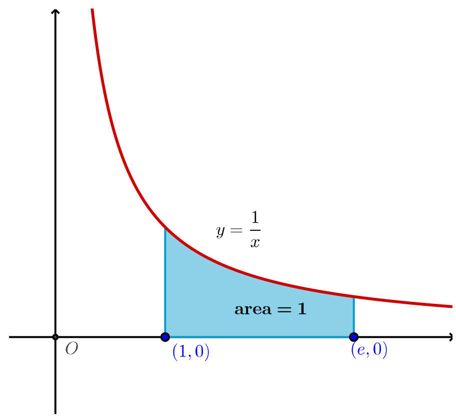
e

আসিফ ই এলাহী

এমসি কলেজ, সিলেট

২২ ডিসেম্বর ২০১৬

ভূমিকা



π এর মতোই গণিতে জগতে আরেকটি চমকপ্রদ ধ্রুবক ফল e। এটি একটি অমূলদ সংখ্যা, দশমিকের পর ৫ ঘর পর্যন্ত এর মান লিখা যায় 2.71828. e সংখ্যাটিকে বিভিন্নাভাবে নির্ণয় করা যায়। যেমন $(1 + \frac{1}{n})^n$ এর লিমিট হচ্ছে e যখন n অসীমের দিকে ধাবিত হয়। অথবা নিচের অসীম ধারাটির যোগফলও e

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

আবার e হচ্ছে এমন সং্খ্যা যার জন্য $(1, e)$ ব্যবধিতে $y = \frac{1}{x}$ এর গ্রাফ x অক্ষের মধ্যকার অংশের ক্ষেত্রফল 1 হয়।
বহু গণিতবিদ এই ধ্রুবকের অনেক কাছাকাছি এসেও এর রহস্য উদঘাটন করতে পারেননি। ১৬২৮ সালে গণিতবিদ জন নেপিয়ার লগারিদম নিয়ে কাজ করার সময় e ভিত্তিক লগারিদমে কয়েকটি সংখ্যার মান বের করেন। তাই এটিকে নেপিয়ারের ধ্রুবকও বলা হয়। e সংখ্যাটি আবিষ্কারের কৃতিত্ব দেয়া হয় জ্যাকব বার্নোলিকে যিনি $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ এর মান বের করার চেষ্টা করেন যেটি আসলে e এর সমান। তবে e এর পরিপূর্ণতা পায় সুইস গণিতবিদ লিওনার্দ অয়লারের মাধ্যমে যিনি প্রথম এই ধ্রুবকটিকর সংজ্ঞা প্রদান করেন এবং দশমিকের পর ১৮ ঘর পর্যন্ত এর মান বের করতে সক্ষম হন।

ক্যালকুলাসে e

ধরি আমরা সূচকীয় ফাংশন a^x এর ডেরিভেটিভ বের করতে চাই যেখানে $a \in \mathbb{R}_+$. ডেরিভেটিভের সংজ্ঞা থেকে লিখা যায়

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}a^x &= \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h}\\ &= a^x\{\lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h}\}\end{aligned}$$

দেখা যাচ্ছে যে a^x এর ডেরিভেটিভ তার নিজের সাথেই সমানুপাতিক, যেখানে অনুপাতটি হচ্ছে $\lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h}$। ধরে নেই এর মান $M(a)$,যা a এর একটি ফাংশন। এটি x এর উপর নির্ভরশীল নয়। সুতরাং

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x M(a) \text{ যেখানে } M(a) = \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h} \qquad (০.১)$$

