Metodi Matematici per l'Informatica - Dispensa 19
(a.a. 22/23, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (`lorenzo.carlucci@uniroma1.it`)

Espressività della Logica Proposizionale

Vogliamo usare la Logica Proposizionale per giudicare in modo rigoroso (e per quanto possibile automatizzabile) della valitdità di argomenti e della verità di proposizioni. Ma che tipo di argomenti e che tipo di proposizioni possiamo formalizzare nel linguaggio proposizionale?

Abbiamo definito la nozione fondamentale di conseguenza logica di una proposizione da un numero finito di premesse:

$$A_1, \ldots, A_n \models A.$$

La validità di un argomento formalizzato come questo può essere – per il momento – verificata in tre modi:

1. Verificando se un assegnamento α soddisfa **tutte** le premesse $A_1, \ldots, A_n$, allora α soddisfa la conclusione A, secondo la definizione di $\models$.

2. Verificando che la formula $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to A$ è in `TAUT` (usando la tavola di verità).

3. Verificando che la formula $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge (\neg A)$ è in `UNSAT` (usando la tavola di verità).

Inoltre, se procediamo come al punto (3), possiamo scrivere la formula in CNF e applicare Risoluzione per decidere se è soddisfacibile o no.

Vediamo alcuni esempi di problemi che si possono formalizzare in Logica Proposizionale e tradurre in domande riguardanti la soddisfacibilità (o insoddisfacbilità), la tautologia o la conseguenza logica.

Esempio 1. Semplici argomenti verbali. La logica proposizionale si presta bene anche a a formalizzare argomenti verbali.

1. Se studi e sei intelligente allora superi l'esame.

2. Se sei intelligente allora studi.

3. Non superi l'esame.

4. Sei scemo.

Come si formalizza? Le parti atomiche in questo caso sono (studi), (sei intelligente), (superi l'esame). Possiamo infatti assumere che (sei scemo) equivalga a (non sei intelligente). Associamo p_1 a (studi), p_2 a (sei intelligente), p_3 a (superi l'esame). L'argomento si formalizza così.

(i) $(p_1 \wedge p_2) \to p_3$.

(ii) $p_2 \to p_1$.

(iii) $\neg p_3$.

(iv) $\neg p_2$.

Possiamo valutarne validità in tre modi:

1. Verificando se ogni assegnamento che soddisfa $(p_1 \wedge p_2) \to p_3$, $(p_2 \to p_1)$ e $\neg p_3$ soddisfa anche $\neg p_2$.
2. Verificando se la singola proposizione
$$((p_1 \wedge p_2) \to p_3 \wedge (p_2 \to p_1) \wedge \neg p_3) \to \neg p_2)$$
è una tautologia.
3. Verificando se la singola proposizione
$$((p_1 \wedge p_2) \to p_3 \wedge (p_2 \to p_1) \wedge \neg p_3 \wedge \neg\neg p_2)$$
è una formula insoddisfacibile.

In tutti e tre i casi è possibile rispondere usando le tavole di verità.

In alternativa possiamo ragionare ad alto livello sulla definizione di conseguenza logica: supponiamo per assurdo che esista un assegnamento α che soddisfa le premesse $(p_1 \wedge p_2) \to p_3$, $(p_2 \to p_1)$ e $\neg p_3$ e non soddisfa la conseguenza, ossia $\alpha(\neg p_2) = 0$. Dato che $\alpha(\neg p_3) = 1$ abbiamo $\alpha(p_3) = 0$. Dato che $\alpha((p_1 \wedge p_2) \to p_3) = 1$ e $\alpha(p_3) = 1$ deve necessariamente valere $\alpha(p_1 \wedge p_2) = 0$ (altrimenti l'implicazione sarebbe di tipo $1 \to 0$, che vale 0). D'altro canto abbiamo $\alpha(\neg p_2) = 0$ e dunque $\alpha(p_2) = 1$. Dunque deve valere $\alpha(p_1) = 0$ (altrimenti la congiunzione $p_1 \wedge p_2$ sarebbe vera). Ma il fatto che $\alpha(p_1) = 0$ e $\alpha(p_2) = 1$ contraddice l'ipotesi che $\alpha(p_2 \to p_1) = 1$. Dunque non può esistere un α come ipotizzato. Dunque l'argomento è valido.

