广州大学 2012-2013 学年第一学期考试卷

高等数学Ⅰ1（A 卷）参考解答与评分标准

一．填空题（每小题 3 分，本大题满分 30 分）

1．曲线 $y=\sqrt{x^2+x}-x$ 有水平渐近线 $\underline{\quad y=\frac{1}{2}\quad}$.

2．已知当 $x\to 0$ 时，$1-\cos 2x$ 与 ax^2 是等价无穷小，则常数 $a=\underline{\quad 2\quad}$.

3．设 $f(x)=\left(1+2x\right)^{\frac{1}{x}}$，若定义 $f(0)=\underline{\quad e^2\quad}$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

4．设 $y=x\sin x+\cos x$，则 $\mathrm{d}\,y=\underline{\quad x\cos x\,\mathrm{d}\,x\quad}$.

5．设 $\begin{cases}x=t^2+2t\\ y=t^3-3t\end{cases}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\underline{\quad \dfrac{3}{2}(t-1)\quad}$.

6．函数 $y=2\sqrt{x}-x$ 在区间 $\underline{\quad [0,1]\quad}$ 上单调增加.

7．曲线 $y=x^3-x^2$ 的凹区间为 $\underline{\quad [\frac{1}{3},+\infty)\quad}$.

8．设 $1-\cos x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f^{(10)}(x)=\underline{\quad -\sin x\quad}$.

9．$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-1}\displaystyle\int_{-1}^{x} t\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}\,t=\underline{\quad \dfrac{\sqrt{2}}{2}\quad}$.

10．质点以速度 $t\sin(t^2)$ 米/秒作直线运动，则从时刻 $t_1=0$ 秒到 $t_2=\sqrt{2\pi}$ 秒内质点

所经过的路程等于 $\underline{\quad 2 \quad}$ 米.

二．解答下列各题（每小题 6 分，本大题满分 18 分）

1．求函数 $y=\ln(1+x^4)$ 的一阶和二阶导数.

解：$y'=\dfrac{1}{1+x^4}\cdot(1+x^4)'=\dfrac{4x^3}{1+x^4}$，------3 分

$$y''=\frac{12x^2(1+x^4)-4x^3\cdot(4x^3)}{(1+x^4)^2}=\frac{12x^2-4x^6}{(1+x^4)^2}.$$ ------6 分

2．求曲线 $e^{x+y}+xy+e^{x-1}=1$ 在点 $(1,-1)$ 处的切线方程.

解：曲线方程两边对 x 求导，得

$$e^{x+y}\cdot(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})+y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+e^{x-1}=0，$$ ------3 分

将 $x=1$，$y=-1$ 代入上式，得切线斜率 $k=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1,\,y=-1}=-\dfrac{1}{2}$，------5 分

切线方程为 $y+1=-\dfrac{1}{2}(x-1)$，即 $x+2y+1=0$. ------6 分

3．设 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x^2-1}=3$，求 $f(1)$ 和 $f'(1)$.

解：$\lim\limits_{x\to1}[f(x)-2]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x^2-1}\cdot\lim\limits_{x\to1}(x^2-1)=0$，

$f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$. ------2 分

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}$$ ------4 分

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}\cdot\lim_{x\to1}(x+1)=6.$$ ------6 分

三．计算下列极限（每小题 6 分，本大题满分 12 分）

1．$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x - x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2}$.

解：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x - x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x} - 1}{4x^3 - 6x^2 + 2x}$ ------3 分

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{12x^2 - 12x + 2} = -\dfrac{1}{2}$. ------6 分

2．$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{\cos x}{\sin^2 x})$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x\sin^2 x}$ ------1 分

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$ ------3 分

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2}$ ------5 分

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{3x} = \dfrac{1}{3}$. ------6 分

四．计算下列积分（每小题 5 分，本大题满分 15 分）

1．$\int \arcsin x \,\mathrm{d}x$.

解：$\int \arcsin x \,\mathrm{d}x = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$------2 分

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2) \text{------3 分}$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \text{------5 分}$$

2．$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

解：$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1})\mathrm{d}x$------1 分

$$= \left[-\frac{1}{x} - \arctan x\right]_1^{+\infty} \text{------3 分}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}. \text{------5 分}$$

3．$\int_2^3 \sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解：注意 $4x-x^2 = 4-(x-2)^2$，令 $x-2=2\sin t$，$t=\arcsin\frac{x-2}{2}$，则

$$\int_2^3 \sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos t \cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t \text{------3 分}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t \text{------4 分}$$

$$= \left[2t+\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{------5 分}$$

五．（本题满分 5 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $|f'(x)| \le M$ 及 $f(0)f(1) < 0$.
证明：$|f(0)| + |f(1)| \le M$.

证明：因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)f(1)<0$，所以，由零点定理知，在 $(0,1)$ 内存在一点 a 使 $f(a)=0$. ------2 分

因为 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，所以，由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi_1\in(0,a)$ 使

$$f(a)-f(0)=f'(\xi_1)a.$$

同理，存在 $\xi_2\in(a,1)$ 使

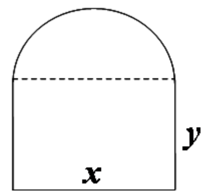
$$f(1)-f(a)=f'(\xi_2)(1-a).$$

于是

$$|f(0)|+|f(1)|=|f'(\xi_1)|a+|f'(\xi_2)|(1-a)$$
$$\le Ma+M(1-a)=M.$$ ------5 分

六．（本题满分 10 分）

某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆（如图示）. 截面的面积为 $5\ \mathrm{m}^2$. 问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小，从而使建造时所用的材料最省？



解：截面的面积为 $xy+\dfrac{\pi x^2}{8}=5$，------2 分

截面的周长为

$$L=x+2y+\frac{\pi x}{2}=\frac{4+\pi}{4}x+\frac{10}{x}，（0<x<\sqrt{\frac{40}{\pi}}）.$$ ------6 分

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}=\frac{4+\pi}{4}-\frac{10}{x^2}，$$ ------8 分

令 $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}=0$，得唯一驻点 $x=\sqrt{\dfrac{40}{4+\pi}}$. 所以，当底宽为 $\sqrt{\dfrac{40}{4+\pi}}$ m时截面的周长最小，从而建造时所用的材料最省. ------10 分

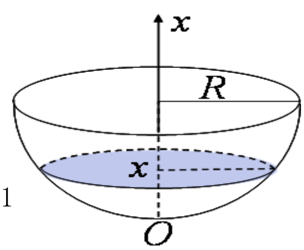
七．（本题满分 10 分）

设有半径为 R 的半球形容器（如图示）. 以每秒 a 升的速度向空容器中注水.

（1）求 x 处的水平截面面积 $A(x)$（图中阴影圆的面积）;

（2）求水深为 $h(0<h<R)$ 时容器中的水量;

（3）求水深为 $h(0<h<R)$ 时水面上升的速度.



解：（1） x 处的水平截面面积

$$A(x)=\pi[R^2-(R-x)^2]$$
$$=\pi(2Rx-x^2).$$ ------3 分

（2）水深为 h 时容器中的水量

$$V=\int_0^h A(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^h \pi(2Rx-x^2)\,\mathrm{d}x$$ ------5 分

$$=\pi[Rx^2-\frac{x^3}{3}]_0^h=\pi h^2(R-\frac{h}{3}).$$ ------7 分

（3）由 $\mathrm{d}V=A(h)\,\mathrm{d}h$，得

$$a=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\pi(2Rh-h^2)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t},$$

所以，水深为 h 时水面上升的速度 $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\dfrac{a}{\pi(2Rh-h^2)}$. ------10 分