Identificarea sistemelor de ordin I şi II folosind metoda logaritmărilor succesive

October 16, 2019

1 Aspecte teoretice vizate

Dacă până acum s-a pus problema identificării unor sisteme de ordin doi cu poli complex-conjugaţi, iar metodele funcţionau doar pentru acele tipuri de sisteme, lucrarea de faţă prezintă o metodă de identificare a sistemelor ce conţin mai multe constante de timp.

Metoda logaritmărilor succesive are ca fundament regresia liniară. Aceasta se va exemplifica atât pentru răspunsul la intrarea de tip treaptă, cât şi pentru răspunsul la intrarea de tip impuls a unui sistem de ordin I şi a unuia de ordin II.

Principalele probleme care apar în timpul identificării:

- impulsul teoretic (Dirac) nu se poate genera în practică;
- treapta nu este cea teoretică (Heaveside);
- este prezent zgomotul de măsură;
- condiţiile iniţiale nu sunt nule.

2 Regresia liniară

Se consideră un set de măsurători în timp: (t_1, x_1), (t_2, x_2), $\ldots$, (t_N, x_N). Se cere găsirea unei drepte care să aproximeze cel mai bine aceste măsurători. Pentru aceasta, vom considera o funcţie de măsură a erorii, şi problema devine:

$$\min_{\alpha,\beta} J(\alpha,\beta) := \sum_{k=1}^{N} (x_k - \alpha t_k - \beta)^2. \tag{1}$$

Pentru a minimiza, se impun condiţiile de punct staţionar:

$$\frac{\partial J(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = \frac{\partial J(\alpha,\beta)}{\partial \beta} = 0, \tag{2}$$

de unde obţinem:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N} t_k^2 & \sum_{k=1}^{N} t_k \\ \sum_{k=1}^{N} t_k & N \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N} x_k t_k \\ \sum_{k=1}^{N} x_k \end{pmatrix}. \tag{3}$$

3 Identificarea unui sistem de ordin I

În general, procesele fizice care pot fi modelate printr-un sistem LTI de ordin I au următoarea funcţie de transfer:

$$H(s) = \frac{K}{Ts+1}. \tag{4}$$

Parametrii care trebuie identificaţi sunt: factorul de proporţionalitate (K) şi constanta de timp ($T[sec]$).

3.1 La intrarea de tip impuls

Funcţia pondere a sistemului 4 este:

$$h(t) = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}, \ \ t \geq 0. \tag{5}$$

Factorul de proporţionalitate este dat de raportul dintre ieşire şi intrare în regim staţionar. Similar cu lucrarea anterioară, datorită zgomotului de măsură este necesară alegerea cu atenţie a valorilor iniţiale şi staţionare:

$$K = \frac{\bar{h}_{st}}{\bar{u}_{st}}, \tag{6}$$

unde fiecare termen din formula precedentă reprezintă o valoare medie luată pe un interval adecvat.

În practică, funcţia pondere este:

$$h(t) = \bar{h}_{st} + (h_{max} - \bar{h}_{st}) \cdot e^{-\frac{t}{T}}, \ \ t \geq t_0. \tag{7}$$

Pentru a identifica valoarea constantei de timp (T), se logaritmează ecuaţia anterioară şi se obţine:

$$\ln(h(t_k) - \bar{h}_{st}) = c - \frac{1}{T} t_k, \tag{8}$$

unde t_k sunt eşantioane de timp, iar c este o constantă de scalare. Aceste eşantioane se aleg de la finalul impulsului până la intrarea în regim staţionar. Semnalul se va scala corespunzător pentru a nu avea probleme cu definirea logaritmului. Astfel, relaţia 8 este o problemă de regresie liniară şi avem:

$$T = \frac{-1}{\alpha}, \tag{9}$$

unde α este parametrul determinat conform formulei 3.

