পিজিওনহোল প্রিন্সিপাল

তাহ্‌নিক নুর সামীন

১২ সেপ্টেম্বর ২০১৬

তোমরা যারা একটু আধটু প্রবলেম সলভিং শুরু করেছ তাদের অনেকেই পিজিওনহোল প্রিন্সিপালের নাম শুনে থাকবে। এখন এটি কি? এটা কি খায় না মাথায় দেয়? এসব প্রশ্নের উত্তর দেবার জন্যেই এই নোটটি লেখা।
পিজিওনহোল প্রিন্সিপাল, সবচেয়ে সহজ ভাষায়, হচ্ছে :

যদি তোমার কাছে অনেকগুলো কবুতর এবং কবুতরের খোপ থাকে, আর কবুতরের সংখ্যা যদি খোপের চেয়ে বেশি হয়, আর তুমি যদি কবুতরগুলোকে খোপের মধ্যে ঢুকাতে চাও, তাহলে কোন না কোন খোপে কমপক্ষে দুইটি কবুতর থাকবে।

তোমার মনে হতে পারে, "এ আর এমন কি? এটা তো বুঝাই যায়।" কিন্তু প্রবলেম সল্ভিংয়ে এই টেকনিকটির গুরুত্ব অনেক। এমনকি অনেক আইএমও প্রবলেমও এটি দিয়ে সল্ভ করতে হয়। এখন আমরা এটির কয়েকটি ছোটখাটো প্রয়োগ দেখব। তবে এই অত্যন্ত সহজ কম্বিনেটরিয়াল যুক্তিটিকে প্রথম জনপ্রিয়ভাবে ব্যবহার করেছিলেন জার্মান গণিতবিদ দিরিশ্লে (১৮০৪-৫৯) তার নাম্বার থিউরীর কাজগুলোতে। অত্যন্ত সহজ হওয়া সত্ত্বেও এর প্রয়োগ দেখা যায় বিভিন্ন জটিল থিউরেমের প্রমাণে।

উদাহরণ ১: যেকোন 3 টি সংখ্যা পূর্ণসংখ্যা নিলে, তাদের মধ্যে দুইটির পেয়ারিটি একই।

সমাধান: যারা যারা জানো না পেয়ারিটি মানে কি, এটি হল কোন সংখ্যার জোড় বা বিজোড় হবার বৈশিষ্ট্য। কোন সংখ্যা জোড় হলে আমরা বলি তার পেয়ারিটি জোড়। আর কোন সংখ্যা বিজোড় হলে আমরা বলি তার পেয়ারিটি বিজোড়।

এখন, এখানে কবুতরের খোপ হিসেবে নিলাম পেয়ারিটি, যার সংখ্যা 2। তারপর কবুতর হিসেবে নিলাম সংখ্যাগুলোকে, যাদের সংখ্যা 3। পিজিওনহোল প্রিন্সিপাল অনুসারে, কমপক্ষে দুইটি সংখ্যার পেয়ারিটি একই। □

উদাহরণ ২: প্রমাণ কর, যদি তোমার কাছে $n+1$ টি পূর্ণসংখ্যা থাকে, তাহলে n দ্বারা ভাগের ফলে সর্বনিম্ন দুইটি সংখ্যার ভাগশেষ একই হবে।

সমাধান: আমরা জানি, কোন সংখাকে n দ্বারা ভাগ করলে n টি সংখ্যা $0, 1, 2, \ldots, n-1$ এর মধ্যে যেকোন একটি ভাগশেষ হবে। এখন সম্ভাব্য ভাগশেষগুলোকে কবুতরের খোপ আর সংখাগুলোকে কবুতর ধরে নিলেই আমাদের প্রমাণ শেষ। □

এই সবগুলো প্রমাণে কোন মিল খুঁজে পাচ্ছ কি? প্রথম সমস্যাটিতে দেখ, আমরা যদি 3 টি সংখ্যা নিতে চাই, সবগুলোই আলাদা পেয়ারিটির, তাহলে আমরা 2 টি সংখ্যার পর আটকে যাচ্ছি। পরের প্রবলেমেও একই কাজ করতে গেলে দেখবে, কোন এক অদৃশ্য শক্তির বলে n টি সংখ্যা নেবার পর আর কোন সংখ্যা নিতে পারছ না, যা প্রশ্নের শর্ত মানে না। অর্থাৎ যতই বলো,

"ভূলোক দ্যুলোক গোলক ভেদিয়া
খোদার আসন আরশ ছেদিয়া
উঠিয়াছি চির বিস্ময় আমি বিশ্ববিধাত্রির!"

