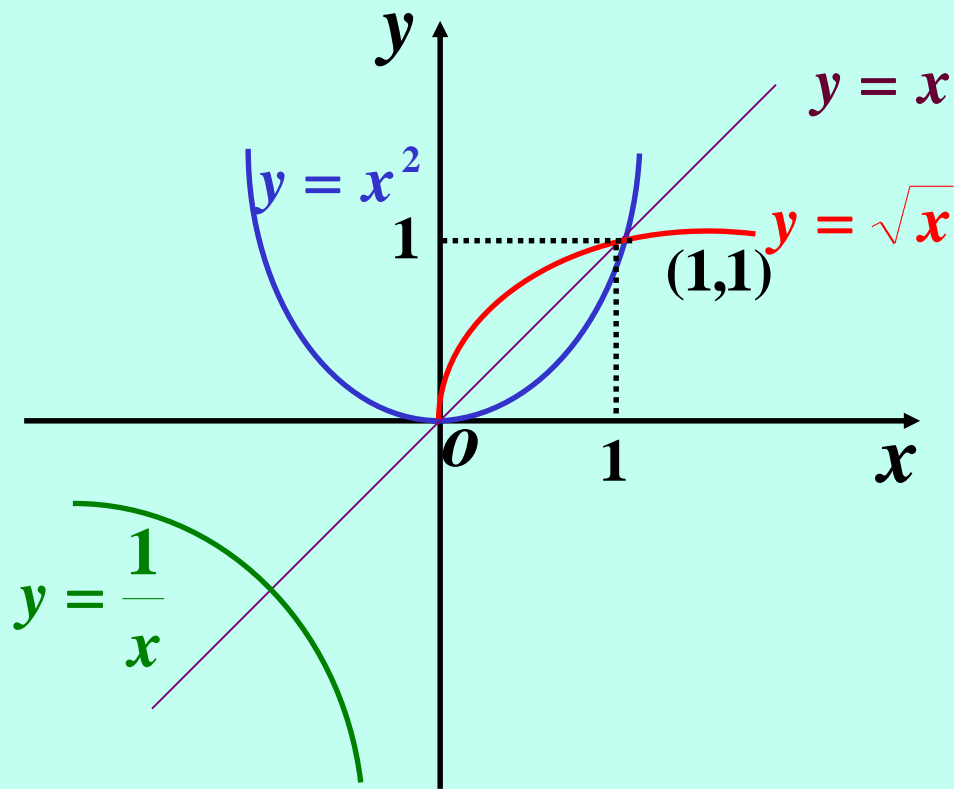


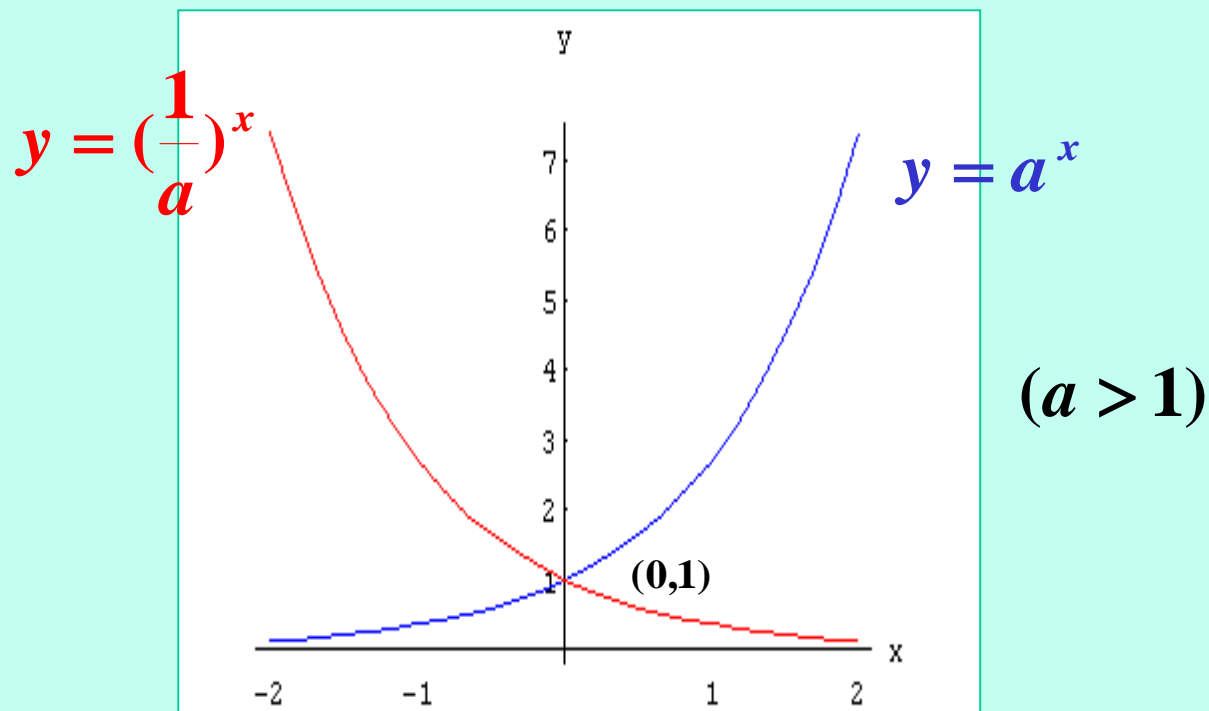
