7.1 Argumentér for, nedenstående funktion har et maksimum og minimum på den angivne mængde. (OBS: Når der ikke anføres "lokalt" eller "globalt", menes der per definition "globalt"). Illustrer grafen for funktionen på den angivne mængde ved hjælp af Maple. Angiv ud fra figuren, hvad du mener er maksimalpunkt og minimalpunkt samt maksimalværdi og minimalværdi.

$$f(x,y) = x + y^2, \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2, x - 2 \leq y \leq x\} \tag{1}$$

Ved omformulering af ulighederne, som definerer hvilke værdier x hhv. y kan antage, har vi at $0 \leq x + y^2 \leq 6$, hvilket viser at f er defineret i en lukket og begrænset mængde. Dette kan tjekkes efter ved $f(0,0) = 0+0 = 0$ hhv. $f(2,2) = 2 + 2^2 = 6$. Af dette kan vi da —jvf. ekstremalsætningen (TLK 2.42)— slutte, at f har maksimum og minimum, og er givet ved uligheden; funktionen f har altså minimalværdi 0 og maksimalværdi 6.

Som det fremgår af figuren til højre, er minimalværdien i $f(0,0) = 0$ og maksimalværdien i $f(2,2) = 6$.

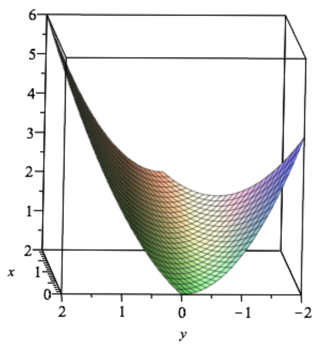

Figure 1: Grafen for $f(x,y) = x + y^2$

7.2 Løs TKO 2.17 a) og b) (uden brug af Maple). Derefter skal man ved brug af Maple tegne graf og tangentplan i samme figur (altså en figur for hver af delopgaverne).
Find funktionens tangentplan i det givne punkt.

a) $f(x,y) = 1 - 2x + 3y - 4yx$ i $\mathbf{a} = (1,-1)$.

Lad os bestemme gradienten ∇f. Vi beregner de partielt afledte

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 - 4y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3 - 4x \tag{2}$$

og gradienten er dermed

$$\nabla f(x,y) = (-2 - 4y, 3 - 4x) \tag{3}$$

Vi kan da beregne tangentplanen

$$h(\mathbf{x}) = f(1,-1) + \nabla f(1,-1) \cdot (\mathbf{x} - a) \tag{4}$$

$$= (2,-1) \cdot (\mathbf{x} - a) = 2x - y - 3 \tag{5}$$

Figure 2: Tangentplanen for f

b) $g(x,y) = \frac{1}{3}x^2 \cos y$ i $b = (\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$.

Ligeledes for g beregner vi gradienten ∇g

Figure 3: Tangentplanen for f

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{2}{3}x \cos y \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{1}{3}x^2 \sin y \tag{6}$$

gradienten er dermed

$$\nabla g(x,y) = (\frac{2}{3}x \cos y, -\frac{1}{3}x^2 \sin y) \tag{7}$$

Vi kan da beregne tangentplanen

$$h(\mathbf{x}) = g(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}) + \nabla f(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}) \cdot (\mathbf{x} - b) \tag{8}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), -\frac{1}{3}\sqrt{3}^2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \cdot (\mathbf{x} - b) \tag{9}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(1, -\frac{1}{2}\right) \cdot (x - \sqrt{3}, y - \frac{\pi}{6}) \tag{10}$$

$$= x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} \tag{11}$$

7.3 Tilstandsligningen for (et givet antal mol af) en gas angiver trykket P som funktion af volumenet V og temperaturen $T : P = f(V,T)$. For en idealgas er tilstandsligningen

$$P = nR\frac{T}{V}, \tag{12}$$

hvor n er moltallet og R er en konstant (gaskonstanten). Man kan selvfølgelig også udtrykke volumenet som funktion af tryk og temperatur, og temperatur som funktion af tryk og volumen:

$$V = nR\frac{T}{P}, \quad T = \frac{PV}{nR}. \tag{13}$$

Hvis man (naivt) forkorter i brøkerne, kunne man ledes til at tro at produktet

$$\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial P} \tag{14}$$

er lig med 1. Dette resultat er imidlertid ikke korrekt.

a) Beregn ved hjælp af de eksplicitte udtryk ovenfor de partielt afledte $\frac{\partial P}{\partial T}$, $\frac{\partial T}{\partial V}$, $\frac{\partial V}{\partial P}$.

$$\frac{\partial P}{\partial T} nR \frac{T}{V} = \frac{nR}{V} \qquad \frac{\partial T}{\partial V} \frac{PV}{nR} = \frac{P}{nR} \tag{15}$$

$$\frac{\partial V}{\partial P} nR \frac{T}{P} = \frac{\partial V}{\partial P} nRT \frac{1}{P} = \frac{\partial V}{\partial P} nRTP^{-1} = (-1)nRTP^{-2} = -\frac{nRT}{P^2} \tag{16}$$

b) Vis at produktet i (14) er lig med et tal forskelligt fra 1, hvilket?
Det viser sig, at denne værdi for produktet i (14) også holder for mere generelle tilstandsligninger end i idealgasligningen.

Vi opstiller, ganger ud og reducerer udtrykket

$$\frac{nR}{V} \cdot \frac{P}{nR} \cdot \left(-\frac{nRT}{P^2}\right) = -\frac{n^2R^2PT}{nRVP^2} = -\frac{nRT}{VP} = -nR\frac{T}{V} \cdot \frac{1}{P} = -\frac{P}{P} = -1 \tag{17}$$