Esercizio 1.

a) Determinare il numero di soluzioni del sistema di congruenze lineari $\begin{cases} 3x \equiv 7 \mod 20 \\ 3x \equiv 2 \mod 5 \end{cases}$ comprese tra 1025 e 2038.

b) Dimostrare che se G è un gruppo ciclico e H è un sottogruppo allora G/H è un gruppo ciclico.

a)
$$\begin{cases} 3x \equiv 7 \pmod{20} \\ 3x \equiv 2 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x \equiv 7 & (5) \\ 3x \equiv 7 & (4) \\ 3x \equiv 2 & (5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x \equiv 3 & (4) \\ 3x \equiv 2 & (5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 1 & (4) \\ x \equiv 4 & (5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+4K \\ 4K = 3 & (5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+4K \\ K = 2 & (5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+4(2+5t) \\ K = 2+5t \end{cases} \Rightarrow x = 9+20t \quad t \in \mathbb{Z}$$

quanti numeri in $H: 1025 \leq 9+20t \leq 2038$? Sono 51.

b) Un gruppo ciclico e' commutativo, quindi H e' normale e G/H e' definito. Sia g il generatore di G, tale che $G = \langle g \rangle$, sappiamo che H e' ciclico, generato da h. Non sappiamo se sono gruppi finiti o meno, quindi non possiamo basare ipotesi sui loro ordini. Sappiamo che $G/H = \{aH,\ a \in G\}$, e sappiamo che l'operazione $\odot$ definita su G/H e' tale che $aH \odot bH = abH$. Consideriamo gH, e notiamo come $(gH)^2 = gH \odot gH = g^2 H$, piu' in generale, se $aH \in G/H$, allora $aH = g^t H = (gH)^t \Rightarrow G/H = \langle gH \rangle$ e' ciclico!

Esercizio 2.

a) Decidere quali delle seguenti applicazioni siano lineari e, quando lo sono, determinarne basi per nucleo e immagine.

(a) $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(a,b,c) = (a+2b+3c, a-b)$

(b) $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $G(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$

(c) $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $H(x_1,x_2) = (x_1+x_2, x_1-x_2, (x_1+1)^2-(x_1-1)^2)$.

b) Calcolare $F \circ H$; detta A la di $F \circ H$ nella base standard di $\mathbb{R}^2$, dire se A è simile a $\begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a)
$$F\left(\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{vmatrix}\right) = F\begin{vmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+a'+2b+2b'+3c+3c' \\ a+a'-b-b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2b+3c \\ a-b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'+2b'+3c' \\ a'-b' \end{vmatrix} = F\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} + F\begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{vmatrix}$$

$$\lambda \cdot F\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a+2b+3c \\ a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a+\lambda 2b+\lambda 3c \\ \lambda a-\lambda b \end{vmatrix} = F\begin{vmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{vmatrix} = F\left(\lambda \cdot \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}\right)$$ e' lineare.

$$G\left(\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix}\right) = G\begin{vmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{vmatrix} = (x+x')^2+(y+y')^2-(z+z')^2 \neq x^2+x'^2+y^2+y'^2-z^2-z'^2 = G\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} + G\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix}$$ non e' lineare.

$$\lambda \cdot H\left(\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}\right) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} x+y \\ x-y \\ (x+1)^2-(x-1)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda(x+y) \\ \lambda(x-y) \\ \lambda((x+1)^2-(x-1)^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda(x+y) \\ \lambda(x-y) \\ \lambda 4x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda x+\lambda y \\ \lambda x-\lambda y \\ (\lambda x+1)^2-(\lambda x-1)^2 \end{vmatrix} = H\begin{vmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{vmatrix} = H\left(\lambda \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}\right)$$

$$H\left(\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}\right) = H\begin{vmatrix} x+a \\ y+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+y+b \\ x+a-y-b \\ ((x+a)+1)^2-((x+a)-1)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+y+b \\ x+a-y-b \\ (x+a)^2+2(x+a)+1-(x+a)^2+2(x+a)-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+y+b \\ x+a-y-b \\ 4x+4a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y \\ x-y \\ 4x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a+b \\ a-b \\ 4a \end{vmatrix} = H\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} + H\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$$
e' lineare.

b)
$$F\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad F\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad F\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{\varepsilon\varepsilon}(F) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$H\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad H\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{\varepsilon\varepsilon}(H) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

trovo gli autovalori

$$\det\begin{vmatrix} 15-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (15-\lambda)(2-\lambda) \Rightarrow$$ ha autovalori 15, 2 inoltre e' diagonalizzabile quindi e' SIMILE alla matrice $\begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

