1.1 Betragt funktionerne $f_1 = \frac{x^2-7}{x+\sqrt{7}}$ og $f_2 = \frac{x^2-7}{x+2.645751311}$. Lav et Maple-plot af graferne for de to funktioner med x i intervallet $[-2.6458, -2.6457]$. Forklar, hvad du ser.

Som det fremgår af graferne nedenfor, er grafen for f_1 kontinuert, hvorimod approksimeringen af $\sqrt{7}$ giver et brud i grafen for f_2, hvilket gør at grafen ikke er kontinuerlig. Dette sker i $x = -2.645751311$, da nævneren for brøken da vil være lig 0.

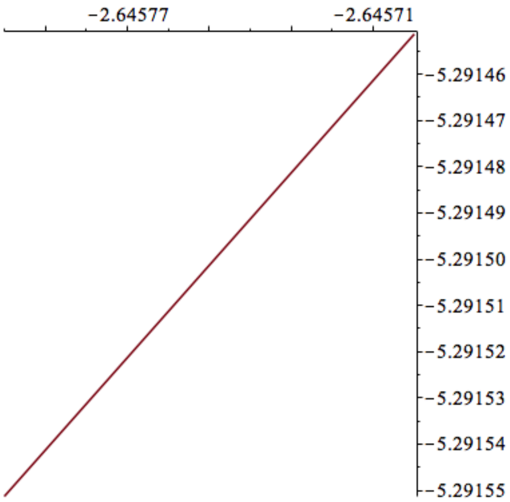

Figure 1: Graf for funktionen f_1

Figure 2: Graf for funktionen f_2

1.2 Lad $z = 3 + 4i$ og $w = 2 + i$

a) Bestem hvert af tallene $z - 2w$, $iz + w$, zw, $\frac{z}{w}$ og w^2

$$\begin{aligned} z - 2w &= (3+4i) - 2(2+i) \\ &= (3+4i) - (4+2i) \\ &= 3 - 4 + 4i - 2i \\ &= -1 + 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} zw &= (3+4i)(2+i) \\ &= 6 + 3i + 4i^2 + 8i \\ &= 2 + 11i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^2 &= (2+i)(2+i) \\ &= 2^2 + i^2 + 2 \cdot 2i \\ &= 4 - 1 + 4i \\ &= 3 + 4i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} &= \frac{(3+4i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \\ &= \frac{6 - 3i + 8i + 4i(-i)}{4 - 2i + 2i + i(-i)} \\ &= \frac{10+5i}{5} \\ &= 2 + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iz + w &= i(3+4i) + (2+i) \\ &= 3i + 4i^2 + (2+i) \\ &= (-4+3i) + (2+i) \\ &= -2 + 4i \end{aligned}$$

b) Bestem endvidere modulus og argument for w.

$$|w| = \sqrt{\mathrm{Re}(w)^2 + \mathrm{Im}(w)^2} = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \qquad w_\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}(w)}{\mathrm{Re}(w)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26.6°$$

1.3 Lad $w = \frac{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}i\right)}{\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i\right)}$

a) Udregn modulus og argument af det komplekse tal w og indtegn det i den komplekse plan

Først og fremmest simplicerer vi z og får da, at

$$w = -\frac{8}{5} + \frac{1}{5}i$$

Dernæst finder vi modulus

$$|w| = \sqrt{\left(-\frac{8}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{5}\sqrt{65}$$

Og argumentet

$$w_\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{8}{5}}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{8}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) - \pi$$

b) Lad $z = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}i$. Indtegn tallene $z^{-8}, z^{-7}, \ldots, z^{-1}, z^0, z, z^2, \ldots, z^8$ i den komplekse plan og forklar resultatet.

Med udgangspunkt i z^x ser vi for $\{x \in Z | x > 0\}$ bevæger vi os z_θ modsat urets retning om origo. Modsat, for $\{x \in Z | x \leq 0\}$ bevæger vi os med urets retning om origo. Det fremgår også, at z^0 er et reelt tal, da $z_\theta = 0$.

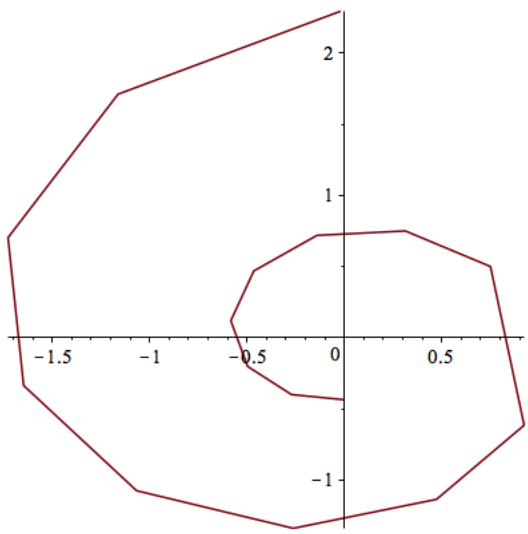

Figure 3: Plot i den komplekse plan over z^x, hvor $x \in \{-8, \ldots, 8\}$