第1.2.2节　函数的极限

本节内容：

一、自变量趋于有限值时函数的极限

二、自变量趋于无穷大时函数的极限

对 $y = f(x)$，　**自变量变化过程的六种形式:**

(1) $x \to x_0$

(2) $x \to x_0^{+}$

(3) $x \to x_0^{-}$

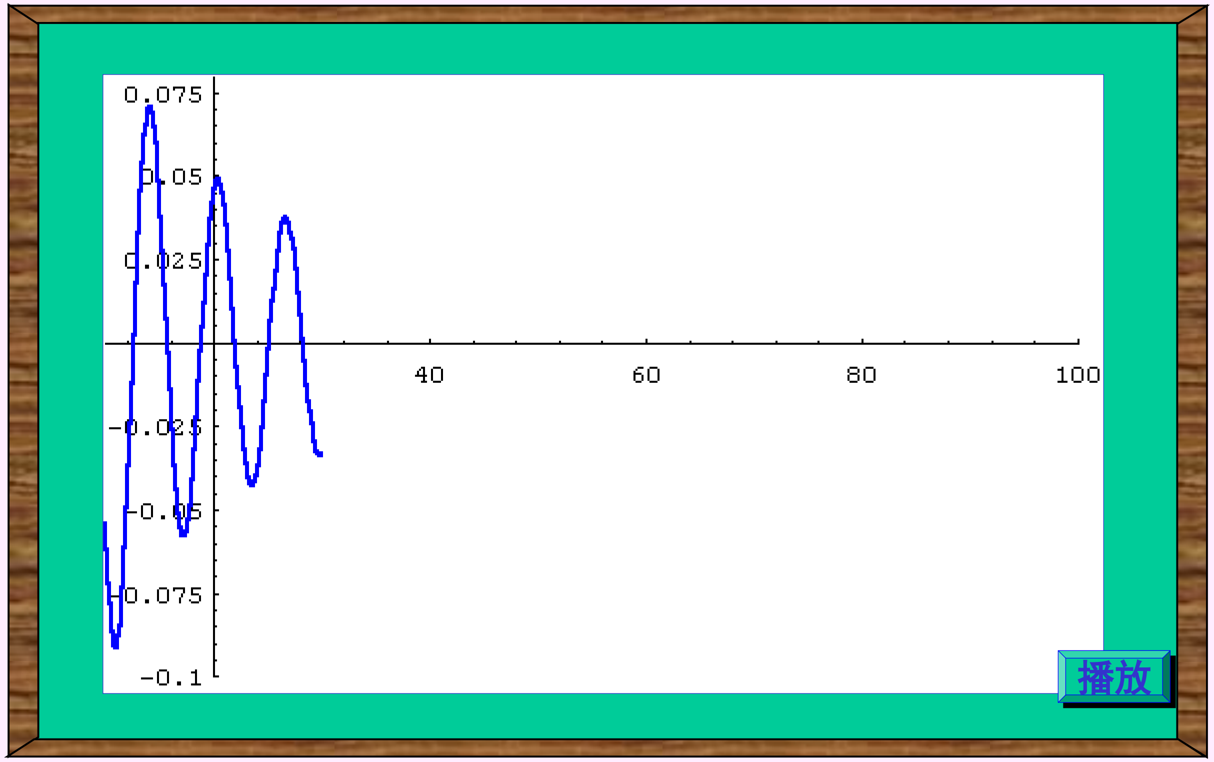
(4) $x \to \infty$

(5) $x \to +\infty$

(6) $x \to -\infty$

一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



问题: 函数 $y = f(x)$ 在 $x \to \infty$ 的过程中, 对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

通过上面演示实验的观察:

当 x 无限增大时, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

问题: 如何用精确的数学数学语言刻划函数“无限接近”.

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;

$|x| > X$ 表示 $x \to \infty$ 的过程.

