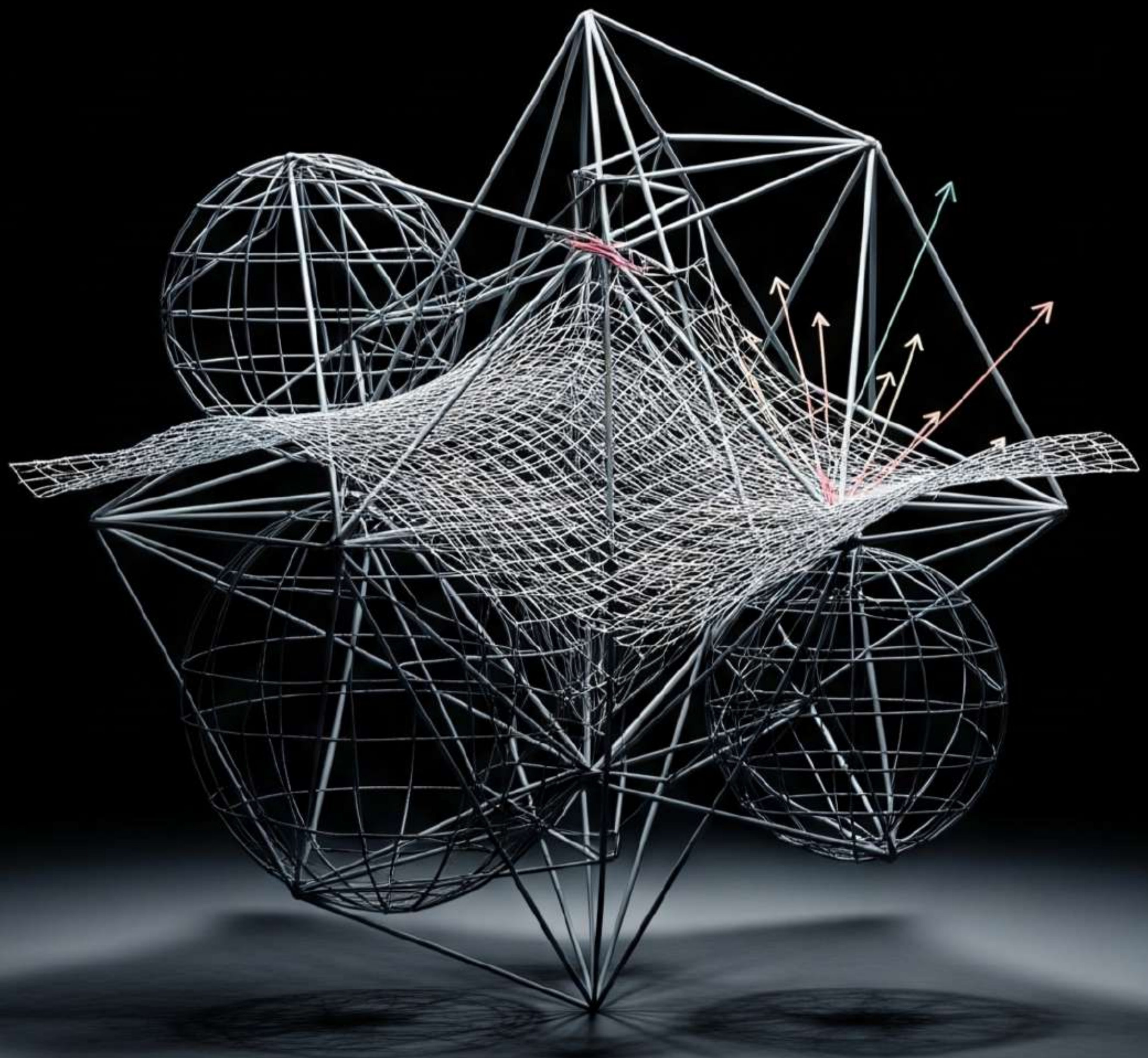
APPUNTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Marco Casu



I seguenti appunti sono tratti dal corso di Geometria Differenziale tenuto dal docente Francesco Bottacin per l'Università degli Studi di Padova.

INDICE

CAPITOLO

1

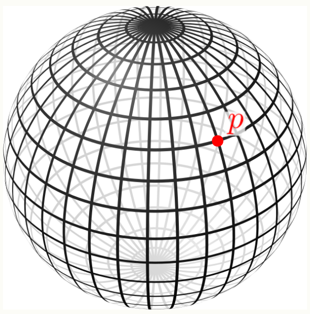
VARIETÀ DIFFERENZIABILI

1.1 Definizioni Preliminari, Varietà Topologiche

Uno degli scopi della geometria differenziale è quello di ricondurro lo studio di oggetti di forme complicate allo studio di un certo sotto-insieme di $\mathbb{R}^n$, si consideri una superficie sferica in $\mathbb{R}^3$

$$S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \|\mathbf{x}\|_2 = 1\} \tag{1.1}$$

denotando con $\|\cdot\|_2$ la norma euclidea. Ogni punto della sfera (esclusi i poli) può essere individuato da due coordinate reali $(\varphi, \theta) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$, dette latitudine e longitudine, come mostrato in figura 1.1. Si è introdotto un'opportuno sistema di coordinate allo scopo di ricondurre lo studio della sfera allo studio di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.



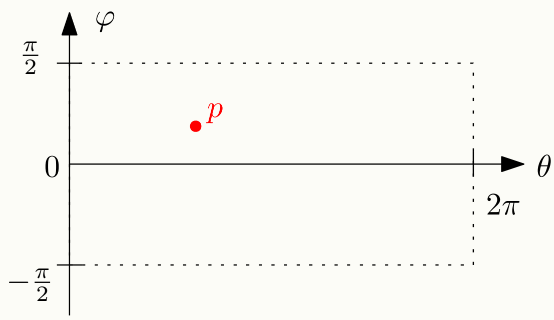


Figura 1.1: Sistema di coordinate per la sfera in $\mathbb{R}^3$

Definizione 1 *Sia X un'insieme, e τ una collezione di sottoinsiemi di X, τ è una* ***topologia*** *in X se*

- $\emptyset \in \tau$ *e* $X \in \tau$
- *Se* $V_i \in \tau$ *per* $i = 1, 2 \ldots, n$ *allora* $\bigcap_{1 \le i \le n} V_i \in \tau$
- *Se* $\{V_\alpha\}$ *è una collezione di elementi di* τ *(finita, numerabile o non numerabile) allora* $\bigcup_\alpha V_i \in \tau$.

