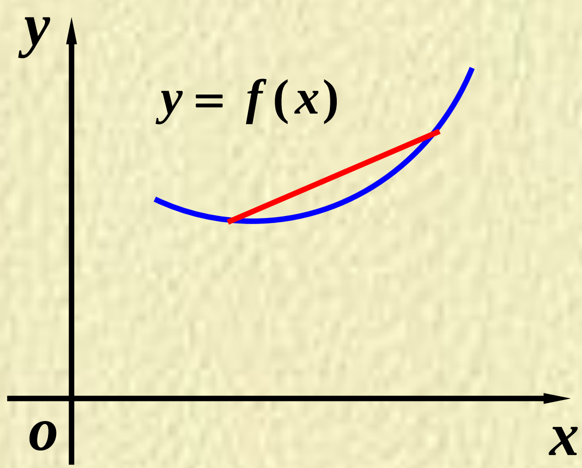
函数图形的描绘

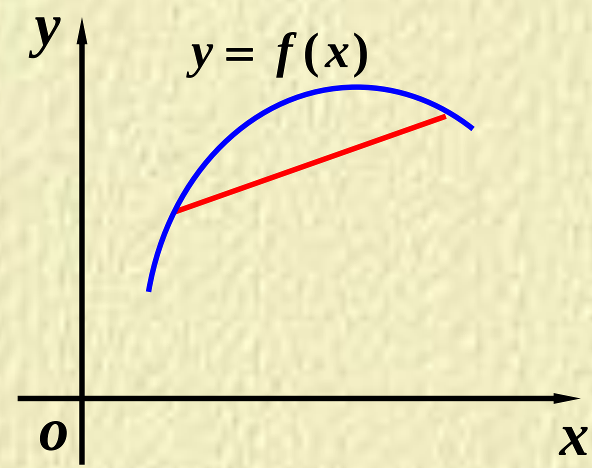
一、曲线的凹凸性与拐点

二、函数图形的描绘

一、曲线的凹凸性与拐点

问题:如何研究曲线的弯曲方向?





图形上任意弧段
位于所张弦的下方

图形上任意弧段
位于所张弦的上方

❖曲线的凹凸性定义

设$f(x)$在区间I上连续,

对I上任意两点x_1, x_2,

如果恒有

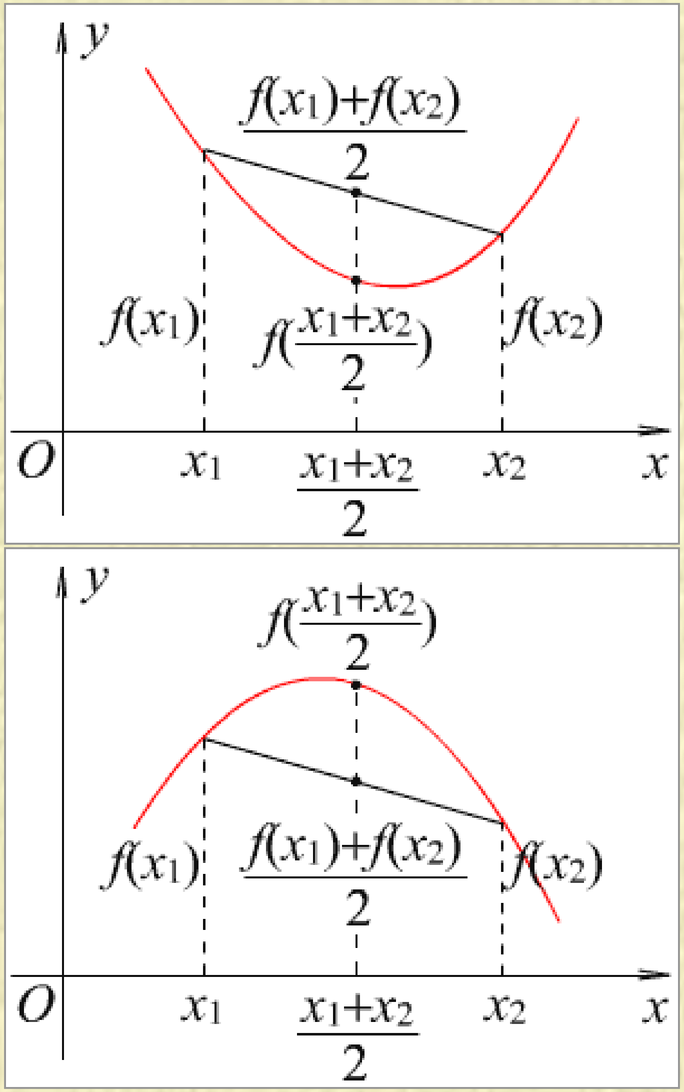
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称$f(x)$在I上的图形是凹的;

如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称$f(x)$在I上的图形是凸的.



