导数的概念

在许多实际问题中，需要从数量上研究变量的变化速度。如物体的运动速度，电流强度，线密度，比热，化学反应速度及生物繁殖率等，所有这些在数学上都可归结为函数的变化率问题，即导数。

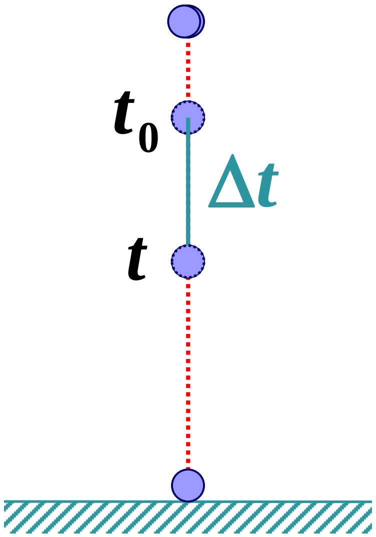
本章将通过对实际问题的分析，引出微分学中两个最重要的基本概念——导数与微分，然后再建立求导数与微分的运算公式和法则，从而解决有关变化率的计算问题。

一、问题的提出

1.自由落体运动的瞬时速度问题

如图，求t_0时刻的瞬时速度，

取一邻近于t_0的时刻t，运动时间Δt，



平均速度 $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{g}{2}(t_0 + t).$

当$t \to t_0$时，取极限得

瞬时速度 $v = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{g(t_0 + t)}{2} = g t_0.$

上述求瞬时速度的方法对一般变速直线运动也同样适用。设物体作变速直线运动，其运动路程为$s = s(t)$，则物体在时刻 t_0 的瞬时速度定义为

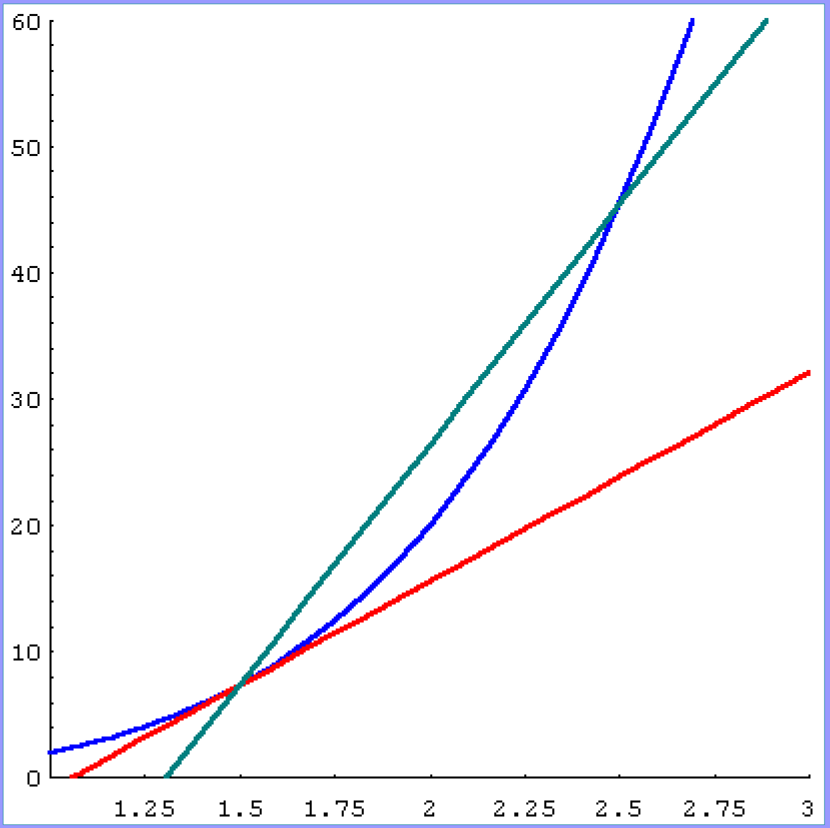
$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

