高等代数-2笔记整理

CassiniWei

序

高等代数第二学期谭老师班本人的笔记。

笔记是按照自己上课记得内容整理而来，只包括课上的内容梗概，由于是期末整理，所有例题的解答和定理的证明都来不及写。

由于匆忙，可能会出现各种各样的问题。

此模板是由https://github.com/zhcosin/elementary-math简化而来的。

CassiniWei

2019-06 于江安

目录

第四章　线性空间和线性映射

4.1　线性空间

定义 4.1.1 (线性空间). *设$\mathbb{F}$是一数域, $\mathbb{F}$是一个非空集合, 设有运算(映射), 称为加法, 从$V \times V \to V$; 再有一运算称为数乘, 从$\mathbb{F} \times V \to V$, 且满足:*

1. *加法: 满足交换律*
2. *加法: 满足结合律*
3. *加法: 存在单位元*
4. *加法: $\forall \alpha \in V$ 使得$\alpha\beta = 0$, 记作$\beta = -\alpha$*
5. *乘法: 存在单位元*
6. *对数的加法的分配律*
7. *对向量的加法的分配律*

则称V是一个关于加法, 数乘的线性空间, 由单点集给出的线性空间称为零空间.

例 1

1. $\mathbb{F}[x]$关于多项式的加法, 数乘是$\mathbb{F}$中的一个线性空间.
2. $\mathbb{F}^n$关于向量的加法, 数乘是$\mathbb{F}$上的一个线性空间.
3. $\mathbb{M}_(m \times n)$关于矩阵的乘法, 数乘是$\mathbb{F}$上的一个线性空间.
4. $HOM(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n)$中映射的加法和数乘.
5. $C[a, b]$中函数的加法和数乘.
6. $\forall a \in [a, b], f : a \mapsto 0$, f是一个线性映射
7. 若$\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$, 则$\mathbb{K}$是$\mathbb{F}$上的线性空间.
8. $\mathbb{R}^+$中规定加法为数的乘法, 规定乘法为求幂, 则$\mathbb{R}^+$是$\mathbb{R}$上的线性空间

性质 4.1.1. *设V是$\mathbb{F}$上的线性空间, 则:*

1. *加法满足消去律*
2. *$-\alpha = -1 \cdot \alpha$ (对数的加法的分配律)*
3. *若$k\alpha = 0$, 则$k = 0$或$\alpha = 0$ (数域的性质$k \cdot k^{-1} = 1$, 反证法)*
4. *0和$-\alpha$的唯一性*

推论 4.1.1. *非零向量的不同倍数不相同*

4.2 维数、基和坐标

定义 4.2.1 (线性组合)**.** *$\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i = k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s \in V$称为$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$的一个线性组合.*

一般称线性空间中的元素为向量, "*0*"为零向量.

定义 4.2.2 (线性表出)**.** *设V是$\mathbb{F}$上的线性空间, $\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in V$, 如果$\exists k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{F}$使得*

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i$$

则称β可以由$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性表出.

例 1

1. *0*可以由任意向量属于V线性表出.
2. $\alpha \in \mathbb{F}^n$可以由基本向量线性表出.
3. 矩阵可由基本矩阵线性表出
4. $\forall a \in \mathbb{F}, f(x) \in \mathbb{F}_n[x], f(x)$可以由$a, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^n$线性表出.
5. $\mathbb{C}$是$\mathbb{C}$上的线性空间, 可以由其线性表出.
6. $\mathbb{C}$是$\mathbb{R}$上的线性空间, 不可以由其线性表出.

定理 4.2.1. *$\forall \beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$只有下面三种情况之一:*

1. *β不可以由其线性表出.*
2. *β可以由其线性表出, 且方式唯一.*
3. *β可以由其线性表出, 且方式不唯一.*

定理 4.2.2. *如果β可以由$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性表出, 且方式不唯一, 则有无穷多种表出方式.*

定义 4.2.3 (线性相关)**.** 如果V是$\mathbb{F}$上的线性空间, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in V$, 若0被$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性表出的方式唯一, 则称$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关, 否则, 称其线性相关.

推论 4.2.1. 若β可以由$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性表出, 且表出方式唯一$\Longleftrightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关

性质 4.2.1. *1.* 若$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关, 则$\exists 1<i<n$使得α_i可以被其余向量线性表出.

2. 若$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关, 而$\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$线性相关, 则$\alpha_{n+1}$可以被其余向量唯一表出.

3. 若在$\mathbb{F}^n$上, 向量$\alpha\in\mathbb{F}^n$伸长不改变线性无关性质, 缩短不改变线性相关性质.

引理 4.2.1 (基本引理)**.** V是$\mathbb{F}$上线性空间, 则若$\alpha_1,\cdots,\alpha_r\in V$能够被$\beta_1,\cdots,\beta_s$线性表出, 且$r>s$, 则$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性相关. 同样的可以得到逆否命题.

定义 4.2.4 (极大无关组)**.** V是$\mathbb{F}$上线性空间, 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in V$, 若其子组设$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关, 且添加任何其他原组中的向量则变为线性相关, 则称其为原组的一个极大无关组.

推论 4.2.2. 极大无关组包含相同的向量个数

定义 4.2.5 (秩)**.** 极大无关组的个数称为向量组的秩

例 2 在$C[a,b]$中, $sinx$和$conx$线性无关

定义 4.2.6 (Wrongski行列式)**.** 设$f_1(x),\cdots,f_n(x)$的$n-1$阶导数存在, 则

$$W(f_1,\cdots,f_n)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x)\\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}$$

为$f_1,\cdots,f_n$的*Wrongski*行列式.

若$W(f_1,\cdots,f_n)\neq 0$, 则$f_1,\cdots,f_n$线性无关.

例 3 在$\mathbb{F}[x]$中, 若$0\leq i_1<\cdots<i_n\in\mathbb{Z}$, 则$x^{i_1},\cdots,x^{i_n}\in\mathbb{F}[x]$线性无关

例 4 设V在$\mathbb{F}$是一个线性空间, 有$\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in V$线性无关, 若有$\beta_i=\sum_{j=1}^n a_{ji}\alpha_j, 1\leq i\leq s$, 即:

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns}\end{pmatrix}$$

记该矩阵为A, 则$rank\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}=rank\{A\}$, 且线性相关性与矩阵$A$对应列的线性相关性相同.

例 5 在$\mathbb{F}[x]$中, 求$\alpha_1=1-x-x^2,\alpha_2=x-x^2,\alpha_3=-2+x^2$的秩.

例 6 $\mathbb{C}$在$\mathbb{C}$是线性空间, $i,1$是线性相关的, 而在$\mathbb{R}$上是线性无关的.

例 7 定义$\mathbb{Q}[\sqrt[n]{2}]=\{f(\sqrt[n]{2})|f(x)\in\mathbb{Q}[x]\}$, 则$1,\sqrt[n]{2},\sqrt[n]{2^2},\cdots,\sqrt[n]{2^{n-1}}\in\mathbb{Q}[\sqrt[n]{2}]$在$\mathbb{R}$上线性无关. $f(x)=x^n-1$有唯一的根$\sqrt[n]{2}$, 考虑其与非零多项式$g(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i$的整除关系.

定义 4.2.7 (线性无关子集). *设V是$\mathbb{F}$上的线性空间, $S\neq\varnothing\subseteq V$, 如果其任意有限子集都线性无关, 则称$S$是$V$的一个线性无关子集.*

定义 4.2.8 (极大线性无关子集). *设V是$\mathbb{F}$上的线性空间, $\varnothing\neq S\subseteq V,\varnothing\neq S_1\subseteq S$, 如果$S_1$是一个线性无关子集, 并且任意$S$中的向量都可以由$S_1$线性表出, 则称$S_1$是$S$的一个极大无关子集.*

公理 4.2.1 (基的存在性定理). *设V是$\mathbb{F}$上的线性空间, $\varnothing\neq S\subseteq V,S\neq\{0\}$, 则$S$一定有极大无关子集.*

定义 4.2.9 (基). *V的极大无关子集称为V的基.*

例 8

1. $M_{m\times n}(\mathbb{F})$中的基本矩阵.
2. $C[a,b]$中的基. (无法直接写出)

引理 4.2.2. *线性空间V的任意基所含向量的个数相同.*

定义 4.2.10 (线性空间的维数). *设S是V的一个基, 则称S中向量的个数为维数, 记为$dimV=n$, $V=\varnothing$时, $dimV=0$, 如果V的极大无关子集含有向量无穷多, 则$dimV=\infty$.*

例 9

1. $\mathbb{F}[x]$的维数
2. 齐次线性方程$AX=0$的解空间的维数

推论 4.2.3. *设$\varnothing\neq V$在$\mathbb{F}$是一个线性空间, 若$dimV=n$, 则其中任意n个线性无关的向量都是V的一个基.*

例 10

1. $\mathbb{C}/\mathbb{C}$中, 有$dim\mathbb{C}=1$

2. $\mathbb{C}/\mathbb{R}$中, 有$dim\mathbb{C}=2$

3. $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$中, 有$dim\mathbb{R}=\infty$

4. $\mathbb{R}/\mathbb{R}$中, 有$dim\mathbb{R}=1$

定义 4.2.11 (坐标)**.** 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是n维线性空间V的一个基, 则对$\forall\alpha\in V$, 有

$$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

称X为α的在该基下的坐标.

