Esercizio 1. Siano A, B due eventi con $\mathbb{P}(A) = 0.3$, $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.5$ e $\mathbb{P}(B) = p$. Trovare il valore di p nei seguenti casi:

1) A e B sono disgiunti,
2) A e B sono indipendenti,
3) A è un sottoinsieme di B.

1) Se $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \Rightarrow 0.5 = 0.3 + p \Rightarrow p = 0.2$

2) $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.3 \cdot p \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \Rightarrow 0.5 = 0.3 + p - 0.3p \Rightarrow 0.2 = 0.7p \Rightarrow p = \frac{0.2}{0.7}$

3) Se $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \Rightarrow 0.5 = 0.3 + p - 0.3 \Rightarrow p = 1/2$

Esercizio 3. Vengono lanciati 2 dadi regolari.

1) Mostrare che l'evento "la somma dei dadi fa sette" è indipendente dal risultato del primo dado.
2) Mostrare che l'evento "la somma dei dadi fa nove" non è indipendente dal risultato del primo dado.
3) Dare una spiegazione intuitiva della diversità tra i due casi precedenti.

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1, \omega_2 \in \{1..., 6\}\}$, $|\Omega| = 6^2 = 36$

1) $A = \{\text{Somma dei dadi fa sette}\} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 + \omega_2 = 7\}$, $|A| = 6$ $\quad \mathbb{P}(A) = 6/36 = 1/6$

$A' = \{\text{Al primo dado esce } i\} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = i\}$, $|A'| = 1/6$

$A' \cap A = \{(i, 6-i)\}$, $|A' \cap A| = 1/36 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Rightarrow$ sono indipendenti.

2) $B = \{\text{la somma e' } 9\} = \{(3,6), (6,3), (4,5), (5,4)\}$, $\mathbb{P}(B) = 4/36 = 1/9$

$A' \cap B = \{(i, 9-i)\}$ ma $9 - i \leq 6 \Rightarrow i \geq 3 \Rightarrow \mathbb{P}(A' \cap B)$ dipende da $i \leftarrow$ esito del primo dado.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Se } i = 2 \Rightarrow A' \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A' \cap B) = 0 \neq \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A') \\ \text{Se } i = 3 \Rightarrow A' \cap B = \{(3,6)\} \Rightarrow \mathbb{P}(A' \cap B) = \frac{1}{36} \neq \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A') \end{array}\right\} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{6}$$

non sono indipendenti!

3) Essendo che gli esiti di un dado vanno da 1 a 6, qualsiasi sia l'esito del primo, ci sarà sempre un esito possibile che renderà la somma 7.

Esercizio 4. Se i tre cavalli a, b, c competono tra loro le rispettive probabilità di vitttoria sono $0.3, 0.5, 0.2$. Si sfidano in tre gare consecutive. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

1) lo stesso cavallo vince tutte e tre le gare,
2) ogni cavallo vince una gara.

1) $A_1 = \{a \text{ vince gara } 1\} = 0.3 = A_2 = A_3$, i 3 eventi sono indipendenti: $\mathbb{P}(\{\text{vince tutto } a\}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0.3^3 =$

$\mathbb{P}(\{\text{vince tutto } b\}) = (0.5)^3$ $\quad \mathbb{P}(\{\text{vince tutto } c\}) = (0.2)^3$, ovviamente gli eventi sono disgiunti.

$\mathbb{P}(\{\text{un cavallo vince tutto}\}) = (0.3)^3 + (0.5)^3 + (0.2)^3 = 0.16$

2) $B_2 = \{b \text{ vince gara } 2\}$, $C_3 = \{c \text{ vince gara } 3\} \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap B_2 \cap C_3) = 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.2 = 0.03$

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \cap B_2 \cap C_3 = \{a, b, c \text{ vincono le gare } 1, 2, 3\} \\ A_1 \cap B_3 \cap C_2 = \{a, b, c \text{ vincono le gare } 1, 3, 2\} \\ \vdots \\ A_3 \cap B_2 \cap C_1 = \{a, b, c \text{ vincono le gare } 3, 2, 1\} \end{array}\right\}$$

$3!$ possibili gare in cui vincono tutti

$\mathbb{P}(\{\text{ogni cavallo vince}\}) = 0{,}03 \cdot 3! = 0{,}18$

Esercizio 5. In un'azienda le macchine A, B, e C producono rispettivamente il 40%, 10%, e 50% dei prodotti. Le rispettive percentuali di prodotti difettosi sono 2%, 3% e 4%. Scegliendo un prodotto a caso,

1) calcolare la probabilità che sia difettoso,

2) supponendo sia difettoso, calcolare le probabilità che sia stato prodotto dalla macchina A, B, o C.

