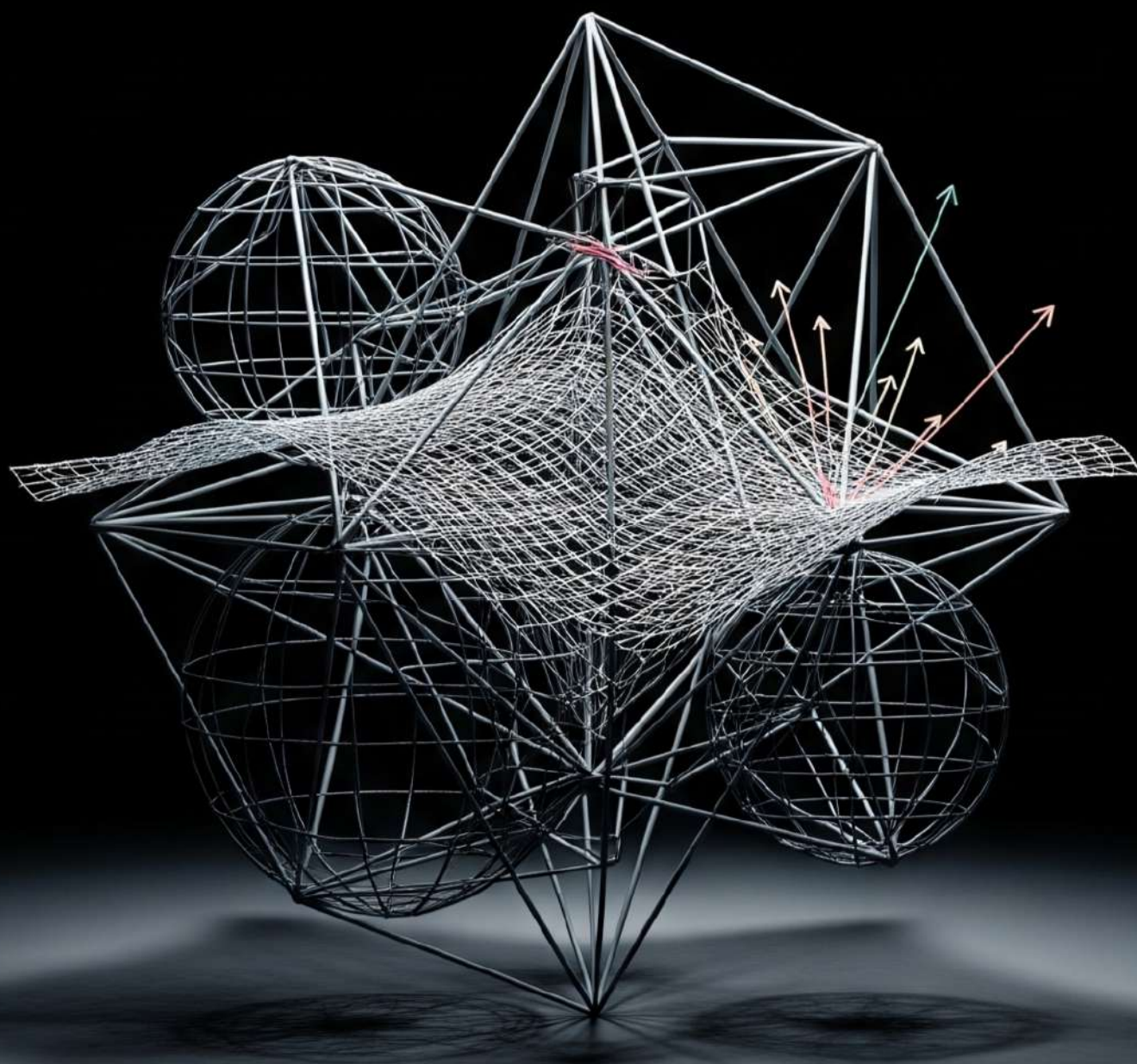


APPUNTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Marco Casu





I seguenti appunti sono tratti dal corso di Geometria Differenziale tenuto dal docente Francesco Bottacin per l'Università degli Studi di Padova.

INDICE

1	Varietà Differenziabili	4
1.1	Definizioni Preliminari, Varietà Topologiche	4
1.2	Funzioni Differenziabili sulle Varietà	6
1.2.1	Esempi di Varietà	8
1.2.2	Il Teorema degli Insiemi di Livello	11
1.3	Funzioni Differenziabili fra Varietà	15
1.3.1	Esempi di Gruppi di Lie	18
1.4	Quaternioni Unitari e Rotazioni	19
2	Lo Spazio Tangente	21
2.1	Lo Spazio delle Derivazioni	21

CAPITOLO

1

VARIETÀ DIFFERENZIABILI

1.1 Definizioni Preliminari, Varietà Topologiche

Uno degli scopi della geometria differenziale è quello di ricondurre lo studio di oggetti di forme complicate allo studio di un certo sotto-insieme di \mathbb{R}^n , si consideri una superficie sferica in \mathbb{R}^3

$$S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\|_2 = 1\} \quad (1.1)$$

denotando con $\|\cdot\|_2$ la norma euclidea. Ogni punto della sfera (esclusi i poli) può essere individuato da due coordinate reali $(\varphi, \theta) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$, dette latitudine e longitudine, come mostrato in figura 1.1. Si è introdotto un'opportuno sistema di coordinate allo scopo di ricondurre lo studio della sfera allo studio di un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 .

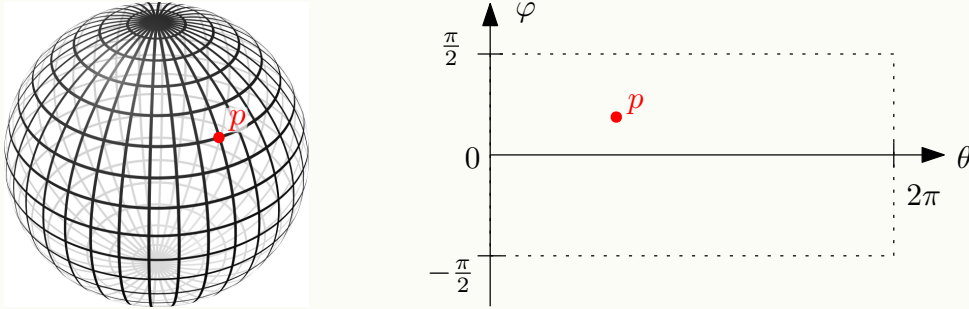


Figura 1.1: Sistema di coordinate per la sfera in \mathbb{R}^3

Definizione 1 Sia X un'insieme, e τ una collezione di sottoinsiemi di X , τ è una **topologia** in X se

- $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$
- Se $V_i \in \tau$ per $i = 1, 2, \dots, n$ allora $\bigcap_{1 \leq i \leq n} V_i \in \tau$
- Se $\{V_\alpha\}$ è una collezione di elementi di τ (finita, numerabile o non numerabile) allora $\bigcup_{\alpha} V_i \in \tau$.

Definizione 2 Se un'insieme X ammette una topologia τ allora X è uno **spazio topologico** e gli insiemi in τ si dicono **insiemi aperti** di X .

Definizione 3 Se X e Y sono due spazi topologici, una funzione $f : X \rightarrow Y$ è **continua** se, per ogni aperto V di Y , l'insieme $f^{-1}(V)$ è un'aperto di X .

Definizione 4 Una funzione $f : X \rightarrow Y$ fra due spazi topologici è un **omeomorfismo** se è biettiva, continua, e la sua inversa f^{-1} è anch'essa continua.

\mathbb{R}^n è il più semplice esempio di spazio topologico. La seguente definizione è fondamentale e necessaria alla successiva definizione di *varietà*.

Definizione 5 Sia X uno spazio topologico e $U \subset X$ un'aperto, sia φ un omeomorfismo da U ad un aperto di \mathbb{R}^n

$$\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \quad (1.2)$$

$$\varphi(U) \text{ è un'insieme aperto} \quad (1.3)$$

allora la coppia (U, φ) è una **carta** per X .

