洛必达法则

•未定式

在函数商的极限中，如果分子和分母同是无穷小或同是无穷大，那么极限可能存在，也可能不存在，这种极限称为未定式，记为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$.

还有其它类型的未定式：$0\cdot\infty$、$\infty-\infty$、0^0、1^∞、∞^0.

•未定式举例

下列极限都是未定式:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\ \left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}\ (n>0)\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$$

$$\lim_{x\to+0} x^n\ln x\ (n>0)\ (0\cdot\infty\text{型})$$

$$\ln 0=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)\ (\infty-\infty\text{型})$$

三角函数在无定义处
极限为无穷大

$$\lim_{x\to+0} x^x\,(0^0\text{型})$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x(1^\infty\text{型})$$

$$\lim_{x\to\infty}(x^2+a^2)^{\frac{1}{x^2}}\ (\infty^0\text{型})$$

❖定理[洛必达(L'Hospital)法则]

如果函数$f(x)$和$g(x)$满足如下条件:

(1) $f(x)$和$g(x)$都是当$x\to a$时的无穷小(或无穷大);

(2) $f(x)$和$g(x)$在点a的某去心邻域内都可导且$g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为无穷大),

那么

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

说明:

把定理中的" $x\to a$ "换成" $x\to\infty$ ", 把条件(2)换成"当$|x|>X$时$f(x)$和$g(x)$都可导且$g'(x)\neq 0$", 结论仍然成立.

证明 定义辅助函数

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq a \\ 0, & x=a \end{cases}, \quad g_1(x)=\begin{cases} g(x), & x\neq a \\ 0, & x=a \end{cases},$$

在 $U^0(a,\delta)$ 内任取一点 x, 在以 a 与 x 为端点的区间上，

$f_1(x), g_1(x)$ 满足柯西中值定理的条件, 则有

$$\frac{f_1(x)-f_1(a)}{g_1(x)-g_1(a)}=\frac{f_1'(\xi)}{g_1'(\xi)}, \quad (\xi \text{ 是 } x \text{ 与 } a \text{ 之间某一值})$$

即 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, 当 $x\to a$ 时, $\xi\to a$,

$$\therefore \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型洛必达法则: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

例1 求 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(\sin 3x)'}{(\sin 4x)'}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{3\cos 3x}{4\cos 4x}=-\dfrac{3}{4}$.

例2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}$.

例3 求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{x^2-2x+1}$. $(\frac{0}{0})$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{2x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{2}=-\frac{1}{2}$.

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{1-\cos x}$. $(\frac{0}{0})$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=1$.

$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型洛必达法则：$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$. $(\frac{0}{0})$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}$.

例6 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$. $(\frac{0}{0})$

解 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$.

例7 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}\ (n>0)$. $(\frac{\infty}{\infty})$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n}=0$.

例8 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}$ (n 为正整数, $\lambda>0$). $(\frac{\infty}{\infty})$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}=\cdots$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0.$$

例9 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}$. $(\frac{\infty}{\infty})$

三角函数无穷大要变

解1 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-6\cos 3x\sin 3x}{-2\cos x\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}=3.$$

解2 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cot 3x}{\cot x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\csc^2 3x}{-\csc^2 x}=3.$

$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型洛必达法则: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

注意：洛必达法则是求未定式的一种有效方法，但与其它求极限方法结合使用，效果更好.

例10　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2\tan x}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

$0\cdot\infty$ 型、$\infty-\infty$ 型极限计算：化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型.

例11 求 $\lim\limits_{x\to+0} x^n \ln x\ (n>0)$. $(0\cdot\infty)$

解 $$\lim_{x\to+0} x^n \ln x = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-n}} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = \lim_{x\to+0}\frac{-x^n}{n} = 0.$$

例12 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$. $(\infty-\infty)$

解 $$\text{原式} = \lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x} = \frac{1}{2}.$$

0^0 型、1^∞ 型、∞^0 型极限计算：取对数化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型.

$$\left.\begin{matrix} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{取对数}} \begin{cases} 0\cdot\ln 0 \\ \infty\cdot\ln 1 \\ 0\cdot\ln\infty \end{cases} \Rightarrow 0\cdot\infty.$$

$$\ln\lim u^v = \lim v\ln u = \lim\frac{\ln u}{v^{-1}} \Rightarrow \frac{0}{0}\text{型或}\frac{\infty}{\infty}\text{型}$$

例13　求 $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\tan x}$.　(0^0)

解　$$\ln\lim_{x\to0^+} x^{\tan x}=\lim_{x\to0^+}\ln x^{\tan x}=\lim_{x\to0^+}\tan x\ln x$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\cot x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}$$
$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x}{x}=0,$$
$$\lim_{x\to0^+} x^{\tan x}=e^0=1.$$

$$\boxed{\ln\lim u^v=\lim v\ln u=\lim\frac{\ln u}{v^{-1}}\Rightarrow\frac{0}{0}\text{型或}\frac{\infty}{\infty}\text{型}}$$

例14 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. (1^∞)

解 $$\ln\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\boxed{\ln\lim u^v = \lim v\ln u = \lim\frac{\ln u}{v^{-1}} \Rightarrow \frac{0}{0}\text{型或}\frac{\infty}{\infty}\text{型}}$$

0^0 型、1^∞ 型、∞^0 型极限计算：取对数化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型.

例15 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$. (∞^0)

解
$$\ln \lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{\cot x}\cdot(-\csc^2 x)}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\cos x\cdot\sin x} = -1,$$

原式 $= e^{-1}$.

$$\ln\lim u^v = \lim v\ln u = \lim\frac{\ln u}{v^{-1}} \Rightarrow \frac{0}{0}\text{型或}\frac{\infty}{\infty}\text{型}$$

填空题选讲

1． 设 $f(x)=(1-\frac{1}{x})^{x}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$______， $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=$______.

［ $\frac{1}{e}$； 1 ］

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}[(1-\frac{1}{x})^{-x}]^{-1}=e^{-1}$$

$$\ln\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\ln f(x)=\lim_{x\to\infty}\ln(1-\frac{1}{x})^{x}=\lim_{x\to 0^-} x\ln(1-\frac{1}{x})$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\ln(1-\frac{1}{x})\Big/\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0^-}(1-\frac{1}{x})^{-1}(\frac{1}{x^2})\Big/(-\frac{1}{x^2})$$

$$=-\lim_{x\to 0^-}(1-\frac{1}{x})^{-1}=0$$

•应注意的问题

本节定理给出的是求未定式的一种方法. 当定理条件满足时, 所求的极限当然存在(或为∞), 但定理条件不满足时, 所求极限却不一定不存在.

例16 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

解 因为极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$ 不存在,

所以不能用洛必达法则. 但其极限是存在的:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

思考题: 以下解法对否?

1. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sin x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\sin x)$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}$ 不存在.

极限不存在

洛必达法则失效.

2. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\arccos x}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=-1.$

注意：洛必达法则的使用条件.

思考题: 以下解法对否?

1. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{\cos x}{x})=1.$

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\arccos x}$.

解 原式 $=\dfrac{0}{\dfrac{\pi}{2}}=0.$

注意：洛必达法则的使用条件.