Esempio 2 (Colorabilità di Grafi)**.** Consideriamo il problema: si può colorare la mappa in figura usando due colori (Rosso e Blu) rispettando il vincolo che due stati adiacenti hanno colori diversi?

Per iniziare, consideriamo il sottoproblema relativo alla sotto-mappa M contenente soltanto Italia, Austria e Ungheria. Dichiariamo il seguente linguaggio proposizionale: le variabili proposizionali sono $I_R, I_B, A_R, A_B, U_R, U_B$ e il loro significato intuitivo è I_R = l'Italia è rossa, I_B = l'Italia è blu, etc.

Per esprimere il vincolo che ogni nazione riceve almeno un colore scriviamo:
$$(1) \quad (I_R \vee I_B) \wedge (A_R \vee A_B) \wedge (U_R \vee U_B)$$
Per esprimere il vincolo che ogni nazione riceve al più un colore scriviamo:
$$(2) \quad (I_R \to \neg I_B) \wedge (A_R \to \neg A_B) \wedge (U_R \to \neg U_B).$$
Per esprimere il vincolo che nazioni confinanti hanno colori diversi, scriviamo:
$$(3) \quad (I_R \to \neg A_R) \wedge (I_B \to \neg A_B) \wedge (A_R \to \neg U_R) \wedge (A_B \to \neg U_B).$$
Osserviamo che questa proposizione dipende dall'istanza del problema in questione ossia dai confini presenti nella mappa.

Ovviamente l'insieme di proposizioni (teoria) appena descritto *dipende* dalla mappa M. Intuitivamente questa teoria formalizza adeguatamente il problema della 2-colorazione per la mappa M.

Tecnicamente questo significa che l'insieme delle proposizioni scritte sopra è in `SAT` se e soltanto se la mappa di Italia, Austria e Ungheria è 2-colorabile (ossia colorabile in 2 colori rispettando il vincolo).

Supponiamo infatti che sia 2-colorabile. Allora esiste un assegnamento di colori Rosso, Blu a Italia, Austria e Ungheria che rispetta il vincolo. Formalmente si tratta di una funzione:

$$f : \{\text{Italia, Austria, Ungheria}\} \to \{\text{Rosso, Blu}\}.$$

Se questa colorazione è Italia Rossa, Austria Blu, Ungheria Rossa, definiamo l'assegnamento proposizionale $\alpha(I_R) = 1$, $\alpha(I_B) = 0$, $\alpha(A_R) = 0$, $\alpha(A_B) = 1$, $\alpha(U_R) = 1$, $\alpha(U_B) = 0$. In generale una colorazione f induce un assegnamento α_f alle variabili del nostro linguaggio. Si verifica facilmente che questo assegnamento soddisfa tutte le proposizioni usate per formalizzare il problema.

Viceversa, dato un assegnamento α che mette a 1 tutte le proposizioni usate per la formalizzazione del problema, posso estrarre una colorazione: se $\alpha(I_R) = 1$ allora coloro l'Italia di Rosso, se $\alpha(A_B) = 1$ coloro l'Austria di Blu, e così via. Dato che l'assegnamento soddisfa, per es., la formula $I_R \to \neg I_B$, non assegnerò due colori distinti all'Italia. Si verifica facilmente che il fatto che α soddisfa tutte le formule in questione implica che la colorazione ottenuta soddisfai vincoli per essere una soluzione corretta al problema della 2-colorazione.

Abbiamo quindi i due punti seguenti:

1. Ogni colorazione f in 2 colori che soddisfa il vincolo induce un assegnamento che soddisfa la teoria,
2. Ogni assegnamento che soddisfa la teoria induce una colorazione in 2 colori che soddisfa il vincolo.

Dai due punti seguenti segue che la mappa M è 2-colorabile se e soltanto se la teoria T_M è soddisfacibile.

