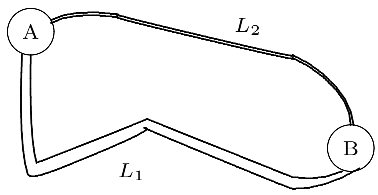
導入 0

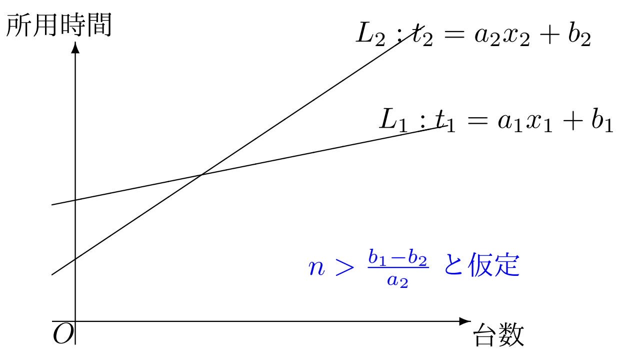
0.1 オペレーションズ・リサーチ

オペレーションズ・リサーチ (Operations Research :OR) :
世の中の「何か困ったこと」に対して,「経験」や「勘」に頼らずに筋の通った手法で「よりうまいやり方, 解決方法」を導き出す問題解決の方法を研究する学問[*1]

0.2 経路選択問題

1. 都市 A から都市 B への経路 : 2 通り
   - L_1 : 広いけど遠回り
   - L_2 : 狭いけど近道
2. 都市 A から都市 B への車通勤人数は一定 : n 人
3. 各経路の利用台数により所用時間が異なる.
   - L_1 の利用台数 x_1 台のときの所要時間 t_1 は $t_1 = a_1x_1+b_1$
   - [*2] L_2 の利用台数 x_2 台のときの所要時間 t_2 は $t_2 = a_2x_2+b_2$





---

*1 財団法人　日本オペレーションズ・リサーチ学会:「オペレーションズ・リサーチとは」 http://www.orsj.or.jp/whatisor/whatisor.html
*2 田口　東:「交通経路の選択 –個人の都合と全体の都合–」オペレーションズ・リサーチ, Vol.41 (1996) 178-179

4. 運転者の意思決定：前日の所要時間を知っていて，早い経路を予測して利用

$$\Downarrow$$

繰り返すことで，L_1, L_2 どちらを使っても同じ所要時間となるところに落ち着く．

問 1 L_1, L_2 のどちらもが同じ所要時間となる台数 x_1^*, x_2^* を求めよう．そのときの所要時間 t^* は？

経路選択問題 —運転者をコントロールできるとき

5. 平均所要時間を最小に
   - $\dfrac{x_1(a_1x_1+b_1)+x_2(a_2x_2+b_2)}{n}$ を最小に
   - 条件は $x_1+x_2=n$

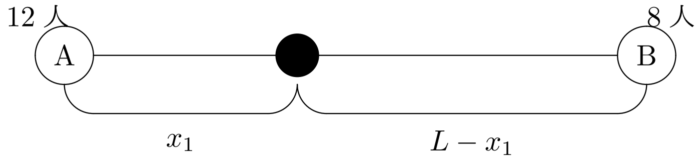
問 2 平均所要時間が最小となるような L_1, L_2 の利用台数とそのときの所要時間 t^{**} は？問 1 で求めた所要時間と比べてどちらがどれだけ早いか.

(平均所要時間：$t^{**}=t^*-\frac{(b_1-b_2)^2}{4(a_1+a_2)n}$)

0.3 集合場所問題

R 大学のあるサークルは神楽坂キャンパスと野田キャンパス合同で行われている．サークルの幹事会を行うのに，神楽坂キャンパスから 12 人，野田キャンパスから 8 人が参加する．交通費はサークル会計から出すので，総交通費をなるべく安くしたい．どこで幹事会をおこなうのがよいか．ただし，どの学生もキャンパスのそばに住んでいて定期券などはないとする．

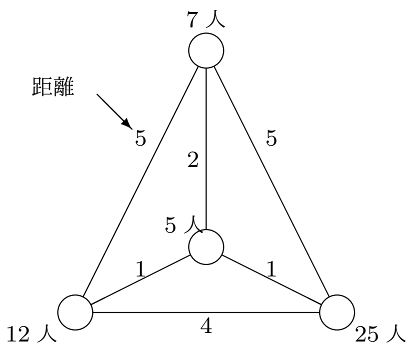
- 交通費最小化 $\rightarrow$ 総移動距離最小化
- A-B 間の場所であることは明らか
- A-B 間の距離 L



$$12x_1 + 8(L - x_1) \text{ の最小化}$$

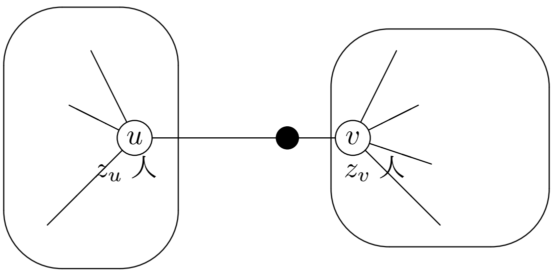
4 箇所から集合

問 3 総移動距離が最小となる集合場所はどこか．



定理 1（Hakimi 1964） ノード上に，最適な集合場所が必ず存在する[*3]

