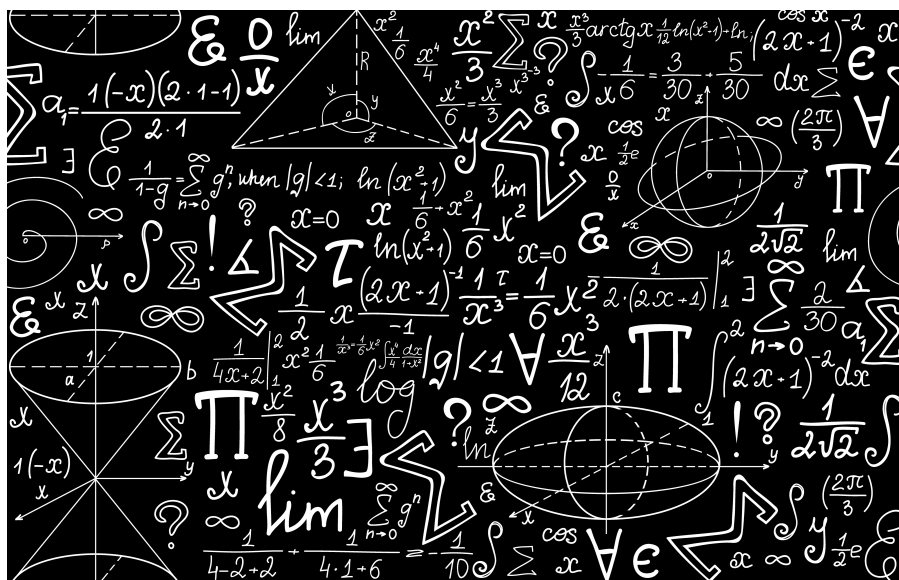


# Algebra

Marco Casu



# 1 Insiemi e Relazioni

Sappiamo già che un insieme non è altro di una collezione di oggetti distinti.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Ricapitoliamo le proprietà basiche degli insiemi :

- **Intersezione** -  $A \cap B \rightarrow \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
- **Unione** -  $A \cup B \rightarrow \{x | x \in A \vee x \in B\}$
- **Sottoinsieme** -  $A \subseteq B \rightarrow \{x \in A \implies x \in B\}$
- **Insieme complementare** -  $A_{\text{in } B}^c \rightarrow \{x \in B | x \notin A\}$

## 1.1 Proprietà fondamentali degli insiemi

Elenchiamo le già note proprietà degli insiemi :

- **Associativa** -  $(A \cap B) \cap C = (C \cap B) \cap A$  oppure  $(A \cup B) \cup C = (C \cup B) \cup A$
- **De Morgan** - Se  $A, B \subseteq C$  allora  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$  oppure  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- **Distributiva** -  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$  oppure  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Un insieme particolare associato ad un dato insieme  $A$  è l'**insieme delle parti** di  $A$ , è l'insieme di tutti i possibili sotto-insiemi di  $A$  e si indica con :

$$\mathcal{P}(A) = \{B | B \subseteq A\} \quad (1)$$

Introduciamo adesso il concetto di **prodotto cartesiano** su due insiemi  $A$  e  $B$ , esso non è altro che l'insieme di tutte le coppie ordinate dove il primo elemento appartiene ad  $A$  ed il secondo elemento a  $B$  :

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\} \quad (2)$$

## 1.2 Le Relazioni

Una relazione  $\rho$  da un insieme  $A$  ad un insieme  $B$ , è un sotto-insieme del prodotto cartesiano  $A \times B$ .

$$\rho \subseteq A \times B, \text{ se } (a, b) \in \rho \text{ si scrive } a\rho b \quad (3)$$

Il dominio di tale relazione  $\rho$  risulta essere :

$$\mathcal{D}(\rho) = \{a \in A | \exists b \in B \text{ per il quale risulti } a\rho b\} \quad (4)$$

La sua immagine :

$$\Im(\rho) = \{b \in B | \exists a \in A \text{ per il quale risulti } a\rho b\} \quad (5)$$

Per una relazione  $\rho$ , se il suo dominio risulta essere tutto  $A$ , e  $\forall a \in A \exists$  un unico  $b \in B | a\rho b$ , tale  $\rho$  è anche una **funzione**.

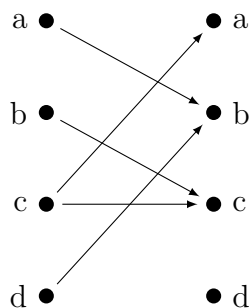
*Esempio di relazione :*

sia  $A = \{a, b, c, d\}$ , è definita la relazione  $\rho \subseteq A \times A = \{(a, b), (b, c), (c, c), (c, a), (d, b)\}$ .

Abbiamo due modi per poter visualizzare una relazione, un formato tabellare, ed un formato con nodi e collegamenti fra gli elementi della relazione. Per la relazione  $\rho$  appena enunciata si ha la seguente rappresentazione tabellare dove si inserisce un 1 nel punto in cui le due coordinate sono in relazione fra loro :

$d$	0	0	0	0
$c$	0	1	1	0
$b$	1	0	0	1
$a$	0	0	1	0
	$a$	$b$	$c$	$d$

Vediamone adesso una rappresentazione con nodi e collegamenti :



Essendo le relazioni degli insiemi, possiamo considerare le operazioni di unione ed intersezione anche per le relazioni. Esista per ogni relazione, anche la sua **relazione inversa**, se  $\rho$  è definita da  $A$  a  $B$ , esisterà  $\rho^{-1}$  definita da  $B$  a  $A$ .

$$\rho^{-1} = \{(b, a) \in B \times A | a\rho b\} \text{ quindi } a\rho b \implies b\rho^{-1}a \quad (6)$$

Se la relazione  $\rho$  è una funzione, non è detto che la sua relazione inversa sia una funzione anch'essa, prendiamo ad esempio la relazione  $\rho \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$ , che non è altro che la funzione di una variabile reale  $f(x) = x^2$ . Tale funzione, per  $x = -a$  ed  $x = a$ , ha sempre  $f(x) = a^2$ , per due valori appartenenti al dominio ha la stessa immagine, la sua funzione inversa avrebbe quindi un punto che mappa due immagini.

Una relazione nota su insieme  $A$  è la **relazione identità**, definita :  $\Delta_A = \{(a, a) \in A \times A\}$ .

### 1.3 Relazioni di Equivalenza

Una relazione  $\rho$  definita su un insieme  $A$ , quindi  $\rho \subseteq A \times A$ , è detta **relazione di equivalenza** se soddisfa i seguenti requisiti :

- $\rho$  è **riflessiva**, ossia è vero che :  $a\rho a \forall a \in A$
- $\rho$  è **simmetrica**, ossia è vero che se esiste  $a\rho a'$  allora esiste  $a'\rho a$
- $\rho$  è **transitiva**, se esistono  $a\rho a'$  e  $a'\rho a''$ , allora esiste  $a\rho a''$

Un esempio di relazione di equivalenza è la relazione di *avere la stessa età* su un insieme di studenti, difatti soddisfa tutti e 3 i requisiti :

- è **riflessiva** perchè ognuno ha la stessa età di se stesso.
- è **simmetrica** perchè se tizio ha la stessa età di caio, caio ha la stessa età di tizio.
- è **transitiva** perchè se tizio ha la stessa età di caio e caio ha la stessa età di sempronio, tizio ha la stessa età di sempronio.

Un esempio di relazione **non** di equivalenza è la relazione di *genitorialità*, ad esempio non è simmetrica, perchè se tizio è padre di caio, caio non è assolutamente padre di tizio.

## 1.4 Le Classi di Equivalenza

Sia  $\rho$  una relazione di equivalenza definita su  $A$ , si definisce **classe di equivalenza** di un elemento  $a \in A$ , e si denota con  $[a]$ , l'insieme di tutti gli elementi di  $A$  che sono equivalenti (ossia in relazione di equivalenza) ad  $a$ , ossia

$$[a] = \{b \in A \mid b \rho a\} \quad (7)$$

Ad esempio, su una relazione di *avere la stessa età*, in ogni classe di equivalenza ci sono tutte le persone che hanno la stessa età : ogni classe può essere quindi un'etichetta con il numero corrispondente all'età.

*Esempio esteso :*

Si prenda in considerazione il seguente insieme di persone :

$$A = \{\text{Valentino}, \text{Marco}, \text{Luca}, \text{Alessandro}, \text{Davide}\}$$

Ognuno ha i seguenti anni :

- Valentino - 20
- Marco - 19
- Luca - 20
- Alessandro - 19
- Davide - 19

La relazione di *avere la stessa età* su  $A$  è definita come :

$$\rho = \{(\text{Valentino}, \text{Luca}), (\text{Luca}, \text{Luca}), (\text{Marco}, \text{Alessandro}), (\text{Alessandro}, \text{Davide}) \dots \text{ecc}\}$$

La classe di equivalenza  $[\text{Marco}] = \{\text{Marco}, \text{Alessandro}, \text{Davide}\}$  definisce tutti gli elementi in relazione con *Marco*, e rappresenta tutte le persone di età uguale a 19.

