函数的单调性与极值

一、函数的单调性

二、函数的极值及其求法

三、最大值最小值问题

一、函数的单调性

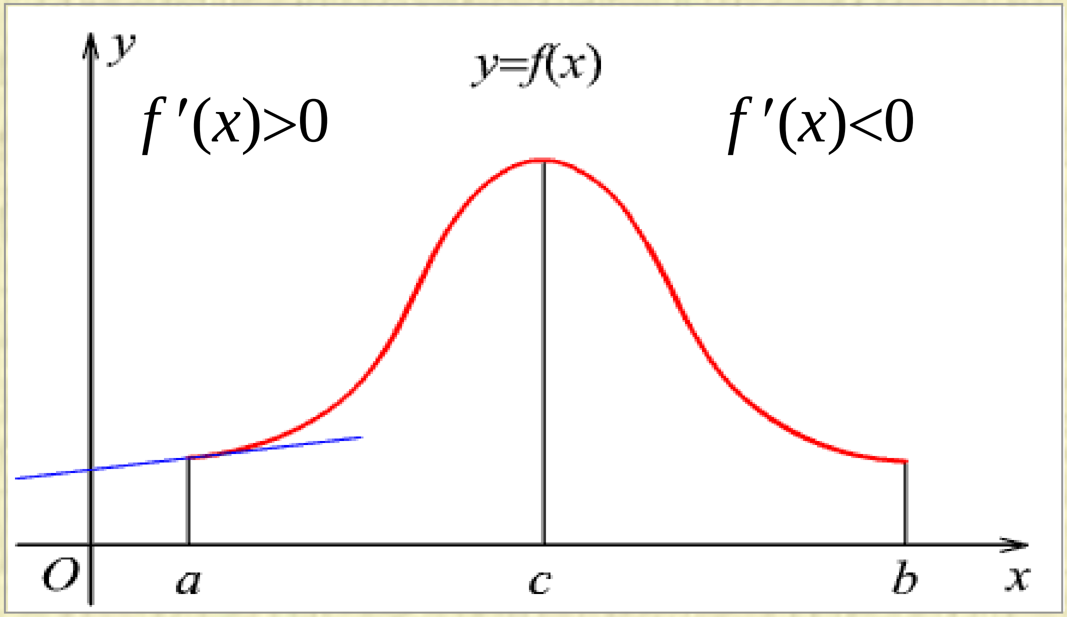
- 观察与思考

  函数的单调性与导数的符号有什么关系?

- 观察结果

  函数单调增加时导数大于零,

  函数单调减少时导数小于零.

