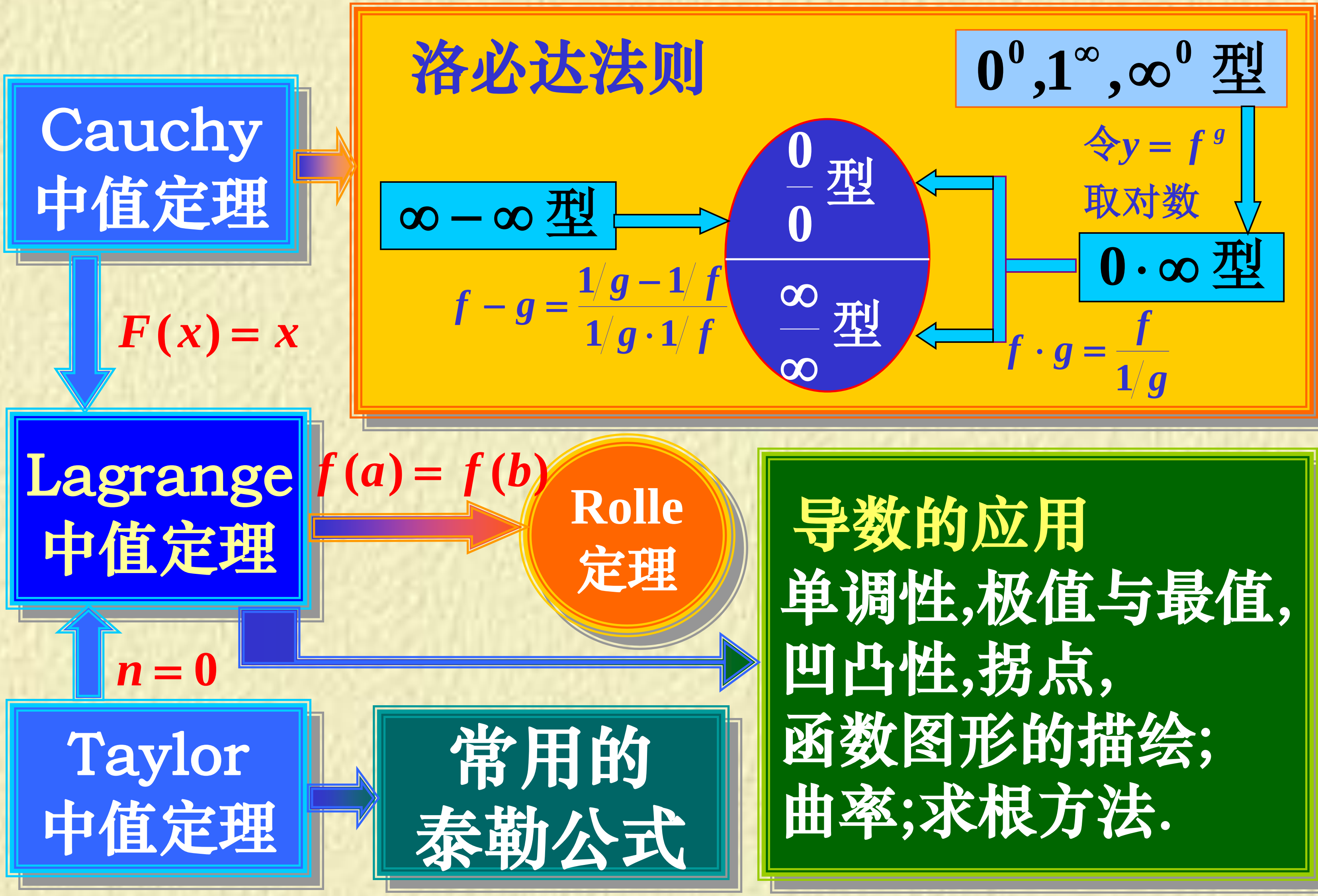
第三章 微分中值定理与导数的应用

习题课

一、主要内容框图

二、典型例题

一、主要内容框图



洛必达法则
$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型
令$y = f^g$
取对数
$0 \cdot \infty$ 型
$\infty - \infty$ 型
$\frac{0}{0}$ 型
$\frac{\infty}{\infty}$ 型
$f - g = \frac{1/g - 1/f}{1/g \cdot 1/f}$
$f \cdot g = \frac{f}{1/g}$
Cauchy 中值定理
$F(x) = x$
Lagrange 中值定理
$f(a) = f(b)$
Rolle 定理
$n = 0$
Taylor 中值定理
常用的泰勒公式
导数的应用
单调性,极值与最值,
凹凸性,拐点,
函数图形的描绘;
曲率;求根方法.

二、典型例题

例1 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-\cos x}{2-\sqrt{4-\ln(1+\sin^2 x)}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-\cos x}{2-\sqrt{4-\ln(1+\sin^2 x)}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{\ln(1+\sin^2 x)}\cdot[2+\sqrt{4-\ln(1+\sin^2 x)}\,]$$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{\ln(1+\sin^2 x)}=4\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x+\sin x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}(e^x+\sin x+\cos x)=4$$

例2 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解
$$\ln\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\cdot(1+x^2)=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\frac{1}{e}$$

例4 设方程 $x^3 - 3xy + y^3 = 3$ 确定 y 是 x 的隐函数, 求 $y = y(x)$ 的驻点, 并判别它们是否为极值点.

解 方程两边对 x 求导得

$$3x^2 - 3y - 3xy' + 3y^2 y' = 0 \qquad (1)$$

令$y' = 0$,得 $y = x^2$, 代入原方程得

$$-2x^3 + x^6 = 3$$