速度反映了路程对时间变化的快慢程度

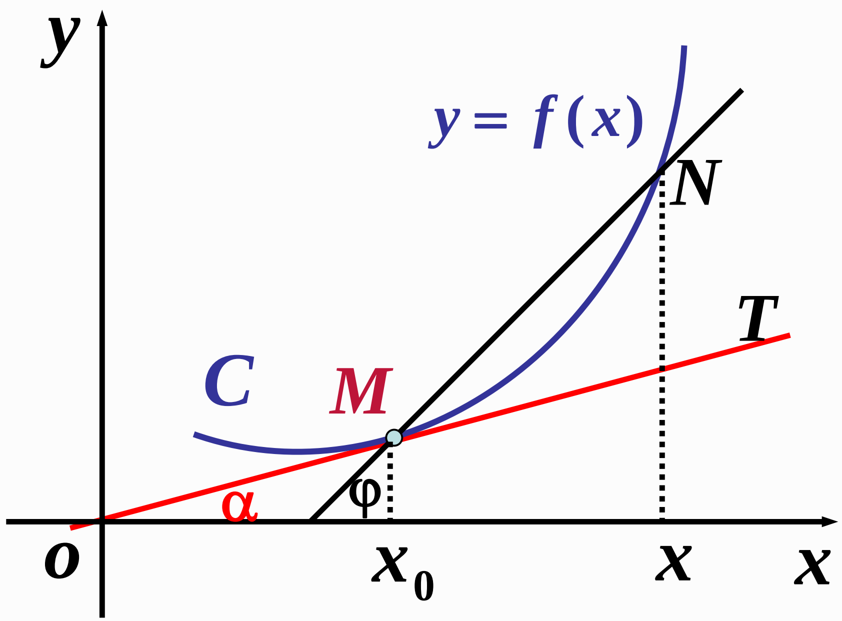
2.切线问题

割线的极限位置——切线位置



播放幻灯片 37

如图，如果割线MN绕点M旋转而趋向极限位置MT,直线MT就称为曲线C在点M处的切线.



极限位置即

$|MN|\to 0, \angle NMT\to 0.$ 设 $M(x_0,y_0), N(x,y)$.

割线MN的斜率为 $\tan\varphi=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,

$N\xrightarrow{\text{沿曲线}C}M, x\to x_0,$

切线MT的斜率为 $k=\tan\alpha=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$

二、导数的定义

定义 设函数 $y=f(x)$在点 x_0的某个邻域内有定义, 当自变量 x在 x_0处取得增量Δx(点 $x_0+\Delta x$仍在该邻域内)时, 相应地函数 y取得增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$; 如果$\Delta y$与$\Delta x$之比当$\Delta x\to 0$时的极限存在, 则称函数 $y=f(x)$在点 x_0处可导, 并称这个极限为函数 $y=f(x)$在点 x_0处的导数, 记为$y'\big|_{x=x_0}$,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \text{或} \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0},$$

即 $\left.y'\right|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

其它形式 $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

关于导数的说明：

★　导数概念是概括了各种各样的变化率而得出的一个更一般、更抽象的概念，它撇开了变量所代表的特殊意义，而纯粹从数量方面来刻画变化率的本质

★　点导数是因变量在点 x_0 处的变化率，它反映了因变量随自变量的变化而变化的快慢程度.

★　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 是 y 在以 x_0 和 $x_0+\Delta x$ 为端点的区间上的平均变化率

★ 如果函数 $y = f(x)$在开区间I内的每点处都可导，就称函数 $f(x)$在开区间I内可导.

★ 对于任一 $x \in I$,都对应着 $f(x)$的一个确定的导数值.这个函数叫做原来函数 $f(x)$的导函数.

记作 $y', f'(x), \dfrac{dy}{dx}$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}$.

即 $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

或 $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

★ 单侧导数

1.左导数:

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

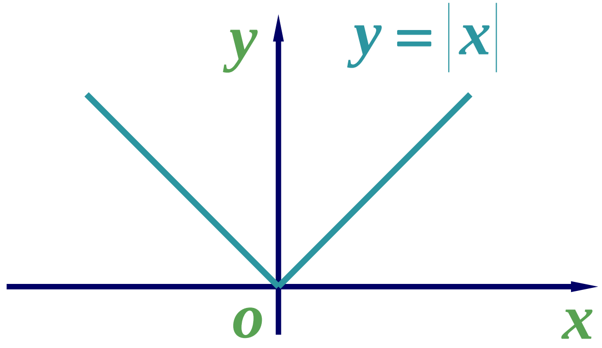
2.右导数:

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

★ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ 左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等.

例 讨论函数 $f(x)=|x|$ 在$x=0$处的可导性.

解 $\because \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h}$,



$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1.$$

即 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$, $\therefore$ 函数$y=f(x)$在$x=0$点不可导.

三、由定义求导数（三步法）

步骤: (1) 求增量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

(2) 算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

(3) 求极限 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例1 求函数 $f(x) = C$(C为常数)的导数.

解 $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{C - C}{h} = 0.$

即 $(C)' = 0.$

例2 设函数 $f(x)=\sin x$，求 $(\sin x)'$ 及 $(\sin x)'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

解 $$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x.$$

即 $$(\sin x)'=\cos x.$$

$$\therefore (\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例3 求函数 $y = x^n$ (n为正整数)的导数.

解 $$(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}] = nx^{n-1}$$

即 $$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

更一般地 $$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}. \qquad (\mu \in R)$$

例如, $$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$(x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}.$$

例4 求函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解 $$(a^x)'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$=a^x\ln a.$$

即 $(a^x)'=a^x\ln a.$

特别地 $(e^x)'=e^x.$

例5 求函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解 $y'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\log_a e.$$

即 $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x}\log_a e=\dfrac{1}{x\ln a}$

