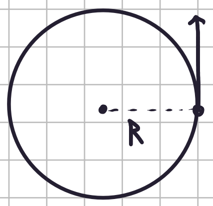
[1] All'istante $t = 0$ un punto materiale, partendo da fermo, si mette in moto su una traiettoria circolare, giacente su un piano orizzontale liscio, di raggio $R = 225\,\mathrm{m}$. Fino all'istante $t_1 = 10\,\mathrm{s}$, la velocità cresce linearmente con il tempo e lo spazio percorso è di $150\,\mathrm{m}$. Determinare il modulo dell'accelerazione nell'istante t_1.



$v =$ lineare $= kt$ per qualche $k \in \mathbb{R}^+$

$a = \frac{d}{dt} kt = k \Rightarrow$ accelerazione costante

dist. percorsa $:= x(t) = \int_0^t k\tau \, d\tau = k \frac{t^2}{2}$

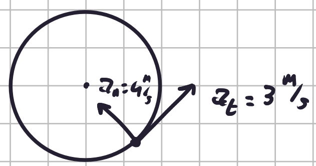
Sappiamo che:

$x(t_1) = 150 \ \mathrm{m} \Rightarrow k \cdot \frac{10^2}{2} = 150 \Rightarrow k \cdot 50 = 150 \Rightarrow k = \frac{150}{50} = 3 \ \mathrm{m/s^2}$

$t_1 = 10$

$v(t_1) = kt_1 = 3 \cdot 10 = 30 \ \frac{m}{s} \Rightarrow$ l'accelerazione normale e' $\frac{v^2}{R}$

$\Rightarrow \frac{v^2(t_1)}{R} = \frac{30^2}{225} = \frac{900}{225} = 4 \ \frac{m}{s^2}$



$\Rightarrow$ l'accelerazione totale e' $\sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \ \frac{m}{s}$

---

[2] Un punto materiale si muove su una traiettoria rettilinea con accelerazione dipendente dal tempo, $a = -4t\,\mathrm{ms^{-2}}$. Se all'istante $t = 0$ il punto parte con una velocità $v_0 = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, quanto spazio percorrerà prima di fermarsi?

$dv = -4t \Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_0^t -4t \Rightarrow v(t) - v_0 = -2t^2 \Rightarrow v(t) = 2 - 2t^2$

il punto si ferma in t^* dove $v(t^*) = 0 \Rightarrow 2 - 2t^{*2} = 0 \Rightarrow 2t^{*2} = 2 \Rightarrow t^* = \sqrt{1} = 1$

$dx = 2 - 2t^2 \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t 2 - 2t^2 \, dt \Rightarrow x(t) = 2t - 2\frac{t^3}{3}$

$x(t^*) = 2 - \frac{2}{3} \approx 1.33 \ \mathrm{m}$

---

[3] Un treno affrontando una curva con raggio costante $r = 150\,\mathrm{m}$, rallenta di moto uniformemente decelerato passando, in un tempo $t = 15\,\mathrm{s}$, da $90\,\mathrm{km/h}$ all'inizio della curva a $50\,\mathrm{km/h}$ alla fine della curva. Determinare il modulo dell'accelerazione del treno nel momento in cui la sua velocità è di $50\,\mathrm{km/h}$, assumendo che in questo istante esso continui a decelerare.

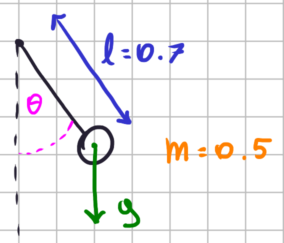
$v_A = 90 \ \frac{km}{h} = 25 \ \frac{m}{s}$ $\qquad v_B = 50 \ \frac{km}{h} = 13.8 \ \frac{m}{s}$

$a_n = \frac{v^2}{R}$ in $B \Rightarrow \frac{13.8^2}{150} \approx 1.3 \ \frac{m}{s^2}$

