

Universidad de El Salvador
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Escuela de Física



Asignatura: Investigación en Física
Docente: PhD. Carlos Rudamas

Proyecto de investigación: *“Simulaciones de chubascos atmosféricos producidos por UHECR con composición mixta”*

Presentado por
Cindy Mariella Castellón Salguero

Ciudad Universitaria “Dr. Fabio Castillo”, septiembre de 2020

Índice general

Introducción	2
1. Marco teórico	4
1.1. Rayos Cósmicos	4
1.1.1. Descubrimiento y naturaleza de los RC	4
1.1.2. Producción de RC	5
1.1.3. Fuentes de RC	6
1.1.4. Propagación de RC	7
1.2. Interacciones de los RC	8
1.2.1. Interacciones electromagnéticas	8
1.2.2. Interacciones hadrónicas	8
1.3. Chubascos atmosféricos	9
1.3.1. Atmósfera terrestre	9
1.3.2. Desarrollo de un chubasco atmosférico	10
1.3.3. Métodos de observación	13
1.4. Estado del conocimiento	14
2. Planteamiento del problema	17
2.1. Objetivos	17
2.2. Preguntas de investigación	18
2.3. Justificación	18
2.4. Viabilidad	19
3. Metodología	20
3.1. Simulaciones de chubascos producidos por UHECR	20
3.1.1. Características de los chubascos	20
3.2. Software para simulaciones de altas energías	21
3.2.1. Sistema de coordenadas	22
3.2.2. Atmósfera	22
3.2.3. Campo geomagnético	23
3.2.4. Estructura de los programas de simulación	23
3.2.5. Muestreo de partículas	24
3.3. Análisis de resultados de simulaciones	24
4. Cronograma de actividades	26

Introducción

Los rayos cósmicos -descubiertos por el austriaco Victor Hess en 1914- son partículas cargadas provenientes del exterior de la Tierra que llegan a la misma con energías de hasta 10^{20} eV. Éstos son en su mayoría protones (90 %) y núcleos de helio (9 %), el resto son electrones, positrones y núcleos más pesados. Cuando los rayos cósmicos entran a la atmósfera terrestre interactúan con los átomos y moléculas de la misma, generando cascadas de partículas secundarias que se conocen como chubascos atmosféricos, éstos son producto de interacciones electromagnéticas y hadrónicas.

Desde el descubrimiento de los rayos cósmicos, se han estudiado ampliamente aspectos como su espectro, su composición, su propagación y su origen. Se conoce que el espectro de rayos cósmicos se extiende desde 10^9 hasta 10^{20} siguiendo una ley de potencias, y que a estas ultraaltas energías se observa una supresión del mismo. También se ha concluido que los rayos cósmicos están compuestos mayormente por protones, y que sus fuentes son principalmente de origen galáctico. Sin embargo las interrogantes fundamentales de la física de rayos cósmicos, relacionadas con su origen y el mecanismo de aceleración con el que alcanzan las energías observadas, siguen vigentes.

En particular el rango de las ultraaltas energías presenta grandes desafíos para la investigación en esta área. Esto debido principalmente a limitaciones experimentales relacionadas con el bajo flujo de partículas a estas energías, así como limitaciones teóricas en la descripción de las interacciones hadrónicas, ya que los modelos utilizados son fenomenológicos y dependen de los avances en aceleradores de partículas. Actualmente uno de los problemas esenciales es la determinación de la composición de los rayos cósmicos de ultraaltas energías. El problema de la composición consiste en dar una correcta interpretación a los datos observacionales basada en simulaciones de chubascos.

Se han medido con bastante precisión diversas propiedades de los chubascos producidos por rayos cósmicos de ultraalta energía que son especialmente sensibles a la composición primaria, no obstante no se ha logrado una interpretación coherente de dichas mediciones en términos de una única composición. Existen importantes discrepancias entre las simula-

ciones con distintos modelos de interacción hadrónica, de manera que dirigen a conclusiones no compatibles entre sí, y además no compatibles con las observaciones realizadas de las magnitudes dependientes de la composición.

El objetivo de este trabajo de investigación es verificar el efecto de una composición mixta de los rayos cósmicos de ultraalta energía en las observables X_{max} y σX_{max} -que son sensibles a la masa de la partícula inicial-, así como estudiar su efecto en la distribución lateral de electrones y muones. Esto pretende lograrse realizando simulaciones de chubascos atmosféricos tomando en cuenta una composición que no sea completamente ligera ni únicamente pesada y comparando los resultados con datos medidos y publicados por la colaboración Pierre Auger. Además se pretende comparar los resultados obtenidos de simulaciones realizadas con diferentes modelos de interacciones hadrónicas, en este caso: Sibyll 2.3c, EPOS-LHC y QGSJETII-04.

Se realizarán simulaciones de 2400 eventos de chubascos atmosféricos iniciados por una combinación de protones, núcleos de helio, núcleos de nitrógeno y núcleos de hierro con energías iniciales entre 180,30 PeV a 42,267 EeV. Para simular los chubascos se utilizará el *software* AIRES, que cuenta con los modelos hadrónicos como paquetes externos, además de una librería de módulos escritos en Fortran y C++ para realizar los cálculos de las características de los eventos simulados. Adicionalmente, los datos observacionales se tomarán del repositorio que se encuentra en sitio web del Observatorio Pierre Auger.

En el capítulo 1 se resume el fundamento teórico necesario para la comprensión física de los chubascos atmosféricos producidos por rayos cósmicos y sus propiedades principales, así como el estado del conocimiento del tema. En el capítulo 2 se presenta el planteamiento del problema de la investigación, incluyendo los objetivos, la justificación y la viabilidad del estudio. El capítulo 3 describe el programa AIRES utilizado para las simulaciones, así como las condiciones que se asumirán para las mismas. Por último, el cronograma de actividades de la investigación se muestra en el capítulo 4.

Capítulo 1

Marco teórico

1.1. Rayos Cósmicos

Los rayos cósmicos (RC) son partículas cargadas aceleradas a altas energías que se propagan por el espacio y llegan a la atmósfera terrestre. Un 90 % de estas partículas son protones, un 9% núcleos de helio y el resto son electrones, núcleos más pesados y antipartículas. La mayoría de RC son relativistas; su espectro de energías está entre $\sim 10^9$ y $\sim 10^{20}$ eV, y sigue una ley de potencias. Actualmente se tiene conocimiento de fuentes de RC de origen galáctico y extragaláctico [1]. A continuación se describen algunos aspectos del desarrollo histórico de la investigación sobre los RC.

1.1.1. Descubrimiento y naturaleza de los RC

En el año 1900 se realizaban experimentos para estudiar la ionización causada por elementos radiactivos, en estos se observó que el aire contenía algún tipo de radiación que también era capaz de ionizar. A partir de esto se inició la búsqueda del origen de dicha radiación. Se repitieron los experimentos a alturas de 300 a 1300 m, esperando que si la fuente de la radiación fuese la corteza terrestre, ésta disminuiría con la altura. En 1911-1912, el austriaco Victor Hess realizó experimentos en globo a alturas de hasta 5200 m, con los que concluyó que la radiación debía originarse fuera de la Tierra y que, comparando mediciones de día y de noche, no provenía del sol. Victor Hess es considerado el descubridor de los rayos cósmicos [2].

Posteriormente se inició la búsqueda de la naturaleza de estas partículas, siendo el candidato más popular los rayos gamma. En 1927 Jacob Clay observó una disminución de la radiación en bajas latitudes. Esto fue explicado en 1932 por Arthur Compton como la acción del campo magnético de la Tierra sobre los RC, llevando a la conclusión de que la mayor parte de las partículas en cuestión debían tener carga eléctrica, y estudiando los efectos geomagnéticos este-oeste se dedujo que casi todas las cargas eran positivas. Finalizando la

década de 1940, experimentos de detección directa realizados por Schein establecieron que aproximadamente el 99 % de los RC son protones, núcleos de Helio y núcleos más pesados y que sólo el 1 % son electrones, positrones y rayos gamma [3].

