Esonero Calcolo 3

Esercizio 1

$$y'(t) = e^{kt}(n + y^2(t))$$

A)L'equazione ha una sola soluzione?

Falso, ha infinite soluzioni, non essendo un problema di Cauchy

B)Esistono infinite soluzioni tali che y(0)=a?

No, perché dando una condizione, diventa un problema di Cauchy che ha una sola soluzione

C)Esiste una sola soluzione tale che y(0)=a e y'(0)=b?

Sostituire a al posto di y(t) e t=0 e vedere se il risultato fa b.

Esempio:

$y'(t) = e^{5t}(6 + y^2(t))$

Esiste un'unica soluzione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 6$?

$y'(0) = e^{5 \cdot 0}(6 + 0^2) = 6 \implies$ vera

D)Se y(t_0)=a, la soluzione è decrescente/crescente in un intorno dell'origine/t_0?

Sostituire a al posto di y(t) e $t = t_0$ e vedere se $y'(t_0) > 0$ o $y'(t_0) < 0$, se è minore è decrescente, se è maggiore è crescente

Esempio:

$y'(t) = e^{5t}(6 + y^2(t))$

Se $y(0) = 6$ la soluzione è decrescente in un intorno dell'origine?

$y'(0) = e^{5 \cdot 0}(6 + 6^2) = 42 > 0 \implies$ la soluzione è crescente in un intorno dell'origine $\implies$ falso

Esercizio 2

$$y''(t) - Ay'(t) + By(t) = k$$

A)Non esistono soluzioni dell'equazione tali che y(0)=a, y'(0)=b e y''(0)=c?

Sostituire a ad y(t), b a y'(t) e c a y(t) e controllare se il risultato fa k

Esempio:

$y''(t) - 7y'(t) + 7y(t) = 14$

Non esistono soluzioni tali che y(0)=2, y'(0)=0 e y''(0)=0?

$0 - 7 \cdot 0 + 7 \cdot 2 = 14 \implies 14 = 14 \implies$ falso

B)Se y(0)=a e y'(0)=b, si ha y''(0)=c?

Sostituire a ad y(t), b a y'(t) e calcolare y''(t)

Esempio:

$y''(t) - 7y'(t) + 7y(t) = 14$

Se y(0)=0 e y'(0)=7, si ha y''(0)=-35?

$y''(t) - 7 \cdot 7 + 7 \cdot 0 = 14 \implies y''(t) = 14 + 49 = 63 \neq -35 \implies$ falso

C)Esiste un'unica soluzione tale che y'(0)=b e y''(0)=c?

Sostituire b ad y'(t) e c a y''(t) e controllare se c'è solo una possibile soluzione per y(t)

Esempio:

$y''(t) - 7y'(t) + 7y(t) = 14$

Esiste un'unica soluzione tale che y'(0)=1 e y''(0)=7?

$7 - 7 \cdot 1 + 7y(0) = 14 \implies 7y(t) = 14 \implies y(0) = 2$ unica soluzione possibile $\implies$ vero

D)Se y(t_0)=a e y'(t_0)=b, la soluzione è convessa/concava in un intorno dell'origine/t_0?

Bisogna calcolare y’’(t_0) sostituendo a ad y(t_0) e b a y’(t_0), se è positiva è convessa, se è negativa è concava

Esempio:

$y''(t) - 7y'(t) + 7y(t) = 14$

Se y(0)=0 e y’(0)=0, la soluzione è convessa in un intorno dell’origine?

$y''(t) - 7 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 14 \implies y''(t) = 14 > 0 \implies$ convessa $\implies$ vero

Esercizio 3

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

A)Si ha y’(t_0)>0?

Sostituire $t = t_0$ e y_0 a $y(t)$ e controllare se $y'(t_0) > 0$ o $y'(t_0) < 0$

Esempio:

$\begin{cases} y'(t) = 9y(t) + e^{9t} + 27 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Si ha $y'(0) > 0$?

