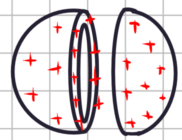
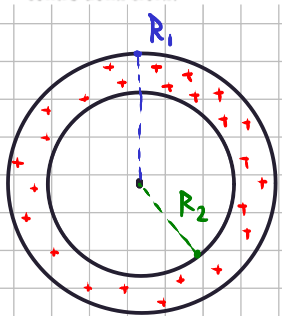
[2] Nel vuoto, una sfera di raggio R_1 ha una cavità centrale di raggio R_2 ($R_2 < R_1$). Una carica q è uniformemente distribuita nella regione di spazio compresa tra R_1 e R_2. Determinare il campo elettrico in funzione della distanza r dal centro della sfera.





Uso la legge di Gauss per calcolare E a dist. r dal centro.

Denoto S_r la superficie sferica di raggio r.

Se $r < R_2$, $\oint_{S_r} \bar{E}\, d\bar{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot$ carica interna, ma non ci sono cariche interne a R_2, quindi $\oint_{S_r} \bar{E}\, d\bar{s} = 0 \Rightarrow E = 0$ se $r < R_2$.

Se $r > R_1$, la carica interna a S_r e' tutta q, quindi $\oint_{S_r} \bar{E}\, d\bar{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

Bisogna calcolare $\oint_{S_r} \bar{E}\, d\bar{s}$, ma in ogni punto della superfice $\bar{E}$ e' normale a $d\bar{s} \Rightarrow \oint_{S_r} E\, ds = 4\pi r^2 E$ allora $4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$

Voglio ora, per $R_2 \le r \le R_1$, calcolare il volume in cui e' contenuta la carica. $q_{int} = \iiint_{\tau_s} dq = \lambda \iiint_{\tau_s} d\tau$ si cambia variabile di integrazione considerando la sfera infinitesima $ds = 4\pi r^2 dr$. $q_{int}(S_r) = \lambda \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{R_2}^{r} 4\pi x^2\, dx = \lambda \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{R_2^3}{3} \right]$

Quindi $\oint_{S_r} \bar{E}\, d\bar{s} = \lambda \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \cdot \frac{r^3 - R_2^3}{3} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \lambda \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \cdot \frac{r^3 - R_2^3}{3} \Rightarrow E = \frac{r^3 - R_2^3}{3 \cdot r^2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \lambda$

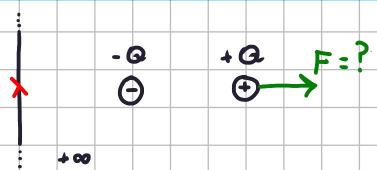
voglio esplicitare λ. $V\lambda = q \Rightarrow \lambda = \frac{1}{V} \cdot q$ $\quad V = \int_{R_2}^{R_1} 4\pi x^2\, dx = 4\pi \left[\frac{R_1^3}{2} - \frac{R_2^3}{2} \right]$

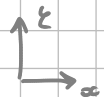
$$\Rightarrow \lambda = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{\frac{R_1^3}{3} - \frac{R_2^3}{3}} \Rightarrow E = \frac{r^3 - R_2^3}{3 \cdot r^2 \varepsilon_0} \frac{q}{4\pi} \frac{1}{\frac{R_1^3}{3} - \frac{R_2^3}{3}} = \frac{q}{r^2 \varepsilon_0 4\pi} \cdot \frac{r^3 - R_2^3}{R_1^3 - R_2^3}$$

---

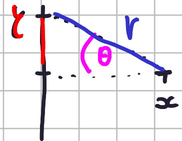
[3] A distanza a da una distribuzione lineare uniforme infinitamente estesa di carica elettrica avente densità λ, è posta una carica puntiforme $-Q$. Si chiede la forza che si esercita su una carica puntiforme $+Q$ posta a distanza $2a$ dal filo, sulla direzione radiale uscente dal filo e passante per la carica $-Q$. ($a = 1\,\mathrm{cm}$, $\lambda = +10\,\mathrm{nC/m}$, $Q = 1\,\mathrm{nC}$)