解得驻点 $x = -1\ (y = 1)$和 $x = \sqrt[3]{3}\ (y = \sqrt[3]{9})$. 由(1)得

$$2x - 2y' - xy'' + 2y(y')^2 + y^2 y'' = 0 \qquad (2)$$

$x = -1, y = 1, y' = 0$代入(2)得, $y''(-1) = 1 > 0.$

$x = \sqrt[3]{3}, y = \sqrt[3]{9}, y' = 0$代入(2)得, $y''(\sqrt[3]{3}) = -1 < 0.$

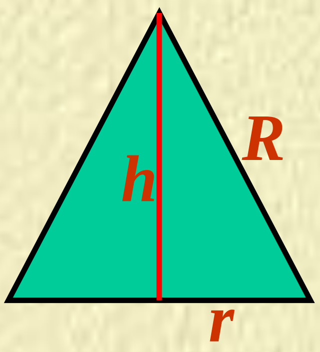
所以$x = -1$为极小值点, $x = \sqrt[3]{3}$为极大值点.

例5 从一块半径为 R 的圆形铁皮上, 剪下一块圆心角为 α 的圆扇形, 用剪下的铁皮做一个圆锥形漏斗, 设圆锥形漏斗的高为 h. 问 h 为多大时, 漏斗的容积 V 最大? 此时圆心角 α 为多大?

解 设圆锥底圆半径为 r, 则有

$$r^2+h^2=R^2,\ V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{\pi}{3}(R^2h-h^3),\ (0<h<R)$$

$$\frac{dV}{dh}=\frac{\pi}{3}(R^2-3h^2),$$



令 $\dfrac{dV}{dh}=0$, 得唯一驻点 $h_0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}R$,

此时漏斗的容积 V 最大.

所求圆心角 $\alpha=\dfrac{2\pi r_0}{R}=\dfrac{2\pi\sqrt{R^2-h_0^2}}{R}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi.$

例7 证明 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

证明 $\ln f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x})$

$$=x[\ln(1+x)-\ln x]$$

$$\therefore\quad f'(x)=(1+\frac{1}{x})^x\underline{[\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{1+x}]}$$

令 $F(t)=\ln t$, 在 $[x,x+1]$ 上利用拉氏中值定理, 得

$$\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{\xi}>\frac{1}{1+x}\quad(0<x<\xi<x+1)$$

故当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$,从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增.

