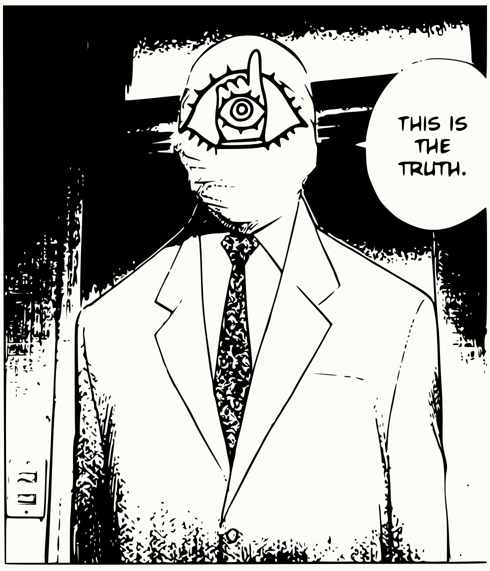
Marco Casu

Fisica

Sapienza Università di Roma

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica
Dipartimento di Informatica

Questo documento è distribuito sotto la licenza GNU, è un resoconto degli appunti (eventualmente integrati con libri di testo) tratti dalle lezioni del corso di Fisica per la laurea triennale in Informatica. Se dovessi notare errori, ti prego di segnalarmeli.



INDICE

CAPITOLO

1 INTRODUZIONE

1.1 Il metodo scientifico

La nascita del metodo scientifico è dovuta a Galileo Galilei, se i filosofi greci stabilivano leggi empiriche senza necessariamente dimostrarle, Galileo introdusse una verifica sperimentale a quelle che erano le sue digressioni.

Un **esperimento**, è una verifica sperimentale delle ipotesi, utile a ricavare valori numerici oggettivi per le misure delle grandezze fisiche. L'avvento del cannocchiale permise un osservazione più accurata dei corpi celesti, questi che venivano creduti perfetti, si rivelarono per quello che sono, la Luna con i suoi accavallamenti e "mari", mostrava una conformazione della sua crosta tutto fuorché perfetta. Oltre al già

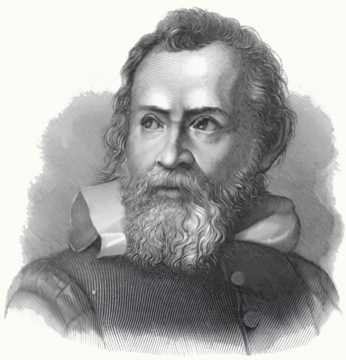


Figura 1.1: Galileo Galilei

citato cannocchiale, erano necessari ulteriori strumenti per le osservazioni dei corpi celesti, era necessario misurare in maniera precisa ed affidabile lo scorrere del tempo. Misurare il tempo vuol dire confrontare due eventi, ad esempio, il sorgere del sole con il movimento periodico riferito ad un misuratore (come l'orologio).

Galileo per le sue misure realizzò un orologio ad acqua, utilizzando un recipiente nella quale riporre un piccolo foro sul fondo, in modo tale che l'acqua cadesse a gocce a velocità costante, così facendo, lo scorrere del tempo era proporzionale al volume dell'acqua perso dall recipiente.

Una **grandezza fisica** è un entità alla quale si attribuisce una specifica definizione, utilizzabile per descrivere un fenomeno fisico, per tali entità devono valere i criteri di uguaglianza e sommabilità.

Uno degli argomenti su cui si soffermò Galileo fu il *moto dei gravi*, in particolare il moto dei corpi in caduta libera. Secondo la fisica aristotelica del tempo, un corpo tanto più pesante era, tanto più rapidamente cadeva.

Galileo fu critico nei riguardi di questa visione, osservò che in realtà, ogni corpo cade verso il suolo con la stessa accelerazione, il motivo per il quale una piuma cade più rapidamente di una sfera di piombo non riguarda la loro massa, bensì la resistenza dell'aria nei confronti del loro materiale e della loro forma. Trovò inoltre che la distanza percorsa durante la caduta di un oggetto è proporzionale al quadrato del tempo impiegato per percorrerla.

Galileo con un esperimento riguardante i piani osservò il seguente fatto : *se si lascia scivolare un corpo su un piano inclinato ad altezza h per poi farlo risalire su un altro piano inclinato, questo tendeva a risalire fino alla stessa altezza h.*

Figura 1.2: caduta sul piano inclinato

Inoltre, notò che questo fenomeno non è condizionato dal seno dell'angolo del piano, bensì esclusivamente dall'altezza.

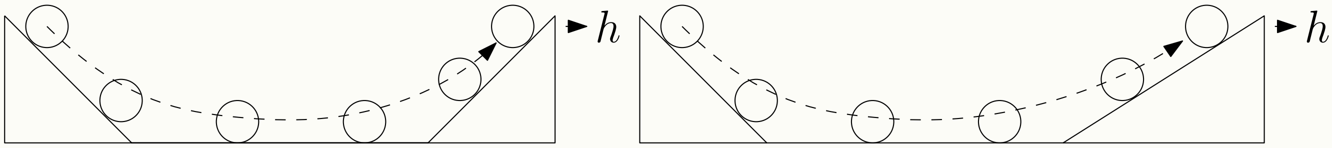


Figura 1.3: inclinazioni differenti

Per osservare tale risultato dovette ridurre le azioni spurie dell'attrito dell'aria. Più il percorso era liscio, più l'attrito risultava debole, e più il corpo tendeva ad avvicinarsi all'altezza originale h. Con tale ragionamento ipotizzò che se l'attrito dovesse essere stato nullo, allora il corpo sarebbe tornato precisamente all'altezza h.

