3.1 Lad $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}$ for alle $x \in \mathbb{R}$ med $x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Til følgende opgaver defineres følgende erklæres følgende udsagn i Maple.

```
f := x -> (1/x) - cos(x)/sin(x)
```

a) Find grænseværdierne $\lim_{x\to 0+} f(x)$, $\lim_{x\to\pi-} f(x)$ først med og dernæst uden Maple.

I Maple skriver vi følgende og får resultaterne 0 hhv. $\frac{1}{\pi} - \frac{\cos\pi}{\sin\pi}$.

```
limit(f(x), x=0, right);
limit(f(x), x=pi, left);
```

Ved håndregning af $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ omformulerer vi

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x}\right) \tag{1}$$

Vi kan se, at (1) er et $\frac{0}{0}$-udtryk, når $x \to 0+$, og benytter derfor L'Hôpital's regel, indtil vi har en grænseværdi, der giver mening.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x}\right) \tag{2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x}\right) \tag{3}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x + x\cos x}{2\cos x - \sin x}\right) = \frac{0}{2} = 0 \tag{4}$$

Altså, er $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = 0$.

For $\lim_{x\to\pi^-} f(x)$ har igen vi, at

$$\lim_{x\to\pi^-}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to\pi^-}\left(\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x}\right) \tag{5}$$

Vi bemærker at $\lim_{x\to\pi^-} x\sin x = 0$, medens $\lim_{x\to\pi^-} \sin x - x\cos x = -\pi(-1) = \pi$. Nævneren er altså 0 i $x = \pi$, men da $\sin x > 0$, $\forall x \in (2n\pi, (2n+1)\pi)$, hvor $n \in \mathbb{Z}$ ved vi, at $\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x} > 0$, $\forall x \in (2n\pi, (2n+1)\pi)$, hvor $n \in \mathbb{Z}$. Nævneren bliver altså meget lille, men er fortsat positiv. Derfor har vi at

$$\lim_{x\to\pi^-}\left(\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x}\right) = \infty \tag{6}$$

b) Vis, at f er strengt voksende i hvert interval $(n\pi, (n+1)\pi)$. Uligheden $|\sin x| < |x|$ for $x \neq 0$ kan benyttes uden bevis (den er vist i TLO side 240).

Lad os først differentiere f, da denne vil give os mulighed for at undersøge væksten af funktionen.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' - \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\cos(x)^2}{\sin(x)^2} - \frac{1}{x^2} + 1 \tag{7}$$

Konstanten kan vi ignorere. Vi bemærker at de nævnerne i de øvrige led er kvadrerede, og dermed altid positive. For at f kan vises at være strengt voksende i intervallet, må vi da vise, at $\frac{\cos(x)^2}{\sin(x)^2} > \frac{1}{x^2}$. Siden $|\sin x| < |x|$ og $0 \leq \cos(x)^2 \leq 1$ holder dette udsagn. I tilfældet, hvor $x = n\pi$, hvor $n \in \mathbb{Z}$, er funktionen ikke defineret pga. division med nul og ekskluderes derfor fra D_f. Uligheden holder derfor kun i $x \in (n\pi, (n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Vi har altså, at

$$f'(x) = \frac{\cos(x)^2}{\sin(x)^2} - \frac{1}{x^2} + 1 > 0, \forall x \in (n\pi, (n+1)\pi) \tag{8}$$

c) Bevis, at ligningen $f(x) = 0$ ikke har nogen løsninger i $(0, \pi)$, og at den har præcis én løsning i $(\pi, 2\pi)$. Benyt Maple til at finde en approksimering til denne løsning.

Siden vi ved, at f er strengt voksende (se opgave 3.1b)) i $(n\pi, (n+1)\pi)$ og at $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$ gælder, at $0 < f(x)$, $\forall x \in (n\pi, (n+1)\pi)$. Hvis vi lader $n = 0$ har vi, at $0 < f(x)$, $\forall x \in (0, \pi)$ og dermed også $f(x) \neq 0$, $\forall x \in (0, \pi)$ — ligningen $f(x) = 0$ har altså ingen løsninger i $(0, \pi)$.

