函数的连续性

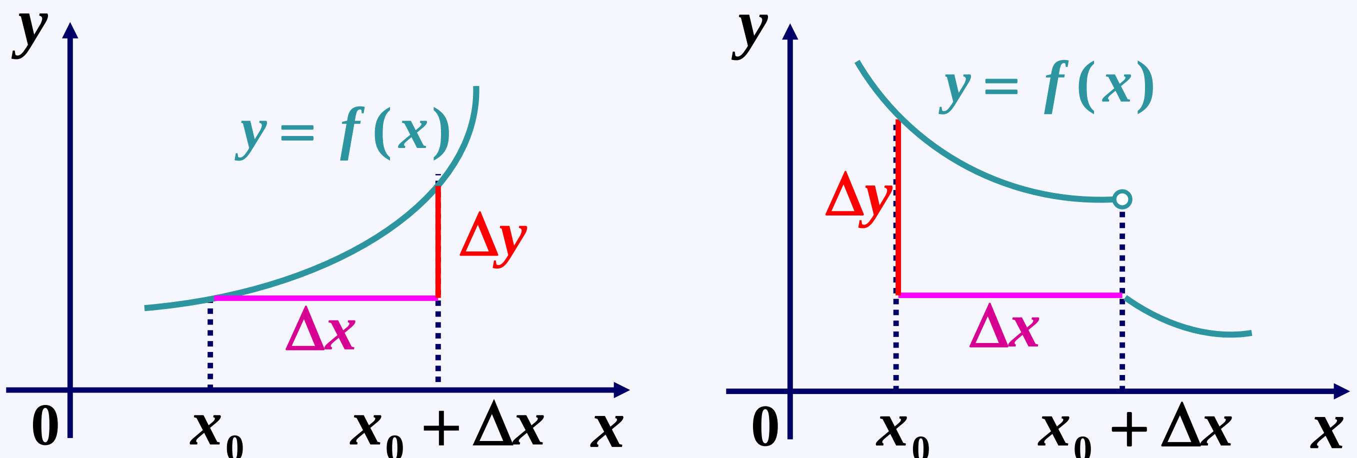
一、函数的连续性

1.函数的增量

设函数 $f(x)$在$U_\delta(x_0)$内有定义, $\forall\ x \in U_\delta(x_0)$,

$\Delta x = x - x_0$, 称为自变量在点 x_0的增量.

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$,称为函数 $f(x)$相应于Δx的增量.



2.连续的定义

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内有定义, 如果当自变量的增量 Δx 趋向于零时, 对应的函数的增量 Δy 也趋向于零, 即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ 或

$$\lim_{\Delta x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

那末就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, x_0 称为 $f(x)$ 的连续点.

设 $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$,

$\Delta x \to 0$ 就是 $x \to x_0$, $\Delta y \to 0$ 就是 $f(x) \to f(x_0)$.

定义 2　设函数$f(x)$在$U_\delta(x_0)$内有定义, 如果函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限存在, 且等于它在点x_0处的函数值$f(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

那末就称函数$f(x)$在点x_0连续.

"$\varepsilon-\delta$"定义:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当$|x - x_0| < \delta$时,

恒有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

例1 试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 在$x=0$处连续.

证 $\because \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0,$

又 $f(0)=0,$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0),$

由定义2知

函数 $f(x)$在$x=0$处连续.

3.单侧连续

若函数$f(x)$在$(a, x_0]$内有定义，且$f(x_0^-) = f(x_0)$，则称$f(x)$在点x_0处左连续；

若函数$f(x)$在$[x_0, b)$内有定义，且$f(x_0^+) = f(x_0)$，则称$f(x)$在点x_0处右连续.

定理

函数 $f(x)$在 x_0 处连续$\Leftrightarrow$是函数 $f(x)$在 x_0 处既左连续又右连续.

例2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\ge 0, \\ x-2, & x<0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2=f(0),$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2\neq f(0),$

右连续但不左连续,

故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

4.连续函数与连续区间

在区间上每一点都连续的函数,叫做在该区间上的连续函数,或者说函数在该区间上连续.

如果函数在开区间 (a,b) 内连续, 并且在左端点 $x=a$ 处右连续, 在右端点 $x=b$ 处左连续, 则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

例3 证明函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

证 任取 $x\in(-\infty,+\infty)$,

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

$\because \left|\cos(x+\dfrac{\Delta x}{2})\right|\le 1,$ 则 $|\Delta y|\le 2\left|\sin\dfrac{\Delta x}{2}\right|.$

对任意的 α, 当 $\alpha\neq 0$ 时, 有 $|\sin\alpha|<\alpha$,

故 $|\Delta y|\le 2\left|\sin\dfrac{\Delta x}{2}\right|<|\Delta x|$, $\therefore$ 当 $\Delta x\to 0$ 时, $\Delta y\to 0$.

