第五章

第三节 定积分的换元法和分部积分法

不定积分

$$\left\{\begin{array}{l}\text{换元积分法}\\ \text{分部积分法}\end{array}\right. \longrightarrow \text{定积分}\left\{\begin{array}{l}\text{换元积分法}\\ \text{分部积分法}\end{array}\right.$$

一、定积分的换元法

二、定积分的分部积分法

一、定积分的换元法

定理1. 设函数 $f(x)\in C[a,b]$, 单值函数 $x=\varphi(t)$ 满足:

1) $\varphi(t)\in C^1[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$;

2) 在$[\alpha,\beta]$上 $a\le\varphi(t)\le b$,

则
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

证: 所证等式两边被积函数都连续, 因此积分都存在, 且它们的原函数也存在. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的原函数, 因此有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]$$
$$=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

说明:

1) 当$\beta < \alpha$，即区间换为$[\beta,\alpha]$时， 定理 1 仍成立 .

2) 必需注意**换元必换限**，原函数中的变量不必代回 .

3) 换元公式也可反过来使用，即

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad (\text{令 } x = \varphi(t))$$

或配元 $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\underline{\varphi'(t)\,\mathrm{d}t} = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\mathrm{d}\varphi(t)$

配元不换限

例1. 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a > 0).$

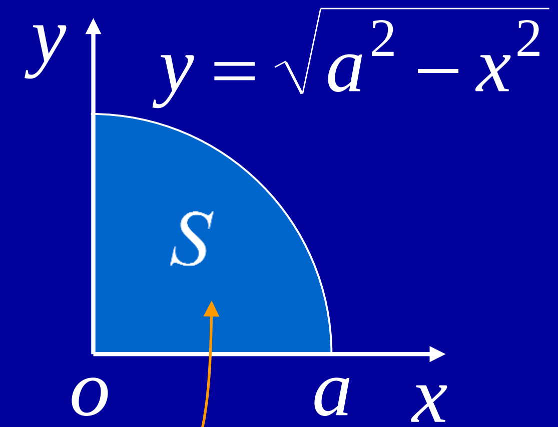
解: 令 $x = a\sin t$, 则 $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$, 且

当 $x = 0$ 时, $t = 0$; $\quad x = a$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\therefore \quad \text{原式} = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$



例2. 计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\sqrt{2x+1}$,则 $x=\frac{t^2-1}{2}$, $\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$, 且

当 $x=0$ 时, $t=1$; $x=4$ 时, $t=3$.

$$\therefore \quad 原式 = \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}\,t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+3)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3+3t\right)\Big|_1^3=\frac{22}{3}$$

例3. 设 $f(x)\in C[-a,a]$,

$\boxed{\text{偶倍奇零}}$

(1) 若 $f(-x)=f(x)$, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

(2) 若 $f(-x)=-f(x)$, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

证: $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x} + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

$\boxed{\text{令 } x=-t}$

$$= \int_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{a} [\,f(-x)+f(x)\,]\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x, & f(-x)=f(x)\text{时} \\ 0, & f(-x)=-f(x)\text{时} \end{cases}$$

二、定积分的分部积分法

定理2. 设$u(x), v(x) \in C^1[a, b]$, 则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

证: $\because\ [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$\Big\downarrow \text{两端在}[a,b]\text{上积分}$$

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore\ \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

例4. 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \,\mathrm{d}x$.

解: 原式 $= x\arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{\frac{-1}{2}}\,\mathrm{d}\,(1-x^2)$$

$$= \frac{\pi}{12} + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

例5. 证明 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

证: 令 $t = \frac{\pi}{2} - x$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n\left(\tfrac{\pi}{2} - t\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$$

令 $u = \sin^{n-1} x$, $v' = \sin x$, 则 $u' = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x$,

$v = -\cos x$

$$\therefore\quad I_n = \underbrace{\left[-\cos x\cdot\sin^{n-1} x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=\,0} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1-\sin^2 x) \, dx$$

$$= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\boxed{I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx}$$

由此得递推公式 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

于是

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1$$

而 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$

故所证结论成立 .

内容小结

基本积分法 $\begin{cases} \text{换元积分法} \\ \text{分部积分法} \end{cases}$

换元必换限
配元不换限
边积边代限

思考与练习

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,\mathrm{d}t = \underline{\ \sin^{100}x\ }$

提示: 令 $u = x - t$, 则

$$\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^0 \sin^{100}u\,\mathrm{d}u$$

2. 设 $f(t)\in C_1$, $f(1)=0$, $\int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t=\ln x$, 求 $f(e)$.

解法1 $\ln x=\int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x^3)-f(1)=f(x^3)$

令 $u=x^3$, 得 $f(u)=\ln\sqrt[3]{u}=\frac{1}{3}\ln u\Longrightarrow f(e)=\frac{1}{3}$

解法2 对已知等式两边求导,

得 $3x^2 f'(x^3)=\frac{1}{x}$

令 $u=x^3$, 得 $f'(u)=\frac{1}{3u}$

$\therefore\quad f(e)=\int_1^e f'(u)\,\mathrm{d}u+f(1)$

$=\frac{1}{3}\int_1^e \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}$

思考: 若改题为

$$\int_1^{x^3} f'(\sqrt[3]{t})\,\mathrm{d}t=\ln x$$

$$f(e)=?$$

提示: 两边求导, 得

$$f'(x)=\frac{1}{3x^3}$$

$$f(e)=\int_1^e f'(x)\,\mathrm{d}x$$

3. 设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$, 求 $\int_0^1 x f''(2x)\,\mathrm{d}x$.

解: $\int_0^1 x \underline{f''(2x)\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}f'(2x)$ **(分部积分)**

$$= \frac{1}{2}\left[\, x f'(2x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(2x)\,\mathrm{d}x \,\right]$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{4} f(2x)\Big|_0^1$$

$$= 2$$

备用题

1. 证明 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,\mathrm{d}x$ 是以π为周期的函数.

证： $f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u$

令 $u=t+\pi$

$$=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(t+\pi)|\,\mathrm{d}\,t$$

$$=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}\,t=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,\mathrm{d}x$$

$$=f(x)$$

$\therefore f(x)$ 是以π为周期的周期函数.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，试证 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x$

解： 右端 $=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}f'(x)$ 　　$\boxed{\text{分部积分积分}}$

$$=\frac{1}{2}\left[(x-a)(x-b)f'(x)\right]\Big|_a^b$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)(2x-a-b)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int_a^b (2x-a-b)\,\mathrm{d}f(x)$$ 　　$\boxed{\text{再次分部积分}}$

$$=-\frac{1}{2}\left[(2x-a-b)f(x)\right]\Big|_a^b+\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\text{左端}$$