Ed Doolittle 2007 Winter Camp

6 Exercices

Attention ! Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté croissante...

Exercice 1 (Crux Mathematicorum 2003).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x :

$$f\left(x^3 + x\right) \leqslant x \leqslant (f(x))^3 + f(x)$$

Exercice 2.
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ bornées et telles que, pour tous entiers n, k :

$$f(n+k) + f(k-n) = 2f(k)f(n)$$

Exercice 3 (Équation de Jensen).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et telles que, pour tous réels x, y :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Exercice 4 (D'après proposition OIM 1989).
Déterminer les réels a pour lesquels il existe une fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue et vérifiant les conditions suivantes :
i) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
ii) pour tous $x, y \in [0;1]$ avec $x \leqslant y$, on a $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1-a)f(x) + af(y)$.

Exercice 5 (OIM 1990).
Construire une fonction $f : \mathbb{Q}^{+*} \to \mathbb{Q}^{+*}$ telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^{+*}$:

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

Exercice 6 (D'après proposition OIM 1991).
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que, pour tous entiers m, n :

$$f(m + f(f(n))) = -f(f(m+1)) - n$$

Exercice 7 (Iran 1999).
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y,

$$f(f(x) + y) = f\left(x^2 - y\right) + 4yf(x)$$

Exercice 8.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et telle que, pour tous réels x, y :

$$f(x+y)f(x-y) = (f(x))^2$$

Prouver que f est identiquement nulle ou que f ne s'annule pas.

Exercice 9 (Proposé OIM 1996).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait $|f(x)| \leqslant 1$ et

$$f\left(x+\frac{13}{42}\right) + f(x) = f\left(x+\frac{1}{6}\right) + f\left(x+\frac{1}{7}\right)$$

Prouver que f est périodique.

Exercice 10 (Irlande 1999).
Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que
i) pour tous entiers a et b premiers entre eux $f(ab) = f(a)f(b)$
ii) pour tous nombres premiers p, q, $f(p+q) = f(p) + f(q)$
Prouver que $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ et $f(1999) = 1999$.

Exercice 11 (Corée 1999).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout réel $x \notin \{-1, 1\}$:

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x$$

Exercice 12 (OIM 1982).
Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ vérifiant les conditions suivantes :
i) pour tous entiers $m, n > 0$, $f(m+n) - f(m) - f(n) \in \{0, 1\}$
ii) $f(2) = 0$, $f(3) > 0$ et $f(9999) = 3333$
Déterminer $f(1982)$.

Exercice 13 (Tournoi des villes 1996).
Prouver qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait $f(f(x)) = x^2 - 1996$.

Exercice 14 (Turquie 1999).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :
i) l'ensemble $\left\{\frac{f(x)}{x}, x \in \mathbb{R}^*\right\}$ soit fini
ii) pour tout réel x, $f(x - 1 - f(x)) = f(x) - x - 1$

Exercice 15 (D'après proposition OIM 1997).
Existe-t-il deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x :

$$f(g(x)) = x^2 \quad \text{et} \quad g(f(x)) = x^3$$

Exercice 16 (D'après proposition OIM 1995).
Existe-t-il une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois conditions suivantes ?

i) il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout réel x, $-M \leqslant f(x) \leqslant M$
ii) $f(1) = 1$
iii) Si $x \neq 0$ alors,

$$f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$$

Exercice 17 (OIM 2002).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y, z, t :

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

Exercice 18 (OIM 1992).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y :

$$f\left(x^2 + f(y)\right) = y + (f(x))^2$$

Exercice 19 (OIM 1999).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y :

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

Exercice 20 (OIM 1977).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$f(n+1) > f(f(n))$$

Exercice 21 (OIM 1996).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que, pour tous entiers $m, n \geqslant 0$:

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

Exercice 22 (Italie 1999).
a) Déterminer toutes les fonctions strictement monotones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y :

$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$

b) Prouver que, pour tout entier $n > 1$, il n'existe pas de fonction strictement monotone $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y :

$$f(x + f(y)) = f(x) + y^n$$

Exercice 23 (Suisse 1999).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x non nul :

$$\frac{1}{x}f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

Exercice 24 (Vietnam 1999).
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que :
i) $f(0) = f(1) = 0$
ii) pour tous $x, y \in [0,1]$, on ait $2f(x) + f(y) = 3f\left(\frac{2x+y}{3}\right)$.
Prouver que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

