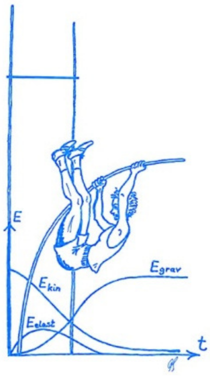


Dansk Fysikolympiade 2012
Landsfinale
fredag den 25. november 2011

Teoretisk prøve

Prøvetid: 3 timer

Opgavesættet består af 6 opgaver med i alt 17 spørgsmål.

Bemærk, at de enkelte spørgsmål **ikke** tæller ens.
Ud for hvert spørgsmål er anført, hvor mange
point, spørgsmålet maksimalt kan give.

Hvis man har alt rigtigt, kan man opnå i alt 30 point.

Alle hjælpemidler er tilladte.

Liste over udvalgte fysiske konstanter

Specifik varmekapacitet, vand	c_{vand}	$4{,}18 \cdot 10^{3}$	J kg^{-1} K^{-1}
Specifik varmekapacitet, is	c_{is}	$1{,}95 \cdot 10^{3}$	J kg^{-1} K^{-1}
Specifik smeltevarme for is	L_{is}	$3{,}34 \cdot 10^{5}$	J kg^{-1}
Specifik fordampningsvarme, vand 100 °C	L	$2{,}26 \cdot 10^{6}$	J kg^{-1}
Specifik fordampningsvarme, vand 0 °C	L	$2{,}50 \cdot 10^{6}$	J kg^{-1}
Densitet, vand 0 °C	ρ_{vand}	$1{,}00 \cdot 10^{3}$	kg m^{-3}
Densitet, is ved 0 °C	ρ_{is}	$9{,}17 \cdot 10^{2}$	kg m^{-3}
Densitet, atmosfærisk luft (1 atm, 20 °C)	ρ_{luft}	1,22	kg m^{-3}
Molarmassen af atmosfærisk luft	M	$2{,}90 \cdot 10^{-2}$	kg mol^{-1}
Middelafstanden mellem Solen og Jorden	D_{S}	$1{,}496 \cdot 10^{11}$	M
Solens masse	M_{S}	$1{,}99 \cdot 10^{30}$	kg
Solens udstrålingseffekt	L_{S}	$3{,}83 \cdot 10^{26}$	W
Jordens middelradius	R_{J}	$6{,}37 \cdot 10^{6}$	M
Jordens masse	M_{J}	$5{,}98 \cdot 10^{24}$	kg
Gravitationskonstanten	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$	N m^{2} kg^{-2}
Tyngdeaccelerationen i Danmark	g	9,82	m s^{-2}
Tyngdeaccelerationen ved Ækvator	g	9,78	m s^{-2}
Lydens fart i luft (1 atm, 20 °C)	v_{s}	343	m s^{-1}
Lysets fart i vakuum	c	$2{,}998 \cdot 10^{8}$	m s^{-1}
Avogadro konstanten	N_{A}	$6{,}022 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Planck konstanten	h	$6{,}626 \cdot 10^{-34}$	J s
Elementarladningen	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$	C
Vakuumpermeabiliteten	ε_{o}	$8{,}854 \cdot 10^{-12}$	C V^{-1} m^{-1}
Stefan-Boltzmann konstanten	σ	$5{,}670 \cdot 10^{-8}$	W m^{-2} K^{-4}
Gaskonstanten	R	8,314	J mol^{-1} K^{-1}
Boltzmann konstanten	k_{B}	$1{,}381 \cdot 10^{-23}$	J K^{-1}
Protonens masse	m_{p}	$1{,}673 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronens masse	m_{e}	$9{,}109 \cdot 10^{-31}$	kg
Atommasseenhed	u	$1{,}661 \cdot 10^{-27}$	kg
Atommassen af $^{1}_{1}\text{H}$	m_{H}	1,0078250	u
Atommassen af $^{2}_{1}\text{H}$	m_{D}	2,0141018	u
Atommassen af $^{1}_{0}\text{n}$	m_{n}	1,0086649	u

1. Forsøg med lille modelkanon

En lille modelkanon spændes fast i vandret stilling på et bord. Kanonrørets underside befinder sig 0,90 m over gulvet. Kanonen lades med en stålkugle og afskydes. Kuglen bevæger sig 22,7 m i vandret retning, inden den rammer gulvet. Der ses bort fra luftmodstanden og fra gnidning mellem kuglen og kanonrøret.

a) (1,0 point) Bestem kuglens fart, idet den forlader kanonmundingen.

