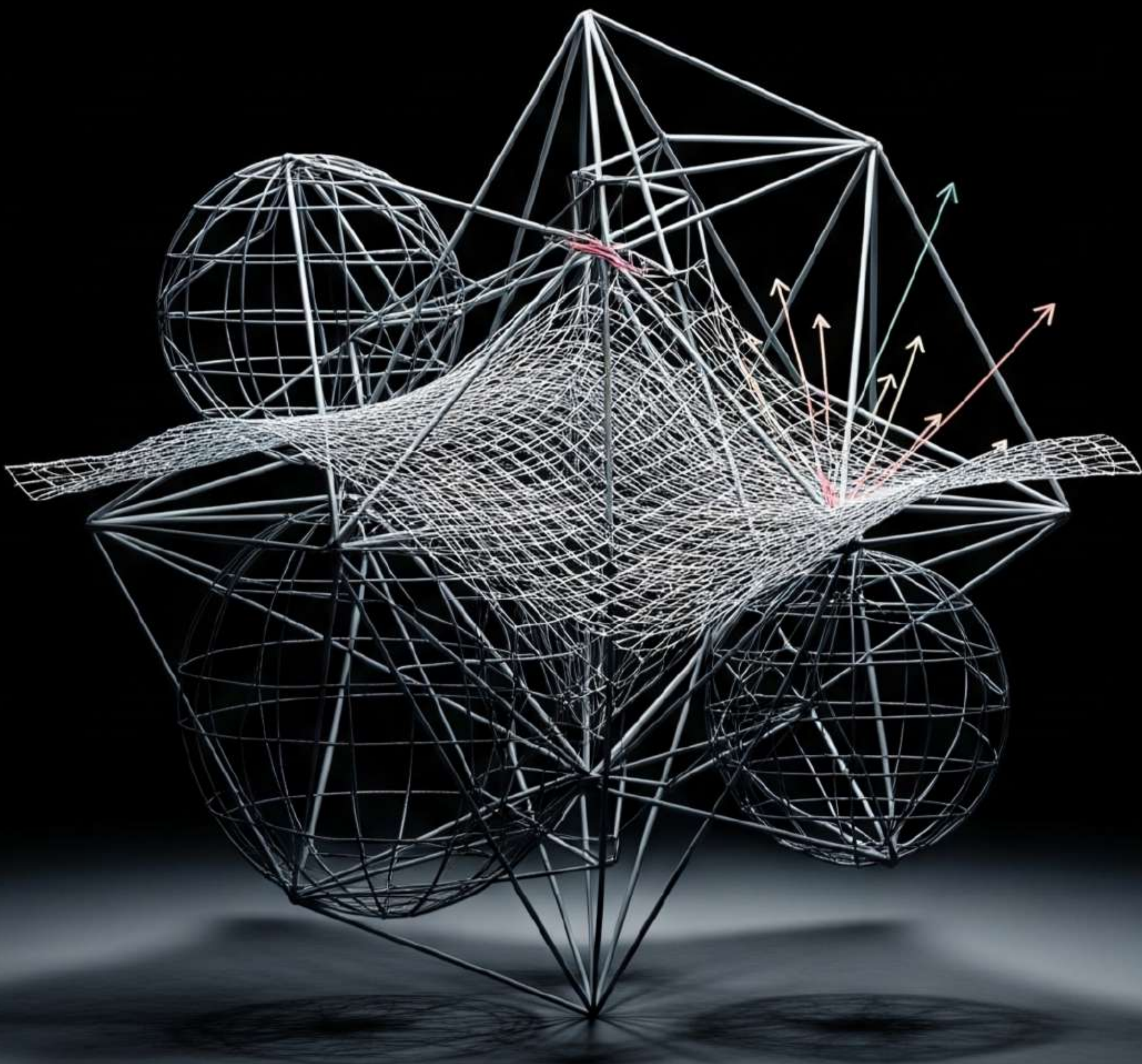
APPUNTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Marco Casu



I seguenti appunti sono tratti dal corso di Geometria Differenziale tenuto dal docente Francesco Bottacin per l'Università degli Studi di Padova.

INDICE

CAPITOLO

1 VARIETÀ DIFFERENZIABILI

1.1 Definizioni Preliminari, Varietà Topologiche

Uno degli scopi della geometria differenziale è quello di ricondurro lo studio di oggetti di forme complicate allo studio di un certo sotto-insieme di $\mathbb{R}^n$, si consideri una superficie sferica in $\mathbb{R}^3$

$$S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \|\mathbf{x}\|_2 = 1\} \tag{1.1}$$

denotando con $\|\cdot\|_2$ la norma euclidea. Ogni punto della sfera (esclusi i poli) può essere individuato da due coordinate reali $(\varphi, \theta) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$, dette latitudine e longitudine, come mostrato in figura 1.1. Si è introdotto un'opportuno sistema di coordinate allo scopo di ricondurre lo studio della sfera allo studio di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

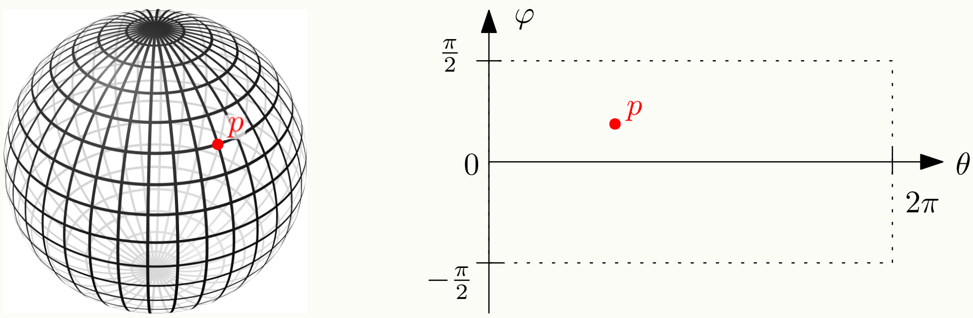


Figura 1.1: Sistema di coordinate per la sfera in $\mathbb{R}^3$

Definizione 1 *Sia X un'insieme, e τ una collezione di sottoinsiemi di X, τ è una* ***topologia*** *in X se*

- $\emptyset \in \tau$ *e* $X \in \tau$
- *Se* $V_i \in \tau$ *per* $i = 1, 2 \ldots, n$ *allora* $\bigcap_{1 \le i \le n} V_i \in \tau$
- *Se* $\{V_\alpha\}$ *è una collezione di elementi di* τ *(finita, numerabile o non numerabile) allora* $\bigcup_{\alpha} V_i \in \tau$.

Definizione 2 *Se un'insieme X ammette una topologia τ allora X è uno* ***spazio topologico*** *e gli insiemi in τ si dicono* ***insiemi aperti*** *di X.*

Definizione 3 *Se X e Y sono due spazi topologici, una funzione $f : X \to Y$ è* ***continua*** *se, per ogni aperto V di Y, l'insieme $f^{-1}(V)$ è un'aperto di X.*

Definizione 4 *Una funzione $f : X \to Y$ fra due spazi topologici è un* ***omeomorfismo*** *se è biettiva, continua, e la sua inversa f^{-1} è anch'essa continua.*

$\mathbb{R}^n$ è il più semplice esempio di spazio topologico. La seguente definizione è fondamentale e necessaria alla successiva definizione di *varietà*.

Definizione 5 *Sia X uno spazio topologico e $U \subset X$ un'aperto, sia φ un omeomorfismo da U ad un aperto di $\mathbb{R}^n$*

$$\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$
$$\varphi(U) \text{ è un'insieme aperto} \tag{1.3}$$

allora la coppia (U, φ) è una ***carta*** *per X.*

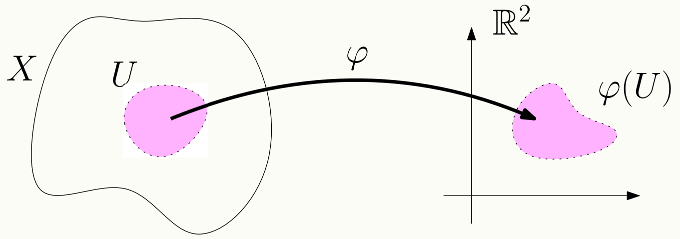


Figura 1.2: Una carta da un'insieme X ad un'aperto di $\mathbb{R}^2$

In tal contesto la funzione inversa φ^{-1} è detta *parametrizzazione locale*. Si considera ora il caso in cui due carte si intersecano, ossia, per uno stesso spazio topologico X, vi sono due carte $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ tali per cui $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, come mostrato in figura 1.3.

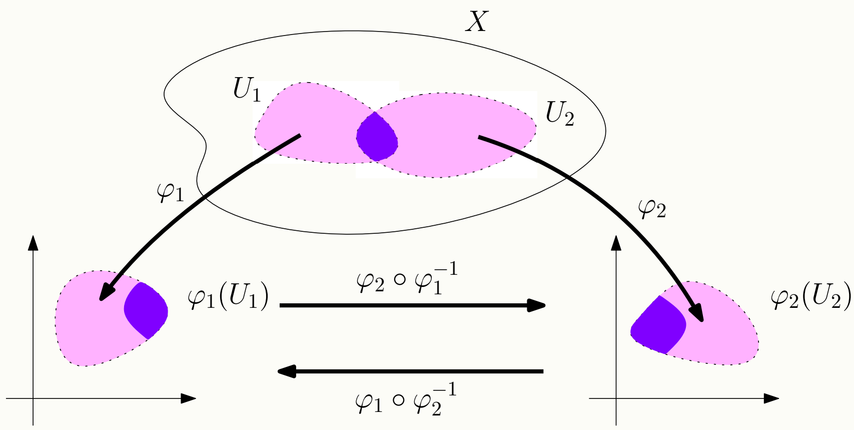


Figura 1.3: Intersezione fra due carte in X

La funzione $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ è definita solamente sulla regione $\varphi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n$, mentre $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ è definita solamente sulla regione $\varphi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n$, si ometterà tale restrizione nella notazione, e si assumerà che tali funzioni sono definite esclusivamente sugli insiemi menzionati.

Le funzioni $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$,$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ sono omeomorfismi tra aperti di $\mathbb{R}^n$. Da questo punto in avanti, date due carte $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$, si denoterà

$$\eta_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \tag{1.4}$$

queste sono denominate **funzioni di transizione** e descrivono il cambiamento di coordinate fra due differenti aperti di $\mathbb{R}^n$. Le funzioni di transizione definiscono la relazione fra punti che si trovano su più insiemi aperti di X sui quali sono definite differenti carte. Le funzioni di transizione soddisfano le seguenti identità:

- $\eta_{ii} = \text{Id}$
- $\eta_{ij} = \eta_{ji}^{-1}$
- su $U_i \cap U_j \cap U_k$ si ha $\eta_{ij} \circ \eta_{jk} = \eta_{ik}$.

Definizione 6 *Sia X uno spazio topologico, e sia $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ una famiglia di carte tali per cui*

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \tag{1.5}$$

*in tal caso l'insieme $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ è un **atlante** per X.*

Definizione 7 *Sia X uno spazio topologico, se esiste un atlante per X, quest'ultima è detta **varietà topologica**.*

Definizione 8 *Uno spazio topologico si dice **connesso** se non può essere rappresentato come l'unione di due o più insiemi aperti non vuoti e disgiunti.*

Da questo punto in avanti si assumerà che gli spazi topologici considerati siano connessi. Un'atlante per uno spazio topologico X è una famiglia di carte che ricopre l'intero spazio, si considerino due differenti carte su X tali per cui

$$\varphi_1 : U_1 \to \varphi_1(U_1) \subset \mathbb{R}^n \tag{1.6}$$
$$\varphi_2 : U_2 \to \varphi_2(U_2) \subset \mathbb{R}^m \tag{1.7}$$

se $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ la funzione di transizione η_{12} è un omeomorfismo tra un'aperto di $\mathbb{R}^m$ ad un'aperto di $\mathbb{R}^n$, necessariamente $n = m$ (la dimostrazione è omessa).