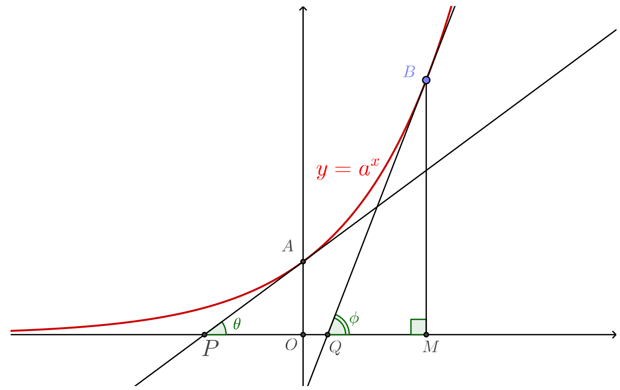
এবং

$$\frac{d}{dx}a^x|_{x=0} = a^0 M(a) = M(a)$$

অর্থাৎ যদি আমরা $y = a^x$ ফাংশনের গ্রাফ আঁকি, $M(a)$ হবে $(0,1)$ বিন্দুতে $y = a^x$ ফাংশনের স্পর্শকের ঢাল। চিত্র ১ এ $y = a^x$ ফাংশনের লেখ y অক্ষকে $A = (0,1)$ বিন্দুতে ছেদ করে এবং A বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x অক্ষের সাথে θ কোণ উপন্ন করে। সুতরাং $\tan\theta = M(a)$. আবার $y = a^x$ এর উপর যেকোন বিন্দু $B(m, a^m)$-তে অঙ্কিত স্পর্শক x অক্ষের সাথে ϕ কোণ উৎপন্ন করে

$$\tan\phi = \frac{d}{dx}a^x|_{x=m} = M(a) \times a^m = \tan\theta \times a^x$$

এভাবে আমরা $y = a^x$ এর যেকোন বিন্দুতে ডেরিভেটিভের মান $M(a)$ বা $\tan\theta$ এর মাধ্যমে বের করতে পারি।



চিত্র ২

এখন আমাদের কাজ হচ্ছে $M(a)$ এর মান বের করা। এবার a এর কয়েকটি মানের জন্য $M(a)$ এর কয়েকটি মান বের করা যাক। যদি $a = 2$ হয়, h এর যথেষ্ট ছোট কয়েকটি মান বসিয়ে পাই

$$M(2) = \frac{2^{0.1} - 1}{0.1} = 0.7177346\cdots$$
$$M(2) = \frac{2^{0.01} - 1}{0.01} = 0.6955550\cdots$$

আবার $a = 3$ নিয়ে পাই

$$M(3) = \frac{3^{0.1} - 1}{0.1} = 1.1612317\cdots$$
$$M(3) = \frac{3^{0.01} - 1}{0.01} = 1.1046691\cdots$$

বুঝাই যাচ্ছে যে $M(2)$ এর মান 1 এর ছোট আর $M(3)$ এর মান 1 এর থেকে বড়। তাহলে নিশ্চয়ই 2 এবং 3 এর মাঝামাঝি একটা সংখ্যা পাওয়া যাবে যার জন্য $M(a)$ এর মান 1. মনে করি আমরা e সংখ্যাটির কথা কখনো শুনিনি এবং সেই সংখ্যাটির মান e ধরে নেই। অর্থাৎ $M(e) = 1$ যেখানে $2 < e < 3$.

এবার e এর কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট বের করা যাক।

উপপাদ্য ০.১: সকল $a \in \mathbb{R}_+$ এর জন্য

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \text{ এবং } \int e^x dx = e^x + C$$

প্রমাণঃ

সমীকরণ (১) এবং e এর সংজ্ঞা থেকেই বলা যায়

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x M(e) = e^x$$

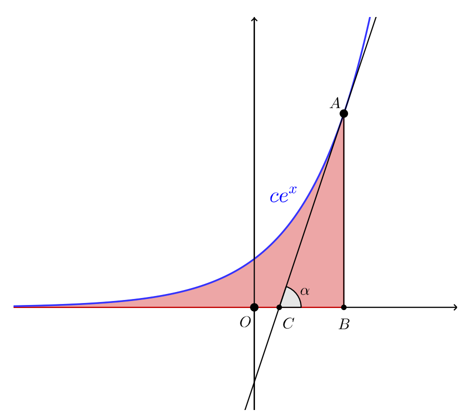
এবং $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ এর উভয় পাশে ইন্টিগ্রেট করে পাই

$$\int e^x dx = e^x + C$$

একই ভাবে $\frac{d}{dx}ce^x = ce^x$ এবং $\int ce^x dx = ce^x + C$. উল্লেখ্য ce^x ই একমাত্র ফাংশন যাকে ডিফারেনসিয়েশন বা ইন্টেগ্রেশন করলে একই মান পাওয়া যায়।

