

বাস্তব সংখ্যা

আদীব হাসান

৪ সেপ্টেম্বর, ২০১৫

আমি জানি অনুশীলনীর অঙ্ক তোমরা সবাই করতে পার। এই নোটে যা আছে তাও হয়ত তোমাদের সবার জানা। সেই জানা জিনিসগুলোকেই একটু সহজ ভাষায় গুছিয়ে বলার চেষ্টা করা হল।

১. সংখ্যা কী

এটা কোন প্রশ্ন হল? সংখ্যা কে না চেনে? মোটা দাগে বললে আমরা যা দিয়ে গুণি, তাই তো সংখ্যা। ক্লাস ওয়ানের পিচ্চিকেও যদি এই প্রশ্নটা করি সেও গড় গড় করে 1, 2, 3, 4, ... বলা শুরু করে দেবে। কত সংখ্যা সে চেনে! হ্যাঁ, এই সাদাসিধে সংখ্যাগুলোর সাথে আমাদের সবারও পরিচয় খুব ছোটবেলায়। এদের একটা নাম আছে। এদের বলে **স্বাভাবিক সংখ্যা** (Natural number), সংক্ষেপে N বা \mathbb{N} । তাহলে $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

স্বাভাবিক সংখ্যার আরেক নাম **ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা**। একটা সময় পর্যন্ত সবারই ধারণা থাকে এগুলো ছাড়া আর কোন সংখ্যাই নেই। কিন্তু হাইস্কুলে উঠেই আমরা জানতে পারি $-1, -2, \dots$ -এর মত সংখ্যার কথা। এদেরকে আমরা ডাকি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা আর শূন্য - এই তিন রকমের সংখ্যাকেই আমরা পূর্ণসংখ্যা বলি। সকল পূর্ণসংখ্যাকে একত্রে Z বা \mathbb{Z} দিয়ে প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ, $Z = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ।

২. মূলদ সংখ্যা

দুটি পূর্ণসংখ্যার যোগফল আরেকটি পূর্ণসংখ্যা। যেমন: $2 + 3 = 5$ । দুটি পূর্ণসংখ্যার বিয়োগফল, এমনকি গুণফলও পূর্ণসংখ্যা হয়। কিন্তু দুটি পূর্ণসংখ্যার ভাগফল কি পূর্ণসংখ্যা হবে?

হতে পারে, আবার নাও হতে পারে। যেমন: $6 \div 2 = 3$ একটি পূর্ণসংখ্যা অথচ, $3 \div 2 = 1.5$ পূর্ণসংখ্যা না। তখন $\frac{3}{2}$ -র মত সংখ্যাদের নাম দেওয়া হল ভগ্নাংশ। পূর্ণসংখ্যা আর ভগ্নাংশকে একসাথে বলে **মূলদ সংখ্যা** (Rational number)। তাহলে মূলদ সংখ্যার সংজ্ঞাটা কী হবে? p, q দুজনেই পূর্ণসংখ্যা। এবং $q \neq 0$ হলে $\frac{p}{q}$ আকারের সকল সংখ্যাকে মূলদ সংখ্যা বলে। 2 কেন মূলদ সংখ্যা? কারণ 2কে $\frac{2}{1}$ হিসেবে লেখা যায়।

কিন্তু প্রশ্ন হচ্ছে $\frac{1}{0}, \frac{2}{0}$ এরা তাহলে কী? এরাও কি মূলদ সংখ্যা? বা এরা কি আদৌ কোন সংখ্যা? উত্তরটা হচ্ছে না। শূন্য দিয়ে কিছুকে ভাগ করা যায় না। ভাগ করলে ভাগফল আর সংখ্যা থাকে না। এদেরকে তাই অসংজ্ঞায়িত ধরা হয়। মূলদ সংখ্যার সেটকে ধরা হয় Q বা \mathbb{Q} । এবং $Q = \{\frac{p}{q} : p, q \in N \text{ এবং } q \neq 0\}$

দুটি মূলদ সংখ্যার যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল এবং ভাগফল, সবই মূলদ সংখ্যা।

ওপরের কথাগুলো সবারই জানা। এবার একটা প্রশ্ন করি? 1, 2, 3, 4... এদের নাম দিয়েছিলাম আমরা স্বাভাবিক সংখ্যা। তাহলে পৃথিবীতে স্বাভাবিক সংখ্যা কতগুলো আছে? অ-নে-এ-এ-ক বেশি। গুণে শেষ করা যাবে না। অসীম সংখ্যক। আবার স্বাভাবিক সংখ্যা, ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা আর শূন্য এদের সর্বত্রকে একসাথে আমরা বলেছি পূর্ণসংখ্যা। সুতরাং পূর্ণসংখ্যাও অবশ্যই অসীম সংখ্যক আছে। কিন্তু কোনটি বেশি সংখ্যক আছে? স্বাভাবিক সংখ্যা না পূর্ণসংখ্যা? পূর্ণসংখ্যাই তো বেশি থাকবে, তাই না? কারণ পূর্ণসংখ্যার মাঝে

