隐函数与参量函数微分法

一、隐函数的导数

定义： 由方程所确定的函数 $y = y(x)$ 称为隐函数.

$y = f(x)$ 形式称为显函数.

$F(x, y) = 0 \Longrightarrow y = f(x)$ 隐函数的显化

问题: 隐函数不易显化或不能显化如何求导?

隐函数求导法则:

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

设$F(x,y)=0$确定了一元隐函数 $y=y(x)$

将 $y=y(x)$代入$F(x,y)=0$得 $u=F[x,y(x)]\equiv 0$

则 $\dfrac{du}{dx}=0$

两边对 x 求导，当遇到 y 的函数 $f(y)$时

要求的是$\dfrac{d}{dx}[f(y)]$ 记$z=f(y)$

$z\to y\to x$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \quad =f'(y)\cdot\frac{dy}{dx}$$

将求出的这些导数代入 $\frac{du}{dx}=0$

得到关于 $\frac{dy}{dx}$ 的代数方程，

解得$\frac{dy}{dx}=g(x,y)$即为所求

至于隐函数求二阶导数，与上同理

在$\frac{dy}{dx}=g(x,y)$两边再对 x求导

$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}=G(x,y,y')$ 再将$\frac{dy}{dx}=g(x,y)$代入

例1 求由方程 $xy - e^x + e^y = 0$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\dfrac{dy}{dx}, \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解 方程两边对 x 求导,

$$y + x\frac{dy}{dx} - e^x + e^y\frac{dy}{dx} = 0$$

解得 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x - y}{x + e^y}$, 由原方程知 $x = 0, y = 0,$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{e^x - y}{x + e^y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 1.$$

例2 设曲线C的方程为$x^3+y^3=3xy$,求过C上点$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$的切线方程,并证明曲线$C$在该点的法线通过原点.

解 方程两边对 x求导, $3x^2+3y^2y'=3y+3xy'$

$$\therefore y'\Big|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=\frac{y-x^2}{y^2-x}\Big|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=-1.$$

所求切线方程为 $y-\frac{3}{2}=-(x-\frac{3}{2})$ 即 $x+y-3=0.$

法线方程为 $y-\frac{3}{2}=x-\frac{3}{2}$ 即 $y=x$, 显然通过原点.

例3 设 $x^4 - xy + y^4 = 1$, 求y''在点$(0,1)$处的值.

解 方程两边对x求导得

$$4x^3 - y - xy' + 4y^3y' = 0 \qquad (1)$$

代入 $x = 0,\ y = 1$得 $y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = \dfrac{1}{4}$;

将方程(1)两边再对x求导得

$$12x^2 - 2y' - xy'' + 12y^2(y')^2 + 4y^3y'' = 0$$

代入 $x = 0,\ y = 1,\ y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = \dfrac{1}{4}$ 得 $y''\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = -\dfrac{1}{16}$.

补证反函数的求导法则

设$x=\varphi(y)$为直接函数，$y=f(x)$为其反函数

$y=f(x)$可视为由方程 $x-\varphi(y)=0$确定的一个隐函数

由隐函数的微分法则

方程$x=\varphi(y)$两边对 x求导得

$$1=\varphi'(y)\cdot\frac{dy}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

例4 设$\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，求$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解 方程两边对x求导得

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(\sqrt{x^2+y^2})'$$

$$\Rightarrow\quad \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow\quad y'x-y=x+yy'$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{2xy'-2y}{(x-y)^2} \quad = 2\cdot\frac{x(x+y)-y(x-y)}{(x-y)^3}$$

$$= \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$$

三、由参数方程所确定的函数的导数

若参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$确定 y与x间的函数关系，

称此为由参数方程所确 定的函数.

例如 $\begin{cases} x = 2t, \\ y = t^2, \end{cases} \Rightarrow t = \dfrac{x}{2}$ 消去参数

$$\therefore y = t^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} \qquad \therefore y' = \frac{1}{2}x$$

问题：消参困难或无法消参如何求导?

在方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$中,

设函数$x = \varphi(t)$具有单调连续的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$,

$\therefore y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$ ——**参量函数**

再设函数$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$都可导, 且$\varphi(t) \neq 0$,

由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

若上述参数方程中$\varphi(t), \psi(t)$ 二阶可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$,
则由它确定的函数$y = f(x)$ 可求二阶导数 .

利用新的参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases}$,可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \Bigg/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)} \Bigg/ \varphi'(t)$$

$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$$

例11 求摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$在$t = \dfrac{\pi}{2}$处的切线方程.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\sin t}{a - a\cos t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1 - \cos\frac{\pi}{2}} = 1.$$

当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时， $x=a(\frac{\pi}{2}-1)$， $y=a.$

所求切线方程为

$$y-a=x-a(\frac{\pi}{2}-1)$$

即 $y=x+a(2-\frac{\pi}{2})$

例 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}t^2 \\ y=1-t \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}.$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-1}{t};\qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{1}{t^2}}{t}=\frac{1}{t^3}$$

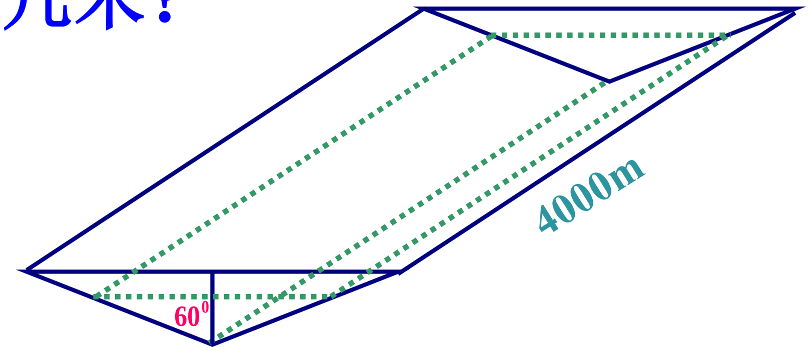
四、相关变化率

设 $x = x(t)$ 及 $y = y(t)$ 都是可导函数, 而变量 x 与 y 之间存在某种关系, 从而它们的变化率 $\frac{dx}{dt}$ 与 $\frac{dy}{dt}$ 之间也存在一定关系, 这样两个相互依赖的变化率称为相关变化率.