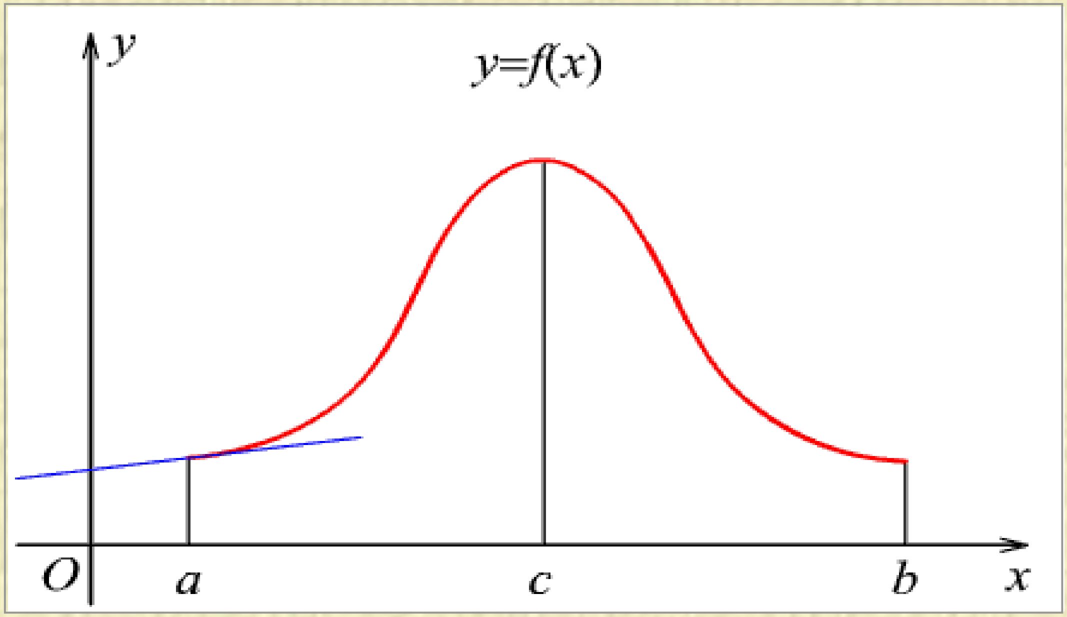


❖定理1(函数单调性的判定法)

设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导.

(1)如果在(a, b)内$f'(x)>0$，则$f(x)$在$[a, b]$上单调增加;

(2)如果在(a, b)内$f'(x)<0$，则$f(x)$在$[a, b]$上单调减少.



❖定理1(函数单调性的判定法)

设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导.

(1)如果在(a, b)内$f'(x)>0$，则$f(x)$在$[a, b]$上单调增加;

(2)如果在(a, b)内$f'(x)<0$，则$f(x)$在$[a, b]$上单调减少.

证明 只证(1). 在$[a, b]$上任取两点$x_1, x_2(x_1<x_2)$,

由拉格朗日中值公式，有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\ (x_1<\xi<x_2).$$

因为$f'(\xi)>0$，$x_2-x_1>0$，所以

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$,

这就证明了函数$f(x)$在$[a, b]$上单调增加.

例1 确定函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$的单调区间.

解 这个函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$.

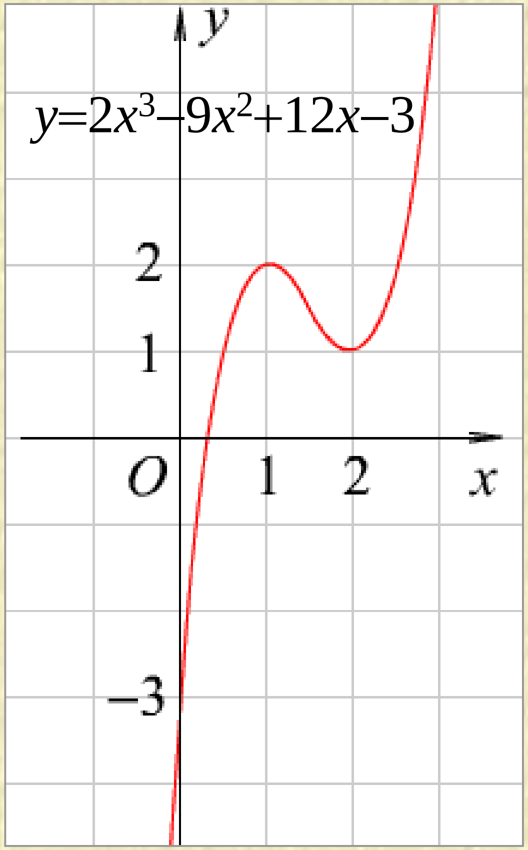
$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2),$$

导数为零的点为$x_1=1$、$x_2=2$.

列表分析:

x	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

函数$f(x)$在区间$(-\infty, 1]$和$[2, +\infty)$上单调增加，在区间$[1, 2]$上单调减少.



例2 讨论函数$y=x^3$的单调性.

解 函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$.

