BEWIJZEN EN REDENEREN

(6sp variant)

voor Bachelor in de Wiskunde

en TWIN studenten

Academiejaar 2023/2024

Arno KUIJLAARS

Departement Wiskunde, Katholieke Universiteit Leuven,

Celestijnenlaan 200 B, bus 2400, 3001 Heverlee

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Wiskundige beweringen en bewijzen

1.1 De taal van de wiskunde

1.1.1 Wiskundige beweringen

De wiskunde houdt zich bezig met het beschrijven en ontwikkelen van concepten die voortgekomen zijn uit de studie van ruimte en getallen. Om wiskundige ideeën te formuleren moeten we beweringen kunnen doen over wiskundige objecten. Een groot deel van de activiteit van een wiskundige kan gezien worden als het formuleren van wiskundige beweringen en het onderzoeken of deze beweringen waar of niet waar zijn.

We zullen geen preciese formulering geven van wat een wiskundige bewering is. Aan de hand van eenvoudige voorbeelden zullen we de lezer met wiskundige beweringen vertrouwd maken. We beginnen met het begrip **propositie**. Een propositie is een zin die ofwel waar is ofwel niet waar is (maar niet allebei). Voor het moment speelt het geen rol of de propositie waar is of niet.

Hier zijn wat voorbeelden.

(1) $1 + 1 = 2$.

(2) $\pi = 3$.

(3) 14 kan geschreven worden als de som van twee priemgetallen.

(4) Elk even getal groter dan 2 kan geschreven worden als de som van twee priemgetallen.

(5) Het kwadraat van een oneven getal is oneven.

(6) n is een priemgetal.

(7) $n^2 > 2n$.

(8) $a < b$.

(9) $14 - 11$.

(10) π is een bijzonder getal.

De eerste vijf zijn proposities. Dit wil nog niet zeggen dat ze alle vijf waar zijn. Het is eenvoudig in te zien dat (1) waar is en (2) niet. Ook (3) is waar, want $14 = 11 + 3$ en 11 en 3 zijn priemgetallen. Proposities (4) en (5) zijn algemene beweringen die niet met een eenvoudige berekening te bewijzen zijn. In feite is (5) waar en het bewijs er van is niet moeilijk. Het is niet bekend of (4) waar is. De propositie (4) staat bekend als het Goldbachvermoeden. Het is een van de oudste onopgeloste problemen uit de getaltheorie. Het vermoeden werd geuit in een brief die Christian Goldbach aan Leonhard Euler in 1742 schreef.

De andere vijf uit de lijst zijn evenwel geen proposities. Nummers (6) en (7) worden proposities als we een waarde aan n toekennen. Als bijvoorbeeld $n = 2$ dan is (6) waar en (7) niet waar. Nummer (8) wordt een propositie als we een waarde aan a en b toekennen. Zinnen zoals deze worden **predicaten** genoemd. De symbolen die een waarde moeten krijgen om tot een propositie te komen heten **vrije veranderlijken**.

Een **bewering** is ofwel een propositie ofwel een predicaat. Dus de eerste 8 zinnen uit de bovenstaande lijst zijn beweringen. We gebruiken letters als P en Q om beweringen aan te geven, of $P(m, n)$ om een predicaat aan te geven met m en n als vrije veranderlijken.

De zinnen (9) en (10) zijn geen beweringen. (9) is zelfs geen zin en (10) heeft geen betekenis zolang we niet weten wat 'bijzonder' is. Het komt vaak voor dat een alledaags woord gebruikt wordt om een bepaalde eigenschap van een wiskundig object aan te duiden. Als 'bijzonder' ingevoerd is als een mogelijke eigenschap van een getal, dan is (10) een propositie en dus een bewering.

1.1.2 Logische connectieven

In de wiskunde moeten we vaak bepalen of een gegeven propositie waar is of niet. Beweringen kunnen soms ingewikkeld zijn en opgebouwd zijn uit een aantal componenten die verbonden worden door **logische connectieven**. Het waar of niet-waar zijn van een samengestelde bewering hangt af van het waar of niet-waar zijn van de componenten.

De connectief 'of' Beschouw de volgende bewering over reële getallen x en y:

$$xy = 0 \quad \text{als } x = 0 \text{ of } y = 0.$$

De bewering '$x = 0$ of $y = 0$' is waar als $x = 0$ (ongeacht de waarde van y) en is ook waar als $y = 0$ (ongeacht de waarde van x). Merk op dat de bewering ook waar is als $x = 0$ en $y = 0$ allebei waar zijn. Dit gebruik van 'of' heet ook wel de 'inclusieve of' en dit gebruik is standaard in de wiskunde.

Als P en Q beweringen zijn dan noteren we de bewering 'P of Q' met $P \vee Q$. De betekenis van $P \vee Q$ kan het best verduidelijkt worden door middel van een **waarheidstabel**. Een bewering is ofwel waar ofwel niet waar. De waarheid van $P \vee Q$ hangt af van de waarheid van P en Q zoals gegeven door de volgende tabel. Hierbij duidt W aan dat de bewering waar is en N dat de bewering niet waar is.

P	Q	$P \vee Q$
W	W	W
W	N	W
N	W	W
N	N	N

Links in de tabel staan de vier mogelijke 'waarheidscombinaties' van de beweringen P en Q. Rechts in de tabel staat de daaruit volgende waarheidswaarde van $P \vee Q$. De derde regel van de tabel drukt dan uit dat indien P niet waar en Q wel waar is, dat dan $P \vee Q$ waar is.

De connectief 'en' We gebruiken 'en' als we willen uitdrukken dat twee beweringen allebei waar zijn. Als P en Q beweringen zijn dan is 'P en Q' de bewering die waar is als P en Q allebei waar zijn en anders niet waar is. We schrijven $P \wedge Q$. De waarheidstabel is

P	Q	$P \wedge Q$
W	W	W
W	N	N
N	W	N
N	N	N

De connectief 'niet' Als P een bewering is dan is 'niet P' de tegengestelde bewering, die waar is als P het niet is, en omgekeerd. We noteren dit met $\neg P$. Dit heet ook wel de **negatie** van P. De waarheidstabel is

P	$\neg P$
W	N
N	W

1.1.3 Oefeningen

Oefening 1.1.1. Stel de waarheidstabellen op voor de volgende beweringen.

(a) $\neg(P \wedge Q)$,

(b) $(\neg P) \vee (\neg Q)$,

(c) $P \wedge (\neg Q)$.

Oefening 1.1.2. Beschouw de volgende bewering:

(i) Alle meisjes zijn goed in wiskunde.

Welk van de volgende bewering is de ontkenning van deze bewering?

(ii) Alle meisjes zijn slecht in wiskunde.

(iii) Alle meisjes zijn niet goed in wiskunde.

(iv) Er is een meisje dat slecht is in wiskunde.

(v) Er is een meisje dat niet goed is in wiskunde.

(vi) Alle kinderen die goed zijn in wiskunde zijn meisjes.

(vii) Alle kinderen die niet goed zijn in wiskunde zijn jongens.

Zijn er beweringen in de lijst die dezelfde betekenis hebben als de bewering (i)?

1.2 Implicaties en equivalenties

1.2.1 Implicaties

Een bewijs is een opvolging van beweringen. We vertrekken hierbij van beweringen waarvan we weten dat ze waar zijn en eindigen met de bewering die we willen bewijzen. Elke bewering is waar omdat de eerdere beweringen waar zijn en omdat de bewering op logische manier volgt uit de eerdere beweringen. Dit leidt ons tot het belangrijke begrip **implicatie**. Een implicatie is de bewering dat als een bepaalde bewering waar is dat dan ook een andere bewering waar is.

We duiden dit aan met het symbool $P \implies Q$ (ook andere notaties worden wel gebruikt, zoals $P \to Q$), en we zeggen: 'P impliceert Q', of 'Q volgt uit P', of 'als P, dan Q'. De waarheidstabel voor $P \implies Q$ is de volgende.

P	Q	$P \implies Q$
W	W	W
W	N	N
N	W	W
N	N	W

Dus de enige manier waarop $P \implies Q$ niet waar is, is als P waar is en Q niet.

Met behulp van waarheidstabellen kan eenvoudig nagegaan worden dat $P \implies Q$ logisch equivalent[1] is met $\neg P \vee Q$ (zie oefening). Dus $P \implies Q$ is altijd waar als Q waar is (onafhankelijk van het al dan niet waar zijn van P), maar ook als P niet waar is (onafhankelijk van het al dan niet waar zijn van Q). Dit laatste wordt wel uitgedrukt door 'Uit een foute bewering kun je alles concluderen'.

Het is belangrijk om je goed te realiseren dat we in de wiskunde de implicatie gebruiken in de preciese betekenis zoals gegeven door de waarheidstabel. Beschouw de volgende implicaties.

(1) $(\pi < 4) \implies (1 + 1 = 2)$

(2) $(\pi < 4) \implies (1 + 1 = 3)$

(3) $(\pi < 3) \implies (1 + 1 = 2)$

(4) $(\pi < 3) \implies (1 + 1 = 3)$

We nemen hierbij aan dat we weten dat $3 < \pi < 4$. Uit de waarheidstabel volgt dan dat implicatie (2) niet waar is terwijl de andere drie wel waar zijn. De uitspraken zien er wel wat vreemd uit, omdat het getal π helemaal niets te maken heeft met de berekening van $1 + 1$. In het dagelijks leven suggereert de uitspraak 'P impliceert Q' dat er een causaal verband bestaat tussen P en Q. Dat wil zeggen dat het waar zijn van Q een gevolg is van het waar zijn van P. In de wiskundige betekenis van implicatie wordt **geen causaal verband** gesuggereerd.

Nog andere manieren waarop $P \implies Q$ uitgedrukt kan worden zijn 'P alleen als Q', 'Q als P', 'P is voldoende voor Q' en 'Q is noodzakelijk voor P'. We zeggen dan ook wel dat P een voldoende voorwaarde is voor Q en dat Q een noodzakelijke voorwaarde is voor P.

[1] We noemen twee beweringen logisch equivalent als de waarheidstabellen overeenkomen.

1.2.2 Equivalenties

De implicatie $Q \implies P$ is de omkering van de implicatie $P \implies Q$. Als beide implicaties gelden dan schrijven we $P \iff Q$ en we zeggen dat P en Q **equivalent** zijn. Dus

$$P \iff Q \quad \text{betekent} \quad (P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$$

De waarheidstabel voor $P \iff Q$ is

P	Q	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$P \iff Q$
W	W	W	W	W
W	N	N	W	N
N	W	W	N	N
N	N	W	W	W

Uit de waarheidstabel zien we dat $P \iff Q$ waar is als P en Q allebei waar zijn, of allebei niet waar zijn. Als een van de twee waar is en de andere niet dan is $P \iff Q$ niet waar.

In wiskundige bewijzen wordt $P \iff Q$ vaak uitgesproken als 'P als en slechts als Q', of in het kort 'P asa Q'. Als $P \iff Q$ dan noemen we P ook wel een nodige en voldoende voorwaarde voor Q.

Voorrangsregels

In ingewikkelde beweringen kunnen een aantal conjectieven gecombineerd worden. Hiervoor gelden de volgende voorrangsregels

$$(\ ) \qquad \neg \qquad \wedge \qquad \vee \qquad \implies / \impliedby / \iff$$

waarbij de haakjes ( ) de eerste voorrang hebben en de implicatie $\implies$ (of de gelijkwaardige connectieven $\impliedby$ en $\iff$) de laatste. Als er verwarring dreigt over de volgorde dan is het altijd aan te raden om haakjes te zetten.

Met

$$\neg P \implies Q \vee R$$

bedoelen we dus

$$(\neg P) \implies (Q \vee R)$$

en het kan hier ook geen kwaad om de haakjes te zetten. Als we iets anders zouden bedoelen dan moeten we zeker haakjes zetten.

1.2.3 Oefeningen

Oefening 1.2.1. Laat door middel van waarheidstabellen zien dat de beweringen $P \implies Q$ en $\neg P \vee Q$ logisch equivalent zijn.

Oefening 1.2.2. Stel de waarheidstabel op van de volgende beweringen:

(a) $(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$

(b) $(P \implies Q) \vee (Q \implies P)$

(c) $(P \implies Q) \implies (Q \implies P)$

Oefening 1.2.3. Welke van de volgende beweringen over een geheel getal n zijn waar en welke zijn niet waar?

(a) $n = 2$ als $n^2 - n - 2 = 0$

(b) $n = 2$ alleen als $n^2 - n - 2 = 0$.

(c) $n = 2$ als en slechts als $n^2 - n - 2 = 0$.

(d) $n = 2$ is noodzakelijk voor $n^2 - n - 2 = 0$.

(e) $n = 2$ is voldoende voor $n^2 - n - 2 = 0$.

(f) $n^2 - n - 2 = 0 \implies (n = 2 \text{ en } n = -1)$.

(g) $n^2 - n - 2 = 0 \implies (n = 2 \text{ of } n = -1)$.

(h) $n^2 - n - 2 = 0 \iff (n = 2 \text{ en } n = -1)$.

(i) $n^2 - n - 2 = 0 \iff (n = 2 \text{ of } n = -1)$.

(j) $(n^2 - n - 2 = 0 \implies n = 2)$ of $(n^2 - n - 2 = 0 \implies n = -1)$.

(k) $(n = 2 \implies n^2 - n - 2 = 0)$ of $(n = -1 \implies n^2 - n - 2 = 0)$.

(l) $(n = 2 \implies n^2 - n - 2 = 0)$ en $(n = -1 \implies n^2 - n - 2 = 0)$.

Oefening 1.2.4. Gebruik waarheidstabellen om te laten zien dat de volgende beweringen waar zijn voor alle beweringen P en Q.

(a) $P \implies (P \vee Q)$

(b) $(P \wedge Q) \implies P$

(c) $Q \implies (P \implies Q)$

(d) $\neg P \implies (P \implies Q)$

Oefening 1.2.5. Toon door middel van waarheidstabellen aan, dat voor alle P en Q,

(a) de beweringen $P \implies Q$ en $(\neg Q) \implies \neg P$ logisch equivalent zijn,

(b) de beweringen $P \vee Q$ en $(\neg P) \implies Q$ logisch equivalent zijn.

Oefening 1.2.6. Welke van de volgende implicaties zijn waar en welke zijn niet waar?

(a) Als $5 < 2$ dan $3 = 4$.

(b) Als $2 < 5$ dan $3 = 4$.

(c) Als $3 = 4$ dan $5 < 2$.

(d) Als $3 = 4$ dan $2 < 5$.

1.3 Bewijzen

Een bewijs van een wiskundige bewering is een logisch argument dat aantoont dat de bewering waar is. Een bewijs bevat een aantal stappen die veelal door implicaties met elkaar verbonden zijn. Een van de belangrijkste doelstellingen van deze cursus is om een aantal **bewijstechnieken** te beschrijven. Je moet daarmee bewijzen kunnen volgen als je ze tegenkomt en tevens zelf bewijzen kunnen geven. Voor dit laatste is het ook essentieel dat je leert hoe je een bewijs moet opschrijven.

In het verleden ben je wellicht al bewijzen tegengekomen. Op de universiteit wordt van je verwacht dat je zelf bewijzen vindt en, net zo belangrijk, dat je bewijzen netjes en volgens bepaalde regels opschrijft zodat andere mensen het ook kunnen begrijpen. Een moeilijkheid hierbij is dat we bewijzen meestal niet opschrijven op de manier waarop we ze vinden. Je zult meestal enige tijd bezig zijn om het bewijs te vinden voordat je kunt overgaan naar het opschrijven van het bewijs.

1.3.1 Directe bewijzen

Veel wiskundige stellingen zijn van de vorm $P \implies Q$. Hierin is P de hypothese of de aanname van de stelling. Dat wil zeggen dat we aannemen dat P waar is. Daaruit willen we Q afleiden. De eenvoudigste manier is door middel van een direct bewijs. Hier is een voorbeeld.

Stelling 1.3.1. *Voor strikt positieve reële getallen a en b geldt*

$$a < b \implies a^2 < b^2$$

We kunnen hier samenvatten wat we moeten doen door onderscheid te maken tussen wat gegeven is en wat we moeten bewijzen.

Gegeven: Strikt positieve reële getallen a en b.

Te bewijzen: $a < b \implies a^2 < b^2$.

Het directe bewijs van een implicatie $P \implies Q$ is om de hypothese P toe te voegen aan de gegevens en om daarmee Q te bewijzen. Dit leidt in dit voorbeeld tot.

Gegeven: Strikt positieve reële getallen a en b met $a < b$.

Te bewijzen: $a^2 < b^2$.

Nu gaan we nadenken hoe het te bewijzene zou kunnen volgen uit het gegevene. Omdat we iets willen weten over a^2 en b^2 ligt het voor de hand om de gegeven ongelijkheid met a en b te vermenigvuldigen. Omdat a en b strikt positief zijn blijven de ongelijkheden behouden zodat

$$a < b \implies a^2 < ab \tag{1.1}$$

en

$$a < b \implies ab < b^2. \tag{1.2}$$

Omdat we aangenomen hebben dat $a < b$ waar is volgt nu dat $a^2 < ab$ en $ab < b^2$. Deze twee ongelijkheden bevatten beide ab en er geldt

$$(a^2 < ab) \wedge (ab < b^2) \implies a^2 < b^2. \tag{1.3}$$

Omdat $a < b$ weten we al dat $a^2 < ab$ en $ab < b^2$ en daarom geldt vanwege (1.3) dat $a^2 < b^2$ waar is.

De lezer zou zich kunnen afvragen waarom we weten dat (1.1), (1.2) en (1.3) waar zijn. Het antwoord is dat deze implicaties volgen uit de fundamentele eigenschappen van reële getallen die we hier voor waar aannemen, in het bijzonder de eigenschappen rond ordening. Deze fundamentele eigenschappen zijn.

(1) Voor elk tweetal reëele getallen a en b geldt precies één van de volgende mogelijkheden

$$a < b, \qquad a = b, \qquad a > b.$$

(2) Voor reëele getallen a, b en c geldt

$$a < b \implies (a + c < b + c)$$

(3) Voor reëele getallen a, b en c geldt

$$(a < b \wedge c > 0) \implies ac < bc \tag{1.4}$$

$$(a < b \wedge c < 0) \implies ac > bc \tag{1.5}$$

(4) Voor reëele getallen a, b en c geldt

$$(a < b \wedge b < c) \implies a < c.$$

Deze eigenschap heet de **transitiviteit** van de ordening.

De beweringen (1.1) en (1.2) volgen meteen uit (3) en (1.3) volgt uit (4).

Het bovenstaande is niet het bewijs zoals je het opschrijft. Een net bewijs van Stelling 1.3.1 is.

Bewijs. Veronderstel dat $a < b$. Omdat $a > 0$ en $b > 0$ volgt hieruit dat $a^2 < ab$ en $ab < b^2$. Dus $a^2 < b^2$ vanwege de transitiviteit van de ordening.

Hiermee is bewezen dat $a < b \implies a^2 < b^2$. □

Het uiteindelijke bewijs is een opeenvolging van Nederlandse zinnen met woorden zoals 'volgt', 'dus' en 'omdat' die aangeven hoe de verschillende zinnen met elkaar samenhangen. Enige wiskundige notatie wordt ook gebruikt maar het geheel moet een leesbaar verhaal opleveren. Let op dat we geen pijlen gebruiken om gevolgtrekkingen aan te geven. Het volgende is geen acceptabel bewijs.

Bewijs. **NIET DOEN!** $a < b \implies (a^2 < ab \wedge ab < b^2) \implies a^2 < b^2$. □

1.3.2 Bewijs door gevalsonderscheid

Soms is het moeilijk om bij een implicatie alle mogelijke objecten die aan de hypothese voldoen gezamenlijk te beschouwen. Het kan dan helpen om verschillende gevallen te onderscheiden, zoals in het volgende eenvoudige voorbeeld.

Voorbeeld 1.3.2. Als $x = 1$ of $x = 3$ dan $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Bewijs. Als $x = 1$ dan $x^2 - 4x + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$. Als $x = 3$ dan $x^2 - 4x + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$. Dus als $x = 1$ of $x = 3$, dan geldt $x^2 - 4x + 3 = 0$. □

Het bewijs door gevalsonderscheid is gebaseerd op het feit dat de bewering $(P \vee Q) \implies R$ logisch equivalent is met $(P \implies R) \wedge (Q \implies R)$.

1.3.3 Achterwaarts construeren van bewijzen

Bij het opstellen van bewijzen gaat men vaak uit van hetgeen te bewijzen is en probeert dat in een vorm te schrijven die volgt uit hetgeen gegeven is.

Stelling 1.3.3. *Voor reële getallen x en y geldt*

$$x < y \implies 4xy < (x+y)^2.$$

Als we beginnen met de hypothese $x < y$ dan is het moeilijk om te zien hoe we verder moeten gaan om tot $4xy < (x+y)^2$ te komen. In plaats daarvan kunnen we de ingewikkeldere uitspraak $4xy < (x+y)^2$ gaan herschrijven:

$$\begin{aligned} 4xy < (x+y)^2 &\Longleftarrow 4xy < x^2 + 2xy + y^2 \\ &\Longleftarrow 0 < x^2 - 2xy + y^2 \\ &\Longleftarrow 0 < (x-y)^2 \\ &\Longleftarrow x - y \neq 0 \\ &\Longleftarrow x < y. \end{aligned}$$

De eerste vier implicaties zijn in feite equivalenties zoals eenvoudig nagegaan kan worden. Maar alleen de gegeven implicaties zijn van belang.

Je zou het bovenstaande als bewijs kunnen geven, maar dat is geen net bewijs dat als een Nederlandse tekst gelezen kan worden. Een net bewijs is bijvoorbeeld

Bewijs. Neem aan dat $x < y$. Dan is $x - y \neq 0$ en dus $(x-y)^2 > 0$. Dit betekent $x^2 - 2xy + y^2 > 0$ en hieruit volgt

$$4xy < x^2 - 2xy + y^2 + 4xy = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2.$$

Dus $4xy < (x+y)^2$ en hiermee hebben we bewezen dat $x < y \implies 4xy < (x+y)^2$. □

Het uiteindelijke bewijs toont niet de manier waarop het bewijs is gevonden. Je zult hier aan moeten wennen, maar het is heel gebruikelijk in de wiskunde.

1.3.4 Oefeningen

Let op dat het er bij deze oefeningen niet om gaat dat je voor jezelf de juistheid van de te bewijzen bewering inziet, maar dat het de bedoeling is dat je een net bewijs geeft.

Oefening 1.3.1. Bewijs dat voor alle reële getallen a, b en c geldt

(a) $(a+b-c)^2 = (a+b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 - a^2 - b^2 - c^2$,

(b) $ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$.

Oefening 1.3.2. Bewijs dat voor alle gehele getallen a, b en c geldt

$$(a \text{ is een deler van } b) \wedge (b \text{ is een deler van } c) \implies (a \text{ is een deler van } c).$$

Oefening 1.3.3. Bewijs dat voor een geheel getal n geldt

$$n^2 \text{ is even} \implies n \text{ is even}.$$

Oefening 1.3.4. Bewijs met behulp van de fundamentele eigenschap (1.4) van de ordening op $\mathbb{R}$ dat voor reële getallen x, y en z met $x > 0$ geldt dat

$$y \geq z \implies xy \geq xz.$$

Oefening 1.3.5. Stelling 1.3.3 zegt dat $x < y$ een voldoende voorwaarde is voor $4xy < (x+y)^2$. Is deze voorwaarde ook nodig? Als dat zo is, geef dan een bewijs. Als het niet zo, geef dan een nodige en voldoende voorwaarde.

Oefening 1.3.6. Bewijs dat voor reële getallen x en y geldt

(a) $0 \leq x < y \implies x^2 < y^2$,

(b) $|x| < |y| \implies x^2 < y^2$,

(c) $|x| = |y| \implies x^2 = y^2$.

Van welke implicaties geldt de omgekeerde implicatie ook?

Oefening 1.3.7. Bewijzen met een opeenvolging van implicaties steunen vaak op het volgende feit

$$[(P \implies Q) \wedge (Q \implies R)] \implies (P \implies R).$$

Laat met een waarheidstabel zien dat dit waar is voor alle beweringen P, Q en R.

Oefening 1.3.8. Een bewijs door gevalsonderscheid is gebaseerd op het feit dat de bewering $(P \vee Q) \implies R$ logisch equivalent is met $(P \implies R) \wedge (Q \implies R)$. Toon dit aan door middel van een waarheidstabel.

1.4 Bewijs uit het ongerijmde

1.4.1 Bewijs van negatieve bewering

Een negatieve bewering is een bewering dat iets niet bestaat. Zo'n bewering is vaak moeilijk op een directe manier te bewijzen. Hier is een voorbeeld.

Stelling 1.4.1. *Er bestaan geen gehele getallen n en m met $8n - 6m = 101$.*

Bij een **bewijs uit het ongerijmde** nemen we aan dat hetgene dat we moeten bewijzen niet waar is. Daaruit leiden we een bewering af waarvan we weten dat ze niet waar is. Dit is een tegenspraak waaruit we concluderen dat onze oorspronkelijke aanname dat de bewering niet waar is, onjuist is. Daarom is de bewering wel waar.

Stelling 1.4.1 kan nu als volgt uit het ongerijmde bewezen worden.

Bewijs. Neem aan dat n en m gehele getallen zijn met $8n - 6m = 101$. Omdat 8 en 6 even getallen zijn is dan $101 = 8n - 6m = 2(4n - 3m)$ een even getal. Maar 101 is oneven, zodat we een tegenspraak hebben. Uit deze tegenspraak volgt dat er geen gehele getallen n en m bestaan met $8n - 6m = 101$. $\square$

Een tegenspraak is een bewering van de vorm $P \wedge \neg P$. Deze bewering is altijd niet waar. In het bewijs van Stelling 1.4.1 vinden we de twee tegengestelde beweringen '101 is een even getal' en '101 is een oneven getal' die allebei waar zouden zijn als de stelling niet waar was.

Een bewijs uit het ongerijmde is gebaseerd op de logische equivalentie van P met

$$\neg P \implies (Q \wedge \neg Q).$$

Hier volgt nog een stelling die het eenvoudigst bewezen kan worden met een bewijs uit het ongerijmde.

Stelling 1.4.2. *Er bestaat geen rationaal getal x met $x^2 = 2$.*

Bewijs. Neem aan dat er wel een rationaal getal x is met $x^2 = 2$. Omdat x rationaal is, kunnen we x schrijven als

$$x = \tfrac{m}{n}$$

waarin m en n gehele getallen zijn met $n \neq 0$. We mogen aannemen dat m en n geen gemeenschappelijke factoren hebben, omdat we deze anders tegen elkaar kunnen wegdelen en zo de breuk kunnen vereenvoudigen. In het bijzonder zijn m en n niet allebei even.

Uit $x = m/n$ en $x^2 = 2$ volgt na kwadratering dat $2 = (m^2)/(n^2)$ en dus dat

$$2n^2 = m^2.$$

Dit betekent dat m^2 een even getal is. Dan is m ook een even getal (immers, het kwadraat van een oneven getal is oneven) en dus is $m = 2k$ voor een zeker geheel getal k. Als we $m = 2k$ invullen in $2n^2 = m^2$ dan volgt

$$2n^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

hetgeen na deling door 2 leidt tot

$$n^2 = 2k^2.$$

Hieruit zien we dat n^2 een even getal is, en dan is n eveneens een even getal.

We hebben gevonden dat m en n allebei even zijn en dit is in tegenspraak met het feit dat m en n geen gemeenschappelijke factoren hebben. Er is nu bewezen (uit het ongerijmde) dat er geen rationaal getal is met kwadraat gelijk aan 2. □

Hier is een ander bewijs van Stelling 1.4.2

Bewijs. Het bewijs is wederom uit het ongerijmde. Neem aan dat $x^2 = 2$ met $x \in \mathbb{Q}$. We mogen aannemen dat $1 < x < 2$.

Er is dan een kleinste natuurlijk getal $n \geq 1$ waarvoor nx geheel is. Dan is ook $m = nx - n$ een geheel getal en het voldoet aan $1 < m < n$, want $1 < x < 2$. Tevens is $mx = nx^2 - nx = 2n - nx$ geheel. Dit is in tegenspraak met het feit dat n het kleinste natuurlijke getal ≥ 1 is met de eigenschap dat nx geheel is. □

1.4.2 Bewijs van implicaties uit het ongerijmde

Soms is het directe bewijs van een implicatie $P \implies Q$ niet eenvoudig te geven, zoals in het volgende voorbeeld.

Stelling 1.4.3. *Als x, y en a reële getallen zijn met $x > y$, dan geldt*

$$ax \leq ay \implies a \leq 0.$$

Het is moeilijk om vanuit de fundamentele eigenschappen van ongelijkheden een direct bewijs te construeren, omdat die eigenschappen afhangen van het teken van a en dat is hetgene dat we willen bepalen.

De eenvoudigste oplossing is een bewijs uit het ongerijmde. Uit de waarheidstabel voor de implicatie volgt dat $P \implies Q$ niet waar is, precies als P waar is en Q niet waar. Dus we kunnen $P \implies Q$ bewijzen door te laten zien dat P waar en Q niet waar samen leiden tot een tegenspraak. Zo vinden we een bewijs van Stelling 1.4.3.

Bewijs. Gegeven is dat $x > y$. Veronderstel dat $ax \leq ay$ en $a > 0$. Dan is $ax > ay$, hetgeen in tegenspraak is met $ax \leq ay$. Dus $ax \leq ay$ en $a > 0$ zijn niet allebei waar en daarom geldt

$$ax \leq ay \implies a \leq 0.$$

□

1.4.3 Contrapositie

De implicatie $P \implies Q$ is logisch equivalent met haar **contrapositie** $\neg Q \implies \neg P$, zoals uit de waarheidstabel kan worden afgeleid. Dus als de ene implicatie waar is, dan is de andere het ook.

De bewering

$$ax \leq ay \implies a \leq 0$$

uit de vorige stelling is dus logisch equivalent met

$$a > 0 \implies ax > ay.$$

Als we van contrapositie gebruik maken vinden we een alternatief bewijs van Stelling 1.4.3.

Bewijs. Gegeven is dat $x > y$. Als $a > 0$ dan volgt uit de eigenschappen voor ongelijkheden dat $ax > ay$. Dus $a > 0 \implies ax > ay$. Vanwege contrapositie is dan ook $ax \leq ay \implies a \leq 0$. □

1.4.4 Bewijs van 'of' bewering

Het bewijs van een 'of' bewering kan gedaan worden met een constructie die analoog is aan een bewijs uit het ongerijmde. Dit is gebaseerd op het feit dat $P \vee Q$ logisch equivalent is met $\neg P \implies Q$.

Beschouw het volgende voorbeeld.

Stelling 1.4.4. *Neem aan dat x en y reële getallen zijn met $xy = 0$. Dan geldt $x = 0$ of $y = 0$.*

Omdat de bewering '$x = 0$ of $y = 0$' equivalent is met '$x \neq 0 \implies y = 0$', kunnen we het bewijs als volgt geven.

Bewijs. Neem aan dat $x \neq 0$. Dan kunnen we de gelijkheid $xy = 0$ links en rechts vermenigvuldigen met $1/x$ en er volgt $y = 0$. Dit laat zien dat $x \neq 0 \implies y = 0$ geldt en dus $x = 0 \vee y = 0$. $\square$

Stelling 1.4.4 kan ook bewezen worden met gevalsonderscheid. Voor x geldt namelijk precies één van de volgende mogelijkheden: $x < 0$, $x = 0$ of $x > 0$. Net zo voor y. In totaal levert dat negen mogelijkheden.

1.4.5 Oefeningen

Oefening 1.4.1. Geef een bewijs uit het ongerijmde voor de bewering dat er geen gehele getallen m en n zijn met $14m + 21n = 100$.

Oefening 1.4.2. Bewijs uit het ongerijmde dat voor elk geheel getal n geldt

$$n^2 \text{ is oneven } \implies n \text{ is oneven }.$$

Oefening 1.4.3. Bewijs de bewering uit de vorige oefening door contrapositie.

Oefening 1.4.4. Een bewijs uit het ongerijmde is gebaseerd op de logische equivalentie van P met

$$\neg P \implies (Q \wedge \neg Q).$$

Toon dit aan met een waarheidstabel.

Oefening 1.4.5. Een bewijs met contrapositie is gebaseerd op de logische equivalentie van $P \implies Q$ met $\neg Q \implies \neg P$. Toon dit aan met een waarheidstabel.

Oefening 1.4.6. Bewijs Stelling 1.4.4 door middel van gevalsonderscheid.

Oefening 1.4.7. Bewijs dat voor een reëel getal x met $x^2 \geq 5x$ geldt dat $x \leq 0$ of $x \geq 5$.

Oefening 1.4.8. Geef een bewijs uit het ongerijmde voor de bewering dat voor reële getallen x en y geldt

$$(x \leq y \ \wedge \ y \leq x) \implies x = y.$$

1.5 Bewijs met volledige inductie

1.5.1 Het principe van volledige inductie

Een bewijs met volledige inductie kan toegepast worden om beweringen te bewijzen die afhangen van een natuurlijk getal. De natuurlijke getallen zijn de getallen

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

Een bewijs met **volledige inductie** is gebaseerd op de volgende eigenschap van natuurlijke getallen.

Stelling 1.5.1. *Neem aan dat $P(n)$ een bewering is die afhangt van een natuurlijk getal n. Veronderstel dat*

(1) *$P(0)$ waar is, en dat*

(2) *$P(k) \implies P(k+1)$ geldt voor elke natuurlijk getal k.*

Dan is de bewering $P(n)$ waar voor elk natuurlijk getal n.

We geven op dit moment geen bewijs van Stelling 1.5.1. Het bewijs van gaat uit van de fundamentele eigenschappen van de verzameling $\mathbb{N}$ van natuurlijke getallen. Hierop gaan we in in paragraaf 5.2.

Intuïtief kunnen we echter de juistheid van Stelling 1.5.1 als volgt inzien.

Op grond van (1) is $P(n)$ waar voor $n = 0$. Neem $k = 0$ in de implicatie in (2). Dus de implicatie $P(0) \implies P(1)$ is juist. Omdat $P(0)$ waar is, is dan ook $P(1)$ waar. Neem nu $k = 1$ in (2). Dus $P(1) \implies P(2)$ is waar. Omdat $P(1)$ waar is (dat hebben we zonet bewezen), volgt nu dat $P(2)$ ook waar is. We kunnen zo doorgaan. Door vertrekkend van (1), steeds de implicatie in (2) te gebruiken vinden we achtereenvolgens dat de bewering $P(n)$ juist is voor $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, …, dat wil zeggen voor elk natuurlijk getal.

Een bewijs met volledige inductie valt uiteen in drie delen. Als eerste het bewijs dat $P(0)$ waar is. Dit is de **basisstap**. Ten tweede het bewijs dat $P(k) \implies P(k+1)$ waar is voor elke $k \in \mathbb{N}$. Dit is de **inductiestap**. In de inductiestap zullen we aannemen dat $P(k)$ waar is. Deze aanname heet de **inductiehypothese**. Gebruik makend van de inductiehypothese moeten we dan bewijzen dat $P(k+1)$ waar is. De derde stap is de **conclusie**. Deze stap is steeds hetzelfde. Het houdt in dat we het principe van volledige inductie aanroepen om te concluderen dat $P(n)$ waar is voor elk natuurlijk getal n.

Hier is een eenvoudig voorbeeld.

Propositie 1.5.2. *Voor elk natuurlijk getal n geldt dat $8^n - 3^n$ deelbaar is door 5.*

Bewijs. De bewering $P(n)$ is

$$P(n): \quad 8^n - 3^n \text{ is deelbaar door } 5.$$

We gebruiken volledige inductie om te bewijzen dat $P(n)$ waar is voor elk natuurlijk n.

Basisstap : Voor $n = 0$ is de bewering dat $1 - 1 = 0$ deelbaar is door 5, en dit is evident waar.

Inductiestap: In de inductiestap bewijzen we dat $P(k) \implies P(k+1)$ waar is voor elk natuurlijk getal k.

We nemen een natuurlijk getal k en we veronderstellen dat $P(k)$ waar is, dus dat $8^k - 3^k$ deelbaar is door 5. Hiervan gaan we gebruik maken om te bewijzen dat $P(k+1)$ waar is, dus dat $8^{k+1} - 3^{k+1}$ deelbaar is door 5. We berekenen

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 3^{k+1} &= 8 \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k = \left(5 \cdot 8^k + 3 \cdot 8^k\right) - 3 \cdot 3^k \\ &= 5 \cdot 8^k + 3 \cdot (8^k - 3^k). \end{aligned} \tag{1.6}$$

We hebben aangenomen dat $8^k - 3^k$ deelbaar is door 5. Dan is ook $3 \cdot (8^k - 3^k)$ deelbaar door 5. Omdat ook $5 \cdot 8^k$ deelbaar is door 5 volgt uit (1.6) dat ook $8^{k+1} - 3^{k+1}$ deelbaar is door 5. Hiermee is de inductiestap bewezen.

Conclusie: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, volgt met het principe van volledige inductie dat $8^n - 3^n$ deelbaar is door 5 voor elk natuurlijk getal n.

$\square$

Vaak wordt het symbool n ook gebruikt in de inductiestap. Dan is de inductiestap dat $P(n) \implies P(n+1)$ geldt voor elk natuurlijk getal n. Dit dubbel gebruik van het symbool n kan tot verwarring leiden en is pas aan te raden als je volledig vertrouwd bent met het principe van volledige inductie.

1.5.2 Variatie 1: Aanpassing basisstap

De primaire vorm van volledige inductie gaat uit van een bewering $P(n)$ die afhangt van een natuurlijk getal n en we willen laten zien dat ze geldt voor elk natuurlijk getal n. De basisstap gaat dan over de uitspraak $P(0)$ die hoort bij $n = 0$.

In plaats van bij 0 kunnen we ook bij een ander natuurlijk (of zelfs geheel) getal beginnen.

Stelling 1.5.3. *Zij n_0 een geheel getal. Neem aan dat $P(n)$ een bewering is die afhangt van een geheel getal $n \geq n_0$. Veronderstel dat*

(1) *$P(n_0)$ waar is, en dat*

(2) *$P(k) \implies P(k+1)$ geldt voor elk geheel getal $k \geq n_0$.*

Dan is de bewering $P(n)$ waar voor elk geheel getal $n \geq n_0$.

Bewijs. Deze variant op volledige inductie kunnen we als volgt terugbrengen tot de basisvorm. We beschouwen de bewering $Q(n) = P(n+n_0)$ die afhangt van een natuurlijk getal n. Uit de aannamen (1) en (2) uit Stelling 1.5.3 volgt dat $Q(0)$ waar is, en dat $Q(k) \implies Q(k+1)$ geldt voor elk natuurlijk getal k. Uit Stelling 1.5.1 volgt dat $Q(n)$ geldt voor elke natuurlijk getal n, hetgeen overeenkomt met de uitspraak dat $P(n)$ waar is voor elk geheel getal $n \geq n_0$. $\square$

Het komt frequent voor dat we volledige inductie beginnen bij $n_0 = 1$. Hier is een voorbeeld.

Propositie 1.5.4. *Voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$ geldt dat*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bewijs. We gebruiken volledige inductie.

Basisstap: Voor $n = 1$ is de bewering dat $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ en dit is juist.

Inductiestap: Neem een natuurlijk getal $k \geq 1$ en veronderstel dat

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Tel hier $k+1$ bij op. Dan volgt

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1). \tag{1.7}$$

Om de inductiestap te bewijzen gaan we de rechterkant als volgt herschrijven:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \tag{1.8}$$

Vanwege (1.7) en (1.8) geldt

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]}{2}$$

en de inductiestap is bewezen.

<u>Conclusie</u>: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, is de propositie bewezen met het principe van volledige inductie.

□

De som $1 + 2 + \cdots + n$ is de som van alle natuurlijke getallen van 1 tot en met n. In plaats van deze 'puntjesnotatie' wordt voor een som van getallen a_1, a_2 tot en met a_n vaak de **somnotatie**

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

gebruikt. Voor het product van de getallen a_1, a_2 tot en met a_n hebben we de analoge **productnotatie**

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n.$$

1.5.3 Variatie 2: Sterke principe van volledige inductie

Een andere variant van volledige inductie is de volgende.

Stelling 1.5.5. *Neem aan dat $P(n)$ een bewering is die afhangt van een natuurlijk getal n. Veronderstel dat*

(1) *$P(0)$ waar is, en dat*

(2) *de implicatie*

$$[P(j) \textit{ is waar voor elk natuurlijk getal } j \leq k] \implies P(k+1)$$

geldt voor elk natuurlijk getal k.

Dan is de bewering $P(n)$ waar voor elk natuurlijk getal n.

Bewijs. Stelling 1.5.5 volgt uit de basisvorm van volledige inductie, zie Stelling 1.5.1, door de volgende bewering $Q(n)$ te beschouwen:

$$Q(n) = [P(j) \text{ is waar voor elk natuurlijk getal } j \leq n].$$

Ga dit zelf na. □

Het verschil bij het sterke principe van volledige inductie zit in de inductiestap. De inductiehypothese is nu dat $P(j)$ waar is voor elke $j \leq k$. We nemen dus niet alleen aan dat $P(k)$ waar is, maar ook alle voorgaanden $P(k-1)$, $P(k-2)$, ..., $P(1)$, $P(0)$. Hieruit moeten we in de inductiestap afleiden dat $P(k+1)$ waar is. Omdat we in de inductiehypothese meer voor waar aannemen, kunnen we meer informatie gebruiken in het bewijs dat $P(k+1)$ waar is. Deze extra informatie kan belangrijk zijn om het bewijs van $P(k+1)$ te kunnen geven. Dit zien we in het volgende voorbeeld.

Propositie 1.5.6. *Zij* (a_n) *de rij van Fibonacci, die gegeven wordt door* $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ *en*

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \qquad \textit{voor } n \geq 1.$$

Dan geldt

$$a_n = (\alpha^n - \beta^n)/\sqrt{5} \tag{1.9}$$

waarin $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ *en* $\beta = (1-\sqrt{5})/2$.

De getallen α en β zijn de oplossingen van de vierkantsvergelijking $x^2 - x - 1 = 0$. Er geldt dus $\alpha^2 = \alpha + 1$ en $\beta^2 = \beta + 1$. Ook geldt $\alpha - \beta = \sqrt{5}$. Het getal α staat bekend als de gulden snede. De formule (1.9) heet de formule van Binet voor de Fibonaccigetallen.

In het bewijs met volledige inductie zullen we de inductiestap pas kunnen toepassen vanaf $n = 1$. Daarom gaan we ook het geval $n = 1$ controleren in de basisstap.

Bewijs. We geven een bewijs met volledige inductie.

Basisstap: Voor $n = 0$ geldt $(\alpha^0 - \beta^0)/\sqrt{5} = 0 = a_0$. Voor $n = 1$ geldt $(\alpha^1 - \beta^1)/\sqrt{5} = \sqrt{5}/\sqrt{5} = 1 = a_1$. De bewering geldt dus voor $n = 0$ en $n = 1$.

Inductiestap: Neem aan dat $k \geq 1$ en dat de bewering geldt voor elk natuurlijk getal $j \leq k$. Dan geldt de bewering zeker voor $j = k$ en voor $j = k - 1$. Bijgevolg is

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} = (\alpha^k - \beta^k)/\sqrt{5} + (\alpha^{k-1} - \beta^{k-1})/\sqrt{5}.$$

De rest van de inductiestap bestaat eruit dat we dit herwerken tot $(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1})/\sqrt{5}$. Dit gaat als volgt

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (\alpha^k + \alpha^{k-1} - \beta^k - \beta^{k-1})/\sqrt{5} \\ &= (\alpha^{k-1}(\alpha+1) - \beta^{k-1}(\beta+1))/\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Omdat α en β aan de vergelijking $x^2 - x - 1 = 0$ voldoen, geldt er $\alpha + 1 = \alpha^2$ en $\beta + 1 = \beta^2$. Dan volgt inderdaad dat

$$a_{k+1} = (\alpha^{k+1} - \beta^{k+1})/\sqrt{5}.$$

Conclusie: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, is de stelling nu bewezen vanwege het (sterke) principe van volledige inductie.

□

We zien in dit bewijs nog een andere mogelijke variatie bij een bewijs met volledige inductie: Bij de basisstap bewijzen we niet alleen $P(0)$ maar ook $P(1)$. De inductiestap gebruiken we dan om $P(n)$ te bewijzen voor $n \geq 2$.

1.5.4 Variatie 3: Combinatie van variaties 1 en 2

We kunnen de variaties 1 en 2 ook combineren.

Stelling 1.5.7. *Zij n_0 een geheel getal. Neem aan dat $P(n)$ een bewering is die afhangt van een geheel getal $n \geq n_0$. Veronderstel dat*

(1) *$P(n_0)$ waar is, en dat*

(2) *de implicatie*

$$[P(j) \text{ is waar voor elk geheel getal } j \geq n_0 \text{ met } j \leq k] \implies P(k+1)$$

geldt voor elk geheel getal $k \geq n_0$.

Dan is de bewering $P(n)$ waar voor elk geheel getal $n \geq n_0$.

Ook hiervan geven we een voorbeeld.

Propositie 1.5.8. *Zij n een natuurlijk getal met $n \geq 2$. Dan is n ofwel een priemgetal, ofwel een product van eindig veel priemgetallen.*

Bewijs. We gebruiken volledige inductie.

Basisstap: Voor $n = 2$ is de bewering waar, want 2 is een priemgetal.

Inductiestap: Neem nu aan dat $k \geq 2$ een natuurlijk getal is en dat de bewering waar is voor elk natuurlijk getal j met $2 \leq j \leq k$. Dus voor elk natuurlijk getal $j \geq 2$ met $j \leq k$ geldt dat j ofwel een priemgetal is, ofwel te schrijven is als een product van eindig veel priemgetallen.

We bekijken nu $k+1$, en we moeten bewijzen dat $k+1$ een priemgetal is, of een product van eindig veel priemgetallen. Als $k+1$ een priemgetal is, dan zijn we klaar. Neem dus aan dat $k+1$ geen priemgetal is, zeg

$$k + 1 = ab$$

waarin a en b natuurlijke getallen zijn met $a \geq 2$ en $b \geq 2$. Voor a en b geldt dat $a < k+1$ en $b < k+1$. Dus $2 \leq a \leq k$ en $2 \leq b \leq k$, zodat we op a en b de inductiehypothese kunnen toepassen. Zowel a als b is dus ofwel een priemgetal, ofwel een product van eindig veel priemgetallen. Dan is $k+1 = ab$ een product van eindig veel priemgetallen. De inductiestap is bewezen.

Conclusie: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, volgt met het principe van volledige inductie dat de propositie bewezen is.

□

1.5.5 Oefeningen

Oefening 1.5.1. Laat zien dat voor elk tweetal natuurlijke getallen a en b met $a \neq b$ geldt dat $a^n - b^n$ deelbaar is door $a - b$ voor elk natuurlijk getal n.

Oefening 1.5.2. Bewijs met volledige inductie dat $n^3 - n$ deelbaar is door 3 voor elk natuurlijk getal n.

Oefening 1.5.3. Bewijs met volledige inductie dat voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$ geldt:

(a) $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ (b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Oefening 1.5.4. Bewijs met volledige inductie dat voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$ geldt:

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2j-1)^3 = n^2(2n^2-1)$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$

Oefening 1.5.5. Bewijs met volledige inductie dat $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < n$ geldt voor elk natuurlijk getal $n \geq 3$.

Oefening 1.5.6. Bewijs dat $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}} > \sqrt{n}$ geldt voor elk natuurlijk getal $n \geq 2$.

Oefening 1.5.7. De getallen a_n worden inductief gedefinieerd door $a_0 = 0$ en $a_{n+1} = 3a_n + 3^n$ voor $n \geq 0$. Bewijs dat $a_n = n3^{n-1}$ voor elk natuurlijk getal n.

Oefening 1.5.8. Zij (a_n) de rij van Fibonaccigetallen, zie Propositie 1.5.6.

(a) Bewijs met inductie op n dat

$$a_{m+n} = a_{m-1}a_n + a_m a_{n+1}$$

voor alle natuurlijke getallen m en n. U mag de formule van Binet (1.9) niet gebruiken.

(b) Leid hieruit af dat a_m een deler is van a_{mn} voor alle natuurlijke getallen m en n met $m, n \geq 1$. Gebruik hiervoor weer inductie op n.

Oefening 1.5.9. De getallen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ worden gedefinieerd door $a_0 = a_1 = 1$ en

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_{n-1}}\right), \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}_0.$$

(a) Bereken a_2, a_3 en a_4.

(b) Probeer te bewijzen dat $a_n \geq 1$ geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$. Kun je dit bewijzen met volledige inductie?

(c) Probeer te bewijzen dat $a_n \leq 2$ geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$. Kun je dit bewijzen met volledige inductie?

(d) Bewijs met inductie dat $1 \leq a_n \leq 2$ geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Oefening 1.5.10. In een enkelvoudige competitie met n teams heeft elk team precies één keer tegen elk ander team gespeeld. Neem aan dat $n \geq 2$ en dat gelijke spelen niet voorkomen.

Bewijs dat het mogelijk is om de n teams te nummeren van $1, 2, \ldots, n$ zodanig dat team i heeft gewonnen van team $i+1$ voor elke $i = 1, \ldots, n-1$.

Oefening 1.5.11. Zij c een vast reëel getal. We weten vanwege de kettingregel voor afgeleiden dat

$$\frac{d}{dx}(e^{cx}) = ce^{cx}.$$

(a) Bereken $\frac{d^2}{dx^2}(e^{cx})$ en $\frac{d^3}{dx^3}(e^{cx})$ en krijg hierdoor een vermoeden omtrent de $n$de afgeleide $\frac{d^n}{dx^n}(e^{cx})$.

(b) Formuleer dit vermoeden als een propositie.

(c) Bewijs de propositie met volledige inductie.

Oefening 1.5.12. Als we de opeenvolgende afgeleiden van e^{-x^2} gaan berekenen, dan vinden we (gebruik makend van de kettingregel en de productregel voor afgeleiden) dat

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\right) &= -2xe^{-x^2} \\
\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2}\right) &= -2e^{-4x^2} + (-2x)\cdot(-2x)e^{-x^2} \\
&= (4x^2-2)e^{-x^2} \\
\frac{d^3}{dx^3}\left(e^{-x^2}\right) &= 8xe^{-x^2} + (4x^2-2)\cdot(-2x)e^{-x^2} \\
&= (-8x^3+12x)e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

Voor algemene $n \in \mathbb{N}$ verwachten we hieruit dat

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}$$

met H_n een veelterm van graad n waarvan de leidende coëfficiënt gelijk is aan 2^n. Bewijs dit met volledige inductie.

1.6 Extra oefeningen over Hoofdstuk 1

Oefening 1.6.1. Beoordeel het bewijs van de volgende stelling. Waar zit de fout?

Stelling Alle paarden hebben dezelfde kleur.

Bewijs. We gaan de volgende uitspraak met volledige inductie bewijzen.

- $P(n)$: Voor elke groep van n paarden geldt dat de paarden in deze groep dezelfde kleur hebben.

Basisstap: Het is evident dat alle paarden in een groep van 1 paarden dezelfde kleur hebben. Dus $P(1)$ waar.

Inductiestap: Neem aan dat $P(k)$ waar is. Dus in elke groep van k paarden hebben de paarden dezelfde kleur.

Beschouw nu een groep met $k+1$ paarden. Haal uit deze groep 1 paard weg. Dan houden we een groep met k paarden over en volgens de inductiehypothese hebben al deze paarden dezelfde kleur. Voeg vervolgens het weggehaalde paard weer toe aan de groep en neem een ander paard weg. Dan hebben we weer een groep met k paarden en volgens de inductiehypothese hebben ook alle paarden in deze groep dezelfde kleur. We besluiten dat de $k+1$ paarden dezelfde kleur hebben en dus geldt $P(k+1)$.

Conclusie: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, geldt $P(n)$ voor elke $n \geq 1$ vanwege het principe van volledige inductie. Dit betekent dat alle paarden dezelfde kleur hebben en de stelling is bewezen.

□

Oefening 1.6.2. Beoordeel het volgende bewijs met volledige inductie. Waar zit de fout?

Stelling Voor elke natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ geldt $2^n = 1$.

Bewijs. Basisstap: Voor $n = 0$ geldt inderdaad $2^n = 2^0 = 1$.

Inductiestap: Neem $n \in \mathbb{N}$ en veronderstel dat $2^k = 1$ geldt voor alle $k \leq n$. Er geldt

$$2^{n+1} = \frac{2^n \cdot 2^n}{2^{n-1}}$$

wat eenvoudig na te rekenen is. Uit de inductiehypothese volgt dat $2^n = 1$ en $2^{n-1} = 1$ en dus

$$2^{n+1} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

Conclusie: Uit het sterke principe van volledige inductie volgt dat $2^n = 1$ geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$.

□

Oefening 1.6.3. De complexe getallen vormen een uitbreiding van de reële getallen, die van groot belang is in de wiskunde. Een belangrijke eigenschap is de zogenaamde hoofdstelling van de algebra, die we hier als volgt formuleren.

Stelling 1.6.1 (Hoofdstelling van de algebra)**.** *Zij* $p(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n$ *een veelterm van graad* $n \geq 1$ *met complexe coëfficiënten* $c_0, \ldots, c_n$ *en* $c_0 \neq 0$*. Dan bestaat er een complex getal* $a \in \mathbb{C}$ *zodanig dat* $p(a) = 0$*.*

Dit is een vrij moeilijke stelling die we hier niet bewijzen. Voor de wiskunde-studenten komt dit later in de opleiding aan bod in de vakken Analyse I en Complexe Analyse.

Een eenvoudigere eigenschap van veeltermen wordt gegeven in de volgende stelling.

Stelling 1.6.2. *Zij* p *een veelterm van graad* $n \geq 1$ *met complexe coëfficiënten, en zij* $a \in \mathbb{C}$*. Dan is er een veelterm* q *van graad* $n - 1$*, zodanig dat*

$$p(z) = p(a) + (z - a)q(z)$$

geldt voor elke $z \in \mathbb{C}$*.*

De stelling volgt uit het algoritme voor euclidische deling toegepast op de deling van $p(z)$ door $z - a$, maar daar gaan we hier verder niet op in.

De oefening is om de twee bovenstaande resultaten te gebruiken om de volgende uitspraak over veeltermen te bewijzen.

Stelling 1.6.3 (Factorisatiestelling)**.** *Als p een veelterm van graad $n \geq 1$ is met complexe coöefficiënten, dan bestaan er complexe getallen $a_1, \ldots, a_n$ en c_0 met $c_0 \neq 0$ zodanig dat*

$$p(z) = c_0 \prod_{j=1}^{n} (z - a_j).$$

We gebruiken hier de productnotatie

$$\prod_{j=1}^{n} (z - a_j) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n).$$

We willen Stelling 1.6.3 bewijzen met volledige inductie.

(a) Om dit te kunnen bewijzen met volledige inductie moeten we de uitspraak van Stelling 1.6.3 eerst herformuleren in de vorm

- voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ geldt $P(n)$

voor zeker predikaat $P(n)$. Wat is $P(n)$ in dit geval?

(b) Bewijs de stelling met volledige inductie. Zorg voor een goed gestructureerd bewijs. Voor het bewijs mag je aannemen dat de Stellingen 1.6.1 en 1.6.2 juist zijn. Verwijs in je bewijs duidelijk naar deze stellingen wanneer je er gebruik van maakt.

(c) Bewijs tenslotte dat de "reële" versie van Stelling 1.6.3 niet juist is. Dat wil zeggen, bewijs dat het volgende niet juist is.

- Als p een veelterm van graad $n \geq 1$ is met reële coöefficiënten, dan bestaan er reële getallen $a_1, \ldots, a_n$ en c_0 met $c_0 \neq 0$ zodanig dat

$$p(z) = c_0 \prod_{j=1}^{n} (z - a_j).$$

Oefening 1.6.4. (a) Bewijs met volledige inductie dat

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$$

geldt voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Zij (a_k) een rij van strikt positieve getallen waarvoor geldt dat voor elke $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2.$$

Bewijs dat $a_k = k$ voor alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Hoofdstuk 2

Verzamelingen en kwantoren

2.1 De taal van verzamelingen

De taal van verzamelingen wordt doorheen de hele wiskunde gebruikt. Verzamelingen bieden een kader waarbinnen wiskundige ideeën op een exacte manier geformuleerd kunnen worden.

2.1.1 Verzamelingen

Op dit beginnend niveau volstaat het om een **verzameling** te definiëren als een zekere collectie van objecten die de **elementen** van de verzameling genoemd worden.

Sommige verzamelingen die vaak voorkomen hebben een standaardnotatie, zoals

- $\mathbb{N}$ is de verzameling van natuurlijke getallen: $0, 1, 2, \ldots$.
- $\mathbb{N}_0$ is de verzameling van natuurlijke getallen zonder 0.
- $\mathbb{Z}$ is de verzameling van gehele getallen.
- $\mathbb{Q}$ is de verzameling van rationale getallen (breuken).
- $\mathbb{R}$ is de verzameling van reële getallen.
- $\mathbb{C}$ is de verzameling van complexe getallen.

Als x een element is van de verzameling A dan schrijven we

$$x \in A.$$

De negatie van de bewering $x \in A$ wordt genoteerd met $x \notin A$. Dus $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ is de bewering dat $\sqrt{2}$ geen rationaal getal is.

Er zijn drie mogelijkheden om een verzameling weer te geven. We kunnen de elementen opsommen, een voorwaarde opgeven waaraan de elementen voldoen, of een formule of algoritme geven om de elementen te construeren.

Elementen opsommen

Als we een verzameling geven door opsomming dan gebruiken we hiervoor accolades. Dus

$$A = \{1, -2, e, \sqrt{\pi}\}$$

is de verzameling met vier elementen 1, -2, e en $\sqrt{\pi}$. De volgorde waarin de elementen worden vermeld is van geen belang. We mogen een element meer dan eens opsommen. Dezelfde verzameling A van hierboven kunnen we dus ook weergeven door

$$A = \{-2, \sqrt{\pi}, e, 1\} = \{1, 1, \sqrt{\pi}, e, 1, -2, \sqrt{\pi}\}.$$

Het opsommen van de elementen is alleen praktisch bij verzamelingen met weinig elementen. We kunnen het wel uitbreiden tot bijvoorbeeld

$$\mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

waarbij de puntjes betekenen 'enzovoorts', en het aan de lezer overgelaten wordt om dit in te vullen.

