微分方程作业 1

1．验证 $y = xe^{rx}$ 为微分方程 $y'' - 2ry' + r^2 y = 0$ 的解.

解：
$$y' = e^{rx} + rxe^{rx} = (rx+1)e^{rx},$$
$$y'' = re^{rx} + r(rx+1)e^{rx} = (r^2x+2r)e^{rx},$$
于是
$$y'' - 2ry' + r^2y = (r^2x+2r)e^{rx} - 2r(rx+1)e^{rx} + r^2xe^{rx} = 0,$$
所以 $y = xe^{rx}$ 为微分方程 $y'' - 2ry' + r^2 y = 0$ 的解.

2．验证 $y = e^{\alpha x}\sin(\beta x+\varphi)$ 为微分方程 $y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2+\beta^2)y = 0$ 的解.

解：$y' = \alpha e^{\alpha x}\sin(\beta x+\varphi) + \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x+\varphi)$,
$$\begin{aligned} y'' &= \alpha^2 e^{\alpha x}\sin(\beta x+\varphi) + \alpha\beta e^{\alpha x}\cos(\beta x+\varphi) + \alpha\beta e^{\alpha x}\cos(\beta x+\varphi) - \beta^2 e^{\alpha x}\sin(\beta x+\varphi) \\ &= (\alpha^2-\beta^2)e^{\alpha x}\sin(\beta x+\varphi) + 2\alpha\beta e^{\alpha x}\cos(\beta x+\varphi), \end{aligned}$$
于是
$$\begin{aligned} y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2+\beta^2)y &= (\alpha^2-\beta^2)e^{\alpha x}\sin(\beta x+\varphi) + 2\alpha\beta e^{\alpha x}\cos(\beta x+\varphi) \\ &\quad -2\alpha\left(\alpha e^{\alpha x}\sin(\beta x+\varphi) + \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x+\varphi)\right) \\ &\quad + (\alpha^2+\beta^2)e^{\alpha x}\sin(\beta x+\varphi) \\ &= 0, \end{aligned}$$
所以 $y = e^{\alpha x}\sin(\beta x+\varphi)$ 为微分方程 $y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2+\beta^2)y = 0$ 的解.

3．利用代换 $y = \dfrac{u}{\cos x}$ 将方程 $y''\cos x - 2y'\sin x + 3y\cos x = e^x$ 化简为 x, u 的微分方程.

解：$y' = \dfrac{u'\cos x + u\sin x}{\cos^2 x}$,
$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(u''\cos x - u'\sin x + u'\sin x + u\cos x)\cos^2 x - (u'\cos x + u\sin x)(-2\cos x\sin x)}{\cos^4 x} \\ &= \frac{u''\cos^2 x + 2u'\cos x\sin x + u\cos^2 x + 2u\sin^2 x}{\cos^3 x}, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} & y''\cos x - 2y'\sin x + 3y\cos x \\ &= \frac{u''\cos^2 x + 2u'\cos x\sin x + u\cos^2 x + 2u\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2u'\cos x\sin x + 2u\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3u \\ &= u'' + 4u, \end{aligned}$$
所以原方程化为 $u'' + 4u = e^x$.

4．验证由方程 $y = \ln(xy)$ 所确定的函数为微分方程 $(xy-x)y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0$ 的解.

解：方程 $y = \ln(xy)$ 两边对 x 求导，得
$$y' = \frac{y+xy'}{xy} \Rightarrow y' = \frac{y}{xy-x},$$
于是
$$y'' = \frac{y'(xy-x) - y(y+xy'-1)}{(xy-x)^2} = \frac{y - y(y + \dfrac{xy}{xy-x} - 1)}{(xy-x)^2} = \frac{2xy^2 - 2xy - xy^3}{(xy-x)^3},$$
所以

