院、系领导 审批并签名		A 卷

广州大学 2013-2014 学年第一学期考试卷解答

课 程：高等数学 I（80 学时）　　　　　　考 试 形 式：闭卷考试

学 院 :____________ 专 业 班 级 :__________ 学 号 :____________ 姓 名:___________

题 次	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分	评卷人
分 数	30	18	6	12	15	9	10				100	
得 分												

一．填空题（每小题 3 分，本大题满分 30 分）

1．设 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\ge 1\\ 2x-1, & x<1\end{cases}$，则 $f(f(e))=$ $\underline{\quad 0 \quad}$.

2．曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 有铅直渐近线 $\underline{\quad x=1 \quad}$.

3．已知当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 与 ax^3 是等价无穷小，则常数 $a=$ $\underline{\quad 1/6 \quad}$.

4．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax)}{2x}, & x>0\\ \sin x+1, & x\le 0\end{cases}$，则当常数 $a=$ $\underline{\quad 2 \quad}$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

5．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)=$ $\underline{\quad 1/2 \quad}$.

6．曲线 $y=e^{2x}$ 上点 $(0,\ 1)$ 处的切线方程为 $\underline{\quad 2x-y+1=0 \quad}$.

7．曲线 $y=x^3(1-x)$ 的凸区间为 $\underline{\quad (-\infty,\ 0],\ [1/2,\ +\infty) \quad}$.

8．函数 $\cos x$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}]$ 上的平均值为 $\underline{\quad 2/\pi \quad}$.

9．设 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sin t^3\,\mathrm{d}t$，则 $f(1)=$ ___0___.

10．$\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2})=$ ___$\pi/4$___.

二．解答下列各题（每小题 6 分，本大题满分 18 分）

1．已知 $y=\frac{x^2}{(1+x)(1-x)}$，求 $y'|_{x=2}$.

解：$y=\frac{x^2}{1-x^2}=\frac{1}{1-x^2}-1$，$y'=\frac{2x}{(1-x^2)^2}$，------5 分

$y'|_{x=2}=\frac{4}{9}$. ------6 分

2．设 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$，计算 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\sin t+t\cos t-\sin t}{\cos t}=t$，------3 分

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\cos t}$，$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$. ------6 分

3．设 $y(x)$ 是由 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，求 $y(x)$ 在 $x=0$ 处的导数.

解：原方程两边对 x 求导，得

$2x-y'=e^y y'$，------4 分

解得 $y'=\frac{2x}{e^y+1}$，于是 $y'(0)=0$. ------6 分

三．（本题满分 6 分）

证明：方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$（整数 $n>1$）在 $(\frac{1}{2},\,1)$ 内有且只有一个根.

证明：令 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$，则 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},\,1]$ 上连续，且

$f(1)=n-1>0$，$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2^n}<0$，

由零点定理知在$(\frac{1}{2},1)$内存在x_0，使$f(x_0)=0$. ------4 分

显然$f(x)$在$(\frac{1}{2},1)$内单调增加，所以$f(x)$在$(\frac{1}{2},1)$内只有一个零点x_0，也即原方程在$(\frac{1}{2},1)$内有且只有一个根x_0. ------6 分

四．计算下列极限（每小题 6 分，本大题满分 12 分）

1． $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x})$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2x-\cos x}{\sin x+x\cos x}$ ------4 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=1.$$ ------6 分

2． $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解：$\ln\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x}{1+x^2}\Big/\frac{1}{x}$ ------4 分

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2}{1+x^2}=2,$$ ------5 分

所以$\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{\ln x}}=e^2$. ------6 分

五．计算下列积分（每小题 5 分，本大题满分 15 分）

1． $\int\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$.

解：$\int\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}(x+\frac{1}{2})$ ------3 分

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$ ------5 分

2．$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解：注意 $2x-x^2=1-(x-1)^2$，令 $x-1=\sin t$，$t=\arcsin(x-1)$，则

$$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin t+1)\cos t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t \text{------3 分}$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,\mathrm{d}t \text{------4 分}$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}. \text{------5 分}$$

3．$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$.

解：$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x \text{------1 分}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\ln x\,\mathrm{d}(-\frac{1}{x})=\lim_{b\to+\infty}(-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^b+\int_1^b\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x) \text{------3 分}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}]_1^b=1. \text{------5 分}$$

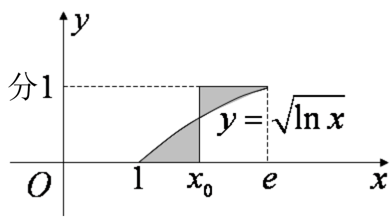
六．（本题满分 9 分）

在 $(1,\ e)$ 内求一点 x_0，使右图中阴影部分的面积之和为最小.

解：阴影部分的面积之和为

$$A=\int_1^{x_0}\sqrt{\ln t}\,\mathrm{d}t+e-x_0-\int_{x_0}^{e}\sqrt{\ln t}\,\mathrm{d}t \text{------4 分}$$

$$A'(x_0)=2\sqrt{\ln x_0}-1 \text{------7 分}$$



令 $A'(x_0)=0$，得唯一驻点 $x_0=\sqrt[4]{e}$，

此时阴影部分的面积之和为最小. ------9 分

七．（本题满分 10 分）

（1）已知 $f(x)$ 是连续函数，证明：$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$；

（2）利用（1）的结论，计算 $\int_0^{\pi}x\sin^3 x\,\mathrm{d}x$.

（1）证明：令 $x=\pi-t$，得

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\pi}^{0}(\pi - t)f(\sin(\pi - t))\,\mathrm{d}t$$ ------2 分

$$= \int_0^{\pi}(\pi - t)f(\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}(\pi - x)f(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x,$$ ------4 分

所以 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$. ------5 分

（2）解：$\int_0^{\pi} x\sin^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(\cos^2 x - 1)\,\mathrm{d}\cos x$ ------8 分

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{3}.$$ ------10 分