Elementen die aan voorwaarde voldoen

Een verzameling kan beschreven worden door een voorwaarde op te geven waaraan de elementen moeten voldoen. Bijvoorbeeld

$$A = \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 < n < 6\}$$

Hierin geeft $n \in \mathbb{Z}$ aan welke objecten we bekijken (in dit geval gehele getallen). De bewering $0 < n < 6$ is een predicaat. De verzameling A bevat alle $n \in \mathbb{Z}$ waarvoor geldt dat het invullen van n in het predicaat leidt tot een ware propositie. Dus voor een geheel getal n geldt

$$n \in A \;\Leftrightarrow\; 0 < n < 6.$$

In dit geval kunnen we A ook geven door opsomming van de elementen

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

maar in andere gevallen is dit moeilijk of onmogelijk.

De verticale streep $\mid$ in de definitie van A wordt uitgesproken als 'waarvoor' of 'met de eigenschap dat'. We zeggen dus 'A is de verzameling van alle $n \in \mathbb{Z}$ waarvoor $0 < n < 6$'.

Het symbool n in de definitie van A is een dummy. Het heeft geen eigen betekenis en het kan vervangen worden door een ander symbool. We hadden bijvoorbeeld ook kunnen schrijven

$$A = \{\alpha \in \mathbb{Z} \mid 0 < \alpha < 6\}.$$

Constructieve definitie

Een derde manier om verzamelingen weer te geven is door middel van een formule zoals in het voorbeeld

$$B = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Hierin is B de verzameling van alle kwadraten van natuurlijke getallen. Dus een getal behoort tot B als en slechts als het kan geschreven worden als n^2 voor zeker natuurlijk getal n.

Andere voorbeelden zijn

$$\{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

voor de verzameling van even gehele getallen en

$$\{n/m \mid n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$$

voor de verzameling van rationale getallen. In het laatste voorbeeld zien we ook de afspraak dat aan alle voorwaarden achter de verticale streep $|$ voldaan moet zijn, en dat de voorwaarden gescheiden worden door een komma.

2.1.2 Basisbegrippen

Een verzameling wordt bepaald door haar elementen, zoals uitgedrukt wordt in de volgende definitie.

Definitie 2.1.1. Twee verzamelingen A en B zijn **gelijk**, en we schrijven $A = B$, als ze precies dezelfde elementen hebben. Dus $A = B$ betekent dat voor alle x geldt

$$x \in A \;\Leftrightarrow\; x \in B. \tag{2.1}$$

In een bewijs dat twee verzamelingen A en B gelijk zijn moeten we in feite twee dingen bewijzen: elk element van A is een element van B, en omgekeerd, elk element van B is een element van A. Dit komt overeen met het bewijzen van de volgende twee implicaties die samen equivalent zijn met (2.1)

$$x \in A \;\Rightarrow\; x \in B$$

$$x \in B \;\Rightarrow\; x \in A.$$

Een speciale verzameling is de lege verzameling.

Definitie 2.1.2. De **lege verzameling** is de unieke verzameling die geen enkel element heeft. We noteren de lege verzameling met $\emptyset$.

De uitspraak dat $x^2 + 1 = 0$ geen reële oplossingen heeft, kan in de taal van verzamelingen uitgedrukt worden door gelijkheid van twee verzamelingen

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset.$$

Een ander basisbegrip is het begrip deelverzameling.

Definitie 2.1.3. Neem aan dat A en B twee verzamelingen zijn. Dan zeggen we dat A een **deelverzameling** is van B, en we noteren $A \subset B$, als elk element van A ook een element van B is. Dus als voor elke x geldt

$$x \in A \;\Rightarrow\; x \in B.$$

De relatie $A \subset B$ heet de **inclusie** van A in B.

Let op dat we in Definitie 2.1.3 niet eisen dat A verschillend is van B. De inclusie $B \subset B$ is waar voor elke verzameling B. Een deelverzameling van B die niet gelijk is aan B wordt wel een 'strikte deelverzameling' of soms 'echte deelverzameling' van B genoemd. We noteren dit met $A \subsetneq B$. Dus[1]

$$A \subsetneq B \;\Leftrightarrow\; A \subset B \text{ en } A \neq B.$$

Uit de definities volgt dat

$$A = B \;\Leftrightarrow\; A \subset B \text{ en } A \supset B,$$

waarin $A \supset B$ een andere notatie is voor $B \subset A$. Dit betekent dat we de gelijkheid van twee verzamelingen A en B ook kunnen aantonen door de twee inclusies $A \subset B$ en $A \supset B$ te bewijzen. Deze aanpak komt vrij veel voor en we zullen ze ook nog regelmatig tegenkomen.

Het is belangrijk om goed onderscheid te maken tussen de symbolen $\in$ en $\subset$. Ze zijn wel nauw verwant omdat

$$x \in A \;\Leftrightarrow\; \{x\} \subset A.$$

2.1.3 Bewerkingen

We beginnen met een aantal definities.

Definitie 2.1.4. De **doorsnede** van twee verzamelingen A en B is de verzameling van elementen die zowel tot A als tot B behoren. We schrijven $A \cap B$. Dus

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}.$$

Definitie 2.1.5. Twee verzamelingen A en B zijn **disjunct** als $A \cap B = \emptyset$.

Definitie 2.1.6. De **unie** of **vereniging** van twee verzamelingen A en B is de verzameling van elementen die ofwel tot A ofwel tot B (of tot beide) behoren. We schrijven $A \cup B$. Dus

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}.$$

Definitie 2.1.7. Het **verschil** van twee verzamelingen A en B is de verzameling van elementen van A die niet tot B behoren. We schrijven $A \setminus B$. Dus

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\}.$$

Hiervoor geldt

$$(A \setminus B) \subset A \quad \text{ en } \quad (A \setminus B) \cap B = \emptyset$$

Eenvoudige eigenschappen zijn $A \cap A = A$, $A \cup A = A$, $A \setminus A = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ en $A \setminus \emptyset = A$.

Propositie 2.1.8. *Voor twee verzamelingen A en B zijn de verzamelingen $A \cap B$, $A \setminus B$ en $B \setminus A$ onderling disjunct en*

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \tag{2.2}$$

[1] Sommige auteurs gebruiken $A \subseteq B$ voor deelverzameling en $A \subset B$ voor strikte deelverzameling.

Bewijs. Het eenvoudigste bewijs is waarschijnlijk met behulp van gevalsonderscheid in de vorm van een waarheidstabel:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$	$x \in A \setminus B$	$x \in B \setminus A$
W	W	W	N	N
W	N	N	W	N
N	W	N	N	W
N	N	N	N	N

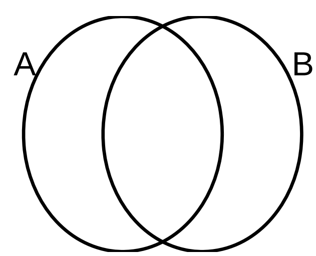
In de derde, vierde en vijfde kolom is er geen rij waar twee (of meer) keer een W in voorkomt. Dit betekent dat de drie verzamelingen $A \cap B$, $A \setminus B$ en $B \setminus A$ onderling (dat wil zeggen twee-aan-twee) disjunct zijn. Om (2.2) te bewijzen kunnen we de waarheidstabel voortzetten tot

$x \in A$	$x \in B$	$x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	$x \in A \cup B$
W	W	W	W
W	N	W	W
N	W	W	W
N	N	N	N

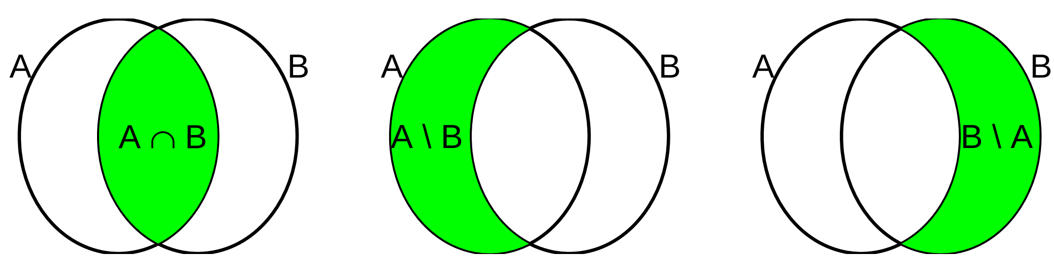
De twee laatste kolommen zijn gelijk. Dus geldt $x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \Leftrightarrow x \in A \cup B$, hetgeen de gelijkheid van de twee verzamelingen aantoont, zie (2.1) in Definitie 2.1.1. $\square$

2.1.4 Venndiagrammen

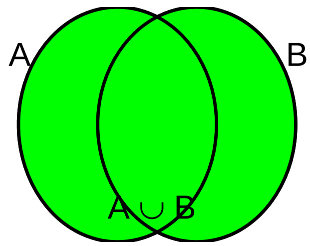
Propositie 2.1.8 kan inzichtelijk geïllustreerd worden door middel van Venndiagrammen. In een **Venndiagram** wordt een verzameling weergegeven door het gebied dat omsloten wordt door een gesloten kromme (vaak een cirkel of een ellips). De elementen van de verzameling liggen binnen de kromme. De elementen die niet tot de verzameling behoren liggen buiten de kromme. Twee algemene verzamelingen A en B worden weergegeven door twee overlappende gebieden zoals in de volgende figuur.



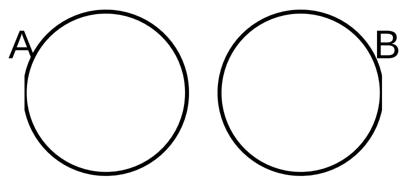
De tweede figuur bevat de Venndiagrammen voor de doorsnede $A \cap B$ en de verschillen $A \setminus B$ en $B \setminus A$. Uit de Venndiagrammen is het duidelijk dat de drie verzamelingen $A \cap B$, $A \setminus B$ en $B \setminus A$ onderling disjunct. Er is namelijk geen overlap tussen de drie gebieden.



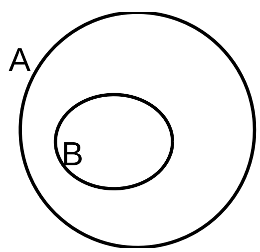
De drie verzamelingen samen vullen het totale gebied dat omsloten worden door de twee krommen. Dit is gelijk aan het gebied dat hoort bij de unie $A \cup B$, zoals gegeven in het volgende Venndiagram. Dit illustreert de eigenschap (2.2).



De bovenstaande Venndiagrammen gaan uit van algemene verzamelingen A en B, waarvan we verder niets weten. Als we bijvoorbeeld zouden weten dat $A \cap B = \emptyset$ dan kunnen we dat met het volgende Venndiagram weergeven



Als we weten dat B een deelverzameling is van A dan geven we dat als volgt weer



2.1.5 Eigenschappen

Het gebeurt vaak dat de verzamelingen die we beschouwen deelverzamelingen zijn van een vaste verzameling, zoals bijvoorbeeld de reële getallen. Dit noemen we dan een **universele verzameling** die we meestal noteren met U.

Definitie 2.1.9. Gegeven een universele verzameling U. Het **complement** van een deelverzameling $A \subset U$, notatie A^c, is het verschil van U en A. Dus

$$A^c = U \setminus A = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

De doorsnede, unie en complement voor verzamelingen komen overeen met de logische bewerkingen ‘en’, ‘of’ en ‘niet’.

Stelling 2.1.10. *Neem aan dat A, B en C deelverzamelingen zijn van een universele verzameling U. Dan geldt*

(a) *(associativiteit)* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *en* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(b) *(commutativiteit)* $A \cup B = B \cup A$ *en* $A \cap B = B \cap A$.

(c) *(distributiviteit)* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *en* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(d) *(de wetten van De Morgan)* $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *en* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

(e) *(complementering)* $A \cup A^c = U$ *en* $A \cap A^c = \emptyset$.

(f) *(dubbel complement)* $(A^c)^c = A$.

We kunnen deze eigenschappen bewijzen met waarheidstabellen of Venndiagrammen. Een andere mogelijkheid is met logische redenering vanuit de definities. Dit laatste zullen we illustreren door het bewijs te geven van de tweede uitspraak van (c).

Bewijs. De gelijkheid $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ tonen we aan door twee inclusies te bewijzen, namelijk

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{2.3}$$

en

$$A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{2.4}$$

Bewijs van (2.3)**:** Neem aan dat $x \in A \cap (B \cup C)$. Dan $x \in A$ en $x \in B \cup C$. Omdat $x \in B \cup C$ geldt $x \in B$ of $x \in C$. Als $x \in B$, dan geldt, omdat ook $x \in A$, dat $x \in A \cap B$. In het andere geval dat $x \notin B$, dan moet $x \in C$, en dan geldt, omdat tevens $x \in A$, dat $x \in A \cap C$. Dus $x \in A \cap B$ of $x \in A \cap C$, hetgeen betekent dat $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Omdat dit geldt voor elke $x \in A \cap (B \cup C)$ is nu bewezen dat $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bewijs van (2.4)**:** Neem aan dat $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Dan $x \in A \cap B$ of $x \in A \cap C$. Als $x \in A \cap B$ dan $x \in A$ en $x \in B$, zodat ook $x \in A$ en $x \in B \cup C$, en dus $x \in A \cap (B \cup C)$. In het andere geval is $x \in A \cap C$ en dan is $x \in A$ en $x \in C$, zodat ook $x \in A$ en $x \in B \cup C$ en dus $x \in A \cap (B \cup C)$. In beide gevallen volgt dat $x \in A \cap (B \cup C)$. Dit geldt voor elke $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ en dus is bewezen dat $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

We hebben nu bewezen dat de beide inclusies (2.3) en (2.4) gelden. Daarmee is de gelijkheid van de twee verzamelingen bewezen. □

2.1.6 De machtsverzameling

Definitie 2.1.11. De **machtsverzameling** $P(X)$ van een verzameling X is de verzameling van alle deelverzamelingen van X. Dus

$$P(X) = \{A \mid A \subset X\}.$$

Als bijvoorbeeld $X = \{a, b, c\}$, dan

$$P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}.$$

De lege verzameling $\emptyset$ is een element van de machtsverzameling van elke verzameling X omdat $\emptyset \subset X$ voor elke X. Een verzameling zoals $\{a\}$ met precies één element heet een **singleton** of **singleton verzameling**. Het is belangrijk om het element a goed te onderscheiden van het singleton $\{a\}$. In het bijzonder is $\{\emptyset\}$ verschillend van de lege verzameling $\emptyset$.

2.1.7 Het Cartesisch product

Definitie 2.1.12. Neem aan dat X en Y twee verzamelingen zijn. Dan is het **Cartesisch product** van X en Y gelijk aan de verzameling van alle koppels (of geordende paren) (x, y) met $x \in X$ en $y \in Y$. We noteren het Cartesisch product met $X \times Y$. Dus

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ en } y \in Y\}.$$

Als $Y = X$ dan schrijven we $X \times X = X^2$.

Er geldt dat twee koppels (x_1, y_1) en (x_2, y_2) gelijk zijn als en slechts als $x_1 = x_2$ en $y_1 = y_2$. Let op dat bij een koppel de volgorde van belang is. Als $x \neq y$ dan geldt $(x, y) \neq (y, x)$. Dit is in tegenstelling tot de situatie bij verzamelingen. Als we een verzameling weergeven door de elementen op te noemen, dan doet de volgorde er niet toe. Er geldt dus $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Voorbeeld 2.1.13. Als $X = \{a, b, c\}$ en $Y = \{1, 2\}$, dan is

$$X \times Y = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

en

$$Y \times X = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

2.1.8 Algemene unies en doorsnedes

In de definities 2.1.4 en 2.1.6 introduceerden we de begrippen doorsnede en unie, telkens van 2 verzamelingen. Het komt vrij vaak voor in de wiskunde dat we deze begrippen willen uitbreiden tot een willekeurig aantal verzamelingen.

Definitie 2.1.14. Veronderstel dat X_i een verzameling is voor elke $i \in I$. De veranderlijke i dient hier als index en de verzameling I wordt een **indexverzameling** genoemd. Dan definieert men de doorsnede, $\bigcap_{i \in I} X_i$, en de unie, $\bigcup_{i \in I} X_i$, van deze verzamelingen als volgt:

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \{x \mid x \in X_i \text{ voor elke } i \in I\}$$
$$\bigcup_{i \in I} X_i = \{x \mid x \in X_i \text{ voor minstens één } i \in I\}.$$

Deze nieuwe, algemenere, notaties voor doorsnede en unie zijn vaak bijzonder handig. De indexenverzameling I kan eindig of oneindig zijn, en bijgevolg kan men op deze manier doorsnede en unie van een oneindige familie van verzamelingen gaan beschouwen.

Voorbeeld 2.1.15. Neem aan dat $I = \{1, 2, 3\}$ en $X_1 = \{a, b, c\}$, $X_2 = \{b, c, d\}$ en $X_3 = \{c, f, g\}$. Dan is

$$\bigcap_{i \in I} X_i = X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \{c\}$$

en

$$\bigcup_{i \in I} X_i = X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{a, b, c, d, f, g\}$$

Voorbeeld 2.1.16. Neem $I = \mathbb{N}_0$ en $X_n =]-\infty, \frac{1}{n}[$ voor $n \in \mathbb{N}_0$. Dan geldt (ga na)

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} X_n =]-\infty, 1[\qquad \text{en} \qquad \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} X_n =]-\infty, 0].$$

2.1.9 Oefeningen

Oefening 2.1.1. Bewijs de eerste uitspraak van onderdeel (c) van Stelling 2.1.10 met een logische redenering.

Oefening 2.1.2. Bewijs onderdeel (c) van Stelling 2.1.10 met behulp van Venndiagrammen.

Oefening 2.1.3. Bewijs onderdeel (d) van Stelling 2.1.10 met behulp van waarheidstabellen.

Oefening 2.1.4. Bewijs dat

(a) $A \subset B \;\Leftrightarrow\; A \cup B = B$, (b) $A \subset B \;\Leftrightarrow\; A \cap B = A$.

Oefening 2.1.5. Het **symmetrisch verschil** van twee verzamelingen A en B is

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

(a) Bewijs dat $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

(b) Onderzoek wanneer $A\Delta B = \emptyset$ geldt en bewijs uw bewering.

(c) Onderzoek wanneer $A\Delta B = A$ geldt en bewijs uw bewering.

N.B: Andere notatie voor het symmetrisch verschil is $A\nabla B$, $A \ominus B$ en $A \div B$.

Oefening 2.1.6. Zie vorige oefening voor het symmetrisch verschil van twee verzamelingen. In deze oefening zijn A, B en C drie verzamelingen.

(a) Ga na of geldt
$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C).$$
Bewijs of geef een tegenvoorbeld.

(b) Bewijs dat
$$A\Delta C \subset (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$$
en geef een voorbeeld waaruit blijkt dat gelijkheid niet hoeft te gelden.

Oefening 2.1.7. Geef de machtsverzameling van $\emptyset$, van $\{\emptyset\}$ en van $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Oefening 2.1.8. Hoeveel elementen heeft de machtsverzameling van X als X een verzameling is met n elementen?

Oefening 2.1.9. Neem aan dat A, B en C verzamelingen zijn. Bewijs dat

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,

(b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,

(c) $A \times (B\Delta C) = (A \times B)\Delta(A \times C)$.

Oefening 2.1.10. Bewijs dat voor verzamelingen A, B, C en D geldt

$$(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D).$$

Laat door middel van een voorbeeld zien dat gelijkheid niet hoeft te gelden.

Oefening 2.1.11. Onderzoek welke verzameling bepaald wordt door de volgende unies en doorsnedes. Bewijs telkens je antwoord.

(a) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0}]0, \tfrac{1}{n}[$ (b) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} [0, \tfrac{1}{n}]$ (c) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \{\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n-1}, \ldots, 1\}$

Oefening 2.1.12. Neem aan dat alle verzamelingen X_i deelverzameling van een zelfde universele verzameling U zijn en dat we X_i^c noteren voor het complement $U \setminus X_i$. Bewijs dat dan

$$\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} X_i^c \qquad \text{en} \qquad \left(\bigcap_{i\in I} X_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} X_i^c.$$

2.2 Kwantoren

2.2.1 De universele en existentiële kwantor

Definitie 2.2.1. Als $P(a)$ een predicaat is dat afhangt van een veranderlijke $a \in A$ dan is

$$\forall a \in A : P(a) \tag{2.5}$$

een alternatieve manier om te schrijven

$$\{a \in A \mid P(a)\} = A.$$

We spreken (2.5) uit als 'voor elk element a van A geldt $P(a)$'.

Het symbool $\forall$ is de **universele kwantor**. We schrijven de kwantor vóór het predicaat. De veranderlijke a is een dummy of gebonden veranderlijke. Ze kan veranderd worden zonder dat de betekenis verandert.

Definitie 2.2.2. Als $P(a)$ een predicaat is dan is

$$\exists a \in A : P(a) \tag{2.6}$$

een alternatieve manier om te schrijven

$$\{a \in A \mid P(a)\} \neq \emptyset.$$

We spreken (2.6) uit als 'er is een element a van A waarvoor $P(a)$ geldt'.

Het symbool $\exists$ is de **existentiële kwantor**. Ook hier is a een dummy veranderlijke.

Merk op dat (2.5) en (2.6) beweringen zijn die waar of onwaar kunnen zijn.

Een variant van de existentiële kwantor $\exists$ is de kwantor $\exists!$ die uitdrukt dat er precies één element voldoet. Dus

$$\exists! a \in A : P(a)$$

betekent dat de verzameling $\{a \in A \mid P(a)\}$ uit precies één element bestaat.

We spreken af dat een kwantor betrekking heeft op alles wat er na komt, tenzij het door haakjes anders bepaald wordt. Zo bedoelen we met

$$\forall a \in A : P(a) \Rightarrow Q$$

dat $P(a) \Rightarrow Q$ waar is voor elke $a \in A$. Dit kunnen we eventueel verduidelijken door te schrijven

$$\forall a \in A : (P(a) \Rightarrow Q)$$

maar dat is vanwege onze afspraak niet nodig.

Als we bedoelen dat $\forall a \in A : P(a)$ impliceert dat Q waar is, dan we moeten zeker wel haakjes zetten. Dat schrijven we dus

$$(\forall a \in A : P(a)) \Rightarrow Q.$$

2.2.2 Bewijzen van beweringen met kwantoren

Enorm veel beweringen in de wiskunde hebben de vorm van een universele bewering of een existentiële bewering of een combinatie er van. Het is heel belangrijk om te weten hoe je dergelijke beweringen kunt bewijzen.

De universele kwantor

Een bewering $\forall a \in A : P(a)$ wordt meestal bewezen vanuit de vorm

$$a \in A \Rightarrow P(a).$$

Dat wil zeggen dat we aannemen dat $a \in A$ en daaruit gaan we $P(a)$ bewijzen.

De aanname dat $a \in A$ wordt als volgt geformuleerd: 'Neem aan dat $a \in A$', 'Laat $a \in A$', 'Zij $a \in A$', of 'Veronderstel dat $a \in A$'.

Als $P(a)$ bewezen is, dan wordt het gehele bewijs vaak afgesloten door een zin als 'Omdat $a \in A$ willekeurig gekozen was is de bewering $\forall a \in A : P(a)$ nu bewezen.' Dit is zeker gebruikelijk als het bewijs van $P(a)$ redelijk lang was.

Voorbeeld 2.2.3. We bewijzen

$$\forall a \in \mathbb{R}_0 : a^2 > 0 \tag{2.7}$$

als volgt:

Bewijs. Neem aan dat $a \in \mathbb{R}_0$. Dan is $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$. Dan geldt ofwel $a < 0$ of $a > 0$. In het geval dat $a > 0$ volgt door beide zijden van de ongelijkheid met het strikt positieve getal a te vermenigvuldigen dat $a^2 > 0$. In het geval dat $a < 0$ krijgen we ook $a^2 > 0$, omdat bij het vermenigvuldigen met het strikt negatieve getal a de ongelijkheid omdraait. In beide gevallen volgt dat $a^2 > 0$. Omdat $a \in \mathbb{R}_0$ willekeurig gekozen was is (2.7) bewezen. $\square$

Merk op dat het bovenstaande bewijs ook gebruik maakt van gevalsonderscheid.

De existentiële kwantor

De eenvoudigste manier om een bewering $\exists a \in A : P(a)$ te bewijzen is om een zeker element $a \in A$ aan te geven waarvoor $P(a)$ geldt. Dit noemen we wel een bewijs met een voorbeeld.

Voorbeeld 2.2.4. Te bewijzen

$$\exists n \in \mathbb{Z} : n^2 = 9. \tag{2.8}$$

Bewijs. Merk op dat $3 \in \mathbb{Z}$ en $3^2 = 9$. Dus $n = 3$ geeft een voorbeeld waaruit blijkt dat (2.8) juist is. $\square$

Er zijn ook minder directe manier om een existentiële bewering te bewijzen, bijvoorbeeld door een algoritme of door een telargument.

Combinaties van kwantoren

Vaak komen combinaties van kwantoren voor. Als $P(a, b)$ een predicaat is dat afhankelijk is van twee vrije veranderlijken, dan zijn er in totaal acht manieren om met kwantoren hieruit proposities te maken.

(a) $\forall a \in A : \forall b \in B : P(a, b)$

(b) $\forall b \in B : \forall a \in A : P(a, b)$

(c) $\forall a \in A : \exists b \in B : P(a, b)$

(d) $\exists b \in B : \forall a \in A : P(a, b)$

(e) $\exists a \in A : \forall b \in B : P(a, b)$

(f) $\forall b \in B : \exists a \in A : P(a, b)$

(g) $\exists a \in A : \exists b \in B : P(a, b)$

(h) $\exists b \in B : \exists a \in A : P(a, b)$

Het is eenvoudig in te zien dat (a) en (b) logisch equivalent zijn. In feite zijn ze logisch equivalent met de volgende bewering met maar één universele kwantor

$$\forall (a, b) \in A \times B : P(a, b).$$

Net zo zijn (g) en (h) logisch equivalent en ze zijn logisch equivalent met de volgende bewering met één existentiële kwantor

$$\exists (a, b) \in A \times B : P(a, b).$$

De andere beweringen zijn niet logisch equivalent. Als we een combinatie hebben van een universele en een existentiële kwantor dan is de volgorde van belang. De beweringen (c) en (d) zijn zeker niet logisch equivalent, zoals ook blijkt uit het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 2.2.5. We nemen voor $P(m, n)$ het predicaat $n > m$ en we vergelijken de twee beweringen

$$\forall m \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} : n > m \tag{2.9}$$

en

$$\exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : n > m. \tag{2.10}$$

De bewering (2.9) zegt dat bij elk natuurlijk getal een groter natuurlijk getal te vinden is. Deze bewering is waar. De tweede bewering (2.10) zegt dat er een natuurlijk getal bestaat dat groter is dan elk natuurlijk getal. Deze bewering is niet waar.

2.2.3 Negaties van beweringen met kwantoren

Soms willen we bewijzen dat een bewering met kwantoren niet waar is. Of we nemen aan dat ze niet waar is, omdat we gebruik maken van een bewijs uit het ongerijmde. Daarom is het goed om te weten wat de negatie van een universele en existentiële bewering is.

Stelling 2.2.6. *Zij $P(a)$ een predicaat. Dan geldt het volgende.*

(a) *De beweringen*

$$\neg\left(\forall a \in A : P(a)\right) \qquad \text{en} \qquad \exists a \in A : \neg P(a)$$

zijn logisch equivalent.

(b) *De beweringen*

$$\neg\left(\exists a \in A : P(a)\right) \qquad \text{en} \qquad \forall a \in A : \neg P(a)$$

zijn logisch equivalent

Bewijs. Het bewijs is niet moeilijk en wordt aan de lezer overgelaten. □

Met Stelling 2.2.6 kunnen we op vrij automatische wijze de negatie vormen van een bewering met een combinatie van universele en existentiële kwantoren. We moeten steeds de universele en existentiële kwantoren omwisselen en het predicaat vervangen door zijn negatie.

Zo zien we bijvoorbeeld dat

$$\neg\left(\forall a \in A : \exists b \in B : P(a,b)\right)$$

hetzelfde is als

$$\exists a \in A : \forall b \in B : \neg P(a,b).$$

Dit soort manipulaties treedt veel op in de wiskunde.

Voorbeeld 2.2.7. Een functie f is continu op een reëel interval $[a,b]$ als geldt

$$\forall x_0 \in [a,b] : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in [a,b] : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{2.11}$$

De negatie hiervan is de bewering dat f niet continu is op het interval $[a,b]$. In kwantoren uitgedrukt betekent dit dat we in (2.11) alle $\forall$-kwantoren vervangen door $\exists$-kwantoren, en omgekeerd, en dan de negatie nemen van het predicaat

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Omdat de negatie van een implicatie $P \Rightarrow Q$ logisch equivalent is met $P \wedge \neg Q$ vinden we dan dat de negatie van (2.11) gelijk is aan

$$\exists x_0 \in [a,b] : \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x \in [a,b] : \left(|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\right). \tag{2.12}$$

2.2.4 Oefeningen

Oefening 2.2.1. Onderzoek of de volgende beweringen waar of niet waar zijn en geef een bewijs.

(a) $\forall m \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{Z} : m \leq n$,

(b) $\exists m \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : m \leq n$,

(c) $\forall m \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : m \leq n$,

(d) $\exists m \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{Z} : m \leq n$,

(e) $\forall n \in \mathbb{Z} : \exists m \in \mathbb{Z} : m \leq n$,

(f) $\exists n \in \mathbb{Z} : \forall m \in \mathbb{Z} : m \leq n$.

Oefening 2.2.2. Onderzoek of de volgende beweringen waar of niet waar zijn en geef een bewijs.

(a) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$,

(b) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x + y = 0$,

(c) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : xy = 0$,

(d) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : xy = 0$,

(e) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : xy = 1$,

(f) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : xy = 1$.

Oefening 2.2.3. Onderzoek of de volgende beweringen waar of niet waar zijn en geef een bewijs.

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : (n$ is even of n is oneven$)$,

(b) $(\forall n \in \mathbb{N} : n$ is even$)$ of $(\forall n \in \mathbb{N} : n$ is oneven$)$.

Oefening 2.2.4. Gebruik de definities om te laten zien dat een bewering

$$\forall a \in \emptyset : P(a)$$

altijd waar is, en dat de bewering

$$\exists a \in \emptyset : P(a)$$

altijd niet waar is.

Oefening 2.2.5. Geldt de volgende implicatie voor alle verzamelingen A en alle predicaten $P(a)$?

$$(\forall a \in A : P(a)) \Rightarrow (\exists a \in A : P(a))$$

Bewijs uw antwoord.

Oefening 2.2.6. Geldt de volgende implicatie voor alle verzamelingen A en B en alle predicaten $P(a, b)$?

$$(\exists a \in A : \forall b \in B : P(a, b)) \Rightarrow (\forall b \in B : \exists a \in A : P(a, b))$$

Bewijs uw antwoord.

Oefening 2.2.7. Een deelverzameling $A \subset \mathbb{R}$ is naar boven begrensd als

$$\exists x \in \mathbb{R} : \forall a \in A : a \leq x.$$

Geef de negatie van deze bewering.

Oefening 2.2.8. De bewering dat $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ een priemgetal is kan in kwantoren worden uitgedrukt door

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 : (\exists k \in \mathbb{N}_0 : mk = n) \Rightarrow (m = 1 \vee m = n).$$

Geef de negatie van deze bewering.

Oefening 2.2.9. Schrijf de volgende beweringen met behulp van kwantoren.

(a) Voor alle gehele getallen a en b geldt dat als a en b even zijn, dat dan $a + b$ ook even is.

(b) De getallen $n, m \in \mathbb{N}_0$ zijn relatief priem.

Geef ook de negaties van deze beweringen.

Oefening 2.2.10. Zij $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ de verzameling van alle $n \times n$ matrices met reële elementen. Een matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ is inverteerbaar als

$$\exists B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) : [AB = I_n \wedge BA = I_n]$$

waarin I_n de $n \times n$ eenheidsmatrix is.

Geef de negatie van deze bewering.

Oefening 2.2.11. Een rij reële getallen (a_n) is convergent als

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |a_n - L| < \varepsilon.$$

Als we twee kwantoren omdraaien dan krijgen we een andere bewering. Onderzoek wat de volgende beweringen over de rij (a_n) inhouden. Wat voor rijen voldoen er aan?

(a) $\exists L \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \; n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |a_n - L| < \varepsilon$

(b) $\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |a_n - L| < \varepsilon$

(c) $\forall \varepsilon > 0 : \exists L \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : \; n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |a_n - L| < \varepsilon$

Oefening 2.2.12. Neem aan dat $P(a)$ en $Q(a)$ twee predicaten zijn met $a \in A$.

(a) Bewijs dat
$$\exists a \in A : (P(a) \Rightarrow Q(a))$$
logisch equivalent is met
$$(\forall a \in A : P(a)) \Rightarrow (\exists a \in A : Q(a))$$

(b) Onderzoek of
$$\forall a \in A : (P(a) \Rightarrow Q(a))$$
logisch equivalent is met
$$(\exists a \in A : P(a)) \Rightarrow (\forall a \in A : Q(a))$$

Oefening 2.2.13. Geef de ontkenning van de volgende bewering over een rij (a_n) van reële getallen
$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : [[\forall k \in \mathbb{N} : k \geq m \implies a_k > a_m] \wedge a_m < a_n]$$
Schrijf de ontkenning in een vorm waarbij $\neg$ en $\implies$ niet voorkomen.

2.3 Extra oefeningen over Hoofdstuk 2

Oefening 2.3.1. Beoordeel het volgende bewijs. Is het juist? Waar zit de fout als het niet juist is?

Stelling Als A, B en C verzamelingen zijn, dan geldt

$$A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C.$$

Bewijs. Neem aan dat $A \cap B = A \cap C$. We willen bewijzen dat $B = C$ en daatoe gaan we eerst de inclusie $B \subset C$ bewijzen.

Kies $x \in B$ willekeurig. Dan zijn er twee mogelijkheden, namelijk $x \in A$ en $x \notin A$.

- Als $x \in A$ dan is $x \in A \cap B$. Omdat $A \cap B = A \cap C$ volgt dan ook dat $x \in A \cap C$ en dus dat $x \in C$.
- Als $x \notin A$ dan is $x \notin A \cap B$. Omdat $A \cap B = A \cap C$ geldt dan ook dat $x \notin A \cap C$. Omdat $x \notin A$ volgt dan dat $x \in C$.

In beide gevallen geldt $x \in C$. Omdat $x \in B$ willekeurig gekozen was, kunnen we concluderen dat $B \subset C$.

Het bewijs dat $C \subset B$ verloopt analoog. Dus $B = C$. □

Oefening 2.3.2. Voor een natuurlijk getal j definiëren we de verzameling

$$A_j = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ is een deler van } j\}$$

(a) Bepaal $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{4} A_j$ en $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{4} A_j$

(b) Bepaal $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ en $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ voor een willekeurige $n \in \mathbb{N}$,

(c) Beschrijf de elementen van de verzameling $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ en $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Zijn deze verzamelingen gelijk?

(d)* Bepaal de twee verzamelingen

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{j=n}^{\infty} A_j \quad \text{en} \quad Y = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j$$

Zijn deze verzamelingen gelijk?

Oefening 2.3.3. Als a en b natuurlijke getallen zijn, dan betekent de notatie

$$a \mid b$$

dat a een deler is van b, of anders gezegd, dat b een veelvoud is van a.

(a) Schrijf $a \mid b$ uit in een bewering met een kwantor.

De notatie $a \mid b$ mag je gebruiken in de rest van de opgave.

Zij A een deelverzameling van de verzameling $\mathbb{N}_0$. We noemen een natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}_0$ een gemeen veelvoud van A als voor elke $a \in A$ geldt dat n een veelvoud van a is.

We noemen $k \in \mathbb{N}_0$ een kleinste gemeen veelvoud van A als k een gemeen veelvoud van A is en voor elk gemeen veelvoud n van A geldt dat $k \leq n$.

(b) Schrijf de definitie voor gemeen veelvoud in symbolische vorm met kwantoren. Begin de definitie met:

Zij $A \subset \mathbb{N}_0$ en $n \in \mathbb{N}_0$. We noemen n een gemeen veelvoud van A als ...

(c) Schrijf de definitie voor kleinste gemeen veelvoud met kwantoren. Begin de definitie met:

Zij $A \subset \mathbb{N}_0$ en $k \in N_0$. We noemen k een kleinste gemeen veelvoud van A als ...

(d) Geef drie verschillende gemene veelvouden van de verzameling $A = \{1, 3, 4, 6\}$. Is er een kleinste gemeen veelvoud?

(e) Heeft de lege verzameling een gemeen veelvoud? Is er een kleinste gemene veelvoud? Leg uit.

(f) Schrijf de bewering dat k niet een kleinste gemeen veelvoud van A is uit in symbolische vorm met kwantoren.

Oefening 2.3.4. Paradox van Russell (behoort niet tot leerstof)

Het is mogelijk dat een verzameling ook verzamelingen als element heeft. We hebben dit al gezien bij de machtsverzameling. We kunnen dan ook denken aan de verzameling van alle verzamelingen. Dit is een hele grote verzameling die alle verzameling bevat. Het is een voorbeeld van een verzameling die ook zichzelf als element heeft.

Beschouw nu de verzameling

$$R = \{X \mid X \text{ is een verzameling met } X \notin X\}$$

en we vragen ons af of R zichzelf als element heeft, of niet.

- Stel dat $R \notin R$. Dan is R een voorbeeld van een verzameling X met $X \notin X$. Uit de definitie van R volgt dan dat $R \in R$. Tegenspraak.
- Stel dat $R \in R$. Dan is R een voorbeeld van een verzameling X met $X \in X$. Uit de definitie van R volgt dan dat $R \notin R$. Weer een tegenspraak.

Wat is er nu mis?

Wat we in de cursus over verzamelingen geleerd hebben staat bekend als **naïeve verzamelingenleer**. We gaan hierin uit van primitieve begrippen ‘verzameling’ en ‘element’ die verder niet gedefinieerd worden. Als je hiermee verder redeneert kom je echter tot tegenspraken, zoals bovenstaande paradox aantoont die gegeven werd door Bertrand Russell in 1901. Wie hier meer over wil lezen kan beginnen met `nl.wikipedia.org/wiki/Russellparadox`

Hoofdstuk 3

Relaties

3.1 Relaties

3.1.1 Definities

In het vorige hoofdstuk hebben we kennis gemaakt met het Cartesisch product $X \times Y$ van twee verzamelingen X en Y. Het is de verzameling van alle koppels (x, y) met $x \in X$ en $y \in Y$. Dus

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ en } y \in Y\}.$$

Een deelverzameling van het Cartesisch product noemen we een relatie.

Definitie 3.1.1. Een **relatie** is een drietal

$$(R, X, Y)$$

waarin X en Y verzamelingen zijn en R een deelverzameling is van het Cartesisch product $X \times Y$. Dus

$$R \subset X \times Y.$$

Meestal zijn de verzamelingen X en Y duidelijk uit de context en dan spreken we van een relatie R van de verzameling X naar de verzameling Y in plaats van een relatie (R, X, Y).

We zien een relatie als een eigenschap die kan gelden tussen elementen van X en elementen van Y. De eigenschap geldt tussen $x \in X$ en $y \in Y$ als en slechts als $(x, y) \in R$. In plaats van $(x, y) \in R$ wordt ook vaak xRy geschreven.

Hier zijn enkele voorbeelden.

Voorbeeld 3.1.2. (a) Zij $X = \{1, 2, 3\}$ en $Y = \{a, b, c\}$. Dan is $R = \{(1, a), (1, c), (3, c)\}$ een relatie van X naar Y.

(b) Zij

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x > y\}.$$

Dan is G een relatie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. G is de 'groter-dan-relatie'.

(c) Zij X een verzameling en $Y = P(X)$ de machtsverzameling van X. Dan is

$$E = \{(x, A) \in X \times Y \mid x \in A\}$$

een relatie van X naar Y. E is de 'element-van-relatie'.

Als $P(x, y)$ een predicaat is met twee vrije veranderlijken $x \in X$ en $y \in Y$, dan is

$$\{(x, y) \in X \times Y \mid P(x, y)\}$$

een relatie. De relaties uit de voorbeelden (b) en (c) zijn van deze vorm.

We introduceren enkele begrippen rond relaties zonder veel commentaar.

Definitie 3.1.3. Zij R een relatie van X naar Y. Het **domein** van R is

$$\operatorname{dom} R = \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in R\}$$

en het **beeld** (of bereik) van R is

$$\operatorname{bld} R = \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x, y) \in R\}.$$

Een relatie van X naar X wordt ook wel een relatie op X genoemd. Een speciale relatie op X is de eenheidsrelatie I_X die als volgt gedefinieerd is

Definitie 3.1.4. De **eenheidsrelatie** op X is

$$I_X = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}.$$

We merken ook nog op dat een relatie een verzameling is en dat daarom de bekende bewerkingen voor verzamelingen gebruikt kunnen worden. Dus als R en S twee relaties zijn van X naar Y, dan zijn $R \cap S$ en $R \cup S$ ook relaties van X naar Y. Bovendien kunnen we spreken van $S \subset R$ of $R \subset S$.

Opmerking 3.1.5. Het is van belang om op te merken dat voor een relatie R van X naar Y de verzamelingen X en Y een integraal deel uit maken van de relatie. Het is dus niet alleen de verzameling van koppels die de relatie bepaalt, maar ook het feit dat we deze koppels zien als deel van het Cartesisch product $X \times Y$ met voorgeschreven X en Y.

Dit wordt ook benadrukt in onze definitie van relatie als een drietal (R, X, Y) met X en Y verzamelingen en $R \subset X \times Y$.

Het is goed om je te realiseren dat dit betekent dat twee relaties R_1 en R_2 gelijk zijn (waarbij R_1 een relatie van X_1 naar Y_1 is en R_2 een relatie van X_2 naar Y_2) als en slechts als geldt

- $X_1 = X_2$ en $Y_1 = Y_2$, en
- $(x, y) \in R_1$ als en slechts als $(x, y) \in R_2$ voor alle $x \in X_1 = X_2$ en $y \in Y_1 = Y_2$.

3.1.2 Inverse relatie en samenstelling

Definitie 3.1.6. Zij R een relatie van X naar Y. Dan is de **inverse relatie** van R de relatie R^{-1} van Y naar X gedefinieerd door

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in R\}.$$

Voorbeeld 3.1.7. De inverse relatie van de relatie G uit onderdeel (b) van Voorbeeld 3.1.2 is

$$\begin{aligned} G^{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (y, x) \in G\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y > x\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < y\}. \end{aligned}$$

De inverse relatie van de ‘groter-dan-relatie’ is dus de ‘kleiner-dan-relatie’.

Het bewijs van de volgende propositie wordt als oefening aan de lezer overgelaten.

Propositie 3.1.8. *Zij R een relatie van X naar Y. Dan geldt*

(a) $\operatorname{dom} R^{-1} = \operatorname{bld} R$. (b) $\operatorname{bld} R^{-1} = \operatorname{dom} R$. (c) $(R^{-1})^{-1} = R$.

Definitie 3.1.9. Zij R een relatie van X naar Y en S een relatie van Y naar Z. Dan is de **samenstelling** $S \circ R$ de relatie van X naar Z gedefinieerd door

$$S \circ R = \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x,y) \in R \text{ en } (y,z) \in S\}.$$

Let op de volgorde $S \circ R$. Deze volgorde is afkomstig van de manier waarop we gewend zijn functies samen te stellen. In het volgende hoofdstuk zullen we functies invoeren als relaties met een speciale eigenschap.

Voorbeeld 3.1.10. Zij A de verzameling van studenten aan de KU Leuven, B de verzameling van professoren, en C de verzameling van alle vakken die dit semester gegeven worden aan de KU Leuven. We beschouwen de relaties

$$\begin{aligned} R &= \{(s,v) \in A \times C \mid \text{ student } s \text{ volgt dit semester vak } v\}, \\ S &= \{(v,p) \in C \times B \mid \text{ vak } v \text{ wordt dit semester gegeven door professor } p\}. \end{aligned}$$

Dan is $S \circ R$ de relatie van A naar B die we kunnen uitdrukken als

$$S \circ R = \{(s,p) \in A \times B \mid \text{ student } s \text{ volgt dit semester een vak dat gegeven wordt door professor } p\}.$$

De relatie $R \circ S$ is niet gedefinieerd omdat $A \neq B$.

Propositie 3.1.11. *Zij R een relatie van X naar Y, S een relatie van Y naar Z, en T een relatie van Z naar W. Dan geldt $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.*

Het bewijs van deze propositie wordt als oefening aan de lezer overgelaten.

Propositie 3.1.11 drukt uit dat de samenstelling van relaties associatief is. Op grond van deze eigenschap mogen we de haakjes ook weglaten en we kunnen schrijven $T \circ S \circ R$.

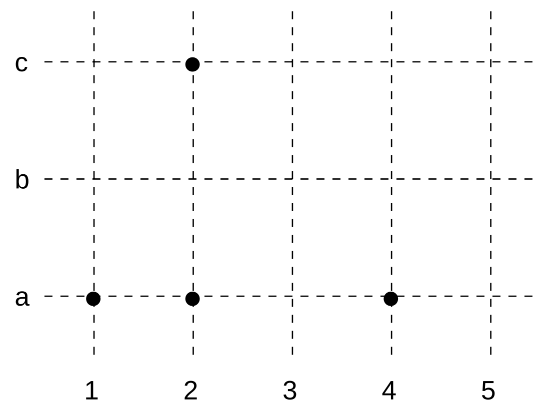
3.1.3 Grafische voorstelling

Grafiek

Als we X horizontaal weergeven en Y verticaal dan kunnen we $X \times Y$ zien als een deel van het vlak. Een relatie kunnen we dan grafisch weergeven door een aantal punten in het vlak. Als $(x,y) \in R$ dan zetten we een punt in het punt met x als horizontale coördinaat en y als verticale coördinaat. Deze voorstellingswijze heet ook wel de **grafiek** van de relatie. Als bijvoorbeeld $X = \{1,2,3,4,5\}$ en $Y = \{a,b,c\}$ dan wordt de relatie

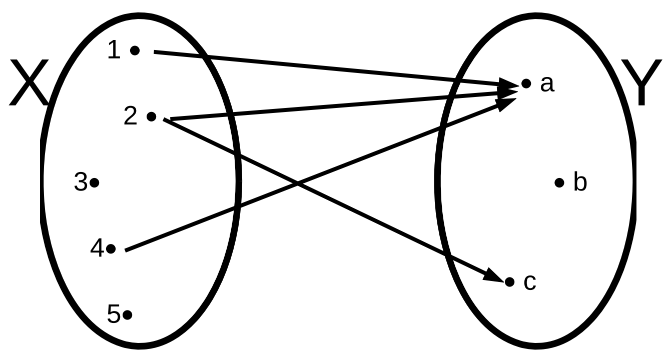
$$R = \{(1,a),(2,a),(2,c),(4,a)\}$$

als volgt weergegeven.



Pijlendiagram

We kunnen een relatie ook voorstellen als een pijlendiagram tussen Venndiagrammen. Als $(x, y) \in R$ dan laten we een pijl vertrekken uit $x \in X$ die aankomt in $y \in Y$. Dezelfde relatie R als hierboven kan dan als volgt worden weergegeven.



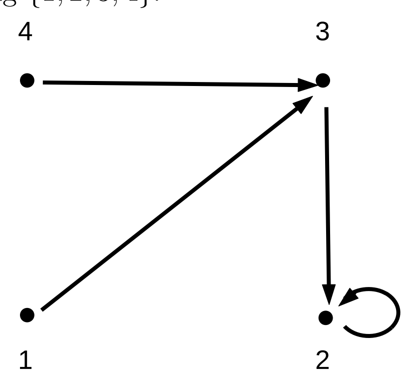
Gerichte graaf

Als R een relatie is op X (dus een relatie van X naar zichzelf) dan kunnen we R ook weergeven met een gerichte graaf. De elementen van X stellen we voor met punten. Als $(x, y) \in R$ dan tekenen we een pijl van x naar y.

In de volgende figuur wordt zo de relatie

$$R = \{(1, 3), (2, 2), (3, 2), (4, 3)\}$$

weergegeven op de verzameling $\{1, 2, 3, 4\}$.



3.1.4 Oefeningen

Oefening 3.1.1. Zij P de verzameling van alle mensen. Geef het domein en het beeld van de volgende relaties

(a) $O = \{(p,q) \in P \times P \mid \text{ persoon } p \text{ is een ouder van persoon } q\}$,

(b) $Z = \{(p,q) \in P \times P \mid \text{ persoon } p \text{ is een zus van persoon } q\}$.

Oefening 3.1.2. Beschouw de relaties O en Z uit de vorige oefening. Beschrijf in woorden wanneer een koppel personen (p,q) tot de volgende relatie behoort:

(a) $O \circ O$,

(b) $O^{-1} \circ O$,

(c) $\left(O \circ O^{-1}\right)^{-1}$,

(d) $O \circ Z$,

(e) $Z^{-1} \circ O$,

(f) $\left(Z \circ O^{-1}\right)^{-1} \circ Z$.

Oefening 3.1.3. Beschouw de relaties R en S uit Voorbeeld 3.1.10. Beschrijf de volgende relaties in woorden

(a) $R^{-1} \circ R$,

(b) $R^{-1} \circ S^{-1}$,

(c) $R^{-1} \circ S^{-1} \circ S \circ R$.

Oefening 3.1.4. Bewijs Propositie 3.1.8.

Oefening 3.1.5. Zij R een relatie op X en neem aan dat $R^{-1} \subset R$. Bewijs dat $R^{-1} = R$.

Oefening 3.1.6. Bewijs Propositie 3.1.11.

Oefening 3.1.7. Neem aan dat R een relatie is van X naar Y en dat S een relatie is van Y naar Z. Bewijs dat

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

Oefening 3.1.8. Interpreteer de samenstelling van twee relaties $S \circ R$ aan de hand van de pijlendiagrammen van R en S.

3.2 Equivalentierelaties

3.2.1 Definities

Er zijn enkele belangrijke eigenschappen die een relatie op X kan hebben.

Definitie 3.2.1. Zij R een relatie op X.

(a) We noemen R **reflexief** als

$$\forall x \in X : (x,x) \in R.$$

(b) We noemen R **symmetrisch** als

$$\forall x,y \in X : (x,y) \in R \implies (y,x) \in R.$$

(c) We noemen R **transitief** als

$$\forall x,y,z \in X : ((x,y) \in R \text{ en } (y,z) \in R) \implies (x,z) \in R.$$

Als we de relatie voorstellen door middel van een gerichte graaf dan betekent reflexief dat elk punt verbonden is met zichzelf. Symmetrisch betekent dat als er een pijl is van x naar y er ook een pijl is van y naar x. Transitief betekent dat als er een pijl is van x naar y en een pijl van y naar z, dat er dan ook een pijl is van x naar z.

Voorbeeld 3.2.2. (a) De 'groter-dan-relatie' $G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times R \mid x > y\}$ is niet reflexief, niet symmetrisch, maar wel transitief.

(b) De eenheidsrelatie $I_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ is reflexief, symmetrisch en transitief.

(c) Zij R de relatie op $\mathbb{Z}$ gegeven door

$$R = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \mid n - m \text{ is deelbaar door } 6\}.$$

Dan is R reflexief, symmetrisch en transitief.

Definitie 3.2.3. Als een relatie R op X reflexief, symmetrisch en transitief is, dan noemen we R een **equivalentierelatie** op X.

Als R een equivalentierelatie is en $(x, y) \in R$ dan zeggen we dat x en y **equivalent** zijn (t.o.v. R). en we schrijven $x \sim_R y$ of kortweg $x \sim y$.

Voorbeeld 3.2.4. (a) De eenheidsrelatie I_X is een equivalentierelatie op X. Hier geldt

$$x \sim y \quad \text{als en slechts als} \quad x = y.$$

(b) De relatie R uit onderdeel (c) van Voorbeeld 3.2.2 is een equivalentierelatie op $\mathbb{Z}$. Hier geldt dat m en n equivalent zijn als $n - m$ deelbaar is door 6. We zeggen dan ook wel dat m en n congruent zijn modulo 6. Dus

$$m \sim n \quad \text{als en slechts als } m \equiv n \mod 6.$$

(c) Twee driehoeken zijn congruent als de zijden even lang zijn. Congruentie is een equivalentierelatie op de verzameling van alle driehoeken.

(d) Zij P de verzameling van alle personen en definieer $p \sim q$ als p en q dezelfde verjaardag hebben. Dit is een equivalentierelatie.

(e) Zij R de relatie op $\mathbb{R}$ gegeven door $(x, y) \in \mathbb{R}$ als en slechts als $|x - y| < 1$. Dit is geen equivalentierelatie want de relatie is niet transitief. Ga dit zelf na.

3.2.2 Partities en equivalentieklassen

Bij een equivalentierelatie op een verzameling X zijn equivalente elementen van X in zeker opzicht hetzelfde. In het onderdeel (d) uit Voorbeeld 3.2.4 is dat de verjaardag. Als we alleen naar de verjaardag kijken dan kunnen we personen met dezelfde verjaardag niet onderscheiden. Ze zijn dan hetzelfde volgens het kenmerk 'verjaardag'. Door alleen naar de verjaardag te kijken delen we de verzameling P van alle personen op in 366 delen, namelijk één deel voor elke mogelijke verjaardag. Een koppel van twee personen behoort tot de relatie als ze uit hetzelfde deel komen. Als ze uit verschillende delen komen dan behoort het koppel niet tot de relatie. Elk deel geeft ons een deelverzameling van P die we kunnen labelen met de bijbehorende verjaardag. Als $D = \{1 \text{ jan}, 2 \text{ jan}, 3 \text{ jan}, \ldots, 30 \text{ dec}, 31 \text{ dec}\}$ de verzameling van alle dagen van het jaar is (inclusief 29 februari!), dan is voor elke $d \in D$

$$P_d = \{p \in P \mid \text{ persoon } p \text{ is geboren op dag } d\}$$

een deelverzameling van P. De verzamelingen P_d heten de equivalentieklassen van de relatie. Elke persoon behoort tot precies één equivalentieklasse. Tevens zijn p en q equivalent als en slechts als p en q tot dezelfde equivalentieklasse behoren. De verzameling van alle equivalentieklassen

$$\mathcal{P} = \{P_d \mid d \in D\}$$

noemen we een partitie van P, want het deelt de verzameling P op in disjuncte delen.

Het blijkt dat elke equivalentierelatie aanleiding geeft tot een partitie waarvan de elementen de equivalentieklassen van de relatie zijn. We definiëren deze begrippen nu algemeen.

Definitie 3.2.5. Een **partitie** $\mathcal{P}$ van een verzameling X is een deelverzameling van de machtsverzameling $P(X)$ met de eigenschappen

(a) De verzamelingen in $\mathcal{P}$ zijn niet leeg. Dus

$$\forall A \in \mathcal{P} : A \neq \emptyset.$$

(b) De verzamelingen in $\mathcal{P}$ zijn onderling disjunct. Dus

$$\forall A, B \in \mathcal{P} : A \neq B \implies A \cap B = \emptyset.$$

(c) De verzamelingen in $\mathcal{P}$ overdekken X. Dus

$$\forall x \in X : \exists A \in \mathcal{P} : x \in A.$$

De eigenschap (c) is equivalent met

(c') X is de unie van de verzamelingen in $\mathcal{P}$:

$$X = \bigcup_{A \in \mathcal{P}} A.$$

Definitie 3.2.6. Zij $\sim$ een equivalentierelatie op X en zij $x \in X$. Dan is $\{y \in X \mid x \sim y\}$ de **equivalentieklasse** van x met betrekking tot $\sim$. De equivalentieklasse van x wordt genoteerd met $[x]_\sim$ of met $[x]$ als duidelijk is welke equivalentierelatie bedoeld wordt. Dus

$$[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$$

De verzameling van alle equivalentieklassen van $\sim$ wordt genoteerd met $X/\sim$. Dus

$$\begin{aligned} X/\sim \; &= \{[x] \mid x \in X\} \\ &= \{A \subset X \mid \exists x \in X : A = [x]\}. \end{aligned}$$

De verzameling $X/\sim$ wordt de **quotiëntverzameling** van X ten opzichte van de equivalentierelatie $\sim$ genoemd.

Dit leidt ons tot de belangrijkste stelling over equivalentierelaties.

Stelling 3.2.7. *Zij $\sim$ een equivalentierelatie op X. Dan is $X/\sim$ een partitie van X.*

Om deze stelling te bewijzen hebben we enkele eenvoudigere hulpresultaten nodig. Zulke hulpresultaten worden vaak lemma's genoemd.

Lemma 3.2.8. *Zij $\sim$ een equivalentierelatie op X. Dan geldt voor alle $x, y \in X$:*

(a) *$x \in [x]$ en $[x] \neq \emptyset$*

(b) *als $x \sim y$ dan $[x] = [y]$, en*

(c) *als $\neg(x \sim y)$ dan $[x] \cap [y] = \emptyset$.*

Bewijs. (a) Omdat $\sim$ reflexief is, geldt $x \in [x]$ en dus is $[x]$ niet leeg.

(b) Neem aan dat $x \sim y$. We willen bewijzen dat $[x] = [y]$ en hiertoe bewijzen we twee inclusies.

- **Bewijs dat** $[x] \subset [y]$**:** Kies $z \in [x]$ willekeurig. Dit betekent dat $x \sim z$. We weten ook dat $x \sim y$ en vanwege symmetrie is dan ook $y \sim x$. Uit $y \sim x$ en $x \sim z$ volgt, vanwege de transitiviteit, dat $y \sim z$ en dit betekent dat $z \in [y]$. We hebben $z \in [x]$ willekeurig gekozen en dus volgt er dat $[x] \subset [y]$.
- **Bewijs dat** $[y] \subset [x]$**:** Kies $z \in [y]$ willekeurig. Dan geldt $y \sim z$. Er geldt ook $x \sim y$ en vanwege transitiviteit is dan ook $x \sim z$. Dit betekent $z \in [x]$. Omdat $z \in [y]$ willekeurig gekozen is volgt er dat $[y] \subset [x]$.

Beide inclusies zijn nu bewezen en er geldt dus inderdaad $[x] = [y]$.

(c) We moeten bewijzen dat $\neg(x \sim y) \implies [x] \cap [y] = \emptyset$ en we doen dit met behulp van contrapositie. We bewijzen dus

$$[x] \cap [y] \neq \emptyset \quad \implies \quad x \sim y.$$

Neem aan dat $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Dan is er een $z \in [x] \cap [y]$. Omdat $z \in [x]$ geldt $x \sim z$ en omdat $z \in [y]$ geldt $y \sim z$. Vanwege de symmetrie is dan ook $z \sim y$. Uit $x \sim z$ en $z \sim y$ volgt dan $x \sim y$ vanwege de transitiviteit van de equivalentierelatie, en dit is wat we moesten bewijzen. □

We kunnen nu Stelling 3.2.7 bewijzen.

Bewijs van Stelling 3.2.7. We moeten bewijzen dat $X/\sim$ voldoet aan de drie voorwaarden uit Definitie 3.2.5.

