极限运算法则

本节讨论极限的求法。利用极限的定义，从变量的变化趋势来观察函数的极限，对于比较复杂的函数难于实现。为此需要介绍极限的运算法则。首先来介绍无穷小。

一、无穷小

在实际应用中，经常会遇到极限为0的变量。对于这种变量不仅具有实际意义，而且更具有理论价值，值得我们单独给出定义

1.定义: 极限为零的函数称为无穷小.

定义 1 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在正数δ(或正数 X),使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$)的一切 x,对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)|<\varepsilon$,

那末 称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为无穷小,

记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \quad (\text{或} \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0)$.

例 $\because \lim\limits_{x\to 0}\sin x=0,$

$\therefore$ 函数 $\sin x$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小.

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$ $\therefore$ 函数 $\frac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0,$ $\therefore$ 数列 $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$ 是当 $n\to\infty$ 时的无穷小.

注意

1.称函数为无穷小，必须指明自变量的变化过程;

2.无穷小是变量,不能与很小的数混淆;

3.零是可以作为无穷小的唯一的数.

定理 1 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$,

其中$\alpha(x)$是当$x \to x_0$时的无穷小.

证 必要性 设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

令 $\alpha(x) = f(x) - A$, 则 $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$且$f(x) = A + \alpha(x)$.

充分性 设 $f(x) = A + \alpha(x)$, 则$\alpha(x) = f(x) - A$

若 $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, 则$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有

$|\alpha(x)| < \varepsilon$ 因为$\alpha(x) = f(x) - A$

即$|f(x) - A| < \varepsilon$ 则 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$

意义

1.将一般极限问题转化为特殊极限问题(无穷小);

2.给出了函数$f(x)$在x_0附近的近似表达式

$f(x) \approx A$,误差为$\alpha(x)$.

3.无穷小的运算性质:

定理2 在同一过程中,有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

证 设α及β是当$x \to \infty$时的两个无穷小,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0, N_2 > 0,$使得

当 $|x| > N_1$ 时恒有 $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$; 当 $|x| > N_2$ 时恒有 $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$;

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $|x| > N$ 时, 恒有

$$|\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$$\therefore \alpha \pm \beta \to 0 \ (x \to \infty)$$

注意 无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小.

例如, $n \to \infty$ 时, $\frac{1}{n}$ 是无穷小,

但 n 个 $\frac{1}{n}$ 之和为1不是无穷小.

定理3 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

证 设函数u在$U^0(x_0,\delta_1)$内有界,

则$\exists M>0,\delta_1>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta_1$时

恒有$|u|\le M$.

又设α是当$x\to x_0$时的无穷小,

$\therefore \forall\varepsilon>0,\exists\delta_2>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta_2$时

恒有$|\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{M}$.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$时,恒有

$$|u \cdot \alpha| = |u| \cdot |\alpha| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

$\therefore$ 当$x \to x_0$时,$u \cdot \alpha$为无穷小.

推论1 在同一过程中,有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

推论2 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论3 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

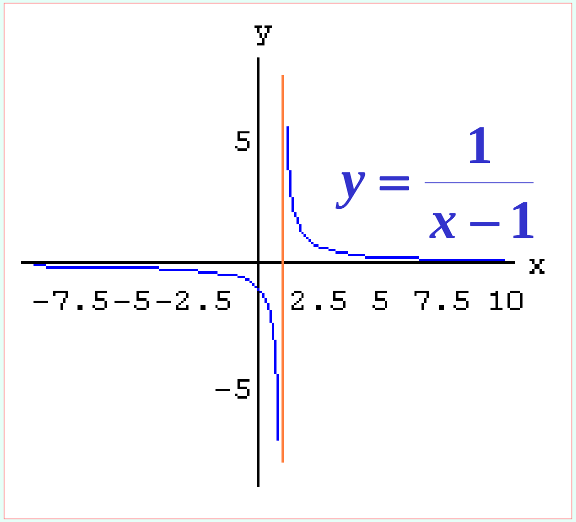
例如,当$x \to 0$时,$x \sin \frac{1}{x}, x^2 \arctan \frac{1}{x}$ 都是无穷小

二、无穷大

绝对值无限增大的变量称为<u>无穷大</u>.

