Taller #2

$\phi = \phi(r) = \phi(x,y,z)$

2.a) $\nabla(\phi\psi) = (\phi\nabla)\psi + (\psi\nabla)\phi$ $\quad \psi = \psi(r) = \psi(x,y,z)$

$$[\nabla(\phi\psi)]^i = \partial^i(\phi\psi)e_i = [(\partial^i\phi)\psi + (\partial^i\psi)\phi]e_i$$

$$= [(\phi\partial^i)\psi + (\psi\partial^i)\phi]e_i$$

$$= (\phi\nabla\psi) + (\psi\nabla\phi)$$

d) $\nabla\cdot(\nabla\times a)$ ¿Que puede decir de $\nabla\times(\nabla\cdot a)$?

$\nabla\cdot(\nabla\times a)$; si esta definido y es igual a 0 porque nala se repite

$\nabla\times(\nabla\cdot a)$; no esta definido ya que $\nabla\cdot a$ me da un escalar y el Producto cruz con un escalar no esta definida

f) $\nabla\times(\nabla\times a) = \nabla(\nabla\cdot a) - \nabla^2 a$

$$= \varepsilon^{ijk}\partial_j(\nabla\times a)_k \hat{1}_i =$$

$$= \varepsilon^{ijk}\partial_j\varepsilon_{kmn}\nabla^m a^n = (\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{kmn})\partial_j\nabla^m a^n$$

$$= (\delta^i_m\delta^j_n - \delta^j_m\delta^i_n)\partial_j\partial^m a^n$$

$$= \delta^i_m\delta^j_n\partial^m a^n\partial_j - \delta^j_m\delta^i_n\partial_j\partial^m a^n$$

$$= \underbrace{\partial_n\partial^i a^n}_{\nabla\cdot a} - \underbrace{\partial_m\partial^m}_{\nabla\cdot\nabla} a^n$$

$$= (\nabla\cdot a)\nabla - \nabla^2 a$$

Ejercicios del 1.6.6

2) Demuestre:

a) $\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)$

$\cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha) = [\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)]^3$

$\cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha) + i[3\cos^2(\alpha)\sin\alpha - \sin^3\alpha]$

igualemos solo la parte real

$\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)$

b) $\sin(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) - \sin^3(\alpha)$

$\cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha) = [\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)]^3$

$\ldots = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha) + i[3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha]$

Igualemos la parte imaginaria

$\cancel{i}\sin(3\alpha) = \cancel{i}[3\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) - \sin^3(\alpha)]$

5.) encuentre las raices

a) $(2i)^{1/2}$

$z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z^{1/2} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}\right)}$

Con $k=0$

$z^{1/2} = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} i}$

Con $k=1$

$z^{1/2} = \sqrt{2}\, e^{\frac{5}{4}\pi i}$

b) $(1 - \sqrt{3}i)^{1/2}$

$z = 2e^{-\frac{\pi}{3} i}$

$z^{1/2} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2}\right)}$

Con $k=0$

$z^{1/2} = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{6} i}$

Con $k=1$

$z^{1/2} = \sqrt{2}\, e^{\frac{5\pi}{6} i}$

c) $(-1)^{1/3}$

$z = e^{\pi i}$

$z^{1/3} = e^{i\left(\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right)}$

Con $k=0$ $\quad z^{1/3} = e^{\frac{\pi}{3} i}$

Con $k=1$ $\quad z^{1/3} = e^{\pi i}$

Con $k=2$ $\quad z^{1/3} = e^{\frac{5}{3}\pi i}$

d) $8^{1/6}$

$z = 8e^{0i}$

$z^{1/6} = \sqrt[6]{8}\, e^{\left(\frac{0 + 2\pi k}{6}\right) i}$

Con $k=0$ $\quad z^{1/6} = 8^{1/6}$

Con $k=1$ $\quad z^{1/6} = 8^{1/6} e^{\frac{1}{3}\pi i}$

Con $k=2$ $\quad z^{1/6} = 8^{1/6} e^{\frac{2}{3}\pi i}$

Con $k=3$ $\quad z^{1/6} = 8^{1/6} e^{\pi i}$

Con $k=4$ $\quad z^{1/6} = 8^{1/6} e^{\frac{4}{3}\pi i}$

Con $k=5$ $\quad z^{1/6} = 8^{1/6} e^{\frac{5}{3}\pi i}$

e) $(-8 - 8\sqrt{3}i)^{1/4}$

$z = 16e^{\frac{4}{3}\pi i}$

$z^{1/4} = 2e^{\left(\frac{\frac{4\pi}{3} + 2\pi k}{4}\right) i}$

Con $k=0$ $\quad z^{1/4} = 2e^{\frac{\pi}{3} i}$

Con $k=1$ $\quad z^{1/4} = 2e^{\frac{5}{6}\pi i}$

Con $k=2$ $\quad z^{1/4} = 2e^{\frac{4}{3}\pi i}$

Con $k=3$ $\quad z^{1/4} = 2e^{\frac{11}{6}\pi i}$