La situazione e' illustrata in Figura





Calcolo la forza esercitata dal filo: $E\cos\theta = E_x(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{r^2}\, dz \cos\theta$ sia θ l'angolo fra $\hat{r}$ e l'asse x



$\Rightarrow r\cos\theta = x \Rightarrow r^2 = \frac{x^2}{\cos^2\theta}$ inoltre $\frac{z}{x} = \tan\theta$ quindi

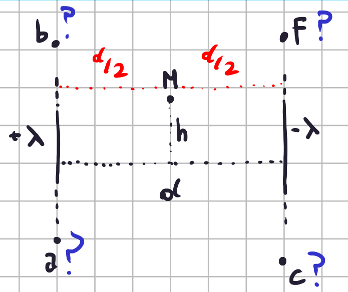
$$dz = x\, d(\tan\theta) = \frac{x}{\cos^2\theta} d\theta \Rightarrow E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{\cos^2\theta}{x^2} \cdot \frac{x}{\cos^2\theta} d\theta \cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta =$$

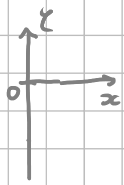
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x} 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} \Rightarrow F = q \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 2a} = \frac{10}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 0.01} = \frac{250}{\pi\varepsilon_0}\, nN \Rightarrow F_{tot} = F + \frac{-2q}{4\pi\varepsilon_0} a$$

$$= \frac{250}{\pi\varepsilon_0} - \frac{50}{\pi\varepsilon_0} = \frac{200}{\pi\varepsilon_0}\, nN$$

[4] Due distribuzioni rettilinee indefinite di carica, nel vuoto, sono tra loro parallele a distanza d e hanno una densità lineica di carica $+\lambda$ e $-\lambda$, rispettivamente. Determinare il vettore campo elettrico in un punto M equidistante dai fili, a distanza h dal loro piano. ($\lambda = 1\,\mu\mathrm{C/m}$, $d = 2\,\mathrm{cm}$, $h = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$)

La situazione e' quella illustrata in Figura →





$$dE'(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda\,dy}{y^2+\frac{1}{4}d^2}$$

$$r = \sqrt{y^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

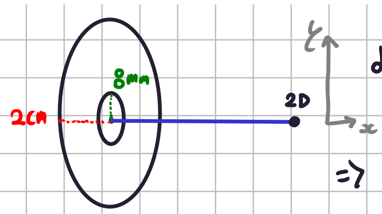
$$\Rightarrow E'(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{1}{y^2+\frac{1}{4}d^2}\,dy = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{d}\arctan\left(\frac{2b}{d}\right) - \frac{2}{d}\arctan\left(\frac{2a}{d}\right)\right]$$

a, b, c, F ignoti

$$\boxed{E(M) = E' + E''}$$

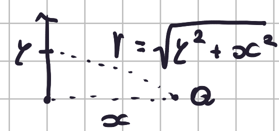
$$\Rightarrow E''(M) = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_c^F \frac{1}{y^2+\frac{1}{4}d^2}\,dy = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{d}\arctan\left(\frac{2F}{d}\right) - \frac{2}{d}\arctan\left(\frac{2c}{d}\right)\right]$$

[5] Una moneta metallica di diametro esterno $D = 2\,\mathrm{cm}$, forata al centro con foro di diametro $d = 8\,\mathrm{mm}$ e sufficientemente sottile da poter trascurare lo spessore, possiede una carica $Q = 5\,\mathrm{pC}$ disposta uniformemente sulla sua superficie. Si determini il valore del campo elettrico prodotto dalla carica presente sulla moneta in un punto dell'asse a distanza $L = 2D$ dal piano della moneta.



