§4 随机变量的数字特征

一、知识梳理

§4.1 数学期望

1. 一维：

离散型：$P\{X=x_i\}=p_i$ 则 $EX=\sum_i x_i p_i$ 更一般地 $Y=\varphi(X)$，$EY=\sum_i \varphi(x_i)p_i$

连续型 $X\sim f(x)$ $EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ … $Y=\varphi(X)$，$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)dx$

2. 二维：

离散型 $P=\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}$ ~~若~~ $Z=\varphi(X,Y)$ $EZ=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi(x_i,y_j)p_{ij}$

连续型 $(X,Y)\sim f(x,y)$ $Z=\varphi(X,Y)$ $EZ=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)f(x,y)dxdy$

不是所有~~牛奶~~函数都有期望.

3. 数学期望性质：

(1) $E(C)=C$

(2) $E(kX)=kE(X)$

(3) $E(aX+bY)=aEX+bEY$

(4) 独立：$EXY=EX\cdot EY$

则有：$E(EX)=EX$

$EXY=EXEY$ 得不到 XY 独立

$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$

$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ $\Gamma(n)=(n-1)!$

§4.2 方差：

4. 定义：$DX=Var(X)=E(X-EX)^2=EX^2-(EX)^2$

5. 性质 ① $DC=0$ $D(EX)=0$

② 非负性. $DX\geq 0$ $EX^2\geq(EX)^2$

③ $D(X\pm Y)=DX+DY$ (X,Y 独立)

④ $D(aX\pm b)=a^2DX$

⑤ $D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2cov(X,Y)$

⑥ $DX=E(X-EX)^2\leq E(X-c)^2$

§4.3 常见随机变量期望及方差

① 二项分布 $B(n,p)$

$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $E=np$ $D=np(1-p)$

② Poisson分布 $P(\lambda)$

$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$　　$E=\lambda$　$D=\lambda$

③ 几何分布　$G(p)$

$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$　　$E=\frac{1}{p}$　　$D=\frac{1-p}{p^2}$

④ 均匀分布：$U(a,b)$

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & 其他\end{cases}$　　$E=\frac{a+b}{2}$　　$D=\frac{(b-a)^2}{12}$

⑤ 指数分布：$E(\lambda)$

$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x>0\end{cases}$　　$F(x)=\begin{cases}0 & x<0 \\ 1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\end{cases}$　　$E=\frac{1}{\lambda}$　$D=\frac{1}{\lambda^2}$

⑥ 正态分布　$N(\mu,\sigma^2)$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$　　$E=\mu$　$D=\sigma^2$

⑦ 卡方分布　$\chi^2(n)$　　$E=n$　$D=2n$

§4.4 协方差：

Cov 7. 定义：$Cov(X,Y)=E(X-EX)E(Y-EY)$

$Cov(X,Y)=EXY-EXEY$

8. 性质：

① $Cov(X,X)=DX$　② $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$　③ $Cov(X,C)=0$

④ $Cov(aX+bY,Z)=aCov(aX,Z)+bCov(Y,Z)$　⑤ $Cov(aX,bY)=ab\,Cov(X,Y)$

9. 相关系数：$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$　　$E(XY)=\begin{cases}\sum x_i y_i p \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,dx\,dy\end{cases}$

二、题型讲解

§4.5　离散型随机变量数字特征

解决方法：① 纯就代公式即可

$E(2^X)\neq 2^{E(X)}$

例：$X\sim B(2,0.1)$　$E(2^X)=$ ______.

解：$E(2^X)=0.9^2\cdot 2^0+C_2^1\cdot 0.9\times 0.1\times 2^1+0.1^2\times 2^2=1.21$

§4.6　连续型随机变量数字特征　带公式

例：X ~ 密度 $f(x)$，$x\in R$，$DX=2$，则随机变量 Y 概率密度为 $f(-y)$ 相关系数 $\rho_{XY}=-\frac{1}{4}$　$Z=X+Y$，求 EZ，DZ.

解：$EY=\int_{-\infty}^{+\infty} yf(-y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} -xf(x)dx = -EX$ $\therefore EZ=0$

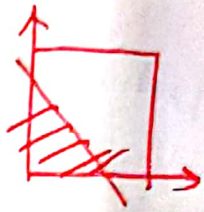
$EY^2=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(-y)dy \xlongequal{y=-x} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = E(X^2)$

$DY=DX$

$DZ=DX+DY+2cov(X,Y) = DY+DX+2\rho_{XY}\sqrt{DY}\sqrt{DX}=2+2-1=3$

例：X、Y相互独立，均服从参数λ的指数分布。

试求(1) $Z=X+Y$ 概率密度 (2)求EX, DX (3) ρ_{XZ}



解，$F(z)=\int_0^{z} dx\int_0^{z-x} \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} dy$

$=\int_0^{z} \lambda e^{-\lambda x}(1-e^{\lambda x-\lambda z})dx$

$=1-e^{-\lambda z} - \lambda z e^{-\lambda z}$

则 $f(z)=\lambda^2 z e^{-\lambda z}$

$EZ=EX+EY=\frac{2}{\lambda}$ $DZ=DX+DY=\frac{2}{\lambda^2}$

$Cov(X,X+Y)=Cov(X,X)+Cov(X,Y)=\frac{1}{\lambda^2}$ $\therefore \rho_{XZ}=\frac{\frac{1}{\lambda^2}}{\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