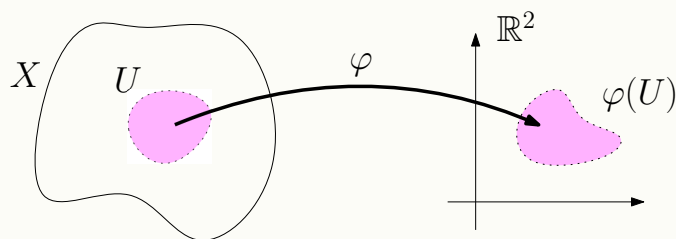


Figura 1.2: Una carta da un'insieme X ad un'aperto di \mathbb{R}^2

In tal contesto la funzione inversa φ^{-1} è detta *parametrizzazione locale*. Si considera ora il caso in cui due carte si intersecano, ossia, per uno stesso spazio topologico X , vi sono due carte $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ tali per cui $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, come mostrato in figura 1.3.

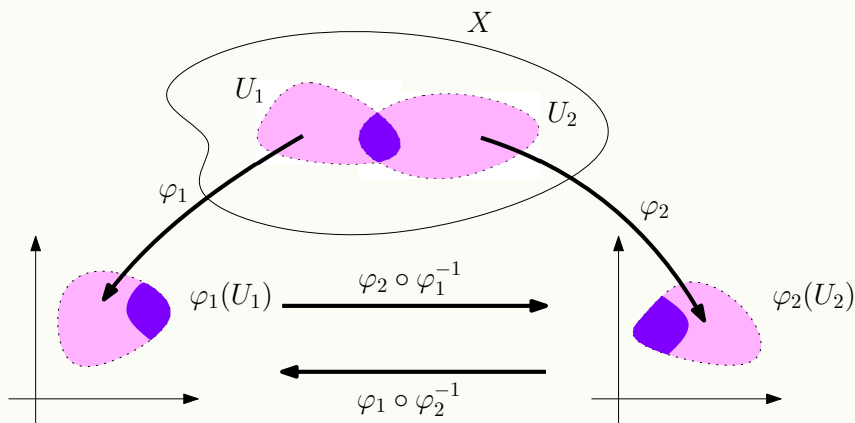


Figura 1.3: Intersezione fra due carte in X

La funzione $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ è definita solamente sulla regione $\varphi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n$, mentre $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ è definita solamente sulla regione $\varphi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n$, si ometterà tale restrizione nella notazione, e si assumerà che tali funzioni sono definite esclusivamente sugli insiemi menzionati.

Le funzioni $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}, \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ sono omeomorfismi tra aperti di \mathbb{R}^n . Da questo punto in avanti, date due carte $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$, si denoterà

$$\eta_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \quad (1.4)$$

queste sono denominate **funzioni di transizione** e descrivono il cambiamento di coordinate fra due differenti aperti di \mathbb{R}^n . Le funzioni di transizione definiscono la relazione fra punti che si trovano su più insiemi aperti di X sui quali sono definite differenti carte. Le funzioni di transizione soddisfano le seguenti identità:



- $\eta_{ii} = \text{Id}$
- $\eta_{ij} = \eta_{ji}^{-1}$
- su $U_i \cap U_j \cap U_k$ si ha $\eta_{ij} \circ \eta_{jk} = \eta_{ik}$.

Definizione 6 Sia X uno spazio topologico, e sia $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ una famiglia di carte tali per cui

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \quad (1.5)$$

in tal caso l'insieme $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ è un **atlante** per X .

Definizione 7 Sia X uno spazio topologico, se esiste un atlante per X , quest'ultima è detta **varietà topologica**.

Definizione 8 Uno spazio topologico si dice **connesso** se non può essere rappresentato come l'unione di due o più insiemi aperti non vuoti e disgiunti.

Da questo punto in avanti si assumerà che gli spazi topologici considerati siano connessi. Un'atlante per uno spazio topologico X è una famiglia di carte che ricopre l'intero spazio, si considerino due differenti carte su X tali per cui

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow \varphi_1(U_1) \subset \mathbb{R}^n \quad (1.6)$$

$$\varphi_2 : U_2 \rightarrow \varphi_2(U_2) \subset \mathbb{R}^m \quad (1.7)$$

se $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ la funzione di transizione η_{12} è un omeomorfismo tra un'aperto di \mathbb{R}^m ad un'aperto di \mathbb{R}^n , necessariamente $n = m$ (la dimostrazione è omessa).

Osservazione 1 Se X è una varietà topologica connessa, tutte le carte di un'atlante per X sono funzioni che hanno come ambiente per il codominio \mathbb{R}^n , con n fissato in comune per ogni carta, in tal caso si dice che n è la **dimensione** della varietà X .

La dimensione di una varietà è quindi ben definita dalle carte locali.

1.2 Funzioni Differenziabili sulle Varietà

Sia X una varietà topologica di dimensione n , con atlante $\{(U_i, \varphi_i)\}$. Si consideri una funzione continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, si ha:

$$\begin{array}{ccc} X \supset U_i & \xrightarrow{\varphi_i} & \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n \\ f|_{U_i} \downarrow & \swarrow \tilde{f}_i & \\ \mathbb{R} & & \end{array}$$

ove $\tilde{f}_i = f|_{U_i} \circ \varphi_i^{-1}$. La funzione $\tilde{f}_i : \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione definita su un'aperto di \mathbb{R}^n , sui quali si possono adoperare i metodi di studio dell'Analisi. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, allora la funzione $\tilde{f}_j : \varphi_j(U_j) \rightarrow \mathbb{R}$ si può riscrivere $\tilde{f}_j = \tilde{f}_i \circ \eta_{ij}$

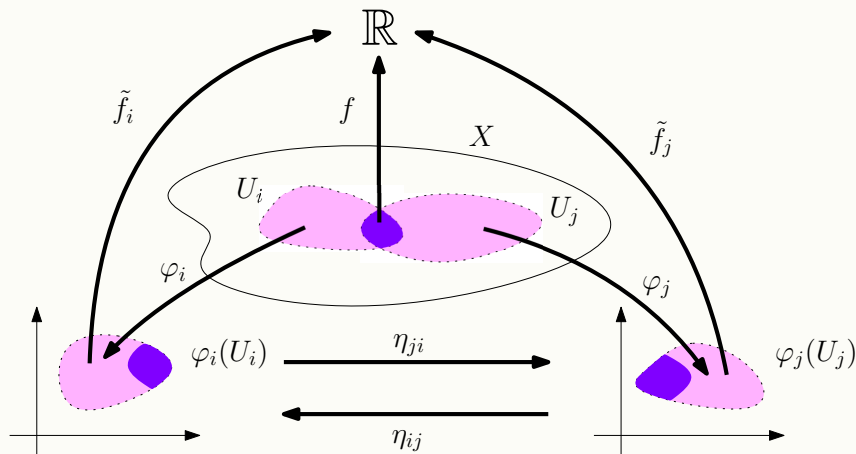
- η_{ij} è un omeomorfismo da un'aperto di \mathbb{R}^n ad un'aperto di \mathbb{R}^n
- \tilde{f}_i è una funzione da un'aperto di \mathbb{R}^n ad un'aperto di \mathbb{R}
- $\tilde{f}_j = \tilde{f}_i \circ \eta_{ij}$ è una funzione da un'aperto di \mathbb{R}^n ad un'aperto di \mathbb{R} .

Un diagramma commutativo è dato in figura 1.4. \tilde{f}_i è la rappresentazione locale della funzione f sull'aperto $U_i \subset X$. \tilde{f}_i e \tilde{f}_j sono funzioni differenti che rappresentano però la stessa funzione f , ma in sistemi di coordinate differenti.

Se si vuole descrivere una funzione f definita in X , si può definire localmente tramite un'atlante su X , ove per ciascuna carta locale φ_i si identifica l'espressione locale di f , denotata \tilde{f}_i , vi è una funzione di questo tipo per ogni carta dell'atlante. Le funzioni \tilde{f}_i sono descrizioni di f , non possono essere funzioni scelte arbitrariamente, ma devono soddisfare la relazione

$$\tilde{f}_j = \tilde{f}_i \circ \eta_{ij} \quad (1.8)$$

per ogni funzione di transizione η_{ij} .

Figura 1.4: La funzione f in relazione con l'intersezione fra due carte in X

Osservazione 2 Usando tale fatto, si è ricondotto il problema di studiare una funzione f su una varietà topologica, al problema dello studio di funzioni \tilde{f}_i definite su aperti di \mathbb{R}^n .