Kanonen stilles derefter i lodret position og lades på ny. På grund af tyngdekraftens indvirkning bliver mundingsfarten for kuglen lidt mindre end før. Kuglen bevæger sig 14 cm inde i kanonrøret.

b) (2,0 point) Hvor højt når kuglen op over kanonmundingen?

Til sidst stilles kanonen i en skrå position. En vandret fangplade placeres i samme højde som den højde, hvor kuglen forlader kanonen.

c) (2,5 point) Hvilken vinkel med vandret skal kanonen stilles i for at kunne skyde kuglen længst hen på fangpladen?

2. Dannelse af carbon-14 i atmosfæren

Når en neutron fra den kosmiske stråling højt oppe i atmosfæren rammer et nitrogenatom, kan der ved en kerneproces dannes den radioaktive isotop ^{14}C, som har en halveringstid på 5730 år. De radioaktive atomer blandes med atmosfærens øvrige carbonindhold og vil senere især findes i havene, men også i alt organisk materiale på Jorden.

a) (1,0 point) Bestem henfaldskonstanten for ^{14}C.

Ved målinger af koncentrationen af ^{14}C i havvand er vurderet, at den samlede mængde af isotopen på Jorden er 300 ton. Dannelsen af ^{14}C i atmosfæren kan antages at have været uændret i en periode, der er meget længere end isotopens halveringstid.

b) (2,0 point) Bestem massen af den mængde ^{14}C, der dannes i atmosfæren hvert år.

3. Fire små nødder

GPS satellit

De 24 satellitter, som udgør GPS (Global Positioning System), bevæger sig i cirkulære baner omkring Jorden, og har alle en omløbstid på 12 timer.

Figur 1, GPS satellit

a) (1,5 point) Bestem en GPS-satellits højde over Jordens overflade.

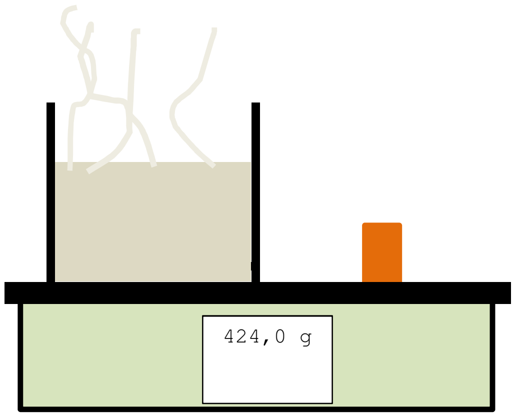
Glaskugle i vand

En hul, lufttom glaskugle med ydre radius R og indre radius r har massen 1,85 kg. Den er lavet på en sådan måde, at den nedsænket i vand hverken vil stige op til overfladen eller synke til bunds. Vandets densitet er $\rho_{vand} = 1{,}00 \cdot 10^3$ kg/m^3 og glassets er $\rho_{glas} = 2{,}60 \cdot 10^3$ kg/m^3.

b) (2,0 point) Bestem R og r.

