Metodi Matematici per l'Informatica - Dispensa 10
(a.a. 22/23, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (lorenzo.carlucci@uniroma1.it)

1 Iniezioni, Suriezioni, Biiezioni

Esempio 1. Consideriamo la funzione $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ così definita:

$$f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{se } x \text{ è pari} \\ x-3 & \text{se } x \text{ è dispari} \end{cases}$$

Consideriamo prima l'iniettività. La funzione f è iniettiva se e solo se due elementi distinti del dominio hanno immagini distinte, ossia: per ogni $x, y \in \mathbf{Z}$, se $x \neq y$ allora $f(x) \neq f(y)$. Ragioniamo **per casi**: $x \neq y$ si verifica nei seguenti casi:

- Caso 1: x pari e y dispari.
- Caso 2: x pari e y pari.
- Caso 3: x dispari e y dispari.

Se riusciamo a dimostrare che nei tre casi abbiamo $f(x) \neq f(y)$ allora abbiamo dimostrato che f è iniettiva. (NB: A differenza di quando tipizziamo un insieme di soluzioni per un problema di conteggio, nel **ragionamento per casi** non è necessario che i casi siano esclusivi. L'importante è che siano esaustivi!).

Caso 1: Se x è pari allora $f(x) = x+1$ è dispari; se y è dispari allora $f(y) = y-3$ è pari. Dunque abbiamo $f(x) \neq f(y)$ e la tesi è dimostrata per questo caso.

Caso 2: Se x e y sono pari, allora $f(x) = x + 1$ e $f(y) = y + 1$. Per ipotesi $x \neq y$, e dunque ovviamente $x + 1 \neq y + 1$. La tesi è dimostrata per questo caso.

Caso 3: Se x e y sono dispari, allora $f(x) = x - 3$ e $f(y) = y - 3$. Per ipotesi $x \neq y$ e dunque $x - 3 \neq y - 3$. La tesi è dimostrata per questo caso.

Concludiamo che la tesi è dimostrata per ogni $x \neq y$ nel dominio.

Consideriamo la suriettività. In generale possiamo concettualizzare una dimostrazione di suriettività come segue: un avversario sceglie a piacere un elemento w nel codominio di f. Noi dobbiamo essere in grado di rispondere con un elemento x nel dominio di f tale che $f(x) = w$. Risulta utile provare alcuni casi per farsi un'idea della forma generale della risposta:

- L'avversario ci dà $w = -17$. Si tratta di un numero dispari, dunque so già che devo cercare un intero x pari (per come è definita f). Inoltre deve valere $f(x) = w$ e dato che x è pari questo significa $x+1 = -17$. Scelgo dunque $x = w - 1$.
- L'avversario ci dà $w = 102$. Si tratta di un numero pari, dunque so già che devo cercare un intero x dispari come pre-immagine. Inoltre deve valere $f(x) = 102$ e dato che x è dispari questo significa $x - 3 = 102$. Scelgo dunque $x = w + 3$.
- L'avversario ci dà $w = 0$. Si tratta di un numero pari, dunque so già che devo cercare un intero x dispari come pre-immagine. Inoltre deve valere $f(x) = 0$ e dato che x è dispari questo significa $x - 3 = 0$. Scelgo dunque $x = w + 3$.

- Etc.

Una volta che mi sono fatto un'idea della soluzione posso organizzare come segue la dimostrazione: dato $w \in \mathbf{Z}$, se w è dispari allora la sua pre-immagine è $w - 1$; se w è pari allora la sua pre-immagine è $w + 3$. Dunque f è suriettiva.

La Proposizione seguente ci dice come l'applicazione di una funzione iniettiva interagisce con l'intersezione.

Proposizione 1. *Sia $f : I \to O$ una funzione, e siano $A, B \subseteq I$ due sottinsiemi del dominio. Se f è iniettiva allora:*

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare una identità tra due insiemi, ossia $f(A \cap B)$ e $f(A) \cap f(B)$. Procediamo dimostrando le due inclusioni:

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B),$$

e

$$f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B).$$

Cominciamo dalla prima. Sia $z \in f(A \cap B)$. Per definizione di immagine di $A \cap B$ via f significa che esiste un w in $A \cap B$ tale che $f(w) = z$. Ma allora di certo esiste un $w \in A$ tale che $f(w) = z$ ed esiste un $w' \in B$ tale che $f(w') = z$ (basta scegliere lo stesso elemento). Dunque z appartiene all'immagine di A via f e z appartiene all'immagine di B via f. Abbiamo così dimostrato che $z \in f(A) \cap f(B)$.