Dato questo per vero, riducendo il valore dell'angolo sarebbe stato possibile far percorrere al corpo una distanza maggiore. Se il secondo piano avesse avuto inclinazione nulla, allora il grave avrebbe continuato a muoversi in avanti a velocità costante.

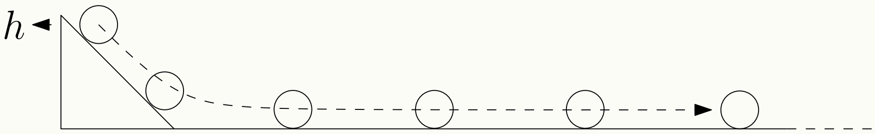
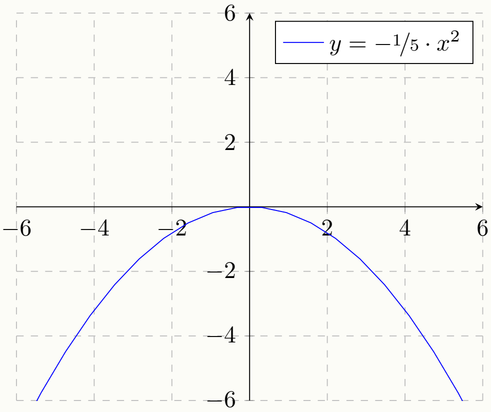


Figura 1.4: inclinazione nulla

Tale principio è noto come **legge d'Inerzia**, eliminando gli attriti, lo stato di moto naturale inalterato di un corpo è quello di moto rettilineo uniforme (a velocità costante) indefinitamente.

Essendo la scienza sempre stata impiegata anche in ambito bellico, Galileo studiò il moto dei proiettili, che fino a quel momento si credeva fosse costantemente orizzontale, fino al momento in cui il proiettile perdeva il suo "impeto" cadendo a terra. Egli si rese conto che i proiettili sono soggetti sia alla forza impressa dal colpo (orizzontale), sia a quella verticale impressa verso il basso.

La forza impressa dal colpo gli da una velocità costante, in quanto non è soggetto ad ulteriori accelerazioni orizzontalmente, quella verticale invece provoca un moto uniformemente accelerato, la distanza percorsa in verticale è proporzionale al quadrato del tempo impiegato a percorrerla, la combinazione dei due moti risulta in un arco di parabola.



Galileo, chiamò x la direzione orizzontale, ed y quella verticale, partendo da $(x, y) = (0, 0)$, e sapendo che lo spazio percorso in x è proporzionale ale tempo, mentre quello percorso in y è proporzionale al quadrato del tempo, si ha

$$x = a \cdot t \qquad y = b \cdot t^2$$

Con alcuni passaggi algebrici si trova esattamente la nota equazione della parabola

$$y = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$$

1.2 Spostamento, Velocità e Grandezze Fisiche

Il **moto**, è uno dei fenomeni fisici più classici, che necessita di una definizione e rappresentazione formale, è il cambiamento di una posizione rispetto al tempo.

Un classico esempio di sistema di riferimento è il piano cartesiano, in cui un punto nello spazio, è identificato da tre coordinate

$$(x(t), y(t), z(t))$$

In funzione del tempo t. Può essere rappresentato anche da un vettore posizione $\bar{r}(t)$, descritto dalla lunghezza e dagli angoli rispetto gli assi del piano e la proiezione delle sue componenti, nel caso bi-dimensionale, sia r il modulo del vettore $\bar{r}$:

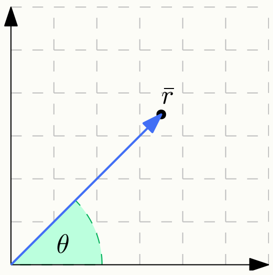


Figura 1.5: $\bar{r} = (r, \theta)$

Risulta possibile passare dalle coordinate cartesiane a quelle descritte con l'angolo tramite le seguenti trasformazioni

$$\begin{cases} r\cos(\theta) = x \\ r\sin(\theta) = y \end{cases}$$

Inoltre

$$r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = x^2 + y^2$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \arctan(y/x)$$

Le componenti di $\bar{r}$ dipendono dal sistema di riferimento. Posso definire uno *spostamento nel tempo*, tramite il vettore $\bar{r}$ in un istante t, ed il medesimo vettore in un istante $t+\Delta t$, dove Δt rappresenta una variazione temporale. Una volta definiti i vettori $\bar{r}(t)$ e $\bar{r}(t+\Delta t)$, si definisce il **vettore spostamento** come la loro differenza algebrica, ossia $\Delta\bar{r} = \bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)$.

Si vogliono rappresentare i vettori in maniera più formale, rispetto che alla classica notazione $\bar{v} = (x, y, z)$. Si fa uso dei versori

$$\bar{i} = (1,0,0) \qquad \bar{j} = (0,1,0) \qquad \bar{k} = (0,0,1)$$

per definire un vettore come somma dei versori scalati con appositi coefficienti, che rappresentano le componenti del vettore :

$$\bar{v} = (x, y, z) = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

Ogni componente della somma è la proiezione del vettore su uno dei tre assi. Si osservi come il vettore spostamente non dipende dal sistema di riferimento.

Il vettore spostamento $\Delta\bar{r}$ varia a sua volta nel tempo, descrivendo quindi il moto di un punto, la **velocità media** di tale spostamento si definisce tramite il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta\bar{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}$$

Si può definire anche la velocità media scalare, se lo spostamento avviene su un percorso già definito, e non è necessaria informazione sulla direzione, è possibile rappresentarlo con uno scalare $s(t)$, e $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ rappresenta la velocità media scalare.

