পূর্ণবর্গ সংখ্যা

আদীব হাসান

১১ আগষ্ট ২০১৬

কোন পূর্ণসংখ্যাকে নিজের সাথে গুণ করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তাকেই বলে পূর্ণবর্গ সংখ্যা। যেমন, 2 একটা পূর্ণসংখ্যা। এর বর্গ হল $2 \times 2 = 4$. অতএব 4 একটা পূর্ণবর্গ সংখ্যা। তেমনিভাবে কোন একটা পূর্ণসংখ্যা n হলে, এর বর্গ হবে $n \times n = n^2$. অতএব n^2 আকারের সকল সংখ্যাই (যেমন: $2^2, 3^2, 4^2 \ldots$) হল আসলে পূর্ণবর্গ সংখ্যা। এই নোটে আমরা পূর্ণবর্গ সংখ্যার কিছু বৈশিষ্ট্য আলোচনা করব।

১. মৌলিক সংখ্যা এবং গুণনীয়ক

পূর্ণসংখ্যা m যদি পূর্ণসংখ্যা n-কে নিঃশেষে ভাগ করে, তবে m-কে nএর গুণনীয়ক বা উৎপাদক বলা হয়। যেমন: 12 কে 6 নিঃশেষে ভাগ করে। তাই, 6 হল 12-র একটি গুণনীয়ক। 12-র অবশ্য অন্যান্য গুণনীয়কও আছে। সেগুলো হল,

$$\begin{aligned} 12 &= 1 \times 12 \\ &= 2 \times 6 \\ &= 3 \times 4 \end{aligned}$$

অর্থাৎ মোট 6টি।

বৈশিষ্ট্য ১.১: একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যার মোট গুণনীয়কের সংখ্যা সবসময় বেজোড় হবে।

উদাহরণ ১.১: 16 একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা। এর গুণনীয়কগুলো হচ্ছে, 1, 2, 4, 8, এবং 16; অর্থাৎ মোট 5টি।

প্রমাণ: যেকোন বর্গ সংখ্যা (ধর 16)-র গুণনীয়কগুলোকে উপরের 12-র মত লিখলেই কারণটা বুঝতে পারবে।

$$\begin{aligned} 16 &= 1 \times 16 \\ &= 2 \times 8 \\ &= 4 \times 4 \end{aligned}$$

12-র ক্ষেত্রে আমরা প্রতি লাইনেই দুটি করে ভিন্ন ভিন্ন গুণনীয়ক পাচ্ছিলাম। 16-র ক্ষেত্রেও তাই হচ্ছিল। কিন্তু, শেষ লাইনে গিয়ে দুটি 4 আসায় আমরা দুইটির বদলে একটি নতুন গুণনীয়ক পেলাম। তাই মোট গুণনীয়কের সংখ্যা হল বেজোড়। $\square$

সমস্যা ১: একটি ঘরে পাশাপাশি 1000টি লাইট জ্বলছে। প্রতিটি লাইটের একটি করে নির্দিষ্ট সুইচ আছে। কোন লাইটের সুইচ টিপলে সেটির অবস্থার পরিবর্তন হয়। (অর্থাৎ লাইটটি জ্বলতে থাকলে নিভে যায়, আর নিভে থাকলে জ্বলে ওঠে) একটি রোবট এসে সব কয়টি লাইটের সুইচ একবার করে টিপল। এরপর দ্বিতীয় একটি রোবট এসে 2, 4,..., 1000তম লাইটের

সুইচ একবার করে টিপল। এরপরে তৃতীয়, চতুর্থ $\ldots$ এভাবে করে n-তম রোবট এসে $n, 2n, 3n, 4n \ldots$-তম লাইটের সুইচ একবার করে টিপল। 1000টি রোবট পালা করে সুইচ টেপার পরে কয়টি লাইট জ্বলন্ত অবস্থায় থাকবে?

সমাধান: কোন লাইটের সুইচ জোড় সংখ্যক বার টেপা হলেই কেবলমাত্র সেটি সবশেষে জ্বলন্ত অবস্থায় থাকবে। লক্ষ করে দেখ যে m-এর যতগুলো গুণনীয়ক আছে, m-তম লাইটের সুইচ ঠিক ততবারই টেপা হচ্ছে। যেসব সংখ্যা পূর্ণবর্গ নয় শুধুমাত্র তাদেরই জোড় সংখ্যক গুণনীয়ক আছে। অতএব শুধু এই নম্বরের লাইটগুলিই জ্বলবে। এখন 1 থেকে 1000-এর মাঝে পূর্ণবর্গ সংখ্যা আছে 31টি$(1^2, 2^2, \ldots, 31^2)$। তাহলে এই 31টি নম্বরের লাইট নিভে যাবে। বাকি $1000 - 31 = 969$টি লাইট জ্বলন্ত অবস্থায় থাকবে। $\square$

বৈশিষ্ট্য ১.২: a^2 এবং b^2 দুটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হলে,

$$\gcd(a^2, b^2) = [\gcd(a, b)]^2$$

উদাহরণ ১.২: 15 ও 6এর $\gcd$ বা গসাগু 3. আবার 15^2 এবং 6^2এর গসাগু $9 = 3^2$.