Osservazione 1 *Se X è una varietà topologica connessa, tutte le carte di un'atlante per X sono funzioni che hanno come ambiente per il codominio $\mathbb{R}^n$, con n fissato in comune per ogni carta, in tal caso si dice che n è la **dimensione** della varietà X.*

La dimensione di una varietà è quindi ben definita dalle carte locali.

1.2 Funzioni Differenziabili sulle Varietà

Sia X una varietà topologica di dimensione n, con atlante $\{(U_i, \varphi_i)\}$. Si consideri una funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$, si ha:

$$\begin{tikzcd} X \supset U_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "f_{|U_i}"'] & \varphi(U_i) \subset \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\tilde{f}_i"] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

ove $\tilde{f}_i = f_{|U_i} \circ \varphi_i^{-1}$. La funzione $\tilde{f}_i : \varphi(U_i) \to \mathbb{R}$ è una funzione definita su un'aperto di $\mathbb{R}^n$, sui quali si possono adoperare i metodi di studio dell'Analisi. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, allora la funzione $\tilde{f}_j : \varphi(U_j) \to \mathbb{R}$ si può riscrivere $\tilde{f}_j = \tilde{f}_i \circ \eta_{ij}$

- η_{ij} è un omeomorfismo da un'aperto di $\mathbb{R}^n$ ad'un aperto di $\mathbb{R}^n$
- $\tilde{f}_i$ è una funzione da un'aperto di $\mathbb{R}^n$ ad'un'aperto di $\mathbb{R}$
- $\tilde{f}_j = \tilde{f}_i \circ \eta_{ij}$ è una funzione da un'aperto di $\mathbb{R}^n$ ad'un'aperto di $\mathbb{R}$.

Un diagramma commutativo è dato in figura 1.4. $\tilde{f}_i$ è la rappresentazione locale della funzione f sull'aperto $U_i \subset X$. $\tilde{f}_i$ e $\tilde{f}_j$ sono funzioni differenti che rappresentano però la stessa funzione f, ma in sistemi di coordinate differenti.

Se si vuole descrivere una funzione f definita in X, si può definire localmente tramite un'atlante su X, ove per ciascuna carta locale φ_i si identifica l'espressione locale di f, denotata $\tilde{f}_i$, vi è una funzione di questo tipo per ogni carta dell'atlante. Le funzioni $\tilde{f}_i$ sono descrizioni di f, non possono essere funzioni scelte arbitrariamente, ma devono soddisfare la relazione

$$\tilde{f}_j = \tilde{f}_i \circ \eta_{ij} \tag{1.8}$$

per ogni funzione di transizione η_{ij}.

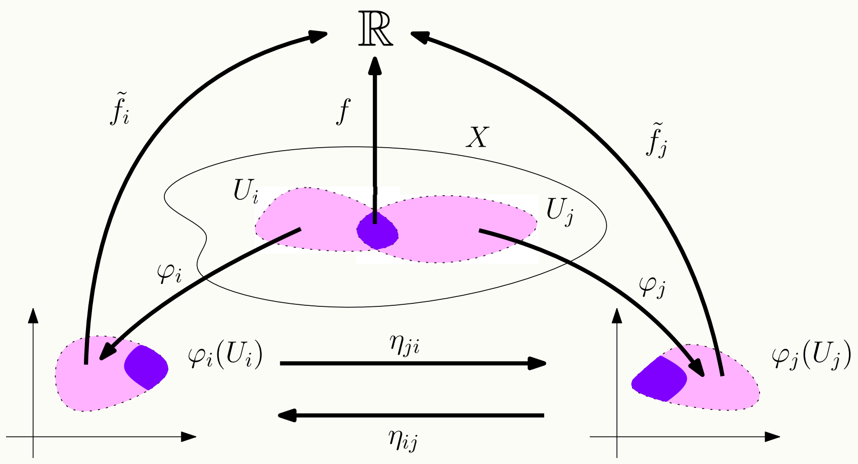


Figura 1.4: La funzione f in relazione con l'intersezione fra due carte in X

Osservazione 2 *Usando tale fatto, si è ricondotto il problema di studiare una funzione f su una varietà topologica, al problema dello studio di funzioni $\tilde{f}_i$ definite su aperti di $\mathbb{R}^n$.*

Si vuole definire ora la *differenziabilità* di f definita su una varietà topologica. Una funzione è di classe C^r definita su U aperto di $\mathbb{R}^n$ se tutte le sue derivate parziali fino all'ordine r esistono e sono continue su U. Potremmo dire che f definita su una varietà topologica X è di classe C^r su U_i aperto di X se e solo se una sua rappresentazione locale $\tilde{f}_i$ è di classe C^r in $\varphi(U_i)$, ma ciò è errato in quanto si deve considerare il fatto che possa esistere una differente carta (U_j, φ_j) che si interseca con U_i, tale per cui $\tilde{f}_j$ è di classe $C^{r'}$ con $r' < r$.

Definizione 9 *Una varietà topologica X è di classe C^r se tutte le funzioni di transizione η_{ij} sono di classe C^s con $s \geq r$.*

Osservazione 3 *Se una varietà X è di classe C^s, si può definire la nozione di funzione f di classe C^r su X, con $r \leq s$.*

Definizione 10 *Una varietà topologica di classe C^∞ è detta **varietà differenziabile**. Se n è la dimensione della varietà, si denominerà semplicemente n-varietà.*

Sulle funzioni definite su una varietà differenziabile si possono applicare i metodi del calcolo differenziale propri dell'Analisi. Essendo che ogni punto di una varietà X è contenuto in un'intorno aperto omeomorfo ad un'insieme aperto di $\mathbb{R}^n$, le proprietà locali di una varietà sono le stesse della topologia in $\mathbb{R}^n$, in particolare ogni varietà è:

- *localmente compatta*
- *localmente connessa*

per completezza, saranno date le definizioni di tali proprietà.

Definizione 11 *Uno spazio topologico X si dice **compatto** se da ogni suo ricoprimento costituito da una famiglia di insiemi aperti si può estrarre una sottofamiglia finita che è ancora un ricoprimento. Sia $\{U_i\}_{i\in I}$ una qualsiasi famiglia di sottoinsiemi aperti di X tali per cui*

$$\bigcup_{i\in I} U_i = X \tag{1.9}$$

allora esiste un sottoinsieme finito $J \subset I$ tale per cui

$$\bigcup_{i\in J} U_i = X. \tag{1.10}$$

Definizione 12 *uno spazio topologico X è detto **localmente compatto** se per ogni suo punto esiste un intorno la cui chiusura è un insieme compatto. Si ricordi che la chiusura di un'aperto U è l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi contenenti U.*

Definizione 13 *Uno spazio topologico X è* ***localmente connesso*** *se ogni punto dello spazio ha un sistema di intorni connessi. Si ricordi che un sistema di intorni è un insieme di intorni tale che qualsiasi intorno aperto di $x \in X$ contiene uno di questi intorni.*

Si assumerà (solitamente) che ogni varietà differenziabile X considerata sia uno spazio topologico di Hausdorff, ossia per il quale vale il seguente assioma:

$$\forall x, y \in X \ : \ x \neq y \ \exists U, V \text{ intorni aperti di } x, y \text{ tali che } U \cap V = \emptyset. \tag{1.11}$$

1.2.1 Esempi di Varietà

Sono dati in seguito alcuni esempi di varietà differenziabili.

Esempio 1 $\mathbb{R}^n$ è una varietà differenziabile, anche ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ lo è. Un qualunque spazio vettoriale reale di dimensione finita è isomorfo a $\mathbb{R}^n$, è quindi anch'esso una varietà.

Osservazione 4 *Anche uno spazio vettoriale a dimensione infinita può essere una varietà differenziabile, è però necessario considerare una definizione alternativa di carta, in cui non si esclude il fatto che l'immagine di una carta locale possa essere uno spazio vettoriale di dimensione infinita.*

Esempio 2 Se X è una varietà e $U \subset X$ è un'insieme aperto, allora U è una varietà.

Esempio 3 Il prodotto di due varietà è una varietà. Si consideri una m-varietà X ed una n-varietà Y, sia $\mathcal{A}$ un'atlante per X e $\mathcal{B}$ un'atlante per Y

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} \tag{1.12}$$
$$\mathcal{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}. \tag{1.13}$$

Sia $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ ove

$$\varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = R^{m+n} \tag{1.14}$$
$$(x, y) \longmapsto (\varphi_\alpha(x), \psi_\beta(y)). \tag{1.15}$$

Questo è un atlante per $X \times Y$, quest'ultima è quindi una $n + m$-varietà.

Esempio 4 Si consideri l'insieme

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \ : \ \det A \neq 0\} \tag{1.16}$$

ossia l'insieme delle matrici quadrate $n \times n$ a valori reali il cui determinante è diverso da zero, questo è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^{n^2}$, quindi è una varietà. Il fatto che sia aperto è dato dal fatto che l'insieme delle matrici con determinante nullo è un'insieme chiuso.

Esempio 5 Si consideri la sfera S^n_R di raggio R in $\mathbb{R}^{n+1}$

$$S^n_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \|\mathbf{x}\|_2 = R\} \tag{1.17}$$

è uno spazio topologico la cui topologia è quella indotta di $\mathbb{R}^{n+1}$. Si definirà un'atlante per S^n_R costituito da due carte. Si considerino i due poli

$$N = (0, 0, 0 \ldots, R) \tag{1.18}$$
$$S = (0, 0, 0 \ldots, -R) \tag{1.19}$$

si denota $p = (p^1, \ldots, p^{n+1})$ un generico punto della sfera, si noti come le coordinate si identificano con degli apici piuttosto che con dei pedici, l'utilità di tale notazione sarà chiarita in seguito.

Sia π l'iperpiano di equazione $x^{n+1} = 0$, naturalmente identificato con $\mathbb{R}^n$. La prima carta è $(S^n_R \backslash \{N\}, \varphi_N)$

$$\varphi_N : S^n_R \backslash \{N\} \to \pi \simeq \mathbb{R}^n \tag{1.20}$$

definita come la *proiezione stereografica*. Il punto $\varphi_N(p) \in \mathbb{R}^n$ identificato, è il punto che si trova su π attraversato dall'unica retta che passa per p e per N. Un'esempio in $\mathbb{R}^3$ è riportato in figura 1.5.

