সংখ্যাতত্ত্ব (Number Theory):

-তারিক আদনান মুন

সংখ্যাতত্ত্ব বা Number theory গণিতের একটি অন্যতম শাখা। আমাদের স্কুল বা কলেজের পাঠ্যক্রমে এই বিষয় অন্তর্ভুক্ত না থাকলেও গণিত অলিম্পিয়াডে এখান থেকে বিভিন্ন ধরণের সমস্যা দেওয়া হয়। এ বিষয়ে আলোচনা শুরুর আগে কিছু সংখ্যার সাথে পরিচয় করিয়ে দিচ্ছি।

১. পূর্ণসংখ্যা বা ইন্টিজার: যেমন : 10,-5,-2,0,1,2,5,10 ইত্যাদি। পূর্ণসংখ্যার সেটকে $\mathbb{Z}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

২. স্বাভাবিক সংখ্যা বা ন্যাচারাল নাম্বার: 0 থেকে বড় সকল পূর্ণসংখ্যা। যেমন: 1,2,5,10,54 ইত্যাদি। স্বাভাবিক সংখ্যার সেটকে $\mathbb{N}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

বিভাজ্যতা (Divisibility):

আমরা জানি,যে যেকোন দু'টি পূর্ণসংখ্যা যোগ,বিয়োগ,গুণ করলে প্রাপ্ত সংখ্যাটি একটি পূর্ণসংখ্যাই হবে। কিন্তু, যদি একটি সংখ্যাকে আরেকটি সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা হয় তবে তা পূর্ণসংখ্যা নাও হতে পারে। একটি সংখ্যাকে আরেকটি সংখ্যা দিয়ে ভাগ করলে কী হতে পারে, সেটা নিয়ে আলোচনা করে বিভাজ্যতা বা ডিভিজিবিলিটি।

আমরা একটি সংখ্যা m কে n দ্বারা বিভাজ্য (প্রকৃতপক্ষে নিঃশেষে বিভাজ্য,কিন্তু এখানে আমরা বিভাজ্য কথাটিই ব্যবহার করব) বলব, যদি এমন আরেকটি সংখ্যা k থাকে যাতে,

$$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} = \mathrm{k}$$

হয়। আমরা এটাকে লিখি $\mathrm{n}|\mathrm{m}$. n কে m এর একটি উৎপাদক এবং m কে n এর একটি গুণিতক(multiple) বলা হয়।

এবং m যদি n দ্বারা বিভাজ্য না হয়, তবে আমরা লিখি: $n \nmid m$

যেহেতু, $0 = 0 \cdot \mathrm{n}$,সকল $n(n \neq 0)$ এর জন্য $n|0$.

এখন আমরা কিছু সাধারণ উপপাদ্য লক্ষ্য করি,

1. $x \mid x$
2. যদি $x \mid y$ এবং $y \mid z$ তবে, $x \mid z$
3. যদি $\mathrm{x} \mid \mathrm{y}$ এবং $\mathrm{y} \neq 0$ তাহলে, $|x| \leq |y|$
4. যদি $x \mid y$ এবং $x \mid z$, তাহলে, যোকোন পূর্ণসংখ্যা α, β এর জন্য $x \mid \alpha y + \beta z$
5. যদি $\mathrm{x} \mid \mathrm{y}$ এবং $x \mid y \pm z$ তাহলে, $x \mid z$
6. যদি $\mathrm{x} \mid \mathrm{y}$ এবং $\mathrm{y} \mid \mathrm{x}$ তাহলে, $|x| = |y|$
7. যদি $\mathrm{x} \mid \mathrm{y}$ এবং $\mathrm{y} \neq 0$ তাহলে, $\frac{y}{x} \mid y$

(অর্থাৎ, উৎপাদকগুলো জোড়ায় জোড়ায় থাকে, অর্থাৎ, একটি উৎপাদক পেলে আরেকটি পাওয়া যাবে এবং পূর্ণবর্গ সংখ্যা বাদে অন্যান্য সংখ্যার ক্ষেত্রে জোড়ার সংখ্যাদুটি ভিন্ন হবে)

সমস্যা ১: n এর যেসব পূর্ণসংখ্যা মানের জন্য $\frac{n+22}{n}$ পূর্ণসংখ্যা তাদের সমষ্টি কত?

