Marco Casu

Automazione

Sapienza
Università di Roma

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica
Dipartimento di Informatica

Questo documento è distribuito sotto la licenza GNU, è un resoconto degli appunti (eventualmente integrati con libri di testo) tratti dalle lezioni del corso di Automazione per la laurea triennale in Informatica. Se dovessi notare errori, ti prego di segnalarmeli.

Nota bene : Essendo questi appunti di un corso esterno alla facoltà di Informatica, è presente un capitolo "Complementi" che può risultare utile al lettore.

INDICE

CAPITOLO

1 INTRODUZIONE

Con il termine *Automazione*, si intende la trasformazione di un processo pre-esistente, al fine di renderlo autonomo, riducendo o sostituendo del tutto l'intervento umano, verrà trattata l'automazione dei processi industriali e manifatturieri, e del loro controllo e supervisione. I sistemi presi in considerazione evolvono nel tempo e reagiscono ad eventi, che ne cambiano lo stato, e scaturiscono dei feedback, per un eventuale correzione dell'errore.

Con sistema *autonomo* si intende un sistema in cui viene ridotto l'intervento umano. L'*Automatica* si occupa di sfruttare gli strumenti dell'informatica per l'automazione, acquisendo informazioni dal mondo fisico tramite appositi sensori, per poi essere elaborate su un sistema di controllo (calcolatore), o una rete di calcolatori, che implementa dei protocolli standard per l'industria. Differentemente da altri contesti, come la trasmissione (ad esempio, di un video in streaming) nelle reti dell'automazione i ritardi risultano critici, e vanno ridotti al minimo.

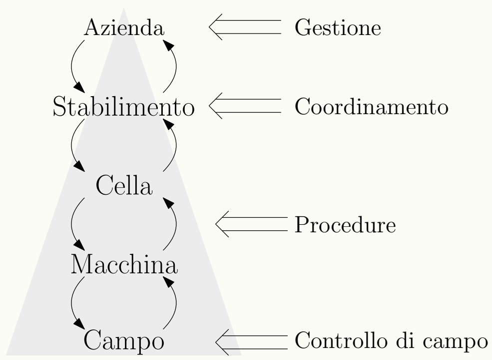


Figura 1.1: Piramide CIM

La *piramide CIM*, mostrata in figura 1.1 schematizza la gestione di un processo industriale e delle sue procedure, ogni strato comunica con quelli adiacenti scambiandosi informazioni, nei livelli più alti, le informazioni sono più *raffinate* ed astratte, nei livelli più bassi sono più grezze, ad esempio

- Al livello azienda viene decisa la produzione di un articolo (che coinvolgerà l'utilizzo di un braccio robotico)
- Al livello macchina, l'informazione che arriverà al braccio sarà semplicemente relativi ai gradi in cui i suoi giunti devono ruotare

- Al livello di campo, l'informazione comprenderà semplicemente il voltaggio da applicare alla macchina in questione per avere l'effetto desiderato.

Con **cella**, si intende un unità composta da più macchine, in cui viene scambiato e lavorato del materiale per compiere delle azioni, il *controllo delle procedure* si occupa delle **macchine**, ed uno **stabilimento** è un complesso di celle/parti e catene di montaggio. nel livello di campo, vengono utilizzati vari dispositivi, quali

- motori elettrici, servomotori, encoder
- azionatori di valvole, dynamo tachimetrici, sensori di temperatura

Tali sensori presenteranno stesso un comportamento lineare, ad esempio, se una tensione x causa una rotazione di y giri per minuti, allora una tensione $2x$ causerà una rotazione di $2y$. Anche se tali dispositivi non si prestano ad un comportamento lineare, ne verrà causata una volontaria linearizzazione, correggendone il comportamento.

Argomento centrale saranno i regolatori *PID*, la cui definizione, come molte altre trattate in questo capitolo, sarà ripresa ed approfondita in seguito. tali regolatori agiscono su delle grandezze di campo.

