高等数学I1部分习题参考解答

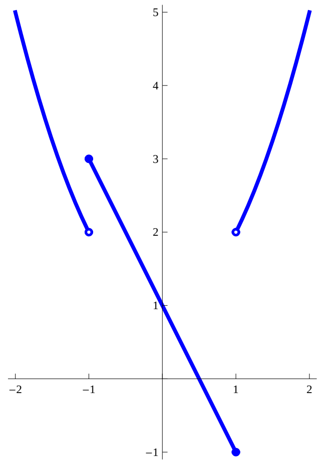
习题 1.1

12. (1) $f(x)=\begin{cases}1-2x, & |x|\le 1,\\ x^2+1, & |x|>1,\end{cases}$ 函数图像如图;

(2) 值域为 $[-1,+\infty)$;

(3) $f(0)=1$, $f(2)=f(-2)=5$, $f(-1)=3$, $f(1)=-1$,

$$f(1+k)=\begin{cases}-2k-1, & -2\le k\le 0,\\ k^2+2k+2, & k<-2 \text{ 或 } k>0.\end{cases}$$



13. (1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{|x|-x}$, 由 $x+1\ge 0$ 得 $x\ge -1$, 由 $|x|-x\ne 0$ 得 $x<0$, 因此定义域为 $[-1,0)$;

(3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, 要求自变量 x 满足 $(x-1)(x+1)\ge 0$, 且 $x+1\ne 0$, 因此定义域为 $(-\infty,-1)\bigcup[1,+\infty)$.

15. 证明: $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $\forall M>1$, 当 $0<x<\dfrac{1}{\sqrt{M}}$ 时, $f(x)>M$, 因此 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 无界; 而当 $0<a<1$ 时, $f(x)$ 在 $[a,1]$ 的值域是 $\left[1,\dfrac{1}{a^2}\right]$, 从而有界.

16. (4) $f(x)=4-x^2$, 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增, 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减.

17. (2) $y=x\sin x$, 其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 关于原点对称, 且 $y(-x)=-x\sin(-x)=x\sin x=y(x)$, 因此该函数是偶函数.

18. (2) $y=\tan 2x$ 是周期函数, 最小正周期是 $\dfrac{\pi}{2}$.

19. (6) $y=\sin\dfrac{2x-1}{3}$ 的反函数为 $y=\dfrac{3\arcsin x+1}{2}$, $x\in[-1,1]$.

20. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\sqrt{x+2}$, 则复合函数为 $f\circ g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$, $x\in(-2,+\infty)$; $g\circ f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}+2}$, $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\bigcup(0,+\infty)$.

习题 1.2

1. (1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{(-1)^n}{n}\right)=2$.

2. (4) 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$.

【证法一】 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\dfrac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}>0$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}<\frac{1}{2n^2}<\varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$.

【证法二】 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\dfrac{1}{\varepsilon}>0$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1<\frac{n+1}{n}-1=\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$.

4. (1) **证明**: 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 因此 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, $|a_n-a|<\varepsilon$, 从而 $\big||a_n|-|a|\big|\le|a_n-a|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

(2) 反之不一定成立. 例如取 $a_n=(-1)^n$, $a=1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$, 但 $\{a_n\}$ 没有极限.

(3) 当 $a=0$ 时, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 事实上, 由已知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, $\big||a_n|-0\big|=|a_n|<\varepsilon$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

6. (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+n^2+1}{3n^3+n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^3}}{3+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}}=\dfrac{2}{3}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}.$

7. (5) $\forall\varepsilon>0$, 不妨设 $\varepsilon<1$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{7}\in(0,1)$, 则当 $0<|x-3|<\delta$ 时, 有 $|x^2-9|=|x+3|\cdot|x-3|<(6+\delta)\cdot|x-3|<7\,|x-3|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$.

8. (2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}(-x-1)=-2$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$, 因此 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$, 从而 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在;

(6) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, 所以 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1-1}{1+1}=0$.

13. 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x^2+b}=\sqrt{b}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}2\mathrm{e}^x=2$, 所以当 a 取任意值, $b=4$ 时, 有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$.

【注】当 $a=2$, $b=4$ 时, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

15. (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{x-2}=-3$;

(7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}\cdot\dfrac{2x-4}{\sqrt{2x+5}+3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{\sqrt{2x+5}+3}=\dfrac{1}{3}$;

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+2)^{90}(x+3)^{10}}{(2x+1)^{100}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^{90}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{10}}{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{100}}=\dfrac{3^{90}}{2^{100}}$;

(15) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 是无穷小量, 而 $2+\cos x\in[1,3]$ 是有界量, 因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\cos x}{x}=0$.

21. (1) 因为 $3=(3^n)^{\frac{1}{n}}\leq(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}\leq 3^{\frac{n+1}{n}}$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{n+1}{n}}=3$, 由夹逼原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

22. 证明: 取 $x_n=\dfrac{1}{2n}$, $y_n=\dfrac{1}{2n+\dfrac{1}{2}}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{x_n}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n\pi)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, 从而 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{\pi}{x}$ 不存在.

24. (4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=\dfrac{1}{2}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=\dfrac{1-1}{1+1}=0$;

(18) 若 $\alpha\neq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\frac{x}{\alpha}}\right)^{\alpha\beta}=\mathrm{e}^{\alpha\beta}$; $\alpha=0$ 时结果也成立;

(22) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{-2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-2}}\right)^{\frac{-2(3x+1)}{2x+1}}=\mathrm{e}^{-3}$.

29. **证明**: 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^3}+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^3}+1}=0$, 所以当 $x\to 0$ 时, $\sqrt{1+x^3}-1=o(x^2)$.

32. **证明**: 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sin\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}}=1$, 所以当 $x\to\infty$ 时, $x\sin\dfrac{1}{x^2}\sim\dfrac{1}{x}$.

习题 1.3

1. (2) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{-x}=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 因此 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, 从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点; 在 $x\neq 0$ 处, $f(x)$ 连续;

(8) $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)\bigcup(0,+\infty)$;

① $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=+\infty$, 因此 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点;

② $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\mathrm{e}=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 从而 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, 但 $f(0)$ 没有定义, 因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点;

③ $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sin x}{x}=\sin 1$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-1)=1$, 从而 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$, 因此 $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点;

④ 当 $x>-1$ 且 $x\neq 0, 1$ 时, $f(x)$ 连续.