Si vuole definire ora la *differenziabilità* di f definita su una varietà topologica. Una funzione è di classe C^r definita su U aperto di \mathbb{R}^n se tutte le sue derivate parziali fino all'ordine r esistono e sono continue su U . Potremmo dire che f definita su una varietà topologica X è di classe C^r su U_i aperto di X se e solo se una sua rappresentazione locale \tilde{f}_i è di classe C^r in $\varphi(U_i)$, ma ciò è errato in quanto si deve considerare il fatto che possa esistere una differente carta (U_j, φ_j) che si interseca con U_i , tale per cui \tilde{f}_j è di classe $C^{r'}$ con $r' < r$.

Definizione 9 Una varietà topologica X è di classe C^r se tutte le funzioni di transizione η_{ij} sono di classe C^s con $s \geq r$.

Osservazione 3 Se una varietà X è di classe C^s , si può definire la nozione di funzione f di classe C^r su X , con $r \leq s$.

Definizione 10 Una varietà topologica di classe C^∞ è detta **varietà differenziabile**. Se n è la dimensione della varietà, si denominerà semplicemente n -varietà.

Sulle funzioni definite su una varietà differenziabile si possono applicare i metodi del calcolo differenziale propri dell'Analisi. Essendo che ogni punto di una varietà X è contenuto in un'intorno aperto omeomorfo ad un'insieme aperto di \mathbb{R}^n , le proprietà locali di una varietà sono le stesse della topologia in \mathbb{R}^n , in particolare ogni varietà è:

- *localmente compatta*
- *localmente connessa*

per completezza, saranno date le definizioni di tali proprietà.

Definizione 11 Uno spazio topologico X si dice **compatto** se da ogni suo ricoprimento costituito da una famiglia di insiemi aperti si può estrarre una sottofamiglia finita che è ancora un ricoprimento. Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ una qualsiasi famiglia di sottoinsiemi aperti di X tali per cui

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X \quad (1.9)$$

allora esiste un sottoinsieme finito $J \subset I$ tale per cui

$$\bigcup_{i \in J} U_i = X. \quad (1.10)$$

Definizione 12 uno spazio topologico X è detto **localmente compatto** se per ogni suo punto esiste un intorno la cui chiusura è un insieme compatto. Si ricordi che la chiusura di un'aperto U è l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi contenenti U .

Definizione 13 Uno spazio topologico X è **localmente connesso** se ogni punto dello spazio ha un sistema di intorni connessi. Si ricordi che un sistema di intorni è un insieme di intorni tale che qualsiasi intorno aperto di $x \in X$ contiene uno di questi intorni.

Si assumerà (solitamente) che ogni varietà differenziabile X considerata sia uno spazio topologico di Hausdorff, ossia per il quale vale il seguente assioma:

$$\forall x, y \in X : x \neq y \exists U, V \text{ intorni aperti di } x, y \text{ tali che } U \cap V = \emptyset. \quad (1.11)$$

1.2.1 Esempi di Varietà

Sono dati in seguito alcuni esempi di varietà differenziabili.

Esempio 1 \mathbb{R}^n è una varietà differenziabile, anche ogni aperto di \mathbb{R}^n lo è. Un qualunque spazio vettoriale reale di dimensione finita è isomorfo a \mathbb{R}^n , è quindi anch'esso una varietà.

Osservazione 4 Anche uno spazio vettoriale a dimensione infinita può essere una varietà differenziabile, è però necessario considerare una definizione alternativa di carta, in cui non si esclude il fatto che l'immagine di una carta locale possa essere uno spazio vettoriale di dimensione infinita.

Esempio 2 Se X è una varietà e $U \subset X$ è un insieme aperto, allora U è una varietà.

Esempio 3 Il prodotto di due varietà è una varietà. Si consideri una m -varietà X ed una n -varietà Y , sia \mathcal{A} un atlante per X e \mathcal{B} un atlante per Y

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} \quad (1.12)$$

$$\mathcal{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}. \quad (1.13)$$

Sia $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ ove

$$\varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n} \quad (1.14)$$

$$(x, y) \mapsto (\varphi_\alpha(x), \psi_\beta(y)). \quad (1.15)$$

Questo è un atlante per $X \times Y$, quest'ultima è quindi una $n + m$ -varietà.

Esempio 4 Si consideri l'insieme

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0\} \quad (1.16)$$

ossia l'insieme delle matrici quadrate $n \times n$ a valori reali il cui determinante è diverso da zero, questo è un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^{n^2} , quindi è una varietà. Il fatto che sia aperto è dato dal fatto che l'insieme delle matrici con determinante nullo è un insieme chiuso.

Esempio 5 Si consideri la sfera S_R^n di raggio R in \mathbb{R}^{n+1}

$$S_R^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{x}\|_2 = R\} \quad (1.17)$$

è uno spazio topologico la cui topologia è quella indotta di \mathbb{R}^{n+1} . Si definirà un atlante per S_R^n costituito da due carte. Si considerino i due poli

$$N = (0, 0, 0, \dots, R) \quad (1.18)$$

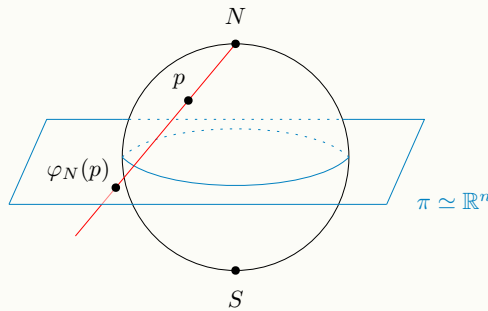
$$S = (0, 0, 0, \dots, -R) \quad (1.19)$$

si denota $p = (p^1, \dots, p^{n+1})$ un generico punto della sfera, si noti come le coordinate si identificano con degli apici piuttosto che con dei pedici, l'utilità di tale notazione sarà chiarita in seguito.

Sia π l'iperpiano di equazione $x^{n+1} = 0$, naturalmente identificato con \mathbb{R}^n . La prima carta è $(S_R^n \setminus \{N\}, \varphi_N)$

$$\varphi_N : S_R^n \setminus \{N\} \rightarrow \pi \simeq \mathbb{R}^n \quad (1.20)$$

definita come la *proiezione stereografica*. Il punto $\varphi_N(p) \in \mathbb{R}^n$ identificato, è il punto che si trova su π attraversato dall'unica retta che passa per p e per N . Un esempio in \mathbb{R}^3 è riportato in figura 1.5.

Figura 1.5: Proiezione stereografica in \mathbb{R}^3

Tale retta è definita dall'equazione

$$\mathbf{x}(t) = N + t(p - N) \quad (1.21)$$

con $t \in \mathbb{R}$. Le singole coordinate della retta al variare di t sono date da

$$\begin{cases} x^1(t) = tp^1 \\ x^2(t) = tp^2 \\ \vdots \\ x^n(t) = tp^n \\ x^{n+1}(t) = R + t(p^{n+1} - R) \end{cases} \quad (1.22)$$

considerando l'intersezione con l'iperpiano π si ricava

$$t = \frac{R}{R - p^{n+1}} \quad (1.23)$$

l'espressione di φ_N è quindi

$$N + \frac{R}{R - p^{n+1}}(p - N) \quad (1.24)$$

ristretta alle prime n componenti

$$\varphi_N(p) = \left(\frac{Rp^1}{R - p^{n+1}}, \frac{Rp^2}{R - p^{n+1}}, \dots, \frac{Rp^n}{R - p^{n+1}} \right) \quad (1.25)$$

tale funzione è biettiva. Si noti come essendo $p \neq N$ i denominatori di ogni componente di $\varphi_N(p)$ non sono mai nulli. L'inversa di tale funzione è la seguente

$$\varphi_N^{-1}((y^1, \dots, y^n)) = \left(y^1 \frac{2R^2}{(\|y\|_2)^2 + R^2}, \dots, y^n \frac{2R^2}{(\|y\|_2)^2 + R^2}, R \frac{(\|y\|_2)^2 - R^2}{(\|y\|_2)^2 + R^2} \right). \quad (1.26)$$

Come seconda carta si considera la proiezione analoga ϕ_S dal punto S

$$\varphi_S : S_R^n \setminus \{S\} \rightarrow \pi \simeq \mathbb{R}^n. \quad (1.27)$$

L'espressione di φ_S è

$$\varphi_S(p) = \frac{R}{R + p^{n+1}}(p^1, \dots, p^n) \quad (1.28)$$

queste due carte costituiscono un'atlante per la sfera S_R^n . Bisogna verificare che le due carte siano compatibili, ossia che le funzioni di transizione siano di classe C^∞ , in modo da dimostrare che la varietà sia differenziabile.