❖定理1(曲线凹凸性的判定法)

设$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内具有二阶导数.

若在(a, b)内$f''(x)>0$, 则$f(x)$在$[a, b]$上的图形是凹的;

若在(a, b)内$f''(x)<0$, 则$f(x)$在$[a, b]$上的图形是凸的.

观察与思考:

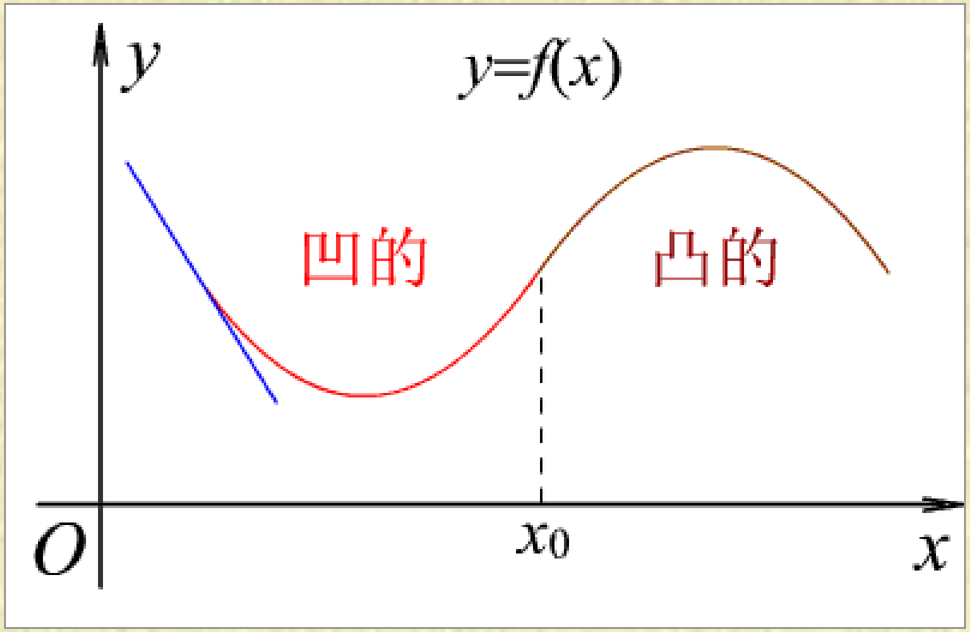
$f(x)$的图形的凹凸性与$f'(x)$的单调性的关系.

1) $f(x)$的图形是凹的

$\Longleftrightarrow f'(x)$单调增加;

2) $f(x)$的图形是凸的

$\Longleftrightarrow f'(x)$单调减少.



❖定理1(曲线凹凸性的判定法)

设$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内具有二阶导数.

若在(a, b)内$f''(x)>0$, 则$f(x)$在$[a, b]$上的图形是凹的;

若在(a, b)内$f''(x)<0$, 则$f(x)$在$[a, b]$上的图形是凸的.

例1 判断曲线$y=x^3$的凹凸性.

解 $y'=3x^2$, $y''=6x$.

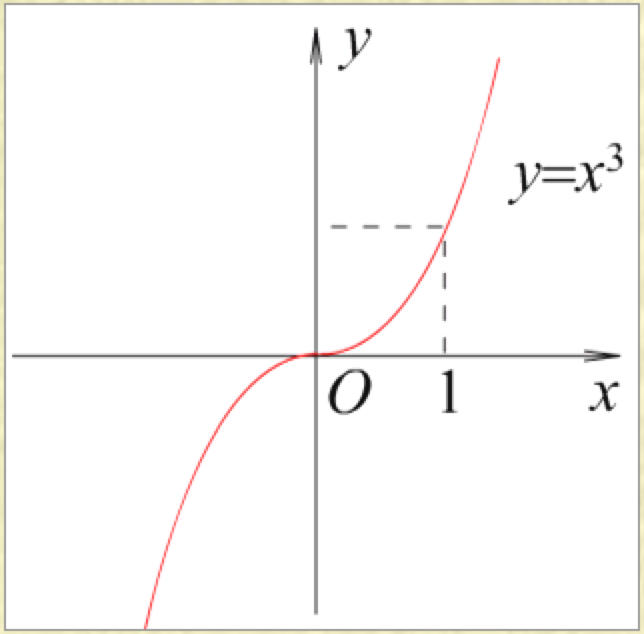
由$y''=0$, 得$x=0$.

