Esercizio 1. È noto che i gemelli possono essere omozigoti, in questo caso sono necessariamente dello stesso sesso, oppure eterozigoti, e in questo caso sono dello stesso sesso nel 50% dei casi. Sia p la probabilità che due gemelli siano omozigoti.

1) Calcolare, in funzione di p, la probabilità che 2 gemelli siano omozigoti sapendo che sono dello stesso sesso.

2) Calcolare, in funzione di p, la probabilità che 2 gemelli siano di sesso diverso.

1) $O:\{\text{gemelli omozigoti}\}$ $SS:\{\text{stesso sesso}\}$ $E:\{\text{eterozigoti}\}$ $SD:\{\text{Sesso diverso}\}$

$$\mathbb{P}(O|S)=\frac{\mathbb{P}(O)\cdot\mathbb{P}(S|O)}{\mathbb{P}(O)\cdot\mathbb{P}(S|O)+\mathbb{P}(E)\cdot\mathbb{P}(S|E)}=\frac{1\cdot p}{1\cdot p+(1-p)\cdot{}^1\!/_2}=\frac{p}{p+{}^1\!/_2-{}^p\!/_2}=\frac{p}{{}^p\!/_2+{}^1\!/_2}=\frac{p}{{}^1\!/_2+{}^1\!/_2 p}\cdot\frac{1}{p}=\frac{1}{{}^1\!/_2+{}^1\!/_2 p}$$

2) $\mathbb{P}(SD|O)\cdot\mathbb{P}(O)+\mathbb{P}(SD|E)\cdot\mathbb{P}(E)=0+{}^1\!/_2(1-p)={}^1\!/_2-{}^p\!/_2$

Esercizio 2. In un'urna ci sono tre monete: la prima è equa ed ha testa (T) su di una faccia e croce (C) sull'altra, la seconda ha C su entrambe le facce, la terza ha T su entrambe le facce. Si estrae a caso una moneta dall'urna e la si lancia senza guardare di quale moneta si tratti.

1) Calcolare la probabilità che esca T.

2) Sapendo che la moneta ha reso T, calcolare la probabilità che sull'altra faccia ci sia C.

Supponendo che la moneta abbia reso testa, la si raccoglie e la si lancia nuovamente (senza guardare l'altra faccia della moneta).

3) Calcolare la probabilità di ottenere ancora T.

$1::\{\text{moneta } 1\}$ $2::\{\text{moneta } 2\}$ $3::\{\text{moneta } 3\}$

1) $\mathbb{P}(T)=\mathbb{P}(T|1)\cdot\mathbb{P}(1)+\mathbb{P}(T|2)\cdot\mathbb{P}(2)+\mathbb{P}(T|3)\cdot\mathbb{P}(3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1+2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

2) $$\mathbb{P}(1|T)=\frac{\mathbb{P}(1)\cdot\mathbb{P}(T|1)}{\mathbb{P}(1)\cdot\mathbb{P}(T|1)+\mathbb{P}(2)\cdot\mathbb{P}(T|2)\quad\mathbb{P}(3)\cdot\mathbb{P}(T|3)}=\frac{{}^1\!/_3\cdot{}^1\!/_2}{{}^1\!/_2}={}^1\!/_3$$

3) $$\underset{\uparrow}{\mathbb{P}(T|1\cup3)}=\frac{\mathbb{P}(T\cap(1\cup3))}{\mathbb{P}(1\cup3)}=\frac{\mathbb{P}((T\cap1)\cup(T\cap3))}{\underset{\uparrow}{\mathbb{P}(1\cup3)}}=\frac{{}^1\!/_3\cdot{}^1\!/_2+{}^1\!/_3}{2/3}=\frac{{}^1\!/_6+{}^1\!/_3}{2/3}=\frac{{}^1\!/_2}{2/3}={}^3\!/_4$$

esce di nuovo testa sapendo che la moneta e' la 1° o la 3°!