例 11 定义建立了一个从V到$\mathbb{F}^n$的双射.

定理 4.2.3. 设$V/\mathbb{F}$, 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是V的一个基, 设$\beta_1,\cdots,\beta_n\in V$, 则有:

$$\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}A$$

则$\beta_1,\cdots,\beta_n$是V的一个基$\Longleftrightarrow$有A可逆

定义 4.2.12 (转移矩阵)**.** 由上, 称A为从$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$到$\beta_1,\cdots,\beta_n$的转移矩阵. 称$GLn(\mathbb{F})=\{\mathbb{F}$上所有可逆的$n$阶矩阵$\}$.

推论 4.2.4. 在$V/\mathbb{F}$, 由上, 若:

$$\gamma=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}Y$$

设A是上述的转移矩阵, 则有$Y=A^{-1}X$.

4.3 线性映射和同构

定义 4.3.1 (线性映射)**.** 设$V_1,V_2/\mathbb{F}$, 设映射$f:V_1\to V_2$, 满足:

1. $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta),\forall\alpha,\beta\in V_1$

2. $f(k\alpha)=kf(\alpha),,\forall\alpha\in V_1,\forall k\in\mathbb{F}$

则称f为从V_1到V_2的线性映射. 记所有此线性映射的集合为$Hom(V_1,V_2)$或$L(V_1,V_2)$

例 1

1. 设$V_1,V_1/\mathbb{F},f:\alpha\mapsto 0,\alpha\in V_1$, 即$0\in Hom(V_1,V_2)$. 这个例子说明$Hom(V_1,V_2)$不会是一个$\varnothing$.

2. 将$V, dimV = n$中的向量映射到$\mathbb{F}^n$中的该向量的坐标的映射, 是一个线性映射.

3. 在$M_{m\times n}(\mathbb{F})$中, 将一个矩阵映射到其的转置.

定义 4.3.2 (线性变换). 在一个线性映射中, 若$V_1 = V_2$, 则称该f是一个线性变换.

定义 4.3.3 (线性映射的矩阵). 设V_1, V_2, $dimV_1 = n$, $dimV_2 = m$是两个有限维线性空间, 设$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$以及$\beta_1, \cdots, \beta_m$分别是两个线性空间的基, 设有线性映射$f$, 有:

$$\begin{pmatrix} f(\alpha_1) & f(\alpha_2) & \cdots & f(\alpha_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{pmatrix} A,\ A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$$

例 2 设$V_1, V_2\ /\mathbb{F}$, 取定$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$以及$\beta_1, \cdots, \beta_m$分别是两个线性空间的基, 则有单射$\sigma : Hom(V_1, V_2) \to M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

定理 4.3.1 (线性映射存在性与唯一性定理). 设$V_1, V_2\ /\mathbb{F}$, $dimV_1 = n$, 则取定V_1的一个基$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 取定$V_2$中的一个向量组$\beta_1, \cdots, \beta_n$, 则存在唯一的$f \in Hom(V_1, V_2)$, 使得$f(\alpha_i) = \beta_i$, $1 < i < n$.

例 3 $f \in Hom(V_1, V_2)$, 关于两个线性空间的两个基(有限)的矩阵为A, 设$\alpha \in V_1$, 其坐标为X, 则有其在V_2中的坐标为AX

例 4 由上例, 设$im(f) = \{f(\alpha) \in V_2 | \alpha \in V_1\}$, 则$\beta \in im(f) \iff \beta$的坐标$Y$可以由$A$的列向量线性表出

例 5 有$kerf = \{\alpha \in V_1 | f(\alpha) = 0\} = \{\alpha \in V_1 | AX = 0\}$, 可见$kerf$不是空集, 一定有0.

推论 4.3.1. $f \in Hom(V_1, V_2)$, 则: f是满射$\iff im(f)$中向量可以由A的列向量线性表出$\iff r(A)$等于$dimV_2$. f是单射$\iff kerf = \{0\}$. 两者都是有限维线性空间, 则f单且满$\iff A$满秩.

例 6 设$f \in Hom(V_1, V_2)$, 其中$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$和$\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n$是$V_1$的基, $\beta_1, \cdots, \beta_m$和$\beta'_1, \cdots, \beta'_m$是$V_2$的基, 有:

$$\begin{pmatrix} f(\alpha_1) & f(\alpha_2) & \cdots & f(\alpha_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{pmatrix} A,\ A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$$

$$\begin{pmatrix} f(\alpha'_1) & f(\alpha'_2) & \cdots & f(\alpha'_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta'_1 & \beta'_2 & \cdots & \beta'_m \end{pmatrix} B,\ B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$$

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \cdots & \alpha'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} P,\ P \in M_n(\mathbb{F})$$

$$\begin{pmatrix} \beta'_1 & \beta'_2 & \cdots & \beta'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} Q,\ Q \in M_m(\mathbb{F})$$

有$B = Q^{-1}AP$. A和B是在同一个线性映射不同基下的矩阵.

定义 4.3.4 (同构映射). 设$V_1, V_2/\mathbb{F}$, 设其线性映射f单且满, 则称其为同构映射.

推论 4.3.2. f为同构映射$\iff f$的矩阵A可逆.

引理 4.3.1. 设$f \in Hom(V_1, V_2)$, 则有f是同构映射$\Longleftrightarrow \exists\ g \in Hom(V_1, V_2) \to g \cdot f = id_{V_1}, f \cdot g = id_{V_2}$

例 7

1. $M_{m\times n}(\mathbb{F}) \cong M_{n\times m}(\mathbb{F})$

2. $D:\ \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x],\ f(x) \mapsto f'(x)$, 有$KerD = \mathbb{F}$, 其是满射但是不是单射.

4.4 子空间

定义 4.4.1 (子空间)**.** 设线性空间V的一个子集W关于V的运算封闭, 则称W是V的线性子空间. 特别地, 任意线性空间的子空间含零空间和其本身.

例 1

1. $M_n(\mathbb{F})$中的对称矩阵组成的集合.

2. $M_n(\mathbb{F})$中秩为1的矩阵组成的集合.

3. $\mathbb{F}[x]$中小于特定阶数的多项式集合.

4. $\mathbb{F}[x]$中同构于其子空间W: $x^i \mapsto x^{2i},\ i \in \mathbb{N}$.

5. $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$关于乘法和幂.

性质 4.4.1. 由上, $dimW \leq dimV$, 特别地, 有$dimW = dimV \leftrightarrow W = V$.

定理 4.4.1 (基的扩充定理)**.** W是V的子空间, 则W的任意一个基可以扩充为V的一个基.

定义 4.4.2 (生成子空间)**.** 设$V/\mathbb{F}$, $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_s \in V$, 称$<\alpha_1, \cdots, \alpha_s> = \{\beta \in V | \beta = \sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i,\ k_i \in \mathbb{F}\}$为$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$张成的子空间.

例 2 求$dim < 1,\ x+1,\ x^2+x+1,\ x^2+x-2 >$

例 3 设$V_1, V_2/\mathbb{F},\ f \in Hom(V_1, V_2)$, 则$kerf$是$V_1$的子空间, $im(f)$是V_2的子空间.

定义 4.4.3 (同构)**.** 若两个线性空间之间存在同构映射, 则称两个线性空间同构(等价关系), 记为$V_1 \cong V_2$.

定理 4.4.2 (同构定理)**.** 两个都是有限维的线性空间同构$\longleftrightarrow$两个线性空间的维数相等(设为n), 特别地, 其同构于$\mathbb{F}^n$

例 4 设$dimV_1 = n$, $dimV_2 = m$则有$Hom(V_1, V_2) \cong M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 特别地, $dimM_{m\times n}(\mathbb{F}) = dimHom(V_1, V_2) = mn$

4.5 子空间的运算

定理 4.5.1 (子空间的维数公式). 设$V_1, V_2/\mathbb{F}$, $f \in Hom(V_1, V_2)$, 其中$dimV_1 = n \Longrightarrow dimkerf + dimim(f) = n$

推论 4.5.1. 由上, 若$dimV_1 = dimV_2 = n$, 则有f是单射$\Longleftrightarrow f$是双射$\Longleftrightarrow f$是同构映射.

命题 4.5.1 (子空间的交). 设V_1, V_2都是V的子空间, 子空间的交为$V_1 \cap V_2$. 子空间的交仍是子空间, 多个子空间的交仍是子空间.

