$\binom{n}{k}$ হচ্ছে Binomial coefficient অর্থাৎ n টি ভিন্ন জিনিস থেকে k টি ভিন্ন জিনিস যতভাবে নেওয়া যায়।

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

একটা ব্যাপার হয়তো তোমরা খেয়াল করেছ। আসলে আলাদা করে বিন্যাস বা P_k^n লাগে না। যদি তুমি ভালমত $\binom{n}{k}$ সেন্স করতে পারো, তাহলে! এটা দিয়েই সবকিছু করতে পারবে। যেমন, 12 টি ভিন্ন জিনিস থেকে 5 টি নেওয়া যায় কতভাবে? উত্তর $P_5^{12} = \dfrac{12!}{(12-5!)}$. কিন্তু এভাবে চিন্তা করঃ আগে তুমি যে কোন 5 টিকে নিয়ে নেও। এটা করা যায় $\binom{12}{5}$ উপায়ে। তারপরে ঐ ৫ টিকে আবার নিজেদের মধ্যে সাজানো যায় $5!$ ভাবে। তাহলে মোট উপায় $\binom{12}{5} \times 5!$.

Counting The Same Objects In two Different Ways.

1. দেখাও যে,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Solution. ধর, ১০টা ভিন্ন জিনিস থেকে ৪টা নেওয়া হচ্ছে। আমরা যতবারই ৪টা করে নির্বাচন করবো, প্রত্যেকবারই অন্যপাশে ৬টা করে বাদ যাবে। তার মানে যতভাবে ১০টা থেকে ৪টাকে নেওয়া যাবে, ততভাবেই ১০টা থেকে ৬টা বাদ পড়বে, যেটা আসলে $\binom{10}{6}$. তাই, $\binom{10}{4} = \binom{10}{6}$. সাধারণভাবে, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

এটা বীজগাণিতিক উপায়ে করা সম্ভব। কিন্তু আমরা এখানে কম্বিনেটরিয়াল প্রমাণই দেখবো। এভাবে একই জিনিস দুইভাবে হিসাব করে দুইটা রাশিকে সমান বলা যায়। অনেক সময়ই দেখবে এর মাধ্যমে এমন কিছু সহজে প্রমাণ করা যায় যা বীজগাণিতিক উপায়ে প্রমাণ করা অনেক কঠিন(পরে এমন উদাহরণ দেওয়া হবে)।

2.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Solution. এখানে ডানে n এর বদলে $n-1$. তাই আমাদের একটা বাদ না দিয়েও বাদ দেওয়ার বুদ্ধি করা লাগবে। এ ধরনের ক্ষেত্রে বেশীর ভাগ ক্ষেত্রেই যা করতে হয় সেটা হচ্ছে, যা থাকে ঐগুলির মধ্যে একটিকে নির্দিষ্ট করে ফেলতে হয়। ধর আমরা ১০ জন থেকে ৪ জনকে নিতে চাই। এখন যে কোন একজন, ধর মি. মফিজের কথা। আমাদের যে ৪ জনের দল হবে, সে দলে যদি মফিজ ভাই থাকেন তাহলে আমাদের দলে জায়গা খালি থাকে আর ৩টা, যাদের নেওয়া লাগবে বাকি ৯ জন থেকে, এটা করা যায় $\binom{9}{3}$ ভাবে। আর যদি তাকে না রাখি তাহলে আমাদের এখনো ৪ জনকেই নিতে হবে কিন্তু এবার যেহেতু মফিজ সাহেব বাদ, তাই ৯ জন থেকে ৪ জনকে নিতে হবে, যেটা করা যায় $\binom{9}{4}$ উপায়ে। তাহলে, $\binom{10}{4} = \binom{9}{3} + \binom{9}{4}$. n, k এর ক্ষেত্রে $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

3. এখন উপরের সমস্যার সাধারণ ফর্ম প্রমাণ কর।

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \ldots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$$

Hint. আগের বার একবার শুধু একজনকে নির্দিষ্ট করা হয়েছিল। এইবার প্রত্যেকবার একজনকে নির্দিষ্ট করে ১ করে কমাতে থাকো যতক্ষণ $\binom{r}{r}$ এ না যায়।

4.

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Solution. আমরা একটা উদাহরণ নেই। ধর, $n = 3$. আর তোমার কাছে ৬ জন মানুষ আছে যাদের থেকে তুমি ৩ জনকে নিবে। এটা করা যায় $\binom{6}{3}$ ভাবে। এখন একে আবার উপরের মত করে দুই ভাগ করি। প্রত্যেক ভাগে ৩ জন করে। ধর ভাগ দুইটা A, B. এখন তুমি দুইটা ভাগ থেকে মোট ৩ জন নিবে। তুমি প্রথমে A থেকে কাউকেই নিলে না(যেটা করা যায় $\binom{3}{0}$ ভাবে), তাহলে B থেকে ৩ জনকে নিতে হবে(যেটা করা যায় $\binom{3}{3}$ ভাবে)। তাহলে এটা করা গেল $\binom{3}{0}\binom{3}{3}$ ভাবে. এরপরে A থেকে ১ জনকে নেও($\binom{3}{1}$) তাহলে B থেকে ২ জনকে নিতে হবে($\binom{3}{2}$)। এটা হবে $\binom{3}{1}\binom{3}{2}$ ভাবে। A থেকে ২ জন আর B থেকে ১ জন নিলে $\binom{3}{2}\binom{3}{1}$ ভাবে। আর A থেকে ৩ জন নিলে B থেকে 0 জন নেওয়া লাগবে। তাহলে,

