Calcolo differenziale

Nozioni di base

Equazioni e disequazioni

L'equazione generale della retta sul piano cartesiano è $y = mx + q$
Una retta è caratterizzata dal fatto che il rapporto fra qualsiasi 2 punti di essa è costante. Nell'equazione *m* rappresenta il coefficiente angolare, cioè il grado di inclinazione.

$$m = \frac{y - y^1}{x - x^1} \qquad (x^1, y^1) = punto\ sulla\ retta$$

Esempio :

$$ax + b\ \geq 0 \to i\ punti\ in\ cui\ x \text{ è } positivo$$

$ax\ \geq -b$

Se $a > 0$ allora $x\ \geq\ -\frac{b}{a}$

Se $a < 0$ allora $x\ \leq\ -\frac{b}{a}$

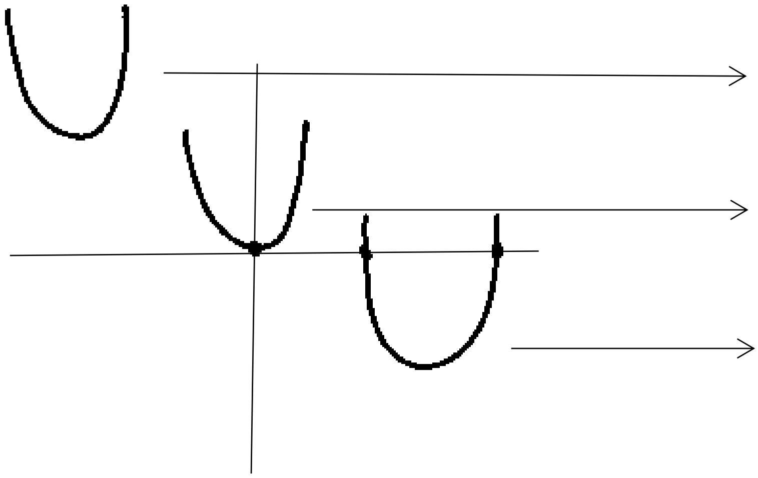
Polinomio di secondo grado

Un polinomio si dice di secondo grado quando l'esponente più alto è uguale a 2.

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad dove \qquad a \neq 0$$

$ax^2 + bx + c$ è l'equazione della parabola, ed in base al valore del Delta Δ (di equazione $b^2 - 4ac$) si possono avere diverse soluzioni.

Prendiamo l'esempio di 3 parabole :



0 soluzioni ($b^2 - 4ac < 0$)

1 soluzione ($b^2 - 4ac = 0$)

2 soluzioni ($b^2 - 4ac > 0$)

$x^2 + 1 = 0$ Non ha soluzioni perché $b^2 - 4ac$ = 0 – 4(1*1) = -4 cioè minore di 0

$x^2 - 4 = 0$ Ha due soluzioni perché $b^2 - 4ac$ = 0-4(1*-4) = 16 cioè maggiore di 0

Da dove è ricavato il delta?

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$
$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$
$$\frac{-b \pm \sqrt{b\text{^}2 - 4ac}}{2a} = 0$$

Modulo

L'operatore modulo $|x|$ può essere definito in vari modi :

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Oppure :

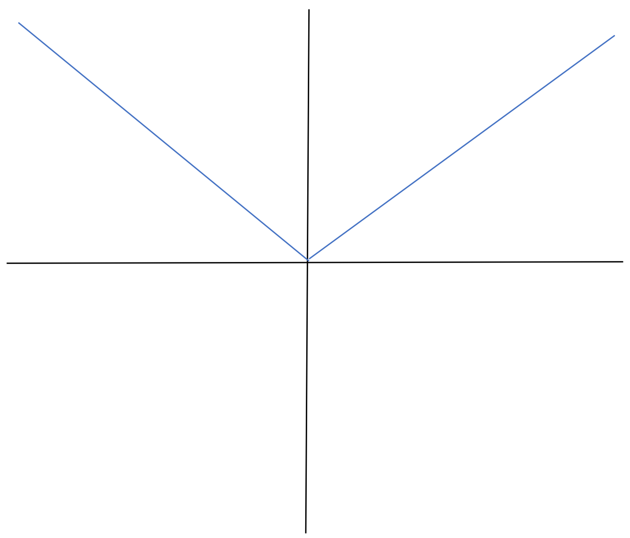
$$|x| = x \; se \; x \geq 0$$
$$|x| = -x \; se \; x < 0$$

Oppure:

$$|x| \text{ è } la \; distanza \; di \; x \; da \; 0$$

Esempio sul piano :

$|y - x| = 0$ sarebbe il modulo dell'equazione della bisettrice.



Cerchiamo i valori tali che $|x| \leq a$. La Formula da applicare è :
$|x| \leq a \rightarrow \; -a \leq |x| \leq a$

Prendiamo un altro esempio : $|x| > 1 \rightarrow x < 1 \; oppure \; x > 1$

Principio della disuguaglianza triangolare = $|x + y| \leq \; |x| + |y|$

Esempio con esercizi :

$a)$

$$|x-2|-3 \leq 0$$

$|x-2| \leq 3$
$-3 \leq x-2 \leq 3$
$-3+2 \leq x \leq 3+2$
$-1 \leq x \leq 5 \rightarrow$ I valori di X compresi fra -1 e 5.

$b)$
$2|x^2-x| > |x|$
$2|x(x-1)| > |x|$

Da questo punto in avanti introduciamo un nuovo concetto, il modulo di un prodotto è uguale al modulo di un fattore moltiplicato per il modulo dell'altro fattore, cioè :

$$|a \times b| = |a| \times |b|$$

Quindi la disequazione continua :

$2|x| \times |x-1| > |x|$ Dividiamo adesso tutto per $|x|$
$2|x-1| > 1$
$|x-1| > \frac{1}{2}$

Da qui applichiamo la formula:

$$|x| > a \begin{cases} x < -a \\ x > +a \end{cases}$$

Quindi avremo 2 risultati :
$x-1 > \frac{1}{2} \rightarrow x > \frac{3}{2}$
$x-1 < -\frac{1}{2} \rightarrow x > \frac{1}{2}$

ESERCIZI

Esercizio 1 :
$x^2+2|x|-3 < 0$
$2|x| < 3-x^2$
$|2x| < 3-x^2$
$-3+x^2 < 2x < 3-x^2$
Abbiamo 2 equazioni :

Equazione 1)
$-3 + x^2 < 2x$
$x^2 - 2x - 3 < 0$
$-1 < x < 3$

Equazione 2)
$-3 + x^2 < -2x$
$x^2 + 2x - 3 < 0$
$1 < x < 3$

Esercizio 2 :
$|\frac{x-1}{x-7}| > 1$
Applico la formula:

$x < -a$

$|x| > a$

$x > +a$

ricaviamo 2 equazioni :

Equazione 1)
$\frac{x-1}{x-7} < -1$
$\frac{x-1}{x-7} + 1 < 0$
$\frac{x-1+x-7}{x-7} < 0$
$\frac{2x-8}{x-7} < 0$
$\frac{2(x-4)}{x-7} < 0$

Due casi possibili (a e b):
a)
$2(x-4) < 0$

$x - 7 > 0$

b)
$2(x-4) < 0$

$x - 7 < 0$

a)

$x < 4$
$x > 7$

b)
$x > 4$
$x < 7$

Equazione 2)

$$\frac{x-1}{x-7} > 1$$

Gli insiemi

Per il concetto di insiemi è importante ricordare queste tre parole :

- Insieme
- Elementi
- Appartenenza

Un insieme è una collezione di elementi, per i quali è sempre possibile determinare se un elemento appartiene o no all'insieme.

$$A = \{a, b, c\} \text{ è } un\ insieme$$

$$A = \{gli\ studenti\ della\ sapienza\ presenti\ il\ 03 - 10 - 2022\} \text{ è } un\ insieme$$

$$A = \{i\ bei\ ragazzi\}\ NON \text{ è } un\ insieme$$

Quest'ultimo non è un insieme perché "i bei ragazzi" non è un dato preciso, in quanto soggettivo.

Operazioni tra insiemi

$x \in A$: Per dire che un elemento di x appartiene ad A si usa questo simbolo : ∈

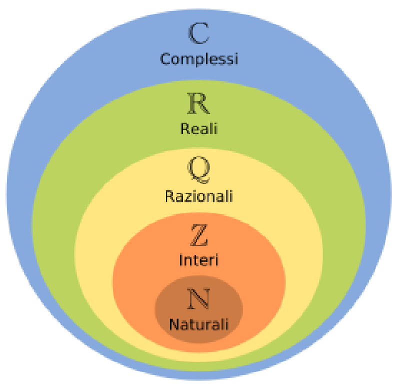
$A = \emptyset$: Vuol dire che A è un insieme vuoto, il simbolo di un insieme vuoto è ∅

$A \cap B$: Quest'operazione definisce tutti gli elementi in comune tra gli insiemi A e B

$A \cup B$: Questa è l'intersezione degli insiemi A e B. L'insieme contiene gli elementi di entrambi gli insiemi

$A\ c\ B$: Ogni elemento di A appartiene a B

$A = B$: I 2 insiemi hanno gli stessi elementi, quindi A c B & B c A.



Il concetto di applicazione

Consideriamo 2 insiemi : A e B.

Esempio di un'applicazione : $R = A \to B$ quindi $\forall\, a \ \in B \to b = R(a)$

Tradotto vuol dire : per ogni elemento di A associo un elemento di B.

Le applicazioni possono essere *iniettive* e/o *suriettive*.

Iniettive:

$$R = A \to B$$
$$a' \ \neq a'' \to \ R(a') \neq R(a'')$$

Si dice iniettiva se ogni elemento di A ha al massimo una contro immagine in B. In pratica un'applicazione è iniettiva se manda elementi distinti in elementi distinti.

Suriettive :

$$R = A \to B$$
$$\forall\, b \ \in B\, \exists\, a \ \in A \; tale\ che\ R(a) = B$$

Si dice suriettiva se ogni elemento di B ha almeno una contro immagine in B

Se un'applicazione è sia iniettiva che suriettiva si dice BIETTIVA .

Consideriamo la classe degli insiemi che sono in biezione tra loro, la cardinalità di tale classe mi permette di definire i numeri interi $\mathbb{N}$.

