数列极限

一、数列的定义

定义:按自然数1,2,3,$\cdots$编号依次排列的一列数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \qquad (1)$$

称为无穷数列,简称数列.其中的每个数称为数列的项,x_n称为通项(一般项).数列(1)记为$\{x_n\}$.

例如 $2,4,8,\cdots,2^n,\cdots;$ $\{2^n\}$

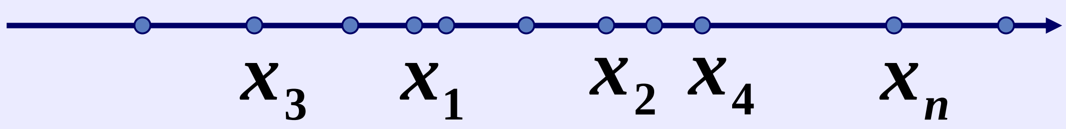
$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots; \qquad \{\frac{1}{2^n}\}$$

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots; \qquad \{(-1)^{n-1}\}$$

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots; \qquad \{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\}$$

$$\sqrt{3},\sqrt{3+\sqrt{3}},\cdots,\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}},\cdots$$

注意： 1.数列对应着数轴上一个点列.可看作一动点在数轴上依次取 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$.



2.数列是整标函数 $x_n = f(n)$.

三、数列的极限

当n无限增大时, 如果数列$\{x_n\}$的一般项x_n无限接近于常数a, 则称数列$\{x_n\}$的极限为a.

观察数列

$$\left\{x_n = 1 + \frac{1}{n}\right\}\text{当}n \to \infty\text{时的变化趋势}$$

问题：当 n 无限增大时, x_n是否无限接近于某一确定的数值?如果是,如何确定?

当 n 无限增大时, $x_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于 1.

对极限仅仅停留于直观的描述和观察是非常不够的

凭观察能判定数列 $\left\{ x_n = (1 + \frac{1}{n})^n \right\}$ 的极限是多少吗

显然不能

问题："无限接近"意味着什么?如何用数学语言刻划它.

$$\because \quad |x_n - 1| = \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

给定 $\frac{1}{100}$，由 $\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$，只要 $n>100$ 时，有 $\left|x_n-1\right|<\frac{1}{100}$，

给定 $\frac{1}{1000}$，只要 $n>1000$ 时，有 $\left|x_n-1\right|<\frac{1}{1000}$，

给定 $\frac{1}{10000}$，只要 $n>10000$ 时，有 $\left|x_n-1\right|<\frac{1}{10000}$，

给定 $\varepsilon>0$，只要 $n>N(=[\frac{1}{\varepsilon}])$ 时，有 $\left|x_n-1\right|<\varepsilon$ 成立.

这就是“当 n 无限增大时，x_n 无限地接近于1”的实质和精确的数学描述。

当n无限增大时，如果数列$\{x_n\}$的一般项x_n无限接近于常数a, 则数列$\{x_n\}$的极限是a.

• **分析**

当n无限增大时，x_n无限接近于a .

$\Leftrightarrow$当n无限增大时, $|x_n-a|$无限接近于0 .

$\Leftrightarrow$当n无限增大时, $|x_n-a|$可以任意小, 要多小就能有多小.

$\Leftrightarrow$当n增大到一定程度以后，$|x_n-a|$能小于事先给定的任意小的正数.

因此, 如果 n 增大到一定程度以后, $|x_n-a|$能小于事先给定的任意小的正数, 则当n无限增大时, x_n无限接近于常数a.

下页

定义 如果对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 N，使得对于 $n > N$ 时的一切 x_n，不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 都成立，那么就称常数 a 是数列 x_n 的极限，或者称数列 x_n 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{或} \; x_n \to a \quad (n \to \infty).$$

如果数列没有极限,就说数列是发散的.

