Esercizio 2. Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Scrivere l'espressione di L_A, $L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \dots$. Determinare la dimensione del nucleo di L_A. Determinare una base per lo spazio immagine.

PIVOT

$$L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ -2x_2 + 5x_3 \end{vmatrix}, \text{ Riduco } A \text{ a scala: } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} A_2 - 2A_1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} A_3 + A_2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + t = 0 \\ 2x_2 - 5t = 0 \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + t = 0 \\ 2x_2 - 5t = 0 \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + t = 0 \\ 2x_2 = 5t \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{5}{2}t + t = 0 \\ x_2 = \frac{5}{2} \cdot t \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}t \\ x_2 = \frac{5}{2}t \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Ker} L_A = \operatorname{Span}\left(\begin{vmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{vmatrix} \right) \Rightarrow \dim(\operatorname{Ker} L_A) = 1 \Rightarrow \operatorname{rango}(L_A) = 2$$

$$\operatorname{Im}(L_A) = \left(\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix} \right)$$

Esercizio 3. Spiegare perché esiste ed è unica l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1,1,1) = (2,3,2), \quad F(0,1,1) = (1,3,2), \quad F(0,1,-1) = (1,1,-2).$$

(Per ragioni tipografiche scriveremo spesso i vettori di $\mathbb{R}^n$ per righe.) Determinare l'immagine tramite F degli elementi della base canonica: $\underline{e}_1 = (1,0,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0)$, $\underline{e}_3 = (0,0,1)$. (*Suggerimento*: esprimere i vettori della base canonica come combinazioni lineari dei vettori $(1,1,1)$, $(0,1,1)$, $(0,1,-1)$ e applicare la linearità.)

Osservazioni :

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{quindi: } F \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = F \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - F \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$F \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = F\left(\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{2} F \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} F \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$F \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = F\left(\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{2} F \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} F \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Esercizio 4. Siano V e W due spazi vettoriali e $T : V \to W$ un'applicazione lineare. Sia $n = \dim V$ e $m = \dim W$.

4.1 Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
se $n > m$ l'applicazione lineare T non può essere iniettiva.

4.2. Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
se $n < m$ l'applicazione lineare T non può essere suriettiva.

Giustificate la vostra risposta.

4.1 $T : V \to W$ e $V \simeq \mathbb{R}^n \wedge W \simeq \mathbb{R}^m$. T e' iniettiva se $\{\bar{v} \in V \mid T(\bar{v}) = \bar{0}\} = \{\bar{0}\}$, sappiamo che $\dim(V) = \dim(\operatorname{Im}(T)) + \dim(\operatorname{Ker} T)$ ossia $n = \dim(\operatorname{Im}(T)) + \dim(\operatorname{Ker} T)$, T iniettiva $\Rightarrow \dim(\operatorname{Ker} T) = 0$ $\Rightarrow n = \dim(\operatorname{Im}(T)) + 0 \Rightarrow n = m$, quindi se $n > m \Rightarrow \dim(\operatorname{Ker} T) \neq 0 \Rightarrow T$ non e' iniettiva. Vero

4.2 T e' suriettiva se $\dim(\operatorname{Im}(T)) = \dim(W) = m$, $\Rightarrow$ ma se $\dim(\operatorname{Im}(T)) = m \Rightarrow n = m + \dim \operatorname{Ker} T$ $\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} T = n - m < 0$ e sarebbe ASSURDO. Quindi se $n < m$ T non e' suriettiva. Vero