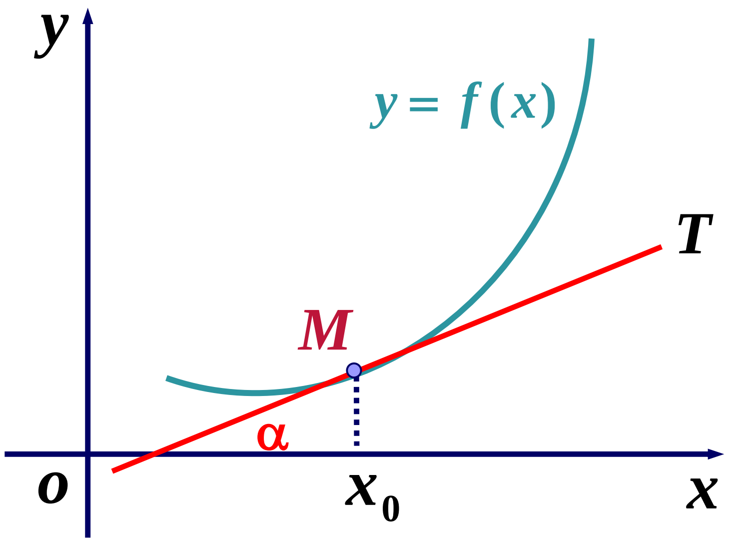
特别地 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}.$

四、导数的几何意义与物理意义

1.几何意义

$f'(x_0)$表示曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率,即

$f'(x_0)=\tan\alpha$, (α为倾角)



若$f'(x_0)\neq 0$且有限时 过$(x_0,f(x_0))$的 切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

法线方程为 $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$

当$f'(x_0)=0$时

切线方程为 $y=f(x_0)$

法线方程为 $x=x_0$

当$f'(x_0)=\infty$时

切线方程为 $x=x_0$

法线方程为 $y=f(x_0)$

例7 求等边双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $(\dfrac{1}{2},2)$ 处的切线的斜率,并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解 由导数的几何意义，得切线斜率为

$$k=y'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=(\frac{1}{x})'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{x^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-4.$$

所求切线方程为 $y-2=-4(x-\dfrac{1}{2})$，即 $4x+y-4=0$.

法线方程为 $y-2=\dfrac{1}{4}(x-\dfrac{1}{2})$，即 $2x-8y+15=0$.

2.物理意义 非均匀变化量的瞬时变化率.

变速直线运动:路程对时间的导数为物体的瞬时速度.

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}.$$

交流电路:电量对时间的导数为电流强度.

$$i(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{dq}{dt}.$$

非均匀的物体:质量对长度(面积,体积)的导数为物体的线(面,体)密度.

五、可导与连续的关系

定理 凡可导函数都是连续函数.

证 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$$

$$\alpha\to 0\quad(\Delta x\to 0)\qquad \Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$$

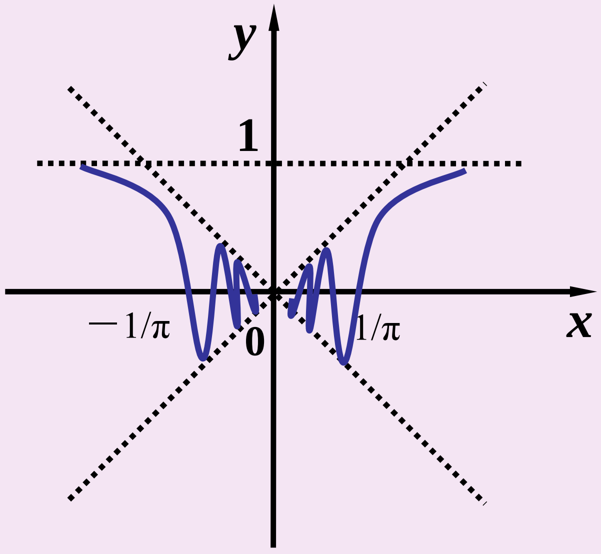
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x]=0$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

注意：该定理的逆定理不成立.

例如，$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，

在$x=0$处连续但不可导.



$\because \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$

$\therefore f(x)$在$x=0$处连续。

$\because f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在

$\therefore f(x)$在$x=0$处不可导.

六、小结

1. 导数的实质：增量比的极限;

2. $f'(x_0)=a \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=a;$

3. 导数的几何意义：切线的斜率;

4. 函数可导一定连续，但连续不一定可导;

5. 求导数最基本的方法：由定义求导数.