1.1.2. Producción de RC

En la figura 1.1 se muestra el espectro observado de RC, el cual está bien representado por una ley de potencias:

$$\frac{dN}{dE} = E^{-(\gamma+1)}. \quad (1.1)$$

El índice γ tiene un valor aproximadamente constante de 2,7 con dos ligeros cambios: uno a $\sim 10^{16}$ eV, conocido como la *rodilla*, y el otro a $\sim 10^{19}$ eV conocido como el *tobillo* [2]. El espectro se extiende desde $\sim 10^9$ hasta $\sim 10^{20}$ eV.

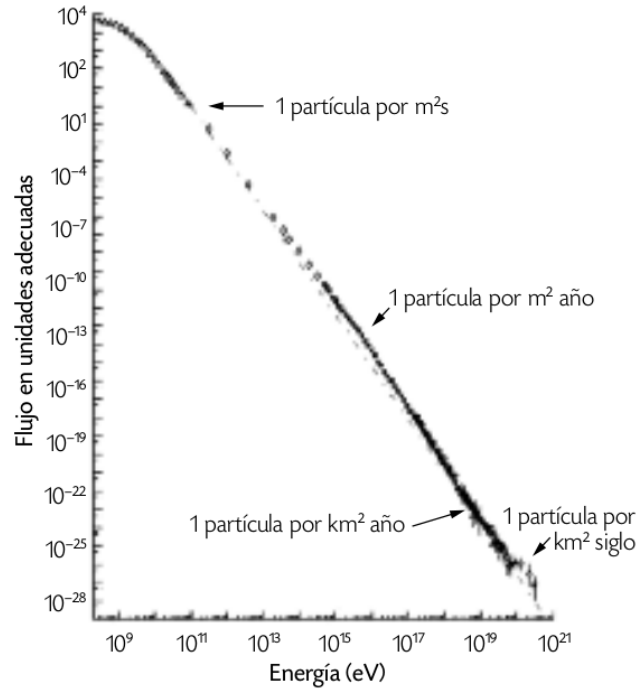


Figura 1.1: Intensidad del flujo de rayos cósmicos en función de su energía. Éste está bien representado por una ley de potencias $E^{-2.7}$. (Tomada de [4])

Por tanto, debe haber un mecanismo capaz de acelerar partículas a tales energías y que reproduzca la forma del espectro observado. En 1949, Fermi propuso un mecanismo en el que las partículas podían ganar energía en colisiones estocásticas en regiones del espacio donde existiesen campos magnéticos turbulentos, como las ondas de choque resultado de un colapso gravitacional, por ejemplo. Se considera que una partícula de prueba tiene un incremento de energía proporcional a la misma $\Delta E = \xi E$ en cada colisión, luego de n colisiones la energía

de la partícula será [1]

$$E_n = E_0(1 + \xi)^n, \quad (1.2)$$

donde E_0 es la energía con la que entra al proceso de aceleración. Tomando en cuenta la probabilidad P_{esc} de que la partícula escape de la región de aceleración, la proporción de partículas que se aceleran a energías mayores a un valor E es

$$N(\geq E) \propto \frac{1}{P_{esc}} \left(\frac{E}{E_0} \right)^{-\gamma}, \quad (1.3)$$

con $\gamma = -\ln(1 - P_{esc})/\ln(1 + \xi) \approx P_{esc}/\xi$, de manera que este mecanismo efectivamente reproduce la ley de potencias que caracteriza al espectro de RC.

El mecanismo de Fermi se describe en dos situaciones físicas: nubes de plasma magnetizadas (aceleración de Fermi de segundo orden) y frentes de onda de choque (aceleración de Fermi de primer orden). En la aceleración de segundo orden se considera una partícula que entra a la nube con cierta velocidad, donde cambia su dirección de modo aleatorio por interacciones con el campo magnético turbulento en el interior, mediante este proceso se tiene $\xi = (4/3)\beta^2$, donde $\beta = V/c$ es la velocidad de la nube; en la aceleración de primer orden se considera que la partícula atraviesa la onda de choque e interactúa con el campo magnético del gas que éste va dejando detrás (*downstream*), en este caso $\xi = (4/3)\beta$, donde $\beta = V/c$ se refiere la velocidad del gas detrás del choque respecto al gas delante del choque (*upstream*).

1.1.3. Fuentes de RC

Luego de establecer cómo pueden acelerarse las partículas, se buscaron objetos astronómicos que cumplan las condiciones necesarias para que el proceso se lleve a cabo. Para que el proceso sea eficaz, la partícula debe estar contenida en una región de radio R , tal que se cumpla la siguiente relación [5]:

$$E[\text{PeV}] \simeq B[\mu\text{G}] \times R[\text{pc}]. \quad (1.4)$$

Ésta es llamada relación de Hillas, ilustrada en la figura 1.2, en la que también pueden observarse los potenciales aceleradores. Como fuentes de RC de origen galáctico pueden mencionarse las estrellas de neutrones de rápida rotación (púlsares) y los remanentes de supernova, mientras que en el caso extragaláctico se consideran los núcleos galácticos activos y los destellos de rayos gamma.

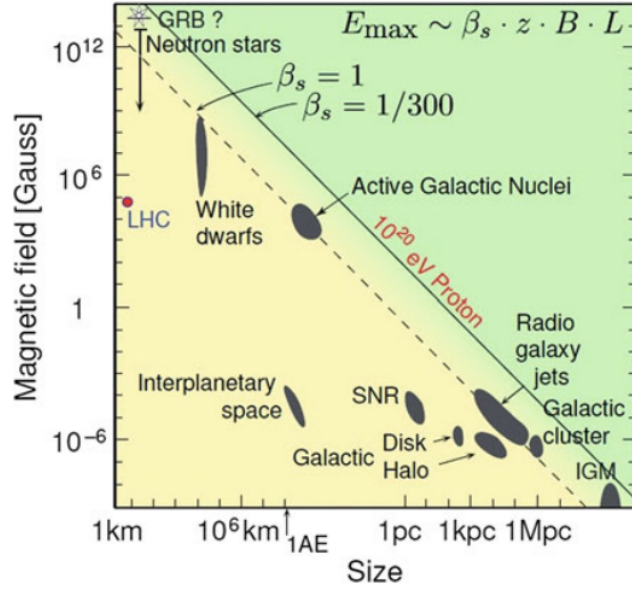


Figura 1.2: La gráfica de Hillas representa las potenciales fuentes de rayos cósmicos según la intensidad de su campo magnético y su tamaño. (Tomada de [5])

1.1.4. Propagación de RC

La presencia de campos magnéticos en el espacio limita la posibilidad de estudiar las fuentes de RC a través de ellos. Los RC llegan a la Tierra isotrópicamente; llegan de todas direcciones con la misma frecuencia, lo que sugiere una trayectoria casi aleatoria desde la fuente hacia la Tierra. Dentro de la galaxia las partículas pueden sufrir varios procesos: difusión en campos magnéticos, convección por vientos galácticos, pérdidas o ganancias de energía, colisiones nucleares con gas interestelar y decaimientos. Para describir la propagación de RC debe resolverse la ecuación de transporte [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} = & \nabla \cdot (D_i \nabla \mathcal{N}_i) - \frac{\partial}{\partial E} [b_i(E) \mathcal{N}_i(E)] - \nabla \cdot u \mathcal{N}_i(E) \\ & + Q_i(E, t) - p_i \mathcal{N}_i + \frac{v\rho}{m} \sum_{k \geq i} \int \frac{d\sigma_{i,k}(E, E')}{dE} \mathcal{N}_k(E') dE', \end{aligned} \quad (1.5)$$

que contempla los procesos mencionados para calcular la densidad de partículas con energías entre E y $E + dE$. Los seis términos de la ecuación representan, respectivamente: la difusión, ganancias de energía, convección, la inyección de partículas, pérdida de partículas por colisiones o decaimientos, cascadas de decaimientos o fragmentación nuclear.

