无穷小的比较

一、无穷小的比较

例如，当$x \to 0$时，$x, x^2, \sin x, x^2 \sin\frac{1}{x}$都是无穷小.

观察各极限

$\lim\limits_{x \to 0}\frac{x^2}{3x} = 0,$ x^2比$3x$要快得多；

$\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$ $\sin x$与x大致相同；

$\lim\limits_{x \to 0}\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在. 不可比.

极限不同，反映了趋向于零的“快慢”程度不同.

定义： 设α,β是同一过程中的两个无穷小，且$\alpha \neq 0$.

(1) 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，

记作$\beta = o(\alpha)$;

(2) 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C (C \neq 0)$，就说$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小;

特殊地 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$，则称$\beta$与$\alpha$是等价的无穷小;

记作$\alpha \sim \beta$;

(3) 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$，就说$\beta$是$\alpha$的低阶的无穷小.

例1 证明:当$x \to 0$时,$4x\tan^3 x$为x^4的同阶无穷小.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{4x\tan^3 x}{x^4} = 4\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^3 = 4,$$

故当$x \to 0$时,$4x\tan^3 x$为x^4的同阶无穷小.

例2 当$x \to 0$时,则$\sin x^3$与x^3是等价无穷小.

解 $$\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x^3} = 1,$$

$\therefore$ 当$x \to 0$时,$\sin x^3$与x^3是等价无穷小.

常用等价无穷小： 当$x \to 0$时，

$$\sin x \sim x, \qquad \arcsin x \sim x,$$

$$\tan x \sim x, \qquad \arctan x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

$$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x \qquad \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

注 1. 上述10个等价无穷小（包括反、对、幂、指、三）必须熟练掌握

2.将x换成$\forall f(x) \to 0$都成立

二、等价无穷小替换

定理(等价无穷小替换定理)

设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ 且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

证 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim\left(\dfrac{\beta}{\beta'} \cdot \dfrac{\beta'}{\alpha'} \cdot \dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)$

$$= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

意义

求两个无穷小之比的极限时，可将其中的分子或分母或乘积因子中的无穷小用与其等价的较简单的无穷小代替，以简化计算。具体代换时，可只代换分子，也可只代换分母，或者分子分母同时代换。

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

解 当$x\to 0$时, $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$, $\tan 2x \sim 2x$.

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x)^2}{\dfrac{1}{2}x^2}=8.$

注意 不能滥用等价无穷小代换.

对于代数和中各无穷小不能分别替换.

等价关系具有：自反性，对称性，传递性

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

错解 当$x\to 0$时，$\tan x \sim x$，$\sin x \sim x$.

原式 $\cancel{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{(2x)^3}=0$.

解 当$x\to 0$时，$\sin 2x \sim 2x$，

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim \frac{1}{2}x^3,$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{16}.$$

三、小结

1.无穷小的比较:

反映了同一过程中，两无穷小趋于零的速度快慢，但并不是所有的无穷小都可进行比较.

高(低)阶无穷小；等价无穷小；无穷小的阶.

2.等价无穷小的替换:

求极限的又一种方法，注意适用条件.

思考题

任何两个无穷小量都可以比较吗?

思考题解答

不能. 例当 $x \to +\infty$ 时

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{\sin x}{x}$$ 都是无穷小量

但 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ 不存在且不为无穷大

故当 $x \to +\infty$ 时 $f(x)$和$g(x)$不能比较.

用等价无穷小可给出函数的近似表达式:

$$\because \lim \frac{\beta}{\alpha}=1, \therefore \lim \frac{\beta-\alpha}{\alpha}=0,$$ 即 $\beta-\alpha=o(\alpha)$,

于是有 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.同理也有 $\alpha=\beta+o(\beta)$

一般地有 $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \beta=\alpha+o(\alpha)$

即α与β等价 $\Longleftrightarrow$ α与β互为主要部分

例如, $\sin x=x+o(x)$, $\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$.

补充

高阶无穷小的运算规律

(1). $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^k)$

其中$k = \min\{m, n\}$

(2). $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$

(3). $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$

(4). $\varphi(x) \cdot o(x^n) = o(x^n)$

其中$\varphi(x)$为有界

例5　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x-\cos x+1}{\sin 3x}$.

解　$\because \tan 5x = 5x + o(x)$, $\sin 3x = 3x + o(x)$,

$$1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{5x + o(x) + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{3x + o(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{5 + \frac{o(x)}{x} + \frac{1}{2}x + \frac{o(x^2)}{x}}{3 + \frac{o(x)}{x}} = \frac{5}{3}.$$