কম্বিনেটরিক্স (Combinatorics)

-তারিক আদনান মুন

কম্বিনেটরিকস গণিতের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। তবে আমাদের দেশে উচ্চমাধ্যমিকের আগে শিক্ষার্থীদের এ বিষয়টি শেখানো হয় না; তাই আমাদের কাছে বেশ অপরিচিত। বতর্মানে সকল গণিত অলিম্পিয়াডে কম্বিনেটরিকস থেকে সমস্যা দেওয়া হয়। বাংলাদেশ গণিত অলিম্পয়াডের বিভিন্ন পর্বেও এখন এসব সমস্যা দেওয়া হচ্ছে। তাছাড়া কম্পিউটার বিজ্ঞান থেকে শুরু করে বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় এটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। কম্বিনেটরিকসে আলোচনা করা হয়, গণনার উপায় (Enumerative Combinatorics), Coloring Proofs, Invariance Principle, Extremal Principle, Pigeonhole principle (পায়রা খোপের নীতিমালা,যা ইতিপূর্বে গণিত ইশকুলে প্রকাশিত হয়েছে), Graph Theory, Recurrence Relation, Generating Function ইত্যাদি। আমি এখানে কম্বিনেটরিক্সের বেশ কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয় নিয়ে আলোচনা করব।

১. কম্বিনেটরিক্সের প্রথম পাঠ: গুণতে শেখা (Basic Counting)

অনেকে ভাবতে পারে যে, আমরা সবাই তো গুণতে পারি, এটা শেখার আর কি আছে! কিন্তু কম্বিনেটরিক্সে গুণতে শেখা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ এবং এই গণনা অন্যান্য গণনার চেয়ে অবশ্যই আলাদা। এটি গণিতের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। এই গণনার বিষয়টি মূলত আমরা কোন কাজ কত ভাবে করতে পারব তার সংখ্যা নির্ণয়।

যেমন: 10 জন ছাত্রের মধ্য থেকে 5 জনকে নিয়ে একটি দল কতভাবে গঠন করা যায়, বা $a + b + c = 6$ এই সমীকরণের অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যায় কতটি সমাধান আছে তা আমরা গণনার মাধ্যমে বের করতে পারি।

১.১.বিন্যাস(Permutation) ও সমাবেশ(Combination): বিন্যাস ও সমাবেশ যে ধারণাগুলো ব্যবহার করে তা হল, যোগ ও গুণের ধারণা।

১.১.১. যোগের ধারণা: মনে করি, আমরা কোন দোকানে যেয়ে দেখলাম যে, সেখানে a প্রকারের কেক ও b প্রকারের বিস্কুট আছে। তাহলে আমরা যদি কেক **বা** বিস্কুট এর যেকোন একটা খেতে চাই; তবে আমরা $a + b$ উপায়ে তা পছন্দ করতে পারব। (5 প্রকারের কেক ও 6 প্রকারের বিস্কুট থাকলে 11 ভাবে আমরা এর যেকোন একটি খেতে পারব।)

১.১.২. গুণের ধারণা: ঐ দোকানে আমরা যদি একই সাথে একটি কেক **ও** একটি বিস্কুট খেতে চাই তবে আমরা তা ab উপায়ে পছন্দ করতে পারব। (5 প্রকারের কেক ও 6 প্রকারের বিস্কুট থাকলে 30 ভাবে আমরা কেক ও বিস্কুট উভয়ই খেতে পারব।) অর্থাৎ, n টি ভিন্ন ভিন্ন প্রকারের খাবার যার প্রত্যেকটি যথাক্রমে $a_1, a_2, \dots, a_n$ বার করে আছে তার জন্য সাধারণভাবে বলা যায় যে আমরা তখন n টি খাবারের সম্পূর্ণ মিল $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$ উপায়ে পছন্দ করতে পারব। (এখনে গণনা দুটি দুই রকম হবার কারণ হল,একবার আমরা কেক বা বিস্কুট খাচ্ছি ; পরেরটিতে আমরা দুটিই খাচ্ছি।)

সমস্যা ১: যদি ঢাকা থেকে খুলনা যাবার জন্য 5 টি রাস্তা থাকে এবং খুলনা থেকে কুষ্টিয়া যাবার জন্য 10 টি রাস্তা থাকে তবে কতভাবে ঢাকা থেকে কুষ্টিয়া যাওয়া যায়? (গুণের ধারণা হতে $5 \times 10 = 50$ উপায়ে।)

সমস্যা ২: ABC শব্দটিকে কতটি ভিন্নভাবে সাজানো যায়?

১.১.৩ বিন্যাস (Permutation): বিন্যাস হল একই প্রকারের বস্তুকে কত ভিন্ন ভিন্ন ভাবে সাজানো যায় তার উপায়। সমস্যা ২ এর সমাধান থেকেই বিন্যাস এর ধারণা পাওয়া যাবে। আমরা সহজেই পরীক্ষা করে দেখতে পারি যে, এটি 6 উপায়ে সম্ভব (ABC,ACB,BAC,BCA,CAB, CBA)। ABC শব্দটিতে 3 টি বর্ণ আছে। ফলে আমরা যখন এর বিন্যাস করব, তখন প্রথম বর্ণটিকে আমরা 3 উপায়ে পছন্দ করতে পারব।

২য়টিকে 2 উপায়ে (কারণ একটি বর্ণকে আমরা এরই মধ্যে নিয়ে ফেলেছি) এবং ৩য় বর্ণটিকে 1 উপায়ে। অর্থাৎ আমরা $3 \times 2 \times 1 = 6$ উপায়ে কাজটি করতে পারি।

এবার, পরিচয় করিয়ে দেই, $n!$ (n Factorial)এর সাথে। $n! = 1.2.3 \dots (n-1).n$। অর্থাৎ 1 থেকে n পযর্ন্ত সংখ্যার গুণফল। 0!=1 হিসেবে সজ্ঞায়িত।

সমস্যা ৩: MAGIC শব্দটির কতটি ভিন্ন ভিন্ন বিন্যাস সম্ভব? একইভাবে,$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$ উপায়ে এটি সম্ভব।

পুনরাবৃত্তি ছাড়া বিন্যাস: n টি বস্তু হতে r টি নিয়ে বিন্যাস: nটি বস্তু হতে r টি নিয়ে বিন্যাস করলে তার সংখ্যা হবে,

$$\frac{n!}{(n-r)!} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1) = P(n,r)$$

nটি বস্তু হতে rটি নিয়ে বিন্যাসকে $P(n,r)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

এখন আমরা যদি MAGIC শব্দটি হতে ৩ টি বর্ণ নিয়ে বিন্যাস করতে চাই তবে কতটি ভিন্নভাবে তা সম্ভব তার উপায় হল $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$

আরেকটি সমস্যা দেখা যাক,**সমস্যা ৪:** GAUSS শব্দটির কতভাবে বিন্যাস সম্ভব? মনে হতে পারে যে,এটি $5!$ উপায়ে সম্ভব। কিন্তু আসলে এটি $\frac{5!}{2}$ উপায়ে সম্ভব।এর কারণ একটু পরে বলছি।ভাবতে থাক!

একইভাবে PARADOXICAL শব্দটির $\frac{11!}{6}$ ভাবে বিন্যাস করা সম্ভব। $\frac{11!}{3}$ বা $11!$উপায়ে নয় ; এবং RAMANUJAN $\frac{9!}{6.2}$ ভাবে বিন্যস্ত করা সম্ভব। হয়ত বুঝতে পারছ যে,যখন কোন শব্দে কোন বর্ণ একাধিকবার থাকে তখন কোন বর্ণ যতবার আছে তার ফ্যাক্টরিয়াল দিয়ে মোট উপায়কে ভাগ করতে হয়। কেন? সেটাই এখন আলোচনা করছি।

Mississippi Formula: MISSISSIPPI শব্দটিতে S আছে 4 টি, I আছে 4 টি, P আছে 2 টি ফলে একে $\frac{11!}{4!4!2!}$ উপায়ে বিন্যস্ত করা সম্ভব।

আমাদের যদি কিছু একই আকারের বল দেওয়া হয় যাদের i টি ভিন্ন ভিন্ন রংয়ে রং করা হয়েছে এবং i তম রংয়ের বল আছে a_iটি $[i = 1,2,\dots,n]$ তাহলে কোন একটি সারিতে তাদের $\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{a_1!a_2!\dots a_n!}$ উপায়ে সাজানো যাবে।

এর কারণ বের করার জন্য আমরা RAMANUJAN শব্দটি দেখি। আমরা একই বর্ণগুলোর বিভিন্ন নাম দেই $RA_1MA_2N_1UJA_3N_2$; A এর তিনটি ভিন্ন বর্ণের নাম A_1, A_2, A_3। N এর ২ টি ভিন্ন বর্ণের নাম N_1, N_2। মনে করি শব্দটিকে 9! উপায়ে সাজানো যায়। এখন,

$$RA_1MA_2N_1UJA_3N_2 \rightarrow \boldsymbol{RA_1A_2A_3MN_1UJN_2} \rightarrow \boldsymbol{RA_2A_1A_3MN_1UJN_2}$$

শেষ দুইটি শব্দ মেটেও ভিন্ন নয় কারণ আমরা $\boldsymbol{A_1A_2} \rightarrow \boldsymbol{A_2A_1}$ লিখেছি। ফলে একই বর্ণের স্থান পরিবর্তন হয়েছে মাত্র। তার মানে, আমরা অতিনিক্ত গণনা করেছি। ফলে এরকম যত বিন্যাস আছে সব বাদ দিতে হবে। A_1, A_2, A_3 কে পাশাপাশি 3!=6 উপায়ে সাজানো যায় ও N_1, N_2 কে 2!=2 উপায়ে সাজানো যায় যায়। কিন্তু গুণের সূত্র অনুসারে আমরা এসব অতিরিক্ত সংখ্যা গুণ করেছি। ফলে আমাদের ভাগ করতে হবে। ফলে আমরা পাব, মোট উপায়=$\frac{9!}{6.2}$

এ থেকে বোঝা যাচ্ছে যে, গুণের ক্ষেত্রে অতিরিক্ত গণনা বাদ দিতে ভাগ করতে হবে এবং যোগের ক্ষেত্র বিয়োগ করতে হবে।

বস্তুসমূহের পুনরাবৃত্তি ঘটতে পারে এমন বিন্যাস:

n সংখ্যক বস্তু হতে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে বিন্যাসে যদি প্রতিবার r সংখ্যক বস্তুর পুনরাবৃত্তি ঘটতে পারে সেক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা n^r

সমস্যা ৫: বাজার করতে যাবার সময় আমার সামনে ভিন্ন ভিন্ন দ্রব্যের 10টি দোকান আছে । প্রতি দোকানে 8টি দ্রব্য পাওয়া যায়। আমি কতভাবে বাজার করতে পারি?