Osservazione 1. La formalizzazione sopra introdotta non è la più economica possibile. Osserviamo infatti che il vincolo espresso al punto (2) è implicato dai vincoli (3) e (1) ed è pertanto ridondante (per quanto non nocivo). In termini formali verifichiamo che (2) è conseguenza logica di (1) e (2), ossia

$$(I_R \lor I_B) \land (A_R \lor A_B) \land (U_R \lor U_B), (I_R \to \neg A_R) \land (I_B \to \neg A_B) \land (A_R \to \neg U_R) \land (A_B \to \neg U_B)$$
$$\models (I_R \to \neg I_B) \land (A_R \to \neg A_B) \land (U_R \to \neg U_B).$$

(Esercizio)

Consideriamo ancora il problema della 2-colorazione per Slovenia, Austria e Ungheria. Analogamente a quanto fatto sopra usiamo un vocabolario proposizionale composto dalle variabili $A_R, A_B, S_R, S_B, U_R, U_B$ e formalizziamo con le seguenti proposizioni:

$$(S_R \lor S_B) \land (A_R \lor A_B) \land (U_R \lor U_B).$$
$$(S_R \to \neg S_B) \land (A_R \to \neg A_B) \land (U_R \to \neg U_B).$$
$$(S_R \to \neg A_R) \land (S_B \to \neg A_B) \land (S_R \to \neg U_R) \land (S_B \to \neg U_B) \land (A_R \to \neg U_R) \land (A_B \to \neg U_B)$$

Si verifica che l'insieme delle proposizioni qui sopra (o equivalentemente la loro congiunzione) è insoddisfacibile. Invece di usare una tavola di verità si può ragionare, per es. così: Supponiamo che α soddisfi tutte le proposizioni di sopra. Supponiamo che $\alpha(S_R) = 1$. Allora $\alpha(\neg A_R) = 1$ e dunque $\alpha(A_B) = 1$. Ma allora $\alpha(\neg U_B) = 1$ e dunque $v(U_R) = 1$. Ma allora $\alpha(S_R \to \neg U_R) = 0$. Contraddizione.

La formalizzazione è adeguata perché, come nell'esempio precedente, l'insieme di formule è soddisfacibile se e solo se esiste una soluzione al problema della 2-colorazione della mappa.

Generalizzando gli esempi di sopra vediamo come formalizzare in logica proposizionale un problema di colorabilità di grafi generale.

Fissato un grafo $G = (V, E)$, consideriamo il seguente linguaggio proposizionale. Per ogni $v \in V$ e per ogni $i \in [1, k]$ abbiamo una variabile proposizionale $P_{v,i}$. Il significato intuitivo di questa variabile è che v ha il colore i. Consideriamo il seguente insieme T di formule:

1. $P_{v,1} \vee P_{v,2} \vee \cdots \vee P_{v,k}$, per ogni $v \in V$.

2. $\neg(P_{v,i} \wedge P_{v,j})$ per ogni $v \in V$, $i \neq j$ in $[1,k]$.

3. $\neg(P_{v,i} \wedge P_{w,i})$ per ogni $\{v,w\} \in E$, $i \in [1,k]$.

Si osserva che se il grado G è finito allora T è un insieme finito di formule e si può considerare la singola formula ottenuta congiungendo tutte le formule in T. Se G è infinito allora T è un insieme infinito di formule.

Sia α un assegnamento booleano alle variabili del linguaggio. Se α soddisfa T, possiamo definire una colorazione di G in k colori come segue.

$$c(v) = i \quad \text{se e solo se } \alpha(P_{v_i}) = 1.$$

Si dimostra facilmente che c è una k-colorazione di G. Viceversa, una k-colorazione di G induce un assegnamento che soddisfa T.

Esempio 3 (Pigeonhole Principle)**.** Questo esempio illustra come formalizzare in logica proposizionale principi matematici in cui appaiono quantificatori (per ogni, esiste) ma solo su un numero finito di oggetti, dando luogo a formule soddisfatte da tutti gli assegnamenti.

Consideriamo il Principio dei Cassetti (o dei Piccioni, *Pigeonhole Principle*).

> **Principio dei Cassetti**. Per ogni $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, se ho messo $n+1$ oggetti in n cassetti allora almeno un cassetto contiene più di un oggetto.

Indichiamo questo principio, per ogni $n \geq 1$ fissato, con $PHP(n+1,n)$. Ovviamente un analogo principio vale se usiamo un qualunque $m \geq n+1$ al posto di $n+1$. In termini più matematici, $PHP(n+1,n)$ si può esprimere come segue.

> $\mathbf{PHP(n+1,n)}$. Se f è una funzione suriettiva con dominio $\{1,\ldots,n+1\}$ e codominio $\{1,\ldots,n\}$, allora esiste un elemento del codominio che ha almeno due preimmagini via f.

In altre parole, non esiste una funzione iniettiva con dominio $\{1,\ldots,n+1\}$ e codominio $\{1,\ldots,n\}$.

