Esercizio 1. Siano X, Y due variabili aleatorie discrete. Per $y \in \mathrm{Im}(Y)$ sia $\mathbb{E}(X|y)$ il valore di attesa di X condizionato a $Y = y$ (il valore di attesa per la distribuzione di X condizionata a $Y = y$). Dimostrare che

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} \mathbb{P}(Y = y)\, \mathbb{E}(X|y).$$

1) $\sum_{y\in \mathrm{Im} Y} \mathbb{P}(Y=y)\cdot \mathbb{E}(X|y) = \sum_{y\in \mathrm{Im} Y} \mathbb{P}(Y=y)\cdot \sum_{x\in \mathrm{Im} X} x\cdot \mathbb{P}(X=x|Y=y) = \sum_{y\in Y} \mathbb{P}(Y=y)\cdot \sum_{x\in X} x\cdot \frac{\mathbb{P}(X=x \cap Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}$

$= \sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} x\cdot \mathbb{P}(Y=y)\cdot \frac{\mathbb{P}(X=x\cap Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)} = \sum_{y\in Y}\sum_{x\in X} x\cdot \mathbb{P}(X=x\cap Y=y) = \sum_{x\in X} x\cdot \sum_{y\in Y} \mathbb{P}(X=x\cap Y=y) = \sum_{x\in X} x\cdot \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{E}(X)$ ■

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria gaussiana con valore di attesa 2 e varianza 25. Rispondere alle seguenti domande utilizzando le tavole dell'integrale gaussiano.

1) Calcolare $\mathbb{P}(|X-2| \geq 7)$.
2) Calcolare $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 7)$.
3) Determinare α tale che $\mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq 0.1$.

Come prima cosa NORMALIZZO la variabile: $Z = \frac{X-2}{\sqrt{25}} = \frac{X-2}{5} \Rightarrow X = 5Z+2$

1) $\mathbb{P}(|X-2|\geq 7) = \mathbb{P}(|5Z| \geq 7) = \mathbb{P}(|5Z|\geq 7) = 2\cdot \mathbb{P}(Z > \frac{7}{5}) = 2[1-\mathbb{P}(Z<\frac{7}{5})] = 2-\phi(\frac{7}{5}) \simeq 0.16$

2) $\mathbb{P}(0\leq X\leq 7) = \mathbb{P}(X>0)\cdot\mathbb{P}(X<7) = \mathbb{P}(5Z+2>0)\cdot\mathbb{P}(5Z+2<7) = \mathbb{P}(Z>-\frac{2}{5})\cdot\mathbb{P}(Z<1) = \mathbb{P}(Z<\frac{2}{5})\cdot\mathbb{P}(Z<1) \simeq 0.6\cdot 0.8 = 0.48$

3) $\mathbb{P}(X>\alpha)\leq 0.1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(5Z>\alpha-2)\leq 0.1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(Z>\frac{\alpha-2}{5})\leq 0.1 \Leftrightarrow 1-\mathbb{P}(Z<\frac{\alpha-2}{5})\leq 0.1$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(Z<\frac{\alpha-2}{5})\geq 0{,}9 \Leftrightarrow \frac{\alpha-2}{5}\geq 1{,}29 \Leftrightarrow \alpha\geq 5\cdot(1{,}29)+2 \Leftrightarrow \alpha\geq 8.45$ CIRCA

Esercizio 3. Le sfere di acciaio prodotte dalla ACME devono avere un diametro di 5 mm. Sono tuttavia accettabili sfere di diametro compreso tra 4 mm e 6 mm. Si assuma che i diametri delle sfere prodotte siano variabili aleatorie gaussiane indipendenti di media 5 mm e varianza 0.25 mm^2.

1) Quale percentuale dei pezzi prodotti non rispetta i limiti di tolleranza?
2) Potendo ricalibrare di produzione, modificando la varianza delle sfere, si determini il valore massimo della varianza per cui la percentuale di pezzi che non rispettano i limiti di tolleranza è inferiore all'1%.

$X\sim \mathcal{N}(5,(\frac{1}{4})) \Rightarrow Z = \frac{X-5}{1/2} = 2\cdot X-10 \Rightarrow X = \frac{1}{2}Z+5$

1) $\mathbb{P}(X<4)+\mathbb{P}(X>6) = \mathbb{P}(Z<-2)+\mathbb{P}(Z>2) = (1-\mathbb{P}(Z<2))+(1-\mathbb{P}(Z<2)) = 2-2\mathbb{P}(Z<2) = 2-2\cdot\phi(2)\simeq 0{,}04 = 4\%$

2) $X\sim\mathcal{N}(5,\sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-5}{\sigma} \Rightarrow X = Z\cdot\sigma+5$

$\mathbb{P}(X<4)+\mathbb{P}(X>6) = \mathbb{P}(Z\cdot\sigma<-1)+\mathbb{P}(Z\sigma>1) = 2\cdot[\mathbb{P}(Z<\frac{1}{\sigma})]$

RISOLVO per σ : $2\cdot[\mathbb{P}(Z<\frac{1}{\sigma})] < 0.01 \Leftrightarrow \mathbb{P}(Z<\frac{1}{\sigma}) < 0.005 \Leftrightarrow \phi(\frac{1}{\sigma}) < 0.005$

Esercizio 4. Per trasmettere un bit da una sorgente A a una ricevente B tramite una coppia di fili elettrici, si applica una differenza di potenziale di $+2$ V per il valore 1 e di -2 V per il valore 0. A causa di disturbi elettromagnetici, se A applica $\mu = \pm 2$ V , B legge $X = \mu + Z$, dove Z rappresenta il rumore, descritto da una variabile aleatoria gaussiana di media 0 e varianza 1 V^2. Dalla lettura di X, B decodifica il messaggio con la seguente regola: se $X \geq 0.5$ V si decodifica 1, mentre se $X < 0.5$ V si decodifica 0.

