ORALE CALCOLO DIFFERENZIALE

Massimo e minimo di un insieme

Sia [a, b] un intervallo chiuso, x_0 è un punto di **massimo relativo** dell'intervallo [a, b] se esiste un intorno $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ in cui $\forall x \in I, f(x_0) \geq f(x)$.

Sia [a, b] un intervallo chiuso, x_0 è un punto di **minimo relativo** dell'intervallo [a, b] se esiste un intorno $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ in cui $\forall x \in I, f(x_0) \leq f(x)$.

Sia [a, b] un intervallo chiuso, x_0 è un punto di **massimo assoluto** dell'intervallo [a, b] per cui $\forall x \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}], f(x_0) \geq f(x)$.

Sia [a, b] un intervallo chiuso, x_0 è un punto di **minimo assoluto** dell'intervallo [a, b] per cui $\forall x \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}], f(x_0) \leq f(x)$.

Diversamente, un **estremo superiore o inferiore** si può dire esistente nella funzione per gli stessi principi dei massimi e minimi, solo che esso può anche non appartenere al codominio della funzione. L'estremo superiore è il minimo dei maggioranti, quello inferiore il massimo dei minoranti.

Successioni

Le **successioni** sono particolari funzioni definite in $\mathbb{N}$ e che hanno valori in $\mathbb{R}$, è una sequenza ordinata di numeri reali con termini eventualmente ripetuti, una successione è **monotona crescente** se per ogni numero naturale n si ha che $a_n < a_n + 1$. È **monotona decrescente** invece se per ogni numero naturale n si ha che $a_n > a_n + 1$.

Invece una successione è **limitata superiormente** se e solo s esiste un numero reale M che *sovrasta tutti i termini*, cioè è posto superiormente a qualsiasi altro valore della successione, ciò si traduce in :

$$a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$$

È invece **limitata inferiormente**, se esiste il numero reale m posto inferiormente a tutti gli altri valori della successione, cioè :

$$m \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$$

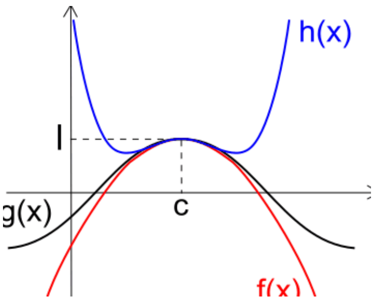
Se una successione è limitata sia superiormente che inferiormente, si dice **limitata**.

Teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia x_n una successione di numeri reali, se essa è limitata, allora esiste una sotto-successione x_{n_k} convergente.

Teorema del confronto/dei due carabinieri

Siano f e g due funzioni tali che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$, ed esiste una funzione h tale che $f(x) < h(x) < g(x)$, allora $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$.



Se due funzioni in un intorno di x_0 tendono ad uno stesso valore, una terza funzione contenuta fra esse, nell'intorno x_0 tenderà anch'essa a quel valore.

Unicità del limite

Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ tale limite è **unico**, infatti se esistessero due limiti l_1, l_2 diversi tra loro, presa una qualsiasi successione $x_n \to c$ si avrebbe :

$$f(x_n) \to l_1 \text{ e } f(x_n) \to l_2$$

La successione avrebbe due limiti e ciò è *assurdo*.

Limite finito in un punto di una funzione

Si dice che $l \in \mathbb{R}$ è il limite della funzione $y = f(x)$ per x che tende ad $a \in \mathbb{R}$ se per ogni $\varepsilon(epsilon) > 0$ esiste un numero $?(delta) > 0$ tale che :

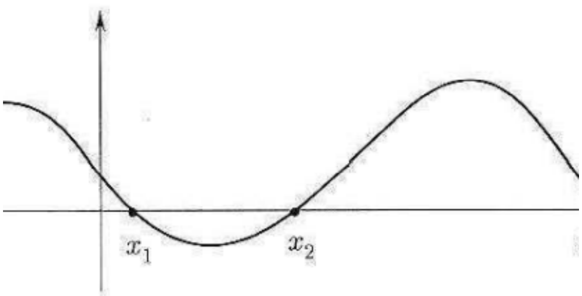
$$\forall x \ (|x - a| < \delta, x \neq a) \rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Quindi, avvicinandosi arbitrariamente ad a, la funzione tenderà al valore finito l.

Permanenza del segno

Se $f(x) > 0$ in un intorno C, allora $\lim_{n \to \infty} f(x) = l > 0$, quindi se una funzione è positiva in un intorno di C, e tende a C, il valore che assumerà il limite sarà positivo. Quindi nell'intorno di C, la funzione **assume lo stesso valore** del limite.