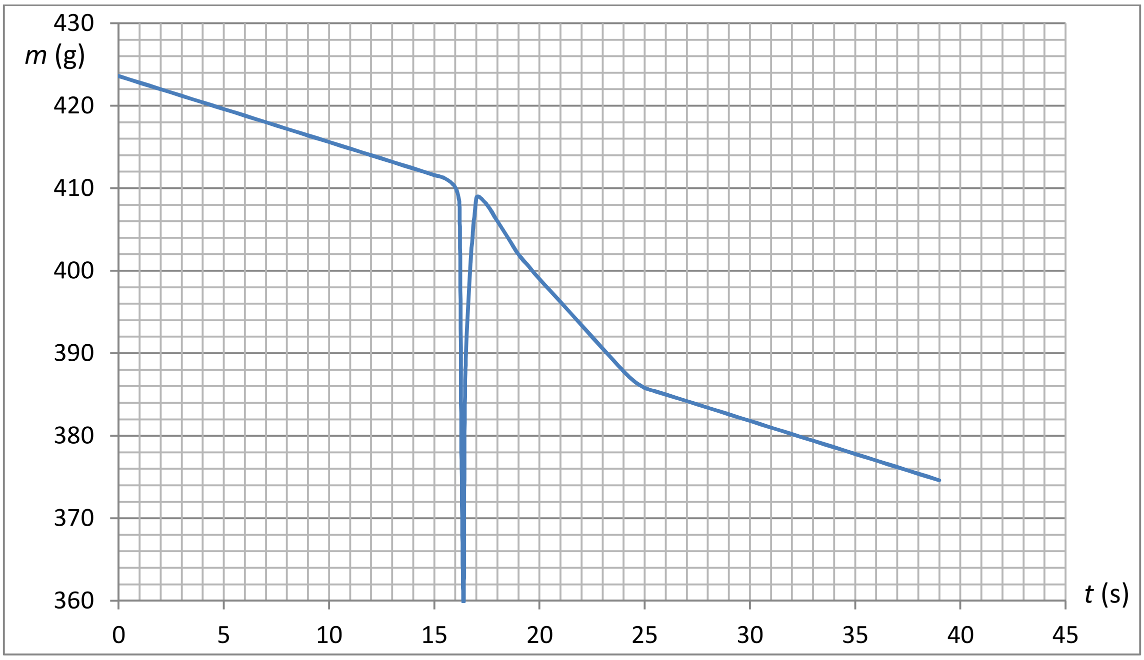
Den specifikke fordampningsvarme for nitrogen

Fig.2 viser et bægerglas med kogende nitrogen. Bægerglasset står på en vægt. Endvidere er der placeret et messinglod med massen 50 g på vægten. Den tilførte effekt fra omgivelserne betyder, at der til stadighed sker fordampning af nitrogen. Derfor aftager vægtens visning, se Fig. 3, der viser vægtens visning som funktion af tiden. Til tiden t = 17 s placeres loddet i nitrogenet, og herved afkøles loddet fra stuetemperaturen på 20 °C til nitrogens kogepunkt, som er -196 °C. Den energi, som nitrogenet modtager fra loddet under dets afkøling, betyder, at fordampningen sker hurtigere, indtil loddet når temperaturen -196 °C. Mens loddet afkøles, aftager vægtens visning hurtigere. Messings specifikke varmekapacitet er $380 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$.



Figur 2. Vægt med bægerglad med nitrogen og et messinglod.

c) (2,0 point) Bestem ud fra grafen en værdi for nitrogens specifikke fordampningsvarme.

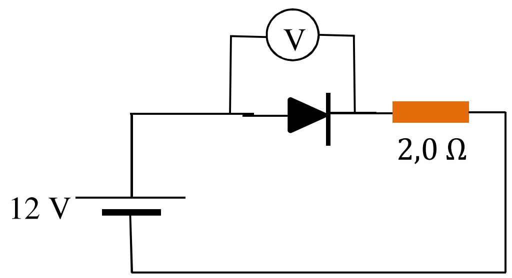


Figur 3. Vægtens visning som funktion af tiden.

Halvlederdiode

Strømstyrken I igennem en halvlederdiode er givet ved $I = I_0(e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1)$, hvor U er spændingsfaldet over dioden, k_B Boltzmann konstanten, e elementarladningen og T diodens kelvintemperatur.
På Fig. 4 ses en spændingskilde på 12 V, som er koblet i serieforbindelse med en halvlederdiode og en resistor med resistansen 2,0 Ω. Temperaturen af dioden, når den er i drift, er 300 K og strømstyrken I_0 er 2,0 mA.

d) (3,0 point) Bestem spændingsfaldet over dioden.

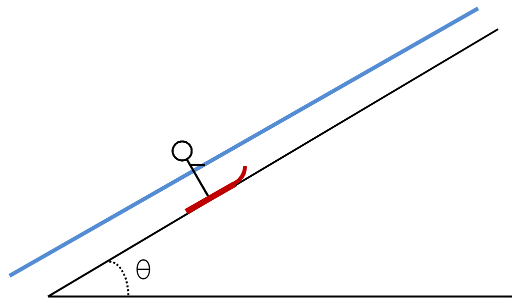


Figur 4, Kredsløb med halvlederdiode.

4.Skilift

For at komme op på pisterne på et skisportssted trækkes skiløberne op ved hjælp af en lift.

