



高阶导数

一、高阶导数的定义

问题: 变速直线运动的加速度.

设 $s = f(t)$, 则瞬时速度为 $v(t) = f'(t)$

\therefore 加速度 a 是速度 v 对时间 t 的变化率

$\therefore a(t) = v'(t) = [f'(t)]'$.

定义 如果函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在点 x 处可导, 即

$$(f'(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

存在, 则称 $(f'(x))'$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 处的二阶导数.

记作 $f''(x), y'', \frac{d^2 y}{dx^2}$ 或 $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x), y''', \frac{d^3 y}{dx^3}$.

三阶导数的导数称为四阶导数, $f^{(4)}(x), y^{(4)}, \frac{d^4 y}{dx^4}$.

一般地, 函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为函数 $f(x)$ 的 n 阶导数, 记作

$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n} \text{ 或 } \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数.

相应地, $f(x)$ 称为零阶导数; $f'(x)$ 称为一阶导数.



、高阶导数求法举例

1. 直接法：由高阶导数的定义逐步求高阶导数.

例1 设 $y = \arctan x$, 求 $f''(0), f'''(0)$.

解 $y' = \frac{1}{1+x^2} \quad y'' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$$y''' = \left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)' = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

$$\therefore f''(0) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Big|_{x=0} = 0; \quad f'''(0) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} \Big|_{x=0} = -2.$$

例2 设 $y = x^\alpha$ ($\alpha \in R$), 求 $y^{(n)}$.

解 $y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$$y'' = (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$y''' = (\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2})' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

.....

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \quad (n \geq 1)$$

若 α 为自然数 n , 则

$$y^{(n)} = (x^n)^{(n)} = n!, \quad y^{(n+1)} = (n!)' = 0.$$

例3 $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 求 $y^{(n)}$

解 $y' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}$

$$y'' = n(n-1)a_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1x^{n-3} + \cdots + 2a_{n-2}$$

.....

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= n(n-1)\cdots(n-k+1)a_0x^{n-k} \\ &\quad + (n-1)(n-2)\cdots(n-k)a_1x^{n-k-1} \\ &\quad + \cdots + k!a_{n-k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y^{(n)} = n!a_0$$

注意:求n阶导数时,求出1-3或4阶后,不要急于合并,分析结果的规律性,写出n阶导数.(数学归纳法证明)——**逐阶求导, 寻求规律, 写出通式**

例4 设 $y = \ln(1+x)$, 求 $y^{(n)}$.

解 $y' = \frac{1}{1+x} \qquad y'' = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$$y''' = \frac{2!}{(1+x)^3} \qquad y^{(4)} = -\frac{3!}{(1+x)^4}$$

.....

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad (n \geq 1, 0! = 1)$$

例5 设 $y = \sin x$, 求 $y^{(n)}$.

解 $y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$y''' = \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2})$$

.....

$$y^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

同理可得 $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$

2. 高阶导数的运算法则:

设函数 u 和 v 具有 n 阶导数, 则

$$(1) (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

$$(2) (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$$

$$\Rightarrow (\alpha u + \beta v)^{(n)} = \alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)}$$

$$\begin{aligned} (3) (u \cdot v)^{(n)} &= u^{(n)} v + nu^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} v'' \\ &\quad + \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} u^{(n-k)} v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \end{aligned}$$

莱布尼兹公式

例7 设 $y = x^2 e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$.

解 设 $u = e^{2x}$, $v = x^2$, 则由莱布尼兹公式知

$$\begin{aligned} y^{(20)} &= (e^{2x})^{(20)} \cdot x^2 + 20(e^{2x})^{(19)} \cdot (x^2)' \\ &\quad + \frac{20(20-1)}{2!} (e^{2x})^{(18)} \cdot (x^2)'' + 0 \\ &= 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x \\ &\quad + \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2 \\ &= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95) \end{aligned}$$

3. 间接法: 利用已知的高阶导数公式, 通过四则运算, 变量代换等方法, 求出n阶导数.

常用高阶导数公式

$$(1) (a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a > 0) \quad (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(2) (\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(3) (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(4) (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

$$(5) (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

例9 设 $y = \frac{1}{x^2 - 1}$, 求 $y^{(5)}$.

解 $\because y = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right)$

$$\therefore y^{(5)} = \frac{1}{2} \left[\frac{-5!}{(x - 1)^6} - \frac{-5!}{(x + 1)^6} \right]$$

$$= 60 \left[\frac{1}{(x + 1)^6} - \frac{1}{(x - 1)^6} \right]$$

三、小结

高阶导数的定义及物理意义;

高阶导数的运算法则(莱布尼兹公式);

n 阶导数的求法;

1.直接法; 2.间接法.

思考题

设 $g'(x)$ 连续, 且 $f(x) = (x-a)^2 g(x)$,
求 $f''(a)$.

思考题解答

$\because g(x)$ 可导

$$\therefore f'(x) = 2(x-a)g(x) + (x-a)^2 g'(x)$$

$\because g''(x)$ 不一定存在 故用定义求 $f''(a)$

$$f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} \quad f'(a) = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} [2g(x) + (x-a)g'(x)] = 2g(a)$$