আমরা প্রশ্নের বিরুদ্ধে যেতে পারছি না!!! এই অদৃশ্য শক্তির সম্মুখীন হলেই আমরা পিজিওনহোল প্রিন্সিপালের দারস্থ হই। তবে সাধারণত কোন সসীম সেটে কোন বৈশিষ্ট্য বা সংখ্যার অস্তিত্ব প্রমাণের জন্য আর কখনো কখনো অসীম সেটেও পিজিওনহোল প্রিন্সিপাল ব্যবহৃত হয়। এখন কয়েকটি সমস্যা তোমরা নিজেরা সমাধান করো তো!

১. প্রমাণ কর, কোন 13 জন লোকের মধ্যে, দুইজনের জন্মমাস একই।

২. কোন মানুষের মাথায় $300,000$ এর বেশি চুল নেই। ধর, কোন শহরে $300,001$ জন বা তার বেশি সংখ্যক মানুষ বসবাস করে। প্রমাণ কর, দুইজন মানুষের মাথায় সমানসংখ্যক চুল আছে।

৩. কমপক্ষে কতজন লোক থাকলে এটা নিশ্চিত হবে যে তাদের মধ্যে দুইজনের জন্মদিন একই?

এবার তোমাদের যেটি দেখাব, সেটি হল একটি আইএমও প্রবলেম।

উদাহরণ ৩: (আইএমও **১৯৭২**, প্রবলেম **১**) তোমাকে দশটি ভিন্ন ভিন্ন দুই অঙ্কের সংখ্যা দেয়া আছে। প্রমাণ কর, তুমি দুইটি ভিন্ন ভিন্ন নিশ্ছেদ সেট গঠন করতে পারবে, যাদের উপাদান ঐ দশটি সংখ্যা থেকে নেয়া আর উপাদানগুলোর যোগফল উভয় সেটেই সমান।

সমাধান: আমরা এটিকে পিজিওনহোল প্রিন্সিপালের সাহায্যে সমাধান করতে চাই। তো, আমাদের পিজিওনহোল আর পিজিওন খুঁজতে হবে। এখন, যোগফলকে আমি সমান রাখতে চাই। তাই এটিই ন্যাচারাল যে আমরা যোগফলকে পিজিওনহোল আর সেটগুলোকে পিজিওন ধরব। এখন, সর্বনিম্ন সম্ভাব্য যোগফল 10 ও সর্বোচ্চ সম্ভাব্য যোগফল $99+98+97+96+95+94+93+92+91+90 = 189\times 5 = 945$ তাই, আমরা বলতে পারি, $945-10+1 = 936$ টি সম্ভাব্য যোগফল রয়েছে।

এখন আমরা কবুতরের সংখ্যা, অর্থাৎ সম্ভাব্য সেট সংখ্যা নির্ণয় করব। এটা অবশ্যই $2^{10} = 1024$ হবে। যারা বুঝতে পারছ না কেন তারা রাহুল সাহার বেসিক কাউন্টিংয়ের উপরে যে নোট টা সেটা পড়তে পার। তাহলে, অবশ্যই এমন দুইটি সেট পাওয়া যাবে যাদের যোগফল সমান। কিন্তু ঐ সেটদ্বয় যে নিশ্ছেদ, তার কোন গ্যারান্টি নেই। এজন্য, আমরা ঐ দুইটি সেট নিয়ে তাদের মধ্যে যে উপাদানগুলো কমন, সেগুলো বাদ দিয়ে দিব। এখনো কিন্তু যোগফল সমান থাকবে! সব কমন উপাদান বাদ দেয়া হলে, যে দুইটি সেট পাওয়া যাবে, তারা নিঃসন্দেহে নিশ্ছেদ।

এখন দেখ, যদি আমরা কমন উপাদানগুলো বাদ দেই, তাহলে কোন একটি সেট বা উভয় সেটেই শূন্য হয়ে যেতে পারে না। যদি উভয় সেটেই শূন্য হয়ে যায়, তাহলে প্রথমেই সেট দুটো সমান একই ছিল, ভিন্ন না। আবার, কেবল একটি সেট শূন্য হলে ঐ সেটের উপাদানগুলোর যোগফল শূন্য, যেখানে অপর সেটের উপাদানগুলোর যোগফল ধনাত্মক। কিন্তু তাদের সমান হতে হবে। তাই সেটিও সম্ভব নয়। $\square$