即函数 $y=\sin x$ 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都是连续的.

二、函数的间断点

函数 $f(x)$在点 x_0处连续必须满足的三个条件:

(1) $f(x)$在点x_0处有定义;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在;

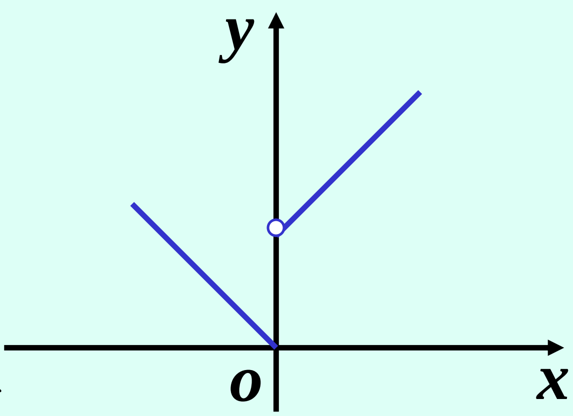
(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

如果上述三个条件中只要有一个不满足, 则称函数 $f(x)$在点 x_0处不连续(或间断), 并称点 x_0为 $f(x)$的不连续点(或间断点).

1.跳跃间断点 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左, 右极限都存在, 但 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例5 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} -x, & x \le 0, \\ 1+x, & x>0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $f(0^-)=0$, $f(0^+)=1$,



$\because f(0^-) \neq f(0^+)$,

$\therefore x=0$ 为函数的跳跃间断点.

2.可去间断点

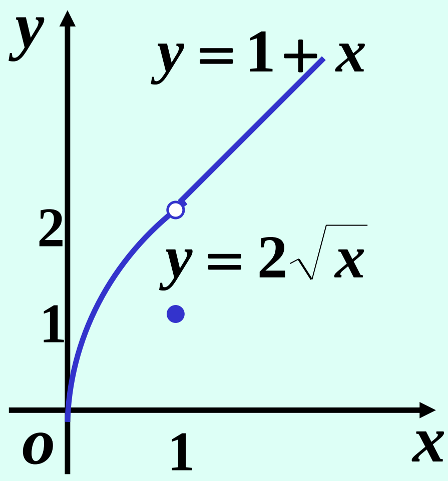
如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$，或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

例6

讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1 \\ 1 + x, & x > 1, \end{cases}$$

在 $x = 1$ 处的连续性.



解　$\because f(1)=1,$

$$f(1^{+})=2,\quad f(1^{-})=2,$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=2 \neq f(1),$$

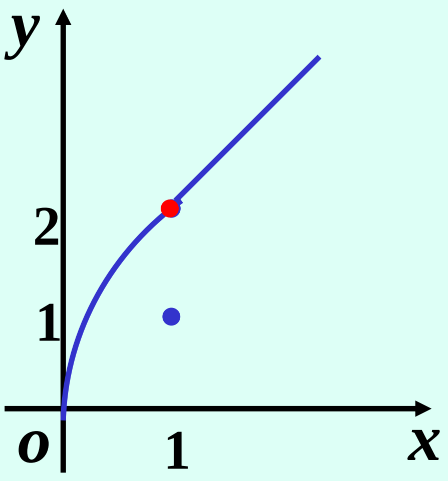
$\therefore x=0$为函数的可去间断点.

注意　可去间断点只要改变或者补充间断处函数的定义, 则可使其变为连续点.

如例6中，令 $f(1)=2$,

则 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ 1+x, & x\ge 1,\end{cases}$

在$x=1$处连续.



跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

特点 函数在点x_0处的左、右极限都存在.

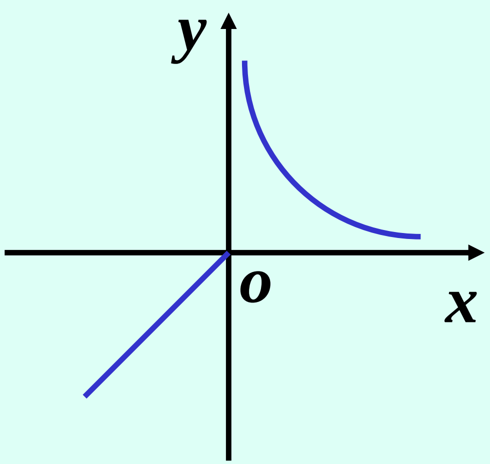
3.第二类间断点 如果 $f(x)$在点 x_0处的左、右极限至少有一个不存在，则称点 x_0为函数 $f(x)$的第二类间断点.