相关变化率问题:

已知其中一个变化率时如何求出另一个变化率?

例15 河水以 $8米^3/秒$ 的体流量流入水库中, 水库形状是长为4000米, 顶角为 120^0 的水槽, 问水深20米时, 水面每小时上升几米?



解 设时刻 t 水深为 $h(t)$,

水库内水量为 $V(t)$, 则

$$V(t) = 4000\sqrt{3}h^2$$

上式两边对 t 求导得 $\dfrac{dV}{dt} = 8000\sqrt{3}h \cdot \dfrac{dh}{dt}$

$\because \dfrac{dV}{dt} = 28800$米^3/小时，　　$\therefore$ 当$h = 20$米时，

$\dfrac{dh}{dt} \approx 0.104$米/小时

水面上升之速率

例16 一气球从离开观察员500m处离地面铅直上升，其速度为140m/min(分). 当气球高度为500m时，观察员视线的仰角增加率是多少？

解 设气球上升t(秒)后，其高度为h，观察员视线的仰角为α，则

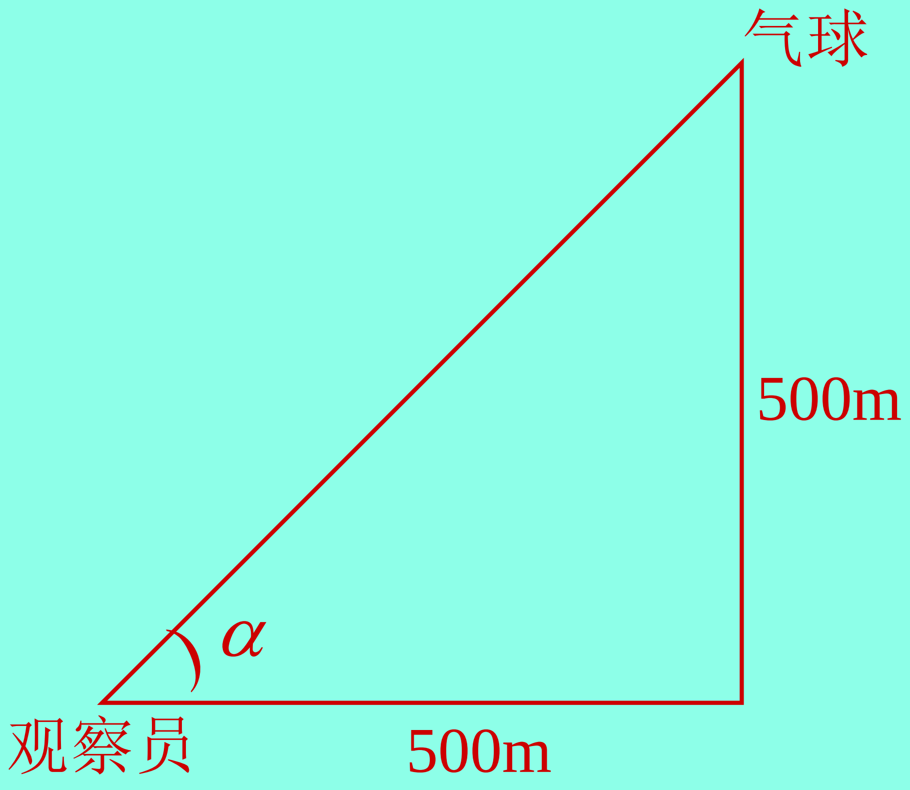
$$\tan\alpha = \frac{h}{500}.$$

上式两边对t求导，得

$$\sec^2\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{500} \cdot \frac{dh}{dt}.$$

已知 $\frac{dh}{dt}=140$ (米/秒).

又当$h=500$(米)时，$\sec^2\alpha=2$.



例16 一气球从离开观察员500m处离地面铅直上升, 其速度为140m/min(分). 当气球高度为500m时, 观察员视线的仰角增加率是多少?

解 设气球上升t(秒)后, 其高度为h, 观察员视线的仰角为α, 则

$$\tan\alpha=\frac{h}{500}.$$

上式两边对t求导, 得

$$\sec^2\alpha\cdot\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{500}\cdot\frac{dh}{dt}.$$

已知 $\frac{dh}{dt}=140$ (米/秒).

又当$h=500$(米)时, $\sec^2\alpha=2$.

将已知数据代入上式得

$$2\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{500}\cdot 140,$$

所以

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{70}{500}=0.14 \text{ (弧度/秒)}.$$

即观察员视线的仰角增加率是每秒0. 14弧度.

五、小结

隐函数求导法则： 直接对方程两边求导;

对数求导法： 对方程两边取对数,按隐函数的求导法则求导;

参数方程求导: 实质上是利用复合函数求导法则;

相关变化率： 通过函数关系确定两个相互依赖的变化率；**解法:** 通过建立两者之间的关系，用链式求导法求解.

思考题

设$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，由$y'_x=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\quad(\varphi'(t)\neq 0)$

可知$y''_x=\dfrac{\psi''(t)}{\varphi''(t)}$，对吗？

思考题解答

不对.

$$y''_x = \frac{d}{dx}\left(y'_x\right) = \frac{dy'_x}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}$$