Esercizio 1. Sull'insieme $G = \{(a,b) \in \mathbb{Q}^2 \mid b \neq 0\}$ definiamo un'operazione binaria $*$ ponendo

$$(x,y)*(x_1,y_1) = (x + x_1 y, y y_1).$$

a) Dimostrare che, rispetto a tale operazione, G è un gruppo.

b) Specificare se G è abeliano.

c) Dimostrare che $N = \{(x,1) \in G \mid x \in \mathbb{Q}\}$ è un sottogruppo normale G.

a) tale gruppo ha elemento neutro $(0,1)$: $(x,y)*(0,1) = (x+0\cdot y, y\cdot 1) = (x,y)$

Inoltre, ogni elemento (x,y) ha inverso $\left(-\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)$, infatti:

$$(x,y)*\left(-\frac{x}{y},\frac{1}{y}\right) = \left(x - \frac{x}{y}\cdot y, y\cdot\frac{1}{y}\right) = \left(x-x, \frac{y}{y}\right) = (0,1)$$

b) Notiamo che: $(x,y)*(a,b) = (x+ay, yb) \neq (a+xb, by) = (a,b)*(x,y)$ non e' commutativo!

c) $N = \{(x,1)\in G \mid x \in \mathbb{Q}\}$ e' un sottogruppo.

CRITERIO: $(x,1)*(y,1)^{-1} = (x,1)*(-y,1) = (x-y,1) \in N$. Anche il neutro $(0,1)\in N$.

N e' un sottogruppo. Inoltre, sia $(a,b)\in G$, $(a,b)*(x,1)*(a,b)^{-1} = (a,b)*(x,1)*\left(-\frac{a}{b},\frac{1}{b}\right)$

$(a,b)*(x,1)*\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) = (a+xb, b)*\left(-\frac{a}{b},\frac{1}{b}\right) = \left(a+xb - \frac{a}{b}b, b\frac{1}{b}\right) = (xb,1)\in N \Rightarrow N$ e' normale.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{B} = \{v_1,v_2,v_3\}$ una sua base. Si consideri, al variare del parametro reale k, l'operatore $T_k: V\to V$ rappresentato dalla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix}1 & 1+k & 0\\ 0&3&0\\ 1 & 1-k & 3\end{pmatrix}$$

rispetto a $\mathcal{B}$ presa come base di partenza e arrivo in V.

a) Determinare gli autovalori di T_k.

b) Studiare la diagonalizzabilità di T_k al variare di k.

c) Per il/i valori di k per cui T_k è diagonalizzabile, determinare una matrice invertibile C tale che CA_kC^{-1} è diagonale.

a) $P_\lambda(T) = \det\begin{vmatrix}1-\lambda & 1+K & 0\\ 0 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 1-K & 3-\lambda\end{vmatrix} = (-1)^6\cdot(3-\lambda)\cdot\det\begin{vmatrix}1-\lambda & 1+K\\ 0 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) \Rightarrow$ AUTOVALORI $\begin{cases}3 \text{ con molt. } 2\\ 1 \text{ con molt. } 1\end{cases}$

b) $V_3 = \operatorname{Ker}\begin{vmatrix}-2 & 1+K & 0\\0&0&0\\1&1-K&0\end{vmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{vmatrix}1&1-K&0\\-2&1+K&0\\0&0&0\end{vmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{vmatrix}1&1-K&0\\0&-K+3&0\\0&0&0\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\dim(V_3)=1 & \text{se } K\neq 0 \Rightarrow T \\ \dim(V_3)=2 & \text{se } K=3\end{cases}$

$V_1 = \operatorname{Ker}\begin{vmatrix}0 & 1+K & 0\\0&2&0\\1&1-K&2\end{vmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{vmatrix}1&1-K&2\\0&2&0\\0&1+K&0\end{vmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{vmatrix}1&1-K&2\\0&1+K&0\\0&0&0\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\dim(V_1)=2 & \text{se } K=-1 \\ \dim(V_1)=1 & \text{se } K\neq -1\end{cases}$

T e' diagonalizzabile se e solo se $K=3$

c) $K=3 \Rightarrow V_3 = \begin{cases}x_1 = 2t_2\\ x_2 = t_2 \\ x_3 = t_3\end{cases} \Rightarrow V_3 = \operatorname{Span}\left(\begin{vmatrix}2\\1\\0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}\right)$ $\quad V_1 = \begin{cases}x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0\\ 4x_2 = 0\\ x_3 = t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = -2t\\x_2=0\\x_3=t\end{cases} \Rightarrow V_1 = \operatorname{Span}\begin{vmatrix}-2\\0\\1\end{vmatrix}$

base di autovettori $\mathcal{A} = \left\{\begin{vmatrix}2\\1\\0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-2\\0\\1\end{vmatrix}\right\}$ so che A_K e' SIMILE alla matrice associata a T_K con la base di autovettori $\mathcal{A}$, e risulta essere diagonale. so che $C = M_{\mathcal{E}\mathcal{A}}(T_K)$ ossia una matrice del cambiamento di base, se considerassimo $\mathcal{E}$ la base canonica, avremmo

$$C = \begin{vmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

Esercizio 3.