初等函数

一、基本初等函数

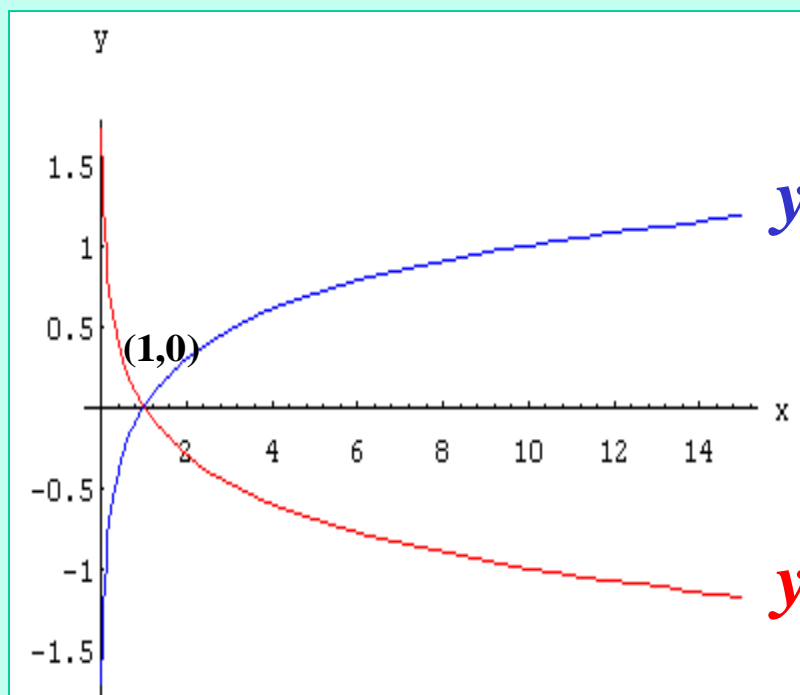
1. 幂函数 $y = x^\mu$ (μ 是常数)