1.2. Interacciones de los RC

1.2.1. Interacciones electromagnéticas

Las partículas cargadas en general interactúan con átomos; estas pueden ionizarlos, excitarlos o producir fotones. Para electrones y positrones a altas energías es relevante la radiación de frenado o *bremsstrahlung*, en la cual partículas cargadas emiten radiación al ser deflectadas por el campo eléctrico de los átomos en un medio. En este proceso, la fracción de energía que la partícula pierde puede describirse por [5]:

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dx} \simeq -\frac{1}{X_0}, \quad (1.6)$$

donde X_0 es la longitud de radiación que es dependiente del medio.

Por otro lado, los fotones interactúan con un medio principalmente mediante efecto fotoeléctrico (emisión de un electrón de un material que ha absorbido un fotón), dispersión de Compton (transferencia de energía de un fotón hacia un electrón mediante una colisión) y producción de pares electrón-positrón. Este último proceso siendo el más relevante a altas energías; al interactuar con el campo eléctrico de un núcleo, el fotón tiene cierta probabilidad de formar un par $e^- - e^+$, con una longitud de interacción:

$$\lambda \simeq \frac{9}{7} X_0. \quad (1.7)$$

Los fotones también puede sufrir otros procesos como dispersión de Rayleigh, que puede tener importancia para el transporte de la luz a través de la atmósfera, o interacciones fotonucleares (excitación de núcleos) que se dan a energías alrededor de 10 MeV.

1.2.2. Interacciones hadrónicas

Los RC primarios están mayoritariamente conformados por hadrones, como lo son los protones y núcleos. Los hadrones se describen mediante el modelo de quarks [5], partículas que interactúan mediante la interacción nuclear fuerte y que, según observaciones, no existen de manera aislada sino en estados ligados de dos o tres quarks. Este tipo de modelos se estudian desde la *cromodinámica cuántica* (QCD por sus siglas en inglés), donde se propone el concepto de *color* como la carga que origina las interacciones fuertes, y el de *gluón* como la partículas mediadora.

Para describir las interacciones hadrónicas se necesitan modelos fenomenológicos apoyados en QCD. Un modelo usado comúnmente es el modelo de cuerdas de Lund (o *string model*) [6]; cuando los hadrones interactúan se forma un campo de color (cuerda) entre pares quark-antiquark, la energía potencial en dicha cuerda aumenta hasta fragmentarse y formar otros quarks que a su vez pueden formar hadrones, como se ilustra en la figura 1.3. También suele utilizarse el modelo de *minijet*, para tomar en cuenta la multiplicidad de partículas producidas.

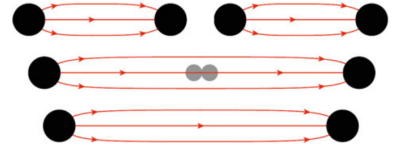


Figura 1.3: De abajo hacia arriba; fragmentación de una cuerda creando un nuevo par de quarks en el campo de color. (Tomado de [5])

Actualmente existen varios generadores Monte Carlo de eventos hadrónicos; describen este tipo de interacciones basándose en diferentes modelos para ciertos aspectos de la interacción y en datos de colisionadores de partículas. Ejemplos de estos son SIBYLL [7], QGSJET [8] y EPOS [9], que están especializados en interacciones de altas energías.

1.3. Chubascos atmosféricos

Un chubasco atmosférico (español para *Air Shower*) es una cascada de partículas generada por la interacción de un rayo cósmico en la alta atmósfera. Antes de profundizar en cómo se desarrollan estas cascadas, conviene describir brevemente las principales características de la atmósfera.

1.3.1. Atmósfera terrestre

La capa de aire que rodea la Tierra se extiende hasta una altura mayor a 100 km. Según el modelo *US Standard Atmosphere*, la atmósfera está compuesta principalmente por N_2 (78 %), O_2 (21 %) y Ar (0,9 %). Acorde al mismo modelo, la densidad del aire es función de la altura:

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{h}{h_a}}, \quad (1.8)$$

donde $\rho_0 = 1,22 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ y $h_a = 8,2 \text{ km}$. Sin embargo, en el estudio de los chubascos atmosféricos es más frecuente utilizar el concepto de *profundidad* en lugar de la altura. La profundidad X indica la cantidad de materia que atraviesa una partícula al moverse de un punto a otro. Esta se relaciona con la densidad mediante:

$$X = \int_h^\infty \rho(h) dh. \quad (1.9)$$

1.3.2. Desarrollo de un chubasco atmosférico

Los chubascos atmosféricos se desarrollan de forma compleja como una combinación de cascadas electromagnéticas y producción de partículas por interacciones hadrónicas [10]. A grandes rasgos, una interacción hadrónica entre el rayo cósmico primario y un núcleo de la atmósfera produce múltiples partículas secundarias: una partícula principal (con la mayor parte de la energía inicial) que puede iniciar otro chubasco, y un gran número de mesones, principalmente piones cargados (π^\pm) y neutros (π^0).

La parte electromagnética del chubasco es generada por los piones neutros al decaer en fotones ($\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$), esta cascada consiste en producción de pares ($\gamma \rightarrow e^+e^-$) y bremsstrahlung ($e^\pm \rightarrow e^\pm\gamma$). Por su parte, los piones cargados pueden volver a interactuar hadrónicamente mientras tengan suficiente energía, luego de eso decaerán en neutrinos y muones ($\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$, $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$). El desarrollo de un chubasco se ilustra en la figura 1.4.

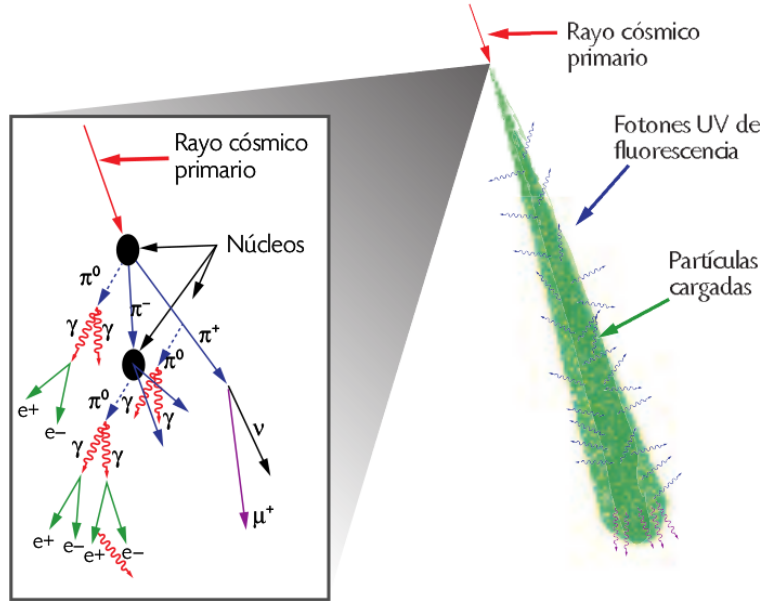


Figura 1.4: Esquema de la formación y desarrollo de un chubasco atmosférico. Se observa la componente hadrónica y la electromagnética. (Tomada de [4])

La propagación de partículas (nucleones en particular) a través de la atmósfera, puede describirse con la ecuación de cascada:

$$\frac{dN(E, X)}{dX} = -\frac{N(E, X)}{\lambda_N(E)} + \int_E^\infty \frac{N(E', X)}{\lambda_N(E')} F_{NN}(E, E') \frac{dE'}{E'}, \quad (1.10)$$

