Esercizio 1. Utilizzando quanto visto ultimamente a lezione, determinare una base per il sottospazio di $\mathbb{R}^5$:

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$$

$W = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, e' una matrice a scala ed il Pivot e' il primo elemento:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 - x_5 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = t_3 \\ x_4 = t_4 \\ x_5 = t_5 \end{cases} \Rightarrow W: t_2 \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + t_3 \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + t_4 \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + t_5 \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$

, e costituiscono una base.

Esercizio 2. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dati da

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \right), \quad V = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} \right).$$

Determinare basi di U e di V. Determinare una base per $U+V$. (È ovvio che $U+V$ ha come insieme di generatori i vettori ottenuti prendendo l'unione di generatori di U ed di generatori di V.)
Stabilire se $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di U e V, cioè se $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Trovo i vettori linearmente indipendenti fra i generatori di U e V:

PIVOT

per U riduco a scala: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} A_4 - A_2 \\ A_3 - A_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} A_2 - A_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ quindi una base e': $\left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$

PIVOT

per W riduco a scala $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} A_3 + A_1 \\ A_4 + A_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} A_2 \leftrightarrow A_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} A_2 - 2A_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ una base e': $\left\{ \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix} \right\}$

So che $U + W = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{vmatrix} \right)$, ricerco una base:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} A_1 \leftrightarrow A_4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} A_2 - A_1 \\ A_3 - A_1 \\ A_4 - A_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} A_2 \leftrightarrow A_4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} A_3 - A_2 \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} A_4 + \tfrac{1}{2}A_3 \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

La matrice a scala ha 4 pivot, quindi $\dim(U+W) = 4$, quindi $U + W = \mathbb{R}^4$, inoltre $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W)$, quindi $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Esercizio 4. Sia $U = \{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$, quindi $U = \mathrm{Ker}A$, con $A \in M_{34}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

Determinare equazioni cartesiane per U.
Determinare equazioni parametriche per U.

Procedo riducendo A a scala: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} A_2 - \frac{1}{2}A_1 \\ A_3 + \frac{1}{2}A_1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & -9/2 \end{vmatrix} \begin{matrix} A_2 = 2A_2 \\ A_3 = 2A_3 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \end{vmatrix} A_3 - 3A_2 \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ e queste sono le equazioni cartesiane.

Per le parametriche considero:

PIVOT

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_3 = t_3 \\ x_4 = t_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = -x_2 - 3t_3 + t_4 \\ x_2 = t_3 + 3t_4 \\ x_3 = t_3 \\ x_4 = t_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = -t_3 - 3t_4 - 3t_3 + t_4 \\ x_2 = t_3 + 3t_4 \\ x_3 = t_3 \\ x_4 = t_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2t_3 - t_4 \\ x_2 = t_3 + 3t_4 \\ x_3 = t_3 \\ x_4 = t_4 \end{cases} \Rightarrow U = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Esercizio 5. Sia $U \leq \mathbb{R}^4$ come nell'esercizio 2,

$$U = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \right)$$

Determinare equazioni cartesiane per U.

Riduco a scala:

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right| \left| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\right| \xrightarrow[A_4 - A_2]{A_3 - A_1} \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \left| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_2 \end{array}\right| \xrightarrow{A_2 - A_1} \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \left| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_2 \end{array}\right| \Rightarrow$$

le eq. cartesiane sono: $\begin{cases} x_3 - x_1 = 0 \\ x_4 - x_2 = 0 \end{cases}$