**Esercizio 1**

Si vuole procedere al dimensionamento e bilanciamento di una linea di trasferta costituita da $N$ macchine che devono eseguire su un prodotto un numero complessivo di 12 lavorazioni $\{a, b, c, \ldots, n\}$. Le durate delle singole lavorazioni sono riportate in Tab. 1, assieme ai vincoli tecnologici di precedenza tra le lavorazioni stesse. In un ciclo continuo di 24h di funzionamento della linea, occorre produrre 144 unità del prodotto.

| **lavorazione** | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** | ***e*** | ***f*** | ***g*** | ***h*** | ***i*** | ***l*** | ***m*** | ***n*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **durata** [minuti] | 5 | 3 | 4 | 3 | 6 | 5 | 2 | 6 | 1 | 4 | 4 | 7 |
| **lavorazioni precedenti** | – | $a$ | $b$ | $a$ | $d$ | $c,e$ | $f$ | $g$ | $f$ | $f$ | $l$ | $h,i,m$ |

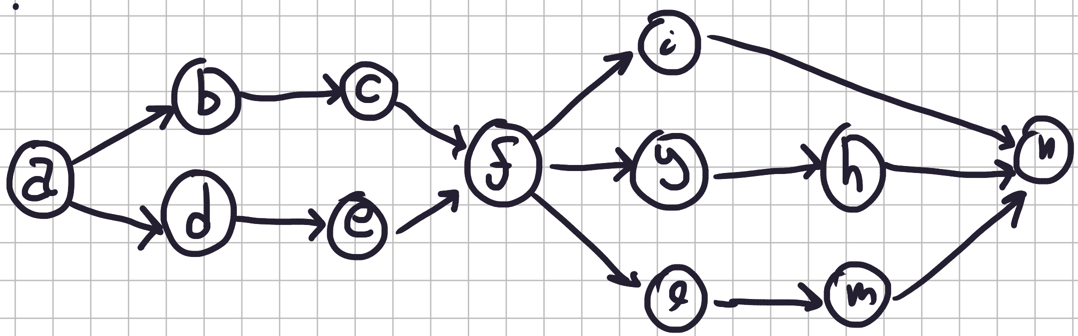
- Qual è il numero minimo teorico $N_t$ di macchine necessarie per soddisfare il tasso di produzione richiesto?
- Costruire il grafo delle precedenze tra lavorazioni.
- Determinare un'assegnazione ammissibile delle lavorazioni alle macchine della linea in modo da ottenere un numero minimo $N^*$ di macchine che soddisfano tutte al vincolo sul carico massimo teorico, usando se necessario l'euristica RPWT.
- Qual è lo sbilanciamento medio (in durata e in percentuale rispetto al carico massimo teorico)?
- In assenza di buffer intermedi, qual è il minimo tempo di avanzamento sincrono della linea?

$$p = \frac{144}{24} = 6 \ \frac{\text{pezzi}}{\text{ora}} \qquad T_a = 0.8\bar{3} \ \text{ore}$$

$$WIP = 6 \cdot 0.8\bar{3} = 5 \qquad CMT = \frac{1}{p} = \frac{1}{6} \ \frac{\text{ore}}{\text{pezzo}}$$

ogni macchina opera per al più 10 minuti

Grafo:




| a | b | c | d | e | f | g | h | i | m | l | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 36 | 33 | 38 | 35 | 29 | 15 | 13 | 8 | 11 | 15 | 7 |

CMT = 10 min

ordine $\underline{a}$ $\underline{d}$ $\underline{b}$ $\underline{e}$ $\underline{c}$ $\underline{f}$ $\underline{g}$ $\underline{l}$ $\underline{h}$ $\underline{m}$ $\underline{i}$ n

| Stazioni | | | Sbilanc. |
|---|---|---|---|
| 1 | $a^{5}$ | $d^{3}$ | 2 |
| 2 | $b^{3}$ | $e^{6}$ | 1 |
| 3 | $c^{4}$ | $f^{5}$ | 1 |
| 4 | $g^{2}$ | $l^{4}$ | 4 |
| 5 | $h^{6}$ | $m^{4}$ | 0 |
| 6 | $i^{1}$ | $n^{7}$ | 2 |

