জ্যামিতির সমস্যা যেভাবে ধরতে হয়

আদীব হাসান

১৩ ফেব্রুয়ারি, ২০১৩

গণিত অলিম্পিয়াডে আমার পরিচিত যত বন্ধুবান্ধব আছে তাদের সবাই জ্যামিতি খুব ভালোবাসে। কিন্তু কীজন্য জানি আমার ছোটবেলায় জ্যামিতি ভালো লাগত না। (এখন অবশ্য লাগে) যারা আমার মত জ্যামিতি পছন্দ করো না তাদের জন্য একটা খারাপ খবর আছে। অলিম্পিয়াডের গত কয়েক বছরের প্রশ্নে জ্যামিতি কিন্তু এককভাবে প্রাধান্য বিস্তার করেছে। গণিত ক্যাম্পের পরীক্ষাগুলোতেও প্রায় দুই তৃতীয়াংশ প্রশ্নই থাকে জ্যামিতি থেকে। অতএব সাবধান! ভালো চাইলে এখনই জ্যামিতির সাথে ভাব জমাও। এই নোটে আমি তোমাকে এর উপর কিছু টিপস দিয়েছি। তবে মনে রাখবে জ্যামিতির মন পেতে হলে সবথেকে বেশি যেটা করতে হবে সেটা হচ্ছে জ্যামিতি নিয়ে সময় কাটানো, তার কথা ভাবা-মানে সোজা বাংলায় প্রচুর জ্যামিতির সমস্যা সমাধান করা এবং সমাধানের চেষ্টা করা।

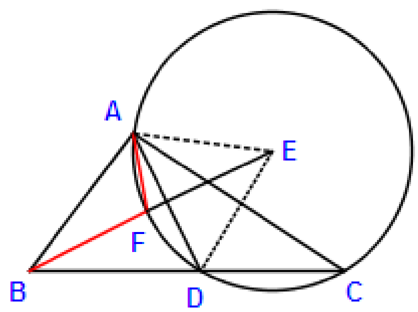
১. একটি সুন্দর চিত্র আঁক

জ্যামিতির কোন সমস্যা হাতে নিলে সবার আগে একটা নিখুঁত চিত্র আঁকবে। একটা ভালো চিত্র আঁকলে সমস্যার ২০-২৫% এমনিই সমাধান হয়ে যায়। সাধারণত পেনসিলেই সবাই চিত্র আঁকে। কিন্তু আমি বলব কলম দিয়ে চিত্র আঁকতে। আর নতুন কিছু অঙ্কন (construction) করলে তখন ব্যবহার করবে পেনসিল। এতে সুবিধা হচ্ছে বেশি অঙ্কনের ফলে চিত্র জটিল হয়ে গেলে কয়েকটা রেখা বা বৃত্ত মুছে ফেলা যায় মূল চিত্র অক্ষুণ্ন রেখেই। আর যদি অঙ্কন ছাড়া মূল চিত্রটাই যদি খুব জটিল হয় তবে এক কালির কলম ব্যবহার না করে লাল, নীল এরকম কয়েক কালির কলম ব্যবহার করতে পার। এতে বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য সম্পন্ন রেখা বা বৃত্তগুলো আলাদা করে বুঝতে সুবিধা হবে।

সমস্যা ১: ABC ত্রিভুজে $AB < BC$. BC বাহুর উপর এমন একটি বিন্দু D নেওয়া হল যেন $AB = AD$ হয়। ACD ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র E ও পরিবৃত্ত ω. BE রেখাংশ ω-কে ABC ত্রিভুজের ভিতরে F বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle ACB = 30^\circ$ হলে $\angle AFB =?$

এখানে সবার আগে তোমার কী কাজ? অবশ্যই চিত্র আঁকা। তো এঁকে ফেলো। এরপর শার্লক হোমসের মত খুঁটিয়ে খুঁটিয়ে চিত্রটা দেখ। কোন বিশেষ বৈশিষ্ট্য খুঁজে পাচ্ছ কি? যেমন-

- কোন দুটি রেখা সমান্তরাল লাগছে কি?
- কোন কোণকে সমকোণের মতো মনে হচ্ছে কি?
- কয়েকটি বিন্দুকে সমবৃত্ত (কনসাইক্লিক) বা সমরেখ (কোলিনিয়ার) লাগছে?
- কোন দুটি কোণকে সমান মনে হচ্ছে?
- কোন দুটি রেখাংশকে সমান লাগছে কি?