定义 2　如果对于任意给定的正数 M (不论它多么大),总存在正数 δ (或正数 X),使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$)的一切 x,所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)| > M$,则称函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$)时为无穷大,记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$).

例　证明$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$



证　$\forall M>0.$ 要使$\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M,$

只要$|x-1|<\dfrac{1}{M},$　取$\delta=\dfrac{1}{M},$

当$0<|x-1|<\delta=\dfrac{1}{M}$时, 就有$\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M.\ \therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$

定义:如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$,则直线$x=x_0$是函数$y=f(x)$的图形的铅直渐近线.

三、无穷小与无穷大的关系

定理4 在同一过程中，无穷大的倒数为无穷小；恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

证 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty.$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

恒有 $|f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$，

$\therefore$ 当 $x \to x_0$ 时，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

反之,设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$,且 $f(x)\neq 0$.

$\therefore \forall M>0, \exists \delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时

恒有$|f(x)|<\dfrac{1}{M}$,

$\therefore$ 当$x\to x_0$时,$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

意义　关于无穷大的讨论,都可归结为关于无穷小的讨论.

四、极限运算法则

定理 设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B;$

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B;$

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B},$ 其中$B\neq 0.$

证 $\because \lim f(x)=A,\quad \lim g(x)=B.$

$\therefore f(x)=A+\alpha,\quad g(x)=B+\beta.$ 其中$\alpha\to 0,\beta\to 0.$

由无穷小运算法则,得

$$[f(x)\pm g(x)]-(A\pm B)=\alpha\pm\beta\ \to 0.\ \therefore (1)成立.$$

$$[f(x)\cdot g(x)]-(A\cdot B)=(A+\alpha)(B+\beta)-AB$$

$$=(A\beta+B\alpha)+\alpha\beta\ \to 0. \qquad \therefore (2)成立.$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha-A\beta}{B(B+\beta)} \quad \because B\alpha-A\beta\to 0.$$

又$\because \beta\to 0, B\neq 0,\quad \exists\,\delta>0,\quad$当$0<\left|x-x_0\right|<\delta$时,

$$|\beta|<\frac{|B|}{2},\quad \therefore |B+\beta|\geq|B|-|\beta|\ >|B|-\frac{1}{2}|B|=\frac{1}{2}|B|$$

$$\therefore \left|B(B+\beta)\right| > \frac{1}{2}B^2,\ \text{故} \left|\frac{1}{B(B+\beta)}\right| < \frac{2}{B^2},\ \text{有界},$$

$\therefore$ (3)成立.

注 ①此定理对于数列同样成立

②此定理证明的基本原则:

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$$

③(1),(2)可推广到任意有限个具有极限的函数

④ (2)有两个重要的推论

推论1　如果$\lim f(x)$存在,而c为常数,则

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x).$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论2　如果$\lim f(x)$存在,而n是正整数,则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

⑤定理的条件：$\lim f(x), \lim g(x)$　存在

商的情形还须加上分母的极限不为0

⑥定理简言之即是：和、差、积、商的极限等于极限的和、差、积、商

⑦定理中极限号下面没有指明极限过程，是指对任何一个过程都成立

五、求极限方法举例

例1 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5) = \lim\limits_{x\to 2}x^2 - \lim\limits_{x\to 2}3x + \lim\limits_{x\to 2}5$

$= (\lim\limits_{x\to 2}x)^2 - 3\lim\limits_{x\to 2}x + \lim\limits_{x\to 2}5$

$= 2^2 - 3\cdot 2 + 5 = 3 \neq 0,$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3 - \lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)} = \frac{2^3-1}{3} = \frac{7}{3}.$$

小结: 1. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a_0(\lim_{x\to x_0} x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0} x)^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=a_0x_0^{\,n}+a_1x_0^{\,n-1}+\cdots+a_n = f(x_0).$$

2. 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且 $Q(x_0)\neq 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0).$$

若 $Q(x_0)=0$, 则商的法则不能应用.