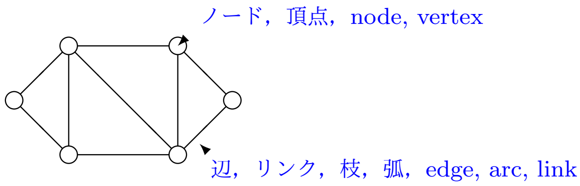
証明（概略） もし，辺 (u, v) 上に最適な集合場所 x があると，
u を通過して x に集合する人数 z_u，v を通過して x に集合する人数 z_v．



2 箇所からの集合場所の問題とおなじ．

[*3] S.L.Hamiki, Optimum Locations of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of a Graph, Operations Research, Vol. 12 Issue 3, 1964, pp. 450-459.

無向グラフ $G=(V,E)$, 辺 $e \in E$ の距離 d_e, ノード $v \in V$ の重み w_v が与えられたときに，$\sum_{v \in V} w_v d(v,x)$ を最小とするグラフ上の点 x を求めよ．ただし，$d(x,y)$ はグラフ上の 2 ノード間の最短距離を表す．



問 4　最適な集合場所 x を求めるアルゴリズムを記述せよ．

0.4　アイスクリーム屋さんの問題

人で賑わう浜辺で 2 件のアイスクリーム屋が営業している．客は浜辺の線上に均等にいて，各々近い方のアイスクリーム屋を利用する．2 件のアイスクリーム屋はどの場所で営業するか．

Hotelling の立地競争問題[*4]
$\Downarrow$
立地競争問題[*5]

- 客が不均一に分布しているとき
- 客が平面上に分布しているとき

0.5　秘書の問題

n 人の候補者と面接をする．採用するかどうかは面接の場で決定しなければならない．つまり，一度，断ったら採用できず，採用を決定したら，その後の面接は行わない．好ましい秘書を採用する確率を上げるにはどうしたらよいか．

最適戦略：k 人までは無条件に断り，$k+1$ 人以降では，それまでで最も良い候補者が現れたら採用する

定理 2　n が十分に大きいとき，$k=n/e$ としたとき，一番好ましい秘書を採用する確率が最も大きくなる．

証明 p 番目に最も良い候補者がある場合．

[*4] H. Hotelling, 'Stability in Competition', Economic Journal, Vol. 39, pp. 41-57 (1929).
[*5] 岡部 篤行, 鈴木 敦夫,「最適配置の数理」朝倉書店，1992

- $p \leq k$ だと，p が選ばれる確率は 0
- $p = k + l$ $(l > 0)$ だと，$k + l - 1$ のなかで最もよい候補者が最初の k 人に含まれていないと，p は選ばれないので，p が選ばれる確率は，$\frac{k}{k+l-1}$

よって，最も良い候補者が選ばれる確率は

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n-k}\frac{k}{k+l-1} = \frac{k}{n}(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots)$$

$n \to \infty$ のとき，$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots = \log\frac{n}{k}$ より，$\frac{k}{n}\log\frac{n}{k}$ の最大化.

$(\frac{k}{n}\log\frac{n}{k})' = \frac{1}{n}\log\frac{n}{k} - \frac{k}{n}\frac{1}{k} = \frac{1}{n}(\log\frac{n}{k} - 1) = 0$ より，$k = \frac{n}{e}$．このとき，$\frac{k}{n}\log\frac{n}{k} = \frac{1}{e}\log e = \frac{1}{e} \approx 0.37$

参考文献

[1] 森雅夫，松井知己，「オペレーションズ・リサーチ」朝倉書店，2004

[2] 松井泰子，根本俊男，宇野毅明,「入門オペレーションズ・リサーチ」東海大学出版会, 2008

[3] 栗原謙三，明石吉三，「経営情報処理のためのオペレーションズ・リサーチ」コロナ社，2001

[4] H. A. Taha, Operations Research, An Introduction, 10th edition, Pearson, 2016.

[5] F.S. Hillier, G.J. Lieberman, Introduction to Operations Research, 10th edition ,McGraw Hill Higher Education, 2014