例 1

1. 如何求两个子空间的交及其维数?
2. 若$dimV = n$, 则V可以写成若干$n-1$维子空间的交.
3. (线性映射保子空间), W是V_1的子空间, 则$f(W)$是V_2的子空间.

引理 4.5.1 (子空间的并). 两个线性子空间V_1, V_2的并是子空间$\Longleftrightarrow V_1 \subseteq V_2$或$V_2 \subseteq V_1$. 可以看出线性子空间的并意义不大.

定理 4.5.2. 线性空间V无法等于其有限多个线性真子空间的并.

命题 4.5.2. 线性子空间的补W^c一定不是子空间.

引理 4.5.2. 线性子空间的和$V_1 + V_2 \triangleq \{\alpha_1 + \alpha_2 | \alpha_1 \in V_1,\ \alpha_2 \in V_2\}$是子空间.

例 2

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_s \Longleftrightarrow \forall\ \alpha \in V, \exists\ \alpha_1 \in V_1, \cdots, \alpha_s \in V_s \to \alpha = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i$$

.

例 3 $V = M_n(\mathbb{F})$, $V_1 = \{A \in V | A = A'\}$, $V_2 = \{A \in V | A = -A'\}$, 有$V = V_1 + V_2$, 由于$A = \frac{A+A'}{2} + \frac{A-A'}{2}$.

例 4

$$V_1 = \{\alpha \in V | f(\alpha) = \alpha\},\ V_2 = \{\alpha \in V | f(\alpha) = -\alpha\},\ f^2 = id_V \Longrightarrow V = V_1 + V_2$$

.

命题 4.5.3.

$$< \alpha_1, \cdots, \alpha_s > + < \beta_1, \cdots, \beta_t > = < \alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t >$$

注意子空间的加不具有消去律.

定理 4.5.3 (子空间的维数公式). 设V_1, V_2是V的子空间, 且其维数都有限, 则$dim(V_1 + V_2) = dimV_1 + dimV_2 - dim(V_1 \cap V_2)$

4.6 直和

定义 4.6.1 (直和)**.** 若$\forall\ \alpha\in\sum_{i=1}^{s}V_i,\ \exists\ \alpha_i\in V_i\to\alpha=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i$, 且表示方法唯一, 则称$\sum_{i=1}^{s}V_i$是一个直和.

推论 4.6.1. $\sum_{i=1}^{s}V_i$是直和$\Longleftrightarrow$零的写法唯一.

命题 4.6.1. V_1+V_2是直和$\Longleftrightarrow V_1\cap V_2=\{0\}$

例 1 设$V_1=\{f(x)\in C[-\infty,+\infty]|f(a)=0\}$, $V_2=\{f(x)\in C[-\infty,+\infty]|f(b)=0\}$, 则$V_1+v_2$是直和?

定理 4.6.1. 设V_i, $1\le i\le s$的一个基为$\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{it_i}$, 则$\sum_{i=1}^{s}V_i$是直和$\Longleftrightarrow\ dim\sum_{i=1}^{s}V_i=\sum_{i=1}^{s}dimV_i$

例 2 若有$V_1\oplus V_2=V_1\oplus V_3\Longrightarrow dimV_2=dimV_3\Longrightarrow V_2\cong V_3$. 注意不能够推导出$V_2=V_3$.

例 3 $f\in Hom(V,V)$则有$kerf+im(f)$是直和.

定理 4.6.2. 设V_1是V的子空间, 则一定存在V_2是V的子空间, 使得$V=V_1\oplus V_2$.

定义 4.6.2 (补空间)**.** 称上述定理中的V_2是V_1在V中的补空间.

定义 4.6.3 (嵌入)**.** 设V_1是V的子空间, 则有映射$\tau:V_1\to V,\ \alpha\mapsto\alpha$, 称为从$V_1$到$V$的嵌入.

定义 4.6.4 (线性投影)**.** 取V_1在V中的补空间V_2, 有$\forall\ \alpha\in V,\ \alpha=\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$, 表示唯一, 称映射$p_{V_1}:V\to V_1,\ \alpha\mapsto\alpha_1$为$V$沿$V_1$的线性的投影.

定理 4.6.3 (准素分解定理)**.** 设$V/\mathbb{F}$, 若有$\rho\in EndV,\ f(x)\in\mathbb{F}[x],\ f(\rho)=0,\ f(x)=f_1(x)\cdots f_s(x)$且$f_i(x)$两两互素, 则有:

$$V=kerf_1(\rho)\oplus\cdots\oplus kerf_s(\rho)$$

例 4 $V/\mathbb{F}$, 设$f\in Hom(V,V)$, 则$V=ker(f-3id_V)\oplus ker(f+2id_V)\Longleftrightarrow f^2-f-6id_V=0$

例 5 线性变换保空间分解: 设$dimV=n,\ f\in Hom(V,V)$, 若有任意的两子空间$V=V_1\oplus V_2,\ V=f(V_1)\oplus f(V_2)\Longrightarrow f$是同构映射.

例 6 设$V,W/\mathbb{F}$, 且$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_s,\ W=W_1\oplus\cdots\oplus W_t$, 若有:

$$V_i\xrightarrow{l_i}V\xrightarrow{f}W\xrightarrow{p_{W_j}}W_j$$

, 记$f_{ji}\triangleq p_{W_j}\cdot f\cdot l_i$, 若设线性空间为有限维, 则可以得到分块矩阵的具体意义, 略.

第五章 线性变换

5.1 线性变换

定义 5.1.1 (线性变换). 线性映射中, 两个线性空间是同一个线性空间的线性映射称为线性变换. 记为$\mathbb{A}$,$\mathbb{B}$等表示线性变换, 此时$Hom(V,V)=End(V)$.

命题 5.1.1. $EndV$是$\mathbb{F}$上的一个线性子空间.

命题 5.1.2.

1. 对乘法封闭, 不满足交换律.
2. λid_V与所有$EndV$中元素都可关于乘法交换.
3. 乘法满足结合律.
4. $\forall\ f,g\in\mathbb{F}[x],\ \mathbb{A},\mathbb{B}\in EndV$ 有$f(\mathbb{A})g(\mathbb{B})=g(\mathbb{B})f(\mathbb{A})$

例 1 设$\mathbb{A}\in EndV,\ C(\mathbb{A})=\{\mathbb{B}\in EndV|\mathbb{A}\mathbb{B}=\mathbb{B}\mathbb{A}\}$, $C(\mathbb{A})$是$EndV$的子空间, 求其维数?

5.2 零化和极小多项式

定义 5.2.1 (零化多项式). 多项式$f(x)$使得$f(\mathbb{A})=0\in EndV$, 则称$f(x)$为$\mathbb{A}$的零化多项式.

引理 5.2.1. 若$dimV=n,\ \mathbb{A}\in EndV$, 则$\mathbb{A}$有非零零化多项式.

例 1 $\frac{d}{dx}\in End(C[a,b])$没有非零零化多项式.

引理 5.2.2 (极小多项式的唯一性). 设$m1$. $m1$是$\mathbb{A}$的次数最小的首一的零化多项式, 则$m1=m2$.

定义 5.2.2 (极小多项式). 设$\mathbb{A}$的次数最低的首一的零化多项式为$\mathbb{A}$的极小多项式.

例 2 设$\mathbb{A}\in EndV,\ dimV=n<\infty,\ \mathbb{F}[\mathbb{A}]\triangleq\{\ \mathbb{B}\in EndV\mid\exists\ f(x)\in\mathbb{F}[x],\ \mathbb{B}=f(\mathbb{A})\}$, 则$\mathbb{F}[\mathbb{A}]$一定是$EndV$的子空间, 求其维数.

定理 5.2.1. $EndV\cong M_n(\mathbb{F}),\ dimEndV=dimM_n(\mathbb{F})=n^2$.

推论 5.2.1. $\forall\ \mathbb{A}\in EndV,\ \exists\ 0\neq f(x)\in\mathbb{F}[x]$使得$f(\mathbb{A})=0\in EndV$

5.3 矩阵的相似

引理 5.3.1. *若有:*

$$\begin{pmatrix}\mathbb{A}\alpha_1 & \mathbb{A}\alpha_2 & \cdots & \mathbb{A}\alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix} A$$

$$\begin{pmatrix}\mathbb{A}\beta_1 & \mathbb{A}\beta_2 & \cdots & \mathbb{A}\beta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix} B$$

$$\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix} C$$

则有$B = C^{-1}AC$.

定义 5.3.1 (相似)**.** *称上述两个矩阵之间的关系为相似, 即存在可逆的矩阵*C, *使得*$B = C^{-1}AC$.

命题 5.3.1. *相似关系是等价关系.*

例 1 相似于一数量阵的矩阵只有其本身.