$$\binom{6}{3} = \binom{3}{0}\binom{3}{3} + \binom{3}{1}\binom{3}{2} + \binom{3}{2}\binom{3}{1} + \binom{3}{3}\binom{3}{0}$$

যেহেতু $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

$$\binom{3}{0}\binom{3}{3} = \binom{3}{0}^2$$

এভাবে

$$\binom{6}{3} = \binom{3}{0}^2 + \binom{3}{1}^2 + \binom{3}{2}^2 + \binom{3}{3}^2$$

n এর ক্ষেত্রে

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2$$

এটা এবার বীজগাণিতিকভাবে করতে চেষ্টা কর।

5 (Vandermonde Convolution Formula)**.** একইভাবে চেষ্টা করে প্রমাণ করঃ

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

6.

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$$

Solution. আমরা আগে বামেরটাকে কোনভাবে নিয়ে আসি। ধর $1, 2, 3, ..., 4$ সংখ্যাগুলো থেকে এমন সব (x, y, z) এর সংখ্যা হিসাব করি যাতে x আর y এর যে কোনটির চেয়ে z বড় হয়। যদি $z = 4$ হয় তাহলে x এবং y দুইটার জন্যই 3 টা করে চয়েস থাকে কারণ x, y ১ থেকে ৩ পর্যন্ত যে কোনটি হতে পারে। তাই এখানে মোট চয়েস $3 \cdot 3 = 3^2$ টা। একইভাবে $z = 3, 2$ এর জন্য যথাক্রমে চয়েস $2^2, 1^2$ টা। তাহলে এমন ত্রয়ী (x, y, z) থাকবে মোট $1^2 + 2^2 + 3^2$ টা। আবার একই ত্রয়ী হিসাব করবো কিন্তু অন্যভাবে। এখানে $x = y$ হতে পারে অথবা $x < y$ হতে পারে অথবা $y < x$ হতে পারে। প্রথমটা হতে পারে $\binom{n+1}{2}$ উপায়ে(কেন?)। আর পরের দুইটাই হতে পারে $\binom{n+1}{3}$ উপায়ে(কেন?)।

7. এবার নিজে নিজে করঃ

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \binom{n+1}{2} + 6\binom{n+1}{3} + 6\binom{n+1}{4}$$

মাঝে মাঝে বিন্দু দিয়ে চিন্তা করলে সুবিধা হয়।

8. প্রমাণ কর

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

Solution. প্রথমেই দেখো যে, বামে যা আছে সেটা হচ্ছে $2n$ টা বিন্দু থেকে যতভাবে 2 টা বিন্দু যোগ করে একটা রেখা বানানো যায় তা। অন্যদিকে, ডানে $2n$ এর অর্ধেক n আছে। তাই আমরা ও ঠিক এই কাজটাই করি। $2n$ টা পয়েন্টকে সমান দুই ভাগে ভাগ করি যাতে প্রত্যেক ভাগে n টা করে বিন্দু পড়ে। এখন আমরা যতভাবে দুইটা করে বিন্দু যোগ করা যায় সেটা হিসাব করি। এখন যদি দুইটা বিন্দু যোগ করে রেখা বানাতে হয় তাহলে দুইভাবে কাজটা করা যায়, একটা ভাগে যে n টা বিন্দু আছে তাদের নিজেদের মধ্যে যতগুলি রেখা টানা যায়, যেটা হয় $\binom{n}{2}$ উপায়ে, যেহেতু দুইটা ভাগ তাই $2\binom{n}{2}$. আর যদি এক ভাগের বিন্দু অন্য ভাগের বিন্দুদের সাথে যুক্ত হয়। একভাগের একটা বিন্দু অন্য ভাগের n টা বিন্দুর সাথে যোগ হয়ে রেখা বানাতে পারে। তাহলে ঐ ভাগের n টা অন্য ভাগের n টার সাথে যুক্ত হলে n^2 টা রেখা পাওয়া যায়। তাহলে,

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

9. এবার এটা নিজে নিজে প্রমাণ করঃ

$$\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$$

10. ধর তোমার বাসায় কেউ খেতে গেল। তোমার কাছে ৩ টা কমলা, ৫ টা আপেল আর ৪ টা পেয়ারা আছে। তুমি তাকে কতভাবে খাওয়াতে পারো?(বাঙালি হিসেবে না খাইয়ে ছাড়বে না)

