Metodi Matematici per l'Informatica - Dispensa 3 (a.a. 21/22, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (carlucci@di.uniroma1.it)

1 Anagrammi

Esempio 1 *Quanti sono gli anagrammi della parola PADRE? Per il PMG sono* $5! = 120$.

Esempio 2 *Quanti sono gli anagrammi della parola NONNA? In questo caso* $5! = 120$ *non è la quantità desiderata, perché sta contando le N come se fossero tutte distinte, ossia come se si trattasse degli anagrammi della parola* $N_1ON_2N_3A$*, dove* N_1, N_2, N_3 *vengono considerate lettere distinte. Ovviamente vogliamo invece considerare identici e contare una sola volta gli anagrammi* $N_1AN_2N_3O$*,* $N_2AN_1N_3O$*,* $N_1AN_3N_2O$*,* $N_2AN_3N_1O$*,* $N_3AN_1N_2O$ *e* $N_3AN_2N_1O$*. ¿Devo quindi dividere per* $3!$ *ossia per il numero delle permutazioni di* $\{N_1, N_2, N_3\}$*. Ottengo quindi* $\frac{5!}{3!} = 20$ *anagrammi.*

Esempio 3 *Quanti sono gli anagrammi della parola NONNO? In questo caso non voglio contare né le 3 occorrenze di N né le 2 occorrenze di O come distinte. Ragionando per passi ho:* $5! = 120$ *permutazioni di* $\{N_1, O_1, N_2, N_3, O_3\}$*,* $\frac{5!}{3!} = 20$ *parole di 5 lettere nell'alfabeto* $\{N, O_1, O_2\}$ *e infine,* $\frac{5!}{3!2!} = 10$ *anagrammi di NONNO.*

Riassumendo: se voglio formare gli anagrammi di una parola formata da n occorrenze di lettere di cui n_1 sono identiche, ho $\frac{n!}{n_1!}$ possibilità. Se ci sono n_1 lettere identiche di un tipo e n_2 di un altro tipo, ho $\frac{n!}{n_1!n_2!}$ possibilità, etc. In generale: gli anagrammi di una parola lunga n in cui compaiono t gruppi di $n_1, \ldots, n_t$ lettere ripetute, sono

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_t!}$$

Esempio 4 *Quante sono le sequenze lunghe 6 composte da due 0, tre 1 e un 2? Sono gli anagrammi di 110002. Dunque sono* $\frac{6!}{2!3!} = \frac{720}{12} = 60$.

Esempio 5 *Quanti sono gli anagrammi di MISSISSIPPI? Sono* $\frac{11!}{4!4!2!}$.

Esempio 6 *Quanti sono gli ordinamenti di 5 persone di cui 3 uomini e 2 donne se mi interessa soltanto distinguere tra uomini e donne? Mentre gli ordinamenti totali sono 5! gli ordinamenti che identificano gli uomini tra loro e le donne tra loro sono* $\frac{5!}{3!2!}$.

Il metodo di ragionamento utilizzato qui sopra verrà meglio illustrato nel prossimo paragrafo. Si tratta della cosidetta Regola del Pastore.

2 Combinazioni semplici

Esempio 7 *Consideriamo di nuovo una gara con* 8 *atleti. Immaginiamo si tratti di una gara di qualificazione a una gara successiva, e la regola è che i primi* 3 *arrivati si qualificano. Quante sono le possibili qualificazioni?*

Nell'esempio di sopra ci interessano non le salite al podio (terne ordinate) bensì le qualificazioni: per esempio non vogliamo distinguere il caso in cui Gianni arriva primo, Pedro secondo e Marie terza dal caso in cui Marie arriva prima, Pedro secondo e Gianni terzo, in quanto in entrambi i casi gli atleti che passano il turno sono Gianni, Marie e Pedro.

In termini insiemistici il numero dei passaggi di turno nell'esempio corrisponde al concetto di *sottinsieme* di 3 elementi scelti dall'insieme degli 8 atleti. Il concetto di insieme formalizza per l'apunto l'idea di una collezione di elementi distinti, non ripetuti e non ordinati. In questi termini gli oggetti dell'insieme che vogliamo contare nell'esempio di sopra sono oggetti del tipo $\{Gianni, Marie, Pedro\}$. In quanto insiemi, si hanno le identità

$$\{Gianni, Marie, Pedro\} = \{Pedro, Gianni, Marie\} = \{Marie, Gianni, Pedro\} = \{Marie, Pedro, Gianni\} = \dots$$

che esprimono il fatto che l'ordine degli elementi di un insieme non conta.

