第六节 函数图形的描绘

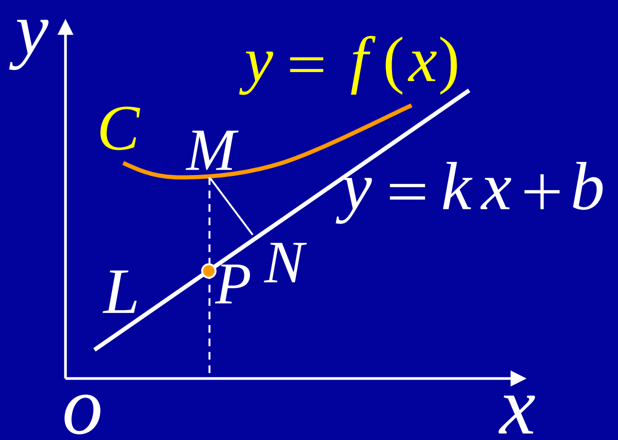
一、 曲线的渐近线

二、 函数图形的描绘

一、 曲线的渐近线

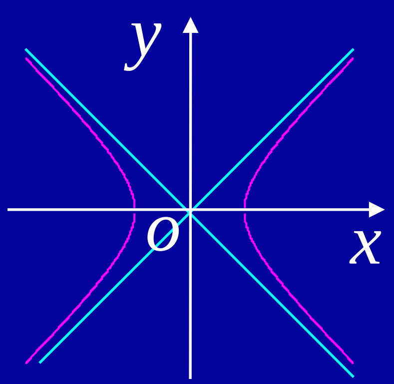
定义. 若曲线 C 上的点 M 沿着曲线无限地远离原点时，点 M 与某一直线 L 的距离趋于 0，则称直线 L 为曲线 C 的**渐近线**.

或为 **"纵坐标差"**



例如, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

有渐近线 $\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$



但抛物线 $y=x^2$ 无渐近线.

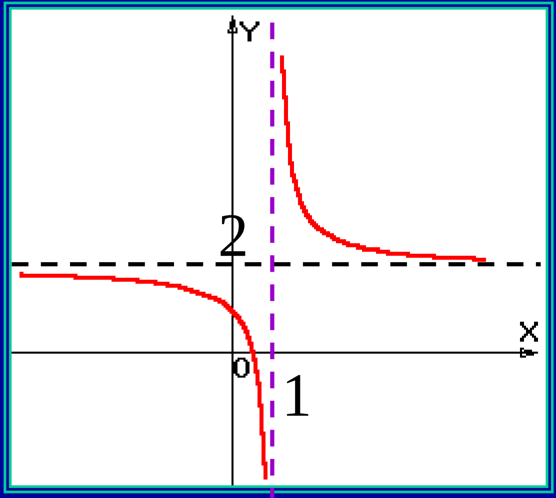
1. 水平与铅直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$,则曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=b$.

(或 $x\to-\infty$)

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$,则曲线 $y=f(x)$ 有铅直渐近线 $x=x_0$.

(或 $x\to x_0^-$)



例1. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$ 的渐近线 .

解: $\because\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x-1}+2\right)=2$

$\therefore\ y=2$ 为水平渐近线;

$\because\ \lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}+2\right)=\infty$, $\therefore\ x=1$为铅直渐近线.

2. 斜渐近线

若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (或 x\to-\infty)}} [f(x)-(kx+b)]=0$，则曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b$.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$$

