Metoda Celor Mai Mici Pătrate Extinsă – ARMAX. Validarea modelelor

November 16, 2019

1 Aspecte teoretice vizate

În lucrarea de faţă este prezentată o extindere a metodei celor mai mici pătrate. Aceasta este implementată în toolbox-ul *System Identification* prin intermediul funcţiei `armax`. De asemenea, sunt prezentate două metode de validare a modelelor obţinute, implementate prin intermediul funcţiei `resid`.

2 ARMAX

Metoda celor mai mici pătrate extinsă (MCMMPE) a fost dezvoltată pentru identificarea unui sistem a cărui model discret este de tip ”proces+perturbaţie”:

$$A(z^{-1})Y(z) = z^{-n_d}B(z^{-1})U(z) + C(z^{-1})E(z), \tag{1}$$

unde

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{n_A} z^{-n_A}, \tag{2}$$
$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{n_B} z^{-n_B}, \tag{3}$$
$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots + c_{n_C} z^{-n_C}, \tag{4}$$

iar $E(z)$ este transformata $\mathcal{Z}$ a perturbaţiei.

Se consideră vectorul parametrilor:

$$\theta = [a_1, a_2, \ldots, a_{n_A}, b_1, b_2, \ldots, b_{n_B}, c_1, c_2, \ldots, c_{n_C}]^\top \tag{5}$$

şi vectorul măsurătorilor:

$$\Phi[n] = [-y[n], \ldots, -y[n-n_A+1], u[n-d], \ldots, u[n-d-n_B+1], e[n], \ldots, e[n-n_C+1]]^\top. \tag{6}$$

Modelul discret al sistemului este

$$y[n+1] = \theta^\top \Phi[n]. \tag{7}$$

Pe baza aproximării vectorului parametrilor, avem:

$$\hat{y}[n+1] = \hat{\theta}^\top[n]\Phi[n], \tag{8}$$

eroarea la pasul n este dată de:

$$\varepsilon[n] = \hat{y}[n] - y[n] = e[n], \tag{9}$$

şi considerăm indicele de performanţă:

$$J[n] = \mathbb{E}\{(\hat{y}[n+1] - y[n+1])^2\}. \tag{10}$$

În cazul unei bune identificări, eroarea de predicţie $\varepsilon(t)$ va tinde asimptotic spre un zgomot alb:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\{\varepsilon(t)\varepsilon(t-i)\} = 0. \tag{11}$$

3 Validarea rezultatelor

Validarea unui model matematic se referă la verificarea unor condiţii: structura ”proces+perturbaţie” aleasă corect, metoda aleasă corespunzător structurii propuse, gradele polinoamelor ce descriu modelul şi numărul tacţilor de întârziere aleşi corect.

Validarea presupune patru paşi:

1. Crearea datelor de test pentru modelul identificat.
2. Calculul erorilor de predicţie pentru modelul identificat.
3. Testul de albire a erorii de predicţie.
4. Testul de decorelare a erorii de predicţie faţă de secvenţa ieşirilor.

3.1 Testul de albire

Se consideră secvenţa erorilor de predicţie $\varepsilon[n]$ şi se calculează autocorelaţia:

$$R[i] = \frac{1}{N} \sum \varepsilon[k]\varepsilon[k-i], \quad i = \overline{0, \max\{n_A, n_B + n_d\}}. \tag{12}$$

Se calculează autocorelaţiile normalizate:

$$RN[i] = \frac{R[i]}{R[0]}, \quad i = \overline{0, \max\{n_A, n_B + n_d\}}. \tag{13}$$

În cazul ideal, eorile reziduale formează o secvenţă perfect albă având $RN[i] = 0$. În practică se definesc niveluri de încredere, rezultând un criteriu practic de validare:

$$|RN[i]| \leq \frac{1.8}{\sqrt{N}} ... \frac{2.17}{\sqrt{N}}, \quad i = \overline{0, \max\{n_A, n_B + n_d\}}, \tag{14}$$

unde N este numărul eşantioanelor.

3.2 Testul de decorelare

Se consideră secvenţa erorilor de predicţie $\varepsilon[n]$ şi secvenţa ieşirilor modelului identificat $\hat{y}[n]$. Se calculează intercorelaţia celor două secvenţe:

$$R[i] = \frac{1}{N} \sum \varepsilon[k]\hat{y}[k-i], \quad i = \overline{0, \max\{n_A, n_B + n_d\}}, \tag{15}$$

şi apoi se calculează intercorelaţiile normalizate:

$$RN[i] = \frac{R[i]}{R[0]}, \quad i = \overline{0, \max\{n_A, n_B + n_d\}}. \tag{16}$$

În cazul ideal, eorarea reziduală este perfect decuplată de ieşire, rezultând $RN[i] = 0$. În practică se definesc niveluri de încredere, rezultând un criteriu practic de validare:

$$|RN[i]| \leq \frac{1.8}{\sqrt{N}} ... \frac{2.17}{\sqrt{N}}, \quad i = \overline{0, \max\{n_A, n_B + n_d\}}, \tag{17}$$

unde N este numărul eşantioanelor.