Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 8
18 Maggio 2023 — Compito n. 00021

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = (8t + 3)\, y(t) + A\, e^{4t^2+3t}\,.$$

1A) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(2) = 3$.
1B) Se $A = 0$, la funzione $y(t) = 4\, e^{4t^2+3t}$ è soluzione dell'equazione.
1C) La funzione $y(t) = (3 + A\,t)\, e^{4t^2+3t}$ non è soluzione dell'equazione.
1D) Se $y(0) = 0$ e $A = 5$, si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0\,.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 8\,\cos(t)\, y(t) + 7\,\sin(t)\,\cos(t)\,.$$

2A) Se $y(0) = 0$, si ha $y'(0) \neq 0$.
2B) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = 7$.
2C) Se $y(0) = 5$, la soluzione $y(t)$ è decrescente in un intorno di $t = 0$.
2D) Se $y(\frac{\pi}{2}) = 6$, si ha $T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = 6$.

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{e^{y(t)} - 1}{e^{y(t)}}\,\cos(t)\,.$$

3A) L'equazione è a variabili separabili.
3B) Se $y(0) = 0$, la soluzione $y(t)$ non è costante.
3C) Se $y(0) = 4$, non esiste $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$.
3D) Se $y(0) = \ln(7)$, si ha

$$y(s) = \ln(6) + \sin(s)\,.$$

4) Si consideri l'equazione differenziale $y'(t) = t\,(y(t)^3 - 25y(t))$.

4A) Se $y(0) = 5$, la soluzione non è costante.
4B) Se $y(0) = 1$, si ha $y'(0) \neq 0$.
4C) Se $y(0) = -1$, si ha $T_2(y(t); 0) = -1 + 12\,t^2$.
4D) Se $y(0) = 1$, la soluzione ha un massimo relativo per $t = 0$.

Docente
☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

Cognome	Nome	Matricola	Compito 00021

5) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

a) Si risolva (1) se $a(t) = -4$, $b(t) = 3$ e $y_0 = 0$.
b) Si risolva (1) se $a(t) = \sin(t)$, $b(t) = 7\,\sin(t)$ e $y(0) = \pi$.
c) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 1 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = e^{10\,t}$, $b(t) = 5\,\cos(t)$ e $y_0 = 7$.
d) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = 12\,t$, $b(t) = 5\,t^2$ e $y_0 = 3$.

---

a) $y'(t) = -4y(t) + 3$ e $y(0) = 0$

$$y(t) = e^{-4t}\left[\int_0^t 3e^{4t}\right] = e^{-4t}\left[3\int_0^t e^{4t}\right] = e^{-4t}\left[3\left[\frac{e^{4t}}{4} - \frac{1}{4}\right]\right] = e^{-4t}\left[\frac{3}{4}e^{4t} - \frac{3}{4}\right] =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{4t} = \frac{3}{4}\left[1 - e^{4t}\right]$$

b) $y'(t) = \sin(t)y(t) + 7\sin(t)$ e $y(0) = \pi$

$$A(t) = \int_0^t \sin(t) = \left[-\cos(t) + \cos(0)\right]$$

$$y(t) = e^{-\cos(t)+1}\left[\pi + \int_0^t 7\sin(t)e^{\cos(t)-1}\right] =$$

INTEGRO

$$7\int_0^t \sin(t)e^{\cos(t)-1} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} y = \cos(t) - 1 \\ dx = -\sin(t)\,dt \\ dt = -\frac{dx}{\sin(t)} \end{array} \right. = -7\int \sin(t)\,e^{y}\frac{dx}{\sin(t)} = -7\int e^{y} = -7e^{y}\Big|$$

$$-7e^{\cos(t)-1}\Big|_0^t = -7e^{\cos(t)-1} + 7$$

$$= e^{-\cos(t)+1}\left[\pi - 7e^{\cos(t)-1} + 7\right] = \pi e^{-\cos(t)+1} - 7 + e^{-\cos(t)+1} = e^{-\cos(t)+1}\left[\pi + 7\right] - 7$$