- **极限定义的简记形式**

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in Z^+, \text{当} n > N \text{时}, \text{有} |x_n - a| < \varepsilon .$$

注

①定义1习惯上称为极限的ε—N定义，它用两个动态指标ε和N刻画了极限的实质，用$|x_n-a|<\varepsilon$定量地刻画了x_n与a之间的距离任意小，即任给ε>0标志着“要多小”的要求，用$n>N$表示n充分大。这个定义有三个要素：1^0，正数ε，2^0，正整数N，3^0，不等式$|x_n-a|<\varepsilon$（$n>N$）

②定义中的ε具有二重性：一是ε的任意性，二是ε的相对固定性。ε的二重性体现了x_n逼近a时要经历一个无限的过程（这个无限过程通过ε的任意性来实现），但这个无限过程又要一步步地实现，而且每一步的变化都是有限的（这个有限的变化通过ε的相对固定性来实现）。

③定义中的N是一个特定的项数，与给定的ε有关。重要的是它的存在性，它是在ε相对固定后才能确定的，且由$|x_n-a|<\varepsilon$来选定，一般说来，ε越小，N越大，但须注意，对于一个固定的ε，合乎定义要求的N不是唯一的。用定义验证x_n以a为极限时，关键在于设法由给定的ε，求出一个相应的N，使当$n>N$时，不等式$|x_n-a|<\varepsilon$成立。

在证明极限时ε，n，N之间的逻辑关系如下图所示

$$\begin{array}{ccc} |x_n-a| & < & \varepsilon \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ n & > & N \end{array}$$

④定义中的不等式$|x_n-a|<\varepsilon$（$n>N$）是指下面一串不等式

$$|x_{N+1}-a|<\varepsilon \quad |x_{N+2}-a|<\varepsilon \quad |x_{N+3}-a|<\varepsilon$$

$\cdots\cdots$ 都成立，

而对 $|x_1-a|<\varepsilon \quad \cdots\cdots \quad |x_N-a|<\varepsilon$

则不要求它们一定成立

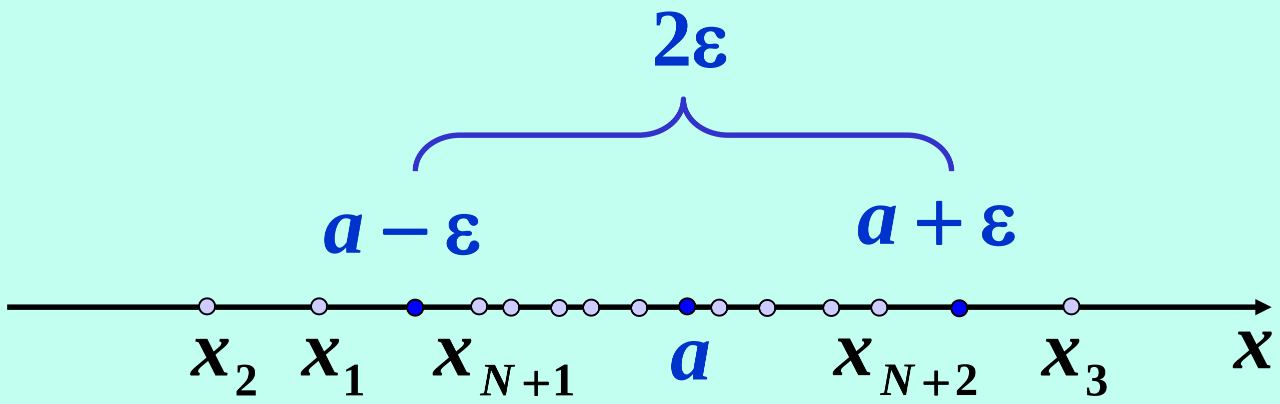
数列极限的几何意义

$\forall\varepsilon>0, \exists N,$ 使得 N 项以后的所有项

$$x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}, \cdots\cdots$$

都落在a点的ε邻域 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$内

因而在这个邻域之外至多能有数列中的有限个点



这就表明数列x_n所对应的点列除了前面有限个点外都能凝聚在点a的任意小邻域内，同时也表明数列x_n中的项到一定程度时变化就很微小，呈现出一种稳定的状态，这种稳定的状态就是人们所称谓的“收敛”。

注意: 数列极限的定义未给出求极限的方法.

