

Marco Casu

Automazione



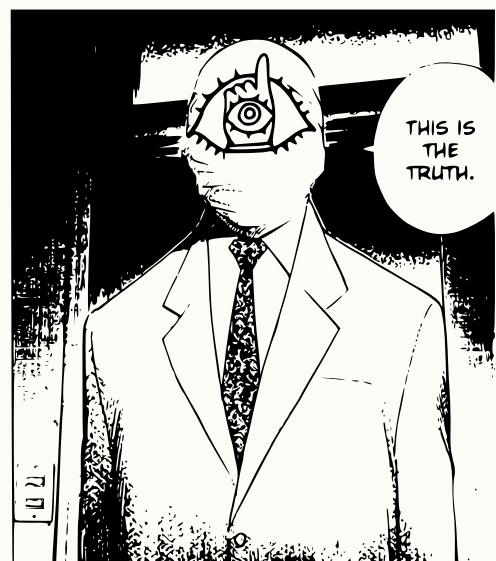
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica
Dipartimento di Informatica



Questo documento è distribuito sotto la licenza [GNU](#), è un resoconto degli appunti (eventualmente integrati con libri di testo) tratti dalle lezioni del corso di Automazione per la laurea triennale in Informatica. Se dovessi notare errori, ti prego di segnalarmeli.

Nota bene : Essendo questi appunti di un corso esterno alla facoltà di Informatica, è presente un capitolo "Complementi" che può risultare utile al lettore.



INDICE

1	L'Automazione Industriale	3
1.1	Introduzione	3
1.2	Processi Industriali	8
1.2.1	Sistema di Controllo	9
1.3	Analisi dei Sistemi di Produzione	12
1.3.1	Linee di Trasferta	13
1.3.2	Flow Shop	17
2	Complementi	21
2.1	La Trasformata di Laplace	21
2.1.1	Proprietà della Trasformata	22
2.1.2	Trasformata inversa	24
2.1.3	Trasformate note	25
2.1.4	Funzione di trasferimento	25

CAPITOLO

1

L'AUTOMAZIONE INDUSTRIALE

1.1 Introduzione

Con il termine *Automazione*, si intende la trasformazione di un processo pre-esistente, al fine di renderlo autonomo, riducendo o sostituendo del tutto l'intervento umano, verrà trattata l'automazione dei processi industriali e manifatturieri, e del loro controllo e supervisione. I sistemi presi in considerazione evolvono nel tempo e reagiscono ad eventi, che ne cambiano lo stato, e scaturiscono dei feedback, per un eventuale correzione dell'errore.

Con sistema *autonomo* si intende un sistema in cui viene ridotto l'intervento umano. L'*Automatica* si occupa di sfruttare gli strumenti dell'informatica per l'automazione, acquisendo informazioni dal mondo fisico tramite appositi sensori, per poi essere elaborate su un sistema di controllo (calcolatore), o una rete di calcolatori, che implementa dei protocolli standard per l'industria. Differentemente da altri contesti, come la trasmissione (ad esempio, di un video in streaming) nelle reti dell'automazione i ritardi risultano critici, e vanno ridotti al minimo.

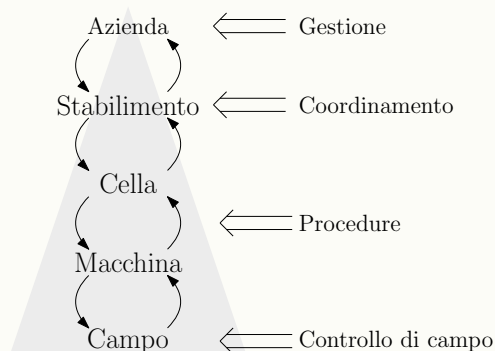


Figura 1.1: Piramide CIM

La *piramide CIM*, mostrata in figura 1.1 schematizza la gestione di un processo industriale e delle sue procedure, ogni strato comunica con quelli adiacenti scambiandosi informazioni, nei livelli più alti, le informazioni sono più *raffinate* ed astratte, nei livelli più bassi sono più grezze, ad esempio

- Al livello azienda viene decisa la produzione di un articolo (che coinvolgerà l'utilizzo di un braccio robotico)



- Al livello macchina, l'informazione che arriverà al braccio sarà semplicemente relativi ai gradi in cui i suoi giunti devono ruotare
- Al livello di campo, l'informazione comprenderà semplicemente il voltaggio da applicare alla macchina in questione per avere l'effetto desiderato.

Con **cella**, si intende un unità composta da più macchine, in cui viene scambiato e lavorato del materiale per compiere delle azioni, il *controllo delle procedure* si occupa delle **macchine**, ed uno **stabilimento** è un complesso di celle/parti e catene di montaggio. nel livello di campo, vengono utilizzati vari dispositivi, quali

- motori elettrici, servomotori, encoder
- azionatori di valvole, dynamo tachimetrici, sensori di temperatura

Tali sensori presenteranno stesso un comportamento lineare, ad esempio, se una tensione x causa una rotazione di y giri per minuti, allora una tensione $2x$ causerà una rotazione di $2y$. Anche se tali dispositivi non si prestano ad un comportamento lineare, ne verrà causata una volontaria linearizzazione, correggendone il comportamento.

Argomento centrale saranno i regolatori *PID*, la cui definizione, come molte altre trattate in questo capitolo, sarà ripresa ed approfondita in seguito. tali regolatori agiscono su delle grandezze di campo.

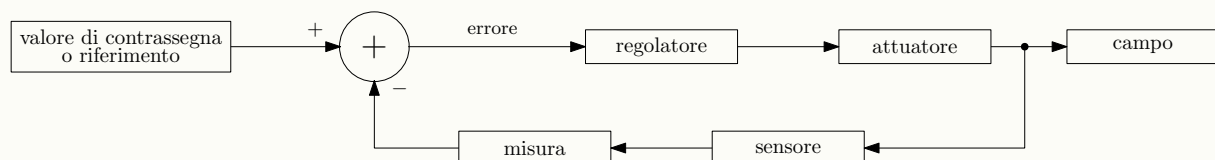


Figura 1.2: schematizzazione del regolatore PID

Si consideri il seguente esempio di regolatore, vi è una stufa che deve riscaldare una stanza, ed un sensore che ne misura la temperatura, il valore da raggiungere, detto *setpoint*, è di 20 gradi celcius. Si supponga che il sensore, una volta rilevata la temperatura, debba accendere e spegnere la stufa in modo che si raggiunga la temperatura adeguata.

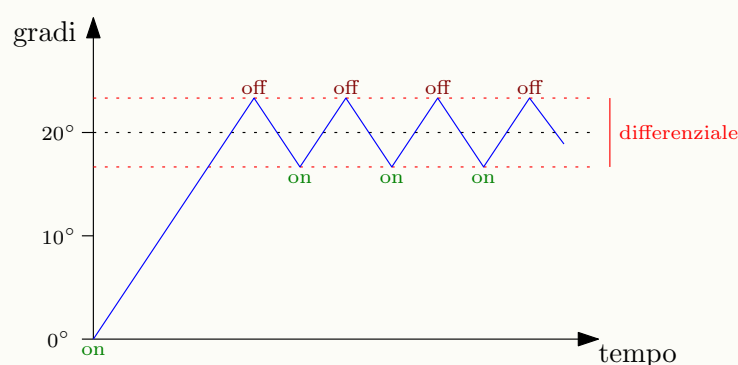


Figura 1.3: Azioni sulla stufa

In figura 1.3, il differenziale rappresenta un margine di differenza rispetto il setpoint, quando la temperatura è sotto il limite inferiore, la stufa viene accesa, quando è oltre il limite superiore, viene spenta (è chiaro che la velocità con la quale la temperatura cambia dipende dalle capacità della stufa e dalla dispersione del calore nella stanza).

Ridurre il valore del differenziale costringerebbe la temperatura ad assestarsi sempre di più sul valore

desiderato, ma ciò, comporterebbe un'accensione/spengimento della stufa più frequente, aumentando lo *sforzo di controllo*, è quindi, in questo caso, accettabile un differenziale di 2° .

Tale modello di controllo è il più semplice che ci sia, esistono ovviamente altri modi di regolare un segnale in modo che esso raggiunga il valore desiderato, ad esempio, calcolare l'errore e (ossia la differenza fra il valore desiderato ed il valore effettivo) e moltiplicarlo ad una certa costante K_p per poi utilizzare tale valore nella regolazione del segnale.

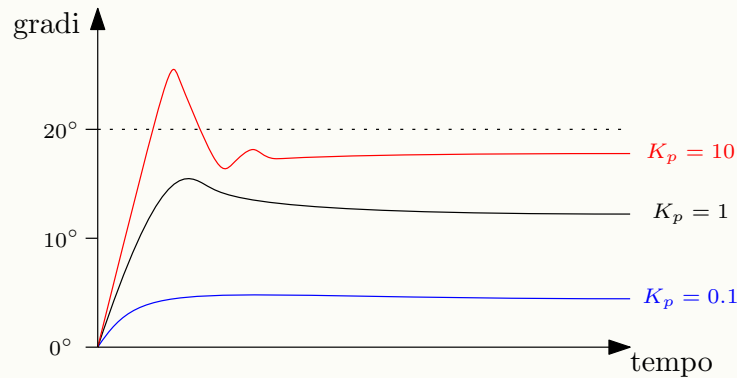


Figura 1.4: Regolatore proporzionale

Anche se la variazione della temperatura è continua nel tempo, il suo superare una certa soglia è un evento, i PLC (controllori logici programmabili) agiscono sulle misure di campo, un noto linguaggio utilizzato per descriverne il funzionamento è noto come *Sequential Flow Chart (SFL)*.

Nei sistemi di automazione industriale vengono prediletti controllori e sensori distribuiti piuttosto che centralizzati, se ne vuole dare una dimostrazione pratica con il seguente esempio : Si considerino i due seguenti modi per trasportare un oggetto su un nastro trasportatore :

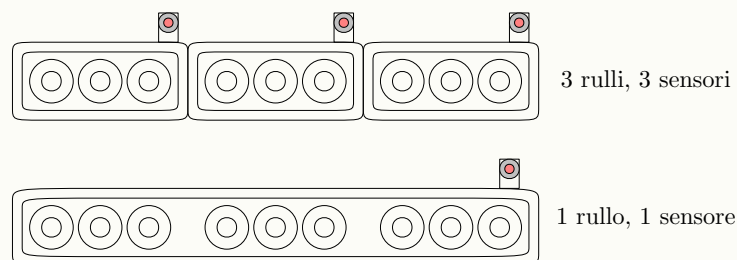


Figura 1.5: Rulli

Ogni nastro ha un sensore, se un oggetto è rilevato sopra il nastro, allora il motore si attiva. Risulta più efficiente la soluzione con 3 nastri in quanti sarà adoperata solamente la zona del nastro in cui è rilevato l'oggetto, piuttosto che l'intero nastro.

