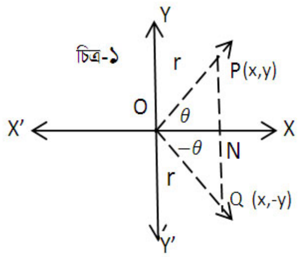
wÎ‡KvYwgwZi wØZxq cvV: wÎ‡KvYwgwZi msh³ I †hŠwMK †KvY

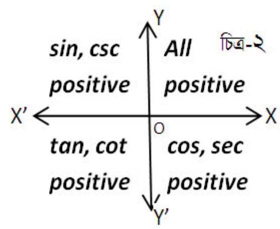
-তারিক আদনান মুন

<u>wÎ‡KvYwgwZ‡Z †KvY:</u>†Kvb NYvqgvb iwk¥ Aw` Ae¯'vb n‡Z Nwoi KvUvi wecixZ w`‡K †Kv‡Y Ni‡j Zv abvZK †KvY Ges Nwoi KvUvi wecixZ w`‡K Ni‡j FYvZK †KvY Drcb K‡i|

<u>$-\theta$ †Kv‡Yi wÎ‡KvYwgwZK AbcvZ:</u> $0° < \theta < 90°$ (চিত্র ১)

আমরা এক্ষেত্রে স্থানাঙ্ক পদ্ধতি ব্যবহার করব।r বাহুর যেকোন বিন্দু P হতে PN লম্ব আঁকি।মনে করি,P বিন্দুর স্থানাঙ্ক(x, y)ফলে,ON=x, আবার OX ঘড়ির কাঁটার দিকে $\theta°$ ঘুরে $-\theta$ কোণ উৎপন্ন করল,যা ON বাহুর বর্ধিতাংশকে Qবিন্দুতে ছেদ করে।$\Delta OPN \cong \Delta OQN$(দুইকোণ ও একবাহু সমান)ফলে, Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x,-y)।





$$\sin -\theta = -\frac{y}{r} = -\sin\theta\,;\ \cos -\theta = \frac{x}{r} = \cos\theta\,;$$

$\tan -\theta = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$ একইভাবে, $\csc -\theta = -\csc\theta\,;$

$$\sec -\theta = \sec\theta\,;\ \cot -\theta = -\cot\theta$$

<u>$(n \times 90° \pm \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:</u>

(১)যে কোণটি দেওয়া থাকবে তাকে $90°$ এর গুণিতক আকারে প্রকাশ করতে হবে।একার কোণটি কোন চতুর্ভাগে তা নির্ণয় করতে হবে।(উপরে ২ নং চিত্রে কোন চতুর্ভাগে কোন অনুপাত ধনাত্মক তা দেওয়া হল।প্রথম চতুর্ভাগে সকল অনুপাত,২য় চতুর্ভাগে sin,csc;৩য় চতুর্ভাগে tan,cot; ৪র্থ চতুর্ভাগে cos,sec ধনাত্মক)

(২)এখন, n যদি জোড় হয় তবে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এর ধরণ অপরিবর্তিত থাকবে।কিন্তু যদি বিজোড় হয় তবে,sin,sec,tan যথাক্রমে cos,csc,cot এ পরিবর্তিত হবে।একইভাবে, cos,csc,cot যথাক্রমে sin,sec,tan এ পরিবর্তিত হবে।

যেমন:$\sin 120 = (1 \times 90 + 30) = \cos 30\,;$

$\tan 1230 = 13 \times 90 + 60 = -\cot 60\,;$

$\cos -120 = \cos 120 = (1 \times 90 + 30) = -\sin 30$

এবার আমরা ত্রিকোণমিতির যৌগিক কোণ নিয়ে আলোচনা করব।ত্রিকোণমিতিক কোণের অনুপাত বন্টন বিধি সমর্থন করে না।

অর্থাৎ,$\sin(\alpha + \beta) \neq \sin\alpha + \cos\beta$ বরং,

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \ \pm \cos\alpha\sin\beta$

প্রমাণ: নিচের চিত্রে, DEF সমকোণী ত্রিভূজ যা ABCD আয়তক্ষেত্রে অন্তর্লিখিত এবং $\angle DEF = 90°; \angle DFE = \beta, \angle ADE = \alpha$ ফলে, $\angle DFC = \alpha + \beta, \angle BEF = \alpha$ ।

