# 高等数学（第六版）

# 高等数学（一）

主讲者：袁荣

手机：18719362095

# 教学形式以及考核方式

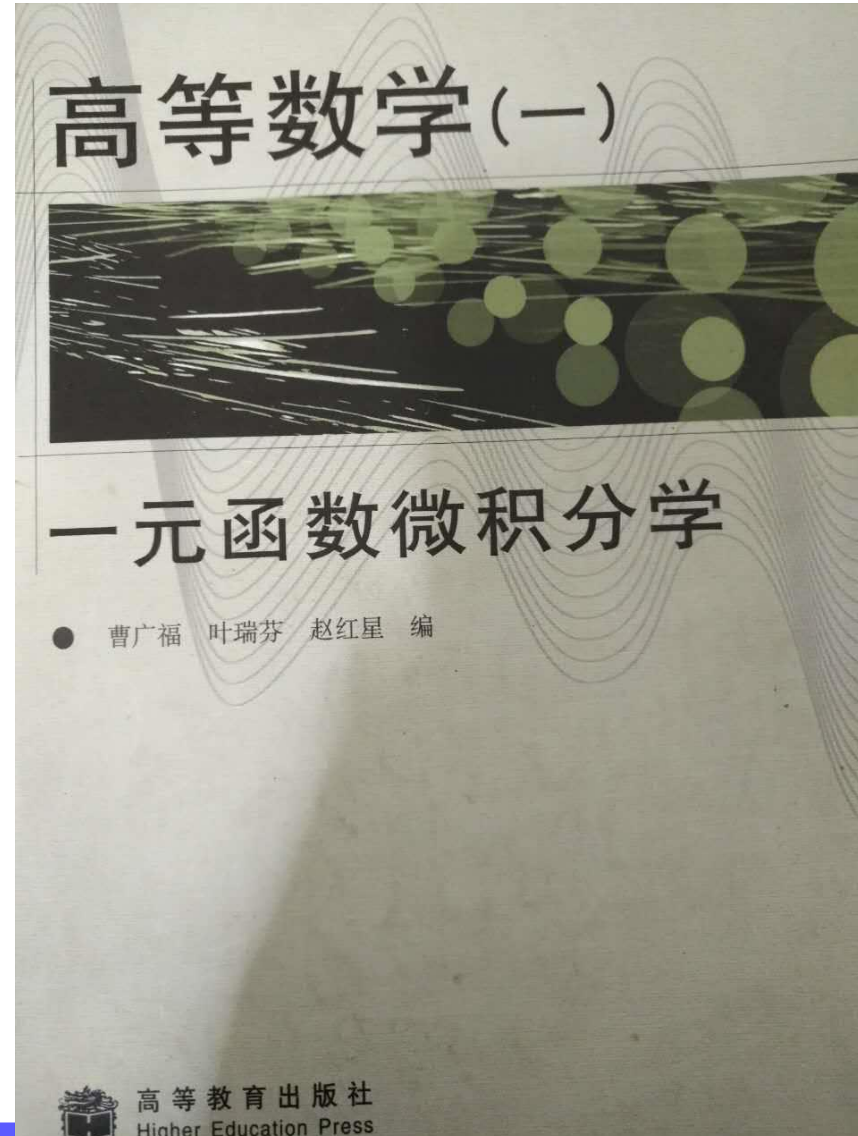
- **教学形式**
  - 教师讲授为主、学生自学讨论为辅
- **考核方式**
  - 考试
    - 平时（30%）
      - 学分5分，学时80
    - 期末（70%）
      - 全校统考

# 主要参考书

- [美]克莱因. 古今数学思想. 牛津大学出版社, 1972（中译本: 北京大学数学系数学史翻译组译, 上海科学技术出版社, 1979~1981, 4卷本)
- 张奠宙. 20世纪数学经纬. 上海: 华东师范大学出版社, 2002
- 吴文俊主编. 世界著名数学家传记(上、下册). 北京: 科学出版社, 1995
- 程民德主编. 中国现代数学家传(5卷本). 南京: 江苏教育出版社, 1994-2002
- 高等数学.同济大学数学系编，高等教育出版社(第六版)
- 高等数学.曹广福 等编,高等教育出版社

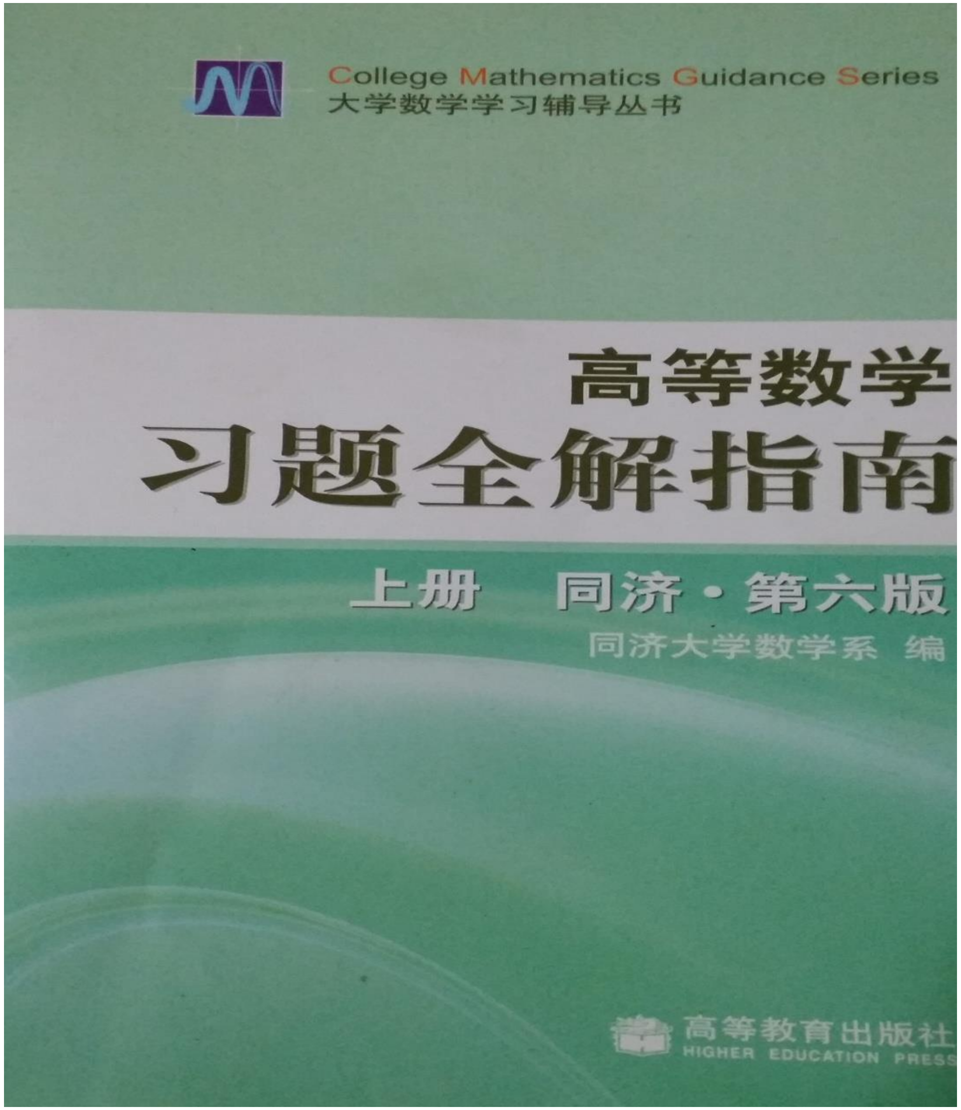
# 主要参考书

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材
高等数学
第六版 上册
同济大学数学系 编
高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