På Fig. 5 ses en skiløber på vej op med en lift, der blot består af et træktov parallelt med bakken. Bakken har hældningen θ med vandret, og gnidningskoefficienten mellem ski og bakke er μ_k. Skiløberen trækkes opad med konstant fart.

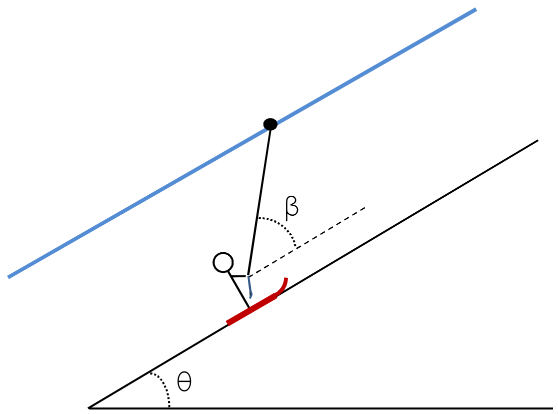


Figur 5. Skiløber, der trækkes af lift med tov parallelt med bakken.

a) (1,0 point) Tegn en kraftdiagram for skiløberen.

b) (1,5 point) Bestem et udtryk for trækkraftens størrelse, F, hvis trækkraften er parallel med bakken. Svaret skal udtrykkes ved størrelserne θ, m, g og μ_k.

I en anden type lift holder skiløberen fast i en snor, der er fastgjort til træktovet, se fig. 6. Denne lift trækker også skiløberen opad med konstant fart.

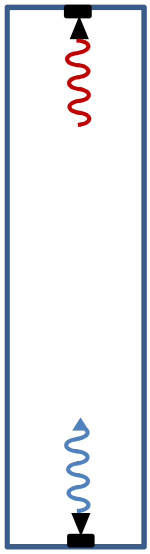


Figur 6. Skiløber, der holder i en snor, som er fastgjort til træktovet.

c) (2,5 point) Bestem den vinkel β, som gør, at snorkraften på skiløberen bliver mindst mulig.

5. Pound og Rebkas fotoneksperiment
I 1960 udførte de to amerikanske fysikere Robert Pound og Glen Rebka et berømt eksperiment, der efterviste en forudsigelse fra Einsteins generelle relativitetsteori, nemlig at en foton vil få en lavere frekvens, når den bevæger sig op gennem Jordens tyngdefelt ("gravitationel rødforskydning").

Eksperimentet blev udført i et 22,57 m højt tårn. Ved bunden af tårnet udsendes fotoner. I toppen af tårnet sidder en modtager, der kan detektere de udsendte fotoner, se Fig. 7.



Figur 7. Principskitse af eksperimentet.

Pound i toppen af tårnet kommunikerer med Rebka i bunden.

Fotonerne emitteres ved γ-henfald fra en exciteret tilstand af ^{57}Fe. Energien af de udsendte fotoner er $2{,}3 \cdot 10^{-15}$ J.

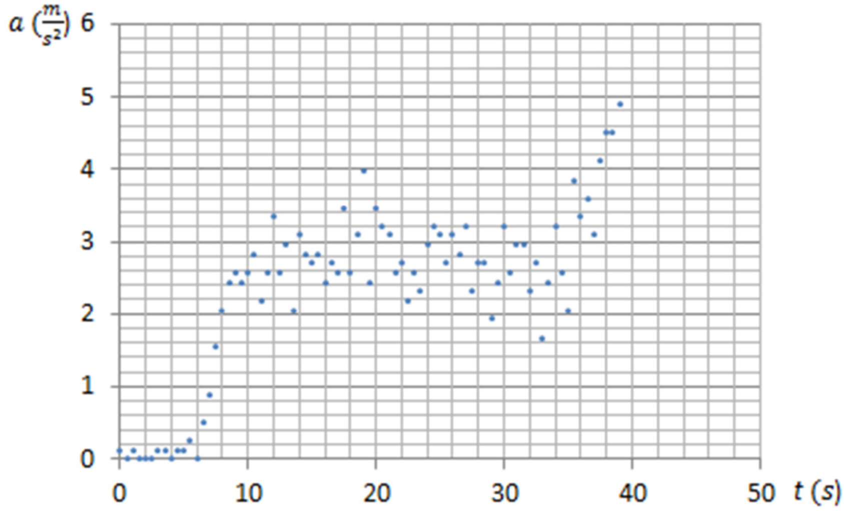
a) (1,0 point) Beregn frekvensen af de udsendte fotoner.

