কম্বিন্যাটরিক্স

আদীব হাসান
তাহনিক নূর সামীন
জয়দীপ সাহা

ভূমিকা

সূচীপত্র

অধ্যায় ১

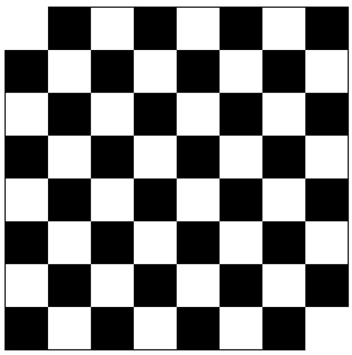
কালারিং

And God promised men that good and obedient wives would be found in all corners of the world. Then He made the earth round, and laughed, and laughed, and laughed...

– Larry Ellis

§১.১ একটি পুরস্কার

তুমি যেহেতু এই বইটা পড়ছ, আমি ধরে নিতে পারি তোমার হাতে এখন কোন কাজ নেই। চলো তোমাকে সময় কাটানোর জন্য একটা ‘আকাজ’ দেই। 31 টি 2×1 মাপের আয়তাকার স্টিকারকে সারি (row) এবং কলাম বরাবর বসিয়ে চিত্র ১.১-এর দাবাবোর্ডটি পুরোপুরি ঢাকো তো!



চিত্র ১.১: একটি সাদা কর্নার ছাড়া দাবাবোর্ড।

যে এই আকাজটা সত্যি সত্যি করতে পারবে তার জন্যে বড় ধরণের পুরস্কার রয়েছে। তাই যদি কোনভাবে মিলিয়ে ফেলতে পারো, তোমার সমাধানের ছবি তুলে আমাকে ইমেইল পাঠিও।[1]

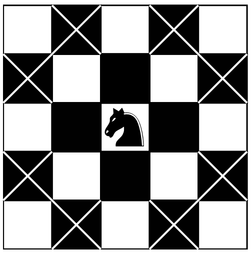
[1]আমার ইমেইল এড্রেস আমার ওয়েবসাইটে (`http://adib-hasan.net/`) পাবে।

এই ঘোষণাটি আমি বেশ কয়েকবার নানান জায়গায় দিয়েছি। কিন্তু কখনও কেউ আমাকে কোন ঠিক সমাধান পাঠায়নি, এবং আমি জানি পাঠাবেও না! আমি কী করে এতটা নিশ্চিন্ত হতে পারলাম? একটু গণিত খাটিয়ে ব্যাপারটা দেখা যাক।

উপরের দাবার বোর্ডে যেকোনো 2×1 মাপের আয়তাকার স্টিকারকে সারি বা কলাম বরাবর বসালে সেটি ঠিক 1 টি সাদা ও 1 টি কালো ঘরকে ঢেকে দেয়। অতএব, 31 টি স্টিকার বোর্ডে বসাতে গেলে সেগুলো দিয়ে মোট 31 টি সাদা ও 31 টি কালো ঘর ঢাকা পড়বে। কিন্তু চিত্র **১.১**-এর দাবা বোর্ডে তো সাদা ঘর 30 টি ও কালো ঘর 32 টি! তাই 31 টি স্টিকার শর্ত মেনে বোর্ডে বসানোই সম্ভব না। এজন্য উপরের সমস্যার আসলে কোন সমাধান নেই। (মিথ্যে পুরস্কারের আশ্বাস দেওয়ার জন্য আমি দুঃখিত!)

এবার গণিত অলিম্পিয়াডের একটি সমস্যা নিয়ে ভাবা যাক।

উদাহরণ ১.১ (জাতীয় গণিত উৎসব 2014; অংশবিশেষ)**:** *দেখাও যে, একটি* 21×19 *দাবাবোর্ডে এমনভাবে* 200 *টি ঘোড়া বসানো যাবে যাতে কেউ কাউকে পরের চালে খেতে না পারে।*



চিত্র ১.২: সাদা ঘরের ঘোড়া পরের চালে শুধু কালো ঘরেই যায়।

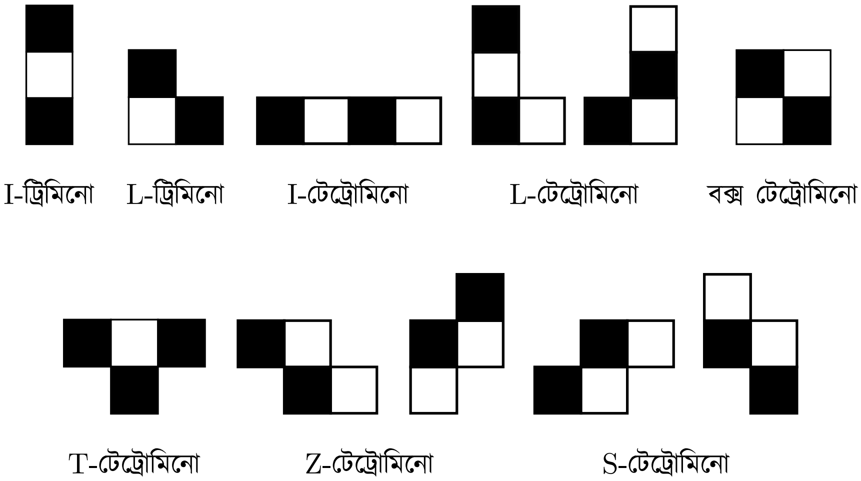
সমাধান: দাবাবোর্ডে $19 \times 21 = 399$ টি ঘর রয়েছে, যাদের (প্রায়) অর্ধেক সাদা এবং অর্ধেক কালো। ধরা যাক, সাদা ঘর একটি বেশি, অর্থাৎ 200 টি আছে। (কালো ঘর একটি বেশি হলেও একইভাবে সমাধান করা সম্ভব।) এবার লক্ষ কর যে, যেকোন সাদা ঘরে ঘোড়া বসালে সেটি পরের চালে সবসময় কালো ঘরে যায়। (চিত্র ১.২) তাই সবগুলো সাদা ঘরে ঘোড়া বসানো হলে শর্তও মানা হয়, এবং ঠিক 200 টি ঘোড়াই বসানো যায়। $\square$

ওপরের দুইটি সমস্যার মাঝে মিল কোথায়?

মিলটা হচ্ছে উভয় সমস্যাতেই প্রথমে একক বর্গগুলোকে সাদাকালো রঙে ভাগ করা হয়েছে, এবং সেখান থেকে কিছু বৈশিষ্ট্য লক্ষ করার পর সমস্যাগুলো সমাধান হয়ে গেছে। গণিতে অনেক সময়ই বর্গ, বিন্দু, রেখাংশ ইত্যাদিকে কিছু আলাদা আলাদা রঙে ভাগ করলে সমাধান খুঁজে পাওয়া যায়, বা সমাধানের দিকে এগোনো যায়। এভাবে কিছু প্রমাণ করার নামই *কালারিং*। তুমি এটা শিখতে পারলে ব্যাপারটা কত্ত মজার হবে ভাব তো। তুমি কিছু জিনিসকে খেয়ালখুশিমত রং করবে, তাতেই জটিল জটিল সমস্যা সমাধান হয়ে যাবে! এর চেয়ে সুন্দরভাবে কি গণিত করা যায়, বলো?

কালারিং নিয়ে বিস্তারিত আলোচনা শুরুর আগে কিছু গুরুত্বপূর্ণ কথা বলি। কালারিঙের সমস্যা ও সমাধানে প্রায়শই নানা আকার ও আকৃতির টাইল ব্যবহার করা হয়। সংক্ষেপে লিখার জন্য এসব টাইলের কিছু নাম আছে। যেমন-প্রথম সমস্যার 2×1 স্টিকারের মত আয়তাকার টাইলের নাম ডমিনো

(domino). এমন অন্যান্য আকারের টাইলগুলোর নাম ও ছবি চিত্র ১.৩-তে দেওয়া হয়েছে। পরবর্তী সমস্যাগুলোতে আমরা কোন টাইলের আকার-আকৃতি বোঝাতে এই নামগুলো ব্যবহার করব।



চিত্র ১.৩: ট্রিমিনো আর টেট্রোমিনো।

আরেকটি ব্যাপার হচ্ছে অধিকাংশ কালারিঙের সমস্যাতে ঠিকঠাক কালারিং খুঁজে পাওয়াই হয় কঠিনতম অংশ। তাই, এই অধ্যায়ের পরবর্তী সকল উদাহরণের সমস্যাগুলো প্রথমে সমাধান ছাড়া একবার দেওয়া হয়েছে, যেন তুমি নিজে সমাধান করতে বসলে অনিচ্ছাকৃতভাবে কালারিঙের ছবি চোখে পড়ে না যায়।

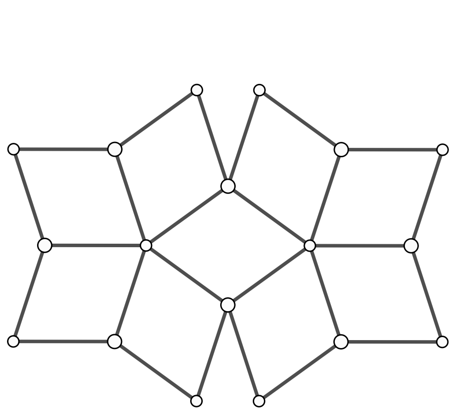
১. একটি 1 মিটার লম্বা সুতার ওপরে 15 টি পিঁপড়া চলাফেরা করছে। প্রতিটি পিঁপড়ার গতিবেগ সেকেন্ডে 5 মিলিমিটার। দুইটি পিঁপড়া পরস্পরের সাথে ধাক্কা খেলে সঙ্গে সঙ্গে উল্টোদিকে ঘুরে একই বেগে চলা শুরু করে এবং কোন পিঁপড়া সুতার কোন প্রান্তবিন্দুতে পৌছে গেলে সুতা থেকে নেমে যায়। নূন্যতম কত সময় পর নিশ্চিতভাবে বলা যাবে যে সুতার ওপর কোন পিঁপড়া নেই?

২. একটি 5×5 শ্রেণিকক্ষের 25 টি চেয়ারকে নতুনভাবে বিন্যস্ত করে এমনভাবে কি পরীক্ষার সিট ফেলা সম্ভব যেন প্রতিটি চেয়ারের নতুন অবস্থান হয় তার পূর্ববর্তী অবস্থানের পার্শ্ববর্তী কোথাও (অর্থাৎ **ঠিক** ডানে, বামে, সামনে, বা পেছনে)?

৩. প্রমাণ কর একটি 8×8 বোর্ডকে 15 টি T-টেট্রোমিনো এবং 1 টি বক্স টেট্রোমিনো দিয়ে টাইল করা সম্ভব না।

৪. চিত্র ১.৪-এ 18 টি শহরের মধ্যবর্তী রাস্তাগুলোর একটি ম্যাপ দেখানো হয়েছে। একজন পর্যটক কোন একটি শহর থেকে শুরু করে এই রাস্তাগুলো দিয়ে কি পর্যায়ক্রমে প্রতিটি শহরে একবার যেতে পারবে?

৫. প্রমাণ কর যে, একটি 10×6 বোর্ডকে 15টি I-টেট্রোমিনো দিয়ে টাইল করা সম্ভব নয়।



চিত্র ১.৪: 18 টি শহরের রাস্তার ম্যাপ।

৬. প্রমাণ কর কোন আয়তক্ষেত্রকে যদি বিভিন্ন আকারের এমন কিছু আয়তক্ষেত্র দিয়ে টাইল করা যায় যাদের প্রত্যেকের অন্তত একটি বাহুর দৈর্ঘ্য পূর্ণসংখ্যা, তবে মূল আয়তক্ষেত্রটিরও অন্তত একটি বাহুর দৈর্ঘ্য পূর্ণসংখ্যা।

৭. 9×8 মাপের একটি আয়তাকার ফ্লোরকে কিছু I-টেট্রামিনো ও বক্স টেট্রামিনো দিয়ে টাইলিং করার পরিকল্পনা ছিল। কিন্তু একটি I-টেট্রামিনো ভেঙে গেছে। তোমার কাছে অতিরিক্ত একটি বক্স টেট্রামিনো আছে। এটি এবং আগের অন্যান্য টেট্রামিনোগুলো নতুন কোনভাবে সাজিয়ে কি সম্পূর্ণ ফ্লোরটি টাইল করতে পারবে?

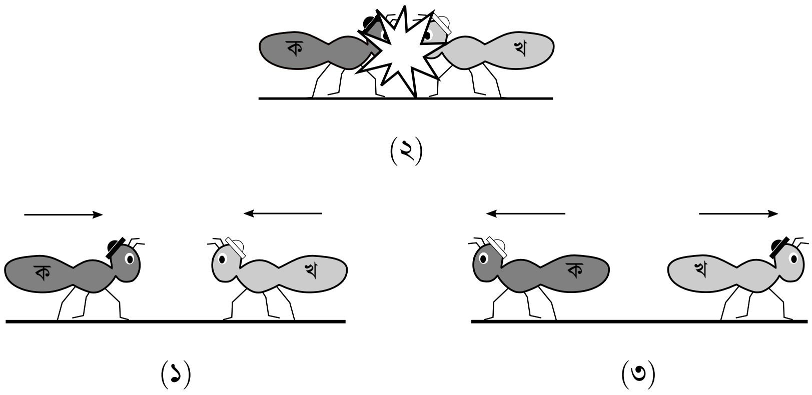
৮. খাতায় একটি 6×6 বোর্ড আঁক। এর যেকোন পাশাপাশি (অর্থাৎ একটি সাধারণ বাহু আছে এমন) দুটি ঘরকে আমরা বলব প্রতিবেশী। আমরা বোর্ডের কিছু ঘরে ক্রস চিহ্ন এমনভাবে বসাতে চাই যেন বোর্ডের যেকোন ঘরের (ক্রস চিহ্নিত নাও হতে পারে) অন্তত একটি ক্রস চিহ্নিত প্রতিবেশী থাকে। সর্বনিম্ন কয়টি ঘরে ক্রস চিহ্ন বসালে এটা নিশ্চিতভাবে বলা যাবে?

§১.২ পর্যাবৃত্ত প্যাটার্নের কালারিং

কয়েকটি রং একটি সুনির্দিষ্ট ক্রমে বার বার বসানোই হচ্ছে পর্যাবৃত্ত কালারিং। যেমন- দাবাবোর্ডে সাদা ও কালো রং পাশাপাশি বার বার বসানো হয়। তেমনিভাবে তিন, চার বা ততোধিক রং পর পর বসিয়েও কোন বোর্ড বা বিন্দুর গ্রিড রং করা যেতে পারে। অনেক সমস্যাই এমন কালারিং দিয়ে সমাধান হয়ে যায়।

উদাহরণ ১.২: *একটি 1 মিটার লম্বা সুতার ওপরে 15 টি পিঁপড়া চলাফেরা করছে। প্রতিটি পিঁপড়ার গতিবেগ সেকেন্ডে 5 মিলিমিটার। দুইটি পিঁপড়া পরস্পরের সাথে ধাক্কা খেলে সঙ্গে সঙ্গে উল্টোদিকে ঘুরে একই বেগে চলা শুরু করে এবং কোন পিঁপড়া সুতার কোন প্রান্তবিন্দুতে পৌছে গেলে সুতা থেকে নেমে যায়। নূন্যতম কত সময় পর নিশ্চিতভাবে বলা যাবে যে সুতার ওপর কোন পিঁপড়া নেই?*

সমাধান: এই সমস্যাটি আমরা একটু ফাঁকিবাজি করে সমাধান করব। আমরা ধরে নেব যেসব পিঁপড়া বাম থেকে ডানে যাচ্ছে তারা মাথায় কালো টুপি, এবং যেসব পিঁপড়া ডান থেকে বামে যাচ্ছে তারা মাথায় সাদা টুপি পরে আছে। আর দুটি পিঁপড়া পরস্পর ধাক্কা খেলে তারা মাথার টুপিগুলো অদল-বদল



চিত্র ১.৫: দুইটি পিঁপড়ার মুখোমুখি সংঘর্ষ।

করে নেয়। এতে মূল সমস্যার কোন তথ্যের পরিবর্তন হয় না, কিন্তু আমরা একটা সুবিধা পাই। সেটা হচ্ছে, প্রতিটি কালো টুপি সবসময় সুতার বাম থেকে ডানে যায়, প্রতিটি সাদা টুপি সবসময় ডান থেকে বামে যায়। (চিত্র ১.৫ দেখ।) আবার, প্রতিটি টুপির বেগও হয় সেকেন্ডে 5 মিলিমিটার।[২] অতএব, $\frac{1 \text{ মিটার}}{5 \text{ মিলিমিটার/সেকেন্ড}} = 200$ সেকেন্ড পরে সুতার উপরে কোন টুপি থাকবে না। তাই, 200 সেকেন্ড পরে সুতার উপরে কোন পিঁপড়াও থাকবে না। □

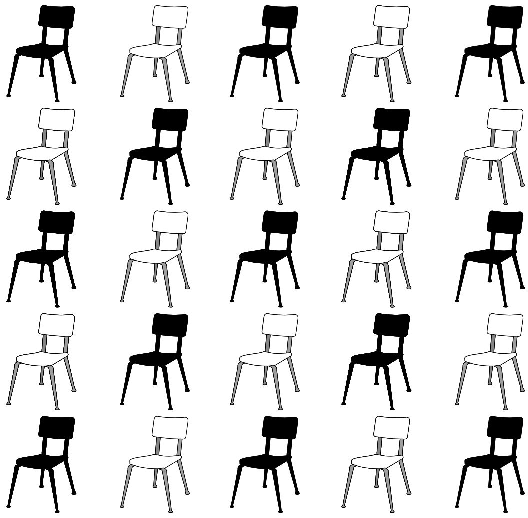
মন্তব্য: তুমি হয়তো ভাবতে পারো যদি সব পিঁপড়া সুতার এক প্রান্তবিন্দুতে থাকে, তবে এক সেকেন্ড পরই সবাই সুতা থেকে নেমে যেতে পারে। তাই উত্তর 1 সেকেন্ড। কিন্তু না! পিঁপড়াগুলো যেকোন অবস্থান থেকে সুতার ওপর চলা শুরু করতে পারে, এবং বিভিন্ন পিঁপড়ার বিভিন্ন অবস্থানের জন্য সুতাটির পিঁপড়াশূন্য হয়ে যেতে সমান সময় নাও লাগতে পারে। তবে পিঁপড়াগুলো শুরুতে যে যে অবস্থানেই থাকুক, একটা সময় পরে সব পিঁপড়াকে অবশ্যই সুতা থেকে নেমে যেতে হবে। (যেকোন প্রান্তবিন্দুর সবচেয়ে নিকটবর্তী পিঁপড়াটির চলার পথ নিয়ে ভাব।) প্রশ্নে জানতে চাওয়া হয়েছে নূন্যতম কত সময় পর সেটা অবশ্যই ঘটবে।

উদাহরণ ১.৩: *একটি 5×5 শ্রেণিকক্ষের 25 টি চেয়ারকে নতুনভাবে বিন্যস্ত করে এমনভাবে কি পরীক্ষার সিট ফেলা সম্ভব যেন প্রতিটি চেয়ারের নতুন অবস্থান হয় তার পূর্ববর্তী অবস্থানের পার্শ্ববর্তী কোথাও (অর্থাৎ **ঠিক** ডানে, বামে, সামনে, বা পেছনে)?*

সমাধান: এই সমস্যাটি সমাধান করার জন্য আমাদেরকে সকল চেয়ারের পুরানো অবস্থান এবং নতুন অবস্থান ঠিক কীভাবে পাল্টাচ্ছে সেটি জানা দরকার। তাই আমাদের এমন একটি কালারিং স্কিম প্রয়োজন যেন প্রতিটি চেয়ারের পুরানো অবস্থান এবং নতুন অবস্থান ভিন্ন রঙের হয়।

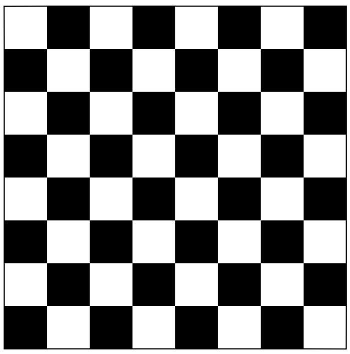
চেয়ারগুলোকে দাবাবোর্ডের মত রং করা হলে প্রতিটি সাদা চেয়ারের পার্শ্ববর্তী চেয়ারগুলো হবে কালো এবং প্রতিটি কালো চেয়ারের পার্শ্ববর্তী চেয়ারগুলো হবে সাদা। (চিত্র ১.৬) তাই নতুন অবস্থানে সাদা এবং কালো চেয়ারগুলোকে পরস্পর স্থান অদলবদল করতে হবে। কিন্তু এটা তো অসম্ভব কেননা সাদা ও কালো চেয়ারের সংখ্যা সমান নয়। তাই নতুনভাবে বিন্যস্ত করাও সম্ভব নয়। □

[২]বল তো কেন?



চিত্র ১.৬: শ্রেণিকক্ষের আসনবিন্যাস।

উদাহরণ ১.৪: *প্রমাণ কর একটি* 8×8 *বোর্ডকে* 15 *টি* T*-টেট্রোমিনো এবং* 1 *টি বক্স টেট্রোমিনো দিয়ে টাইল করা সম্ভব না।*

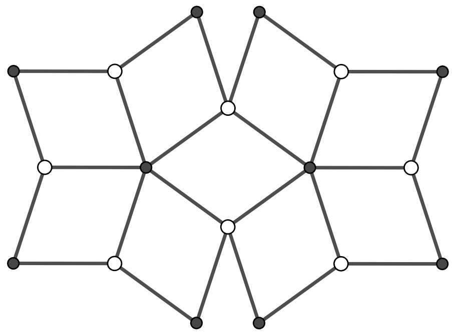


চিত্র ১.৭: T-টেট্রোমিনোগুলো বোর্ডে দুইরকম অবস্থানে বসতে পারে।

সমাধান: বোর্ডটিকে দাবাবোর্ডের মত রং কর। প্রতিটি বক্স টেট্রোমিনো বোর্ডে ঠিক 2 টি কালো ও 2 টি সাদা ঘর দখল করে। তাই, একটি বক্স টেট্রোমিনো বোর্ডে বসানোর পর অবশিষ্ট 60 টি ঘরের মাঝে অর্ধেক কালো এবং অর্ধেক সাদা ঘর থাকবে।

এবার লক্ষ কর যে, T-টেট্রোমিনোগুলো বোর্ডে দুই রকম অবস্থানে বসতে পারে: হয় তারা 1 টি কালো ও 3 টি সাদা ঘর দখল করবে, নাহয় 3 টি কালো ও 1 টি সাদা ঘর দখল করবে। তাই, সম্পূর্ণ বোর্ড কোনভাবে টাইলিং করা গেলে সেখানে উভয়রকম অবস্থানের সমান সংখ্যক T-টেট্রোমিনো থাকতে হবে। কিন্তু, T-টেট্রোমিনোর সংখ্যা তো 15 টি! তাই সম্পূর্ণ বোর্ড এভাবে টাইলিং করা সম্ভব না। □

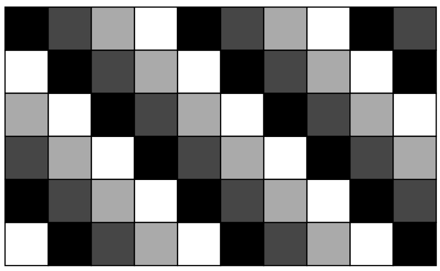
উদাহরণ ১.৫: *চিত্র ১.৪-এ 18 টি শহরের মধ্যবর্তী রাস্তাগুলোর একটি ম্যাপ দেখানো হয়েছে। একজন পর্যটক কোন একটি শহর থেকে শুরু করে এই রাস্তাগুলো দিয়ে কি পর্যায়ক্রমে প্রতিটি শহরে একবার যেতে পারবে?*



চিত্র ১.৮: 18 টি শহরের রাস্তার ম্যাপ।

সমাধান: শহরগুলোকে চিত্র ১.৮-এর মত সাদা ও কালো রং কর যেন যেকোন দুটি পাশাপাশি (অর্থাৎ সরাসরি রাস্তা দিয়ে সংযুক্ত) শহরের রং ভিন্ন হয়। মনে কর, কোন সাদা শহর থেকে পর্যটক যাত্রা শুরু করল। 18টি শহরে পর্যায়ক্রমিকভাবে যাওয়া সম্ভব হলে তার যাত্রাপথে প্রথমে সেই সাদা শহর, তারপর একটি কালো শহর, আবার একটি সাদা শহর, $\ldots$ এই ক্রমে 9 টি সাদা শহর ও 9 টি কালো শহর পড়বে। কিন্তু ম্যাপে 8 টি কালো শহর এবং 10 টি সাদা শহর আছে। তাই আমরা বলতে পারি, কাজটি করা সম্ভব না। পর্যটক কালো শহর থেকে চলা শুরু করলেও একই যুক্তিতে সবগুলো শহরে একবার যাওয়া সম্ভব না। $\square$

উদাহরণ ১.৬: *প্রমাণ কর যে, একটি 10×6 বোর্ডকে 15টি I-টেট্রোমিনো দিয়ে টাইল করা সম্ভব নয়।*



চিত্র ১.৯: 4টি রং দিয়ে কালারিং

সমাধান: এই সমস্যাটি অনেকটাই কর্নারবিহীন দাবাবোর্ডে স্টিকার বসানোর সমস্যাটির মতো। তাই সেই সমস্যাটির সাথে মিল রেখে আমরা বোর্ডটিকে চারটি রং দিয়ে চিত্র ১.৯-এর মত রং করব যেন পাশাপাশি বা ওপরে-নিচে যেকোনো চারটি ঘরের রং ভিন্ন ভিন্ন হয়। এতে করে বোর্ডে যেকোন জায়গায় I-টেট্রোমিনো বসানো হলে তাতে চারটি রংয়ের প্রতিটি ঠিক একবার করে থাকবে। অতএব, সম্পূর্ণ বোর্ড I-টেট্রোমিনো দিয়ে টাইল করা সম্ভব হলে প্রতিটি রং বোর্ডে ঠিক $\frac{10\times 6}{4} = 15$ বার করে থাকতে

হবে। কিন্তু গুণলে দেখা যায় যে কালো রংটি বোর্ডে 16 বার ব্যবহার করা হয়েছে। অতএব এমন টাইলিং সম্ভব নয়। □

নিজে করো

n এর কোন কোন মানের জন্য একটি $n \times n$ বোর্ডকে T-টেট্রোমিনো দিয়ে টাইল করা সম্ভব? চল, এই প্রশ্নটার উত্তর খুঁজে দেখি!

১. একটি 4×4 বোর্ডকে কি T-টেট্রোমিনো দিয়ে টাইল করা যাবে?

২. 5×5, 6×6, 7×7 এবং 8×8 বোর্ডের বেলায়ও কি একই ব্যাপার ঘটবে?

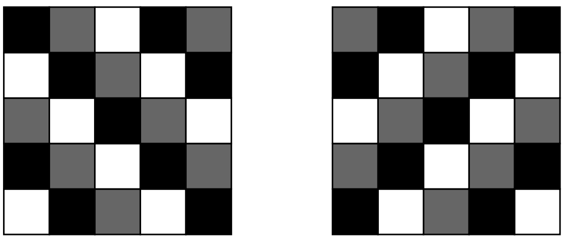
৩. একটি 20×20 বোর্ডকে কি T-টেট্রোমিনো দিয়ে টাইল করা যাবে?

৪. তুমি কি এখন n-এর মানগুলো কেমন হবে অনুমান করতে পারছ?