2. 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) $y = e^x$



3.对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) $y = \ln x$



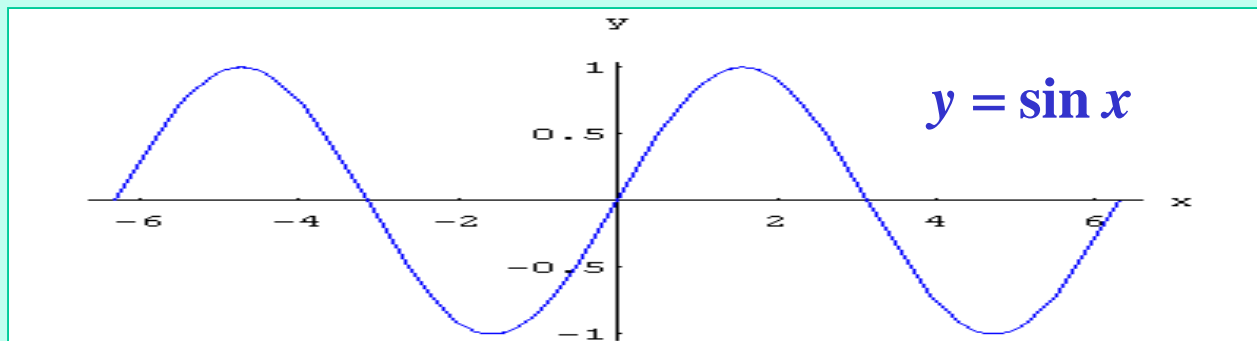
$$y = \log_a x$$

$$(a > 1)$$

$$y = \log_{\frac{1}{a}} x$$

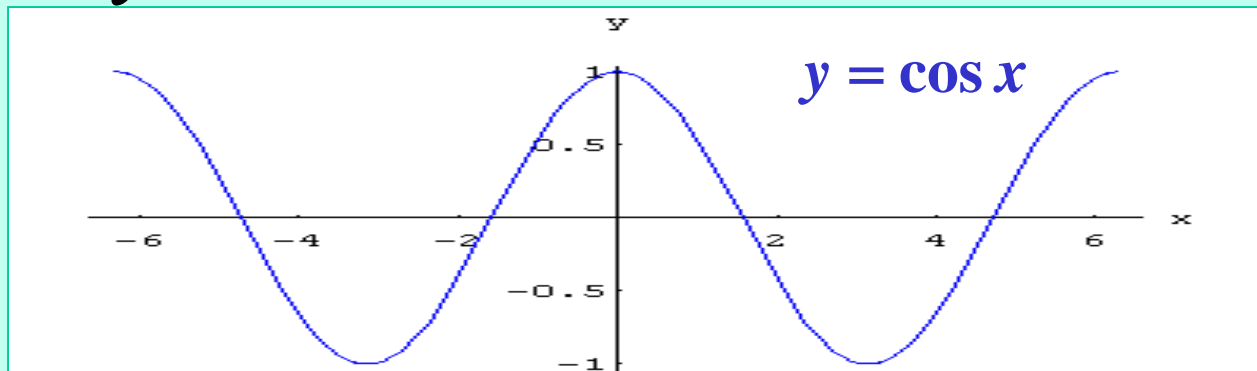
4.三角函数

正弦函数 $y = \sin x$

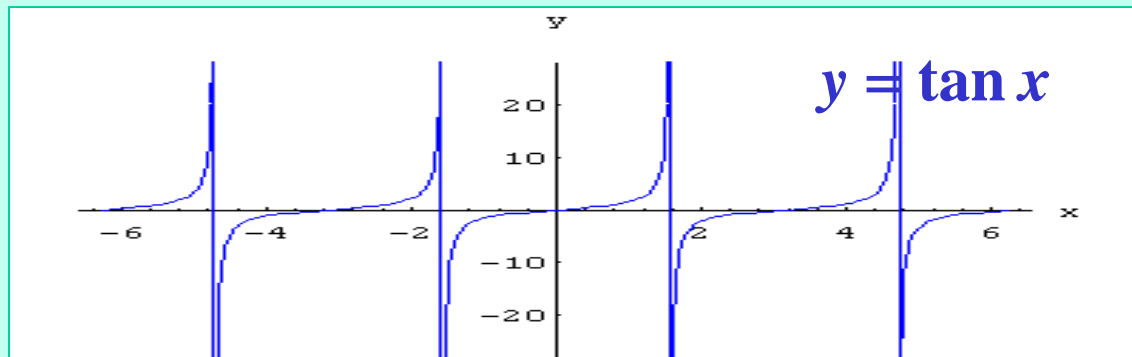


余弦函数