a) Risolvere il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 108 \\ x \equiv 13 \mod 40 \\ x \equiv 28 \mod 225 \end{cases}$$

b) Siano $V_1 = \mathbb{R}_2[t], V_2 = \mathbb{R}_3[t]$ gli spazi vettoriali dei polinomi a coefficienti reali nella variabile t di grado al più 2 e 3 rispettivamente. Si consideri l'applicazione lineare $F: V_1 \to V_2$

$$F(p(t)) = \frac{d^2}{dt^2}p(t^2) - (t+2)p(t+1).$$

Dimostrare che F è iniettiva.

27
4
98

a) $\begin{cases} x \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 108) \\ x \equiv 13 \ (\mathrm{mod}\ 40) \\ x \equiv 28 \ (\mathrm{mod}\ 225) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 1 \ (2^2) \\ x \equiv 1 \ (3^3) \\ x \equiv 13 \equiv 3 \ (5) \\ x \equiv 13 \equiv 5 \ (2^3) \\ x \equiv 28 \equiv 3 \ (5^2) \\ x \equiv 28 \equiv 1 \ (3^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 1 \ (27) \\ x \equiv 3 \ (25) \\ x \equiv 5 \ (8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 27l \\ x \equiv 3 \ (25) \\ 27l \equiv 4 \ (8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 27(4+8K) \\ 1 + 27(4+8K) \equiv 3 \ (25) \\ l = 4 + 8K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 216K \equiv -106 \ (25) \end{cases}$

$216K \equiv -106 \ (25) \Rightarrow 16K \equiv 19 \ (25) \Rightarrow K \equiv 19 \cdot 11 \ (25) \Rightarrow K \equiv 9 \ (25) \Rightarrow K = 9 + 25t$

$x = 1 + 27(4 + 8[9+25t]) = 1 + 27(76 + 25 \cdot 8t) = 2053 + (27 \cdot 25 \cdot 8)t \equiv 2053 \ (\mathrm{mod}\ 27 \cdot 25 \cdot 8)$

b) considero $\mathrm{Ker}F = \{ p \in \mathbb{R}_2[t] \mid \frac{d^2}{dt^2}p(t^2) - (t+2)p(t+1) = 0 \}$

$\Leftrightarrow (at^4 + bt^2 + c)'' - (t+2)(a(t+1)^2 + b(t+1) + c) = 0 \Leftrightarrow (4at^3 + 2bt)' - (t+2)(a(t+1)^2 + bt + b + c) \Leftrightarrow$

$12at^2 + bt - (t+2)(a(t^2+2t+1) + bt + b + c) = 0 \Leftrightarrow 12at^2 + bt - (t+2)(at^2 + 2at + a) - (t+2)(bt) - tb - 2b - tc - 2c$

$12at^2 + bt - at^3 - 2at^2 - at - 2at^2 - 4at - 2a - t^2b - 3bt - 2b - tc - 2c = -at^3 + t^2(8a - b) + t(-5a - 2b - c) - 2(a + b + c)$

$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ -5 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Leftarrow$ e' a scala ed ha $rg = 3 \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}F) = 0 \Rightarrow F$ e' iniettiva.

Esercizio 4.

a) Dare la definizione di indipendenza lineare per un insieme finito di vettori $\{v_1, \ldots, v_r\}$ in uno spazio vettoriale V.

b) Dimostrare che $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ è invertibile se e solo se a è coprimo con n.

c) Dimostrare che ogni sottogruppo non zero di $\mathbb{Z}$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

a) un insieme finito di vettori $\{\bar{v}_1, \ldots \bar{v}_r\}$, vede i vettori linearmente indipendenti se l'unica combinazione lineare di essi uguale al vettore nullo, ha i coefficenti tutti nulli:

$$\alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2 \cdots + \alpha_r\bar{v}_r = \bar{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \cdots = \alpha_r = 0$$

b) $[a] \in \mathbb{Z}_n$ e' invertibile se $\exists x \in \mathbb{Z}_n \mid a \cdot x \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ n)$, ma ciò e' possibile se e solo se $\mathrm{MCD}(a,n)$ divide $1 \Rightarrow \mathrm{MCD}(a,n) = 1$.

c) Considero $f: \mathbb{Z} \to n\mathbb{Z}$ tale che $f(a) = n \cdot a$. Tale mappa e' un omomorfismo: $f(0) = n \cdot 0 = 0$ e $f(a+b) = n(a+b) = na + nb = f(a) + f(b)$. Inoltre e' iniettiva: $a \neq b \wedge f(a) = na \neq nb = f(b)$. E' anche suriettiva: $\forall na \in n\mathbb{Z}, \exists a \in \mathbb{Z} \mid f(a) = na \Rightarrow f$ e' un isomorfismo.