Metodi Matematici per l'Informatica - Dispensa 9
(a.a. 22/23, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (`lorenzo.carlucci@uniroma1.it`)

1 Iniezioni, Suriezioni, Biiezioni

Esercizio 1. *Consideriamo la funzione $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definita come segue: $f(x) = 1 + x$. Si tratta di una funzione iniettiva? Suriettiva?*

Per rispondere alla prima domanda – accertatomi che si tratti di una funzione – devo considerare la condizione che definisce l'iniettività: per ogni $z, z' \in \mathbf{Z}$ se $z \neq z'$ allora $f(z) \neq f(z')$. Alternativamente posso provare a dimostrare la contrapposta *ossia: per ogni $z, z' \in \mathbf{Z}$, se $f(z) = f(z')$ allora $z = z'$. Quando si ha a che fare con semplici funzioni algebriche questa strada è la più conveniente. Supponiamo quindi che $f(z) = f(z')$. Per definizione di f questo significa che $1 + z = 1 + z'$. Dunque $z = z'$. Abbiamo così stabilito che f è una iniezione.*

Passiamo alla suriettività: dobbiamo verificare se per ogni elemento $z \in \mathbf{Z}$ (del codominio) esiste almeno un $x \in \mathbf{Z}$ (elemento del dominio) tale che z è immagine di x via f ossia tale che $f(x) = z$. Devo quindi chiedermi: è vero che posso scrivere un arbitrario intero z nella forma $1 + x$ dove x è un intero? Ovviamente la risposta è sì: per chiarezza è opportuno specificare qualle x funziona per l'arbitrario z scelto, e si vede facilmente che si tratta di $z - 1$, che è ovviamente in $\mathbf{Z}$.

Osservazione 1. Abbiamo osservato che dichiarare come codominio $\mathbf{N}$ per la f dell'esercizio precedente (ossia dichiarare $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ non costituisce una corretta dichiarazione di funzione: non è vero che ogni elemento del dominio ha una immagine nel codominio: la regola che definisce f non mappa -2 in nessun numero naturale non-negativo, dato che lo mappa in -1.

Abbiamo anche osservato che dichiarare $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ risulta essere una corretta definizione di funzione (perché per ogni $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \in \mathbf{Z}$) ma che in questo caso non si tratta di una funzione suriettiva: per esempio il numero 0 appartiene al codominio $\mathbf{Z}$ ma non esiste alcun elemento n del dominio $\mathbf{N}$ per cui valga $f(n) = 0$, dato che $f(n) = n + 1$.

Esercizio 2. *Consideriamo la funzione $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definita come segue: $f(x) = 1 + x^2$. Si tratta di una funzione iniettiva? Suriettiva?*

Consideriamo l'iniettività. Dobbiamo verificare se è vera l'implicazione: se z, y sono elementi distinti del dominio $\mathbf{Z}$ allora $f(z) \neq f(y)$. Oppure, come sopra, la contrapposta: per ogni z, y in $\mathbf{Z}$ se $f(z) = f(y)$ allora $z = y$. Per come è definita f questo significa: se $1 + z^2 = 1 + y^2$? Di certo se $1 + z^2 = 1 + y^2$ allora vale $z^2 = y^2$. Da questo però non segue che $z = y$. Per concludere in modo rigoroso: negare l'implicazione significa trovare due valori specifici di z e di y che verificano la premessa (ossia $1 + z^2 = 1 + y^2$) ma non verificano la conseguenza (ossia tali che $z \neq y$). Per esempio possiamo scegliere $z = 1$ e $y = -1$. Ovviamente

$$1 + z^2 = 1 + 1^2 = 2 = 1 + 1 = 1 + (-1)^2 = 1 + y^2$$

ma $1 \neq -1$. Possiamo concludere che la funzione non è iniettiva.

Passiamo alla suriettività: dobbiamo verificare se è vero che per ogni $z \in \mathbf{Z}$ esiste un $y \in \mathbf{Z}$ tale che $f(y) = z$, ossia tale che $z = 1 + y^2$. Si vede facilmente che non è vero, e per dimostrarlo è sufficiente indicare un valore di z tale che non è possibile trovare un valore corrispondente di y che soddisfi la proprietà richiesta. Dato che $1 + y^2$ è sempre positivo per ogni $y \in \mathbf{Z}$ basta scegliere per z un qualunque numero negativo, e.g., porre $z = -2$. Abbiamo così verificato che la funzione f non è suriettiva.

