作业 3.3 解答

一. 证明下列不等式：(20 分)

(1) 当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$\sin x+\tan x>2x$；

证明：令 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$，则

$$f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2,$$

$$f''(x)=-\sin x+2\sec^2 x\tan x=(2\sec^2 x-\cos x)\tan x,$$

当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$\tan x>0$，$\sec x>1>\cos x$，可知 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)>f'(0)=0$，从而

$$f(x)>f(0)=0\text{，即}\sin x+\tan x>2x.$$

(2) 当$x>4$时，$2^x>x^2$.

证明：我们要注意的是

$$2^x>x^2\Leftrightarrow x\ln 2>2\ln x\Leftrightarrow x\ln 2-2\ln x>0.$$

令 $f(x)=x\ln 2-2\ln x$，则

$$f'(x)=\ln 2-\frac{2}{x}=\frac{1}{2}\ln 4-\frac{2}{x}>\frac{1}{2}-\frac{2}{x},$$

当$x>4$时，$f'(x)>0$，因此 $f(x)>f(4)=0$，即 $x\ln 2-2\ln x>0$，亦即 $2^x>x^2$.

二. 求下列函数图形的凹凸区间和拐点：(20 分)

(1) $y=xe^{-x}$；

解：$y'=e^{-x}-xe^{-x}$，

$y''=-e^{-x}-(e^{-x}-xe^{-x})=(x-2)e^{-x}$，

令 $y''=0$，得 $x=2$.

当$x<2$时，$y''<0$，所以$(-\infty,\ 2]$为凸区间；当$x>2$时，$y''>0$，所以$[2,\ +\infty)$为凹区间；拐点为$(2,\ \dfrac{2}{e^2})$.

(2) $y=x^4(12\ln x-7)$；

解：$y'=4x^3(12\ln x-7)+x^4\cdot\dfrac{12}{x}=48x^3\ln x-16x^3$，

$y''=144x^2\ln x+48x^3\cdot\dfrac{1}{x}-48x^2=144x^2\ln x$，

令 $y''=0$，得 $x=1$.

当$0<x<1$时，$y''<0$，所以$(0,\ 1]$为凸区间；当$x>1$时，$y''>0$，所以$[1,\ +\infty)$为凹区间；拐点为$(1,\ -7)$.

三. 问 $a,\ b$ 为何值时，点$(1,\ 3)$为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？(10 分)

解：$y'=3ax^2+2bx$，$y''=6ax+2b$，由点$(1,\ 3)$为拐点，知 $y(1)=3$，且 $y''(1)=0$，于是有

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 6a+2b=0 \end{cases},$$

解得 $a=-\dfrac{3}{2}$， $b=\dfrac{9}{2}$.

四. 证明： $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$ （$x>0$， $y>0$， $x\neq y$）.（10 分）

证明：考虑函数 $f(x)=x\ln x$，则 $f'(x)=\ln x+1$， $f''(x)=\dfrac{1}{x}>0\ (x>0)$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,\ +\infty)$ 内是凹的，从而对任意 $x>0$， $y>0$， $x\neq y$，成立

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f(\frac{x+y}{2})，即\ x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$$

五.　描绘下列函数的图形：（20 分）

（1） $y=x^3-3x^2$；

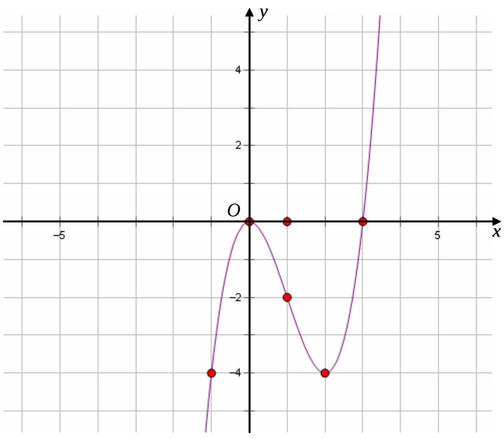
解： $y'=3x^2-6x$， $y''=6x-6$. 令 $y'=0$，得 $x=0$ 、 $x=2$；令 $y''=0$，得 $x=1$.

曲线性态分析表：

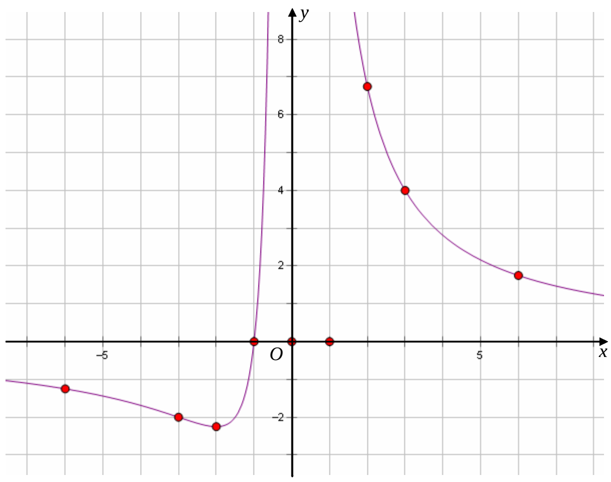
x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0,\ 1)$	1	$(1,\ 2)$	2	$(2,\ +\infty)$
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y 的图形		极大		拐点		极小	

峰点 $(0,0)$，谷点 $(2,-4)$， 拐点 $(1,-2)$.

作图补充点： $(-1,-4)$， $(3,0)$.



题（1）图



题（2）图

（2） $y=\dfrac{9(x+1)}{x^2}$.

解： $y'=9(-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3})$， $y''=9(\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{6}{x^4})$. 令 $y'=0$，得 $x=-2$；令 $y''=0$，得 $x=-3$.

曲线性态分析表：

x	$(-\infty,\ -3)$	-3	$(-3,\ -2)$	-2	$(-2,\ 0)$	$(0,\ +\infty)$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
y 的图形		拐点		极小		

谷点 $(-2, -\frac{9}{4})$，拐点 $(-3, -2)$．水平渐近线 $y=0$，铅直渐近线 $x=0$．

作图补充点：$(-6, -\frac{5}{4})$，$(-1, 0)$，$(2, \frac{27}{4})$，$(3, 4)$，$(6, \frac{7}{4})$．

六．填空题:（20 分）

1.函数 $y = x + 2\cos x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $\underline{\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}}$

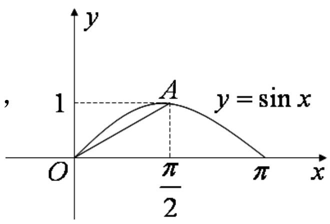
2. 函数 $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{x^2}{2}$ 在区间 $\underline{\quad [0,1] \qquad}$ 上单调增加.

3.曲线 $y = \frac{\ln x}{x}$ 的凸区间是 $\underline{(0, \sqrt{e^3}]}$.

4. 函数 $f(x) = 3\sqrt[3]{x^4} - 8x + 6\sqrt[3]{x^2}$ 在 $x = \underline{\quad 0 \quad}$ 处取极 $\underline{\quad 小 \quad}$ 值.

七. 证明：当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x > \frac{2}{\pi}x$．

证明：如图所示，设点 A 的坐标为 $(\frac{\pi}{2},\ 1)$，则直线 OA 的方程为 $y = \frac{2}{\pi}x$．



易知函数 $y = \sin x$ 在区间 $[0,\ \frac{\pi}{2}]$ 上是凸的，因此线段 OA 在弧段 OA 的下方，由此就得到

$$\sin x > \frac{2}{\pi}x\ （0 < x < \frac{\pi}{2}）.$$