4. 由函数的定义可见, $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续, 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续, 只需要 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$;

(1) 当 $a\neq0$ 时, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left((1+ax)^{\frac{1}{ax}}\right)^a=\ln\mathrm{e}^a=a$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(a^2+x^2)=a^2$, 此时 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 亦即 $a^2=a$, 解得 $a=1$;

(2) 当 $a=0$ 时, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln1}{x}=0=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ 成立;

综上, 当 $a=0$ 或 $a=1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续.

11. (6) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\arctan x)\cos\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$;

(8) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5+4x}+\mathrm{e}^{x-1}}{\mathrm{e}^{x-1}\arctan x}=\dfrac{\sqrt{9}+1}{1\cdot\frac{\pi}{4}}=\dfrac{16}{\pi}$.

12. 由于 $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=x^2-1$, 复合函数为

$$f\circ g(x)=\begin{cases}-1, & -1<x<1,\\ 0, & x=\pm1,\\ 1, & x<-1\text{ 或 }x>1,\end{cases}\qquad g\circ f(x)=\begin{cases}0, & x\neq0,\\ -1, & x=0,\end{cases}$$

则 $x=\pm1$ 是 $f\circ g(x)$ 的跳跃间断点, 当 $x\neq\pm1$ 时, $f\circ g(x)$ 连续; $x=0$ 是 $g\circ f(x)$ 的可去间断点, 当 $x\neq0$ 时, $g\circ f(x)$ 连续.

14. 题目改为: "证明: 曲线 $y=x^4+5x^2-8x+1$ 在 $x=1$ 与 $x=2$ 之间至少与 x 轴有一个交点."

证明: 令 $f(x)=x^4+5x^2-8x+1$, 则 $f(1)=-1<0$, $f(2)=21>0$, 由零点定理, $\exists\xi\in(1,2)$, 使得 $f(\xi)=0$, 即曲线 $y=x^4+5x^2-8x+1$ 在 $x=1$ 与 $x=2$ 之间至少与 x 轴有一个交点.

20. **【证法一】** 用反证法. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上没有零点, 假设 $\exists x_1$, $x_2\in[a,b]$, 使得 $f(x_1)>0$, $f(x_2)<0$; 不妨设 $x_1<x_2$, 因为 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]\subset[a,b]$ 上连续, 由零点定理, $\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使得 $f(\xi)=0$, 这与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上没有零点矛盾! 因此, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正或恒负.

【证法二】 用最值定理和介值定理. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值分别为 m 和 M, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域为 $[m,M]$; 由条件 $0\notin[m,M]$, 因此, $m>0$ 或者 $M<0$, 即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正或恒负.

总复习题一

11. (2) 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{2^k}$, 则 $S_n=2S_n-S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{2^k}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{2k+1}{2^k}-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{2^k}=1-\dfrac{2n-1}{2^n}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{2}{2^k}=1-\dfrac{2n-1}{2^n}+2-\dfrac{1}{2^{n-2}}=3-\dfrac{2n+3}{2^n}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=3$.

习题 2.1

5. (1) 根据导数的定义, $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2\sin\dfrac{h}{2}\sin\left(x+\dfrac{h}{2}\right)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}\cdot\sin\left(x+\dfrac{h}{2}\right)=-\sin x$, 即 $(\cos x)'=-\sin x$.

6. (4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)}{2\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\dfrac{1}{2}f'(1)$.

8. (2) $y'(x)=\cos x$, $y'(\pi)=-1$, 因此 $y=\sin x$ 在点 $(\pi,0)$ 处的切线方程为

$$y=-(x-\pi)=-x+\pi.$$

9. (2) $y=\dfrac{1}{x}$, $y'=-\dfrac{1}{x^2}$, 令 $-\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$, 解得 $x=\pm\sqrt{2}$, 对应的函数值 $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 因此在点 $\left(\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 和 $\left(-\sqrt{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处, 切线与直线 $x+2y-1=0$ 平行.

【注】此时, 切线方程分别为 $y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{1}{2}\left(x-\sqrt{2}\right)$ 和 $y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{2}\right)$, 即 $x+2y\pm 2\sqrt{2}=0$.

11. 由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$, 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 (其中第二个等号用到了无穷小量与有界量的乘积是无穷小量);

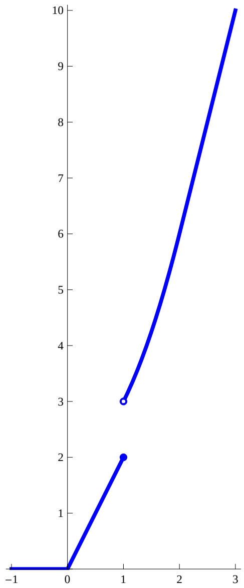
由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$, 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=0$.

【注】当 $x\neq 0$ 时, 求导得 $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, 因此 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不存在, 这只是说明导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 并不意味着 $f'(0)$ 不存在!

15. 计算左右极限可得 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=0=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)=2\neq$

$3 = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = 6 = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, 因此 $f(x)$ 在点 $x=0$, $x=2$ 处连续, 在点 $x=1$ 处不连续, 从而不可导;

计算左右导数可得 $f'_-(0) = 0 \neq 2 = f'_+(0)$, $f'_-(2) = 4 = f'_+(2)$, 从而 $f(x)$ 在点 $x=0$, $x=1$ 处不可导, 在点 $x=2$ 处可导.



16. 题目改为: "……, 使 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导."

解: 为使 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导, 需要 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续, 即 $2 = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = a+b$, 此外, 还需要 $2 = f'_-(1) = f'_+(1) = a$, 因此 $a=2$, $b=0$.

19. 由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续, 因此 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在, 又 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1} = 2$, 所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}\cdot(x-1) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$, 从而 $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$; 因此 $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1} = 2$.

习题 2.2

1. (4) $f(x) = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$, $f'(x) = \dfrac{\cos x(2+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(2+\cos x)^2} = \dfrac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$, 因此, $f'(0) = \dfrac{1}{3}$, $f'(\pi) = -1$.

2. (2) $y = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^x$, $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^x + \sqrt{x}\,\mathrm{e}^x = \dfrac{1+2x}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^x$;

(8) $y = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$, $y' = \dfrac{\dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$;

(9) $y=\dfrac{\sin x}{x^2}$, $y'=\dfrac{x^2\cos x-2x\sin x}{x^4}=\dfrac{x\cos x-2\sin x}{x^3}$.

