1 Parte Prima — 10 Points

- Sia L_k il linguaggio di tutte le stringhe su alfabeto $\{0, 1, \ldots, 9\}$ la somma delle cui cifre è un multiplo di k, per un fissato $k \in \mathbb{N}$. Descrivere formalmente un DFA che riconosca L_k per ogni $k \in \mathbb{N}$. Disegnare il diagramma di transizione degli stati del DFA per il caso $k = 4$.
- Dimostrare che un linguaggio è acontestuale se e solo se esiste un PDA che lo riconosce.

Dim PDA = CFG :

[=>]: Sia $G = (V, \Gamma, R, S)$, definisco $P = (\{q_s, q_1, q_2\}, \Sigma, \Gamma, \delta, q_s, F)$ t.c.

$$\delta(q_s, \epsilon, \epsilon) = (q_1, S\$)$$
$$\delta(q_1, \epsilon, A) = \{(q_1, w) \text{ se } A \to w \in R\}$$
$$\delta(q_1, a, a) = (q_1, \epsilon)$$
$$\delta(q_1, \epsilon, \$) = (q_2, a)$$

=> Il PDA deriva ogni possibile $w \in L(G)$ dentro lo stack, e se una coincide con l'input accetta.

[<=]: Sia $P = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_s, F\}$, definisco $G = \{V, \Gamma, R, S\}$ in tal modo

$\forall p \in Q$, $A_{pp} \to \epsilon \in R$

$\forall p, r, q \in Q$, $A_{pq} \to A_{pr}A_{rq}$ $\delta^*(p, x, \epsilon) = (r, \epsilon) \wedge \delta^*(r, y, \epsilon) = (q, \epsilon)$ Se esiste un cammino da p ad r e da r a q.

$\forall p, q, r, s$, se $\delta(p, a, \epsilon) = (r, u) \wedge \delta(s, b, u) \to (q, \epsilon)$ allora $A_{pq} \to aA_{rs}b \in R$

Lemma: $A_{pq} \to x \iff x$ porta P da p a q con pila vuota

[=>]

- Caso base: una produzione: $A_{pp} \to \epsilon$, ma ϵ porta da p a p con pila vuota.
- I.I. : $A_{pq} \to x$ allora x //
- Passo Ind: $A_{pq} \to x$, due casi:
  - $A_{pq} \to aA_{rs}b$, ma $\delta(p, a, \epsilon) = (r, u) \wedge \delta(s, b, u) \to (q, \epsilon)$ e per ipotesi A_{rs} porta da r a s con pila vuota => $A_{pq} \to x$ e x soddisfa l'asserto.
  - $A_{pq} \to A_{pr}A_{rq}$, per ipotesi: $\begin{cases} A_{pr} \to x \\ A_{rq} \to y \end{cases} \Rightarrow xy$ porta da p a q.

[<=]

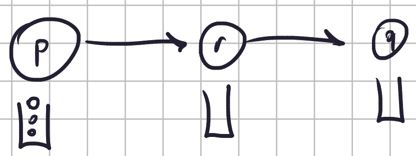
Caso base: 1 passo, puo' essere solo ϵ, ma $A_{pp} \to \epsilon \in R \Rightarrow$ da p a p senza ... //

Ip. In. : Se in k passi x porta da p a q, allora $A_{pq} \to x$

Passo Ind: x porta da p a q con pila vuota, 2 casi:

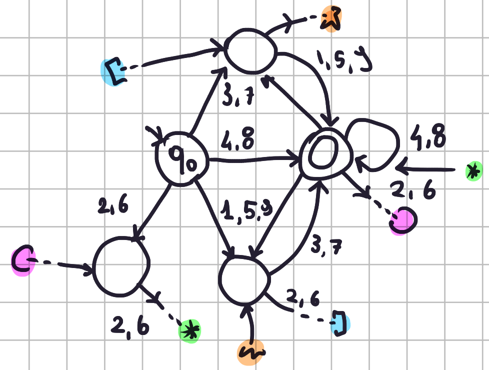
* $x = ayb$ e a fa inserire u, b lo rimuove, $A_{rs} \to y$, ma $A_{pq} \to aA_{rs}b \in R$ quindi $A_{pq} \to x$

* la pila si svuota in uno stato r



Per costruzione $A_{pq} \to A_{pr}A_{rq}$ e $\begin{cases} A_{pr} \to y \\ A_{rq} \to z \end{cases} \Rightarrow A_{pq} \to x$ ∎