因为当$x<0$时，$y''<0$,

所以曲线在$(-\infty, 0]$上是凸的;

因为当$x>0$时，$y''>0$,

所以曲线在$[0, +\infty)$上是凹的.



❖拐点

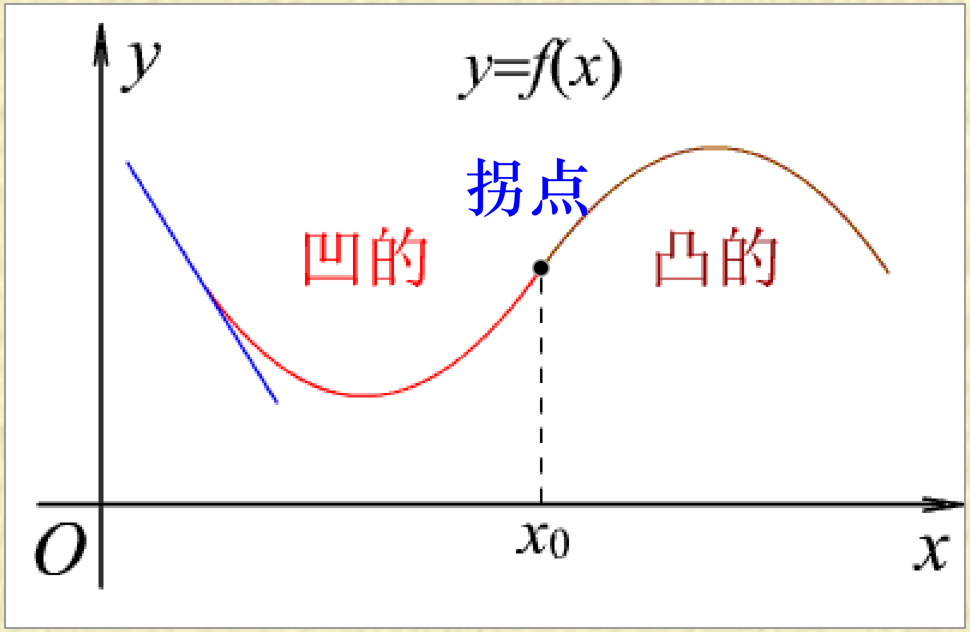
连续曲线$y=f(x)$上凹弧与凸弧的连接点称为该曲线的拐点.

•讨论

如何确定曲线$y=f(x)$的拐点?

如果$(x_0, f(x_0))$是拐点, 且$f''(x_0)$存在, 问$f''(x_0)=?$

如何找可能的拐点?

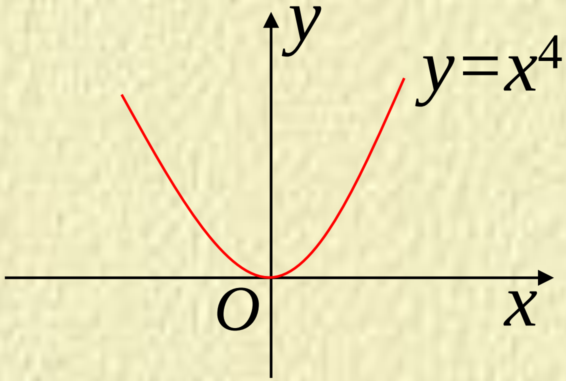


- 只有$f''(x_0)$等于零或不存在，$(x_0, f(x_0))$才可能是拐点.
- 如果在x_0的左右两侧$f''(x)$异号，则$(x_0, f(x_0))$是拐点.

