Esame 31 Agosto 2021

Esercizio 1

1) Le estrazioni dai 2 mazzi sono indipendenti. $\mathbb{P}(\{\text{double rouge}\}) =$

$= \mathbb{P}(\{1^\circ \text{ mazzo rossa}\} \cap \{2^\circ \text{ mazzo rossa}\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

2) E' la probabilita' che si peschi ad ogni estrazione, una nera ed una rossa, alla 1° estrazione e': $\mathbb{P}^1(\text{Nera-Rossa} \vee \text{Rossa-Nera}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, alla seconda e'

$\mathbb{P}^2(\,''\,) = \frac{20}{39} \cdot \frac{19}{39} + \frac{19}{39} \cdot \frac{20}{39} = 2\,\frac{20 \cdot 19}{39 \cdot 39}$, $\mathbb{P}^3(\,''\,) = 2 \cdot \frac{19}{38} \cdot \frac{19}{38}$, $\mathbb{P}^4(\,''\,) = 2 \cdot \frac{18}{37} \cdot \frac{19}{37}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^K(\,''\,) = \begin{cases} 2\,\frac{20-K+2}{40-K+1} \cdot \frac{20-K+1}{40-K+1} & \text{se } K\%2=0 \\ 2\,\frac{20-K+1}{40-K+1} \cdot \frac{20-K+1}{40-K+1} & \text{se } K\%1=0 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{P}(\text{Nessun double rouge}) = \prod_{i=1}^{40} \mathbb{P}^K(\,''\,)$$

$$= \prod_{i=1}^{40} \mathbb{P}^K(\,''\,) = \left(\prod_{i=2K}^{40} 2\,\frac{20-K+2}{40-K+1} \cdot \frac{20-K+1}{40-K+1}\right) \cdot \left(\prod_{i=2K-1}^{39} 2\,\frac{20-K+1}{40-K+1} \cdot \frac{20-K+1}{40-K+1}\right)$$

Esercizio 2

Per vedere una faccia i, che ha prob. $\frac{1}{6}$, in media e' necessario lanciare il dado $1/(\frac{1}{6}) = 6$ volte. $X_i \sim Geom(\frac{1}{6}) \Rightarrow \mathbb{E}(X_i) =$

Esercizio 4

P e' fisso: $P = (x_P, y_P)$ con la condizione che $\sqrt{x_P^2 + y_P^2} = 1$, Q e' una variabile aleatoria continua uniforme in $[0, 2\pi]$ di distribuzione $F_Q(t) = \frac{1}{2\pi}$, ed identifica il punto $\dot{Q} = (\cos(Q), \sin(Q))$. Sia: $X = \overline{PQ} = [(x_p - \cos(Q))^2 + (y_p - \sin(Q))^2]^{1/2}$, quindi $X^2 = (x_p - \cos(Q))^2 + (y_p - \sin(Q))^2$.

a) $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{2\pi} t \cdot [(x_p - \cos(t))^2 + (y_p - \sin(t))^2]\,dt = \int_0^{2\pi} t\,x_p^2 - t\,2\cos(t) + t\cos^2(t) + t\,y_p^2 - t\,2\sin(t) + t\sin^2(t)\,dt$

$(x_p^2 + y_p^2) \cdot \int_0^{2\pi} t\,dt - \int_0^{2\pi} t \cdot \sin(t)\,dt - \int_0^{2\pi} t \cdot \cos(t)\,dt + \int_0^{2\pi} t \cdot [\underbrace{\cos^2(t) + \sin^2(t)}_{=1}]\,dt = (x_p^2 + y_p^2)\,\frac{4\pi^2}{2} - (-2\pi) - 0 + \frac{4\pi^2}{2} =$

$\Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = \frac{2\pi}{2} \cdot (2\pi \cdot (x_p^2 + y_p^2) + 2\pi + 1)$