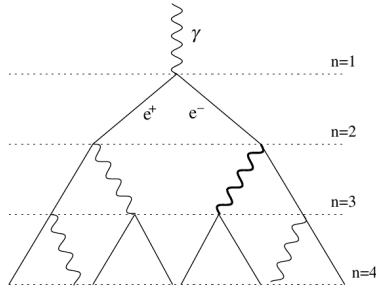
donde $N(E, X)dE$ es el flujo de nucleones a una profundidad X en la atmósfera con energías entre E y $E + dE$, λ_N es la longitud de interacción del nucleón en el aire y F_{NN} es la

sección eficaz para la colisión de un nucleón incidente de energía E' con un núcleo del aire, produciendo otro nucleón con energía E . Para generalizar al caso de la propagación de los múltiples hadrones producidos, se considera un grupo de ecuaciones acopladas [1]:

$$\frac{dN_i(E, X)}{dX} = -\left(\frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{d_i}\right)N_i(E, X) + \sum_j \int \frac{F_{ij}(E_i, E_j)}{E_i} \frac{N_j(E_j)}{\lambda_j} dE_j. \quad (1.11)$$

Modelo Heitler-Matthews

En 1954, W. Heitler presentó un modelo simplificado del desarrollo de la componente electromagnética, posteriormente modificado por J. Matthews. Aunque no reemplaza simulaciones detalladas de chubascos, el modelo Heitler-Matthews permite describir correctamente características importantes de los mismos. En el modelo de Heitler se describe la componente electromagnética como ilustra la figura 1.5;



luego de viajar una distancia $d = \lambda_r \ln 2$ (donde λ_r es la longitud de radiación en el aire) un electrón produce un fotón que al viajar la misma distancia produce un par e^-e^+ . Luego de n divisiones, en la cascada hay un total de $N = 2^n$ partículas; la división se detiene cuando las partículas alcanzan una energía crítica ξ_c^e .

Figura 1.5: Esquema de un chubasco puramente electromagnético; las líneas rectas representan electrones y las curvas representan fotones.

A partir de lo anterior pueden deducirse características de un chubasco iniciado por un fotón:

$$E_0 = \xi_c^e N_{\max}, \quad (1.12)$$

$$X_{\max}^\gamma = n_c \lambda \ln 2 = \lambda \ln[E_0/\xi_c^e], \quad (1.13)$$

donde n_c es el número de longitudes d necesarias para que la energía por partícula se reduzca a ξ_c^e , donde $N = N_{\max} = 2^{n_c}$. Se observa que el número de partículas en el máximo aumenta linealmente con la energía inicial y que la profundidad aumenta con la energía de manera logarítmica. Los chubascos iniciados por hadrones se describen similarmente, como se ilustra en la figura 1.6. Se consideran capas de atmósfera de altura $\lambda_I \ln 2$ donde λ_I es la longitud de interacción. Luego de atravesar una capa, un hadrón interactúa produciendo partes iguales de piones cargados y neutros; N_{π^\pm} cargados y $N_{\pi^0} = \frac{1}{2}N_{\pi^\pm}$ neutros. Los piones cargados pueden repetir el proceso hasta alcanzar una energía crítica ξ_c^π , entonces se asume su decaimiento.

Luego de n capas, la energía por pion cargado es

$$E_\pi = \frac{E_0}{\left(\frac{3}{2}N_{\pi^\pm}\right)^n}, \quad (1.14)$$

de manera que el número de interacciones n_c necesarias para que la energía por pion alcance el valor crítico es

$$n_c = \frac{\ln [E_0/\xi_c^\pi]}{\ln \left[\frac{3}{2}N_{\pi^\pm}\right]}. \quad (1.15)$$

Considerando un chubasco iniciado por un protón, con componentes electromagnética y hadrónica, y tomando en cuenta el decaimiento de todos los piones en muones ($N_{\pi^\pm}^{n_c} = N_\mu$) la energía total es

$$E_0 = \xi_c^e N_{\max} + \xi_c^\pi N_\mu. \quad (1.16)$$

El modelo de Heitler sobreestima la razón de electrones a fotones, de manera que se introduce un factor de corrección $g = 10$ tal que $N_e = N/g$. Con esta corrección la ecuación (1.16) se reescribe como

$$E_0 = g\xi_c^e \left(N_e + \frac{\xi_c^\pi}{g\xi_c^e} N_\mu \right), \quad (1.17)$$

lo que indica que la energía inicial puede calcularse si se miden el número de electrones y de muones. Cabe mencionar que esta expresión es independiente de el tipo de partícula primaria. Asimismo se puede estimar la profundidad del máximo X_{\max}^p tomando en cuenta que el protón primario interactúa a una profundidad $X_0 = \lambda_I \ln 2$ como

$$X_{\max}^p = X_0 + \lambda_r \ln \left[\frac{E_0}{3N_{\pi^\pm}\xi_c^e} \right]. \quad (1.18)$$

El segundo término corresponde a la profundidad del máximo de la componente electromagnética de la ecuación (1.13), cuya energía inicial es $E_0/3N_{\pi^\pm}$. En las ecuaciones (1.17) y (1.18) se observa que la dependencia del número de partículas y la profundidad del máximo con la energía inicial es lineal y logarítmica, respectivamente, tal como en (1.12) y (1.13). En general los valores calculados con la ecuación (1.18) son bastante bajos comparados con resultados de simulaciones; esto debido a que sólo se toma en cuenta la primera generación de partículas de la componente electromagnética. Por otro lado, el número de muones en el

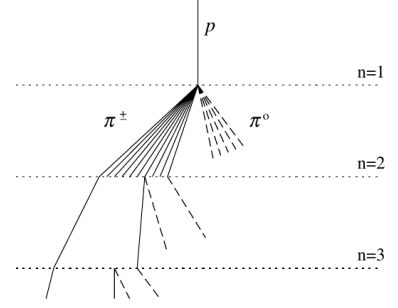


Figura 1.6: Esquema de un chubasco producido por un protón; las líneas sólidas representan piones cargados mientras las líneas cortadas representan piones neutros.

chubasco puede expresarse en función de la energía como

$$N_\mu = \left(\frac{E_0}{\xi_c^\pi} \right)^\beta, \text{ donde } \beta = \frac{\ln[N_{\pi^\pm}]}{\ln[\frac{3}{2}N_{\pi^\pm}]} \quad (1.19)$$

Para describir chubascos producidos por un núcleo A , en el modelo Heitler-Matthews se utiliza el modelo de superposición; se trata el núcleo como A protones iniciando chubascos individualmente. cada uno con una porción igual de la energía inicial del núcleo E_0 , es decir E_0/A . Las características de éstos chubascos pueden obtenerse sustituyendo la energía inicial en las ecuaciones para protones, a la vez que se expresan en términos de las cantidades correspondientes a un chubasco producido por un protón de energía E_0 , por ejemplo el número de muones y la profundidad del máximo puede expresarse como

$$N_\mu^A = N_\mu^p A^{\beta-1}, \quad (1.20)$$

$$X_{\max}^A = X_{\max}^p - \lambda_r \ln A. \quad (1.21)$$

Adicionalmente, Matthews presenta el modelo tomando en cuenta la inelasticidad de las interacciones; como resultado de una interacción se produce una partícula principal que se lleva la mayor parte de la energía, de manera que hay menos energía disponible para la producción de las múltiples partículas restantes. La inelasticidad se introduce con un parámetro κ representando la porción de la energía inicial que se invierte en la producción de piones. Todas las expresiones anteriores corresponden a un valor $\kappa = 1$.