Insieme limitato

Supponiamo che l'insieme M sia un sottoinsieme di R. Esso è **limitato superiormente** quando :

$$x1 \ \in R \ tale \ che \ \forall \ x \ \in R, x < x1$$

Tradotto, ogni elemento dell'insieme R è inferiore all'elemento dell'insieme R x1.

Questo vuol dire che l'insieme è limitato superiormente, e non ha infiniti numeri crescenti.

L'insieme è invece **limitato inferiormente** quando

$$x1 \ \in R \ tale \ che \ \forall \ x \ \in R, x > x1$$

Vuol dire che l'insieme è limitato inferiormente, e non ha infiniti numeri decrescenti dato che qualsiasi valore è superiore all'elemento x1.

Definiamo ora il concetto di **massimo**, consideriamo un insieme M limitato superiormente. L'elemento Xm è il massimo di M se:

$$Xm \ \in M \ e \ \forall \ x \ \in M \ si \ ha \ x \ \leq Xm$$

Quindi Xm è il massimo di M se ogni elemento dell'insieme è inferiore ad esso.

Alcuni insiemi non hanno un massimo, vediamo degli esempi :

M = [0, 1 ,2 ,3] il massimo è 3

M = [$-\infty$, 1] il massimo è 1

M = [0 , 1) il massimo non esiste, dato che 1 non è compreso nell'insieme.

Estremo superiore ed inferiore

Consideriamo X un sottoinsieme di R.

ξ è un **maggiorante** di X se :

$$\forall x \in X, x \leq \xi$$

Quindi ξ è un maggiorante di X se ogni elemento dell'insieme X è minore o uguale a ξ

ξ è un **minorante** di X se :

$$\forall x \in X, x \geq \xi$$

Quindi ξ è un minorante di X se ogni elemento dell'insieme X è maggiore o uguale a ξ

L'estremo superiore di X è definito come il minimo dei maggioranti, l'estremo inferiore è invece definito come il massimo dei minoranti.

Se un insieme non è limitato superiormente, ha infiniti estremi superiori.

Un insieme è **completo** quando ha sia estremo superiore che estremo inferiore.

La sommatoria

Il simbolo della sommatoria è questo $\sum_{k=0}^{n} ak$, ed il suo valore equivale alla somma di tutti i valori di a con k, da 0 fino a k=n

Esempio :

$$\sum_{k=0}^{3} k \times 2 = 0 \times 2 + \ 1 \times 2 + 2 \times 2 + 3 \times 2$$

La sommatoria di un numero elevato a k segue una regola specifica :

$\sum_{k=1}^{n} q^k \ = \ \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ Dove $n \ \neq 0$ se q = 1 il risultato della sommatoria sarà n+1

Dal momento che il valore ha come divisore 1-q, possiamo direttamente moltiplicare la sommatoria per 1 – q

$$(1-q) \times \sum_{k=1}^{n} q^k \ = \ 1 - q^{n+1}$$

Esempio:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

Un'altra regola generale vale per le potenze di un binomio :

$$(a+b)^n \ = \ \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} \times a^{n-k} \ \times b^k$$

Ricordiamo che $C_{n,k} \ = \ \frac{n!}{k!(n-k!)}$

Quindi la formula completa risulterebbe :

$$(a+b)^n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times a^{n-k} \ \times b^k$$

Dimostrazione per induzione

La dimostrazione per induzione prevede una tesi come una proposizione vera P(n) per ogni $n \in NUMERI\ NATURALI$

Prendiamo un teorema come esempio :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Per dimostrarlo seguiamo 2 passi, prima si verifica che P(n) sia vera per n = 1. Poi si suppone per ipotesi un certo valore di n, se P(n) è vera, si prova che sia vero anche per P(n+1).

Testiamo i vari casi :

$$n = 1 \quad \frac{1(1+1)}{2} = \sum_{k=1}^{1} k$$

$$\frac{2}{2} = 1$$

Il primo caso è vero. Ora implichiamo che n sia uguale a 2 :

$$n = 2 \quad \frac{2(2+1)}{2} = \sum_{k=1}^{2} k$$

$$\frac{6}{2} = 1 + 2$$

Anche questo caso è vero, ora proviamo con P(n+1), quindi n sarà uguale a 3 :

$$n = 3 \quad \frac{3(3+1)}{2} = \sum_{k=1}^{3} k$$

$$\frac{12}{2} = 1 + 2 + 3$$

Anche questo caso è vero, la dimostrazione per induzione è riuscita e la tesi è corretta.

FUNZIONE

Le funzioni nascono per descrivere le grandezze variabili, cioè quelle dipendenti da due grandezze.

- Prendiamo per esempio la formula che descrive lo spazio percorso da un oggetto pesante che viene lasciato cadere

$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ g = accelerazione di gravità

a t viene associato $s(t)$; in simboli :

$$t \to s(t) = spazio\ percorso\ al\ tempo\ t$$

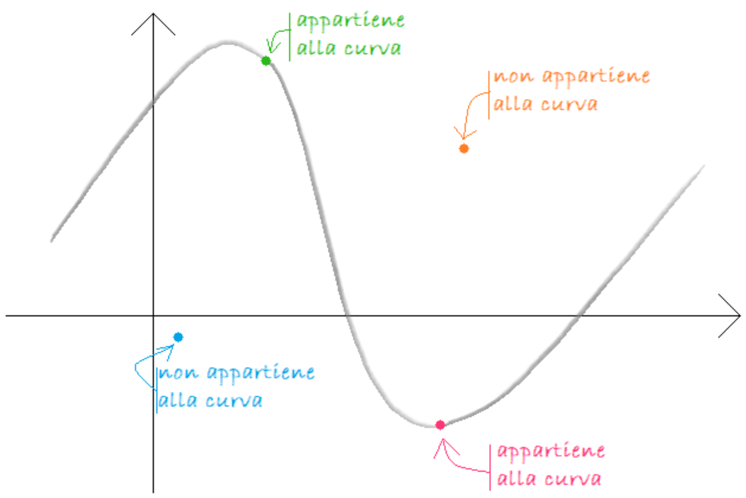
- Supponiamo che i sia il tasso d'interesse di un capitale investito, e che $k(i)$ sia l'interesse maturato dopo 1 anno.

$$k(i) = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^2$$

Cioè :

$$i \to k(i) = capitale\ alla\ fine\ dell'anno$$

Prendiamo per esempio una curva :



Una funzione p tale quando non c'è ambiguità, e per un certo dato si è certi di un unico risultato.

Una funzione f con dominio A e codominio B è una qualsiasi legge che ad ogni valore di A associa un valore di B.

$$f : A \to B \; dove \; \forall x \in A \to f(x) \in B$$

Per definire una funzione ho bisogno di A, B e la legge che collega i 2 valore di A e B.

$y = f(x)$ l'uscita corrispondente a x si *chiama immagine di x*;

FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

Le funzioni reali di variabile reale sono caratterizzate dal fatto che sia la variabile d'ingresso che quella di uscita sono numeri reali, la funzione ha quindi come dominio un sottoinsieme di ℝ e come codominio ℝ, l'immagine di f sarà anch'essa un sottoinsieme di ℝ.

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ con D appartenente ad } \mathbb{R}$$

$$f : x \to f(x)$$

Le funzioni più comuni hanno come dominio e come immagine un intervallo o l'unione di un numero finito di intervalli.

Ogni retta parallela all'asse delle ordinate che tagli l'asse delle ascisse in un punto x del dominio D, interseca il grafico di f in uno e un sol punto.

FUNZIONI LIMITATE

Se il grafico di una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è contenuto in un semipiano inferiore da una retta parallela all'asse delle ascisse (y = M) la funzione è limitata superiormente:

$$f(x) \leq M \; per \; ogni \; x \in D$$

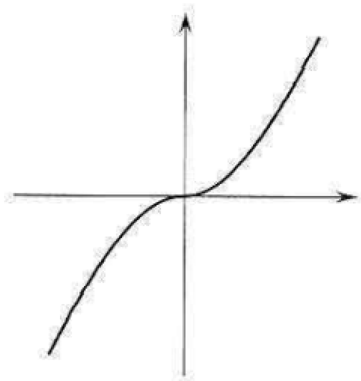
Analogamente se contenuto in un semipiano superiore da una retta parallela all'asse delle ascisse (y = M) la funzione è limitata inferiormente:

$$f(x) \geq M \; per \; ogni \; x \in D$$

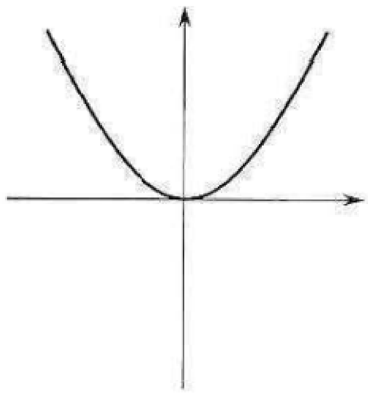
Una funzione è LIMITATA se è limitata sia inferiormente che superiormente, il grafico è quindi contenuto in una striscia orizzontale del piano xy.

Esempi:

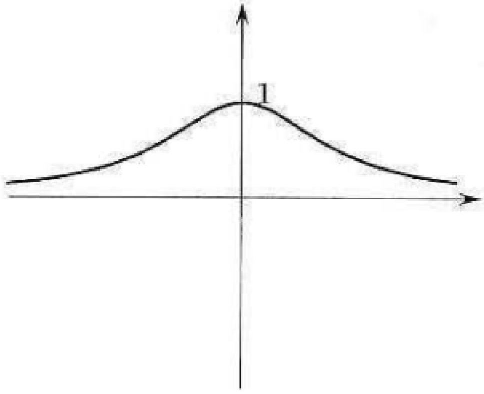
$x \to x^3, x \in \mathbb{R}$ non è limitata ne superiormente ne inferiormente



$x \to x^2, x \in \mathbb{R}$ non è limitata inferiormente, infatti $x^2 \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$



$x \to \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$ è limitata, poiché $0 < \frac{1}{1+x^2} < 1, \forall x \in \mathbb{R}$



FUNZIONI SIMMETRICHE

Esistono funzioni il cui grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, queste si chiamano funzioni *pari* ed hanno un dominio simmetrico rispetto ad x = , sono caratterizzate dalla relazione :

$$f(-x) = f(x)$$

Le funzioni il cui grafico è simmetrico all'origine invece si chiamano *dispari*, e anch'esse hanno dominio simmetrico rispetto a x = 0 e sono caratterizzate dalla relazione :

$$f(-x) = f(x)$$

Per esempio $x \to x^2$ è pari mentre $x \to x^3$ è dispari. In generale, le potenze a esponente intero sono funzioni pari se l'esponente è pari, e dispari se l'esponente è dispari.