$y'(0) = 9 \cdot 0 + e^{9 \cdot 0} + 27 = 28 > 0 \implies$ vero

B)La funzione $y_0(t) = ke^{\alpha t}$ è soluzione dell’equazione omogenea associata all’equazione?

Calcolare le soluzioni generiche dell’equazione omogenea $y'(t) = a(t)y(t)$ e controllare se la soluzione data è di quel tipo.

$y(t) = C \cdot e^{A(t)}$

$A(t) = \int^t a(t)$

Esempio:

$$\begin{cases} y'(t) = 9y(t) + e^{9t} + 27 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La funzione $y_0(t) = 6e^{9t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione?

Equazione omogenea associata = $y_0(t) = 9y(t)$

$A(t) = \int^t 9 = 9t$

$y(t) = Ce^{9t} \implies 6e^{9t}$ va bene $\implies$ vero

C)La soluzione dell'equazione è $y(t) = (t-a)e^{9t} + 3$?

Sostituiamo y(t) nell'equazione e controlliamo se la derivata è uguale

Esempio:

$$\begin{cases} y'(t) = 9y(t) + e^{9t} + 27 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione è $y(t) = (t-3)e^{9t} + 3$?

$y'(t) = ((t-3)e^{9t} + 3)' = e^{9t} + 9(t-3)e^{9t} \neq 9y(t) + e^{9t} + 27 \implies$ falso

D)Si ha $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \infty$?

Bisogna calcolare y(t) con la formula e controllare se il limite tende a infinito.

$y(t) = [y_0 + \int_{t_0}^t b(t)e^{-A(t)}]e^{A(t)}$

$A(t) = \int_{t_0}^t a(t)$

Esempio:

$$\begin{cases} y'(t) = 9y(t) + e^{9t} + 27 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$A(t) = \int_0^t 9 = 9t$

$y(t) = [0 + \int_0^t (e^{9t} + 27)e^{-9t}]e^{9t} = [\int_0^t 27e^{-9t} + 1]e^{9t} = [27(-\frac{e^{-9t}}{9} + \frac{1}{9}) + t]e^{9t} = [-3e^{-9t} + 3 + t]e^{9t} = 9e^{9t} + te^{9t} - 3$

$\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\infty} 9e^{9t} + te^{9t} - 3 = \infty \implies$ vero

Esercizio 4

$$y''(t) + Ay'(t) + By(t) = 0$$

A)Se A=B=0, i polinomi di primo grado sono soluzioni dell'equazione?

Vero, perché l'equazione diventa $y''(t) = 0$ e $y''(t)$ di un polinomio di primo grado è per forza 0.

B)Se A e B tali che $A^2 > 4B$, la funzione y(t)=$ke^{\alpha t}$ non è soluzione dell'equazione?

Calcolare λ usando il polinomio associato e vedere se la soluzione data va bene per l'equazione associata.

$P(\lambda) = \lambda^2 + A\lambda + B$

$$y_0(t) = \begin{cases} Ce^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_2 t} & \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ (C + Dt)e^{\lambda t} & \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ [C\cos(\beta t) + D\sin(\beta t)]e^{\alpha t} & \lambda = \alpha \pm i\beta \in C \end{cases}$$

Esempio:

A=-11

B=24

$P(\lambda) = \lambda^2 - 11\lambda + 24 \implies \lambda = 3, 8 \implies y(t) = Ce^{3t} + De^{8t} \implies 9e^{3t}$ va bene $\implies$ falso

C)Se A e B tali che $A^2 = 4B$, la funzione y(t)=$kte^{\alpha t}$ è soluzione dell'equazione?

Calcolare λ usando il polinomio associato e vedere se la soluzione data va bene per l'equazione associata.

