

第一次大作业：第四题 汤姆孙问题【分值：25 分】

作业提交截止时间：2020 年 4 月 19 日 24 点

汤姆孙在提出他的葡萄布丁原子模型后，顺便考虑了如下问题：在单位球面上放置 N 个电子，怎样才能使得静电势能取极小值？选取单位使 $e^2/4\pi\epsilon_0 = 1$ ，试：

1. 编写程序，分别对于 $N = 2, 3, \dots, 64$ ，寻求电子相互作用势能最小值 $V_{\min}(N)$ 。你可以使用此维基页面上的数据核对你的结果，但请确保你的结果精确到小数点后第十位。
2. 对于 $N = 12$ ，检验你找到的势能极小构型正好是正二十面体的全部顶点；选取单位使电子质量 $m_e = 1$ ，求解围绕此构型作小扰动的全部简正频率以及相应的简并度。

提示：在计算过程中可以选取球面坐标系 (θ, ϕ) 或任意你喜欢的坐标系。（单位）球面坐标系下两点间欧式距离公式为

$$r_{12} = 2\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin^2 \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}},$$

动能表达式为

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta).$$