

第一次大作业：第一题 电阻网络【分值：25 分】

作业提交截止时间：2020 年 3 月 22 日 24 点

电磁学中，常要求一个无源电阻网络中两端点之间的等效电阻。这个问题一般而言可以转化为一个线性代数方程组的求解。我们用指标 $i = 1, 2, \dots, n$ 标记电阻网络中的各个节点，两节点之间直连的导纳记作 g_{ij} ，对于断路的情形 $g_{ij} = 0$ 。记节点 i 的电势为 U_i ，由外部流入该节点的电流为 I_i ，我们可以根据基尔霍夫第二定律列出方程组

$$\sum_{j \neq i} g_{ij}(U_i - U_j) = I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

从而可以写成矩阵方程

$$\mathbf{G}\mathbf{U} = \mathbf{I}, \quad (2)$$

其中导纳矩阵诸元由下式给出

$$\mathbf{G}_{ij} = \begin{cases} \sum_{k \neq i} g_{ik}, & i = j, \\ -g_{ij}, & i \neq j. \end{cases} \quad (3)$$

然而，我们容易发现，导纳矩阵 \mathbf{G} 是奇异矩阵，存在着零特征值的特征向量 $\{U_i = 1\}(i = 1, 2, \dots, n)$ ，对应着电势零点的改变不影响物理；此外，可以注意到 I_i 需满足流入电阻网络的净电流为零，并非线性独立。由此我们可以将某个节点 i 的电势取作零，简单的删去导纳矩阵的第 i 行、第 i 列，维持矩阵的对称性的同时消去了奇异性。

若要求节点 ij 之间的等效电阻 R_{ij} ，可以考虑令这两个节点分别自外流入流出一个单位的电流，两点间的电势差便是等效电阻。若取输出电流节点 i 的电势为零，便有

$$R_{ij} = U_j. \quad (4)$$

请分别使用线性代数方程组的直接解法和迭代解法编写程序，求解如下情形的等效电阻，并比较不同算法的时间消耗：

1. 如图 (1) 所示的正方形电阻网络，相连节点之间导纳均为单位 1，分别对于边长为 1, 4, 16, 64 的情形，计算对顶点 ac 和相邻顶点 ab 之间的等效电阻；
2. 如图 (2) 所示的正三角形电阻网络，相连节点之间导纳均为单位 1，分别对于边长为 1, 4, 16, 64 的情形，计算相邻顶点 ab 之间的等效电阻；
3. 如图 (3) 所示由正六边形砌成的电阻网络，相连节点之间导纳均为单位 1，分别对于单元周期数为 4, 16, 64 的情形，计算两顶点处六边形左下顶点 ab 之间的等效电阻；
4. 对于含有电容电感等交流元件的无源网络，我们可以在频域上以完全相同的方法研究。对于图 (2) 所示的网络，将全部横向连接的电阻置换成容抗为单位 1 的电容，将斜向右下连接的电阻置换成感抗为单位 1 的电感，而 ab 朝向的电阻不变。画出 ab 间等效阻抗大小与相角的频率响应曲线，作图范围应包含全部共振峰位置。

提示：关于任意非奇异矩阵 \mathbf{A} 的线性代数方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

等价于一个关于实对称矩阵线性代数方程组 (\mathbf{A}^\dagger 为转置复共轭)

$$(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b}.$$

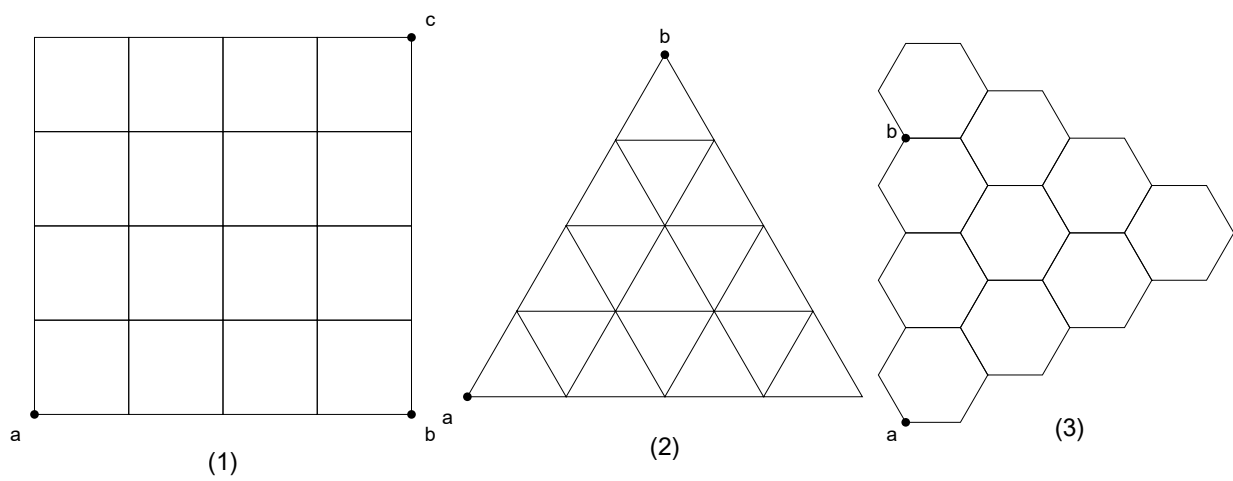


Figure 1: (1) 边长为 4 的正方形电阻网络；(2) 边长为 4 的正三角形电阻网络；(3) 由正六边形砌成的单元周期数为 4 的电阻网络。