5.1 Betragt funktionen $f(x,y) = \sqrt{4xy - 3y^2}$

I de følgende opgaver er følgende deklareret i Maple

```
g := (x,y) -> 4xy - 3y^2
f := (x,y) -> sqrt(g(x,y))
```

a) Bestemt definitionsmængden D_f. Skitser (uden Maple) D_f i et xy-diagram.

Under antagelsen om, at f er en *reel* funktion er definitionsmængdien da $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 4xy - 3y^2 \geq 0\}$.

Løser vi for y iht. ovenstående betingelse, får vi en ret linje, som viser D_f

$$4xy - 3y^2 = 0 \tag{1}$$

$$3y^2 = 4xy \tag{2}$$

$$y^2 = \frac{4}{3}xy \tag{3}$$

$$y = \frac{4}{3}x \tag{4}$$

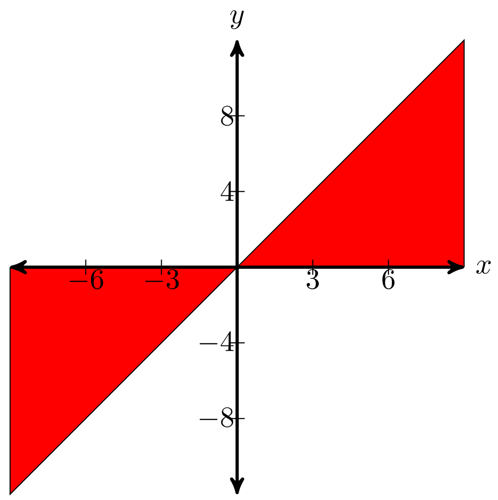

Figure 1: Illustration af D_f i xy-diagram.

Bemærk at x-aksens intervaller er inddelt i multipla af 3, og tilsvarende y-aksens intervaller er inddelt i multipla af 4.

b) Lav (med Maple) et `plot3d` af funktionen $4xy - 3y^2$, og sammensæt dette med et plot af xy-planen, således at uligheden $4xy - 3y^2 \geq 0$ illustreres.

I Maple skriver jeg

```
plot3d([f(x),0])
```

som giver figuren nedenfor

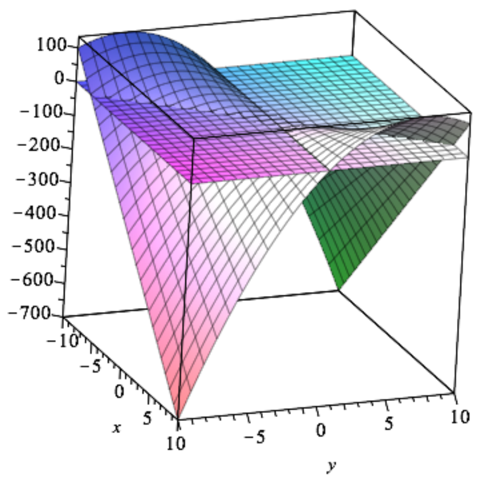

Figure 2: Grafen for f, samt $(x,y) = 0$.

c) Bestem (uden Maple) $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h,rh)}{h}$ for alle $r \in [0, \frac{4}{3}]$.

Opstiller vi udtrykket, ser vi at vi kan faktorisere h^2 ud af kvadratroden, og går derfor ud med nævneren. Vi har derfor, at

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{4rh^2-3r^2h^2}}{h}\right) = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{h\sqrt{4r-3r^2}}{h}\right) = \lim_{h\to 0^+}\left(\sqrt{4r-3r^2}\right) = \sqrt{4r-3r^2} \tag{5}$$

Bemærk, at h er positiv som $h \to 0$ og derfor er grænseværdien også.

5.2 Betragt funktionen $f(x) = x^4 + 7x^2 - 2$.

a) Bestem alle Taylorpolynomierne omkring $x = 1$ for funktionen (uden Maple).

Først differenerer vi f fire gange, da f er et fjerdegradspolynomium. Og beregner tilhørende koefficienter.

$$\begin{aligned}
f &= x^4 + 7x^2 - 2 & f(1) &= 6 && (6)\\
f' &= 4x^3 + 14x & f'(1) &= 18 && (7)\\
f'' &= 12x^2 + 14 & f''(1) &= 26 && (8)\\
f''' &= 24x & f'''(1) &= 24 && (9)\\
f'''' &= 24 & f''''(1) &= 24 && (10)
\end{aligned}$$

Vi kan da beregne $T_0 f(x)$

$$T_0 f(x) = f^{(0)}(1)(x-1)^0 = 6 \tag{11}$$

Og følgende $T_k f(x)$, for $k \in [1, 4]$

$$\begin{aligned}
T_1 f(x) &= T_0 f(x) + \frac{f^{(1)}(1)}{1}(x-1)^1 && (12)\\
&= 6 + 18(x-1) = 18x - 12 && (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2 f(x) &= T_1 f(x) + \frac{f^{(2)}(1)}{2}(x-1)^2 && (14)\\
&= 18x - 12 + 13(x^2 + 1 - 2x) && (15)\\
&= 13x^2 - 8x + 1 && (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3 f(x) &= T_2 f(x) + \frac{f^{(3)}(1)}{6}(x-1)^3 && (17)\\
&= 13x^2 - 8x + 1 + 4(x-1)^3 && (18)\\
&= 4x^3 + x^2 + 4x - 3 && (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_4 f(x) &= T_3 f(x) + \frac{f^{(4)}(1)}{24}(x-1)^4 && (20)\\
&= 4x^3 + x^2 + 4x - 3 + (x-1)^4 && (21)\\
&= x^4 + 7x^2 - 2 && (22)
\end{aligned}$$

Bemærk, at $f(x) = T_4 f(x)$.