- 讨论

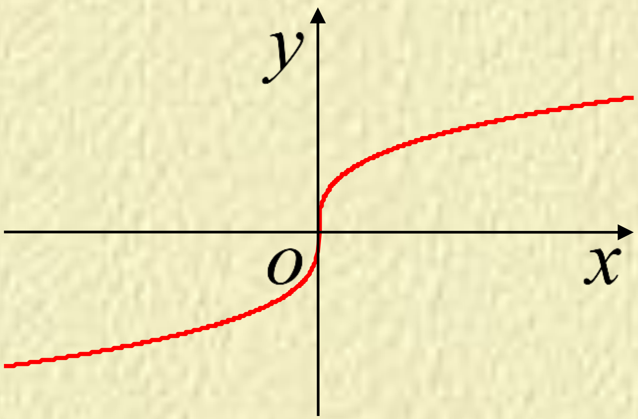
曲线$y=x^4$是否有拐点?

虽然$y''(0)=0$, 但$(0,0)$不是拐点.



例2 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.

解 $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $y''=-\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$;



二阶导数无零点;

当$x=0$时，二阶导数不存在.

因为当$x<0$时, $y''>0$; 当$x>0$时, $y''<0$,

所以点$(0, 0)$是曲线的拐点.

•只有$f''(x_0)$等于零或不存在，$(x_0, f(x_0))$才可能是拐点.

•如果在x_0的左右两侧$f''(x)$异号，则$(x_0, f(x_0))$是拐点.

例3 求曲线$y=3x^4-4x^3+1$的拐点及凹、凸的区间.

解 (1)函数$y=3x^4-4x^3+1$的定义域为$(-\infty, +\infty)$;

(2) $y'=12x^3-12x^2$， $y''=36x^2-24x=36x(x-\frac{2}{3})$；

(3)解方程$y''=0$，得 $x_1=0$， $x_2=\frac{2}{3}$；

(4)列表判断:

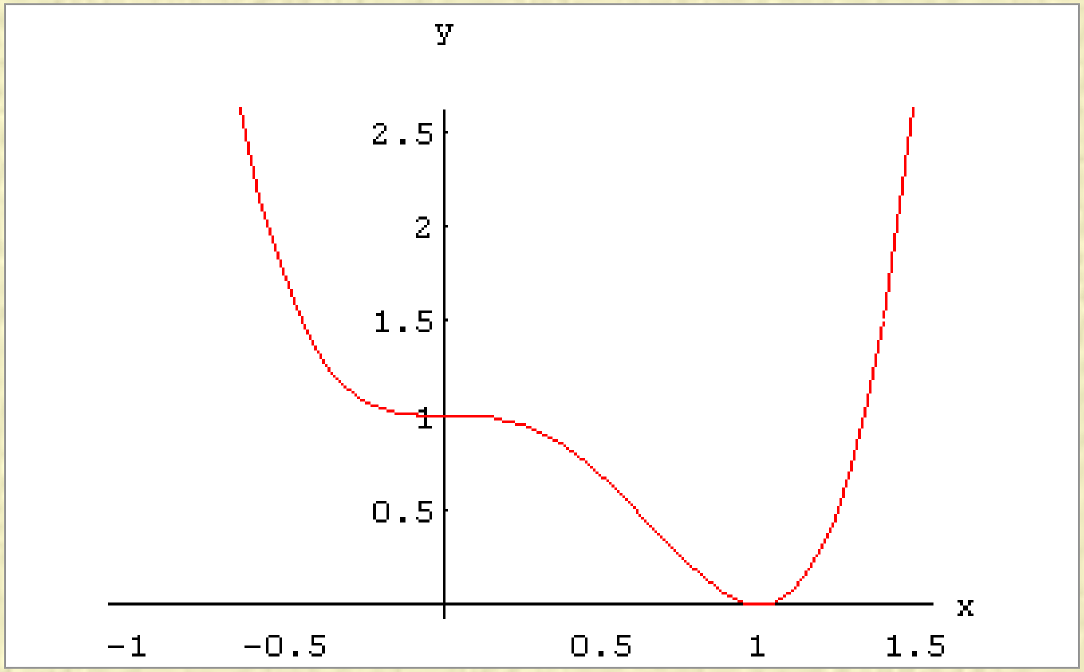
x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2/3)$	$2/3$	$(2/3, +\infty)$
$y''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\cup$	1	$\cap$	$11/27$	$\cup$

在区间$(-\infty,0]$和$[2/3,+\infty)$上曲线是凹的; 在区间$[0,2/3]$上曲线是凸的. 点$(0, 1)$和$(2/3, 11/27)$是曲线的拐点.