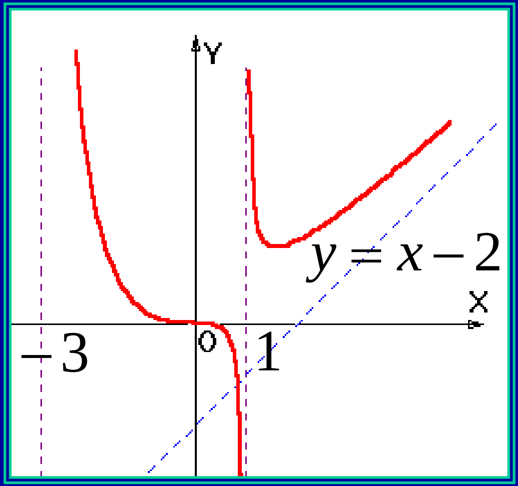
$$\Downarrow$$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}\right]$$

$$\therefore \quad \boxed{k=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (或 x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}}$$

$$\boxed{b=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (或 x\to-\infty)}}[f(x)-kx]}$$

例2. 求曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线 .



解: $\because\ y=\dfrac{x^3}{(x+3)(x-1)}$, $\lim\limits_{x\to-3} y=\infty$,
(或 $x\to 1$)

所以有铅直渐近线 $x=-3$ 及 $x=1$

又因 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+2x-3}=1$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3x}{x^2+2x-3}=-2$$

$\therefore\ y=x-2$ 为曲线的斜渐近线 .

二、函数图形的描绘

步骤：

1. 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域，并考察其对称性及周期性；

2. 求 $f'(x)$, $f''(x)$, 并求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 为 0 和不存在的点；

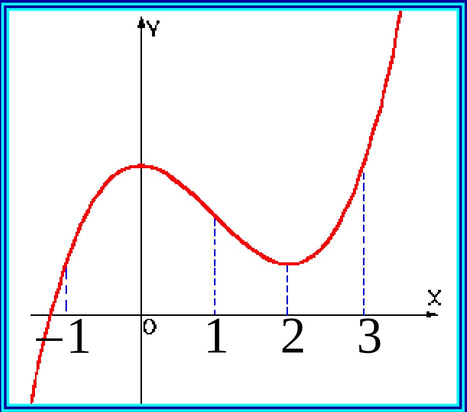
3. 列表判别增减及凹凸区间，求出极值和拐点；

4. 求渐近线；

5. 确定某些特殊点，描绘函数图形 .

例3. 描绘 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$ 的图形.

解: 1) 定义域为$(-\infty,+\infty)$,无对称性及周期性.



2) $y'=x^2-2x,\ y''=2x-2,$

令 $y'=0$, 得 $x=0,\ 2$

令 $y''=0$, 得 $x=1$

3)

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$	0	$+$		$+$
y		2		$\frac{4}{3}$		$\frac{2}{3}$	
		(极大)		(拐点)		(极小)	

4)

x	-1	3
y	$\frac{2}{3}$	2

例4. 描绘方程 $(x-3)^2+4y-4xy=0$ 的图形.

解: 1) $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$, 定义域为 $(-\infty,1),(1,+\infty)$

2) 求关键点

$$\because \quad 2(x-3)+4y'-4y-4xy'=0$$

$$\therefore \quad y'=\frac{x-3-2y}{2(x-1)}=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

$$\because \quad 2+4y''-8y'-4xy''=0$$

$$\therefore \quad y''=\frac{1-4y'}{2(x-1)}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

令 $y'=0$ 得 $x=-1,3$;

3) 判别曲线形态

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	无定义	$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$		$+$		$+$
y		-2				0	
		(极大)				(极小)	

4) 求渐近线

$$\because \lim_{x\to 1} y=\infty,\ \therefore x=1 \text{ 为铅直渐近线}$$

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)},\quad y'=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2},\quad y''=\frac{2}{(x-1)^3}$$

又因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{4}$, 即 $k=\dfrac{1}{4}$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-\frac{1}{4}x)=\lim_{x\to\infty}[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}-\frac{1}{4}x]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+9}{4(x-1)}=-\frac{5}{4}$$