সমস্যা ১

এরকম কিছু যদি পাও সেটা যুক্তি দিয়ে প্রমাণের চেষ্টা করো। সমস্যায় যেসব শর্ত বা সম্পর্ক দেয়া আছে সেগুলো কাজে লাগানোর চেষ্টা কর। তুমি যা আন্দাজ করেছ তা যদি এখনও প্রমাণ না করতে পার তবে আবার চিত্রে ফিরে যাও, নতুন কিছু খোঁজো।

চিত্রটা দেখে মনে হয় না যে $AD \perp BE$? আরও মনে হয় না $\angle ABF = \angle DBF$? আমাদের পর্যবেক্ষণ সঠিক কিনা তা এখন আমরা যাচাই করব। লক্ষ করো আমাদের কোন কোন তথ্য দেয়া ছিল: $AB = BD$ এবং $EA = ED = EC$. যাচাই করতে হলে এই তথ্যগুলো নিঃসন্দেহে ব্যবহার করতে হবে। এবার কিছুক্ষণ নিজে চিন্তা করো কীভাবে এগুলো ব্যবহার করা যায়, পরে আমার সমাধান দেখ।

$\triangle ABE$ এবং $\triangle DBE$-র মাঝে $AB = BD$, $AE = ED$ এবং BE সাধারণ বাহু। তাই $\triangle ABE \cong \triangle DBE$. অতএব $\angle ABF = \angle DBF$. এর অর্থ BF, $\angle ABC$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক। আবার দেখো $\angle AEF$ এবং $\angle DEF$-কেও চিত্রে সমান দেখা যাচ্ছে। কেন বলতো? এবার মনে কর $\angle AED$ ও $\angle ACD$-র মাঝে সম্পর্ক কী। এবার কোনভাবে আমরা কি প্রমাণ করতে পারি CF, $\angle ACB$-র সমদ্বিখণ্ডক? F বিন্দুকে কি এভাবে নতুনভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়? আমার এই প্রশ্নগুলোর উত্তর বের করো। তাহলে বাকিটা নিজেই করতে পারবে।
এখন বুঝতে পারছ ভালো চিত্র আঁকলে কী সুবিধা পাওয়া যায়?

২. অ্যাঙ্গেল চেজিং

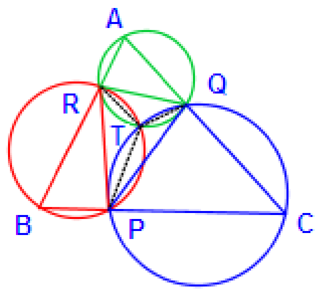
এটার সহজ বাংলা হচ্ছে কোণের পিছনে ছোটা। অর্থাৎ সমাধান করতে বিভিন্ন কোণের মধ্যকার সম্পর্কগুলো ব্যবহার করা। জ্যামিতির অজস্র সমস্যা শুধুমাত্র চিত্রের কোণগুলোর দিকে মনোযোগ দিলে সমাধান হয়ে যায়। কারণ কোণগুলো ভালোভাবে খেয়াল করলে নানা গুরুত্বপূর্ণ জিনিস-যেমন বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ, সদৃশকোণী ত্রিভুজ, সমান্তরাল সরলরেখা, স্পর্শক ইত্যাদি খুঁজে পাওয়া যায়। এই উদাহরণটা দেখো-

সমস্যা ২:(মিকেলের উপপাদ্য) ABC একটি ত্রিভুজ এবং P, Q, R হচ্ছে যথাক্রমে BC, CA, AB বাহুর ওপর অবস্থিত যেকোনো তিনটি বিন্দু। প্রমাণ করো যে $\triangle ARQ$, $\triangle BPR$, $\triangle CQP$-র পরিবৃত্ত একটি সাধারণ বিন্দু (common point) দিয়ে যায়।

