ভূমিকা

জ্যামিতি গণিতের একটি মজার শাখা। প্রাচীনকাল থেকেই মানুষ জ্যামিতি নামক বিদ্যার সাথে পরিচিত। জ্যামিতি অনেক ধরণেরই আছে। আমাদের স্কুলে যে জ্যামিতি শেখানো হয় তা হচ্ছে ইউক্লিডিয়ান জ্যামিতি। এছাড়াও আছে প্রজেক্টিভ জ্যামিতি,হাইপারবোলিক জ্যামিতি, ডিফারেনশিয়াল জ্যামিতি। তবে অলিম্পিয়াডের সমস্যা সমাধানের জন্য ইউক্লিডিয়ান জ্যামিতির বাইরে তেমন কিছুর প্রয়োজন হয় না। তাছাড়া আমাদের দেশের ৯ম-১০ম শ্রেণীর বইয়ের জ্যামিতি অংশটূকু অনেক সমৃদ্ধ। এমনকি আন্তর্জাতিক গণিত অলিম্পিয়াডের বেশিরভাগ সমস্যার সমাধান ৯ম-১০ম শ্রেণীর জ্যামিতি দিয়েই হয়ে যায়! সেজন্য তোমাদের জ্যামিতি নিয়ে তেমন সমস্যা হবার কথা না। কিন্তু যা করতে হবে শুধু সূত্র শিখলেই হবে না, তা ঠিকমত ব্যবহার করা জানতে হবে। আর সেজন্য দরকার প্রচুর সমস্যার সমাধান করা।

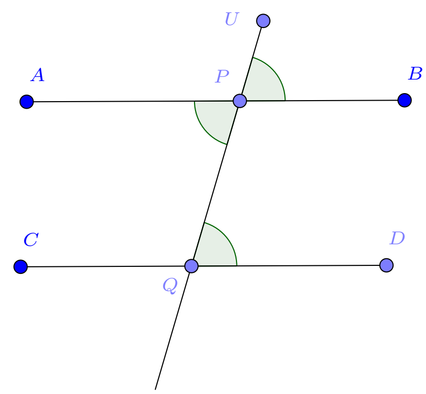
১. সমান্তরাল রেখা ও ত্রিভুজের কোণ

সমান্তরাল রেখার স্বীকার্য(Parallel axiom) : যদি ২টি পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও CD কে আরবকটি রেখা UQ যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে তখন

১. একান্তর কোণ $\angle APQ = \angle DQP$

২. অনুরূপ কোণ $\angle UPB = \angle PQD$

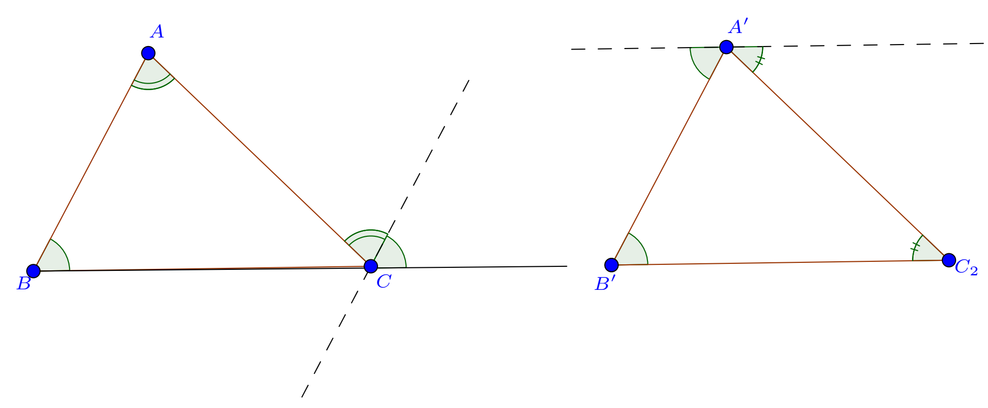
৩. ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণ $\angle BPQ + \angle DQP = 180^\circ$



এটিকে কিন্তু উপপাদ্য বলা হয়নি কারণ এটি কোনভাবেই প্রমাণ করা যায় না। এধরণের জিনিসগুলোকে জ্যামিতিতে স্বীকার্য বলা হয়েছে।

উপপাদ্য ১.১: ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি এক সমকোণ।

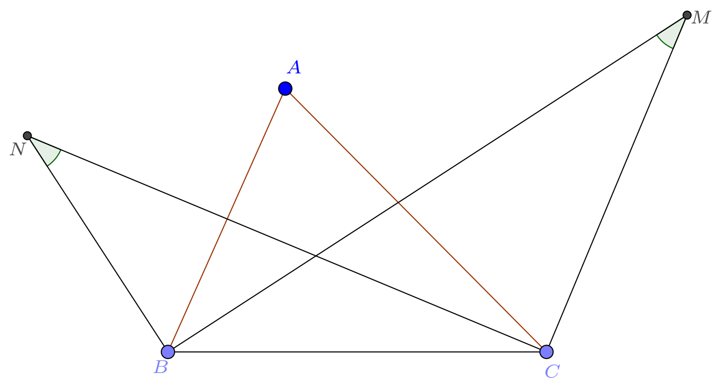
প্রমাণ: যেকোন একটি ত্রিভুজ ABC নাও। এবার C বিন্দু AB এর সমান্তরাল করে একটি রেখা আঁক। খেয়াল করলে দেখতে পাবে যে C বিন্দুতে উতপন্ন অন্য কোণ ২টি ত্রিভুজের ২টি কোণ $\angle A$ ও $\angle B$ এর সমান।