La velocità media non è molto precisa come informazione, in quanto non descrive il moto di un corpo (la sua traiettoria) a pieno, si vuole quindi dare una misura di una velocità *istantanea*, si fa quindi tendere a zero la differenza di tempo :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}$$

Tale grandezza si denota $\dfrac{d\bar{r}}{dt}$, è la derivata dello spostamento rispetto al tempo, verrà nominata semplicemente **velocità**, e denotata $\bar{v}$, rappresenta lo spostamento istantaneo ed è tangente alla curva dello spostamento. Si definisce anche la velocità scalare $\dfrac{ds}{dt}$, ed è il modulo della velocità.

Una volta definite delle quantità come spostamento e velocità, è necessario definire delle *grandezze fisiche* ed introdurre delle *unità di misura*. Il vettore $\bar{r}$ ha le dimensioni di una lunghezza, la dimensione lunghezza $[l]$ è espressa in metri m, il sistema internazionale definisce

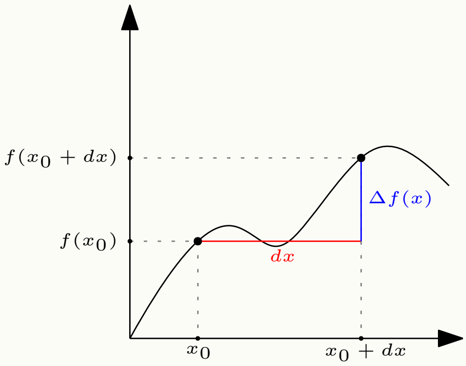
$$(m, kg, s) = \text{ (metri, kilogrammi, secondi)}$$

La dimensione del tempo $[t]$ è espressa in secondi s. Esistono alcune grandezze dette adimensionali, un esempio sono gli angoli, misurati in gradi o radianti.

La velocità, è una grandezza derivata, essendo un rapporto fra lo spostamento ed il tempo, si misura in metri al secondo : $^{m}/_{s}$, rappresenta, appunto la distanza in metri percorsa in 1 secondo. Le grandezze possono essere convertite, ad esempio, considerando i kilometri - orari si ha che

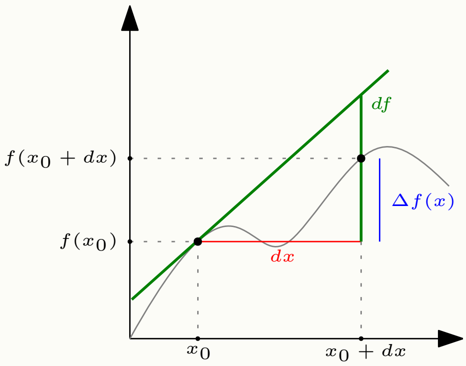
$$1^{m}/_{s} = \frac{10^{-3}}{^{1}/_{3600}}{}^{km}/_{h} = 10^{-3} \cdot 3600^{km}/_{h} = 3.6^{km}/_{h}$$

Introduciamo adesso il concetto di **differenziale**, si consideri una generica funzione $f(x)$ in un punto x_0, ed il suo rapporto incrementale per una variazione dx.



Il segmento denotato $\Delta f(x)$ rappresenta l'incremento effettivo della funzione, e vale $f(x_0 + dx) - f(x_0)$.

Definisco ora il **differenziale** di f come una **linearizzazione** della funzione, ossia, si considera nel punto x_0 una retta tangente alla curva di f.



Il differenziale df da una stima dell'incremento, considerando una funzione lineare (in questo caso bidimensionale, una retta).

Denotando con f' la derivata di f si ha

$$df = f' \cdot dx$$

$$\frac{df}{dx} = f'$$

Le funzioni lineari sono più semplici di quelle non lineari, il punto di tale differenziale è che, quando l'incremento dx tende a zero, l'incremento effettivo della funzione e l'incremento "stimato" dato dal differenziale tendono allo stesso valore.

$$\lim_{dx \to 0} f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot dx$$

CAPITOLO

2

CINEMATICA

Si è introdotto il vettore spostamento $\delta\bar{r}$, con la sua relativa formulazione infinitesima di velocità $\bar{v}$, come derivata del vettore posizione $\bar{r}$. Un'altra grandezza fondamentale nello studio del moto dei corpi è la variazione della velocità, definita come il limite del rapporto incrementale di quest'ultima rispetto al tempo. Tale grandezza prende il nome di **accelerazione**

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a}$$

L'accelerazione $\bar{a}$, o a se riferita ad una grandezza scalare, si misura in $^{m}/_{s^2}$, di cui l'unità, indica che ad ogni secondo, la velocità aumenta di $1^{m}/_{s}$, ovviamente anche'essa può dipendere dal tempo.

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

Si consideri adesso lo spostamento in forma scalare $s(t)$, definito su una traiettoria curvilinea già definita

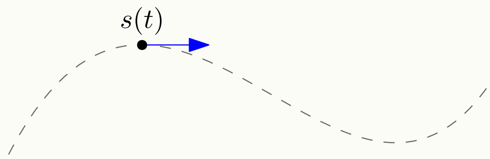


Figura 2.1: velocità scalare

Di quest'ultima ne voglio ricavare la sua versione vettoriale, sia $\bar{\tau}(t)$ il versore tangente alla curva prestabilita, nell'immagine 2.1, evidenziato in blu. Si avrà che la velocità vettoriale sarà

$$\bar{v}(t) = \dot{s}(t) \cdot \bar{\tau}(t)$$

Appunto sulla notazione : $\dot{s}$ è la derivata prima di s. $\ddot{s}$ è la derivata seconda di s. A questo punto è possibile riscrivere l'accelerazione nella seguente forma :

$$\bar{a} = \frac{d}{dt}\bar{v}(t) = \ddot{s}(t) \cdot \bar{\tau}(t) + \dot{s}(t) \cdot \dot{\bar{\tau}}(t)$$

Si è quindi divisa l'accelerazione in due componenti distinte, la componente $\ddot{s}(t) \cdot \bar{\tau}(t)$ è nota come **accelerazione tangenziale** e rappresenta la variazione nel tempo del modulo della velocità. L'altra componente, verrà ripresa in seguito, ha a che fare con la curvatura della traiettoria.