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dS}{r^2}$$ considero $dS = 2\pi y\,dy$ anello di spessore infinitesimo

$$\Rightarrow E = \int_d^D \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^3}\,2\pi y\,dy$$ calcolo r :

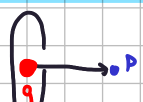


$$\Rightarrow E = \frac{2\pi\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_d^D \frac{y}{(y^2+x^2)^{3/2}}\,dy \Rightarrow \begin{cases} t = x^2+y^2 \\ dt = 2y\,dy \\ y\,dy = \frac{dt}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = d \Rightarrow t = x^2+d^2 \\ y = D \Rightarrow t = x^2+D^2 \end{cases}$$

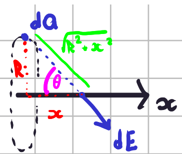
$$\Rightarrow E = \frac{2\pi\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x^2+d^2}^{x^2+D^2} \frac{1}{2}\,\frac{1}{t^{3/2}}\,dt = \frac{\lambda x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+D^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+d^2}}\right]$$

calcolo in $x = 2D \Rightarrow$ $$\frac{\lambda D}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{3D^2}} - \frac{1}{\sqrt{2D^2+d^2}}\right] = \boxed{\frac{5\cdot10^{-12}\cdot 2\cdot10^{-2}}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{3\cdot2\cdot10^{-4}}} - \frac{1}{\sqrt{2\cdot2\cdot10^{-4}+8\cdot10^{-6}}}\right]}$$

[6] Una carica $q = 20\,\mathrm{nC}$ è distribuita uniformemente lungo una circonferenza di raggio $R = 9\,\mathrm{cm}$; al centro O della circonferenza è posta una carica puntiforme $Q = -100\,\mathrm{nC}$. Calcolare il lavoro necessario per portare la carica Q dal punto O al punto P, posto sull'asse della circonferenza, a distanza $d = R^{0.5}$ da O.



Si vuole trovare il valore di $\vec{E}$ lungo il segmento OP.



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{dQ}{r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dl}{\sqrt{x^2+R^2}} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_C dE_x \Rightarrow \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{dl}{r^2}\cos\theta$$

$\Rightarrow$ r e θ non dipendono da $dl \Rightarrow$ $$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\cos\theta}{r^2}\int_C dl = \frac{\cos\theta\cdot q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

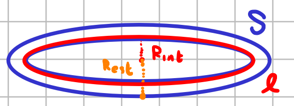
Si vuole esprimere in funzione di x

$$r\cos\theta = x \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \frac{x\,q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{x\,q}{(R^2+x^2)^{3/2}}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow L = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{R^{0.5}} \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\,dx =$$

$$= \boxed{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{R^2+R}} + \frac{1}{R}\right]}$$

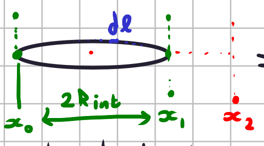
[7] Un tubo metallico, da considerarsi infinitamente lungo con raggio interno R_{int} ed esterno R_{est}, viene caricato con una carica che si dispone con densità per unità di lunghezza uniforme pari a λ. Scrivete le espressioni sia del campo elettrico, sia del potenziale elettrostatico in funzione della distanza r dall'asse del tubo per $0 < r < \infty$

$dQ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2}$ bisogna integrare sul tubo, posso considerare degli anelli infinitesimi



e poi integrare sulla lunghezza del tubo.

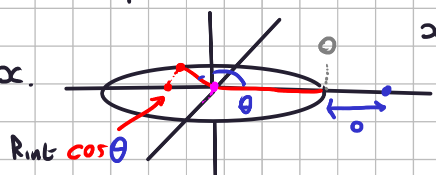
campo anello inf: $\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_\ell \frac{d\ell}{r^2} =$



$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{1}{x^2}\,d\ell$ bisogna trovare

r dipende da dl

la relazione fra dl ed x.



