2.1 Regn TLO 3.4.12 uden brug af elektroniske hjælpemidler. Vis på en (gerne håndtegnet) skitse, hvordan løsningerne ligger i den komplekse plan.

Find de komplekse løsninger til ligningen $z^2 - 2iz - (1+i) = 0$. Skriv svaret på formen $a + bi$.

Jvf. sætning 3.4.5[TL] har vi, at

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2i) \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1+i)}}{2 \cdot 1} = i \pm \frac{\sqrt{(-2i)^2 - (4+4i)}}{2} \tag{1}$$

$$= i \pm \frac{1}{2}\sqrt{(-8-4i)} = i \pm \frac{1}{2}2\sqrt{(-2-i)} = i \pm \sqrt{(-2-i)} \tag{2}$$

Vi skal nu finde kvadratroden til $(-2-i)$. Vi bestemme da først modulus;

$$|(-2-i)| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \tag{3}$$

Til bestemmelse af argumentet har vi, at

$$\cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}} \qquad \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{5}} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-1/\sqrt{5}}{-2/\sqrt{5}} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \tag{4}$$

Vi har da, at

$$\sqrt{(-2-i)} = \sqrt{5}e^{\arctan(\frac{1}{2})i} = \sqrt{5}\left(\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) + i\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right) \tag{5}$$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}^2}} + i\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}^2}}\right) = \sqrt{5}\left(\frac{1+i\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\right) = \sqrt{5}\left(\frac{1+i\frac{1}{2}}{\sqrt{5\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\right) \tag{6}$$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{1+i\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{5}}\right) = \frac{1\sqrt{5} + i\frac{1}{2}\sqrt{5}}{\frac{1}{2}\sqrt{5}} = \frac{1+i\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2+i \tag{7}$$

Vi fortsætter da vores udregning fra (2), ved at erstatte $\sqrt{(-2-i)}$ med den beregnede $2+i$, og får løsningerne

$$z_1 = i + (2+i) = 2+2i \qquad \text{og} \qquad z_2 = i - (2+i) = -2 \tag{8}$$

Se vedhæftede tegning for illustration af løsningerne.

2.2 Betragt funktionen $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x^2+3x+2}$, $x \in [0, \infty[$.

I det følgende vil jeg benævne $P(x) = 2x^2 - x - 1$ og $Q(x) = x^2 + 3x + 2$, for $x \in [0, \infty[$.

a) Tegn funktionens graf med Maple.

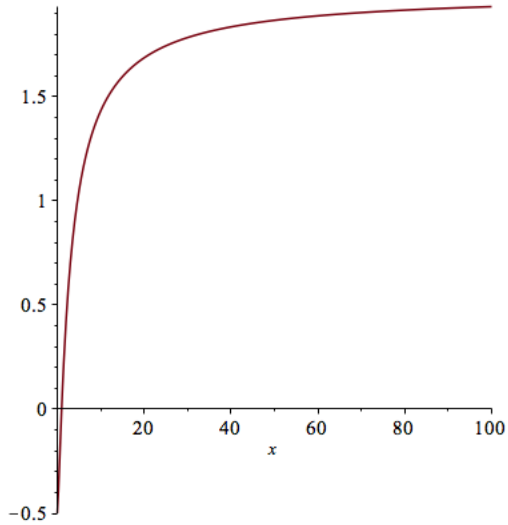

Figure 1: Graf for f i $x \in [0, 100]$

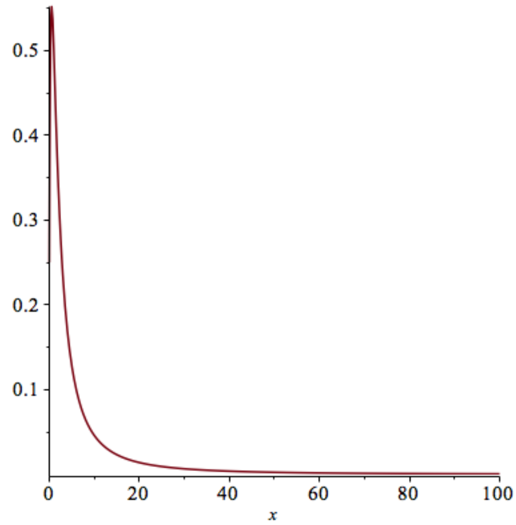

Figure 2: Graf for f' i $x \in [0, 100]$

b) Udregn den afledede $f'(x)$ (benyt gerne Maple) og vis, at den er positiv for alle $x \in [0, \infty[$.