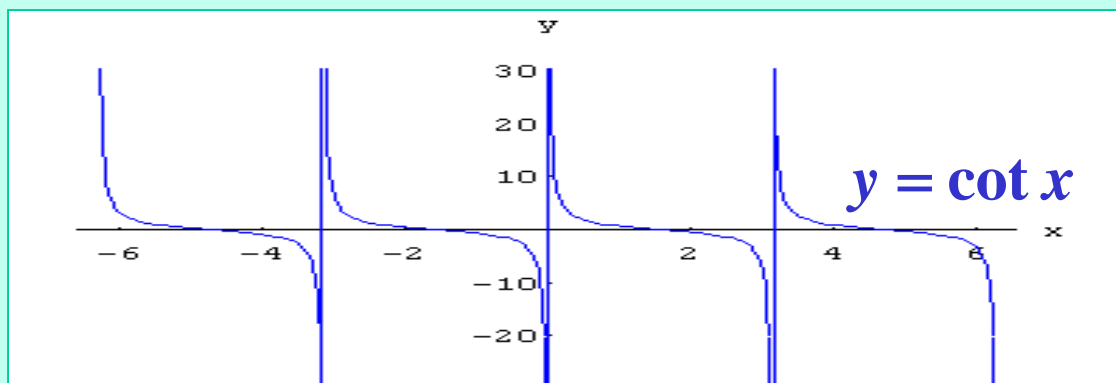
$$y = \cos x$$



正切函数 $y = \tan x$



余切函数 $y = \cot x$

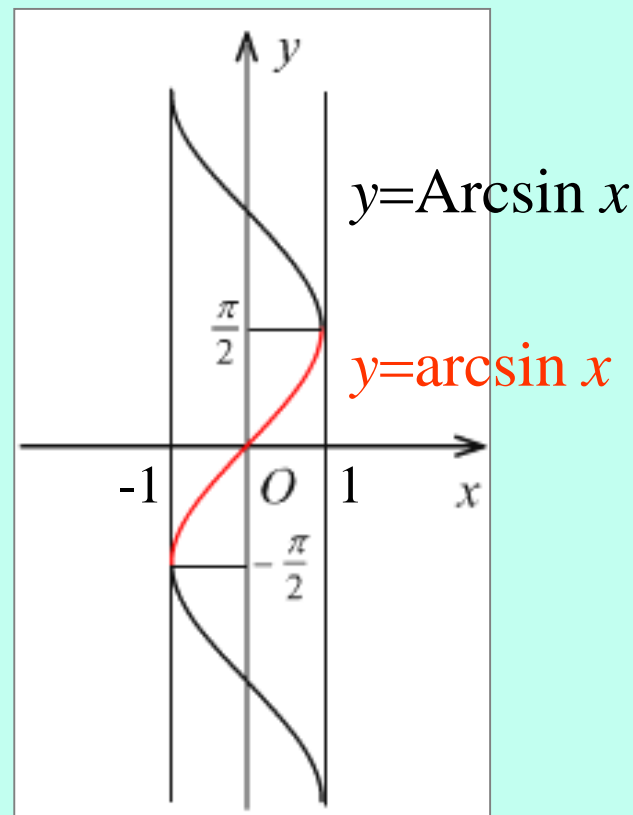


反三角函数

• 反正弦函数

正弦函数 $y=\sin x$ 的反函数称为反正弦函数, 记为 $y=\text{Arcsin } x$. 它是多值函数, 定义域为 $[-1, 1]$.

正弦函数 $y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的反函数称为反正弦函数的主值, 记为 $y=\arcsin x$, 其定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

