作业3.1解答

一．设，证明多项式在区间内至少有一个零点.

证明：设，则，且，而由题设知，因此，由罗尔定理知，在区间内至少有一个，使得，即在区间内至少有一个零点.

二. 证明恒等式：.

证明：设，则

，（）

所以在内为常数. 又因为在上连续，所以在上也为常数. 该常数可由算出，其值为，这样就得到

.

三. 已知函数具有二阶导数，且，，证明：在区间内至少存在一点，使得.

证明：由，知，从而. 因此，由罗尔定理知，在区间内存在一点，使得. 由于

，

由罗尔定理知，在区间内存在一点（当然），使得.

四. 设函数在上连续，在内可导，当时，；当时，. 求证：方程在内有且只有一个根.

证明：设，则在上连续，在内可导. 因为当时，，所以

，.

因此，由零点定理知，在内存在，使得，即方程在内有一个根.

假设方程在内另有一个根，则. 于是由罗尔定理知，在与之间存在，使得，即，这与题设矛盾.

因此，方程在内有且只有一个根.

五. 设，证明：.

证明：设，由拉格朗日中值定理知，存在，使得

，即，

因，所以

，即.

六. 设、都是可导函数，且，证明：当时，.

证明：由题设知. 由拉格朗日中值定理知，存在，使得

.

而由柯西中值定理又知，存在，使得

，

结合题设，就得到

.

七. 求下列极限：

（1）；

解：原式

(2) ；

解：原式.

(3) ；

解：，

.

八．验证极限存在，但不能用洛必达法则得出.

解：因，，所以，从而.

由于不存在，所以.

因此存在，但不能用洛必达法则得出.

九．求函数的间断点，并判别其类型.

解：由初等函数在其定义域内处处连续，知的间断点为和. 因为



，

所以为的可去间断点. 因为

，，

所以为的跳跃间断点.

十．填空:

(1) 设则的零点个数为 3 .

(2) 函数在闭区间上满足拉格朗日中值定理，则定理中的

