广州大学 2017-2018 学年第一学期考试卷

高等数学Ⅰ1 参考解答与评分标准

一．填空题（每小题 3 分，本大题满分 30 分）

1. 曲线 $y=\dfrac{x}{x+1}\cos\dfrac{1}{x}$ 有铅直渐近线 $\underline{x=-1}$

2. 已知当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 与 ax^3 是等价无穷小，则常数 $a=$ $\underline{1/6}$

3. 设 $f(x)=\left(1+2x\right)^{\frac{1}{x}}$，若定义 $f(0)=$ $\underline{e^2}$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

4. 曲线 $y=e^{2x}$ 上点 $(0,\ 1)$ 处的切线方程为 $\underline{2x-y+1=0}$

5. 设 $f(x)=(x+9)^5$，求 $f'''(1)=$ $\underline{6000}$

6. 设 $y=xe^x$，则 y 的 n 阶导数 $y^{(n)}=$ $\underline{(x+n)e^x}$

7. 曲线 $y=xe^{-x}$ 的凹区间为 $\underline{[2,+\infty)}$

8. 设 $1-\cos x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f^{(10)}(x)=$ $\underline{-\sin x}$

9. 设 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sin t^3\,\mathrm{d}t$，则 $f(1)=$ $\underline{0}$，$f'(x)=$ $\underline{\sin x^3}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$ $\underline{\pi/4}$

二．解答下列各题（每小题 6 分，本大题满分 18 分）

1．求函数 $y=\tan^2 x\cdot\ln(3x)$ 的微分 dy.

解：$y'=2\tan x\cdot\sec^2 x\cdot\ln(3x)+\dfrac{3\tan^2 x}{3x}$ ……………………..………….3 分

$=2\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}\cdot\ln(3x)+\dfrac{\tan^2 x}{x}$ ……………….…...……...…….4 分

$dy=\left(2\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}\cdot\ln(3x)+\dfrac{\tan^2 x}{x}\right)dx$ …………………..…...……….6 分

2．已知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+ax+b}{x^2-4}=4$, 求常数 a,b 的值.

解：因为 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$，又 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+ax+b}{x^2-4}=4$, ------1 分

所以 $\lim\limits_{x\to 2} x^3+ax+b=8+2a+b$ ------2 分

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+ax+b}{x^2-4}(x^2-4)=4\times 0=0$ ------4 分

又 $4=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+ax+b}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2+2x+a+4)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{12+a}{4}$ ------5 分

故 $a=4$，$b=-16$ ------6 分

3．已知 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，求二阶导数 $\dfrac{d^2 y}{d x^2}$.（6 分）

解：$\dfrac{d y}{d x}=\dfrac{(t-\arctan t)'}{[\ln(1+t^2)]'}=\dfrac{1-\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}$ ------3 分

$\dfrac{d^2 y}{d x^2}=\dfrac{(\dfrac{t}{2})'}{[\ln(1+t^2)]'}=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1+t^2}{4t}$ ------6 分

三．计算下列极限（每小题 6 分，本大题满分 12 分）

1．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}$；

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x\ (1-\cos x)}{\sin x^3}$ ------3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\dfrac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$ ------6 分

2．$\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x})$；

解：原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$ ------1 分

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{x}-1}{\ln x+1-\dfrac{1}{x}}$ ------3 分

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=-\dfrac{1}{2}$ ------6 分

四．计算下列积分（每小题 5 分，本大题满分 15 分）

1． $\int x\sin 2xdx$.

解：原式 $=-\dfrac{1}{2}\int xd\cos 2x=-\dfrac{1}{2}\left(x\cos 2x-\int\cos 2x\cdot dx\right)$ ------2 分

$=-\dfrac{1}{2}\left(x\cos 2x-\dfrac{1}{2}\int\cos 2xd(2x)\right)$ ------4 分

$=-\dfrac{1}{2}x\cos 2x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$ ------5 分

2． $\int\dfrac{1}{x(1+x^4)}\mathrm{d}x$；

解：原式 $=\int\dfrac{(1+x^4)-x^4}{x(1+x^4)}\mathrm{d}x$ ------1 分

$=\int(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^3}{1+x^4})\mathrm{d}x$ ------3 分

$=\ln|x|-\dfrac{1}{4}\ln(1+x^4)+C$ ------5 分

3． $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$；

解：原式 $=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}$ ------2 分

$=[\arctan(x+1)]_{-\infty}^{+\infty}=\pi$. ------5 分

五．（本题满分 10 分）

求函数 $y=(x-1)(x+1)^3$ 的单调区间和极值.

解： $y'=(x+1)^3+3(x-1)(x+1)^2=(x+1)^2(4x-2)$ ------2 分

令 $y'=0$，得驻点 $x_1=-1$ 和 $x_2=\dfrac{1}{2}$ ------4 分

当 $x<\dfrac{1}{2}$ 且 $x\neq-1$ 时， $y'<0$，所以 $(-\infty,\ \dfrac{1}{2}]$ 为单调减少区间；------6 分

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时， $y'>0$，所以 $[\dfrac{1}{2},\ +\infty)$ 为单调增加区间；------8 分

显然 $y(\dfrac{1}{2})=-\dfrac{27}{16}$ 为极小值. ------10 分

六．设 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，证明 $x=0$是$f(x)$的跳跃间断点.（**本题满分 5 分**）

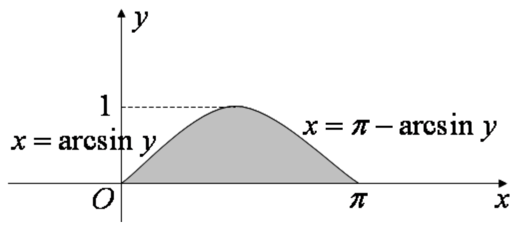
证明：因为 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}{1+\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}=\dfrac{1-0}{1+0}=1$------2 分

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$ ------4 分

显然 $f(0^+)\neq f(0^-)$，所以 $x=0$是$f(x)$的跳跃间断点.------5 分

七．计算曲线 $y=\sin x$（$0\le x\le\pi$）与 x 轴所围成的图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转所得旋转体的体积. （**本题满分 10 分**）

解：绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为



$V_x=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}\,x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}\,x$------3 分

$=2\pi\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi^2}{2}$.------5 分

绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为

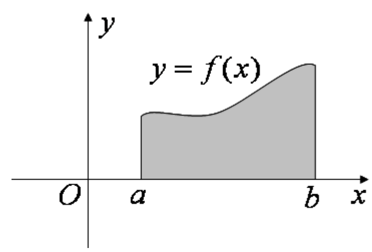
$V_y=\pi\int_0^1[(\pi-\arcsin y)^2-(\arcsin y)^2]\,\mathrm{d}\,y$------8 分

$=\pi\int_0^1(\pi^2-2\pi\arcsin y)\,\mathrm{d}\,y$

$=\pi^3-2\pi^2[y\arcsin y+\sqrt{1-y^2}\,]_0^1=2\pi^2$. ------10 分

【注】 如图示，平面图形$\{(x,\ y)\,|\,0\le y\le f(x),\ a\le x\le b\}$（$a\ge 0$）绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为

$V=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}\,x$



根据这一公式，本题绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为

$V_y=2\pi\int_0^{\pi}x\sin x\,\mathrm{d}\,x$ ------8 分

$=2\pi[-x\cos x+\sin x]_0^{\pi}=2\pi^2$ ------10 分