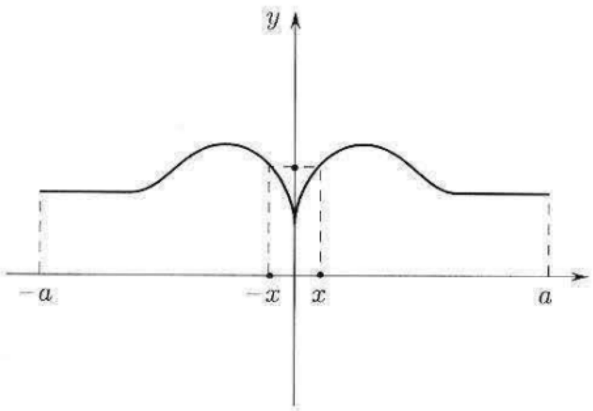


grafico di una funzione *pari*

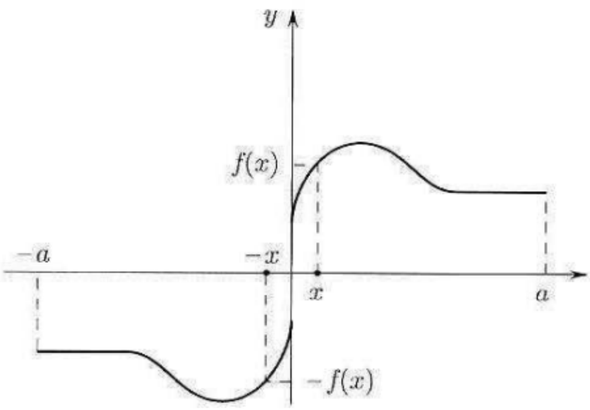


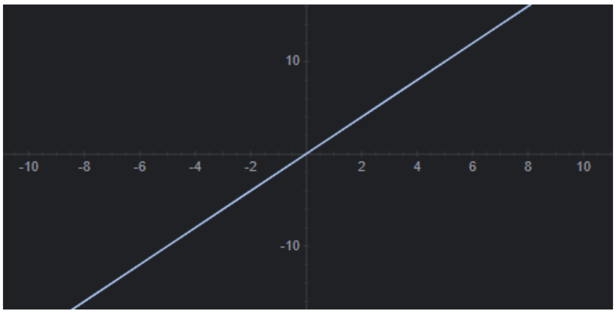
grafico di una funzione *dispari*

FUNZIONE MONOTONA

Una funzione sarà monotona crescente in A se per ogni coppia di x, f(x1) ≤ f(x2), dove x1 è più piccolo di x2.

$\forall\, x_1 \in A, x_2 \in A \quad x_1 \leq x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

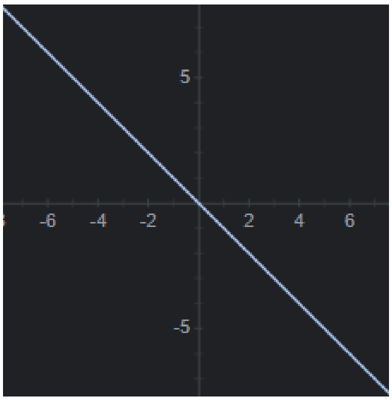
Esempio ($y = 2x$):



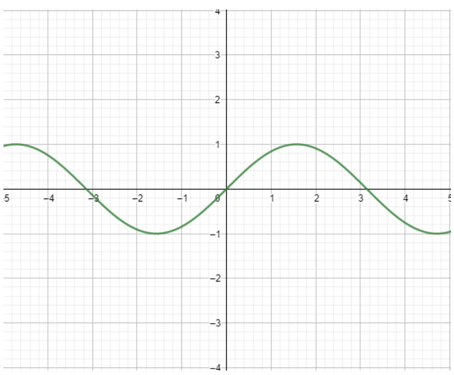
Sarà invece decrescente se va verso il basso spostandoci verso destra

$\forall\, x_1 \in A, x_2 \in A \quad x_1 \leq x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Esempio ($y = -x$):



Una funzione può essere monotona crescente anche solo in un intervallo, prendiamo per esempio la funzione seno.



$f(x) = \sin(x)$

Essa è monotona crescente solamente nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, e monotona decrescente in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

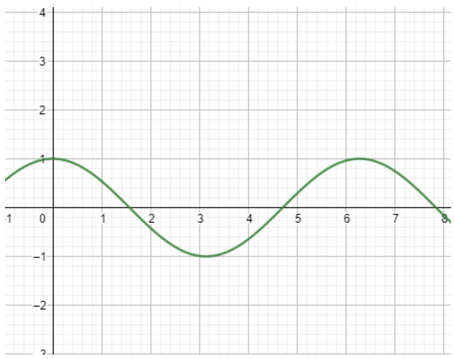
FUNZIONE PERIODICA

Una funziona è periodica di periodo T se per ogni x appartenente ad A la funzione si ripete in modo periodico nell'intervallo T.

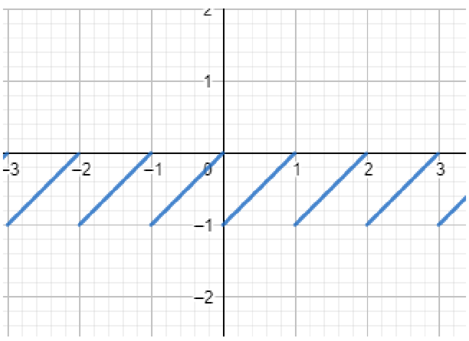
$$\forall x \in A, x + kT \in A \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$f(x + T) = f(x)$$

Un esempio è la funzione Coseno, che è periodica nell'intervallo [x,x+6], quindi è periodica di 6.



Un altro esempio è $f(x) = x - [x] \leftarrow parte\ intera\ di\ x$, è periodica di 1



FUNZIONI COMPOSTE

Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{4-x^2}$. Essa è una composizione di 2 operazioni, la funzione potenza e la funzione radicale. Ad x si associa prima un esponente poi si mette sotto radice:

$$x \to 4 - x^2 \to \sqrt{4-x^2}$$

È quindi una composizione della funzione $g(x) = 4 - x^2$ e $h(x) = \sqrt{x}$, vediamo il dominio e l'immagine di entrambe le funzioni :

	$g(x) = 4 - x^2$	$h(x) = \sqrt{x}$
DOMINIO	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
IMMAGINE	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\mathrm{h} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$$

In questo caso la funzione $h(x) = \sqrt{x}$ viene applicata prima, poi viene applicata $g(x) = 4 - x^2$, quindi si dice scrive h composto g, usando questa scrittura :

$$h \circ g$$

L'immagine di g deve essere per forza contenuta nell'insieme di definizione di h. In questo caso l'immagine di g che è $\mathbb{R}$ non è contenuta nel dominio di h, cioè $[0, \infty)$, quindi restringiamo il dominio dato che l'immagine di h non è mai inferiore a 0. Il dominio di g diventa [-2,2] dato che esiste solo quando $4 - x^2 \geq 0$.

FUNZIONE INVERSA

La funzione neutra rispetto all'operazione di composizione è $f(x) = x$

La funzione inversa di f (che si scrive f^{-1}) è quella che mi permette di ritrovare l'elemento neutro, è la funzione che associa a ogni uscita $y \in f(D)$ l'unico ingresso $x \in D$ tale che $f(x) = y$.

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in D \end{cases} \quad \text{equivale a} \quad \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(D) \end{cases}$$

Considerando ciò, è possibile trovare una funzione inversa rispetto all'operazione di composizione?

Tale che:

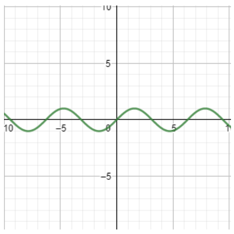
$$f^{-1}\ o\ f(x) = I(x) = x$$
$$f\ o\ f^{-1}(x) = I(x) = x$$
$$cio\grave{e}$$
$$x \to f(x) \to f^{-1}\big(f(x)\big) = x$$
$$xx_1 \neq x_2\, x_1 \neq x_2 \ \to f^{-1}(x) \to f\big(f^{-1}(x)\big) = x$$

La funzione inversa esiste solo se f è iniettiva, se presi

$x_1, x_2 \ \in D(f)\ x_1 \neq x_2 \ \longleftrightarrow \ \ f(x_1) \neq f(x_2\,)$

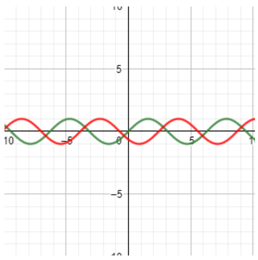
OPERAZIONI SUI GRAFICI

Supponiamo di conoscere il grafico di $y = f(x)$:

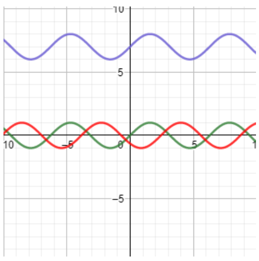


Ora prendiamo una funzione $g(x) = \ f(x + k)$

Essa è una translazione orizzontale, se $f(x)$ è contenuta tra a e b, $g(x)$ sarà contenuta tra a+k e b+k.



Per avere una translazione verticale, dovremmo far si che $g(x)$ assuma questo valore : $g(x) = \ f(x) + k$. se k>0 si ha una translazione verso l'alto, se k<0 verso il basso.



SUCCESSIONI

La successione è una funzione con dominio l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$n \in \mathbb{N} \to f(n)$ Si può scrivere anche : a_n

Esempio:

$a_n = \frac{1}{n} \quad n \geq 1 \qquad a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3}$

Una successione può avere anche una forma ricorsiva, un esempio classico è la *successione di Erone* :

$$a_0 = 1 \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

Questa successione è il modo più veloce per approssimare $\sqrt{2}$, si dice quindi che *tende* a $\sqrt{2}$.

