Esercizio 1. Calcolare $\det A$ con

$$A := \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Calcolarlo con un opportuno sviluppo di Laplace e, in alternativa, tramite la riduzione a scala.

Eseguo lo sviluppo per la prima riga:

$$\det(A) = (-1)^2 \cdot 3 \cdot \det\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1-2) + 2 = -7$$

Esercizio 2. Utilizzando un opportuno sviluppo di Laplace, calcolare

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

e determinare per quali valori di k la matrice è invertibile.

RIGA 1: $\det(A) = \det\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow$ RIGA 3: $= (-1)^4 \cdot 2 \cdot \det\begin{vmatrix} k & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^6 \cdot (-1) \cdot \det\begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(k-1) - (-1-k) = 2k-2+1+k = 3k-1$ e $3k-1 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq \frac{1}{3}$.

Esercizio 3. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} a & b & l & m \\ c & d & n & p \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & z & w \end{vmatrix}$$

Dimostrare che

$$\det A = \det B = \det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \det\begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

RIGA 1

$$\det(A) = (-1)^2 \cdot a \cdot \det\begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ f & g & h \\ y & z & w \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot b \cdot \det\begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ e & g & h \\ x & z & w \end{vmatrix} = a \cdot \left(d \cdot \det\begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix} \right) - b \cdot \left(c \cdot \det\begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix} \right) =$$

$$a \cdot d \cdot \det\begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix} - b \cdot c \cdot \det\begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix} \cdot (ad - bc) = \det\begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix} \det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

RIGA 4

$$\det(B) = (-1)^7 \cdot z \cdot \det\begin{vmatrix} a & b & m \\ c & d & p \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix} + (-1)^8 \cdot w \cdot \det\begin{vmatrix} a & b & l \\ c & d & n \\ 0 & 0 & g \end{vmatrix} = -z \cdot \left(h \cdot \det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right) + w \left(g \cdot \det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right)$$

$$= wg \cdot \det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - zh \cdot \det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} (wg - zh) = \det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} (gw - zh) = \det\begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix} \det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Esercizio 4. Consideriamo $V = \mathbb{R}_2[t]$ e l'applicazione $T : V \to V$ che associa ad un polinomio la sua derivata: $T(p) := p'$. Sappiamo che T è lineare. Determinare la matrice A associata a T nella base canonica di V, $\mathcal{E} := \{1, t, t^2\}$, presa come base di partenza e come base di arrivo.
Calcolare $\det A$.

Sulla base, ho che, $T(t^2) = 2t$ $\quad T(t) = 1$ $\quad$ e $\quad T(1) = 0$.

$$T(\bar{v}) = T(x_1 + x_2 t + x_3 t^2) = x_1 \cdot T(1) + x_2 \cdot T(t) + x_3 \cdot T(t^2) =$$

$$x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 2t$$

che coordinate hanno nella base canonica?

$$0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2$$
$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2$$
$$2t = 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2$$

$$\Rightarrow T(\bar{v}) = \bar{v} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 0 \\ x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 2 \\ x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 \\ 2x_3 \\ 0 \end{vmatrix}$$