Continuità di una funzione



Una funzione è **continua** se può essere disegnata "senza staccare la penna dal foglio", contrariamente, è **discontinua**. Per **teorema di esistenza degli zeri**, se f è continua in $[a, b]$ e $f(a) \times f(b) < 0$, allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$. se f è strettamente monotona lo zero è uno.

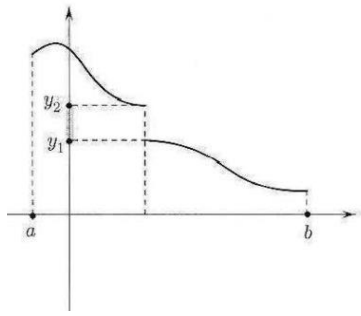
Quindi possiamo concludere che se una funzione è continua, vale:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Un'altra importante proprietà delle funzioni continue è il **Teorema di Weierstrass** :
Sia $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, allora f assume massimo e minimo in $[a,b]$.

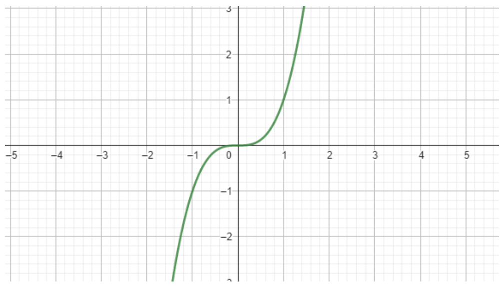
Una conseguenza dei due teoremi appena enunciati è **il teorema dei valori intermedi**, se f è continua in $[a,b]$, allora per ogni valore λ compreso tra il minimo ed il massimo, esiste un valore x_0 tale che $f(x_0) = \lambda$.

Se la funzione invece *non è continua,* può esistere un valore tra minimo e massimo che però non è immagine di nessun elemento in ingresso della funzione. Esempio nell'immagine



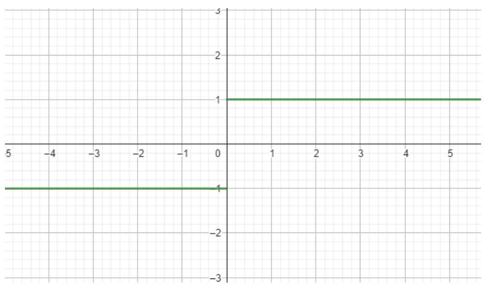
Esempi :

Una funzione continua :



$$f(x) = x^3$$

Una funzione discontinua :

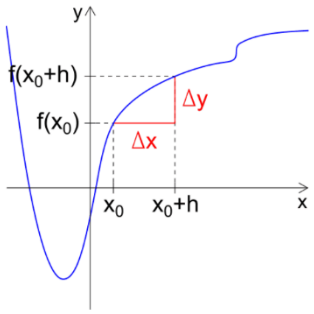


$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

Definizione di derivata

Consideriamo una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y = f(x)$ di variabile reale a valori reali, definiamo **rapporto incrementale** di tale funzione nel punto x_0 :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



È un rapporto di differenze calcolate a partire da un incremento, h.

Esso viene scritto come $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$

La derivata di una funzione in un punto x_0, non è altro che il limite del rapporto incrementale con il valore h che tende a 0, quindi al diminuire sempre della distanza. Quindi se esiste finito :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La derivata di $f(x)$ si indica come $\boldsymbol{f'(x)}$**.**

Allora la funzione si dice derivabile nel punto x_0. Inoltre, si dice *retta tangente* al grafico nel punto $(x_0, f(x_0)) : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Possiamo considerare la derivata come il *tasso di variazione puntuale o istantaneo*.

È ovvio il seguente teorema : **Se $\boldsymbol{f}$ è derivabile in un punto $\boldsymbol{x_0}$, allora $\boldsymbol{f}$ è continua in $\boldsymbol{x_0}$**.
Dimostriamo tale enunciato :

$h \times \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = h \times \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ eguagliamo il rapporto incrementale e moltiplichiamo ad entrambe le parti, h.

Semplifichiamo h nel primo termine e portiamo $-f(x_0)$ a destra dell'uguale cambiando segno.

$$f(x_0 + h) = h \times \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + f(x_0)$$

Vediamo i limiti per h che tende a 0 :

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \to 0} \left(h \times \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + f(x_0)\right)$$

Spezziamo i limiti come :

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0} h \times \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x_0)$$

Il limite evidenziato è la derivata prima nel punto x_0. Invece $\lim_{h\to 0} h = 0$.

L'ultimo $\lim_{h\to 0} f(x_0) = f(x_0)$ dato che non dipende da h.

Possiamo concludere che il valore a destra dell'uguale è uguale a $f(x_0)$.