Si osserva facilmente che il principio vale anche se f è una relazione $\subseteq [1,4] \times [1,3]$ ovunque definita, nel senso che per ogni $x \in [1,4]$ esiste (almeno) un $y \in [1,3]$ tale che $(x,y) \in f$.

Per ogni scelta di n, facciamo vedere come formalizzare $PHP(n+1,n)$ nel linguaggio proposizionale.

Fissiamo per semplicità $n = 3$. Vogliamo formalizzare $PHP(4,3)$, che dice che se f è una realzione ovunque definita sul dominio $\{1,2,3,4\}$ e codominio $\{1,2,3\}$ allora un elemento del dominio ha almeno due preimmagini secondo f.

Spezziamo questo enunciato in due parti.

1. f è una relazione con dominio $\{1,2,3,4\}$ e codominio $\{1,2,3\}$ (ovunque definita).

2. f non è iniettiva.

Dobbiamo formalizzare: **Se** f è una funzione con dominio $\{1,2,3,4\}$ e codominio $\{1,2,3\}$ **allora** f non è iniettiva. Ossia **Se** (1) allora (3).

Un linguaggio adeguato per formalizzare $PHP(4,3)$ è il linguaggio che ha come variabili proposizionali i simboli $p_{i,j}$, dove i varia in $\{1,2,3,4\}$ e j varia in $\{1,2,3\}$. Dunque le variabili del linguaggio sono 12 in tutto. (N.B.B. I simboli $p_{i,j}$ non fanno parte del linguaggio!! Sono solo un modo comodo per quantificare su $\{1,2,3,4\}$ e $\{1,2,3\}$. Le vere variabili sono simboli del tipo $p_{1,1}$, $p_{4,2}$, $p_{4,3}$ etc.). Il significato *intuitivo* delle variabili scelte è il seguente.

$$p_{i,j} \text{ sta per } f(i) = j.$$

Cominciamo formalizzando (1). Vogliamo esprimere il fatto che ogni elemento del dominio $\{1,2,3,4\}$ viene associato ad almeno un elemento del codominio, ossia che f è una relazione in $\{1,2,3,4\} \times \{1,2,3\}$

ovunque definita. In termini comuni la proprietà in questione si esprime così: Per ogni $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ esiste un $j \in \{1, 2, 3\}$ tale che $f : i \mapsto j$. Dato che abbiamo a che fare con insiemi finiti, possiamo svolgere i quantificatori universali come congiunzioni e gli esistenziali come disgiunzioni. Per ogni $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ dà luogo a quattro proposizioni:

- $(i = 1)$: Esiste un $j \in \{1, 2, 3\}$ tale che $f : 1 \mapsto j$.
- $(i = 2)$: Esiste un $j \in \{1, 2, 3\}$ tale che $f : 2 \mapsto j$.
- $(i = 3)$: Esiste un $j \in \{1, 2, 3\}$ tale che $f : 3 \mapsto j$.
- $(i = 4)$: Esiste un $j \in \{1, 2, 3\}$ tale che $f : 4 \mapsto j$.

Consideriamo la prima e osserviamo che l'esistenziale si può rappresentare con una disgiunzione sui possibili valori di j:

$$(p_{1,1} \vee p_{1,2} \vee p_{1,3}).$$

Analogamente per le altre tre proposizioni:

$$(p_{2,1} \vee p_{2,2} \vee p_{2,3}).$$

$$(p_{3,1} \vee p_{3,2} \vee p_{3,3}).$$

$$(p_{4,1} \vee p_{4,2} \vee p_{4,3}).$$

Il quantificatore universale in (1) (per ogni $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ viene infine espresso congiungendo le quattro proposizioni ottenute sopra:

$$A = (p_{1,1} \vee p_{1,2} \vee p_{1,3}) \wedge (p_{2,1} \vee p_{2,2} \vee p_{2,3}) \wedge (p_{3,1} \vee p_{3,2} \vee p_{3,3}) \wedge (p_{4,1} \vee p_{4,2} \vee p_{4,3}).$$