定义 1 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小), 总存在着正数X, 使得对于适合不等式$|x| > X$的一切x, 所对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

那末常数A就叫函数$f(x)$当$x \to \infty$时的极限, 记作

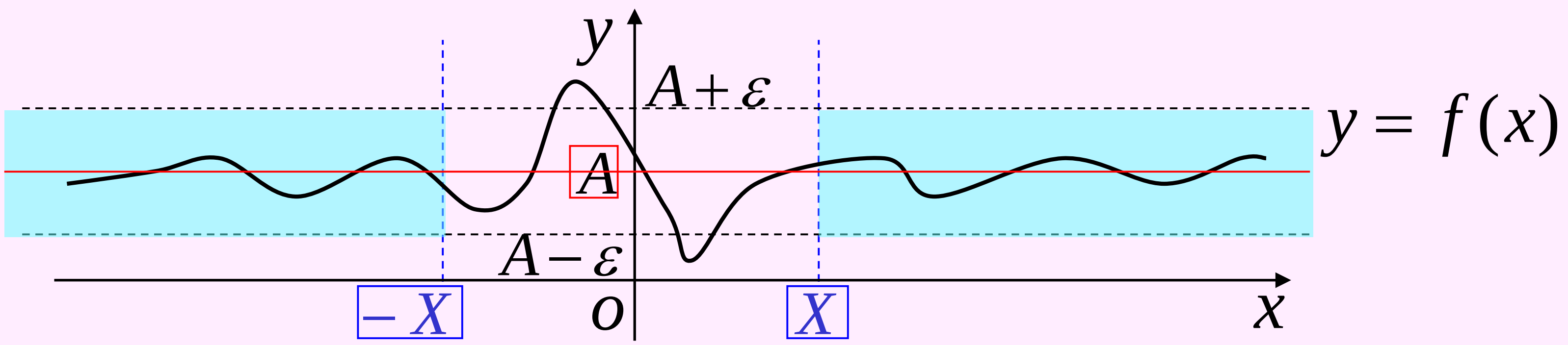
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(当x \to \infty)$$

$\boxed{"\varepsilon - X"定义}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$\forall\varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当$|x| > X$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon.$

2、几何解释:



直线 $y = A$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线

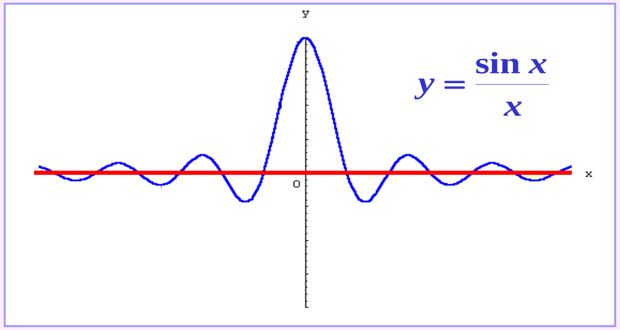
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

$x < -X$ 或 $x > X$

(双侧极限)

例1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$



证 $\because \left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|<\dfrac{1}{|x|}$

$\forall\varepsilon>0$, 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 则当 $|x|>X$时恒有

$\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\dfrac{1}{|x|}<\dfrac{1}{X}=\varepsilon$, 故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

定义: 如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$,则直线 $y=c$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的水平渐近线.

3、另两种情形 (单侧极限)

$1^0.\ x \to +\infty$ 情形： $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当$\underline{x > X}$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon.$

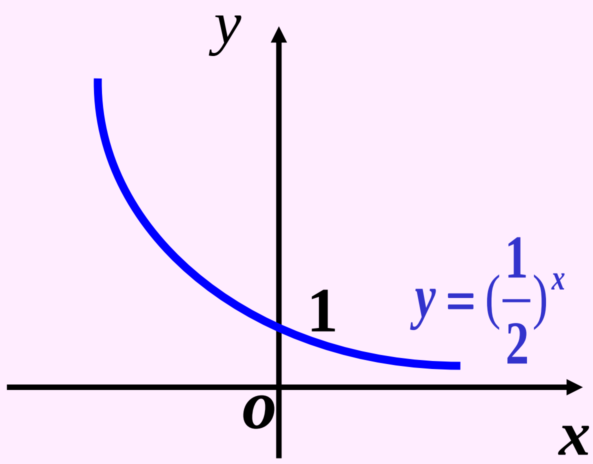
$2^0.\ x \to -\infty$ 情形： $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$

