Esercizio 1. Consideriamo $\mathbb{Z}_8$. Applicando il teorema fondamentale di omomorfismo caratterizzare tutti i gruppi quoziente di $\mathbb{Z}_8$.
Suggerimento: ricordate la struttura dei sottogruppi di $\mathbb{Z}_8$ e definite opportune applicazioni $\mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8$.

Sappiamo che $(\mathbb{Z}_8,+)$ e' ciclico e generato da 1. Per il teorema di struttura dei gruppi ciclici, si ha che $\mathbb{Z}_8$ ha tanti sottogruppi quanti sono i divisori di 8, ossia $\{2,4\}$. Quindi abbiamo i sottogruppi:

$\langle 1^{\frac{8}{2}} \rangle = \langle 1^4 \rangle = \langle 4 \rangle = \{[4],[8]\}$

$\langle 1^{\frac{8}{4}} \rangle = \langle 1^2 \rangle = \langle 2 \rangle = \{[2],[4],[6],[8]\}$

Siano anche i sottogruppi banali $\Rightarrow$ $\langle 1^1 \rangle = \mathbb{Z}_8$, $\langle 1^8 \rangle = \langle 8 \rangle = \{[8]\}$

Tali sottogruppi, sono tutti normali.

Esercizio 2. Dimostrare che il gruppo degli automorfismi del gruppo di Klein V_4 è isomorfo a S_3.
Suggerimento: osserviamo preliminarmente che un automorfismo trasforma sempre l'identità nell'identità e quindi manda l'insieme costituito dai restanti 3 elementi di V_4 in sé stesso. Esiste allora una mappa naturale $S_3 \to \mathrm{Aut}(V_4)$ che è un isomorfismo di gruppi.

Il gruppo di Klein e' $V_4 = \{Id, R_\pi, S_x, S_y\}$, tale gruppo NON e' ciclico, ed un suo automorfismo trasforma $Id \to Id$. Possiamo quindi tenere fissa l'identita', e considerare le "permutazioni" degli altri elementi. Ne segue in maniera naturale che $|Aut(V_4)| = 3! = 6 = |S_3|$. **Notazione: denoto $a \in Aut(V_4)$ così: $\begin{pmatrix} R & x & y \\ x & R & y \end{pmatrix}$ e significa: $a(R_\pi) = x \wedge a(x) = R \wedge a(y) = y$.** Adesso definisco la seguente mappa Φ:

$\Phi\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & x & y \\ R & x & y \end{pmatrix}$ $\Phi\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & x & y \\ R & y & x \end{pmatrix}$ $\Phi\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & x & y \\ y & x & R \end{pmatrix}$ $\Phi\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & x & y \\ x & R & y \end{pmatrix}$

$\Phi\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & x & y \\ y & R & x \end{pmatrix}$ $\Phi\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & x & y \\ x & y & R \end{pmatrix}$ tale mappa e' biettiva. E conserva ovviamente l'op., in quanto e' la stessa. NON SO COME PROSEGUIRE

Esercizio 3. Per le seguenti permutazioni di S_8 determinare : inversa, decomposizione in cicli disgiunti, ordine, parità.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 3 & 2 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 8 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 3 & 2 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 4 & 8 & 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 8 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 2 & 1 & 8 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 3 & 2 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 8\ 4\ 3\ 6\ 7)(2\ 5)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 8 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 2\ 3\ 6\ 7)(5\ 8)$

le due permutazioni hanno la stessa struttura ciclica.

l'ordine e' $mcm(6,2) = 2$.

$(1\ 8\ 4\ 3\ 6\ 7)(2\ 5) = (1\ 7)(1\ 6)(1\ 3)(1\ 4)(1\ 8)(2\ 5) \Rightarrow$ le permut. sono pari!

Esercizio 4. Sia $\sigma = (13564) \in S_9$. Sia $\tau = (45)(842)(793) \in S_9$.
Determinare σ^{-1} e τ^{-1}.
Determinare $\tau\sigma\tau^{-1}$.
Determinare (se esiste) $\tau \in S_9$ tale che $\beta = \tau\alpha\tau^{-1}$ con:

- $\alpha = (4657)(98123) \qquad \beta = (5746)(123)(89)$:
- $\alpha = (1357) \qquad \beta = (2468)$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 8 & 3 & 2 & 5 & 6 & 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 9 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 8 & 3 & 2 & 4 & 6 & 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 9 & 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 8 & 7 & 2 & 4 & 6 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 9 & 5 & 8 & 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 8 & 7 & 2 & 4 & 6 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 6 & 4 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 9 & 5 & 8 & 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 4 & 1 & 6 & 2 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 9 & 5 & 8 & 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 3 & 6 & 5 & 2 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- Nel punto 1 non esiste τ in quanto le due permutazioni hanno parità diverse.
- $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

Esercizio 5. Dimostrare che esiste in S_{30} un sottogruppo di ordine 209.
Suggerimento: $30 = 11 + 19$; $209 = 11 \cdot 19$.

Per il teo. di Lagrange, so che esiste un sottogruppo di ordine 209 se e solo se 209 divide $|S_{30}| = 30!$ Noto che:

$$\frac{30!}{209} = \frac{10! \cdot 11 \cdot \left(\prod_{i=12}^{18} i\right) \cdot 19 \cdot \left(\prod_{i=20}^{30} i\right)}{209} = \frac{10! \cdot 11 \cdot \left(\prod_{i=12}^{18} i\right) \cdot 19 \cdot \left(\prod_{i=20}^{30} i\right)}{11 \cdot 19} = 10! \cdot \left(\prod_{i=12}^{18} i\right) \cdot \left(\prod_{i=20}^{30} i\right) \in \mathbb{Z} \Rightarrow 209 \text{ divide } 30!$$