Abbreviamo per comodità con $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i$ (risp. $\bigvee_{i=1}^{n} A_i$) la proposizione $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ (risp. $A_1 \vee \cdots \vee A_n$). Con questa notazione possiamo scrivere la congiunzione di sopra come

$$\bigwedge_{i=1}^{4} (p_{i,1} \vee p_{i,2} \vee p_{i,3})$$

In modo ancora pù sintetico possiamo scriverla come segue

$$\bigwedge_{i=1}^{4} \bigvee_{j=1}^{3} p_{i,j}.$$

Ora formalizziamo (2), partendo dalla formalizzazione di f è iniettiva e applicando una negazione. f è iniettiva se e solo se non esiste un elemento del codominio con due pre-immagini distinte secondo f. In altre parole, f non è iniettiva se e solo se per ogni elemento j del codominio, per ogni scelta di due pre-immagini distinte i, i' nel dominio, non è vero che $f(i) = j$ e $f(i') = j$. Dobbiamo quindi formalizzare l'enunciato seguente.

$$\forall j \in \{1, 2, 3\} \forall i \neq i' \in \{1, 2, 3, 4\} (f(i) \neq j \vee f(i') \neq j).$$

Procediamo come sopra. Consideriamo uno per uno i valori di j.

Per $j = 1$, dobbiamo formalizzare

$$\forall i \neq i' \in \{1, 2, 3, 4\} (f(i) \neq 1 \vee f(i') \neq 1).$$

Per ognuna delle $\binom{4}{2}$ scelte di due elementi distinti $i, i' \in \{1,2,3,4\}$ dobbiamo formalizzare $(f(i) \neq 1 \vee f(i') \neq 1)$. Quest'ultimo enunciato si formalizza ovviamente con $\neg(p_{i,1} \wedge p_{i',1})$ (o equivalentemente con $(\neg p_{i,1} \vee \neg p_{i',1})$). Dato che la quantificazione su i, i' è universale, otteniamo la seguente congiunzione.

$$\neg(p_{1,1} \wedge p_{2,1}) \wedge \neg(p_{1,1} \wedge p_{3,1}) \wedge \neg(p_{1,1} \wedge p_{4,1}) \wedge \neg(p_{2,1} \wedge p_{3,1}) \wedge \neg(p_{2,1} \wedge p_{4,1}) \wedge \neg(p_{3,1} \wedge p_{4,1}).$$

Analogamente, per $j = 2$ otteniamo

$$\neg(p_{1,2} \wedge p_{2,2}) \wedge \neg(p_{1,2} \wedge p_{3,2}) \wedge \neg(p_{1,2} \wedge p_{4,2}) \wedge \neg(p_{2,2} \wedge p_{3,2}) \wedge \neg(p_{2,2} \wedge p_{4,2}) \wedge \neg(p_{3,2} \wedge p_{4,2}).$$

Analogamente, er $j = 3$ otteniamo

$$\neg(p_{1,3} \wedge p_{2,3}) \wedge \neg(p_{1,3} \wedge p_{3,3}) \wedge \neg(p_{1,3} \wedge p_{4,3}) \wedge \neg(p_{2,3} \wedge p_{3,3}) \wedge \neg(p_{2,3} \wedge p_{4,3}) \wedge \neg(p_{3,3} \wedge p_{4,3}).$$

Infine, per esprimere la quantificazione universale $\forall j \in \{1,2,3\} \ldots$ basta prendere la congiunzione delle tre proposizioni ottenute per i singoli valori di j.

$$B = \neg(p_{1,1} \wedge p_{2,1}) \wedge \neg(p_{1,1} \wedge p_{3,1}) \wedge \neg(p_{1,1} \wedge p_{4,1}) \wedge \neg(p_{2,1} \wedge p_{3,1}) \wedge \neg(p_{2,1} \wedge p_{4,1}) \wedge \neg(p_{3,1} \wedge p_{4,1}) \wedge$$
$$\neg(p_{1,2} \wedge p_{2,2}) \wedge \neg(p_{1,2} \wedge p_{3,2}) \wedge \neg(p_{1,2} \wedge p_{4,2}) \wedge \neg(p_{2,2} \wedge p_{3,2}) \wedge \neg(p_{2,2} \wedge p_{4,2}) \wedge \neg(p_{3,2} \wedge p_{4,2}) \wedge$$
$$\neg(p_{1,3} \wedge p_{2,3}) \wedge \neg(p_{1,3} \wedge p_{3,3}) \wedge \neg(p_{1,3} \wedge p_{4,3}) \wedge \neg(p_{2,3} \wedge p_{3,3}) \wedge \neg(p_{2,3} \wedge p_{4,3}) \wedge \neg(p_{3,3} \wedge p_{4,3}).$$

Questa proposizione esprime l'iniettività; dunque $\neg B$ esprime la non-iniettività.