Sia  $A$  un insieme sulla quale è definita una relazione di equivalenza, l'insieme  $A/\rho$  è detto **insieme quoziente**, ed è l'insieme che contiene tutte le classi di equivalenza della relazione definita su  $A$ .

$$A/\rho = \{[a], a \in A\} \quad (8)$$

Vediamo adesso un **importante proprietà** delle classi di equivalenza :

### Teorema 1

$$[a] = [b] \iff a \rho b \quad (9)$$

**Dimostrazione 1** Ovviamente  $b \in [b]$  perchè  $b \rho b$ , essendo

$$[a] = [b] \implies b \in [a] \implies b \rho a \implies a \rho b, \text{ Analogamente, se } a \rho b, \text{ se esiste}$$

$$c \in [a] \implies c \rho a \implies c \rho b \implies c \in [b] \implies [a] \subseteq [b].$$

se esiste  $c \in [b] \implies c \rho b \implies c \rho a \implies c \in [a] \implies [b] \subseteq [a]$ . Essendo  $[b] \subseteq [a]$  e  $[a] \subseteq [b]$ , per forza di cose  $[a] = [b]$ .

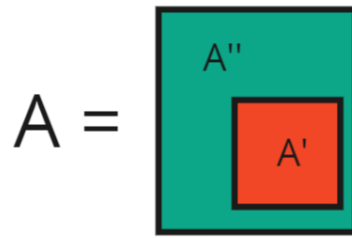
■

### 1.4.1 Le Partizioni

Dicesi **partizione** di un insieme  $A$  una *collezione di parti o sotto-insiemi*  $A_\alpha$  non vuoti di  $A$  tali che l'**unione** di tutti i sotto-insiemi sia  $A$ , ossia, tali collezioni *ricoprono*  $A$ .

$$\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = A \quad (10)$$

Ciò significa che  $A_{\alpha} \cap A_{\beta} \neq \emptyset \implies A_{\alpha} = A_{\beta}$ , in un linguaggio meno formale, tutte le partizioni di un insieme  $A$ , non condividono nessun elemento di  $A$ . Nell'immagine seguente,  $A'$  e  $A''$  sono partizioni di  $A$ .



**Proposizione 1** Sia  $\rho$  una relazione di equivalenza su  $A$ , le classi di equivalenza di  $\rho$  sono partizioni di  $A$ .

*Dimostrazione:*

Ricoprono totalmente  $A$ , essendo  $a\rho a \forall a \in A$ , ogni  $a$  appartiene alla sua classe di equivalenza. Inoltre le classi di equivalenza, o coincidono o sono disgiunte.

**Proposizione 2** Ogni partizione di un insieme  $A$  determina su  $A$  una relazione di equivalenza, per la quale i sotto insiemi della partizione sono le classi di equivalenza.

*Dimostrazione:*

Se indichiamo con  $B_{\alpha}$  i sotto-insiemi della partizione  $A_{\alpha}$  su  $A$ , è ovvio che :

$$a\rho b \implies \exists B_{\alpha} | a, b \in B_{\alpha} \quad (11)$$

Una relazione di equivalenza definisce a sua volta delle classi di equivalenza, che definiscono a loro volta delle partizioni.

## 1.5 Relazioni di Ordine Parziale

Introduciamo adesso un'altro gruppo di relazioni, ma prima necessitiamo della definizione di **relazione antisimmetrica** :

$$\text{Sia } \rho \text{ una relazione, essa si dice } \mathbf{antisimmetrica} \text{ se è vero che } a\rho b \text{ e } b\rho a \implies a = b \quad (12)$$

Detto ciò, possiamo definire una *relazione di ordine* parziale se essa è :

- Riflessiva
- Transitiva
- Antisimmetrica

*Esempio 1* - Sia  $X$  un insieme, e sia  $\mathcal{P}(X)$  l'insieme delle sue parti, definiamo la relazione sugli elementi di  $\mathcal{P}(X)$  nel seguente modo  $\rho = \{\{A, B\} \text{ con } A, B \in \mathcal{P}(X) \text{ se } A \subseteq B\}$ , quindi  $A\rho B \iff A \subseteq B$ , è chiaro che tale relazione soddisfa i 3 requisiti, è quindi di ordine parziale.

*Esempio 2* - Prendiamo come relazione la divisibilità in  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , siano  $a, b \in \mathbb{N}^*$  vale che  $a\rho b \iff a|b$ , dove  $a|b$  significa *a divide b*, ossia che  $\exists x \in \mathbb{N}^*$  tale che  $b = a \cdot x$ . Tale relazione è di ordine parziale dato che è riflessiva ( $a = 1 \cdot a$  quindi  $a\rho a$ ), è transitiva (dato che se  $a$  è divisibile per  $b$  e  $b$  è divisibile per  $c$ , è ovvio che  $a$  sia divisibile per  $c$ ), e risulta essere anche antisimmetrica, dato che :

$$\begin{cases} a\rho b \\ b\rho a \end{cases} \implies \begin{cases} b = ax \\ a = by \end{cases} \implies a = (ax)y \implies xy = 1 \quad (13)$$

Quando si ha una relazione di ordine parziale, gli elementi di tale relazione godono della proprietà di poter essere rappresentati graficamente in un determinato modo, ma prima di enunciare tale rappresentazione, necessitiamo di una definizione.

**Teorema 2** Sia  $\rho$  una relazione d'ordine parziale su un insieme  $A$ , presi  $a, b \in A$ , diciamo che *a è coperto da b* e scriveremo

$$a \preceq b \quad (14)$$

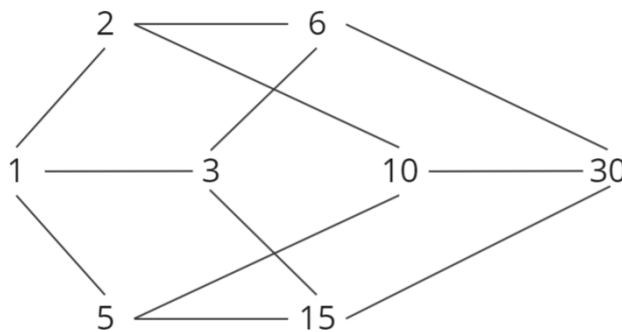
se  $a\rho b$  e non esiste nessun elemento  $c$  tale che  $a\rho c$  e  $c\rho b$ .

Ad esempio, prendiamo l'insieme  $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ , ossia dei numeri naturali che dividono 30. Risulta chiaro come :

- $2! \preceq 30$  30 non è il primo valore che si fa dividere da 2, ci sono valori prima di 30 per il quale 2 è divisore.
- $2! \preceq 3$  dato che 2 e 3 non sono nemmeno in relazione.
- $2 \preceq 6$  perchè 6 è il primo numero che 2 può dividere.

Stabilito ciò, possiamo *rappresentare graficamente* una relazione di ordine parziale su un insieme finito tramite il **diagramma di Hasse**, disegnando tutti gli elementi dell'insieme, collegandoli con una fraccia ogni dove un elemento *copre* un altro.

preso  $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$  e la relazione di divisibilità prima enunciata, si ha



## 1.6 I Numeri Naturali

Dalle scuole elementari siamo abituati a lavorare e fare operazioni con i numeri naturali, in questa sezione ne daremo una definizione assiomatica in termini di *fondamenti della matematica*. È importante in questo momento non considerare assolutamente il concetto di numeri naturali che ci è ben chiaro, e cercare di leggere il seguente paragrafo da un punto di vista puramente logico, dando nulla per scontato.

### 1.6.1 La Terna di Peano

Introduciamo prima quella che è un'astrazione dei numeri naturali, ossia la **terna di Peano**.

$$(\mathbb{N}, \sigma, 0) \tag{15}$$

Si indica in questo caso con  $\mathbb{N}$  un insieme di elementi, non i numeri naturali alla quale siamo abituati, con  $\sigma$  invece si indica una funzione  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , e dato ogni elemento  $n \in \mathbb{N}$ , l'elemento  $\sigma(n)$  si dice *successivo* di  $n$ . Su tale terna, sono definiti 3 fondamentali assiomi :

- $\mathbb{N}_1$  -  $\sigma$  è una funzione iniettiva.
- $\mathbb{N}_2$  -  $0 \notin \mathfrak{S}(\sigma)$ ,  $0$  non è contenuto nell'immagine di  $\sigma$ .
- $\mathbb{N}_3$  (*Principio di induzione matematica*) - Se  $U \subseteq \mathbb{N}$ , ed è vero che :
  - $0 \in U$
  - $k \in U \implies \sigma(k) \in U$

Allora  $U = \mathbb{N}$

*Dimostrazione*

Considero  $U = \{0\} \cup \{n | \exists n' \text{ tale che } \sigma(n') = n\}$  quindi  $k \in U \implies \exists k' | k = \sigma(k')$  allora risulta ovvio che  $\sigma(k) = \sigma(\sigma(k')) \in U \implies U = \mathbb{N}$ .

