Mémoire de Master 2 mathématiques, parcours Algèbre, théorie des nombres et applications.

Titre du mémoire

Cassian DUPONT-ROZÉ

Sous la direction de Daniel Juteau

Université de picardie Jules Verne. Département de Mathématiques.

Année académique 2025-2026

Dernière modification : 30 novembre 2025.

Sommaire

Introduction

Rédiger l'introduction.

Notations

Rajouter les notations.

1 Dessiner les catégories monoïdales

Plan du chapitre

♦ **Introduction.** Petit texte pour annoncer ce qu'on va faire dans ce chapitre.

1.1 Diagrammes linéaires des catégories

Phrase pour dire qu'on commence par représenter les morphismes d'une catégorie.

Dans cette section, on désigne par $\mathcal{C}$ une catégorie, et M, N, P des objets de $\mathcal{C}$.

Un morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ est habituellement représenté par une flèche :

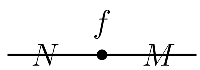
$$M \xrightarrow{f} N \,. \tag{1.1}$$

De même, la composition de deux morphismes $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, P)$ est souvent représenté comme suit :

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \,. \tag{1.2}$$

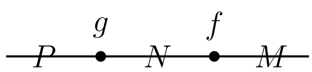
Dans cette approche, un objet est représenté par quelque chose de zéro-dimensionnel, et un morphisme par quelque chose de unidimensionnel. On peut dualiser cette idée pour obtenir une autre manière de représenter les catégories, que nous appellerons diagrammes linéaires, où les objets sont maintenant représentés par des éléments unidimensionnels, et les morphismes par des éléments zéro-dimensionnels.

Un morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ sera donc représenté de la façon suivante :



(1.3)

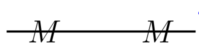
Par exemple, le diagramme linéaire suivant (que l'on lit de droite à gauche) représente la composition $g \circ f$ pour deux morphismes $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, P)$,



(1.4)

Remarque 1.1.1. Nous avons choisi de lire les diagrammes linéaires de droite à gauche, plutôt que de gauche à droite comme dans (1.1). Ce choix est compatible avec la notation standard de la composition : $g \circ f$ est représenté avec g à gauche de f.

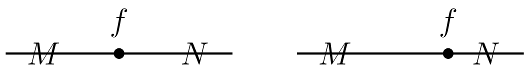
Un point sur la ligne est associé à un objet, et un intervalle représente un morphisme allant de l'extrémité droite vers l'extrémité gauche. La composition des morphismes est donnée par la concaténation des intervalles. Un intervalle contenant uniquement un objet représente le morphisme identité sur cet objet. Ainsi, l'identité $\mathrm{Id}_M \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M)$ sera représenté par :



???

(1.5)

Remarquons que dans un diagramme linéaire, plusieurs points distincts peuvent représenter le même objet, et qu'il existe plusieurs manières de représenter un même morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ selon la position du point :

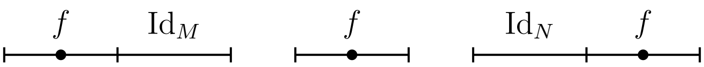


(1.6)

Remarque 1.1.2. Le repositionnement du point (comme ci-dessus) peut être vu comme la composition avec les morphismes identité appropriés. Plus formellement, nous pouvons lorsque $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$, annoter les diagrammes ainsi :

(1.7)

(où les étiquettes des objets M, N ont été omises pour plus de clarté). L'axiome d'identité d'une catégorie dit alors que les diagrammes suivants sont égaux :



(1.8)

Remarque 1.1.3. L'associativité de la composition des morphismes dans une catégorie implique que nous n'avons pas à nous soucier de la parenthésisation des morphismes.

Proposition 1.1.4. Les axiomes d'identité et de composition d'une catégorie impliquent qu'un diagramme, à "isotopie linéaire" près, représente de manière non ambiguë un morphisme. ???

Ici, une isotopie linéaire signifie une isotopie contrainte à une ligne : intuitivement, on peut étirer les intervalles et faire glisser les points le long de la ligne, mais sans les faire passer les uns à travers les autres.

1.2 Diagrammes planaires des 2-catégories

Phrase pour dire qu'on va maintenant représenter les morphismes d'une 2-catégorie.

La procédure pour les 2-catégories (strictes) est analogue à celle des catégories. Commençons par rappeler la définition d'une 2-catégorie.

Définition 1.2.1. Une 2-catégorie (stricte) $\mathcal{C}$ est la donnée :

— D'une classe d'objets.

— D'une catégorie $\mathcal{C}(A, B)$ pour tout couple d'objets (A, B). Les objets $f, g : A \to B$ de cette catégorie seront appelés 1-morphismes, et les morphismes $\alpha : f \Rightarrow g$ sont appelés 2-morphismes.