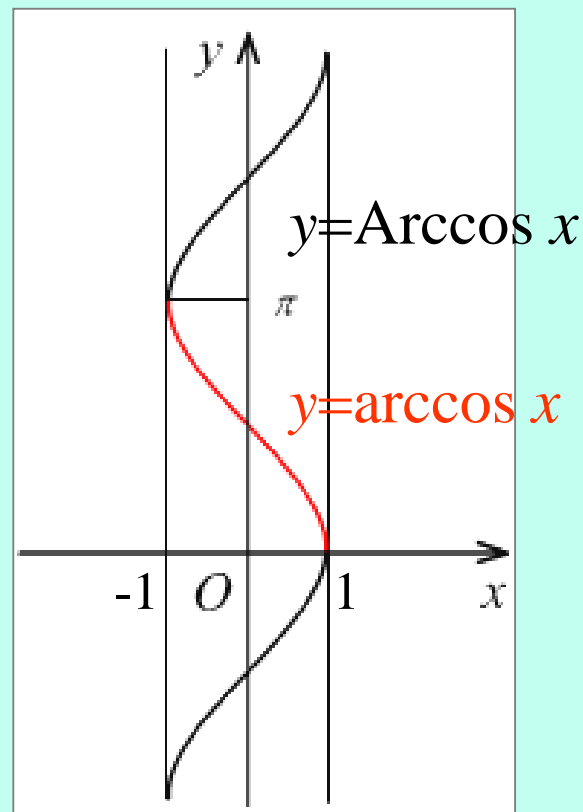


反三角函数

• 反余弦函数

余弦函数 $y=\cos x$ 的反函数称为反余弦函数, 记为 $y=\text{Arccos } x$. 它是多值函数, 定义域为 $[-1, 1]$.

余弦函数 $y=\cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的反函数称为反余弦函数的主值, 记为 $y=\arccos x$, 其定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$.

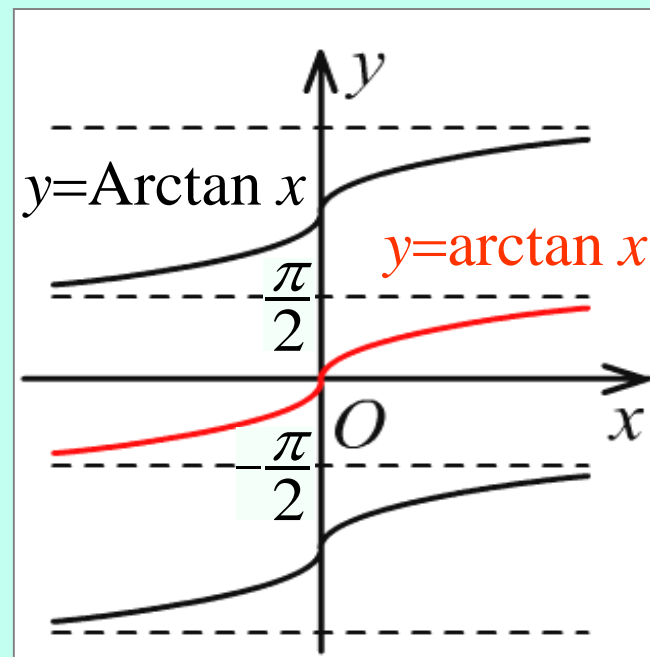


反三角函数

• 反正切函数

正切函数 $y=\tan x$ 的反函数称为反正切函数, 记为 $y=\operatorname{Arctan} x$. 它是多值函数, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

正切函数 $y=\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的反函数称为反正切函数的主值, 记为 $y=\arctan x$, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

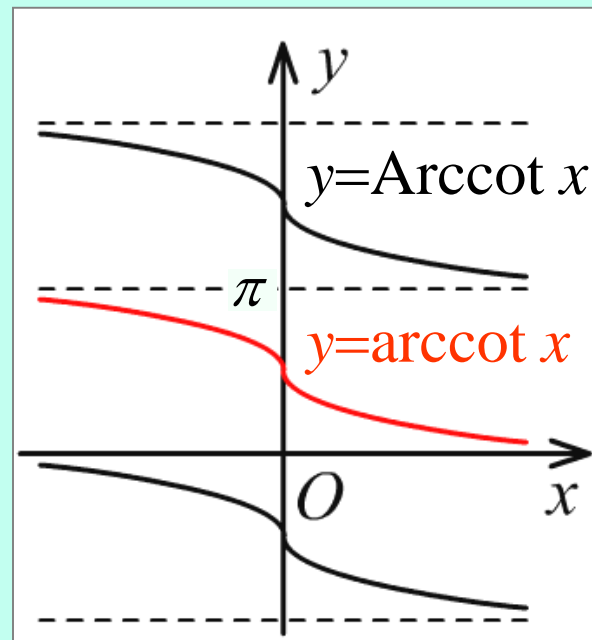


反三角函数

• 反余切函数

余切函数 $y=\cot x$ 的反函数称为反余切函数, 记为 $y=\operatorname{Arccot} x$. 它是多值函数, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

余切函数 $y=\cot x$ 在 $(0, \pi)$ 上的反函数称为反余切函数的主值, 记为 $y=\operatorname{arccot} x$, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, \pi)$.