Solution. $\underline{K}\ \underline{A}\ \underline{P}$, এখানে K, A, P পাত্রে যথাক্রমে কমলা, আপেল আর পেয়ারা দিবে। এখন K পাত্রে তুমি চাইলে কোন কমলা না দিতে পারো, অথবা ১ টা দিতে পারো, অথবা ২ টা অথবা ৩ টা, মোট চারটা চয়েস

থাকে তোমার হাতে(একটা ও দিলে না, এইজন্য চয়েস একটা বাড়বে)। একই ভাবে A পাত্রে চয়েস থাকবে ৬ টা। আর পেয়ারার ক্ষেত্রে চয়েস থাকবে ৫ টা। তাহলে মোট চয়েস ৪*৬*৫=১২০ তা। কিন্তু এদের মধ্যে একটা এমন চয়েস $\underline{0}\ \underline{0}\ \underline{0}$ থেকে যায় যেটাতে তুমি কিছুই দেও নি। যেহেতু এটা করা যাবে না, তাই ১ বিয়োগ করতে হবে। অর্থাৎ উত্তর ১১৯ হবে।

11. একটি ৮*৮ দাবা বোর্ডে কতভাবে ৮টা নৌকাকে বসানো সম্ভব যাতে তারা একটা আরেকটাকে আক্রমণ না করে?

Solution. প্রথমে ধর আমরা যে কোন একটা ঘরে একটা নৌকাকে বসাবো। এর জন্য আমাদের হাতে ঘর আছে 8^2 টা। একটা বসিয়ে ফেললে, ঐ ঘর বরাবর সারি আর কলাম দুইটাতেই আর কোন নৌকা বসানো যাবে না। তখন আমাদের হাতে থাকে 7^2 টা ঘর। এভাবে, তারপরে $6^2, \ldots, 1^2$ টা ঘর থাকবে। তাহলে মোট উপায় $8^2 \cdot 7^2 \cdots 1^2 = 8!^2$. কিন্তু নৌকাগুলো দেখতে যেহেতু একইরকম, আর এই ৮টা নৌকাকে নিজেদের মধ্যে $8!$ উপায়ে সাজানো যায়, তাই আমাদের আবার $8!$ দিয়ে ভাগ করতে হবে। তাহলে সমাধান হয় $8!$.

12. $n = 2^{30}3^{18}$. তাহলে n^2 এর কয়টি উৎপাদক থাকবে যারা n কে ভাগ করে না?

Solution. $n^2 = 2^{60}3^{36}$. এখানে n^2 এর একটি উৎপাদককে $d = 2^a3^b$ হিসেবে ধরা যায়। এখন d দিয়ে n ভাগ যাবে না যদি $60 \geq a > 30$ অথবা $18 < b \leq 36$ হয়। এমন a আছে $(60-30) = 30$ টা আর এমন b আছে $(36-18) = 18$ টা। এখন $31 \leq a \leq 60$ হলে যে কোন b এর জন্যই $2^a3^b, n$ কে ভাগ করবে না। তাহলে এটা হতে পারে $30 \cdot 37$ ভাবে, কারণ $0 \leq b \leq 36$ হতে পারে। আবার $19 \leq b \leq 36$ হলে যে কোন a এর জন্যই $2^a3^b, n$ কে ভাগ করে না। এটা হতে পারে $61 \cdot 18$ ভাবে। তাহলে মোট এমন উৎপাদক থাকবে $30 \times 37 + 61 \times 18$ টা।

13. এখন বের কর যে, একটা সংখ্যার কয়টা উৎপাদক থাকে?

Hint. ধরে নেও যে, n এর মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ

$$n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_2}$$

যেখানে $p_1, p_2, \ldots, p_k$ হচ্ছে n এর ভিন্ন মৌলিক উৎপাদকসমূহ। দেখো যে, তোমার উত্তর $(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)$ আসে কিনা।

14. ৪০ জন মুভার্স গোল হয়ে বসে আছে। এদের মধ্যে থেকে ৩ জনকে নিতে হবে। কিন্তু শর্ত হচ্ছে তাদের মধ্যে অন্তত দুইজনকে ক্রমিক হতে হবে, তার মানে তারা নির্বাচনের আগে একসাথে বসে ছিল। কতভাবে করা যাবে?

Solution. প্রথমে, খেয়াল কর যে এখানে ক্রম গুরুত্বপূর্ণ না। যেহেতু দুই জনকে ক্রমিকভাবে একসাথে বসে থাকতে হবেই, আগে আমরা দেখি কতগুলি ক্রমিক জোড়া বানানো যায়। পাশাপাশি দুইজনকে নিতে থাকলে এমন জোড়া বানানো যায় ৪০ টা। এখন যে কোন এক জোড়া নিলাম। এটা করা যায় $\binom{40}{1} = 40$ ভাবে। দুই জনকে নিয়ে নেওয়ার পরে আর বাকি থাকে ৩৮ জন। অন্য একজনকে ঐ ৩৮ জন থেকে নিয়ে নিলেই আমাদের তিন জন হবে। এটা করা যায় $\binom{38}{1} = 38$ ভাবে। তাই কাজটা করা যাবে মোট $40 \times 38 = 1520$ ভাবে।[1]

[1] $40 \times 38 = (39+1) \times (39-1) = 39^2 - 1 = 1520$:p

15. দুটি সমান্তরাল সরলরেখার একটিতে n টি এবং আরেকটিতে m টি বিন্দু রয়েছে। এদেরকে যোগ করলে এদের মাঝে কয়টি ছেদবিন্দু পাওয়া যাবে?

