

第一章 作业 2

一. 填空题 (每空 5 分, 本大题满分 25 分)

1. 曲线 $y = \frac{x}{x+1} \cos \frac{1}{x}$ 有水平渐近线 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 和铅直渐近线 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 曲线 $y = \sqrt{x^2 + x} - x$ 有水平渐近线 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

二. 解答下列各题 (每小题 10 分, 本大题满分 60 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 2\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

2. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}$.

3. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 4$, 求 c

4. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n}$

5. 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$

6. 已知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + ax + b}{x^2 - 4} = 4$, 求常数 a, b 的值.

三. 证明题:

1. 用 $\varepsilon - \delta$ 定义证明: $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1-4x^2}{2x+1} = 2$ (5 分)

2. 证明: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x}\right] = 1$ (10 分)