6. (9) $y=\ln(\ln x)$, $y'=\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x\ln x}$;

(17) $y=2^{3x^2}$, $y'=2^{3x^2}\cdot(\ln 2)\cdot 6x=6x\cdot 2^{3x^2}\ln 2$;

(22) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$, $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$;

(28) $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x=\mathrm{e}^{x\ln\frac{x}{1+x}}$,

$y'=\mathrm{e}^{x\ln\frac{x}{1+x}}\left(\ln\dfrac{x}{1+x}+x\cdot\dfrac{1+x}{x}\cdot\dfrac{1+x-x}{(1+x)^2}\right)=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x\left(\ln\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1}{1+x}\right)$;

【另解】 $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x=\mathrm{e}^{x\ln\frac{x}{1+x}}=\mathrm{e}^{x(\ln|x|-\ln|1+x|)}$, 利用 $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$, 得

$y'=\mathrm{e}^{x\ln\frac{x}{1+x}}\left(\ln\dfrac{x}{1+x}+x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}\right)\right)=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x\left(\ln\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1}{1+x}\right)$;

(29) $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$, $y'=\arcsin\dfrac{x}{2}+x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{2}$.

7. (4) $y=f(xf(x))$, $y'=f'(xf(x))\cdot(f(x)+xf'(x))$.

9. (2) $y=\arctan\dfrac{f}{g}$, $y'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{f}{g}\right)^2}\cdot\dfrac{f'g-g'f}{g^2}=\dfrac{f'g-g'f}{f^2+g^2}$.

10. (4) 对 $y\cos x-\sin(x-y)=0$ 关于 x 求导, 有 $y'\cos x-y\sin x-\cos(x-y)(1-y')=0$, 解得 $y'=\dfrac{y\sin x+\cos(x-y)}{\cos x+\cos(x-y)}$;

(6) 方程写为 $\mathrm{e}^{y\ln x}=\mathrm{e}^{x\ln y}$, 关于 x 求导, 有 $\mathrm{e}^{y\ln x}\left(y'\ln x+\dfrac{y}{x}\right)=\mathrm{e}^{x\ln y}\left(\ln y+\dfrac{xy'}{y}\right)$, 即 $x^y\left(y'\ln x+\dfrac{y}{x}\right)=y^x\left(\ln y+\dfrac{xy'}{y}\right)$, 解得 $y'=\dfrac{y^x\ln y-yx^{y-1}}{x^y\ln x-xy^{x-1}}=\dfrac{\ln y-\dfrac{y}{x}}{\ln x-\dfrac{x}{y}}$ (第二个等号是因为 $x^y=y^x$).

【另解】方程 $x^y=y^x$ 两边取自然对数, 得 $y\ln x=x\ln y$, 关于 x 求导, 有 $y'\ln x+\dfrac{y}{x}=$

$\ln y+\dfrac{xy'}{y}$, 解得 $y'=\dfrac{\ln y-\dfrac{y}{x}}{\ln x-\dfrac{x}{y}}=\dfrac{xy\ln y-y^2}{xy\ln x-x^2}$.

11. (1) 对方程 $xy+\ln y=1$ 关于 x 求导, 有 $y+xy'+\dfrac{y'}{y}=0$, 解得 $y'=-\dfrac{y^2}{xy+1}$, 从而 $y'\big|_{x=1}=-\dfrac{y^2}{xy+1}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=-\dfrac{1}{2}$, 因此曲线在点 $(1,1)$ 的切线为 $y-1=-\dfrac{1}{2}(x-1)$, 即 $x+2y-3=0$.

13. 设点 $A(-5,0)$, 灯的坐标为 $B(3,a)$, 设直线 AB 与椭圆 $x^2+4y^2=5$ 相切于点 $C(x_0,y_0)$, 则有 $x_0^2+4y_0^2=5$. 对 $x^2+4y^2=5$ 关于 x 求导, 有 $2x+8yy'=0$, 解得 $y'=-\dfrac{x}{4y}$, 于是直线 AB 的方程为 $y-y_0=-\dfrac{x_0}{4y_0}(x-x_0)$, 即 $x_0x+4y_0y-5=0$. 代入 A 点坐标, 得 $x_0=-1$, 由于 C 点位于 x 轴上方, 有 $y_0=1$, 从而 AB 的方程为 $x-4y+5=0$. 代入 B 点坐标, 得 $a=2$, 亦即灯放置在距离 x 轴上方 2 个单位处.

14. (2) $x=\mathrm{e}^{2t}\cos t$, $y=\mathrm{e}^{2t}\sin t$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2\mathrm{e}^{2t}\cos t-\mathrm{e}^{2t}\sin t$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2\mathrm{e}^{2t}\sin t+\mathrm{e}^{2t}\cos t$, 有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{2\mathrm{e}^{2t}\sin t+\mathrm{e}^{2t}\cos t}{2\mathrm{e}^{2t}\cos t-\mathrm{e}^{2t}\sin t}=\dfrac{2\sin t+\cos t}{2\cos t-\sin t}$.

习题 2.3

1. (5) $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$, $f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

$f''(x)=-\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}-x\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}=-\dfrac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;

(11) $f(x)=x^2\mathrm{e}^{3x}$, $f'(x)=2x\mathrm{e}^{3x}+x^2\cdot 3\mathrm{e}^{3x}=\mathrm{e}^{3x}(3x^2+2x)$,

$f''(x)=3\mathrm{e}^{3x}(3x^2+2x)+\mathrm{e}^{3x}(6x+2)=\mathrm{e}^{3x}(9x^2+12x+2)$.

2. (1) $y=f(\sin x)$, $y'=f'(\sin x)\cos x$, $y''=f''(\sin x)\cos^2 x-f'(\sin x)\sin x$.

3. (4) $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}$, $f^{(n)}(x)=(-1)^n\,n!\left(\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{1}{x^{n+1}}\right)$.

7. 因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=0$, 所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续;

因为 $f'_-(0)=f'_+(0)=0$, 所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导, $f'(x)=\begin{cases}2x, & x\geq 0\\ -2x, & x<0\end{cases}$;

因为 $f''_-(0)=-2\neq 2=f''_+(0)$, 所以 $f''(0)$ 不存在, $f''(x)=\begin{cases}2, & x>0\\ \text{不存在}, & x=0\\ -2, & x<0\end{cases}$;

当 $n\geq 3$ 时, $f^{(n)}(x)=\begin{cases}0, & x>0\\ \text{不存在}, & x=0\\ 0, & x<0\end{cases}$.