$a_t = \frac{|13.8 - 25|}{15} = 0.7 \ \frac{m}{s^2} \Rightarrow a = \sqrt{0.7^2 + 1.3^2} = 1.5 \ \frac{m}{s^2}$

acc. media

[4] All'istante $t = 0$ un pendolo semplice di massa $m = 0.5\,\text{kg}$ e lunghezza $l = 0.7\,\text{m}$ parte da fermo a un angolo $\theta = 30\,°$ con la verticale. Determinare, all'istante $t = 0$, il modulo dell'accelerazione tangenziale, dell'accelerazione normale e dell'accelerazione angolare.



eq.

acc. tang

$$-mg\sin\theta = -m\frac{d^2s}{dt^2}$$

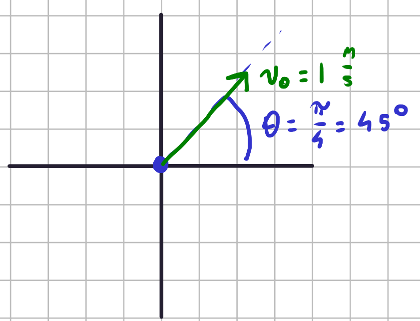
$$g\sin\theta = \frac{d^2s}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = 9.8\cdot\sin(30) = 4{,}9\ \frac{m}{s^2}$$

$a_n = \frac{v^2}{R}$ ma v e' 0 all'inizio $\Rightarrow a_n = 0\ \frac{m}{s^2}$. vel. angolare $= \omega = \frac{v}{l}$

$$\dot{\omega} = \frac{d}{dt}\frac{v}{l} = \frac{1}{l}\,4.9 = 7\ \frac{m}{s^2}$$

---

[5] All'istante $t = 0$ una massa puntiforme ferma nell'origine di un sistema cartesiano (x, y) posto su un piano orizzontale liscio, parte con una velocità $v_0 = 1\,\text{m/s}$ diretta con un angolo $\theta = \pi/4$ rispetto al semiasse positivo delle x. La massa è sottoposta a un'accelerazione $\mathbf{a} = -g\mathbf{i} - g/2\,\mathbf{j}$, dove $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ sono i versori degli assi x e y, rispettivamente, e g il modulo dell'accelerazione di gravità. Determinare la componente della velocità vettoriale della massa nell'istante in cui la sua posizione sul semiasse positivo delle x è massima.



$$\bar{a} = -g\,\hat{i} - \frac{g}{2}\,\hat{j}$$

$$\begin{cases} a_x = -g \\ a_y = -\frac{g}{2} \end{cases}$$

Calcolo vel. iniziale sugli assi

$$v_x(0) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0.7$$

$$v_y(0) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0.7$$

$$dv_x = a_x \Rightarrow \int_{v_x(0)}^{v_x(t)} dv_x = \int_0^t -g \Rightarrow v_x - 0.7 = -gt \Rightarrow v_x = 0.7 - gt$$

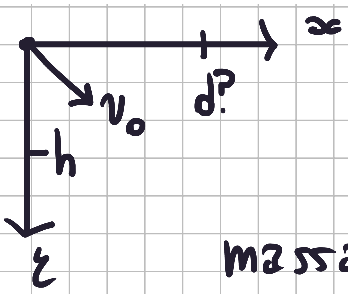
$$dv_y = a_y \Rightarrow v_y - 0.7 = \int_0^t -\frac{1}{2}g \Rightarrow v_y - 0.7 = -\frac{1}{2}gt \Rightarrow v_y = 0.7 - \frac{1}{2}gt$$

$$\bar{v} = (0.7 - gt)\,\hat{i} + \left(0.7 - \frac{1}{2}gt\right)\hat{j}$$

trovo t' per cui $v_x(t') = 0 \Rightarrow 0.7 - gt' = 0 \Rightarrow t' = \frac{0.7}{g} = 0{,}07$

$$\Rightarrow \bar{v}(t') = 0 + \hat{j}\left(0.7 - \frac{1}{2}g\,\frac{0.7}{g}\right) = \hat{j}\left(0.7 - \frac{1}{2}\,0.7\right) = \hat{j}\,\frac{1}{2}\,0.7$$