$x + R_{int}\cos\theta$ per $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$x + R_{int} + R_{int}\cos\theta$ per $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$

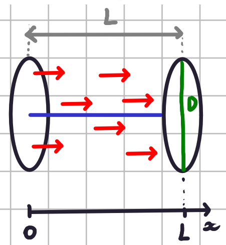
$$\Rightarrow \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(x+R_{int}\cos\theta)^2}\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{1}{(x+R_{int}+R_{int}\cos\theta)^2}\,d\theta\right]$$

NON SO COME CONTINUARE

[8] Due cariche puntiformi q_1 e q_2 sono poste nel vuoto a una distanza d l'una dall'altra. Calcolare il lavoro che è necessario fare per ridurre la distanza di separazione fino al valore $d/2$.

$V_1(d) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{d}$ $\quad V_1(\frac{d}{2}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{d} \Rightarrow L = \Delta U = q_2\Delta V = \boxed{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{d}}$

[10] Un filo isolante con carica distribuita uniformemente con densità lineica $\lambda = 70\,\text{nC}\cdot\text{m}^{-1}$ è inserito e teso tra le armature circolari di un condensatore sottile, carico a $V = 2500\,\text{V}$, parallelamente a queste e passante per il loro asse comune. Se su di esso si esercita una forza di modulo $F = 2.5\,\text{mN}$, si chiede quale sia il diametro D delle armature, sapendo che esse distano di un tratto $L = 3\,\text{mm}$. (Si trascurino gli effetti di bordo del condensatore)



Voglio trovare E all'interno del condensatore, so che il campo generato da un disco carico di raggio a e' $E(x) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma x\left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$

quindi $E(x) = \frac{\sigma x}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}D^2}}\right)$

$\frac{x}{x}$ perche' l'integrale e' su $[0,L]$

$$dF = dQ\cdot E = \lambda dx\cdot E \Rightarrow F = \lambda\int_0^L \frac{\sigma x}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}D^2}}\right)dx = \frac{\lambda\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^L \frac{x}{|x|} + \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}D^2}}\,dx =$$

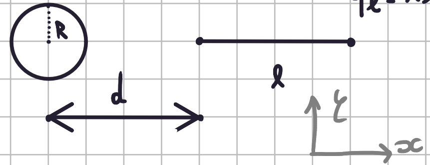
$$\frac{\lambda\sigma}{\varepsilon_0}L + \frac{\lambda\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^L \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}D^2}}\,dx = \frac{\lambda\sigma}{\varepsilon_0}L + \frac{\lambda\sigma}{\varepsilon_0}\left[\sqrt{\frac{1}{4}D^2+L^2} - \frac{D}{2}\right] = \frac{\lambda\sigma}{\varepsilon_0}\left[L + \sqrt{\frac{1}{4}D^2+L^2} - \frac{D}{2}\right]$$

RISOLVERE PER D

Se il condensatore si assume ideale, $F = QE = \lambda D\frac{V}{L} \Rightarrow D = \frac{L}{\lambda V}F \Rightarrow D = \boxed{4.3\text{ cm}}$

[14] Nel vuoto, una carica positiva q è uniformemente distribuita su una superficie sferica non conduttrice di raggio R. A distanza d ($d > R$) dal centro delle superficie sferica e in direzione radiale, è posto un sottile segmento non conduttore di lunghezza l che porta una carica positiva distribuita con densità lineica uniforme λ. Determinare l'espressione della forza con cui si respingono le due distribuzioni di carica.

