

## পিজিওন হোল প্রিন্সিপাল। (Pigeon Hole Principle)

একটা অদ্ভুত সমস্যা দিয়ে শুরু করা যাক -

প্রমাণ কর যে, ঢাকা শহরে অন্তত দুইজন মানুষের মাথায় সমান সংখ্যক চুল আছে (!)

এই সমস্যাটির সমাধান করতে গেলে তোমাদেরকে জানতে হবে -

পিজিওন হোল প্রিন্সিপাল (PHP):

পিজিওন হোল প্রিন্সিপাল বলে যে, যদি  $n + 1$  সংখ্যক পায়রা,  $n$  সংখ্যক খোপের মধ্যে থাকতে চায় তবে অন্তত একটি খোপে একাধিক পায়রা থাকবে। আরেকটু সাধারণভাবে বলা যায়  $n$  সংখ্যক খোপের মধ্যে,  $mn$  এর চেয়ে বেশি সংখ্যক পায়রা থাকতে চাইলে অন্তত একটি খোপে  $m + 1$  বা তারচেয়ে বেশি পায়রা থাকবে। তোমাদের অনেকের কাছেই এটি হাস্যকর ও অপ্রয়োজনীয় মনে হলেও PHP ব্যবহার করে অনেক গাণিতিক সমস্যা খুব সহজেই সমাধান করা যায়। আগে চলো উপরের সমস্যাটি এখন সমাধান করি।

একজন মানুষের মাথায় প্রায় 150000 চুল থাকে। আমরা একটু বেশি ধরি। ধরা যাক একজনের মাথায় সর্বোচ্চ 1000000 চুল থাকা সম্ভব। আর ঢাকা শহরে মানুষের সংখ্যা এর চেয়ে অনেক বেশি। এখন চুলকে যদি পায়রার খোপ আর মানুষের মাথাকে যদি পায়রা ধরি তবে PHP অনুসারে অবশ্যই একটা নির্দিষ্ট সংখ্যার চুল একাধিক মাথায় থাকবে!

এখন কিছু সমস্যা দেওয়া হলো, সমাধানের চেষ্টা কর:

১) যেকোন তিনটি পূর্ণসংখ্যার যোগফল 19 হলে দেখাও যে, অন্তত একটি সংখ্যা 7 বা তার চেয়ে বড়।

২) প্রমাণ কর যে, যেকোন 101 টা সংখ্যার মধ্যে দুইটি সংখ্যা পাওয়া যাবেই যাদের পার্থক্য 100 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য।

৩) 1 থেকে 10 পর্যন্ত সংখ্যাগুলো ইচ্ছামত ক্রমে (random order) বৃত্তাকারভাবে সাজানো হলো। দেখাও যে, তাদের মধ্যে পরপর তিনটি সংখ্যা আছে যাদের সমষ্টি 17 বা তার চেয়ে বড়।

৪) 1 একক বাহুর দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজের উপরে যেকোন 5 টা বিন্দু নিলে তাদের মধ্যে অন্তত 2 টি বিন্দুর মধ্যে সর্বোচ্চ দূরত্ব  $\frac{1}{2}$  একক।

৫) একজন ছাত্র প্রতিদিন অন্তত একটি গাণিতিক সমস্যা সমাধান করে। আবার কোন সপ্তাহেই (শনি-শুক্র) সে 12 টির বেশি সমস্যা সমাধান করে না। প্রমাণ করতে হবে যে, এক বছরের মধ্যে পরপর কয়েকদিনে সে 20 টি সমস্যার সমাধান করে।

এবারে তাদের সমাধান নিয়ে আলোচনা করা যাক। তবে প্রতিটি সমস্যার সমাধান হুট করে না দেখে আগে নিজে নিজে চেষ্টা করা উচিত (বিশেষজ্ঞ পরামর্শ!)

১) তিনটি সংখ্যাকে যদি তিনটি পায়রার বাক্স ধরি তবে PHP অনুসারে একটি বাক্সে  $6 + 1 = 7$  বা তারচেয়ে বেশি পায়রা থাকবে (অর্থাৎ অন্তত একটি সংখ্যা 7 বা তার চেয়ে বড়)।

২) একটি সংখ্যাকে 100 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে 0, 1, 2, ..., 98, 99 এই 100 টি সংখ্যার যেকোন একটি। PHP অনুসারে যেহেতু 101 টি সংখ্যাকে ভাগ করতে হবে আর ভাগশেষ সম্ভব 100 রকম তাহলে অন্তত দুইটি সংখ্যা পাওয়া যাবে যাদেরকে 100 দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকবে। তাহলে ঐ দুটি সংখ্যার