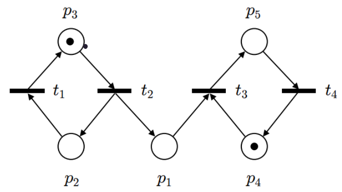
$N^* = 6$ num. minimo macchine

$$\text{Sbil. medio} = \frac{10}{6} \simeq 1.6 \ \text{min}$$

16%

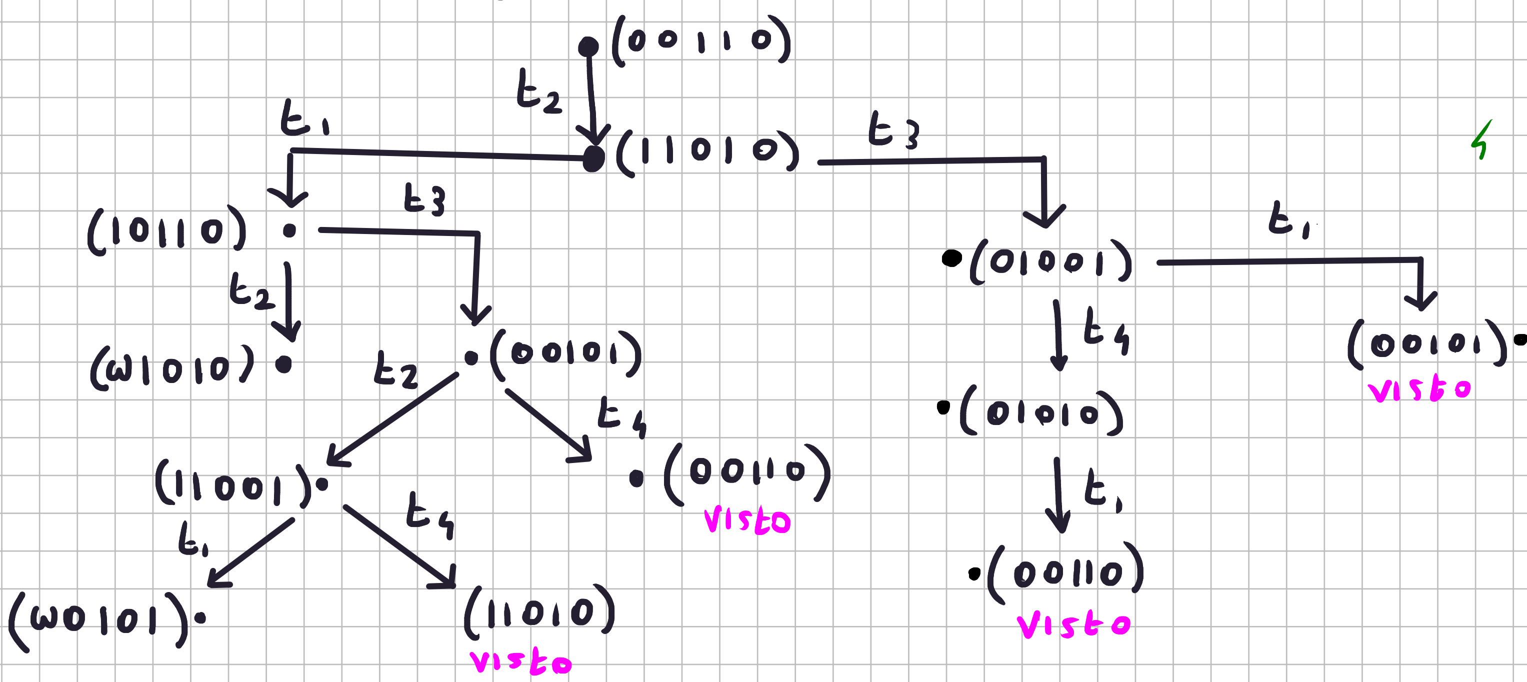
**Esercizio 2**

Si consideri la rete di Petri $PN$ in Fig. 1, con la marcatura iniziale $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$.

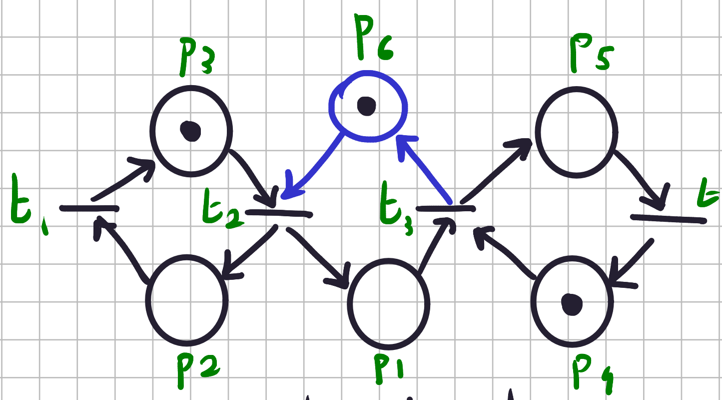



- Verificare se $PN$ è $k$-limitata o meno, costruendo l'albero di raggiungibilità (o di copertura).
- Progettare un supervisore in modo che il numero di token nel posto $p_1$ sia sempre al più pari a 1 e non ci siano situazioni di deadlock.
- Per la rete supervisionata $PN_s$ così ottenuta:
  - verificare se la rete è in una classe più ristretta di quella generale delle reti di Petri posti-transizioni;
  - determinare tutti i P-invarianti minimi (ossia a supporto minimo e canonico) e i T-invarianti;
  - fornire l'insieme di tutte le soluzioni delle equazioni di invarianza e individuare la sua relazione con l'insieme delle marcature raggiungibili $\mathcal{R}(PN_s)$;
  - costruire l'albero di raggiungibilità (o di copertura);
  - concludere sulla vivezza, reversibilità, esistenza di cicli conservativi e limitatezza della rete $PN_s$.