例8 证明方程 $x^5+5x^2-1=0$ 只有一个正根.

证明 设 $f(x)=x^5+5x^2-1$, 则 $f(x)$ 在$[0, 1]$上连续

且 $f(0)=-1, f(1)=5.$

由零点定理, $\exists\, x_0\in(0,1),$ 使 $f(x_0)=0,$

x_0 即为方程的一个正根.

当 $x>0$ 时, $f'(x)=5x^4+10x>0,$

因此 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$单调增加, 从而至多有一个正零点.

所以方程 $x^5+5x^2-1=0$ 只有一个正根 x_0.

恒等式的证明

例9 证明当 $x > -1$ 时，$\arctan x + \arctan\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{\pi}{4}$.

证明 令 $f(x) = \arctan x + \arctan\dfrac{1-x}{1+x}, (x > -1)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = 0,$$

$\therefore\ f(x) \equiv C,\ (x > -1)$. 而 $C = f(0) = \dfrac{\pi}{4}$,

因此，当 $x > -1$ 时，$\arctan x + \arctan\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{\pi}{4}$.

利用函数的单调性证明不等式

例10 证明: 当 $x>0$ 时, $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

证明 令 $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$,

$$f'(x) = e^x - 1 - x,$$

$$f''(x) = e^x - 1,$$

当 $x > 0$ 时, $f''(x) > 0$,

$$\Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0,$$

$$\Rightarrow f(x) > f(0) = 0.$$

即得所证.

例11 证明不等式

$$x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}, (x>0, y>0, x\neq y).$$

证明 令 $f(t) = t\ln t\ (t>0)$,

则 $f'(t) = \ln t + 1,\quad f''(t) = \frac{1}{t} > 0,$

$\therefore\ f(t) = t\ln t$ 在 $[x, y]$ 或 $[y, x]$ 是凹的.

于是 $\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f(\frac{x+y}{2})$

即 $\frac{1}{2}[x\ln x + y\ln y] > \frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2},$

即 $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$

利用函数的单调区间和极值确定方程根的个数

例12 若曲线 $y = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ 与直线 $y = 5x + b$ 有三个不同的交点, 求 b 值的范围.

注: 曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 有 n 个交点, 也就是方程 $f(x)=g(x)$ 有 n 个根.

解 设 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 12$,

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$,

得驻点 $x_1 = -3,\ x_2 = 1$.

当 $x < -3$ 时, $f'(x) > 0$,

$f(x)$在 $(-\infty, -3]$ 上单调增加,

值域为 $(-\infty, 15]$;

当 $-3 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$,

$f(x)$在 $[-3, 1]$ 上单调减少,

值域为 $[-17, 15]$;

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$,

$f(x)$ 在 $[1, +\infty)$上单调增加,

值域为$[-17, +\infty)$.

可知 $-17 < b < 15$.

13．函数 $y=x^2$ 在闭区间 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理，则定理中的 $\xi=$______.

[$\dfrac{a+b}{2}$]

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

$$b^2-a^2=2\xi(b-a)$$

14．函数 $f(x)=2\sqrt{x}-\frac{x^2}{2}$ 在区间________上单调增加.

【$[0,1]$】

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-x=0 \Rightarrow x=1$$

$$0\le x<1 \Rightarrow f'(x)>0$$

$$x>1 \Rightarrow f'(x)<0$$

0^0 型、1^∞ 型、∞^0 型极限计算：取对数化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型.

例15　求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.　(∞^0)

解　$$\ln\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\cot x}\cdot(-\csc^2 x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\cos x\cdot\sin x}=-1,$$

原式 $=e^{-1}$.

$$\ln\lim u^v=\lim v\ln u=\lim\frac{\ln u}{v^{-1}}\Rightarrow\frac{0}{0}\text{型或}\frac{\infty}{\infty}\text{型}$$

16．函数 $f(x)=3\sqrt[3]{x^4}-8x+6\sqrt[3]{x^2}$ 在 $x=$______处取极______值.