Definizione 2 *Se un'insieme X ammette una topologia τ allora X è uno* ***spazio topologico*** *e gli insiemi in τ si dicono* ***insiemi aperti*** *di X.*

Definizione 3 *Se X e Y sono due spazi topologici, una funzione $f : X \to Y$ è* ***continua*** *se, per ogni aperto V di Y, l'insieme $f^{-1}(V)$ è un'aperto di X.*

Definizione 4 *Una funzione $f : X \to Y$ fra due spazi topologici è un* ***omeomorfismo*** *se è biettiva, continua, e la sua inversa f^{-1} è anch'essa continua.*

$\mathbb{R}^n$ è il più semplice esempio di spazio topologico. La seguente definizione è fondamentale e necessaria alla successiva definizione di *varietà*.

Definizione 5 *Sia X uno spazio topologico e $U \subset X$ un'aperto, sia φ un omeomorfismo da U ad un aperto di $\mathbb{R}^n$*

$$\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

$$\varphi(U) \text{ è un'insieme aperto} \tag{1.3}$$

allora la coppia (U, φ) è una ***carta*** *per X.*

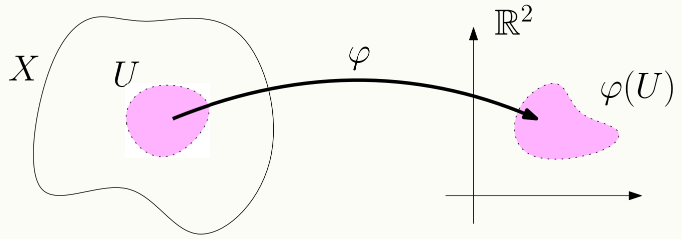


Figura 1.2: Una carta da un'insieme X ad un'aperto di $\mathbb{R}^2$

In tal contesto la funzione inversa φ^{-1} è detta *parametrizzazione locale.* Si considera ora il caso in cui due carte si intersecano, ossia, per uno stesso spazio topologico X, vi sono due carte $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ tali per cui $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, come mostrato in figura 1.3.

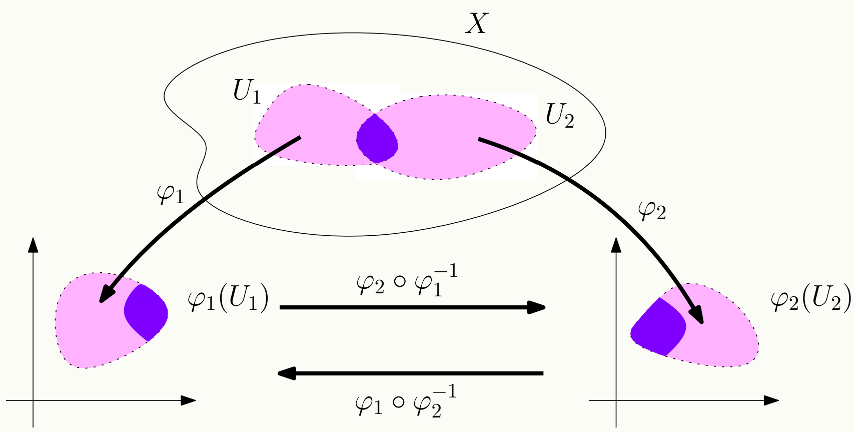


Figura 1.3: Intersezione fra due carte in X

La funzione $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ è definita solamente sulla regione $\varphi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n$, mentre $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ è definita solamente sulla regione $\varphi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n$, si ometterà tale restrizione nella notazione, e si assumerà che tali funzioni sono definite esclusivamente sugli insiemi menzionati.

Le funzioni $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$,$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ sono omeomorfismi tra aperti di $\mathbb{R}^n$. Da questo punto in avanti, date due carte $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$, si denoterà

$$\eta_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \tag{1.4}$$

queste sono denominate **funzioni di transizione** e descrivono il cambiamento di coordinate fra due differenti aperti di $\mathbb{R}^n$. Le funzioni di transizione definiscono la relazione fra punti che si trovano su più insiemi aperti di X sui quali sono definite differenti carte. Le funzioni di transizione soddisfano le seguenti identità:

- $\eta_{ii} = \text{Id}$
- $\eta_{ij} = \eta_{ji}^{-1}$
- su $U_i \cap U_j \cap U_k$ si ha $\eta_{ij} \circ \eta_{jk} = \eta_{ik}$.

Definizione 6 *Sia X uno spazio topologico, e sia $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ una famiglia di carte tali per cui*

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i \tag{1.5}$$

*in tal caso l'insieme $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ è un **atlante** per X.*

Definizione 7 *Sia X uno spazio topologico, se esiste un atlante per X, quest'ultima è detta **varietà topologica**.*

Definizione 8 *Uno spazio topologico si dice **connesso** se non può essere rappresentato come l'unione di due o più insiemi aperti non vuoti e disgiunti.*

Da questo punto in avanti si assumerà che gli spazi topologici considerati siano connessi. Un'atlante per uno spazio topologico X è una famiglia di carte che ricopre l'intero spazio, si considerino due differenti carte su X tali per cui

$$\varphi_1 : U_1 \to \varphi_1(U_1) \subset \mathbb{R}^n \tag{1.6}$$
$$\varphi_2 : U_2 \to \varphi_2(U_2) \subset \mathbb{R}^m \tag{1.7}$$

se $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ la funzione di transizione η_{12} è un omeomorfismo tra un'aperto di $\mathbb{R}^m$ ad un'aperto di $\mathbb{R}^n$, necessariamente $n = m$ (la dimostrazione è omessa).

Osservazione 1 *Se X è una varietà topologica connessa, tutte le carte di un'atlante per X sono funzioni che hanno come ambiente per il codominio $\mathbb{R}^n$, con n fissato in comune per ogni carta, in tal caso si dice che n è la **dimensione** della varietà X.*

La dimensione di una varietà è quindi ben definita dalle carte locali.

1.2 Funzioni Differenziabili sulle Varietà

Sia X una varietà topologica di dimensione n, con atlante $\{(U_i, \varphi_i)\}$. Si consideri una funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$, si ha:

$$\begin{tikzcd} X \supset U_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "f_{|U_i}"'] & \varphi(U_i) \subset \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\tilde{f}_i"] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

ove $\tilde{f}_i = f_{|U_i} \circ \varphi_i^{-1}$. La funzione $\tilde{f}_i : \varphi(U_i) \to \mathbb{R}$ è una funzione definita su un'aperto di $\mathbb{R}^n$, sui quali si possono adoperare i metodi di studio dell'Analisi. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, allora la funzione $\tilde{f}_j : \varphi(U_j) \to \mathbb{R}$ si può riscrivere $\tilde{f}_j = \tilde{f}_i \circ \eta_{ij}$

- η_{ij} è un omeomorfismo da un'aperto di $\mathbb{R}^n$ ad'un aperto di $\mathbb{R}^n$
- $\tilde{f}_i$ è una funzione da un'aperto di $\mathbb{R}^n$ ad'un'aperto di $\mathbb{R}$
- $\tilde{f}_j = \tilde{f}_i \circ \eta_{ij}$ è una funzione da un'aperto di $\mathbb{R}^n$ ad'un'aperto di $\mathbb{R}$.

