# AM-GM অসমতা

আদীব হাসান

১৮ অক্টোবর ২০১৬

সারসংক্ষেপ

অসমতার জগতে তোমাকে স্বাগতম! এই নোটে তুমি শিখবে গণিতের সবচেয়ে মৌলিক অসমতাগুলোর একটি, যার নাম AM-GM অসমতা। অতি সাধারণ হওয়া সত্ত্বেও এই অসমতাটির দাপট কিন্তু কম নয়। অজস্র রকমের অসমতার সমস্যা এই AM-GM, কিংবা এর কোন না কোন দুঃসম্পর্কের আত্মীয় দিয়ে করে ফেলা যায়। শুধু কি তাই! Cauchy-Schwarz's inequality, Hölder's inequality, Muirhead's inequality সহ আরো অনেক 'স্মার্ট' অসমতার মূল ভিত্তি হল এই AM-GM.

## ১. AM এবং GM

তোমাকে AM-GM অসমতা দেখানোর আগে তো বলতে হবে এই 'AM' আর 'GM' দিয়ে কী বোঝায়, তাই না? নিচে এদের সংজ্ঞা দিচ্ছি, পড়ে নাও।

গাণিতিক গড় (Arithmetic Mean বা AM): এটা হল আমাদের সেই ছোটবেলায় শেখা গড়। ধর, তোমাকে $n$টি ধ্বনাত্মক বাস্তব সংখ্যা দেওয়া হল। এদের গাণিতিক গড় বা শুধু গড় হল, এই সংখ্যাদের যোগফলকে $n$ দিয়ে ভাগ করার পরের ভাগফলটি। যদি আমরা সংখ্যাগুলোকে $a_1, a_2 \ldots, a_n$ নাম দেই, তবে এদের গাণিতিক গড় বা AM হবে,

$$AM = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

জ্যামিতিক গড় (Geometric Mean বা GM): যদি আগের মত সংখ্যাগুলিকে আমরা $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ধরি, তবে তাদের জ্যামিতিক গড় বা GM হবে,

$$GM = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

আর হ্যাঁ, এক্ষেত্রেও প্রতিটি সংখ্যাকে ধ্বনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হতে হবে।

জ্যামিতিক গড়ের কটমটে সংজ্ঞাটি দেখে ভয় পাওয়ার কিছু নেই। এটাকে এভাবে চিন্তা কর: ধর, তোমার কাছে 2টি সংখ্যা $a_1$ এবং $a_2$ আছে। তাহলে এদের জ্যামিতিক গড় হবে $\sqrt{a_1 a_2}$. যদি 3টি সংখ্যা $a_1, a_2, a_3$ দেওয়া থাকে, তবে এদের জ্যামিতিক গড় হবে $\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$. যেমন: 2 ও 8 এর জ্যামিতিক গড় $\sqrt{2 \times 8} = 4$. আবার, $3, 3$ এবং 81-র জ্যামিতিক গড় $\sqrt[3]{3 \times 3 \times 81} = 9$. সহজ না? :-)

## ২. AM-GM অসমতা

AM-GM অসমতাটি বলে যে, $AM \geq GM$. অর্থাৎ,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \tag{২.১}$$

$$\implies a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \tag{২.২}$$

$$\implies \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 a_2 \cdots a_n \tag{২.৩}$$

$$\implies a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n \geq n a_1 a_2 \cdots a_n \tag{২.৪}$$

এবং অসমতার উভয়পক্ষে সমতা হবে যদি এবং কেবল যদি $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ হয়।

মনে রাখবে: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ এই ভেরিয়েবলগুলোকে অবশ্যই ধ্বনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হতে হবে।

পরিশিষ্টে এই অসমতার একটি প্রমাণ দেওয়া হয়েছে। কারও ইচ্ছে হলে দেখে নিতে পার।

## ৩. সমস্যা সমাধানে ব্যবহার

**সমস্যা ১:** $x$ একটি ধ্বনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

**প্রমাণ:** (২.২) থেকে আমরা পাই,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

□

**সমস্যা ২:** $a, b, c$ তিনটি ধ্বনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

**প্রমাণ:** (২.২) থেকে আমরা লিখতে পারি,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\geq 2ab \\ b^2 + c^2 &\geq 2bc \\ c^2 + a^2 &\geq 2ca \end{aligned}$$

এই তিনটি অসমতা যোগ করলেই আমাদের কাঙ্ক্ষিত অসমতাটি চলে আসবে। □

**সমস্যা ৩ (জাতীয় গণিত উৎসব ২০১০):** একটি বর্গক্ষেত্র এবং একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলে কার পরিসীমা বেশি?