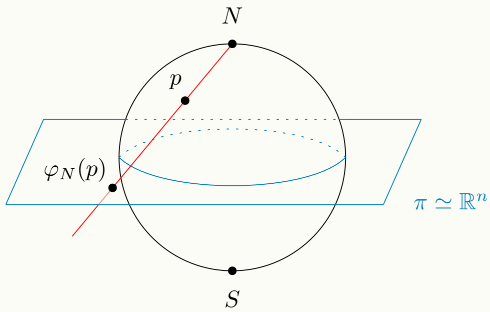


Figura 1.5: Proiezione stereografica in $\mathbb{R}^3$

Tale retta è definita dall'equazione

$$\mathbf{x}(t) = N + t(p - N) \tag{1.21}$$

con $t \in \mathbb{R}$. Le singole coordinate della retta al variare di t sono date da

$$\begin{cases} x^1(t) = tp^1 \\ x^2(t) = tp^2 \\ \vdots \\ x^n(t) = tp^n \\ x^{n+1}(t) = R + t(p^{n+1} - R) \end{cases} \tag{1.22}$$

considerando l'intersezione con l'iperpiano π si ricava

$$t = \frac{R}{R - p^{n+1}} \tag{1.23}$$

l'espressione di φ_N è quindi

$$N + \frac{R}{R - p^{n+1}}(p - N) \tag{1.24}$$

ristretta alle prime n componenti

$$\varphi_N(p) = \big(\frac{Rp^1}{R - p^{n+1}}, \frac{Rp^2}{R - p^{n+1}} \dots, \frac{Rp^n}{R - p^{n+1}}\big) \tag{1.25}$$

tale funzione è biettiva. Si noti come essendo $p \neq N$ i denominatori di ogni componente di $\varphi_N(p)$ non sono mai nulli. L'inversa di tale funzione è la seguente

$$\varphi_N^{-1}((y^1 \dots, y^n)) = \big(y^1 \frac{2R^2}{(\|y\|_2)^2 + R^2} \dots, y^n \frac{2R^2}{(\|y\|_2)^2 + R^2}, R\frac{(\|y\|_2)^2 - R^2}{(\|y\|_2)^2 + R^2}\big). \tag{1.26}$$

Come seconda carta si considera la proiezione analoga ϕ_S dal punto S

$$\varphi_S : S_R^n \backslash \{S\} \to \pi \simeq \mathbb{R}^n. \tag{1.27}$$

L'espressione di φ_S è

$$\varphi_S(p) = \frac{R}{R + p^{n+1}}(p^1, \dots, p^n) \tag{1.28}$$

queste due carte costituiscono un'atlante per la sfera S_R^n. Bisogna verificare che le due carte siano compatibili, ossia che le funzioni di transizione siano di classe C^∞, in modo da dimostrare che la varietà sia differenziabile.

L'intersezione dei due aperti di S_R^n è $S_R^n \backslash \{N, S\}$, si ha che $\varphi_N(S_R^n \backslash \{N, S\}) = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. La funzione di transizione $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ è la seguente

$$\eta_{SN}(y) = \frac{R^2}{(\|y\|_2)^2} y \tag{1.29}$$

questa è di classe C^∞ (la dimostrazione è omessa). L'altra funzione, ossia $\eta_{NS} = \eta_{SN}^{-1}$ è a sua volta di classe C^∞. La sfera S_R^n è una n-varietà differenziabile.

Osservazione 5 *Due è il numero minimo di carte per ricoprire una sfere.*

Esempio 6 Prodotti di sfere sono varietà differenziabili, come il toro

$$T^2 = S^1 \times S^1 \tag{1.30}$$

mostrato in figura 1.6.

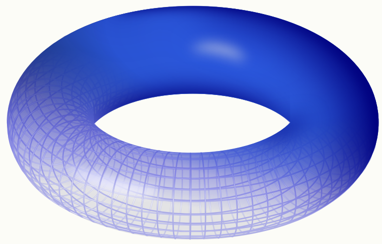


Figura 1.6: Rappresentazione geometrica del toro T^2

Esempio 7 Gli esempi precedenti consideravano varietà "immerse" in $\mathbb{R}^n$, il seguente esempio riguarda una varietà differenziabile che non nasce come sotto varietà contenuta in $\mathbb{R}^n$. Lo spazio **proiettivo reale** di dimensione n si può costruire come segue, si consideri la seguente relazione di equivalenza fra vettori in $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{\mathbf{0}\}$:

$$(x^0, x^1 \ldots, x^n) \sim (y^0, y^1 \ldots, y^n) \iff (y^0, y^1 \ldots, y^n) = (\lambda x^0, \lambda x^1 \ldots, \lambda x^n)\ \forall\lambda \neq 0. \tag{1.31}$$

Si considera l'insieme quoziente delle classi di equivalenza rispetto tale relazione

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = \frac{\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{\mathbf{0}\}}{\sim} \tag{1.32}$$

si denota $(x^0 : x^1 \cdots : x^n)$ un'elemento di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. Dal punto di vista geometrico, ogni elemento di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è una retta passante per l'origine, come mostrato in figura 1.7.

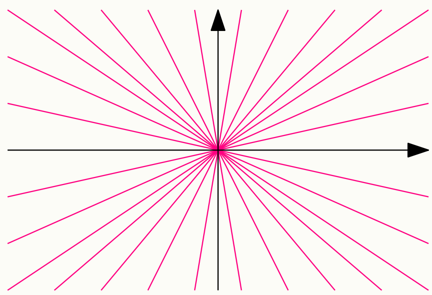


Figura 1.7: Lo spazio $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$

I punti $(x^0 : x^1 \cdots : x^n)$ si denominano **coordinate omogenee** in $\mathbb{P}^n$ (da ora in poi si omette il pedice $\mathbb{R}$). Lo spazio proiettivo deve essere dotato di una topologia, siccome $\mathbb{P}^n$ è un'insieme quoziente, è quindi dotato della *topologia quoziente*, ai fini dell'esempio, non è necessario conoscere i dettagli di tale topologia.

Si vuole ora costruire un atlante per $\mathbb{P}^n$, si pone

$$U_i = \{(x^0 : x^1 \cdots : x^n) \in \mathbb{P}^n \ : \ x^i \neq 0\} \tag{1.33}$$

di tali insiemi U_i ce ne sono $n+1$, per $i = 0, 1 \ldots n$. Si ha che

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{0\leq i\leq n} U_i \tag{1.34}$$

ogni punto dello spazio proiettivo deve avere almeno una coordinata diversa da zero, quindi deve essere necessariamente in uno degli insiemi U_i. Bisogna definire ora le carte locali, si pone $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ come segue

$$\varphi_i(x^0 : \cdots : x^n) = (\frac{x^0}{x_i}, \dots \frac{x^{i-1}}{x_i}, \frac{x^{i+1}}{x_i}, \dots \frac{x^n}{x_i}) \tag{1.35}$$

nell'immagine di φ_i si è esclusa la coordinata x_i, φ_i è ben definita in quanto

$$\varphi_i(x^0 : \cdots : x^n) = \varphi_i(\lambda x^0 : \cdots : \lambda x^n) \tag{1.36}$$

non è difficile da verificare

$$\varphi_i(\lambda x^0 : \cdots : \lambda x^n) = (\frac{\lambda x^0}{\lambda x_i}, \dots \frac{\lambda x^{i-1}}{\lambda x_i}, \frac{\lambda x^{i+1}}{\lambda x_i}, \dots \frac{\lambda x^n}{\lambda x_i}) = \tag{1.37}$$

$$(\frac{x^0}{x_i}, \dots \frac{x^{i-1}}{x_i}, \frac{x^{i+1}}{x_i}, \dots \frac{x^n}{x_i}) = \varphi_i(x^0 : \cdots : x^n). \tag{1.38}$$

La funzione inversa è la seguente

$$\varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \to U_i \tag{1.39}$$

$$(y^1 \dots, y^n) \longmapsto (y^1 : \cdots : y^i : 1 : y^{i+1} : \cdots : y^n) \tag{1.40}$$

l'insieme $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=0,\dots n}$ è un atlante per $\mathbb{P}^n$. Bisogna verificare ora la regolarità delle funzioni di transizione. Siano $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ due carte, si considera η_{ij}:

$$\eta_{ij}(y^1 \dots, y^n) = \tag{1.41}$$

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(y^1 \dots, y^n) = \tag{1.42}$$

$$\varphi_i(y^1 : \cdots : y^j : 1 : y^{j+1} : \cdots : y^n) = \tag{1.43}$$

$$(\frac{y^1}{y^i} : \cdots : \frac{y^{i-1}}{y^i} : \frac{y^{i+1}}{y^i} : \cdots : \frac{y^j}{y^i} : \frac{1}{y^i} : \frac{y^{j+1}}{y^i} : \cdots : \frac{y^n}{y^i}) \tag{1.44}$$

essendo che $y^i \neq 0 \neq y^j$, ogni funzione di transizione η_{ij} è di classe C^∞. In conclusione, $\mathbb{P}^n$ è una n-varietà differenziabile.

Osservazione 6 *$\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è l'insieme dei sotto spazi vettoriali di dimensione 1 di $\mathbb{R}^{n+1}$, dato che contiene tutte le rette passanti per l'origine.*

Tale struttura si può generalizzare, sia V uno spazio vettoriale sul campo reale di dimensione n, si definisce

$$Gr_k(V) = \{ \text{ insieme dei sottospazi di } V \text{ di dimensione } k\} \tag{1.45}$$

si ha che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = Gr_1(\mathbb{R}^{n+1})$. L'insieme $Gr_2(\mathbb{R}^{n+1})$ contiene tutti gli iperpiani passanti per l'origine. Anche $Gr_k(V)$ è una varietà differenziabile di dimensione $k(n-k)$ ed è detta *varietà grassmanniana.*

1.2.2 Il Teorema degli Insiemi di Livello

Il teorema presentato in tale sezione è rilevante. Sono necessari prima alcuni risultati, ed alcune definizioni.

Definizione 14 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un'aperto e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^1. Un punto $p \in \Omega$ è un* ***punto critico*** *di F se il differenziale $dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ non è suriettivo (il rango della matrice Jacobiana in tal punto non è m). Il punto $F(p)$ è detto* ***valore critico****.*

Sia $Crit(F) \subset \Omega$ l'insieme dei punti critici di F, tale insieme è chiuso (la dimostrazione è omessa). Si ricordi che nel caso $m = 1$, un punto critico è un punto in cui il gradiente di F si annulla. Se $n = m$, un punto è critico se la matrice Jacobiana ha determinante nullo.

Un punto è regolare se non è critico, e la sua immagine tramite F è un valore regolare.

Teorema 1 ***(della funzione inversa)*** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, e $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^k con $k \geq 1$. Sia $p_0 \in \Omega$ un punto regolare, ossia $\det(JacF(p_0)) \neq 0$, esiste un'intorno U di p_0 ed un'intorno V di $F(p_0)$ in $\mathbb{R}^n$ tali per cui la funzione*

$$F_{|U} : U \to V \tag{1.46}$$

è un diffeomorfismo (essa e la sua inversa sono differenziabili) la cui inversa è di classe C^k.

Intuitivamente, il teorema afferma che, se una funzione F in un punto p_0 è approssimabile da un'applicazione lineare invertibile, anche F stessa sarà localmente invertibile in un intorno di p_0.

Il seguente teorema è fondamentale ed afferma che le curve di livello di una funzione di classe C^∞ sono varietà differenziabili.

Teorema 2 *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+n}$ *un aperto, e sia*

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^m \tag{1.47}$$

una funzione di classe C^∞*. Sia* $a \in F(\Omega)$*, si consideri l'insieme di livello di* a*, ossia l'insieme dei punti in* Ω *in cui la funzione assume valore* a*, escludendo i punti critici:*

$$F^{-1}(a) = \{x \in \Omega \ : \ F(x) = a\} \tag{1.48}$$

$$M_a = F^{-1}(a) \backslash Crit(F) \tag{1.49}$$

allora M_a *è uno spazio topologico, la cui topologia è quella indotta da* $\mathbb{R}^{m+n}$*, inoltre è una* n*-varietà differenziabile. Se* a *è regolare,* $M_a = F^{-1}(a)$*.*

Dimostrazione: Bisogna costruire un atlante per M_a, e mostrare che le funzioni di transizione sono di classe C^∞. Si consideri un punto $p_0 \in M_a$, siccome tale punto non è critico (per ipotesi), la matrice Jacobiana $\mathrm{Jac}F(p_0)$ ha rango massimo, ossia m. Questo significa che esiste almeno una sotto-matrice di $\mathrm{Jac}F(p_0)$ costituita da n righe ed m colonne che ha determinante diverso da zero. A meno di permutare le coordinate, si può assumere che queste siano le ultime m colonne

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^{n+1}(p_0)} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^{n+m}(p_0)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^{n+1}(p_0)} & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^{n+m}(p_0)} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{1.50}$$

denotiamo tale matrice B, essa è invertibile. Si costruisce una funzione $G : \Omega \to \mathbb{R}^{n+m}$ definita ponendo

$$G(x) = (x^1, \ldots, x^n, F(x)). \tag{1.51}$$

si considera poi la Jacobiana di G in p_0

$$\mathrm{Jac}G(p_0) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & \mathbf{0} \\ * & B \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

è una matrice quadrata di $n+m$ righe e colonne, $\mathrm{Jac}G(p_0)$ è suddivisa in quattro componenti come mostrato, in particolare

- Id è la matrice identità, in quanto gli elementi di tali componenti sono del tipo

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} \tag{1.53}$$

  e chiaramente, se $i = j$ allora $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^i} = 1$, differentemente, se $i \neq j$ si ha che $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = 0$, quindi la matrice risultante è l'identità.