1.3.3. Métodos de observación

Existen distintos tipos de experimentos para observar chubascos atmosféricos, la técnica utilizada depende principalmente de la energía del rayo cósmico incidente; a energías > 50 TeV pueden detectarse partículas secundarias directamente a nivel del suelo, mientras que a energías \sim TeV pueden observarse recolectando la radiación producida en las interacciones de las partículas.

Los experimentos pueden ser de *radiación de Cherenkov*, que detectan radiación producida por una partícula cargada que se mueve a través de un medio más rápido que la velocidad de la luz en ese medio; y de *fluorescencia*, que colectan la luz emitida por las moléculas de nitrógeno excitadas en el chubasco, este método permite reconstruir el desarrollo longitudinal del mismo. Existen también observatorios híbridos, como el *Telescope Array* (TA) y el *Pierre Auger Observatory* (PAO); estos utilizan la técnica de fluorescencia para observar el desarrollo del chubasco y además detectan partículas de alta energía que alcanzan el nivel del suelo.

1.4. Estado del conocimiento

En la actualidad, los RC de ultraalta energía (UHECR, $E > 10^{18}$ eV) siguen considerándose un enigma en términos de su composición y origen. Debido a su bajo flujo, éstos se estudian indirectamente a partir de mediciones de los chubascos atmosféricos que producen. Experimentos como TA y PAO miden observables de los chubascos como X_{max} , X_{max}^μ y N_μ , magnitudes que son sensibles a la energía y la masa de la partícula primaria, y por tanto pueden aportar al espectro de RC y dar información sobre la composición del flujo de los UHECR. Con ayuda de programas de simulación de chubascos atmosféricos, como CORSIKA, CONEX y AIRES, se ha progresado en esta dirección.

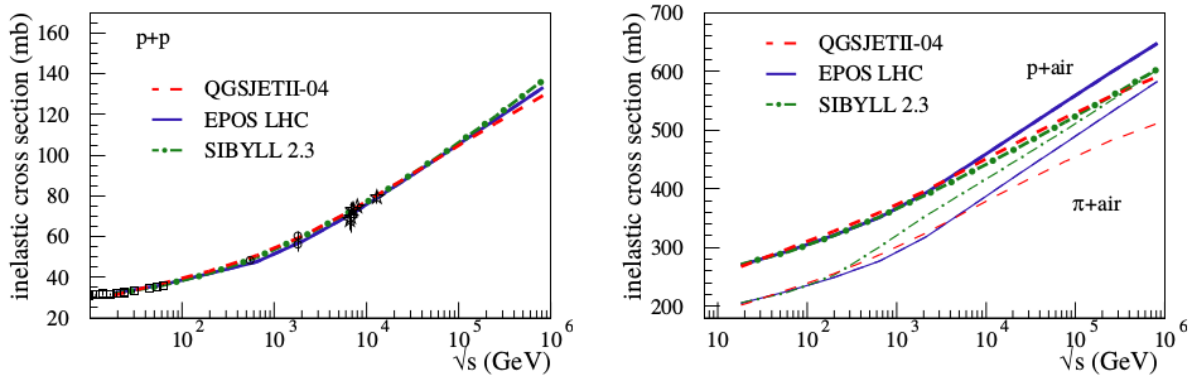


Figura 1.7: Sección eficaz inelástica para interacciones p-p (izquierda) e interacciones p-aire y π -aire (derecha) calculadas con tres modelos hadrónicos [11].

Dichos programas utilizan modelos de interacciones hadrónicas, que son mayoritariamente fenomenológicos, consecuentemente el estudio de los UHECR está estrechamente vinculado con la investigación experimental de colisiones hadrónicas de alta energía en aceleradores de partículas. Los parámetros de las interacciones que afectan el desarrollo de los chubascos atmosféricos son la sección eficaz, la multiplicidad y la elasticidad; se han comparado diferentes modelos (Sibyll 2.3, EPOS LHC y QGSJETII-04) observando que coinciden muy bien para interacciones $p - p$, pero difieren para interacciones $p - A$ y $\pi - A$ [11].

La interpretación de las mediciones observacionales para dilucidar la composición de los UHECR es todavía un problema, esto es debido particularmente a que los modelos de interacciones hadrónicas aún difieren entre sí y ninguno de ellos puede describir a cabalidad los datos. La interpretación de los datos del TA se inclina por una composición de núcleos ligeros [12], mientras que datos del PAO indican que la composición se vuelve más pesada a mayores energías. Sobre esto último, se realizó un ajuste simulando chubascos iniciados por una mezcla de partículas primarias (p, He, N y Fe) que resultó en buena concordancia con los datos de X_{max} [13]. Sin embargo, la interpretación está sujeta al modelo utilizado para

las simulaciones.

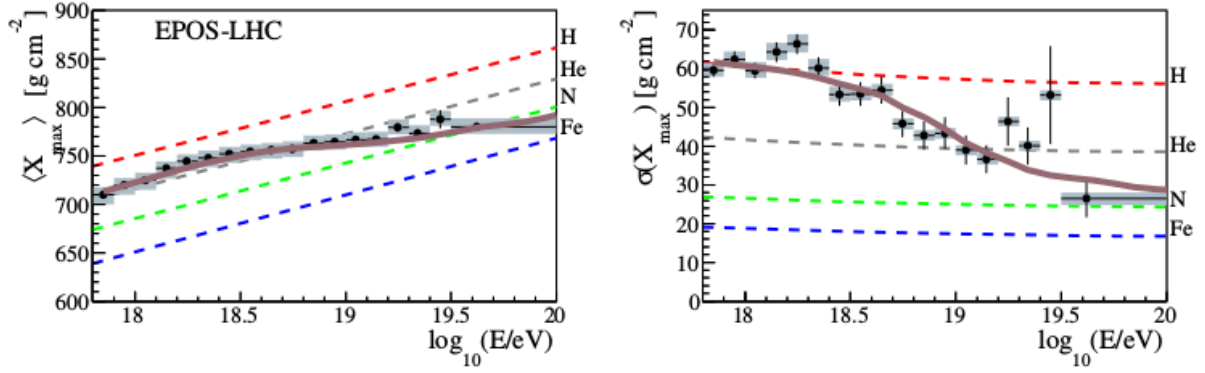


Figura 1.8: X_{max} promedio (izquierda) y desviación estándar (derecha) asumiendo una composición mixta (línea sólida) [13].

Se han considerado cambios en el tratamiento de ciertos aspectos físicos en los modelos [14] con los cuales se mejora la simulación de X_{max} y X_{max}^μ comparándolo con los datos de PAO. También se ha presentado una discusión sobre N_μ , ya que el número de muones predicho por simulaciones es significativamente menor que el observado; se puso a prueba la hipótesis de una composición mixta de los UHECR estudiando su impacto sobre N_μ , reduciendo la diferencia entre las simulaciones y las observaciones a una constante [15].