সমাধান: এখানে আমি প্রত্যেক দোকান হতে 8+1=9 উপায়ে বাজার করতে পারি (কারণ আমি কোন দোকান 0 হতে 8 টি দ্রব্য কিনতে পারি) সুতরাং মোট বিন্যাস সংখ্যা 9^{10}।

সমস্যা ৬: এই সমস্যাটি অত্যন্ত চমৎকার। n উপাদান বিশিষ্ট কোন সেটের কতটি সাবসেট থাকতে পারে? আমরা জানি, যে এর উত্তর 2^n।

এর সমাধান হল: আমরা যখন কোন সাবসেট গঠন করতে যাব, তখন আমরা nটি উপাদান হতে সাবসেটের কোন একটি উপদান দুইভাবে পছন্দ করতে পারি। (আমরা উপাদানটি সাবসেটে নিতে পারি, আবার নাও নিতে পারি) অর্থাৎ, মোট বিন্যাস সংখ্যা=2^n

<u>**সমস্যা:**</u> এবার সমস্যা সমাধানের পালা।

১. 0,1,...,9 অঙ্কগুলো দ্বারা এদের প্রত্যেককে 1 বারের বেশি না নিয়ে 5000 হতে ছোট এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য কতটি সংখ্যা তৈরী করা যায়?

২. MATHEMATICS শব্দটিকে কতভাবে সাজানো যায় যেখানে দুইটি স্বরবর্ণ পাশাপাশি থাকবে না?

৩. n সংখ্যক অক্ষরকে কতভাবে একসারিতে সাজানো যায় যাতে বিশেষ দুইটি অক্ষর পাশাপাশি থাকবে না এবং এরা সারির প্রথমে বা শেষে থাকবে না?

৪. PERMUTATION শব্দটিতে স্বরবর্ণগুলোর অবস্থান পরিবর্তন না করে এদের কতভাবে সাজানো যাবে?

৫. n জন ব্যক্তি একটি গোলটেবিলে বসে আছেন তাদের মধ্যে $n!$ বিন্যাসের মধ্যে কতটি ভিন্ন ? (অর্থাৎ, যেসব বিন্যাসে ব্যক্তির অবস্থানের পরিবতর্ন হয় ও তার পাশের ব্যক্তিরও পরিবর্তন হয়)

<u>১.১.৪ সমাবেশ (Combination):</u> সমাবেশ মূলত একটি বিশেষ ধরণের বিন্যাসের পদ্ধতি যেখানে কোন বস্তুর ক্রম কোন ভূমিকা রাখে না।

সমস্যা ৭: কোন শ্রেণীতে 4 জন ছাত্র হতে 2 জন নিয়ে কতটি ভিন্ন ভিন্ন দল গঠন করা যাবে?

মনে করি,ছাত্ররা হল, ABCD। তাহলে এদের বিন্যাস করা যাবে $\frac{4!}{2!} = 12$ উপায়ে (AB, AC, AD, BC, BD, BA, CD, CA, CB, DA, DB, DC), কিন্তু যখন আমরা সমাবেশ করব; অর্থাৎ দল গঠন করব তখন AB ও BA এর মধ্যে পাথর্ক্য নেই। ফলে দলগুলো হবে, AB,AC,AD,BC,BD,CD এই সমাবেশ সংখ্যা হল, $\frac{4!}{2!2!} = 6$

<u>সমাবেশের ব্যাখ্যা:</u>

n টি বস্তু হতে r টি বস্তু নিয়ে কত ভিন্ন ভাবে দল গঠন করা যাবে তা হল, $\frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$।

$\left(\binom{n}{r}\text{ কে } C(n,r) \text{ বা } {}^nC_r \text{ রূপেও লেখা হয়।}\right)$

কারণ, আমরা যখন n টি উপাদান হতে r টি নিয়ে বিন্যাস করেছি তখন সেগুলোর প্রত্যেকটি উপাদানের ভিন্ন ক্রমের জন্য ভিন্ন বিন্যাস পাওয়া গিয়েছে। কিন্তু, সমাবেশ এর ক্ষেত্রে ক্রম এর কোন ভূমিকা নেই (সমস্যা ৫ এ দেখা যায় যে বিন্যাসের ক্ষেত্রে AB, BA এর মধ্যে পাথর্ক্য থাকলেও সমাবেশ এর ক্ষেত্রে কোন পাথর্ক্য নেই; কারণ,যখন আমরা কোন দল গঠন করি তখন রহিম ও করিমকে নিয়ে গঠিত দল এবং করিম ও রহিমকে নিয়ে গঠিত দলের মধ্যে কোন পার্থক্য নেই)। তাই এর বিন্যাস সংখ্যা কে r! দিয়ে ভাগ করতে হবে (কারণ ঐ r টি উপাদানকে r! উপায়ে সাজানো হয় যখন তাদের ক্রমের ভূমিকা থাকে)।

বিন্যাস ও সমাবেশ এর ভেতর মূল পাথর্ক্য হল, বিন্যাসের ক্ষেত্রে ক্রম গুরুত্বপূর্ণ কিন্তু সমাবেশের ক্ষেত্রে ক্রম গুরুত্বপূর্ণ নয়।

সমস্যা ৮: 30 জনের দল থেকে 3 জনকে নিয়ে কতভাবে দল গঠন করা যাবে? ৩০ জনের দল থেকে ৩ জনকে নিয়ে কতভাবে কমিটি গঠন করা যাবে যেখানে একজন হবেন সভাপতি, একজন সম্পাদক ও একজন সদস্য?

প্রথমটির সমাধান $\binom{30}{3}$ কারণ, এখানে ক্রমের কোন ভূমিকা নেই। কিন্তু ২য়টির সমাধান $P(30,3)$ কারণ, এখানে ক্রম গুরুত্বপূর্ণ অর্থাৎ প্রত্যেক সদস্যের আলাদা পদ আছে।

সমস্যা ৯: একটি তালার ১০ টি বোতাম আছে।সঠিক কম্বিনেশন ৫টি বোতামের মাধ্যমে তৈরী করা যায় (বোতামগুলো যেকোন ক্রমে চাপলে তালাটি খোলে)। কতটি ভিন্ন কম্বিনেশন সম্ভব? $\binom{10}{5} = 252$টি।

*** বিন্যাস সমাবেশ বিষয়ক আরও সমস্যা পাওয়া যাবে [1],[2],[3],[4,],[5] বইগুলোতে।

১.২ কম্বিনেটরিয়াল যুক্তি (Combinatorial Argument): কম্বিনেটরিকস এর বিভিন্ন জটিল সমস্যা সমাধানের পূবশর্ত হল বিভিন্নভাবে গণনার জন্য বিভিন্ন কম্বিনেটরিয়াল যুক্তি সম্পর্কে ভাল ধারণা থাকা। নিচে সাধারণ কিছু যুক্তি দেওয়া হল। তবে,বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে নিজেকেই যুক্তি তৈরী করে নিতে হবে।

4×5	যদি 4 রকম রুটি ও 5 রকম কাটলেট থাকে; তবে, 4×5 উপায়ে বার্গার বানানো যাবে। (রুটি+কাটলেট=বার্গার!)
$10 + 8 + 5$	যদি 10 ধরণের জুস,8 ধরণের চা ও 5 ধরণের কফি থাকে তবে $10 + 8 + 5$ উপায়ে যেকোন একটি পানীয় পান করা যাবে।
7^3	যদি কোন হোটেলে 3 বেলার প্রতি বেলায় 7 ধরণের খাবারের মেন্যু থাকে তবে 7^3 উপায়ে 3 বেলার খাবারের অর্ডার দেওয়া যাবে।
$\binom{9}{4}$	কোন কক্ষে 9 জনের ভেতর থেকে 4 জনকে নিয়ে $\binom{9}{4}$ উপায়ে দল গঠন করা যাবে।(যেখানে ক্রম গুরুত্বপূর্ণ নয়।)
$P(9,4)$	কোন কক্ষে 9 জনের ভেতর থেকে 4 জনকে নিয়ে $P(9,4)$ উপায়ে দল গঠন করা যাবে।(যেখানে ক্রম গুরুত্বপূর্ণ)। [অর্থাৎ প্রত্যেক সদসস্যের আলাদা পদ আছে।যেমন: 4 জনের দলে যদি সভাপতি,সহ সভাপতি,সম্পাদক ও সদস্যের পদ থাকে।]
$4 \times \binom{9}{4}$	কোন কক্ষে 9 জনের ভেতর থেকে 4 জনকে নিয়ে দল গঠন করার উপায় সংখ্যা; যেখানে একজন হবে সভাপতি।
$\binom{20}{8} \times \binom{12}{4}$	কোন শ্রেণীর 20 জনবালক ও 12 জন বালিকা থেকে 8 জন বালক ও 4 জন বালিকা নিয়ে দল গঠনের উপায় সংখ্যা।
$\binom{20}{8} + \binom{20}{4}$	কোন শ্রেণীর 20 জন হতে 8 বা 4 জন নিয়ে দল গঠনের উপায় সংখ্যা।
$\binom{20}{8} = \binom{20}{12}$	কোন খেলায় 20 জন থেকে যতভাবে 8 জন বিজয়ী নির্ধারণ করা যায় ততভাবে 12 জন পরাজিত খেলোয়াড় নির্ধারিত করা যায়।

