Esercizio 3. Sia $A \neq \emptyset$ un insieme e $R_1, \ldots, R_n$ relazioni su A. Dimostrare che

$$(R_1 \cap \ldots \cap R_n)^{-1} = R_1^{-1} \cap \ldots \cap R_n^{-1}.$$

se $(a,b) \in R_i \Rightarrow (b,a) \in R_i^{-1}$.

se $(a,b) \in R_K$ e $(a,b) \in R_i \Rightarrow (a,b) \in R_K \cap R_i \Rightarrow$

$\Rightarrow (b,a) \in (R_K \cap R_i)^{-1} \Rightarrow (b,a) \in R_K^{-1}$ e $(b,a) \in R_i^{-1}$.

Esercizio 4. Siano R_1 e R_2 relazioni sull'insieme A. Dimostrare che se ambedue R_1 e R_2 sono di equivalenza, allora $R_1 \cap R_2$ è pure di equivalenza.

$R_1 \cap R_2$ e' RIFLESSIVA perche':

$\forall a \in A$, $(a,a) \in R_1$ e $(a,a) \in R_2 \Rightarrow (a,a) \in R_1 \cap R_2$ $\forall a \in A$.

$R_1 \cap R_2$ e' SIMMETRICA perche':

se $(a,b) \in R_1 \Rightarrow (b,a) \in R_1$

$\forall a,b \in A \mid$ se $(a,b) \in R_1$ oppure $(a,b) \in R_2$, SICURAMENTE

$(b,a) \in R_1$ oppure $(b,a) \in R_2$, quindi, $\forall a,b \in A$,

se $(a,b) \in R_1$ e R_2, anche $(b,a) \in R_1$ e R_2,

quindi se $(a,b) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (b,a) \in R_1 \cap R_2$

Esercizio 5. In generale l'unione di due relazioni di equivalenza **non** è di equivalenza: si esibisca un esempio.

$R_1 = \{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a)\}$

$R_2 = \{(c,c),(c,b),(b,b),(b,c)\}$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix}(a,b)\\(b,c)\end{matrix}\right\} \in R_1 \cup R_2$ MA $(a,c) \notin R_1 \cup R_2$

$R_1 \cup R_2$ NON E' TRANSITIVA

Esercizio 6. Sull'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali si consideri la relazione R così definita:

$$(a,b) \in R \Leftrightarrow a+b=2$$

Descrivere R e dire se è vuota, riflessiva, simmetrica, transitiva.

$R = \{(0,2),(2,0),(1,1)\}$ R NON È VUOTA

R NON È RIFLESSIVA PERCHE' $(2,0) \in R$ MA $(2,2) \notin R$

R È SIMMETRICA DATO CHE $\forall (a,b) \in R \; \exists (b,a) \in R$

$(2,0) \in R$ $\quad$ $(0,2) \in R$

R È TRANSITIVA, LA CONDIZIONE DI TRANSITIVITA' NON È CONFUTATA.