CC: estado del conocimiento de las distribuciones laterales de electrones y muones

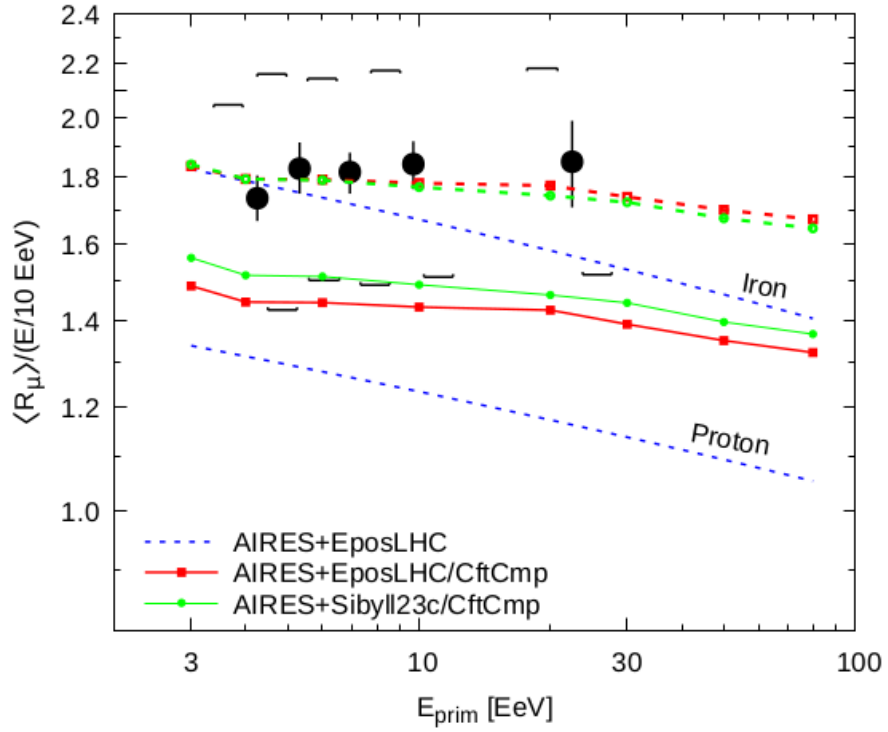


Figura 1.9: Las líneas sólidas verde y roja corresponden a la estimación del número de muones utilizando el sistema AIRES con diferentes modelos hadrónicos. Se observa que al desplazarlas una constante éstas tienen buena concordancia con los datos experimentales (círculos negros) [15].

Capítulo 2

Planteamiento del problema

2.1. Objetivos

Objetivo general

Estudiar el efecto de una composición primaria mixta de los UHECR en la distribución lateral de electrones y muones, con el fin de observar si la composición primaria que se ha obtenido por la colaboración Pierre Auger, a partir de mediciones de la profundidad de máximo y el número de muones, es consistente con otras observables de los chubascos.

Objetivos específicos

1. Verificar el efecto de una composición mixta de los UHECR en las observables X_{\max} y σX_{\max} realizando simulaciones de chubascos atmosféricos con el sistema AIRES y comparando con resultados publicados por la colaboración Pierre Auger para validar dichas simulaciones.
2. Analizar las distribuciones laterales de electrones y muones en chubascos producidos por rayos cósmicos de composición mixta, en contraposición con chubascos producidos únicamente por protones o núcleos de hierro.
3. Examinar las discrepancias entre las predicciones de las distribuciones laterales realizadas con los diferentes modelos hadrónicos de altas energías disponibles en AIRES, con el propósito de concluir si el efecto de la composición es sensible a particularidades de las interacciones hadrónicas.
4. Comparar los resultados de las distribuciones laterales obtenidas de las simulaciones con los respectivos datos tomados por el Observatorio Pierre Auger.

2.2. Preguntas de investigación

A partir de datos experimentales del PAO se ha intentado deducir la composición de los rayos cósmicos de las más altas energías, para ello se han realizado ajustes a observables de chubascos atmosféricos tales como la profundidad del máximo y sus fluctuaciones, y el número de muones a nivel del suelo, sin embargo los resultados no son concluyentes. En esta investigación se pretende analizar la relación de la composición con otras observables: la distribución lateral de electrones y la distribución lateral de muones.

Para ello se plantean las siguientes interrogantes: ¿cómo afecta la composición del flujo de UHECR a la distribución lateral de electrones y de muones? ¿la distribución lateral de electrones y muones obtenida en simulaciones es sensible al modelo de interacciones hadrónicas utilizado? ¿los resultados de la distribución lateral apoyan la hipótesis de una composición primaria mixta? y ¿la composición mixta deducida a partir de otras observables es congruente con los resultados y mediciones de la distribución lateral?

2.3. Justificación

Los rayos cósmicos de ultraalta energía se estudian mediante observaciones y simulaciones de las cascadas de partículas que producen en la atmósfera. Actualmente existen discrepancias entre las simulaciones realizadas con diferentes modelos de interacciones hadrónicas, así como entre predicciones de simulaciones y resultados observacionales. Debido a tales desacuerdos no es posible hacer coincidir simulaciones y observaciones en términos de una única composición de los UHECR.

Las magnitudes de un chubasco atmosférico con mayor dependencia de la masa del rayo cósmico primario son la profundidad del máximo y sus fluctuaciones, la profundidad de la máxima producción de muones y el número de muones a nivel del suelo. Tomando en cuenta las mediciones de dichos observables, la colaboración Pierre Auger ha propuesto una composición primaria mixta de los rayos cósmicos.

Esta investigación pretende estudiar los efectos de la composición de los UHECR en diferentes observables del desarrollo de chubascos atmosféricos mediante simulaciones, utilizando distintos modelos hadrónicos de altas energías. De esta manera se logrará una mejor comprensión del comportamiento de las distribuciones laterales de electrones y muones en relación a la composición del flujo de rayos cósmicos primarios, de modo que al comparar las simulaciones con los datos observacionales pueda apoyarse o contradecirse la hipótesis de una composición mixta de los UHECR.

Asimismo, se tiene por objetivo analizar la sensibilidad de los resultados de las distribuciones laterales al modelo de interacción hadrónica. Dado que la tarea de reconciliar los resultados de las simulaciones ejecutadas con distintos modelos se ha mostrado difícil -debido a que las magnitudes más utilizadas presentan una gran dependencia del modelo-, con este análisis se busca poder sugerir el empleo de estos observables en nuevos estudios acerca de la composición primaria de rayos cósmicos.

2.4. Viabilidad

Para las simulaciones se utilizará el sistema AIRES, éste es de acceso libre y está disponible en línea en el sitio <http://aires.fisica.unlp.edu.ar/>, así como toda su documentación; éste ya ha sido instalado en una computadora personal junto con los modelos hadrónicos disponibles, adicionalmente se han realizado ejecuciones de prueba para estimar el tiempo de simulación. Se estima que por cada modelo se empleen tres semanas para todas las simulaciones necesarias, haciendo un total de nueve semanas, siendo éste tiempo razonable dado el tiempo disponible para el desarrollo del proyecto.

Por otro lado, muchos datos del Observatorio Pierre Auger están publicados en su repositorio en su sitio web, incluyendo los resultados de las fracciones de núcleos primarios que conforman la composición mixta. Cabe mencionar que la asesora principal del proyecto, PhD. Karen Caballero, es parte de la colaboración Pierre Auger así como de la colaboración del *High Altitude Water Cherenkov Gamma-ray Observatory* (HAWC). Además es líder del grupo de investigación de astropartículas de la Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de Chiapas. De manera que su experiencia en esta área de investigación es la oportuna para la realización del presente proyecto.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Simulaciones de chubascos producidos por UHECR

Se estudiará el efecto de la composición primaria de los rayos cósmicos en la distribución lateral de electrones y muones. Para ello se realizarán tres grupos de simulaciones por cada modelo de interacciones hadrónicas: el primer grupo serán chubascos producidos por protones, el segundo chubascos producidos por hierro y el tercero chubascos producidos por una mezcla de protones, helio, nitrógeno y hierro. Cada grupo consistirá en aproximadamente 2400 chubascos con ultraaltas energías, debido a que actualmente el problema de la composición se encuentra en esta región del espectro.

3.1.1. Características de los chubascos

Se simularán chubascos producidos por rayos cósmicos de energías entre $10^{17,256}$ y $10^{19,626}$ eV, en la ubicación de Malargue en Mendoza, Argentina -donde se encuentra una de las estaciones del PAO-. Se considerarán direcciones de incidencia con ángulo zenital entre 0° y 70° y ángulo azimutal distribuido isotrópicamente entre 0° y 360° . Se utilizarán tres modelos de interacciones hadrónicas de altas energías; Sibyll 2.3c, EPOS-LHC y QGSJETII-04. Los tres se han destinado a este tipo de simulaciones anteriormente, y son precisamente dichos modelos los que muestran discrepancias en la composición de los UHECR basada en la profundidad X_{\max} .