সুতরাং $\angle A + \angle B + \angle C =$ বিন্দুতে উতপন্ন সরল কোণ$=180^\circ$ $\square$

এবার কয়েকটি সমস্যা দেখা যাক।

উদাহরণ ১.১: $\triangle ABC$ তে $\angle A$ অন্তঃদ্বিখন্ডক ও $\angle B$ এর বহির্দ্বিখন্ডক M বিন্দুতে ছেদ করে। একইভাবে $\angle B$ অন্তঃদ্বিখন্ডক ও $\angle A$ এর বহির্দ্বিখন্ডক N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে $\angle BMC = \angle BNC$.



সমাধান:

এখানে আমাদেরকে ২টি কোণের মান সমান দেখাতে হবে। এক কাজ করা যাক, ২টি কোণকেই আমরা $\triangle ABC$ এর কোণগুলোর মাধ্যমে প্রকাশ করি (কারণ নতুন বিন্দু ২টি M ও N কে $\triangle ABC$ এর সাপেক্ষেই তৈরী করা হয়েছে)।
$\triangle BMC$ এর কোণগুলোর মধ্যে $\angle NBC = \frac{\angle B}{2}$ এবং $\angle NCB = \angle C + \angle ACM = \angle C + \frac{180^\circ - \angle C}{2} = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}$.
সুতরাং

$$\begin{aligned}
\angle BMC &= 180^\circ - \angle MBC - \angle MCB \\
&= 180^\circ - \frac{\angle B}{2} - (90^\circ 2 + \frac{\angle C}{2}) \\
&= \frac{180^\circ - \angle B - \angle C}{2} \\
&= \frac{\angle A}{2}
\end{aligned}$$

একইভাবে প্রমাণ করা যাবে যে $\angle BNC = \frac{\angle A}{2}$. অর্থাৎ $\angle BMC = \angle BNC$. $\square$

নিজে করো

সমস্যা ১.১: $\triangle ABC$ তে CA ও CB এর উপর E এবং D যেকোন ২টি বিন্দু। $\angle CAD$ ও $\angle CBE$ এর সমদ্বিখন্ডক পরস্পরকে F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে $\angle AEB + \angle ADB = 2\angle AFB$। (হিন্টঃ প্রতিটি কোণকে B ও C বিন্দুতে উতপন্ন কোনগুলোর মাধ্যমে লিখার চেষ্টা কর)

২. ত্রিভুজের সর্বসমতা

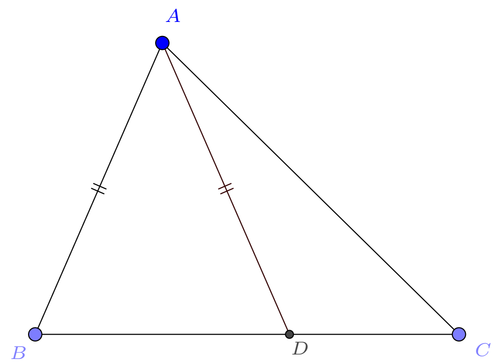
যদি ২টি ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু ও কোণগুলো পরস্পর সমান হয় তখন এদেরকে সর্বসম ত্রিভুজ(congruent triangle) বলা হয়। ২টি ত্রিভুজ সর্বসম দেখানোর জন্য সবগুলো বাহু ও কোণ সমান প্রমাণ করার প্রয়োজন হয় না। নিচে ত্রিভুজ সর্বসমতার শর্তগুলো দেয়া হল। প্রমাণগুলো তোমরা স্কুলের বই থেকে দেখে নিও।

উপপাদ্য ২.১: (*SAS congruence*) যদি ২টি ত্রিভুজ ABC ও DEF এ $AB = DE$ ও $AC = DF$ হয় এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle BAC = \angle EDF$ হয়, তখন $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. একে বলা হয় side-angle-side congruence বা সংক্ষেপে SAS congruence.