c) $y'(t) = e^{10t}y(t) + 5\cos(t)$ $\qquad y(0) = 7$ $\qquad y'(0) = 12$ $\qquad T = 7 + 12t$

d) $y'(t) = 12t\,y(t) + 5t^2$ $\qquad y(0) = 3$ $\qquad y'(0) = 0$ $\qquad y''(0) = 36$

$$y''(t) = 12y(t) + 12t\,y'(t) + 10t$$

$12 \cdot 3 +$

$$T = 3 + 18t^2$$

	Cognome	Nome	Matricola	Compito 00021

6) Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.
a) $y'(t) = 12\,y(t) + 11$, se $y(0) = 0$.
b) $y'(t) = 10\,t\,(4 + y^2(t))$, se $y(0) = 0$.
c) $y'(t) = e^{-y(t)}\,e^{2\,t}$, se $y(0) = 0$.
d) $y'(t) = \frac{3\,(1+y^2(t))}{y(t)}$, se $y(0) = 1$.

---

a) $y'(t) = 12y(t) + 11 \quad y(0)=0$

$$y(t) = e^{12t}\left[\int_0^t 11 e^{-12t}\right] = e^{12t}\left[11\int_0^t e^{-12t}\right] = e^{12t}\left[11\left[-\frac{e^{-12t}}{12} + \frac{1}{12}\right]\right]$$

$$= e^{12t}\left[-\frac{11}{12}e^{-12t} + \frac{11}{12}\right] = -\frac{11}{12} + \frac{11}{12}e^{12t} = \frac{11}{12}\left[e^{12t} - 1\right]$$

b)

$f(t) = 10t \qquad F(t) = 5t^2$

$g(s) = 4+s^2 \qquad G(s) = \int \frac{1}{4+s^2} \longrightarrow \frac{2}{4}\arctan\left(\frac{2s}{4}\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{s}{2}\right)$

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y(t)}{2}\right) = 5t^2 \rightarrow \arctan\left(\frac{y(t)}{2}\right) = 10t^2 \rightarrow y(t) = 2\tan(10t^2)$$

c) $y'(t) = e^{-y(t)}e^{2t} \qquad y(0)=0$

$f(t) = e^{2t} \qquad F(t) = \frac{e^{2t}}{2} \qquad g(s) = e^{-s} \qquad G(s) = \int \frac{1}{e^{-s}} = e^s$

$$e^{y(t)} = \frac{e^{2t}+1}{2} \rightarrow y(t) = \ln\left(\frac{e^{2t}+1}{2}\right)$$

d) $y'(t) = 3 \cdot \frac{1+y^2(t)}{y(t)} \qquad y(0)=1 \qquad \frac{y'(t)}{\frac{1+y^2(t)}{y(t)}} = 3$

$$G(s) = \int \frac{s}{1+s^2} = \frac{1}{2}\int\frac{2s}{1+s^2} = \frac{1}{2}\ln(1+s^2) = G(s)$$

$F(t) = 3t$

$$\ln(1+y^2(t)) = \ln(2) + 6t$$

$$y(t) = \sqrt{2e^{6t} - 1}$$

Soluzioni del compito 00021

1) Si consideri l'equazione differenziale
$$y'(t) = (8t + 3)\, y(t) + A\, \mathrm{e}^{4t^2+3t}\,.$$

Ricordiamo la formula risolutiva per il problema di Cauchy

$$(1)\qquad \begin{cases} y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t)\,, \\ y(t_0) = y_0\,. \end{cases}$$

Posto
$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\,,$$
si ha
$$(2)\qquad y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\, \mathrm{e}^{-A(s)}\, ds \right].$$

1A) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(2) = 3$.

Falso: Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, è sufficiente una sola condizione iniziale affinché esista un'unica soluzione.

1B) Se $A = 0$, la funzione $y(t) = 4\, \mathrm{e}^{4t^2+3t}$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $y(t) = 4\, \mathrm{e}^{4t^2+3t}$, si ha
$$y'(t) = 4\,(8t + 3)\, \mathrm{e}^{4t^2+3t} = (8t + 3)\, y(t) = (8t + 3)\, y(t) + A\, \mathrm{e}^{4t^2+3t}\,,$$
e quindi $y(t)$ è soluzione dell'equazione.