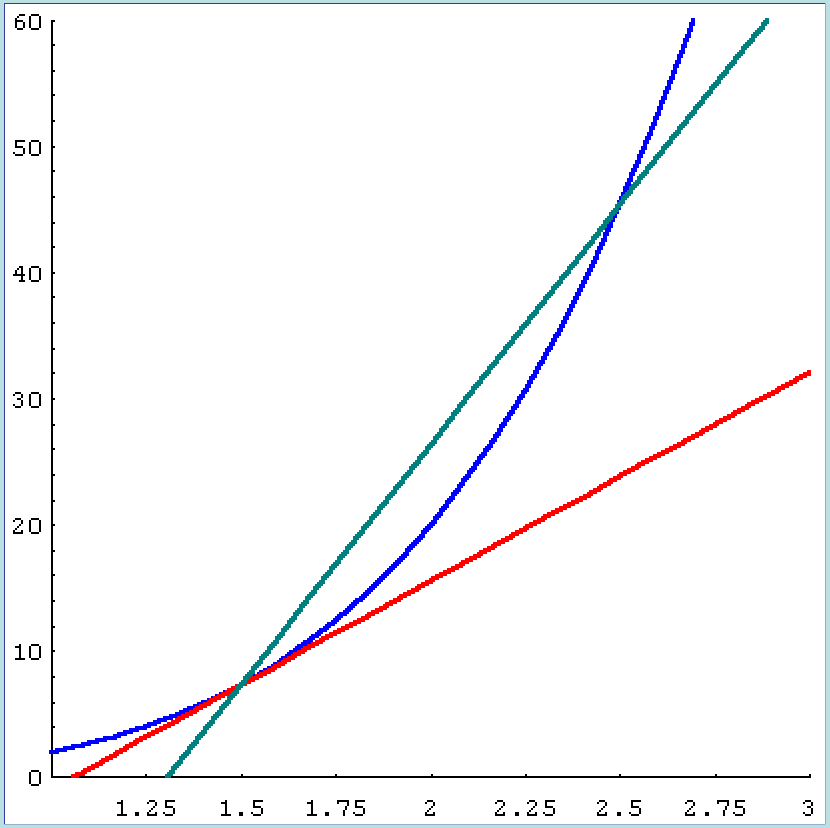
$$6.\ \text{判断可导性}\begin{cases}\text{不连续,一定不可导.}\\ \text{连续}\begin{cases}\text{直接用定义;}\\ \text{看左右导数是否存在且相等.}\end{cases}\end{cases}$$

思考题

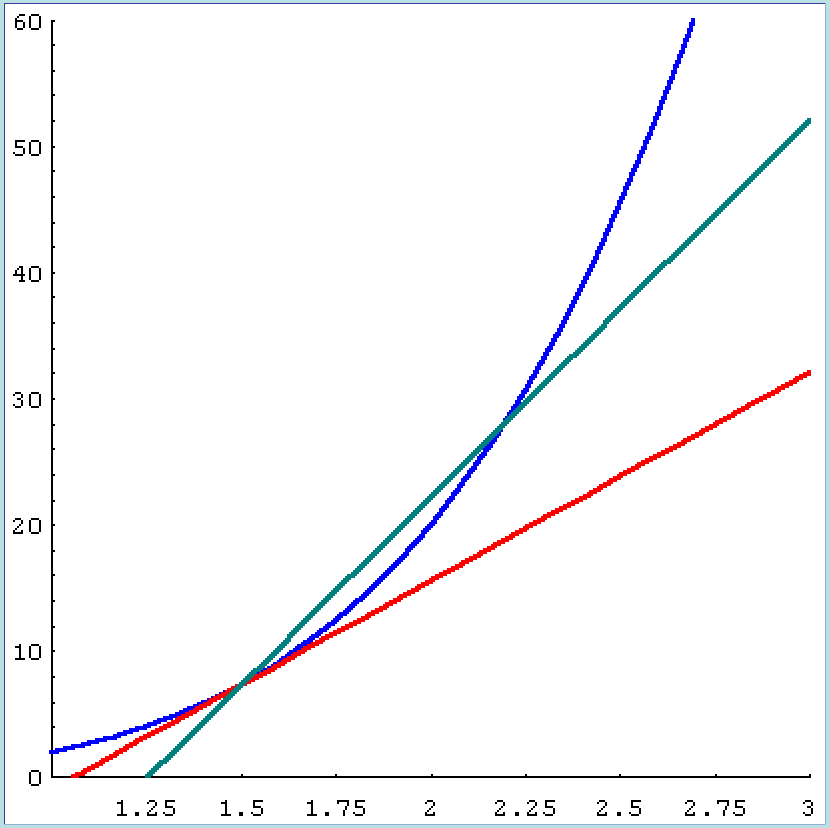
函数 $f(x)$ 在某点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 与导函数 $f'(x)$ 有什么区别与联系？