$q = \pi R^2 \sigma$ $\qquad$ $q_l = \lambda l$

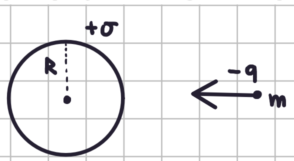


il campo generato dalla sfera e' identico ad un campo generato da una carica $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{1}{r^2}$

la carica dq' sulla linea subisce $dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{dq'}{r^2}$ bisogna integrare sulla linea l

$$F = \int_l dF = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{1}{r^2}\,dq = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{1}{r^2}\,dl = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_d^{d+l}\frac{1}{x^2}\,dx = \boxed{\frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{(d+l)^2}+\frac{1}{d^2}\right]}$$

[15] Una sfera cava di raggio R priva di massa e fissa nello spazio vuoto, possiede una densità di carica superficiale $+\sigma$. Una carica puntiforme $-q$ di massa m si trova all'infinito ed è attratta dalla sfera. Si determini la velocità con la quale la carica puntiforme arriverà nel centro della sfera supponendo che essa possieda un piccolo pertugio attraverso il quale la carica può passare.



$Q = \sigma\pi R^2$

Il potenziale della sfera all'esterno e' $V(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, si assume che la massa ha velocita' nulla all'inizio. L'energia meccanica si conserva $\Delta E_m = 0 \Rightarrow -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{1}{2}mv_r^2 = 0 \Rightarrow v_r^2 = \frac{1}{m}\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow$

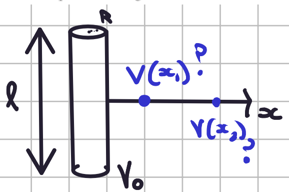
La velocita' con cui giunge in un punto distante r dal centro e' $v_r = \sqrt{\frac{1}{m}\cdot\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 r}}$

Questo vale per $r \geq R$. All'interno della sfera per il teo. di Gauss, il campo e' nullo, quindi lo e' anche il potenziale

$\Rightarrow E_m(\text{centro}) = \frac{1}{2}mv_c^2 \Rightarrow$ $\boxed{v_c = v_R = \frac{q\cdot Q}{2m\pi\varepsilon_0 R}}$

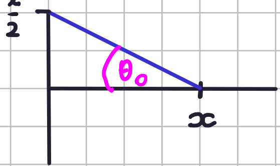
vel. al centro

[16] Un cilindro conduttore di raggio R e lunghezza l, con $l \gg R$, posto nel vuoto, possiede una carica positiva con densità areica di carica σ sulla superficie laterale e si trova a potenziale V_0. Si determini come varia il potenziale nei punti equidistanti dagli estremi del cilindro distanti r dal suo asse ($0 < r < \infty$).



Voglio prima calcolare E sull'asse x, $E = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint_C \frac{1}{r^2}\,dC$ essendo $l \gg C$ approssimo il cilindro ad un filo $\Rightarrow E = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{1}{r^2}\,d\bar{l}$

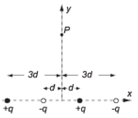
ma so che in questo caso (PAG. 56 APPUNTI) $E(x) = \frac{\sigma}{x 4\pi\varepsilon_0} 2\sin\theta_0$

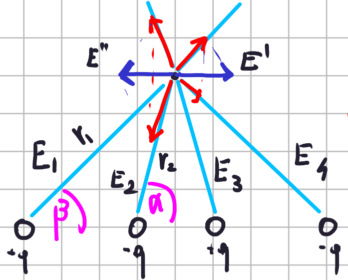


$$\sqrt{x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}\cos\theta_0 = x \Rightarrow \theta_0 = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}}\right)$$

$$V_x(r) = \int_r^\infty E\,dx = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{1}{x}\sin\theta_0\,dx = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{1}{x}\,dx - \int_r^\infty \frac{x}{x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}\,dx$$

[20] Quattro cariche elettriche puntiformi, q, identiche in valore assoluto, di cui due positive e due negative, sono disposte lungo l'asse delle x, in maniera simmetrica rispetto all'asse delle y, a distanza d e $3d$ da quest'ultimo, come mostrato nella figura. Determinare, se esiste, il punto P sull'asse delle y dove il campo elettrico creato dalle cariche è nullo.





