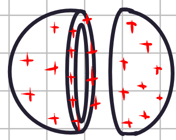
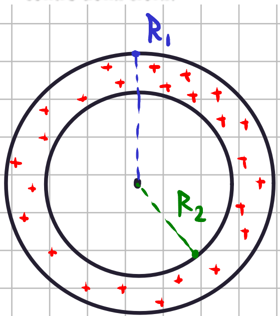
[2] Nel vuoto, una sfera di raggio R_1 ha una cavità centrale di raggio R_2 ($R_2 < R_1$). Una carica q è uniformemente distribuita nella regione di spazio compresa tra R_1 e R_2. Determinare il campo elettrico in funzione della distanza r dal centro della sfera.





Uso la legge di Gauss per calcolare E a dist. r dal centro.

Denoto S_r la superficie sferica di raggio r.

Se $r < R_2$, $\oint_{S_r} \bar{E}\,d\bar{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot$ carica interna, ma non ci sono cariche interne a R_2, quindi $\oint_{S_r} \bar{E}\,d\bar{s} = 0 \Rightarrow \boxed{E = 0}$ se $r < R_2$.

Se $r > R_1$, la carica interna a S_r e' tutta q, quindi $\oint_{S_r} \bar{E}\,d\bar{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

Bisogna calcolare $\oint_{S_r} \bar{E}\,d\bar{s}$, ma in ogni punto della superfice $\bar{E}$ e' normale a $d\bar{s} \Rightarrow \oint_{S_r} E\,ds = 4\pi r^2 E$ allora $4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}}$

Voglio ora, per $R_2 \leq r \leq R_1$, calcolare il volume in cui e' contenuta la carica. $q_{int} = \iiint_{\tau_s} dq = \lambda \iiint_{\tau_s} d\tau$ si cambia variabile di integrazione considerando la sfera infinitesima $ds = 4\pi r^2 dr$. $q_{int}(S_r) = \lambda \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{R_2}^{r} 4\pi x^2\,dx = \lambda \frac{4\pi}{\varepsilon_0}\left[\frac{r^3}{3} - \frac{R_2^3}{3}\right]$

Quindi $\oint_{S_r} \bar{E}\,d\bar{s} = \lambda \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \cdot \frac{r^3 - R_2^3}{3} \Rightarrow E\,4\pi r^2 = \lambda \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \cdot \frac{r^3 - R_2^3}{3} \Rightarrow E = \frac{r^3 - R_2^3}{3 \cdot r^2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \lambda$

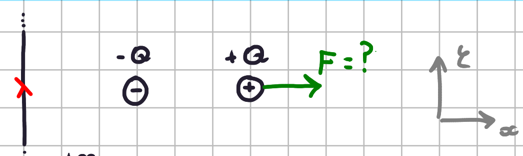
Voglio esplicitare λ. $V\lambda = q \Rightarrow \lambda = \frac{1}{V} \cdot q$ $\quad V = \int_{R_2}^{R_1} 4\pi x^2\,dx = 4\pi\left[\frac{R_1^3}{2} - \frac{R_2^3}{2}\right]$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{\frac{R_1^3}{3} - \frac{R_2^3}{3}} \Rightarrow E = \frac{r^3 - R_2^3}{3 \cdot r^2 \cdot \varepsilon_0} \frac{q}{4\pi} \frac{1}{\frac{R_1^3}{3} - \frac{R_2^3}{3}} = \boxed{\frac{q}{r^2 \varepsilon_0 4\pi} \cdot \frac{r^3 - R_2^3}{R_1^3 - R_2^3}}$$

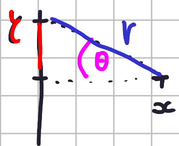
---

[3] A distanza a da una distribuzione lineare uniforme infinitamente estesa di carica elettrica avente densità λ, è posta una carica puntiforme $-Q$. Si chiede la forza che si esercita su una carica puntiforme $+Q$ posta a distanza $2a$ dal filo, sulla direzione radiale uscente dal filo e passante per la carica $-Q$. ($a = 1\,\text{cm}$, $\lambda = +10\,\text{nC/m}$, $Q = 1\,\text{nC}$)

La situazione e' illustrata in figura



Calcolo la forza esercitata dal filo : $E\cos\theta = E_x(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{r^2}\,dz\cos\theta$ sia θ l'angolo fra $\hat{r}$ e l'asse x



$\Rightarrow r\cos\theta = x \Rightarrow r^2 = \frac{x^2}{\cos^2\theta}$ inoltre $\frac{z}{x} = \tan\theta$ quindi

