第一章

函数与极限

分析基础 { 函数 —— 研究对象; 极限 —— 研究方法; 连续 —— 研究桥梁 }

- **函数** —— 研究对象
- **极限** —— 研究方法
- **连续** —— 研究桥梁

第一节 函数与初等函数

一、函数

二、初等函数

一、 函数

1. 集合的定义及表示法

定义 1. 具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**.

组成集合的事物称为**元素**.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$.

元素 a 属于集合 M，记作 $a \in M$.

元素 a 不属于集合 M，记作 $a \overline{\in} M$ (或 $a \notin M$) .

注： M 为数集 $\begin{cases} M^{*} \text{表示 } M \text{ 中排除 } 0 \text{ 的集；} \\ M^{+} \text{表示 } M \text{ 中排除 } 0 \text{ 与负数的集 .} \end{cases}$

表示法：

(1) 列举法：按某种方式列出集合中的全体元素 .

例: 有限集合 $A = \{ a_1, a_2, \cdots, a_n \} = \{ a_i \}_{i=1}^{n}$

自然数集 $\mathrm{N} = \{ 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots \} = \{ n \}$

(2) 描述法：$M = \{ x \mid x$ 所具有的特征 $\}$

例: 整数集合 $\mathrm{Z} = \{ x \mid x \in \mathrm{N}$ 或 $-x \in \mathrm{N}^+ \}$

有理数集 $\mathrm{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathrm{Z}, q \in \mathrm{N}^+, \ p \text{ 与 } q \text{ 互质} \right\}$

实数集合 $\mathrm{R} = \{ x \mid x$ 为有理数或无理数$\}$

2. 集合之间的关系及运算

定义2． 设有集合 A, B, 若 $x \in A$ 必有 $x \in B$, 则称 A 是 B 的**子集**, 或称 B 包含 A, 记作 $A \subset B$.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称 A 与 B **相等**, 记作 $A = B$.

例如, $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z}$, $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Q}$, $\mathrm{Q} \subset \mathrm{R}$

显然有下列关系 :

(1) $A \subset A$; $A = A$; $\varnothing \subset A$

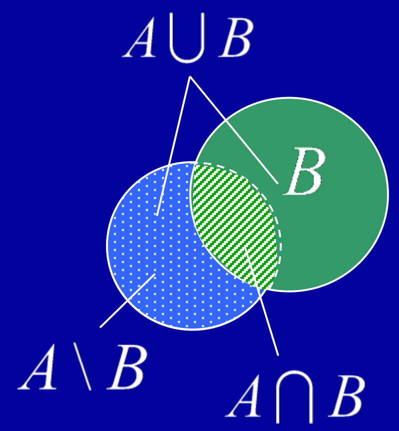
(2) $A \subset B$ 且 $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$

定义 3 . 给定两个集合 A, B, 定义下列运算:

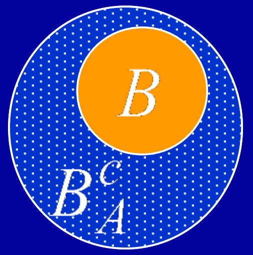
并集 $A\bigcup B=\{x \mid x\in A$ **或** $x\in B\}$

交集 $A\bigcap B=\{x \mid x\in A$ **且** $x\in B\}$

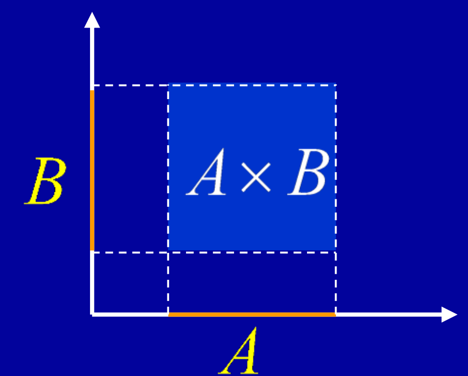
差集 $A\setminus B=\{x \mid x\in A$ **且** $x\notin B\}$



余集 $B_A^c=A\setminus B\,($其中$B\subset A)$



直积 $A\times B=\{(x, y) \mid x\in A,\ y\in B\}$



特例: $\mathrm{R}\times\mathrm{R} \overset{\text{记}}{=\!=} \mathrm{R}^2$

为平面上的全体点集

3.区间与邻域

定义4． 设a , b是两个实数，且 $a<b$

称数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 为开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$$

称数集 $\{x \mid a \le x \le b\}$ 为闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x \mid a \le x \le b\}$$

这里，称 a, b 为闭区间 $[a, b]$ 的端点.

