§2 一维随机变量及分布（红笔做标注，本课使用粗黑笔）

一、知识清单

§2.1 基本概念

① 随机变量：样本空间 $S=\{e\}$，$X=X(e)$ 是定义在样本空间 S 上的实值单值函数，称 $X=X(e)$ 为随机变量

② 分布函数：X 随机变量，x 为任意实数，$F(x)=P\{X\le x\}$ $(-\infty<x<+\infty)$ 为随机变量 X 的分布函数

③ 性质：① $F(x)$ 单调不减 ② $0\le F(x)\le 1$ 且 $F(-\infty)=0$ $F(+\infty)=1$

③ 右连续 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)=F(a)$

反之，满足这3个性质的函数必为分布函数

§2.2 离散型随机变量

① 4. 定义：X 的可能取值为有限个或可列无限多个，称 X 为离散型随机变量

5. 分布律：可以做成表格，形式如下：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

并且满足 $p_i\ge 0$　$\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i=1$

分布函数 → $F(x)=P(X\le x)=\sum\limits_{x_i\le x}p_i$　→ 特征：① 阶梯状 ② $F(x)$ 间断点，可能为 X 的取值点，且左右极限之差为该点概率

6. (0-1) 分布：随机变量 X 只可取 0, 1 两个值，它的分布律 $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$

7. 二项分布：$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$　记 $X\sim B(n,p)$。期望：np

若 $X\sim B(n,p)$，则令 $Y=n-X$，$Y\sim B(n,1-p)$。方差 $np(1-p)$。

8. Poisson 分布：分布列：$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，记 $X\sim P(\lambda)$

λ为常，$n\in N^*$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}np_n=\lambda$，则有：

$$\lim_{n\to\infty}C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

→ 解决了 n 大 p 小的二项分布问题

这里是 $e^{-\lambda}$ 而非 e^{-k}!! 期望：λ 方差：λ

9. 最大值与最小值分布

对于n个随机变量$\xi_1,\xi_2\cdots\xi_n$，最大值$\eta_1=\max\{\xi_1,\xi_2\cdots\xi_n\}$和最小值$\eta_2=\min\{\xi_1,\xi_2\cdots\xi_n\}$，则当$\xi_1\cdots\xi_n$独立时，设它们的分布函数$F_1(x)\cdots F_n(x)$

$$F_{\eta_1}(x)=P(\eta_1\leqslant x)=P(\max\{\xi_1,\xi_2\cdots\xi_n\}\leqslant x)=P(\bigcap_{k=1}^{n}\xi_k\leqslant x)=\prod_{k=1}^{n}F_k(x)$$

$$F_{\eta_2}(x)=P(\eta_2\leqslant x)=1-P(\eta_2>x)=1-P(\min\{\xi_1,\xi_2\cdots\xi_n\}>x)$$
$$=1-P(\bigcap_{k=1}^{n}\xi_k>x)=1-\prod_{k=1}^{n}(1-F_k(x))$$

所以$F_{\eta_1}=\prod_{k=1}^{n}F_k(x)$　$F_{\eta_2}=1-\prod_{k=1}^{n}(1-F_k(x))$ 推导完毕.

§2.3 连续型随机变量

10、定义：$F(x)$分布函数，存在非负可积函数$f(x)$，对于任何x都有：$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

则称X为…，$f(x)$为X的概率密度函数.

补：1. $F(x)$是连续函数　2. 改变部分概率函数值不影响分布函数取值

11、性质：① $f(x)\geqslant 0$　② $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$　③ $f(x)$在x连续，有$F'(x)=f(x)$

特别地：$f(x)$无$0<f(x)<1$之限制且$F(x)$往往在端点不可导.

且连续型随机变量取一点概率为0

12、均匀分布：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$　$X\sim U(a,b)$则$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\leqslant x<b\\ 1 & x\geqslant b\end{cases}$

则其数学期望为$\frac{a+b}{2}$，方差为$\frac{(b-a)^2}{12}$

13. 指数分布：若X之密度函数为$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$ 称X服从参数为$\lambda>0$的指数分布：记为$X\sim E(\lambda)$，其分布函数、$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

有无记忆性：对于任意$s,t>0$，有$P\{X>s+t\mid X>s\}=P\{X>t\}$

特别地，数学期望为$\frac{1}{\lambda}$，方差为$\frac{1}{\lambda^2}$.