আশা করি পিজিওনহোল প্রিন্সিপালের গুরুত্ব তোমরা বুঝতে পারছ। এখন তোমাদের একটি নতুন ফাংশন শিখাবো, এর নাম হলো সিলিং ফাংশন। $\lceil x\rceil$ হল এমন সর্বনিম্ন পূর্ণসংখ্যা যা x এর সমান বা তার চেয়ে বড়। এখন, $\lceil 1.5\rceil = 2$, $\lceil 5\rceil = 5$, $\lceil e\rceil = 3$, $\lceil \pi\rceil = 4$

যদি তোমরা সিলিং ফাংশনটি বুঝে থাক, তাহলে তোমরা পিজিওনহোল প্রিন্সিপালের পরবর্তী ধাপের জন্য তৈরি! পিজিওনহোল প্রিন্সিপাল এই ফর্মে অনেক বেশি ব্যবহার হয়ে থাকে।

যদি তোমার কাছে k টি কবুতর আর n টি কবুতরের খোপ থাকে, তাহলে কোন একটি খোপে কমপক্ষে $\left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil$ টি কবুতর রয়েছে।

এবার নিচের সমস্যাগুলো তোমরা নিজেরা সমাধান কর দেখি!

১. যদি আমরা $pq+1$ টি মুক্তা p টি বাক্সে রাখি, তাহলে দেখাও যে, কোন একটি বাক্সে q এর চেয়ে বেশিসংখ্যক মুক্তা রয়েছে।

২. যদি আমরা $\frac{a}{b}$ কে দশমিকে প্রকাশ করি, তাহলে পৌনঃপুনিক হবার পর আবার আগের প্যাটার্ন আসতে সর্বোচ্চ $b-1$ টি অঙ্ক নিতে হবে।

৩. যদি আমাদের কাছে 12 টি ভিন্ন ভিন্ন দুই অঙ্কের সংখ্যা থাকে, দেখাও যে, আমরা এমন দুইটি সংখ্যা পাব যাতে তাদের বিয়োগফলের দুইটি অঙ্কই সমান।

৪. প্রমাণ কর, প্রতিটি 16 অঙ্কের সংখ্যায়ে এক বা একাধিক পাশাপাশি ডিজিট আছে যাদের গুণফল পূর্ণবর্গ হয়। (যেমন, 2353568726832687 , এখানে, $12, 13$ ও 14 তম ডিজিটের গুণফল 36) (জাপান এমও ১৯৯১)

উদাহরণ ৪: $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ সেটটা থেকে $n+1$ টা সংখ্যা নিলে দেখাও যে দুইটি সংখ্যা আছে যাদের পার্থক্য 1।

সমাধান: এখানে, আমাদেরকে $2n$ টি সংখ্যা হতে $n+1$ টি সংখ্যা নিতে হবে। যেহেতু আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে, কমপক্ষে দুইটি সংখ্যা ক্রমিক, আমরা উল্টোটি করার চেষ্টা করি। অর্থাৎ দুইটি সংখ্যা ক্রমিক না নিয়ে $2n$ টি সংখ্যা হতে $n+1$ টি সংখ্যা নেয়ার চেষ্টা করি। সবার প্রথমেই যেটা মাথায়ে আসে তা হল-

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1$$

কিন্তু $2n$ টি সংখ্যা থেকে এভাবে সর্বোচ্চ n টি সংখ্যা নেয়া যাবে। অন্য সংখ্যাটি অবশ্যই কোন না কোন সংখ্যার সাথে ক্রমিক হবে। আমাদের প্রমাণ কিন্তু হয়ে যায়নি। আমরা আবার এই ধারাটিও নিতে পারতাম-