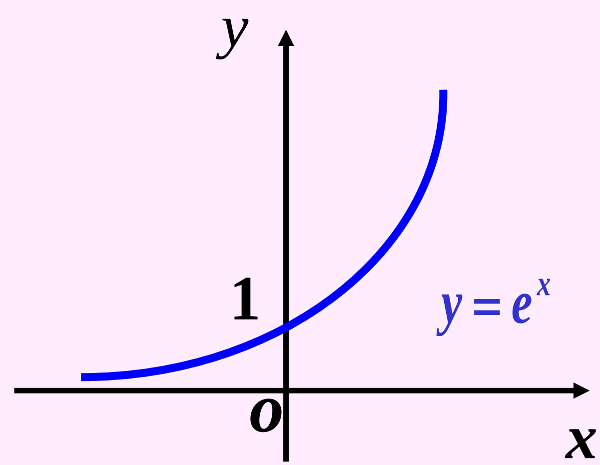
$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当$\underline{x < -X}$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon.$

4、单侧极限与双侧极限的关系

定理 : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$且$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A.$

例如,





$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{2})^x=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{2})^x=\infty$$ 不存在

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=\infty$$ 不存在

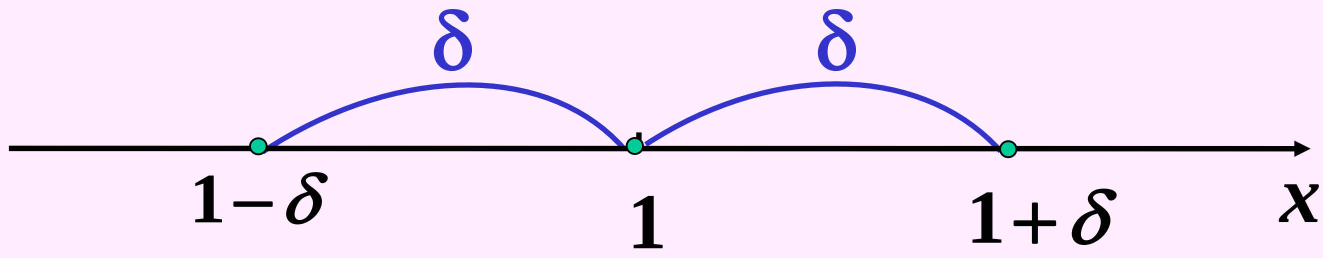
二、自变量趋向有限值时函数的极限

1. $x \to x_0$ 时函数极限的定义

例如: 函数 $y = 5x + 1$ 在 $x \to 1$ 的过程中,对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 6.

$\left| f(x) - 6 \right| < \varepsilon$ 表示 $\left| f(x) - 6 \right|$ 任意小;

$0 < \left| x - 1 \right| < \delta$ 表示 $x \to 1$ 的过程.



$x = 1$ 的去心 δ 邻域, δ 体现 x 接近 1 程度.

定义 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正数δ使得对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切x，函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$，常数A就叫函数$f(x)$ $x\to x_0$时的极限，

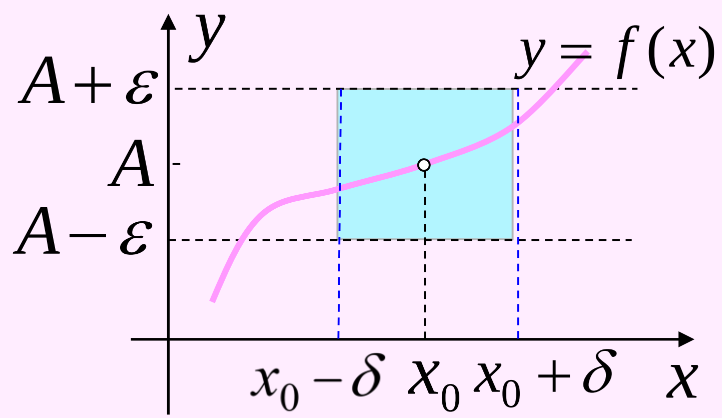
记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$(当$x\to x_0$)

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \rightleftarrows \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$x\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$

"$\varepsilon-\delta$"定义

注意： 函数极限与$f(x)$在点x_0是否有定义无关.