习题 2.4

3. (3) $y=\mathrm{e}^{-2x}\cos 3x$, $y'=-2\mathrm{e}^{-2x}\cos 3x-3\mathrm{e}^{-2x}\sin 3x=-\mathrm{e}^{-2x}(2\cos 3x+3\sin 3x)$, 因此 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-2x}(2\cos 3x+3\sin 3x)\mathrm{d}x$.

4. 对方程 $\ln(x^2+y^2)=x+y-1$ 两边关于 x 求导, 有 $\dfrac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=1+y'$, 解得 $y'=\dfrac{2x-x^2-y^2}{x^2+y^2-2y}$, 所以 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\dfrac{2x-x^2-y^2}{x^2+y^2-2y}\mathrm{d}x$, 代入点 $(0,1)$, 得 $\mathrm{d}y\big|_{(0,1)}=\dfrac{2x-x^2-y^2}{x^2+y^2-2y}\bigg|_{(0,1)}\mathrm{d}x=\mathrm{d}x$.

5. (6) 因为 $\mathrm{d}f(x)=x\sin x^2\mathrm{d}x$, 所以 $f(x)=-\dfrac{1}{2}\cos x^2+C$, 其中 C 为任意常数.

8. 设圆柱体的半径为 R, 高为 h, 则体积 $V=\pi R^2h$, $\mathrm{d}V=\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R}\cdot\mathrm{d}R=2\pi Rh\mathrm{d}R$. 把 $R=2$, $h=10$, $\mathrm{d}R=0.02$ 代入, 计算得 $\mathrm{d}V=0.8\pi\approx 2.51\,(\mathrm{m}^3)$.

11. $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, 求导得 $f'(x)=\dfrac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$, 从而 $\mathrm{d}f\big|_{x=0}=f'(0)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x$, 因此 $\sqrt[3]{1.001}=f(0.001)\approx 1+\dfrac{1}{3}\times 0.001=1.00033$.

习题 3.1

1. 证明: 设 $f(x)=\arctan x+\operatorname{arccot} x$, 则其导数 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}=0$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 因此 $f(x)$ 是常函数; 因为 $f(1)=\arctan 1+\operatorname{arccot} 1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$, 所以 $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}$.

3. 证明: 设 $f(x)=x^3+2x-10$, 则 $f(1)=-7<0$, $f(2)=2>0$, 根据零点定理, $\exists\xi\in(1,2)$, 使得 $f(\xi)=0$; 若有 $x_1<x_2$ 满足 $f(x_1)=f(x_2)=0$, 则 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足罗尔定理的条件, 于是 $\exists\eta\in(x_1,x_2)$, 使得 $f'(\eta)=0$, 但是 $f'(x)=3x^2+2>0$, 矛盾! 因此方程 $x^3+2x-10=0$ 有且仅有一个实根.

5. 证明: 设 $f(x)=x^m(1-x)^n$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的条件, 于是 $\exists \xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$, 亦即

$$m\xi^{m-1}(1-\xi)^n-n\xi^m(1-\xi)^{n-1}=\xi^{m-1}(1-\xi)^{n-1}(m(1-\xi)-n\xi)=0,$$

因此 $\dfrac{m}{n}=\dfrac{\xi}{1-\xi}$.

10. (3) 证明: 令 $f(t)=\arctan t$, 则 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 于是 $\exists \xi\in(0,x)$, 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, 即 $\dfrac{1}{1+\xi^2}=\dfrac{\arctan x}{x}$, 亦即 $\arctan x=\dfrac{x}{1+\xi^2}$; 此时, $\dfrac{1}{1+x^2}<\dfrac{1}{1+\xi^2}<1$, 所以当 $x>0$ 时, 有 $\dfrac{x}{1+x^2}<\arctan x<x$.

14. 证明: 设 $F(x)=\ln x$, 由于 $0<a<b$, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $F'(x)=\dfrac{1}{x}\neq 0$, $x\in(a,b)$; 根据柯西中值定理, $\exists \xi\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$, 即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\dfrac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$, 因此, $f(b)-f(a)=\xi\ln\dfrac{b}{a}\cdot f'(\xi)$.

习题 3.2

1. (2) $y=x-3\ln x$, $x>0$, 导数在函数定义域上都存在, $y'=1-\dfrac{3}{x}$, 令 $y'=0$, 解得唯一的可疑极值点 $x=3$; 由于 $y''=\dfrac{3}{x^2}>0$, 所以 $x=3$ 是极小值点, 极小值为 $y=3-3\ln 3$.

2. $f(x)=2\sin x+k\sin 3x$, 求导, $f'(x)=2\cos x+3k\cos 3x$, 根据条件 $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$, 即 $2\cos\dfrac{\pi}{3}+3k\cos\pi=1-3k=0$, 解得 $k=\dfrac{1}{3}$. 此时 $f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x$, $f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}<0$, 因此 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 是极大值点, 极大值为 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.

4. (3) $y=3-\sqrt[3]{(x-1)^2}=3-(x-1)^{\frac{2}{3}}$, $x\in[0,2]$; 求导, $y'=-\dfrac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}$, 可疑极值点为 $x=1$, 而 $y(1)=3$, $y(0)=y(2)=2$, 因此最大值为 $y(1)=3$, 最小值为 $y(0)=y(2)=2$.

9. 设旋转所得圆柱体底面半径为 x, 则高为 $3-x$, 体积为 $V(x)=\pi x^2(3-x)$, $0<x<3$; 求导, $V'(x)=2\pi x(3-x)-\pi x^2=3\pi x(2-x)$, 令 $V'(x)=0$, 解得唯一可疑极值点 $x=2$, 而 $V''(2)=-6\pi<0$, 因此 $x=2$ 是唯一极大值点, 从而是最大值点, 亦即矩形的旋转边长为 1, 另一边长为 2 时旋转体的体积最大, 最大值为 $V(2)=4\pi$.

习题 3.3

1. (5) ① 当 $a \neq 0$ 时, 由洛必达法则, 有 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \dfrac{m}{n} a^{m-n}$;

② 当 $a = 0$ 时, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \lim\limits_{x\to 0} x^{m-n} = \begin{cases} 0, & m > n \\ 1, & m = n \\ \infty, & m < n \end{cases}$;

(10) 由洛必达法则, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2$

(其中倒数第二步用了等价无穷小替换);

【另解】由洛必达法则, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2$;

(16) $\lim\limits_{x\to 1} (1 - x) \tan \dfrac{\pi}{2} x = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x}{\cos \frac{\pi}{2} x} \cdot \sin \dfrac{\pi}{2} x = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x}{\cos \frac{\pi}{2} x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-1}{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} x} = \dfrac{2}{\pi}$;

(18) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} \right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x(\mathrm{e}^x - 1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x}{2} = \dfrac{1}{2}$.