L'intersezione dei due aperti di S_R^n è $S_R^n \setminus \{N, S\}$, si ha che $\varphi_N(S_R^n \setminus \{N, S\}) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. La funzione di transizione $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è la seguente

$$\eta_{SN}(y) = \frac{R^2}{(\|y\|_2)^2} y \quad (1.29)$$

questa è di classe C^∞ (la dimostrazione è omessa). L'altra funzione, ossia $\eta_{NS} = \eta_{SN}^{-1}$ è a sua volta di classe C^∞ . La sfera S_R^n è una n -varietà differenziabile.

Osservazione 5 Due è il numero minimo di carte per ricoprire una sfera.

Esempio 6 Prodotti di sfere sono varietà differenziabili, come il toro

$$T^2 = S^1 \times S^1 \quad (1.30)$$

mostrato in figura 1.6.

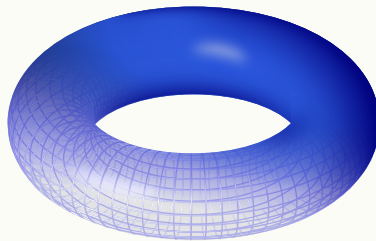


Figura 1.6: Rappresentazione geometrica del toro T^2

Esempio 7 Gli esempi precedenti consideravano varietà "immerse" in \mathbb{R}^n , il seguente esempio riguarda una varietà differenziabile che non nasce come sotto varietà contenuta in \mathbb{R}^n . Lo spazio **proiettivo reale** di dimensione n si può costruire come segue, si consideri la seguente relazione di equivalenza fra vettori in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$:

$$(x^0, x^1, \dots, x^n) \sim (y^0, y^1, \dots, y^n) \iff (y^0, y^1, \dots, y^n) = (\lambda x^0, \lambda x^1, \dots, \lambda x^n) \quad \forall \lambda \neq 0. \quad (1.31)$$

Si considera l'insieme quoziente delle classi di equivalenza rispetto tale relazione

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim} \quad (1.32)$$

si denota $(x^0 : x^1 : \dots : x^n)$ un'elemento di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$. Dal punto di vista geometrico, ogni elemento di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ è una retta passante per l'origine, come mostrato in figura 1.7.

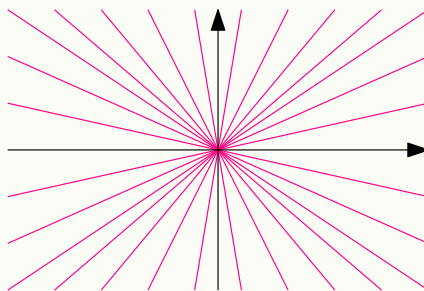


Figura 1.7: Lo spazio $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$

I punti $(x^0 : x^1 : \dots : x^n)$ si denominano **coordinate omogenee** in \mathbb{P}^n (da ora in poi si omette il pedice \mathbb{R}). Lo spazio proiettivo deve essere dotato di una topologia, siccome \mathbb{P}^n è un'insieme quoziente, è quindi dotato della *topologia quoziente*, ai fini dell'esempio, non è necessario conoscere i dettagli di tale topologia.

Si vuole ora costruire un atlante per \mathbb{P}^n , si pone

$$U_i = \{(x^0 : x^1 : \dots : x^n) \in \mathbb{P}^n : x^i \neq 0\} \quad (1.33)$$

di tali insiemi U_i ce ne sono $n+1$, per $i = 0, 1, \dots, n$. Si ha che

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{0 \leq i \leq n} U_i \quad (1.34)$$



ogni punto dello spazio proiettivo deve avere almeno una coordinata diversa da zero, quindi deve essere necessariamente in uno degli insiemi U_i . Bisogna definire ora le carte locali, si pone $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ come segue

$$\varphi_i(x^0 : \dots : x^n) = \left(\frac{x^0}{x_i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x_i}, \frac{x^{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x^n}{x_i} \right) \quad (1.35)$$

nell'immagine di φ_i si è esclusa la coordinata x_i , φ_i è ben definita in quanto

$$\varphi_i(x^0 : \dots : x^n) = \varphi_i(\lambda x^0 : \dots : \lambda x^n) \quad (1.36)$$

non è difficile da verificare

$$\varphi_i(\lambda x^0 : \dots : \lambda x^n) = \left(\frac{\lambda x^0}{\lambda x_i}, \dots, \frac{\lambda x^{i-1}}{\lambda x_i}, \frac{\lambda x^{i+1}}{\lambda x_i}, \dots, \frac{\lambda x^n}{\lambda x_i} \right) = \quad (1.37)$$

$$\left(\frac{x^0}{x_i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x_i}, \frac{x^{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x^n}{x_i} \right) = \varphi_i(x^0 : \dots : x^n). \quad (1.38)$$

La funzione inversa è la seguente

$$\varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_i \quad (1.39)$$

$$(y^1, \dots, y^n) \mapsto (y^1 : \dots : y^i : 1 : y^{i+1} : \dots : y^n) \quad (1.40)$$

l'insieme $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=0, \dots, n}$ è un atlante per \mathbb{P}^n . Bisogna verificare ora la regolarità delle funzioni di transizione. Siano $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ due carte, si considera η_{ij} :

$$\eta_{ij}(y^1, \dots, y^n) = \quad (1.41)$$

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \quad (1.42)$$

$$\varphi_i(y^1 : \dots : y^j : 1 : y^{j+1} : \dots : y^n) = \quad (1.43)$$

$$\left(\frac{y^1}{y^i} : \dots : \frac{y^{i-1}}{y^i} : \frac{y^{i+1}}{y^i} : \dots : \frac{y^j}{y^i} : \frac{1}{y^i} : \frac{y^{j+1}}{y^i} : \dots : \frac{y^n}{y^i} \right) \quad (1.44)$$

essendo che $y^i \neq 0 \neq y^j$, ogni funzione di transizione η_{ij} è di classe C^∞ . In conclusione, \mathbb{P}^n è una n -varietà differenziabile.

Osservazione 6 $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ è l'insieme dei sotto spazi vettoriali di dimensione 1 di \mathbb{R}^{n+1} , dato che contiene tutte le rette passanti per l'origine.

Tale struttura si può generalizzare, sia V uno spazio vettoriale sul campo reale di dimensione n , si definisce

$$Gr_k(V) = \{ \text{insieme dei sottospazi di } V \text{ di dimensione } k \} \quad (1.45)$$

si ha che $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n = Gr_1(\mathbb{R}^{n+1})$. L'insieme $Gr_2(\mathbb{R}^{n+1})$ contiene tutti gli iperpiani passanti per l'origine. Anche $Gr_k(V)$ è una varietà differenziabile di dimensione $k(n-k)$ ed è detta *varietà grassmanniana*.

1.2.2 Il Teorema degli Insiemi di Livello

Il teorema presentato in tale sezione è rilevante. Sono necessari prima alcuni risultati, ed alcune definizioni.

Definizione 14 Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un'aperto e sia $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^1 . Un punto $p \in \Omega$ è un **punto critico** di F se il differenziale $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ non è suriettivo (il rango della matrice Jacobiana in tal punto non è m). Il punto $F(p)$ è detto **valore critico**.

Sia $Crit(F) \subset \Omega$ l'insieme dei punti critici di F , tale insieme è chiuso (la dimostrazione è omessa). Si ricordi che nel caso $m = 1$, un punto critico è un punto in cui il gradiente di F si annulla. Se $n = m$, un punto è critico se la matrice Jacobiana ha determinante nullo.

Un punto è regolare se non è critico, e la sua immagine tramite F è un valore regolare.

Teorema 1 (della funzione inversa) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un'aperto, e $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^k con $k \geq 1$. Sia $p_0 \in \Omega$ un punto regolare, ossia $\det(JacF(p_0)) \neq 0$, esiste un'intorno U di p_0 ed un'intorno V di $F(p_0)$ in \mathbb{R}^n tali per cui la funzione

$$F|_U : U \rightarrow V \quad (1.46)$$

è un diffeomorfismo (essa e la sua inversa sono differenziabili) la cui inversa è di classe C^k .