Una successione è *limitata superiormente* se esiste

$$M \in \mathbb{R}\ tale\ che\ a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{R}$$

Una successione è *limitata inferiormente* se esiste

$$M \in \mathbb{R}\ tale\ che\ a_n \geq M \quad \forall n \in \mathbb{R}$$

Abbiamo detto prima che la *successione di Erone* *tende* a $\sqrt{2}$, vuol dire che all'incrementare di n, il risultato sarà sempre più vicino a $\sqrt{2}$, vediamo la dimostrazione:

$a_0 = 1$

$a_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2}$

$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = 1{,}14\bar{6}$

Più si va avanti tendendo a $+\infty$ più ci avviciniamo con precisione ad un certo valore (in questo caso $\sqrt{2}$), tale fenomeno ha un nome specifico :

LIMITE

Il limite è una successione convergente a $l \ \in \mathbb{R}$, il limite per n che tende a $+\infty$ di a_n è l. Tale operazione si scrive così :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l$$

Inoltre, è vero il seguente fatto :

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N = N(\varepsilon)\ tale\ che\ \forall n\ \geq N\ \ \to |a_n - l| \leq \varepsilon$$

Per ogni ε maggiore di 0, esiste $N = a_\varepsilon$ (la successione con ε come n) tale che per ogni n maggiore di N, il modulo di 1/ n è minore o uguale ad ε.

ESEMPIO/DIMOSTRAZIONE

Prendiamo il limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad a_n = \frac{1}{n} \qquad l = 0$$

Vogliamo dimostrare che :

$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N = N(\varepsilon)\ tale\ che\ \forall n\ \geq N\ \ \to |\frac{1}{n} - 0| \leq \varepsilon$

È già dimostrato che $|\frac{1}{n} - 0| \leq \varepsilon$ quindi rimane da verificare quanto vale N tale che $\forall n\ \geq N\ si\ ha \frac{1}{n}\ \leq$ ε , cioè da che valore di n in poi, $\frac{1}{n}$ è sempre minore o uguale ad ε. Se $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ allora $\frac{1}{\varepsilon} \leq n$. Poniamo per esempio ε = 0,001.

$$\frac{1}{0{,}001} \leq n \qquad \forall n \geq N \ \ (ricorda\ \frac{1}{0{,}001} = 1000)$$
$$quindi\ 1000 \leq n, allora\ N = 1000$$

Quando si ha una successione divergente? Prendiamo $(a_n)_n \ \in \ \mathbb{N}$, essa diverge a $+\infty$ e verifica $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se:

$$\forall M > 0 \ \ \exists\ N = N(M)\ tale\ che\ \forall n > N \to a_n\ \geq M$$

essa diverge a $-\infty$ e verifica $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ se:

$$\forall M > 0 \ \ \exists\ N = N(M)\ tale\ che\ \forall n > N \to a_n\ \leq -M$$

ESERCIZIO

Dimostrare : $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right) = 1$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N = \left(\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right) \mathit{tale\ che} \; \forall n \; \geq N \qquad 1 - \varepsilon < \frac{n+1}{n-1} \leq 1 + \varepsilon$

Della disuguaglianza $1 - \varepsilon < \frac{n+1}{n-1} \leq 1 + \varepsilon$ è verificato e palese che $1 - \varepsilon < \frac{n+1}{n-1}$, bisogna quindi verificare $\frac{n+1}{n-1} \leq 1 + \varepsilon$ e trovare per quali valori di n > N è vera, trovare quindi N.

$$\frac{n+1}{n-1} \leq 1 + \varepsilon$$

$$n + 1 \leq 1 + \varepsilon(n+1)$$

$$2 + \varepsilon \leq n + n\varepsilon - n$$

$$2 + \varepsilon \; \leq \; n\varepsilon$$

$$\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} \leq n$$

$$n > \; \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}$$

Confronti e stime asintodiche

Prendiamo due successioni ;

$$\{a_n\}\, n \in \mathbb{N} \qquad e \qquad \{b_n\}\, n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} b^n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \begin{cases} 0 \;\; \{a_n\} \text{ è } un\ infinito\ di\ ordine\ inferiore\ a\ \ \{b_n\} \\ \infty \;\; \{a_n\} \text{ è } un\ infinito\ di\ ordine\ superiore\ a\ \ \{b_n\} \\ \quad l \in \mathbb{R};\, \boldsymbol{l \neq 0}\ \{a_n\} \text{ è } dello\ stesso\ ordine\ di\ \{b_n\} \end{cases}$$

Analogamente per gli infinitesimali :

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} b^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \begin{cases} 0 \;\; \{a_n\} \text{ è } un\ infinito\ di\ ordine\ superiore\ a\ \ \{b_n\} \\ \infty \;\; \{a_n\} \text{ è } un\ infinito\ di\ ordine\ inferiore\ a\ \ \{b_n\} \\ \quad l \in \mathbb{R};\, \boldsymbol{l \neq 0}\ \{a_n\} \text{ è } dello\ stesso\ ordine\ di\ \{b_n\} \end{cases}$$

Se $a_n = n^\alpha \quad e \quad b_n = n^\beta \quad con \quad \alpha, \beta > 0$ allora:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta} = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-\beta} = \begin{cases} \infty \quad se \;\; \alpha - \beta > 0 \\ \;0 \quad se \;\; \alpha - \beta < 0 \\ \;1 \quad se \;\; \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

Esempio:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + \sqrt{n} - n}{n^4 + n^2 + n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1 + \frac{\sqrt{n}}{n^3} - \frac{n}{n^3}\right)}{n^4\left(1 + \frac{n^2}{n^4} - \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^4}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^4} = 0$$

Raccogliamo gli esponenti più grandi

Osservazione :

$$2^x \geq x \quad \forall x \geq 0$$

$$2^x = (1+1)^x \geq (1+x) > x \quad non\ è\ verificato$$
$$Ma\ considerando\ ciò: [x] \leq x \leq [x]+1\ dove\ [x] \in \mathbb{N}$$

$$constatiamo\ che\ 2^x = (1+1)^x \geq (1+1)^{[x]} \geq 1+[x] \geq x$$

Un limite da sapere è :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} = 0 \qquad b > 1$$
$$Dimostrazione:$$
$$\frac{b^n}{n!} = \frac{b*b*b*b\ldots}{1*2*3\ldots*n} = \frac{b*b*b*b\ldots}{1*2*3\ldots*[b]} =$$

**Dimostrazione non completa*

Limiti di funzioni

Definizione : sia $x_0 \in I$ intervallo di $\mathbb{R}$, sia $l \in \mathbb{R}$

$$\cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}\ sia\ f: I\ \ \{x_0\} \to \mathbb{R}$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x) = l\ se\ \forall\ successione\ \{x_n\}\ che\ verifica\ \ x_n \in I\{x_0\}$$
$$si\ ha\ che\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$$

Teorema : Unicità dei limiti

Se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad con\ x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ e $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

$$si\ ha\ l_1 \neq l_2\ e\ \lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \quad e$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2\ \ se\ \{x_n\}\ t.c.\ \ x_n \to x_0$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)\ sarebbe\ uguale\ a\ l_1\ ed\ a\ \ l_2\ che\ è\ assurdo$$

Definizione di intorno

L'intorno di $C \in \mathbb{R}$ è un qualsiasi intervallo aperto che contenga C.

$$U_c = (a, b) \; tale \; che \; C \in (a, b)$$

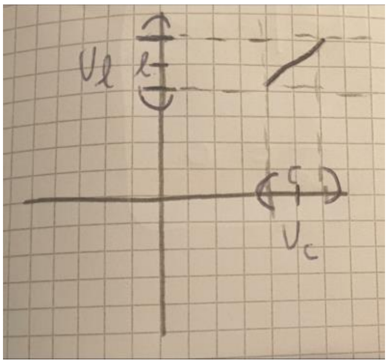
Intorno degli infiniti

$$U_{+\infty} = (a, +\infty) \qquad U_{-\infty} = (-\infty, b)$$

Definizione di "definitivamente": una proprietà vale definitivamente per $x \to C \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ se esiste un intorno di C dove vale la proprietà.

Definizione topologica :

limite dato $C \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\} = \mathbb{R}^*$: $\lim_{x \to C} f(x) = l$ se $\forall$ intorno U_l $\exists$ intorno $U_C \; tale \; che \; \forall \; x \; \in U_C\{c\} \; tale \; che \; f(x) \in U_l$



Riguardo i limiti :

$$\forall \varepsilon > 0 : U_C = (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \; \exists \; \delta \to U_C = (C - \delta, C + \delta)$$
$$\forall x \in (C - \delta, C + \delta)\{C\} \leftrightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

$$\updownarrow$$

$$0 < |x - C| < \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon$$

Quindi:

$$\lim_{x \to C} f(x) = l \; \text{ se } \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \; tale \; che \; 0 < |x - C| < \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$C = +\infty, l \in \mathbb{R} \; \forall \; U_l \; \exists \; U_\infty \; tale \; che \; x \in U_\infty \to f(x) \in U_l$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

$$\forall \varepsilon > 0, U_l = (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \exists \; M \to U_\infty = (M, \infty) \quad tale \; che$$
$$x \in U_\infty \to f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) x \in (M, \infty) \to x > M$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \in \mathbb{R} \; tale \; che \; \forall x > M \to |f(x) - l| < \varepsilon$$

Teorema ponte

La definizione di limite per successione e la definizione topologica sono uguali.