$P(\lambda) = \lambda^2 + A\lambda + B$

$$y_0(t) = \begin{cases} Ce^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_2 t} & \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ (C + Dt)e^{\lambda t} & \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ [C\cos(\beta t) + D\sin(\beta t)]e^{\alpha t} & \lambda = \alpha \pm i\beta \in C \end{cases}$$

Esempio:

A=-6

B=9

$P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 \implies \lambda = 3 \implies y(t) = (C + Dt)e^{3t} \implies 2te^{3t}$ va bene $\implies$ vero

D)Se A e B tali che $A^2 < 4B$, esistono soluzioni non nulle che non sono periodiche?

Calcolare λ usando il polinomio associato e vedere se la soluzione data va bene per l'equazione associata.

$P(\lambda) = \lambda^2 + A\lambda + B$

$$y_0(t) = \begin{cases} Ce^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_2 t} & \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ (C + Dt)e^{\lambda t} & \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ [C\cos(\beta t) + D\sin(\beta t)]e^{\alpha t} & \lambda = \alpha \pm i\beta \in C \end{cases}$$

Esempio:

A=0

B=49

$P(\lambda) = \lambda^2 - 0\lambda + 49 \implies \lambda = \pm 7i \implies y(t) = [C\cos(7t) + D\sin(7t)]e^{0t} = C\cos(7t) + D\sin(7t) \implies$ non esistono soluzioni non periodiche e non nulle $\implies$ falso

Esercizio 5

$$y'(t) = f(t)g(y(t))$$

A)Quante soluzioni verificano y(0)=a? E quante verifica y(0)=b e y'(0)=c?

La prima domanda una sola soluzione perché è un problema di Cauchy.

La seconda bisogna sostituire e controllare se y'(0) viene uguale a c, se si allora c'è una sola soluzione se no 0.

Esempio:

$y'(t) = 4(y(t)+8)\cos(4t) = 4\cos(4t)y(t) + 32\cos(4t)$

y(0)=0

y'(0)=32

$y'(0) = 4(0+8)\cos(0) = 32 \implies$ vero

B)Determinare la soluzione tale che $y(t_0) = y_0$?

Controllare se $g(y_0) = 0$, se si la funzione $y(t) = y_0$

Se non lo è bisogna calcolare

$F(t) = \int^t f(t)$

$G(t) = \int^t \frac{1}{g(t)}$

$G(y(t)) = F(t) - F(t_0) + G(y_0)$

$y(t) = G^{-1}(F(t) - F(t_0) + G(y_0))$ con G^{-1} che è la funzione inversa di G

Esempio:

$y'(t) = 4(y(t)+8)\cos(4t)$

$y(4) = -8$

$g(-8) = -8+8 = 0 \implies y(t) = -8$

C)Calcolare $T_2(y(t), 0)$, dove y(t) è la soluzione dell'equazione e y(0)=a?

Bisogna calcolare il polinomio di Taylor di secondo grado.

$T_2(y(t);0) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2}$

Per calcolare y'(0) basta sostituire y(0) e t=0.

Per calcolare y''(0) bisogna derivare l'equazione e calcolarla in 0.

Esempio:

$y'(t) = 4(y(t)+8)\cos(4t)$

$y(0) = 0$

$y'(0) = 4(0+8)\cos(0) = 32$

$y''(t) = [4(y(t)+8)\cos(4t)]' = 4y'(t)\cos(4t) - 16(y(t)+8)\sin(4t) \implies y''(0) = 4\cdot 32\cos(0) - 16(0+8)\sin(0) = 128$

$T_2(y(t);0) = 0 + 32t + 64t^2$

D)Determinare la soluzione dell'equazione tale che y(0)=a?

