院、系领导审批并签名		A 卷

广州大学 2011-2012 学年第一学期考试卷

高等数学Ⅰ1（90 学时）参考解答与评分标准

一．填空题（每空 2 分，本大题满分 30 分）

1．曲线 $y=\dfrac{x}{x+1}\cos\dfrac{1}{x}$ 有水平渐近线 $y=$ $\underline{\quad 1 \quad}$ 和铅直渐近线 $x=$ $\underline{\quad -1 \quad}$.

2．设 $f(x)=(1+2x)^{\frac{1}{x}}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ $\underline{\quad e^2 \quad}$， $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=$ $\underline{\quad 1 \quad}$.

3．设 $y=x^2-x$，当 $x=2$，$\Delta x=0.01$ 时，$\Delta y=$ $\underline{\quad 0.0301 \quad}$，$\mathrm{d}y=$ $\underline{\quad 0.03 \quad}$.

4．设 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=$ $\underline{\quad t\cos t \quad}$， $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ $\underline{\quad t \quad}$.

5．若点 $(1,\ 2)$ 为曲线 $y=ax^3-6x^2+b$ 的拐点，则常数 $a=$ $\underline{\quad 2 \quad}$，$b=$ $\underline{\quad 6 \quad}$.

6．设 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}+bx+a, & x\le 0 \\ x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续且可导，则常数 $a=$ $\underline{\quad -1 \quad}$，$b=$ $\underline{\quad -2 \quad}$.

7．设 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sin t^3\,\mathrm{d}t$，则 $f(1)=$ $\underline{\quad 0 \quad}$， $f'(x)=$ $\underline{\quad \sin x^3 \quad}$， $f^{(10)}(0)=$ $\underline{\quad -\dfrac{9!}{6} \quad}$.

二．解答下列各题（每小题 8 分，本大题满分 24 分）

1．求函数 $y=\arcsin\sqrt{1-x^4}$ 的一阶和二阶导数.

解：$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x^4)}}(\sqrt{1-x^4})'$ 。。。。。。（2 分）

$$=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^4}}\cdot(-4x^3)=-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$ 。。。。。。（5 分）

$$y''=-\frac{2\sqrt{1-x^4}-2x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^4}}\cdot(-4x^3)}{1-x^4}=\frac{2+2x^4}{(x^4-1)\sqrt{1-x^4}}$$ 。。。。。。（8 分）

2．求曲线 $y^3+(x-1)y+x^3=9$ 在点 $x=1$ 处的切线方程.

解：将 $x=1$ 代入曲线方程，得 $y=2$，切点为 $(1,\ 2)$． 。。。。。。（1 分）

曲线方程两边对 x 求导，得

$$3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y+(x-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3x^2=0$$ 。。。。。。（5 分）

将 $x=1$，$y=2$ 代入上式，得切线斜率 $k=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1,\ y=2}=-\dfrac{5}{12}$， 。。。。。。（6 分）

切线方程为 $y-2=-\dfrac{5}{12}(x-1)$，即 $5x+12y-29=0$． 。。。。。。（8 分）

3．求函数 $f(x)=e^x\cos x$ 的极大值和极小值.

解：$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x$， 。。。。。。（2 分）

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_k=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in\mathrm{Z}$． 。。。。。。（4 分）

$f''(x)=-2e^x\sin x$， 。。。。。。（5 分）

当k为偶数时，$f''(x_k)=-\sqrt{2}\,e^{x_k}<0$，$f(x_k)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{x_k}$为极大值；　。。。（7 分）

当k为奇数时，$f''(x_k)=\sqrt{2}\,e^{x_k}>0$，$f(x_k)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{x_k}$为极小值.　　。。。（8 分）

三．计算下列积分（每小题 6 分，本大题满分 18 分）

1．$\displaystyle\int\frac{x\arctan x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

解：$\displaystyle\int\frac{x\arctan x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\arctan x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}(x^2)$　。。。。。。（2 分）

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int\arctan x^2\,\mathrm{d}(\arctan x^2)$　。。。。。。（4 分）

$\displaystyle=\frac{1}{4}(\arctan x^2)^2+C$　。。。。。。（6 分）

2．$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}}\,\mathrm{d}x$.