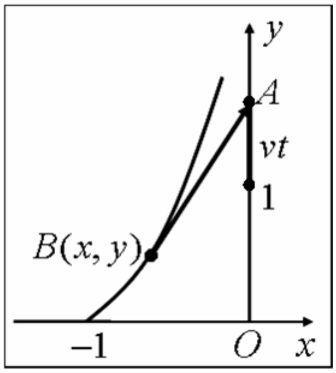
$$(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=\frac{2xy^2-2xy-xy^3}{(xy-x)^2}+\frac{xy^2}{(xy-x)^2}+\frac{y^2}{xy-x}-\frac{2y}{xy-x}$$
$$=\frac{2xy(y-1)-xy^2(y-1)}{(xy-x)^2}+\frac{y^2}{xy-x}-\frac{2y}{xy-x}=0.$$

5．设平面曲线 L 上任意一点 $P(x,y)\ (x>0)$ 处的切线与 y 轴总相交，交点记为 A．已知 $|PA|=|OA|$，且 L 过点 $(1,1)$．求曲线 L 所满足的微分方程，并写出初始条件.

解：曲线 L 上点 $P(x,y)$ 处的切线方程为
$$Y-y=y'(X-x),$$
令 $X=0$，得 $Y=y-xy'$，所以点 A 的坐标为 $(0,y-xy')$．由题设 $|PA|=|OA|$，得
$$\sqrt{x^2+(xy')^2}=|y-xy'|,$$
由此得所求微分方程为
$$2xyy'+x^2-y^2=0,$$
由 L 过点 $(1,1)$，得初始条件 $y|_{x=1}=1$.

6．设物体 A 从点 $(0,1)$ 出发，以速度大小为常数 v 沿 y 轴正向运动．物体 B 从点 $(-1,0)$ 与 A 同时出发，其速度大小为 $2v$，方向始终指向 A．试建立物体 B 的运动轨迹所满足的微分方程，并写出初始条件.

解：设在时刻 t，B 位于点 (x,y) 处，则
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(1+vt)-y}{-x}，\text{即 } x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y-(1+vt),$$



两边对 x 求导，得
$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-v\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x},\qquad（1）$$
已知 $2v\,\mathrm{d}t=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$，代入（1）式得所求微分方程为
$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}=0,$$
当 $t=0$ 时，$x=-1$，$y=0$，于是
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(1+vt)-y}{-x}=1,$$
所以初始条件为 $y|_{x=-1}=0,\quad y'|_{x=-1}=1$.

微分方程作业 2

1．求下列微分方程的通解或特解：

（1）$y'-y^2\cos x=0$；

解：分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y^2}=\cos x\,\mathrm{d}x$，两边积分得 $-\dfrac{1}{y}=\sin x+C$，即 $y=-\dfrac{1}{\sin x+C}$.

（2）$(x^2+1)y'=xy$，$y|_{x=0}=1$；

解：分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$，两边积分得
$$\ln|y|=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C，\text{即 } y=C_1\sqrt{x^2+1}，（C_1=\pm e^C）.$$

由 $y|_{x=0}=1$，得 $C_1=1$，所以 $y=\sqrt{x^2+1}$.

（3）$\cos y\,\mathrm{d}x+(1+e^{-x})\sin y\,\mathrm{d}y=0$， $y|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$.

解：分离变量得 $\dfrac{\sin y\,\mathrm{d}y}{\cos y}=-\dfrac{e^x}{e^x+1}\mathrm{d}x$，两边积分得

$$-\ln|\cos y|=-\ln(e^x+1)+C\text{，即}\cos y=C_1(e^x+1)\text{，（}C_1=\pm e^{-C}\text{）}.$$

由 $y|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$，得 $C_1=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，所以 $\cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(e^x+1)$.

2．一曲线上任意一点处的法线都过原点，且点 $(2,2)$ 在该曲线上，求这一曲线的方程.

解：曲线上点 (x,y) 处的法线方程为 $Y-y=-\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(X-x)$，由法线过原点（将 $X=0$， $Y=0$ 代入），得

$$-y=x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}.$$

分离变量得 $y\,\mathrm{d}y=-x\,\mathrm{d}x$，两边积分得

$$\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C.$$

由 $x=2,\ y=2$，得 $C=4$．所求曲线方程为 $x^2+y^2=8$.

