院、系领导 审批并签名		A 卷

广州大学 2016-2017 学年第一学期考试卷参考答案

课 程：高等数学Ⅰ1（80 学时）　　　　　　考 试 形 式：闭卷考试

学 院 :____________ 专 业 班 级 :__________ 学 号 :____________ 姓 名:___________

题 次	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总 分	评卷人
分 数	15	15	21	10	12	6	10	6	5	100	
得 分											

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=$ 2 .

（2）$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=$ 1/e .

（3）已知 $y=\sin x$，则 $\mathrm{d}y=$ $\cos x\,\mathrm{d}x$.

（4）$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+x)\cos x\,\mathrm{d}x=$ 2 .

（5）$\int_{0}^{+\infty}e^{-x}\,\mathrm{d}x=$ 1 .

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

（6）已知函数

$$f(x)=\frac{\sin x}{x},\ g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases},\ h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases};$$

$a=\lim\limits_{x\to 0}f(x),\ b=\lim\limits_{x\to 0}g(x),\ c=\lim\limits_{x\to 0}h(x)$，则（ A ）.

A. $a=b=c$； B. $a=b\neq c$； C. $a\neq b\neq c$； D. $a\neq b=c$.

（7）已知 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则下列说法**不正确**的是（ B ）.

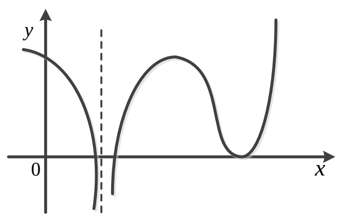
A. $f(x)$ 在 x_0 处的左右极限都存在； B. $f(x)$ 在 x_0 处可导；

C. $f(x)$ 在 x_0 处有定义； D. $f(x)$ 在 x_0 处左、右连续.

（8）已知 $f(1)=3,\ f'(1)=2,\ f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数且可导，则 $[f^{-1}(x)]'_{x=3}=$（ B ）.

A. 2； B. 1/2； C. −1/2； D. −2.

（9）设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导数如下图所示，则（ B ）.



A. 函数 $y=f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点；

B. 函数 $y=f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点；

C. 函数 $y=f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点；

D. 函数 $y=f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

（10）已知函数 $f(x)$ 可导，则以下结论**正确**的是（ C ）.

A. $\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)$； B. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)=f(x)$；

C. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=f(x)$； D. $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)$.

三、解答下列各题（每小题 7 分，共 21 分）

（11）求曲线 $y=(x+1)e^{1-x}$ 上点 $(1,\ 2)$ 处的切线方程.

解：

$$y'=e^{1-x}+(x+1)e^{1-x}(-1)=-xe^{1-x}$$，------4 分

切线斜率为

$$k=y'(1)=-1$$，------5 分

所以切线方程为

$$y-2=-(x-1)$$，即 $x+y-3=0$. ------7 分

（12）求由参数方程 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ 所表示的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数.

解： $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{3a\sin^2 t\cdot\cos t}{3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)}=-\tan t$，------4 分

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$ ------5 分

$$=\frac{-\sec^2 t}{3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)}=\frac{\sec^4 t}{3a\sin t}.$$ ------7 分

（13）计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 3x}{(1-\cos x)\ln(1+2x)}$.

解： 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\ln(1+2x)\sim 2x$，故

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 3x}{x^3}$ ------2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-3\cos 3x}{3x^2}$ ------5 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{2x}=\dfrac{9}{2}$. ------7 分

四、计算下列不定积分（每小题 5 分，共 10 分）

（14）$\int \frac{1}{3+2x} \mathrm{d}x$.

解： 原式$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}\,\mathrm{d}(3+2x)$------3 分

$=\frac{1}{2}\ln|3+2x|+C$. ------5 分

（15）$\int x\cos x \,\mathrm{d}x$.

解： 原式$=\int x\,\mathrm{d}\sin x$------1 分

$=x\sin x-\int \sin x\,\mathrm{d}x$------3 分

$=x\sin x+\cos x+C$. ------5 分

五、（本题满分 12 分）

（16）求函数 $f(x)=x-\frac{3}{2}x^{2/3}$ 的单调增减区间和极值.

