Esercizio 1. Siano A, B due eventi con $\mathbb{P}(A) = 0.3$, $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.5$ e $\mathbb{P}(B) = p$. Trovare il valore di p nei seguenti casi:

1) A e B sono disgiunti,

2) A e B sono indipendenti,

3) A è un sottoinsieme di B.

ovviamente, se A e B sono disgiunti: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + p = 0{,}3 + p = 0{,}5$ $\Rightarrow p = 0{,}2$. Se A e' un sotto-insieme di B, ovviamente $A \cup B = B$, quindi $p = 0{,}5$. Se A e B sono indipendenti, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.3 \cdot p$, e

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ ho che:

- $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \underline{\mathbb{P}(A \cup B)}$ (SAPPIAMO ESSERE 0.5)

$$0{,}3 \cdot p = 0{,}3 + p - 0.5 \Rightarrow -0.7p = -0{,}2 \Rightarrow p = \frac{0.2}{0.7}$$

Esercizio 2. Siano A, B, C tre eventi indipendenti. Dimostrare che i seguenti eventi sono indipendenti

1) $A^{\complement}, B, C$,

2) $A^{\complement}, B^{\complement}, C$,

3) $A^{\complement}, B^{\complement}, C^{\complement}$.

se A, B, C sono indipendenti: $\begin{cases} \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C), \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \end{cases}$

Esercizio 3. Vengono lanciati 2 dadi regolari.

1) Mostrare che l'evento "la somma dei dadi fa sette" è indipendente dal risultato del primo dado.

2) Mostrare che l'evento "la somma dei dadi fa nove" non è indipendente dal risultato del primo dado.

3) Dare una spiegazione intuitiva della diversità tra i due casi precedenti.

(1) $\Omega = \{(w_1, w_2) \text{ t.c. } w_i, w_j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ $\quad w_i = \frac{1}{6}$ $\quad |\Omega| = 36$

$A = \{\text{la somma fa } 7\} = \{w \in \Omega \mid w_i + w_j = 7\}$ $\quad |A| = 6$ $\quad \mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$

chiamo $B_K = \{\text{il primo lancio esce } K\} = \{w \in \Omega \mid w_1 = K\}$ $\quad |B_k| = 6$

il risultato di un qualsiasi lancio ha prob. $\mathbb{P}(B_k) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$A \cap B_K = \{w \in \Omega \mid w_1 = K,\ w_2 = 7-K\} \Rightarrow |A \cap B_k| = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B_k) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B_k)$

(2)

$A = \{\text{la somma fa } 9\} = \{w \in \Omega \mid w_1 + w_2 = 9\}$ $\quad |A| = 4$ $\quad \mathbb{P}(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

chiamo $B_K = \{\text{il primo lancio esce } K\} = \{w \in \Omega \mid 3 \leq K\} \Rightarrow |B_K| = 4 \Rightarrow \mathbb{P}(B_K) = \frac{1}{6}$

$A \cap B_K = \{\text{il primo lancio esce } K \geq 3 \text{ e il secondo } 9-K\} \Rightarrow |A \cap B_K| = 4$

$\mathbb{P}(A \cap B_K) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B_K) = \frac{1}{54}$

(3) sono differenti perchè che la somma sia 6, può accadere a prescindere dal risultato del primo lancio, che sia 9 invece, c'è necessità che il primo lancio faccia $K \geq 3$.