



微分中值定理

- 一、几何背景
- 二、罗尔定理
- 三、拉格朗日中值定理
- 四、柯西中值定理

一、几何背景

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导.

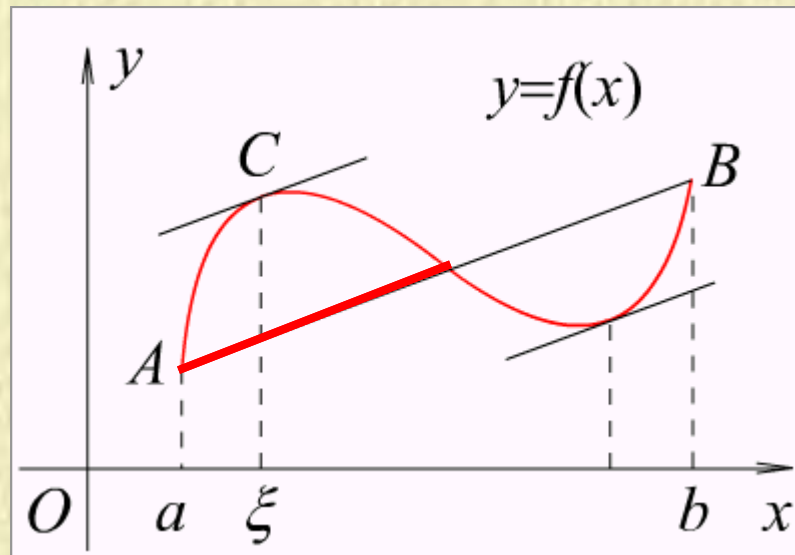
$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

拉格朗日中值公式

$$k_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad k_{CT} = f'(\xi),$$

$$k_{CT} = k_{AB}, \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

在曲线弧 AB 上至少有一点 C , 在该点处的切线平行于弦 AB .



一、几何背景

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导.

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

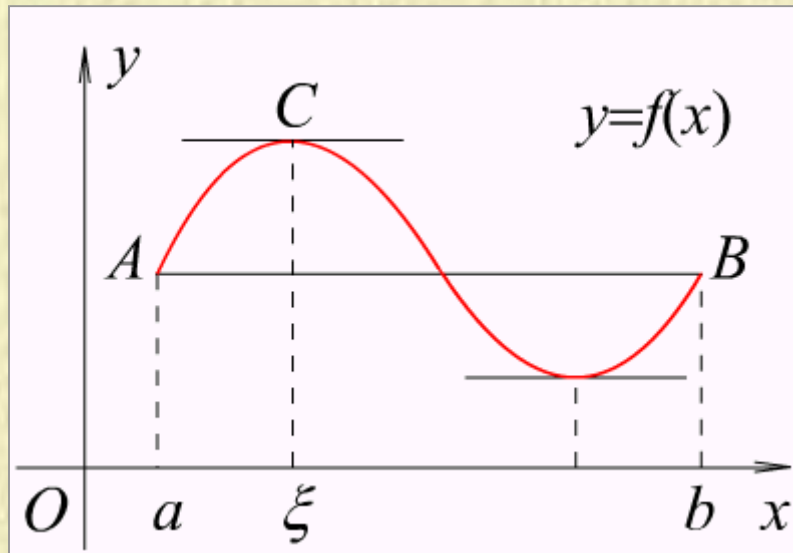
拉格朗日中值公式

在曲线弧 AB 上至少有一点 C , 在该点处的切线平行于弦 AB .

当 $f(a) = f(b)$ 时,

$$f'(\xi) = 0$$

罗尔定理



二、罗尔定理

❖ 费马(Fermat)引理

设 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的最大(小)值, 若 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f'(x_0) = 0$.

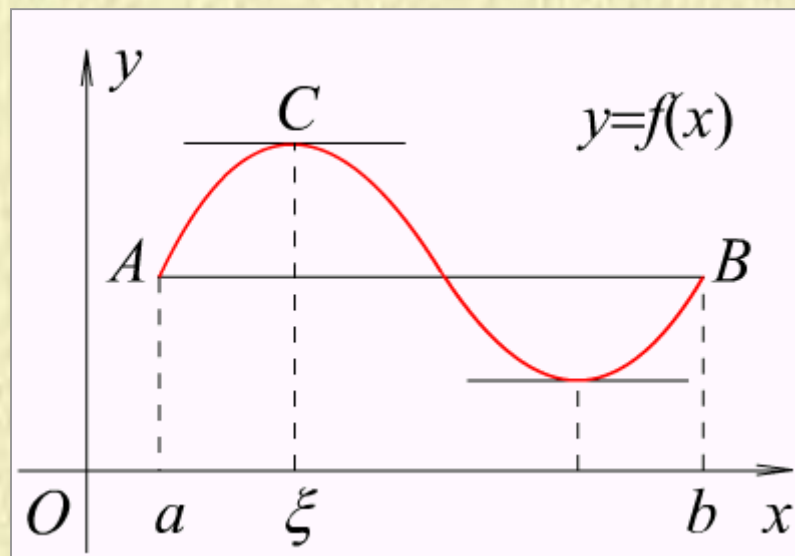
证明 设 $f(x_0)$ 为最大值.

