

作业 5.1

一. 填空题: (50 分)

1. 比较积分值的大小: (20 分)

$$(1) \int_0^1 x^2 dx \text{ ______ } \int_0^1 x^3 dx;$$

$$(2) \int_1^2 x^2 dx \text{ ______ } \int_1^2 x^3 dx;$$

$$(3) \int_1^2 \ln x dx \text{ ______ } \int_1^2 \ln^2 x dx;$$

$$(4) \int_0^1 x dx \text{ ______ } \int_0^1 \ln(1+x) dx.$$

2. 计算下列导数:

$$(1) \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt;$$

$$(2) \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt;$$

$$(3) \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt.$$

二. 计算下列极限: (20 分)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \int_0^x \cos t^2 dt;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x e^{t^2} dt)^2}{\int_0^x t e^{2t^2} dt};$$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+4} (\arctan t)^2 dt$;

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} (1 + 2^3 + \cdots + n^3)$.

三. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 证明 $\int_a^{a+T} f(x) dx$ 的值与 a 无关.

四. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上为单调增加的连续函数, $g(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, x]$ 上的平均值, 证明 $g(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上是单调增加的.

五. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$. 证明: 在 $(0, 1)$ 内存在 ξ , 满足 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.