Exercice 25 (Autriche-Pologne 1997).
Prouver qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que, pour tous entiers x, y :

$$f(x + f(y)) = f(x) - y$$

Exercice 26 (Ukraine 1997).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Q}^{+*} \to \mathbb{Q}^{+*}$ telles que, pour tout rationnel $x > 0$:

$$f(x+1) = f(x) + 1 \quad \text{et} \quad f\left(x^2\right) = (f(x))^2$$

Exercice 27.
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ et, pour tous réels x, y :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$$

Exercice 28 (Irlande 1997).
Déterminer tous les polynômes P tels que, pour tout réel x :

$$(x-16)P(2x) = 16(x-1)P(x)$$

Exercice 29 (Proposé OIM 1987).
Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to R$ une fonction telle que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. Prouver qu'il existe une fonction $u : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que :

$$u\left(\frac{x + \frac{1}{x}}{2}\right) = f(x)$$

pour tout réel $x > 0$.

Exercice 30 (URSS 1974).

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(1) = 1$ et $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel x. De plus, pour tous réels $x_1, x_2 \geqslant 0$ tels que $x_1 + x_2 \leqslant 1$, on a $f(x_1 + x_2) \geqslant f(x_1) + f(x_2)$.

a) Prouver que, pour tout réel x, on a $f(x) \leqslant 2x$.

b) Est-il exact que, pour tout réel x, on ait $f(x) \leqslant 1,9x$ et pourquoi ?

Exercice 31 (Proposé OIM 1989).

Soient $g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ une fonction, $a \in \mathcal{C}$ et $\omega \in \mathcal{C} \backslash \{1\}$ tel que $\omega^3 = 1$. Prouver qu'il existe une et une seule fonction $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ telle que :

$$f(z) + f(\omega z + a) = g(z)$$

pour tout $z \in \mathcal{C}$ et déterminer cette fonction f.

Exercice 32 (American Mathematical Monthly).

Soit $n > 1$ un entier. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y :

$$f(x + y^n) = f(x) + (f(y))^n$$

Exercice 33 (Roumanie 1999).

Déterminer toutes les fonctions monotones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x :

$$f(f(f(x))) - 3f(f(x)) + 6f(x) = 4x + 3$$

Exercice 34 (Proposé OIM 1995).

Montrer qu'il existe une et une seule fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que, pour tous entiers $m, n > 0$:

$$f(m + f(n)) = n + f(m + 95)$$

Quelle est la valeur de $\sum_{k=1}^{19} f(k)$?

Exercice 35 (Crux Mathematicorum).

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissantes et bijectives telles que, pour tout réel x :

$$f(x) + f^{-1}(x) = 2x$$

Exercice 36 (Proposé OIM 2000).

Trouver toutes les paires de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y :

$$f(x + g(y)) = xf(y) - yf(x) + g(x)$$

Exercice 37 (OIM 1998).

On considère toutes les applications $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que, pour tous entiers $s, t > 0$:

$$f\left(t^2 f(s)\right) = s(f(t))^2$$

Déterminer la plus petite valeur possible de $f(1998)$.

Exercice 38.
Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y :

$$(f(x) + f(y))f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2f(x)f(y)$$

Exercice 39 (Israël 1995).
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telles que, pour tous réels $x > 0$:

$$\alpha x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Exercice 40 (Autriche/Pologne 1994).
Soient a, b deux réels. Déterminer les fonctions à deux variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y, z :

$$f(x,y) = af(x,z) + bf(y,z)$$

Exercice 41 (Turquie 1996).
Prouver qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tous réels $x, y > 0$:

$$f(x+y) > f(x)(1 + yf(x))$$

Exercice 42 (OIM 1975).
Déterminer toutes les fonctions polynômiales à deux variables P qui vérifient les conditions suivantes :
i) il existe un entier $n > 0$ tel que, pour tous réels x, y, t, on ait $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$
ii) pour tous a, b, c réels, on a $P(b+c, a) + P(c+a, b) + P(a+b, c) = 0$
iii) $P(1, 0) = 1$

Exercice 43 (OIM 1986).
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ qui vérifient les conditions suivantes :
i) $f(2) = 0$
ii) pour tout $x \in [0, 2[$, $f(x) \neq 0$
iii) pour tous réels $x, y \geqslant 0$, $f(xf(y))f(y) = f(x+y)$

Exercice 44 (OIM 1993).
Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ qui vérifie les conditions suivantes ?
i) $f(1) = 2$
ii) pour tout entier $n > 0$, $f(f(n)) = f(n) + n$
iii) $f(n) < f(n+1)$

Exercice 45 (OIM 1994).
Déterminer les fonctions $f :]-1, +\infty[\to]-1; +\infty[$ qui vérifient les conditions suivantes :
i) pour tous réels $x, y > -1$, $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$
ii) la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est strictement croissante sur $]-1; 0[$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$