আমরা ধরে নেই যে, $DF = 1$।

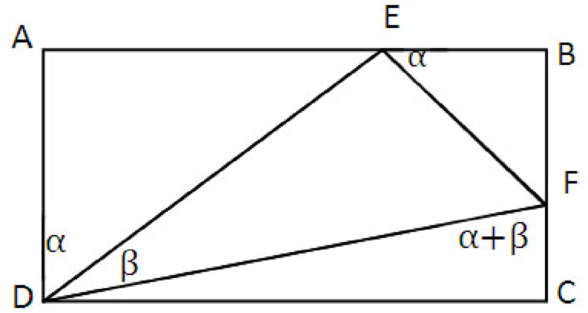
এখন, $DE = DF.\cos\beta = \cos\beta\,;$

$EF = DF.\sin\beta = \sin\beta$

ΔADE তে, $AD = DE.\cos\alpha = \cos\alpha.\cos\beta\,;$

$$AE = DE.\sin\alpha = \sin\alpha.\cos\beta$$

ΔBEF তে, $BE = EF.\cos\alpha = \cos\alpha.\sin\beta\,;$



$BF = EF.\sin\alpha = \sin\alpha.\sin\beta$

ΔCDF তে,$\angle DFC = \alpha + \beta;$

$\Rightarrow CD = DF.\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta);$

$CF = DF.\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta)$

এখন,

$\sin(\alpha + \beta) = CD = AE + EB = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$

$$\cos(\alpha + \beta) = CF = BC - BF = AD - BF$$
$$= \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$$

এবং, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta}$

একইভাবে, βএর স্থলে,-β বসিয়ে পাওয়া যায়,

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$

এবং, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha.\tan\beta}$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{cot\ \alpha\ cot\ \mp 1}{cot\ \alpha \pm cot\ \beta} = \frac{1}{\tan(\alpha \pm \beta)}$$

একইভাবে,অন্যান্য অনুপাতগুলোর জন্যও যোগ ও বিয়োগের সূত্র বের করা যায়।

এছাড়া আরো কিছু সূত্র আছে যা উপরের সাইন ও কসের যোগের সূত্র ব্যবহার করে সহজেই প্রতিপাদন করা যায়।এসব সূত্র নিচে দেওয়া হল;পাঠকদের নিজেদেরই প্রমাণ করে নিতে হবে।এসব সূত্র বিভিন্ন জ্যামিতিক সমস্যা সমাধানে অত্যন্ত কার্যকর।

<u>গুণিতক কোণ:</u>

$$1. \sin 2a = 2\sin a\cos a = \frac{2\tan a}{1 + \tan^2 a}$$

$$2. \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$$

$$3. \tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}; \qquad 4. \cot 2a = \frac{\cot^2 a}{2\cot a}$$

$5. \sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a;$

$6. \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

$$7. \tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

সাহায্য: যোগের সূত্র ব্যবহার কর।

অর্ধকোণ কোণের সূত্র (Half Angle Formulas):

$8. \sin^2\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{2}$; $9. \cos^2\frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{2}$

$$10. \tan\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{\sin a} = \frac{\sin a}{1+\cos a};$$

$$11. \cot\frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{\sin a} = \frac{\sin a}{1-\cos a}$$

সাহায্য:গুণিতক কোণের সূত্রে $2A = a$ বসাও।

যোগ থেকে গুণ সূত্র(Sum to product Formulas):

$$12. \sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$13. \cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$14. \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$$

সাহায্য:$a = \frac{A+B}{2}$; $b = \frac{A-B}{2}$ বসিয়ে যোগ ও বিয়োগের সূত্র ব্যবহার করে প্রাপ্ত দুইটি সমীকরণ যোগ কর।

বিয়োগ হতে গুণ সূত্র:(Difference to Product Formulas):

$$15. \sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

$$16. \cos a - \cos b = -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$$

$$17. \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}$$

সাহায্য: $a = \frac{A+B}{2}$; $b = \frac{A-B}{2}$ বসিয়ে যোগ ও বিয়োগের সূত্র ব্যবহার করে প্রাপ্ত দুইটি সমীকরণ বিয়োগ কর।

গুণ হতে যোগ সূত্র:(Product to sum Formulas)

$$18. 2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \cos(a-b)$$

$$19. 2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

$$20. 2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

সাহায্য:যোগ হতে ও বিয়োগ হতে গুণের সূত্রের ডানপক্ষে $\frac{A+B}{2} = a$, $\frac{A-B}{2} = b$ বসাও।

এবার কিছু সমস্যার সমাধান করা যাক:

১.প্রমাণ কর যে,$1 - \cot 23° = \frac{2}{1-\cot 22°}$

আমরা প্রমাণ করব,$(1-\cot 23°)(1-\cot 22°) = 2$

$$\frac{\cot 22°\cot 23° - 1}{\cot 22° + \cot 23°} = \cot(23° + 22°) = \cot 45° = 1$$

$$\Leftrightarrow \cot 22°\cot 23° - 1 = \cot 22° + \cot 23°$$

$$\Leftrightarrow \cot 22°\cot 23° + 1 - \cot 22° - \cot 23° = 2$$
$$= (1-\cot 23°)(1-\cot 22°)$$

২.কোন ত্রিভূজ ABC এ,

$3\sin A + 4\cos B = 6$ ও $4\sin B + 3\cos A = 1$ হলে, $\angle C = ?$

উভয় সমীকরণকে বর্গ করে যোগ করে পাই,

$$24(\sin A\cos B + \cos A\sin B = 12$$

$$\Leftrightarrow \sin(A+B) = \frac{1}{2}$$

আবার,$C = 180 - A - B \Rightarrow \sin C = \sin(A+B) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow C = 30°$ or $150°$কিন্তু, $C = 150°$ সম্ভব নয়।

তাই, $C = 30°$।

৩.প্রমাণ কর যে,$(4\cos^2 9° - 3)(4\cos^2 27° - 3) = \tan 9°$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 a - 3 = \frac{\cos 3a}{\cos a}$$

যেখানে,$(a \neq (2k+1).90°, k \in \mathbb{Z})$

ফলে,

$$(4\cos^2 9° - 3)(4\cos^2 27° - 3) = \frac{\cos 27°}{\cos 9°}.\frac{\cos 81°}{\cos\cos 27°} = \frac{\cos 81°}{\cos 9°} = \frac{\sin 9°}{\cos 9°} = \tan 9°$$

Kushtia Math Circle

KMC

We love Mathematics

wÎ‡KvYwgwZi ZZxq cvV: wÎ‡KvYwgwZ n‡Z R¨wgwZ

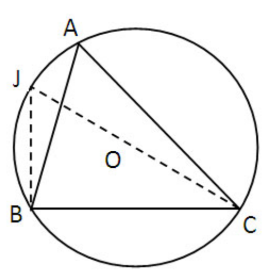
-তারিক আদনান মুন

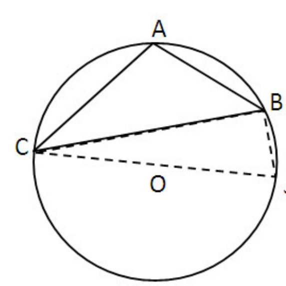
mvBb I K‡mi eyaZ mÎ R¨wgwZ‡Z AZ¨š— KvhKi `ÖwU mÎ|AvR‡K Avgiv GB mÎ, Zv‡`i cgvY I Zv‡`i gva¨‡g wewfb mgm¨vi mgvavb Kie|

<u>mvB‡bi eyaZ mÎ(The Extended law of Sine):</u>

‡h †Kvb wÎfR ABC এ, $\frac{a}{Sin\ A} = \frac{b}{Sin\ B} = \frac{c}{Sin\ C} = 2R$ †hLv‡b, $AB = c, BC = a, CA = b,$ R cwie‡Ëi e¨vmva|

C বিন্দু দিয়ে ব্যাস COJ আঁকি এবং B,J যোগ করি।$\angle JBC = 90°$ ফলে, $\sin\angle BJC = \frac{BC}{JC} = \frac{a}{2R}$ আবার, $\angle A = \angle BJC$ বা $180 - \angle BJC$

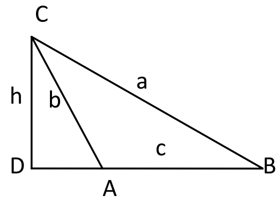


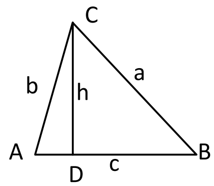


ফলে, উভয় ক্ষেত্রে $\sin\angle A = \frac{BC}{JC} = \frac{a}{2R}$ [যেহেতু, $\sin\angle A = \sin\angle BJC = \sin(180 - \angle BJC)$)] ফলে,$\frac{a}{\sin A} = 2R$

অনুরূপভাবে, $\frac{b}{\sin B} = 2R$ ও $\frac{c}{\sin C} = 2R$. [প্রমাণিত]

