বিভাজ্যতা (Divisibility)

মুতাসিম মিম

আগস্ট ২০১৬

বিভাজ্যতা নিয়ে আমরা সবসময়ই জেনে বা না জেনে ভেবেছি। যেমন আমার 10 টা চকলেট থাকলে সেগুলো 5 জন বন্ধুকে সমানভাবে ভাগ করে দেওয়া যাবে, কিন্তু চারজনকে সমান ভাগ করে দেওয়া যাবে না। অথবা স্কুলের ক্লাসে 45 জন ছাত্র থাকলে তারা 5 বা 9 টা লাইনে সমানভাবে দাঁড়াতে পারে, কিন্তু 4,6 বা 10 টা লাইনে দাঁড়ালে সব লাইনে সমান সংখ্যক ছাত্র থাকবে পারে না। এই সাধারণ ধারণাগুলোই সংখ্যাতত্ত্বের ভিত্তি। কিন্তু সাধারণ এই ধারনাগুলোই জন্ম দিয়েছে অসংখ্য অসাধারণ সমস্যার। মানুষ তার কতগুলোর সমাধান করতে পেরেছে। আবার কতগুলোর কোন কুল-কিনারা করা যায়নি। যেমন বলা যায় ফার্মার শেষ উপপাদ্যের কথা। এই উপপাদ্য বলে, $n > 2$ একটা পূর্ণসংখ্যা হলে এমন তিনটি স্বাভাবিক সংখ্যা a, b, c পাওয়া যাবে না যেন $a^n + b^n = c^n$ হয়। আপাত দৃষ্টিতে সরল দর্শন এই সমস্যার সমাধান করতে মানুষের লেগেছে প্রায় চারশ বছর! যদিও ফার্মা নিজেই চমৎকার একটি প্রমাণ আবিষ্কার করার দাবি করেছিলেন, তবুও তার সত্যতা যাচাই করা যায়নি।

আবার বলা যায় টুইন প্রাইম কনজেকচারের(Twin Prime Conjecture) কথা। 1 থেকে বড় যেসব সংখ্যার মাত্র দুইটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার উৎপাদক আছে তাদের মৌলিক সংখ্যা বলে। আর দুইটি মৌলিক সংখ্যার পার্থক্য 2 হলে তাদের টুইন প্রাইম বলে। যেমন (3,5) আর (41,43) দুই জোড়া টুইন প্রাইম। এখন টুইন প্রাইম কনজেকচার বলে যে এরকম টুইন প্রাইমের জোড়া অসীম সংখ্যক। এই সমস্যার সমাধান এখনও হয়নি।

এরকম আরও অনেক চমকপ্রদ সমস্যায় তৈরি এলিমেন্টারি নাম্বার থিওরির জগৎ। একেবারে গোড়ার একটা সংজ্ঞা দিয়ে শুরু করা যাক।

সংজ্ঞা ১ (বিভাজ্যতা(divisibility))**:** a ও b দুটি পূর্ণসংখ্যা হলে a দ্বারা b বিভাজ্য বলতে বোঝায় যে এমন একটি পূর্ণ সংখ্যা c আছে যেন $ac = b$ হয়। a দ্বারা b বিভাজ্য কে $a|b$ লেখা হয়। যেমনঃ 3 দ্বারা 42 সংখ্যাটি বিভাজ্য, কারণ এমন একটি সংখ্যা 14 আছে যেন $3 \times 14 = 42$. আবার যেকোন পূর্ণসংখ্যা n হলে, $n|0$ এবং $n|n$.

সংজ্ঞা ২ (উৎপাদক এবং গুণিতক)**:** a দ্বারা b বিভাজ্য হলে a কে b এর একটি উৎপাদক বলে। আর b কে a এর গুণিতক বলা হয়। উপরের উদাহরণে 3 ও 14 উভয়েই 42 এর উৎপাদক এবং 42 হল 3 ও 14 এর গুণিতক।

এখন বিভাজ্যতা সম্পর্কিত কয়েকটি সরল কিন্তু গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য দেখা যাক।

উপপাদ্য ১.১: a এবং b পূর্ণসংখ্যা হলে,

i) a দ্বারা b বিভাজ্য হলে যেকোনো পূর্ণসংখ্যা c এর জন্য $a|bc$ হবে।

ii) a দ্বারা b ও c উভয়েই বিভাজ্য হলে a দ্বারা $b + c$ ও $b - c$ উভয়েই বিভাজ্য হবে।

প্রমাণ:

i) যেহেতু, $a|b$ ফলে এমন পূর্ণসংখ্যা k আছে যেন $b = ak$ হয়। তাহলে, $bc = akc = a(kc)$. অর্থাৎ $a|bc$.

ii) যেহেতু, $a|b$ এবং $a|c$, ফলে এমন পূর্ণসংখ্যা u, v আছে যেন $b = au,\ c = av$ হয়। তাহলে, $b \pm c = a(u \pm v)$, যেটি অবশ্যই a দ্বারা বিভাজ্য।

□

সমস্যা ১: একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা দ্বারা 678 ও 680 উভয়কেই ভাগ করা যায়। সংখ্যাটি কত?

