

# Kostenoptimierung einer vorgefertigten Lagerhalle

Extremwertaufgabe mit Ableitungen - Modellierung eines Baukostenmodells  
(RSB Rudolstädter Systembau GmbH)

Fach: Mathematik (Oberstufe)

Jahrgangsstufe: 11/12

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

**WICHTIG:**

**Bearbeitung und Abgabe erfolgen digital über die CaseBridge-Plattform  
mit integrierter KI-Unterstützung.**

---

Hinweis: Dieses Material enthält eine Schülerfassung und eine Lehrkräftelösung im selben Dokument.

Druck: DIN A4, schwarz-weiß

# PART 1 - SCHÜLERVERSION

## 1. Unternehmenshintergrund

RSB Rudolstädter Systembau GmbH ist ein mittelständisches, regional tätiges Unternehmen aus Thüringen, das Bauprojekte im Systembau umsetzt. Unter Systembau versteht man die Planung und Errichtung von Gebäuden aus standardisierten, vorgefertigten Bauteilen (z.B. Betonfertigteile und Stahlsysteme), die auf der Baustelle montiert werden. Typische Projekte sind Industrie- und Gewerbegebäuden wie Lager- und Produktionshallen, Logistikgebäude oder Anbauten für Bestandsstandorte. Bei der Planung spielen neben Nutzfläche und Bauzeit besonders Kosten, Materialeinsatz, Transport und Montageabläufe, statische Anforderungen (z.B. Spannweiten von Dachträgern), Brandschutz sowie die Erweiterbarkeit des Gebäudes eine Rolle. In dieser Fallstudie wird ein vereinfachtes Kostenmodell genutzt, um eine wirtschaftliche Dimensionierung einer Hallengrundfläche zu bestimmen.

## 2. Betriebssituation

Ein Industriekunde beauftragt RSB mit der Planung einer neuen, rechteckigen Lagerhalle. Die benötigte Hallenfläche auf dem Boden ist fest vorgegeben: **A = 2 400 m<sup>2</sup>**. Die lichte Innenhöhe soll **8 m** betragen (für das Modell als konstant angenommen). Je nach Verhältnis von Länge und Breite ändern sich die Baukosten: Eine große Breite führt zu größeren Spannweiten im Dachtragwerk (teurer), eine große Länge erhöht u.a. die erforderliche Fassadenlänge. RSB möchte daher die Grundabmessungen so wählen, dass die **Gesamtkosten minimal** sind.

Zentrale Entscheidungsfrage:

**Welche Abmessungen (Länge und Breite) soll die Halle haben, damit die Gesamtbaukosten minimal werden?**

Kostenbestandteil	Ansatz (vereinfachtes Modell)
Planung/Genehmigung (fix)	38 000 EUR
Bodenplatte/Fundament	115 EUR pro m <sup>2</sup> Grundfläche
Dachhaut (Paneele, Abdichtung)	85 EUR pro m <sup>2</sup> Grundfläche
Außenwände (Fertigteile, Montage; Höhe 8 m)	1 150 EUR pro laufendem Meter Außenwand
Dachtragwerk (Stahlbinder)	Binderabstand 6 m entlang der Hallenlänge; Kosten je Binder: 4 800 EUR + 28 EUR·(Breite) <sup>2</sup>

Vereinfachungen: Rechteckige Grundfläche, konstante Höhe (8 m), Kostenansätze ohne Mehrwertsteuer. Binderanzahl wird als x/6 modelliert (für x in m).

## 3. Mathematisches Modell

Wir modellieren die Halle als Rechteck mit Länge **x** (in m) und Breite **y** (in m). Die Grundfläche ist fest:

$$xy = 2\ 400 \text{ und damit } y = 2\ 400 / x \text{ (mit } x > 0\text{).}$$

Die Kosten setzen sich aus einem fixen Anteil und einem variablen Anteil zusammen: Fix: Planung/Genehmigung sowie Dach und Fundament pro m<sup>2</sup> (bei fester Fläche konstant). Variabel: Außenwände (abhängig vom Umfang) und Dachbinder (abhängig von Länge und Breite).

- **Fixkosten:**  $38\ 000 + (115 + 85) \cdot 2\ 400 = 518\ 000 \text{ EUR}$
- **Außenwände:**  $1\ 150 \cdot (2x + 2y) = 2\ 300 \cdot (x + y)$
- **Dachbinder:** Anzahl n = x/6; Kosten je Binder:  $4\ 800 + 28 \cdot y^2$

Damit ergibt sich (mit  $y = 2400/x$ ):

$$C(x) = 518\ 000 + 2\ 300 \cdot (x + 2\ 400/x) + (x/6) \cdot (4\ 800 + 28 \cdot (2\ 400/x)^2)$$

Vereinfacht:

$$C(x) = 518\ 000 + 3\ 100 \cdot x + 32\ 400\ 000/x$$

Definitionsbereich:  $x > 0$  (sinnvoll zusätzlich:  $60\text{ m} \leq x \leq 120\text{ m}$ ,  $18\text{ m} \leq y \leq 30\text{ m}$ ).