[6] Un aereo vola con velocità costante v_0 seguendo una rotta rettilinea inclinata verso ll basso di un angolo α rispetto all'orizzonte. Se il pilota volesse centrare un bersaglio a terra sganciando una massa puntiforme da una quota h, a quale distanza d dal bersaglio dovrebbe sganciarla?



h : fisso

Nel momento dello sgancio, la massa subisce un'accel. di $g \approx 9.8 \frac{m}{s}$

$$\Rightarrow a_z = 9.8 \Rightarrow dv_z = a_z \Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} dv_z = \int_0^t g\, dt$$

$$\Rightarrow v_z(t) = v_0 \sin\alpha + gt$$

$$\Rightarrow r_z(t) = v_0 \sin\alpha\, t + \frac{1}{2} g t^2$$

Sia t' l'istante in cui la massa raggiunge la terra (percorre h m)

$$h = v_0 \sin\alpha\, t' + \frac{1}{2} g t'^2 \Rightarrow h = t'\left(v_0 \sin\alpha + \frac{1}{2} g t'\right)$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha \Rightarrow r_x = v_0 \cos\alpha\, t$$ pongo $r_x(t') = d$

$$\Rightarrow v_0 \cos\alpha\, t' = d \Rightarrow t' = \frac{d}{v_0 \cos\alpha}$$

Si vuole d in funzione di h

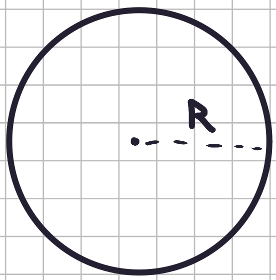
$$\Rightarrow h = \frac{d}{v_0 \cos\alpha}\left(v_0 \sin\alpha + \frac{g}{2} \frac{d}{v_0 \cos\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow d \tan\alpha + \frac{g}{2} d^2 \tan\alpha - h = 0$$

$$\Delta = \tan^2\alpha + 2g \tan\alpha\, h$$

$$d = \frac{-\tan\alpha \pm \sqrt{\Delta}}{g \tan\alpha}$$

[7] Un punto materiale si muove lungo una traiettoria circolare di raggio $R = 250\,\mathrm{m}$. Dall'istante iniziale $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ all'istante $t_1 = 10\,\mathrm{s}$ la sua velocità cresce quadraticamente con il tempo ($v = kt^2$); in tale intervallo di tempo, il punto materiale percorre uno spazio $\Delta s = 250\,\mathrm{m}$. Determinare il modulo dell'accelerazione all'istante t_1.



$$v = Kt^2$$

$$a_t = \frac{d}{dt} Kt^2 = 2Kt$$

$$v(t_1) = v(10) = K \cdot 100$$

$$ds = v \Rightarrow \int_{s(0)}^{s(t)} ds = \int_0^t v \Rightarrow s(t) - s(0) = K \frac{t^3}{3}$$

$$s(t_0) = 0$$

$$s(t_1) = 250\ \mathrm{m} \Rightarrow \quad 250 = K \frac{10^3}{3} \Rightarrow K = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow a_t(10) = 2 \frac{3}{4} 10 = 15 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

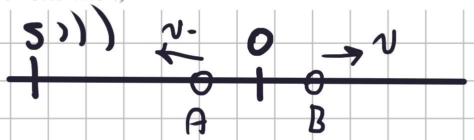
$$\Rightarrow v(10) = \frac{3}{4} 10^2 = 75 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \Rightarrow a_n(10) = \frac{75^2}{250} = 22.5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\Rightarrow a(t_1) = \sqrt{15^2 + 22.5^2} = 27 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

[8] Due osservatori, A e B, si muovono in versi opposti lungo l'asse delle x con la stessa velocità v, costante. Quando, all'istante $t = 0$, si trovano nello stesso punto O, un suono viene emesso da una sorgente sonora S posta sull'asse delle x a distanza d da O. Determinare il valore di v e d sapendo che l'osservatore A che si sta muovendo verso la sorgente percepisce il suono all'istante $t_A = 8\,\mathrm{s}$, mentre l'altro osservatore percepisce il suono all'istante $t_B = 10\,\mathrm{s}$. (La velocità del suono in aria vale: $v_S = 340\,\mathrm{m/s}$, indipendentemente dal moto dell'osservatore)