চিত্র ২ এ $y = ce^x$ এর গ্রাফের উপর $A(x, ce^x)$ যেকোন বিন্দু।

অর্থাৎ $OB = x, AB = ce^x$. A বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল বা $\tan\alpha$ এর মান ce^x। এমনকি $-\infty$ থেকে $(x, 0)$ পর্যন্ত $y = ce^x$ এবং x অক্ষের মধ্যকার ক্ষেত্রের(চিত্রে লাল অংশ দ্বারা চিহ্নিত) ক্ষেত্রফলও ce^x.



চিত্র ৩

আমরা e^x এর ডেরিভেটিভ বের করলাম যেখানে e এর মানই অজানা এবং আমাদের আসল কাজ a^x এর মান বের করা বাকি রয়ে গেছে। সেজন্য আমরা e ভিত্তিক লগারিদম $\ln x$ সংজ্ঞায়িত করি। $x > 0$ ও y এর জন্য $\ln x = y$ হবে যদি এবং কেবল যদি $x = e^y$ হয়। এই লগারিদম সাধারণ ১০ ভিত্তিক লগারিদমের সব বৈশিষ্টই মেনে চলে অর্থাৎ $\ln 1 = 0, \ln xy = \ln x + \ln y$.

আরেকটি ব্যাপার লক্ষ করলে দেখা যাবে e^x এবং $\ln x$ পরস্পরের বিপরীত ফাংশন। অর্থাৎ $y = e^x$ হলে $x = \ln y$.

উপপাদ্য ০.২: সকল $a \in \mathbb{R}_+$ এর জন্য

$$\frac{d}{dx}a^x = \ln a \times a^x \text{ এবং } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

প্রমাণ:

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}(e^{\ln a})^x = \frac{d}{dx}e^{x \ln a}$$

চেইন রুল ব্যবহার করে পাই

$$\frac{d}{dx}e^{x \ln a} = \frac{d}{d(x \ln a)}e^{x \ln a} \times \frac{d}{dx}x \ln a = e^{x \ln a} \times \ln a = \ln a \times a^x$$

একইভাবে এর ২ পাশে ইন্টিগ্রেট করলে $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ পাওয়া যাবে। □

যেমন আমরা যদি 3^x এর ডেরিভেটিভ বের করতে চাই, তার মান হবে $\ln 3 \times 3^x$। e ভিত্তিক লগারিদমকে ন্যাচারাল লগারিদম বলার অনেকগুলো কারণের মধ্যে এটি একটি। e ভিত্তিক লগারিদম সাধারণভাবেই সকল সূচকীয় ফাংশনের ডেরিভেটিভে উপস্থিত হয়।

অনুশীলনী ১

১. নিচের ফাংশনগুলোর ডেরিভেটিভ $f'(x)$ বের কর

(১) e^{3x-1}
(২) e^{4x^2}
(৩) $e^{\sqrt{x}}$
(৪) $e^{\frac{1}{x}}$
(৫) e^{e^x}

২. নিচের ফাংশনগুলোকে ইন্টেগ্রেট কর

(১) $\int xe^x \, dx$
(২) $\int xe^{-x} \, dx$
(৩) $\int x^2 e^x \, dx$
(৪) $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$
(৫) $\int x^3 e^{-x^2} \, dx$

৩. এমন সকল a ও b বের কর যেন $\int\limits_a^x e^t \, dt + b = e^x$

উপপাদ্য ০.৩:

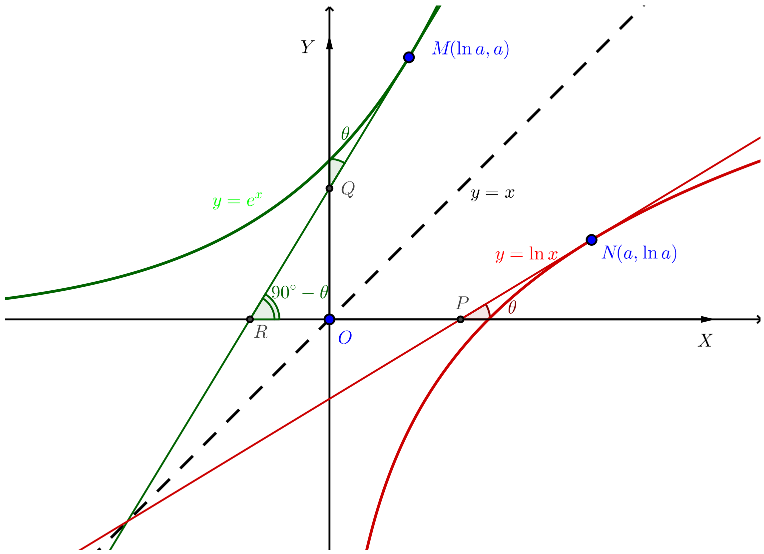
$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \text{ এবং } \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

প্রমাণ: যেহেতু e^x এবং $\ln x$ পরস্পর বিপরীত ফাংশন, $y = \ln x$ হলে $x = e^y$ এবং

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln x &= \frac{d}{dx}y \\ &= \frac{1}{\frac{d}{dy}x} \\ &= \frac{1}{\frac{d}{dy}e^y} \\ &= \frac{1}{e^y} \\ &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

$\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$ এর উভয়পাশে ইন্টেগ্রেট করলে $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$ পাওয়া যায়।

বিপরীত ফাংশনের ডেরিভেটিভ নির্ণয় করার বিষয়টিকে আমরা স্থানাংকের মাধ্যমেও ব্যাখ্যা করতে পারি। চিত্র - এ $y = e^x$ এর গ্রাফের উপর যেকোন বিন্দু $N(a, \ln a)$ নিই। যেহেতু $e^{\ln a} = a$, $M(\ln a, a)$ বিন্দুটি $y = e^x$ এর গ্রাফের উপর থাকবে। আবার M কে $y = x$ সরলরেখার উপর রিফ্লেক্ট করলে N কে পাওয়া যায়। অর্থাৎ $y = e^x$ এবং $y = \ln x$ হচ্ছে $y = x$ উপর পরস্পরের রিফ্লেকশন। এ থেকে বলা যায় M বিন্দুতে $y = e^x$ এর স্পর্শক $MQ(Q \in OY)$ ও N বিন্দুতে $y = \ln x$ এর স্পর্শকও $y = x$ সরলরেখার সাপেক্ষে সিমেট্রিক। ধরি MQ x অক্ষকে R বিন্দুতে ছেদ করে।



চিত্র ৪

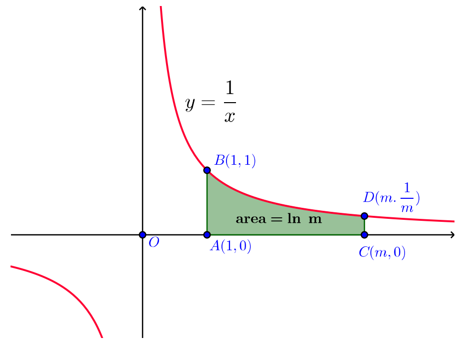
সুতরাং

$$
\begin{aligned}
&\angle MQY = \angle NPX \\
&\Rightarrow 90^\circ - \angle MRX = \angle NPX \\
&\Rightarrow \tan 90^\circ - \angle MRX = \tan \angle NPX \\
&\Rightarrow \frac{1}{\tan \angle MRX} = \tan \angle NPX \\
&\Rightarrow \frac{1}{M \text{ বিন্দুতে } y = e^x \text{ এর ঢাল}} = N \text{ বিন্দুতে } y = \ln x \text{ এর ঢাল} \\
&\Rightarrow \frac{1}{\frac{d}{dx}e^x|_{x=\ln a}} = \frac{d}{dx}\ln x|_{x=a} \\
&\Rightarrow \frac{1}{e^{\ln a}} = \frac{d}{dx}\ln x|_{x=a} \\
&\Rightarrow \frac{d}{dx}\ln x|_{x=a} = \frac{1}{a}
\end{aligned}
$$