### 1.6.2 Definizione Formale

Dati tali assiomi adesso procesiamo nel riconnetterci con l'insieme dei numeri naturali da noi conosciuti, enunciandone le proprietà elementari secondo la terna di Peano.

Sia  $(\mathbb{N}, \sigma, 0)$  una terna di Peano, presi  $n, m \in \mathbb{N}$ , dirò che  $n \leq m \iff m = \sigma(\sigma(\sigma(\dots n)))$ , ossia che  $n$  è minore o uguale di  $m$  se  $m$  è uguale a  $\sigma$  applicato su  $n$  un certo numero di volte.

**Proposizione** - Questo stabilisce una relazione di ordine totale.

Adesso definiamo le operazioni elementari che conosciamo sui numeri naturali, ossia di somma e prodotto.

Definiamo la **somma** come operazione su un insieme  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , ossia che associa ad ogni coppia di elementi di  $\mathbb{N}$ , un elemento di  $\mathbb{N}$ .

$$n, m \in \mathbb{N} \text{ si definisce somma } n \times m \rightarrow n + m \tag{16}$$

La somma è definita in tal modo :

- (i)  $0 + b = b$

- (ii)  $\sigma(a) + b = \sigma(a + b)$

**Osservazione** -  $\sigma(0) + b = \sigma(0 + b) = \sigma(b)$ , Se poniamo  $\sigma(0) = 1$ , allora vediamo che  $\sigma(b) = b + 1$ .

Definiamo adesso il **prodotto**, sempre come un operazione  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  avente le seguenti proprietà :

- (i)  $0 \cdot b = 0 \forall b \in \mathbb{N}$
- (ii)  $\sigma(a) \cdot b = a \cdot b + b$

*Si può dire che gli assiomi di Peano caratterizzano i numeri naturali. Quello che si deve accettare senza dimostrazione, è l'esistenza di un insieme  $\mathbb{N}$  verificante gli assiomi di Peano.*

## 2 I Numeri Interi

Nell'insieme  $\mathbb{N}$ , non ci è permesso risolvere  $x + 1 = 0$ . In questo capitolo partiremo dai numeri naturali per costruirne un'estensione in grado di rappresentare gli interi. Partendo dal prodotto cartesiano  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , costruiamo una relazione del tipo :

$$(n, m) \sim (n', m') \iff n + m' = m + n' \quad (17)$$

In linguaggio meno formale, una coppia  $(0, a)$  è in relazione con tutte le coppie  $n, m$ , per cui  $n - m = -a$ , ed una coppia  $(a, 0)$  è in relazione con tutte le coppie  $n, m$ , per cui  $n - m = a$ .  
*Esempio :*

$$\begin{aligned} (5, 6) \sim (0, 1) &\iff 5 + 1 = 6 + 0 \\ (8, 2) \sim (6, 0) &\iff 8 + 0 = 2 + 6 \end{aligned}$$

Si nota facilmente come tale relazione sia di equivalenza, possiamo quindi definire delle classi di equivalenza che ripartiscono l'insieme  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  in classi  $[(n, m)]$ . Scegliamo come *rappresentanti* delle classi di equivalenza gli elementi che prevedono uno dei due elementi uguale a *zero*, ogni classe sarà rappresentabile con uno dei seguenti rappresentanti distinti :

$$\begin{aligned} &(0, 0) \\ &(1, 0), (2, 0), (3, 0) \dots, (n, 0) \dots \\ &(0, 1), (0, 2), (0, 3) \dots, (0, n) \dots \end{aligned}$$

Abbiamo detto che ogni classe  $[(a, 0)]$  contiene tutti gli elementi  $(n, m)$  per cui  $n - m = a$ , ad esempio si noti come :

$$[(5, 0)] = \{(10, 5), (35, 30), (1434, 1429) \dots\}$$

Analogamente :

$$[(0, 3)] = \{(5, 8), (1, 4), (22, 25) \dots\}$$

Poniamo per **definizione** :

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim \quad (18)$$



Ossia l'insieme  $\mathbb{Z}$  è l'insieme quoziente<sup>1</sup> di  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  sulla relazione  $\sim$  precedentemente definita. Possiamo inoltre decomporre  $\mathbb{Z}$  nei seguenti sotto-insiemi :

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$$

Dove (com'è di facile intuizione) si ha :

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}^+ &= \{[(n, 0)] | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \\ 0 &= [(0, 0)] \\ \mathbb{Z}^- &= \{[(0, n)] | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}\end{aligned}$$

Gli elementi di  $\mathbb{Z}^+$  saranno denominati **interi positivi** mentre quelli di  $\mathbb{Z}^-$  **interi negativi**, l'insieme  $\mathbb{Z}$  è un *estensione* di  $\mathbb{N}$ , dato che contiene al suo interno  $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  che è identificabile come  $\mathbb{N}$  tramite l'applicazione iniettiva da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{Z}$  che associa ad ogni naturale  $n$  la classe  $[(n, 0)]$ . Definiamo adesso su  $\mathbb{Z}$  le operazioni elementari di somma e prodotto :

**Somma :**

$$[(n, m)] + [(n', m')] = [(n + n', m + m')]$$

*Esempio 1 :*

$$[(5, 0)] + [(0, 9)] = [(5, 9)] = [(0, 4)]$$

**Prodotto :**

$$[(n, m)] \cdot [(n', m')] = [(n \cdot n' + m \cdot m', n' \cdot m + n \cdot m')]$$

*Esempio 2 :*

$$[(7, 0)] \cdot [(0, 2)] = [(7 \cdot 0 + 0 \cdot 2, 0 \cdot 0 + 7 \cdot 2)] = [(0, 14)]$$

Da ora in poi indicheremo gli elementi di  $\mathbb{Z}$  in tal modo :

$$[(n, 0)] = n \quad [(0, 0)] = 0 \quad [(0, n)] = -n$$

Riprendendo gli esempi di prima, è chiaro come adesso siano definite le operazioni elementari che siamo abituati ad utilizzare fin dalle elementari.

$$\begin{aligned}\text{Esempio 1} &\rightarrow 5 + (-9) = -4 \\ \text{Esempio 2} &\rightarrow 7 \cdot (-2) = -14\end{aligned}$$

**Osservazioni :**

$$[(n, 0)] + [(0, n)] = [(n + 0, 0 + n)] = [(n, n)] \sim [(0, 0)] \implies n + (-n) = 0$$

In  $\mathbb{Z}$  ci sono due importanti elementi,  $[(0, 0)] = 0$  e  $[(1, 0)] = 1$ , dati tali elementi e le operazioni precedentemente definite, diciamo che  $\mathbb{Z}$  è una **struttura algebrica**.

---

<sup>1</sup>l'insieme di tutte le classi di equivalenza.

## 2.1 Divisibilità in $\mathbb{Z}$

**Teorema Fondamentale :** Presi due numeri  $a, b \in \mathbb{Z}$ , con  $b \neq 0$ , esistono e sono unici due numeri  $q, r \in \mathbb{Z}$  tale che :

$$a = bq + r \text{ dove } 0 \leq r < |b|$$

Dove  $a$  è detto *dividendo*,  $b$  è detto *divisore*,  $q$  è detto *quoziente* ed  $r$  è detto *resto*.

**Dimostrazione :**

(*Esistenza*) Consideriamo un numero intero  $b \geq 1$  e l'insieme  $S = \{a - bx \geq 0, x \in \mathbb{Z}\}$ , si ha che  $S \neq \emptyset$  perchè, ponendo ad esempio  $x = -|a|$ , si verifica  $a + b|a| \geq 0$ . Per *principio del buon ordinamento*, essendo  $S$  sottoinsieme di  $\mathbb{N}$ ,  $S$  ha un minimo, che denoteremo  $r$ . Quindi  $r \in S \implies r = a - bq$  con  $q \in \mathbb{Z}$ . Segue che  $a = bq + r$ , e tale coppia  $q, r$  è unica dato che  $r$  essendo un minimo, è unico. Si dimostra facilmente  $0 \leq r < |b|$ , sicuramente  $0 \leq r$  dato che  $r \in S$ , poniamo per assurdo che  $r \geq |b|$ , quindi  $r - b \geq 0$ . Dato che prima si è scritto  $r = a - bq$ , ora abbiamo  $r - b = a - bq - b$ , che possiamo riscrivere come  $a - b(q + 1)$ , che rientra nella forma  $a - bx$  definita inizialmente nell'insieme  $S$ . Ciò vuol dire che  $r - b \in S$ , ovviamente  $r > r - b$ , ma  $r$  è il minimo di  $S$  quindi è **assurdo** che  $r - b$  sia in  $S$ , per questo  $r < |b|$ .

**Definizione :** presi  $a, b \in \mathbb{Z}$  si dice che  $a$  divide  $b$ , e si scrive  $a|b$ , se esiste  $c \in \mathbb{Z}$  tale che  $b = ac$ .