Per la modellizzazione di sistemi autonomi verranno adoperati automi a stati finiti, ampiamente trattati nel corso di [Automi, Calcolabilità e Complessità](#), e *Reti di Petri*. Una rete di Petri, non è altro che un grafo bipartito, in cui ogni nodo appartiene ad un'insieme fra

- nodi *posto*
- nodi *transizione*

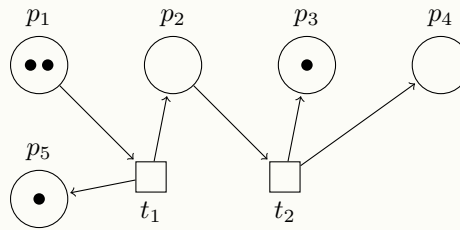


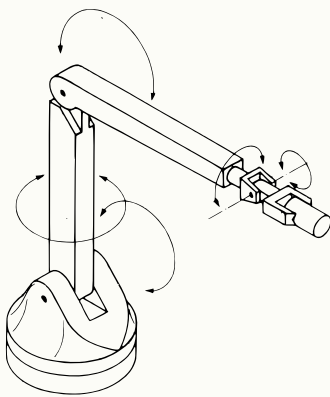
Figura 1.6: Esempio di una rete di Petri

Inoltre, i nodi posto possono essere annotati con dei pallini neri, detti *token*, essi rappresentano lo stato del sistema in quanto indicano che delle risorse (in senso generale) sono disponibili in un posto, permettendo eventualmente una transizione. Ogni arco del grafo collega un nodo posto ad un nodo transizione.

Le macchine per l'automazione possono essere di vari tipi, ad esempio, comprendere un unico attuatore, e più meccanismi di attuazione del moto che utilizzano una sola fonte. Un altro tipo di macchine sono quelle a *controllo numerico*, macchine programmate per fare compiti elementari periodicamente.

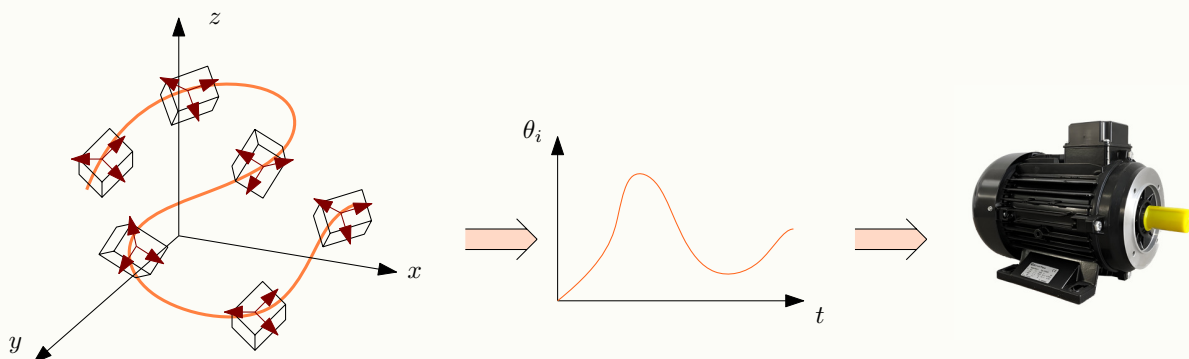
Quando in un processo produttivo il materiale viene trasformato in maniera continuativa (come nell'industria farmaceutica o alimentare) si parla di **produzione continua**. Nel caso in cui i materiali sono processati in quantità finite e determinate si parla di **produzione a lotti**, le pause dovute fra la lavorazione di un lotto e l'altro sono dovute al fatto che è necessario trasformare solo una determinata quantità di materiale grezzo.

L'automazione industriale fa largo utilizzo dei *robot*, bracci meccanici che presentano diversi gradi di libertà, ossia giunti, che possono ruotare attorno un certo asse.



L'organo terminale, posto alla fine del braccio (in un certo senso, la sua "mano"), può assumere una certa configurazione (posizione e direzione) a seconda della rotazione di ogni giunto del braccio. Si può dire che la posizione finale p e la sua direzione sono in funzione degli angoli $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ di rotazione di ogni giunto.

La procedura di comando da far eseguire al robot si traduce in una funzione nel tempo che descrive in che modo deve variare la rotazione di ogni singolo giunto, quest'ultima al livello di campo, si traduce nell'attuazione dei motori elettrici posti sui giunti.



Altri tipi di macchine per la movimentazione oltre i robot sono i rulli o i carrelli automatici, questi ultimi inizialmente potevano muoversi seguendo un percorso stabilito da magneti posti sul terreno, vengono dotati di sensori di prossimità per evitare collisioni. I carrelli moderni non sono limitati da percorsi prestabiliti, sono autonomi e possono fare percorsi arbitrari, che vengono calcolati da un elaboratore che ha la "visione" completa di essi.

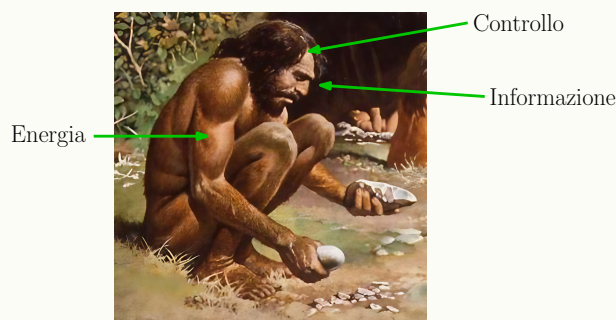
Sorge spontaneo chiedersi quale sia la differenza fra Automazione e Robotica.

- *Analogie* : Entrambe coinvolgono l'informatica ed i calcolatori, interfacciandosi con il mondo fisico, entrambe sfruttano conoscenze e tecnologie multi-disciplinari.
- *Differenze* : La robotica mostra la fattibilità di una soluzione, l'automazione si occupa di porsi delle domande riguardo tale soluzione, fra cui l'efficienza, l'ottimalità, la fattibilità e l'affidabilità.

Formalmente, si definisce **processo** la *trasformazione* di *materiali* in *prodotti*. Tale trasformazione richiede

- Energia
- Informazione
- Controllo

Anche la costruzione di uno strumento per la caccia da parte di un uomo primitivo è un processo, in quel caso, l'energia è data dai muscoli del corpo, l'informazione viene dai sensi, quali vista e tatto, ed il controllo avviene da parte del cervello.



Lo scopo dell'automazione nel tempo è stato quello di sostituire o eliminare l'intervento dell'uomo nei processi, spesso è faticoso e pericoloso fornire energia, e l'uomo non ha le capacità sufficienti per gestire in maniera precisa l'informazione ed il controllo.

Il **primo passo** di industrializzazione è stato quello di sostituire l'energia fornita dall'uomo con l'energia naturale ed animale, durante la prima rivoluzione industriale, dove la produzione dipendeva da macchine azionate tramite potenza meccanica derivante da fonti energetiche come mulini.

Il **secondo passo** riguarda la sostituzione delle operazioni di controllo, un importante esempio fu il *regolatore di velocità* di Watt (1785), fu la prima applicazione di regolatore automatico, e sfruttava la forza centrifuga di due masse in rotazione per regolare la velocità di una macchina a vapore.

Il funzionamento è semplice, il vapore passante per la valvola fa aumentare la velocità di rotazione del regolatore, per la forza centrifuga, le masse poste sulla valvola a farfalla si allontanano, alzandosi, qui la gravità oppone resistenza facendo chiudere la valvola essendo che le masse tendono ad avvicinarsi al suolo, facendone diminuire la velocità di rotazione. Tali automatismi sono compresi dalla teoria dei controlli automatici, che definisce l'azione di comando più efficace per ottenere il comportamento desiderato a seguito di una certa misurazione fisica.

Il **terzo passo** riguarda la gestione delle informazioni mediante sistemi combinatorici/sequenziali che al verificarsi di determinate condizioni reagiscono con operazioni di base. La prima generazione di controllori prevedeva circuiti elettronici composti da bobine e relé, essi erano ingombranti e lenti nell'acquisizione delle informazioni, inoltre la loro logica era prestabilita e ridefinirla scaturiva una modifica sostanziale del circuito.

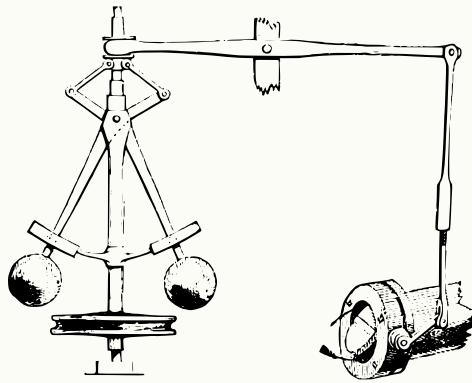


Figura 1.7: regolatore di Watt

Con l'avvento dei semiconduttori si è introdotta la seconda generazione di controllori, basati su schede elettroniche stampate, riducendo i costi ed aumentando l'efficienza, non risolvendo però il problema della bassa flessibilità, in quanto tali schede erano progettate per gestire una specifica logica.

La terza generazione di controllori vede i microprocessori protagonisti, grazie all'evoluzione dell'elettronica e dell'informatica sono ad oggi utilizzabili schede riprogrammabili (PLC) altamente flessibile, capaci di eseguire un generico algoritmo logico sequenziale.