## 4. Arbeitsaufträge

### Aufgabe1 - Modellverständnis

- Beschreibe in eigenen Worten, wofür die Variablen  $x$  und  $y$  stehen und welche Einheit sie haben.
- Erkläre, warum die Nebenbedingung  $xy = 2400$  gilt und wie daraus  $y = 2400/x$  folgt.
- Ordne die Terme der Kostenfunktion den Kostenbestandteilen zu (Fixkosten, Wände, Dachbinder).

### Aufgabe2 - Ableitung

Leite die Kostenfunktion  $C(x)$  nach  $x$  ab. Gib  $C'(x)$  in vereinfachter Form an.

### Aufgabe3 - Extremwert

- Bestimme die kritische Stelle ( $C'(x)=0$ ) und berechne die zugehörigen Hallenmaße  $x$  und  $y$ .
- Zeige, dass es sich um ein Minimum handelt (z.B. mit  $C''(x)$  oder Vorzeichenwechsel von  $C'(x)$ ).

### Aufgabe4 - Von der Gleichung zur echten Halle

Nutze den CaseBridge-KI-Chat, um auf Basis deiner berechneten Maße zwei realistische Skizzen oder Visualisierungen einer Lagerhalle zu erzeugen.

- Ihre optimale Halle
- Eine quadratische Halle (z. B.  $\approx 49\text{ m} \times 49\text{ m}$  bei gleicher Fläche)

Verwende dabei einen präzisen Prompt, zum Beispiel:

„Erstelle eine realistische 3D-Skizze einer Industrie-Lagerhalle mit einer Länge von ... m, einer Breite von .... m und einer Höhe von ... m. Perspektive leicht schräg von oben. Sachlicher Industrie-Stil.“

Welche wirkt kosteneffizienter im Sinne des Modells? Welche würde vermutlich höhere Binderkosten erzeugen?

### Aufgabe5 - Risikobewertung mit KI

Bitte die KI, drei wirtschaftliche Risiken deiner optimalen Hallenform zu formulieren (z. B. Erweiterbarkeit, Materialpreise, Statik).

Ergänze selbst:

Welche Risiken erscheinen realistisch? Welche hältst du für übertrieben?

## **5. Nutzung der CaseBridge-KI**

Die Bearbeitung dieses Cases erfolgt über die Plattform CaseBridge.

Auf der Plattform steht euch ein integrierter KI-Chat zur Verfügung. Diese KI basiert auf den von RSB bereitgestellten Unternehmensinformationen sowie auf dem mathematischen Modell des Cases.

Ihr dürft die KI aktiv nutzen, um:

- Verständnisfragen zum Modell zu klären
- euch Rechenschritte erklären zu lassen
- eure Ableitungsschritte zu überprüfen
- Interpretationen zu reflektieren
- alternative Lösungswege zu diskutieren

Wichtig:

Die KI soll euch beim Denken unterstützen, ersetzt aber nicht eure eigene mathematische Argumentation.

Eure finale Lösung muss nachvollziehbar, vollständig und strukturiert dargestellt werden.

Die Nutzung der KI wird nicht negativ bewertet – entscheidend ist die Qualität eurer finalen Ausarbeitung.

## **6. Abgabe über CaseBridge**

Die Abgabe erfolgt ausschließlich digital über das CaseBridge-Tool.

Bitte ladet eure Lösung dort hoch:

- als strukturiertes Textdokument
- mit vollständigen Rechenschritten
- inklusive Begründung und Interpretation
- Fügt zu Aufgabe 4 Prompt + Screenshot(s) der Visualisierung ein.

Nach der Abgabe erfolgt eine KI-gestützte Analyse der Lösung. Die Lehrkraft behält dabei die pädagogische Entscheidungsgewalt.

## PART 2 - LEHRKRÄFTELÖSUNG (nicht an Schülerinnen und Schüler ausgeben)

### Lösungsidee und vollständiger Rechengang

Gesucht ist die Minimierung der Gesamtkosten bei fester Grundfläche  $A = 2\ 400 \text{ m}^2$ . Mit  $x = \text{Hallenlänge}$  und  $y = \text{Hallenbreite}$  gilt die Nebenbedingung  $xy = 2\ 400$  und damit  $y = 2\ 400/x$ .