স্বাভাবিক সংখ্যা তো থাকেই, তার সাথে থাকে আরও এত এত ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। এটাই তো ভাবছ? ঠিক আছে এবার দ্বিতীয় প্রশ্নটা করি।

পূর্ণসংখ্যা আর ভগ্নাংশকে একত্রে আমরা বলেছিলাম মূলদ সংখ্যা। এবার বল তো কোন ধরনের সংখ্যা বেশি আছে? স্বাভাবিক সংখ্যা না কি মূলদ সংখ্যা? এবারও নিশ্চয়ই বলবে অবশ্যই মূলদ সংখ্যা। পূর্ণসংখ্যার সাথে এবার আমরা ভগ্নাংশও যোগ করছি। মূলদ সংখ্যা তো আরও বেশি থাকা উচিত।

এবার একটা ধাক্কা খাওয়ার জন্যে প্রস্তুত হও। তোমার দুটি ধারণাই ভুল। জর্জ ক্যান্টর দেখিয়েছেন পৃথিবীতে যতগুলো স্বাভাবিক সংখ্যা আছে, ঠিক ততগুলোই পূর্ণসংখ্যা আছে এবং ঠিক ততগুলোই মূলদ সংখ্যা আছে! হ্যাঁ, বিশ্বাস না করলেও সত্যি, তিনি এটাই দেখিয়েছেন। তাঁর প্রমাণটাও বিস্ময়কর রকমের সহজ। টপিকের বাইরে চলে যাচ্ছি বলে আর দেখালাম না। আপাতত ব্যাখ্যা হিসেবে এটুকু বলতে পারি, স্বাভাবিক সংখ্যা, পূর্ণসংখ্যা, মূলদ সংখ্যা- এরা সবাই যেহেতু অসীম সংখ্যক করে আছে, তাই আমাদের পরিচিত নিয়মগুলো এদের ক্ষেত্রে সবসময় খাটে না।

৩. অমূলদ সংখ্যা

হে যুবক, তুমি কি পিথাগোরাসকে চেনো? তাঁর কিংবদন্তী উপপাদ্যটি জানো? (নিশ্চয়ই জানো, নয়তো ক্লাস এইট পার করলে কী করে!) জ্যামিতির এই একটি উপপাদ্যের বাইরেও পিথাগোরাসের অন্য একটি পরিচয় ছিল। তিনি ছিলেন একজন সংখ্যাপাগল। বিশ্বাস করতেন এই জগতের সবকিছু জ্ঞান-বিজ্ঞান, সঙ্গীত থেকে শুরু করে ঈশ্বর-আত্মা পর্যন্ত সবই সংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করা যায়। বলাবাহুল্য, পিথাগোরাসের অনেক শিষ্য ছিল। তাদের বলা হত পিথাগোরিয়ান। আড়াই হাজার বছর আগে পিথাগোরাস তাঁর এই শিষ্যদের নিয়ে মুক্তবুদ্ধির চর্চা করতেন। বলা হয়ে থাকে অমূলদ সংখ্যা আবিষ্কার করে তাঁরই এক শিষ্য, নাম হিপাসাস (Hippasus)।

পিথাগোরিয়ানেরা সংখ্যাকে খুব পবিত্র ভাবতেন। তাদের বিশ্বাস ছিল সব সংখ্যাকেই দুটি পূর্ণসংখ্যার ভাগফল হিসেবে লেখা যায়। হিপাসাস একদিন নিচের ছবির মত একটি সমকোণী ত্রিভুজ এঁকে দেখলেন এর অতিভুজকে তো কিছুতেই দুটি পূর্ণসংখ্যার ভাগফল আকারে লেখা যাচ্ছে না। প্রকৃতপক্ষে, অতিভুজটির দৈর্ঘ্য ছিল $\sqrt{2}$ । তিনি এরপর প্রমাণ করলেন এই $\sqrt{2}$ কে কোনভাবেই দুটো পূর্ণসংখ্যার ভাগফল আকারে লেখা সম্ভব না।