Solution. এই ধরনের কোন সমস্যা পেলে সবার আগে চিন্তা করবে যে ছেদবিন্দুগুলি কিভাবে আসে? n আর m এর ছোট কয়েকটি মান নিয়ে যোগ করে দেখলেই বুঝবে যে, আসলে একটি সরলরেখা থেকে দুটি বিন্দু আর অন্যটি থেকে দুটি বিন্দু নিয়ে যদি কোণাকুণি যোগ কর তাহলেই শুধু ছেদবিন্দু পাওয়া যায়। তার মানে মোট ছেদবিন্দু পাওয়া যাবে $\binom{m}{2}\binom{n}{2}$ টি।[2]

16. একটি সুষম $n-$ভুজের কর্ণগুলি ছেদবিন্দু কয়টি?

Solution. এখানে ও আগের মত দেখো যে কখন তুমি দুইটা কর্ণের ছেদবিন্দু পাও? দেখো যে, তোমার উত্তর $\binom{n}{4}$ আসে কিনা।

মাঝে মাঝে রিকার্সন অনেক কাজে দেয়। রিকার্সন বা রিকারেন্স সম্বন্ধে কোন ধারণা আসলে লাগে না। ধর, একটি ফাংশন $f(n)$ শুধু n এর জন্য মান দেয়। তাহলে তুমি যদি $f(n)$ কে কোন ভাবে $f(n-1), f(n-2), \ldots$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারো তাহলে এটা ও একটা সমাধান। এখানে আমরা আসলে n এর ক্ষেত্রে মান কি হবে সেটা তার আগের মান অর্থাৎ $n-1, n-2$ এদের জানা মান থেকে বের করে নিয়ে আসি। যেমন নিচের উদাহরণগুলো দেখো তাহলে আরো বুঝবে।

17. একটি পার্টিতে সবাই সবার সাথে হ্যান্ডশেক করে, কিন্তু কেউ একজনের সাথে দুইবার নয়। তাহলে মোট কয়বার হ্যান্ডশেক করা হবে?

Solution. যেহেতু দুইজন মিলে হ্যান্ডশেক হয় তাই যতভাবে দুইজন নেওয়া যায় ততগুলো হ্যান্ডশেক করা হবে। তার মানে $\binom{n}{2}$. কিন্তু এখানে আমরা রিকার্সন এর মাধমে সমাধান দেখি। খেয়াল করে দেখো, $n-$তম ব্যক্তি অন্য $n-1$ জনের সাথে হ্যান্ডশেক করবে। আর বাকি $n-1$ জনের মধ্যে হ্যান্ডশেক হবে $f(n-1)$ টা। তাই যদি n জনের ক্ষেত্রে উত্তর হয় $f(n)$ তাহলে $f(n) = f(n-1)+n-1$ যেখানে $f(1) = 0$ কারণ একা একা হ্যান্ডশেক হয় না।[3]

18. কতগুলি সরলরেখা ছেদ করলে সর্বোচ্চ কতগুলি ছেদবিন্দু হতে পারে?

Solution. প্রথমে এটা বুঝো যে, ছেদবিন্দুর সংখ্যা সর্বোচ্চ হবে যদি কোন তিনটিই এক সরলরেখায় না থাকে। এখন ধরি n টা সরলরেখার ক্ষেত্রে সমাধান $f(n)$. আগের সমস্যার মতই দেখো একটা সরলরেখা অন্য $n-1$ টি সরলরেখাকে $n-1$ টি বিন্দুতে ছেদ করতে পারে যা নতুন ছেদবিন্দু হিসেবে যোগ হবে। তাই $f(n) = f(n-1)+n-1$. বাকিটা নিজে শেষ কর।[4]

19. একটি $2 \times n$ আয়তক্ষেত্রকে তুমি 2×1 আয়তক্ষেত্র, বা অন্য কথায় ডোমিনো দিয়ে কতভাবে সাজাতে পারো?

---

[2]এই সমাধান ঠিক মত বুঝাটা খুব জরুরী।

[3]এটা নিশ্চয়ই খেয়াল করেছো যে রিকার্সন এ কিছু ছোট মান হাতে বের করতে হয় যাতে পরের গুলো এ থেকে বের করা যায়, এদের বলে Base Case. যে কোন রিকার্সনেই এটা খুব দরকার।

[4]হ্যান্ডশেক সমস্যার মত এখানে কিভাবে বলতে পারতে যে উত্তর $\binom{n}{2}$?

