第三次大作业：第一题　绝热不变量【分值：50 分】

作业提交截止时间：2020 年 5 月 17 日 24 点
邮件发给方助教： fangyongkang@pku.edu.cn

对于单自由度非含时的哈密顿系统 $H(q,p)$，若其等能线 $H(q,p)=E$ 对应于相空间中的一条简单闭曲线，可以定义所谓绝热不变量

$$J \equiv \frac{1}{2\pi}\oint p\,\mathrm{d}q, \tag{1}$$

其中积分环路即为该等能线。将绝热不变量看作是能量的函数，容易检验

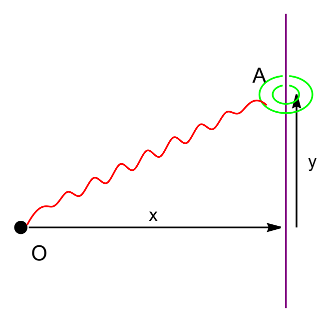
$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}E}=\frac{T}{2\pi}=\frac{1}{\omega}, \tag{2}$$

其中 T 为系统运动周期，ω 定义为该系统的角频率。

若在原有的哈密顿量中引入一个随时间缓慢变化的参量 $\lambda(t)$，让系统在这个含时哈密顿量 $H(q,p;\lambda(t))$ 下演化；经典绝热定理宣称，此时的绝热不变量将近似为与 λ 无关的常数

$$\lim_{\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}t\to 0}\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\lambda}=0, \tag{3}$$

此时绝热不变量定义式中的积分沿 λ 为常数的轨迹进行。更详尽的讨论请参考理论力学教材。



本题中我们通过研究一个简单力学模型的长期行为来讨论绝热不变量的适用性。如图所示，质量为 m 的小圆环 A 套在无穷长竖直光滑直杆上，通过劲度系数为 k、原长为 ℓ 的轻质弹簧与固定点 O 相连。以 O 为原点，A 点的水平和竖直坐标分别记为 x,y。从而，整个系统的哈密顿量可以写作

$$H(p_y,y)=\frac{p_y^2}{2m}+\frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+y^2}-\ell\right)^2+mgy, \tag{4}$$

(1) 考虑该系统的平衡位置 y_0。当 (x,g) 满足什么条件时该系统存在多个平衡位置，而什么时候仅存在一个？试解析或数值求解该关系，在 x-g 平面上画出这两种情形的分界线。

(2) 以速度 v 缓慢的向左移动直杆的水平位置，那么 $x(t)$ 便构成了慢变参量。取初始时刻 $p_y=0, y=0.1\ell$，以及 $g=0, x(t)=2\ell-vt$。分别对于 $\sqrt{m/k}v/\ell=1/4,1/16,1/64,1/256$ 的情形，计算 x 由 2ℓ 减小至 0 的过程中系统的相轨以及绝热不变量 J 随 y 的变化。解释你的结果。

(3) 将整个系统放置在一个以频率 ν 作往复运动的电梯里，那么等效重力加速度 g 也可以作为慢变参量。取初始时刻 $p_y=0, y=-2\ell$，以及 $g(t)=2\frac{k\ell}{m}\cos 2\pi\nu t, x=0.2\ell$。分别对于 $\sqrt{m/k}\nu=1/4,1/16,1/64,1/256$ 的情形，计算 g 从 $2k\ell/m$ 变化为 $-2k\ell/m$ 的过程中系统的相轨以及绝热不变量 J 随 y 的变化。解释你的结果。

两个参量 x, g 可以同时变化。对于若干个参量自时刻 t_i 经历一系列变化后于时刻 t_f 回到原点的过程，我们可以定义该过程的贝瑞相位。设初末的相空间坐标分别为 (p_i, q_i) 和 (p_f, q_f)，贝瑞相位定义为

$$\varphi_{\mathrm{B}} \equiv \left[\omega(t_i)\int_{(p_i,q_i)}^{(p_f,q_f)} \mathrm{d}t - \int_{t_i}^{t_f} \omega(t)\,\mathrm{d}t\right] \mod 2\pi, \tag{5}$$

(4) 取初始时刻 $p_y = 0, y = -2.1\ell$，以及 $g(t) = 2\frac{k\ell}{m}\cos 2\pi\nu t, x(t) = 2\ell \sin 2\pi\nu t$。选择充分小的 ν 以至于 J 近似为常数，检验这样计算得到的 φ_{B} 近似不依赖于 ν。

(5) 取初始时刻 $p_y = 0, y = 0.52\ell$，以及 $g(t) = 0.5\frac{k\ell}{m}\cos 2\pi\nu t, x(t) = 0.5\ell \sin 2\pi\nu t$。选择充分小的 ν 以至于 J 近似为常数，检验这样计算得到的 φ_{B} 近似不依赖于 ν。