Osservazioni :

- 1) ogni  $a \in \mathbb{Z}$  ha sempre i divisori *ovvi*, ossia  $\pm 1$  e  $\pm a$ .
- 2)  $\forall a \in \mathbb{Z}, a|0$ .
- 3)  $0|a \iff a = 0$
- 4)  $a|1 \iff a = \pm 1$
- 5.1) se  $a|b$  e  $a|c$ , allora  $\forall x, \forall y, a|bx + cy$ , si dimostra facilmente :

$$\begin{cases} a|b \implies b = at \\ a|c \implies c = as \end{cases} \implies bx + cy = atx + asy = a(tx + sy) \implies a|bx + cy \quad (19)$$

- 5.2) se  $\forall x, \forall y, a|bx + cy$ , allora  $a|b$  e  $a|c$ .

## 2.2 Il Massimo Comun Divisore

**Definizione :** Siano  $a, b \neq 0, 0 \in \mathbb{Z}, d \geq 1 \in \mathbb{Z}$  si dice **massimo comun divisore** di  $(a, b)$  se:

- i)  $d|a$  e  $d|b$
- ii) se  $d'|a$  e  $d'|b$  allora  $d'|d$

Il massimo comun divisore esiste  $\forall a, b \neq 0, 0 \in \mathbb{Z}$  ed è *unico*.

**Dimostrazione :**

(*Esistenza*) Vogliamo dimostrare che  $MCD(a, b)$  esiste. Sia  $S = \{ax + by > 0, \forall x, y \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$  un insieme, ovviamente non vuoto, essendo

sotto-insieme dei numeri naturali vale il principio del buon ordinamento, quindi esiste un minimo in  $S$ , che denotiamo  $d = ax_0 + by_0$ . Vogliamo provare che  $MCD(a, b) = d$ , per la (5.2) basta dimostrare che  $d|ax + by \forall x, y$ , prendo  $ax + by$  e lo divido per  $d$ , vale ovviamente :  $ax + by = d \cdot q + r$  con  $0 \leq r < |d|$ . Ci basta ora dimostrare che  $r = 0$ . Supponiamo per *assurdo* che  $r > 0$ , ciò vorrebbe dire che, essendo  $d = ax_0 + by_0$ , ho che :

$$ax + by = (ax_0 + by_0) \cdot q + r \implies r = a(x - x_0q) + b(y - y_0q) \quad (20)$$

Essendo di tale forma, vuol dire che essendo maggiore di 0,  $r \in S$ . Si giunge ad una contraddizione, dato che  $r$  è strettamente minore di  $d$ , ma abbiamo definito  $d$  come il minimo di  $s$ , quindi è impossibile che  $r > 0$ . Essendo  $r = 0$ , si ha che  $d|ax + by$ , quindi  $d|a$  e  $d|b$ ,  $d$  è il massimo comun divisore. ■

Abbiamo visto che tale  $d$  può essere scritto nella forma  $d = ax_0 + by_0$  per due coefficienti  $x_0, y_0$ . Tale forma è detta **identità di Bézout**, e *non è unica*. Vediamo alcune proposizioni:

- 1) se  $a \neq 0$  e  $a|b$ , allora  $MCD(a, b) = |a|$
- 2)  $MCD(a, \pm a) = a$
- 3)  $MCD(a, 0) = a$
- 4)  $MCD(\pm 1, a) = 1$
- 5) Siano  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  tutti diversi da 0, vale che  $MCD(ab, ac) = |a| \cdot MCD(b, c)$
- 6)  $MCD(a, b) = d \implies MCD(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$

**Definizione :** Siano  $a, b \neq 0$ , se  $MCD(a, b) = 1$ , allora  $a$  e  $b$  si dicono *co-primi*. Se due numeri sono co-primi, allora  $\exists r, s \in \mathbb{Z}$  t.c.  $ar + bs = 1$ .

*Lemma di Euclide :* se  $a|bc$  e  $MCD(a, b) = 1$  allora  $a|c$ .

**Dimostrazione :**

Abbiamo per ipotesi che  $ar + bs = 1$ , allora  $c = c \cdot 1 = c \cdot (ar + bs)$ , e per ipotesi essendo  $a|bc$  vuol dire che  $bc = ax$  per qualche  $x$ . allora  $c = a(cr) + a(xs) = a(cr + xs) \implies a|c$ . ■

Vediamo un importante *lemma*, sappiamo che se  $a, b \in \mathbb{Z}$  con  $b \neq 0$ , si ha che  $a = bq + r$  con  $0 \leq r < |b|$ . Si ha che  $MCD(a, b) = MCD(b, r)$ .

**Dimostrazione :**

Sia  $d = MCD(a, b)$  e  $d' = MCD(b, r)$ . In generale, se  $a|b$  e  $b|a \implies a = \pm b$ . Per tale osservazione, dobbiamo dimostrare che  $d|d'$  e  $d'|d$ .

- Sappiamo che  $d|a$  e  $d|b$ , quindi  $d|a - bq \implies d|r$ , essendo che  $d|r$  e  $d|b$ , si ha che  $d|d'$  perchè  $d' = MCD(b, r)$ .
- Sappiamo che  $d'|d$  e  $d'|r$ , quindi  $d'|bq + r \implies d'|a$ , essendo che  $d'|a$  e  $d'|b$ , si ha che  $d'|d$  perchè  $d = MCD(a, b)$ .

■

### 2.2.1 L'Algoritmo Euclideo

Vediamo ora l'algoritmo per trovare il massimo comun divisore di due numeri  $a, b$ , per cui vale la condizione  $a \geq b > 0$ . Vediamo come si fa passo per passo.

- Passo 1) divido  $a$  per  $b$ , ed ottengo  $a = bq_1 + r_1$ . Se  $r_1 \neq 0$ , continuo.
- Passo 2) divido  $b$  per  $r_1$ , ed ottengo  $b = r_1q_2 + r_2$ . Se  $r_2 \neq 0$ , continuo.
- Passo 3) divido  $r_1$  per  $r_2$ , ed ottengo  $r_1 = r_2q_3 + r_3$ . Se  $r_3 \neq 0$ , continuo.

*Osservazione* : Procedendo in tal modo, definiamo una successione di interi strettamente decrescente :

$$b > r_1 > r_2 > r_3 \dots$$

Quindi, ad un certo punto, otterremo un resto pari a 0 :

- Passo  $n$ ) divido  $r_{n-2}$  per  $r_{n-1}$ , ed ottengo  $r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$ . Se  $r_n \neq 0$ , continuo.
- Passo  $n+1$ ) divido  $r_{n-1}$  per  $r_n$ , ed ottengo  $r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}$ . A questo punto ho che  $r_{n+1} = 0$

Ho trovato finalmente che  $r_{n+1} = 0$ , per lemma di Euclide, si ricordi che :  $MCD(r_{n-1}, r_n) = MCD(r_n, r_{n+1}) \implies MCD(r_{n-1}, r_n) = MCD(r_n, 0) \implies MCD(r_{n-1}, r_n) = r_n$ .

A questo punto risulta chiaro che :

$$MCD(a, b) = MCD(b, r_1) = MCD(r_1, r_2) \dots = MCD(r_n, 0) = r_n \quad (21)$$

Quindi,  $MCD(a, b)$  è uguale all'ultimo resto non nullo.

## 2.3 Equazioni Diofantee

Un *equazione diofantea* è un'equazione della forma :

$$ax + by = c \text{ con } a, b, c \in \mathbb{Z}$$

Dove si vogliono trovare delle soluzioni intere, ossia con  $x, y \in \mathbb{Z}$ . Tale equazione, ha soluzione intera **se e solo se** il massimo comun divisore fra  $a$  e  $b$  divide  $c$ .

$$\text{con } a, b, c \in \mathbb{Z}, \exists x, y \in \mathbb{Z} \text{ tale che } ax + by = c \iff MCD(a, b) | c$$

### 2.3.1 Risoluzione

Vediamo adesso passo-passo come si risolve un'equazione di questo tipo:

- 1) Bisogna prima verificare che l'equazione sia risolubile, si calcoli quindi  $MCD(a, b) = d$ , se esso divide  $c$ , l'equazione ammette soluzione.
- 2) Usare l'algoritmo euclideo 2.2.1 per trovare un'identità di Bézout per  $d$ , esprimendolo nella forma  $d = ax_0 + by_0$ , utilizzeremo proprio tali coefficienti  $(x_0, y_0)$ .
- 3) Moltiplicare  $(x_0, y_0)$  per  $\frac{c}{d}$ , ottenendo  $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\frac{c}{d} \cdot x_0, \frac{c}{d} \cdot y_0)$ .
- 4) Per qualsiasi  $k \in \mathbb{Z}$ , le soluzioni dell'equazione diofantea sono della forma :

$$(\tilde{x} + k \cdot \frac{b}{d}, \tilde{y} - k \cdot \frac{a}{d})$$

Vediamo un *Esempio* di risoluzione, sia :

$$2x + 5y = 3$$

- Uso l'algoritmo di Euclide per trovare  $MCD(5, 2)$  :  $(1)5 = 2 \cdot 2 + 1$   $(2)2 = 2 \cdot 1 + 0$ . Trovo quindi  $MCD(5, 2) = 1$ .
- Tramite tale algoritmo, identifico anche la combinazione lineare  $1 = (-2) \cdot 2 + (1) \cdot 5$ .
- Moltiplico  $(-2, 1)$  per 3, ottenendo  $(-6, 3)$ .
- Tutte le soluzioni sono :  $(-6 + (k \cdot 5), 3 - (k \cdot 2))$ , difatti, per  $k = 1$  ho :  $2(-6 + 5) + 5(3 - 2) = 3$ .