৫. কাজ কিন্তু এখনও শেষ হয়নি। n-এর যেই মানগুলো তুমি অনুমান করছ, তাদের জন্য $n \times n$ বোর্ডের T-টেট্রোমিনো দিয়ে একটি টাইলিং তোমাকে দেখাতে হবে।

কিছু সমস্যা সমাধান করার জন্য একাধিকবার কালারিং করার প্রয়োজন হতে পারে। যেমন– পরের উদাহরণটি দেখ।

উদাহরণ ১.৭: *দেখাও যে একটি 5×5 বোর্ডকে 8 টি I-ট্রিমিনো দিয়ে টাইল করা হলে বোর্ডের **কেন্দ্রের** ঘরটি সবসময় ফাঁকা থাকবে।*



(ক) (খ)

চিত্র ১.১০: 3 টি রং দিয়ে দুই রকমের কালারিং।

সমাধান: প্রশ্নে যেহেতু I-ট্রিমিনোর কথা আছে, তাই আমরা 3 টি রঙ দিয়ে চিত্র ১.১০(ক)-এর মত পর্যাবৃত্ত কালারিং করি। এখন গুণলে দেখতে পাবে যে বোর্ডে কালো রঙের ঘর একটি বেশি আছে। যেহেতু প্রতিটি I-ট্রিমিনো প্রতিটি রঙের ঠিক একটি করে ঘরকে ঢাকে, তাই বোর্ডে 8 টি টেট্রোমিনো বসালে যে ঘরটি ফাঁকা থাকবে সেটি অবশ্যই কালো হবে। আমাদের প্রমাণ কিন্তু শেষ হয়ে যায়নি!

প্রমাণ শেষ করার জন্য আমাদের বোর্ডটিকে আরও একবার চিত্র ১.১০(খ)-এর মত কালারিং করতে হবে। এই কালারিঙেও উপরের যুক্তি অনুসারে ফাঁকা ঘরটিকে কালো হতে হবে।

সুতরাং, ফাঁকা ঘরটি হবে এমন একটি ঘর যেটাকে উভয় কালারিঙেই কালো রং করা হয়েছে। এমন ঘর কোনগুলো? একটু খুঁজে দেখলে বুঝতে পারবে যে এমন ঘর বোর্ডে একটাই আছে, আর সেটা হচ্ছে কেন্দ্রের ঘরটি। তাই কেন্দ্রের ঘরটিকে অবশ্যই ফাঁকা থাকতে হবে। $\square$

§১.৩ ভারযুক্ত (weighted) কালারিং

রঙের পরিবর্তে সংখ্যা ব্যবহার করেও একই কালারিংকে প্রকাশ করা সম্ভব। যেমন– প্রথম সমস্যায় দাবাবোর্ডের কালো ঘরে 1 এবং সাদা ঘরে -1 বসানো হলে প্রতিটি ডমিনোর যোগফল হয় 0, কিন্তু সম্পূর্ণ বোর্ডের যোগফল 2; তাই শুধু ডমিনো দিয়ে বোর্ডটি টাইলিং করা যাবে না।

কিন্তু সংখ্যা দিয়ে 'কালারিং' করার সুবিধাটা কী? উত্তর হচ্ছে, এভাবে কোন কালারিংকে গণিতের ভাষায় লিখে সমীকরণ বা অসমতাতে ব্যবহার করা যায়। এটা অনেক সমস্যার সমাধানে খুবই কাজে আসে। কিছু উদাহরণ দেখা যাক!

উদাহরণ ১.৮: *প্রমাণ কর কোন আয়তক্ষেত্রকে যদি বিভিন্ন আকারের এমন কিছু আয়তক্ষেত্র দিয়ে টাইল করা যায় যাদের প্রত্যেকের অন্তত একটি বাহুর দৈর্ঘ্য পূর্ণসংখ্যা, তবে মূল আয়তক্ষেত্রটিরও অন্তত একটি বাহুর দৈর্ঘ্য পূর্ণসংখ্যা।*

জটিল সংখ্যা, বিশেষ করে এককের বিভিন্ন মূল, কালারিঙে প্রায়ই ব্যবহৃত হয়। জটিল সংখ্যা কী জানা না থাকলে পরবর্তী দুটি উদাহরণ পড়ার আগে পরিশিষ্ট দেখে নাও।

উদাহরণ ১.৯: *একটি 8×8 বোর্ড হতে একটি কোণার ব্লক সরিয়ে ফেলা হয়েছে। বাকি ব্লকগুলিকে কি I-ট্রিমিনো দিয়ে টাইল করা সম্ভব?*

1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω
ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2
ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1
1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω
ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2
ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1
1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω
ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	

চিত্র ১.১১: এককের ঘনমূল দিয়ে টাইলিং।

সমাধান: ধরা যাক, এককের ঘনমূলগুলো হচ্ছে $1, \omega$ ও ω^2. বোর্ডের প্রতিটি বর্গে চিত্র **১.১১**-র মত 1, ω এবং ω^2 বসাও। বোর্ডের যেকোনো স্থানে I-ট্রিমিনো বসানো হলে সেটি ঠিক একটি করে 1, ω এবং ω^2 বসানো টাইলকে ঢেকে দেবে। এই তিনটি টাইলের যোগফল $1 + \omega + \omega^2 = 0$. অতএব, পুরো বোর্ড I-ট্রিমিনো দিয়ে টাইল করা সম্ভব হলে পুরো বোর্ডের টাইলগুলোর যোগফলও 0 হতে হবে।

কিন্তু আমরা দেখতে পাই যে, সম্পূর্ণ বোর্ডের টাইলগুলোর যোগফল $1 + 2\omega \neq 0$. তাই এমন টাইলিং অসম্ভব। □

উদাহরণ ১.১০: *একটি $(m+1) \times (n+1)$ আয়তক্ষেত্রকে $1 \times k$ আকারের ব্লক দিয়ে টাইল করা যায়। প্রমাণ কর k হয় $m+1$ নাহয় $n+1$-কে নিঃশেষে ভাগ করে।*

1	ζ	ζ^2	$\dots$	ζ^m
ζ	ζ^2	ζ^3	$\dots$	ζ^{m+1}
ζ^2	ζ^3	ζ^4	$\dots$	ζ^{m+2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
ζ^n	ζ^{n+1}	ζ^{n+2}	$\dots$	ζ^{m+n}

চিত্র ১.১২: এককের k-তম মূল দিয়ে টাইলিং।

সমাধান: ধরা যাক, এককের k-তম মূলগুলো হচ্ছে $1,\ \zeta,\ \zeta^2,\ \dots\ \zeta^{k-1}$. এবার চিত্র **১.১২**-এর মত আয়তক্ষেত্রটির প্রতিটি বর্গে সংখ্যা বসাও। আমরা এবার দুইভাবে আয়তক্ষেত্রের সবগুলো সংখ্যার যোগফল নির্ণয় করব।

ছবির আয়তক্ষেত্রের,

$$\begin{array}{rll}
\text{১ম সারির যোগফল: } & 1+\zeta\dots+\zeta^m & =(1+\zeta\dots+\zeta^m)\,1 \\
\text{২য় সারির যোগফল: } & \zeta+\zeta^2\dots+\zeta^{m+1} & =(1+\zeta\dots+\zeta^m)\,\zeta \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{শেষ সারির যোগফল: } & \zeta^n+\zeta^{n+1}\dots+\zeta^{n+m} & =(1+\zeta\dots+\zeta^m)\,\zeta^n \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\text{সম্পূর্ণ আয়তক্ষেত্রের যোগফল: } & (1+\zeta\dots+\zeta^m)(1+\zeta\dots+\zeta^n) \\
&= \frac{\zeta^{m+1}-1}{\zeta-1}\cdot\frac{\zeta^{n+1}-1}{\zeta-1}
\end{aligned}$$

আবার লক্ষ কর যে, ζ-র যেকোনো k টি ক্রমিক পাওয়ারের যোগফল 0 হতে হবে[৩], কেননা $1+\zeta+\dots+\zeta^{k-1}=0$. এখন, যেকোন $1\times k$ ব্লক বোর্ডে বসালে সেটি ζ-র ঠিক k টি ক্রমিক পাওয়ার সম্বলিত ঘরকে ঢেকে দেয়। এই ঘরগুলোতে থাকা সংখ্যাগুলোর যোগফল 0. সুতরাং সম্পূর্ণ আয়তক্ষেত্র $1\times k$ ব্লক দিয়ে টাইল করা সম্ভব হলে সম্পূর্ণ আয়তক্ষেত্রের যোগফলও 0 হতে হবে।

[৩]এটা প্রমাণ কর।

তাই আমরা বলতে পারি,

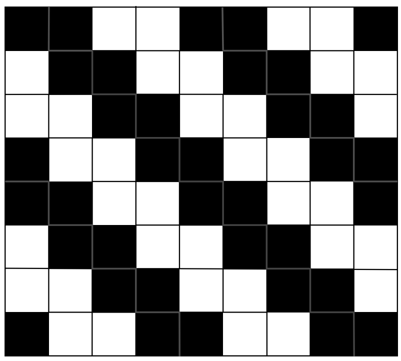
$$\frac{\zeta^{m+1}-1}{\zeta-1}\cdot\frac{\zeta^{n+1}-1}{\zeta-1}=0 \implies (\zeta^{m+1}-1)(\zeta^{n+1}-1)=0$$

অতএব, হয় $\zeta^{m+1}=1$ নাহয় $\zeta^{n+1}=1$. k যদি $(m+1)$ অথবা $(n+1)$-কে নিঃশেষে ভাগ করে, তবেই এটা সম্ভব। □

§১.৪ ক্রিয়েটিভ কালারিং

অনেক সমস্যা সমাধান করার জন্য আমাদের পুরোপুরি ইউনিক কোন প্যাটার্নে কালারিং করতে হতে পারে। এসব সমস্যার মূল কাঠিন্যই থাকে এমন কালারিংগুলো খুঁজে পাওয়া। কিছু উদাহরণ দেখা যাক।

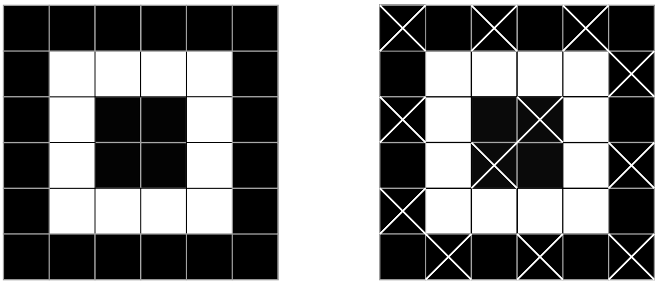
উদাহরণ ১.১১: *9×8 মাপের একটি আয়তাকার ফ্লোরকে কিছু I-টেট্রামিনো ও বক্স টেট্রামিনো দিয়ে টাইলিং করার পরিকল্পনা ছিল। কিন্তু একটি I-টেট্রামিনো ভেঙে গেছে। তোমার কাছে অতিরিক্ত একটি বক্স টেট্রামিনো আছে। এটি এবং আগের অন্যান্য টেট্রামিনোগুলো নতুন কোনভাবে সাজিয়ে কি সম্পূর্ণ ফ্লোরটি টাইল করতে পারবে?*



চিত্র ১.১৩: 9×8 ফ্লোরের একক বর্গগুলোর একটি কালারিং।

সমাধান: প্রথমে ফ্লোরটিকে 9×8 টি একক বর্গে বিভক্ত কর। তারপর, চিত্র ১.১৩-এর মত ফ্লোরের বর্গগুলোকে সাদাকালো রং কর। লক্ষ কর যে, একটি I-টেট্রামিনো ফ্লোরে যেখানেই বসানো হোক, ঠিক দুইটি কালো বর্গ সেটির নিচে পড়বে। কিন্তু একটি বক্স টেট্রামিনো ফ্লোরে বসালে একটি বা তিনটি কালো বর্গ সেটির নিচে পড়বে। সুতরাং, একটি I-টেট্রামিনো ভেঙে গেলে কালো বর্গ খোলা থাকবে ঠিক দুইটি। তাই আগের টাইলগুলোর সাথে নতুন একটি বক্স টেট্রামিনো যোগ করে যেভাবেই বিন্যস্ত করা হোক, সম্পূর্ণ ফ্লোর টাইল করা সম্ভব না। □

উদাহরণ ১.১২ (আইএমও $1999/3$; সরলীকৃত)**:** *একটি 6×6 বোর্ডের দুটি ঘরকে প্রতিবেশী বলা হবে যদি তাদের মাঝে অন্তত একটি সাধারণ বাহু থাকে। আমরা বোর্ডের কিছু ঘরে ক্রস চিহ্ন এমনভাবে বসাতে চাই যেন বোর্ডের যেকোন ঘরের (ক্রস চিহ্নিত নাও হতে পারে) অন্তত একটি ক্রস চিহ্নিত প্রতিবেশী থাকে। সর্বনিম্ন কয়টি ঘরে ক্রস চিহ্ন বসালে এটা নিশ্চিতভাবে বলা যাবে?*



(ক) (খ)

চিত্র ১.১৪: আইএমও 1999/3.

সমাধান: ধরা যাক, সর্বনিম্ন M টি ঘরে ক্রস বসিয়ে কাজটি করা যায়। এবার, চিত্র ১.১৪(ক)-এর মত করে বোর্ডটিকে কালার কর। খেয়াল কর যে বোর্ডে কালো ঘর আছে 24 টি এবং প্রতিটি ঘরের কালো প্রতিবেশী আছে ঠিক 2 টি। তাহলে, M টি ক্রস চিহ্নিত ঘরের কালো প্রতিবেশী আছে সর্বোচ্চ[৪] $2M$ টি। আবার, সমস্যার শর্তানুসারে, প্রতিটি কালো ঘরের অন্তত একটি ক্রস চিহ্নিত প্রতিবেশী রয়েছে। এর অর্থ হচ্ছে $2M$ টি কালো প্রতিবেশীর মাঝে প্রতিটি কালো ঘরকেই অন্তত একবার গোণা হয়েছে। তাই, $2M \geq 24 \implies M \geq 12$.

চিত্র ১.১৪(খ)-র মত একটি করে কালো ঘর বাদ দিয়ে দিয়ে ক্রস বসালে 12 টি ঘরে ক্রস বসিয়ে শর্ত পূরণ করা যায়। তাই $M = 12$. □

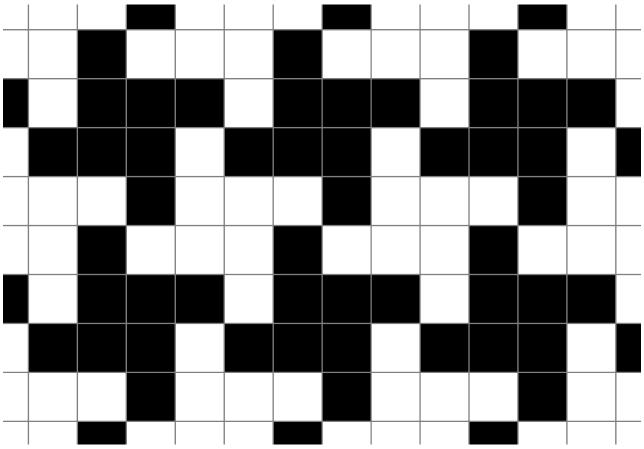
উদাহরণ ১.১৩ (আইএমও শর্টলিস্ট 2014 C4)**:** *কার্তেসীয় তলে একটি বহুভুজের প্রতিটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক কোন পূর্ণসংখ্যার ক্রমজোড়, এবং বহুভুজটিকে শুধু S-টেট্রোমিনো ব্যবহার করে টাইল করা সম্ভব। দেখাও যে, বহুভুজটিকে যদি S এবং Z উভয় ধরনের টেট্রোমিনো দিয়ে টাইল করা সম্ভব হয়, তবে সেই টাইলিঙে জোড় সংখ্যক Z-টেট্রোমিনো ব্যবহার করতে হবে।*

সমাধান: কার্তেসীয় তলের সকল একক বর্গকে চিত্র ১.১৫-এর মত করে রং করা যাক। লক্ষ করলে দেখবে যে প্রতিটি S-টেট্রোমিনো জোড় সংখ্যক এবং প্রতিটি Z-টেট্রোমিনো বেজোড় সংখ্যক কালো ঘর দখল করে। কিন্তু মূল বহুভুজটি তো জোড় সংখ্যক কালো ঘর দখল করে। (কেননা এটিকে শুধু S-টেট্রামিনো দিয়ে টাইল করা যায়।) সুতরাং, টাইলিঙে S-টেট্রোমিনোর সাথে Z-টেট্রোমিনো ব্যবহার করা হলে Z-টেট্রোমিনোর সংখ্যা অবশ্যই জোড় হতে হবে। □

§১.৫ অনুশীলনী

সমস্যা ১.১: 5×5 দাবাবোর্ডের প্রতিটি ঘরে ঠিক একবার গিয়ে একটি ঘোড়া কি যে ঘর থেকে চলা শুরু করেছিল সেই ঘরে ফেরত যেতে পারবে?

[৪]এখানে 'সর্বোচ্চ' শব্দটি কেন ব্যবহার করতে হল?



চিত্র **১.১৫**: আইএমও শর্টলিস্ট 2014 C4

নিজে করো

১. আইএমও শর্টলিস্ট 2014 $C4$ কে দুইবার কালারিং ব্যবহার করে সমাধান কর।

সমস্যা ১.২: কোন একটি ঘুঁটি A দাবাবোর্ডে বসানো আছে। কোন চালে এটি উপরে-নিচে বা ডানে বামে (নৌকার মত) যেতে পারে, কিন্তু সর্বোচ্চ 2 ঘর। একটি 2019×2019 বোর্ডে এমন সর্বোচ্চ কয়টি ঘুঁটি রাখা যেতে পারে?

সমস্যা ১.৩: একটি আয়তাকার বোর্ডকে শুধুমাত্র T-টেট্রোমিনো ব্যবহার করে টাইল করা সম্ভব। প্রমাণ কর যে এটিকে T-টেট্রোমিনো এবং বক্স টেট্রোমিনো দিয়ে টাইল করা হলে বক্স টেট্রোমিনোর সংখ্যা জোড় হবে।

সমস্যা ১.৪: একটি $n \times n$ বর্গের চারটি কর্নারের ঘরগুলো খুলে নেয়া হয়েছে। n-এর কোন কোন মানের জন্য একে L-টেট্রোমিনো দিয়ে টাইল করা সম্ভব?

সমস্যা ১.৫: একটি 9×9 বোর্ডের প্রতিটি ঘরে একটি পিঁপড়া বসে আছে। একবার হাততালি দিলে পিঁপড়াগুলো কোণাকুণিভাবে যেকোন দিকে একঘর যায় [কোন ঘরে একের বেশি পিঁপড়া থাকতে পারে।] সর্বোচ্চ কয়টি ঘর ফাঁকা থাকা সম্ভব?

সমস্যা ১.৬: একটা $10 \times 10 \times 10$ বক্সে কি 250টি $4 \times 1 \times 1$ আকারের ইট আঁটবে?

সমস্যা ১.৭: একটি গ্রহের আকৃতি হল একটি সুষম ঘনক। এই গ্রহে বেশ কয়েকটি দেশ আছে। দেশগুলোর অবস্থান হল :

- ঘনকের শীর্ষগুলোতে।
- প্রতিটি তলের কর্ণের ছেদবিন্দুতে।

এ গ্রহে দেশগুলোর মধ্যে রাস্তা হল কর্ণগুলো। প্রতিটি দেশে একবার করে গিয়ে কি সকল দেশ ঘোরা সম্ভব?

সমস্যা ১.৮: একটি $(2n+1) \times (2n+1)$ বোর্ড থেকে কোণার একটি বর্গ তুলে নেয়া হল। কোন কোন n এর জন্য উলম্ব এবং আনুভূমিক ডমিনোর সংখ্যা সমান হবে?

সমস্যা ১.৯: দেখাও যে, $n > 3$ এর জন্য কোন $4 \times n$ বোর্ডে কোন ঘোড়া সবগুলো ঘর একবার করে ঘুরে এসে প্রথম ঘরে ফিরে আসতে পারে না।

সমস্যা ১.১০: একটি 5×5 বোর্ডকে আটটি 1×3 ট্রিমিনো দিয়ে এমনভাবে টাইল করা হয়েছে যাতে একটি সেল ফাঁকা থাকে। দেখাও যে মাঝখানের বর্গটি ফাঁকা থাকবে।

সমস্যা ১.১১: একটি $(2n-1) \times (2n-1)$ টাইলকে L-ট্রিমিনো, S/Z-টেট্রোমিনো এবং এবং বর্গাকার টেট্রোমিনো দিয়ে টাইল করা হয়েছে। দেখাও যে, কমপক্ষে $4n-1$ টি L-ট্রিমিনো ব্যবহৃত হয়েছে।

সমস্যা ১.১২: (আইএমও $2016/2$) এমন সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n বের কর যাতে একটি $n \times n$ বোর্ডের ব্লকগুলোতে এমনভাবে I, M, O অক্ষরগুলো লেখা যায় যে,

- যেকোন রো বা কলামে I, M এবং O এর সংখ্যা সমান।
- যেসব কর্ণে ব্লকের সংখ্যা 3 দ্বারা বিভাজ্য তাদের মধ্যে I, M এবং O এর সংখ্যা সমান।

অধ্যায় ২

ইনভ্যারিয়ান্ট এবং মনোভ্যারিয়ান্ট

Isn't it funny how day by day nothing changes, but when you look back, everything is different ...

– C.S. Lewis

§২.১ ইনভ্যারিয়ান্ট

কয়েকটা মজাদার সমস্যা দিয়ে শুরু করা যাক ।

উদাহরণ ২.১: *একটি বিশেষ ধরনের ক্যালকুলেটরে কোন সংখ্যা লিখে প্রেস করলে, এটি তার অঙ্ক গুলোর যোগফল বলে দেয় (সংখ্যাটি এক অঙ্কের হলে সে অঙ্কটিই আবার ফেরত আসে)। তন্ময় 3^{999} সংখ্যাটি ক্যালকুলেটরে লিখে বারবার প্রেস করতে থাকল ,যতক্ষণ না এক অঙ্কের কোন সংখ্যা পাওয়া যায় । ঐ সর্বশেষ অংকটি কত ?*

সমাধান: তোমাদের নিশ্চয়ই ছোটবেলায় শেখা "9 দিয়ে বিভাজ্যতার" শর্তটি মনে আছে , যেটা বলে , কোন সংখ্যা 9 দিয়ে নিঃশেষে বিভাজ্য হবে যদি ও কেবল যদি তার অঙ্কগুলোর যোগফল 9 দিয়ে নিঃশেষে বিভাজ্য হয় (এমনকি 9 দিয়ে কোন সংখ্যা আর তার অঙ্কগুলোর যোগফলকে ভাগ করলে একই ভাগশেষ পাওয়া যায়)। 3^{999} সংখ্যাটি যেহেতু 9 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য তাহলে ক্যালকুলেটর এ আসা দ্বিতীয় সংখ্যাটিও নিশ্চয় 9 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হবে । একই যুক্তিতে তৃতীয় সংখ্যাটিও 9 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হবে । একইভাবে ক্যালকুলেটরে ফেরত আসা প্রত্যেকটি সংখ্যাই এ যুক্তি অনুযায়ী 9 দ্বারা বিভাজ্য । কিন্তু 9 দ্বারা বিভাজ্য এক অঙ্কের সংখ্যা আছে মাত্র দুইটি , 0 এবং 9 । শেষ অঙ্কটি 0 হতে পারেনা (কেন ?),সুতরাং শেষ অঙ্কটি অবশ্যই 9 । □

উদাহরণ ২.২: *ঈপ্সিতার কাছে একটি আয়তাকার $m \times n$ চকলেট বার আছে, সে চায় চকলেট বারটিকে কেটে ছোটছোট বর্গাকার টুকরায় ভাগ করতে (এখানে কাটা বলতে দুইটি আলাদা অংশে ভাগ করাকে বোঝানো হয়েছে । শুধুমাত্র ছোট বর্গাকার টুকরোগুলোর ধার বরাবর কাটা যাবে, আর*

আলাদা হাওয়া একাধিক খণ্ডকে একই সাথে কাটা যাবে না)। তাহলে সর্বনিম্ন কতবার কেটে ঈপ্সিতা চকলেট বারটিকে সম্পূর্ণরুপে আলাদা করতে পারবে ?

সমাধান: আসলে, ইপ্সিতা যেভাবেই কাটতে থাকুক না কেন প্রত্যেক ভাবেই শেষপর্যন্ত তাকে একই সংখ্যক বার কাটতে হবে ।
লক্ষ করো, প্রতিবার কাটার পর টুকরার সংখ্যা ঠিক একটি করে বেড়ে যায় (যেহেতু একটা বড় টুকরা ভেঙ্গে দুইটা ছোট টুকরায় পরিণত হয়)। অর্থাৎ চকলেটটি যতবার কাটা হয়েছে তার সংখ্যা এক বাড়লে, টুকরার সংখ্যাও এক বাড়ে । ফলে, **(টুকরার সংখ্যা)** $-$ **(যতবার কাটা হয়েছে তার সংখ্যা)** সবসময় ধ্রব থাকে । শুরুতে এ ধ্রবকের মান আমরা পাই 1 । তাহলে টুকরা করার কাজ শেষ হয়ে যাবার পর, **মোট টুকরার সংখ্যা (অর্থাৎ বর্গাকার চকলেটের সংখ্যা)** $-$ **মোট যতবার কাটা হয়েছে তার সংখ্যা** $=1$ । অর্থাৎ, প্রতিক্ষেত্রেই ঠিক **(বর্গাকার চকলেটের সংখ্যা $-$ 1)** বার কাটার পরই ঈপ্সিতা নিশ্চিত হয়ে যেতে পারে যে সবগুলো বর্গাকার টুকরা আলাদা হয়ে গেছে । □

লক্ষও করো , উপরের দুটি সমস্যাতেই আমাদের প্রধান পর্যবেক্ষণ ছিল এমন কিছু বৈশিষ্ট্য, যারা প্রক্রিয়াটির কোন ধাপেই পরিবর্তিত হয় না, এদেরকেই আমরা বলি ইনভ্যারিয়ান্ট । আরও সহজ কথায় বললে যা বদলায় না তাই ইনভ্যারিয়ান্ট । এটিকে শুনতে যতটা সহজসরল শোনায় ,প্রকৃতঅর্থে এটি ঠিক ততোটাই শক্তিশালী । কম্বিন্যাটোরিক্স , টপোলজি , জ্যামিতি , অ্যালজেবরা সহ গনিতের আরও অনেক শাখায় ইনভ্যারিয়ান্সের ব্যবহার করা হয় ।এমনকি কিছু কিছু ইনভ্যারিয়ান্ট এততাই গুরুত্বপূর্ণ যে তারা আমাদেরকে গনিতকেই নতুনভাবে চিনতে শেখায় , যেমন ধরো অয়লারের দেওয়া $V-E+F=2$ বৈশিষ্ট্যটি[১] যা যেকোনো ত্রিমাত্রিক বহুতলকের(পলিহেড্রন) জন্য একটি ইনভ্যারিয়ান্ট । আসলে যখনই আমরা দেখি কোন কিছু ক্রমাগত পরিবর্তিত হচ্ছে , তখনই একটি ভাল বুদ্ধি হল ঐ জিনিসগুলির উপর নজর রাখা যারা বদলাচ্ছে না (যেমন উপরের প্রথম সমস্যায় 9 দিয়ে বিভাজ্যতা অথবা দ্বিতীয় সমস্যার বিয়োগফলটি)।এ ধরনের বৈশিষ্ট্য আমাদেরকে প্রায়ই কোনো বিশেষ ধরনের প্রক্রিয়াকে (যেমন কোনো অ্যালগরিদম ,ট্রান্সফরমেসন ইত্যাদি) আরো গভীরভাবে বুঝতে সাহায্য করে ।

§২.২ কিছু উদাহরণ এবং ইনভ্যারিয়ান্সের ব্যবহার

> *The only way to make sense out of change is to plunge into it, move with it, and join the dance.*
>
> – Alan Watts

উদাহরণ ২.৩: *ইত্তিয়াদের কাছে একটি কাগজের টুকরা আছে । সে প্রথমে এটিকে হয় 6টি অথবা 11টি ছোট টুকরায় ভাগ করবে । তারপর সে যেকোনো একটি টুকরা নিবে এবং আবার সেটিকে হয় 6টি অথবা 11টি ছোট টুকরায় ভাগ করে ফেলবে । এভাবে করতে থাকলে কি কোন ধাপে মোট টুকরার সংখ্যা 2017টি হতে পারে ?*

[১]এখানে V হচ্ছে শীর্ষের সংখ্যা , E হচ্ছে বাহুর সংখ্যা আর F হচ্ছে তলের সংখ্যা

চিত্র ২.১: চকোলেট বার

নিজে করো

কি বদলাচ্ছে না ?