Un diagramma commutativo è dato in figura 1.4. $\tilde{f}_i$ è la rappresentazione locale della funzione f sull'aperto $U_i \subset X$. $\tilde{f}_i$ e $\tilde{f}_j$ sono funzioni differenti che rappresentano però la stessa funzione f, ma in sistemi di coordinate differenti.

Se si vuole descrivere una funzione f definita in X, si può definire localmente tramite un'atlante su X, ove per ciascuna carta locale φ_i si identifica l'espressione locale di f, denotata $\tilde{f}_i$, vi è una funzione di questo tipo per ogni carta dell'atlante. Le funzioni $\tilde{f}_i$ sono descrizioni di f, non possono essere funzioni scelte arbitrariamente, ma devono soddisfare la relazione

$$\tilde{f}_j = \tilde{f}_i \circ \eta_{ij} \tag{1.8}$$

per ogni funzione di transizione η_{ij}.

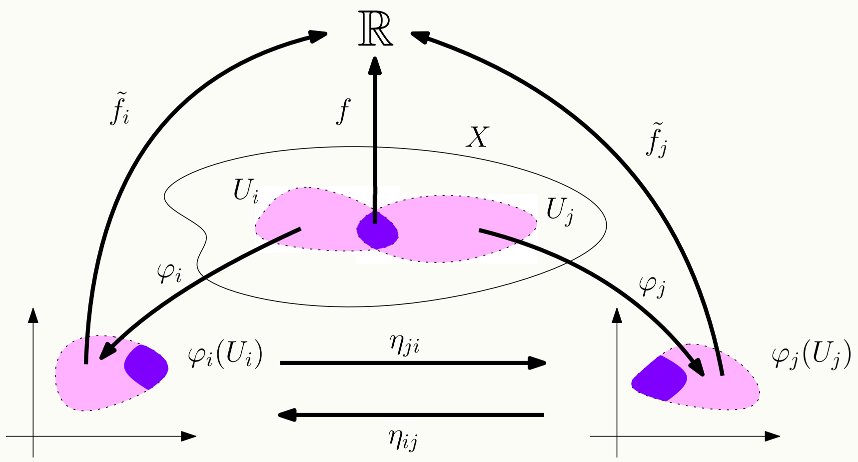


Figura 1.4: La funzione f in relazione con l'intersezione fra due carte in X

Osservazione 2 *Usando tale fatto, si è ricondotto il problema di studiare una funzione f su una varietà topologica, al problema dello studio di funzioni $\tilde{f}_i$ definite su aperti di $\mathbb{R}^n$.*

Si vuole definire ora la *differenziabilità* di f definita su una varietà topologica. Una funzione è di classe C^r definita su U aperto di $\mathbb{R}^n$ se tutte le sue derivate parziali fino all'ordine r esistono e sono continue su U. Potremmo dire che f definita su una varietà topologica X è di classe C^r su U_i aperto di X se e solo se una sua rappresentazione locale $\tilde{f}_i$ è di classe C^r in $\varphi(U_i)$, ma ciò è errato in quanto si deve considerare il fatto che possa esistere una differente carta (U_j, φ_j) che si interseca con U_i, tale per cui $\tilde{f}_j$ è di classe $C^{r'}$ con $r' < r$.

Definizione 9 *Una varietà topologica X è di classe C^r se tutte le funzioni di transizione η_{ij} sono di classe C^s con $s \geq r$.*

Osservazione 3 *Se una varietà X è di classe C^s, si può definire la nozione di funzione f di classe C^r su X, con $r \leq s$.*

Definizione 10 *Una varietà topologica di classe C^∞ è detta **varietà differenziabile**. Se n è la dimensione della varietà, si denominerà semplicemente n-varietà.*

Sulle funzioni definite su una varietà differenziabile si possono applicare i metodi del calcolo differenziale propri dell'Analisi. Essendo che ogni punto di una varietà X è contenuto in un'intorno aperto omeomorfo ad un'insieme aperto di $\mathbb{R}^n$, le proprietà locali di una varietà sono le stesse della topologia in $\mathbb{R}^n$, in particolare ogni varietà è:

- *localmente compatta*
- *localmente connessa*

per completezza, saranno date le definizioni di tali proprietà.

Definizione 11 *Uno spazio topologico X si dice **compatto** se da ogni suo ricoprimento costituito da una famiglia di insiemi aperti si può estrarre una sottofamiglia finita che è ancora un ricoprimento. Sia $\{U_i\}_{i\in I}$ una qualsiasi famiglia di sottoinsiemi aperti di X tali per cui*

$$\bigcup_{i\in I} U_i = X \tag{1.9}$$

allora esiste un sottoinsieme finito $J \subset I$ tale per cui

$$\bigcup_{i\in J} U_i = X. \tag{1.10}$$

Definizione 12 *uno spazio topologico X è detto **localmente compatto** se per ogni suo punto esiste un intorno la cui chiusura è un insieme compatto. Si ricordi che la chiusura di un'aperto U è l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi contenenti U.*

Definizione 13 *Uno spazio topologico X è* ***localmente connesso*** *se ogni punto dello spazio ha un sistema di intorni connessi. Si ricordi che un sistema di intorni è un insieme di intorni tale che qualsiasi intorno aperto di $x \in X$ contiene uno di questi intorni.*

Si assumerà (solitamente) che ogni varietà differenziabile X considerata sia uno spazio topologico di Hausdorff, ossia per il quale vale il seguente assioma:

$$\forall x, y \in X \ : \ x \neq y \ \exists U, V \text{ intorni aperti di } x, y \text{ tali che } U \cap V = \emptyset. \tag{1.11}$$

1.2.1 Esempi di Varietà

Sono dati in seguito alcuni esempi di varietà differenziabili.

Esempio 1 $\mathbb{R}^n$ è una varietà differenziabile, anche ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ lo è. Un qualunque spazio vettoriale reale di dimensione finita è isomorfo a $\mathbb{R}^n$, è quindi anch'esso una varietà.

Osservazione 4 *Anche uno spazio vettoriale a dimensione infinita può essere una varietà differenziabile, è però necessario considerare una definizione alternativa di carta, in cui non si esclude il fatto che l'immagine di una carta locale possa essere uno spazio vettoriale di dimensione infinita.*

Esempio 2 Se X è una varietà e $U \subset X$ è un'insieme aperto, allora U è una varietà.