সমাবেশের সদৃশ্যতা (Symmetry Identity) : সকল ধনাত্মক সংখ্যা n, r এবং $n \geq r \geq 0$ হলে $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

বীজগণিতের মাধ্যমে সহজই এটা প্রমাণ করা যায়। তবে কম্বিনেটরিকস এর মাধ্যমে প্রমাণটি আরও চমৎকার। কোন খেলায় n জন হতে r জন বিজয়ীকে আমরা যতভাবে নির্ধারণ করতে পারি ততভাবে $n - r$ জন পরাজিত খেলোয়াড় নির্ধারণ করতে পারি। ফলে $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

সমাবেশের যোগের বৈশিষ্ট্য(Summation Identity): সকল ধনাত্মক সংখ্যা n, r এবং $n \geq r \geq 0$ হলে $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$

এটা বীজগণিতের সাহায্যেও প্রমাণ করা যায়।

কম্বিনেটরিয়াল প্রমাণ: আমরা কোন শ্রেণীতে $n + 1$ হতে যদি $r + 1$ জনকে নিয়ে দল গঠন করতে চাই (তা $\binom{n+1}{r+1}$ পদ্ধতিতে করা যায়); তবে আমরা তা দুই পদ্ধতিতে করতে পারি। আমরা একবার ক্লাশের ১ম যে তাকে নিয়ে দল গঠন করব (অর্থাৎ, আমাদের বাকী n জন হতে r জনকে পছন্দ করতে হবে এবং তা $\binom{n}{r}$উপায়ে করা যায়) এবং আরেকবার তাকে বাদ দিয়ে দল গঠন করব (অর্থাৎ, বাকী n জন হতে $r + 1$

জনকে পছন্দ করতে হবে এবং তা $\binom{n}{r+1}$ উপায়ে করা যায়)। কিন্তু এই দুইভাবেই $n+1$ হতে $r+1$ জনকে নিয়ে দল গঠন করা যায়। ফলে,

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$$

২. কম্বিনেটরিয়াল মডেল গঠন: আমরা এরই মধ্যে বিভিন্ন কম্বিনেটরিয়াল মডেলের ব্যবহার দেখেছি। কম্বিনেটরিয়াল মডেল এর সাহায্যে বিভিন্ন সমস্যার দারুণ(এবং অভাবনীয়ও বটে!) সমাধান করা যায়। কম্বিনেটরিয়াল মডেলের সাহায্যে সমস্যা সমাধানে সমস্যার গাণিতিক বাক্যগুলিকে বাস্তব কোন উদাহরণের সাথে তুলনা করে মডেল গঠন করা হয় এবং এর সমাধান করা হয়।এরকম কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হল:

১. প্রমাণ করতে হবে যে, $\binom{2n}{2}=2\binom{n}{2}+n^2$

মনে করি, কোন শ্রেণীতে $2n$ জন শিক্ষার্থীর n জন মেয়ে এবং n জন ছেলে।তাহলে আমরা 2 জনের দল গঠন করতে পারব $\binom{2n}{2}$ উপায়ে।আবার দল গঠন তিন ভাবে হতে পারে দলের 2জনই মেয়ে,2 জনই ছেলে,1জন মেয়ে ও 1জন ছেলে।আমরা এই তিনপ্রকার দল পছন্দ করতে পারি যথাক্রমে $\binom{n}{2},\binom{n}{2},n^2$ উপায়ে।কিন্তু এই 3 উপায়েই দল গঠন করা সম্ভব। সুতরাং,এই মডেল হতে প্রমাণিত হল যে,

$$\binom{2n}{2}=2\binom{n}{2}+n^2$$

২. অনেকটা একইভাবে প্রমাণ করা যাবে, $\binom{2n+2}{n+1}=\binom{2n}{n+1}+2\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n-1}$ (পাঠকরা চেষ্টা করুন)

৩. প্রমাণ করতে হবে যে, $1.\binom{n}{1}+2.\binom{n}{2}+\cdots+n.\binom{n}{n}=n.2^{n-1}$

বামপক্ষ: মনে করি,আমরা n জন হতে যথাক্রমে $1,2,3,\ldots,\mathrm{n}$ জন নিয়ে দল গঠন করছি যেখানে একজন হবে দলনেতা। আবার ডানপক্ষে আমরা প্রথমে একজন দলনেতা ঠিক করছি (এটা করা যাবে n উপায়ে) এবং $1,2,3,\ldots,\mathrm{n}$ জন নিয়ে দল গঠন করার ক্ষেত্রে একজন দলনেতাকে বাদ দিয়ে বাকীদের নির্বাচন করা যাবে 2^{n-1} উপায়ে। (এখানে এই নির্বাচন দলের সদস্যদের সংখ্যার উপর নির্ভর করে না)।ফলে, বামপক্ষ=ডানপক্ষ।

৪. প্রমাণ করতে হবে যে,

$$\binom{n}{k}\binom{k}{r}=\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}\quad \text{যেখানে,} n\geq k\geq r\geq 0$$ (এটি নিউটন সাম নামে পরিচিত)

বামপক্ষ: মনে করি, গণিত অলিম্পিয়াডের জাতীয় পর্যায়ে n জন প্রতিযোগী হতে k জনকে পুরষ্কৃত করা হয় এবং k জন বিজয়ী হতে r জনকে জাতীয় গণিত ক্যাম্পের জন্য নির্বাচিত করা হয়; সুতরাং এটি করা যাবে, $\binom{n}{k}\binom{k}{r}$ উপায়ে।
ডানপক্ষ: মনে করি আমরা প্রথমে n জন প্রতিযোগী হতে হতে r জনকে জাতীয় গণিত ক্যাম্পের জন্য নির্বাচিত করলাম। তাহলে বাকী $n-r$ জন হতে $k-r$ জন বিজয়ী নির্ধারণ করা যাবে $\binom{n-r}{k-r}$ উপায়ে। সুতরাং,সম্পূর্ণ কাজটি করা যাবে,$\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$ উপায়ে।
ফলে, বামপক্ষ=ডানপক্ষ।

৫. a যেকোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং p মৌলিক সংখ্যা হলে;প্রমাণ কর যে, a^p-a , p দ্বারা বিভাজ্য।
(একে মডুলার এরিথমেটিক দিয়ে লেখা হয়, $a^p\equiv a \bmod p$। এই সূত্রটি সংখ্যাতত্ত্বের অত্যন্ত পরিচিত সূত্র। একে ফার্মার লিটল থিউরেম (Fermat's Little Theorem) বলা হয়।)
কম্বিনেটরিয়াল প্রমাণ: এটা প্রমাণ করাই যথেষ্ট যে,$\frac{a^p-a}{p}$ একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা k। (কারণ, $\frac{a^p-a}{p}=k$ হলে a^p-a , p দ্বারা বিভাজ্য।) মনে করি, আমাদের a টি রংয়ের মুক্তা আছে। আমরা ঠিক p সংখ্যক মুক্তা দিয়ে একটি মালা তৈরী করব। তাহলে আমরা a^p টি বিন্যাস পাব। আমরা এদের মধ্যে থেকে যেসব মালার সব মুক্তা একই রংয়ের তাদের বাদ দেব। এখন বাকী a^p-a টি মালার মধ্যে এমন অনেকগুলো বিন্যাস আছে যাদের যেকোন দুটিকে কেবল ঘূর্ণন করলে একই রকম মালা পাওয়া যায়। তাহলে চক্রবিন্যাসের নিয়ম অনুসারে ভিন্ন ভিন্ন রকমের মালার সংখ্যা $\frac{a^p-a}{p}$। (কারণ,প্রতি p টি চক্রীয় বিন্যাস একই রকম) এবং $\frac{a^p-a}{p}$ সংখ্যাটি একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। ফলে, $a^p\equiv a \bmod p$

<u>দ্বিপদী উপপাদ্যের কম্বিনেটরিয়াল প্রমাণ:</u>

প্যাসকেলের ত্রিভূজ ও দ্বিপদী উপপাদ্য: দ্বিপদী উপপাদ্য মানে $(x+y)$ এর n তম ঘাতের বিস্তৃতিতে বহুপদী নির্ণয়ের পদ্ধতি। আমরা জানি,

$$(x+y)^n = \binom{n}{n}x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y^1 + \cdots + \binom{n}{1}x^1y^{n-1} + \binom{n}{0}y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k a^{n-k} \;\ldots\ldots(\mathbf{1})$$

প্রমাণ: আমরা গণিতিক আরোহ এবং সমাবেশের যোগের বৈশিষ্ট্য $\left[\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}\right]$ ব্যবহার করব।

n=1 হলে,$(x+y)^1 = \binom{1}{1}x^1 + \binom{1}{0}y^1$ ফলে n=1এর জন্য **(1)** উক্তিটি সত্য।ধরি, n=m এটি এর জন্য সত্য।

$$(x+y)^m = \binom{m}{m}x^m + \binom{m}{m-1}x^{m-1}y^1 + \cdots + \binom{m}{1}x^1y^{m-1} + \binom{m}{0}y^m \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathbf{2})$$

এখন, n=m+1এর জন্য সত্য হবে যদি

$$(x+y)^{m+1} = \binom{m+1}{m}x^{m+1} + \binom{m+1}{m}x^m y^1 + \cdots + \binom{m+1}{1}x^1y^m + \binom{m+1}{0}y^{m+1}$$ হয়।

