Esercizio 1. Sia $\phi : G \to G'$ un isomorfismo. Verificare che l'applicazione inversa $\phi^{-1} : G' \to G$ è anche un isomorfismo

Siano $x, y \in G$, si ha che $\phi(x) = x'$ e $\phi(y) = y'$. Considero ϕ^{-1}:

Per ipotesi: $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) = x' + y'$

$\phi^{-1}(x'+y') =$ APPLICO L'IPOTESI: $\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y)) = \phi^{-1}(\phi(x+y)) = x + y = \phi^{-1}(x') + \phi^{-1}(y')$.

Esercizio 2. Sia R il rettangolo di lati $2a$ e $2b$, con $a > b$, dato da

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq a, |y| \leq b\}$$

Sia G il gruppo di tutte le gigezioni di $\mathbb{R}^2$ in sé stesso, con la composizione come operazione. Consideriamo il sottoinsieme V_4 costituito dall'identità $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, denotata semplicemente con 1, e da:

$a := R_\pi$, la rotazione di π in senso antiorario
$b := S_{\text{assex}}$, la simmetria (o ribaltamento) rispetto all'asse x
$c := S_{\text{assey}}$, la simmetria (o ribaltamento) rispetto all'asse y.

Verificate che V_4 è un sottogruppo di ordine 4 di G detto il gruppo di Klein. Scrivete la tabella moltiplicativa.

Vero o Falso: V_4 è isomorfo a $\mathbb{Z}_4$. Spiegare.

Come prima cosa, scrivo la tabella moltiplicativa.

$\circ$	id	R_π	S_x	S_y
id	id	R_π	S_x	S_y
R_π	R_π	id	S_y	S_x
S_x	S_x	S_y	id	R_π
S_y	S_y	S_x	R_π	id

in azzurro ho scritto le composizioni "banali"

le operazioni son definite in tal modo:

$S_x(a,b) = (-a,b) \quad S_y(a,b) = (a,-b) \quad R_\pi(a,b) = (-a,-b)$

Le applicazioni composte a se stesse danno l'identità;

G e' un gruppo commutativo.

$(S_x \circ S_y)(a,b) = S_x(S_y(a,b)) = S_x(a,-b) = (-a,-b) = R_\pi(a,b)$

$(S_x \circ R_\pi)(a,b) = S_x(R_\pi(a,b)) = S_x(-a,-b) = (a,-b) = S_y(a,b)$

$(S_y \circ R_\pi)(a,b) = S_y(R_\pi(a,b)) = S_y(-a,-b) = (-a,b) = S_x(a,b)$

Si ha che $\forall a,b \in G$, $a \circ b \in G$, **INOLTRE**, $\forall a \in G$, $a^{-1} \in G$, dato che:

$R_\pi^{-1} = R_\pi \qquad id^{-1} = id \qquad S_x^{-1} = S_x \qquad S_y^{-1} = S_y$.

$\begin{cases} R_\pi(a,b) = (a\cdot(-1), b\cdot(-1)) = (-a,-b) \\ R_\pi^{-1}(-a,-b) = (a,b) = (-a\cdot(-1), -b\cdot(-1)) \end{cases}$ $\begin{cases} S_x(a,b) = (a\cdot(-1),b) = (-a,b) \\ S_x^{-1}(-a,b) = (a,b) = (-a\cdot(-1),b) \end{cases}$ $\begin{cases} S_y(a,b) = (a, b\cdot(-1)) = (a,-b) \\ S_y^{-1}(a,-b) = (a,b) = (a,-b\cdot(-1)) \end{cases}$

Quindi $\forall a,b \in G \Rightarrow a \circ b^{-1} = a \circ h \; (h \in G) \Rightarrow a \circ h \in G$. G e' un sottogruppo.

$\mathbb{Z}_4$ NON e' isomorfo a G in quanto tutti gli elementi di G composti a se stessi danno l'identità. In $(\mathbb{Z}_4, +)$ cio' non perviene, in quanto gli unici elementi che hanno inverso identico a loro stessi sono $\{[0],[2]\}$, quindi non esiste NESSUN isomorfismo che conservi le operazioni, in quanto ESISTERANNO sempre 2 elementi tali che $\phi(a+a) \neq \phi(a) + \phi(a)$.

Esercizio 3. Verificare che un gruppo di ordine p, con p primo, è necessariamente ciclico.

Se un gruppo e' di ordine p, allora e' ISOMORFO a $\mathbb{Z}_p$, e sappiamo che $\mathbb{Z}_p$ e' CICLICO, generato da 1.

Esercizio 4. Dimostrare che $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{25}),\cdot)$ è ciclico e determinarne tutti i sottogruppi.

$\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{25})=\{[1],[2],[3],[4],[6],[7],[8],[9],[11],[12],[13],[14],[16],[17],[18],[19],[21],[22],[23],[24]\}$

$\varphi(25)=\varphi(5\cdot5)=\varphi(5^2)=5^2-5=20 \Rightarrow |\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{25})|=20$. E' un gruppo di ordine 20.

tale gruppo contiene tutti i numeri minori di 25 non divisibili per 5.