সমাধান: $\frac{n+22}{n} = 1 + \frac{22}{n}$ । এখন, সংখ্যাটিকে পূর্ণসংখ্যা হতে হলে, $n \mid 22$. ফলে, $n = 1,2,11,22$। $\therefore$ যোগফল $= 36$

সমস্যা ২: তিনটি ক্রমিক ধনাত্মক সংখ্যা নেওয়া হল। প্রথমটিকে ঠিক রেখে ২য়টির সাথে 10 ও ৩য়টির সাথে একটি মৌলিক সংখ্যা p যোগ করা হল। এতে সংখ্যা তিনটি একটি জ্যামিতিক ধারার পরপর তিনটি পদে পরিণত হল (অর্থাৎ, সংখ্যাগুলোকে a, ar, ar^2 হিসেবে প্রকাশ করা যায়)। $p =$?

সমাধান: ধরি, ক্রমিক সংখ্যা তিনটি $x-1, x, x+1$শর্তমতে,

$$\frac{x+10}{x-1} = \frac{x+p+1}{x+10} \Leftrightarrow x^2 + 20x + 100 = x^2 + xp - p - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{20(x-1)+121}{(x-1)} = p \Leftrightarrow 20 + \frac{121}{x-1} = p$$

সুতরাং, $(x-1) \mid 121$, ফলে, $x - 1 = 1,11,121$

মানগুলো পরীক্ষা করে দেখা যায় যে, $x = 12, p = 31$

জোড়-বিজোড় (Even-Odd):

যেসব সংখ্যাকে 2 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ 0 হয় তাদের জোড় এবং যেসব সংখ্যাকে 2 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ 1 হয় তাদের বিজোড় সংখ্যা বলে।

জোড়-বিজোড় সংখ্যার কিছু সাধারণ ধর্ম:

1. প্রত্যেক জোড় সংখ্যাকে $2m$ ও বিজোড় সংখ্যাকে $2k+1$ আকারে লেখা যায়। $(m, k \in \mathbb{Z})$
2. দুটি জোড় বা বিজোড় সংখ্যাকে যোগ করলে জোড় সংখ্যা পাওয়া যায়।
3. একটি জোড় ও একটি বিজোড় সংখ্যা যোগ করলে বিজোড় সংখ্যা পাওয়া যায়। (প্রকৃতপক্ষে,জোড় সংখ্যক জোড় বা বিজোড় সংখ্যার সমষ্টি জোড়)
4. যেকোন সংখ্যার সাথে জোড় সংখ্যা গুণ করলে জোড় সংখ্যা পাওয়া যায়।
5. কেবল বিজোড় সংখ্যা গুণ করলে বিজোড় সংখ্যা পাওয়া যায়।

সমস্যা ৩: 570 তম বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা থেকে 190 তম জোড় স্বাভাবিক সংখ্যার বিয়োগফল কত?

সমাধান: 570 তম বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা=$2 \cdot 570 - 1$ এবং 190 তম জোড় স্বাভাবিক সংখ্যা= $2 \cdot 190$

$\therefore$ বিয়োগফল $= 2 \cdot (570 - 190) - 1 = 2 \cdot 380 - 1$

মৌলিক সংখ্যা (Prime Number):

মৌলিক সংখ্যা অনেকটা শরীরের কোষের মত। কোষ যেমন শরীর গঠন করে, তেমনি অনেকগুলো মৌলিক সংখ্যার গুণফলের সমন্বয়ে একটা সংখ্যা তৈরি হয়।