Solution. প্রথমে তোমার মনে হতে পারে যে এটা হিসেব করতে গেলে পাগল হয়ে যাওয়ার কথা। কিন্তু রিকার্সন কাজটা করে দেয়। কিভাবে দেখো।

ধর $2 \times n$ আয়তক্ষেত্রকে মোট $f(n)$ উপায়ে ডোমিনো দিয়ে পূরণ করা যায়। প্রথমে $n = 1, 2$ এর মান আমরা হাতেই বের করে নিতে পারি। এবার ধর আমরা $n > 2$ এর জন্য মান বের করতে চাই। কিছু ব্যাপার চিন্তা করে বুঝতে চেষ্টা কর। তুমি সবার শুরুতে একটা ডোমিনো বসাবে। যদি 2×1 কে $2 \times n$ আয়তক্ষেত্রে ভূমির সমান্তরালে বসাও তাহলে ঠিক এর উপরে ও আরেকটি বসাতে হবে ভাঙ্গা অংশ ম্যাচ করানোর জন্য। তখন আমাদের হাতে পড়ে থাকে $2 \times n - 2$ আয়তক্ষেত্র যা পূরণ করা যায় $f(n-2)$ ভাবে। আর যদি তুমি এটা লম্বভাবে বসাতে চাও তাহলে তোমার হাতে অবশিষ্ট থাকবে $2 \times n - 1$ আয়তক্ষেত্র যা পূরণ করা যায় $f(n-1)$ উপায়ে। তাহলে $2 \times n$ এর ক্ষেত্রে মোট $f(n-1) + f(n-2)$ ভাবে বসানো যায়, অর্থাৎ $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ যা আসলে ফিবোনাক্কি সংখ্যা.

20. ধর পরপর দুইটা ০ আসবে না এমন শুধু ০,১,২ দিয়ে যতগুলি স্ট্রিং বানানো যায় তার সংখ্যা হচ্ছে $f(n)$. তাহলে এর জন্য রিকার্সন বের কর।

21. a, b, c, d দিয়ে কতগুলি শব্দ বানাতে পারবে যাতে a আর b কখনো পাশাপাশি না থাকে?

22. একটা $2 \times n$ আয়তক্ষেত্রকে 1×1 বর্গ, 2×1 ডোমিনো আর 2×2 বর্গ দিয়ে কতভাবে পূরণ করা যাবে?

23. একটি দৌড় প্রতিযোগিতায় $n-$টি ঘোড়া কতভাবে দৌড় শেষ করতে পারে?(অবশ্যই ড্র হতে পারে)

Solution. এ ক্ষেত্রে কিভাবে রিকার্সন কাজে লাগাবে? আগে নিজে কিছুক্ষণ চিন্তা করে দেখো খুজে পাও কিনা। না পেলে নিচে দেখো।

আমরা ধরে নেই $n-$টা ঘোড়া $f(n)$ উপায়ে খেলা শেষ করে। এখন আমরা $f(n-1)$ এ কিভাবে সুইচ করবো? অবশ্যই একটা ঘোড়াকে বাদ দিতে হবে বা অন্য কিছু করতে হবে। এই বাদ দেওয়ার কাজটাই আসলে বাদ না দিয়ে করতে হয়। এর আগের গুলোতে ও কিন্তু একই কাজ করা হয়েছে, যদি না লক্ষ্য করে থাক তাহলে আবার উপরে যাও, দেখো টের পাও কিনা কিভাবে n থেকে লাফ দিয়ে আমরা $n-1$ এ গিয়েছিলাম। এবার ও এই কাজটাই করা লাগবে। কিন্তু কিভাবে? এই কাজটাই আসলে রিকার্সনের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ অংশ।

দেখো, আমরা যদি শুধু কয়টা ঘোড়া প্রথম হয় সেটা নিয়ে চিন্তা করি তাহলেই হয়ে যায়(অথবা কয়টা হেরে যায়, একই)। যেহেতু ড্র আছে তাই একাধিক ঘোড়া প্রথম হতে পারে। ধর প্রথম একটা ঘোড়া প্রথম হবে। কিন্তু কোন ঘোড়া প্রথম হবে সেটা আবার নির্বাচন করার ব্যাপার আছে। n টা ঘোড়া থেকে একটা নির্বাচন করা যায় $\binom{n}{1}$ ভাবে। তাহলে অন্যদিকে ঘোড়া পড়ে থাকে $n-1$টা। তারা নিজেদের মধ্যে খেলা শেষ করবে $f(n-1)$ ভাবে। এখন যদি দুইটা ঘোড়া প্রথম হয় তাহলে $\binom{n}{2}$ উপায়ে এই দুইটাকে নেওয়া যাবে আর অন্য $n-2$টা খেলা শেষ করে $f(n-2)$ উপায়ে। এভাবে,[5]

$$f(n) = \binom{n}{1} f(n-1) + \binom{n}{2} f(n-2) + \ldots + \binom{n}{n-1} f(1) + \binom{n}{n} f(0)$$

[5] Stirling Number দিয়ে এর সমাধান করা যায়। চেষ্টা কর।

আর রিকার্সন কোথায় কাজে লাগবে তা ঠিক মত ধরতে হবে। যেমন নিচের বিখ্যাত সমস্যাটি ও রিকার্সন দিয়ে করা যায়।

24. একটি গ্রাফে $(0, 0)$ বিন্দু হতে (m, n) বিন্দুতে সর্বনিম্ন সংখ্যক ধাপে কতভাবে যাওয়া যায়?