(a) Als $A \in X/\sim$ dan is er een $x \in X$ met $A = [x]$. Op grond van onderdeel (a) van het lemma is $A \neq \emptyset$.

(b) Neem aan dat $A, B \in X/\sim$ twee elementen van $X/\sim$ zijn. Er zijn x en y in X met $A = [x]$ en $B = [y]$. Er zijn twee mogelijkheden, nl. $x \sim y$ en $\neg(x \sim y)$. Als $x \sim y$ dan volgt uit onderdeel (b) van Lemma 3.2.8 dat $A = B$, en als $\neg(x \sim y)$ dan volgt uit onderdeel (c) van het lemma dat $A \cap B = \emptyset$.

Als $A \neq B$ dan volgt dus dat $A \cap B = \emptyset$, hetgeen betekent dat de elementen van $X/\sim$ onderling disjunct zijn.

(c) Kies $x \in X$. Dan is $x \in [x]$ vanwege onderdeel (a) van Lemma 3.2.8. Er is dus een $A \in X/\sim$ met $x \in A$ (namelijk $A = [x]$). □

Stelling 3.2.7 zegt dat elke equivalentierelatie op X aanleiding geeft tot een partitie van X. Omgekeerd hoort er ook een equivalentierelatie bij elke partitie.

Stelling 3.2.9. *Zij $\mathcal{P}$ een partitie van X. Dan definieert*

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; (\exists A \in \mathcal{P} : x \in A \wedge y \in A)$$

een equivalentierelatie op X. De equivalentieklassen van $\sim$ zijn precies de elementen van $\mathcal{P}$. Dus

$$X/\sim\, = \mathcal{P}.$$

Het bewijs van deze stelling wordt als oefening aan de lezer overgelaten.

3.2.3 Oefeningen

Oefening 3.2.1. Welke van de onderstaande relaties zijn reflexief? Welke symmetrisch en welke transitief?

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x - y| < r\}$ met $r > 0$.

(b) $\{(A, B) \in P(X) \times P(X) \mid A \subset B\}$ waarin X een verzameling is en $P(X)$ de machtsverzameling van X is.

(c) $\{(A, B) \in P(X) \times P(X) \mid (A \Delta B) \subset Y\}$. Hierin is X een verzameling en Y een vast gekozen deelverzameling van X. Herinner u dat $A \Delta B$ het symmetrisch verschil van A en B is, zie Oefening 2.1.5.

(d) De volle relatie op X: $X \times X$.

(e) De lege relatie op X: $\emptyset$ (met $\emptyset$ gezien als deelverzameling van $X \times X$).

Oefening 3.2.2. Welke van de volgende relaties op $\{a, b, c, d\}$ zijn reflexief? Welke symmetrisch en welke transitief?

(a) $\{(b, d), (a, c), (c, c), (d, b), (d, a)\}$,

(b) $\{(a, b), (b, a), (b, d), (a, d)\}$,

(c) $\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, d), (d, b)\}$.

Oefening 3.2.3. Zij R een relatie op X.

(a) Bewijs dat R reflexief is als en slechts als $I_X \subset R$ met I_X de eenheidsrelatie op X.

(b) Bewijs dat R symmetrisch is als en slechts als $R^{-1} = R$.

(c) Bewijs dat R transitief is als en slechts als $R \circ R \subset R$.

Oefening 3.2.4. Zij R een relatie op X. Bewijs dat

(a) Als R reflexief is, dan is R^{-1} het ook.

(b) Als R symmetrisch is, dan is R^{-1} het ook.

(c) Als R transitief is, dan is R^{-1} het ook.

Oefening 3.2.5. Geef voorbeelden van relaties R_j die voldoen aan:

(a) R_1 is reflexief, symmetrisch en transitief.

(b) R_2 is reflexief, symmetrisch en niet transitief.

(c) R_3 is reflexief, niet symmetrisch en transitief.

(d) R_4 is reflexief, niet symmetrisch en niet transitief.

(e) R_5 is niet reflexief, symmetrisch en transitief.

(f) R_6 is niet reflexief, symmetrisch en niet transitief.

(g) R_7 is niet reflexief, niet symmetrisch en transitief.

(h) R_8 is niet reflexief, niet symmetrisch en niet transitief.

Oefening 3.2.6. Zij R en S relaties op X. Gelden de volgende beweringen? Zo ja, geef een bewijs. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

(a) Als R en S reflexief zijn, dan is $S \circ R$ het ook.

(b) Als R en S symmetrisch zijn, dan is $S \circ R$ het ook.

(c) Als R en S transitief zijn, dan is $S \circ R$ het ook.

Oefening 3.2.7. Geef alle partities van $X = \{1, 2, 3\}$. Hoeveel partities zijn er?

Oefening 3.2.8. Geef alle equivalentierelaties op $X = \{1, 2, 3\}$. Hoeveel equivalentierelaties zijn er?

Oefening 3.2.9. Zij W de verzameling van alle Nederlandse woorden. Welke van de volgende relaties is een equivalentierelatie op W? Geef de equivalentieklassen van de equivalentierelaties.

(a) $\{(v, w) \in W \times W \mid$ de woorden v en w beginnen met dezelfde letter$\}$.

(b) $\{(v, w) \in W \times W \mid$ de woorden v en w hebben minstens één letter gemeenschappelijk$\}$.

(c) $\{(v, w) \in W \times W \mid$ de woorden v en w hebben evenveel letters$\}$.

Oefening 3.2.10. Welke van de volgende relaties is een equivalentierelatie op $\mathbb{R}$? Geef de equivalentieklassen van de equivalentierelaties.

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{N}\}$.

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{Q}\}$.

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{Z} : y = x \cdot 10^n\}$.

De twee volgende oefeningen maken gebruik van begrippen uit de lineaire algebra (zie cursus Lineaire Algebra).

Oefening 3.2.11. Zij V een vectorruimte en W een deelruimte van V. Laat zien dat

$$\{(v, w) \in V \times V \mid v - w \in W\}$$

een equivalentierelatie op V is.

Oefening 3.2.12. Zij V een vectorruimte. Bewijs dat

$$\{(v, w) \in V \times V \mid \exists t \in \mathbb{R}_0 : v = tw\}$$

een equivalentierelatie op V is.

Oefening 3.2.13. Zij R de relatie op $\mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$R = \{((x, y), (p, q)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid 2x + q = 2p + y\}$$

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

(b) Teken de equivalentieklasse $[(1, 1)]$ als een deel van $\mathbb{R}^2$.

Oefening 3.2.14. Bewijs Stelling 3.2.9.

3.3 Extra oefeningen over Hoofdstuk 3

Oefening 3.3.1. Beoordeel het volgende bewijs. Is het juist? Waar zit de fout als het niet juist is?

Stelling Zij R een relatie op een verzameling X. Als R symmetrisch en transitief is, dan is R een equivalentierelatie.

Bewijs. We nemen aan dat R symmetrisch en transitief is. We moeten alleen nog bewijzen dat R ook reflexief is.

Neem $x, y \in X$ willekeurig. Als $(x, y) \in R$ dan volgt ook $(y, x) \in R$, omdat R symmetrisch is. Maar dan is zowel $(x, y) \in R$ als $(y, x) \in R$. Omdat R transitief is volgt dat $(x, x) \in R$. Dus R is reflexief. □

Oefening 3.3.2. Naast reflexiviteit, symmetry en transitiviteit zijn er nog andere eigenschappen die een relatie kan hebben.

We noemen een relatie R op X **circulair** als voor alle $x, y, z \in X$ geldt dat uit $(x, y) \in R$ en $(y, z) \in R$ volgt dat $(z, x) \in R$.

(a) Wat is het verschil met een transitieve relatie?

(b) Zij $X = \{1, 2, 3\}$. Teken een gerichte graaf van een relatie op X die circulair is, maar niet transitief.

(c) Zij $X = \{1, 2, 3\}$. Teken een gerichte graaf van een relatie op X die transitief is, maar niet circulair.

(d) Geldt de volgende uitspraak? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

- Een relatie R op X is een equivalentierelatie als en slechts als ze reflexief en circulair is.

Oefening 3.3.3. We noemen een relatie R op X **antisymmetrisch** als voor alle $x, y \in X$ met $(x, y) \in R$ en $(y, x) \in R$ geldt dat $x = y$.

(a) Wat is het verschil met een symmetrische relatie?

(b) Zij $X = \{1, 2, 3\}$. Teken een gerichte graaf van een relatie op X die antisymmetrisch is, maar niet symmetrisch.

(c) Zij $X = \{1, 2, 3\}$. Teken een gerichte graaf van een relatie op X die symmetrisch is, maar niet antisymmetrisch.

(d) Gelden de volgende uitspraken? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

- Als een relatie R op een verzameling X zowel symmetrisch als antisymmetrisch is dan is R transitief.
- Als een relatie R op een verzameling X zowel symmetrisch als antisymmetrisch is dan is R reflexief.

Hoofdstuk 4

Functies

4.1 Functies

4.1.1 Basisbegrippen

Het begrip 'functie' is op een informele manier ingevoerd in de cursus Calculus I. Daar wordt een functie f van de verzameling X naar Y gezien als 'een regel' die bij elk element $x \in X$ een uniek element $y = f(x) \in Y$ oplevert. We geven hier een preciese definitie. We zien een functie als een relatie met een speciale eigenschap.

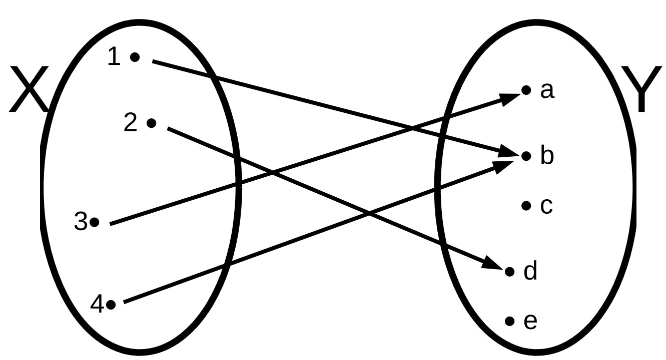
Definitie 4.1.1. Zij f een relatie van een verzameling X naar een verzameling Y. We noemen f een **functie** van X naar Y als voor elke $x \in X$ er precies één $y \in Y$ bestaat met $(x, y) \in f$.

In plaats van $(x, y) \in f$ schrijven we meestal $y = f(x)$.

Opmerking 4.1.2. Omdat de verzamelingen X en Y een integraal deel uitmaken van de definitie van een relatie van X naar Y geldt hetzelfde voor een functie.

Om dit te benadrukken definieert men een functie soms ook wel als een drietal (f, X, Y) waarin X en Y verzamelingen zijn en f een deelverzameling van $X \times Y$ met de eigenschap dat er voor elke $x \in X$ precies één $y \in Y$ is met $(x, y) \in f$.

Als we een relatie weergeven met een pijlendiagram dan herkennen we een functie aan de eigenschap dat uit elke $x \in X$ precies één pijl vertrekt, zoals in de volgende figuur het geval is.



Voorbeeld 4.1.3. (a) Zij $A = \{a, b, c\}$ en $B = \{1, 2, 3\}$. Dan is $f = \{(a, 2), (c, 3), (b, 2)\}$ een functie van A naar B. Hiervoor geldt $f(a) = 2$, $f(b) = 2$ en $f(c) = 3$.

(b) Zij S de verzameling van alle steden en L de verzameling van alle landen. Dan is $f = \{(s, l) \in S \times L \mid \text{ stad } s \text{ ligt in land } l\}$ een functie van S naar L. We maken hier de redelijke veronderstelling dat elke stad in precies één land ligt.

(c) Zij M de verzameling van alle mensen. De relatie

$$\{(p, q) \in M \times M \mid \text{ persoon } p \text{ is een ouder van persoon } q\}$$

is geen functie.

(d) De eenheidsrelatie op een verzameling X is gegeven door

$$I_X = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}.$$

Dit is een functie van X naar X die ook de **eenheidsfunctie** genoemd wordt. Voor deze functie geldt $I_X(x) = x$ voor elke $x \in X$.

(e) De relatie $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$ is een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$.

(f) De relatie $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy = 1\}$ is geen functie. Waarom niet?

Om aan te duiden dat f een functie is van X naar Y schrijven we

$$f : X \to Y.$$

In plaats van $(x, y) \in f$ schrijven we meestal $f(x) = y$. Uit de definitie volgt dat y uniek bepaald wordt door x. We zeggen dat y het **beeld** is van x onder f. Een uitgebreide notatie voor f is

$$f : X \to Y : x \mapsto f(x).$$

Vaak specificeren we een functie f van X naar Y door het beeld $f(x)$ te definiëren. Dan is $f(x)$ het **functievoorschrift** voor de functie. Het geeft aan hoe we bij gegeven x de functiewaarde $f(x)$ kunnen bepalen. Let op dat het functievoorschrift $f(x)$ gedefinieerd moet zijn voor elke $x \in X$.

Het is heel belangrijk om een goed onderscheid te maken tussen de functie f en het functievoorschrift $f(x)$. We spreken bv. over de sinus-functie sin met als functievoorschrift $\sin x$. Het is slordig om het te hebben over de functie $\sin x$. In plaats daarvan kunnen we zeggen dat we een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschouwen met $f(x) = \sin x$ voor elke $x \in \mathbb{R}$. Hiermee bedoelen we dan dat

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sin x\}.$$

Definitie 4.1.4. Zij f een functie van X naar Y. Dan is X het **domein** van f en Y het **codomein** van f.

Het domein en het codomein maken fundamenteel deel uit van de functie f. Als we X of Y veranderen dan krijgen we een andere functie, hoewel het functievoorschrift hetzelfde kan blijven. Omdat dit een belangrijke eigenschap is formuleren we ze nog in een aparte stelling, waarvan we het (eenvoudige) bewijs achterwege laten.

Stelling 4.1.5. *Zij $f : X_1 \to Y_1$ en $g : X_2 \to Y_2$ twee functies. Dan is $f = g$ als en slechts als $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ en*

$$\forall x \in X_1 : f(x) = g(x).$$

Voorbeeld 4.1.6. Beschouw de volgende vier functies

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f_1(x) = x^2$.

(b) $f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ gegeven door $f_2(x) = x^2$.

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ gegeven door $f_3(x) = x^2$.

(d) $f_4 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ gegeven door $f_4(x) = x^2$.

Het functievoorschrift $f_j(x) = x^2$ is hetzelfde voor elk van de functies. Toch zijn het vier verschillende functies omdat het domein of codomein steeds anders is.

Voorbeeld 4.1.7. Het functievoorschrift

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

geeft geen functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ omdat $f(x)$ niet gedefinieerd is voor $x = 1$. In zo'n geval is de gebruikelijke afspraak dat het domein uit alle waarden van x bestaat waarvoor het functievoorschrift zinvol is. In dit geval is dat $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ en we hebben zo een functie

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2+1}{x-1}.$$

We kunnen een functie uitbreiden naar een groter domein door voor elk nieuw element een functiewaarde voor te schrijven. Anderzijds kunnen we een functie ook beperken tot een kleiner domein.

Definitie 4.1.8. Neem aan dat f een functie is van X naar Y en dat $A \subset X$. Dan kunnen we een functie $g : A \to Y$ definiëren door

$$g(x) = f(x) \qquad \text{voor elke } x \in A.$$

Deze functie is de **beperking** van f tot A en wordt genoteerd door $f|_A$.

4.1.2 Samenstellen van functies

Omdat een functie een speciaal geval is van een relatie gelden de begrippen die we in het vorige hoofdstuk gedefinieerd hebben voor relaties ook voor functies.

We kennen bijvoorbeeld het samenstellen van relaties uit Definitie 3.1.9. Daaruit volgt dat we ook functies kunnen samenstellen en het resultaat is een relatie. Het blijkt dat de samenstelling van twee functies ook weer een functie is.

Stelling 4.1.9. *Neem aan dat $f : X \to Y$ en $g : Y \to Z$ functies zijn. Dan is $g \circ f$ een functie van X naar Z en er geldt*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \textit{voor elke } x \in X. \tag{4.1}$$

Bewijs. In dit bewijs gebruiken we de notatie met behulp van verzamelingen om functies en relaties weer te geven. Volgens Definitie 3.1.9 is

$$g \circ f = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x, y) \in f \text{ en } (y, z) \in g\}. \tag{4.2}$$

Neem $x \in X$ willekeurig. We moeten laten zien dat er precies één $z \in Z$ is met $(x, z) \in g \circ f$.

Eerst bewijzen we de *existentie* van z. Neem $y = f(x)$ en $z = g(y)$. Dan is $(x, y) \in f$ en $(y, z) \in g$, zodat uit (4.2) volgt dat $(x, z) \in g \circ f$. Er is dus zeker een $z \in Z$ met $(x, z) \in g \circ f$.

Vervolgens bewijzen we de *uniciteit* van z. Dit doen we door aan te nemen dat $z_1, z_2 \in Z$ voldoen aan $(x, z_1) \in g \circ f$ en $(x, z_2) \in g \circ f$ en daaruit te bewijzen dat $z_1 = z_2$. Dit is een veelgebruikte manier om uniciteit te bewijzen.

Neem dus aan dat $z_1, z_2 \in Z$ met $(x, z_1) \in g \circ f$ en $(x, z_2) \in g \circ f$. Dan volgt uit (4.2) dat er een $y_1 \in Y$ bestaat met $(x, y_1) \in f$ en $(y_1, z_1) \in g$. Net zo is er een $y_2 \in Y$ met $(x, y_2) \in f$ en $(y_2, z_2) \in g$. Omdat f een functie is en $(x, y_1) \in f$ en $(x, y_2) \in f$, volgt $y_1 = y_2$. Dan geldt $(y_1, z_2) = (y_2, z_2) \in g$. Omdat ook $(y_1, z_1) \in g$ en g een functie is, volgt hieruit dat $z_1 = z_2$. Dit bewijst de uniciteit.

We hebben nu bewezen dat $g \circ f$ een functie is van X naar Z. In het bovenstaande existentie-bewijs is al laten zien dat als $y = f(x)$ en $z = g(y)$ dat dan $(x, z) \in (g \circ f)$. Omdat $g \circ f$ een functie is, kunnen we dan schrijven $z = (g \circ f)(x)$. Ook geldt $z = g(y) = g(f(x))$. Dit bewijst (4.1). □

Een belangrijke eigenschap is dat het samenstellen van functies **associatief** is.

Propositie 4.1.10. *Neem aan dat $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ en $h : Z \to W$ functies zijn. Dan geldt*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Bewijs. Hier hebben we het eerste voorbeeld waarbij we moeten bewijzen dat twee functies gelijk zijn. Vanwege Stelling 4.1.5 moeten we hiervoor bewijzen dat de domeinen en de codomeinen van de twee functies gelijk zijn, en dat

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x) \tag{4.3}$$

geldt voor elke x uit het domein.

In de gegeven situatie is het duidelijk dat X het domein en W het codomein is van de twee functies. Verder geldt voor willekeurige $x \in X$,

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))$$

en

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)),$$

zodat (4.3) geldt. □

De associativiteit van het samenstellen van functies volgt ook uit Propositie 3.1.11 en Stelling 4.1.9. We hebben toch een apart bewijs gegeven omdat het bewijs een mooie illustratie geeft van een algemene principe voor het bewijzen van gelijkheid van twee functies f en g:

- bewijs dat de domeinen van f en g gelijk zijn,
- bewijs dat de codomeinen van f en g gelijk zijn,
- bewijs dat $f(x) = g(x)$ voor elke x uit het gezamenlijke domein van f en g.

4.1.3 Beeld en invers beeld

Definitie 4.1.11. Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Zij A een deelverzameling van X. Dan is $f(A)$ de deelverzameling van Y gegeven door

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A : f(x) = y\}.$$

We noemen $f(A)$ het **beeld** van A.

(b) Zij B een deelverzameling van Y. Dan is $f^{-1}(B)$ de deelverzameling van X gegeven door

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

We noemen $f^{-1}(B)$ het **invers beeld** van B.

De notatie $f(A)$ is een uitbreiding van de notatie $f(x)$ voor het beeld van x. Merk echter op dat $f(A)$ een verzameling is (een deelverzameling van Y) en dat $f(x)$ een element van Y is.

Als $B \subset Y$ uit één element bestaat, zeg $B = \{y\}$, dan schrijven we meestal $f^{-1}(y)$ in plaats van $f^{-1}(\{y\})$ en we noemen $f^{-1}(y)$ het **invers beeld** van y. Dus

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}. \tag{4.4}$$

Dit is een deelverzameling van X.

4.1.4 Oefeningen

Oefening 4.1.1. Zij $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4\}$ en $f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$. Is f een functie van X naar Y?

Oefening 4.1.2. Zij $X = \{4\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ en $f = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$. Is f een functie van X naar Y?

Oefening 4.1.3. Zij $f = \{(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \mid n \leq x < n + 1\}$. Laat zien dat f een functie is. Wat is $f(\pi)$? Wat is $f(-\pi)$?

Oefening 4.1.4. Neem aan dat R een relatie is van X naar Y en dat S een relatie is van Y naar Z. Veronderstel dat $S \circ R$ een functie is van X naar Z. Laat door middel van voorbeelden zien dat het dan niet noodzakelijk is dat R of S functies zijn.

Oefening 4.1.5. Zij $f : X \to Y$ een functie. Bewijs dat $R = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ een equivalentierelatie op X is.

Oefening 4.1.6. Zij X een niet-lege verzameling en $f : X \to X$.

(a) Veronderstel dat er een $x_0 \in X$ is met $f(x) = x_0$ voor alle $x \in X$ (in dat geval noemen we f een constante functie). Bewijs dat voor alle $g : X \to X$ geldt $f \circ g = f$.

(b) Veronderstel dat $f \circ g = f$ geldt voor alle functies $g : X \to X$. Bewijs dat f constant is.

Oefening 4.1.7. Welke van de volgende inclusies zijn geldig voor alle functies $f : X \to Y$ en alle $A \subset X$ en $B \subset Y$? Geef een bewijs van de juiste inclusies en geef een tegenvoorbeeld voor de niet-juiste.

(a) $f^{-1}(f(A)) \subset A$,

(b) $A \subset f^{-1}(f(A))$,

(c) $f(f^{-1}(B)) \subset B$,

(d) $B \subset f(f^{-1}(B))$.

Oefening 4.1.8. Zij X een verzameling. Laat zien dat de eenheidsrelatie I_X de enige relatie op X is die zowel een equivalentierelatie als een functie is.

Oefening 4.1.9. Zij $X = \{1, 2, 3\}$ en $Y = \{a, b\}$.

(a) Hoeveel functies zijn er van X naar Y?

(b) Hoeveel functies zijn er van Y naar X?

Oefening 4.1.10. Zij $X = \{1, 2, 3\}$.

(a) Hoeveel functies zijn er van X naar $\emptyset$ (de lege verzameling)?

(b) Hoeveel functies zijn er van $\emptyset$ naar X?

Oefening 4.1.11. Zij $f : X \to Y$ en $A_1, A_2 \subset X$. Ga na welke van de volgende beweringen juist zijn. Bewijs uw antwoord.

(a) $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$,

(b) $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$,

(c) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,

(d) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$,

(e) $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$,

(f) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$,

Oefening 4.1.12. Zij $f : X \to Y$ en $B_1, B_2 \subset Y$. Ga na welke van de volgende beweringen juist zijn. Bewijs uw antwoord.

(a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,

(b) $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2)$,

(c) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,

(d) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,

(e) $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cap B_2)$,

(f) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

4.2 Injecties, surjecties en bijecties

4.2.1 Definities

We behandelen nu de belangrijke begrippen injectiviteit en surjectiviteit van functies.

Definitie 4.2.1. Een functie $f : X \to Y$ is **injectief** (of één op één) als ze verschillende waarden aanneemt in verschillende elementen van het domein; dus als

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

In dat geval noemen we f een injectieve functie of een **injectie**.

Met behulp van contrapositie kunnen we de injectiviteit ook uitdrukken door

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Een functie f is injectief als en slechts als voor elke $y \in Y$ het inverse beeld $f^{-1}(y)$ uit hoogstens één element bestaat.

Definitie 4.2.2. Een functie $f : X \to Y$ is **surjectief** (of op) als elk element van het codomein als beeld optreedt; dus als

$$\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y.$$

In dat geval noemen we f een surjectieve functie of een **surjectie**.

Een functie f is surjectief als en slechts voor elke $y \in Y$ het inverse beeld $f^{-1}(y)$ uit minstens één element bestaat (dus niet-leeg is).

Definitie 4.2.3. Een functie is **bijectief** als ze zowel injectief als surjectief is. We noemen zo'n functie een **bijectie**.

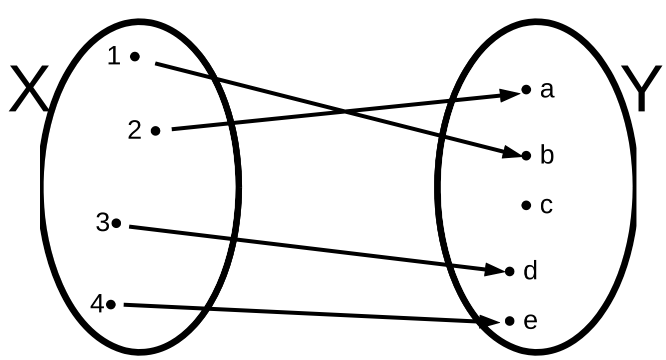
Een functie f is bijectief als en slechts als voor elke $y \in Y$ het inverse beeld $f^{-1}(y)$ uit precies één element bestaat.

Pijlendiagrammen

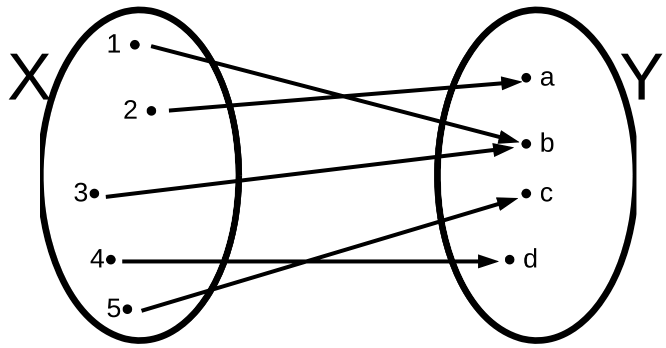
Als we een functie voorstellen door middel van een pijlendiagram tussen Venndiagrammen dan kunnen we injectiviteit, surjectiviteit en bijectiviteit als volgt karakteriseren.

- De functie $f : X \to Y$ is injectief als er geen element van Y is waarin meer dan één pijl aankomt.
- De functie is surjectief als in elk element van Y minstens één pijl aankomt.
- De functie is bijectief als in elk element van Y precies één element aankomt.

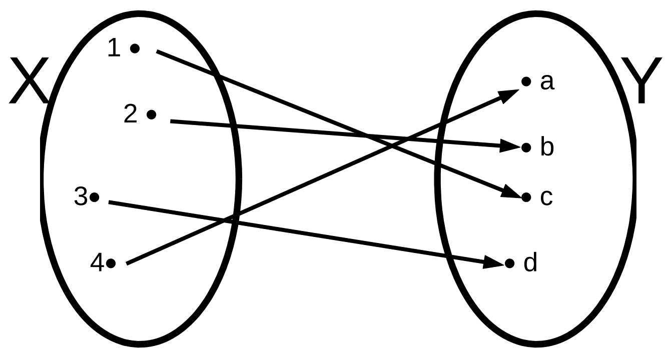
Dit wordt geïllustreerd in de volgende figuren. Merk op dat het feit dat $f : X \to Y$ een functie is betekent dat er in het pijlendiagram uit elk element van X precies één pijl vertrekt.



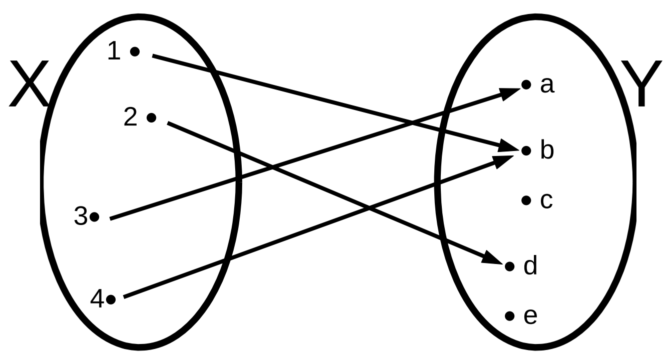
De eerste figuur bevat het pijlendiagram van een injectieve functie. De functie is niet surjectief want $c \in Y$ treedt niet op als beeld.



De tweede figuur bevat het pijlendiagram van een surjectieve functie. Het is geen injectie, want $b \in Y$ treedt twee keer als beeld op. Het is het beeld van zowel $1 \in X$ als $3 \in X$.



De derde figuur bevat het pijlendiagram van een bijectieve functie.



Er zijn ook functies die niet injectief en niet surjectief zijn. De vierde figuur bevat het pijlendiagram van zo'n functie.

4.2.2 Inverse functie

Herinner u dat I_X de eenheidsfunctie op de verzameling X is.

Definitie 4.2.4. Een functie $f : X \to Y$ is **inverteerbaar** als er een functie $g : Y \to X$ bestaat met de eigenschappen dat

$$g \circ f = I_X \text{ en } f \circ g = I_Y.$$

In dat geval noemen we g een **inverse functie** van f.

Uit de symmetrie van de definitie volgt dat een inverse functie g ook inverteerbaar is en dat f een inverse functie van g is.

Uit de volgende stelling zal blijken dat een inverse functie van f (als ze bestaat) uniek is. Als gevolg daarvan kunnen we spreken over 'de inverse functie', in plaats van 'een inverse functie'.

Stelling 4.2.5. *Zij $f : X \to Y$ een functie. Dan is f inverteerbaar als en slechts als f bijectief is. Bovendien is voor een inverteerbare functie de inverse functie uniek bepaald.*

Bewijs. Er zijn twee beweringen die we moeten bewijzen. De eerste bewering is een 'als en slechts als' bewering die zegt dat twee beweringen equivalent zijn. Om deze equivalentie te bewijzen gaan we de twee implicaties ' $\Longrightarrow$ ' en ' $\Longleftarrow$ ' bewijzen.

- *Bewijs van 'f is inverteerbaar $\Longrightarrow$ f is bijectief':* Veronderstel dat f inverteerbaar is. Er is dan een functie $g : Y \to X$ met $g \circ f = I_X$ en $f \circ g = I_Y$. We bewijzen dat f een bijectie is door te laten zien dat f zowel een injectie als een surjectie is.

  Zij $y \in Y$ willekeurig. Dan geldt omdat $f \circ g = I_Y$ dat $y = I_Y(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$. Als we dus $x = g(y)$ nemen dan geldt $x \in X$ en $y = f(x)$ en bijgevolg behoort y tot $f(X)$. Dit geldt voor elke $y \in Y$ en daarom is f surjectief.

  Neem vervolgens $x_1, x_2 \in X$ willekeurig en veronderstel dat $f(x_1) = f(x_2)$. Omdat $g \circ f = I_X$ geldt dan

  $$x_1 = I_X(x_1) = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1))$$

  en net zo

  $$x_2 = I_X(x_2) = (g \circ f)(x_2) = g(f(x_2)).$$

  Omdat $f(x_1) = f(x_2)$ volgt dat $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ en dus vinden we dat $x_1 = x_2$. We hebben nu bewezen dat

  $$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

  Omdat $x_1, x_2 \in X$ willekeurig waren gekozen, volgt nu dat f injectief is.

  Omdat f zowel injectief als surjectief is, is ze bijectief en ' $\Longrightarrow$ ' is bewezen.

- *Bewijs van 'f is inverteerbaar $\Longleftarrow$ f is bijectief':* Nu nemen we omgekeerd aan dat f bijectief is en we moeten laten zien dat f inverteerbaar is. We moeten dus een inverse functie g vinden.

  Omdat f een bijectie is, is er voor elke $y \in Y$ precies één $x \in X$ met $y = f(x)$. We definiëren nu $x = g(y)$. Dan is g goed gedefinieerd als functie van Y naar X, omdat bij iedere $y \in Y$ er precies één x is met $x = g(y)$. Deze x voldoet aan $f(x) = y$.

  We bewijzen dat $g \circ f = I_X$. Neem $x \in X$ willekeurig en stel $y = f(x)$. Dan volgt uit de manier waarop g gedefinieerd is dat $x = g(y)$. Bijgevolg is

  $$x = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

  Omdat dit geldt voor elke $x \in X$ volgt dat $g \circ f = I_X$.

  Op vrijwel analoge wijze bewijzen we dat $f \circ g = I_Y$. Neem $y \in Y$ willekeurig en stel $x = g(y)$. Dan volgt uit de manier waarop g gedefinieerd is dat $y = f(x)$. Dan is

  $$y = f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y).$$

Omdat dit geldt voor elke $y \in Y$ volgt dat $f \circ g = I_Y$.

We hebben nu bewezen dat $g \circ f = I_X$ en $f \circ g = I_Y$. Dit betekent dat f inverteerbaar is. De implicatie ' $\Longleftarrow$ ' is nu ook bewezen.

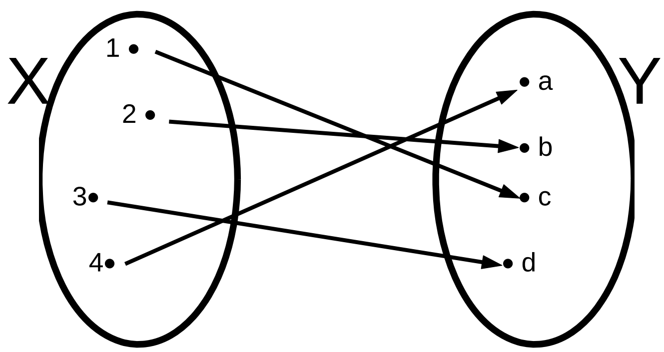
Tenslotte bewijzen we dat een inverse functie uniek is. We nemen dus aan dat f inverteerbaar is. Uit wat we in deze stelling reeds bewezen hebben, weten we al dat f bijectief is. Zij g een inverse functie. Dan geldt $g(f(x)) = x$ voor elke $x \in X$. Omdat f bijectief is legt dit g uniek vast. Immers voor elke $y \in Y$ is er een $x \in X$ met $y = f(x)$ en dan is $g(y) = g(f(x)) = x$. Dit bepaalt $g(y)$ voor elke $y \in Y$ en dus is g uniek. $\square$

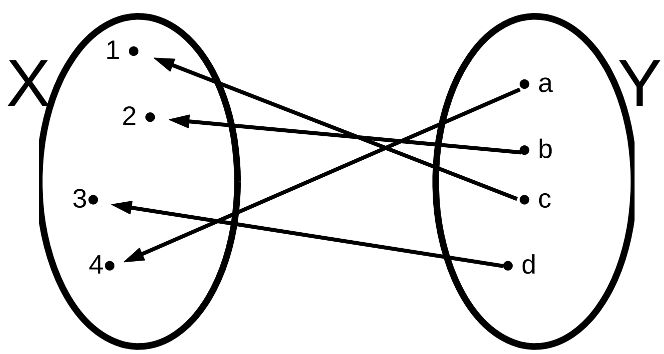
Stelling 4.2.5 zegt dat voor een inverteerbare functie $f : X \to Y$ de inverse functie uniek is. De inverse functie komt dan overeen met de inverse relatie en we noteren

$$f^{-1} : Y \to X.$$

Let op dat de inverse relatie f^{-1} alleen een functie is als f inverteerbaar is. Als in een opgave f^{-1} gebruikt wordt en het is niet gegeven dat f inverteerbaar is, dan is f^{-1} de inverse relatie. In dat geval wordt $f^{-1}(y)$ gebruikt voor het invers beeld, zoals gegeven in (4.4).

Het pijlendiagram van de inverse functie krijgen we uit het pijlendiagram van een bijectieve functie door alle pijlen om te keren. Hieronder staat het pijlendiagram van een bijectieve functie en van haar inverse.





Opmerking 4.2.6. Een injectieve functie die niet bijectief is kan bijectief gemaakt worden door het codomein te beperken. Zij namelijk $f : X \to Y$ injectief. Dan is de functie

$$\hat{f} : X \to f(X) : x \mapsto \hat{f}(x) = f(x)$$

die we uit f verkrijgen door het codomein van Y te beperken tot $f(X)$, zowel injectief als surjectief. Dus is $\hat{f}$ bijectief en bijgevolg inverteerbaar vanwege Stelling 4.2.5. De inverse functie $(\hat{f})^{-1}$ bestaat dus.

Een algemene functie die niet injectief en niet surjectief is kan bijectief gemaakt worden door zowel het domein als het codomein te beperken. Zo is bijvoorbeeld de functie sin

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin x$$

niet injectief en ook niet surjectief. De beperking

$$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$$

is wel bijectief (strikt genomen is dit een andere functie en hadden we ze een andere naam moeten geven). De inverse functie is de boogsinusfunctie

$$\operatorname{bgsin} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2].$$

4.2.3 Oefeningen

Oefening 4.2.1. Welke van de functies uit Voorbeeld 4.1.3 zijn injectief? Welke surjectief en welke bijectief?

Oefening 4.2.2. Welke van de vier functies f_1, f_2, f_3 en f_4 uit Voorbeeld 4.1.6 zijn injectief? Welke surjectief? Welke bijectief?

Oefening 4.2.3. Welke van de volgende functies zijn injectief? Welke surjectief? Welke bijectief?

(a) De functie uit Voorbeeld 4.1.7.

(b) De functie $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \frac{2x}{x+1} \qquad \text{voor elke } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

(c) De functie $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gegeven door

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \qquad \text{voor elke } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Oefening 4.2.4. Neem aan dat $f : X \to Y$ en $g : Y \to Z$ functies zijn. Bewijs de volgende beweringen.

(a) Als f en g injectief zijn, dan is $g \circ f$ injectief.

(b) Als f en g surjectief zijn, dan is $g \circ f$ surjectief.

Geef tegenvoorbeelden waaruit blijkt dat de volgende beweringen (de omkeringen van de beweringen uit (a) en (b)) niet juist zijn.

(c) Als $g \circ f$ injectief is, dan zijn f en g injectief.

(d) Als $g \circ f$ surjectief is, dan zijn f en g surjectief.

Oefening 4.2.5. Zij $X = \{1, 2, 3\}$ en $Y = \{a, b\}$.

(a) Hoeveel injectieve functies $f : X \to Y$ zijn er?

(b) Hoeveel surjectieve functies $f : X \to Y$ zijn er?

(c) Hoeveel bijectieve functies $f : X \to Y$ zijn er?

Oefening 4.2.6. Zij $X = \{1, 2\}$ en $Y = \{a, b, c\}$.

(a) Hoeveel injectieve functies $f : X \to Y$ zijn er?

(b) Hoeveel surjectieve functies $f : X \to Y$ zijn er?

(c) Hoeveel bijectieve functies $f : X \to Y$ zijn er?

Oefening 4.2.7. Bewijs dat $f : X \to Y$ surjectief is als en slechts als er een functie $g : Y \to X$ bestaat met $f \circ g = I_Y$.

Oefening 4.2.8. Neem aan dat $X \neq \emptyset$. Bewijs dat $f : X \to Y$ injectief is als en slechts als er een functie $g : Y \to X$ bestaat met $g \circ f = I_X$.

Oefening 4.2.9. Zij $X = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Laat zien dat er een verzameling $Y \subset \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat

$$f : X \to Y : x \mapsto f(x) = \frac{3x}{x - 2}$$

een bijectie is. Wat is Y? Geef een functievoorschrift voor f^{-1}.

Oefening 4.2.10. Veronderstel dat $f : X \to Y$ en $g : Y \to Z$ bijecties zijn. Bewijs dat $g \circ f$ een bijectie is en dat

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Oefening 4.2.11. Zij $f : X \to Y$ en veronderstel dat er een functie $g : Y \to X$ is met $g \circ f = I_X$ en tevens een functie $h : Y \to X$ met $f \circ h = I_Y$. Bewijs dat f inverteerbaar is en dat $g = h$.

Oefening 4.2.12. Bij een functie $f : X \to Y$ kunnen we een functie F van $P(Y)$ naar $P(X)$ definiëren door

$$F : P(Y) \to P(X) : \quad B \mapsto F(B) = f^{-1}(B).$$

Bewijs

(a) F is injectief als en slechts als f surjectief is.

(b) F is surjectief als en slechts als f injectief is.

Oefening 4.2.13. Zij $\sim$ een equivalentierelatie op een verzameling X en $X/\sim$ de bijbehorende quotiëntverzameling. Er is een functie

$$q : X \to X/\sim \, : x \mapsto [x]$$

die elk element $x \in X$ afbeeldt naar zijn equivalentieklasse in $X/\sim$. Deze functie heet de **quotiëntafbeelding** behorende bij de equivalentierelatie $\sim$.

(a) Laat zien dat q surjectief is.

(b) Neem aan dat $f : X \to Y$ een functie is met de eigenschap dat

$$x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) = f(x_2).$$

Bewijs dat er een unieke functie $\bar{f} : X/\sim \to Y$ bestaat met de eigenschap dat

$$f = \bar{f} \circ q.$$

Oefening 4.2.14. Bij een gegeven functie $f : X \to Y$ definiëren we een relatie $R(f)$ op X door

$$R(f) = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}.$$

(a) Bewijs dat $R(f)$ een equivalentierelatie is.

(b) Bewijs dat elke equivalentierelatie op X van deze vorm is. Dat wil zeggen: als R een equivalentierelatie op X is, laat dan zien dat er een verzameling Y en een functie $f : X \to Y$ zijn, zodanig dat $R = R(f)$.

Hint bij (b): denk aan de functie q uit de vorige oefening.

4.3 Extra oefeningen over Hoofdstuk 4

Oefening 4.3.1. $f : X \to Y$ en $g : Y \to Z$ zijn twee functies.

(a) Is het mogelijk dat $g \circ f$ en f injectief zijn, terwijl g niet injectief is.

(b) Is het mogelijk dat $g \circ f$ en g injectief zijn, terwijl f niet injectief is.

(c) Is het mogelijk dat $g \circ f$ en f surjectief zijn, terwijl g niet surjectief is.

(d) Is het mogelijk dat $g \circ f$ en g surjectief zijn, terwijl f niet surjectief is.

Geef in alle gevallen een voorbeeld of leg uit waarom het niet mogelijk is.

Oefening 4.3.2. In $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kunnen we rekenen modulo 5. Dat wil zeggen

$$2 + 4 = 6 = 1 \pmod 5 \qquad \text{en} \qquad 2 \cdot 4 = 8 = 3 \pmod 5$$

(a) Zij $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$ gegeven door

$$f(x) = x^2 - 1 \pmod 5 \qquad \text{voor } x \in \mathbb{Z}_5.$$

Schrijf de inverse relatie f^{-1} als een verzameling van koppels en leg uit waarom f^{-1} geen functie is.

(b) Zij $g : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$ gegeven door

$$g(x) = x^3 - 1 \pmod 5 \qquad \text{voor } x \in \mathbb{Z}_5.$$

Schrijf de inverse relatie g^{-1} als een verzameling van koppels en leg uit waarom g^{-1} wel een functie is.

(c) Is het mogelijk om een formule te vinden voor $g^{-1}(y)$ als $y \in \mathbb{Z}_5$?

Oefening 4.3.3. (Oude examenvraag) Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat
$$f(f^{-1}(B)) \subset B$$
geldt voor alle $B \in P(Y)$.

(b) Laat aan de hand van een voorbeeld zien dat de gelijkheid $f(f^{-1}(B)) = B$ niet altijd geldt.

(c) Bewijs dat
$$\forall B \in P(Y) : \quad B = f(f^{-1}(B))$$
geldt als en slechts als f surjectief is.

Oefening 4.3.4. (Oude examenvraag) Zij X een verzameling. We noteren met $\mathrm{Fun}(X)$ de verzameling van alle functies $f : X \to X$. Zij R de relatie op $\mathrm{Fun}(X)$ gegeven door

$$(f, g) \in R$$

als en slechts als er een bijectieve functie $\sigma : X \to X$ bestaat met $\sigma \circ f = g \circ \sigma$.

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

(b) Neem aan dat X eindig is en dat $(f, g) \in R$. Bewijs dat f en g evenveel vaste punten hebben.

[N.B.: $x \in X$ is een vast punt van f als en slechts als $f(x) = x$.]

(c) Hoeveel equivalentieklassen zijn er in het geval dat $|X| = 3$? Beschrijf elke equivalentieklasse.

Hoofdstuk 5

Kardinaliteit

5.1 Eindige en oneindige verzamelingen

5.1.1 Kardinaliteit

We tellen elementen van een eindige verzameling door ze te benoemen met 'één', 'twee', 'drie' enzovoorts. Als we alle elementen gehad hebben dan is het laatst genoemde getal het aantal elementen in de verzameling, ofwel de kardinaliteit van de verzameling. Het telproces levert een bijectie tussen de gegeven verzameling en de verzameling[1]

$$\mathbb{E}_n = \{j \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq j \leq n\} = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

We schrijven ook

$$\mathbb{E}_0 = \emptyset.$$

We zullen de kardinaliteit nu precies definiëren.

Definitie 5.1.1. Zij X een verzameling en $n \in \mathbb{N}$. Als er een bijectie $f : X \to \mathbb{E}_n$ bestaat, dan zeggen we dat de **kardinaliteit** van X gelijk is aan n en we schrijven

$$|X| = n \qquad \text{of} \qquad \#X = n.$$

De kardinaliteit van de lege verzameling is per definitie gelijk aan 0. Dus $|\emptyset| = \#\emptyset = 0$.

Als $f : X \to \mathbb{E}_n$ een bijectie is, dan bestaat de inverse functie $f^{-1} : \mathbb{E}_n \to X$ en f^{-1} is een bijectie van $\mathbb{E}_n$ naar X. We kunnen dus ook zeggen dat de kardinaliteit van X gelijk aan n is als en slechts als er een bijectie is van $\mathbb{E}_n$ naar X.

De bijectie f van X naar $\mathbb{E}_n$ waarvan sprake is in Definitie 5.1.1 is niet uniek (tenzij $n = 1$ of $n = 0$).

We kunnen nu het onderscheid maken tussen eindige en oneindige verzamelingen.

Definitie 5.1.2. Zij X een verzameling. Als X leeg is, of als er een bijectie is van X naar $\mathbb{E}_n$ voor een zekere $n \in \mathbb{N}_0$, dan noemen we X een **eindige verzameling** en heeft het een **eindige kardinaliteit**. Anders is X een **oneindige verzameling** en heeft het een oneindige kardinaliteit die we noteren met $|X| = \#X = \infty$.

De volgende eigenschap is intuïtief duidelijk.

[1] Er is geen standaardnotatie voor de verzameling $\{1, 2, \ldots, n\}$. We gebruiken hier de letter $\mathbb{E}$ en het subscript n in de notatie $\mathbb{E}_n$ om aan te geven dat het om een **e**indige verzameling gaat met n elementen.

Propositie 5.1.3. *Zij $n, m \in \mathbb{N}$ met $n \neq m$. Dan bestaat er geen bijectie van $\mathbb{E}_n$ naar $\mathbb{E}_m$.*

Bewijs. Het bewijs hiervan is een oefening voor de lezer, zie Oefening 5.1.1. □

Uit de propositie volgt dat het begrip kardinaliteit van eindige verzamelingen op een zinvolle manier is ingevoerd. Het is niet mogelijk dat er bij een gegeven verzameling X een bijectie $f : X \to \mathbb{E}_n$ bestaat en ook een bijectie $g : X \to \mathbb{E}_m$ waarbij $n \neq m$. Waarom is dat?equ

5.1.2 Equipotente verzameling

Definitie 5.1.4. Twee verzamelingen X en Y zijn **equipotent** als er een bijectie $f : X \to Y$ bestaat.

Bij twee verzamelingen X en Y die equipotent zijn, kunnen we door middel van een bijectie $f : X \to Y$ elk element van x koppelen aan precies één element $y = f(x)$. In deze zin zijn twee equipotente verzamelingen even groot.

Een verzameling X is **eindig** als en slechts als ze leeg is, of als ze equipotent is met $\mathbb{E}_n$ voor zekere $n \in \mathbb{N}_0$. In dat geval is $|X| = n$.

We kunnen equipotentie zien als een **equivalentierelatie** tussen verzamelingen. Het is namelijk eenvoudig in te zien dat equipotentie reflexief, symmetrisch en transitief is.

Naast eindige verzamelingen zijn er ook oneindige verzamelingen. De verzameling van strikt positieve natuurlijke getallen

$$\mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

is een belangrijk voorbeeld van een oneindige verzameling.

Definitie 5.1.5. Een verzameling X is **aftelbaar oneindig** als X equipotent is met $\mathbb{N}_0$. Als X aftelbaar oneindig is dan zeggen we dat de **kardinaliteit** van X gelijk is aan $\aleph_0$ en we noteren $|X| = \aleph_0$.

Een verzameling X is **aftelbaar** als X eindig is of aftelbaar oneindig. Als een verzameling X niet aftelbaar is dan noemen we haar **overaftelbaar**.

Het symbool $\aleph$ is de Hebreeuwse letter alef. Het symbool $\aleph_0$ wordt uitgesproken als 'alef nul'.

Als X aftelbaar oneindig is, en $f : \mathbb{N}_0 \to X$ is een bijectie dan kunnen we de elementen van X één voor één opsommen (aftellen) met $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$, enzovoorts. Dan is dus

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

waarin $x_n = f(n)$.

Voorbeeld 5.1.6. (a) $\mathbb{N}_0$ is aftelbaar oneindig, want de eenheidsfunctie $I_{\mathbb{N}_0} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ is een bijectie.

(b) $\mathbb{N}$ is aftelbaar oneindig. Een mogelijke bijectie $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ wordt gegeven door $n \mapsto n - 1$.

(c) De verzameling van gehele getallen $\mathbb{Z}$ is aftelbaar oneindig. Een mogelijke bijectie $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ is

$$n \mapsto \begin{cases} -(n-1)/2 & \text{als } n \text{ oneven is,} \\ n/2 & \text{als } n \text{ even is.} \end{cases}$$

Dit geeft de opsomming

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}.$$

(d) De verzameling $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ van de positieve even getallen is aftelbaar oneindig want $n \mapsto 2n$ is een bijectie van $\mathbb{N}_0$ naar $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$.

(e) De verzameling van priemgetallen is aftelbaar oneindig.

We zien uit de voorbeelden dat een echte deelverzameling van een aftelbaar oneindige verzameling ook aftelbaar oneindig kan zijn, en dus dezelfde kardinaliteit heeft. De verzameling $\mathbb{N}_0$ is een echte deelverzameling van $\mathbb{Z}$. Vandaar dat we zouden kunnen zeggen dat $\mathbb{Z}$ groter is dan $\mathbb{N}_0$. Er is echter wel een bijectie tussen de twee verzamelingen. Ze zijn dus equipotent en hebben dezelfde kardinaliteit $\aleph_0$. Dus in dit opzicht zijn ze even groot.

Om deze schijnbare tegenstelling te vermijden spreken we liever niet van 'de ene verzameling is even groot als de andere', maar we zeggen dat de verzamelingen dezelfde kardinaliteit hebben.

5.1.3 Overaftelbare verzamelingen

In de vorige paragraaf hebben we gezien dat heel wat verzamelingen aftelbaar oneindig zijn. Deze verzamelingen hebben allemaal dezelfde kardinaliteit en zijn in dit opzicht 'even groot'. Er zijn ook overaftelbare verzamelingen die écht groter zijn dan aftelbaar oneindige verzamelingen. Het belangrijkste voorbeeld hiervan is $\mathbb{R}$, de verzameling van reële getallen.

In deze paragraaf zullen we bewijzen dat er bij elke verzameling een grotere verzameling gemaakt kan worden.

Definitie 5.1.7. Zij X en Y verzamelingen. We zeggen dat de kardinaliteit van X kleiner dan of gelijk is aan die van Y, en we noteren $|X| \leq |Y|$ als er een injectieve functie $f : X \to Y$ bestaat.

We zeggen dat de kardinaliteit van X strikt kleiner is dan die van Y, en we noteren $|X| < |Y|$, als er een injectieve functie van X naar Y bestaat, maar geen injectieve functie van Y naar X.

De notatie $|X| \leq |Y|$ suggereert dat de ongelijkheid tussen kardinaliteiten zich gedraagt als de ongelijkheid tussen gewone getallen. Dit is inderdaad het geval, maar het vereist wel een bewijs. Zie hiervoor Oefening 5.1.11 en de stelling van Cantor-Bernstein-Schröder (Stelling 5.3.1 uit paragraaf 5.3).

We kunnen $|X| \leq |Y|$ uitdrukken met behulp van surjectieve functies.

Lemma 5.1.8. *Voor niet-lege verzamelingen X en Y geldt dat $|X| \leq |Y|$ als en slechts als er een surjectieve functie $g : Y \to X$ bestaat.*

Bewijs. Neem aan dat $|X| \leq |Y|$ zodat er een injectieve functie $f : X \to Y$ bestaat. Neem $x_0 \in X$ willekeurig (hier gebruiken we dat $X \neq \emptyset$) en definieer $g : Y \to X$ door

$$g(y) = \begin{cases} x, & \text{als } f^{-1}(y) = \{x\}, \\ x_0, & \text{als } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Dan is g goed gedefinieerd en het is eenvoudig te controleren dat g inderdaad surjectief is.

Voor het bewijs van de andere implicatie, nemen we aan dat er een surjectieve $g : Y \to X$ bestaaat. Voor elke $x \in X$ is $g^{-1}(x)$ dan een niet-lege deelverzameling van Y. We kiezen willekeurig[2] een element uit $g^{-1}(x)$ en we noemen dit element $f(x)$. Op deze manier krijgen we een functie $f : X \to Y$ en het is eenvoudig in te zien dat f injectief is. Dus $|X| \leq |Y|$. $\square$

Stelling 5.1.9. *Voor elke verzameling X geldt dat $|X| < |P(X)|$.*

Bewijs. De functie $f : X \to P(X) : x \mapsto \{x\}$ is injectief en daarom is $|X| \leq |P(X)|$.

We moeten laten zien dat er geen injectieve functie van $P(X)$ naar X bestaat. Vanwege Lemma 5.1.8 is het voldoende om te laten zien dat er geen surjectieve functie van X naar $P(X)$ bestaat. Neem een willekeurige functie $f : X \to P(X)$. We bewijzen dat $f : X \to P(X)$ niet surjectief kan zijn door te laten zien dat de verzameling

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in P(X).$$

niet tot het beeld van f behoort.

Dit bewijzen we uit het ongerijmde. Stel dat $f(a) = A$ voor zekere $a \in X$. Dan zijn er twee mogelijkheden namelijk $a \in A$ of $a \notin A$. Als $a \in A$, dan volgt uit de definitie van A dat $a \notin f(a)$, maar dan is $a \notin A$ omdat $A = f(a)$. Dit is een tegenspraak. Als $a \notin A$, dan volgt uit de definitie van A dat $a \in f(a)$, en we krijgen weer een tegenspraak.

In beide gevallen vinden we een tegenspraak en de conclusie is dat A niet tot het beeld $f(X)$ van f behoort. Dit bewijst dat f niet surjectief is. $\square$

Voor een eindige verzameling X met n elementen geldt dat $P(X)$ uit 2^n elementen bestaat. In analogie hiermee wordt ook voor een willekeurige verzameling de kardinaliteit van $P(X)$ genoteerd met $2^{|X|}$:

$$|P(X)| = 2^{|X|}.$$

Stelling 5.1.9 zegt dan dat $|X| < 2^{|X|}$. Als we $X = \mathbb{N}_0$ nemen dan zien we in het bijzonder dat $P(\mathbb{N}_0)$ overaftelbaar is. Omdat $|\mathbb{N}_0| = \aleph_0$ wordt dit uitgedrukt door

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}.$$

We zien uit Stelling 5.1.9 ook dat voor elke verzameling X de machtsverzameling $P(X)$ echt groter is dan X. Er kan dus geen sprake zijn van een grootst mogelijke verzameling.

5.1.4 Oefeningen

Oefening 5.1.1. Neem aan dat $n, m \in \mathbb{N}$ met $n < m$.

(a) Bewijs dat er geen surjectieve functie $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_m$ bestaat.

(b) Bewijs dat er geen injectieve functie $f : \mathbb{E}_m \to \mathbb{E}_n$ bestaat.

(c) Concludeer dat Propositie 5.1.3 geldt. (Je kunt ofwel (a) ofwel (b) gebruiken.)

[2] Dit bewijs steunt op het zogenaamde keuze-axioma, dat stelt dat we uit een niet-lege verzameling een element kunnen kiezen en dit kunnen we gelijktijdig doen ook in het geval dat we een willekeurig aantal (mogelijk overaftelbaar) niet-lege verzamelingen hebben

Hint bij (a) en (b): gebruik volledige inductie naar n of m.

Het onderdeel (b) staat wel bekend als het **duivenhok-principe**. Als er m duiven zijn die zich bevinden in n duivenhokken en als $m > n$ dan moet er minstens één hok zijn met minstens twee duiven.

Oefening 5.1.2. Neem aan dat X en Y equipotent zijn. Bewijs:

(a) X is eindig als en slechts als Y is eindig,

(b) X is aftelbaar oneindig als en slechts als Y is aftelbaar oneindig,

(c) X is overaftelbaar als en slechts als Y is overaftelbaar.

Oefening 5.1.3. Neem aan dat X aftelbaar oneindig is, en dat Y eindig is. Bewijs dat $X \cup Y$ aftelbaar oneindig is.

Oefening 5.1.4. Neem aan dat $f : \mathbb{N}_0 \to X$ en $g : \mathbb{N}_0 \to Y$ bijecties zijn. Bewijs dat de functie $h : \mathbb{N}_0 \to X \cup Y$ gedefinieerd door

$$h(n) = \begin{cases} f(k) & \text{als } n = 2k-1 \text{ oneven is,} \\ g(k) & \text{als } n = 2k \text{ even is} \end{cases}$$

een surjectie is. Is h een bijectie?

Oefening 5.1.5. Neem aan dat X en Y aftelbaar oneindig zijn. Bewijs dat $X \cup Y$ aftelbaar oneindig is.

Hint: Gebruik de vorige oefening.

Oefening 5.1.6. (a) Bewijs dat

$$f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : (n, m) \mapsto \frac{1}{2}(n+m-2)(n+m-1) + m$$

een bijectie van $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ naar $\mathbb{N}_0$ is.

(b) Concludeer dat $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ aftelbaar oneindig is.

Oefening 5.1.7. Neem aan dat X en Y aftelbaar oneindig zijn. Bewijs dat het Cartesisch product $X \times Y$ aftelbaar oneindig is.

Hint: Gebruik de vorige oefening.

Oefening 5.1.8. Neem aan dat X een eindig verzameling is met $|X| = n$.