যেহেতু এই সমীকরণটি সকল ধনাত্মক a এর জন্য সত্য, তাই $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$ $\square$

উপপাদ্য ৩ অনুযায়ী $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$. এখান থেকে আমরা $\ln x$ কে অন্যভাবে সংজ্ঞায়িত করতে পারি।

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$$
$$\Rightarrow \int_1^m \frac{1}{x}dx = |\ln x + C|_1^m$$
$$\Rightarrow \int_1^m \frac{1}{x}dx = \ln m$$



চিত্র ৫

অর্থাৎ $\ln m$ হচ্ছে $[1, m]$ ব্যবধিতে $y = \frac{1}{x}$ এর গ্রাফ ও x অক্ষের মধ্যকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

অনুশীলনী ২

১. নিচের ফাংশনগুলোর ডেরিভেটিভ $f'(x)$ বের কর

(১) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

(২) $f(x) = \ln \sqrt{1 + x^2}$

(৩) $f(x) = \ln(\ln x)$

(৪) $f(x) = \ln(x^2 \ln x)$

(৫) $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

(৬) $f(x) = x \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

(৭) $\frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}$

২. নিচের ফাংশনগুলোকে ইন্টেগ্রেট কর

(১) $\int \frac{1}{2 + 3x} dx$

(২) $\int \ln^2 x \, dx$

(৩) $\int x \ln x \, dx$

(৪) $\int x \ln^2 x \, dx$

(৫) $\int_0^{e^3 - 1} \frac{1}{1 + t} dt$

(৬) $\int x^n \ln ax \, dx$

উপপাদ্য ০.৪: সকল $x \in \mathbb{R}_+$ এর জন্য

$$e^x = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$$

প্রমাণ: আমরা আগের উপপাদ্য থেকে পেলাম যে $\ln x$ এর ডেরিভেটিভ হচ্ছে $\frac{1}{x}$. আবার $\ln x$ এর ডেরিভেটিভকে নিম্নোক্তভাবেও লিখা যায়

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{d}{dx} \ln x \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x + h) - \ln x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\ln \frac{x + h}{x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right) \\
&= \lim_{h \to 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}
\end{aligned}$$

ধরি $\frac{1}{x} = y$ এবং $\frac{1}{h} = n$. যেহেতু $h \to 0$, তাই $n \to \infty$. সুতরাং

$$\begin{aligned}
y &= \lim_{h\to 0} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \\
\Rightarrow y &= \lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{y}{n})^n \\
\Rightarrow e^y &= e^{\{\lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{y}{n})^n\}} \\
\Rightarrow e^y &= \lim_{n\to\infty} e^{\{\ln(1+\frac{y}{n})^n\}} \\
\Rightarrow e^y &= \lim_{n\to\infty} (1+\frac{y}{n})^n
\end{aligned}$$

y কে x দ্বারা রুপান্তরিত করে পাই $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. □

এবার e এর মান বের করা যাক। আগের সূত্রে $x = 1$ বসিয়ে পাই

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

n এর যথেষ্ট বড় কয়েকটি মান বসিয়ে পাই

$$\begin{aligned}
(1+\frac{1}{1000})^{1000} &= 2.716923932235 \\
(1+\frac{1}{10000})^{10000} &= 2.718145926825 \\
(1+\frac{1}{100000})^{100000} &= 2.718268237174
\end{aligned}$$

অর্থাৎ e এর মান দশমিকের পর 3 ঘর পর্যন্ত 2.718 লিখা যায়

উপপাদ্য ০.৫: যেকোন ডিফারেনশিয়েবল ফাংশন f এর জন্য

$$\frac{d}{dx}\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ এবং } \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C$$

প্রমাণ: চেইন রুল ব্যবহার করে পাই

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\ln f(x) &= \frac{d}{df(x)}\ln f(x) \times \frac{d}{dx}f(x) \\
&= \frac{1}{f(x)} \times f'(x) \\
&= \frac{f'(x)}{f(x)}
\end{aligned}$$

