作业 3.1 解答

一. 设 $a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$，证明多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在区间 $(0,\ 1)$ 内至少有一个零点.

证明：设 $F(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$，则 $F'(x)=f(x)$，且 $F(0)=0$，而由题设知 $F(1)=0$，因此，由罗尔定理知，在区间 $(0,\ 1)$ 内至少有一个 x_0，使得 $F'(x_0)=0$，即 $f(x)$ 在区间 $(0,\ 1)$ 内至少有一个零点 x_0.

二. 证明恒等式：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\ (-1\le x\le 1)$.

证明：设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$，则

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0\text{，（}-1<x<1\text{）}$$

所以在 $(-1,\ 1)$ 内 $f(x)$ 为常数. 又因为 $f(x)$ 在 $[-1,\ 1]$ 上连续，所以在 $[-1,\ 1]$ 上 $f(x)$ 也为常数. 该常数可由 $f(0)$ 算出，其值为 $\frac{\pi}{2}$，这样就得到

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\ (-1\le x\le 1).$$

三. 已知函数 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，$f(1)=0$，证明：在区间 $(0,\ 1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$.

证明：由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，从而 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(1)$. 因此，由罗尔定理知，在区间 $(0,\ 1)$ 内存在一点 η，使得 $f'(\eta)=0$. 由于

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0=f'(\eta),$$

由罗尔定理知，在区间 $(0,\ \eta)$ 内存在一点 ξ（当然 $\xi\in(0,\ 1)$），使得 $f''(\xi)=0$.

四. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，在 $(a,\ b)$ 内可导，当 $x\in[a,\ b]$ 时，$a<f(x)<b$；当 $x\in(a,\ b)$ 时，$f'(x)\ne 1$. 求证：方程 $f(x)=x$ 在 $(a,\ b)$ 内有且只有一个根.

证明：设 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，在 $(a,\ b)$ 内可导. 因为当 $x\in[a,\ b]$ 时，$a<f(x)<b$，所以

$$g(a)=f(a)-a>0,\quad g(b)=f(b)-b<0.$$

因此，由零点定理知，在 $(a,\ b)$ 内存在 x_0，使得 $g(x_0)=0$，即方程 $f(x)=x$ 在 $(a,\ b)$ 内有一个根 x_0.

假设方程 $f(x)=x$ 在 $(a,\ b)$ 内另有一个根 $x_1\ne x_0$，则 $g(x_1)=0$. 于是由罗尔定理知，在 x_0 与 x_1 之间存在 ξ，使得 $g'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=1$，这与题设矛盾.

因此，方程 $f(x)=x$ 在 $(a,\ b)$ 内有且只有一个根 x_0.

五. 设 $b>a>0$，证明：$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$.

证明：设 $f(x)=\ln x$，由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi\in(a,\ b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\text{，即}\ln\frac{b}{a}=\ln b-\ln a=\frac{b-a}{\xi},$$

因$0<a<\xi<b$，所以

$$\frac{b-a}{b}<\frac{b-a}{\xi}<\frac{b-a}{a}\text{，即}\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}.$$

六．设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是可导函数，且 $|f'(x)|<g'(x)$，证明：当 $x>a$ 时，$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$.

证明：由题设知$g'(x)>0$．由拉格朗日中值定理知，存在$\eta\in(a,\ x)$，使得

$$g(x)-g(a)=g'(\eta)(x-a)>0.$$

而由柯西中值定理又知，存在$\xi\in(a,\ x)$，使得

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

结合题设$|f'(x)|<g'(x)$，就得到

$$|f(x)-f(a)|=\frac{|f'(\xi)|}{g'(\xi)}(g(x)-g(a))<g(x)-g(a).$$

七. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$；

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=1$

(2)　$\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x})$；

解：原式$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-\dfrac{1}{2}$.

(3)　$\lim\limits_{x\to0^+}(\tan x)^{\frac{1}{\ln x}}$；

解：$\ln\lim\limits_{x\to0^+}(\tan x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\tan x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\tan x}=1$,

$\lim\limits_{x\to0^+}(\tan x)^{\frac{1}{\ln x}}=e$.

八．验证极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$存在，但不能用洛必达法则得出.

解：因$|\sin x|\le1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，从而$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{\sin x}{x})=1$.

由于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$不存在，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}\ne\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x)'}$.

因此$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$存在，但不能用洛必达法则得出.

九．求函数 $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}+\arctan\frac{1}{x-1}$ 的间断点，并判别其类型.

解：由初等函数 $f(x)$ 在其定义域内处处连续，知 $f(x)$ 的间断点为 $x=0$ 和 $x=1$．因为

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\frac{\pi}{4}+\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=-\frac{\pi}{4}+\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$

$$=-\frac{\pi}{4}+\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=-\frac{\pi}{4}+\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2},$$

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点．因为

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=1-\frac{1}{e-1}+\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=1-\frac{1}{e-1}-\frac{\pi}{2},$$

所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

十．填空:

(1) 设 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$, 则 $f^{'}(x)$ 的零点个数为____3____.

(2) 函数 $y=x^2$ 在闭区间 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理，则定理中的 $\xi=$ __

[$\frac{a+b}{2}$]