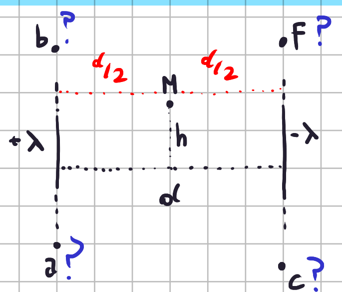
$$dz = x\,d(\tan\theta) = \frac{x}{\cos^2\theta}\,d\theta \Rightarrow E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{\cos^2\theta}{x^2} \cdot \frac{x}{\cos^2\theta}\,d\theta\,\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta =$$

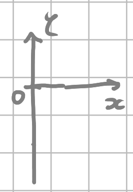
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x} 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} \Rightarrow F = q\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 2a} = \frac{10}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 0.01} = \frac{250}{\pi\varepsilon_0}\,nN \Rightarrow F_{tot} = F + \frac{-2q}{4\pi\varepsilon_0}a$$

$$= \frac{250}{\pi\varepsilon_0} - \frac{50}{\pi\varepsilon_0} = \boxed{\frac{200}{\pi\varepsilon_0}}\,nN$$

[4] Due distribuzioni rettilinee indefinite di carica, nel vuoto, sono tra loro parallele a distanza d e hanno una densità lineica di carica $+\lambda$ e $-\lambda$, rispettivamente. Determinare il vettore campo elettrico in un punto M equidistante dai fili, a distanza h dal loro piano. ($\lambda = 1\,\mu\mathrm{C/m}$, $d = 2\,\mathrm{cm}$, $h = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$)

La situazione e' quella illustrata in figura →





$$dE'(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda\,dy}{y^2+\frac{1}{4}d^2}$$

$$r = \sqrt{y^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

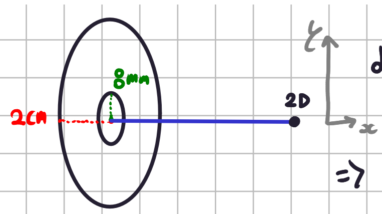
$$\Rightarrow E'(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{1}{y^2+\frac{1}{4}d^2}\,dy = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{d}\arctan\left(\frac{2b}{d}\right) - \frac{2}{d}\arctan\left(\frac{2a}{d}\right)\right]$$

a, b, c, F ignoti

$$\boxed{E(M) = E' + E''}$$

$$\Rightarrow E''(M) = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_c^F \frac{1}{y^2+\frac{1}{4}d^2}\,dy = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{d}\arctan\left(\frac{2F}{d}\right) - \frac{2}{d}\arctan\left(\frac{2c}{d}\right)\right]$$

[5] Una moneta metallica di diametro esterno $D = 2\,\mathrm{cm}$, forata al centro con foro di diametro $d = 8\,\mathrm{mm}$ e sufficientemente sottile da poter trascurare lo spessore, possiede una carica $Q = 5\,\mathrm{pC}$ disposta uniformemente sulla sua superficie. Si determini il valore del campo elettrico prodotto dalla carica presente sulla moneta in un punto dell'asse a distanza $L = 2D$ dal piano della moneta.

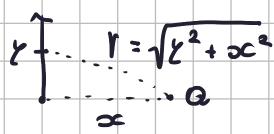


$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dS}{r^2}$$

considero $dS = 2\pi y\,dy$ anello di spessore infinitesimo

$$\Rightarrow E = \int_d^D \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^3}\,2\pi y\,dy$$

calcolo r :



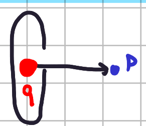
$$\Rightarrow E = \frac{2\pi\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_d^D \frac{y}{(y^2+x^2)^{3/2}}\,dy \Rightarrow \begin{cases} t = x^2+y^2 \\ dt = 2y\,dy \\ y\,dy = \frac{dt}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = d \Rightarrow t = x^2+d^2 \\ y = D \Rightarrow t = x^2+D^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2\pi\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x^2+d^2}^{x^2+D^2} \frac{1}{2}\,\frac{1}{t^{3/2}}\,dt = \frac{\lambda x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+D^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+d^2}}\right]$$

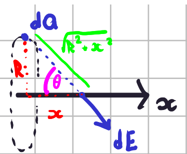
calcolo in $x = 2D \Rightarrow$

$$\frac{\lambda D}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{3D^2}} - \frac{1}{\sqrt{2D^2+d^2}}\right] = \boxed{\frac{5\cdot10^{-12}\cdot 2\cdot10^{-2}}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{3\cdot2\cdot10^{-4}}} - \frac{1}{\sqrt{2\cdot2\cdot10^{-4}+8\cdot10^{-6}}}\right]}$$

[6] Una carica $q = 20\,\mathrm{nC}$ è distribuita uniformemente lungo una circonferenza di raggio $R = 9\,\mathrm{cm}$; al centro O della circonferenza è posta una carica puntiforme $Q = -100\,\mathrm{nC}$. Calcolare il lavoro necessario per portare la carica Q dal punto O al punto P, posto sull'asse della circonferenza, a distanza $d = R^{0.5}$ da O.