例7 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x>0, \\ x, & x\le 0, \end{cases}$ 在 $x=0$处的连续性.

解 $f(0^-)=0,\ f(0^+)=+\infty,$

$\therefore x=1$为函数的第二类间断点.

这种情况称为无穷间断点.

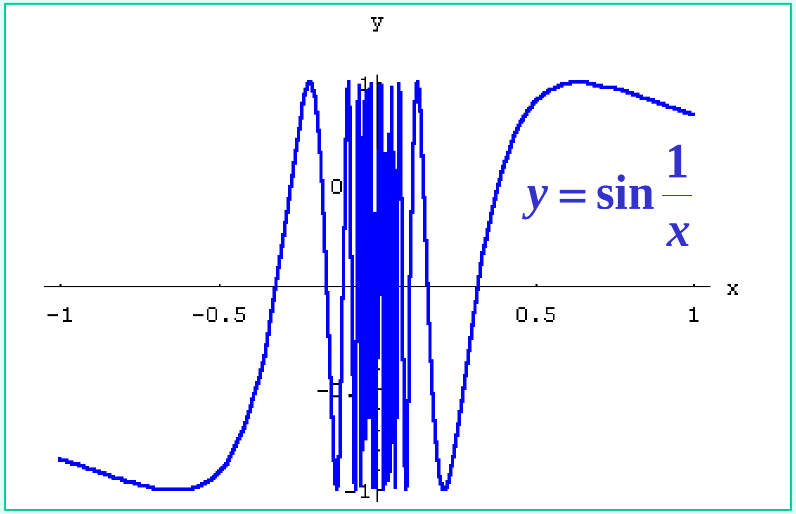


例8 讨论函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\because$ 在 $x=0$ 处没有定义,

且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

$\therefore\ x=0$ 为第二类间断点



这种情况称为的振荡间断点.

注意 不要以为函数的间断点只是个别的几个点.

★ 狄利克雷函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当}x\text{是有理数时}, \\ 0, & \text{当}x\text{是无理数时}, \end{cases}$$

在定义域R内每一点处都间断,且都是第二类间断点.

★ $$f(x) = \begin{cases} x, & \text{当}x\text{是有理数时}, \\ -x, & \text{当}x\text{是无理数时}, \end{cases}$$

仅在x=0处连续，其余各点处处间断.

例9 当a取何值时,

函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\geq 0,\end{cases}$ 在 $x=0$处连续.

解 $\because\ f(0)=a,$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a,$$

要使 $f(0^+)=f(0^-)=f(0),\quad \Rightarrow a=1,$

故当且仅当 $a=1$时，函数 $f(x)$在 $x=0$处连续.

三、小结

1.函数在一点连续必须满足的三个条件;

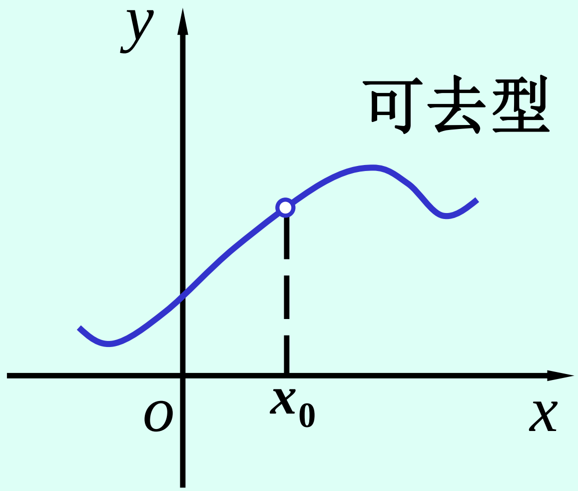
2.区间上的连续函数;