类似可定义半开半闭区间和无穷区间.

半开半闭区间 $[a,b)=\{x \mid a\le x<b\}$

$(a,b]=\{x \mid a<x\le b\}$

无穷区间 $(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$

$[a,+\infty)=\{x \mid a\le x<+\infty\}$

$(a,+\infty)=\{x \mid a<x<+\infty\}$

$(-\infty,b]=\{x \mid -\infty<x\le b\}$

$(-\infty,b)=\{x \mid -\infty<x<b\}$

上述任何一种区间都可在数轴上表示出来.

区间常用字母 I 表示.

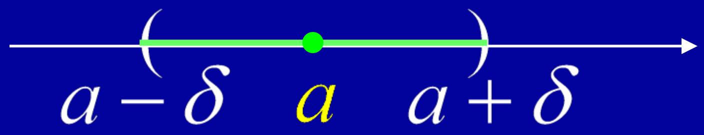
定义5.

设a与δ是两个实数且$\delta>0$,称以a为中心且长度等于2δ的开区间$(a-\delta, a+\delta)$为**点a 的δ邻域**，记作$U(a,\delta)$.

即 $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$

$$=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

$$=\{x \mid\ |x-a|<\delta\}$$



其中，点a 称为该邻域的**中心**，δ 称为该邻域的**半径**.

去心 δ 邻域 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$

左 δ 邻域：$(a-\delta, a)$，**右 δ 邻域**：$(a, a+\delta)$.

4.常量与变量

定义6. 在自然现象及技术过程中，总会涉及到各种各样的量. 有些量在整个过程中保持一定的数值，这种量叫做常量（或常数），常用字母 a, b, c 表示. 有些量可以取不同的数值，这种量叫变量 . 常用字母 x, y, z 表示.

5. 函数的概念

设 x 和 y 是两个变量, 如果对于变量 x 在其变化范围内所取得的每一个值, 变量 y 按照一定的规律总有确定的值与之对应, 就称 y 是 x 的函数, 记作

$$y = f(x)$$

因变量 自变量

x 的变化范围称为函数的**定义域**, 用字母 D 表示.

相应的全体函数值, 称为函数的**值域**, 用字母 W 表示.

记作 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$

- **定义域** —— 使表达式及实际问题都有意义的自变量集合.
- **对应规律**的表示方法：解析法、图象法、列表法

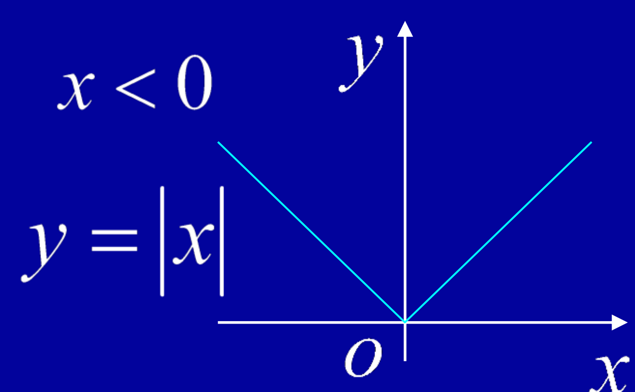
例如, 反正弦主值 $y = f(x) = \arcsin x$

定义域 $D = [-1, 1]$, 值域 $f(D) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

又如, 绝对值函数 $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

定义域 $D = \mathrm{R}$

值　域 $f(D) = [0, +\infty)$



关于函数的定义域

- 对于表示实际问题的函数关系, 定义域应由所研究问题的实际意义来确定.
- 对于用数学公式抽象表示的函数, 其定义域是使这个表达式有意义的自变量的一切值组成的集合.

一般包括下列情况:

1.分母不得为零.

2.偶数次方根的被开方式必须大于或等于零.

3.对数的真数部分大于零,底数部分大于零且不等于1.

4.反正弦反余弦函数其自变量的绝对值不能大于1.

5.正切余切函数的自变量分别满足 $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2},$

$x \neq k\pi,\ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

例1. 已知函数 $y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}\,, & 0\le x\le 1\\ 1+x\,, & x>1\end{cases}$

求 $f(\frac{1}{2})$ 及 $f(\frac{1}{t})$，并写出 $f(x)$ 的定义域及值域 .

解: $f(\frac{1}{2})=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

$$f(\tfrac{1}{t})=\begin{cases}1+\dfrac{1}{t}\,, & 0<t<1\\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{t}}\,, & t\ge 1\end{cases}$$

$t\le 0$ 时
函数无定义

定义域 $D=[0,+\infty)$

值　域 $f(D)=[0,+\infty)$

6. 函数的几种特性

设函数 $y=f(x), x\in D$, 且有区间 $I\subset D$.