$(T\cap1)\cap(T\cap3)=\emptyset$

Esercizio 3. È stato indetto un referendum in una popolazione di n individui (tutti aventi diritto al voto). Ciascun individuo andrà a votare con probabilità 1/2, indipendentemente dagli altri. Inoltre, se un individuo andrà a votare, voterà SI con probabilità 1/2, indipendentemente dagli altri.

1) Calcolare la probabilità che un individuo fissato vada a votare e voti SI.

2) Calcolare la probabilità che il numero di voti SI sia k, $k=0\ldots,n$.

3) Sapendo che il numero di voti SI è pari a k, calcolare la probabilità che il numero di votanti sia stato m, $m=k,\ldots,n$.

1) Sia i un generico individuo, esso vota SI con probabilità ${}^1\!/_2\cdot{}^1\!/_2={}^1\!/_4$.

2) $\Omega:\{(\omega_1,\omega_2\ldots,\omega_n),\ \omega_i\in\{0,1\}$ K voti si:= occorrenze di 1 in $\omega\in\Omega$: $\mathbb{P}(\{K\text{ si}\})=\binom{n}{k}\frac{1}{4^k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$

INDIVIDUI   NON VOTA SI   VOTA SI

3) $$\mathbb{P}(\{m\text{ voti}\mid K\text{ si}\})=\frac{\mathbb{P}(\{m\text{ voti}\}\cap\{K\text{ si}\})}{\mathbb{P}(\{K\text{ si}\})}=\frac{\mathbb{P}(\{m\text{ persone hanno votato, e } K\text{ hanno votato si}\})}{\binom{n}{k}\frac{1}{4^k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}}$$

$$=\frac{\binom{n}{m}\frac{1}{2^m}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}\binom{m}{k}\frac{1}{4^k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{m-k}}{\binom{n}{k}\frac{1}{4^k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}}$$

! in questo punto (3) ho sfaciolato.

Esercizio 6. Tre sentieri collegano i bivacchi A, B e C in modo che da ciascun bivacco si possa raggiungere uno qualunque degli altri due con un sentiero diretto. A causa di frane, ciascun sentiero può essere non percorribile. Sia $p_{AB}\in(0,1)$ (rispettivamente p_{BC}, p_{AC}) la probabilità che il sentiero che collega A con B (rispettivamente B con C, A con C) sia percorribile. Si assuma che lo stato di agibilità di ciascun sentiero sia indipendente dagli altri. Vi trovate al bivacco A.

1) Calcolare la probabilità che possiate arrivare al bivacco C.

2) Un alpinista vi ha detto che non è possibile arrivare a C per via delle frane. Calcolare la probabilità che possiate comunque arrivare a B.

Supponiamo ora che tra A e B via siano 3 sentieri diretti, ciascuno percorribile con probabilità q indipendentemente dagli altri.

3) Calcolare le due probabilità precedenti (senza rifare tutti i calcoli).

1) Posso arrivare al bivacco C seguendo du percorsi: $A\to C\vee A\to B\to C$, le probabilità di raggiungere C sono $\frac{1}{2}\cdot P_{AC}+\frac{1}{2}(P_{AB}\cdot P_{BC})$

2) La probabilità di raggiungere B partendo da A e' semplicemente P_{AB}.

3.1) $\frac{1}{2}\cdot P_{AC}+\frac{1}{6}q+\frac{1}{6}q+\frac{1}{6}q=\frac{1}{2}P_{AC}+\frac{3}{6}q={}^1\!/_2P_{AC}+{}^1\!/_2q$

3.2) ${}^1\!/_3q+{}^1\!/_3q+{}^1\!/_3q=3\frac{1}{3}q=q$

Esercizio 8. Si considerino lanci ripetuti di una moneta truccata in modo che la probabilità di ottenere testa sia $p \in (0,1)$. Dati $a, b \geq 1$, calcolare la probabilità che la moneta renda a volte testa prima di b volte croce.

$\Omega = \{ \{0,1\}^{\mathbb{N}} \}$ e $\mathbb{P}(\omega_i = 1) = p$, voglio la probabilità di ottenere nei primi $a+b-1$ lanci, a volte testa: $\displaystyle\sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{i}{a} \cdot p^a \cdot (1-p)^{i-a}$