思考题解答

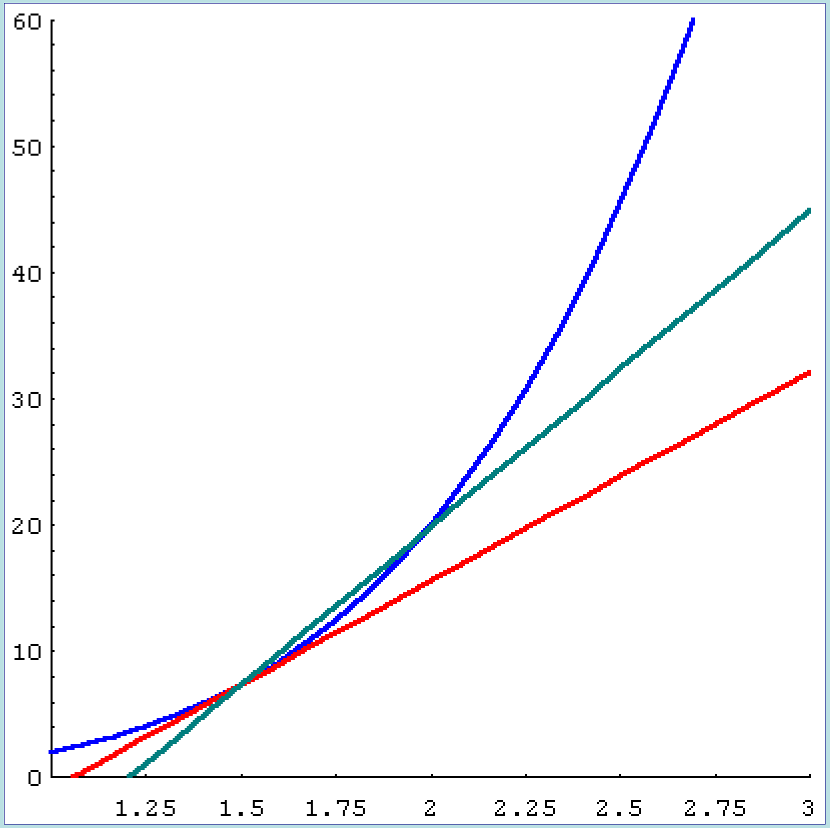
由导数的定义知，$f'(x_0)$是一个具体的数值，$f'(x)$是由于$f(x)$在某区间I上每一点都可导而定义在I上的一个新函数，即$\forall x \in I$，有唯一值$f'(x)$与之对应，所以两者的区别是：一个是数值，另一个是函数．两者的联系是：在某点x_0处的导数$f'(x_0)$即是导函数$f'(x)$在x_0处的函数值．