(1) 有界性

$\forall x\in D, \exists M>0$, 使 $|f(x)|\le M$, 称 $f(x)$ 为有界函数.

$\forall x\in I, \exists M>0$, 使 $|f(x)|\le M$, 称 $f(x)$ 在 I 上有界.

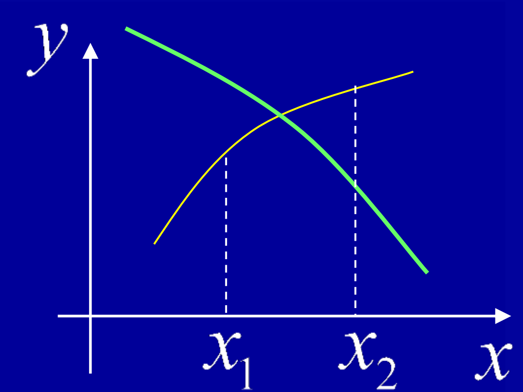
说明: 还可定义有上界、有下界、无界

(2) 单调性

$\forall x_1, x_2\in I,\ x_1<x_2$ 时,

若 $f(x_1)<f(x_2)$, 称 $f(x)$ 为 I 上的单调增函数；

若 $f(x_1)>f(x_2)$, 称 $f(x)$ 为 I 上的单调减函数.

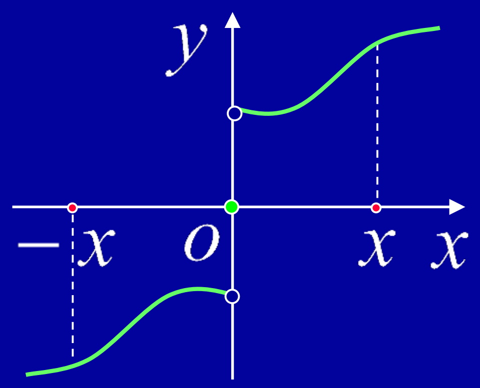


(3) 奇偶性

$\forall x \in D$, 都有 $-x \in D$,

若 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数;

若 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

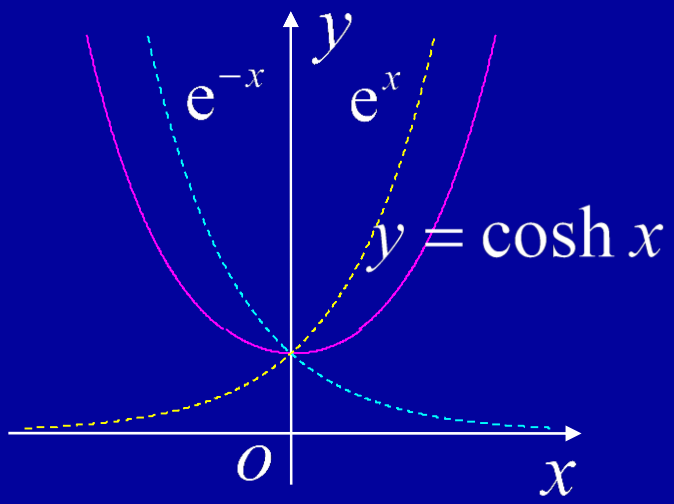


说明: 若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 有定义 , 则当 $f(x)$ 为**奇函数**时, 必有 $f(0) = 0$.

例如,

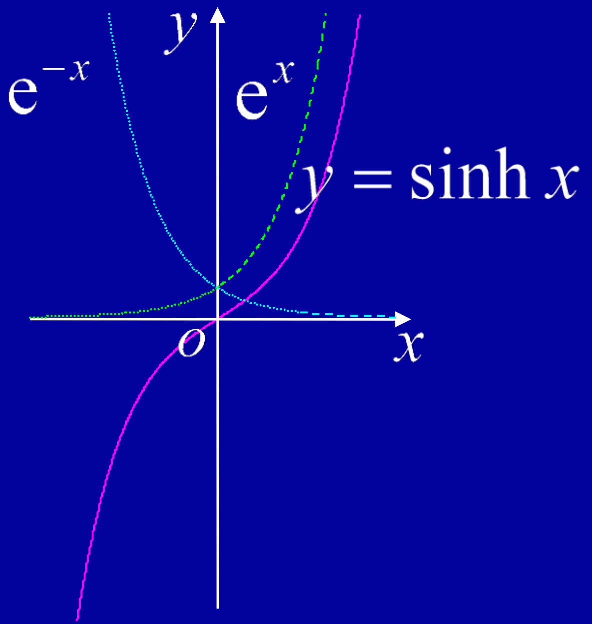
$$y = f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{偶函数}$$