Per concludere, possiamo formalizzare $PHP(4,3)$ formalizzando: Se (1) allora (2), ossia $(A \to \neg B)$.

In forma sintetica la formula proposta è la seguente:

$$\bigwedge_{i=1}^{4} \bigvee_{k=1}^{2} p_{i,k} \to \neg(\bigwedge_{k=1}^{3} \bigwedge_{i \neq j, i,j \in [1,4]} (\neg p_{i,k} \vee \neg p_{j,kj})).$$

A lezione abbiamo visto almeno altre due versioni equivalenti, basate su descrizioni verbalmente differenti del conseguente:

- Esiste $k \in [1,3]$ tale che esistono $i \neq j$ in $[1,4]$ tali che $f(i) = k = f(j)$,
- Per ogni $k \in [1,3]$ per ogni $j \in [1,4]$, se $f(j) = k$ allora per ogni $i \neq j$, $i \in [1,4]$ vale $f(i) \neq k$.

Si invita il lettore a scrivere le versioni formali delle due frasi precedenti.

Tanta fatica per formalizzare un singolo caso del Principio dei Cassetti? Osserviamo che la formalizzazione svolta sopra è *uniforme* nel senso che se volessimo formalizzare $PHP(101,100)$ o $PHP(2^9, 2^9 - 1)$ potremmo usare lo stesso procedimento. Avremmo proposizioni più lunghe ma di stessa struttura.

Le formule risultanti saranno vere sotto ogni assegnamento, come si può facilmente stabilire invocando proprio il Principio dei Cassetti. Chiamiamo una tale formula una tautologia. Analogamente, se consideriamo la formalizzazione della negazione del PHP, ossia f associa ogni elemento di $[n+1]$ a un elemento di $[n]$ e f è iniettiva, otteniamo una formula sempre falsa. Chiamiamo una tale formula una contraddizione o una formula insoddisfacibile.

Possiamo esprimere una forma debole della **negazione** del PHP per m piccioni e n cassetti con il seguente insieme di formule nel linguaggio composto da variabili $p_{i,j}$:

1. $p_{i,1} \vee \cdots \vee p_{i,n}$ per ogni $i \in [1,m]$, (in forma sintetica $\bigwedge_{i=1}^{4} \bigvee_{j=1}^{n} p_{i,j}$)
2. $\neg p_{i,k} \vee \neg p_{j,k}$ per ogni $i, j \in [1,m]$ con $i \neq j$ e per ogni $k \in [1,n]$.

In forma sintetica abbiamo:

$$\bigwedge_{i=1}^{4} \bigvee_{j=1}^{n} p_{i,j} \wedge \bigwedge_{i \neq j, i,j \in [1,m]} \bigwedge_{k=1}^{n} (\neg p_{i,k} \vee \neg p_{j,k}).$$

L'insieme di formule qui sopra (o, equivalentemente la singola formula ottenuta congiungendo tutte le formule qui sopra) esprime la negazione del Principio dei Cassetti per i valori n e m e se $n < m$ è falsa sotto ogni assegnamento (insoddisfacibile).

Seguono altri due esempi non visti a lezione.

Esempio 4 (Sudoku)**.** Consideriamo il gioco del Sudoku su una tabella 9×9.

1	4	**5**	**3**	2	7	6	9	8
8	3	9	6	5	4	1	**2**	7
6	**7**	2	9	**1**	8	**5**	4	3
4	9	6	1	8	**5**	**3**	7	2
2	**1**	8	4	**7**	3	9	5	**6**
7	5	**3**	**2**	9	6	4	**8**	1
3	**6**	7	**5**	4	2	8	1	**9**
9	8	**4**	7	6	1	2	**3**	5
5	2	1	8	3	**9**	**7**	6	4

Vogliamo definire un insieme di proposizioni tali che gli assegnamenti che le soddisfano corrispondano esattamente alle soluzioni del gioco.

Scegliamo un linguaggio proposizionale composto dalle variabili $p_{N,R,C}$, dove $N, R, C \in [1, 9]$. Il significato intuitivo della variabile $p_{N,R,C}$ è "il numero N è nel quadrato individuato dalla riga R e dalla colonna C".

