作业 3.2

- 一. 求下列函数的单调区间和极值: (20分)
- (1) $y = (x-1)(x+1)^3$;

(2) 求函数 $f(x) = e^x \cos x$ 的极值.

二. 试问 a 为何值时,函数 $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值?它是极大值还是极小值?并求此极值. (10 分)

三. 求函数 $y = x^4 - 8x^2 + 2$ 在闭区间[-1, 3]上的最大值和最小值. (10 分)

四. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆如下图. 截面的面积为 5 m^2 . 问底宽x为多少时才能使截面的周长最小,从而使建造时所用的材料最省?(10 分)

五. 求 $\frac{1}{1+x^2}$ 带有佩亚诺型余项的 8 阶麦克劳林公式,并计算 $(\arctan x)^{(9)}|_{x=0}$. (10 分)

六. 设
$$f(x) = \ln(1+x^2) - x^2$$
, 求 $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4}$ 及 $f^{(10)}(0)$. (10分)

七. 证明: 当x > 0时, $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$. (10 分)

八. 利用泰勒公式求下列极限: (10分)

(1)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{x^2[x + \ln(1-x)]};$$

(2)
$$\lim_{x\to +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt[4]{x^4 - 2x^3}).$$

九. 试确定常数 a 和 b ,使 $f(x) = x - (a + b\cos x)\sin x$ 为当 $x \to 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小. (10 分)