2.1 I Moti

2.1.1 Rettilineo Uniforme

Il moto rettilineo uniforme, secondo la legge d'Inerzia, descrive il moto naturale degli oggetti quando non sono soggetti a forze. Tale moto è contraddistinto dal fatto che l'accelerazione sia nulla, e la velocità costante, (per semplicità, verranno trattate le grandezze in forma scalare).

$$\frac{dv}{dt} = 0 \implies v = v_0 \text{ costante}$$

Si può ricavare facilmente l'equazione dello spostamento r in un lasso di tempo che va da t_0 fissato, ad un t generico

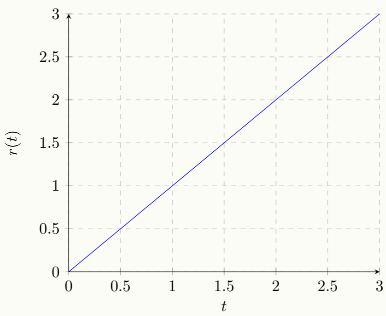
$$\frac{dr}{dt} = v = v_0 \implies dr = vd_0t \implies \int_{r(t_0)}^{r(t)} dr = \int_{t_0}^{t} v_0 dt$$

$$\int_{t_0}^{t} v_0 dt = v_0 \int_{t_0}^{t} dt = v_0(t - t_0)$$

Si ha che

$$r(t) = r(t_0) + v_0(t - t_0)$$

L'equazione che descrive il moto rettilineo uniforme è lineare



2.1.2 Uniformemente Accelerato

La caratteristica del moto uniformemente accelerato è quella di avere un accelerazione costante $a = a_0$, si avrà che

$$\frac{dv}{dt} = a_0 \implies dv = a_0 dt \implies \int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} a dt \implies$$

$$v(t) = v(t_0) + a_0(t - t_0)$$

Per semplicità, si definisce $v_0 = v(t_0)$ la velocità iniziale. A questo punto, avendo nota l'equazione della velocità, si ricava la legge oraria, sia $x_0 = x(x)$ la posizione iniziale

$$\frac{dx}{dt} = v \implies \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v dt = \int_{t_0}^{t} v_0 + a_0(t - t_0) dt = v_0 \int_{t_0}^{t} dt + a_0 \int_{t_0}^{t} (t - t_0) dt$$

Considero $t' = t - t_0 \implies dt' = dt$

$$v_0 \int_{t_0}^{t} dt + a_0 \int_{t_0}^{t} (t - t_0) dt = v_0 \int_{t_0}^{t} dt + a_0 \int_{0}^{t - t_0} t' dt' = v_0(t - t_0) + \left[\frac{1}{2} a_0 t'\right]_0^{t - t_0}$$

La soluzione oraria è quindi

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 \cdot (t - t_0)^2$$

Essa risulta essere l'equazione della parabola, nel caso più semplice in cui la posizione iniziale è 0, ed il tempo iniziale pure, si ha

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t$$

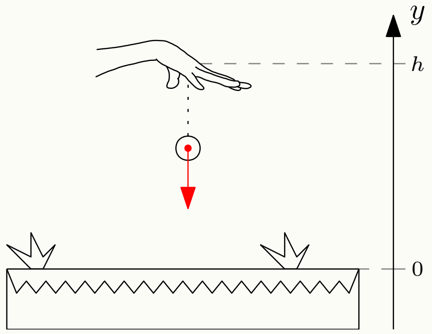
lo spazio percorso è proporzionale al tempo al quadrato.

2.1.3 Caduta dei Gravi

La caduta degli oggetti verso il suolo è descritta dal moto uniformemente accelerato. Ogni oggetto nel campo gravitazionale terrestre, all'altezza del mare, subisce un accelerazione di gravità pari a

$$g \simeq 9.81 {}^{m}/_{s^2}$$

diretta verso il centro della terra.



Definiamo un sistema di riferimento in cui il suolo rappresenta lo zero, ed un corpo viene lasciato cadere da un altezza h. Per semplicità, il tempo iniziale t_0 è uguale a 0.

La legge orario che descrive la posizione y dell'oggetto è la segunete

$$\begin{cases} y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = \dfrac{dy}{dt} = -gt \end{cases}$$

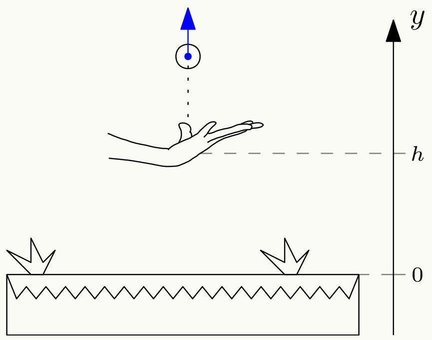
È possibile calcolare l'istante t^* in cui l'oggetto toccherà il suolo :

$$y(t^*) = 0 \implies h - \frac{1}{2}g{t^*}^2 = 0 \tag{2.1}$$

$$h = \frac{1}{2}g{t^*}^2 \tag{2.2}$$

$$2\frac{h}{g} = {t^*}^2 \tag{2.3}$$

$$t^* = \sqrt{2\frac{h}{g}} \tag{2.4}$$



Se l'oggetto venisse inizialmente lanciato verso l'alto, si avrebbe una velocità iniziale v_0 diversa da zero. La forza di gravità agirà sulla velocità dell'oggetto, facendola diminuire fino a farla diventare negativa, facendolo ricadere verso il suolo.

