第一章　作业 1.2 解答

一．填空题（每空 5 分，本大题满分 25 分）

1．曲线 $y=\dfrac{x}{x+1}\cos\dfrac{1}{x}$ 有水平渐近线 $y=$___1___和铅直渐近线 $x=$___-1___.

2．设 $f(x)=(1+2x)^{\frac{1}{x}}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\underline{e^2}$.

3. 曲线 $y=\sqrt{x^2+x}-x$ 有水平渐近线__$\underline{\dfrac{1}{2}}$______.

4. 设 $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$___2______

二．解答下列各题（每小题 10 分，本大题满分 60 分）

1．(1) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-2\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}=\dfrac{2}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1+x}{x})^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{1}{x})^x]^2=e^2$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x^2-5x+6}$;

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x^2-5x+6}\cdot\dfrac{\sqrt{2x+5}+3}{\sqrt{2x+5}+3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{(x-3)(\sqrt{2x+5}+3)}=-\dfrac{1}{3}$.

3. （1）解： $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+2)^{90}(x+3)^{10}}{(2x+1)^{100}}=\dfrac{3^{90}}{2^{100}}$

（2） 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=4$，求 c

解：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+\frac{c}{x})^x}{(1-\frac{c}{x})^x}=\dfrac{e^c}{e^{-c}}=e^{2c}=4$ ，所以 $c=\ln 2$

4.（1）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}$

解：$5<\sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}<5\sqrt[n]{3}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}5\sqrt[n]{3}=\lim\limits_{n\to\infty}5(3^{\frac{1}{n}})=5\cdot 3^0=5$，

因此由夹逼法知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}=5$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}]$

解：记$x_n:=n[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}]$，则

$$x_n>y_n:=n[\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+1)}]$$

$$=n[(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})+(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3})+\cdots+(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1})]=n(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1})\ ,$$

$$x_n<z_n:=n[\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2n}]$$

$$=n[(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n})]=\frac{1}{2}\ ,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}n(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1})=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1}-\frac{n}{2n+1})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}，\ \lim_{n\to\infty}z_n=\frac{1}{2}\ ,$$

因此由夹逼法知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$，即原式$=\frac{1}{2}$.

5. 求$\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})$

解：原式$=\lim\limits_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-1$

6.已知$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3+ax+b}{x^2-4}=4,$求常数$a,b$的值.

解：因为$\lim\limits_{x\to2}(x^2-4)=0$，又$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3+ax+b}{x^2-4}=4,$

所以 $\lim\limits_{x\to2}x^3+ax+b=8+2a+b=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3+ax+b}{x^2-4}(x^2-4)=4\times0=0$

又$4=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3+ax+b}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x^2+2x+a+4)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{12+a}{4}$

故$a=4,\quad b=-16$

三.证明题：（15 分）

1. 用$\varepsilon-\delta$定义证明：$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$

证明：$\forall\varepsilon>0$,要使$|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2|=|2x+1|=2|x+\dfrac{1}{2}|<\varepsilon$,只要$|x+\dfrac{1}{2}|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

综上$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$,当$0<|x+\dfrac{1}{2}|<\delta$时,有$|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2|=|2x+1|=2|x+\dfrac{1}{2}|<\varepsilon$,

所以由定义得 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$

2.证明：$\lim\limits_{x\to0^+}x[\dfrac{1}{x}]=1$

证明：$\because\quad \dfrac{1}{x}-1<[\dfrac{1}{x}]<\dfrac{1}{x}+1$

$\therefore\quad 1-x<x[\dfrac{1}{x}]<1+x\qquad(x>0)$

又 $\lim\limits_{x\to0^+}1-x=\lim\limits_{x\to0^+}1+x=1$

故 $\lim\limits_{x\to0^+}x[\dfrac{1}{x}]=1$

3. 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

【提示：令$a_n=\sqrt[n]{n}-1\geq0$，并利用二项公式

$(1+a_n)^n=1+na_n+\dfrac{n(n-1)}{2}a_n^2+\cdots+na_n^{n-1}+a_n^n$.】

证明：令$a_n=\sqrt[n]{n}-1\geq0$，则

$$n=(1+a_n)^n=1+na_n+\frac{n(n-1)}{2}a_n^2+\cdots+na_n^{n-1}+a_n^n\geq1+\frac{n(n-1)}{2}a_n^2,$$

可知$a_n\leq\sqrt{\dfrac{2}{n}}$. 我们知道$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{2}{n}}=0$，因此由夹逼法知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.