Chapter 1

Number Theory Functions

এখানে প্রধানত একটি সংখ্যার উৎপাদকের সংখ্যা, উৎপাদকসমূহের যোগফল এবং অয়লার ফাংশন নিয়ে আলোচনা করা হবে।

1.1 Number Of Divisors(ভাজক সংখ্যা)

আমরা আগে হাতে কয়েকটি সংখ্যার ভাজকের সংখ্যা বের করি। ধর ১২ এর কথা। ১২ এর ভাজকগুলো হচ্ছে ১,২,৩,৪,৬,১২। তার মানে ১২ এর ভাজক সংখ্যা হচ্ছে ৬। আমরা n এর ভাজকের সংখ্যাকে $\tau(n)$ দিয়ে প্রকাশ করি। তার মানে, $\tau(12) = 6$. একইভাবে, $\tau(100) = 9$. এখন যে কোন সংখ্যার ভাজকের সংখ্যা বের করতে গেলে কি করা যায়? সংখ্যাটি যদি বেশ বড় হয় তাহলে তো হাতে বের করাটা বেশ সমস্যা। এখানে আমরা দেখি যে কোন সংখ্যার মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ জানা থাকলে কিভাবে এর ভাজকের সংখ্যা বের করা যায়। আগে এটা চিন্তা কর যে, ভাজকের সংখ্যা বের করার জন্য কোন সংখ্যার মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ কেন দরকার? এটার কারণ হচ্ছে যে সংখ্যার ভাজক আমরা বের করতে চাই, তার মধ্যে যে মৌলিক উৎপাদক থাকবে, এর ভাজকগুলোতেও একই মৌলিক উৎপাদক থাকতে হবে।

এজন্য আমরা দেখি যে ১২ এর উৎপাদক সংখ্যা যে ৬ এটা কিভাবে মৌলিক উৎপাদক থেকে বের করা যায়।

$$12 = 2^2 \times 3$$

$2^0 \times 3^0 \to 1$
$2^0 \times 3^1 \to 3$
$2^1 \times 3^0 \to 2$
$2^1 \times 3^1 \to 6$
$2^2 \times 3^0 \to 4$
$2^2 \times 3^1 \to 12$

এটা পরিষ্কার যে ১২ এর যে কোন ভাজকে ২ আর ৩ ছাড়া আর কোন মৌলিক উৎপাদক থাকবে না। তার মানে যে কোন ভাজককে 2^a3^b হিসেবে লেখা যায়। এখানে অবশ্যই $0 \leq a \leq 2, 0 \leq b \leq 1$ হতে হবে। এবার দেখো কিভাবে উৎপাদকগুলো আসে। $2^0, 2^1, 2^2$ আর $3^0, 3^1$ ছাড়া আর কিছু ভাজকে আসতে পারবে না। 2^0 এর সাথে $3^0, 3^1$ এর যে কোনটি হতে পারে, যা থেকে আমরা ২টা ভাজক পাবো। একইভাবে $2^1, 2^2$ এর ক্ষেত্রে ও পাওয়া যাবে। তার মানে মোট ভাজক সংখ্যা $2 \times 3 = 6.$ এখানে ২ আর ৩ আসলো কোথা থেকে? ২ এর পাওয়ার ছিল ২ আর ৩ এর পাওয়ার ছিল ১। যেহেতু ভাজকে পাওয়ার ০ থেকে ২ পর্যন্ত যে কোনটি হতে পারে, তাই আমাদের হাতে চয়েস ৩টা। একইভাবে ৩ এর ক্ষেত্রে ২টা। তাই মোট উপায় যেহেতু (২+১)*(১+১)=৬, মোট ভাজক সংখ্যা ও ৬। একইভাবে, যেহেতু $100 = 2^2 \times 5^2$, ১০০ এর ভাজক সংখ্যা (২+১)*(২+১)=৯ টা। তাহলে যে কোন n এর ক্ষেত্রে কি হবে? আমরা ধরে নেই

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

এখানে $p_1, p_2, ..., p_k$ হচ্ছে n এর মৌলিক উৎপাদকসমূহ আর $e_1, e_2, ..., e_k$ হচ্ছে n এ এদের পাওয়ার। তাহলে, n এর ভাজক সংখ্যা $\tau(n)$ হবে,

$$\tau(n) = (e_1 + 1) \cdot (e_2 + 1) \cdots (e_k + 1)$$

এখানে খেয়াল করে দেখো যে, n এর মৌলিক উৎপাদকগুলি কি তার উপরে ভাজক সংখ্যা নির্ভর করে না, শুধু তাদের পাওয়ারের উপরে নির্ভর করে।