$$f'(x) = \left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)' = \frac{P(x)'Q(x) - P(x)Q(x)'}{Q(x)^2} \tag{9}$$

$$= \frac{(4x-1)(x^2+3x+2) - (2x^2-x-1)(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} \tag{10}$$

$$= \frac{7x^2+10x+1}{(x^2+3x+2)^2} = (7x^2+10x+1)Q(x)^{-2} \tag{11}$$

En måde, at vise f' er positiv i intervallet $[0, \infty[$ er, at bemærke at begge andengradspolynomierne $7x^2+10x+1$ hhv. x^2+3x+2 består udelukkende af positive koefficienter. Vi ser bla., at deres skæring med andenaksen er $c = 1$ hhv. $c = 2$. Ydermere, så er deres afledte funktioners skæring med andenaksen $b = 10$ hhv. $b = 3$. Det fremgår af $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$. Hvilket betyder at tilvæksten for begge må nødvendigvis være positiv i $x = 0$. Sidst, men ikke mindst, så ved vi, at andengradspolynomier har et og kun ét lokalt ekstremum, og når $a > 0$ er parablen konveks og derfor er dette ekstremum et lokalt minimum. Når vi nu ved, at deres afledte har positiv tilvækst i $x = 0$, må tangenten i dette punkt nødvendigvis tilhøre højresiden af parablen — hvilket jo så medfører, at tangenten vokser når $x \to \infty$.

En mere koncis måde, kunne være at påvise at f' har kun negative rødder; $-\frac{5}{7} + \frac{3}{7}\sqrt{2}$ hhv. $-\frac{5}{7} - \frac{3}{7}\sqrt{2}$, og da $f'(0) = \frac{1}{4}$ følger det, at $f'(x) > 0$, $\forall x \in [0, \infty[$.

c) Bestem $\lim_{n\to\infty} f(n)$ (benyt ikke Maple).

Det fremgår tydeligt af grafen til f at funktionen har asymptote i $y = 2$

Hvis vi først og fremmest dividere $P(x)$ med dets højeste potensled x^2, kan vi nemmere bestemme grænseværdien for f. Så vi har at

$$\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{2 - 1/x - 1/x^2}{1 + 3/x + 2/x^2} \tag{12}$$

Vi bemærker, at alle led hvori x indgår nu er på formen $\frac{k}{x^a}$, og siden $\lim_{x\to\infty} k\frac{1}{x^a} = k \cdot \left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right)^a$, samt reglen om at $\lim_{x\to\infty} f(x) + g(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$ og vi ved at $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, har vi, at samtlige af disse led bliver nul. Derfor må

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2 - 1/x - 1/x^2}{1 + 3/x + 2/x^2} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{altså er} \quad \lim_{n\to\infty} f(n) = 2 \tag{13}$$

d) Bestem værdimængden for f.

Den øvre grænse $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$ er allerede fundet. Idet vi har påvist, at $f'(x) > 0$, $\forall x \in [0, \infty[$ ved vi, at f vil være voksende i hele definitionsmængden, og finder da nemt den nedre grænse for f ved indsættelse af laveste x-værdi;

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0^2 - 0 - 1}{0^2 + 3 \cdot 0 + 2} = -\frac{1}{2} \tag{14}$$

Altså er værdimængden $V_f = [-0.5, 2[$. Bemærk, at den øvre grænse ikke er med i værdimængden, da funktionen er asymptote i $y = 2$.

e) Lad $\epsilon = 0.1$. Bestem en værdi af N, som kan anvendes i TL definition 4.3.1, når denne definition benyttes på grænseovergangen i (c). Du må gerne benytte Maple til at finde en værdi af N, men du skal argumentere for, at den faktisk kan anvendes. Gentag for $\epsilon = 0.01$.

Først beregner vi $|a_n - a|$

$$|a_n - a| = \left|\frac{2n^2 - n - 1}{n^2 + 3n + 2} - 2\right| = \left|\frac{2n^2 - n - 1}{n^2 + 3n + 2} - 2\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n + 2}\right| \tag{15}$$

$$= \left|\frac{2n^2 - n - 1 - 2(n^2 + 3n + 2)}{n^2 + 3n + 2}\right| \tag{16}$$

$$= \left|\frac{2n^2 - n - 1 - 2n^2 - 6n - 4}{n^2 + 3n + 2}\right| = \left|\frac{-7n - 5}{n^2 + 3n + 2}\right| \tag{17}$$

$$= \frac{7n + 5}{n^2 + 3n + 2} \tag{18}$$

Da vi nu kender $|a_n - a|$ skal vi finde en passende værdi af N, således at $\frac{7n+5}{n^2+3n+2} < \epsilon$

Jeg benytter mig af Maple til, at finde disse værdier, og får at

$$N_1 = 67.70891697, \text{ for } \epsilon_1 = 0.1 \qquad \text{og} \qquad N_2 = 697.7137598, \text{ for } \epsilon_2 = 0.01 \tag{19}$$