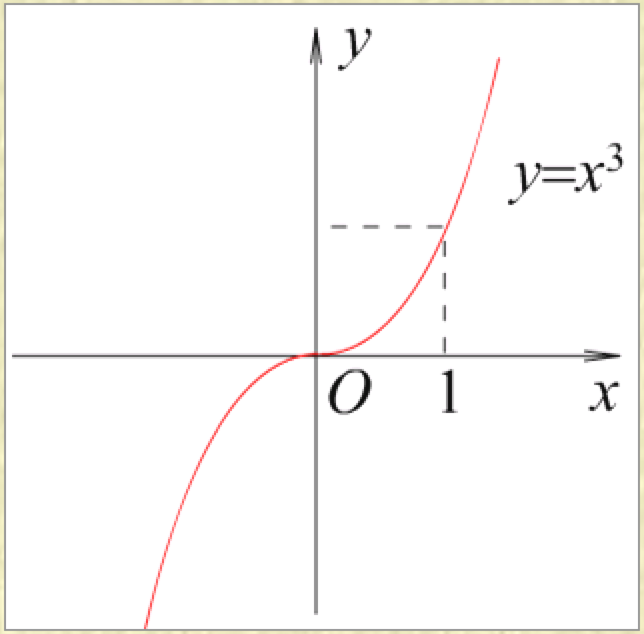
$$y'=3x^2.$$

显然当$x=0$时，$y'=0$；当$x\neq 0$时，$y'>0$.

因此函数$y=x^3$在区间$(-\infty, 0]$及$[0, +\infty)$上都是单调增加的. 从而函数在整个定义域$(-\infty, +\infty)$内是单调增加的.

说明:

一般地，如果$f'(x)$在某区间内的有限个点处为零，在其余各点处均为正(或负)时，那么$f(x)$在该区间上仍旧是单调增加(或减少)的.



例3 证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$.

证明 令 $f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$, $f(x)$在$[0, \frac{\pi}{2})$连续,

$$f'(x) = \sec^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2$$

当$0 < x < \frac{\pi}{2}$时, $\tan x > x$, 因此 $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$在$[0, \frac{\pi}{2})$单调增加. 于是

当$0 < x < \frac{\pi}{2}$时, $f(x) > f(0) = 0$,

即 $$\tan x > x + \frac{x^3}{3}.$$

二、函数的极值及其求法

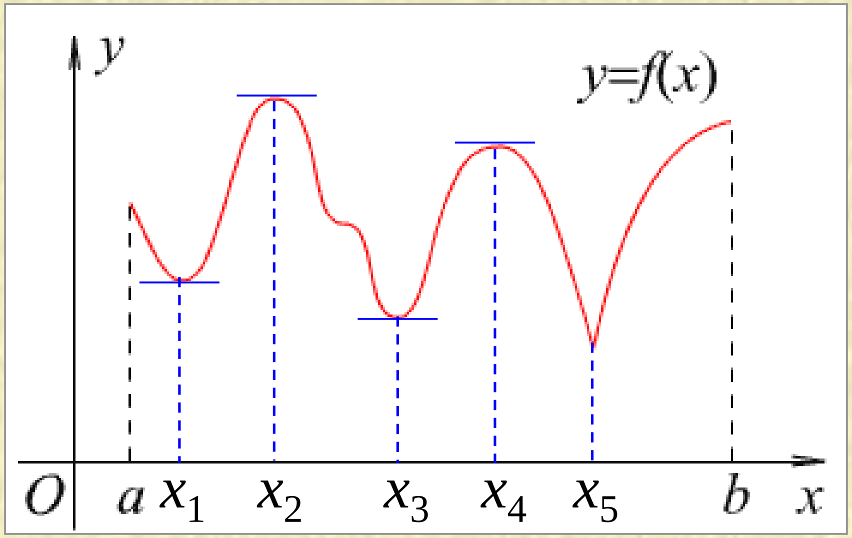
❖函数的极值

设函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义，如果对于任意$x\in \mathring{U}(x_0)$有

$$f(x)\le f(x_0)\ (\text{或}\ f(x)\ge f(x_0)\ ),$$

则称$f(x_0)$是函数 $f(x)$的一个**极大值**(或**极小值**).

函数的极大值与极小值统称为函数的极值, 使函数取得极值的点称为**极值点**.



提问:

$f(a)$和 $f(b)$是极值吗?

观察与思考:

观察极值与切线的关系.

❖费马(Fermat)引理

设 $f(x_0)$为函数 $f(x)$在开区间(a, b)内的最大(小)值, 若 $f'(x_0)$存在, 则 $f'(x_0) = 0$.