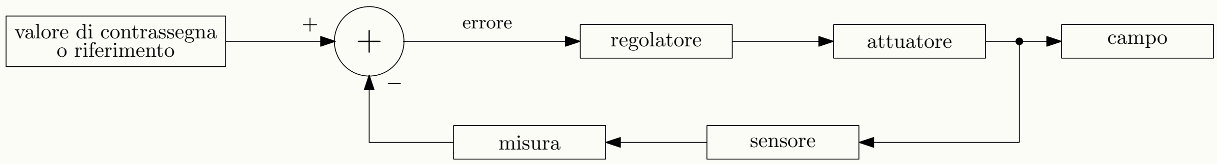


Figura 1.2: schematizzazione del regolatore PID

Si consideri il seguente esempio di regolatore, vi è una stufa che deve riscaldare una stanza, ed un sensore che ne misura la temperatura, il valore da raggiungere, detto *setpoint*, è di 20 gradi celcius. Si supponga che il sensore, una volta rilevata la temperatura, debba accendere e spengere la stufa in modo che si raggiunga la temperatura adeguata.

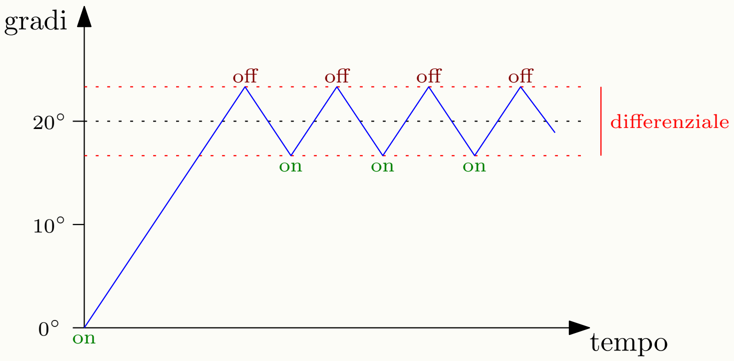


Figura 1.3: Azioni sulla stufa

In figura 1.3, il differenziale rappresenta un margine di differenza rispetto il setpoint, quando la temperatura è sotto il limite inferiore, la stufa viene accesa, quando è oltre il limite superiore, viene spenta (è chiaro che la velocità con la quale la temperatura cambia dipende dalle capacità della stufa e dalla dispersione del calore nella stanza).

Ridurre il valore del differenziale costringerebbe la temperatura ad assestarsi sempre di più sul valore desiderato, ma ciò, comporterebbe un'accensione/spengimento della stufa più frequente, aumentando lo *sforzo di controllo*, è quindi, in questo caso, accettabile un differenziale di 2°.

Anche se la variazione della temperatura è continua nel tempo, il suo superare una certa soglia è un evento, i PLC (controllori logici programmabili) agiscono sulle misure di campo, un noto linguaggio utilizzato per descriverne il funzionamento è noto come *Sequential Flow Chart (SFL)*.

Nei sistemi di automazione industriale vengono prediletti controllori e sensori distribuiti piuttosto che centralizzati, se ne vuole dare una dimostrazione pratica con il segunete esempio : Si considerino i due seguenti modi per trasportare un oggetto su un nastro trasportatore :

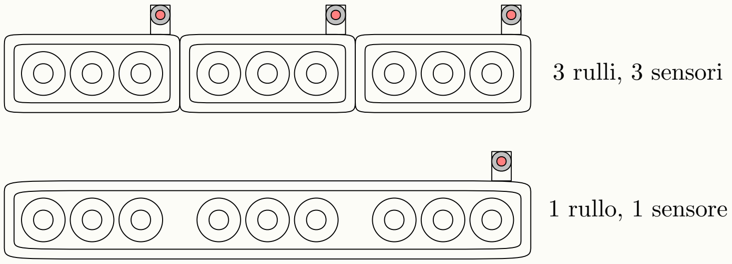


Figura 1.4: Rulli

CAPITOLO

2 COMPLEMENTI

2.1 La Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace è una *trasformata integrale*, nello specifico, è una funzione che associa ad una funzione di variabile reale, una funzione di variabile complessa.