3．假定物体在空气中的冷却速度是正比于该物体的温度和它周围的空气温度之差．若室温为 20^0c 时，一物体由 100^0c 冷却到 60^0c 须经过 20 分钟，问共经过多少时间方可使此物体的温度从开始时的 100^0c 降低到 30^0c.

解：设在时刻 t 物体的温度为 $T(t)$，由题设得

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-20)\text{，其中 }k>0\text{ 为冷却系数.}$$

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}T}{T-20}=-k\,\mathrm{d}t$，两边积分得

$$\ln(T-20)=-kt+\ln C\text{，即 }T=20+Ce^{-kt}.$$

由 $T(0)=100$ 得 $C=80$，再由 $T(20)=60$ 得 $k=\dfrac{\ln 2}{20}$，所以 $T=20+80e^{-\frac{\ln 2}{20}t}$．令 $T(t)=30$，得 $t=60$.

共经过 60 分钟方可使此物体的温度从开始时的 100^0c 降低到 30^0c.

4．一池盛有盐水 100 公斤，其中含盐 10 公斤，现以每分钟 2 公斤的速率往池内注入淡水，同时从池内流出 2 公斤混和均匀的盐水，求池内溶液的含盐量降至一半所需要的时间.

解：设从注入淡水开始记时（此时 $t=0$），第 t 分钟后池内盐的含量为 m 公斤，则池内盐的浓度为 $\dfrac{m}{100}$，

在时间间隔 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内，从池内流出的溶液中盐的含量为 $\dfrac{m}{100}\times 2\times\mathrm{d}t=\dfrac{m}{50}\mathrm{d}t$，也即

$$\mathrm{d}m=-\frac{m}{50}\mathrm{d}t.$$

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}m}{m}=-\dfrac{1}{50}\mathrm{d}t$，两边积分得

$$\ln m = -\frac{t}{50} + \ln C，即 m = Ce^{-\frac{t}{50}}.$$

由初始条件$t=0$，$m=10$，得$C=10$，所以$m=10e^{-\frac{t}{50}}$．令$m=5$，得$t=50\ln 2$，即池内的含盐量降至一半所需要的时间为$50\ln 2$分钟.

5．设L是一条平面曲线，其上任意一点$P(x, y)\ (x>0)$到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在y轴上的截距，且L过点$(1, 0)$．求曲线L的方程.

解：设曲线L上点$P(x, y)$处的切线方程为$Y - y = y'(X - x)$，令$X = 0$得$Y = y - xy'$，所以切线在y轴上的截距为$y - xy'$．由题设得曲线L满足微分方程

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy',$$

令$y = ux$，方程化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分得

$$\ln(u + \sqrt{1+u^2}) = -\ln x + \ln C \Rightarrow y + \sqrt{x^2 + y^2} = C.$$

由L过点$(1, 0)$，得$C = 1$．所以曲线L的方程为$y + \sqrt{x^2 + y^2} = 1$，即$x = \sqrt{1-2y}$.

微分方程作业 3

1．求下列微分方程的通解或特解：

（1）$y' - y\cos x = e^{\sin x}$；

解：先解齐次方程$y' - y\cos x = 0$，分离变量得$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \cos x\,\mathrm{d}x$，两边积分得

$$\ln|y| = \sin x + \ln C，即 y = \pm Ce^{\sin x}.$$

再用常数变易法求原非齐次方程的解．令$y = u(x)e^{\sin x}$，则$y' = u'e^{\sin x} + ue^{\sin x}\cos x$，代入原方程，得

$$u'e^{\sin x} = e^{\sin x}，即 u' = 1,$$

积分得$u = x + C$，所以$y = e^{\sin x}(x + C)$.

（2）$(x-2)y' = y + 2(x-2)^3$；

解：将原方程化为标准形式

$$y' - \frac{1}{x-2}y = 2(x-2)^2,$$

由通解公式得

$$y = e^{\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x}[\int 2(x-2)^2 e^{-\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C] = (x-2)[\int 2(x-2)\,\mathrm{d}x + C] = (x-2)[(x-2)^2 + C].$$

（3）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$，$y|_{x=\pi} = 1$.