L'equazione oraria sarebbe

$$\begin{cases} y(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = \dfrac{dy}{dt} = v_0 - gt \end{cases}$$

È possibile trovare il punto più alto raggiunto dal grave, esso sarà il punto in cui la velocità passerà da essere positiva (l'oggetto si allontana dal suolo) ad essere negativa (l'oggetto si avvicina al suolo), raggiungerà quindi il punto più alto nell'istante t^* in cui la velocità è nulla.

$$v(t^*) = 0 \implies v_0 - gt^* = 0 \implies t^* = \frac{v_0}{g}$$

La quota massima raggiunta sarà quindi

$$t({}^{v_0}/_g) = h + v_0{}^{v_0}/_g - \frac{1}{2}g({}^{v_0}/_g)^2 = \tag{2.5}$$

$$h + \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0}{2g} = \tag{2.6}$$

$$h + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \tag{2.7}$$

È possibile riscrivere l'equazione del moto uniformemente accelerato in funzione dello *spazio percorso* partendo da un punto x_0

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v = v_0 + at \end{cases} \implies x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}(v - v_0)t \implies x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

2.1.4 Moto del Proiettile

Si vuole modellizzare la traiettoria di un proiettile, sparato con una certa angolazione, si considera quindi il piano cartesiano (x, y), e la legge oraria sarà descritta da un vettore $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$ che ne descrive lo spostamento sui due assi.

Il proiettile è soggetto a due forze, la prima è la velocità orizzontale, data al tempo t_0 dallo sparo, la seconda è l'accelerazione di gravità, che gli conferisce una velocità verticale uniformemente accelerata. Denotiamo v_x e v_y le due velocità, (x_0, y_0) la posizione iniziale, e (v_{y0}, v_{x0}) la velocità iniziale. Per semplicità, l'istante di inizio sarà 0.

$$\begin{cases} y(t) = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y(t) = v_{y_0} - gt \end{cases} \quad \text{verticalmente}$$

$$x(t) = x_0 + v_{x_0}t \text{ orizzontalmente}$$

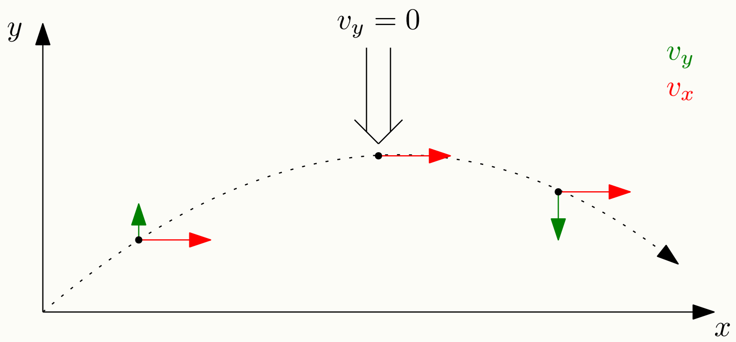


Figura 2.2: moto del proiettile

L'altezza massima si ha nell'istante t^* in cui $v_y(t^*) = 0 \implies t^* = \frac{v_{y_0}}{g}$. Con il termine *gittata*, si intende la distanza R percorsa dal proiettile orizzontalmente, essa è uguale a $R = v_{x_0} \cdot t_{tot}$, dove t_{tot} è l'istante in cui il proiettile raggiunge il suolo, terminando la traiettoria e vale $t_{tot} = 2\frac{v_{y_0}}{g}$.

$$R = v_{x_0} \cdot 2\frac{v_{y_0}}{g}$$

La velocità totale iniziale del proiettile, risulta essere

$$v_0 = \sqrt{v_{x_0}^2 + v_{x_y}^2}$$

Si può esprimere la gittata in funzione dell'angolo θ in cui si lancia il proiettile rispetto l'asse delle ascisse

$$R(\theta) = \frac{2v_0^2 \sin(\theta)\cos(\theta)}{g}$$

A tal punto, si vuole esprimere l'angolo θ che massimizza la gittata. Essendo che $R(\theta)$ descrive la variazione della gittata al variare di θ, è necessario trovare l'angolo in cui la derivata di R si annulla, si considera

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{2v_0^2}{g}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$$

Si pone a zero e si risolve per θ

$$\frac{2v_0^2}{g}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = 0 \implies \tag{2.8}$$

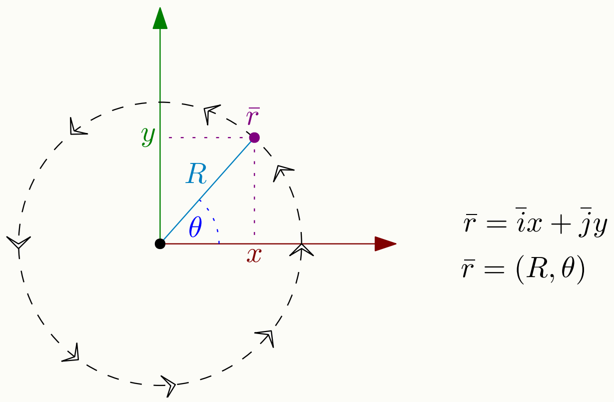
$$(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = 0 \implies \tag{2.9}$$

$$\cos^2(\theta) = \sin^2(\theta) \implies \tag{2.10}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} = 45° \tag{2.11}$$

2.1.5 Moto Circolare Uniforme

Si vuole descrivere il moto di un corpo, che rotea attorno ad un centro il cui modulo della velocità è costante. È importante specificare che il modulo sia costante, in quanto la velocità costante indica una non-variazione della direzione, invece nel moto circolare, la direzione cambia nel tempo, quindi vi sarà un accelerazione non nulla.