Esempio 8 *Consideriamo l'insieme $A = \{a, b, c, d\}$. Vogliamo contare quanti sono i sottinsiemi di 3 elementi. Si vede facilmente che sono 4:*

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}.$$

Che idea possiamo usare per contarli? Confrontiamoli con le disposizioni semplici di ordine 3:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba$$

$$abd, adb, bad, bda, dab, dba$$

$$adc, acd, dac, dca, cad, cda$$

$$dbc, dcb, bdc, bcd, cdb, cbd$$

Cosa si può osservare? Si può osservare che il sottinsieme $\{a, b, c\}$ corrisponde alle 6 sequenze abc, acb, bac, cab, cba formate con i suoi elementi; il sottinsieme $\{a, b, d\}$ corrisponde alle 6 sequenze abd, adb, bad, bda, dba formate con i suoi elementi, e analogamente per $\{a, c, d\}$ e $\{b, c, d\}$. Dunque ogni sottinsieme di 3 elementi corrisponde a 6 disposizioni semplici di lunghezza 3. Dato che sappiamo contare queste ultime, possiamo contare i sottinsiemi, usando la regola seguente.

Regola del Pastore

Per contare le pecore in un gregge, conta le zampe e dividi per 4.

Nel nostro caso gni pecora (sottinsieme di 3 elementi tra 6) ha 6 zampe (disposizioni semplici di lunghezza 3). Si nota che è fondamentale che l'associazione sopra descritta tra sottinsiemi di 3 elementi e disposizioni semplici soddisfi le seguenti condizioni: (1) a ogni sottinsieme di 3 elementi viene associato lo stesso numero (=6) di disposizioni semplici; (2) se due sottinsiemi di 3 elementi sono distinti allora l'insieme delle disposizioni semplici associate al primo non ha elementi in comune con l'insieme delle disposizioni semplici associato al secondo; (3) l'associazione esaurisce l'insieme delle disposizioni semplici di ordine 3 su 4, ossia ogni disposizione semplice di ordine 3 sui 4 elementi $\{a, b, c, d\}$ appartiene all'insieme di disposizioni semplici associato a un qualche sottinsieme di 3 elementi in $\{a, b, c, d\}$. Queste condizioni ci permettono di contare quante sono le combinazioni semplici di ordine 3 su $\{a, b, c, d\}$ se sappiamo contare quante sono le disposizioni semplici di ordine 3 su $\{a, b, c, d\}$: ogni volta che contiamo (o togliamo) un insieme di 3 elementi scelti in $\{a, b, c, d\}$ stiamo contando (o togliendo) 6 disposizioni semplici di ordine 3 su $\{a, b, c, d\}$. Il procedimento esaurisce l'insieme dei sottinsiemi di ordine 3 in $\{a, b, c, d\}$ esattamente quando è esaurito l'insieme delle disposizioni semplici di ordine 3 su $\{a, b, c, d\}$.

Abbiamo dunque che

$$C_{4,3} = \frac{D_{4,3}}{6}$$

Per ottenere una formula generale dobbiamo chiederci cosa è 6 come funzione di n o di k. Si vede facilmente che 6 è il numero delle permutazioni di 3 elementi ($6 = 3!$) e che ogni sottinsieme corrisponde a tante disposizioni semplici quante sono le permutazioni dei suoi elementi: infatti ogni disposizione semplice di ordine 3 composta dagli elementi di un sottinsieme $\{x, y, z\}$ è determinata/determina/corrisponde a una permutazione di x, y, z.

Nel caso generale in cui vogliamo contare i sottinsiemi di k elementi scelti in un insieme A di n elementi, le nostre pecore saranno oggetti della forma $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ con $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ e ciascuna avrà un numero di zampe uguale al numero di permutazioni dei suoi elementi, ossia $k!$.

Applicando la Regola del Pastore come sopra otteniamo in generale una formula per contare il numero di sottinsiemi di k elementi scelti tra n (con $n \geq k$).

$$\frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}.$$

Per ricordarsi l'espressione è comodo pensare che ha k fattori partendo da n al numeratore e k fattori partendo da k al denominatore.

La quantità di sopra è molto importante in Combinatoria e si merita un nome – coefficiente binomiale (vedremo perché) – e una notazione a sé: $\binom{n}{k}$, (che leggiamo: n scegli k).

La lettera C sta per *combinazioni*. Diamo infatti la seguente definizione.

Definizione 1 (Combinazioni Semplici) *Le combinazioni semplici di ordine k su n sono i sottinsiemi di k elementi scelti in un insieme di n elementi. La loro quantità si denota con $C_{n,k}$.*