

- 6.1** Beregn $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right)$ for funktionen $f(x, y) = y^2(1 + xy)$. Beregn endvidere $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right)$. Gør det samme for $g(x, y) = xy + \cos(2x + y)$ og $h(x, y) = x \ln(x^2 - 2y)$. Tegner der sig et mønster? Løs mindst en af opgaverne i hånden og mindst en med Maple.

Vi løser f i hånden, og starter med $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} y^2(1 + xy) \right) = \frac{\partial}{\partial y} y^3 = 3y^2 \quad (1)$$

Dernæst beregner vi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} y^2(1 + xy) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2y + 3xy^2) = 3y^2 \quad (2)$$

Og bemærker, at de er ens.

- 6.2** Opgaven skal besvares uden Maple. Definer $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ ved $h(x, y) = \frac{\cos x - \cos y}{x^2 + y^2}$. Bestem $H(x) := \lim_{y \rightarrow 0} h(x, y)$, $x \in \mathbb{R}$ for alle $x \in \mathbb{R}$ (også $x = 0$). Er H en kontinuert funktion af x ? Hvad siger dette om mulighederne for at vælge en værdi $c = h(0, 0)$, sådan at h bliver kontinuert i hele \mathbb{R}^2 ?

...

- 6.3** Til oplysning: Funktionen $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ er defineret som den omvendte funktion til $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ og opfylder altså, at $\sin(\arcsin(x)) = x$ for alle $x \in [-1, 1]$. Endvidere, \arcsin er differentiabel op $(-1, 1)$ med differentialkvotient $(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Spørgsmålene (a) og (b) herunder regnes uden Maple, (c) og (d) kun med Maple.

- a) Bestem Taylorpolynomiet $T_3 f$ af 3. orden omkring udviklingspunktet $a = 0$ for funktionen $f = \arcsin$.

...

- b) Beregn dette Taylorpolynomiums værdi $b = T_3 f(\frac{1}{2})$ i $x = \frac{1}{2}$. Forklar med udgangspunkt i ligningen $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, hvorfor tallet $6b$ er en tilnærmelse til π . Hvor meget afviger $6b$ fra den egen approksimation til π ?

...

- c)** Det oplyses, at alle de afledte af \arcsin er voksende i $[0, \frac{1}{2}]$. Hvilken maksimalt afvigelse garanterer TL Korollar 11.2.2 af $6b = 6T_3f(\frac{1}{2})$ som tilnærmelse til π ?

...

- d)** Gentag beregningerne i (a)–(c) til orden 100 i stedet for 3 (og med passende antal cifre i Maples udregninger).

...