例 2 A与B相似, 等且仅当$XA = BX$矩阵方程有可逆的解, 等且仅当$f(t_1, \cdots, t_r) = det(t_1X_1 + \cdots + t_rX_r) \in \mathbb{F}[t_1, \cdots, t_r]$是一个非零函数($X_i$是解空间的基).

命题 5.3.2. *相似关系不依赖于数域, 由上可以看出.*

性质 5.3.1. *相似关系的必要条件:*

1. $det(A) = det(B)$.

2. $r(A) = r(B)$.

3. $tr(A) = tr(B)$.

4. A, B*的极小多项式相同.*

引理 5.3.2.

$$A \sim B \Longrightarrow A^k \sim B^k \Longrightarrow f(A) \sim f(B)$$

.

5.4 特征值和特征向量

引理 5.4.1. $A \in M_n(\mathbb{F}),\ D = diag\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\},\ A \sim D \Longrightarrow A\xi_i = \lambda_i\xi_i,\ 1 \le i \le n$, *其中每个*$\xi_i$*线性无关.*

定义 5.4.1 (特征向量)**.** *上述引理中, 称*λ*为*A*的特征值,* ξ*是*A*的属于*λ*的特征向量.*

定义 5.4.2 (可对角化)**.** *若*$A \in M_n(\mathbb{F})$, $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$, *在数域*$\mathbb{K}$*上可以相似于一个对角阵, 则称*$A$*在*$\mathbb{K}$*上可以对角化.*

推论 5.4.1. $M_n(\mathbb{F})$*上的矩阵可以对角化, 当且仅当其有*n*个线性无关的特征向量.*

定义 5.4.3 (特征子空间). $A \in M_n(\mathbb{F})$, 若λ_1, $\cdots$, λ_s是其互不相同的特征值, 则称$V_\lambda = \{\xi \in \mathbb{F}^n | A\xi = \lambda\xi\}$为矩阵的属于该特征值的特征子空间.

引理 5.4.2. $A \in M_n(\mathbb{F})$, 若λ_1, $\cdots$, λ_s是其互不相同的特征值, 则该s个特征子空间是直和.

推论 5.4.2. 若有对角元都相同的上三角阵$A \in M_n(\mathbb{F})$, 则其不可对角化.

引理 5.4.3. $A \in M_n(\mathbb{F})$, 则λ是其特征值(不为0)当且仅当$r(A - \lambda E) < n$或$\det(A - \lambda E) = 0$.

5.5 特征多项式

定义 5.5.1 (特征多项式). 称$f(\lambda) = det(\lambda E - A) \in \mathbb{F}[x]$为$A \in M_n(\mathbb{F})$的特征多项式.

则有λ是其特征值, 当且仅当是其特征多项式的根.

推论 5.5.1. $A \in M_n(\mathbb{F})$是对角元都不相同的上三角阵, 则其可对角化.

推论 5.5.2. 两个矩阵相似, 则其特征多项式相同.

推论 5.5.3. 若$A \in M_n(\mathbb{F})$, 则$det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$, $tr(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

推论 5.5.4. $A \in M_n(\mathbb{F})$是上三角阵, 若λ_1, $\cdots$, λ_n是其对角元, 则$tr(A^k) = \sum_{i=1}^n {\lambda_i}^k$.

定义 5.5.2 (几何重数和代数重数). λ是$A \in M_n(\mathbb{F})$的一个特征值, 则称其在特征多项式中的重数为其代数重数, 其特征子空间的维数为几何重数.

定理 5.5.1 (实数对称阵的特征值). 实数域上的对称阵的特征值一定是实数.

例 1 对角化算法:

1. 由特征多项式判断其特征值是否在数域$\mathbb{F}$上, 否则不可对角化.
2. 算出每个特征子空间的基, 若维数之和小于n, 则其不可对角化.
3. 依次排列基和对应的特征值即为C和D.

定理 5.5.2. $A \in M_n(\mathbb{F})$, $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$, 则$A$相似于一个上三角阵, 当且仅当其特征值都在$\mathbb{K}$上.

推论 5.5.5. 一个矩阵在复数域上一定相似于一个上三角阵.

例 2 $A \in M_n(\mathbb{F})$, $A^n = 0$, 当且仅当A只有零特征值, 当且仅当其特征多项式为x^n.

例 3 若$A \in M_n(\mathbb{F})$, A相似于一个对角元为λ_1, $\cdots$, λ_n的上三角阵, $g \in \mathbb{F}[x]$, 有$det(g(A)) = \prod_{i=1}^n g(\lambda_i)$.

命题 5.5.1. $A \in M_n(\mathbb{F})$, 则A一定有非零零化多项式.

定理 5.5.3 (Hamilton-Caylay定理)**.** *矩阵的特征多项式即为其零化多项式.*

推论 5.5.6. *$A \in M_n(\mathbb{F})$, 则其极小多项式整除其特征多项式, 且其复根相同.*

推论 5.5.7. *若A, $B \in M_n(\mathbb{F})$, 且其特征多项式有f_A, $f_B \in \mathbb{F}[x]$互素, 则矩阵方程$AX = XB$只有零解.*

推论 5.5.8. *若有A, $B \in M_n(\mathbb{F})$, $A = diag\{A_1, \cdots, A_s\}, A_i \in M_{r_i}(\mathbb{F})$, $AB = BA$, 则$B = diag\{B_1, \cdots, B_s\}, B_i \in M_{r_i}(\mathbb{F})$.*

特别地, 若A是对角阵, 则B也是对角阵, 且有$dim\{B \in M_n(\mathbb{F}) | AB = BA\} = n$.

例 4 $A \in M_n(\mathbb{F})$, 其特征多项式为f_A, 若f_A, $g \in \mathbb{F}[x]$, 则$g(A)$可逆, 当且仅当$(f_A, g) = 1$.

例 5 由A的特征多项式可得, A^{-1}仍为其多项式.

例 6 $A \in M_n(\mathbb{F})$, 则其复特征值λ的代数重数大于等于其几何重数.

且, A可对角化, 当且仅当其代数重数和几何重数相等.

5.6 不变子空间

定义 5.6.1 (不变子空间)**.** *若W是$\mathbb{F}^n$的子空间, 若有$\forall \alpha \in W$, $A\alpha \in W$, 则称W是A的不变子空间(A-子空间).*

即A在$\mathbb{F}$上可准对角化, 当且仅当其可以分解为其不变子空间的直和.

例 1

1. $A \in M_n(\mathbb{F})$, 则有$\mathbb{F}^n$, 0是A的平凡A-子空间.
2. 其特征子空间是其一个不变子空间.
3. 特征子空间的和是一个不变子空间.

例 2 设$A \in M_n(\mathbb{R})$, 设λ是其一复特征值, 对应α是其特征向量, 令$\xi_1 = \alpha + \bar{\alpha}$, $\xi_2 = (\alpha - \bar{\alpha})i$. 则有$W = <\xi_1, \xi_2>$是$A$的一个不变子空间.

实数域上的方阵一定有二维的不变子空间.

例 3 $A = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 绕$z$轴旋转.

例 4 $A \in M_n(\mathbb{F})$, 且$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$是其互不相同的特征值, V_{λ_i}是其特征子空间, 设W是其不变子空间, 则有:

$W \cap (V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}) = (W \cap V_{\lambda_1}) \oplus \cdots \oplus (W \cap V_{\lambda_s})$.

特别地, 若A可对角化, 则有:

$W = (W \cap V_{\lambda_1}) \oplus \cdots \oplus (W \cap V_{\lambda_s})$.

定义 5.6.2 (线性变换的特征值等)**.** *定义$\mathbb{A} \in EndV$的矩阵A的特征值, 特征向量, 特征子空间, 不变子空间, 特征多项式为$\mathbb{A}$的.*

例 5 若$\mathbb{A} \in EndV$, 则$ker\mathbb{A}$, $im(\mathbb{A})$是$\mathbb{A}$-子空间.

例 6 $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, 且$AB = BA$, 则$kerB$一定是A的特征子空间.

特别地, 对$\forall f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $kerf(A)$是A-子空间.

例 7 $\mathbb{F}[x]$上, $\frac{d}{dx}$只有一个特征值0, 且其特征子空间的维数为1.

定义 5.6.3 (限制)**.** *设$V/\mathbb{F}$, $\mathbb{A} \in EndV$, W是其一个不变子空间, 则称$\mathbb{A}|_W : W \to W$, $\alpha \mapsto \mathbb{A}\alpha$是$\mathbb{A}$在$W$上的限制.*

例 8 设V_λ是$\mathbb{A}$的一个特征子空间, 则有$\mathbb{A}|_{V_\lambda} = \lambda id_{V_\lambda}$.

例 9 在准素分解定理中, 若$g = g_1 \cdots g_s$, 且其两两互素, g非零为$\mathbb{A}$的一个零化多项式, $kerg_i(\mathbb{A})$是其一个不变子空间, 则g_i是$\mathbb{B}_i = \mathbb{A}|_{kerg_i(\mathbb{A})}$的一个零化多项式.