## Albero di raggiungibilita'




## Supervisore per $x(p_1) \leq 1$




tale rete e' ordinaria
e' un Marked Graph
ogni posto ha al piu'
una transizione in ingresso.

Matrice di incidenza: $C = O - I$

$$C = \begin{array}{c|cccc|} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ p_1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ p_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ p_3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ p_4 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ p_5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ p_6 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$C^T = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$x_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$C^T x = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{cases} -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_6 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 = 0 \\ \lambda_4 - \lambda_5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_3 = \lambda_2 \\ \\ \lambda_1 = \lambda_6 \\ \lambda_4 = \lambda_5 \end{cases} \qquad \lambda = [a\ b\ b\ c\ c\ a] \quad a, b, c \in \mathbb{N}$$

P invarianti minimi :

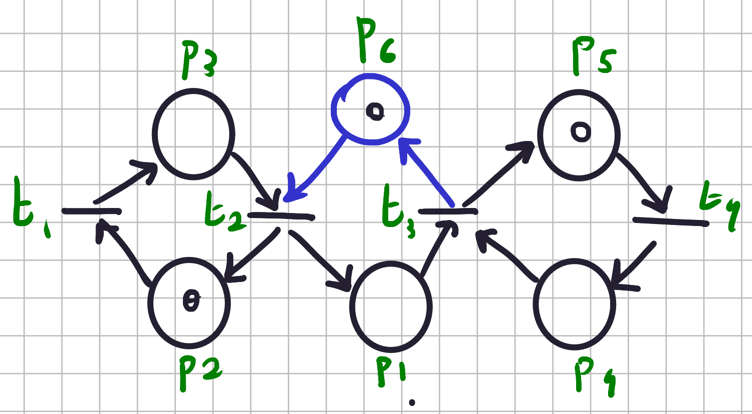
$\lambda_1 = [1\,0\,0\,0\,0\,1]$ $\quad \lambda_2 = [0\,1\,1\,0\,0\,0]$ $\quad \lambda_3 : [0\,0\,0\,1\,1\,0]$

