অণুসম গণিত

নাম্বার থিয়োরি ভালোবাসেন কিন্তু কনগ্রুয়েন্স বা অনুসমতা সম্পর্কে ধারণা নেই এমন মানুষ একটিও সম্ভবত এই ধরাধামে খুঁজে পাওয়া যাবে না। কারণ ক্লাসিক্যাল নাম্বার থিয়োরির খুব বড় একটি অংশই যে রয়েছে এই মডুলার এরিথম্যাটিকের দখলে।

এবার ভূমিকা ছেড়ে মূল আলোচনায় আসা যাক। a এবং b সংখ্যা দুটিকে যদি c দ্বারা ভাগ করে একই ভাগশেষ পাওয়া যায় তবে বলা হয় **a এবং b হচ্ছে c ভাজকের সাপেক্ষে অনুসম বা কনগ্রুয়েন্ট**। কিংবা গণিতের ভাষায় $a \equiv b \pmod{c}$ পড়তে হয় 'a is congruent to b modulo c'

সমীকরণ আর কনগ্রুয়েন্স সহোদর না হলেও মাসতুতো-পিসতুতো ভাই কিনা, তাই দুজনের স্বভাব-চরিত্রে ভীষণ মিল। কনগ্রুয়েন্সের চিহ্নটার কথাই ধর না, '$=$' চিহ্নের সাথে মিল রেখে সেটা হয়েছে কেমন '$\equiv$'

শুধু এইটুকুতে সন্তুষ্ট না হলে চল কনগ্রুয়েন্সের আরও কিছু বৈশিষ্ট্য এই ফাঁকে দেখে নেই।

১) $a \equiv a \pmod{c}$

২) $a \equiv b \pmod{c}$ হলে $b \equiv a \pmod{c}$

৩) $a \equiv b \pmod{c}$ এবং $b \equiv d \pmod{c}$ হলে $a \equiv d \pmod{c}$

৪) $a \equiv b + d \pmod{c}$ হলে $a - b \equiv d \pmod{c}$

৫) $a \equiv b \pmod{c}$ হলে যেকোনো পূর্ণসংখ্যা d-র জন্য $a + d \equiv b + d \pmod{c}$ এবং $ad \equiv bd \pmod{c}$

৬) $a \equiv b \pmod{c}$ হলে $a^n \equiv b^n \pmod{c}$ যেখানে $n \in \mathbb{N}$

৭) যদি a-কে c দ্বারা ভাগ করে d ভাগশেষ থাকে তবে কিন্তু লেখা যায় $a \equiv d \pmod{c}$ কারণ $d = 0 \times c + d$ অর্থাৎ d-কে c দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ থাকে d !!!

৮) $a \equiv b \pmod{c}$ হলে $a + c \equiv b \pmod{c}$ (এবং সাধারণভাবে $a + kc \equiv b \pmod{c}$ যেখানে $k \in \mathbb{Z}$)

লক্ষ কর যে $(\text{mod } c)$-র অংশটুকু 'হলে'-র আগে ও পরে একই থেকেছে, একটুও পাল্টায়নি। মূল হিসেবে অংশ নেয় না বলেই হয়ত একে বন্ধনী দিয়ে আলাদা করে রাখা হয়।সমীকরণ আর কনগ্রুয়েন্সের সম্পর্ক এখানেই শেষ নয়; দুটো সমীকরণের মত দুটো কনগ্রুয়েন্সকেও যোগ, বিয়োগ বা গুণ করা যায়। অর্থাৎ যদি $a \equiv b \pmod{c}$ এবং একইসাথে $e \equiv f \pmod{c}$ হয় তাহলে,

$$a + e \equiv b + f (\text{mod } c); \quad a - e \equiv b - f \pmod{c}; \quad ae \equiv bf \pmod{c}$$

আর এক্ষেত্রেও খেয়াল রাখতে হবে যাতে সবগুলো কনগ্রুয়েন্সের $(\text{mod } c)$ অংশে c-র মান অভিন্ন থাকে। নয়ত বিরাট গণ্ডগোল পাকিয়ে যেতে পারে।

সমীকরণের সাথে কনগ্রুয়েন্সের কিছু পার্থক্যও আছে। যেমন, এখানে আমরা ধুম-ধাম ভাগ করতে পারি না, একটু বুঝেশুনে করতে হয়। কনগ্রুয়েন্সে ভাগ দুই ভাবে করা যায়:

১. $am \equiv bm \pmod{c}$ এবং m, c সহমৌলিক হলে বলা যায় $a \equiv b \pmod{c}$

২. $am \equiv bm \pmod{cm}$ থেকে লেখা যায় $a \equiv b \pmod{c}$

এতক্ষণ তো শুধু 'উপদেশ' দিয়ে গেলাম, এবার কাজে না নামলে কি হয়? চল কনগ্রুয়েন্সের কয়েকটা সমস্যায় এবার দাঁত বসিয়ে দেখা যাক কেমন লাগে।

সমস্যা ১: ডানদিক থেকে 3^{105}-এর প্রথম অঙ্ক দুটি কত?

