Taller Clases 4, 5, 6.

a.) Seccion 2.1.6

3.) a) $G_\Delta = \{ I, \{R_i\}, \{R_j\}, \{X_K\} \}$ con la operacion concatenacion.

I	R_i	R_j	X_A	X_B	X_C
R_i	R_j	I	X_C	X_A	X_B
R_j	I	R_i	X_B	X_C	X_A
X_A	X_B	X_C	I	R_i	R_j
X_B	X_C	X_A	R_j	I	R_j
X_C	X_A	X_B	R_i	R_i	I

b) La operacion con concatenacion es cerrada.

$$R_i \square (R_j \square X_K) = (R_i \square R_j) \square X_K$$
$$R_i \square X_K = I \square X_K$$
$$X_K = X_K$$

existe un neutro llamado I

Para R_i su inverso es R_j y viceversa y para X_K su inverso es X_K.

c) el triangulo tiene 3 angulos de rotacion que pueden ser en sentido horario o antihorario estos angulos son

$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$; estas rotaciones forman un ciclico

$H = \langle a \rangle$, $a^1 = \frac{2\pi}{3}$, $a^2 = \frac{4\pi}{3}$, $a^3 = \boxed{2\pi}$ elemento neutro y $a^0 = I$

Por tanto el orden es 3.

Las reflexiones posibles son X_A, X_B X_C

$H = \{ I, X_A \}$

$H = \langle a \rangle$; $a^0 = I$, $a^1 = X_A$, $a^2 = \boxed{I}$ elemento neutro

Por tanto es de orden 2.

d)

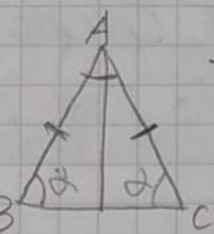
I	A	B	C	D	E
A	B	I	E	C	D
B	I	A	D	E	C
C	D	E	I	A	B
D	E	C	B	I	B
E	C	D	A	A	I

esta es la "tabla de multiplicar" bajo la multiplicacion de matrices. y tiene la misma estructura que G_Δ

$\otimes$	P_0	P_4	P_5	P_3	P_2	P_1
P_0	P_0	P_4	P_5	P_3	P_2	P_1
P_4	P_4	P_5	P_0	P_1	P_3	P_2
P_5	P_5	P_0	P_4	P_2	P_1	P_3
P_3	P_3	P_3	P_1	P_0	P_4	P_5
P_2	P_2	P_1	P_3	P_5	P_0	P_4
P_1	P_1	P_3	P_2	P_4	P_5	P_0

$\odot$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_5$
$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_5$
$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_2$
$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_3$
$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_1$
$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_0$
$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_4$

f) Para el isoceles



tiene simetia de reflexion en A no tiene simetria en la rotacion

el escaleno no tiene ningun tipo de simetria.

b) a) • $\overbrace{(a_1x^1 + a_3x^3)}^{P_1} + (b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3)$

$= (a_1+b_1)x^1 + b_2x^2 + (a_3+b_3)x^2$; por tanto es cerrado en la suma ya que solo se suman los coeficientes que acompañen a un x^n (grado igual)

- $a_1x^1 + b_1x^1 = b_1x^1 + a_1x^1$; Conmutativo
- $P_1 + (P_2 + P_3) = (P_1 + P_2) + P_3$
- el Polinomio $0x^0 + 0x^1 + \dots + 0x^n$, elemento neutro
- $a_1x^1 + a_2x^2 - a_1x^1 - a_2x^2 = 0x^1 + 0x^2 = 0$
- $\alpha(a_1x^1 + a_2x^2) = \alpha a_1x^1 + \alpha a_2x^2 = b_1x^1 + b_2x^2$
- $\alpha(\beta(a_1x^1 + a_2x^2)) = (\alpha\beta)(a_1x^1 + a_2x^2)$
- $(\alpha + \beta)(a_1x^1 + a_2x^2) = \alpha(a_1x^1 + a_2x^2) + \beta(a_1x^1 + a_2x^2)$
- $\alpha((a_1x^1 + a_2x^2) + (b_1x^1 + b_2x^2)) = \alpha(a_1x^1 + a_2x^2) + \alpha(b_1x^1 + b_2x^2)$
- $1(a_1x^1 + a_2x^2) = a_1x^1 + a_2x^2$

b) al ser a_i un numero entero; entonces existe el elemento simetrico y el nulo. cosa que no pasaria con el conjunto de naturales por ejemplo.

c) Cual es Subespacio Vectorial?

