6.1 Beregn $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right)$ for funktionen $f(x,y) = y^2(1+xy)$. Beregn endvidere $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right)$. Gør det samme for $g(x,y) = xy + \cos(2x+y)$ og $h(x,y) = x\ln(x^2 - 2y)$. Tegner der sig et mønster? Løs mindst en af opgaverne i hånden og mindst en med Maple.

Vi løser f i hånden, og starter med $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} y^2(1+xy)\right) = \frac{\partial}{\partial y} y^3 = 3y^2 \tag{1}$$

Dernæst beregner vi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} y^2(1+xy)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y + 3xy^2\right) = 3y^2 \tag{2}$$

Og bemærker, at de er ens.

Lad os tage g i hånden også, igen

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} xy + \cos(2x+y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y - 2\sin(2x+y)\right) = -2\cos(2x+y) \tag{3}$$

Og ligeledes

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} xy + \cos(2x+y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - 2\sin(2x+y)\right) = -2\cos(2x+y) \tag{4}$$

Og bemærker, igen, at de er ens.

Den sidste tager vi i Maple. Vi definerer da funktionen h således

```
h := (x,y) -> x ln(x^2 - 2y)
```

og beregner hhv. $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}$ og $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$ således

```
diff(diff(h(x,y), y), x)
diff(diff(h(x,y), x), y)
```

Begge producerer, som forventet, samme resultat

$$\frac{4x^2}{(x^2-2y)^2} - \frac{2}{x^2-2y} \tag{5}$$

Selvfølgelig er det der søges, at få afklaret er, at $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$.

6.2 Opgaven skal besvares uden Maple. Definer $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ ved $h(x,y) = \frac{\cos x - \cos y}{x^2 + y^2}$. Bestem $H(x) := \lim_{y \to 0} h(x,y)$, $x \in \mathbb{R}$ for alle $x \in \mathbb{R}$ (også $x = 0$). Er H en kontinuert funktion af x? Hvad siger dette om mulighederne for at vælge en værdi $c = h(0,0)$, sådan at h bliver kontinuert i hele $\mathbb{R}^2$?

...

6.3 Til oplysning: Funktionen arcsin : $[-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ er defineret som den omvendte funktion til sin : $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ og opfylder altså, at $\sin(\arcsin(x)) = x$ for alle $x \in [-1,1]$. Endvidere, arcsin er differentiabel op $(-1,1)$ med differentialkvotient $(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Spørgsmålene (a) og (b) herunder regnes uden Maple, (c) og (d) kun med Maple.

a) Bestem Taylorpolynomiet $T_3 f$ af 3. orden omkring udviklingspunktet $a = 0$ for funktionen $f = \arcsin$.

...

b) Beregn dette Taylorpolynomiums værdi $b = T_3 f(\frac{1}{2})$ i $x = \frac{1}{2}$. Forklar med udgangspunkt i ligningen $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, hvorfor tallet $6b$ er en tilnærmelse til π. Hvor meget afviger $6b$ fra den egen approksimation til π?

...

c) Det oplyses, at alle de afledte af arcsin er voksende i $[0,\frac{1}{2}]$. Hvilken maksimalt afvigelse garanterer TL Korollar 11.2.2 af $6b = 6T_3 f(\frac{1}{2})$ som tilnærmelse til π?

...

d) Gentag beregningerne i (a)–(c) til orden 100 i stedet for 3 (og med passende antal cifre i Maples udregninger).

...