$$2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$$

কিন্তু একই যুক্তিতে সেটাও গ্রহণযোগ্য না। কিন্তু এখানে কি হচ্ছে আমরা কি বুঝতে পারছি? আমরা যতই ক্রমিক না রেখে সংখ্যা নেবার চেষ্টা করি, একটা না একটা বাকি থেকেই যাবে। চেনা চেনা লাগছে কি? ঠিক এই পরিস্থিতিতে পরেই আমরা পিজিওনহোল প্রিন্সিপাল আবিষ্কার করেছিলাম। অর্থাৎ আমরা পিজিওনহোল প্রিন্সিপাল ব্যাবহার করার জন্য আদর্শ পরিস্থিতিতে আছি। এখানে, আমরা পিজিওনহোল হিসেবে নিব হলো $(1,2), (3,4), (5,6), \ldots, (i, i+1), \ldots, (2n-1, 2n)$ কে। কোন না কোন খোপে আমাদের দুইটি কবুতর রাখতে হবে। আমাদের প্রমাণ কিন্তু শেষ! □

এই সমস্যাটি গণিতের একটি ক্লাসিক সমস্যা। পিজিওনহোল প্রিন্সিপাল ব্যবহার করে সমাধানযোগ্য এই সমস্যাটি সারা পৃথিবীতেই পিজিওনহোল প্রিন্সিপাল শেখানোর কাজে ব্যবহৃত হয়। বেশিরভাগ এমন সমস্যায়ে মূল ধাপ অর্থাৎ কিনা ক্রাক্স হল পিজিওনহোল এবং পিজিওন চিহ্নিত করা। আবার কঠিন সমস্যাগুলোতে পিজিওনহোল প্রিন্সিপাল একটি মধ্যবর্তী ধাপ হিসেবে ব্যাবহার করা হয়, তা সম্পূর্ণ সমাধান দেয় না।

উদাহরণ ৫: জাহিন একটা বোর্ডে বিশটি ভিন্ন ভিন্ন ধনাত্মক পুর্ণসংখ্যা নিলো, যাদের সবগুলোই 70 অপেক্ষা ছোট। তারপর তাদের মধ্যে যতরকমের জোড়া সম্ভব, ততগুলো নিয়ে সবগুলোর জন্য অন্তরফল অন্য একটি বোর্ডে লিখল। প্রমাণ কর, দ্বিতীয় বোর্ডে চারটি সংখ্যা আছে যারা পরস্পর সমান।

সমাধান: এতক্ষণে তোমাদের বুঝে যাওয়ার কথা, কেন এখানে আমরা পিজিওনহোল প্রিন্সিপাল ব্যবহার করব। তাহলে আমাদের কবুতর ও কবুতরের খোপ খুঁজে বের করতে হবে। তো চল খুঁজার জন্য সাঁড়াশি অভিযান চালাই। তো, এটি প্রথমেই পরিষ্কার, দ্বিতীয় বোর্ডে কতগুলো সংখ্যা আছে সেটা বের করতে হবে। যারা একটু আধটু কম্বিনেটরিক্স জানো, তাদের জন্য কাজটি সহজই হওয়ার কথা। উত্তর হবে $\binom{20}{2} = 190$। না জানলেও সমস্যা নাই, প্রতিটি সংখ্যা উনিশটি সংখ্যার সাথে জোড় গঠন করে, তাই সংখ্যা হওয়া উচিত ছিল $20 \times 19 = 380$ টি। কিন্তু 11 যদি 24 এর সাথে একবার জোড় গঠন করে, তাহলে 24 ও 11 এর সাথে জোড় গঠন করেছে। তাই 380 কে অর্ধেক করলেই সংখ্যা কয়টা আছে পাওয়া যাবে। এবার আমরা কবুতরের সংখ্যা বের করলাম। এখন কবুতরের খোপের সংখ্যা বের করতে হবে। লক্ষ করি, দ্বিতীয় বোর্ডের কোন সংখ্যার সর্বোচ্চ মান $69 - 1 = 68$, আর তাই কমপক্ষে $\left\lceil \frac{190}{68} \right\rceil = 3$ টা সংখ্যা একই হবে। এ কি হল?!? আমরা ত দেখাতে চেয়েছিলাম যে 4 টি সংখ্যা একই হবে। কিন্তু আমরা পেলাম হল 3। এ অবস্থায় আমদের প্রায়ই পড়তে হয়। কিন্তু তাই বলে কি হাল ছেড়ে দিব? কখনই না!!! কারণ,

"দুর্গম গিরি কান্তার মরু দুস্তর পারাবার
লঙ্ঘিতে হবে রাত্রি নিশিথে যাত্রীরা হুঁশিয়ার!"