- 反三角函数值的确定

求 $\arcsin x$ 的方法是：

在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 内确定一点 α ，使 $\sin \alpha = x$ ，则 $\arcsin x = \alpha$ 。

例如，求 $\arcsin(-\frac{1}{2})$ 。

$$\because \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$$

- 反三角函数值的确定

求 $\arccos x$ 的方法是：

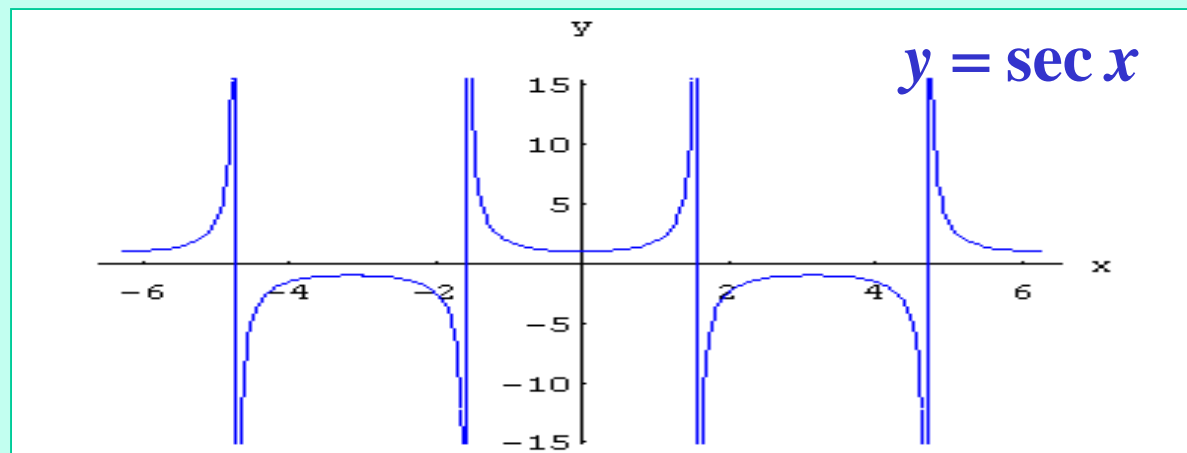
在 $[0, \pi]$ 内确定一点 α ，使 $\cos \alpha = x$ ，则 $\arccos x = \alpha$ 。

例如，求 $\arccos(-\frac{1}{2})$ 。

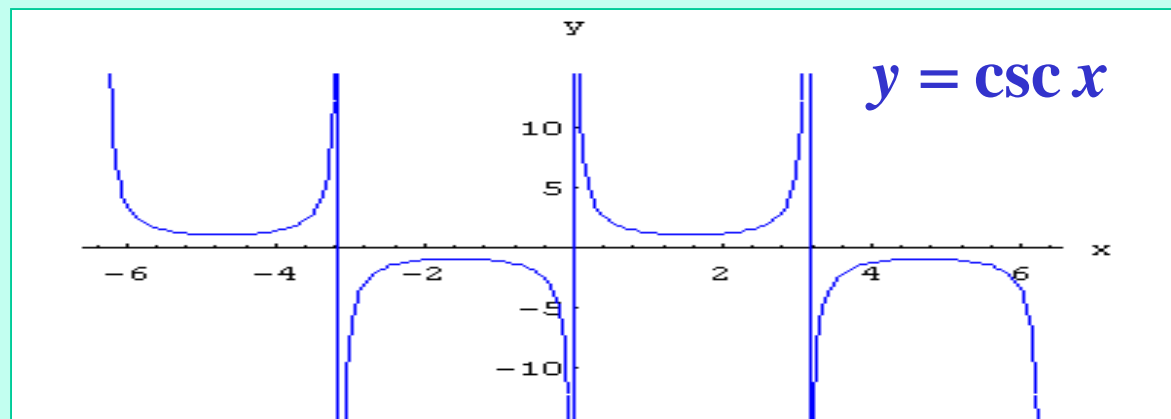
$$\because \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