例 10 若$V/\mathbb{F}$, $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in EndV$, 且$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$, $dimV < \infty$, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, 则$\mathbb{A}$和$\mathbb{B}$有共同的特征向量.

例 11 设$A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $AB = BA$, 则存在可逆的方阵$P \in M_n(\mathbb{C})$, 使得$P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$同时为上三角阵.

例 12 设$A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $AB = BA$, 且B幂零, 则$det(A + B) = det(A)$

命题 5.6.1. *极小多项式不依赖于数域(线性相关性不依赖于数域).*

引理 5.6.1. *若A可以写成准对角阵$diag\{A_1, \cdots, A_s\}$, 设$m(x)$是其极小多项式, $m_i(x)$是对角元位置上矩阵的极小多项式, 则 $m = [m_1, \cdots, m_s]$.*

推论 5.6.1. *若$A = diag\{\lambda_1 E_{r_1}, \cdots, \lambda_s E_{r_s}\}$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_s \in \mathbb{K}$, 则有 A在$\mathbb{K}$上可对角化, 当且仅当其极小多项式可以在$\mathbb{K}$上分解为互异(没有重根)的一次多项式乘积.*

例 13 r阶Jordan块一定不可对角化.

5.7 λ-阵

定义 5.7.1 (特征阵)**.** *设$A \in M_n(\mathbb{F})$, λ为不定元, 称$\lambda E_n - A \in M_n(\mathbb{F}[\lambda])$为$A$的特征阵.*

其中$M_n(\mathbb{F}[\lambda])$为所有$(a_{ij}(\lambda))_{n\times n}$, $a_{ij}(\lambda) \in \mathbb{F}[x]$的集合.

定义 5.7.2 (λ阵的次数)**.** *定义$max_{1\le i,j\le n} a_{ij}(\lambda)$为$A(\lambda) \in M_n(\mathbb{F}[\lambda])$为其次数, 约定在$A(\lambda) = 0$时次数为$-\infty$.*

一般地可以将$A(\lambda)$写成$A(\lambda) = \lambda^m A_m + \lambda^{m-1} A_{m-1} + \cdots + \lambda A_1 + A_0$, $A_i \in M_n(\mathbb{F})$的样式.

性质 5.7.1. *$M_n(\mathbb{F}[\lambda])$上:*

1. $deg(A(\lambda) + B(\lambda)) \le max\{degA(\lambda), degB(\lambda)\}$, $deg(A(\lambda)B(\lambda)) \le degA(\lambda) + degB(\lambda)$.

2. *是一个环, 是$\mathbb{F}[\lambda]$上的矩阵环.*

3. *$\mathbb{F}[x]$是一个交换环, 可以定义行列式, 满足行列式乘积定理、laplace定理.*

定义 5.7.3 (λ阵的可逆性). 若存在$B(\lambda) \in M_n(\mathbb{F}[\lambda])$使得$A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = E$, 则称$A(\lambda)$可逆, $B(\lambda)$为其逆矩阵.

定理 5.7.1 (λ阵可逆的充要条件). 若$A(\lambda) \in M_n(\mathbb{F}[\lambda])$, 则$A(\lambda)$可逆, 当且仅当 $det(A(\lambda)) \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

例 1

1. λ阵的初等变换: 交换两行/列, 将某行/列的$u(\lambda)$倍加到另一行, 将某一行乘以一个非零常数.
2. 定义E_n经一次初等变换得到的矩阵称为初等λ阵.
3. 初等λ阵一定可逆, 且逆矩阵仍是初等λ阵.
4. 定理: 对λ阵做初等变换, 等价于对该λ阵乘以相应的初等λ阵.

定义 5.7.4 (λ阵的秩). 称$A(\lambda)$非零子式的最高阶数为其秩, 记为$r(A(\lambda))$.

命题 5.7.1. 若$A(\lambda)$可逆, 则其秩为n, 反之不一定成立.

定义 5.7.5 (λ阵的相抵). 设$A(\lambda), B(\lambda) \in M_n(\mathbb{F}[\lambda])$, 若存在可逆的$P(\lambda), Q(\lambda)$使得$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = B(\lambda)$, 则称$A(\lambda), B(\lambda)$相抵.

相抵是等价关系.

引理 5.7.1. A, B相似, 当且仅当, 存在可逆的R_1, R_2使得$R_1(\lambda E - A)R_2 = \lambda E - B$.

引理 5.7.2. $P(\lambda), Q(\lambda) \in M_n(\mathbb{F}[\lambda])$, 则存在$H(\lambda), G(\lambda) \in M_n(\mathbb{F}[\lambda])$, $R_1, R_2 \in M_n(\mathbb{F})$使得

$$P(\lambda) = H(\lambda)(\lambda E - B) + R_1$$
$$Q(\lambda) = (\lambda E - B)G(\lambda) + R_2.$$

定理 5.7.2 (矩阵相似的充要条件). 若$A, B \in M_n(\mathbb{F})$, 则两矩阵相似, 当且仅当$\lambda E - A$与$\lambda E - B$相抵.

引理 5.7.3. 设$A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$, 且$a_1 1 \neq 0$若存在$a_{ij}(\lambda)$使得$a_{11}(\lambda) \nmid a_{ij}(\lambda)$, 则$A(\lambda)$一定可以经有限步初等变换化为$B(\lambda) = (b_{ij}(\lambda))_{m\times n}$其中, $b_{11}(\lambda)$首一且$degb_{11} < dega_{11}$.

定理 5.7.3. 设$A(\lambda) \in M_{m\times n}(\mathbb{F}[\lambda])$且非零, 则$A(\lambda)$一定相抵于: $diag\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda), 0, \cdots, 0\}$, 且对角元首一, $d_i(\lambda) | d_{i+1}(\lambda), 1 \leq i \leq r-1$.

推论 5.7.1.

1. $A(\lambda)$可逆, 当且仅当其可以表示为有限个初等λ阵的乘积.
2. $A(\lambda)$, $B(\lambda)$相抵, 当且仅当$A(\lambda)$可以经有限步初等变换化为$B(\lambda)$.

5.8 行列式、不变、初等因子

定义 5.8.1 (行列式因子). 设$A(\lambda)$是一个λ阵, 且$r(A(\lambda) > 0)$, 对$1 \le k \le n$, 其存在非零k阶子式, 则称其所有k阶子式的最大公因式为其k级行列式因子, 记为$D_k(\lambda) = D_k(A(\lambda))$.

引理 5.8.1. 初等行/列变换不改变$\lambda-$阵的行列式因子.

推论 5.8.1. 1. 初等变换不改变$\lambda-$矩阵的秩.

2. 相抵的$\lambda-$阵具有相同的秩.

定理 5.8.1 (行列式因子与不变因子). 若$A(\lambda)$相抵于$diag\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda), 0, \cdots, 0\}$, 且对角元首一, $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda), 1 \le i \le r-1$, 则有:

1. $d_1(\lambda) = D_1(\lambda)$, $d_2(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}$, $\cdots$, $d_r(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$.

2. 若$A(\lambda)$相抵于$diag\{f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_r(\lambda), 0, \cdots, 0\}$, 则$f_i = d_i$, $1 \le i \le r$.(唯一性)

定义 5.8.2 (smith标准形). 称上定理中的矩阵为$A(\lambda)$的相抵标准形, 称$d_i(\lambda)$, $1 \le i \le r$为其不变因子.

推论 5.8.2 (λ阵相抵的充要条件). 两个$\lambda-$阵相抵, 当且仅当其各级行列式因子相同, 当且仅当其所有不变因子相同.

定义 5.8.3 (行列式因子与不变因子). 称$\lambda E - A$的不变因子/行列式因子, 为A的不变因子/行列式因子.

定理 5.8.2 (矩阵相似的充要条件). 两个矩阵相似, 当且仅当其行列式因子相同, 当且仅当其不变因子相同.

例 1 若$A \in M_n(\mathbb{F})$, f_A是其特征多项式, d_1, $\cdots$, d_r是其不变因子, 则
$f_A = d_1 \cdots d_r$

推论 5.8.3. 1. $A \in M_n(\mathbb{F})$, 则A与A'相似.

2. $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$, 则$A, B$在$\mathbb{F}$上相似, 当且仅当其在$\mathbb{K}$上相似.

例 2 r阶Jordan块$J_r(a)$的$D_1(\lambda) = \cdots = D_{r-1}(\lambda) = 1$, $D_r(\lambda) = (\lambda - a)^r$.

例 3 $A(\lambda)$可逆, 当且仅当其行列式为非零常数, 当且仅当$D_n(\lambda) = 1$, 当且仅当$A(\lambda)$的标准形为E_n.