Dimostriamo la seconda implicazione. Sia $z \in f(A) \cap f(B)$. Allora $z \in f(A)$ e $z \in f(B)$. Da $z \in f(A)$ deduciamo che esiste un $w \in A$ tale che $f(w) = z$. Da $z \in f(B)$ deduciamo che esiste un $w' \in B$ tale che $f(w') = z$. A questo punto – in generale – non possiamo dedurre che w e w' sono lo stesso elemento! Ma abbiamo ipotizzato che f è iniettiva, il che significa che $f(w) = f(w')$ implica necessariamente $w = w'$. Esiste dunque un elemento simultaneamente in A e in B la cui immagine è z. Dunque $z \in f(A \cap B)$ come richiesto.

QED

Osservazione 1. L'inclusione $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$ non vale in generale. Sia f non iniettiva, e siano $x \neq x'$ nel dominio di f tali che $f(x) = f(x')$ (diciamo che x, x' *testimoniano* la non iniettività di f). Ponendo $A = \{x\}$ e $B = \{y\}$ abbiamo che $f(x) \in f(A) \cap f(B)$ ma $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$.

Osservazione 2. La dimostrazione dell'implicazione $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$ per una funzione f generica si blocca quando vogliamo passare da

1. Esiste $w \in A$ tale che $f(w) = x$ **e** Esiste $w' \in B$ tale che $f(w') = x$, a
2. Esiste $w \in A \cap B$ tale che $f(w) = x$.

Infatti il primo punto può valere anche se $w \in A$ e $w' \in B$ sono due elemeti distinti e tali che $w \notin B$ e $w' \notin A$. L'impossibilità di dedurre (2) da (1) dimostrata da questo esempio indica che in generale non si può dedurre l'esistenza di un elemento che soddisfa la congiunzione di due proprietà P e Q dall'ipotesi che esista un elemento che soddisfa P e un elemento che soddisfa Q.

Esercizio 1. *Vale il viceversa della Proposizione precedente? Ossia, se $f : I \to O$ è tale che* per ogni coppia di sottinsiemi *$A, B \subseteq I$ vale l'identità $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ è vero che f è necessariamente iniettiva?*

Esempio 2. Sia $f : I \to O$ una funzione e siano $A, B \subseteq O$ due sottinsiemi del dominio. A quali condizioni vale

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)?$$

Consideriamo la possibile inclusione

$$f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B).$$

Scriviamo le definizioni dei vari insiemi coinvolti:

- $f(A \cup B) = \{z \in O : \text{ esiste } x \in A \cup B \in I \text{ t.c. } f(x) = z\}$
- $f(A) = \{z \in O : \text{ esiste } x \in A \text{ t.c. } f(x) = z\}$.
- $f(B) = \{z \in O : \text{ esiste } x \in B \text{ t.c. } f(x) = z\}$.
- $f(A) \cup f(B) = \{z \in O : (\text{esiste } x \in A \text{ t.c. } f(x) = z) \text{ oppure } (\text{esiste } x \in B \text{ t.c. } f(x) = z)\}$.

Dimostrare l'inclusione consiste nel considerare un arbitrario $z \in f(A \cup B)$ e dimostrare che $z \in f(A) \cup f(B)$. Sia dunque $z \in f(A \cup B)$. Per definizione esiste $x \in A \cup B \in I$ t.c. $f(x) = z$. $x \in A \cup B$ vale sse $x \in A$ oppure $x \in B$. Questo dà luogo naturalmente a un **ragionamento per casi**: se dimostriamo che in entrambi i casi z è anche in $f(A) \cup f(B)$ abbiamo fatto. Se $x \in A$ e $f(x) = z$ allora *a fortiori* (a maggior ragione) vale $x \in A \cup B$ e $f(x) = z$. Dunque $z \in f(A) \cup f(B)$. Se $x \in B$ e $f(x) = z$ allora *a fortiori* (a maggior ragione) vale $x \in A \cup B$ e $f(x) = z$. Dunque $z \in f(A) \cup f(B)$.

Consideriamo la possibile inclusione

$$f(A \cup B) \supseteq f(A) \cup f(B).$$

Consideriamo un arbitrario $z \in f(A) \cup f(B)$. Per definizione significa che $z \in f(A)$ oppure $z \in f(B)$ (o entrambe). Anche in questo caso abbiamo naturalmente un **ragionamento per casi**. Se $z \in f(A)$ allora esiste $x \in A$ tale che che $f(x) = z$. Dunque (a fortiori) esiste $x \in A \cup B$ tale che $f(x) = z$. Dunque $z \in f(A \cup B)$. Se $z \in f(B)$ allora esiste $x \in B$ tale che che $f(x) = z$. Dunque (a fortiori) esiste $x \in A \cup B$ tale che $f(x) = z$. Dunque $z \in f(A \cup B)$.