❖定理2(必要条件)

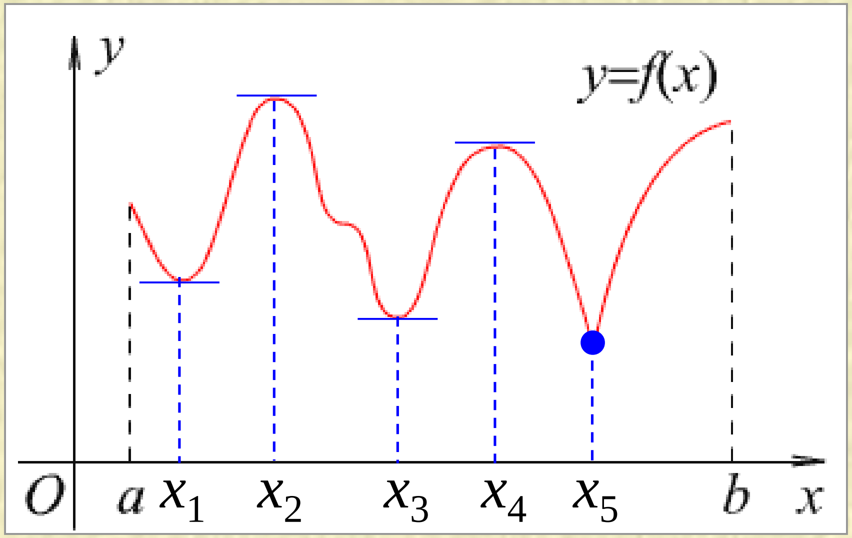
如果x_0为$f(x)$的极值点, 那么$f'(x_0)=0$或$f'(x_0)$不存在.

•驻点: 导数的零点.

讨论:

驻点是否一定是极值点?

考察$x=0$是否是函数$y=x^3$的驻点, 是否是函数的极值点.



❖费马(Fermat)引理

设 $f(x_0)$为函数 $f(x)$在开区间(a, b)内的最大(小)值, 若 $f'(x_0)$存在, 则 $f'(x_0) = 0$.

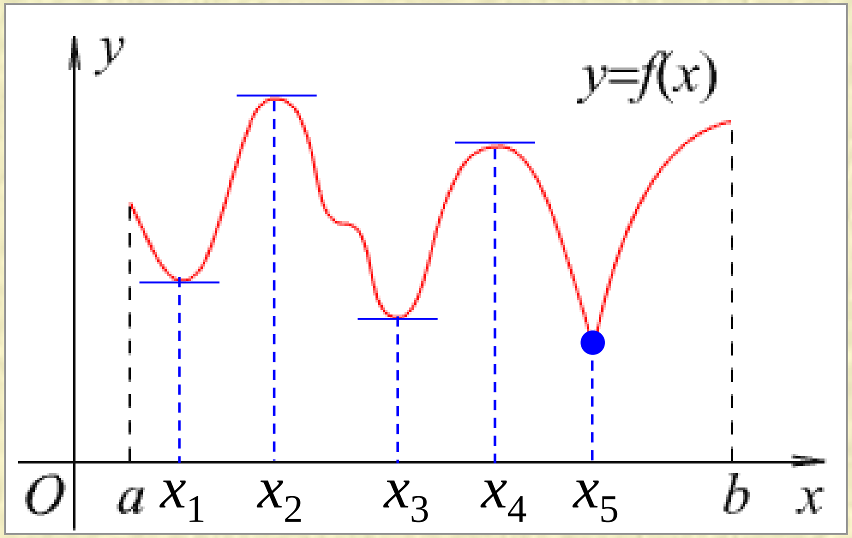
❖定理2(必要条件)

如果x_0为$f(x)$的极值点, 那么$f'(x_0)=0$或$f'(x_0)$不存在.

•**驻点**: 导数的零点.

观察与思考:

观察曲线的升降与极值之间的关系.



❖定理3(第一充分条件)

