思考与练习

1. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 间断点的类型.

答案: $x=1$ 是第一类可去间断点，

$x=2$ 是第二类无穷间断点.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x<0 \\ a+x^2, & x\geq 0 \end{cases}$，$a=$ ___0___ 时 $f(x)$ 为连续函数.

提示: $f(0^-)=0$，$f(0^+)=f(0)=a$

例3. 确定函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 间断点的类型.

解: 间断点 $x=0,\ x=1$

$\because \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$, $\therefore$ $x=0$ 为无穷间断点;

当 $x\to 1^-$ 时, $\dfrac{x}{1-x}\to +\infty$, $\therefore$ $f(x)\to 0$

当 $x\to 1^+$ 时, $\dfrac{x}{1-x}\to -\infty$, $\therefore$ $f(x)\to 1$

故 $x=1$ 为跳跃间断点.

在 $x\neq 0,1$ 处, $f(x)$ 连续.

初等函数的连续性

一、四则运算的连续性

定理1 若函数 $f(x)$, $g(x)$在点x_0处连续,

则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$

在点x_0处也连续.

例如, $\sin x,\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内连续,

故 $\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$ 在其定义域内连续.

定理3 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$, 函数 $f(u)$在点a连续,

则有 $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f(a) = f[\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)]$.

证 $\because f(u)$在点 $u = a$连续,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, 使当 $|u - a| < \eta$时,

恒有$|f(u) - f(a)| < \varepsilon$成立.

又 $\because \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$,

对于$\eta > 0$, $\exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$时,

恒有$|\varphi(x)-a|=|u-a|<\eta$成立.

将上两步合起来:

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,$ 使当$0<|x-x_0|<\delta$时,

$|f(u)-f(a)|=|f[\varphi(x)]-f(a)|<\varepsilon$ 成立.

$$\therefore \lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(a)=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

意义　1.在定理的条件下，极限符号可以与函数符号互换，即极限号可以穿过外层函数符号直接取在内层,

2.变量代换$(u=\varphi(x))$的理论依据.

注 1.定理的条件：内层函数有极限，外层函数在极限值点处连续

2.将$x \to x_0$换成$x \to \infty$可得类似的定理

例1 求$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 原式$=\lim\limits_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$= \ln[\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln e = 1.$$

例2　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解　令 $e^x-1=y$,　则 $x=\ln(1+y)$,

当$x\to 0$时, $y\to 0$.

$$原式=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}=1.$$

同理可得　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.

定理4 设函数$u=\varphi(x)$在点$x=x_0$连续，且$\varphi(x_0)=u_0$，而函数$y=f(u)$在点$u=u_0$连续，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点$x=x_0$也连续.

注意 定理4是定理3的特殊情况.

例如，$u=\dfrac{1}{x}$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$内连续，

$y=\sin u$在$(-\infty,+\infty)$内连续，

$\therefore\ y=\sin\dfrac{1}{x}$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$内连续.

三、初等函数的连续性

★ 三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.

★ 指数函数 $y = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

在$(-\infty, +\infty)$内单调且连续;

★ 对数函数 $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

在$(0, +\infty)$内单调且连续;

★ $y = x^{\mu} = a^{\mu \log_a x} \longrightarrow y = a^{u}, \quad u = \mu \log_a x.$

在$(0, +\infty)$内连续， 讨论μ不同值，

(均在其定义域内连续)

定理5 基本初等函数在定义域内是连续的.

定理6 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

定义区间是指包含在定义域内的区间.

注意 1. 初等函数仅在其定义区间内连续，在其定义域内不一定连续；

例如， $y=\sqrt{\cos x-1}$， $D: x=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$

这些孤立点的邻域内没有定义.

$y=\sqrt{x^2(x-1)^3}$， $D: x=0$，及 $x \geq 1$，

在0点的邻域内没有定义.

函数在区间$[1,+\infty)$上连续.

注意 2. 初等函数求极限的方法代入法.

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0) \qquad (x_0 \in \text{定义区间})$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x$

解 $y=\ln\sin x$是初等函数

它的一个定义区间是 $(0,\pi)$ 而$x_0=\dfrac{\pi}{2}\in(0,\pi)$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x=\ln\sin\frac{\pi}{2}=0$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

解 $$原式=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{0}{2}=0.$$

例5 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \arcsin x(\sqrt{x^2+1}-x)$

解 当$x\to+\infty$时，$x\sqrt{x^2+1}$和x^2都$\to+\infty$

不能应用差的极限运算法则，须变形——先分子有理化，然后再求极限

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \arcsin x(\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$= \arcsin[\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)]$$

$$= \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

四、小结

连续函数的和差积商的连续性.

反函数的连续性.

复合函数的连续性.

初等函数的连续性.

定义区间与定义域的区别;
求极限的又一种方法.