En el rango de energías mencionado, se harán simulaciones de chubascos producidos únicamente por protones, producidos únicamente por núcleos de hierro y finalmente producidos por la composición primaria mixta, como propone la colaboración Pierre Auger [13], mostrada en la Fig. 3.1.

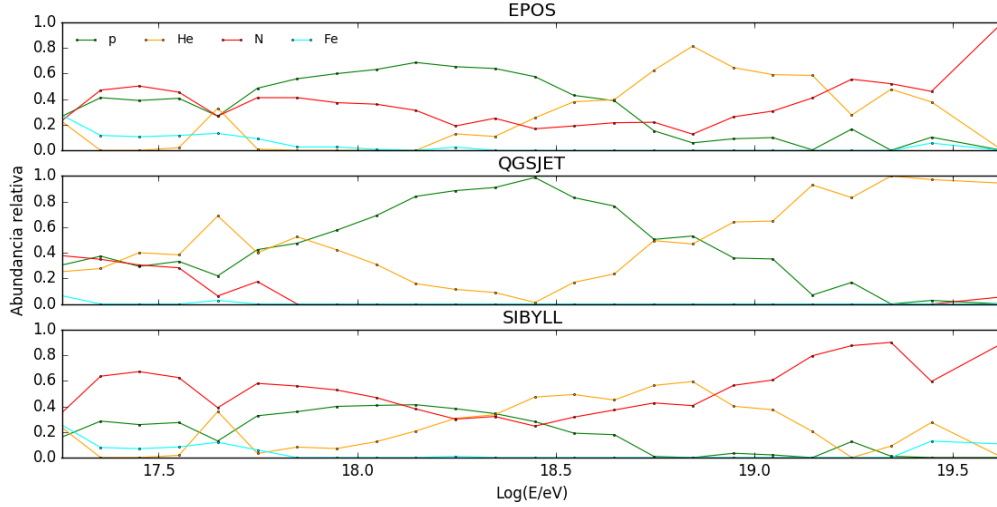


Figura 3.1: Composición en función de la energía, resultado de ajustes con los datos de X_{\max} del Observatorio Pierre Auger realizados con tres modelos de interacciones hadrónicas de altas energías.

3.2. Software para simulaciones de altas energías

El sistema AIRES (AIR shower Extended Simulations) es un conjunto de programas para simular chubascos atmosféricos extendidos desarrollado por el Departamento de Física de la Universidad Nacional de La Plata y el Instituto de Física La Plata. AIRES está diseñado de manera modular para facilitar el intercambio entre los modelos de distintos aspectos de las simulaciones. El código completo de AIRES incluye los paquetes de interacciones hadrónicas EPOS 1.99, EPOS LHC, QGSJET-II-03, QGSJET-II-04, SIBYLL 2.1, SIBYLL 2.3, y SIBYLL 2.3c, así como las rutinas para evaluar el campo geomagnético. En síntesis, el sistema AIRES consiste en:

- Los programas de simulación principales (AiresEPLHC, AiresEP199, AiresQIIr03, AiresQIIr04, AiresS21, AiresS23, AiresS23c), cada uno conteniendo la interfaz para un paquete de interacciones hadrónicas.
- El programa resumen (AiresSry), diseñado para procesar parte de los datos generados por los programas de simulación.
- El programa de conversión de formato IDF (*internal dump file*) a ADF (*portable dump file*) (AiresIDF2ADF).
- Una librería de auxiliares para procesar los archivos de salida de los programas de simulación (libAires.a)
- El *AIRES runner system*, para facilitar el trabajo con AIRES en ambientes UNIX.

3.2.1. Sistema de coordenadas

El sistema de coordenadas de AIRES es un sistema cartesiano con el origen al nivel del mar en la ubicación proporcionada por el usuario, el plano xy se posiciona horizontalmente; el eje x apunta hacia el norte magnético, el eje y hacia el Este y el eje z hacia arriba. En la figura 3.2 se muestra una representación esquemática del sistema coordenado, incluyendo el nivel del suelo y el nivel de inyección, éstos se refieren a superficies esféricas concéntricas con la superficie del nivel del mar. El eje del chubasco se define como una línea recta que pasa por la intersección del nivel del suelo con el eje z , con un ángulo cenital Θ y un ángulo azimutal Φ .

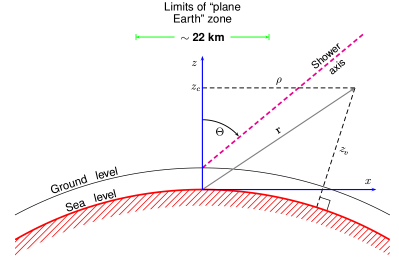


Figura 3.2: Esquema del sistema de coordenadas utilizado en AIRES.

3.2.2. Atmósfera

AIRES utiliza el modelo basado en datos experimentales *US standard atmosphere* como modelo predeterminado. En este modelo, la composición de la atmósfera es 78,47 % N, 21,05 % O, 0,47 % Ar y 0,03 % otros elementos. El perfil de densidad isotérmico de la forma

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-gMh/RT},$$

se adapta a los valores de la *US standard atmosphere*. En AIRES el modelo se extiende hasta una altura $h_{max} \sim 420$ km, después de la cual se considera que la densidad es cero. Se utiliza una parametrización de la profundidad atmosférica vertical X_v ; dividiendo la atmósfera en L capas, $X_v(h)$ se define por

$$X_v(h) = \begin{cases} a_l + b_l e^{-h/c_l} & h_l \leq h < h_{l+1} \\ a_L - b_L(h/c_L) & h_L \leq h < h_{L+1} \\ 0 & h \geq h_{L+1}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Los coeficientes usados en AIRES, que corresponden a un modelo con $L = 5$, se muestran en la tabla. La profundidad atmosférica inclinada (*slant*) X_s depende del ángulo cenital y cuando no se toma en cuenta la curvatura de la Tierra, se relaciona con X_v de la siguiente manera:

$$X_s(h) = \frac{X_v(h)}{\cos(\Theta)}. \quad (3.2)$$

3.2.3. Campo geomagnético

El campo magnético de la Tierra \mathbf{B} se define por su intensidad F ; su inclinación I , que se define como el ángulo entre el plano horizontal y el vector \mathbf{B} ; y su declinación D , que se define como el ángulo entre la componente horizontal (H) de \mathbf{B} y el norte geográfico. Las componentes cartesianas de \mathbf{B} con respecto al sistema coordenado de AIRES son

$$B_x = F \cos I, \quad (3.3)$$

$$B_y = 0, \quad (3.4)$$

$$B_z = -F \sin I. \quad (3.5)$$

Hay dos maneras de especificar el campo geomagnético en AIRES; la primera es ingresando manualmente los valores de F , I y D , y la segunda es ingresando las coordenadas geográficas del lugar y la fecha para evaluar el campo magnético utilizando el modelo *International Geomagnetic Reference Field* (IGRF).

