Identificarea sistemelor de ordin I şi II folosind o intrare de tip treaptă

October 5, 2019

1 Aspecte teoretice vizate

Printre cele mai comune metode neparametrice de identificare se regăseşte şi identificarea unui sistem pe baza răspunsului la semnalul de tip treaptă. În acest laborator se va studia această metodă pentru identificarea sistemelor de ordin I şi a celor de ordin II cu poli complex-conjugaţi.

Principalele probleme care apar în timpul identificării:

- semnalul de intrare nu este o treaptă unitară (Heaviside);
- este prezent zgomotul de măsură;
- condiţiile iniţiale nu sunt nule.

2 Identificarea unui sistem de ordin I

În general, procesele fizice care pot fi modelate printr-un sistem LTI de ordin I au următoarea funcţie de transfer:

$$H(s) = \frac{K}{Ts+1}. \tag{1}$$

Parametrii care trebuie identificaţi sunt: factorul de proporţionalitate (K) şi constanta de timp ($T[sec]$). Răspunsul unui astfel de sistem la intrarea de tip treaptă Heaviside este descris prin:

$$y(t) = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right), \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Factorul de proporţionalitate este dat de raportul dintre ieşire şi intrare în regim staţionar, în condiţii iniţiale nule. Deoarece, în general, treapta nu este ideală, definiţia se extinde la raportul dintre variaţia ieşirii şi variaţia intrării:

$$K = \frac{y_{st} - y_0}{u_{st} - u_0}. \tag{3}$$

Dar, prezenţa zgomotului de măsură necesită alegerea cu atenţie a valorilor iniţiale şi staţionare:

$$K = \frac{\bar{y}_{st} - \bar{y}_0}{\bar{u}_{st} - \bar{u}_0}, \tag{4}$$

unde fiecare termen din formula precedentă reprezintă o valoare medie luată pe un interval adecvat.

Pentru a identifica valoarea constantei de timp (T), se citeşte variaţia de timp de la momentul declanşării treptei (neideale) până la 63% din valoarea diferenţei dintre cele două paliere staţionare ale ieşirii:

$$y(T) = 0.63 \cdot (\bar{y}_{st} - \bar{y}_0) + \bar{y}_0 \Rightarrow T \tag{5}$$

Pentru simularea răspunsului la intrarea de tip treaptă din condiţii iniţiale nenule este necesar modelul de tip spaţiul stărilor. Pe baza formei canonice observabile dedusă din funcţia de transfer (1), se obţin matricele:

$$A = \left(-\frac{1}{T}\right) \qquad B = \left(\frac{K}{T}\right) \qquad C = (1) \qquad D = (0). \tag{6}$$

3 Identificarea unui sistem de ordin II

În general, procesele fizice care pot fi modelate printr-un sistem LTI de ordin II cu poli complex-conjugaţi au următoarea funcţie de transfer:

$$H(s) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad 0 \leq \zeta < 1. \tag{7}$$

Parametrii care trebuie identificaţi sunt: factorul de proporţionalitate (K), factorul de amortizare (ζ) şi pulsaţia naturală de oscilaţie ($\omega_n[rad/sec]$). Răspunsul sistemului la treapta Heaviside este:

$$y(t) = K \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \cdot t + \cos^{-1}(\zeta)\right)\right), \quad t \geq 0. \tag{8}$$

Factorul de proporţionalitate este dat de raportul dintre ieşire şi intrare în regim staţionar, în condiţii iniţiale nule. Deoarece, în general, treapta nu este ideală, definiţia se extinde la raportul dintre variaţia ieşirii şi variaţia intrării:

$$K = \frac{y_{st} - y_0}{u_{st} - u_0}. \tag{9}$$

Dar, prezenţa zgomotului de măsură necesită alegerea cu atenţie a valorilor iniţiale şi staţionare:

$$K = \frac{\bar{y}_{st} - \bar{y}_0}{\bar{u}_{st} - \bar{u}_0}, \tag{10}$$

unde fiecare termen din formula precedentă reprezintă o valoare medie luată pe un interval adecvat.

Pentru a identifica valoarea factorului de amortizare (ζ), este necesară estimarea suprareglajului, definit prin:

$$\sigma = \frac{y_{max} - \bar{y}_{st}}{\bar{y}_{st} - \bar{y}_0}. \tag{11}$$

Pe baza formulei analitice a dependenţei dintre factorul de amortizare şi suprareglaj pentru sistemul descris prin funcţia de transfer (7), rezultă:

$$\sigma = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad \Rightarrow \quad \zeta = \frac{-\ln(\sigma)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\sigma)}}. \tag{12}$$

Pentru a identifica pulsaţia naturală de oscilaţie (ω_n) se poate utiliza timpul de răspuns (t_r), care se poate aproxima pentru sistemul descris prin funcţia de transfer (7):

$$t_r \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{4}{\zeta \cdot t_r}. \tag{13}$$

Observaţie: Parametrul ω_n se poate determina şi pe baza pulsaţiei de oscilaţie $\omega_{osc} = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$.

Pentru simularea răspunsului la intrarea de tip treaptă din condiţii iniţiale nenule este necesar modelul de tip spaţiul stărilor. Pe baza formei canonice observabile dedusă din funcţia de transfer (7), se obţin matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k\omega_n^2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = (0). \tag{14}$$

4 Validarea rezultatelor

Pentru a valida rezultatele se folosesc urmtorii indici de performanţă:

- `eroarea medie pătratică`:

$$J = ||\mathbf{y} - \mathbf{y}_M|| = \sqrt{\frac{1}{N}\sum(y - y_M)^2}; \tag{15}$$

- `eroarea medie pătratică relativă`

$$\varepsilon_{MPN} = \frac{||\mathbf{y} - \mathbf{y}_M||}{||\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}||}. \tag{16}$$