**সমাধান:** ধরা যাক, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $a$, প্রস্থ $b$ এবং বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য $d$. দেওয়া আছে, $ab = d^2$. আমাদের বের করতে হবে আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা $2(a+b)$ এবং বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা $4d$র মাঝে কোনটি বড়। (২.২) থেকে আমরা জানি,

$$\begin{aligned} a + b &\geq 2\sqrt{ab} \\ \implies 2(a+b) &\geq 4\sqrt{ab} \\ &\geq 4\sqrt{d^2} \\ \therefore 2(a+b) &\geq 4d \end{aligned}$$

এবং সমতা হবে যদি এবং কেবল যদি $a = b$ হয়, অর্থাৎ, যদি আয়তক্ষেত্রটি নিজেই একটি বর্গক্ষেত্র হয়।

অতএব, আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা বড় হবে। □

**সমস্যা ৪:** $x, y, z$ ধ্বনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে,

(i) $x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x \geq 3xyz$

(ii) $x^3 + y^3 + z^3 \geq xy^2 + yz^2 + zx^2 \geq 3xyz$

**প্রমাণ:** (২.৪) থেকে পাই,

$$\begin{aligned} x^3 + x^3 + y^3 &\geq 3x^2y \\ y^3 + y^3 + z^3 &\geq 3y^2z \\ z^3 + z^3 + x^3 &\geq 3z^2x \end{aligned}$$

এই তিনটি অসমতা যোগ করে উভয়পক্ষকে 3 দিয়ে ভাগ করলেই পাওয়া যাবে

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x$$

আবার (২.২) থেকে আমরা লিখতে পারি,

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq 3\sqrt[3]{x^2y \cdot y^2z \cdot z^2x} = 3$$

অনুরূপভাবে (ii) নং অসমতাটিও প্রমাণ করা যায়। □

**সমস্যা ৫ (নেসবিট(Nesbitt)-এর অসমতা):** $a, b, c$ ধ্বনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

**প্রমাণ:** ধরা যাক, $a + b = x$, $b + c = y$ $c + a = z$. এবার সমস্যা ৪ থেকে আমরা পাই,

$$(x^2y + y^2z + z^2x) + (xy^2 + yz^2 + zx^2) \geq 6xyz$$

এই অসমতার উভয়পক্ষকে $xyz$ দিয়ে ভাগ করলে আসবে,

$$\begin{aligned} &\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} \geq 6 \\ \implies &\frac{a+2b+c}{c+a} + \frac{a+b+2c}{a+b} + \frac{2a+b+c}{b+c} \geq 6 \end{aligned}$$

এবার এই অসমতাটিকে সরল করলেই কাঙ্ক্ষিত অসমতাটি পেয়ে যাবে। □

**সমস্যা ৬ (রাশিয়া ২০০৪):** $a, b, c$ ধ্বনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং $a + b + c = 3$ হলে প্রমাণ কর যে,

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca$$

**প্রমাণ:** লক্ষ কর যে,

$$\begin{aligned}2(ab+bc+ca) &= (a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\\ &= 9-(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

অতএব আমাদের এটা প্রমাণ করলেই হয় যে,

$$\begin{aligned}2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) &\geq 9-(a^2+b^2+c^2)\\ \implies \sum_{cyc} a^2 + 2\sum_{cyc}\sqrt{a} &\geq 9\end{aligned}$$

শেষের অসমতাটি একবার AM-GM ব্যবহার করেই নিয়ে আসা যায়:

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} a^2 + 2\sum_{cyc}\sqrt{a} &= \sum_{cyc}(a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a})\\ &\geq 3\sum_{cyc} a\\ &= 9\end{aligned}$$

□

## ৪. অনুশীলনী

নিচের সব সমস্যায় ধরে নাও যে $a, b, c$ ধ্বনাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

১. দেখাও যে,

$$a^5+b^5+c^5 \geq ab^4+bc^4+ca^4$$

২. প্রমাণ কর যে,

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

৩. $a, b, c$ নিচের শর্ত দুটি মেনে চলে:

$$\begin{aligned}a+b &= c+2\\ c^2+4 &= 2ab\end{aligned}$$

$a, b, c$-র সকল মান নির্ণয় কর।

৪. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geq a+b+c$$

৫. $n$ একটি ধ্বনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $n > 1$ হলে প্রমাণ কর যে,

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\ln(n)$$

৬. দেখাও যে,

$$\frac{b^3+c^3}{c^2a+c^2b}+\frac{c^3+a^3}{a^2b+a^2c}+\frac{a^3+b^3}{b^2c+b^2a} \geq 3$$

## ৫. পরিশিষ্ট

AM-GM অসমতার একটি বিশেষ রূপ হচ্ছে Weighted বা ভারযুক্ত AM-GM. এটি এবং অন্যান্য অসমতা সম্পর্কে প্রাথমিক ধারণার জন্য দেখতে পার-

1. Basic of Olympiad Inequalities *by* Samin Riasat Nayel

অসমতা নিয়ে আরও বিস্তারিত পড়ার জন্য দেখতে পার-

1. Secrets in Inequalities *by* Pham Kin Han
2. Olympiad Inequalities *by* Thomas J. Mildorf

AM-GM অসমতার একটি গুরুত্বপূর্ণ জেনারেলাইজেশন হচ্ছে মুয়িরহেডের(Muirhead) অসমতা। এটি নিয়ে পড়ার জন্য দেখতে পার-

1. Mathematical Excalibur *vol 11, Num 1*