সমাধান: ধরা যাক, $\bigcirc ARQ \cap \bigcirc BPR = \{R, T\}$ (এই অদ্ভুত চিহ্ন দেখে ঘাবড়ানোর কিছু নেই। এর মানে হচ্ছে $\bigcirc ARQ$ অর্থাৎ ARQ ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও $\bigcirc BPR$ বা BPR ত্রিভুজের পরিবৃত্ত পরস্পরকে R ও T বিন্দুতে ছেদ করে। একটা ছেদবিন্দু R তো প্রশ্নে দেয়াই ছিল। আমি অন্য ছেদবিন্দুকে T ধরলাম। এটা গণিতে খুব কমন একটা সাইন, তাই আমি আগেভাগেই তোমাদের জানিয়ে দিলাম)

আমরা জানি যেকোনো বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ দুটির সমষ্টি $180°$. তাহলে,

$$\left.\begin{aligned}\angle QTR &= 180° - \angle A\\ \angle PTR &= 180° - \angle B\end{aligned}\right\}\angle PTQ = 360° - (\angle QTR + \angle PTR)$$



সমস্যা ২

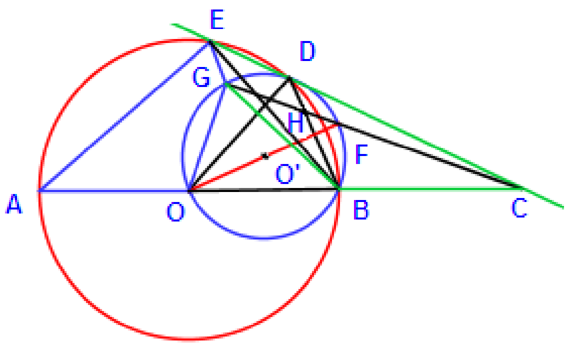
$$\begin{aligned}\text{সুতরাং } \angle PTQ &= 360° - 180° + \angle A - 180° + \angle B\\ &= \angle A + \angle B\\ &= 180° - \angle C\end{aligned}$$

অতএব, $\angle PTQ + \angle C = 180° \iff P, T, Q, C$ সমবৃত্তীয়। এর অর্থ $\triangle PQC$-র পরিবৃত্তও T বিন্দু দিয়ে যায়।

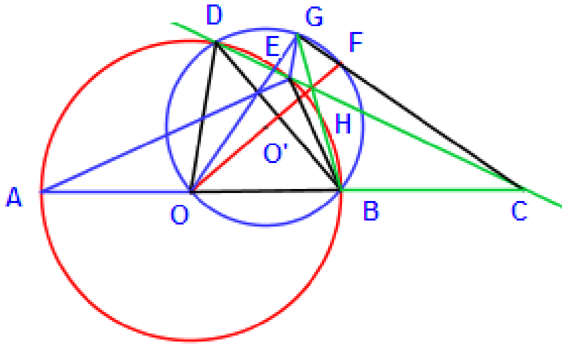
অ্যাঙ্গেল চেজিং-এ পারদর্শী হতে চাইলে প্রচুর প্রবলেম সলভ করা ছাড়া কোন বিকল্প নেই। একইসাথে তোমাকে চিত্র ভালোভাবে পর্যবেক্ষণ করার ক্ষমতাও অর্জন করতে হবে। চিত্রের এক কোনায় অনেক সময় মহাগুরুত্বপূর্ণ একটা পিচ্চি কোণ ছদ্মবেশে লুকিয়ে থাকতে পারে। এগুলো খুঁজে পাওয়া বেশ কঠিন। আমার নিজেরও প্রায়ই এই সমস্যা হয়। ঘণ্টা খানেক নানান জিনিস অ্যাপ্লাই করে বিফল হবার পর যখন দেখি ছোট্ট কোন কোণ ধরে চেজ করলেই সমস্যাটা মিলে যেত তখন মেজাজ এমন গরম হয় আর বলার মতো না। যেমন-এই সমস্যাটা দেখো-

সমস্যা ৩: (চীন পশ্চিম আঞ্চলিক গণিত অলিম্পিয়াড ২০০৬) ω বৃত্তের কেন্দ্র O এবং যেকোনো একটি ব্যাস AB. AB রেখাংশকে B-র দিকে বর্ধিত করে তার উপর একটি বিন্দু C নেওয়া হল। C বিন্দুগামী একটি রেখা ω-কে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। $\triangle BOD$-র পরিকেন্দ্র O' এবং একটি ব্যাস OF. $CF \cap \bigcirc BOD = \{F, G\}$. প্রমাণ করো যে A, O, G, E সমবৃত্ত।