eq. invarianza per $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

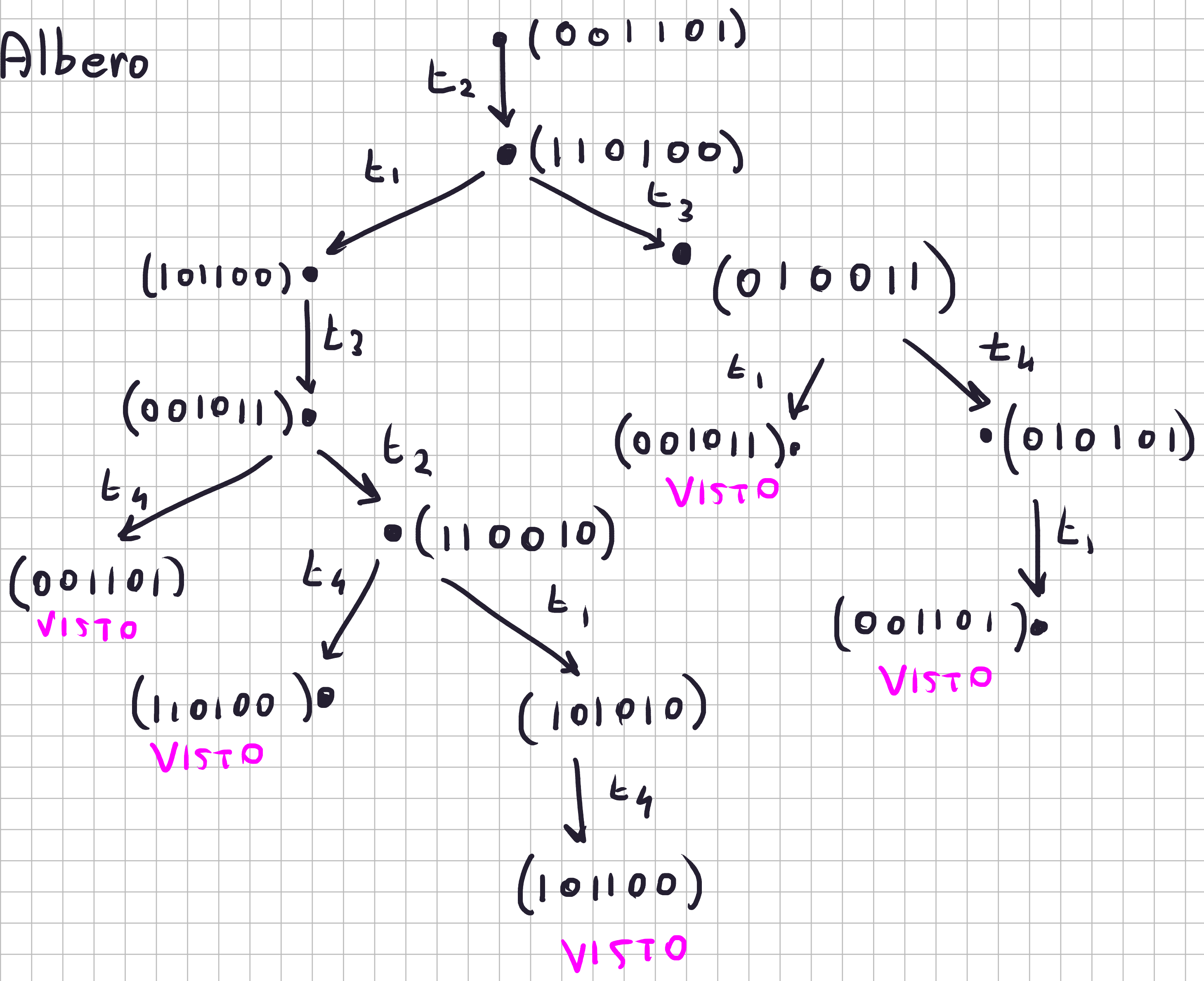
$$\sum_{i=1}^{6} x(p_i) = 3$$ la rete e' conservativa

$$I_x(PN) = \left\{ \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{vmatrix} ; \ a+b+c+d+e+f = 3 \right\}$$

$$R(PN) = \left\{ \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \dots \right\} \subseteq I_x(PN)$$



# Albero




VIVO : SI

REV : SI

LIMITATO : SI

## T-Invarianti

$$C = \begin{array}{c|cccc|} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ p_1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ p_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ p_3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ p_4 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ p_5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ p_6 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$C\eta = 0 \quad \begin{cases} \lambda_2 = \lambda_3 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 \end{cases} \Rightarrow \eta = \begin{vmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{vmatrix} \quad a \in \mathbb{N}$$

$$\eta = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

**Esercizio 4**

La funzione di trasferimento tra il comando di corrente $u$ di un motore elettrico con costante di conversione corrente-coppia $k > 0$ e la velocità $y$ di una massa $m > 0$ da esso movimentata in presenza di attrito viscoso con coefficiente $d > 0$ è data da

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k}{ms + d}.$$

Progettare un regolatore di velocità che annulli l'errore a regime quando il riferimento $y_d$ è costante, sintonizzando i suoi guadagni con il 1° metodo di Ziegler-Nichols. Nel caso di andamento della velocità desiderata $y_d(t)$ variabile nel tempo, progettare l'aggiunta di un'azione di feedforward sul comando di corrente che fornisca, in condizioni nominali, errore di inseguimento della velocità sempre nullo. *[Opzionale: Ripetere il progetto del feedforward se si vuole modificare solo il riferimento esterno all'anello di controllo.]*

$$u \rightarrow \boxed{\frac{K}{ms+d}} \rightarrow y \qquad y(s) = \frac{1}{s}\,\frac{K}{ms+d} = \frac{K}{ms^2+ds}$$

$$y(t) = \frac{K}{d}\left(1 - e^{-\left(\frac{d}{m}\right)t}\right)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{K}{d}\,\frac{d}{m}\,e^{-\left(\frac{d}{m}\right)t} = \frac{K}{m}\,e^{-\frac{d}{m}t}$$

per $t \to \infty$, $\dot{y} \to 0 \Rightarrow \dot{y}(t)$ e' massima in $t = 0 \Rightarrow \dot{y}(0) = \frac{K}{m}e^{0} = \frac{K}{m}$

retta tangente $= \frac{K}{m}t$ incrocia $0$ in $t=0$

incrocia $\frac{K}{d}$ in $t'$, $\frac{K}{m}t' = \frac{K}{d} \Rightarrow t' = \frac{m}{d}$

$$\Theta = 0 \qquad \tau = \frac{m}{d} \qquad K = \frac{K}{d}$$