命题 5.8.1. $A(\lambda)$不变因子的个数为$A(\lambda)$的秩.

引理 5.8.2. $diag\{a_1(\lambda), \cdots, p(\lambda)^s a_i(\lambda), \cdots, p(\lambda)^t a_j(\lambda), \cdots, a_n(\lambda)\}$,
$diag\{a_1(\lambda), \cdots, p(\lambda)^t a_i(\lambda), \cdots, p(\lambda)^s a_j(\lambda), \cdots, a_n(\lambda)\}$相抵.

引理 5.8.3. 设$A(\lambda)$相抵于$B(\lambda)=diag\{h_1(\lambda),\cdots,h_n(\lambda)\}$, 设$h_i(\lambda)=p_1(\lambda)^{r_{i1}}\cdots p_s(\lambda)^{r_{is}},1\leq i\leq n$, 且$r_{ij}\geq 0,1\leq j\leq s$, 其中$p_j(\lambda)^{r_{ij}}$是$\mathbb{F}$上的素幂因子, $p_j(\lambda)$不可分解. 作s行, 每行按照$p_i(\lambda)$的次数降幂排列, 每一列的乘积即为$A(\lambda)$和$B(\lambda)$的不变因子.

定义 5.8.4 (初等因子)**.** $A(\lambda)\in M_n(\mathbb{F}[\lambda])$, 且$r(A(\lambda))=n$, 把$A(\lambda)$的每个正次数的不变因子的数幂因子称为$A(\lambda)$的初等因子.

推论 5.8.4. $A(\lambda)$的不变因子的所有数幂因子构成$A(\lambda)$的初等因子.

定理 5.8.3 (矩阵相似的充要条件)**.** $A,B\in M_n(\mathbb{F})$相似当且仅当其在同一数域的初等因子相同.

例 4 A的特征多项式等于其特征阵的初等因子的乘积.

定义 5.8.5 (正整数的划分)**.** 设$n\in\mathbb{N}^+$, 则称$n=n_1+\cdots+n_k$, $n_i\geq 1$, $n_{i+1}\geq n_i$, $1\leq i\leq n-1$为n的一个划分, 以$p(n)$表示划分的个数.

推论 5.8.5. 设$A\in M_n(\mathbb{F})$, 其特征多项式$f_A=p_1(\lambda)^{s_1}\cdots p_t(\lambda)^{s_t}$, 则其初等因子和矩阵按照相似关系分类有$p(s_1)\cdots p(s_t)$种.

定理 5.8.4 (Jordan标准形)**.** 若A的全部复特征值属于$\mathbb{F}$, 写出其初等因子, 按序排列, 构造准对角阵

$J=diag\{J_1(a_1),\cdots,J_{m_1}(a_1),\cdots,J_1(a_s),\cdots,J_{m_s}(a_s)\}$是$A$在$\mathbb{F}$上的$Jordan$标准形.
矩阵在某一数域上有$Jordan$标准形, 当且仅当其全部特征阵属于该数域.

例 5 如何求矩阵在某一数域的Jordan标准形.

1. 特征阵化为对角阵, 正次数对角元能否化为一次多相似的乘积, 否则无Jordan标准形.

2. 写出全部初等因子.

3. 写出Jordan标准形.

例 6 待定系数法求可逆矩阵P使得$P^{-1}AP=J$.

例 7 矩阵的极小多项式等于其最后一个不变因子.

例 8 $A\in M_n(\mathbb{F})$, 存在$k\in\mathbb{N}^+$, 使得$r(A^k)=r(A^{k+1}=\cdots)$

例 9 设$A\in M_n(\mathbb{F})$, 若A在某数域上有Jordan标准形, 则其对角元为a的Jordan块的个数为a作为其特征值的几何重数.

5.9 有理标准形

定义 5.9.1 (友阵)**.** 若$f(x)=\lambda_n+a_1\lambda_{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda_1+a_n\in\mathbb{F}[\lambda]$, 定义$R=\begin{pmatrix}0 & & & -a_n\\ 1 & \ddots & & \vdots\\ & \ddots & 0 & -a_2\\ & & 1 & -a_1\end{pmatrix}$为其友阵.

注意到, $|\lambda E-R|=f(\lambda)=d_n(\lambda)$, 而其他初等因子为1.

定义 5.9.2 (有理标准形)**.** 设A的全部初等因子的友阵分别为$R_{11}, \cdots, R_{1t_1}, \cdots, R_{s1}, \cdots, R_{st_s}$, 则定义矩阵$diag\{R_{11}, \cdots, R_{1t_1}, \cdots, R_{s1}, \cdots, R_{st_s}\}$为其有利标准形.

注意到其有利标准形与A有相同的初等因子, 因此他们相似.

例 1 若一个矩阵在某数域同时具有Jordan标准形, 则此Jordan标准形与其有利标准形相似.

例 2 考虑$M_2(\mathbb{R})$上所有矩阵的相似情况.

设该空间上的矩阵A的特征多项式为$f(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b$.

1. 若$a^2-4b>0$, 则其在实数域上相似于对角阵$diag\{\lambda_1, \lambda_2\}$.
2. 若$a^2-4b=0$, 则其在实数域上的初等因子有两种情况, 相似于其Jordan标准形, 可能相似于$diag\{\lambda_0, \lambda_0\}$或是$\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1\\ 0 & \lambda_0\end{pmatrix}$.
3. 若$a^2-4b<0$, 则其相似于其有利标准形$\begin{pmatrix}0 & b\\ 1 & -a\end{pmatrix}$.

第六章　Euclidean空间

6.1　内积

定义 6.1.1 (内积)**.** *具有对称性和正定性的双线性型为内积.*

例 1

1. 称$\mathbb{R}^n$上的$f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\ X,Y\mapsto\sum_{i=1}^n x_iy_i$为标准内积.

2. $\mathbb{R}^3$上的点积是内积.

3. $f:V\times V\to\mathbb{R},\ (A,B)\mapsto tr(A'B)$是内积.

4. $f:C[a,b]\times C[a,b]\to\mathbb{R},\ f,g\mapsto\int_a^b fgdx$是一个内积.

定义 6.1.2 (内积空间)**.** *若$(\ ,\ )$是V上的内积, 则称$(V,\ (\ ,\ ))$是一个内积空间.*

性质 6.1.1.　*1. 若某一向量与该空间内任意向量做内积都为零, 则该向量为零向量.*

2. 若$\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n$, 两两之间内积都为零(正交), 则其线性无关.

3. (Caucthy-Bunyakawski不等式): $\alpha,\ \beta\in V$, 则$(\alpha,\ \beta)^2\le(\alpha,\ \alpha)(\beta,\ \beta)$.

4. (Schmidt正交化): $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n$线性无关, 则$\beta_k=\alpha_k-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{(\alpha_k,\ \beta_i)}{(\beta_i,\ \beta_i)}\beta_i,\ \beta_1=\alpha_1$. 两两正交且与原向量组等价.

例 2　由Caucthy不等式得到$(\sum_{i=1}^n\frac{x_i^2}{n})^2\le\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$成立.
特别地, 基本不等式成立.

定义 6.1.3 (内积的几何性概念)**.**　*1. 定义某空间中向量的长度$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}$.*

2. 三角不等式$\|\alpha\|-\|\beta\|\le\|\alpha+\beta\|\le\|\alpha\|+\|\beta\|$.

3. 称$\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$为$\alpha$的单位化, 长度为一的向量为单位向量.

4. 设两向量$\alpha,\ \beta$都不为零, 则$|\frac{(\alpha,\ \beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}|\le 1$, 存在唯一的$\theta\in[0,\ \pi]$使得$cos\theta$与之相等, 定义$\theta$为两向量之间的夹角.

5. 若两向量之间的夹角为$\frac{\pi}{2}$, 即称两向量垂直.

定义 6.1.4 (度量映射)**.** *设V_1, V_2是两个线性空间, 分别两个内积为$(\ ,\ )_1$, $(\ ,\ )_2$, 若$f \in Hom(V_1,\ V_2)$, 且任意V_1中的向量, $(f(\alpha),\ f(\beta))_2 = (\alpha,\ \beta)_1$, 即线性映射保内积, 则称该线性映射为度量映射.*

引理 6.1.1. *线性映射是单射是线性映射为度量映射的必要条件.*

定义 6.1.5 (等距)**.** *若度量映射是双射, 则称其为等距映射, 两个线性空间存在等距映射, 则称两个线性空间等距.*

6.2 欧氏空间

定义 6.2.1 (欧氏空间)**.** *n维的内积空间称为一个n维欧氏空间.*

性质 6.2.1. *1. 欧氏空间具有标准正交基.*

2. 若欧氏空间上一个向量组标准正交, 则其可以扩充为一个标正基.

3. 两个欧式空间等距, 当且仅当其维数相等.