1C) La funzione $y(t) = (3 + A\, t)\, \mathrm{e}^{4t^2+3t}$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $y(t) = (3 + A\, t)\, \mathrm{e}^{4t^2+3t}$, derivando si ha
$$y'(t) = A\, \mathrm{e}^{4t^2+3t} + (3 + A\, t)\, (8t + 3)\, \mathrm{e}^{4t^2+3t} = (8t + 3)\, y(t) + A\, \mathrm{e}^{4t^2+3t}\,,$$
e quindi $y(t)$ è soluzione dell'equazione.

1D) Se $y(0) = 0$ e $A = 5$, si ha
$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0\,.$$

Falso: Il problema rientra nel caso (1) con
$$a(t) = 8t + 3\,, \quad b(t) = 5\, \mathrm{e}^{4t^2+3t}\,, \qquad t_0 = 0\,, \quad y_0 = 0\,.$$
Dato che
$$A(t) = \int_0^t a(s)\, ds = \int_0^t (8s + 3)\, ds = (4s^2 + 3s)\Big|_0^t = 4t^2 + 3t\,,$$
e dato che
$$\int_0^t b(s)\, \mathrm{e}^{-A(s)}\, ds = \int_0^t 5\, \mathrm{e}^{4s^2+3s}\, \mathrm{e}^{-(4s^2+3s)}\, ds = \int_0^t 5\, ds = 5\, t\,,$$
dalla (2) si ha
$$y(t) = 5\, t\, \mathrm{e}^{4t^2+3t}\,,$$
da cui segue che
$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty \neq 0\,.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 8\,\cos(t)\,y(t) + 7\,\sin(t)\,\cos(t)\,.$$

Derivando l'equazione si ha

(1) $$y''(t) = -8\,\sin(t)\,y(t) + 8\,\cos(t)\,y'(t) + 7\,\cos^2(t) - 7\,\sin^2(t)\,.$$

2A) Se $y(0) = 0$, si ha $y'(0) \neq 0$.

Falso: Dall'equazione, sostituendo $t = 0$, si ha

$$y'(0) = 8\,\cos(0)\,y(0) + 7\,\sin(0)\,\cos(0) = 8 \cdot 1 \cdot 0 + 7 \cdot 0 \cdot 1 = 0\,.$$

2B) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = 7$.

Vero: Dall'equazione con $t = 0$ si ha (si veda l'esercizio **2A**)

$$y'(0) = 0\,.$$

Dalla (1) con $t = 0$ si ha

$$y''(0) = 7\,,$$

dato che il primo, secondo e quarto termine si annullano.

2C) Se $y(0) = 5$, la soluzione $y(t)$ è decrescente in un intorno di $t = 0$.

Falso: Dall'equazione si ha

$$y'(0) = 8 \cdot \cos(0) \cdot y(0) = 8 \cdot 5 = 40 > 0\,,$$

per ipotesi. Essendo $y'(0) > 0$, si ha $y'(t) > 0$ in un intorno dell'origine (per il teorema di permanenza del segno per funzioni continue) e quindi $y(t)$ è crescente in un intorno dell'origine.

2D) Se $y(\frac{\pi}{2}) = 6$, si ha $T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = 6$.

Vero: Dall'equazione si ha

$$y'(\tfrac{\pi}{2}) = 8\,\cos(\tfrac{\pi}{2})\,y(\tfrac{\pi}{2}) + 7\,\sin(\tfrac{\pi}{2})\,\cos(\tfrac{\pi}{2}) = 8 \cdot 0 \cdot 6 + 7 \cdot 1 \cdot 0 = 0\,.$$

Ricordando che

$$T_1(y(t); \tfrac{\pi}{2}) = y(\tfrac{\pi}{2}) + y'(\tfrac{\pi}{2})\,(t - \tfrac{\pi}{2})\,,$$

si ha

$$T_1(y(t); \tfrac{\pi}{2}) = 6\,.$$

---

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{e^{y(t)} - 1}{e^{y(t)}} \cos(t)\,.$$