সমাধান: নিশ্চয়ই অবাক লাগছে যে এই সমস্যায় কনগ্রুয়েন্স এল কোথা থেকে। কিন্তু লক্ষ করে দেখ কোনো সংখ্যাকে 100 দ্বারা ভাগ করলেই কিন্তু ডান দিকের প্রথম দুটি অঙ্ক ভাগশেষে বের হয়ে আসে। (যেমন, 1298-এর ক্ষেত্রে ভাগশেষ 98) তাই এখানে আসলে জানতে চাওয়া হয়েছে 3^{105}-কে 100 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ কত থাকবে। তাহলে আমাদের কাজটা কী দাঁড়ালো? $3^{105} \equiv ? \pmod{100}$-এই কনগ্রুয়েন্সে '?' চিহ্নের জায়গায় শর্ত পূরণ করে এমন ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা বসানো। লক্ষ্য কর $243 \equiv 43 \pmod{100}$. সুতরাং $3^{105} = 243^{21} \equiv 43^{21} \pmod{100}$. আবার দেখ $43^{21} = 43 \times 43^{20} = 43 \times 1849^{10}$. আমরা জানি $1849 \equiv 49 \pmod{100}$. তাহলে আগের মত লেখা যায় $43 \times 1849^{10} \equiv 43 \times 49^{10} \pmod{100}$. বাকি অংশটুকু আমি আর ব্যাখ্যা করে বললাম না। আশা করি আগের দুই বারের থেকে বুঝে নেবে। $43 \times 49^{10} = 43 \times 2401^5 \equiv 43 \times 1^5 = 43 \pmod{100}$.

এবার পুরো জিনিসটাকে গুছিয়ে লেখা যাক।

$$3^{105} \equiv 43^{21} \equiv 43 \times 49^{10} \equiv 43 \times 1^5 \equiv 43 \pmod{100}$$

তাহলে ৩ নং বৈশিষ্ট্য থেকে আমরা বলতে পারি $3^{105} \equiv 43 \pmod{100}$. অতএব অঙ্ক দুইটি 3 এবং 4.এবার একইভাবে বের করতে পার 4^{2012}-কে 17 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ কত থাকে।

তোমাদের বোঝানোর জন্য আমি এখানে বিস্তারিতভাবে লিখেছি। অলিম্পিয়াডে কিন্তু শর্টকাটে কাজ চালানো জায়েজ। যেমন এই প্রশ্নটাই আমি অলিম্পিয়াডে করলে শুধুমাত্র শেষের ঐ বিশাল জটিল এক লাইনই লিখতাম।

সমস্যা ২: $4a + 3b \equiv 1 \pmod 5$ এবং $b \equiv 2 \pmod 3$ হলে $3a + b$-কে 5 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

সমাধান: এখানে মূল সমস্যা হচ্ছে দুটো কনগ্রুয়েন্সে ভাজক ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা। তাই কনগ্রুয়েন্স যোগ, বিয়োগ ইত্যাদি নিয়মের কোনটাই এখানে সরাসরি ব্যবহার করা যাবে না। তবে এক্ষেত্রে কনগ্রুয়েন্সের ভাগের দুই নং নিয়মটি আমাদের বাঁচিয়ে দিতে পারে।

$$4a + 3b \equiv 1 \pmod 5 \Longleftrightarrow (4a + 3b)3 \equiv 3 \pmod{5 \times 3} \Longleftrightarrow 12a + 9b \equiv 3 \pmod{15}$$

$$b \equiv 2 \pmod 3 \Longleftrightarrow 5b \equiv 2 \times 5 \pmod{3 \times 5} \Longleftrightarrow 5b \equiv 10 \pmod{15}$$

প্রথম কনগ্রুয়েন্সে এই $5b$-র মান বসিয়ে দাও। এভাবে আমরা পাচ্ছি

$$12a + 9b \equiv 12a + 4b + 10 \equiv 3 \pmod{15} \Longleftrightarrow 12a + 4b \equiv -7 \equiv 8 \pmod{15}$$

যেহেতু 4 এবং 15 সহমৌলিক, সেজন্য ১ নং ভাগের নিয়ম থেকে আমরা বলতে পারি $3a + b \equiv 2 \pmod{15}$

আবার 15 নিজেই যেহেতু 5 দ্বারা বিভাজ্য, তাই লেখা যায়, $3a + b \equiv 2 \pmod 5$ অর্থাৎ ভাগশেষ 2. নতুনদের একটা জিনিসে খটকা লাগতে পারে যে আমার $-7 \equiv 8 \pmod{15}$ লেখাটা ঠিক হল কিনা। তাদের বলছি এটা সম্পূর্ণ সঠিক কেননা আমরা জানি $0 \equiv 7 + 8 \pmod{15}$ এবার ৪ নং বৈশিষ্ট্য থেকে এটা আসে।