Solution. প্রথমে বের করা লাগবে কখন সর্বনিম্ন সংখ্যক ধাপ হয়? এটা সহজেই বোঝা যায় যে, একবার যদি ডানে যাও তাহলে আর বামে যাবে না আর একবার যদি উপরে উঠো তাহলে আর নিচে নামবে না এই নীতি মানলেই সর্বনিম্ন সংখ্যক ধাপে যাওয়া যাবে। তার মানে হচ্ছে আমাদের যাওয়ার জন্য শুধু দুই ধরনের ধাপ আছেঃ উপরে যাওয়া অথবা ডানে যাওয়া।

ধরি (m, n) বিন্দুতে $f(m, n)$ উপায়ে যাওয়া সম্ভব। (m, n) বিন্দুতে কিভাবে যাওয়া যায়? এখানে যেতে হলে $(m, n-1)$ অথবা $(m-1, n)$ এই দুইটার যে কোন একটাতে আগে আসতে হবে। তাহলে $(m, n-1)$ বিন্দুতে যতভাবে আসা যায় আর $(m-1, n)$ বিন্দুতে যতভাবে আসা যায় তার সমষ্টি হচ্ছে (m, n) বিন্দুতে যতভাবে আসা যাবে সেটা। তার মানে, $f(m, n) = f(m-1, n) + f(m, n-1)$.[6]

25. উপরের সমস্যাটাই আবার অন্যভাবে সমাধান কর। এখানে একভাবে করা আছে, যাতে একটা ফর্মুলা পাওয়া যায়। এবং এখন যে আইডিয়া দিয়ে এটা প্রমাণ করা হবে, কম্বিনেটরিক্সে এর অনেক প্রয়োগ আছে।

Solution. $(0, 0)$ থেকে (m, n) এ যাওয়ার কয়েকটা উপায় আমরা দেখি। এখানে একটা R মানে ডানে আর U মানে উপরে বোঝানো হবে। আর আমরা ধরে নেই, আমর (৩,২) বিন্দুতে আমরা যেতে চাই। তাহলে দুইবার ডানে, একবার উপরে, তারপরে একবার ডানে আর শেষ একবার উপরে এটা হবে $RRURU$. $RUURR$ এটা অন্য আরেকটি উপায় বোঝাবে। তার মানে তুমি যেভাবেই যাও না কেন তোমাকে তিনবার ডানে আর দুইবার উপরে যেতেই হবে। অর্থাৎ তিনটা R আর দুইটা U এর এক একটা বিন্যাস এক-একটা যাওয়ার উপায় বোঝাবে। এখন, এখানে মোট R, U আছে ৫টা যাদের বিন্যাস $5!$. কিন্তু এদের মধ্যে তিনটা R আর দুইটা U একই, যে জন্য $3! \cdot 2!$ দিয়ে ভাগ করা লাগবে। তাহলে, উপায় পাওয়া গেল $\dfrac{5!}{2!3!} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$. (m, n) এর ক্ষেত্রে হবে $\binom{m+n}{m}$. এভাবে কোন একটা কোড হিসেবে কোন কিছু বের করার ধারণাকে অনেক বইয়ে কোডিং বা এনকোডিং বলে।

26. শুধু ১ আর ০ আছে এমন সংখ্যাকে বাইনারি স্ট্রিং বলে। কতগুলি ১০ দৈর্ঘ্যের বাইনারি স্ট্রিং আছে যাতে ঠিক ৪টা ০ থাকে?

Solution. এবার ও একই। ১০১০০০১১১১১১ এমন একটা বাইনারি স্ট্রিং। এর যতগুলি বিন্যাস থাকবে ৪টা ০ বিশিষ্ট ততগুলি স্ট্রিং থাকবে। তাহলে এমন স্ট্রিং আছে $\binom{10}{4} = 210$ টা। একইভাবে, k টা শুন্য আছে এমন n দৈর্ঘ্যের স্ট্রিং থাকবে $\binom{n}{k}$ টা।

27. চারটা অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার যোগফল কতভাবে ২৫ হতে পারে?