I. Si es Subespacio

$\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle \in$ a lo $\mathbb{P}_{n-1}$; no puede aumentar de grado; es cerrado

II. Un polinomio de grado par mas otro de grado par sigue dando un polinomio de grado par.

III. Siguen siendo polinomios normales.

IV. Polinomios con factor $ax-1$ no son porque no existe elemento simetrico

$a_0x^0 + b_0x^0 = (a_0+b_0)x^0$; el elemento simetrico hace que $b_0 = -a_0$; pero la condicion $ax-1$ hace que $a_0 = -1$ para todo polinomios; no existe un $-a_0 = 1$; eso y que no existe el nulo por la misma razon.

b) 6.) $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle \in V$; $\alpha, \beta, \gamma \in K$

a.) • $|a\rangle + |b\rangle = (a_0 + a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) + (b_0 + b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$

$= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)\hat{i} + (a_2+b_2)\hat{j} + (a_3+b_3)\hat{k} = c_0 + c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$

• $|a\rangle + |b\rangle = |b\rangle + |c\rangle$

$a_0 + a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} + b_0 + b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k} = b_0 + b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k} + a_0 + a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$(a_0+b_0) + (a_1+b_1)\hat{i} + (a_2+b_2)\hat{j} + (a_3+b_3)\hat{k} = (b_0+a_0) + (b_1+a_1)\hat{i} + (b_2+a_2)\hat{j} + (b_3+a_3)\hat{k}$

$c_0 + c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k} = c_0 + c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$

• $(a_0 + a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) + (b_0 + b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) + (c_0 + c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}) =$

$((a_0+b_0)+c_0) + ((a_1+b_1)+c_1)\hat{i} + ((a_2+b_2)+c_2)\hat{j} + ((a_3+b_3)+c_3)\hat{k} =$

$(a_0 + (b_0+c_0)) + (a_1 + (b_1+c_1))\hat{i} + (a_2+(b_2+c_2))\hat{j} + (a_3+(b_3+c_3))\hat{k}$

a.) $\bullet\ |a\rangle + |0\rangle = (a_0 + a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) + (0 + 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k})$

$= (a_0 + 0) + (a_1 + 0)\hat{i} + (a_2 + 0)\hat{j} + (a_3 + 0)\hat{k} = |a\rangle$

$\bullet\ (a_0 + a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) + (-a_0 + (-a_1)\hat{i} + (-a_2)\hat{j} + (-a_3)\hat{k} =$

$(a_0 - a_0) + (a_1 - a_1)\hat{i} + (a_2 - a_2)\hat{j} + (a_3 - a_3)\hat{k} = |0\rangle$

$\bullet\ \alpha|a\rangle = \alpha(a_0 + a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) = \alpha a_0 + \alpha a_1\hat{i} + \alpha a_2\hat{j} + \alpha a_3\hat{k}$

$= b_0 + b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$\bullet\ (\alpha + \beta)|a\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$

$((\alpha+\beta)a_0) + ((\alpha+\beta)a_1)\hat{i} + ((\alpha+\beta)a_2)\hat{j} + ((\alpha+\beta)a_3)\hat{k} = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$

$(\alpha a_0 + \alpha a_1\hat{i} + \alpha a_2\hat{j} + \alpha a_3\hat{k}) + (\beta a_0 + \beta a_1\hat{i} + \beta a_2\hat{j} + \beta a_3\hat{k}) = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$

$\bullet\ \alpha(\beta|a\rangle) = (\alpha\beta)|a\rangle$

$\alpha(\beta|a\rangle) = \alpha(\beta a_0) + (\alpha(\beta a_1))\hat{i} + (\alpha(\beta a_2))\hat{j} + (\alpha(\beta a_3))\hat{k}$

$\bullet\ \alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle$

$\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = (\alpha a_0 + \alpha a_1\hat{i} + \alpha a_2\hat{j} + \alpha a_3\hat{k}) + (\alpha b_0 + \alpha b_1\hat{i} + \alpha b_2\hat{j} + \alpha b_3\hat{k})$

$\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha(a_0 + b_0) + \alpha(a_1 + b_1)\hat{i} + \alpha(a_2 + b_2)\hat{j} + \alpha(a_3 + b_3)\hat{k}$

$\bullet\ 1|a\rangle = |a\rangle$

$1a_0 + 1a_1\hat{i} + 1a_2\hat{j} + 1a_3\hat{k} = |a\rangle$

b.) $|b\rangle \equiv (b^0, b) \quad |r\rangle \equiv (r^0, r)$

$|d\rangle \equiv |b\rangle \odot |r\rangle \Longleftrightarrow (d^0, d) = (b^0 r^0 - b \cdot r,\ r^0 b + b^0 r + b \times r)$