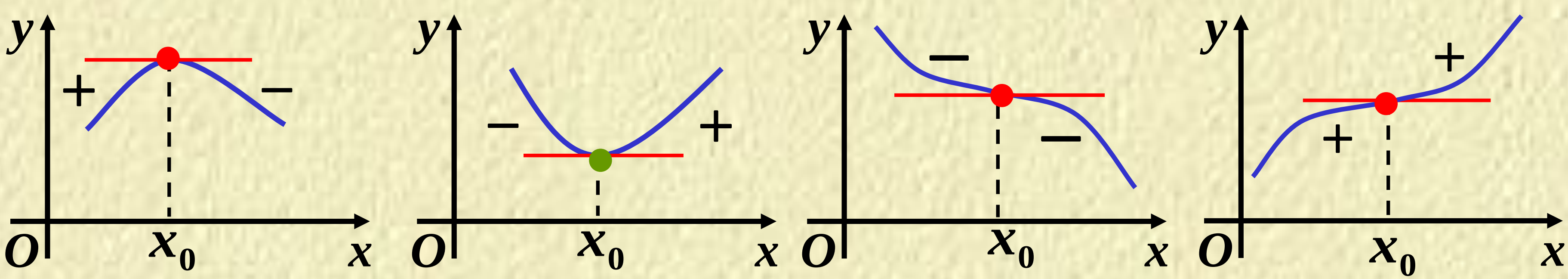
设函数$f(x)$在x_0处连续, 且在$(a, x_0)\cup(x_0, b)$内可导.

(1)如果在(a, x_0)内$f'(x)>0$, 在(x_0, b)内$f'(x)<0$, 那么函数$f(x)$在x_0处取得极大值;

(2)如果在(a, x_0)内$f'(x)<0$, 在(x_0, b)内$f'(x)>0$, 那么函数$f(x)$在x_0处取得极小值;

(3)如果在(a, x_0)及(x_0, b)内 $f'(x)$的符号相同, 那么函数$f(x)$在x_0处没有极值.

$f'(x)$的正负变化与极值的关系



例4 求函数 $y=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-x$ 的单调区间和极值.

解 这个函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$.

$$y'=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-1,$$

驻点 $x=1$, 不可导点 $x=0$,

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$-$	不可导	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

函数 y 在区间$(-\infty, 0]$和$[1, +\infty)$上单调减少,

在区间$[0, 1]$上单调增加.

函数 y 的极小值为 $y(0)=0$, 极大值为 $y(1)=\frac{1}{2}$.

例5 讨论方程 $\ln x = ax\ (a>0)$有几个实根?

解 令 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$,

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2},$$

得驻点 $x = e.$

当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$,

$f(x)$ 在 $(0, e]$上单调增加,

值域为 $(-\infty, e^{-1}]$;

当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$,

$f(x)$ 在 $[e, +\infty)$ 上单调减少,

值域为 $(0, e^{-1}]$.

当 $a > e^{-1}$ 时,

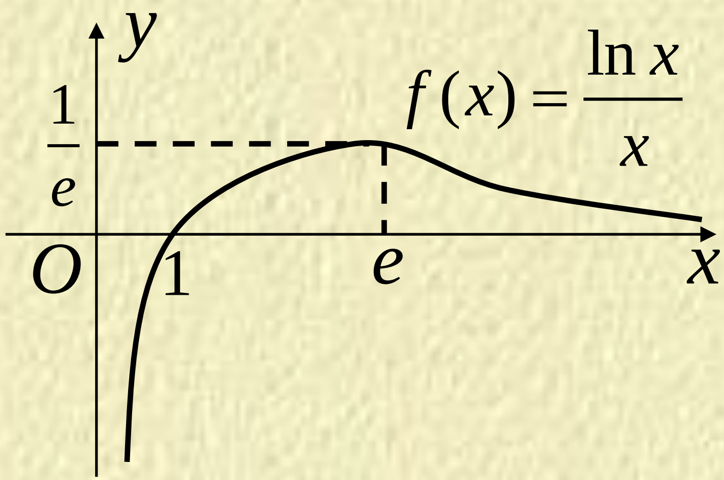
方程 $\ln x = ax$ 无实根;

当 $a = e^{-1}$ 时,

方程 $\ln x = ax$ 有一个实根;

当 $0 < a < e^{-1}$ 时,

方程 $\ln x = ax$ 有两个实根.