## 2.4 Il Minimo Comune Multiplo

Il *minimo comune multiplo* fra due numeri  $a, b$ , che si indica con  $mcm(a, b)$ , è quel valore  $h \geq 0$  tale che,  $a|h$  e  $b|h$ , e se esiste  $h'$  tale che  $a|h'$  e  $b|h'$ , allora  $h|h'$ . Ne seguono le seguenti osservazioni:

- 1)  $mcm(a, 0) = 0$
- 2)  $mcm(a, 1) = a$
- 3)  $mcm(a, b) = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$

**Corollario :** Se  $a, b \in \mathbb{Z}$  e  $a, b \neq 0$ , allora  $|ab| = MCD(a, b) \cdot mcm(a, b)$ , quindi

$$mcm(a, b) = \frac{|ab|}{MCD(a, b)}.$$

## 2.5 I Numeri Primi

Un intero  $p \geq 2$  è detto *primo* se i suoi divisori sono esclusivamente  $\pm 1$  e  $\pm p$ . Quindi, segue la seguente osservazione : Se  $p|xy$  e  $p \nmid x \implies p|y$ , è chiaro che  $p$  è primo se e solo se, se  $p$  divide un prodotto :  $p|xy, x \neq \pm 1 \implies y = \pm 1$ . La generalizzazione di elemento primo è la seguente :

Un elemento  $p$  di un anello 3.3  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  è detto **irriducibile** se:

$$p = xy, x \notin \mathcal{U}(\mathbb{Z}) \implies y \in \mathcal{U}(\mathbb{Z})$$

Un qualsiasi dominio di integrità può presentare elementi primi o irriducibili, se  $a \in A, +, \cdot)$  è primo, allora  $a$  è irriducibile (primo  $\implies$  irriducibile). non è però vero il contrario, in generale, se un elemento è irriducibile, non è per forza primo (irriducibile  $\nRightarrow$  primo). Nei numeri interi  $\mathbb{Z}$ , gli elementi irriducibili sono i numeri primi.

### 2.5.1 Teorema Fondamentale dell'Aritmetica

Se  $n \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tale  $n$  è un prodotto di numeri primi (può essere fattorizzato in numeri primi). Inoltre, tale fattorizzazione ha scrittura :

$$n = p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \cdot p_3^{h_3} \dots \cdot p_s^{h_s} \text{ con } h_i \geq 1 \text{ e } s \geq 1$$

Dove  $p_1, p_2, \dots, p_s$  sono  $s$  primi distinti, e tale scrittura è **unica** a meno dell'ordine dei fattori. Conseguentemente, preso un qualunque intero  $z$  diverso da zero e diverso da  $\pm 1$ , ha scrittura :

$$z = \pm p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \cdot p_3^{h_3} \dots \cdot p_s^{h_s} \text{ con } h_i \geq 1 \text{ e } p_i \text{ irriducibili } > 1$$

Vediamo una proprietà, sia :

$$a = p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \dots \cdot p_s^{h_s}, \quad b = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots \cdot p_s^{k_s}$$

Ammettendo esponenti  $h_i = 0$ , è possibile scrivere le fattorizzazioni di due interi diversi con gli stessi identici primi distinti, "costringendo" ad essere presenti nella fattorizzazione anche primi che in realtà non apparirebbero, ma grazie ad esponente nullo diventano  $p_i^0 = 1$ . Date tali fattorizzazioni, si ha che :

$$MCD(a, b) = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \dots \cdot p_s^{m_s}$$

$$mcm(a, b) = p_1^{M_1} \cdot p_2^{M_2} \dots \cdot p_s^{M_s}$$

Dove, per ogni  $i$ , tali esponenti sono :  $m_i = \min\{h_i, k_i\}$  e  $M_i = \max\{h_i, k_i\}$ .

**Proposizione** : Esistono *infiniti* numeri primi. *Dimostrazione* : Supponiamo che i numeri primi siano in un numero finito :  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_N$ . Prendiamo adesso il numero  $a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots \cdot p_N + 1$ . Tale numero è un intero positivo maggiore di 1, quindi, per il teorema fondamentale dell'aritmetica, deve per forza avere una fattorizzazione in numeri primi. Tuttavia, se esso viene diviso per ogni primo  $p_i$  dà come resto 1, questo è assurdo e ci assicura che i numeri primi sono necessariamente infiniti.

*Corollario* :  $\forall p$  primo,  $\nexists \sqrt{p} \in \mathbb{Q}$ .

## 3 Strutture Algebriche Notevoli

Vediamo prima una definizione :

Sia  $X$  un insieme, un **operazione binaria** in  $X$  è un *applicazione*

$*$  :  $X \times X \rightarrow X$ , ossia che ad ogni elemento del prodotto cartesiano  $X \times X$  associa un elemento di  $X$ .

Ad esempio, l'operazione somma  $+$  nei numeri naturali è un'operazione binaria.  $(\mathbb{Z}, +)$  è un insieme con un'operazione binaria definita su di esso. Vediamo adesso alcune strutture algebriche notevoli e largamente studiate.

### 3.1 Definizione di Semigrupp

Il **semigrupp** è un insieme  $S$  dotato di un operazione  $*$  verificante i seguenti punti :

- **1.1** -  $*$  è **associativa**, ossia  $(s * s') * s'' = s * s' * s''$ .
- **1.2** -  $\exists e \in S | e * s = s = s * e \forall s \in S$  dove tale  $e$  è detto **elemento nullo**.

Se dovesse accadere che  $\forall s, s' \in S | s * s' = s' * s$  si dice che il semigrupp  $S, *$  è anche **commutativo**.

*Esempio 1 :* Sia  $S = \{f : X \rightarrow X\}$  l'insieme delle funzioni definite su un insieme  $X$ , l'operazione  $\circ$  detta composizione è associativa, presenta l'elemento neutro (la funzione identità), ma non è commutativa, dato che  $f \circ g \neq g \circ f$ , quindi  $(S, \circ)$  è un semigrupp non commutativo.

### 3.2 Definizione di Gruppo

Il **gruppo** è un insieme  $S$  dotato di un operazione  $*$  verificante i punti del semigrupp, ma avendo una condizione aggiunta necessaria :

- **2.1** -  $*$  è **associativa**, ossia  $(s * s') * s'' = s * s' * s''$ .
- **2.2** -  $\exists e \in S | e * s = s = s * e \forall s \in S$  dove tale  $e$  è detto **elemento nullo**.
- **2.3** -  $\forall s \in S \exists s' | s * s' = e = s' * s$  dove  $s'$  è detto **inverso** di  $s$ .

*Esempio 1 :*  $(\mathbb{N}, +)$  non è un gruppo, ma  $(\mathbb{Z}, +)$  sì, dato che  $\forall x \in \mathbb{Z} \exists -x | x + (-x) = 0$ , ovviamente 0 è l'elemento neutro.

*Esempio 2 :* Sia  $X$  un insieme, l'insieme  $S = \{f : X \rightarrow X \text{ biettiva}\}$  ossia di tutte le funzioni biettive su  $X$ , con l'operazione  $\circ$  di composizione, è un gruppo, dato che  $\forall f \in S \exists f^{-1} | f \circ f^{-1} = d_x$ , dove  $d_x$  è la funzione identità (l'elemento neutro).

È importante notare che per definizione, l'elemento neutro  $e$ , se esiste è unico. La **dimostrazione** è semplice : sia  $\tilde{e}$  un'altro elemento neutro su  $(S, *)$ . dato che  $\forall s \in S | s * \tilde{e} = s = \tilde{e} * s \implies \tilde{e} * e = e = e * \tilde{e}$ , ma dato che anche  $e$  è elemento neutro,  $e * \tilde{e} = \tilde{e} = \tilde{e} * e$ .

$$\begin{cases} e * \tilde{e} = \tilde{e} = \tilde{e} * e \\ \tilde{e} * e = e = e * \tilde{e} \end{cases} \implies \tilde{e} = e \text{ L'elemento neutro è unico.} \quad (22)$$

#### 3.2.1 Il Gruppo Simmetrico $S_n$

Sia  $X$  un insieme ,abbiamo chiamato il gruppo di tutte le sue corrispondenze biunivoche  $f : X \rightarrow X$  con il simbolo  $(S(X), \circ)$ , nel caso in cui  $X$  sia finito, con cardinalità  $|X| = n$ , si indicherà con  $S_n$ , e prende il nome di **gruppo simmetrico di grado  $n$** . Tale gruppo non è commutativo, data l'operazione di composizione  $\circ$ . È facile notare come ogni elemento  $\sigma$  di  $S_n$  sia una permutazione di  $X = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ , quindi la cardinalità sarà  $|S_n| = n!$ .