Ogni riga contiene tutti i numeri:

$$\bigwedge_{R=1}^{9} \left(\bigwedge_{N=1}^{9} \left(\bigvee_{C=1}^{9} p_{N,R,C} \right) \right)$$

NB: Abbiamo usato i simboli $\bigwedge$ e $\bigvee$ come abbreviazioni di un numero finito di congiunzioni e, rispettivamente, disgiunzioni, indicate dagli indici. Per esempio $\bigvee_{C=1}^{9} p_{N,R,C}$ con N e R fissati abbrevia la disgiunzione

$$p_{N,R,1} \vee p_{N,R,2} \vee \dots p_{N,R,9}.$$

La proposizione esprime: per ogni riga R, per ogni numero N, esiste una colonna C tale che N è in R e C. Analogamente la proposizione $\bigwedge_{N=1}^{9} \left(\bigvee_{C=1}^{9} p_{N,R,C} \right)$, con R fissato, abbrevia

$$\bigvee_{C=1}^{9} p_{1,R,C} \wedge \bigvee_{C=1}^{9} p_{2,R,C} \wedge \dots \wedge \bigvee_{C=1}^{9} p_{9,R,C}.$$

Per esteso è:

$$(p_{1,R,1} \vee p_{1,R,2} \vee \dots p_{1,R,9}) \wedge (p_{2,R,1} \vee p_{2,R,2} \vee \dots p_{2,R,9}) \wedge \dots \wedge (p_{9,R,1} \vee p_{9,R,2} \vee \dots p_{9,R,9}).$$

Analogamente si esprime il vincolo che ogni colonna contiene tutti i numeri.

Esprimiamo poi il vincolo che ognuna delle quattro sotto-griglie 3×3 contiene tutti i numeri con la seguente proposizione, per $0 \leq k$ (variabile di riga) e $h \leq 2$ (variabile di colonna):

$$\bigwedge_{N=1}^{9} \left(\bigvee_{R=1}^{3} \left(\bigvee_{C=1}^{3} p_{N,3 \cdot k+R,3 \cdot h+C} \right) \right).$$

Infine esprimiamo il vincolo che nessuna cella può contenere due numeri diversi, aggiungendo, per ogni $1 \leq N, N', C, R \leq 9$ con $N \neq N'$ la seguente proposizione:

$$p_{N,R,C} \to \neg p_{N',R,C}$$

Si verifica facilmente che ogni soluzione corretta del Sudoku 9×9 soddisfa tutte le proposizioni qui sopra. Viceversa, dato un assegnamento v che soddisfa tutte le proposizioni qui sopra si ottiene una soluzione corretta del Sudoku 9×9 scrivendo il numero N nella cella in R, C per tutti e soli gli N, R, C tali che $v(p_{N,C,R}) = 1$.

Esempio 5 (Ordini)**.** Il concetto di soddisfacibilità permette di usare insiemi di formule proposizionali per catturare determinate strutture matematiche.

Sia X un insieme. Consideriamo il linguaggio proposizionale composto dalle variabili $p_{x,y}$ per ogni $(x, y) \in X \times X$. Consideriamo il seguente insieme T di proposizioni in questo linguaggio.

1. $\neg p_{x,x}$ per ogni $x \in X$.
2. $p_{x,y} \to \neg p_{y,x}$ per ogni $x, y \in X$.
3. $(p_{x,y} \wedge p_{y,z}) \to p_{x,z}$ per ogni $x, y, z \in X$
4. $p_{x,y} \vee p_{y,x}$ per ogni $x, y \in X$ con $x \neq y$.

L'insieme T *cattura* il concetto di ordine totale (stretto) su X nel senso seguente. Supponiamo di avere un assegnamento α che soddisfa tutte le proposizioni di T (scriviamo in questo caso $\alpha(T) = 1$ e diciamo che α soddisfa T). L'ordine indotto da tutte le variabili proposizionali vere sotto un tale assegnamento è un ordine totale stretto su X. Più precisamente, se α è un assegnamento, definiamo la relazione $\prec_\alpha$ su X come segue:

$$x \prec_\alpha y \leftrightarrow \alpha(p_{x,y}) = 1.$$

Si verifica facilmente che se $\alpha(T) = 1$ allora $\prec_\alpha$ è un ordine totale stretto su X.

D'altra parte, sia $(X, \prec)$ è un ordine totale (stretto). Consideriamo l'asseegnamento così definito:

$$\alpha(p_{x,y}) = 1 \leftrightarrow (x \prec y).$$

Allora $\alpha(T) = 1$.