•只有$f''(x_0)$等于零或不存在，$(x_0, f(x_0))$才可能是拐点.

•如果在x_0的左右两侧$f''(x)$异号，则$(x_0, f(x_0))$是拐点.

例3 求曲线$y=3x^4-4x^3+1$的拐点及凹、凸的区间.



在区间$(-\infty,0]$和$[2/3,+\infty)$上曲线是凹的; 在区间$[0,2/3]$上曲线是凸的. 点$(0, 1)$和$(2/3, 11/27)$是曲线的拐点.

例4 求曲线 $y = x^2 + 9\sqrt[3]{x^2}$ 的凹凸区间和拐点.

解 $y' = 2x + \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}$, $y'' = 2 - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^4}}$,

二阶导数的零点为 $x_1 = -1$, $x_2 = 1$,

二阶导数不存在的点为 $x=0$.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y''	$+$	0	$-$	不存在	$-$	0	$+$
y	$\cup$	10	$\cap$	0	$\cap$	10	$\cup$

凹区间为 $(-\infty, -1]$ 和 $[1, +\infty)$, 凸区间为 $[-1, 0]$ 和 $[0, 1]$,

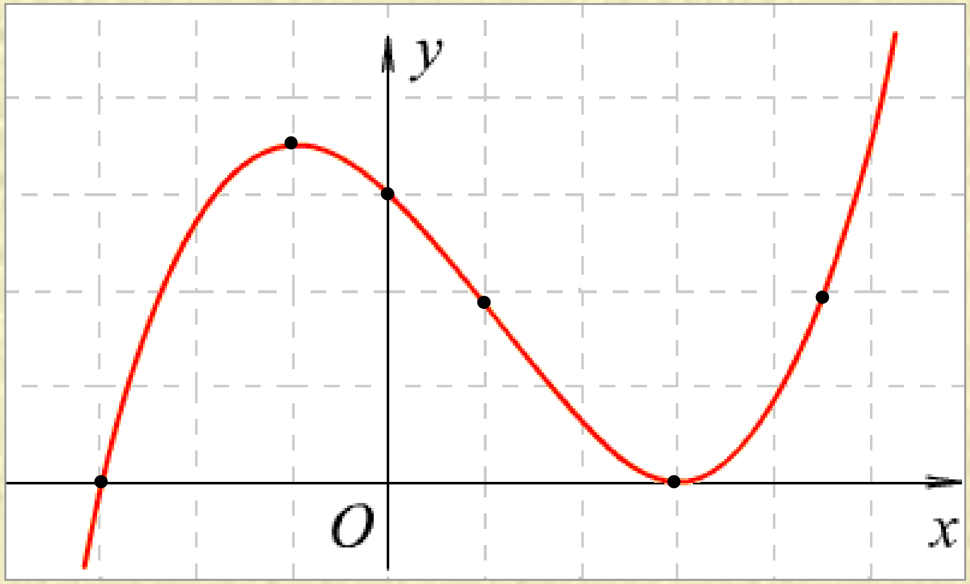
拐点为 $(-1, 10)$ 和 $(1, 10)$.

思考: 凸区间 $[-1, 0]$ 与 $[0, 1]$ 可否合并为 $[-1, 1]$?

二、函数图形的描绘

用描点法作函数图形需要计算许多点，才能画出较精确的函数图形.

当我们对函数曲线的性态有了全面了解之后，只需少数几个点就能画出较精确的函数图形.



❖微分法描绘函数图形的一般步骤

1. 确定函数的定义域(奇偶性和周期性).

2. 讨论函数的单调性和极值, 曲线的凹凸性和拐点, 渐近线.

3. 定点作图: 峰点, 谷点, 拐点, 坐标轴交点(适当补点)用光滑曲线连接定点.

例5 画出函数$y=x^3-x^2-x+1$的图形.

解 (1)函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$.

(2)$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$, $f''(x)=6x-2=2(3x-1)$.

令$f'(x)=0$得$x=-1/3, 1$; 令$f''(x)=0$得$x=1/3$.

(3)曲线性态分析表:

x	$(-\infty,-1/3)$	$-1/3$	$(-1/3,1/3)$	$1/3$	$(1/3, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$32/27$ 极大		$16/27$ 拐点		0 极小	

(4)特殊点的函数值: $f(0)=1$, $f(-1)=0$, $f(3/2)=5/8$.

