1. Hitta alla lösningar till ekvationen

$$cos^2(4x + \frac{\pi}{3}) = sin^2(3x - \frac{\pi}{4}) \tag{1}$$

Vi börjar med notera att $sin(v) = cos(\frac{\pi}{2} - v)$ och skriver således om ekvationen till:

$cos^2(4x + \frac{\pi}{3}) = cos^2(\frac{3\pi}{4} - 3x)$

Lösningarna till denna ekvation finns då $4x + \frac{\pi}{3} = \pi n \pm (\frac{3\pi}{4} - 3x)$ för alla $n \in Z$. Orsaken till att perioden är π och inte 2π är att bägge leden i den ursprngliga ekvationen är kvadrerade och kan således endast ge positiva värden, och $cos(v) = -cos(v + \pi)$. Vi kan dela in ekvationen i dess två möjligheter:

$4x + \frac{\pi}{3} = \pi n + \frac{3\pi}{4} - 3x$ och $4x + \frac{\pi}{3} = \pi n - \frac{3\pi}{4} + 3x$.

Den första av dessa har lösnignarna $x = \frac{\pi n}{7} + \frac{5\pi}{84}$ och den andra har lösningarna $x = \pi n - \frac{13\pi}{12}$

Svar: $x = \frac{\pi(12n+5)}{84}$ eller $x = \frac{\pi(84n-91)}{84}$ för alla $n \in Z$.

2. Hitta alla lösningar till ekvationen.

$$|2x^3 + x^2 - 13x + 6| = 1 - 2x \tag{2}$$

Vi delar in ekvationen i dess två möjliga fall:

$$2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 1 - 2x \tag{3}$$

och

$$2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 2x - 1 \tag{4}$$

Vi börjar med den första möjligheten, ekvation (3). Subtrahera 1 - 2x från bägge sidor.

$2x^3 + x^2 - 11x + 5 = 0$

Vi faktoriserar vänsterledet och får

$(2x - 1)(x^2 + x - 5) = 0$

Ekvationen har 3 rötter. En finns då $2x - 1$ är 0 och övriga då $x^2 + x - 5$ är 0. Den förstnämnda roten är trivial och övriga finns exempelvis via pq-formeln. Rötterna är följande: $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{1}{2}$ och $x = -\frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{1}{2}$

Vi repeterar stegen ovan för den andra ekvationen, ekvation (4). Subtrahera

2x - 1 från bägge sidor och faktorisera vänsterledet. Vi får följande ekvation:

$(2x - 1)(x^2 + x - 7) = 0$

Vi har samma triviala rot $x = \frac{1}{2}$ även i denna ekvation. Övriga rötter finner vi på samma sätt som tidigare. Dessa rötter är följande: $x = \frac{\sqrt{29}}{2} - \frac{1}{2}$ och $x = -\frac{\sqrt{29}}{2} - \frac{1}{2}$

Vi har alltså funnit 5 rötter: $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{1}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{1}{2}$, $x = \frac{\sqrt{29}}{2} - \frac{1}{2}$ och $x = -\frac{\sqrt{29}}{2} - \frac{1}{2}$. Vi måste nu verifiera dessa genom att sätta in värdena för x i vår ursprungliga ekvation. När vi gör detta finner vi att två av rötterna är falska: $x = \frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{1}{2}$ och $x = \frac{\sqrt{29}}{2} - \frac{1}{2}$. Våra lösnignar är således följande: $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{1}{2}$ och $x = -\frac{\sqrt{29}}{2} - \frac{1}{2}$

Svar: $x = \frac{1}{2}$ eller $x = -\frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{1}{2}$ eller $x = -\frac{\sqrt{29}}{2} - \frac{1}{2}$

3. Hitta alla $x \in R$ sådana att

$$ln(4 + e^{2x}) \leq ln(1 + 2e^x) + ln(3 + e^x) \tag{5}$$

Vi börjar med att upphöja e till bägge leden för att få bort alla logaritmer:
$4 + e^{2x} \leq (1 + 2e^x)(3 + e^x) \Rightarrow 4 + e^{2x} \leq 3 + 7e^x + 2e^{2x} \Rightarrow (e^x)^2 + 7e^x - 1 \geq 0$
pq-formeln ger sedan att $e^x \geq -\frac{7}{2} + \sqrt{(\frac{7}{2})^2 + 1} = \frac{\sqrt{53}-7}{2}$. Notera att vi inte är intresserade av den negativa lösningen som pq-formeln vanligvis ger eftersom e^x aldrig kan vara negativt. Slutligen kan vi beräkna x genom att ta den naturliga logaritmen på bägge sidor.

Svar: $\{x \in R : x \geq ln(\frac{\sqrt{53}-7}{2})\}$

4. Lös ekvationen

$$arctan(sinh(x)) = -\frac{\pi}{4} \tag{6}$$

Vi tar tangens för bägge sidor. och får $sinh(x) = tan(-\frac{\pi}{4})$. $tan(-\frac{\pi}{4})$ har den triviala lösningen -1. Vi tar sedan arcsinh på bägge sidor och får $x = arcsinh(-1)$

Svar: $x = arcsinh(-1)$ och eftersom $arcsinh(x) = ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ kan svaret även skrivas som $ln(\sqrt{2} - 1)$