SUCCESSIONI

La successione è una funzione con dominio l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$n \in \mathbb{N} \to f(n)$ Si può scrivere anche : a_n

Esempio:

$a_n = \frac{1}{n} \quad n \geq 1 \qquad a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3}$

Una successione può avere anche una forma ricorsiva, un esempio classico è la *successione di Erone* :

$$a_0 = 1 \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

Questa successione è il modo più veloce per approssimare $\sqrt{2}$, si dice quindi che *tende* a $\sqrt{2}$.

Una successione è *limitata superiormente* se esiste

$$M \in \mathbb{R}\ tale\ che\ a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{R}$$

Una successione è *limitata inferiormente* se esiste

$$M \in \mathbb{R}\ tale\ che\ a_n \geq M \quad \forall n \in \mathbb{R}$$

Abbiamo detto prima che la *successione di Erone* *tende* a $\sqrt{2}$, vuol dire che all'incrementare di n, il risultato sarà sempre più vicino a $\sqrt{2}$, vediamo la dimostrazione:

$a_0 = 1$

$a_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2}$

$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = 1{,}14\bar{6}$

Più si va avanti tendendo a $+\infty$ più ci avviciniamo con precisione ad un certo valore (in questo caso $\sqrt{2}$), tale fenomeno ha un nome specifico :

LIMITE

Il limite è una successione convergente a $l \in \mathbb{R}$, il limite per n che tende a $+\infty$ di a_n è l. Tale operazione si scrive così :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l$$

Inoltre, è vero il seguente fatto :

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon)\ tale\ che\ \forall n\ \geq N\ \rightarrow |a_n - l| \leq \varepsilon$$

Per ogni ε maggiore di 0, esiste $N = a_\varepsilon$ (la successione con ε come n) tale che per ogni n maggiore di N, il modulo di 1/ n è minore o uguale ad ε.

ESEMPIO/DIMOSTRAZIONE

Prendiamo il limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad a_n = \frac{1}{n} \qquad l = 0$$

Vogliamo dimostrare che :

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon)\ tale\ che\ \forall n\ \geq N\ \rightarrow |\frac{1}{n} - 0| \leq \varepsilon$

È già dimostrato che $|\frac{1}{n} - 0| \leq \varepsilon$ quindi rimane da verificare quanto vale N tale che $\forall n\ \geq N\ si\ ha \frac{1}{n}\ \leq$ ε , cioè da che valore di n in poi, $\frac{1}{n}$ è sempre minore o uguale ad ε. Se $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ allora $\frac{1}{\varepsilon} \leq n$. Poniamo per esempio ε = 0,001.

$$\frac{1}{0{,}001} \leq n \qquad \forall n \geq N \quad \left(ricorda\ \frac{1}{0{,}001} = 1000\right)$$
$$quindi\ 1000 \leq n, allora\ N = 1000$$

Quando si ha una successione divergente? Prendiamo $(a_n)_n \in \mathbb{N}$, essa diverge a $+\infty$ e verifica $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se:

$$\forall M > 0\ \ \exists\, N = N(M)\ tale\ che\ \forall n > N \rightarrow a_n\ \geq M$$

essa diverge a $-\infty$ e verifica $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ se:

$$\forall M > 0\ \ \exists\, N = N(M)\ tale\ che\ \forall n > N \rightarrow a_n\ \leq -M$$

ESERCIZIO

Dimostrare : $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = 1$

$\forall\varepsilon > 0 \; \exists \; N = \left(\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right) \textit{tale che} \; \forall n \; \geq N \qquad 1-\varepsilon < \frac{n+1}{n-1} \leq 1+\varepsilon$

Della disuguaglianza $1-\varepsilon < \frac{n+1}{n-1} \leq 1+\varepsilon$ è verificato e palese che $1-\varepsilon < \frac{n+1}{n-1}$, bisogna quindi verificare $\frac{n+1}{n-1} \leq 1+\varepsilon$ e trovare per quali valori di n > N è vera, trovare quindi N.

$$\frac{n+1}{n-1} \leq 1+\varepsilon$$

$$n+1 \leq 1+\varepsilon(n+1)$$

$$2+\varepsilon \leq n+n\varepsilon-n$$

$$2+\varepsilon \; \leq \; n\varepsilon$$

$$\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} \leq n$$

$$n > \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}$$