Proprietà dei limiti

Teorema dei carabinieri

Se $\lim_{x \to C} f(x) = l \; e \; \lim_{x \to C} g(x) = l \;\; C \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}$ e se $f(x) < h(x) < g(x)$ in un intorno di C $\rightarrow \; \lim_{x \to C} h(x) = l$

Esempio:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad 0 \leftarrow -\frac{1}{x} < \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 0 < \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

Corollario

Se $\lim_{x \to C} g(x) = 0 \quad e \quad |h(x)| < g(x) \rightarrow \; \lim_{x \to c} h(x) = 0$

Permanenza del segno

I) Se $\lim_{x \to C} f(x) = l > 0 \;\rightarrow\; \exists\, U_C \; tale \; che \; \forall x \in U_C\{C\} \rightarrow f(x) > 0$

II) Se $f(x) > 0$ in un intorno di C allora $\lim_{x \to C} f(x) = l > 0$

Algebre dei limiti

Se $\lim_{x \to C} f(x) = l \;\; e \;\; \lim_{x \to C} g(x) = k \;\; , C \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$

Allora

$$\lim_{x \to C} f(x) \; + \; \lim_{x \to C} g(x) \; = l + k$$
$$\lim_{x \to C} f(x) \; \times \; \lim_{x \to C} g(x) \; = l \times k$$
$$\lim_{x \to C} \frac{f(x)}{g(x)} \;\; = \frac{l}{k} \; se \; k > 0$$

L'algebra dei limiti si può estendere a $l = \pm\infty \;\; e \;\; k = \pm\infty$ esclusi i casi:

$$+\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \times \infty, 1^{\infty}$$

Ricorda :

$$\left|\frac{k}{0}\right| = +\infty \quad e \quad \frac{k}{\infty} = 0$$

Teorema del cambio di variabili

$$\text{se } \lim_{x \to C} g(x) = t_0 \text{ e } \lim_{x \to t_0} f(x) = l \text{ allora } \lim_{x \to C} f(g(x)) = l$$

Esempi:

I) $\lim_{x \to 0} f\left(sin\frac{1}{x}\right)$ Non esiste

II) $\lim_{x \to 0} f\left(xsin\frac{1}{x}\right)$ Esiste e vale 0

III) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \quad f(x) = \begin{cases} 1 \; se \; x \neq 0 \\ 0 \; se \; x = 0 \end{cases}$

Definizione di continuità

F definita in I è *continua* in $x_0 \in I$ se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ci sono 2 proprietà richieste :

- Esistenza del limite
- Uguaglianza del limite con la funzione nel punto

Limiti notevoli

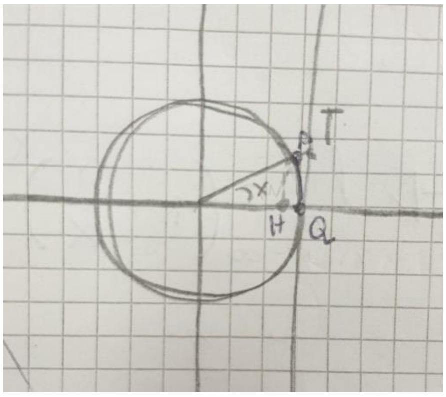
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^{\alpha}}=0,\forall\alpha>0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}=0,\forall\alpha>0,\forall a>1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=l\to\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=l$$

Un altro limite notevole :

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$$



$$HP=Sin(x)$$

$$\overline{PQ}=x$$

$$\overline{QT}=Tan(x)=\frac{Sin(x)}{Cos(x)}$$

$$HP\leq PQ\leq QT$$

$$Sin(x)\leq x\leq\frac{Sin(x)}{Cos(x)}$$

$$1\leq\frac{x}{\mathrm{Sin}(x)}\leq\frac{1}{Cos(x)}$$

1 teorema del confronto 1

Funzione continue in un intervallo

Nell'intervallo in cui sono continue, possono essere di segnate senza mai alzare la penna dal foglio.

Teorema dell'esistenza degli zeri

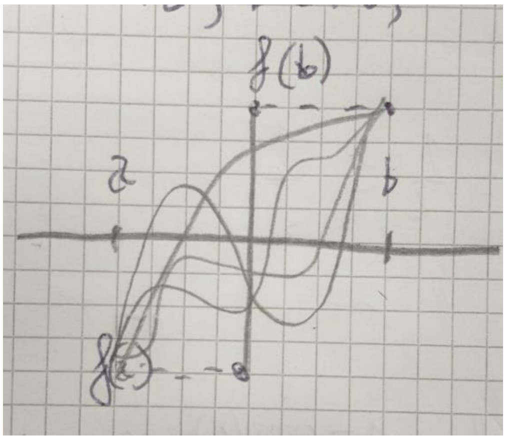
Sia f una funzione continua in [a,b], $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, a < b

$$se\ f(a)f(b) < 0 \rightarrow\ \exists\ x_0 \in (a,b)\ tale\ che\ f(x_0) = 0$$

Tutte le funzioni

continue in

[a, b]



Dimostrazione :

f(a) e f(b) < 0 $\quad C_1 = \frac{a+b}{2}\ calcoliamo\ f(C_1) se\ f(C_1) = 0$

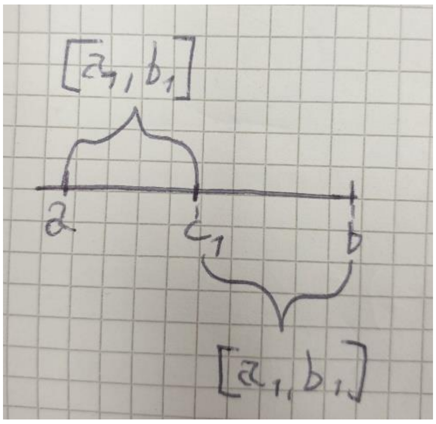
$$f(a)f(C_1) < 0 \qquad a_1 = a, b_1 = c_1$$

$$\boxed{a_1, b_1}$$

$$f(a)f(C_1) > 0 \qquad a_1 = c_1, b_1 = b$$

$$\downarrow$$

$$f(a_1)f(b_1) < 0$$



$\{a_n\}\ e\ \{b_n\}$

Corollario

Sia f una funzione continua in [a,b] tale che :

$$\forall\, m \in [f(a), f(b)](\forall m \in [f(b(, f(a)]se\ f(b) < f(a))$$
$$\left(se\ f(a) < f(b)\right) \exists\, x_0 \in (a,b) tale\ che\ f(x_0) = m$$

Teorema di Weierstrass

Sia f una funzione continua in [a,b] allora esiste il massimo ed il minimo di f in [a,b]

Corollario

$$\forall\ \mathrm{y} \in [\min f(x), \max f(x)] \rightarrow\ \exists\, x \in [a,b]\ tale\ che\ f(x) = y$$

Funzioni continue in un intervallo

Riguardo il teorema di Weierstrass

Condizioni da soddisfare affinchè il teorema di Weierstrass valga:

1. L'insieme è aperto $I = (a, b)$

$$f(x) = x \ in \ (0,1) \qquad \inf(f) = 0 \ il \ minimo \ non \ esiste$$
$$\sup(f) = 1 \ il \ massimo \ non \ esiste$$
$$Non \ esiste \ una \ x \ in \ (0,1) tale \ che \ f(x) = 0 \ o \ f(x) = 1$$

2. L'insieme non è limitato

$$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R} \ \ f(x) = \frac{1}{x}$$
$$\inf(x) = 0$$
$$non \ esiste \ il \ minimo \ in \ [1, +\infty)$$
$$dato \ che \ non \ esiste \ nessun \ x \ in \ [1, +\infty) \ \ tale \ che \ f(x) = 0$$

3. $f(x) = \begin{cases} x \ \ in (0,1) \qquad f[0,1] \to \mathbb{R} \\ \frac{1}{2} \ per \ x = 0 \ e \ x = 1 \qquad f \ non \ \text{è} \ continua \ in \ 0 \ e \ 1 \end{cases}$

$$\inf(f) = 0 \quad \sup(f) = 1$$

Ma non sono massimi e minimi

Corollario :

Se f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ con f continua in $[a, b]$ allora

$$\forall \ l \ \in [m, M] dove \ m = \min(f) \, , M = \max(f) \, \exists \ x \in [a, b] tale \ che \ f(x) = l$$

Funzioni monotone in I

Teorema : sia f una funzione definita in un intervallo I, allora se f è monotona in I esiste:

$$\lim_{n \to c^-} f(x) \ \ e \ \lim_{n \to c^+} f(x)$$

Dimostrazione ipotesi

$$x_1, x_2 \ \in I, x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2) \text{ se } f \text{ è monotona crescente}$$

$$x_1, x_2 \ \in I, x_1 > x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2) \text{ se } f \text{ è monotona decrescente}$$

$$\Delta = \sup\{f(x), x < c\} \ tesi : \lim_{n \to c^-} f(x) = \Delta$$
$$f(x) \leq \Delta$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \overline{x} < c \ \ tale \ che \ f(x) > \Delta - \varepsilon$$

$$\bar{x} < x \to f(\bar{x}) < f(x)$$

in modo analogo dimostriamo che

$$\Gamma = \sup\{f(x), x > c, x \in I\} \lim_{n \to c^+} f(x) = \Gamma$$

Le funzioni monotone ma non continue hanno solo discontinuità di salto.

Funzione inversa

Teorema : $f: I \to \mathbb{R}, I\ intervallo, f\ continua\ in\ I$
f è $invertibile\ se\ e\ solo\ se$ è $monotona$
$in\ I, inoltre\ la\ funzione\ inversa$ è $continua\ e\ monotona$

Dimostrazione :

f non è monotona cioè $x_1 < x_2 < x_3\ tale\ che$

$f(x_1) < f(x_2)\ e\ f(x_2) > f(x_3)$

$\forall\ l\ \in \big(f(x_1), f(x_2)\big)\ \exists\ \overline{x}\ \in (x_1, x_2)\ tale\ che\ f(\bar{x}) = l$

$\forall\ k\ \in \big(f(x_3), f(x_2)\big) \exists\ \bar{\bar{x}}\ \epsilon\ (x_3, x_2) tale\ che\ f(\bar{\bar{x}}) = k$

$m \in \big(f(x_1), f(x_2)\big) \cap \big(f(x_3), f(x_2)\big) \to f(x) = m\ \ \bar{x} \in (x_1, x_2)$

$f(x) = m\ \bar{\bar{x}}\ \in (x_3, x_2)$

f è $continua\ e\ monotona$:

$y_1 < y_2 \to f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \to f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

$f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2) \to x_1 < x_2$

f^{-1} è monotona quindi se non fosse continua avrebbe delle circostanze di salto :

$I\ in\ \ f^{-1}$ non sarebbe un intervallo.

$$f(x) = \begin{cases} x^{\bar{c}} + \sin^2 x > 0 \\ ax + b\ x \leq 0 \end{cases}$$

