9.1 Tegn en skitse af mængden

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2, 1 - y \leq x \leq 1\} \tag{1}$$

som her er opskrevet på formen (5.2) fra bogens side 154.

Udregn planintegralet af x^2y over D som et itereret integral med integration mht. x inderst.

Opskriv dernæst den samme mængde D på lærebogens form (5.1) og udregn det samme planintegral, nu med integration mht. x yderst.

Illustrer ved brug af Maple den figur, hvis rumfang integralet udtrykker.

Først identificerer vi delelementerne af (5.2) formen

$$c = 0 \quad d = 2 \quad v(y) = 1 - y \quad h(y) = 1 \tag{2}$$

Så opstiller og beregner vi planintegralet af x^2y over D som et itereret integral med x inderst, ud fra sætning 5.2 TK, pkt. 2

$$\int_0^2 \left(\int_{1-y}^1 x^2y \, dx \right) dy = \frac{4}{5} \tag{3}$$

I Maple skriver jeg da

```
c := 0; d := 2;
v := y -> 1 - y; h := y -> 1;

Fx := Int(y*x^2, x=v(y)..h(y))
Int(Fx, y=c..d)
```

Hvilket giver $\frac{4}{5}$, som angivet i ligningen ovenfor.

Omskriver vi (1) fra til lærebogens form (5.1) har vi

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq x + 1\} \tag{4}$$

hvilket vi da kan opstille integralet for, jvf. sætning 5.2 TK, pkt. 1

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{x+1}^2 x^2y \, dy \right) dx = \frac{4}{5} \tag{5}$$

I Maple skriver vi ligeledes

```
a := -1; b := 1;
u := x -> x + 1; o := x -> 2;

Fy := Int(y * x^2, y=u(x)..o(x))
Int(Fy, x=a..b)
```

Hvilket igen giver $\frac{4}{5}$, som angivet i ligningen ovenfor.

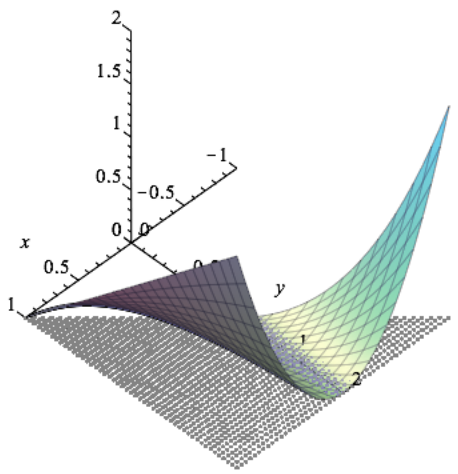

Figure 1: Illustration af x^2y over D

9.2 Udregn både ved brug af kartesiske koordinater og ved brug af polære koordinater planintegralet $\int_D x^2 dA$, når D er den halve cirkelskive

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\} \tag{6}$$

Vi opskriver det itererede integrale i kartesiske koordinater (venstre) og i polære koordinater (højre) ved

$$\int_{-1}^{0} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 \, dy \right) \, dx \qquad \int_0^1 r^3 \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^2 \, d\theta \right) \, dr \tag{7}$$

I Maple udregner vi da ved

```
int(int(f(x,y),y=-sqrt(1-x^2)..sqrt(1-x^2)),x=-1..0)
int(x^3*int(cos(y)^2,y=-pi/2..pi/2),x=0..1)
```

Begge giver resultatet $\frac{1}{8}\pi$, omend Maple glemmer at reducere lidt i udtrykket for udregning med polære koordinator — at køre *value* funktionen på resultatet afvikler dog dette.