

Esercizio 1. Si assuma che - in media - il 2% della popolazione sia mancina. Dato un campione di 100 individui, utilizzando l'approssimazione di Poisson della binomiale, calcolare la probabilità che almeno 3 siano mancini.

probabilità che un individuo sia mancino: $\frac{2}{100}$, consideriamo una v.a. $X \sim \text{Bin}(100, \frac{2}{100})$,

$$P(X=3) = \binom{100}{3} \left(\frac{2}{100}\right)^3 \cdot \left(\frac{98}{100}\right)^{97} \approx 0.2. \text{ Consideriamo } Y \sim \text{Poisson}\left(\frac{2}{100}\right)$$

↳ tasso di MANCINI su 100 PERSONE

$$P(Y^{(100)} = k) = e^{-2} \cdot \frac{2^k}{k!}, \quad P(X \geq 3) = 1 - P(Y < 3)$$

$$P(Y^{(100)} < 3) = P(Y^{(100)} = 0 \cup Y^{(100)} = 1 \cup Y^{(100)} = 2) = \sum_{k=0}^2 e^{-2} \cdot \frac{2^k}{k!} = e^{-2} \cdot \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!}\right) = 5e^{-2} \Rightarrow P(X \geq 3) = 1 - 5e^{-2} \approx 0.32$$

Esercizio 2. Una moneta con probabilità di testa pari a $p \in (0, 1)$ viene lanciata un numero di volte aleatorio (indipendente dai risultati dei lanci della moneta) con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Trovare le distribuzioni del numero totale di teste e croci ottenute e dimostrare che queste due variabili aleatorie sono indipendenti.

$$\{\text{Numero di lanci}\} = X \sim \text{Poisson}(\lambda) \Rightarrow P(\{\text{sono } k \text{ lanci}\}) = P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$T = \{\text{Numero di teste su } X \text{ lanci}\}, \text{ la prob. che il numero di teste sia } k \text{ e' condizionata dal numero di lanci: } P(T=k) = P(X \geq k) \cdot P(T=k | X \geq k) : \sum_{l=k}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^l}{l!} \cdot \binom{l}{k} p^k \cdot (1-p)^{l-k} \stackrel{\text{wolfram}}{=} e^{-\lambda \cdot p} \cdot \frac{\lambda^k p^k}{k!}$$

LANCI ≥ TESTE

Esercizio 3. Ogni giorno Carlo riceve un numero aleatorio X di email, che possiamo pensare come una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Ogni email, indipendentemente dalle altre e dal numero totale di email ricevute, è spam con probabilità p e legittima con probabilità $1-p$, $p \in (0, 1)$. Siano Y e Z rispettivamente il numero di email di spam e di email legittime ricevute oggi da Carlo.

1) Calcolare la distribuzione di Y e quella di Z .

2) Dire se Y e Z siano o meno indipendenti. In caso affermativo dimostrarlo, in caso contrario dare un controesempio.

$$M = \text{Numero di email} \sim \text{Poisson}(\lambda) \Rightarrow P(M=m) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^m}{m!} \quad \text{dove } \lambda := \text{tasso email} \times \text{unita' di tempo}$$

1) Se Y e' il numero di email spam ricevute, $P(Y=k) = P(\{\text{si ricevono ALMENO } k \text{ email e } k \text{ di queste sono spam}\}) = P(M \geq k) \cdot P(Y=k | M \geq k)$

$$\bullet P(M \geq k) = P(M=k \cup M=k+1 \cup \dots \cup M=k+n) = \sum_{i=k}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$$

$$\bullet P(Y=k | M \geq k) = \frac{P(Y=k \cap M \geq k)}{P(M \geq k)} = \frac{\sum_{i=k}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \binom{i}{k} p^k \cdot (1-p)^{i-k}}{\sum_{i=k}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}} \Rightarrow P(M \geq k) \cdot P(Y=k | M \geq k) = \frac{P(Y=k \cap M \geq k)}{P(M \geq k)} P(M \geq k)$$

$$\Rightarrow P(Y=k) = \sum_{i=k}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \binom{i}{k} p^k \cdot (1-p)^{i-k} = e^{-\lambda \cdot p} \cdot \frac{(\lambda \cdot p)^k}{k!} \quad \text{e} \quad P(Z=k) = e^{-\lambda(1-p)} \cdot \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!}$$

Esercizio 5. Da un gruppo di 7 batterie, di cui 3 nuove, 2 usate ma funzionanti e 2 difettose, ne vengono scelte 3 a caso. Siano X e Y rispettivamente il numero di batterie nuove e usate ma funzionanti tra quelle scelte.

1) Determinare la distribuzione congiunta di (X, Y) e le distribuzioni marginali di X e di Y .

2) Calcolare $\text{cov}(X, Y)$. Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?

3) Le tre batterie scelte sono montate su di un apparecchio che funziona se nessuna di esse è difettosa. Determinare la probabilità che l'apparecchio funzioni.

