阿求的概率论与数理统计 Akyuu's Probability & Mathematic Statistic.

Probability部分：§1 随机事件与概率

一、知识清单 < §1.1 基本概念

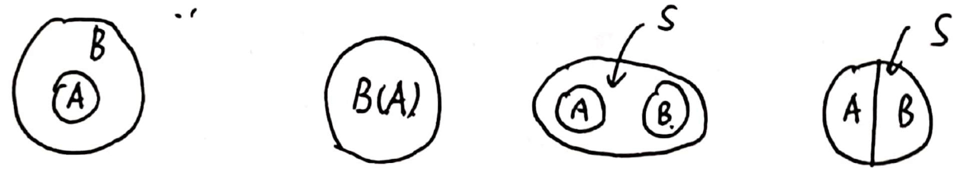
1、随机试验：可重复，结果不唯一，但可能性结果具有确定性试验 (E)

2、样本空间：随机试验E所有基本事件集合（基本结果：空间中一个点）

3、随机事件：样本空间的子集，简称结果事件.

§1.2. 事件.

4、事件的关系：



①包含　②相等　③互斥　④对立

事件A发生则B一定发生 $A\subset B$

$A\subset B$且$B\subset A$ 记为$A=B$.

$A\cap B=\phi$

不是A发生就是B发生，则有：$A\cap B=\phi$　$A\cup B=S$.

5、事件的表示

①和事件．A或B发生．记为 $A\cup B$ 或 $A+B$

②积事件：AB同时发生．记为$A\cap B$或AB

③差事件：$A-B$表示 A发生但B发生，记为 $A-B=A-AB=A\bar{B}$

④逆事件：$\bar{A}$表示A不发生的事件.

6、事件的运算.

①交换律：$A\cup B=B\cup A$，同．②结合律．③分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$　同

④De-Morgan律，参考 Discrete Math.

§1.3 概率　　$P(A)=0 \not\Rightarrow A=\phi$

7、定义：随机试验E样本空间为S，在S定义一个关于事件的实值函数$P(.)$，函数自变量为事件，则该函数称为概率

满足：①非负：$0\le P(A)$

②可列可加：$P(\sum_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$，($A_1$ $A_2\dots A_n$ 互斥且可列

③归一性：$P(S)=1$.

Chan

8. 基本性质:

① $P(\emptyset)=0$.

② $AB\subset A\subset A\cup B$，则 $P(AB)\leq P(A)\leq P(A\cup B)$

③. 对任一一个事件都有: $P(A)\leq 1$

例: A,B两个随机事件.
$P(A)=0.4$ $P(A\cup B)=0.7$
求 $P(B-A)$
$P(B-A)=P(B\bar{A})=P(B)-P(AB)$
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
$=P(A)+P(B-A)$.
所: $P(B-A)=0.3$

9. 基本公式

① 减法: $P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$.

② 加法: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ (满足容斥定理)

③ 求逆公式: $P(\bar{A})=1-P(A)$

§1.4. 条件概率:

10. 定义 A.B: 两个事件，且 $P(A)>0$. 称 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件A发生概率下B发生的概率，本质上还是一个概率

11. 定理.

① 乘法公式: $P(AB)=P(B|A)P(A)$. 一般地，有 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2|A_1)P(A_1)$

② 完备事件组，$B_1,B_2\ldots B_n$ 为一组两两互斥的随机事件组，且 $B_1\cup B_2\cdots\cup B_n=S$.

③ 全概率公式. 设 $B_1,B_2\ldots B_n$ 是一组完备事件组. A为随机试验的事件. 则 有

$$\boxed{P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$$

因→果

④ Bayes公式: 设 $B_1\ldots B_n$ 为一组完备事件组，A为随机试验E的事件，且 $P(A)>0$ $P(B_k)>0$. $(k=1,2\ldots n)$，则

$$\boxed{P(B_k|A)=\frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\underset{\text{概率}}{P(A)}}=\frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}}$$

果→因

求A概率

全概率: 原因 B_i 以及在 B_i 发生情况下能得到 A的概率 (执因求果)

Bayes: 已知 A概率，求A发生条件下由原因 B_k 导致的概率 (执果求因)

往往题目先利用全概率公式求出总概率，第2问再用Bayes公式求出条件概率

§1.5 独立性

12. 定义:

① 两个事件独立: $P(AB)=P(A)P(B)$

② 三个事件独立: ABC两两独立，且 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

1-9中无放回取3个数则3个数之积能被10整除之概率. 陷阱答案: 64

13. 性质.