Sia $\bar{v}$ la velocità, essendo il modulo costante, denoteremo $|\bar{v}| = v_0$. Si considera ora la velocità scalare s, di cui si ricorda

$$\frac{ds}{dt} = v_0$$

Inoltre, sapendo che $\frac{s}{R} = \theta$, si pone

$$\frac{ds}{R} = d\theta \implies \frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{d\theta}{dt} = v_0$$

Denotiamo $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$, tale termine descrive la variazione dell'angolo nel tempo ed è denominato **velocità angolare**. Il fatto che la velocità dipenda dal raggio R, descrive il fatto che a parità di velocità angolare, un oggetto che si muove su un cerchio di raggio minore va meno veloce.

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \qquad \frac{ds}{dt} = R\omega \qquad v_0 = R\omega$$

La velocità angolare si misura in radianti al secondo, essendo i radianti adimensionali, l'unità di misura è $1/s = 1Hz$, detta anche *frequenza*. Si può esprimere anche $\omega = \frac{2\pi}{t}$ dove t rappresenta il tempo impiegato per fare un giro intero, detto anche *periodo*. Si pone la frequenza $\frac{1}{t} = \nu$ e si ha

$$\frac{2\pi}{t} 1/s = 2\pi\nu\ Hz$$

Si ha quindi la velocità angolare ω, si vuole però rappresentare il vettore velocità $\bar{v}$, serve prima definire il vettore velocità angolare $\bar{\omega}$, ossia un vettore il cui modulo è uguale alla velocità angolare

$$|\bar{\omega}| = \omega = \frac{v}{R}$$

Il vettore ω, essendo che deve rappresentare una rotazione, deve definire

- la velocità di rotazione
- il piano di rotazione
- il verso della rotazione

Un piano, può essere definito dal suo *vettore normale*, ossia il vettore ortogonale ai due vettori le cui combinazioni lineari generano tutti i punti del piano. Inoltre, il verso di tale vettore, definisce anche il verso di rotazione.

$$\bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{v}$$

rispetta infatti

$$|\bar{\omega} \times \bar{r}| = |\bar{v}| \implies \omega R = v$$

Si ricordi che il vettore spostamento si muove sempre sul cerchio di raggio R, per questo $\bar{r} = R$.

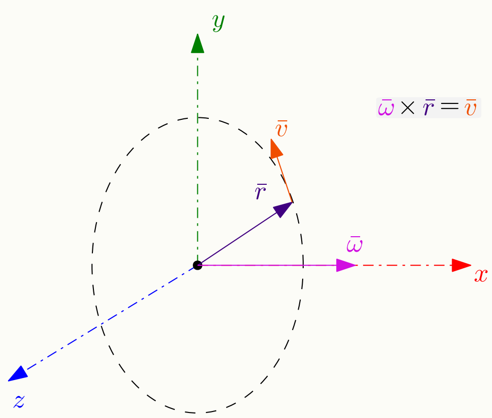


Figura 2.3: vettore velocità angolare

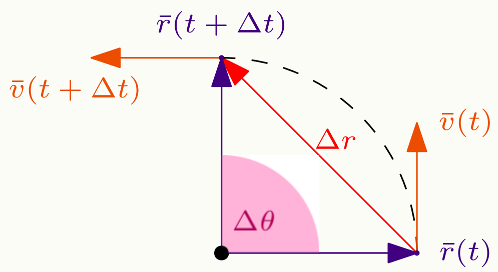
Per convenzione, la rotazione avviene in senso antiorario intorno al vettore, se lo si osserva dal punto diretto dal suo verso.

Una volta stabilito il vettore velocità, si vuole trovare l'accelerazione, derivandola

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$$

Definiamo $\Delta\theta$ l'angolo formato dal vettore $\bar{r}(t+\Delta t)$ con il vettore $\bar{r}(t)$, definisce la variazione dell'angolo nel tempo, è chiaro che se $\Delta t \to 0$ allora $\Delta\theta \to 0$.

Differentemente, il vettore $\Delta\bar{v} = \bar{v}(t+\Delta t) - \bar{v}(t)$, tende a puntare al centro del cerchio attorno a cui il punto rotea. Trovata la sua direzione, se ne vuole stabilire l'intensita, ossia il suo modulo $|\bar{a}| = a$.



Se Δt tende a zero, l'arco di curva è approssimabile ad una retta fra i due punti, che sappiamo essere di lunghezza $|\Delta\bar{r}| = \Delta r$, inoltre, il rapporto fra quest'ultimo ed il raggio è proprio uguale all'angolo, quindi

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{R} = \Delta\theta$$

Inoltre, anche considerando il vettore $\Delta\bar{v}$, esso rispetto al vettore velocità permette di trovare il medesimo angolo

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{v}}{v} = \Delta\theta$$

Quindi

$$|\Delta\bar{v}| = v\Delta\theta = \frac{\Delta r}{R}v$$

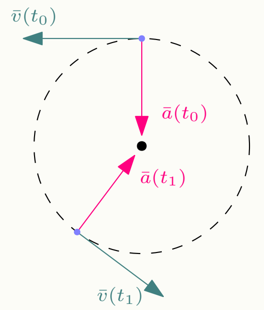
Indicando con v il modulo di $\bar{v}$, si ha che

$$a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v}{R}\frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Appare come secondo termine proprio la derivata dello spostamento

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v}{R}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v}{r}(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}) \implies$$

$$|\bar{a}| = a = \tfrac{v^2}{R} = \omega^2 R$$



Si ricordi come il vettore accelerazione può essere scritto come somma di due componenti che rappresentano l'accelerazione tangenziale, ossia la variazione del modulo della velocità, e **l'accelerazione normale**, che descrive il variare della direzione della velocità. Nel caso del moto rettilineo uniforme, l'accelerazione ha componente tangenziale nulla, è solo normale e diretta verso il centro del cerchio, ed ha intensità $\frac{v^2}{R}$.