#### 1) Fixkosten (konstant):

$$K_{\text{fix}} = 38\ 000 + (115 + 85) \cdot 2\ 400 = 38\ 000 + 200 \cdot 2\ 400 = 518\ 000$$

#### 2) Außenwände:

$$K_W(x) = 1\ 150 \cdot (2x + 2y) = 2\ 300 \cdot (x + y) = 2\ 300 \cdot (x + 2\ 400/x)$$

#### 3) Dachbinder:

$$n = x/6, \text{ Kosten je Binder: } 4\ 800 + 28 \cdot y^2.$$

$$K_B(x) = (x/6) \cdot (4\ 800 + 28 \cdot y^2) = 800x + (28/6) \cdot x \cdot (2\ 400/x)^2$$

$$K_B(x) = 800x + (28/6) \cdot (2\ 400^2)/x = 800x + 26\ 880\ 000/x$$

#### 4) Gesamtkostenfunktion:

$$C(x) = K_{\text{fix}} + K_W(x) + K_B(x) = 518\ 000 + 3\ 100x + 32\ 400\ 000/x$$

#### Ableitung:

$$C(x) = 518\ 000 + 3\ 100x + 32\ 400\ 000 \cdot x^{-1}$$

$$C'(x) = 3\ 100 - 32\ 400\ 000 \cdot x^{-2} = 3\ 100 - 32\ 400\ 000/x^2$$

#### Kritische Stelle: $C'(x)=0$

$$3\ 100 - 32\ 400\ 000/x^2 = 0 \Rightarrow 3\ 100 = 32\ 400\ 000/x^2 \Rightarrow x^2 = 32\ 400\ 000 / 3\ 100 \approx 10\ 451,61$$

$$\Rightarrow x \approx 102,23 \text{ m.}$$

$$\text{Damit } y = 2\ 400/x \approx 2\ 400/102,23 \approx 23,48 \text{ m.}$$

#### Minimum-Nachweis:

$$C''(x) = 64\ 800\ 000/x^3 > 0 \text{ für alle } x > 0 \Rightarrow \text{an der kritischen Stelle liegt ein Minimum.}$$

#### Praxisrundung:

Da Binder im Abstand von 6 m geplant sind, ist eine Länge als Vielfaches von 6 m sinnvoll. 102 m passt gut ( $102/6 = 17$  Binder). Dann  $y = 2\ 400/102 \approx 23,53 \text{ m}$ .

Gesamtkosten bei  $x = 102 \text{ m}$ :

$$C(102) = 518\ 000 + 3\ 100 \cdot 102 + 32\ 400\ 000/102 \approx 1151\ 847 \text{ EUR (gerundet).}$$

#### Interpretation

Im Modell steigen die Außenwandkosten mit dem Umfang und damit mit  $x$  und  $y$ . Zusätzlich verursachen große Spannweiten (große Breite  $y$ ) hohe Binderkosten, die hier über den Term  $28 \cdot y^2$  quadratisch wachsen. Dadurch wird eine kleinere Breite wirtschaftlich, selbst wenn dadurch die Länge zunimmt. Das Optimum liegt daher deutlich bei einer längeren und vergleichsweise schmalen Halle.

## KI-gestützte Auswertung über CaseBridge

KI-gestützte Auswertung über CaseBridge

Die eingereichten Lösungen werden über die CaseBridge-Plattform strukturiert analysiert.

Die KI bewertet dabei insbesondere:

- mathematische Modellbildung
- korrekte Ableitung
- Extremwertbestimmung
- argumentative Qualität der Interpretation
- Nachvollziehbarkeit der Empfehlung

Die Lehrkraft erhält eine strukturierte Auswertungsübersicht und kann:

- Bewertungen anpassen
- qualitative Kommentare ergänzen
- einzelne Teilaufgaben stärker gewichten

Die finale Bewertung liegt bei der Lehrkraft.

## Typische Fehler (für Feedback)

- Nebenbedingung  $xy = 2400$  nicht genutzt oder  $y$  nicht korrekt durch  $2400/x$  ersetzt.
- Fixkosten fälschlich als variabel bezeichnet (Dach/Fundament sind bei fester Fläche konstant).
- Ableitung von  $1/x$  falsch (Vorzeichenfehler) oder Potenzregel bei  $x^{-1}$  nicht korrekt angewendet.
- Bei  $C'(x)=0$  die Umformung zu  $x^{2=b/a}$  falsch oder  $x$  negativ zugelassen.
- Zu frühes Runden, dadurch ungenaue Maße/Kosten; Einheiten fehlen.

## Vorschlag für die 90-Minuten-Struktur

Phase	Min.	Inhalt / Hinweis
Einstieg	0-10	Kontext lesen, Ziel klären, Variablen und Nebenbedingung sammeln
Modellbildung	10-25	Kostenbestandteile zu Termen, $y=2400/x$ einsetzen, $C(x)$ aufstellen
Ableiten	25-45	Ableitungsregeln wiederholen, $C'(x)$ berechnen und vereinfachen
Optimieren	45-65	$C'(x)=0$ lösen, Minimum nachweisen ( $C''$ oder Vorzeichen)
Interpretation/Entscheidung	65-80	<b>Visualisierung &amp; wirtschaftliche Bewertung mit KI</b>
Sicherung/Transfer	80-90	Ergebnis vergleichen, Modellannahmen reflektieren

**Curriculare Einordnung (kurz):** Extremwertprobleme mit Ableitungen, Modellierung mit Nebenbedingungen, Interpretation mathematischer Ergebnisse im Kontext einer Anwendungssituation (Oberstufe, Analysis).