Esercizio 1. Siano dati gli insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, c, d\}$. Si considerino le relazioni R su A e S su B definite da

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c)\} \quad S = \{(b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (d, d)\}$$

Determinare $R \circ S$ e $S \circ R$.

$R \circ S = \{(a,c), (a,d), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c)\}$ $\quad S \circ R = \{(c,c)\}$

Esercizio 2. Sull'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$ siano R_1 e R_2 le relazioni così definite:

$$R_1 = \{(a, a), (a, c), (a, e), (b, c), (d, e)\} \quad R_2 = \{(a, d), (b, c), (b, d), (d, d)\}$$

Determinare $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ e $R_2 \circ R_1$.

$R_1 \cup R_2 = \{(a,a), (a,c), (a,e), (b,c), (d,e), (a,d), (b,d), (d,d)$

$R_1 \cap R_2 = \{(b,c)\}$

$R_2 \circ R_1 = \{(a,e), (b,e), (d,e)\}$

Esercizio 3. Sia $A \neq \emptyset$ un insieme e R_1, ..., R_n relazioni su A. Dimostrare che

$$(R_1 \cap ... \cap R_n)^{-1} = R_1^{-1} \cap ... \cap R_n^{-1}.$$

Dimostro per doppia inclusione. Sia $(a,b) \in (R_1 \cap ... \cap R_n)^{-1} \Rightarrow (b,a) \in (R_1 \cap ... R_n) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall i \in \{1,2...,n\},\ (b,a) \in R_i \Rightarrow \forall i \in \{1,2...,n\},\ (a,b) \in R_i^{-1} \Rightarrow (a,b) \in R_1^{-1} \cap ... \cap R_n^{-1}$.

Sia $(a,b) \in R_1^{-1} \cap ... \cap R_n^{-1} \Rightarrow \forall i \in \{1,2...,n\},\ (a,b) \in R_i^{-1} \Rightarrow \forall i \in \{1,2...,n\},\ (b,a) \in R_i$
$\Rightarrow (b,a) \in R_1 \cap ... \cap R_n \Rightarrow (a,b) \in (R_1 \cap ... R_n)^{-1}$ ■

Esercizio 4. Siano R_1 e R_2 relazioni sull'insieme A. Dimostrare che se ambedue R_1 e R_2 sono di equivalenza, allora $R_1 \cap R_2$ è pure di equivalenza.

So che $\forall x \in A,\ (x,x) \in R_1 \land (x,x) \in R_2 \Rightarrow (x,x) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow R_1 \cap R_2$ e' riflessiva.

So che $(a,b) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow \begin{cases} (a,b) \in R_1 \\ (a,b) \in R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b,a) \in R_1 \\ (b,a) \in R_2 \end{cases} \Rightarrow (b,a) \in R_1 \cap R_2$ e' simmetrica

So che $\begin{cases} (a,b) \in R_1 \cap R_2 \\ (b,c) \in R_1 \cap R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a,b), (b,c) \in R_1 \\ (a,b), (b,c) \in R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a,c) \in R_1 \\ (a,c) \in R_2 \end{cases} \Rightarrow (a,c) \in R_1 \cap R_2$ e' transitiva

Esercizio 5. In generale l'unione di due relazioni di equivalenza **non** è di equivalenza: si esibisca un esempio.

Si considerino 2 relazioni R_1 ed R_2 entrambe di equivalenza. ho che

$\begin{cases} (a,b) \in R_1 \land (a,b) \notin R_2 \\ (b,c) \in R_2 \land (b,c) \notin R_1 \end{cases} \land \begin{matrix} (a,c) \notin R_1 \\ (a,c) \notin R_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} (a,b) \in R_1 \cup R_2 \\ (b,c) \in R_1 \cup R_2 \end{cases} \land (a,c) \notin R_1 \cup R_2 \Rightarrow R_1 \cup R_2$ non e' transitiva.

Esercizio 6. Sull'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali si consideri la relazione R così definita:

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow a + b = 2$$

Descrivere R e dire se è vuota, riflessiva, simmetrica, transitiva.

Posso scrivere R esplicitamente: $R = \{(1,1), (0,2), (2,0)\}$. R non e' vuota, inoltre, non e' riflessiva, in quanto $\exists x \in \mathbb{N} \mid (x,x) \notin R$, ad esempio $3 \in \mathbb{N} \land (3,3) \notin R$ dato che $3+3 \neq 2$. Non e' transitiva, in quanto $(0,2) \in R \land (2,0) \in R \land (0,0) \notin R$ dato che $0+0 \neq 2$

E' simmetrica, in quanto $\forall (a,b) \in R\ \exists (b,a) \in R$, questo e' dato dal fatto che i numeri naturali rispetto all'operazione di addizione commutano.

Esercizio 7. Siano $M = \{m, a, r, i\}$ e $O = \{o, n, d, e\}$ due insiemi.

- Costruire un'applicazione **non** suriettiva $A : M \to O$ e la si decomponga secondo il teorema fondamentale delle applicazioni.
- Descrivere la partizione di M indotta dall'applicazione $U : M \to O$ definita da $\forall x \in M,\ U(x) = o$.

- Definisco A non suriettiva: $A: M \to O \mid A(m) = e \wedge A(a) = n \wedge A(r) = n \wedge A(i) = e$, considero due applicazioni f e g, $g: M \to M$ e' suriettiva definita in tal modo:

$g(m) = a \qquad g(a) = r \qquad g(r) = i \qquad g(i) = m$

$f: M \to O$ e' iniettiva ed e' definita in tal modo:

$f(m) = e \qquad f(a) = e \qquad f(r) = n \qquad f(i) = n$

Considero $f \circ g$ definita in tal modo:

$f(g(m)) = e \qquad f(g(a)) = n \qquad f(g(r)) = n \qquad f(g(i)) = e$

Si noti come $f \circ g = A$.