$\therefore\quad y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$ 为斜渐近线

5) 求特殊点

x	0	2
y	$-\dfrac{9}{4}$	$\dfrac{1}{4}$

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$$

$$y'=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

$$y''=\frac{2}{(x-1)^3}$$

6）绘图

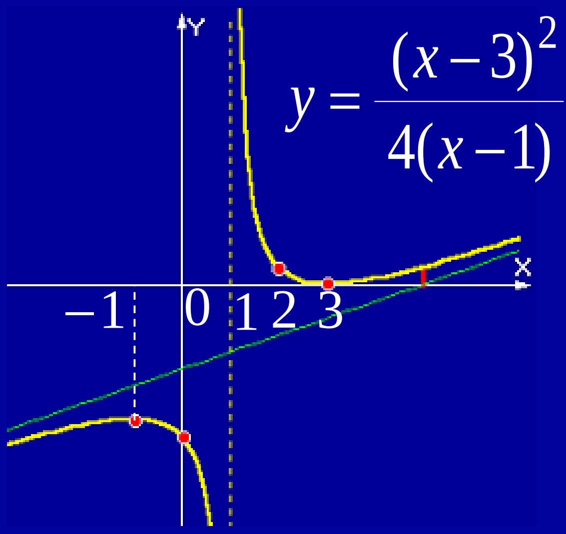
x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y		-2 (极大)		无定义		0 (极小)	

铅直渐近线 $x=1$

斜渐近线 $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$

特殊点

x	0	2
y	$-\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$



三、练习

1. 作函数 $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的图形.

解 $D: x \neq 0,$ 非奇非偶函数, 且无对称性.

$$f'(x)=-\frac{4(x+2)}{x^3}, \qquad f''(x)=\frac{8(x+3)}{x^4}.$$

令 $f'(x)=0,$ 得驻点 $x=-2,$

令 $f''(x)=0,$ 得特殊点 $x=-3.$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2]=-2,$ 得水平渐近线 $y=-2;$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{4(x+1)}{x^2} - 2\right] = +\infty,$$

得铅直渐近线 $x = 0.$

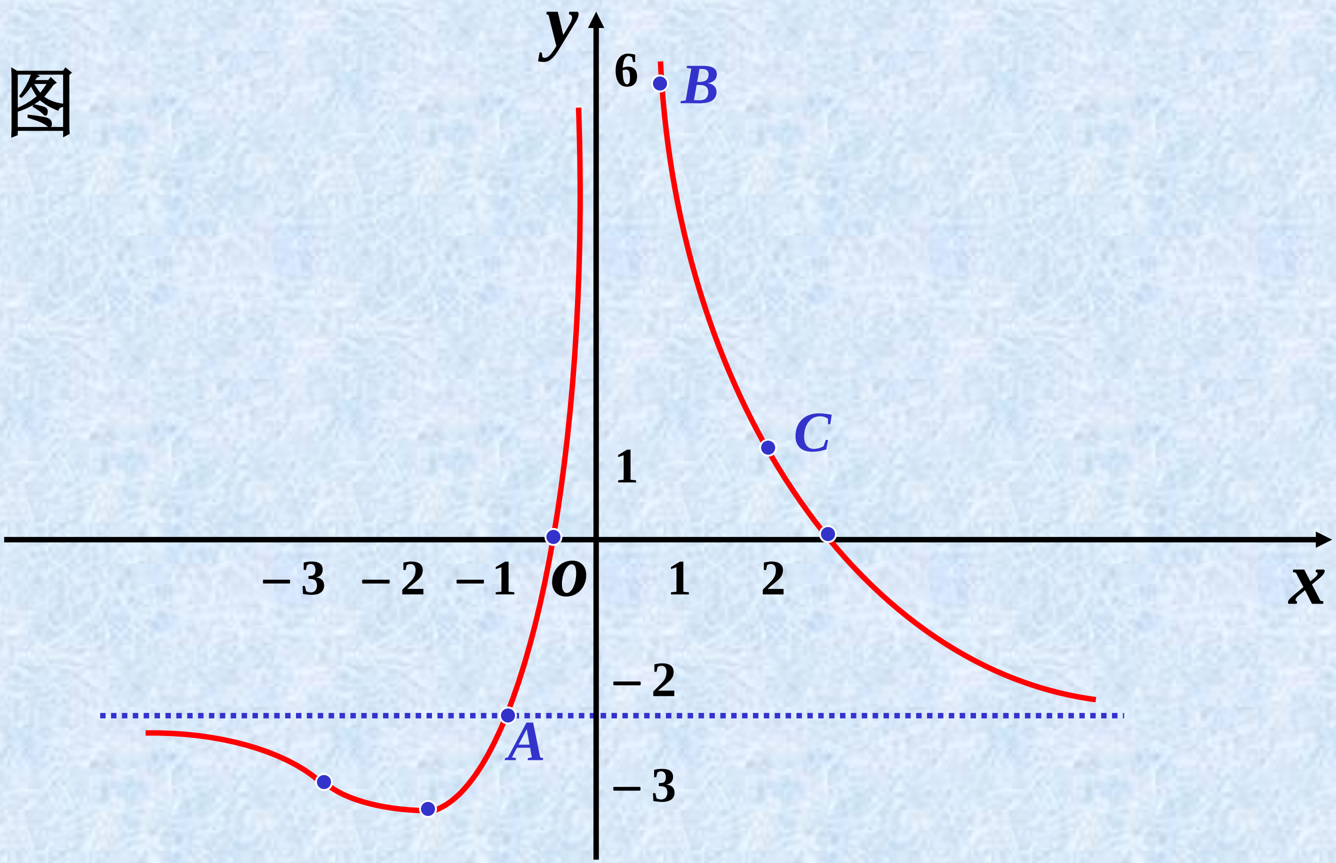
列表确定函数升降区间,凹凸区间及极值点和拐点:

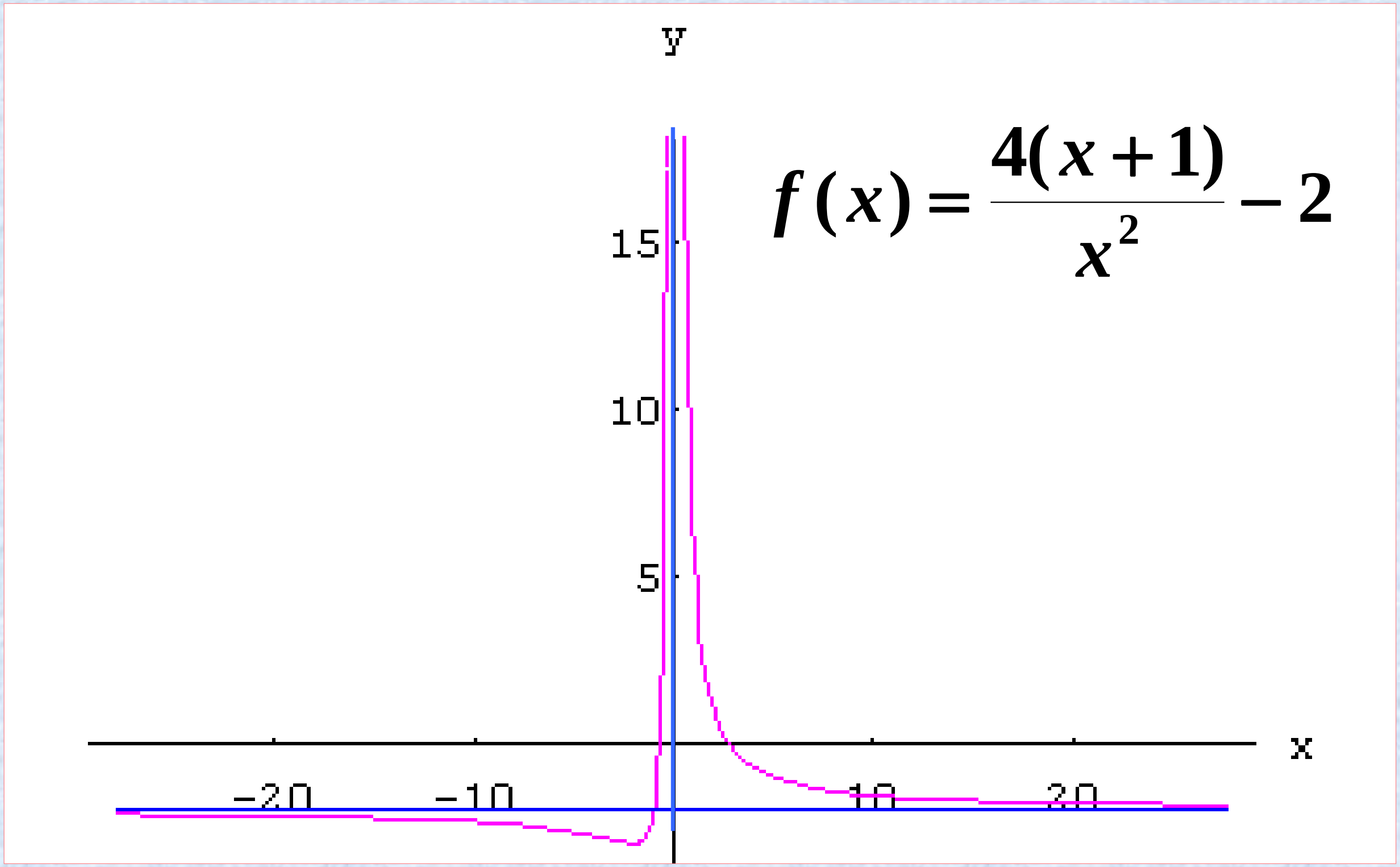
x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$	不存在	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$		拐点 $(-3,-\frac{26}{9})$		极值点 -3		间断点	