(2) এর উভয় পক্ষে (x+y) গুণ করে পাই,

$$(x+y)^{m+1} = (x+y)\left\{\binom{m}{m}x^m + \binom{m}{m-1}x^{m-1}y^1 + \cdots + \binom{m}{1}x^1y^{m-1} + \binom{m}{0}y^m\right\}$$

$$= x^{m+1} + \left\{\binom{m}{1}+\binom{m}{0}\right\}x^m y + \cdots + \left\{\binom{m}{r}+\binom{m}{r-1}\right\}xy^m + y^{m+1}$$

$$= \binom{m+1}{m}x^{m+1} + \binom{m+1}{m}x^m y^1 + \cdots + \binom{m+1}{1}x^1y^m + \binom{m+1}{0}y^{m+1} \;\ldots\ldots$$ (যোগের বৈশিষ্ট্য থেকে)

অর্থাৎ,গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে আমরা দ্বিপদী উপপাদ্য প্রমাণ করলাম। এখন আমরা কম্বিনেটরিয়াল পদ্ধতিতে এটি প্রমাণ করব।

কম্বিনেটরিয়াল পদ্ধতিতে প্রমাণের জন্য আমাদের বুঝতে হবে, আসলে প্রত্যেকটি পদের সহগগুলোর মানগুলো আমরা কিভাবে পাচ্ছি। এটা বোঝার জন্য আমরা একটা উদাহরণ লক্ষ্য করি,

$$(x+y)^6 = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{6\text{ টি উৎপাদক}}$$

এখন আমরা যদি গুণ করতে থাকি তালে প্রথম দুটি পদের জন্য পাই,

$$(x+y)^6 = (x^2+yx+xy+y^2)(x+y)^4$$

এরপর আমরা যা করি তাহল, এগুলোকে সরল করি এবং সাধারণ পদগুলো যোগ করি। কিন্তু আমরা তা না করে লক্ষ্য করি পরবর্তী ধাপে কি ঘটে। আমরা এরপরের ধাপে প্রত্যেকটি পদকে আলাদা আলাদাভাবে x ও y দিয়ে গুণ করি-

$$(x+y)^6 = (xxx+yxx+xyy+yyx+yxy+xyy+yyy)(x+y)^2$$

আমরা $(x+y)^6$ এর বিস্তৃতিতে প্রকৃতপক্ষে 2^6 টি পদ পাই (কারণ, প্রত্যেকটি পদের জন্য আমাদের দুইটি বিন্যাস পাই। সুতরাং, এখান থেকে আমরা বুঝতে পারি যে, এখানে আমরা x ও y দিয়ে সবগুলি সম্ভাব্য বিন্যাস পাব যেখানে প্রত্যেকটি পদে x ও y এর মোট সংখ্যা হবে 6। তাহলে আমরা যেকোন পদের সহগ সম্পর্কে কী বলতে পারি? যেমন: x^2y^4 এর সহগ কত হবে?

লক্ষ্য করি, আমরা x ও y দিয়ে সবগুলি সম্ভাব্য সব বিন্যাসের মধ্যে সেসব বিন্যাসই নেব, যেখানে x আছে 2 টি এবং y আছে 4 টি। অর্থাৎ.

$$xxyyyy, xyxyyy, yxxyyy, \dots\dots\dots$$

এরকম বিন্যাস বিশিষ্ট পদগুলো নেব। মিসিসিপি সূত্র অনুসারে এরকম বিন্যাস আছে, $\frac{6!}{2!4!}=\binom{6}{4}$ টি। এই উদাহরণ থেকে আমরা সাধারণভাবে বলতে পারি যে, $(x+y)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^ky^{n-k} পদটির সহগ হবে, $\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$

কম্বিনেটরিয়াল পদ্ধতিতে প্রমাণের ফলে আমরা প্রকৃতপক্ষে অনুভব করতে পারি যে, দ্বিপদী উপপাদ্য আসলে কিভাবে পাওয়া যায়। এই প্রমাণটি ভালভাবে বুঝে থাকলে আমরা কেবল দুটি পদের জন্য নয়, n টি পদের জন্যও সূত্র প্রমাণ করতে পারব।

যেমন: $(x+y+z)^n=?$ এখানে আমাদের মূলত $x^ky^lz^{n-k-l}$ পদের সহগের মান বের করতে হবে। সহজেই আমরা দেখতে পাই যে, সহগের মান, $\frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}$

একইভাবে, $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$ এর বিস্তৃতিও আমরা সহজেই করতে পারি। সেটার দায়িত্ব পাঠকের উপরই ছেড়ে দেওয়া হল। (উল্লেখ্য, এই উপপাদ্যকে বহুপদী উপপাদ্য বা Multinomial Theorem বলা হয়)

দ্বিপদী উপপাদ্যের পদগুলোর সহগের মান প্যাসকেলের ত্রিভুজ থেকে পাওয়া যায়। প্যাসকেলের ত্রিভুজের অনেক চমৎকার বৈশিষ্ট্য আছে। একটি বৈশিষ্ট্য হল- এর একটি সারির যেকোন পদ এর আগের সারির দুটি পদের সমষ্টির সমান হয় (১ম চিত্র)। নিচে প্যাসকেলের ত্রিভুজ দেখানো হল-

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&1&&&&&\\
&&&&1&&2&&1&&&&\\
&&&1&&3&&3&&1&&&\\
&&1&&4&&6&&4&&1&&\\
&1&&5&&10&&10&&5&&1&\\
1&&6&&15&&20&&15&&6&&1
\end{array}$$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের মাধ্যমে দ্বিপদী উপপদ্যের পদগুলোর সহগ দেখানো হল:

$$\begin{array}{ccccccc}
&&&\binom{1}{0}&&&\\
&&\binom{1}{1}&&\binom{1}{0}&&\\
&\binom{2}{2}&&\binom{2}{1}&&\binom{2}{0}&\\
\binom{3}{3}&&\binom{3}{2}&&\binom{3}{1}&&\binom{3}{0}\\
\end{array}$$

....

$$\binom{n-1}{n-1}\quad\binom{n-1}{n-2}\quad\binom{n-1}{n-3}\dots\dots\dots\binom{n-1}{2}\quad\binom{n-1}{1}\quad\binom{n-1}{0}$$

$$\binom{n}{n}\quad\binom{n}{n-1}\quad\binom{n}{n-3}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\binom{n}{2}\quad\binom{n}{1}\quad\binom{n}{0}$$

***আরও বেশকিছু বৈশিষ্ট্য [1],[3],[4] বইগুলোতে পাওয়া যাবে।

৩. <u>পার্টিশন ও বাইজেকশন:</u> কোন একটি সমস্যাতে কোন একটি কাজ অনেকভাবে করার প্রয়োজন হতে পারে (যেমন: একবার দুইজনকে নিয়ে কিংবা একবার ৩ জনকে নিয়ে দল গঠন ইত্যাদি)। এসময় সমস্যাটিকে ছোট ভাগে ভাগ করা হয় পার্টিশনের নীতি ব্যাবহার করে। এই পদ্ধতিতে কোন সমস্যার গণনার অংশটিকে একটি সাদৃশ্যপূর্ণ উপায়ে ভাগ করা হয়। মনে করি, S কোন একটি সেট।এক সুবিধাজনকভাবে $A_1, \ldots, A_n$উপসেট এ এমনভাবে ভাগ করা হয়েছে যাতে তারা পরস্পর নিশ্ছেদ হয়; অর্থাৎ, $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$।তাহলে,

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i\,; \qquad \text{ফলে,} \qquad n(S) = n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_n)$$

পার্টিশনের সবচেয়ে পরিচিত উদাহরণটি হল যেকোন সেটের উপসেট সংখ্যা নির্ণয়। আমরা জানি, n উপদান বিশিষ্ট সেটের উপসেট সংখ্যা 2^n

এই গণনাটিকে আমরা কয়েকটি ভাগে ভাগ করি। মনে করি, r উপাদান বিশিষ্ট সবসেটের সংখ্যা $n(E_r)$ তাহলে,

$$2^n = n(E_0) + n(E_1) + \cdots + n(E_n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

(এই বৈশিষ্ট্যটি বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ)

<u>বাইজেকশন(Bijection):</u> আবার, অনেকসময় কোন একটি সমস্যার সাথে আরেকটি সমস্যার সরাসরি মিল দেখানো সম্ভব এক-এক মিলকরণের মাধ্যমে।এই পদ্ধতিই হল বাইজেকশন।

সমস্যা: n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে এমন চারটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা (a, b, c, d) বের কর যাতে $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq n$ হয়। এখানে সমাধানের সময় লক্ষ করতে হবে যে,চারটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা (a, b, c, d) এবং $\{0,1, \ldots, n+3\}$ সেটটি হতে চারটি উপাদানের উপসেট গঠনের মধ্যে একটি এক এক মিল(বা বাইজেকশন) আছে। ফলে, সমাধান: $\binom{n+4}{4}$

<u>৪. ইনক্লুশন-এক্সক্লুশন পদ্ধতি (The Inclusion and Exclusion Principle):</u>

মনে করি, $S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$; (উপসেটগুলোর নিশ্ছেদ হবার প্রয়োজন নেই)। এক্ষেত্রে সেটগুলোর অপারেশন পার্টিশনের মত এত সহজ নয়। এ সময় ইনক্লুশন-এক্সক্লুশন পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। এই পদ্ধতি অনুযায়ী,

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n}^{n} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

এর n=2 এর রূপটি আমাদের অত্যন্ত পরিচিত, $n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)$

<u>সমস্যা:</u>

১. কোন একটি 7 অঙ্কের টেলিফোন নাম্বার $d_1d_2d_3 - d_4d_5d_6d_7$ কে *ভাল* বলা হয় যদি $d_4d_5d_6$ বা $d_5d_6d_7$ এর অন্তত একটি (অথবা উভয়ই) $d_1d_2d_3$এর সাথে মিলে যায়। কতটি *ভাল* টেলিফোন নাম্বার আছে?