বিয়োগফলের ভাগশেষ 0 অর্থাৎ বিয়োগফলটি 100 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য।

৩) সংখ্যাগুলোকে সাজানোর ক্রমানুসারে নামকরণ করা যাক  $a, b, \dots, j$ । এখন তিনটি করে সাজালে যে দশটি ত্রয়ী পাওয়া যাবে সেগুলো হচ্ছে:  $(a, b, c), (b, c, d), \dots, (i, j, a), (j, a, b)$ । তাদের যোগফলগুলো হচ্ছে যথাক্রমে  $a+b+c, b+c+d, \dots, i+j+a, j+a+b$ । এবারে এই দশটি সংখ্যার যোগফল হবে,  
 $a+b+c+b+c+a+\dots+i+j+a+j+a+b = 3(a+b+\dots+j)$ । এখন  $a, b, c, \dots, j$  এর পরিবর্তে  $1, 2, 3, \dots, 10$  বসালে যোগফল হবে,  $3X(1+2+\dots+10) = 165$ । এখন যেকোন একটি ত্রয়ীর যোগফল 17 (বা তারচেয়ে বেশি) দেখানোর জন্য PHP এর সাহায্য নেয়া যায়। লক্ষ্য কর যে এখন পায়রা 165 টা আর খোপ 10 টা।  
অতএব, PHP অনুযায়ী... ।

৪) ত্রিভুজটিকে চারটি সমবাহু ত্রিভুজে ভাগ কর (প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য হবে  $1/2$  একক)। এখন চারটি ঘরে পাঁচটি বিন্দু রাখতে হবে। অতএব ... ।

৫) ধরা যাক বছরের ১ম দিন থেকে শুরু করে  $n$  তম দিন পর্যন্ত সে  $p(n)$  সংখ্যক সমস্যা সমাধান করে।  $p(n)$  এর প্রত্যেকটা মান আলাদা হবে কারণ প্রতিদিন সে অন্তত একটা সমস্যার সমাধান করে  $(p(n+1) > p(n))$ । ধরি  $q(n) = p(n)+20$ । আর  $q(n)$  এর প্রত্যেকটা মানও আলাদা। এখন আমরা জানি একটানা 11 সপ্তাহে সে  $12 \times 11 = 132$  টার বেশি সমস্যার সমাধান করবে না। তাহলে  $p(n)$  এর মানগুলো হবে 1 থেকে 132 এর মধ্যে আর  $q(n)$  এর মানগুলো হবে 21 থেকে 152 এর মধ্যে। কিন্তু 11 সপ্তাহে 77 দিন। তাই  $p(1), p(2), \dots, p(77)$  এবং  $q(1), q(2), \dots, q(77)$  মিলে 154 টি সংখ্যা হয় যার প্রতিটির মান 1 থেকে 152 এর মধ্যে। এখন PHP অনুসারে, অন্তত দুইটা সংখ্যার মান সমান হবে। আবার যেহেতু  $p(n)$  এর প্রতিটি মান আলাদা এবং  $q(n)$  এর প্রতিটি মান আলাদা সেহেতু দুইটা সংখ্যার একটা  $p(i)$  হলে আরেকটা হবে  $q(j)$ ।  $p(i) = q(j) = p(j) + 20$  ( $1 \leq i < j \leq 77$ )। অর্থাৎ,  $j$  তম দিন থেকে  $i$  তম দিন পর্যন্ত সে 20 টা সমস্যা সমাধান করে।

এবারে তোমাদের অনুশীলনের জন্য আরো কিছু সমস্যা দেয়া হলো:

৬) 1 থেকে 100 পর্যন্ত সংখ্যাগুলো থেকে যেকোন 51 টি সংখ্যা বাছাই করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে এদের মধ্যে দুইটি সংখ্যা আছে যাদের কোন সাধারণ মৌলিক উৎপাদক নেই।

৭) দেখাও যে, যেকোন ছয়জন মানুষের মধ্যে তিনজন একে অপরকে চিনে অথবা তিনজন কেউ কাউকে চিনে না।

৮) দেখাও যে, যেকোন 17 টি স্বাভাবিক সংখ্যা থেকে 5 টা নির্বাচন করা সম্ভব যাতে তাদের যোগফল 5 দ্বারা বিভাজ্য হয়।

তামিম শাহরিয়ার সুবিন।

June 21, 2k6.