3.2 La intrarea de tip treaptă

Răspunsul indicial al sistemului 4 este descris prin:

$$y(t) = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right), \ \ t \geq 0. \tag{10}$$

Factorul de proporţionalitate este dat de raportul dintre ieşire şi intrare în regim staţionar. Similar cu lucrarea 1, datorită zgomotului de măsură este necesară alegerea cu atenţie a valorilor iniţiale şi staţionare:

$$K = \frac{\bar{y}_{st} - \bar{y}_0}{\bar{u}_{st} - \bar{u}_0}, \tag{11}$$

unde fiecare termen din formula precedentă reprezintă o valoare medie luată pe un interval adecvat.

În practică, răspunsul indicial este:

$$y(t) = \bar{y}_0 + (\bar{y}_{st} - \bar{y}_0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right). \tag{12}$$

Pentru a identifica valoarea constantei de timp (T), se logaritmează relaţia 12 şi se obţine, după o eventuală scalare pentru a rezolva problema existenţei logaritmului, relaţia:

$$\ln(|y(t_k) - \bar{y}_{st}|) = c - \frac{1}{T} t_k, \tag{13}$$

unde t_k sunt eşantioane de timp, iar c este o constantă de scalare. Aceste eşantioane se aleg de la momentul declanşării treptei până la intrarea în regim staţionar. Acum, trebuie făcută distincţia între cazul unei identificări pe frontul ascendent şi una pe frontul descendent: pe frontul descendent, $\bar{y}_{st}$ este valoarea minimă, iar cantitatea $y(t_k) - \bar{y}_{st}$ este pozitivă, iar pe frontul ascendent trebuie realizată o înmulţire cu

-1 pentru a avea o cantitate pozitivă, factor ce se va regăsi în constanta c. Astfel, relaţia 13 este o problemă de regresie liniară şi obţinem:

$$T = \frac{-1}{\alpha}, \tag{14}$$

unde α este parametrul determinat conform formulei 3.

Pentru simularea răspunsului la intrarea dată din condiţii iniţiale nenule este necesar modelul de tip spaţiul stărilor. Pe baza formei canonice observabile dedusă din funcţia de transfer 4, se obţin matricele:

$$A = \left(-\frac{1}{T}\right) \qquad B = \left(\frac{K}{T}\right) \qquad C = (1) \qquad D = (0). \tag{15}$$

4 Identificarea unui sistem de ordin II

În general, procesele fizice care pot fi modelate printr-un sistem LTI de ordin II cu poli reali au următoarea funcţie de transfer:

$$H(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad T_1 > T_2. \tag{16}$$

Parametrii care trebuie identificaţi sunt: factorul de proporţionalitate (K) şi cele două constante de timp: $T_1[sec]$ şi $T_2[sec]$.

4.1 La intrarea de tip impuls

Funcţia pondere a sistemului 16 este:

$$h(t) = \frac{K}{T_1 - T_2}\left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}\right), \quad t \geq 0. \tag{17}$$

Factorul de proporţionalitate este dat de raportul dintre ieşire şi intrare în regim staţionar. Similar cu lucrarea anterioară, datorită zgomotului de măsură este necesară alegerea cu atenţie a valorilor iniţiale şi staţionare:

$$K = \frac{\bar{h}_{st}}{\bar{u}_{st}}, \tag{18}$$

unde fiecare termen din formula precedentă reprezintă o valoare medie luată pe un interval adecvat.

Pentru a identifica constanta de timp dominantă (T_1), se logaritmează relaţia 17 şi se obţine:

$$\ln(h(t_k)) = \ln\frac{K}{T_1 - T_2} + \ln\left(1 - e^{-\frac{t_k(T_1 - T_2)}{T_1 T_2}}\right) - \frac{1}{T_1}t_k, \tag{19}$$

unde t_k sunt eşantioane de timp. Se observă prezenţa unui termen suplimentar care face ca problema 19 să nu fie una de regresie liniară. Însă, dacă aceste eşantionane se aleg de la momentul finalizării impulsului până la momentul în care termenul neliniar are o valoare semnificativă, problema este aproape una de regresie liniară şi obţinem:

$$T_1 = -\frac{1}{\alpha_1}, \tag{20}$$

unde α_1 este parametrul determinat conform formulei 3.