Intuitivamente, il teorema afferma che, se una funzione F in un punto p_0 è approssimabile da un'applicazione lineare invertibile, anche F stessa sarà localmente invertibile in un intorno di p_0 .

Il seguente teorema è fondamentale ed afferma che le curve di livello di una funzione di classe C^∞ sono varietà differenziabili.

Teorema 2 Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+n}$ un aperto, e sia

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (1.47)$$

una funzione di classe C^∞ . Sia $a \in F(\Omega)$, si consideri l'insieme di livello di a , ossia l'insieme dei punti in Ω in cui la funzione assume valore a , escludendo i punti critici:

$$F^{-1}(a) = \{x \in \Omega : F(x) = a\} \quad (1.48)$$

$$M_a = F^{-1}(a) \setminus \text{Crit}(F) \quad (1.49)$$

allora M_a è uno spazio topologico, la cui topologia è quella indotta da \mathbb{R}^{m+n} , inoltre è una n -varietà differenziabile. Se a è regolare, $M_a = F^{-1}(a)$.

Dimostrazione: Bisogna costruire un atlante per M_a , e mostrare che le funzioni di transizione sono di classe C^∞ . Si consideri un punto $p_0 \in M_a$, siccome tale punto non è critico (per ipotesi), la matrice Jacobiana $\text{Jac}F(p_0)$ ha rango massimo, ossia m . Questo significa che esiste almeno una sotto-matrice di $\text{Jac}F(p_0)$ costituita da n righe ed m colonne che ha determinante diverso da zero. A meno di permutare le coordinate, si può assumere che queste siano le ultime m colonne

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^{n+1}(p_0)} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^{n+m}(p_0)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^{n+1}(p_0)} & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^{n+m}(p_0)} \end{pmatrix} \neq 0 \quad (1.50)$$

denotiamo tale matrice B , essa è invertibile. Si costruisce una funzione $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ definita ponendo

$$G(x) = (x^1, \dots, x^n, F(x)). \quad (1.51)$$

si considera poi la Jacobiana di G in p_0

$$\text{Jac}G(p_0) = \begin{pmatrix} \text{Id} & \mathbf{0} \\ * & B \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

è una matrice quadrata di $n+m$ righe e colonne, $\text{Jac}G(p_0)$ è suddivisa in quattro componenti come mostrato, in particolare

- Id è la matrice identità, in quanto gli elementi di tali componenti sono del tipo

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} \quad (1.53)$$

e chiaramente, se $i = j$ allora $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^i} = 1$, diversamente, se $i \neq j$ si ha che $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = 0$, quindi la matrice risultante è l'identità.

- La componente in alto a destra è la matrice nulla perché i termini sono tutti del tipo

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{n+j}} \quad (1.54)$$

e per ogni i, j tale derivata è nulla.

- La componente in basso a sinistra è composta dai termini del tipo

$$\frac{\partial F^i}{\partial x^{n+j}}(p_0) \quad (1.55)$$

non vi sono assunzioni sui tali valori e con \mathbf{x} si indica che tale matrice può assumere qualsiasi valore.

- L'ultima componente contiene termini del tipo

$$\frac{\partial F^i}{\partial x^{n+j}} \quad (1.56)$$

ed è chiaramente la matrice B , come dall'equazione (1.50).

si conclude che il determinante di $\text{Jac}G(p_0)$ è uguale al determinante di B , quindi diverso da zero

$$\det \begin{pmatrix} \text{Id} & \mathbf{0} \\ * & B \end{pmatrix} = \det B \neq 0. \quad (1.57)$$

A tal punto si può applicare il Teorema (1), G è localmente invertibile, ossia esistono degli intorno $\tilde{U} \subset \Omega \setminus \text{Crit}(F)$ di p_0 , e $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ di $G(p_0)$ tali che

$$G|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow W \quad (1.58)$$

è un diffeomorfismo. Sia H l'inversa di $G|_{\tilde{U}}$

$$H(y) = (h^1(y), \dots, h^{n+m}(y)) \quad (1.59)$$

essendo H l'inversa di G si ha che $G(H(y)) = y$, in particolare

$$y = (y^1, \dots, y^{n+m}) = G(H(y)) = \quad (1.60)$$

$$(h^1(y), \dots, h^{n+m}(y), F(H(y))) \quad (1.61)$$

quindi per $i = 1, 2, \dots, n$ si ha che $h^i(y) = y^i$. Pertanto

$$F(H(y)) = F(h^1(y), \dots, h^n(y), h^{n+1}(y), \dots, h^{n+m}(y)) = \quad (1.62)$$

$$F(y^1, \dots, y^n, h^{n+1}(y), \dots, h^{n+m}(y)) \quad (1.63)$$

ma dato che $y = (h^1(y), \dots, h^{n+m}(y), F(H(y)))$ si ha che l'ultimo blocco di $F(y^1, \dots, y^n, h^{n+1}(y), \dots, h^{n+m}(y))$, ossia $h^{n+1}(y), \dots, h^{n+m}(y)$, deve essere uguale all'ultimo blocco di y , quindi

$$F(H(y)) = (y^{n+1}, \dots, y^{n+m}) \quad \forall y \in W \quad (1.64)$$

Si pone $U = M_a \cap \tilde{U}$ e si definisce l'insieme

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, a) \in W\} \quad (1.65)$$

è un aperto di \mathbb{R}^n dato che W è un aperto di \mathbb{R}^{n+m} . Si definisce una funzione

$$\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+m} \quad (1.66)$$

ponendo

$$\psi(x) = (x, h^{n+1}(x, a), \dots, h^{n+m}(x, a)) \quad (1.67)$$

dall'uguaglianza ricavata prima

$$F(y^1, \dots, y^n, h^{n+1}(y), \dots, h^{n+m}(y)) = (y^{n+1}, \dots, y^{n+m}) \quad (1.68)$$

si deduce che $\psi(V) = U = M_a \cap \tilde{U}$

$$\psi : \mathbb{R}^n \supset V \rightarrow U \subset M_a \subset \mathbb{R}^{n+m} \quad (1.69)$$

si pone $\varphi = \psi^{-1}$, questa è una carta locale su M_a , definita su un'intorno U di p_0 . Tale costruzione può avvenire per ogni punto p_0 , per tanto questo definisce un'atlante, M_a è quindi una varietà topologica. Bisogna ora mostrare che le funzioni di transizione siano differenziabili.

Siano (U, φ) e (U', φ') due carte, la funzione di transizione $\varphi' \circ \varphi^{-1} = \varphi' \circ \psi$ ha come coordinate termini del tipo x^i oppure $h^j(x, a)$ (per costruzione), queste funzioni sono quindi di classe C^∞ . ■

Saranno presi in considerazione alcuni esempi di applicazione di tale teorema. Sia $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$F(x) = (\|x\|_2)^2 \quad (1.70)$$

ossia la funzione che associa ad ogni vettore la sua norma euclidea elevata al quadrato. La funzione è chiaramente di classe C^∞ , l'unico valore critico è $x = \mathbf{0}$, in ogni altro punto, la matrice Jacobiana ha determinante diverso da zero, quindi per ogni $R \neq 0$ l'insieme di livello

$$F^{-1}(R^2) = S_R^n \quad (1.71)$$

è una $((n+1)-1)$ -varietà (è la sfera di raggio R). La dimensione della varietà è la differenza fra la dimensione del dominio con quella del codominio.

Si consideri ora la funzione $F : M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$ che assegna ad ogni matrice quadrata il suo determinante

$$F(A) = \det A. \quad (1.72)$$

Sia $X = (x_i^j) \in M_n(\mathbb{R})$, il determinante si calcola tramite lo sviluppo di Laplace:

$$\det X = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} x_i^j \det X_i^j \quad (1.73)$$

dove X_i^j è la sotto-matrice di X ottenuta eliminando la i -esima riga e la j -esima colonna. Da tale formula, si deduce che la derivata parziale di F è la seguente

$$\frac{\partial F}{\partial x_i^j} = (-1)^{i+j} \det X_i^j \quad (1.74)$$

Il differenziale di questa funzione non è suriettivo sui punti critici, essendo il codominio di dimensione 1, il differenziale non è suriettivo se la matrice Jacobiana ha rango zero, ossia è la funzione nulla, in tal caso i punti critici di F sono le matrici che hanno derivate parziali nulle, X è un punto critico se tutte le sotto-matrici X_i^j hanno determinante nullo

$$X \text{ è critico} \iff \det X_i^j = 0 \quad \forall i, j. \quad (1.75)$$

Ciò avviene se il rango di X è minore o uguale di $n-2$

$$Crit(F) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) : rk(X) \leq n-2\}. \quad (1.76)$$

Il determinante di una matrice quadrata di rango non massimo è nullo, quindi l'unico valore critico di F è zero

$$\forall X \in Crit(F), F(X) = \det X = 0. \quad (1.77)$$

Si consideri un valore non critico, ad esempio 1, l'insieme di livello

$$SL(n, \mathbb{R}) = F^{-1}(1) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) : \det X = 1\} \quad (1.78)$$

questo è il gruppo speciale lineare, è una varietà differenziabile di dimensione $n^2 - 1$.