Laat zien dat $|P(X)| = 2^n$ door uitgaande van een bijectie tussen X en $\mathbb{E}_n$ een expliciete bijectie tussen $P(X)$ en $\mathbb{E}_{2^n}$ aan te geven.

Oefening 5.1.9. Zij X een aftelbaar oneindige verzameling. Is de verzameling $\mathrm{Fun}(X, X)$ van alle functies van X naar X aftelbaar of overaftelbaar?

Oefening 5.1.10. Vervolledig het bewijs van Lemma 5.1.8.

Oefening 5.1.11. (a) Laat zien dat $|X| \leq |X|$ geldt voor elke verzameling X.

(b) Neem aan dat X, Y en Z verzamelingen zijn waarvoor geldt dat $|X| \leq |Y|$ en $|Y| \leq |Z|$. Bewijs dat $|X| \leq |Z|$.

(c) Neem aan dat X, Y en Z verzamelingen zijn waarvoor geldt dat $|X| \leq |Y|$ en $|Y| < |Z|$. Bewijs dat $|X| < |Z|$.

5.2 Natuurlijke getallen en de axioma's van Peano

De natuurlijke getallen

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, \}$$

vormen het standaard voorbeeld van een aftelbaar oneindige verzameling. Een belangrijk aspect van $\mathbb{N}$ is dat er bij elk getal $n \in \mathbb{N}$ een volgend getal $n+1$ hoort. Dit is de opvolger van n in de natuurlijke getallen. Om $\mathbb{N}$ te vinden beginnen we bij 0, het kleinste natuurlijk getal. De opvolger van 0 is 1, de opvolger van 1 is 2, enzovoorts. Uiteindelijk vinden we elk natuurlijk getal op deze manier, als we maar lang genoeg doorgaan.

Deze eigenschap van de natuurlijke getallen kan als uitgangspunt genomen worden in de bestudering van natuurlijke getallen. Dit werd als eerste geformuleerd door de Italiaanse wiskundige Guiseppe Peano (1858–1932) in 1889.

Axioma 5.2.1. (Peano) De natuurlijke getallen bestaan uit een verzameling $\mathbb{N}$ met een functie $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en een element $0 \in \mathbb{N}$ zodanig dat

(a) S is een injectie,

(b) 0 behoort niet tot het beeld van S,

(c) Als A een deelverzameling is van $\mathbb{N}$ met $0 \in A$ en

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \in A \implies S(n) \in A,$$

dan $A = \mathbb{N}$.

De functie S is de opvolgerfunctie (Engels: successor function). We noteren $S(0) = 1$, $S(1) = 2$, $S(2) = 3$, enzovoorts. Omdat S injectief is, en omdat 0 niet tot het beeld van S behoort, zijn de elementen van $\mathbb{N}$ die we zo krijgen allemaal verschillend. Uit het derde axioma volgt dat elk element van $\mathbb{N}$ ook een keer aan de beurt komt.

De axioma's van Peano bevatten de essentie van de natuurlijke getallen, zonder dat ze zeggen wat de natuurlijke getallen zijn.

Elke structuur (X, x_0, s) met X een verzameling, $x_0 \in X$, en $s : X \to X$ een functie die voldoet aan de bovenstaande eigenschappen (a), (b) en (c) kan geïdentificeerd worden met $(\mathbb{N}, 0, S)$. Zie Oefening 5.2.2 voor de preciese formulering.

Volledige inductie Het principe van volledige inductie is gebaseerd op onderdeel (c) van Axioma 5.2.1. Uitgaande van de axioma's van Peano kunnen we Stelling 1.5.1 als volgt bewijzen. Voor het gemak herhalen we ook de stelling.

Stelling 5.2.2. *Neem aan dat $P(n)$ een bewering is die afhangt van een natuurlijk getal n. Veronderstel dat*

(1) *$P(0)$ waar is, en dat*

(2) *$P(k) \implies P(k+1)$ geldt voor elke natuurlijk getal k.*

Dan is de bewering $P(n)$ waar voor elk natuurlijk getal n.

Bewijs. Zij $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ is waar}\}$. Vanwege eigenschap (1) uit Stelling 5.2.2 is dan $0 \in A$, en vanwege eigenschap (2) geldt $k \in A \implies k+1 \in A$ voor elke $k \in A$. Bijgevolg voldoet A aan de voorwaarden van eigenschap (c) uit Axioma 5.2.1 en dus is $A = \mathbb{N}$. Dit wil zeggen dat $P(n)$ waar is voor elke $n \in \mathbb{N}$. □

Optelling op $\mathbb{N}$ Uitgaande van de axioma's van Peano is het mogelijk om de optelling op $\mathbb{N}$ in te voeren. Dit doet men door te bewijzen dat er een unieke functie

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

is (we noemen dit een binaire bewerking op $\mathbb{N}$) die voldoet aan

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}: &\quad n + 0 = n \\ \forall n, m \in \mathbb{N}: &\quad n + S(m) = S(n + m). \end{aligned}$$

Vervolgens kan men de gebruikelijke eigenschappen van de optelling bewijzen, zoals

(a) als $n + p = m + p$ dan $n = m$ (schrapwet);

(b) $(n + m) + p = n + (m + p)$ (associativiteit);

(c) $n + m = m + n$ (commutativiteit);

(d) $n + m = 0$ als en slechts als $n = m = 0$;

(e) als $n, m \in \mathbb{N}$, dan is er een $p \in \mathbb{N}$ met $n + p = m$ of $m + p = n$.

We gaan deze eigenschappen hier niet bewijzen.

Vermenigvuldiging op $\mathbb{N}$ We kunnen vanuit de optelling op $\mathbb{N}$ de vermenigvuldiging definiëren door

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}: &\quad n \cdot 0 = 0 \\ \forall n, m \in \mathbb{N}: &\quad n \cdot S(m) = n + n \cdot m. \end{aligned}$$

De vermenigvuldiging voldoet dan aan de gebruikelijke eigenschappen. We gaan hier verder niet op in.

Ordening op $\mathbb{N}$ en het welordeningsprincipe Met behulp van de optelling kan men de ordening $\leq$ op $\mathbb{N}$ invoeren door

$$n \leq m \quad \iff \quad \exists p \in \mathbb{N} : n + p = m.$$

Dit is een totale ordening en 0 is het kleinste element van $\mathbb{N}$. Een belangrijk eigenschap van de ordening op $\mathbb{N}$ is het zogenaamde welordeningsprincipe.

Stelling 5.2.3. *Elke niet-lege deelverzameling $B \subset \mathbb{N}$ heeft een kleinste element.*

Bewijs. Zij B een deelverzameling van $\mathbb{N}$ die geen kleinste element heeft. Voer in

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in B : m > n\}.$$

Omdat B geen kleinste element heeft, geldt $0 \notin B$. Dan is het eenvoudig in te zien dat $0 \in A$.

Neem aan dat $n \in A$. Voor elke $m \in B$ geldt dan dat $m > n$, en dus $m \geq n + 1$ voor elke $m \in B$. Als $n + 1 \in B$ dan zou $n + 1$ het kleinste element van B zijn. We hebben evenwel verondersteld dat B geen kleinste element heeft. Dus $n + 1 \notin B$. Voor elke $m \in B$ is dan $m > n + 1$ en bijgevolg is $n + 1 \in A$.

Dan voldoet A aan de voorwaarden in onderdeel (c) van Axioma 5.2.1. Er volgt dat $A = \mathbb{N}$. Dan is het eenvoudig in te zien dat $B = \emptyset$.

De lege verzameling is dus de enige deelverzameling van $\mathbb{N}$ die geen kleinste element heeft. Hiermee is de welordening van $\mathbb{N}$ bewezen. $\square$

5.2.1 Oefeningen

Oefening 5.2.1. Bewijs dat $S(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ door alleen gebruik te maken van de axioma's van Peano.

Oefening 5.2.2. Zij X een verzameling met een functie $s : X \to X$ en een element $x_0 \in X$ die voldoen aan de axioma's van Peano, namelijk dat

(a) s is een injectie,

(b) x_0 behoort niet tot het beeld van s,

(c) Als $A \subset X$ een deelverzameling is van X met $x_0 \in A$ en

$$\forall x \in X : x \in A \implies s(x) \in A,$$

dan $A = X$.

Bewijs dat er dan een unieke bijectie $f : \mathbb{N} \to X$ bestaat die voldoet aan $f(0) = x_0$ en $f(S(n)) = s(f(n))$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

5.3 De stelling van Cantor-Bernstein-Schröder

Vanwege Definitie 5.1.7 betekent $|X| \leq |Y|$ dat er een injectieve functie van X naar Y is. Net zo betekent $|Y| \leq |X|$ dat er een injectieve functie van Y naar X is. Als $|X| \leq |Y|$ en $|Y| \leq |X|$ allebei gelden, dan zouden we graag concluderen dat $|X| = |Y|$, dat wil zeggen dat de verzamelingen X en Y equipotent zijn.

Dit kunnen we inderdaad doen vanwege de volgende stelling die genoemd is naar de Duitse wiskundigen Georg Cantor (1845-1918), Felix Bernstein (1878-1956) en Ernst Schröder (1841-1902). De stelling lijkt voor de hand te liggen, maar het bewijs is zeker niet eenvoudig. Probeer het eerst maar eens zelf!

Stelling 5.3.1. *Zij X en Y verzamelingen. Als er injectieve functies $f : X \to Y$ en $g : Y \to X$ tussen de verzamelingen X en Y bestaan dan bestaat er een bijectieve functie $h : X \to Y$.*

Bewijs. We geven het bewijs voor het speciale geval dat $Y \subset X$ en $g : Y \to X : y \in Y \mapsto y$ de inclusie-afbeelding is. Het algemene geval kan uit dit speciale geval afgeleid worden, zie Oefening 5.3.5.

We hebben dus dat $f : X \to Y$ injectief is met $Y \subset X$. We definiëren $X_0 = X$, $Y_0 = Y$ en inductief

$$X_{n+1} = f(X_n), \qquad Y_{n+1} = f(Y_n), \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}. \tag{5.1}$$

Dan is $X_1 = f(X) \subset Y$ en dus $X_1 \subset Y_0 \subset X_0$. Door steeds f toe te passen vinden we eenvoudig met behulp van volledige inductie dat $X_{n+1} \subset Y_n \subset X_n$ geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$. We hebben met andere woorden een opeenvolging van steeds kleiner wordende deelverzamelingen van X:

$$X = X_0 \supset Y = Y_0 \supset X_1 \supset Y_1 \supset X_2 \supset \cdots \tag{5.2}$$

We definiëren

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X_n \setminus Y_n) \tag{5.3}$$

en de functie $h : X \to Y$ door

$$h : X \to Y : x \mapsto h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{als } x \in A, \\ x, & \text{als } x \in X \setminus A. \end{cases} \tag{5.4}$$

We moeten eerst laten zien dat h goed gedefinieerd als functie van X naar Y. Om het bewijs van de stelling af te maken, gaan we vervolgens bewijzen dat h zowel injectief als surjectief is.

Bewijs dat h goed gedefinieerd is We moeten eerst laten zien dat $h(x) \in Y$ voor elke $x \in X$, zodat h goed gedefinieerd is als functie van X naar Y.

Vanwege (5.3) geldt

$$X \setminus Y = X_0 \setminus Y_0 \subset A,$$

en hieruit volgt $X \setminus A \subset Y$. Als dus $x \in X \setminus A$, dan is $h(x) = x \in Y$. Als anderzijds $x \in A$, dan is $h(x) = f(x) \in Y$ want f is een functie van X naar Y. In beide gevallen is dus $h(x) \in Y$ en $h : X \to Y$ is goed gedefinieerd.

Bewijs dat h injectief is Het is eenvoudig in te zien dat h injectief is op A en op $X \setminus A$. Voor injectiviteit van h op X volstaat het dus om te bewijzen dat $h(x_1) \neq h(x_2)$ als $x_1 \in A$ en $x_2 \in X \setminus A$.

We voeren het bewijs uit het ongerijmde. Stel dat $x_1 \in A$ en $x_2 \in X \setminus A$ met $h(x_1) = h(x_2)$. Uit de definitie van h in (5.4) volgt dan dat $f(x_1) = x_2$ Omdat $x_1 \in A$ is er vanwege (5.3) een $n \in \mathbb{N}$ met $x_1 \in X_n \setminus Y_n$. Dus $x_1 \in X_n$ en $x_1 \not\in Y_n$. Dan volgt uit de definitie (5.1) dat $x_2 = f(x_1) \in f(X_n) = X_{n+1}$. Omdat f injectief is en $x_1 \not\in Y_n$, volgt ook dat $x_2 = f(x_1) \not\in f(Y_n) = Y_{n+1}$. Bijgevolg is

$$x_2 \in X_{n+1} \setminus Y_{n+1}.$$

maar dan is $x_2 \in A$, zie (5.3), terwijl we hadden aangenomen dat $x_2 \in X \setminus A$. Deze tegenspraak bewijst dat h injectief is.

Bewijs dat h surjecief is Om de surjectiviteit te bewijzen nemen we $y \in Y$ willekeurig. Als $y \in f(A)$ dan is er een $x \in A$ met $f(x) = y$. Vanwege de definitie van h is dan ook $h(x) = y$.

We nemen vervolgens aan dat $y \in Y \setminus f(A)$. Stel dat $y \in A$. Dan is $y \in X_n \setminus Y_n$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$ vanwege (5.3). Omdat $y \in Y = Y_0$ is $n \geq 1$. Dus $y \in X_n = f(X_{n-1})$ en $y \not\in Y_n = f(Y_{n-1})$. Er is dus een $x \in X_{n-1} \setminus Y_{n-1}$ met $y = f(x)$. Dan $x \in A$ en dus $y \in f(A)$. Dit is in tegenspraak met $y \in Y \setminus f(A)$. Bijgevolg is $y \in Y \setminus A$, en dan volgt uit de definitie (5.4) van h dat $h(y) = y$.

In beide gevallen vinden we een $x \in X$ met $h(x) = y$. Hiermee is de surjectiviteit van h bewezen. □

We kunnen het bovenstaande als volgt samenvatten.

Gevolg 5.3.2. Voor twee verzamelingen X en Y geldt het volgende.

(a) Als er een injectieve functie $f : X \to Y$ bestaat dan is $|X| \leq |Y|$.

(b) Als er een surjectieve functie $f : X \to Y$ bestaat dan is $|X| \geq |Y|$.

(c) Als er een injectieve functie $f_1 : X \to Y$ en een surjectieve functie $f_2 : X \to Y$ bestaan dan is er ook een bijectieve functie $f : X \to Y$ en er geldt $|X| = |Y|$.

De contrapositie van onderdeel (a) van Gevolg 5.3.2 zegt dat voor verzamelingen X en Y met $|X| > |Y|$ er geen injectieve functie $f : X \to Y$ is. Dat wil zeggen dat voor elke functie $f : X \to Y$ er $x_1, x_2 \in X$ te vinden zijn met $x_1 \neq x_2$ en $f(x_1) = f(x_2)$.

Een alternatief bewijs van Stelling 5.3.1

Er is een ander bewijs voor de Stelling van Cantor-Bernstein-Schröder, dat langer is, maar mogelijk wat inzichtelijker is. Dit bewijs maakt gebruik maken van het begrip keten.

Bewijs. We nemen aan dat $f : X \to Y$ en $g : Y \to X$ injectieve functies zijn. Een keten is een opeenvolging $x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, \ldots$ van elementen waarbij $x_j \in X$, $y_j = f(x_j) \in Y$ en $x_{j+1} = g(y_j)$ geldt voor elke j. We geven dit aan met

$$x_0 \xrightarrow{f} y_0 \xrightarrow{g} x_1 \xrightarrow{f} y_1 \xrightarrow{g} x_2 \xrightarrow{f} \cdots$$

De keten wordt vastgelegd door de keuze van het element $x_0 \in X$. Naar rechts gaat de keten oneindig lang door.

We willen de keten ook naar links uitbreiden. Dit kan als $x_0 \in g(Y)$. In dat geval is er een $y \in Y$ met $g(y) = x_0$. Omdat g injectief is, is y uniek en we nemen $y_{-1} = y$. Dan is de keten uitgebreid tot

$$y_{-1} \xrightarrow{g} x_0 \xrightarrow{f} y_0 \xrightarrow{g} x_1 \xrightarrow{f} y_1 \xrightarrow{g} x_2 \xrightarrow{f} \cdots$$

Als vervolgens $y_{-1} \in f(X)$ dan kunnen we de keten nog verder naar links uitbreiden. Er is in dat geval een element $x_{-1} \in X$ met $f(x_{-1}) = y_{-1}$ en dit element is uniek omdat f injectief is. We hebben dan een verdere uitbreiding van de keten tot

$$x_{-1} \xrightarrow{f} y_{-1} \xrightarrow{g} x_0 \xrightarrow{f} y_0 \xrightarrow{g} x_1 \xrightarrow{f} y_1 \xrightarrow{g} x_2 \xrightarrow{f} \cdots$$

We kunnen zo doorgaan. Het proces stopt als we een x_{-n} bereiken met $x_{-n} \notin g(Y)$ of een y_{-n} met $y_{-n} \notin f(X)$. Als dit niet gebeurt dan kunnen we steeds doorgaan. Er zijn dan drie mogelijkheden.

Geval 1: Voor zekere $n \in \mathbb{N}$ geldt $x_{-n} \in X \setminus g(Y)$. In dat geval stopt het proces bij x_{-n} en we vinden een keten

$$x_{-n} \xrightarrow{f} y_{-n} \xrightarrow{g} \cdots\cdots \xrightarrow{g} x_0 \xrightarrow{f} y_0 \xrightarrow{g} x_1 \xrightarrow{f} y_1 \xrightarrow{g} x_2 \xrightarrow{f} \cdots$$

De keten begint met x_{-n} en ze kan niet verder naar links voortgezet worden. Deze keten noemen we een X-keten omdat ze begint met een element van X.

Geval 2: Voor zekere $n \in \mathbb{N}_0$ geldt $y_{-n} \in Y \setminus f(X)$. In dat geval stopt het proces bij y_{-n} en we vinden een keten

$$y_{-n} \xrightarrow{g} x_{-n+1} \xrightarrow{f} \cdots\cdots \xrightarrow{f} y_{-1} \xrightarrow{g} x_0 \xrightarrow{f} y_0 \xrightarrow{g} x_1 \xrightarrow{f} y_1 \xrightarrow{g} x_2 \xrightarrow{f} \cdots$$

De keten begint met y_{-n} en ze kan niet verder naar links voortgezet worden. Deze keten noemen we een Y-keten omdat ze begint met een element van Y.

Geval 3: Voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $x_{-n} \in g(Y)$ en $y_{-n} \in f(X)$. In dat geval vinden we een keten

$$\cdots \xrightarrow{f} y_{-2} \xrightarrow{g} x_{-1} \xrightarrow{f} y_{-1} \xrightarrow{g} x_0 \xrightarrow{f} y_0 \xrightarrow{g} x_1 \xrightarrow{f} y_1 \xrightarrow{g} x_2 \xrightarrow{f} \cdots$$

We noemen dit een O-keten omdat de keten ook naar links oneindig ver doorloopt.

We noteren met $K(x_0)$ de keten met x_0 die we maximaal naar links hebben voortgezet. Voor twee elementen x_0 en x_0' van X geldt dan dat de ketens $K(x_0)$ en $K(x_0')$ ofwel disjunct zijn (ze hebben geen enkel element van X of Y gemeenschappelijk) ofwel hetzelfde zijn op een hernummering van de elementen na. In het tweede geval zullen we de twee ketens als hetzelfde beschouwen. Met deze identificatie kunnen we dan zeggen dat elk element van X tot een unieke keten behoort.

We definiëren nu de functie $h : X \to Y$ door

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als } x \text{ tot een } X\text{- of } O\text{-keten behoort,} \\ g^{-1}(x) & \text{als } x \text{ tot een } Y\text{-keten behoort.} \end{cases}$$

Het is evident dat $h(x)$ een goed gedefinieerd element van Y is als x tot een X- of O-keten behoort. Als x tot een Y-keten behoort dan begint de keten waar x in zit met een element van Y. Er is dan zeker een element $y \in Y$ met $x = g(y)$, dit element is uniek omdat g injectief is, en dit element bedoelen we met $g^{-1}(x)$. Dus ook als x tot een Y-keten behoort is $h(x)$ een goed gedefinieerd element van Y.

We gaan bewijzen dat h een bijectie is.

Bewijs dat h injectief is Neem x en x' in X willekeurig met $x \neq x'$. Stel $y = h(x)$ en $y' = h(x')$. Er zijn dan vier gevallen:

(1) x en x' behoren allebei tot een X- of O-keten. In dat geval is $y = f(x)$ en $y' = f(x')$. Omdat f injectief is, geldt $y \neq y'$.

(2) x en x' behoren allebei tot een Y-keten. In dat geval is $g(y) = x$ en $g(y') = x'$. Omdat g een functie is en $x \neq x'$ is dan ook $y \neq y'$.

(3) x behoort tot een X- of O-keten en x' behoort tot een Y-keten. Dan is $y = f(x)$ en $g(y') = x'$. Als y en y' gelijk zouden zijn, dan zou volgen dat $g(f(x)) = x'$ en dan zouden x en x' in dezelfde keten zitten. Dit is niet het geval en dus is $y \neq y'$.

(4) x behoort tot een Y-keten en x' behoort tot een X- of O-keten. Dit is analoog aan geval (3). Ook nu volgt $y \neq y'$.

In alle gevallen volgt dat $y \neq y'$ en dus is h injectief.

Bewijs dat h surjectief is Neem $y \in Y$ willekeurig en stel $x_0 = g(y)$. Dan behoort y tot de keten van x_0. Het is namelijk de voorganger van x_0 in de keten en dus $y = y_{-1}$. Er zijn nu twee mogelijkheden.

(1) x_0 behoort tot een Y-keten. Omdat $g(y) = x_0$ volgt uit de definitie van h dat in dit geval $y = h(x_0)$.

(2) x_0 behoort tot een X- of O-keten. Dan begint de keten van x_0 zeker niet met $y = y_{-1}$. Er is dan een element x_{-1} met $f(x_{-1}) = y$. Deze x_{-1} behoort tot dezelfde keten als x_0 en dus ook tot een X- of O-keten. Volgens de definitie van h is dan $h(x_{-1}) = f(x_{-1}) = y$.

In beide gevallen vinden we een element x van X met $h(x) = y$ en dus is h surjectief.

Omdat h zowel injectief als surjectief is, is h bijectief en Stelling 5.3.1 is bewezen. □

5.3.1 Oefeningen

Oefening 5.3.1. Zij X een eindige verzameling en $f : X \to X$ een injectie. Bewijs dat f een bijectie is.

Oefening 5.3.2. Zij X een eindige verzameling en $f : X \to X$ een surjectie. Bewijs dat f een bijectie is.

Oefening 5.3.3. (a) Geef een voorbeeld van een verzameling X en een injectieve functie $f : X \to X$ die geen bijectie is.

(b) Geef een voorbeeld van een verzameling X en een surjectieve functie $f : X \to X$ die geen bijectie is.

Oefening 5.3.4. Zij X een groep personen met $|X| \geq 2$. Elke persoon in X heeft een aantal vrienden in X. We nemen aan dat de relatie 'vriend van' symmetrisch is. Dus als x een vriend van y is, dan is y ook een vriend van x. Bewijs dat er twee personen in X zijn met hetzelfde aantal vrienden in X.

Oefening 5.3.5. Stelling 5.3.1 is bewezen in het speciale geval dat $Y \subset X$ en $g : Y \to X$ de inclusie-afbeelding is.

Gebruik dit om Stelling 5.3.1 in het algemene geval te bewijzen.

Oefening 5.3.6. Het bewijs van Stelling 5.3.1 is constructief, in de zin dat voor gegeven injectieve functies $f : X \to Y$ en $g : Y \to X$ de bijectieve functie $h : X \to Y$ expliciet gemaakt wordt.

We gaan dit bekijken voor het geval dat $X = \mathbb{N}$ en $Y = \mathbb{N}_0$ met injectieve functies

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 : n \mapsto f(n) = n + 2,$$

$$g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N} : n \mapsto g(n) = n + 1.$$

We gebruiken de verzamelingen A_n zoals die voorkomen in het bewijs van Stelling 5.3.1.

(a) Laat zien dat $A_0 = \{0, 1\}$ en $A_1 = \{3, 4\}$.

(b) Bepaal de verzamelingen A_n voor $n \geq 2$.

(c) Beschrijf de bijectieve functie $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ die volgt uit het bewijs van Stelling 5.3.1.

5.4 Kardinaliteit van $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

De getallenverzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ zijn bekend vanuit het middelbaar. De verzamelingen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ zijn aftelbaar oneindig.

5.4.1 $\mathbb{Q}$ is aftelbaar oneindig

De verzameling $\mathbb{Q}$ van rationale getallen is ook aftelbaar oneindig. Om dit te bewijzen beginnen we met een eenvoudig resultaat.

Propositie 5.4.1. *De verzameling*

$$X_0 = \mathbb{Q} \cap [0, 1[$$

is aftelbaar oneindig.

Bewijs. We kunnen de rationale getallen in $[0, 1[$ als volgt aftellen:

$$0 = \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \ldots$$

$\square$

We definiëren voor elke $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \mathbb{Q} \cap [n, n+1[$$

en al deze verzamelingen zijn aftelbaar oneindig. Het bewijs hiervan is analoog aan dat van Propositie 5.4.1. Ook geldt

$$\mathbb{Q}^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n,$$

zodat $\mathbb{Q}^+$ een aftelbare unie is van aftelbaar oneindige verzamelingen.

Het is een algemeen resultaat dat een aftelbare unie van aftelbare verzamelingen zelf aftelbaar is.

Stelling 5.4.2. *Zij X_n een aftelbare verzameling voor elke $n \in \mathbb{N}$. Dan is*

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

ook aftelbaar.

Bewijs. We geven het bewijs in de veronderstelling dat elke X_n aftelbaar oneindig is. Het bewijs kan eenvoudig aangepast worden als er ook eindige verzamelingen bij zijn.

Omdat X_n aftelbaar oneindig is, is er dan een aftelling

$$x_{n,0},\ x_{n,1},\ x_{n,2},\ x_{n,3},\ x_{n,4},\ \ldots$$

van de elementen van X_n. Al deze elementen steken we in een oneindige matrix, waarbij de elementen van X_n in de $(n+1)$ste rij van de matrix staan. Dus

$$\begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} & x_{0,3} & x_{0,4} & \cdots & \cdots \\ x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} & \cdots & \cdots \\ x_{2,0} & x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & x_{2,4} & \cdots & \cdots \\ x_{3,0} & x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & x_{3,4} & \cdots & \cdots \\ x_{4,0} & x_{4,1} & x_{4,2} & x_{4,3} & x_{4,4} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

We maken nu een aftelling van $X = \bigcup_n X_n$ door deze matrix beginnend met het element $x_{0,0}$ langs de achtereenvolgende anti-diagonalen[3] te doorlopen. Dat geeft de volgende rij

$$x_{0,0},\ x_{1,0},\ x_{0,1},\ x_{2,0},\ x_{1,1},\ x_{0,2},\ x_{3,0},\ x_{2,1},\ x_{1,2},\ x_{0,3},\ x_{4,0},\ \ldots$$

waarbij inderdaad elk element van X een keer aan de beurt komt.

Dit is een aftelling van X als de verzamelingen X_n onderling disjunct zijn. Als de verzamelingen niet onderling disjunct zijn dan zijn er elementen die meer dan één keer voorkomen in bovenstaande rij. We passen de rij dan aan door elementen die we al tegengekomen zijn over te slaan als we ze nog een keer tegenkomen. $\square$

Het bewijs van de volgende stelling is nu niet moeilijk meer.

Stelling 5.4.3. *(Cantor 1874) De verzameling van rationale getallen $\mathbb{Q}$ is aftelbaar oneindig.*

Bewijs. Er geldt dat $\mathbb{Q}^+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ met $X_n = \mathbb{Q} \cap [n, n+1[$ en elke X_n is aftelbaar oneindig. Uit Stelling 5.4.2 volgt dan dat $\mathbb{Q}^+$ aftelbaar oneindig is. Evenzo is $\mathbb{Q}^-$ aftelbaar oneindig en dan ook $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$. $\square$

5.4.2 $\mathbb{R}$ is overaftelbaar

Een groot verschil tussen $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ is dat $\mathbb{R}$ overaftelbaar is. De overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$ is voor het eerst door Cantor bewezen met behulp van een diagonaalargument.

Stelling 5.4.4. *(Cantor 1874) De verzameling van reële getallen $\mathbb{R}$ is overaftelbaar.*

Bewijs. We geven een bewijs uit het ongerijmde en we nemen daartoe aan dat $\mathbb{R}$ aftelbaar is. Dan is de deelverzameling $[0,1[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 1\}$ ook aftelbaar. Deze verzameling is duidelijk oneindig en bijgevolg is er een bijectie $f : \mathbb{N}_0 \to [0,1[$.

We gaan gebruiken dat we elk reëel getal $x \in [0,1[$ kunnen schrijven door middel van een kommagetal van de vorm

$$x \;=\; 0,\ a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4\ \ \cdots$$

voor zekere getallen $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Deze decimale schrijfwijze is echter niet uniek. Het getal $1/5$ kunnen we bijvoorbeeld op de volgende twee manieren als kommagetal schrijven

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{5} &= 0,\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0\ \cdots && \text{(2 gevolgd door alleen maar nullen)} \\ \tfrac{1}{5} &= 0,\ 1\ 9\ 9\ 9\ 9\ \cdots && \text{(1 gevolgd door alleen maar negens)} \end{aligned}$$

Als we afspreken dat de decimale ontwikkeling niet eindigt met enkel negens dan is de decimale schrijfwijze wel uniek.

We passen dit toe op het getal $f(j) \in [0,1[$ en we schrijven de decimale ontwikkeling van het getal $f(j)$ als

$$f(j) \;=\; 0,\ a_{j,1}\ \ a_{j,2}\ \ a_{j,3}\ \ a_{j,4}\ \ \cdots$$

[3]Een anti-diagonaal in een matrix is een diagonaal die van linksonder naar rechtsboven loopt.

met getallen $a_{j,k} \in \{0, 1, 2 \ldots, 9\}$. We zetten al deze decimale ontwikkelingen bijeen in een oneindige matrix

$$\begin{array}{ccccccccc} f(1) & = & 0, & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & \cdots \\ f(2) & = & 0, & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & \cdots \\ f(3) & = & 0, & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \cdots & \cdots \\ f(4) & = & 0, & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{array}$$

We gaan nu laten zien dat er een getal $b \in [0, 1[$ bestaat met een decimale ontwikkeling die verschillend is van al de bovenstaande decimale ontwikkelingen. Dit doen we met een zogenaamd **diagonaalargument**.

De getallen $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, a_{4,4}, \ldots$ zijn de elementen op de diagonaal. We gaan nu een getal $b \in [0, 1[$ vastleggen door middel van een decimale ontwikkeling

$$b \;=\; 0, \;\; b_1 \;\; b_2 \;\; b_3 \;\; b_4 \;\; \cdots$$

waarbij we er voor zorgen dat $b_j \neq a_{j,j}$ voor alle $j \in \mathbb{N}_0$. We kunnen dit op veel manieren doen. Een mogelijke manier is door te definiëren

$$b_j = \begin{cases} 5 & \text{als } a_{j,j} \neq 5, \\ 6 & \text{als } a_{j,j} = 5. \end{cases}$$

Als we b op deze manier vastleggen dan zal $b \neq f(j)$ voor elke $j \in \mathbb{N}_0$. Immers, het $j$de getal na de komma in de decimale ontwikkeling van b is b_j en het verschilt met het $j$de getal na de komma van $f(j)$. Omdat de decimale ontwikkeling van b zeker niet eindigt op alleen maar nullen of alleen maar negens, is de gegeven decimale ontwikkeling van b de enig mogelijke, en dus is $b \neq f(j)$.

We concluderen nu dat $f : \mathbb{N}_0 \to [0, 1[$ niet surjectief is. Dit is in tegenspraak met de aanname dat f een bijectie is. Bijgevolg is $[0, 1[$ overaftelbaar. Dan is ook $\mathbb{R}$ overaftelbaar. $\square$

Uit Stelling 5.4.4 volgt dat $\mathbb{R}$ 'echt groter' is dan $\mathbb{N}_0$. Omdat $\mathbb{Q}$ aftelbaar is, is $\mathbb{R}$ ook 'echt groter' dan $\mathbb{Q}$. Het is echter wel zo dat $\mathbb{Q}$ dicht ligt in $\mathbb{R}$. Elk irrationaal getal kunnen we zien als een 'gat' in $\mathbb{Q}$. Dit leidt tot de misschien vreemde situatie dat $\mathbb{Q}$ aftelbaar is, maar dat er tussen de getallen in $\mathbb{Q}$ een overaftelbaar aantal gaten zitten. Er zijn dus meer gaten in $\mathbb{Q}$ dan dat er elementen in $\mathbb{Q}$ zijn.

5.4.3 Continuümhypothese

We weten nu dat $\mathbb{R}$ overaftelbaar is. We weten ook dat de machtsverzameling $P(\mathbb{N}_0)$ van $\mathbb{N}_0$ overaftelbaar is, zie hiervoor Stelling 5.1.9.

Een logische vraag is nu of $\mathbb{R}$ en $P(\mathbb{N}_0)$ even groot zijn, dat wil zeggen of ze dezelfde kardinaliteit hebben. Dit blijkt inderdaad zo te zijn. Er geldt dus

$$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0},$$

maar het bewijs hiervan zou ons te ver voeren.

De **continuümhypothese** stelt dat er geen verzameling X bestaat met $\aleph_0 < |X| < 2^{\aleph_0}$. Dat wil dus zeggen dat er geen verzameling is die strikt groter is dan $\mathbb{N}$ is maar strikt kleiner dan $\mathbb{R}$. De continuümhypothese is jarenlang een open probleem geweest, totdat de Amerikaanse wiskundige Paul Cohen (1934–2007) in 1963 aantoonde dat de continuümhypothese niet bewezen kan worden in het standaardmodel van de verzamelingenleer. Het was al eerder aangetoond door de Oostenrijks-Amerikaanse wiskundige Kurt Gödel (1906–1978) dat ook niet bewezen kan worden dat ze niet waar is!

Met andere woorden we kunnen aannemen dat de continuümhypothese waar is en we zullen niet tot een tegenspraak komen. Maar we kunnen ook aannemen dat ze niet waar is en we komen evenmin tot een tegenspraak.

5.4.4 Oefeningen

Oefening 5.4.1. Laat zien dat elke deelverzameling van $\mathbb{Q}$ een aftelbare verzameling is.

Oefening 5.4.2. Als X aftelbaar oneindig is en $n \in \mathbb{N}_0$, dan is ook X^n aftelbaar oneindig. Bewijs. Hierin is

$$X^n = \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n \text{ keer}} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_j \in X \text{ voor elke } j\}$$

het n-voudig Cartesisch product van X met zichzelf.

Oefening 5.4.3. Een reëel getal x is **algebraïsch** als het voldoet aan een veeltermvergelijking

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0, \qquad a_0 \neq 0, \tag{5.5}$$

waarin alle coëfficiënten a_j geheel zijn. Als een reëel getal niet algebraïsch is dan is het **transcendent** (of transcendentaal).

Bewijs dat de verzameling van alle algebraïsche getallen aftelbaar oneindig is. Gebruik hierbij dat de veeltermvergelijking (5.5) niet meer dan n reële oplossingen heeft.

Oefening 5.4.4. Bewijs dat $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ overaftelbaar is.

Oefening 5.4.5. Zijn de volgende verzamelingen eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar?

(a) De verzameling van alle oneindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$.

(b) De verzameling van alle injectieve functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

(c) De verzameling van alle injectieve functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$.

[Hint bij (b): Deze verzameling is overaftelbaar. Dit kun je aantonen met een diagonaalargument, dat gebruik maakt van hetzelfde idee dat voorkomt in het bewijs van overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$.]

5.5 Extra oefeningen over Hoofdstuk 5

Oefening 5.5.1. We vragen ons af of de lege verzameling equipotent is met de lege verzameling. Volgens Definitie 5.1.1 is dat het geval als er een bijectie van $\emptyset$ naar $\emptyset$ bestaat. Is er inderdaad zo'n bijectie? Hoe ziet die er uit?

Oefening 5.5.2. Zij X een verzameling, $x_0 \in X$, en $f : X \to X$ een functie. Het doel van deze oefening is om te bewijzen dat er een unieke functie $\varphi : \mathbb{N} \to X$ bestaat met $\varphi(0) = x_0$ en

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in X : \varphi(n) = x \implies \varphi(n+1) = f(x). \tag{5.6}$$

Intüitief is is het bestaan van φ als volgt in te zien. Uitgaande van x_0 verkrijgen we een rij $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ van elementen van X door f herhaald toe te passen. Dat wil zeggen $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, enzovoorts. We nemen dan

$$\varphi : \mathbb{N} \to X : n \mapsto x_n.$$

Het onbevredigende aspect aan deze redenering, zit hem in het gebruik van “enzovoorts”. Voor iemand met een goed beeld van de natuurlijke getallen zal het duidelijk zijn wat ermee bedoeld wordt. Als iemand geen goed beeld heeft van de natuurlijke getallen dan is het niet duidelijk wat er bedoeld wordt.

De axioma’s van Peano beogen om een preciese beschrijving te geven van de natuurlijke getallen. In de volgende stappen doorlopen we een precies bewijs, gebaseerd op de axioma’s van Peano, die het gebruik van “enzovoorts” vermijdt.

We gaan de functie φ construeren als een speciale relatie van $\mathbb{N}$ naar X. We beschouwen de verzameling $\mathcal{C}$ van alle relaties $R \subset \mathbb{N} \times X$ met de eigenschap

$$(0, x_0) \in R \quad \wedge \quad \forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in X : (n, x) \in R \implies (n+1, f(x)) \in R. \tag{5.7}$$

Ons doel zal zijn om te laten zien dat er een functie φ behoort tot $\mathcal{C}$.

(a) Bewijs dat voor een functie $\varphi : \mathbb{N} \to X$ geldt dat $\varphi \in \mathcal{C}$ als en slechts als φ voldoet aan $\varphi(0) = x_0$ en (5.6).

(b) Laat zien dat $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Hint: $\mathbb{N} \times X \in \mathcal{C}$.

(c) Definieer de relatie φ van $\mathbb{N}$ naar X door

$$\varphi = \bigcap_{R \in \mathcal{C}} R.$$

Bewijs dat $\varphi \in \mathcal{C}$.

(d) Beschouw

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists! x \in X : (n, x) \in \varphi\}$$

en bewijs dat $0 \in A$ en $n \in A \implies n+1 \in A$. [De kwantor $\exists!$ betekent: er is precies één]

(e) Concludeer dat $A = \mathbb{N}$ en dat φ een functie is.

Oefening 5.5.3. Een bijectieve functie van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ noemen we ook wel een **permutatie** van $\mathbb{N}$.

(a) Neem een vaste $N \in \mathbb{N}$. Hoeveel permutaties f van $\mathbb{N}$ zijn er met de eigenschap dat $f(n) = n$ voor alle $n \geq N$? Dit antwoord hangt af van N.

Zijn de volgende verzamelingen eindig, aftelbaar oneindig, of overaftelbaar?

(b) De verzameling van alle permutaties van $\mathbb{N}$ waarvoor er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat met $f(n) = n$ voor alle $n \geq N$.

(c) De verzameling van alle permutaties van $\mathbb{N}$.

[Dit is niet zo makkelijk. Denk er maar eens over na, maar niet te lang...]

Oefening 5.5.4. (a) Gebruik de stelling van Cantor-Bernstein-Schröder om aan te tonen dat $[0, 1]$ en $[0, 1[$ equipotent zijn.

De stelling van Cantor-Bernstein-Schröder geeft geen expliciet voorschrift voor een bijectie van $[0, 1]$ naar $[0, 1[$.

(b) Denk zelf na over een mogelijke bijectie $f : [0, 1] \to [0, 1[$.

- Als je zo'n bijectie kunt vinden, beschrijf deze functie dan nauwkeurig en bewijs dat het inderdaad een bijectie is. In dat geval hoef je onderdeel (c) niet te maken.
- Als je zo'n bijectie niet zelf kunt vinden, ga dan door met onderdeel (c).

(c) Zij $f : [0, 1] \to [0, 1[$ gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{als } x = \frac{1}{n} \text{ voor zekere } n \in \mathbb{N}_0, \\ x & \text{anders.} \end{cases}$$

Bewijs dat f inderdaad een functie van $[0, 1]$ naar $[0, 1[$ is en bewijs dat f een bijectie is.

Oefening 5.5.5. Transitiviteit van kardinaliteit

We beschouwen de volgende drie beweringen voor verzamelingen X, Y en Z:

- Als $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ en $\text{card}(Y) \leq \text{card}(Z)$ dan $\text{card}(X) \leq \text{card}(Z)$.
- Als $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ en $\text{card}(Y) < \text{card}(Z)$ dan $\text{card}(X) < \text{card}(Z)$.
- Als $\text{card}(X) < \text{card}(Y)$ en $\text{card}(Y) \leq \text{card}(Z)$ dan $\text{card}(X) < \text{card}(Z)$.

Deze beweringen drukken een vorm van transitiviteit uit tussen de kardinaliteit van verzamelingen.

(a) Schrijf elke bewering uit in termen van het bestaan (of niet bestaan) van injectieve functies.

(b) Bewijs de drie beweringen, waarbij u gebruik mag maken van de stelling van Cantor-Bernstein-Schröder.

Oefening 5.5.6. (a) Beargumenteer dat de verzameling van irrationale getallen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ overaftelbaar is.

(b) Geef een injectieve functie $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

(c) In het boek van Sundstrom, in opgave 9.3.9 op blz. 487–488 staat een constructie van een injectieve functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Bestudeer deze constructie en leg ze uit in je eigen woorden. Is g een bijectie?

(d) Wat kunnen we op grond van (b) en (c) concluderen uit de stelling van Cantor-Bernstein-Schröder?

Oefening 5.5.7. De bedoeling van deze oefening is om te bewijzen dat het interval $X = [0,1]$ en het vierkant $Y = [0,1] \times [0,1]$ equipotent zijn. We gebruiken hiervoor de stelling van Cantor-Bernstein-Schröder.

(a) Vind een injectieve functie $f : X \to Y$.

(b) Vind een injectieve functie $g : Y \to X$.

Onderdeel (b) is niet zo makkelijk. Als het niet lukt kijk dan op

`www-math.ucdenver.edu/~wcherowi/courses/m4010/infin2.pdf`

om inspiratie op te doen.

(c) Is de functie g die je in (b) gevonden hebt ook surjectief?

(d) Bewijs dat er een bijectie bestaat van $[0,1]$ naar $[0,1] \times [0,1]$.

Het inzicht dat het vierkant equipotent is met het interval komt van Cantor, hoewel zijn oorspronkelijke bewijs niet correct was. Het lijkt tegenstrijdig omdat er beweerd wordt dat een 1-dimensionale verzameling (het interval) even groot is als een 2-dimensionale verzameling (het vierkant).

Hoofdstuk 6

Getallen en tellen

6.1 Tellen

6.1.1 Telprincipes

We behandelen een aantal telprincipes die vaak handig zijn om te gebruiken.

Stelling 6.1.1. *Als X en Y disjuncte eindige verzamelingen zijn dan is*

$$|X \cup Y| = |X| + |Y|. \tag{6.1}$$

Bewijs. We beschouwen verder het geval dat X en Y niet leeg zijn. Stel $|X| = n$ en $|Y| = m$. Dan zijn er bijecties $f : X \to \mathbb{E}_n$ en $g : Y \to \mathbb{E}_m$. We maken een bijectie $h : X \cup Y \to \mathbb{E}_{n+m}$ op de volgende manier. We definiëren voor $x \in X \cup Y$,

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als } x \in X, \\ g(x) + n & \text{als } x \in Y. \end{cases}$$

Omdat X en Y disjunct zijn is h goed gedefinieerd. Het is eenvoudig na te gaan dat h een bijectie is (omdat f en g bijecties zijn). Bijgevolg geldt $|X \cup Y| = n + m = |X| + |Y|$. $\square$

Gevolg 6.1.2. Als $X_1, X_2, \ldots X_n$ onderling disjuncte eindige verzamelingen zijn (d.w.z. als $i \neq j$ dan $X_i \cap X_j = \emptyset$), dan is

$$\left| \bigcup_{j=1}^{n} X_j \right| = \sum_{j=1}^{n} |X_j|.$$

Bewijs. Dit volgt met behulp van volledige inductie uit Stelling 6.1.1. $\square$

Het tweede telprincipe handelt over het Cartesisch product van eindige verzamelingen.

Stelling 6.1.3. *Als X en Y twee eindige verzamelingen zijn dan is het Cartesisch product $X \times Y$ eindig en*

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|. \tag{6.2}$$

Bewijs. Als X of Y de lege verzameling is, dan is $X \times Y$ ook de lege verzameling en (6.2) volgt. Neem dus aan dat beide verzamelingen niet leeg zijn.

Stel $|X| = n$ en $|Y| = m$. Zij $f : X \to \mathbb{E}_n$ en $g : Y \to \mathbb{E}_m$ bijecties. Schrijf $x_j = f^{-1}(j)$ voor $j = 1, 2, \dots, n$. Dan geldt $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \cdots \cup \{x_n\}$. Bijgevolg is

$$X \times Y = \bigcup_{j=1}^{n} (\{x_j\} \times Y)$$

en de verzamelingen $\{x_j\} \times Y$, $j = 1, 2, \dots, n$ zijn onderling disjunct. Uit Gevolg 6.1.2 volgt dat

$$|X \times Y| = \sum_{j=1}^{n} |\{x_j\} \times Y|. \tag{6.3}$$

Voor elke $j = 1, 2, \dots, n$ is $\{x_j\} \times Y \to \mathbb{E}_m : (x_j, y) \mapsto g(y)$ een bijectie. Dus $|\{x_j\} \times Y| = m$. Vanwege (6.3) volgt dan

$$|X \times Y| = \sum_{j=1}^{n} m = nm = |X| \cdot |Y|.$$

De stelling is hiermee bewezen. □

6.1.2 Het principe van inclusie-exclusie

De volgende stelling is een veralgemening van Stelling 6.1.1 naar verzamelingen die niet noodzakelijk disjunct zijn.

Stelling 6.1.4. *Als X en Y twee eindige verzamelingen zijn dan is*

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|. \tag{6.4}$$

Bewijs. De verzamelingen X en $Y \setminus X$ zijn disjunct en hun unie is $X \cup Y$. Vanwege Stelling 6.1.1 geldt dus

$$|X \cup Y| = |X| + |Y \setminus X|. \tag{6.5}$$

De verzamelingen $Y \setminus X$ en $X \cap Y$ zijn ook disjunct en hun unie is Y. Dus $|Y \setminus X| + |X \cap Y| = |Y|$ en dit betekent dat

$$|Y \setminus X| = |Y| - |X \cap Y|. \tag{6.6}$$

Nu volgt (6.4) meteen uit (6.5) en (6.6). □

De gelijkheid (6.4) drukt uit dat we het aantal elementen van de unie $X \cup Y$ kunnen tellen door te beginnen met het aantal elementen in de afzonderlijke verzamelingen X en Y te tellen en dit samen te nemen. Maar dan hebben we te veel geteld. De elementen in de doorsnede $X \cap Y$ zijn twee keer geteld. Door het aantal elementen van $X \cap Y$ er weer van af te trekken krijgen we het juiste aantal elementen in $X \cup Y$.

De uitbreiding van Stelling 6.1.4 naar een willekeurig aantal eindige verzamelingen staat bekend als het **principe van inclusie-exclusie**. Voor drie eindige verzamelingen X, Y en Z luidt het:

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|. \tag{6.7}$$

Als we dus het aantal elementen in de unie $X \cup Y \cup Z$ willen tellen, dan tellen we eerst het aantal elementen in elk van de verzamelingen X, Y en Z afzonderlijk en we nemen dit samen, zodat we krijgen

$$|X| + |Y| + |Z|.$$

We hebben nu te veel geteld. Elk element dat tot meer dan één van de verzamelingen behoort is meer dan één keer geteld terwijl het maar één keer geteld zou moeten worden. We trekken daarom het aantal elementen van de doorsneden $X \cap Y$, $X \cap Z$ en $Y \cap Z$ er van af. Dit leidt tot

$$|X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z|.$$

Elk element dat tot precies één van deze doorsneden behoort is nu juist geteld. Het is evenwel nog niet goed voor de elementen in de totale doorsnede $X \cap Y \cap Z$. Deze zijn eerst elk 3 keer geteld in elk van de verzamelingen X, Y en Z. Daarna zijn ze er ook 3 keer weer afgetrokken vanwege elk van de doorsneden $X \cap Y$, $X \cap Z$ en $Y \cap Z$. Uiteindelijk zijn de elementen van $X \cap Y \cap Z$ dus helemaal nog niet meegeteld. Door het aantal elementen van $X \cap Y \cap Z$ er weer bij te tellen vinden we de juiste formule (6.7).

Om het algemene inclusie-exclusie principe voor n eindige verzamelingen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ te formuleren voeren we een (tijdelijke) notatie in. Voor $I \subset \mathbb{E}_n$, $I \neq \emptyset$, definiëren we

$$X_I = \bigcap_{j \in I} X_j. \tag{6.8}$$

Dus $X_{\{j\}} = X_j$, $X_{\{j_1,j_2\}} = X_{j_1} \cap X_{j_2}$, $X_{\{j_1,j_2,j_3\}} = X_{j_1} \cap X_{j_2} \cap X_{j_3}$, enzovoorts.

Stelling 6.1.5. *Zij $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eindige verzamelingen. Dan geldt*

$$\left| \bigcup_{j=1}^{n} X_j \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subset \mathbb{E}_n} (-1)^{|I|-1} |X_I|$$

waarbij X_I door (6.8) *gedefinieerd is.*

Stelling 6.1.5 kan met volledige inductie bewezen worden. We zullen het bewijs echter hier niet geven.

6.1.3 Oefeningen

Oefening 6.1.1. Bewijs Gevolg 6.1.2.

Oefening 6.1.2. Geef een ander bewijs van Stelling 6.1.3 door uitgaande van bijecties $f : X \to \mathbb{E}_n$ en $g : Y \to \mathbb{E}_m$ een bijectie $h : X \times Y \to \mathbb{E}_{nm}$ te definiëren.

[Hint: we kunnen nemen $h(x, y) = f(x) + (g(y) - 1)n$.]

Oefening 6.1.3. We hebben een collectie van 144 tegels die vierkant of driehoekig zijn, die rood of blauw zijn, en die van hout of van kunststof zijn. Er zijn 68 houten tegels, 69 rode tegels, 75 driehoekige tegels, 36 rode houten tegels, 40 driehoekige houten tegels, 38 rode driehoekige tegels en 23 rode houten driehoekige tegels. Hoeveel blauwe vierkante tegels van kunststof zijn er?

Oefening 6.1.4. Bewijs Stelling 6.1.5 met volledige inductie.

Oefening 6.1.5. Zij $f : X \to Y$ met X en Y eindige verzamelingen. Neem aan dat er een $k \in \mathbb{N}$ bestaat waarvoor geldt dat $|f^{-1}(y)| = k$ voor alle $y \in Y$. Bewijs dat dan

$$|X| = k\ |Y|.$$

Oefening 6.1.6. Hoeveel natuurlijke getallen ≤ 100 zijn er die niet deelbaar zijn door 3, 5 of 7? Gebruik het principe van inclusie-exclusie.

6.2 Het tellen van functies en deelverzamelingen

6.2.1 Tellen van functies

Zij X en Y eindige verzamelingen. Het ligt voor de hand om ons af te vragen hoeveel functies er zijn van X naar Y.

Stelling 6.2.1. *Zij X en Y eindige verzamelingen met $|X| = m$ en $|Y| = n$. Dan is het aantal functies $f : X \to Y$ gelijk aan n^m.*

Bewijs. We kunnen de juistheid van deze stelling als volgt inzien. Zij $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ en $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Om een functie $f : X \to Y$ te maken moeten we voor elk element x_j van X een element $f(x_j) = y_k \in Y$ kiezen. Dit kan op n manieren. Voor elk van de m elementen uit X moeten we zo'n keuze maken en dit kunnen we onafhankelijk van elkaar doen. In totaal hebben we dan n^m mogelijkheden om een functie van X naar Y te maken. □

Een meer formeel bewijs van Stelling 6.2.1 kan gegeven worden met volledige inductie, maar hier gaan we verder niet op in.

Op grond van Stelling 6.2.1 wordt de verzameling van alle functies $X \to Y$ ook wel genoteerd met Y^X.

Vaak willen we niet alle functies tellen maar alleen functies met een bepaalde eigenschap.

Stelling 6.2.2. *Zij X en Y niet-lege eindige verzamelingen met $|X| = m$ en $|Y| = n$. Het aantal injectieve functies $f : X \to Y$ is gelijk aan $n(n-1)\cdots(n-m+1)$.*

Bewijs. Zij $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ en $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$.

Om een injectieve functie $f : X \to Y$ maken kunnen we het beeld $f(x_1)$ willekeurig in Y kiezen. Hiervoor zijn er n mogelijkheden. Als we $f(x_1)$ gekozen hebben, blijven er voor $f(x_2)$ nog $n-1$ mogelijkheden over. De functie moet namelijk injectief zijn zodat $f(x_2)$ niet gelijk mag zijn aan $f(x_1)$. Voor $f(x_3)$ blijven er dan nog $n-2$ mogelijkheden over. Enzovoorts. Voor de laatste $f(x_m)$ zijn er nog $n-m+1$ mogelijkheden. In totaal vinden we $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ mogelijke injectieve functies. □

Het product $n(n-1)\cdots(n-m+1)$ wordt wel genoteerd met $P(n,m)$ omdat het gelijk is aan het aantal m-permutaties van een verzameling met n elementen. Dit is gelijk aan het aantal manieren om uit n objecten er m te kiezen, waarbij de volgorde van belang is.

Als $m > n$ dan is $P(n,m) = 0$ omdat één van de factoren in het product gelijk aan nul is. Als $m = n$ dan is het gelijk aan $n!$ (n-**faculteit**):

$$P(n,n) = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Als $m < n$ dan is

$$\begin{aligned} P(n,m) &= n(n-1)\cdots(n-m+1) \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)(n-m)\cdots 2\cdot 1}{(n-m)\cdots 2\cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!}. \end{aligned}$$

Als $|X| = |Y| = n$ dan is een injectieve functie $f : X \to Y$ noodzakelijk ook een bijectie. Een bijzonder geval is als het domein X en het codomein Y hetzelfde zijn. Dan spreken we van een permutatie.

Definitie 6.2.3. Een bijectieve functie $f : X \to X$ noemen we een **permutatie** van X.

Voor een eindige verzameling X geldt dat injectiviteit (of surjectiviteit) van een functie $f : X \to X$ impliceert dat ze een bijectie is en dus een permutatie is. Uit Stelling 6.2.2 volgt dan meteen.

Gevolg 6.2.4. Het aantal permutaties van een eindige verzameling X met $|X| = n$ is gelijk aan $n!$.

6.2.2 Tellen van verzamelingen

Herinner u dat de machtsverzameling $P(X)$ van X de verzameling is van alle deelverzamelingen van X.

Stelling 6.2.5. *Als X een eindige verzameling is met $|X| = n$ dan geldt $|P(X)| = 2^n$.*

Bewijs. Om dit te bewijzen voeren we het begrip **karakteristieke functie** van een deelverzameling $A \subset X$ in. Dit is de functie

$$\chi_A : X \to \{0,1\}$$

gegeven door

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in A, \\ 0 & \text{als } x \notin A. \end{cases}$$

Noteer met $\mathrm{Fun}(X,\{0,1\})$ de verzameling van alle functies van X naar $\{0,1\}$. Het is eenvoudig in te zien dat de twee functies

$$P(X) \to \mathrm{Fun}(X,\{0,1\}) : A \mapsto \chi_A$$

en

$$\mathrm{Fun}(X,\{0,1\}) \to P(X) : \chi \mapsto \{x \in X \mid \chi(x) = 1\}$$

elkaars inverse zijn. Er is dus een bijectie tussen $P(X)$ en $\mathrm{Fun}(X,\{0,1\})$. Bijgevolg hebben deze verzamelingen dezelfde kardinaliteit. Vanwege Stelling 6.2.1 is dan

$$|P(X)| = |\,\mathrm{Fun}(X,\{0,1\})| = 2^n$$

als $|X| = n$. $\square$

Vanwege Stelling 6.2.5 wordt de machtsverzameling van X soms ook wel genoteerd met 2^X. Dus

$$2^X = P(X).$$

Definitie 6.2.6. Zij X een verzameling en $r \in \mathbb{N}$. Een r**-deelverzameling** van X is een deelverzameling met r elementen. De verzameling van alle r-deelverzamelingen noteren we met $P_r(X)$. Dus

$$P_r(X) = \{A \subset X \mid |A| = r\}.$$

We definiëren de **binomiaalcoëfficiënt** $\binom{n}{r}$ als

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \tag{6.9}$$

Stelling 6.2.7. *Zij* $|X| = n$ *en* $r \in \mathbb{N}$ *met* $r \leq n$. *Dan geldt*

$$|P_r(X)| = \binom{n}{r}.$$

Bewijs. Om een r-deelverzameling te krijgen moeten we uit de n elementen van X er r kiezen.

We kunnen deze r elementen achtereenvolgens gaan kiezen. Dus eerst kiezen we een element van X, daarna een tweede element van X, verschillend van het eerste element, vervolgens een derde element, dat weer verschillend is, enzovoorts, tot we r elementen.

Voor het eerste element hebben we dan n keuzen, voor het tweede element $n-1$ mogelijkheden, enzovoorts. In totaal hebben we

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{6.10}$$

mogelijkheden om r verschillende elementen uit X te kiezen, waarbij de volgorde van belang is. Dit komt in feite overeen met het aantal injectieve functies van $\{1, \ldots, r\}$ naar X, zie ook Stelling 6.2.2.

We hebben nu r elementen van X in een zekere volgorde gekozen. Voor een deelverzameling is de volgorde echter niet van belang. Zij bv. $r = 3$ en stel dat x, y en z drie elementen van X zijn. Er zijn 6 mogelijkheden om deze elementen in een zekere volgorde te kiezen, namelijk xyz, xzy, yxz, yzx, zxy en zyx. Elk van deze mogelijkheden leidt echter tot dezelfde deelverzameling $\{x, y, z\}$ van X. Voor algemene r zijn er $r!$ mogelijkheden om r elementen in volgorde te kiezen en elk van die mogelijkheden leidt tot dezelfde deelverzameling van r elementen.