Vi bemærker, at $\lim_{n\to\infty}|a_n - a| = 0$. Dvs. udtrykket går altså imod nul som n bevæger sig mod ∞, og $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1$. Derfor holder

$$|a_n - a| = \frac{7n+5}{n^2+3n+2} < \epsilon_1, \text{ hvis og kun hvis } n > N_1 \tag{20}$$

$$|a_n - a| = \frac{7n+5}{n^2+3n+2} < \epsilon_2, \text{ hvis og kun hvis } n > N_2 \tag{21}$$

2.3 Denne opgave omhandler, hvor hurtigt kaniner kan formere sig under idealiserede forhold. Vi antager, at vi starter med par nyfødte kaniner, en han- og en hunkanin. Forestil dig, at kaniner kan formere sig, når de er 1 måned gamle, og en hunkanin har en drægtighedsperiode på 1 måned, så ved udgangen af den 2. måned kan hun-kaninen føde et nyt kaninpar (men det nye kuld kommer først til umiddelbart efter 2. måned, således at der i 2. måned stadig kun er 1 kaninpar.) Vi antager, at vores kaniner ikke dør, og der ved hver fødsel kommer et kaninpar bestående af en han- og en hunkanin.

Lad $n \in \mathbb{N}$ betegne måned nummer n, med $n = 1$ som den første måned. Lad F_n betegne antallet af kaninpar i måneden n. Hvis kaninerne får lov til at formere sig til frit, vil det samlede antal kaninpar være summen af par de to foregående måned.

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \tag{22}$$

a) Giv en intuitiv forklaring på denne rekursionsformel. Hvad er begyndelsesbetingelserne F_1, F_2 i vores tilfælde? Bestem, hvor mange kaninpar der således vil være efter 1 år.

I første måned har vi det nyfødte kaninpar, og dermed er $F_1 = 1$. Ved begyndelsen af anden måned antages hunkaninen, at være drægtig, og siden en drægtighedsperioden er en måned, så må $F_2 = 1$ også. Det er altså først i tredje måned, hvor det første kuld fødes.

$$F_1 = 1 \qquad F_2 = 1 \tag{23}$$

I ord, kan man sige at F_{n+2} er antallet af kaninpar, som under disse ideelle omstændigheder, kan produceres af den foregående generation F_n, samt den nye generation F_{n+1}.

Til bestemmelse af antal kaninpar, med disse startbetingelser, efter 1 år, har vi at

$$\begin{aligned}
F_{12} &= F_{10} + F_{11} && (24)\\
&= F_8 + 2F_9 + F_{10} && (25)\\
&= F_6 + 3F_7 + 3F_8 + F_9 && (26)\\
&= F_4 + 4F_5 + 6F_6 + 4F_7 + F_8 && (27)\\
&= F_2 + 5F_3 + 10F_4 + 10F_5 + 5F_6 + F_7 && (28)\\
&\vdots && (29)\\
&= 144F_1 = 144 && (30)
\end{aligned}$$

Bemærk, at koefficienterne i lignerne ovenfor følger Pascal's trekant.

b) Vis at elementerne i følgen F_n opfylder $F_n \leq F_{n+1} \leq 2F_n$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$.
Vi definerer vækstraten for kaninbestanden ved $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$. Udregn vækstraten for $n = 1, 2, \ldots, 12$ og illustrer de beregnede værdier af a_n ved brug Maple.

Vi viser først, at F_n opfylder uligheden for $n = 1$

$$F_1 \leq F_{1+1} \leq 2F_1 = 1 \leq 1 \leq 2 \qquad (31)$$

Dernæst viser vi, at F_n opfylder uligheden for $n = k$, hvor $k \in \mathbb{N}$, altså

$$\begin{aligned}
F_k \leq F_{k+1} \leq 2F_k &\implies F_{k-2} + F_{k-1} \leq F_{k-1} + F_k \leq 2F_{k-2} + 2F_{k-1} && (32)\\
&\implies F_{k-2} \leq F_k \leq 2F_{k-2} + F_{k-1} && (33)\\
&\implies 0 \leq F_k - F_{k-2} \leq F_{k-2} + F_{k-1} && (34)\\
&\implies 0 \leq F_k - F_{k-2} \leq F_k && (35)
\end{aligned}$$

Det er tydeligt at se, at F_n opfylder uligheden idet $0 \leq k - a \leq k$, $\forall k, a \in \mathbb{N}$.

