作业 1.3

一．填空题（每题 5 分，本大题满分 40 分）

1．已知当 $x \to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小，则常数 $a =$ $\underline{-\frac{3}{2}}$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$，若定义 $f(0)=\underline{\frac{1}{4}}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

3. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x-1}, & x\neq 1\\ a, & x=1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处左连续，则常数 $a=\underline{-\frac{\pi}{2}}$.

4. 函数 $y=\dfrac{x-1}{\ln|x|}\cos\dfrac{1}{x-1}$ 的可去间断点是 $\underline{x=0}$，无穷间断点是 $\underline{x=-1}$.

5. 设 $f(x)=(1+2x)^{\frac{1}{x}}$，若定义 $f(0)=\underline{\quad 2 \quad}$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

6. 设 $f(x)=x\cos x - x$. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是关于 x 的 $\underline{3}$ 阶无穷小；

7. 设 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\underline{\quad 1 \quad}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=\underline{\quad 0 \quad}$，$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}=\underline{\quad 1 \quad}$

二．解答下列各题（每小题 10 分，本大题满分 50 分）

1．求 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点，并判别其类型.

解：由初等函数的连续性知 $f(x)$ 的间断点只能是 $x=1$ 和 $x=2$.

由 $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=-2$$

知点 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点中的可去间断点.

由

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\infty$$

知 $x=2$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点中的无穷间断点.

（2）$y=\dfrac{1}{x-1}\sin\dfrac{\pi}{x}$；

【提示】设 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的间断点，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在且不等于 0，则 $x=x_0$ 也为 $f(x)g(x)$ 的间断点，且间断点的类型不变.

解：由初等函数的连续性知函数 y 的间断点为 $x=0$ 和 $x=1$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-1}=-1\neq 0$，且 $x=0$ 为 $\sin\dfrac{\pi}{x}$ 的振动间断点，可知 $x=0$ 为函数 y 的振动间断点.

因为

$$\lim_{x\to1} y=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\sin\frac{\pi}{x}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\sin\frac{\pi(x-1)}{x}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\cdot\frac{\pi(x-1)}{x}=\pi,$$

所以 $x=1$ 为函数 y 的可去间断点.

（3） $f(x)=\arctan\frac{1}{x}+\frac{x-1}{\ln|x|}$.

解：由初等函数在其定义域内处处连续知 $f(x)$ 的间断点为 $x=0$， $x=-1$ 和 $x=1$．因为

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=-\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to0^+} f(x)=\frac{\pi}{2},$$

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点．因为

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\infty,$$

所以 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点．因为

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}(\arctan\frac{1}{x}+\frac{x-1}{\ln x})=\frac{\pi}{4}+\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\ln[1+(x-1)]}=\frac{\pi}{4}+1,$$

所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

2． 求(1) $\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{\sin\pi x}$;

解:令 $x=1+t$, 则

原式 $=\lim_{t\to0}\frac{-t(t+2)}{\sin\pi(t+1)}=\lim_{t\to0}\frac{t(t+2)}{\sin\pi t}=\lim_{t\to0}\frac{t(t+2)}{\pi t}\cdot=\frac{2}{\pi}$

(2) $\lim_{x\to1}(\frac{5x-3}{x+1})^{\frac{1}{x-1}}$.

解：原式 $=\lim_{x\to1}(1+\frac{4x-4}{x+1})^{\frac{x+1}{4x-4}\cdot\frac{4}{x+1}}=\exp(\lim_{x\to1}\frac{4}{x+1})=e^2$.

3． 求(1) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}$;

解：原式 $=\lim_{x\to0}\frac{\tan x（1-\cos x)}{\sin x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$;

解：原式 $=\lim_{x\to0}\frac{\cos x\cdot\ln(1+x^2)}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=1$.

4． 已知 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=2$, 求 $\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{1-\cos x}$.

解：因为 $\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\cdot x^2=2\times0=0$，且 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x^2}=1$

所以 $f(x) \sim 2x^2$， $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (x \to 0)$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2} = 16$

5.设函数 $f(x) = \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$，

试确定常数 a及b.

解：因为 $x=0$ 是无穷间断点，即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$.

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x - b} = \frac{a}{1-b} = 0$，从而 $a=0, b\neq 1$

又 $x=1$ 是可去间断点,所以 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x - b}{x(x-1)}$ 的极限存在,

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} e^x - b = 0 \Rightarrow b = \lim\limits_{x\to 1} e^x = \mathrm{e}$

三.证明题:(20 分)

1.设 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$，证明 $x=0$是$f(x)$的跳跃间断点.

证明：因为 $f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}{1 + \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

所以 $x=0$是$f(x)$的跳跃间断点.

2. 证明方程 $x - \cos x = 0$ 至少有一个正根.

证明：令 $f(x) = x - \cos x$，则 $f(x)$ 在$[0, \frac{\pi}{2}]$上连续.

而 $f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$， $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$

由介值定理知存在 $c \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $f(c) = 0$，

即方程 $x-\cos x=0$ 至少有一个正根 c .

3．设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$．证明：至少存在一点 ξ，使

$$k\xi+f(\xi)=0，其中 k>0 .$$

证明：由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 知，存在 $X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，有

$$\frac{f(x)}{x}>-k .$$

设 $g(x)=kx+f(x)$，则 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内连续．取 $a=-2X$ ，$b=2X$ ，则

$$\frac{f(a)}{a}>-k\Rightarrow f(a)<-ka\Rightarrow ka+f(a)<0\Rightarrow g(a)<0,$$

$$\frac{f(b)}{b}>-k\Rightarrow f(b)>-kb\Rightarrow kb+f(b)>0\Rightarrow g(b)>0,$$

因此，由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in[a,\ b]$，使 $g(\xi)=0$，即 $k\xi+f(\xi)=0$.

4. 设 $f(x)=\dfrac{2x^2(x+\sin x)}{5x^5+1}$，问

（1）当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是关于 x 的几阶无穷小?

（2）当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 是关于 $\dfrac{1}{x}$ 的几阶无穷小?

解：（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{5x^5+1}\cdot(1+\dfrac{\sin x}{x})=4$，

所以，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是关于 x 的 3 阶无穷小.

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{(1/x)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5}{5x^5+1}\cdot(1+\dfrac{\sin x}{x})=\dfrac{2}{5}$，

所以，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 是关于 $\dfrac{1}{x}$ 的 2 阶无穷小.