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \omega_i \in \{0, 1, \dots, 7\}\}, \quad |\Omega| = \binom{7}{3} = 35$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{3}{1} \binom{4}{2}}{35} \quad P(X=2) = \frac{\binom{3}{2} \binom{4}{1}}{35} \quad P(X=3) = \frac{\binom{3}{3} \binom{4}{0}}{35} = \frac{1}{35}$$

$$1) \Rightarrow P(X=k) = \frac{\binom{3}{k} \binom{4}{3-k}}{35} \quad \text{e} \quad P(Y=k) = \frac{\binom{2}{k} \binom{5}{3-k}}{35}$$

$$P(X=1, Y=1) = \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1}}{35} \cdot \frac{1}{35}$$

FUNZ. USATE RIN

$$\text{in generale: } P(X=x, Y=y) = \frac{\binom{3}{x} \binom{2}{y} \binom{2}{3-x-y}}{35} \Rightarrow$$

distribuzione congiunta

x \ y	0	1	2	3
0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{1}{35}$
1	$\frac{2}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{6}{35}$	0
2	$\frac{2}{35}$	$\frac{3}{35}$	0	0

2) Calcolo prima il valore atteso.

$$E(X) = \sum_{i=0}^3 i \cdot \frac{\binom{3}{i} \binom{4}{3-i}}{35} = \frac{1}{35} \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} \cdot \binom{4}{3-i} \cdot i = \frac{1}{35} \left[0 + \binom{3}{1} \binom{4}{2} + \binom{3}{2} \binom{4}{1} \cdot 2 + \binom{3}{3} \binom{4}{0} \cdot 3 \right] = \frac{1}{35} [18 + 24 + 3] = \frac{9}{7}$$

$$E(Y) = \sum_{i=0}^2 i \cdot \frac{\binom{2}{i} \binom{5}{3-i}}{35} = \frac{1}{35} \left[0 + \binom{2}{1} \binom{5}{2} + \binom{2}{2} \binom{5}{1} \cdot 2 \right] = \frac{1}{35} [20 + 10] = \frac{6}{7}$$

$$E(X \cdot Y) = \sum_{x=0}^3 \sum_{y=0}^2 x \cdot y \cdot P(X=x, Y=y) = \frac{1}{35} [0 + 18 + 2 \cdot 12 + 3] = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}$$

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{6}{7} - \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{7} = \frac{6}{7} - \frac{54}{49} = \frac{42-54}{49} = -\frac{12}{49}$$

3) Ci sono 2 batterie difettose su 7: $A = \{\text{batterie funzionanti}\} = \binom{5}{3} \Rightarrow P(A) = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$

Esercizio 6. Un dado che ha una faccia blu, due rosse e tre verdi viene lanciato due volte. Siano R il numero di volte in cui il dado esibisce la faccia superiore rossa e V il numero di volte in cui il dado esibisce la faccia superiore verde.

1) Costruire la tabella della distribuzione congiunta di (R, V) .

2) Determinare la distribuzione di $Z = \max\{R, V\}$ e calcolare $E(Z)$ e $V(Z)$.

1) R e' una V.A. binomiale, si fanno 2 lanci e con prob. $\frac{1}{3}$ la faccia esce rossa.

$$R \sim \text{binom}(2, \frac{1}{3}) \Rightarrow P(R=k) = \binom{2}{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2-k} \Rightarrow R = \begin{cases} 0 & \text{con prob.} = \frac{4}{9} \\ 1 & \text{con prob.} = \frac{4}{9} \\ 2 & \text{con prob.} = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$k: 0, 1, 2$

$$V \sim \text{binom}(2, \frac{1}{2}) \Rightarrow P(V=k) = \binom{2}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-k} = \binom{2}{k} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow V = \begin{cases} 0 & \text{con prob.} = \frac{1}{4} \\ 1 & \text{con prob.} = \frac{1}{2} \\ 2 & \text{con prob.} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Nota: i due lanci sono indipendenti fra loro

$$P(\text{LANCIO 1} = x, \text{LANCIO 2} = y) = P(\text{LANCIO 1} = x) \cdot P(\text{LANCIO 2} = y)$$

La V.A. congiunta (R, V) ha immagine: $\{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (2,0), (0,2)\}$