Esempio 1. Consideriamo la funzione $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ così definita:

$$f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{se } x \text{ è pari} \\ x-3 & \text{se } x \text{ è dispari} \end{cases}$$

Consideriamo prima l'iniettività. La funzione f è iniettiva se e solo se due elementi distinti del dominio hanno immagini distinte, ossia: per ogni $x, y \in \mathbf{Z}$, se $x \neq y$ allora $f(x) \neq f(y)$. Ragioniamo **per casi**: $x \neq y$ si verifica nei seguenti casi:

- Caso 1: x pari e y dispari.
- Caso 2: x pari e y pari.
- Caso 3: x dispari e y dispari.

Se riusciamo a dimostrare che nei tre casi abbiamo $f(x) \neq f(y)$ allora abbiamo dimostrato che f è iniettiva. (NB: A differenza di quando tipizziamo un insieme di soluzioni per un problema di conteggio, nel **ragionamento per casi** non è necessario che i casi siano esclusivi. L'importante è che siano esaustivi!).

Caso 1: Se x è pari allora $f(x) = x+1$ è dispari; se y è dispari allora $f(y) = y-3$ è pari. Dunque abbiamo $f(x) \neq f(y)$ e la tesi è dimostrata per questo caso.

Caso 2: Se x e y sono pari, allora $f(x) = x+1$ e $f(y) = y+1$. Per ipotesi $x \neq y$, e dunque ovviamente $x+1 \neq y+1$. La tesi è dimostrata per questo caso.

Caso 3: Se x e y sono dispari, allora $f(x) = x-3$ e $f(y) = y-3$. Per ipotesi $x \neq y$ e dunque $x-3 \neq y-3$. La tesi è dimostrata per questo caso.

Concludiamo che la tesi è dimostrata per ogni $x \neq y$ nel dominio.

Consideriamo la suriettività. In generale possiamo concettualizzare una dimostrazione di suriettività come segue: un avversario sceglie a piacere un elemento w nel codominio di f. Noi dobbiamo essere in grado di rispondere con un elemento x nel dominio di f tale che $f(x) = w$. Risulta utile provare alcuni casi per farsi un'idea della forma generale della risposta:

- L'avversario ci dà $w = -17$. Si tratta di un numero dispari, dunque so già che devo cercare un intero x pari (per come è definita f). Inoltre deve valere $f(x) = w$ e dato che x è pari questo significa $x+1 = -17$. Scelgo dunque $x = w-1$.
- L'avversario ci dà $w = 102$. Si tratta di un numero pari, dunque so già che devo cercare un intero x dispari come pre-immagine. Inoltre deve valere $f(x) = 102$ e dato che x è dispari questo significa $x-3 = 102$. Scelgo dunque $x = w+3$.
- L'avversario ci dà $w = 0$. Si tratta di un numero pari, dunque so già che devo cercare un intero x dispari come pre-immagine. Inoltre deve valere $f(x) = 0$ e dato che x è dispari questo significa $x-3 = 0$. Scelgo dunque $x = w+3$.
- Etc.

Una volta che mi sono fatto un'idea della soluzione posso organizzare come segue la dimostrazione: dato $w \in \mathbf{Z}$, se w è dispari allora la sua pre-immagine è $w-1$; se w è pari allora la sua pre-immagine è $w+3$. Dunque f è suriettiva.

Abbiamo considerato anche la seguente argomentazione più formale. Denotiamo con P l'insieme degli interi pari e con D l'insieme degli interi dispari. Siano $f_0 : P \to D$ e $f_1 : D \to P$ le seguenti funzioni:

$$f_0(x) = x+1; f_1(x) = x-3.$$

Risulta allora che $f = f_0 \cup f_1$. Inoltre il dominio di f_0 e il dominio di f_1 sono disgiunti. Analogamente sono disgiunte l'immagine di f_0 e l'immagine fi f_1: $f_0(P) \subseteq D$ e $f_1(D) \subseteq P$. Infine, $P \cup D = \mathbb{Z}$.

In queste condizioni abbiamo osservato che se f_0 e f_1 sono iniettive, allora anche f è iniettiva. Se f non fosse iniettiva esisterebbero $x \neq x'$ interi tali che $f(x) = f(x')$. Se x e x' hanno stessa parità questo è impossibile perché f si comporta su entrambi come f_0 o come f_1 e queste sono iniettive. Se x e x' hanno parità opposte, è impossibile che le loro immagini coincidono perché l'immagine di un pari è un dispari (sotto f_0) e l'immagine di un dispari è un pari (sotto f_1).