Tale teorema seppur potente nel suo enunciato va utilizzato in maniera corretta, si considerino le seguenti funzioni $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F(x, y) = y \quad (1.79)$$

$$G(x, y) = y^2 \quad (1.80)$$

condividono l'insieme di livello per il valore 0:

$$F^{-1}(0) = \{(x, y) : y = 0\} \quad (1.81)$$

$$G^{-1}(0) = \{(x, y) : y^2 = 0\} = \{(x, y) : y = 0\}. \quad (1.82)$$

$F^{-1}(0) = G^{-1}(0)$ indica la retta di equazione $y = 0$ ed è una 1-varietà. Il Jacobiano di F è costante ed è $Jac F = (0, 1)$, il rango è 1, non ci sono quindi valori critici per F .

Il Jacobiano di G è $Jac G = (0, 2y)$, ha rango nullo ove $y = 0$, 0 è quindi un valore critico per G , il teorema non si può applicare per $G^{-1}(0)$ perchè il valore non deve essere critico, nonostante ciò, questo insieme è comunque una varietà.

Le funzioni F e G hanno lo stesso insieme di livello per il valore 0 il teorema enuncia che

l'antimmagine di un valore regolare è una varietà

non dice che

l'antimmagine di un valore critico non è una varietà

quest'ultima condizione si può comunque verificare.

1.3 Funzioni Differenziabili fra Varietà

Si considerino due varietà differenziabili X, Y , di dimensioni n ed m . Sia F una funzione continua

$$F : X \rightarrow Y \quad (1.83)$$

si vuole definire il concetto di funzione di classe C^r fra due varietà differenziabili. Ci si riconduce sempre ad insiemi aperti di \mathbb{R}^n , si considerino due carte per X e per Y :

$$(U, \varphi) \text{ carta per } X, \quad p \in U \quad (1.84)$$

$$(V, \psi) \text{ carta per } Y, \quad q \in V \quad (1.85)$$

si considera \tilde{F} la rappresentazione locale di F :

$$\begin{array}{ccc} X \supset U & \xrightarrow{F|_U} & V \subset Y \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^n \supset \varphi(U) & \xrightarrow{\tilde{F}} & \psi(V) \subset \mathbb{R}^m \end{array}$$

si ha che

$$\tilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}. \quad (1.86)$$

\tilde{F} è una funzione definita su un'aperto di \mathbb{R}^n ad immagine su un'aperto di \mathbb{R}^m .

Definizione 15 Una funzione F definita fra due varietà differenziabili è di classe C^r in un'intorno di $p \in U$ se la sua rappresentazione locale \tilde{F} è di classe C^r in un'intorno di $q \in \varphi(p)$.

La definizione è ben posta se non dipende dalla scelta delle carte locali.

Si considerino due carte per X $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ con $p \in U_1 \cap U_2$. Siano $(V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2)$ due carte per Y , con $q = F(p) \in V_1 \cap V_2$. Si ha che

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1(U_1 \cap U_2) & \xrightarrow{\tilde{F}_1} & \psi_1(V_1 \cap V_2) \\ \uparrow \varphi_1 & & \uparrow \psi_1 \\ U_1 \cap U_2 & \xrightarrow{F|_{U_1 \cap U_2}} & V_1 \cap V_2 \\ \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \psi_2 \\ \varphi_2(U_1 \cap U_2) & \xrightarrow{\tilde{F}_2} & \psi_2(V_1 \cap V_2) \end{array}$$

$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = \eta_{12}$ (curva rossa a sinistra) $\vartheta_{12} = \psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ (curva rossa a destra)

F ha due rappresentazioni locali, \tilde{F}_1 e \tilde{F}_2 , sono tali che:

$$\tilde{F}_2 = \vartheta_{12}^{-1} \circ \tilde{F}_1 \circ \eta_{12}. \quad (1.87)$$

La Definizione 15 è ben posta se, ogni qual volta una rappresentazione locale di F ha una certa regolarità (è di classe C^r), allora anche una sua altra rappresentazione deve esserlo, siccome queste sono collegate dalle funzioni di transizione, l'unico modo per garantire ciò è che le funzioni di transizione siano a loro volta di classe C^r , ma queste per definizione di varietà differenziabile sono di classe C^∞ .

Definizione 16 Una funzione $F : X \rightarrow Y$ definita fra due varietà differenziabili è differenziabile se è di classe C^∞ in ogni punto di X .

Proposizione 1 Siano X, Y, Z tre varietà differenziabili, e siano

$$F : X \rightarrow Y \quad (1.88)$$

$$G : Y \rightarrow Z \quad (1.89)$$

funzioni differenziabili, allora

$$G \circ F : X \rightarrow Z \quad (1.90)$$

è differenziabile.



Definizione 17 Una funzione $F : X \rightarrow Y$ fra varietà differenziabili è un *diffeomorfismo di classe C^r* se è biettiva, di classe C^r , e la sua inversa è di classe C^r . Se non specificato, un *diffeomorfismo* è inteso di classe C^∞ .

Esempio Si consideri la varietà

$$X = GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0\} \quad (1.91)$$

è di dimensione n^2 , la varietà $X \times X$ è di dimensione $2n^2$. L'applicazione

$$F : X \times X \rightarrow X \quad (1.92)$$

$$F(A, B) = A \cdot B \quad (1.93)$$

che associa a due matrici il loro prodotto

$$C = A \cdot B \quad (1.94)$$

$$c_j^i = \sum_h a_h^i b_j^h \quad (1.95)$$

le componenti di F sono funzioni polinomiali, quindi F è di classe C^∞ , pertanto è differenziabile.

Si consideri ora la funzione $G : X \rightarrow X$ definita come segue

$$G(A) = A^{-1} \quad (1.96)$$

per le stesse ragioni, G è differenziabile. Le funzioni F e G determinano il *gruppo moltiplicativo* delle matrici quadrate a determinante non nullo, tali funzioni sono differenziabili, il gruppo $GL_n(\mathbb{R})$ è un *gruppo di Lie*.

Definizione 18 Un **gruppo di Lie** è un gruppo G , dotato di una struttura di varietà differenziabile, e per cui le funzioni che lo definiscono

$$G \times G \rightarrow G \text{ operazione binaria} \quad (1.97)$$

$$G \rightarrow G \text{ inverso} \quad (1.98)$$

sono entrambe differenziabili.

Il gruppo $(\mathbb{R}^n, +)$ è un gruppo di Lie.

Esempio Si consideri la varietà $X_1 = \mathbb{R}$ (la retta reale) con unica carta (U, φ) la funzione identità

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.99)$$

$$\varphi(x) = x \quad (1.100)$$

$$U = X_1. \quad (1.101)$$

Si consideri poi $X_2 = \mathbb{R}$ con unica carta (V, ψ) la funzione cubica

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.102)$$

$$\varphi(x) = x^3 \quad (1.103)$$

$$V = X_2. \quad (1.104)$$

anche X_2 è la retta reale, ma dotata di una differente carta. Esistono varietà differenziabili diverse ma tra loro **diffeomorfe**, possono essere identificate da un diffeomorfismo, è il corrispettivo dell'isomorfismo fra gruppi. Due varietà sono uguali se diffeomorfe ed il diffeomorfismo che le mette in relazione è l'identità.

X_1 e X_2 sono diverse perché l'identità non è un diffeomorfismo, si consideri però la funzione

$$F : X_1 \rightarrow X_2 \quad (1.105)$$

$$F(x) = \sqrt[3]{x} \quad (1.106)$$

questa è un diffeomorfismo:



- F è biettiva
- F è continua

la rappresentazione locale \tilde{F} è la funzione identità

$$\tilde{F} = x^3 \circ \sqrt[3]{x} \circ x = x \quad (1.107)$$

\tilde{F} è chiaramente un diffeomorfismo.