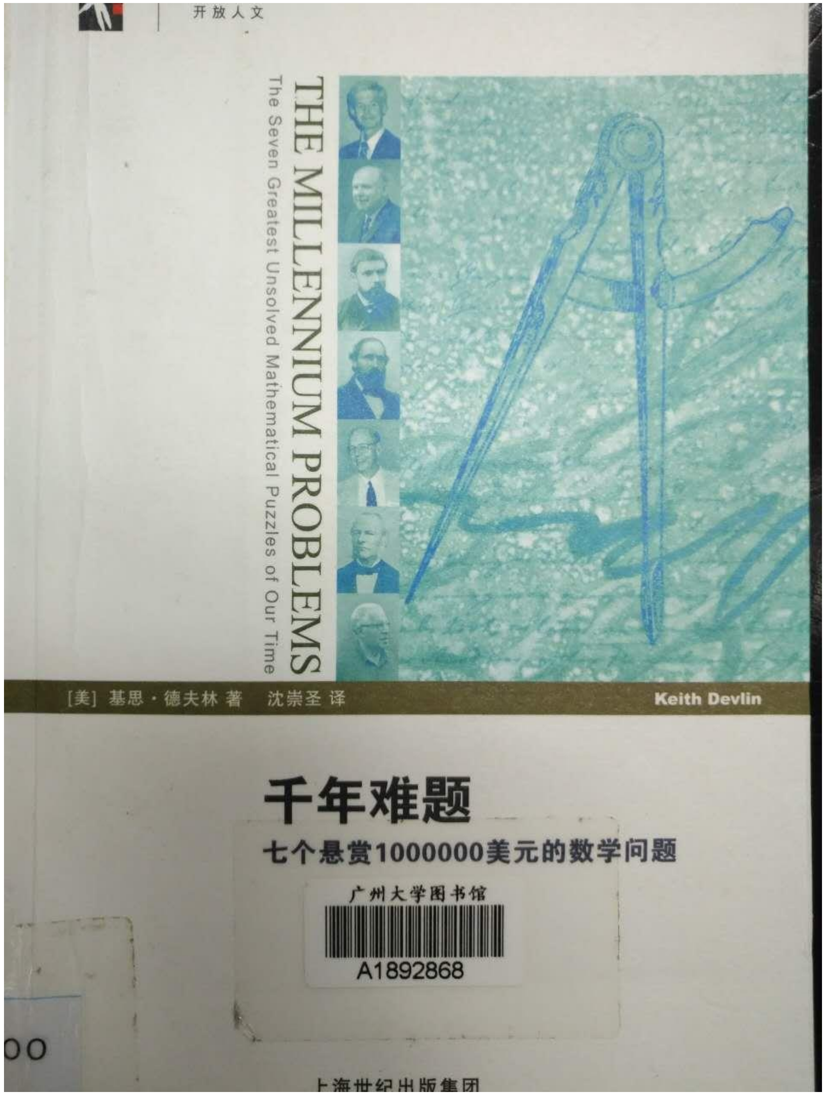
高等数学(一)
一元函数微积分学
曹广福 叶瑞芬 赵红星 编
高等教育出版社
Higher Education Press

# 主要参考书


College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书
高等数学
习题全解指南
上册 同济·第六版
同济大学数学系 编
高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

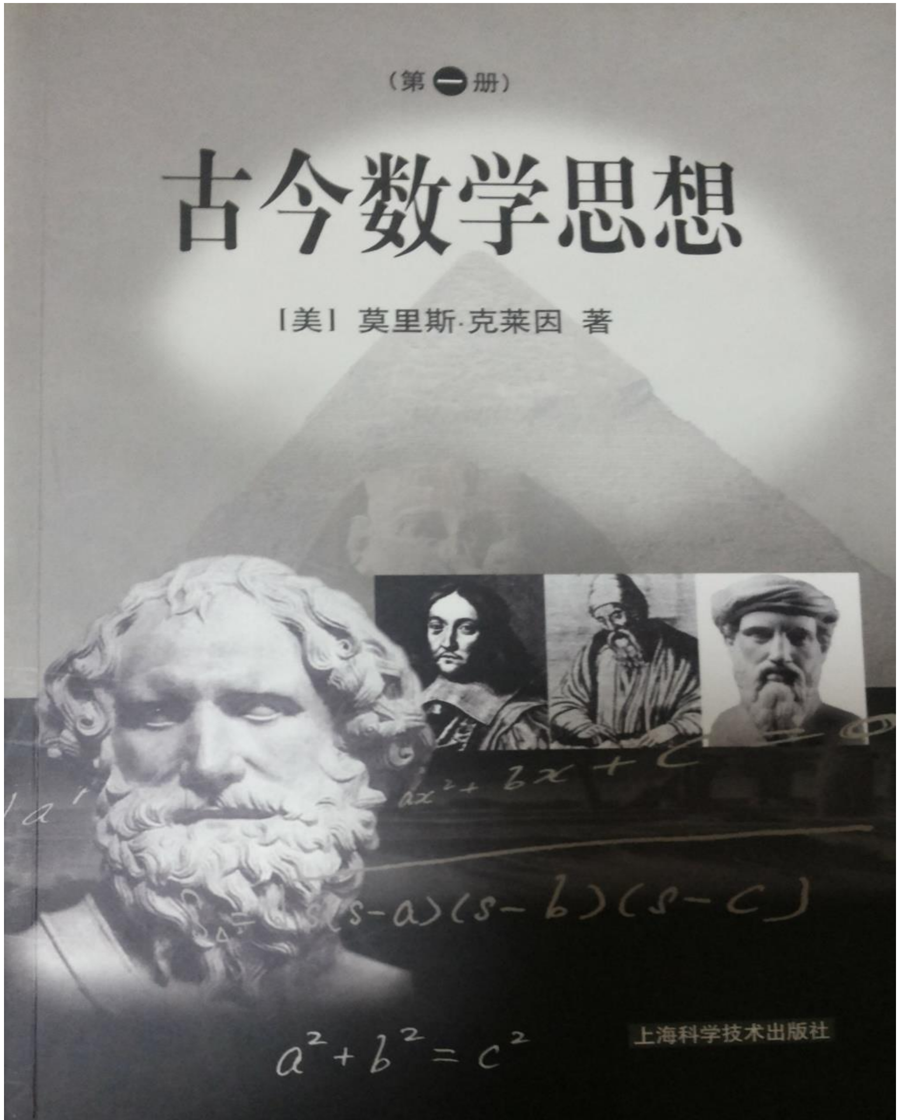

GAODENGSHUXUE XUEXIBAO
21世纪远程教育精品教材
公共基础课系列
高等数学"学习包"
(第二版)
张家琦 曹承宾 编著
广州大学图书馆
A1766079
中国人民大学出版社