Rimane quindi:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

Quindi se $x_0 + h = x_0\ ed\ h \to 0$, allora $x \to x_0$. Questo diventa allora :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

È quindi dimostrata la continuità.

Teorema di Fermat

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di massimo o di minimo relativo, se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.
Dimostrazione:
se f è derivabile, sappiamo che $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Dato che x_0 è un massimo relativo, allora se $h > 0$ e $f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$, vale che :

$$f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$$

invece, se $h < 0$ e $f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$, dato che x_0 è un massimo relativo, vale che :

$$f'(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

intersecando i due casi otteniamo :

$$f'(x_0) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f'(x) \leq 0 \\ \lim_{x\to 0^-} f'(x) \geq 0 \end{cases}$$

Quindi $f'(x_0) = 0$.

Teorema di Lagrange

Sia $f\ :[a,b] \rightarrow\ \mathbb{R}$ una funzione **continua** in $[a,b]$ e **derivabile** in (a,b), esiste un punto $c\ \in (a,b)$ tale che :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Questo graficamente, significa che esiste un punto in cui la retta tangente al grafico è **parallela** alla **retta secante**.

Dimostrazione:
Consideriamo la funzione continua e derivabile : $F(x) = f(x) - kx$

Avremo dunque : $f(a) - ka = f(b) - kb \rightarrow k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Sostituiamo quindi k a tale risultato : $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ poiché $F(x)$ soddisfa il teorema di Rolle esiste un punto $c\ \in (a,b)\ t.c\ f'(c) = 0$. Calcoliamo la derivata di

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Otteniamo quindi la tesi che : $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Teorema del criterio differenziale di monotonia

Sia $f\ : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile nell'intervallo I, in tal caso vale che :

1. $f'(x) \geq 0, \forall x \in I\ \leftrightarrow f$ è $monotona\ crescente\ in\ I$:
   - Se $f(x)$ è crescente, allora $f(x_2) \geq f(x_1)\ se\ x_2 \geq x_1$, dunque abbiamo che $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ e che $x_2 - x_1 \geq 0$, da ciò ne consegue che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \rightarrow \lim_{x^2 \rightarrow x^1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

$$f'(x_1) \geq 0\ \forall x_1 \in I$$

2. $f'(x) \leq 0, \forall x \in I\ \leftrightarrow f$ è $monotona\ decrescente\ in\ I$:
   - Se $f(x)$ è decrescente, allora $f(x_2) \leq f(x_1)\ se\ x_2 \geq x_1$, dunque abbiamo che $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$ e che $x_2 - x_1 \geq 0$, da ciò ne consegue che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0 \rightarrow \lim_{x^2 \rightarrow x^1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$$

$$f'(x_1) \leq 0\ \forall x_1 \in I$$

In linguaggio naturale, tale teorema afferma che f è crescente in un intervallo, se e solo se la derivata prima è maggiore o uguale a 0 per ogni x appartenente all'intervallo, oppure che f è decrescente in un intervallo, se e solo se la derivata prima è minore o uguale a 0 per ogni x appartenente all'intervallo.

Dimostrazione:
crescente :

Assumiamo che $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$, per Teorema di Lagrange possiamo dire che :

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Come ipotesi, $f'(c) \geq 0$, dunque :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

Sappiamo che $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, e quindi ne consegue che :

$$f(x_2) - f(x_1) \ \forall x_2 \geq x_1$$

decrescente :

Assumiamo che $f'(x) \leq \ 0 \ \forall x \in I$, per Teorema di Lagrange possiamo dire che :

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Come ipotesi, $f'(c) \leq 0$, dunque :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$$

Sappiamo che $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$, e quindi ne consegue che :

$$f(x_2) - f(x_1) \ \forall x_2 \leq x_1$$

Formula di Taylor con resto di Peano

La formula di Taylor permette di approssimare localmente tutte le funzioni sufficientemente regolari con polinomi.

Se una funzione f è derivabile almeno $n-1$ volte in un certo intervallo ed esista la derivata n-essima almeno in 0, la funzione può essere scritta come :

$$f(x) = T_n(x) + o(x^n) \; per \; x \to 0$$

$T_n(x)$ è il polinomio di grado minore o uguale ad n, ed esso vale :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} x^k$$

L' $o(x^n)$ descrive **l'errore di approssimazione**, è una quantità che per x che tende a 0, diventa sempre più piccola/trascurabile al crescere di n.

resto di Lagrange

Se x tende invece ad un punto x_0 si può approssimare l'errore con il resto di Lagrange.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \; per \; x \to x_0$$

Il termine evidenziato è il cosiddetto resto di Lagrange.