$v_A = -v \qquad v_s = 340$

$v_B = v$



$O = 0$

$S = -d$

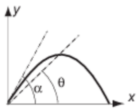
$x_A = -vt \qquad x_B = vt \qquad x_s = -d + 340t$

$$\begin{cases} -v \cdot 8 = -d + 340 \cdot 8 \\ v \cdot 10 = -d + 3400 \end{cases} \quad \begin{cases} v = \frac{d}{8} - 340 \\ \frac{10}{8} d - 3400 = -d + 3400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 3022 \frac{1}{8} - 340 \\ d = 3022 \ \mathrm{m} \end{cases} \quad \begin{cases} v = 37.75 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ d = 3022 \ \mathrm{m} \end{cases}$$

---

[9] Una massa puntiforme è lanciata verso l'alto con una velocità inclinata di un angolo α rispetto all'orizzontale. Un osservatore posto nel punto di lancio della massa, la vede raggiungere la quota massima e misura l'angolo θ corrispondente. Mostrare che $\tan\theta = 1/2 \tan\alpha$



Sia v_0 la velocità.

ist alt. massima

$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$

punto massimo: $v_y = 0 \Rightarrow v_0 \sin\alpha = gt \Rightarrow t^* = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$

$y(t) = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{g}{2} t^2$

$\Rightarrow y(t^*) = v_0 \sin\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2} \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{g^2}$

$= \frac{1}{g} v_0^2 \sin\alpha^2 - \frac{1}{2} v_0^2 \sin\alpha^2 \frac{1}{g} = \frac{1}{2} v_0^2 \sin\alpha^2$

Trovo la coordinata x

$$x(t) = v_0 \cos\alpha\, t$$

$$x(t^*) = v_0 \cos\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cos\alpha \sin\alpha$$

punto di massima altezza:

$$\bar{r} = \left(\frac{v_0^2}{g} \cos\alpha \sin\alpha ,\ \frac{1}{2} v_0^2 \sin\alpha^2 \right)$$

modulo

$$r = \left(\left(\frac{v_0^2}{g} \cos\alpha \sin\alpha \right)^2 + \left(\frac{1}{2} v_0^2 \sin\alpha^2 \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$r\cos\theta = \frac{v_0^2}{g} \cos\alpha \sin\alpha \qquad r\sin\theta = \frac{1}{2} v_0^2 \sin\alpha^2$$

[10] Un punto materiale A viene lasciato cadere al suolo da un'altezza h con velocità nulla e, contemporaneamente, un punto materiale B viene lanciato dal suolo verso l'alto, lungo la direzione del moto di A, con velocità v_0. Determinare il valore di v_0 affinchè i due punti si scontrino a un'altezza pari ad $h/2$.

$$A(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$B(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

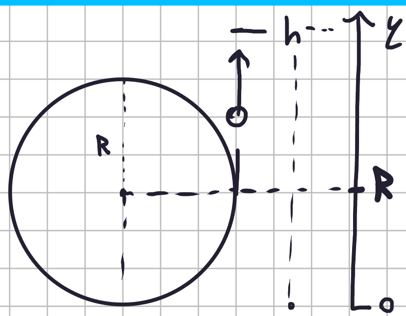
$$A(t') = \frac{h}{2} \Rightarrow \frac{h}{2} = h - \frac{1}{2} g t'^2 \Rightarrow \frac{1}{2} g t'^2 = \frac{h}{2} \Rightarrow t' = \sqrt{\frac{h}{g}}$$

$$B(t') = \frac{h}{2} \Rightarrow v_0 \sqrt{\frac{h}{g}} - \frac{1}{2} h = \frac{h}{2}$$

$$v_0 \sqrt{\frac{h}{g}} = \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \Rightarrow v_0 = h \cdot \left(\frac{h}{g}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{gh}$$

---

[11] Un punto materiale inizialmente fermo si muove con accelerazione tangenziale costante su una traiettoria circolare di raggio $R = 0.5\,\mathrm{m}$ giacente in un piano verticale. All'istante $t_1 = 2\,\mathrm{s}$ il punto abbandona la traiettoria circolare proseguendo lungo la tangente in direzione verticale verso l'alto. Sapendo che il punto raggiunge una quota massima di $h = 2\,\mathrm{m}$, rispetto al punto più in basso della traiettoria circolare. Si determini: a) il valore dell'accelerazione tangenziale durante il moto circolare e b) lo spazio percorso lungo la traiettoria circolare prima di abbandonarla.

