第三节
分部积分法

由导数公式 $(uv)' = u'v + uv'$

积分得: $uv = \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x \\ \text{或} \quad \int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u \end{array}\right\} \textbf{分部积分公式}$$

选取 u 及 v' (或$\mathrm{d}v$) 的原则:

1) v 容易求得 ;

2) $\int u'v\,\mathrm{d}x$ 比 $\int uv'\,\mathrm{d}x$ 容易计算 .

例1. 求 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $u = x,\ v' = \cos x,$

则 $u' = 1,\ v = \sin x$

$\therefore$ 原式 $= x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x$

$= x\sin x + \cos x + C$

思考: 如何求 $\int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$?

提示: 令 $u = x^2,\ v' = \sin x$, 则

原式 $= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,\mathrm{d}x$

$= \cdots$

例2. 求 $\int x\ln x\,\mathrm{d}x.$

解: 令 $u=\ln x,\ v'=x$

则 $u'=\frac{1}{x},\quad v=\frac{1}{2}x^2$

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$

例3. 求 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $u=\arctan x$, $v'=x$

则 $u'=\dfrac{1}{1+x^2}$, $v=\dfrac{1}{2}x^2$

$$\therefore \text{原式}=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C$$

例4. 求 $\int e^x \sin x \, dx$.

解: 令 $u=\sin x,\ v'=e^x$, 则

$$u'=\cos x,\ v=e^x$$

$$\therefore\ \text{原式}=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$$

再令 $u=\cos x,\ v'=e^x$, 则

$$u'=-\sin x,\ v=e^x$$

$$=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,dx$$

故 $\quad\text{原式}=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

说明: 也可设 $u=e^x, v'$ 为三角函数, 但两次所设类型必须一致.

解题技巧: 选取 u 及 v' 的一般方法:

把被积函数视为两个函数之积，按 **“反对幂指三”** 的顺序, 前者为 u 后者为 v'.

反: 反三角函数
对: 对数函数
幂: 幂函数
指: 指数函数
三: 三角函数

例5. 求 $\int \arccos x \, \mathrm{d}x$.

解: 令 $u = \arccos x$, $v' = 1$, 则

$$u' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = x$$

$$\text{原式} = x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$$

$$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2} \mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

HIGH EDUCATION PRESS

例6. 求 $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

解: 令 $u=\ln\cos x,\ v'=\frac{1}{\cos^2 x}$ ，则

$$u'=-\tan x,\quad v=\tan x$$

原式 $=\tan x\cdot\ln\cos x+\int\tan^2 x\,\mathrm{d}x$

$$=\tan x\cdot\ln\cos x+\int(\sec^2 x-1)\,\mathrm{d}x$$

$$=\tan x\cdot\ln\cos x+\tan x-x+C$$

例7. 求 $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2$, $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$

$$\text{原式}=2\int t e^t\,\mathrm{d}t$$

令 $u=t$, $v'=e^t$

$$=2(te^t-e^t)+C$$

$$=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$$

例8. 求 $\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \ (a>0)$.

解: 令 $u=\sqrt{x^2+a^2}$, $v'=1$, 则 $u'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $v=x$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + a^2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

例9. 求 $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$.

解: 令 $u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $v'=1$, 则 $u'=\frac{-2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$, $v=x$

$$\therefore\ I_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}$$

得递推公式 $I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n$

$$I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

递推公式 $I_{n+1}=\dfrac{1}{2na^2}\dfrac{x}{(x^2+a^2)^n}+\dfrac{2n-1}{2na^2}I_n$

说明: 已知 $I_1=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}+C$ 利用递推公式可求得 I_n.