14. 正态分布．$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$　记$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

若$\mu=0$，$\sigma=0$　则有$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$　$-\infty<x<+\infty$，则有$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$.

有：① $\Phi(0)=\frac{1}{2}$　$\Phi(a)=1-\Phi(-a)$

② $X\sim N(\mu,\sigma^2)$　则：$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$\{0 \quad x<0$

③ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

④ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $P(X \le \mu) = P(X > \mu) = \frac{1}{2}$.

§2.4. 一维随机变量函数分布

对于 $Y=\varphi(X)$，称Y为随机变量的函数，则求Y分布

15. 若X为离散型随机变量：$P\{X=x_i\}=p_i$.

则 $P\{Y=y_j\}=P\{\varphi(X)=y_j\}=\sum_{\varphi(x_i)=y_j} P\{X=x_i\}$

16. 若X为连续型随机变量

且Y也为连续型：

则有以下做法：一、定义法：

给出y的范围

找出x的范围

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\varphi(X)\le y)=\underline{P(X\in\varphi^{-1}(y))}$ 然后有：$f_Y(y)=F_Y'(y)$

$=F_X'(\varphi^{-1}(y))\frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}$

最后检查 $f_Y(y)$ 是否满足概率密度函数条件

二、公式法.

$y=\varphi(x)$ 严格单调且反函数 $x=h(y)$ 连续可导，则 $Y=\varphi(X)$ 密度

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\,[h'(y)] & \alpha<y<\beta \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

二. 重要题型

§2.5 随机变量之性质

解决方法：一、判断是否能够成为分布函数或概率密度函数.

二、已知分布求概率密度　三、求未知之参数

例：判断下列函数是否能成为随机变量

① $f(x)=\begin{cases} 2(1-|x|) & |x|\le 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$　② $f(x)=\begin{cases} x & -1<x<0 \\ \frac{3}{4}x & 0\le x<2 \\ 0 & 其他. \end{cases}$　③ $f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

× $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-1}^{1}2(1-|x|)dx=2\ne 1$　× 因为 $-1<x<0$ 时，$f(x)$ 相 <0　√.

例：$f(x)=\begin{cases} A\sin x & 0\le x\le \pi. \\ 0 & 其他 \end{cases}$　① 求A　② 求X分布函数、分

解：① $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_0^{\pi} A\sin x\,dx=1$ 即：$2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}$.

(2) 则分布: $\int_0^x \frac{1}{2}\sin x\,dx = \frac{1}{2}(1-\cos x)$. $\therefore F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2}(1-\cos x) & 0\le x<\lambda\\ 1 & x\ge\lambda\end{cases}$

$0<x\le\lambda$.

§2.5. 离散型随机变量及其分布律　　解决方法: 一、求参数 二、建模

例: $P\{X=k\}=C(0.75)^k$, $k=1,2,3\cdots\cdots$ 则常数 C 的值为 ____

$\because \sum_{i=1}^{\infty} C(0.75)^k=1$. $\therefore \lim_{n\to\infty} C\cdot\frac{0.75(1-(0.75)^n)}{1-0.75}=1$ 即: $3C=1$ 即 $C=\frac{1}{3}$.

例: X 分布函数 $F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ 0.4 & -1\le x<1\\ 0.8 & 1\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$ 求 (1) X 概率分布 (2) $P(X<2\mid X\ne 1)$

解: (1) 找间断点 -1 1 3　概率: $0.4-0=0.4$ $0.8-0.4=0.4$ $1-0.8=0.2$.

则有:

X	-1	1	3
P(X)	0.4	0.4	0.2

(2) $P(X<2\mid X\ne1)=\frac{P(X<2, X\ne1)}{P(X\ne1)}=\frac{0.4}{0.6}=\frac{2}{3}$.