解：方程两边乘以积分因子$\mu = e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x} = x$，得

$$(xy)' = \sin x,$$

两边积分得

$$xy = -\cos x + C，即 y = \frac{1}{x}(C - \cos x),$$

由 $y|_{x=\pi}=1$，得 $C=\pi-1$，所以 $y=\frac{1}{x}(\pi-1-\cos x)$.

2．已知某曲线经过点 $(1,1)$，它的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标，求它的方程.
解：曲线上点 (x,y) 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，令 $X=0$，得 $Y=y-xy'$（纵截距）. 由题设条件得曲线所满足的微分方程为

$$y-xy'=x\text{，即 } y'-x^{-1}y=-1.$$

由通解公式得

$$y=e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}[\int(-1)e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]=x(-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+C)=x(-\ln x+C).$$

由 $x=1,\ y=1$ 得 $C=1$. 所求曲线方程为 $y=x(1-\ln x)$.

3．设有一质量为 m 的质点作直线运动，从速度等于零的时刻起，有一个与运动方向一致、大小与时间成正比（比例系数为 k_1）的力作用于它，此外还受到一与速度成正比（比例系数为 k_2）的阻力作用. 求质点运动的速度与时间的函数关系.
解：依题设，根据牛顿第二定律，得微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=k_1t-k_2v.$$

由通解公式得

$$v=e^{-\int\frac{k_2}{m}\mathrm{d}t}(\int\frac{k_1}{m}te^{\int\frac{k_2}{m}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C)=e^{-\frac{k_2}{m}t}(\int\frac{k_1}{m}te^{\frac{k_2}{m}t}\mathrm{d}t+C)=\frac{k_1}{k_2}t-\frac{mk_1}{k_2{}^2}+Ce^{-\frac{k_2}{m}t},$$

由 $t=0$，$v=0$，得 $C=\frac{mk_1}{k_2{}^2}$，所以

$$v=\frac{k_1}{k_2}t-\frac{k_1m}{k_2{}^2}(1-e^{-\frac{k_2}{m}t}).$$

4．设可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=x+1$，求 $f(x)$.
解：将 $x=0$ 代入所给方程得 $f(0)=1$，方程两边对 x 求导得

$$f'(x)\cos x+f(x)\sin x=1\text{，即 } f'(x)+f(x)\tan x=\sec x.$$

由通解公式得

$$f(x)=e^{-\int\tan x\mathrm{d}x}(\int\sec xe^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=\cos x(\int\sec^2x\,\mathrm{d}x+C)=\cos x(\tan x+C).$$

由 $f(0)=1$ 得 $C=1$. 所以 $f(x)=\sin x+\cos x$.

5．设平面曲线 L 上任意一点 $P(x,y)\ (x>0)$ 处的切线与 y 轴总相交，交点记为 A. 已知 $|PA|=|OA|$，且 L 过点 $(1,1)$. 求曲线 L 的方程.
解：曲线 L 上点 $P(x,y)$ 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，令 $X=0$，得 $Y=y-xy'$，所以点 A 的坐标为 $(0,y-xy')$. 由题设 $|PA|=|OA|$，得

$$\sqrt{x^2+(xy')^2}=|y-xy'|\ \Rightarrow 2xyy'+x^2-y^2=0\ \Rightarrow (y^2)'-\frac{1}{x}y^2=-x,$$

由通解公式得

$$y^2=e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}(\int(-x)e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=Cx-x^2,$$

由 L 过点 $(1,1)$，得 $C=2$. 所以曲线 L 的方程为 $x^2-2x+y^2=0$.

微分方程作业 4

1．求下列微分方程的通解或特解：

（1）$y''-4y'=0$；

解：特征方程为$r^2-4r=0$，特征根为$r_1=0$，$r_2=4$，所以通解为$y=C_1+C_2e^{4x}$.

（2）$y''+6y'+13y=0$；

解：特征方程为$r^2+6r+13=0$，特征根为$r=-3\pm 2\mathrm{i}$，所以通解为$y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

（3）$y''-2y'+y=0$，$y|_{x=0}=2$，$y'|_{x=0}=3$.