প্রমাণ: ধর $\gcd(a, b) = g$; অর্থাৎ পূর্ণসংখ্যা a এবং bর গসাগু g. তাহলে, $a = gm$ এবং $b = gn$ লেখা যায় যেখানে m ও n পরস্পর সহমৌলিক[1] সংখ্যা। লক্ষ কর যে, $a^2 = g^2m^2$ এবং $b^2 = g^2n^2$. যেহেতু m ও n সহমৌলিক, তাই m^2 এবং n^2ও সহমৌলিক। সুতরাং g^2m^2 এবং g^2n^2 এর গসাগু নিঃসন্দেহে g^2. অর্থাৎ,

$$\gcd(g^2m^2, g^2n^2) = g^2 \implies \gcd(a^2, b^2) = [\gcd(a, b)]^2$$

$\square$

বৈশিষ্ট্য ১.৩: একটি মৌলিক সংখ্যা p যদি n^2কে নিঃশেষে ভাগ করে, তবে p^2ও n^2-কে নিঃশেষে ভাগ করবে।

উদাহরণ ১.৩: $30^2 = 900$কে 5 এবং 25 উভয়েই নিঃশেষে ভাগ করে।

প্রমাণ: n^2কে p নিঃশেষে ভাগ করে। তাহলে নিশ্চয়ই nকেও p নিঃশেষে ভাগ করে। সুতরাং আমরা লিখতে পারি, $n = pk$. অতএব, $n^2 = p^2k^2$. সুতরাং n^2-কে p^2-ও নিঃশেষে ভাগ করে। $\square$

অনুসিদ্ধান্ত ১.১: প্রতিটি জোড় মৌলিক সংখ্যার বর্গ 4 দ্বারা বিভাজ্য।

সমস্যা ২: a এবং b দুটি সহমৌলিক সংখ্যা এবং $ab = n^2$. তাহলে a এবং b উভয়েই পৃথকভাবে পূর্ণবর্গ সংখ্যা।

সমাধান: ধর, $\gcd(a, n) = g$. তাহলে আমরা লিখতে পারি, $a = gc$ এবং $n = gd$ যেখানে c, d পরস্পর সহমৌলিক। অতএব,

$$\begin{aligned} ab = n^2 &\implies gc \cdot b = g^2d^2 \\ &\implies cb = gd^2 \end{aligned} \tag{১.১}$$

সুতরাং $g|cb$ এবং $c|gd^2$.
কিন্তু $g|a$ বলে $\gcd(g, b) = 1$. সুতরাং $g|c$. একইসাথে $\gcd(c, d) = 1$ এবং $c|gd^2$ বলে $c|g$. তাহলে আমরা পাই, $c = g$. এবার (১.১) থেকে আমরা পাই, $b = d^2$ এবং $a = gc = g^2$. $\square$

[1]দুটি সংখ্যার গসাগু 1 হলে তাদেরকে পরস্পর সহমৌলিক সংখ্যা বলে

২. ভাগশেষ

বৈশিষ্ট্য ২.১: যেকোনো বেজোড় পূর্ণসংখ্যার বর্গকে 8 দিয়ে ভাগ করলে 1 ভাগশেষ থাকে।

প্রমাণ: ধর, n একটি বেজোড় বর্গ সংখ্যা। তাহলে লেখা যায় যে $n = 2k + 1$. অতএব,

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (2k+1)^2 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 - 1 \\ &= 4k(k+1) \qquad (২.১) \end{aligned}$$

k এবং $k+1$ দুটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা। সুতরাং এদের মাঝে একটি অবশ্যই জোড় এবং দুই দিয়ে বিভাজ্য। তাই $k(k+1)$-ও দুই দিয়েই বিভাজ্য। সুতরাং সমীকরণ (২.১)-এর ডানপক্ষ নিশ্চয়ই $4 \times 2 = 8$ দিয়ে বিভাজ্য।

সুতরাং, $n^2 - 1$কে 8 নিঃশেষে ভাগ করে। অতএব, n^2-কে 8 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ নিঃসন্দেহে 1. $\square$