Metodi Matematici per l'Informatica

Esame (a.a. 20/21, I canale) - Docente: Lorenzo Carlucci - Data: 01 Febbraio 2021

Esercizio 1 *Un testo d'esame comprende 10 domande di Combinatoria e 15 domande di Logica.*

1. *In quanti modi posso scegliere 10 domande?*
2. *In quanti modi posso scegliere 10 domande di cui esattamente 4 di Logica?*
3. *In quanti modi posso scegliere 10 domande di cui almeno una di Combinatoria e almeno una di Logica?*

Esercizio 2 *Sia p il vostro anno di nascita. Sia q il vostro mese di nascita $+3$.*

- *Quanti sono i modi di scrivere p come somma di q interi non negativi?*
- *Quante sono le soluzioni intere positive dell'equazione seguente?*

$$x_1 + \cdots + x_q = p$$

- *Quante sequenze ordinate di 3 cifre distinte posso formare con le cifre che compongono la vostra data di nascita (nel formato GGMMAAAA)?*

Esercizio 3 *Siano $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$, $f : A \to B$ e $g : B \to A$. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.*

1. *Se f e g sono iniettive allora $(g \circ f)$ è iniettiva.*
2. *È impossibile che $(g \circ f)$ sia l'identità su A.*
3. *Se g è la funzione costante che manda tutti gli elementi in 1 allora lo è anche $(g \circ f)$.*

Esercizio 4 *Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, sia $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ e $S = \{(1, 3), (3, 5), (1, 5), (2, 4)\}$ due relazioni su A.*

1. *$R \cup S$ è transitiva?*
2. *Calcolare $R \circ S$ e $S \circ R$.*
3. *Calcolare la chiusura transitiva di R.*

Esercizio 5 *Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.*

1. *L'insieme di tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ costanti ha cardinalità numerabile.*
2. *$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{Q}$.*
3. *Ogni funzione da $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ in $\mathbb{R}$ è suriettiva.*

Esercizio 6 *Dimostrare per Induzione che, per ogni* $n \geq 0$, $n = 3 \cdot a + b$ *per qualche* $a, b \in \mathbb{N}$ *con* $0 \leq b < 3$. *Specificare il Caso Base, l'Ipotesi Induttiva e la dimostrazione del Passo Induttivo.*

Esercizio 7 *Trovare l'errore (o gli errori) nella seguente dimostrazione per Induzione Forte.*

Tesi: Per ogni $n \geq 0$, $17 \times n = 0$.

Base: $17 \times 0 = 0$.

Passo: Assumiamo l'Ipotesi Induttiva: per ogni $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *valga* $17 \times k = 0$. *Dimostriamo che* $17 \times (k+1) = 0$. *Siano* $\ell, p > 0$ *tali che* $k + 1 = \ell + p$ *e* $\ell, p < k + 1$. *Per ipotesi induttiva* $17 \times \ell = 0$ *e* $17 \times p = 0$. *Dunque* $17 \times (k+1) = 17 \times (\ell + p) = (17 \times \ell) + (17 \times p) = 0 + 0 = 0$.

Esercizio 8 *In un processo per omicidio vengono raccolte le deposizioni di tre testimoni: Mario, Giada e Roberto. Mario dice: "Sono innocente e, se Roberto è innocente, allora anche Giada è innocente." Giada dice: "Mario e Roberto sono colpevoli." Roberto dice: "Mario è innocente e Giada è colpevole."*

1. *Formalizzare le tre testimonianze in logica proposizionale scegliendo un linguaggio adeguato.*
2. *È possibile che tutti e tre i testimoni dicano il vero? Argomentare.*
3. *Se tutti dicono il falso, chi è sicuramente innocente? Argomentare.*

(Suggerimento: si consiglia di usare le tavole di verità).

Esercizio 9 *La seguente formula proposizionale in CNF è soddisfacibile?*

$$\{\{p, q\}, \{\neg q, r, \neg s\}, \{\neg p, s\}, \{t, \neg v\}\}.$$

Se si risponde "SI" definire un assegnamento che la soddisfa, se si risponde "NO" dimostrare l'insoddisfacibilità usando la regola di Risoluzione.

Esercizio 10 *Consideriamo il linguaggio predicativo composto da un solo simbolo di relazione a due posti* $E(x, y)$ *e un simbolo di costante* c. *Il linguaggio contiene anche il simbolo* $=$ *di uguaglianza, sempre interpretato come l'identità.*

1. *Formalizzare in logica dei predicati: "E è una relazione antisimmetrica e riflessiva".*
2. *Se l'interpretazione di* E *in una certa struttura è una relazione di equivalenza e la seguente proposizione è vera in quella struttura, quanti elementi hanno le classi di equivalenza di* E*?*

$$\forall x \exists y (E(x, y) \wedge \forall z (E(x, z) \rightarrow (y = z)))$$

3. *Nell'interpretazione con dominio* $\mathbb{N}$ *in cui il simbolo* E *è interpretato come la relazione seguente:*

$$\{(n, m) : m = 2n\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

se la seguente proposizione è vera, che interpretazione deve avere il simbolo di costante c*?*

$$\forall x \forall y ((E(x, y) \wedge E(y, x)) \rightarrow x = c).$$