En foton med frekvensen f kan ifølge relativitetsteorien tilskrives en energi på $E = hf = mc^2$ hvor h er Planck konstanten, m er en størrelse, som svarer til at tilskrive fotonen en dynamisk masse og c er lysets fart. Når fotonen bevæger sig op gennem Jordens tyngdefelt til højden H, vil dens potentielle energi stige med mgH, men til gengæld vil dens frekvens falde, da fotonens samlede energi skal være bevaret.

b) (2,0 point) Bestem den relative frekvensændring, $\frac{\Delta f}{f}$, af de udsendte fotoner ved toppen af tårnet, idet f er frekvensen af fotonerne ved bunden af tårnet.

6. Boeing 737

På Fig. 8 er vist data optaget med et accelerometer (som fx det, der er indbygget i en iphone eller visse smartphones) af et Boeing 737-fly, der starter fra hvile og accelererer ud ad startbanen og letter. Ved det målte take-off var massen af flyet 60 ton.
Motorerne kan tilsammen maksimalt levere en fremadrettet kraft på 220 kN. En Boeing 737 har et samlet tværsnitsareal på 28 m^2 og luftens densitet ved startbanen var 1,20 kg/m^3, lufttrykket var 100 kPa og temperaturen 17 $^{\circ}$C.



Figur 8. Målinger af accelerationen som funktion af tiden for en Boeing 737, der accelererer ud ad en startbane og letter.

a) (1,5 point) Benyt de målte data til at give en vurdering af flyets fart, lige når det letter, og bestem den strækning, flyet tilbagelægger på startbanen i accelerationsfasen.

Flyet er ud over den fremadrettede kraft fra motorerne påvirket af en bagudrettet luftmodstandskraft, som er givet ved $F_{luft} = \frac{1}{2}\rho A C_d v^2$, hvor A er tværsnitsarealet af flyet, ρ den omgivende lufts densitet, og C_d den såkaldte luftmodstandskoefficient, som her har værdien 0,4.

b) (1,5 point) Hvor stor kraft leverer motorerne omkring tidspunktet t = 28 sekunder?

Luftens densitet varierer med højden og er givet ved formlen
$\rho = \frac{p_0 M}{R T_0}\left(1 - \frac{\alpha y}{T_0}\right)^{(Mg/R\alpha)}$, hvor R er gaskonstanten, g tyngdeaccelerationen ved jordoverfladen, M molarmassen af luft, og $p_0$trykket ved jordoverfladen. Endvidere betegner T_0 kelvintemperaturen ved jordoverfladen og α = 0,006 K/m er temperaturfaldet pr. meter.

I den typiske flyvehøjde på 10 km bevæger flyet sig med den konstante fart 900 km/h.

c) (2,0 point) Giv en vurdering af den effekt, som motorerne da leverer.

Opgavesættet slut

Løsninger

1. Lille modelkanon

a) $v_0 = \frac{x}{\left(\frac{2h}{g}\right)^{½}} = 6{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

b) $½mv_1^2 = ½mv_0^2 + mgl \Rightarrow v_1 = (v_0^2 - 2gl)^{½} = 6{,}08\,\frac{m}{s}$, og den søgte højde bliver derfor:

$y = \frac{v_1^2}{2g}$ = 1,88 m. Hvis man glemmer tyngdekraftens arbejde under afskydning fås: 2,03 m.

c) Hvis vinklen er α, bliver mundingsfarten: $v_2 = (v_0^2 - 2gl\sin\alpha)^{½}$.

Kastevidden er: $2v_2^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \ (v_0^2 - 2gl\sin(\alpha))\ 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$. Størsteværdien for denne funktion fås ved differentiation mht. α, eller ved at undersøge funktionen vha. lommeregner. Man får α=43,7°≈44°. (Hvis man glemmer tyngdekraftens arbejde under afskydningen får man som bekendt 45°).