例如,

$$I_3=\frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{4a^2}I_2$$

$$=\frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{4a^2}\left(\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}I_1\right)$$

$$=\frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{8a^4}\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{3}{8a^5}\arctan\frac{x}{a}+C$$

例10. 证明递推公式

$$I_n = \int \tan^n x\,\mathrm{d}x = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} \quad (n \ge 2)$$

证: $I_n = \int \tan^{n-2} x\,(\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$

$$= \int \tan^{n-2} x\,\mathrm{d}(\tan x) - I_{n-2}$$

$$= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$$

注: $I_n \to \cdots \to I_0$ 或 I_1

$$I_0 = x + C, \qquad I_1 = -\ln|\cos x| + C$$

说明:

分部积分题目的类型:

1) 直接分部化简积分；

2) 分部产生循环式，由此解出积分式；

(注意: 两次分部选择的 u , v 函数类型不变，解出积分后加 C)

例4

3) 对含自然数 n 的积分, 通过分部积分建立递推公式 .

例11. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\dfrac{\cos x}{x}$，求 $\int x f'(x)\,\mathrm{d}x$.

解:
$$\begin{aligned}\int x f'(x)\,\mathrm{d}x &= \int x\,\mathrm{d}f(x)\\ &= x f(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= x\left(\frac{\cos x}{x}\right)' - \frac{\cos x}{x} + C\\ &= -\sin x - 2\frac{\cos x}{x} + C\end{aligned}$$

说明: 此题若先求出 $f'(x)$ 再求积分反而复杂.

$$\int x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(-\cos x + \frac{2\sin x}{x} + \frac{2\cos x}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

内容小结

分部积分公式 $\int u\,v'\,\mathrm{d}x = u\,v - \int u'v\,\mathrm{d}x$

1. 使用原则： v易求出, $\int u'v\,\mathrm{d}x$易积分

2. 使用经验："**反对幂指三**" ，前 u 后 v'

3. 题目类型：

分部化简； 循环解出; 递推公式

4. 计算格式：

$$\begin{array}{ccc} u & & u' \\ & + \quad \Big| \quad -\int & \\ v' & & v \end{array}$$

思考与练习

1. 下述运算错在哪里? 应如何改正?

$$\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x}=\frac{\sin x}{\sin x}-\int\left(\frac{1}{\sin x}\right)'\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$=1-\int\frac{-\cos x}{\sin^2 x}\sin x\,\mathrm{d}x=1+\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$\therefore\quad \int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x-\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=1,\quad \text{得 } 0=1$$

$$\boxed{=\ln\left|\sin x\right|+C}$$

答: 不定积分是原函数族 , 相减不应为 0 .

求此积分的正确作法是用换元法 .

2. 求 $I=\int e^{kx}\cos(ax+b)\,\mathrm{d}x$

提示:

$$\begin{array}{ccccc} \cos(ax+b) & & -a\sin(ax+b) & & -a^2\cos(ax+b) \\ & + & & - & +\int \\ e^{kx} & & \dfrac{1}{k}e^{kx} & & \dfrac{1}{k^2}e^{kx} \end{array}$$

备用题. 求不定积分 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x$.

解: 方法1 (先分部, 再换元)

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}(e^x-1)$$

$$= 2\int x\,\mathrm{d}\sqrt{(e^x-1)} = 2x\sqrt{e^x-1} - 2\int\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$$

令 $u=\sqrt{e^x-1}$, 则 $\mathrm{d}x = \frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u$

$$= 2x\sqrt{e^x-1} - 4\int\frac{u^2+1-1}{1+u^2}\mathrm{d}u \qquad \boxed{-4(u-\arctan u)+C}$$

$$= 2x\sqrt{e^x-1} - 4\sqrt{e^x-1} + 4\arctan\sqrt{e^x-1} + C$$

方法2 (先换元,再分部)

令 $u=\sqrt{e^x-1}$, 则 $x=\ln(1+u^2),\ \mathrm{d}x=\dfrac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u$

故 $$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{(1+u^2)\ln(1+u^2)}{u}\cdot\frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=2\int\ln(1+u^2)\,\mathrm{d}u$$

$$=2u\ln(1+u^2)-4\int\frac{1+u^2-1}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=2u\ln(1+u^2)-4u+4\arctan u+C$$

$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$$