① 设 A, B 两事件, 且 $P(A)>0$, 若 A, B 相互独立, 则 $P(B|A)=P(B)$

② 事件 AB, $\bar{A}B$, $A\bar{B}$, $\bar{A}\bar{B}$ 任何一对事件独立, 则其他三对事件也独立

③ $A_1, \cdots, A_m, B_1 \cdots B_n$ 相互独立. ~~则其他三对事件相互独立~~ 则 $\varphi_1(A_1 \cdots A_m)$ 与 $\varphi_2(B_1 \cdots B_n)$ 相互独立

$\varphi_1 \varphi_2$ 表示对事件进行和, 差, 积, 逆及它们的复合运算

④ 一组事件独立, 则该组事件的部分事件组独立 独立的事件进行复合运算仍独立.

⑤ 若 $P(A)=0, 1$, 则 A, B 独立.

⑥ 若 $P(A)>0$ 且 $P(B)>0$ 则 AB 一定不独立.

※ 三个事件两两独立, 不一定三个事件独立

14. 几个 A, B 独立的充分条件. (前提: $P(A)$ 不为 0 或 1)

① $P(B|A)+P(\bar{B}|\bar{A})=1$. ② $P(B|A)+P(B|\bar{A})=P(B)$ ③ $P(B|\bar{A})+P(\bar{B}|A)=1$.

§1.6 概型.

15. ① 古典概型. $P(A)=\dfrac{k}{n}$ $k \to$ 事件A样本点数, $n \to$ S样本点个数

② 几何概型: $P(A)=\dfrac{A的度量}{\Omega的度量}$.

二. 重要题型

§1.7 集合关系与概率计算

解决方法: 利用集合间的关系结合概率计算公式. (利用运算律)

例: $P(\bar{A})=0.3$, $P(B)=0.4$ $P(A\bar{B})=0.5$, 则求 $P(B|A\cup\bar{B})$

$P(AB) \neq P(A)P(B)$ $\downarrow$ 一切自行代

求: $P(B|A\cup\bar{B})$, 则有: $\dfrac{P(B\cap(A\cup\bar{B}))}{P(A\cup\bar{B})} = \dfrac{P((B\cap A)\cup(B\cap\bar{B}))}{P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})} = \dfrac{P(AB)}{P(A\cup\bar{B})}$ 0.8 → 注意代正确

分子: 集合分配律 分母: 加法定理

由减法原理: $P(AB)=P(A)-P(A\bar{B})=1-0.3-0.5=0.2$

$\therefore P(B|A\cup\bar{B})=\dfrac{0.2}{0.8}=0.25$.

§1.8 概率基本概念与性质考查

解决方法: 不涉及到关于具体概率计算, 结合概率性质

例: 设 A, B 为任意两事件, 且 $A\subset B$ $P(B)>0$, 则下列结论一定正确的是

$P(A)$ ___ $P(A|B)$ $A\subset B$, $P(AB)=P(A)$ $0<P(B)<1$

我们知: $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)}{P(B)} \geqslant P(A)$ 还可以用样本空间之定义来推测.

§1.8 相互独立与互斥与对立：

解决方法：① 独立：$P(AB)=P(A)P(B)$

② 互斥　$P(A\cap B)=0$

③ 对立：　互斥 ＋ $P(A\cup B)=1$.

} 互不相容.

例：A、B是任意两个概率为0的互不相容事件，则下论结论正确的是（　）

A. $\bar{A}$与$\bar{B}$ 不相容　B. $\bar{A}$与$\bar{B}$相容　C. $P(AB)=P(A)P(B)$　D. $P(A-B)=P(A)$

当A与B互为对立事件时，$\bar{A}$与$\bar{B}$不相容，反之则相容. 则A与B错.

$P(A-B)=P(A)-P(AB)$. N: C. $\boxed{\text{互不相容} \neq \text{独立}}$　互不相容并不意味着独立.

§1.9 全概率与Bayes公式

解决方法：分清因果

例：0.1信号，传0概率0.7 错传率0.2. 传1概率0.3，错传率0.1.