- La componente in alto a destra è la matrice nulla perché i termini sono tutti del tipo

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{n+j}} \tag{1.54}$$

  e per ogni i, j tale derivata è nulla.

- La componente in basso a sinistra è composta dai termini del tipo

$$\frac{\partial F^i}{\partial x^{n+j}}(p_0) \tag{1.55}$$

  non vi sono assunzioni sui tali valori e con $\mathbf{x}$ si indica che tale matrice può assumere qualsiasi valore.

- L'ultima componente contiene termini del tipo

$$\frac{\partial F^i}{\partial x^{n+j}} \tag{1.56}$$

ed è chiaramente la matrice B, come dall'equazione (1.50).

si conclude che il determinante di Jac$G(p_0)$ è uguale al determinante di B, quindi diverso da zero

$$\det \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & \mathbf{0} \\ * & B \end{pmatrix} = \det B \neq 0. \tag{1.57}$$

A tal punto si può applicare il Teorema (1), G è localmente invertibile, ossia esistono degli intorni $\tilde{U} \subset \Omega \backslash Crit(F)$ di p_0, e $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ di $G(p_0)$ tali che

$$G_{|\tilde{U}} : \tilde{U} \to W \tag{1.58}$$

è un diffeomorfismo. Sia H l'inversa di $G_{|\tilde{U}}$

$$H(y) = (h^1(y), \dots h^{n+m}(y)) \tag{1.59}$$

essendo H l'inversa di G si ha che $G(H(y)) = y$, in particolare

$$y = (y^1, \dots y^{n+m}) = G(H(y)) = \tag{1.60}$$
$$(h^1(y), \dots h^{n+m}(y), F(H(y))) \tag{1.61}$$

quindi per $i = 1, 2 \dots, n$ si ha che $h^i(y) = y^i$. Pertanto

$$F(H(y)) = F(h^1(y), \dots, h^n(y), h^{n+1}(y), \dots h^{n+m}(y)) = \tag{1.62}$$
$$F(y^1, \dots, y^n, h^{n+1}(y), \dots h^{n+m}(y)) \tag{1.63}$$

ma dato che $y = (h^1(y), \dots h^{n+m}(y), F(H(y)))$ si ha che l'ultimo blocco di $F(y^1, \dots, y^n, h^{n+1}(y), \dots h^{n+m}(y))$, ossia $h^{n+1}(y), \dots h^{n+m}(y)$, deve essere uguale all'ultimo blocco di y, quindi

$$F(H(y)) = (y^{n+1} \dots, y^{n+m}) \quad \forall y \in W \tag{1.64}$$

Si pone $U = M_a \cap \tilde{U}$ e si definisce l'insieme

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ (x, a) \in W\} \tag{1.65}$$

è un aperto di $\mathbb{R}^n$ dato che W è un aperto di $\mathbb{R}^{n+m}$. Si definisce una funzione

$$\psi : V \to \mathbb{R}^{n+m} \tag{1.66}$$

ponendo

$$\psi(x) = (x, h^{n+1}(x, a) \dots, h^{n+m}(x, a)) \tag{1.67}$$

dall'uguaglianza ricavata prima

$$F(y^1 \dots, y^n, h^{n+1}(y) \dots, h^{n+m}(y)) = (y^{n+1} \dots, y^{n+m}) \tag{1.68}$$

si deduce che $\psi(V) = U = M_a \cap \tilde{U}$

$$\psi : \mathbb{R}^n \supset V \to U \subset M_a \subset \mathbb{R}^{n+m} \tag{1.69}$$

si pone $\varphi = \psi^{-1}$, questa è una carta locale su M_a, definita su un'intorno U di p_0. Tale costruzione può avvenire per ogni punto p_0, per tanto questo definisce un'atlante, M_a è quindi una varietà topologica. Bisogna ora mostrare che le funzioni di transizione siano differenziabili.

Siano (U, φ) e (U', φ') due carte, la funzione di transizione $\varphi' \circ \varphi^{-1} = \varphi' \circ \psi$ ha come coordinate termini del tipo x^i oppure $h^j(x, a)$ (per costruzione), queste funzioni sono quindi di classe C^∞. ■

Saranno presi in considerazione alcuni esempi di applicazione di tale teorema. Sia $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$F(x) = (\|x\|_2)^2 \tag{1.70}$$

ossia la funzione che associa ad ogni vettore la sua norma euclidea elevata al quadrato. La funzione è chiaramente di classe C^∞, l'unico valore critico è $x = \mathbf{0}$, in ogni altro punto, la matrice Jacobiana ha determinante diverso da zero, quindi per ogni $R \neq 0$ l'insieme di livello

$$F^{-1}(R^2) = S^n_R \tag{1.71}$$

è una $((n+1)-1)$-varietà (è la sfera di raggio R). La dimensione della varietà è la differenza fra la dimensione del dominio con quella del codominio.

Si consideri ora la funzione $F : M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ che assegna ad ogni matrice quadrata il suo determinante

$$F(A) = \det A. \tag{1.72}$$

Sia $X = (x^j_i) \in M_n(\mathbb{R})$, il determinante si calcola tramite lo sviluppo di Laplace:

$$\det X = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} x^j_i \det X^j_i \tag{1.73}$$

dove X^j_i è la sotto-matrice di X ottenuta eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna. Da tale formula, si deduce che la derivata parziale di F è la seguente

$$\frac{\partial F}{\partial x^j_i} = (-1)^{i+j} \det X^j_i \tag{1.74}$$

Il differenziale di questa funzione non è suriettivo sui punti critici, essendo il codominio di dimensione 1, il differenziale non è suriettivo se la matrice Jacobiana ha rango zero, ossia è la funzione nulla, in tal caso i punti critici di F sono le matrici che hanno derivate parziali nulle, X è un punto critico se tutte le sotto-matrici X^j_i hanno determinante nullo

$$X \text{ è critico} \iff \det X^j_i = 0 \ \forall i, j. \tag{1.75}$$

Ciò avviene se il rango di X è minore o uguale di $n-2$

$$Crit(F) = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ rk(X) \leq n-2\}. \tag{1.76}$$

Il determinante di una matrice quadrata di rango non massimo è nullo, quindi l'unico valore critico di F è zero

$$\forall X \in Crit(F), \ F(X) = \det X = 0. \tag{1.77}$$

Si consideri un valore non critico, ad esempio 1, l'insieme di livello

$$SL(n, \mathbb{R}) = F^{-1}(1) = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ \det X = 1\} \tag{1.78}$$

questo è il gruppo speciale lineare, è una varietà differenziabile di dimensione $n^2 - 1$.

Tale teorema seppur potente nel suo enunciato va utilizzato in maniera corretta, si considerino le seguenti funzioni $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$F(x, y) = y \tag{1.79}$$

$$G(x, y) = y^2 \tag{1.80}$$

condividono l'insieme di livello per il valore 0:

$$F^{-1}(0) = \{(x, y) \ : \ y = 0\} \tag{1.81}$$

$$G^{-1}(0) = \{(x, y) \ : \ y^2 = 0\} = \{(x, y) \ : \ y = 0\}. \tag{1.82}$$

$F^{-1}(0) = G^{-1}(0)$ indica la retta di equazione $y = 0$ ed è una 1-varietà. Il Jacobiano di F è costante ed è $\mathrm{Jac}F = (0, 1)$, il rango è 1, non ci sono quindi valori critici per F.

Il Jacobiano di G è $\mathrm{Jac}G = (0, 2y)$, ha rango nullo ove $y = 0$, 0 è quindi un valore critico per G, il teorema non si può applicare per $G^{-1}(0)$ perchè il valore non deve essere critico, nonostante ciò, questo insieme è comunque una varietà.

Le funzioni F e G hanno lo stesso insieme di livello per il valore 0 il teorema enuncia che

> l'antimmagine di un valore regolare è una varietà

non dice che

> l'antimmagine di un valore critico non è una varietà

quest'ultima condizione si può comunque verificare.

1.3 Funzioni Differenziabili fra Varietà

Si considerino due varietà differenziabili X, Y, di dimensioni n ed m. Sia F una funzione continua

$$F : X \to Y \tag{1.83}$$

si vuole definire il concetto di funzione di classe C^r fra due varietà differenziabili. Ci si riconduce sempre ad insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$, si considerino due carte per X e per Y:

$$(U, \varphi) \text{ carta per } X, \quad p \in U \tag{1.84}$$
$$(V, \psi) \text{ carta per } Y, \quad q \in V \tag{1.85}$$

si considera $\tilde{F}$ la rappresentazione locale di F:

$$\begin{tikzcd}
X \supset U \arrow[r, "F_{|U}"] \arrow[d, "\varphi"] & V \subset Y \arrow[d, "\psi"] \\
\mathbb{R}^m \supset \varphi(U) \arrow[r, "\widetilde{F}"] & \psi(V) \subset \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

si ha che

$$\tilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}. \tag{1.86}$$

$\tilde{F}$ è una funzione definita su un'aperto di $\mathbb{R}^n$ ad immagine su un'aperto di $\mathbb{R}^m$.

Definizione 15 *Una funzione F definita fra due varietà differenziabili è di classe C^r in un'intorno di $p \in U$ se la sua rappresentazione locale $\tilde{F}$ è di classe C^r in un'intorno di $q \in \varphi(p)$.*

La definizione è ben posta se non dipende dalla scelta delle carte locali.

Si considerino due carte per X $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ con $p \in U_1 \cap U_2$. Siano $(V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2)$ due carte per Y, con $q = F(p) \in V_1 \cap V_2$. Si ha che

$$\begin{tikzcd}
\varphi_1(U_1 \cap U_2) \arrow[r, "\tilde{F}_1"] & \psi_1(V_1 \cap V_2) \\
U_1 \cap U_2 \arrow[u, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] \arrow[r, "F_{|U_1 \cap U_2}"] & V_1 \cap V_2 \arrow[u, "\psi_1"] \arrow[d, "\psi_2"'] \\
\varphi_2(U_1 \cap U_2) \arrow[r, "\tilde{F}_2"] \arrow[uu, bend left=60, "\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = \eta 12"] & \psi_2(V_1 \cap V_2) \arrow[uu, bend right=60, "\vartheta_{12} = \psi_1 \circ \psi_2^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

F ha due rappresentazioni locali, $\tilde{F}_1$ e $\tilde{F}_2$, sono tali che:

$$\tilde{F}_2 = \vartheta_{12}^{-1} \circ \tilde{F}_1 \circ \eta_{12}. \tag{1.87}$$

La Definizione 15 è ben posta se, ogni qual volta una rappresentazione locale di F ha una certa regolarità (è di classe C^r), allora anche una sua altra rappresentazione deve esserlo, siccome queste sono collegate dalle funzioni di transizione, l'unico modo per garantire ciò è che le funzioni di transizione siano a loro volta di classe C^r, ma queste per definizione di varietà differenziabile sono di classe C^∞.