১. এক কাঠুরিয়া 22 টি কাঠের গুঁড়িকে কেটে 50টি টুকরায় ভাগ করলো । তাহলে তাকে কয়বার কাটতে হয়েছে ?

২. একটি টুর্নামেন্টে 50টি দল অংশ নেয় ।প্রতি বার দুইটি করে দলের মধ্যে খেলা হয় আর পরাজিত দল টুর্নামেন্ট থেকে বাদ যায় ।তাহলে বিজয়ী নির্ণয় করতে মোট কতবার খেলতে হবে ?

৩. একটি বোর্ডে $1, 2, 3, \cdots, 100$ সংখ্যাগুলি লেখা আছে । তুমি প্রতি ধাপে যেকোনো দুইটি সংখ্যা মুছে তাদের যোগফল বোর্ডে লিখবে , যতক্ষণ না পর্যন্ত বোর্ডে মাত্র একটি সংখ্যা থাকে । শেষ সংখ্যাটি কত হবে ?

সমাধান: কিছু ছোট ছোট সংখ্যা দিয়ে এক্সপেরিমেন্ট করে দেখা যাক । এভাবে করতে থাকলে শুরুর দিকে মোট টুকরার সংখ্যার মান হতে পারে $1, 6, 11, 16, 21$ ইত্যাদি । সংখ্যাগুলোর মাঝে কোন মিল দেখতে পাচ্ছ কি ?
সংখ্যাগুলির প্রত্যেক কে 5 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ থাকে 1 । তাহলে কি সব সময়ই এটি সত্য হবে ? চেষ্টা করে দেখা যাক । লক্ষ্য করো, কোন এক সময়ে মোট টুকরার সংখ্যা m হলে , তার পরের ধাপে মোট টুকরার সংখ্যা হবে $m - 1 + 6$ অর্থাৎ $m + 5$ অথবা $m - 1 + 11$ অর্থাৎ $m + 10$ । এখন ,

$$m \equiv m + 5 \equiv m + 10 \pmod 5$$[২]

ফলে মোট টুকরার সংখ্যা $mod\ 5$ এ সর্বদা ইনভ্যারিয়ান্ট থাকে । শুরুতে এ সংখ্যা ছিল 1 । কিন্তু $1 \not\equiv 2017 \pmod 5$ । তাই মোট টুকরার সংখ্যা কখনো 2017 হাওয়া সম্ভব নয় । □

উদাহরণ ২.8: *তুমি চাইলে নিচের চিত্রের যেকোনো সারি বা কলামের অথবা যেকোনো কর্ণের সমান্তরাল সবগুলি বর্গে অবস্থিত সংখ্যার চিহ্ন পরিবর্তন করতে পার । তুমি চাইলে যেকোনো কোনায় অবস্থিত সংখ্যার চিহ্নও পরিবর্তন করতে পারো ।*
প্রমান করো , বোর্ডটিতে সবসময় অন্তত একটি হলেও -1 থাকবে ।

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	-1	1

সমাধান: চার কোণার চারটি বর্গ বাদে বাকি 8টি বাউণ্ডারির বর্গগুলিকে বিবেচনা করো । লক্ষ্য করো , এ 8টি বর্গের মধ্যে কোন বর্গের সংখ্যার চিহ্ন পরিবর্তিত হলে এর ঠিক বিপরিত দিকের বর্গটিতে

[২] $a \equiv b \pmod c$ মানে হল a এবং b কে c দিয়ে ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকবে ।

অবস্থিত সংখ্যার চিহ্নও পরিবর্তিত হবে । ফলে এ 8টি বর্গের মধ্যে অবস্থিত সংখ্যাগুলির গুণফল ইনভ্যারিয়ান্ট থাকবে । শুরুতে এ গুণফল -1 ,অর্থাৎ সবসময় গুণফলটি -1 থাকবে । তাই এই 8টি বর্গের মধ্যে সবসময় বিজোড় সংখ্যক -1 থাকতে হবে , ফলে সবসময় অন্তত একটি -1 থাকবেই । □

উদাহরণ ২.৫: *একটি গোলটেবিলের চারপাশে $1, 0, 1, 0, 0, 0$ সংখ্যাগুলি এই ক্রমে লেখা আছে ,তুমি চাইলে পাশাপাশি দুইটি সংখ্যার মান 1 করে বাড়িয়ে দিতে পার । এভাবে করতে করতে ,তুমি কি কখনো সবগুলি সংখ্যাকে সমান বানিয়ে ফেলতে পারবে ?*

সমাধান: ধরি , কোন এক ক্রমে সংখ্যাগুলো ক্রমান্বয়ে a, b, c, d, e, f । তাহলে $a-b+c-d+e-F$ সবসময় ইনভ্যারিয়ান্ট থাকবে । শুরুতে এটি 2 আর সব সংখ্যা সমান হলে এটি হবে 0 । তাই এটি সম্ভব না । □

উপরের সমস্যাগুলিতে ইনভ্যারিয়ান্ট আমাদের একটি নির্দিষ্ট অবস্থানে পৌঁছানো যায় কিনা তা বের করতে সাহায্য করেছে । সাধারনত সঠিক ইনভ্যারিয়ান্টটি খুজে বের করতে পারলে , এ ধরনের ইনভ্যারিয়ান্ট এর সমস্যায় সমাধানের খুব কাছাকাছি চলে আসা যায় (অবশ্যই সবসময় একথা সত্য না)। তবে আসল চ্যালাঞ্জটি হল সঠিক ইনভ্যারিয়ান্টটি খুজে বের করা । ইনভ্যারিয়ান্ট অনেক ধরনের হতে পারে । যেমন যেকোনো সিমেট্রি এক ধরনের ইনভ্যারিয়ান্ট ,আবার ইনভ্যারিয়ান্ট হতে পারে কোন অ্যালজেব্রিক ফাংশন আকারের । কোন সংখ্যা দিয়ে বিভাজ্যতা কিংবা ভাগশেষ কে প্রায়ই ইনভ্যারিয়ান্ট হতে দেখা যায় । তবে সবচেয়ে সহজ ধরনের ডিভিসিবিলিটি ইনভ্যারিয়ান্ট হচ্ছে প্যারিটি [৩] । পরের সেকশনে আমরা প্যারিটি নিয়ে আলোচনা করব । এরপরই সাথে সাথে ম্যাজিশিয়ান বলে দিল যে চারটি কার্ডের মধ্যে তিনটি কার্ড এক দিকে মুখ করে আছে, আর অন্যটি আছে ঠিক উল্টো দিকে মুখ করে । বলও তো কোন কার্ডটি উল্টো দিকে মুখ করে আছে ? কেন ?[৪]

§২.৩ প্যারিটি

প্যারিটি দ্বারা কোন সংখ্যার জোড় বা বিজোড় হওয়ার চরিত্র প্রকাশ পায় । প্রত্যেকটি স্বাভাবিক সংখ্যার প্যারিটি হয় জোড় অথবা বিজোড় । তোমাদের মনে হতে পারে এ আর কি এমন বিষয় , তবে স্বাভাবিক সংখ্যার এই সামান্য ধর্মটি যে কতোটা কাজের হতে পারে তা তোমরা শীঘ্রই দেখতে পারবে । ছোটবেলায় শেখা কিছু জিনিস দিয়ে শুরু করা যাক ।

- একই প্যারিটির দুটি সংখ্যার যোগফল ও বিয়োগফল জোড়
- ভিন্ন প্যারিটির দুটি সংখ্যার যোগফল ও বিয়োগফল বিজোড়
- দুটি সংখ্যার যোগফল এর প্যারিটি আর দুটি সংখ্যার বিয়োগফল এর প্যারিটি একই ।
- কোন সংখ্যার সাথে জোড় সংখ্যা যোগ করলে তার প্যারিটি বদলায় না ।

[৩]অর্থাৎ সংখ্যাটি জোড় না বিজোড়

[৪]এই সমস্যাটি সম্পর্কে বিস্তারিত জানতে

নিজে করো

ম্যাথ না ম্যাজিক

এক ম্যাজিশিয়ান একজন লোককে 4টি কার্ড (ধরে নেই তোমার কাছে তাসের কার্ড নেই, তাই ধরো 1,2,3,4 লেখা চারটি কার্ড) ধরিয়ে দিয়ে নিছের কাজগুলো করতে বললো (তুমিও করে দেখতে পার)।

১. প্রথমে সবার নিচে 1 লেখা কার্ডটি সোজা করে [a] রেখে তার উপর 2 এবং 3 লেখা কার্ড দুটি সোজা করে রাখো । তাদের উপর 4 লেখা কার্ডটি উল্টো করে রাখতে হবে ।

২. নিচের কাজগুলো যতবার ইচ্ছা যেকোনো ক্রমে করা যাবে ।

- উপর থেকে যেকোনো সংখ্যক কার্ড নিয়ে তাদের একসাথে বাকি কার্ডগুলির নিচে রেখে দেওয়া যাবে ।
- উপরের দুইটি কার্ডকে একসাথে নিয়ে একটি কার্ডের মত করে উল্টিয়ে দেয়া যাবে ।
- চাইলে পুরো কার্ডের বান্ডিলটিকে উল্টিয়ে দেয়া যাবে ।

৩. প্রথম কার্ডটি উল্টিয়ে দাও । তারপর প্রথম দুইটি কার্ড একসাথে একটির মত করে উল্টিয়ে দাও । একইভাবে প্রথম তিনটি কার্ড একসাথে একটির মত করে উল্টিয়ে দাও ।

[a]অর্থাৎ কার্ডের 1 চিহ্নিত অংশটি উপরের দিকে রেখে

- একাধিক সংখ্যার যোগফল জোড় হয় যদি এবং কেবল যদি তাদের মধ্যে জোড় সংখ্যক বিজোড় সংখ্যা থাকে ।

- একাধিক সংখ্যার গুণফল বিজোড় হয় যদি এবং কেবল যদি তাদের মধ্যে কোন জোড় সংখ্যা না থাকে ।

নিজে করো

১. উপরের উক্তি গুলো প্রমান করো ।

২. $\_\_1\_\_2\_\_3\_\_4\_\_5\_\_6\_\_7\_\_8\_\_9\_\_10$
উপরের শূন্যস্থানগুলোর মাঝে কি এমনভাবে ”যোগ” বা ”বিয়োগ” চিহ্ন বসানো যেতে পারে যাতে রাশিটির মান 0 হয় ।

কিছু উদাহরণ দিয়ে শুরু করা যাক ।

উদাহরণ ২.৬: *একটি পার্টিতে কিছু মানুষ হ্যান্ডশেক করছে । প্রমান করো ,যে কোন মুহূর্তে বিজোড় সংখ্যক বার হ্যান্ডশেক করা মানুষের সংখ্যা জোড় ।*

সমাধান: প্রতি বার হ্যান্ডশেক করার পর প্রত্যেকের মোট হ্যান্ডশেকের সংখ্যার যোগফল 2 করে বেরে যায় । অর্থাৎ প্রত্যেকের মোট হ্যান্ডশেকের সংখ্যার যোগফলের প্যারিটি ইনভ্যারিয়ান্ট থাকে ,অর্থাৎ এর প্যারিটি হয় জোড় । যেহেতু , প্রত্যেকের মোট হ্যান্ডশেকের সংখ্যার যোগফলের প্যারিটি জোড় ,তাই বিজোড় সংখ্যক বার হ্যান্ডশেক করা মানুষের সংখ্যা জোড় । □

উদাহরণ ২.৭: *একটি বাক্সে 11টি সাদা এবং 11টি কালো বল আছে । খেলার নিয়ম হলো বাক্স থেকে একই রঙের দুইটা বল তুলে নিলে , তাদের পরিবর্তে একটি সাদা বল রেখে দিতে হবে আর আলাদা রঙের দুইটা বল তুলে নিলে , তাদের পরিবর্তে একটি কালো বল রেখে দিতে হবে । একবার তুমি দুইটা বল তুলে নিবে , পরের বার আমি দুইটা বল তুলে নিব ,এভাবে চলতে থাকবে । শেষ পর্যন্ত যদি একটা সাদা বল অবশিষ্ট থাকে , তবে তুমি জিতবে , আর যদি কালো বল অবশিষ্ট থাকে তবে আমি জিতব , প্রশ্ন হল তুমি কি আমাকে হারাতে পারবে ?*

সমাধান: উত্তর হলো ," না " । যে যেভাবেই খেলুক না কেন (এমনকি আমি না খেললেও),শেষপর্যন্ত আমিই জিতবো । প্রথমত লক্ষ্য করো , প্রতি ধাপে বলের সংখ্যা ঠিক একটি করে কমে যায় । অর্থাৎ এমন এক সময় আসবে যখন ঠিক একটি বল অবশিষ্ট থাকবে । খেলার নিয়ম অনুসারে প্রতি ধাপে কালো বলের সংখ্যা হয় 2টি করে কমে যাবে অথবা একটিও কমবে না । অর্থাৎ প্রতি ধাপে কালো বলের সংখ্যা $mod\ 2$ তে ইনভ্যারিয়ান্ট থাকবে (অর্থাৎ কালো বলের সংখ্যাকে 2 দিয়ে ভাগ করলে সর্বদা একই ভাগশেষ পাওয়া যাবে , মানে এটি হয় সব ধাপে জোড় থাকবে অথবা সব ধাপে বিজোড় থাকবে)। কিন্তু 11 যেহেতু বিজোড় তাই শেষ ধাপে 0 টি কালো বল থাকতে পারে না (যেহেতু 0 জোড়) । তাই শেষ ধাপে 1টি কালো বলই অবশিষ্ট থাকবে । □

উদাহরণ ২.৮: *একটি বোর্ডে 11টি α ,12টি β ও 13টি γ চিহ্ন আঁকা আছে । লাযিম চাইলে যেকোনো দুইটি আলাদা ধরনের চিহ্ন মুছে, তৃতীয় ধরনের চিহ্ন একটি করে বাড়িয়ে দিতে পারে । এরকম কয়েকবার করার পর লাযিম দেখলও শুধুমাত্র একটি চিহ্ন বাকি আছে, কোন চিহ্নটি বাকি আছে ?*

সমাধান: লক্ষ্য করো , প্রতি ধাপে α এর সংখ্যার, β এর সংখ্যার এবং γ এর সংখ্যার প্যারিটি উল্টো হয়ে যায় । যেহেতু প্রথম ধাপে α এর সংখ্যা এবং γ এর সংখ্যা এর প্যারিটি একই , তাই প্রত্যেক ধাপে এদের প্যারিটি একই থাকবে আর β এর প্যারিটি থাকবে তার উল্টোটা । শেষ ধাপে যেহেতু দুইটি চিহ্ন 0 বার রয়েছে আর একটি চিহ্ন রয়েছে 1 বার, তাই অবশ্যই β বাকি রয়েছে । □

উদাহরণ ২.৯: *$1, 2, 3, \cdots, n$ সংখ্যাগুলো এই ক্রমে সাজানো আছে । আমরা চাইলে এদের মধ্যে যেকোনো দুইটি সংখ্যাকে পরস্পর স্থান বিনিময় করে লিখতে পারি । এভাবে বিজোড় সংখ্যক বার স্থান বিনিময় করে কি পুনরায় আগের অবস্থানে ফিরে আসা সম্ভব ?*

সমাধান: প্রথমত, বিজোড় সংখ্যক বার করার কথা কেন বলা হলো, জোড় সংখ্যক বারে কি এটা করা সম্ভব ? অবশ্যই, একই সংখ্যাজোড়কে দুই বার স্থান বিনিময় করালেই তা আগের অবস্থানেই ফিরে আসবে ।

তাহলে এবার আসল প্রশ্নে আসা যাক । আমরা এমন ধরনের ক্রমজোড় (a, b) এর সংখ্যা গণনা করব যাতে $a > b$ কিন্তু তালিকায় a সংখ্যাটি b এর আগে রয়েছে । এ ধরনের ক্রমজোড়কে আমরা বলব " ইনভারসন " । আমরা মোট ইনভারসন এর সংখ্যা I কে বিবেচনা করব । শুরুতে ইনভারসন এর সংখ্যা 0 । ধরি কোন ধাপে দুইটা সংখ্যা m, n এর স্থান বিনিময় করা হলো । m ও n এর মাঝে

K টি সংখ্যা আছে । তাহলে (m, n) , m ও K টি সংখ্যার প্রত্যেকটিকে নিয়ে গঠিত ক্রমজোড় আর n ও Kটি সংখ্যার প্রত্যেকটিকে নিয়ে গঠিত ক্রমজোড়সমূহের প্রত্যেকে (মোট $2K+1$ টি ক্রমজোড়) তাদের অবস্থার পরিবর্তন করবে । অর্থাৎ আগে যে ক্রমজোড়গুলো আগে ইনভারসন ছিল তারা ইনভারসন থাকবে না , আর যারা ছিল না তারা ইনভারসন হয়ে যাবে । অর্থাৎ I এর প্যারিটি বিজোড় সংখ্যক বার (যেহেতু $2K+1$ বিজোড়) পরিবরতিত হবে । তাই প্রত্যেকবার স্থান বিনিময় করার পর I এর পেয়ারিটি উল্টে যাবে । তাহলে বিজোড় সংখ্যক বার স্থান বিনিময় করার পর I এর মান বিজোড় হবে (যেহেতু শুরুতে এর মান ছিল 0 যা জোড়)। কিন্তু প্রথম অবস্থানে I এর মান জোড় (0) ছিল । অর্থাৎ বিজোড় সংখ্যক বারে পূর্বের অবস্থানে ফিরে আসা সম্ভব না । □

উদাহরণ ২.১০: *একটি 4×4 বোর্ডে নিচের চিত্রের মতো করে 1 থেকে 15 পর্যন্ত চিহ্ন গুলো সাজানো আছে । বোর্ডের শেষ বর্গটি খালি । প্রতি পদক্ষেপে, কোন বর্গ আর খালি বর্গটির একটি সাধারন বাহু*

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

চিত্র ২.২: বোর্ডের প্রথম অবস্থান

থাকলে, আমরা ঐ বর্গের সংখ্যাটি তুলে খালি বর্গে বসাতে পারব ।[৫] এরকম কিছু পদক্ষেপের পর কি আমরা নিচের চিত্রের অবস্থানে পৌঁছাতে পারব ?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

চিত্র ২.৩: বোর্ডের দ্বিতীয় অবস্থান

সমাধান: বোর্ডটির প্রথম সারি , দ্বিতীয় সারি , তৃতীয় সারি ও চতুর্থ সারির সংখ্যা গুলোকে একসাথে (এই ক্রমে) নিয়ে তৈরি অনুক্রমটি [৬] বিবেচনা করি । কোন ধাপে সংখ্যাগুলির অবস্থান অনুভূমিকভাবে পরিবর্তিত হলে উপরের অনুক্রমটির কোন পরিবর্তন হয় না । আর সংখ্যাগুলির অবস্থান উলম্বভাবে পরিবর্তিত হলে অনুক্রমটির একটি সংখ্যা তার তিন ঘর আগে বা পরে চলে যায় । এখন আমরা আগের সমস্যার মতো এই অনুক্রমে " ইনভারসন " এর সংখ্যা বিবেচনা করি । যেহেতু উলম্বভাবে পরিবর্তনের সময় ইনভারসন এর প্যারিটি তিনবার বদলায় (সংখ্যাটি তিন ঘর আগায় বা পিছায় বলে),ফলে এতে

[৫] *তোমরা যারা sliding puzzle নিয়ে খেলেছ , তারা নিশ্চই এটা চিনতে পেরেছ ?*

[৬] সিকোয়েন্স(Sequence) অর্থাৎ নির্দিষ্ট বিন্যাসের একটি তালিকা যাতে একই জিনিস একাধিকবার আস্তে পারে ।

ইনভারসন এর প্যারিটি উল্টে যায় । কিন্তু শুরুর অবস্থায় আর শেষ অবস্থায় , উভয় ক্ষেত্রেই খালি ঘরটি একই স্থানে থাকায় , খালিঘরটি যতবার উপরে উঠে ঠিক ততবার নিচে নামে , তাই উলম্বভাবে পরিবর্তন হয় জোড় সংখ্যক বার । ফলে শেষ অবস্থানে ইনভারসন এর সংখ্যার প্যারিটি আর শুরুর অবস্থানে ইনভারসন এর সংখ্যার প্যারিটি একই হওয়া উচিৎ । কিন্তু শুরুর অবস্থানে ইনভারসন এর সংখ্যা 1 , অথচ শেষ অবস্থানে ইনভারসন এর সংখ্যা 0 ।
ফলে প্রদত্ত শেষ অবস্থানে আসা সম্ভব না । □

পরবর্তী সেকশনে আমরা প্যারিটি ব্যবহার করে একটি বিখ্যাত ফলাফল প্রমাণ করব ।

নিজে করো

১. ধরি একটি বোর্ডে 1 থেকে 200 পর্যন্ত সবগুলি সংখ্যা লেখা আছে । তুমি চাইলে যেকোনো দুইটি সংখ্যা a ও b তুলে দিয়ে $|\, a-b \,|$ সংখ্যাটি লিখতে পার । 199বার এমন করার পর একটি সংখ্যা বাকি থাকবে । সংখ্যাটি জোড় না বিজোড় ?

২. $a_1, a_2, \cdots, a_n$ হচ্ছে $1, 2, \cdots, n$ সংখ্যাগুলোর একটি বিন্যাস । যদি n বিজোড় হয় তবে প্রমান করো ,নিচের গুণফলটি জোড় ।

$$(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)\cdots(a_n-n)$$

স্পারনারের লেমা

গণিতবিদ **এমানুয়েল স্পারনার** সর্বপ্রথম এই লেমাটি[৭] ব্যবহার করেন । মজাদার ব্যাপার হল, এই কম্বিন্যাটরিয়াল লেমাটি ব্যবহার করে "ব্রউয়ার ফিক্সড পয়েন্ট থিওরেম [৮]" এর মতো শক্তিশালী অ্যালজেব্রিক রেজাল্ট সরাসরি প্রমাণ করা যায় । আমরা এখানে শুধুমাত্র একমাত্রিক ও দ্বিমাত্রিক ক্ষেত্রে স্পারনারের লেমা নিয়ে আলোচনা করব ।

উপপাদ্য ২.১: *(একমাত্রিক স্পারনারের লেমা) একটি রেখাংশ AB কে অন্য কতোগুলি ক্ষুদ্র রেখাংশে বিভক্ত করে ,রেখাংশগুলির প্রান্তবিন্দুগুলিকে 1 বা 2 এই দুইটি রঙের মধ্যে যেকোনো একটি রঙ দিয়ে রং করা হল । A ও B এর রং যথাক্রমে 1 ও 2 । তাহলে বিভক্ত রেখাংশগুলির মধ্যে এমন বিজোড় সংখ্যক রেখাংশ রয়েছে যাদের দুই প্রান্তের রং আলাদা ।*

প্রমাণ: লক্ষ্য কর , A থেকে B তে যাওয়ার পথে বিজোড় সংখ্যক বার রং পরিবর্তন করলেই কেবলমাত্র A ও B এর রং ভিন্ন হবে ।এখান থেকে আমরা সরাসরি পাই , ভিন্ন রঙের প্রান্তবিন্দু বিশিষ্ট রেখাংশের সংখ্যা বিজোড় । আরেকটা মজার জিনিস লক্ষ্য কর যে , 1 ও 2 রঙের প্রান্তবিন্দু বিশিষ্ট (এই ক্রমে) রেখাংশের সংখ্যা , 2 ও 1 রঙের প্রান্তবিন্দু বিশিষ্ট (এই ক্রমে) রেখাংশের সংখ্যার চেয়ে ঠিক 1 বেশী

[৭]**লেমা** হল একটি প্রমানিত ফলাফল, যার একমাত্র উদ্দেশ্য অন্য একটি উপপাদ্যকে(Theorem) প্রমাণ করতে সাহায্য করা ।

[৮]যারা এই থিওরেমটি নিয়ে জানতে আগ্রহী তারা ইন্টারনেটে এ নিয়ে আরও খুজে দেখতে পার ।

।এখান থেকেও দেখা যায় যে, এমন বিজোড় সংখ্যক রেখাংশ রয়েছে যাদের দুই প্রান্তের রং আলাদা । □

উপপাদ্য ২.২: ***(দ্বিমাত্রিক স্পারনারের লেমা)*** *একটি ত্রিভুজক্ষেত্র ABC কে অন্য কতগুলো ছোট ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে[১],নিম্নোক্ত শর্ত মেনে এর প্রত্যেকটি শীর্ষ বিন্দুকে 1 ,2 বা 3 এই তিনটি রঙের মধ্যে যেকোনো একটি রঙ দিয়ে রং করা হল ঃ*

- *A , B ও C এর রং যথাক্রমে 1 , 2 ও 3*
- *ABC ত্রিভুজের কোন বাহুর উপরে থাকা শীর্ষবিন্দু গুলোকে শুধুমাত্র ,ঐ বাহুর দুই প্রান্তের শীর্ষবিন্দু দুটির রঙ দিয়েই রং করা যাবে ।*
- *বাকি শীর্ষগুলিকে ইচ্ছেমতো রং করা যাবে ।*

বিভক্ত করে পাওয়া ত্রিভুজ গুলোর মধ্যে , কোন ত্রিভুজকে ”সম্পূর্ণ” বলা হবে যদি এর 3টি শীর্ষবিন্দু রং পরস্পর আলাদা হয় । তাহলে ত্রিভুজ গুলির মধ্যে বিজোড় সংখ্যক ”সম্পূর্ণ” ত্রিভুজ থাকবে ।

প্রমাণ: প্রথমেই লক্ষ্য কর যে ,0 একটি জোড় সংখ্যা । অর্থাৎ উপরের লেমাটি যদি আমরা প্রমাণ করতে পারি , তাহলে সাথে সাথে এটাও প্রমাণ হয়ে যাবে যে ,”সম্পূর্ণ” ত্রিভুজ এর সংখ্যা 0 হতে পারে না ,অর্থাৎ অন্তত একটি হলেও ”সম্পূর্ণ” ত্রিভুজ রয়েছে ।এবার মূল প্রমানে ফিরে আসা যাক । কোন একটি বাহু কে 12 বাহু বলা হবে যদি এর দুইটি প্রান্তবিন্দুর রং যথাক্রমে 1 ও 2 হয় । এখন প্রত্যেকটি 12 বাহুর দুই পাশে একটি করে ফোঁটা আঁকি । আমরা ABC ত্রিভুজটির অভ্যন্তরে অবস্থিত ফোঁটার সংখ্যা গননা করব । প্রথমত ABC এর অভ্যন্তরের প্রত্যেকটি বাহুর জন্য 0 বা 2টি করে ফোঁটা পাওয়া যায় । আবার ABC এর পরিসীমায় অবস্থিত প্রত্যেকটি বাহুর জন্য ABC এর অভ্যন্তরে 0 বা 1টি ফোঁটা পাওয়া যায় (বাহুটি 12 বাহু কিনা তার উপর নির্ভর করে)। ফলে,

$$ABC \text{ এর অভ্যন্তরে ফোঁটার সংখ্যা} \equiv ABC \text{ এর পরিসীমায় } 12 \text{ বাহুর সংখ্যা} \pmod 2$$