Dit betekent dat we met (6.10) elke deelverzameling $r!$ keer geteld hebben. Om het aantal deelverzamelingen met r elementen te vinden moeten we daarom (6.10) delen door $r!$ en dan vinden we inderdaad

$$|P_r(X)| = \frac{1}{r!} \cdot \frac{n!}{(n-r)!} = \binom{n}{r}.$$

□

De volgende eigenschappen zijn duidelijk uit de definitie (6.9) van binomiaalcoëfficiënt.

Lemma 6.2.8. *Er geldt*

(a) $\binom{n}{r} = 0$ *als* $r > n$*;*

(b) $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ *en* $\binom{n}{n} = 1$*;*

(c) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

De volgende eigenschap is niet meteen duidelijk uit de definitie 6.9 maar volgt eenvoudig met Stelling 6.2.7.

Propositie 6.2.9. *Er geldt*

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$$

Bewijs. Als $|X| = n$ dan hebben we een disjuncte unie $P(X) = \bigcup_{r=0}^{n} P_r(X)$. Bijgevolg is

$$|P(X)| = \sum_{r=0}^{n} |P_r(X)|,$$

zie ook Gevolg 6.1.2. De propositie volgt hieruit omdat $|P(X)| = 2^n$ en $|P_r(X)| = \binom{n}{r}$. □

6.2.3 Binomium van Newton

De binomiaalcoëfficiënten treden op in het zogenaamde binomium van Newton, dat genoemd is naar de Engelse geleerde Isaac Newton (1643–1727).

Stelling 6.2.10. *Voor elke* $n \in \mathbb{N}$ *en* $x \in \mathbb{R}$ *geldt*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k. \tag{6.11}$$

Bewijs. Het is mogelijk om (6.11) te bewijzen met volledige inductie. Doe dat zelf. We geven hier een combinatorisch bewijs.

Uiteraard is $(1+x)^n$ het product van n factoren

$$(1+x) \cdot (1+x) \cdot \cdots \cdot (1+x).$$

Als we dit product volledig uitwerken dan moeten we bij elke factor de keuze maken om ofwel 1 ofwel x te kiezen. We krijgen een macht x^k als we k keer voor x kiezen en de overige $n-k$ keer voor 1. Het aantal mogelijkheden om uit n factoren er k te kiezen is $\binom{n}{k}$. Vandaar dat x^k komt met een factor $\binom{n}{k}$ en we vinden (6.11). □

6.2.4 Oefeningen

Oefening 6.2.1. Als we Gevolg 6.2.4 ook zouden hanteren voor $n = 0$ dan zouden we $0!$ moeten definiëren als het aantal permutaties van de lege verzameling.

(a) Hoeveel permutaties zijn er van de lege verzameling?

(b) Vindt u dit een goede definitie voor $0!$?

Oefening 6.2.2. Bewijs met volledige inductie dat

$$n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt \tag{6.12}$$

geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Opmerking: Op grond van de eigenschap (6.12) kan men de faculteitsfunctie voor een willekeurige $x > -1$ definiëren door

$$x! = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt.$$

Deze notatie is echter niet gebruikelijk. De gebruikelijke notatie is door middel van de Gammafunctie:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt,$$

waarvoor geldt dat $\Gamma(n+1) = n!$ als n een natuurlijk getal is.

Oefening 6.2.3. Gebruik de eigenschap dat $|P_r(X)| = \binom{n}{r}$ om te bewijzen dat

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}.$$

Hint: Zij $|X| = n$ en kies een vast element $x^* \in X$. Deel $P_r(X)$ op in twee delen: de r-deelverzamelingen van X met x^* als element, en die zonder x^* als element. Tel beide delen.

Oefening 6.2.4. Een **derangement** or **herschikking** van n is een permutatie $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_n$ zonder vaste punten. Dat wil zeggen dat $f(j) \neq j$ voor alle $j \in \mathbb{E}_n$. Gebruik het principe van inclusie-exclusie om te bewijzen dat het aantal derangementen van n gelijk is aan

$$n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right).$$

Opmerking: Dit betekent dat de fractie van derangementen binnen de permutaties gelijk is aan

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

De som is een partieelsom van de reeks $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}$ die gelijk is aan e^{-1}.]

Oefening 6.2.5. Bewijs dat

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

[Hint: Bereken de coëfficiënt van x^n in $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ met behulp van het binomium van Newton.]

6.3 Voortbrengende functies

Neem aan dat we geïnteresseerd zijn in een rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ van getallen. De **voortbrengende functie** van deze rij is de machtreeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

We spreken ook van een **voorbrengende machtreeks**.

Het is soms mogelijk om de voortbrengende functie te gebruiken om informatie over de rij te verkrijgen. We geven hiervan twee voorbeelden.

6.3.1 Fibonaccigetallen

De **Fibonaccigetallen** worden gegeven door de **recursierelatie**

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2}, \qquad \text{voor } k \geq 2 \tag{6.13}$$

die samen met de beginwaarden

$$a_0 = a_1 = 1 \tag{6.14}$$

de rij vastlegt. Het volgende element in de rij is steeds de som van de twee voorgaanden. Het begin van de rij ziet er uit als 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... De Fibonaccigetallen zijn genoemd naar de Italiaanse wiskundige Leonardo van Pisa (ca. 1170-1250) die ook wel Leonardo Fibonacci genoemd werd.

Zij

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

de voortbrengende functie van de Fibonaccigetallen. Vanwege de beginwaarden (6.14) geldt dan

$$f(x) = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$$

en voor elke $k \geq 2$ kunnen we de recursierelatie (6.13) toepassen, hetgeen leidt tot

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} (a_{k-1} + a_{k-2}) x^k \\ &= 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k. \end{aligned} \tag{6.15}$$

De twee oneindige reeksen in (6.15) gaan we even apart bekijken. Er geldt

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} x^k = a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \cdots = x\left(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\right)$$

De som tussen haakjes is bijna gelijk aan de voortbrengende functie $f(x)$, alleen de constante term a_0 ontbreekt. Ze is bijgevolg gelijk aan $f(x) - a_0$, zodat (vanwege $a_0 = 1$)

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} x^k = x\left(f(x) - 1\right). \tag{6.16}$$

Voor de tweede reeks in (6.15) hebben we

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^k &= a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \cdots \\ &= x^2\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\right) = x^2 f(x).\end{aligned} \tag{6.17}$$

Uit (6.15), (6.16) en (6.17) vinden we dat $f(x)$ aan de volgende vergelijking

$$f(x) = 1 + x + x(f(x) - 1) + x^2 f(x)$$

voldoet. Dit betekent dat $\left(1 - x - x^2\right) f(x) = 1$ en dus dat

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}. \tag{6.18}$$

De Fibonaccigetallen a_k zijn bijgevolg de coëfficiënten in de machtreeksontwikkeling (Maclaurinreeks) van de rationale functie (6.18).

We vinden de coëfficiënten het eenvoudigst door een splitsing in partieelbreuken gebaseerd op de factorisatie $1 - x - x^2 = (1 - \tau_1 x)(1 - \tau_2 x)$ met

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right), \qquad \tau_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right). \tag{6.19}$$

Dan volgt na enig eenvoudig rekenwerk

$$f(x) = \frac{1}{(1 - \tau_1 x)(1 - \tau_2 x)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\tau_1}{1 - \tau_1 x} - \frac{\tau_2}{1 - \tau_2 x}\right).$$

Vanwege de bekende som van een meetkundige reeks

$$\frac{1}{1 - \tau x} = \sum_{k=0}^{\infty} (\tau x)^k$$

volgt hieruit dat

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau_1 \sum_{k=0}^{\infty} (\tau_1 x)^k - \tau_2 \sum_{k=0}^{\infty} (\tau_2 x)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau_1^{k+1} - \tau_2^{k+1}\right) x^k.$$

We zien dat

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau_1^{k+1} - \tau_2^{k+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right). \tag{6.20}$$

en dit is de gezochte expliciete formule voor het $k$de Fibonaccigetal a_k.

Hoewel de getallen τ_1 en τ_2 irrationaal zijn is de combinatie (6.20) altijd geheel. Omdat $|\tau_2| < 1$ wordt τ_2^{k+1} snel klein als k groot wordt. Dan volgt uit (6.20) ook de goede benadering

$$a_k \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\tau_1^{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}.$$

6.3.2 Herschikkingen

In Oefening 6.2.4 is gevraagd om het aantal herschikkingen (derangementen) te bepalen met behulp van het principe van inclusie-exclusie. We gebruiken nu de techniek van voortbrengende functies. Een **herschikking** van $\mathbb{E}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ is een permutatie $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_n$ zonder vaste punten. Dat wil zeggen dat $f(j) \neq j$ voor elke j.

Lemma 6.3.1. *Het aantal herschikkingen d_n voldoet aan de recursierelatie*

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}), \qquad n \geq 2, \tag{6.21}$$

met beginwaarden $d_0 = 1$ en $d_1 = 0$.

Bewijs. We geven alleen een schets van het bewijs. De recursie (6.21) volgt door naar het laatste element n van $\mathbb{E}_n$ te kijken.

Omdat een herschikking f van $\mathbb{E}_n$ een permutatie zonder vaste punten is, zijn er $j, k \in \mathbb{E}_{n-1}$ met $f(j) = n$ en $f(n) = k$. De eerste mogelijkheid is dat $j = k$. In dat geval zal de herschikking f de elementen n en $j = k = f(n)$ onderling verwisselen. Er zijn $(n-1)d_{n-2}$ herschikkingen van $\mathbb{E}_n$ van dit type. (Waarom precies?)

De overige herschikkingen van $\mathbb{E}_n$ zijn zo dat $j \neq k$. Van dit type zijn er $(n-1)d_{n-1}$. Dit kunnen we inzien door bij elke herschikking met $j \neq k$ een herschikking $\widetilde{f}$ van $\mathbb{E}_{n-1}$ te definiëren door

$$\widetilde{f}(j) = k$$

terwijl $\widetilde{f}$ overeenstemt met f in elk ander punt van $\mathbb{E}_{n-1}$. □

Merk op dat $n!$ aan de recursie (6.21) voldoet, maar met andere beginwaarden.

Een analyse van de voortbrengende functie $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ levert niets op. Omdat $n!$ ook aan de recursie voldoet, beschouwen we een nieuwe rij

$$c_n = \frac{d_n}{n!}. \tag{6.22}$$

Uit (6.21) volgt dan eenvoudig dat

$$nc_n = (n-1)c_{n-1} + c_{n-2}, \qquad n \geq 2, \tag{6.23}$$

met beginwaarden $c_0 = 1$ en $c_1 = 0$.

De voortbrengende functie

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{6.24}$$

voldoet aan

$$C'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} nc_n x^{n-1} \tag{6.25}$$

want $c_1 = 0$. Vanwege de recursie (6.23) is dan

$$\begin{aligned} C'(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)c_{n-1}x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^{n-1} \\ &= (c_1 x + 2c_2 x^2 + 3c_3 x^3 + \cdots) + (c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + \cdots) \\ &= xC'(x) + xC(x). \end{aligned}$$

Dit is een differentiaalvergelijking

$$(1-x)C'(x) = xC(x) \tag{6.26}$$

voor de voortbrengende functie. De oplossing van (6.26) die ook voldoet aan de beginvoorwaarde $C(0) = 1$ is gelijk aan (ga dit zelf na)

$$C(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}. \tag{6.27}$$

Uit

$$C(x) = \frac{1}{1-x} \cdot e^{-x} = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \cdot (1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots)$$

volgt dat de coëfficiënt c_n van x^n in dit product gelijk is aan

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \tag{6.28}$$

Vanwege (6.22) en (6.28) geldt

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \tag{6.29}$$

en dit is ook wat we in Oefening 6.2.4 gevonden hadden.

6.3.3 Oefeningen

Oefening 6.3.1. Zij $b_0 = 1$ en

$$b_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-k}{k}.$$

Deze reeks is in feite een eindige som omdat $\binom{n-k}{k} = 0$ als $k > n-k$.

(a) Laat zien dat de rij $b_0, b_1, b_2, b_3, \cdots$ aan dezelfde recursierelatie en beginwaarden voldoet als de rij van Fibonaccigetallen.

(b) Concludeer dat b_n gelijk is aan het $n$de Fibonaccigetal.

Oefening 6.3.2. Een woord van lengte n uit een alfabet met 2 letters A en B is een opeenvolging van n letters. Zij a_n het aantal woorden van lengte n uit een alfabet met twee letters A en B waarin de letter B niet op twee opeenvolgende plaatsen voorkomt. Laat zien dat $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ en

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \qquad n \geq 3.$$

Bereken hieruit a_n.

Oefening 6.3.3. De $n \times n$ determinant D_n wordt gedefinieerd door

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

We stellen ook $D_0 = 1$. Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n$ de voorbrengende machtreeks.

(a) Laat zien dat

$$D_n = (1+a^2)D_{n-1} - a^2 D_{n-2} \qquad \text{voor } n \geq 2.$$

(b) Bereken $f(x)$ en bepaal daaruit D_n.

Oefening 6.3.4. Een woord van lengte n uit een alfabet met 4 letters A, B, C en D is een opeenvolging van n letters. Zo zijn $AACB$ en $BCAD$ twee woorden van lengte 4. Het totaal aantal woorden van lengte n is duidelijk 4^n want voor elke positie hebben we de keus uit 4 letters.

Zij a_n het aantal woorden van lengte n met een oneven aantal letters A. Zij

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

de voortbrengende functie.

(a) Onderscheid de gevallen dat het woord al dan niet eindigt op een A en vind daaruit de recursie

$$a_{n+1} = 3a_n + (4^n - a_n), \qquad \text{ofwel} \qquad a_{n+1} = 2a_n + 4^n.$$

(b) Laat zien dat

$$f(x) = \frac{x}{(1-2x)(1-4x)}.$$

(c) Bereken hieruit a_n.

Oefening 6.3.5. Zij b_n het aantal woorden van lengte n uit een alfabet met drie letters A, B en C waarin geen twee B's achter elkaar en ook geen twee C's achter elkaar voorkomt. Laat zien dat

$$b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2} \qquad \text{voor } n \geq 3$$

en vind hieruit b_n.

6.4 Extra oefeningen over Hoofdstuk 6

Oefening 6.4.1. We beschouwen deelverzamelingen C van $\mathbb{E}_{30}$ met 8 elementen.

(a) Eén zo'n deelverzameling is $C_0 = \{3, 5, 11, 17, 21, 24, 26, 29\}$. Geef twee disjuncte deelverzamelingen van C_0 waarvan de elementen dezelfde som hebben.

(b) Als C een deelverzameling is van $\mathbb{E}_{30}$ met 8 elementen, wat is dan de maximale som van de elementen? Noem dit getal M.

(c) Definieer

$$f : P(C) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{E}_M$$

door voor $X \in P(C) \setminus \{\emptyset\}$ te stellen dat $f(X)$ gelijk is aan de som van de elementen in X.

Gebruik f om te laten zien dat er twee niet-lege deelverzamelingen zijn van C met dezelfde som van elementen.

(d) Bewijs dat er twee **disjuncte** niet-lege deelverzamelingen zijn van C met dezelfde som van elementen.

Oefening 6.4.2. Twee natuurlijke getallen $n, m \geq 1$ zijn **copriem** als hun grootste gemene deler gelijk aan 1 is. Dat wil ook zeggen dat er geen priemgetal is dat zowel een deler van n als van m is. We noteren met $\phi(n)$ het aantal getallen in $\{1, 2, \ldots, n\}$ dat copriem is met n.

Gebruik het principe van inclusie-exclusie om te bewijzen dat voor $n \geq 2$

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

waarin het product genomen wordt over alle priemgetallen p die een deler zijn van n.

Hoofdstuk 7

Orderelaties

7.1 Partiële en totale ordening

7.1.1 Partiële ordening

De relatie op $\mathbb{R}$ ('kleiner dan of gelijk aan')

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\} \tag{7.1}$$

is reflexief en transitief, maar niet symmetrisch. Het is dus zeker geen equivalentierelatie. De relatie is ver van symmetrisch. Immers als $(x, y) \in K$ en $(y, x) \in K$, dan geldt $x \leq y$ en $y \leq x$, en dit kan alleen als $x = y$. Een relatie met deze eigenschap noemen we anti-symmetrisch.

Definitie 7.1.1. Een relatie R op een verzameling X is **anti-symmetrisch** als

$$\forall x, y \in X : [(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R] \implies x = y.$$

Equivalent hiermee is

$$\forall x, y \in X : [(x, y) \in R \wedge x \neq y] \implies (y, x) \notin R.$$

Definitie 7.1.2. Een relatie op X is een **orderelatie** op X als ze reflexief, anti-symmetrisch en transitief is. Een orderelatie op X wordt ook wel een **partiële ordening** op X genoemd.

We geven enkele voorbeelden.

Voorbeeld 7.1.3. (a) De relatie K van (7.1) is een orderelatie op $\mathbb{R}$.

(b) De relatie
$$D = \{(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid \ n \text{ is een deler van } m\} \tag{7.2}$$
is een orderelatie op de strikt positieve gehele getallen.

(c) Zij X een verzameling. Dan is

$$\{(A, B) \in P(X) \times P(X) \mid A \subset B\}$$

een orderelatie op de machtsverzameling van X.

Zoals blijkt uit bovenstaande voorbeelden geldt bij een orderelatie R dat $(x, y) \in R$ betekent dat x in een of andere zin kleiner dan of gelijk is aan y. In een concrete situatie wordt een orderelatie vaak aangegeven met een symbool zoals $\leq$ of $\subset$. In een algemene context zullen we $\preccurlyeq$ gebruiken om een orderelatie aan te duiden.

Definitie 7.1.4. Een (partieel) geordende verzameling is een koppel $(X, \preccurlyeq)$ bestaande uit een verzameling X en een orderelatie $\preccurlyeq$ op X.

Als $(X, \preccurlyeq)$ een geordende verzameling is, dan schrijven we meestal $x \preccurlyeq y$ als het koppel (x, y) tot de relatie $\preccurlyeq$ behoort. We gebruiken ook de volgende voor de hand liggende varianten op deze notatie

- $x \succcurlyeq y$ betekent dat $y \preccurlyeq x$,
- $x \prec y$ betekent dat $x \preccurlyeq y$ en $x \neq y$,
- $x \succ y$ betekent dat $x \succcurlyeq y$ en $x \neq y$.

We herhalen nog eens dat volgens de definitie een geordende verzameling $(X, \preccurlyeq)$ aan het volgende voldoet.

- $\preccurlyeq$ is reflexief: $x \preccurlyeq x$ geldt voor elke $x \in X$.
- $\preccurlyeq$ is transitief: uit $x \preccurlyeq y$ en $y \preccurlyeq z$ volgt $x \preccurlyeq z$.
- $\preccurlyeq$ is anti-symmetrisch: uit $x \preccurlyeq y$ en $y \preccurlyeq x$ volgt $x = y$.

7.1.2 Totale ordening

Definitie 7.1.5. Een orderelatie $\preccurlyeq$ op X is een **totale ordening** als

$$\forall x, y \in X: \ x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x.$$

In een totaal geordende verzameling $(X, \preccurlyeq)$ kunnen we elk tweetal elementen x en y met elkaar vergelijken. Precies één van de drie mogelijkheden

$$x \prec y, \qquad x = y, \qquad x \succ y$$

is geldig.

De orderelatie K uit (7.1) is totaal. De orderelatie D uit onderdeel (b) van Voorbeeld 7.1.3 is niet totaal. Immers, er zijn zeker natuurlijke getallen $n, m \in \mathbb{N}_0$ te vinden waarbij n niet een deler is van m en ook m niet een deler van n. De orderelatie uit onderdeel (c) van Voorbeeld 7.1.3 is niet totaal als X uit meer dan één element bestaat.

7.1.3 Begrippen rond ordening

Kleinste en grootste element

We nemen aan dat $(X, \preccurlyeq)$ een geordende verzameling is.

Definitie 7.1.6. Zij $A \subset X$. We noemen a een **grootste element** van A als $a \in A$ en

$$\forall x \in A : x \preccurlyeq a. \tag{7.3}$$

Analoog kennen we een **kleinste element** van A.

Voorbeeld 7.1.7. Zij D de delerrelatie op $\mathbb{N}_0$ uit onderdeel (b) van Voorbeeld 7.1.3. Dan is 1 een kleinste element van $\mathbb{N}_0$. Er is geen grootste element.

De deelverzameling $A = \mathbb{N}_0 \setminus \{1\} \subset \mathbb{N}_0$ heeft in dit voorbeeld geen kleinste element.

Propositie 7.1.8. *Zij $(X, \preccurlyeq)$ een geordende verzameling en $A \subset X$. Als A een grootste element heeft, dan is dit grootste element uniek.*

Bewijs. Neem aan dat A een grootste element heeft, zeg a. Het bewijs dat dit element uniek is voeren we uit het ongerijmde. Stel dat er nog een grootste element van A is. We noemen dit element b en we nemen dus aan dat $b \neq a$.

Dan is $b \in A$ en omdat a een grootste element is van A volgt uit (7.3) dat $b \preccurlyeq a$. Maar omgekeerd is ook b is een grootste element van A en $a \in A$, zodat uit (7.3) ook volgt dat $a \preccurlyeq b$. Uit het anti-symmetrisch zijn van de ordening volgt nu dat $a = b$, hetgeen in tegenspraak is met $b \neq a$. Deze tegenspraak toont aan dat het grootste element van A uniek is. □

Als A een grootste element heeft, dan kunnen we vanwege onderdeel (a) van Propositie 7.1.8 spreken van het grootste element van A in plaats van een grootste element van A. Het grootste element noemen we ook wel een **maximum** en we noteren het met

$$\max A.$$

Net zo is een kleinste element van A uniek. Het kleinste element heet ook wel een **minimum** en we schrijven

$$\min A$$

voor het kleinste element van A (als het bestaat).

Bovengrens en ondergrens, supremum en infimum

We formuleren de begrippen bovengrens en ondergrens, supremum en infimum voor een willekeurige orderelatie.

Definitie 7.1.9. Zij $(X, \preccurlyeq)$ een geordende verzameling en $A \subset X$.

(a) Dan is $b \in X$ een **bovengrens** van A als

$$\forall x \in A : x \preccurlyeq b.$$

Als A een bovengrens heeft, dan noemen we A **naar boven begrensd**.

(b) Verder is $s \in X$ een **supremum** (of **kleinste bovengrens**) van A als s een bovengrens is van A die kleiner is dan elke andere bovengrens van A.

Analoog kennen we de begrippen **ondergrens**, **naar onder begrensd** en **infimum** (of **grootste ondergrens**).

Uit de definities volgt dat $s \in X$ een supremum is van A als

(a) s is een bovengrens van A:

$$\forall x \in A : x \preccurlyeq s,$$

(b) en s is kleiner dan of gelijk aan elke bovengrens b van A:

$$\forall b \in X : (\forall x \in A : x \preccurlyeq b) \implies s \preccurlyeq b.$$

Een bovengrens is meestal niet uniek bepaald, maar het supremum (als het bestaat) is wel uniek (zie Oefening 7.1.6). We kunnen dus spreken van het supremum van A en net zo van het infimum. We noteren

$$\sup A \qquad \text{en} \qquad \inf A$$

voor het supremum en het infimum van een verzameling A.

7.1.4 Oefeningen

Oefening 7.1.1. Welke van de volgende relaties zijn orderelaties op de verzameling W van alle woorden uit de Nederlandse taal? Zijn de orderelaties partieel of totaal?

(a) R_1 is de relatie op W waarbij $(x, y) \in R_1$ als alle letters van woord x ook voorkomen in woord y.

(b) R_2 is de relatie op W waarbij $(x, y) \in R_2$ als en slechts als de letters van woord x achter elkaar en in dezelfde volgorde voorkomen in woord y.

(c) R_3 is de relatie op W waarbij $(x, y) \in R_3$ als y na x komt in alfabetisch-lexicografische ordening.

Oefening 7.1.2. Welke van de volgende relaties zijn orderelaties op $\mathbb{R}$? Zijn de orderelaties partieel of totaal?

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq y\}$.

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| \geq |y|\}$.

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| < |y| \text{ of } x = y\}$.

Oefening 7.1.3. Zij $(X, \preccurlyeq)$ een geordende verzameling. Voor elke $x \in X$ definiëren we

$$P_x = \{a \in X \mid a \preccurlyeq x\}.$$

Bewijs dat

$$\forall x, y \in X : (x \preccurlyeq y \Leftrightarrow P_x \subset P_y).$$

Oefening 7.1.4. Zij $(X, \preccurlyeq)$ een geordende verzameling.

(a) Laat zien dat $(X, \succcurlyeq)$ ook een geordende verzameling is.

(b) Zij $A \subset X$. Laat zien dat a het kleinste element van A is in de geordende verzameling $(X, \preccurlyeq)$ als en slechts als a het grootste element van A is in de geordende verzameling $(X, \succcurlyeq)$.

Oefening 7.1.5. Zij $(X, \preccurlyeq)$ een geordende verzameling en $A \subset X$. We noemen $a \in A$ een **maximaal element** van A als er geen groter element in A is, d.w.z.

$$\neg (\exists x \in A : a \prec x)$$

(a) Geef een voorbeeld van een verzameling A in een geordende verzameling die meer dan één maximaal element heeft.

(b) Als A een grootste element heeft, dan is dit ook een maximaal element. Bewijs.

(c) Neem aan dat de ordening totaal is. Bewijs dat dan eeen maximaal element van A ook een grootste element is.

Oefening 7.1.6. Zij $(X, \preccurlyeq)$ een geordende verzameling en $A \subset X$. Bewijs dat een supremum van A (als het bestaat) uniek is.

Oefening 7.1.7. Zij $(X, \preccurlyeq)$ een geordende verzameling en $A \subset X$. Neem aan dat A een grootste element heeft, $\max A$. Bewijs dat $\max A$ dan ook het supremum van A is.

Oefening 7.1.8. Zij $(X, \preccurlyeq)$ een geordende verzameling en $A \subset X$. Zij B gelijk aan de verzameling van alle bovengrenzen van A.

(a) Laat zien dat B naar boven gesloten is. Dat wil zeggen, laat zien dat als $b \in B$ en $b \preccurlyeq c$ dan is $c \in B$.

(b) Bewijs dat elk element van A een ondergrens van B is.

(c) Neem aan dat B een infimum heeft, zeg $\inf B = x$. Bewijs dat $x = \sup A$.

Oefening 7.1.9. Zij D de 'deler van' relatie op $\mathbb{N}_0$ als in (7.2). Bewijs dat voor $n, m \in \mathbb{N}_0$ geldt

$$\sup\{n, m\} = \mathrm{kgv}(n, m)$$

en

$$\inf\{n, m\} = \mathrm{ggd}(n, m)$$

waarin met kgv het kleinste gemene veelvoud en met ggd de grootste gemene deler bedoeld wordt.

Oefening 7.1.10. Beschouw de partiële ordening '$\subset$' op de machtsverzameling $P(X)$ van een verzameling X. Zie onderdeel (c) van Voorbeeld 7.1.3. Bewijs dat voor $A, B \in P(X)$,

$$\inf\{A, B\} = A \cap B$$

en

$$\sup\{A, B\} = A \cup B.$$

Oefening 7.1.11. Zij $(X, \preccurlyeq)$ een geordende verzameling. Neem aan dat X zowel een kleinste als een grootste element heeft. We zien $\emptyset$ als deelverzameling van X.

(a) Is $\inf \emptyset$ het kleinste of het grootste element van X? Bewijs uw antwoord.

(b) Dezelfde vraag voor $\sup \emptyset$.

Oefening 7.1.12. Neem aan dat R een reflexieve en transitieve relatie op een verzameling X is. Definieer een relatie $\sim$ op X door

$$x \sim y \quad \text{als en slechts als} \quad (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R.$$

(a) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie op X is.

Zij $X/\sim$ de quotiëntverzameling bestaande uit alle equivalentieklassen $[x]$ met $x \in X$. Definieer op $X/\sim$ een relatie S door

$$([x],[y]) \in S \quad \text{als en slechts als} \quad (x,y) \in R.$$

(b) Laat zien dat S goed gedefinieerd is.

(c) Bewijs dat S een orderelatie op $X/\sim$ is.

7.2 Ordening op $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

Bovenstaande begrippen zijn in het bijzonder van toepassing op de standaardordening $\leq$ op de getallenverzamelingen $\mathbb{N}$ (de natuurlijke getallen), $\mathbb{Z}$ (de gehele getallen), $\mathbb{Q}$ (de rationale getallen) en $\mathbb{R}$ (de reële getallen). Elk van deze verzamelingen is op natuurlijke wijze een geordende verzameling

$$(\mathbb{N},\leq), \qquad (\mathbb{Z},\leq), \qquad (\mathbb{Q},\leq), \qquad (\mathbb{R},\leq).$$

Deze ordeningen zijn totaal. Immers voor elk tweetal getallen x en y geldt ofwel $x < y$, ofwel $y < x$, ofwel $x = y$.

7.2.1 Algebraïsche bewerkingen

We gaan in het bijzonder de totaal geordende verzamelingen $(\mathbb{Q},\leq)$ en $(\mathbb{R},\leq)$ bekijken. Op zowel $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{R}$ kennen we ook de algebraïsche bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

De **optelling** $+$ en de **vermenigvuldiging** $\cdot$ zijn in feite functies op het Cartesische product van $\mathbb{Q}$ of $\mathbb{R}$. We spreken ook van **binaire bewerkingen**. Als $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ of $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ dan zijn er functies

$$\begin{aligned} + &: \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}: \ (x,y) \mapsto x + y \\ \cdot &: \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}: \ (x,y) \mapsto x \cdot y = xy \end{aligned} \tag{7.4}$$

die we de optelling en de vermenigvuldiging op $\mathbb{F}$ noemen. Deze bewerkingen voldoen aan een groot aantal bekende eigenschappen die we hieronder zonder bewijs vermelden.

Eigenschap 7.2.1. *Zij $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ of $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Dan geldt voor de optelling in $\mathbb{F}$.*

(a) *Als $x, y \in \mathbb{F}$ dan $x + y \in \mathbb{F}$.*

(b) *Voor alle $x, y, z \in \mathbb{F}$ geldt $(x + y) + z = x + (y + z)$.*

(c) *Voor elke $x \in \mathbb{F}$ geldt $x + 0 = x = 0 + x$.*

(d) *Voor elke $x \in \mathbb{F}$ bestaat er een $y \in \mathbb{F}$ zodanig dat $x + y = 0 = y + x$.*

(e) *Voor alle $x, y \in \mathbb{F}$ geldt $x + y = y + x$.*

De vermenigvuldiging in $\mathbb{F}$ voldoet aan:

(f) *Als $x, y \in \mathbb{F}$ dan $xy \in \mathbb{F}$.*

(g) *Voor alle* $x, y, z \in \mathbb{F}$ *geldt* $(xy)z = x(yz)$.

(h) *Voor elke* $x \in \mathbb{F}$ *geldt* $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$.

(i) *Voor elke* $x \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ *bestaat er een* $y \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ *zodanig dat* $xy = 1 = yx$.

(j) *Voor alle* $x, y \in \mathbb{F}$ *geldt* $xy = yx$.

De optelling en de vermenigvuldiging zijn met elkaar verbonden door volgende eigenschap.

(k) *Voor alle* $x, y, z \in \mathbb{F}$ *geldt* $x(y + z) = xy + xz$.

De eigenschappen (a) en (f) zitten ook al bevat in de definitie van $+$ en $\cdot$ als functies met $\mathbb{F}$ als codomein, zie (7.4). Ze worden de **geslotenheid** van $\mathbb{F}$ ten opzichte van de optelling en de vermenigvuldiging genoemd. De eigenschap (b) heet de **associativiteit** van de optelling en eigenschap (g) heet de associativiteit van de vermenigvuldiging. De eigenschappen (e) en (j) zijn de **commutativeit** van de optelling en de vermenigvuldiging. De eigenschap (c) drukt uit dat 0 het **neutraal element** voor de optelling is. Eigenschap (d) zegt dat elk getal $x \in \mathbb{F}$ een **invers element** $y \in \mathbb{F}$ ten opzichte van de optelling heeft. Uiteraard is $y = -x$. Net zo zegt eigenschap (h) dat 1 het neutrale element voor de vermenigvuldiging is. Elk getal x verschillend van 0 heeft volgens eigenschap (i) een invers element y ten opzichte van de vermenigvuldiging, namelijk $y = \frac{1}{x}$. De eigenschap (k) tenslotte is de **distributiviteit** van de vermenigvuldiging ten opzichte van de optelling.

De eigenschappen (a)–(k) worden wel samengevat door te zeggen dat $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ en $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ velden zijn. In het algemeen is een **veld** een verzameling $\mathbb{F}$ voorzien van twee binaire bewerkingen zoals in (7.4), die we $+$ en $\cdot$ noemen, en met twee bijzondere elementen, die we 0 en 1 noemen, zodanig dat aan alle eigenschappen (a)–(k) uit Eigenschap 7.2.1 voldaan is. Om een triviaal voorbeeld uit te sluiten wordt ook aangenomen dat

$$0 \neq 1.$$

7.2.2 Totaal geordende velden

De ordening op $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ hangt samen met de algebraïsche bewerkingen $+$ en $\cdot$ op $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, zoals uitgedrukt in de volgende eigenschap.

Eigenschap 7.2.2. *Zij* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *of* $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$.

(a) *Voor alle* $a, x, y \in \mathbb{F}$ *geldt*

$$x \leq y \implies x + a \leq y + a$$

(b) *Voor alle* $a, x, y \in \mathbb{F}$ *geldt*

$$x \leq y \wedge a \geq 0 \implies ax \leq ay$$

(c) *Voor alle* $a, x, y \in \mathbb{F}$ *geldt*

$$x \leq y \wedge a \leq 0 \implies ax \geq ay$$

Omdat aan deze eigenschappen voldaan zijn zeggen we dat $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ en $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ **totaal geordende velden** zijn.

In het algemeen definiëren we een totaal geordend veld $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ als een veld $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ voorzien van een totale ordening $\leq$ zodanig dat aan de eigenschappen (a), (b) en (c) uit Eigenschap 7.2.2 voldaan is.

De eigenschappen (a), (b) en (c) zijn de basiseigenschappen van de ordening in een totaal geordend veld. De volgende eigenschappen kunnen hieruit afgeleid worden. Deze eigenschappen zijn bekend voor rationale of reële getallen, maar het belang is dat ze geldig zijn in een algemeen veld $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$. We kunnen ze bewijzen door alleen gebruik te maken van de eigenschappen die opgenomen zijn in Eigenschap 7.2.1 en Eigenschap 7.2.2.

Eigenschap 7.2.3. *Zij* $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ *een totaal geordend veld. Dan geldt het volgende voor alle* $a, b, c, d \in \mathbb{F}$.

(d) *Als* $a \leq b$ *en* $c \leq d$, *dan is* $(a + c) \leq (b + d)$.

(e) *Als* $a \leq b$, *dan is* $-b \leq -a$. *In het bijzonder is* $c \geq 0$ *als en slechts als* $-c \leq 0$.

(f) *Als* $a \geq 0$ *en* $b \geq 0$, *dan is* $ab \geq 0$.

(g) *Als* $a > 0$ *dan is ook* $a^{-1} > 0$. *Als* $a < 0$ *dan is* $a^{-1} < 0$.

(h) *Als* $b > a > 0$ *dan is* $b^{-1} < a^{-1}$.

(i) $0 < 1$.

Bewijs. Ter illustratie bewijzen we onderdeel (i). Dit doen we uit het ongerijmde. Veronderstel dat $0 < 1$ niet waar is. Omdat de ordening totaal is, geldt dan dat $1 \leq 0$.

Volgens onderdeel (c) van Eigenschap 7.2.2 keert de ongelijkheid om bij vermenigvuldiging met een negatief getal. Omdat $1 \leq 0$ geldt dit dan ook voor vermenigvuldigen met 1. Er volgt dus uit $1 \leq 0$ dan $1 \cdot 1 \geq 1 \cdot 0$. Omdat 1 het neutraal element van de vermenigvuldiging is, zie onderdeel (h) van Eigenschap 7.2.1, betekent dit dat $1 \geq 0$.

We hebben nu dat $1 \leq 0$ en $0 \leq 1$ en hieruit volgt dat $0 = 1$. Dit is een tegenspraak want $0 \neq 1$ in een veld. □

7.2.3 Oefeningen

Oefening 7.2.1. Het rekenkundig gemiddelde van twee reële getallen x en y is zoals bekend gelijk aan $\frac{1}{2}(x + y)$. Voor strikt positieve getallen x en y kennen we ook het meetkundig gemiddelde $\sqrt{xy}$ en het harmonisch gemiddelde $\dfrac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$.

Neem aan dat $0 < x < y$.

(a) Laat zien dat deze drie gemiddelden tussen x en y liggen; dat wil dus zeggen in het interval $]x, y[$.

(b) Bewijs dat het rekenkundig gemiddelde het grootste van de drie is.

(c) Welke is groter: het meetkundig gemiddelde of het harmonisch gemiddelde ?

Oefening 7.2.2. Op de verzameling $\mathbb{C}$ van complexe getallen kennen we ook een optelling en een vermenigvuldiging, zodanig dat $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ een veld is. Dit hoeft u hier niet te bewijzen. Het doel van deze oefening is om te bewijzen dat er geen totale ordening $\leq$ op $\mathbb{C}$ kan bestaan zodanig dat $(\mathbb{C}, +, \cdot, \leq)$ een totaal geordend veld is.

Dit bewijzen we uit het ongerijmde. Neem dus aan dat er wel een totale ordening is zodanig dat $(\mathbb{C}, +, \cdot, \leq)$ een totaal geordend veld is. Omdat de ordening totaal is geldt dan ofwel $0 < i$ ofwel $i < 0$.

(a) Stel dat $0 < i$. Gebruik de definitie van totaal geordend veld om hieruit te concluderen dat $0 < -1$ en laat zien hoe dit tot een tegenspraak leidt.

(b) Vind op analoge wijze een tegenspraak als $i < 0$.

Oefening 7.2.3. Zij $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ een veld. Toon de volgende eigenschappen aan.

(a) Voor elke $x \in \mathbb{F}$ geldt $0 \cdot x = 0$. Hierin staat 0 voor het neutraal element voor de optelling.

(b) Voor elke $x \in \mathbb{F}$ geldt $(-1) \cdot x = -x$. Hierin staat -1 voor het inverse element van 1 voor de optelling, en $-x$ is het inverse element van x, ook voor de optelling.

(c) Als $x, y \in \mathbb{F}$ met $x \neq 0$ en $y \neq 0$ dan is $xy \neq 0$.

7.3 Eigenschappen van $\mathbb{Q}$

We zien dat zowel $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{R}$ totaal geordende velden zijn. Er zijn echter wel grote verschillen tussen $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

In zekere zin heeft $\mathbb{Q}$ een aantal tekortkomingen. Het is bijvoorbeeld bekend dat er geen rationaal getal x bestaat met $x^2 = 2$. In $\mathbb{R}$ zijn er wel oplossingen van $x^2 = 2$, namelijk $x = \sqrt{2}$ en $x = -\sqrt{2}$. Bij $x = \sqrt{2}$ en bij $x = -\sqrt{2}$ zit er een 'gat' in $\mathbb{Q}$. In feite zijn er heel veel gaten in $\mathbb{Q}$ die door $\mathbb{R}$ allemaal opgevuld worden.

7.3.1 Volledige ordening

Het onderscheid in de ordening op $\mathbb{Q}$ en die op $\mathbb{R}$ is bevat in het begrip volledigheid dat als volgt gedefinieerd wordt

Definitie 7.3.1. Zij $(X, \preccurlyeq)$ een geordende verzameling. Dan is de ordening **volledig** als geldt:

(a) iedere niet-lege naar boven begrensde deelverzameling A van X heeft een supremum $\sup A \in X$, en

(b) iedere niet-lege naar onder begrensde deelverzameling A van X heeft een infimum $\inf A \in X$.

7.3.2 $\mathbb{Q}$ is niet volledig

We bewijzen nu het volgende.

Stelling 7.3.2. $(\mathbb{Q}, \leq)$ *is niet volledig.*

Bewijs. De verzameling

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \vee x^2 < 2\} \tag{7.5}$$

is niet leeg en naar boven begrensd: 2 is bijvoorbeeld een bovengrens. Meer algemeen is elk getal $b \in \mathbb{Q}$ met $b > 0$ en $b^2 > 2$ een bovengrens van A.

We gaan bewijzen dat A geen supremum heeft (in $\mathbb{Q}$). We doen dit uit het ongerijmde. Neem aan $s \in \mathbb{Q}$ het supremum van A is.

Omdat $1 \in A$ geldt zeker $s \geq 1$, en omdat 2 een bovengrens van A is geldt $s \leq 2$. We weten dus al zeker dat

$$1 \leq s \leq 2. \tag{7.6}$$

Omdat de vergelijking $x^2 = 2$ geen rationale oplossingen heeft, zijn er twee mogelijkheden, namelijk $s^2 < 2$ (geval (1)) of $s^2 > 2$ (geval (2)). In beide gevallen willen we tot een tegenspraak komen.

Geval (1): Het eerste geval is dat $s^2 < 2$.

In dit geval willen we tot een tegenspraak komen door een element $a \in A$ te vinden met $s < a$. Als dat lukt, dan is s geen bovengrens van A en dus zeker niet de kleinste bovengrens van A. We zoeken a van de vorm

$$a = s + \frac{1}{n}$$

met n een geschikt gekozen natuurlijk getal. Dit getal behoort tot A als $\left(s + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$.

We berekenen daarom voor $n \in \mathbb{N}_0$

$$\left(s + \frac{1}{n}\right)^2 = s^2 + \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} \tag{7.7}$$

en we vragen ons af of dit < 2 is. Omdat $s < 2$, zie (7.6), geldt $\frac{2s}{n} < \frac{4}{n}$. Omdat $n^2 \geq n$ geldt ook $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$. Uit (7.7) volgt dus dat

$$\left(s + \frac{1}{n}\right)^2 < s^2 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n} = s^2 + \frac{5}{n}. \tag{7.8}$$

We zouden graag willen dat $s^2 + \frac{5}{n} < 2$. Als we deze ongelijkheid herschrijven zien we dat dit neerkomt op $\frac{5}{n} < 2 - s^2$, en omdat $2 - s^2 > 0$ is dit ook hetzelfde als $\frac{n}{5} > \frac{1}{2-s^2}$, ofwel

$$n > \frac{5}{2 - s^2}. \tag{7.9}$$

Het is nu duidelijk hoe we n moeten nemen. We nemen namelijk een natuurlijk getal n dat strikt groter is dan $\frac{5}{2-s^2}$. Dus (7.9) geldt en zoals we hierboven gezien hebben, komt dit neer op

$$s^2 + \frac{5}{n} < 2. \tag{7.10}$$

De twee ongelijkheden (7.8) en (7.10) samen leiden (vanwege de transitiviteit van de ordening) tot

$$\left(s + \frac{1}{n}\right)^2 < 2.$$

Dit betekent dat $s + \frac{1}{n} \in A$. Omdat $s < s + \frac{1}{n}$ is s geen bovengrens van A. Dit is een tegenspraak met de aanname dat s het supremum van A is. We hebben in het geval dat $s^2 < 2$ dus een tegenspraak gevonden.

Geval (2): Het tweede geval is dat $s^2 > 2$.

Laat dan zelf zien dat voor $n \in \mathbb{N}_0$ groot genoeg geldt dat

$$\left(s - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$$

en vind hieruit een tegenspraak.

$\square$

We zullen in het volgende hoofdstuk zien dat $(\mathbb{R}, \leq)$ wel volledig is. De volledigheid is het grote verschil tussen de rationale en de reële getallen. We zullen $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ invoeren als een totaal geordend veld dat volledig is.

7.3.3 Oefeningen

Oefening 7.3.1. Zijn de volgende uitspraken waar of niet waar? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld. Een element van $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ noemen we een irrationaal getal.

(a) Als x en y irrationaal zijn dan is $x + y$ irrationaal.

(b) Als x rationaal en y irrationaal is, dan is $x + y$ irrationaal.

(c) Als x en y irrationaal zijn dan is xy irrationaal.

(d) Als x rationaal en y irrationaal is, dan is xy irrationaal.

Oefening 7.3.2. Beschouw de partiële ordening '$\subset$' op de machtsverzameling $P(X)$ van een verzameling X. Zie onderdeel (c) van Voorbeeld 7.1.3. Bewijs dat de ordening op $P(X)$ volledig is. Voor $F \subset P(X)$ met $F \neq \emptyset$, beschrijf het infimum en het supremum van F.

Oefening 7.3.3. Vervolledig het bewijs van Stelling 7.3.2 in het Geval (2).

Oefening 7.3.4. Zij $b \in \mathbb{Q}$ met $b > 0$.

(a) Neem aan dat $b^2 > 2$ en definieer

$$c = \frac{1}{2}b + \frac{1}{b}.$$

Laat zien dat $0 < c < b$ en $c^2 > 2$.

(b) Neem aan dat $b^2 < 2$ en definieer

$$c = \frac{4b}{2+b^2}.$$

Laat zien dat $c > b$ en $c^2 < 2$.

(c) Gebruik (a) en (b) om een alternatief bewijs te geven van het feit dat

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \vee x^2 < 2\}$$

geen supremum heeft in $\mathbb{Q}$.

N.B.: Het getal c uit onderdeel (a) is het rekenkundig gemiddelde van b en $2/b$. Het getal c uit onderdeel (b) is het harmonisch gemiddelde van b en $2/b$.

Oefening 7.3.5. Geef het maximum, minimum, supremum en infimum van de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{Q}$.

(a) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

(b) $B = \{\frac{n-m}{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$.

7.4 Extra oefeningen over Hoofdstuk 7

Oefening 7.4.1. Beschouw voor elke $n \in \mathbb{N}$ de functie

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f_n(x) = \frac{n}{nx^2+1}$$

(a) Bepaal voor elke $n \in \mathbb{N}$ het supremum

$$\sup\{f_n(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

en het infimum

$$\inf\{f_n(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

[Antwoorden: n en 0.]

(b) Bepaal voor elke $x \in \mathbb{R}$ het supremum

$$\sup\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

en het infimum

$$\inf\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Beschouw vervolgens voor elke $n \in \mathbb{N}$ de functie

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g_n(x) = \frac{nx}{nx^2+1}$$

(c) Bepaal voor elke $x \in \mathbb{R}$ het supremum

$$\sup\{g_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Let hier op de gevallen $x \leq 0$ en $x > 0$.

(d) Wat is
$$\inf\{\sup\{g_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \mid x \in \mathbb{R}\}\,?$$

(e) Bereken voor elke $n \in \mathbb{N}$ het infimum
$$\inf\{g_n(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

(f) Wat is
$$\sup\{\inf\{g_n(x) \mid x \in \mathbb{R}\} \mid n \in \mathbb{N}\}\,?$$

Oefening 7.4.2. Bewijs Eigenschap 7.2.3.

Eigenschap 7.2.3 bevat een groot aantal eigenschappen die geldig zijn in een totaal geordend veld. Al deze eigenschappen zijn eenvoudige consequenties van de definities. Het is een beetje vervelende bezigheid om ze allemaal te bewijzen, maar DOE DIT TOCH.

Oefening 7.4.3. Neem aan dat X een verzameling is. We noteren met $\mathrm{Fun}(X, \mathbb{R})$ de verzameling van alle functies f van X naar $\mathbb{R}$.

(a) Laat zien dat de definitie $f \leq g$ als en slechts als $\forall x \in X : f(x) \leq g(x)$ een ordening oplevert op $\mathrm{Fun}(X, \mathbb{R})$.

(b) Is de ordening totaal?

(c) Zij $A \subset \mathrm{Fun}(X, \mathbb{R})$. Bewijs dat A naar boven begrensd is als en slechts als voor elke $x \in X$ de verzameling
$$\{f(x) \mid f \in A\}$$
naar boven begrensd is in $\mathbb{R}$.

(d) Is de ordening volledig? U mag hier gebruiken dat $(\mathbb{R}, \leq)$ volledig is. Dit wordt in Hoofdstuk 8 behandeld.

Hoofdstuk 8

Reële getallen

8.1 $\mathbb{R}$ als volledig totaal geordend veld

8.1.1 Axiomatische invoering van $\mathbb{R}$

Het grote verschil tussen de rationale getallen $\mathbb{Q}$ en de reële getallen $\mathbb{R}$ is dat $\mathbb{R}$ volledig is.

Om dit zinvol te kunnen formuleren zouden we eerst moeten weten wat $\mathbb{R}$ precies is. Vanuit het middelbaar heb je waarschijnlijk een intuïtief beeld van een reëel getal als een kommagetal. Dat wil zeggen als een getal met een teken ($+$ of $-$) en een natuurlijk getal gevolgd door aftelbaar veel decimalen achter de komma, zoals bijvoorbeeld

$$0,14500179\cdots, \qquad -3,141529\cdots, \qquad \text{en} \qquad 7,555555\cdots.$$

Dit is een juist beeld, maar het is lastig om hieruit een definitie te maken van wat een reëel getal nu precies is.

We zullen in plaats daarvan de reële getallen op een axiomatische wijze invoeren. Dat betekent dat we de structuur van de reële getallen beschrijven, zonder te zeggen wat de reële getallen precies zijn.

Axioma 8.1.1. $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ is een volledig totaal geordend veld.

Het verschil met $\mathbb{Q}$ is bijgevolg de volledigheid van $\mathbb{R}$. We herhalen nog eens dat de volledigheid (zie Definitie 7.3.1) betekent dat elke niet-lege naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ een supremum heeft. Dit wordt de **supremumeigenschap** van de reële getallen genoemd. Net zo geldt de **infimumeigenschap**: elke niet-lege naar onder begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ heeft een infimum in $\mathbb{R}$.

Bij deze axiomatische invoering van de reële getallen moet men zich twee voor de hand liggende vragen stellen.

Vraag 1: Bestaat er wel een volledig totaal geordend veld?

Vraag 2: Als het bestaat, is het dan uniek, of zijn er meerdere heel verschillende volledige totaal geordende velden?

Vraag 1 kan beantwoord worden door een expliciete constructie van een volledig totaal geordend veld uit te voeren. Dit is geen eenvoudige zaak. In de laatste paragraaf 8.4 van dit hoofdstuk zullen we een constructie van de reële getallen vanuit de rationale getallen bespreken.

Vraag 2 wordt beantwoord door de volgende stelling die we hier niet zullen bewijzen.

Stelling 8.1.2. $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *is op isomorfie na het enige volledige totaal geordende veld. Met andere woorden, als* $(\mathbb{F}, \oplus, \odot, \preccurlyeq)$ *een volledig totaal geordend veld is, dan bestaat er een bijectie* $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ *zodanig dat voor alle* $x, y \in \mathbb{F}$ *geldt dat*

(a) $\varphi(x \oplus y) = \varphi(x) + \varphi(y)$,

(b) $\varphi(x \odot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$,

(c) *als* $x \preccurlyeq y$ *dan is* $\varphi(x) \leq \varphi(y)$.

Op grond van Stelling 8.1.2 kunnen we zeggen dat de reële getallen als volledig totaal geordend veld in feite uniek bepaald zijn. Elk ander volledig totaal geordend veld kunnen we door middel van een bijectie op een één-éénduidige manier in verband brengen met $\mathbb{R}$ waarbij zowel de algebraïsche bewerkingen als ook de ordening behouden blijven.

In wat volgt vertrekken we van de axiomatische beschrijving en leiden daaruit verdere eigenschappen van $\mathbb{R}$ af.

8.1.2 Natuurlijke, gehele en rationale getallen in $\mathbb{R}$

Uitgaande van de axiomatische beschrijving van $\mathbb{R}$ door middel van Axioma 8.1.1 willen we allereerst de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$, de gehele getallen $\mathbb{Z}$, en de rationale getallen $\mathbb{Q}$ invoeren als deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Hier gaan we niet diep op in en we geven geen bewijzen.

Omdat $\mathbb{R}$ een veld is, bevat het de elementen 0 en 1. Er geldt $0 < 1$. We definiëren dan achtereenvolgens $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$, enzovoorts. Deze elementen van $\mathbb{R}$ zijn allemaal verschillend vanwege de eigenschappen van de ordening. Er geldt namelijk $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \cdots$. Dan is per definitie

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \qquad \text{en} \qquad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Vervolgens stellen we

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{en} \qquad \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists m \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{N}_0 : \; x = \frac{m}{n}\}.$$

De aldus ingevoerde verzameling $\mathbb{Q}$ voldoet aan de vertrouwde eigenschappen van de verzameling van de rationale getallen. In het bijzonder geldt:

Eigenschap 8.1.3. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ *is een totaal geordend veld dat niet volledig is.*

8.1.3 Archimedische eigenschap en gevolgen

De volgende eigenschap heet de **Archimedische eigenschap** van de reële getallen.

Propositie 8.1.4. *Voor elke* $x \in \mathbb{R}$ *is er een* $n \in \mathbb{N}$ *met* $x < n$.

Bewijs. We bewijzen dit uit het ongerijmde. Neem aan dat $x \in \mathbb{R}$ zodanig is dat $x \geq n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Dan is $\mathbb{N}$ als deelverzameling van $\mathbb{R}$ naar boven begrensd, met x als bovengrens. Uit de volledigheid van $\mathbb{R}$ volgt dat $\mathbb{N}$ dan een supremum heeft, zeg $s = \sup \mathbb{N}$. Dan is $s - 1$ geen bovengrens van $\mathbb{N}$. Er is dus een $n \in \mathbb{N}$ met $s - 1 < n$. Maar dan is $s < n + 1$ met $n + 1 \in \mathbb{N}$, zodat s geen bovengrens van $\mathbb{N}$ is. Dit is een tegenspraak. $\square$

De Archimedische eigenschap heeft een aantal gevolgen.

Gevolg 8.1.5. (a) Als $a, b \in \mathbb{R}$ met $a > 0$ dan is er een $n \in \mathbb{N}_0$ met $an > b$.

(b) Als $a \in \mathbb{R}$ met $a > 0$, dan is er een $n \in \mathbb{N}_0$ met $1/n < a$.

Bewijs. Het bewijs laten we over aan de lezer. □

Propositie 8.1.6. *Voor elke $x \in \mathbb{R}$ bestaat er een $n \in \mathbb{Z}$ met $n \leq x < n+1$.*

Bewijs. Neem $x \in \mathbb{R}$. Vanwege de Archimedische eigenschap, toegepast op $-x$, is er een natuurlijk getal m met $-x < m$. dan is $-m < x$ en bijgevolg is de verzameling

$$A = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$$

niet-leeg. Het is duidelijk dat x een bovengrens is van A, zodat A ook naar boven begrensd is. Uit de volledigheid van $\mathbb{R}$ volgt dat A een supremum heeft. Omdat $A \subset \mathbb{Z}$ is het eenvoudig in te zien dat dit supremum een geheel getal n is met $n \in A$ en $n+1 \notin A$. Dus inderdaad $n \leq x < n+1$. □

Uit de Archimedische eigenschap volgt ook dat $\mathbb{Q}$ dicht ligt in $\mathbb{R}$. Hiermee bedoelen we het volgende.

Definitie 8.1.7. Een deelverzameling A van $\mathbb{R}$ ligt **dicht** in $\mathbb{R}$ als voor elke $x, y \in \mathbb{R}$ met $x < y$ geldt dat er een $a \in A$ bestaat met $x < a < y$.

In de volgende paragraaf 8.1.4 zullen we intervallen invoeren. Als we hier al gebruik van maken, dan kunnen we zeggen dat A dicht ligt in $\mathbb{R}$ als voor elke $x, y \in \mathbb{R}$ met $x < y$ geldt dat $A \cap \,]x, y[\, \neq \emptyset$.

Propositie 8.1.8. $\mathbb{Q}$ *ligt dicht in* $\mathbb{R}$.

Bewijs. Neem $x, y \in \mathbb{R}$ met $x < y$. Dan is $y - x > 0$. Vanwege onderdeel (b) van Gevolg 8.1.5 is er een $n \in \mathbb{N}_0$ met $1/n < y - x$, zodat

$$x < x + \frac{1}{n} < y. \tag{8.1}$$

Vanwege Propositie 8.1.6, toegepast op nx, is er een geheel getal $m \in \mathbb{Z}$ met

$$m - 1 \leq nx < m. \tag{8.2}$$

Uit (8.2) volgt, na deling door n, dat

$$\frac{m-1}{n} \leq x < \frac{m}{n}. \tag{8.3}$$

De eerste ongelijkheid in (8.3) betekent dat

$$\frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n}$$

en als we dit combineren met de tweede ongelijkheid in (8.1) en de transitiviteit van de ordening gebruiken, dan vinden we

$$\frac{m}{n} < y.$$

Samen met de tweede ongelijkheid in (8.3) komt er dan

$$x < \frac{m}{n} < y.$$

Het rationale getal $q = \frac{m}{n}$ ligt dus inderdaad strikt tussen x en y. □

8.1.4 Intervallen

Intervallen zijn bijzondere deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ die sterk samenhangen met de ordening op $\mathbb{R}$.

Definitie 8.1.9. Een **interval** is een niet-lege deelverzameling I van $\mathbb{R}$ waarvoor geldt

$$\forall x, y \in I : \forall z \in \mathbb{R} : \ x \leq z \leq y \implies z \in I.$$

Voor een interval geldt dus dat elk reëel getal dat tussen twee elementen van I ligt zelf ook tot I behoort. We kunnen de intervallen in $\mathbb{R}$ als volgt onderscheiden.

Begrensde intervallen: Een **begrensd interval** I is zowel naar boven als naar onder begrensd. Hierbij zijn er de volgende mogelijkheden.

- Er zijn $a, b \in \mathbb{R}$ met $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$. We noemen I een **gesloten interval** en we noteren
$$I = [a, b].$$
- Er zijn $a, b \in \mathbb{R}$ met $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$. We noemen I een **half-open, half-gesloten interval** en we noteren
$$I = [a, b[.$$
- Er zijn $a, b \in \mathbb{R}$ met $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$. We noemen I een **half-open, half-gesloten interval** en we noteren
$$I =]a, b].$$
- Er zijn $a, b \in \mathbb{R}$ met $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. We noemen I een **open interval** en we noteren
$$I =]a, b[.$$

Onbegrensde intervallen: Voor een **onbegrensd interval** I dat naar boven begrensd is, zijn er twee mogelijkheden.

- Er is een $b \in \mathbb{R}$ met $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$. Dan is I een onbegrensd gesloten interval en we noteren
$$I =]-\infty, b].$$
- Er is een $b \in \mathbb{R}$ met $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$. Dan is I een onbegrensd open interval en we noteren
$$I =]-\infty, b[.$$

Voor een onbegrensd interval I dat naar onder begrensd is, zijn er twee mogelijkheden.

- Er is een $a \in \mathbb{R}$ met $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$. Dan is I een onbegrensd gesloten interval en we noteren
$$I = [a, \infty[.$$
- Er is een $a \in \mathbb{R}$ met $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$. Dan is I een onbegrensd open interval en we noteren
$$I =]a, \infty[.$$

Als I een onbegrensd interval is dat niet naar boven begrensd is, en ook niet naar onder begrensd, dan is
$$I = \mathbb{R}.$$

8.1.5 Absolute waarde

We brengen ook nog de definitie van de absolute waarde en enkele eigenschappen ervan in herinnering.