Esempio 3 Il prodotto di due varietà è una varietà. Si consideri una m-varietà X ed una n-varietà Y, sia $\mathcal{A}$ un'atlante per X e $\mathcal{B}$ un'atlante per Y

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} \tag{1.12}$$
$$\mathcal{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}. \tag{1.13}$$

Sia $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ ove

$$\varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = R^{m+n} \tag{1.14}$$
$$(x, y) \longmapsto (\varphi_\alpha(x), \psi_\beta(y)). \tag{1.15}$$

Questo è un atlante per $X \times Y$, quest'ultima è quindi una $n+m$-varietà.

Esempio 4 Si consideri l'insieme

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \ : \ \det A \neq 0\} \tag{1.16}$$

ossia l'insieme delle matrici quadrate $n \times n$ a valori reali il cui determinante è diverso da zero, questo è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^{n^2}$, quindi è una varietà. Il fatto che sia aperto è dato dal fatto che l'insieme delle matrici con determinante nullo è un'insieme chiuso.

Esempio 5 Si consideri la sfera S^n_R di raggio R in $\mathbb{R}^{n+1}$

$$S^n_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \|\mathbf{x}\|_2 = R\} \tag{1.17}$$

è uno spazio topologico la cui topologia è quella indotta di $\mathbb{R}^{n+1}$. Si definirà un'atlante per S^n_R costituito da due carte. Si considerino i due poli

$$N = (0, 0, 0 \ldots, R) \tag{1.18}$$
$$S = (0, 0, 0 \ldots, -R) \tag{1.19}$$

si denota $p = (p^1, \ldots, p^{n+1})$ un generico punto della sfera, si noti come le coordinate si identificano con degli apici piuttosto che con dei pedici, l'utilità di tale notazione sarà chiarita in seguito.

Sia π l'iperpiano di equazione $x^{n+1} = 0$, naturalmente identificato con $\mathbb{R}^n$. La prima carta è $(S^n_R \backslash \{N\}, \varphi_N)$

$$\varphi_N : S^n_R \backslash \{N\} \to \pi \simeq \mathbb{R}^n \tag{1.20}$$

definita come la *proiezione stereografica*. Il punto $\varphi_N(p) \in \mathbb{R}^n$ identificato, è il punto che si trova su π attraversato dall'unica retta che passa per p e per N. Un'esempio in $\mathbb{R}^3$ è riportato in figura 1.5.

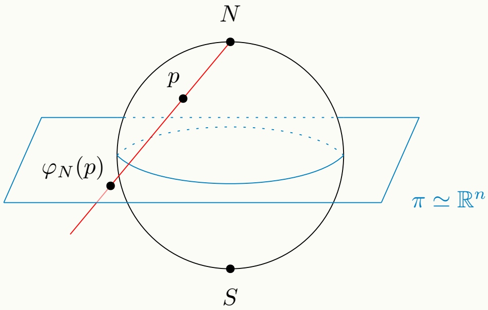


Figura 1.5: Proiezione stereografica in $\mathbb{R}^3$

Tale retta è definita dall'equazione

$$\mathbf{x}(t) = N + t(p - N) \tag{1.21}$$

con $t \in \mathbb{R}$. Le singole coordinate della retta al variare di t sono date da

$$\begin{cases} x^1(t) = tp^1 \\ x^2(t) = tp^2 \\ \vdots \\ x^n(t) = tp^n \\ x^{n+1}(t) = R + t(p^{n+1} - R) \end{cases} \tag{1.22}$$

considerando l'intersezione con l'iperpiano π si ricava

$$t = \frac{R}{R - p^{n+1}} \tag{1.23}$$

l'espressione di φ_N è quindi

$$N + \frac{R}{R - p^{n+1}}(p - N) \tag{1.24}$$

ristretta alle prime n componenti

$$\varphi_N(p) = \big(\frac{Rp^1}{R - p^{n+1}}, \frac{Rp^2}{R - p^{n+1}} \dots, \frac{Rp^n}{R - p^{n+1}}\big) \tag{1.25}$$

tale funzione è biettiva. Si noti come essendo $p \neq N$ i denominatori di ogni componente di $\varphi_N(p)$ non sono mai nulli. L'inversa di tale funzione è la seguente

$$\varphi_N^{-1}((y^1 \dots, y^n)) = \big(y^1 \frac{2R^2}{(\|y\|_2)^2 + R^2} \dots, y^n \frac{2R^2}{(\|y\|_2)^2 + R^2}, R\frac{(\|y\|_2)^2 - R^2}{(\|y\|_2)^2 + R^2}\big). \tag{1.26}$$

Come seconda carta si considera la proiezione analoga ϕ_S dal punto S

$$\varphi_S : S_R^n \backslash \{S\} \to \pi \simeq \mathbb{R}^n. \tag{1.27}$$

L'espressione di φ_S è

$$\varphi_S(p) = \frac{R}{R + p^{n+1}}(p^1, \dots, p^n) \tag{1.28}$$

queste due carte costituiscono un'atlante per la sfera S_R^n. Bisogna verificare che le due carte siano compatibili, ossia che le funzioni di transizione siano di classe C^∞, in modo da dimostrare che la varietà sia differenziabile.

L'intersezione dei due aperti di S_R^n è $S_R^n \backslash \{N, S\}$, si ha che $\varphi_N(S_R^n \backslash \{N, S\}) = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. La funzione di transizione $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ è la seguente

$$\eta_{SN}(y) = \frac{R^2}{(\|y\|_2)^2} y \tag{1.29}$$

questa è di classe C^∞ (la dimostrazione è omessa). L'altra funzione, ossia $\eta_{NS} = \eta_{SN}^{-1}$ è a sua volta di classe C^∞. La sfera S_R^n è una n-varietà differenziabile.

Osservazione 5 *Due è il numero minimo di carte per ricoprire una sfere.*

Esempio 6 Prodotti di sfere sono varietà differenziabili, come il toro

$$T^2 = S^1 \times S^1 \tag{1.30}$$

mostrato in figura 1.6.