解：令$x=2\sin t$，$t=\arcsin\dfrac{x}{2}$，则

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/6}\frac{1}{8\cos^3 t}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t$　。。。。。。（3 分）

$\displaystyle=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/6}\sec^2 t\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{4}\tan t\right]_0^{\pi/6}=\frac{\sqrt{3}}{12}$　。。。。。。（6 分）

3．$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

解：$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}(\frac{1}{x})$　。。。。。。（1 分）

$$=-\left[\frac{\ln x}{x}\right]_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$ 。。。。。。（3 分）

$$=-\left[\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty}=1$$ 。。。。。。（6 分）

四.（本题满分 10 分）

求函数 $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}+\arctan\frac{1}{x-1}$ 的间断点，并判别其类型.

解：由初等函数 $f(x)$ 在其定义域内处处连续，可知 $f(x)$ 的间断点有两个：$x=0$ 和 $x=1$. 。。。。。。（3 分）

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=1-\frac{1}{e-1}+\frac{\pi}{2}，\quad \lim_{x\to 1^-}f(x)=1-\frac{1}{e-1}-\frac{\pi}{2}，$$

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点. 。。。。。。（5 分）

$$\lim_{x\to 0}f(x)=-\frac{\pi}{4}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=-\frac{\pi}{4}+\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$

$$=-\frac{\pi}{4}+\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=-\frac{\pi}{4}+\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点. 。。。。。。（10 分）

五.（本题满分 6 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，在 $(0,\ 1)$ 内可导，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明：在 $(0,\ 1)$ 内存在 ξ，满足 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证明：由积分中值定理知，存在 $a\in(0,\ 1)$，使得

$$f(a)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0.$$ 。。。。。。（2 分）

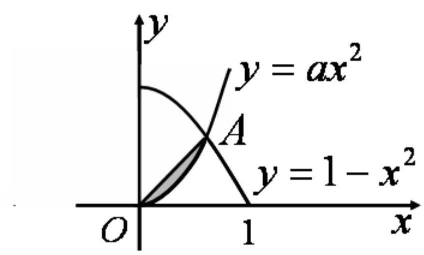
设 $g(x)=xf(x)$，则 $g(x)$ 在 $[0,\ a]$ 上连续，在 $(0,\ a)$ 内可导，且 $g(0)=0=g(a)$.

由罗尔定理知，存在 $\xi\in(0,\ a)\subset(0,\ 1)$，使得

$$g'(\xi)=0，即\ f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$ 。。。。。。（6 分）

六．（本题满分 12 分）

设曲线 $y=ax^2\ (a>0,\ x\geq 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A，过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形．问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大？



解：点 A 的坐标为 $(\dfrac{1}{\sqrt{a+1}},\ \dfrac{a}{a+1})$，　。。。。。。（1 分）

直线 OA 的方程为 $y=\dfrac{a}{\sqrt{a+1}}x$．。。。。。。（3 分）

所得的旋转体体积为

$$V=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}[\pi(\frac{a}{\sqrt{a+1}}x)^2-\pi(ax^2)^2]\mathrm{d}x \quad \text{。。。。。。（6 分）}$$

$$=\pi\left[\frac{a^2}{3(a+1)}x^3-\frac{a^2}{5}x^5\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}=\frac{2\pi a^2}{15(a+1)^{5/2}} \quad \text{。。。。。。（9 分）}$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{2a(a+1)^{5/2}-a^2\cdot\frac{5}{2}(a+1)^{3/2}}{(a+1)^5}=\frac{\pi a(4-a)}{15(a+1)^{7/2}}$$

令$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=0$，得唯一驻点$a=4$，此时旋转体体积$V$最大．。。。（12 分）