Definitie 8.1.10. De **absolute waarde** $|x|$ van een reëel getal x is gelijk aan

$$|x| = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0, \\ -x & \text{als } x \leq 0. \end{cases}$$

De absolute waarde heet ook wel de **modulus** van x.

We vermelden zonder bewijs.

Eigenschap 8.1.11. *Voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt*

(a) $|x| \geq 0$ *en* $|x| = 0$ *als en slechts als* $x = 0$,

(b) $|x| = |-x|$,

(c) $-|x| \leq x \leq |x|$.

Voor elke $x, y \in \mathbb{R}$ geldt

(d) $|xy| = |x|\ |y|$,

(e) *als* $y \neq 0$, *dan* $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

De onderdelen (d) en (e) van Eigenschap 8.1.11 drukken uit dat de absolute waarde zich heel netjes gedraagt ten opzichte van het vermenigvuldigen en het delen van reële getallen. De absolute waarde gedraagt zich minder mooi ten opzichte van het optellen en het aftrekken want de gelijkheden $|x + y| = |x| + |y|$ en $|x - y| = |x| - |y|$ zijn **niet altijd waar**.

In plaats daarvan geldt een ongelijkheid die we de **driehoeksongelijkheid** noemen.

Eigenschap 8.1.12. *Voor elke $x, y \in \mathbb{R}$ geldt*

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \tag{8.4}$$

Een belangrijke variant van de driehoeksongelijkheid is dat voor elke $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|. \tag{8.5}$$

Dit volgt uit (8.4) als we opmerken dat $x - z = (x - y) + (y - z)$ en dan (8.4) toepassen op de twee reële getallen $x - y$ en $y - z$ in plaats van x en y. Ook (8.5) wordt wel de driehoeksongelijkheid genoemd.

8.1.6 Oefeningen

Oefening 8.1.1. Bewijs Gevolg 8.1.5.

Oefening 8.1.2. Zij $a < b$. Laat zien dat het interval $]a, b[$ oneindig veel rationale getallen bevat, en ook oneindig veel irrationale getallen.

Oefening 8.1.3. Wat is $\sup A$ en $\max A$ voor de volgende verzamelingen:

(a) het gesloten interval $A = [a, b]$

(b) het open interval $A =]a, b[$.

Oefening 8.1.4. Bewijs: als I een interval in $\mathbb{R}$ is dat niet naar boven en niet naar onder begrensd is, dan is $I = \mathbb{R}$.

Oefening 8.1.5. Laat zien dat $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht ligt in $\mathbb{R}$.

Oefening 8.1.6. Laat zien dat voor elke $x, y \in \mathbb{R}$ geldt

$$|x - y| \geq \big| |x| - |y| \big|.$$

Deze ongelijkheid heet wel de **omgekeerde driehoeksongelijkheid**.

Oefening 8.1.7. Zij $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ een totaal geordend veld met de supremumeigenschap (d.w.z. elke niet-lege naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{F}$ heeft een supremum in $\mathbb{F}$). Bewijs dat $\mathbb{F}$ ook aan de infimumeigenschap voldoet.

Opmerking. Volgens Axioma 8.1.1 is $\mathbb{R}$ een totaal geordend veld dat volledig is. De volledigheid betekent dat zowel de supremumeigenschap als de infimumeigenschap moeten gelden. Uit Oefening 8.1.7 volgt dat het (in een veld) voldoende is als aan de supremumeigenschap voldaan wordt. Dan is namelijk automatisch ook aan de infimumeigenschap voldaan.

8.2 Bewijzen met ongelijkheden

In bewijzen komt het voor dat we een ongelijkheid $x \leq y$ voor reële getallen x en y aantonen door te bewijzen dat $x < y + \varepsilon$ geldt voor elke $\varepsilon > 0$. Dit is gebaseerd op de eigenschap

$$(\forall \varepsilon > 0 : x < y + \varepsilon) \implies x \leq y. \tag{8.6}$$

Een gelijkheid $x = y$ wordt vaak bewezen door de twee ongelijkheden $x \leq y$ en $y \leq x$ te bewijzen. Dit is gebaseerd op de eigenschap

$$(x \leq y \wedge y \leq x) \implies x = y$$

hetgeen uiteraard niets anders is dan het anti-symmetrisch zijn van de orderelatie.

Bovenstaande bewijstechnieken worden toegepast in het bewijs van de volgende propositie.

Propositie 8.2.1. *Zij $A \subset \mathbb{R}$ niet-leeg en naar onder begrensd. Dan is*

$$-A := \{-x \mid x \in A\}$$

niet-leeg en naar boven begrensd en er geldt

$$\sup(-A) = -\inf A. \tag{8.7}$$

Bewijs. Het is duidelijk dat $-A$ niet leeg is. Omdat A naar onder begrensd is, heeft A een ondergrens en vanwege de volledigheid van $\mathbb{R}$ ook een infimum. Zij a het infimum van A.

Kies $x \in -A$ willekeurig. Dan is $-x \in A$, zodat $a \leq -x$ omdat a een ondergrens van A is. Vanwege de basiseigenschappen van de ordening op $\mathbb{R}$ geldt dan dat $x \leq -a$. Omdat $x \in -A$ willekeurig gekozen was, volgt hieruit dat $-a$ een bovengrens van $-A$ is. Dus $-A$ is naar boven begrensd en

$$\sup(-A) \leq -a = -\inf A. \tag{8.8}$$

Om de gelijkheid (8.7) te krijgen gaan we vervolgens proberen de omgekeerde ongelijkheid $-\inf A \leq \sup(-A)$ te bewijzen. Zij weer $a = \inf A$. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Vanwege de definitie van infimum is dan $a + \varepsilon$ geen ondergrens van A. Er is bijgevolg een $x \in A$ met $x < a + \varepsilon$. Dan is $-a - \varepsilon < -x$. Omdat $-x \in -A$ geldt $-x \leq \sup(-A)$. Er volgt nu dat $-a - \varepsilon < \sup(-A)$ en dus $-a < \sup(-A) + \varepsilon$. Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig gekozen was is nu bewezen dat

$$\forall \varepsilon > 0 : -a < \sup(-A) + \varepsilon.$$

Vanwege (8.6) volgt hieruit dat $-a \leq \sup(-A)$ en dus inderdaad

$$-\inf A \leq \sup(-A). \tag{8.9}$$

De twee ongelijkheden (8.8) en (8.9) samen geven ons de gelijkheid (8.7) die hiermee bewezen is. $\square$

8.2.1 Oefeningen

Oefening 8.2.1. Bewijs de eigenschap (8.6).

Oefening 8.2.2. Zij $A \subset \mathbb{R}$ niet-leeg en naar boven begrensd. Bewijs dat $-A$ naar onder begrensd is, en dat

$$\inf(-A) = -\sup(A).$$

Oefening 8.2.3. Voor een deelverzameling A van $\mathbb{R}$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ definiëren we

$$\lambda A := \{\lambda x \mid x \in A\}.$$

(a) Neem aan dat A een niet-lege, naar boven begrensde verzameling is en dat $\lambda > 0$. Bewijs dat λA naar boven begrensd is en dat

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A.$$

(b) Formuleer en bewijs een analoge bewering voor het geval dat $\lambda < 0$.

Oefening 8.2.4. Voor twee deelverzamelingen A en B van $\mathbb{R}$ definiëren we

$$A + B := \{x + y \mid x \in A \text{ en } y \in B\}.$$

Neem aan dat A en B niet-lege, naar boven begrensde verzamelingen zijn. Bewijs dat $A + B$ naar boven begrensd is en dat

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Oefening 8.2.5. Neem aan dat A en B niet-lege naar boven begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn. Bewijs dat $A \cup B$ naar boven begrensd is, en dat

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

Oefening 8.2.6. Neem aan dat A en B niet-lege deelverzamelingvan van $\mathbb{R}$ zijn, waarbij A naar boven en B naar onder begrensd is. Zijn de volgende beweringen dan waar? Zo ja, geef een bewijs. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

(a) $\sup A \geq \inf B \iff \exists a \in A : \exists b \in B : a \geq b.$

(b) $\sup A > \inf B \iff \exists a \in A : \exists b \in B : a > b.$

8.3 Constructie van $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$

In de volgende paragraaf geven we een constructie van de reële getallen uit de rationale getallen. Daarbij nemen we aan dat $\mathbb{Q}$, het veld van rationale getallen, kennen.

In een systematische opbouw van de getallensysteem wordt uitgegaan van de natuurlijke getallen zoals beschreven door de axioma's van Peano. Zie hiervoor paragraaf 5.2. Vanuit natuurlijke getallen zullen we eerst de gehele getallen construeren en daarna de rationale getallen. Deze constructies zijn eenvoudiger dan de constructie van de reële getallen.

8.3.1 Constructie van $\mathbb{Z}$ uit $\mathbb{N}$

Definitie van $\mathbb{Z}$ We definiëren een equivalentierelatie $\sim$ op $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als volgt. Voor $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiëren we

$$(n, m) \sim (p, q) \qquad \text{als en slechts als} \qquad n + q = m + p. \tag{8.10}$$

Het wordt aan de lezer overgelaten om te bewijzen dat dit inderdaad een equivalentierelatie op $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definieert.

Dan definiëren we $\mathbb{Z}$ als

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim. \tag{8.11}$$

Dat wil zeggen: $\mathbb{Z}$ is de verzameling van equivalentieklassen behorende bij de equivalentierelatie $\sim$. Herinner u dat de equivalentieklasse $[(n, m)]$ van $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gelijk is aan de deelverzameling

$$[(n, m)] = \{(n', m') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (n, m) \sim (n', m')\}$$

van $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Elke $x \in \mathbb{Z}$ is dus van de vorm $x = [(n, m)]$ voor zekere $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Optelling op $\mathbb{Z}$ We definiëren nu een binaire operatie $+$ op $\mathbb{Z}$, die we de optelling noemen. We nemen $x, y \in \mathbb{Z}$. We nemen $(n, m) \in x$ en $(p, q) \in y$ zodat

$$x = [(n, m)] \quad \text{en} \quad y = [(p, q)].$$

Vervolgens definiëren we

$$x + y = [(n + p, m + q)]. \tag{8.12}$$

Dus de som is de equivalentieklasse van $(n + p, m + q)$.

Deze definitie maakt gebruik van het element (n,m) van x en het element $(p,q) \in y$. Zo'n element wordt een **representant** van de equivalentieklasse genoemd. Om zinvol te zijn moet een definitie met representanten onafhankelijk zijn van de keuze van representanten. Dat wil zeggen als we een ander koppel (n',m') zouden nemen in x en een ander koppel (p',q') in y, dan zou het moeten zijn dat de constructie van de som aan de hand van deze andere representanten tot dezelfde equivalentieklasse leidt. Hiervoor is het nodig dat de equivalentierelatie $\sim$ de volgende eigenschap heeft:

$$\big[(n',m') \sim (n,m) \wedge (p',q') \sim (p,q)\big] \implies (n'+p',m'+q') \sim (n+p,m+q). \tag{8.13}$$

Deze eigenschap (8.13) is inderdaad eenvoudig te controleren vanuit de definitie (8.10). De optelling (8.12) is bijgevolg goed gedefinieerd.

De gehele getallen $\mathbb{Z}$ met de optelling heeft de structuur van een Abelse groep.

Propositie 8.3.1. $(\mathbb{Z},+)$ *is een **Abelse groep**, hetgeen wil zeggen dat*

(a) $x+(y+z)=(x+y)+z$ *geldt voor alle* $x,y,z \in \mathbb{Z}$ *(de optelling is associatief)*

(b) $x+y=y+x$ *geldt voor alle* $x,y \in \mathbb{Z}$ *(de optelling is commutatief)*

(c) $x+[(0,0)]=x$ *geldt voor alle* $x \in \mathbb{Z}$ *(*$[(0,0)]$ *is een neutraal element voor de optelling)*

(d) *Ieder element* $x \in \mathbb{Z}$ *heeft een tegengesteld element* $-x \in \mathbb{Z}$ *waarvoor geldt* $x+(-x) = [(0,0)]$.

Bewijs. Het bewijs wordt aan de lezer overgelaten. We merken alleen bij onderdeel (d) op dat als $x=[(n,m)]$ dan is $-x=[(m,n)]$. □

Gevolg 8.3.2. Voor elke $a,b \in \mathbb{Z}$ is er een unieke $x \in \mathbb{Z}$ met $a+x=b$, namelijk

$$x = b + (-a).$$

Bewijs. Neem $x=b+(-a)$. Dan geldt vanwege de commutativiteit en de associativiteit dat $a+x=a+(b+(-a))=(a+(-a))+b$. Omdat $a+(-a)=[(0,0)]$ het neutraal element is volgt $a+x=b$. Er is dus een $x \in \mathbb{Z}$ met $a+x=b$. Het wordt aan de lezer overgelaten om te laten zien dat er maar één zo'n x is. □

Elke vergelijking $a+x=b$ met $a,b \in \mathbb{Z}$ heeft dus een oplossing in $\mathbb{Z}$. Dit is het verschil met $\mathbb{N}$, waarin een dergelijke vergelijking niet noodzakelijk een oplossing heeft. In plaats van $x=b+(-a)$ schrijven we

$$x = b - a.$$

Binnen de gehele getallen kunnen we dus twee elementen van elkaar aftrekken.

Door $n \in \mathbb{N}$ te identificeren met $[(n,0)] \in \mathbb{Z}$, kunnen we $\mathbb{N}$ zien als een deelverzameling van $\mathbb{Z}$. Bovendien geldt voor elke $n,m \in \mathbb{N}$ dat

- $[(n,0)] = [(m,0)]$ als en slechts als $n=m$,
- $[(n,0)] + (m,0) = [(n+m,0)]$.

Vermenigvuldiging op $\mathbb{Z}$ We kunnen de vermenigvuldiging uitbreiden naar $\mathbb{Z}$. Zie hiervoor Oefening 8.3.3 en de vertrouwde eigenschappen van de vermenigvuldiging gelden, zoals associativiteit, commutativiteit en de distributieve wetten. We gaan hier verder niet op in.

8.3.2 Constructie van $\mathbb{Q}$ uit $\mathbb{Z}$

We gaan nu uit van de gehele getallen $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ met de optelling en vermenigvuldiging en we willen nu de rationale getallen construeren.

Dit gaat weer via een equivalentierelatie, maar nu gedefinieerd op $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$. Voor $(a, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ en $(b, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ definiëren we

$$(x, n) \sim (y, m) \quad \text{als en slechts als } xm = yn. \tag{8.14}$$

Dit is inderdaad een equivalentierelatie en we definiëren

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0)/ \sim .$$

Het element $a \in \mathbb{Z}$ identificeren we met $[(a, 1)] \in \mathbb{Q}$ en op deze manier is $\mathbb{Z}$ te zien als een deelverzameling van $\mathbb{Q}$. De optelling en vermenigvuldiging op $\mathbb{Q}$ definiëren we als volgt. Zij $q = [(a, n)], r = [(b, m)] \in \mathbb{Q}$. Dan

$$q + r = [(a, n)] + [(b, m)] = [(am + bn, nm)], \tag{8.15}$$

$$q \cdot r = [(a, n)] \cdot [(b, m)] = [(ab, nm)]. \tag{8.16}$$

We kunnen ook een ordening op $\mathbb{Q}$ definiëren en dan is $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ een totaal geordend veld.

8.3.3 Oefeningen

Oefening 8.3.1. Bewijs dat (8.10) een equivalentierelatie op $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ is.

Oefening 8.3.2. Bewijs dat er bij elke equivalentieklasse x een uniek getal $n \in \mathbb{N}$ is zodat ofwel $x = [(n, 0)]$ ofwel $x = [(0, n)]$.

Oefening 8.3.3. De vermenigvuldiging op $\mathbb{N}$ breiden we uit naar $\mathbb{Z}$ door te definiëren

$$[(n, m)] \cdot [(p, q)] = [(np + mq, nq + mp)]. \tag{8.17}$$

Laat zien dat de definitie (8.17) voor de vermenigvuldiging niet afhangt van de gekozen representanten.

NB: de definitie (8.17) komt van het feit dat we $[(n, m)]$ interpreteren als het gehele getal $n - m$. Net zo is $[(p, q)] = p - q$ en

$$\begin{aligned} (n - m) \cdot (p - q) &= np - nq - mp + mq \\ &= (np + mq) - (nq + mp) \end{aligned}$$

hetgeen we interpreteren als de equivalentieklasse $[(np + mq, nq + mp)]$.

Oefening 8.3.4. Definieer een ordening $\leq$ op $\mathbb{Z}$ door te stellen dat $[(n, m)] \leq [(p, q)]$ als en slechts als $n + q \leq m + p$.

(a) Bewijs dat de definitie niet afhangt van de gekozen representanten.

(b) Bewijs dat $\leq$ reflexief, anti-symmetrisch en transitief is, en dus inderdaad een ordening is op $\mathbb{Z}$.

(c) Bewijs dat de ordening totaal is.

Oefening 8.3.5. Bewijs dat (8.14) een equivalentierelatie is.

Oefening 8.3.6. Bewijs dat de definities (8.15) en (8.16) niet afhangen van de gekozen representanten.

8.4 Constructie van $\mathbb{R}$ uit $\mathbb{Q}$

8.4.1 Dedekindsneden

In deze paragraaf geven we de constructie van de reële getallen vanuit de rationale getallen met behulp van zogenaamde Dedekindsneden. We nemen aan dat we $\mathbb{Q}$ kennen als een totaal geordend veld $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$.

Definitie 8.4.1. Een **Dedekindsnede** in $\mathbb{Q}$ is een deelverzameling A van $\mathbb{Q}$ die aan de volgende eigenschappen voldoet:

(a) $A \neq \emptyset$ en $A \neq \mathbb{Q}$,

(b) als $p \in A$ en $q \in \mathbb{Q}$ met $q < p$, dan is $q \in A$,

(c) bij elke $p \in A$ is er een $q \in A$ met $p < q$.

Dedekindsneden zijn genoemd naar de Duitse wiskundige Richard Dedekind (1831-1916). Vanwege onderdeel (b) van Definitie 8.4.1 is een Dedekindsnede A naar onder toe gesloten (hetgeen betekent dat met elk getal in A ook elk kleiner getal tot A behoort). Het complement $B = \mathbb{Q} \setminus A$ van een Dedekindsnede is naar boven toe gesloten: als $p \in B$ en $q \in \mathbb{Q}$ met $q > p$ dan is $q \in B$. Uit onderdeel (c) van Definitie 8.4.1 volgt dat A geen grootste element heeft.

Voorbeeld 8.4.2. (a) Als $q \in \mathbb{Q}$ dan is

$$A_q = \{p \in \mathbb{Q} \mid p < q\} \tag{8.18}$$

een Dedekindsnede. Vanwege eigenschap (c) is de verzameling $\{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq q\}$ geen Dedekindsnede.

(b) De verzameling

$$A = \{p \in \mathbb{Q} \mid p < 0 \vee p^2 < 2\} \tag{8.19}$$

is een Dedekindsnede. Deze Dedekindsnede is niet van de vorm A_q voor zekere $q \in \mathbb{Q}$.

Definitie 8.4.3. We noteren met $\mathbb{D}$ de verzameling van alle Dedekindsneden in $\mathbb{Q}$.

Door middel van (8.18) kunnen we $\mathbb{Q}$ zien als een deel van $\mathbb{D}$. De functie

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{D} : q \mapsto A_q$$

is namelijk injectief. Deze functie is niet surjectief zoals blijkt uit het voorbeeld in Voorbeeld 8.4.2(b). Dus $\mathbb{D}$ is een uitbreiding van $\mathbb{Q}$ tot een grotere verzameling.

Ons doel is om $\mathbb{D}$ te maken tot een volledig totaal geordend veld. We moeten daartoe een ordening $\preccurlyeq$ en binaire bewerkingen $\oplus$ en $\odot$ op $\mathbb{D}$ definiëren en controleren dat $(\mathbb{D}, \oplus, \odot, \preccurlyeq)$ aan alle voorwaarden van een volledig totaal geordend veld voldoet. Als dit lukt dan hebben we Vraag 1 uit paragraaf 8.1.1 beantwoord. Er bestaat dan inderdaad een volledig totaal geordend veld. Vanwege Stelling 8.1.2 is een volledig totaal geordend veld op isomorfie na uniek. We kunnen dan $\mathbb{D}$ identificeren met de reële getallen.

Het zal redelijk wat werk zijn om de ordening $\preccurlyeq$ en de bewerkingen $\oplus$ en $\odot$ te definiëren, en nog meer werk om te bewijzen dat $(\mathbb{D}, \oplus, \odot, \preccurlyeq)$ inderdaad een totaal geordend veld is. In wat volgt zullen we de constructies geven, maar de meeste bewijzen alleen schetsen of helemaal achterwege laten.

8.4.2 Ordening op $\mathbb{D}$

De ordening op $\mathbb{D}$ is eenvoudig te definiëren.

Definitie 8.4.4. Voor $A, B \in \mathbb{D}$ definiëren we

$$A \preccurlyeq B \quad \Longleftrightarrow \quad A \subset B.$$

Eigenschap 8.4.5. $(\mathbb{D}, \preccurlyeq)$ *is een totaal geordende verzameling.*

Bewijs. Het is eenvoudig in te zien dat $\preccurlyeq$ een orderelatie op $\mathbb{D}$. Het bewijs dat de ordening totaal is, laten we over aan de lezer. □

Propositie 8.4.6. *De totaal geordende verzameling* $(\mathbb{D}, \preccurlyeq)$ *voldoet aan de supremumeigenschap.*

Bewijs. We geven een schets van het bewijs. Stel $\mathcal{A} \subset \mathbb{D}$ is niet-leeg en naar boven begrensd. Definieer

$$S = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists A \in \mathcal{A} : q \in A\}.$$

Dan is S een Dedekindsnede (ga dit zelf na) en $S = \sup \mathcal{A}$. □

8.4.3 Optelling op $\mathbb{D}$

We gaan een binaire bewerking $\oplus$ op $\mathbb{D}$ invoeren.

Definitie 8.4.7. Voor $A, B \in \mathbb{D}$ definiëren we

$$A \oplus B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Uit de volgende eigenschap volgt dat $\oplus$ inderdaad een binaire bewerking op $\mathbb{D}$ is.

Eigenschap 8.4.8. *Als A en B Dedekindsneden zijn, dan is $A \oplus B$ ook een Dedekindsnede.*

Propositie 8.4.9. *De binaire bewerking $\oplus$ voldoet aan de eigenschappen* (a)–(e) *van Eigenschap* 7.2.1*, waarbij het neutrale element gelijk is aan*

$$0_{\mathbb{D}} = A_0 = \{p \in \mathbb{Q} \mid p < 0\} \tag{8.20}$$

en het inverse element van $A \in \mathbb{D}$ gelijk is aan

$$\ominus A = \{p \in \mathbb{Q} \mid \exists q \in \mathbb{Q}_0^+ : -p - q \in \mathbb{Q} \setminus A\}. \tag{8.21}$$

Tevens geldt dat voor $p, q \in \mathbb{Q}$ dat

$$A_p \oplus A_q = A_{p+q}. \tag{8.22}$$

Bewijs. Dit laten we over aan de lezer. □

Uit de definities (8.20) en (8.21) volgt ook eenvoudig dat

Eigenschap 8.4.10. *Voor elke $A \in \mathbb{D}$ geldt*

(a) *als $A \preccurlyeq 0_{\mathbb{D}}$ dan $\ominus A \succcurlyeq 0_{\mathbb{D}}$,*

(b) *als $A \succcurlyeq 0_{\mathbb{D}}$ dan $\ominus A \preccurlyeq 0_{\mathbb{D}}$.*

8.4.4 Vermenigvuldiging op $\mathbb{D}$

We gaan vervolgens een binaire bewerking $\odot$ op $\mathbb{D}$ invoeren die de rol van vermenigvuldiging zal spelen. De definitie gaat in twee stappen. Eerst definiëren we de vermenigvuldiging voor positieve Dedekindsneden, d.w.z. voor Dedekindsneden A en B met $A \succcurlyeq 0_{\mathbb{D}}$ en $B \succcurlyeq 0_{\mathbb{D}}$.

Definitie 8.4.11. Als A en B positieve Dedekindsneden zijn, dan definiëren we

$$A \odot B = \mathbb{Q}_0^- \cup \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists a \in A : \exists b \in B : a \geq 0 \,\wedge\, b \geq 0 \,\wedge\, q = ab\}.$$

Eigenschap 8.4.12. *Als A en B positieve Dedekindsneden zijn, dan is ook $A \odot B$ een positieve Dedekindsnede.*

We gebruiken nu Eigenschap 8.4.10 om de vermenigvuldiging uit te breiden tot willekeurige A en B in $\mathbb{D}$.

Definitie 8.4.13. Zij $A, B \in \mathbb{D}$.

(a) Als $A \preccurlyeq 0_{\mathbb{D}}$ en $B \succcurlyeq 0_{\mathbb{D}}$ dan definiëren we

$$A \odot B = \ominus\left((\ominus A) \odot B\right).$$

(b) Als $A \succcurlyeq 0_{\mathbb{D}}$ en $B \preccurlyeq 0_{\mathbb{D}}$ dan definiëren we

$$A \odot B = \ominus\left(A \odot (\ominus B)\right).$$

(c) Als $A \preccurlyeq 0_{\mathbb{D}}$ en $B \preccurlyeq 0_{\mathbb{D}}$ dan definiëren we

$$A \odot B = \left((\ominus A) \odot (\ominus B)\right).$$

Door Definitie 8.4.11 en Definitie 8.4.13 is $A \odot B$ nu gedefinieerd voor elk tweetal $A, B \in \mathbb{D}$. In alle gevallen is $A \odot B$ weer een Dedekindsnede.

Laten we dit wat nader bekijken voor de situatie in onderdeel (a) van Definitie 8.4.13. Neem dus $A \preccurlyeq 0_{\mathbb{D}}$ en $B \succcurlyeq 0_{\mathbb{D}}$. Vanwege Eigenschap 8.4.10 (a) is dan $\ominus A \succcurlyeq 0_{\mathbb{D}}$. Dan is $(\ominus A) \odot B$ de vermenigvuldiging van twee positieve Dedekindsneden en dit gebeurt via de Definitie 8.4.11. Het resultaat is een positieve Dedekindsnede. Dan is $\ominus\left((\ominus A) \odot B\right)$ een negatieve Dedekindsnede vanwege Eigenschap 8.4.10 (b). Deze Dedekindsnede is per definitie gelijk aan $A \odot B$.

Propositie 8.4.14. *De binaire bewerking $\odot$ voldoet aan de eigenschappen* (f)–(k) *van Eigenschap 7.2.1, waarbij het neutrale element voor $\odot$ gelijk is aan*

$$1_{\mathbb{D}} = A_1 = \{p \in \mathbb{Q} \mid p < 1\} \tag{8.23}$$

en het inverse element van $A \in \mathbb{D} \setminus \{0_{\mathbb{D}}\}$ voor $\odot$ gelijk is aan

$$A^{\ominus} = \begin{cases} \{p \in \mathbb{Q} \mid \exists q \in \mathbb{Q} \setminus A : pq < 1\}, & \textit{als } A \succ 0_{\mathbb{D}}, \\ \ominus\left((\ominus A)^{\ominus}\right), & \textit{als } A \prec 0_{\mathbb{D}}. \end{cases} \tag{8.24}$$

Bewijs. Dit is een uitgebreid bewijs waarbij vele gevallen onderscheiden moeten worden. We geven het hier niet. $\square$

8.4.5 Conclusie

We hebben nu een ordening $\preccurlyeq$ en binaire bewerkingen $\oplus$ en $\odot$ op $\mathbb{D}$. De ordening $\preccurlyeq$ is gedefinieerd in Definitie 8.4.4 en volgens Propositie 8.4.6 is $(\mathbb{D}, \preccurlyeq)$ een totaal geordende verzameling die voldoet aan de supremumeigenschap.

De binaire bewerkingen $\oplus$ en $\odot$ zijn gedefinieerd in Definitie 8.4.7 en Definitie 8.4.13. Vanwege Proposities 8.4.9 en 8.4.14 is aan alle onderdelen van Eigenschap 7.2.1 voldaan. Dit betekent dat $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ een veld is.

We moeten ook nog laten zien dat de ordening en de binaire bewerkingen samenhangen zoals beschreven in Eigenschap 7.2.2. Dat wil zeggen, de volgende eigenschap moet gelden

Eigenschap 8.4.15. *Zij $A, B, C \in \mathbb{D}$. Dan geldt*

(a) *Als $A \preccurlyeq B$ dan $A \oplus C \preccurlyeq B \oplus C$.*

(b) *Als $A \preccurlyeq B$ en $C \succcurlyeq 0_{\mathbb{D}}$ dan $A \odot C \preccurlyeq B \odot C$.*

(c) *Als $A \preccurlyeq B$ en $C \preccurlyeq 0_{\mathbb{D}}$ dan $A \odot C \succcurlyeq B \odot C$.*

Bewijs. (a) Neem aan dat $A \preccurlyeq B$. Vanwege Definitie 8.4.4 betekent dit dat $A \subset B$. We moeten laten zien dat $A \oplus C \preccurlyeq B \oplus C$, ofwel vanwege Definitie 8.4.4 dat

$$A \oplus C \subset B \oplus C. \tag{8.25}$$

Om de inclusie (8.25) te bewijzen, nemen we $q \in A \oplus C$ willekeurig. Volgens Definitie 8.4.7 is dan $q = a + c$ voor zekere $a \in A$ en $c \in C$. Omdat $A \subset B$ is dan ook $a \in B$ en dus is $q \in B \oplus C$. Dit bewijst inderdaad de inclusie (8.25) en daarmee is onderdeel (a) bewezen.

De bewijzen van (b) en (c) worden aan de lezer overgelaten. □

De volgende stelling is nu (bijna) bewezen.

Stelling 8.4.16. $(\mathbb{D}, \oplus, \odot, \preccurlyeq)$ *is een totaal geordend veld.*

Bewijs. Vanwege Eigenschap 8.4.15 is aan alle vereisten voor een totaal geordend veld voldaan. Het totaal geordende veld $(\mathbb{D}, \oplus, \odot, \preccurlyeq)$ voldoet aan de supremumeigenschap volgens Propositie 8.4.6. Dan is ook aan de infimumeigenschap voldaan vanwege Oefening 8.1.7. □

8.4.6 Oefeningen

Oefening 8.4.1. Bewijs dat de orderelatie $\preccurlyeq$ uit Definitie 8.4.4 een totale ordening is.

Oefening 8.4.2. Werk het bewijs van Propositie 8.4.6 verder uit.

Oefening 8.4.3. Bewijs Eigenschap 8.4.8.

Oefening 8.4.4. Zij A een Dedekindsnede.

(a) Bewijs dat $\ominus A$ zoals gedefinieerd in (8.21) een Dedekindsnede is en dat

$$A \oplus (\ominus A) = 0_{\mathbb{D}}.$$

(b) Hadden we in plaats van door (8.21) de inverse ook kunnen definiëren door

$$\{p \in \mathbb{Q} \mid -p \in \mathbb{Q} \setminus A\} \quad ?$$

Oefening 8.4.5. Geef het bewijs van (8.22).

Oefening 8.4.6. Bewijs Eigenschap 8.4.10.

Oefening 8.4.7. Bewijs Eigenschap 8.4.12.

Oefening 8.4.8. Bewijs onderdelen (b) en (c) van Eigenschap 8.4.15.

8.5 Extra oefeningen over Hoofdstuk 8

Oefening 8.5.1. De verzameling van de **uitgebreide reële getallen** is

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Dit zijn de reële getallen met daaraan toegevoegd twee elementen $-\infty$ en $+\infty$ waarvoor per definitie geldt

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} : -\infty \leq x \,\wedge\, x \leq +\infty.$$

(a) Bewijs dat $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ een totaal geordende verzameling is.

(b) Bewijs dat de ordening volledig is.

(c) Is $\overline{\mathbb{R}}$ een volledig totaal geordend veld?

Oefening 8.5.2. Een deelverzameling $A \subset \mathbb{R}$ kunnen we ook zien als een deelverzameling van $\overline{\mathbb{R}}$. Zij $A \subset \mathbb{R}$ niet-leeg.

(a) Bewijs dat

$$\sup(A) = +\infty$$

als en slechts als A niet naar boven begrensd is in $\mathbb{R}$,

(b) Bewijs dat

$$\inf(A) = -\infty$$

als en slechts als A niet naar onder begrensd is in $\mathbb{R}$.

N.B.: Het supremum en infimum worden hier genomen in de totaal geordende verzameling van de uitgebreide reële getallen, zie vorige oefening.

Oefening 8.5.3. Het supremum en infimum is ingevoerd voor niet-lege deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ en in de vorige oefening voor niet-lege deelverzamelingen van $\overline{\mathbb{R}}$.

Denk eens na over de vraag of er een redelijke manier is om het **supremum van de lege verzameling** te definiëren, waarbij we werken in de uitgebreide reële getallen $\overline{\mathbb{R}}$. Aan welke van de volgende drie mogelijke definities zou u de voorkeur geven?

- $\sup(\emptyset) = +\infty$,
- $\sup(\emptyset) = -\infty$,
- $\sup(\emptyset) = 0$.

Leg uit.

Oefening 8.5.4. Op $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ kunnen we een algebraïsche bewerking $+$ definiëren door

$$(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty,$$
$$(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty,$$

als $x \in \mathbb{R}$, en

$$(+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = 0,$$

terwijl $x + y$ de gewone optelling in $\mathbb{R}$ is als $x, y \in \mathbb{R}$.

Onderzoek of deze optelling voldoet aan de eigenschappen (a)-(e) uit Eigenschap 7.2.1. Dat wil zeggen, ga na of geldt

(a) Als $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ dan $x + y \in \overline{\mathbb{R}}$.

(b) Voor alle $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$ geldt $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(c) Voor elke $x \in \overline{\mathbb{R}}$ geldt $x + 0 = x$.

(d) Voor elke $x \in \overline{\mathbb{R}}$ bestaat er een $y \in \overline{\mathbb{R}}$ zodanig dat $x + y = 0$.

(e) Voor alle $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ geldt $x + y = y + x$.

Hoofdstuk 9

Rijen van reële getallen

9.1 Reële rijen

9.1.1 Definitie en voorbeelden

Definitie 9.1.1. Een **rij** in een verzameling X is een functie $a : \mathbb{N} \to X$ met als domein de verzameling $\mathbb{N}$ van natuurlijke getallen. Als het codomein X gelijk is aan aan de verzameling $\mathbb{R}$ van reële getallen dan spreken we van een **reële rij** of een **rij van reële getallen**.

In plaats van $a(n)$ schrijven we meestal a_n. De getallen a_n zijn de **elementen** of **termen** van de rij. Gebruikelijke notaties voor een rij zijn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ of kortweg (a_n).

Een rij stellen we ons voor als een opeenvolging van reële getallen

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

De rij begint met a_0, dan komt a_1, enzovoorts. Er zit dus een duidelijke richting aan een rij.

Het komt wel eens voor dat we niet met a_0 willen beginnen, maar met a_1, of pas met zekere a_{n_0}. We zullen de vrijheid nemen om ook een opeenvolging van getallen als

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

een rij te noemen.

Voorbeeld 9.1.2.

- Als eerste voorbeeld hebben we de rij van natuurlijke getallen

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

die formeel gegeven wordt door (a_n) met $a_n = n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

- Als we van elk natuurlijk getal de vierkantswortel nemen, dan krijgen we de rij

$$0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots.$$

Dit is de rij (a_n) met $a_n = \sqrt{n}$.

- De rij (a_n) met $a_n = (-1)^n$ begint met $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots$. In het algemeen geldt

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{als } n \text{ even is,} \\ -1, & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Dit is een voorbeeld van een **alternerende rij**, dat will zeggen een rij met afwisselend positieve en negatieve termen.

- De rij van priemgetallen is
$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$$
- De rij van Fibonaccigetallen (a_n) wordt gegeven door de beginwaarden $a_0 = a_1 = 1$ en de recursie
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \qquad \text{voor } n \geq 2.$$
Dit is een voorbeeld van een **recursief gedefinieerde rij**. In paragraaf 6.3.1 is aangetoond dat
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$
voor elke $n \in \mathbb{N}$.
- De rij van getallen $(1/n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ begint niet met de index $n = 0$ maar met $n = 1$. De rij begint met
$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots.$$

9.2 Convergentie en limiet

9.2.1 Definities

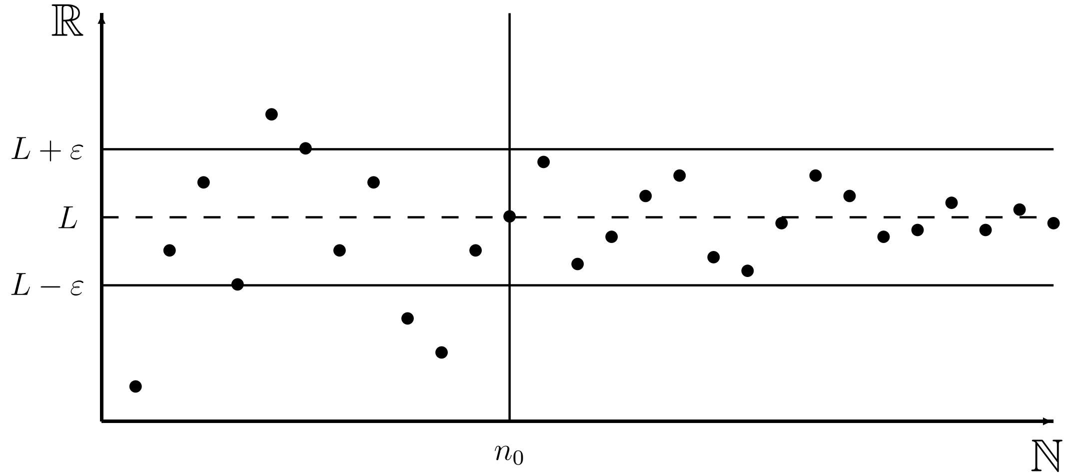
Rijen zijn belangrijk in benaderingsprocessen. Een karakteristieke handelswijze om een onbekende grootheid te benaderen bestaat uit de volgende stappen.

1. Bepaal een eerste benadering van de onbekende grootheid.
2. Vind een manier om een betere benadering te verkrijgen.
3. Genereer een rij van steeds betere benaderingen.
4. De gewenste grootheid is de limiet van de rij.

Beschouw als voorbeeld de rij (s_n) met
$$s_n = 0,3333\cdots3 \qquad\qquad \text{(precies } n \text{ drieën).}$$
Dit is een rij van benaderingen van $1/3$. Uitgaande van de eerste benadering $s_1 = 0,3$ hebben we een manier om steeds een betere benadering te vinden, namelijk door een 3 toe te voegen aan de decimale ontwikkeling. Dit leidt tot de rij (s_n) en $1/3$ is de limiet van deze rij. In het algemeen definiëren we de limiet van een rij als volgt.

Definitie 9.2.1. Zij (a_n) een reële rij.

We zeggen dat de rij (a_n) **convergent** is indien een reëel getal $L \in \mathbb{R}$ bestaat met de eigenschap dat voor elk strikt positief getal ε er een natuurlijk getal n_0 bestaat zodanig dat voor alle $n \geq n_0$ geldt dat het verschil tussen a_n en L in absolute waarde kleiner is dan ε. Het getal L wordt de **limiet** van de rij genoemd en we zeggen dat de rij convergeert naar L. We noteren
$$L = \lim_{n \to \infty} a_n$$
of
$$a_n \to L \qquad \text{als} \qquad n \to \infty.$$
Een rij die niet convergent is wordt **divergent** genoemd.



Figuur 9.1: Convergentie van een rij.

Uitgedrukt in kwantoren zegt Definitie 9.2.1 dat de reële rij (a_n) convergent is als

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - L| < \varepsilon. \tag{9.1}$$

We kunnen hierbij aan $\varepsilon > 0$ denken als een nauwkeurigheid waarmee het getal L benaderd wordt door de rij. Als we een gewenste nauwkeurigheid $\varepsilon > 0$ voorschrijven, dan kunnen we deze bereiken door n maar voldoende groot te nemen. Dit wordt geïllustreerd in Figuur 9.1.

9.2.2 Voorbeelden

Voorbeeld 9.2.2. We laten zien hoe de definitie gebruikt wordt om te bewijzen dat de rij (a_n) met $a_n = n/(n+1)$ naar 1 convergeert. Dus we bewijzen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Vanwege (9.1) moeten we bewijzen dat

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - 1| < \varepsilon. \tag{9.2}$$

Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Nu is de vraag hoe we $n_0 \in \mathbb{N}$ zouden moeten kiezen zodanig dat uit $n \geq n_0$ volgt dat $|a_n - 1| < \varepsilon$. Nu is

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n-(n+1)}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}.$$

De vraag is dus hoe we n_0 moeten kiezen zodanig dat uit $n \geq n_0$ volgt dat $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. We kunnen dit doen door $n_0 \geq \varepsilon^{-1}$ te kiezen. Omdat ε^{-1} niet noodzakelijk een geheel getal is ronden we naar boven af en we nemen dus $n_0 = \lceil \varepsilon^{-1} \rceil$.

Het bovenstaande is nog geen goed bewijs. Nu volgt het echte 'nette' bewijs.

Bewijs van (9.2) Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig en neem $n_0 = \lceil \varepsilon^{-1} \rceil$. Dan is $n_0 \in \mathbb{N}$. Kies $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq n_0$ willekeurig. Dan volgt dat $n + 1 > n_0 \geq \varepsilon^{-1} > 0$ zodat

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon. \tag{9.3}$$

Omdat
$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$
volgt uit (9.3) dat $|a_n - 1| < \varepsilon$. Hiermee is (9.2) bewezen en er volgt dat de rij (a_n) naar 1 convergeert.

Merk op dat de keuze van n_0 niet vastligt. Elk groter natuurlijk getal zou ook voldoen. n_0 hangt wel af van de gekozen $\varepsilon > 0$. Hoe kleiner ε is, hoe groter in het algemeen n_0 gekozen moet worden. Dit hangt er mee samen dat we, om een grotere nauwkeurigheid te verkrijgen, verder in onze rij moeten zitten.

Het is belangrijk dat je de ε-n_0 techniek voor het bewijzen van limieten van rijen goed onder de knie krijgt. Je moet hier goed en veel mee oefenen. We geven daarom nog een uitgebreid voorbeeld.

Voorbeeld 9.2.3. We bewijzen dat
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{n^4-10} = 0. \tag{9.4}$$

Bij een gegeven $\varepsilon > 0$ vragen we ons af wanneer
$$\left|\frac{n^2+2n}{n^4-10}\right| < \varepsilon$$
geldt. Als we ons beperken tot $n \geq 2$ dan is $n^4 - 10 > 0$ en kunnen we de absolute waarde weglaten. De vraag is dus wanneer
$$\frac{n^2+2n}{n^4-10} < \varepsilon. \tag{9.5}$$
Deze ongelijkheid is lastig om naar n op te lossen. Maar dat hoeft ook niet. We willen alleen inzien dat voor n groot genoeg aan (9.5) voldaan is.

Daartoe gaan we onderzoeken hoe groot de linkerkant van (9.5) kan zijn. Om precieser te zijn: we zoeken een bovengrens voor $\frac{n^2+2n}{n^4-10}$ en dit doen we door de teller naar boven en de noemer naar onder af te schatten. De teller $n^2 + 2n$ gedraagt zich als n^2 voor n groot genoeg en daarom zoeken we een afschatting van de vorm
$$n^2 + 2n \leq bn^2 \qquad \text{voor zekere } b > 0. \tag{9.6}$$
De noemer $n^4 - 10$ gedraagt zich als n^4 voor n groot genoeg en daarom zoeken we een afschatting naar onder van de vorm
$$n^4 - 10 \geq cn^4 \qquad \text{voor zekere } c > 0. \tag{9.7}$$
Als we in staat zijn om (9.6) en (9.7) te bewijzen, dan kunnen we eruit concluderen dat
$$\frac{n^2+2n}{n^4-10} \leq \frac{bn^2}{cn^4} = \frac{b}{c}\frac{1}{n^2}. \tag{9.8}$$
Het rechterlid van (9.8) is kleiner dan $\varepsilon > 0$ als n groot genoeg gekozen wordt. Dit is relatief eenvoudig te bewijzen.

Als $n \geq 2$ dan zal $2n \leq n^2$ zodat

$$n^2 + 2n \leq n^2 + n^2 \leq 2n^2 \qquad \text{als } n \geq 2. \tag{9.9}$$

Dit geeft (9.6) met $b = 2$. De ongelijkheid (9.7) met $c = 1/2$ geldt als $10 \leq \frac{1}{2}n^4$, dus als $n^4 \geq 20$, en dit is het geval als $n \geq 3$. Dus

$$n^4 - 10 \geq \frac{1}{2}n^4 \qquad \text{als } n \geq 3. \tag{9.10}$$

Dit is (9.7) met $c = 1/2$. Uit (9.9) en (9.10) volgt dat voor $n \geq 3$ geldt

$$\frac{n^2 + 2n}{n^4 - 10} \leq \frac{2n^2}{\frac{1}{2}n^4} = \frac{4}{n^2}.$$

Dit is kleiner dan ε als $n^2 > 4\varepsilon^{-1}$, oftewel als $n > 2\varepsilon^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$.

We kunnen nu het nette bewijs geven.

Bewijs van (9.4) Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig en neem $n_0 \in \mathbb{N}$ met

$$n_0 \geq \max\left\{3, \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} + 1\right\}.$$

Kies $n \geq n_0$ willekeurig. Dan is $n \geq 3$ en $n \geq 2\varepsilon^{-1/2} + 1 > 2\varepsilon^{-1/2}$. Omdat $n \geq 3$ gelden de ongelijkheden $n^2 + 2n \leq 2n^2$ en $n^4 - 10 \geq \frac{1}{2}n^4$. Bijgevolg is

$$\left|\frac{n^2 + 2n}{n^4 - 10} - 0\right| = \frac{n^2 + 2n}{n^4 - 10} \leq \frac{2n^2}{\frac{1}{2}n^4} = \frac{4}{n^2}.$$

Omdat $n > 2\varepsilon^{-1/2}$ geldt tevens dat $\frac{4}{n^2} < \varepsilon$. Dus

$$\left|\frac{n^2 + 2n}{n^4 - 10} - 0\right| < \varepsilon$$

en dit geldt voor elke $n \geq n_0$. De limiet (9.4) is hiermee bewezen.

9.2.3 Eenduidigheid van de limiet

In de definitie van convergentie wordt gesproken van de limiet van een convergente rij. We mogen spreken van de limiet (en niet van een limiet) omdat de limiet van een convergente rij uniek bepaald is. Dit is een wellicht voor de hand liggende uitspraak, maar ze vereist toch een bewijs.

Propositie 9.2.4. *Neem aan dat (a_n) een convergente rij is. Als zowel L als M een limiet is van (a_n), dan geldt $L = M$.*

Bewijs. We bewijzen dit uit het ongerijmde. Neem aan dat $L \neq M$. Dan is $|L - M| > 0$. Neem

$$\varepsilon = \frac{1}{2}|L - M| > 0.$$

Omdat (a_n) naar L convergeert, is er een $n_0 \in \mathbb{N}$ zodanig dat $|a_n - L| < \varepsilon$ voor alle $n \geq n_0$. Omdat (a_n) ook naar M convergeert, is er ook een $n_1 \in \mathbb{N}$ zodanig dat $|a_n - M| < \varepsilon$ voor alle $n \geq n_1$.

Neem nu $n \geq \max\{n_0, n_1\}$. Dan geldt zowel $|a_n - L| < \varepsilon$ als $|a_n - M| < \varepsilon$. Vanwege de driehoeksongelijkheid geldt nu

$$\begin{aligned} |L - M| &= |(a_n - M) - (a_n - L)| \leq |a_n - M| + |a_n - L| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Omdat $2\varepsilon = |L - M|$ vinden we hieruit de strikte ongelijkheid

$$|L - M| < |L - M|$$

en dit is een tegenspraak. Bijgevolg is $L = M$. □

9.2.4 Oefeningen

Oefening 9.2.1. Wat vindt u van de volgende 'definitie' van convergentie van een rij (a_n)? Wees zeer kritisch.

- We zeggen dat de rij (a_n) convergeert naar L als a_n steeds dichter bij L komt te liggen naarmate n groter wordt.

Oefening 9.2.2. Bewijs vanuit de definitie dat de volgende rijen convergent zijn.

(a) De rij (a_n) met $a_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ voor $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) De rij (b_n) met $b_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$.

(c) De rij (c_n) met $c_n = \dfrac{n^2+3n}{n^3-2}$ voor $n \in \mathbb{N}_0$.

Oefening 9.2.3. Bewijs met de definitie dat de volgende rijen divergent zijn.

(a) De rij (a_n) met $a_n = (-1)^n$.

(b) De rij (b_n) met $b_n = \sqrt{n}$.

(c) De rij (c_n) met $c_n = \sin n$.

Oefening 9.2.4. Bewijs de volgende beweringen, of geef een tegenvoorbeeld.

(a) Als (a_n) convergeert naar L dan convergeert de rij $(|a_n|)$ naar $|L|$.

(b) Als $(|a_n|)$ convergeert naar L dan convergeert (a_n) naar L of naar $-L$.

(c) De rij (a_n) convergeert naar 0 als en slechts als de rij $(|a_n|)$ naar 0 convergeert.

Oefening 9.2.5. Neem aan dat (a_n) en (b_n) twee rijen zijn, waarvoor geldt dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat

$$\forall n \geq N : a_n = b_n.$$

Bewijs dat de rij (a_n) convergent is als en slechts als de rij (b_n) convergent is. Bovendien zijn in dat geval de limieten aan elkaar gelijk.

Oefening 9.2.6. Zij (a_n) een convergente rij met limiet L. Laat van elk van de volgende twee rijen zien dat ze ook convergent zijn met dezelfde limiet L.

(a) De rij (b_n) met $b_n = a_{n+k}$, waarin $k \in \mathbb{N}$ een vast gekozen natuurlijk getal is.

(b) De rij (c_n) met $c_n = a_{2n}$.

Oefening 9.2.7. We gebruiken het dicht liggen van $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ om te bewijzen dat elk reëel getal $x \in \mathbb{R}$ de limiet is van een rij van rationale getallen. Dit doen we als volgt.

Voor $n \in \mathbb{N}_0$ is $x - \frac{1}{n} < x + \frac{1}{n}$. Omdat $\mathbb{Q}$ dicht ligt in $\mathbb{R}$ is

$$\mathbb{Q} \cap \left]x - \tfrac{1}{n}, x + \tfrac{1}{n}\right[\neq \emptyset.$$

Neem $q_n \in \mathbb{Q} \cap \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[$. Dan is $(q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ een rij van rationale getallen. Bewijs dat (q_n) naar x convergeert.

9.3 Verband met ordening

9.3.1 Begrensde rijen

We definiëren een aantal begrippen rond reële rijen die samenhangen met de totale ordening $\leq$ op $\mathbb{R}$.

Definitie 9.3.1. Zij (a_n) een reële rij.

(a) Een **bovengrens** van de rij (a_n) is een reëel getal $x \in \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; a_n \leq x.$$

De kleinste bovengrens is het **supremum** van de rij.

(b) Een **ondergrens** van de rij (a_n) is een reëel getal $x \in \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; a_n \geq x.$$

De grootste ondergrens is het **infimum** van de rij.

(c) Als (a_n) een bovengrens heeft, dan noemen we de rij **naar boven begrensd**. Als (a_n) een ondergrens heeft, dan noemen we de rij **naar onder begrensd**. Een rij die zowel naar boven als naar onder begrensd is noemen we kortweg **begrensd**.

De begrippen uit Definitie 9.3.1 hebben in feite betrekking op het beeld

$$a(\mathbb{N}) = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

van de rij. Dit is een deelverzameling van $\mathbb{R}$. De rij is naar boven begrensd als de verzameling $a(\mathbb{N})$ naar boven begrensd is in $\mathbb{R}$. Het supremum van de rij is het supremum van $a(\mathbb{N})$, enzovoorts.

Het is eenvoudig in te zien dat de rij (a_n) begrensd is als en slechts als

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{N} : \; |a_n| \leq M. \tag{9.11}$$

Propositie 9.3.2. *Een convergente rij* (a_n) *is begrensd.*

Bewijs. Zij L de limiet van de rij (a_n). Uit de definitie van limiet volgt dat er een $n_0 \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat

$$|a_n - L| < 1 \tag{9.12}$$

voor alle $n \geq n_0$. Voor $n \geq n_0$ geldt dat $|a_n| = |L + a_n - L| \leq |L| + |a_n - L|$ zodat vanwege (9.12) geldt

$$|a_n| < |L| + 1. \tag{9.13}$$

Er zijn slechts eindig veel elementen a_n met $n < n_0$, namelijk $a_0, a_1, \ldots, a_{n_0-1}$. Voor deze elementen van de rij is het niet noodzakelijk dat (9.13) geldt. Omdat het er maar eindig veel zijn, is het maximum

$$M = \max\{|L| + 1, |a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|\}$$

goed gedefinieerd en is $M \in \mathbb{R}^+$. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt nu dat $|a_n| \leq M$ en bijgevolg is de rij begrensd, zie hiervoor ook (9.11) $\square$

9.3.2 Limieten en ongelijkheden

Stelling 9.3.3. *Als* (a_n) *en* (b_n) *twee convergente rijen zijn met* $a_n \leq b_n$ *voor alle* $n \in \mathbb{N}$, *dan geldt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Bewijs. Dit bewijzen we uit het ongerijmde. Stel $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $M = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ en $L > M$. Dan is

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(L - M) > 0.$$

Uit de definitie van ε volgt dat

$$M + \varepsilon = L - \varepsilon. \tag{9.14}$$

Omdat (a_n) naar L convergeert is er een n_0 zodanig dat $|a_n - L| < \varepsilon$ voor alle $n \geq n_0$. Omdat (b_n) naar M convergeert is er ook een n_1 zodanig dat $|b_n - M| < \varepsilon$ voor alle $n \geq n_1$. Neem nu $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq \max\{n_0, n_1\}$. Dan geldt zowel $|a_n - L| < \varepsilon$ als $|b_n - M| < \varepsilon$. Dan geldt zeker $b_n < M + \varepsilon$ en $L - \varepsilon < a_n$. Als we dit combineren met (9.14) volgt er dat $b_n < a_n$ en dit is in tegenspraak met het gegeven dat $a_n \leq b_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

We concluderen dat inderdaad $L \leq M$. $\square$

Merk op dat het in Stelling 9.3.3 gaat over niet-strikte ongelijkheden. Wat kunnen we zeggen als een strikte ongelijkheid

$$a_n < b_n \tag{9.15}$$

geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$? Uiteraard geldt dan ook $a_n \leq b_n$ en kunnen we uit Stelling 9.3.3 concluderen dat (indien de limieten bestaan)

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{9.16}$$

Het voorbeeld $a_n = 0$ en $b_n = \frac{1}{n}$ laat echter zien dat we uit een strikte ongelijkheid (9.15) niet mogen concluderen dat de ongelijkheid voor de limieten in (9.16) ook een strikte ongelijkheid is. Met andere woorden: **een strikte ongelijkheid blijft bij het nemen van limieten niet noodzakelijk behouden**.

9.3.3 Insluitstelling

De volgende stelling staat bekend als de **insluitstelling**.

Stelling 9.3.4. *Beschouw drie rijen,* (a_n), (b_n) *en* (c_n) *waarvoor geldt dat*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; b_n \leq a_n \leq c_n.$$

Neem aan dat bekend is dat (b_n) *en* (c_n) *convergente rijen zijn met dezelfde limiet, zeg*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L.$$

Dan is ook (a_n) *convergent met*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Bewijs. Dit is een oefening voor de lezer. □

In een typisch gebruik van de insluitstelling is (a_n) een moeilijke rij waarvan we de convergentie willen aantonen. We doen dit door twee eenvoudigere rijen (b_n) en (c_n) te construeren waarvan we weten (of eenvoudig kunnen aantonen) dat ze convergent zijn met dezelfde limiet. Als tevens $b_n \leq a_n \leq c_n$ geldt voor elke n, dan volgt uit de insluitstelling dat de moeilijke rij (a_n) ook convergent is met dezelfde limiet.

Voorbeeld 9.3.5. Omdat $-1 \leq \sin n \leq 1$ geldt

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

We zitten nu in de situatie van Stelling 9.3.4 met $a_n = \frac{\sin n}{n}$, $b_n = -\frac{1}{n}$ en $c_n = \frac{1}{n}$. Omdat de rijen (b_n) en (c_n) naar 0 convergeren, kunnen we concluderen dat ook

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0. \tag{9.17}$$

Voorbeeld 9.3.6. We bewijzen dat

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Schrijf $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$. We moeten laten zien dat (a_n) naar 0 convergeert.

Vanwege de definitie van de n-de machtswortel geldt dat $(1 + a_n)^n = n$. Volgens het binomium van Newton geldt bovendien

$$n = (1 + a_n)^n = 1 + \binom{n}{1} a_n + \binom{n}{2} a_n^2 + \cdots + \binom{n}{n} a_n^n. \tag{9.18}$$

Neem $n \geq 2$. Het is dan duidelijk dat $\sqrt[n]{n} > 1$ en dus dat $a_n > 0$. Bijgevolg is elke term in de som in het rechterlid van (9.18) strikt positief. De som wordt dus kleiner als we alleen de termen 1 en $\binom{n}{2} a_n^2$ overhouden. Dus geldt

$$n \geq 1 + \binom{n}{2} a_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2,$$

waaruit volgt dat

$$a_n^2 \leq \frac{n-1}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n},$$

en daarom is

$$0 < a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \qquad \text{als } n \geq 2.$$

Uit de insluitstelling (Stelling 9.3.4) volgt nu dat (a_n) naar 0 convergeert als $n \to \infty$.

Propositie 9.3.7. *Neem aan dat (a_n) een rij is die naar 0 convergeert, en dat (b_n) een begrensde rij is. Dan is de rij $(a_n \cdot b_n)$ convergent met*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$$

Bewijs. We geven het begin van het bewijs.

Omdat de rij (b_n) begrensd is, is er een $M > 0$ met $|b_n| \leq M$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Dan geldt

$$0 \leq |a_n \cdot b_n| \leq M|a_n|. \tag{9.19}$$

De lezer wordt nu gevraagd om zelf het bewijs af te maken. □

9.3.4 Oefeningen

Oefening 9.3.1. Neem aan dat (a_n) een convergente rij is met $\lim_{n\to\infty} a_n > 1$. Bewijs dat er een $n_0 \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat $a_n > 1$ voor alle $n \geq n_0$.