$D = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$ e $F = \{q_k\}$



$Q = \{q_0, q_k,$

Ci sono diversi stati

$\delta(q_k, a) = q_k$

se $a \% K = 0$

se $a + b \% K = 0$

allora $\delta(q_a, b) = q_k$

$\delta(q_b, a) = q_k$

$\delta(q_k, a) = q_a$

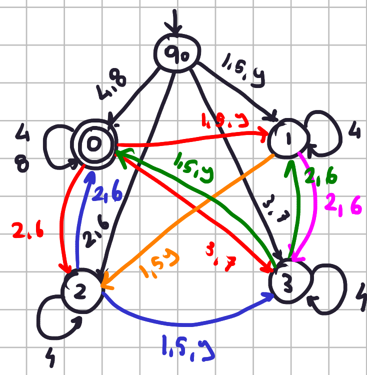
$\delta(q_k, b) = q_b$

$$\begin{cases} Q = \{ q_{i \% K} \ \forall i \} \\ F = \{q_0\} \\ \delta(q_{i\%K}, j) = q_{i+j \% K} \end{cases} \Rightarrow \text{Ci sono } K+1 \text{ stati}$$

i mod K

0, 1, 2, 3

0	% 4 =	0
1	% 4 =	1
2	% 4 =	2
3	% 4 =	3
4	%	= 0
5	,	= 1
6	,	= 2
7	,	= 3
8		= 0
9	,	= 1



2 Parte Seconda 10 Points

Sia $HALTS\_ON\_ALL_{TM}$ il linguaggio che consiste di tutte le stringhe della forma $\langle M \rangle$ tali che M è una macchina di Turing che termina sempre per ogni possibile scelta dell'input. Mostrare che $HALTS\_ON\_ALL_{TM}$ è indecidibile.

Dimostrare che il linguaggio $EQ_{TM} = \{\langle M_1, M_2 \rangle : L(M_1) = L(M_2)\}$, dove M_1 ed M_2 sono macchine di Turing, è indecidibile.

$HALTS\_ON\_ALL_{TM}$ e' l'insieme di tutti i decisori.

Definisco R su input $\langle M, w \rangle$

- Crea M' t.c.
  - Su input x
  - Se $x \neq w$, rifiuta
  - se M(w) rifiuta, va in loop
  - Sennò accetta

$\Rightarrow A_{TM} \leq_m HA\ldots \Rightarrow$ e' indecidibile

- Ritorna M'

Definisco R per $A_{TM} \leq EQ_{TM}$

- Su input $\langle M, w \rangle$
- Definisce M' che
  - accetta sempre
- Definisce M'' che
  - Se $x \neq w$ accetta
  - esegue M(w) e fa la stessa cosa

Ritorna $\langle M', M'' \rangle$

3 Parte Terza 10 Points

- Dimostrare che $NTIME(n^k) \subsetneq PSPACE$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Questo implica che $NP \subsetneq PSPACE$? Motivare la risposta.
- Definire il concetto di riduzione. Dimostrare che 3-$COL \leq_m^p SAT$, dove 3-COL è il linguaggio dei grafi 3-colorabili.

Riduzione: $A \leq_m^P B$ se $\exists R$ t.c. $w \in A \iff R(w) \in B$ e $L(M) \in P$

x_i	x_i'	COL
0	0	1
0	1	2
1	0	3

Definisco una riduzione per 3-COL

$\forall$ nodo $i \in V(G)$ si hanno x_i, x_i', codificano un colore

$\forall (i,j) \in E(G)$, $(x_i, x_i') \neq (x_j, x_j')$ e $\forall_i$ $\overline{(x_i \wedge x_i')}$ non devono codificare il colore $(1,1)$. $\Phi_1 = \bigwedge_i \overline{(x_i \wedge x_i')}$

$\forall (i,j) \in E(G)$ c'e' $\phi_{i,j}$ $\overline{(x_i \leftrightarrow x_i') \wedge (x_j \leftrightarrow x_j')}$

$\phi = (\bigwedge_{i,j} \phi_{i,j}) \wedge \Phi_1$

$NTIME(n^k) \Rightarrow$ Supponiamo che non e' in PSPACE, allora usa un numero di celle esponenziale, ma per ogni cella serve un passo di computazione, allora non e' in $NTIME(n^k)$.

$L \in NP$ allora $L \in Ntime(n^k)$ per qualche k ma $Ntime(n^k) \subseteq PSPACE \Rightarrow L \in PSPACE$