Esercizio 1. Si consideri il sistema omogeneo di 3 equazioni in 6 incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che trattasi di un sistema omogeneo a scala $S\underline{x} = \underline{0}$.

Determinare i pivots della matrice S. Determinare le variabili dipendenti del sistema e quelle libere. Risolvere il sistema. Sia Σ_0 l'insieme delle soluzioni. Spiegare perché Σ_0 è un sottospazio di $\mathbb{R}^6$. Determinare $k \in \mathbb{N}$ e k vettori linearmente indipendenti $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k\}$ in $\mathbb{R}^6$ in modo tale che

$$\Sigma_0 = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k)$$

Determinare il rango di S. Determinare una base per $\mathrm{Im}\, S$.

La matrice $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ha 3 pivot, sono tutti e tre 1. Saprò che $\text{rango}(S) = 3$.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 = t_2 \\ x_4 = t_4 \\ x_6 = t_6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = t_2 - 2t_4 + 2t_6 + t_4 - t_6 + t_6 \\ x_3 = 2t_4 - 2t_6 \\ x_5 = t_6 \\ x_2 = t_2 \\ x_4 = t_4 \\ x_6 = t_6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = t_2 - t_4 + 2t_6 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = 2t_4 - 2t_6 \\ x_4 = t_4 \\ x_5 = t_6 \\ x_6 = t_6 \end{cases} \Rightarrow \Sigma_0 = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$

L'insieme delle soluzioni di $S\underline{x} = \underline{0}$, ossia Σ_0, sappiamo essere il Kernel di S, quindi è un sottospazio.

Esercizio 2. Si consideri il sistema di 3 equazioni in 6 incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 2 \\ x_5 - x_6 = 1 \end{cases}$$

Stabilire se il sistema è compatibile ed in caso affermativo determinare l'insieme Σ delle sue soluzioni.

Il sistema ha matrice associata: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e termini noti $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

La matrice ha rango 3, ed ha 6 righe e 3 colonne, le ultime colonne-rango $= 3-3 = 0$ coordinate dei termini noti sono 0, inoltre, sappiamo che $\dim(\mathrm{Ker}\, S) = \text{righe} - \text{rango} = 6 - 3 = 3$.

Allora il sistema è compatibile. (Corollario 6.2)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 2 \\ x_5 - x_6 = 1 \\ x_2 = t_2 \\ x_4 = t_4 \\ x_6 = t_6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = t_2 - 2t_4 + 2t_6 - 1 + t_4 - t_6 - 1 + t_6 + 1 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = 2t_4 - 2t_6 + 1 \\ x_4 = t_4 \\ x_5 = t_6 + 1 \\ x_6 = t_6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = t_2 - t_4 + 2t_6 - 1 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = 2t_4 - 2t_6 + 1 \\ x_4 = t_4 \\ x_5 = t_6 + 1 \\ x_6 = t_6 \end{cases} \Rightarrow \Sigma = t_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_4 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_6 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3. Si consideri il sistema di 3 equazioni in 6 incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 3x_5 - x_6 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 - 2x_6 = 2 \end{cases}$$

Stabilire se il sistema è compatibile ed in caso affermativo determinare l'insieme Σ delle sue soluzioni.

Riduco a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} A_2 - 2A_1 \\ A_3 - A_1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ANALOGO ALL'ES. 2