当 $x \in (a, b)$ 时, $f(x) - f(x_0) \leq 0$.

当 $x > x_0$ 时, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$,

$$f'(x_0) = f'_+(x_0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$





二、罗尔定理

❖ 费马(Fermat)引理

设 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的最大(小)值,
若 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f'(x_0) = 0$.

证明 设 $f(x_0)$ 为最大值.

当 $x \in (a, b)$ 时, $f(x) - f(x_0) \leq 0$.

当 $x > x_0$ 时, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$,

$$f'(x_0) = f'_+(x_0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

当 $x < x_0$ 时, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$,

$$f'(x_0) = f'_-(x_0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

所以, $f'(x_0) = 0$.

$f(x_0)$ 为最小值时类似可证.



❖ 罗尔(Rolle)定理

如果函数 $y=f(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导;
- (3) $f(a) = f(b)$,

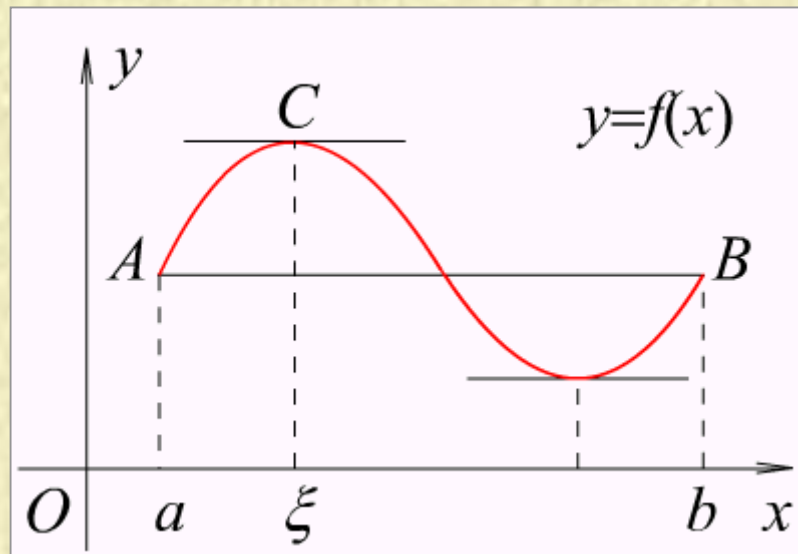
那么在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续,
必有最大值 M 和最小值 m .

(1) 若 $M = m$. 则 $f(x) = M$.

由此得 $f'(\xi) = 0, \forall \xi \in (a, b)$.

(2) 若 $M \neq m$. 则 $M \neq f(a)$,





❖ 罗尔(Rolle)定理

如果函数 $y=f(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导;
- (3) $f(a) = f(b)$,

那么在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 必有最大值 M 和最小值 m .

(1) 若 $M = m$. 则 $f(x) = M$.
由此得 $f'(\xi) = 0, \forall \xi \in (a, b)$.

(2) 若 $M \neq m$. 则 $M \neq f(a)$,

或 $m \neq f(a)$. 设 $M \neq f(a)$,
则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ ,
使 $f(\xi) = M$. 由费马引理,
 $f'(\xi) = 0$.

当 $m \neq f(a)$ 时, 类似可证.



❖ 罗尔(Rolle)定理

如果函数 $y=f(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导;
- (3) $f(a) = f(b)$,

那么在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = 0$.

应注意的问题:

如果定理的三个条件有一个不满足, 则定理的结论有可能不成立.

