第二章 作业 2.1

一.填空题和选择题（50 分）

1. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$,则$f'(0)=$（ 100! ）

2. 设 $f(x)$ 为可导函数,且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为(-2)

3.函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处(C)

A. 极限不存在　B. 极限存在但不连续　C. 连续但不可导　D. 可导

4. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是(B)

A. 3　B. 2　C. 1　D. 0

5. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, x\le 1\\ x^2, \quad x>1\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的(B)

A. 左右导数都存在　B. 左导数存在,右导数不存在

C. 左导数不存在, 右导数存在　D. 左右导数都不存在

6. 下列函数在 $x=0$ 处连续且可导的是（ B ）

（A） $f(x)=\sqrt[3]{x}$　（B） $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

（C） $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x>0\\ x^2-1 & x<0\end{cases}$　（D） $f(x)=\begin{cases}2x-3 & x\ge 0\\ x^2-1 & x<0\end{cases}$

7. 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)=0$，则曲线 $y=f(x)$ 在点（$x_0,f(x_0)$）处的法线（ B ）

（A）与 x 轴相平行；（B）与 x 轴垂直；（C）与 y 轴相垂直；（D）与 x 轴即不平行也不垂直：

8. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则 $f(x)$ 在 x_0 （ C ）

（A）必不可导；　（B）必定可导；　（C）不一定可导；　（D）必无定义.

9. 设函 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，并且 $f'(x_0)=2$, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$ 等于（ D ）

A、$\dfrac{1}{2}$　B、2　C、$\dfrac{-1}{2}$　D、-2

10. 设 $f(0)=0$且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$ （ B ）

A、 $f'(x)$　B、 $f'(0)$　C、 $f(0)$　D、 $\dfrac{1}{2}f'(0)$

二.讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性：

（1） $y=f(x)=|\sin x|$；

解: $\because \quad \lim_{x\to 0}|\sin x|=0=f(0),$

$\therefore \quad f(x)$在$x=0$处连续

又 $f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{|\sin x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,$

$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{|\sin x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{x}=-1,$ 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

（2） $y=f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$

解: $\because \quad \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x^3\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0),$

$\therefore \quad f(x)$在$x=0$处连续

又 $f'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0,$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

三.设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, x\leq 1 \\ ax+b, x>1 \end{cases}$

为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导， a,b 应取什么值？

解：因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，于是

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1) \quad\Rightarrow\quad a+b=1.$$

现在计算 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的左右导数：

$$f_-'(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2,$$

$$f_+'(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax-a}{x-1}=a.$$

由 $f_-'(1)=f_+'(1)$，得 $a=2$，从而 $b=-1$.

四. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且 $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2,$ 求 $f'(1)$

解: $\because \quad \lim\limits_{x\to1} x-1=0,\ \ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2,$

$$\therefore \lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}(x-1)=2\times0=0,$$

又 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,

$\therefore \quad \lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)=0$

$$\therefore f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$$

五. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, x<0\\ 0, \quad x\ge0\end{cases}$, 求 $f'(x)$.

解: $f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0\\ 不存在, & x=0\\ 0, & x>0\end{cases}$