$\overset{\text{记}}{=} \cosh x$ 双曲余弦函数



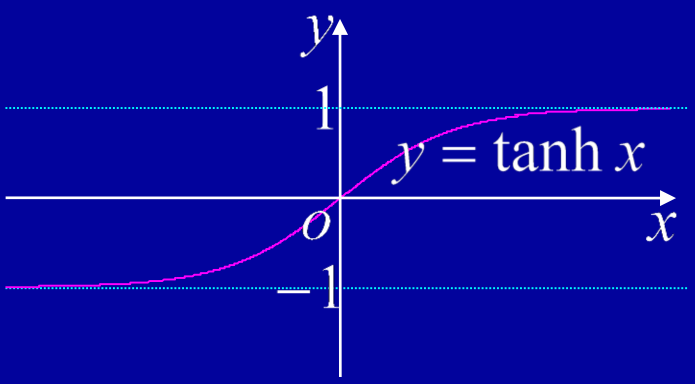
又如, $y = f(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ 奇函数

记 $= \sinh x$ 双曲正弦函数



再如, $y = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$ 奇函数

记 $= \tanh x$ 双曲正切函数

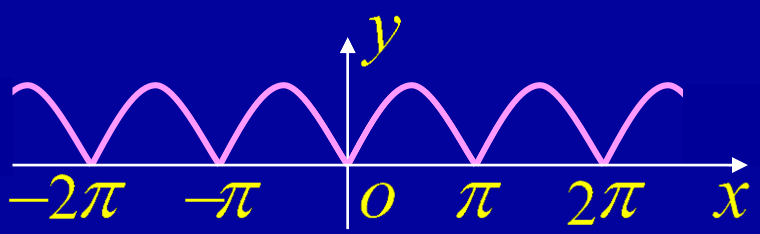


(4) 周期性

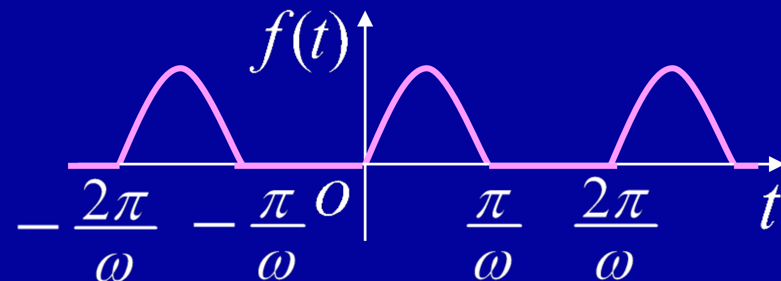
$$\forall x \in D, \exists l > 0, \text{ 且 } x \pm l \in D, \text{ 若}$$

$$f(x \pm l) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，称 l 为周期（一般指最小正周期）.



周期为 π



周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$

注：周期函数不一定存在最小正周期 .

例如，常函数 $f(x) = C$

狄利克雷函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x\text{ 为有理数} \\ 0, & x\text{ 为无理数} \end{cases}$

例3. 设函数 $y=f(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形关于 $x=a$, $x=b \ (a<b)$ 均对称, 求证 $y=f(x)$ 是周期函数.

证: 由 $f(x)$ 的对称性知

$$f(x)=f(2a-x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$f(x)=f(2b-x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

在(2)中将 x 换为 $2a$ - x , 得

$$f(2a-x)=f(2b-2a+x),$$

再利用(1)式得恒等式

$$f(x)=f(2b-2a+x),$$

故 $f(x)$ 是周期函数，周期为 $T=2(b-a)$

7. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为D，值域为W．若对于任一 $y\in W$，有唯一一个 $x\in D$，适合关系式

$$f(x)=y$$

则把 y 看作自变量，x 看作因变量时，得到的新函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=\varphi(y)$.