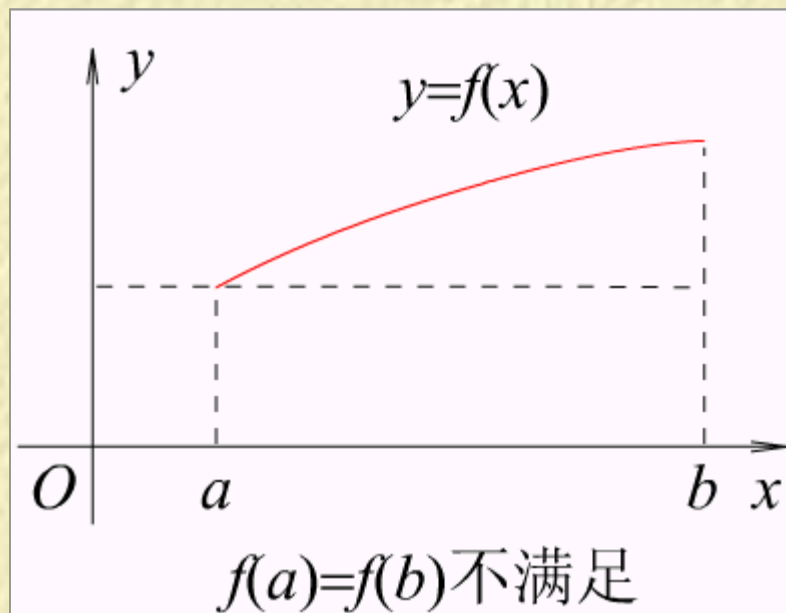


❖ 罗尔(Rolle)定理

如果函数 $y=f(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导;
- (3) $f(a) = f(b)$,

那么在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = 0$.





例1 不求导数, 判断函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ 的导数有几个实根, 以及其所在范围.

解 $f(1)=f(2)=f(3)=0$, $f(x)$ 在 $[1, 2]$, $[2, 3]$ 上满足罗尔定理的三个条件. 由罗尔定理

在 $(1, 2)$ 内至少存在一点 ξ_1 , 使 $f'(\xi_1)=0$, ξ_1 是 $f'(x)$ 的一个实根;

在 $(2, 3)$ 内至少存在一点 ξ_2 , 使 $f'(\xi_2)=0$, ξ_2 也是 $f'(x)$ 的一个实根.

$f'(x)$ 是二次多项式, 至多有两个实根.

所以 $f'(x)$ 有两个实根, 分别在区间 $(1, 2)$ 及 $(2, 3)$ 内.



用罗尔定理证明: 方程 $F'(x) = 0$ 在 (a, b) 内存在根.

例2 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 证明:
在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

分析: 结论化为 $f'(x) - 2x[f(1) - f(0)] = 0$ 有根 $\xi \in (0, 1)$.

寻找 $F(x)$ 使 $F'(x) = f'(x) - 2x[f(1) - f(0)]$

证明 设 $F(x) = f(x) - x^2[f(1) - f(0)]$,

则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且

$$F(0) = f(0) = F(1)$$

由罗尔定理, 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使

$$F'(\xi) = f'(\xi) - 2\xi[f(1) - f(0)] = 0$$

也即 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.



用罗尔定理证明: 方程 $F'(x) = 0$ 在 (a, b) 内存在根.

例3 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(1) = 0$.

证明: 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.

分析: 结论化为 $f(x) + xf'(x) = 0$ 有根 $\xi \in (0, 1)$.

寻找 $F(x)$ 使 $F'(x) = f(x) + xf'(x)$

证明 设 $F(x) = xf(x)$,

则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且

$$F(0) = 0 = F(1)$$

由罗尔定理, 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使

$$F'(\xi) = f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$$



用罗尔定理证明: 方程 $F'(x) = 0$ 在 (a, b) 内存在根.

思考题

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(1) = 0$.

证明: 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使

$$2f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0.$$

提示: 考虑方程 $2xf(x) + x^2 f'(x) = 0$.

化为方程 $[x^2 f(x)]' = 0$.

三、拉格朗日中值定理

❖ 拉格朗日(Lagrange)中值定理

如果函数 $y=f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a, b) 内可导,

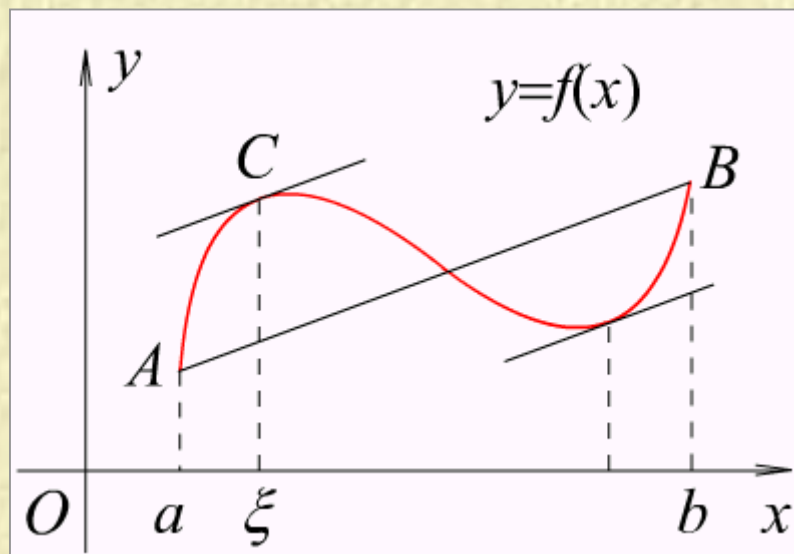
那么在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

拉格朗日中值公式

在曲线弧 AB 上至少有一点 C , 在该点处的切线平行于弦 AB .