1 থেকে বড় যে পূর্ণ সংখ্যার 1 এবং ঐ সংখ্যা ছাড়া আর কোন উৎপদক নেই তাকে মৌলিক সংখ্যা বলে। যেমন-2,3,5,7,11,13 ইত্যাদি। এক্ষেত্রে লক্ষ্যণীয় যে, 1 মৌলিক সংখ্যা নয়, 2 একমাত্র জোড় মৌলিক সংখ্যা। 2,3 একমাত্র পরপর মৌলিক সংখ্যা। 10 থেকে ছোট মৌলিক সংখ্যা 4 টি। 100 থেকে ছোট মৌলিক সংখ্যা 25 টি। মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা অসীম।

List of primes: 2,3,5,7,(4 primes) 11,13,17,19,23,29,31, 37,41,43,47,53, 59, 31,67,71,73,79,83,89,97 (25 primes) **More:** 101,103,107,109,113, 127, 131,137,139,149,151 157,163,167,173,179, 181,191,193,197, 199,211.

কোন একটি সংখ্যা n মৌলিক কিনা তা পরীক্ষা করার উপায় হল,1 থেকে $\sqrt{n}$ পর্যন্ত সকল মৌলিক সংখ্যা দিয়ে n কে ভাগ করে পরীক্ষা করে দেখা।

যেকোন সংখ্যাকে কেবল একটি অনন্য উপায়ে মৌলিক সংখ্যার গুণফল আকারে লেখা যায়। অর্থাৎ, $n \in \mathbb{Z}, n > 1$ হলে,

$$n = p_1^{e_1} \times p_2^{e_2} \times \cdots \times p_k^{e_k}$$

কোন সংখ্যার মোট উৎপাদকের সংখ্যা:

$$\tau(n) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_k + 1)$$

প্রমাণ: এর প্রমাণটি অনেকটা সেটের সাবসেটের সংখ্যা বের করার মত।

কোন উৎপাদকে আমরা একটি মৌলিক সংখ্যা p_i এর $(e_i + 1)$ টি উৎপাদক নিতে পারি। (অর্থাৎ, 0 থেকে e_i পর্যন্ত)

ফলে, মোট বিন্যাস, $\tau(n) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_k + 1)$

<u>সহমৌলিক(Co-prime/relatively prime):</u> দু'টি সংখ্যা (a, b) কে সহমৌলিক বলা হবে যদি এবং কেবল যদি $\gcd(a, b) = 1$ হয়।

গ.সা.গু.(G.C.D):

কোন দুটি সংখ্যার উৎপাদকগুলির মধ্যে যে সর্ববৃহৎ উৎপাদকটি উভয় সংখ্যার মধ্যেই আছে তাকে ঐ দুটি সংখ্যার গ.সা.গু(গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক) বা G.C.D (Greatest Common Divisor) বলে।

দুটি সংখ্যা a, b এর মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ,

$$a = p_1^{e_1} \times \cdots \times p_k^{e_k} \text{ এবং } b = p_1^{f_1} \times \cdots \times p_k^{f_k}$$

হলে, তাদের গ.সা.গু,

$$\gcd(a, b) = p_1^{\min(e_1, f_1)} \times \cdots \times p_k^{\min(e_k, f_k)}$$

যেমন: $12 = 2^2 \times 3^1, 27 = 2^0 \times 3^3$

$$\therefore \gcd(12,27) = 2^0 \times 3^1 = 3$$

সমস্যা ৪: একটি সংখ্যা এবং অপর একটি মৌলিক সংখ্যার গ.সা.গু. 2. মৌলিক সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

আমরা জানি, কোন দুটি সংখ্যার গ.সা.গু. 2 হলে,তাদের প্রতিটির উৎপাদকে বিশ্লেষণে একটি করে 2 আছে। একমাত্র জোড় মৌলিক সংখ্যা 2। ফলে, নির্ণেয় মৌলিক সংখ্যা 2.