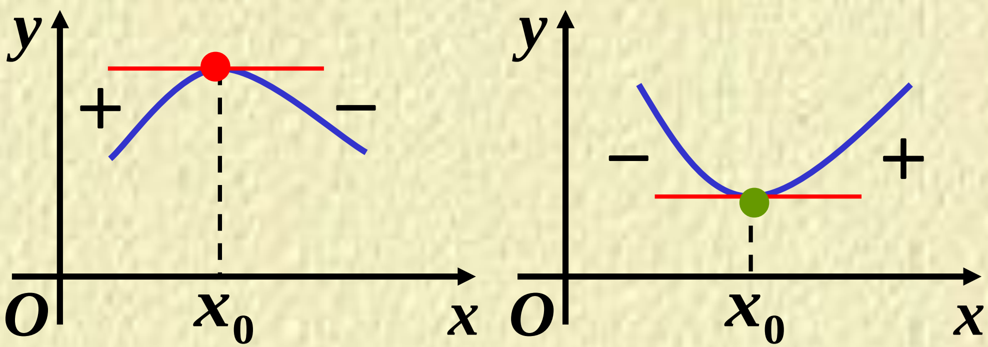


❖定理4(第二充分条件)

设函数$f(x)$在点x_0处具有二阶导数且$f'(x_0)=0$，那么

(1)当$f''(x_0)<0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极大值;

(2)当$f''(x_0)>0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极小值.



$f'(x)$的正负变化与极值的关系

❖定理4(第二充分条件)

设函数$f(x)$在点x_0处具有二阶导数且$f'(x_0)=0$，那么

(1)当$f''(x_0)<0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极大值;

(2)当$f''(x_0)>0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极小值.

证 (1) $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0,$

因此，当$|x-x_0|$充分小时，$\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0.$ (由极限的保号性)

可见，$f'(x)$ 与 $x-x_0$ 异号.

当$x<x_0$，$f'(x)>0$； 当$x>x_0$，$f'(x)<0.$

所以，$f(x)$在点x_0处取极大值.

(2)类似可证.

❖定理4(第二充分条件)

设函数$f(x)$在点x_0处具有二阶导数且$f'(x_0)=0$，那么

(1)当$f''(x_0)<0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极大值;

(2)当$f''(x_0)>0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极小值.

应注意的问题：

如果$f'(x_0)=0, f''(x_0)=0$，则定理3不能应用，但不能由此说明$f(x_0)$不是$f(x)$的极值.

讨论：

函数$f(x)=x^4$，$g(x)=x^3$在点$x=0$是否有极值?

例6 求函数$f(x)=e^x\sin x$的极值.

解 $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)$.

令$f'(x)=0$, 得驻点 $x_k=k\pi-\dfrac{\pi}{4}\ (k\in\mathbf{Z})$.

$f''(x)=2e^x\cos x$.

因为 $f''(x_{2k})=\sqrt{2}\,e^{x_{2k}}>0$,

所以 $f(x_{2k})=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{x_{2k}}$ 为极小值.

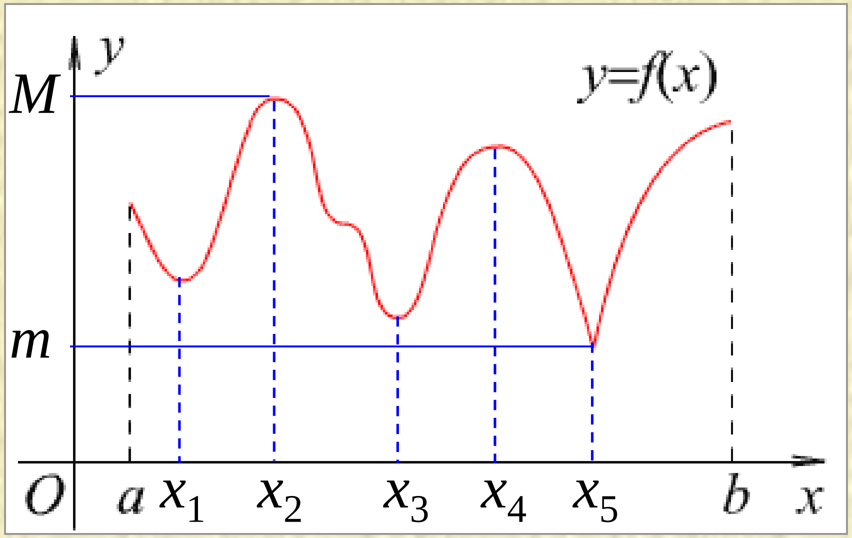
因为 $f''(x_{2k+1})=-\sqrt{2}\,e^{x_{2k+1}}<0$,

所以 $f(x_{2k+1})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{x_{2k+1}}$ 为极大值.