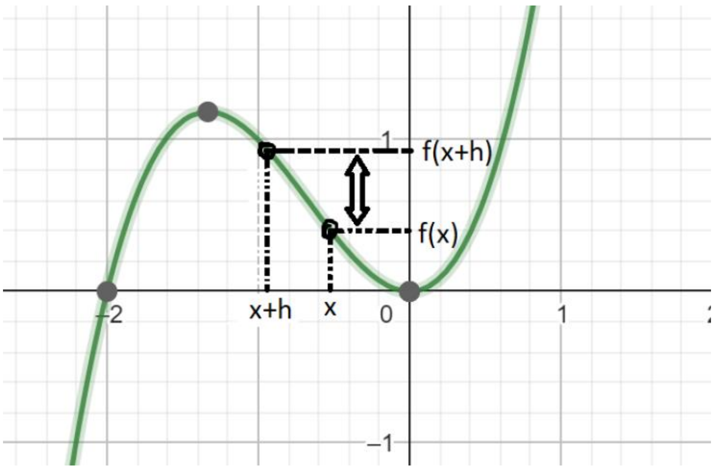
$a \in \mathbb{R}$, b $\in \mathbb{R}$ f continua in $\lim_{x \to 0^+} x^2 \sin^2 x = \lim_{x \to 0^-} ax + b \to 0 = b$

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \to a = 0\ \ e\ \ b = 0$
- Non esiste $\lim_{x \to 0} f(x)$ basta perdere $b \neq 0$ perché $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$
- $f\ limitato\ inferiormente : a \leq 0 \to ax + b \geq b\ per\ x \leq 0$
  $x^2 + \sin^2 x \geq 0 \to f(x) \geq \min\{0, b\}$

Calcolo della derivata

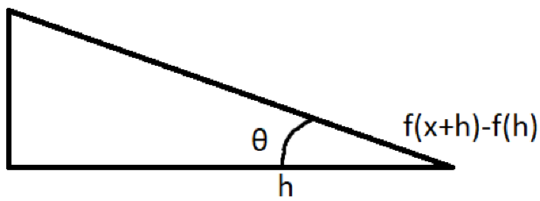
La velocità è la distanza percorsa nel tempo diviso il tempo, più minimizzo il lasso di tempo, più ho una precisa misurazione della velocità. In questo modo però non sto calcolando la crescita istantanea.

Derivata di una funzione



$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \in I$

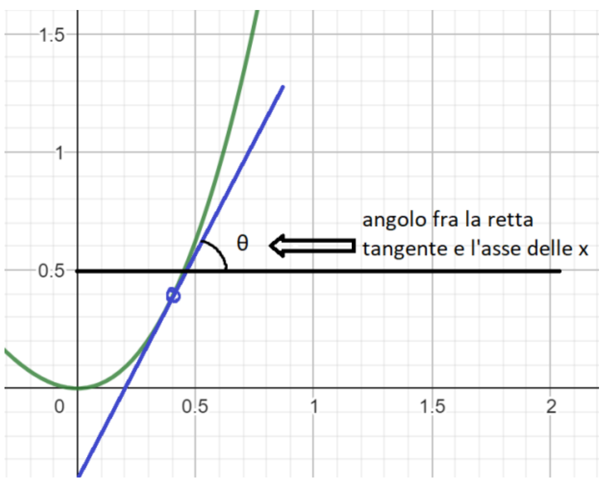
La crescita media della funzione nell'intervallo $(x, x+h)$ vale $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$



Questa crescita media si chiama rapporto incrementale.

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$ questo limite si chiama **derivata** di f nel punto x. Si scrive $f'(x)$.

$f'(x)$ è la tangente dell'angolo formato dalla retta limite delle rette passanti per $(x, f(x)), (x+h, f(x+h))$ e l'asse delle x.



$$f'(x) = \tan(\theta) \text{ dove } \theta(h) \to \bar{\theta}$$

Fissato un punto $\left(x_0, f(x_0)\right)$ sul grafico, la retta per quel punto è la retta tangente e la sua equazione è $y = f(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Sappiamo che :

dato $f : I \to \mathbb{R}, f$ è derivabile in I se $\forall x \in I \; \exists$ la derivata $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\boldsymbol{f(x) = 3x + 2}$ $\leftarrow$ la crescita di una retta è il suo coefficiente angolare, in questo caso 3.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{3(x+h) + 2 - (3x+2)}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

$$Regola : f(x) = x^{\alpha} \to f'(x) = \alpha \times x^{\alpha - 1}$$
$$Regola : f(x) = costante \to f'(x) = 0$$

$\boldsymbol{f(x) = x^2}$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h$$

$\lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$ $\leftarrow$ la crescita è $2x$.

$\boldsymbol{f(x) = e^x}$ $\leftarrow f'(x) = e^x$

$$Regola : f(x) = e^x \to f'(x) = e^x$$

$\boldsymbol{f(x) = log(x)}$ con x > 0

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \frac{\log(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \times \frac{1}{x}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$Regola : f(x) = \log(x) \to f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$Regola : f(x) = \cos(x) \to f'(x) = -\sin(x)$$

$$Regola : f(x) = \sin(x) \to f'(x) = \cos(x)$$

Punti di non derivabilità

$f(x) = |x|$ è derivabile in 0?

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \qquad \underset{da\ destra}{\lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1} \qquad \underset{da\ sinistra}{\lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1}$$

La derivata destra è diversa da quella sinistra, quindi la derivata **non esiste**.

x_0 è un punto angoloso se esiste $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x^0+h)-f(x)}{h}$ ma non coincidono esiste una derivata destra ed una sinistra.

Altri punti di non derivabilità $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \mp\infty$

<u>Teorema</u>

Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.

Tesi : $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \longleftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(h)$

Algebra delle derivate

siano f o g due funzioni derivate in I

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) \times g(x)]'=f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

$$[hg'(x)] = \left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'(g(x)) \times g'(x)$$

Teorema del valore medio

Ottimizzazione :

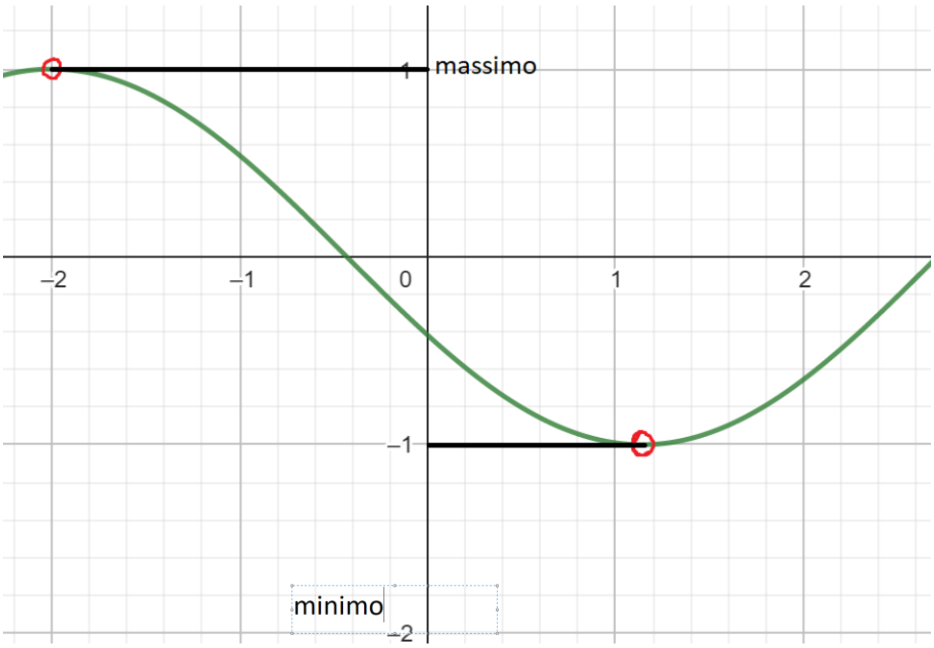
Definizione : data una funzione f in un intervallo $\mathbb{R}$, cioè $f : I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

M è il massimo globale di f in I se $\forall x \in I \;\; f(x) \leq M$

$M = f(x_0), x_0 =$ punto massimo globale

m è il minimo globale di f in I se $\forall x \in I \;\; f(x) \geq m$

$$m = f(x_0), x_0 = \text{punto massimo globale}$$



M è un **massimo locale** se esiste $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in I$ tale che $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

$$f(x) \leq f(x_0) = M = Max\, f(x)$$

m è un **minimo locale** se esiste $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in I$ tale che $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

$$f(x) \geq f(x_0) = m = Min\, f(x)$$

Teorema di Fermat

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in (a, b) e $x_0 \in (a, b)$ è un punto estremale (con estremale si intende un estremo, cioè il minimo o il massimo) locale, allora la derivata si annulla in x_0.

$$f'(x_0) = 0$$

Esempi :

$f(x) = x^3$ in $[-1,1]$ $\quad f'(x) = 3x^2$
$f'(x) = 0, 0$ non è un punto estremale

$$\forall x > 0 \quad f(x) > 0 \qquad \forall x < 0 \quad f(x) < 0$$

Se non è 0, non è un punto estremale.

$f(x) = x^2$ in $[-1,1]$

Altro esempio

$$f(0) = 0 \leq x^2 \rightarrow f'(x) = 2x < f'(0) = 0$$

Dimostrazione del teorema di Fermat

x_0 è un punto di minimo locale

$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ sappiamo $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0 \quad h < \varepsilon$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$$

Il limite destro e sinistro devono essere uguali. Non possono essere sia maggiori che minori di 0, quindi sono entrambi uguali a 0. Siccome esiste f è derivabile in x_0, esiste finito $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$

Altro esempio :

$$f(x) = |x| \geq 0 = f(x)$$

Siccome f non è derivabile in 0, non si può applicare il teorema di Fermat.

Teorema di Lagrang

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ è derivabile in (a, b) allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

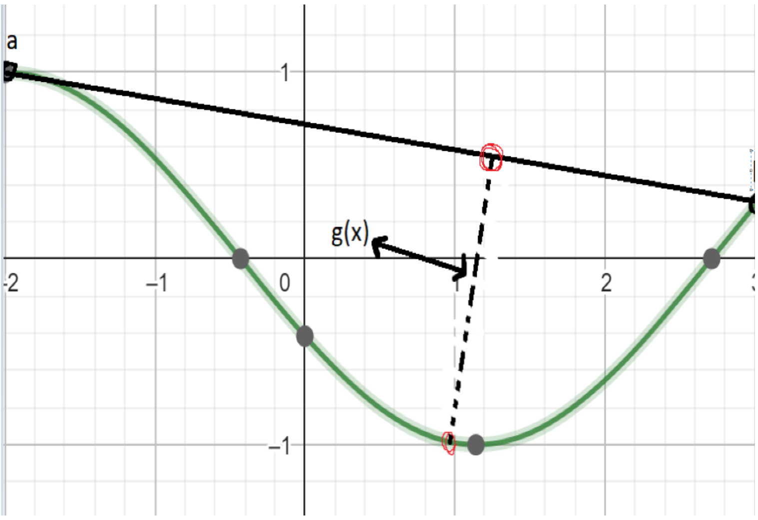
C'è un punto in (a, b) dove la derivata è uguale alla crescita media.