Rivoluzione Industriale	Periodo Temporale	Tecnologie e Caratteristiche
prima	1785 – metà 19° secolo	utilizzo di macchine azionate da energia meccanica (vapore, acqua)
seconda	fine 19° secolo – 1970	azionamento elettrico delle macchine e produzione di massa basata sulla divisione del lavoro (catene di montaggio)
terza	1970 – oggi	utilizzo dell'elettronica e delle tecnologie dell'informazione (IT) per aumentare il livello di automazione di attività complesse (CNC, robot e computer)
quarta	oggi – futuro	sviluppo di macchine sensorizzate e intelligenti, interconnesse tra loro e con internet, con la raccolta, analisi e uso di grandi quantità di informazioni (Big data), per una specializzazione di massa del prodotto, l'integrazione della catena produttiva (supply and value chains) e una maggiore efficienza



1.2 Processi Industriali

I sistemi di produzione automatizzati sono composti da diverse componenti

- processo produttivo - movimentazioni meccaniche, attuazioni, trasformazioni fisiche e chimiche
- sistema di controllo - uno o più dispositivi messi in comunicazione con il processo produttivo, potendo agire su di esso riducendo l'intervento umano.
- impianto di produzione - macchinari, edifici, componenti

Si considerino i seguenti esempi di produzione industriale

- **produzione di energia elettrica**

- materie prime (input continuo) : combustibile fossile, ossigeno
- prodotto (output continuo) : energia elettrica misurata in Kilowatt/ore
- impianto necessario : tubature, caldaia, turbine, bruciatori, pompe, valvole, camini, edifici di sostegno e di contenimento, sensori

- **produzione di vernice**

- materie prime (input continuo) : resine, coloranti, acqua, additivi
- prodotto (output discreto) : barattoli di vernice
- impianto necessario : reattori (dove avvengono le reazioni principali), miscelatori, riscaldatori, tubature, pompe, valvole, edificio di sostegno e di contenimento, sensori

- **produzione di parti meccaniche di motori**

- materie prime (input discreto) : pezzo metallico grezzo
- prodotto (output discreto) : componenti del motore
- impianto necessario : macchina con mandrini per la meccanica (fresatura, foratura, ...), sistema di controllo numerico (posizionamento corretto dell'utensile del mandrino), dispositivo di cambio utensile automatico, protezioni, sistemi di scarico trucioli

1.2.1 Sistema di Controllo

Il sistema di controllo interagisce con il processo attraverso *sensori* e *trasduttori*. Acquisiscono informazioni dal mondo fisico (pressione, temperatura) e le convertono in segnali facilmente analizzabili e controllabili (segnali elettrici).

Un esempio di sensore per misurare la forza, consiste in un circuito il cui resistore viene deformato quando rilevata una pressione sul sensore, variandone la resistenza.

Una volta raccolte le informazioni, è possibile cambiare le variabili di controllo del processo per ottenere il comportamento desiderato. Solitamente, il segnale di controllo è a bassa potenza, non sufficiente per correggere il comportamento di grossi attuatori, a tal proposito sono adoperati gli *amplificatori*. Le informazioni sono elaborate da un apposito calcolatore che può essere inglobato o esterno alla macchina in questione.

Nei sistemi di controllo è stata definita una normativa, nota come IEC61499 per normalizzare il funzionamento generale di tali dispositivi. In particolare, deve un sistema di controllo deve rifarsi ai seguenti punti

- è un sistema informatico che elabora informazioni ed esegue/applica algoritmi.
- è costituito da vari dispositivi che comunicano attraverso un'apposita rete.
- i dispositivi devono implementare delle funzionalità, denominate *applicazioni*.
- tali applicazioni possono essere distribuite fra i vari dispositivi.
- i dispositivi devono interfacciarsi con la rete e con il processo, inoltre le applicazioni costituiscono le loro *risorse*.
- in particolare, una *risorsa* è costituita da
 - una o più applicazioni
 - funzioni che collegano dati ed eventi
 - funzioni di pianificazione delle attività (un sistema operativo)

Si definisce **Manufacturing** l'insieme dei processi produttivi da applicare per ottenere un prodotto finale desiderato, a partire da materiali grezzi. Richiede

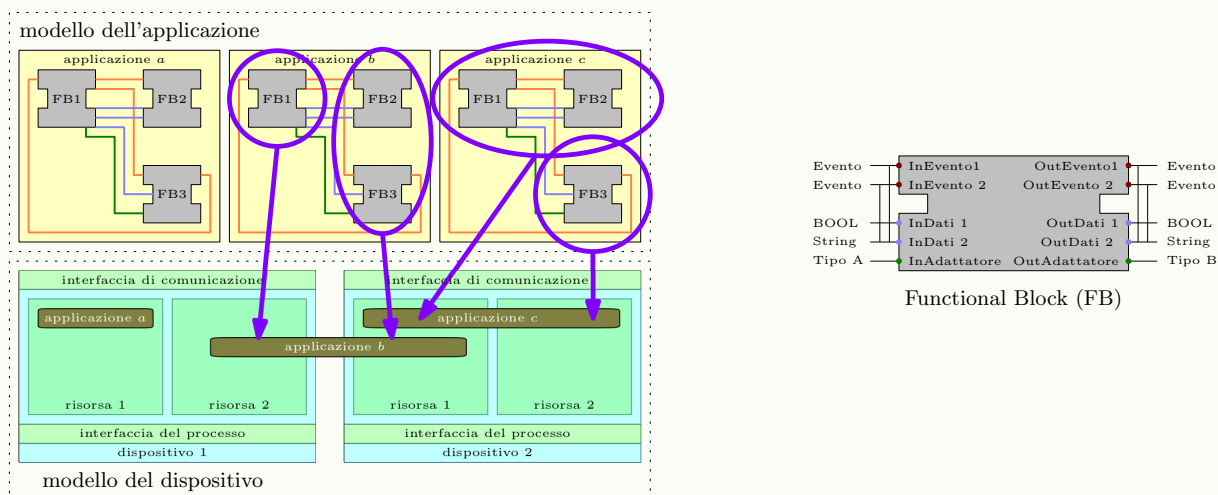


Figura 1.8: schematizzazione di un sistema di controllo

- energia
- macchine
- intervento umano
- informazioni

Da un punto di vista economico, è il processo che dà valore aggiunto ai materiali utilizzati.

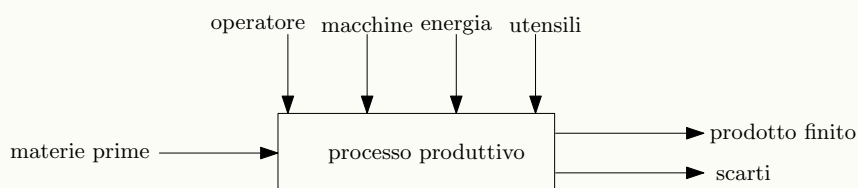


Figura 1.9: Cementificio : schema

per essere tritati, ciò che ne esce viene miscelato per poi venire accumulato in un silos. Quest'ultimo, funge da *buffer*, ossia un accumulo del prodotto non ancora terminato durante la sequenza di produzione, utile nel sincronizzare la catena, qui viene riempito totalmente prima di passare allo step successivo. Il

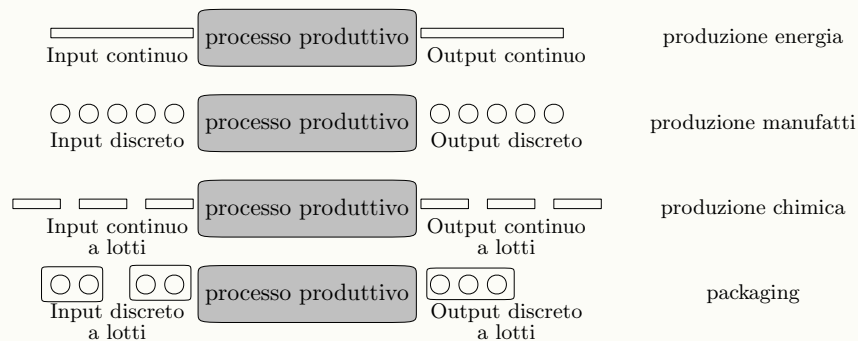


primo mulino esegue una fase di pre riscaldamento, il calore utilizzato deriva dall'energia termica scartata dal forno principale ad alte temperature.

Il processo consiste in una *sequenza di operazioni elementari* di varia natura

- lavorazione e assemblaggio
- trasporto e stoccaggio
- verifica, test, e coordinamento

Fin'ora è stato evidenziato se le materie prime o il prodotto finale di un certo processo fossero numerabili oppure no, a tal proposito, è possibile classificare i processi produttivi nel seguente modo



- **processi continui** : Trattano la trasformazione continua nel tempo della materia, energia e quantità di moto. L'obiettivo è mantenere uniforme nel tempo la qualità del prodotto, gli scambi avvengono sulle variabili fisiche.
- **processi a lotti** : Possono essere sia continui che discreti, il prodotto finale necessita di una specifica, e finita, quantità di materia prima per essere prodotto. Segue una specifica sequenza di lavorazione detta *ricetta*, il processo si interrompe fra un lotto ed un altro. Obiettivo dell'automazione è la definizione delle ricette, garantire un uso corretto delle risorse e realizzare tale sistemi in modo che siano ripetibili.
- **processi semi continui** : **TODO**
- **processi discreti** : Si lavora su singoli prodotti, materiali numerabili, è una produzione tipica dell'industria manifatturiera.

I sistemi di controllo dei processi prevedono azioni di tipo *logico* oppure *diretto*

	Controllo logico	Controllo diretto
Processi continui	coordinamento complessivo avviamento e spegnimento guasti e emergenze	controlli primari (livelli, temperature, pressioni) controlli asserviti (portata pompe, posizione valvole)
Processi a lotti	controllo delle ricette supervisione impianto avviamento e spegnimento guasti e emergenze allocazione risorse impianto	controlli primari (livelli, temperature, pressioni) controlli asserviti (portata pompe, posizione valvole)
Processi discreti	controllo sequenze di lavoro delle singole macchine supervisione impianto avviamento e spegnimento guasti e emergenze	controlli asserviti (posizionamento, velocità motori elettrici)

- *regolazione* : Portare un segnale ad un determinato valore di riferimento
- *asserimento* : Far sì che il segnale segua una certa dinamica nel tempo



Il *controllo diretto* riguarda il rilevamento di grandezze fisiche analogiche da parte di sensori posti sul campo, tali valori continui nel tempo vengono convertiti in segnali digitali, confrontandoli poi con il valore di riferimento, dando l'azione di comando per correggere il comportamento delle variabili.

