第二章　导数与微分

习题课

一、主要内容

关系 $\frac{dy}{dx} = y' \Leftrightarrow dy = y'dx \Leftrightarrow \Delta y = dy + o(\Delta x)$

导　数

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

基本公式

高阶导数

高阶微分

微　分

$dy = y'\Delta x$

求　导　法　则

上页　下页　返回

1、导数的定义

定义 设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，当自变量x在x_0处取得增量Δx(点$x_0+\Delta x$仍在该邻域内)时，相应地函数y取得增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；如果$\Delta y$与$\Delta x$之比当$\Delta x\to 0$时的极限存在，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处可导，并称这个极限为函数$y=f(x)$在点$x_0$处的导数，记为$y'\big|_{x=x_0}$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$或$\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$，即

$$y'\big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

★ 单侧导数

1.左导数:

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

2.右导数:

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

★ **函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ 左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等.**

2、基本导数公式（常数和基本初等函数的导数公式）

$$(C)' = 0 \qquad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x tg x \qquad (\csc x)' = -\csc x ctg x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

3、求导法则

(1) 函数的和、差、积、商的求导法则

设$u=u(x),v=v(x)$可导，则

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$，（2）$(cu)'=cu'$(c 是常数),

（3）$(uv)'=u'v+uv'$，（4）$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$.

(2) 反函数的求导法则

如果函数$x=\varphi(y)$的反函数为$y=f(x)$,则有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(x)}.$$

(3) 复合函数的求导法则

设$y=f(u)$,而$u=\varphi(x)$则复合函数$y=f[\varphi(x)]$的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad 或 \quad y'(x)=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

(4) 对数求导法

先在方程两边取对数,然后利用隐函数的求导方法求出导数.

适用范围:

多个函数相乘和幂指函数$u(x)^{v(x)}$的情形.

(5) 隐函数求导法则

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

(6) 参变量函数的求导法则

若参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$确定$y$与$x$间的函数关系,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

4、高阶导数 (二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数)

二阶导数 $(f'(x))' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$,

记作 $f''(x), y'', \dfrac{d^2 y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x), y''', \dfrac{d^3 y}{dx^3}$.

一般地,函数$f(x)$的$n-1$阶导数的导数称为函数$f(x)$的n阶导数,记作

$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n} \text{或} \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

5、微分的定义

定义 设函数$y=f(x)$在某区间内有定义，x_0及$x_0+\Delta x$在这区间内，如果

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$$

成立(其中A是与Δx无关的常数)，则称函数$y=f(x)$在点x_0可微，并且称$A\cdot\Delta x$为函数$y=f(x)$在点x_0相应于自变量增量Δx的微分，记作$dy\big|_{x=x_0}$或$df(x_0)$，即

$$dy\big|_{x=x_0} = A\cdot\Delta x.$$

微分dy叫做函数增量Δy的线性主部.（微分的实质）

上页 下页 返回

6、导数与微分的关系

定理 函数$f(x)$在点x_0可微的充要条件是函数$f(x)$在点x_0处可导,且 $A = f'(x_0)$.

7、 微分的求法

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

求法: 计算函数的导数,乘以自变量的微分.

基本初等函数的微分公式

$d(C)=0$　　$d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}dx$

$d(\sin x)=\cos x dx$　　$d(\cos x)=-\sin x dx$

$d(\tan x)=\sec^2 x dx$　　$d(\cot x)=-\csc^2 x dx$

$d(\sec x)=\sec x\tan x dx$　　$d(\csc x)=-\csc x\cot x dx$

$d(a^x)=a^x\ln a dx$　　$d(e^x)=e^x dx$

$d(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}dx$　　$d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx$

$d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　$d(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$d(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}dx$　　$d(\text{arccot}\, x)=-\dfrac{1}{1+x^2}dx$

8、 微分的基本法则

函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + udv \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

微分形式的不变性

无论x是自变量还是中间变量,函数$y = f(x)$

的微分形式总是 $\boxed{dy = f'(x)dx}$

上页 下页 返回

二、典型例题

例1 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$，

求 $f'(0)$.

解 $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$$

$$=100!$$

上页 下页 返回

例2 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$，

求 $f'(2)$.

解 $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}[(x-2)\cdot\dfrac{f(x)}{(x-2)}] = 0$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3$$

例3 设函数$y=f(x)$由方程$\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}(x>0,y>0)$所确定,求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 两边取对数 $\dfrac{1}{x}\ln y=\dfrac{1}{y}\ln x$, 即$y\ln y=x\ln x$,

$\therefore(1+\ln y)y'=\ln x+1$, $\quad y'=\dfrac{\ln x+1}{1+\ln y}$,

$$y''=\frac{\frac{1}{x}(\ln y+1)-(\ln x+1)\frac{1}{y}\cdot y'}{(1+\ln y)^2}$$

$$=\frac{y(\ln y+1)^2-x(\ln x+1)^2}{xy(\ln y+1)^3}$$

上页 下页 返回

例4 设$f(x)=x|x(x-2)|$，求 $f'(x)$.

