Metodi Matematici per l'Informatica - Dispensa 4
(a.a. 22/23, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (`lorenzo.carlucci@uniroma1.it`)

1 Combinazioni Semplici: esempi e osservazioni

Esempio 1 *In un gruppo di* 80 *individui vogliamo scegliere un gruppo di* 4 *rappresentanti. In quanti modi posso farlo? Questo è il tipico esempio di applicazione diretta del concetto di combinazione semplice. Basta osservare che non ci interessa l'ordine dei rappresentanti (hanno tutti lo stesso titolo) ma ci interessa solo chi sono i componenti. La risposta è dunque* $C_{80,4} = \binom{80}{4}$.

Esempio 2 *Consideriamo un campionato di calcio cui partecipano 20 squadre. Quante partite si giocano nel campionato, considerando il normale schema di andata e ritorno?*

Possiamo osservare che ogni scelta di una coppia non ordinata di due squadre $\{s_1, s_2\}$ *tra le 20 possibili determina esattamente 2 partite (una di andata e una di ritorno). Le coppie non ordinate di due squadre sono esattamente i sottinsiemi di ordine 2 dell'insieme delle squadre. Dunque il numero di partite è*

$$C_{20,2} \times 2 = \frac{20 \times 19}{2} \times 2 = 20 \times 19.$$

Si osserva facilmente che 20×19 *è anche il numero di disposizioni semplici di 2 elementi scelti tra 20, ossia* $D_{20,2}$. *In questo caso infatti si può ragionare anche usando le disposizioni semplici: vogliamo contare le* coppie ordinate (s_1, s_2) *di squadre. Molto spesso i problemi di Combinatoria hanno diverse soluzioni possibili a seconda di come* concettualizziamo *la soluzione.*

Esempio 3 *Sappiamo già contare le sequenze ordinate di 8 numeri distinti scelti tra 1 e 15. Cosa cambia se vogliamo contare le sequenze ordinate strettamente crescenti di 8 numeri distinti scelti tra 1 e 15? Anche se la domanda parla di sequenze ordinate (e quindi saremmo inclini a usare il concetto di disposizione) un momento di riflessione ci assicura che in questo caso l'ordine conta solo apparentemente: una scelta di 8 numeri distinti tra 1 e 15 dà luogo (determina) una unica sequenza ordinata strettamente crescente. Dunque quello che ci interessa veramente contare sono le scelte di 8 elementi distinti tra 1 e 15, ossia i sottinsiemi di 8 elementi scelti tra 15. La risposta è dunque* $C_{15,8}$.

Esempio 4 *Quante sono le delegazioni di 4 individui tra cui un portavoce (o capogruppo)?*

Soluzione 1 *Scelgo i 4 membri della delegazione e tra essi un capogruppo (4 scelte di un capogruppo). Per il PM ho*

$$\binom{80}{4} \times 4.$$

Soluzione 2 *Scelgo 1 capogruppo tra gli 80 membri totali (80 scelte) e poi scelgo i rimanenti 3 membri della delegazione. Per il PM ho:*

$$80 \times \binom{79}{3}.$$

Dimostrazione per doppio conteggio Dato che entrambe le soluzioni dell'ultimo esempio qui sopra sono corrette, posso dedurre:

$$\binom{80}{4} \times \binom{4}{1} = \binom{80}{1} \times \binom{79}{3},$$

come si verifica anche facendo i calcoli.

Proviamo a generalizzare, ponendo: n invece di 80, m invece di 4. Otteniamo

$$\binom{n}{m} \times m = n \times \binom{n-1}{m-1}.$$

Posso dire che questa equazione vale in generale (per $n \geq m > 0$)? Un modo di verificarlo è procedere all'inverso di quanto abbiamo fatto sopra, ossia mostrare che l'espressione a sinistra dell'$=$ e quella a destra *contano la stessa quantità*. L'espressione a sinistra conta i modi di scegliere una delegazione di m tra n e in essa un capogruppo (scegliendo prima gli m membri della delegazione e poi il capogruppo tra essi). Ma anche l'espressione a destra conta i modi di scegliere una delegazioni di m tra n e in essa un capogruppo: si sceglie prima un capogruppo tra tutti gli individui e poi i tre restanti membri della commissione. Dunque le due espressioni sono identiche per tutte le scelte delle variabili. Vedremo più avanti che è un caso particolare di una identità ancora più generale.

Questo metodi di dimostrare una identità tra due formule dimostrando che contano la stessa quantità viene detta *dimostrazione per doppio conteggio*.

Abbiamo osservato che l'identità seguente può dimostrarsi per doppio conteggio.

$$\binom{n}{m} \times m = n \times \binom{n-1}{m-1}.$$

Riscriviamola come segue

$$\binom{n}{m} \times \binom{m}{1} = \binom{n}{1} \times \binom{n-1}{m-1}.$$

Proviamo a generalizzare ulteriormente sostituendo a 1 una variabile k. Otteniamo:

$$\binom{n}{m} \times \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{m-k}.$$

Questa identità è ancora vera (per $n \geq m \geq k > 0$?).

Esercizio: trovare una interpretazione tale che le due quantità a destra e a sinistra dell'equazione di sopra contino lo stesso insieme di oggetti (= dimostrare l'identità per doppio conteggio).