ল.সা.গু(L.C.M):

দুটি সংখ্যার গুণিতকগুলোর মধ্যে যে সর্বনিম্ন সংখ্যা উভয় সংখ্যার গুণিতক তাকে ঐ দুটি সংখ্যার ল.সা.গু (লঘিষ্ট সাধারণ গুণিতক) বা L.C.M (Least Common Multiple) বলে।

দুটি সংখ্যা a, b এর মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ,

$$a = p_1^{e_1} \times \cdots \times p_k^{e_k} \text{ এবং } b = p_1^{f_1} \times \cdots \times p_k^{f_k}$$

হলে, তাদের ল.সা.গু,

$$\text{lcm}(a, b) = p_1^{\max(e_1, f_1)} \times \cdots \times p_k^{\max(e_k, f_k)}$$

যেমন: $12 = 2^2 \times 3^1, 27 = 2^0 \times 3^3$

$$\therefore \text{lcm}(12,27) = 2^2 \times 3^3 = 108$$

সমস্যা ৫: দুটি মৌলিক সংখ্যার লসাগু 27661 হলে তাদের গসাগু কত?

সমাধান: যেকোন দুটি ভিন্ন মৌলিক সংখ্যায় 1 ব্যতীত অন্য কোন উৎপাদক নেই। ফলে, তাদের গ.সা.গু 1.

দুইটি সংখ্যা, a, b হলে, $ab = gcd(a, b) \times lcm(a, b)$

একঘাত বিশিষ্ট ডায়োফেন্টাইনের সমীকরণ:

$$ax + by = c \ldots (১)$$

আকারের সমীকরণকে বলা হয় ডায়োফেন্টাইনের সমীকরণ। এখানে, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. এই সমীকরণের পূর্ণসংখ্যায় সমাধান থাকবে যদি এবং কেবল যদি $d \mid c$. যেখানে, $d = \gcd(a, b)$

এবং এক্ষেত্রে সকল সমাধানের সাধারণ রূপ হল:

$$x = x_0 + \frac{bn}{d}, y = y_0 - \frac{an}{d}$$

এবং, x_0, y_0 হল যেকোন দুটি সংখ্যা যারা (১) সমীকরণ সিদ্ধ করে। যেখানে, n যেকোন পূর্ণসংখ্যা।

সমস্যা ৬: পূর্ণসংখ্যায় সমাধান কর: $2x + 3y = 1$

এখানে, $d = 1$এবং $d \mid 1$; আমরা পাই যে, $(x_0, y_0) = (-1,1)$ এই সমীকরণকে সিদ্ধ করে। সুতরাং, সকল সমাধান হল,

$$x = -1 + \frac{3n}{1}, \qquad y = 1 - \frac{2n}{1}$$

একটি S সেট কে এমনভাবে সজ্জায়িত করা হয়েছে: (a, b) এ সেটের একটি উপাদান হবে যদি $a, b \in \mathbb{N}$ হয়; যেখানে, $b = \frac{2007-a}{5}$। S সেটের উপাদান সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান: লক্ষ্য করি, $a = 5k + 2$ হলে সংখ্যাটি পূর্ণসংখ্যা হয়। মান বসিয়ে পাই, $b = 401 - k$ ।ফলে, k এর 401 টি মানের জন্য $a, b \in \mathbb{N}$।

সমস্যা ৭: চার অংকের কয়টি সংখ্যা আছে যাদের অংকগুলোর গুণফল **343** ?

সমাধান: $343 = 7^3$, ফলে, নির্ণেয় সংখ্যার অঙ্কগুলো হল $\{1,7,7,7\}$। এখানে থেকে কেবল *4* টি সংখ্যা বানানো সম্ভব। উত্তর: *4.*

সমস্যা ৮: `kwgK c×wZ‡Z $6^4 = 1296$| 6-wfwËi msL¨v wnmv‡e 1295-‡K cKvk Ki|
সমাধান: 5555

সমস্যা ৯: তিনটি ধনাত্মক সংখ্যার গুণফল সংখ্যাগুলোর যোগফলের 6 গুণ এবং একটি সংখ্যা অপর দুইটি সংখ্যার যোগফলের সমান। সংখ্যাগুলোর সম্ভাব্য সকল মান বের কর।

