Identificarea sistemelor de ordin I şi II folosind o intrare de tip impuls

October 5, 2019

1 Aspecte teoretice vizate

Printre cele mai comune metode neparametrice de identificare se regăseşte şi identificarea unui sistem pe baza răspunsului la semnalul de tip impuls. În acest laborator se va studia această metodă pentru identificarea sistemelor de ordin I şi a celor de ordin II cu poli complex-conjugaţi.

Principalele probleme care apar în timpul identificării:

- impulsul teoretic (Dirac) nu se poate genera în practică;
- este prezent zgomotul de măsură;
- condiţiile iniţiale nu sunt nule.

Definiţie: Despre un semnal se poate spune că este de tip impuls dacă, în afara unui interval de timp suficient de mic, este constant, iar aria acestuia este unitară.

2 Identificarea unui sistem de ordin I

În general, procesele fizice care pot fi modelate printr-un sistem LTI de ordin I au următoarea funcţie de transfer:

$$H(s) = \frac{K}{Ts+1}. \tag{1}$$

Parametrii care trebuie identificaţi sunt: factorul de proporţionalitate (K) şi constanta de timp ($T[sec]$). Răspunsul unui astfel de sistem la intrarea de tip impul Dirac este descris prin:

$$h(t) = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}, \;\; t \geq t_0. \tag{2}$$

Factorul de proporţionalitate este dat de raportul dintre ieşire şi intrare în regim staţionar. Similar cu lucrarea anterioară, datorită zgomotului de măsură este necesită alegerea cu atenţie a valorilor iniţiale şi staţionare:

$$K = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{u}_{st}}, \tag{3}$$

unde fiecare termen din formula precedentă reprezintă o valoare medie luată pe un interval adecvat.

Pentru a identifica valoarea constantei de timp (T), se citeşte variaţia de timp de la momentul finalizării impulsului neideal până la 37% din valoarea factorului de proporţionalitate:

$$h(T) = 0.37 \cdot (y_{max} - \bar{y}_{st}) + \bar{y}_{st} \Rightarrow T \tag{4}$$

Pentru simularea răspunsului la intrarea de tip treaptă din condiţii iniţiale nenule este necesar modelul de tip spaţiul stărilor. Pe baza formei canonice observabile dedusă din funcţia de transfer (1), se obţin matricele:

$$A = \left(-\frac{1}{T}\right) \qquad B = \left(\frac{K}{T}\right) \qquad C = (1) \qquad D = (0). \tag{5}$$

3 Identificarea unui sistem de ordin II

În general, procesele fizice care pot fi modelate printr-un sistem LTI de ordin II cu poli complex-conjugaţi au următoarea funcţie de transfer:

$$H(s) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad 0 \leq \zeta < 1. \tag{6}$$

Parametrii care trebuie identificaţi sunt: factorul de proporţionalitate (K), factorul de amortizare (ζ) şi pulsaţia naturală de oscilaţie ($\omega_n[rad/sec]$). Răspunsul sistemului la impuls Dirac este:

$$h(t) = K\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\cdot t\right), \quad t \geq 0. \tag{7}$$

Factorul de proporţionalitate este dat de raportul dintre ieşire şi intrare în regim staţionar. Similar cu lucrarea anterioară, datorită zgomotului de măsură este necesită alegerea cu atenţie a valorilor iniţiale şi staţionare:

$$K = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{u}_{st}}, \tag{8}$$

unde fiecare termen din formula precedentă reprezintă o valoare medie luată pe un interval adecvat.

Pentru a identifica valoarea factorului de amortizare (ζ), este necesară estimarea suprareglajului. Datorită faptului ca răspunsul la impuls poate fi privit ca derivata răspunsului la intrarea de tip treaptă, se poate demonstra următoarea relaţie:

$$\sigma = \frac{\int_{t_1}^{t_2} |h(t) - \bar{y}_{st}|dt}{\int_{t_0}^{t_1} h(t) - \bar{y}_{st}dt} = \frac{A_-}{A_+}, \tag{9}$$

unde t_0 este momentul finalizării impulsului, t_1 şi t_2 sunt momentele primelor două treceri prin valoarea staţionară, iar A_+ şi A_- sunt ariile răspunsului la impuls faţă de valoare staţionară.

Pe baza formulei analitice a dependenţei dintre factorul de amortizare şi suprareglaj pentru sistemul descris prin funcţia de transfer (6), rezultă:

$$\sigma = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad \Rightarrow \quad \zeta = \frac{-\ln(\sigma)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\sigma)}}. \tag{10}$$

Pentru a identifica pulsaţia naturală de oscilaţie (ω_n) se poate utiliza legătura cu pulsaţia de oscilaţie $\omega_{osc} = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. Pulsaţia de oscilaţie se poate determina direct din perioada oscilaţiilor. Astfel, se consideră t_3 şi t_4 momentele corespunzătoare primelor două vârfuri şi rezultă:

$$\omega_{osc} = \frac{\pi}{t_4 - t_3} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{\pi}{(t_4 - t_3)\cdot\sqrt{1-\zeta^2}}. \tag{11}$$

Pentru simularea răspunsului la intrarea de tip treaptă din condiţii iniţiale nenule este necesar modelul de tip spaţiul stărilor. Pe baza formei canonice observabile dedusă din funcţia de transfer (7), se obţin matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k\omega_n^2 \end{pmatrix} \qquad C = (1 \quad 0) \qquad D = (0). \tag{12}$$

4 Validarea rezultatelor

Pentru a valida rezultatele se folosesc urmtorii indici de performanţă:

- `eroarea medie pătratică`:

$$J = ||\mathbf{y} - \mathbf{y}_M|| = \sqrt{\frac{1}{N}\sum(y - y_M)^2}; \tag{13}$$

- `eroarea medie pătratică relativă`

$$\varepsilon_{MPN} = \frac{||\mathbf{y} - \mathbf{y}_M||}{||\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}||}. \tag{14}$$