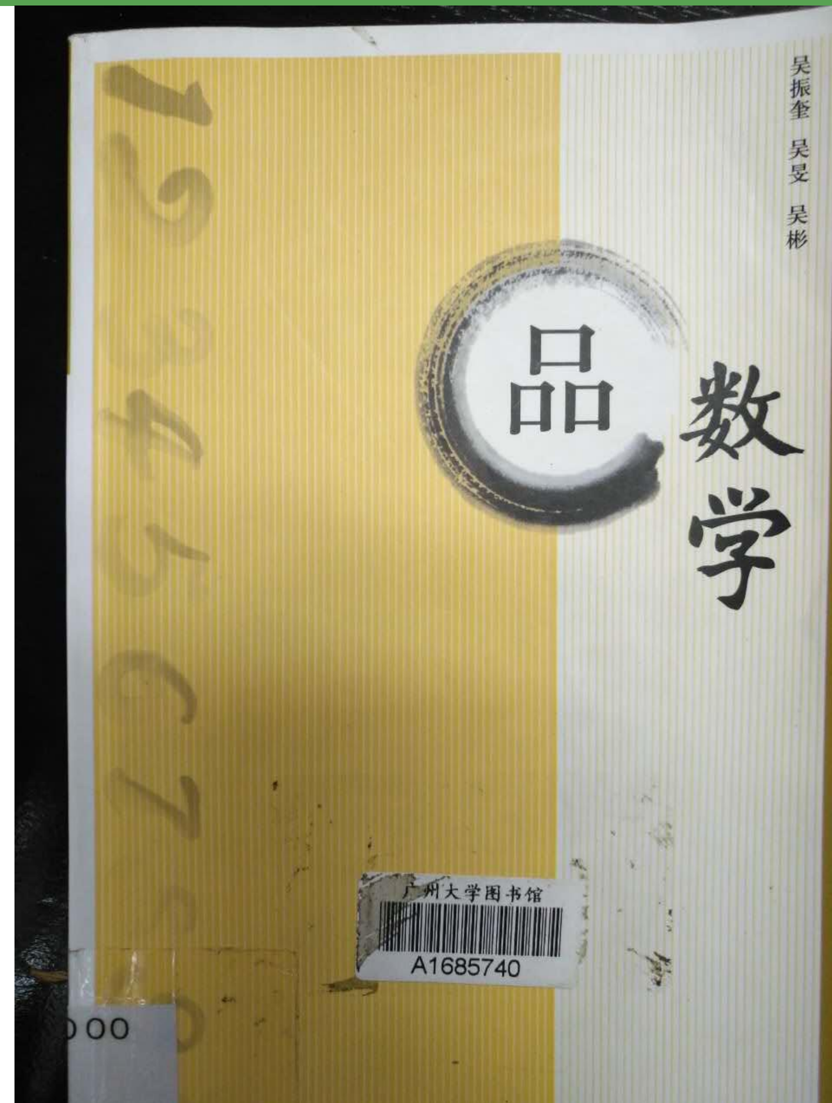
# 主要参考书

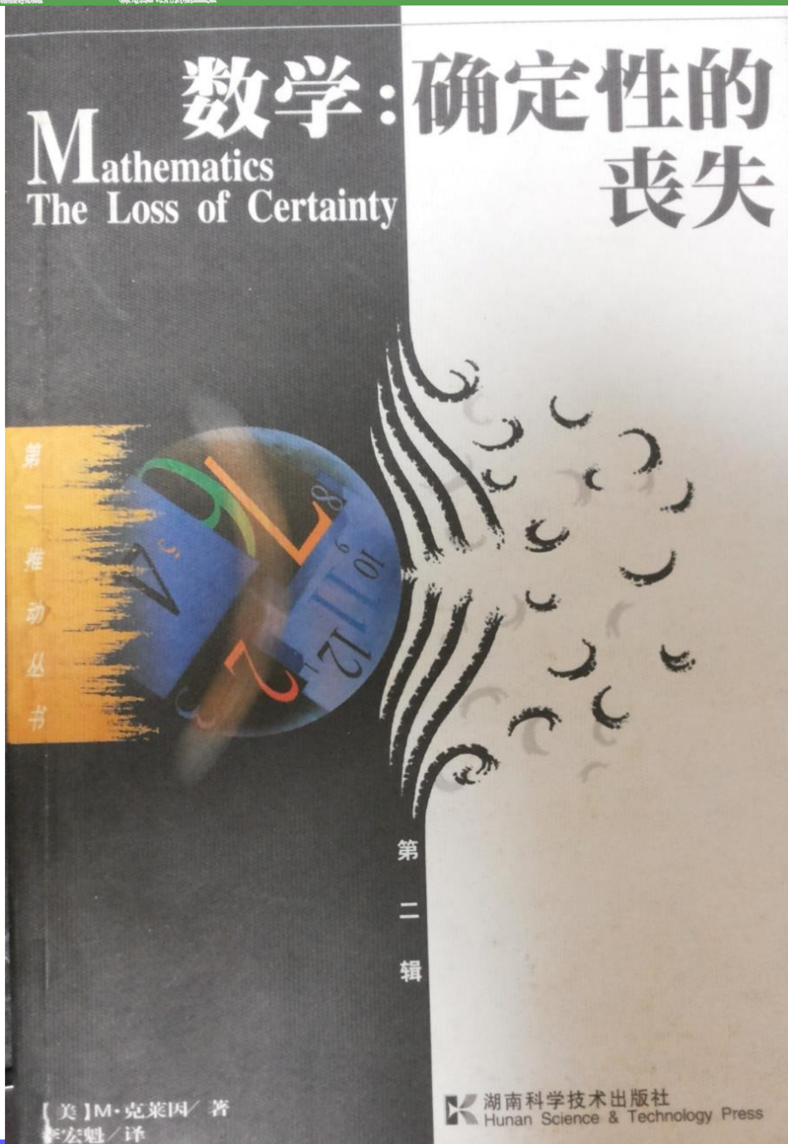

主讲教师-袁荣

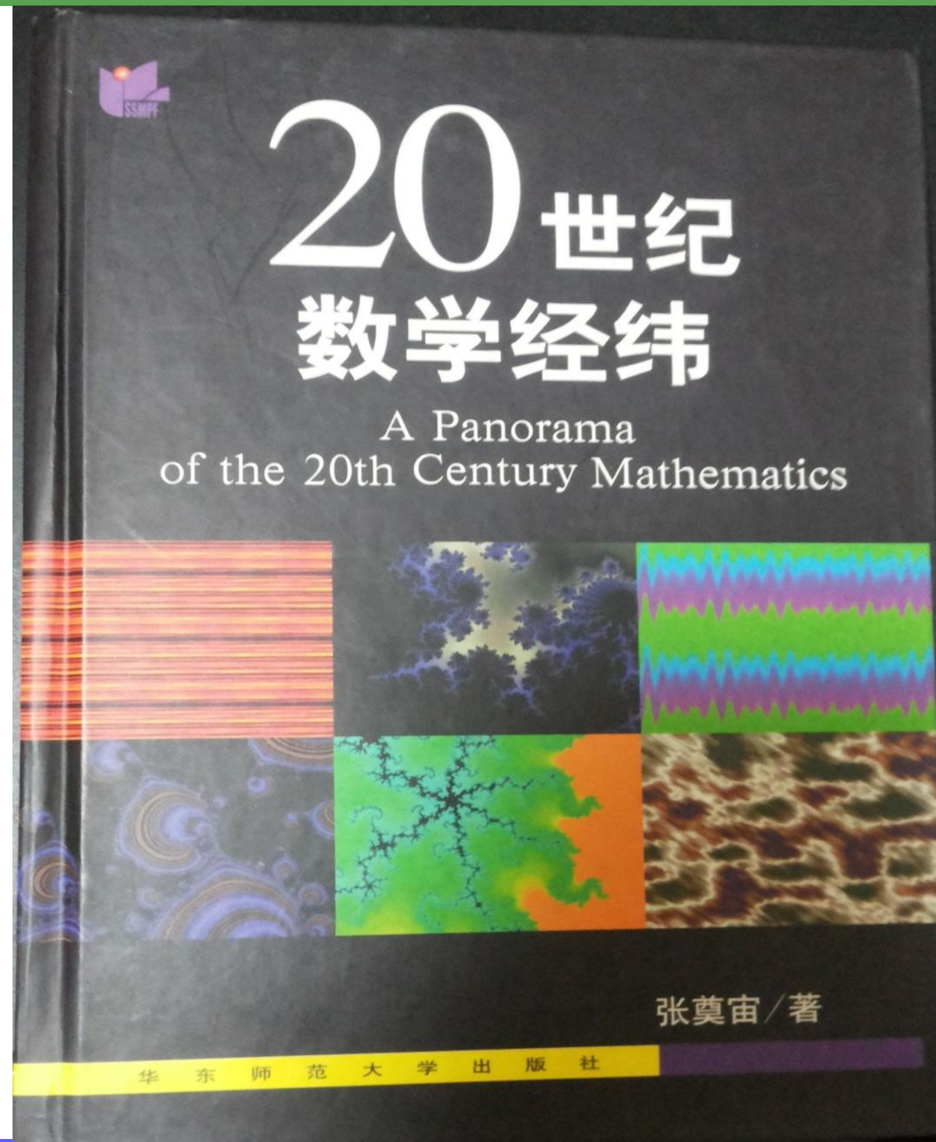
# 主要参考书


（第一册）
古今数学思想
[美] 莫里斯·克莱因 著
$a^2+b^2=c^2$
上海科学技术出版社

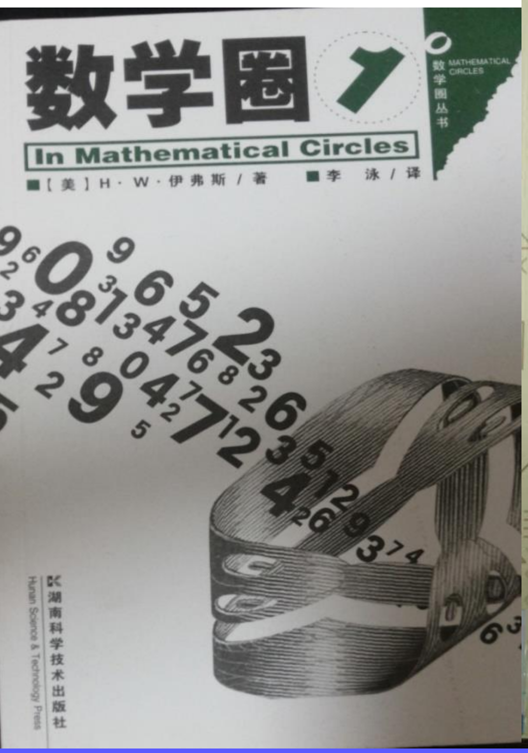

吴振奎 吴旻 吴彬
品
数学
广州大学图书馆
A1685740

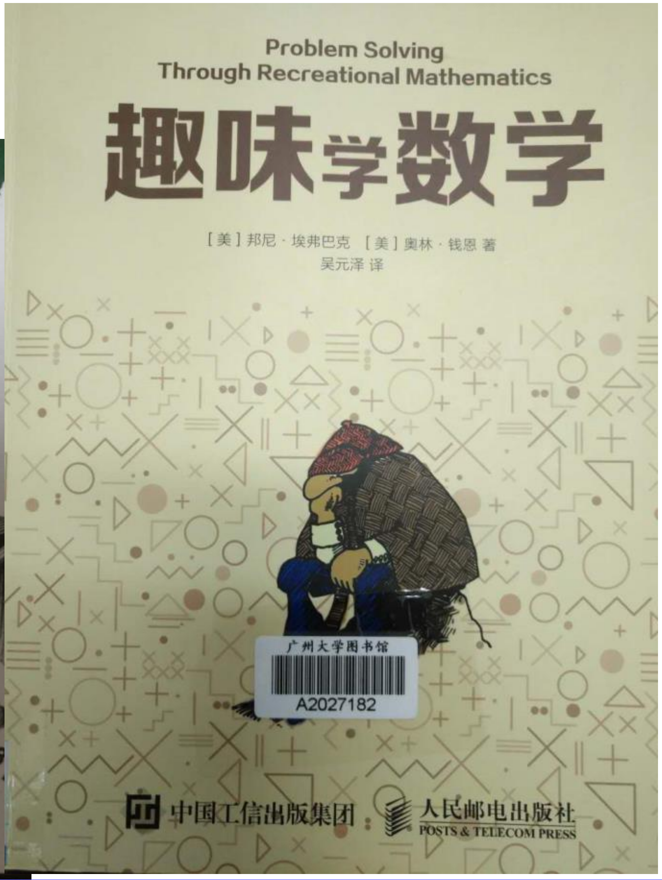
# 主要参考书

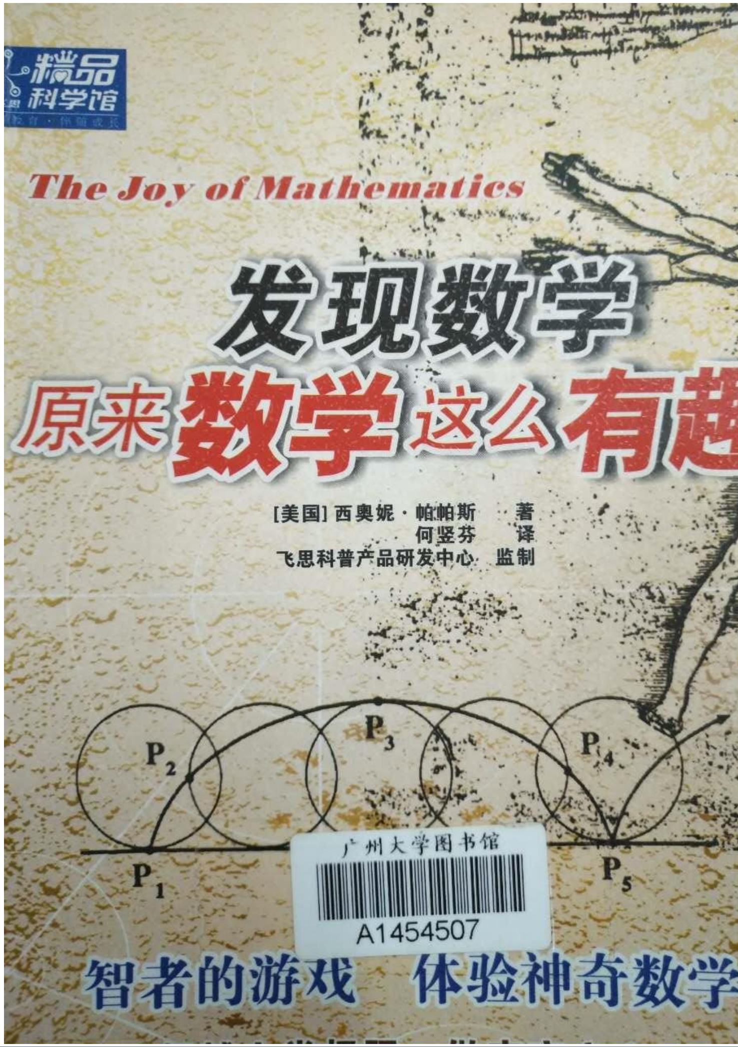

数学:确定性的丧失
Mathematics
The Loss of Certainty
第一推动丛书
第二辑
[美]M·克莱因/著
李宏魁/译
湖南科学技术出版社
Hunan Science & Technology Press


20世纪
数学经纬
A Panorama
of the 20th Century Mathematics
张奠宙/著
华东师范大学出版社

# 主要参考书


数学圈 1
In Mathematical Circles
[美] H·W·伊弗斯 / 著
李 泳 / 译
数学圈丛书
湖南科学技术出版社


Problem Solving
Through Recreational Mathematics
趣味学数学
[美] 邦尼·埃弗巴克 [美] 奥林·钱恩 著
吴元泽 译
中国工信出版集团
人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

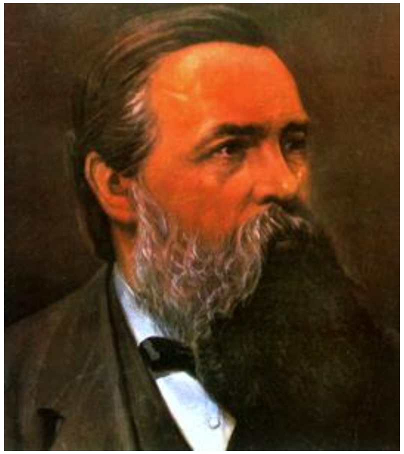

精品科学馆
The Joy of Mathematics
发现数学
原来数学这么有
[美国] 西奥妮·帕帕斯 著
何竖芬 译
飞思科普产品研发中心 监制
智者的游戏 体验神奇数学

# 引　言

## 一、什么是高等数学？

初等数学 — 研究对象为常量，以静止观点研究问题.