Controllare se $g(y_0) = 0$, se si la funzione $y(t) = y_0$

Se non lo è bisogna calcolare

$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(t)$

$G(y(t)) = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(t)}$

$F(t) = G(y(t))$

$G(y(t)) = F(t) - F(t_0) + G(y_0)$

$y(t) = G^{-1}(F(t) - F(t_0) + G(y_0))$ con G^{-1} che è la funzione inversa di G

Esempio:

$y'(t) = 4(y(t)+8)\cos(4t)$

$y(0) = 0$

$g(0) = 0 + 8 \neq 0$

$F(t) = \int_{t_0}^{t} 4\cos(4t) = \sin(4t) - \sin(0)$

$G(y(t)) = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{t+8} = \ln(y(t)+8) - \ln(8)$

$F(t) = G(y(t))$

$\ln(y(t)+8) = \sin(4t) + \ln(8) = \ln(\frac{y(t)+8}{8}) = \sin(4t) \implies \frac{y(t)+8}{8} = e^{\sin(4t)} \implies y(t) = 8e^{\sin(4t)} - 8$

Esercizio 6

$$\begin{cases} y''(t) + Ay'(t) + By(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

A)Quante soluzioni ha l'equazione? E quante tali che y''(t_0)= y''_0?

L'equazione ha una soluzione sola essendo un problema di Cauchy.

Per la seconda domanda bisogna sostituire $y(t)$ con y_0 e $y'(t)$ con y'_0.

Esempio:

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 20 \\ y(0) = 6 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Quante soluzioni tali che $y''(0) = 19$?

$y''(t) - 4 \cdot 0 + 4 \cdot 6 = 20 \implies y''(t) + 24 = 20 \implies y''(t) = -4 \neq 19 \implies$ non ci sono soluzioni

B)Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata?

Calcolare λ usando il polinomio associato e trovare la soluzione.

$P(\lambda) = \lambda^2 + A\lambda + B$

$$y_0(t) = \begin{cases} Ce^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_2 t} & \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ (C + Dt)e^{\lambda t} & \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ [C\cos(\beta t) + D\sin(\beta t)]e^{\alpha t} & \lambda = \alpha \pm i\beta \in C \end{cases}$$

Esempio:

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 20 \\ y(0) = 6 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Equazione associata: $y_0''(t) - 4y_0(t) + 4y_0(t) = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \implies \lambda = 2 \implies y_0(t) = [C + Dt]e^{2t}$

C)Determinare una soluzione particolare dell'equazione e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione?

Devo cercare una soluzione particolare nella forma $\overline{y}(t) = Qf(t)$.

Casi: $\begin{cases} e^{Qt} \\ \cos(Qt)/\sin(Qt) \\ \text{Polinomio di grado n} \end{cases}$

Se questa soluzione particolare è anche soluzione dell'equazione omogenea associata, allora bisogna porre $\overline{y}(t) = Qtf(t)$, se anche questa dovesse esserlo allora $\overline{y}(t) = Qt^2f(t)$, e così via.

Poi calcolo $\overline{y}'(t)$ e $\overline{y}''(t)$ e li sostituisco nell'equazione iniziale e controllo quale Q fa diventare l'equazione uguale ad $f(t)$.

Per trovare tutte le soluzioni uso la formula:

$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t)$

Esempio:

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 20 \\ y(0) = 6 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$\overline{y}(t) = Q \implies \overline{y}'(t) = 0 = \overline{y}''(t)$

$0 - 4 \cdot 0 + 4Q = 20 \implies Q = 5$

$y(t) = [C + Dt]e^{2t} + 5$

D)Determinare la soluzione dell'equazione?

Calcolo $y'(t)$ e faccio un sistema ponendo $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y'_0$ per calcolare C e D. Poi li sostituisco nella soluzione generica dell'equazione.