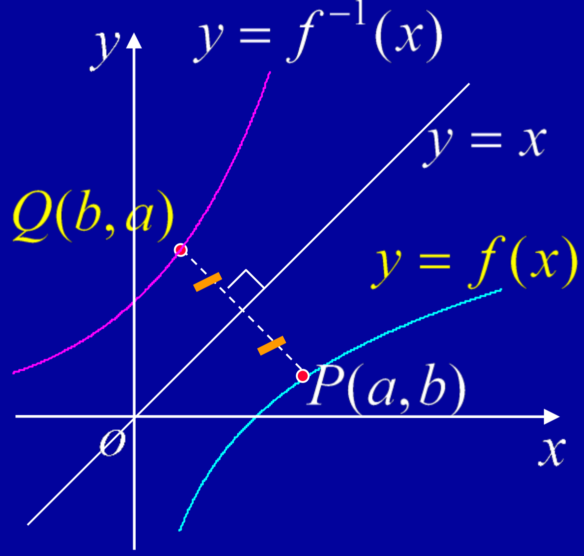
习惯上，$y=f(x),x\in D$ 的反函数记成

$$y=f^{-1}(x)\ ,x\in f(D)$$

性质:

1) $y=f(x)$ 单调递增 (减) 其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 存在，且也单调递增 (减) .

2) 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称 .



例如 ,

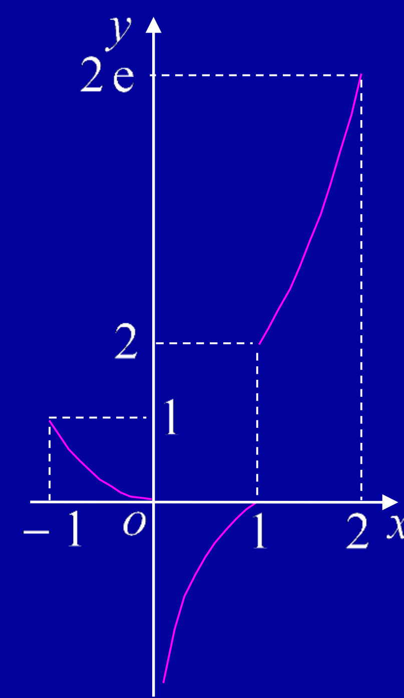
指数函数 $y=\mathrm{e}^x, x\in(-\infty,+\infty)$

对数函数 $y=\ln x\ , x\in(0,+\infty)$

互为反函数 ,

它们都单调递增, 其图形关于直线 $y=x$ 对称 .

例4. 求 $y=\begin{cases} x^2, & -1\le x<0 \\ \ln x, & 0<x\le 1 \\ 2\mathrm{e}^{x-1}, & 1<x\le 2 \end{cases}$ 的反函数及其定义域.



解: 当 $-1\le x<0$ 时, $y=x^2\in(0,1]$,

则 $x=-\sqrt{y}$, $y\in(0,1]$

当 $0<x\le 1$ 时, $y=\ln x\in(-\infty,0]$,

则 $x=\mathrm{e}^y$, $y\in(-\infty,0]$

当 $1<x\le 2$ 时, $y=2\mathrm{e}^{x-1}\in(2,2\mathrm{e}]$,

则 $x=1+\ln\frac{y}{2}$, $y\in(2,2\mathrm{e}]$

反函数 $y=\begin{cases} \mathrm{e}^x, & x\in(-\infty,0] \\ -\sqrt{x}, & x\in(0,1] \\ 1+\ln\frac{x}{2}, & x\in(2,2\mathrm{e}] \end{cases}$