সমাধান: মনে করি, A হল সেসব নাম্বারের সেট যার জন্য $d_1d_2d_3$, $d_4d_5d_6$ এর সমান হয় এবং B সেসব নাম্বারের সেট যার জন্য $d_1d_2d_3$, $d_5d_6d_7$ এর সমান হয়। এখন,$d_1d_2d_3 - d_4d_5d_6d_7$ এর $d_4d_5d_6$ ও $d_5d_6d_7$ উভয়ই সমান হয় যদি এবং কেবল যদি $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = d_7$ হয়।সুতরাং, $n(A \cap B) = 10$

ফলে ইনক্লুশন-এক্সক্লুশন পদ্ধতি অনুযায়ী, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 10^3.1.10 + 10^3.10.1 - 10 = 19990$

২. অবস্থা পরিবর্তন করে পুনর্বিন্যাস (Derangement): $\{1,2,\ldots,n\}$ সংখ্যাগুলোকে যদি এমনভাবে সাজানো হয় যাতে কোন সংখ্যা তার পূর্বের অবস্থানে না আসে তবে তাবে অবস্থা পরিবর্তন করে পুনর্বিন্যাস (Derangement) বলে। (যেমন: 4321এরকম পুনর্বিন্যাস কিন্তু 4231নয়)। প্রথম n টি সংখ্যার জন্য কতটি এমন পুনর্বিন্যাস সম্ভব?

সমাধান: আমরা জানি $n!$ ভাবে সাধারণ বিন্যাস সম্ভব। আমরা সরাসরি পুনর্বিন্যাস বের করতে হলে তা এত সহজ হবে না। তাই আমরা বের করব নির্দিষ্ট অবস্থান অপরিবর্তিত রেখে কতটি বিন্যাস সম্ভব। তারপর প্রাপ্ত মানকে মোট বিন্যাস থেকে বাদ দিলেই আমরা পুনর্বিন্যাস সংখ্যা পাব।

মনে করি, i তম সংখ্যাকে তার অবস্থানে অপরিবর্তিত রেখে বিন্যাসের সেট A_i।

$n(A_i) = (n-1)!$; একইভাবে, $n\left(A_i \cap A_j\right) = (n-2)! \ldots \ldots \ldots$

তাহলে ইনক্লুশন-এক্সক্লুশন পদ্ধতি অনুযায়ী,

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n}^{n} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$
$$= n(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \cdots + (-1)^{n-1}.1 = n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{n!}{n!}$$

অর্থাৎ, মোট পুনর্বিন্যাসের সংখ্যা,

$$D(n) = n! - n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}\right)$$

৩. মনে করি, n একটি ধনাত্মক সংখ্যা। $\{1,2,\ldots,2n\}$ সেটের একটি বিন্যাস $\{x_1, x_2, \ldots, x_{2n}\}$ এর $\mathcal{P}$ বৈশিষ্ট্য থাকবে যদি এবং কেবল যদি $\{1,2,\ldots,2n-1\}$ সেটে অন্তত এমন একটি উপাদান i থাকে যার জন্য $|x_i - x_{i+1}| = n$ হয়। প্রমাণ কর, যেসব বিন্যাসের $\mathcal{P}$ বৈশিষ্ট্য আছে তার সংখ্যা > যেসব বিন্যাসের $\mathcal{P}$ বৈশিষ্ট্য নেই তাদের সংখ্যা। (আন্তর্জাতিক গণিত অলিম্পিয়াড (IMO) ১৯৮৯)

সমাধান: মনে করি, A_k হল সেসব বিন্যাসের সেট যাতে পাশাপাশি দুটি উপাদান n+k এবং k থাকে। সহজেই দেখা যায় যে,$n(A_k) = 2 \times (2n-1)!$ একইভাবে,$n(A_k \cap A_h) = 2^2 \times (2n-2)!$। তাহলে যেসব বিন্যাসের $\mathcal{P}$ বৈশিষ্ট্য আছে তাদের সংখ্যা, (ইনক্লুশন-এক্সক্লুশন পদ্ধতি অনুযায়ী)

$$= n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \ge \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} n(A_i \cap A_j)$$
$$= 2 \times (2n-1)! - \binom{n}{2} \times 2^2 \times (2n-2)!$$
$$= 2n \times (2n-2)! \times n! = (2n)! \times \frac{n}{2n-1} > (2n)! \times \frac{1}{2}$$

ফলে, মোট বিন্যাস এর অর্ধেকের বেশির $\mathcal{P}$ বৈশিষ্ট্য আছে। [প্রমাণিত]

৫. কম্বিনেটরিয়াল জ্যামিতি: কম্বিনেটরিয়াল জ্যামিতিতে অনেক সমস্যা সমাধানে গণনার ধারণা বের করতে হয়। তবে যেসব সমস্যা প্রমাণ করতে হয় তাতে অসমতা এবং অন্যান্য বিভিন্ন কৌশল ব্যবহার করা হয়। নিচে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হল।

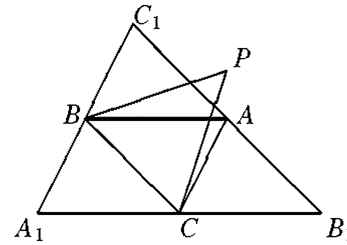
১. কোন একটি বৃত্তের উপর ১০ টি বিন্দু আছে।বিন্দু গুলো দিয়ে কতটি ভিন্ন ভিন্ন বহুভুজ তৈরী করা যাবে?

সমাধান: যথাক্রমে ত্রিভূজ,চতুর্ভুজ,...,১০-ভুজ নির্বাচন সম্ভব $\binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \cdots + \binom{10}{10} = 2^{10} - 1 - 10 - 45 = 968$ উপায়ে।

২. কোন একটি n-ভুজের(n-বাহু বিশিষ্ট বহুভুজ) কর্ণ কতটি?

কর্ণ দুটি শীর্ষবিন্দুর সংযোগে হয় কিন্তু প্রাপ্ত রেখাটি বাহু নয়। সুতরাং, $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$ উপায়ে সম্ভব। অর্থাৎ,কর্ণ $\frac{n(n-3)}{2}$ টি।

৩. কোন একটি n-ভুজের কর্ণগুলো পরস্পরকে সর্বোচ্চ কতটি বিন্দুতে ছেদ করে? সমাধান: $\binom{n}{4}$ টি।



৪. মনে করি, কোন তলে n টি বিন্দু দেওয়া আছে। প্রতি 3 টি বিন্দু এমন একটি ত্রিভুজ গঠন করে যার ক্ষেত্রফল ≤ 1। প্রমাণ কর যে, n টি বিন্দুই এমন একটি ত্রিভূজের ভেতরে অবস্থিত যার ক্ষেত্রফল ≤ 4।

সমাধান: আমরা জানি,এরকম $\binom{n}{3}$ টি ত্রিভূজ গঠন সম্ভব। এমন তিনটি বিন্দু A,B,C নেই যাতে ΔABC এর ক্ষেত্রফল=F সবচেয়ে বড় হয়। শর্তানুসারে, $F \leq 1$।এখন A,B,C বিন্দু দিয়ে তাদের বিপরীত বাহর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করলে $\Delta A_1B_1C_1$পাওয়া যায়; যার ক্ষেত্রফল, $F_1 = 4F \leq 4$ । আমরা প্রমাণ করব যে, $\Delta A_1B_1C_1$এর ভিতরে সকল বিন্দু অবস্থিত। মনে করি, P, $\Delta A_1B_1C_1$ এর বাইরে একটি বিন্দু এবং B_1C_1 বাহুর একপাশে বিন্দুটি এবং অন্যপাশে BC বাহু। (অন্যান্য বাহুর ক্ষেত্রেও একইভাবে দেখানো যায়) তাহলে, $(\Delta BPC) > (\Delta ABC)$ । ফলে,ΔABC এর চেয়ে বড় ক্ষেত্রফলের আরেকটি ত্রিভূজ পাওয়া গেল যা আমাদের অনুমানের বিপরীত। ফলে, বৈপররিত্যের (contradiction) সাহায্যে প্রমাণ হল যে, সকল বিন্দু $\Delta A_1B_1C_1$এর ভেতরে অবস্থিত।

<u>৬. কম্বিনেটরিয়াল সংখ্যতত্ব:</u>

<u>৬.১ বাক্সের মধ্যে বল (Balls in Urns):</u> $a + b + c = 6$ এই সমীকরণের অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যায় কতটি সমাধান আছে?