补充点：$(1-\sqrt{3},0)$, $(1+\sqrt{3},0)$;

$A\,(-1,-2)$, $B\,(1,6)$, $C\,(2,1)$.

作图





y
15
10
5
x
−20
−10
10
20
$f(x) = \frac{4(x+1)}{x^2} - 2$

内容小结

1. 曲线渐近线的求法

水平渐近线； 铅直渐近线;

斜渐近线

2. 函数图形的描绘 ———— 按作图步骤进行

思考与练习

1. 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ （ D ）

(A) 没有渐近线; (B) 仅有水平渐近线;

(C) 仅有铅直渐近线;

(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

提示: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty$

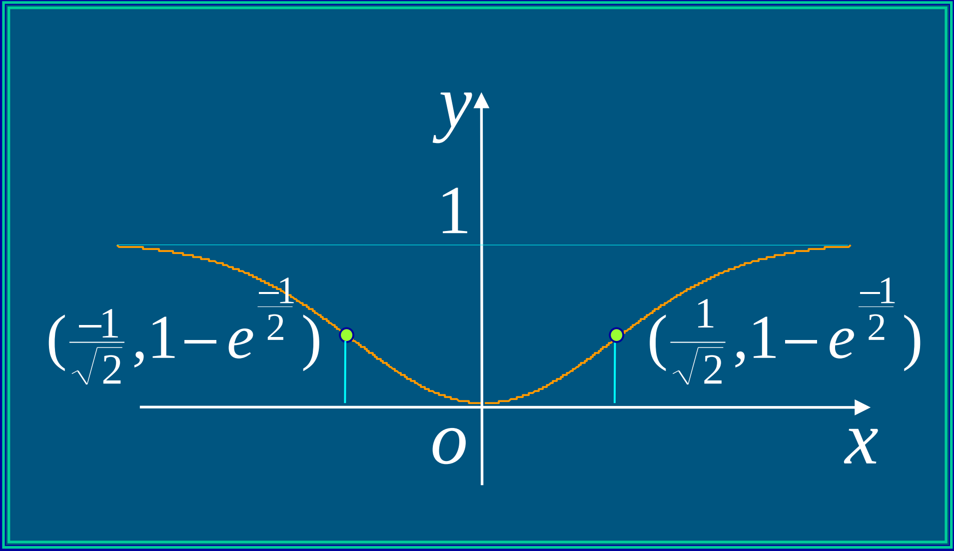
2. 曲线 $y=1-e^{-x^2}$ 的凹区间是 $\underline{(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})}$ ，

