函数的微分

一、微分的定义

二、微分的几何意义

三、基本微分公式与微分运算法则

四、微分在近似计算中的应用

一、微分的定义

❖引例

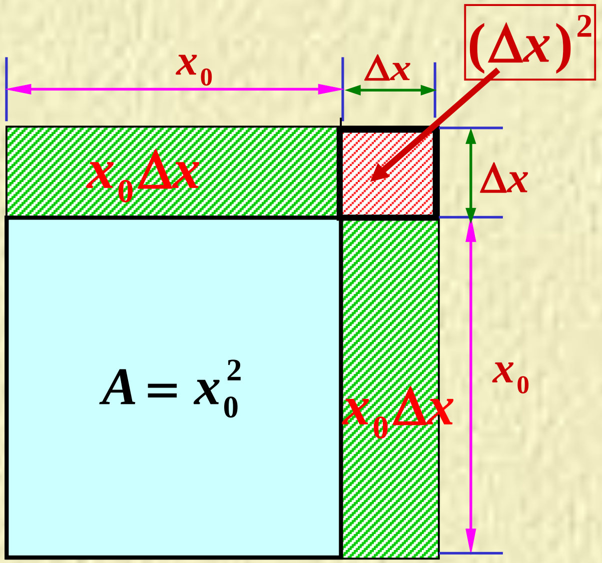
正方形金属薄片受热后面积的改变量.

设边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$,

金属薄片面积的增量

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2$$

$$=\underbrace{2x_0\cdot\Delta x}_{(1)}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}.$$



(1): Δx 的线性函数,且为 ΔA 的主要部分;

(2): Δx 的高阶无穷小,当 $|\Delta x|$ 很小时可忽略.

再例如，设函数 $y=x^3$ 在点 x_0 处的改变量为 Δx 时，求函数的改变量 Δy.

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3$$

$$=\underbrace{3x_0^2\cdot\Delta x}_{(1)}+\underbrace{3x_0\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}_{(2)}.$$

当 $|\Delta x|$ 很小时，(2)是 Δx 的高阶无穷小 $o(\Delta x)$，

$\therefore \Delta y\approx 3x_0^2\cdot\Delta x.$ 既容易计算又是较好的近似值

问题：是否所有函数的改变量都可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)\ ?$$

线性函数 $A\Delta x$ 中的 A 是什么？

❖微分的定义

如果函数 $y=f(x)$ 的增量可表示为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数, 则称函数 $y=f(x)$在点 x_0可微. 而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分, 记作 $\mathrm{d}y$, 即

$$\mathrm{d}y=A\Delta x.$$

微分 $\mathrm{d}y$ 叫做函数增量 Δy 的线性主部. (微分的实质)

问题: 是否所有函数的改变量都可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)\ ?$$

线性函数 $A\Delta x$ 中的 A 是什么?

❖微分的定义

如果函数 $y=f(x)$ 的增量可表示为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数, 则称函数 $y=f(x)$在点 x_0可微. 而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分, 记作 $\mathrm{d}y$, 即

$$\mathrm{d}y=A\Delta x.$$

微分 $\mathrm{d}y$ 叫做函数增量 Δy 的线性主部. (微分的实质)

注: (1) 当 $A\neq 0$ 时, $\mathrm{d}y$ 与 Δy 是等价无穷小;

(2) 当 $A\neq 0$, 而 $|\Delta x|$ 很小时,

$$\Delta y\approx \mathrm{d}y = A\Delta x.$$

既容易计算又是较好的近似值

• 可微与可导的关系

函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导.
函数 $y=f(x)$在点 x_0 的微分一定是

$$dy=f'(x_0)\Delta x.$$

这是因为, 一方面

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)=A.$$

另一方面

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha\Rightarrow\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x,$$

其中 $\alpha\to 0$(当 $\Delta x\to 0$), 且 $A=f(x_0)$ 是常数, $\alpha\Delta x=o(\Delta x)$.

•可微与可导的关系

函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导.

函数 $y=f(x)$在点 x_0 的微分一定是

$$dy=f'(x_0)\Delta x.$$

函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 的微分，称为函数的微分，记作 dy 或 $df(x)$, 即

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

例如，$d\cos x=(\cos x)'\Delta x=-\sin x\,\Delta x$;

$de^x=(e^x)'\Delta x=e^x\Delta x$.

例1 求函数 $y=x^3$ 当 $x=2$，$\Delta x=0.02$ 时的微分.