### 3.3 Definizione di Anello

L'anello  $(A, \odot, *)$  è un insieme dotato di 2 operazioni con le seguenti proprietà :

- **3.1** -  $(A, \odot)$  è un **gruppo commutativo**, dove  $O_A$  è l'elemento neutro.
- **3.2** - L'operazione  $*$  è **associativa**.
- **3.3** - Riguardo le due operazioni, valgono le proprietà **distributive** :

$$(a \odot a') * b = (a * b) \odot (a' * b) \quad (23)$$

Per essere un anello, non è necessario che l'operazione  $*$  sia commutativa, nel caso dovesse esserlo, l'anello si dice commutativo.

Un anello si dice **unitario** se  $\exists u \in A | a * u = a = u * a \forall a \in A$ , ossia, se è definito l'elemento neutro sull'operazione  $*$ .

Un anello commutativo, è detto **privo di divisori dello zero** se :

$$a * b = O_A \implies a = O_A \vee b = O_A \quad (24)$$

Dove si ricordi che  $O_A$  è l'elemento neutro definito su  $(A, \odot)$ .

Se un anello commutativo è privo di divisori dello zero, ed è unitario, si dice **dominio di integrità**.

L'insieme dei numeri interi  $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0)$  è un *anello commutativo unitario* con unità 1, privo di divisori dello 0, detto quindi *dominio di integrità*.

#### Proprietà dell'anello

- **(1)**  $\forall a \in A, a \cdot 0 = 0$  ciò si dimostra facilmente, infatti  $a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$ , ma essendo che  $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0)$  si ha  $a \cdot 0 + 0 = a \cdot (0 + 0)$ , aggiungo ad entrambi i membri  $-a \cdot 0$  ed ottengo  $-a \cdot 0 + a \cdot 0 + 0 = -a \cdot 0 + a \cdot 0 + a \cdot 0 \implies 0 + 0 = a \cdot 0 + 0 \implies a \cdot 0 = 0$ . ■
- **(2)**  $a \cdot (-b) = -(-ab) = (-a) \cdot b$
- **(3)**  $(-a) \cdot (-b) = ab$
- **(4)**  $a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$

In ogni anello unitario (non necessariamente commutativo)  $(A, +, \cdot)$  si definisce  $\mathcal{U}(A) = \{a \in A | \exists a' | a \cdot a' = 1 = a' \cdot a\}$ , ossia l'insieme degli elementi invertibili di  $A$ , ad esempio, nei numeri interi si ha  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$ . Si nota facilmente che l'insieme degli elementi invertibili è un gruppo. Vediamo ora un'importante proprietà :

$$a, b \in \mathcal{U}(A) \implies a \cdot b \in \mathcal{U}(A)$$

Ossia, il prodotto di due elementi invertibili, è anche esso un elemento invertibile.

*Dimostrazione:*

Siano  $a'$  l'inverso moltiplicativo di  $a$  e  $b'$  l'inverso moltiplicativo di  $b$ , quindi  $a, b, a', b' \in \mathcal{U}(A)$ . Ciò vuol dire che  $a' \cdot b'$  è l'inverso moltiplicativo di  $a \cdot b$ , dato che  $(a' \cdot b') \cdot (a \cdot b) = b' \cdot (a' \cdot a) \cdot b = b' \cdot 1 \cdot b = b' \cdot b = 1$ , è quindi dimostrato che essendo  $a'b'$  l'inverso di  $ab$ , essi sono invertibili, per cui fanno parte di  $\mathcal{U}(A)$ . ■

#### Notazioni semplificate

Da questo punto in poi useremo le seguenti notazioni semplificate :



- **Gruppo** -  $(S, \cdot, 1)$  dove " $S$ " è l'insieme, " $\cdot$ " l'operazione, ed " $1$ " l'elemento neutro.
- **Gruppo Commutativo** -  $(S, +, 0)$  dove " $S$ " è l'insieme, " $+$ " l'operazione, e " $0$ " l'elemento neutro.
- **Anello** -  $(A, +, \cdot, 0)$  dove " $S$ " è l'insieme, " $+$ " la prima operazione, per cui  $(A, +)$  risulta un gruppo commutativo, " $\cdot$ " la seconda operazione, e " $0$ " l'elemento neutro. Se unitario, si usa " $1$ " come simbolo per l'unità.

### 3.4 Definizione di Campo

Abbiamo visto che l'insieme degli invertibili di un anello è uguale a tutti quegli elementi, che moltiplicati per un altro elemento dell'insieme, detto *inverso*, sono uguali all'elemento neutro rispetto l'operazione di prodotto. Infatti in un anello, l'inverso esiste per tutti gli elementi rispetto l'operazione di somma (essendo un gruppo), ma non del prodotto.

Da qui possiamo dare la definizione di **campo**, che si denota con  $\mathbb{K}$ ,  $+$ ,  $\cdot$ , e non è altro che un *anello commutativo unitario* per cui vale la seguente proprietà :

$$\forall k \in \mathbb{K}, k \neq 0, \exists k' | k \cdot k' = 1 \text{ dove } 1 \text{ è l'elemento neutro rispetto all'operazione } "\cdot", \text{ e } 0 \text{ è l'elemento neutro rispetto all'operazione } "+".$$

Quindi un campo, è un anello commutativo unitario per cui esiste l'inverso di ogni elemento rispetto l'operazione di prodotto, difatti vale che  $\mathcal{U}(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Due noti esempi di campo che conosciamo sono il campo dei numeri razionali  $\mathbb{Q}$  ed il campo dei numeri reali  $\mathbb{R}$ .

## 4 L'Anello $\mathbb{Z}_n$

L'insieme dei numeri interi  $\mathbb{Z}$  è il più semplice e chiaro esempio di anello. Vediamo adesso un anello commutativo unitario, **privo di divisori dello zero**, che non sia quindi dominio di integrità. Definiamo prima di tutto una relazione :

$$a \sim_n b \iff a - b \text{ è divisibile per } n \quad (25)$$

L'insieme  $\mathbb{Z}_n \equiv \mathbb{Z} / \sim_n$  non è altro che l'insieme quoziente di tale relazione sui numeri interi. Ossia l'insieme delle sue classi di equivalenza.  $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], [2] \dots, [n-1]\}$ . Notiamo come la cardinalità di tale insieme sia proprio  $n$ , e che :

$$\begin{aligned} [-1] &= [n-1] \text{ perchè } n-1 \sim_n 1 \iff n-1 - (-1) = n \\ [0] &= [n] \text{ perchè } n \sim_n 0 \iff n - 0 = n \\ [1] &= [n+1] \text{ perchè } n+1 \sim_n 1 \iff n+1 - 1 = n \\ [10] &= [n+10] \text{ perchè } n+10 \sim_n 10 \iff n+10 - 10 = n \end{aligned}$$

Su tale insieme sono definiti somma e prodotto (ben posti):

$$\begin{aligned} [k] + [h] &= [k+h] \\ [k] \cdot [h] &= [k \cdot h] \end{aligned}$$

Ha un elemento neutro per la somma  $[0]$ , ed uno per il prodotto  $[1]$ . L'anello è commutativo ed unitario, però possiede *divisori dello zero*, se prendo ad esempio  $\mathbb{Z}_{12}$ , nonostante  $[3] \neq [4] \neq [0]$ , risulta che  $[3] \cdot [4] = [12] = [0]$  perchè  $12 \sim_{12} 0 \iff 12 - 0 = 12$  e  $12$  è divisibile per  $12$ . *Osservazione:* Se non si è in un dominio di integrità non è possibile

semplificare un'equazione, si prenda  $\mathbb{Z}_{10}$ , sicuramente  $[8] = [2][4]$  e  $[8] = [28] = [7][4]$ , quindi  $[7][4] = [2][4]$ , semplificando il  $[4]$  otterrei  $[7] = [2]$  che non è vero.

**Notazione :** Al posto di  $\mathbb{Z}_n$  scriveremo  $(\text{mod } n)$ , e se  $a = b \pmod{n}$ , potremmo anche scrivere  $a \equiv b \pmod{n}$ .

## 4.1 Equazioni in $\mathbb{Z}_n$ : Congruenze Lineari

In questo paragrafo ci occuperemo di spiegare come si risolve un'equazione detta *congruenza lineare*, del tipo :

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

Ossia, trovare un  $x_0$  tale che  $ax_0 \equiv b \pmod{n}$ .

