极限存在准则　两个重要极限

本节将给出两个在后面求极限时经常要用到的重要的极限公式：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

为此先介绍判定极限存在的准则

一、极限存在准则

1.两边夹原理(夹逼原理）

如果数列 x_n, y_n 及 z_n 满足下列条件:

(1) $y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1,2,3\cdots)$

(2) $\lim_{n\to\infty} y_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = a,$

那末数列 x_n 的极限存在，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a.$

证 $\because y_n \to a, \quad z_n \to a,$

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_1 > 0, \ N_2 > 0,$ 使得

当$n > N_1$时恒有$|y_n - a| < \varepsilon$,

当$n > N_2$时恒有$|z_n - a| < \varepsilon$,

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 上两式同时成立,

即$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$, $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$,

当$n > N$时，恒有 $a - \varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \varepsilon$,

即$|x_n - a| < \varepsilon$成立, $\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = a$.

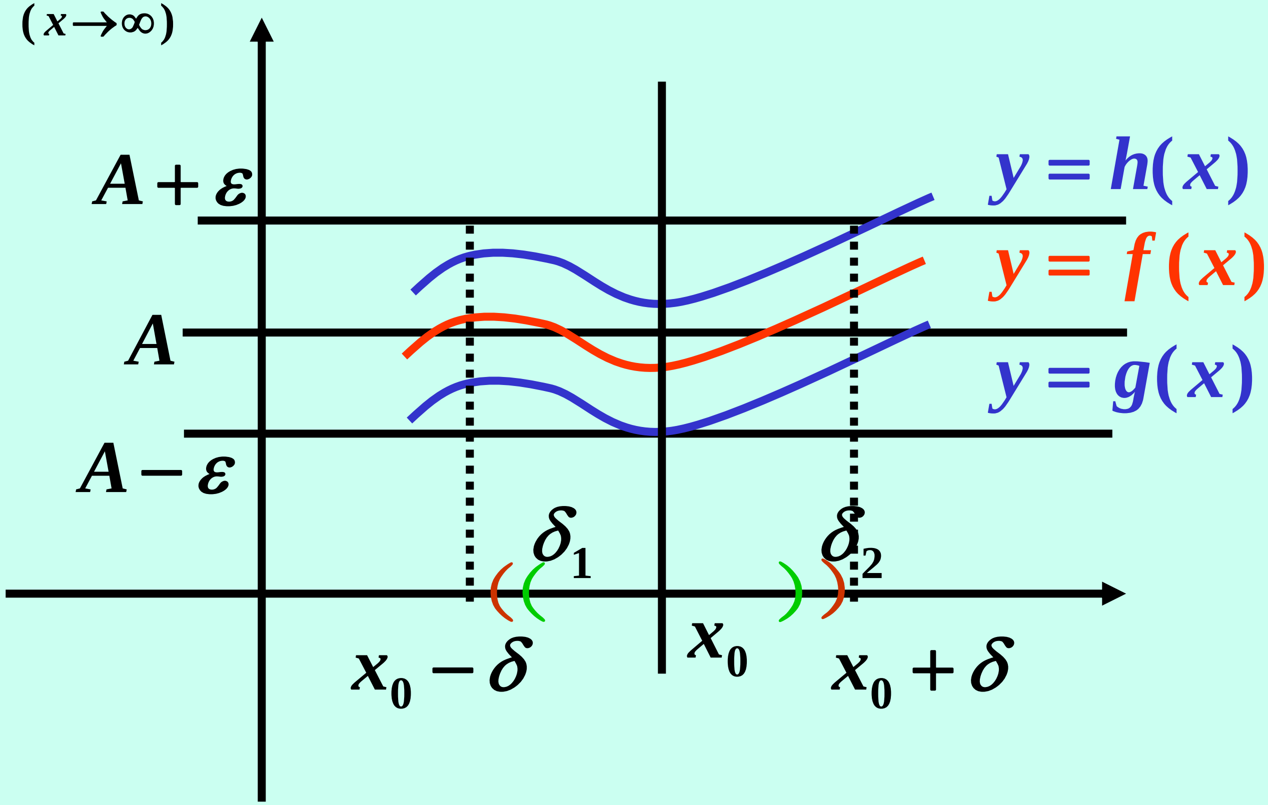
上述数列极限存在的准则可以推广到函数的极限

I' 如果当 $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$ (或 $|x| > M$)时，有

(1) $g(x) \le f(x) \le h(x)$,

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = A, \quad \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A,$

那末 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$ 存在，且等于 A.



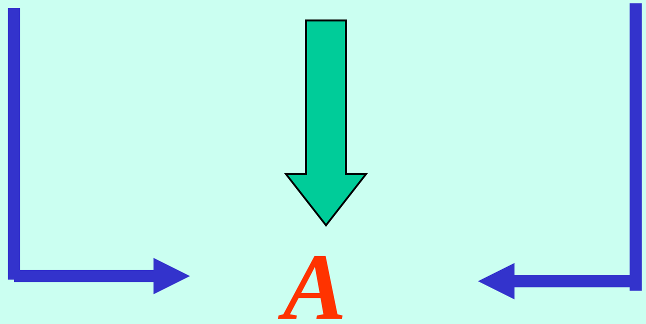
准则 I和准则 I‘称为两边夹原理.

注意：(1).利用夹逼准则求极限关键是构造出 y_n 与 z_n，并且 y_n 与 z_n 的极限是容易求的.