2. 直接计算得 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} \cdot \left(x \sin \dfrac{1}{x} \right) = 0$, 但极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right)'}{(\sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在, 因此不能使用洛必达法则计算原极限.

习题 3.4

1. (1) $f(x) = (1 + x)^{-1}$, 因此 $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{(1 + x)^{n+1}}$, 从而 $f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$, 所以 $f(x)$ 带佩亚诺型余项的麦克劳林公式为 $f(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.

2. (2) $f(x) = \ln x$, 因此 $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{(n-1)!}{x^n}$, $n = 1, 2, \cdots$, 从而 $f^{(n)}(2) = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{(n-1)!}{2^n}$, 所以 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处带拉格朗日型余项的泰勒公式为

$$f(x) = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^k} (x - 2)^k + \frac{(-1)^n}{(n+1)(2 + \theta(x - 2))^{n+1}} (x - 2)^{n+1},\ 0 < \theta < 1.$$

3. (4) 由于 $\ln(1+x)=x+o(x)$, 因此当 $x\to+\infty$ 时, 有 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, 从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\cdot\dfrac{1}{x}=1$.

7. 利用公式 $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{\mathrm{e}^{\theta x}x^4}{4!}$, $0<\theta<1$, 取 $x=\dfrac{1}{10}$, 得到近似值

$$\sqrt[10]{\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{10}}\approx 1+\frac{1}{10}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{10}\right)^3=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{200}+\frac{1}{6000}=\frac{6631}{6000}=1.10517;$$

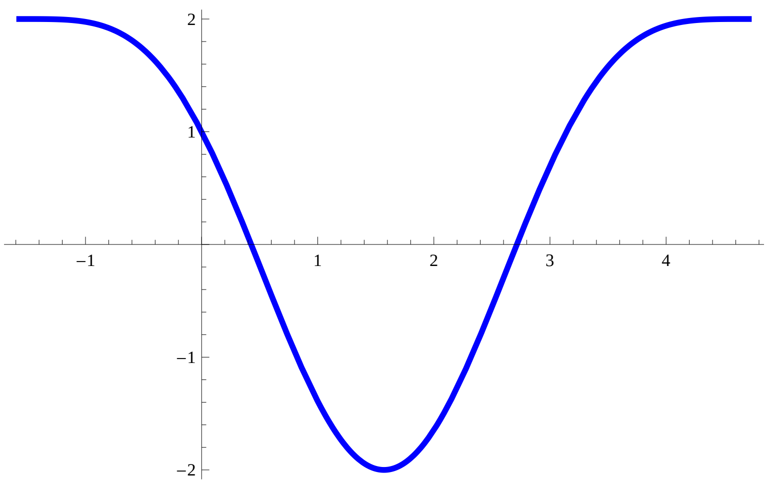
误差估计: $\left|R_4\left(\dfrac{1}{10}\right)\right|=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\theta}{10}}}{4!}\left(\dfrac{1}{10}\right)^4\leq\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{10}}}{4!}\left(\dfrac{1}{10}\right)^4\leq\dfrac{3^{\frac{1}{10}}}{4!}\left(\dfrac{1}{10}\right)^4=4.65\times10^{-6}$.

【注】真值为 $\sqrt[10]{\mathrm{e}}=1.10517092\cdots$

习题 3.5

1. (3) $y=2x^2-\ln x$, $x>0$, 求导, $y'=4x-\dfrac{1}{x}$, 令 $y'=0$, 得 $x=\dfrac{1}{2}$; 当 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 时, $y'<0$, 当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时, $y'>0$; 因此函数的单调递减区间是 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$, 单调递增区间是 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$;

(6) $y=\cos^2 x-2\sin x$, 求导, $y'=-2\cos x\sin x-2\cos x=-2\cos x(\sin x+1)$, 在 $[0,2\pi]$ 中, 令 $y'=0$, 即 $\cos x=0$ 或 $\sin x+1=0$, 得 $x_1=\dfrac{\pi}{2}$, $x_2=\dfrac{3\pi}{2}$; 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}<x<2\pi$ 时, $y'<0$, 当 $\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$ 时, $y'>0$; 因此函数的单调递减区间是 $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right]$, 单调递增区间是 $\left[\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$



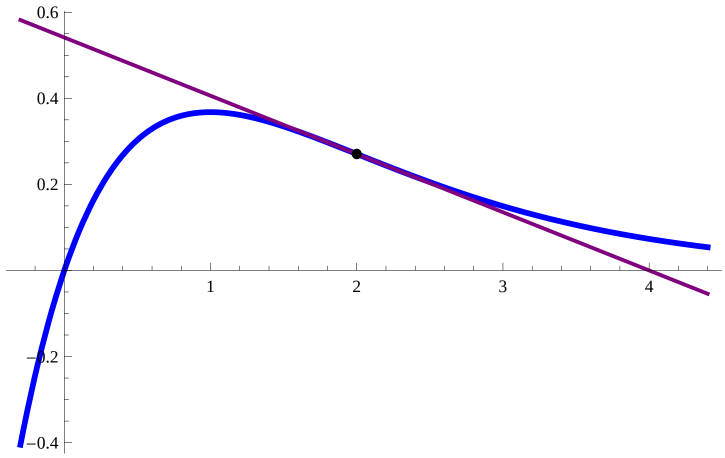
2. (2) 令 $f(x)=1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$, $x>0$, 则当 $x>0$ 时,

$$f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+x\cdot\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>0,$$

因此 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数, 即 $f(x)>f(0)=0$, 亦即

$$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>\sqrt{1+x^2},\ x>0.$$

3. (4) $y=x\mathrm{e}^{-x}$, 求导, $y'=\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}(1-x)$, $y''=-\mathrm{e}^{-x}(1-x)-\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}(x-2)$, 令 $y''=0$, 得 $x=2$; 当 $x<2$ 时, $y''<0$, 当 $x>2$ 时, $y''>0$; 因此函数在 $(-\infty,2]$ 上是凸的, 在 $[2,+\infty)$ 上是凹的, 曲线的拐点是 $(2,2\mathrm{e}^{-2})$.