উভয়পাশে ইন্টেগ্রেট করলে পাওয়া যায় $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C$ □

উপরের উপপাদ্যটিকে এভাবেও লিখা যায়

$$f'(x) = f(x) \times \frac{d}{dx}\ln f(x)$$

অনেক ক্ষেত্রে $f(x)$ এর ডেরিভেটিভ বের করার চেয়ে $\ln f(x)$ এর ডেরিভেটিভ বের করা অনেক সহজ হয়। সেক্ষেত্রে আমরা এই উপপাদ্যটি ব্যবহার করতে পারি। নিচের উদাহরণটিকে লক্ষ কর

উদাহরণ ১: নিচের ফাংশনটির ডেরিভেটিভ বের কর

$$f(x) = \frac{x^5}{(1-10x)\sqrt{x^2+2}}$$

প্রমাণ: $f(x)$ ফাংশনটিতে মোট ৩টি রাশি গুণ আকারে আছে যথা $x^5, \dfrac{1}{1-10x}, \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$. এটির ডেরিভটিভ বের করতে হলে আমাদেরকে গুণ ও ভাগের সূত্র অন্তত ২ বার ব্যবহার করতে হবে যা অনেক সময়সাপেক্ষ । কিন্তু লগারিদমের মাধ্যমে অপেক্ষাকৃত সহজে করা যায়

$$\begin{aligned}
\ln f(x) &= \ln\left(\frac{x^5}{(1-10x)\sqrt{x^2+2}}\right) \\
&= \ln x^5 - \ln(1-1ox) - \ln\sqrt{x^2+2} \\
&= 5\ln x - \ln(1-10x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+2)
\end{aligned}$$

এটিকে ডিফারেনশিয়েট করলে পাই

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\ln f(x) &= \frac{d}{dx}\{5\ln x - \ln(1-10x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+2)\} \\
&= 5\frac{d}{dx}\ln x - \frac{d}{dx}\ln(1-10x) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(x^2+2) \\
&= \frac{5}{x} - \frac{\frac{d}{dx}(1-10x)}{1-10x} - \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dx}(x^2+2)}{x^2+2} \\
&= \frac{5}{x} + \frac{10}{1-10x} - \frac{x}{x^2+2}
\end{aligned}$$

সুতরাং

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) &= f(x) \times \frac{d}{dx}\ln f(x) \\
&= \frac{x^5}{(1-10x)\sqrt{x^2+2}}\left(\frac{5}{x} + \frac{10}{1-10x} - \frac{x}{x^2+2}\right)
\end{aligned}$$

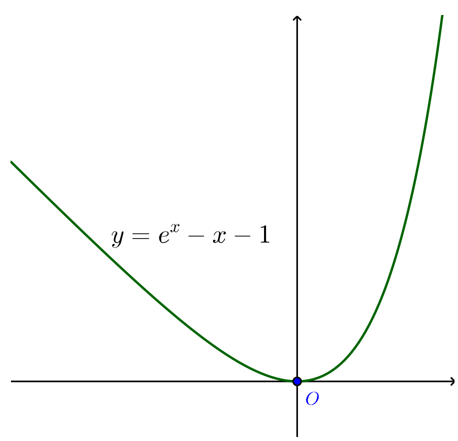
□

খেয়াল করলে দেখবে যে $\ln$ থাকার কারণে রাশি ৩টি গুণ থেকে যোগে রূপান্তরিত হয়েছে । এভাবে অনেকগুলো জটিল রাশির গুণফল থাকলে অথবা সূচকে কোন জটিল পদ থাকলে আমরা ওই ফাংশনের লগারিদম বের করার মাধ্যমে ডিফারেনশিয়েট করতে পারি।

উপপাদ্য ০.৬: সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য

$$e^x \geq x+1$$

প্রমাণঃ মনে করি $f(x) = e^x - x - 1$. এখন আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে সকল ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য $f(x) \geq 0$। আমরা প্রথমেই f ফাংশনটির গ্রাফ আঁকি।



