(2) Se G è un gruppo, dimostrare che $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
(3) Se G è un gruppo abeliano, dimostrare che $(ab)^n = a^n b^n$ per ogni intero n.
(4) Se G è un gruppo tale che $(ab)^2 = a^2b^2$ per ogni $a, b \in G$, allora G è abeliano.

(3)- $(ab)^n = \underbrace{a\cdot b\cdot a\cdot b\cdots a\cdot b}_{\text{N-volte}} \Rightarrow$ G e' ASS. $\Rightarrow = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{\text{N VOLTE}}\cdot \underbrace{b\cdot b\cdot b\cdots b}\cdot a^n\cdot b^n = b^n\cdot a^n$

(4)- So che $(ab)^2 = a^2\cdot b^2 \Leftrightarrow abab = aabb \Rightarrow \begin{cases} K = ab \\ K' = ba \end{cases} \Rightarrow a\cdot k\cdot b = a\cdot K'\cdot b \Leftrightarrow akb\cdot(aK'b)^{-1} = 0 \Leftrightarrow akb\cdot(K'b)^{-1}\cdot a^{-1} = 0$
$\Leftrightarrow akbb^{-1}K'^{-1}a^{-1} = 0 \Leftrightarrow aKK'^{-1}a^{-1} = 0 \Leftrightarrow K\cdot K'^{-1} = 0 \Leftrightarrow$ PER UNICITA' INVERSO $K = K' \Leftrightarrow ab = ba$.

(3) Per $x \in \mathbb{R}$ definiamo la parte intera $\lfloor x \rfloor$ di x come il massimo intero minore o uguale a x. Poniamo poi $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Consideriamo le seguenti relazioni su $\mathbb{R}$:

$$x \sim_1 y \iff \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor,$$
$$x \sim_2 y \iff \{x\} = \{y\},$$

(a) Si verifiche che $\sim_1, \sim_2$ sono relazioni di equivalenza su $\mathbb{R}$.
(b) Poniamo $E_i = \mathbb{R}/\sim_i$, $i = 1, 2$ e definiamo le seguenti operazioni binarie $+_1, +_2$ su E_1, E_2 rispettivamente:

$$\overline{x} +_1 \overline{y} = \overline{x+y}$$
$$\tilde{x} +_2 \tilde{y} = \widetilde{x+y}$$

ove $\overline{x}$ denota la classe di equivalenza di x rispetto a $\sim_1$ e $\tilde{x}$ quella rispetto a $\sim_2$.
Decidere se $+_1, +_2$ sono ben poste.

RIFLESSIVITA': $x \sim_1 x \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor - \lfloor x \rfloor = 0$ ✓
$x \sim_2 x \Leftrightarrow x - \lfloor x \rfloor = x - \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow x - \lfloor x \rfloor - x + \lfloor x \rfloor = 0$ ✓

SIMMETRIA: $a \sim_1 b \Leftrightarrow \lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor \Leftrightarrow \lfloor b \rfloor = \lfloor a \rfloor \Leftrightarrow b \sim_1 a$
$a \sim_2 b \Leftrightarrow a - \lfloor a \rfloor = b - \lfloor b \rfloor \Leftrightarrow b - \lfloor b \rfloor = a - \lfloor a \rfloor \Leftrightarrow b \sim_2 a$ ✓

TRANSITIVITA': $\begin{cases} a \sim_1 b \\ b \sim_1 c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor \\ \lfloor b \rfloor = \lfloor c \rfloor \end{cases} \Rightarrow \lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor = \lfloor c \rfloor \Rightarrow \lfloor a \rfloor = \lfloor c \rfloor \Leftrightarrow a \sim_1 b$

$\begin{cases} a \sim_2 b \\ b \sim_2 c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - \lfloor a \rfloor = b - \lfloor b \rfloor \\ b - \lfloor b \rfloor = c - \lfloor c \rfloor \end{cases} \Rightarrow a - \lfloor a \rfloor = b - \lfloor b \rfloor = c - \lfloor c \rfloor \Rightarrow a - \lfloor a \rfloor = c - \lfloor c \rfloor \Leftrightarrow a \sim_2 c$. ✓

Verifico che $+_1$ su $E/\sim_1$ sia ben posta, siano $a \sim_1 b \wedge c \sim_1 d \Leftrightarrow \lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor \wedge \lfloor c \rfloor = \lfloor d \rfloor$
$[a] +_1 [c] = [b] +_1 [d] \Leftrightarrow [a+c] = [b+d] \Leftrightarrow a+c \sim_1 b+d \Leftrightarrow \lfloor a+c \rfloor = \lfloor b+d \rfloor$ ma questo non e' sempre vero,
si ha un contro-esempio: $a = 5.5$ $b = 5.5$ $c = 3.8$ $d = 3.1$, $a \sim_1 b \wedge c \sim_1 d$ MA $\lfloor a+c \rfloor = \lfloor b+d \rfloor \Leftrightarrow$
$\lfloor 5.5+3.8 \rfloor = \lfloor 5.5+3.1 \rfloor \Leftrightarrow \lfloor 9.3 \rfloor = \lfloor 8.6 \rfloor \Leftrightarrow 9 = 6$ ASSURDO! Non e' ben posta!

Verifico che $+_2$ su $E/\sim_2$ sia ben posta, siano $a \sim_2 b \wedge c \sim_2 d \Leftrightarrow a - \lfloor a \rfloor = b - \lfloor b \rfloor \wedge c - \lfloor c \rfloor = d - \lfloor d \rfloor$
$[a] +_2 [c] = [b] +_2 [d] \Leftrightarrow [a+c] = [b+d] \Leftrightarrow a+c - \lfloor a+c \rfloor = b+d - \lfloor b+d \rfloor$, data l'ipotesi, cio' e' vero, quindi l'operazione e' ben posta.