高等数学 — 研究对象为变量，运动和辩证法进入了数学.



恩格斯

数学中的转折点是笛卡儿的变数.

有了变数，运动进入了数学，

有了变数，辩证法进入了数学，

有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生.

# 主要内容

1. 分析基础: 函数 , 极限, 连续

2. 微积分学: 一元微积分(上册)

多元微积分 (下册)

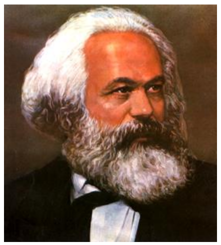
3. 向量代数与空间解析几何

4. 无穷级数

5. 常微分方程

# 二、如何学习高等数学？

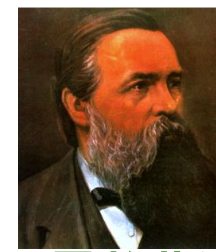
1. 认识高等数学的重要性, 培养浓厚的学习兴趣.



马克思

一门科学, 只有当它成功地运用数学时, 才能达到真正完善的地步.

要辩证而又唯物地了解自然, 就必须熟悉数学.



恩格斯

2. 学数学最好的方式是做数学.

华罗庚

聪明在于学习, 天才在于积累.

学而优则用, 学而优则创.

由薄到厚, 由厚到薄.

# 学习建议

- 上课认真听讲，课后复习做作业，并预习
  - 广泛涉猎，深入阅读，增强兴趣
    - 结合教师推荐的教材和数学史等参考资料泛读，了解国内外数学的发展状况
  - 作业和答疑
    - 作业：按时交
    - 答疑时间：每周一到周四晚上7点到八点半
    - 地点：文清305

# 第一章　函数与极限

高等数学中几乎所有的概念都离不开极限，因此极限概念是高等数学的重要概念，极限理论是高等数学的基础理论，极限是高等数学的精华所在，是高等数学的灵魂。因此很好地理解极限概念是学习好微积分的关键，同时也是从初等数学迈入高等数学的一个重要阶梯。

极限是研究在指定的过程中某变量的变化趋势，这里所讲的变化趋势有其明确的含义：不管所指定的变化过程多么复杂，我们所关心的仅仅是变量变化的终极目标，若这个终极目标存在，就称之为变量的极限

第一章我们首先介绍极限理论的基本概念、运算和性质，然后讨论函数的连续性

# 一、基本概念

**1. 集合:** 具有某种特定性质的事物的总体.

组成这个集合的事物称为该集合的元素.