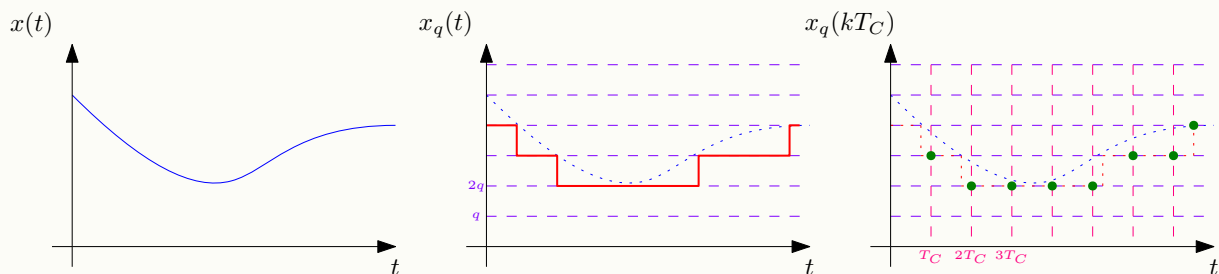
1. I sensori forniscono un segnale **analogico** $x(t)$ continuo nel tempo (temperatura, posizione)
2. Tale segnale viene **quantizzato**, denotato $x_q(t)$, costringendolo ad assumere un numero limitato di valori prestabiliti Δ , separati da un ampiezza q , il numero di bit necessari a rappresentare i valori del segnale sarà $n = \log_2(\Delta/q)$

$$x_q(t) = \left\lfloor \frac{x(t)}{q} \right\rfloor \cdot q$$

3. Il segnale analogico quantizzato viene poi **campionato**, ossia, viene valutato esclusivamente in determinati intervalli di tempo separati da un tempo di campionamento T_C

$$x_q(t) \longrightarrow x_q(kT_C) \quad t \in \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{Z}$$

4. A tal punto si ha un **segnale digitale** codificato in numeri binari che può essere elaborato su un sistema di controllo digitale.



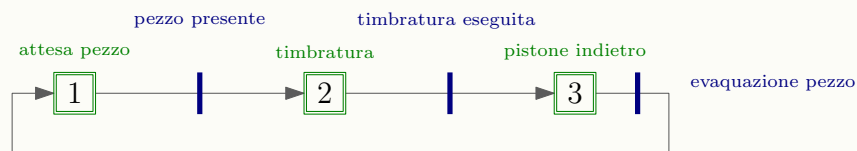
Le variabili logiche, ad esempio quelle booleane, assumono valori in un insieme numerabile, e su di esse è possibile eseguire operazioni logiche, si consideri il seguente esempio :

Il comando M è una variabile booleana che se vera aziona il moto di un motore elettrico. Il sensore di prossimità è descritto una variabile booleana P che è vera se ci sono ostacoli nelle vicinanze, la variabile C descrive il consenso nel voler attivare il motore.

Risulta chiaro che

$$M = C \wedge \neg P$$

Il seguente SFC (Sequential Functional Chart) descrive il comportamento logico di una timbratrice automatica.



1.3 Analisi dei Sistemi di Produzione

Si considerino i sistemi di produzione manifatturiera, quindi, discreti. Essi possono seguire diverse strutture, fra le più importanti vi sono

- **linea di trasferta** : La produzione avviene secondo una specifica sequenza, rigida e non flessibile. Un esempio tipico è la classica catena di montaggio introdotta da Ford.
- **flow shop** : Vi sono diversi macchinari, e più flussi di produzione che si alternano i macchinari diversi.

- **job shop** : Ci sono differenti percorsi, intrecciati e complessi fra i diversi macchinari e reparti dell'impianto di produzione.
- **celle di produzione** : Le singole celle contengono più macchinari, ed ognuna di queste si occupa della produzione (dall'inizio alla fine) di un singolo prodotto, mantenendola concentrata nella celle, senza che essa sia dislocata nell'impianto.
- **FMS** : Diversi flussi fra le varie celle.

Vanno considerati vari aspetti nell'analisi dei sistemi di produzione, come la trattazione dei tempi di attesa, il *WIP* - *work in process*, è un termine utilizzato per indicare il numero di pezzi che vengono lavorati contemporaneamente.

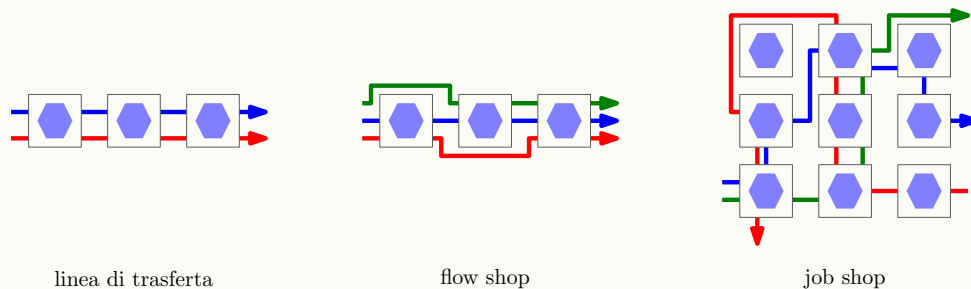


Figura 1.10: sistemi di produzione

1.3.1 Linee di Trasferta

Verrà trattata in questa sezione la modellizzazione delle linee di trasferta, e verranno analizzati alcuni parametri che le caratterizzano. Una linea di trasferta consiste in una serie di macchine o stazioni (macchinari adatti a più compiti) connessi sequenzialmente da un sistema di trasporto. La sequenza di produzione è rigida ed i pezzi vengono processati continuamente nel tempo senza interruzioni. Le linee possono essere sincrone e (i pezzi avanzano alla stessa velocità) oppure asincrone, tramite l'installazione di appositi buffer fra una macchina e l'altra.

- *pro* : La produzione avviene per un singolo prodotto, risulta molto efficiente, il *WIP* è ridotto ed il trasporto dei pezzi è semplice, dato che segue un'unica direzione. I tempi di avvio sono brevi.
- *contro* : La produzione è poco flessibile ed è a rischio obsolescenza, il malfunzionamento di una macchina può causare l'interruzione dell'intera linea (single point of failure).

Teorema (Legge di Little) : Data una linea di trasferta, ed i seguenti parametri

- p : tasso di produzione misurato in pezzi per unità di tempo
- T_a : tempo necessario per l'attraversamento di una linea
- *WIP* il work in process, il numero di pezzi che vengono lavorati contemporaneamente

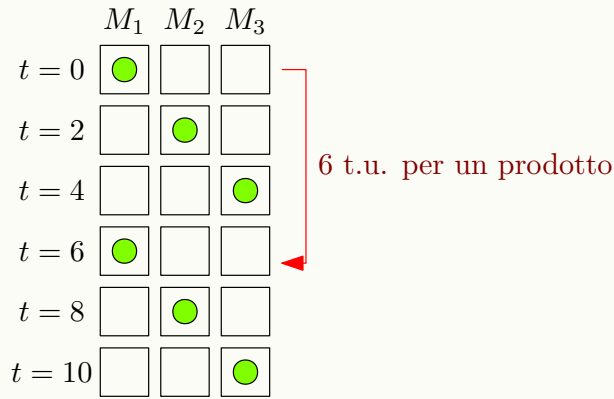
Vale la seguente relazione

$$WIP = p \cdot T_a$$

La legge si riferisce ad un sistema a regime permanente, quindi non considera l'avvio della linea, dato quindi un tasso p fisso, per ridurre il *WIP* è necessario ridurre il tempo necessario per l'attraversamento della linea.

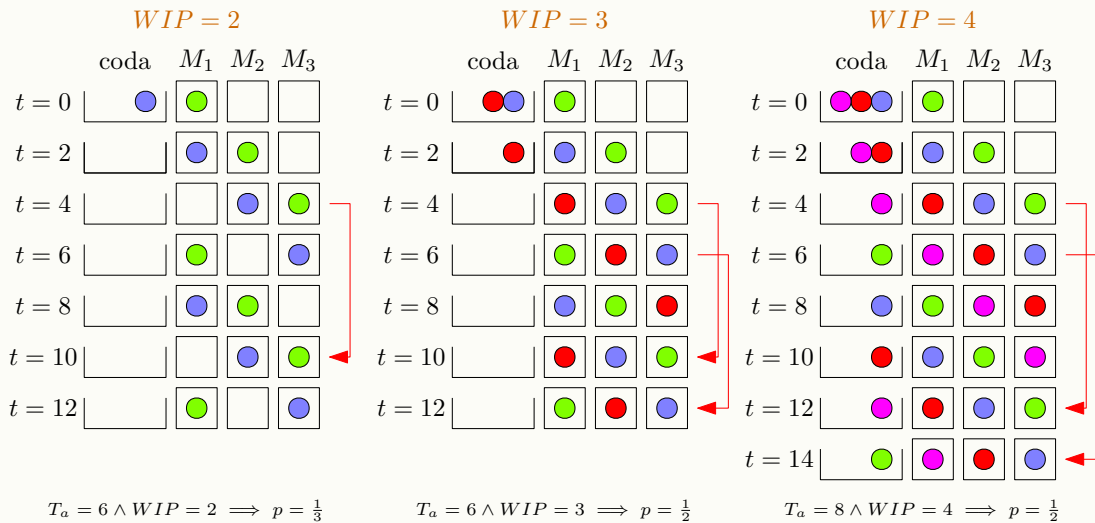
Esempio

Verrà considerata una linea di trasferta composta da 3 macchine M_1, M_2 e M_3 , i cui tempi di lavoro sono uguali e costanti $T_1 = T_2 = T_3 = 2$. Tale analisi è fatta a *WIP* costante.



In questo contesto, il WIP è 1, ciò significa che solamente un pezzo (indicato con una pallina verde) può occupare le 3 macchine contemporaneamente. Ogni 2 unità di tempo, il pezzo viene processato da una macchina all'altra, ci vogliono 6 unità di tempo per produrre un pezzo, $T_a = 6$.

$$T_a = 6 \wedge WIP = 1 \implies p = \frac{1}{6} \text{ un pezzo ogni 6 unità di tempo}$$



Si noti come nonostante il WIP aumenti, nel caso $WIP = 4$ il tasso di produzione rimane invariato, risulta quindi fondamentale trovare il valore di WIP ottimale che minimizzi T_a e massimizzi p .