Definizione 16 *Una funzione $F : X \to Y$ definita fra due varietà differenziabili è differenziabile se è di classe C^∞ in ogni punto di X.*

Proposizione 1 *Siano X, Y, Z tre varietà differenziabili, e siano*

$$F : X \to Y \tag{1.88}$$
$$G : Y \to Z \tag{1.89}$$

funzioni differenziabili, allora

$$G \circ F : X \to Z \tag{1.90}$$

è differenziabile.

Definizione 17 *Una funzione $F : X \to Y$ fra varietà differenziabili è un diffeomorfismo di classe C^r se è biettiva, di classe C^r, e la sua inversa è di classe C^r. Se non specificato, un diffeomorfismo è inteso di classe C^∞.*

Esempio Si consideri la varietà

$$X = GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \ : \ \det A \neq 0\} \tag{1.91}$$

è di dimensione n^2, la varietà $X \times X$ è di dimensione $2n^2$. L'applicazione

$$F : X \times X \to X \tag{1.92}$$
$$F(A, B) = A \cdot B \tag{1.93}$$

che associa a due matrici il loro prodotto

$$C = A \cdot B \tag{1.94}$$
$$c^i_j = \sum_h a^i_h b^h_j \tag{1.95}$$

le componenti di F sono funzioni polinomiali, quindi F è di classe C^∞, pertanto è differenziabile.

Si consideri ora la funzione $G : X \to X$ definita come segue

$$G(A) = A^{-1} \tag{1.96}$$

per le stesse ragioni, G è differenziabile. Le funzioni F e G determinano il *gruppo moltiplicativo* delle matrici quadrate a determinante non nullo, tali funzioni sono differenziabili, il gruppo $GL_n(\mathbb{R})$ è un *gruppo di Lie.*

Definizione 18 *Un* ***gruppo di Lie*** *è un gruppo G, dotato di una struttura di varietà differenziabile, e per cui le funzioni che lo definiscono*

$$G \times G \to G \ \textit{operazione binaria} \tag{1.97}$$
$$G \to G \ \textit{inverso} \tag{1.98}$$

sono entrambe differenziabili.

Il gruppo $(\mathbb{R}^n, +)$ è un gruppo di Lie.

Esempio Si consideri la varietà $X_1 = \mathbb{R}$ (la retta reale) con unica carta (U, φ) la funzione identità

$$\varphi : U \to \mathbb{R} \tag{1.99}$$
$$\varphi(x) = x \tag{1.100}$$
$$U = X_1. \tag{1.101}$$

Si consideri poi $X_2 = \mathbb{R}$ con unica carta (V, ψ) la funzione cubica

$$\varphi : V \to \mathbb{R} \tag{1.102}$$
$$\varphi(x) = x^3 \tag{1.103}$$
$$V = X_2. \tag{1.104}$$

anche X_2 è la retta reale, ma dotata di una differente carta. Esistono varietà differenziabili diverse ma tra loro **diffeomorfe**, possono essere identificate da un diffeomorfismo, è il corrispettivo dell'isomorfismo fra gruppi. Due varietà sono uguali se diffeomorfe ed il diffeomorfismo che le mette in relazione è l'identità.

X_1 e X_2 sono diverse perché l'identità non è un diffeomorfismo, si consideri però la funzione

$$F : X_1 \to X_2 \tag{1.105}$$
$$F(x) = \sqrt[3]{x} \tag{1.106}$$

questa è un diffeomorfismo:

- F è biettiva
- F è continua

la rappresentazione locale $\tilde{F}$ è la funzione identità

$$\tilde{F} = x^3 \circ \sqrt[3]{x} \circ x = x \quad (1.107)$$

$\tilde{F}$ è chiaramente un diffeomorfismo.

Osservazione 7 *Come nell'Algebra si possono classificare i gruppi a meno di isomorfismi, si possono classificare le varietà differenziabili a meno di diffeomorfismi.*

In seguito, sono riportati alcuni risultati riguardanti la classificazione delle varietà differenziabili.

- Esistono varietà topologiche che non ammettono alcuna struttura differenziabile. Le varietà topologiche di dimensioni 1, 2 e 3 ammettono sempre una struttura differenziabile
- Le varietà topologiche di dimensioni 1, 2 e 3 ammettono un'unica struttura di differenziabile (a meno di diffeomorfismi).
- Se $n \neq 4$, la varietà $\mathbb{R}^n$ ammette un'unica struttura differenziabile a meno di diffeomorfismi. $\mathbb{R}^4$ è uno spazio topologico speciale perché ammette un'infinità non numerabile di strutture di varietà differenziabile. Si noti come lo spazio tempo in Relatività Generale è descritto come una 4-varietà.
- La sfera unitaria S^7 ha 28 strutture differenziabili distinte non diffeomorfe e sono descritte tutte esplicitamente.
- Non è ancora noto quale sia il numero di strutture differenziabili distinte non diffeomorfe per S^4.

Definizione 19 *Una funzione $F : X \to Y$ è un **diffeomorfismo locale** se ogni $p \in X$ ha un'intorno aperto U tale per cui $F(U)$ è aperto in Y e la funzione*

$$F_{|U} : U \to F(U) \quad (1.108)$$

è un diffeomorfismo.

Definizione 20 *Una funzione*

$$\pi : \tilde{X} \to X \quad (1.109)$$

*fra due varietà è un **rivestimento** se*

1. *π è suriettiva e differenziabile*
2. *per ogni $p \in X$ vi è un intorno aperto connesso $U \subset X$ tale per cui, per ogni componente connessa $\tilde{U}$ di $\pi^{-1}(U)$, la restrizione*

   $$\pi_{|\tilde{U}}$$

   è un diffeomorfismo fra $\tilde{U}$ e U.

Se $\tilde{X}$ è semplicemente connesso, π è un rivestimento universale.

Un'esempio è il seguente, siano

$$\tilde{X} = \mathbb{R} \quad (1.110)$$
$$X = S^1_R \subset \mathbb{R}^2 \quad (1.111)$$
$$\pi : \tilde{X} \to X \quad (1.112)$$
$$\pi(t) = (R\cos t, R\sin t) \quad (1.113)$$

π è un rivestimento universale.

1.3.1 Esempi di Gruppi di Lie

Si consideri $\mathbb{R}^2$, questo si può identificare come il campo dei numeri complessi, ereditandone la struttura$\mathbb{C}$

$$(a, b) \longleftrightarrow z = a + ib \tag{1.114}$$

inoltre

$$U(1) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a^2 + b^2 = 1\} = S^1 \tag{1.115}$$

$U(1)$ è un gruppo rispetto l'operazione di prodotto (il prodotto di due numeri complessi di norma unitaria è un numero di norma unitaria). S^1 eredita da $U(1)$ la struttura di gruppo abeliano (è un gruppo di Lie commutativo).

Si consideri $\mathbb{R}^4$ questo si identifica come l'insieme dei quaternioni

$$\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H} \tag{1.116}$$

$$(a, b, c, d) \longleftrightarrow z = a + bi + cj + dk \tag{1.117}$$

dove

$$i^2 = j^2 = j^2 = -1, \ ij = k, \ ji = -k, \ \text{ecc.} \tag{1.118}$$

il prodotto nell'insieme $\mathbb{H}$ non è commutativo. Il modulo per un quaternione si definisce come segue:

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z} = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \tag{1.119}$$

Il gruppo dei quaternioni unitari identifica la sfera S^3

$$\{z \in \mathbb{H} \ : \ |z| = 1\} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} = S^3 \tag{1.120}$$

S^3 eredita dal gruppo dei quaternioni unitari una struttura di gruppo di Lie non abeliano.

Si considerino adesso le tre **matrici di Pauli**:

$$\sigma_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.121}$$

sono matrici complesse ed unitarie (svolgono un ruolo fondamentale nel calcolo quantistico). Si ha che

$$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma_Z^2 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.122}$$

inoltre

$$\sigma_X \sigma_Y = i\sigma_Z, \quad \sigma_Y \sigma_X = -i\sigma_Z, \quad \text{ecc.} \tag{1.123}$$

Se si moltiplica ogni matrice per i si costruiscono tre nuove matrici:

$$\tilde{\sigma}_X = i\sigma_X \quad \tilde{\sigma}_Y = i\sigma_Y \quad \tilde{\sigma}_Z = i\sigma_Z \tag{1.124}$$

queste soddisfano le seguenti relazioni

$$\tilde{\sigma}_X^2 = \tilde{\sigma}_Y^2 = \tilde{\sigma}_Z^2 = -I \tag{1.125}$$

$$\tilde{\sigma}_X \tilde{\sigma}_Y = -\tilde{\sigma}_Z, \quad \tilde{\sigma}_Y \tilde{\sigma}_X = \tilde{\sigma}_Z, \quad \tilde{\sigma}_Y \tilde{\sigma}_Z = -\tilde{\sigma}_X \tag{1.126}$$

$$\tilde{\sigma}_Z \tilde{\sigma}_Y = \tilde{\sigma}_X, \quad \tilde{\sigma}_X \tilde{\sigma}_Z = \tilde{\sigma}_Y, \quad \tilde{\sigma}_Z \tilde{\sigma}_X = -\tilde{\sigma}_Y \tag{1.127}$$

confrontando tali relazioni con quelle dei quaternioni, si stabilisce la seguente corrispondenza

$$1 \leftrightarrow I \tag{1.128}$$

$$i \leftrightarrow \tilde{\sigma}_Z \tag{1.129}$$

$$j \leftrightarrow \tilde{\sigma}_Y \tag{1.130}$$

$$k \leftrightarrow \tilde{\sigma}_X \tag{1.131}$$

i quaternioni si possono quindi rappresentare come delle matrici

$$z = a + bi + cj + dk \longleftrightarrow aI + b\tilde{\sigma}_Z + c\tilde{\sigma}_Y + d\tilde{\sigma}_X = \tag{1.132}$$

$$\begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix} = A_z \in M(2,\mathbb{C}) \tag{1.133}$$

si noti che l'operazione di determinante è l'equivalente del modulo

$$\det A_z = (a+ib)(a-ib) - (c+id)(-c+id) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \tag{1.134}$$

vi è quindi una corrispondenza fra il gruppo dei quaternioni unitari ed il gruppo delle matrici 2×2 unitarie a valori complessi $SU(2)$ con determinante uguale ad 1, in particolare, i due gruppi sono isomorfi. In conclusione:

$$SU(2) \simeq \{z \in \mathbb{H} \ : \ |z| = 1\} \simeq S^3. \tag{1.135}$$

1.4 Quaternioni Unitari e Rotazioni

Si consideri l'insieme dei quaternioni con prima coordinata nulla

$$\mathbb{H}_0 = \{0 + bi + cj + dk\} \subset \mathbb{H}_0 \tag{1.136}$$

$\mathbb{H}_0$ si può identificare con $\mathbb{R}^3$ tramite la seguente mappa $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}_0$:

$$q(x^1, x^2, x^3) = x^1 i + x^2 j + x^3 k. \tag{1.137}$$

Sia $z \in \mathbb{H}$ un quaternione unitario, si definisce una trasformazione $R_z : \mathbb{H}_0 \to \mathbb{H}_0$ come segue:

$$x \in \mathbb{R}^3 \tag{1.138}$$

$$R_z(q(x)) = zq(x)z^{-1} \tag{1.139}$$

il quaternione risultante avrà ancora parte reale nulla (facile da verificare). Siccome $\mathbb{H}_0$ si identifica come $\mathbb{R}^3$, la funzione R_z è identicamente una mappa fra vettori in $\mathbb{R}^3$. Si ha inoltre che la mappa R_z è un'isometria di $\mathbb{H}_0 \simeq \mathbb{R}^3$:

$$|R_z(q(z))| = |zq(x)z^{-1}| = |z| \cdot |q(x)| \cdot |z^{-1}| = |q(x)| \tag{1.140}$$