例: 某段时间内来百货公司的顾客满足参数为 λ 的 Poisson 分布. 且每个顾客购买电视概率为 p 求 P(A) 其中 A_i 为 i 位顾客买了电视

$$P(A)=\sum_{i=0}^{\infty}P(A_i)P(A\mid A_i)=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}C_i^k p^k(1-p)^{i-k}$$

$$=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\frac{i!}{(i-k)!k!}p^k(1-p)^{i-k}=\frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!}\cdot\sum_{i=k}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{i-k}}{(i-k)!}$$

$$=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda(1-p)}\cdot\frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}$$

§2.6 连续型随机变量　　正态　指数　均匀

解决方法: 一、求参数 (积分)　二、对于三种分布的理解与掌握

例: 指数分布: 某医院内科窗口有5个, 患者平均就诊时间为10分钟, 假定每个患者的就诊时间服从指数分布, 则患者就诊时间超过10分钟之概率为 ____. 假如5个窗口都有病人就诊 则恰有2个人超过10分钟

解: $\frac{1}{\lambda}=10 \Rightarrow \lambda=0.1$ 则: $\int_{10}^{\infty}0.1e^{-0.1x}dx=e^{-1}$

$$P=C_5^2\cdot(e^{-1})^2(1-e^{-1})^3=10e^{-2}(1-e^{-1})^3$$

§ 2-7 随机变量函数的分布列 ☆

一、公式法.

如果 $y=\varphi(x)$ 是单调, 则可有公式, 公式已给出

例. $X\sim E(2)$ 则求 $Y=1-e^{2x}$ $f_Y(y)=$ ______ . $x\in(0,+\infty)$.

已知 $f_X(x)=2e^{-2x}$

且 $Y=1-e^{-2x}$ 单调, 则 $x=-\frac{1}{2}\ln(1-y)$ $y=1-e^{2x}$ 值域

则有 $f_Y(y)=\begin{cases} f_X(\varphi(y))\cdot|\varphi'(y)|, & \alpha<y<\beta \\ 0 & 其他 \end{cases}$ ~ 值域 $(0,1)$ 则 y 范围 $(0,1)$

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases} 2e^{\ln(1-y)}\left[-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right]' & 0\le y<1 \\ 0 & 其他 \end{cases} = \begin{cases} 1 & 0<y\le 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

二、定义法.

若 $y=\varphi(x)$ 不单调, 那么就按照定义来

例: 设随机变量 $X\sim N(4,16)$ 则 $Y=|X-4|$

令 $Z=X-4$ 则 $Z\sim N(0,16)$ $Y=|Z|$

$P(Y\le y)=P(|Z|\le y)=P(-y<Z<y)=F_Z(y)-F_Z(-y)$

第一步: 给定 $Y\le y$ 求出前置变量 Z 的范围, 利用 Z 的范围求出 $P(Y\le y)$

$f_Y(y)=F_Z(y)'-F_Z(-y)'(-1)=f_Z(y)+f_Z(-y)$

第二步, 对 $F_Y(y)$ 求导即为 $f_Y(y)$

$f_Y(y)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\cdot 4}e^{-\frac{y^2}{2\times16}}=\frac{1}{\sqrt{8\pi}}e^{-\frac{y^2}{32}}$

定义域怎么求?

$x\in[a,b]$ $\xrightarrow{f(x)映射}$ $y\in$[最小, 最大]

三、补充习题

1、下面函数可以作为分布函数的是

① $F(x)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ \frac{1}{3} & -1\le x\le 2 \\ 1 & x>2. \end{cases}$ 不行, 因为没有做到右连续!

2. 设：$f(x)=\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}|x|}$ $x\in R$ $\lambda>0$

(1) 求方程 $y^2+2Xy+\lambda^2=0$

(2) 求 $Z=e^{-|X|}$ 的概率密度

解：(1) e^{-1} (2) $\because$ $x\in R$ $z\in(0,1)$

$F_Z(z)=P(e^{-|X|}\le z)=P(|X|\geqslant -\ln z)$.

$=\int_{-\infty}^{\ln z}\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}|x|}dx+\int_{-\ln z}^{+\infty}\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}|x|}dx$

$=\int_{-\ln z}^{+\infty}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}|x|}dx=z^{\frac{1}{\lambda}}$

$\therefore$ $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}z^{\frac{1}{\lambda}-1} & 0<z<1\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$