

ESAME 23 GIUGNO 2020

Esercizio 1

I possibili modi per sedersi sono $7!$, per essere vicini, Alfredo e Bianca devono in 2 posti adiacenti, ad esempio: $(1,2) \sigma (2,3) \dots \sigma (6,7)$. Ci sono 6 coppie di posti adiacenti, ed Alfredo e Bianca possono scambiarsi, ci sono quindi $6 \cdot 2 = 12$ modi, allora la probabilità che seggano vicini sarà $\frac{12 \cdot 5!}{7!}$, se il tavolo è rotondo, semplicemente le coppie adiacenti sono 7, quindi le probabilità sono $\frac{14 \cdot 5!}{7!}$.

Esercizio 2

- i) Uso le probabilità totali: $\frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{10} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10} = 0.7$
- ii) $\{Domande\ corretto\} = D \sim \text{Binom}(10, \frac{7}{10})$, $P(D \geq 6) = \sum_{i=6}^{10} \binom{10}{i} \left(\frac{7}{10}\right)^i \left(\frac{3}{10}\right)^{10-i}$
- iii) La prob. che S conosca 1 domanda è 0.6, La prob. che ne conosca 6 è $\binom{10}{6} \left(\frac{6}{10}\right)^6 \left(\frac{4}{10}\right)^4$, la prob. che delle 4 che non conosce le sbaglia tutte è $\left(\frac{3}{4}\right)^4$, quindi le prob. sono $\binom{10}{6} \left(\frac{6}{10}\right)^6 \left(\frac{3}{4}\right)^4$, uso ora la prob. condizionata:
- $$P(S \text{ knows } 6 | D=6) = \frac{P(S \text{ knows } 6 \cap D=6)}{P(D=6)} = \frac{1}{\binom{10}{6} 0.7^6 \cdot 0.3^4} \cdot \binom{10}{6} \cdot 0.6^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

Esercizio 3

- i) So che $\text{Im}(X) = \{1, 2, \dots, 6\}$, so inoltre che le prob. non sono uniformi, si noti come $P(X=1) = P(D_1 \text{ fa } 1 | D_2 \text{ fa } \geq 1)$, Ci sono 6 possibili esiti dei 21 in cui il minimo è 1, ed un solo esito in cui è 6 $\Rightarrow P(X=k) = \frac{7-k}{21}$.
- ii) $E(X) = \sum_{i=1}^6 \frac{7-i}{21} = \frac{1}{21} \sum_{i=1}^6 (7-i) = \frac{1}{21} \left[\sum_{i=1}^6 7 - \sum_{i=1}^6 i \right] = \frac{1}{21} \left[42 - \frac{36+6}{2} \right] = \frac{1}{21} [42 - 21] = \frac{1}{21} \cdot 21 = 1$

Esercizio 4

So che: $P(|X-25| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^2} \cdot 4$

- i) $P(X \geq 35) = P(X-35 \geq 0) = P(X-25 \geq 10) \leq \frac{1}{100} \cdot 4 = \frac{1}{25}$
- ii) $P(21 \leq X \leq 30) = P(X \geq 21) \cdot P(X \leq 30)$
- $\cdot P(X \leq 30) = 1 - P(X \geq 30) = 1 - P(X-25 \geq 5) \leq 1 - \frac{4}{25}$
- $\left. \begin{array}{l} P(21 \leq X \leq 30) \leq P(X \geq 21) \cdot \left[1 - \frac{4}{25}\right] \end{array} \right\}$