| 院、系领导审批并签名 | | A 卷 |
|---|---|---|

# 广州大学 2014-2015 学年第一学期考试卷解答

课 程：高等数学Ⅰ1（80 学时） 考 试 形 式：闭卷考试

学 院 :____________ 专 业 班 级 :__________ 学 号 :____________ 姓 名:___________

| 题 次 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 总 分 | 评卷人 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 分 数 | 30 | 30 | 8 | 6 | 10 | 8 | 8 | | | | 100 | |
| 得 分 | | | | | | | | | | | | |

一、填空题（每空 3 分，本大题满分 30 分）

1．曲线 $y=\dfrac{\sin x}{x^2+x}$ 有水平渐近线 $\underline{\quad y=0 \quad}$ 和铅直渐近线 $\underline{\quad x=-1 \quad}$.

2．设 $f(x)=(1+\dfrac{1}{x^2})^{x^2-1}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\underline{\quad e \quad}$；如果定义 $f(0)=\underline{\quad 0 \quad}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

3．函数 $y=x^3-3x^2$ 在区间 $\underline{[0,2]}$ 上单调减少，其图形在区间 $\underline{[1,+\infty)}$ 上是凹的.

4．设 $f(x)=x\cos x-x$.

（1）当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是关于 $x$ 的 $\underline{\quad 3 \quad}$ 阶无穷小；

（2）$f^{(100)}(x)=\underline{\quad x\cos x+100\sin x \quad}$.

5．设 $f(x)=\int_{-1}^{x}(3+t\sqrt{t^4+3})\,\mathrm{d}t$，则 $f(1)=\underline{\quad 6 \quad}$，$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{x+1}=\underline{\quad 1 \quad}$.

二、解答下列各题（每小题 6 分，本大题满分 30 分）

1．求 $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$ 的导数和微分.

解：$y'=\arcsin\frac{x}{2}+x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)=\arcsin\frac{x}{2}$，------4 分

$\mathrm{d}\,y=y'\,\mathrm{d}\,x=\arcsin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}\,x$. ------6 分

2．求曲线 $y^2+xy+x^5=3$ 在点 $(1,\ 1)$ 处的切线方程.

解：曲线方程两边对 $x$ 求导，得

$$2y\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}+y+x\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}+5x^4=0\text{，------3 分}$$

将 $x=1$，$y=1$ 代入上式，得切线斜率 $k=\left.\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{x=1,\ y=1}=-2$，所以切线方程为

$$y-1=-2(x-1)\text{，即 }2x+y-3=0.\text{ ------6 分}$$

3．设 $\begin{cases}x=t^2-2t\\ y=t^4-4t\end{cases}$，求 $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2}$.

解：$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}\Big/\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=\frac{4t^3-4}{2t-2}=2(t^2+t+1)$，------4 分

$\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x})\Big/\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=\frac{2(2t+1)}{2t-2}=\frac{2t+1}{t-1}$. ------6 分

4．根据**导数的定义**，推导公式：$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ \ (x>0)$.

解：$(\sqrt{x})'=\lim\limits_{h\to0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ ------3 分

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ ------5 分

$=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. ------6 分

5．计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{\sin x^3}$.

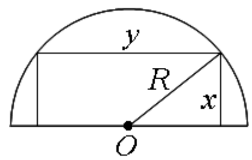
解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}$------2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}$------4 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$-----6 分

三、（本题满分 8 分）

求内接于半径为$R$的半圆且周长最大的矩形的边长.




解：$y=2\sqrt{R^2-x^2}$，矩形的周长

$L=2x+2y=2x+4\sqrt{R^2-x^2}$，$0<x<R$.------4 分

$L'(x)=2-\dfrac{4x}{\sqrt{R^2-x^2}}$，------6 分

令$L'(x)=0$，得唯一驻点$x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}R$，此时$y=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}R$，矩形的周长最大. ---8 分

四、（本题满分 6 分）

证明：当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$4\sin x+\tan x>4x$.

证明：令$f(x)=4\sin x+\tan x-4x$，则

$$f'(x)=4\cos x+\sec^2 x-4，\text{------2 分}$$

当$0<x<\pi/2$时，$0<\cos x<1$，所以$\cos x>\cos^2 x$，于是

$$f'(x)>4\cos^2 x+\sec^2 x-4=(2\cos x-\sec x)^2\geq 0，\text{------5 分}$$

从而$f(x)>f(0)$，即$4\sin x+\tan x>4x$.------6 分

五、计算下列积分（每小题 5 分，本大题满分 10 分）

1. $\int\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$.

解：原式$=x\ln(1+x^2)-\int\dfrac{2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$------2 分

$=x\ln(1+x^2)-2\int(1-\dfrac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x$------3 分

$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C$. ------5 分

2. $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \mathrm{d}x$.

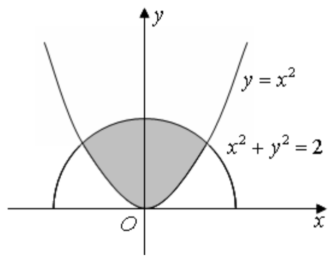
解：原式$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x+1)^2} \mathrm{d}(e^x+1) = [-\frac{1}{e^x+1}]_0^{+\infty}$ ------3 分

$= \lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{e^x+1}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. ------5 分

六、（本题满分 8 分）

求由抛物线 $y = x^2$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 所围成的图形的面积 $A$.

解：抛物线与圆的交点为 $(-1,1)$ 和 $(1,1)$，------1 分




$A = \int_{-1}^{1} (\sqrt{2-x^2} - x^2) \mathrm{d}x$ ------3 分

$= 2\int_0^1 \sqrt{2-x^2} \mathrm{d}x - \frac{2}{3}$，------5 分

令 $x = \sqrt{2}\sin t \ (0 \le t \le \pi/2)$，则

$$\int_0^1 \sqrt{2-x^2} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2 t \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2t) \mathrm{d}t$$

$$= [t + \frac{1}{2}\sin 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2},$$

所以 $A = 2(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}) - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$. ------8 分

七、（本题满分 8 分）

（1）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x) \mathrm{d}x$；

（2）利用（1）的结论，计算 $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{x(\pi - 2x)} \mathrm{d}x$.

（1）证明：令 $x = a + b - t$，则

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \int_b^a f(a+b-t)(-\mathrm{d}t)$$

$$=\int_a^b f(a+b-t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x.\text{------}3\text{ 分}$$

（2）解：由（1）知

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2(\frac{1}{2}\pi-x)}{(\frac{1}{2}\pi-x)(\pi-2(\frac{1}{2}\pi-x))}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x\text{------}5\text{ 分}$$

$$I=\frac{1}{2}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\frac{1}{x}+\frac{2}{\pi-2x})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Big[\ln x-\ln(\pi-2x)\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\ln 2}{\pi}.\text{------}8\text{ 分}$$