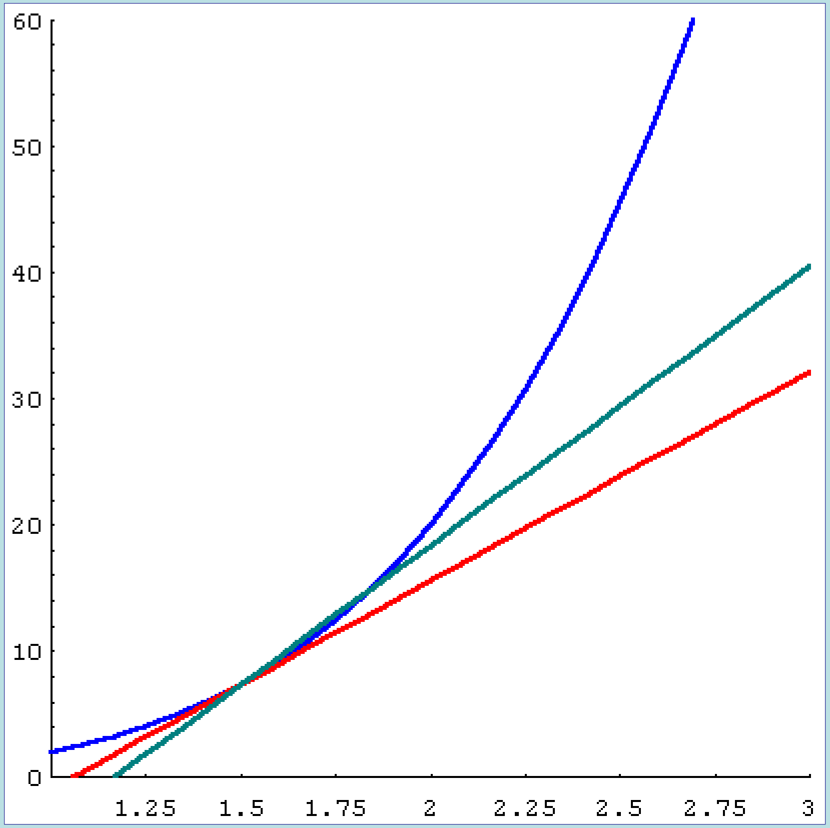


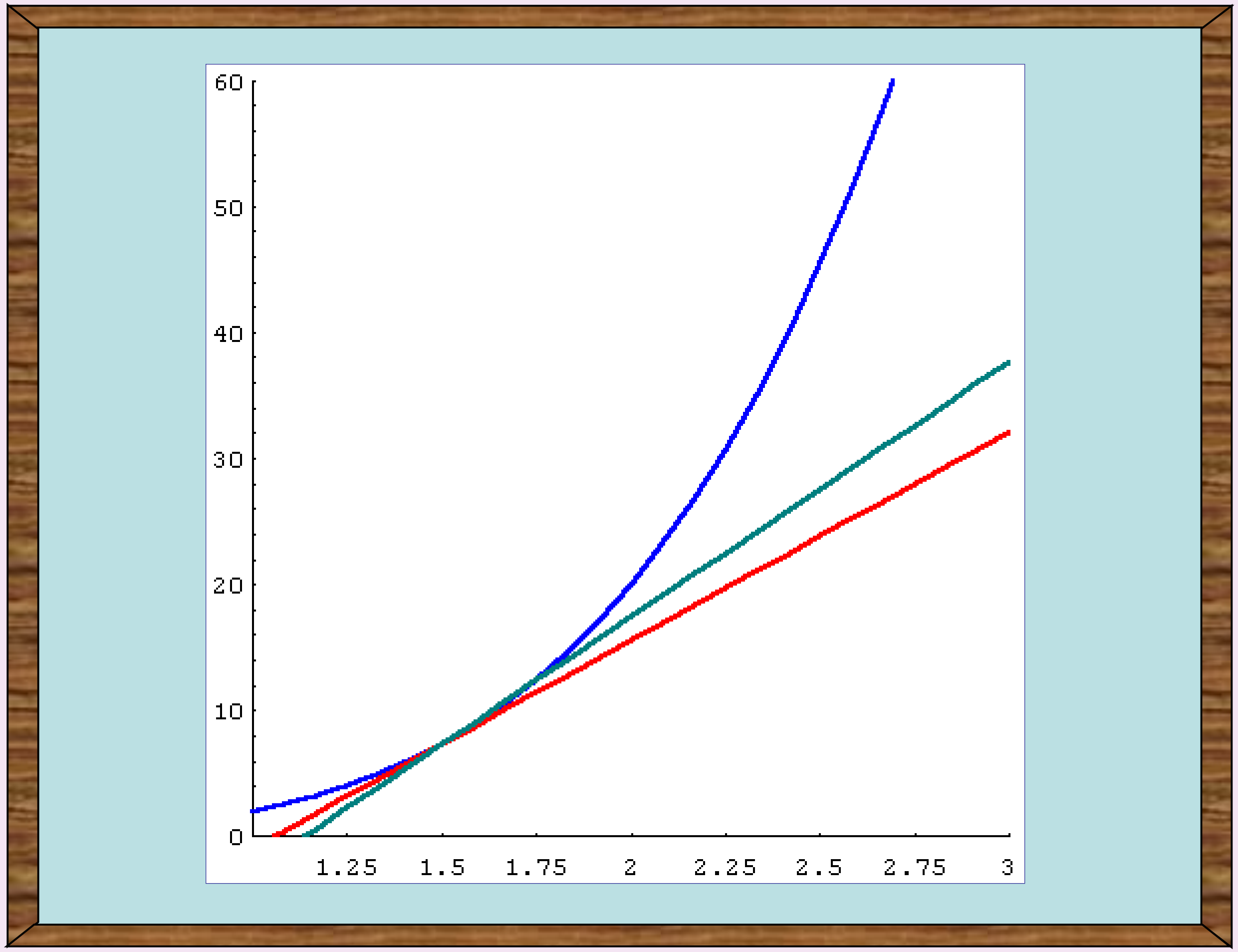
60
50
40
30
20
10
0
1.25
1.5
1.75
2
2.25
2.5
2.75
3



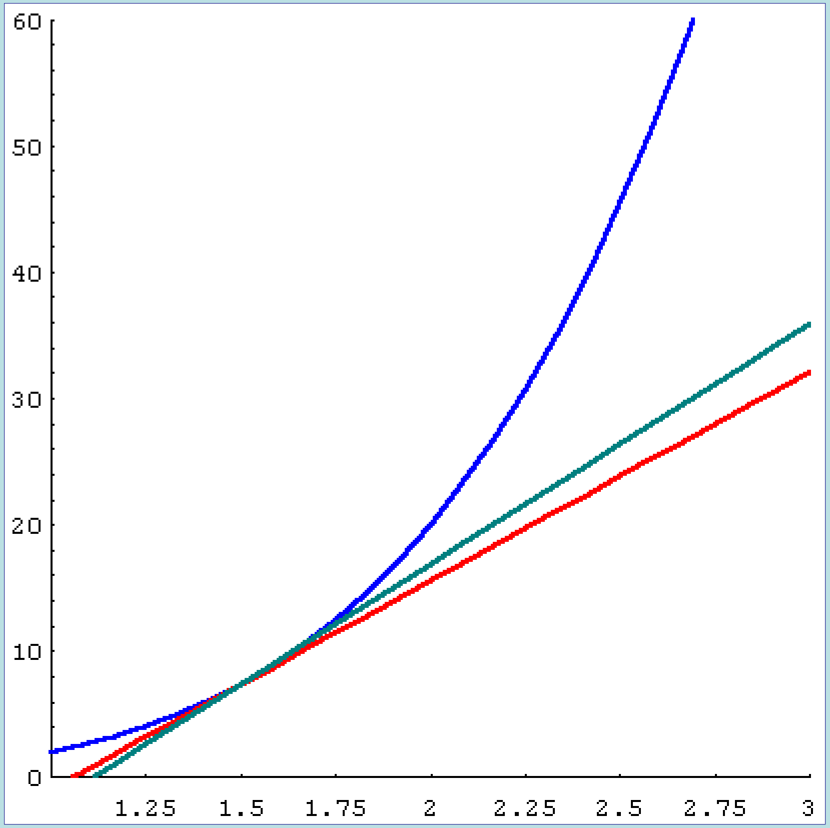
60
50
40
30
20
10
0
1.25
1.5
1.75
2
2.25
2.5
2.75
3


