8.1 Benyt Maple til at finde alle stationære punkter for funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x, y) = x(8x^2 + 5x + \cos y) \tag{1}$$

og til at afgøre, om der er tale om lokalt maksimum, minimum eller sadelpunkt for hvert af dem. Tegn med Maple grafen for f i nærheden af et sadelpunkt, til illustration af det punkts type.

I Maple løser jeg for de stationære punkter ved

```
f := (x,y) -> x (8x^2 + 5x + cos(y))
fx := diff(f(x,y), x)
fy := diff(f(x,y), y)
ps := solve(fx=0, fy=0)
```

hvilket giver mig de stationære punkter

$$p_1 = \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$p_2 = \left(-\frac{1}{6}, 0\right) \quad p_3 = \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$$

$$p_4 = \left(-\frac{1}{2}, \pi\right) \quad p_5 = \left(\frac{1}{12}, \pi\right)$$

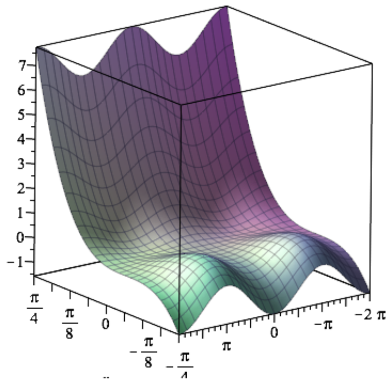

Figure 1: Grafen for f i $x \in [-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ og $y \in [-2\pi, 2\pi]$. Sadelpunktet p_3 er mest tydelig i denne figur, imellem de to bump. p_1 er dog også synligt.

Vi anvender nu ABC-kriteriet, og beregner A, B hhv. C

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 48x + 10 \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sin y \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -x \cos y \tag{2}$$

Med disse kan vi nu bestemme $D = AC - B^2$ for hvert af de stationære punkter

$$D(p_1) = -1 \qquad D(p_2) = \frac{1}{3} \qquad D(p_3) = -\frac{1}{2} \qquad D(p_4) = 7 \qquad D(p_5) = \frac{7}{6} \tag{3}$$

Vi har da, jvf. sætning 3.4 TK, at p_1 og p_3 er sadelpunkter, idet $D < 0$, og de øvrige er lokale minima eller maxima. For at finde ud af, om de er minima eller maxima beregner vi A for dem

$$A(p_2) = 2 \qquad A(p_4) = -14 \qquad A(p_5) = 14 \tag{4}$$

Igen, jvf. sætning 3.4 TK har vi, at p_2 og p_5 er lokale minima, idet $A > 0$ og ligeledes p_4 er lokalt maximum, idet $A < 0$.

8.2 (Uden Maple)
Vi lader D betegne den halve enhedscirkelskive

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\} \tag{5}$$

og betragter funktionen $f : D \to \mathbb{R}^2$ givet ved

$$f(x, y) = 4xy^2 - x^2 \tag{6}$$

Giv en begrundelse for, at f har en størsteværdi og en mindsteværdi i D. Bestem disse værdier og angiv, i hvilke punkter af D disse værdier antages.

Mængden D er lukket med $0 \leq x \leq 1$ og $-1 \leq y \leq 1$, og funktionen f er kontinuert. Jvf. ekstremalværdisætningen 2.42 TK, må f da også have største- hhv. mindsteværdi i D.

Det er let at se ud fra ledene i f, at for at finde mindsteværdien, bør vi maksimere x^2 og minimere $4xy^2$, og omvendt for størsteværdien. Mindsteværdien er da $f(\pm 1, 0) = -1$ og størsteværdien er da $f(1, \pm 1) = 3$. Dette fremgår også tydeligt af grafen til højre.

