§3 二维随机变量及分布

一、知识清单

§3.1 ~~1定义~~ 定义 1. $S=\{e\}$，设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 的随机变量，构成的二元组 (X,Y)

2. 联合分布函数 $F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$

① $F(x,y)$ 关于 x,y 单调不减

② $0\le F(x,y)\le 1$，且对于固定 y，$F(-\infty,y)=0$，对于固定 x $F(x,-\infty)=0$

③ $F(x,y)$ 关于 x,y 右连续 $F(x+0,y)=F(x,y)$ $F(x,y+0)=F(x,y)$

④ $F(-\infty,-\infty)=F(-\infty,+\infty)=F(+\infty,-\infty)=0$ $F(+\infty,+\infty)=1$

⑤ $x_1<x_2$，$y_1<y_2$，则有

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0$$

3. 边缘分布函数 $F_X(x)=P(X\le x)$ $F_Y(y)=P(Y\le y)$ 称为X及Y的边缘分布函数

§3.2 二维离散型随机变量及分布

4. 字联合分布律：$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}$，

性质 (1) $p_{ij}\ge 0$ (2) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$ (3) $\left(\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}\right)=F(x,y)$

5. 边缘分布律

① $P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}$ ② $P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}$

6. 条件分布

若 $P(Y=y_j)>0$，则 $P(X=x_i\mid Y=y_j)=\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$ 为在 $(Y=y_j)$ 条件下X的分布律

若 $P(X=x_i)>0$，则 $P(Y=y_j\mid X=x_i)=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$ 为在 $(X=x_i)$ 条件下Y的分布律

§3.3 二维连续型随机变量分布

7. 定义：存在二元非负可积函数 $f(x,y)$，使得 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)\,dx\,dy$

称 (X,Y) 为联合概率密度函数

8. 性质 ① $f(x,y)\ge 0$ ② $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)\,du\,dv=1$

③ 设G为平面区域则落在区域G内概率为 $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$

④ $f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{不可偏导}\\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \text{可偏导}\end{cases}$

9、边缘分布

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$　　$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 分别为 X, Y 边缘密度函数

10、条件分布

① 对于固定的 $(X=x)$ 若 $f_X(x)>0$，则称 $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 为在 $X=x$ 条件下 y 的分布

② 对于固定的 $(Y=y)$，若 $f_Y(y)>0$，则称 $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在 $Y=y$ … x 的 ……

§3.4 随机变量独立性

11、定义 $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$

等价条件：X, Y 独立：$P_{ij}=P_{i\cdot}\times P_{\cdot j}$ 或 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

§3.5 二维随机变量函数的分布

X Y 不相关 无法推出 (X,Y)
$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$
服从二维正态分布

$U=\varphi(X,Y)$ $F_U(u)=P(U\le u)=P(\varphi(X,Y)\le u)$

12、离散型随机变量函数的分布.

设 (X,Y) 联合分布律为 $P=P_{ij}$ 则 U 的为 $P(U=u_k)=\sum_{\varphi(x_i,y_j)=u_k} P_{ij}$

13. 连续型随机变量分布

$F_U(u)=\iint_{\varphi(x,y)\le u} f(x,y)\,dx\,dy$　　$f(u)=\frac{dF(u)}{du}$.　　$U=X+Y$

(1) $U=X+Y$

公式法：$f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\cancel{u-x})\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)$　卷积公式

例：① $X\sim B(m,p)$　$Y\sim B(n,p)$　　$U\sim B(m+n,p)$

② $X\sim P(\lambda_1)$　$Y\sim P(\lambda_2)$　　$U\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

③ $X\sim \chi^2(n_1)$　$Y\sim\chi^2(n_2)$　　$U\sim\chi^2(n_1+n_2)$

② $U=$最大，最小值　　$1-(1-F_X(x))(1-F_Y(y))$ or $F_X(x)F_Y(y)$

③ $U=\frac{Y}{X}$　　$V=XY$

$f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,xu)\,dx$　　$f_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{v}{x})\,dx$

二. 重要题型

§3.6 离散性型随机变量　解决方法：① 找准定义 ② 边缘分布列与总和为1 ③ 独立的定义

例：

X_1	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

X_2	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

而 $P(X_1X_2=0)=1$

角

(1) 求联合分布律，(2) 独立么？ (3) 求 $Z=X_1-X_2$ 之分布律

解：(1)

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0 ③	$\frac{1}{4}$
1	0 ①	$\frac{1}{2}$ ②	0 ①

① $P(X_1X_2\neq 0)=0$

② $P(X_2=1)=\frac{1}{2}$

③ $P(X_2=0)=\frac{1}{2}$.