R_z è un'applicazione lineare, ha determinante unitario

$$\det R_z = 1 \tag{1.141}$$

la mappa $R_z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una **rotazione** nello spazio $\forall z \in \mathbb{H}$, $|z| = 1$. Una rotazione si può sempre scrivere sotto forma di matrice (essendo lineare), se $z = a + bi + cj + dk$ con $|z| = 1$, R_z è rappresentata dalla seguente:

$$R_z = \begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2bc-2ad & 2bd+2ac \\ 2bc+2ad & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2cd-2ab \\ 2bd-2ac & 2cd+2ab & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{pmatrix} \tag{1.142}$$

si dimostra che ogni rotazione in $\mathbb{R}^3$ è del tipo R_z per qualche quaternione unitario z. Per ogni rotazione in $\mathbb{R}^3$ esistono esattamente due quaternioni unitari che la descrivono

$$R_z = R_z' \iff \begin{cases} z = z' & \text{oppure} \\ z = -z' \end{cases} \tag{1.143}$$

Ricapitolando:

- Ad ogni quaternione di modulo 1 si è associata una matrice $A_z \in M(2,\mathbb{C})$ tramite una corrispondenza biettiva
- questa identifica il gruppo dei quaternioni unitari con il gruppo $SU(2)$.
- Ad ogni quaternione di modulo 1 si è associata una matrice di rotazione $R_z \in SO(3)$ tramite una corrispondenza non biettiva

- si ricordi che $SO(3)$ è il gruppo delle matrici ortogonali con determinante uguale ad 1.

Questo è un **omomorfismo suriettivo** di gruppi di Lie. Il nucleo dell'omomorfismo è $\{-I, I\}$:

$$\frac{SU(2)}{\{I, -I\}} \simeq SO(3) \tag{1.144}$$

$SU(2)$ e $SO(3)$ hanno una struttura di varietà differenziabile. Si noti come $SU(2) \simeq S^3$ è semplicemente connesso, quindi $SU(2)$ è il *rivestimento universale* di $SO(3)$.

Dall'equazione (1.144), si ha che prendere il quoziente di S^3 rispetto il sottogruppo $\{I, -I\}$ significa identificare punti diametralmente opposti su S^3, ma le coppie di punti diametralmente opposti sulla sfera rappresentano lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, considerando la relazione $\sim$ fra due punti su S^3

$$x \sim y \iff x = -y \tag{1.145}$$

si hanno pertanto i seguenti diffeomorfismi:

$$\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \simeq \frac{S^3}{\sim} \simeq \frac{SU(2)}{\{I, -I\}} \simeq SO(3). \tag{1.146}$$

CAPITOLO

2 LO SPAZIO TANGENTE

Si vuole definire il concetto di *vettore tangente* ad una varietà in un suo punto.

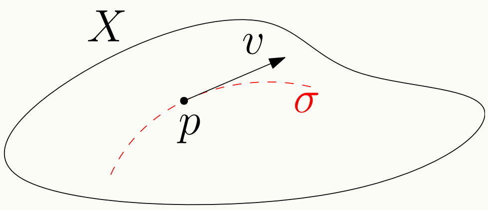


Figura 2.1: Vettore tangente ad un punto di X

L'idea è quella di rappresentare un vettore tangente ad una varietà X in un punto p come vettore tangente ad un'arco di curva γ contenuta in X passante per p, come mostrato in figura 2.1. Tale idea va formalizzata utilizzando le carte locali di X. Tale idea è poco elegante dato che il vettore tangente in questo caso dipenderà dalla scelta della carta, va quindi considerato un'altro approccio.

2.1 Lo Spazio delle Derivazioni

Per spiegare l'idea si comincia con un caso semplice, si consideri la varietà $X = \mathbb{R}^n$. Dato un qualsiasi punto $p \in \mathbb{R}^n$, lo spazio tangente a tale punto, denotato $T_p\mathbb{R}^n$, è esattamente $\mathbb{R}^n$.

La definizione formale di spazio tangente sarà data in seguito, considerando la definizione poco elegante, è chiaro che nel caso di $\mathbb{R}^n$, una qualsiasi curva passante per un punto può identificare un qualsiasi vettore tangente.

Sia $v \in T_p\mathbb{R}^n \in \mathbb{R}^n$ un vettore tangente e sia f una funzione di classe C^∞ definita in un'intorno di P. Si può calcolare la **derivata direzionale** di f in p rispetto al vettore v:

$$v = (a^1, a^2 \dots, a^n) \in T_p\mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

$$\partial_v f(p) = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \tag{2.2}$$

Si consideri ora l'insieme delle funzioni a valori reali derivabili infinite volte in p

$$C_p^\infty = \{f : U \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ è di classe } C^\infty \text{ in un'intorno aperto } U \text{ di } p\} \tag{2.3}$$

la derivata direzionale valutata in p è un'operatore da C_p^∞ ad $\mathbb{R}$

$$\partial_{v_{|p}} : C_p^\infty \to \mathbb{R} \tag{2.4}$$

$$f \longmapsto \partial_v f(p) \tag{2.5}$$

questa soddisfa le seguenti proprietà

- $\partial_{v_{|p}}(f+g) = \partial_{v_{|p}}(f) + \partial_{v_{|p}}(g)$
- $\partial_{v_{|p}}(\text{costante}) = 0$
- $\partial_{v_{|p}}(fg) = \partial_{v_{|p}}(f)g(p) + f(p)\partial_{v_{|p}}(g)$ **regola di Leibniz**.

Definizione 21 *Un'operatore $D : C_p^\infty \to \mathbb{R}$ che soddisfa le tre proprietà elencate in un punto p è detto **derivazione centrata** in p.*

Si denota Der_p l'insieme di tali derivazioni. Ad ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ risulta associata una di queste derivazioni, Der_p ha la proprietà di essere uno spazio vettoriale sul campo dei reali, de facto

$$D_1, D_2 \in Der_p \implies D_1 + D_2 \in Der_p \tag{2.6}$$

$$D \in Der_p, \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda D \in Der_p \tag{2.7}$$

Ritornando alla varietà $X = \mathbb{R}^n$ e allo spazio tangente T_pX, ad ogni vettore $v = (a^1, a^2 \dots, a^n)$ in tale spazio, è associata una derivazione centrata in p:

$$\partial_{v_{|p}} = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x_i}\,_{|p} \in Der_p \tag{2.8}$$

questa associazione è lineare ed è un'omeomorfismo fra spazi vettoriali

$$T_p\mathbb{R}^n \to Der_p \tag{2.9}$$

$$v \longmapsto \partial_{v_{|p}} \tag{2.10}$$

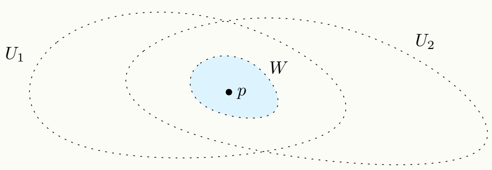
Questo spazio vettoriale è relativo ad un punto p. Ad ogni punto p si può associare uno spazio vettoriale $T_p\mathbb{R}^n$. Si vedrà in seguito che in realtà tale omeomorfismo è un'isomorfismo, gli spazi vettoriali $T_p\mathbb{R}^n, Der_p$ si possono identificare, in tal modo lo spazio vettoriale delle derivazioni si può identificare con lo spazio tangente (almeno nel caso di $\mathbb{R}^n$).

Si comincia definendo in maniera più rigorosa C_p^∞. Sia X una varietà differenziabile, e $p \in X$, se $U \subset X$ è un'aperto, si pone

$$C^\infty(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ è di classe } C^\infty\} \tag{2.11}$$

si considera l'insieme delle coppie (U, f) tali per cui U è un'aperto di X contenente p e $f \in C^\infty(U)$. Sull'insieme $\{(U, f)\}$ di tutte le coppie di questo tipo si definisce una relazione di equivalenza:

$$(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2) \iff \begin{array}{c} \exists W \text{ intorno aperto di } p \text{ tale che} \\ W \subset U_1 \cap U_2 \text{ ove } f_{1_{|W}} = f_{2_{|W}} \end{array} \tag{2.12}$$



Si richiede che f_1 ed f_2 coincidano in un qualche intorno aperto W di p.

Definizione 22 *Si pone*

$$C_p^\infty = \frac{\{(U, f) \ : \ p \in U, f \in C^\infty(U)\}}{\sim} \tag{2.13}$$

come insieme quoziente. Si indicherà $[(U, f)] \in C_p^\infty$ una classe di equivalenza.

Si pone $f_p = [(U, f)]$ e si denomina **germe** di f in p. Intuitivamente il germe di una funzione in un punto p è semplicemente una funzione definita in un qualche intorno U di p che è di classe C^∞. Nell'insieme C_p^∞ si possono definire somma e prodotto:

$$[(U_1, f_1)] + [(U_2, f_2)] = [[(U_1 \cap U_2, f_1 + f_2)]] \tag{2.14}$$
$$[(U_1, f_1)] \cdot [(U_2, f_2)] = [[(U_1 \cap U_2, f_1 f_2)]]. \tag{2.15}$$

C_p^∞ ha una struttura di anello, si può verificare facilmente, è detto *anello dei germi delle funzioni di classe C^∞ in p.*

L'anello $C^\infty(U)$ prima definito, con $p \in U$, è omeomorfo a C_p^∞ tramite la mappa:

$$f \longmapsto f_p = [(U, f)] \tag{2.16}$$

che associa ad una funzione f il suo germe in p.

Osservazione 8 *Sia $F : X \to Y$ una funzione differenziabile fra due varietà, se $U \subset Y$, allora $F^{-1}(U)$ è un'aperto di X, dato che F è continua, se $f \in C^\infty(U)$, ossia è di classe C^∞ su U, allora è valido il seguente diagramma commutativo:*

$$\begin{tikzcd} X \supset F^{-1}(U) \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "f \circ F"'] & & U \subset Y \arrow[dl, "f"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Dato che f e F sono di classe C^∞, lo è anche $f \circ F$ nell'insieme $F^{-1}(U)$. Per ogni aperto $U \subset Y$, la funzione $F : X \to Y$ induce una funzione F^* come segue

$$F^* : C^\infty(U) \to C^\infty(F^{-1}(U)) \tag{2.17}$$
$$f \longmapsto F^*(f) = f \circ F \tag{2.18}$$

si verifica che F^* è un'omomorfismo di anelli. Questo vale per ogni aperto U, vi è un'analoga funzione di F^* definita sui germi delle funzioni, sia $p \in X$ e $q = F(p) \in Y$:

$$F_p^* : C_q^\infty \to C_p^\infty \tag{2.19}$$
$$[(U, f)] \longmapsto [(F^{-1}(U), f \circ F)]. \tag{2.20}$$

La funzione F^* è detta "pull back".

2.1.1 Lo Spazio Cotangente

Si vuole definire in maniera ora formalmente il concetto di vettore tangente ad una varietà. La definizione di derivazione è stata già accennata:

Definizione 23 *Sia X una varietà e $p \in X$. Una **derivazione** in p è un'operatore*

$$D : C_p^\infty \to \mathbb{R} \tag{2.21}$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

- $D(f + g) = D(f) + D(g)$
- $D(costante) = 0$
- $D(fg) = D(f)g(p) + D(g)f(p), \quad \forall f, g \in C_p^\infty$

L'insieme delle derivazioni per X in p è denotato Der_p. Il numero reale associato è da intendersi come la derivata di una funzione del germe contenuto in C_p^∞ calcolata in p.

