Taller #3

3.1.4

6.) Si $\{e_i\}$ define un sistema de coordenadas (dextrogiro) no necesariamente ortogonal, entonces, demuestr que:

a) $e^i = \dfrac{e_j \times e_k}{e_i \cdot (e_j \times e_k)}$; $i, j, k = 1,2,3$ y sus permutaciones cíclicas

Por tanto $\{e_1, e_2, e_3\}$ es base de un espacio vectorial V y $\{e^1, e^2, e^3\}$ de su dual V^*.

$e^i \rightarrow e_i$ Por tanto el producto interno debería ser 1 mientras que el producto interno con los demas debería ser 0.

$$\langle e^1 | e_1 \rangle = \left\langle \frac{e_2 \times e_3}{V} \middle| e_1 \right\rangle = \frac{(e_2 \times e_3) \cdot e_1}{V} = \frac{V}{V} = 1$$

mismo plano igual a 0

$$\langle e^1 | e_2 \rangle = \left\langle \frac{e_2 \times e_3}{V} \middle| e_2 \right\rangle = \frac{(e_2 \times e_3) \cdot e_2}{V} = 0$$

Si continuo este proceso voy a obtener que

$$\langle e^i | e_i \rangle = 1 \quad y \quad \langle e^i | e_j \rangle = 0 \quad y \quad \langle e^i | e_k \rangle = 0$$

b.) $V = e_1 \cdot (e_2 \times e_3)$ y $\tilde{V} = e^1 \cdot (e^2 \times e^3) \Rightarrow V\tilde{V} = 1$

$$V\tilde{V} = 1 \Rightarrow \tilde{V} = \frac{1}{V} \Rightarrow e^1 \cdot (e^2 \times e^3) = \frac{1}{V}$$

$$\Rightarrow \frac{(e_2 \times e_3)}{V} \cdot (e^2 \times e^3) = \frac{1}{V} \underbrace{(e_2 \times e_3) \cdot (e^2 \times e^3)}_{=1}$$

c.) $a \cdot e^i = 1 \Rightarrow a \cdot \left(\dfrac{(e_j \times e_k)}{e_i \cdot (e_j \times e_k)} \right) = 1$; escribamos $|a\rangle$ como combinacion lineal de $\{e_1, e_2, e_3\}$.

$$a = \underbrace{a^i e_i + a^j e_j + a^k e_k}_{\text{componentes de } a \text{ en las bases } e_L} = a^L e_L$$

$$\Rightarrow a \cdot (e_j \times e_k) = e_i \cdot (e_j \times e_k);$$

$$\Rightarrow (a^i e_i) \cdot (e_j \times e_k) = V$$

$$\Rightarrow a^L (e_L \cdot (e_j \times k) = V$$

$$\Rightarrow a^i V = V \Rightarrow a^i = 1$$

$$\Rightarrow a = a^i e_i = 1 e_i = e_i$$

d.) $w_1 = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$; $w_2 = 3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$; $w_3 = 2\hat{k}$

I.) encuentre las reciprocas

$$V = w_1 \cdot (w_2 \times w_3) = w_1 \cdot ((3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) \times (2\hat{k}))$$

$$V = (4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}) \cdot (6\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}) = 24 - 12 = 12$$

$$w^1 = \frac{w_2 \times w_3}{V} = \frac{1}{V}((3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) \times (2\hat{k})) = \frac{1}{12}(6\hat{\jmath} - 6\hat{\jmath})$$

$$w^2 = \frac{w_3 \times w_1}{V} = \frac{1}{V}((2\hat{k}) \times (4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k})) = \frac{1}{12}(-4\hat{\imath} + 8\hat{\jmath})$$

$$w^3 = \frac{w_1 \times w_2}{V} = \frac{1}{V}((4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}) \times (3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})) = \frac{1}{12}(-3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 6\hat{k})$$

II.) Las componentes contravariantes y covariantes del vector $a = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$

$|\hat{a}\rangle = a^i = \langle w^i | a \rangle$ resolviendo ese producto interno obtenemos.

$$a^1 = -\frac{1}{2}; \quad a^2 = 1; \quad a^3 = \frac{7}{4}$$

$$\langle \hat{a} | = a_i = \langle a | w_i \rangle \Rightarrow a_1 = 11 \quad a_2 = 9 \quad a_3 = 6$$

7.) Espacio vectorial de matrices hermeticas 2×2 y producto interno $\langle a | b \rangle = Tr(A^{+}B)$; las matrices de pauli son base de este espacio. encuentre la base dual asociada a las matrices de pauli.

$$X = \begin{pmatrix} a & b + ci \\ b - ci & d \end{pmatrix} \Rightarrow \langle X | \sigma_i \rangle = Tr(X^{+}\sigma_i) = Tr(X\sigma_i)$$

$$\langle X | \sigma_0 \rangle = Tr(X\sigma_0) = Tr\begin{pmatrix} a & b + ci \\ b - ci & d \end{pmatrix} = a + d = ?$$

$$\langle X | \sigma_1 \rangle = Tr(X\sigma_1) = Tr\begin{pmatrix} b + ci & a \\ d & b - ci \end{pmatrix} = b + ci + b - ci = 2b = ?$$

$$\langle X|\sigma_2\rangle = Tr(X\sigma_2) = Tr\begin{pmatrix} bi-c & -ai \\ di & -bi-c \end{pmatrix} = bi-c-bi-c = -2c = ?$$

$$\langle X|\sigma_3\rangle = Tr(X\sigma_3) = Tr\begin{pmatrix} a & -b-ci \\ b-ci & -d \end{pmatrix} = a-d = ?$$

llamemos $\{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2\ \sigma^3\}$ a la base dual, remplazamos X por un covector de la base dual y si este hace producto interno con su vector repectivo entonces ? es 1 y si no es 0.