解：特征方程为$r^2-2r+1=0$，特征根为$r_1=r_2=1$，所以通解为$y=e^x(C_1+C_2x)$．求导得

$$y'=e^x(C_1+C_2+C_2x),$$

由所给初始条件得

$$\begin{cases} C_1=2 \\ C_1+C_2=3 \end{cases},$$

解得$C_1=2$，$C_2=1$，所求特解为$y=2e^x+xe^x$.

2．设圆柱形浮筒，直径为0.5 m，铅直放在水中，当稍向下压后突然放开，浮筒在水中上下振动的周期为 2s，求浮筒的质量.

解：当浮筒下移$x\,(\mathrm{m})$时，受到的浮力为

$$f=-\rho g\pi r^2x=-62.5g\pi x \text{（牛顿）}.$$

根据牛顿第二定律，得微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-62.5g\pi x.$$

此方程的通解为

$$x=C_1\cos(\sqrt{62.5g\pi/m}\,t)+C_2\sin(\sqrt{62.5g\pi/m}\,t).$$

函数$x(t)$的周期为$T=\dfrac{2\pi}{\sqrt{62.5g\pi/m}}=2$，得$m=\dfrac{62.5g}{\pi}\approx 195$（kg）.

3．已知$y_1=e^x$是微分方程

$$(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$$

的一个解，求此微分方程的通解.

解 1：设$y=u(x)e^x$，则

$$y'=ue^x+u'e^x,\quad y''=ue^x+2u'e^x+u''e^x,$$

代入原微分方程，并整理得

$$(2x-1)u''+(2x-3)u'=0,$$

解得

$$u'=C\exp(-\int\frac{2x-3}{2x-1}\mathrm{d}x)=Ce^{-x}(2x-1),$$

$$u=\int Ce^{-x}(2x-1)\,\mathrm{d}x=-Ce^{-x}(2x+1)+C_1,$$

所以

$$y=C_1e^x+C_2(2x+1),\ (C_2=-C).$$

解 2：设$y_2=ax+b$为原微分方程的另一个解，则

$$-(2x+1)a+2(ax+b)=0,$$
得 $a=2b$，可取 $y_2=2x+1$．因 $y_2\neq Cy_1$，所以原微分方程的通解为
$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^x+C_2(2x+1).$$

4．求微分方程 $y''-2y'+y=\frac{1}{x}e^x$ 的通解.

解：容易求得微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的通解为 $y=C_1e^x+C_2xe^x$．设 $y=u(x)e^x$，则
$$y'=ue^x+u'e^x,\quad y''=ue^x+2u'e^x+u''e^x,$$
代入原微分方程，并整理得
$$u''=\frac{1}{x},$$
积分得
$$u'=C+\ln|x|,$$
再积分得
$$u=C_1+Cx+x\ln|x|-x,$$
所以
$$y=C_1e^x+C_2xe^x+xe^x\ln|x|,\ (C_2=C-1).$$

微分方程作业 5

1．求下列微分方程的通解或特解：

（1）$2y''-3y'+y=x^2-6x+4$；

解：齐次方程 $2y''-3y'+y=0$ 的特征方程为 $2r^2-3r+1=0$，特征根为 $r_1=1$，$r_2=\frac{1}{2}$，所以齐次通解为
$$Y=C_1e^x+C_2e^{x/2}.$$
设原方程的待定特解为 $y_p=ax^2+bx+c$，代入原方程得
$$4a-3(2ax+b)+ax^2+bx+c=x^2-6x+4,$$
比较两边系数，求得 $a=1$，$b=0$，$c=0$，所以 $y_p=x^2$．原方程的通解为
$$y=Y+y_p=C_1e^x+C_2e^{x/2}+x^2.$$

（2）$y''-4y'+5y=2e^x$；

解：齐次方程 $y''-4y'+5y=0$ 的特征方程为 $r^2-4r+5=0$，特征根为 $r=2+\mathrm{i}$，所以齐次通解为
$$Y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$
设原方程的待定特解为 $y_p=ae^x$，代入原方程得
$$2ae^x=2e^x,$$
求得 $a=1$，所以 $y_p=x^2$．原方程的通解为
$$y=Y+y_p=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^x.$$