求(1)接受到信号0之时间

(2). 接收到0时. 传送的信号为0的概率

设 A: 传0　B: 接收到0

且 $P(A)=0.7$　$P(\bar{A})=0.3$　$P(\bar{B}|\bar{A})=0.9$　$P(B|\bar{A})=0.1$.　$P(B|A)=0.8$

则(1) $P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})=0.8\cdot0.7+0.1\cdot0.3=0.59$

(2) $A\subset B$. 则 $P(AB)=P(A)$.　$P(A|B)=\dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}=\dfrac{0.56}{0.59}=\dfrac{56}{59}$

做此考题时须注意：标明清事件类型

三. 综合题

1. $P(A)=0.5$　$P(B)=0.4$　$C=\bar{A}\cup B$，求$P(C|(A\cup B))$　(A,B)独立

解：$P(C|(A\cup B))=\dfrac{P((\bar{A}\cup B)\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}$

对$(\bar{A}\cup B)\cap(A\cup B)$进行运算，则有 $\dfrac{[(\bar{A}\cup B)\cap A]\cup[(\bar{A}\cup B)\cap B]}{P(A\cup B)}$

$=[(\bar{A}\cap A)\cup(B\cap A)]\cup[(\bar{A}\cap B)\cup(B\cap B)]$

$=\overset{0}{(A\cap B)}\cup(\bar{A}\cap B)\cup B=B$

$\therefore P=\dfrac{P(B)}{P(A\cup B)}=\dfrac{0.4}{0.7}=\dfrac{4}{7}$

2. 选择

A. $P(A)+P(B)-1\le P(AB)\le P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$

B. $P(A)+P(B)-1\le P(A(A\cup B))\le P(AB)\le P(A\cup(A\cup B))$

C. $1-P(A)-P(B)\le P(AB)\le P(A)+P(B)\le P(A\cup B)$

B. $P(A(A\cup B))=P((A\cap A)\cup(A\cap B))=P(A)\ge P(AB)$

C. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\le P(A)+P(B)$

A. $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\le P(A)+P(B)-1$

3. AB相互独立，AC与BC互不相容 $P(A)=P(B)=0.5$ $P(C)=0.2$

则仅C发生与仅C不发生之概率

求: $P(AB\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$ 由De-Morgan律:

$=\underbrace{P(AB)}-P(ABC)+\underbrace{P(\bar{A}\bar{B})}-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$

$=0.25-0+0.25-\underbrace{P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})}$

$=0.25+0.25-0.05=0.45$

$\underline{P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})}=$ 七中 $\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$

$=\overline{A\cup B\cup C}$

$=1-P(A\cup B\cup C)$

$=1-(P(A)+P(B)+P(C)-\underbrace{P(AB)}_{0.25}-\underbrace{P(AC)}_{0}-\underbrace{P(BC)}_{0}-\underbrace{P(ABC)}_{0})$

$=1-0.95=0.05$

4. 设A, B为任意两种事件，则(

A. $P(AB)\le P(A)P(B)$.

B. $P(AB)\ge P(A)P(B)$

C. $P(AB)\le\frac{P(A)+P(B)}{2}$

D. $P(AB)\ge\frac{P(A)+P(B)}{2}$.

解: A. 反例: 对 $B\subseteq A$ 时,则有: $P(AB)=P(A)\ge P(A)P(B)$

B. 反例: $A\cap B=\phi$ 则 $P(AB)=0$

C. 反证明: $A\cap B=\phi$ 成立 $A\cap B\ne\phi$ $P(AB)\le P(A)$ 且 $P(AB)\le P(B)$

则 $2P(AB)\le P(A)+P(B)$

D. 反例: $P(AB)=0$

5. 设A, B, C. 相互独立. $P(A)\ne0$ $0<P(C)<1$, 则下面四个事件不是独立的是

A. $\overline{A\cup B}$ 与 C　B. $\overline{AC}$ 与 $\bar{C}$　C. $\overline{A-B}$ 与 $\bar{C}$　D. $\overline{AB}$ 与 $\bar{C}$

参考13中③. AB独立, ~~也~~ 则AB之间做运算与C之间恒独立

$P(\overline{AC})$ $P(\overline{AC}\cdot\bar{C})\ne P(\overline{AC})\cdot P(\bar{C})$ ≠　$(\bar{C}\cap\bar{C})=\bar{C}$

[illegible]