无穷级数作业 1

1．判别下列级数的收敛性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2^n})$；

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2^n})$发散.

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n})$；

解：$s_n=\sum_{i=1}^{n}(\sqrt[i+1]{i+1}-\sqrt[i]{i})=\sqrt[n+1]{n+1}-1$，$\lim_{n\to\infty}s_n=0$，原级数收敛.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}n^2(1-\cos\frac{1}{n})$.

解：$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}n^2(1-\cos\frac{1}{n})=\frac{1}{2}\neq 0$，原级数发散.

2．设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和为$s_n=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}$，求级数的一般项$u_n$及和$s$.

解：$u_n=s_n-s_{n-1}=(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n})-(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{2n-2})=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$，

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2.$$

3．已知$\lim_{n\to\infty}nu_n=0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(u_{n+1}-u_n)$收敛，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛.

证明：$s_n=\sum_{i=1}^{n}(i+1)(u_{i+1}-u_i)=\sum_{i=1}^{n}[(i+1)u_{i+1}-iu_i]-\sum_{i=1}^{n}u_i=(n+1)u_{n+1}-u_1-\sum_{i=1}^{n}u_i$，

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}u_i=(n+1)u_{n+1}-u_1-s_n.$$

因$\lim_{n\to\infty}nu_n=0$，且$\lim_{n\to\infty}s_n$存在，所以$\lim_{n\to\infty}\sigma_n$存在，也即级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

无穷级数作业 2

1．用比较审敛法或其极限形式判别下列级数的收敛性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n^2+3}$；

解：当$n\to\infty$时，

$$\frac{n+2}{2n^2+3}=\frac{n(1+2n^{-1})}{n^2(2+3n^{-2})}\sim\frac{1}{2n},$$

所以原级数与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$有相同的敛散性．因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$收敛，所以原级数也收敛.

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2}$；

解：因$\frac{\cos^2 n}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以原级数也收敛.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$；

解：因$\sin\frac{\pi}{2^n}<\frac{\pi}{2^n}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$收敛，所以原级数也收敛.

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2n}$；

解：当$n\to\infty$时，$\sin\frac{\pi}{2n}\sim\frac{\pi}{2n}$，所以原级数与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2n}$有相同的敛散性．因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2n}$发散，所以原级数也发散.

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n}\ln(1+\frac{1}{n})$；

解：当$n\to\infty$时，

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n}=\frac{n\sqrt{1+n^{-2}}}{n^2(1+n^{-1})}\sim\frac{1}{n},\quad \ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}\quad\Rightarrow\quad\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n}\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n^2},$$

所以原级数与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$有相同的敛散性．因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以原级数也收敛.

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$.

解：当$a>1$时，因$\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$收敛.

当$a\le1$时，因$u_n=\frac{1}{1+a^n}\ge\frac{1}{2}$，所以$\lim_{n\to\infty}u_n\ne0$，从而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$发散.

2．若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$及$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$都收敛，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$也收敛.

证明：因级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$及$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$都收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n^2+2b_n^2)$收敛．又因

$$(a_n+b_n)^2=2a_n^2+2b_n^2-(a_n-b_n)^2\le2a_n^2+2b_n^2,$$

所以由比较审敛法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$收敛.

3．设 $a_n \le b_n \le c_n$，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛.

证明：因级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n)$ 收敛. 又因

$$0 \le b_n - a_n \le c_n - a_n,$$

所以由比较审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛.

4．判别下列级数的收敛性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$；

解：渐近公比

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^3} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = \frac{1}{2},$$

因 $\rho < 1$，所以级数收敛.

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$；

解：渐近公比

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = e,$$

因 $\rho > 1$，所以级数发散.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty} n!(\frac{2}{n})^n$；

解：渐近公比

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}(n+1)!\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2}\right)^n = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e},$$

因 $\rho < 1$，所以级数收敛.

（4）$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2n^2+3}{3n^2+2})^{2n-1}$；

解：渐近公比

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{2n^2+3}{3n^2+2})^{2-\frac{1}{n}} = \frac{4}{9},$$

因 $\rho < 1$，所以级数收敛.

（5）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$；

解：渐近公比

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^n = \frac{e}{3},$$

因 $\rho<1$，所以级数收敛.

（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a+\frac{1}{n})^n\ (a>0)$.

解：渐近公比

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}(a+\frac{1}{n})=a.$$

当 $a<1$ 时，$\rho<1$，级数收敛；当 $a>1$ 时，$\rho>1$，级数发散；当 $a=1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e\neq 0,$$

级数发散.

5．判别下列级数是绝对收敛，条件收敛，还是发散？

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sqrt[n]{n}$；

解：$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，从而级数发散.

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n^2}$；

解：对任何正数 μ，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\mu}}=0$，于是

$$|u_n|=\frac{\ln n}{n^2}=\frac{1}{n^{2-\mu}}\cdot\frac{\ln n}{n^{\mu}}=o(\frac{1}{n^{2-\mu}}),\text{（当 } n\to\infty \text{ 时），其中 } 0<\mu<2.$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-\mu}}$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 的强级数．当 $0<\mu<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-\mu}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，即原级数绝对收敛.

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^2}$；

解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2}=2>1$，所以原级数发散.

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$.

解：记 $u_n=\frac{1}{n-\ln n}$．因 $u_n\geq\frac{1}{n}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

考虑函数 $f(x)=x-\ln x$，则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 单调增加，由此可知 $u_{n+1}<u_n$．显然 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$．由莱布尼茨定理知交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛．所以原级数条件收敛.