Ha tanti sottogruppi, quanti sono i divisori di 20. $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{25})=\langle[2]\rangle$

$\{x\in\mathbb{Z} \mid x|20\}=\{1,2,4,5,10\}$

ho $\langle 2^{\frac{20}{1}}\rangle=\langle1\rangle=\{[1]\}$, $\langle 2^{\frac{20}{2}}\rangle=\langle 2^{10}\rangle=\langle24\rangle$, $\langle 2^{\frac{20}{4}}\rangle=\langle 2^{5}\rangle=\langle7\rangle$

$\langle 2^{\frac{20}{5}}\rangle=\langle16\rangle$, $\langle 2^{\frac{20}{10}}\rangle=\langle4\rangle$.

Esercizio 6. Vero o Falso: se G è commutativo allora ogni suo sottogruppo è normale.

VERO

Esercizio 7. Sia G un gruppo abeliano e si ponga

$$T(G):=\{x \mid x\in G,\quad \exists n\in\mathbb{N}\ x^n=1_G\}.$$

(1) Provare che $T(G)\leq G$;
(2) Consideriamo $G/T(G)$. Dimostrare che ogni elemento di $G/T(G)$ diverso dall'identità e cioè ogni classe laterale $xT(G)$ diversa da $T(G)$, ha ordine infinito.

1) Siano $a,b\in T(G)$, noto che $(b^{-1})^t=(b^t)^{-1}=1_G^{-1}=1_G \Rightarrow b^{-1}\in T(G)$.

$(a\cdot b^{-1})^t=\underbrace{(a\cdot b^{-1})\cdot(a\cdot b^{-1})\cdots(a\cdot b^{-1})}_{t\text{-volte}}=$ PER ASSOCIATIVITA' $=\underbrace{(a\cdot a\cdots a)}_{t\text{-volte}}\cdot\underbrace{(b^{-1}\cdot b^{-1}\cdots b^{-1})}_{t\text{-volte}}=a^t\cdot(b^{-1})^t=1_G\cdot1_G=1_G \Rightarrow a\cdot b^{-1}\in T(G)$.

2) Sia (con $x\neq1$) $xT(G)\in G/_{T(G)}$, ossia: $\{xa,xb\ldots,xk \mid \exists n\in\mathbb{N}, i^n=1_G\}$. Faccio un' OSSERVAZIONE:

Se $a\notin T(G)$, allora $\nexists n\in\mathbb{N} \mid a^n=1_G, \Rightarrow a\in xT(G)\neq T(G)$ a ha ordine infinito.

Considero $xT(G)^2=xT(G)*xT(G)=x^2T(G)=\{x^2a,x^2b\ldots x^2k\}$, Se $xT(G)$ avesse

ordine finito n, cio' significherebbe che $xT(G)^n=\{x^na,x^nb,\ldots x^nk\}=\{a,b\ldots k\}=T(G)$

$\Rightarrow$ questo significherebbe che: $xT(G)$ ha ordine FINITO $n \Longleftrightarrow x^n=1_G \Longleftrightarrow x\in T(G)$

Ne deduciamo che, se $x\notin T(G)\Rightarrow x\cdot T(G)$ ha ordine INFINITO.

Ma allora, se $y\in T(G)$, $yT(G)=\{ya,yb\ldots,yk\}$, MA $T(G)$ e' un sottogruppo!

quindi, essendo ogni elemento di $yT(G)$ un prodotto di 2 elementi di $T(G)$,

ne segue che OGNI elemento di $yT(G)$ e' in $T(G)\Rightarrow yT(G)=T(G)\Rightarrow$ OGNI

classe laterale $xT(G)\neq T(G)$ ha ordine INFINITO.

Esercizio 8. Dato $x\in G$ possiamo definire l'applicazione [1]: $\gamma_x: G\to G, g\to xgx^{-1}$. In formule $\gamma_x(g):=xgx^{-1}$.
Verificare che γ_x è un automorfismo di G.
Verificare che l'applicazione $G\to \mathrm{Aut}(G)$ che associa a $x\in G$ l'automorfismo γ_x è un omomorfismo di gruppi.

Ovviamente $\Psi: G\to \mathrm{AUT}(G)$ e' un omomorfismo: $\Psi(x\cdot y)=\gamma_{xy}=\gamma_x\circ\gamma_y=\Psi(x)\circ\Psi(y)$.

Esercizio 5. Consideriamo il gruppo simmetrico S_3.
Determinare il reticolo dei sottogruppi di S_3 specificando quali fra di essi sono normali.
Il Teorema di Lagrange può essere utile....

Secondo il teo. di Lagrange, l'ordine dei sottogruppi di S_3, deve dividere $|S_3| = 6$.
Escludendo i sottogruppi banali, sappiamo che i sottogruppi di S_3 avranno ordine (cardinalita') uguale a 2 o 3. Precisamente, i sottogruppi sono:

$H_1 = \left\{ Id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$, $H_2 = \left\{ Id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $H_3 = \left\{ Id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$, $H_4 = \left\{ Id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$, $H_5 = \{ Id \}$, S_3

Ovviamente H_5 ed S_3 sono NORMALI su S_3, ma anche H_4 e' NORMALE.

Diagramma di "inclusione"