6.1 Beregn $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right)$ for funktionen $f(x,y) = y^2(1+xy)$. Beregn endvidere $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right)$. Gør det samme for $g(x,y) = xy + \cos(2x+y)$ og $h(x,y) = x\ln(x^2-2y)$. Tegner der sig et mønster? Løs mindst en af opgaverne i hånden og mindst en med Maple.

Vi løser f i hånden, og starter med $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} y^2(1+xy)\right) = \frac{\partial}{\partial y} y^3 = 3y^2 \tag{1}$$

Dernæst beregner vi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} y^2(1+xy)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y + 3xy^2\right) = 3y^2 \tag{2}$$

Og bemærker, at de er ens.

Lad os tage g i hånden også, igen

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} xy + \cos(2x+y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y - 2\sin(2x+y)\right) = -2\cos(2x+y) \tag{3}$$

Og ligeledes

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} xy + \cos(2x+y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - 2\sin(2x+y)\right) = -2\cos(2x+y) \tag{4}$$

Og bemærker, igen, at de er ens.

Den sidste tager vi i Maple. Vi definerer da funktionen h således

```
h := (x,y) -> x ln(x^2 - 2y)
```

og beregner hhv. $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}$ og $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$ således

```
diff(diff(h(x,y), y), x)
diff(diff(h(x,y), x), y)
```

Begge producerer, som forventet, samme resultat

$$\frac{4x^2}{(x^2-2y)^2} - \frac{2}{x^2-2y} \tag{5}$$

Selvfølgelig er det der søges, at få afklaret er, at $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$.

6.2 Opgaven skal besvares uden Maple. Definer $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ ved $h(x,y) = \frac{\cos x - \cos y}{x^2+y^2}$. Bestem $H(x) := \lim_{y\to 0} h(x,y)$, $x \in \mathbb{R}$ for alle $x \in \mathbb{R}$ (også $x = 0$). Er H en kontinuert funktion af x? Hvad siger dette om mulighederne for at vælge en værdi $c = h(0,0)$, sådan at h bliver kontinuert i hele $\mathbb{R}^2$?

Vi har at

$$H(x) = \lim_{y\to 0} h(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{\cos x - \cos y}{x^2+y^2} = \frac{\cos x - \lim_{y\to 0}\cos y}{x^2 + \lim_{y\to 0} y^2} = \frac{\cos x - 1}{x^2} \tag{6}$$

Vi bemærker, at i $x = 0$ er $H(x)$ et $\frac{0}{0}$-udtryk, og derfor vil vi se på grænsen $\lim_{x\to 0} H(x)$ for at undersøge om denne eksistere.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} -\frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} -\frac{\cos x}{2} = -\frac{1}{2} \tag{7}$$

Idet denne grænse eksisterer er funktionen $H(x)$ kontinuert. Lader vi $x = 0$ for dette udtryk får vi nøjagtig det samme, og dermed er $c = h(0,0) = -\frac{1}{2}$ — $h(x,y)$ er altså kontinuert i hele $\mathbb{R}^2$.

6.3 Til oplysning: Funktionen $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ er defineret som den omvendte funktion til $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ og opfylder altså, at $\sin(\arcsin(x)) = x$ for alle $x \in [-1,1]$. Endvidere, arcsin er differentiabel på $(-1,1)$ med differentialkvotient $(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Spørgsmålene (a) og (b) herunder regnes uden Maple, (c) og (d) kun med Maple.

a) Bestem Taylorpolynomiet $T_3 f$ af 3. orden omkring udviklingspunktet $a = 0$ for funktionen $f = \arcsin$.

Lad os differentiere og beregne de tilhørende koefficienter

$$f = \arcsin(x) \qquad f(0) = 0 \tag{8}$$

$$f' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad f'(0) = 1 \tag{9}$$

$$f'' = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}} \qquad f''(0) = 0 \tag{10}$$

$$f''' = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}} + \frac{3x^2}{\sqrt{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}} \qquad f'''(0) = 1 \tag{11}$$

Da kan vi beregne Taylorpolynomierne $T_k f(x)$, for $k \in [0,3]$

$$T_0 f(x) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}(x-0)^0 = 0 \tag{12}$$

$$T_1 f(x) = T_0 f(x) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}(x-0)^1 = x \tag{13}$$

$$T_2 f(x) = T_1 f(x) + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2 = x \tag{14}$$

$$T_3 f(x) = T_2 f(x) + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^2 = x + \frac{x^3}{6} \tag{15}$$

Taylorpolynomiet $T_3 f$ af 3. orden er derfor $\frac{1}{6}x^3 + x$

b) Beregn dette Taylorpolynomiums værdi $b = T_3 f(\frac{1}{2})$ i $x = \frac{1}{2}$. Forklar med udgangspunkt i ligningen $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, hvorfor tallet $6b$ er en tilnærmelse til π. Hvor meget afviger $6b$ fra din egen approksimation til π?

Vi beregner $b = T_3 f(\frac{1}{2})$ hhv. $6b$

$$b = T_3 f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{48} = \frac{50}{96} = \frac{50}{96} \qquad 6b = 6\frac{50}{96} = 3.125 \tag{16}$$

Vi ved at $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ og $\arcsin(\sin(x)) = x$, vi har derfor, at

$$6 \arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 6\frac{\pi}{6} = \pi \tag{17}$$

Idet $T_3 f$ er en approksimation af arcsin må $6b$ da være en approksimering af π.

c) Det oplyses, at alle de afledte af arcsin er voksende i $[0, \frac{1}{2}]$. Hvilken maksimalt afvigelse garanterer TL Korollar 11.2.2 af $6b = 6T_3 f(\frac{1}{2})$ som tilnærmelse til π?

I Maple løser jeg for M i TL korollar 11.2.2 ved

```
n := 3
a := 0

lhs := (d^(n+1)/d x^(n+1) arcsin(x)) * ((n+1)!)^(-1) * |x - a|^(n+1)
rhs := M / ((n+1)!) * |x - a|^(n+1)

solve(subs(x = 1/2, evalf(lhs = rhs)), M)
```

Og får $M = 86.217642$

d) Gentag beregningerne i (a)–(c) til orden 100 i stedet for 3 (og med passende antal cifre i Maples udregninger).

I Maple skriver jeg

```
a := 0
mtaylor(arcsin(x), x=a, 100)
```

og får $T_{100} f$.

Ved beregning af $6b = 6T_{100} f(\frac{1}{2})$ giver Maple mig en tilnærmelse af π på 3.1415926536146024854, hvor `Digits := 20`.

I Maple løser jeg for M i TL korollar 11.2.2 ved

```
n := 100
a := 0

lhs := (d^(n+1)/d x^(n+1) arcsin(x)) * ((n+1
rhs := M / ((n+1)!) * |x - a|^(n+1)

solve(subs(x = 1/2, evalf(lhs = rhs)), M)
```

Og får $M = 6.2175212 \cdot 10^{344}$