Esempio:

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 20 \\ y(0) = 6 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = [C + Dt]e^{2t} + 5 \implies y'(t) = De^{2t} + 2[C + Dt]e^{2t}$$

$$\begin{cases} y(0) = [C + D \cdot 0]e^0 + 5 = 6 \\ y'(0) = De^0 + 2[C + D \cdot 0]e^0 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C = 1 \\ D = -2 \end{cases}$$

$$y(t) = [1 - 2t]e^{2t} + 5$$

Formule

Equazioni differenziali di primo grado omogenee:

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)$$

$$y(t) = Ce^{A(t)}$$

Equazioni differenziali di primo grado non omogenee:

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)$$

$$y(t) = [y_0 + \int_{t_0}^{t} b(t)e^{-A(t)}]e^{A(t)}$$

EDO di primo ordine a variabili separabili

$$\text{per un problema di Cauchy : } \begin{cases} y'(t) = f(t) \cdot g(y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

La prima cosa da fare è controllare se $g(y_0) = 0$, se si, la soluzione è costante, e vale $y(t) = y_0$.

Ad esempio : $\begin{cases} y'(t) = e^{9t} \cdot (y(t) - 4) \\ y(0) = 4 \end{cases}$ Si ha $(y(0) - 4) = 0$ quindi $y(t) = 4$.

Dopo di ciò, se la soluzione non è costante bisogna considerare alcuni passaggi :

Come prima cosa si esplicita $f(t)$ in modo da ottenere $\dfrac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t)$.

Dopo si calcolano gli integrali di tali membri.

$\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s)ds = F(t) - F(t_0)$ Poi $\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{g(y(s))}ds$ Tale integrale si calcola per sostituzione in maniera piuttosto semplice, ottenendo : $\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{g(y(s))}ds \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} z = y(s) \\ dz = y'(s)ds \\ ds = \dfrac{dz}{y'(s)} \\ t = t_0 \rightarrow z = y(t_0) = y_0 \\ t = t \rightarrow z = y(t) \end{bmatrix}$$

Quindi ottengo : $\displaystyle\int_{y_0}^{y(t)} \frac{z}{g(z)}dz = G(y(t)) - G(y_0)$

Da qui ritorno all'identità $G(y(t)) - G(y_0) = F(t) - F(t_0)$, tale che :

$G(y(t)) = F(t) - F(t_0) + G(y_0)$

E quindi $y(t) = G^{-1}(F(t) - F(t_0) + G(y_0))$ Dove G^{-1} non è altro che la funzione inversa di G.

Esempio funzioni inverse :

$\ln(y(t)) = f(t) \implies y(t) = e^{f(t)}$

$e^{y(t)} = f(t) \implies y(t) = \ln(f(t))$

$\arctan(y(t)) = f(t) \implies y(t) = \tan(f(t))$
$\tan(y(t)) = f(t) \implies y(t) = \arctan(f(t))$

$\sin(y(t)) = f(t) \implies y(t) = \arcsin(f(t))$ e viceversa

$\cos(y(t)) = f(t) \implies y(t) = \arccos(f(t))$ e viceversa

$\sqrt{y(t)} = f(t) \implies y(t) = f(t)^2$ e viceversa

Equazioni di secondo grado non omogenee:

$$\begin{cases} y''(t) + Ay'(t) + By(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

Omogenea associata:

$P(\lambda) \to \lambda^2 + A\lambda + B = 0$, Si trovano λ_1 e λ_2

$$y_0(t) = \begin{cases} Ce^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_2 t} & \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ (C + Dt)e^{\lambda t} & \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ [C\cos(\beta t) + D\sin(\beta t)]e^{\alpha t} & \lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Soluzione particolare:

Si osservi $f(t)$ e si cerchi una soluzione della stessa forma. $f(t)$ può essere :