解 先去掉绝对值

$$f(x)=\begin{cases} x^2(x-2), & x\le 0 \\ -x^2(x-2), & 0<x<2, \\ x^2(x-2), & x\ge 2 \end{cases}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2(x-2)}{x}=0,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{-x^2(x-2)}{x}=0,$$

$$f'_-(0)=f'_+(0)=0,\quad f'(0)=0;$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2(x-2)}{x-2}=-4,$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2(x-2)}{x-2}=4,$$

$$f'_-(2)\ne f'_+(2),$$

$\therefore\ f(x)$在$x=2$处不可导.

例4 设$f(x)=x|x(x-2)|$,求 $f'(x)$.

解 先去掉绝对值

$$f(x)=\begin{cases} x^2(x-2), & x\le 0 \\ -x^2(x-2), & 0<x<2, \\ x^2(x-2), & x\ge 2 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-4x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ -3x^2+4x, & 0<x<2 \\ 3x^2-4x, & x>2 \end{cases}.$$

$f'_-(0)=f'_+(0)=0$, $f'(0)=0$;

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2(x-2)}{x-2}=-4,$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2(x-2)}{x-2}=4,$$

$f'_-(2)\ne f'_+(2)$,

$\therefore f(x)$在$x=2$处不可导.

例5　设$y=\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$,求 $y^{(n)}$.

解　$y=\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}=\dfrac{4x^2-4+3}{x^2-1}=4+\dfrac{3}{2}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1})$

$\because (\dfrac{1}{x-1})^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}},\quad (\dfrac{1}{x+1})^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}},$

$\therefore y^{(n)}=\dfrac{3}{2}(-1)^n n![\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}].$

上页　下页　返回

例6 设 $y=\sin^2\ln(e^x+x)$, 求 $\mathrm{d}y$.

解 $y'=2\sin\ln(e^x+x)\cdot[\sin\ln(e^x+x)]'$

$$=2\sin\ln(e^x+x)\cdot[\cos\ln(e^x+x)]\cdot[\ln(e^x+x)]'$$

$$=\sin[2\ln(e^x+x)]\cdot\frac{1}{e^x+x}\cdot(e^x+x)'$$

$$=\frac{e^x+1}{e^x+x}\sin[2\ln(e^x+x)],$$

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\frac{e^x+1}{e^x+x}\sin[2\ln(e^x+x)]\,\mathrm{d}x.$$

填空题选讲

7．若 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-3h)}{h}=$ ________.

[$5f'(x_0)$]

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0-3h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0)-f(x_0-3h)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[2\cdot\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}+3\cdot\frac{f(x_0-3h)-f(x_0)}{-3h}\right]$$

填空题选讲

8．设函数 $f(x)=\begin{cases} a\sin x+b, & x<0 \\ e^{x}+\cos x, & x\geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则常数 $a=$________，$b=$________.

[1; 2]

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f(0)=2,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a\sin x+b)=b$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\Rightarrow b=2$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x}+\cos x-2}{x}=1$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{a\sin x+b-2}{x}=a$$

9．设 $f'(x)=\sin x^2$，则 $\dfrac{\mathrm{d}f(\sqrt{x})}{\mathrm{d}x}=$________.

[$\dfrac{\sin x}{2\sqrt{x}}$]

$$\frac{\mathrm{d}f(\sqrt{x})}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f(\sqrt{x})}{\mathrm{d}\sqrt{x}}\cdot\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}x}=\sin(\sqrt{x})^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

例10 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{[a(1-\cos t)]'}{[a(t-\sin t)]'} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_t' = \frac{\cos t\cdot(1-\cos t)-\sin t\cdot(\sin t)}{(1-\cos t)^2} = \frac{1}{\cos t-1},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_t'}{x'(t)} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

例11 设 $y=\dfrac{x^3}{x+1}$, 求$y^{(10)}$.

解: $$y=\frac{x^3}{x+1}=\frac{x^3+1}{x+1}-\frac{1}{x+1}=x^2-x+1-\frac{1}{x+1},$$

$$y^{(10)}=(x^2-x+1)^{(10)}-\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(10)}$$

$$=-(-1)^{10}\frac{10!}{(x+1)^{11}}=-\frac{10!}{(x+1)^{11}}.$$

12、设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}+a, & x<0 \\ e^x+b\sin x, & x\geq 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 可导，求 a，b 的值.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=1$,

因 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导, 从而连续, 于是 $a=1$.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}x\sin\frac{1}{x}=0,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+b\sin x-1}{x}=1+b,$$

由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导, 得 $b+1=0$, $b=-1$.

13、设 $f(x)$在 $x=1$处连续，且 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+\ln x}{x^2-1}=3$，求 $f'(1)$.

解 $\lim\limits_{x\to1}[f(x)+\ln x]=0 \Longrightarrow f(1)=0$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+\ln x}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}+\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x^2-1}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}+\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}+\frac{1}{2}=3$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=5$$

$$f'(1)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=5$$