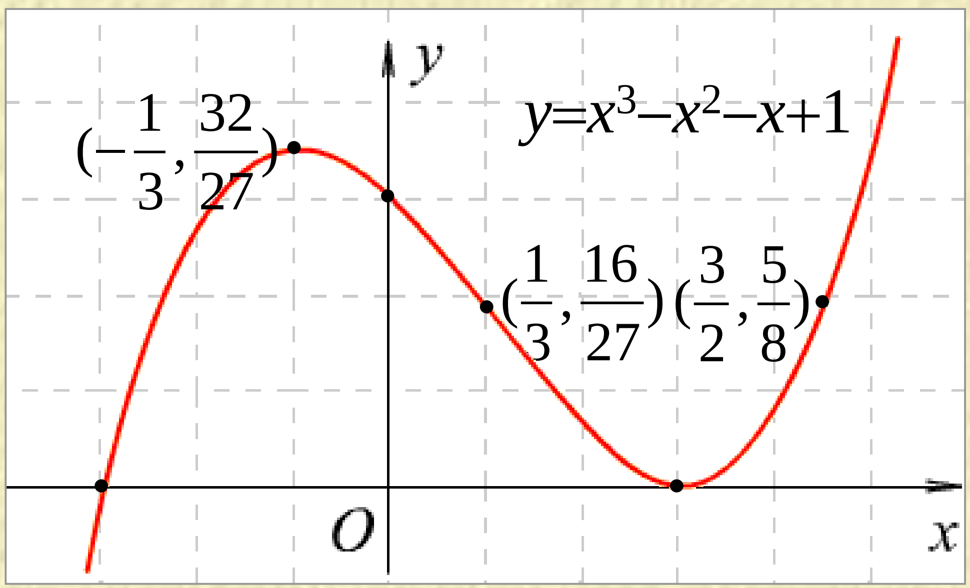
例5 画出函数$y=x^3-x^2-x+1$的图形.

解 曲线性态分析表:

x	$(-\infty,-1/3)$	$-1/3$	$(-1/3,1/3)$	$1/3$	$(1/3,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f(x)$		$32/27$ 极大		$16/27$ 拐点		0 极小	

特殊点的函数值: $f(0)=1$, $f(-1)=0$, $f(3/2)=5/8$.

描点联线画出图形.



例6 作函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 的图形.

解 (1)函数$f(x)$的定义域为$(-\infty, +\infty)$,

$f(x)$是偶函数, 图形关于y 轴对称.

(2) $f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $f''(x)=\dfrac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

令$f'(x)=0$, 得$x=0$; 令$f''(x)=0$, 得$x=-1$和$x=1$.

(3)曲线性态分析表:

x	0	(0, 1)	1	(1, +∞)
$f'(x)$	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	0	+
$y=f(x)$的图形	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$极大		$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}$拐点	

(4)曲线有水平渐近线$y=0$.

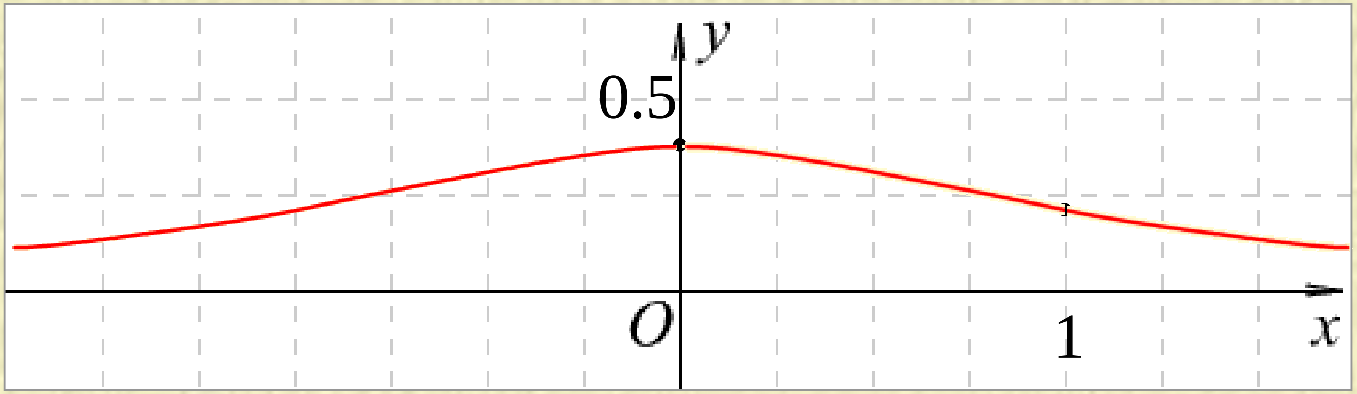
例6 作函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 的图形.