এখন আমরা ABC এর ভিতরে ছোট ত্রিভুজগুলোর অভ্যন্তরে ফোঁটার সংখ্যা গননা করব ।”সম্পূর্ণ” ত্রিভুজগুলির ভিতরে 1টি ফোঁটা থাকবে , যেখানে বাকি ত্রিভুজ গুলির ভিতরে ফোঁটা থাকবে জোড় সংখ্যক । ফলে,

$$ABC \text{ এর অভ্যন্তরে ফোঁটার সংখ্যা} \equiv \text{ ”সম্পূর্ণ” ত্রিভুজের সংখ্যা} \pmod 2$$

লক্ষ্য কর, ABC এর পরিসীমার সকল 12 বাহু থাকবে AB বাহুতে । আবার একমাত্রিক স্পারনারের লেমা হতে পাই AB বাহুতে 12 বাহু থাকবে বিজোড় সংখ্যক ।ফলে ,

$$\text{”সম্পূর্ণ” ত্রিভুজের সংখ্যা } \equiv ABC \text{ এর পরিসীমায় } 12 \text{ বাহুর সংখ্যা} \equiv 1 \pmod 2$$

অর্থাৎ , ”সম্পূর্ণ” ত্রিভুজ রয়েছে বিজোড় সংখ্যক । □

[১] *এভাবে কোন ক্ষেত্রকে কতগুলো ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করাকে বলা হয় $Triangulation$*

মজার ব্যাপারটি হল আগের মতই "সম্পূর্ণ" ত্রিভুজগুলির মধ্যেও যে কয়টা ত্রিভুজকে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে 1 , 2 ও 3 দ্বারা (এই ক্রমে) রং করা হয়েছে তাদের সংখ্যা ও যাদের ঘড়ির কাটার দিকে 1 , 2 ও 3 দ্বারা (এই ক্রমে) রং করা হয়েছে তাদের সংখ্যার ব্যবধান ঠিক 1(এর প্রমাণ আমরা দিচ্ছি না, তোমরা চাইলে চেষ্টা করে দেখতে পার)। আরোহ (Induction) পদ্ধতি ব্যবহার করে যেকোনো n-মাত্রিক ক্ষেত্রের জন্য স্পারনারের লেমা প্রমাণ করা যায় ।
প্যারিটি এর আরও উদাহরণের জন্য তোমরা "কালারিং" অধ্যায়টি দেখতে পার ।এখন আমরা আবার ইনভ্যারিয়ান্ট এ ফিরে যাই ।

§২.৪ আবারো ইনভ্যারিয়ান্ট

এখন আমরা ইনভ্যারিয়ান্টস ব্যবহার করে আইএমও এর একটি সমস্যা সমাধান করব ।

উদাহরণ ২.১১ (আইএমও ২০১১/২): *সসীম সংখ্যক বিন্দু (অন্তত 2টি) নিয়ে গঠিত একটি সেট S । ধরি , S এর কোন তিনটি বিন্দু সমরৈখিক নয় । " উইন্ডমিল " দ্বারা আমরা এমন একটি প্রক্রিয়াকে বোঝাবো , যেটা $P \in S$ বিন্দুগামী একটি রেখা l কে দিয়ে শুরু হয় । পিভট [১০] P কে কেন্দ্র করে l ঘড়ির কাটার দিকে ঘুরতে থাকে , যতক্ষণ না এটি S সেটে অবস্থিত অন্য কোন বিন্দু Q কে স্পর্শ করে । এখন Q হয়ে যাবে আমাদের নতুন পিভট , আর লাইনটা এখন Q কে কেন্দ্র করে ঘুরবে ।এই প্রক্রিয়াটি অনির্দিষ্ট সংখ্যক বার পর্যন্ত চলতে থাকবে ।*
প্রমান করো ,আমরা এমন একটি বিন্দু $P \in S$ এবং শুরু করার জন্য এমন একটি রেখা l নির্বাচন করতে পারব যেন ,প্রাপ্ত উইন্ডমিল S সেটের প্রতিটি বিন্দুকে অসিম সংখ্যক বার ভ্রমন করে ।

সমাধান: ধরি ,S এর যেকোনো দুইটি বিন্দুগামি সরলরেখা সমূহের সেট R । আর l_0 যেকোনো একটি সরলরেখা যা R সেটের কোন সরলরেখার সমান্তরাল নয় । আমরা এখন দুইটি কেস বিবেচনা করব ।
প্রথমে কেসে ধরি, S এ বিজোড় সংখ্যক বিন্দু রয়েছে এবং $|S| = 2n+1$ । তাহলে নিশ্চয়ই এমন একটি সরলরেখা l_1 রয়েছে , যাতে l_1 রেখাটি l_0 এর সমান্তরাল , l_1 এর দুই পাশে S এর সমান সংখ্যক (n সংখ্যক) বিন্দু বিদ্যমান এবং রেখাটি S এর কোন একটি বিন্দু (বিন্দুটি অনন্য, ধরি এর নাম P) দিয়ে যায় । (কেন ? তার উত্তর তোমরা নিজেরা খুজে বের করার চেষ্টা কর)।আমরা প্রমান করব , এই P এবং l_1 প্রশ্নের শর্তগুলো পূরণ করে । l_1 এর একপাশের নাম দাও **লাল অংশ** আর অপর পাশের নাম দাও **হলুদ অংশ**(P বিন্দুটি কোন অংশেই পরে না) । লক্ষ্য কর Q বিন্দুটি যখন আমাদের নতুন পিভট হয়ে যাবে, তখন P বিন্দুটি Q আগে যেই অংশে ছিল ঠিক সেই অংশে চলে যাবে ।এখন কোন ইনভ্যারিয়ান্ট দেখতে পাচ্ছ কি ? হ্যাঁ , কোন অংশে বিন্দুর সংখ্যা পরিবর্তিত হচ্ছে না । ফলে সবসময়ই l_1 এর দুই পাশের লাল আর হলুদ অংশে বিন্দুর সংখ্যা সমান থেকে যাচ্ছে । তাছাড়া শুধু সেই সকল বিন্দুই অংশ পরিবর্তন করছে যাদের পূর্বে পিভট হিসেবে ব্যবহার করা হয়েছে । l_1 ঘুরতে ঘুরতে কোন এক সময় (180° ঘোরার পর) আবার l_0 এর সমান্তরাল হয়ে যাবে । কিন্তু আমাদের ইনভ্যারিয়ান্ট অনুযায়ী এখনো l_1 এর দুই পাশে সমান সংখ্যক বিন্দু বিদ্যমান । তাহলে l_1 নিশ্চয়ই তার আগের অবস্থানে ফিরে এসেছে ।কিন্তু 180° ঘোরার পর l_1 এর লাল আর হলুদ

[১০] *যাকে কেন্দ্র করে কোন কিছু ঘুরে*

অংশ পরস্পর উল্টে গেছে । S এর সব বিন্দুই (P ছাড়া) যেহেতু অংশ পরিবর্তন করেছে , তাহলে নিশ্চয়ই সকল বিন্দুকেই পিভট হিসেবে ব্যবহার করা হয়েছে ।
S এ বিজোড় সংখ্যক বিন্দু থাকলে ,সবকিছু আগের মতই করব শুধু l_1 এর দুই পাশে অবস্থিত বিন্দুর সংখ্যার পার্থক্য হবে 1 । $180°$ ঘোরার পর l_1 আবার l_0 এর সমান্তরাল হয়ে যায় ,কিন্তু এবার এটা অন্য একটি বিন্দু T দিয়ে যায় । এবারও S এর সব বিন্দুই (P ও T ছাড়া) যেহেতু অংশ পরিবর্তন করেছে ,তাই এক্ষেত্রেও সকল বিন্দুকেই পিভট হিসেবে ব্যবহার করা হয়েছে । উভয় ক্ষেত্রেই এভাবে বারবার চলতে থাকলে আমাদের প্রশ্নের শর্তও পূরণ হয়ে যাবে । □

উদাহরণ ২.১২: *ধরো, একটি সেট $\{1, 2, \cdots, n\}$ (যেখানে $n > 1$) দেয়া আছে । তুমি চাইলে সেটটি থেকে যেকোনো দুইটি সংখ্যা a ও b তুলে নিয়ে তাদের বদলে $ab + a + b$ সংখ্যাটি লিখে দিতে পার । $n - 1$ ধাপের পর শুধু একটি সংখ্যা বাকি থাকবে । সংখ্যাটি কত ?*

উদাহরণ ২.১৩: *একটা লাইনের উপর কিছু সংখ্যা একটি নির্দিষ্ট ক্রমে সাজানো আছে । আমরা চাইলে যেকোনো চারটি সংখ্যা a, b, c, d (এই ক্রমে) তুলে নিয়ে তাদেরকে বদলে উল্টোক্রমে d, c, b, a (এই ক্রমে) লিখতে পারি । শুরুর সংখ্যাগুলি $1, 2, 3, \cdots, 19, 20$ (এই ক্রমে) হলে , একাধিক ট্রান্সফরমেসনের মাধ্যমে এদেরকে কি $20, 13, 1, 2, \cdots, 12, 14, 15, \cdots, 19, 20$(এই ক্রমে) এই বিন্যাসে নিয়ে আসা সম্ভব ?*

§২.৫ মনোভ্যারিয়াণ্ট

There is nothing wrong with change if it is in the right direction.

– Winston Churchill

অধ্যায় ৩

পিজিয়নহোল প্রিন্সিপল

§৩.১ সরল (Simple) পিজিয়নহোল প্রিন্সিপল

মনে করো, তোমার কাছে $(n+1)$ টি পায়রা আছে, আর এদেরকে তুমি n টি খোপে রাখতে চাও। তাহলে, নিশ্চয়ই তোমাকে অন্তত একটি খোপে একাধিক পায়রা রাখতে হবে? এই সাদাসিধে ধারণাটিকে বলে পিজিয়নহোল প্রিন্সিপল বা সোজা বাংলায় পায়রার খোপ নীতি।

তবে সাদাসিধে হলেও পিজিয়নহোল প্রিন্সিপল অত্যন্ত কাজের একটি জিনিস। কেননা ঠিক ঠিক গাণিতিক বস্তুকে পায়রা এবং খোপ হিসেবে চিন্তা করে এর সাহায্যে অনেক বাঘা বাঘা উপপাদ্য প্রমাণ করে ফেলা সম্ভব। পিজিয়নহোল প্রিন্সিপল ব্যবহার হয় এমন কিছু সমস্যা চলো তাহলে দেখি!

উদাহরণ ৩.১: *প্রমাণ কর সাত ভাই চম্পা ও পারুলের মাঝে অন্তত দুইজনের জন্ম একই বারে!*

সমাধান: আট ভাইবোনকে পায়রা এবং সপ্তাহের সাত দিনকে খোপ ভাব। তাহলে অন্তত দুজন ভাইবোন (পায়রা)-কে একই খোপে যেতে হবে, অর্থাৎ একই বারে জন্মাতে হবে। □

উদাহরণ ৩.২: *ময়মনসিংহ জিলা স্কুলে 2000 জন ছাত্র পড়ে। প্রমাণ করো অন্তত দুইজন ছাত্রের জন্মদিন বছরের একই দিনে।*

সমাধান: ছাত্রদেরকে পায়রা এবং বছরের 365 দিনকে খোপ ধর। অবশ্যই একাধিক ছাত্রকে কোন একটি খোপে যেতে হবে, অর্থাৎ একই দিনে জন্মাতে হবে। □

উদাহরণ ৩.৩: *আমরা জানি যে কোন মানুষের মাথায় 3 লক্ষের বেশি চুল থাকে না। এবার প্রমাণ কর ঢাকা শহরে অন্তত দুইজন মানুষের মাথায় সমান সংখ্যক চুল আছে!*

সমাধান: ঢাকা শহরের জনসংখ্যা 3 লক্ষের চেয়ে অনেক বেশি। যদি চুলের সংখ্যাকে পায়রার খোপ আর মানুষের মাথাকে পায়রা হিসেবে চিন্তা করি, তবে পিজিয়নহোল প্রিন্সিপল অনুসারে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যার চুল অবশ্যই একাধিক মানুষের মাথায় থাকবে। □

মন্তব্য: ঢাকার সব টেকো লোকের মাথায় বাই ডেফিনিশন 0টি চুল আছে। উপরের সমস্যার একটি হাস্যকর সমাধান এটা হতে পারে। তবে যদি সব টেকো লোককে বাদ দিয়ে চুলের সংখ্যা গোণা হয়, তাও উপরের সমাধান অনুযায়ী ঢাকার অন্তত দুইজন লোকের মাথায় সমান সংখ্যক চুল পাওয়া যাবে।

নিজে করো

নিচের ঘটনাগুলো পিজিয়নহোল প্রিন্সিপল দিয়ে ব্যাখ্যা করতে পারবে কি?

১. যেকোন 13 জন লোকের মধ্যে অন্তত 2 জনের একই মাসে জন্ম হয়েছে।

২. 6 বিষয়ের কোন পরীক্ষায় যদি কেউ 486 পায়, তবে সে কমপক্ষে একটি পরীক্ষায় 81 বা তার বেশি পেয়েছে।

৩. কোন ওয়ানডে ম্যাচ এ যদি কোন দল 250 রান করে, তবে কমপক্ষে একটি ওভারে 5 বা তার বেশি রান হয়েছে।

৪. প্রমাণ কর যেকোন বিয়েবাড়িতে এমন দুজন লোক অবশ্যই পাওয়া যাবে যারা সমান সংখ্যক লোকের সাথে করমর্দন করেছে।

উদাহরণ ৩.৪: *প্রমাণ কর $(n+1)$ টি পূর্ণসংখ্যার প্রতিটিকে n দিয়ে ভাগ করা হলে অন্তত দুইটি সংখ্যার ভাগশেষ অভিন্ন হবে।*

সমাধান: আমরা জানি, কোন সংখ্যাকে n দ্বারা ভাগ করলে n টি সংখ্যা $0, 1, 2, \ldots, n-1$ এর মধ্যে যেকোন একটি ভাগশেষ হবে। এখন সম্ভাব্য ভাগশেষগুলোকে খোপ আর $(n+1)$ টি সংখ্যাকে পায়রা ধরলে কমপক্ষে দুইটি সংখ্যাকে অবশ্যই একই খোপে যেতে হবে। তাই এদেরকে n দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ সমান হবে। □

উদাহরণ ৩.৫: *দেখাও যে প্রতিটি ধ্বনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n-এর এমন একটি ধ্বনাত্মক গুণিতক আছে যা শুধুমাত্র 0 এবং 5 দিয়ে গঠিত।*

সমাধান: নিচের $(n+1)$ টি সংখ্যার যেকোন দুইটির পার্থক্য হবে শুধুমাত্র 0 ও 5 দিয়ে গঠিত কোন সংখ্যা।

$$5,\ 55,\ 555,\ \ldots,\ \underbrace{5\ldots5}_{(n+1)\text{ টি}}$$

আবার, উদাহরণ ৩.৪ অনুযায়ী, এই $(n+1)$ টি সংখ্যার মাঝে অন্তত দুইটি সংখ্যা আছে যাদের n দিয়ে ভাগ করলে অভিন্ন ভাগশেষ থাকবে। অতএব, এই দুইটি সংখ্যার পার্থক্যই nএর কাঙ্ক্ষিত একটি গুণিতক। □

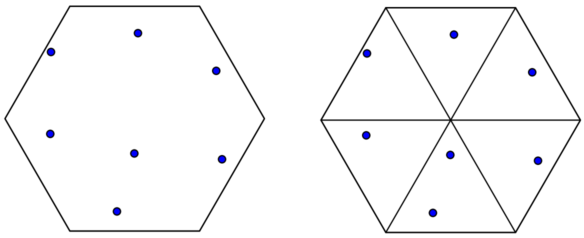
§৩.২ বর্ধিত পিজিয়নহোল প্রিন্সিপল

মনে কর, তুমি 7 টি পায়রাকে 3 টি খোপে রাখতে চাও। অন্তত একটি খোপে নিশ্চয়ই তোমাকে 3 টি পায়রা রাখতে হবে, কেননা কোন খোপে দুইটির বেশি পায়রা না রাখলে 3 টি খোপে সর্বোচ্চ $3 \times 2 = 6$ টি পায়রা রাখা যেতে পারে। তেমনিভাবে, যদি m টি পায়রাকে n টি খোপে রাখা হয়,

তবে একটি খোপে অন্তত $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ টি পায়রা থাকবে।[১] এটি পিজিয়নহোল প্রিন্সিপলের আরেকটু বর্ধিত রূপ।

উদাহরণ ৩.৬: *তিনটি পূর্ণসংখ্যার যোগফল 17 হলে দেখাও যে অন্তত একটি পূর্ণসংখ্যা 5 থেকে বড়।*

সমাধান: সংখ্যা তিনটিকে খোপ হিসাবে চিন্তা কর। 17 টি পায়রাকে 3 টি খোপে রাখতে গেলে একটি খোপে অবশ্যই $\left\lceil \frac{17}{3} \right\rceil > 5$ টি পায়রা রাখতে হবে। □



চিত্র ৩.১: ষড়ভুজের ভেতর 7 টি বিন্দু।

উদাহরণ ৩.৭: *একটি $1m$ বাহুবিশিষ্ট সুষম ষড়ভুজের ভেতরে 7 টি বিন্দু নেওয়া হল। প্রমাণ কর যে এদের মাঝে অন্তত দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $1m$ থেকে বেশি নয়।*

সমাধান: চিত্র ৩.১-এর মত ষড়ভুজটিকে ছয়টি সমবাহু ত্রিভুজে বিভক্ত কর। এই ছয়টি ত্রিভুজকে খোপ আর সাতটি বিন্দুকে পায়রা ভাবলে, পিজিয়নহোল প্রিন্সিপল অনুসারে অন্তত একটি ত্রিভুজের ভেতরে একাধিক বিন্দু পড়বে। এখন প্রতিটি ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য যেহেতু $1m$, তাই সেই দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $1m$ থেকে বেশি হতে পারে না। □

উদাহরণ ৩.৮: *প্রমাণ কর যে $\{1, 2, \ldots, 100\}$ সেটটি থেকে 51 টি সংখ্যা তুলতে হলে অবশ্যই দুইটি ক্রমিক সংখ্যা তুলতে হবে।*

সমাধান: যেহেতু আমাদের প্রমাণ করতে হবে অন্তত দুইটি সংখ্যা ক্রমিক, আমরা উল্টোটি করার চেষ্টা করি। অর্থাৎ দুইটি সংখ্যা ক্রমিক না নিয়ে উপরের সেট থেকে 51টি সংখ্যা নেয়ার চেষ্টা করি। প্রথমেই যেটা মাথায় আসতে পারে-

$$\{1, 3, 5, 7, \ldots, 99\}$$

কিন্তু এভাবে সর্বোচ্চ 50টি সংখ্যা তোলা যাবে। পরের সংখ্যাটি অবশ্যই কোন না কোন সংখ্যার সাথে ক্রমিক হবে। আমাদের প্রমাণ কিন্তু শেষ হয়ে যায়নি। কেননা আমরা এই ধারাটিও নিতে পারতাম-

$$\{2, 4, 6, 8, \ldots, 100\}$$

এবং একই যুক্তিতে সেটাও গ্রহণযোগ্য হত না। আমরা ইচ্ছেমত সংখ্যা তোলার চেষ্টাও করতে পারি। কিন্তু আমরা যতই ক্রমিক সংখ্যা না রেখে সংখ্যা নেবার চেষ্টা করি, আমরা দেখতে পাব যে 50টার বেশি

[১]যারা $\lceil\ \rceil$ (সিলিং ফাংশন)-এর সাথে পরিচিত নও, তারা পরিশিষ্ট দেখ।

সংখ্যা কখনও নেওয়া যাচ্ছে না। এমন পরিস্থিতিতে পড়লেই আমরা পিজিয়নহোল প্রিন্সিপল ব্যবহার করে থাকি।

এই সমস্যার সমাধানের জন্য খোপ হিসেবে নেব নিচের 50টি ক্রমিক সংখ্যার ক্রমজোড়কে।

$$(1,2),\ (3,4),\ (5,6),\ \ldots,\ (99,100)$$

এবার আমাদের তোলা প্রতিটি সংখ্যাকে তার স্বকীয় খোপে রাখব। (যেমন- আমাদের 51টি সংখ্যার মাঝে 5 থাকলে তাকে আমরা রাখব $(5,6)$-তে।) যেহেতু পায়রা 51টি ও খোপ 50টি, তাই অন্তত একটি খোপে আমাদেরকে দুইটি পায়রা রাখতেই হবে। অর্থাৎ, সেই ক্রমজোড়ের দুটি ক্রমিক সংখ্যাই আমাদের তোলা 51টি সংখ্যার মাঝে থাকবে। □

উদাহরণ ৩.৯ (আইএমও $1972/1$)**:** *তোমাকে 100 থেকে ছোট 10টি ধ্বনাত্মক পূর্ণসংখ্যার একটি সেট দেওয়া আছে। প্রমাণ কর যে এই সেটের এমন দুটি অশূন্য (non-empty), নিশ্ছেদ উপসেট আছে যাদের উপাদানসমূহের যোগফল সমান।*

সমাধান: আইএমওর সমস্যা বলে এটিকে ভয় পাওয়ার কিছু নেই। এটিকেও আমরা পিজিওনহোল প্রিন্সিপালের সাহায্যে চমৎকারভাবে ঘায়েল করতে পারি।

পিজিয়নহোল প্রিন্সিপল প্রয়োগ করতে হলে আমাদের পায়রা আর খোপ লাগবে। তাই, চলো এখানে আমরা পায়রা এবং খোপ খুঁজি। প্রশ্নে দুটি নিশ্ছেদ সেটের উপাদানসমূহের যোগফল *সমান* দেখাতে বলা হয়েছে। তাই আমরা প্রদত্ত সেটটির সকল উপসেটকে পায়রা, এবং এদের উপাদানসমূহের সম্ভাব্য যোগফলগুলোকে খোপ ধরব।

প্রদত্ত সেটে যেহেতু 10টি সংখ্যা আছে, তাই এর উপসেট আছে $2^{10} = 1024$টি। আবার, প্রদত্ত সেটের উপাদানগুলো যেহেতু 100 থেকে ছোট, তাই এর সবচেয়ে বড় সম্ভাব্য উপসেটটি হতে পারে $\{99,\ 98,\ 97,\ 96,\ 95,\ 94,\ 93,\ 92,\ 91,\ 90\}$, যার উপাদানসমূহের যোগফল 945. আর এর সবচেয়ে ছোট উপসেটটি হল ফাঁকা সেট, যার যোগফল 0. তাই, প্রদত্ত সেটের যেকোন উপসেটের উপাদানসমূহের যোগফল হবে 0 থেকে 945-এর মাঝে কোন একটি পূর্ণসংখ্যা। সুতরাং সম্ভাব্য যোগফল অর্থাৎ খোপ আছে $945 + 1 = 946$টি।

যেহেতু, $1024 > 946$, তাই পিজিয়নহোল প্রিন্সিপল অনুসারে প্রদত্ত সেটের এমন অন্তত দুইটি উপসেট অবশ্যই পাওয়া যাবে যাদের উপাদানসমূহের যোগফল সমান। কিন্তু সেই উপসেটদ্বয় নিশ্ছেদ নাও হতে পারে! এদেরকে নিশ্ছেদ বানানোর জন্য আমরা এদের কমন উপাদানগুলো উভয় উপসেট থেকে বাদ দেব। এর ফলে উভয় উপসেটের উপাদানসমূহের যোগফল কমলেও সেগুলো পরস্পর সমানই থাকবে। লক্ষ্য কর যে, কমন উপাদান বাদ দেওয়ার পর কোন উপসেট ফাঁকা হয়ে যেতে পারে না। কারণ যদি উভয় উপসেট ফাঁকা হয়ে যায়, তাহলে প্রথমেই উপসেট দুটো অভিন্ন ছিল, যা অসম্ভব। আবার, কেবল একটি উপসেট ফাঁকা হলে ঐ উপসেটের উপাদানগুলোর যোগফল শূন্য, যেখানে অপর উপসেটের উপাদানগুলোর যোগফল ধনাত্মক। তাই তারা সমান হতে পারে না। অতএব সেটিও সম্ভব নয়।

তাহলে, আমরা প্রদত্ত সেটের দুটি নিশ্ছেদ উপসেট পেয়ে গেলাম যাদের যোগফল সমান। □

উদাহরণ ৩.১০ (বিডিএমও ২০১৪, জুনিয়র ১০)**:** *ঐন্দ্রির কাছে 100 টি চকলেট ছিল। সে 58 দিনে সবগুলো চকলেট খেয়ে শেষ করে। সে প্রতিদিন কমপক্ষে একটি করে চকলেট খেয়েছে। প্রমাণ কর যে ঐন্দ্রি পর পর কয়েক দিনে ঠিক 15 টি চকলেট খেয়েছে।*

সমাধান: ধরা যাক, ঐন্দ্রি শুরু থেকে i-তম দিন পর্যন্ত a_i টি চকলেট খেয়েছে। সে প্রতিদিনই কমপক্ষে একটি চকলেট খেয়েছে। সুতরাং,

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{58} = 100 \implies a_1 + 15 < a_2 + 15 < \cdots < a_{58} + 15 = 115$$

এখন $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{58},\ (a_1+15),\ (a_2+15),\ \ldots,\ (a_{58}+15)$ পর্যন্ত $58+58 = 116$ টি সংখ্যাকে পায়রা এবং এদের মান, অর্থাৎ 1 থেকে 115 পর্যন্ত সংখ্যাকে খোপ ধর। তাহলে, পিজিয়নহোল প্রিন্সিপল অনুযায়ী এদের মাঝে অন্তত দুইটি সংখ্যার মান সমান। অর্থাৎ, এমন দুটি দিন m এবং n আছে যাতে করে $a_m = a_n + 15$ হয়। n-তম এবং m-তম দিনের মাঝে ঐন্দ্রি সব মিলিয়ে ঠিক ঠিক 15 টি চকলেট খেয়েছে। □

বেশিরভাগ এমন সমস্যায় মূল ধাপ অর্থাৎ কিনা ক্রাক্সটি থাকে পায়রা এবং খোপ চিহ্নিত করা। আবার, কঠিন সমস্যাগুলোতে পিজিওনহোল প্রিন্সিপাল একটি মধ্যবর্তী ধাপ হিসেবে ব্যাবহার করা হয়, তা সম্পূর্ণ সমাধান দেয় না। যেমন– পরবর্তী সমস্যাটি দেখো।

উদাহরণ ৩.১১: *জাহিন একটা বোর্ডে 70 থেকে ছোট 20টি ভিন্ন ভিন্ন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা নিলো এবং এদের সবরকমের জোড়ার পার্থক্য অন্য একটি বোর্ডে লিখল। প্রমাণ কর, দ্বিতীয় বোর্ডে 4টি সংখ্যা আছে যারা পরস্পর সমান।*

সমাধান: কাউন্টিং-এর জ্ঞান কাজে লাগিয়ে আমরা বলতে পারি যে দ্বিতীয় বোর্ডে $\binom{20}{2} = 190$ টি সংখ্যা আছে। এই সংখ্যাগুলো হবে আমাদের পায়রা।

প্রথম বোর্ডে সবচেয়ে বড় সংখ্যা হতে পারে 69, এবং সবচেয়ে ছোট সংখ্যা হতে পারে 1. তাই দ্বিতীয় বোর্ডে কোন সংখ্যার সম্ভাব্য সর্বোচ্চ মান $69 - 1 = 68$ এবং সম্ভাব্য সকল মান হচ্ছে 1 থেকে 68 পর্যন্ত 68টি ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা। এদের আমরা খোপ ধরলে পিজিয়নহোল প্রিন্সিপল অনুসারে দ্বিতীয় বোর্ডে অন্তত $\lceil \frac{190}{68} \rceil = 3$ টি সংখ্যা একই হবে।

কিন্তু এ কী! আমদের দেখাতে হবে দ্বিতীয় বোর্ডে অন্তত 4টি সংখ্যা একই হবে। এবার কী করা যায়?