<u>Dimostrazione</u>

Equazione della retta che passa per $\left(a, f(a)\right)$ e $(b, f(b))$

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$
$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right]$$
$$g(x) = 0, \qquad g(b) = a$$

$g(x)$ è la distanza tra la funzione e la retta della crescita media.



Se il massimo è interno e vale $x_0 \in (a, b) \to g'(x) = 0$

Se il minimo è interno e vale

$x \in (a, b) \to g'(x) = 0$

Se $max(g)$ e $min(g)$ sono raggiunti sugli estremi allora coincidono, g è costantemente uguale a 0.b

Teorema sulla monotone

$f(a, b) \to \mathbb{R}$, derivabile in (a, b)

f crescente in $(a, b) \longleftrightarrow f'(x) \geq 0$

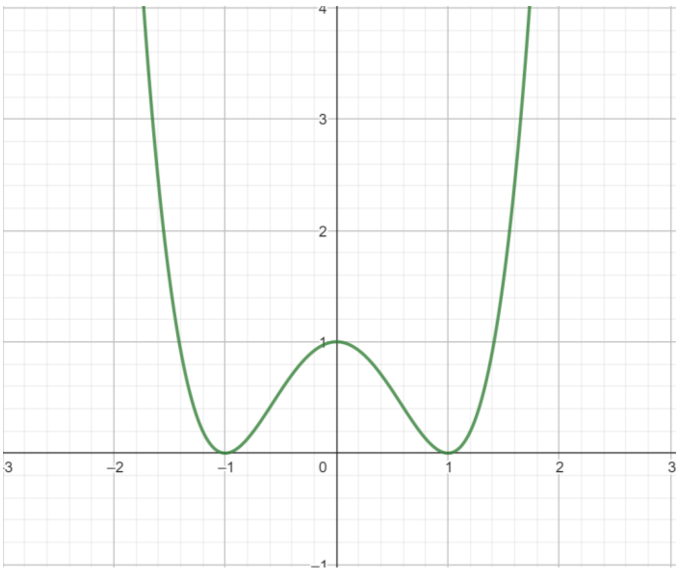
f decrescente in $(a, b) \longleftrightarrow f'(x) \leq 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Esempio

$f(x) = (1-x^2)^2$ determinare gli intervalli di monotonie

$$f'(x) = 2(1-x^2)(-2x) = -4x(1-x^2) = -4x(1+x)(1-x)$$



$f'(x) \leq 0$ in $(-\infty,-1)$ Verso il basso

$f'(x) \leq 0$ in $(-1,0)$ Verso l'alto

$f'(x) \leq 0$ in $(0{,}1)$ Verso il basso

$f'(x) \leq 0$ in $(1,+\infty)$ Verso l'alto

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \textit{Dominio di } f \ = \ \mathbb{R}\{0\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$$f(1) = \frac{\pi}{2} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\ (0,+\infty) \\ -\frac{\pi}{2}(-\infty,0) \end{cases}$$

$$f(-1) = -\frac{\pi}{2} \qquad x > 0 \ \ \arctan(x) = \arctan(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2})$$

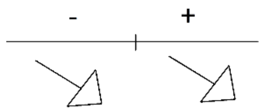
Ricavare punti estremali $f\colon I \to \mathbb{R} \quad [a,b]$

Candidati ad essere estremali $\big(a, f(a)\big)\ e\ (b, f(b))$

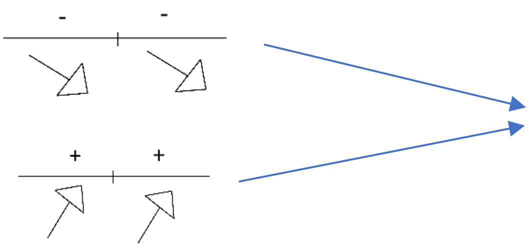
$$x_0 \text{ tale che } f'(x_0) = 0$$

Negli estremali la derivata si annulla, ma li dove la derivata si annulla non è per forza un estremale.

$0 = f'(x_0) \to$ Punti minimo locale



$0 = f'(x_0)$



$0 = f'(x_0)$

x_0 non è un punto

estremale

$$\begin{aligned}
&f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12 \\
&f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 \\
&4[x^3 - 6x^2 + 11x - 6] = 0 \\
&quindi\ f'(1) = 0
\end{aligned}$$

È verificato in X=1 $\to$ $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Teorema dell'Hopital

$f(x)$ e $g(x)$ derivabile in un intorno di x_0 continue tale che $f(x_0)$ e $g(x_0) = 0$

Se esiste $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ allora coincide con $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

Esempio :

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 0$ non è sicuramente verificato.

Applichiamo la derivata :

$\lim_{x \to 1} \frac{2x}{1} = 0$ ora è sicuramente verificato.

Dimostrazione

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

$$f(x_0) = g(x_0) = 0$$

Successione $x_n \to 0$

$$\frac{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}}{\frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0}} = L$$

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ecco perché $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Derivata seconda

La derivata seconda di una funzione, si calcola facendo il calcolo della derivata alla derivata prima della funzione stessa $f''(x) = (f'(x))'$. Se la derivata seconda è positiva, la derivata prima è monotona crescente.

Qual è il semicerchio che approssima meglio il grafico di f in 0?

$x^2 + (y - R^2) = R^2$ È l'equazione del semicerchio

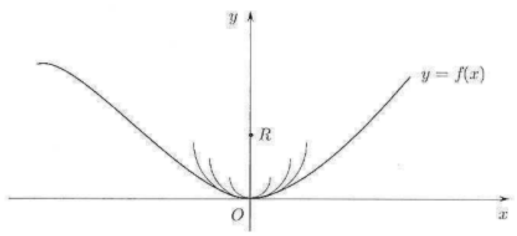
$$(y - R^2) = R^2 - x^2 \quad \rightarrow \quad y - R = \sqrt{R^2 - x^2} \quad \rightarrow \quad y = R - \sqrt{R^2 - x^2} \ = g(x)$$

Ora che abbiamo tale equazione, calcoliamone la derivata prima :

$$se\ g(0) = 0\ e\ g'(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}-1}(-2x) = x(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\ allora\ g'(0) = 0$$

Se x = 0, allora $g'(x)$ = 0, calcoliamo la derivata seconda

$$g''(x) = (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + x\left(-\frac{1}{2}\right)(R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) \rightarrow g''(0) = (R^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{R}$$



Per x = 0, la derivata seconda è uguale a $\frac{1}{R}$, che equivale alla curvatura del grafico di f in 0.
R è il raggio della curvatura.

In generale $\frac{1}{R(x)} \ = \ \frac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$ è la curvatura del grafico in x dove R(x) è il raggio della curvatura. Più R(x) è piccolo, più la curvatura sarà grande.

Concavità e Convessità

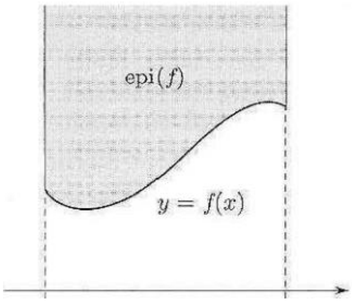
Una figura è **convessa** quando due punti all'interno di essa possono essere collegati da una retta senza che essa esca fuori dalla figura stessa.

La prima figura non è convessa, la seconda si, dato che soddisfa il requisito appena spiegato.

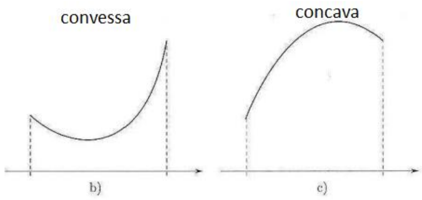
Prendiamo ora una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dove I è un intervallo, chiamiamo **epigrafico** di f l'insieme:

$$epi\ f = \{(x, y) \in \ \mathbb{R}^2 : x \ \in I\ e\ y \geq f(x)\}$$

L'epigrafico è quindi il grafico al di sopra della funzione.

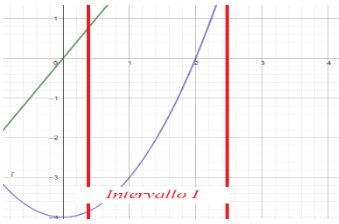


Dato tale grafico, si dice che f è convessa nell'intervallo I se il suo epigrafico è un insieme convesso, si dice che f è concava in I se – f è convessa in I.



Teorema :

se $f(x)$ è convessa in I e f è derivabile, allora la derivata **è monotona crescente**, se è due volte derivabile allora $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$.



Come si può notare, la funzione f: y=x^(2)-4 disegnata in blu ha come derivata g: y=2 x disegnata in verde, nell'intervallo I tale funzione è convessa e derivabile, quindi f'(x) è sicuramente monotona crescente.

Viceversa, se f è derivabile con derivata monotona crescente in I, allora f in I è convessa, se è due volte derivabile e $f''(x) > 0\ \forall x \in I$ allora f è convessa.
Esempio 1 : $I : f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x \quad f''(x) = 2\ \ quindi\ f''(x) > 0, f$ è convessa in $\mathbb{R}$.
Esempio 2 : $f(x) = x^3\ \ f'(x) = 3x^2\ \ f''(x) = 6x\ quindi\ f''(x) \geq 0\ se\ \forall\ x\ \geq 0$
Quindi $f(x) = x^3$ è convessa in $(0, +\infty)$.
Adesso cerchiamo gli intervalli di convessità per e^{-x^2}

$f'(x) = e^{-x^2}(-2x) \quad f''(x) = -2x \times e^{-x^2}(-2x) = 2e^{-x^2}(-1 + 2x^2)$
$f''(x) \leq 0\ in\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$f''(x) \geq 0\ in\ (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ in questi intervalli f è convessa.