例1 已知 $x_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ 证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

证明 $|x_n - 0| = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

故 $\forall \varepsilon > 0$ 要使 $|x_n - 0| < \varepsilon$

只须使 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$

因此 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 则当 n >N时，有

$|x_n - 0| < \varepsilon$ 得证 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

利用定义验证数列极限，有时遇到的不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 不易考虑，往往采用把 $|x_n - a|$ 放大的方法。若能放大到较简单的式子，就较容易从一个比较简单的不等式去寻找项数指标N

放大的原则：

①放大后的式子较简单

②放大后的式子以0为极限

例2 证明 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$$

证明 $$|x_n - 1| = \left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} - 1\right| = \frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}$$

$$\le \frac{1}{n}\cdot\frac{a^2}{n} \qquad (\text{若 } n > a^2 \text{ 则 } \frac{a^2}{n} < 1)$$

故 $\forall \varepsilon > 0 \quad N = \max\left\{[\frac{1}{\varepsilon}],[a^2]\right\}$ 则当n >N时，有

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} - 1\right| < \frac{1}{n}\cdot\frac{a^2}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} = 1$$

例3 证明 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, 其中 $|q| < 1.$

证 若q=0则上式显然成立 下证$q \neq 0$的情形

任给$\varepsilon > 0$，（不妨设$\varepsilon < 1$）

$$|x_n - 0| = |q^n| < \varepsilon, \quad n \ln|q| < \ln \varepsilon,$$

$$\therefore n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}, \quad \text{取} N = [\frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}] + 1, \quad \text{则当} n > N \text{时},$$

$$\text{就有} |q^n - 0| < \varepsilon, \quad \therefore \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

注

在论证极限问题时，都可以假设ε<1，因为若对小于1的ε已经得到项数指标N，则对于大于1的ε上述项数指标N仍合乎定义要求。

例4　设$x_n > 0$,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$,

求证$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

证　任给$\varepsilon > 0$,　$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,　(对$\varepsilon_1 = \sqrt{a}\varepsilon$)

$\therefore \exists N$使得当$n > N$时恒有$|x_n - a| < \varepsilon_1$,

从而有$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{a}} = \varepsilon$

故$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

四、数列极限的性质

1.有界性

定义：对数列x_n，若存在正数M，使得一切自然数n，恒有$|x_n| \le M$成立，则称数列x_n有界，否则，称为无界.

例如，数列 $x_n = \dfrac{n}{n+1}$; 有界　数列 $x_n = 2^n$.无界

数轴上对应于有界数列的点x_n都落在闭区间$[-M, M]$上.

定理1 收敛的数列必定有界.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 由定义, 取$\varepsilon = 1$,

则$\exists N$,使得当$n > N$时恒有$\left|x_n - a\right| < 1$,

$$\Rightarrow |x_n| = |x_n - a + a| \le |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

记 $M = \max\{\left|x_1\right|, \cdots, \left|x_N\right|, 1 + |a|\}$,

则对一切自然数n,皆有$\left|x_n\right| \le M$, 故$\{x_n\}$有界.

注意：有界性是数列收敛的必要条件.

推论 无界数列必定发散.

2.唯一性

定理2 每个收敛的数列只有一个极限.

[分析] 直接证明较困难，采用反证法

由数列极限的几何意义， $\forall \varepsilon > 0, \exists N,$当$n > N$时

$$x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

在a的任一ε邻域内聚集着x_n中的无穷多个点，而在该邻域之外至多有x_n中的有限个点

证　用反证法　　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,又 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$,

$a \neq b$不妨设$a < b$

取$\varepsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0$　由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,及 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$,

$\exists N_1, N_2$.使得　当$n > N_1$时恒有$|x_n - a| < \dfrac{b-a}{2}$;

$$\Rightarrow \quad x_n < \frac{a+b}{2}$$

当$n > N_2$时恒有$|x_n - b| < \dfrac{b-a}{2}$;　$\Rightarrow \quad x_n > \dfrac{a+b}{2}$

取$N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当$n > N$时,同时有

$$x_n < \frac{a+b}{2} \qquad x_n > \frac{a+b}{2}$$

矛盾，这说明结论成立

例5 证明数列$x_n=(-1)^{n+1}$是发散的.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 由定义, 对于$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$,

则$\exists N$,使得当$n>N$时,有$|x_n-a|<\dfrac{1}{2}$成立,

即当$n>N$时,$x_n\in(a-\dfrac{1}{2},a+\dfrac{1}{2})$, 区间长度为1.

