TERZO ESONERO 03/06/2022

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' + 6\,y' + 13\,y = 8\,.$$

ⓐ ha infinite soluzioni

ⓑ ha una sola soluzione per $y(0) = 7$

ⓒ per $y'(0) = 3$ e $y(0) = 0$ ha 1 soluzione

ⓓ se $y(0) = 8$, $y'(0) = 8$ e $y''(0) = 8$

$$8 + 48 + (13 \cdot 8) = 8 \rightarrow \text{FALSO}$$

non esistono soluzioni

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' + 8\,y' + 3\,y = 7\,.$$

ⓐ esistono soluzioni costanti dell'equazione.

ⓑ SE $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$, $y''(0) = 7$

ⓒ $y(0) = -8$ $\quad y'(0) = 3$ $\quad y''(0) = 7$

$$T_2 = -8 + 3t + \frac{7}{2}t^2$$

ⓓ SE $y(0) = \frac{7}{3}$ e $y'(0) = 0 \rightarrow y''(0) = 0$

$y''(0) = 0$

$$y'' = -8y' - 3y + 7$$

$$y''' = -8y'' - 3y'$$

$$y'''(0) = -8 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$$

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{t+4} + 5t + 20, \\ y(0) = 12. \end{cases}$$

$a(t) = \frac{1}{t+4} \to A(t) = \int \frac{1}{t+4} = \ln(t+4)$

$b(t) = 5t+20$

(a) $y'(0) = 3 + 20 = 23$

(b) $y_0(t) = Q e^{\ln(t+4)} \to Qt+4$

(c) $\bar{y}(t) = \left(\int [5t+20] \frac{1}{t+4}\right)[t+4]$

$= \left[\int \frac{5t+20}{t+4}\right][t+4] = \left[5\int \frac{t+4}{t+4}\right][t+4] = 5t[t+4] = 5t^2 + 20t$

(d) $A(t) = \ln(t+4)$

$y(t) = [t+4]\left[12 + 5t^2 + 20\right] = [t+4][5t^2 + 32]$

$y(t) = [t+4]\left[12 + \int_0^t \left[[5t+20] e^{-\ln(t+4)}\right]\right] =$

$= [t+4]\left[12 + \int_0^t \frac{5t+20}{t+4}\right] = [t+4]\left[12 + 5\int 1\right]$

$= [t+4][12+5t] = 12t + 48 + 9t + 5t^2 = 5t^2 + 21t + 48$

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 10\,y' + B\,y = 7\,.$$

a) SE $B = 0 \to y'' - 10y' = 7$

le costanti non sono soluzione

b) SE $B = 8 \to y'' - 10y' + 8y = 7$

le costanti SONO SOLUZIONI. AD ESEMPIO $y(t) = \frac{7}{8}$

c) SE $B = 25$

$$y'' - 10y' + 25y = 7$$

$$(C + Dt)e^{5t} + \frac{7}{25}$$

d)

SE $B = 24$

$$y'' - 10y' + 24y = 7$$

$$\frac{10 \pm 2}{2} \begin{cases} 6 \\ 4 \end{cases}$$

$$y_0(t) = Ce^{4t} + De^{6t}$$

$$y(t) = Ce^{4t} + De^{6t} + \frac{7}{24}$$

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (9 + y^2)\, e^{3t}\,. \tag{1}$$

a) Quante soluzioni ha l'equazione (1)? E quante, aggiungendo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 8$?

b) L'equazione (1) ha soluzioni costanti? Giustificare la risposta.

c) Determinare il polinomio di Taylor $T_1(y(t); 0)$ se $y(0) = 3$.

d) Determinare la soluzione di (1) se $y(0) = 0$.

(a) (1) ha infinite SOLUZIONI.

DATE $y(0)=0$ e $y'(0)=8 \to 8=(9+0)e^0=9$, CON TALI CONDIZIONI, (1) NON HA SOLUZIONI.

(b) FALSO, LA DERIVATA PRIMA, PER COME SI PUO' NOTARE, E' SEMPRE POSITIVA, ESSENDO CHE LA DERIVATA DI OGNI COSTANTE E' 0, $y(t)$ NON PUO' ESSERE UNA COSTANTE.

(c) SE $y(0)=3$, $y'(0)=(9+9)=18$

QUINDI $T_1(y(t);0) = 3+18t$

(d) SE $y(0)=0$, LA SOLUZIONE LA TROVERO' COSI':

$$y' = (9+y^2)e^{3t} \Rightarrow \frac{y'}{9+y^2} = e^{3t} \Rightarrow \int_0^{y(t)} \frac{y'}{9+y^2} = \int_0^t e^{3t}$$

$$\Rightarrow \int_0^{y(t)} \frac{1}{9+y^2} = \int_0^t e^{3t} \Rightarrow \frac{1}{3}\operatorname{arctan}\left(\frac{t}{3}\right)\Bigg|_0^{y(t)} = \frac{e^{3t}}{3}\Bigg|_0^t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\operatorname{arctan}\left(\frac{y(t)}{3}\right) = \frac{e^{3t}}{3} - \frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{arctan}\left(\frac{y(t)}{3}\right) = e^{3t}-1$$

$$\Rightarrow y(t) = 3\tan\left(e^{3t}-1\right)$$

Si consideri l'equazione differenziale

(1) $$y'' - 8\,y' + 16\,y = e^{5t}\,.$$

a) Quante soluzioni tali che $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 1$ ha l'equazione (1)?
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
c) Scrivere una soluzione particolare di (1).
d) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 1$ e $y'(0) = 6$.

a) ASSEGNANDO: $1 - 0 + 0 = e^0$ UNA SOLUZIONE

b) $64 - 4(16) = 0 \Rightarrow \frac{8}{2} = 4 \quad y_0(t) = (C + Dt)e^{4t}$

c) CERCO UNA SOL. DELLA FORMA $Qe^{5t} = \bar{y}(t)$

$$\bar{y}'(t) = 5Qe^{5t} \qquad \bar{y}''(t) = 25Qe^{5t}$$

$$25Qe^{5t} - 8[5Qe^{5t}] + 16[Qe^{5t}] = e^{5t}$$

$$25Qe^{5t} - 40Qe^{5t} + 16Qe^{5t} = e^{5t}$$

$$Qe^{5t} + e^{5t} \Rightarrow Q = 1$$

QUINDI $\bar{y}(t) = e^{5t}$

d) $y(t) = (C + Dt)e^{4t} + e^{5t}$, SOL. I.C. $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$

$$y'(t) = De^{4t} + 4(C + Dt)e^{4t} + 5e^{5t}$$

$$1 = y(0) = (C + 0)1 + 1 = C + 1 \Rightarrow C + 1 = 1 \Rightarrow C = 0$$

$$6 = y'(0) = D + 4(C) + 5 = D + 4C + 5 \Rightarrow D + 5 = 6 \Rightarrow D = 1$$

$$y(t) = te^{4t} + e^{5t}$$