Quando un moto di un punto $\bar{r}$ segue una traiettoria curva (ma non circolare uniforme), preso un istante fissato t_0, l'accelerazione normale è diretta verso il centro del cerchio che approssima la curva nell'istante dato e che contenga $\bar{r}(t_0)$, come mostrato in figura 2.5.

A tal punto è possibile descrivere un moto qualsiasi definendo la sua accelerazione normale e tangenziale. Il moto circolare uniforme è il particolare caso in cui l'accelerazione tangenziale è nulla.

$$\begin{cases} \bar{v}(t) = \bar{\omega}(t)\times\bar{r}(t) \\ \bar{a}_t(t) = \frac{d\bar{\omega}}{dt}(t)|\bar{r}|(t) \text{ accelerazione tangenziale} \\ \bar{a}_n(t) = \frac{\bar{v}(t)^2}{\bar{r}(t)} \text{ accelerazione normale} \end{cases}$$

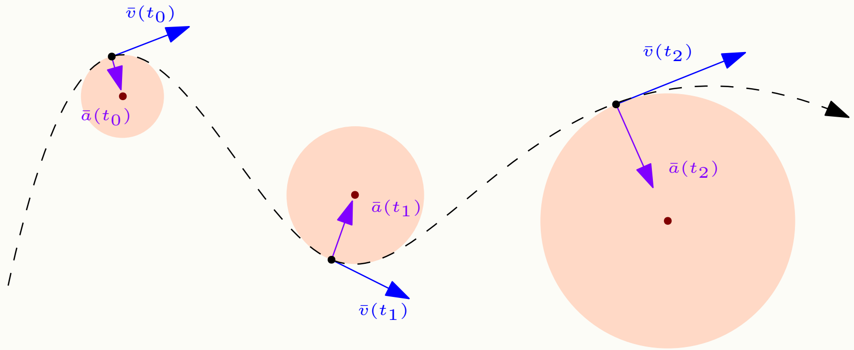


Figura 2.4: Cerchio osculatore

2.1.6 Moto Armonico

Il moto armonico vuole descrivere il comportamento oscillatorio e periodico di un punto. Si può descrivere come la proiezione su uno degli assi del moto circolare uniforme.

$$x(t) = R\cos(\theta(t)) = R\cos(\omega t)$$

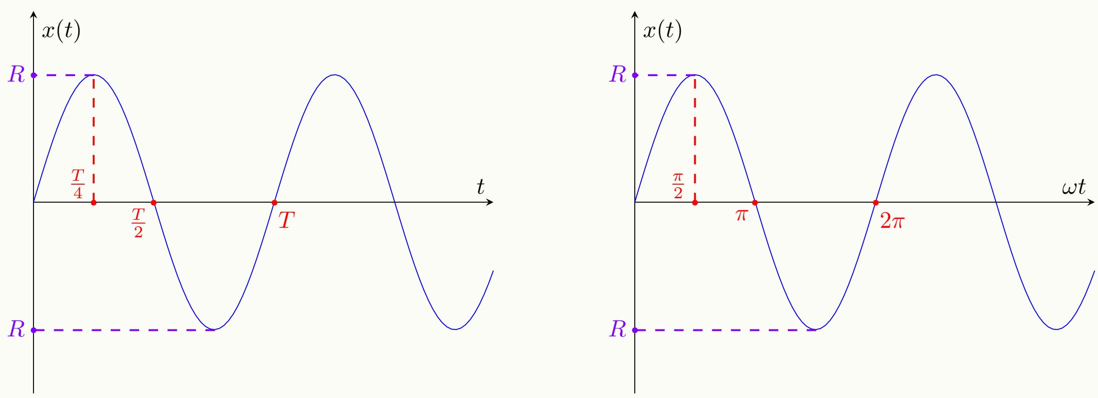


Figura 2.5: $x(t) = R\cos(\omega t)$

La costante R si chiama *ampiezza* del moto, mentre ω si chiama *pulsazione*. La funzione x del moto è armonica di periodo T, ossia $x(t+T) = x(t)$. Essendo che l'argomento della funzione trigonometrica deve variare di 2π si ha

$$\omega(t+T) - \omega t = 2\pi \implies \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Si definisce $\nu = \frac{1}{T}$ una nuova grandezza denominata *frequenza* di moto.

Si vuole trovare la velocità, ossia

$$v(t) = \frac{d}{dt}R\cos(\omega t) = -R\omega\sin(\omega t)$$

La velocità massima si ha in $-R\omega\sin(\omega t) = 0 \implies \sin(\omega t) = 0$, ossia nei punti in cui x incontra l'asse delle ascisse. L'accelerazione vale

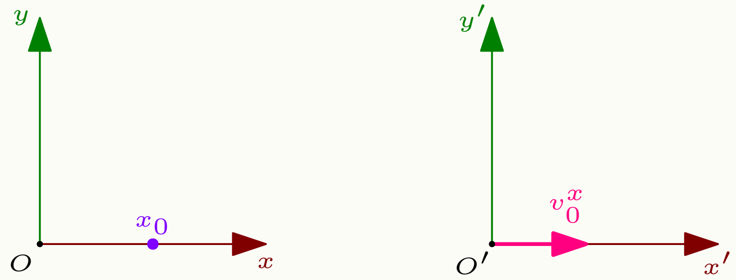
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} - R\omega\sin(\omega t) = -R\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 x(t)$$

Si noti come l'accelerazione dipende dalla posizione, la sua forza è proprio opposta ad essa, si dice infatti che il moto oscillatorio è dettato da una *forza di richiamo*.