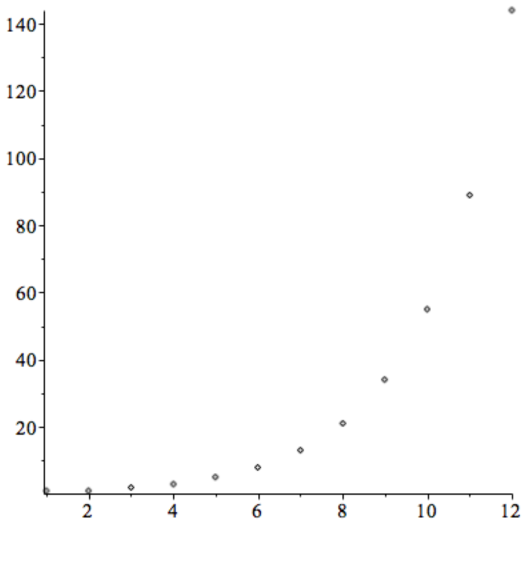

Figure 3: Grafen for F_n i $n \in [1, 12]$

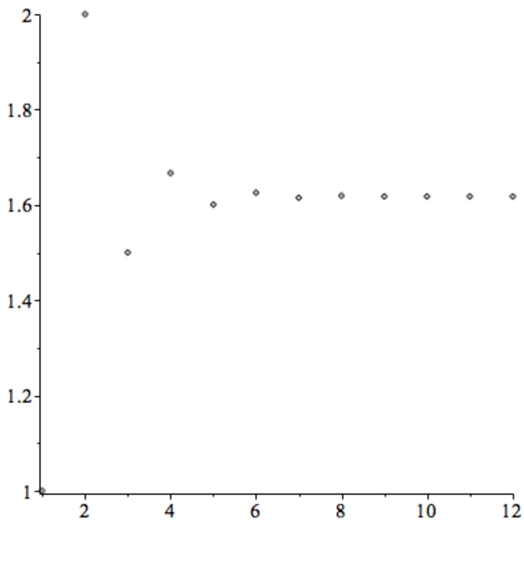

Figure 4: Grafen for a_n i $n \in [1, 12]$

c) Anfør ud fra din illustration i (b) et træk ved den første del af følgen a_n, der taler for, at følgen konvergent. Vi tillader os nu at antage, at dette kan uddybes til et bevis for at følgen *er* konvergent.

Bestem grænseværdien, a, af a_n for $n \to \infty$ uden brug af Maple. [Vink: opstil først rekursionsformlen $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ ud fra (1) og se, hvad der sker når $n \to \infty$.]

Det lader til, at $F_{2n-1} < k < F_{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, og $a_{n+1} < a_n$. Med andre ord, $F_n < a_n$, hvis n er ulige og omvendt er $F_n > a_n$, hvis n er lige. Dermed, så må a_n konvergere mod k.

Det ses også tydeligt på grafen for a_n i fig. 4, at forholdet mellem F_{n+1} og F_n konvergerer mod et tal k.

Vi opstiller forholdet, og beregner

$$a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_{n-1} + F_n}{F_n} = \frac{F_{n-1}}{F_n} + \frac{F_n}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{F_n/F_{n-1}} = 1 + \frac{1}{a_{n-1}} \tag{36}$$

Vi ser nu på, hvad grænseværdien $a = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_{n-1}}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_{n-1}} \implies a = 1 + \frac{1}{a} \implies a^2 = a + 1 \implies a^2 - a - 1 = 0 \tag{37}$$

Dette er en andengradspolynomium, for hvilket vi kan løse for a

$$a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \tag{38}$$

d) Hvis (1) i stedet (under passende begyndelsesbetingelser) havde været $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} - \alpha$ eller $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} - \gamma F_{n+1}$, med $\alpha \in \mathbb{N}$ og $\gamma \in]0, 1[$, hvad ville modellen så beskrive? Er dette en mere realistisk model?

I første tilfælde, hvor $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} - \alpha$, hvor $\alpha \in \mathbb{N}$, beskriver modellen et statisk dødsfald, hver måned, uafhængigt af kaninbestanden. Denne model er lidt mere realistisk end den oprindelige.

For det andet tilfælde, hvor $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} - \gamma F_{n+1}$, hvor $\gamma \in]0, 1[$, beskriver modellen da et dynamisk procentvis dødsfald i den forrige generation F_{n+1}. Idet $0 < \gamma < 1$ er vi sikre på, at en hvis procentdel af den forrige generation dør, men aldrig hele generationen. Antal dødsfald i den forrige generation kan altså beskrives ved γF_{n+1}, eller modsat antal overlevende kan beskrives ved $(1 - \gamma)F_{n+1}$ og dødsfaldsprocenten kan beskrives ved $1 - \gamma$ — ved omformulering af udtrykket har vi da, at $F_{n+2} = F_n + (1 - \gamma)F_{n+1}$. Denne model er nok den mest realistiske, da dødsfaldet afhænger af bestanden.