Les 1-morphismes peuvent être composés suivant les objets, il s'agit de la composition usuelle des morphismes dans une catégorie. Les 2-morphismes peuvent être composés de deux manières : suivant les objets, et suivant les 1-morphismes. Ces deux compositions sont appelées respectivement composition horizontale et composition verticale.

Soient deux objets A et B, et trois 1-morphismes $f, g, h : A \to B$. Soient les 2-morphismes $\alpha : f \Rightarrow g$ et $\beta : g \Rightarrow h$. Alors la composition verticale de α et β est le 2-morphisme

$$\beta \circ \alpha : f \Rightarrow h,$$

qui est la composition de morphismes au sens usuel dans la catégorie $\mathcal{C}(A, B)$. Soient trois objets A, B, C, et quatre 1-morphismes $f, g : A \to B$ et $f', g' : B \to C$. Soient deux 2-morphismes $\alpha : f \Rightarrow g$ et $\beta : f' \Rightarrow g'$.

On peut définir les composées de 1-morphismes $f'f : A \to C$ et $g'g : A \to C$. Dans une 2-catégorie, on suppose qu'il existe un foncteur

$$\mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B) \longrightarrow \mathcal{C}(A, C),$$

qui associe aux deux 2-morphismes α et β un 2-morphisme noté

$$\beta\alpha : f'f \Rightarrow g'g.$$

Cela se traduit par une **relation de cohérence** entre les compositions horizontale et verticale : si on a quatre 2-morphismes

$$\alpha : f \Rightarrow f', \quad \alpha' : f' \Rightarrow f'', \quad \beta : g \Rightarrow g', \quad \beta' : g' \Rightarrow g'',$$

alors on a

$$(\beta' \circ \beta)(\alpha' \circ \alpha) = \beta'\alpha' \circ \beta\alpha.$$

De plus, si id_A est le 1-morphisme identité de l'objet A et si $\mathrm{Id}_{\mathrm{id}_A}$ est le 2-morphisme identité de l'objet id_A dans la catégorie $\mathcal{C}(A, A)$, alors la composée horizontale de ce 2-morphisme par un 2-morphisme α est égale à α :

$$\mathrm{Id}_{\mathrm{id}_A} \alpha = \alpha = \alpha \, \mathrm{Id}_{\mathrm{id}_A}.$$

Nous donnons deux exemples de 2-catégories, puis nous décrivons comment tracer des diagrammes planaires pour représenter les objets, les 1-morphismes et les 2-morphismes.

Exemple 1.2.2. On notera $\mathcal{C}$at la 2-catégorie dont les objets sont les catégories elles-mêmes. Les 1-morphismes de $\mathcal{C}$at sont les foncteurs, et les 2-morphismes sont les transformations naturelles (morphismes de foncteurs).

Exemple 1.2.3. La 2-catégorie $\mathcal{B}$im a pour objets des anneaux, et pour deux anneaux R et S, un 1-morphisme de R vers S est un (S, R)-bimodule M. Où la composition des 1-morphismes se fait par produit tensoriel. Autrement dit, le (T, R)-bimodule $N \otimes_S M$ est la composition de M et N. Les 2-morphismes de $\mathcal{B}$im sont les homomorphismes de bimodules. ✗

Mettre les trois images de wikipedia.

Les objets C et D sont représentés par quelque chose de zéro-dimensionnel, les 1-morphismes F et G par quelque chose d'unidimensionnel, et le 2-morphisme α par quelque chose de bidimensionnel, une 2-cellule remplissant le diagramme.

Comme auparavant, nous allons dualiser cette méthode pour obtenir notre façon préférée de représenter les 2-catégories (strictes). Les objets vont étiqueter des régions dans le plan, les morphismes vont étiqueter des lignes, et les 2-morphismes vont étiqueter des points. Nous appellerons ces diagrammes *diagrammes planaires* (aussi appelés *diagrammes en cordes*) et les lirons de droite à gauche et de bas en haut. Par exemple, le diagramme planaire suivant décrit la même information que (7.3) :

Les objets C et D sont représentés par quelque chose de zéro-dimensionnel, les 1-morphismes F et G par quelque chose d'unidimensionnel, et le 2-morphisme α par quelque chose de bidimensionnel, une 2-cellule remplissant le diagramme.

1.3 Dessiner les catégories monoïdales

1.4 La catégorie de Temperley–Lieb

1.5 Compléments sur les isotopies

Annexe

A.1 Première annexe

A.2 Deuxième annexe

Bibliographie

[nom item] Auteur, *Titre*, Édition, Année. Lien : lien.

[1] Ben Elias, Shotaro Makisumi, Ulrich Thiel, Geordie Williamson, *Introduction to Soergel Bimodules*, Springer, 2020.