

第一章 作业 1

一. 填空题 (每空 5 分, 本大题满分 40 分)

1. 设 $f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ 2x-1, & x < 1 \end{cases}$, 则 $f(f(e)) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 则 $f(f(x))$ 的定义域为 $\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq \underline{\hspace{2cm}}\}$,

表达式为 $f(f(x)) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则 $f(\sqrt{1-x^2})$ 的定义域为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 $f(x) = (1 - \frac{1}{x})^x$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 设 $f(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

二. 解答下列各题 (每小题 10 分, 本大题满分 30 分)

1. 求 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1})$; (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2}$

2. 求 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{2x+3}{2x+1})^{3x+1}$; (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x^2)^{\frac{1}{\ln x}}$

3. 求 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \cdots (1 - \frac{1}{n^2})$; (2) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = 4$, 求 c

三. (每小题 10 分, 本大题满分 30 分)

1. 设 $f(x) = 0$, 且 $x \neq 0$ 时 $af(x) + bf(\frac{1}{x}) = \frac{c}{x}$, 其中 a, b, c 为常数, 且 $|a| \neq |b|$,

证明: $f(x)$ 为奇函数.

2. 设 $f(x) + f(\frac{x-1}{x}) = 2x$, 其中 $x \neq 0, x \neq 1$. 求 $f(x)$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$, $\varphi(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.