সমাধান: আগেই বলছি আমার সমাধান দেখার আগে নিজে একবার চেষ্টা করে দেখো। কে জানে তোমারও হয়তো আমার মতো অনুভূতি হবে! আমার চিত্র ভালো হয়নি। নিজে খাতায় সুন্দর চিত্র আঁক পরে এটা দেখো।



সমস্যা ৩(ক)



সমস্যা ৩(খ)

লক্ষ করো যে $\angle BOF = \angle FOD$. ধরা যাক, OF রেখাংশ ও DB চাপ পরস্পরকে H বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে এটা নিশ্চয়ই সত্যি যে H, DB চাপের মধ্যবিন্দু।

সুতরাং $\angle BGF = \angle BOF = \frac{1}{2}\angle BOD = \angle BED$ চিত্র-৩(ক) বা $\angle BEC$ চিত্র-৩(খ)

অতএব B, C, E, G সমবৃত্ত।

আবার দেখো $BE \perp AE$ এবং $GC \perp OG$ (কারণ $\angle AEB$ ও $\angle OGF$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ)

তাহলে $\angle AEG = 90° - \angle BEG = 90° - \angle BCG = \angle COG$. [চিত্র-৩(ক)]

অথবা $\angle AEG = 270° - \angle BEG = 90° + 180° - \angle BEG = 90° + \angle BCG = \angle AOG$. [চিত্র-৩(খ)]

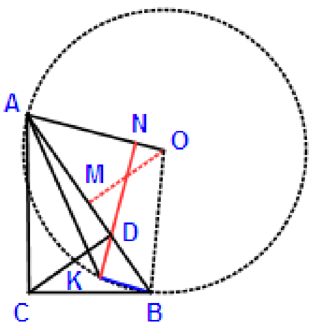
$\therefore\ A, O, G, E$ সমবৃত্ত।

এটা প্রথম বার করার সময় প্রথম আধ ঘণ্টা হেন জিনিস নাই যেটা আমি ট্রাই দেই নাই। পরে আবিষ্কার করলাম $\angle BGF$-র মাঝে সব রহস্য লুকিয়ে আছে। তোমাদেরও অ্যাঙ্গেল চেজিং করার সময় এমন অভিজ্ঞতা হতে পারে। আরেকটা জিনিস দেখো যে এই প্রমাণে আমাকে দুটো আলাদা কেস নিয়ে কাজ করতে হয়েছে। এটাই হচ্ছে অ্যাঙ্গেল চেজিং-এর সবচেয়ে বড় ত্রুটি। প্রায় সময়ই এই টেকনিকে মূল প্রবলেমকে কয়েকটা কেসে ভেঙে কাজ করতে হয়। অলিম্পিয়াডে কোন কেস বাদ পড়লে নাম্বার কাটা যায়। এ বিষয়ে তাই সতর্ক থাকবে। তবে আশার কথা হচ্ছে অ্যাঙ্গেল চেজিং করার সময় ডিরেক্টেড অ্যাঙ্গেল ব্যবহার করলে প্রবলেম কেসে ভাগ হয় না। ডিরেক্টেড অ্যাঙ্গেলের কাজ এই ছোট নোটে দেখানো সম্ভব নয়। যারা আগ্রহী তারা Geometry Unbound page 12 দেখতে পার।

৩. পিছনে হাঁটা (Working Backward)

এটা অনেকটা এরকম-প্রামাণ্য বিষয়টি যদি সত্যি হয় তাহলে এর সাথে সাথে আর কোন কোন বিষয় সত্যি হতে হয়? যেমন-কোন সমস্যায় যদি কোন ত্রিভুজকে সমকোণী প্রমাণ করতে হয় তবে ঐ ত্রিভুজের বাহুগুলো পিথাগোরাসের উপপাদ্য মেনে চলে এটা দেখালেই হয়। আবার কোন ত্রিভুজকে সমদ্বিবাহু প্রমাণ করতে হলে তার কোন দুইটি কোণ সমান-এটা দেখালেই চলে।

সমস্যা ৪:(সার্বিয়া ১৯৯০) $\triangle ABC$ সমকোণী যার $\angle C = 90°$. CD হচ্ছে ত্রিভুজটির উচ্চতা এবং K ত্রিভুজের অভ্যন্তরে এমন একটি বিন্দু যেন $AK = AC$. $\bigcirc ABK$-র কেন্দ্র O. প্রমাণ করো যে $DK \perp AO$.