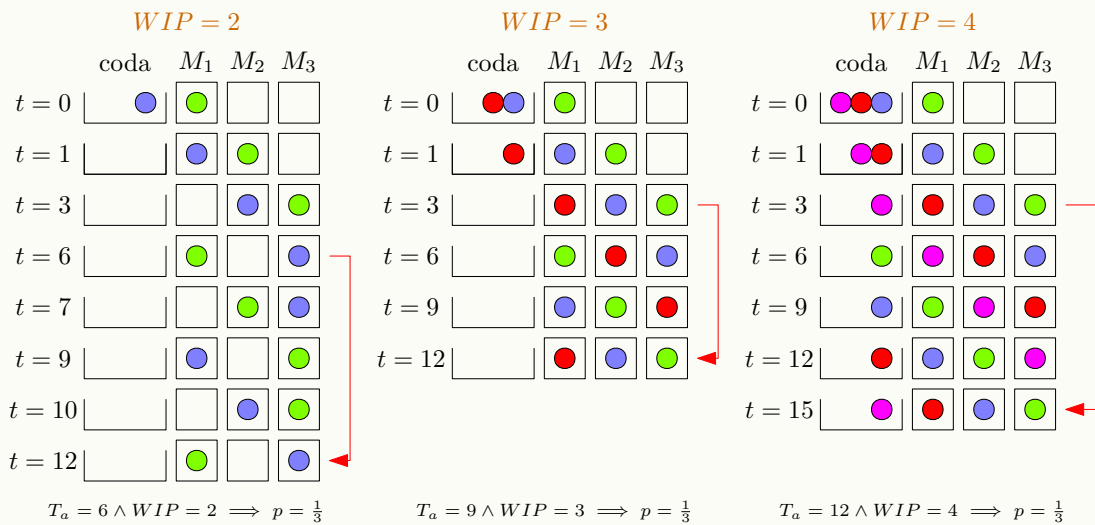


Figura 1.11: $T_1 = 1$ $T_2 = 2$ $T_3 = 3$



L'esempio proposto in figura 1.11 è simile a quello precedente, ma in questo caso le macchine hanno tempi di lavoro differenti, precisamente, aumentano in ordine crescente.

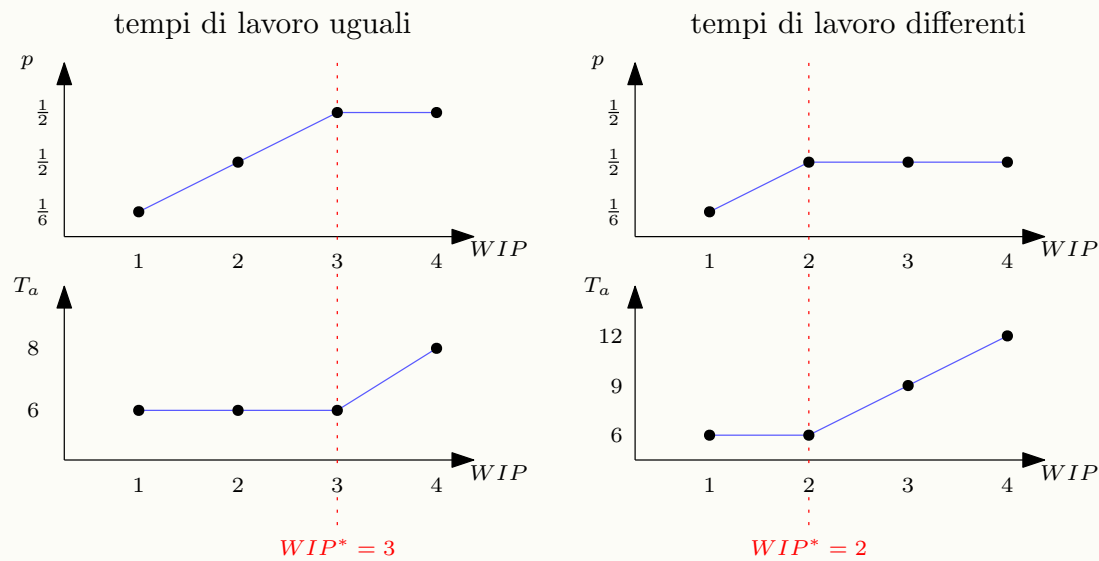


Figura 1.12: Analisi in funzione del WIP

Con **Dimensionamento e Bilanciamento** di una linea di trasferta, si intende la ricerca del compromesso ideale fra l'aumento della produttività (utilizzo di più macchine) e la riduzione dei costi, a parità di tempo totale di lavorazione. Le curve in figura 1.13, descrivono l'allocazione delle lavorazioni (distribuzione del carico) in un numero fissato di N stazioni/macchine.

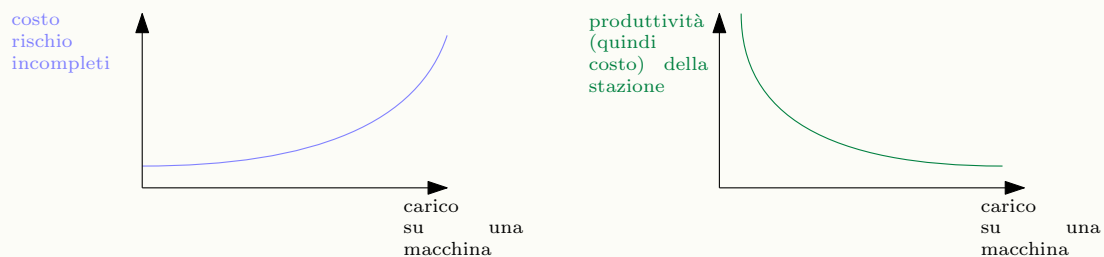


Figura 1.13: Analisi in funzione del carico su una singola macchina

- maggiore è il numero di stazioni utilizzate, minore sarà il carico medio delle stazioni e maggiore il costo unitario del singolo pezzo prodotto
- minore è il numero di stazioni utilizzate, maggiore sarà il carico medio delle stazioni e maggiore il costo del rischio di effettuare lavorazioni incomplete, a causa della elevata saturazione nell'impiego dei macchinari della stazione

Il problema del bilanciamento di una linea di trasferta è NP-completo, per questo vengono utilizzate delle euristiche di soluzione, che garantiscono una soluzione prossima a quella ottimale.

Modello del Problema del Dimensionamento

Vi è una linea di trasferta con n macchine/stazioni, ogni macchina i -esima, ha un carico di lavoro C_i espresso in unità di tempo. La linea deve soddisfare un certo tasso di produzione p espresso in pezzi per unità di tempo. Il valore $CMT = \frac{1}{p}$ rappresenta il *carico massimo teorico*, è chiaro che se una qualsiasi stazione ha un carico $C_i > CMT$, allora il tasso di produzione p non è rispettato.



Un tasso $p = 7200 \frac{\text{pezzi}}{\text{mese}} = 10 \frac{\text{pezzi}}{\text{ora}}$ implica un carico di lavoro massimo pari a 6 minuti per pezzo.

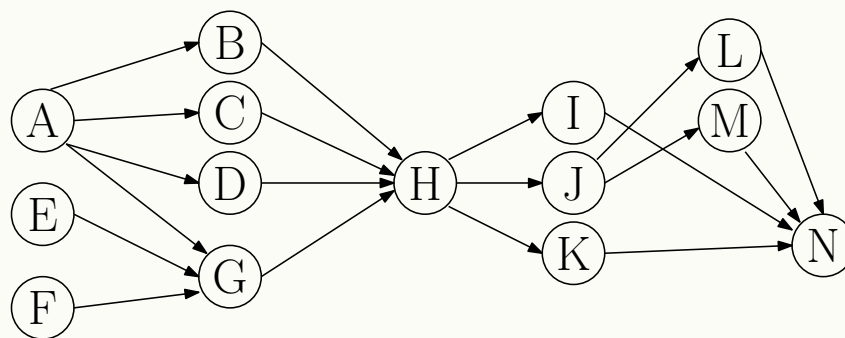
Sarebbe ideale inoltre ridurre il numero delle macchine n , dato che più macchine, equivale a dire un costo di manutenzione maggiore. Nella linea di trasferta, le varie lavorazioni da eseguire possono avere delle *dipendenze* (una lavorazione i può essere eseguita esclusivamente dopo una lavorazione j), si possono quindi rappresentare tali dipendenze attraverso un grafo orientato.

Dato quindi un insieme di lavorazioni, si vuole trovare

- una sequenza di produzione in cui il carico di lavoro per ogni macchina sia minore del carico di lavoro massimo teorico (ammissibilità)
- tale sequenza, deve rispettare le dipendenze (ammissibilità)
- che minimizzi il numero n di macchine/stazioni

Esempio

Lavorazione	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
Tempo T_i in secondi	55	30	50	42	20	25	45	60	36	42	30	40	36	40
lavorazioni necessarie		A	A	A			A, E, F	B, C, D, G	H	H	H	J	J	I, K, L, M



La specifica del tasso di produzione è

$$p = 300 \frac{\text{pezzi}}{7h} = \frac{300}{7} \frac{\text{pezzi}}{h} = \frac{300}{3600 * 7} \frac{\text{pezzi}}{s} = \frac{1}{84} \frac{\text{pezzi}}{s}$$

Il carico massimo teorico è quindi

$$CMT = p^{-1} = 84 \text{ secondi a pezzo}$$

Essendo il tempo totale per la lavorazione di un pezzo uguale a 551 secondi, si ha che, al minimo, il numero di macchine presenti deve essere $n = \lceil T_{tot}/CMT \rceil = \lceil 551/84 \rceil = 7$. Per trovare una sequenza ammissibile ed ottimale, sarebbe necessaria una procedura non polinomiale, esistono quindi degli algoritmi che forniscono una soluzione ammissibile (quando possibile) tramite delle euristiche.