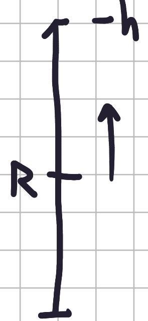


a_t costante. $\quad v(0) = 0$

$$dv = a_t \Rightarrow \int_{v(0)}^{v(t)} dv = \int_0^t a_t$$

$$\Rightarrow v(t) = a_t \cdot t$$

$$ds = v \Rightarrow \int_{\underset{0}{\overset{\shortparallel}{s(0)}}}^{s(t)} ds = \int_0^t a_t \cdot \tau \, d\tau \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2} a_t \cdot t^2$$



$$y(t) = R + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad y'(t') = 0 \Rightarrow t' = \frac{v_0}{g}$$

$$y(t') = R + \frac{v_0^2}{2g} = R + \frac{(a_t \cdot t_1)^2}{2g} = h$$

$$\Rightarrow 2 = 0.5 + \frac{(2a_t)^2}{19.6} \Rightarrow (2a_t)^2 = 19.6 \cdot 1.5 = 29.4$$

$$a_t = \sqrt{29.4} \cdot \frac{1}{2} \approx 2.7 \ \frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{1}{2} 2.7 t^2 \Rightarrow s(2) \approx 5.42 \ m$$

---

[12] Un punto materiale si muove con una velocità angolare $\omega = \pi\,\mathrm{rad/s}$ lungo una circonferenza di raggio R e centro nel punto O origine di un sistema cartesiano ortogonale Oxy. Determinare l'angolo φ che formava inizialmente il raggio con la direzione positiva dell'asse x, sapendo che all'istante $t_1 = 1/2\,\mathrm{s}$ il modulo dell'ampiezza del moto armonico sull'asse x è $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.

il moto su x e' descritto da $x(t) = R\cos(\pi t + \varphi)$

so che $R\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}R \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

so che $\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} + \varphi = \pm\frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi \in \left\{-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}\right\}$

---

[13] Trascurando la resistenza dell'aria, si determini l'angolo α rispetto all'orizzontale con il quale deve essere lanciato un grave di massa m affinché l'altezza massima raggiunta durante il moto sia uguale alla gittata.

Sia v_0 il modulo della vel. di lancio

$x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t$

$y(t) = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$

Calcoliamo l'altezza massima: $v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt$

$v_y = 0 \Leftrightarrow gt^* = v_0 \sin\alpha \Rightarrow t^* = \frac{1}{g} v_0 \sin\alpha$

ALTEZZA MAX: $y(t^*) = v_0 \sin\alpha \frac{1}{g} v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}\frac{1}{g} v_0^2 \sin^2\alpha$

$= \frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2\alpha$

GITTATA MAX: $x(t')$ dove $t' \neq 0 \wedge y(t') = 0$

$y(t') = 0 \Rightarrow v_0 \sin\alpha \cdot t' - \frac{1}{2} g t'^2 = 0 \Rightarrow$ $\Delta = v_0^2 \sin^2\alpha$

$t' = \frac{-v_0 \sin\alpha - v_0 \sin\alpha}{-g} = \frac{2}{g} v_0 \sin\alpha$

$$x(t') = v_0 \cos\alpha \frac{2}{g} v_0 \sin\alpha$$

voglio α per cui $x(t') = y(t^*)$

$$v_0 \cos\alpha \frac{2}{g} v_0 \sin\alpha = \frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow 2\cos\alpha \sin\alpha = \frac{1}{2}\sin^2\alpha \Rightarrow 2\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \tan(\alpha) = 4 \Rightarrow \alpha \simeq 76^\circ$$

---

[14] Due corpi puntiformi si muovono in un campo gravitazionale uniforme. Partono da uno stesso punto con due velocità iniziali in direzione orizzontale (x) e in versi opposti di $v_1 = 3\,\mathrm{m/s}$ e $v_2 = 4\,\mathrm{m/s}$. Trovare la distanza tra i corpi al momento in cui le loro velocità diventano mutualmente ortogonali.