2. a) ln2/5730 år = $121 \cdot 10^{-6}$ år = $3{,}83 \cdot 10^{-12}$ s.

b) 300 ton svarer til $3 \cdot 10^{5}$ kg/0,014 kg= $2{,}14 \cdot 10^{6}$ mol, eller $1{,}29 \cdot 10^{31}$ kerner. Aktiviteten af denne portion er henfaldskonstanten ganget med antal kerner, altså $1{,}56 \cdot 10^{27}$ år^{-1}. Denne aktivitet svarer til antallet af dannede kerner i atmosfæren. Der dannes altså $1{,}56 \cdot 10^{27}$ kerner hvert år. Dette antal svarer til 259 kmol eller 36 kg pr. år.

3. Fire små nødder

a) GPS satellit

Da gravitationskraften er eneste kraft på satellitten fås: $G \cdot \frac{mM}{r^2} = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} r$ eller $r = \left(G \cdot \frac{MT^2}{(4\pi^2)}\right)^{\frac{1}{3}} = 2{,}662 \cdot 10^7$ m. Jordens radius er $6{,}37 \cdot 10^{6}$ m, heraf fås højden over jordoverfladen til $(2{,}662-0{,}637) \cdot 10^{7}$m = $2{,}02 \cdot 10^{7}$ m.

b) Glaskugle

Da kuglen netop kan flyde, må dens gennemsnits densitet være lig med densiteten af vand. Heraf bestemmes kuglens ydre radius:

$$V = \frac{m}{\rho_{vand}} = \tfrac{4}{3}\pi \cdot r_{ydre}^3 \Rightarrow r_{ydre} = \left(\frac{3m}{4\pi\rho_{vand}}\right)^{\frac{1}{3}} = 0{,}076154\,\text{m} \approx 7{,}62\text{ cm}$$

Til bestemmelse af den indre radius anvendes, idet V_{glas} betegner rumfanget af glasset:

$$V_{glas} = \frac{m}{\rho_{glas}} = \tfrac{4}{3}\pi \cdot r_{ydre}^3 - \tfrac{4}{3}\pi \cdot r_{indre}^3 \Rightarrow r_{indre} = \left(\tfrac{3}{4\pi}\left(\frac{m}{\rho_{vand}} - \frac{m}{\rho_{glas}}\right)\right)^{\frac{1}{3}} = 0{,}06478\text{ m} \approx 6{,}48\text{ cm}$$

c) Den specifikke fordampningsvarme for nitrogen

Fx ved at forlænge de to retlinjede dele af grafen ses at loddet forårsager et ekstra vægtfald på $|\Delta m|$ =18 g. Herefter får $m_{lod} \cdot c \cdot |\Delta T| = |\Delta m| L$ eller $L = \frac{m_{lod} \cdot c \cdot |\Delta T|}{|\Delta m|}$=$2{,}3 \cdot 10^{3}$ J/kg. (Tabelværdien er $2{,}0 \cdot 10^{3}$ J/kg).

d) Halvlederdiode

Det benyttes, at $U = U_d + U_R$, hvilket giver $U = U_d + RI$. Når strømmen er I i kredsløbet kan U_{diode} bestemmes: Strømmen gennem dioden og modstanden er den samme, så

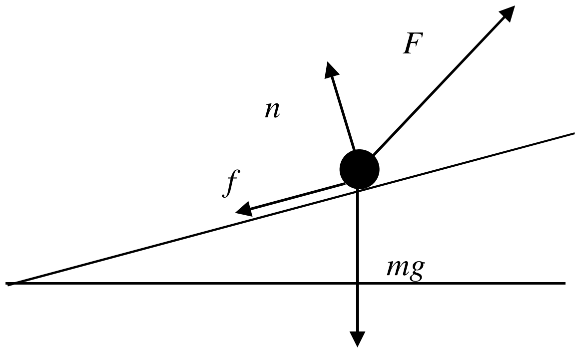
$U = U_d + RI_0(e^{\frac{eU_d}{k_B T}} - 1)$. Indsættelse af talværdier og løsning vha. CAS giver U_d = 0,206 V.

4. Skilift

a) og b)

Vi løser a) ved at løse b) for specialtilfældet $\beta = 0$. Et kraftdiagram er vist i figuren.

Sædvanlige koordinater op ad skråplanet og væk fra skråplanet.



