闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数有着十分优良的性质，这些性质在函数的理论分析、研究中有着重大的价值，起着十分重要的作用。下面我们就不加证明地给出这些结论，好在这些结论在几何意义是比较明显的。

一、最大值和最小值定理

定义: 对于在区间I上有定义的函数$f(x)$,
如果有$x_0 \in I$, 使得对于任一$x \in I$都有

$$f(x) \le f(x_0) \qquad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称$f(x_0)$是函数$f(x)$在区间I上的最大(小)值.

例如, $y = 1 + \sin x$, 在$[0,2\pi]$上, $y_{\max} = 2$, $y_{\min} = 0$;

$y = \operatorname{sgn} x$, 在$(-\infty,+\infty)$上, $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = -1$;

在$(0,+\infty)$上, $y_{\max} = y_{\min} = 1$.

定理1（最大值和最小值定理） 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

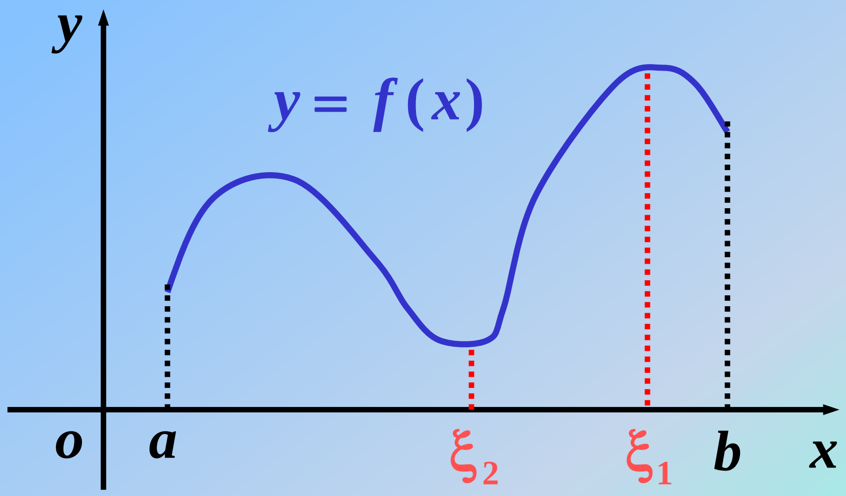
若 $f(x) \in C[a,b]$,

则 $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a,b]$,

使得 $\forall x \in [a,b]$,

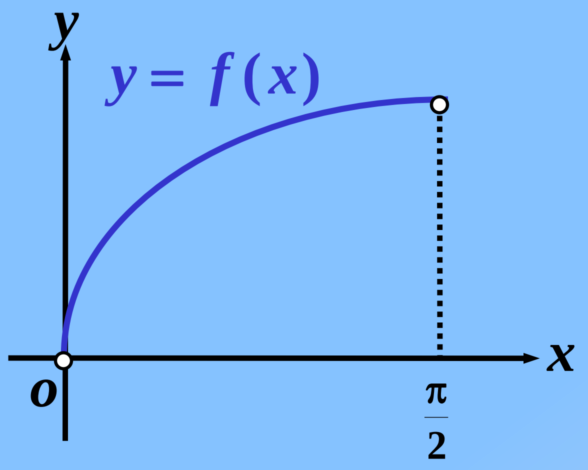
有 $f(\xi_1) \geq f(x)$,

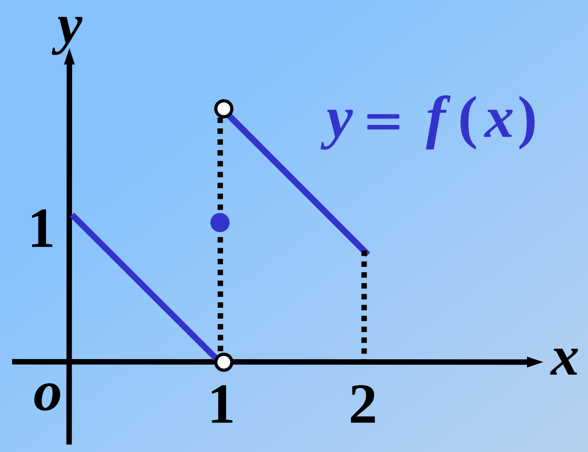
$f(\xi_2) \leq f(x)$.