$a \in M$, $a \notin M$,

$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 有限集

$M = \{x \mid x\text{所具有的特征}\}$ 无限集

若$x \in A$,则必$x \in B$,就说$A$是$B$的子集.

记作 $A \subset B$.

数集分类: N----自然数集 Z----整数集

Q----有理数集 R----实数集

**数集间的关系:** $N \subset Z$, $Z \subset Q$, $Q \subset R$.

若$A \subset B$,且$B \subset A$,就称集合$A$与$B$相等. $(A = B)$

例如 $A = \{1,2\}$,

$$C = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}, \quad \text{则 } A = C.$$

不含任何元素的集合称为<u>空集.</u> (记作 $\varnothing$)

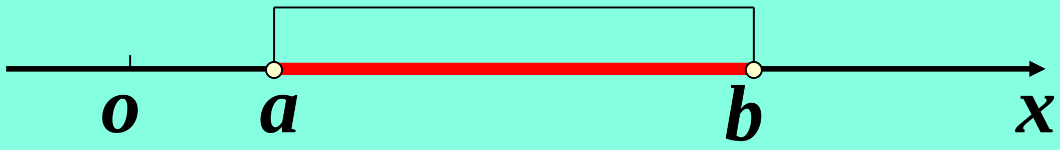
例如, $\{x \mid x \in R, x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$

**规定** 空集为任何集合的子集.

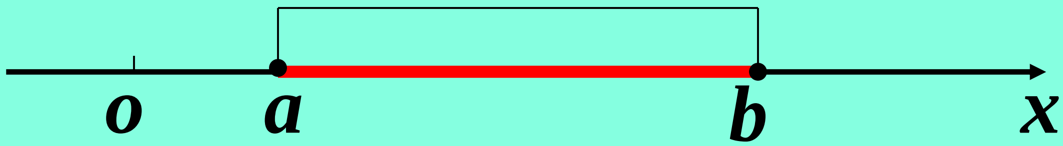
**2. 区间:** 是指介于某两个实数之间的全体实数. 这两个实数叫做区间的端点.

$\forall\, a, b \in R$, 且 $a < b$.

$\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间, 记作 $(a, b)$




$\{x \mid a \le x \le b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$



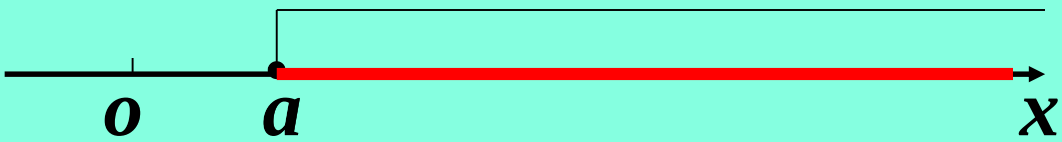

$\{x \mid a \le x < b\}$ 称为半开区间, 记作 $[a, b)$

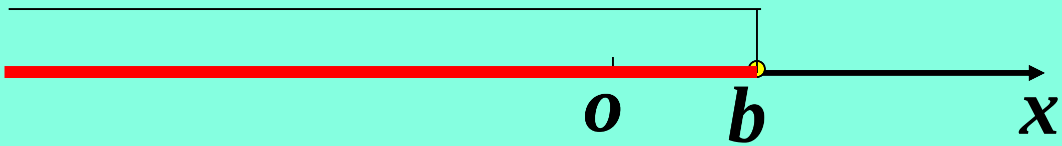
$\{x \mid a < x \le b\}$ 称为半开区间, 记作 $(a, b]$

有限区间

$$[a,+\infty)=\{x \mid a \le x\} \qquad (-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$$

无限区间




**区间长度的定义:**

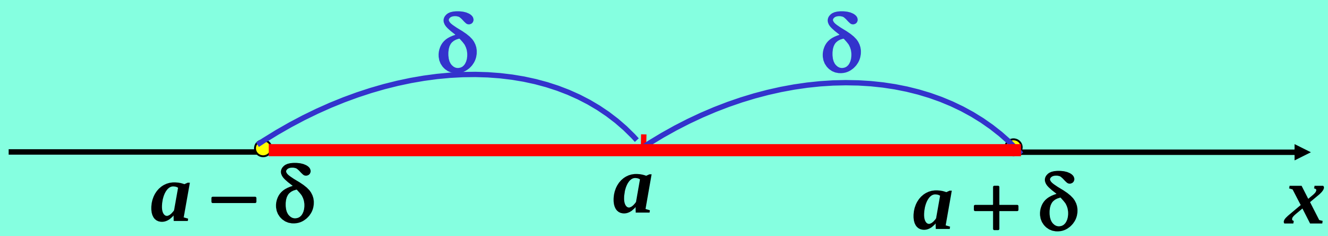
**两端点间的距离(线段的长度)称为区间的长度.**

**3. 邻域:** 设$a$与$\delta$是两个实数，且$\delta > 0$.

数集$\{x \mid |x-a|<\delta\}$称为点$a$的$\delta$邻域，

点$a$叫做这邻域的中心，$\delta$叫做这邻域的半径.

$$U_\delta(a)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$




点$a$的去心的δ邻域, 记作$\overset{0}{U}_\delta(a)$.

$$\overset{0}{U}_\delta(a)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

# 希腊字母读音表

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Α | α | alpha | a:lf | 阿尔法 |
| 2 | Β | β | beta | bet | 贝塔 |
| 3 | Γ | γ | gamma | ga:m | 伽马 |
| 4 | Δ | δ | delta | delt | 德尔塔 |
| 5 | Ε | ε | epsilon | ep`silon | 伊普西龙 |
| 6 | Ζ | ζ | zeta | zat | 截塔 |
| 7 | Η | η | eta | eit | 艾塔 |
| 8 | Θ | θ | theta | θit | 西塔 |
| 9 | Ι | ι | iota | aiot | 约塔 |
| 10 | Κ | κ | kappa | kap | 卡帕 |
| 11 | ∧ | λ | lambda | lambd | 兰布达 |
| 12 | Μ | μ | mu | mju | 缪 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | N | ν | nu | nju | 纽 |
| 14 | Ξ | ξ | xi | ksi | 克西 |
| 15 | O | ο | omicron | omik`ron | 奥密克戎 |
| 16 | ∏ | π | pi | pai | 派 |
| 17 | P | ρ | rho | rou | 肉 |
| 18 | ∑ | σ | sigma | `sigma | 西格马 |
| 19 | T | τ | tau | tau | 套 |
| 20 | Y | υ | upsilon | ju:p`sailon | 宇普西龙 |
| 21 | Φ | φ | phi | fai | 佛爱 |
| 22 | X | χ | chi | phai | 西 |
| 23 | Ψ | ψ | psi | psai | 普西 |
| 24 | Ω | ω | omega | o`miga | 欧米伽 |

# 二、函数概念

**定义** 设$x$和$y$是两个变量，$D$是一个给定的数集，若对于$x \in D$，变量$y$按照确定的法则总有确定的数值和它对应，则称$y$是$x$的函数

记作 $y = f(x)$

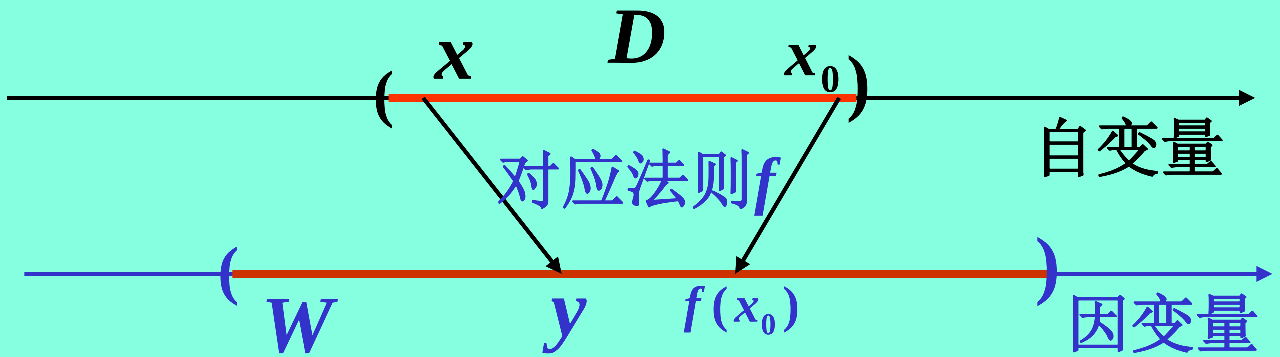
因变量 自变量

当$x_0 \in D$时,称$f(x_0)$为函数在点$x_0$处的函数值.