解： $f'(x)=1-x^{-1/3}$，令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=1$，而在 $x=0$ 处 $f(x)$ 不可导，因此，函数只可能在这两点取得极值. ------5 分

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 0	↘	极小值$-\frac{1}{2}$	↗

由上表可见：函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$, $(1,+\infty)$ 内单调增加，在区间 $(0,1)$ 单调减少.

在点 $x=0$ 处有极大值 $f(0)=0$，在点 $x=1$ 处有极小值 $f(1)=-\frac{1}{2}$. ------12 分

六、（本题满分 6 分）

（17）溶液自深 18cm 顶直径 12cm 的圆锥形漏斗中漏入一直径为 10cm 的圆柱形筒中，开始时漏斗中盛满了溶液. 已知当溶液在漏斗中深为 12cm 时，其表面下降的速率为 1cm/min. 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少？

解： 设时刻 t 漏斗中溶液的高度为 $h(t)$，而筒中溶液的高度为 $H(t)$，则

$$216\pi - \frac{\pi h^3}{27} = 25\pi H \text{，} \quad \text{------2 分}$$

两边对 t 求导，得

$$-\frac{\pi h^2}{9}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 25\pi\cdot\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \text{，} \quad \text{------4 分}$$

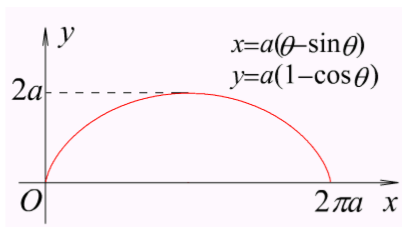
将 $h=12\,(\mathrm{cm})$，$\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-1\,(\mathrm{cm/min})$ 代入，得所求圆柱形筒中溶液表面上升的速率为

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{16}{25} = 0.64\,(\mathrm{cm/min})\,. \quad \text{------6 分}$$

七、（本题满分 10 分）

（18）求由摆线 $x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$ 的一拱（$0\le\theta\le 2\pi$）与 x 轴所围成的图形的面积.

解： 所求面积为



$$A = \int_0^{2\pi a} y\,\mathrm{d}x \quad \text{------3 分}$$

$$= \int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)\,\mathrm{d}[a(\theta-\sin\theta)]$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta \quad \text{------5 分}$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi a^2 + 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi a^2 + 4a^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 3\pi a^2\,. \quad \text{------10 分}$$

八、（本题满分 6 分）

（19）证明方程$x^5-5x+1=0$有且仅有一个小于 1 的正实根.

证：设$f(x)=x^5-5x+1$，则$f(x)$在$[0,\ 1]$上连续，且

$$f(0)=1,\ \ f(1)=-3,$$

由介值定理，存在$x_0\in(0,\ 1)$，使$f(x_0)=0$，即x_0为方程的根. ------3 分

设另有$x_1\in(0,\ 1),\ x_1\neq x_0$，使$f(x_1)=0$．因为$f(x)$在$x_0$，$x_1$之间满足罗尔定理的条件，所以至少存在一点$\xi$（在$x_0$，$x_1$之间），使得$f'(\xi)=0$．但

$$f'(x)=5(x^4-1)<0\ (x\in(0,\ 1)),$$

导致矛盾，故方程有且仅有一个小于 1 的正实根x_0. ------6 分

九、（本题满分 5 分）

（20）设函数$f(x)$在[0，1]上连续且递增，证明：对于任意$k\in(0,\ 1)$，

$$\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x\le k\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证：

$$\begin{aligned}&\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x-k\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\\ =&\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x-k\left(\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x+\int_k^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ =&(1-k)\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x-k\int_k^1 f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$ ------2 分

因函数$f(x)$在[0，1]上递增，所以

$$\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_0^k f(k)\,\mathrm{d}x=kf(k),$$

$$\int_k^1 f(x)\,\mathrm{d}x\ge\int_k^1 f(k)\,\mathrm{d}x=(1-k)f(k),$$

于是

$$(1-k)\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x-k\int_k^1 f(x)\,\mathrm{d}x\le(1-k)kf(k)-k(1-k)f(k)=0,$$

即

$$\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x-k\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\le 0,$$

移项即得所证. ------5 分