Definizione (Trasformata di Laplace) : : Sia f una funzione di variabile reale, nulla in $(-\infty, 0)$, si chiama trasformata di Laplace di f la funzione

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\ dx \qquad p \in \mathbb{C}$$

Essendo $p = \alpha + i\beta$ una variabile complessa, la funzione integranda si può riscrivere

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\ dx = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\beta)x} f(x)\ dx$$

Ricordando l'identità di Eulero

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Si ha

$$e^{-(\alpha+\beta i)x} = e^{-\alpha x} \cdot e^{-\beta i x} = \tag{2.1}$$

$$e^{-\alpha x} \cdot \Big(\cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x)\Big) = e^{-\alpha x} \cdot \Big(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\Big) = \tag{2.2}$$

$$e^{-\alpha x}\cos(\beta x) - ie^{-\alpha x}\sin(\beta x) \tag{2.3}$$

Quindi

$$\mathcal{L}[f](p) = \mathcal{L}[f](\alpha + i\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\beta)x} f(x)\ dx =$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos(\beta x) f(x) - ie^{-\alpha x}\sin(\beta x) f(x)\ dx =$$

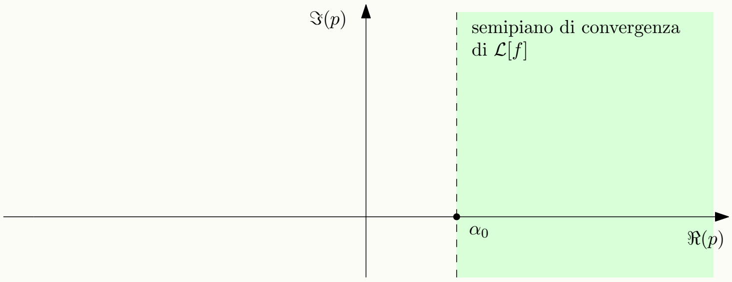
$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos(\beta x) f(x)\ dx - i\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin(\beta x) f(x)\ dx$$

Se l'integrale $\mathcal{L}[f](\alpha + i\beta)$ converge per un certo $\alpha \in \mathbb{R}$, allora converge per $p = \alpha + i\beta$ per ogni altro $\beta \in \mathbb{R}$. Se per f esiste almeno un $p \in \mathbb{C}$ tale che $\mathcal{L}[f](p) < \infty$, allora f si dice *trasformabile secondo Laplace.*

In generale, se $\mathcal{L}[f](p) < \infty$ per $p = p_0$, allora è definita anche nel semipiano complesso

$$\{p \in \mathbb{C} \mid \Re(p) > \Re(p_0)\}$$

Sia α_0 l'estremo inferiore dell'insieme $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \mathcal{L}[f](p) < \infty \wedge \Re(p) > \alpha\}$, allora il semipiano $\{p \in \mathbb{C} \| \Re(p) > \alpha_0\}$ è detto **semipiano di convergenza**.



Vediamo un esempio di trasformata, si consideri

$$H(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \geq 0 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

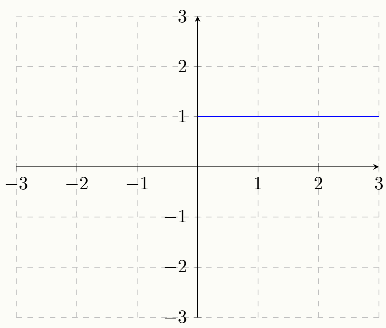


Figura 2.1: Funzione di Heaviside

Si calcola

$$\mathcal{L}[H](p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} \cdot 1 \, dx = \lim_{T \to +\infty} \mathcal{L}[H](p) = \int_0^T e^{-px} \cdot 1 \, dx = \lim_{T \to +\infty} \left[-\frac{e^{-px}}{p} \right]_0^T =$$

$$\lim_{T \to +\infty} -\frac{e^{-pT}}{p} - \left[-\frac{e^{-p0}}{p} \right] = \lim_{T \to +\infty} -\frac{e^{-pT}}{p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$$

Il cui semipiano di convergenza risulta essere $\Re(p) > 0$.

2.1.1 Proprietà della Trasformata

Linearità

La trasformazione di Laplace gode della proprietà di *linearità*, siano $f(p)$ e $g(p)$ due funzioni trasformabili, siano $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ due costanti complesse, se la funzione $\lambda \cdot f(p) + \mu \cdot g(p)$ è trasformabile, allora

$$\mathcal{L}[\lambda \cdot f + \mu \cdot g](p) = \lambda \mathcal{L}[f](p) + \mu \mathcal{L}[g](p)$$

Il semipiano di convergenza sarà uguale all'intersezione dei due semipiani di convergenza delle funzioni di partenza, più precisamente se

- f ha come semipiano di convergenza $\Re(p) > \alpha$
- g ha come semipiano di convergenza $\Re(p) > \beta$
- allora $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ ha come semipiano di convergenza $\Re(p) > \max\{\beta, \alpha\}$

Ritardo

Sia f una funzione trasformabile, si consideri una costante reale $a > 0$, la funzione $g(x) = f(x - a)$ è detta funzione *ritardata*.