para σ^0 tengo

$$\langle\sigma^0|\sigma_0\rangle = a+d = 1$$
$$\langle\sigma^0|\sigma_1\rangle = 2b = 0$$
$$\langle\sigma^0|\sigma_2\rangle = -2c = 0 \Rightarrow a=\tfrac{1}{2} \quad b=0 \quad c=0 \quad d=\tfrac{1}{2} \Rightarrow \sigma^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$\langle\sigma^0|\sigma_3\rangle = a-d = 0$$

Para σ^1

$$\langle\sigma^1|\sigma_0\rangle = a+d = 0$$
$$\langle\sigma^1|\sigma_1\rangle = 2b = 1$$
$$\langle\sigma^1|\sigma_2\rangle = -2c = 0 \Rightarrow a=0 \quad b=1 \quad c=0 \quad d=0 \Rightarrow \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$
$$\langle\sigma^1|\sigma_3\rangle = a-d = 0$$

Para σ^2

$$\langle\sigma^2|\sigma_0\rangle = a+d = 0$$
$$\langle\sigma^2|\sigma^1\rangle = 2b = 0$$
$$\langle\sigma^2|\sigma^2\rangle = -2c = 1 \Rightarrow a=0 \quad b=0 \quad c=-\tfrac{1}{2} \quad d=0 \Rightarrow \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}i & 0 \end{pmatrix}$$
$$\langle\sigma^2|\sigma_3\rangle = a-d = 0$$

Para σ^3

$$\langle\sigma^3|\sigma_0\rangle = a+d = 0$$
$$\langle\sigma^3|\sigma_1\rangle = 2b = 0$$
$$\langle\sigma^3|\sigma_2\rangle = -2c = 0 \Rightarrow a=\tfrac{1}{2} \quad b=0 \quad c=0 \quad d=-\tfrac{1}{2} \Rightarrow \sigma^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$\langle\sigma^3|\sigma_3\rangle = a-d = 1$$

Para un vector generico en ese espacio encuentre su forma asociada.

$$|y\rangle = y^0\sigma_0 + y^1\sigma_1 + y^2\sigma_2 + y^3\sigma_3 = y^i\sigma_i$$

$\langle x|y\rangle = y^i\langle x|\sigma_i\rangle$ de aqui salen los sistemas de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} y^0\langle x|\sigma_0\rangle &= y^0(a+d)=1 \\ y^1\langle x|\sigma_1\rangle &= y^1\, 2b=1 \\ y^2\langle x|\sigma_2\rangle &= y^2(-2c=1 \\ y^3\langle x|\sigma_3\rangle &= y^3(a-d)=1 \end{aligned} \Rightarrow \quad a=\frac{y^3+y^0}{2y^0y^3};\quad b=\frac{1}{2y^1} \qquad c=\frac{-1}{2y^2} \quad d=\frac{y^3-y^0}{2y^0y^3}$$

$$\langle x| = \begin{vmatrix} \frac{y^3+y^0}{2y^0y^3} & \frac{1}{2y^1}-\frac{i}{2y^2} \\ \frac{1}{2y^1}+\frac{i}{2y^2} & \frac{y^3-y^0}{2y^0y^3} \end{vmatrix}$$

2,36. Ejercicios

5. Considere el espacio de las matrices complejas 2x2 hermíticas

$$A \hookrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \leq A^+ = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix}$$

(a) Muestre que las matrices de pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ forman base para ese espacio vectorial

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ci \\ ci & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b-ci \\ b+ci & a-d \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a+d = f \\ a-d = g \end{matrix} \in \mathbb{R} \qquad \hookrightarrow \begin{pmatrix} f & b-ci \\ b+ci & g \end{pmatrix} \Rightarrow A^+ i$$

(b) compruebe que esa base es ortogonal bajo la definición de producto interno $\langle a|b\rangle = Tr(A^+B)$

$$\langle \sigma_0|\sigma_1\rangle = Tr(\sigma_0^+, \sigma_1) = 0.$$

$$Tr(\sigma_0^+\sigma_1) = Tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \sigma_0|\sigma_2\rangle = Tr(\sigma_0^+\sigma_2) = 0.$$

$$Tr(\sigma_0^+\sigma_2) = Tr\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\langle \sigma_0|\sigma_3\rangle = Tr(\sigma_0^+\sigma_3) = 0$$

$$Tr(\sigma_0^+\sigma_3) = Tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\langle \sigma_1|\sigma_2\rangle = Tr(\sigma_1^+\sigma_2)$$

$$Tr(\sigma_1^+\sigma_2) = Tr\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 0.$$

$$\langle \sigma_1 | \sigma_3 \rangle = Tr(\sigma_1^+ \sigma_3) = 0$$

$$Tr(\sigma_1^+ \sigma_3) = tr\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \sigma_2 | \sigma_3 \rangle = Tr(\sigma_2^+ \sigma_3) = 0.$$

$$tr(\sigma_2^+ \sigma_3) = tr\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \sigma_1 | \sigma_0 \rangle = tr(\sigma_1^+ \sigma_0)$$

$$Tr(\sigma_1^+ \sigma_0) = Tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\langle \sigma_2 | \sigma_0 \rangle = tr(\sigma_2^+ \sigma_0) = 0$$

$$tr(\sigma_2^+ \sigma_0) = tr\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0$$