Definizione 24 *Sia X una varietà e $p \in X$. Lo **spazio tangente** a X in p è uno spazio vettoriale reale denotato T_pX costituito da tutte le derivazioni di X*

$$T_pX = Der_p. \tag{2.22}$$

Se n è la dimensione della varietà X, Der_p è isomorfo a $\mathbb{R}^n$. T_pX è definito esclusivamente dalla varietà X e da un punto p, e non dipende dalle carte locali.

Si consideri un punto $p \in X$ di una varietà, ad ogni punto possiamo associare l'anello C_p^∞, vogliamo però associare ad ogni punto uno spazio tangente. In C_p^∞ potremmo considerare il sottoinsieme di tutti i germi di funzioni che si annullano in p

$$C_p^\infty \supset m_p = \{f_p \in C_p^\infty \ : \ f_p(p) = 0\} \tag{2.23}$$

si ricordi che f_p non è una funzione ma una classe di equivalenza $[(U, f)]$, dire $f_p(p) = 0$ equivale a dire $f(p) = 0$. m_p è un **ideale**, perché è un sotto anello, ed un elemento di m_p moltiplicato per un qualsiasi elemento di C_p^∞ produce un elemento a sua volta in m_p:

$$f_p \in m_p \tag{2.24}$$
$$f_p' \in C_p^\infty \tag{2.25}$$
$$f_p(p) = 0 \in \mathbb{R} \tag{2.26}$$
$$f_p' f_p(p) = f_p(p) f_p'(p) = \tag{2.27}$$
$$0 \cdot f_p'(p) = 0 \implies \tag{2.28}$$
$$f_p' \in m_p. \tag{2.29}$$

m_p è un modulo sull'anello C_p^∞, se si prende il quoziente

$$\frac{m_p}{m_p^2} \tag{2.30}$$

si ha un modulo sull'anello quoziente $\frac{C_p^\infty}{m_p}$. Tale quoziente è isomorfo a $\mathbb{R}$ (i dettagli verranno omessi), si ha una funzione $\phi : C_p^\infty \to \mathbb{R}$ definita

$$\phi(g_p) = g_p(p) \tag{2.31}$$

il nucleo di questa funzione (gli elementi che la annullano) è esattamente m_p, per definizione

$$\ker \phi = m_p \tag{2.32}$$

come detto prima, se si considera il quoziente C_p^∞ modulo il nucleo di ϕ, si ottiene uno spazio isomorfo a $\mathbb{R}$. $\frac{m_p}{m_p^2}$ è un modulo sull'anello $\frac{C_p^\infty}{m_p} \simeq \mathbb{R}$, questo è un campo (il campo dei numeri reali), ma per definizione, un modulo su un campo è uno spazio vettoriale, conclusione:

$$\frac{m_p}{m_p^2} \text{ è uno spazio vettoriale reale} \tag{2.33}$$

in particolare, è uno spazio associato in modo canonico al punto p. Questa è una definizione nei termini dell'algebra commutativa, non ne è necessario conoscere i dettagli (io stesso non l'ho compresa). Lo spazio $\frac{m_p}{m_p^2}$ non è lo spazio tangente T_pX, ma il suo spazio duale:

$$\frac{m_p}{m_p^2} \simeq \hom(T_pX, \mathbb{R}) = T_p^*X \tag{2.34}$$

$\frac{m_p}{m_p^2} = T_p^*X$ è detto lo **spazio cotangente**.

Nota: Il fatto che la dimensione dello spazio tangente ad un punto di una varietà sia la stessa della varietà, va dimostrato.

2.2 Derivazioni e Carte Locali

Si introducono ora le carte locali nel contesto dello spazio tangente. Sia (U, φ) una carta per una varietà X tale per cui $p \in U$. Siano $(x^1 \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ le coordinate di $\varphi(p)$. Le coordinate cartesiane in $\mathbb{R}^n$ determinano delle derivazioni naturali rispetto tali coordinate (le derivate parziali)

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1},\ \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} \dots, \partial_n = \frac{\partial}{\partial x^n} \tag{2.35}$$

∂_i è la derivata nella direzione del versore determinato dall'asse x^i. Le derivate parziali corrispondo ad i versori degli assi, che sono la base canonica $(e_1, \dots, e_n)$ di $T_q\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ per ogni $q \in \mathbb{R}^n$.

Si vogliono definire delle derivazioni definite su $U \subset X$. Usando φ si possono associare derivazioni definite su X a derivazioni classiche su $\mathbb{R}^n$ (le derivate parziali). Sia

$$f_p = [(V, f)] \in C_p^\infty \tag{2.36}$$

un germe nel punto p. Si può supporre che $V \subset U$ (dominio della carta locale), considerando eventualmente un'aperto più piccolo contenente p.

$$\begin{tikzcd} U \supset V \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "f"'] & \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n \arrow[dl, "f\circ\varphi^{-1}"'] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Si pone

$$\partial_{i_{|p}}(f_p) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \tag{2.37}$$

$\partial_{i_{|p}}(f_p) \in T_pX$ rappresenta il vettore tangente a X lunga la curva che si ottiene come anti immagine del versore x^i tramite la carta locale φ:

- In $\mathbb{R}^n$ vi è $\varphi(p) = (\varphi_1(p), \dots \varphi_n(p))(x^1 \dots, x^n)$
- si consideri la curva $\gamma_i(t) = (x^1, x^2 \dots, x^i + t \dots, x^n)$ che è una retta parallela all'i-esimo asse passante per $\varphi(p)$.
- si considera l'anti-immagine di questa curva $\gamma(t)$ tramite la carta locale, ossia la curva $\varphi^{-1}(\gamma(t))$, questa è una curva su X passante per p
- il vettore $\partial_{i_{|p}}(f_p)$ è tangente a questa curva $\varphi^{-1}(\gamma(t))$ nel punto p (ossia per $t = 0$). $\partial_{i_{|p}}(f_p)$ rappresenta la direzione in cui "cambia" la varietà quando ti muovi lungo la curva che corrisponde all'i-esimo asse coordinato locale. Una rappresentazione è riportata in figura 2.2.

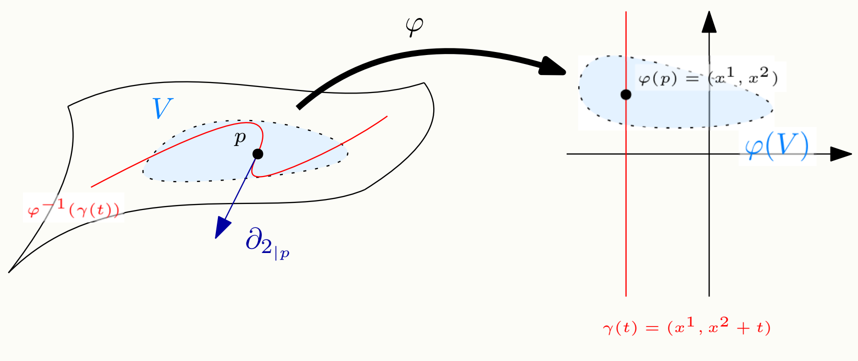


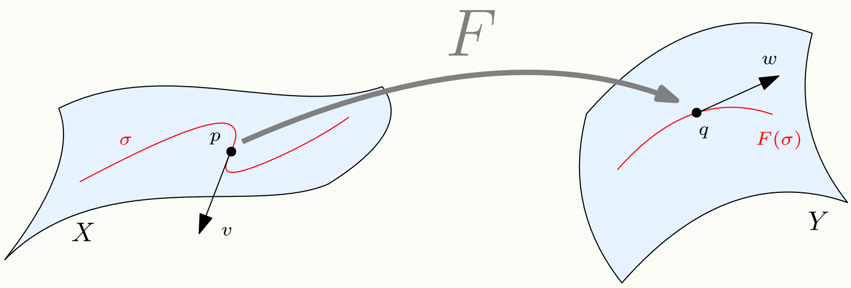
Figura 2.2: Un esempio per una 2-varietà.

> $\partial_{i_{|p}}(f_p)$ è un numero reale che rappresenta la variazione della funzione $f_p = [(f, U)]$ lungo la curva $\varphi^{-1}(\gamma(t))$.

Le funzioni $\partial_{i_{|p}}$ sono delle derivazioni, soddisfano le proprietà date nella Definizione 23, sono quindi i vettori tangenti (elementi dello spazio tangente T_pX). Gli operatori $\partial_{i_{|p}}$ dipendono dalla scelta di una carta locale φ, come si può notare dalla definizione in (2.37). L'analogo della derivata parziale sulla carta locale dipende dalla scelta della carta locale, l'unica cosa indipendente da tale scelta è lo spazio tangente in un punto T_pX.

2.2.1 Differenziale di una Funzione fra Varietà

Si consideri una funzione $F : X \to Y$ fra due varietà, sia $p \in X$ e $q = F(p) \in Y$. Si consideri un vettore $v \in T_pX$, v è tangente ad un'arco di curva $\sigma \subset X$ ove $p \in \sigma$, tramite F, si identifica una curva $F(\sigma) \subset Y$, chiaramente $q \in F(\sigma)$ e vi sarà un vettore w tangente a q lungo la curva $F(\sigma)$.



La funzione F induce una mappa (quella che associa w a v) fra gli spazi tangenti T_pX e T_qY. Tale mappa è detta **differenziale** di F in p, ed è una funzione lineare fra spazi vettoriali. La definizione di differenziale sarà data interpretando T_pX e T_qY come gli spazi delle derivazioni.

Si ricordi che F induce una funzione F_p^* che è un'omomorfismo di anelli:

$$F_p^* : C^\infty_{F(p)} \to C^\infty_p \tag{2.38}$$
$$[(U, f)] \longmapsto f \circ F. \tag{2.39}$$

questa era il pull back, sia $D \in T_pX$ una derivazione, si ha il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} C^\infty_{F(p)} \arrow[r, "F_p^*"'] \arrow[d, "D\circ F_p^*"'] & C^\infty_p \arrow[dl, "D"'] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

La funzione $D \circ F_p^*$ associa ad ogni germe di funzione un numero reale

$$D \circ F_p^* : C^\infty_{F(p)} \to \mathbb{R} \tag{2.40}$$

Dato che D è una derivazione, anche $D \circ F_p^*$ è una derivazione, si verifica facilmente:

$$(D \circ F_p^*)(f) = D(F_p^*(f)) = D(f \circ F). \tag{2.41}$$

L'applicazione lineare che associa elementi fra gli spazi tangenti (il differenziale di F) è la seguente

$$T_pX \to T_{F(p)}Y \tag{2.42}$$
$$D \longmapsto D \circ F_p^* \tag{2.43}$$

Definizione 25 *Sia $F : X \to Y$ una funzione fra due varietà differenziabili. Si definisce il **differenziale** di F in un punto $p \in X$ la seguente applicazione lineare*

$$dF_p : T_pX \longrightarrow T_{F(p)}Y \tag{2.44}$$
$$D \longmapsto dF_p(D) = D \circ F_p^*. \tag{2.45}$$

A volte si denota T_pF.

Vediamo adesso alcune proprietà del differenziale.

Proposizione 2 *1. Sia F la funzione identità su una varietà X*

$$F = Id_X : X \to X \tag{2.46}$$

il suo differenziale è la funzione identità sullo spazio tangente

$$dF_p = d(Id_X)_p = Id_{T_pX}. \tag{2.47}$$

2. *Se X, Y, Z sono varietà e*

$$F : X \to Y \tag{2.48}$$
$$G : Y \to Z \tag{2.49}$$

sono funzioni differenziabili, allora

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p. \tag{2.50}$$

$$\begin{tikzcd} T_pX \arrow[r, "dF_p"] \arrow[dr, "d(G\circ F)_p"'] & T_{F(p)}Y \arrow[d, "dG_{F(p)}"] \\ & T_{G(F(p))}Z \end{tikzcd}$$

Inoltre, se F è un diffeomorfismo, dF_p è un'isomorfismo di spazi vettoriali.