函数值全体组成的数集

$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

**函数的两要素：** <u>定义域</u>与<u>对应法则.</u>




**约定：** 定义域是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值的集合.

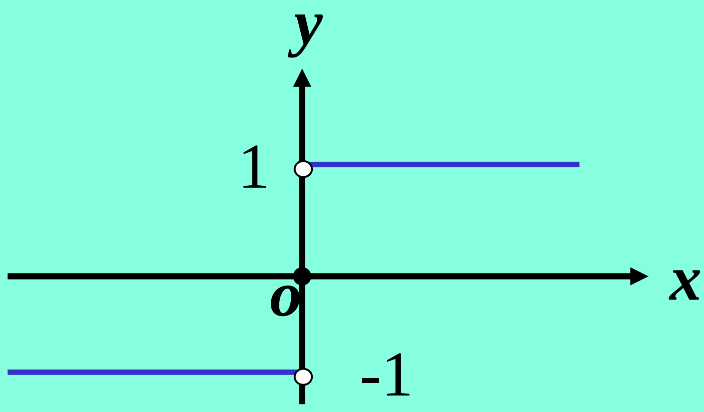
例如， $y=\sqrt{1-x^2}$ $\qquad D:[-1,1]$

例如， $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad D:(-1,1)$

# 几个特殊的函数举例

**(1)** 符号函数

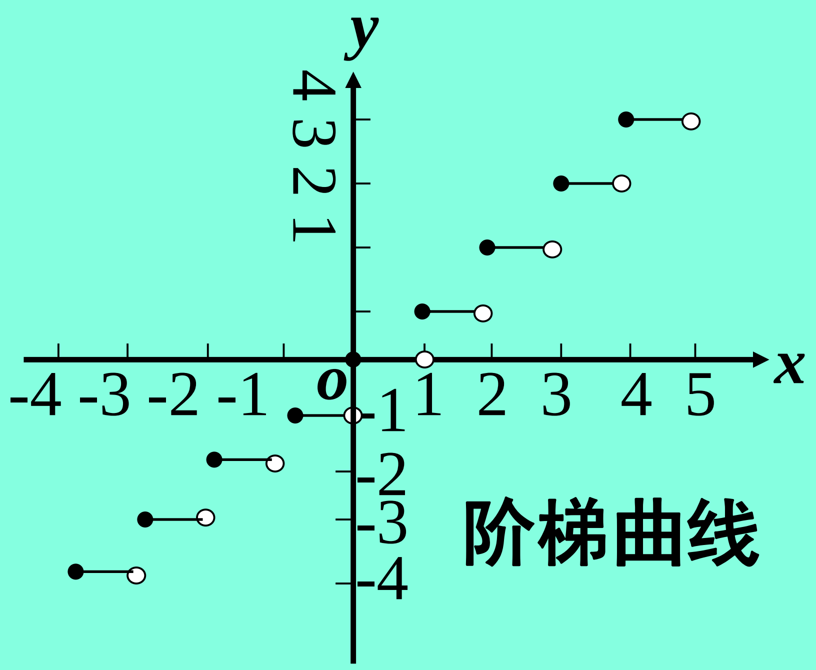
$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & 当x > 0 \\ 0 & 当x = 0 \\ -1 & 当x < 0 \end{cases}$$




$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

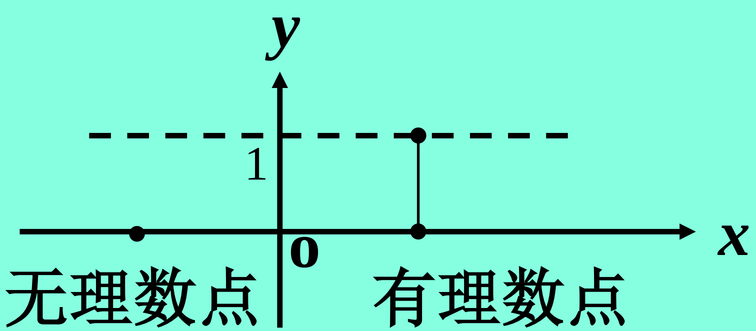
**(2)** 取整函数 $y=[x]$

$[x]$表示不超过$x$的最大整数



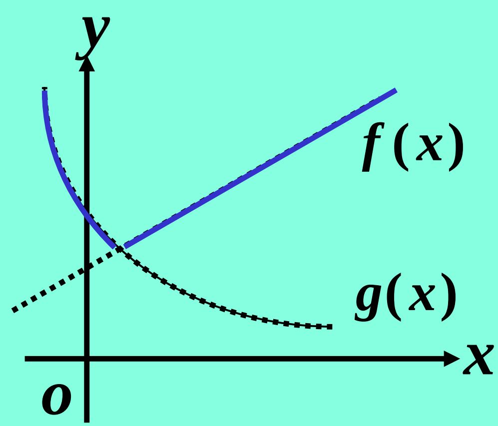
**(3)** 狄利克雷函数

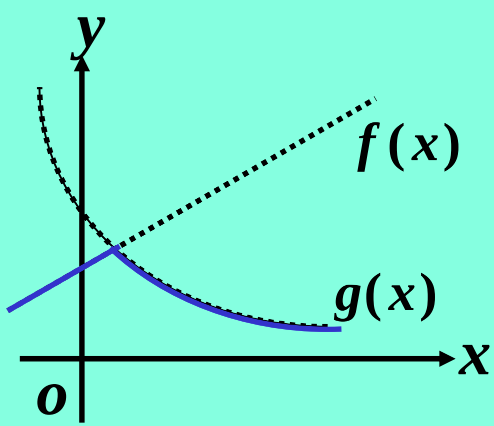
$$y = D(x) = \begin{cases} 1 & \text{当}x\text{是有理数时} \\ 0 & \text{当}x\text{是无理数时} \end{cases}$$




**(4)** 取最值函数

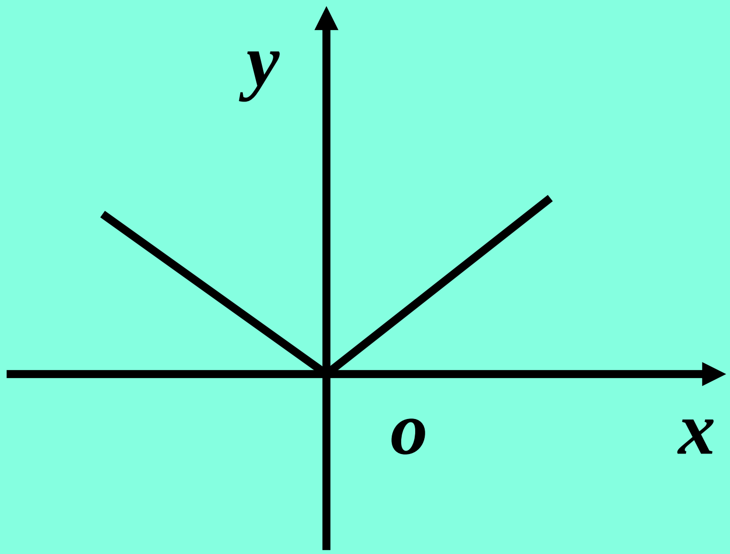
$$y = \max\{f(x), g(x)\} \qquad y = \min\{f(x), g(x)\}$$



## (5)绝对值函数

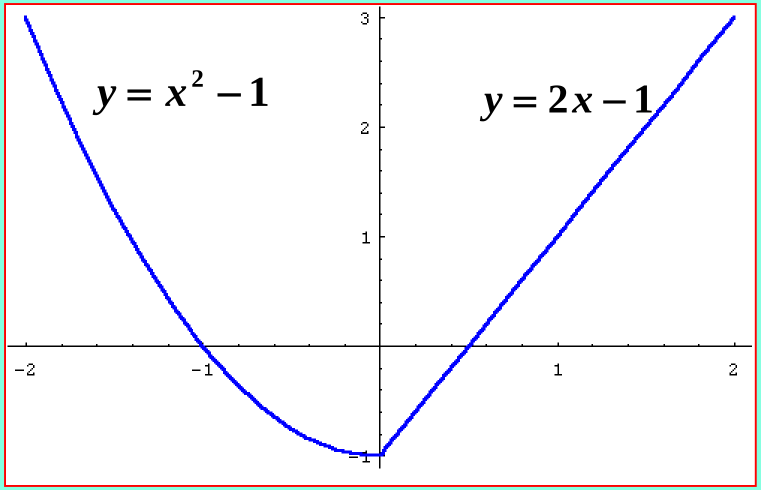
$$y=|x|=\begin{cases} x\,, x\ge 0 \\ -x,\ x<0 \end{cases}$$




定义域$R$　　　值域　$[0,+\infty)$

在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同的式子来表示的函数,称为<u>分段函数</u>.