Oefening 9.3.2. Neem aan dat (a_n) een convergente rij is met waarvoor geldt dat er $n_0 \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat $a_n > 1$ voor alle $n \geq n_0$. Volgt hieruit dat $\lim_{n\to\infty} a_n > 1$?

Oefening 9.3.3. Gebruik de insluitstelling om de volgende limieten te berekenen.

(a) $\lim_{n\to\infty} (3^n + 4^n)^{1/n}$

(b) $\lim_{n\to\infty} (x^n + y^n)^{1/n}$ waarin $x > 0$ en $y > 0$ vast gekozen zijn

Oefening 9.3.4. Bewijs de insluitstelling (zie Stelling 9.3.4).

Oefening 9.3.5. Vervolledig het bewijs van Propositie 9.3.7.

Oefening 9.3.6. Zij (a_n) een rij van positieve reële getallen die convergent is met limiet L. We willen bewijzen dat

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}. \tag{9.20}$$

(a) Bewijs dat $L \geq 0$.

(b) Bewijs (9.20) voor het geval dat $L = 0$. Doe dit vanuit de ε-n_0 definitie van convergentie van een rij.

(c) Bewijs (9.20) voor het geval dat $L > 0$. Gebruik de worteltruc (9.31).

Oefening 9.3.7. We weten dat de rij $(1/n)$ convergent is en dat de rij $(\sin n)$ niet convergent is. Vanwege de rekenregels voor limieten zal dan ook de productrij

$$\frac{1}{n} \cdot \sin n$$

niet convergent zijn. Wat vindt u van dit bewijs dat de limiet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$$

niet bestaat?

9.4 Verband met algebraïsche bewerkingen

9.4.1 Algebraïsche bewerkingen

Als (a_n) een reële rij is en $c \in \mathbb{R}$ dan is (ca_n) een nieuwe rij, die een **scalair veelvoud** is van (a_n).

Reële rijen kunnen we elementsgewijs bij elkaar optellen, van elkaar aftrekken en met elkaar vermenigvuldigen. Als (a_n) en (b_n) twee reële rijen zijn, dan kennen we de **som** $(a_n + b_n)$, het **verschil** $(a_n - b_n)$ en het **product** $(a_n \cdot b_n)$ van de twee rijen. Als $b_n \neq 0$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ dan kennen we ook de **quotiëntrij** $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$.

Het is een belangrijke eigenschap dat het limietbegrip zich goed gedraagt ten opzichte van de algebraïsche bewerkingen.

9.4.2 Rekenregels

We beginnen met een eenvoudige eigenschap.

Propositie 9.4.1. *Zij (a_n) een convergente rij in $\mathbb{R}$. Voor elke $c \in \mathbb{R}$ is (ca_n) dan een convergente rij en*

$$\lim_{n\to\infty} (ca_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Bewijs. Het bewijs hiervan wordt als oefening aan de lezer overgelaten. □

Stelling 9.4.2. *Neem aan dat (a_n) en (b_n) twee convergente rijen zijn met*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \textit{en} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = M.$$

Dan geldt het volgende.

(a) *De somrij $(a_n + b_n)$ is convergent met*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L + M. \tag{9.21}$$

(b) *De verschilrij $(a_n - b_n)$ is convergent met*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = L - M. \tag{9.22}$$

(c) *De productrij* $(a_n \cdot b_n)$ *is convergent met*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = L \cdot M. \tag{9.23}$$

(d) *Als* $M \neq 0$ *en* $b_n \neq 0$ *voor alle* $n \in \mathbb{N}$, *dan is de quotiëntrij* (a_n/b_n) *convergent met*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}. \tag{9.24}$$

Bewijs.

(a) Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan is ook $\varepsilon/2 > 0$. Omdat de rij (a_n) naar L convergeert is er een $n_1 \in \mathbb{N}$ met $|a_n - L| < \varepsilon/2$ voor alle $n \geq n_1$. Omdat de rij (b_n) naar M convergeert is er ook een $n_2 \in \mathbb{N}$ met $|b_n - M| < \varepsilon/2$ voor alle $n \geq n_2$. Neem $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Als nu $n \geq n_0$ dan geldt zowel $|a_n - L| < \varepsilon/2$ als $|b_n - M| < \varepsilon/2$. Vanwege de driehoeksongelijkheid is dan

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (L + M)| &= |(a_n - L) + (b_n - M)| \\ &\leq |a_n - L| + |b_n - M| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Dit bewijst onderdeel (a).

(b) Dit wordt aan de lezer overgelaten.

(c) Schrijf

$$a_n \cdot b_n = (a_n - L) \cdot b_n + Lb_n. \tag{9.25}$$

Omdat (a_n) convergent is met limiet L, volgt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - L) = 0$$

(dit is te zien als een speciaal geval van onderdeel (b) van de stelling). De rij (b_n) is convergent en dus zeker begrensd, zie Propositie 9.3.2. Vanwege Propositie 9.3.7 geldt dan

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - L) \cdot b_n = 0. \tag{9.26}$$

Vanwege Propositie 9.4.1 is

$$\lim_{n\to\infty}(Lb_n) = L \lim_{n\to\infty} b_n = L \cdot M. \tag{9.27}$$

Vanwege onderdeel (a) van de stelling (dat we reeds bewezen hebben) volgt uit (9.26) en (9.27) dat de somrij $((a_n - L) \cdot b_n + Lb_n))$ convergent is met limiet $0 + L \cdot M = L \cdot M$.

Omdat (9.25) geldt, is onderdeel (c) nu bewezen.

(d) Omdat $a_n/b_n = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ en omdat we onderdeel (c) reeds bewezen hebben, volstaat het om te bewijzen dat

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{M}. \tag{9.28}$$

We zullen het bewijs geven voor het geval dat $M = 1$. Het bewijs voor algemene $M \neq 0$ wordt aan de lezer overgelaten.

We nemen dus aan dat $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$. Neem $\varepsilon > 0$ willekeurig. Omdat de rij (b_n) naar 1 convergeert is er een $n_1 \in \mathbb{N}$ zodanig dat

$$|b_n - 1| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{9.29}$$

geldt voor alle $n \geq n_1$. Omdat de rij (b_n) naar 1 convergeert en $1 > \frac{1}{2}$ is er ook een $n_2 \in \mathbb{N}$ met $b_n > \frac{1}{2}$ voor alle $n \geq n_2$. Dan ook

$$|b_n| > \frac{1}{2} \tag{9.30}$$

voor alle $n \geq n_2$.

Neem $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ en $n \geq n_0$ willekeurig. Dan geldt zowel (9.29) als (9.30). We gebruiken nu dat

$$\left|\frac{1}{b_n} - 1\right| = \left|\frac{1 - b_n}{b_n}\right| = \frac{|b_n - 1|}{|b_n|}$$

waarin de teller kleiner is dan $\frac{\varepsilon}{2}$ vanwege (9.29) en de noemer groter is dan $\frac{1}{2}$ vanwege (9.30). Dus

$$\left|\frac{1}{b_n} - 1\right| < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

Dit bewijst wat we moesten bewijzen, namelijk dat de rij $(1/b_n)$ convergent is met limiet 1.

□

Voorbeeld 9.4.3. Gebruik makend van de rekenregels kunnen we de limiet in Voorbeeld 9.2.3 ook als volgt berekenen. Schrijf eerst

$$\frac{n^2 + 2n}{n^4 - 10} = \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{1 - \frac{10}{n^4}}.$$

Het is eenvoudig in te zien (en ook eenvoudig te bewijzen, zie Oefening 9.4.3) dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} = 0.$$

Vanwege Propositie 9.4.1 geldt dan ook

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n^4} = 0.$$

Vanwege (9.21) geldt dan voor de teller

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} = 0 + 0 = 0$$

en vanwege (9.22) geldt voor de noemer

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{10}{n^4}\right)=1-0=1.$$

Tenslotte geldt volgens (9.24) dat

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{1-\frac{10}{n^4}}=\frac{0}{1}=0.$$

9.4.3 Oefeningen

Oefening 9.4.1. Bewijs Propositie 9.4.1.

Oefening 9.4.2. Bewijs onderdeel (b) van Stelling 9.4.2 op twee manieren.

(a) Volg het bewijs van onderdeel (a) en pas het aan aan de situatie van onderdeel (b).

(b) Maak gebruik van Propositie 9.4.1 en onderdeel (a) van Stelling 9.4.2.

Oefening 9.4.3. Bewijs met volledige inductie dat

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0$$

geldt voor elke $k\in\mathbb{N}_0$.

Oefening 9.4.4. Bereken de limieten

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4+2n+1}{3n^3-n^4}\qquad\text{en}\qquad\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

Hint bij de tweede limiet: Het verschil van twee vierkantswortels kan als volgt herschreven worden

$$\sqrt{p}-\sqrt{q}=(\sqrt{p}-\sqrt{q})\,\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}=\frac{p-q}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}.\tag{9.31}$$

Dit heet wel de **worteltruc**.

Oefening 9.4.5. Zij (a_n) een rij die voldoet aan

$$a_{n+1}=1+\frac{6}{a_n},\qquad\text{voor } n\in\mathbb{N}$$

met beginwaarde $a_0>0$.

(a) Kies beginwaarde $a_0=1$ en bereken met uw rekenmachine een aantal elementen van de rij (a_n). Denkt u dat de rij convergeert?

(b) Veronderstel dat de rij (a_n) convergent is met limiet L. Bewijs dat $L\neq 0$ en gebruik de rekenregels om aan te tonen dat $L=1+\frac{6}{L}$. Bereken L hieruit.

Oefening 9.4.6. Zij (a_n) een rij met $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ en $a_n\neq 0$ voor alle $n\in\mathbb{N}$.

Bewijs dat de rij $(1/a_n)$ niet convergent is.

Oefening 9.4.7. In het bewijs van onderdeel (d) van Stelling 9.4.2 is de volgende bewering bewezen voor het geval dat $M = 1$.

- Als $b_n \neq 0$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ en als de rij (b_n) convergent is met limiet $M \neq 0$, dan is de rij $(1/b_n)$ convergent met
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{M}.$$

Bewijs de bewering voor algemene $M \neq 0$.

[Dit kan op twee manieren. Ofwel past u het bewijs dat gegeven is voor $M = 1$ aan aan het algemene geval $M \neq 0$, ofwel maakt u gebruik van het resultaat voor $M = 1$ om het voor het algemene geval te bewijzen.]

9.5 Extra oefeningen over Hoofdstuk 9

Oefening 9.5.1. Bewijs met behulp van de ε-n_0 definitie van convergentie dat de rij (a_n) met
$$a_n = n\left(\sqrt{n^2+p} - n\right), \qquad n \in \mathbb{N}$$
convergent is. Hierin is $p \geq 0$ een vast gekozen reëel getal. Wat is de limiet?

Oefening 9.5.2. Een rij (z_n) van complexe getallen is convergent als
$$\exists L \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |z_n - L| < \varepsilon.$$
Een rij van complexe getallen (z_n) geeft aanleiding tot twee rijen (x_n) en (y_n) van reële getallen. We nemen namelijk $x_n = \operatorname{Re} z_n$ en $y_n = \operatorname{Im} z_n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

(a) Bewijs dat een rij (z_n) van complexe getallen convergent is als en slechts als de twee reële rijen (x_n) en (y_n) convergent zijn.

(b) Bewijs dat voor een convergente rij (z_n) van complexe getallen geldt dat de rij (z_n^2) ook convergent is.

Oefening 9.5.3. Neem aan dat $A \subset \mathbb{R}$ een niet-lege naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ is. Bewijs dat er een rij (a_n) bestaat met $a_n \in A$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, die convergeert naar $\sup(A)$.

Oefening 9.5.4. De definitie van convergentie kan als volgt geformuleerd worden. De rij (a_n) is convergent als en slechts als
$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : \ n \geq n_0 \implies |a_n - L| < \varepsilon.$$

We weten dat in een predikaat met kwantoren de volgorde van kwantoren van belang is. Als we een $\forall$ kwantor en een $\exists$ kwantor omwisselen dan verandert in het algemeen de betekenis. Als we in bovenstaande definitie twee opeenvolgende kwantoren omwisselen komen we tot de volgende drie predikaten.

(a) $\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ n \geq n_0 \implies |a_n - L| < \varepsilon.$

(b) $\exists L \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \ n \geq n_0 \implies |a_n - L| < \varepsilon.$

(c) $\forall \varepsilon > 0 : \exists L \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : \ n \geq n_0 \implies |a_n - L| < \varepsilon.$

Onderzoek voor elk van de gevallen (a), (b), (c) wat voor reële rijen (a_n) er aan voldoen. Voldoen alle convergente rijen er aan? Zijn er nog andere rijen die ook voldoen?

Hoofdstuk 10

Monotone rijen, limsup en liminf

De eigenschappen van reële rijen die in het vorig hoofdstuk behandeld zijn maken geen gebruik van de volledigheid van $\mathbb{R}$. In dit hoofdstuk is de volledigheid van $\mathbb{R}$ wel belangrijk. Ze is zelfs essentieel voor de meeste resultaten uit dit hoofdstuk.

10.1 Monotone rijen

10.1.1 Definities

Definitie 10.1.1. Zij (a_n) een reële rij.

(a) De rij is **stijgend** als
$$\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} \geq a_n.$$

(b) De rij is **strikt stijgend** als
$$\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} > a_n.$$

(c) De rij is **dalend** als
$$\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} \leq a_n.$$

(d) De rij is **strikt dalend** als
$$\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} < a_n.$$

(e) De rij is **monotoon** als ze ofwel stijgend ofwel dalend is.

Merk op dat bij een stijgende of dalende rij de gelijkheid $a_{n+1} = a_n$ van twee opeenvolgende elementen van de rij toegestaan is.

10.1.2 Convergentie van monotone rijen

Stelling 10.1.2. *Er geldt:*

(a) *Een stijgende rij die naar boven begrensd is, is convergent.*

(b) *Een dalende rij die naar onder begrensd is, is convergent.*

Bewijs. Zij (a_n) een stijgende naar boven begrensde rij. De verzameling

$$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

is dan een niet-lege, naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$. Vanwege de volledigheid van $\mathbb{R}$ heeft A een supremum, zeg

$$s = \sup A.$$

We bewijzen dat s de limiet van de rij (a_n) is.

Neem $\varepsilon > 0$ willekeurig. Omdat s de kleinste bovengrens is, is $s - \varepsilon$ geen bovengrens van A. Daarom bestaat er een $n_0 \in \mathbb{N}$ met

$$a_{n_0} > s - \varepsilon.$$

Neem $n \geq n_0$ willekeurig. Aangezien de rij stijgend is, volgt dat

$$a_n \geq a_{n_0} > s - \varepsilon.$$

Anderzijds geldt omdat s een bovengrens van A is, en $a_n \in A$, dat $a_n \leq s$. Bijgevolg geldt

$$s - \varepsilon < a_n \leq s$$

en hieruit volgt $|a_n - s| < \varepsilon$. Hiermee is onderdeel (a) bewezen.

Het bewijs van onderdeel (b) is analoog. □

Op grond van Stelling 10.1.2 zijn er voor een stijgende rij (a_n) twee mogelijkheden.

- De eerste mogelijkheid is dat de rij naar boven begrensd is. In dat geval is de rij convergent. Uit het bewijs van Stelling 10.1.2 blijkt ook dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

- De tweede mogelijkheid is dat de rij niet naar boven begrensd is. De rij is in dat geval divergent.

10.1.3 De meetkundige rij en de meetkundige reeks

Beschouw de rij (x^n) met vast gekozen $x \in \mathbb{R}$. Deze rij is een **meetkundige rij** met rede x.

Eigenschap 10.1.3. *De meetkundige rij (x^n) is convergent als en slechts als $-1 < x \leq 1$ en er geldt*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{als } -1 < x < 1, \\ 1 & \text{als } x = 1. \end{cases}$$

Bewijs. Voor $x = 1$ geldt $x^n = 1$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ en bijgevolg is de rij (x^n) dan constant en dus zeker convergent met limiet 1.

Voor $x = 0$ geldt $x^n = 0$ voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ en in dat geval convergeert de rij (x_n) naar 0.

Neem aan dat $0 < x < 1$. Dan is $x^n > 0$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, en omdat $0 < x < 1$ geldt ook

$$x^{n+1} = x \cdot x^n < x^n$$

De rij (x_n) is bijgevolg strikt dalend. De rij is ook naar onder begrensd, want 0 is een ondergrens. Vanwege Stelling 10.1.2 (b) is de rij convergent, zeg met limiet L. Dan heeft ook (x^{n+1}) dezelfde limiet L. Uit $x^{n+1} = x \cdot x^n$ en de rekenregels voor limieten volgt dan dat $L = xL$. Omdat $x < 1$ volgt hieruit dat $L = 0$.

Neem aan dat $-1 < x < 0$. In dat geval is $0 < |x| < 1$ en er geldt vanwege onderdeel (a) dat $|x|^n \to 0$ als $n \to \infty$. Omdat

$$-|x|^n \leq x^n \leq |x|^n$$

volgt dan ook dat $x^n \to 0$ (vanwege de insluitstelling).

Als $x = -1$, dan is $(x^n) = ((-1)^n)$ gelijk aan de alternerende rij $1, -1, 1, -1, \ldots$ die niet convergent is.

Neem tenslotte aan dat $|x| > 1$. Dan is $1/|x| < 1$ en op grond van wat we al bewezen hebben convergeert $(1/x)^n$ naar 0. Uiteraard geldt $1/(x^n) = (1/x)^n$, zodat ook $1/(x^n)$ naar 0 convergeert. Dan divergeert de rij (x^n), zie ook Oefening 9.4.6. □

De **meetkundige reeks** met rede x is de oneindige som

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

De $n$de partieelsom van deze reeks is per definitie

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n. \tag{10.1}$$

Dan is

$$xs_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1}. \tag{10.2}$$

Als we (10.2) aftrekken van (10.1) dan krijgen we

$$s_n - xs_n = 1 - x^{n+1}.$$

Dit betekent dat voor $x \neq 1$ geldt

$$s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \qquad \text{als } x \neq 1. \tag{10.3}$$

Voor $x = 1$ is het uit (10.1) meteen duidelijk dat

$$s_n = n + 1. \tag{10.4}$$

We kennen het gedrag van x^{n+1} voor $n \to \infty$ uit Eigenschap 10.1.3. Daaruit en uit (10.3) en (10.4) volgt het volgende over de rij (s_n).

Eigenschap 10.1.4. *De rij* (s_n) *gegeven door* (10.1) *is convergent als en slechts als* $|x| < 1$. *In dat geval geldt*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x}.$$

10.1.4 Een limiet voor het getal e

We bewijzen dat de limiet

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

bestaat. Hierbij maken we gebruik van de **ongelijkheid van Bernoulli** die als volgt luidt.

Lemma 10.1.5. *Voor $x > -1$ en $n \in \mathbb{N}$ geldt dat*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Bewijs. Dit is eenvoudig met volledige inductie te bewijzen. We laten het aan de lezer over. $\square$

De ongelijkheid is genoemd naar de Zwitserse wiskundige Jacob Bernoulli (1654-1705). Naast Jacob zijn ook zijn broer Johann Bernoulli (1667-1748) en diens zoon Daniel Bernoulli (1700-1782) beroemde wiskundigen.

We bekijken nu de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ met

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}.$$

Het is duidelijk dat $a_n \geq 1$ voor elke $n \in \mathbb{N}_0$. We laten zien dat de rij (a_n) strikt dalend is.

Er geldt voor $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n-1}}{a_n} &= a_{n-1}\cdot a_n^{-1} \\
&= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \frac{n^{2n+1}}{(n-1)^n(n+1)^{n+1}} \\
&= \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n}\cdot\frac{n}{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \\
&> \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

Nu passen we de ongelijkheid van Bernoulli toe. We vinden

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} > \left(1+\frac{n}{n^2}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = 1.$$

Dit betekent dat $a_{n-1} > a_n$, zodat de rij (a_n) inderdaad strikt dalend is.

Omdat $a_n \geq 1$ is de rij ook naar onder begrensd. Volgens Stelling 10.1.2 is de rij (a_n) bijgevolg convergent.

Omdat

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = a_n\cdot\frac{n}{n+1}$$

is dan ook de rij $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ convergent met dezelfde limiet.

Een van de mogelijke manieren om het getal e te definiëren is door

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{10.5}$$

10.1.5 Andere definities voor het getal e

Naast de limiet (10.5) zijn er nog andere manieren om het getal e in te voeren. We geven hiervan een overzicht. Het vereist steeds een bewijs dat de verschillende definities op hetzelfde neer komen. Daar gaan we hier niet diep op in. We zullen wel zien dat we uiteindelijk de definitie (10.5) weer terugvinden.

Oneindige reeks Het getal e is gelijk aan de som van de oneindige reeks

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \tag{10.6}$$

Meer algemeen is

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

en dit is een gebruikelijke manier om de exponentiële functie met grondtal e in te voeren.

Exponentiële functie De exponentiële functie met grondtal $a > 1$ is de functie

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : \; x \mapsto a^x.$$

De afgeleide van deze functie is gelijk aan

$$\frac{d}{dx} \exp_a(x) = c \exp_a(x) \tag{10.7}$$

voor zekere constante $c > 0$. Er is precies één grondtal $a > 1$ waarvoor geldt dat $c = 1$. Dit grondtal is e en dit is een mogelijke definitie van e. Dit geeft de belangrijke eigenschap

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

Om e op deze manier te definiëren moeten we de exponentiële functie met algemeen grondtal invoeren. We moeten ook afleidbaarheid van functies definiëren en voldoende eigenschappen ervan vinden om te kunnen laten zien dat (10.7) inderdaad geldt.

Afgeleide in $x = 0$ Het getal c in (10.7) is gelijk aan de afgeleide van $\exp_a$ in $x = 0$. Als $c = 1$ dan geldt dus dat

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1. \tag{10.8}$$

Dit treedt op als slechts als $a = e$. We kunnen e dus ook definiëren als het unieke getal $a > 1$ waarvoor (10.8) geldt. Dit is het getal $a > 1$ waarvoor de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van $\exp_a$ in het punt $(0, 1)$ gelijk is aan 1.

Afgeleide van logaritme De inverse functie van de exponentiële functie met grondtal a is de logaritmische functie met grondtal a

$$\log_a : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \log_a x.$$

Vanwege de eigenschappen van de afgeleide van een inverse functie volgt uit (10.7) dat

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{cx} \tag{10.9}$$

met dezelfde $c > 0$ als in (10.7).

We kunnen nu dus e ook definiëren door te stellen dat e het grondtal $a > 1$ is waarvoor $c = 1$ in (10.9). We noteren $\ln x = \log_e x$ en er geldt dus dat

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

De definitie (10.5) We laten nu zien dat we hieruit de eerste definitie (10.5) van het getal e weer terugvinden. Uit (10.9) volgt dat $\frac{1}{c}$ de afgeleide is in $x = 1$, zodat

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log_a(1+h)}{h} = \frac{1}{c}.$$

Neem hierin $h = 1/n$ met $n \in \mathbb{N}$. Dan geldt

$$\lim_{n \to \infty} n \log_a \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{c}.$$

Vanwege de eigenschappen van de logaritme is dan

$$\lim_{n \to \infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{c}.$$

We mogen hierin de limiet en de logaritme omwisselen (dit is een gevolg van de continuïteit van de logaritmische functie), zodat

$$\log_a \left(\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right) = \frac{1}{c}. \tag{10.10}$$

We zijn nu weer terug bij onze eerste definitie (10.5) van het getal e. In (10.10) zien we de limiet uit (10.5) namelijk weer terugkomen. Als e het getal $a > 1$ is waarvoor $c = 1$ is in (10.10) dan geldt inderdaad

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

10.1.6 Oefeningen

Oefening 10.1.1. Pas het bewijs van Stelling 10.1.2 (a) aan en bewijs het volgende:

(a) Een dalende, naar onder begrensde rij is convergent.

(b) Een naar boven begrensde rij (a_n) met de eigenschap dat

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \ a_n \leq a_{n+1}$$

is convergent

Oefening 10.1.2. Zij $q > 0$ en $a_n = \frac{q^n}{n!}$.

(a) Laat zien dat $a_n = \frac{q}{n} a_{n-1}$.

(b) Concludeer uit (a) dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat $(a_n)_{n \geq N}$ strikt dalend is.

(c) Leid hieruit af dat de rij (a_n) convergent is.

(d) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Oefening 10.1.3. Bewijs Lemma 10.1.5 met behulp van volledige inductie.

Oefening 10.1.4. We definiëren een rij (a_n) door $a_0 = 0$ en

$$a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n} \qquad \text{voor elke } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Gebruik volledige inductie om te bewijzen dat $a_n \leq 3$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

(b) Bewijs dat de rij (a_n) stijgend is.

(c) Bewijs dat de rij convergent is en bereken de limiet.

Oefening 10.1.5. Zij gegeven $0 < a_0 < b_0$. We definiëren twee rijen (a_n) en (b_n) door

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n} \qquad \text{en} \qquad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}.$$

Dus a_{n+1} is het meetkundig gemiddelde en b_{n+1} is het rekenkundig gemiddelde van a_n en b_n.

(a) Laat zien dat $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$ geldt voor elke n. Gebruik hierbij Oefening 7.2.1.

(b) Leg precies uit waarom hieruit volgt dat de rijen (a_n) en (b_n) convergent zijn.

(c) Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

De gemeenschappelijke limiet van (a_n) en (b_n) heet het **rekenkundig-meetkundig gemiddelde** van a_0 en b_0. U kunt het bewijs van (c) met nog verdere informatie vinden op de Wikipedia pagina `http://en.wikipedia.org/wiki/Arithmetic-geometric_mean`.

Oefening 10.1.6. Zij A een niet-lege naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$. Bewijs dat er een stijgende rij (a_n) is met $a_n \in A$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A.$$

10.2 Limsup en liminf

10.2.1 Definitie

Zij (a_n) een begrensde reële rij. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ is $A_n = \{a_m \mid m \geq n\}$ dan een begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$. Deze verzameling heeft bijgevolg een infimum en een supremum. Zij

$$\begin{aligned} x_n &= \inf A_n = \inf\{a_m \mid m \geq n\} \\ y_n &= \sup A_n = \sup\{a_m \mid m \geq n\}. \end{aligned} \tag{10.11}$$

Uiteraard is $x_n \leq y_n$. Omdat $A_{n+1} \subset A_n$ geldt tevens dat $x_{n+1} \geq x_n$ en $y_{n+1} \leq y_n$. We hebben dus voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ de volgende keten van ongelijkheden

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq y_n \leq \cdots \leq y_2 \leq y_1 \leq y_0.$$

Bijgevolg is (x_n) een stijgende rij en (y_n) een dalende rij. Deze rijen zijn ook begrensd. Bijgevolg zijn ze convergent vanwege Stelling 10.1.2.

Dit leidt tot de volgende definitie.

Definitie 10.2.1. Zij (a_n) een begrensde reële rij. Dan is $(\sup\{a_m \mid m \geq n\})_n$ een dalende rij die naar onder begrensd is. Deze rij is bijgevolg convergent en we definiëren

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_m \mid m \geq n\}. \tag{10.12}$$

Evenzo is $(\{\inf\{a_m \mid m \geq n\})_n$ een stijgende rij die naar boven begrensd is. Deze rij is bijgevolg ook convergent en we definiëren

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_m \mid m \geq n\}. \tag{10.13}$$

We noemen (10.12) de **limes superior** of kortweg **limsup** van de rij (a_n). Net zo heet (10.13) de **limes inferior** of **liminf** van de rij (a_n).

Voorbeeld 10.2.2. Zij $a_n = (-1)^n$. Voor elke n is dan $A_n = \{a_m \mid m \geq n\} = \{-1, 1\}$ met $\sup A_n = 1$ en $\inf A_n = -1$. Dus

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1 \qquad \text{en} \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Het belang van limsup en liminf is onder andere gelegen in het feit dat ze altijd bestaan (voor begrensde rijen). De limiet van een rij hoeft daarentegen niet altijd te bestaan.

10.2.2 Karakterisatie van limsup

De limsup wordt als volgt gekarakteriseerd.

Eigenschap 10.2.3. *Zij (a_n) een begrensde reële rij en zij $L \in \mathbb{R}$. Dan is $L = \limsup_{n\to\infty} a_n$ als en slechts als*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a_n < L + \varepsilon \tag{10.14}$$

en

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} : \exists n \geq n_0 : a_n > L - \varepsilon. \tag{10.15}$$

Bewijs. Neem aan dat $L = \limsup_{n\to\infty} a_n$. Dus $L = \lim_{n\to\infty} y_n$ met

$$y_n = \sup\{a_m \mid m \geq n\}. \tag{10.16}$$

We moeten (10.14) en (10.15) bewijzen.

Neem $\varepsilon > 0$ willekeurig. Omdat de rij (y_n) naar L convergeert is er dan zeker een n_0 met $y_{n_0} < L + \varepsilon$. Vanwege (10.16) is $a_m \leq y_{n_0}$ voor elke $m \geq n_0$. Neem $n \geq n_0$ willekeurig. Dan is $a_n \leq y_{n_0}$ en dus $a_n < L + \varepsilon$. Dit bewijst (10.14).

Neem weer $\varepsilon > 0$ willekeurig. Neem $n_0 \in \mathbb{N}$ willekeurig. Omdat $L = \lim_{n\to\infty} y_n$ is er een $n_1 \geq n_0$ met $L - \varepsilon < y_{n_1}$. Vanwege (10.16) is $L - \varepsilon$ dus geen bovengrens van de verzameling $\{a_m \mid m \geq n_1\}$. Er is bijgevolg een $n \geq n_1$ met $a_n > L - \varepsilon$ en dit bewijst (10.15).

Neem nu omgekeerd aan dat L zodanig is dat (10.14) en (10.15) gelden. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Vanwege (10.14) is er dan een n_0 met $a_n < L + \varepsilon$ voor elke $n \geq n_0$. Dit betekent dat $y_{n_0} \leq L + \varepsilon$. Omdat de rij (y_n) dalend is met als limiet de limsup van (a_n) volgt hieruit dat

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq L + \varepsilon.$$

We hebben $\varepsilon > 0$ willekeurig genomen, en dus is

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq L. \tag{10.17}$$

We kiezen weer $\varepsilon > 0$ willekeurig. Voor elke n_0 is er dan vanwege (10.15) een $n \geq n_0$ met $a_n > L - \varepsilon$. Dit betekent dat $y_{n_0} > L - \varepsilon$ voor elke n_0. Als we de limiet $n_0 \to \infty$ nemen dan volgt hieruit

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \geq L - \varepsilon.$$

Dit geldt voor elke $\varepsilon > 0$ en bijgevolg is

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \geq L. \tag{10.18}$$

Vanwege (10.17) en (10.18) geldt inderdaad dat $L = \limsup_{n\to\infty} a_n$. $\square$

We kunnen (10.14) ook uitdrukken door te zeggen dat

- voor elke $\varepsilon > 0$ zijn er slechts eindig veel $n \in \mathbb{N}$ met $a_n \geq L + \varepsilon$,

en (10.15) door

- voor elke $\varepsilon > 0$ zijn er oneindig veel $n \in \mathbb{N}$ met $a_n > L - \varepsilon$.

De analoge karakterisatie van liminf is als volgt.

Eigenschap 10.2.4. *Zij (a_n) een begrensde reële rij en $L \in \mathbb{R}$. Dan is $L = \liminf_{n\to\infty} a_n$ als en slechts als*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a_n > L - \varepsilon \tag{10.19}$$

en

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} : \exists n \geq n_0 : a_n < L + \varepsilon. \tag{10.20}$$

10.2.3 Limsup, liminf en convergentie

De limsup en liminf kunnen gebruikt worden om convergentie aan te tonen.

Propositie 10.2.5. *Neem aan dat (a_n) een convergente rij is met limiet L. Dan geldt*

$$L = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Bewijs. Om te bewijzen dat $L = \limsup_{n\to\infty} a_n$ gebruiken we (10.14) en (10.15).

Neem $\varepsilon > 0$ willekeurig. Omdat de rij (a_n) convergent is, is er een $n_0 \in \mathbb{N}$ met $|a_n - L| < \varepsilon$ voor elke $n \geq n_0$. Dan is $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ voor elke $n \geq n_0$ en dus zeker $a_n < L + \varepsilon$. Dit bewijst (10.14).

Om (10.15) te bewijzen nemen we $\varepsilon > 0$ en $n_0 \in \mathbb{N}$ willekeurig. Er is een $n_1 \in \mathbb{N}$ met $|a_n - L| < \varepsilon$ voor elke $n \geq n_1$. Neem nu $n = \max\{n_0, n_1\}$. Dan is $n \geq n_0$ en $|a_n - L| < \varepsilon$, zodat in het bijzonder $a_n > L - \varepsilon$. Dit bewijst (10.15).

Vanwege Eigenschap 10.2.3 geldt nu dat $L = \limsup_{n\to\infty} a_n$. Op analoge manier volgt $L = \liminf_{n\to\infty} a_n$. □

Propositie 10.2.6. *Een begrensde reële rij (a_n) is convergent als en slechts als*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n. \tag{10.21}$$

Bewijs. Neem aan dat (a_n) convergent is, zeg met limiet $L \in \mathbb{R}$. Uit Propositie 10.2.5 volgt dat $L = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$ en dus geldt (10.21).

Neem omgekeerd aan dat (10.21) geldt. We definiëren

$$L = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n. \tag{10.22}$$

We nemen $A_n = \{a_m \mid m \geq n\}$ en $x_n = \inf A_n$ en $y_n = \sup A_n$ zoals in (10.11). Omdat $a_n \in A_n$ geldt er

$$x_n \leq a_n \leq y_n. \tag{10.23}$$

Uit de definitie (10.12) en (10.13) van liminf en limsup volgt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Op grond van (10.22) is dus $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ en $\lim_{n\to\infty} y_n = L$. Vanwege (10.23) en de insluitstelling (zie Stelling 9.3.4) is de rij (a_n) convergent met L als limiet. □

10.2.4 Oefeningen

Oefening 10.2.1. Bewijs dat voor elke begrensde reële rij (a_n) geldt dat

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Oefening 10.2.2. Neem aan dat (a_n) en (b_n) begrensde rijen zijn en dat er een $n_0 \in \mathbb{N}$ bestaat met $a_n \leq b_n$ voor alle $n \geq n_0$.

(a) Bewijs dat

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n \qquad \text{en} \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(b) Laat zien dat

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n$$

niet hoeft te gelden.

Oefening 10.2.3. Bereken $\liminf_{n\to\infty} a_n$ en $\limsup_{n\to\infty} a_n$ voor de volgende rijen.

(a) De rij (a_n) met $a_n = (-1)^n \frac{3n+5}{n+1}$

(b) De rij (a_n) met $a_n = \sin n$.

Oefening 10.2.4. Neem aan dat (a_n) en (b_n) begrensde rijen zijn.

(a) Bewijs dat

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(b) Bewijs dat

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

(c) Laat door middel van voorbeelden zien dat gelijkheid in (a) en (b) niet hoeft te gelden.

Oefening 10.2.5. Neem aan dat (a_n) een begrensde rij is. Zij $c \in \mathbb{R}$. Bewijs het volgende.

(a) Als $c \geq 0$, dan geldt

$$\limsup_{n\to\infty}(ca_n) = c \cdot \limsup_{n\to\infty} a_n,$$
$$\liminf_{n\to\infty}(ca_n) = c \cdot \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

(b) Als $c \leq 0$, dan geldt

$$\limsup_{n\to\infty}(ca_n) = c \cdot \liminf_{n\to\infty} a_n,$$
$$\liminf_{n\to\infty}(ca_n) = c \cdot \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Oefening 10.2.6. Voor een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiëren we een nieuwe rij $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ met

$$b_n = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Dus b_n is het rekenkundig gemiddelde van de eerste n termen van de rij (a_n).

(a) Als (a_n) een convergente rij is, dan is (b_n) ook convergent met dezelfde limiet. Bewijs.

(b) Geef een voorbeeld van een divergente rij (a_n) zodanig dat (b_n) wel convergent is.

Oefening 10.2.7. Elk reëel getal x kunnen we op unieke manier schrijven als

$$x = n + r \qquad \text{met } n \in \mathbb{Z} \text{ en } r \in [0, 1[.$$

We noemen n het gehele deel (of entier) van x en r het fractionele deel van x. Het gehele deel wordt genoteerd met

$$n = \lfloor x \rfloor.$$

Het fractionele deel is dan

$$r = x - \lfloor x \rfloor.$$

Voor een gegeven $x \in \mathbb{R}^+$ definiëren we een rij (a_n) door

$$a_n = nx - \lfloor nx \rfloor, \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N},$$

zodat a_n het fractionele deel van nx is.

(a) Neem aan dat $x \in \mathbb{Q}$. Laat zien dat de rij (a_n) uit slechts eindig veel verschillende elementen bestaat. Bepaal $\liminf_{n\to\infty} a_n$ en $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

(b) Neem aan dat $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Laat zien dat alle elementen van de rij (a_n) onderling verschillend zijn en bewijs dat

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \text{en} \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n = 1.$$

10.3 Divergente rijen

10.3.1 Divergent naar $\pm\infty$

Een reële rij die niet convergent is noemen we **divergent**. Er zijn veel manieren waarop een rij kan divergeren. Er zijn begrensde rijen die niet convergeren. Een voorbeeld hiervan is de rij $(-1)^n$ met de termen

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots.$$

De rij gaat op en neer tussen 1 en -1. Ook de rij $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ is begrensd, maar niet convergent.

Een onbegrensde rij is altijd divergent. Dit volgt uit Propositie 9.3.2. Voorbeelden van onbegrensde rijen zijn

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

en

$$0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 2,\ 0,\ -2,\ 0,\ 3,\ 0,\ -3,\ 0,\ 4,\ 0,\ \ldots$$

Een speciaal type van onbegrensde rijen zijn rijen die divergeren naar $+\infty$ of $-\infty$.

Definitie 10.3.1. De reële rij (a_n) **divergeert naar** $+\infty$ als er bij elk reëel getal $M \in \mathbb{R}$ een index n_0 te vinden is zodanig dat $a_n \geq M$ voor alle $n \geq n_0$. We schrijven in dat geval

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \tag{10.24}$$

of

$$a_n \to +\infty \qquad \text{als } n \to \infty.$$

In kwantoren uitgedrukt betekent divergentie naar $+\infty$ dat

$$\forall M \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a_n \geq M. \tag{10.25}$$

Equivalent met (10.25) is

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a_n \geq M. \tag{10.26}$$

In (10.24) gebruiken we het symbool voor limiet en we zullen ook zeggen dat de limiet $+\infty$ is. Toch is de rij niet convergent, maar ze divergeert naar $+\infty$.

De analoge definitie voor divergentie naar $-\infty$ is als volgt.

Definitie 10.3.2. De reële rij (a_n) **divergeert naar** $-\infty$ als er bij elk reëel getal $M \in \mathbb{R}$ een index n_0 te vinden is zodanig dat $a_n \leq M$ voor alle $n \geq n_0$. We schrijven

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \tag{10.27}$$

of

$$a_n \to -\infty \qquad \text{als } n \to \infty.$$

In kwantoren betekent divergentie naar $-\infty$ dat

$$\forall M \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a_n \leq M. \tag{10.28}$$

Relevante waarden van M in (10.28) zijn negatief. Om niet met negatieve waarden te moeten werken gebruikt men ook vaak

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a_n \leq -M \tag{10.29}$$

hetgeen equivalent is met (10.28).

Voorbeeld 10.3.3. We gebruiken de definitie om te laten zien dat de rij

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n} + \sin n\right) = +\infty.$$

Zij $a_n = \sqrt{n} + \sin n$. Omdat $\sin n \geq -1$ geldt zeker dat $a_n \geq \sqrt{n} - 1$.

Neem $M \in \mathbb{R}^+$ willekeurig. Neem $n_0 \in \mathbb{N}$ zo dat $n_0 \geq (M+1)^2$, zodat $\sqrt{n_0} \geq M + 1$. Als dan $n \geq n_0$ dan is

$$a_n \geq \sqrt{n} - 1 \geq \sqrt{n_0} - 1 \geq M.$$

Bijgevolg is aan (10.26) voldaan zodat de rij inderdaad divergeert naar $+\infty$.

Voor stijgende rijen geldt de volgende eigenschap.

Eigenschap 10.3.4. *Zij (a_n) een stijgende rij. Als (a_n) naar boven begrensd is dan is de rij convergent. Als (a_n) niet naar boven begrensd is dan is de rij divergent naar $+\infty$.*

Bewijs. Vanwege Stelling 10.1.2 weten we al dat een stijgende, naar boven begrensde rij convergent is.

Als (a_n) niet naar boven begrensd is, dan geldt voor elke $M \in \mathbb{R}$ dat M geen bovengrens is. Er is dan een $n_0 \in \mathbb{N}$ met $a_{n_0} > M$. Omdat (a_n) stijgend is, geldt dan ook dat $a_n > M$ voor alle $n \geq n_0$. Hiermee is (10.25) bewezen zodat de rij (a_n) naar $+\infty$ divergeert. □

Formuleer zelf de overeenkomstige eigenschap van dalende rijen.

10.3.2 Inleiding tot rekenregels

Voor convergente rijen kennen we de rekenregels uit Propositie 9.4.1 en Stelling 9.4.2 die het verband geven tussen de algebraïsche bewerkingen op $\mathbb{R}$ en limieten van convergente rijen.

Kunnen we deze rekenregels ook uitbreiden naar rijen met limiet $\pm\infty$? De uitbreiding van Propositie 9.4.1 bestaat inderdaad en luidt als volgt.

Propositie 10.3.5. *Zij (a_n) een reële rij.*

(a) *Neem aan dat $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Zij $c \in \mathbb{R}$. Dan geldt*

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = \begin{cases} +\infty, & \text{als } c > 0, \\ 0, & \text{als } c = 0, \\ -\infty, & \text{als } c < 0. \end{cases}$$

(b) *Neem aan dat $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Zij $c \in \mathbb{R}$. Dan geldt*

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = \begin{cases} -\infty, & \text{als } c > 0, \\ 0 & \text{als } c = 0, \\ +\infty & \text{als } c < 0. \end{cases}$$

Bewijs. Het bewijs hiervan wordt als oefening aan de lezer overgelaten. □

Laten we nu kijken naar een situatie met twee rijen (a_n) en (b_n) met limiet $+\infty$. Dus

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \text{en} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty. \tag{10.30}$$

Wat kunnen we zeggen over de somrij (a_n+b_n) ? Intuïtief kunnen we het antwoord wel vinden. De elementen van de rij (a_n) worden heel groot als de index n groot wordt. Hetzelfde geldt voor de elementen van de rij (b_n). De som $a_n + b_n$ zal dan ook groot zijn. We verwachten dus dat uit (10.30) volgt dat

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty.$$

Dit geldt inderdaad en het bewijs vanuit de definitie is niet moeilijk.

Eigenschap 10.3.6. *Neem aan dat (a_n) en (b_n) twee rijen zijn die voldoen aan* (10.30). *Dan geldt*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty.$$

Bewijs. Neem $M \in \mathbb{R}$ willekeurig. Omdat (a_n) naar $+\infty$ divergeert is er een $n_1 \in \mathbb{N}$ met $a_n \geq M/2$ voor alle $n \geq n_1$. Omdat (b_n) naar $+\infty$ divergeert is er ook een $n_2 \in \mathbb{N}$ met $b_n \geq M/2$ voor alle $n \geq n_2$. Neem $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Als $n \geq n_0$ dan geldt zowel $a_n \geq M/2$ als $b_n \geq M/2$ en bijgevolg is

$$a_n + b_n \geq \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M.$$

□

Vanwege Eigenschap 10.3.6 spreken we af dat

$$\boxed{+\infty + (+\infty) = +\infty.}$$

Met deze afspraak is de rekenregel

$$\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n),$$

die geldig is als de limieten reële getallen zijn, ook geldig als de limieten van (a_n) en (b_n) allebei $+\infty$ zijn.

We vragen ons vervolgens af wat we kunnen zeggen over het verschil van twee rijen (a_n) en (b_n) die aan (10.30) voldoen. Is er dan een limiet van de verschilrij $(a_n - b_n)$? Hiermee samenhangend is de vraag of we het verschil $+\infty - (+\infty)$ op een zinvolle manier zouden kunnen definiëren.

Aan de hand van eenvoudige voorbeelden van rijen kunnen we inzien dat er geen eenduidig antwoord te geven is.

- Neem $a_n = n$ en $b_n = n$. Dan geldt (10.30) en $a_n - b_n = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Uiteraard is dan
$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0.$$
- Neem $a_n = n + x$ met $x \in \mathbb{R}$ vast en $b_n = n$. Weer geldt (10.30) maar nu geldt $a_n - b_n = x$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dus
$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = x \in \mathbb{R}.$$
- Neem $a_n = 2n$ en $b_n = n$. Opnieuw geldt (10.30) en nu is $a_n - b_n = n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dus
$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = +\infty.$$
- Neem $a_n = n$ en $b_n = 2n$. Dan geldt (10.30) weer en nu is $a_n - b_n = -n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dus nu krijgen we
$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = -\infty.$$
- Neem $a_n = n + \sin n$ en $b_n = n$. Dan geldt (10.30) en nu is $a_n - b_n = \sin n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Nu vinden we
$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) \quad \text{bestaat niet.}$$

Uit de voorbeelden zien we dat we uit (10.30) helemaal niets kunnen besluiten omtrent de verschilrij $(a_n - b_n)$. De verschilrij kan een limiet hebben of niet. Als ze een limiet heeft, dan kan de limiet een eindig reëel getal zijn, maar het kan ook dat de limiet $+\infty$ of $-\infty$ is. Alles kan dus nog gebeuren.

Het is daarom ook niet mogelijk om het verschil $+\infty - (+\infty)$ op een zinvolle manier te definiëren. We vatten dit gedrag samen door te stellen:

$$\boxed{+\infty - (+\infty) \quad \text{is een onbepaalde vorm.}}$$

10.3.3 Rekenregels voor $+\infty$ en $-\infty$

Naast $+\infty + (+\infty)$ en $+\infty - (+\infty)$ zijn er nog heel wat andere mogelijkheden om $+\infty$ en $-\infty$ te combineren met de algebraïsche bewerkingen op $\mathbb{R}$. We geven in Propositie 10.3.7 een overzicht over de bewerkingen die op een zinvolle manier uitgebreid kunnen worden tot $\pm\infty$.

De uitspraken uit Propositie 10.3.7 moeten geïnterpreteerd worden als uitspraken over limieten van rijen. Bijvoorbeeld de uitspraak in (c) dat

$$+\infty \cdot x = -\infty \qquad \text{als } x \in \mathbb{R}_0^-$$

betekent het volgende. Als (a_n) en (b_n) twee willekeurige reële rijen zijn met

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \text{en} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = x \in \mathbb{R}_0^-$$

dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty.$$

Formuleer voor uzelf alle onderdelen van Propositie 10.3.7 als uitspraken over rijen.

Propositie 10.3.7. (a) *Voor de som geldt*

$$+\infty + (+\infty) = +\infty, \qquad -\infty + (-\infty) = -\infty$$

en voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt,

$$x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty, \qquad x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty.$$

(b) *Voor het verschil geldt*

$$+\infty - (-\infty) = +\infty, \qquad -\infty - (+\infty) = -\infty$$

en voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt,

$$+\infty - x = x - (-\infty) = +\infty, \qquad -\infty - x = x - (+\infty) = -\infty.$$

(c) *Voor het product geldt*

$$+\infty \cdot (+\infty) = -\infty \cdot (-\infty) = +\infty, \qquad +\infty \cdot (-\infty) = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Voor $x \in \mathbb{R}_0^+$ geldt

$$+\infty \cdot x = x \cdot (+\infty) = +\infty, \qquad -\infty \cdot x = x \cdot (-\infty) = -\infty,$$

en voor $x \in \mathbb{R}_0^-$ geldt

$$+\infty \cdot x = x \cdot (+\infty) = -\infty, \qquad -\infty \cdot x = x \cdot (-\infty) = +\infty.$$

(d) *Voor het quotiënt geldt voor $x \in \mathbb{R}$*

$$\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0.$$

Voor $x \in \mathbb{R}_0^+$ geldt

$$\frac{+\infty}{x} = +\infty, \qquad \frac{-\infty}{x} = -\infty$$

en voor $x \in \mathbb{R}_0^-$ geldt

$$\frac{+\infty}{x} = -\infty, \qquad \frac{-\infty}{x} = +\infty.$$

10.3.4 Onbepaalde vormen

Propositie 10.3.7 bevat niet alle mogelijke combinaties van $\pm\infty$ met de algebraïsche bewerkingen op $\mathbb{R}$. De niet genoemde combinaties zijn **onbepaalde vormen**. Het overzicht van onbepaalde vormen is.

Propositie 10.3.8. (a) *Onbepaalde vormen voor de som zijn*

$$+\infty + (-\infty) \qquad \textit{en} \qquad -\infty + (+\infty)$$

(b) *Onbepaalde vormen voor het verschil zijn*

$$+\infty - (+\infty) \qquad \textit{en} \qquad -\infty - (-\infty)$$

(c) *Onbepaalde vormen voor het product zijn*

$$0 \cdot (+\infty) \qquad (+\infty) \cdot 0, \qquad (-\infty) \cdot 0 \qquad \textit{en} \qquad 0 \cdot (-\infty).$$

(d) *Onbepaalde vormen voor het quotiënt zijn*

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{+\infty}{+\infty}, \qquad \frac{+\infty}{-\infty}, \qquad \frac{-\infty}{+\infty} \qquad \textit{en} \qquad \frac{-\infty}{-\infty}.$$

Voorbeeld 10.3.9. We geven voorbeelden waaruit blijkt dat $0 \cdot (+\infty)$ een onbepaalde vorm is. We gaan dus een aantal voorbeelden geven van rijen (a_n) en (b_n) die voldoen aan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \text{en} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty. \tag{10.31}$$

Afhankelijk van het voorbeeld zal de productrij $(a_n \cdot b_n)$ al dan niet een limiet hebben, en als er een limiet is zal de waarde van de limiet afhangen van het preciese voorbeeld. Ga zelf na dat de rijen (a_n) en (b_n) inderdaad aan (10.31) voldoen.

(a) Neem $a_n = 0$ en $b_n = n$. Dan geldt $a_n \cdot b_n = 0$ en dus

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

(b) Neem $a_n = \frac{1}{n}$ en $b_n = n$. Dan geldt $a_n \cdot b_n = 1$ en dus

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 1.$$

(c) Neem $x \in \mathbb{R}$ vast en $a_n = \frac{x}{n}$ en $b_n = n$. Dan geldt $a_n \cdot b_n = x$ en dus

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = x \in \mathbb{R}.$$

(d) Neem $a_n = \frac{1}{n}$ en $b_n = n^2$. Dan geldt $a_n \cdot b_n = n$ en dus

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty.$$

(e) Neem $a_n = -\frac{1}{n}$ en $b_n = n^2$. Dan geldt $a_n \cdot b_n = -n$ en dus

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty.$$

(f) Neem $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ en $b_n = n$. Dan geldt $a_n \cdot b_n = (-1)^n$ en dus

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \quad \text{bestaat niet.}$$

10.3.5 Uitbreiding van limsup en liminf

Tenslotte willen we ook $\pm\infty$ invoeren als mogelijke waarden van de limsup en liminf van een reële rij (a_n).

We beginnen met het invoeren van het supremum en infimum van een willekeurige niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$. Herinner u dat we in Hoofdstuk 9 de reële getallen hebben ingevoerd als een totaal geordend veld dat volledig is. Er geldt dus dat elke niet-lege naar boven begrensde deelverzameling A van $\mathbb{R}$ een supremum $\sup A \in \mathbb{R}$ heeft. Elke niet-lege naar onder begrensde deelverzameling A heeft een infimum $\inf A \in \mathbb{R}$.

Voor verzamelingen die niet naar boven of naar onder begrensd zijn voeren we het supremum of het infimum als volgt in.

Definitie 10.3.10. Zij $A \subset \mathbb{R}$.

(a) Als A niet naar boven begrensd is, dan definiëren we

$$\sup A = +\infty.$$

(b) Als A niet naar onder begrensd is, dan definiëren we

$$\inf A = -\infty.$$

Nu zullen we de definitie van limsup en liminf uitbreiden tot willekeurige reële rijen. De definitie is analoog aan die van limsup in Definitie 10.2.1.

Definitie 10.3.11. Zij (a_n) een reële rij. Dan is

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_m \mid m \geq n\} \tag{10.32}$$

en

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_m \mid m \geq n\}. \tag{10.33}$$

Als de rij (a_n) niet naar boven begrensd is, dan is ook de verzameling

$$A_n = \{a_m \mid m \geq n\}$$

niet naar boven begrensd. In dat geval is $\sup A_n = +\infty$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ en er volgt uit (10.32) dat

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Als de rij (a_n) wel naar boven begrensd is, dan is A_n naar boven begrensd en $\sup A_n$ is een reëel getal. De rij $(\sup A_n)$ is dalend en heeft, vanwege het analogon van Eigenschap 10.3.4 voor dalende rijen, bijgevolg een limiet, waarbij de limiet ook $-\infty$ kan zijn. Deze limiet is gelijk aan $\limsup_{n\to\infty} a_n$ volgens (10.32).

10.3.6 Oefeningen

Oefening 10.3.1. Geef een voorbeeld van een rij die niet naar boven begrensd is, maar die toch niet divergeert naar $+\infty$.

Oefening 10.3.2. Formuleer en bewijs het analogon van Eigenschap 10.3.4 voor dalende rijen.

Oefening 10.3.3. Neem aan dat (a_n) en (b_n) twee reële rijen zijn waarvoor geldt dat er een $n_0 \in \mathbb{N}$ bestaat met $a_n \leq b_n$ voor alle $n \geq n_0$. Zijn de volgende uitspraken waar? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(a) Als (a_n) divergeert naar $+\infty$, dan divergeert (b_n) ook naar $+\infty$.

(b) Als (b_n) divergeert naar $+\infty$, dan divergeert (a_n) ook naar $+\infty$.

(c) Als (a_n) divergeert naar $-\infty$, dan divergeert (b_n) ook naar $-\infty$.

(d) Als (b_n) divergeert naar $-\infty$, dan divergeert (a_n) ook naar $-\infty$.

Oefening 10.3.4. Geef het bewijs van Propositie 10.3.5.

Oefening 10.3.5. Neem aan dat (a_n) en (b_n) twee reële rijen zijn. Veronderderstel dat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ en dat (b_n) naar onder begrensd is. Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty.$$

Oefening 10.3.6. Geef voorbeelden waaruit blijkt dat de volgende vormen inderdaad onbepaald zijn.

(a) $0 \cdot (-\infty)$, (b) $\dfrac{+\infty}{-\infty}$, (c) $\dfrac{0}{0}$.

Oefening 10.3.7. Welke van de volgende vormen zijn onbepaald? Leg uit.

(a) $(+\infty)^{+\infty}$ (b) $1^{+\infty}$ (c) $0^{+\infty}$

Oefening 10.3.8. Geef een voorbeeld van een rij (a_n) waarvoor geldt dat $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ en $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Oefening 10.3.9. Zij (a_n) een reële rij. Bewijs dat de rij naar $+\infty$ divergeert als en slechts als $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Oefening 10.3.10. In de cursus is $\sup A$ gedefinieerd voor elke niet-lege deelverzameling A van $\mathbb{R}$. Als A niet-leeg en naar boven begrensd is dan is $\sup A$ een reëel getal, en als A niet naar boven begrensd is dan is $\sup A = +\infty$ volgens Definitie 10.3.10.

Neem aan dat u $\sup A$ zou moeten definiëren voor het geval dat A de lege verzameling is. Wat zou uw definitie van $\sup \emptyset$ zijn? En van $\inf \emptyset$? Waarom ?

10.4 Extra oefeningen over Hoofdstuk 10

Oefening 10.4.1. Voor een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiëren we een nieuwe rij $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ door

$$b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

voor $n \in \mathbb{N}_0$. Dus b_n is het rekenkundig gemiddelde van de eerste n elementen uit de rij (a_n).

(a) Geef een voorbeeld van een divergente rij (a_n) waarvoor de rij (b_n) convergent is.

(b) Neem aan dat (a_n) een convergente rij is. Bewijs dat (b_n) dan ook convergent is, met dezelfde limiet.

(c) Als de rij (a_n) onbegrensd is (en dus zeker divergent is), kan het dan toch zijn dat (b_n) convergent is? Geef een voorbeeld hiervan, of bewijs dat het niet kan.

Oefening 10.4.2. Een reëel getal heeft altijd een decimale ontwikkeling. We gaan dit bekijken voor getallen in $[0, 1]$.

Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ een rij van decimalen. Dus $a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ voor elke $n \in \mathbb{N}_0$. Voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ hebben we het getal x_n met de eindige decimale ontwikkeling

$$x_n = 0, a_1 a_2 \cdots a_n$$

(a) Laat zien dat de getallen x_n gegeven worden door de recursierelatie

$$x_n = x_{n-1} + \frac{a_n}{10^n} \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}_0$$

met beginwaarde $x_0 = 0$.

(b) Bewijs dat de rij (x_n) stijgend en naar boven begrensd is.

(c) Concludeer dat de rij (x_n) convergent is.

(d) In het speciale geval dat $a_n = 9$ voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ is de limiet van (x_n) gelijk aan 1. Bewijs.

(e) Bewijs in het algemene geval dat de limiet ≤ 1 is.

Als x de limiet van de rij (x_n) is, dan schrijven we

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots$$

en we zeggen dat dit de decimale ontwikkeling van het getal x is.

Oefening 10.4.3. (vervolg) We willen nu ook de omgekeerde weg volgen. Dat wil zeggen we beginnen met $x \in [0, 1]$ en we zoeken $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ zodanig dat de rij (x_n) gedefinieerd door $x_0 = 0$ en

$$x_n = x_{n-1} + \frac{a_n}{10^n} \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}_0$$

convergeert naar x.

Voor $x = 1$ weten we dat er zo'n rij bestaat. Daarom nemen we in wat volgt aan dat $0 \leq x < 1$.

(a) Laat zien dat er een $a_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ bestaat zodanig dat voor $x_1 = \frac{a_1}{10}$ geldt

$$x_1 \leq x < x_1 + \frac{1}{10}.$$

(b) Neem nu aan dat $n \geq 2$ en dat we x_{n-1} gevonden hebben met

$$x_{n-1} \leq x < x_{n-1} + \frac{1}{10^{n-1}}.$$

Bewijs dat $a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ bestaat zo dat voor $x_n = x_{n-1} + \frac{a_n}{10^n}$ geldt dat

$$x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}.$$

(c) Gegeven $x \in [0, 1[$ vinden we uit (a) en (b) op een inductieve manier een rij (a_n) en een bijbehorende rij (x_n). Bewijs dat (x_n) convergeert naar x.