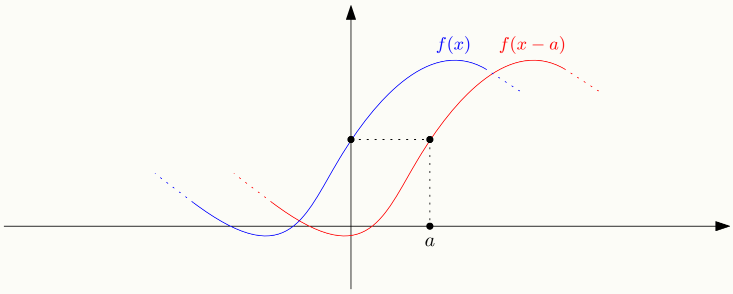


Figura 2.2: funzione ritardata

Per il calcolo della trasformata di $g(x) = f(x - a)$ si considera il cambio di variabile

$$t = x - a$$
$$x = t + a$$

Si ricordi come, se f è nulla in $(-\infty, 0)$, allora g sarà nulla in $(0, a)$.

$$\mathcal{L}[g](p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} g(x)\ dx = \int_a^{+\infty} e^{-px} f(x-a)\ dx = \int_a^{+\infty} e^{-p(t+a)} f(t)\ dx =$$

$$\int_a^{+\infty} e^{-pt-pa} f(t)\ dx = \int_a^{+\infty} e^{-pt} e^{-pa} f(t)\ dx = e^{-pa} \int_a^{+\infty} e^{-pt} f(t)\ dx = e^{-pa}\mathcal{L}[f](p)$$

Dunque si ricavano le cosiddette *formule del ritardo* :

$$\mathcal{L}[f(x-a)](p) = e^{-pa}\mathcal{L}[f(x)](p)$$

$$\mathcal{L}[e^{ax} f(x)](p) = \mathcal{L}[f](p-a)$$

Trasformazione di una derivata e di una primitiva

La seguente proprietà risulta cruciale nell'utilizzo della trasformata di Laplace per la risoluzione di equazioni differenziali. Le dimostrazioni dei seguenti risultati non saranno trattate in quanto non sono argomento di questo corso.

Sia f una funzione derivabile, la cui derivata è continua in $[0, \infty)$. Sia inoltre f' trasformabile, con semipiano di convergenza $\Re(p) > \alpha$, allora anche f è trasformabile, ha semipiano di convergenza $\Re(p) > \max\{\alpha, 0\}$, e vale la seguente identità :

$$☞ \quad \mathcal{L}[f'](p) = p\mathcal{L}[f](p) - f(0) \quad ☜$$

Si generalizza per derivate di ordine maggiore

$$\mathcal{L}[f''](p) = p^2\mathcal{L}[f](p) - pf(0) - f'(0)$$

Analogamente, sia $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$, se f è trasformabile ed ha semipiano di convergenza $\Re(p) > \alpha$, allora anche F lo è, ha semipiano di convergenza $\Re(p) > \max\{\alpha, 0\}$ e vale che

$$☞ \quad \mathcal{L}[F](p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}[f](p) \quad ☜$$

Convoluzione

Siano f e g due funzioni integrabili secondo Riemann e nulle in $(-\infty, 0)$, l'operatore $*$ detto **convoluzione** è definito nel modo seguente

$$(f * g)(x) = \int_0^{+\infty} f(x-t)g(t)\ dt = \int_0^{+\infty} f(t)g(x-t)\ dt$$