Igen, idet vi ved at f er strengt voksende i intervaller $(n\pi, (n+1)\pi)$, skal vi blot argumentere at $\lim_{x\to\pi+} f(x) < 0 < \lim_{x\to 2\pi-}$, hvilket ville medføre, at f nødvendigvis må skære x-aksen i intervallet.

I opgave (a) dragede vi følgende udsagn; $\sin x > 0$, $\forall x \in (2n\pi, (2n+1)\pi)$. Tilsvarende gælder det, at $\sin x < 0$, $\forall x \in ((2n+1)\pi, 2n\pi)$, derfor har vi, at

$$\lim_{x\to\pi^+} \left(\frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x} \right) = -\lim_{x\to\pi^-} \left(\frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x} \right) = -\infty \tag{9}$$

Ligeledes, observerer vi, at $\sin(2\pi) = \sin(\pi)$ og $\cos(2\pi) = -\cos\pi$. Dette minder meget om $\lim_{x\to\pi^-} f(x)$, men vi skal huske at vende fortegnet, da det nu gælder at $\sin x < 0$ i intervallet, som påvist tidligere. Altså, idet $\cos(2\pi) = -\cos\pi$, skal vi vende fortegnet, men siden $\sin x < 0$ i intervallet, skal vi igen vende det. Vi har derfor, at

$$\lim_{x\to 2\pi^-} \left(\frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x} \right) = \lim_{x\to\pi^-} \left(\frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x} \right) = \infty \tag{10}$$

Ud fra dette, kan vi slutte, at $\lim_{x\to\pi^+} < 0 < \lim_{x\to 2\pi^-}$, og siden $f(a) < f(b)$, $\forall a < b \in (\pi, 2\pi)$ ved vi, at der findes en og kun én løsning til ligningen $f(x) = 0$ i $x \in (\pi, 2\pi)$.

I Maple finder jeg approksimeringen af $f(x) = 0$, $x \in (\pi, 2\pi)$ ved

```
fsolve(f(x)=0,x=Pi..2Pi)
```

hvilket giver mig en approksimation på $x \approx 4.493409457909064175308$

3.2 En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineres ved (11)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{(x-1)(x-3)} & x \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty) \\ x & x \in [1; 3] \end{cases} \tag{11}$$

I Maple har jeg erklæret funktionen, som følger

```
c1 := x -> x < 1 or x > 3
c2 := x -> 1 <= x <= 3

f1 := x -> (1 - x^2) / ((x - 1)(x - 3))
f2 := x -> x

f  := x -> piecewise(c1(x), f1(x), c2(x), f2(x))
```

a) Lav i Maple et plot af et udsnit af grafen for f, der giver et retvisende og oplysende billede af funktionens overordnede opførsel.

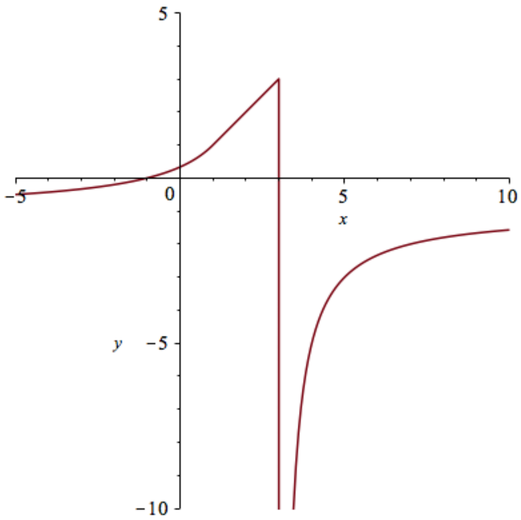

Figure 1: Grafen for f i intervallet $x, y \in [-5, 10]$

b) Er f differentiabel i $x = 1$? Begrund dit svar uden brug af Maple.

Ja. Vi ved, at

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) \implies \exists \lim_{x \to a} f(x) \tag{12}$$

Det er let at se, at $\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$, så lad os kigge på den anden side.

