La sommatoria

Il simbolo della sommatoria è questo $\sum_{k=0}^{n} ak$, ed il suo valore equivale alla somma di tutti i valori di a con k, da 0 fino a k=n

Esempio :

$$\sum_{k=0}^{3} k \times 2 = 0 \times 2 + \ 1 \times 2 + 2 \times 2 + 3 \times 2$$

La sommatoria di un numero elevato a k segue una regola specifica :

$\sum_{k=1}^{n} q^k \ = \ \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ Dove $n \ \neq 0$ se q = 1 il risultato della sommatoria sarà n+1

Dal momento che il valore ha come divisore 1-q, possiamo direttamente moltiplicare la sommatoria per 1 – q

$$(1-q) \times \sum_{k=1}^{n} q^k \ = \ 1 - q^{n+1}$$

Esempio:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

Un'altra regola generale vale per le potenze di un binomio :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} \times a^{n-k} \ \times b^k$$

Ricordiamo che $C_{n,k} \ = \ \frac{n!}{k!(n-k!)}$

Quindi la formula completa risulterebbe :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times a^{n-k} \ \times b^k$$

Dimostrazione per induzione

La dimostrazione per induzione prevede una tesi come una proposizione vera P(n) per ogni $n \in NUMERI\ NATURALI$

Prendiamo un teorema come esempio :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Per dimostrarlo seguiamo 2 passi, prima si verifica che P(n) sia vera per n = 1. Poi si suppone per ipotesi un certo valore di n, se P(n) è vera, si prova che sia vero anche per P(n+1).

Testiamo i vari casi :

$$n = 1 \quad \frac{1(1+1)}{2} = \sum_{k=1}^{1} k$$

$$\frac{2}{2} = 1$$

Il primo caso è vero. Ora implichiamo che n sia uguale a 2 :

$$n = 2 \quad \frac{2(2+1)}{2} = \sum_{k=1}^{2} k$$

$$\frac{6}{2} = 1 + 2$$

Anche questo caso è vero, ora proviamo con P(n+1), quindi n sarà uguale a 3 :

$$n = 3 \quad \frac{3(3+1)}{2} = \sum_{k=1}^{3} k$$

$$\frac{12}{2} = 1 + 2 + 3$$

Anche questo caso è vero, la dimostrazione per induzione è riuscita e la tesi è corretta.