Problema : L'osservazione appena fatta, enuncia che ci basta controllare la chiusura di un insieme di attributi rispetto a G per verificare l'equivalenza, il problema, è che G deriva da F^+, quindi è troppo grande per essere calcolato esplicitamente, e non può essere applicato l'algoritmo visto nel capitolo 4.5.1. Vedremo quindi, un nuovo algoritmo, capace di calcolare la chiusura di un insieme di attributi X rispetto a $G = \bigcup_{i=1}^{n} \pi_{R_i}(F)$ partendo da F.

4.6.2 L'Algoritmo 2 (`Compute` X_G^+ `from` F)

`Input` : Lo schema R, l'insieme delle dipendenze funzionali F, una decomposizione $\rho = \{R_1, R_2 \ldots, R_k\}$ ed $X \subseteq R$.

`Output` : Denotato con Z_f, sarà la chiusura di X rispetto a $G = \bigcup_{i=1}^{n} \pi_{R_i}(F)$.

```
begin {
    Z = X
    S' = ∅
    for  i = 1  to  k{
        S' = S' ∪ (Z ∩ R_i)^+_F ∩ R_i
    }
    while  S' ⊈ Z {
        Z = Z ∪ S'
        for  i = 1  to  k{
            S' = S' ∪ (Z ∩ R_i)^+_F ∩ R_i
        }
    }
    return  Z
}
```

Teorema : L'algoritmo calcola correttamente la chiusura di X rispetto a G, ossia $Z_f = X_G^+$.

Dimostrazione : Si procede per doppia inclusione, partendo col dimostrare $\boxed{Z_f \subseteq X_G^+}$: Si dimostra per induzione, *Caso Base* : $Z_0 = X \subseteq X_G^+$. *Passo induttivo* : L'ipotesi è che, $Z_i \subseteq X_G^+$, voglio dimostrare che se ciò è vero, è vero anche che $Z_{i+1} \subseteq X_G^+$. Considero un qualsiasi $A \in Z_{i+1}$, per come è definito Z_{i+1}, ciò significa che $A \in Z_i$ oppure $A \in S_i'$. Il primo caso dimostra di per se la tesi, si consideri quindi il caso in cui $A \in S_i'$. Ricordo che $S_i' = \bigcup_{j=1}^{k}(Z_i \cap R_j)_F^+ \cap R_j$, allora, $\exists j \in \{1, 2 \ldots, k\} | A \in (Z_i \cap R_j)_F^+ \cap R_j$, ciò implica che $A \in R_j \wedge A \in (Z_i \cap R_j)_F^+$, ma questo'ultimo implicherebbe che $Z_i \cap R_j \to A \in F^A$. So che $Z_i \cap R_j \subseteq R_j$, e che $A \in R_j$, allora $Z_i \cap R_j \to A \in \pi_{R_j}(F) \subseteq G$, ma ricordiamoci che per ipotesi $Z_i \subseteq X_G^+$, allora, anche il suo sotto insieme $Z_i \cap R_j$ è contenuto in X_G^+, ciò implica che $X \to (Z_i \cap R_j) \in G^A$, per transitività, ho che $X \to A \in G^A \implies A \in X_G^+$ come volevasi dimostrare. Adesso rimane da dimostrare che $\boxed{X_G^+ \subseteq Z_f}$: Tale dimostrazione risulta più ostica e richiede più ragionamento, si invita il lettore ad essere particolarmente attento. Prima di tutto, occorre un osservazione :

Osservazione Fondamentale : Siano A e B due insiemi di attributi ed F un insieme di dipendenze funzionali su di essi. se $A \subseteq B$, allora sicuramente $A_F^+ \subseteq B_F^+$.

Tornando a noi, vogliamo dimostrare che $X_G^+ \subseteq Z_f$, ma per come è stato costruito Z_f, sappiamo sicuramente che $X \subseteq Z_f$, allora, per l'osservazione, sicuramente $X_G^+ \subseteq (Z_f)_G^+$. Se riuscissimo a dimostrare che $Z_f = (Z_f)_G^+$, vuol dire che avremmo dimostrato che $X_G^+ \subseteq Z_f$. Dimostriamo quindi che $Z_f = (Z_f)_G^+$, possiamo utilizzare l'algoritmo 4.5.1, che calcola la chiusura di un insieme di attributi rispetto un insieme di dipendenze funzionali, quindi passiamo come input Z_f e ne calcoliamo la chiusura rispetto a G, se l'output dell'algoritmo sarà uguale all'input, allora sarà dimostrato.

Durante il corso di questa dimostrazione, si osservi l'algoritmo 4.5.1.

Notiamo che, nella seconda riga dell'algoritmo, si inizia costruendo un insieme S definito in tal modo :

$$S = \{A | \exists Y \to V \in G, Y \subseteq Z_f \land A \in V\} \tag{21}$$

Prendiamo quindi A, che è un qualsiasi elemento dell'insieme S costruito nella seconda riga di codice. Notiamo che $A \in V$, ed $Y \to V \in G$, per la regola di decomposizione, possiamo affermare che $Y \to A \in G$, adesso, ricordiamo come è stato costruito G :

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} \pi_{R_i}(F) \equiv F$$

G è l'unione delle dipendenze funzionali nelle proiezioni, quindi, $Y \to A$ appartiene ad una delle proiezioni :

$$\exists j \in \{1, 2 \ldots, n\} | Y \to A \in \pi_{R_j}(F)$$

ma una proiezione, è definita in tal modo :

$$\pi_{R_i}(F) = \{X \to Y \in F^+ | \{X, Y\} \subseteq R_i\}$$

Quindi, se $Y \to A \in \pi_{R_j}(F)$, allora $Y \in R_j$ e $A \in R_j$.

Passo cruciale 1! $A \in R_j$

Abbiamo quindi visto che $Y \to A \in \pi_{R_j}(F)$, ma le dipendenze delle proiezioni, derivano tutte da F^+, quindi possiamo sicuramente dire che $Y \to A \in F^+ = F^A$, ma per ipotesi (Ricordando come è stato costruito S), sappiamo che $Y \subseteq Z_f$, quindi :

$$\begin{cases} Y \subseteq Z_f \\ Y \to A \in F^A \end{cases} \implies Z_f \to A \in F^A \implies A \in (Z_f)_F^+ \tag{22}$$

Passo cruciale 2! $A \in (Z_f)_F^+$

Passaggio mancante! Dimostrare che $A \in (Z_f \cap R_j)_F^+$

A questo punto vedo che :

$$\begin{cases} A \in (Z_f \cap R_j)_F^+ \\ A \in R_j \end{cases} \implies A \in (Z_f \cap R_j)_F^+ \cap R_j \tag{23}$$

Adesso, noi sappiamo che $A \in (Z_f \cap R_j)_F^+ \cap R_j$, si osservi ora, il secondo algoritmo 4.6.2, quello che è stato usato per costruire il nostro Z_f. Si noti che, ad ogni passo iterativo di