Ranked Positional Weight Technique

L'algoritmo consiste nell'assegnare ad ogni lavorazione i un peso PW_i , che consiste nel suo tempo necessario T_i sommato ai tempi di tutte le lavorazioni che dipendono da esso, direttamente ed indirettamente. In seguito, si ordinano le lavorazioni in base a tali pesi, in ordine decrescente, nell'esempio precedente si ha

Lavorazione	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
T_i	55	30	50	42	20	25	45	60	36	42	30	40	36	40
precedenti	B, C, D G..., N	H, I ..., N	H, I ..., N	H, I ..., N	G, H , I,... N	G, H , I,... N	H, I ...,N	I...,N	N	L, M, N	N	N	N	
PW_i	506	314	334	326	349	354	329	284	76	158	70	80	76	40



A tal punto si ordinano secondo PW_i :

$$A \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow H \rightarrow J \rightarrow L \rightarrow I \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow N$$

Si iniziano poi a considerare le lavorazioni in quest'ordine una dopo l'altra, sommandone i tempi necessari fino a ch  sono minori di CMT , ad esempio

- Considero A, che ha tempo di lavorazione 55, lo assegno alla prima stazione.
 ◇ Carico della stazione 1 : $C_1 = 55 \leq CMT$
- Considero F, che ha tempo di lavorazione 25, lo assegno alla prima stazione.
 ◇ Carico della stazione 1 : $C_1 = 80 \leq CMT$
- Considero E, che ha tempo di lavorazione 20, non posso assegnarlo alla prima stazione, dato che il carico sarebbe maggiore di $CMT = 84$, quindi   necessaria una nuova stazione alla quale assegno E.
 ◇ Carico della stazione 2 : $C_2 = 20 \leq CMT \leq CMT$
- Considero C, che ha tempo di lavorazione 50, lo assegno alla seconda stazione.
 ◇ Carico della stazione 2 : $C_2 = 70 \leq CMT \leq CMT$
- ...e cos  via

Al termine, si avr  la seguente assegnazione

$CMT - C_i$	4	14	39	12	24	2	12	14
C_i	80	70	45	72	60	82	72	70
Lavorazioni	F	C		B		L	M	N
	A	E	G	D	H	J	I	K
Stazione	1	2	3	4	5	6	7	8

Il termine $CMT - C_i$   detto *sbilanciamento*, lo sbilanciamento medio equivale alla somma degli sbilanciamenti diviso il numero di stazioni, in questo caso $111/8 = 13.875$ secondi, si misura in percentuale rispetto il CMT , in questo caso, si ha uno sbilanciamento di circa 16.5%.

tempi lavorazioni	55	25	20	50	45	42	30	60	42	40	36	36	30	40			tempi lavorazioni sulle macchine	tempi morti	distanza da CMT = 84		
macchina																	82 sec/pezzo				
1	A	F	ripete A, F su nuovi pezzi				80		A = 55	F = 25	2	4	
2			E	C	ripete E, C su nuovi pezzi				70	a regime con	E = 20	C = 50	12	14	
3					G	ecc	45	avanzamento	G = 45	-	37	39	
4						D	B	ecc	72	sincrono	D = 42	B = 30	10	12	
5								H	60	della linea	H = 60	-	22	24	
6									J	L	82	di trasferta	J = 42	L = 40	0	2	
7											I	M	72	ogni 82 sec	I = 36	M = 36	10	12	
8													K	N	70		K = 30	N = 40	12	14	
tempo totale	551															tempo totale	8 x 82 = 656				
lavorazioni (effettivo sul primo pezzo)																lavorazioni (a regime)					

1.3.2 Flow Shop

Un'altro tipo di struttura per un sistema industriale   il gi  citato flow shop, dove vi   la produzione di diversi prodotti, che devono seguire un determinato percorso fra le macchine presenti. Ogni prodotto deve vedere m lavorazioni, e differenti prodotti, possono passare per la stessa macchina, ma necessitando di tempi differenti, quindi, sar  assegnato un tempo di lavorazione ad ogni coppia (lavorazione, prodotto). Il tempo totale di completamento T_{max} , detto **makespan**,   il valore da minimizzare, possono essere presenti dei buffer nella struttura.

Il problema si complica rispetto la linea di trasferta, in questo caso per , date per assunte delle condizioni,

vi è una regola che permette di stabilire una sequenza ottimale.

Teorema (Regola di Jhonson) : Assunzione : Ci sono esclusivamente 2 macchine/stazioni, denotate M_1 e M_2 .

Sia $L = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ un insieme di lavorazioni, i cui tempi per M_1 sono $\{t_{11}, t_{21}, \dots, t_{n1}\}$, e i tempi per M_2 sono $\{t_{12}, t_{22}, \dots, t_{n2}\}$. dove $\forall i, t_{i1} > 0 \wedge t_{i2} > 0$. Nella **soluzione ottimale**, la lavorazione l_i precede la lavorazione l_j se e solo se

$$\min(t_{i1}, t_{j2}) < \min(t_{j1}, t_{i2})$$

Tale teorema fornisce una procedura per trovare una soluzione ottimale, i passi sono i seguenti

1. si costruisce $S1 = \{l_i \in L \mid t_{i1} < t_{i2}\}$
2. si costruisce $S2 = S1^C = \{l_i \in L \mid l_i \notin S1\}$
3. Vengono schedate le lavorazioni secondo la regola
 - prima si eseguono tutte le lavorazioni di $S1$ in ordine crescente secondo t_{i1}
 - poi si eseguono tutte le lavorazioni di $S2$ in ordine decrescente secondo t_{i2}

Esempio di Applicazione per 2 Macchine

Si hanno le seguenti lavorazioni

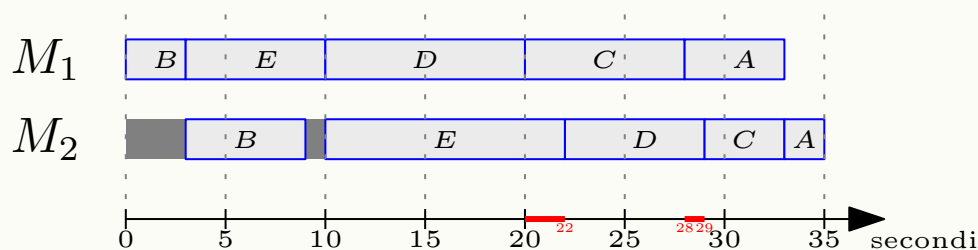
Lavorazione	A	B	C	D	E	T_{tot}
t_{i1}	5	3	8	10	7	33
t_{i2}	2	6	4	7	12	31

Si costruiscono i due insiemi

- $S1 = \{B, E\}$
- $S2 = \{A, C, D\}$

Si ordinano secondo i criteri della procedura ottenendo la sequenza

$$S^* = B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A$$



Gli intervalli rossi nella linea del tempo rappresentano il *tempo sprecato*, all'istante $t = 20$, la lavorazione D termina su M_1 , ed è pronta ad essere schedata su M_2 , ma quest'ultima è ancora impegnata nella lavorazione di E, per questo il prodotto che ha appena terminato D dovrà attendere, sarà quindi necessaria la presenza di un buffer. Situazione analoga per la lavorazione C nell'istante 28.

Non ci sono attese sulla macchina 1, le attese sulla macchina 2 sono inevitabili, ma tale procedura le minimizza. La macchina 1 è costantemente carica, si dice che $T_{idle,1} = 0$ (non ci sono tempi di attesa). Differente è la situazione per la macchina 2 : $T_{idle,2} = 4$. Il tempo di lavorazione totale è $T_{max} = 35$.

Generalizzazione con 3 Macchine

Sotto ulteriori ipotesi, è possibile trovare una soluzione ottimale anche in un contesto con 3 macchine/stazioni M_1, M_2, M_3 , con relativi tempi di lavorazione t_{i1}, t_{i2}, t_{i3} con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ dove n = numero lavorazioni. Per poter trovare tale soluzione, è necessario che venga soddisfatta la seguente condizione

$$\max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} (t_{i2}) \leq \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} (t_{i1}) \vee \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} (t_{i2}) \leq \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} (t_{i3})$$



Se tale condizione è avverata, è possibile considerare una struttura flow shop a due macchine, precisamente M'_1, M'_2 , con le medesime lavorazioni, la cui soluzione è identica alla soluzione del sistema originale con 3 macchine.

Nel nuovo sistema, i nuovi tempi di lavorazione t'_{i_1}, t'_{i_2} vanno definiti come segue

- $t'_{i_1} = t_{i_1} + t_{i_2}$
- $t'_{i_2} = t_{i_2} + t_{i_3}$

Esempio di Applicazione per 3 Macchine

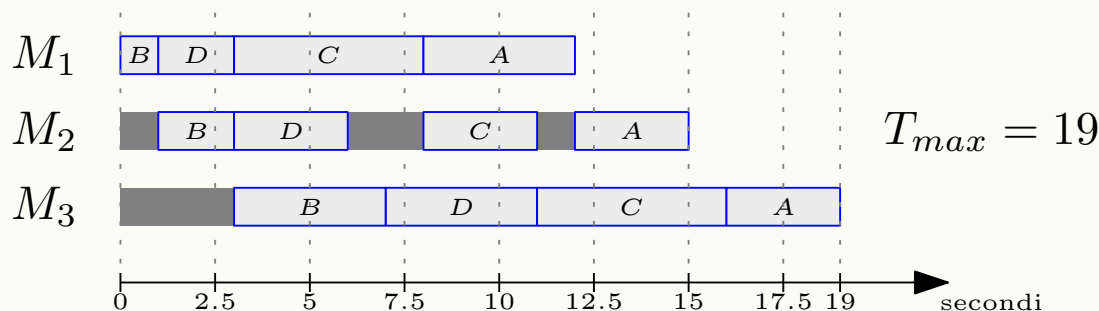
Si hanno le seguenti lavorazioni

Lavorazione	A	B	C	D
t_{i_1}	4	1	5	2
t_{i_2}	3	2	3	3
t_{i_3}	3	4	5	3

La condizione $\max_{i \in \{1,2,\dots,n\}}(t_{i_2}) \leq \min_{i \in \{1,2,\dots,n\}}(t_{i_3})$ è soddisfatta, quindi posso ridurre il sistema ad uno equivalente

Lavorazione	A	B	C	D
$t'_{i'_1}$	7	3	8	5
$t'_{i'_2}$	6	6	8	7

Si applica la regola di Jhonson, trovando la sequenza $S^* = B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A$, che verrà applicata al sistema originale con 3 macchine.



Un'altra struttura è la **produzione per reparti**, già accennata con il nome di **job shop**, in cui l'impianto è suddiviso in reparti contenenti stazioni, ed i vari prodotti devono essere passati fra i reparti attraverso sistemi di trasporto che seguono un percorso prefissato, è quindi necessario considerare il routing dei prodotti fra i reparti. Il modello job shop è caratterizzato da

- vaste categorie di prodotti, che subiscono lavorazioni con sequenze differenti
- operazioni non ripetitive ed alta flessibilità
- un maggiore work in process, i flussi lavorativi sono intricati
- elevati tempi di attraversamento, e qualità dei prodotti non sempre omogenea

Quando è possibile individuare famiglie di prodotti simili con cicli di lavorazione omogenei si identificano delle celle contenenti gruppi di macchine adatti a tale famiglia di prodotti, tale **produzione per celle** semplifica i flussi di produzione, il trasporto e la gestione, le varie celle sono indipendenti fra loro.