সমাধান: সংখ্যাটি n হলে, $n|678$ এবং $n|680$. অতএব $n|680 - 678 = 2$.কিন্তু 1 কে ভাগ করে এমন ধনাত্মক সংখ্যা হল শুধু 1ও 2. অর্থাৎ সংখ্যাটি 1 অথবা 2. □

সংজ্ঞা ৩ (মৌলিক ও যৌগিক সংখ্যা (prime and composite numbers))**:** 1 হতে বড় কোন স্বাভাবিক সংখ্যাকে 1 ও সেই সংখ্যা ছাড়া অন্য কোন সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা না গেলে সেই সংখ্যাকে *মৌলিক সংখ্যা* বলে। যেমন, 2,3,997 সংখ্যাকে 1 এবং এই সংখ্যাগুলো ছাড়া অন্য কোন সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা যায় না। তাই এরা প্রত্যেকেই মৌলিক সংখ্যা। 1 হতে বড় সংখ্যাগুলোর মধ্যে মৌলিক সংখ্যা ছাড়া আর সব সংখ্যা *যৌগিক সংখ্যা*।

লক্ষ্য কর, 1 সংখ্যাটি মৌলিকও নয়, যৌগিকও নয়। 1 কে ইউনিট নাম্বার বলা হয়।

সংজ্ঞা ৪ (জোড় ও বিজোড় সংখ্যা)**:** 2 দ্বারা বিভাজ্য পূর্ণসংখ্যাকে জোড় সংখ্যা বলে। কোন পূর্ণসংখ্যা জোড় না হলে তাকে বিজোড় সংখ্যা বলে। যেমন, 0,2,-4,66 হল জোড় সংখ্যা আর -21,1,3,77 হল বিজোড় সংখ্যা।

সমস্যা ২:

১. 2 একটি মৌলিক সংখ্যা। এটি ছাড়া আর কোন জোড় সংখ্যা কি মৌলিক সংখ্যা হতে পারে?

২. দুটি ক্রমিক সংখ্যার প্রত্যেকেই কি মৌলিক হতে পারে?হলে এরকম কত জোড়া সংখ্যা আছে?

৩. দুটি মৌলিক সংখ্যার যোগফল 999. সংখ্যা দুটি কত কত?

৪. $p^2 + p$ সংখ্যাটির দুটি মৌলিক উৎপাদক আছে। p এর মান কি কি হতে পারে?

উপপাদ্য ১.২: যেকোনো পূর্ণসংখ্যাকেই এক বা একাধিক মৌলিক সংখ্যার গুণফল হিসাবে লেখা যায়।

প্রমাণ: নিজে কর। □

সংজ্ঞা ৫ (ডিভিশন এলগরিদম)**:** a ও b যেকোনো দুটি পূর্ণসংখ্যা হলে, যেখানে $b \neq 0$, এমন দুটি অনন্য পূর্ণসংখ্যা c, d পাওয়া যাবে যেখানে $a = bc + d$ এবং $0 \leq d < a$ হবে।

প্রমাণ: এই সেটটি দেখঃ $S = \{\ldots, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, \ldots, kb, \ldots\}$। যদি a সংখ্যাটি এই সেটের কোন সংখ্যার সমান হয় তাহলে আমরা পাবো sb=a বা, 0+sb=a. আর যদি a সংখ্যাটি এই সেট এর কোন সংখ্যার সমান না হয়, তাহলে a নিশ্চয় এই সেট এর দুটি সংখ্যার মাঝে থাকবে। ধরা যাক, sb আর (s+1)b এর মাঝে b আছে। তাহলে ধরি a-sb=d , যেখানে 0¡d . আবার, যদি $d \geq b$ হয়, $a = d + sb \geq b + sb = b(s+1)$ যা ,$sb < a < b(s+1)$ শর্ত কে লজ্ঘন করে। সুতরাং বলা যায় $b > d$.

c, d যে অনন্য হবে তা নিজে প্রমাণ কর। □

উপপাদ্য ১.৩: মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা অসীম।

প্রমাণ: ধরা যাক, কেবলমাত্র k সংখ্যক মৌলিক সংখ্যা আছে, যাদের $p_1, p_2, \ldots, p_k$ দ্বারা নির্দেশ করা হল। $n = p_1 p_2 ......p_k + 1$ সংখ্যাটি দেখ। এই সংখ্যাটি যদি যৌগিক সংখ্যা হয় তাহলে এর অবশ্যই কোন মৌলিক উৎপাদক থাকবে, যেটি হবে আমাদের জানা k টি মৌলিক সংখ্যার মধ্যে কোন একটি। কিন্তু এই মৌলিক সংখ্যার যেকোনোটি দ্বারা n কে ভাগ করলে ভাগশেষ হবে 1, অর্থাৎ n নিজেই একটি মৌলিক সংখ্যা। তাহলে আমরা আরেকটি নতুন মৌলিক সংখ্যা পেয়ে গেলাম।

□

মন্তব্য: লক্ষ্য কর, এখান থেকে বলা যায়, যদি p_kদ্বারা k তম মৌলিক সংখ্যা বোঝানো হয়, তবে

$$p_k \leq p_1 p_2 \ldots p_{k-1} + 1$$