সমাধান: মনে করি, সংখ্যাগুলো হল $a, b, c(= a + b)$।

শর্তমতে, $ab(a + b) = 12(a + b) \Rightarrow ab = 12$

ফলে, $\{a, b\} = \{1, 12\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}$।

এবং, $\{a, b, c\} = \{1,12,13\}, \{2, 6,8\}, \{3, 4,7\}$।

কনগ্রুয়েন্স এবং মডুলার এরিথমেটিক :

যদি a, b, m $(m \neq 0)$ এমন সব পূর্ণসংখ্যা হয় যাতে করে, m দ্বারা $a - b$ বিভাজ্য হয় তবে আমরা এটাকে লিখি, $a \equiv b \pmod{m}$

এবং একে পড়া হয়, a *is congruent to* b *modulo (mod)* m.

$\equiv$ দ্বারা চিহ্নিত এই সম্পর্ককে "কনগ্রুয়েন্স রিলেশন" বলা হয়। এবং সংখ্যাতত্ত্বের যে শাখা এই সম্পর্ক নিয়ে আলোচনা করে তাকে *Modular Arithmetic* বলা হয়।

আমরা এখন কনগ্রুয়েন্সের কয়েকটি সাধারণ বৈশিষ্ট্য লক্ষ্য করি:

1. $a \equiv a \pmod{m}$
2. $a \equiv b \pmod{m}$ এবং $b \equiv c \pmod{m}$ হলে, $a \equiv c \pmod{m}$
3. $a \equiv b \pmod{m}$ হলে $b \equiv a \pmod{m}$ হবে।
4. $a \equiv b \pmod{m}$ এবং $c \equiv d \pmod{m}$ হলে,

$a + c \equiv b + d \pmod{m}$ এবং $a - c \equiv b - d\ (mod\ m)$

5. $a \equiv b \pmod{m}$ হলে যেকোন $k \in \mathbb{Z}$ এর জন্য $ka \equiv kb\ (mod\ m)$
6. যদি $a \equiv b\ (mod\ m)$ এবং $c \equiv d\ (mod\ m)$ হয় তবে,
$$ac \equiv bd\ (mod\ m)$$

সাধারণভাবে আমরা লিখতে পারি $a_i \equiv b_i\ (mod\ m)$ হলে,
(যেখানে $i = 1,2,\cdots,k$)
$a_1a_2\cdots a_k \equiv b_1b_2\cdots b_k\ (mod\ m)$
অর্থাৎ, যেকোন $k \in \mathbb{N}$ এর জন্য $a^k \equiv b^k\ (mod\ m)$

আমরা এখন কনগ্রুয়েন্সের কিছু সাধারণ ব্যবহার দেখব।

আমরা জানি, কোন সংখ্যার অঙ্কগুলোর যোগফল 9 দিয়ে বিভাজ্য হলে তা 9 দ্বারা বিভাজ্য।

প্রমাণ: কোন একটি সংখ্যা x কে আমরা লিখতে পারি,

$$x = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$$

$$10 \equiv 1\ (mod\ 9) \Longrightarrow 10^i \equiv 1^i = 1\ (mod\ 9)$$

$$\Longrightarrow a_i 10^i \equiv a_i\ (mod\ 9)\ [\text{এখানে}, i = 0,1,\ldots,n]$$

ফলে, $x \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0\ (mod\ 9)$

সুতরাং, x , 9 দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এবং কেবল যদি x এর অঙ্কগুলোর যোগফল দ্বারা বিভাজ্য হয়।

একইভাবে অন্যান্য সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্যতার সূত্রগুলোও প্রমাণ করা যায়।

সমস্যা ১০: পাঁচ অংকের একটি সংখ্যা **2785X**, **11** দ্বারা বিভাজ্য হলে **X** এর মান কত?
সমাধান: **11** দ্বারা বিভাজ্যতার সূত্রানুসারে,
$7 + 5 - (2 + 8 + x) = 2 - x \equiv 0\ (mod\ 11)$
ফলে, $2 \equiv x\ (mod\ 11)$। যেহেতু x একটি অঙ্ক; সুতরাং, $x = 2$

সমস্যা ১১: 7^{2008} সংখ্যাটির শেষ অঙ্কটি কত?