Km mÎ(The Cosine Law): যেকোন ত্রিভূজ ABC এ, $CA^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos\angle ABC$ বা, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$।একইভাবে b,c বাহুর জন্যও সম্পকর্টি একইভাবে প্রতিপাদন করা যায়।





প্রমাণ:C হতে AB বাহুর উপর AD লম্ব আঁকি।$BD = a\cos B$, $CD = a\sin B$; $|DA| = |c - a\cos B|$।(সূক্ষকোণী ও স্থুলকোণী উভয় ত্রিভূজে)ফলে, সমকোণী এ,

$$b^2 = CA^2 = CD^2 + AD^2$$
$$= a^2\sin^2 B + (c - a\cos B)^2$$
$$= a^2\sin^2 B + c^2 + a^2\cos^2 B - 2ac\cos B$$
$$= a^2(\sin^2 B + \cos^2 B) + c^2 - 2ca\cos B$$
$$\therefore b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

কস সূত্রের আরেকটি রূপ হল, $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

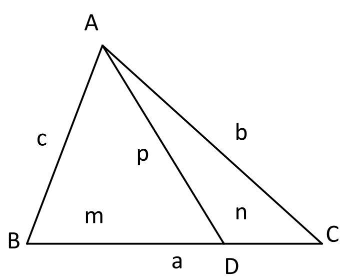
পাশের চিত্র হতে আমরা প্রমাণ করব wÎf‡Ri ‡¶Îd‡ji mÎ: $(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\, ac\sin A$।($(\Delta ABC)$ দ্বারা ΔABC এর ক্ষেত্রফল বোঝানো হয়।)

উভয় ত্রিভুজেই, $\frac{h}{b} = \sin\angle CAD = \sin A$।(স্থুলকোণী ত্রিভূজে, $\sin(180 - \angle CAD) = \sin A$ ।)

ফলে,$h = b\sin A \Longrightarrow (\Delta ABC) = \frac{1}{2}\, ah = \frac{1}{2}\, ac\sin A$।

÷qv‡Ui mÎ: ΔABC এ BC বাহুর উপর D যেকোন বিন্দু হলে;প্রমাণ কর যে,

[যেখানে,a,b,c ত্রিভূজের তিনবাহু; AD=p, BD=m, DC=n]



আমরা প্রমাণের জন্য কস সূত্র ব্যবহার করব।ΔABD ও ΔACD এ কস সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\cos\angle ADB = \frac{p^2 + m^2 - c^2}{2pm}$$
$$\cos\angle ADC = \frac{p^2 + n^2 - b^2}{2pn}$$

আবার $\angle ADB + \angle ADC = 180°$।

ফলে,$\cos\angle ADB + \cos\angle ADC = 0$

অর্থাৎ,

$$\frac{p^2 + m^2 - c^2}{2pm} + \frac{p^2 + n^2 - b^2}{2pn} = 0$$

$$\Leftrightarrow n(p^2 + m^2 - c^2) + m(p^2 + n^2 - b^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow np^2 + m^2n - c^2n + mp^2 + mn^2 - b^2m = 0$$
$$\Leftrightarrow p^2(m + n) + mn(m + n) = b^2m + c^2n$$
$$\Leftrightarrow a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n\ \ [\because m + n = a]$$

এখান থেকে আমরা অ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য এবং সেখান থেকে মধ্যমার সূত্র প্রতিপাদন করব।

এখন, $BD = CD$ হলে $m = n$ ফলে, স্টুয়ার্টের সূত্র হতে,

$$\Leftrightarrow 2m(p^2 + m^2) = m(b^2 + c^2)$$
$$\Leftrightarrow 2(p^2 + m^2) = b^2 + c^2$$

সুতরাং অ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যটি প্রমাণ করা হল।(সরাসরি ত্রিকোণমিতিক প্রমাণের ক্ষেত্রে স্টুয়ার্টের সূত্রের প্রমাণের পদ্ধতি ব্যবহার করা যায়।)

এখন,মধ্যমা $m_a = \sqrt{\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}}$ ।

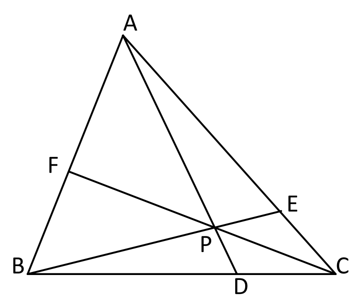
সেভা'র উপপাদ্য ও মেনালুস'র উপপাদ্য:

এই দুটি উপপাদ্য বিভিন্ন জ্যামিতিক সমস্যা সমাধানে অত্যন্ত কার্যকর।সেভার উপপাদ্য হল সমবিন্দু(Concurrency) সংক্রান্ত উপপাদ্য এবং মেনালুস'র উপপাদ্য হল সমরেখতা (Colinearity) সংক্রান্ত উপপাদ্য।

সেভার উপপাদ্য(Ceva's Theorem):ΔABC তে D, E, Fবিন্দু যথাক্রমে BC, CA, AB বাহুর উপর অবস্থিত হলে AD, BE, CF সমবিন্দু(Concurrrent) হবে যদি এবং কেবল যদি

$$\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}.\frac{AF}{FB} = 1$$

হয়।



আমরা এখানে এই উপপাদ্যের ত্রিকোণমিতিক প্রমাণ উপস্থাপন করব।

মনে করি,AD,BE,CF বাহুত্রয় P বিন্দুতে ছেদ করেছে।ΔABP এ সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle DAB} = \frac{\sin\angle ABP}{\sin\angle PAB} = \frac{AP}{BP}$$

এভাবে ΔBCP ও ΔCAP এ সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle EBC} = \frac{BP}{CP}$ ও $\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle FCA} = \frac{CP}{AP}$

এদের গুণ করলে পাওয়া যায়,

$$\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle DAB}.\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle EBC}.\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle FCA} = 1$$

এটা হল সেভার উপপাদ্যের ত্রিকোণমিতিক রূপ।এই রূপটিও অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ।

আবার, ΔABD ও ΔACD এ সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$\frac{\sin\angle ADB}{\sin\angle DAB} = \frac{AB}{BD}$ ও $\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle ADC} = \frac{DC}{CA}$

এখন,$\angle ADC + \angle ADB = 180$ ।তাই,$\sin\angle ADB = \sin\angle ADC$ ।

উপরের সমীকরণদ্বয় গুণ করে পাই,

$$\frac{DC}{BD}.\frac{AB}{CA} = \frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle DAB}$$

একইভাবে ,

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{BC}{AB}=\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle EBC}$$

এবং

$$\frac{BF}{FA}\cdot\frac{CA}{Bc}=\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle FCA}$$

গুণ করে পাই,

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=1$$

ফলে,আমরা প্রমাণ করলাম হলে AD, BE, CF সমবিন্দু হলে $\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=1$ হয়।এখন আমরা বিপরীত উপপাদ্য প্রমাণ করব।অর্থাৎ,$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=1$ হলে AD, BE, CF সমবিন্দু হবে।
মনে করি, AD, BE , P বিন্দুতে ছেদ করে এবং C,P বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত বাহু CF’।তাহলে,সেভার সূত্র হতে(যেটা আমরা প্রমাণ করলাম),

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AF'}}{\mathrm{F'B}}=1$$

কিন্তু,দেওয়া আছে,

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=1$$

ফলে, $\frac{AF'}{F'B}=\frac{AF}{FB}$

সুতরাং F এবং F’ একই বিন্দু।

<u>সমস্যা:</u> সেভার উপপাদ্য ব্যবহার করে আমাদের কিছু পরিচিত সমস্যার সমাধান খুব সহজেই করা যায়,যেমন-

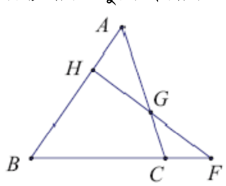
১.প্রমাণ করতে হবে যে,ত্রিভূজের মধ্যমাত্রয়(Median) সমবিন্দু।(বিন্দুটি হল ত্রিভূজের ভরকেন্দ্র (Centroid))

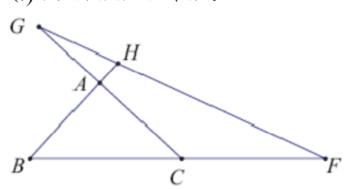
২.ত্রিভূজের কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকত্রয় সমবিন্দু।(বিন্দুটি হল ত্রিভূজের অন্তকেন্দ্র (Incenter))

৩.ত্রিভূজের তিন শীর্ষবিন্দু হতে অঙ্কত লম্বত্রয় সমবিন্দু।(বিন্দুটি হল ত্রিভূজের লম্ববিন্দু (Orthocenter))

৪.ত্রিভূজের কোণগুলির সমদ্বিখন্ডকত্রয়কে মধ্যমার সাপেক্ষে প্রতিবিম্বিত(Reflect) করলে যে রেখাত্রয় পাওয়া যায় তারা সমবিন্দু।(বিন্দুটি হল ত্রিভূজের symedian point)