Oefening 10.4.4. Definieer de reële rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ door $a_0 = 1$ en de recursierelatie

$$a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n} \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Bewijs dat de rij stijgend is en naar boven begrensd.

(b) Toon aan dat de rij convergeert en bepaal de limiet.

Oefening 10.4.5. Neem aan dat (a_n) en (b_n) twee reële rijen zijn en defineer

$$c_n = \max\{a_n, b_n\}, \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}$$

(a) Neem aan dat (a_n) en (b_n) convergente rijen zijn. Bewijs dat (c_n) dan ook een convergente rij is en dat

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \max\{\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n\}.$$

(b) Neem aan dat (a_n) en (b_n) begrensde rijen zijn (niet noodzakelijk convergent). Geldt dan de volgende gelijkheid:

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = \max\{\limsup_{n\to\infty} a_n, \limsup_{n\to\infty} b_n\} \quad ?$$

Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(c) Dezelfde vraag als in (b) voor de gelijkheid

$$\liminf_{n\to\infty} c_n = \max\{\liminf_{n\to\infty} a_n, \liminf_{n\to\infty} b_n\}$$

Oefening 10.4.6. Neem aan dat (a_n) een rij van positieve getallen is die voldoet aan

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m$$

voor elke $n, m \in \mathbb{N}$. Bewijs dat de rij $(\frac{a_n}{n})_n$ convergent is en dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{a_m}{m}.$$

Hint:

- Neem eerst $m = 1$. Dan volgt $a_{n+1} \leq a_n + a_1$. Leid hieruit af dat $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq a_1$.
- Neem $m = 2$. Dan volgt $a_{n+2} \leq a_n + a_2$. Bewijs dat hieruit volgt dat $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_2}{2}$.
- Beschouw algemene m en maak het bewijs af...

Oefening 10.4.7.

(a) Zij (a_n) een rij van strikt positieve getallen waarvoor geldt dat de limiet

$$L_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

bestaat. Bewijs dat dan ook de limiet

$$L_2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

bestaat en dat $L_1 = L_2$.

(b) Geldt de omkering van (a) ook? D.w.z. als de limiet L_2 bestaat, bestaat dan de limiet L_1 ook?

(c) Uit de theorie van machtreeksen (zie Calculus I of Analyse I) volgt dat de convergentiestraal van een machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ gelijk is aan $\left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}$.

In het geval dat de rij $(|c_n|/|c_{n+1}|)_n$ convergent is, dan is convergentiestraal ook gelijk aan $\lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$. Laat zien dat dit volgt uit onderdeel (a).

Hoofdstuk 11

Cauchyrijen en deelrijen

11.1 Cauchyrijen

11.1.1 Definitie

Cauchyrijen zijn genoemd naar de Franse wiskundige Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) die een van de grondleggers was van de wiskundige analyse.

Definitie 11.1.1. Een reële rij (a_n) is een **Cauchyrij** als voor elke $\varepsilon > 0$ een $n_0 \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat voor $n, m \in \mathbb{N}$ met $n \geq n_0$ en $m \geq n_0$ geldt dat $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

In kwantoren uitgeschreven betekent dit dat (a_n) een Cauchyrij is als en slechts als

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \forall m \geq n_0 : \ |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{11.1}$$

Bij een Cauchyrij liggen de elementen ver weg in de rij allemaal dicht bij elkaar. Precieser gezegd: als we een zekere $\varepsilon > 0$ voorschrijven dan geldt voor n en m voldoende groot (namelijk voor $n, m \geq n_0$) steeds dat $|a_n - a_m| < \varepsilon$. De afstand tussen a_n en a_m is dus kleiner dan ε.

Propositie 11.1.2. *Een convergente rij is een Cauchyrij.*

Bewijs. Neem aan dat (a_n) een convergente rij is met limiet L. Kies $\varepsilon > 0$. Er is dan een n_0 zodanig dat $|a_n - L| < \varepsilon/2$ geldt voor alle $n \geq n_0$. Als dan $n \geq n_0$ en $m \geq n_0$ dan geldt zowel $|a_n - L| < \varepsilon/2$ als $|a_m - L| < \varepsilon/2$ en hieruit volgt vanwege de driehoeksongelijkheid dat

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |a_m - L| < \varepsilon.$$

Dit bewijst dat (a_n) aan (11.1) voldoet en bijgevolg is (a_n) een Cauchyrij. $\square$

11.1.2 Een Cauchyrij is convergent

Een belangrijke eigenschap is dat het omgekeerde van Propositie 11.1.2 ook geldt. Voordat we dat bewijzen laten we eerst zien dat een Cauchyrij begrensd is.

Lemma 11.1.3. *Een Cauchyrij is begrensd.*

Bewijs. Zij (a_n) een Cauchyrij. Dan geldt (11.1) en in het bijzonder kunnen we $\varepsilon = 1$ nemen in (11.1). Er volgt dat er een $n_0 \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat

$$\forall n \geq n_0 : \forall m \geq n_0 : |a_n - a_m| < 1.$$

Hierin nemen we $m = n_0$ en er volgt

$$\forall n \geq n_0 : |a_n - a_{n_0}| < 1.$$

Bijgevolg geldt voor elke $n \geq n_0$

$$a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1.$$

Het staartstuk van de rij $(a_n)_{n \geq n_0}$ is dus naar onder begrensd door $a_{n_0} - 1$ en naar boven begrensd door $a_{n_0} + 1$. Dat staartstuk is dus begrensd en dan is ook de hele rij (a_n) begrensd. □

Stelling 11.1.4. *Een Cauchyrij is convergent.*

Bewijs. Zij (a_n) een Cauchyrij. Uit Lemma 11.1.3 weten we dat de rij begrensd is. We kennen dus $\liminf_{n\to\infty} a_n$ en $\limsup_{n\to\infty} a_n$ en dit zijn reële getallen. Net zoals bij de definitie van liminf en limsup definiëren we

$$A_n = \{a_m \mid m \geq n\}, \qquad x_n = \inf A_n \qquad \text{en} \qquad y_n = \sup A_n. \tag{11.2}$$

We weten dan dat

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \qquad \text{en} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = \limsup_{n\to\infty} a_n. \tag{11.3}$$

Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Vanwege de Cauchy-eigenschap (11.1) bestaat er een $n_0 \in \mathbb{N}$ zodanig dat $|a_n - a_m| < \varepsilon$ voor alle $n, m \geq n_0$. Kies $n \geq n_0$ willekeurig. Dan geldt $|a_n - a_m| < \varepsilon$ voor alle $m \geq n$ en dus vanwege de definitie (11.2) van A_n dat

$$A_n \subset \,]a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon[.$$

Bijgevolg is $x_n = \inf A_n \geq a_n - \varepsilon$ en $y_n = \sup A_n \leq a_n + \varepsilon$, zodat $y_n - x_n \leq 2\varepsilon$. We weten ook dat $x_n \leq y_n$ zodat

$$0 \leq y_n - x_n \leq 2\varepsilon. \tag{11.4}$$

Deze ongelijkheden gelden voor elke $n \geq n_0$.

Neem nu de limiet $n \to \infty$. Dan blijven de ongelijkheden (11.4) behouden en er volgt vanwege (11.3)

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} a_n - \liminf_{n\to\infty} a_n \leq 2\varepsilon.$$

Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig gekozen kan worden, volgt hieruit dat

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

De limsup en liminf zijn gelijk, dus de rij (a_n) is convergent vanwege Propositie 10.2.6. □

Opmerking 11.1.5. De definitie van Cauchyrij (11.1) maakt geen gebruik van de limiet L van de rij. Dat is in sommige situaties een voordeel.

Opmerking 11.1.6. Het feit dat elke Cauchyrij in $\mathbb{R}$ convergent is is een belangrijke eigenschap van de reëele getallen. Deze eigenschap geldt niet voor de rationale getallen $\mathbb{Q}$. De volledigheid van $\mathbb{R}$ heeft een essentiële rol gespeeld in het bewijs van Stelling 11.1.4 (waarom precies?).

In feite is Stelling 11.1.4 equivalent met de volledigheid van $\mathbb{R}$. Hiermee bedoelen we het volgende. Herinner u dat $\mathbb{R}$ is ingevoerd als een totaal geordend veld dat **volledig** is in de zin dat elke niet-lege naar boven begrensde deelverzameling een supremum heeft in $\mathbb{R}$ en elke niet-lege naar onder begrensde deelverzameling een infimum in $\mathbb{R}$. Zoals we gezien hebben volgt hieruit dat elke Cauchyrij convergent is.

Een andere manier om de volledigheid van $\mathbb{R}$ uit te drukken is door: 'elke Cauchyrij is convergent'. Dan kan men laten zien dat elke niet-lege naar boven begrensde deelverzameling een supremum in $\mathbb{R}$ heeft en dat elke niet-lege naar onder begrensde deelverzameling een infimum in $\mathbb{R}$ heeft. Dus dan is $\mathbb{R}$ ook volledig in de oorspronkelijke zin en daarom is Stelling 11.1.4 equivalent met de volledigheid van $\mathbb{R}$.

Het begrip Cauchyrij kan eenvoudig uitgebreid worden naar rijen in algemenere verzamelingen waarin een afstandsbegrip aanwezig is, zoals bv. $\mathbb{C}$ of $\mathbb{R}^n$. Zo'n verzameling wordt een metrische ruimte genoemd (voor details, zie de cursus 'Analyse 1'). Als het dan waar is dat elke Cauchyrij convergeert (naar een element van de metrische ruimte zelf) dan zullen we de metrische ruimte volledig noemen. Men kan aantonen dat dit inderdaad het geval is voor $\mathbb{C}$ of $\mathbb{R}^n$. Deze ruimten zijn dus volledig.

Merk op dat het in $\mathbb{C}$ of $\mathbb{R}^n$ geen zin heeft om te spreken van niet-lege naar boven of naar onder begrensde deelverzamelingen en van suprema en infima, omdat er geen ordening aanwezig is op deze verzamelingen. Een uitbreiding van de oorspronkelijke definitie van volledigheid naar $\mathbb{C}$ of $\mathbb{R}^n$ is bijgevolg niet mogelijk.

Voorbeeld 11.1.7. Zij a_n voor $n \geq 1$ gedefinieerd door

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Dan is

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

en dit is een som met n termen waarin elke term $\geq \frac{1}{2n}$ is. Dus

$$a_{2n} - a_n \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Hieruit volgt dat (a_n) geen Cauchyrij is en bijgevolg is de rij (a_n) niet convergent.

11.1.3 Oefeningen

Oefening 11.1.1. Zij (a_n) een reële rij waarvoor geldt

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon.$$

(a) Volgt hieruit dat de rij (a_n) een Cauchyrij is (en dus convergent is)? Zo ja, geef een bewijs. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

(b) Dezelfde vraag als nog extra gegeven is dat de rij (a_n) begrensd is.

Oefening 11.1.2. Zij (a_n) een reële rij waarvoor geldt dat er een $c \in [0, 1[$ en een $n_0 \in \mathbb{N}_0$ bestaan zodanig dat

$$\forall n \geq n_0 : |a_{n+1} - a_n| \leq c|a_n - a_{n-1}|$$

Bewijs dat (a_n) een Cauchyrij is.

Oefening 11.1.3. Een complex getal z heeft zoals bekend de vorm $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$. Een rij (z_n) van complexe getallen noemen we convergent met limiet $z^* \in \mathbb{C}$ als

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \ |z_n - z^*| < \varepsilon. \tag{11.5}$$

Dit lijkt sterk op de definitie van convergentie voor reële rijen. Het verschil is dat de absolute waarde in (11.5) betrekking heeft op de absolute waarde van het complexe getal $z_n - z$. Als $z_n = x_n + iy_n$ en $z = x + iy$ dan is

$$|z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}.$$

(a) Zij (z_n) een rij van complexe getallen. Neem $x_n = \operatorname{Re} z_n$ en $y_n = \operatorname{Im} z_n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Dan zijn (x_n) en (y_n) twee reële rijen. Bewijs dat (z_n) convergent is als en slechts als de twee rijen (x_n) en (y_n) allebei convergent zijn.

Een complexe rij (z_n) noemen we een Cauchyrij als

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \forall m \geq n_0 : \ |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Ook hier is $|z_n - z_m|$ de absolute waarde van een complex getal.

(b) Neem aan dat de complexe rij (z_n) een Cauchyrij is. Bewijs dat (z_n) convergent is.

11.2 Deelrijen

11.2.1 Definitie

Zij (a_n) een rij in de verzameling X:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, \ldots$$

Het komt wel eens voor dat we een aantal elementen van de rij willen weglaten. Dit aantal kan eindig of oneindig zijn. Als er oneindig veel elementen overblijven vormen de overblijvende elementen van de rij zelf ook weer een rij. Een rij die we op deze manier uit de rij (a_n) kunnen verkrijgen noemen we een deelrij van de rij (a_n).

We kunnen bijvoorbeeld a_0, a_3 en a_8 weglaten en we houden over

$$a_1, a_2, a_4, a_5, a_6, a_7, a_9, a_{10}, a_{11}, \ldots$$

Als we alle a_n met even n weglaten houden we over

$$a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11}, a_{13}, \ldots$$

Een andere deelrij is de rij

$$a_0, a_1, a_2, a_6, a_{24}, a_{120}, a_{720}, \ldots$$

Een deelrij wordt vastgelegd door de indices van de overblijvende termen. In het laatste voorbeeld is dat de rij

$$0, 1, 2, 6, 24, 120, 720, \dots$$

Deze rij is een strikt stijgende rij in $\mathbb{N}$.

Dit leidt tot de volgende definitie.

Definitie 11.2.1. Zij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een rij in de verzameling X. Zij (n_k) een strikt stijgende rij in $\mathbb{N}$ en zij

$$b_k = a_{n_k} \qquad \text{voor } k \in \mathbb{N}.$$

Dan is de rij $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ een **deelrij** van de rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

De volgende eenvoudige stelling geldt voor deelrijen van convergente rijen.

Stelling 11.2.2. *Als de reële rij (a_n) convergent is, dan convergeert elke deelrij van (a_n) naar dezelfde limiet.*

Bewijs. Neem aan dat (a_n) een convergente rij is met limiet L. Zij (n_k) een strikt stijgende rij in $\mathbb{N}$.

Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Er is dan een N zodanig dat $|a_n - L| < \varepsilon$ voor alle $n \geq N$. Omdat de rij (n_k) een strikt stijgende rij van natuurlijke getallen is, geldt $n_k \geq k$. Als dus $k \geq N$ dan $n_k \geq N$ en er geldt $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$ voor elke $k \geq n_0$. Dit betekent dat de deelrij $(a_{n_k})_k$ convergent is met limiet L. □

Een rij die zelf niet convergent is, kan wel convergente deelrijen hebben. De alternerende rij $((-1)^n)$ is zelf niet convergent, maar heeft wel de convergente deelrijen $1, 1, 1, 1, \dots$ en $-1, -1, -1, -1, \dots$.

11.2.2 Ophopingspunten

Definitie 11.2.3. Zij (a_n) een reële rij. We noemen $x \in \mathbb{R}$ een **ophopingspunt** van de rij als voor elke $\varepsilon > 0$ geldt dat

$$\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - x| < \varepsilon\}$$

een oneindige deelverzameling is van $\mathbb{N}$.

Stelling 11.2.4. *Zij (a_n) een reële rij en $x \in \mathbb{R}$ een ophopingspunt van (a_n). Dan is er een deelrij van (a_n) die convergeert naar x.*

Bewijs. We gaan inductief een strikt stijgende rij (n_k) van natuurlijke getallen invoeren. We beginnen met $n_0 = 0$.

Neem $k \geq 1$ en veronderstel dat we $n_0, \dots, n_{k-1}$ reeds kennen. Vanwege de definitie van ophopingspunt is de verzameling

$$\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - x| < \frac{1}{k}\}$$

oneindig groot. Er is dan zeker ook een element in deze verzameling dat strikt groter is dan n_{k-1}. We noemen dat element n_k. Dan is dus $n_k > n_{k-1}$ en

$$|a_{n_k} - x| < \frac{1}{k}. \tag{11.6}$$

We krijgen zo een strikt stijgende rij (n_k) zodat (11.6) geldt voor elke $k \geq 1$. Dan is (a_{n_k}) een deelrij van (a_n) die vanwege (11.6) convergeert naar x. □

11.2.3 Stelling van Bolzano-Weierstrass

Zij (a_n) een begrensde reële rij. In het vorige hoofdstuk hebben we de lim sup en lim inf van de rij ingevoerd. We herinneren aan de karakterisatie (10.14) en (10.15) van $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

Lemma 11.2.5. *Zij (a_n) een begrensde reële rij. Dan zijn $\limsup_{n\to\infty} a_n$ en $\liminf_{n\to\infty} a_n$ ophopingspunten van de rij (a_n).*

Bewijs. Zij $x = \limsup_{n\to\infty} a_n$ en veronderstel dat x geen ophopingspunt van de rij (a_n) is.

Dan geldt vanwege de definitie van ophopingspunt dat voor een zekere $\varepsilon > 0$ de verzameling

$$\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - x| < \varepsilon\}$$

eindig is. Deze verzameling is dan leeg, of heeft een grootste element. In beide gevallen is er een $n_1 \in \mathbb{N}$ zodanig dat $|a_n - x| \geq \varepsilon$ geldt voor alle $n \geq n_1$.

Ook geldt vanwege (10.14) dat er een $n_2 \in \mathbb{N}$ is zo dat $a_n < x + \varepsilon$ voor alle $n \geq n_2$. Vanwege (10.15) met $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ is er een $n \geq n_0$ met $a_n > x - \varepsilon$. Omdat $n \geq n_2$ is ook $a_n < x + \varepsilon$ zodat $|a_n - x| < \varepsilon$. Er geldt echter ook dat $n \geq n_1$ zodat ook $|a_n - x| \geq \varepsilon$. Dit is een tegenspraak en er volgt dat $\limsup_{n\to\infty}$ wel een ophopingspunt van de rij (a_n) is.

Het bewijs dat $\liminf_{n\to\infty} a_n$ een ophopingspunt is gaat analoog. □

Gevolg 11.2.6. Zij (a_n) een begrensde rij. Dan is er een deelrij van (a_n) die convergeert naar $\limsup_{n\to\infty} a_n$. Er is ook een deelrij van (a_n) die convergeert naar $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Gevolg 11.2.7. Elke begrensde rij heeft een convergente deelrij.

Dit is de stelling van Bolzano-Weierstrass voor rijen. Ze komt hier tevoorschijn als een eenvoudig gevolg van de eerdere zaken die we bewezen hebben. Toch is het een belangrijk resultaat.

De stelling is genoemd naar de Oostenrijkse wiskundige Bernard Bolzano (1781-1848) en de Duitse wiskundige Karl Weierstrass (1815-1897). Weierstrass is samen met Cauchy de grondlegger van de moderne wiskundige analyse.

11.2.4 Oefeningen

Oefening 11.2.1. Leg uit waarom de Gevolgen 11.2.6 en 11.2.7 precies gelden.

Oefening 11.2.2. Bereken lim inf, lim sup en elk mogelijke limiet van een convergente deelrij van de rij

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n} + 2\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Oefening 11.2.3. Zoals we weten is $\mathbb{Q} \cap [0, 1[$ een aftelbare verzameling. Zij $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0, 1[$ een bijectie en beschouw de rij (a_n) met

$$a_n = f(n) \qquad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs dat elke $x \in [0, 1]$ een ophopingspunt is van de rij (a_n).

Oefening 11.2.4. Neem aan dat van een begrensde rij gegeven is dat elke convergente deelrij dezelfde limiet L heeft. Bewijs dat de rij convergent is met L als limiet.

11.3 Extra oefening over Hoofdstuk 11

Oefening 11.3.1. De stelling van Bolzano-Weierstrass zegt dat elke begrensde rij een convergente deelrij heeft. Hier volgt een ander bewijs voor deze belangrijke stelling. Het bewijs is echter niet volledig en u wordt gevraagd om het op een altijd punten aan te vullen.

We nemen aan dat (a_n) een begrensde reële rij is. We gaan inductief twee rijen (m_k) en (M_k) maken met de volgende eigenschappen

(I) Voor elke $k \in \mathbb{N}$ is $m_k < M_k$ en

$$M_{k+1} - m_{k+1} = \frac{1}{2}(M_k - m_k) \tag{11.7}$$

(II) (m_k) is een stijgende rij, (M_k) is een dalende rij

(III) Voor elke $k \in \mathbb{N}$ geldt dat het interval $[m_k, M_k]$ oneindig veel elementen van de rij (a_n) bevat, d.w.z.

$$\{n \in \mathbb{N} \mid m_k \leq a_n \leq M_k\} \text{ is een oneindige verzameling.} \tag{11.8}$$

Om te beginnen nemen we $m_0 < M_0$ zodanig dat

$$a_n \in [m_0, M_0] \qquad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}. \tag{11.9}$$

Dit kan omdat de rij (a_n) begrensd is. Dan is aan (11.8) voldaan als $k = 0$.

Neem aan dat we m_k en M_k al hebben gevonden, zodat in het bijzonder (11.8) geldt voor deze k. Het interval $[m_k, M_k]$ bevat dus oneindig veel elementen van de rij. Als g_k het gemiddelde is

$$g_k = \frac{1}{2}(m_k + M_k),$$

dan wordt $[m_k, M_k]$ opgedeeld in twee deelintervallen $[m_k, g_k]$ en $[g_k, M_k]$ van gelijke lengte. Omdat er oneindig veel elementen van de rij in $[m_k, M_k]$ zijn, zijn er drie mogelijkheden

Geval 1: Er zijn oneindig veel elementen van de rij in $[m_k, g_k]$ en maar eindig veel in $[g_k, M_k]$.

Geval 2: Er zijn oneindig veel elementen van de rij in $[g_k, M_k]$ en maar eindig veel in $[m_k, g_k]$.

Geval 3: Er zijn oneindig veel elementen van de rij in $[m_k, g_k]$ en ook oneindig veel in $[g_k, M_k]$.

In Geval 1 gaan we verder met het deelinterval $[m_k, g_k]$ en we nemen

$$m_{k+1} = m_k, \qquad M_{k+1} = g_k \qquad \text{in Geval 1.}$$

In Geval 2 gaan we verder met het deelinterval $[g_k, M_k]$ en we nemen

$$m_{k+1} = g_k, \qquad M_{k+1} = M_k \qquad \text{in Geval 2.}$$

In Geval 3 maakt het niet uit met welk deelinterval we verder gaan. We kunnen dan kiezen om $[m_{k+1}, M_{k+1}] = [m_k, g_k]$ te nemen zoals in Geval 1, of om $[m_{k+1}, M_{k+1}] = [g_k, M_k]$ te nemen zoals in Geval 2.

(a) Laat zien dat de twee rijen (m_k) en (M_k) uit de bovenstaande constructie inderdaad voldoen aan de eigenschappen die staan in (I), (II) en (III).

(b) Bewijs dat de twee rijen (m_k) en (M_k) convergent zijn met dezelfde limiet.

In de volgende stap gaan we inductief een deelrij (a_{n_k}) van de rij (a_n) maken zodanig dat

$$m_k \leq a_{n_k} \leq M_k \qquad \text{voor alle } k \in \mathbb{N}. \tag{11.10}$$

We nemen $n_0 = 0$. Vanwege (11.9) geldt (11.10) dan voor $k = 0$. Neem aan $k \geq 1$ en dat we $n_0 < n_1 < \cdots < n_{k-1}$ al gevonden hebben Vanwege (11.8) zijn er oneindig veel n met $a_n \in [m_k, M_k]$. Er is dan zeker een $n_k > n_{k-1}$ te vinden met $a_{n_k} \in [m_k, M_k]$. Dan geldt (11.10).

(c) Bewijs dat de deelrij (a_{n_k}) convergent is.

Er is enige vrijheid in de constructie van de rijen (m_k) en (M_k). Als we voor een zekere k in Geval 3 zitten, dan hebben we de keus om verder te gaan met het deelinterval $[m_k, g_k]$ of met het deelinterval $[g_k, M_k]$. De deelrij (a_{n_k}) die we vinden zal afhangen van de keuze die we maken.

(d) Neem aan dat we er voor kiezen om in het Geval 3 steeds met het linkerinterval $[m_k, g_k]$ verder te gaan. Bewijs dat in dat geval

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

(e) Neem aan dat we er voor kiezen om in het Geval 3 steeds met het rechterinterval $[g_k, M_k]$ verder te gaan. Bewijs dat in dat geval

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Hoofdstuk 12

Open en gesloten verzamelingen, recursief gedefinieerde rijen

12.1 Open en gesloten verzamelingen

We behandelen in deze paragraaf enkele begrippen die samenhangen met open en gesloten verzamelingen. Een open verzameling is een veralgemening van een open interval. Een gesloten verzameling is een veralgemening van een gesloten interval.

12.1.1 Inwendig punt, uitwendig punt en randpunt

We beginnen met de begrippen inwendig en uitwendig punt en randpunt.

Definitie 12.1.1. Zij $A \subset \mathbb{R}$ en $x \in \mathbb{R}$.

(a) We noemen x een **inwendig punt** van A als

$$\exists r > 0 : \quad]x - r, x + r[\subset A.$$

In dat geval noemen we A een **omgeving** van x.

(b) We noemen x een **uitwendig punt** van A als

$$\exists r > 0 : \quad]x - r, x + r[\cap A = \emptyset.$$

(c) In alle andere gevallen noemen we x een **randpunt** van A.

Merk op dat het in Definitie 12.1.1 niet geëist wordt dat $x \in A$. Het is echter eenvoudig in te zien dat een inwendig punt altijd tot A behoort en een uitwendig punt nooit tot A behoort. Een randpunt kan zowel tot A behoren, als niet tot A behoren.

Uit de definities volgt eenvoudig dat x een randpunt van A is als en slechts als voor elke $r > 0$ het interval $]x - r, x + r[$ zowel elementen van A als elementen van $\mathbb{R} \setminus A$ bevat. De verzameling van randpunten van A noteren we met ∂A.

Definitie 12.1.2. Zij $A \subset \mathbb{R}$. Dan is

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ is een randpunt van } A\}$$

de rand van A.

12.1.2 Open en gesloten verzamelingen

We definiëren nu de begrippen open en gesloten verzamelingen.

Definitie 12.1.3. Zij $A \subset \mathbb{R}$.

(a) We noemen A een **open verzameling** als elk element van A een inwendig punt is.

(b) We noemen A een **gesloten verzameling** als het complement $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ open is.

Een open interval is een voorbeeld van een open verzameling en een gesloten interval is een voorbeeld van een gesloten verzameling.

Lemma 12.1.4. (a) *Een open interval is een open verzameling.*

(b) *Een gesloten interval is een gesloten verzameling.*

Bewijs. (a) Zij $A =]a, b[$ een open interval. Neem $x \in A$ willekeurig en kies $r > 0$ zodanig dat $r < \min\{x - a, b - x\}$. Het is dan eenvoudig in te zien dat $]x - r, x + r[\subset A$, zodat x een inwendig punt is van A. Elk element van A is dus een inwendig punt en dit betekent dat A open is.

(b) Het bewijs van onderdeel (b) is een oefening. □

We kunnen open en gesloten ook formuleren met behulp van de rand van A.

Lemma 12.1.5. (a) *Een verzameling A is open als en slechts als $\partial A \cap A = \emptyset$.*

(b) *Een verzameling A is gesloten als en slechts als $\partial A \subset A$.*

Bewijs. (a) Stel A is open en $x \in A$. Dan is x een inwendig punt van A en dus geen randpunt. Dus $x \notin \partial A$. Dit betekent dat $\partial A \cap A = \emptyset$. Stel omgekeerd dat $\partial A \cap A = \emptyset$. Neem $x \in A$ willekeurig. Dan is x geen randpunt van A en moet dus een inwendig punt zijn. Bijgevolg is A open.

(b) Dit volgt uit (a) door over te gaan naar het complement. Er geldt

$$\begin{aligned}
A \text{ is gesloten} \quad &\iff \quad A^c \text{ is open} && \text{(vanwege definitie van gesloten)} \\
&\iff \quad \partial(A^c) \cap A^c = \emptyset && \text{(vanwege (a))} \\
&\iff \quad \partial A \cap A^c = \emptyset && \text{(vanwege } \partial(A^c) = \partial A) \\
&\iff \quad \partial A \subset A.
\end{aligned}$$

□

Een verzameling is met andere woorden gesloten als elk randpunt tot de verzameling behoort. Een verzameling is open als geen enkel randpunt tot de verzameling behoort. Als er randpunten van A zijn die tot A behoren en (andere) randpunten die niet tot A behoren dan is A noch open, noch gesloten.

We formuleren nog twee belangrijke eigenschappen van open verzamelingen.

Propositie 12.1.6. *Neem aan dat $A_i \subset \mathbb{R}$ voor elke i in een zekere indexverzameling I. Neem aan dat A_i open is voor elke $i \in I$.*

(a) *Dan is $\bigcup_{i \in I} A_i$ open.*

(b) *Als I eindig is, dan is $\bigcap_{i \in I} A_i$ open.*

Bewijs. (a) Neem $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ willekeurig. Er is dan een $i \in I$ met $x \in A_i$. Omdat A_i open is, is x dan een inwendig punt van A_i en er volgt dat er een $r > 0$ is zodanig dat $]x-r, x+r[\subset A_i$. Dan is ook $]x - r, x + r[\subset \bigcup_{i \in I} A_i$, zodat x een inwendig punt van $\bigcup_{i \in I} A_i$ is. Bijgevolg is $\bigcup_{i \in I} A_i$ open.

(b) Neem $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ willekeurig. Voor elke $i \in I$ geldt dan dat $x \in A_i$. Omdat elke A_i open is, is bij elke $i \in I$ een $r_i > 0$ met $]x - r_i, x + r_i[\subset A_i$. Omdat I eindig is, zijn er maar eindig veel getallen r_i. We nemen het minimum

$$r = \min\{r_i \mid i \in I\}$$

en er geldt $r > 0$. Voor elke $i \in I$ is dan $r \leq r_i$ zodat

$$]x - r, x + r[\subset]x - r_i, x + r_i[\subset A_i.$$

Dan volgt

$$]x - r, x + r[\subset \bigcap_{i \in I} A_i,$$

en we concluderen dat x een inwendig punt van $\bigcap_{i \in I} A_i$ is. De verzameling is bijgevolg open. □

Volgens de propositie is een willekeurige unie van open verzamelingen open. Een eindige doorsnede van open verzamelingen is ook open. De overeenkomstige propositie voor gesloten verzamelingen is als volgt.

Propositie 12.1.7. *Neem aan dat $A_i \subset \mathbb{R}$ voor elke i in een zekere indexverzameling I. Neem aan dat A_i gesloten is voor elke $i \in I$.*

(a) *Dan is $\bigcap_{i \in I} A_i$ gesloten.*

(b) *Als I eindig is, dan is $\bigcup_{i \in I} A_i$ gesloten.*

Bewijs. Dit is een oefening. □

12.1.3 Inwendige en afsluiting

Definitie 12.1.8. Zij A een deelverzameling van $\mathbb{R}$. Dan is

$$\mathring{A} = A \setminus \partial A = \{x \mid x \text{ is inwendig punt van } A\}$$

het **inwendige** van A en

$$\overline{A} = A \cup \partial A = \{x \mid x \text{ is geen uitwendig punt van } A\}$$

is de **afsluiting** (of sluiting) van A.

In plaats van $\overset{\circ}{A}$ wordt ook wel $\mathrm{int}(A)$ geschreven voor het inwendige van A. Het is duidelijk uit Lemma 12.1.5 dat A open is als en slechts als $\overset{\circ}{A} = A$ en dat A gesloten is als en slechts als $\overline{A} = A$.

Lemma 12.1.9. (a) *Het inwendige $\overset{\circ}{A}$ van A is een open verzameling, en het is de grootste open verzameling die een deelverzameling is van A. [M.a.w. als B open is en $B \subset A$, dan ook $B \subset \overset{\circ}{A}$.]*

(b) *De afsluiting $\overline{A}$ is een gesloten verzameling, en het is de kleinste gesloten verzameling waarvan A een deelverzameling is. [M.a.w. als B gesloten is en $A \subset B$, dan ook $\overline{A} \subset B$.]*

Bewijs. (a) Neem $x \in \overset{\circ}{A}$. Dan is x een inwendig punt van A en bijgevolg is er een $r > 0$ met $]x - r, x + r[\subset A$. Het open interval $]x - r, x + r[$ is een open verzameling, zie Lemma 12.1.4. Dus elk element van $]x - r, x + r[$ is een inwendig punt van $]x - r, x + r[$. Omdat $]x - r, x + r[\ \subset A$, is elk element van $]x - r, x + r[$ ook een inwendig punt van A, hetgeen betekent dat $]x - r, x + r[\ \subset \overset{\circ}{A}$. Dus $\overset{\circ}{A}$ is open.

Zij vervolgens B een open verzameling met $B \subset A$. Neem $x \in B$. Omdat B open is, is x dan een inwendig punt van B, en vanwege $B \subset A$, is x dan ook een inwendig punt van A. Bijgevolg is $x \in \overset{\circ}{A}$. We hebben bewezen dat $B \subset \overset{\circ}{A}$.

(b) Het bewijs van (b) wordt aan de lezer overgelaten. □

12.1.4 Karakterisatie met rijen

We kunnen open en gesloten verzamelingen ook karakteriseren met behulp van convergente rijen.

Propositie 12.1.10. *A is gesloten als en slechts als voor elke convergente rij $(x_n)_n$ met $x_n \in A$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A$.*

Bewijs. Neem aan dat A gesloten is en dat $(x_n)_n$ een convergente rij is met $x_n \in A$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Zij $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ en stel dat $x \notin A$. Dan is $x \in A^c$. Omdat A^c open is, is er een $r > 0$ met

$$]x - r, x + r[\ \subset A^c.$$

Omdat (x_n) naar x convergeert geldt dat $x_n \in\ ]x - r, x + r[$ voor n groot genoeg, en dus $x_n \in A^c$ voor n groot genoeg. Dit is echter een tegenspraak want $x_n \in A$ voor alle n.

Stel nu omgekeerd dat voor elke convergente rij $(x_n)_n$ in A geldt dat $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A$. We gaan laten zien dat $\partial A \subset A$. Uit Lemma 12.1.5 (b) volgt dan dat A gesloten is.

Neem $x \in \partial A$ willekeurig. Dan is $]x - r, x + r[\cap A \neq \emptyset$ voor elke $r > 0$. Neem in het bijzonder $r = \frac{1}{n+1}$ met $n \in \mathbb{N}$. Er is dus een element $x_n \in A$ met

$$x_n \in\ ]x - \tfrac{1}{n+1}, x + \tfrac{1}{n+1}[.$$

Dan is $(x_n)_n$ een rij in A waarvoor geldt

$$x - \tfrac{1}{n+1} < x_n < x + \tfrac{1}{n+1} \qquad \text{voor elke } n.$$

Uit de insluitstelling voor rijen volgt dat $(x_n)_n$ convergent is en $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Uit onze aanname over convergente rijen in A volgt dan dat $x \in A$. Dit bewijst dat inderdaad $\partial A \subset A$. $\square$

De karakterisatie van open verzamelingen luidt als volgt.

Propositie 12.1.11. *A is een open verzameling als en slechts als voor elke convergente rij (x_n) met $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$ geldt dat $x_n \in A$ voor n groot genoeg.*

Bewijs. Dit is een oefening. $\square$

12.1.5 Oefeningen

Oefening 12.1.1. Bewijs Lemma 12.1.4 (b).

Oefening 12.1.2. Toon aan dat $\partial(A^c) = \partial A$ geldt voor elke $A \subset \mathbb{R}$.

Oefening 12.1.3. Neem aan dat A niet-leeg en naar boven begrensd is. Bewijs dat dan $\sup A \in \partial A$.

Oefening 12.1.4. (a) Is de lege verzameling $\emptyset$ open of gesloten?

(b) Is $\mathbb{R}$ open of gesloten?

(c) Is $\mathbb{Z}$ open of gesloten?

(d) Is $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ open of gesloten?

(e) Is $\mathbb{Q}$ open of gesloten?

(f) Is $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ open of gesloten?

Oefening 12.1.5. (a) Bewijs dat een deelverzameling A van $\mathbb{R}$ zowel open als gesloten is als en slechts als $\partial A = \emptyset$.

(b) Neem aan dat A niet-leeg is en naar boven begrensd. Bewijs dat het niet mogelijk is dat A zowel open als gesloten is. [Hint: gebruik Oefening 12.1.3.]

(c) Neem aan dat A niet-leeg is en naar onder begrensd. Bewijs dat het niet mogelijk is dat A zowel open als gesloten is.

(d) Bewijs dat $\emptyset$ en $\mathbb{R}$ de enige deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn die zowel open als gesloten zijn. [Dit is wel wat lastig...]

Oefening 12.1.6. Bewijs dat elke open deelverzameling van $\mathbb{R}$ een unie is van open intervallen.

Oefening 12.1.7. Bewijs Propositie 12.1.7.

Oefening 12.1.8. Bewijs dat $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Oefening 12.1.9. Bewijs dat

$$\left(\overline{A}\right)^c = (A^c)^\circ = \{x \mid x \text{ is een uitwendig punt van } A\}.$$

Oefening 12.1.10. Neem aan dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie is waarvoor geldt dat $f^{-1}(A)$ open is voor elke open verzameling A.

Bewijs dat dan $f^{-1}(B)$ gesloten is voor elke gesloten verzameling B.

Oefening 12.1.11. Bewijs Lemma 12.1.9 (b).

Oefening 12.1.12. Bewijs Propositie 12.1.11.

12.2 Recursief gedefinieerde rijen

12.2.1 Recursief gedefinieerde rijen

We zijn recursief gedefinieerde rijen in deze cursus al verschillende malen tegengekomen.

Een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is recursief gedefinieerd als het volgende geldt. De rij vertrekt van een aantal beginwaarden die willekeurig gegeven kunnen zijn, zeg

$$a_0, a_1, \ldots, a_{n_0-1}$$

voor zekere $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Voor $n \geq n_0$ is er een voorschrift om a_n te berekenen uit de voorgaande elementen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ van de rij. Dus

$$a_n = F_n(a_0, \ldots, a_{n-1})$$

voor een zekere functie F_n van n veranderlijken.

Bij een **één-staps recursie** hangt a_n enkel af van het voorgaande element a_{n-1}. Dus $a_n = F_n(a_{n-1})$. We zullen ook aannemen dat de functie F_n onafhankelijk is van n. We beschouwen dus de volgende situatie.

Definitie 12.2.1. Zij X een verzameling en $F : X \to X$ een functie. Een door F voortgebrachte rij is een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X waarvoor geldt dat

$$a_n = F(a_{n-1}), \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{12.1}$$

Als a_0 gegeven is dan ligt de rij door (12.1) uniek vast. Een rij (a_n) die door F wordt voortgebracht heet ook wel een door F iteratief voortgebrachte rij. De rij krijgen we vanuit a_0 door F **iteratief** toe te passen.

Voorbeeld 12.2.2. De Newton-Raphson iteratie om een nulpunt van een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ te benaderen is

$$a_n = a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})}. \tag{12.2}$$

Dit is een veelgebruikte methode om nulpunten benaderend te berekenen van afleidbare functies. Neem aan dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ afleidbaar is en dat $f'(x) \neq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dan is

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

goed gedefinieerd als functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. De Newton-Raphson iteratie (12.2) kan dan ook geschreven worden als

$$a_n = F(a_{n-1}).$$

Dit betekent dat we in de situatie van Definitie 12.2.1 zijn met $X = \mathbb{R}$.

Voorbeeld 12.2.3. Het is vaak het geval dat Newton-Raphson iteratie slechts zinvol is dicht bij een nulpunt x^* van f. Dit treedt bv. op als f niet overal op $\mathbb{R}$ gedefinieerd is, of als $f'(x) = 0$ voor zekere x. Bijgevolg is dan

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

niet gedefinieerd voor elke $x \in \mathbb{R}$.

In dit soort gevallen willen we F beperken tot een interval $[a, b]$ met $a < x^* < b$. Om de Newton-Raphson iteratie zinvol te laten zijn moeten we weten dat $F(x) \in [a, b]$ voor alle $x \in [a, b]$. Dan is de beperking van F tot $[a, b]$ goed gedefinieerd:

$$F : [a, b] \to [a, b].$$

We bevinden ons dan in de situatie van Definitie 12.2.1 met $X = [a, b]$.

12.2.2 Contractiestelling op $\mathbb{R}$

We zijn geïnteresseerd in situaties waarbij rijen voortgebracht door F altijd convergent zijn, onfhankelijk van de keuze van beginwaarde a_0. De limiet zal in de gevallen die we beschrijven een vast punt zijn, zoals hieronder gedefinieerd. Daarom wordt iteratie met F ook wel **vastepuntsiteratie** genoemd.

Definitie 12.2.4. Een **vast punt** van een functie $F : X \to X$ is een element $x^* \in X$ met de eigenschap dat

$$F(x^*) = x^*.$$

Als $a_0 \in X$ een vast punt van F is, dan is de rij voortgebracht door F met beginwaarde a_0 een constante rij.

We bekijken in deze paragraaf het geval $X = \mathbb{R}$ en we bekijken functies $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan de volgende eigenschap.

Definitie 12.2.5. Een functie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is een **contractie** als er een getal $c \in [0, 1[$ bestaat zodanig dat

$$|F(x) - F(y)| \leq c|x - y| \tag{12.3}$$

geldt voor alle $x, y \in \mathbb{R}$. De kleinste c die we kunnen nemen in (12.3) is de **contractiefactor** van F.

Aan (12.3) is altijd voldaan als $x = y$. Als $x \neq y$, dan mogen we door $|x - y|$ delen en dan is (12.3) equivalent met

$$\left|\frac{F(x) - F(y)}{x - y}\right| \leq c.$$

Als F een contractie is, dan geldt dus

$$\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R} \\ x\neq y}} \left|\frac{F(x) - F(y)}{x - y}\right| < 1. \tag{12.4}$$

Het linkerlid van (12.4) is de contractiefactor.

Opmerking 12.2.6. Soms[1] wordt een contractie gedefinieerd als een functie F die voldoet aan

$$|F(x) - F(y)| < |x - y| \qquad \text{als } x \neq y.$$

Dit is een zwakkere eigenschap dan (12.3) met $c < 1$. In zo'n geval wordt een functie die aan (12.3) voldoet met $c < 1$ een strikte contractie genoemd.

Het zal blijken dat een rij die voortgebracht wordt door een contractie altijd convergeert naar een vast punt. We laten eerst zien dat een contractie hooguit één vast punt heeft.

Lemma 12.2.7. *Als $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een contractie is, dan heeft F hooguit één vast punt.*

Bewijs. Als zowel $F(x^*) = x^*$ als $F(y^*) = y^*$ dan is uiteraard

$$|x^* - y^*| = |F(x^*) - F(y^*)|.$$

Als F een contractie is met contractiefactor $c < 1$, dan volgt uit (12.3) dat ook

$$|F(x^*) - F(y^*)| \leq c|x^* - y^*|$$

wat leidt tot

$$|x^* - y^*| \leq c|x^* - y^*|$$

Omdat $c < 1$ kan dit alleen als $|x^* - y^*| = 0$ en bijgevolg is $x^* = y^*$. □

De **contractiestelling** van Banach is genoemd naar de Poolse wiskundige Stefan Banach (1892-1945) die de grondlegger was van de functionaalanalyse. De kracht van de contractiestelling is dat ze uitgebreid kan worden van $\mathbb{R}$ naar veel algemenere situaties die van groot belang zijn in de wiskunde. Ze wordt bijvoorbeeld gebruikt om het bestaan van oplossingen van differentiaalvergelijkingen te bewijzen.

Stelling 12.2.8. *Zij $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een contractie. Dan heeft F precies één vast punt $x^* \in \mathbb{R}$.*

Bovendien is elke rij (a_n) die voldoet aan

$$a_n = F(a_{n-1}) \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}_0 \tag{12.5}$$

met $a_0 \in \mathbb{R}$ willekeurig, convergent met limiet x^*.

Bewijs. Neem $a_0 \in \mathbb{R}$ willekeurig en zij (a_n) recursief gegeven door (12.5).

Zij $c < 1$ de contractiefactor van F. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dan vanwege (12.3) dat

$$|a_{n+1} - a_n| = |F(a_n) - F(a_{n-1})| \leq c|a_n - a_{n-1}|$$

Door dit herhaald toe te passen (of met volledige inductie) volgt dat

$$|a_{n+1} - a_n| \leq c^n |a_1 - a_0|. \tag{12.6}$$

Voor $m > n$ volgt ook dat

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n|$$

[1]Onder andere in de cursus 'Analyse I'

hetgeen vanwege (12.6) leidt tot

$$|a_m - a_n| \leq \left(c^{m-1} + c^{m-2} + \cdots + c^n\right) |a_1 - a_0|. \tag{12.7}$$

Er geldt voor $m > n$ dat

$$c^{m-1} + c^{m-2} + \cdots + c^n \leq c^n \sum_{k=0}^{\infty} c^k = \frac{c^n}{1-c}$$

Dit laatste geldt vanwege de som van de meetkundige reeks en het feit dat $c < 1$. Als we dit gebruiken in (12.7) vinden we voor $m > n$

$$|a_m - a_n| \leq \frac{c^n}{1-c} |a_1 - a_0|. \tag{12.8}$$

Hieruit volgt dat (a_n) een Cauchyrij is, en bijgevolg is (a_n) convergent, zie Stelling 11.1.4.

Zij $x^* \in \mathbb{R}$ de limiet van de rij (a_n). Vanwege (12.3) geldt dan voor $n \geq 1$ dat

$$|a_n - F(x^*)| = |F(a_{n-1}) - F(x^*)| \leq c|a_{n-1} - x^*|. \tag{12.9}$$

Omdat (a_n) naar x^* convergeert zal $|a_{n-1} - x^*| \to 0$ als $n \to \infty$. Dan volgt uit (12.9) dat $|a_n - F(x^*)| \to 0$ als $n \to \infty$, zodat de rij (a_n) ook naar $F(x^*)$ convergeert. Vanwege het uniek zijn van de limiet is dus $F(x^*) = x^*$. Bijgevolg is x^* een vast punt van F. Het vaste punt is uniek vanwege Lemma 12.2.7.

De stelling is nu bewezen. □

Uit het bewijs van de contractiestelling halen we ook interessante informatie over de snelheid van de convergentie. Omdat (12.8) geldt voor elke $m > n$, kunnen we hierin de limiet nemen $m \to \infty$. Er volgt dan dat

$$|a_n - x^*| \leq Mc^n \qquad \text{met } M = \frac{1}{1-c}|a_1 - a_0|.$$

Omdat M vast is en $c < 1$ betekent dit dat de rij (a_n) snel naar x^* convergeert. Het aantal beduidende cijfers groeit evenredig met n. Men spreekt in zo'n geval van **lineaire convergentie**.

12.2.3 Contractiestelling op een gesloten verzameling

Een variant van de contractiestelling geldt ook voor gesloten intervallen binnen $\mathbb{R}$, of meer algemeen voor gesloten verzamelingen.

Zij X een gesloten verzameling. Hierin kan X begrensd zijn of onbegrensd zijn. Een contractie op X met contractiefactor $c < 1$ is een functie $F : X \to X$ waarvoor geldt dat

$$|F(x) - F(y)| \leq c|x - y|$$

voor elke $x, y \in X$.

De volgende stelling is analoog aan Stelling 12.2.8.

Stelling 12.2.9. *Zij X een gesloten deelverzameling van $\mathbb{R}$ en $F : X \to X$ een contractie. Dan heeft F precies één vast punt $x^* \in X$.*

Bovendien is elke rij (a_n) die voldoet aan

$$a_n = F(a_{n-1}) \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}_0$$

met $a_0 \in X$ willekeurig, convergent met limiet x^*.

Bewijs. We kunnen het bewijs van Stelling 12.2.8 vrijwel overnemen.

Net zoals in het bewijs van Stelling 12.2.8 is een rij (a_n) met $a_n = F(a_{n-1})$ en $a_0 \in X$ een Cauchyrij. Ze is bijgevolg convergent in $\mathbb{R}$. De limiet $x^* = \lim_{n\to\infty} a_n$ is een element van $\mathbb{R}$, maar omdat de verzameling gesloten is, is $x^* \in X$, zie ook Propositie 12.1.10. Dan is x^* een vast punt van F. $\square$

12.2.4 Contractiefactor voor afleidbare functies

Hoe kunnen we controleren of $F : X \to X$ een contractie is? Er is een eenvoudig criterium in het geval dat F afleidbaar is. Het begrip afleidbaar is niet behandeld in deze cursus, maar is uiteraard bekend vanuit het middelbaar en van de cursus 'Calculus I'.

Propositie 12.2.10. *Neem aan dat X een interval is, en dat $F : X \to X$ een continue functie is die afleidbaar is in elk punt van X met*

$$c = \sup_{x\in X} \left|F'(x)\right| < 1. \tag{12.10}$$

Dan is F een contractie met contractiefactor c.

Bewijs. We steunen op de **middelwaardestelling** voor afleidbare functies, die zegt dat er bij gegeven $x, y \in X$ een ξ tussen x en y bestaat zodanig dat

$$F(x) - F(y) = F'(\xi)(x - y). \tag{12.11}$$

Zie bijvoorbeeld §2.8 in het boek van Adams en Essex dat bij 'Calculus I' gebruikt wordt.

Uit (12.10) volgt dat $|F'(\xi)| \leq c$ en er volgt uit (12.11) dat

$$|F(x) - F(y)| \leq c|x - y|$$

voor elke x en y in X. Omdat in (12.10) verondersteld is dat $c < 1$, is F inderdaad een contractie met contractiefactor $\leq c$.

We moeten nog laten zien de contractiefactor niet strikt kleiner dan c kan zijn en we doen dit uit het ongerijmde. We nemen dus aan dat er een $c' < c$ bestaat zodanig dat

$$|F(x) - F(y)| \leq c'|x - y| \tag{12.12}$$

voor alle x en y in X.

Vanwege (12.10) en het feit dat $c' < c$ is er dan een $x \in X$ met $|F'(x)| > c'$. We herinneren nu aan de definitie van $F'(x)$ als limiet van differentiequotiënten

$$F'(x) = \lim_{X\ni y\to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x}.$$

Omdat $|F'(x)| > c'$ volgt dan dat voor alle $y \in X \setminus \{x\}$ die dicht genoeg bij x liggen geldt

$$\left|\frac{F(y) - F(x)}{y - x}\right| > c'. \tag{12.13}$$

We kiezen zo'n y en er volgt uit (12.13) dat $|F(y) - F(x)| > c'|y - x|$ hetgeen in tegenspraak is met (12.12).

Bijgevolg is c de contractiefactor van F. □

12.2.5 Voorbeelden

Voorbeeld 12.2.11. Als bijvoorbeeld

$$a_n = q \cos a_{n-1} \qquad \text{met } -1 < q < 1 \text{ vast},$$

dan is

$$F(x) = q \cos x$$

met $F'(x) = -q \sin x$. In dit geval is $|F'(x)| \leq |q| < 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, zodat F een contractie op X is vanwege Propositie 12.2.10. Vastepuntsiteratie vertrekkende vanuit $a_0 = 0$ levert voor $q = -1/2$ de volgende rij

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0.0 \\
a_1 &= -0.5 \\
a_2 &= -\mathbf{0.4}387912809451863580581407913 02 \\
a_3 &= -\mathbf{0.45}26329216602095588029639952 95 \\
a_4 &= -\mathbf{0.449}6493762136596223341772192 74 \\
a_5 &= -\mathbf{0.450}2997781314498885836300620 36 \\
a_6 &= -\mathbf{0.4501}583343696808810871282673 76 \\
a_7 &= -\mathbf{0.4501}891105361431189215048876 51 \\
a_8 &= -\mathbf{0.45018}241484327759662782641 2044 \\
a_9 &= -\mathbf{0.450183}87160105673138851535 9006 \\
a_{10} &= -\mathbf{0.4501835}5466123177584160449 9489
\end{aligned}$$

De rij convergeert naar het vaste punt van F:

$$x^* = -0.4501836112948735730365386967 63$$

Na 10 stappen in de iteratie hebben we 7 beduidende cijfers van het vaste punt x^* gevonden.

Voorbeeld 12.2.12. De Newton-Raphson iteratie om een nulpunt van een functie f te vinden is

$$a_n = F(a_{n-1})$$

met

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Neem als voorbeeld $f(x) = x^2 - 2$ met

$$F(x) = x - \frac{x^2 - 2}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Dus $F(x)$ is het rekenkundig gemiddelde van x en $\dfrac{2}{x}$. Vanwege deze interpretatie is het duidelijk dat $F(x) \in [1, 2]$ voor elke $x \in [1, 2]$. Ook geldt dat $F'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right)$ waaruit eenvoudig volgt dat

$$|F'(x)| \leq \frac{1}{2} \qquad \text{als } x \in [1, 2].$$

Uit Propositie 12.2.10 volgt dat $F : [1, 2] \to [1, 2]$ een contractie is met contractiefactor $\leq \frac{1}{2}$. Aan Stelling 12.2.9 is bijgevolg voldaan met $X = [1, 2]$ en $c \leq \frac{1}{2}$. Vastepuntsiteratie vertrekkende vanuit $a_0 = 1$ levert de volgende rij

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1.0 \\
a_1 &= \mathbf{1}.5 \\
a_2 &= \mathbf{1.41}6666666666666666666666666667 \\
a_3 &= \mathbf{1.41421}568627450980392156862745 \\
a_4 &= \mathbf{1.41421356237}468991062629557889 \\
a_5 &= \mathbf{1.414213562373095048801688}962350 \\
a_6 &= \mathbf{1.414213562373095048801688872421} \\
a_7 &= \mathbf{1.414213562373095048801688872421}
\end{aligned}$$

Na 6 iteraties hebben we reeds 30 beduidende cijfers gevonden. De convergentie is veel sneller dan in Voorbeeld 12.2.11. Kunt u dit verklaren? In dit voorbeeld is sprake van **superlineaire convergentie**.

12.2.6 Oefeningen

Oefening 12.2.1. Laat zien dat $F : [1, 2] \to [1, 2]$ met

$$F(x) = \frac{x + 2}{x + 1}$$

een contractie is op het interval $[1, 2]$. Bepaal de contractiefactor en het vaste punt van F.

Oefening 12.2.2. Zij $c > 0$ vast gekozen en definieer

$$F : [0, 1 + \sqrt{c}] \to [0, 1 + \sqrt{c}] : x \mapsto F(x) = \sqrt{x + c}.$$

(a) Laat zien dat F goed gedefinieerd is.

[Dat wil zeggen: laat zien dat $F(x) \in [0, 1 + \sqrt{c}]$ als $x \in [0, 1 + \sqrt{c}]$.]

(b) Laat zien dat F precies één vast punt heeft.

(c) Bewijs dat F een contractie is als en slechts als $c > 1/4$.

(d) Voor $0 < c \leq 1/4$ is F geen contractie, maar vastepuntsiteratie zal toch convergeren naar het vaste punt van F. Kunt u dit bewijzen?

Oefening 12.2.3. Laat zien dat de contractiefactor van de functie $F : [1,2] \to [1,2]$ met $F(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ uit Voorbeeld 12.2.12 gelijk aan $\frac{1}{2}$ is.

Oefening 12.2.4. Verklaar dat de convergentie in Voorbeeld 12.2.12 veel sneller is dan in Voorbeeld 12.2.11.

Oefening 12.2.5. Bewijs dat het supremum in (12.4) inderdaad de contractiefactor is.

12.3 Extra oefeningen over Hoofdstuk 12

Oefening 12.3.1. Het doel van deze oefening is om te laten zien dat een open verzameling te schrijven is als een **aftelbare** unie van disjuncte open intervallen.

Zij A een open verzameling.

(a) Voor $x, y \in \mathbb{R}$ definiëren we

$$I(x,y) = \begin{cases} [x,y] & \text{als } x < y, \\ [y,x] & \text{als } x > y, \\ \{x\} & \text{als } x = y. \end{cases}$$

Voor twee elementen $x, y \in A$ definiëren we vervolgens

$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad I(x,y) \subset A.$$

Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is op A.

[N.B.: voor deze eigenschap is het niet nodig dat A open is.]

(b) Bewijs dat de equivalentieklasse $[x]_\sim$ van $x \in A$ een open interval is.

(c) Bewijs er slechts aftelbaar veel equivalentieklassen zijn.
[Hint: elke equivalentieklasse bevat ratonale getallen.]

(d) Concludeer dat A de unie is van aftelbaar veel disjuncte open intervallen.

Oefening 12.3.2. Neem $c > 0$ en beschouw de functie

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto F(x) = \frac{1}{x^2 + c^2}.$$

We gaan itereren met de functie F en we beschouwen dus rijen (a_n) van de vorm

$$a_{n+1} = F(a_n) \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}$$

met een willekeurige beginwaarde $a_0 \in \mathbb{R}$.

(a) Bewijs dat F precies één vast punt x^* heeft en dat $x^* \in [0,1]$.

(b) Voor welke waarden van c is F een contractie?

(c) Wat kunt u nu concluderen omtrent de convergentie van de rij (a_n) ?

Het blijkt dat F niet altijd een contractie is en dat de rij (a_n) niet altijd convergeert.

(d) Neem $c = 1/2$ en $a_0 = 0$. Bewijs met inductie dat $a_{2n} < \frac{1}{2}$ en $a_{2n+1} > 2$ geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$.

(e) Concludeer dat de rij (a_n) niet convergent is.

Oefening 12.3.3. We noemen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een zwakke contractie als F voldoet aan

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \, x \neq y \,\Rightarrow\, |F(x) - F(y)| < |x - y|. \tag{12.14}$$

(a) Geef een voorbeeld van een functie F die aan (12.14) voldoet, maar die geen contractie is.

(b) Onderzoek of de contractiestelling ook geldt voor zwakke contracties. Dat wil zeggen, ga na of het volgende waar is:

- Als F aan (12.14) voldoet, dan heeft F precies één vast punt. Bovendien geldt voor elke a_0 dat de rij (a_n) gegeven door $a_n = F(a_{n-1})$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$, convergent is, met limiet gelijk aan het vaste punt.

Oefening 12.3.4. In de d-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^d$ kunnen we ook contracties beschouwen. De definitie is als volgt:

- Een functie $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ is een contractie als er een $c < 1$ bestaat zodanig dat

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d : \|F(x) - F(y)\| \leq c\|x - y\|.$$

Formuleer en bewijs de contractiestelling in $\mathbb{R}^d$.

Oefening 12.3.5. De rij (a_n) is gedefinieerd door $a_0 = 0$ en

$$a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n} \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}.$$

Er zijn twee mogelijkheden om te laten zien dat deze rij convergent is.

(a) Bewijs dat de rij stijgend en naar boven begrend is.

(b) Gebruik de contractiestelling.

Werk beide mogelijke bewijzen uit.

Index