注意: 1.若区间是开区间，定理不一定成立;

2.若区间内有间断点，定理不一定成立.





定理2（有界性定理） 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

证 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，$\forall x \in [a,b]$,

有 $m \le f(x) \le M$， 取 $K = \max\{|m|, |M|\}$,

则有 $|f(x)| \le K$. $\therefore$ 函数$f(x)$在$[a,b]$上有界.

二、介值定理

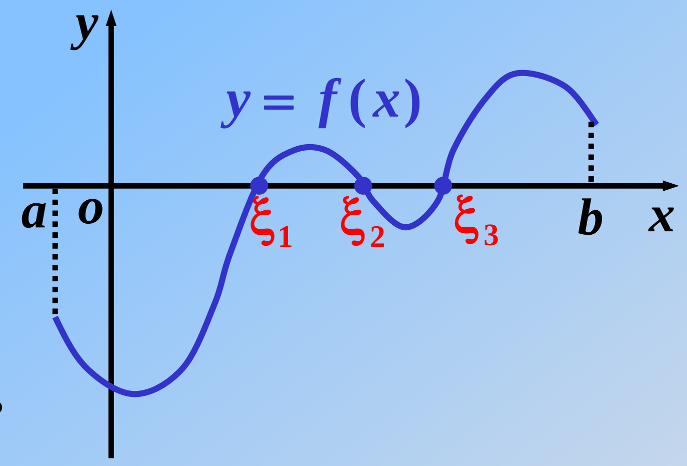
定义: 如果 x_0 使 $f(x_0)=0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理 3（零点定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)\cdot f(b)<0$）, 那末在开区间 (a,b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点, 即至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使 $f(\xi)=0$.

即方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少存在一个实根 .

几何解释:

连续曲线弧 $y = f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧,则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.



定理 4(介值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a) = A \quad 及 \quad f(b) = B,$$

那末，对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi) = C \quad (a < \xi < b)$.

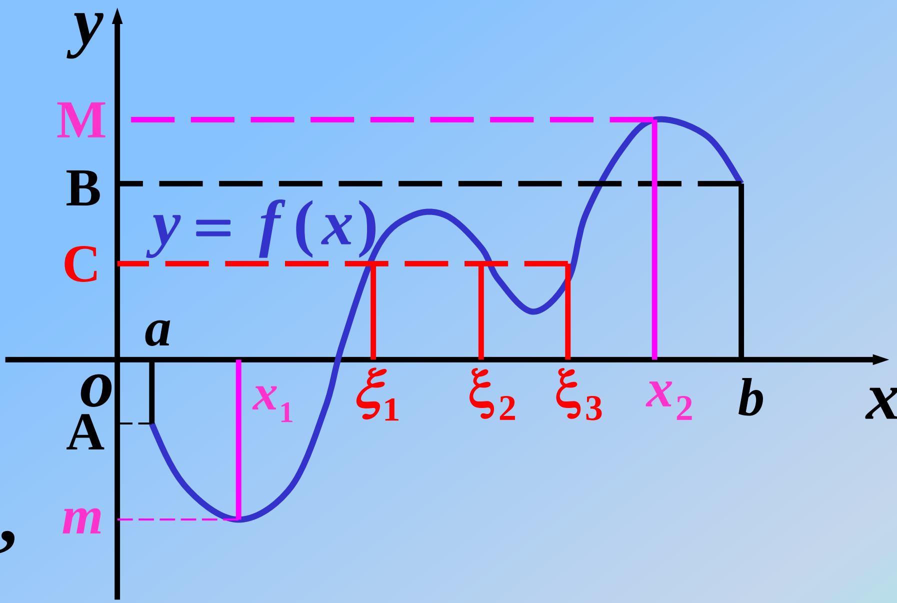
证 设$\varphi(x)=f(x)-C$,

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续,

且$\varphi(a)=f(a)-C$

$=A-C$,

$\varphi(b)=f(b)-C=B-C$,



$\therefore \varphi(a)\cdot\varphi(b)<0$, 由零点定理, $\exists\,\xi\in(a,b)$,使

$\varphi(\xi)=0$, 即 $\varphi(\xi)=f(\xi)-C=0$, $\therefore f(\xi)=C$.