Solution. এটা সমাধান করার আগে কয়েকটা ছোট সমস্যা সমাধান করি। ধর

$$a + b = 6$$

[6]এটা আসলে $\binom{m+n}{n}$. এ সমস্যার অনেক সমাধান আছে। নিজে নিজে কোনটা বের করতে চেষ্টা কর।

এটার কয়টা এমন সমাধান আছে? করে দেখো ৭টা। একইভাবে,৬ এর জায়গায় ১০ থাকলে ১১ হত। আসলে $a+b=n$ এর সমাধান আছে $n+1$ টা। কারণ a এর মান 0 থেকে n পর্যন্ত হতে পারে। এর মধ্যে সংখ্যা আছে $n+1$টা। তাই এর সমাধান সংখ্যা $n+1$. এবার $a+b+c=n$ সমীকরণের সমাধানের সংখ্যা বের করি। c এর মান $0, 1, ..., n$ এর মধ্যে যে কোনটি হতে পারে। $c=0$ হলে $a+b=n$ যার সমাধান সংখ্যা $n+1$ টি। $c=1$ হলে $a+b=n-1$ এর সমাধানের সংখ্যা nটি। এভাবে, মোট সমাধানের সংখ্যা হবে $(n+1)+n+\ldots+1=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}=\binom{n+2}{2}$. আগেরটাকে আমরা $\binom{n+1}{1}$ লিখতে পারি। এবার তুমি যদি হাতে $a+b+c+d=3$ সমীকরণের সমাধান সংখ্যা বের করে দেখো তাহলে সেটা পাবে $\binom{3+3}{3}$. তার মানে এটা অনুমান করা যায়, k টা অঋণাত্মক সংখ্যার যোগফল হতে পারে $\binom{n+k-1}{k-1}$ উপায়ে। এটা এখন আমরা প্রমাণ করি। উপরে কোডিং এর যে আইডিয়া ব্যবহার করা হয়েছে সেটা এখানে ও কাজে দেয়।

এখানে আমরা $|$ দিয়ে যোগ বুঝাই। তাহলে $a+b+c=4$ সমীকরণের একটা সমাধান হতে পারে $1|2|1$. এখন আমরা $1|2|1$ কে $*|**|*$ হিসেবে কোড করি. তাহলে $||****$ বুঝাবে ০,০,৪ এই সমাধানটা। একইভাবে $2+2+0$ হবে $**|**|$. খেয়াল করে দেখো, এখানে মোট $*$ হবে চারটা এবং এটা আসলে আগেরটারই আরেকটা বিন্যাস। তার মানে এই চারটা $*$ আর দুইটা $|$ এর যতগুলি বিন্যাস থাকবে তার প্রত্যেকটি এক-একটা উপায় নির্দেশ করবে। তাহলে মোট উপায় সংখ্যা হবে $\dfrac{(4+2)!}{4!2!}=\binom{6}{2}$. এখন আশা করি বুঝতে পেরেছ কেন ওখানে $\binom{n+k-2}{k-1}$ হয়েছিল। কারণ, আমাদের k টা সংখ্যার যোগফল হিসেবে লেখার জন্য $k-1$ টা $|$ চিহ্ন লাগবে। মোট $*$ আর $|$ থাকবে $n+k-1$ টা। তাই মোট বিন্যাস হবে $\dfrac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!}=\binom{n+k-1}{k-1}$.

এখানে $|$ চিহ্ন দিয়ে তাদেরকে আলাদা করার ধারণাকে বলে পার্টিশন(Partition) করা। বাইনোমিয়াল থিওরেম ও কোডিং দিয়েই বের করা হয়।

28. প্রমাণ কর,

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

Solution.

$$(a+b)^n=(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)$$

এখানে n টা $(a+b)$. এদেরকে যদি গুন করা হয় তাহলে এইটুকু বলে ফেলা যায় যে গুনফল এইরকম হবেঃ

$$a^n+s_1a^{n-1}b+s_2a^{n-2}b^2+\ldots+s_{n-1}ab^{n-1}+b^n$$

যেহেতু n টা $a+b$ আছে, তাই গুনফলকে বিস্তৃত করলে a আর b এর পাওয়ার যোগ করলে n হতে হবে।[7] ধর যে কোন একটা পদ a^xb^y ধরনের। তার মানে x টা a আর y টা b আছে এতে। তাহলে অবশ্যই $x+y=n$ হতে হবে। এর সহগ কত হবে? যতবার আমরা x টা a আর b নিতে পারবো ততবার আসবে a^xb^y থাকবে। তার মানে, এখানে ও এক-একটা বিন্যাস একটা করে উপায় বোঝায়। তার মানে এর সহগ হবে $\binom{n}{x}$.

[7]এ থেকে কিন্তু এটা বলা যায় কেন এই বিস্তারে মোট পদ $n+1$. দুইটা অঋণাত্মক সংখ্যার যোগফল $n+1$ উপায়ে n হতে পারে।

THEOREM 1. k টি অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার যোগফল n হতে পারে $\binom{n+k-1}{k-1}$ ভাবে।

এই থিওরেম যে কত জায়গায় খাটে তার কোন ধারণা আমার নেই।

29. $(a+b+c)^n$ এ $a^x b^y c^z$ এর সহগ কত হবে বের কর।

Solution. এবার দেখো তোমার উত্তর $\dfrac{n!}{x!y!z!}$ হয় কিনা।

30. $(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n$ এর বিস্তারে কয়টি পদ থাকবে? আর এর সাধারণ পদ যদি $a_1^{x_1}a_2^{x_2}\cdots a_k^{x_k}$ হয় তাহলে এর সহগ কত?