আমরা আরেকটু চেষ্টা করি। চলো, প্রথমে সংখ্যাগুলোকে ছোট থেকে বড় ক্রমে সাজাই এবং ধরি, সংখ্যাগুলো $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{20}$. তাহলে দ্বিতীয় বোর্ডের সংখ্যাগুলো হবে $a_i - a_j$, যেখানে $i > j$। ধরো $(a_2 - a_1),\ (a_3 - a_2),\ (a_4 - a_3),\ \ldots,\ (a_{20} - a_{19})$-এর কোনটিই দ্বিতীয় বোর্ডে 3 বারের বেশি নেই। তাহলে $a_{20} - a_1$-এর সর্বনিম্ন মান হতে পারে,

$$\begin{aligned} a_{20} - a_1 &= (a_{20} - a_{19}) + (a_{19} - a_{18}) + \ldots + (a_2 - a_1) \\ &\geq 3 \times 1 + 3 \times 2 + \ldots + 3 \times 6 + 7 \\ &= 70 \end{aligned}$$

কিন্তু $(a_{20} - a_1)$ সংখ্যাটি দ্বিতীয় বোর্ডে আছে বিধায় এটি 68 এর বেশি হতে পারে না। তাই আমরা যা ধরে নিয়েছিলাম সেটি ভুল। তাই একটি না একটি $(a_{i+1} - a_i)$ কমপক্ষে 4 বার দ্বিতীয় বোর্ডে আছে। তাই দ্বিতীয় বোর্ডে এই সংখ্যাটি অন্তত 4 বার লিখা হয়েছে। □

আমাদের কিছু পরিচিত ফাংশন রয়েছে, যেগুলো নিয়ে ধারণা থাকলে কিছু সমস্যা সমাধানে সুবিধা হতে পারে। যেমন ধরো $\tan$ ফাংশন। এর বিয়োগের সূত্রটি হচ্ছে,

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}$$

এটি জানা থাকলে পরবর্তী সমস্যাটির একটি সুন্দর সমাধান বের করা সম্ভব।

উদাহরণ ৩.১২: *দেখাও যে, যেকোনো 5টি বাস্তব সংখ্যার মধ্যে এমন দুইটি সংখ্যা a আর b পাওয়া যাবে, যারা নিচের অসমতাটি মেনে চলে*

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} < 1$$

সমাধান: এই সমস্যার শর্তটির সাথে $\tan$-এর বিয়োগ ফরমুলার কি মিল পাচ্ছ? ব্যাপারটা এমন যেন, a এবং b কোন দুটি $\tan$-এর মান। তাই আমরা পাঁচটি সংখ্যার $\tan^{-1}$ নেব, এবং ধরব মানগুলো হচ্ছে $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ এবং x_5. তাহলে,

$$-\frac{\pi}{2} < x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 < \frac{\pi}{2}$$

এখন $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ব্যবধিকে আমরা 4টি সমান ভাগে ভাগ করি। প্রতিটি ভাগের দৈর্ঘ্য তাহলে (প্রায়) $\frac{\pi}{4}$. পিজিয়নহোল প্রিন্সিপল অনুযায়ী কোন একটি ভাগে দুইটি সংখ্যা পড়বে। এদের পার্থক্য নিশ্চয়ই তাহলে $\frac{\pi}{4}$ থেকে ছোট। মনে করি, এই সংখ্যা দুইটি p ও q। তাহলে, $a = \tan p$ ও $b = \tan q$. এবং আমাদের প্রাপ্ত শর্তানুসারে,

$$0 < \tan(p-q) < \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$\tan$-এর বিয়োগের সূত্র প্রয়োগ করে লিখা যায়,

$$0 < \frac{\tan p - \tan q}{1+\tan p \tan q} < 1$$

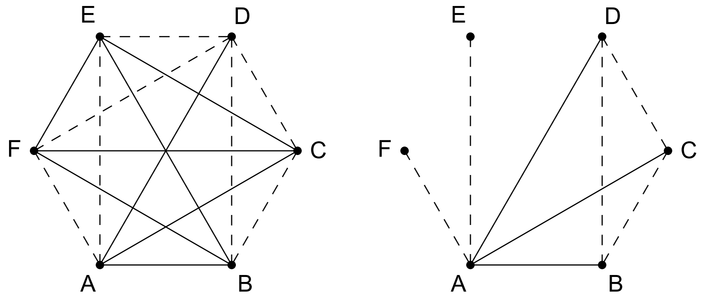
যেটা সরল করলে হয়,

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} < 1$$

□

উদাহরণ ৩.১৩: *প্রমাণ করো যেকোন 6 জন ফেসবুক ব্যবহারকারীর মাঝে হয় এমন 3 জন আছে যারা প্রত্যেকে প্রত্যেকের ফ্রেন্ড, নাহয় এমন 3 জন আছে যারা কেউ কারও ফ্রেন্ড না।*

সমাধান: মনে কর, A, B, C, D, E, এবং F হল 6 জন ফেসবুক ব্যবহারকারী। এদেরকে শীর্ষবিন্দু ধরে একটি সুষম ষড়্ভুজ আঁক। দুজন ফেসবুক ব্যবহারকারী পরস্পরের ফ্রেন্ড হলে তাদেরকে একটি সলিড রেখাংশ (—), এবং ফ্রেন্ড না হলে তাদেরকে একটি ড্যাশ ড্যাশ রেখাংশ (--) দিয়ে সংযুক্ত করে দাও। এই ছবিটিকে আমরা বলব ফ্রেন্ডশিপ ম্যাপ। উদাহরণস্বরূপ, চিত্র ৩.২a-তে ছয়



(a) পূর্ণাঙ্গ ফ্রেন্ডশিপ ম্যাপ।

(b) প্রমাণের জন্য দরকারী অংশ।

চিত্র ৩.২: ছয় ফেসবুক ব্যবহারকারীর ফ্রেন্ডশিপ ম্যাপ

ফেসবুক ব্যবহারকারীর মধ্যকার ফ্রেন্ডশিপের একটি সম্ভাব্য ম্যাপ আঁকা হয়েছে। তবে তোমার ম্যাপটি ঠিক এরকমই হতে হবে এমন কোন কথা নেই।

তিন জন ফেসবুক ব্যবহারকারী প্রত্যেকে প্রত্যেকের ফ্রেন্ড হওয়ার অর্থ এই ফ্রেন্ডশিপ ম্যাপে একটি সলিড রেখাংশের ত্রিভুজ থাকা। তেমনিভাবে, তিন জন কেউ কারও ফ্রেন্ড না হওয়ার মানে এখানে একটি ড্যাশ ড্যাশ রেখাংশের ত্রিভুজ থাকা। সুতরাং, আমাদেরকে প্রমাণ করতে হবে যে, ছয়জন মানুষের ফ্রেন্ডশিপ ম্যাপটি যেভাবেই গঠিত হোক না কেন, এতে একই রকমের রেখাংশ দিয়ে তৈরি অন্তত একটি ত্রিভুজ থাকবে।

এই স্টেটমেন্টটি প্রমাণ করার জন্য আমরা চিত্র ৩.২a থেকে অদরকারী রেখাংশ সরিয়ে দিয়ে একটা সরল চিত্র ৩.২b আঁকব। এখানে A-র সাথে অন্য পাঁচ জন পাঁচটি রেখাংশ দিয়ে যুক্ত আছে।(চিত্র ৩.২b) এই পাঁচটি রেখাংশকে পায়রা এবং রেখাংশের ধরণকে খোপ ধরলে পিজিয়নহোল প্রিন্সিপল অনুযায়ী অন্তত তিনটি রেখাংশ একই রকম হতে হবে। ধরা যাক, তিনটি রেখাংশ AB, AC এবং AD হচ্ছে সলিড (—)। (অন্তত তিনটি রেখাংশ ড্যাশ ড্যাশ (--) হলেও অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যাবে।) এখন BC রেখাংশ যদি সলিড হয়, তবে ABC একটি সলিড রেখার ত্রিভুজ হয়ে যাবে। সেক্ষেত্রে আমাদের প্রমাণ শেষ। আর তা যদি না হয়, তবে BC একটি ড্যাশ ড্যাশ রেখাংশ। একই যুক্তিতে CD এবং BD-ও ড্যাশ ড্যাশ রেখাংশ হবে। কিন্তু সেক্ষেত্রে BCD একটি ড্যাশ ড্যাশ রেখাংশের ত্রিভুজ হয়ে যায়। অতএব ফ্রেন্ডশিপ ম্যাপে সবসময়ই একটি একই ধরণের রেখাংশ দিয়ে তৈরি ত্রিভুজ পাওয়া যাবে। সুতরাং, যেকোন 6 জন ফেসবুক ব্যবহারকারীর মাঝে হয় এমন 3 আছে যারা প্রত্যেকে প্রত্যেকের ফ্রেন্ড, নাহয় এমন 3 জন আছে যারা কেউ কারও ফ্রেন্ড না। $\square$

মন্তব্য: এই সমস্যাটির জেনারেলাইজেশন হচ্ছে রামসে সংখ্যা (Ramsey Numbers)। প্রকৃতপক্ষে আমরা এখানে প্রমাণ করেছি যে $R(3, 3) \leq 6$. গ্রাফ থিওরি অধ্যায়ে রামসে সংখ্যা নিয়ে বিস্তারিত আলোচনা পাবে।

§৩.৩ অসীম পিজিয়নহোল প্রিন্সিপল

যদি তোমার কাছে অসীম সংখ্যক পায়রা থাকে, আর তুমি তাদেরকে সসীম সংখ্যক খোপে রাখতে চাও, তবে অন্তত একটি খোপে অবশ্যই অসীম সংখ্যক পায়রা রাখতে হবে। পিজিয়নহোল প্রিন্সিপলের এই রূপটি ব্যবহার করে অনেক সময় বেশ ট্রিকি সমস্যার সুন্দর সমাধান পাওয়া যায়। পরবর্তী উদাহরণটি দেখ।

উদাহরণ ৩.১৪: *রাজকুমারকে এক রাক্ষস চিত্র ৩.৩-এর মত একটি 8×8 মায়াপুরীতে আটকে রেখেছে। মায়াপুরীর চতুর্দিকে উঁচু দেয়াল রয়েছে, এবং এটি থেকে বেরোবার একমাত্র ফটকটি হচ্ছে উত্তর-পূর্ব কোণার ঘরটির পাশে। প্রতিটি ঘরের মেঝেতে একটি করে জাদুর তিরচিহ্ন আঁকা রয়েছে যা উত্তর, দক্ষিণ, পূর্ব, বা পশ্চিমে মুখ করে আছে। কোন ঘরের তিরচিহ্ন যেদিকে মুখ করে থাকে, সেই ঘর থেকে শুধুমাত্র সেই দিকে পার্শ্ববর্তী ঘরে যাওয়া যায়। যদি কোন ঘরের তিরচিহ্ন দেয়ালের দিকে মুখ করে থাকে, তবে অবশ্য সেখান থেকে অন্য কোন ঘরে যাওয়া যায় না। রাজকুমার মায়াপুরীর যে ঘরে পা দেয়, সেই ঘরের তিরচিহ্নটি ঘড়ির কাঁটার দিকে 90° ঘুরে যায়। যদি ঘোরার পর ঘরের তিরচিহ্নটি দেয়ালের দিকে মুখ করে থাকে, তবে সেই তিরচিহ্নটি পুনরায় ঘড়ির কাঁটার দিকে 90° করে ঘুরতে থাকে, যতক্ষণ না সেটি কোন ঘরের দিকে মুখ করে। রাজকুমার মায়াপুরীর* ***যেকোন*** *একটি ঘর থেকে যদি তিরচিহ্ন অনুসরণ করে হাঁটতে থাকে, তবে কি সে মায়াপুরী থেকে বের হতে পারবে?*

↑	→	→	↑	←	↓	↓	↑
↓	→	↑	↑	↓	↓	→	←
→	↓	←	→	↓	←	↑	↓
←	→	←	↓	←	↓	→	←
→	↓	↑	←	↓	↑	↓	↑
↓	↓	←	↑	↓	→	↓	←
↓	→	↑	←	→	→	←	↓
→	↑	←	↑	↓	←	↑	→

চিত্র ৩.৩: মায়াপুরী ও ফটকের অবস্থান।

সমাধান: তুমি ভাবতে পার যদি রাজকুমার উত্তর-পূর্ব কোণের ঘরটি থেকে হাঁটা শুরু করে, তাহলে প্রথমবারই ঘরের তিরচিহ্নটি ফটকের দিকে মুখ করবে, এবং সে বের হয়ে যেতে পারবে। অতএব,কাজ শেষ। কিন্তু আসলেই কি শেষ? খেয়াল করে দেখ প্রশ্নে মোটা অক্ষরে বলা হয়েছিল রাজকুমার যেকোন ঘর থেকে চলা শুরু করতে পারে। সব বারই কি সে মায়াপুরী থেকে বের হয়ে যেতে পারবে? এর উত্তরটাও হচ্ছে, হ্যাঁ, পারবে। (কি মজা!)

এটা প্রমাণ করার জন্য আগে আমাদের উল্টোটা ধরে নিতে হবে। অর্থাৎ, মনে কর রাজকুমার কখনও মায়াপুরী থেকে বের হতে পারবে না। সে যেহেতু হাঁটা থামাচ্ছে না, সুতরাং সে অবশ্যই অসীম

সময় ধরে একটার পর একটা ঘরে যেতে থাকবে। যেহেতু ঘরের সংখ্যা (খোপ) সসীম, অতএব, পিজিয়নহোল প্রিন্সিপল অনুসারে রাজকুমারকে অন্তত একটা ঘরে অবশ্যই অসীম সংখ্যকবার যেতে হবে। এখন খেয়াল কর, প্রতিবার রাজকুমার যখন এই ঘরটিতে পা দিচ্ছে, এই ঘরের তিরচিহ্নটি ঘড়ির কাঁটার দিকে 90° ঘুরে যাচ্ছে। ফলে, এই ঘরের চারপাশে লাগোয়া চারটি ঘরেও রাজকুমার অসীম সংখ্যকবার যাবে। একই যুক্তিতে সে এই চারটি ঘরের চারপাশের ঘরগুলোতেও অসীম সংখ্যকবার যাবে। এই যুক্তি ধরে এগোতে থাকলে আমরা আসলে বুঝতে পারব যে মায়াপুরীর প্রতিটা ঘরেই রাজকুমার অসীম সংখ্যকবার যাবে। সুতরাং উত্তর-পূর্ব কোণার ঘরটিতেও সে অসীম সংখ্যকবার যাবে, এবং যখনই ঘরের তিরচিহ্ন ফটকের দিকে মুখ করবে, সে বেরিয়ে আসবে। □

§৩.৪ আর্ডস-জেকেরেস (Erdős-Szekeres) উপপাদ্য

মনে করো, আমাদের কাছে বাস্তব সংখ্যার একটা বড়োসড়ো ধারা আছে–

$$-2.5,\ 0,\ 5.1,\ 4.3,\ 0.11,\ 0.9,\ -0.87,\ 1.82,\ -3.2,\ 1.85,\ -6.4,\ 12,\ 2.75$$

গণিত এবং প্রোগ্রামিং-এ মাঝে মাঝেই আমাদের জানা প্রয়োজন পড়ে যে এমন ধারায় কত বড় ক্রমবর্ধমান (monotonically increasing) বা ক্রমহ্রাসমান (monotonically decreasing) উপধারা লুকিয়ে আছে। উদাহরণস্বরূপ, উপরের ধারাটির একটি ক্রমবর্ধমান উপধারা হতে পারে–

$$-2.5,\ 0,\ 0.11,\ 0.9,\ 1.82,\ 1.85,\ 2.75$$

এবং ক্রমহ্রাসমান উপধারা হতে পারে

$$5.1,\ 4.3,\ 0.9,\ -0.87,\ -3.2,\ -6.4$$

প্রথম উপধারাটির দৈর্ঘ্য হচ্ছে 7, ও দ্বিতীয়টির 6. কিন্তু কোন ধারা কত বড় হলে নিশ্চিতভাবে বলা যাবে যে তার একটি 7 দৈর্ঘ্যের ক্রমবর্ধমান উপধারা, কিংবা 6 দৈর্ঘ্যের ক্রমহ্রাসমান উপধারা থাকবে? এই প্রশ্নটির একটি চমৎকার উত্তর দেয় আর্ডস-জেকেরেস উপপাদ্য।

উপপাদ্য ৩.১ (আর্ডস-জেকেরেস, ১৯৩৫)**:** *যদি m এবং n দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, এবং ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব সংখ্যা দিয়ে গঠিত ধারায় অন্তত $(mn+1)$ টি পদ থাকে, তবে এই ধারার $(m+1)$ দৈর্ঘ্যের একটি **ক্রমবর্ধমান** উপধারা, অথবা $(n+1)$ দৈর্ঘ্যের একটি **ক্রমহ্রাসমান** উপধারা থাকবে।*

প্রমাণ: মনে কর, ধারাটি

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots,\ c_{mn+1}$$

c_1 থেকে c_i-এর মাঝে দীর্ঘতম ক্রমবর্ধমান উপধারার দৈর্ঘ্যকে a_i এবং দীর্ঘতম ক্রমহ্রাসমান উপধারার দৈর্ঘ্যকে b_i ধর। যদি এই ধারার উপপাদ্যে বলা দৈর্ঘ্যের কোন ক্রমবর্ধমান বা ক্রমহ্রাসমান উপধারা না থাকে, তবে নিশ্চয়ই এর সকল ক্রমবর্ধমান উপধারার দৈর্ঘ্য হবে m বা তার চেয়ে কম, এবং সকল ক্রমহ্রাসমান ধারার দৈর্ঘ্য হবে n বা তার চেয়ে কম। সুতরাং (a_i, b_i) ক্রমজোড়টির সম্ভাব্য ভিন্ন ভিন্ন মান হতে পারে সর্বোচ্চ $m \times n = mn$ টি। কিন্তু প্রদত্ত ধারায় পদ আছে $mn+1$ টি। অতএব,

পিজিয়নহোল প্রিন্সিপল অনুযায়ী প্রদত্ত ধারায় এমন দুটি পদ c_j এবং c_k, $(j < k)$ আছে, যাদের জন্য $(a_j, b_j) = (a_k, b_k)$.

লক্ষ্য কর যে c_j এবং c_k দুটি ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা। যদি $c_j < c_k$ হয়, তবে c_k-কে a_j দৈর্ঘ্যের ক্রমবর্ধমান উপধারাটির সাথে সংযুক্ত করে c_1 থেকে c_k-এর মাঝে একটি $a_j + 1$ দৈর্ঘ্যের ক্রমবর্ধমান উপধারা পাওয়া যাবে। অতএব $a_k \geq a_j + 1 > a_j$. আবার $c_k < c_j$ হলে, c_k-কে b_j দৈর্ঘ্যের ক্রমহ্রাসমান উপধারাটির সাথে সংসুক্ত করে c_1 থেকে c_k-র মাঝে একটি $b_j + 1$ দৈর্ঘ্যের ক্রমহ্রাসমান উপধারা পাওয়া যাবে। তাই, $b_k \geq b_j + 1 > b_j$. সুতরাং উভয়ক্ষেত্রেই আমরা পাচ্ছি যে একইসাথে $a_j = a_k$ এবং $b_j = b_k$ হতে পারে না। তাই $(a_j, b_j) \neq (a_k, b_k)$.

যেহেতু আমরা দুইভাবে এগিয়ে দুইরকম সিদ্ধান্তে পৌছাচ্ছি, এর অর্থ হচ্ছে আমরা প্রথমে যা ধরে নিয়েছিলাম সেটাই ভুল। অর্থাৎ, প্রদত্ত ধারার অবশ্যই একটি $(m + 1)$ দৈর্ঘ্যের ক্রমবর্ধমান উপধারা, অথবা $(n + 1)$ দৈর্ঘ্যের ক্রমহ্রাসমান উপধারা থাকবে। □

§৩.৫ অনুশীলনী

সমস্যা ৩.১: কমপক্ষে কতজন লোক থাকলে এটা নিশ্চিত হবে যে তাদের মধ্যে দুইজনের জন্মদিন একই?

সমস্যা ৩.২: দেখাও যে কোন সরলরেখা একটি ত্রিভুজের কোন শীর্ষবিন্দু দিয়ে না গেলে কখনও ত্রিভুজটির সবকটি বাহুকে (অর্থাৎ বাহুর ওপরে) ছেদ করতে পারে না।

সমস্যা ৩.৩: $2m$ ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তের মাঝে 13টি $1m \times 1m$ বর্গক্ষেত্র আঁকা হল। প্রমাণ কর অন্তত দুইটি বর্গক্ষেত্র পরস্পরকে ছেদ করবে।

সমস্যা ৩.৪: একটি $1m$ বাহুবিশিষ্ট সুষম ষড়ভুজের ভেতরে 20টি বিন্দু নেওয়া হল। প্রমাণ কর যে এদের মাঝে অন্তত দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $0.5m$ থেকে বেশি নয়।

সমস্যা ৩.৫: প্রমাণ কর কোন ক্রিকেট ম্যাচে required run rate 7.09 হলে জেতার জন্য কোন না কোন ওভারে 8 বা তার বেশি রান নিতে হবে।

সমস্যা ৩.৬: যদি আমরা $pq + 1$ টি মুক্তা p টি বাক্সে রাখি, তাহলে দেখাও যে, কোন একটি বাক্সে q এর চেয়ে বেশিসংখ্যক মুক্তা রয়েছে।

সমস্যা ৩.৭: যদি আমরা $\dfrac{a}{b}$ কে দশমিকে প্রকাশ করি, তাহলে পৌনঃপুনিক হবার পর আবার আগের প্যাটার্ন আসতে সর্বোচ্চ $b - 1$ টি অঙ্ক নিতে হবে।

সমস্যা ৩.৮: (দিরিশ্লে আসন্নীকরণ (Dirichlet Approximation)) যেকোন বাস্তব সংখ্যা x এবং ধ্বনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য প্রমাণ কর যে এমন একটি মূলদ সংখ্যা $\frac{p}{q}$ আছে যেন $1 \leq q \leq n$ এবং

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}$$

সমস্যা ৩.৯: যদি আমাদের কাছে 12 টি ভিন্ন ভিন্ন দুই অঙ্কের সংখ্যা থাকে, দেখাও যে, আমরা এমন দুইটি সংখ্যা পাব যাতে তাদের বিয়োগফলের দুইটি অঙ্কই সমান।

সমস্যা ৩.১০: (জাপান এমও 1991) প্রমাণ কর, প্রতিটি 16 অঙ্কের সংখ্যায়ে এক বা একাধিক পাশাপাশি ডিজিট আছে যাদের গুণফল পূর্ণবর্গ হয়। (যেমন, 2353568726832687 , এখানে, $12, 13$ ও 14 তম ডিজিটের গুণফল 36)।

সমস্যা ৩.১১: দেখাও যে কোন একটি উত্তল $2n$ ভুজে এমন একটি কর্ণ আছে যা কোন বাহুর সমান্তরাল নয়।

অধ্যায় ৪

রৈখিক রিকারেন্স

It was a dark and stormy night. The ship was tossed at sea. The captain said, ``Tell me a story, my son.'' And so I began: ``It was a dark and stormy night. The ship was tossed at sea. The captain said, ``Tell me a story, my son.'' And so I began: ...''

– Remy Charlip

§৪.১ ছোটবেলার একটি ধাঁধা

আমি যখন বেশ ছোট ছিলাম এক ধরণের সংখ্যার ধাঁধা খুব জনপ্রিয় ছিল। একটা কাগজে কিছু সংখ্যা লিখে কেউ একজন জিজ্ঞেস করত পরের সংখ্যাটি কত হবে। অন্য কেউ মাথা চুলকাতে চুলকাতে সেটা বের করতে বসে যেত। তেমন একটা সহজ সংখ্যার ধাঁধা দিয়ে শুরু করা যাক। মনে কর, আমি নিচের সংখ্যাগুলো তোমাকে দিলাম। বলো তো এর পরের সংখ্যাটি কত?

$$1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ 25,\ \_\_$$

পরের সংখ্যাটি হবে 29. কিভাবে পাওয়া যায় সেটা? লক্ষ করলে দেখবে উপরের ধারার প্রতিটা সংখ্যা তার আগের সংখ্যা থেকে 4 করে বেশি। গণিতের ভাষায় আমরা সেটাকে লিখি, উপরের ধারার n-তম সংখ্যা

$$a_n = a_{n-1} + 4, \quad n = 2, 3, 4, \ldots \qquad (৪.১.১)$$

যেহেতু ধারার সপ্তম সংখ্যা অর্থাৎ $a_7 = 25$, তাই পরবর্তী সংখ্যা

$$a_8 = a_7 + 4 = 25 + 4 = 29$$

এখানে মজার ব্যাপারটা হল সমীকরণ (৪.১.১) আমাদেরকে সরাসরি উপরের ধারার n-তম সংখ্যা বের করে দেয়নি, কিন্তু আগের পদগুলো জানা থাকলে তা থেকে n-তম পদ নির্ণয় করার একটি উপায়

বলে দিয়েছে। কোন ধারার সংখ্যা বা পদগুলোর মাঝে এমন সম্পর্ককে বলে রিকার্সিভ (recursive) সম্পর্ক কিংবা সংক্ষেপে রিকারেন্স (recurrence).

কোন ধারার রিকারেন্স আমাদেরকে বলে কীভাবে সেই ধারার পরবর্তী পদগুলো বের করতে হবে, কিন্তু কখনও বলে না ধারার শুরুর পদগুলো কী কী হবে। তাই ভিন্ন ভিন্ন পদ দিয়ে শুরু করে একই রিকারেন্স দিয়ে ভিন্ন ভিন্ন ধারা পাওয়া যেতে পারে। উদাহরণস্বরূপ, মনে করো কোন ধারার n তম পদ হচ্ছে ঠিক আগের দুইটি পদের যোগফল। এখন, 1, 1 দিয়ে ধারা শুরু করলে আমরা পাই ফিবোনাচ্চি ধারা

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots$$

কিন্তু 2, 1 দিয়ে শুরু করলে পাই লুকাস সংখ্যার ধারা

$$2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ \ldots$$

তাই কোন নির্দিষ্ট রিকারেন্স থেকে নির্দিষ্ট ধারা পেতে আমাদেরকে শুরুর পদগুলোও ঠিক করে দিতে হয়।

এবার আরও কিছু রিকারেন্স দেখা যাক!

ফ্যাক্টোরিয়াল

$$a_n = na_{n-1}$$

ডিরেঞ্জমেন্ট সংখ্যা

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

ফিবোনাচ্চি ধারা

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

প্যাস্কেলের ত্রিভুজ

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

কাতালান সংখ্যা

$$C_n = C_{n-1}C_0 + C_{n-2}C_1 + \ldots + C_0C_{n-1}$$

ম্যান্ডেলব্রট সেট[১]

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

লজিস্টিক ম্যাপ[২]

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

বাইনারি সার্চের রানটাইম

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + O(1)$$

[১]আরও জানতে দেখ: `https://www.youtube.com/watch?v=9gk_8mQuerg`

[২]গণিতের খুবই বিচিত্র একটি শাখা বিশৃঙ্খলা (Chaos) থিওরি। আরও জানতে পড়তে পার: `http://geoffboeing.com/2015/03/chaos-theory-logistic-map/`

কোন রিকারেন্স সমাধান করার অর্থ হচ্ছে এর পদগুলোর জন্য ঠিক ঠিক (explicit) সূত্র বের করা। যেমন– সমীকরণ (৪.১.১)-এর রিকারেন্সের সমাধান হচ্ছে $a_n = 4n - 3$. আবার কাতালান সংখ্যার রিকারেন্সের সমাধান $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. তবে সব রিকারেন্সের এমন ছোটখাটো সমাধান নাও থাকতে পারে। যেমন– ডিরেঞ্জমেন্ট সংখ্যার সাদাসিধে রিকারেন্সটির সমাধান হচ্ছে

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

কী বিচ্ছিরি একটা জিনিস!