无穷级数作业 3

1．求下列幂级数的收敛域：

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4^n}x^{2n}$；

解：记$u_n=\frac{2n+1}{4^n}x^{2n}$，则

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{x^2}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}=\frac{x^2}{4},$$

当$|x|<2$时，$\rho<1$，幂级数绝对收敛；当$|x|>2$时，$\rho>1$，幂级数发散；当$x=\pm 2$时，幂级数成为$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)$，此级数发散．所以，幂级数的收敛域为$(-2,2)$．

（2）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$；

解：记$u_n=\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，则

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=x^2,$$

当$|x|<1$时，$\rho<1$，幂级数绝对收敛；当$|x|>1$时，$\rho>1$，幂级数发散；当$x=\pm 1$时，幂级数成为$\pm\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$，是收敛的交错级数．所以，幂级数的收敛域为$[-1,1]$.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

解：记$u_n=\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$，则

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=|x-5|\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=|x-5|,$$

当$|x-5|<1$时，$\rho<1$，幂级数绝对收敛；当$|x-5|>1$时，$\rho>1$，幂级数发散；当$x=6$时，幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，此级数发散；当$x=4$时，幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，是收敛的交错级数．所以，幂级数的收敛域为$[4,6)$.

2．求下列幂级数的和函数：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$；

解：$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n=(x-1)\sum_{n=1}^{\infty}[(x-1)^n]'=(x-1)[\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n]'$

$$=(x-1)[\frac{1}{1-(x-1)}-1]'=\frac{x-1}{(2-x)^2}，（-1<x-1<1）.$$

幂级数当$x=0$，$x=2$时发散，所以

$$s(x)=\frac{x-1}{(2-x)^2},\quad x\in(0,2).$$

（2）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$；

解：$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t$

$$=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan x\text{，（}-1<x<1\text{）.}$$

幂级数当 $x=\pm1$ 时收敛，且函数 $\arctan x$ 在点 $x=\pm1$ 连续，所以

$$s(x)=\arctan x\text{，}\quad x\in[-1,1].$$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$.

解：$s(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})''=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1})''$

$$=x(\frac{1}{1-x}-1-x)''=\frac{2x}{(1-x)^3}\text{，（}-1<x<1\text{）.}$$

幂级数当 $x=\pm1$ 时发散，所以

$$s(x)=\frac{2x}{(1-x)^3}\text{，}\quad x\in(-1,1).$$

无穷级数作业 4

1．将下列函数展开成 x 的幂级数：

（1）$\ln(a+x)\ (a>0)$；

解：$\ln(a+x)=\ln a+\ln(1+\frac{x}{a})=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na^n}x^n$，（$-a<x\le a$）.

（2）2^x；

解：$2^x=e^{x\ln 2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n 2}{n!}x^n$，（$-\infty<x<+\infty$）.

（3）$(1+x)\ln(1+x)$.

解：$(1+x)\ln(1+x)=(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-2}}{n-1}x^n=x+\sum_{n=2}^{\infty}[\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{(-1)^{n-2}}{n-1}]x^n$$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n\text{，（}-1<x\le1\text{）.}$$

2．将下列函数 $f(x)$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数：

(1)　$f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$；

解：$f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$，

$$\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(x-1)^{n}$$，（$-1<\frac{x-1}{2}<1$，即 $-1<x<3$）

$$\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{1-(x-1)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{n}$$，（$-1<x-1<1$，即 $0<x<2$）

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})(x-1)^{n}$$，（$0<x<2$）.

（2） $f(x)=\frac{1}{(3-x)^{2}}$.

解：$$\frac{1}{3-x}=\frac{1}{2-(x-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}(x-1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}(x-1)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(x-1)^{n}$$，（$-1<x<3$）.

$$f(x)=(\frac{1}{3-x})'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}(x-1)^{n-1}$$，（$-1<x<3$）.

3．将函数 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n}(2n-1)}$ 的和.

解：$$\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n}+\cdots$$，（$-1<x\le 1$）

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^{2}}{2}-\frac{x^{3}}{3}-\cdots-\frac{1}{n}x^{n}-\cdots$$，（$-1\le x<1$）

$$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2(x+\frac{x^{3}}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}+\cdots)$$，（$-1<x<1$）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n}(2n-1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}=\frac{1}{4}f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\ln 3.$$

4．设 $f(x)=2\cos x+\sin x^{2}-2$，求 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^{4}}$ 及 $f^{(10)}(0)$.

解：$$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{4}}{4!}-\frac{x^{6}}{6!}+\frac{x^{8}}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\cdots,$$

$$\sin x^{2}=x^{2}-\frac{x^{6}}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}+\cdots,$$

$$f(x)=\frac{1}{12}x^{4}-(\frac{2}{6!}+\frac{1}{3!})x^{6}+\frac{2}{8!}x^{8}+(\frac{1}{5!}-\frac{2}{10!})x^{10}+\cdots,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^{4}}=\lim_{x\to 0}[\frac{1}{12}-(\frac{2}{6!}+\frac{1}{3!})x^{2}+\frac{2}{8!}x^{4}+(\frac{1}{5!}-\frac{2}{10!})x^{6}+\cdots]=\frac{1}{12},$$

$$f^{(10)}(0)=10!(\frac{1}{5!}-\frac{2}{10!})=\frac{10!}{5!}-2.$$