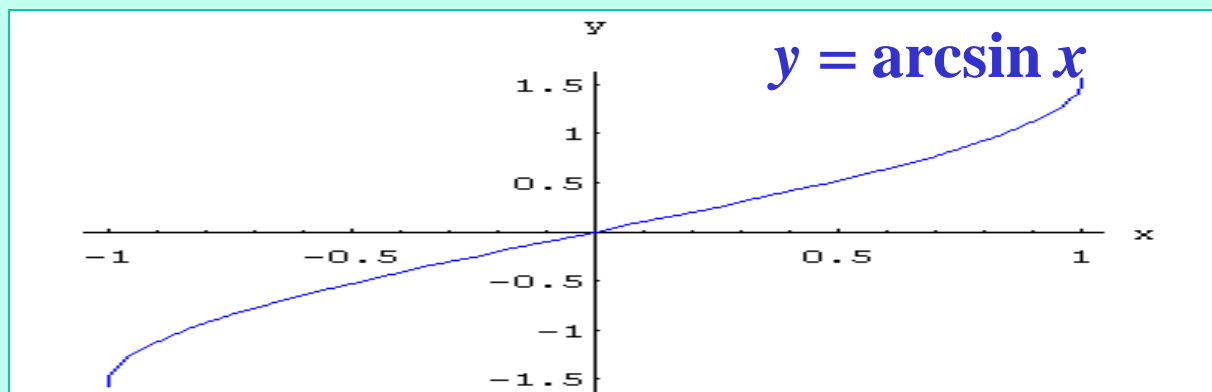
正割函数 $y = \sec x$



余割函数 $y = \csc x$



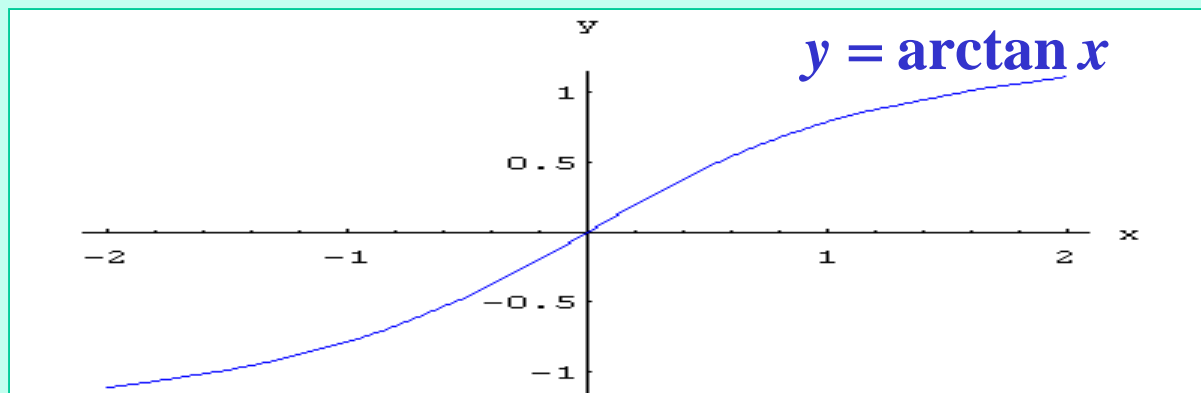
5.反三角函数 反正弦函数 $y = \arcsin x$



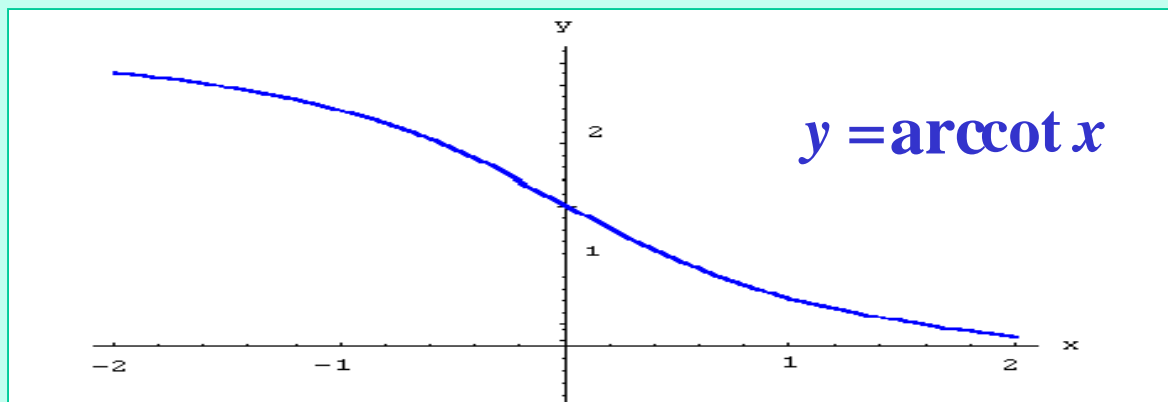
反余弦函数 $y = \arccos x$



反正切函数 $y = \arctan x$



反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$



幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

二、复合函数 初等函数

1. 复合函数

在实际问题中，有很多比较复杂的函数是由几个比较简单的函数“叠置”而成的，如在简谐振动中位移 y 与时间 t 的函数关系

$$y = \sin(\omega t + \varphi)$$

就是由三角函数 $y = \sin u$ 和线性函数 $u = \omega t + \varphi$ “叠置”而成的，

$$\text{设 } y = \sqrt{u}, \quad u = 1 - x^2, \quad \longrightarrow \quad y = \sqrt{1 - x^2}$$

定义: 设函数 $y = f(u)$ 的定义域 D_f , 而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z_φ , 若 $D_f \cap Z_\varphi \neq \emptyset$, 则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.

$x \leftarrow$ 自变量, $u \leftarrow$ 中间变量, $y \leftarrow$ 因变量,

注意: 1.不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的;

$$Z_\varphi \cap D_f \neq \emptyset \quad \text{——复合条件}$$

例如 $y = \arcsin u$, $u = 2 + x^2$; $y \neq \arcsin(2 + x^2)$

复合函数的定义域

复合条件在实际应用时常取形式 $Z_\varphi \subseteq D_f$

内层函数的值域落在外层函数的定义域之内

2. 复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

例如 $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}, \quad y = \sqrt{u}, \quad u = \cot v,$
 $v = \frac{x}{2}.$

2.初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

例1 设 $f(x) = \arcsin(1-2x)$,

求 $f(x^2) + f(\frac{1}{x})$ 的定义域.

解

$f(x)$ 的定义域为 $|1-2x| \leq 1$, 即 $0 \leq x \leq 1$,
故 $f(x^2)$ 的定义域为 $x^2 \leq 1$, 即 $-1 \leq x \leq 1$.