解 先求函数在任意点 x 的微分，

$$dy=(x^3)'\Delta x=3x^2\Delta x.$$

再求函数当 $x=2$，$\Delta x=0.02$ 时的微分，

$$dy\big|_{x=2,\ \Delta x=0.02}$$

$$=3x^2\Delta x\big|_{x=2,\ \Delta x=0.02}$$

$$=3\times 2^2\times 0.02=0.24.$$

•自变量的微分

$$\mathrm{d}x=(x)'\Delta x=\Delta x,$$

自变量 x 的微分 $\mathrm{d}x$ 等于增量 Δx , 即

$$\boxed{\mathrm{d}x=\Delta x.}$$

函数 $y=f(x)$ 的微分更习惯地记作

$$\boxed{\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x.}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x).$$

函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 之商等于该函数的导数．导数也叫“微商”.

函数 $y=f(x)$ 的微分：$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$.

例2 设 $y=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$, 求$\mathrm{d}y$.

解 $y'=2\arctan x+2x\cdot\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}\cdot 2x=2\arctan x$,

$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=2\arctan x\,\mathrm{d}x.$

例3 设 $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, 求$\mathrm{d}y$.

解 $$y'=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x}{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}},$$

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\mathrm{d}x.$$

二、微分的几何意义

当 x 从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时,

Δy 是曲线上点的纵坐标的增量;

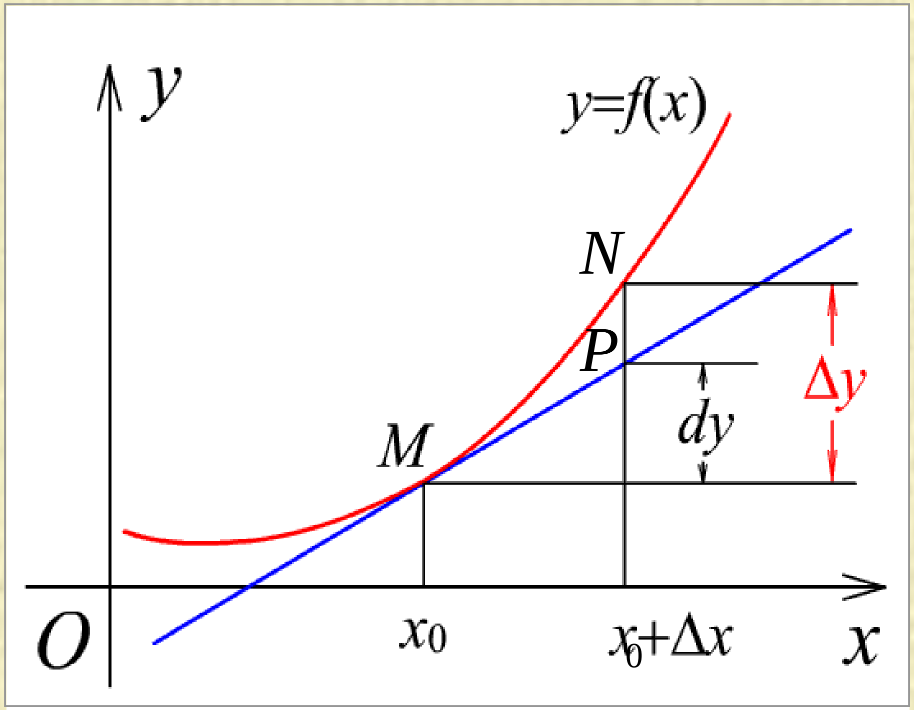
$\mathrm{d}y$ 是过点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线上点的纵坐标的增量.

当 $|\Delta x|$ 很小时, $|\Delta y-\mathrm{d}y|$ 比 $|\Delta x|$ 小得多. 于是

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y.$$

微分的几何意义:

用切线小段 MP 近似代替曲线小段 MN.



三、基本微分公式与微分运算法则

1. 基本初等函数的微分公式

导数公式:	微分公式:
$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$	$d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}dx$
$(\sin x)'=\cos x$	$d(\sin x)=\cos x dx$
$(\cos x)'=-\sin x$	$d(\cos x)=-\sin x dx$
$(\tan x)'=\sec^2 x$	$d(\tan x)=\sec^2 x dx$
$(\cot x)'=-\csc^2 x$	$d(\cot x)=-\csc^2 x dx$
$(\sec x)'=\sec x \tan x$	$d(\sec x)=\sec x \tan x dx$
$(\csc x)'=-\csc x \cot x$	$d(\csc x)=-\csc x \cot x dx$
$(a^x)'=a^x \ln a$	$d(a^x)=a^x \ln a dx$
$(e^x)=e^x$	$d(e^x)=e^x dx$

导数公式:

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

微分公式:

$$d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx$$

$$d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$$

$$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$d(\operatorname{arccot} x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$$

2. 函数和、差、积、商的微分法则

求导法则	微分法则
$(u\pm v)'=u'\pm v'$	$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$
$(Cu)'=Cu'$	$\mathrm{d}(Cu)=C\mathrm{d}u$
$(u\cdot v)'=u'v+uv'$	$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$
$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\ (v\neq 0)$	$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}\ (v\neq 0)$

公式 $\mathrm{d}(u\cdot v)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$ 的证明:

因为

$$\mathrm{d}(uv)=(u'v+uv')\mathrm{d}x=u'v\mathrm{d}x+uv'\mathrm{d}x.$$

而 $u'\mathrm{d}x=\mathrm{d}u,\ v'\mathrm{d}x=\mathrm{d}v,$

所以 $\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v.$

3. 复合函数的微分法则

设 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 可微, 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$\mathrm{d}y=y'_x\mathrm{d}x=f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

因为 $\varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$, 所以, 复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分公式也可以写成

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u \text{ 或 } \mathrm{d}y=y'_u\mathrm{d}u.$$

由此可见，无论 u 是自变量还是中间变量, 微分形式 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$ 保持不变．这一性质称为微分形式不变性.