Dimostrazione: Se $F = \mathrm{Id}_X$, allora anche il pull back F_p^* è l'identità, pertanto:

$$d(\mathrm{Id}_x)_p : D \to D \circ F_p^* = D \circ \mathrm{Id} = D \tag{2.51}$$

$d(\mathrm{Id}_x)_p$ è quindi l'identità. La seconda proprietà si dimostra facilmente, sia $D \in T_pX$:

$$d(G \circ F)_p(D) = D \circ (G \circ F)_p^* = D \circ (F_p^* \circ G_{F(p)}^*) = \tag{2.52}$$
$$(D \circ F_p^*) \circ G_{F(p)}^* = dF_p(D) \circ G_{F(p)}^* = \tag{2.53}$$
$$dG_{F(p)}(dF_p(D)) = (dG_{F(p)} \circ dF_p)(D) \tag{2.54}$$

le due proprietà sono dimostrate. ■

2.3 La Dimensione dello Spazio Tangente

In questa sezione, verrà dimostrato che lo spazio tangente ad un punto di una n-varietà, è uno spazio vettoriale n-dimensionale

$$\dim X = n \implies \dim T_pX = n. \tag{2.55}$$

È necessario un lemma.

Lemma 1 *Sia $x_0 = (x^1, \dots x^n) \in \mathbb{R}^n$ un punto, e sia $f \in C^\infty_{x_0}$. Esistono dei germi di funzioni*

$$g_1, \dots g_n \in C^\infty_{x_0} \tag{2.56}$$

tali per cui

$$g_j(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) \tag{2.57}$$

e per ogni x contenuto in un intorno sufficientemente piccolo di x_0 si ha:

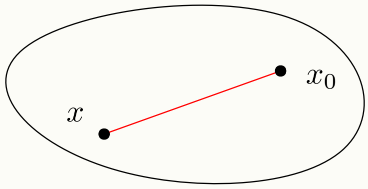
$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{n} (x^j - x_0^j) g_j(x_0) \tag{2.58}$$

equivalentemente

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{n} (x^j - x_0^j) \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0). \tag{2.59}$$

Questa approssimazione si può interpretare come uno sviluppo in serie di Taylor troncato all'n-esimo termine della sommatoria.

Dimostrazione: Siccome si considerano germi di funzioni, sia (U, f) un rappresentante di $f \in C^\infty_{x_0}$. U si può considerare un'intorno sufficientemente piccolo da contenere sia x_0 che x, tale per cui il segmento di linea che congiunge questi due è ancora contenuto in U.



Si può scrivere la differenza fra $f(x)$ e $f(x_0)$ sotto forma di integrale:

$$f(x) - f(x_0) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(x_0 + t(x - x_0))dt = \tag{2.60}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (x^j - x_0^j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0 + t(x - x_0))dt \tag{2.61}$$

Si definisce g_j come segue

$$g_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0 + t(x - x_0))dt \tag{2.62}$$

chiaramente

$$g_j(x_0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_0^j}(x_0 + t(x_0 - x_0))dt = \tag{2.63}$$

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_0^j}(x_0)dt = \frac{\partial f}{\partial x_0^j}(x_0) \int_0^1 dt = \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) \tag{2.64}$$

allora

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{j=1}^{n} (x^j - x_0^j) g_j(x) \implies \tag{2.65}$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{n} (x^j - x_0^j) g_j(x). \tag{2.66}$$

$g_j(x)$ sono di classe C^∞ in U quindi sono contenute nei germi $g_j \in C^\infty_{x_0}$. ■

Osservazione 9 *Tale lemma è valido esclusivamente per funzioni di classe C^∞.*

Si vuole dimostrare ora che $\dim X = n \implies \dim T_p X = n$, si dimostra prima un caso più semplice in cui la varietà X è un'aperto di $\mathbb{R}^n$, si sfrutta poi il fatto che localmente ogni varietà è identificata tramite una carta locale da un'aperto di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 3 *La proposizione è divisa in due punti.*

$\boxed{1}$ *: Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un'aperto, sia $x_0 \in U$, si consideri la funzione*

$$\iota : \mathbb{R}^n \to T_{x_0} U \tag{2.67}$$

$$(a^1 \dots, a^n) = v \longmapsto \iota(v) = \sum_{j=1}^{n} a^j \frac{\partial}{\partial x^j}_{|x_0} \tag{2.68}$$

$\iota(v)$ non è altro che la derivata direzionale nella direzione specificata da v. ι è un'isomorfismo di spazi vettoriali.

$\boxed{2}$ *: Sia X una n-varietà, e sia $p \in X$. Lo spazio tangente $T_p X$ è uno spazio vettoriale di dimensione n. Se $\varphi = (x^1 \dots, x^n)$ è una carta locale in p, allora*

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}_{|p}, \frac{\partial}{\partial x^2}_{|p}, \dots \frac{\partial}{\partial x^n}_{|p} \right\} \tag{2.69}$$

è una base per $T_p X$.

Dimostrazione: Si dimostrano separatamente i due punti.

$\boxed{1}$:Si comincia col dimostrare che ι è un'isomorfismo, per definizione è chiaramente lineare, bisogna dimostrare che è biettiva. Sia $v = (a^1 \dots, a^n) \neq 0$ un vettore, per qualche $1 \leq h \leq n$, si ha $a^h \neq 0$. Si consideri l'immagine di ι su v:

$$\iota(v) = \sum_{j=1}^{n} a^j \frac{\partial}{\partial x^j} |_{x_0} \tag{2.70}$$

si deve dimostrare che $\iota(v)$ non è la derivazione nulla. Bisogna trovare una funzione tale per cui, applicando tale derivazione su questa funzione non si trova 0. Si consideri la funzione $\mathbf{x} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita in tal modo

$$\mathbf{x}^h(q^1 \dots, q^n) = q^h \tag{2.71}$$

ossia la funzione che ad ogni vettore associa la h-esima coordinata, si ha

$$\iota(v)(\mathbf{x}^h) = \sum_{j=1}^{n} a^j \frac{\partial \mathbf{x}^h}{\partial x^j} |_{x_0} = \sum_{j=1}^{h-1} a^j \cdot 0 + a^h + \sum_{j=h+1}^{n} a^j \cdot 0 = a^h \neq 0 \tag{2.72}$$

quindi $\iota(v)$ non è la derivazione nulla, ι è quindi iniettiva. Bisogna ora dimostrare la suriettività di ι, sia $D \in T_{x_0}U$ una qualunque derivazione. Bisogna trovare v tale che $D = \iota(v)$.

Sia $x^j \in C^\infty_{x_0}$ una funzione definita come in (2.71), si pone $D(x^j) = a^j \in \mathbb{R}$. Si costruisce un vettore

$$v = (a^1, a^2 \dots a^n) = (D(x^1) \dots, D(x^n)) \tag{2.73}$$

Si vuole dimostrare che $D = \iota(v)$, ossia, si vuole mostrare che $D(f) = \iota(v)(f)$ per ogni $f \in C^\infty_{x_0}$. Si utilizza il Lemma 1:

$$D(f) = D[f(x_0) + \sum_{j=1}^{n}(x^j - x_0^j)g_j(x)] = \tag{2.74}$$

$$D(f(x_0)) + \sum_{j=1}^{n} D[(x^j - x_0^j)g_j(x)] \tag{2.75}$$

$D(f(x_0))$ è 0 dato che $f(x_0)$ è una costante

$$D(f(x_0)) + \sum_{j=1}^{n} D[(x^j - x_0^j)g_j(x)] = \tag{2.76}$$

$$\sum_{j=1}^{n} D[(x^j - x_0^j)g_j(x)] \tag{2.77}$$

essendo che D è una derivazione, si applica la regola di Leibniz

$$\sum_{j=1}^{n}[D(x^j - x_0^j)g_j(x_0) + ((x^j(x_0) - x_0^j))D(g_j)] \tag{2.78}$$

per definizione $x^j(x_0) = x_0^j$ quindi

$$\sum_{j=1}^{n}[D(x^j - x_0^j)g_j(x_0) + ((x^j(x_0) - x_0^j))D(g_j)] = \tag{2.79}$$

$$\sum_{j=1}^{n}[D(x^j - x_0^j)g_j(x_0) + ((x_0^j - x_0^j))D(g_j)] = \tag{2.80}$$

$$\sum_{j=1}^{n} D(x^j - x_0^j)g_j(x_0) \tag{2.81}$$

si sfrutta nuovamente l'additività di D

$$\sum_{j=1}^{n} D(x^j - x_0^j) g_j(x_0) = \tag{2.82}$$

$$\sum_{j=1}^{n} [D(x^j) - D(x_0^j)] g_j(x_0) = \tag{2.83}$$

$$\sum_{j=1}^{n} D(x^j) g_j(x_0) \tag{2.84}$$

per definizione $D(x^j) = a^j$

$$\sum_{j=1}^{n} D(x^j) g_j(x_0) = \tag{2.85}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a^j g_j(x_0) \tag{2.86}$$

per il lemma, la funzione g_j in x_0 assume lo stesso valore della derivata parziale di f rispetto x^j

$$\sum_{j=1}^{n} a^j g_j(x_0) = \tag{2.87}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) = \iota(v)(f). \tag{2.88}$$

Si è dimostrato che $D = \iota(v)$, ι è un'isomorfismo di spazi vettoriali, $T_{x_0}U$ ha la stessa dimensione di $U \subset \mathbb{R}^n$.

$\boxed{2}$: Bisogna mostrare che lo stesso risultato si estende ad ogni varietà. Sia X una varietà con $p \in X$, sia (U, φ) una carta locale con $p \in U$. È banale che φ sia un diffeomorfismo di varietà, sappiamo essere un omeomorfismo fra X e $\mathbb{R}^n$

$$X \supset U \longrightarrow V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \tag{2.89}$$

se l'espressione locale di φ è un diffeomorfismo fra aperti di $\mathbb{R}^n$ allora anche φ lo è, ma la rappresentazione locale di φ è la composizione fra φ e φ^{-1} (è l'identità in V).

$$\begin{tikzcd}
X \supset U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \subset \mathbb{R}^n \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
\mathbb{R}^n \supset \varphi(U) = V \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] & V \subset \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

L'identità è ovviamente un diffeomorfismo. Si consideri il differenziale di φ in p

$$d\varphi_p : T_pU = T_pX \longrightarrow T_{\varphi(p)}\varphi(U) \tag{2.90}$$

Ma $T_{\varphi(p)}\varphi(U)$ è isomorfo ad $\mathbb{R}^n$ (per il punto 1 della dimostrazione). Per le proprietà del differenziale, se la funzione fra varietà φ è un diffeomorfismo, il differenziale $d\varphi_p$ è un'isomorfismo, ma questo allora è isomorfo ad $\mathbb{R}^n$, allora la dimensione di T_pX è n. Un'isomorfismo mappa i vettori di una base nell'altra, i vettori

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\,|_p, \frac{\partial}{\partial x^2}\,|_p, \ldots \frac{\partial}{\partial x^n}\,|_p \right\} \tag{2.91}$$

Sono le immagini tramite $d\varphi_p^{-1}$ dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$, sono quindi una base per T_pX. ■

In conclusione, lo spazio tangente in un punto di una varietà n-dimensionale è isomorfo ad $\mathbb{R}^n$.