几何解释:



这表明:

极限存在 $\Longrightarrow$ 函数局部有界

例3 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

证 $\because \left| f(x) - A \right| = \left| x - x_0 \right|$, 任给$\varepsilon > 0$, 取$\delta = \varepsilon$,

当$0 < \left| x - x_0 \right| < \delta = \varepsilon$时,

$\left| f(x) - A \right| = \left| x - x_0 \right| < \varepsilon$成立, $\therefore \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

例4. 证明 $\lim\limits_{x \to 1} (2x - 1) = 1$

证: $\left| f(x) - A \right| = \left| (2x - 1) - 1 \right| = 2\left| x - 1 \right|$

$\forall \varepsilon > 0$, 欲使 $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$, 只要 $\left| x - 1 \right| < \varepsilon/2$,

取 $\delta = \varepsilon/2$, 则当 $0 < \left| x - 1 \right| < \delta$ 时, 必有

$\left| f(x) - A \right| = \left| (2x - 1) - 1 \right| < \varepsilon$ $\therefore \lim\limits_{x \to 1} (2x - 1) = 1$

例5 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$

证 函数在点$x=1$处没有定义.

$\because \left|f(x)-A\right|=\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|=\left|x-1\right|$ 任给$\varepsilon>0$,

要使$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$, 只要取$\delta=\varepsilon$,

当$0<\left|x-x_0\right|<\delta$时, 就有$\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$,

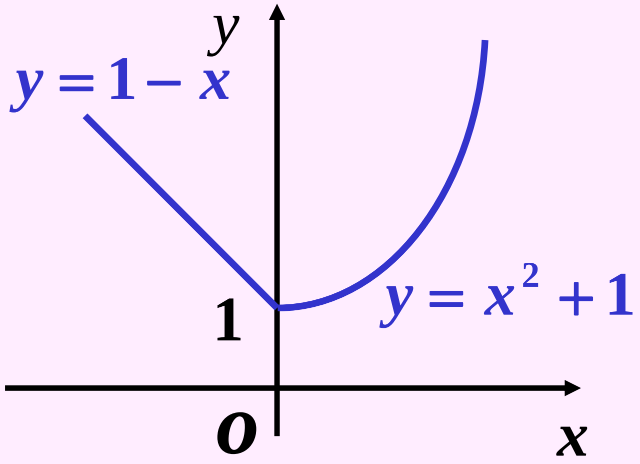
$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$

2. 单侧极限

例如,

设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$

证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1.$



分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况分别讨论

x 从左侧无限趋近 x_0，记作 $x\to x_0^-$

x 从右侧无限趋近 x_0，记作 $x\to x_0^+$

左极限 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $\underline{x_0 - \delta < x < x_0}$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

记作 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0^-) = A.$

右极限 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $\underline{x_0 < x < x_0 + \delta}$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

记作 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0^+) = A.$

注： $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$

定理 3 .

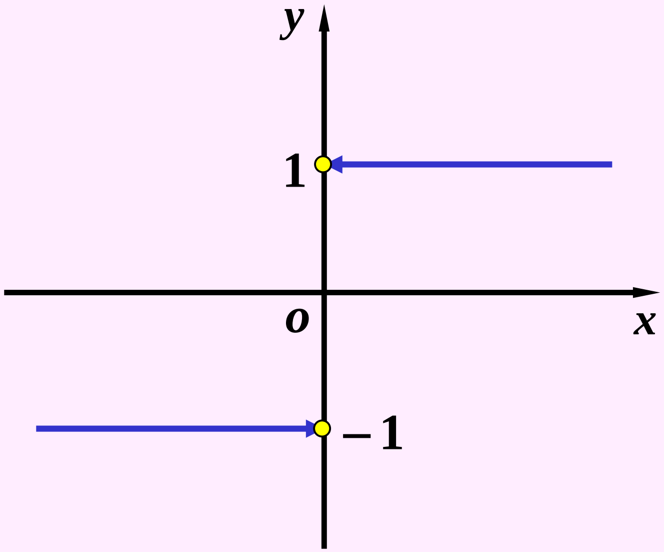
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$$

例7 验证 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在.

