Esercizio 1. È noto che i gemelli possono essere omozigoti, in questo caso sono necessariamente dello stesso sesso, oppure eterozigoti, e in questo caso sono dello stesso sesso nel 50% dei casi. Sia p la probabilità che due gemelli siano omozigoti.

1) Calcolare, in funzione di p, la probabilità che 2 gemelli siano omozigoti sapendo che sono dello stesso sesso.

2) Calcolare, in funzione di p, la probabilità che 2 gemelli siano di sesso diverso.

$O = \{\text{OMOZIGOTI}\}$ $E = \{\text{ETEROZIGOTI}\}$ $D = \{\text{SESSO DIVERSO}\}$ $S = \{\text{STESSO SESSO}\}$

1) Utilizzo la formula di Bayes perche' O ed E rappresentano una partizione di Ω.

$$\mathbb{P}(O|S) = \frac{\mathbb{P}(O)\cdot\mathbb{P}(S|O)}{\mathbb{P}(E)\cdot\mathbb{P}(S|E)+\mathbb{P}(O)\cdot\mathbb{P}(S|O)} = \boxed{\frac{p}{(1-p)\frac{1}{2}+p}}$$

2) $$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(O)\cdot\mathbb{P}(D|O)+\mathbb{P}(E)\cdot\mathbb{P}(D|E) = p\cdot 0+(1-p)\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1-p}{2}}$$

Esercizio 2. In un'urna ci sono tre monete: la prima è equa ed ha testa (T) su di una faccia e croce (C) sull'altra, la seconda ha C su entrambe le facce, la terza ha T su entrambe le facce. Si estrae a caso una moneta dall'urna e la si lancia senza guardare di quale moneta si tratti.

1) Calcolare la probabilità che esca T.

2) Sapendo che la moneta ha reso T, calcolare la probabilità che sull'altra faccia ci sia C.

Supponendo che la moneta abbia reso testa, la si raccoglie e la si lancia nuovamente (senza guardare l'altra faccia della moneta).

3) Calcolare la probabilità di ottenere ancora T.

CODIFICA EVENTO ELEMENTARE $\omega = \{1, 2, 3\} \times \{T, C\}$

3 diverse monete 2 facce

$\Omega = \{1T, 1C, 2C_1, 2C_2, 3T_1, 3T_2\}$ $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{6}$ ← prob. uniforme

1) $\mathbb{P}(\{1T, 3T_1, 3T_2\}) = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$

2) A = ho fatto testa, sull'altra faccia vi e' croce = ho fatto testa con la moneta 1

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{1T\}) = \boxed{\frac{1}{6}}$

3) Creo un nuovo spazio con due lanci:

$\Omega' = \{1TT, 1TC, 1CT, 1CC, 2C_1C_1, 2C_2C_2, 2C_2C_1, 2C_2C_2, 3T_1T_1, 3T_1T_2, 3T_2T_1, 3T_2T_2\}$

$B = \{$Prendo una moneta, lancio 2 volte ed ottengo sempre testa$\}$

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{1TT, 3T_1T_1, 3T_1T_2, 3T_2T_1, 3T_2T_2\}) = \boxed{\frac{5}{12}}$

Esercizio 3. È stato indetto un referendum in una popolazione di n individui (tutti aventi diritto al voto). Ciascun individuo andrà a votare con probabilità 1/2, indipendentemente dagli altri. Inoltre, se un individuo andrà a votare, voterà SI con probabilità 1/2, indipendentemente dagli altri.

1) Calcolare la probabilità che un individuo fissato vada a votare e voti SI.
2) Calcolare la probabilità che il numero di voti SI sia k, $k = 0\dots, n$.
3) Sapendo che il numero di voti SI è pari a k, calcolare la probabilità che il numero di votanti sia stato m, $m = k, \dots, n$.

! Basta ignorare il fatto che un individuo possa non votare, e modellizzare il problema in maniera identica allo schema di bernoulli, per poi dividere per 2 il risultato finale.

1 = VOTO SI 0 = VOTO NO $\Omega = \{0,1\}^n$ $\mathbb{P}(\omega \in \Omega) = \frac{1}{2^n}$

1) $A = \{$l'individuo J vota SI$\} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_J = 1\}$

l'individuo J vota si, il resto è indifferente $\Rightarrow |A'| = 1 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow \mathbb{P}(A') \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$

! DIVIDO PER 2 $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A') \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

2) $B' = \{$i votanti votano si$\} = \{\omega \in \Omega \mid \sum_{\omega_i \in \omega} \omega_i = k\}$

$\mathbb{P}(B') = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow$! $\Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2}$