$r_1 \cos\beta = 3d$

$r_2 \cos\alpha = d$

Oss: il campo ha componente nulla sull'asse y

$r_1 \cos\beta = 3d \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{3d}{r_1}$

$r_2 \cos\alpha = d \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{d}{r_2}$

$$E' = E_1 \cos\beta + E_4 \cos\beta = 2E_1 \cos\beta$$

$$E = 0 \Leftrightarrow E' = -E''$$

$$-E'' = E_2 \cos\alpha + E_3 \cos\alpha = 2E_2 \cos\alpha$$

$\Rightarrow$

$$\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1^2} \cos\beta = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{3d^2+y^2}^{\,2}} \cos\beta \Rightarrow \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{3d}{3d^2+y^2}$$

$$\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_2^2} \cos\alpha = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{d^2+y^2}^{\,2}} \cos\alpha \Rightarrow \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{d}{d^2+y^2}$$

trovare y_0 per cui

$$\Rightarrow \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} d \left(\frac{3}{3d^2+y_0^2} - \frac{1}{d^2+y_0^2} \right) = 0$$

---

[21] Una carica $q = 10^{-9}$ C è uniformemente distribuita in una sfera di raggio R. Il potenziale in un punto P a distanza $R/2$ vale $V(P) = 10^3$ V, supponendo nullo il potenziale all'infinito. Determinare il valore di R.

All'interno della sfera il potenziale é $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{3}{2}R - \dfrac{r^2}{2R^3}\right)$ quindi

$$\Rightarrow \frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{3}{2}R - \frac{R^2}{8R^3}\right) = 10^3 \text{ V}$$

Si risolve per R

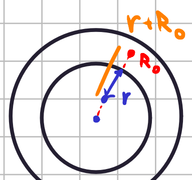
---

[22] È data una distribuzione di carica a simmetria sferica di densità uniforme ρ contenuta in un guscio sferico di raggio interno R e raggio esterno $3R$. Determinare il valore del potenziale $V(0)$ al centro, in funzione del raggio e della densità di carica, potendo assumere nullo il potenziale in punti infinitamente distanti dalla distribuzione di carica.

Il campo elettrico di una superfice sferica carica e' $E_s = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{r}{R^3}$

$$\Rightarrow E = \int_R^{3R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R_0^3} 4\pi R_0^2 \, dR_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \int_R^{3R} \frac{r}{R_0} dR_0$$

ma qual'e' la relazione fra r ed R_0?

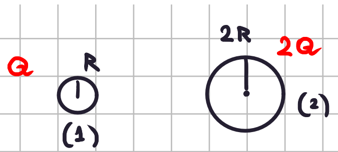


$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \int_R^{3R} \frac{r+R_0}{R_0} dR_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \left[r \int_R^{3R} \frac{1}{R_0} dR_0 + \int_R^{3R} dR_0 \right] = \frac{Q}{\varepsilon_0} \left[r \log(3) + 2R \right]$$

all'interno della sfera

---

[23] È data una sfera conduttrice isolata di carica Q_1 e di raggio $R_1 = 5$cm centrata in O. Sostituendo tale sfera con un'altra di raggio $R_2 = 2R_1$ e di carica $Q_2 = 2Q_1$ sempre centrata in O, a quale distanza R^* da O l'energia contenuta nel volume di spazio sferico corrispondente, è uguale per le due situazioni?