N1(x): $\sum F_x = F\cos\beta - \mu_k n - mg\sin\theta = 0$

N1(y): $\sum F_y = n + F\sin\beta - mg\cos\theta = 0$

$n = mg\cos\theta - F\sin\beta$

$F\cos\beta - \mu_k\left(mg\cos\theta - F\sin\beta\right) - mg\sin\theta = 0$

$$F = \frac{mg\left(\sin\theta + \mu_k\cos\theta\right)}{\cos\beta + \mu_k\sin\beta}$$

Så for $\beta = 0$ fås $F = mg(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)$.

c)

For at finde den mindste værdi for trækkraften må vi finde minimum for

$$F = \frac{mg\left(\sin\theta + \mu_k\cos\theta\right)}{\cos\beta + \mu_k\sin\beta}$$

Det må findes når nævneren har maksimum. Vi finder dette:

$$\frac{d}{d\beta}\left(\cos\beta + \mu_k\sin\beta\right) = -\sin\beta + \mu_k\cos\beta = 0$$

Vælges vinklen som løsning til $\mu_k = \tan\beta$ fås den mindste trækkraft.

5. Pound-Rebkas fotoneksperiment

a) E= 14,4 keV = $8{,}669\cdot 10^{-15}$ J. Hvilket giver f $=1{,}308\cdot 10^{19}$ Hz.

b) Det benyttes at energiændringen af fotonenergien går til potentiel energi

$$hf - hf' = mgH$$

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{hf}{c^2}$$

Kombineres fås

$$hf - hf' = \frac{hf}{c^2}\cdot gH \quad \Leftrightarrow \quad \frac{h(f - f')}{hf} = \frac{gH}{c^2}$$

Dvs. $\dfrac{-\Delta f}{f} = \dfrac{gH}{c^2} \approx \dfrac{9{,}8\cdot 22{,}57}{(3{,}00\cdot 10^8)^2} \approx 2{,}5\cdot 10^{-15}$, altså en særdeles lille ændring.

6.

a) Arealet under grafen fra flyet starter kl. t=0 til det letter (estimeret til omkring t = 36 s, hvor accelerometerets visning ændrer sig, fordi flyets vinkel med vandret ændrer sig, og tyngdekraften begynder at vise sig i accelerometeret) bliver ca. 30 s·2,6 m/s^2 = 78 m/s = 274 km/h (take-off farten). Længden af startbanen finder vi som gennemsnitsfarten gange tiden, hvilket bliver ca. 1200 m$\pm$100 m.

b) Omkring t = 28 s er accelerationen omtrent 2,8 m/s^2. Den samlede kraft på flyet er derfor $ma =$

$60 \cdot 10^3$ kg · 2,8 m/s^2 = 168 kN. Farten på dette tidspunkt er omkring $v = a\ t =$ 2,5 m/s^2 · 28 s = 70 m/s, og luftmodstandskraften følgelig $F_{luft} = \frac{1}{2}\rho A C_d v^2 = 0{,}5 \cdot 1{,}2\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 28\ \text{m}^2 \cdot 0{,}4 \cdot 4900\,\frac{m^2}{s^2} = 33\ kN$, og motorerne skal derfor levere en kraft på $F_{motor} = ma + F_{luft} = 201$ kN, altså ikke langt fra maksimal ydelse.

c) Først bestemmes luftens densitet i flyvehøjden 10 km:

$$\rho = \frac{p_0 M}{R T_0}\left(1 - \frac{\alpha y}{T_0}\right)^{\left(\frac{Mg}{R\alpha}\right)} =$$

$$1{,}001 \cdot 10^5\ \text{Pa} \cdot \frac{0{,}029\frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{8{,}314\ \text{Pa}\frac{\text{m}^3}{\text{K}\cdot\text{mol}}\cdot 300\ \text{K}}\left(1 - 0{,}006 \cdot \frac{10000}{300}\right)^{0{,}029\cdot\frac{0{,}8}{8{,}314\cdot 0{,}006}} = 0{,}326\ \text{kg/m}^3.$$

Så bestemmes luftmodstandskraften $F_{luft} = \frac{1}{2}\rho A C_d v^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}326\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 28\ \text{m}^2 \cdot 0{,}4 \cdot \left(250\,\frac{m}{s}\right)^2 = 114\ kN$, hvilket størrelse motorkraften skal svare til. Motorerne skal derfor levere effekten $P = F_{motor} v = 114\ \text{kN} \cdot 250\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 28{,}5\ \text{MW}$.