$|d\rangle = b^0 r^0 + b^0 r^1\hat{i} + b^0 r^2\hat{j} + b^0 r^3\hat{k} + b^1 r^0\hat{i} - b^1 r^1 + b^1 r^2\hat{k}$
$- b^1 r^3\hat{j} + b^2 r^0\hat{j} - b^2 r^1\hat{k} - b^2 r^2 + b^2 r^3\hat{i} + b^3 r^0\hat{k} + b^3 r^1\hat{j}$
$- b^3 r^2\hat{i} - b^3 r^3$

$|d\rangle = (b^0 r^0 - br,\ b^0 r + r^0 b + b \times r)$

c.) $|b\rangle \odot |r\rangle = a|q_0\rangle + S^{\alpha j}\delta^0_\alpha |q_j\rangle + A^{jki} b_j r_k |q_i\rangle$

$= a|q_0\rangle + (S^{\alpha j}\delta^0_\alpha + S^{j\alpha}\delta^0_\alpha)|q_j\rangle + (A^{jki} b_j r_k - A^{kji} b_j r_k)|q_i\rangle$

$|q_0\rangle = 0 \Rightarrow a|q_0\rangle = b^0 r^0 - b r$ I

II $S^{\alpha j}\delta^0_\alpha |q_j\rangle = S^{0j}|q_j\rangle = b^0 r^1 |q_1\rangle + b^0 r^2 |q_2\rangle + b^0 r^3 |q_3\rangle = b^0 r$

III $S^{j\alpha}\delta^0_\alpha |q_j\rangle = S^{j0}|q_j\rangle = b^j r^0 |q_j\rangle = r^0 b$

A^{jki} basicamente representa la parte ciclica de operador de levi-cita y A^{kji} la anticiclica.

por tanto.

$|b\rangle \odot |r\rangle = (b^0 r^0 - b r, b^0 r + r^0 b + b \times r)$

d.) a, S^{ij}, A^{jki}; estan expresados en el anterior

Ninguna de los anteriores

no se comporta ni como vector ni como pseudovector. bajo reflexion.

e.) (No le se)

F.) $|q_i\rangle \odot |q_j\rangle = |q_3\rangle$; si hago la multiplicacion de matrices se puede observar que por ejemplo

$|q_1\rangle \odot |q_2\rangle = |q_3\rangle$; como lo indica la tabla de esta manera se puede generar toda la tabla.

g.) • $\widetilde{\langle a|a\rangle} = |a\rangle^* \odot |a\rangle = (a^0 a^0 - a^* a, a^0 a^* + a^0 a + \cancel{a^* \times a})$

$\widetilde{\langle a|a\rangle} = (a^0 a^0 + a a) \geq 0$

• $\widetilde{\langle a|b\rangle} = \widetilde{\langle b|a\rangle}^*$

$(a^0 b^0 - a^* b, b^0 a^* + a^0 b + a^* \times b) = (b^0 a^0 - b^* a, a^0 b^* + b^0 a + b^* \times a)^*$

$(a^0 b^0 + ab, -b^0 a + a^0 b - a \times b) = (a^0 b^0 + ab, -a^0 b + b^0 a - b \times a)^*$

$(a^0 b^0 + ab, -b^0 a + a^0 b + b \times a) = (a^0 b^0 + ab, -b^0 a + ab + b \times a)$

• $\widetilde{\langle a|\alpha b + \beta c\rangle} = \alpha \widetilde{\langle a|b\rangle} + \beta \widetilde{\langle a|c\rangle}$

$|a\rangle^* \odot \alpha|b\rangle + |a\rangle^* \odot \beta|c\rangle = \alpha(|a\rangle^* \odot |b\rangle) + \beta(|a\rangle^* \odot |c\rangle)$

$\alpha(|a\rangle^* \odot |b\rangle) + \beta(|a\rangle^* \odot |c\rangle$

- $\widehat{\langle \alpha a + \beta b | c \rangle} = \alpha^* \widehat{\langle a | c \rangle} + \beta^* \widehat{\langle b | c \rangle}$

$\widehat{\langle \alpha a | c \rangle} + \widehat{\langle \beta b | c \rangle}$

$|\alpha a\rangle^* \odot |c\rangle + |\beta b\rangle^* \odot |c\rangle$

$\alpha^* (|a\rangle^* \odot |c\rangle) + \beta^* (|b\rangle^* \odot |c\rangle = \alpha^* \widehat{\langle a | c \rangle} + \beta^* \widehat{\langle b | c \rangle}$

- $\widehat{\langle a | 0 \rangle} = (a^0 0 - a0, a^0 0 + 0a + a \times 0) = 0$

h)

i) $n(|a\rangle) = \| |a\rangle \| = \sqrt{\langle a | a \rangle} = \sqrt{|a\rangle^* \odot |a\rangle}$