উপপাদ্য ২.২: (*ASA congruence*) যদি ২টি ত্রিভুজ ABC ও DEF এ $AB = DE$ হয় এবং এদের সংলগ্ন ২টি কোণ $\angle BAC = \angle EDF$ হয়, তখন $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

উপপাদ্য ২.৩: (*SSS congruence*) ABC ও DEF এর অনুরূপ বাহুগুলো পরস্পর সমান হলে ত্রিভুজ ২টি সর্বসম।

SAS congruence এ কোণটি অবশ্যই বাহু ২টির অন্তর্ভুক্ত হতে হবে। অন্যথায় ত্রিভুজ ২টি সর্বসম নাও হতে পারে। যেমন নিচের চিত্রে দেখ



ABC ও ADC তে $\angle ACB = \angle ACD, AC = AC$ এবং $AB = AC$. কিন্তু বুঝতেই পারছ যে ত্রিভুজ ২টি সর্বসম নয়। এক্ষত্রে ত্রিভুজ ২টির একটি সূক্ষকোণী, অপরটি স্থুলকোণী। তবে তুমি যদি ২টি ত্রিভুজের ক্ষেত্রে এই শর্তগুলি প্রমাণ করার পাশাপাশি দেখাতে পার যে ২টি ত্রিভুজই সুক্ষকোণী(বা স্থূলকোণী), সেক্ষেত্রে ত্রিভুজ ২টি সর্বসম প্রমাণ হয়ে যাবে।

ত্রিভুজের সর্বসমতার সূত্রগুলো থেকে আরো কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ অনুসিদ্ধান্ত প্রমাণ করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত ২.১: $\triangle ABC$ তে $\angle ABC = \angle ACB$ হবে যদি এবং কেবল যদি $AB = AC$ হয়।

অনুসিদ্ধান্ত ২.২: $\angle B > \angle C$ হবে যদি এবং কেবল যদি $AC > AB$ হয়।

অনুসিদ্ধান্ত ২.৩: ত্রিভুজের যে কোন ২ বাহুর দৈর্ঘ্যের যোগফল অপর বাহু হতে বৃহত্তর।

অনুসিদ্ধান্ত ২.৪: $\triangle ABC$ এ AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{BC}{2}$

অনুসিদ্ধান্ত ২.৫: সমকোণী ত্রিভুজ ABC এ $\angle A = 90°$ এবং M BC এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর $MA = MB = MC$.

নিজে করো

সমস্যা ২.১: $\triangle ABC$ এর AC বাহুর উপর D এমন একটি বিন্দু যেন $AB = AD$ হয়। $\angle ABC - \angle ACB = 30°$ হলে $\angle CBD$ এর মান বের কর।

সমস্যা ২.২: ABC এর $\angle B$ এর অন্তর্দ্বিখন্ডক ও $\angle C$ এর বহির্দ্বিখন্ডক পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে। D দিয়ে BC এর সমান্তরাল সরলরেখা AC ও AB কে যথাক্রমে L ও M বিন্দুতে ছেদ করে। LC ও MB এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5 ও 7 হলে LM এর দৈর্ঘ্য বের কর।

সমস্যা ২.৩: ত্রিভুজ ABC এ BC বাহুর উপর M এমন একটি বিন্দু যেন $\angle CAM = 2\angle BAM$. AM এর বর্ধিতাংশের উপর D এমন একটি বিন্দু যেন $\angle ABD = 90°$ হয়। প্রমাণ কর $AD = 2AC$.

সমস্যা ২.৪: $ABCD$ বর্গের AB এর মধ্যবিন্দু M. M বিন্দুতে MC এর উপর লম্ব AD কে K বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর $\angle BCM = \angle KCM$.

সমস্যা ২.৫: ABC এর CA ও CB বাহুর উপর D ও E এমন ২টি বিন্দু যেন $\angle CAE = \angle BAE$ ও $\angle CBD = \angle ABD$ হয়। C থেকে DF ও EF এর উপর লম্বের পাদবিন্দু যথাক্রমে P ও Q. প্রমাণ কর $PQ \parallel AB$.

সমস্যা ২.৬: $ABCD$ বর্গের $\angle ACD$ এর সমদ্বিখন্ডকের উপর B হতে অঙ্কিত লম্ব CA ও CD কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর $DQ = 2PE$ যেখানে $E = AC \cap BD$.

সমস্যা ২.৭: $\triangle ABC$ এ CA, AB, BC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F. G BC এর উপর যেন $BG \perp AC$. প্রমাণ কর $\angle EDF = \angle EGF$.

সমস্যা ২.৮: সমকোণী $\triangle ABC$ তে $\angle C = 90°$. D ও E AB বাহুর উপর এমন ২টি বিন্দু যেন $AC = AE$ ও $BC = BD$ হয়। D ও E হতে AC ও BC এর উপর অঙ্কিত লম্ব DG ও EF. প্রমাণ কর $DE = DG + EF$.

সমস্যা ২.৯: BE ও AD হচ্ছে $\triangle ABC$ এর ২টি উচ্চতা। AH, AB, BC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F, G, K, প্রমাণ কর $\angle FGk = 90°$.

সমস্যা ২.১০: $ABCD$ সামান্তরিকে BC এর মধ্যবিন্দু M এবং B হতে AB এর উপর লম্বের পাদবিন্দু T. প্রমাণ কর $CT = CD$.

সমস্যা ২.১১: $\triangle ABC$ এ C বিন্দুগামী যেকোন রেখার উপর A ও B হতে লম্বের পাদবিন্দু যথাক্রমে P ও Q. প্রমাণ কর $MP = MQ$ যেখানে M AB এর মধ্যবিন্দু।