এখন, আমরা বুঝতে পারলাম, এই পদ্ধতিতে কোন কাজ হবে না। অন্য কোন পদ্ধতি ব্যবহার করতে হবে। তো, আমরা প্রথম সংখ্যাগুলোকে ছোট থেকে বড় ক্রমে সাজাই। ধরি, সংখ্যাগুলো $a_1, a_2, a_3 \cdots a_{20}$। তাহলে দ্বিতীয় বোর্ডের সংখ্যাগুলো হবে $a_i - a_j$, যেখানে $i > j$। এখন আমি যে টেকনিকটি দেখাব, সেটা তোমাদের মনে রাখা উচিত, কারন এটি অনেক সময়ই কাজে দেয়। লক্ষ করো,

$$(a_{j+1} - a_j) + (a_{j+2} - a_{j+1}) + \ldots + (a_i - a_{i-1}) = a_i - a_j$$

এখন, মনে করি, কোন $a_{k+1} - a_k$ আছে সর্বোচ্চ 3 বার। তাহলে,

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \ldots + (a_{20} - a_{19})$$

বা $a_{20} - a_1$ এর সর্বনিম্ন মান হবে

$$3 \times 1 + 3 \times 2 + \ldots + 3 \times 6 + 7 = 70$$

(কেন বলোতো?) । অর্থাৎ $a_{20} - a_1 \geq 70$। কিন্তু এই সংখ্যাটি দ্বিতীয় বোর্ডে আছে বিধায় এটি 68 এর বেশি হতে পারে না। তাই আমরা যা ধরে নিয়েছিলাম সেটি ভুল। তাই একটি না একটি $a_{k+1} - a_k$ আছে 3 এর চেয়ে বেশিবার, কমপক্ষে 4 বার। তাই দ্বিতীয় বোর্ডে একটি না একটি সংখ্যা আছে যা চারবারের বেশি সংখ্যকবার লেখা হয়েছে। □

এখন আমরা কিভাবে এই এপ্রোচটি বের করলাম? আসলে যখন অনেকগুলো ডিফারেন্স থাকে, তখন এটি একটি স্ট্যান্ডার্ড এপ্রোচ। তাই তোমরা এটি মনে রাখার চেষ্টা করো। আমরা এখন আরেকটি সমস্যার সমাধান করব, যা একটি কাছাকাছি এপ্রোচ ব্যবহার করে।

উদাহরণ ৬: (বিডিএমও ২০১৪, জুনিয়র ১০) ঐন্দ্রির কাছে 100 টি চকলেট ছিল। সে 58 দিনে সবগুলো চকলেট খেয়ে শেষ করে। সে প্রতিদিন কমপক্ষে একটি করে চকলেট খেয়েছে। প্রমাণ কর যে, কয়েকদিনে সে মোট 15 টি চকলেট খেয়েছে।

সমাধান: এটি আমার প্রথম বিডিএমও এর শেষ সমস্যা, তাই এটি আমার স্মৃতির সাথে জড়িত। আমি পিজিওনহোল প্রিন্সিপালের নাম শুনেছিলাম পরীক্ষার আগের দিন, আর অনেক গুতাগুতি করেও কিছু বের করতে না পেরে শেষে খাতায় খালি "পিজিওনহোল প্রিন্সিপাল" কথাটি লিখে এসেছিলাম। এর জন্য আমাকে আংশিক নম্বর দেয়া হয়েছিল!!!

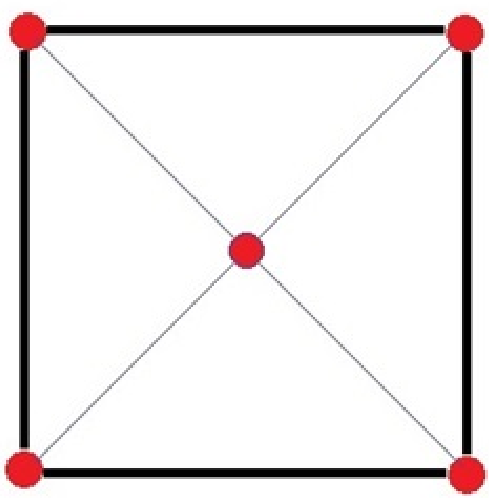
আমি অন্য সমস্যাগুলোর মত এখানে পেছনের চিন্তাটা বলে দিব না, এটা তোমাদের নিজেদের বের করতে হবে। মনে করি, ঐন্দ্রি i তম দিনে a_i টি চকলেট খেয়েছে। তাহলে, ঐন্দ্রি 1 থেকে i তম দিনে চকলেট খেয়েছে $b_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$ টি। তাহলে ঐন্দ্রি $m+1$ থেকে n দিনে খেয়েছে $b_n - b_m$ টি চকলেট। এখন লক্ষ করি, $1 \leq b_1 < b_2 < b_3 < \ldots < b_{58} = 100$। এখন যদি প্রমাণ করতে পারি, এমন দুইটি m ও n আছে যাতে $b_m - b_n = 15$ তাহলে আমাদের কাজ শেষ।