§4.7 利用随机变量求数字特征

例：$\rho_{XY}=0.4$ $EX=2$ $DX=25$ $EY=1$ $DY=16$ 求 $E(2X-3Y+4)^2$

$E(4X^2)+E9Y^2-E12XY+16+16EX-24EY$

$4EX^2=4((EX)^2+D(X))=116$

$9EY^2=9((EY)^2+D(Y))=9\times17=153$

$12EXY=12\cdot(EXEY+cov(X,Y))=120$

$cov(X,Y)=\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}\cdot\rho_{XY}$

答案

$116+153-120+16+32-24$

$=173$

$D(X+Y)=DX+DY+2cov(X,Y)$ $EXY-EXEY=Cov(X,Y)$ $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

解决方法：①三个很重要的公式

②每个量的性质的记住。

例：长度1m木棒分成2端，两端长度相关系数（ ）。

因为 $X+Y=1$ 所以 $Y=1-X$ $\therefore$ 相关系数 -1.

二、例题典例

例: X,Y独立 ~N(0,0.5), 求|X-Y|之期望与方差

3.! 解: $E(|X-Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\int_0^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

4. $E(|X-Y|)^2=D(X-Y)+[E(X-Y)]^2$

$EX^2-2EXEY+EY^2=1$　　$\therefore D(X-Y)=1-\frac{2}{\pi}$

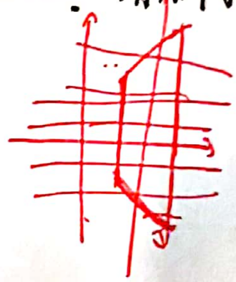
解: 正态分布 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)$ ↓相关系数

注: $X\sim N(\mu_1,\sigma_1)$　$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2)$　X,Y关 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$

§4.8 判断独立性与相关性.

例: [0.5,1]中取一个值再在区间[-x,x]上任取一个值y, 构成二维随机变量

(1) 求f(x,y), 关于Y边缘函数, 并判断X,Y是否独立. (2) 求X,Y相关否?



解 (1) $f(x,y)=\underbrace{f(x)f(y|x)}_{\text{条件分布,x随取值.}}=\frac{1}{0.5}\times\frac{1}{2x}=\frac{1}{x}$

Y边缘密度 $f_Y(y)$

$0.5\le y<1\ \rightarrow\ \int_y^1\frac{1}{x}dx=-\ln y.$　　$-1\le y<-0.5$　~~$-0.5<y$~~　$-\ln(-y)$

$0.5>y>-0.5\ \rightarrow\ \ln 2$

$f_X(x)=\int_{-x}^{+x}\frac{1}{x}dy=2.=0$　　$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$ 不独立.

三. 补充例题.

1. $(X,Y)\sim N(1,1,9,16,+0.5)$　$Z=\frac{1}{2}Y+\frac{1}{3}X$　求EZ, DZ与X,Z相关系数

$EZ=\frac{5}{6}$　　$DZ=\frac{1}{4}DY^2+\frac{1}{9}DX^2+\frac{1}{3}cov(X,Y)$

$=4+1+\frac{1}{3}\times3\times4\times\frac{1}{2}=7.$

$\therefore cov(X,Z)=\frac{1}{3}cov(X,X)+\frac{1}{2}cov(X,Y)=6.$　　$\therefore\frac{6}{\sqrt{7}\cdot3}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

$3\ +\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times3\times4=6$

2. T7 (注意 试f与 xe^{-x}: xe^{t-x} 等 x^2e^{t-x}等　$\int_0^{+\infty}e^{-x}x^kdx=k!$

3. 3解 T8　注意：限　与计算：$\iint xy f(x,y)dxdy = EXY$

4. 详解 T15.

[0.1]上任取 n 个点，记 X_{min} & X_{max}，求 $X = X_{max} - X_{min}$ 求 EX

解：EX_{min}：

$\therefore X_{min} = \begin{cases} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

~~X所有~~ $P(X_{min} \le z) = 1 - P(X_{min} \ge z) = 1 - \prod P(X_i \ge z) = 1-(1-x)^n$

$f(x) = n(1-x)^{n-1}$

$\therefore \int_0^1 nx(1-x)^{n-1}dx = \int_0^1 n(1-x)x^{n-1}dx = \int_0^1 nx^{n-1} - nx^n dx = \frac{1}{n+1}$

最大：$P(X_{max} \le z) = \prod P(X_i \le z) = x^n$

$\therefore \int_0^1 nx^n dx = \frac{n}{n+1}$　　$\therefore EX = \frac{n-1}{n+1}$

5. 详解 T10.

~~组织 ax，国际要 y~~

$\therefore \cancel{Y} = \begin{cases} 3\cancel{x} & y<x \\ \cancel{3y-(a-} \; 3y-(x-y) & y \ge x \end{cases}$

$\therefore E(\cancel{Y}) = \int_{2000}^{a} (4x-a)$

组织 a，国际要 X

$Y = \begin{cases} 3a & X>a \\ 3X-(a-X) = 4X-a & X \le a \end{cases}$

$EY = \int_{2000}^{a} (4x-a)\frac{1}{2000}dx + \int_a^{4000} 3a\frac{1}{4000-2000}dx$

$= 7a - \frac{a^2}{1000} - 4000$

$\frac{dEY}{da} = 0 \Rightarrow a = 3500$.