Calcolo differenziale

Nozioni di base

Equazioni e disequazioni

L'equazione generale della retta sul piano cartesiano è $y = mx + q$
Una retta è caratterizzata dal fatto che il rapporto fra qualsiasi 2 punti di essa è costante. Nell'equazione *m* rappresenta il coefficiente angolare, cioè il grado di inclinazione.

$$m = \frac{y - y^1}{x - x^1} \qquad\qquad (x^1, y^1) = punto\ sulla\ retta$$

Esempio :

$$ax + b \ \geq 0 \rightarrow i\ punti\ in\ cui\ x \text{ è } positivo$$

$ax \ \geq \ -b$

Se $a > 0$ allora $x \ \geq \ -\frac{b}{a}$

Se $a < 0$ allora $x \ \leq \ -\frac{b}{a}$

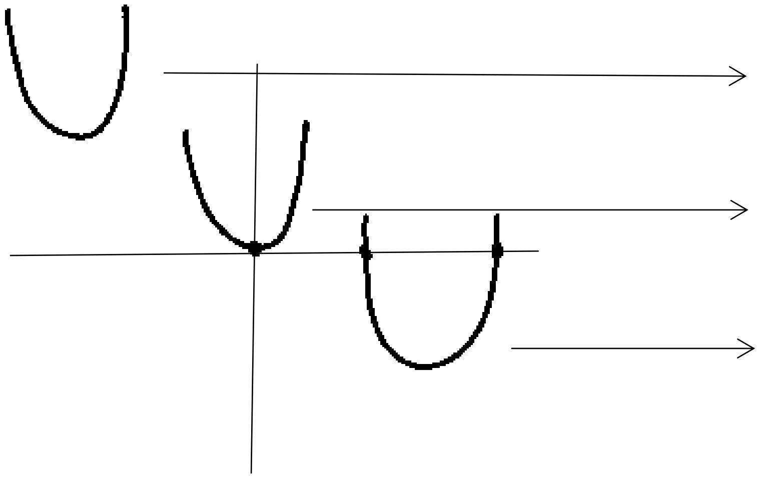
Polinomio di secondo grado

Un polinomio si dice di secondo grado quando l'esponente più alto è uguale a 2.

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad dove \qquad a \neq 0$$

$ax^2 + bx + c$ è l'equazione della parabola, ed in base al valore del Delta Δ (di equazione $b^2 - 4ac$) si possono avere diverse soluzioni.

Prendiamo l'esempio di 3 parabole :



0 soluzioni ($b^2 - 4ac < 0$)

1 soluzione ($b^2 - 4ac = 0$)

2 soluzioni ($b^2 - 4ac > 0$)

$x^2 + 1 = 0$ Non ha soluzioni perché $b^2 - 4ac$ = 0 – 4(1*1) = -4 cioè minore di 0

$x^2 - 4 = 0$ Ha due soluzioni perché $b^2 - 4ac$ = 0-4(1*-4) = 16 cioè maggiore di 0

Da dove è ricavato il delta?

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$
$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$
$$\frac{-b \pm \sqrt{b\text{^}2 - 4ac}}{2a} = 0$$

Modulo

L'operatore modulo $|x|$ può essere definito in vari modi :

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Oppure :

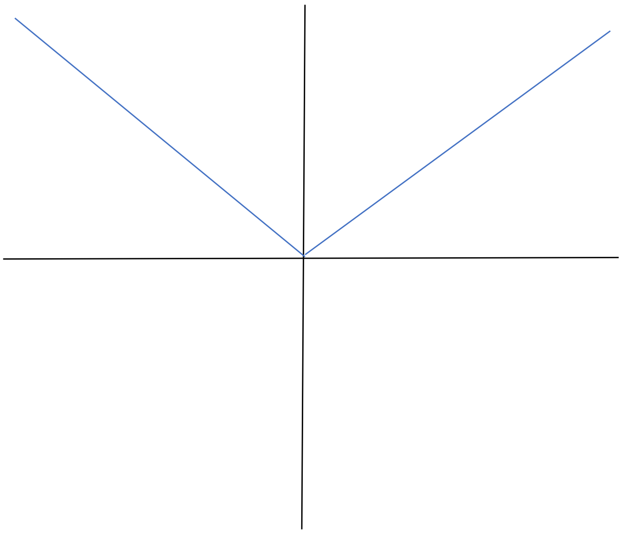
$$|x| = x \; se \; x \geq 0$$
$$|x| = -x \; se \; x < 0$$

Oppure:

$$|x| \text{ è } la \; distanza \; di \; x \; da \; 0$$

Esempio sul piano :

$|y - x| = 0$ sarebbe il modulo dell'equazione della bisettrice.



Cerchiamo i valori tali che $|x| \leq a$. La Formula da applicare è :
$|x| \leq a \rightarrow -a \leq |x| \leq a$

Prendiamo un altro esempio : $|x| > 1 \rightarrow x < 1 \; oppure \; x > 1$

Principio della disuguaglianza triangolare = $|x + y| \leq |x| + |y|$

Esempio con esercizi :

$a)$

$$|x-2|-3 \leq 0$$

$|x-2| \leq 3$
$-3 \leq x-2 \leq 3$
$-3+2 \leq x \leq 3+2$
$-1 \leq x \leq 5 \rightarrow$ I valori di X compresi fra -1 e 5.

$b)$
$2|x^2-x| > |x|$
$2|x(x-1)| > |x|$

Da questo punto in avanti introduciamo un nuovo concetto, il modulo di un prodotto è uguale al modulo di un fattore moltiplicato per il modulo dell'altro fattore, cioè :

$$|a \times b| = |a| \times |b|$$

Quindi la disequazione continua :

$2|x| \times |x-1| > |x|$ Dividiamo adesso tutto per $|x|$
$2|x-1| > 1$
$|x-1| > \frac{1}{2}$

Da qui applichiamo la formula:

$$|x| > a \begin{cases} \nearrow \; x < -a \\ \searrow \; x > +a \end{cases}$$

Quindi avremo 2 risultati :
$x-1 > \frac{1}{2} \rightarrow x > \frac{3}{2}$
$x-1 < -\frac{1}{2} \rightarrow x > \frac{1}{2}$

ESERCIZI

Esercizio 1 :
$x^2+2|x|-3 < 0$
$2|x| < 3-x^2$
$|2x| < 3-x^2$
$-3+x^2 < 2x < 3-x^2$
Abbiamo 2 equazioni :

Equazione 1)
$-3 + x^2 < 2x$
$x^2 - 2x - 3 < 0$
$-1 < x < 3$

Equazione 2)
$-3 + x^2 < -2x$
$x^2 + 2x - 3 < 0$
$1 < x < 3$

Esercizio 2 :
$|\frac{x-1}{x-7}| > 1$
Applico la formula:

$$|x| > a \begin{cases} \nearrow x < -a \\ \searrow x > +a \end{cases}$$

ricaviamo 2 equazioni :

Equazione 1)
$\frac{x-1}{x-7} < -1$
$\frac{x-1}{x-7} + 1 < 0$
$\frac{x-1+x-7}{x-7} < 0$
$\frac{2x-8}{x-7} < 0$
$\frac{2(x-4)}{x-7} < 0$

Due casi possibili (a e b):
a)
$2(x-4) < 0$

$x - 7 > 0$

b)
$2(x-4) < 0$

$x - 7 < 0$

a)

$x < 4$
$x > 7$

b)
$x > 4$
$x < 7$

Equazione 2)
$$\frac{x-1}{x-7} > 1$$