Tabella:

$$P((R,V)=(0,0)) = \{2 \text{ volte una faccia blu}\} = \frac{1}{36}$$

$$P((R,V)=(1,0)) = \{\text{ROSSA E BLU}\} = \frac{1}{9}$$

R \ V	0	1	2
0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{4}$	0	0

$$P((R,V)=(0,1)) = \frac{1}{6}$$

$$P((R,V)=(1,1)) = \frac{1}{3}$$

$$P((R,V)=(2,0)) = \frac{1}{9}$$

$$P((R,V)=(0,2)) = \frac{1}{4}$$

2) Voglio trovare $Z = \max(R, V)$, sicuramente: $\text{Im}(Z) = \{0, 1, 2\}$, e' facile da trovare:

$$Z=0 \Leftrightarrow (R,V)=(0,0) \Rightarrow P(Z=0) = P((R,V)=(0,0)) = \frac{1}{36}$$

$$Z=1 \Leftrightarrow (R,V)=(1,0) \vee (1,1) \vee (0,1) \Rightarrow P(Z=1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{11}{18}$$

$$Z=2 \Leftrightarrow (R,V)=(2,0) \vee (0,2) \Rightarrow P(Z=2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36}$$

$$E(Z) = \sum_{i=0}^2 i \cdot P(Z=i) = \frac{11}{18} + 2 \cdot \frac{13}{36} = \frac{22+26}{36} = \frac{48}{36} = \frac{4}{3}$$

$$V(Z) = \sum_{i=0}^2 \left(i - \frac{4}{3}\right)^2 \cdot P(Z=i) = \frac{1}{36} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{11}{18} \cdot \left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{13}{36} \cdot \left(2 - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{36} \cdot \frac{16}{9} + \frac{11}{18} \cdot \frac{1}{9} + \frac{13}{36} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{11}{162} + \frac{13}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{81} + \frac{11}{162} + \frac{13}{36} = \frac{155}{324}$$

Esercizio 7. I componenti elettronici prodotti in una fabbrica sono difettosi. L'uno indipendentemente dall'altro, con probabilità p e funzionanti con probabilità $1-p$, $p \in (0, 1)$. Vengono sottoposti ad un controllo di qualità con la seguente modalità: ogni componente, l'uno indipendentemente dall'altro, viene ispezionato con probabilità α e non ispezionato con probabilità $1-\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$. Un componente trovato difettoso viene scartato, mentre gli altri vengono messi in commercio. Si supponga di avere n componenti prodotti dalla fabbrica.

- 1) Calcolare la distribuzione del numero di componenti che vengono scartati dopo il controllo di qualità.
- 2) Sapendo che il numero di componenti scartati dopo il controllo di qualità è pari a k , $k = 0, 1, \dots, n$, calcolare la distribuzione dei componenti difettosi tra gli $n-k$ messi in commercio.

1) Essendo che, ogni componente viene scartato se e solo se viene controllato ed è difettoso. $P(\{i \text{ viene scartato}\}) = P(i \text{ è difettoso}, i \text{ viene controllato}) = p \cdot \alpha$

Considero: $\{\text{Componenti scartati su } n\} = X \sim \text{binom}(n, p \cdot \alpha) \Rightarrow P(X=k) = \binom{n}{k} (p\alpha)^k \cdot (1-p\alpha)^{n-k}$

2) Siano $\{\text{Componenti difettosi su } n-k \text{ in commercio}\} = Y \sim \text{binom}(n-k, p)$ Voglio $P(Y=d | X=k)$

prima trovo $P(Y=d) = \binom{n-k}{d} p^d \cdot p^{(n-k-d)} \Rightarrow P(Y=d | X=k) = \frac{P(Y=d \cap X=k)}{P(X=k)}$ Voglio trovare $P(Y=d \cap X=k)$

$P(Y=d \cap X=k) :: d \text{ difettosi su } n-k = \binom{n-k}{d} p^d \cdot p^{(n-k-d)} = P(Y=d)$

$$\Rightarrow P(Y=d | X=k) = \frac{\binom{n-k}{d} p^d \cdot p^{(n-k-d)}}{\binom{n}{k} (p\alpha)^k \cdot (1-p\alpha)^{n-k}}$$

Esercizio 8. Siano X, Y due variabili aleatorie di Bernoulli di parametro p e indipendenti. Siano inoltre

$$Z = X(1-Y) \quad \text{e} \quad W = 1 - XY.$$

- 1) Qual è la distribuzione congiunta di (Z, W) ?
- 2) Quali sono le distribuzioni marginali di Z e W ?
- 3) Per quali valori di p le variabili aleatorie Z e W sono indipendenti?

Costruisco delle tavole di verità:

X	Y	Z	W
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0

$$P(Z=1) = P(X=1, Y=0) = p \cdot p^0 \Rightarrow P(Z=0) = 1 - p + p^2$$

$$\Rightarrow P(W=0) = P(X=1, Y=1) = p^2 \Rightarrow P(W=1) = 1 - p^2$$

$$\Rightarrow P((Z, W) = (0, 0)) = P(X=1, Y=1) = p^2 \quad P((Z, W) = (0, 1)) = P(X=0, Y=0 \vee X=0, Y=1) = (1-p)(1-p) + (1-p) \cdot p$$

$$P((Z, W) = (1, 0)) = 0 \quad P((Z, W) = (1, 1)) = P(X=1, Y=0) = p \cdot (1-p)$$