邯郸农业高等专科学校学报 1998 年 第 15 卷 第 1 期 第 40—41 页
JOURNAL OF HANDAN AGRICULTURAL COLLEGE 1998 15(1):40—41

"常数变易法"来历的探讨

崔士襄

（邯郸农业高等专科学校，河北永年 057150）

常数变易法是解线性微分方程行之有效的一种方法。它是拉格朗日十一年的研究成果，我们所用仅是他的结论，并无过程，因而初学者感到神秘、突然。为了打破学生对科研的神秘感和对洋人、古人的盲目崇拜，启发学生敢于动脑，善于动脑，解放思想，勇于创造，对此方法的来历加一番剖析和探讨。

求线性方程：

$$y'+P(x)y=Q(x) \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

的解。（其中 P(x)、Q(x) 皆不为零，否则变量就可分离）

要解这样的方程，我们的知识基础是分离变量，于是我们只好用分离变量法来解决这样的问题。

因为 $y'+P(x)y=Q(x)$

亦即 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

所以 $dy+[P(x)y-Q(x)]dx=0$

由此看出：变量分离不开。怎么办？是否分离变量对方程(1)无效呢？我们并不灰心。我们想到解齐次方程：$y'=f(\frac{y}{x})$ 时令 $\frac{y}{x}=u$，作代换 $y=xu$，将方程 $y'=f(\frac{y}{x})$ 化为：

$$xdu=[f(u)-u]dx$$

这样变量就可分离了。仿此，我们将方程(1)化为变量可分离是有可能的。于是我们再向前推进一步。设 $y=xu$（其中 u 是 x 的函数）则 $y'=u+xu'$ 代入方程(1)得：

$$u+xu'+P(x)xu=Q(x)$$

即 $$xu'+[1+P(x)x]u=Q(x) \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

其变量仍不可分离。除非 $P(x)=-\frac{1}{x}$。这样在前进道路上又遇到了障碍。什么原因？我们仔细查找和分析。发现方程(2)不可分离变量的原因是 u 的系数在一般情况下不为零，因为自由项 Q(x) 已经假设它不为零。因此，我们应该集中力量寻找这样的代换：使方程(1)通过该代换可化为不含 u 的线性方程。这样看来上面失败的原因是我们机械地模仿了齐次方程的解法，只是把 u 的系数限制为 x，导致了方程(2)中只有 $P(x)=-\frac{1}{x}$ 时变量才可分离。

现在我们调整一下 u 的系数。把 u 的系数换为与 P(x) 有关的 x 的某一函数，这样问题可能迎刃而解。于是我们给代换 $y=xu$ 更大的灵活性，换 x 为其某一函数 v，即设 $y=vu$，然后，再根据需要确定其中的 v。由此我们有 $y'=v'u+vu'$，代入方程(1)，得：

$$v'u+vu'+P(x)vu=Q(x)$$

也就是：$$vu'+[v'+P(x)v]u=Q(x) \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

我们看到：当 v 是方程

$$v'+P(x)v=0 \quad \cdots\cdots \quad (4)$$

某一确定特解，如 $v=e^{-\int p(X)dx}$ 时，代换 $y=vu$ 就被确定了：$y=ue^{-\int P(x)dx}$

它将方程(1)化为关于 u 的变量可分离的方程：

$$e^{-\int p(X)dx}u'=Q(x) \quad \cdots\cdots \quad (5)$$

其通解为：$u=\int Q(x)e^{\int p(X)dx}dx+C$

换回原变量 y，最后得到方程(1)的通解为：

$$y=e^{-\int p(X)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(X)dx}dx+c\right]$$

这种方法称之为线性方程的变量代换法。它可归结为如下几步：

1)求方程 $v'+P(x)v=0$ 的一个特解：

$v=e^{-\int p(X)dx}$

2)对方程(1)作代换 $y=ue^{-\int p(X)dx}$ 得方程

$e^{-\int p(X)dx}u'=Q(x)$

3)求出此方程的通解：

$u=\int Q(X)e^{\int p(X)dx}dx+c$

代入 $y=ue^{-\int p(X)dx}$ 便得方程(1)的通解为：

$$y=e^{-\int p(X)dx}[\int Q(X)e^{\int p(X)dx}dx+c] \quad \cdots\cdots \quad (6)$$