（3）$y''-6y'+9y=(6x-4)e^{3x}$；

解：齐次方程 $y''-6y'+9y=0$ 的特征方程为 $r^2-6r+9=0$，特征根为 $r_1=r_2=3$，所以齐次通解为
$$Y=e^{3x}(C_1+C_2x).$$

设原方程的待定特解为 $y_p = x^2(ax+b)e^{3x}$，代入原方程，并整理得

$$6ax+2b=6x-4,$$

比较两边系数，求得 $a=1$，$b=-2$，所以 $y_p=(x^3-2x^2)e^{3x}$．原方程的通解为

$$y=Y+y_p=e^{3x}(C_1+C_2x-2x^2+x^3).$$

（4）$y''-y=4xe^x$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$．

解：齐次方程 $y''-y=0$ 的特征方程为 $r^2-1=0$，特征根为 $r_1=1,\ r_2=-1$，所以齐次通解为

$$Y=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

设原方程的待定特解为 $y_p=x(ax+b)e^x$，代入原方程，并整理得

$$2a+4ax+2b=4x,$$

比较两边系数，求得 $a=1$，$b=-1$，所以 $y_p=(x^2-x)e^x$．原方程的通解为

$$y=Y+y_p=C_1e^x+C_2e^{-x}+(x^2-x)e^x.$$

求导得

$$y'=C_1e^x-C_2e^{-x}+(x^2+x-1)e^x,$$

由所给初始条件得

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1-C_2-1=1 \end{cases},$$

解得 $C_1=1$，$C_2=-1$，所求特解为

$$y=e^x-e^{-x}+(x^2-x)e^x=(x^2-x+1)e^x-e^{-x}.$$

2．设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $f(x)=2e^x+\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t-x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，求 $f(x)$．

解：由所给方程得 $f(0)=2$，且

$$f'(x)=2e^x-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (1)$$

由方程（1）得 $f'(0)=2$，且

$$f''(x)=2e^x-f(x) \qquad (2)$$

解微分方程（2）得

$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+e^x.$$

由 $f(0)=2$，$f'(0)=2$，求得 $C_1=1$，$C_2=1$．所以

$$f(x)=\cos x+\sin x+e^x.$$

3．已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的三个解，求此微分方程.

解 1：设所求微分方程为 $y''+py'+qy=f(x)$．因 y_1，y_2，y_3 为该方程的解，所以

$$y_4=y_1-y_2=e^{2x}-e^{-x},\quad y_5=y_1-y_3=e^{-x},\quad y_6=y_4+y_5=e^{2x}$$

都是 $y''+py'+qy=0$ 的解.

由 y_5，y_6 为 $y''+py'+qy=0$ 的两个解，可知 $r_1=-1$，$r_2=2$ 为特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根，因此 $p=-1$，$q=-2$. 于是

$$f(x)=y_1''+py_1'+qy_1=[(2+x)e^x+4e^{2x}]-[(1+x)e^x+2e^{2x}]-2(xe^x+e^{2x})=(1-2x)e^x.$$

所求微分方程为 $y''-y'-2y=(1-2x)e^x$.

解 2：设所求微分方程为 $y''+py'+qy=f(x)$．分别将 y_1， y_2 代入，得

$$[(x+2)e^x+4e^{2x}]+p[(x+1)e^x+2e^{2x}]+q(xe^x+e^{2x})=f(x)\text{，（1）}$$

$$[(x+2)e^x+e^{-x}]+p[(x+1)e^x-e^{-x}]+q(xe^x+e^{-x})=f(x)\text{，（2）}$$

由方程（1）和（2）得

$$(4+2p+q)e^{2x}-(1-p+q)e^{-x}=0\text{，}$$

由此可知

$$4+2p+q=0\text{，}1-p+q=0\text{，}$$

解得 $p=-1$， $q=-2$．代入方程（1），得 $f(x)=(1-2x)e^x$．所求微分方程为

$$y''-y'-2y=(1-2x)e^x.$$