অনেক রিকারেন্সে সংখ্যাগুলো আরও অদ্ভুত আচরণ করে। যেমন: $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$-এ সংখ্যাগুলোর মান এতটাই এলোমেলোভাবে আসে যে চল্লিশের দশকে কম্পিউটার বিজ্ঞানী ভন নিউম্যান পরামর্শ দিয়েছিলেন এটিকে একটি রেন্ডম সংখ্যা জেনারেটর হিসেবে ব্যবহার করতে! কয়েক যুগ পরে অবশ্য এই রিকারেন্সও সমাধান করা হয়েছে–

$$x_n = \frac{1 - \cos\left(4^n \cos^{-1}(1 - 2x_0)\right)}{2}$$

কিন্তু চাইলেই সব রিকারেন্স যখন-তখন সমাধান করে ফেলা যায় না। যেমন- সকল r-এর জন্য লজিস্টিক ম্যাপের সাধারণ সমাধান এখনও মানুষ বের করতে পারেনি!

তবে তোমার দুশ্চিন্তার কিছু নেই। গণিত অলিম্পিয়াডে তুমি যেসব রিকারেন্সের মুখোমুখি হবে সেসবের সমাধান প্রায়শ রিকারেন্স দেখেই অনুমান করা যায় এবং ইন্ডাকশন দিয়ে প্রমাণও করে ফেলা যায়। তাই, এই অধ্যায়ে মূলত তুমি শিখবে কোন সমস্যাকে কীভাবে রিকারেন্সে রূপান্তর করতে হয়। অধ্যায়ের শেষ অংশে কিছু বিশেষ ধরণের রিকারেন্স সমাধান করার নিয়ম রয়েছে। তবে সেগুলো সম্পর্কে খুব ভালোমত বোঝা গুরুত্বপূর্ণ নয়, মোটামুটি ধারণা রাখলেই চলবে। এছাড়া রিকারেন্সের সমাধান নিয়ে আরও বিস্তারিত আলোচনা পাবে জেনারেটিং ফাংশন অধ্যায়ে।

§৪.২ রিকারেন্সের ব্যবহার

উদাহরণ ৪.১: *1 থেকে n পর্যন্ত ধ্বনাত্মক পূর্ণসংখ্যার যোগফলকে রিকারেন্স আকারে প্রকাশ করো।*

সমাধান: ধরা যাক, 1 থেকে n পর্যন্ত সব পূর্ণসংখ্যার যোগফল s_n. তাহলে নিশ্চয়ই 1 থেকে $(n-1)$ পর্যন্ত সব পূর্ণসংখ্যার যোগফল s_{n-1}. আবার,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n &= \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)}_{1 \text{ থেকে } (n-1) \text{পর্যন্ত সব পূর্ণসংখ্যার যোগফল}} + n \\ \implies s_n &= s_{n-1} + n \end{aligned}$$

এটাই আমাদের কাঙ্ক্ষিত রিকারেন্স। □

উদাহরণ ৪.২: *একটি কাগজের উপর 5টি সরলরেখা আঁকা হল যাদের মাঝে কোন দুইটি রেখা পরস্পর সমান্তরাল নয় এবং কোন তিনটি রেখা সমবিন্দু নয়।*

নিজে করো

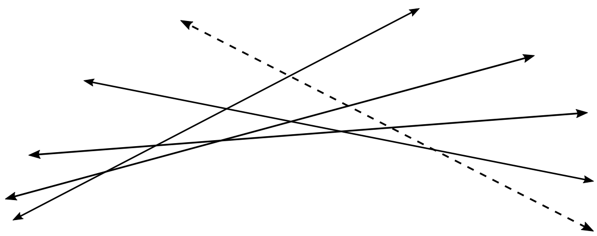
১. একটি সাধারণ খাতার কাগজকে একবার ভাঁজ করলে পুরুত্ব দ্বিগুণ হয়। n বার ভাঁজের পর কাগজের পুরুত্বের রিকারেন্সটি কী হবে?

২. যদি প্রথমে কাগজের পুরুত্ব $0.1mm$ হয়, তবে 7 বার ভাঁজের পর পুরুত্ব কত হবে?

৩. সিদ্ধান্ত নাও সাধারণ খাতার কাগজকে 7 বারের বেশি ভাঁজ করা সম্ভব কিনা।

(ক) এরা কাগজের উপরে পরস্পরকে সর্বোচ্চ কতগুলো বিন্দুতে ছেদ করতে পারে?

(খ) এরা কাগজটিকে সর্বোচ্চ কতগুলো অঞ্চলে (region) বিভক্ত করতে পারে?



চিত্র ৪.১: কাগজের উপর পাঁচটি সরলরেখা।

সমাধান:

(ক) ধরা যাক, 5 টি সরলরেখা কাগজের উপরে সর্বোচ্চ a_5 টি বিন্দুতে ছেদ করতে পারে। চিত্র ৪.১-এ প্রথমে চারটি সরলরেখা (চিত্রে সলিড (–) রেখা) আঁকা হয়েছে। এরা পরস্পরকে সর্বোচ্চ a_4 টি বিন্দুতে ছেদ করেছে। এখন, পঞ্চম সরলরেখাটি (চিত্রে ড্যাশ ড্যাশ (--) রেখা) এমনভাবে আঁকা যেতে পারে যেন সেটি আগের সবগুলো সরলরেখাকে ছেদ করে। এতে নতুন ছেদবিন্দু যোগ হবে 4টি। সুতরাং, $a_5 = a_4 + 4$. একই যুক্তিতে বলা যায় $a_n = a_{n-1} + (n-1)$. এখন,

$$\begin{aligned} a_5 =& a_4 + 4 \\ =& a_3 + 3 + 4 \\ =& a_2 + 2 + 3 + 4 \\ =& 1 + 2 + 3 + 4 \\ =& 10 \end{aligned}$$

এবং সাধারণভাবে

$$a_n = 1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

এটা অবশ্য এভাবেও বোঝা যায় যে, n টি রেখার মাঝে যেকোনো দুইটি রেখা পরস্পরকে ছেদ করতে পারে। তাই ছেদবিন্দুর সংখ্যা সর্বোচ্চ হতে পারে $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ টি।

(খ) মনে কর, 5টি রেখা কাগজটিকে সর্বোচ্চ b_5 টি অঞ্চলে ভাগ করতে পারে। আগের মতই কাগজে প্রথমে 4টি সরলরেখা আঁক। এরা পরস্পরকে সর্বোচ্চ b_4 টি বিন্দুতে ছেদ করবে। চিত্র ৪.১-এর মত পঞ্চম রেখাটি আঁকলে এটি আগের সবগুলো রেখাকে ছেদ করবে এবং এতে সর্বোচ্চ 5টি নতুন অঞ্চল যোগ হবে। তাই $b_5 = b_4 + 5$. একই যুক্তিতে বলা যায় $b_n = b_{n-1} + n$. আবার খেয়াল কর যে, প্রথম রেখাটি পুরো কাগজকে দুইটি অঞ্চলে ভাগ করে। তাই $b_1 = 2$. সুতরাং,

$$\begin{aligned} b_5 =& b_4 + 5 \\ =& b_3 + 4 + 5 \\ =& b_2 + 3 + 4 + 5 \\ =& b_1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\ =& 16 \end{aligned}$$

এবং সাধারণভাবে

$$b_n = b_1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

□

উদাহরণ ৪.৩: *অন্তু খুবই লাফাতে পছন্দ করে। সিঁড়ি দিয়ে ওপরে ওঠার সময় সে এক লাফে কখনও একটি কখনও দুইটি ধাপ ওঠে। যদি কোন সিঁড়িতে n টি ধাপ থাকে, তবে অন্তু কতভাবে সিঁড়িটি দিয়ে উপরে উঠতে পারবে?*

সমাধান: মনে কর, n ধাপের সিঁড়ি বেয়ে অন্তু a_n সংখ্যক উপায়ে উপরে উঠতে পারে। এখন, সিঁড়ির n-তম ধাপে পৌছানোর জন্য অন্তুকে অবশ্যই সিঁড়ির $(n-1)$-তম বা $(n-2)$-তম ধাপ থেকে শেষ লাফটি দিতে হবে, কেননা এক লাফে সে একটি কিংবা দুইটি ধাপ ডিঙাতে পারে। শর্তানুযায়ী, $(n-1)$ টি ধাপ ও $(n-2)$ টি ধাপ অন্তু উঠতে পারবে যথাক্রমে a_{n-1} ভাবে এবং a_{n-2} ভাবে। তাহলে নিশ্চয়ই,

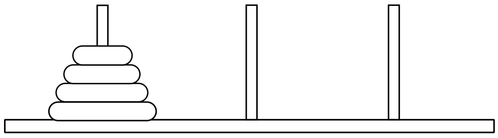
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

খেয়াল কর যে a_n ফিবোনাচ্চি ধারার রিকারেন্স মেনে চলছে। আবার, রিকারেন্স অনুসারে a_n ধারার প্রথম কিছু পদ হচ্ছে

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

অতএব, আমরা দেখতে পাচ্ছি a_n হচ্ছে প্রকৃতপক্ষে ফিবোনাচ্চি ধারার $(n+1)$-তম পদ। সুতরাং, অন্তু f_{n+1} সংখ্যকভাবে n ধাপের সিঁড়ি বেয়ে উপরে উঠতে পারবে। □

উদাহরণ ৪.৪ (হানোই (Hà Nội)-এর টাওয়ার)**:** *পাশাপাশি তিনটি দন্ডের প্রথমটিতে 64 টি ভিন্ন ভিন্ন আকারের চাকতি ছোট থেকে বড় ক্রমে সাজানো রয়েছে। সবগুলো চাকতিকে তৃতীয় দন্ডে সরাতে হবে। যদি একবারে একটির বেশি চাকতি সরানো না যায় এবং কখনও কোন বড় চাকতিকে কোন ছোট চাকতির উপরে না রাখা হয়, তাহলে সর্বনিম্ন কতবার চাকতি সরিয়ে কাজটি করা সম্ভব?*



চিত্র ৪.২: চারটি চাকতির হানোইয়ের টাওয়ার।

সমাধান: মনে কর, সর্বনিম্ন a_n বার চাকতি সরিয়ে প্রথম দন্ড থেকে n টি চাকতি শর্ত মেনে তৃতীয় দন্ডে স্থানান্তর করা সম্ভব। এখন, সবগুলো চাকতিকে তৃতীয় দন্ডে সরাতে হলে আগে সবচেয়ে বড় চাকতিটিকে তৃতীয় দন্ডে সরাতে হবে। কিন্তু এটা তো প্রথম দন্ডে সবার নিচে! তাই আমাদেরকে আগে প্রথম দন্ড থেকে উপরের $(n-1)$ টি চাকতি সরিয়ে মাঝের দন্ডে রাখতে হবে। এটা করতে অন্তত a_{n-1} বার চাকতি স্থানান্তর করতে হবে। এরপর প্রথম দন্ডের সবার নিচের চাকতিটিকে আমরা তৃতীয় দন্ডে রেখে দেব। সব শেষে মাঝের দন্ড থেকে $(n-1)$ টি চাকতি পুনরায় তৃতীয় দন্ডে স্থানান্তর করব। এটা করতেও আমাদের অন্তত a_{n-1} বার চাকতি সরাতে হবে। সুতরাং, সর্বমোট চাকতি স্থানান্তরের সংখ্যা

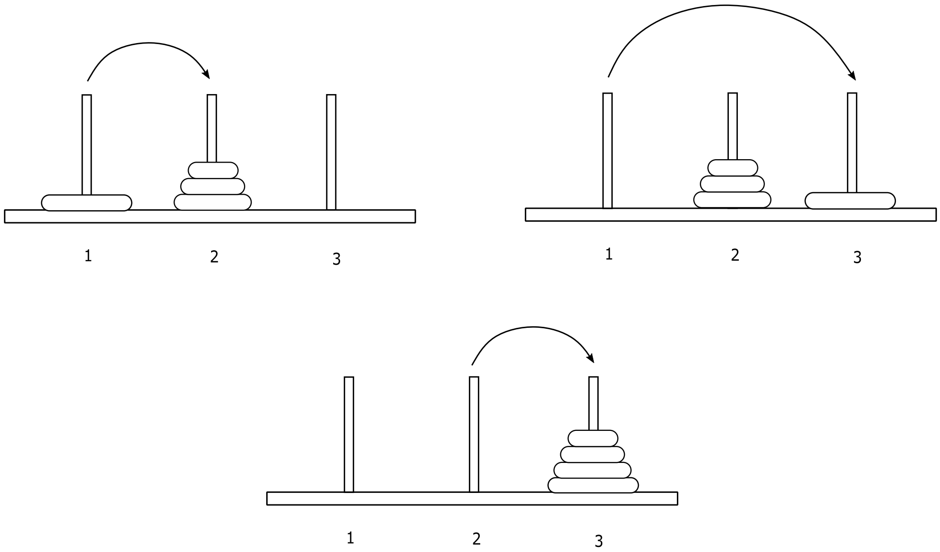
$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 1 + a_{n-1} \\ \implies a_n &= 2a_{n-1} + 1 \end{aligned}$$

চিত্র ৪.৩-এ চাকতি স্থানান্তরের তিনটি ধাপ দেখানো হয়েছে।

লক্ষ কর যে, $a_1 = 1$ কেননা একটিমাত্র চাকতি থাকলে তাকে প্রথম দন্ড থেকে তৃতীয় দন্ডে একবারেই সরানো যায়। তাহলে,

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 1 \\ \implies (a_n + 1) &= 2(a_{n-1} + 1) \\ &= 2^2(a_{n-2} + 1) \\ &= 2^3(a_{n-3} + 1) \\ &\vdots \\ &= 2^{n-1}(a_1 + 1) \\ &= 2^n \\ \implies a_n &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

অতএব 64টি চাকতি প্রথম দন্ড থেকে তৃতীয় দন্ডে সরাতে হলে কমপক্ষে $a_{64} = 2^{64} - 1$ বার চাকতি সরাতে হবে। □



চিত্র ৪.৩: চাকতিগুলো প্রথম দন্ড থেকে তৃতীয় দন্ডে স্থানান্তরের তিনটি ধাপ।

মন্তব্য: জনশ্রুতি আছে যে ভিয়েতনামের হানোই (মতান্তরে ভারতের বেনারস) শহরের একটি প্রাচীন মন্দিরে চিত্র ৪.২-এর মত তিনটি হীরের দন্ড ও 64 টি সোনার চাকতি রয়েছে। সৃষ্টির শুরুতে ব্রহ্মা মন্দিরের পুরোহিতদের নির্দেশ দিয়েছিলেন উপরের সমস্যার শর্ত দুটি মেনে চাকতিগুলো প্রথম দন্ড থেকে তৃতীয় দন্ডে স্থানান্তর করতে, আর বলেছিলেন সবগুলো চাকতি সরানো শেষ হওয়া মাত্রই তিনি বিশ্বব্রহ্মান্ড ধ্বংস করে দেবেন। সেই থেকে পুরোহিতেরা চাকতি সরিয়ে চলেছেন। কিন্তু কাজটি শেষ করা চাট্টিখানি কথা না, কেননা উপরের সমাধান অনুসারে মন্দিরের পুরোহিতদের অন্তত $2^{64} - 1 = 18,446,744,073,709,551,615$ বার চাকতি স্থানান্তর করতে হবে। যদি প্রতিবার চাকতি সরাতে তাদের 1 সেকেন্ড করে লাগে, তাহলেও সবগুলো চাকতি সরাতে সরাতে প্রায় 585 বিলিয়ন বছর কেটে যাবে! আমাদের মহাবিশ্বের বর্তমান বয়স (মাত্র!) 13.5 বিলিয়ন বছর। তাই এই কাহিনীটি যারা বিশ্বাস করেন তাদের হুটহাট ব্রহ্মার নির্দেশে মহাবিশ্ব ধ্বংস হয়ে যাবে এমন দুশ্চিন্তার কোন কারণ নেই।

উদাহরণ ৪.৫: 1 *টাকার কয়েন এবং* 2 *টাকার কয়েন একত্র করে কতভাবে* 1000 *টাকা বানানো যাবে?*

সমাধান: ধরে নাও, 1 টাকার ও 2 টাকার কয়েন দিয়ে n টাকা বানানো যায় a_n ভাবে, আর তুমি টেবিলের ওপরে কোন একভাবে 1 টাকার ও 2 টাকার কয়েন জড়ো করে n টাকা বানিয়েছ। শেষ যে কয়েনটি টেবিলে রেখেছিলে সেটা যদি 1 টাকার কয়েন হয়ে থাকে, তবে টেবিলে সেটি রাখার আগে ছিল $(n-1)$ টাকা যা বানানো যায় a_{n-1} ভাবে। আর যদি শেষ কয়েনটি 2 টাকার কয়েন হয়ে থাকে তবে টেবিলে আগে ছিল $(n-2)$ টাকা যা বানানো যায় a_{n-2} ভাবে।

কিন্তু খেয়াল কর টেবিলে এরও আগে $(n-3)$ টাকা ছিল এমন হতে পারে। সেক্ষেত্রে, সেখানে তুমি সেখানে একটি 1 টাকার কয়েন এবং পরে একটি 2 টাকার কয়েন যোগ করে n টাকা বানাচ্ছ, অথবা প্রথমে 2 টাকার কয়েন ও পরে 1 টাকার কয়েন যোগ করে n টাকা বানাচ্ছ। এই দুটি উপায়কে আলাদাভাবে যথাক্রমে a_{n-2} ও a_{n-1}-এ অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। কিন্তু এই দুটি উপায় তো আসলে

অভিন্ন, কেননা কোন কয়েন টেবিলে আগে রাখা হল তা গুরুত্বপূর্ণ না। সুতরাং $(n-3)$ টাকা বানানোর প্রতিটি উপায়কেই আমরা আসলে দুইবার করে গুণেছি। এখন, $(n-3)$ টাকা বানানো যায় a_{n-3} ভাবে। সুতরাং

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$$

এই অধ্যায়ের পরবর্তী অংশে এমন রিকারেন্স সমাধান করার নিয়ম পাবে। সেই নিয়ম অনুসারে এই রিকারেন্স সমাধান হচ্ছে

$$a_n = \frac{2n+3+(-1)^n}{4}$$
$$\implies a_{1000} = \frac{2\times 1000+3+1}{4} = 501$$

অর্থাৎ 1 টাকার কয়েন এবং 2 টাকার কয়েন দিয়ে মোট 501 ভাবে 1000 টাকা বানানো যায়। □

মন্তব্য:

- 1, 2, ও 5 টাকার কয়েন ব্যবহার করে n টাকা বানানোর ক্ষেত্রে রিকারেন্সটি হবে

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-5} - a_{n-3} - a_{n-6} - a_{n-7} + a_{n-8}$$

  এটা কি প্রমাণ করতে পারবে?

- 1000 টাকা বানানোর সময় আমরা কতগুলো ভিন্ন ভিন্ন 2 টাকার কয়েন ব্যবহার করছি সেটা গুণেও সমস্যাটি সমাধান করা যেত। চাইলে আমরা সবগুলো, অর্থাৎ $\frac{1000}{2} = 500$টি 2 টাকার কয়েন ব্যবহার করতে পারি, 499টি 2 টাকার এবং 2টি 1 টাকার কয়েন ব্যবহার করতে পারি, $\ldots$ সবগুলো 1 টাকার কয়েন ব্যবহার করতে পারি। তাই আমাদের হাতে অপশন আছে $500+1 = 501$টি। কিন্তু এভাবে 1, 2, ও 5 টাকার কয়েন ব্যবহার করে নির্দিষ্ট টাকা বানানোর সমস্যাটি সমাধান করা যায় না।

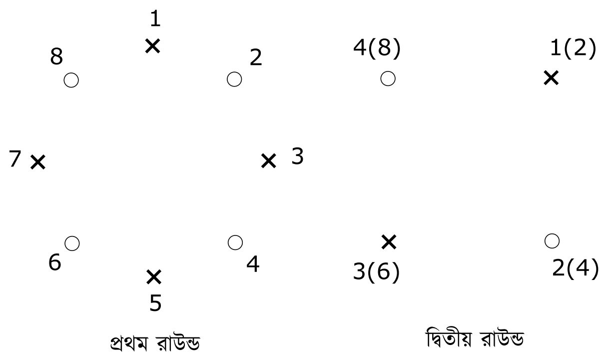
উদাহরণ ৪.৬ (জোসেফাসের[৩] সমস্যা)**:** *মনে কর তুমিসহ 1000 জন লোক যুদ্ধে শত্রুপক্ষের হাতে ধরা পড়েছ। শত্রুপক্ষের রাজা সিদ্ধান্ত নিলেন সব যুদ্ধবন্দীদেরকে বৃত্তাকারে দাঁড়া করিয়ে একজন বাদ দিয়ে দিয়ে গর্দান নেবেন। শেষ যে বন্দীটি বেঁচে থাকবে তাকে তিনি দয়া করে ছেড়ে দেবেন। যদি প্রথমজন থেকে গর্দান নেওয়া শুরু হয়ে থাকে, তুমি কত নম্বরে দাঁড়ালে বাঁচতে পারবে?*

সমাধান: ধরা যাক, n-জন যুদ্ধবন্দী বৃত্তাকারে দাঁড়ালে $f(n)$-তম লোকটি বেঁচে যায়। তাহলে, $f(1) = 1$ এবং $f(2) = 2$.

শুরু থেকে বৃত্তাকারে ঘুরে একবার গর্দান নেওয়া শেষ হওয়াকে আমরা বলব একটি রাউন্ড। খেয়াল করলে দেখবে যে প্রতিটি রাউন্ডেই প্রথম বন্দী থেকে গর্দান নেওয়া শুরু হয়ে সব বেজোড় বন্দীর গর্দান চলে যায়। তাই আমাদের দেখতে হবে প্রতিটি রাউন্ড থেকে তার পরবর্তী রাউন্ডে কোন বন্দীর অবস্থান কীভাবে পাল্টাচ্ছে।

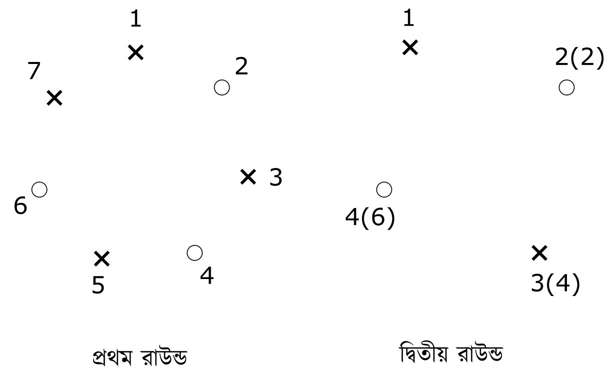
শুরুতে $2k$ সংখ্যক যুদ্ধবন্দী থাকলে প্রথম রাউন্ডের পর অবশিষ্ট থাকবে k জন বন্দী। প্রথম রাউন্ডের 2 নম্বর বন্দী হয়ে যাবে 1 নম্বর বন্দী, 4 নম্বর বন্দী হয়ে যাবে 2 নম্বর বন্দী, ইত্যাদি। এই k-জন বন্দীর মাঝে নতুন প্রথম বন্দী থেকে গর্দান নেওয়া শুরু হবে। তাহলে, সবশেষে বাঁচবে $f(k)$-তম বন্দী, যার শুরুতে অবস্থান ছিল $2f(k)$-তে। তাই বলা যায়, $f(2k) = 2f(k)$.

[৩]খ্রিস্টীয় প্রথম শতাব্দীর একজন ইতিহাসবিদ। তার লেখায় প্রথম অনুরূপ একটি সমস্যা পাওয়া যায়।



চিত্র ৪.৪: $2k$ সংখ্যক বন্দীর জন্য প্রথম দুটি রাউন্ড। ক্রস দেওয়া বন্দীদের গর্দান চলে গেছে। দ্বিতীয় রাউন্ডে বন্ধনীর মাঝে প্রথম রাউন্ডে বন্দীর অবস্থান দেখানো হয়েছে।

আবার, প্রথমে $(2k-1)$ সংখ্যক বন্দী থাকলে দ্বিতীয় রাউন্ডের শুরুতে $(k-1)$ জন বন্দী থাকবে। কিন্তু প্রথম রাউন্ডের শেষ বন্দীর অবস্থান বেজোড় হওয়ায় তার প্রথম রাউন্ডেই গর্দান চলে যাবে। সেজন্যে দ্বিতীয় রাউন্ডে প্রথম বন্দী (অর্থাৎ প্রথম রাউন্ডের 2 নম্বর বন্দী) থেকে গর্দান নেওয়া শুরু হবে না। এই পরিস্থিতিটাকে আমরা এভাবে চিন্তা করতে পারি যেন প্রথম রাউন্ডের 2 নম্বর বন্দী দ্বিতীয় রাউন্ডেও 2 নম্বর বন্দী এবং দ্বিতীয় রাউন্ডের 1 নম্বর বন্দীর ইতিমধ্যেই গর্দান চলে গেছে। অতএব এই $(k-1)+1=k$ জন বন্দীর মাঝে বাঁচবে $f(k)$-তম বন্দী। কিন্তু এই বন্দীর প্রথম রাউন্ডে অবস্থান কত ছিল?



চিত্র ৪.৫: $(2k-1)$ সংখ্যক বন্দীর জন্য প্রথম দুটি রাউন্ড। ক্রস দেওয়া বন্দীদের গর্দান চলে গেছে। দ্বিতীয় রাউন্ডে বন্ধনীর মাঝে প্রথম রাউন্ডে বন্দীর অবস্থান দেখানো হয়েছে।

দ্বিতীয় রাউন্ডে বন্দীর অবস্থান	**প্রথম রাউন্ডে বন্দীর অবস্থান**
1	প্রথম রাউন্ডে ছিল না
2	2
3	4
4	6
$\vdots$	$\vdots$
m	$2m-2$

সুতরাং, দ্বিতীয় রাউন্ডের $f(k)$-তম বন্দীর প্রথমে অবস্থান ছিল $2f(k)-2$-তে, এবং $f(2k-1)=2f(k)-2$.

এখন আমাদের শুধু $f(1000)$-এর মান বের করতে হবে।

$$\begin{aligned}
f(1000) &= 2f(500)\\
&= 4f(250)\\
&= 8f(125)\\
&= 16f(63)-16\\
&= 32f(32)-32-16\\
&\ \vdots\\
&= 512f(2)-48\\
&= 1024-48\\
&= 976
\end{aligned}$$

অর্থাৎ তুমি 976-তম অবস্থানে দাঁড়ালে বাঁচতে পারবে। □

মন্তব্য: এই সমস্যার জন্য আরেকটি রিকারেন্স হতে পারে

$$f(k)=\begin{cases} k & \text{যখন } k \text{ দুইয়ের কোন পাওয়ার;}\\ 2 & \text{যখন } (k-1) \text{ দুইয়ের কোন পাওয়ার;}\\ f(k-1)+2 & \text{অন্যথায়।}\end{cases}$$

এই রিকারেন্সটি প্রমাণ করে সমস্যাটি সমাধান করতে পারবে?