সমাধান: প্রকৃতপক্ষে শেষ অঙ্ক বের করার অর্থ হচ্ছে সংখ্যাটিকে *10* দ্বারা ভাগ করে প্রাপ্ত ভাগশেষ বের করা। এখন, $7 \equiv -3\ (mod\ 10)$

$$\Longrightarrow 7^4 \equiv (-3)^4 \equiv 81 \equiv 1\ (mod\ 10)$$

$$\Longrightarrow (7^4)^{502} \equiv 1\ (mod\ 10)$$

ফলে, শেষ অঙ্ক 1.

সমস্যা ১২: 17^{2009} এর শেষ অঙ্কটি কত?

সমাধান: $\quad 17 \equiv 7 \implies 17^{2009} \equiv 7^{2009}$

(সুতরাং, 7^{2009} এর শেষ অঙ্ক বের করাই যথেষ্ট)

$$7^4 \equiv 1 \Longrightarrow (7^4)^{502} \equiv 1 \Longrightarrow 7^{2008} \cdot 7 \equiv 7$$

*এখানে সব হিসাব mod 10 এ করা হয়েছে। কোন সমস্যা সমাধানে একই mod এ হিসেব করা হলে তা একবার উল্লেখ করাই যথেষ্ট।

সমস্যা ১২: $y = 4x^2 + 12x + 3$ কি কখনো পূর্ণবর্গ সংখ্যা হতে পারে?

সমাধান: না হতে পারেনা। কারণ, সংখ্যাটি একটি বিজোড় সংখ্যা।

ফলে, $y \equiv 1\ (mod\ 8)$ হতে হবে। কিন্তু,

$$y = 4x^2 + 4x + 8x + 3 \equiv 4x(x+1) + 3 \equiv 3 \not\equiv 1$$

কারণ, x ও $(x-1)$ এর একটি জোড়। ফলে, $4x(x+1) \equiv 0$

*কোন সমস্যায় কোন mod বিবেচনা করতে হবে এটার কোন ধরাবাঁধা নিয়ম নেই। এই দক্ষতা সমস্যা সমাধান করতে করতে অর্জন করতে হবে।

<u>নিজে কর:</u>

1. পূর্ণসংখ্যায় সমাধান কর: $10x + 7y = 17$
2. 2^{1000} কে 17 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?
3. 11 দিয়ে বিভাজ্যতার নিয়মটি প্রমাণ কর।
4. 3^{2009} এর শেষ দুটি অঙ্ক বের কর।
5. মুন ও তানভীরের কাছে কিছু পরিমান টাকা আছে। মুন তানভীরকে বলল যদি তুমি আমাকে তিন টাকা দাও তাহলে আমার টাকার পরিমান তোমার n গুণ হবে। তানভীর মুনকে বলল যদি তুমি আমাকে n টাকা দাও তাহলে আমার টাকার পরিমান তোমার তিনগুণ হবে। যদি n পূর্ণসংখ্যা হয় তাহলে n এর সম্ভাব্য মান গুলো নির্ণয় কর।
6. 19 থেকে 92 এর মধ্যকার সবকয়টি পূর্ণসংখ্যা পরপর লিখে আরেকটি বড় পূর্ণসংখ্যা N=192021...909192 গঠন করা হল। N যদি 3^k দ্বারা বিভাজ্য হয়, তবে k এর সর্বোচ্চ মান কত?

Kushtia Math Circle
KMC
We love Mathematics

Note for Bangladesh Math Olympiad 2009:
By: ***Tarik Adnan Moon,*** *Class 11,*
Member, Bangladesh National Math Team,
International Mathematical Olympiad (IMO) 2007, 2008

If you find any error or have any question,
Contact: moon.math@matholympiad.org.bd