证 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$

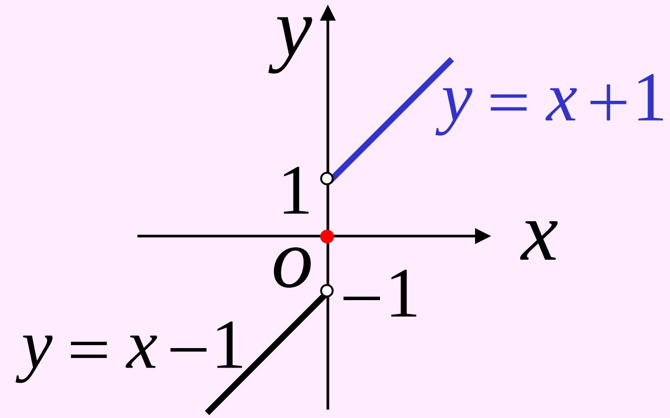


左右极限存在但不相等,

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

例8. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0\quad, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$$



讨论 $x\to 0$ 时 $f(x)$ **的极限是否存在 .**

解：利用定理 .　因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x-1) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1$$

显然 $f(0^-)\neq f(0^+)$, **所以** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **不存在 .**

三、函数极限的性质

1. 局部有界性

定理　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则∃常数 $M>0$ 和 $\delta>0$, 使当 $x\in U^0(x_0,\delta)$ 时，有 $|f(x)|\le M$.

2. 唯一性

定理　若 $\lim f(x)$ 存在,则极限唯一.

3. 局部保号性

定理3（保号性）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $A>0$(或 $A<0$), 则∃$\delta>0$, 当 $x\in U^0(x_0,\delta)$ 时, $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

4.子列收敛性(函数极限与数列极限的关系)

设在过程$x \to a$(a可以是x_0, x_0^+,或x_0^-)中有数列$x_n(\neq a)$,使得$n \to \infty$时$x_n \to a$.则称数列$\{f(x_n)\}$,即$f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), \cdots$为函数$f(x)$当$x \to a$时的子列.

若$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$,数列$f(x_n)$是$f(x)$当$x \to a$时的一个子列,则有$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

证 $\because \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当$0 < |x - x_0| < \delta$时, 恒有

$|f(x) - A| < \varepsilon.$

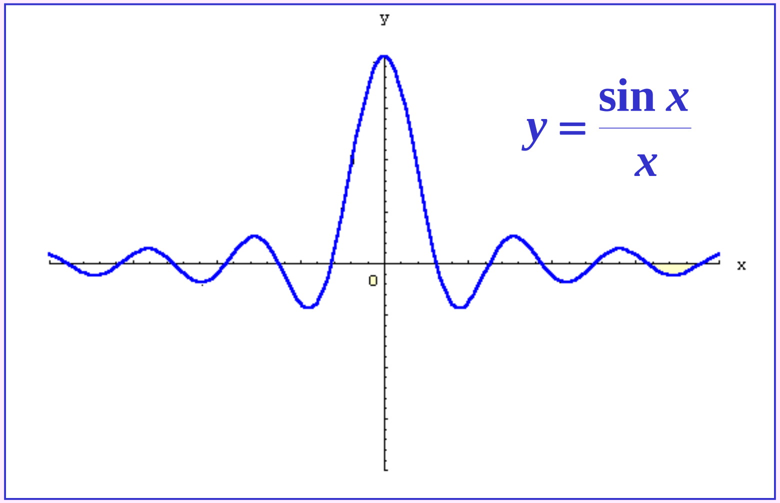
又 $\because \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0$,

$\therefore$ 对上述$\delta > 0, \exists N > 0,$ 使当$n > N$时, 恒有

$0 < |x_n - x_0| < \delta.$

从而有 $|f(x_n) - A| < \varepsilon,$ 故 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A.$

例如, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$



$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}\sin\frac{n+1}{n^2}=1$$

函数极限与数列极限的关系

函数极限存在的充要条件是它的任何子列的极限都存在, 且相等.