উদাহরণ ৪.৭ (আইএমও $2011/4$)**:** *আমাদের কাছে একটি দাঁড়িপাল্লা এবং n টি ($n>0$) বাটখারা আছে যাদের ভর যথাক্রমে $2^0,\ 2^1,\ \dots,\ 2^{n-1}$ একক। একটি একটি করে সবগুলো বাটখারা দাঁড়িপাল্লায় এমনভাবে তুলতে হবে যেন ডান পাশের পাল্লা কখনও বাম পাশের পাল্লা থেকে ভারী না হয়। কতভাবে এটা করা যেতে পারে?*

সমাধান: ধরা যাক n টি বাটখারাকে শর্ত মেনে দাঁড়িপাল্লায় রাখা যায় a_n ভাবে। লক্ষ কর যে $(k+1)$-তম বাটখারার ভর তার চেয়ে হালকা সবগুলো বাটখারার সম্মিলিত ভরের চেয়ে বেশি কেননা

$$2^k > 2^{k-1}+2^{k-2}+\cdots+2^0 = 2^k-1$$

একটু চিন্তা করলে বুঝতে পারবে যে বাটখারাগুলোর ওজন 2-এর পাওয়ার হওয়া বাধ্যতামূলক নয়। প্রকৃতপক্ষে ভিন্ন ভিন্ন ভরের যেকোন n টি বাটখারার মাঝে প্রতিটির ভর যদি তার চেয়ে হালকা বাকি বাটখারাগুলোর সম্মিলিত ভরের চেয়ে বেশি হয়, তবেই তাদেরকে a_n ভাবে দাঁড়িপাল্লায় শর্ত মেনে রাখা সম্ভব।

এবার সমস্যাটির সমাধানে আসা যাক। মনে কর, শর্ত মেনে কোন এক ভাবে দাঁড়িপাল্লায় সবগুলো বাটখারা রাখা হয়েছে। যদি সর্বশেষ যে বাটখারাটি দাঁড়িপাল্লায় তোলা হল তার ভর 2^m একক হয়, তাহলে বাকি বাটখারাগুলোর ভর যথাক্রমে $2^0,\ 2^1,\ \ldots 2^{m-1},\ 2^{m+1},\ \ldots, 2^{n-1}$ একক এবং এদের প্রতিটির ভর তার চেয়ে হালকা সবগুলো বাটখারার সম্মিলিত ভরের চেয়ে বেশি। তাই এদেরকে a_{n-1} ভাবে দাঁড়িপাল্লায় শর্ত মেনে রাখা যেতে পারে। শেষ বাটখারাটি 2^{n-1} ভরের না হলে 2^{n-1} ভরের বাটখারাটিকে ইতিমধ্যেই দাঁড়িপাল্লার বামদিকে রাখা হয়েছে, কেননা এটির ভর বাকি সব বাটখারার চেয়ে বেশি। তাই 2^m ভরের বাটখারাটিকে দাঁড়িপাল্লার দুই পাশের যেকোন এক পাশে রাখা যেতে পারে। কিন্তু শেষ বাটখারাটি 2^{n-1} ভরের হলে এটিকে অবশ্যই দাঁড়িপাল্লার বাম পাশে রাখতে হবে। অতএব শেষ বাটখারাটি দাঁড়িপাল্লায় রাখার জন্য আমাদের হাতে অপশন আছে $(2n-1)$ টি। সুতরাং

$$\begin{aligned}
a_n &= (2n-1)\cdot a_{n-1} \\
&= (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot a_{n-2} \\
&\ \ \vdots \\
&= (2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot a_1 \\
&= (2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1
\end{aligned}$$

অর্থাৎ a_n হচ্ছে প্রথম n টি বেজোড় সংখ্যার গুণফল। □

উদাহরণ ৪.৮: *একটি পাত্রে 1 থেকে n পর্যন্ত সংখ্যাগুলো রাখা আছে। এখান থেকে কিছু সংখ্যাকে সাদা এবং কিছু সংখ্যাকে কালো রং করা হল। (সবগুলো সংখ্যা রং নাও করা হতে পারে।) যেকোন দুটি ক্রমিক সংখ্যার রং যদি একই না হয়ে থাকে, তবে কতভাবে এমন রং করা সম্ভব?*

সমাধান: প্রদত্ত শর্ত মানে এমন কালারিংগুলোর মাঝে n সাদা, কালো অথবা বর্ণহীন হতে পারে। ধরা যাক, এমন কালারিং-এর সংখ্যা যথাক্রমে w_n, b_n ও t_n টি। লক্ষ কর যে, n বর্ণহীন হলে বাকি $(n-1)$ টি সংখ্যার যেকোন বৈধ কালারিং-ই গ্রহণযোগ্য। তাই

$$t_n = w_{n-1} + b_{n-1} + t_{n-1}$$

কিন্তু n সাদা হলে $(n-1)$ সাদা হতে পারবে না। সুতরাং,

$$w_n = b_{n-1} + t_{n-1}$$

এই মান আগের রিকারেন্সে বসিয়ে পাওয়া যায়

$$t_n = w_{n-1} + w_n$$

আবার, যেকোন বৈধ কালারিঙে সাদা এবং কালো রং বিনিময় করলে আরেকটি স্বতন্ত্র বৈধ কালারিং পাওয়া যায় যেখানে n এর বর্ণ পরিবর্তন হয়। তাই n সাদা এমন কালারিঙের সংখ্যা আর n কালো এমন কালারিঙের সংখ্যা আসলে সমান, অর্থাৎ, $w_n = b_n$. সুতরাং,

$$\begin{aligned} t_n &= w_{n-1} + b_{n-1} + t_{n-1} \\ &= w_{n-1} + b_{n-1} + w_{n-2} + b_{n-2} + t_{n-2} \\ &= (w_{n-1} + w_{n-2}) + (b_{n-1} + b_{n-2}) + t_{n-2} \\ &= t_{n-1} + t_{n-1} + t_{n-2} \\ &= 2t_{n-1} + t_{n-2} \end{aligned}$$

আবার দেখ $t_1 = 1$ এবং $t_2 = 3$. এই রিকারেন্স সমাধান করলে পাওয়া যাবে

$$t_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}$$

এটা কিন্তু n বর্ণহীন হলে বৈধ কালারিং-এর সংখ্যা। তাহলে সর্বমোট বৈধ কালারিং-এর সংখ্যা হবে

$$t_n + w_n + b_n = t_{n+1} = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2}$$

□

মন্তব্য: উত্তরে $\sqrt{2}$ দেখে ভড়কে যেও না কিন্তু! একটু পরেই তুমি জানতে পারবে কীভাবে এসব সংখ্যা রিকারেন্সের সমাধানে আসতে পারে।

§৪.৩ রৈখিক ও হোমোজেনাস রিকারেন্স

কোন একটি রিকারেন্সকে *রৈখিক* বলা হবে যদি রিকারেন্সটি নিচের মত হয়

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_d a_{n-d} + f(n) \tag{৪.৩.১}$$

এবং $f(n)$ ও $c_1, c_2, \ldots, c_d$ এর প্রত্যেকটিই ধ্রুবক অথবা n-এর কোন ফাংশন হয়ে থাকে।

$f(n) = 0$ হলে রিকারেন্সটিকে বলা হয় *হোমোজেনাস (homogeneous) রিকারেন্স*। আর $c_1, c_2, \ldots, c_d$-এর প্রতিটিই ধ্রুবক হলে রিকারেন্সটিকে বলা হবে *ধ্রুবপদযুক্ত রৈখিক রিকারেন্স*। উদাহরণস্বরূপ ফিবোনাচ্চি ধারার রিকারেন্সটি–

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

এটি একটি ধ্রুবপদযুক্ত রৈখিক হোমোজেনাস রিকারেন্স, কেননা এখানে $c_1 = 1,\ c_2 = 1$ এবং $f(n) = 0$. আবার উদাহরণ ৪.১-এর রিকারেন্সটি–

$$s_n = s_{n-1} + n$$

এটি একটি রৈখিক, ধ্রুবপদযুক্ত কিন্তু ননহোমোজেনাস রিকারেন্স, কেননা এতে $c_1 = 1$ এবং $f(n) = n$.

কোন রিকারেন্স পরবর্তী পদ নির্ণয় করতে আগের যতগুলো পদ ব্যবহার করে তাকে বলে তার *অর্ডার* বা *ডিগ্রি*। উপরে সমীকরণ (৪.৩.১)-এর রিকারেন্সটির ডিগ্রি d. ফিবোনাচ্চি ধারার রিকারেন্সের ডিগ্রি 2. তাহলে বলো তো নিচের রিকারেন্সের ডিগ্রি কত?

$$t_n = 2t_{n-1} + t_{n-2} - t_{n-4}$$

এই রিকারেন্সের ডিগ্রি 4 কেননা এতে t_{n-3} ব্যবহৃত না হলেও t_n জানতে t_{n-4} পর্যন্ত চার পদ পেছনে যেতে হচ্ছে।

আবার লক্ষ কর, কোন রিকারেন্সের সুনির্দিষ্ট ডিগ্রি নাও থাকতে পারে। যেমন: কাতালান সংখ্যার রিকারেন্স–

$$C_n = C_{n-1}C_0 + C_{n-2}C_1 + \ldots + C_0C_{n-1}$$

এই রিকারেন্সে যেকোন পদ বের করতে আগের সবগুলো পদ জানার প্রয়োজন হয়। এটি একটি অরৈখিক (non-linear), ধ্রুবপদহীন নন-হোমোজেনাস রিকারেন্সের উদাহরণ।

§৪.৪ ধ্রুবসহগযুক্ত রৈখিক হোমোজেনাস রিকারেন্সের সমাধান

প্রথম ডিগ্রির ধ্রুবসহগযুক্ত রৈখিক হোমোজেনাস রিকারেন্স

ধরো, $a_n = ra_{n-1}$ যেখানে r একটি অশূন্য বাস্তব সংখ্যা। তাহলে এই রিকারেন্সের সমাধান কী হবে?

আমরা সরাসরি a_n-এর মান বের করতে চেষ্টা করি।

$$\begin{aligned} a_n &= ra_{n-1} \\ &= r^2a_{n-2} \\ &= r^3a_{n-3} \\ &\ \ \vdots \\ &= r^{n-1}a_1 \\ &= a_0r^n \end{aligned}$$

অতএব, $a_n = a_0r^n$.

দ্বিতীয় ডিগ্রির ধ্রুবসহগযুক্ত রৈখিক হোমোজেনাস রিকারেন্স

এবার তাহলে আমরা নিচের রিকারেন্সটি সমাধানের চেষ্টা করি।

$$a_n = ca_{n-1} + da_{n-2} \tag{৪.৪.১}$$

উপরে আমরা দেখেলাম যে ডিগ্রি 1 হলে রৈখিক হোমোজেনাস রিকারেন্সের সমাধান হয় $a_0 r^n$ আকারের। তাহলে এমন কি হতে পারে না যে রিকারেন্স (৪.৪.১)-এর সমাধানও হবে একই ধরণের কিছু? এটা পরীক্ষার জন্য আমরা ধরে নেব রিকারেন্স (৪.৪.১)-এর সমাধান $a_n = Ar^n$ আকারের কিছু একটা হবে। এই মান রেকারেন্সে বসালে পাওয়া যায়,

$$Ar^n = cAr^{n-1} + dAr^{n-2}$$

যেটাকে সরল করলে হয়

$$r^2 = cr + d \tag{৪.৪.২}$$

সমীকরণ (৪.৪.২)-কে বলা হয় রিকারেন্সের বৈশিষ্ট্যমূলক সমীকরণ (Characteristic equation). যেহেতু এটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, এর দুটি মূল আছে। ধরা যাক, মূল দুটি হল r_1 এবং r_2. খুব সহজেই প্রমাণ করা যায় যে যেকোন দুটি ধ্রুবক A এবং B-র জন্য $a_n = Ar_1^n$ এবং $a_n = Br_2^n$ উভয়েই রিকারেন্স (৪.৪.১)-কে সিদ্ধ করে। আরেকটু খেয়াল করলে দেখবে $a_n = Ar_1^n + Br_2^n$ দিয়েও উপরের রিকারেন্সটি সিদ্ধ হয়। সুতরাং, এটাই দ্বিতীয় ডিগ্রির রৈখিক হোমোজেনাস রিকারেন্সের সাধারণ সমাধান। কিন্তু A এবং B-এর মান কোথায় পাবে? এর উত্তর হচ্ছে a_0 এবং a_1 থেকে। কেননা

$$\begin{aligned} a_0 &= Ar_1^0 + Br_2^0 = A + B \\ a_1 &= Ar_1^1 + Br_2^1 = Ar_1 + Br_2 \end{aligned}$$

সমীকরণদুটি A এবং B-এর জন্য সমাধান করলে পাওয়া যায়

$$A = \frac{a_1 - r_2 a_0}{r_1 - r_2} \quad B = \frac{r_1 a_0 - a_1}{r_1 - r_2} \tag{৪.৪.৩}$$

সমীকরণ (৪.৪.৩) একটি ঝামেলা সৃষ্টি করে। বৈশিষ্ট্যমূলক সমীকরণের মূলগুলো অভিন্ন হলে লক্ষ কর যে A এবং B-এর মান কিন্তু অসংজ্ঞায়িত হয়ে যাবে। সেক্ষেত্রে রিকারেন্সের সমাধান কী?

সেটি জানতে আমাদের একটু অন্যপথে হাঁটতে হবে। আমরা প্রথমে ধরে নেব সমীকরণ (৪.৪.২)-এর দুটি ভিন্ন ভিন্ন মূল r_1 এবং r_2 আছে। তারপর $(r_1 - r_2) \to 0$ নিয়ে দেখব ঠিক কী হচ্ছে। তাহলে, চলো উপরের ফর্মুলায় রিকারেন্সের সমাধানটি লিখি এবং এতে A এবং B-এর মান বসাই।

$$a_n = \frac{a_1 - r_2 a_0}{r_1 - r_2} r_1^n + \frac{r_1 a_0 - a_1}{r_1 - r_2} r_2^n$$

এই সমীরকণটিকে একটু সাজিয়ে লিখলে পাওয়া যাবে

$$a_n = a_1 \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} - a_0 r_1 r_2 \frac{r_1^{n-1} - r_2^{n-1}}{r_1 - r_2}$$

এখন $(r_1 - r_2) \to 0$ ধরে লিমিট নিলে আসবে

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 n r_1^{n-1} - a_0 r_1^2 (n-1) r_1^{n-2} \\ &= a_1 n r_1^{n-1} - n a_0 r_1^n + a_0 r_1^n \\ &= a_0 r_1^n + n \frac{a_1 - a_0 r_1}{r_1} r_1^n \end{aligned}$$

$$= Cr_1^n + nDr_1^n$$

এটিই হলো আমাদের কাঙ্ক্ষিত সমাধান।

উপপাদ্য ৪.১: *$a_n = ca_{n-1} + da_{n-2}$ রিকারেন্সের বৈশিষ্ট্যমূলক সমীকরণ $x^2 = cx + d$. এই সমীকরণের দুইটি ভিন্ন ভিন্ন মূল r_1 এবং r_2 থাকলে রিকারেন্সের সমাধান*

$$a_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

আর একটি মূল r থাকলে রিকারেন্সের সমাধান

$$a_n = Ar^n + nBr^n$$

যেখানে A এবং B দুটি ধ্রুবক যাদের মান ধারার শুরুর পদগুলো থেকে নির্ধারিত হয়।

দুইয়ের বেশি ডিগ্রির ধ্রুবসহগযুক্ত রৈখিক হোমোজেনাস রিকারেন্স

এক্ষেত্রেও ডিগ্রি 2 কেসের মত বৈশিষ্ট্যমূলক সমীকরণ বের করবে। যদি রিকারেন্সের ডিগ্রি d হয়, তবে এর বৈশিষ্ট্যমূলক সমীকরণের ডিগ্রিও হবে d, এবং এর মূলও থাকবে dটি। ধরা যাক মূলগুলো $r_1, r_2, \ldots, r_d$. যদি সবগুলো মূল ভিন্ন ভিন্ন হয়, তবে রিকারেন্সের সমাধান হবে

$$a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + \ldots + A_d r_d^n$$

কিন্তু যদি কোন মূল রিপিট হয়, অর্থাৎ একাধিকবার আসে, তবে আমাদেরকে আগের মত অতিরিক্ত সমাধান খুঁজতে হবে। এটা দেখা গেছে যে, যদি মূল r_i বৈশিষ্ট্যমূলক সমীকরণে k বার আসে, তবে রিকারেন্সের অতিরিক্ত সমাধানগুলো হবে $nr_i^n,\ n^2r_i^n,\ \ldots,\ n^{k-1}r_i^n$. (জেনারেটিং ফাংশন দিয়ে এই ব্যাপারটির সুন্দর ব্যাখ্যা দেওয়া যায়। জেনারেটিং ফাংশন অধ্যায়ে সেটা পাবে।)

কিছু উদাহরণ

উদাহরণ ৪.৯: *$a_0 = 0, a_1 = 1$ হলে $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ রিকারেন্সটি সমাধান কর।*

সমাধান: রিকারেন্সটির সাথে সম্পর্কিত বৈশিষ্ট্যমূলক সমীকরণ

$$x^2 = 5x - 6 \implies x = 2, 3$$

মূল দুইটি ভিন্ন ভিন্ন হওয়ায় প্রদত্ত রিকারেন্সের সাধারণ সমাধান

$$a_n = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n$$

এখন

$$A \cdot 3^0 - B \cdot 2^0 = a_0 = 0$$
$$A \cdot 3^1 - B \cdot 2^1 = a_1 = 1$$

এই দুটি সহসমীকরণ সমাধান করে পাওয়া যায় $(A, B) = (1, -1)$. সুতরাং

$$a_n = 3^n - 2^n$$

এটাই প্রদত্ত রিকারেন্সের সমাধান। □

উদাহরণ ৪.১০: *লুকাস সংখ্যার জন্য একটি ক্লোজড ফর্মুলা বের কর।*

সমাধান: লুকাস সংখ্যার ধারার রিকারেন্স

$$l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$$

এর সাথে সম্পৃক্ত বৈশিষ্ট্যমূলক সমীকরণ

$$x^2 = x + 1$$

যার সমাধান হচ্ছে

$$x = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = (\phi, \phi^{-1})$$

সুতরাং লুকাস সংখ্যার রিকারেন্সের সাধারণ সমাধান হচ্ছে

$$l_n = A\phi^n + B\phi^{-n}$$

তাহলে, $A\phi^0 + B\phi^{-0} = l_0 = 2$ এবং $A\phi + B\phi^{-1} = l_1 = 1$. এগুলো সমাধান করলে পাওয়া যায় $(A, B) = (1, 1)$. সুতরাং, লুকাস সংখ্যার n-তম পদ

$$l_n = \phi^n + \phi^{-n}$$

□

মন্তব্য: অনুরূপভাবে দেখাতে পার ফিবোনাচ্চি ধারার n-তম পদ

$$f_n = \frac{\phi^n - \phi^{-n}}{\sqrt{5}}$$

n মোটামুটি বড় হলে $\phi^{-n} \approx 0$ হয়ে যায়। তাই সাধারণভাবে লেখা যায়

$$f_n \approx \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$$

উদাহরণ ৪.১১: $a_0 = 4,\ a_1 = 8,\ a_2 = 16$ *হলে* $a_n = 5a_{n-1} - 7a_{n-2} + 3a_{n-3}$ *রিকারেন্সটি সমাধান কর।*

এই রিকারেন্সটির বৈশিষ্ট্যমূলক সমীকরণ

$$x^3 = 5x^2 - 7x + 3 \implies (x-1)^2(x-3) = 0$$

অতএব, $x = 1$ মূলটি এই সমীকরণে দুইবার আছে। সুতরাং প্রদত্ত রিকারেন্সের সাধারণ সমাধান

$$a_n = A \cdot 1^n + nB \cdot 1^n + C \cdot 3^n$$

এখন

$$\begin{cases} A + 0B + 1C = a_0 = 4 \\ A + 1B + 3C = a_1 = 8 \\ A + 2B + 9C = a_2 = 16 \end{cases}$$

সমীকরণত্রয় সমাধান করে পাওয়া যায় $(A, B, C) = (3, 2, 1)$. অতএব,

$$a_n = 3^n + 2n + 3$$

প্রদত্ত রিকারেন্সে বসালে দেখা যায়, এটি রিকারেন্সকে সিদ্ধ করছে। তাই এটাই প্রদত্ত রিকারেন্সের সমাধান।

§৪.৫ ধ্রুবসহগযুক্ত রৈখিক নন-হোমোজেনাস রিকারেন্সের সমাধান

মনে কর আমাদের কাছে ধ্রবসহগযুক্ত একটি রৈখিক নন-হোমোজেনাস রিকারেন্স আছে।

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_d a_{n-d} + f(n) \tag{৪.৫.১}$$

ধরা যাক, এই রিকারেন্সের দুটি সমাধান a'_n ও a''_n, এবং $a'_n - a''_n = b'_n$. তাহলে,

$$\begin{aligned} a'_n &= c_1 a'_{n-1} + \ldots + c_d a'_{n-d} + f(n) \\ a''_n &= c_1 a''_{n-1} + \ldots + c_d a''_{n-d} + f(n) \\ \implies (a'_n - a''_n) &= c_1(a'_{n-1} - a''_{n-1}) + \ldots + c_d(a'_{n-d} - a''_{n-d}) \\ \implies b'_n &= c_1 b'_{n-1} + \ldots + c_d b'_{n-d} \end{aligned} \tag{৪.৫.২}$$

(৪.৫.২)-কে বলা হয় (৪.৫.১)-এর সংশ্লিষ্ট হোমোজেনাস রিকারেন্স। আমরা উপরে দেখতে পাচ্ছি (৪.৫.২)-এর একটি সমাধান b'_n. বিপরীতভাবে বলা যায় যে

উপপাদ্য ৪.২: *কোন ধ্রুবপদযুক্ত রৈখিক নন-হোমোজেনাস রিকারেন্সের একটি সমাধান a'_n এবং সংশ্লিষ্ট হোমোজেনাস রিকারেন্সের সাধারণ সমাধান b_n হলে এর সাধারণ সমাধান*

$$a_n = a'_n + b_n$$

তবে প্রশ্ন হচ্ছে a'_n কীভাবে বের করা যায়? উত্তর হচ্ছে অনুমান করে! তবে যা খুশি তাই অনুমান না করে কিছু নিয়মমাফিক পথে আমাদেরকে এগোতে হয়।

অজ্ঞাত সহগ নিয়ম (The Method of Undetermined Coefficients)

প্রায়সময়ই দেখা যায় যে রৈখিক নন-হোমোজেনাস রিকারেন্সের সমাধানটি হয় এর সাথে যুক্ত ফাংশন $f(n)$-এর কাছাকাছি ধরণের কিছু। যেমন- $f(n)$-একটি দ্বিঘাত বহুপদী হলে দেখা যায় সমাধানটিও হয় কোন দ্বিঘাত বা ত্রিঘাত বহুপদী। $f(n)$ সূচকীয় ফাংশন হলে সমাধানেও দেখা যায় তেমন সূচকীয় ফাংশন আছে। তাই রিকারেন্স সমাধানের জন্য এতে $f(n)$ ধরণের কোন ফাংশন বসিয়ে আমরা উভয়পক্ষ মেলানোর চেষ্টা করতে পারি।

উদাহরণ ৪.১২: *$a_0 = 1$ হলে $a_n = 2a_{n-1} + n^2$ রিকারেন্সটি সমাধান কর।*

সমাধান: যেহেতু $f(n) = n^2$, তাই আমরা ধরে নেব এই রিকারেন্সের সমাধান কোন দ্বিঘাত বহুপদী, অর্থাৎ $a'_n = An^2 + Bn + C$. এই মান রিকারেন্সে বসালে পাওয়া যায়

$$\begin{aligned} An^2 + Bn + C &= 2A(n-1)^2 + 2B(n-1) + 2C + n^2 \\ &= 2An^2 - 4An + 2A + 2Bn - 2B + 2C + n^2 \\ &= (2A+1)n^2 + (2B-4A)n + 2A - 2B + 2C \\ \implies An^2 + Bn + C &= (2A+1)n^2 + (2B-4A)n + 2A - 2B + 2C \end{aligned}$$

উভয়পাশে সহগ মিলিয়ে পাওয়া যায়

$$A = 2A + 1 \implies A = -1$$

$$B = 2B - 4A \implies B = -4$$

$$C = 2A - 2B + 2C \implies C = -6$$

সুতরাং $a'_n = -(n^2 + 4n + 6)$. এখন সংশ্লিষ্ট হোমোজেনাস রিকারেন্স

$$b_n = 2b_{n-1} \implies b_n = 2^n b_0$$

অতএব সাধারণ সমাধান

$$a_n = a'_n + b_n = 2^n b_0 - n^2 - 4n - 6$$

যেহেতু $a_0 = 2^0 b_0 - 6 = 1 \implies b_0 = 7$, সুতরাং

$$a_n = 7 \cdot 2^n - n^2 - 4n - 6$$

এটাই কাঙ্ক্ষিত সমাধান। □

উদাহরণ ৪.১৩: *$s_0 = 0$ হলে $s_n = s_{n-1} + n$-এর সমাধান নির্ণয় কর।*

সমাধান: যেহেতু $f(n) = n$, তাই ধরে নাও $s'_n = An + B$. এই মান রিকারেন্সে বসালে পাওয়া যায়

$$An + B = A(n-1) + B + n \implies An + B = (A+1)n + B - A$$

উভয়পাশের সহগ মিলালে $A = A + 1$ আসে! কিন্তু সেটা তো সম্ভব না। তাহলে কি এই রিকারেন্সের সমাধান নেই? উত্তরটা হচ্ছে অবশ্যই আছে। যখন উপরের মত অসম্ভব সমীকরণ আসবে, তখন বুঝতে হবে আমাদের s'_n অনুমানে ভুল ছিল। এবার আমরা $s'_n = An^2 + Bn + C$ ধরে দেখি।

$$An^2 + Bn + C = A(n-1)^2 + B(n-1) + C + n$$

$$\begin{aligned} &= An^2 - 2An + A + Bn - B + C + n \\ &= An^2 + (B - 2A + 1)n + A + C - B \\ \implies An^2 + Bn + C &= An^2 + (B - 2A + 1)n + A + C - B \end{aligned}$$

উভয়পাশে সহগ মেলালে পাওয়া যাবে

$$B = B - 2A + 1 \implies A = \frac{1}{2}$$

$$C = A + C - B \implies B = A = \frac{1}{2}$$

সুতরাং

$$s'_n = \frac{n^2 + n}{2} + C$$

এখন প্রদত্ত রিকারেন্সের সংশ্লিষ্ট হোমোজেনাস রিকারেন্স $b_n = b_{n-1} \implies b_n = b_0$. এটি s'_n-এর সাথে যোগ করলে কোন পরিবর্তন হবে না কেননা s'_n-এ এমনিতেই একটি ধ্রুবপদ C যুক্ত আছে। সুতরাং প্রদত্ত রিকারেন্সের সাধারণ সমাধান

$$s_n = \frac{n^2 + n}{2} + C$$

যেহেতু $s_0 = 0 \implies C = 0$, সুতরাং

$$s_n = \frac{n^2 + n}{2}$$

□

উদাহরণ ৪.১৪: $a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2} + 4^n$ *রিকারেন্সটি সমাধান কর।*

সমাধান: যেহেতু $f(n) = 4^n$, আমরা অনুমান করছি $a'_n = A \cdot 4^n$. এই মান রিকারেন্সে বসালে পাওয়া যায়

$$A \cdot 4^n = 2A \cdot 4^{n-1} + 8A \cdot 4^{n-2} + 4^n \implies (A - 1)4^n = A \cdot 4^n$$

এমন হচ্ছে কেন! এর কারণটা হল $A \cdot 4^n$ নিজেই এই রিকারেন্সের সংশ্লিষ্ট হোমোজেনাস রিকারেন্সের একটা সমাধান। যখন এমন হবে, তখন তোমার a'_n সম্পর্কিত অনুমানকে n, n^2 ইত্যাদি দিয়ে গুণ করে আবার চেষ্টা করবে। যেমন- এই রিকারেন্সে $a'_n = An4^n$ বসালে পাওয়া যায়

$$\begin{aligned} An4^n &= 2A(n-1)4^{n-1} + 8A(n-2)4^{n-2} + 4^n \\ &= 2An4^{n-1} - 2A4^{n-1} + 8An4^{n-2} - A4^n + 4^n \\ &= (2An4^{n-1} + 2An4^{n-1}) - 2A4^{n-1} - A4^n + 4^n \\ &= An4^n + (4 - 6A)4^{n-1} \end{aligned}$$