解 函数性态分析表:

x	0	(0, 1)	1	(1, +∞)
$y=f(x)$的图形	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$极大	↘	$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$拐点	↘

$y=0$是曲线的水平渐近线.

先作出区间$(0,+\infty)$内的图形, 然后利用对称性作出区间$(-\infty, 0)$内的图形.



例7 作函数 $y=1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形.

解 (1)函数的定义域为$(-\infty, -3)\cup(-3, +\infty)$.

(2) $f'(x)=\dfrac{36(3-x)}{(x+3)^3}$， $f''(x)=\dfrac{72(x-6)}{(x+3)^4}$.

令$f'(x)=0$得$x=3$，令$f''(x)=0$得$x=6$.

(3)曲线性态分析表:

x	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	3	$(3, 6)$	6	$(6, +\infty)$
$f'(x)$	−	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	−	−	0	+
$y=f(x)$的图形			4极大		11/3拐点	

(4)曲线有铅直渐近线$x=-3$与水平渐近线$y=1$.

(5)特殊点的函数值: $f(0)=1$，$f(-1)=-8$，$f(-9)=-8$，$f(-15)=-11/4$.

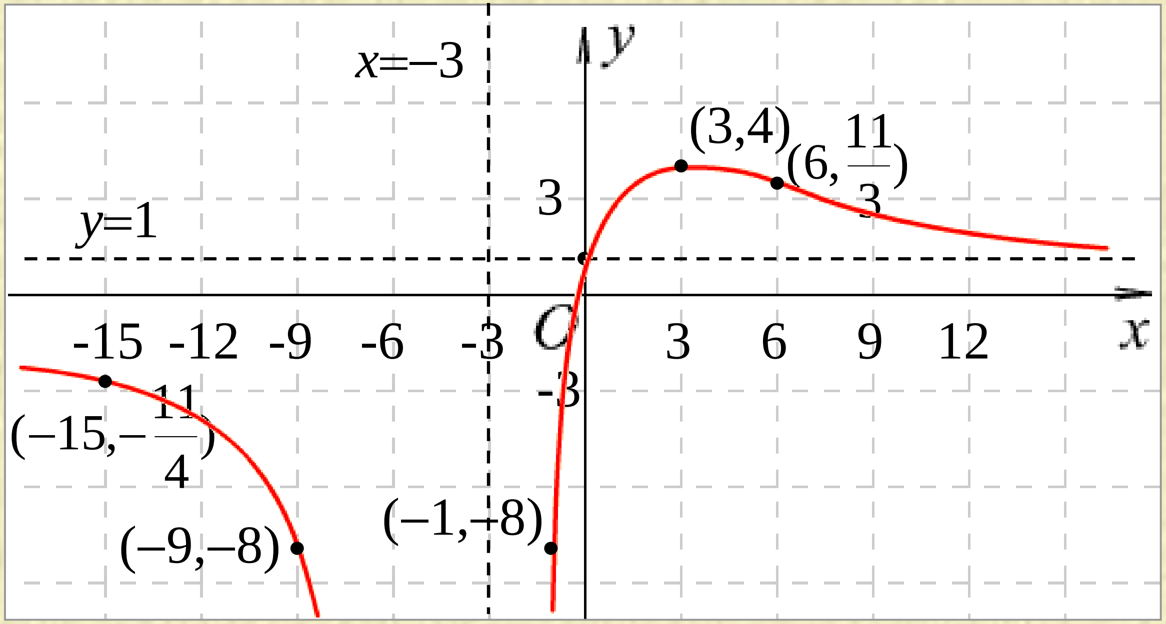
例7 作函数 $y=1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形.

解 函数性态分析表:

x	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	3	$(3,6)$	6	$(6,+\infty)$
$y=f(x)$的图形	↘	↗	4极大	↘	11/3拐点	↘

铅直渐近线为$x=-3$, 水平渐近线为$y=1$.

$f(0)=1$, $f(-1)=-8$, $f(-9)=-8$, $f(-15)=-11/4$.



作业3.5