［ 0；小 ］

$$f'(x)=4\sqrt[3]{x}-8+\frac{4}{\sqrt[3]{x}}=\frac{4(\sqrt[3]{x}-1)^2}{\sqrt[3]{x}}$$

驻点 $x=1$

不可导点 $x=0$

$$x<0\Rightarrow f'(x)<0$$

$$0<x<1\Rightarrow f'(x)>0$$

$$x>1\Rightarrow f'(x)>0$$

例17 求函数$y=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-x$ 的单调区间和极值.

解 这个函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$$y'=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-1,$$

驻点 $x=1$, 不可导点 $x=0$,

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	不可导	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

函数 y 在区间$(-\infty,0]$和$[1,+\infty)$上单调减少,

在区间$[0,1]$上单调增加.

函数 y 的极小值为 $y(0)=0$, 极大值为 $y(1)=\frac{1}{2}$.

例18 讨论方程 $\ln x = ax\ (a>0)$ 有几个实根?

解 令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$,

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},$$

得驻点 $x=e$.

当 $0<x<e$ 时, $f'(x)>0$,

$f(x)$ 在 $(0,e]$ 上单调增加,

值域为 $(-\infty, e^{-1}]$;

当 $x>e$ 时, $f'(x)<0$,

$f(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调减少,

值域为 $(0, e^{-1}]$.

当 $a>e^{-1}$ 时,

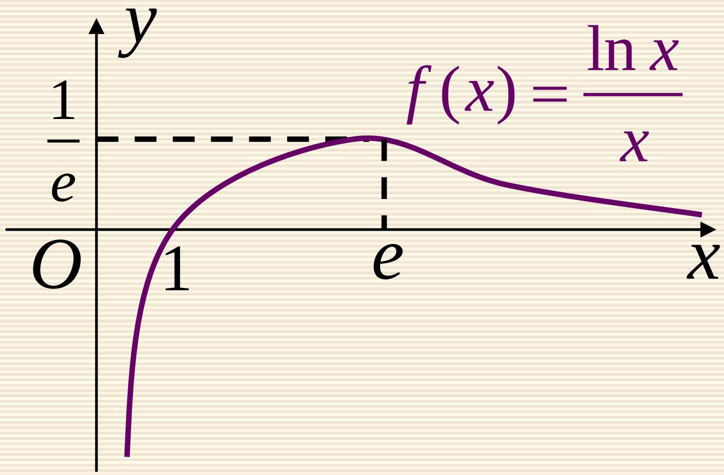
方程 $\ln x = ax$ 无实根;

当 $a=e^{-1}$ 时,

方程 $\ln x = ax$ 有一个实根;

当 $0<a<e^{-1}$ 时,

方程 $\ln x = ax$ 有两个实根.



19．函数$y = xe^{-x}$的图形的凹区间为______．

［$[2, +\infty)$］

$$y' = e^{-x} + xe^{-x} \cdot (-1) = (1 - x)e^{-x}$$

$$y'' = -e^{-x} + (1 - x)e^{-x} \cdot (-1) = (x - 2)e^{-x}$$

例20 求函数 $f(x)=|x^2-3x+2|$在$[-3, 4]$上的最大值与最小值.

解
$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & x\in[-3,1]\cup[2,4] \\ -x^2+3x-2 & x\in(1,2) \end{cases},$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & x\in(-3,1)\cup(2,4) \\ -2x+3 & x\in(1,2) \end{cases}.$$

在$(-3, 4)$内, $f(x)$的驻点为 $x=\dfrac{3}{2}$;

不可导点为 $x=1$ 和 $x=2$.

由于 $f(-3)=20$, $f(1)=0$, $f(\dfrac{3}{2})=\dfrac{1}{4}$, $f(2)=0$, $f(4)=6$,

比较可得$f(-3)=20$是 $f(x)$在$[-3, 4]$上的最大值, $f(1)=f(2)=0$是$f(x)$在$[-3, 4]$上的最小值.