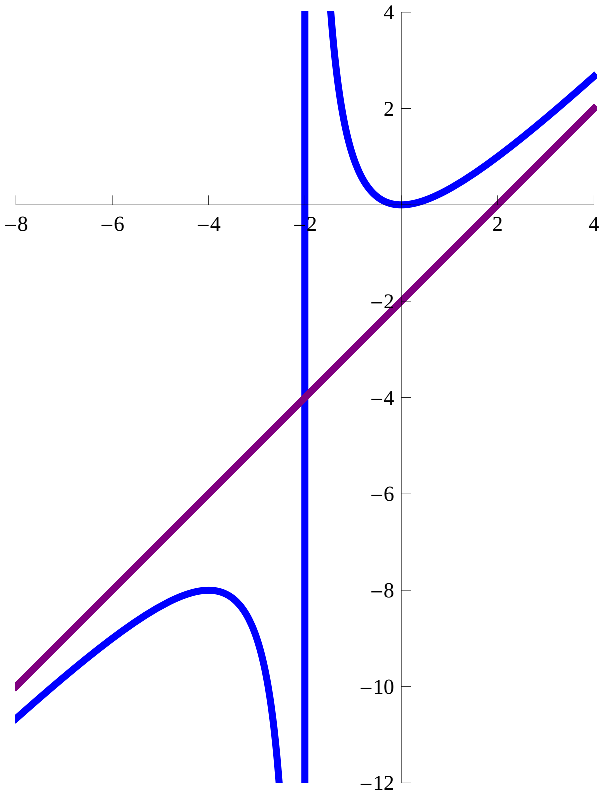
4. (3) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{2+x}$, 定义域是 $(-\infty,-2)\bigcup(-2,+\infty)$, 由 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\mathrm{e}^x}{2+x}=\infty$, 曲线有铅直渐近线 $x=-2$; 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x(2+x)}=+\infty$, 而 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x(2+x)}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{2+x}=0$, 曲线有水平渐近线 $y=0$.

8. (3) $y=\dfrac{x^2}{2+x}$, 定义域是 $(-\infty,-2)\bigcup(-2,+\infty)$, 无奇偶性和周期性. 求导, $y'=\dfrac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2}=\dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$, $y''=\dfrac{(2x+4)(x+2)^2-2x(x+4)(x+2)}{(x+2)^4}=\dfrac{8}{(x+2)^3}$.

令 $y'=0$, 解得 $x_1=-4$, $x_2=0$; 而 $y''\neq0$. 列表说明 y' 和 y'' 的变号区间:

x	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,-2)$	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
y	凸, 增	极大值 -8	凸, 减	凹, 减	极小值 0	凹, 增

由于 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2}{2+x}=\infty$, 曲线有铅直渐近线 $x=-2$; 又由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x(2+x)}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{2+x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{2+x}=-2$, 曲线有斜渐近线 $y=x-2$. 函数图像如图.



【注】若把坐标原点移到 $(-2,-4)$, 函数可写成 $y=\dfrac{x^2+4}{x}=x+\dfrac{4}{x}$, 是奇函数.

习题 4.1

4. (3) $\displaystyle\int\frac{(t-2)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t=\int\frac{t^2-4t+4}{t^2}\,\mathrm{d}t=\int\left(1-\frac{4}{t}+4t^{-2}\right)\mathrm{d}t=t-4\ln|t|-\frac{4}{t}+C$;

(6) $\displaystyle\int\frac{2+\sin^2x}{\cos^2x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{3-\cos^2x}{\cos^2x}\,\mathrm{d}x=\int(3\sec^2x-1)\mathrm{d}x=3\tan x-x+C$;

(13) $\displaystyle\int\frac{1}{x^4(1+x^2)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1-x^4+x^4}{x^4(1+x^2)}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1-x^2}{x^4}+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$\displaystyle=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\arctan x+C.$

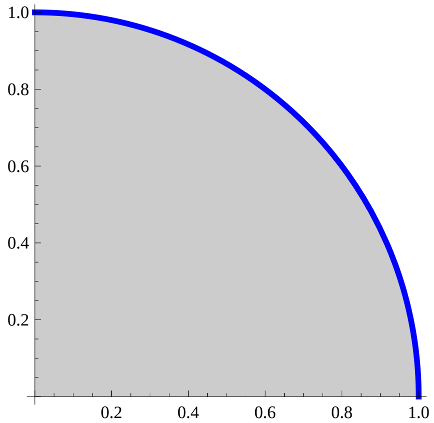
6. (3) 已知 $f(x)f'(x)=1$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{2}\big(f(x)\big)^2-x\right)=0$, 因此 $\dfrac{1}{2}\big(f(x)\big)^2-x=C_1$, 从而 $f(x)=\pm\sqrt{2x+C}$, 其中 C 是常数.

习题 4.2

4. (6) 设 $f(x)=\mathrm{e}^x-(1+x)$, $x\in[0,1]$, 则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1>0$, $x\in(0,1]$, 因此, $f(x)>f(0)=0$, $x\in(0,1]$, 从而 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x>\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x$.

5. (1) 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$, 则当 $x\in[0,1]$ 时, 有 $f'(x)=2x\mathrm{e}^{x^2}\geq 0$, 因此 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的增函数, 从而 $f(0)\leq f(x)\leq f(1)$, 即 $1\leq \mathrm{e}^{x^2}\leq \mathrm{e}$, 所以 $1\leq \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\leq \mathrm{e}$.

6. (3) 设 $y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0,1]$, 函数图像是单位圆周在第一象限的部分, 与 x 轴和 y 轴所围图形的面积是单位圆盘面积的四分之一, 因此 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$.



习题 4.3

1. (6) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int_{x^3}^{x^2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right)=\mathrm{e}^{x^2}\cdot(x^2)'-\mathrm{e}^{x^3}\cdot(x^3)'=2x\mathrm{e}^{x^2}-3x^2\mathrm{e}^{x^3}$.

5. (5) $\displaystyle\int_4^9\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x}\,)\mathrm{d}x=\int_4^9(\sqrt{x}+x)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_4^9=\frac{271}{6}$;

(13) $\displaystyle\int_{-2}^{-1}|2x|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}(-2x)\mathrm{d}x=-x^2\Big|_{-2}^{-1}=3$.