60
50
40
30
20
10
0
1.25
1.5
1.75
2
2.25
2.5
2.75
3

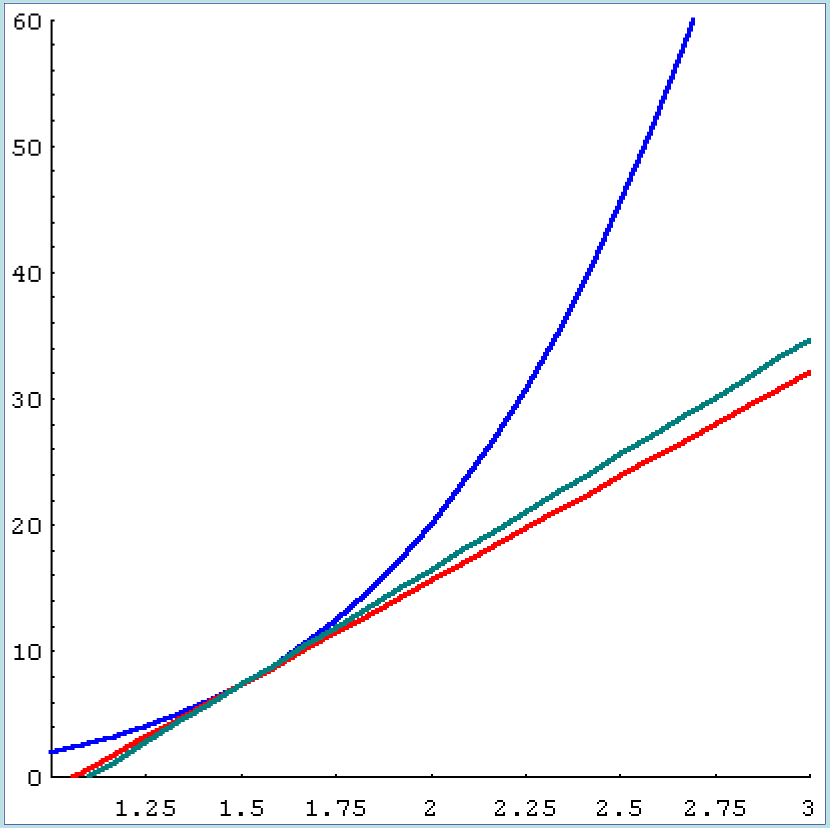

60
50
40
30
20
10
0
1.25
1.5
1.75
2
2.25
2.5
2.75
3

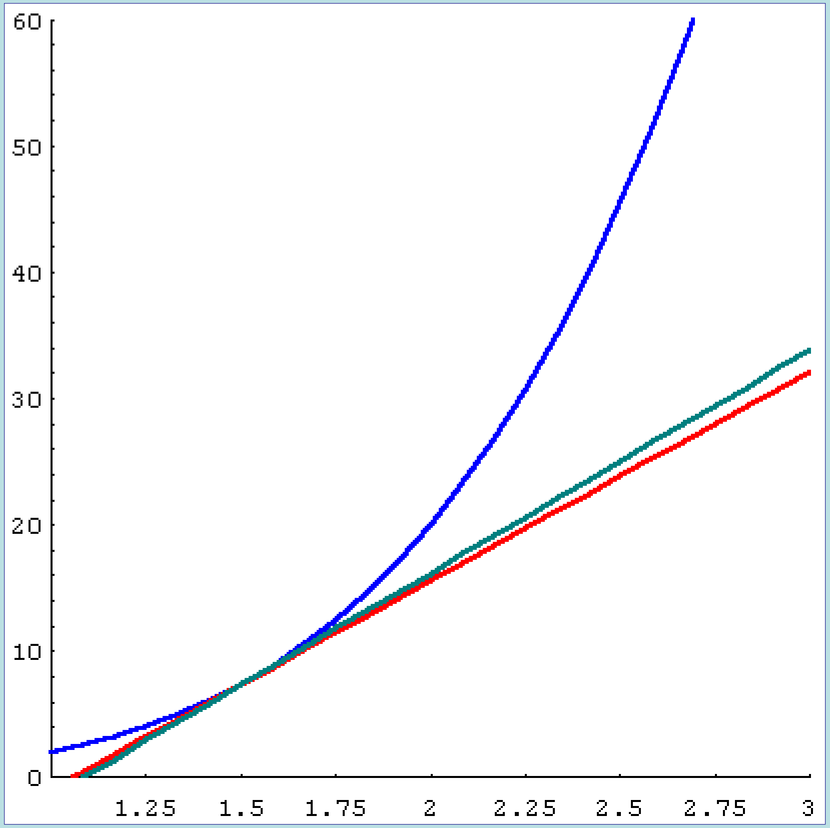


60
50
40
30
20
10
0
1.25
1.5
1.75
2
2.25
2.5
2.75
3

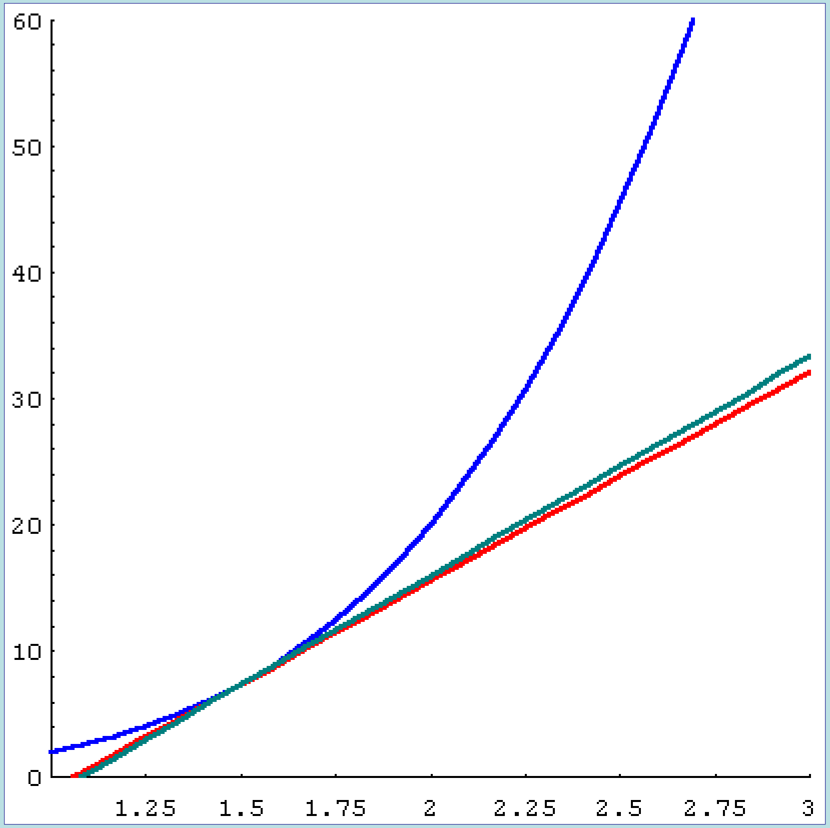