而x_n无休止地反复取$1,-1$两个数,

不可能同时位于长度为1的区间内.

事实上,$\{x_n\}$是有界的,但却发散.

❖ **定理3（收敛数列的保号性）**

如果数列$\{x_n\}$收敛于a，且$a>0$(或$a<0$)，那么存在正整数N，当$n>N$时，有$x_n>0$(或$x_n<0$).

证明 就$a>0$的情形证明.

由数列极限的定义，对$\varepsilon=\frac{a}{2}>0$，$\exists N\in\mathbf{N}^{+}$，当$n>N$时，有

$$|x_n-a|<\frac{a}{2},$$

从而 $x_n>a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}>0$.

• **推论**

如果数列$\{x_n\}$从某项起有$x_n\geq 0$(或$x_n\leq 0$)，且数列$\{x_n\}$收敛于a，那么$a\geq 0$(或$a\leq 0$).

在数列 $\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列中的先后次序，得到的数列称为子数列：

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots\cdots, x_{n_k}, \cdots\cdots$$

在$\{x_{n_k}\}$中，x_{n_k}是第k项，而x_{n_k}在$\{x_n\}$中是第n_k项，

显然$n_k \geq k$

定理4 **若数列x_n收敛于a，则它的任一子数列也收敛，且极限也是a**

这一定理表明的是收敛的数列与其子数列之间的关系。由此可知，若数列x_n有两个子数列收敛于不同的极限值，则x_n一定是发散的。

如$x_n = (-1)^{n+1}$ $\{x_{2k-1}\}$收敛于1 $\{x_{2k}\}$收敛于-1

❖ 定理4(收敛数列与其子数列间的关系)

如果数列$\{x_n\}$收敛于a,那么它的任一子数列也收敛,且极限也是a.

证明 设数列$\{x_{n_k}\}$是数列$\{x_n\}$的任一子数列.

因为数列$\{x_n\}$收敛于a, 所以$\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}^+$, 当$n>N$时,有$|x_n-a|<\varepsilon$.

取$K=N$, 则当$k>K$时, $n_k\geq k>K=N$. 于是$|x_{n_k}-a|<\varepsilon$.

这就证明了$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$.

例6 对于数列x_n 若$x_{2k}\to a(k\to\infty)$

$x_{2k+1}\to a(k\to\infty)$ 则$x_n\to a(n\to\infty)$

证 $\forall\varepsilon>0$ 由$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$知

$\exists K_1$,使当$k>K_1$时，有 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$

再由$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}=a$知

$\exists K_2$,使当$k>K_2$时，有 $|x_{2k+1}-a|<\varepsilon$

取$N=\max\{2K_1,2K_2+1\}$ 则当$n>N$时

若$n=2m$则$2m>2K_1\Rightarrow m>K_1$

此时有 $|x_n-a|=|x_{2m}-a|<\varepsilon$

若$n=2m+1$则$2m+1>2K_2+1 \Rightarrow m>K_2$

此时有 $|x_n-a|=|x_{2m+1}-a|<\varepsilon$

总之： $\forall \varepsilon>0 \quad \exists N$ 使当$n>N$时

恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

对数列$\{x_n\}$：若子数列$\{x_p \mid p\in A\}$与$\{x_q \mid q\in B\}$

(其中$A\bigcup B=N$)趋于同一极限值$a(p,q\to\infty)$

则$x_n\to a(n\to\infty)$

五.小结

数列: 研究其变化规律;

数列极限: 极限思想,精确定义,几何意义;

收敛数列的性质: 有界性,唯一性,保号性.