1) Se A invia 0, calcolare la probabilità che B decodifichi 1.
2) Se A invia 1, calcolare la probabilità che B decodifichi 0.

Si supponga ora che A invii 0 o 1 con la stessa probabilità.

3) Calcolare la probabilità che B decodifichi 1.
4) Se B ha decodificato 1 calcolare la probabilità che la decodifica corrisponda al messaggio inviato.

1) Voglio calcolare la probabilitá che $X = -2+Z\geq 0.5 \Rightarrow Z\geq 2.5$: $\mathbb{P}(Z\geq 2.5) = 1-\mathbb{P}(Z<2.5) = 1-\phi(\frac{5}{2}) = 0.0062$

2) $X = 2+Z < 0.5 \Rightarrow Z<-\frac{3}{2} \Rightarrow \mathbb{P}(Z<-\frac{3}{2}) = 1-\mathbb{P}(Z<\frac{3}{2}) = 1-0.9332 = 0{,}0668$

3) $\mathbb{P}(\text{B legge } 1) = \frac{1}{2}\cdot\mathbb{P}(\text{INVIA } 1 \wedge \text{RICEVE } 1) + \frac{1}{2}\cdot\mathbb{P}(\text{INVIA } 0\wedge\text{RICEVE } 1) = \frac{1}{2}\cdot 0.9932+\frac{1}{2}\cdot 0.0062 = \frac{0.9932+0.0062}{2} = \frac{0.9994}{2}\simeq\frac{1}{2}$

4) $\mathbb{P}(\text{A INVIA } 1|\text{B RICEVE } 1) = \frac{\mathbb{P}(\text{A INVIA } 1)\mathbb{P}(\text{B RICEVE } 1|\text{A INVIA } 1)}{\mathbb{P}(\text{B RICEVE } 1|\text{A INVIA } 1)\cdot\mathbb{P}(\text{A INVIA } 1)+\mathbb{P}(\text{B RICEVE } 1|\text{A INVIA } 0)\cdot\mathbb{P}(\text{A INVIA } 0)}$

$= \frac{(\frac{1}{2})\cdot 0.9332}{(\frac{1}{2})\cdot 0.9332+(\frac{1}{2})\cdot 0.0062} \simeq \frac{\frac{0.9932}{2}}{1/2} = 0.9932$

Esercizio 5. Due dadi equilibrati vengono lanciati 300 volte. Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di volte che si è ottenuto un doppio uno.

1) Calcolare $\mathbb{E}(X)$ e $\mathbb{V}(X)$.

2) Utilizzando l'approssimazione gaussiana, calcolare la probabilità di ottenere un doppio uno più di 10 volte.

Si consideri ora il caso in cui i due dadi vengono lanciati n volte.

3) Utilizzando l'approssimazione gaussiana, determinare quanto grande debba essere n affinché la probabilità di ottenere un doppio uno almeno 10 volte sia maggiore di 1/2.

1) $\mathbb{P}(\{\text{Su un lancio, otteng 2 uno}\}) = 1/36 \Rightarrow X \sim \text{binom}(300, 1/36) \Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \binom{300}{k}\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^k\cdot\left(\frac{35}{36}\right)^{300-k}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{300} i\cdot\binom{300}{i}\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^i\cdot\left(\frac{35}{36}\right)^{300-i} = 300!\cdot\left(\frac{35}{36}\right)^{300}\cdot\sum_{i=0}^{300} i\cdot\frac{1}{i!\,(300-i)!}\cdot\frac{1}{36^i}\cdot\frac{1}{(35/36)^i} \overset{\text{WOLFRAM}}{=} \frac{25}{3}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left[X-\frac{25}{3}\right]^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2 - X\frac{50}{3} + \left(\frac{25}{3}\right)^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \frac{50}{3}\mathbb{E}(X) + \left(\frac{25}{3}\right)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \frac{50\cdot 25}{9} + \frac{25^2}{9} = \mathbb{E}(X^2) - \frac{625}{9}$$

$$= 300!\left(\frac{35}{36}\right)^{300}\cdot\sum_{i=0}^{300}\frac{i^2}{i!\,(300-i)!\,36^i\left(\frac{35}{36}\right)^i} - \frac{625}{9} \overset{\text{WOLFRAM}}{\simeq} 8.101$$

2) Considero $X : \left(\frac{25}{3}, 8\right) \Rightarrow Z = \frac{X - 25/3}{\sqrt{8}} \Rightarrow X = \sqrt{8}Z + \frac{25}{3}$

tavola

$$\mathbb{P}(X > 10) = \mathbb{P}\left(\sqrt{8}\,Z + \frac{25}{3} > 10\right) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{5}{\sqrt{8}\cdot 3}\right) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{5}{6\sqrt{2}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{5}{\sqrt{2}\cdot 6}\right) \simeq 1 - \phi(0.5892) \simeq 1 - 0.719 = 0{,}281$$