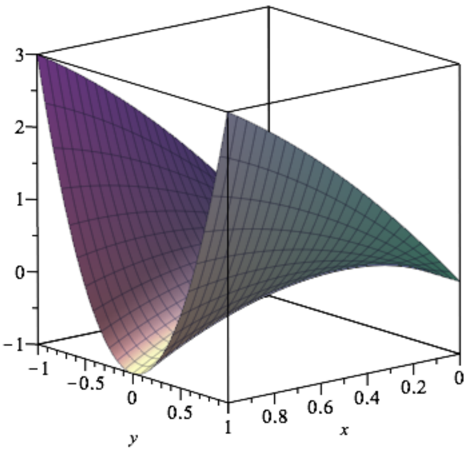

Figure 2: Graf for f i $x \in [0, 1]$ og $y \in [-1, 1]$

8.3 (Uden Maple)
Ved forsendelse af såkaldte ruller, altså pakker i cylinderform, kræver postvæsenet i Langbortistan, at summen af længden l og tre en halv gange diameteren d højst må være 84cm. Hvad er den maksimale volumen af sådan en rulle?

Redegør for, at opgaven kan løses ved at bestemme maksimum for en funktion $V(l, d)$ defineret i en afsluttet og begrænset delmængde af $\mathbb{R}^2$ (optimering under bibetingelser). Løs dette optimeringsproblem dels ved elimination af én af de variable og dels ved brug af Lagranges metode.

Betingelsen der opstilles af postvæsenet i Langbortistan er givet ved

$$l + \frac{7}{2}d \leq 84\text{cm} \tag{7}$$

og funktionen $V(l, d)$ for volumen er givet ved

$$V(l, d) = \pi l r^2 = \frac{\pi l d^2}{4},\ r = \frac{d}{2} \tag{8}$$

Vi skal altså finde størsteværdien af $V(l, d)$ på mængden

$$\{(l, d) \in \mathbb{R}^2 \mid l + \frac{7}{2}d = 84\} \tag{9}$$

Isolerer vi l hhv. d har vi, at

$$l = 84 - \frac{7}{2}d \qquad d = 24 - \frac{2l}{7} \tag{10}$$

Vi kan da udtrykke V som en funktion af én variabel — l eller d. Her givet på polynomiumform, da det gør differentiation lettere.

$$V(l) = \frac{\pi}{49}l^3 - \frac{24\pi}{7}l^2 + 144\pi l \tag{11}$$

$$V(d) = 21\pi d^2 - \frac{7\pi}{8}d^3 \tag{12}$$

Lad os differentiere disse

$$V(l) = \frac{3\pi}{49}l^2 - \frac{48\pi}{7}l + 144\pi \tag{13}$$

$$V(d) = 42\pi d - \frac{21\pi}{8}d^2 \tag{14}$$

Da $V(d)$ er et andengradspolynomium vælger vi at løse for $V'(d) = 0$

$$= \frac{-(42\pi) \pm \sqrt{(42\pi)^2 - 4(-21\pi/8) \cdot 0}}{2(-21\pi/8)} \tag{15}$$

$$= \frac{-42\pi \pm 42\pi}{-42\pi(1/8)} = (1 \pm 1)8 = 16 \tag{16}$$

$$\tag{17}$$

Idet vi ikke kan have en negativ diameter, må $d = 16$

Da vi nu kender d indsætter vi og beregner l

$$l = 84 - \frac{7}{2} \cdot 16 = 84 - \frac{112}{2} = 28 \tag{18}$$

Den maksimale volumen af pakken må da være

$$V(28, 16) = \frac{\pi 28 \cdot 16^2}{4} = \pi 7 \cdot 16^2 = 1792\text{cm}^3 \tag{19}$$

Lad os nu løse samme problemstilling vha. Lagranges multiplikationsmetode.

Vi beregner gradienterne for betingelsen, som vi vil benævne ved g, og volumen

$$\nabla g(l,d) = (1, \frac{7}{2}) \quad \nabla V(l,d) = (\frac{\pi d^2}{4}, \frac{2\pi l d}{4}) \tag{20}$$

Vi skal nu løse ligningssættet, som opfylder

$$1 = \lambda \frac{\pi d^2}{4} \quad \frac{7}{2} = \lambda \frac{2\pi l d}{4} \quad 84 = \frac{\pi l d^2}{4} \tag{21}$$

$$4 = \lambda \pi d^2 \quad 7 = \lambda \pi l d \quad 336 = \pi l d^2 \tag{22}$$

Øv. Noget gik galt, og kan ikke nå at rette det :(