Osserviamo che l'equazione è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(y(t))\, g(t)\,,$$

con

$$f(s) = \frac{e^s - 1}{e^s}\,, \qquad g(t) = \cos(t)\,.$$

Dato che $f(0) = 0$, se all'equazione abbiniamo la condizione iniziale $y(0) = 0$ abbiamo la soluzione costante $y(t) \equiv 0$. Se, invece $y(0) = y_0 > 0$ allora $y(t) \neq 0$ per ogni t e possiamo separare le variabili, riscrivendo l'equazione come

$$\frac{e^{y(t)}\, y'(t)}{e^{y(t)} - 1} = \cos(t)\,.$$

Integrando tra zero e s si ha

$$\int_0^s \frac{e^{y(t)}\, y'(t)}{e^{y(t)} - 1}\, dt = \int_0^s \cos(t)\, dt = \sin(s)\,.$$

Per il primo integrale, con la sostituzione $z = y(t)$, da cui $dz = y'(t)\, dt$, si ha

$$\int_0^s \frac{e^{y(t)}\, y'(t)}{e^{y(t)} - 1}\, dt = \int_{y_0}^{y(s)} \frac{e^z}{e^z - 1}\, dz\,.$$

Con la sostituzione $w = e^z - 1$, da cui $dw = e^z\, dz$, si ha

$$\int_{y_0}^{y(s)} \frac{e^z}{e^z - 1}\, dz = \int_{e^{y_0} - 1}^{e^{y(s)} - 1} \frac{dw}{w} = \ln(|w|)\Big|_{e^{y_0} - 1}^{e^{y(s)} - 1} = \ln\left(\left|\frac{e^{y(s)} - 1}{e^{y_0} - 1}\right|\right).$$

Essendo $y_0 > 0$ possiamo levare i moduli (perché?) e scrivere che

$$\ln\left(\frac{e^{y(s)} - 1}{e^{y_0} - 1}\right) = \sin(s)\,,$$

da cui segue, dopo alcuni calcoli, che

$$y(s) = \ln[(e^{y_0} - 1)\, e^{\sin(s)} + 1]\,. \tag{1}$$

Osserviamo di passaggio che la (1) è valida anche nel caso in cui $y_0 = 0$.

3A) L'equazione è a variabili separabili.

Vero: Per quanto detto sopra, l'equazione è a variabili separabili.

3B) Se $y(0) = 0$, la soluzione $y(t)$ non è costante.

Falso: Dato che $f(y_0) = f(0) = 0$, la funzione costante $y(t) \equiv y_0 = 0$ è soluzione dell'equazione.

3C) Se $y(0) = 4$, non esiste $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$.

Vero: Se esistesse $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$, il problema di Cauchy con dato iniziale $y(t_0) = 0$ avrebbe due soluzioni: la funzione $y(t)$ che stiamo considerando (e che non è la funzione nulla dato che in $t = 0$ vale 4), e la funzione $w(t) \equiv 0$. Dato che il problema di Cauchy ha un'unica soluzione, si ha $y(t) \neq 0$ per ogni $t > 0$.

3D) Se $y(0) = \ln(7)$, si ha

$$y(s) = \ln(6) + \sin(s)\,.$$

Falso: Dalla (1), con $y_0 = \ln(7)$, da cui segue che $\mathrm{e}^{y_0} - 1 = 7 - 1 = 6$, si ha

$$y(s) = \ln(6\,\mathrm{e}^{\sin(s)} + 1) \neq \ln(6) + \sin(s)\,.$$

4) Si consideri l'equazione differenziale $y'(t) = t\,(y(t)^3 - 25y(t))$.

Osserviamo che l'equazione è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(y(t))\,g(t)\,,$$

con

$$f(s) = s^3 - 25s\,, \qquad g(t) = t\,. \tag{1}$$

4A) Se $y(0) = 5$, la soluzione non è costante.

Falso: Se $f(s)$ è come in (1), dato che si ha $f(5) = 0$, la funzione costante $y(t) \equiv 5$ è soluzione dell'equazione.

4B) Se $y(0) = 1$, si ha $y'(0) \neq 0$.