几何解释: 连续曲线弧$y=f(x)$与水平直线$y=C$至少有一个交点.

例1. 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间$(0,1)$ 内至少有一个根 .

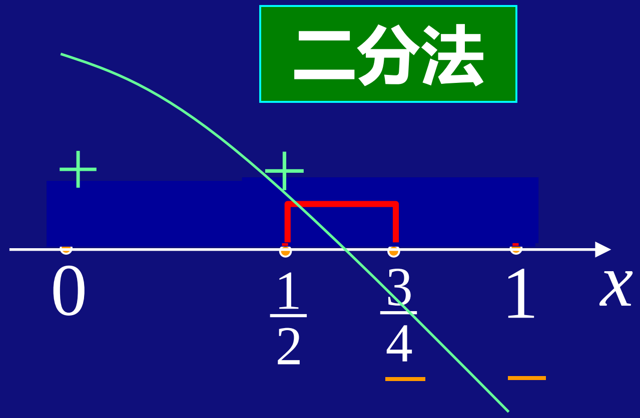
证: 显然 $f(x)=x^3-4x^2+1\in C[0,1]$, 又

$$f(0)=1>0,\quad f(1)=-2<0$$

故据零点定理, 至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使 $f(\xi)=0$, 即

$$\xi^3-4\xi^2+1=0$$

说明:



取 $[0,1]$的中点 $x=\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}>0$,

则$(\frac{1}{2},1)$ 内必有方程的根 ;

取$[\frac{1}{2},1]$ 的中点 $x=\frac{3}{4}$, $f(\frac{3}{4})<0$,

则 $(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ 内必有方程的根 ; $\cdots$ 可用此法求近似根.

例2 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(a)<a$, $f(b)>b$. 证明$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

证 令 $F(x)=f(x)-x$，则$F(x)$在$[a,b]$上连续，

而 $F(a)=f(a)-a<0$,

$F(b)=f(b)-b>0$,　　由零点定理，

$\exists\xi\in(a,b)$，使 $F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$,

即 $f(\xi)=\xi$.

例3 设$f(x)$在$[0,2a]$上连续，且$f(0)=f(2a)$

证明$\exists\xi\in[0,a)$使$f(\xi)=f(\xi+a)$

证 记$F(x)=f(x)-f(x+a)$则

$F(x)$在$[0,a]$上连续($[0,a]$即$F(x)$的定义域)

且$F(0)=f(0)-f(a)$

$$F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$$

若$f(0)=f(a)$ 则$\xi=0$即为所求

若$f(0)\neq f(a)$ 则$F(0)\cdot F(a)<0$

由介值定理知 $\exists\xi\in(0,a)$使$F(\xi)=0$

即$f(\xi)=f(\xi+a)$

总之 $\exists\xi\in[0,a)$使$f(\xi)=f(\xi+a)$

注

①方程$f(x)=0$的根 ⟺ 函数$f(x)$的零点

②有关闭区间上连续函数命题的证明方法

1^0直接法：先利用最值定理，再利用介值定理

2^0间接法（辅助函数法）：先作辅助函数，
再利用零点定理

辅助函数的作法

（1）将结论中的ξ(或x_0或c)改写成x

（2）移项使右边为0，令左边的式子为$F(x)$
则$F(x)$即为所求

区间一般在题设中或要证明的结论中已经给出，余下只须验证$F(x)$在所讨论的区间上连续，再比较一下两个端点处的函数值的符号，或指出要证的值介于$F(x)$在所论闭区间上的最大值与最小值之间。

三、小结

四个定理

有界性定理;最值定理;介值定理;根的存在性定理.

注意　1．闭区间；　2．连续函数.
这两点不满足上述定理不一定成立.

解题思路

1. **直接法:**先利用最值定理,再利用介值定理;

2. **辅助函数法:**先作辅助函数$F(x)$,再利用零点定理;

思考题

下述命题是否正确？

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在 (a,b) 内连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内必有零点.

思考题解答

不正确.

例函数 $f(x)=\begin{cases} e, & 0<x\le 1 \\ -2, & x=0 \end{cases}$

$f(x)$在$(0,1)$内连续, $f(0)\cdot(1)=-2e<0.$

但 $f(x)$在$(0,1)$内无零点.