定义域为

$(-\infty,1]\cup(2,2\mathrm{e}]$

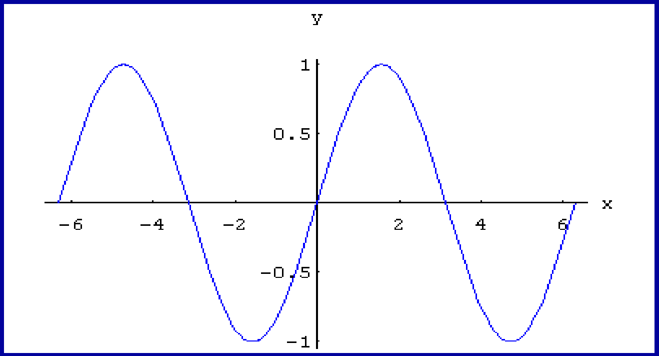
二、初等函数

1. 基本初等函数

幂函数、 指数函数、 对数函数、 三角函数、

反三角函数　　阅读教材 P11-14

反三角函数介绍



(1) 反正弦函数 $y = \arcsin x$

正弦函数 $y = \sin x \quad x \in (-\infty, +\infty)$，函数非单调，

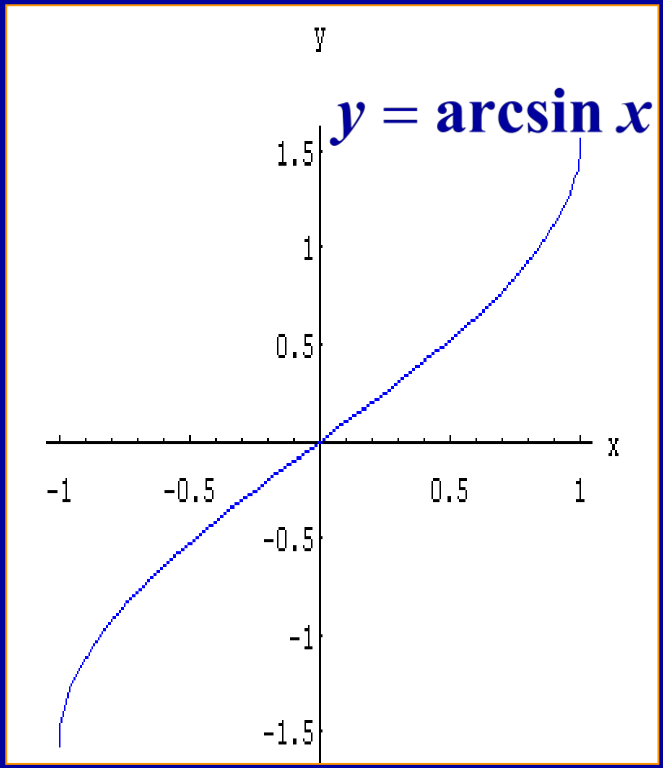
取定 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，正弦函数 $y = \sin x$ 存在反函数，

我们引进记号 arc ，由 $y = \sin x$ 解得 $x = \arcsin y$

再将 x, y 变量互换，得 反正弦函数 $y = \arcsin x$

注： 反正弦函数 $y = \arcsin x$ 中 x, y 的取值范围分别为

$$x \in [-1, 1], \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$



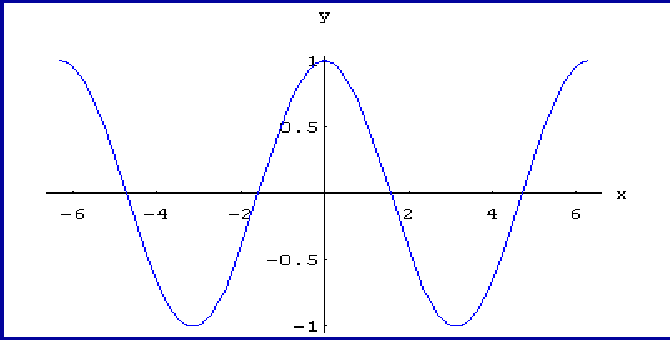
例如，

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

注： $\sin(\arcsin x) = x$

(2) 反余弦函数$y = \arccos x$



余弦函数 $y = \cos x$ $x \in (-\infty, +\infty)$，函数非单调，

取定 $x \in [0, \pi]$，余弦函数 $y = \cos x$ 存在反函数，

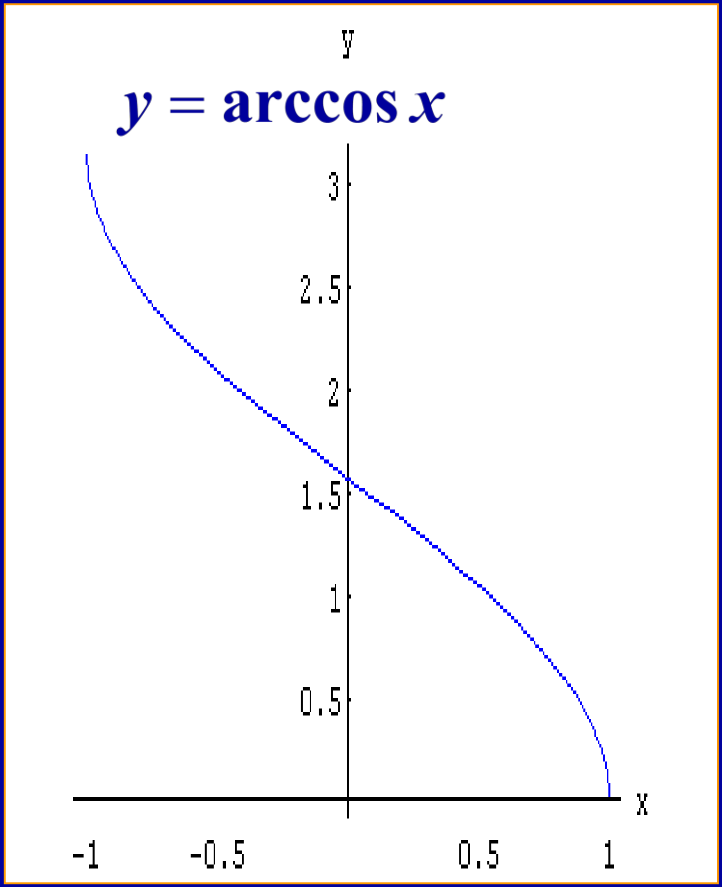
同理引进记号 arc ，由 $y = \cos x$ 解得 $x = \arccos y$

