第一次大作业：第二题　Logistic 模型【分值：25 分】

作业提交截止时间：2020 年 3 月 22 日 24 点

我们来考察一个非常简单而广为人知的数值模型，其由如下迭代关系定义

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n), \tag{1}$$

其中 $r > 0$ 为可调参数，等式右端的函数 $f(x)$ 被称为 logistic 函数。请编写程序完成以下问题，并做图。所有要求作图展示的计算结果只需达到作图精度即可。

1. 作为最初步的认识，分别取 $r = 0.5$ 和 $r = 1.5$，任取几个 0 到 1 之间的初值 x_0，计算序列 $\{x_n\}$。绘图观察并描述它们的行为。

2. 显然，对于不同的 r 值，x_n 将迅速收敛于某一个特定的 x^* 处，而与初值无关。x^* 必将满足如下自洽方程
$$x^* = f(x^*). \tag{2}$$
作为一个二元一次方程，其存在两个根。试证明，迭代收敛于某一个根的必要条件是 $|f'(x^*)| \leq 1$，并画出 x^* 随 r 的变化关系图。一般而言，其收敛阶和收敛速度 s 各是多少?

3. 当 r 大于某个特定值 r_1 时，上述条件无法满足。取 $r = r_1 + 0.1$ 以及不同的初值 x_0，计算序列 $\{x_n\}$。绘图观察并描述它们的行为。

4. 序列终将在某两个 x_1^* 和 x_2^* 之间来回震荡。事实上，考察复合迭代 $x_{n+2} = f(f(x_n))$，其所定义的序列依旧将收敛于某一个固定值，从而依旧可以使用前述方法来分析。试证明，这类迭代收敛的必要条件是 $|f'(x_1^*)f'(x_2^*)| \leq 1$，并在第 2 问的图中补上 x_1^* 和 x_2^* 随 r 的变化关系。

5. 继续缓慢增大 r，请展示周期为二的震荡会逐渐变成周期四、周期八...试定义一个量，可以一般性的描述序列向各类稳定震荡的平均收敛速度，并可由一段有限序列近似算出。在 $r \in (0, 4)$ 上等距取点，绘制收敛速度随 r 的变化，描述其与不同震荡周期的关系。

6. 在第 4 问的图中补上后续震荡值随 r 的变化关系。依次缩小你的作图范围，将坐标原点分别放在周期一到周期二的分叉点、周期二到周期四的分叉点、周期四到周期八的分叉点...描述你所观察到的现象。

7. 计算相邻分叉点之间的横轴距离 Δr，说明相邻 Δr 之比渐近于一常数 F，并给出 F 以及无穷周期分叉点 r_∞ 的值。

8. 对于 $r = 4$ 的情形，试解析求解该迭代序列，论证此时一般不存在稳定的震荡周期。【提示：作代换 $x = \sin^2 y$】

9. 选择另一个你喜欢的函数 $g(x)$，其在从原点开始的某段区域上是凸函数。将 $f(x)$ 替换成 $rg(x)$，重复 1-7 问的计算，说明你能看到类似的现象，并得到完全相同的 F 值。