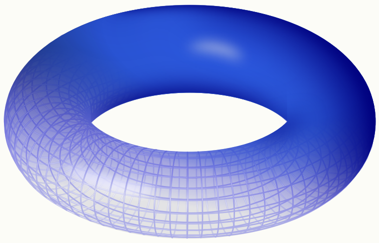


Figura 1.6: Rappresentazione geometrica del toro T^2

Esempio 7 Gli esempi precedenti consideravano varietà "immerse" in $\mathbb{R}^n$, il seguente esempio riguarda una varietà differenziabile che non nasce come sotto varietà contenuta in $\mathbb{R}^n$. Lo spazio **proiettivo reale** di dimensione n si può costruire come segue, si consideri la seguente relazione di equivalenza fra vettori in $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{\mathbf{0}\}$:

$$(x^0, x^1 \dots, x^n) \sim (y^0, y^1 \dots, y^n) \iff (y^0, y^1 \dots, y^n) = (\lambda x^0, \lambda x^1 \dots, \lambda x^n)\ \forall \lambda \neq 0. \tag{1.31}$$

Si considera l'insieme quoziente delle classi di equivalenza rispetto tale relazione

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{\mathbf{0}\}}{\sim} \tag{1.32}$$

si denota $(x^0 : x^1 \dots : x^n)$ un'elemento di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. Dal punto di vista geometrico, ogni elemento di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è una retta passante per l'origine, come mostrato in figura 1.7.

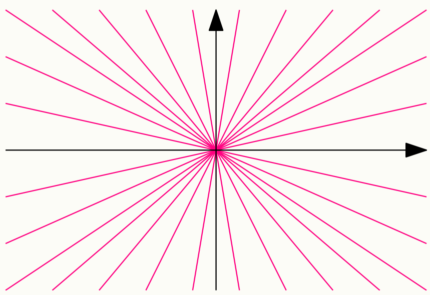


Figura 1.7: Lo spazio $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$

I punti $(x^0 : x^1 \dots : x^n)$ si denominano **coordinate omogenee** in $\mathbb{P}^n$ (da ora in poi si omette il pedice $\mathbb{R}$). Lo spazio proiettivo deve essere dotato di una topologia, siccome $\mathbb{P}^n$ è un'insieme quoziente, è quindi dotato della *topologia quoziente*, ai fini dell'esempio, non è necessario conoscere i dettagli di tale topologia.

Si vuole ora costruire un atlante per $\mathbb{P}^n$, si pone

$$U_i = \{(x^0 : x^1 \dots : x^n) \in \mathbb{P}^n \ : \ x^i \neq 0\} \tag{1.33}$$

di tali insiemi U_i ce ne sono $n+1$, per $i = 0, 1 \dots n$. Si ha che

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{0 \leq i \leq n} U_i \tag{1.34}$$

ogni punto dello spazio proiettivo deve avere almeno una coordinata diversa da zero, quindi deve essere necessariamente in uno degli insiemi U_i. Bisogna definire ora le carte locali, si pone $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ come segue

$$\varphi_i(x^0 : \cdots : x^n) = (\frac{x^0}{x_i}, \dots \frac{x^{i-1}}{x_i}, \frac{x^{i+1}}{x_i}, \dots \frac{x^n}{x_i}) \tag{1.35}$$

nell'immagine di φ_i si è esclusa la coordinata x_i, φ_i è ben definita in quanto

$$\varphi_i(x^0 : \cdots : x^n) = \varphi_i(\lambda x^0 : \cdots : \lambda x^n) \tag{1.36}$$

non è difficile da verificare

$$\varphi_i(\lambda x^0 : \cdots : \lambda x^n) = (\frac{\lambda x^0}{\lambda x_i}, \dots \frac{\lambda x^{i-1}}{\lambda x_i}, \frac{\lambda x^{i+1}}{\lambda x_i}, \dots \frac{\lambda x^n}{\lambda x_i}) = \tag{1.37}$$

$$(\frac{x^0}{x_i}, \dots \frac{x^{i-1}}{x_i}, \frac{x^{i+1}}{x_i}, \dots \frac{x^n}{x_i}) = \varphi_i(x^0 : \cdots : x^n). \tag{1.38}$$

La funzione inversa è la seguente

$$\varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \to U_i \tag{1.39}$$

$$(y^1 \dots, y^n) \longmapsto (y^1 : \cdots : y^i : 1 : y^{i+1} : \cdots : y^n) \tag{1.40}$$

l'insieme $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=0,\dots n}$ è un atlante per $\mathbb{P}^n$. Bisogna verificare ora la regolarità delle funzioni di transizione. Siano $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ due carte, si considera η_{ij}:

$$\eta_{ij}(y^1 \dots, y^n) = \tag{1.41}$$

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(y^1 \dots, y^n) = \tag{1.42}$$

$$\varphi_i(y^1 : \cdots : y^j : 1 : y^{j+1} : \cdots : y^n) = \tag{1.43}$$

$$(\frac{y^1}{y^i} : \cdots : \frac{y^{i-1}}{y^i} : \frac{y^{i+1}}{y^i} : \cdots : \frac{y^j}{y^i} : \frac{1}{y^i} : \frac{y^{j+1}}{y^i} : \cdots : \frac{y^n}{y^i}) \tag{1.44}$$

essendo che $y^i \neq 0 \neq y^j$, ogni funzione di transizione η_{ij} è di classe C^∞. In conclusione, $\mathbb{P}^n$ è una n-varietà differenziabile.

Osservazione 6 *$\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è l'insieme dei sotto spazi vettoriali di dimensione 1 di $\mathbb{R}^{n+1}$, dato che contiene tutte le rette passanti per l'origine.*

Tale struttura si può generalizzare, sia V uno spazio vettoriale sul campo reale di dimensione n, si definisce

$$Gr_k(V) = \{ \text{ insieme dei sottospazi di } V \text{ di dimensione } k\} \tag{1.45}$$

si ha che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = Gr_1(\mathbb{R}^{n+1})$. L'insieme $Gr_2(\mathbb{R}^{n+1})$ contiene tutti gli iperpiani passanti per l'origine. Anche $Gr_k(V)$ è una varietà differenziabile di dimensione $k(n-k)$ ed è detta *varietà grassmanniana.*

1.2.2 Il Teorema degli Insiemi di Livello

Il teorema presentato in tale sezione è rilevante. Sono necessari prima alcuni risultati, ed alcune definizioni.

Definizione 14 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un'aperto e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^1. Un punto $p \in \Omega$ è un **punto critico** di F se il differenziale $dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ non è suriettivo (il rango della matrice Jacobiana in tal punto non è m). Il punto $F(p)$ è detto **valore critico**.*

Sia $Crit(F) \subset \Omega$ l'insieme dei punti critici di F, tale insieme è chiuso (la dimostrazione è omessa). Si ricordi che nel caso $m = 1$, un punto critico è un punto in cui il gradiente di F si annulla. Se $n = m$, un punto è critico se la matrice Jacobiana ha determinante nullo.

Un punto è regolare se non è critico, e la sua immagine tramite F è un valore regolare.

Teorema 1 ***(della funzione inversa)*** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, e $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^k con $k \geq 1$. Sia $p_0 \in \Omega$ un punto regolare, ossia $\det(JacF(p_0)) \neq 0$, esiste un'intorno U di p_0 ed un'intorno V di $F(p_0)$ in $\mathbb{R}^n$ tali per cui la funzione*

$$F_{|U} : U \to V \tag{1.46}$$

è un diffeomorfismo (essa e la sua inversa sono differenziabili) la cui inversa è di classe C^k.