Heine定理，又称归并原则

★ 函数极限与子数列极限的关系

函数极限存在的充要条件是它的任何子列的极限都存在且相等. 即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \rightleftarrows \forall\{x_n\}:\ x_n\neq x_0,\ f(x_n)\text{ 有定义},$$

$x\to\infty$

$$x_n\to x_0\ (n\to\infty),\ \text{有}\ \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$$

$x_n\to\infty$

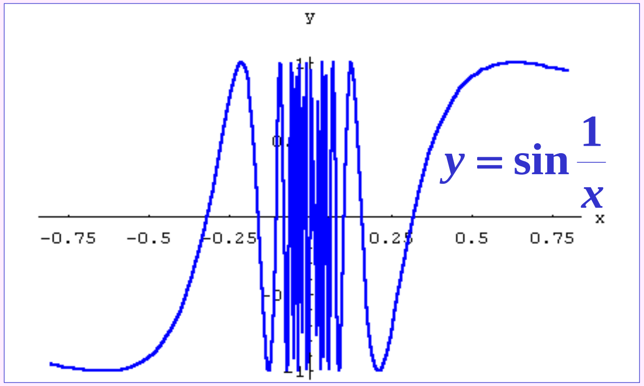
说明: 此定理常用于判断函数极限不存在 .

法1 找一个数列 $\{x_n\}:\ x_n\neq x_0$, 且 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在 .

法2 找两个趋于 x_0 的不同数列 $\{x_n\}$ 及 $\{x_n'\}$, 使

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq\lim_{n\to\infty} f(x_n')$$

例9 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.



证 取 $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n\pi}\right\}$,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0,\quad 且\ x_n\neq 0;\quad 而\ \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sin n\pi=0,$$

又取 $x_n'=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$ $\qquad\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=0,\quad 且\ x_n'\neq 0;$

$$而\ \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n'}=\lim_{n\to\infty}\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=\lim_{n\to\infty}1=1,$$

二者不相等, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

四、小结

函数极限的统一定义

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A;$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

$\lim f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$,∃时刻,从此时刻以后,

恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$. (见下表)

过　程	$n \to \infty$	$x \to \infty$	$x \to +\infty$	$x \to -\infty$
时　刻	N			
从此时刻以后	$n > N$	$\|x\| > N$	$x > N$	$x < -N$
$f(x)$	$\|f(x) - A\| < \varepsilon$			

过　程	$x \to x_0$	$x \to x_0^+$	$x \to x_0^-$
时　刻	δ		
从此时刻以后	$0 < \|x - x_0\| < \delta$	$0 < x - x_0 < \delta$	$-\delta < x - x_0 < 0$
$f(x)$	$\|f(x) - A\| < \varepsilon$		

思考题

试问函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 10, & x=0 \\ 5+x^2, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处

的左、右极限是否存在？当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的

极限是否存在？

思考题解答

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(5+x^2) = 5,$$ 左极限存在,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x} = 0,$$ 右极限存在,

$\because \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$ $\therefore \lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

思考与练习

1. 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在, 是否一定有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} a x^2, & x\le 1 \\ 2x+1, & x>1 \end{cases}$ 且 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在, 则

$a=$ __3__ .

3. 用函数极限的定义 证明:

(1) $\displaystyle \lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{1-4x^2}{2x+1} = 2$ **(2)** $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$

例6 证明：当$x_0>0$时，$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

证 $\because \left|f(x)-A\right|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\left|\dfrac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|\le\dfrac{\left|x-x_0\right|}{\sqrt{x_0}}$,

任给$\varepsilon>0$，要使$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$，只要$\left|x-x_0\right|<\sqrt{x_0}\,\varepsilon$ 且 $x\ge 0$. 而 $x\ge 0$可用$\left|x-x_0\right|\le x_0$保证.

取$\delta=\min\{x_0,\sqrt{x_0}\,\varepsilon\}$，当$0<\left|x-x_0\right|<\delta$时，

就有$\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|<\varepsilon$,

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.