

3.1 Lad $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}$ for alle $x \in \mathbb{R}$ med $x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Til følgende opgaver defineres følgende erklæres følgende udsagn i Maple.

`f := x -> (1/x) - cos(x)/sin(x)`

- a) Find grænseværdierne $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pi-} f(x)$ først med og dernæst uden Maple.

I Maple skriver vi følgende

`limit(f(x), x=0, right);`
`limit(f(x), x=pi, left);`

og får resultaterne 0 hhv. $\frac{1}{\pi} - \frac{\cos \pi}{\sin \pi}$.

Ved håndregning benytter vi reglen $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, og ser at førsteledet $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = \infty$ og $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos x}{\sin x} = -\infty$ [TODO: UDDYB]. Vi har derfor, at $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \infty - \infty = 0$.

- b) Vis, at f er strengt voksende i hvert interval $(n\pi, (n+1)\pi)$. Uligheden $|\sin x| < |x|$ for $x \neq 0$ kan benyttes uden bevis (den er vist i TLO side 240).

...

- c) Bevis, at ligningen $f(x) = 0$ ikke har nogen løsninger i $(0, \pi)$, og at den har præcis én løsning i $(\pi, 2\pi)$. Benyt Maple til at finde en approksimering til denne løsning.

...

3.2 En funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defineres ved (1)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{(x-1)(x-3)} & x \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty) \\ x & x \in [1; 3] \end{cases} \quad (1)$$

- a) Lav i Maple et plot af et udsnit af grafen for f , der giver et retvisende og oplysende billede af funktionens overordnede opførsel.

...

- b) Er f differentiabel i $x = 1$? Begrund dit svar uden brug af Maple.

...

3.3 (iii) Betragt funktionen $f(x) = x(\ln(x+1) - \ln x)$, $x > 0$.

- a) Tegn grafen for $0 < x \leq 100$ og gæt på $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ud fra denne.

...

- b)** Beregn i Maple $f(10^n)$ for $n = 1, \dots, 10$ (brug f. eks. værdien 20 af Digits=antal decimaler). Gæt igen på $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ud fra disse tal.

...

- c)** Bestem $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ uden brug af Maple. Kommenter resultaterne fra (a) og (b).

...