Intuitivamente, il teorema afferma che, se una funzione F in un punto p_0 è approssimabile da un'applicazione lineare invertibile, anche F stessa sarà localmente invertibile in un intorno di p_0.

Il seguente teorema è fondamentale ed afferma che le curve di livello di una funzione di classe C^∞ sono varietà differenziabili.

Teorema 2 *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+n}$ *un aperto, e sia*

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^m \tag{1.47}$$

una funzione di classe C^∞*. Sia* $a \in F(\Omega)$*, si consideri l'insieme di livello di* a*, ossia l'insieme dei punti in* Ω *in cui la funzione assume valore* a*, escludendo i punti critici:*

$$F^{-1}(a) = \{x \in \Omega \ : \ F(x) = a\} \tag{1.48}$$

$$M_a = F^{-1}(a) \backslash Crit(F) \tag{1.49}$$

allora M_a *è uno spazio topologico, la cui topologia è quella indotta da* $\mathbb{R}^{m+n}$*, inoltre è una* n*-varietà differenziabile. Se* a *è regolare,* $M_a = F^{-1}(a)$*.*

Dimostrazione: Bisogna costruire un atlante per M_a, e mostrare che le funzioni di transizione sono di classe C^∞. Si consideri un punto $p_0 \in M_a$, siccome tale punto non è critico (per ipotesi), la matrice Jacobiana $\text{Jac}F(p_0)$ ha rango massimo, ossia m. Questo significa che esiste almeno una sotto-matrice di $\text{Jac}F(p_0)$ costituita da n righe ed m colonne che ha determinante diverso da zero. A meno di permutare le coordinate, si può assumere che queste siano le ultime m colonne

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^{n+1}(p_0)} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^{n+m}(p_0)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^{n+1}(p_0)} & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^{n+m}(p_0)} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{1.50}$$

denotiamo tale matrice B, essa è invertibile. Si costruisce una funzione $G : \Omega \to \mathbb{R}^{n+m}$ definita ponendo

$$G(x) = (x^1, \dots, x^n, F(x)). \tag{1.51}$$

si considera poi la Jacobiana di G in p_0

$$\text{Jac}G(p_0) = \begin{pmatrix} \text{Id} & \mathbf{0} \\ * & B \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

è una matrice quadrata di $n + m$ righe e colonne, $\text{Jac}G(p_0)$ è suddivisa in quattro componenti come mostrato, in particolare

- Id è la matrice identità, in quanto gli elementi di tali componenti sono del tipo

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} \tag{1.53}$$

  e chiaramente, se $i = j$ allora $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^i} = 1$, differentemente, se $i \neq j$ si ha che $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = 0$, quindi la matrice risultante è l'identità.

- La componente in alto a destra è la matrice nulla perché i termini sono tutti del tipo

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{n+j}} \tag{1.54}$$

  e per ogni i, j tale derivata è nulla.

- La componente in basso a sinistra è composta dai termini del tipo

$$\frac{\partial F^i}{\partial x^{n+j}}(p_0) \tag{1.55}$$

  non vi sono assunzioni sui tali valori e con $\mathbf{x}$ si indica che tale matrice può assumere qualsiasi valore.

- L'ultima componente contiene termini del tipo

$$\frac{\partial F^i}{\partial x^{n+j}} \tag{1.56}$$

ed è chiaramente la matrice B, come dall'equazione (1.50).

si conclude che il determinante di Jac$G(p_0)$ è uguale al determinante di B, quindi diverso da zero

$$\det\begin{pmatrix}\mathrm{Id} & \mathbf{0}\\ * & B\end{pmatrix} = \det B \neq 0. \tag{1.57}$$

A tal punto si può applicare il Teorema (1), G è localmente invertibile, ossia esistono degli intorni $\tilde{U} \subset \Omega \backslash Crit(F)$ di p_0, e $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ di $G(p_0)$ tali che

$$G_{|\tilde{U}} : \tilde{U} \to W \tag{1.58}$$

è un diffeomorfismo. Sia H l'inversa di $G_{|\tilde{U}}$

$$H(y) = (h^1(y), \dots h^{n+m}(y)) \tag{1.59}$$

essendo H l'inversa di G si ha che $G(H(y)) = y$, in particolare

$$y = (y^1, \dots y^{n+m}) = G(H(y)) = \tag{1.60}$$
$$(h^1(y), \dots h^{n+m}(y), F(H(y))) \tag{1.61}$$

quindi per $i = 1, 2 \dots, n$ si ha che $h^i(y) = y^i$. Pertanto

$$F(H(y)) = F(h^1(y), \dots, h^n(y), h^{n+1}(y), \dots h^{n+m}(y)) = \tag{1.62}$$
$$F(y^1, \dots, y^n, h^{n+1}(y), \dots h^{n+m}(y)) \tag{1.63}$$

ma dato che $y = (h^1(y), \dots h^{n+m}(y), F(H(y)))$ si ha che l'ultimo blocco di $F(y^1, \dots, y^n, h^{n+1}(y), \dots h^{n+m}(y))$, ossia $h^{n+1}(y), \dots h^{n+m}(y)$, deve essere uguale all'ultimo blocco di y, quindi

$$F(H(y)) = (y^{n+1} \dots, y^{n+m}) \quad \forall y \in W \tag{1.64}$$

Si pone $U = M_a \cap \tilde{U}$ e si definisce l'insieme

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ (x, a) \in W\} \tag{1.65}$$

è un aperto di $\mathbb{R}^n$ dato che W è un aperto di $\mathbb{R}^{n+m}$. Si definisce una funzione

$$\psi : V \to \mathbb{R}^{n+m} \tag{1.66}$$

ponendo

$$\psi(x) = (x, h^{n+1}(x, a) \dots, h^{n+m}(x, a)) \tag{1.67}$$

dall'uguaglianza ricavata prima

$$F(y^1 \dots, y^n, h^{n+1}(y) \dots, h^{n+m}(y)) = (y^{n+1} \dots, y^{n+m}) \tag{1.68}$$

si deduce che $\psi(V) = U = M_a \cap \tilde{U}$

$$\psi : \mathbb{R}^n \supset V \to U \subset M_a \subset \mathbb{R}^{n+m} \tag{1.69}$$

si pone $\varphi = \psi^{-1}$, questa è una carta locale su M_a, definita su un'intorno U di p_0. Tale costruzione può avvenire per ogni punto p_0, per tanto questo definisce un'atlante, M_a è quindi una varietà topologica. Bisogna ora mostrare che le funzioni di transizione siano differenziabili.

