4.1 Løs differentialligningen $(1+x^2)yy' = x(1+y^2)$ med hver af begyndelsesbetingelserne $y(3) = 1$, $y(3) = 3$ og $y(3) = -7$. Opgaven skal først løses med Maple, dernæst ved separation uden brug af Maple.

I Maple definerer jeg differentialligningen ved

```
l := (1 + x^2) * y(x) * y'(x):
r := x * (1 + y(x)^2):
f := l = r;
```

og løser for hhv. $y(3) = k$, hvor $k \in \{1, 3, -7\}$ ved

```
dsolve({f, y(3) = 1})
dsolve({f, y(3) = 3})
dsolve({f, y(3) = -7})
```

hvilket giver mig

$$y(x) = \frac{1}{5}\sqrt{5x^2 - 20} \qquad \text{for } y(3) = 1 \tag{1}$$

$$y(x) = x \qquad \text{for } y(3) = 3 \tag{2}$$

$$y(x) = -\sqrt{5x^2 + 4} \qquad \text{for } y(3) = -7 \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

For at løse ved separation må vi omformulere udtrykket, og sigter efter formen $q(y)y' = p(x)$.

$$(1+x^2)yy' = x(1+y^2) \implies \frac{1+x^2}{x} = \frac{1+y^2}{yy'} \implies \frac{x}{1+x^2} = \frac{y}{1+y^2}y' \tag{5}$$

De to variable er nu adskilt og vi kan betegne $q(y) = \frac{y}{1+y^2}$ og $p(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Lad os da integrere begge sider

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{y}{1+y^2}y'\,dx \tag{6}$$

Vi indfører nu $y = y(x)$; følgelig er $dy = y'(x)\,dx$, og vi da at

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{y}{1+y^2}y'\,dx \implies \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{y}{1+y^2}\,dy \tag{7}$$

og nu kan vi beregne integralet på begge sider

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{y}{1+y^2}\,dy \implies \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1 = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + C_2 \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

Vi lader $C = C_1 - C_2$ og fortsætter

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) \implies y(x) = \pm\sqrt{Cx^2 + C - 1} \tag{10}$$

Lader vi $y(3) = 1$ har vi, at

$$1 = \pm\sqrt{C \cdot 3^2 + C - 1} \implies 1^2 = C \cdot 3^2 + C - 1 \implies 2 = C \cdot 9 + C \tag{11}$$

$$\implies 2 = 10C \implies \frac{2}{10} = C = \frac{1}{5} \tag{12}$$

Indsætter vi dette, får vi

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5} - 1} \implies y(x) = \frac{1}{5}\sqrt{5x^2 - 20} \tag{13}$$

Lader vi $y(3) = 3$ har vi, at

$$3 = \pm\sqrt{C \cdot 3^2 + C - 1} \implies 3^2 = C \cdot 3^2 + C - 1 \implies 10 = C \cdot 9 + C \tag{14}$$

$$\implies 10 = 10C \implies \frac{10}{10} = C = 1 \tag{15}$$

Indsætter vi dette, får vi

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 + 1 - 1} \implies y(x) = \sqrt{x^2} \implies y(x) = x \tag{16}$$

Lader vi $y(3) = -7$ har vi, at

$$-7 = \pm\sqrt{C \cdot 3^2 + C - 1} \implies (-7)^2 = C \cdot 3^2 + C - 1 \implies 50 = C \cdot 9 + C \tag{17}$$

$$\implies 50 = 10C \implies \frac{50}{10} = C = 5 \tag{18}$$

Indsætter vi dette, får vi

$$y(x) = \pm\sqrt{5x^2 + 5 - 1} \implies y(x) = -\sqrt{5x^2 + 4} \tag{19}$$

4.2 Her skal (a) løses uden Maple, (b) og (c) med Maple.

a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen $y'' + 2y' - 3y = 0$.

Vi bemærker at differentialligningen er af den homogene type i anden orden, og har da løsningen

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \tag{20}$$

hvor $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ og r_1, r_2 er rødderne i ligningen $r^2 + ar + b = 0$.

Lad os først bestemme, hvor mange rødder der er i ligningen $r^2 + 2r - 3 = 0$. Vi beregner determinanten

$$d = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 \tag{21}$$

Da $d > 0$ har ligningen to rødder, som vi finder ved

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \pm 2 - 1 = \pm 1 \tag{22}$$

Nu kender vi rødderne og kan indsætte i den oprindelige differentialligning

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} \tag{23}$$

b) Find for enhver reel værdi af konstanten a den fuldstændige løsning til differentialligningen $y'' + 2y' - 3y = e^{ax}$.

I Maple definerer jeg differentialligningen som

```
f := y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = e^ax
```

og løser den ved

```
dsolve(f)
```

hvilket giver mig

$$y(x) = C_2 e^{-3x} + C_1 e^{x} - \frac{1}{3} e^{ax} \tag{24}$$

c) Find, stadig for alle a, den partikulære løsning $y(x)$ til problemet i (b), som opfylder $y(0) = y'(0) = 0$.

I Maple genanvender jeg definitionen fra før, og løser ved

```
dsolve({f, y(0)=0, y'(0)=0})
```

hvilket giver mig den partikulære løsning

$$y(x) = \frac{1}{4} e^{x} e^{ax} + \frac{1}{12} e^{-3x} e^{ax} - \frac{1}{3} e^{ax} \tag{25}$$