Falso: Dall'equazione, scritta per $t = 0$, si ha

$$y'(0) = 0 \cdot (y(0)^3 - 25y(0)) = 0 \cdot (1 - 25) = 0\,.$$

4C) Se $y(0) = -1$, si ha $T_2(y(t); 0) = -1 + 12\,t^2$.

Vero: Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = y(t)^3 - 25y(t) + t\,(3y(t)^2 - 25)\,y'(t)\,,$$

da cui segue che $y''(0) = 24$. Dato che dall'equazione segue che $y'(0) = 0$ (si veda l'esercizio **4B**), si ha

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)\,t + \frac{y''(0)}{2}\,t^2 = -1 + 12\,t^2\,.$$

4D) Se $y(0) = 1$, la soluzione ha un massimo relativo per $t = 0$.

Vero: Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = y(t)^3 - 25y(t) + t\,(3y(t)^2 - 25)\,y'(t)\,,$$

da cui segue che $y''(0) = -24 < 0$. Dato che dall'equazione segue che $y'(0) = 0$ (si veda l'esercizio **4B**), si ha che $t = 0$ è un punto di massimo relativo per $y(t)$.

---

5) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

a) Si risolva (1) se $a(t) = -4$, $b(t) = 3$ e $y_0 = 0$.
b) Si risolva (1) se $a(t) = \sin(t)$, $b(t) = 7\,\sin(t)$ e $y(0) = \pi$.
c) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 1 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = \mathrm{e}^{10\,t}$, $b(t) = 5\,\cos(t)$ e $y_0 = 7$.
d) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = 12\,t$, $b(t) = 5\,t^2$ e $y_0 = 3$.

Soluzione:
Ricordiamo che la soluzione del problema di Cauchy (1) è data da

$$(2) \qquad y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left[y_0 + \int_0^t b(s)\,\mathrm{e}^{-A(s)}\,ds \right], \qquad \text{dove} \qquad A(t) = \int_0^t a(s)\,ds\,.$$

a) Dato che $a(t) = -4$, si ha

$$A(t) = -\int_0^t 4\,ds = -4\,t\,.$$

Pertanto, per la (2) si ha

$$y(t) = \mathrm{e}^{-4\,t} \left[0 + \int_0^t 3\,\mathrm{e}^{4\,s}\,ds \right] = \mathrm{e}^{-4\,t} \left[\frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{4\,s}\Big|_0^t \right] = \frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-4\,t}\,[\mathrm{e}^{4\,t} - 1] = \frac{3}{4}\,[1 - \mathrm{e}^{-4\,t}]\,.$$

b) Dato che $a(t) = \sin(t)$, si ha

$$A(t) = \int_0^t \sin(s)\,ds = -\cos(s)\Big|_0^t = 1 - \cos(t)\,,$$

e quindi, per la (2),

$$y(t) = \mathrm{e}^{1-\cos(t)} \left[\pi + \int_0^t 7\,\sin(s)\,\mathrm{e}^{\cos(s)-1}\,ds \right].$$

Con il cambio di variabile $z = \cos(s) - 1$, da cui $dz = -\sin(s)\,ds$, si ha

$$\int_0^t 7\,\sin(s)\,\mathrm{e}^{\cos(s)-1}\,ds = -7 \int_0^{\cos(t)-1} \mathrm{e}^z\,dz = -7\,\mathrm{e}^z\Big|_0^{\cos(t)-1} = 7(1 - \mathrm{e}^{\cos(t)-1})\,.$$

Pertanto

$$y(t) = \mathrm{e}^{1-\cos(t)}\,[\pi + 7\,(1 - \mathrm{e}^{\cos(t)-1})] = (\pi + 7)\,\mathrm{e}^{1-\cos(t)} - 7\,.$$

c) Dall'equazione si ha

$$y'(0) = \mathrm{e}^{10\cdot 0}\,y(0) + 5\,\cos(0) = 1 \cdot 7 + 5 = 12\,,$$

da cui segue che

$$T_1(y(t); 0) = y(0) + y'(0)\,t = 7 + 12\,t\,.$$

d) Dall'equazione si ha

$$y'(0) = 12 \cdot 0 \cdot y(0) + 5 \cdot 0^2 = 0\,.$$

Derivando l'equazione si ha poi

$$y''(t) = 12\,y(t) + 12\,t\,y'(t) + 10\,t\,,$$

da cui segue che

$$y''(0) = 12\,y(0) + 12 \cdot 0 \cdot y'(0) + 10 \cdot 0 = 36\,.$$

Si ha quindi

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)\,t + \frac{y''(0)}{2}\,t^2 = 3 + 18\,t^2\,.$$

6) Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.
a) $y'(t) = 12\,y(t) + 11$, se $y(0) = 0$.
b) $y'(t) = 10\,t\,(4 + y^2(t))$, se $y(0) = 0$.
c) $y'(t) = e^{-y(t)}\,e^{2\,t}$, se $y(0) = 0$.
d) $y'(t) = \frac{3\,(1+y^2(t))}{y(t)}$, se $y(0) = 1$.

Soluzione:
a) Dividendo per $12\,y(t) + 11$, l'equazione è equivalente a

$$\frac{y'(t)}{12\,y(t) + 11} = 1\,.$$

Integrando tra 0 e s si ha

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{12\,y(t) + 11}\,dt = \int_0^s 1\,dt = s\,.$$

Con la sostituzione $z = y(t)$ si ha, ricordando che $y(0) = 0$, ed osservando che $12\,y(s) + 11 > 0$ per s vicino a zero,

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{12\,y(t) + 11}\,dt = \int_0^{y(s)} \frac{dz}{12\,z + 11} = \frac{1}{12}\,\ln(|12\,z + 11|)\Big|_0^{y(s)} = \frac{1}{12}\,[\ln(12\,y(s) + 11) - \ln(11)]\,.$$

Pertanto,

$$\frac{1}{12}\,[\ln(12\,y(s) + 11) - \ln(11)] = s\,,$$

da cui segue (dopo facili calcoli...) che

$$\frac{12\,y(s) + 11}{11} = e^{12\,s}\,,$$

e quindi che

$$y(s) = \frac{11\,e^{12\,s} - 11}{12}\,.$$

b) Separando le variabili, si ha che deve essere

$$\frac{y'(t)}{4 + y^2(t)} = 10\,t\,.$$

Integrando (con la consueta sostituzione $z = y(t)$) si ha

$$\int_0^{y(s)} \frac{dz}{4 + z^2} = \int_0^s 10\,t\,dt = 5\,s^2\,.$$

Dato che

$$\int \frac{dz}{4 + z^2} = \frac{1}{2}\,\arctan\left(\frac{z}{2}\right),$$

si ha

$$\frac{1}{2}\,\arctan\left(\frac{y(s)}{2}\right) = 5\,s^2\,,$$

da cui segue che

$$y(s) = 2\,\tan(10\,s^2)\,.$$

c) Separando le variabili si arriva a

$$\int_0^{y(s)} e^z\,dz = \int_0^s e^{2\,t}\,dt = \frac{e^{2\,s} - 1}{2}\,.$$

Il primo integrale è immediato, e porta a

$$e^{y(s)} - 1 = \frac{e^{2\,s} - 1}{2}\,,$$

da cui
$$y(s) = \ln\left(\frac{e^{2\,s} + 1}{2}\right).$$
d) Separando le variabili si arriva a
$$\int_1^{y(s)} \frac{z}{1+z^2}\,dz = \int_0^s 3\,dt = 3\,s\,.$$
Dato che
$$\int \frac{z}{1+z^2}\,dz = \frac{1}{2}\,\frac{2z}{1+z^2}\,dz = \frac{1}{2}\,\ln(1+z^2)\,,$$
si ha
$$\frac{1}{2}\,\ln(1+y^2(s)) - \frac{1}{2}\,\ln(2) = 3\,s\,,$$
da cui
$$y^2(s) = 2\,e^{6\,s} - 1\,,$$
e quindi
$$y(s) = \sqrt{2\,e^{6\,s} - 1}\,.$$
Perché, tra le due radici, si è scelta quella positiva?