院、系领导审批并签名		A 卷

广州大学 2015-2016 学年第一学期考试卷参考解答

课 程：高等数学Ⅰ1（80 学时）　　　　考 试 形 式：闭卷考试

学 院 :____________ 专 业 班 级 :__________ 学 号 :____________ 姓名:___________

题 次	一	二	三	四	五	六	总 分	评卷人
分 数	30	32	12	10	10	6	100	
得 分								

一、填空题（每空 3 分，本大题满分 30 分）

1．函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x(x+1)(x-2)}$ 的无穷间断点为 $\underline{\quad x=2\quad}$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\underline{-\dfrac{1}{2}}$．

2．曲线 $y=(1+\dfrac{1}{x})^{x-1}$ 有水平渐近线 $\underline{\quad y=e\quad}$ 和铅直渐近线 $\underline{\quad x=-1\quad}$．

3．设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+3t+1\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$ 确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\underline{\quad\dfrac{t^2-1}{t^2+1}\quad}$；曲线 $y=y(x)$ 的拐点为 $\underline{\quad(1,\ 1)\quad}$．

4．设 $x+\cos 2x$ 为 $f(x)$ 的原函数，则 $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\underline{\quad\pi\quad}$，$f^{(2015)}(0)=\underline{\quad 2^{2016}\quad}$．

5．设 $f(x)=\int_{-1}^{x}\dfrac{t^2+t}{t^6+1}\mathrm{d}t$，则 $f(1)=\underline{\quad\dfrac{\pi}{6}\quad}$，$f'(1)=\underline{\quad 1\quad}$．

二、解答下列各题(每小题 8 分，本大题满分 32 分)

1．设 $f(x)=g(x)(\sqrt{x}-1)$，其中 $g(x)$ 在点 $x=1$ 处连续且 $g(1)=2$，求 $f'(1)$.

解：由题设知 $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=g(1)=2$，------2 分

$$\therefore\quad f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)(\sqrt{x}-1)}{x-1}\text{ ------5 分}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{\sqrt{x}+1}=1.\text{ ------8 分}$$

注：利用乘积求导公式得到答案的，给 4 分。

2．求函数 $y=\sqrt{8+x^3}$ 的导数和微分，并利用微分计算 $\sqrt{8+(2.001)^3}$ 的近似值.

解：$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{8+x^3}}\cdot(8+x^3)'=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{8+x^3}}$，------3 分

$$\mathrm{d}\,y=y'\,\mathrm{d}\,x=\frac{3x^2}{2\sqrt{8+x^3}}\mathrm{d}\,x，\text{------5 分}$$

当 $x_0=2$，$\mathrm{d}\,x=\Delta x=0.001$ 时，

$$y(x_0)=\sqrt{8+2^3}=4，\ \Delta y\approx\mathrm{d}\,y=\frac{3\cdot 2^2}{2\sqrt{8+2^3}}\cdot 0.001=0.0015，$$

$$\sqrt{8+(2.001)^3}=y(x_0+\Delta x)=y(x_0)+\Delta y\approx 4.0015.\text{------8 分}$$

3．求曲线 $x^4+x^2y-y^3=1$ 在点 $(1,\ 1)$ 处的切线方程.

解：曲线方程两边对 x 求导，得

$$4x^3+2xy+x^2\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}-3y^2\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=0，\text{------4 分}$$

将 $x=1$，$y=1$ 代入上式，得切线斜率 $k=\left.\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{x=1,\ y=1}=3$，------6 分

所以切线方程为

$$y-1=3(x-1)，\text{即 }3x-y-2=0.\text{------8 分}$$

4．求函数 $f(x)=x^4-4x^3$ 的单调区间和极值.

解：$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$，

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=0$ 和 $x_2=3$. ------3 分

当 $x<3$ 且 $x\neq 0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ 3]$ 上单调减少；

当 $x>3$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[3,\ +\infty)$ 上单调增加. ------6 分

$f(3)=-27$ 为极小值. ------8 分

三、计算下列积分（每小题 6 分，本大题满分 12 分）

1. $\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,\mathrm{d}\,x$.