三、最大值最小值问题

观察与思考：

观察哪些点有可能成为函数的最大值或最小值点，怎样求函数的最大值和最小值.

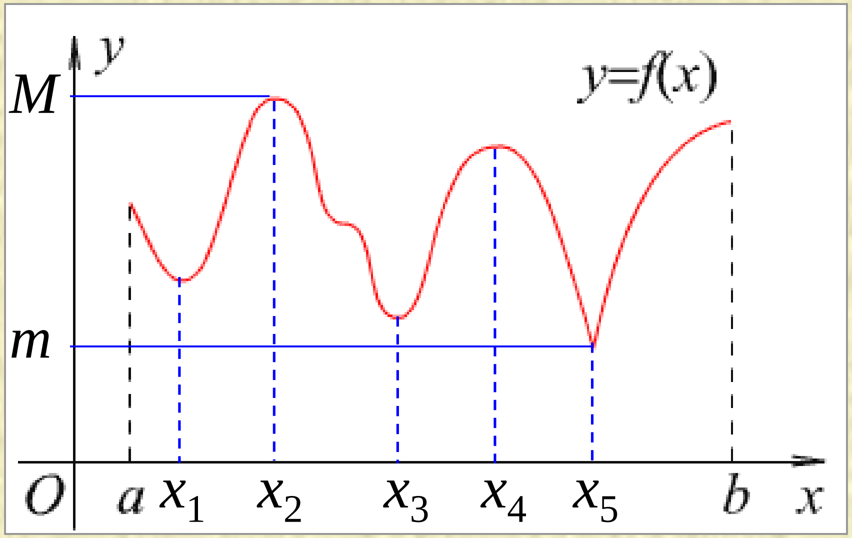


❖闭区间上连续函数的最值求法

(1)求出函数$f(x)$在(a, b)内的驻点和不可导点, 设这些点为$x_1, x_2, \cdots, x_n$;

(2)计算函数值 $f(a),\ f(x_1), \cdots,\ f(x_n),\ f(b)$;

(3)判断: 最大者是函数 $f(x)$ 在$[a, b]$上的最大值, 最小者是函数 $f(x)$ 在$[a, b]$上的最小值.



例7 求函数 $f(x)=|x^2-3x+2|$在$[-3, 4]$上的最大值与最小值.

解
$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & x\in[-3,1]\cup[2,4] \\ -x^2+3x-2 & x\in(1,2) \end{cases},$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & x\in(-3,1)\cup(2,4) \\ -2x+3 & x\in(1,2) \end{cases}.$$

在$(-3, 4)$内, $f(x)$的驻点为 $x=\dfrac{3}{2}$;

不可导点为 $x=1$ 和 $x=2$.

由于 $f(-3)=20$, $f(1)=0$, $f(\dfrac{3}{2})=\dfrac{1}{4}$, $f(2)=0$, $f(4)=6$,

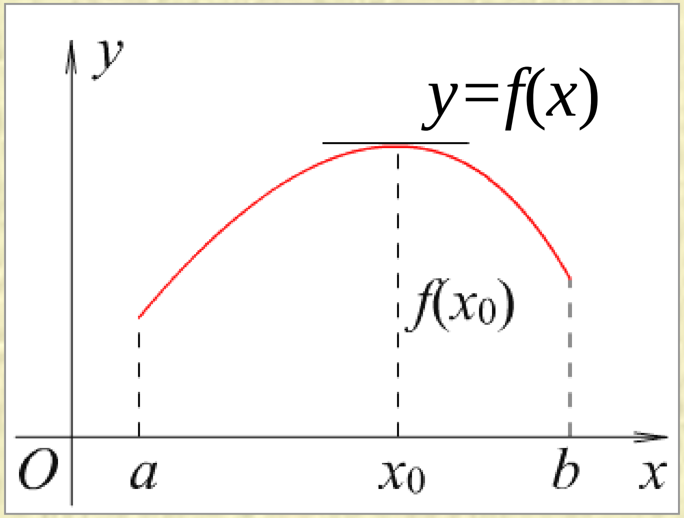
比较可得$f(-3)=20$是 $f(x)$在$[-3, 4]$上的最大值, $f(1)=f(2)=0$ 是$f(x)$在$[-3, 4]$上的最小值.

