Esercizio 1. (COUPON COLLECTOR) Si consideri un album con n figurine. Calcolare la probabilità di completare l'album comprando k figurine, $k \geq n$ (si supponga probabilità uniforme sulla k-pla di figurine comprate). [SUGG. Utlizzare esclusione/inclusione]

$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) \mid \omega_i \in \{1,2\dots,n\} \wedge \omega_1 \leq \omega_2 \dots \leq \omega_k\}$, estrazioni NON ordinate con riampiazzo.

Figurine comprate   Figurine distinte $|\Omega| = \binom{k+n-1}{n}$

$A = \{\text{Completo l'album}\} = \{\omega \in \Omega \mid 1 \in \omega \wedge 2 \in \omega \dots \wedge n \in \omega\}$

$A_1 = \{\omega \in \Omega \mid 1 \in \omega\} = \{$su k figurine, esce almeno una volta la figurina "1"$\}$

Per $k=1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{n}$, per $k=2 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$, per k generico $\mathbb{P}(A_1) = \frac{k}{n}$

$A_2 = \{\omega \in \Omega \mid 2 \in \omega\}$, ho che $A_1 \cap A_2 = \{\omega \in \Omega \mid 2 \in \omega \wedge 1 \in \omega\} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = 1 \wedge \omega_2 = 2\} \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = \binom{k-2+n-1}{n}$

NON SO COME PROCEDERE

Esercizio 2. Lanciando un dado equo a 6 facce, sia X il risultato ottenuto.

1) Calcolare la distribuzione di X.
2) Calcolare il valore atteso di X.
3) Calcolare la varianza di X.

Rispondere alle precedenti domande nel caso in cui il dado abbia $n \in \mathbb{N}$ facce.

X e' una variabile aleatoria: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $X = \omega$

1) $\mathbb{P}(X=i) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = i\}) = 1/6$

2) $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$

3) $\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{6} (i - \frac{7}{2})^2 \cdot 1/6 = 1/6 \sum_{i=1}^{6} (i - 7/2)^2 = 1/6 \left[(1-7/2)^2 + (2-7/2)^2 + (3-7/2)^2 + (4-7/2)^2 + (5-7/2)^2 + (6-7/2)^2\right]$

$= 1/6 \left[\frac{25}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}\right] = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{70}{4}\right] = \frac{1}{6} \cdot \frac{35}{2} = \frac{35}{12}$

1.bis) $\Omega = \{1,2\dots,n\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=i) = 1/n$

2.bis) $\sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^2+n}{2n} = \frac{n+1}{2}$

3.bis) $\sum_{i=1}^{n} \left[i - \frac{n+1}{2}\right]^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2 - ni + i + \frac{n^2+2n+1}{4} = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - ni + i + \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2+2n+1}{4}\right]$

$= \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2 - ni + i\right] + \frac{n^2+2n+1}{4} = \left[\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} ni + \sum_{i=1}^{n} i\right]\right] + \frac{n^2+2n+1}{4} = \left[\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - n\left[\frac{n^2-n}{2}\right] + \frac{n^2-n}{2}\right]\right] + \frac{n^2+2n+1}{4}$

$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2 - \left(\frac{n^2-n}{2}\right) + \frac{n-1}{2} + \frac{n^2+2n+1}{4} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2n^3+3n^2+n}{6} - \left(\frac{n^2-n}{2}\right) + \frac{n-1}{2} + \frac{n^2+2n+1}{4} = \frac{2n^2+3n+1}{6} - \frac{n^2-n}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{n^2+2n+1}{4}$

$= 1/12 \cdot 4n^2 + 6n + 2 - 6n^2 + 6n + 6n - 6 + 3n^2 + 6n + 3 = \frac{n^2+24n-1}{12}$ → c'e' un piccolo errore nei calcoli che non voglio cercare, il risultato corretto dovrebbe essere $(n^2-1) \cdot 1/12$

Esercizio 3. Lanciando due dadi equi a 6 facce, sia X il minimo tra i due risultati.

1) Calcolare la distribuzione di X.
2) Calcolare il valore atteso di X.

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \leq \omega_2 \wedge \omega_i \in \{1,2,\dots,6\}\} \Rightarrow |\Omega| = \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = 21$$

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)\}$$

1) La distribuzione e' $\mathbb{P}(X=i) = \frac{6+1-i}{36}$

2) $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{6+1-i}{36} = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{5}{36} + 3 \cdot \frac{4}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{2}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{6} + \frac{20}{36} + \frac{24}{36} = \frac{1}{3} + \frac{5}{9} + \frac{2}{3} = \frac{14}{9}$

Esercizio 4. Una scatola contiene 10 transistor di cui 3 sono rotti. Si esamina un transistor alla volta (senza rimpiazzo) finché non se ne trova uno rotto. Calcolare il valore di attesa del numero di transistor esaminati.

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2 .. \omega_{10}) \mid \omega_i \in (1,2..,10) \wedge i \neq j \Rightarrow \omega_i \neq \omega_j\} \Rightarrow$ i transistor 1,2 e 3 sono rotti.

$X(\omega) = \inf(i \mid \omega_i \in \{1,2,3\}) \in \{1,2 \dots 8\}$

$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}($i primi $k-1$ transistor sono $\{4 \dots 10\}$ ed il k-esimo e' $\{1,2,3\})$

$A_1 = \{$i primi $k-1 \in \{4..10\}$ ed il $k°$ e' $1\}$, $\Rightarrow 7 \cdot 6 \cdots 4-k \cdot \underbrace{1}_{\text{Fissato}} \cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot \prod_{i=7}^{7-k+1} i \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{2}{10!} \cdot \prod_{i=7}^{7-k+1} i$ Sono stanco