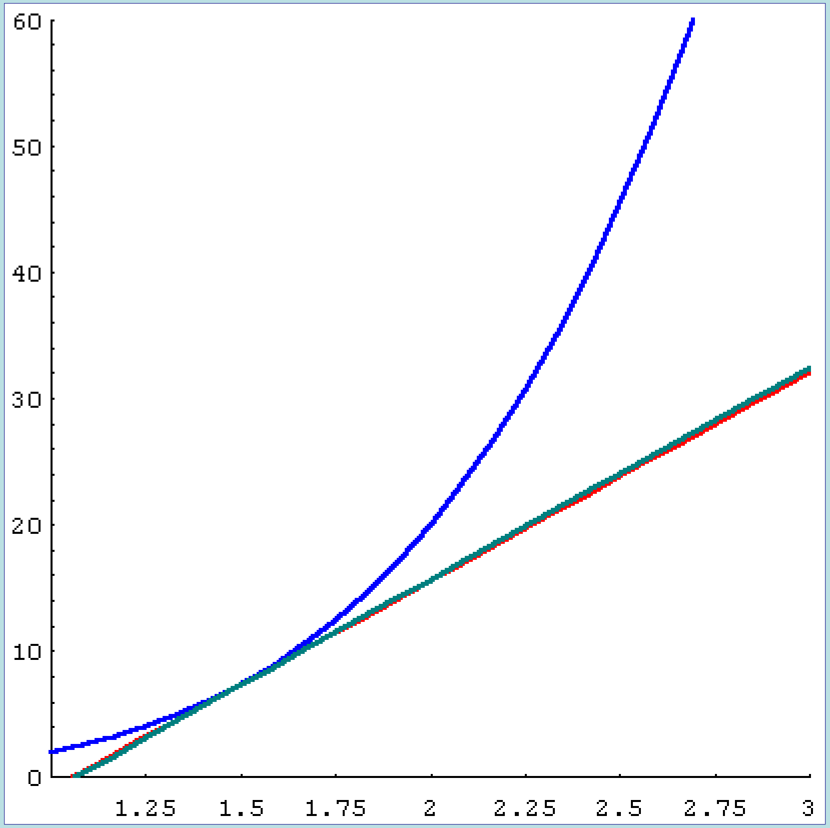
60
50
40
30
20
10
0
1.25
1.5
1.75
2
2.25
2.5
2.75
3


60
50
40
30
20
10
0
1.25
1.5
1.75
2
2.25
2.5
2.75
3



60
50
40
30
20
10
0
1.25
1.5
1.75
2
2.25
2.5
2.75
3


60
50
40
30
20
10
0
1.25
1.5
1.75
2
2.25
2.5
2.75
3



60
50
40
30
20
10
0
1.25
1.5
1.75
2
2.25
2.5
2.75
3