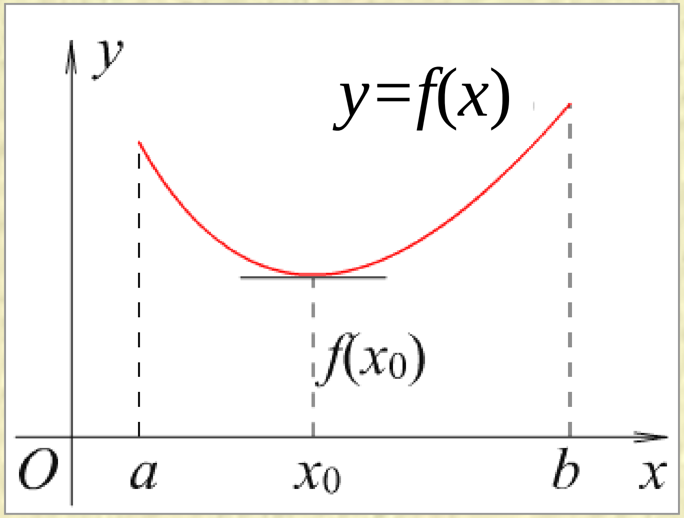
❖特殊情况下的最大值与最小值

如果 $f(x)$在一个区间中可导, 且**只有一个驻点** x_0, 那么,

当$f(x_0)$是极大值时, $f(x_0)$就是$f(x)$在该区间上的最大值;

当$f(x_0)$是极小值时, $f(x_0)$就是$f(x)$在该区间上的最小值.

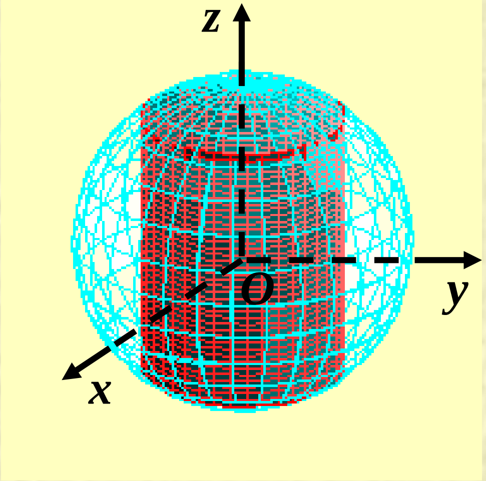




例8 求内接于球的圆柱体的最大体积, 设球的半径为R.

解 设圆柱体的高为$2h$,

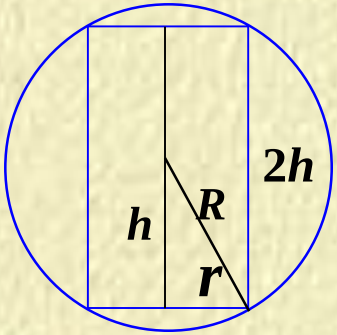
底半径为r, 体积为V,



$$V = \pi r^2 \cdot 2h$$

由$r^2 + h^2 = R^2$, 得

$$V = 2\pi(R^2 - h^2)\cdot h, \quad 0 < h < R$$



$$V_h' = 2\pi(R^2 - 3h^2)$$

令 $V_h' = 0$, 得$h = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$

例8 求内接于球的圆柱体的最大体积，设球的半径为R.

解 设圆柱体的高为$2h$, 底半径为r, 体积为V,

$$V = \pi r^2 \cdot 2h$$

由$r^2 + h^2 = R^2$, 得

$$V = 2\pi(R^2 - h^2)\cdot h, \quad 0 < h < R$$

$$V_h' = 2\pi(R^2 - 3h^2)$$

令 $V_h' = 0$, 得$h = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$

圆柱体的最大体积一定存在，

唯一驻点 $h = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$ 就是最大值点，

最大体积为

$$V = 2\pi(R^2 - \frac{R^2}{3})\cdot\frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$$

作业3.2