2 Composizione di funzioni

Comporre funzioni significa applicarle in sequenza. Per esempio, comporre la funzione $n \mapsto n+1$ alla funzione $n \mapsto n^2$ significa $n \mapsto n+1 \mapsto (n+1)^2$. Affinché questo sia possibile deve valere che l'output della prima funzione rientri tra i possibili argomenti della seconda (ossia sia parte del dominio della seconda). In questo caso è facile osservare che l'associazione risultante è anch'essa una funzione.

Definizione 1 (Funzione composta)**.** *Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni. La* funzione composta *di f e g è la funzione $h : X \to Z$ definita ponendo: per ogni $x \in X$, $h(x) = g(f(x))$. La funzione composta si denota con $g \circ f$.*

Osservazione 3. Si noti che la definizione sopra è ben posta: ogni elemento di X ha una immagine via $g \circ f$ perché ogni elemento di X ha una immagine in Y via $f : X \to Y$ e ogni elemento di Y ha una immagine in Z via $g : Y \to Z$ (questo giustifica la convenienza di definire una funzione in modo che sia definita su tutto il dominio).

Osservazione 4. Qui sopra abbiamo considerato le funzioni $s : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definita come $s(n) = n+1$ e la funzione $q : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definita come $q(n) = n^2$ e abbiamo descritto la loro composizione come la funzione risultante dall'applicazione prima di s e poi di q. Questa funzione si comporta così:

$$n \mapsto (n+1)^2.$$

Da questo esempio si vede facilmente che nelle composizioni *l'ordine conta*: se infatti componiamo s e q applicando prima q e poi s otteniamo una funzione diversa, che si comporta così:

$$n \mapsto n^2 + 1.$$

La composizione di funzionio **non è commutativa**.

Esercizio 2. *Verificare che la composizione di funzioni è associativa. Se $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ e $h : Z \to W$ sono funzioni allora la funzione composta $((f \circ g) \circ h)$ è identica alla funzione composta $(f \circ (g \circ h))$.*

La seguente Proposizione ci dice quando le proprietà di iniettività, suriettività e biiettività sono preservate dalla composizione.

Proposizione 2. *Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni.*

1. *Se f e g sono iniettive allora $(g \circ f)$ è iniettiva.*
2. *Se f e g sono suriettive allora $(g \circ f)$ è suriettiva.*
3. *Se f e g sono biiettive allora $(g \circ f)$ è biiettiva.*

Dimostrazione.

Cominciamo con il punto (1). Supponiamo che f e g siano entrambe iniettive. Dobbiamo dimostrare che la composta $(g \circ f)$ è iniettiva. Per definizione questo significa che non esistono due elementi distinti del dominio X che hanno come immagine lo stesso elemento del codominio Z. Ragioniamo **per assurdo**: supponiamo che esista un elemento del codominio $z \in Z$ tale che esistono due distinti elementi del dominio $x \neq x' \in X$ che vengono entrambi mappati in z dalla funzione composta $(g \circ f)$ e cerchiamo di dimostrare una contraddizione. In questo caso avremmo stabilito la verità desiderata. Questo significa che

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$$

che per definizione della composta significa che

$$g(f(x)) = g(f(x')).$$

Dato che g è iniettiva per ipotesi, se g mappa gli elementi $f(x)$ e $f(x')$ del suo dominio Y nello stesso elemento del codominio Z, deve essere necessariamente $f(x) = f(x')$.

Dato he f è iniettiva per ipotesi, se f mappa gli elmenti x e x' del suo dominio X nello stesso elemento del codominio Y, deve essere necessariamente $x = x'$. Ma questo contraddice l'ipotesi che x e x' siano distinti. Abbiamo raggiunto una contraddizione. Dunque $(g \circ f)$ è iniettiva.

Dimostriamo il punto (2). Dobbiamo dimostrare che ogni elemento del codominio Z è immagine via $(g \circ f)$ di almeno un elemento del dominio X. Procediamo a ritroso: scegliamo un arbitrario $z \in Z$. Dato che $g : Y \to Z$ è suriettiva per ipotesi esiste $y \in Y$ tale che $g(y) = z$. Sia y_0 un tale y. Dato che $f : X \to Y$ è suriettiva per ipotesi esiste un $x \in X$ tale che $f(g(y_0)) = z$. Sia x_0 un tale x. Abbiamo dunque dimostrato che esiste un $x \in X$ tale che $(g \circ f)(x) = z$.

Dimostriamo il punto (3). Segue immediatamente dai due punti precedenti!

QED

Esercizio 3. *Se la composta $g \circ f$ è iniettiva, cosa posso dire di f e di g?*

Esercizio 4. *Se la composta $g \circ f$ è suriettiva, cosa posso dire di f e di g?*