Se f è trasformabile, e $|g|$ lo è, nello stesso semipiano, allora $f * g$ è trasformabile e vale

$$\mathcal{L}[f * g](p) = \mathcal{L}[f](p) \cdot \mathcal{L}[g](p)$$

Derivata ed Integrale della trasformata di Laplace

Essendo $\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}\ dx$ si ha

$$\frac{d}{dp}\mathcal{L}[f](p) = \frac{d}{dp}\int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}\ dx$$

$$\frac{d}{dp}\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dp}(f(x)e^{-px})\ dx$$

$$\frac{d}{dp}\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} -xf(x)e^{-px}\ dx$$

$$\frac{d}{dp}\mathcal{L}[f](p) = \mathcal{L}[-xf(x)](p)$$

Generalizzando, per ogni $n \geq 0$

$$\frac{d^n}{dp^n}\mathcal{L}[f](p) = \mathcal{L}[-(1)^n x^n f(x)](p)$$

Esempio di calcolo : Si vuole trovare

$$\mathcal{L}[x\sin(\omega x)](p)$$

Essendo

$$\mathcal{L}[\sin(\omega x)](p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

Ho che

$$\mathcal{L}[x\sin(\omega x)](p) = -\frac{d}{dp}\mathcal{L}[\sin(\omega x)](p) = -\frac{d}{dp}\Big(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\Big) = \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$$

Trascurando il procedimento, la formula per l'integrale di una trasformata è la seguente

$$\int_p^{+\infty} \mathcal{L}[f](s)\ ds = \mathcal{L}[\frac{f(x)}{x}](p)$$

2.1.2 Trasformata inversa

La funzione che associa ad ogni funzione trasformabile la sua trasformata, è iniettiva, se $F(p)$ è una trasformata di Laplace, esiste un unica funzione f tale che $\mathcal{L}[f](p) = F(p)$. Data F, è possibile ottenere la funzione di base su cui si è effettuata la trasformata, tale operazione è detta *trasformazione inversa* di Laplace, si indica con $\mathcal{L}^{-1}$

$$\mathcal{L}[f] = F$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F] = f$$

Le formule di trasformazione derivate dalle proprietà (raggruppate alla fine di questa sezione), se lette al contrario valgono come formule di anti-trasformata.

Esempio di calcolo : Ricordando che $\mathcal{L}[e^{-ax}](p) = \frac{1}{p+a}$, si vuole calcolare la trasformata inversa di

$$\frac{2}{p+3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{p+3}](x) = \tag{2.4}$$
$$2 \cdot \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p+3}](x) = \tag{2.5}$$
$$2 \cdot e^{-3x} \cdot H(x) \tag{2.6}$$

Una funzione risultante da un anti trasformata va moltiplicata per la funzione di Heaviside $H(x)$ in quanto deve essere nulla in $(-\infty, 0)$. **Esempio di calcolo** : Si vuole trovare l'anti trasformata di

$$F(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}$$

Riscrivo la funzione

$$\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p^3+p} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}$$

Applicando la linearità ho

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}](x) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p}](x) - \mathcal{L}^{-1}[\frac{p}{p^2+1}](x) = \tag{2.7}$$
$$H(x) - \cos(x) \cdot H(x) = H(x)(1 - \cos(x)) \tag{2.8}$$

2.1.3 Trasformate note

Funzione	Trasformata	Semipiano di convergenza
1	$\frac{1}{p}$	$\Re(p) > 0$
e^{-ax}	$\frac{1}{p+a}$	$\Re(p) > -\Re(a)$
x	$\frac{1}{p^2}$	$\Re(p) > 0$
x^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\Re(p) > 0 \ n \in \mathbb{N}$
$\sin(\omega x)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\Re(p) > 0$
$\cos(\omega x)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\Re(p) > 0$
δ	1	$p \in \mathbb{C}$
$\cosh(ax)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\Re(p) > \lvert\Re(a)\rvert$
$\sinh(ax)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\Re(p) > \lvert\Re(a)\rvert$

2.1.4 Funzione di trasferimento

Come già accennato, la trasformata di Laplace è utile nella risoluzione di equazioni differenziali. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$a_0y''(t) + a_1y'(t) + a_2y(t) = b(t) \qquad \begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

Si applica la trasformata all'equazione, ottenendo

$$\mathcal{L}[a_0y'' + a_1y' + a_2y](p) = \mathcal{L}[b](p)$$

si applica la linearità

$$a_0\mathcal{L}[y''](p) + a_1\mathcal{L}[y'](p) + a_2\mathcal{L}[y](p) = \mathcal{L}[b](p)$$