চিত্র ৬

চিত্র থেকে দেখা যায় $y = f(x)$ এর মধ্যকার সকল বিন্দু x অক্ষের উপরে অবস্থান করে, অনেকটা কনভেক্স গ্রাফ এর মত এবং এটি x অক্ষকে $(0,0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে। গ্রাফটি যে কনভেক্স তা প্রমাণ করার জন্য আমাদেরকে দেখাতে হবে যে $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. এখানে

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x - x - 1 \\
f'(x) &= e^x - 1 \\
f''(x) &= e^x
\end{aligned}$$

যেহেতু $e^x \geq 0$, ফাংশনটি কনভেক্স। সুতরাং f এর শুধুমাত্র একটি বিন্দুতে $f(x)$ এর মান সর্বনিম্ন হবে এবং সে বিন্দুতে ফাংশনটির ডেরিভেটিভের মান 0 হবে। যদি $P = (a, f(a))$ সেই বিন্দু হয় তখন

$$\begin{aligned}
f'(a) &= 0 \\
\Rightarrow e^a - 1 = 0 \\
\Rightarrow a = 0 \\
\Rightarrow f(a) = 0
\end{aligned}$$

অর্থাৎ $(0,0)$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান সর্বনিম্ন মান 0 পাওয়া যায়। সুতরাং $f(x) = e^x - x - 1$ বা $e^x \geq x+1$ এবং সমতা তখনই হবে যখন $x = 0$।

উপপাদ্য ০.৭: সকল $x \in \mathbb{R}$ এবং $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য

$$e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

প্রমাণ: মনে করি,

$$g_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

এবং

$$\begin{aligned}
\int_0^y g_n(x)dx &= \int_0^x (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!})dx \\
&= \int_0^y 1.dx + \int_0^y \frac{x}{1!}dx + \int_0^y \frac{x^2}{2!}dx + \cdots + \int_0^y \frac{x^n}{n!}dx \\
&= y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots + \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= g_{n+1}(y) - 1
\end{aligned}$$

অর্থাৎ $g_n(x)$ কে $[0, y]$ ব্যবধিতে ইন্টেগ্রেট করলে $g_{n+1}(y) - 1$ পাওয়া যায়। আবার পূর্ববর্তী উপপাদ্য থেকে

$$e^x \geq x + 1 \quad \text{অর্থাৎ} \quad e^x \geq g_1(x)$$

এর উভয় পাশে $[0, y]$ ব্যবধিতে বারবার ইন্টেগ্রেট করে পাই

$$\begin{aligned}
&\int_0^y e^x dx \geq \int_0^y g_1(x)dx \\
&\Rightarrow [e^x]_0^y \geq g_2(y) - 1 \\
&\Rightarrow e^y - e^0 \geq g_2(y) - 1 \\
&\Rightarrow e^y \geq g_2(y) \\
&\Rightarrow e^x \geq g_2(x) \quad [y \text{ কে } x \text{ দ্বারা রূপান্তরিত করে}] \\
&\Rightarrow \int_0^y e^x dx \geq \int_0^y g_2(x)dx \\
&\Rightarrow e^y - 1 \geq g_3(y) - 1 \\
&\Rightarrow e^y \geq g_3(y) \\
&. \\
&. \\
&. \\
&\Rightarrow e^x \geq g_n(x)
\end{aligned}$$

সুতরাং $e^x \geq g_n(x)$ সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য। এর থেকে লিখা যায়

$$\begin{aligned}
e^x &\geq \lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\
\Rightarrow e^x &\geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots
\end{aligned}$$

$\square$

উপপাদ্য ০.৮: যদি $g(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ হয়, তবে $g(x + y) = g(x) \times g(y)$ সকল $x, y \in \mathbb{R}$ এর জন্য।