凸区间是 $\underline{(-\infty,\frac{-1}{\sqrt{2}})\text{ 及 }(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)}$ ，

拐点为 $\underline{(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},1-e^{\frac{-1}{2}})}$ ， 渐近线 $\underline{y=1}$.

提示:

$$y''=2e^{-x^2}(1-2x^2)$$



备用题 求笛卡儿叶形线 $x^3+y^3=3axy$ 的渐近线 .

解: 令 $y=t\,x$，代入原方程得曲线的参数方程：

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}\qquad t\neq -1$$

当$x\to\infty$时$t\to-1$, 因

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1}\frac{3at^2}{1+t^3}\Big/\frac{3at}{1+t^3}=-1$$

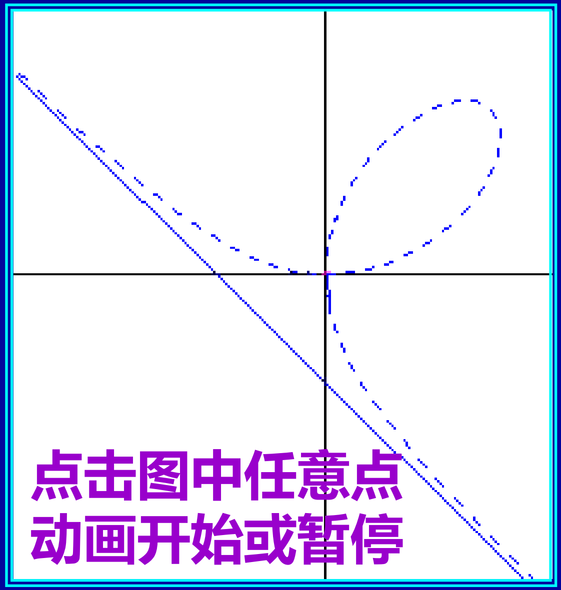
$$\lim_{x\to\infty}[y-(-x)]=\lim_{t\to-1}\left[\frac{3at^2}{1+t^3}+\frac{3at}{1+t^3}\right]=\lim_{t\to-1}\frac{3at\cancel{(1+t)}}{\cancel{(1+t)}(1-t+t^2)}$$

$$=-a$$

所以笛卡儿叶形线有斜渐近线 $y=-x-a$

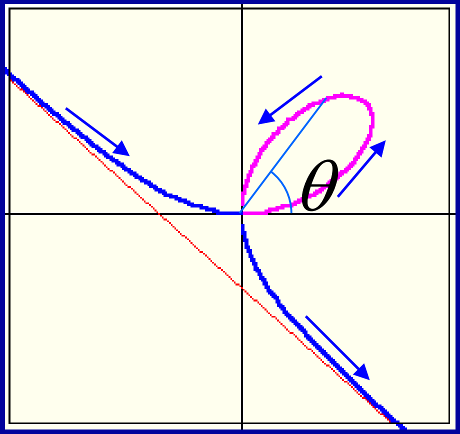
笛卡儿叶形线

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \qquad t \neq -1$$



参数的几何意义:

$$t = \tan\theta$$



$$t \in (-\infty, -1) \to \theta \in (-\tfrac{\pi}{2}, -\tfrac{\pi}{4})$$

图形在第四象限

$$t \in (-1, 0] \to \theta \in (\tfrac{3\pi}{4}, \pi]$$

图形在第二象限

$$t \in [0, +\infty) \to \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2})$$

图形在第一象限