1.2 Sum Of Divisors(ভাজকসমূহের যোগফল)

এবার ও হাতে কয়েকটা সংখ্যার ক্ষেত্রে তার ভাজকগুলোর যোগফল বের কর। ১২ এর ক্ষেত্রে পাওয়া যাবে ২৮। আমরা n এর ভাজকগুলোর যোগফলকে $\sigma(n)$ দিয়ে প্রকাশ করি। তার মানে $\sigma(12) = 28, \sigma(6) = 12.$

$$\begin{aligned}
\sigma(2^2) &= 2^0 + 2^1 + 2^2 \\
\sigma(3^1) &= 3^0 + 3^1
\end{aligned}$$

আবার আমরা আগের উদাহরণ দিয়েই কাজ করি।

$$\begin{aligned}
\sigma(12) &= \sigma(2^2 3^1) \\
&= 2^0 3^0 + 2^0 3^1 + 2^1 3^0 + 2^1 3^1 + 2^2 3^0 + 2^2 3^1 \\
&= 2^0(3^0 + 3^1) + 2^1(3^0 + 3^1) + 2^2(3^0 + 3^1) \\
&= (2^0 + 2^1 + 2^2)(3^0 + 3^1) \\
&= \sigma(2^2)\sigma(3^1) \\
&= 7 \times 4 \\
&= 28
\end{aligned}$$

একইভাবে, আমরা যদি $\sigma(100)$ বের করতে চাই, তাহলে

$$\begin{aligned}
\sigma(300) &= \sigma(2^2 3^1 5^2) \\
&= \sigma(2^2)\sigma(3^1)\sigma(5^2) \\
&= (2^0+2^1+2^2)(3^0+3^1)+(5^0+5^1+5^2) \\
&= 7\times 4\times 31 \\
&= 868
\end{aligned}$$

তার মানে যদি n এর মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ হয়

$$n = p_1^{e_1}\times p_2^{e_1}\cdots p_k^{e_k}$$

তাহলে,

$$\begin{aligned}
\sigma(n) &= \sigma\left(p_1^{e_1}\times p_2^{e_1}\cdots p_k^{e_k}\right) \\
&= \sigma(p_1^{e_1})\times\sigma(p_2^{e_2})\cdots\sigma(p_k^{e_k}) \\
&= \left(p_1^0+p_1^1+\ldots+p_1^{e_1}\right)\cdots\left(p_k^0+p_k^1+\ldots+p_k^{e_k}\right) \\
&= \left(\frac{p_1^{e_1+1}-1}{p_1-1}\right)\cdots\left(\frac{p_k^{e_k+1}-1}{p_k-1}\right)
\end{aligned}$$

শেষ লাইনে আমরা গুণোত্তর ধারার সমষ্টি ব্যবহার করেছিঃ[1]

$$1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}=\frac{a^n-1}{a-1}$$

একটা প্রশ্ন মাথায় আসার কথা। আমরা

$$\sigma(12)=\sigma(4)\times\sigma(3)$$

অথবা

$$\sigma(12)=\sigma(1)\times\sigma(12)$$

লিখতে পারি। কিন্তু একে কি

$$\sigma(12)=\sigma(2)\times\sigma(6)$$

লিখতে পারি? হাতে বের কর। দেখো উত্তর না। এবার দেখো

$$\sigma(100)=\sigma(4)\times\sigma(25)$$

[1]এর প্রমাণ না জানা থাকলে করে ফেল। ধরে নেও সমষ্টি হল S। তাহলে একে a দিয়ে গুন করে তা থেকে S কে বিয়োগ করে দেখো কি হয়।