প্রমাণ:

$$\begin{aligned}
g(x)\times g(y) &= (1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\cdots)(1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\cdots+\frac{y^n}{n!}+\cdots)\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y^j}{j!}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^iy^j}{i!j!}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i+j=k}\frac{x^iy^j}{i!j!}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i+j=k}\frac{1}{(i+j)!}\binom{i+j}{i}x^iy^j\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i+j=k}\frac{1}{(k!}\binom{k}{i}x^iy^{k-i}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!}\sum_{i=o}k\binom{k}{i}x^iy^{k-i}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!}(x+y)^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x+y)^k}{(k!}\\
&= g(x+y)
\end{aligned}$$

□

উপপাদ্য ০.৯: সকল $x\in\mathbb{R}$ এর জন্য

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

প্রমাণ: উপপাদ্য ৭ থেকে

$$e^x \geq 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

বা

$$e^x \geq g(x)$$

x এর স্থানে $-x$ লিখে পাই

$$e^{-x} \geq g(-x)$$

অসমতা ২টিকে গুণ করে পাই

$$\begin{aligned}
e^x\times e^{-x} &\geq g(x)\times g(-x)\\
\Rightarrow 1 &\geq g(x+(-x))\\
\Rightarrow 1 &\geq g(0)
\end{aligned}$$

কিন্তু $1 = g(o)$. এটি সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি $e^x = g(x)$ ও $e^{-x} = g(-x)$ হয়। সুতরাং

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

□

উপপাদ্য ০.১০: সকল $x\in[-1,1]$ এর জন্য

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

প্রমাণ: উপপাদ্য ৩ থেকে পাই

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \int_1^{x+1} \frac{1}{t}dt \\
&= \int_0^x \frac{1}{1+t}dt \\
&= \int_0^x \frac{1}{1-(-t)}dt \\
&= \int_0^x (1-t+t^2-t^3+\cdots)dt \\
&= \int_0^x 1.dt - \int_0^x tdt + \int_0^x t^2dt - \int_0^x t^3dt + \cdots \\
&= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots
\end{aligned}$$

□

অনুশীলনী ৩

১. ডেরিভেটিভ বের কর

(১) $f(x) = x^x$

(২) $f(x) = (1+x)(1+e^{x^2})$

(৩) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(৪) $x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$

(৫) $\ln(\ln(\ln x))$

(৬) $\ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}$

(৭) x^{x^x}

(৮) $(\ln x)^x$

(৯) $(\ln x)^{\ln x}$

(১০) $x^{\ln x}$

(১১) $\dfrac{x^2(3-x)^{\frac{1}{3}}}{(1-x)(3+x)^{\frac{2}{3}}}$

(১২) $\sqrt{x}e^{x^2}(x^2+1)^{10}$

(১৩) $\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{b_i}$

item ইন্টেগ্রেট কর

(১) $\int \dfrac{x}{x^2+1}\,dx$

(২) $\int \dfrac{1}{e^x+1}\,dx$

(৩) $\int \dfrac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^6x}}\,dx$

(৪) $\int \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

(৫) $\int \dfrac{1}{x\ln x}\,dx$

২. সকল $c \in \mathbb{R}$ এর জন্য $I(c) = \int_0^1 2^{-(x-c)^2}\,dx.$ এমন c এর সকল মান বের কর যেন $I(c)$ এর মান সর্বোচ্চ হয়।

৩. $f(x) = \ln(x-1)$ হলে $f^{(n)}(x)$ এর জন্য একটি ফর্মুলা বের কর।

৪. $\dfrac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$ এর মান বের কর

৫. ধনাত্নক সংখ্যা a এর জন্য

$$I(a) = \int_0^a (4 - 2^{x^2})\, dx$$

যদি $\frac{d}{da} I(a) = 0$ হয়, তবে a এর মান

(a)$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (b)$\sqrt{2}$ (c)$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (d)1

৬. নিম্নোক্ত ফাংশনগুলোর গ্রাফের উল্লিখিত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ লিখ (a)$y = \ln xe^{x^2}$ $(1, 1)$ (b)$y = \ln x^3 - 7$ $(2, 0)$

৭. এমন সকল c বের কর যেন $\ln x = c + \int_e^x \frac{1}{t}\, dt$

৮. কোনটি $y = \log_{10}(x^2 - 2x + 2)$ এর গ্রাফ