再将 x, y 变量互换，得 反余弦函数$y = \arccos x$

注：反余弦函数 $y = \arccos x$ 中 x, y 的取值范围分别为

$$x \in [-1, 1], \qquad y \in [0, \pi],$$

反余弦函数 $y = \arccos x$



例如，

$$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\arccos(-1) = \pi$$

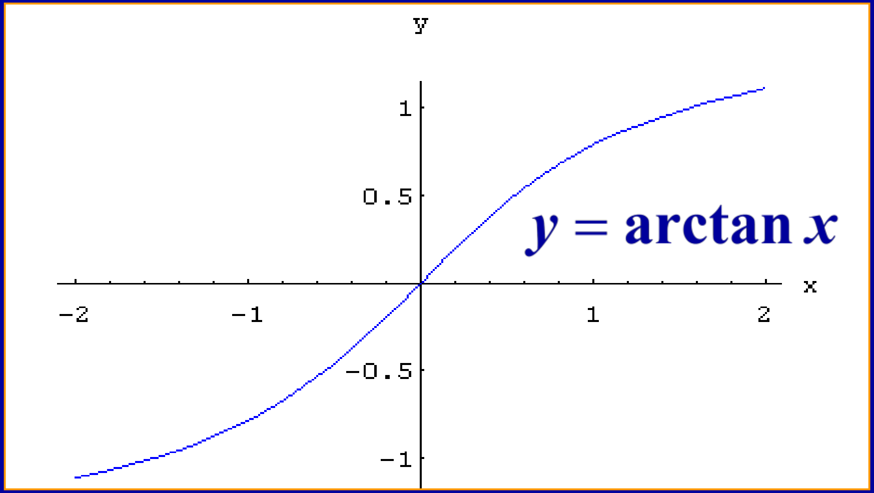
注： $\cos(\arccos x) = x$

(3) 反正切函数 $y=\arctan x$

同理取正切函数 $y=\tan x \quad x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

解得　反正切函数 $y=\arctan x$

其中 $x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,



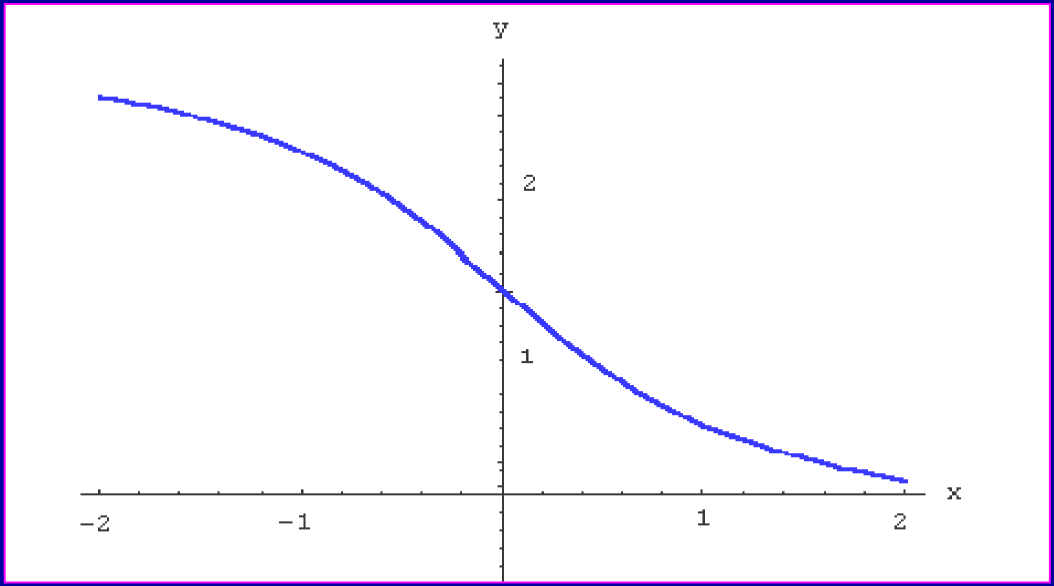
例如，

$$\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

$$\tan(\arctan x)=x$$

(4) 反余切函数 $y = arccotx$

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ $\quad x \in (-\infty, +\infty)$, $\quad y \in (0, \pi)$,