লেখা যায় কিন্তু

$$\sigma(100) = \sigma(2)\sigma(50)$$

লেখা যায় না। $\sigma(25), \sigma(300)$ এদের ক্ষেত্রে কি হয় দেখো। এর পরে নিচের প্রশ্নের উত্তর দিতে চেষ্টা করঃ[2]

$$\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$$

কখন সত্যি হবে? উপরের উদাহরণগুলো হাতে করে থাকলে এটা বুঝার কথা যে যদি m আর n সহমৌলিক হয় তাহলে $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ হয়। এ ধরনের একটি ফাংশনকে বলে $Multiplicative\ Function.$ উপরে τ ফাংশনের ক্ষেত্রে ও কিন্তু এ কথা সত্যি, অর্থাৎ τ একটি $Multiplicative\ Function.$ অর্থাৎ m আর n সহমৌলিক হলে,

$$\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$$

একটা ফাংশন মাল্টিপ্লিকেটিভ হওয়ার সুবিধা কি সেটা এতক্ষণে আন্দাজ করতে পারার কথা। আমাদের কাজ অনেকখানিই কমে যায়। শুধু মৌলিক সংখ্যাগুলোর জন্য তাদের মান বের করলেই যে কোন সংখ্যার জন্য ওই ফাংশনের মান বের করে ফেলা যায়। যেমন, আমরা এখন τ মাল্টিপ্লিকেটিভ এটা ব্যবহার করে যে কোন n এর জন্য এর মান বের করতে পারি, যেমনটা σ এর ক্ষেত্রে করেছিলাম। আমরা ধরে নেই

$$n = p_1^{e_1} \times p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

এখানে যেহেতু $p_1, p_2, \ldots, p_k$ যেহেতু ভিন্ন প্রাইম, তাই তারা পরস্পর সহমৌলিক। $\tau(p^a)$ এর মান আমরা এমনিতেই বের করে ফেলতে পারি। এর ভাজকগুলো হবে $p^0, p^1, ..., p^a$, তাই এর ভাজক সংখ্যা $a+1$ টা। অর্থাৎ,

$$\tau(p^a) = a + 1$$

তাহলে,

$$\begin{aligned}
\tau(n) &= \tau(p_1^{e_1}) \cdots p_k^{e_k}) \\
&= \tau(p_1^{e_1}) \cdots \tau(p_k^{e_k}) \\
&= (e_1 + 1) \cdots (e_k + 1)
\end{aligned}$$

এ কাজটা নিশ্চয়ই যে কোন মাল্টিপ্লিকেটিভ ফাংশনের ক্ষেত্রে করা যায়। যে কোন একটা মাল্টিপ্লিকেটিভ ফাংশন f এর জন্য

$$f(p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}) = f(p_1^{e_1}) \cdots f(p_k^{e_k})$$

এবং এর মান বের করার জন্যে যে কোন মৌলিক সংখ্যা p এর জন্য $f(p^a)$ এর মান বের করতে পারলেই হয়। এখন আমরা আরেকটা মাল্টিপ্লিকেটিভ ফাংশন আলোচনা করি।

2

1.3 Euler's Phi Function

অয়লারের ফাই ফাংশন $\varphi(n)$ হচ্ছে n এ সমান বা ছোট যতগুলো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর সাথে সহমৌলিক সে সংখ্যাটা। যেমন $\varphi(6) = 2$ কারণ ৬ এর ছোট ১ আর ৫ শুধু ৬ এর সাথে সহমৌলিক। একইভাবে $\varphi(10) = 4$ কারণ ১০ এর সাথে সহমৌলিক হবে চারটা সংখ্যা-১,৩,৭,৯। $\varphi(1)$ এর মান কিন্তু $1, 0$ না।[3] যেহেতু বলেই দেওয়া হয়েছে যে φ মাল্টিপ্লিকেটিভ, এখন আমরা শুধু $\varphi(p^a)$ এর মান বের করি। আমাদের বের করা লাগবে p^a এর ছোট বা সমান কয়টা সংখ্যা এর সাথে সহমৌলিক। p^a এর সাথে কোন সংখ্যার সাথে একটা সংখ্যাই কমন থাকতে পারে সেটা হচ্ছে p নিজে, তার মানে যতগুলি সংখ্যা p দিয়ে ভাগ যাবে তাদের কেউ এর সাথে সহমৌলিক না। অন্যরা এর সাথে সহমৌলিক। আমাদের তাহলে বের করা লাগবে যে p^a এর ছোট কয়টা সংখ্যা p দিয়ে ভাগ যায়।

[3]কেন? আমরা কিন্তু বলেছিলাম n এর ছোট বা সমান যতগুলো সংখ্যা n এর সাথে সহমৌলিক, শুধু ছোট না। কিন্তু ১ এর সাথে ১ নিজেই সহমৌলিক, তাই এর মান ০ না।