$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

energia in R^* per (1): $\displaystyle\int_R^{R^*} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2} \int_R^{R^*} \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_R^{R^*} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R^*} - \frac{1}{R}\right]$

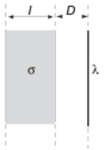
(2): $\displaystyle\int_{2R}^{R^*} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{4Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_{2R}^{R^*} \frac{dr}{r^2} = \frac{4Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R^*} - \frac{1}{2R}\right] \Rightarrow \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R^*} - \frac{1}{2R}\right] = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R^*} - \frac{1}{R}\right]$ risolvo per R^*

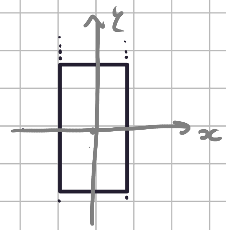
$$\frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R^*}-\frac{1}{2R}\right]=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R^*}-\frac{1}{R}\right]$$

$$\frac{2\pi\varepsilon_0 R^*}{Q^2}-\frac{4\pi\varepsilon_0 R}{Q^2}=\frac{8\pi\varepsilon_0 R^*}{Q^2}-\frac{8\pi\varepsilon_0 R}{Q^2}$$

$$\frac{2\pi\varepsilon_0}{Q^2}\left[R^*-2R-4R^*+4R\right]=0 \Rightarrow \frac{2\pi\varepsilon_0}{Q^2}\left[-3R^*+2R\right]=0 \Rightarrow 3R^*=2R \Rightarrow R^*=\frac{2}{3}R$$

[12] Un filo rettilineo indefinito carico con densità lineica di carica λ, si trova nel vuoto a una distanza D dal bordo più vicino di una striscia rettilinea indefinita, di spessore trascurabile e larga l, complanare con il filo e a esso parallela avente densità di carica areica σ. Si ricavi la forza per unità di lunghezza che viene esercitata sul filo.

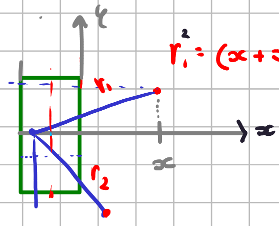




$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \frac{ds}{r^2}$$

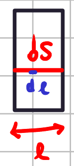
Voglio calcolare il campo E generato dalla striscia

$$= dE(x,y) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{x^2+y^2} ds \Rightarrow E(x,y) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{1}{x^2+y^2} dS =$$



$r_1^2 = (x+x_0)^2 + y^2$ y Fissato

integro su un tratto dS



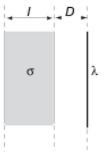
$$dE(x,y) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_{ds} \frac{1}{r^2} dl$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{-l} \frac{1}{(x+x_0)^2+y^2} dx_0 = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0 y}\left[\arctan\left(\frac{x-l}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$

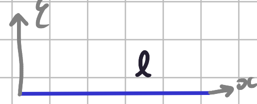
$$= E = \int_0^{-r} \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0 y'}\left[\arctan\left(\frac{x-l}{y'}\right) - \arctan\left(\frac{x}{y'}\right)\right] dy_0$$

$y' = (y-y_0)^2$

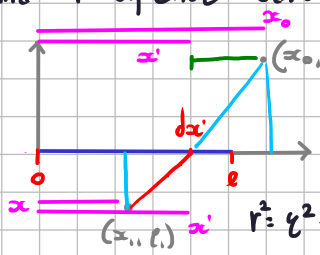
[12] Un filo rettilineo indefinito carico con densità lineica di carica λ, si trova nel vuoto a una distanza D dal bordo più vicino di una striscia rettilinea indefinita, di spessore trascurabile e larga l, complanare con il filo e a esso parallela avente densità di carica areica σ. Si ricavi la forza per unità di lunghezza che viene esercitata sul filo.



Si consideri un Filo di lunghezza ℓ



si vuole calcolare E_ℓ in ogni punto del piano x, y. $dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\ell}{r^2} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_\ell \frac{d\ell}{r^2}$ voglio integrare da 0 ad ℓ ma r dipende dallo variabile di integrazione



$r^2 = y^2 +$

per $x \geq \ell$ $\quad E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\ell \frac{dx'}{(x-x')^2+y^2}$

per $0 \leq x \leq \ell$ $\quad E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\ell \frac{dx}{x^2+y^2}$

per $x < 0$ $\quad E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\ell \frac{dx'}{(x+x')^2+y^2}$