Esame 29 Gennaio 2024

Esercizio 1

1) Uso le probabilità totali: $\mathbb{P}(2°\ D) = \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)}_{1°\ D} \cdot \underbrace{\left[\frac{9}{39}\right]}_{9\ D\ \text{su}\ 39\ \text{rimanenti}} + \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \underbrace{\left[\frac{10}{39}\right]}_{10\ D\ \text{su}\ 39\ \text{rimanenti}} = \frac{9}{39 \cdot 4} + \frac{30}{4 \cdot 39} = \frac{39}{39 \cdot 4} = \frac{1}{4}$

2) $\mathbb{P}(1°\ D \mid 2°\ D) = \frac{\mathbb{P}(1°\ D \cap 2°\ D)}{\mathbb{P}(2°\ D)} = 4 \cdot \mathbb{P}(1°\ D \cap 2°\ D) = 4 \cdot \frac{9}{4 \cdot 39} = \frac{9}{39}$

3) $C = \{A\text{-}2\text{-}3\text{-}4\} : \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} = 4^4 \Rightarrow \mathbb{P}(C) = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37} = \frac{16}{39 \cdot 37 \cdot 19 \cdot 5}$

4) Pesco 4 carte senza ordine: $\binom{40}{4} \Rightarrow \mathbb{P}(C) \cdot$ Permutazioni dei 4 valori $= \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37} \cdot 4! = \frac{16 \cdot 4!}{39 \cdot 37 \cdot 19 \cdot 5}$

Esercizio 2

i) B viene assolto se almeno 2 giudici non lo votano colpevole:

$\mathbb{P}(B\ \text{assolto}) = \mathbb{P}(1°\ \text{lo vota colp.}) + \mathbb{P}(2°\ \text{lo vota colp.}) + \mathbb{P}(3°\ \text{lo vota colp.}) + \mathbb{P}(\text{nessuno}) = \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$

ii) $\mathbb{P}(B\ \text{assolto} \mid 1°\ \text{lo vota colp.}) = \frac{\mathbb{P}(B\ \text{assolto} \cap 1°\ \text{colp})}{\mathbb{P}(1°\ \text{lo vota colp})} = \frac{1}{(3/4)} \left[\mathbb{P}(1°\ \text{colp}, 2°\ \text{e}\ 3°\ \text{innocente})\right] = \frac{4}{3} \cdot \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{8}$

iii) $\mathbb{P}(3°\ \text{inn} \mid B\ \text{assolto}) = \frac{\mathbb{P}(3°\ \text{inn} \cap B\ \text{assolto})}{\mathbb{P}(B\ \text{assolto})} = \frac{\mathbb{P}(1°\ \text{colp.}) + \mathbb{P}(2°\ \text{colp.}) + \mathbb{P}(\text{nessuno})}{(1/2)} = \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\right] \cdot 2 = \frac{13}{32} \cdot 2 = \frac{13}{16}$

iv) Uso le prob. totali, con probabilità p, B viene assolto se il primo giudice lo vota innocente, con $(1-p)$, B viene assolto se il secondo giudice lo vota innocente:

$\mathbb{P}(B\ \text{assolto}) = p \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + (1-p) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}p + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}p = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}p$

Esercizio 3

1) Un componente è scartato con probabilità $p \cdot \alpha$, quindi: $\{\text{Scartati}\} \sim \text{Binom}(n, p\alpha)$, ne consegue che $\mathbb{P}(S=k) = \binom{n}{k} p\alpha^k \cdot (1-p\alpha)^{n-k}$.

2) Si utilizza la distribuzione multinomiale, Considero $X \sim \text{Multin}(n, \underbrace{(1-p)}_{\text{Funzionanti}}, \underbrace{p\alpha}_{\text{scartati}}, \underbrace{p(1-\alpha)}_{\text{rotti ed in commercio}})$

$$\mathbb{P}(X = (k, h, \ell)) = \frac{n!}{k!\, h!\, \ell!} \cdot (1-p)^k \cdot (p\alpha)^h \cdot (p[1-\alpha])^\ell$$

$$\mathbb{P}(X = (\overset{\text{noto}}{n-k-h}, \underset{\text{Condizione: } k \text{ scartati}}{\overset{\text{noto}}{k}}, \overset{\text{variabile}}{h}) \mid k\ \text{scartati}) = \frac{n!}{(n-k-h)!\, k!\, h!} \cdot (1-p)^{(n-k-h)} \cdot (p\alpha)^k \cdot (p[1-\alpha])^h \cdot \frac{1}{\frac{n!}{(n-k)!\, k!} \cdot p\alpha^k \cdot (1-p\alpha)^{n-k}} = \frac{(1-p)^{(n-k-h)} \cdot (p[1-\alpha])^h\, (n-k)!}{(n-k-h)!\;\; h!\;\; (1-p\alpha)^{n-k}}$$