Quando si implementa il trasporto automatico ed un controllo tramite calcolatore nelle celle di produzione si parla di **Flexible Manufacturing/Assembly Systems (FMS/FAS)**, sono sistemi dotati di elevata flessibilità riguardo alle diverse sequenza delle lavorazioni e/o all'assegnamento di operazioni alle risorse. Sono caratterizzati da

- diversi prodotti
- lavorazioni eseguite su più macchine

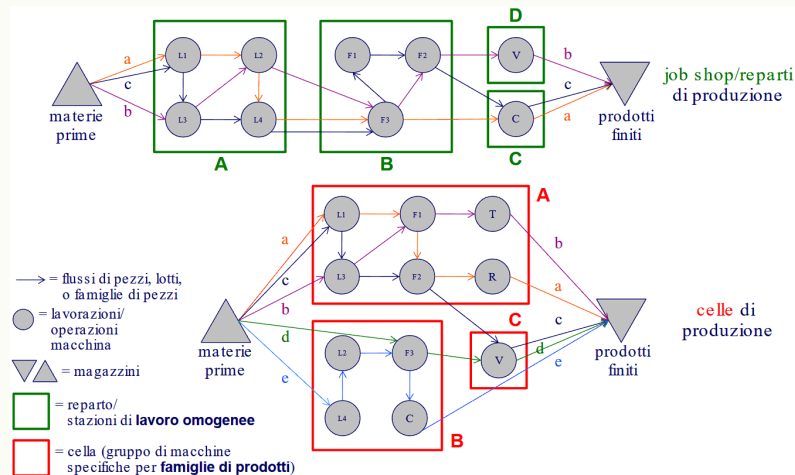


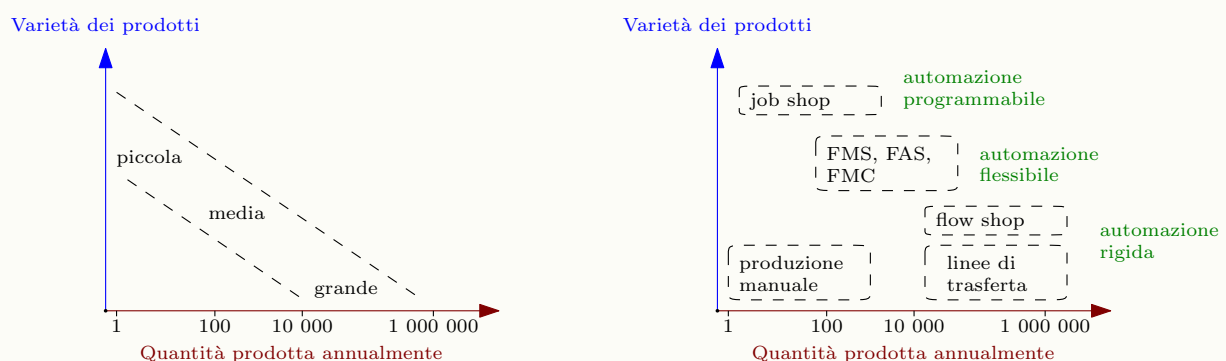
Figura 1.14: job shop e celle di produzione

- assegnazione delle risorse tramite routing dei flussi
- problemi di sequenziamento locale dell'impiego delle risorse
- alto grado di automazione

È possibile individuare tre tipi di automazione industriale

- *Automazione rigida* : La sequenza delle operazioni è fissata, sono sistemi poco flessibili (come le linee di trasferta) destinati a grandi produzioni con poca varietà di prodotto.
- *Automazione programmabile* : Si può cambiare la configurazione del flusso di produzione in modo da variare il prodotto, tipico delle industrie con produzione discreta a lotti. Vi è un tempo di attesa fra un lotto ed un altro per la riconfigurazione del flusso.
- *Automazione flessibile* : estensione dell'automazione programmabile in cui è possibile diversificare la produzione senza avere tempi morti di conversione dell'impianto, i macchinari utilizzati sono caratterizzati sono altamente configurabili.

In generale, per i sistemi di automazione, esiste una correlazione qualitativa fra la quantità di prodotto fabbricata, ed il numero di prodotti distinti.



CAPITOLO

2

COMPLEMENTI

2.1 La Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace è una *trasformata integrale*, nello specifico, è una funzione che associa ad una funzione di variabile reale, una funzione di variabile complessa.

Definizione (Trasformata di Laplace) : Sia f una funzione di variabile reale, nulla in $(-\infty, 0)$, si chiama trasformata di Laplace di f la funzione

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx \quad p \in \mathbb{C}$$

Essendo $p = \alpha + i\beta$ una variabile complessa, la funzione integranda si può riscrivere

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\beta)x} f(x) dx$$

Ricordando l'identità di Eulero

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

Si ha

$$e^{-(\alpha+i\beta)x} = e^{-\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = \quad (2.1)$$

$$e^{-\alpha x} \cdot (\cos(-\beta x) + i \sin(-\beta x)) = e^{-\alpha x} \cdot (\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)) = \quad (2.2)$$

$$e^{-\alpha x} \cos(\beta x) - i e^{-\alpha x} \sin(\beta x) \quad (2.3)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](p) &= \mathcal{L}[f](\alpha + i\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\beta)x} f(x) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x) f(x) dx - i \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin(\beta x) f(x) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x) f(x) dx - i \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin(\beta x) f(x) dx \end{aligned}$$

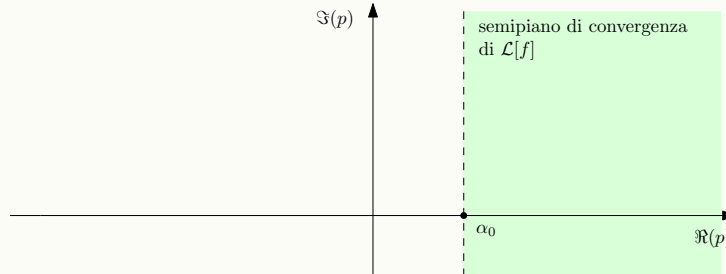
Se l'integrale $\mathcal{L}[f](\alpha + i\beta)$ converge per un certo $\alpha \in \mathbb{R}$, allora converge per $p = \alpha + i\beta$ per ogni altro $\beta \in \mathbb{R}$. Se per f esiste almeno un $p \in \mathbb{C}$ tale che $\mathcal{L}[f](p) < \infty$, allora f si dice *trasformabile secondo Laplace*.



In generale, se $\mathcal{L}[f](p) < \infty$ per $p = p_0$, allora è definita anche nel semipiano complesso

$$\{p \in \mathbb{C} \mid \Re(p) > \Re(p_0)\}$$

Sia α_0 l'estremo inferiore dell'insieme $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \mathcal{L}[f](p) < \infty \wedge \Re(p) > \alpha\}$, allora il semipiano $\{p \in \mathbb{C} \mid \Re(p) > \alpha_0\}$ è detto **semipiano di convergenza**.



Vediamo un esempio di trasformata, si consideri

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

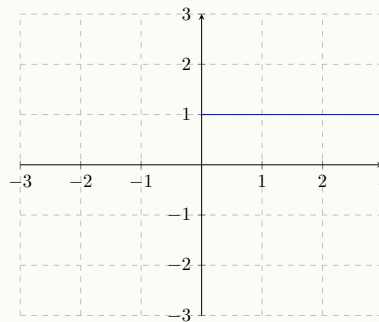


Figura 2.1: Funzione di Heaviside

Si calcola

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[H](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-px} \cdot 1 \, dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[H](p) = \int_0^T e^{-px} \cdot 1 \, dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-px}}{p} \right]_0^T = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} -\frac{e^{-pT}}{p} - \left[-\frac{e^{-p0}}{p} \right] = \lim_{T \rightarrow +\infty} -\frac{e^{-pT}}{p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Il cui semipiano di convergenza risulta essere $\Re(p) > 0$.

2.1.1 Proprietà della Trasformata

Linearità

La trasformazione di Laplace gode della proprietà di *linearità*, siano $f(p)$ e $g(p)$ due funzioni trasformabili, siano $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ due costanti complesse, se la funzione $\lambda \cdot f(p) + \mu \cdot g(p)$ è trasformabile, allora

$$\mathcal{L}[\lambda \cdot f + \mu \cdot g](p) = \lambda \mathcal{L}[f](p) + \mu \mathcal{L}[g](p)$$

Il semipiano di convergenza sarà uguale all'intersezione dei due semipiani di convergenza delle funzioni di partenza, più precisamente se

- f ha come semipiano di convergenza $\Re(p) > \alpha$
- g ha come semipiano di convergenza $\Re(p) > \beta$
- allora $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ ha come semipiano di convergenza $\Re(p) > \max\{\beta, \alpha\}$



Ritardo

Sia f una funzione trasformabile, si consideri una costante reale $a > 0$, la funzione $g(x) = f(x - a)$ è detta funzione *ritardata*.

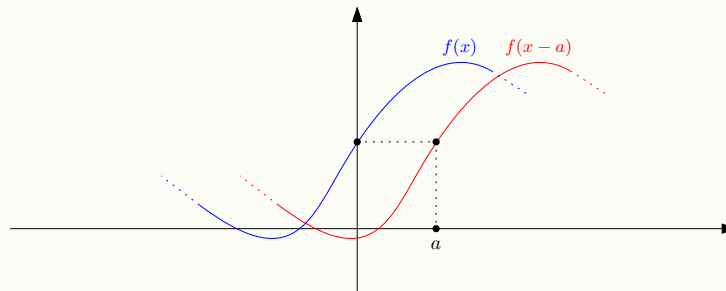


Figura 2.2: funzione ritardata

Per il calcolo della trasformata di $g(x) = f(x - a)$ si considera il cambio di variabile

$$\begin{aligned} t &= x - a \\ x &= t + a \end{aligned}$$

Si ricordi come, se f è nulla in $(-\infty, 0)$, allora g sarà nulla in $(0, a)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-px} g(x) dx = \int_a^{+\infty} e^{-px} f(x - a) dx = \int_a^{+\infty} e^{-p(t+a)} f(t) dx = \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-pt-pa} f(t) dx = \int_a^{+\infty} e^{-pt} e^{-pa} f(t) dx = e^{-pa} \int_a^{+\infty} e^{-pt} f(t) dx = e^{-pa} \mathcal{L}[f](p) \end{aligned}$$

Dunque si ricavano le cosiddette *formule del ritardo* :

$$\mathcal{L}[f(x - a)](p) = e^{-pa} \mathcal{L}[f(x)](p)$$

$$\mathcal{L}[e^{ax} f(x)](p) = \mathcal{L}[f](p - a)$$

Trasformazione di una derivata e di una primitiva

La seguente proprietà risulta cruciale nell'utilizzo della trasformata di Laplace per la risoluzione di equazioni differenziali. Le dimostrazioni dei seguenti risultati non saranno trattate in quanto non sono argomento di questo corso.