**Proposizione :** La congruenza lineare  $ax \equiv b \pmod{n}$  ammette soluzioni **se e solo se**  $MCD(a, n) | b$ . La *Dimostrazione* è semplice, dato che risolvere una congruenza lineare equivale a risolvere un'equazione diofantea del tipo:

$$ax + ny = b$$

**Proposizione :** Se  $x_0$  è una soluzione di  $ax \equiv b \pmod{n}$ , *tutte* le soluzioni di tale congruenza saranno del tipo :

$$x_0 + h \cdot \frac{n}{MCD(a, n)} \text{ con } h \in \mathbb{Z}$$

Ma tale generalizzazione identifica infinite soluzioni congruenti fra loro, le soluzioni diverse  $(\text{mod } n)$  sono quindi esattamente  $d = MCD(a, n)$ .

Come accennato precedentemente, per risolvere una congruenza lineare  $ax \equiv b \pmod{n}$ , basta risolvere  $ax + ny = b$ , trovando :  $(x_0 + h \cdot \frac{n}{MCD(a, n)}, y_0 + h \cdot \frac{a}{MCD(a, n)})$ , e considerando la prima coordinata della coppia.

## 4.2 La funzione di Eulero

Il *Teorema di Eulero*, enuncia che, se  $n$  è un intero positivo, ed  $a$  è co-primario rispetto ad  $n$ , allora è vero che :

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Dove  $\varphi$  è la **funzione di Eulero**, che associa ad ogni  $n$ , il numero di tutti gli interi positivi minori di  $n$ , che sono co-primi con  $n$ . Ad *esempio* :

- $\varphi(20) = 8$  perchè i co-primi con 20 minori di esso sono : 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19.
- $\varphi(6) = 2$  perchè i co-primi con 6 minori di esso sono : 1, 5.

Ci occuperemo di capire come calcolare  $\varphi(n)$  per ogni intero  $n$  della quale si conosca la *fattorizzazione*.

**Proposizione :** Sia  $n = p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \dots \cdot p_k^{h_k}$  la fattorizzazione in numeri primi di  $n$ , dove  $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $p_i$  è un numero primo distinto, risulta :

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{h_1}) \cdot \varphi(p_2^{h_2}) \dots \cdot \varphi(p_k^{h_k})$$

Con tale risultato, non rimane che calcolare il valore di  $\varphi$  sulle potenze dei numeri primi.

**Proposizione :** Se  $p$  è un numero primo, allora :

$$\varphi(p^h) = p^h - p^{h-1}$$

Tale risultato risulta quasi scontato, tutti i numeri co-primi con un numero primo, sono tutti i numeri minori di tale numero, dato che esso non condivide divisori con nessuno. Parlando di potenze, non sono co-primi con  $p^h$ , solo i multipli di  $p$ , che sono del tipo :  $p \cdot i$ . Ora per ogni  $n$  della quale si conosca la fattorizzazione, siamo in grado di calcolare la sua funzione di Eulero :

- $\varphi(72) = \varphi(2^3 \cdot 3^2) = \varphi(2^3)\varphi(3^2) = (2^3 - 2^2)(3^2 - 3) = (4)(6) = 24$
- $\varphi(8) = \varphi(2^3) = (2^3 - 2^2) = 4$

#### 4.2.1 Gli Invertibili di $\mathbb{Z}_n$

Ricordiamo che  $\mathbb{Z}_n$  ha la struttura di un anello commutativo con unità 3.3, ha quindi un insieme di elementi invertibili. Vogliamo determinare la cardinalità di tale insieme  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$ .

**Proposizione :** In  $\mathbb{Z}_n$ , gli unici elementi *invertibili* sono quelle classi  $a$  tali che  $MCD(a, n) = 1$ .

Ossia, tutti gli elementi co-primi con  $n$ , ed equivale a risolvere la congruenza :

$$ax \equiv 1 \pmod{n}$$

Tale congruenza ammette un'unica soluzione, se e solo se  $MCD(a, n) = 1$ . Gli invertibili, sono esattamente  $\varphi(n)$ , quindi, se  $p$  è primo, tutti gli elementi di  $\mathbb{Z}_p$  escluso lo 0 sono co-primi con  $p$ , quindi, ogni classe non nulla è invertibile :  $|\mathcal{U}(\mathbb{Z}_p)| = \varphi(p) = p - 1$ .

Ricordando che un campo è un anello commutativo con unità, per cui ogni elemento non nullo è invertibile, si arriva al seguente risultato :

Se  $p$  è un numero primo, allora l'anello  $\mathbb{Z}_p$  è un *campo*.

## 5 I Numeri Razionali

Abbiamo definito i numeri naturali, che servono per la definizione degli interi, che useremo a loro volta per definire i **numeri razionali**. Prima però, dobbiamo stabilire una *relazione* su  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , ossia sul prodotto cartesiano fra gli interi, e gli interi escluso l'elemento neutro rispetto la somma. Definiamo la relazione  $\rho$  in tal modo :

$$(a, b)\rho(c, d) \iff a \cdot d = b \cdot c \tag{26}$$

Ad esempio,  $(2, 1)\rho(4, 2)$  perchè  $2 \cdot 2 = 4 \cdot 1$ , oppure  $(3, 2)\rho(6, 4)$  perchè  $3 \cdot 4 = 6 \cdot 2$ . Definiamo l'insieme dei razionali come l'insieme quoziente del prodotto cartesiano fra gli interi, e gli interi escluso l'elemento neutro rispetto la somma, rispetto la relazione appena definita.

$$\mathbb{Q} = \{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} / \rho\}$$

Ossia l'insieme di tutte le classi di equivalenza. Denotiamo poi  $0 := [(0, 1)]$  e  $1 := [(1, 1)]$ . Come abbiamo visto prima,  $(2, 1)\rho(4, 2)$ , quindi  $[(2, 1)] = [(4, 2)]$ . Come abbiamo detto in precedenza,  $\mathbb{Q}$  è un campo. Definiamo quindi due operazioni, ossia la somma ed il prodotto.

- somma :  $[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)]$
- prodotto :  $[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac, bd)]$

Tali operazioni fra classi di equivalenza sono *ben poste*, ossia non dipendono dalla scelta dei rappresentanti delle classi. Difatti se  $[(a, b)] = [(c, d)]$  e  $[(a', b')] = [(c', d')]$ , si avrà che  $[(a, b)] + [(a', b')] = [(c, d)] + [(c', d')]$ , ossia che  $(ab' + ba', bb')\rho(cd' + dc', dd') \implies (ab' + ba') \cdot dd' = bb' \cdot (cd' + dc')$ .

Abbiamo quindi due operazioni con definiti elementi neutri, uno per la somma  $0 := [(0, 1)]$  ed uno per il prodotto  $1 := [(1, 1)]$ , è un anello commutativo unitario, ed inoltre è un campo, dato che presi qualsiasi  $[(a, b)]$  con  $a \neq 0$  allora  $[(a, b)] \cdot [(b, a)] = 1$ , questo è di facile verifica dato che  $[(a, b)] \cdot [(b, a)] = [(ab, ba)] = [(1, 1)] = 1$  dato che  $(ab, ba)\rho(1, 1) \iff ab \cdot 1 = ba \cdot 1$ , ed essendo il prodotto definito su  $\mathbb{Z}$  commutativo, ciò risulta vero.

L'insieme  $\mathbb{Z}$  si identifica come sotto-insieme di  $\mathbb{Q}$ , dato che c'è un'applicazione iniettiva  $\varphi$  che associa ad ogni intero, la sua classe in  $\mathbb{Q}$ . Per ogni intero  $a$ , si ha  $\varphi(a) = [(a, 1)]$ . Inoltre, è compatibile con le operazioni di somma e prodotto, dato che:

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) = [(a, 1)] + [(b, 1)] = [(a \cdot 1 + b \cdot 1, 1 \cdot 1)] = [(a + b, 1)]$$

Si dice che  $\mathbb{Z}$  è sotto-insieme di  $\mathbb{Q}$ , di fatti  $\mathbb{Z}$  è in biezione con  $\{[(a, 1)] | a \in \mathbb{Z}\}$ . L'inverso di  $[(a, b)]$  è  $[(b, a)]$ . Possiamo usare una **notazione semplificata** e denotare ogni elemento:

$$[(a, b)] := \frac{a}{b}$$

Qui risultano chiare note tutte le proprietà e le operazioni fatte sui razionali che svolgiamo fin dalle elementari.

$$[(3, 2)] + [(9, 4)] = [(3 \cdot 4 + 2 \cdot 9, 2 \cdot 4)] \text{ in notazione semplificata risulta } \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 9}{2 \cdot 4} = \frac{12 + 18}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} \text{ dato che } [(30, 8)] = [(15, 4)] \iff (30, 8)\rho(15, 4) \iff 30 \cdot 4 = 15 \cdot 8$$

## 6 Il Campo dei Numeri Complessi

Un'equazione del tipo  $3x = 5$  non ha soluzione in  $\mathbb{Z}$ , si è appunto creata una sua estensione  $\mathbb{Q}$  che ammette la soluzione  $x = \frac{5}{3}$ . Un'equazione del tipo  $x^2 = 2$  non ha soluzione nei numeri razionali, ma la ha in quella dei numeri reali, ossia  $x = \sqrt{2}$ . Vediamo l'equazione  $x^2 + 1 = 0$ , è un'equazione di secondo grado che non ammette nessuna soluzione reale, di fatto non esistono numeri reali, il quale quadrato equivale a  $-1$ . Esiste un'estensione di  $\mathbb{R}$ , definita nel seguente modo.