Osservazione 7 *Come nell'Algebra si possono classificare i gruppi a meno di isomorfismi, si possono classificare le varietà differenziabili a meno di diffeomorfismi.*

In seguito, sono riportati alcuni risultati riguardanti la classificazione delle varietà differenziabili.

- Esistono varietà topologiche che non ammettono alcuna struttura differenziabile. Le varietà topologiche di dimensioni 1, 2 e 3 ammettono sempre una struttura differenziabile
- Le varietà topologiche di dimensioni 1, 2 e 3 ammettono un'unica struttura di differenziabile (a meno di diffeomorfismi).
- Se $n \neq 4$, la varietà \mathbb{R}^n ammette un'unica struttura differenziabile a meno di diffeomorfismi. \mathbb{R}^4 è uno spazio topologico speciale perché ammette un'infinità non numerabile di strutture di varietà differenziabile. Si noti come lo spazio tempo in Relatività Generale è descritto come una 4-varietà.
- La sfera unitaria S^7 ha 28 strutture differenziabili distinte non diffeomorfe e sono descritte tutte esplicitamente.
- Non è ancora noto quale sia il numero di strutture differenziabili distinte non diffeomorfe per S^4 .

Definizione 19 *Una funzione $F : X \rightarrow Y$ è un **diffeomorfismo locale** se ogni $p \in X$ ha un'intorno aperto U tale per cui $F(U)$ è aperto in Y e la funzione*

$$F|_U : U \rightarrow F(U) \quad (1.108)$$

è un diffeomorfismo.

Definizione 20 *Una funzione*

$$\pi : \tilde{X} \rightarrow X \quad (1.109)$$

*fra due varietà è un **rivestimento** se*

1. π è suriettiva e differenziabile
2. per ogni $p \in X$ vi è un intorno aperto connesso $U \subset X$ tale per cui, per ogni componente connessa \tilde{U} di $\pi^{-1}(U)$, la restrizione

$$\pi|_{\tilde{U}}$$

è un diffeomorfismo fra \tilde{U} e U .

Se \tilde{X} è semplicemente connesso, π è un rivestimento universale.

Un'esempio è il seguente, siano

$$\tilde{X} = \mathbb{R} \quad (1.110)$$

$$X = S_R^1 \subset \mathbb{R}^2 \quad (1.111)$$

$$\pi : \tilde{X} \rightarrow X \quad (1.112)$$

$$\pi(t) = (R \cos t, R \sin t) \quad (1.113)$$

π è un rivestimento universale.

1.3.1 Esempi di Gruppi di Lie

Si consideri \mathbb{R}^2 , questo si può identificare come il campo dei numeri complessi, ereditandone la struttura \mathbb{C}

$$(a, b) \longleftrightarrow z = a + ib \quad (1.114)$$

inoltre

$$U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1\} = S^1 \quad (1.115)$$

$U(1)$ è un gruppo rispetto l'operazione di prodotto (il prodotto di due numeri complessi di norma unitaria è un numero di norma unitaria). S^1 eredita da $U(1)$ la struttura di gruppo abeliano (è un gruppo di Lie commutativo).

Si consideri \mathbb{R}^4 questo si identifica come l'insieme dei quaternioni

$$\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H} \quad (1.116)$$

$$(a, b, c, d) \longleftrightarrow z = a + bi + cj + dk \quad (1.117)$$

dove

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad ji = -k, \text{ ecc.} \quad (1.118)$$

il prodotto nell'insieme \mathbb{H} non è commutativo. Il modulo per un quaternionone si definisce come segue:

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad (1.119)$$

Il gruppo dei quaternioni unitari identifica la sfera S^3

$$\{z \in \mathbb{H} : |z| = 1\} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} = S^3 \quad (1.120)$$

S^3 eredita dal gruppo dei quaternioni unitari una struttura di gruppo di Lie non abeliano.

Si considerino adesso le tre **matrici di Pauli**:

$$\sigma_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.121)$$

sono matrici complesse ed unitarie (svolgono un ruolo fondamentale nel calcolo quantistico). Si ha che

$$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma_Z^2 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.122)$$

inoltre

$$\sigma_X \sigma_Y = i \sigma_Z, \quad \sigma_Y \sigma_X = -i \sigma_Z, \text{ ecc.} \quad (1.123)$$

Se si moltiplica ogni matrice per i si costruiscono tre nuove matrici:

$$\tilde{\sigma}_X = i \sigma_X \quad \tilde{\sigma}_Y = i \sigma_Y \quad \tilde{\sigma}_Z = i \sigma_Z \quad (1.124)$$

queste soddisfano le seguenti relazioni

$$\tilde{\sigma}_X^2 = \tilde{\sigma}_Y^2 = \tilde{\sigma}_Z^2 = -I \quad (1.125)$$

$$\tilde{\sigma}_X \tilde{\sigma}_Y = -\tilde{\sigma}_Z, \quad \tilde{\sigma}_Y \tilde{\sigma}_X = \tilde{\sigma}_Z, \quad \tilde{\sigma}_Y \tilde{\sigma}_Z = -\tilde{\sigma}_X \quad (1.126)$$

$$\tilde{\sigma}_Z \tilde{\sigma}_Y = \tilde{\sigma}_X, \quad \tilde{\sigma}_X \tilde{\sigma}_Z = \tilde{\sigma}_Y, \quad \tilde{\sigma}_Z \tilde{\sigma}_X = -\tilde{\sigma}_Y \quad (1.127)$$

confrontando tali relazioni con quelle dei quaternioni, si stabilisce la seguente corrispondenza

$$1 \leftrightarrow I \quad (1.128)$$

$$i \leftrightarrow \tilde{\sigma}_Z \quad (1.129)$$

$$j \leftrightarrow \tilde{\sigma}_Y \quad (1.130)$$

$$k \leftrightarrow \tilde{\sigma}_X \quad (1.131)$$

i quaternioni si possono quindi rappresentare come delle matrici

$$z = a + bi + cj + dk \longleftrightarrow aI + b\tilde{\sigma}_Z + c\tilde{\sigma}_Y + d\tilde{\sigma}_X = \quad (1.132)$$

$$\begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix} = A_z \in M(2, \mathbb{C}) \quad (1.133)$$

si noti che l'operazione di determinante è l'equivalente del modulo

$$\det A_z = (a + ib)(a - ib) - (c + id)(-c + id) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad (1.134)$$

vi è quindi una corrispondenza fra il gruppo dei quaternioni unitari ed il gruppo delle matrici 2×2 unitarie a valori complessi $SU(2)$ con determinante uguale ad 1, in particolare, i due gruppi sono isomorfi. In conclusione:

$$SU(2) \simeq \{z \in \mathbb{H} : |z| = 1\} \simeq S^3. \quad (1.135)$$

1.4 Quaternioni Unitari e Rotazioni

Si consideri l'insieme dei quaternioni con prima coordinata nulla

$$\mathbb{H}_0 = \{0 + bi + cj + dk\} \subset \mathbb{H}_0 \quad (1.136)$$

\mathbb{H}_0 si può identificare con \mathbb{R}^3 tramite la seguente mappa $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{H}_0$:

$$q(x^1, x^2, x^3) = x^1 i + x^2 j + x^3 k. \quad (1.137)$$

Sia $z \in \mathbb{H}$ un quaternione unitario, si definisce una trasformazione $R_z : \mathbb{H}_0 \rightarrow \mathbb{H}_0$ come segue:

$$x \in \mathbb{R}^3 \quad (1.138)$$

$$R_z(q(x)) = zq(x)z^{-1} \quad (1.139)$$

il quaternione risultante avrà ancora parte reale nulla (facile da verificare). Siccome \mathbb{H}_0 si identifica come \mathbb{R}^3 , la funzione R_z è identicamente una mappa fra vettori in \mathbb{R}^3 . Si ha inoltre che la mappa R_z è un'isometria di $\mathbb{H}_0 \simeq \mathbb{R}^3$:

$$|R_z(q(z))| = |zq(x)z^{-1}| = |z| \cdot |q(x)| \cdot |z^{-1}| = |q(x)| \quad (1.140)$$