হিপাসাসের এই আবিষ্কারের পর পিথাগোরিয়ানরা ভীষণভাবে বেকায়দায় পড়ে যায়। কারণ সংখ্যা নিয়ে তাদের ধারণা, আদর্শের সাথে এটা ছিল পুরোপুরি সাংঘর্ষিক। তারা তাই $\sqrt{2}$ জাতীয় সংখ্যার নাম দিল Irrational Number বা অযৌক্তিক সংখ্যা। আর এই আবিষ্কারের কথা গোপন রাখতে ক্ষুদ্ধ পিথাগোরিয়ানেরা হিপাসাসকে সাগরে ফেলে দেয়। অমূলদ সংখ্যা আবিষ্কারের জন্য এই ছিল তাঁর পুরস্কার।

যাই হোক আলোচনায় ফিরে আসি। এখন আমরা সবাই জানি, অনেক সংখ্যাকেই দুটো পূর্ণসংখ্যার ভাগফল আকারে লেখা সম্ভব না। এদেরকেই বলে অমূলদ সংখ্যা। $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π এরা সবাই অমূলদ সংখ্যা।

আমি যদি আবার আগের প্রশ্নটা করি, অমূলদ সংখ্যা আর মূলদ সংখ্যা কি সমান সংখ্যক আছে? এটার উত্তরও হচ্ছে না। অমূলদ সংখ্যা মূলদ সংখ্যার চেয়ে অনেক বেশি পরিমাণে আছে। অনেক অনেক বেশি। ঠাট্টা করে গণিতবিদেরা তাই বলেন (প্রায়) সব বাস্তব সংখ্যাই অমূলদ।

৪. বাস্তব সংখ্যা

মূলদ আর অমূলদ সব সংখ্যা মিলে হয় বাস্তব সংখ্যা। এদের বাস্তব সংখ্যা কেন বলে? কারণ বাস্তব জগতের হিসেব নিকেশে এদের পাওয়া যায়। যেমন- তোমার কাছে দুশো টাকা থাকতে পারে, উত্তর মেরুর তাপমাত্রা $-40.5^\circ C$ হতে পারে। আরও বড় হলে দেখবে এমন সংখ্যাও আছে যাদের কোনদিন এই প্রকৃতিতে খুঁজে পাওয়া যাবে না। এদের বলে কাল্পনিক সংখ্যা।

বাস্তব সংখ্যার সেটের প্রতীক R বা \mathbb{R} । শূন্য থেকে বড় বাস্তব সংখ্যাকে বলে ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা, আর শূন্যের ছোট বাস্তব সংখ্যাকে বলে ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা। সাধারণত বাস্তব সংখ্যাকে চিত্রের মত একটি সরলরেখায় দেখানো হয়। এটাকে বলে সংখ্যারেখা।

৫. দশমিক পদ্ধতি

সংখ্যা লিখতে আমাদের অঙ্ক বা প্রতীক লাগে মাত্র দশটি। এই দশ প্রতীক দিয়েই আমরা তাবৎ সংখ্যা লিখে ফেলতে পারি। আমাদের সংখ্যাপদ্ধতিকে তাই বলে দশভিত্তিক বা দশমিক পদ্ধতি।

আমাদের সংখ্যা লিখতে কেন দশটি অঙ্ক লাগে? কেন আটটি লাগে না বা বারটি লাগে না? দশের কি কোন বিশেষ গুরুত্ব আছে? দশের বেশি বা কম প্রতীক ব্যবহার করেও কি সব সংখ্যা লেখা সম্ভব?

না, দশের আসলে বিশেষ কোন গুরুত্ব নেই। ধারণা করা হয় আমাদের দুইহাতে আঙ্গুল দশটি, তাই আমরা দশকে ভিত্তি ধরে সংখ্যা গুণি। অন্য সংখ্যাকে ভিত্তি ধরেও সংখ্যা গোণা যাবে এবং গোণা হয়ও। যেমন- কম্পিউটার দুইকে ভিত্তি ধরে গোণে। কম্পিউটারের কাছে অঙ্ক তাই মাত্র দুইটি!

৬. পৌনঃপুনিক

পৌনঃপুনিকের সাথেও সবারই পরিচয় আছে। দশমিকে প্রকাশ করলে কিছু ভগ্নাংশের মানে এক বা একাধিক অঙ্ক বারবার ঘুরেফিরে আসতে থাকলে তাকে বলে পৌনঃপুনিক ভগ্নাংশ। পৌনঃপুনিক থেকে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর নিশ্চয়ই জানো। নিচের রূপান্তরটি দেখ তো একটু:

$$0.\dot{9} = \frac{9 - 0}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

যার মানে দাঁড়াচ্ছে $0.999999... = 1!!$ বলতে পারবে এটা কী করে সম্ভব?