7. (2) 由洛必达法则, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\arctan t^2\,\mathrm{d}t}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x^2}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$, 其中第一步用了变上限函数求导公式, 第二步用了等价无穷小替换.

【另解】 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\arctan t^2\,\mathrm{d}t}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x^2}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2x}{1+x^4}}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{3(1+x^4)}=\frac{1}{3}$.

9. (1) 题目改为: “若 $\displaystyle\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t=x^2(1+x)$, 求 $f(2)$. ”

解: 对等式两边求导, 得 $2xf(x^2)=2x+3x^2$, 即 $f(x^2)=1+\dfrac{3}{2}x$, 由于 $f(x)$ 定义在 $[0,+\infty)$ 上, 所以 $f(x)=1+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$, 从而 $f(2)=1+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$.

习题 4.4

2. (4) $\int x^2\cdot\sqrt[3]{(x^3-5)^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{3}(x^3-5)^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}(x^3-5)=\frac{1}{5}(x^3-5)^{\frac{5}{3}}+C$;

(17) $\int\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\int\cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\sin\frac{1}{x}+C$;

(26) $\int\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(\sqrt{x}\right)=2\arctan\sqrt{x}+C$;

(30) $\int\sin^2x\cos^3x\,\mathrm{d}x=\int\sin^2x(1-\sin^2x)\mathrm{d}(\sin x)=\frac{1}{3}\sin^3x-\frac{1}{5}\sin^5x+C$;

(40) $\int\frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x+1)=\frac{-1}{\mathrm{e}^x+1}+C.$

3. (2) $\int_1^2\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\int_1^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\left.\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right|_1^2=\mathrm{e}-\sqrt{\mathrm{e}}$;

(10) 令 $t=\sqrt{x}-1$, 则 $x=(t+1)^2$, $\mathrm{d}x=2(t+1)\mathrm{d}t$; 当 $x=4$ 时, $t=1$, 当 $x=9$ 时, $t=2$; 因此 $\int_4^9\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{t+1}{t}\cdot2(t+1)\mathrm{d}t=2\int_1^2\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=2\left.\left(\frac{1}{2}t^2+2t+\ln t\right)\right|_1^2=7+2\ln 2.$

5. 证明: 由积分区间可加性, $\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{a+T}f(x)\mathrm{d}x$; 令 $t=x-T$, 利用 $f(t+T)=f(t)$, 则 $\int_T^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(t+T)\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$, 于是 $\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$

9. (6) $\int\frac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}(\ln x)$

$$=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C;$$

(7) $\int\arctan x\,\mathrm{d}x=x\arctan x-\int x\,\mathrm{d}(\arctan x)=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}(x^2+1)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C;$$

(14) 令 $t=\sqrt{x}$, 则 $x=t^2$, $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$; 当 $x=0$ 时, $t=0$, 当 $x=4\pi^2$ 时, $t=2\pi$; 则 $\int_0^{4\pi^2}\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}2t\sin t\,\mathrm{d}t=-2\int_0^{2\pi}t\,\mathrm{d}(\cos t)=-2t\cos t\Big|_0^{2\pi}+2\int_0^{2\pi}\cos t\,\mathrm{d}t=$

$-4\pi+2\sin t\Big|_0^{2\pi}=-4\pi$;

(18) 由于 $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x-\int x\,\mathrm{d}(\ln x) = x\ln x - x + C$, 因此 $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} |\ln x|\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}(-\ln x)\mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}x = (-x\ln x+x)\Big|_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}+(x\ln x-x)\Big|_1^{\mathrm{e}} = 2\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)$.

11. $\int_0^1 \big(1+xf'(x)\big)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}\big(f(x)\big)$

$= \int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x\,\mathrm{d}\big(\mathrm{e}^{f(x)}\big) = \int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x + x\mathrm{e}^{f(x)}\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{f(1)}$.

习题 4.5

1. (2) $\int \tan^5 x\sec^3 x\,\mathrm{d}x = \int \tan^4 x\sec^2 x\,\mathrm{d}(\sec x) = \int (\sec^2 x-1)^2\sec^2 x\,\mathrm{d}(\sec x) = \int (\sec^6 x - 2\sec^4 x+\sec^2 x)\mathrm{d}(\sec x) = \frac{1}{7}\sec^7 x-\frac{2}{5}\sec^5 x+\frac{1}{3}\sec^3 x + C$;

(6) $\int \cos 3x\cos 4x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(\cos 7x+\cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{14}\sin 7x+\frac{1}{2}\sin x + C$.

2. (1) **【解法一】** 令 $x=\sec t$, 则 $\mathrm{d}x = \sec t\tan t\,\mathrm{d}t$; 当 $x>1$ 时, $0<t<\frac{\pi}{2}$, 此时 $\sqrt{x^2-1}=\tan t$, 有 $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sec t\tan t}\cdot \sec t\tan t\,\mathrm{d}t = t + C = \arctan\sqrt{x^2-1}+C$; 当 $x<-1$ 时, 结果相同.

【解法二】 令 $t=\frac{1}{x}$, 则 $x=\frac{1}{t}$, $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$; 当 $x>1$ 时, $0<t<1$, $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\cdot\frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = -\arcsin t + C = -\arcsin\frac{1}{x}+C$; 当 $x<-1$ 时, 结果相同.

【解法三】 令 $t=\sqrt{x^2-1}$, 则当 $x>1$ 时, $x=\sqrt{t^2+1}$, $\mathrm{d}x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t$; 有 $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \int\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \arctan t + C = \arctan\sqrt{x^2-1}+C$; 当 $x<-1$ 时, 结果相同.