2.2 Moti Relativi

La velocità è relativa, le caratteristiche di un punto sono legate al suo sistema di riferimento, e al suo sistema di coordinate. Il moto di un punto può essere osservato diversamente da due sistemi di riferimento differenti.

Si considerino due sistemi di riferimento O e O', per semplicità, siano il piano cartesiano, di cordinate (rispettivamente) x, y e x', y'. Supponiamo inoltre, che all'origine dei tempi, essi si trovino nella stessa posizione, e che il sistema O' si muova con velocità costante $\bar{v} = (v_0^x, 0)$.



Vi è poi un punto nello spazio, che secondo il sistema di riferimento O, è fermo, ed ha cordinate x_0. Si vuole trovare tale punto nel sistema di riferimento O'. Tale sistema, si allontana da O ad una velocità costante v_0^x, intuitivamente, avendo O una velocità "assoluta" nulla, vedrà allontanarsi il punto x_0 a velocità v_0^x. La velocità è de facto relativa al sistema di riferimento, non esiste quindi una velocità assoluta, ma si sceglie arbitrariamente un sistema di riferimento da considerare fisso, l'altro sistema sarà detto "mobile", ed il moto in esso, sarà detto "relativo".

$$x_0' = x_0 - v_0^x t$$

In generale, la formula per il *passaggio di coordinate* è la seguente

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \\ t \end{cases} \implies \begin{cases} x' = x - v_0^x t \\ y' = y - v_0^y t \\ z' = z - v_0^z t \\ t' = t \text{ il tempo è assoluto} \end{cases}$$

Dove $\bar{v}_0 = (v_0^x, v_0^y, v_0^z)$ è la velocità del secondo sistema di riferimento.

Il moto del punto nel sistema di riferimento fisso, visto dal sistema di riferimento relativo, è detto *moto di trascinamento*, nell'esempio trattato, tale moto è una traslazione, si dice infatti moto di trascinamento traslatorio. Denoteremo

$\bar{v}_a$ velocità assoluta
$\bar{v}_r$ velocità relativa
$\bar{v}_t$ velocità traslatoria

$$\bar{v}_a(t) = \bar{v}_r(t) + \bar{v}_t \qquad \textbf{composizione delle velocità}$$

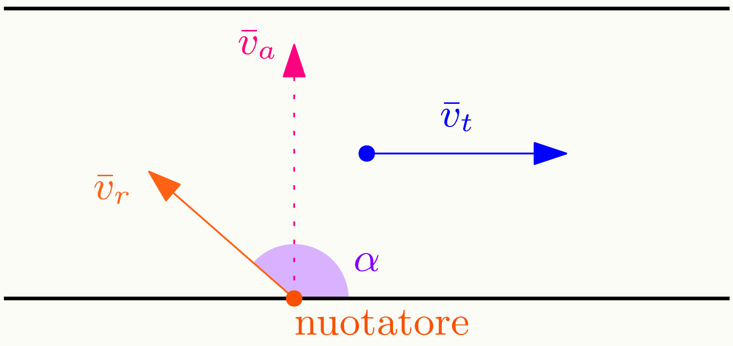
Ne consegue che

$$a_a(t) = \frac{d}{dt}v_a(t) = \frac{d}{dt}v_r(t) + v_t = a_r$$

Se la velocità è costante, l'accelerazione assoluta, come quella relativa risulterà nulla, in tale configurazione il sistema è detto **inerziale**.

Esempio (nuotatore) : Si consideri un fiume in cui una corrente spinge chiunque vi sia all'interno con una velocità costante $\bar{v}_t$, un nuotatore, vuole attraversare il fiume in linea retta, la sua velocità è $\bar{v}_r$, tale che $|\bar{v}_r| > |\bar{v}_t|$.

Partendo da una sponda, il nuotatore deve decidere in che direzione nuotare per far si che la sua velocità si bilanci con la corrente del fiume, facendo risultare il suo moto assoluto $\bar{v}_a$ in modo che attraversi il fiume in linea retta.



Si vuole trovare l'angolo α fra la velocità relativa e quella di trascinamento per far si che la velocità assoluta sull'asse delle parallelo alle sponde sia nulla.

$$v_r \sin(\alpha) = -v_t \implies \alpha = -\arcsin(\frac{v_t}{v_r})$$

Si consideri ora un sistema non inerziale, ossia in cui la velocità di trascinamento dipende dal tempo

$$\bar{v}_a(t) = \bar{v}_r(t) + \bar{v}_t(t)$$

Ne consegue che l'accelerazione di trascinamento non è nulla.

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c$$

Il termine $\bar{a}_c$ risulta ambiguo, essa è detta *forza di Coriolis*, è una forza apparente (si tratteranno in seguito), e si manifesta quando il sistema di riferimento sta ruotando, si ha che

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$$

Dove $\bar{\omega}$ è il vettore velocità angolare del sistema in rotazione. Un tipico esempio di manifestazione di tale accelerazione è il seguente : Ci si trova su una giostra che sta ruotando, si lancia un oggetto davanti a se, la traiettoria di tale oggetto non sarà dritta come voluto, ma curverà verso l'esterno della giostra.

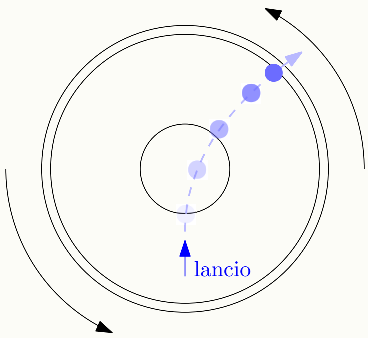


Figura 2.6: Forza di Coriolis