Derivata seconda

La derivata seconda di una funzione, si calcola facendo il calcolo della derivata alla derivata prima della funzione stessa $f''(x) = (f'(x))'$. Se la derivata seconda è positiva, la derivata prima è monotona crescente.

Qual è il semicerchio che approssima meglio il grafico di f in 0?

$x^2 + (y - R^2) = R^2$ È l'equazione del semicerchio

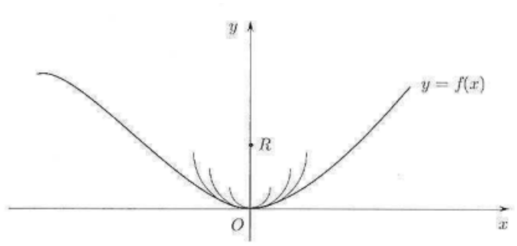
$$(y - R^2) = R^2 - x^2 \quad \rightarrow \quad y - R = \sqrt{R^2 - x^2} \quad \rightarrow \quad y = R - \sqrt{R^2 - x^2} \; = g(x)$$

Ora che abbiamo tale equazione, calcoliamone la derivata prima :

$$se\ g(0) = 0\ e\ g'(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}-1}(-2x) = x(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\ allora\ g'(0) = 0$$

Se x = 0, allora $g'(x)$ = 0, calcoliamo la derivata seconda

$$g''(x) = (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + x\left(-\frac{1}{2}\right)(R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) \rightarrow g''(0) = (R^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{R}$$

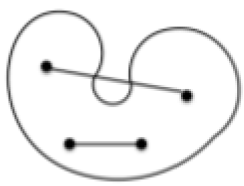


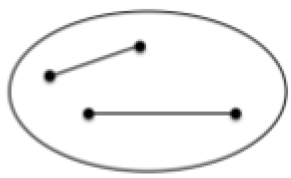
Per x = 0, la derivata seconda è uguale a $\frac{1}{R}$, che equivale alla curvatura del grafico di f in 0.
R è il raggio della curvatura.

In generale $\frac{1}{R(x)} \; = \; \frac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$ è la curvatura del grafico in x dove R(x) è il raggio della curvatura. Più R(x) è piccolo, più la curvatura sarà grande.

Concavità e Convessità

Una figura è **convessa** quando due punti all'interno di essa possono essere collegati da una retta senza che essa esca fuori dalla figura stessa.



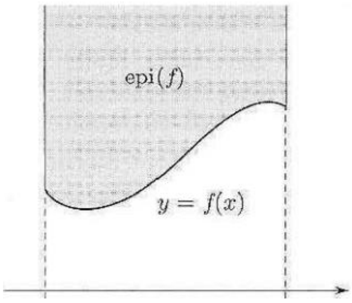


La prima figura non è convessa, la seconda si, dato che soddisfa il requisito appena spiegato.

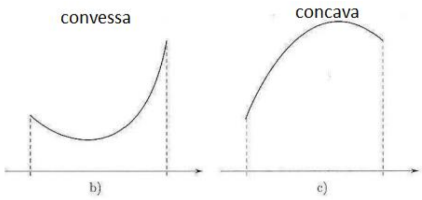
Prendiamo ora una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dove I è un intervallo, chiamiamo **epigrafico** di f l'insieme:

$$epi\ f = \{(x, y) \in \ \mathbb{R}^2 : x \ \in I\ e\ y \geq f(x)\}$$

L'epigrafico è quindi il grafico al di sopra della funzione.

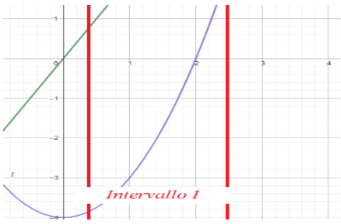


Dato tale grafico, si dice che f è convessa nell'intervallo I se il suo epigrafico è un insieme convesso, si dice che f è concava in I se $-f$ è convessa in I.



Teorema :

se $f(x)$ è convessa in I e f è derivabile, allora la derivata **è monotona crescente**, se è due volte derivabile allora $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$.



Come si può notare, la funzione f: y=x^(2)-4 disegnata in blu ha come derivata g: y=2 x disegnata in verde, nell'intervallo I tale funzione è convessa e derivabile, quindi f'(x) è sicuramente monotona crescente.

Viceversa, se f è derivabile con derivata monotona crescente in I, allora f in I è convessa, se è due volte derivabile e $f''(x) > 0\ \forall x \in I$ allora f è convessa.

Esempio 1 : $I : f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x \quad f''(x) = 2\ \ quindi\ f''(x) > 0, f$ è convessa in $\mathbb{R}$.

Esempio 2 : $f(x) = x^3 \ \ f'(x) = 3x^2 \ \ f''(x) = 6x\ quindi\ f''(x) \geq 0\ se\ \forall\ x\ \geq 0$

Quindi $f(x) = x^3$ è convessa in $(0, +\infty)$.

Adesso cerchiamo gli intervalli di convessità per e^{-x^2}

$f'(x) = e^{-x^2}(-2x) \quad f''(x) = -2x \times e^{-x^2}(-2x) = 2e^{-x^2}(-1 + 2x^2)$

$f''(x) \leq 0\ in\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$f''(x) \geq 0\ in\ (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ in questi intervalli f è convessa.

Teorema :

sia *f* derivabile in (a, b), *f* è convessa se e solo se $\forall\ x_0 \in (a, b)$ la retta tangente al grafico in $(x_0, f(x_0, 1))$ è sopra il grafico di *f*, cioè $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in (a, b)$.

Se *f(x)* è convessa in (a, x_0) e concava in (x_0, b) e *f* è due volte derivabile in *(a, b)* → $f''(x_0) = 0$ e x_0 è un punto di flesso, cioè la retta ad esso tangente "traversa" il grafico.

Studio di funzione

Possiamo suddividere lo studio del grafico di una funzione in vari step:

1. Trovare l’insieme di definizione
2. Trovare i valori agli estremi (inclusi i limiti e gli asintoti)
3. Calcolare la derivata e studiarne il segno
4. Trovare i punti di discontinuità e non derivabilità
5. Determinare gli intervalli di monotonia, punti di massima e minima
6. Calcolare la derivata seconda e studiarne il segno
7. Trovare gli intervalli di convessità/concavità