(2) 不独立

因为 $P(X_1=-1,X_2=0)=\frac{1}{4}$

而 $P(X_1=-1)P(X_2=0)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

不对

(3) 对于 $X_1=-1$ $X_2=0$ $Z=-1$

$X_1=0$ $X_2=1$ $Z=-1$

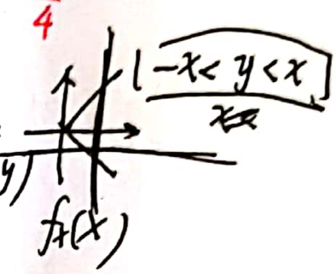
$X_1=1$ $X_2=0$ $Z=1$

∴

-1	1
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

§3.7 连续型二维随机变量

对于求系数，积分即可，边缘函数：划线，看边界：



条件分布：求边缘函数

例：$f(x,y)=\begin{cases}A(6-x-y) & 0\le x\le 2,\ 2\le y\le 4\\ 0 & 其他\end{cases}$

(1) 求A

(2) 求X、Y 边缘概率密度

(3) X、Y是否独立？

(4) 求 $f(x|y)$ $f(y|x)$

对于Y (0,2)

解：(1) $\int_0^2 dx\int_2^4(6-x-y)\,dy=8$ ∴ $A=\frac{1}{8}$

(2) $f_X(x)=\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)\,dy=\frac{3-x}{4}$

$f_Y(y)=\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)\,dx=\frac{5-y}{4}$

对于X：(2,4)

其他为0

(3) $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$，不独立

(4) $f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{(6-x-y)}{10-2y}$ $f(y|x)=\frac{6-x-y}{6-2x}$

§3.8 随机变量函数

就利用公式结合即可

例：$f(x,y)=\begin{cases}xe^{-y} & 0<x<y<+\infty\\ 0 & 其他\end{cases}$

(1) 求 $Z=X+Y$ 密度函数

(2) 求 $P(\min(X,Y)<1)$

(1) 解: $F_Z = P(X+Y\le z) = \int_0^{\frac{z}{2}} x\,dx \cdot \int_x^{z-x} e^{-y}dy$

$= \int_0^{\frac{z}{2}} x(e^{-x} - e^{x-z})dx$

$= -(x+1)e^{-x} - \frac{1}{e^z}(x-1)e^{x} \Big|_0^{\frac{z}{2}}$

$= -(\frac{z}{2}+1)e^{-\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}(\frac{z}{2}-1) + 1 - e^{-z}$

$= -2e^{-\frac{z}{2}} - e^{-z} + 1$ $\quad f_Z = -(\frac{z}{2}-1)e^{-\frac{z}{2}} + e^{-z}$

∴有: $f_Z(z) = \begin{cases} (\frac{z}{2}-1)e^{-\frac{z}{2}} + e^{-z} & z \ge 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$

(2) $P(\min(X,Y)<1) = 1 - P(\min(X,Y)\ge 1)$

$= 1-\int_1^{\infty} dy \int_1^{y} xe^{-y}dx = 1 - \int_1^{\infty}(\frac{y^2}{2}-\frac{1}{2})e^{-y}dy = 1-2e^{-1}$

三. 补充练习.

✓ Poisson 分布.

例1. 1、X_1, X_2, X_3 e.v. $\sim P(1)$

记: $X = \begin{cases} 1 & X_1+X_2=1 \\ 0 & X_1+X_2\ne 1 \end{cases}$ $\quad Y = \begin{cases} 1 & X_3+X_2=1 \\ 0 & X_3+X_2\ne 1. \end{cases}$

(1)求X, Y联合分布列 (2)求X, Y边缘分布列.

解:(1) $P(X=1,Y=1) = P(0,1,0)+P(1,0,1) = e^{-1}\cdot e^{-1}\cdot e^{-1} + e^{-1}\cdot e^{-1}\cdot e^{-1} = 2e^{-3}$

$P(X=0,Y=1) = P(Y=1) - P(X=1,Y=1) = 2e^{-2}-2e^{-3}$

同理 $P(X=1,Y=0) = 2e^{-2}-2e^{-3}$

∴ $P(X=0,Y=0) = 1-4e^{-2}+2e^{-3}$ 边缘 Poission分布 $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

2. 已知随机变量 (X,Y) 联合概率密度: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} & x>0, y>0 \\ 0 & \times 0 \end{cases}$

(1)求X, Y边缘概率密度 (2)独立否 (3) $Z=X^2+Y^2$ 之概率密度.

解 (1) $\int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dy = e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = e^{-\frac{1}{2}x^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

同理 $f_Y(y) = e^{-\frac{1}{2}y^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 注意不要写成2π了!!!

(2)独立. (3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} e^{-\frac{1}{2}r^2} r\,dr = 1-e^{-\frac{1}{2}z}$. 则 $f(z) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}$.

注意为 $\sqrt{z}$