Siano (U, φ) e (U', φ') due carte, la funzione di transizione $\varphi' \circ \varphi^{-1} = \varphi' \circ \psi$ ha come coordinate termini del tipo x^i oppure $h^j(x, a)$ (per costruzione), queste funzioni sono quindi di classe C^∞. ■

Saranno presi in considerazione alcuni esempi di applicazione di tale teorema. Sia $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$F(x) = (\|x\|_2)^2 \tag{1.70}$$

ossia la funzione che associa ad ogni vettore la sua norma euclidea elevata al quadrato. La funzione è chiaramente di classe C^∞, l'unico valore critico è $x = \mathbf{0}$, in ogni altro punto, la matrice Jacobiana ha determinante diverso da zero, quindi per ogni $R \neq 0$ l'insieme di livello

$$F^{-1}(R^2) = S_R^n \tag{1.71}$$

è una $((n+1)-1)$-varietà (è la sfera di raggio R). La dimensione della varietà è la differenza fra la dimensione del dominio con quella del codominio.

Si consideri ora la funzione $F : M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ che assegna ad ogni matrice quadrata il suo determinante

$$F(A) = \det A. \tag{1.72}$$

Sia $X = (x_i^j) \in M_n(\mathbb{R})$, il determinante si calcola tramite lo sviluppo di Laplace:

$$\det X = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} x_i^j \det X_i^j \tag{1.73}$$

dove X_i^j è la sotto-matrice di X ottenuta eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna. Da tale formula, si deduce che la derivata parziale di F è la seguente

$$\frac{\partial F}{\partial x_i^j} = (-1)^{i+j} \det X_i^j \tag{1.74}$$

Il differenziale di questa funzione non è suriettivo sui punti critici, essendo il codominio di dimensione 1, il differenziale non è suriettivo se la matrice Jacobiana ha rango zero, ossia è la funzione nulla, in tal caso i punti critici di F sono le matrici che hanno derivate parziali nulle, X è un punto critico se tutte le sotto-matrici X_i^j hanno determinante nullo

$$X \text{ è critico} \iff \det X_i^j = 0 \ \forall i, j. \tag{1.75}$$

Ciò avviene se il rango di X è minore o uguale di $n-2$

$$Crit(F) = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ rk(X) \leq n-2\}. \tag{1.76}$$

Il determinante di una matrice quadrata di rango non massimo è nullo, quindi l'unico valore critico di F è zero

$$\forall X \in Crit(F), \ F(X) = \det X = 0. \tag{1.77}$$

Si consideri un valore non critico, ad esempio 1, l'insieme di livello

$$SL(n, \mathbb{R}) = F^{-1}(1) = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ \det X = 1\} \tag{1.78}$$

questo è il gruppo speciale lineare, è una varietà differenziabile di dimensione $n^2 - 1$.

Tale teorema seppur potente nel suo enunciato va utilizzato in maniera corretta, si considerino le seguenti funzioni $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$F(x, y) = y \tag{1.79}$$
$$G(x, y) = y^2 \tag{1.80}$$

condividono l'insieme di livello per il valore 0:

$$F^{-1}(0) = \{(x, y) \ : \ y = 0\} \tag{1.81}$$
$$G^{-1}(0) = \{(x, y) \ : \ y^2 = 0\} = \{(x, y) \ : \ y = 0\}. \tag{1.82}$$

$F^{-1}(0) = G^{-1}(0)$ indica la retta di equazione $y = 0$ ed è una 1-varietà. Il Jacobiano di F è costante ed è $\text{Jac}F = (0, 1)$, il rango è 1, non ci sono quindi valori critici per F.

Il Jacobiano di G è $\text{Jac}G = (0, 2y)$, ha rango nullo ove $y = 0$, 0 è quindi un valore critico per G, il teorema non si può applicare per $G^{-1}(0)$ perchè il valore non deve essere critico, nonostante ciò, questo insieme è comunque una varietà.

Le funzioni F e G hanno lo stesso insieme di livello per il valore 0 il teorema enuncia che

> l'antimmagine di un valore regolare è una varietà

non dice che

> l'antimmagine di un valore critico non è una varietà

quest'ultima condizione si può comunque verificare.

1.3 Funzioni Differenziabili fra Varietà

Si considerino due varietà differenziabili X, Y, di dimensioni n ed m. Sia F una funzione continua

$$F : X \to Y \tag{1.83}$$

si vuole definire il concetto di funzione di classe C^r fra due varietà differenziabili. Ci si riconduce sempre ad insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$, si considerino due carte per X e per Y:

$$(U, \varphi) \text{ carta per } X, \quad p \in U \tag{1.84}$$
$$(V, \psi) \text{ carta per } Y, \quad q \in V \tag{1.85}$$

si considera $\tilde{F}$ la rappresentazione locale di F:

$$\begin{tikzcd}
X \supset U \arrow[r, "F_{|U}"] \arrow[d, "\varphi"] & V \subset Y \arrow[d, "\psi"] \\
\mathbb{R}^m \supset \varphi(U) \arrow[r, "\widetilde{F}"] & \psi(V) \subset \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

si ha che

$$\tilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}. \tag{1.86}$$

$\tilde{F}$ è una funzione definita su un'aperto di $\mathbb{R}^n$ ad immagine su un'aperto di $\mathbb{R}^m$.

Definizione 15 *Una funzione F definita fra due varietà differenziabili è di classe C^r in un'intorno di $p \in U$ se la sua rappresentazione locale $\tilde{F}$ è di classe C^r in un'intorno di $q \in \varphi(p)$.*

La definizione è ben posta se non dipende dalla scelta delle carte locali.

Si considerino due carte per X $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ con $p \in U_1 \cap U_2$. Siano $(V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2)$ due carte per Y, con $q = F(p) \in V_1 \cap V_2$. Si ha che

$$\begin{tikzcd}
\varphi_1(U_1 \cap U_2) \arrow[r, "\tilde{F}_1"] & \psi_1(V_1 \cap V_2) \\
U_1 \cap U_2 \arrow[u, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] \arrow[r, "F_{|U_1 \cap U_2}"] & V_1 \cap V_2 \arrow[u, "\psi_1"'] \arrow[d, "\psi_2"] \\
\varphi_2(U_1 \cap U_2) \arrow[r, "\tilde{F}_2"] \arrow[uu, bend left=60, "\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = \eta 12"] & \psi_2(V_1 \cap V_2) \arrow[uu, bend right=60, "\vartheta_{12} = \psi_1 \circ \psi_2^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

F ha due rappresentazioni locali, $\tilde{F}_1$ e $\tilde{F}_2$, sono tali che:

$$\tilde{F}_2 = \vartheta_{12}^{-1} \circ \tilde{F}_1 \circ \eta_{12}. \tag{1.87}$$

La Definizione 15 è ben posta se, ogni qual volta una rappresentazione locale di F ha una certa regolarità (è di classe C^r), allora anche una sua altra rappresentazione deve esserlo, siccome queste sono collegate dalle funzioni di transizione, l'unico modo per garantire ciò è che le funzioni di transizione siano a loro volta di classe C^r, ma queste per definizione di varietà differenziabile sono di classe C^∞.