解：令 $x=\sin t$（$t=\arcsin x$），则

$$原积分=\int \frac{1}{\cos^3 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}\,t=\int \sec^2 t\,\mathrm{d}\,t$$ ------3 分

$$=\tan t+C$$ ------5 分

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$$ ------6 分

2. $\int_{-\infty}^{0} xe^x\,\mathrm{d}\,x$.

解：$原式=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 xe^x\,\mathrm{d}\,x$ ------1 分

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x\,\mathrm{d}(e^x)=\lim_{a\to-\infty}\left(\left[xe^x\right]_a^0-\int_a^0 e^x\,\mathrm{d}\,x\right)$$ ------3 分

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(-ae^a-\left[e^x\right]_a^0\right)=\lim_{a\to-\infty}\left(-ae^a-1+e^a\right)$$ ------5 分

$$=-1.$$ ------6 分

四、（本题满分 10 分）

求抛物线 $y=3-x^2$ 与直线 $y=2x$ 及 y 轴在第一象限所围成的平面图形的面积 A 及该平面图形绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积 V.

解：如图（略），$y=3-x^2$ 与 $y=2x$ 在第一象限的交点为 $(1,\ 2)$，------2 分

所求面积为

$$A=\int_0^1(3-x^2-2x)\,\mathrm{d}\,x$$ ------4 分

$$=[3x-\frac{1}{3}x^3-x^2]_0^1=\frac{5}{3};$$ ------6 分

所求体积为

$$V=\pi\int_0^2\frac{1}{4}y^2\,\mathrm{d}\,y+\pi\int_2^3(3-y)\,\mathrm{d}\,y$$ ------8 分

$$=\frac{\pi}{12}[y^3]_0^2-\frac{\pi}{2}[(3-y)^2]_2^3=\frac{7}{6}\pi.$$ ------10 分

五、（本题满分 10 分）

设 $f(x)=\dfrac{x^2-(\sin x)^2}{x^4}$.

（1）计算 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$；

（2）证明：当 $x\to\infty$ 时， $f(x)$ 是关于 $\dfrac{1}{x}$ 的 2 阶无穷小.

（1）解：$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\sin 2x}{4x^3}$ ------3 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{6x}=\frac{1}{3}.$$ ------6 分

（2）证明: 按无穷小阶的定义，需证明 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\Big/(\dfrac{1}{x})^2$ 为非零常数. ------7 分

$$f(x)\Big/(\frac{1}{x})^2=\frac{x^2-(\sin x)^2}{x^2}=1-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2,$$

因 $\sin x$ 为有界函数，所以，当 $x\to\infty$ 时，无穷小 $\dfrac{1}{x}$ 与有界函数 $\sin x$ 的乘积 $\dfrac{\sin x}{x}$ 也是无穷小. 由此可知 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\Big/(\dfrac{1}{x})^2=1$. 证毕. ------10 分

六、（本题满分 6 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，在 $(0,\ 1)$ 内可导，且 $f(0)=0$， $f(1)=1$. 证明：

（1）存在 $x_0\in(0,\ 1)$，使得 $f(x_0)=1-x_0$；

（2）存在两个不同的点 $x_1,\ x_2\in(0,\ 1)$，使得 $f'(x_1)f'(x_2)=1$.

证明：（1）令 $g(x)=f(x)+x-1$，则 $g(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，

$$g(0)=f(0)+0-1=-1，\quad g(1)=f(1)+1-1=1，$$

由零点定理知，存在 $x_0\in(0,\ 1)$，使得 $g(x_0)=0$，即 $f(x_0)=1-x_0$. ------3 分

（2）由拉格朗日中值定理知，存在 $x_1\in(0,\ x_0)$ 和 $x_2\in(x_0,\ 1)$，使得

$$f'(x_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{1-x_0}{x_0},$$

$$f'(x_2)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{x_0}{1-x_0},$$

于是 $f'(x_1)f'(x_2)=1$. ------6 分