Inoltre in questo caso vale anche che se f_0 e f_1 sono suriettive allora $f = f_0 \cup f_1$ è suriettiva, perché $P \cup D = \mathbb{Z}$ e $P \cap D = \emptyset$.

Osservazione 2. Abbiamo discusso il seguente ragionamento per casi: Presi $x, y \in \mathbb{Z}$, con $x \neq y$, consideriamo $f(x)$ e $f(y)$. Lo scopo è di dimostrare che in ogni caso si può concludere $f(x) \neq f(y)$.

In base alla definizione di f possiamo distinguere i seguenti casi:

Caso 1: $f(x) = x+1$ e $f(y) = y+1$. In questo caso è possibile concludere che $f(x) \neq f(y)$ dato che $x \neq y$.

Caso 2: $f(x) = x-3$ e $f(y) = y-3$. In questo caso è possibile concludere che $f(x) \neq f(y)$ dato che $x \neq y$.

Caso 3: $f(x) = x+1$ e $f(y) = y-3$. In questo caso abbiamo osservato che se $f(x) = x+1$ allora x è pari e che se $f(y) = y-3$ allora y è dispari. Questo di per sé non contraddice l'ipotesi né verifica la tesi desiderata.

Caso 4: $f(x) = x-3$ e $f(y) = y+1$. In questo caso abbiamo osservato che se $f(x) = x-3$ allora x è dispari e che se $f(y) = y+1$ allora y è pari. Questo di per sé non contraddice l'ipotesi né verifica la tesi desiderata.

Abbiamo osservato che quanto sopra rilevato non conduce in nessun modo a concludere che la tesi che si stava cercando di dimostrare (f iniettiva) sia falsa. Si tratta solo di un ragionamento per casi non conclusivo. Un ragionamento per casi è conclusivo solo se in ciascuno dei casi riesco a stabilire la tesi. Il non riuscire a stabilire la tesi in uno dei casi non significa che la tesi sia falsa.

Si può inoltre osservare che il ragionamento di sopra può essere ulteriormente sviluppato. Nel Caso 3, supponiamo (per assurdo) di avere $f(x) = f(y)$, ossia $x+1 = y-3$. Dunque $x+4 = y$. Da questo deduciamo che la parità di x e di y è la stessa. Ma questo contraddice l'ipotesi per cui $f(x) = x+1$ mentre $f(y) = y-3$. Infatti, in base alla definizione di f, se x e y sono entrambi pari allora $f(x) = x+1$ e $f(y) = y+1$; se x e y sono entrambi dispari allora $f(x) = x-3$ e $f(y) = y-3$. Dato che ipotizzare che $f(x) = f(y)$, in questo caso, conduce a una contraddizione, possiamo concludere che deve essere necessariamente vero che $f(x) \neq f(y)$. Abbiamo così stabilito la tesi desiderata anche nel Caso 3.

Analogamente possiamo ragionare sul Caso 4 e concludere che $f(x) \neq f(y)$. Questo dà luogo a un ragionamento per casi conclusivo, alternativo a quello svolto in precedenza.

Osservazione 3. Abbiamo osservato che la funzione f dell'esempio di sopra definita per casi risulta ben definita perché i casi sono mutualmente esclusivi ed esaustivi. In termini insiemistici gli insiemi corrispondenti ai casi, ossia gli interi relativi pari e gli interi relativi dispari, costituiscono una partizione del dominio $\mathbf{Z}$.

Al contrario, se proviamo a definire una funzione in base a casi non disgiunti, non otteniamo propriamente una funzione, in quanto a un elemento che cade sotto più di un caso può venir assegnato un valore differente.

In generale una funzione definita come segue:

$$f(x) := \begin{cases} h_1(x) & \text{se } x \in A_1 \\ h_2(x) & \text{se } x \in A_2 \\ \cdots & \cdots \\ h_t(x) & \text{se } x \in A_t \end{cases}$$

risulta ben posta se tutte le $h_1, \dots, h_t$ sono funzioni e se gli insiemi $A_1, \dots, A_t$ sono due a due disgiunti. In tal caso f è una funzione ben definita con dominio $A_1 \cup \cdots \cup A_t$.