例如,　$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x>0 \\ x^2-1, & x\le 0 \end{cases}$



**例2**

设$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ -2 & 1<x\le 2\end{cases}$,求函数 $f(x+3)$的定义域.

**解** $\because f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ -2 & 1<x\le 2\end{cases}$

$$\therefore f(x+3)=\begin{cases}1 & 0\le x+3\le 1\\ -2 & 1<x+3\le 2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1 & -3\le x\le -2\\ -2 & -2<x\le -1\end{cases}$$

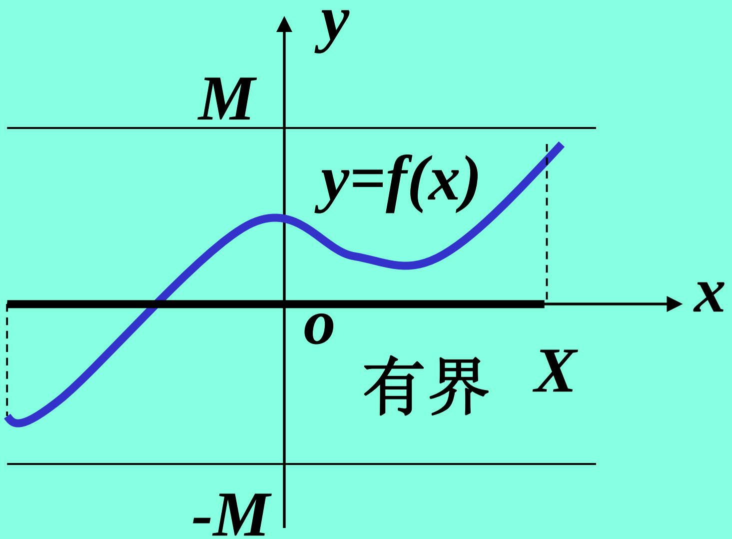
故 $D_f:[-3,-1]$

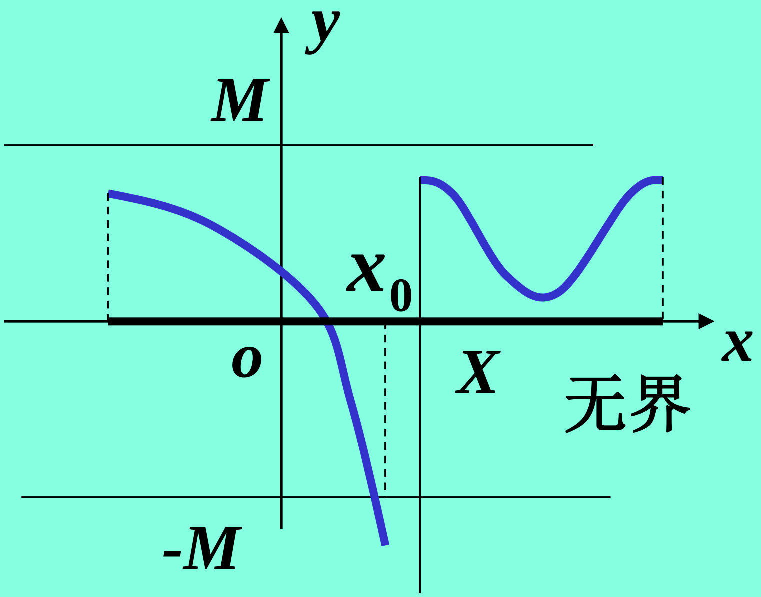
# 三、函数的特性

## 1. 函数的有界性:

若$X \subset D, \exists M > 0, \forall x \in X$,有$|f(x)| \le M$成立,

则称函数$f(x)$在$X$上有界.否则称无界.



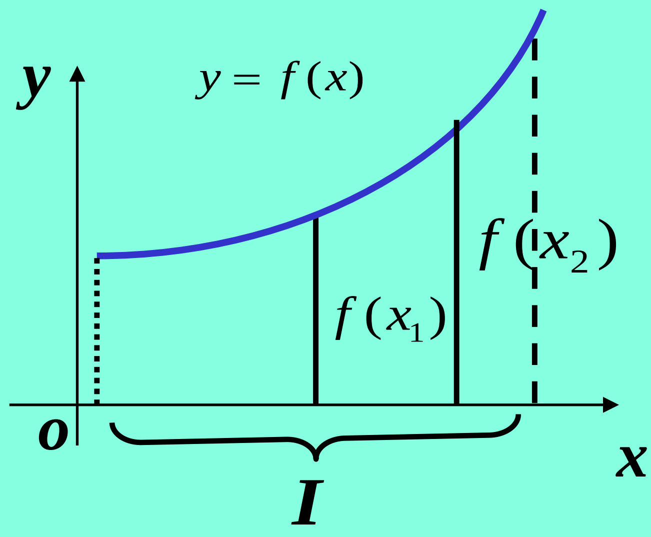
## 2．函数的单调性:

设函数 $f(x)$的定义域为$D$，区间$I \in D$,

如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$及 $x_2$，当 $x_1 < x_2$时,

恒有 (1) $f(x_1) < f(x_2)$,

则称函数 $f(x)$在区间$I$上是单调增加的;