$f(\frac{1}{x})$ 的定义域为 $0 < \frac{1}{x} \leq 1$, 即 $x \geq 1$.

$f(x^2) + f(\frac{1}{x})$ 的定义域为 $\{x | x = 1\}$.

练习1

设 $\forall x > 0$, 函数值 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$, 求函数 $y = f(x)$ ($x > 0$)的解析表达式.

解答 设 $\frac{1}{x} = u$

$$\begin{aligned}\text{则 } f(u) &= \frac{1}{u} + \sqrt{1 + \frac{1}{u^2}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{1 + u^2}}{u},\end{aligned}$$

$$\text{故 } f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}. \quad (x > 0)$$

例1 设 $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$, $g(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

求 $f[g(x)]$.

解
$$f[g(x)] = \frac{1}{2}[g(x) + |g(x)|]$$

当 $x < 0$ 时, $g(x) = x < 0$,

$$\longrightarrow f(g(x)) = \frac{1}{2}[x + |x|] = 0;$$

当 $x \geq 0$ 时, $g(x) = x^2 \geq 0$,

$$\longrightarrow f(g(x)) = \frac{1}{2}[x^2 + |x^2|] = x^2,$$

由上即得 $f[g(x)] = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

练习2

设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases},$

求 $f[f(x)]$.

解

$$f[f(x)] = 1$$

例 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-l, l)$, 证明必存在 $(-l, l)$ 上的偶函数 $g(x)$ 及奇函数 $h(x)$, 使得 $f(x)=g(x)+h(x)$.

证 作 $g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$, $h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$,
则 $f(x)=g(x)+h(x)$, 且

$$g(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=g(x),$$

$$h(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-h(x).$$

提示: 如果 $f(x)=g(x)+h(x)$, 则 $f(-x)=g(x)-h(x)$, 于是

$$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)], \quad h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$