对于任一线性方程：

$A(X)y'+B(x)y+C(x)=0 \quad \cdots\cdots \quad (1)^*$

(其中 $A(x)\neq 0$，而 $B(x)$、$C(x)$ 也假设不为零，否则，变量已可分离)。

将 $(1)^*$ 化为形如方程(1)的标准形式：即令 $\frac{B(x)}{A(x)}=P(x)$　$-\frac{C(x)}{A(x)}=Q(x)$ 这样就可直接利用公式(6)得其通解。

由以上分析我们得到这样的启发：

函数 $V=e^{-\int p(X)dx}$ 正满足对应于方程(1)的齐次方程：

$y'+P(x)y=0$

用分离变量法我们可得到此方程的通解为：

$y=ce^{-\int p(X)dx}$

其中C为任意常数

将 $y=ce^{-\int p(X)dx}$ 与 $y=ue^{-\int p(X)dx}$ 比较，我们看到常数c恰恰占据了u的位置。如果将常数c换为x的函数，$y=ce^{-\int p(X)dx}$ 变为：

$$y=c(x)e^{-\int p(X)dx} \quad \cdots\cdots \quad (7)$$

现在我们设方程(1)有形如(7)的解。将(7)代入方程(1)，得到与方程 $e^{-\int p(X)dx}u'=Q(x)$ 相似的关于 $c(x)$ 的变量可分离的方程。同前，我们求得其通解为：

$$c(x)=\int Q(x)e^{\int p(X)dx}dx+C_1$$

代入(7)我们同样得到方程(1)的通解为：

$$y=e^{-\int p(X)dx}[\int Q(X)e^{\int p(X)dx}dx+C_1]$$

(其中 C_1 为任意常数)

这样我们得到了解线性微分方程(1)的又一种方法——常数变易法。它的步骤可归结为：

1)求对应于方程(1)的齐次方程：$y'+P(x)y=0$ 的通解：$y=ce^{-\int p(X)dx}$

2)将通解中的常数c换为x的函数 $c(x)$（变易常数），设方程(1)有通解 $y=c(x)\cdot e^{-\int p(X)dx}$

3)将 $y=c(x)e^{-\int p(X)dx}$ 代入方程(1)，必可解出 $c(x)$ 来。

4)将解出的 $c(x)$ 代入 $y=c(x)e^{-\int p(X)dx}$ 最后可求得原方程的通解为：

$y=e^{-\int p(X)dx}[\int Q(X)e^{\int p(X)dx}dx+C_1]$(其中 C_1 是任意常数)

我们按照这样的步聚就可以把线性微分方程解出来。用它来解一阶非齐次线性微分方程和变量代换法并无原则区别。但将它推广到解高阶线性微分方程时就显出了它的无比巨大的威力。它的优点是比变量代换法容易掌握，所以一般教科书中都愿意采用它。

(上接第43页)5.3 **学会归纳**

在学习一个阶段后，可以让学生自己总结归纳一些语言现象。例如，在阶段复习，全班分工，学生可根据自己的兴趣和所长，总结归纳某一个语言项目。教师可提出一些参考书或其中的一些章节供他们阅读，并设计练习让他们做。主要目的在于培养他们对语言的敏感及观察能力，也初步培养翻阅参考书的习惯。

参考文献

萧天柱《教师素质与人才质量漫谈》《课程　教材　教法》1998年第8期

胡文仲　主编《基础英语教学论文集》1985年外语教学与研究出版社1985年

《大学英语教学通讯》1998年第4期

李庭芗 主编《英语教学法》1983年 高等教育出版社

作者简介：张秀仿　1970年9月18日出生　本科　职称　英语助教