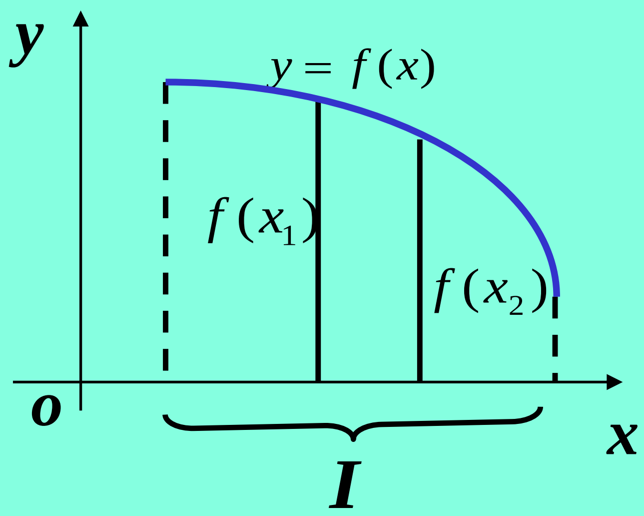


设函数 $f(x)$的定义域为$D$，区间$I \in D$，

如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$及 $x_2$，当 $x_1 < x_2$时，

恒有 (2) $f(x_1) > f(x_2)$，

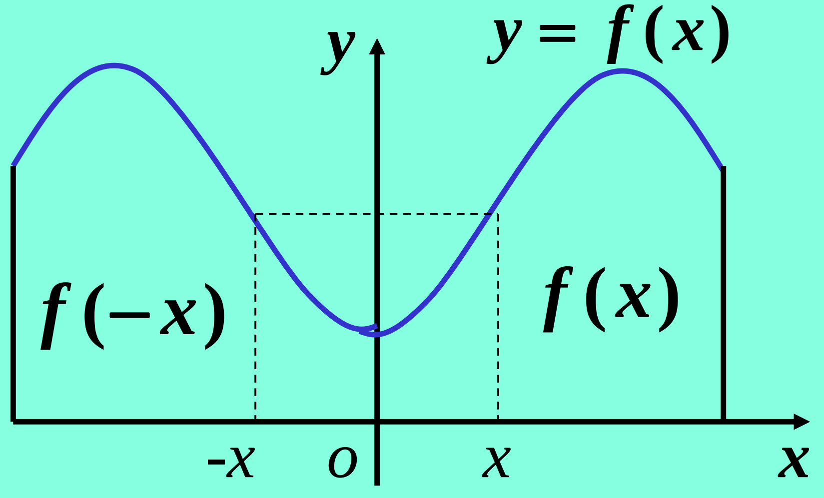
则称函数 $f(x)$在区间$I$上是单调减少的；



## 3．函数的奇偶性:

设$D$关于原点对称，对于$\forall x \in D$，有

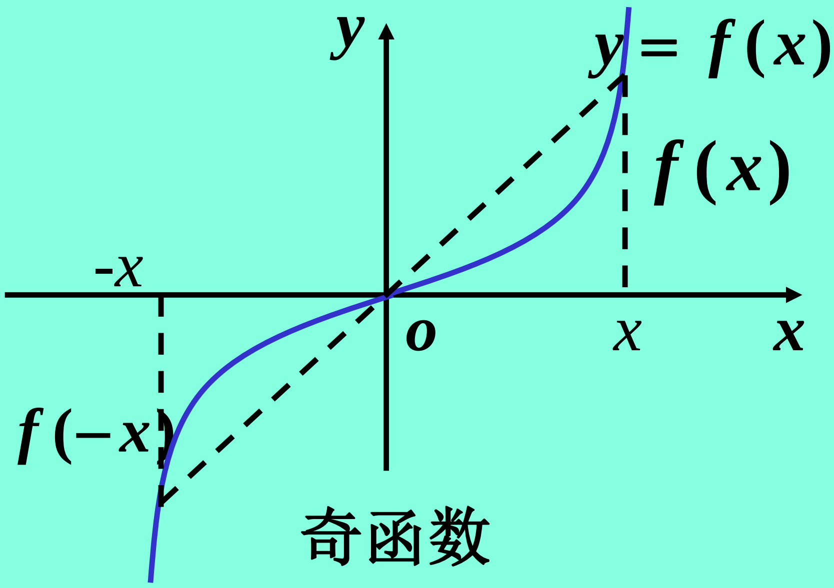
$f(-x) = f(x)$ 称 $f(x)$为偶函数；




偶函数

设$D$关于原点对称，对于$\forall x \in D$，有

$f(-x) = -f(x)$ 称 $f(x)$为奇函数；



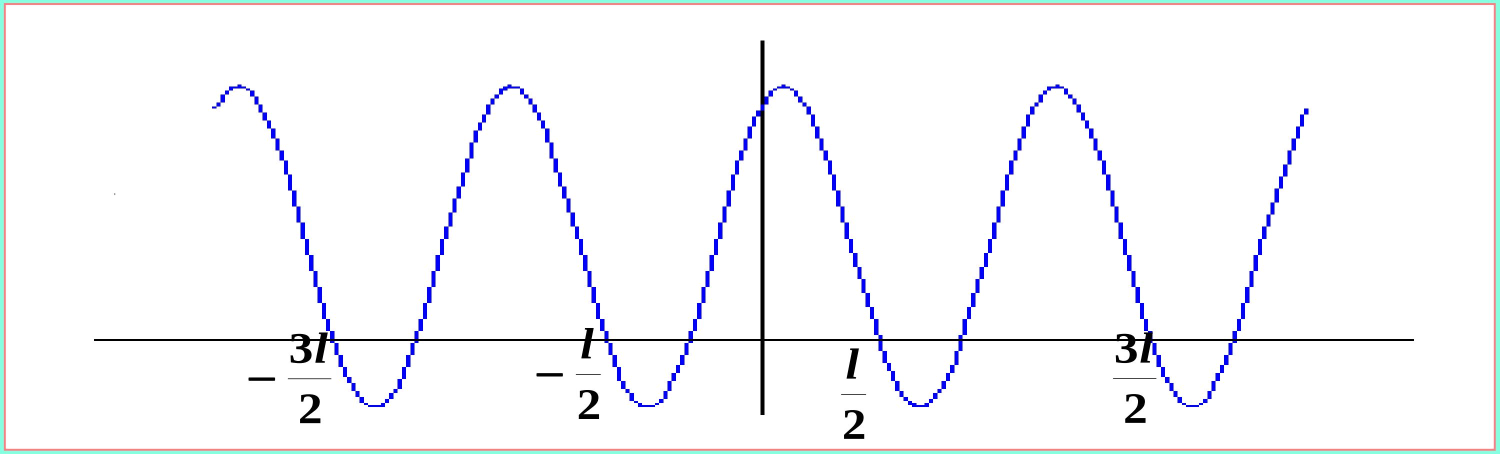

奇函数

# 4．函数的周期性:

设函数$f(x)$的定义域为$D$，如果存在一个不为零的数$l$，使得对于任一$x \in D, (x \pm l) \in D$.且$f(x+l) = f(x)$恒成立.

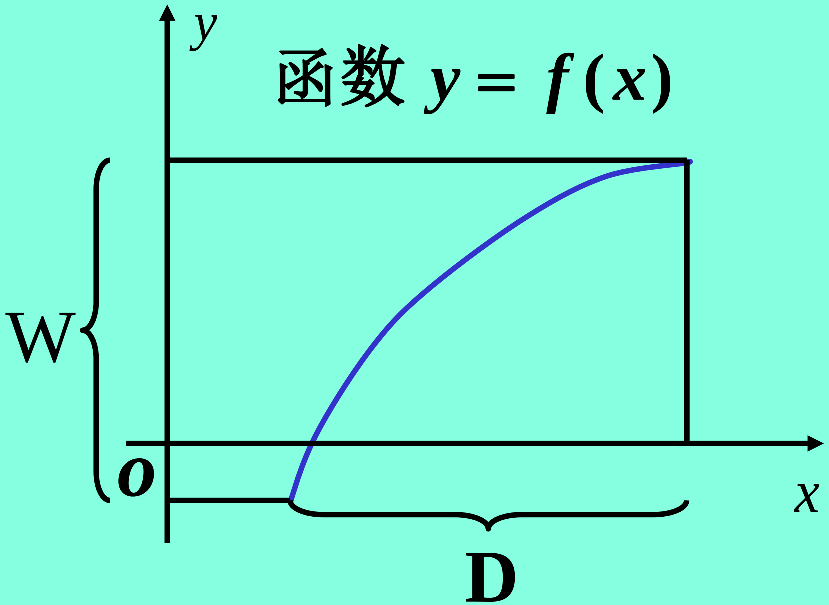
则称$f(x)$为周期函数，$l$称为$f(x)$的周期.

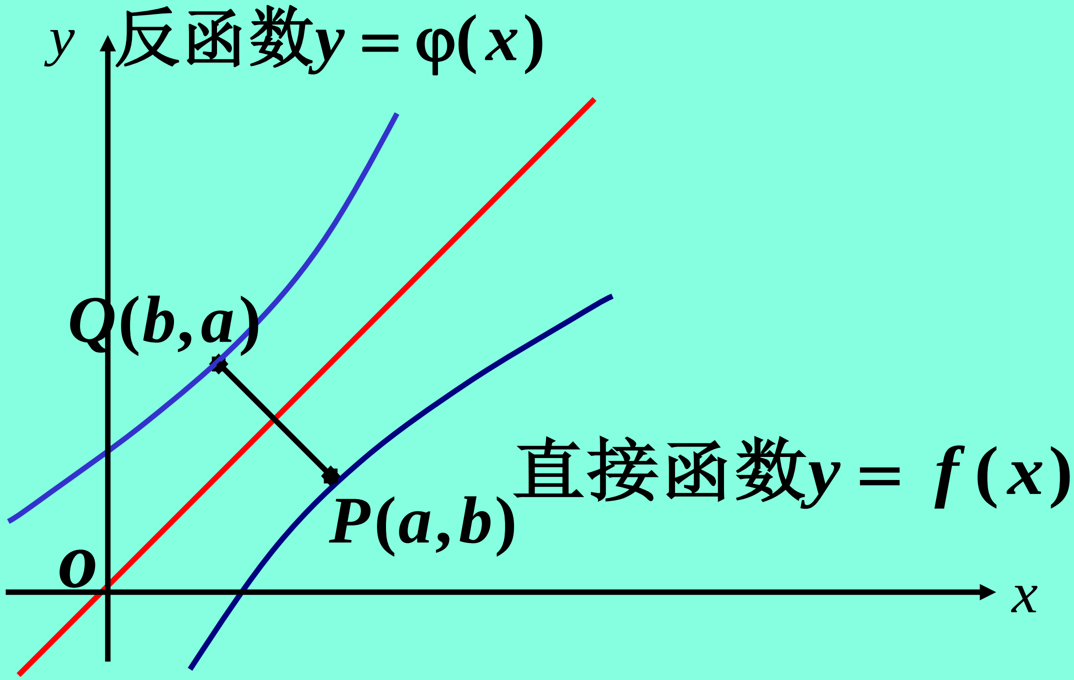
（通常说周期函数的周期是指其最小正周期）.




**德国医生发现，人的体力(23天),情绪(28天),智力(33天)都是周期变化的.**

# 四、反函数






直接函数与反函数的图形关于直线$y=x$对称.