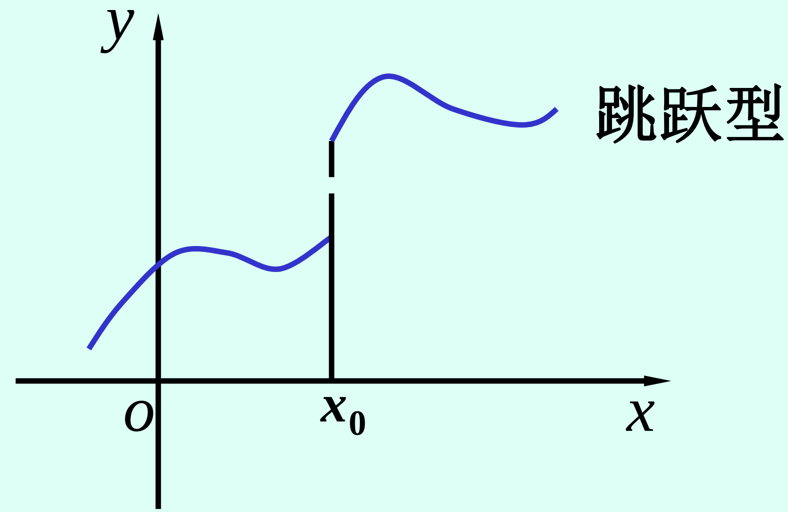
3.间断点的分类与判别;

间断点
- 第一类间断点:可去型,跳跃型.
- 第二类间断点:无穷型,振荡型.

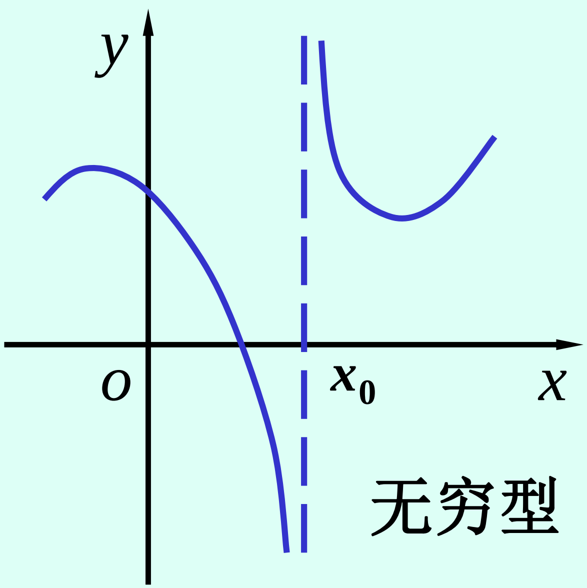
(见下图)

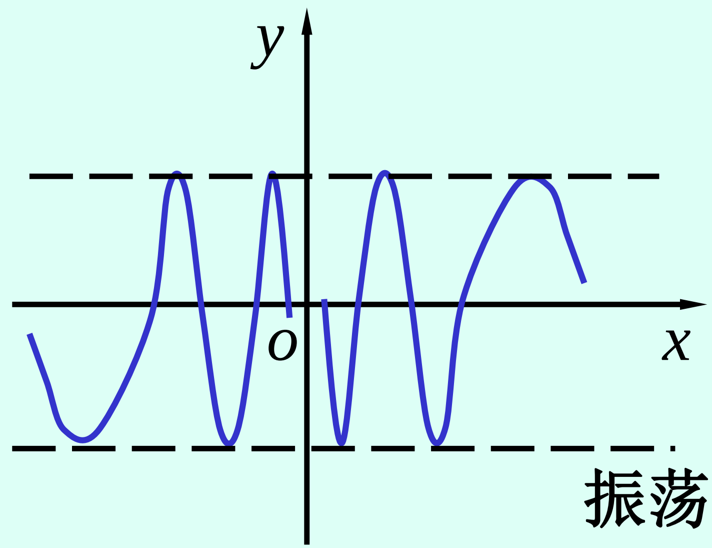
第一类间断点





第二类间断点





思考题

若 $f(x)$在x_0连续，则$|f(x)|$、$f^2(x)$在x_0是否连续？又若$|f(x)|$、$f^2(x)$在x_0连续，$f(x)$在x_0是否连续？

思考题解答

$\because f(x)$在x_0连续， $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

且 $0\le \big||f(x)|-|f(x_0)|\big|\le |f(x)-f(x_0)|$

$$\therefore \lim_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|$$

$$\lim_{x\to x_0} f^2(x)=\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]$$

故$|f(x)|$、$f^2(x)$在x_0都连续.

但反之不成立.

例 $f(x)=\begin{cases}-1, & x \geq 0 \\ 1, & x<0\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 不连续

但 $|f(x)|$、$f^2(x)$ 在 $x_0=0$ 连续