Chiamo

$$\mathcal{L}[y](p) = Y(p) \qquad \mathcal{L}[b](p) = B(p)$$

ed applico le proprietà della trasformazione di una derivata

$$a_0(p^2Y(p) - p\alpha - \beta) + a_1(pY(p) - \alpha) + a_2Y(p) = B(p)$$

$$a_0p^2Y(p) - a_0p\alpha - a_0\beta + a_1pY(p) - a_1\alpha + a_2Y(p) = B(p)$$

esplicito $Y(p)$:

$$Y(p)(a_0p^2 + a_1p + a_2) = B(p) + a_0p\alpha + a_0\beta + a_1\alpha$$

$$Y(p) = \frac{1}{(a_0p^2 + a_1p + a_2)}B(p) + a_0p\alpha + a_0\beta + a_1\alpha$$

Pongo

$$S(p) = \frac{1}{(a_0p^2 + a_1p + a_2)}$$

Tale S è detta **funzione di trasferimento**, se le condizioni iniziali sono entrambe nulle, ossia $\alpha = \beta = 0$, si ha

$$Y(p) = S(p) \cdot B(p)$$

$$\mathcal{L}[y](p) = S(p) \cdot \mathcal{L}[b](p)$$

Ricordando la convoluzione di una trasformata, si ha che

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[S \cdot B](t)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[S](t) * \mathcal{L}^{-1}[B](t)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[S](t) * b(t)$$

Le seguenti formule hanno un significato fisico notevole, supponiamo che vi sia un sistema fisico caratterizzato da un ingresso $b(t)$, ed un uscita $y(t)$, ad esempio, $b(t)$ è una forza, e $y(t)$ il moto di una particella. Trovare esplicitamente il moto y non è banale, è possibile quindi applciare la trasformata, passando nel dominio complesso di Laplace, per poi risolvere l'equazione ed applicare l'anti trasformata, trovando così il moto.

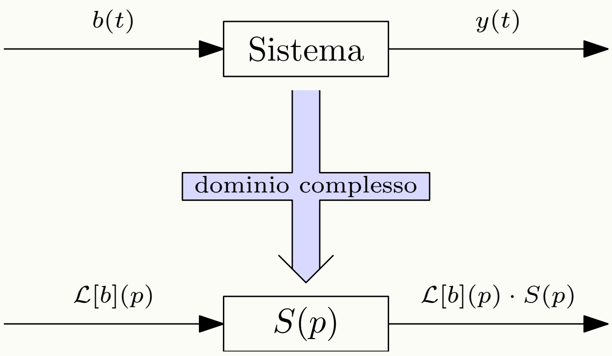


Figura 2.3: Funzione di Trasferimento

La funzione $S(p)$ quindi caratterizza totalmente il sistema fisico nel dominio di Laplace, in quanto basta moltiplicarla alla trasformata del segnale in ingresso per ottenere la trasformata del segnale in uscita.

Esempio di calcolo : Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 0 \qquad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Si applica la trasformazione di Laplace

$$\mathcal{L}[y''](p) + 4\mathcal{L}[y'](p) + 3\mathcal{L}[y](p) = 0$$

Chiamando $\mathcal{L}[y](p) = Y(p)$, si ha

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + 4pY(p) - 4y(0) + 3Y(p) = 0$$

$$Y(p)(p^2 + 4p + 3) - 1 = 0$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3} = \frac{1}{(p+1)(p+3)} = \frac{A}{(p+1)} + \frac{B}{(p+3)}$$

dove $A = \frac{1}{p+1}$ se $p = -3$ e $B = \frac{1}{p+3}$ se $p = -1$, quindi

$$A = \frac{1}{(-3)+1} = -\frac{1}{2}$$

$$B = \frac{1}{(-1)+3} = \frac{1}{2}$$

Quindi

$$Y(p) = -\frac{1}{2}\frac{1}{p+3} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+1}$$

Si applica l'anti trasformata

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[-\frac{1}{2}\frac{1}{p+3} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+1}](t)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p+3}](t) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p+1}](t)$$

Ricordando che $\mathcal{L}[e^{-ax}](p) = \frac{1}{p+a}$ si ha

$$y(t) = (\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t})H(t)$$