3. (2) 先作部分分式分解, 设

$$\frac{2x+3}{x^2+2x-3}=\frac{2x+3}{(x-1)(x+3)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}=\frac{(a+b)x+3a-b}{(x-1)(x+3)},$$

利用分子各项对应系数相等, 则 $a+b=2$, $3a-b=3$, 解得 $a=\frac{5}{4}$, $b=\frac{3}{4}$, 于是

$$\int\frac{2x+3}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\left(\frac{5}{x-1}+\frac{3}{x+3}\right)\mathrm{d}x=\frac{5}{4}\ln|x-1|+\frac{3}{4}\ln|x+3|+C;$$

【另解】直接计算, $\displaystyle\int\frac{2x+3}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2x+2+1}{(x-1)(x+3)}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
&=\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2x-3)}{x^2+2x-3}+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x\\
&=\ln|x^2+2x-3|+\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+3|+C\\
&=\frac{5}{4}\ln|x-1|+\frac{3}{4}\ln|x+3|+C;
\end{aligned}$$

(8) 先作部分分式分解, 设

$$\begin{aligned}
\frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}&=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{cx+d}{x^2+4}\\
&=\frac{(a+c)x^3+(b+d)x^2+(4a+c)x+(4b+d)}{(x^2+1)(x^2+4)},
\end{aligned}$$

对比分子各项对应系数, 有 $a+c=0$, $b+d=0$, $4a+c=1$, $4b+d=0$, 解得 $a=\frac{1}{3}$, $b=0$, $c=-\frac{1}{3}$, $d=0$, 则

$$\begin{aligned}
\int\frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{3}\int\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+4}\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{6}\int\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}(x^2+1)-\frac{1}{6}\int\frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}(x^2+4)\\
&=\frac{1}{6}\big(\ln(x^2+1)-\ln(x^2+4)\big)+C=\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}+C.
\end{aligned}$$

4. (5) 令 $t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, 则 $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\begin{aligned}
\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x&=\int t\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\int\frac{-4t^2}{1-t^4}\,\mathrm{d}t\\
&=2\int\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{1-t^2}\right)\mathrm{d}t=2\arctan t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C\\
&=2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C.
\end{aligned}$$

习题 4.7

1. (4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}(x+1) = \arctan(x+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$;

(6) $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x}) = -x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$, 其中, 由洛必达法则, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$;

(7) 瑕点是 $x=\pm 2$, $\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_{-2^+}^{2^-} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$;

(10) 瑕点 $x=0$, $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x}}\,\mathrm{d}(x^2+2x) = \sqrt{x^2+2x}\Big|_{0^+}^{1} = \sqrt{3}$.

2. (2) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2-1}} = 1$, 且 $\frac{5}{3} > 1$, 由极限判别法知无穷限反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(5) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x}\arctan x}{1+x} = \frac{\pi}{2} \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x} = \frac{\pi}{2}$, 且 $\frac{1}{2} < 1$, 由极限判别法知无穷限反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\arctan x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ 发散.

3. (2) 瑕点是 $x=1$, 因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot\frac{1}{x^2-4x+3} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{2}$, 由极限判别法知瑕积分 $\int_0^2 \frac{1}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x$ 发散;

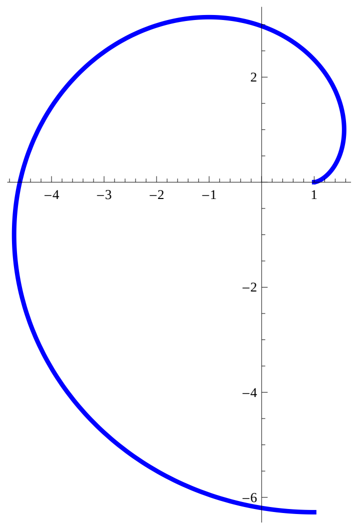
(7) 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1$, 所以 $x=0$ 不是瑕点, 瑕点是 $x=1$; 而 $\lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \cdot \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\pi}{2}$, 且 $\frac{1}{2} < 1$, 由极限判别法知瑕积分 $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

习题 5.1

1. (1) $y = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $x\in[0,2]$, $y' = 2\sqrt{x}$, 弧长 $L = \int_0^2 \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \sqrt{1+4x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot(1+4x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{13}{3}$;

(6) $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$, 则 $x' = at\cos t$, $y' = at\sin t$, 弧长为

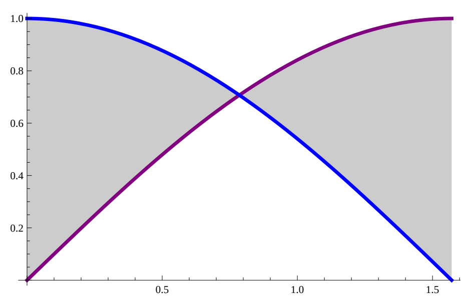
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} at\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}at^2\bigg|_0^{2\pi} = 2\pi^2 a;$$

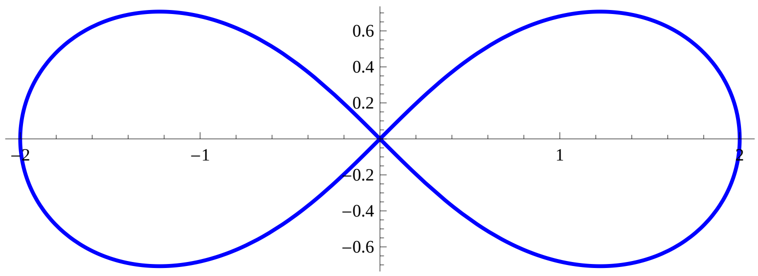


(7) $r = \mathrm{e}^{2\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, 则 $r' = 2\mathrm{e}^{2\theta}$, 弧长 $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{5}\,\mathrm{e}^{2\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{2\theta}}{2}\bigg|_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\mathrm{e}^{4\pi} - 1\right)$.

2. (3) 曲线 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ 所围图形如左下图, 其面积为

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x|\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)\mathrm{d}x$$
$$= (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - (\cos x + \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sqrt{2} - 1\right);$$





(7) $r^2 = 4\cos 2\theta$ (双纽线)

由于 $r^2 \ge 0$, 极角的范围为 $\theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \bigcup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$, 根据图形的对称性, 所围图形面积 $S = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2(\theta)\mathrm{d}\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = 4\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4$.

4. 曲线 $y=\sqrt{x}$ 在 $4\le x\le 9$ 的一段绕 x 轴旋转一周所成曲面的面积为

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\int_4^9 y\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_4^9\sqrt{x+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\cdot\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_4^9 = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-17\sqrt{17}\right). \end{aligned}$$

7. (2) 平面曲线 $y=\dfrac{1}{x}$, $x=1$, $x=2$, $y=0$ 所围图形绕 x 轴旋转一周所成立体的体积为 $V=\pi\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{x}\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}$.

12. 由图形的对称性, 所求立体体积为其在第一卦限部分体积的八倍; $\forall\, x_0\in[0,R]$, 用平面 $x=x_0$ 去截该立体在第一卦限的部分, 得到边长为 $\sqrt{R^2-x_0^2}$ 的正方形, 于是所求立体体积为 $V=8\displaystyle\int_0^R(R^2-x^2)\mathrm{d}x=8\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^R=\frac{16}{3}R^3$.