几种特殊类型函数的积分

一、有理函数的积分

有理函数的定义：

两个多项式的商表示的函数称之.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

其中m、n都是非负整数；$a_0,a_1,\cdots,a_n$及$b_0,b_1,\cdots,b_m$都是实数，并且$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

有理函数 $\xrightarrow[\text{相除}]{}$ 多项式 + 真分式

真分式 $\xrightarrow{\text{分解}}$ 若干部分分式之和

例 $\dfrac{x^3+x+1}{x^2+1}=\underbrace{\boxed{x}}_{\text{多项式}}+\dfrac{1}{x^2+1}$ 真分式

多项式的积分容易计算. 只讨论:

真分式的积分.

对一般有理真分式的积分,代数学中下述定理起着关键性的作用.

定理 任何有理真分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 均可表为有限个部分分式的和. 如果分母多项式 $Q(x)$ 在实数域上的质因式分解式为:

$$Q(x)=b_0(x-a)^{\lambda}\cdots(x^2+px+q)^{\mu}\cdots,(p^2-4q<0)$$

λ,μ 为正整数, 则 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 可唯一的分解为:

$$Q(x)=b_0(x-a)^{\lambda}\cdots(x^2+px+q)^{\mu}\cdots,(p^2-4q<0)$$

λ个常数待定

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^{\lambda}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{A_{\lambda}}{(x-a)^{1}}+\cdots$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu}}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{\mu-1}}+\cdots$$

$$+\frac{M_{\mu}x+N_{\mu}}{x^2+px+q}+\cdots$$

2μ个常数待定

其中诸A_i, M_i, N_i都是常数,可由待定系数法确定,

式中每个分式叫做$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$的**部分分式(最简分式)**.

有理函数化为部分分式之和的一般规律：

（1）分母中若有因式 $(x-a)^k$，则分解后为

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a},$$

其中$A_1, A_2, \cdots, A_k$都是常数.

特殊地：$k=1$, 分解后为$\dfrac{A}{x-a}$;

注 关于部分分式分解

如对 $\dfrac{1}{(x-a)^k}$ 进行分解时

$$\frac{1}{(x-a)^k}=\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a},$$

一项也不能少，因为通分后分子上是 x的$(k-1)$次多项式，可得到k个方程，定出k个系数，否则将会得到矛盾的结果。

例如 $$\frac{1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$$

$$\Rightarrow Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ A+B=0 \\ B=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}$$

但若 $\dfrac{1}{x^2(x+1)}=\dfrac{A}{x^2}+\dfrac{B}{x+1}$

$$\Rightarrow A(x+1)+Bx^2=1$$

$\Rightarrow A=0, A=1$ 矛盾

（2）分母中若有因式 $(x^2+px+q)^k$，其中

$p^2-4q<0$ 则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

其中M_i,N_i都是常数$(i=1,2,\cdots,k)$.

特殊地：$k=1$，分解后为 $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

用此定理有理函数的积分就易计算了.

且有:

有理函数的积分是初等函数.

注 系数的确定,一般有三种方法:

(1) 等式两边同次幂系数相等;

(2) 赋值;

(3) 求导与赋值结合使用.

例 求 $\int \boxed{\frac{x^3+x+1}{x^2+1}} \mathrm{d}x$ 假分式

解 由多项式除法,有

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+1} = x + \frac{1}{x^2+1}$$

$$\text{原式} = \int x\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} + \arctan x + C$$

说明:当被积函数是假分式时,应把它分为一个多项式和一个真分式,分别积分.

例 求 $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$

解 $\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$

因式分解

$$x+3=A(x-3)+B(x-2)$$

$$x+3=(A+B)x-(3A+2B)$$

比较系数

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=1,\\-(3A+2B)=3,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-5\\B=6\end{cases}$$

$$\therefore\quad \frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}$$

$$\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$$

$$=\int\left[\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}\right]\mathrm{d}x$$

$$=-5\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x+6\int\frac{1}{x-3}\mathrm{d}x$$

$$=-5\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C$$

例 求$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x$

解 $\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$

$1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)$ (1) 赋值

代入特殊值来确定系数 A,B,C

取 $x=0,\Rightarrow A=1$ 取 $x=1,\Rightarrow B=1$

取 $x=2$, 并将 A,B 值代入 (1) $\Rightarrow C=-1$

$$\therefore \frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}$$

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}$$

$$\int\frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x$$

于是 $\displaystyle\int\frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x$

$$=\int\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{x-1}-\ln|x-1|+C$$

例 求 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x.$

解 $\frac{1}{(1+2x)\boxed{(1+x^2)}} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$