এই সমস্যাটি দিয়েই আমরা আমাদের আলোচনা শুরু করেছিলাম। প্রকৃতপক্ষে এই সমীকরণের অর্থ হল আমরা 6 কে এমন তিনভাগে ভাগ করব যাতে প্রত্যেকভাগে অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা থাকে।

আমরা 6 কে 6 টি 1 চিহ্নিত বলের মাধ্যমে 6=❶+❶❶❶+❶❶ [যখন $(a, b, c) = (1,3,2)$]

6=++❶❶❶❶❶❶ [যখন $(a, b, c) = (0,0,6)$]; এভাবে লিখি। (0 কে ফাঁকা স্থান দ্বারা চিহ্নিত করি)

মনে করি, আমরা এই 6 টি বল হতে কয়েকটি বল x, y, z চিহ্নিত তিনটি বাক্সে ফেলব (কোন বাক্সে বল নাও ফেলতে পারি)। তাহলে যতভাবে আমরা এটি করতে পারব তা হল আমাদের সমীকরণের সমাধান সংখ্যা।

তাহলে আমাদের এই বলগুলোকে দুইটি যোগ চিহ্ন দিয়ে ভাগ করতে হবে। তাহলেই আমরা 1 কে তিনভাগে ভাগ করতে পারব এবং প্রত্যেক ভাগকে একেকটি বাক্সে ফেলতে পারব। তাহলে দুটি যোগ চিহ্ন সহ আমাদের 8 টি ফাঁকা স্থান আছে যেখানে আমাদের 6 টি বল এবং 2 টি যোগ চিহ্ন বসাতে হবে। মিসিসিপি সূত্রানুসারে পাই বিন্যাস সংখ্যা= $\frac{8!}{2!6!} = \binom{8}{2} = 28$। আরো সাধারণভাবে আমরা বলতে পারি যে,

$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n$ সমীকরণটির অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যায় $\binom{n+k-1}{k-1}$ টি সমাধান আছে। আমরা এরই মধ্যে বাক্সের মধ্যে বল সূত্র প্রমাণ করেছি।

সূত্রটি হল: আমরা এই ❶ গুলোকে n টি অভিন্ন বল এবং বাক্সগুলোকে k টি ভিন্ন ভিন্ন বাক্স হিসেবে ধরলে, বলগুলোকে k টি বাক্সে ফেলা যাবে $\binom{n+k-1}{k-1}$ উপায়ে।

সমস্যা:

1. $a + b + c = 6$ এই সমীকরণের ধনাত্মক পূণর্সংখ্যায় কতটি সমাধান আছে?

সমাধান হল:$\binom{5}{2}$।কারণ যেহেতু ধনাত্মক সমাধান বের করতে হবে তাই কোন সমাধানই শূন্য হবে না।অর্থাৎ প্রত্যেক বাক্সে অন্তত একটি বল ফেলতেই হবে।এখন,6=❶_❶_❶_❶_❶_❶।অর্থাৎ,বলগুলোর মাঝখানে 5 টি ফাঁকা স্থান আছে এবং এখানে যোগ চিহ্ন বসাতে হবে এবং আমরা তা করতে পারব $\binom{5}{2}$ উপায়ে।

তাহলে, $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n$ সমীকরণের ধনাত্মক পূণর্সংখ্যায় কতটি সমাধান আছে?

2. $x_1+x_2+x_3+x_4=100$ সমীকরণটির ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যায় কতটি সমাধান আছে, যাতে x_1,x_2,x_3,x_4 প্রত্যেকটি বেজোড় হয় ? [সাহায্য: $x_i=2y_i-1$]

3. $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k=n$ সমীকরণটির ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যায় কতটি সমাধান আছে, যাতে r (0<r<k) টি জোড় এবং বাকীগুলো বিজোড় হয়?

আরও সমস্যা:

১. $\binom{200}{100}$এর সবচেয়ে বড় 2 অঙ্কের মৌলিক উৎপাদক কত?

সমাধান: এমন একটি মৌলিক সংখ্যা p বিবেচনা করি যাতে, $100>\ p\ >\frac{200}{3}$। এখন 2p, {1,2,...,200} সেট এ থাকলেও 3p সেটটিতে নেই। সুতরাং, $\binom{200}{100}$, p এর দ্বারা বিভাজ্য নয়। এখন সবচেয়ে বড় মৌলিক সংখ্যা$<\frac{200}{3}$ হল 61। ফলে,$3\times 61=183$ সুতরাং, 61সবচেয়ে বড় দুই অঙ্কের মৌলিক সংখ্যা যা দ্বারা $\binom{200}{100}$ বিভাজ্য।

২. একটি সংখ্যাকে *ভাল* বলা হয়, যদি এটি এর *প্রকৃত উৎপাদকগুলোর* (ঐ সংখ্যাটি বাদে বাকী সকল উৎপাদককে প্রকৃত উৎপাদক বলা হচ্ছে) গুণফলের সমান হয়। প্রথম 10 টি ভাল সংখ্যার যোগফল কত?

সমাধান: সহজেই দেখা যায় যে, ভাল সংখ্যা হবে শুধুমাত্র $p^n(n>2), pq$ $(p,q$ মৌলিক) আকারের। ফলে প্রথম ১০ টি ভাল সংখ্যা হল 6, 8, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 27, 33।

৩. 2007! সংখ্যাটির শেষে কতটি শূন্য আছে? (আরেকটু কঠিন: n! এর শেষে কতটি শূন্য আছে?)
অর্থাৎ বের করতে হবে যে, 2007! কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করলে কতটি 10পাওয়া যাবে। আবার $10=2\times 5$;ফলে,2007! এর উৎপাদকে বিশ্লষণে কতটি 5 আছে তা বের করাই যথেষ্ট (কারণ,আমরা যথেষ্ট পরিমাণ 2 পাব)। এখন 2007!এ 5 আছে,

$$\left\lfloor\frac{2007}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2007}{5^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2007}{5^3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2007}{5^4}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2007}{5^5}\right\rfloor=401+80+16+3+0=500 \text{ টি।}$$

(n! এর জন্য 5 আছে, $\left\lfloor\frac{2007}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2007}{5^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2007}{5^3}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{2007}{5^{i-1}}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2007}{5^i}\right\rfloor$ এখানে, i এর মান যথেষ্ট বড় কোন সংখ্যা যাতে $\left\lfloor\frac{2007}{5^i}\right\rfloor=0$ হয়।)

নিজে কর:

৪. কতটি অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা (m, n) এর যোগফল 1492;কিন্তু এদের যোগের সময় কোন হাতে রাখার প্রয়োজন হয় না। (যেমন: 2+1490 =1492 গ্রহণযোগ্য, কিন্তু 1006+486=1492 গ্রহণযোগ্য নয়; কারণ একক ঘরে যোগের সময় 1 হাতে ছিল) (সমাধান:300)

৫. 10^{99} এর কোন উৎপদককে দৈবচয়নের(randomly) ভিত্তিতে নির্বাচিত করা হলে তা 10^{88} দ্বারা বিভাজ্য হবার সম্ভাবনা কত? (সমাধান:$\frac{9}{625}$)

৭. সমস্যার সমাধানের কলাকৌশল: কম্বিনেটরিকস এর প্রতিটি সমস্যাই প্রত্যেকটি থেকে আলাদা এবং এদের প্রত্যেকটির সমাধান পদ্ধতিই ভিন্ন ভিন্ন ও স্বকীয়। তাই কম্বিনেটরিকস এর বিভিন্ন কলাকৈশল নিয়ে এর বিভিন্ন শাখা গড়ে উঠেছে। এসব শাখায় তেমন কোন সূত্র নেই; বরং এসব শাখা সমস্যা সমাধানে দক্ষ হওয়ার জন্য অনেক সমস্যার সমাধান করতে হবে এবং বিভিন্ন সমাধান থেকে ধারণা নিতে হবে। একারণে বিভিন্ন ধরনের কলাকৌশলের সমস্যার সমাধান এই অংশে উপস্থাপন করা হল। আরো সমস্যা সমাধান ও আরো কলাকৌশল শিখতে হলে, [1],[2],[3],[4] ইত্যাদি বিভিন্ন বই পড়া যেতে পারে। তবে, প্রচুর অনুশীলনের বিকল্প নেই।

১. n, 1এর চেয়ে বড় কোন বিজোড় পূর্ণসংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে, নিচের ধারাটিতে বেজোড় সংখ্যক বিজোড় সংখ্যা আছে।

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$$

প্রমাণ: $\frac{1}{2}\left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}}\right] = \frac{1}{2}(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1$ । যেহেতু ধারাটির যোগফল বেজোড়,সুতরাং এতে বেজাড় সংখ্যক বেজোড় সংখ্যা আছে।

২. 1 থেকে 999 পর্যন্ত সংখ্যাগুলো পাশাপাশি লিখে x=1234567891011…998999 সংখ্যাটি পাওয়া গেল।এর 1983তম অঙ্কটি কত?

সমাধান: এক অঙ্কের সংখ্যায় অঙ্ক আছে 9 টি; দুই অঙ্কের সংখ্যায় 2.90=180 টি। সুতরাং তিন অঙ্কের সংখ্যার বাকী 1983-189=1794 অঙ্ক পরের অঙ্কটি নির্ণয় করতে হবে। 1794 কে 3 দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল হয় 598 এবং ভাগশেষ 0; সুতরাং 598তম তিন অঙ্কের সংখ্যার শেষ অঙ্কই নির্ণেয় অঙ্ক এবং সংখ্যাটি হল 597 ও অঙ্কটি 7 (কারণ তিন অঙ্কের সংখ্যা 100 থেকে শুরু হয়)

৩. (বাংলাদেশ গণিত দল নির্বাচন পরীক্ষা)

A) Zwg **A** we›` (meev‡gi mewbg we›`) †_‡K **B** we›`‡Z (meWv‡bi m‡ev"P we›`) †h‡Z PvI |Zwg ïagvÎ Dc‡i ↑ I Wv‡b → †h‡Z cvi| KZfv‡e Zwg A †_‡K B we›`‡Z †h‡Z cvi‡e?

							B
A							

K-1 msL¨K ev·

n msL¨K ev·

সমাধান: লক্ষ্য করি, শেষ পর্যন্ত যেতে মোট n+k-1 বার উপরে বা নিচে যেতে হয়। সুতরাং আমরা যদি উপরে যাওয়াকে U লিখি এবং ডানে R যাওয়াকে লিখি তাহলে পথটা হবে অনেকটা এরকম UU…RR…UR। সুতরাং মিসিসিপি সূত্রানুসারে, মোট পদ্ধতি $\frac{n+k-1!}{n!(k-1)!} = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$

B) $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n$ mgxKiYwUi KZ¸wj AFYvZK cYmsL¨vi mgvavb (non-negative integer solution) Av‡Q?

এর সমাধানও $\binom{n+k-1}{k-1}$। (পাঠকদের কারণটা বাক্সের মধ্যে বলের নীতি ব্যবহার করে বের করতে হবে!)