এখন আমরা আরেকটা ধারা ডিফাইন করব, আর তা হল $c_i = d_i + 15$, যেখানে $1 \leq i \leq 58$। এবার আমরা লক্ষ করি, $c_{58} = 115$। আবার, $\{b_i\}$ ধারা ও $\{c_i\}$ ধারায় একত্রে পদ আছে $58 + 58 = 116$ টি, যেখানে ঐ দুইটি ধারার সংযোগ সেটে সর্বোচ্চ মান 115। পিজিওনহোল প্রিন্সিপাল থেকে পাই, এমন m আর n আছে, যাতে $b_m = c_n$, কারণ সংযোগ করলে ঐ ধারায় অন্তত দুইটি পদ কমন থাকবে। কিন্তু যেকোনো m ও n এর জন্য $b_m \neq b_n$ ও $c_m \neq c_n$। এখন, $b_m = c_n \implies b_m = b_n + 15 \implies b_m - b_n = 15$। আমাদের প্রমাণ শেষ! □

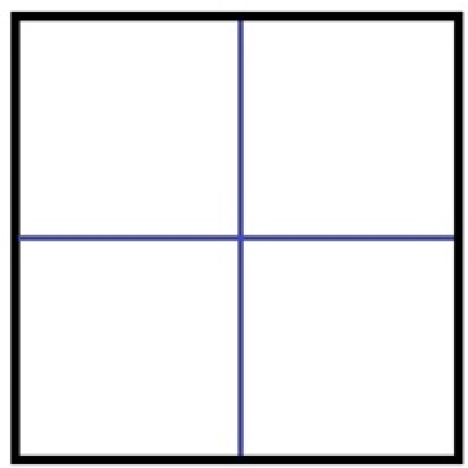
এখানে লক্ষণীয়, সবচেয়ে কঠিন অংশ ছিল নতুন ধারা c_i কে নিয়ে আসা। তবে যখন তোমরা কোনভাবেই দুইটির বিয়োগফল 15 আনতে পারবে না, তখন অনেকটা খড়ের কুটার মত এই টেকনিককে আঁকড়ে ধরবে অনেকে। তাই সবচেয়ে কঠিন অংশ হলেও এটাই ন্যাচারাল।

উদাহরণ ৭: একটি এক একক দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট বর্গের মধ্যে পাঁচটি বিন্দু আছে। প্রমাণ কর, এমন দুইটি বিন্দু আছে যাদের দুরত্ব $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ এর কম।

সমাধান: সমাধান দেখার আগে নিজে চেষ্টা করে নাও।



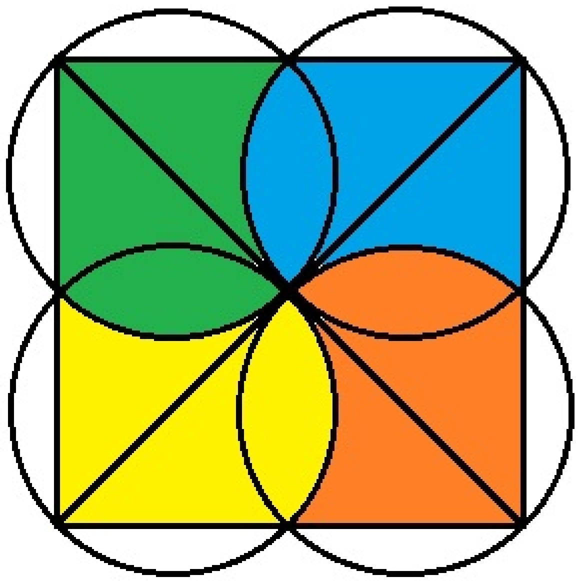
চিত্র - ১



চিত্র-২

আমরা একটু নাড়াচাড়া করলেই বুঝে যাব, চিত্র - ১ এর মত করে সাজালে আমরা বিন্দুগুলকে সর্বোচ্চ দুরত্বে রাখতে পারব। সেই পুরোনো গন্ধ এখানেও পাওয়া যায়, একটু নাড়াচাড়া করলেই কোন একজোড়ার দুরত্ব $\frac{\sqrt{2}}{2}$ এর কম হবে। কিন্তু