Definizione 16 *Una funzione $F : X \to Y$ definita fra due varietà differenziabili è differenziabile se è di classe C^∞ in ogni punto di X.*

Proposizione 1 *Siano X, Y, Z tre varietà differenziabili, e siano*

$$F : X \to Y \tag{1.88}$$
$$G : Y \to Z \tag{1.89}$$

funzioni differenziabili, allora

$$G \circ F : X \to Z \tag{1.90}$$

è differenziabile.

Definizione 17 *Una funzione $F : X \to Y$ fra varietà differenziabili è un diffeomorfismo di classe C^r se è biettiva, di classe C^r, e la sua inversa è di classe C^r. Se non specificato, un diffeomorfismo è inteso di classe C^∞.*

Esempio Si consideri la varietà

$$X = GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \ : \ \det A \neq 0\} \tag{1.91}$$

è di dimensione n^2, la varietà $X \times X$ è di dimensione $2n^2$. L'applicazione

$$F : X \times X \to X \tag{1.92}$$
$$F(A, B) = A \cdot B \tag{1.93}$$

che associa a due matrici il loro prodotto

$$C = A \cdot B \tag{1.94}$$
$$c^i_j = \sum_h a^i_h b^h_j \tag{1.95}$$

le componenti di F sono funzioni polinomiali, quindi F è di classe C^∞, pertanto è differenziabile.

Si consideri ora la funzione $G : X \to X$ definita come segue

$$G(A) = A^{-1} \tag{1.96}$$

per le stesse ragioni, G è differenziabile. Le funzioni F e G determinano il *gruppo moltiplicativo* delle matrici quadrate a determinante non nullo, tali funzioni sono differenziabili, il gruppo $GL_n(\mathbb{R})$ è un *gruppo di Lie.*

Definizione 18 *Un **gruppo di Lie** è un gruppo G, dotato di una struttura di varietà differenziabile, e per cui le funzioni che lo definiscono*

$$G \times G \to G \text{ operazione binaria} \tag{1.97}$$
$$G \to G \text{ inverso} \tag{1.98}$$

sono entrambe differenziabili.

Il gruppo $(\mathbb{R}^n, +)$ è un gruppo di Lie.

Esempio Si consideri la varietà $X_1 = \mathbb{R}$ (la retta reale) con unica carta (U, φ) la funzione identità

$$\varphi : U \to \mathbb{R} \tag{1.99}$$
$$\varphi(x) = x \tag{1.100}$$
$$U = X_1. \tag{1.101}$$

Si consideri poi $X_2 = \mathbb{R}$ con unica carta (V, ψ) la funzione cubica

$$\varphi : V \to \mathbb{R} \tag{1.102}$$
$$\varphi(x) = x^3 \tag{1.103}$$
$$V = X_2. \tag{1.104}$$

anche X_2 è la retta reale, ma dotata di una differente carta. Esistono varietà differenziabili diverse ma tra loro **diffeomorfe**, possono essere identificate da un diffeomorfismo, è il corrispettivo dell'isomorfismo fra gruppi. Due varietà sono uguali se diffeomorfe ed il diffeomorfismo che le mette in relazione è l'identità.

X_1 e X_2 sono diverse perché l'identità non è un diffeomorfismo, si consideri però la funzione

$$F : X_1 \to X_2 \tag{1.105}$$
$$F(x) = \sqrt[3]{x} \tag{1.106}$$

questa è un diffeomorfismo:

- F è biettiva
- F è continua

la rappresentazione locale $\tilde{F}$ è la funzione identità

$$\tilde{F} = x^3 \circ \sqrt[3]{x} \circ x = x \tag{1.107}$$

$\tilde{F}$ è chiaramente un diffeomorfismo.

Osservazione 7 *Come nell'Algebra si possono classificare i gruppi a meno di isomorfismi, si possono classificare le varietà differenziabili a meno di diffeomorfismi.*

In seguito, sono riportati alcuni risultati riguardanti la classificazione delle varietà differenziabili.

- Esistono varietà topologiche che non ammettono alcuna struttura differenziabile. Le varietà topologiche di dimensioni 1, 2 e 3 ammettono sempre una struttura differenziabile
- Le varietà topologiche di dimensioni 1, 2 e 3 ammettono un'unica struttura di differenziabile (a meno di diffeomorfismi).
- Se $n \neq 4$, la varietà $\mathbb{R}^n$ ammette un'unica struttura differenziabile a meno di diffeomorfismi. $\mathbb{R}^4$ è uno spazio topologico speciale perché ammette un'infinità non numerabile di strutture di varietà differenziabile. Si noti come lo spazio tempo in Relatività Generale è descritto come una 4-varietà.
- La sfera unitaria S^7 ha 28 strutture differenziabili distinte non diffeomorfe e sono descritte tutte esplicitamente.
- Non è ancora noto quale sia il numero di strutture differenziabili distinte non diffeomorfe per S^4.

Definizione 19 *Una funzione $F : X \to Y$ è un* ***diffeomorfismo locale*** *se ogni $p \in X$ ha un'intorno aperto U tale per cui $F(U)$ è aperto in Y e la funzione*

$$F_{|U} : U \to F(U) \tag{1.108}$$

è un diffeomorfismo.

Definizione 20 *Una funzione*

$$\pi : \tilde{X} \to X \tag{1.109}$$

fra due varietà è un ***rivestimento*** *se*

1. *π è suriettiva e differenziabile*
2. *per ogni $p \in X$ vi è un intorno aperto connesso $U \subset X$ tale per cui, per ogni componente connessa $\tilde{U}$ di $\pi^{-1}(U)$, la restrizione*

   $$\pi_{|\tilde{U}}$$

   è un diffeomorfismo fra $\tilde{U}$ e U.

Se $\tilde{X}$ è semplicemente connesso, π è un rivestimento universale.

Un'esempio è il seguente, siano

$$\tilde{X} = \mathbb{R} \tag{1.110}$$
$$X = S^1_R \subset \mathbb{R}^2 \tag{1.111}$$
$$\pi : \tilde{X} \to X \tag{1.112}$$
$$\pi(t) = (R\cos t, R\sin t) \tag{1.113}$$

π è un rivestimento universale.