作业 3.2 解答

一．求下列函数的单调区间和极值：

（1）$y=(x-1)(x+1)^3$；

解：$y'=(x+1)^3+3(x-1)(x+1)^2=(x+1)^2(4x-2)$，

令 $y'=0$，得驻点 $x_1=-1$ 和 $x_2=\dfrac{1}{2}$.

当 $x<\dfrac{1}{2}$ 且 $x\neq -1$ 时，$y'<0$，所以 $(-\infty,\ \dfrac{1}{2}]$ 为单调减少区间；当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$y'>0$，所以 $[\dfrac{1}{2},\ +\infty)$ 为单调增加区间；$y(\dfrac{1}{2})=-\dfrac{27}{16}$ 为极小值.

（2）求函数 $f(x)=e^x\cos x$ 的极值.

解：$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x$，

$f''(x)=e^x\cos x-e^x\sin x-(e^x\sin x+e^x\cos x)=-2e^x\sin x$，

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

因 $f''(2k\pi+\dfrac{\pi}{4})=-\sqrt{2}e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}<0$，所以 $f(2k\pi+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}$ 为极大值；

因 $f''(2k\pi+\dfrac{5\pi}{4})=\sqrt{2}e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}>0$，所以 $f(2k\pi+\dfrac{5\pi}{4})=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}$ 为极小值.

二．试问 a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值？它是极大值还是极小值？并求此极值.

解：$f'(x)=a\cos x+\cos 3x$，$f''(x)=-a\sin x-3\sin 3x$，由于 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值，所以

$$f'(\frac{\pi}{3})=\frac{a}{2}-1=0\Rightarrow a=2.$$

因 $f''(\dfrac{\pi}{3})=-\sqrt{3}<0$，所以 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极大值，其值为 $f(\dfrac{\pi}{3})=\sqrt{3}$.

三．求函数 $y=x^4-8x^2+2$ 在闭区间 $[-1,\ 3]$ 上的最大值和最小值.

解：$y'=4x^3-16x$，函数 y 在闭区间 $[-1,\ 3]$ 上的驻点为 $x_1=0$ 和 $x_2=2$. 函数 y 在闭区间 $[-1,\ 3]$ 上的可能最值为

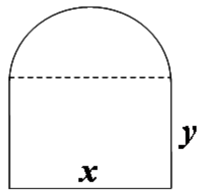
$$y(-1)=-5,\quad y(0)=2,\quad y(2)=-14,\quad y(3)=11,$$

比较它们的大小，可知所求最大值为 $y(3)=11$，最小值为 $y(2)=-14$.

四．某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆（图 3-1）．截面的面积为 $5\ \mathrm{m}^2$．问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小，从而使建造时所用的材料最省？

解：截面的面积为

$$xy+\frac{\pi x^2}{8}=5,$$



截面的周长为

$L = x + 2y + \frac{\pi x}{2} = \frac{4+\pi}{4}x + \frac{10}{x}$，（$0 < x < \sqrt{\frac{40}{\pi}}$）.

我们有

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = \frac{4+\pi}{4} - \frac{10}{x^2},$$

令 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = 0$，得唯一驻点 $x = \sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$. 所以，当底宽为 $\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$ m 时截面的周长最小，从而建造时所用的材料最省.

五．求 $\frac{1}{1+x^2}$ 带有佩亚诺型余项的 8 阶麦克劳林公式，并计算 $(\arctan x)^{(9)}|_{x=0}$.

解：由麦克劳林公式 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$，得

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + o(x^8),$$

由系数公式 $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$，得

$$(\arctan x)^{(9)}|_{x=0} = (\frac{1}{1+x^2})^{(8)}|_{x=0} = 8!a_8 = 8!.$$

六．设 $f(x) = \ln(1+x^2) - x^2$，求 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^4}$ 及 $f^{(10)}(0)$.

解：由麦克劳林公式 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$，得

$$f(x) = \ln(1+x^2) - x^2 = -\frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^{10}}{5} + o(x^{10}),$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{2}, \quad f^{(10)}(0) = 10!a_{10} = \frac{10!}{5}.$$

七．证明：当 $x > 0$ 时，$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.

证明：我们知道麦克劳林公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$，其中 θ 介于 0 与 1 之间.

当 $x > 0$ 时，$\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} > 0$，所以

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

八．利用泰勒公式求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^2[x+\ln(1-x)]}$；

解：$e^{x^2}+2\cos x-3=1+x^2+\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)+2[1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)]-3=\dfrac{7x^4}{12}+o(x^4)$，

$x+\ln(1-x)=x+(-x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2))=-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^2[x+\ln(1-x)]}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{7x^4}{12}+o(x^4)}{x^2[-\dfrac{x}{2}+o(x^2)]}=-\frac{7}{6}.$$

（2）$\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$.

解：令$t=\dfrac{1}{x}$，则$\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3}=\dfrac{1}{t}(\sqrt[3]{1+3t}-\sqrt[4]{1-2t})$，由

$$\sqrt[3]{1+3t}=1+\frac{1}{3}(3t)+o(t)=1+t+o(t),$$

$$\sqrt[4]{1-2t}=1+\frac{1}{4}(-2t)+o(t)=1-\frac{1}{2}t+o(t),$$

得$\sqrt[3]{1+3t}-\sqrt[4]{1-2t}=\dfrac{3}{2}t+o(t)$，所以

$$原式=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\sqrt[3]{1+3t}-\sqrt[4]{1-2t})=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\frac{3}{2}t+o(t))=\frac{3}{2}.$$

九. 试确定常数a和b，使$f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$为当$x\to 0$时关于x的5阶无穷小.

解：$f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x=x-a\sin x-\dfrac{b}{2}\sin 2x$

$$=x-a[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)]-\frac{b}{2}[2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+o(x^5)]$$

$$=(1-a-b)x+(a+4b)\frac{x^3}{3!}-(a+16b)\frac{x^5}{5!}+o(x^5),$$

依题意，$1-a-b=0,\ a+4b=0,\ a+16b\neq 0$，求得$a=\dfrac{4}{3}$，$b=-\dfrac{1}{3}$.