Teorema :

sia *f* derivabile in (a, b), *f* è convessa se e solo se $\forall\ x_0 \in (a, b)$ la retta tangente al grafico in $(x_0, f(x_0, 1))$ è sopra il grafico di *f*, cioè $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in (a, b)$.

Se *f(x)* è convessa in (a, x_0) e concava in (x_0, b) e *f* è due volte derivabile in *(a, b)* → $f''(x_0) = 0$ e x_0 è un punto di flesso, cioè la retta ad esso tangente "traversa" il grafico.

Studio di funzione

Possiamo suddividere lo studio del grafico di una funzione in vari step:

1. Trovare l'insieme di definizione
2. Trovare i valori agli estremi (inclusi i limiti e gli asintoti)
3. Calcolare la derivata e studiarne il segno
4. Trovare i punti di discontinuità e non derivabilità
5. Determinare gli intervalli di monotonia, punti di massima e minima
6. Calcolare la derivata seconda e studiarne il segno
7. Trovare gli intervalli di convessità/concavità

Approssimazione lineare

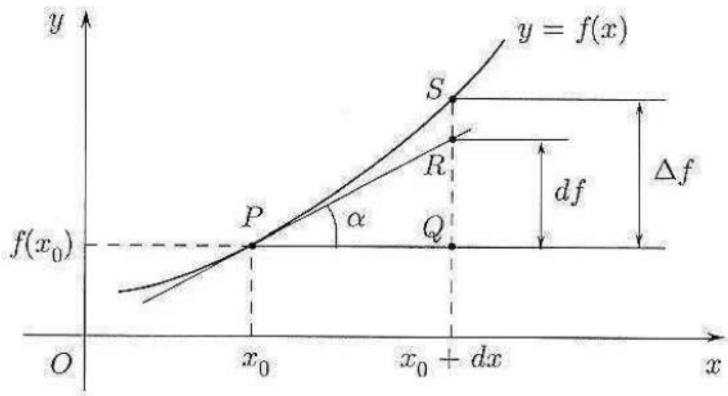
La **linearizzazione** è un operazione essenziale in matematica, consiste **nell'approssimare** una quantità, che dipende da una o più variabili in modo non lineare (quindi non intercorra una proporzione diretta, si riveda il concetto di *linearità*), fornendo informazioni sull'errore commesso.
Parliamo di linearizzazione quando vogliamo approssimare l'incremento subito da una data funzione f(quanto e come cresce sul grafico) in conseguenza di una **variazione** del suo argomento, prendendo l'argomento x_0 sommiamo ad esso dx, che sarebbe la suddetta variazione (il quale valore assoluto deve essere sempre molto piccolo, cioè $|dx| \ll 1$), e sostituiamo alla funzione f, la sua **retta tangente nel punto x_0**.

Quindi per una funzione $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0, se diamo ad x_0 un incremento dx, f subisce un incremento

$$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$$

Tale incremento non è proporzionale a dx, quindi non è lineare rispetto a dx.

Sostituiamo poi al grafico di f, quello della sua retta tangente nel punto P=$(x_0, f(x_0))$, e calcoliamo l'incremento per essa, che è uguale all'angolo della tangente moltiplicato all'incremento, cioè $tg(\alpha) \times dx$, che sarebbe $f'(x_0) \times dx$, dato che l'angolo della tangente è uguale alla derivata della funzione nel punto x_0, Tale incremento è uguale al segmento QR in questo grafico.



Questo incremento, che è proporzionale a dx, viene chiamato **differenziale di f** nel punto x_0, e si indica con il simbolo $df(x_0)$.

$$df(x_0) = f'(x_0) \times dx$$

L' o piccolo

Vediamo due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definite in un intorno x_0, possiamo dire che :

$$f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to x_0$$

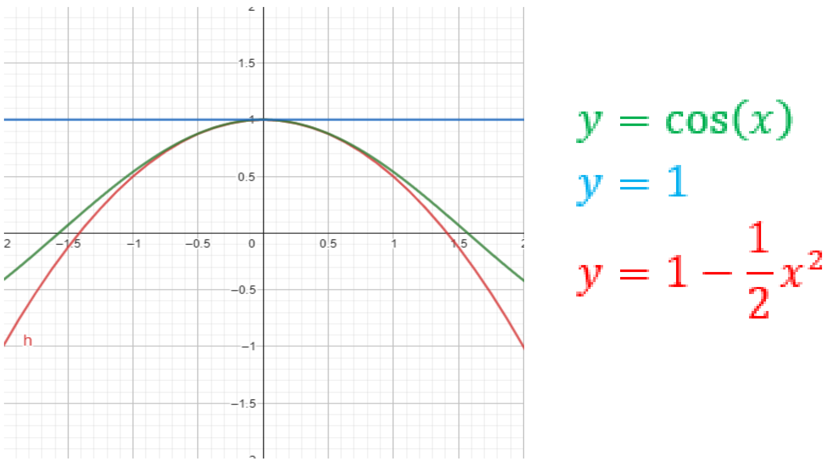
Tale scrittura si legge $f(x)$ è **o piccolo** di $g(x)$ se $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ per $x \to x_0$, vale se f è continua e derivabile in x_0, e sta ad indicare il fatto che $f(x)$ è un **infinitesimo** di ordine superiore rispetto a $g(x)$, tende quindi più velocemente a 0, in quanto il simbolo o(1) denota

una quantità infinitesima.
Vediamo un esempio, per $x \to 0$, possiamo dire che $x^2 = o(x)$, dato che tendono entrambi a 0, ma x_2 è più "rapido" a raggiungere tale valore. Si ricordi quindi : $\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$

Il polinomio di Taylor

Data una funzione f che è derivabile n-volte in x_0 o in un intorno di x_0, considerando che le derivate siano continue, qual è il **polinomio che approssima** meglio f vicino x_0? Si intende quel polinomio, che nel punto fissato, approssima la funzione meglio della sua retta tangente.

Vediamo un esempio, si prenda la funzione $\cos(x)$, nel punto 0, la sua retta tangente equivale ad $y = 0$, ma esiste una parabola $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ che approssima $\cos(x)$ meglio della sua retta tangente.



Difatti, lo scarto tra la funzione e questo polinomio di secondo grado è $o(x^2)$, tende a 0 più rapidamente di x^2.

Data una funzione f derivabile n-volte in $x = 0$, esiste solo un polinomio di grado $\leq n$, chiamato T_n con tale proprietà :

$$T_n(0) = f(0), \quad T_n'(0) = f'(0), \quad T_n''(0) = f''(x0), \dots\dots, \quad T_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

Questo polinomio, è detto **polinomio di MacLaurin** di $f(x)$di grado n, e vale :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \ =$$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Riprendendo il polinomio di Taylor

Come già detto, prendiamo una funzione f derivabile $n -$ volte in x_0 :

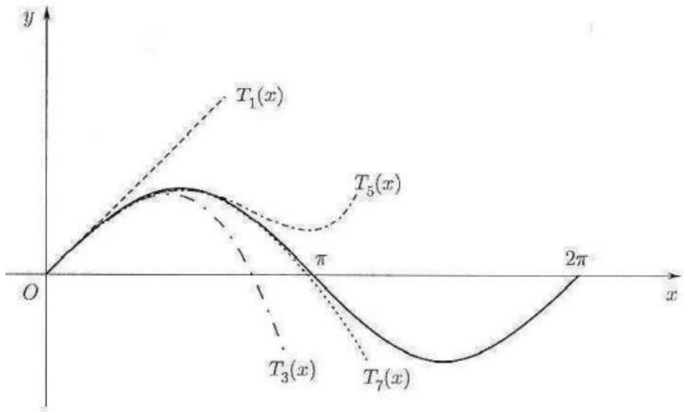
$$T_n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Riscritto sottoforma di sommatoria :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Teorema : se f è n-volte derivabile in un intorno di x_0 allora :

$f(x) = T_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$ cioè $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - T_n(x - x_0)}{(x - x_0)^n} = 0$



Vediamo come all'aumentare del grado del polinomio di Taylor, esso approssimi sempre più correttamente la funzione:

Teorema : Resto di Lagrange

Supponiamo che f sia $n + 1$ volte derivabile in un intorno di x_0, allora esiste :

$$c \in (x_0, x), \big(x \in (x, x_0)\big)\ tale\ che\ f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

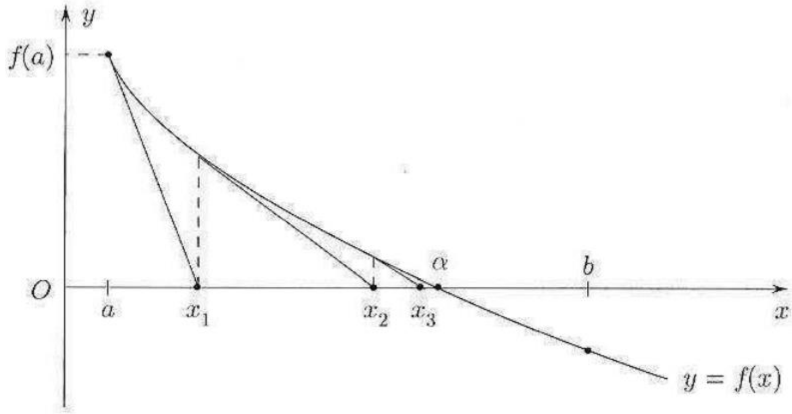
Metodo di Newton

Di una funzione $f(x) = 0$ supponiamo ci sia un'unica soluzione $x = \alpha$ all'interno di un intervallo $[a.b]$. Il **metodo di Newton** serve a dare una **valutazione approssimata** di α, costruendo una successione convergente di α, tale successione è definita in modo **ricorsivo**.

Sia assegna un primo termine x_0, si assegna poi una legge per calcolare x_{n+1} a partire da x_n. In questo modo x_n può partire da x_0, con n iterazioni del medesimo algoritmo.

Si parte prendendo un punto $x_0 = a$ e sostituendo ad f la retta tangente al suo grafico nel punto $(a, f(a))$, tale retta ha equazione : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, risolviamo quindi $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$ ed otteniamo $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \rightarrow$ prima approssimazione di a.

Procediamo con x_1, quindi prendiamo la retta tangente nel punto $(x_1, f(x_1))$, risolvendo l'equazione $f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = 0$ ed otteniamo $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \to$ seconda approssimazione di α. Proseguendo così.



Continuando in tal modo, si perviene alla **legge di ricorrenza** :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$