4. W是欧氏空间V的一个子空间, 则$W^{\perp}$也是其子空间, $V = W \oplus W^{\perp}$.

例 1 欧氏空间上的两个向量在标正基下的坐标为X, Y, 则其内积为$X'Y$.

定义 6.2.2 (空间的正交)**.** *内积空间的两子空间中的任意两向量内积为零, 则称两子空间是正交的.*

例 2 例如Fourier级数中的向量组1, $sinx$, $sin2x$, $\cdots$, $cosx$, $cos2x$, $\cdots$

定义 6.2.3 (正交投影)**.** *若W是内积空间V的子空间, 有$V = W \oplus W^{\perp}$, 对$\forall \alpha \in V$, 有$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 分别属于$W$和$W^{\perp}$且唯一, 则称$\alpha_1$为$\alpha$在$W$上的正交投影.*

定理 6.2.1 (正交投影)**.** *由上, α_1是α在W上的正交投影, 当且仅当, $\forall \beta \in W$, 有$\|\alpha - \alpha_1\| \leq \|\alpha - \beta\|$.*

定理 6.2.2 (最小二乘法)**.** *设$y = k_1x_1 + \cdots + k_nx_n$, 若有$m$组数据$a_{i1}$, $\cdots$, a_{in}, b_i, $1 \leq i \leq m$, 则使得$\sum_{i=1}^{m}(b_i - \sum_{j=1}^{n} k_ia_{ij})$最小的$X = (k_1,\ \cdots,\ k_n)'$是线性方程组$A'AX = A'\beta$的解, 称为最小二乘解.*

定义 6.2.4 (内积的度量阵)**.** *V是一个欧氏空间, 其内积在某一基下具有度量阵.*

例 3 α_1, $\cdots$, α_n是标正基, 当且仅当其内积在其上的度量阵为单位阵.

性质 6.2.2. *1. 度量阵是单位阵.*

2. 度量阵可逆.

3. 在不同基上的度量阵合同.

定义 6.2.5 (合同)**.** *两个方阵A, $B \in M_n(\mathbb{F})$合同, 即存在可逆的方阵$P \in M_n(\mathbb{F})$使得$B = P'AP$.*

6.3 正交变换

定义 6.3.1 (正交变换). 若一欧氏空间, 有$\mathbb{A} \in EndV$, 若$(\mathbb{A}\alpha,\ \mathbb{A}\beta) = (\alpha,\ \beta)$, 则称其是一个正交变换.

记欧式空间V上的所有正交变换的空间为$O(V)$.

例 1 恒等变换是正交变换.

性质 6.3.1. 1. 一个正交变换是双射, 可逆, 且其逆也是正交变换.

2. 若W是正交变换的不变子空间, 则其正交补也是其不变子空间.

3. 两个正交变换的积也是正交变换, $O(V)$是一个一般线性群$GL(V)$(V上可逆的线性变换作成的群)的子群.

4. 一个线性变换是正交变换, 当且仅当其将一个标正基映射到一个标正基.

例 2 若两个n维欧氏空间, 则其$O(V_1),\ O(V_2)$同构.

定义 6.3.2 (反射变换). 对$\forall\alpha$, V是一欧氏空间, 有$r_\alpha : V \to V,\ \gamma \mapsto \gamma - \frac{2(\alpha,\ \gamma)}{(\alpha,\ \alpha)}\alpha$. 称为由$\alpha$确定的反射变换.

性质 6.3.2. 1. 反射变换是线性变换.

2. 反射变换是正交变换.

3. 反射变换的特征值为$1,\ -1$, 且几何重数分别为$n-1,\ 1$, 则反射变换可对角化.

例 3 $T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F}),\ A \mapsto 3A+5A'$, 则由定义可以得到其两个特征值$-2,\ 8$, 且只有两个特征值.

例 4 chapter6, 例62, Dieudonne定理.

定义 6.3.3 (正交阵). $A \in M_n(\mathbb{R})$, 且$A'A = E_n$, 则称其是一个n阶正交阵.

定理 6.3.1 (正交阵的充要条件). $A \in M_n(\mathbb{R}) \in O(V)$, 当且仅当其在标正基下的矩阵为正交阵.

记所有正交阵组成的集合为$On(\mathbb{R})$.

性质 6.3.3. 1. 正交阵可逆, 且其逆矩阵也是正交阵.

2. 正交阵的积仍是正交阵, 正交阵作成的集合是一个群.

3. n维欧式空间的$O(V)$与$On(\mathbb{R})$之间有双射.

4. 若$A \in O_m(\mathbb{R}),\ B \in O_n(\mathbb{R})$, 则$diag\{A,\ B\} \in O_{m+n}(\mathbb{R})$.

5. 正交阵的行列式为1或-1. 记$SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | A'A = E_n,\ |A| = 1\}$为标准正交群.

6. 正交阵的任意复特征值在单位圆上.

7. 定义线性变换$A: \alpha \mapsto A\alpha$, 则$A$是正交阵, 当且仅当其是正交变换.

8. A是正交阵, 当且仅当其列/行向量组是$\mathbb{R}^n$的标正基.

9. 正交阵一定相似于$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_t & & & & & & \\ & & & cos\theta_1 & sin\theta_1 & & & & \\ & & & -sin\theta_1 & cos\theta_1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & cos\theta_s & sin\theta_s \\ & & & & & & -sin\theta_s & cos\theta_s \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$,

其中, λ_i, $1 \le i \le t$为1或-1.

6.4 对称变换

定义 6.4.1 (对称变换)**.** 欧氏空间上一线性变换$\mathbb{A}$, 使得对任意属于欧氏空间的两向量有$(\mathbb{A}\alpha,\ \beta) = (\alpha,\ \mathbb{A}\beta)$, 则称此线性变换为对称变换.

记欧式空间上所有对称变换组成的集合记为$\mathscr{S}(V)$.

定理 6.4.1 (对称变换的充要条件)**.** $\mathbb{A}$是对称变换, 当且仅当其在标正基下的矩阵为对称阵.

性质 6.4.1. 1. 实对称阵的特征值全为实数.

2. 若A是实对称阵, 则若W是$A-$子空间, 则$W^{\perp}$也是$A-$子空间.

3. 若A是实对称阵, 若λ_1, $\cdots$, λ_s是其互不相同的特征值, 则其相应的特征子空间为直和且相互正交.

定理 6.4.2 (实对称阵可对角化)**.** 若A是实对称阵, 则A在$\mathbb{R}$上一定可以对角化. 且存在正交阵T使得$T^{-1}AT = T'AT$为对角阵.

即, 存在一个标正基, 使得$\mathbb{A}$是欧氏空间V上的正交变换, 其在此标正基上的矩阵为对角阵.

即, V可以分解为$\mathbb{A}$特征子空间的直和.

第七章　线性型双线性型二次型

7.1　线性型

定义 7.1.1 (线性型)**.** 设$V/\mathbb{F}$, 则称$V^* \triangleq Hom(V,\mathbb{F})$为$V$上的一个线性型(线性函数).

称V^*为V的一个对偶空间.

例 1　设V是一个内积空间, $f:\ V \to V^*,\ \alpha \mapsto f_\alpha,\ f_\alpha(\beta) = (\alpha,\beta),\ \forall\beta \in V$, f是一个线性型, 其为单射, 则有嵌入$V \to V^*$.

例 2　映射$f:\ M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F},\ A \mapsto tr(A)$, 有$f \in V^*$.

定义 7.1.2 (对偶基)**.** 由于$V \cong V^*$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是V的一个基, 取V^*的一个向量组$\alpha_1^*,\cdots,\alpha_n^*$, 其中$\alpha_i^*:\ \alpha_j \mapsto \delta_{ij},\ 1 \le i,j \le n$.

将$\sum_{i=1}^n k_i\alpha_i$依次作用于α_i, 则可以得出$\alpha_1^*,\cdots,\alpha_n^*$是$V^*$的一个基, 称其为$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$的对偶基.

例 3　设映射关系$V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} \mathbb{F}$, 定义映射: $f^* \in Hom(V_2^*,V_1^*),\ g \mapsto g\cdot f$.

证明其为线性映射, 求其关于$\beta_1^*,\cdots,\beta_m^*$和$\alpha_1^*,\cdots,\alpha_n^*$的矩阵.

命题 7.1.1. 设$f_1,\cdots,f_s \in V^*$, 则一定$\exists\alpha \in V$使得$f_i(\alpha)$互不相同.

命题 7.1.2. 设$\alpha \in V$, 有$\forall f \in V^*,\ f(\alpha) = 0$, 则一定有$\alpha = 0$.

例 4　记$V^{**} \triangleq (V^*)^*$, 对$\forall\alpha \in V$有线性映射$\alpha^{**} \in Hom(V^*,\mathbb{F}),\ f \mapsto f(\alpha)$.

有"自然的"线性映射$\rho \in Hom(V,V^{**}),\ \alpha \mapsto \alpha^{**}$, 且$\rho$是单射, 有嵌入$V \to V^{**}$.

