

## 第一章 作业 1

一. 填空题 (每小题 10 分, 本大题满分 20 分)

1. 设  $f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ 2x-1, & x < 1 \end{cases}$ , 则  $f(f(e)) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 设  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ , 则  $f(f(x))$  的定义域为  $\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq \underline{\hspace{2cm}}\}$ ,

表达式为  $f(f(x)) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

二. 解答下列各题 (每小题 10 分, 本大题满分 40 分)

1. 求 (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2} - n)n$

2. 求 (1)  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{9-x}{3-\sqrt{x}}$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^4-16}$

3. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \cdots (1 - \frac{1}{n^2})$

4. 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+2)^{90}(x+3)^{10}}{(2x+1)^{100}}$

三. (每小题 10 分, 本大题满分 40 分)

1. 设  $f(x) = 0$ , 且  $x \neq 0$  时  $af(x) + bf(\frac{1}{x}) = \frac{c}{x}$ , 其中  $a, b, c$  为常数, 且  $|a| \neq |b|$ ,

证明:  $f(x)$  为奇函数.

2. 设  $f(x) + f(\frac{x-1}{x}) = 2x$ , 其中  $x \neq 0, x \neq 1$ . 求  $f(x)$ .

3. 设  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}, \varphi(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases}$ , 求  $f[\varphi(x)]$ .

4. 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$