2. 复合函数

设有函数链

$$y = f(u),\ u \in D_1 \qquad ①$$

$$u = g(x),\ x \in D,\quad \text{且 } g(D) \subset D_1 \qquad ②$$

则 $y = f[g(x)],\ x \in D$

称为由①, ②确定的复合函数, u 称为中间变量.

注意: 构成复合函数的条件 $g(D) \subset D_1$ 不可少.

此条件也可放宽为: 外函数的定义域与内函数的值域必须相交.

即 $g(D) \cap D_1 \neq \varnothing$

例如 函数链：$y=\arcsin u$，$u=2\sqrt{1-x^2}$，可定义复合函数

$$y=\arcsin 2\sqrt{1-x^2},\quad x\in D$$

因为 $\left.\begin{array}{l} 2\sqrt{1-x^2}\le 1 \\ 1-x^2\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D=[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{3}}{2},1]$

所以复合函数为

$$y=\arcsin 2\sqrt{1-x^2},\quad x\in[-1,-\tfrac{\sqrt{3}}{2}]\cup[\tfrac{\sqrt{3}}{2},1]$$

但函数链 $y=\arcsin u$, $u=2+x^2$ 不能构成复合函数 .

两个以上函数也可构成复合函数. 例如,

$$y = \sqrt{u}\,,\ \ u > 0$$

$$u = \cot v\,,\ \ v \neq k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$v = \frac{x}{2},\ \ x \in (-\infty, +\infty)$$

可定义复合函数:

$$y = \sqrt{\cot\frac{x}{2}},\quad x \in (\,2k\pi\,, (2k+1)\pi\,],\quad k \in Z$$

$$k\pi < \frac{x}{2} \leq k\pi + \frac{\pi}{2}\text{时},\ \cot\frac{x}{2} \geq 0$$

3. 初等函数

由常数及基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数 .

否则称为非初等函数 .

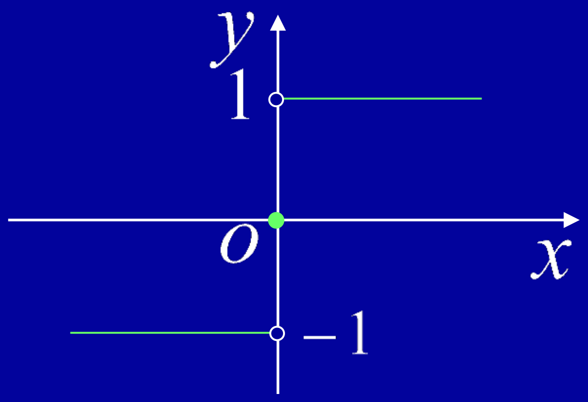
例如，$y=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 可表为 $y=\sqrt{x^2}$, 故为初等函数.

又如，双曲函数与反双曲函数也是初等函数 .

非初等函数举例:

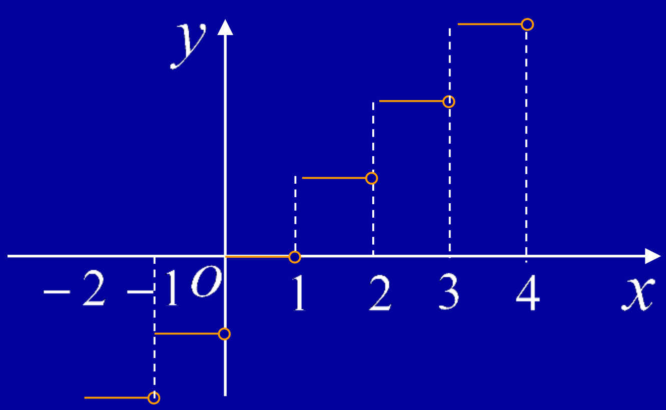
符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$



取整函数

$$y = [x] = n, \text{当 } n \le x < n+1, n \in Z$$



内容小结

1. 邻域的概念

2. 函数的定义及函数的二要素 $\begin{cases} \text{定义域} \\ \text{对应规律} \end{cases}$

3. 函数的特性 —— 有界性, 单调性, 奇偶性, 周期性

4. 初等函数的结构