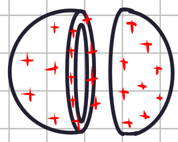
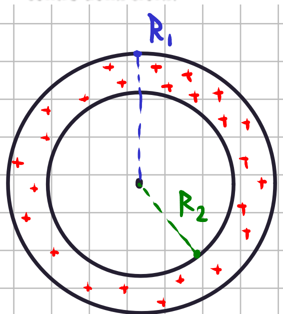
[2] Nel vuoto, una sfera di raggio R_1 ha una cavità centrale di raggio R_2 ($R_2 < R_1$). Una carica q è uniformemente distribuita nella regione di spazio compresa tra R_1 e R_2. Determinare il campo elettrico in funzione della distanza r dal centro della sfera.





Uso la legge di Gauss per calcolare E a dist. r dal centro.

Denoto S_r la superficie sferica di raggio r.

Se $r<R_2$, $\oint_{S_r}\bar{E}\,d\bar{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot$ carica interna, ma non ci sono cariche interne a R_2, quindi $\oint_{S_r}\bar{E}\,d\bar{s} = 0 \Rightarrow E=0$ se $r<R_2$.

Se $r>R_1$, la carica interna a S_r e' tutta q, quindi $\oint_{S_r}\bar{E}\,d\bar{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

Bisogna calcolare $\oint_{S_r}\bar{E}\,d\bar{s}$, ma in ogni punto della superficie $\bar{E}$ e' normale a $d\bar{s} \Rightarrow \oint_{S_r} E\,ds = 4\pi r^2 E$ allora $4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}$

Voglio ora, per $R_2\le r\le R_1$, calcolare il volume in cui e' contenuta la carica. $q_{int} = \iiint_{\tau_s} dq = \lambda \iiint_{\tau_s} d\tau$ si cambia variabile di integrazione considerando la sfera infinitesima $ds = 4\pi r^2 dr$. $q_{int}(S_r) = \lambda \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{R_2}^{r} 4\pi x^2\, dx = \lambda\frac{4\pi}{\varepsilon_0}\left[\frac{r^3}{3} - \frac{R_2^3}{3}\right]$

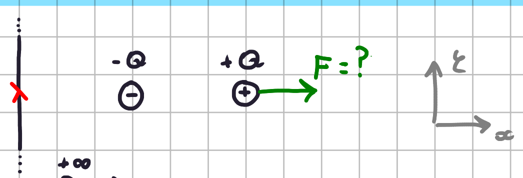
Quindi $\oint_{S_r}\bar{E}\,d\bar{s} = \lambda\frac{4\pi}{\varepsilon_0}\cdot\frac{r^3-R_2^3}{3} \Rightarrow E\,4\pi r^2 = \lambda\frac{4\pi}{\varepsilon_0}\cdot\frac{r^3-R_2^3}{3} \Rightarrow E = \frac{r^3-R_2^3}{3\cdot r^2\cdot\varepsilon_0}\cdot\lambda$

Voglio esplicitare λ. $V\lambda = q \Rightarrow \lambda = \frac{1}{V}\cdot q$ $\quad V = \int_{R_2}^{R_1} 4\pi x^2\, dx = 4\pi\left[\frac{R_1^3}{2} - \frac{R_2^3}{2}\right]$

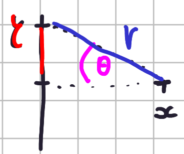
$$\Rightarrow \lambda = \frac{q}{4\pi}\,\frac{1}{\frac{R_1^3}{3}-\frac{R_2^3}{3}} \Rightarrow E = \frac{r^3-R_2^3}{3\cdot r^2\cdot\varepsilon_0}\,\frac{q}{4\pi}\,\frac{1}{\frac{R_1^3}{3}-\frac{R_2^3}{3}} = \frac{q}{r^2\varepsilon_0 4\pi}\cdot\frac{r^3-R_2^3}{R_1^3-R_2^3}$$

[3] A distanza a da una distribuzione lineare uniforme infinitamente estesa di carica elettrica avente densità λ, è posta una carica puntiforme $-Q$. Si chiede la forza che si esercita su una carica puntiforme $+Q$ posta a distanza $2a$ dal filo, sulla direzione radiale uscente dal filo e passante per la carica $-Q$. ($a = 1\,\mathrm{cm}$, $\lambda = +10\,\mathrm{nC/m}$, $Q = 1\,\mathrm{nC}$)

La situazione e' illustrata in figura



Calcolo la forza esercitata dal filo: $E\cos\theta = E_x(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda}{r^2}\,dz\cos\theta$ sia θ l'angolo fra $\hat{r}$ e l'asse x



$\Rightarrow r\cos\theta = x \Rightarrow r^2 = \frac{x^2}{\cos^2\theta}$ inoltre $\frac{z}{x} = \tan\theta$ quindi

$$dz = x\,d(\tan\theta) = \frac{x}{\cos^2\theta}\,d\theta \Rightarrow E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\frac{\cos^2\theta}{x^2}\cdot\frac{x}{\cos^2\theta}\,d\theta\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} \Rightarrow F = q\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 2a} = \frac{10}{4\pi\varepsilon_0\cdot 0.01} = \frac{250}{\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{nN} \Rightarrow F_{tot} = F + \frac{-2q}{4\pi\varepsilon_0}a$$

$$= \frac{250}{\pi\varepsilon_0} - \frac{50}{\pi\varepsilon_0} = \frac{200}{\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{nN}$$