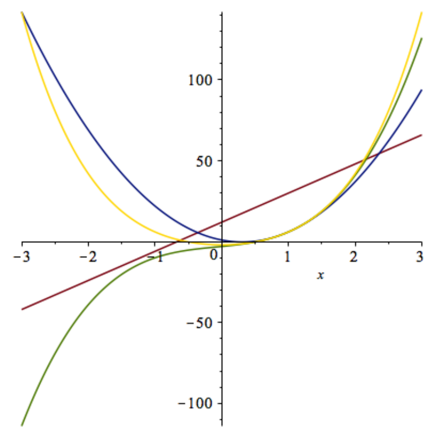

Figure 3: Graferne for hhv. $T_1 f$ (rød), $T_2 f$ (blå) og $T_3 f$ (grøn), samt f (gul).

b) Indtegn (med Maple) resultatet fra (a) i et plot, som viser grafen for f samt de tre Taylorpolynomier $T_1 f$, $T_2 f$ og $T_3 f$. Vælg f. eks. x-intervallet $[-3, 3]$.

Se figur 3 i opgave (a).

5.3 Betragt den naturlige logaritmefunktion $f(x) = \ln x$, og lad $T_n \ln$ være Taylorpolynomiet af grad n omkring $x = 1$. Benyt formlen (side 586) for den n-te afledte af ln, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$.

a) Plot (med Maple) graferne for ln, $T_9 \ln$ og $T_{49} \ln$ i et fælles plot.

Først beregner vi de afledte

$$f^{(9)} = (-1)^{9-1}(9-1)!x^{-9} = \frac{8!}{x^9} \tag{23}$$

$$f^{(49)} = (-1)^{49-1}(49-1)!x^{-49} = \frac{48!}{x^{49}} \tag{24}$$

og tilhørende funktionsværdier omkring $x = 1$

$$f^{(9)}(1) = 8! \tag{25}$$

$$f^{(49)}(1) = 48! \tag{26}$$

I Maple skriver jeg

```
f := ln(x)
T9 := mtaylor(f(x), x=1, 9)
T49 := mtaylor(f(x), x=1, 49)

plot([T9,T49], x=-2..4, y=-10..2)
```

hvilket giver grafen i figur 4, vist til højre.

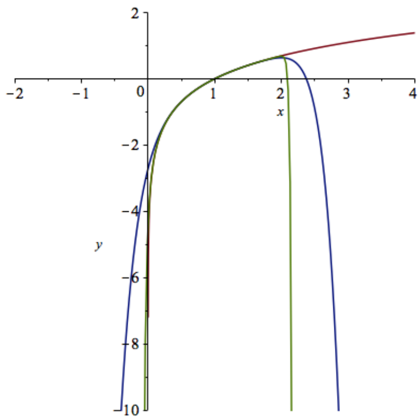

Figure 4: Graferne for $\ln x$ (rød), T_9 (blå) og T_49 (grøn).

b) Argumentér, ud fra Taylors formel med restled, for at $|R_n \ln x| = |\ln x - T_n \ln x| \leq \frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}$ for $x > 1$. Udregn (med Maple), for $x = 2$, $x = 1.9$ og $x = 2.1$, værdien af $T_{49} \ln x$ og sammenlign med $\ln x$ (også udregnet i Maple). Check uligheden ovenfor. Forklar forskellen mellem tilfældene $x < 2$ og $x > 2$.

Hvis vi indsætter i Lagranges restledsformel og erstatter $f^{(n+1)}$ med den givne formel, får vi

$$|R_n \ln x| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} \right| \tag{27}$$

$$\implies |R_n \ln x| = \left| (-1)^n \frac{n! c^{-(n+1)}}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} \right| = \left| \frac{1}{c^{n+1}(n+1)}(x-1)^{n+1} \right| \tag{28}$$

Idet $1 < c < x$ jvf. definitionen af Lagranges restledsformel har vi, at $c^{n+1}(n+1) > (n+1)$ og derfor holder uligheden, da nævneren i restledet, som beregnet, da altid vil være større.

For $T_{49} \ln x$ skriver jeg i Maple

```
T := mtaylor(f(x), x=1, 49)
evalf(subs(x=2, T))
evalf(subs(x=1.9, T))
evalf(subs(x=2.1, T))
```

og ligeledes for $\ln x$

```
evalf(ln(2))
evalf(ln(1.9))
evalf(ln(2.1))
```

hvilket giver mig

$$T_{49} \ln x = 0.68283900, \text{ for } x = 2 \tag{29}$$

$$T_{49} \ln x = 0.64179181, \text{ for } x = 1.9 \tag{30}$$

$$T_{49} \ln x = -0.30627131, \text{ for } x = 2.1 \tag{31}$$

og tilsvarende

$$\ln 2.0 = 0.69314718 \tag{32}$$

$$\ln 1.9 = 0.64185389 \tag{33}$$

$$\ln 2.1 = 0.74193734 \tag{34}$$

I modsætning til $\ln x$, som er voksende i hele $\mathbb{R}$, har vores Taylorpolynomium approksimering vendetangent i $x = 2$, altså $x = 2$ er en løsning til $T'_{49} = 0$, og er aftagende i $[2, \infty)$. Dette fremgår også tydeligt af figur 4. Denne egenskab ved T_{49} afviger stærkt fra $\ln x$.