

## 作业 5.2 解答

一. 计算下列定积分: (30 分)

$$(1) \int_1^2 \frac{(1+x)^2}{x} dx \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx \quad (3) \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x} dx$$

$$(4) \int_0^1 x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (5) \int_1^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx \quad (6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x dx$$

$$(7) \int_0^{\pi} (1-\sin^3 x) dx \quad (8) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$$

$$(9) \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} dx \quad (10) \int_2^3 \sqrt{4x-x^2} dx$$

二. 计算下列定积分: (20 分)

(1)  $\int_0^1 x \arctan x \, dx$ ; (2)  $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$ ; (3)  $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| \, dx$ ; (4)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx$

三. 计算下列反常积分: (20 分)

(1)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} \, dx$ ; (2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ ; (3)  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + 1}$ ; (4)  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$

四. 已知  $f(x) = x^2 - x \int_0^1 f(x) dx + 2 \int_0^1 f(x) dx$ , 求  $f(x)$ . (5 分)

五. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ , 求  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  在  $[0, 2]$  上的表示式. (5 分)

六. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 证明

$$\int_0^\pi f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx. \quad (10 \text{ 分})$$

七. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 证明  $\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx$ , 并利用此式计算

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$$