পিজিওনহোল প্রিন্সিপাল এখানে কিভাবে ব্যবহার করব? আমাদের এমন সকল বিন্দুর সেট নিতে হবে যাদের মধ্যে সর্বোচ্চ দুরত্ব $\frac{\sqrt{2}}{2}$। যারা এরকম চিন্তা করেছ, তাদের মাথায় প্রথমেই আসা উচিত বৃত্ত। আমরা নিচের চিত্র লক্ষ করি,



চিত্র - ৩

এখানে, বৃত্তগুলোর ব্যাস $\frac{\sqrt{2}}{2}$, তাই আমরা যদি প্রতি রংকে একটা করে পিজিওনহোল বলে বিবেচনা করি, তাহলে কোন একটি রংয়ে দুইটি বিন্দু থাকবে। যেহেতু বৃত্তের ভেতরে বা পরিধির উপর যেকোনো দুইটি বিন্দুর দূরত্ব তাদের ব্যাসের সমান বা কম। তাই ঐ বিন্দু দুটির দুরত্ব $\frac{\sqrt{2}}{2}$ এর কম। □

অবশ্য, আমরা চিত্র - ২ এর মত করেও চারটি বর্গক্ষেত্রকে পিজিওনহোল ধরে এই সমস্যাটি সমাধান করতে পারতাম। আমি যেটি দেখাতে চেয়েছি, তা হলো আমরা বিভিন্নভাবে পিজিওনহোল ধরে সমস্যার সমাধান করতে পারি। এবার তোমরাই প্রমাণ করে ফেল, কোন এক একক বাহুবিশিষ্ট সুষম ষড়ভুজের মধ্যে 7 টি বিন্দু নিলে কোন দুইটি বিন্দু আছে যাদের দুরত্ব 1 একক অপেক্ষা কম।

আমাদের কিছু পরিচিত ফাংশন রয়েছে, যেগুলো নিয়ে ধারণা থাকলে কিছু সমস্যা সমাধানে সুবিধা হতে পারে। নিচে আমরা এমন একটি সমস্যার সমাধান দেখব। তার আগে একটু ত্রিকোণমিতি রিভাইস করে আসি। আমরা জানি যে $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}$। এখন আমরা সমস্যাটা দেখব।

উদাহরণ ৮: দেখাও যে, যেকোনো নয়টি বাস্তব সংখ্যার মধ্যে এমন দুইটি সংখ্যা a আর b পাওয়া যাবে, যাতে $0 < \frac{a-b}{1+ab} < \sqrt{2}-1$।

সমাধান: দেখো তো, শর্তটিকে কি $\tan$ এর বিয়োগ ফরমুলার মত মনে হচ্ছে না? যেহেতু $\tan$ ফাংশনে বাস্তব সংখ্যার সেটকে রেঞ্জ হিসেবে নিলে একটি সার্বিক বা সারজেক্টিভ ফাংশন হয় আর ডোমেন হিসেবে যদি আমরা $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ নেই, তাহলে এটি একটি বাইজেক্টিভ ফাংশনে পরিণত হয়।

এত বড় কচকচানি না বুঝলেও চলবে, খালি জেনে রাখ, $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ রেঞ্জে $\tan$ এর বিপরীত ফাংশন আছে। তাহলে, নয়টি সংখ্যার $\tan^{-1}$ নিলে আমরা পাই, $(-\frac{\pi}{2} < x_1, x_2, \ldots, x_9 < \frac{\pi}{2})$। এখন $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ ব্যবধিটিকে আমরা 8 টি সমান ভাগে ভাগ করলে কোন একটি ভাগে দুইটি সংখ্যা পড়বে, যাদের বিয়োগফল $\frac{\pi}{8}$ এর চেয়ে ছোট। মনে করি ঐ দুইটি সংখ্যা p ও q। তাহলে, $a = \tan p$ ও $b = \tan q$ হলে, প্রদত্ত রাশি $= \tan(p-q) < \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ □

এখন দেখ, একটি জানা ফরমুলার সাথে যোগসূত্র স্থাপন করায় আমরা কি সুন্দর করে সমস্যাটি সমধান করতে পারলাম!