1) $\mathbb{P}(\{e' \text{ difettoso}\}) = \mathbb{P}((A \cup B \cup C) \cap \{e' \text{ difettoso}\}) = 0.4 \cdot 0.02 + 0.1 \cdot 0.03 + 0.5 \cdot 0.04 = 0.008 + 0.003 + 0.02 = 0.031 \simeq 3{,}1\%$

2) Uso la formula di Bayes:

$$\mathbb{P}(A \mid \{e' \text{ difettoso}\}) = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\{e' \text{ difettoso}\} \mid A)}{\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(\{e' \text{ difettoso} \mid B) + \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(\{e' \text{ difettoso} \mid B) + \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\{e' \text{ difettoso}\} \mid A)} = \frac{0.4 \cdot 0.02}{0.031}$$

Analogamente:

$$\mathbb{P}(B \mid \{e' \text{ difettoso}\}) = \frac{0.1 \cdot 0.03}{0.031} \qquad \mathbb{P}(B \mid \{e' \text{ difettoso}\}) = \frac{0.5 \cdot 0.04}{0.031}$$

Esercizio 6. Un canale di comunicazione trasmette segnali binari. A causa del rumore di fondo alcune volte viene trasmesso 0, ma è ricevuto 1; altre volte viene trasmesso 1 e ricevuto 0. Si assuma che

- la probabilità che uno 0 sia ricevuto correttamente è 0.94;
- la probabilità che un 1 sia ricevuto correttamente è 0.91.

Viene spedito un singolo bit, che con probabilità 0.45 è 0 e con probabilità 0.55 è 1. Calcolare:

1) la probabilità che venga ricevuto 1;

2) la probabilità che venga ricevuto 0;

3) la probabilità che sia stato trasmesso 1 se si è ricevuto 1;

4) la probabilità che sia stato trasmesso 0 se si è ricevuto 0;

5) la probabilità che si verifichi un errore di trasmissione.

1) Con prob. $\frac{45}{100}$ viene spedito 1, se spedito, con prob. 0.94 rimane 1:

$\mathbb{P}(\text{Si trasmette e riceve } 1) = \frac{55}{100} \cdot \frac{91}{100} = \frac{5005}{10000} = 0.5005$

$\mathbb{P}(\text{Si trasmette } 0 \text{ e riceve } 1) = \frac{45}{100} \cdot \frac{6}{100} = \frac{270}{10000} = 0.027$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\{\text{si riceve } 1\}) = 0.5005 + 0.027 = 0.5275$

2) $\mathbb{P}(\{\text{si riceve } 0\}) = 1 - 0.5275 = 0.4725$

3) Formula di Bayes: $\dfrac{91/100 \cdot \frac{55}{100}}{91/100 \cdot \frac{55}{100} + \frac{6}{100} \cdot \frac{45}{100}} = \dfrac{0.5005}{0.5005 + 0{,}45 \cdot 0.06} = \dfrac{0.5005}{0.5275}$

4) $\dfrac{\frac{45}{100} \cdot \frac{94}{100}}{\frac{45}{100} \cdot \frac{94}{100} + \frac{9}{100} \cdot \frac{55}{100}} = \dfrac{94}{105} \simeq 0{,}89$

5) $0.45 \cdot 0.06 + 0.55 \cdot 0.09 = 0{,}0765$

Esercizio 7. Armando gioca 10 partite alla roulette puntando sul rosso 1 euro a partita. La probabilità di vincere una singola partita è 18/37

1) Calcolare la probabilità che Armando vinca per la prima volta alla quinta partita.

2) Calcolare la probabilità che armando vinca almeno 2 partite.

3) Calcolare la probabilità che alla fine delle 10 partite il capitale di Armando sia aumentato di 2 euro.

1) Modellizzo come uno schema di Bernoulli, di parametro $18/37$.

$\Omega = \{(\omega_1 \dots \omega_{10}),\ \omega_i \in (0,1)\}$ $|\Omega| = 2^{10}$ ← esiti in 10 partite

$A = \{\text{prima vittoria alla } 5^\circ \text{ partita}\}: \ (1 - 18/37)^4 \cdot 18/37 \simeq 0{,}034$

2) $B = \{\text{vince 2 partite}\} = \{\omega \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{10} \omega \geq 2\}$

considero: $B' = \{\text{vince 1 volta}\} = \binom{10}{1} \cdot 18/37 \cdot (1 - 18/37)^9$ $\quad B'' = \{\text{vince 0 volte}\} = (1 - 18/37)^{10}$

$B^c = B' \cup B'' \Rightarrow \mathbb{P}(B) = 1 - \left[\binom{10}{1} \cdot 18/37 \cdot (1 - 18/37)^9 + (1 - 18/37)^{10}\right] \simeq 0{,}98$

3) Per aumentare di 2 euro, deve vincere 6 partite: $\binom{10}{6} \cdot \left(\frac{18}{37}\right)^6 \cdot \left(1 - \frac{18}{37}\right)^4$