- $f(t)$ è un **polinomio** di grado n, ad esempio : $y''(t) + 2 \cdot y'(t) - 6 \cdot y(t) = t^2 - 4t$, la soluzione particolare si ricercherà sotto-forma di polinomio di grado n :

$$\overline{y}(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

- $f(t)$ è una funzione **esponenziale**, ad esempio : $y''(t) + 2 \cdot y'(t) - 6 \cdot y(t) = 2e^{3t}$, la soluzione particolare si ricercherà sotto-forma di funzione esponenziale :

$$\overline{y}(t) = Qe^{kt}$$

- $f(t)$ è una funzione **trigonometrica**, ad esempio : $y''(t) + 2 \cdot y'(t) - 6 \cdot y(t) = \sin(t)$, la soluzione particolare si ricercherà sotto-forma di funzione trigonometrica:

$$\overline{y}(t) = C \cdot \cos(t) + D \cdot \sin(t)$$

Se questa soluzione particolare è anche soluzione dell'equazione omogenea associata, allora bisogna moltiplicare alla soluzione particolare proposta, t :

$$\overline{y}(t) = t \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

$$\overline{y}(t) = t(C \cdot \cos(t) + D \cdot \sin(t))$$

$$\overline{y}(t) = t(Qe^{kt})$$

se anche questa nuova soluzione con t moltiplicato dovesse essere soluzione dell'omogenea associata, si provera ma moltiplicando per t^2 :

$$\overline{y}(t) = t^2 \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

$$\overline{y}(t) = t^2(C \cdot \cos(t) + D \cdot \sin(t))$$

$$\overline{y}(t) = t^2(Qe^{kt})$$

💡 **Caso specifico del polinomio!**
Se $f(t)$ dovesse essere un polinomio, senza controllare se la soluzione particolare può essere soluzione dell'omogena associata possiamo dire che :

○Se le radici del polinomio caratteristico sono diverse, ed una vale 0, bisognerà moltiplicare la soluzione per t.

○Se la radice del polinomio caratteristico è una e vale 0, bisognerà moltiplicare la soluzione per t^2.

Poi calcolo $\overline{y}'(t)$ e $\overline{y}''(t)$ e li sostituisco nell'equazione iniziale e controllo quale Q fa diventare l'equazione uguale ad $f(t)$.

Soluzioni generiche e soluzione specifica:

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t)$$

Calcolo $y'(t)$ e faccio un sistema ponendo $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y'_0$ per calcolare C e D. Poi li sostituisco nella soluzione generica dell'equazione.

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0(t_0) + \overline{y}(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0(t_0) + \overline{y}'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

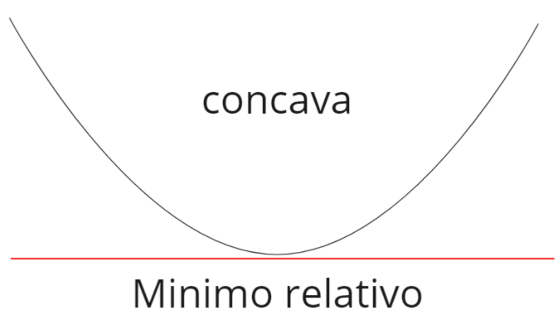
Notazioni utili

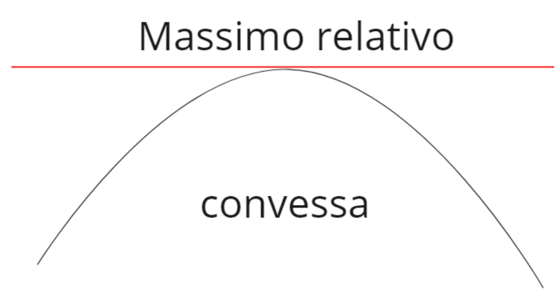
Per una funzione, se in un punto x_0 si ha $f''(x_0) \geq 0$, in quel punto è **convessa**.

Per una funzione, se in un punto x_0 si ha $f''(x_0) \leq 0$, in quel punto è **concava**.

Se una funzione è concava in un intervallo, il **minimo relativo** sarà nel punto in cui la derivata prima si annulla.

Se una funzione è convessa in un intervallo, il **massimo relativo** sarà nel punto in cui la derivata prima si annulla.





Ricorda che $e^{-\ln(f(t))} = \dfrac{1}{f(t)}$