সমস্যা ৪

সমাধান: ধর M হচ্ছে AB বাহুর মধ্যবিন্দু এবং $DK \cap AO = N$. আমাদের প্রমাণ করতে হবে $\angle DNO = 90°$. আবার দেখো $\angle DMO = 90°$ আমাদের জানা আছে। (কারণ ABK বৃত্তের জ্যা AB-র মধ্যবিন্দু M) যদি $\angle DNO = 90°$ হয়ে থাকে তাহলে $\angle DNO = \angle DMO$. অর্থাৎ D, M, N, O সমবৃত্ত। আবার D, M, N, O সমবৃত্ত হওয়ার অর্থ এই না যে $\angle MDN = \angle MON$?

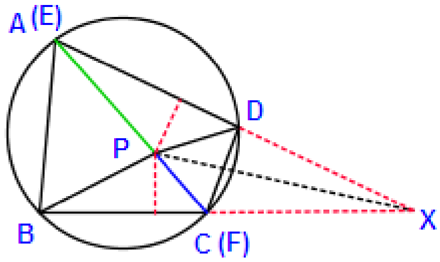
$\angle MON = \angle MOA = \frac{1}{2}\angle AOB = 180° - \angle AKB$. এদিকে $\angle MDN = 180° - \angle ADK$. অর্থাৎ $\angle AKB = \angle ADK$. আরও লক্ষ করো $\triangle ADK$ ও $\triangle AKB$-র মাঝে সাধারণ কোণ $\angle KAB$. সুতরাং $\angle DNO = 90°$ হতে হলে এদুটি ত্রিভুজ অবশ্যই সদৃশ হতে হবে আর তাই এদের সদৃশ প্রমাণ করলেই মূল সমস্যাটা ফিনিশ।

আমরা জানি $\triangle ADC \sim \triangle ACB \iff \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AB}{AC} \iff \dfrac{AK}{AD} = \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB}{AK} \iff \triangle ADK \sim \triangle AKB$

৪. স্পেশাল কেস নির্বাচন

অভিজ্ঞ প্রবলেম সলভারদের জন্য এটা খুব ভালো। অনেক সময় সমস্যায় প্রমাণ করতে বলা হয় কোন অনুপাতের মান ধ্রুবক বা ফিক্সড, বা কোন কোণের মান ফিক্সড, কিংবা কয়েকটি বৃত্ত বা রেখা সমসময় একটা ফিক্সড বিন্দু দিয়ে যায়, কিন্তু সেই ফিক্সড মানটা কত অথবা সেই ফিক্সড বিন্দুটা কোথায় অবস্থিত সেটা বলে দেওয়া হয় না। এরকম ক্ষেত্রে মূল প্রবলেমের কোন স্পেশাল কেস হাতে নিয়ে সেটা থেকে সেই অনুপাতের মান বা বিন্দুর অবস্থান বের করে নিলে সেটা পরে প্রবলেম সলভ করতে বেশ সহায়ক হয়।

সমস্যা ৫:(আইএমও শর্টলিস্ট ১৯৯৮ জি২) $ABCD$ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। E ও F যথাক্রমে AB ও CD-র উপর অবস্থিত যেকোনো দুটি বিন্দু। দেওয়া আছে $AE : EB = CF : FD$. EF রেখাংশের উপর P এমন একটি বিন্দু যাতে $PE : PF = AB : CD$. প্রমাণ করো যে $[\triangle APD] : [\triangle BPC]$-র মান E ও F-এর অবস্থানের উপর নির্ভর করে না। (এখানে $[X]$ দ্বারা X ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে বোঝানো হচ্ছে)



সমস্যা ৫

সমাধান: ধরে নাও $AD \cap BC = X$.($AD \parallel BC$ কেসটা আলাদাভাবে প্রমাণ করতে হবে) আমরা প্রথমে $[\triangle APD] : [\triangle BPC]$-র মান নির্ণয় করব। এমন একটি স্পেশাল কেসের কথা চিন্তা করো যেখানে A ও E বিন্দু অভিন্ন এবং একইসাথে C ও F বিন্দুও অভিন্ন। তাহলে $PA : PC = PE : PF = AB : CD = AX : CX$ (কারণ $\triangle ABX \sim \triangle CDX$) $\Longleftrightarrow XP$ হচ্ছে $\angle AXB$-র সমদ্বিখণ্ডক।