সমস্যা ৩: এমন সব ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা x ও y বের কর যাতে করে নিচের সমীকরণটি সিদ্ধ হয়:

$$5^x - 1 = 7^y + 1$$

সমাধান: $5 \equiv -1 \pmod 3 \Longrightarrow 5^x - 1 \equiv (-1)^x - 1 = 0$ অথবা $1 \pmod 3$ (x জোড় হলে 0 অন্যথায় 1)

$7 \equiv 1 \pmod 3 \Longrightarrow 7^y + 1 \equiv 1^y + 1 = 2 \pmod 3$

অতএব সমীকরণের বামপক্ষকে 3 দিয়ে ভাগ করে ভাগশেষ পাওয়া যাচ্ছে 0 অথবা 1 কিন্তু ডানপক্ষকে ভাগ করে ভাগশেষ পাওয়া যাচ্ছে 2. একারণে ডানপক্ষ আর বামপক্ষ কখনও সমান হতে পারে না। সুতরাং এমন কোন x, y পাওয়া সম্ভব নয়।

ওপরের সমস্যায় আমি এত কিছু থাকতে কেন $\bmod 3$ নিলাম সে প্রশ্ন জাগাটাই স্বাভাবিক। এর উত্তরটা হচ্ছে -ইন্টুইশন! আসলে দীর্ঘদিনের অভ্যাস থেকে আমি জানি যে $\bmod 3, 4, 7, 8, 9, 11$ এসব নেওয়া খুব কাজে দেয়। আর এই ফাঁকে একটা দরকারি টোটকা শিখিয়ে দিচ্ছি, মন দিয়ে শিখে নাও।

$x^2 \equiv 0$ অথবা $1 \pmod 3$

$x^2 \equiv 0$ অথবা $1 \pmod 4$

$x^3 \equiv 0, 1$ অথবা $-1 \pmod 7$

$x^3 \equiv 0, 1$ অথবা $-1 \pmod 9$

এগুলো ম্যাজিকের মতই সমস্যার গতিবিধি পাল্টে দিতে ওস্তাদ। ঠিক মত এদের কাজে লাগিও, কেমন?

কিছু সমস্যা:

১) নিচের প্রথম সংখ্যাটিকে দ্বিতীয় সংখ্যা দ্বারা ভাগ করে ভাগশেষ নির্ণয় কর:

(i)$2^{1000}, 19$ (ii)$17^{209}, 12$ (iii)$5^{2012}, 2012$ (iv) $7^{603}, 22$ (v) $37!, 41$ (সাহায্য: $39! \equiv 1 \pmod{41}$)

২) তিন, পাঁচ ও এগার দ্বারা বিভাজ্যতার নিয়মগুলো নিজে নিজে প্রমাণ কর। চেষ্টা করে দেখ তো সাতের জন্য এমন কোন নিয়ম বানানো যায় কিনা। (সাহায্য: $10^6 \equiv 1 \pmod 7$)

৩) এমন ক্ষুদ্রতম ধ্বনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n নির্ণয় কর যা 101 দ্বারা বিভাজ্য এবং যার সাথে এক যোগ করে প্রাপ্ত সংখ্যাটি 103 দ্বারা বিভাজ্য।

৪) এমন সকল অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা x, y নির্ণয় কর যাতে নিচের এই সমীকরণটি সিদ্ধ হয়:

$$2^x + 1 = 3^y$$

৫) ধরা যাক, a একটি পূর্ণসংখ্যা এবং $m = 4a + 3.$ যদি m সংখ্যাটি 11 দ্বারা বিভাজ্য হয় তাহলে a^4-কে 11 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? (উৎস: তারিক আদনান মুন)

৬) 19 থেকে 92 পর্যন্ত সবগুলো পূর্ণসংখ্যা পাশাপাশি লিখে আরেকটি বড় পূর্ণসংখ্যা $N = 192021...9192$ গঠন করা হল। N যদি 3^k দ্বারা বিভাজ্য হয় তবে k-র সর্বোচ্চ মান কত হতে পারে? (উৎস: তারিক আদনান মুন)

৭) একটি পরীক্ষায় তেরো জন ছাত্রী এবং b জন ছাত্র অংশ নেয়। ফল প্রকাশের পর দেখা গেল যে ছাত্র ও ছাত্রীদের প্রাপ্ত সর্বমোট নাম্বার $b^2 + 10b + 17.$ আরও দেখা গেল ছাত্র-ছাত্রীদের নাম্বারের গড় একটি পূর্ণসংখ্যা। তাহলে ঐ পরীক্ষায় 'সর্বোচ্চ' কতজন ছাত্র অংশ নিয়েছিল? (উৎস: ড. মোহাম্মদ কায়কোবাদ)

আদীব হাসান
৯ম শ্রেণি, ময়মনসিংহ জিলা স্কুল
সদস্য, বাংলাদেশ গণিত দল ২০১২
২৩ অক্টোবর, ২০১২