Vi ser, at $\frac{1-x^2}{(x-1)(x-3)}$ giver et $\frac{0}{0}$-udtryk for $x = 1$. Derfor ganger vi først ud, for at gøre det nemmere

$$\frac{1-x^2}{(x-1)(x-3)} = \frac{1-x^2}{x^2-4x+3} \tag{13}$$

og benytter os derefter af L'Hôpitals regel.

$$\lim_{x \to 1-} \frac{1-x^2}{x^2-4x+3} = \lim_{x \to 1-} \frac{-2x}{2x-4} = 1 \tag{14}$$

Da $\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} = 1$, har vi at

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \tag{15}$$

Og funktionen f er derfor differentiabel i $x = 1$.

3.3 (iii) Betragt funktionen $f(x) = x(\ln(x+1) - \ln x), x > 0$.

a) Tegn grafen for $0 < x \leq 100$ og gæt på $\lim_{x \to \infty} f(x)$ ud fra denne.

Funktionen defineres og plottes i Maple som

```
f := x -> x (ln(x + 1) - ln(x))

plot(f(x), x=0..100)
```

Mit umiddelbare gæt er, at funktionen er asymptote med $y = 1$, og derfor at $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$.

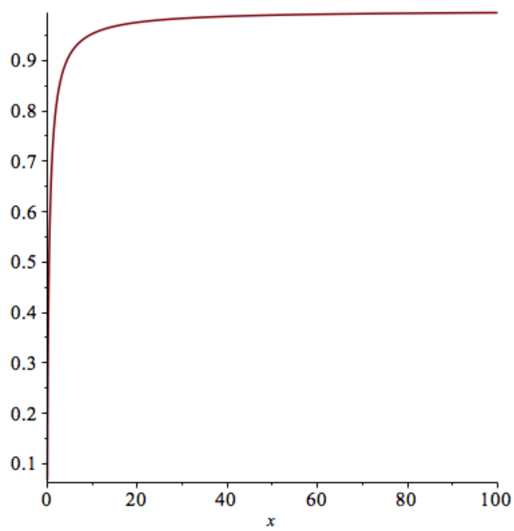

Figure 2: Grafen for f i intervallet $x \in [0, 100]$

b) Beregn i Maple $f(10^n)$ for $n = 1, \ldots, 10$ (brug f. eks. værdien 20 af Digits=antal decimaler). Gæt igen på $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ud fra disse tal.

I Maple angiver jeg

```
Digits := 22

evalf(f(10^1))
evalf(f(10^2))
evalf(f(10^3))
evalf(f(10^4))
evalf(f(10^5))
evalf(f(10^6))
evalf(f(10^7))
evalf(f(10^8))
evalf(f(10^9))
evalf(f(10^10))
```

Og får følgende resultater;

$$f(10^1) = 0.95310179804324860044 \tag{16}$$
$$f(10^2) = 0.9950330853168082848 \tag{17}$$
$$f(10^3) = 0.999500333083533167 \tag{18}$$
$$f(10^4) = 0.99995000333308335 \tag{19}$$
$$f(10^5) = 0.999995000033333 \tag{20}$$
$$f(10^6) = 0.99999950000033 \tag{21}$$
$$f(10^7) = 0.99999995000000 \tag{22}$$
$$f(10^8) = 0.99999999500000 \tag{23}$$
$$f(10^9) = 0.99999999950000 \tag{24}$$
$$f(10^{10}) = 0.99999999995000 \tag{25}$$

Hvilket stemmer meget godt overens med mit første gæt, og mit er derfor uændret, ud fra disse resultater.

c) Bestem $\lim_{x\to\infty} f(x)$ uden brug af Maple. Kommenter resultaterne fra (a) og (b).

Vi starter med at omformulere udtrykket

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\left(\ln(x+1) - \ln(x)\right) = \lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \tag{26}$$
$$= \lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x} \tag{27}$$

Vi bemærker nu at $\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$, da som $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ og $\ln 1 = 0$. Ligeledes, går nævneren imod 0 når $x \to \infty$. Vi har derfor et $\frac{0}{0}$-udtryk, og anvender derfor L'Hôpitals regel;

$$\frac{\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}(1/x)} = \frac{\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{\lim_{x\to\infty}(1/x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+1/x} = \frac{1}{1} = 1 \tag{28}$$