ESAME 24 APRILE 2014

Esercizio 1

RIMANENTI - QUELLE CON VALORE DELLA 1° e 2°

i) $\mathbb{P}(\text{tutte diverse}) = 1 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{28} \cdots \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \sum_{i=1}^{9} \frac{1}{40-4i}$

RIMANENTI - QUELLE CON VALORE DELLA 1°   RIMANENTI - QUELLE CON VALORE DELLA 1° e 2°

ii) $B = \{\text{Mani con 4 carte di valore 1}\}: \binom{4}{4}\binom{36}{6} \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \binom{36}{6} \Big/ \binom{40}{10}$

iii) $C = \{\text{tutte le carte con 1 e 2}\}: \binom{32}{2} = 16 \cdot 31 \Rightarrow \mathbb{P}(C) = 16\cdot 31 / \binom{40}{10}$

iv) $D_i = \{\text{quattro } i\} = \binom{36}{6}$, $D_J = \{\text{quattro } J\} = \binom{36}{6}$ $\quad D_i \cup D_J = 2\binom{36}{6} - 16\cdot 31$

$\mathbb{P}(\{\text{4 carte stesso valore}\}) = \left[2\binom{36}{6} - 16\cdot 31\right] \cdot \binom{10}{2}$ ← 2 VALORI da 10 possibili

v) $E_i = \{\text{essattamente 3 } i\}$ = ho 3 i, e poi distribuisco le prossime 7 carte nei 9 possibili valori col vincolo che ogni valore contiene al più 2 carte.

ooo oooo ← 7 CARTE

⊔⊔⊔⊔⊔⊔⊔⊔⊔ ← 9 VALORI

⇒ Senza vincolo, le possibili disposizioni sarebbero 9^7, con il vincolo, e' x, quindi $E_i = x$, $\mathbb{P}(\bigcup_{\forall i} E_i) = 10 \cdot x$

Esercizio 2

i) $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{0,1\} \wedge \sum_{i=1}^{n} \omega_i = k\}$

ii) $\mathbb{P}(A_i) = \frac{k}{n}$, $\mathbb{P}(A_i \cap A_J) = \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1}$

iii) $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{\ell-1}) = \prod_{i=0}^{\ell-1} \frac{k-i}{n-i} \Rightarrow \mathbb{P}(A_\ell \mid A_1 \dots \cap A_\ell) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_\ell)}{\mathbb{P}(A_\ell)} = \frac{n}{k} \cdot \prod_{i=0}^{\ell} \frac{k-i}{n-i} = \prod_{i=0}^{\ell-1} \frac{k-i}{n-i}$

iv) $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} \neq \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$, $\quad \lim_{k,n \to +\infty} \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} = p \cdot \frac{k-1}{n-1} = p \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{(1-\frac{1}{k})}{(1-\frac{1}{n})} = p^2 \cdot \underbrace{\frac{1-0}{1-0} = p^2}$

$\lim_{\substack{n \to \infty \\ k}} \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) = \frac{k}{n} \cdot \frac{k}{n} = p^2 = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$