作业 3.1

一. 设 $a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$，证明多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在区间 $(0,\ 1)$ 内至少有一个零点. (10 分)

二. 证明恒等式： $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\ (-1\le x\le 1)$. (10 分)

三. 已知函数 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$， $f(1)=0$，证明：在区间 $(0,\ 1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$. (10 分)

四. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，在 $(a,\ b)$ 内可导，当 $x\in[a,\ b]$ 时， $a<f(x)<b$；当 $x\in(a,\ b)$ 时， $f'(x)\ne 1$. 求证：方程 $f(x)=x$ 在 $(a,\ b)$ 内有且只有一个根. (10 分)

五. 设$b>a>0$，证明：$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$.（10 分）

六. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是可导函数，且 $|f'(x)|<g'(x)$ ，证明：当 $x>a$ 时，$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$.（10 分）

七. 求下列极限：（15 分）

（1）$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$； (2) $\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x})$； （3） $\lim\limits_{x\to0^+}(\tan x)^{\frac{1}{\ln x}}$；

八．验证极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$存在，但不能用洛必达法则得出. （5 分）

九．求函数 $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}+\arctan\frac{1}{x-1}$ 的间断点，并判别其类型.（10 分）

十．填空:（10 分）

(1) 设 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$, 则 $f'(x)$ 的零点个数为____3____.

(2) 函数 $y=x^2$ 在闭区间 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理，则定理中的 $\xi=$__

[$\frac{a+b}{2}$]