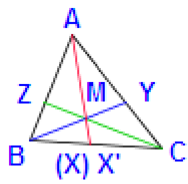
সুতরাং, P থেকে AX-এর দূরত্ব $=$ P থেকে BX-এর দূরত্ব

$\therefore \triangle APD$ ও $\triangle BPC$-র উচ্চতা সমান। সেক্ষেত্রে $\dfrac{[APD]}{[BPC]} = \dfrac{AD}{BC}$ যা E, F-এর উপর নির্ভর করছে না। এবার E, F সকল অবস্থানের জন্য এই জিনিস দেখাতে পারলেই হয়ে গেল। আমি এই নোটে এটা দেখাব না। কেউ আগ্রহী থাকলে এই ঠিকানায় আমার মূল প্রমাণ দেখতে পার: IMO ShortList G2

৫. নতুন বিন্দু নেওয়া

সমস্যায় যা প্রমাণ করতে বলা হয় অনেক সময় তা সরাসরি প্রমাণ করা যায় না বা গেলেও খুব জটিল হয়। এক্ষেত্রে ইফিশিয়েন্ট টেকনিক হচ্ছে সমস্যায় বর্ণিত প্রামাণ্য বিষয়টি ভুল ধরে নেওয়া এবং এই ভুল থেকে সৃষ্ট একটা নতুন বিন্দু ধরে নিয়ে আগানো। এরপর দেখানো যে একটা অসঙ্গতি আসছে।

সমস্যা ৬:(সেভার উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা) ABC ত্রিভুজের $BC, CA,$ ও AB বাহুর উপর যথাক্রমে X, Y, Z তিনটি বিন্দু। দেওয়া আছে $\dfrac{BX}{XC} \cdot \dfrac{CY}{YA} \cdot \dfrac{AZ}{ZB} = 1$. দেখাও যে AX, BY, CZ সমবিন্দু।



সমস্যা ৬

সমাধান: ধরা যাক AX, BY, CZ সমবিন্দু নয়। আরও ধর $BY \cap CZ = M,\ AM \cap BC = X'$.

সেভার উপপাদ্য থেকে পাই $\dfrac{BX'}{X'C} \cdot \dfrac{CY}{YA} \cdot \dfrac{AZ}{ZB} = 1$

আবার দেওয়া আছে $\dfrac{BX}{XC} \cdot \dfrac{CY}{YA} \cdot \dfrac{AZ}{ZB} = 1$. সুতরাং $\dfrac{BX'}{X'C} = \dfrac{BX}{XC}$. কিন্তু X আর X' একই বিন্দু না হলে এটা কিছুতেই সম্ভব না। (বল তো দেখি কেন?) $\therefore\ AX, BY, CZ$ সমবিন্দু।

অনুশীলনীর ৭ ও ৮ নং সমস্যাদুটি এই টেকনিক দিয়ে করলে সহজ হবে।

নিজে করো:

১. ২০০৯ সালের জ্যামিতি ক্যাম্পের প্রবলেম সেট নামাও এবং যতগুলো পার করে ফেলো।

লিঙ্ক: www.kmcbd.org/Home/documents/geometrycamp2009problemset.pdf?attredirects=0&d=1

২.(এপিএমও ২০০৭) ABC একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ যার $\angle BAC = 60^\circ$ এবং $AB > AC$. I হচ্ছে এর অন্তকেন্দ্র আর H লম্ববিন্দু। দেখাও যে $2\angle AHI = 3\angle ABC$.

৩.(জেবিএমও ২০১০) ABC একটি বিষমবাহু ত্রিভুজ। BC বাহুর ওপর L ও AC বাহুর ওপর K এমন দুইটি বিন্দু যাতে করে AL এবং BK যথাক্রমে $\angle A$ ও $\angle B$-র অন্তর্দ্বিখণ্ডক। BK-র লম্বসমদ্বিখণ্ডক AL-কে M বিন্দুতে ছেদ করে। L বিন্দুগামী MK-র সমান্তরাল রেখা BK রেখাকে N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করো যে $NL = NA$.