৪. 25 জন ছেলে এবং 25 জন মেয়ে একটি গোলটেবিলে পাশাপাশি বসে আছে।প্রমাণ কর যে, সবসময় অন্তত এমন একজনকে (ছেলে বা মেয়ে) পাওয়া যাবে যার দুইপাশের দুইজনই মেয়ে।

সমাধান: বৈপরিত্য দেখানোর জন্য আমরা মনে করি যে, এমন বিন্যাস সম্ভব। আমরা ব্লক বলবো সেসব মেয়ে (বা ছেলের) গ্রুপকে যারা পাশাপাশি বসে আছে এবং তাদের দুইপাশে ছেলে (বা মেয়ে) আছে। তাহলে প্রত্যেক মেয়েদের ব্লকে সর্বোচ্চ 2 জন মেয়ে আছে এবং পরপর দুটি মেয়েদের ব্লকের মাঝে অন্তত দুইজন ছেলের ব্লক আছে। তাহলে,মেয়েদের পাশাপাশি বসা ব্লক আছে অন্তত $\left\lceil \frac{25}{2} \right\rceil = 13$ টি; ফলে তাদের মাঝে বসা ছেলের সংখ্যা অন্তত 26 জন। কিন্তু আমাদের ছেলের সংখ্যা 25 জন। ফলে এরকম একজনকে অবশ্যই পাওয়া যাবে যার দুইপাশে মেয়ে।

<u>৭.১ অপরিবর্তনের নীতি (The Invariance Principle):</u> এক্ষেত্রে সমস্যা সমাধানের সময়, যদি দেখা যায় যে,সমস্যার কোন একটি উপাদানের মান অপরিবর্তিত থাকছে, তাহলে সেই অপরিবর্তনটি ব্যবহার করে সমস্যার সমাধান করা হয়। এক্ষেত্রে সমাধানকারীকে খুঁজে বের করতে হবে সমস্যাটির কোন অংশটি অপরিবর্তিত থাকছে।

সমস্যা:

১. মনে করি, কোন একটি বোর্ডে 1,2,...,2n সংখ্যাগুলো লেখা আছে। এখন প্রতিবার এদের থেকে যেকোন দুটি সংখ্যা a,b বাছাই করা হয় এবং তাদের মুছে তাদের পরিবর্তে |a-b| লেখা হয়। প্রমাণ কর যে, সবশেষে বোর্ডে একটি বেজোড় সংখ্যা থাকবে।

সমাধান: মনে করি,বোর্ডের সকল সংখ্যার যোগফল S। শুরুতে $S = 1 + 2+ \ldots +2n = n(2n + 1)$; যা একটি বেজোড় সংখ্যা। প্রতিধাপে S এর মান $2\min(a, b)$ হ্রাস পায়। ফলে, S এর Parity অপরিবর্তিত থাকে (জোড় বেজোড় সম্পর্ককে বলে Parity; Parityঅপরির্তিত থাকার অর্থ হল জোড় থাকলে জোড় ও বেজোড় থাকলে বেজোড় থাকা।)

ফলে, সবশেষে $S \equiv 1 \bmod 2$। ($x \equiv y \bmod z$ এর অর্থ হল x কে z দ্বারা ভাগ করলে y অবশিষ্ট থাকে।)কিন্তু সবশেষে S হল সর্বশেষ সংখ্যা। সুতরাং সংখ্যাটি বেজোড়।

২. মনে করি, $a_1, \ldots, a_n$ সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটি হয় 1 না হয় -1, এবং $S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0$ প্রমাণ কর যে, $n \equiv 0 \bmod 4$

সমাধান: যেকোন a_i কে $-a_i$দ্বারা পরিবর্তন করলে mod 4 এ S এর পরিবর্তন হয় না। অর্থাৎ, S সবসময় 4 দ্বারা বিভাজ্য থাকবে এবং চিহ্ন অনুসারে S এর পরিবর্তন হবে ± 4 বা ± 8। শুরুতে $S = 0 \Rightarrow S \equiv 0 \bmod 4$। এখন আমরা প্রত্যেক ঋণাত্মক চিহ্নকে ধনাত্মক চিহ্নে পরিবর্তন করি। তাহলে,সবশেষে $S = n$ । কিন্তু সবসময়ই $S \equiv 0 \bmod 4$। ফলে, $n \equiv 0 \bmod 4$।

৩. সিকিনিয়ার আইনসভায় প্রত্যেক সদস্যের সর্বোচ্চ 3 জন করে শত্রুআছে। প্রমাণ কর যে,আইনসভাকে এমন দুই কক্ষে বিভক্ত করা যাবে যাতে করে সেই কক্ষে প্রত্যেক সদস্যের সর্বোচ্চ 1 জন শত্রুথাকবে।

সমাধান: প্রথমে সদস্যদের যেকোনভাবে দুইটি কক্ষে ভাগ করি। মনে করি হল প্রত্যেক কক্ষে প্রত্যেক সদস্যের মোট শত্রুর সংখ্যার যোগফল H। মনে করি, কোন সদস্য, A এর তার নিজ কক্ষে অন্তত দুইজন শত্রুআছে। তাহলে অন্য কক্ষে তার সর্বোচ্চ একজন শত্রুআছে। তাহলে,A কে অন্য কক্ষে সরিয়ে নিলে H এর মান কমে। কিন্তু এই মানের হ্রাস পাওয়া একসময় সর্বনিম্ন হবে। তখনই আমাদের উদ্দিষ্ট বন্টন সম্পন্ন হবে।

৪.1,2,...,2n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং 1,2,..,2n এদেরকে চিহ্নিত বাক্সে যেকোন বিন্যাসে ফেলা হল এবং এদের প্রত্যেকটি সংখ্যার সাথে সেই বাক্সের ক্রম সংখ্যা যোগ করা হল। প্রমাণ কর যে,যেকোন দুটি সংখ্যাকে 2n দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ একই হবে বা, mod 4 একই হবে।

সমাধান: আমরা বৈপরিত্যে প্রমাণ করব। মনে করি,সকল ভাগশেষ (0,1,2,...,2n-1) পাওয়া যায়; অর্থাৎ,সকল সংখ্যার ভাগশেষ ভিন্ন। তাহলে,সকল সংখ্যা এবং তাদের বাক্সের ক্রম সংখ্যার যোগফল,

$$S_1 = 2(1 + 2 + \cdots + 2n) = 2n(2n + 1) \equiv 0 \bmod 2n$$

কিন্তু, সকল ভাগশেষের যোগফল,

$S_2 = 0 + 1 + 2 + \cdots + 2n - 1 = n(2n - 1) \equiv n \bmod 2n$ । ফলে, বৈপরিত্য পাওয়া গেল।

৭.২ গরিষ্ঠতার নীতি (The Extremal Principle): এক্ষেত্রে কোন সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে সমস্যাটিতে দেওয়া বিভিন্ন তথ্য হতে সবচেয়ে ছোট বা সবচেয়ে বড় উপাদান ধরে নওয়া হয় এবং সেই উপাদানের চেয়ে ছেট বা বড় আর কোন উপাদান থাকতে পারে কি না তা নির্ণয় করে সমস্যাটি সমাধান করা হয়। এক্ষেত্রে অনেকসময় বৈপরিত্যের সাহায্যেও সমাধান করা হয়।

এক্ষেত্রে কিছু সাধারণ ধারণা ব্যবহার করা হয়:

১)অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা বাস্তব সংখ্রার প্রত্যেক সসীম অশূন্য সেটের অন্তত একটি সর্বনিম্ন উপাদান এবং অন্তত একটি সর্বোচ্চ উপাদান আছে।

২)ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার প্রত্যেক উপসেটের একটি এবং কেবল একটি সর্বনিম্ন উপাদান আছে। (একে Well Ordering Principle বলা হয় এবং এটির দ্বারা গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিকে প্রতিপাদন করা যায়)

সমস্যা:

১. কোন ছককাগজের প্রতিটি পূর্ণসংখ্যার স্থানাঙ্কবিন্দু কোন একটি ধনাত্মক সংখ্যা দ্বারা চিহ্নিত (লেবেল) করা আছে। প্রতিটি সংখ্যা তার চারপাশের বিন্দুগুলো যে সংখ্যা দ্বারা চিহ্নিত তাদের গাণিতিক গড়ের সমান। প্রমাণ কর যে, সকল সংখ্যাগুলো সমান। (যেগুলো দিয়ে চিহ্নিত করা হয়েছে)

সমাধান: মনে করি,সবচেয়ে ছোট লেবেলের মান m।এর চারপাশের বিন্দুগুলোর লেবেল a,b,c,d।

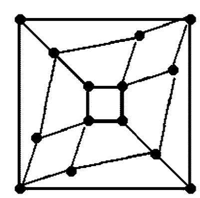
তাহলে, $m = \frac{a+b+c+d}{4} \Leftrightarrow a + b + c + d = 4m$। এখন, $a \geq m, b \geq m, c \geq m, d \geq m$। কোন একটি অসমতার সমতা না হলে $a + b + c + d > 4m$।ফলে,তা হবে বৈপরিত্য। সুতরাং, $a = b = c = d = m$ । ফলে, সব লেবেলেই সমান। [প্রমাণিত]

