

第一章 作业 3

一. 填空题 (每空 5 分, 本大题满分 40 分)

1. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小, 则常数 $a =$ _____.

2. 设 $f(x) = \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$, 若定义 $f(0) =$ _____, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

3. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x-1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处左连续, 则常数 $a =$ _____.

4. 函数 $y = \frac{x-1}{\ln|x|} \cos \frac{1}{x-1}$ 的可去间断点是 _____, 无穷间断点是 _____.

5. 设 $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}}$, 若定义 $f(0) =$ _____, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

6. 设 $f(x) = x \cos x - x$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是关于 x 的 _____ 阶无穷小;

7. 设 $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____

二. 解答下列各题 (每小题 10 分, 本大题满分 50 分)

1. 求函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} + \arctan \frac{1}{x-1}$ 的间断点, 并判别其类型 (15 分).

2. 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}$

3. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x^3}$

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{1 - \cos x}$.

5. 设函数 $f(x) = \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 及可取间断点 $x=1$,

试确定常数 a 及 b .

三. 证明题: (20 分)

1. 设 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$, 证明 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

2. 证明方程 $x - \cos x = 0$ 至少有一个正根.