R_z è un'applicazione lineare, ha determinante unitario

$$\det R_z = 1 \quad (1.141)$$

la mappa $R_z : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una **rotazione** nello spazio $\forall z \in \mathbb{H}$, $|z| = 1$. Una rotazione si può sempre scrivere sotto forma di matrice (essendo lineare), se $z = a + bi + cj + dk$ con $|z| = 1$, R_z è rappresentata dalla seguente:

$$R_z = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2bc - 2ad & 2bd + 2ac \\ 2bc + 2ad & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2cd - 2ab \\ 2bd - 2ac & 2cd + 2ab & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix} \quad (1.142)$$

si dimostra che ogni rotazione in \mathbb{R}^3 è del tipo R_z per qualche quaternione unitario z . Per ogni rotazione in \mathbb{R}^3 esistono esattamente due quaternioni unitari che la descrivono

$$R_z = R'_z \iff \begin{cases} z = z' & \text{oppure} \\ z = -z' \end{cases} \quad (1.143)$$

Ricapitolando:

- Ad ogni quaternione di modulo 1 si è associata una matrice $A_z \in M(2, \mathbb{C})$ tramite una corrispondenza biettiva
- questa identifica il gruppo dei quaternioni unitari con il gruppo $SU(2)$.
- Ad ogni quaternione di modulo 1 si è associata una matrice di rotazione $R_z \in SO(3)$ tramite una corrispondenza non biettiva



- si ricordi che $SO(3)$ è il gruppo delle matrici ortogonali con determinante uguale ad 1.

Questo è un **omomorfismo suriettivo** di gruppi di Lie. Il nucleo dell'omomorfismo è $\{-I, I\}$:

$$\frac{SU(2)}{\{I, -I\}} \simeq SO(3) \quad (1.144)$$

$SU(2)$ e $SO(3)$ hanno una struttura di varietà differenziabile. Si noti come $SU(2) \simeq S^3$ è semplicemente connesso, quindi $SU(2)$ è il *rivestimento universale* di $SO(3)$.

Dall'equazione (1.144), si ha che prendere il quoziente di S^3 rispetto al sottogruppo $\{I, -I\}$ significa identificare punti diametralmente opposti su S^3 , ma le coppie di punti diametralmente opposti sulla sfera rappresentano lo spazio proiettivo $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$, considerando la relazione \sim fra due punti su S^3

$$x \sim y \iff x = -y \quad (1.145)$$

si hanno pertanto i seguenti diffeomorfismi:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \simeq \frac{S^3}{\sim} \simeq \frac{SU(2)}{\{I, -I\}} \simeq SO(3). \quad (1.146)$$

CAPITOLO

2

LO SPAZIO TANGENTE

Si vuole definire il concetto di *vettore tangente* ad una varietà in un suo punto.

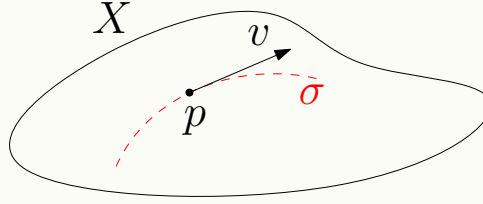


Figura 2.1: Vettore tangente ad un punto di X

L'idea è quella di rappresentare un vettore tangente ad una varietà X in un punto p come vettore tangente ad un'arco di curva γ contenuta in X passante per p , come mostrato in figura 2.1. Tale idea va formalizzata utilizzando le carte locali di X . Tale idea è poco elegante dato che il vettore tangente in questo caso dipenderà dalla scelta della carta, va quindi considerato un'altro approccio.

2.1 Lo Spazio delle Derivazioni

Per spiegare l'idea si comincia con un caso semplice, si consideri la varietà $X = \mathbb{R}^n$. Dato un qualsiasi punto $p \in \mathbb{R}^n$, lo spazio tangente a tale punto, denotato $T_p\mathbb{R}^n$, è esattamente \mathbb{R}^n .

La definizione formale di spazio tangente sarà data in seguito, considerando la definizione poco elegante, è chiaro che nel caso di \mathbb{R}^n , una qualsiasi curva passante per un punto può identificare un qualsiasi vettore tangente.

Sia $v \in T_p\mathbb{R}^n \in \mathbb{R}^n$ un vettore tangente e sia f una funzione di classe C^∞ definita in un'intorno di P . Si può calcolare la **derivata direzionale** di f in p rispetto al vettore v :

$$v = (a^1, a^2, \dots, a^n) \in T_p\mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

$$\partial_v f(p) = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \quad (2.2)$$

Si consideri ora l'insieme delle funzioni a valori reali derivabili infinite volte in p

$$C_p^\infty = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ è di classe } C^\infty \text{ in un'intorno aperto } U \text{ di } p\} \quad (2.3)$$



la derivata direzionale valutata in p è un'operatore da C_p^∞ ad \mathbb{R}

$$\partial_{v|_p} : C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.4)$$

$$f \mapsto \partial_v f(p) \quad (2.5)$$

questa soddisfa le seguenti proprietà

- $\partial_{v|_p}(f + g) = \partial_{v|_p}(f) + \partial_{v|_p}(g)$
- $\partial_{v|_p}(\text{costante}) = 0$
- $\partial_{v|_p}(fg) = \partial_{v|_p}(f)g(p) + f(p)\partial_{v|_p}(g)$ **regola di Leibniz.**

Definizione 21 Un'operatore $D : C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa le tre proprietà elencate in un punto p è detto **derivazione centrata in p** .

Si denota Der_p l'insieme di tali derivazioni. Ad ogni vettore di \mathbb{R}^n risulta associata una di queste derivazioni, Der_p ha la proprietà di essere uno spazio vettoriale sul campo dei reali, de facto

$$D_1, D_2 \in Der_p \implies D_1 + D_2 \in Der_p \quad (2.6)$$

$$D \in Der_p, \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda D \in Der_p \quad (2.7)$$

Ritornando alla varietà $X = \mathbb{R}^n$ e allo spazio tangente $T_p X$, ad ogni vettore $v = (a^1, a^2, \dots, a^n)$ in tale spazio, è associata una derivazione centrata in p :

$$\partial_{v|_p} = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x_i} |_p \in Der_p \quad (2.8)$$

questa associazione è lineare ed è un'omeomorfismo fra spazi vettoriali

$$T_p \mathbb{R}^n \rightarrow Der_p \quad (2.9)$$

$$v \mapsto \partial_{v|_p} \quad (2.10)$$

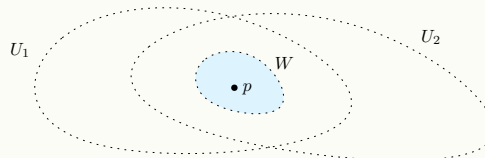
Questo spazio vettoriale è relativo ad un punto p . Ad ogni punto p si può associare uno spazio vettoriale $T_p \mathbb{R}^n$. Si vedrà in seguito che in realtà tale omeomorfismo è un'isomorfismo, gli spazi vettoriali $T_p \mathbb{R}^n$, Der_p si possono identificare, in tal modo lo spazio vettoriale delle derivazioni si può identificare con lo spazio tangente (almeno nel caso di \mathbb{R}^n).

Si comincia definendo in maniera più rigorosa C_p^∞ . Sia X una varietà differenziabile, e $p \in X$, se $U \subset X$ è un'aperto, si pone

$$C^\infty(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ è di classe } C^\infty\} \quad (2.11)$$

si considera l'insieme delle coppie (U, f) tali per cui U è un'aperto di X contenente p e $f \in C^\infty(U)$. Sull'insieme $\{(U, f)\}$ di tutte le coppie di questo tipo si definisce una relazione di equivalenza:

$$(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2) \iff \begin{array}{l} \exists W \text{ intorno aperto di } p \text{ tale che} \\ W \subset U_1 \cap U_2 \text{ ove } f_{1|_W} = f_{2|_W} \end{array} \quad (2.12)$$



Si richiede che f_1 ed f_2 coincidano in un qualche intorno aperto W di p .

Definizione 22 Si pone

$$C_p^\infty = \frac{\{(U, f) : p \in U, f \in C^\infty(U)\}}{\sim} \quad (2.13)$$

come insieme quoziente. Si indicherà $[(U, f)] \in C_p^\infty$ una classe di equivalenza.

Si pone $f_p = [(U, f)]$ e si denomina **germe** di f in p . **lezione 4 minuto 1.12.47**