例2　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}$.

解　$\because \lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-3)=0,$　　商的法则不能用

又 $\because \lim\limits_{x\to 1}(4x-1)=3\neq 0,$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{4x-1}=\frac{0}{3}=0.$$

由无穷小与无穷大的关系,得

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x-1}{x^2+2x-3}=\infty.$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

解 $x\to1$时,分子,分母的极限都是零. $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

先约去不为零的无穷小因子$x-1$后再求极限.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}.$$

(消去零因子法)

例4　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解　$x\to\infty$时, 分子,分母的极限都是无穷大. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$

先用x^3去除分子分母,分出无穷小,再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}}{7+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

(无穷小因子分出法)

小结: 当$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$和$n$为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, \text{当} n = m, \\ 0, \text{当} n > m, \\ \infty, \text{当} n < m, \end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子,分母,以分出无穷小,然后再求极限.

例5 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2})$.

解 $n\to\infty$时,是无穷小之和. 先变形再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2}.$$

由以上几例可见，在应用极限的四则运算法则求极限时，必须注意定理的条件，当条件不具备时，有时可作适当的变形，以创造应用定理的条件，有时可以利用无穷小的运算性质或无穷小与无穷大的关系求极限。

六、复合函数极限

定理 （复合函数极限运算法则——变量代换法则）

设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，但在$x_0$的某去心邻域内$\varphi(x)\neq a$，

又$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$

证

由$\lim\limits_{u\to a} f(u) = A$知 $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$

使当$0 < |u - a| < \eta$时,有 $|f(u) - A| < \varepsilon$

又由$\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = a$得 对上述$\eta > 0$, $\exists \delta > 0$

使当$0 < |x - x_0| < \delta$时,有 $|\varphi(x) - a| < \eta$

又$\varphi(x) \neq a$ $\Rightarrow$ $0 < |\varphi(x) - a| < \eta$

$\Rightarrow$ $|f[\varphi(x)] - A| < \varepsilon$

由极限定义得 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim\limits_{u\to a} f(u) = A$

此定理表明：若$f(u)$与$\varphi(x)$满足定理的条件

则可作代换 $u=\varphi(x)$把求$\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]$转化为

$\lim\limits_{u\to a} f(u)$,这里$a=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$

——极限过程的转化

注 如将$\lim\varphi(x)=a$换成$\lim\varphi(x)=\infty$

$\lim\limits_{u\to a} f(u)=A$换成$\lim\limits_{u\to\infty} f(u)=A$

可得类似的定理

六、小结

无穷小与无穷大是相对于过程而言的.

1、主要内容: 两个定义;四个定理;三个推论.

2、几点注意:

（1） 无穷小（ 大）是变量,不能与很小（大）的数混淆，零是唯一的无穷小的数;

（2）无穷多个无穷小的代数和（乘积）未必是无穷小.

（3） 无界变量未必是无穷大.

3.极限的四则运算法则及其推论;

4.极限求法;

a. 多项式与分式函数代入法求极限;
b. 消去零因子法求极限;
c. 无穷小因子分出法求极限;
d. 利用无穷小运算性质求极限;
e. 利用左右极限求分段函数极限.

思考题1

若 $f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，

问：能否保证有 $A>0$ 的结论？试举例说明.

思考题2

在某个过程中，若 $f(x)$ 有极限, $g(x)$ 无极限，那么 $f(x)+g(x)$ 是否有极限？为什么？

思考题1解答

不能保证.

例 $f(x)=\frac{1}{x}$ $\forall x>0,$ 有 $f(x)=\frac{1}{x}>0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=A=0.$$

思考题2解答

没有极限.

假设 $f(x)+g(x)$ 有极限， $\because f(x)$ 有极限，

由极限运算法则可知：

$g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$ 必有极限，

与已知矛盾， 故假设错误.