3.2.4. Estructura de los programas de simulación

Un chubasco se origina cuando un rayo cósmico interactúa con la atmósfera terrestre, donde se producen partículas secundarias que se propagan y pueden interactuar de manera similar produciendo más partículas. Eventualmente la multiplicidad de partículas llega a un máximo, después del cuál el chubasco empieza a atenuarse. En AIRES todo este proceso se simula de la siguiente manera [16]:

- Se definen arreglos vacíos destinados a almacenar los datos de las características de las partículas.
- Las partículas pueden moverse por la atmósfera en un volumen delimitado por la superficie de inyección, el suelo y planos verticales que delimitan la región de interés.
- La primera acción es añadir a un arreglo la entrada correspondiente a la partícula inicial, ésta se localiza inicialmente en la superficie de inyección y su dirección de movimiento define el eje del chubasco.
- Las entradas respectivas a cada partícula se actualizan primero evaluando las probabilidades de todas las interacciones posibles.
- Se selecciona entre las posibles interacciones utilizando un método estocástico.
- Se procesa la interacción; la partícula se mueve una cierta distancia dependiente de la interacción seleccionada y luego se generan los productos de dicha interacción. Se agregan a los arreglos las entradas de las nuevas partículas creadas.

- En el caso de las partículas cargadas, se modifica la energía para tomar en cuenta pérdidas por ionización.
- Las entradas de partículas pueden removerse (1) si su energía es menor que cierto límite, (2) si alcanza el nivel del suelo, (3) si alcanza la superficie de inyección hacia arriba y (4) si horizontalmente sale de la región de interés.
- Se verifica que todas las entradas de partículas de los arreglos se hayan procesado; cuando se hayan procesado se completa la simulación del chubasco.

3.2.5. Muestreo de partículas

Para chubascos iniciados por partículas de ultraalta energía, el número de partículas secundarias producidas es tan grande que la tarea computacional de propagarlas todas es imposible; para poder realizar las simulaciones se emplea un mecanismo de muestreo que permite propagar únicamente una fracción representativa del total de partículas secundarias. AIRES utiliza una extensión del *Hillas thinning algorithm* [17].

Considerando un proceso donde una partícula primaria A genera un conjunto de n secundarios, éstos son propagados con cierta probabilidad P_i . El algoritmo de Hillas consiste en establecer una constante E_{th} llamada *thinning energy*; para incorporar a los secundarios B_i en la propagación se compara la energía de la partícula primaria E_A con E_{th} : si $E_A \geq E_{th}$, entonces los secundarios se aceptan con una probabilidad

$$P_i = \begin{cases} 1 & \text{si } E_{B_i} \geq E_{th} \\ \frac{E_{B_i}}{E_{th}} & \text{si } E_{B_i} < E_{th}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Por el contrario, si $E_A < E_{th}$ sólo una partícula secundaria se conserva, lo que asegura que una vez se alcance E_{th} el número de partículas no se incrementa. El algoritmo utilizado por AIRES es una extensión de lo descrito anteriormente, pero éste incluye características adicionales para disminuir las fluctuaciones estadísticas.

3.3. Análisis de resultados de simulaciones

En primer lugar se analizarán los resultados de las simulaciones con composición mixta tomando en consideración las observables X_{\max} y σX_{\max} . Estos resultados se compararán estadísticamente con los publicados por el PAO, tanto de simulaciones con el programa CORSIKA como los datos experimentales para validar las ejecuciones realizadas con AIRES.

Una vez validadas las simulaciones con observables ya estudiadas, se van a graficar y comparar los resultados de las distribuciones laterales de electrones y muones de cada grupo de simulaciones. En la misma gráfica se estudiarán las distribuciones que resulten de las diferentes composiciones primarias consideradas, esto con el fin de observar claramente los efectos de la composición sobre las distribuciones laterales.

Posteriormente se realizarán comparaciones entre los resultados de distribuciones laterales de los tres modelos de interacción hadrónica, ésto para visualizar si el efecto de la composición observado es dependiente de características particulares de dichas interacciones. Asimismo se evaluará

Capítulo 4

Cronograma de actividades

Se presenta el cronograma de actividades a seguir. A continuación se describen las tareas a realizar en el desarrollo de la investigación:

Semana	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15
Tarea 1	■														
Tarea 2		■	■	■											
Tarea 3					■										
Tarea 4						■									
Tarea 5					■	■	■								
Tarea 6								■							
Tarea 7									■	■					
Tarea 8								■	■	■					
Tarea 9											■				
Tarea 10												■			
Tarea 11												■	■		
Tarea 12													■	■	
Tarea 13										■	■	■	■	■	■

- **Tarea 01:** redactar los archivos de entrada para cada grupo de simulaciones.
- **Tarea 02:** simular chubascos producidos por protones, hierro y mezcla con el modelo Sibyll 2.3c.
- **Tarea 03:** validar las simulaciones de Sibyll reproduciendo resultados de X_{\max} .
- **Tarea 04:** analizar los resultados de las distribuciones laterales obtenidas con Sibyll.
- **Tarea 05:** simular chubascos producidos por protones, hierro y mezcla con el modelo EPOS-LHC.
- **Tarea 06:** validar las simulaciones de EPOS-LHC reproduciendo resultados de X_{\max} .
- **Tarea 07:** analizar los resultados de las distribuciones laterales obtenidas con EPOS-LHC.

- **Tarea 08:** simular chubascos producidos por protones, hierro y mezcla con el modelo QGSJETII-04.
- **Tarea 09:** validar las simulaciones de QGSJETII-04 reproduciendo resultados de X_{\max} .
- **Tarea 10:** analizar los resultados de las distribuciones laterales obtenidas con QGSJETII-04.
- **Tarea 11:** comparar resultados de los tres modelos.
- **Tarea 12:** comparar los resultados de las simulaciones con composición mixta con datos experimentales.
- **Tarea 13:** redactar informe final.

Referencias

- ¹T. K. Gaisser, *Cosmic Rays and Particle Physics* (1990).
- ²M. Massip Mellado, *Los rayos cósmicos: Las energías más extremas del universo* (2016).
- ³L. I. Dorman, *Cosmic rays in the earth's atmosphere and underground* (2004).
- ⁴A. Bahena y W. Bietenholz, “Ículas Más Poderosas”, (2013).
- ⁵A. De Angelis y M. J. Martins Pimenta, *Introduction to particle and astroparticle physics: Questions to the universe* (2015).
- ⁶T. Sjöstrand, “Status of fragmentation models”, *International Journal of Modern Physics* **3**, 751-823 (1988).
- ⁷E. J. Ahn, R. Engel, T. K. Gaisser, P. Lipari y T. Stanev, “Cosmic ray interaction event generator SIBYLL 2.1”, *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology* **80**, 34 (2009).
- ⁸S. Ostapchenko, “Monte Carlo treatment of hadronic interactions in enhanced Pomeron scheme: QGSJET-II model”, *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology* **83**, 1-36 (2011).
- ⁹T. Pierog, I. Karpenko, J. M. Katzy, E. Yatsenko y K. Werner, “EPOS LHC: Test of collective hadronization with data measured at the CERN Large Hadron Collider”, *Physical Review C - Nuclear Physics* **92**, 1-15 (2015).
- ¹⁰J. Matthews, “A Heitler model of extensive air showers”, *Astroparticle Physics* **22**, 387-397 (2005).
- ¹¹T. Pierog, “Review of Model Predictions for Extensive Air Showers”, en *Proceedings of 2016 international conference on ultra-high energy cosmic rays (uhecr2016)* (2018).
- ¹²W. Hanlon, “Measurements of UHECR Mass Composition by Telescope Array”, (2018).
- ¹³P. A. Collaboration, “Combined fit of spectrum and composition data as measured by the Pierre Auger Observatory”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 21 (2017).
- ¹⁴S. Ostapchenko, “High energy cosmic ray interactions and UHECR composition problem”, *EPJ Web of Conferences* **210** (2019) 10.1051/epjconf/201921002001.
- ¹⁵S. J. Sciutto, *Air showers, hadronic models, and muon production*, inf. téc. (2019).
- ¹⁶S. J. Sciutto, “Aires A system for air shower simulations 2.6.0”, 1-250 (2019).
- ¹⁷M. Koba, “A thinning method using weight limitation for air-shower simulations”, *Astroparticle Physics* **15**, 259-273 (2001).