<u>মেনালুস’র উপপাদ্য বা ম্যানিলাউ’র উপপাদ্য (Menelaus’s Theorem):</u> ত্রিভূজ ABC এ F,G,H বিন্দুত্রয় যথাক্রমে BC,CA,AB বাহু বা এর বর্ধিতাংশের উপর যেকোন বিন্দু হলে F,G,H সমরেখ হবে যদি এবং কেবল যদি, $\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{Ga}=1$ হয়। (এর সাধারণ প্রমাণটি এরই মধ্যে গণিত স্কুলে প্রকাশিত হয়েছে।) ত্রিকোণমিতিক প্রমাণ:





ত্রিভূজ, AGH,BFH,CFG এ সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{AH}{GA}=\frac{\sin\angle AGH}{\sin\angle GHA},\frac{BF}{HB}=\frac{\sin\angle BHF}{\sin\angle HFB},\frac{CG}{FC}=\frac{\sin\angle GCF}{\sin\angle CGF}$$

আবার,$\sin\angle AGH=\sin\angle CGF$,

$$\sin\angle BHF=\sin\angle GHA,\sin\angle GFC=\sin\angle HFB$$

ফলে, উপরের সমীকরণত্রয় গুণ করে পাই, $\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{Ga}=1$

বিপরীত উপপাদ্যটিও একইভাবে প্রমাণ করা যায়।

<u>কিছু সমস্যা:</u>

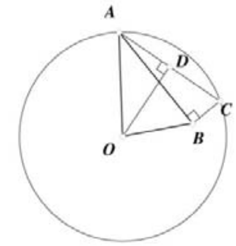
1. যেকোন ত্রিভুজ ABC এ, $[ABC]=\frac{abc}{4R}$
ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল=[ABC], R পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ,
প্রমাণ: $[ABC]=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\frac{abc}{2R}$ (সাইন সূত্র)

2. প্রমাণ কর, $abc=4srR$ [অর্ধপরিসীমা,$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$, r অন্তবৃত্তের ব্যাসার্ধ] সাহায্য: $[ABC]=sr$

3. প্রমাণ কর, $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{1}{2Rr}$
প্রমাণ: $LHS=\frac{c}{abc}+\frac{a}{abc}+\frac{b}{abc}=\frac{1}{abc}(a+b+c)=\frac{2s}{abc}$
2 নং সমস্যা থেকে পাই, $\frac{2s}{abc}=\frac{1}{2Rr}$

4. কোন ত্রিভুজ ABC এ $\angle C=2\angle A$ এবং $b=2a$ । ত্রিভুজের কোণগুলি বের কর। (ans: $30°, 60°, 90°$)

5. প্রমাণ কর, $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}$



6. $\sqrt{50}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্র O এবং বৃত্তের উপরে অবস্থিত দুটি বিন্দু। যদি $\angle ABC=90°, AB=6$, $BC=2$ হয়; তবে, $OB=?$

সমাধান: $OD\perp AC$ আঁকি। এখানে, $\tan BAC=\frac{1}{3}$,
এখন, $AC=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}\Leftrightarrow AD=\sqrt{10}$
$\Longrightarrow OD=\sqrt{50-10}=2\sqrt{10}\Longrightarrow \tan OAC=2$
$\tan OAB=\tan(OAC-OAB)=\frac{\tan OAC-\tan OAB}{1+\tan OAC\tan OAB}=1$
$\Longrightarrow \cos OAB=\frac{1}{\sqrt{2}}$। এখন আমরা কস সূত্র প্রয়োগ করে পাই,
$OB^2=OA^2+AB^2-2OA.OB.\cos OAB$
$=50+36-60=26\Leftrightarrow OB=\sqrt{26}$

7. ত্রিভুজ ABC এর বৈশিষ্ট্য হল, এর অভ্যন্তরে এমন একটি বিন্দু P আছে যাতে, $\angle PAB=10°$,$\angle PBA=20°$, $\angle PCA=30°$ এবং $\angle PAC=40°$ হয়। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

Kushtia Math Circle
KMC
We love Mathematics

Note for Bangladesh Math Olympiad 2009:
*By: **Tarik Adnan Moon,** Class 11,*
Member, Bangladesh National Math Team,
International Mathematical Olympiad (IMO) 2007, 2008

If you find any error or have any question,
Contact: moon.math@matholympiad.org.bd