Esercizio 3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice associata all'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $B = \{(1,1,0),(0,3,0),(0,1,1)\}$.
a) Si determinino gli autovalori di T.
b) Si determinino gli autovettori ~~ed equazioni per gli autospazi~~ di T.
c) Si stabilisca se T è diagonalizzabile.

a) considero $\det\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 3\\ 1 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot\det\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)(-1-\lambda)-3] = (1-\lambda)(\lambda^2-4) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2) \Rightarrow \begin{cases}1\\2\\-2\end{cases}$ con molt. alg. $=1$

b) $V_1 = \mathrm{Ker}\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&3\\1&1&-2\end{vmatrix} = \begin{cases}x_1=-t\\x_2=t\\x_3=0\end{cases} \Rightarrow V_1 = \mathrm{Span}\begin{vmatrix}-1\\1\\0\end{vmatrix}$

$V_2 = \mathrm{Ker}\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&-1&3\\1&1&-3\end{vmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&-1&3\\0&0&0\end{vmatrix} = \begin{cases}x_1=0\\x_2=3t\\x_3=t\end{cases} \Rightarrow V_2 = \mathrm{Span}\begin{vmatrix}0\\3\\1\end{vmatrix}$

$V_{-2} = \mathrm{Ker}\begin{vmatrix}3&0&0\\0&3&3\\1&1&1\end{vmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{vmatrix}3&0&0\\0&3&3\\0&1&1\end{vmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{vmatrix}3&0&0\\0&3&3\\0&0&0\end{vmatrix} = \begin{cases}x_1=0\\x_2=-t\\x_3=t\end{cases} \Rightarrow V_{-2} = \mathrm{Span}\begin{vmatrix}0\\-1\\1\end{vmatrix}$

c) e' diagonalizzabile perche' ogni autovalore ha molt. geo. identica alla molt. alg.

Esercizio 4.

a) Dare la definizione di applicazione lineare tra due spazi vettoriali V, W.

b) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche 3×3. Dare un esempio di applicazione lineare $V \to \mathbb{R}^5$. Dare un esempio di applicazione non lineare $\mathbb{R}^5 \to V$.

c) Dimostrare che un gruppo ciclico infinito è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

a) Siano V e W due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, con operazioni $+_V$ e $+_W$. Un'applicazione $T: V \to W$ e' detta lineare se, $a,b \in V$ $\lambda \in \mathbb{K}$:

- $T(a +_V b) = T(a) +_W T(b)$
- $T(\lambda a) = \lambda T(a)$
- $T(0_V) = 0_W$

b) $T\left(\begin{vmatrix}a & x_1 & x_2\\ x_1 & b & x_3\\ x_2 & x_3 & c\end{vmatrix}\right) = (a,0,0,0,0)$ e' lineare.

$T\left(\begin{vmatrix}a & x_1 & x_2\\ x_1 & b & x_3\\ x_2 & x_3 & c\end{vmatrix}\right) = (a^2,0,0,0,0)$ non e' lineare. $\Rightarrow \lambda T\left(\begin{vmatrix}a & x_1 & x_2\\ x_1 & b & x_3\\ x_2 & x_3 & c\end{vmatrix}\right) = \lambda(a^2,0,0,0,0) \neq ((\lambda a)^2,0,0,0,0) = T\left(\lambda\cdot\begin{vmatrix}a & x_1 & x_2\\ x_1 & b & x_3\\ x_2 & x_3 & c\end{vmatrix}\right)$

c) Sia $G = \{g^t, t \in \mathbb{Z}\}$ un gruppo ciclico infinito. Definisco $f: G \to \mathbb{Z}$ tale che $f(g^t) = t$.

Tale applicazione e' un omomorfismo: $f(g^t + g^k) = f(g^{t+k}) = t + k = f(g^t) + f(g^k) \wedge f(\overset{\text{neutro di } G}{e}) = f(g^0) = 0$

Inoltre e' iniettiva, $(a \neq b \wedge g^t = a \wedge g^k = b) \Rightarrow t \neq k \Rightarrow f(a) = f(g^t) = t \neq k = f(g^k) = b$.

Inoltre e' suriettiva, sia $k \in \mathbb{Z}$, allora $\exists g^k \mid f(g^k) = k$, g^k esiste per definizione di G. ∎