Sia $\bar{g}$ l'accelerazione di gravità dovuta al campo
si assume che sia $\bar{g} = -g\hat{j}$ $\downarrow \downarrow \downarrow g$

$$\bar{r}_1(t) = (-3t)\hat{i} + \left(-\frac{1}{2}gt^2\right)\hat{j} \qquad \bar{v}_1 = (-3)\hat{i} + (-gt)\hat{j}$$

$$\bar{r}_2(t) = (4t)\hat{i} + \left(-\frac{1}{2}gt^2\right)\hat{j} \qquad \bar{v}_2 = (4)\hat{i} + (-gt)\hat{j}$$

Sono ortogonali in t^* quando

$$v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} = 0$$

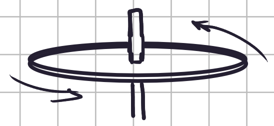
$$-3 \cdot 4 + (-gt^*)(-gt^*) = 0 \Rightarrow g^2 t^{*2} = 12 = t^* = \frac{1}{g}\sqrt{12}$$

$$r_1(t^*) = \left(-\frac{3}{g}\sqrt{12}\right)\hat{i} + \left(-\frac{6}{g}\right)\hat{j}$$

$$r_2(t^*) = \left(\frac{4}{g}\sqrt{12}\right)\hat{i} + \left(-\frac{6}{g}\right)\hat{j}$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{4}{g}\sqrt{12} + \frac{3}{g}\sqrt{12}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{g^2}12} = \frac{7}{g}\sqrt{12} = \frac{7}{9.8}\sqrt{12} \approx 2.5\,m$$

[15] Una ruota gira attorno a un asse stazionario con angolo di rotazione che varia nel tempo con la legge $\varphi = at^2$ dove $a = 0.2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$. Trovare l'accelerazione totale w del punto A sul bordo al tempo $t_0 = 2.5\,\text{s}$ se la velocità tangenziale del punto in quel momento è $v(t_0) = 0.65\,\text{m/s}$.



$$\varphi = \frac{2}{10}t^2 \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{4}{10}t = \frac{2}{5}t$$

$$v(t_0) = \omega(t_0)R = \frac{2}{5}2.5\,R = 0.65$$

$$\Rightarrow R = 0.65\ \text{m} \Rightarrow v(t) = \frac{13}{50}t \Rightarrow a_t(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{13}{50}$$

$$a_n(t) = \omega^2(t)R = 0.65\cdot\frac{4}{25}t^2$$

$$a_n(t_0) = a_n(2.5) = \frac{2.6}{25}(2.5)^2 = 0.65 \Rightarrow a_{tot} = \sqrt{\left(\frac{13}{50}\right)^2 + 0.65^2} \approx 0.7\ \frac{m}{s^2}$$

---

[16] Un'automobile sta percorrendo in pianura una strada rettilinea con velocità costante, di modulo $V = 65\,\text{km/h}$. Si determinino – rispetto a un sistema di riferimento solidale con la strada – direzioni, versi e moduli delle velocità e delle accelerazioni dei punti sulla circonferenza esterna delle ruote, di raggio $R = 25\,\text{cm}$, nelle posizioni di massima (v_A e a_A) e di minima (v_B e a_B) quota.

[17] Due ciclisti percorrono con velocità costanti, $v_1 = 32\,\text{km/h}$ e $v_2 = 38\,\text{km/h}$, una pista circolare in verso discorde. Si chiede di determinare il raggio R della pista sapendo che essi si incontrano ogni $\tau = 35\,\text{s}$, .