৪.(ইরান আইএমও গণিতদল নির্বাচনী পরীক্ষা ২০০৮) ABC ত্রিভুজে $\angle B > \angle C$ এবং এর পরিবৃত্ত ω ও অন্তকেন্দ্র I. ω বৃত্তে BAC চাপের মধ্যবিন্দু T. E এমন একটি বিন্দু যাতে $\angle AEI = 90^\circ$ ও $AE \parallel BC$. $TE \cap \omega = \{T, P\}$. যদি $\angle B = \angle IPB$ হয়ে থাকে তাহলে $\angle A = ?$

৫.(আইএমও ২০১০) ABC একটি ত্রিভুজ $(BC \neq AC)$ যার পরিবৃত্ত ω এবং P তার অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু। AP, BP, CP পুনরায় ω-কে যথাক্রমে K, L, M বিন্দুতে ছেদ করে। C বিন্দুতে অঙ্কিত ω-র স্পর্শক AB-কে S বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করো যদি $SP = SC$ হয় তবে $MK = ML$.

৬.(আইএমও ২০০৭) ABC ত্রিভুজে $\angle C$-র অন্তর্দ্বিখণ্ডক পরিবৃত্তকে পুনরায় R বিন্দুতে, BC বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডককে P এবং AC বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডককে Q বিন্দুতে ছেদ করে। BC বাহুর মধ্যবিন্দু K আর AC-র L. দেখাও যে $\triangle RPK$ ও $\triangle RQL$-এর ক্ষেত্রফল সমান।

৭. (মার্কিন গণিত অলিম্পিয়াড ২০০৫) ABC একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ যার BC বাহুর উপর P এবং Q বিন্দু দুইটি অবস্থিত। C_1 এমন একটি বিন্দু যাতে করে উত্তল চতুর্ভুজ $APBC_1$ বৃত্তস্থ, $QC_1 \parallel CA$ এবং C_1, Q, AB রেখার দুই ভিন্ন পাশে অবস্থান করে। B_1 এমন একটি বিন্দু যাতে উত্তল চতুর্ভুজ $APCB_1$ বৃত্তস্থ, $QB_1 \parallel BA$ এবং B_1, Q, AC রেখার দুই ভিন্ন পাশে অবস্থান করে। প্রমাণ করো যে B_1, C_1, P, Q সমবৃত্ত। (যে চতুর্ভুজের প্রতিটি কোণ ১৮০° থেকে ছোট তাকে উত্তল চতুর্ভুজ বলে।)

৮.(ব্রিটিশ গণিত অলিম্পিয়াড ২০০৬) ABC একটি ত্রিভুজ যার $AC > AB$. AB বাহুকে A-র দিকে বর্ধিত করে এমন একটি বিন্দু X নেওয়া হল যেন $BX = AC$. AC বাহুর উপর এমন একটি বিন্দু Y নেওয়া হল যেন $CY = AB$. XY রেখাটি BC বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডককে P বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে $\angle BPC + \angle BAC = 180^\circ$.

৯.(আইএমও ২০১২) ABC একটি ত্রিভুজ যার A শীর্ষের বিপরীত বহির্কেন্দ্র হচ্ছে J. এই বহির্বৃত্তটি BC বাহুকে M বিন্দুতে, AB-কে K এবং AC-কে L বিন্দুতে স্পর্শ করে। LM রেখা ও BJ রেখা F বিন্দুতে মিলিত হয় আর KM রেখা ও CJ রেখা মেলে G বিন্দুতে। $AF \cap BC = S$, $AG \cap BC = T$. প্রমাণ করো M হচ্ছে ST-র মধ্যবিন্দু।

১০.(আইএমও শর্টলিস্ট ২০১০ জি১) ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজে D, E, F হচ্ছে যথাক্রমে A, B, C থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু। EF রেখার সাথে $\bigcirc ABC$-র দুটি ছেদবিন্দুর মাঝে একটি হচ্ছে P. BP ও DF রেখা পরস্পরকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে $AP = AQ$.

আদীব হাসান
শিক্ষার্থী, দশম শ্রেণি, ময়মনসিংহ জিলা স্কুল
সদস্য, বাংলাদেশ গণিতদল ২০১২