(2).此准则对于 $x \to \infty$ 时的情形也成立

两边夹定理示意图

$$g(x) \quad \le \quad f(x) \quad \le \quad h(x)$$



例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$

解 $\because \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$ 由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

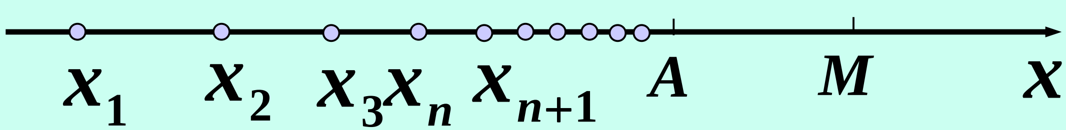
2.单调有界准则

如果数列x_n满足条件

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \le x_2 \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots, \text{ 单调增加} \\ x_1 \ge x_2 \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots, \text{ 单调减少} \end{array}\right\} \text{单调数列}$$

准则 II　单调有界数列必有极限.

几何解释:



例2 证明数列 $x_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ (n重根式)的极限存在.

证 显然 $x_{n+1} > x_n$， $\therefore \{x_n\}$是单调递增的；

又 $\because x_1 = \sqrt{3} < 3$, 假定 $x_k < 3$, $x_{k+1} = \sqrt{3 + x_k} < \sqrt{3+3} < 3$,

$\therefore \{x_n\}$是有界的； $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

$\because x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$， $x_{n+1}^2 = 3 + x_n$， $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty}(3 + x_n)$,

$A^2 = 3 + A$, 解得 $A = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $A = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去)

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

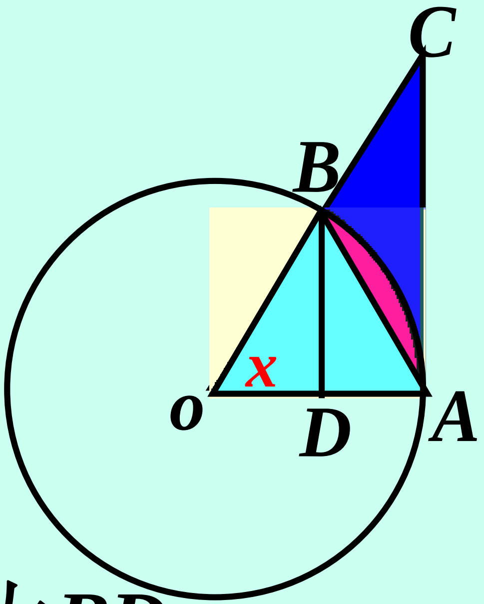
二、两个重要极限

(1) $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

首先注意到 函数$\frac{\sin x}{x}$对一切$x \neq 0$都有定义

设法构造一个“夹逼不等式”，使函数 $\frac{\sin x}{x}$

在$x=0$的某去心邻域内置于具有同一极限值的两个函数 $g(x), h(x)$ 之间，以便应用准则I



作如图所示的单位圆

设单位圆 O, 圆心角$\angle AOB = x$, $(0 < x < \frac{\pi}{2})$

作单位圆的切线，得ΔACO.

扇形OAB的圆心角为x， ΔOAB的高为BD,

于是有$\sin x = BD$, $x =$ 弧AB, $\tan x = AC$,

$\therefore \sin x < x < \tan x$, 即$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$,

上式对于$-\frac{\pi}{2} < x < 0$也成立. 当$0 < |x| < \frac{\pi}{2}$时,

$$0 < |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0, \qquad \therefore \lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0,$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\cos x = 1, \qquad \text{又} \because \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

注 此结论可推广到 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$

条件是$x \to a$时,$\varphi(x) \to 0$，其中a可为有限值，也可为∞

例3　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\Bigg(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\Bigg)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

例4　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

解　$$\text{原式}=\lim_{x\leftarrow 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\right\}=1\times\frac{1}{2}\times 1=1$$

例5 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$

解 令$t=\dfrac{\pi}{2}-x$ 则当$x\to\dfrac{\pi}{2}$时$t\to 0$

于是

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

(2) $\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e}$

定义 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

设 $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$

$$= 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}).$$

类似地, $x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\cdots$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+2})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+2})\cdots(1-\frac{n}{n+1}).$$

显然 $x_{n+1}>x_n$, $\quad\therefore\{x_n\}$是单调递增的;

$$x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,\qquad\therefore\{x_n\}$是有界的;

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e\quad(e=2.71828\cdots)$

当 $x \geq 1$ 时， 有 $[x] \leq x < [x]+1$，

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} \leq (1+\frac{1}{x})^{x} < (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1},$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]} \cdot \lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]}) = e,$

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1} \cdot \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{-1} = e,$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = e.$$

令 $t=-x$,

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t}=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{1}{t-1})=e.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

注

此结论可推广到 $\lim_{x\to a}\left(1+\varphi(x)\right)^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$

条件是$x\to a$时,$\varphi(x)\to 0$，其中a可为有限值，也可为∞

特别有

$$\boxed{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e}$$

例6 求 $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$.

解 原式 $= \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{(1+\frac{1}{-x})^{-x}} = \dfrac{1}{e}$.

一般地 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x = e^k$

例7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+\dfrac{1}{x})^{x}}{(1-\dfrac{1}{x})^{x}}=\dfrac{e}{e^{-1}}=e^{2}$

三、小结

1.两个准则

夹逼准则；单调有界准则 .

2.两个重要极限

设 α 为某过程中的无穷小，

$$1^0 \quad \lim_{\text{某过程}} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1; \qquad 2^0 \quad \lim_{\text{某过程}} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$