২. এমন কোন সমাধান (x, y, z, u) নেই যা, $x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।
সমাধান:মনে করি, এমন সমাধানের মধ্য সবচেয়ে ছোট হয় (a, b, c, d) এর জন্য। তাহলে, (a|b অর্থ b,a দ্বারা বিভাজ্য)
$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2) \Rightarrow 3|a^2 + b^2 \Rightarrow 3|a, 3|b \Rightarrow a = 3a_1, b = 3b_1$
$\therefore a^2 + b^2 = 9(a_1^2 + b_1^2) = 3(c^2 + d^2) \Leftrightarrow c^2 + d^2 = 3(a_1^2 + b_1^2)$
তাহলে,সমীকরণটির নতুন সমাধান (c, d, a_1, b_1) পাওয়া গেল যার জন্য $c^2 + d^2 < a^2 + b^2$ । অর্থাৎ, আরেকটি নতুন সমাধান পাওয়া গেল যার জন্য $x^2 + y^2$ আরও ছোট। সুতরাং, আমরা বৈপরিত্য পেয়ে গেছি। (এই ধারনাটিকে ব্যবহার করে সংখ্যাতত্ত্বের Infinite Descent কৌশলের জন্ম হয়েছে।)

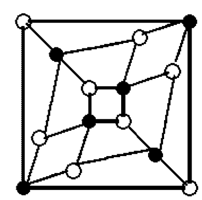
৩. প্রমাণ কর যে, প্রত্যেক উত্তল পঞ্চভুজে আমরা এমন তিনটি কর্ণ নির্বাচন করতে পারি যাতে ঐ তিনটি কর্ণ ত্রিভূজ গঠন করে।
সমাধান:মনে করি, ABCDE পঞ্চভুজের সবচেয়ে বড় কর্ণ BE। ত্রিভূজের অসমতা হতে পাই, BD+CE >BE+CD>BE (অসমতাটি প্রমাণের জন্য ধরি BD,CE বাহু X বিন্দুতে ছেদ করে; এবার BD+CE= BX+XE+XD+XC লিখে প্রতি দুইটি অংশে ত্রিভূজের অসমতা প্রযোগ করি)। তাহলে, BE,BD,CE কর্ণ দ্বারা ত্রিভূজ গঠন সম্ভব।

<u>৭.৩ রঙিন প্রমাণ(!) (Coloring Proofs):</u> এই ধরণের সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে বিভিন্ন রং ব্যাবহার করা হয়! সমস্যাগুলোতে সমস্যার প্রদত্ত অংশকে কোন একটি চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করে তার বিভিন্ন অংশকে এমন সুবিধাজনকভাবে রং করা হয় যাতে প্রদত্ত সমস্যাটির সঠিকতা বৈপরিত্যের (Contradiction) সাহায্যে বা কোন একটি Algorithm বের করে যাচাই করা হয়।

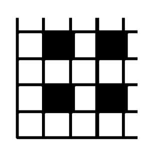
<u>সমস্যা ও সমাধান:</u>
১. n>4 হলে প্রমাণ কর যে, কোন তলে n টি বিন্দুকে এমনভাবে দুটি রং দুটি রং করা যাবে যাতে করে কোন সরলরেখা দ্বারা দুটি রংয়ের বিন্দুগুলোর একটি রংয়ের সব বিন্দুকে আরেকটি রংয়ের সব বিন্দু হতে সম্পূর্ণ আলাদা করা যায়।
সমাধান: n>4 হলে সবসময় বিন্দু গুলো হতে কোন বহুভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু বের করা যায়।এখন,দুটি বিপরীত শীর্ষবিন্দুকে একই রং করা হলে কোন সরলরেখা টেনে সব বিন্দুগুলোকে আলাদা করা যাবে না।



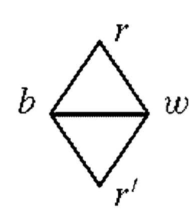
২. পাশের চিত্রে ১৪ টি শহরের রাস্তার ম্যাপ দেখানো হল। এমন কোন পথ কি আছে যা প্রত্যেক শহরকে একবার করে স্পর্শ করে?
সমাধান: পাশের চিত্রের মত করে শহরগুলোকে এমনভাবে সাদা (w) ও কালো (b) রং দিয়ে রং করি যাতে করে প্রত্যেকটি শহরের প্রতিবেশী শহরগুলোর রং ভিন্ন হয়। তাহলে কোন একটি শহর হতে পাশের শহরে যাবার রংয়ের বিন্যাস হবে wbwbwbwbwbwbwb বা bwbwbwbwbwbwbw। অর্থাৎ, সেক্ষেত্রে 7টি কালো এবং 7টি সাদা শহরের উপর দিয়ে যেতে হবে। কিন্তু পাশের চিত্রে 8টি সাদা শহর এবং 6টি কালো শহর আছে। তাই উদ্দিষ্ট পথ পাওয়া সম্ভব নয়।



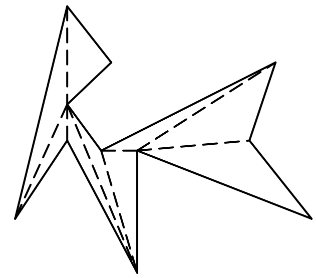
৩. কোন একটি আয়তকার ঘরের মেঝে 2×2 এবং 4×1 টাইলস দিয়ে আবৃত। কোন এক ধরণের টাইলস এর একটি নষ্ট হয়ে গেল। কিন্তু আরেকটি অন্য ধরণের টাইলস আছে। প্রমাণ কর যে, টাইলস গুলোকে পুনর্বিন্যাস করে ঘরটির মেঝেকে সম্পূর্ণভাবে ঢাকা যাবে না।
সমাধান: মেঝেটিকে পাশের চিত্রের মত করে রং করি। চিত্রটি হতে দেখা যাচ্ছে যে, 4×1 টাইলস সবসময় 0 বা 2 টি কাল রংয়ের ঘরকে ঢাকতে পারে। কিন্তু একটি 2×2 টাইলস সবসময় 1 টি কাল রংয়ের ঘরকে ঢাকতে পারে।ফলে,কোন একধরণের টাইলস নষ্ট হলে অন্যটি দ্বারা মেঝে ঢাকা সম্ভব নয়।



৪. একটি তলের সকল বিন্দুকে তিনটি ভিন্ন রং দিয়ে রং করা হল। প্রমাণ কর যে, এমন দুটি একই রংয়ের বিন্দু পাওয়া যাবে যাদের মধ্যকার দূরত্ব 1 একক।
সমাধান: মনে করি, রংগুলো হল লাল (r),কাল (b) এবং সাদা (w)।তাহলে পাশের চিত্রের মত একটি রম্বস কল্পনা করি। বিন্দু হতে 1 একক দূরত্বে বিন্দু b আছে; আবার, b হতে 1 একক দূরত্বে w বিন্দু আছে। আবার উভয় বিন্দু হতে 1 একক দূরত্বে আরকটি লাল রংয়ের বিন্দু r' থাকবে। r বিন্দুকে কেন্দ্র করে এমন একটি ঘূর্নন কল্পনা করি যাতে



একইভাবে আরেকটি লাল রংয়ের বিন্দু r”পাওয়া যায় যার দূরত্ব r’ হতে 1 একক।



৫. আর্ট গ্যালারীর সমস্যা: কোন আর্ট গ্যালারীর আকার একটি n ভুজের মত হলে সবচেয়ে কম কতজন প্রহরী রাখলে তাদের পক্ষে সম্পূর্ণ গ্যালারী একসাথে পাহারা দেওয়া সম্ভব হবে? (আর্ট গ্যালারী একটি বর্গ বা আয়তের মত হলে একজন প্রহরীতেই চলত, কিন্তু আর্ট গ্যালারীর আকার যদি নিচের মত অদ্ভুত হয় তাহলে ব্যাপারটা এত সহজ নয়। এই সমস্যাটি অত্যন্ত পুরানো এবং বিখ্যাত একটি সমস্যা)

সংক্ষিপ্ত সমাধান: গ্যালারীটিকে ভুজের কর্ণ টেনে এমনভাবে ত্রিভূজক্ষেত্রে ভাগ করা হল, যাতে করে কোন কর্ণ কোন কর্ণকে ছেদ না করে। (এরকম ভাগ করাকে Triangulation বলে)। সহজেই গাণিতিক আরোহ দ্বারা প্রমাণ করা যায় যে, এরকম ভাগ করা সবসময় সম্ভব। এবার আমরা প্রত্যেকটি ত্রিভূজ্রর শীর্ষবিন্দুকে এমনভাবে তিনটি রং দ্বারা রং করব যাতে করে প্রত্যেক ত্রিভূজের তিনটি শীর্ষবিন্দু তিনটি ভিন্ন রংয়ে রং করা যায় (এটিও অত্যন্ত সহজ আরোহ দ্বারা প্রমাণ করা যায়।)। মনে করি, তিনটি রংয়ের মধ্যে লাল রংয়ের শীর্ষবিন্দু সবচেয়ে কম। তাহলে লাল রংয়ের শীর্ষবিন্দুগুলোতে প্রহরী বসালেই তাদের পক্ষে সম্পূর্ণ গ্যালারী পাহারা দেওয়া সম্ভব হবে। অর্থাৎ, প্রহরীর সংখ্যা কমপক্ষে $\lfloor n/3 \rfloor$।

কম্বিনেটরিক্স শেখার জন্য আরও যেসব বই পড়া যেতে পারে:

[1] The Art and Craft if Problem Solving, *Paul Zeitz*
[2] Problem Solving Strategies, *Arthur Engel*
[3] A Path to Combinatorics for Undergraduates, *Titu Andreescu, Zooming Feng*
[4] 102 Combinatorial Problems, *Titu Andreescu, Zooming Feng*
[5] ১১-১২’শ শ্রেণীর পাঠ্যবই।

লেখক:
তারিক আদনান মুন
সদস্য, বাংলাদেশ জাতীয় গণিত দল,
আন্তর্জাতিক গণিত অলিম্পিয়াড, ২০০৭, ২০০৮।

১১ ডিসেম্বর ২০০৮

***এই প্রবন্ধের কিছু অংশ *দৈনিক প্রথম আলো*’র *গণিত ইশকুল* বিভাগে প্রকাশিত।

If you find any error in this note or if you have any question to ask please contact:
moon.math@matholympiad.org.bd