### 6.1 Definizione

I **numeri complessi** sono una struttura di questo tipo : si consideri  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ , ossia tutte le coppie ordinate di numeri reali, ed introduciamo due operazioni :

- **Somma** -  $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
- **Prodotto** -  $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$

Si noti come l'elemento neutro additivo è  $(0, 0)$  e l'elemento neutro moltiplicativo  $(1, 0)$ . Ogni elemento ha un inverso, presa la coppia  $(x, y) \neq (0, 0)$  si ha :

$$(x, y)^{-1} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \quad (27)$$

*Dimostrazione :*

$$(x, y) \cdot \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \left( x \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} - y \cdot \frac{-y}{x^2 + y^2}, x \cdot \frac{-y}{x^2 + y^2} + y \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \quad (28)$$

$$= \left( \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \frac{-xy + xy}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0) \quad \blacksquare \quad (29)$$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  è un **campo** noto come *campo dei numeri complessi* ed è denotato con  $\mathbb{C}$ . Esiste un applicazione iniettiva  $\varphi$  da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$  che associa  $\varphi : x \rightarrow (x, 0)$ .  $\mathbb{R}$  è un *sotto-campo* di  $\mathbb{C}$ , dato che l'applicazione *conserva* le operazioni, i complessi sono quindi un'estensione dei reali.

$$\varphi(x \cdot_{\mathbb{R}} x') = \varphi(x) \cdot_{\mathbb{C}} \varphi(x') \quad (30)$$

$$\varphi(x +_{\mathbb{R}} x') = \varphi(x) +_{\mathbb{C}} \varphi(x') \quad (31)$$

L'equazione iniziale  $x^2 + 1 = 0$ , che possiamo riscrivere  $x^2 + (1, 0) = (0, 0)$ , ammette soluzione in  $\mathbb{C}$ , ed è proprio  $x = (0, 1)$ , difatti :

$$\begin{aligned} (0, 1)^2 + (1, 0) = (0, 0) &\implies (0, 1)(0, 1) + (1, 0) = (0, 0) \implies (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) + (1, 0) = \\ &(0, 0) \implies (-1, 0) + (1, 0) = (0, 0) \implies (-1 + 1, 0) = (0, 0) \implies (0, 0) = (0, 0) \checkmark \end{aligned}$$

Denoteremo  $(a, 0) \equiv a$  per ogni  $a \in \mathbb{R}$ . Notiamo come qualsiasi numero complesso della forma  $(a, b)$  può essere riscritto come  $(a, 0) + (0, b)$ , ma  $(0, b) = (0, 1)(b, 0)$ , quindi posso rappresentare ogni numero come  $(a, 0) + (0, 1)(b, 0)$ , ossia la somma di un reale con un altro reale moltiplicato per  $(0, 1)$ . Tale numero viene denotato con  $i$ , ed è detta **unità immaginaria**, possiamo quindi rappresentare ogni numero complesso nella seguente forma :  $(a, b) \equiv a + ib$ , con  $i^2 = -1$ .

## 6.2 Teorema Fondamentale dell'Algebra

Ogni equazione algebrica con coefficienti complessi (quindi in particolare reali) di grado  $n$ , ammette precisamente  $n$  soluzioni in  $\mathbb{C}$  (contando le molteplicità). Si dice che  $\mathbb{C}$  è **algebricamente chiuso**.

## 7 Teoria degli Anelli

### 7.1 Isomorfismi e Omomorfismi tra Anelli

Abbiamo visto precedentemente la definizione assiomatica di *Anello*, presentiamo ora un'altra importante definizione :

**Definizione 1** Un **isomorfismo**  $\varphi$  tra due anelli  $R$  e  $R'$  è una corrispondenza biunivoca tra  $R$  e  $R'$  che conserva le operazioni, tale che

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad \forall a, b \in R$$

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \quad \forall a, b \in R$$

Se i due anelli sono *isomorfi*, si scrive  $R \simeq R'$ . La relazione di isomorfismo è una relazione di equivalenza, e qualunque proprietà algebrica che vale in  $R$ , vale anche in  $R'$ , e viceversa, godendo delle stesse proprietà, dal punti di vista algebrico sono *indistinguibili*, si considerano quindi uguali due anelli isomorfi.

Spesso fra due anelli, esiste un'applicazione che ne conservi le operazioni, ma che non è biunivoca. Si dà la seguente definizione:

**Definizione 2** *Dati due anelli  $R, +, \cdot$  e  $R', +, \cdot$ , si chiama **omomorfismo** di  $R$  in  $R'$  ogni corrispondenza  $\varphi$  da  $R$  ad  $R'$  tale che :*

$$\varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2) \quad \forall r_1, r_2 \in R$$

$$\varphi(r_1 \cdot r_2) = \varphi(r_1) \cdot \varphi(r_2) \quad \forall r_1, r_2 \in R$$

### 7.1.1 Nucleo di un omomorfismo

Inoltre si definisce un **nucleo** di omomorfismo  $\varphi$  tra  $R$  e  $R'$ , il sotto-insieme di  $R$  costituito da tutti gli elementi che hanno come immagine l'elemento neutro rispetto la somma (lo zero) di  $R'$ , indicato con  $0_{R'}$ . Tale nucleo si indica con :

$$\text{Ker}\varphi = \{r \in R \mid \varphi(r) = 0_{R'}\} \quad (32)$$

*Esempio :*

Prendiamo l'isomorfismo  $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  definito come  $\varphi(a) = a + (-2)$ , avremo che  $\text{Ker}\varphi = \{2\}$ .

$\text{Ker}\varphi$  gode di un'importante *proprietà*, moltiplicando un qualunque  $a \in \text{Ker}\varphi$  per un qualunque  $b \in R$ , il risultato sarà sempre un elemento di  $\text{Ker}\varphi$  :

$$\text{siano } k \in \text{Ker}\varphi \text{ e } r \in R \text{ vale che } \varphi(k \cdot r) = \varphi(k) \cdot \varphi(r) = 0 \cdot \varphi(r) = 0 \quad (33)$$

### 7.1.2 Ideale di un Anello

Definiamo adesso cos'è un **ideale** :

Un *ideale destro* di un anello  $R$ , è un sotto-gruppo additivo  $I$  di  $R$ , tale che,  $\forall a \in I$  e  $\forall r \in R$ , risulta che  $ar \in I$ .

Un *ideale sinistro* di un anello  $R$ , è un sotto-gruppo additivo  $I$  di  $R$ , tale che,  $\forall a \in I$  e  $\forall r \in R$ , vale che  $r \cdot a \in I$ .

Se un ideale è sia sinistro che destro si dice *bilatero*, e si denota nel seguente modo :

$$I \trianglelefteq R \quad (34)$$

Per come l'abbiamo definito prima, è ovvio che il nucleo di un omomorfismo tra due anelli  $\text{Ker}\varphi$  sia un ideale bilatero. Ogni anello  $R$  possiede due ideali detti *banali*, ossia  $\{0\}$  e  $R$ .

$\{0\}$  è un ideale  $I$  di  $R$  perchè  $\forall a \in R$ , essendo  $0$  l'unico elemento di  $I$ , è ovvio che  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \in I$ .

Da qui in poi sono BOZZE

## 8 Teoria dei Gruppi

### 8.1 Il Gruppo Simmetrico $S_n$

Sia  $X$  un insieme, abbiamo chiamato il gruppo di tutte le sue corrispondenze biunivoche  $f : X \rightarrow X$  con il simbolo  $(S(X), \circ)$ , nel caso in cui  $X$  sia finito, con cardinalità  $|X| = n$ , si indicherà con  $S_n$ , e prende il nome di **gruppo simmetrico di grado  $n$** . Tale gruppo non è commutativo, data l'operazione di composizione  $\circ$ . È facile notare come ogni elemento  $\sigma$  di  $S_n$  sia una permutazione di  $X = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ , quindi la cardinalità sarà  $|S_n| = n!$ .

Una proprietà importante, è che se  $(G, *)$  è un gruppo, esiste una *mappa iniettiva*  $\varphi$  da  $(G, *)$  a  $(S(G), \circ)$  che *conserva* le operazioni, ossia :

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$$

### 8.2 Omomorfismo tra Gruppi

Siano  $(G, *)$  e  $(G', \cdot)$  due gruppi, un applicazione  $\varphi$  tra  $G$  e  $G'$  si dice **omomorfismo** se :

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \text{ con } a, b \in G$$

Ossia se *conserva* l'operazione. Prima abbiamo parlato di gruppo simmetrico, esso stabilisce sempre un omomorfismo iniettivo *canonico*  $\varphi : (X, *) \rightarrow (S(X), \circ)$ . Se un omomorfismo è anche biunivoco, si dice **isomorfismo**.