অতএব

$$(4 - 6A)4^{n-1} = 0 \implies A = \frac{2}{3}$$

সুতরাং $a'_n = \frac{2}{3}4^n$. আবার সংশ্লিষ্ট হোমোজেনাস রিকারেন্স

$$b_n = 2b_{n-1} + 8b_{n-2}$$

যার সমাধান হচ্ছে $b_n = B4^n + C(-2)^n$. সুতরাং প্রদত্ত রিকারেন্সের সাধারণ সমাধান

$$a_n = \frac{2n + 3B}{3}4^n + C(-2)^n$$

$\square$

ক্রমিক পদের পার্থক্য নেওয়া

উদাহরণ ৪.১৫: *$a_0 = 5,\ a_1 = 7$ হলে $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2^n$ রিকারেন্সের সমাধান নির্ণয় কর।*

সমাধান: এখানে $a_2 = 2 \times 7 - 5 + 2^2 = 13$. ধরা যাক, $b_n = a_n - a_{n-1}$. প্রদত্ত রিকারেন্সটিকে সাজিয়ে লেখ

$$\begin{aligned}
a_n - a_{n-1} &= a_{n-1} - a_{n-2} + 2^n \\
\implies b_n &= b_{n-1} + 2^n \\
&= b_{n-2} + 2^{n-1} + 2^n \\
&\ \ \vdots \\
&= b_2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n \\
&= a_2 - a_1 + 2^{n+1} - 8 \\
&= 13 - 7 + 2^{n+1} - 8 \\
&= 2^{n+1} - 2
\end{aligned}$$

সুতরাং আমরা পেলাম $b_n = 2^{n+1} - 2$. আবার

$$\begin{aligned}
a_n &= b_n + a_{n-1} \\
&= b_n + b_{n-1} + a_{n-2} \\
&\ \ \vdots \\
&= b_n + b_{n-1} + \ldots + b_2 + a_1 \\
&= \left(2^{n+1} - 2\right) + (2^n - 2) + \ldots + \left(2^3 - 2\right) + 7 \\
&= 2^{n+2} - 8 - 2(n-1) + 7 \\
&= 2^{n+2} - 2n + 1
\end{aligned}$$

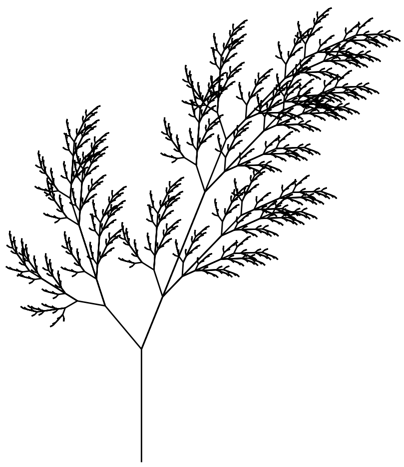
অতএব $a_n = 2^{n+2} - 2n + 1$. চাইলে প্রদত্ত রিকারেন্সে বসিয়ে দেখতে পার যে এটা আসলেই এর সঠিক সমাধান। □

তুমি নিশ্চয়ই এতদূর পড়তে পড়তে ক্লান্ত হয়ে গেছ। আমিও না লিখতে লিখতে ক্লান্ত হয়ে গেছি! তাই আর বেশি কিছু লিখব না। রিকারেন্সের একটি অসাধারণ বাস্তব প্রয়োগ দিয়ে এই অধ্যায়টি শেষ করে দিচ্ছি।

§৪.৬ লিন্ডেনমেয়ার সিস্টেম (Lindenmayer System)

মনে কর, তুমি ছোট্ট একটা গাছ। তুমি অনেক বড় হয়ে অনেক অনেক ফুল ফোটাতে চাও। কিন্তু তোমার বড় হতে তো আলো-বাতাস দরকার, শাখাপ্রশাখাগুলো ঠিকঠাকমত মেলে ধরা দরকার, নির্দিষ্ট পরিমাণে পাতা থাকা দরকার। তোমার যেহেতু মানুষের মত অংক কষার ক্ষমতা নেই, তুমি কিভাবে ঠিক করবে কখন, কোথায় একটা শাখা গজাতে হবে, পাতা গজাতে হবে? কোন কোন শাখায় ফুল ফোটাতে হবে?

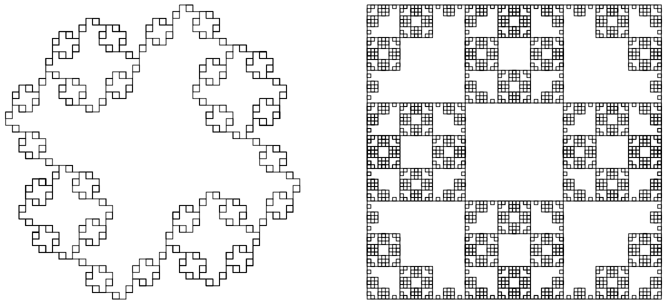
ষাটের দশকে এই প্রশ্নগুলো ভাবিয়ে তুলেছিল হাংগেরির জীববিজ্ঞানী আর্টিসিড লিন্ডেনমেয়ারকে। তিনি দিনরাত মাথা খাটিয়ে গাছপালার মন পড়তে শিখলেন। তাঁর আবিষ্কৃত পদ্ধতিটি দিয়ে গাছপালার বৃদ্ধি নিখুঁতভাবে বর্ণনা করা যায়, তাদের অবিশ্বাস্য রকমের বাস্তব (realistic) ত্রিমাত্রিক মডেল তৈরি করা যায়, এবং চিত্র ৪.৭-এর মত অসাধারণ সব প্যাটার্ন আঁকা যায়। তাঁর নামানুসারে এই পদ্ধতিটির নাম *লিন্ডেনমেয়ার সিস্টেম* বা সংক্ষেপে *এল-সিস্টেম*।



চিত্র ৪.৬: এই গাছটা এল-সিস্টেম দিয়ে আঁকা।

এল-সিস্টেম কী

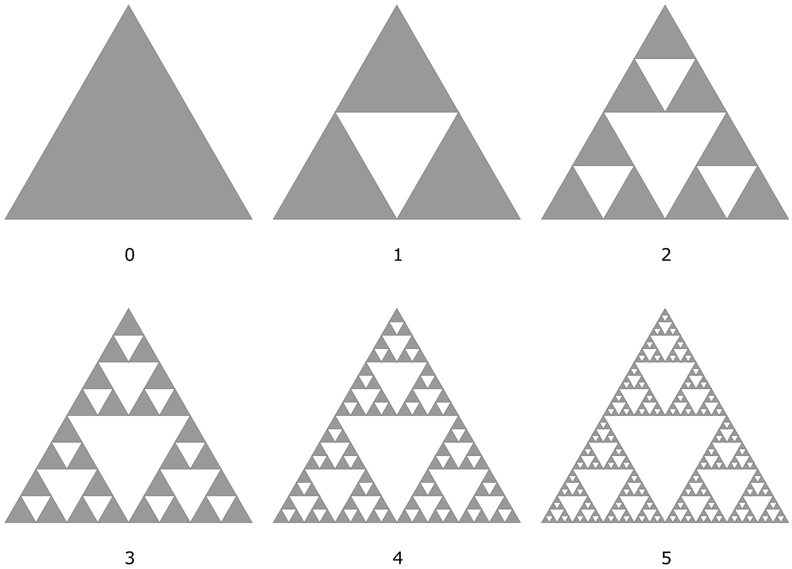
সোজা বাংলায় বললে তোমাকে একটি ছবি দিয়ে যদি বলা হয় কিছু বিশেষ বিশেষ অংশ রিকার্সিভলি বার বার পরিবর্তন করতে, তবে সেটাই হল এল-সিস্টেম। যেমন- কোন ছবির সকল ত্রিভুজের পেট



চিত্র ৪.৭: এল-সিস্টেমে আঁকা দুটি প্যাটার্ন।

কেটে মাঝের ত্রিভুজটা বাদ দিয়ে যেতে থাক। রিকার্সিভলি কাজটি করে গেলে চিত্র ৪.৮-এর মত একটি ব্যাপার হবে। এই পুরো প্রক্রিয়াটি একটি এল-সিস্টেমের উদাহরণ।

চিত্র ৪.৮-এর প্রতিটি ধাপকে বলা হয় এল-সিস্টেমের একেকটি *প্রজন্ম* $(Generation)$. যে ছবিটি দিয়ে শুরু করা হয়, তাকে বলে *স্বীকার্য* $(Axiom)$. আর প্রতিটি প্রজন্মে যে পরিবর্তনগুলো রিকার্সিভলি করা হয়, তাদের বলে *নিয়ম* $(Rule)$. তবে সাধারণত এভাবে এল-সিস্টেমকে কোথাও



চিত্র ৪.৮: সহজ একটি এল-সিস্টেম।

লিখা হয় না। প্রথমে বিশেষ স্ট্রিং আকারে স্বীকার্যটি লিখে কিছু নিয়ম রিকার্সিভলি খাটিয়ে প্রয়োজনীয় সংখ্যক প্রজন্ম পার করা হয়। পরবর্তীতে একটি বিশেষ প্রক্রিয়ায় সেই স্ট্রিং থেকে ছবি আঁকা হয়।

স্ট্রিং আকারে লিখলে একটি এল-সিস্টেমের তিনটি অংশ রয়েছে। সেগুলো হচ্ছে,

১. **বর্ণমালা:** কিছু বর্ণ যাদেরকে পাশাপাশি বসিয়ে স্ট্রিং বানানো যায়। বর্ণগুলো দুই রকমের। যেসব বর্ণগুলোকে নিয়ম অনুসারে বার বার পরিবর্তন করা হয় তাদের নাম *চলক* $(variable)$, আর

যেসব বর্ণগুলো পরিবর্তিত হয় না, কিন্তু বিশেষ বিশেষ কাজে ব্যবহৃত হয় তাদের নাম *ধ্রুবক (constant)*.

২. **স্বীকার্য:** কোন এল-সিস্টেমের প্রারম্ভিক অবস্থা। এটি বাইরে থেকে সিস্টেমে দেওয়া হয়।

৩. **নিয়ম:** ছবির ক্ষেত্রে যেমন প্রতিটি প্রজন্মে কিছু অংশ বার বার পরিবর্তন করা হয়, তেমনি স্ট্রিঙের ক্ষেত্রে প্রতিটি প্রজন্মে কিছু বর্ণ পূর্বনির্ধারিত উপায়ে বার বার প্রতিস্থাপন করতে হয়। এই উপায়গুলোকে বলে *নিয়ম (Rule)*. কোন এল-সিস্টেমের নিয়মগুলো কোন বর্ণকে প্রতিস্থাপনের সময় তার আশেপাশের বর্ণগুলোর উপরে নির্ভর করলে সিস্টেমটিকে বলা হয় *কন্টেক্সট সেনসিটিভ (Context Sensitive)*. আর এমন নিয়ম সিস্টেমে না থাকলে তাকে বলে *কন্টেক্সট ফ্রি (Context Free)*. কন্টেক্সট সেনসিটিভ এল-সিস্টেম সাধারণত জটিল গাছপালার ত্রিমাত্রিক মডেল বানাতে ব্যবহৃত হয়।

এবার একটি উদাহরণ দেখা যাক।

উদাহরণ ৪.১৬: *নিচের এল-সিস্টেমের প্রথম 5 টি প্রজন্ম নির্ণয় কর।*

$$\begin{aligned} \textit{চলক} \quad & AB \\ \textit{ধ্রুবক} \quad & \textit{নেই} \\ \textit{স্বীকার্য} \quad & A \\ \textit{নিয়ম} \quad & A \to AB \\ & B \to A \end{aligned}$$

সমাধান: উপরের নিয়মগুলো অনুসারে যে কোন প্রজন্মের সবগুলো A-কে AB এবং সবগুলো B-কে A দিয়ে প্রতিস্থাপন করতে হবে। আবার, স্বীকার্য অনুসারে, একদম প্রথমে এল-সিস্টেমে শুধু A রয়েছে। তাহলে পরবর্তী প্রজন্মগুলো হবে–

প্রজন্ম $1: \; AB$

প্রজন্ম $2: \; ABA$

প্রজন্ম $3: \; ABAAB$

প্রজন্ম $4: \; ABAABABA$

প্রজন্ম $5: \; ABAABABAABAAB$

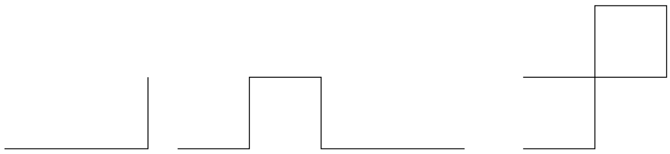
□

মন্তব্য: লক্ষ কর যে প্রতিটি স্ট্রিঙের দৈর্ঘ্য ফিবোনাচ্চি সংখ্যা। বলতে পারবে কেন?

স্ট্রিং থেকে ছবি আঁকা: টার্টল গ্রাফিক্স

এল-সিস্টেমে স্ট্রিং থেকে ছবি আঁকার জন্য *টার্টল গ্রাফিক্স (Turtle Graphics)* নামে একটি পদ্ধতি ব্যবহৃত হয়। ব্যাপারটা এমন যেন কাগজের উপরে একটা বাধ্য কচ্ছপ বসে আছে, আর তুমি তাকে চলাফেরা করার নির্দেশ দিচ্ছ। যদি তুমি বল F, কচ্ছপ যেদিকে মুখ করে আছে সেদিকে এক ঘর

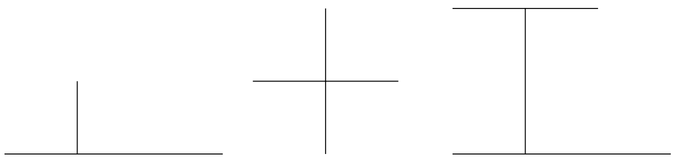
সামনে যাবে। যদি বল R, সে ডানে 90° ঘুরবে। আবার যদি বল L, সে বামে 90° ঘুরবে। কাগজের ওপরে কচ্ছপের চলার পথ ট্র্যাক করা হলে সেটা এমন হবে–



FFLF *FLFRFRFRFF* *FLFFRFRFRFF*

চিত্র ৪.৯: টার্টল গ্রাফিক্সের কিছু উদাহরণ।

সাধারণত বামে ঘোরার জন্য $+$ এবং ডানে ঘোরার জন্য $-$ চিহ্ন ব্যবহৃত হয়। কচ্ছপকে ঘোরানোর সময় 90° ঘোরাতে হবে এমন কোন কথা নেই। অন্য কোণেও ঘোরানো যায়। আবার চাইলে ডানে ও বামে ঘোরানোর কোণও আলাদা করা যায়। এছাড়া টার্টল গ্রাফিক্সে তৃতীয় বন্ধনী ব্যবহার হয়। কচ্ছপ স্ট্রিঙে কোথাও '[' পেলে ম্যাচিং ']' পাওয়ার আগ পর্যন্ত স্ট্রিঙের সবকিছু আঁকে, তারপর আবার ছবিতে '[' বন্ধনী পাওয়ার আগের স্থানে গিয়ে স্ট্রিঙের পরের অংশ অনুসারে আঁকা শুরু করে। বন্ধনীর ভেতর বন্ধনী পেলে রিকার্সিভভাবে আঁকা শেষ হয়। নিচের উদাহরণগুলো দেখ–



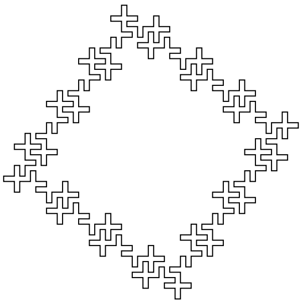
$F[+F]FF$ $F[+F][-F]F$ $F+[FF[-F]+F]-FF$

চিত্র ৪.১০: টার্টল গ্রাফিক্সের আরও কিছু উদাহরণ।

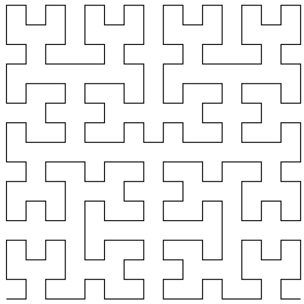
কচ্ছপ তার জানাশোনা বর্ণগুলোর বাইরে অন্য কোন বর্ণ স্ট্রিঙে পেলে সেটাকে অগ্রাহ্য করে পরবর্তী বর্ণে চলে যায়।

কিছু উদাহরণ

নিচের উদাহরণগুলোতে ছবি আঁকার সময় যে বর্ণগুলো কচ্ছপকে অগ্রাহ্য করতে হবে তাদেরকে প্রথম বন্ধনীর মাঝে রাখা হয়েছে। প্রতিটি ছবি tikz বা inkscape ব্যবহার করে আঁকা। তবে তুমি চাইলে এল-সিস্টেম নিয়ে পরীক্ষা-নিরীক্ষার জন্য এই সাইটটিতে যেতে পার: `http://www.kevs3d.co.uk/dev/lsystems/` . এল-সিস্টেম সম্পর্কে আরও জানার জন্য [11] দেখতে পারো।

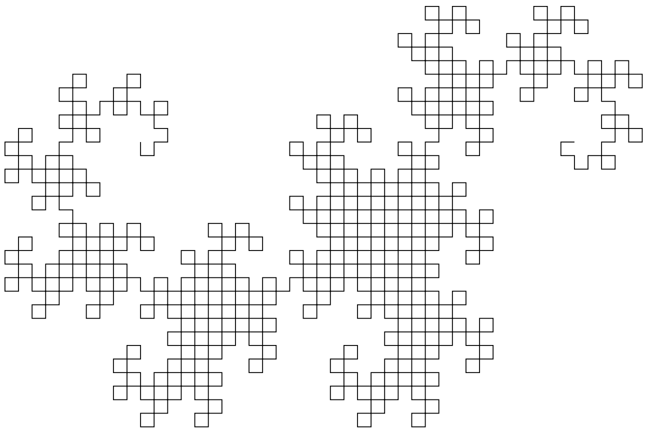


চলক $F, (XY)$
ধ্রুবক $+-$
স্বীকার্য $XYXYXYX+XYXYXYX+XYXYXYX+XYXYXYX$
নিয়ম $X \rightarrow FX + FX + FXFY - FY-$
$Y \rightarrow +FX+FXFY-FY-FY$
$F \rightarrow$ (অর্থাৎ F মুছে যাচ্ছে)
কোণ 90°
প্রজন্ম 2



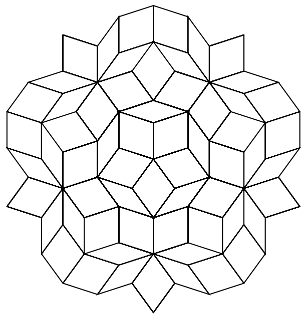
চলক (LR)
ধ্রুবক $F + -$
স্বীকার্য L
নিয়ম $L \rightarrow +RF - LFL - FR+$
$R \rightarrow -LF + RFR + FL-$
কোণ 90°
প্রজন্ম 4

চিত্র ৪.১১: দুইটি বর্গাকৃতির প্যাটার্ন। দ্বিতীয়টি হিলবার্ট কার্ভ নামে পরিচিত।



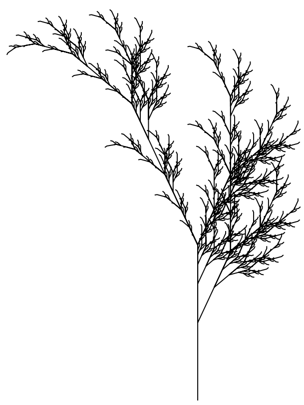
চলক $F, (XY)$
ধ্রুবক $+-$
স্বীকার্য FX
নিয়ম $X \rightarrow X + YF+$
$Y \rightarrow -FX - Y$
কোণ 90°
প্রজন্ম 10

চিত্র ৪.১২: ড্রাগন কার্ভ।

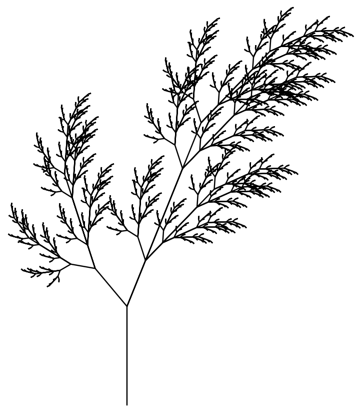


চলক	$F, (WXYZ)$
ধ্রুবক	$+ - [\ ]$
স্বীকার্য	$[X] + +[X] + +[X] + +[X] + +[X]$
নিয়ম	$W \to YF + +ZF - - - -XF[-YF - - - -WF] + +$
	$X \to +YF - -ZF[- - -WF - -XF]+$
	$Y \to -WF + +XF[+ + +YF + +ZF]-$
	$Z \to - -YF + + + +WF[+ZF + + + +XF] - -XF$
	$F \to$
কোণ	36°
প্রজন্ম	3

চিত্র ৪.১৩: পেনরোজ টাইলিং।



চলক	$F, (X)$
ধ্রুবক	$+ - [\ ]$
স্বীকার্য	X
নিয়ম	$X \to F - [[X] + X] + F[+FX] - X$
	$F \to FF$
কোণ	22°
প্রজন্ম	6



চলক	$F, (X)$
ধ্রুবক	$+ - [\ ]$
স্বীকার্য	X
নিয়ম	$X \to F[+X][-X[FX+]][-[FX]]$
	$F \to FF$
কোণ	$+40^\circ, -22^\circ$
প্রজন্ম	6

চিত্র ৪.১৪: এল-সিস্টেমে আঁকা দুইটি গাছ।

§৪.৭ অনুশীলনী

সমস্যা ৪.১: নিচের রিকারেন্সগুলো সমাধান কর। ধরে নাও বেইস কেসগুলো হচ্ছে $a_0 = 0,\ a_1 = 1, \ldots$ ইত্যাদি।

১. $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2}$

২. $a_n = a_{n-1} + n^3$

৩. $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 3^n$

সমস্যা ৪.২: (এআইএমই 2006) তোমার কাছে 8টি ঘনক আছে যাদের আয়তন যথাক্রমে 1 থেকে 8 ঘনএকক। এদেরকে একটার উপর আরেকটা বসিয়ে টাওয়ার বানাতে হবে। তবে শর্ত হচ্ছে প্রতিটি ঘনকের উপরে তার চেয়ে সর্বোচ্চ 2 ঘনএকক বেশি আয়তনের কোন ঘনক বসানো যাবে। তাহলে কতগুলো ভিন্ন ভিন্ন টাওয়ার বানানো সম্ভব?

সমস্যা ৪.৩: 10 দৈর্ঘ্যের কতগুলো স্ট্রিং আছে যারা শুধুমাত্র 0,1 ও 2 দিয়ে গঠিত এবং যাদের মাঝে পাশাপাশি দুটি অশূন্য ডিজিট নেই?

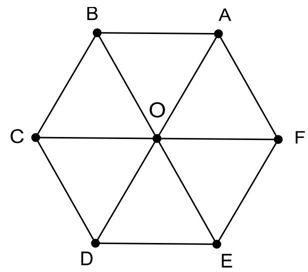
সমস্যা ৪.৪: *এভিএল ট্রি* হচ্ছে একটি বিশেষ ধরণের বাইনারি ট্রি[৪] যার যেকোন নোড ও তার সহোদর (sibling) থেকে শুরু হওয়া সাবট্রিদ্বয়ের উচ্চতার পার্থক্য সর্বোচ্চ 1. প্রমাণ কর কোন এভিএল ট্রির উচ্চতা n হতে হলে এতে নূন্যতম $(f_n - 1)$টি নোড থাকতে হবে। (f_n হল n-তম ফিবোনাচ্চি সংখ্যা।)

সমস্যা ৪.৫: 0 এবং 1 ব্যবহার করে 10 দৈর্ঘ্যের কতগুলো স্ট্রিং বানানো সম্ভব যাতে ক্রমিক তিনটি 0 অথবা 1 নেই?

সমস্যা ৪.৬: আগের সমস্যার স্ট্রিংগুলোর যোগফল কত?

সমস্যা ৪.৭: 20 অংকের কতগুলো সংখ্যায় 1 এবং 2 পাশাপাশি নেই?

সমস্যা ৪.৮: (হংকং এমও 2003) চিত্র ৪.১৫-এ প্রতিটি রেখাংশের দৈর্ঘ্য 1 একক। O বিন্দু থেকে চলা শুরু করে কতভাবে রেখাংশগুলো দিয়ে 2003 একক ভ্রমণ করে আবার O-তে ফিরে আসা যাবে?



চিত্র ৪.১৫: ষড়ভুজের কেন্দ্র থেকে পথ।

[৪]বাইনারি ট্রি কী জানা না থাকলে গ্রাফ থিওরি অধ্যায় থেকে জেনে নাও।

সমস্যা ৪.৯: দেওয়া আছে $a_0 = 0,\ a_1 = 1,$ এবং $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$. প্রমাণ কর যে 2-এর কোন পাওয়ার a_n-কে নিঃশেষে ভাগ করবে যদি এবং কেবল যদি 2-এর একই পাওয়ার n-কেও নিঃশেষে ভাগ করে।

সমস্যা ৪.১০: (এমওপি ২০০৬) $\{1, 2, 3, \ldots, 2005\}$ সেটের কতগুলো উপসেট আছে যাদের প্রতিটির উপাদানসমূহের যোগফলকে 2048 দিয়ে ভাগ করলে 2006 অবশিষ্ট থাকবে?

সমস্যা ৪.১১: (ট্রি ট্রান্সভার্সাল)

গ্রন্থসূত্র

[1] T. Andreescu and Z. Feng. *102 Combinatorial Problems From the Training of the USA IMO Team*. Birkhäuser, 2003. ISBN 978-0-8176-8222-4.

[2] T. Andreescu and Z. Feng. *A Path to Combinatorics for Undergraduates*. Springer, 2004. ISBN 978-0-8176-4288-4.

[3] A. T. Benjamin, S. S. Plott, and J. A. Sellers. Tiling Proofs of Recent Sum Identities Involving Pell Numbers. *Annals of Combinatorics*, 12 (3), 2008.

[4] A. T. Benjamin and J. J. Quinn. *Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof*, volume 27 of *Dolciani Mathematical Expositions*. The Mathematical Association of America, 1st edition, 2003.

[5] A. Engel. *Problem-Solving Strategies*. Springer, 1998. ISBN 0-387-98219-1.

[6] P. Erdős and G. Szekeres. A Combinatorial Problem in Geometry. *Compositio Mathematica*, 2, 1935.

[7] K.-Y. Li. Pigeonhole Principle. *Mathematical Excalibur*, 1(1), 1995. Available from: `https://www.math.ust.hk/excalibur/v1_n1.pdf`.

[8] D. A. Marcus. *Combinatorics: A Problem Oriented Approach*. MAA Textbooks. The Mathematical Association of America, 1999. ISBN 9780883859810.

[9] R. B. Nelsen. *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*, volume 1. The Mathematical Association of America, 1st edition, 1993. ISBN 0-88385-700-6.

[10] D. Patrick. *Introduction to Counting and Probability.* AoPS Incorporated, 2005. ISBN 0-9773045-0-7.

[11] P. Prusinkiewicz and A. Lindenmayer. *The Algorithmic Beauty of Plants.* Springer-Verlag, 2nd edition, 1996.

[12] P. Soberón. *Problem-Solving Methods in Combinatorics.* Birkhäuser, 2013. ISBN 978-3-0348-0596-4.

[13] P. Sriram. Olympiad Combinatorics, 2014.

[14] C. Tuffley. Recurrence relations, January 2009.

[15] S. Wolfram. *A New Kind of Science.* Wolfram Media, 2002. ISBN 1-57955-008-8.

[16] P. Zeitz. *The Art and Craft of Problem Solving.* Springer, 2nd edition, 2007.