Solution. দেখো $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ হতে হবে। এর যতগুলো সমাধান আছে, বিস্তারে ও ঠিক ততগুলি পদ থাকবে।

এখন, এখানে মোট $a_1, a_2, \ldots a_k$ আছে n টা যাদের সাজানো যায় $n!$ ভাবে। এর মধ্যে x_1 টা a_1 একইরকম। তাই $x_1!$ দিয়ে ভাগ, তারপরে একই কারণে $x_2!, \ldots, x_k!$ দিয়ে ভাগ করা লাগবে। তাহলে, এই পদটি আসবে $\dfrac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_k!}$ বার।

31. টম ও জেরীর কাছে মোট 14 টি টাইলস আছে। এর মধ্যে 8 টি নীল আর 6 টি লাল। তারা এগুলো এক লাইনে এমনভাবে সাজাতে চায় যে, দুটি লাল টাইলসের মাঝখানে কমপক্ষে একটি নীল টাইলস থাকেব। সম্ভাব্য কতভাবে টম ও জেরী এই কাজ করেত পারবে?

Solution. আমাদের ব্যাপারটা এইরকমঃ $* * * * **$ কে লাল টাইলস ধরলাম। দুটি লাল টাইলসের মাঝে অন্তত একটি নীল টাইলস থাকতে হবে। ছয়টি লাল টাইলসের মাঝে ৫টি খালি জায়গা আছে। আমরা ধরি এই ৫টিতে যথাক্রমে $a_1+1, a_2+1, a_3+1, a_4+1, a_5+1$ গুলি করে টাইলস আছে। এখানে $a_1, a_2, \ldots, a_5$ অঋণাত্মক। যেহেতু অন্তত একটা থাকতে হবে, তাই সাথে ১ করে যোগ করা হয়েছে। কিন্তু দুইপাশে ও টাইলস থাকতে পারে। ধরি একদম শুরুতে a_0 টা আর শেষে a_6 টা টাইলস থাকবে। এবং আমাদের দরকার কতভাবে $a_0+a_1+1+a_2+1+a_3+1+a_4+1+a_5+1+a_6=8$ হতে পারে।

$$a_0+a_1+\ldots+a_6=3$$

এর সমাধান আছে $\binom{3+6-1}{6-1}=\binom{8}{5}$ গুলি। তাই তারা এই কাজ করতে পারবে $\binom{8}{5}=56$ উপায়ে।

32. দশটি বিজোড় সংখ্যার যোগফল কতভাবে ১০০০০ হতে পারে?

Solution. আমরা বিজোড় সংখ্যাগুলোকে $2a+1$ হিসেবে লেখি যেখানে a অঋণাত্মক। তাহলে,

$$2a_1+1+2a_2+1+\ldots+2a_{10}+1=10000$$

এর সমাধান কয়টি আছে সেটা বের করা লাগবে। একে সাজিয়ে লিখলে

$$a_1+a_2+\ldots+a_{10}=4995$$

দশটি অঋণাত্মক সংখ্যার যোগফল ৪৯৯৫ হতে পারে $\binom{4995+10-1}{10-1}=\binom{5004}{9}$ উপায়ে।

33. তোমার কাছে n টা অভিন্ন বল আর k টা অভিন্ন পাত্র আছে। তাহলে মোট কতভাবে তুমি বলগুলি পাত্রগুলিতে রাখতে পারবে?

Solution. এটা ও উপরের সমস্যারই আরেকটা ভার্সন। কারণ এই k টা পাত্রতে যতগুলি করে বল রাখবে তাদের সমষ্টি হতে হবে n. আবার উপায়ের সংখ্যা $\binom{n+k-1}{k-1}$.

34. এবার উপরের সমস্যার আরেক রূপ। এবার ও n টা অভিন্ন বল আর k টা অভিন্ন পাত্রই, কিন্তু সবগুলি পাত্রে কমপক্ষে অন্তত একটা করে বল থাকতে হবে।

Solution. ধর পাত্রগুলিতে $a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots, a_k + 1$ টা করে বল থাকবে। তাহলে এদের সমষ্টি হবে n[8]. তাহলে উপায়ের সংখ্যা হবে

$$a_1 + 1 + a_2 + 1 + \ldots + a_k + 1 = n$$

অথবা,

$$a_1 + \ldots + a_k = n - k$$

এর সমাধানের সংখ্যা। যা হচ্ছে $\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$.

[8]কেন সাথে ১ যোগ করা হয়েছে তা বুঝে ফেলার কথা।