微分等式 $\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$ 中的自变量 x 可用可微中间变量 $u=\varphi(x)$ 代换.

若 $u=\varphi(x)$可微, 则由 $\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$, 得 $\mathrm{d}f(u)=f'(u)\mathrm{d}u$.

例4 设 $y=\ln\cos\frac{1}{x}$, 求$\mathrm{d}y$.

解 $$\mathrm{d}y=\frac{1}{\cos\frac{1}{x}}\mathrm{d}\cos\frac{1}{x}$$

$$\mathrm{d}\ln u=\frac{1}{u}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\cos\frac{1}{x}}(-\sin\frac{1}{x})\mathrm{d}\frac{1}{x}$$

$$\mathrm{d}\cos u=-\sin u\,\mathrm{d}u$$

$$=-(\tan\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{x^2}\tan\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

例5 在下列等式的括号中填入适当的函数，使等式成立.

(1) $\mathrm{d}(\quad) = \cos\omega t\,\mathrm{d}t$;　　(2) $\mathrm{d}(\sin x^2) = (\quad)\mathrm{d}(\sqrt{x})$.

解 (1) $\because \mathrm{d}(\sin\omega t) = \omega\cos\omega t\,\mathrm{d}t$,

$$\therefore \cos\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\mathrm{d}(\sin\omega t) = \mathrm{d}(\frac{1}{\omega}\sin\omega t);$$

$$\therefore \mathrm{d}(\frac{1}{\omega}\sin\omega t + C) = \cos\omega t\,\mathrm{d}t.$$

$$(2) \because \frac{\mathrm{d}(\sin x^2)}{\mathrm{d}(\sqrt{x})} = \frac{2x\cos x^2\mathrm{d}x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x} = 4x\sqrt{x}\cos x^2,$$

$$\therefore \mathrm{d}(\sin x^2) = (4x\sqrt{x}\cos x^2)\mathrm{d}(\sqrt{x}).$$

四、微分在近似计算中的应用

❖函数的近似计算

当函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x)\neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时, 我们有

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x,$$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \approx dy = f'(x_0)\Delta x,$$

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

若令 $x = x_0+\Delta x$，即 $\Delta x = x-x_0$，那么又有

$$f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

特别当 $x_0=0$ 时，有 $f(x) \approx f(0)+f'(0)x$.

例6 有一批半径为 1cm 的球，为了提高球面的光洁度，要镀上一层铜，厚度定为 0.01cm. 估计一下每只球需用铜多少 g (铜的密度是$8.9g/cm^3$)?

解 已知球体体积为$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$，$R_0=1\text{cm}$，$\Delta R=0.01\text{cm}$.

镀层的体积为

$$\Delta V=V(R_0+\Delta R)-V(R_0)$$
$$\approx V'(R_0)\Delta R=4\pi R_0^2\Delta R$$
$$\approx 4\times3.14\times1^2\times0.01\approx0.13(\text{cm}^3).$$

于是镀每只球需用的铜约为

$$0.13\times8.9\approx1.16(g).$$

例7 利用微分计算 $\sin 30°30'$ 的近似值.

解 已知 $30°30' = \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{360}$， $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$， $\Delta x = \dfrac{\pi}{360}$.

$$\sin 30°30' = \sin(x_0+\Delta x) \approx \sin x_0 + \cos x_0\,\Delta x$$

$$= \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{360}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360} \approx 0.5076.$$

常用的近似公式(假定 $|x|$ 是较小的数值)：

(1) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$； (2) $\sin x\approx x$； (3) $\tan x\approx x$；

(4) $e^x\approx 1+x$； (5) $\ln(1+x)\approx x$.

例8 计算下列各数的近似值.

(1) $\sqrt[3]{998.5}$； (2) $e^{-0.03}$.

解 (1) $\sqrt[3]{998.5}=\sqrt[3]{1000-1.5}=\sqrt[3]{1000(1-\frac{1.5}{1000})}$

$$=10\sqrt[3]{1-0.0015}\approx 10(1-\frac{1}{3}\times 0.0015)=9.995.$$

(2) $e^{-0.03}\approx 1-0.03=0.97.$

作业2.4