定理 7.1.1 (对偶定理)**.** $dimV = n < \infty$, ρ是同构映射, 即$V \cong V^{**}$.

7.2　双线性型

定义 7.2.1 (双线性型)**.** 设$V/\mathbb{F}$, 若$f \in Hom(V\times V,\mathbb{F})$, 且$f$满足双线性性, 则称其为双线性型.

记$B(V)$是V上所有双线性型的集合.

例 1　内积是一个双线性型.

例 2　对任意的$f \in Hom(V,V^*)$, 定义映射$\tilde{f} \in B(V):\ V\times V \to \mathbb{F},\ (\alpha,\beta) \mapsto f(\alpha)(\beta)$, 可以证明$\tilde{f}$是一个线性映射.

定义映射$\rho:\ Hom(V,V^*)\to B(V),\ f\mapsto\tilde{f}$, 可以证明其为线性映射且单射, 有嵌入$Hom(V,V^*)\to B(V)$

定义 7.2.2 (左右根). *若$f\in B(V)$, 则称$rad_L f\triangleq\{\alpha\in V|f(\alpha,\beta)=0,\ \forall\ \beta\in V\}$, 称其为左根, 相应的有右根的定义, 他们都是$V$的子空间.*

若有$f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha),\ \forall\ \alpha,\beta\in V$, 则称$f$是对称的, 记$\mathscr{S}(V)$为$V$的所有对称的双线性型的集合, 作为$B(V)$的子空间.

若有$rad_L f=rad_R f=0$, 则称f是非退化的.

例 3 内积是对称的且是非退化的, 具有更强的正定性.

定义 7.2.3 (度量阵). *若有$V/\mathbb{F},\ dimV=n<\infty,\ f\in B(V)$, 取定其一个基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 则记$A=(f(\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n},\ 1\le i,j\le n$为$f$在该基下的度量阵.*

命题 7.2.1. *在上述定义下(有限维情况下), 若有两向量α,β的坐标分别是X,Y, 则有$f(\alpha,\beta)=X'AY$.*

设$\alpha\in rad_L f$, 则有$X'AY=0$的解空间的维数为n, 即$A'X=0$的解空间即为$rad_L f$, 则$dimrad_L f=n-r(A)$.

同理可以得到有限维时情况相同, 即$rad_R f$为$AY=0$的解空间, $dimrad_R f=n-r(A)$, 即左根和右根同构.

则有f非退化当且仅当$r(A)=n$即可逆.

定理 7.2.1. *定义映射:$\rho:\ B(V)\to M_n(\mathbb{F}),\ f\mapsto A$, 其中$A$为$f$在取定的一个基下的度量阵, 则有$\rho$是线性的, 单且满, 则有:*

$B(V)\cong M_n(\mathbb{F})$

命题 7.2.2. *求一个线性空间的维数(已知):*

1. *找到其一个基*

2. *将其同构于一个维数已知的线性空间*

3. *使用维数公式*

例 4 由定理可以得到$dim\mathscr{S}(V)=\frac{n(n+1)}{2}$.

定理 7.2.2 (双线性映射的秩). *设有$A,B\in M_n(\mathbb{F})$, 则A,B合同$\Longleftrightarrow$存在n维线性空间的双线性映射f使得A,B是其在不同基上的度量阵.*

称$r(A)$为f的秩, 记为$rank(f)$.

定理 7.2.3 (对称阵基本定理). *设$A\in M_n(\mathbb{F})$, 则有A是对称阵$\Longleftrightarrow$其在$\mathbb{F}$上合同于一个对角阵.*

或者说: $dimV=n<\infty,\ f\in\mathscr{S}(V)$当且仅当其在某一个基上的度量阵是对角阵.

引理 7.2.1. *若$0\ne f\in\mathscr{S}(V)$, 则一定存在$\alpha\in V$使得$f(\alpha,\alpha)\ne 0$.*

7.3 合同关系

例 1 合同关系依赖于数域.

例如$A = diag\{1, 1\}$, $B = diag\{2, -2\}$, 在$\mathbb{C}$上有:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}i} \end{pmatrix} = E_2$$

在$\mathbb{R}$上, 若有可逆的$C \in M_n\mathbb{R}$, 使得$B = C'AC$, 两边取行列式有$det(C)^2 = -4$, 矛盾.

引理 7.3.1. *对角阵$A = diag\{a_1, \cdots, a_n\}$, $B = diag\{a_{i1}, \cdots, a_{in}\}$, 其中$i_1, \cdots, i_n$是$1, \cdots, n$的排列, 则有$A$和$B$合同.*

推论 7.3.1. *在$\mathbb{C}$上, 两对称阵合同当且仅当其秩相同, 其一定相似于$\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$, 其中$r$是矩阵的秩.*

推论 7.3.2. *在$\mathbb{R}$上, 任意对称阵一定相似于$\begin{pmatrix} E_p & & \\ & E_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, 其中$p + q$为矩阵的秩.*

7.4 二次型

定义 7.4.1 (二次型)**.** *形如$f(x_1, \cdots, x_n) = b_{11}{x_1}^2 + \cdots + b_{nn}{x_n}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij}x_ix_j$, 其中系数数域某一数域, 称为二次型.*

二次型都可以写成$X'AX$的形式.

引理 7.4.1. *二次型可以唯一写作$X'AX$的形式, 其中$A' = A$, 称A为f的矩阵.*

例 1 某数域上所有对称阵空间, 与所有对称双线性型组成的空间, 与所有二次型组成的空间同构.

定义 7.4.2 (二次型的标准型)**.** *二次型只有平方项(其为标准型), 当且仅当其矩阵为对角阵.*

定义 7.4.3 (非退化的线性替换)**.** *若P可逆, 则称$X = PY$是二次型$X'PX$的一个非退化的线性替换.*

定义 7.4.4 (二次型的等价)**.** *存在非退化的线性替换从一个二次型到另一个二次型, 则称两个二次型等价.*

推论 7.4.1. *二次型$X'AX$和$Y'BY$等价, 当且仅当A, B合同.*

推论 7.4.2. *某一数域下的二次型一定等价于一标准型.*

推论 7.4.3. *在$\mathbb{C}$上的二次型一定等价于${y_1}^2 + \cdots + {y_r}^2$.*

在$\mathbb{R}$上的二次型一定等价于${y_1}^2 + \cdots + {y_p}^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - {y_{p+q}}^2$, 称为规范型.

例 2 如何求实数域对称阵的规范型?

1. 配方法
2. 利用合同变换.
3. *利用正交变换.

定理 7.4.1 (惯性定理)**.** *在实数域上, 两对称阵合同, 当前仅当其p, q相同(正负惯性系数相同).*

定义 7.4.5 (惯性指数)**.** *p, q被一矩阵唯一地确定, 称p为其正惯性指数, 称q为其负惯性指数, 称$p-q$为其符号差.*

推论 7.4.4. *实数域上对称阵的正负惯性指数, 分别等于其正负特征值的个数(重根按重数计).*

推论 7.4.5. *实数域上的对称阵按照合同关系分类, 可以分为$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$种.*

7.5 正定阵

定义 7.5.1 (正定阵)**.** *实数域上, 若二次型$X'AX$恒有$X'AX \geq 0$, $X'AX = 0 \leftrightarrow X = 0$, 则称$X'AX$为正定二次型, 称$A$为正定阵.*

例 1 实数域上的$b_1{x_1}^2 + \cdots + b_n{x_n}^2$是正定二次型, 当且仅当其所有不定元的系数都大于零.

推论 7.5.1. *$A \in M_n(\mathbb{R})$:*

1. *A是正定阵, 当且仅当其正惯性系数为n.*
2. *A是正定阵, 当且仅当其特征值全为正数.*
3. *A是正定阵, 当且仅当其合同于单位阵.*
4. *A是正定阵, 当且仅当存在实数域上可逆的C使得$A = C'C$.*

例 2 A是正定阵, 当且仅当存在唯一的正定阵B使得$A = B^2$.

性质 7.5.1.

1. *等价的两二次型, 若其中一个是正定二次型, 则另一个也是正定二次型.*
2. *若两个矩阵是正定阵, 则其和也是正定阵.*
3. *若两个矩阵是正定阵, 则其乘积是正定阵当且仅当其可交换.*
4. *若一个矩阵正定, 则其行列式大于零.*

5. 若两个矩阵正定, 则其组合成的准对角阵正定.

定理 7.5.1 (正定阵的充要条件). 实数域上的对称阵A是正定阵, 当且仅当, 对$1 \le i \le n$, 有$\Delta k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$, $det(\Delta k) > 0$, 称Δk为A的顺序主子式.

定理 7.5.2 (正定阵的充要条件). 一个矩阵是正定阵, 当且仅当其是欧氏空间某内积的度量阵.