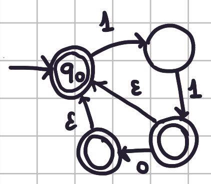
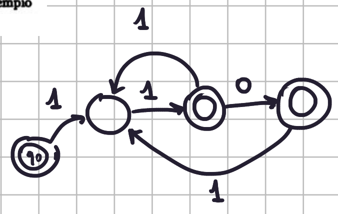
1 Automi 10 Points

- Sia $L = \{11, 110\}^*$. Costruire un NFA N con 4 stati che riconosca L. Convertire l'NFA N in un DFA M equivalente.
- Enunciare e dimostrare il *pumping lemma* per linguaggi regolari. Fornire un esempio di utilizzo.

NFA



DFA



Pumping Lemma

Se L e' REG allora $w \in L \Rightarrow$ esiste p t.c. $|w| \geq p$ e $w = xyz$ per cui

- $|y| > 0$
- $|xy| \leq p$
- $xy^iz \in L$

Dim: Sia M t.c. $L(M) = L$ e $w \in L$ con $\overset{n}{\overset{\shortparallel}{|w|}} \geq p$ e p: numero stati:

$w = w_1 \cdots w_n$ $\quad r_i \in Q$ $\quad \delta(r_i, w_i) = r_{i+1}$

$R = r_1 \cdots r_{n+1}$ $\quad r_{n+1} \in F$

in R si ripete due volte uno stato fra i primi $p+1$

$r_1 \cdots \underbrace{r_j \cdots r_l}_{\text{uguale}} \cdots r_{n+1}$ $\quad l \leq p+1$

pongo $w = xyz$ con $\begin{cases} x = w_1 \cdots w_{j-1} \\ y = w_j \cdots w_{l-1} \\ z = w_l \cdots w_n \end{cases} \Rightarrow |xy| = l-1 \leq p$ dato che $l \leq p+1$

$\Rightarrow l-1 > j \Rightarrow |w_j \cdots w_{l-1}| = |y| > 0$

y porta da r_i a r_j quindi anche y^i.

Esempio

$L = \{ 0^n 1^n 2^n \mid n \geq 1 \}$

$w = 0^p 1^p 2^p$

$|xy| \leq p \Rightarrow xy$ non ha 2 caratteri diversi (e quindi nemmeno y) $\Rightarrow xy^iz$ non sara' del tipo $0^n 1^n 2^n$.

2 Calcolabilità 10 Points

- Si consideri il linguaggio $REJ_{TM} = \{\langle M, w\rangle : M \text{ è una TM che rifiuta } w\}$. Mostrare che REJ_{TM} è Turing-riconoscibile ma non è decidibile.
- Definire il concetto di riducibilità tramite funzione. Mostrare che:

  (i) se $A \leq_m B$ e B è decidibile, allora A è decidibile;

  (ii) se $A \leq_m B$ e A è indecidibile, allora B è indecidibile.

Definisco R che:
- su input $\langle M, w\rangle$
- definisce M' che
  esegue M e fa l'opposto
- ritorna $\langle M', w\rangle$

[⇒] Se $\langle M,w\rangle \in A_{TM}$, $M(w)$ accetta ⇒ $M'(w)$ rifiuta ⇒ $\langle M,w\rangle \in ReJ$

[⇐] Se $\langle M,w\rangle \notin A_{TM}$, $M'(w)$ accetta o va in loop ⇒ $\langle M',w\rangle \notin ReJ$

⇒ $A_{TM} \leq_m REJ$

↳ A_{TM} e' riconoscibile ed indecidibile, quindi anche REJ.

$A \leq_m B$ se $\exists\, f$ t.c. $w \in A \iff f(w) \in B$ e f e' calcolabile.

- Se $A \leq_m B$ e B e' decidibile (deciso da M_B) considero $M_A(w)$ che:

  * - Calcola $f(w)$ ed esegue $M_B(f(w))$ ⇒ M_A decide A.

- Se $A \leq_m B$ e A e' indecidibile, B lo e' perche' se non lo fosse si potrebbe applicare il ragionamento * per decidere A.

3 Complessità 10 Points

- Si considerino i linguaggi $3COL = \{G : G$ è un grafo 3-colorabile$\}$ e $4COL = \{G :$ G è un grafo 4-colorabile$\}$. Mostrare che $3COL \leq_m^P 4COL$.
- Definire le classi di complessità *PSPACE* ed *NPSPACE*. Dimostrare che *PSPACE* = *NPSPACE*.

Se G e' 3-colorabile, considero H, uguale a G ma con un nodo in piu' connesso a tutti gli altri.

se G è 3-colorabile, allora H colorato uguale a G (per i vertici originari) è 4-colorabile dando al nuovo vertice il quarto colore. Inoltre, se H è 4-colorabile, il vertice nuovo essendo collegato a tutti è necessariamente l'unico con il suo colore, quindi, rimuovendolo, si ha sempre un grafo 3-colorabile.

$PSPACE = \bigcup_k DSPACE(n^k)$

$NPSPACE = \bigcup_k NSPACE(n^k)$

e' banale che $PSPACE \subseteq NPSPACE$

SAVITCH: $NPSPACE(S(n)) \subseteq PSPACE(S^2(n)) \Rightarrow NPSPACE \subseteq PSPACE \Rightarrow$ SONO UGUALI