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$





三、拉格朗日中值定理

❖ 拉格朗日(Lagrange)中值定理

如果函数 $y=f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a, b) 内可导,

那么在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

拉格朗日中值公式

证明 令 $F(x)=[f(b)-f(a)]x-f(x)(b-a)$

则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且

$$F(a)=F(b)=af(b)-bf(a)$$

由罗尔定理, 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使

$$F'(\xi)=f(b)-f(a)-f'(\xi)(b-a)=0$$

由此得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$



三、拉格朗日中值定理

❖ 拉格朗日(Lagrange)中值定理

如果函数 $y=f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a, b) 内可导,

那么在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

拉格朗日中值公式

• 有限增量公式

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x \quad (0<\theta<1),$$

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

注: $dy=f'(x)\Delta x$ 是函数增量 Δy 的近似表达式.

$f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$ 是函数增量 Δy 的精确表达式.



例4 证明当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

证明 设 $f(t)=\ln(1+t)$, 显然 $f(t)$ 在区间 $[0, x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 根据定理, 在 $(0, x)$ 内至少存在一点 ξ , 使

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0), \quad 0<\xi<x.$$

由于 $f(0)=0$, $f'(t)=\frac{1}{1+t}$, 因此上式即为

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}.$$

又由 $0<\xi<x$, 有 $\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < x$,

即 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

❖ 定理

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零,
那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

证明 在区间 I 上任取两点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 应用拉格朗日中值定理, 在 (x_1, x_2) 内至少存在一点 ξ , 使

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad (x_1 < \xi < x_2).$$

由假定, $f'(\xi) = 0$, 所以 $f(x_2) - f(x_1) = 0$, 即

$$f(x_2) = f(x_1).$$

因此 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.



例5 证明: $2 \arcsin \sqrt{x} - \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq 1.$

证明 设 $f(x) = 2 \arcsin \sqrt{x} - \arcsin(2x-1), x \in [0,1].$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \cdot 2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-(4x^2-4x+1)}} = 0, \quad (0 < x < 1) \end{aligned}$$

$\therefore f(x) \equiv C, 0 < x < 1.$ 又因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,

$\therefore f(x) \equiv C, 0 \leq x \leq 1.$ 而 $C = f(0) = \frac{\pi}{2},$

因此 $2 \arcsin \sqrt{x} - \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq 1.$

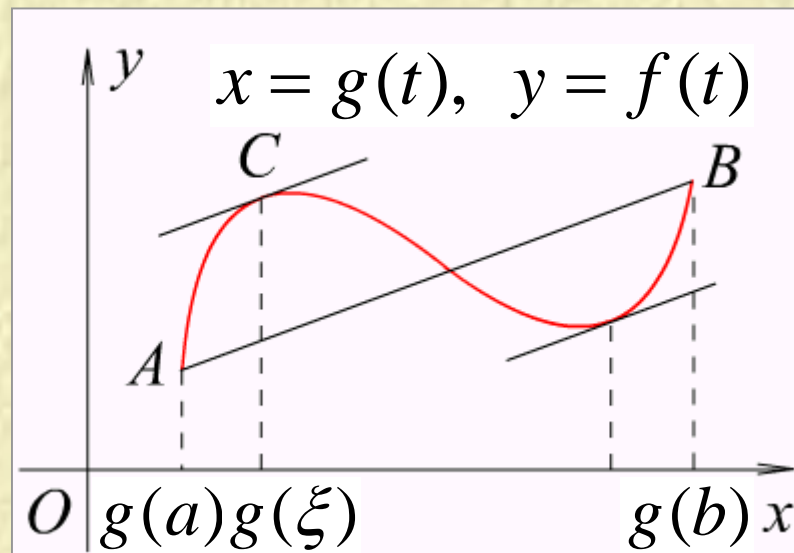
四、柯西中值定理

弦 AB 的斜率为 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$,

点 $C(t = \xi)$ 处的切线的斜率为 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\xi} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

在曲线弧 AB 上至少有一点 C , 在该点处的切线平行于弦 AB .





❖柯西(Cauchy)中值定理

如果函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a, b) 内可导;

(3) $g'(x)$ 在 (a, b) 内恒不为零,

那么在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

柯西中值公式

如果取 $g(x) = x$, 则柯西中值公式就变成了拉格朗日中值公式.



例6 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 证明:
在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

分析: 结论可变形为 $\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi} = \frac{f'(x)}{(x^2)'} \Big|_{x=\xi}$.

证明 设 $g(x) = x^2$,

则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上满足柯西中值定理的条件,
所以在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使

$$\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \text{即} \quad \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi},$$

也即 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

证法2: 见例2.



作业3.1