উদাহরণ ৯: দেখাও যে কোন একটি উত্তল $2n$ ভুজে এমন একটি কর্ণ আছে যা কোন বাহুর সমান্তরাল নয়।

সমাধান: আপাতদৃষ্টিতে এটিকে দেখে মনেই হয় না যে এখানে পিজিওনহোল প্রিন্সিপাল প্রয়োগ করতে হবে। তাই আমরা এমনভাবে আগাই যাতে কোন পরীক্ষায় আগাব এটা সমধান করার জন্য। আগে দেখা যাক কর্ণ কয়টা আছে। এটি সহজ, কর্ণ থাকবে $\binom{2n}{2} - 2n = n(2n-3)$ টা। এখন আমরা দেখি একটা কর্ণ কখন বাহুর সমান্তরাল হয়। একটা খুব সুন্দর চিত্র এঁকে ফেল। এবার আমরা একটা বাহু ফিক্স করে ফেলি। তারপর তার সাথে সমান্তরাল কর্ণগুলোর কথা চিন্তা করি। আমাদের কাছে বিন্দু বাকি রয়েছে $2n-2$ টি। দেখ যে প্রতিটি বিন্দু থেকে যতগুলো কর্ণই টানা হোক না কেন, সর্বোচ্চ একটা কর্ণই বাহুটির সমান্তরাল হবে। আর প্রতিটি বিন্দুই নেয়া হচ্ছে বলে প্রতিটি কর্ণ দুইবার করে গোণা হবে। তাই সমান্তরাল কর্ণের সর্বোচ্চ হবে $n-1$ এর সমান বা কম। কিন্তু আসলেই কি তাই? তোমরা চিত্র এঁকে কিছুক্ষণ চেষ্টা করলেই বুঝবে যে সর্বোচ্চ কর্ণসংখ্যা $n-2$। কিন্তু এটিকে কিভাবে প্রমাণ করা যায়?

আসলে দেখ, যদি কর্ণ $n-1$ টা হতে হয়, তাহলে প্রতি দুইটি বিন্দুর মধ্যেই একটি সংযোজক সরলরেখা থাকবে। আমরা কর্ণগুলোকে ল্যাবেল করি। ধরি, ফিক্সড বাহুর ডানদিকের বিন্দুগুলো $R_1, R_2, \ldots R_n$ (বাহু সংলগ্ন বিন্দুসহ) আর বামদিকের বিন্দুগুলো $L_1, L_2, \ldots, L_n$। যদি কখনো L_i এর সাথে R_j যুক্ত হয় যেখানে $i \neq j$, তাহলে পরে অন্য কোন বামের বিন্দু ডানের ঐ বিন্দুর নিচে কর্ণ গঠন করতে পারে না যাতে উভয়ই সমান্তরাল হয়, কারণ তাহলে তারা বহুভুজের ভেতরেই ছেদ করে। তাই আমাদের কর্ণ সংখ্যা ঐ ক্ষেত্রে $n-2$ বা তার চেয়ে কম হয়। আবার, যদি L_i সর্বদা R_i এর সাথে যুক্ত হয়, তাহলে L_n ও R_n পরস্পর যুক্ত হবে। কিন্তু এটি বহুভুজের বাহু বলে কর্ণ হতে পারে না। তাই এক্ষেত্রেও কর্ণের সংখ্যা $n-2$ বা তার চেয়ে কম।

এখন, একটি বাহুর সাথে সমান্তরাল কর্ণের সংখ্যা যদি সর্বোচ্চ $n-2$ হয়, তাহলে বহুভুজে যেকোনো বাহুর সাথে সমান্তরাল কর্ণের সংখ্যা সর্বোচ্চ $2n(n-2) = 2n^2 - 4n$। সেখানে মোট কর্ণের সংখ্যা $n(2n-3) = 2n^2 - 3n$। তাই, পিজিওনহোল প্রিন্সিপাল ব্যবহার করে আমরা বলতে পারি, অন্তত n টি কর্ণ আছে যারা কোন বাহুর সমান্তরাল না। □