În practică, formula 19 trebuie adaptată pentru a evita logaritmarea unui număr negativ şi pentru a surprinde condiţiile iniţiale nenule şi semnalele de intrare neideale. Aceste lucru se face în mod similar cu cele menţionate în secţiunea anterioară.

Pentru a idenifica a doua constantă de timp (T_2), se elimină din funcţia pondere modul corespunzător constantei de timp T_1 şi se obţine o problemă clasică de regresie liniară pe ultima parte a răspunsului (de unde a fost finalizată alegerea eşantionaelor pentru identificarea primei constante de timp până la intrarea în regim staţionar):

$$T_2 = -\frac{1}{\alpha_2}, \tag{21}$$

unde α_2 este parametrul determinat conform formulei 3.

4.2 La intrarea de tip treaptă

Răspunsul indicial al sistemului 16 este descris prin:

$$y(t) = K \cdot \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right), \quad t \geq 0. \tag{22}$$

Factorul de proporţionalitate este dat de raportul dintre ieşire şi intrare în regim staţionar. Similar cu lucrarea 1, datorită zgomotului de măsură este necesară alegerea cu atenţie a valorilor iniţiale şi staţionare:

$$K = \frac{\bar{y}_{st} - \bar{y}_0}{\bar{u}_{st} - \bar{u}_0}, \tag{23}$$

unde fiecare termen din formula precedentă reprezintă o valoare medie luată pe un interval adecvat.

Pentru a identifica valoarea constantei de timp (T_1), se logaritmează relaţia 22 şi se obţine:

$$\ln(y(t_k) - K) = \ln \frac{K}{T_1 - T_2} - \frac{1}{T_1} t_k + \ln \left(-T_1 + T_2 e^{-t \frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2}}\right), \tag{24}$$

unde t_k sunt eşantioane de timp. Similar cu cazul precedent, aceste eşantioane se aleg de la momentul declanşării treptei până ce al treilea termen are o valoare ce influenţează posibilitatea de utilizare a regresiei liniare. Astfel, relaţia 24 este o problemă de regresie liniară şi obţinem:

$$T_1 = \frac{-1}{\alpha_1}, \tag{25}$$

unde α_1 este parametrul determinat conform formulei 3.

În practică, formula 24 trebuie adaptată pentru a evita logaritmarea unui număr negativ şi pentru a surprinde condiţiile iniţiale nenule şi semnalele de intrare neideale. Aceste lucru se face în mod similar cu cele menţionate în secţiunea anterioară.

Similar, pentru a identifica a doua constantă de timp (T_2), se elimină din răspunsul indicial modul corespunzător constantei de timp T_1 şi se obţine o problemă clasică de regresie liniară pe ultima parte a răspunsului (de unde a fost finalizată alegerea eşantioanelor pentru identificarea primei constante de timp până la intrarea în regim staţionar):

$$T_2 = -\frac{1}{\alpha_2}, \tag{26}$$

unde α_2 este parametrul determinat conform formulei 3.

Pentru simularea răspunsului la intrarea dorită din condiţii iniţiale nenule este necesar modelul de tip spaţiul stărilor. Pe baza formei canonice observabile dedusă din funcţia de transfer 16, se obţin matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_1 \cdot T_2} & -\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{T_1 \cdot T_2} \end{pmatrix} \qquad C = (1 \quad 0) \qquad D = (0). \tag{27}$$

5 Validarea rezultatelor

Pentru a valida rezultatele se folosesc urmˇtorii indici de performanţă:

- `eroarea medie pătratică`:

$$J = ||\mathbf{y} - \mathbf{y}_M|| = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (y - y_M)^2}; \tag{28}$$

- `eroarea medie pătratică relativă`:

$$\varepsilon_{MPN} = \frac{||\mathbf{y} - \mathbf{y}_M||}{||\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}||}. \tag{29}$$