- $\| |a\rangle \| \geq 0$; en el inciso g) se probo que $|a\rangle^* \odot |a\rangle \geq 0$

Por tanto $\sqrt{|a\rangle^* \odot |a\rangle} \geq 0$

- $\| \alpha |a\rangle \| = |\alpha| \| |a\rangle \|$;

$\| \alpha |a\rangle \|^2 = |\alpha |a\rangle^* \odot |\alpha |a\rangle = (\alpha^2 a^0 a^0 - (\alpha a^* (\alpha a))$, demostrado en el g)

$\| \alpha |a\rangle \|^2 = (\alpha^2 (a^0)^2 + \alpha^* \alpha a^2) = (\alpha^2 (a^0)^2 + \alpha^2 a^2) = \alpha^2 ((a^0)^2 + aa)$

$\| \alpha |a\rangle \| = \alpha \sqrt{(a^0)^2 + aa} = |\alpha| \; \| |a\rangle \|$

- (Desigualdad triangular)

j) demuestre que $\overline{|a>} = \frac{|a>^*}{\| |a> \|^2}$

$|a> \odot \overline{|a>} = 1$

$|a> \odot \frac{|a>^*}{\| |a> \|^2}$

$\frac{1}{\| |a> \|^2} (|a> \odot |a>^*) = \frac{1}{\| |a> \|^2} (a^0 a^0 - a a^*, \cancel{a^0 a^*} + \cancel{a^0 a} + \cancel{a \times a^*})$

$= \frac{1}{\| |a> \|^2} ((a^0)^2 + a a)$ del ejercicio h) e i) sabemos que eso es $\| |a> \|^2$

$= 1$

k) • De la tabla de multiplicacion se observa que $\odot$ es cerrado.

• $(|q_2> \odot |q_3>) \odot |q_3> = |q_2> \odot (|q_3> \odot |q_3>) = -|q_2>$

• de la tabla de multiplicacion se ve que 1 es el elemento neutro.

• en el inciso j) se demostro el inverso

L) $|V'> = \overline{|a>} \odot |V> \odot |a>$

$|V'> = \frac{|a>^*}{\| |a> \|^2} \odot |V> \odot |a>$

$|V'> = \frac{(a^0, -a) \odot (V^0, V) \odot (a^0, a)}{a^0 + a^2)}$

$= \frac{(a^0 V^0 + a V, -\cancel{Va} + \cancel{a^0 V} + a \times V)}{a^0 + a^2} \odot (a^0, a)$

2,36 Ejercicios

5. Considere el espacio de las matrices complejas 2x2 hermiticas.

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = A^{+} = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix}$$

(a) Muestre que las matrices de pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ forman base para ese espacio vectorial

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ci \\ ci & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b-ci \\ b+ci & a-d \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a+d = f \\ a-d = g \end{matrix} \in \mathbb{R} \quad \hookrightarrow \begin{pmatrix} f & b-ci \\ b+ci & g \end{pmatrix} \Rightarrow A^{+i}_{j}$$

(b) compruebe que esa base es ortogonal bajo la definicion de producto interno $\langle a|b\rangle = Tr(A^* B)$

$$\langle \sigma_0|\sigma_1\rangle = Tr(\sigma_0^+, \sigma_1) = 0.$$

$$Tr(\sigma_0^+ \sigma_1) = Tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \sigma_0|\sigma_3\rangle = Tr(\sigma_0^+ \sigma_3) = 0.$$

$$Tr(\sigma_0^+ \sigma_3) = Tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\langle \sigma_0|\sigma_2\rangle = Tr(\sigma_0^+ \sigma_2) = 0.$$

$$Tr(\sigma_0^+ \sigma_2) = Tr\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\langle \sigma_1|\sigma_2\rangle = Tr(\sigma_1^+ \sigma_2)$$

$$Tr(\sigma_1^+ \sigma_2) = Tr\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 0.$$

$$\langle \sigma_1 | \sigma_3 \rangle = \mathrm{Tr}(\sigma_1^{+} \sigma_3) = 0$$

$$\mathrm{Tr}(\sigma_1^{+} \sigma_3) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \sigma_2 | \sigma_3 \rangle = \mathrm{Tr}(\sigma_2^{+} \sigma_3) = 0.$$

$$\mathrm{Tr}(\sigma_2^{+} \sigma_3) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \sigma_1 | \sigma_0 \rangle = \mathrm{Tr}(\sigma_1^{+} \sigma_0)$$

$$\mathrm{Tr}(\sigma_1^{+} \sigma_0) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\langle \sigma_2 | \sigma_0 \rangle = \mathrm{Tr}(\sigma_2^{+} \sigma_0) = 0$$

$$\mathrm{Tr}(\sigma_2^{+} \sigma_0) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0$$