二次质因式

$$1 = A(1+x^2) + (Bx+C)(1+2x)$$

$$1 = (A+2B)x^2 + (B+2C)x + C + A$$

比较系数

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \Rightarrow A=\frac{4}{5}, B=-\frac{2}{5}, C=\frac{1}{5}$$

$$\therefore \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}$$

$$\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{4}{5}}{1+2x}\mathrm{d}x + \int \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln|1+x^2| + \frac{1}{5}\arctan x + C$$

注 任意有理真分式的不定积分都归纳为下列*四种典型部分分式的积分*之和.

$$(1)\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x; \qquad (2)\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x;$$

$$(3)\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x; \qquad (4)\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x.$$

其中$A,B,\ a,p,q$都为常数,n为大于1的正整数.

并设 $p^2-4q<0.$

分别讨论上述几种类型的不定积分.

$$(1)\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\int \frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a}$$

$$= A\ln|x-a| + C$$

$$(2)\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = A\int \frac{\mathrm{d}(x-a)}{(x-a)^n}$$

$$= A\cdot\frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n} + C$$

$$(x^2+px+q)'=2x+p$$

$$(3)\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\int\frac{Ax+\frac{A}{2}p-\frac{A}{2}p+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{Ax+\frac{A}{2}p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x+(B-\frac{A}{2}p)\int\frac{1}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{\boxed{2x+p}}{x^2+px+q}\mathrm{d}x+(B-\frac{A}{2}p)\int\frac{1}{\boxed{x^2+px+q}}\mathrm{d}x$$

$$x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+(B-\frac{A}{2}p)\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+\boxed{(q-\frac{p^2}{4})}}$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+(B-\frac{A}{2}p)\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{(B-\frac{A}{2}p)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$$

有理函数积分是三角函数有理式积分、无理函数积分的基础，应重点提高计算的熟练程度和技巧，一般有以下方法：

(1) 部分分式法；此法一般运算较繁.

(2) 拆项法； (分项积分法)

(3) 换元法；

(4) 配方法.

例 求 $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$

分析 从理论上看,可用部分分式法,但计算复杂,故不宜轻易使用,应尽量考虑其它方法.

解 原式 $=\int \frac{x^2+2x+2-2x-2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$ 分项

$$=\int \frac{x^2+2x+2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x-\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$$

约去公因子 配方 凑微分

$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1^2}-\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$=\arctan(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}+C$$

- **分母是二次质因式的真分式的不定积分**

例 求$\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}dx$.

解 $$\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}dx = \int (\frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+3} - 3\frac{1}{x^2+2x+3})dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx - 3\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} - 3\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) - \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

提示：

$$\frac{x-2}{x^2+2x+3} = \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x-2}{x^2+2x+3} - 3\cdot\frac{1}{x^2+2x+3}.$$

二、简单无理函数的积分

讨论类型 $R(x,\sqrt[n]{ax+b})$, $R(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+e}})$,

解决方法 作代换去掉根号.

例10 求积分 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$

解

令 $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=t \Rightarrow \dfrac{1+x}{x}=t^2$,

$$x=\frac{1}{t^2-1},\qquad dx=-\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2},$$

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=-\int\left(t^2-1\right)t\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt=-2\int\frac{t^2dt}{t^2-1}$$

$$=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=-2t-\ln\frac{t-1}{t+1}+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left[x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right]+C.$$

例11 求积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx.$

解 令 $t^6 = x+1 \Rightarrow 6t^5dt = dx,$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx = \int \frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5dt$$

$$= 6\int \frac{t^3}{t+1}dt = 2t^3 - 3t^2 + 6t + 6\ln|t+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\sqrt[6]{x+1} + 6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1) + C.$$

说明 无理函数去根号时, 取根指数的最小公倍数.

练习 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x$

1993年考研数学一, 5分

解 令 $\sqrt{e^x-1}=t$, $e^x=t^2+1$, $x=\ln(t^2+1)$,

$$\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$\text{原式}=\int\frac{(t^2+1)\ln(t^2+1)}{t}\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$=2\int \underbrace{\ln(t^2+1)}_{u}\mathrm{d}\underbrace{t}_{v}$$

分部积分

$$=2t\ln(t^2+1)-2\int t\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=2t\ln(t^2+1)-4t+4\arctan t+C$$

回代

$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$$