Sia f una funzione derivabile, la cui derivata è continua in $[0, \infty)$. Sia inoltre f' trasformabile, con semipiano di convergenza $\Re(p) > \alpha$, allora anche f è trasformabile, ha semipiano di convergenza $\Re(p) > \max\{\alpha, 0\}$, e vale la seguente identità :

$$\mathcal{L}[f'](p) = p\mathcal{L}[f](p) - f(0)$$

Si generalizza per derivate di ordine maggiore

$$\mathcal{L}[f''](p) = p^2 \mathcal{L}[f](p) - pf(0) - f'(0)$$

Analogamente, sia $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, se f è trasformabile ed ha semipiano di convergenza $\Re(p) > \alpha$, allora anche F lo è, ha semipiano di convergenza $\Re(p) > \max\{\alpha, 0\}$ e vale che

$$\mathcal{L}[F](p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}[f](p)$$

Convoluzione

Siano f e g due funzioni integrabili secondo Riemann e nulle in $(-\infty, 0)$, l'operatore $*$ detto **convoluzione** è definito nel modo seguente

$$(f * g)(x) = \int_0^{+\infty} f(x-t)g(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$$

Se f è trasformabile, e $|g|$ lo è, nello stesso semipiano, allora $f * g$ è trasformabile e vale

$$\mathcal{L}[f * g](p) = \mathcal{L}[f](p) \cdot \mathcal{L}[g](p)$$

Derivata ed Integrale della trasformata di Laplace

Essendo $\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px} dx$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{d}{dp}\mathcal{L}[f](p) &= \frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px} dx \\ \frac{d}{dp}\mathcal{L}[f](p) &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dp}(f(x)e^{-px}) dx \\ \frac{d}{dp}\mathcal{L}[f](p) &= \int_0^{+\infty} -xf(x)e^{-px} dx \\ \frac{d}{dp}\mathcal{L}[f](p) &= \mathcal{L}[-xf(x)](p)\end{aligned}$$

Generalizzando, per ogni $n \geq 0$

$$\left. \begin{array}{c} \text{✎} \end{array} \right\} \frac{d^n}{dp^n}\mathcal{L}[f](p) = \mathcal{L}[-(1)^n x^n f(x)](p) \left. \begin{array}{c} \text{✎} \end{array} \right\}$$

Esempio di calcolo : Si vuole trovare

$$\mathcal{L}[x \sin(\omega x)](p)$$

Essendo

$$\mathcal{L}[\sin(\omega x)](p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Ho che

$$\mathcal{L}[x \sin(\omega x)](p) = -\frac{d}{dp}\mathcal{L}[\sin(\omega x)](p) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\right) = \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$$

Trascurando il procedimento, la formula per l'integrale di una trasformata è la seguente

$$\left. \begin{array}{c} \text{✎} \end{array} \right\} \int_p^{+\infty} \mathcal{L}[f](s) ds = \mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right](p) \left. \begin{array}{c} \text{✎} \end{array} \right\}$$

2.1.2 Trasformata inversa

La funzione che associa ad ogni funzione trasformabile la sua trasformata, è iniettiva, se $F(p)$ è una trasformata di Laplace, esiste un'unica funzione f tale che $\mathcal{L}[f](p) = F(p)$. Data F , è possibile ottenere la funzione di base su cui si è effettuata la trasformata, tale operazione è detta *trasformazione inversa* di Laplace, si indica con \mathcal{L}^{-1}

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f] &= F \\ \mathcal{L}^{-1}[F] &= f\end{aligned}$$

Le formule di trasformazione derivate dalle proprietà (raggruppate alla fine di questa sezione), se lette al contrario valgono come formule di anti-trasformata.

Esempio di calcolo : Ricordando che $\mathcal{L}[e^{-ax}](p) = \frac{1}{p+a}$, si vuole calcolare la trasformata inversa di

$$\frac{2}{p+3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{p+3}\right](x) = \quad (2.4)$$

$$2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+3}\right](x) = \quad (2.5)$$

$$2 \cdot e^{-3x} \cdot H(x) \quad (2.6)$$

Una funzione risultante da un'anti trasformata va moltiplicata per la funzione di Heaviside $H(x)$ in quanto deve essere nulla in $(-\infty, 0)$. **Esempio di calcolo** : Si vuole trovare l'anti trasformata di

$$F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)}$$

Riscrivo la funzione

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p^3 + p} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}$$

Applicando la linearità ho

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}\right](x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right](x) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2 + 1}\right](x) = \quad (2.7)$$

$$H(x) - \cos(x) \cdot H(x) = H(x)(1 - \cos(x)) \quad (2.8)$$

2.1.3 Trasformate note

Funzione	Trasformata	Semipiano di convergenza
1	$\frac{1}{p}$	$\Re(p) > 0$
e^{-ax}	$\frac{1}{p+a}$	$\Re(p) > -\Re(a)$
x	$\frac{1}{p^2}$	$\Re(p) > 0$
x^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\Re(p) > 0 \quad n \in \mathbb{N}$
$\sin(\omega x)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\Re(p) > 0$
$\cos(\omega x)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\Re(p) > 0$
δ	1	$p \in \mathbb{C}$
$\cosh(ax)$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\Re(p) > \Re(a) $
$\sinh(ax)$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\Re(p) > \Re(a) $

2.1.4 Funzione di trasferimento

Come già accennato, la trasformata di Laplace è utile nella risoluzione di equazioni differenziali. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b(t) \quad \begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

Si applica la trasformata all'equazione, ottenendo

$$\mathcal{L}[a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y](p) = \mathcal{L}[b](p)$$

si applica la linearità

$$a_0 \mathcal{L}[y''](p) + a_1 \mathcal{L}[y'](p) + a_2 \mathcal{L}[y](p) = \mathcal{L}[b](p)$$

Chiamo

$$\mathcal{L}[y](p) = Y(p) \quad \mathcal{L}[b](p) = B(p)$$

ed applico le proprietà della trasformazione di una derivata

$$a_0(p^2 Y(p) - p\alpha - \beta) + a_1(pY(p) - \alpha) + a_2 Y(p) = B(p)$$

$$a_0 p^2 Y(p) - a_0 p\alpha - a_0 \beta + a_1 pY(p) - a_1 \alpha + a_2 Y(p) = B(p)$$

esplicito $Y(p)$:

$$Y(p)(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) = B(p) + a_0 p\alpha + a_0 \beta + a_1 \alpha$$

$$Y(p) = \frac{1}{(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)} B(p) + a_0 p\alpha + a_0 \beta + a_1 \alpha$$

Pongo

$$S(p) = \frac{1}{(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)}$$

Tale S è detta **funzione di trasferimento**, se le condizioni iniziali sono entrambe nulle, ossia $\alpha = \beta = 0$, si ha

$$Y(p) = S(p) \cdot B(p)$$

$$\mathcal{L}[y](p) = S(p) \cdot \mathcal{L}[b](p)$$

Ricordando la convoluzione di una trasformata, si ha che

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[S \cdot B](t)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[S](t) * \mathcal{L}^{-1}[B](t)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[S](t) * b(t)$$

Le seguenti formule hanno un significato fisico notevole, supponiamo che vi sia un sistema fisico caratterizzato da un ingresso $b(t)$, ed un uscita $y(t)$, ad esempio, $b(t)$ è una forza, e $y(t)$ il moto di una particella. Trovare esplicitamente il moto y non è banale, è possibile quindi applicare la trasformata, passando nel dominio complesso di Laplace, per poi risolvere l'equazione ed applicare l'anti trasformata, trovando così il moto.

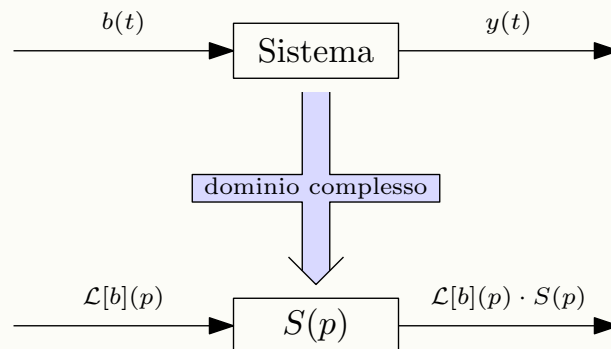


Figura 2.3: Funzione di Trasferimento

La funzione $S(p)$ quindi caratterizza totalmente il sistema fisico nel dominio di Laplace, in quanto basta moltiplicarla alla trasformata del segnale in ingresso per ottenere la trasformata del segnale in uscita.

Esempio di calcolo : Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 0 \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Si applica la trasformazione di Laplace

$$\mathcal{L}[y''](p) + 4\mathcal{L}[y'](p) + 3\mathcal{L}[y](p) = 0$$

Chiamando $\mathcal{L}[y](p) = Y(p)$, si ha

$$p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) + 4pY(p) - 4y(0) + 3Y(p) = 0$$

$$Y(p)(p^2 + 4p + 3) - 1 = 0$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3} = \frac{1}{(p+1)(p+3)} = \frac{A}{(p+1)} + \frac{B}{(p+3)}$$

dove $A = \frac{1}{p+1}$ se $p = -3$ e $B = \frac{1}{p+3}$ se $p = -1$, quindi

$$A = \frac{1}{(-3) + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$B = \frac{1}{(-1) + 3} = \frac{1}{2}$$

Quindi

$$Y(p) = -\frac{1}{2} \frac{1}{p+3} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+1}$$

Si applica l'anti trasformata

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{p+3} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+1}\right](t)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+3}\right](t) + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right](t)$$

Ricordando che $\mathcal{L}[e^{-ax}](p) = \frac{1}{p+a}$ si ha

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}\right)H(t)$$