Si vuole trovare il valore di $\vec{E}$ lungo il segmento OP.



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dl}{\sqrt{x^2+R^2}} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_C dE_x \Rightarrow \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{dl}{r^2}\cos\theta$$

$\Rightarrow$ r e θ non dipendono da dl $\Rightarrow$ $E = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\cos\theta}{r^2}\displaystyle\int_C dl = \dfrac{\cos\theta\cdot q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

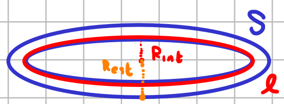
Si vuole esprimere in funzione di x

$$r\cos\theta = x \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \frac{xq}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{xq}{(R^2+x^2)^{3/2}}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow L = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{R^{0.5}} \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\,dx =$$

$$= \boxed{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{R^2+R}} + \frac{1}{R}\right]}$$

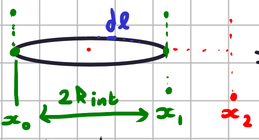
[7] Un tubo metallico, da considerarsi infinitamente lungo con raggio interno R_{int} ed esterno R_{est}, viene caricato con una carica che si dispone con densità per unità di lunghezza uniforme pari a λ. Scrivete le espressioni sia del campo elettrico, sia del potenziale elettrostatico in funzione della distanza r dall'asse del tubo per $0 < r < \infty$

$dQ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2}$ bisogna integrare sul tubo, posso considerare degli anelli infinitesimi



e poi integrare sulla lunghezza del tubo.

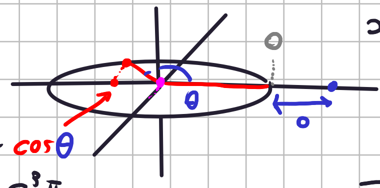
campo anello inf: $\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_\ell \frac{d\ell}{r^2} =$



$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{1}{x^2}\,d\ell$ bisogna trovare

r dipende da dℓ

la relazione fra dℓ ed x.



$x + R_{int}\cos\theta$ per $\theta\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$x + R_{int} + R_{int}\cos\theta$ per $\theta\in[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$

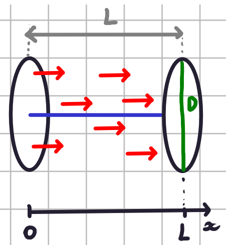
$$\Rightarrow \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(x+R_{int}\cos\theta)^2}d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{1}{(x+R_{int}+R_{int}\cos\theta)^2}d\theta\right]$$

NON SO COME CONTINUARE

[8] Due cariche puntiformi q_1 e q_2 sono poste nel vuoto a una distanza d l'una dall'altra. Calcolare il lavoro che è necessario fare per ridurre la distanza di separazione fino al valore $d/2$.

$V_1(d) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{d}$ $\quad V_1(\frac{d}{2}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{d} \Rightarrow L = \Delta U = q_2\Delta V = \boxed{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{d}}$

[10] Un filo isolante con carica distribuita uniformemente con densità lineica $\lambda = 70\,\mathrm{nC\cdot m^{-1}}$ è inserito e teso tra le armature circolari di un condensatore sottile, carico a $V = 2500\,\mathrm{V}$, parallelamente a queste e passante per il loro asse comune. Se su di esso si esercita una forza di modulo $F = 2.5\,\mathrm{mN}$, si chiede quale sia il diametro D delle armature, sapendo che esse distano di un tratto $L = 3\,\mathrm{mm}$. (Si trascurino gli effetti di bordo del condensatore)



Voglio trovare E all'interno del condensatore, so che il campo generato da un disco carico di raggio a e' $E(x) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma x\left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$

quindi $E(x) = \frac{\sigma x}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}D^2}}\right)$

$\frac{x}{x}$ perche' l'integrale e' su $[0,L]$

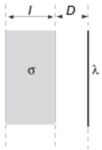
$$dF = dQ\cdot E = \lambda dx\cdot E \Rightarrow F = \lambda\int_0^L \frac{\sigma x}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}D^2}}\right)dx = \frac{\lambda\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^L \frac{x}{|x|} + \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}D^2}}\,dx =$$

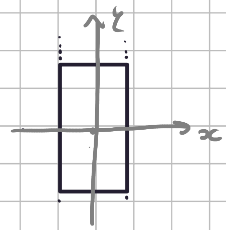
$$\frac{\lambda\sigma}{\varepsilon_0}L + \frac{\lambda\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^L\frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}D^2}}dx = \frac{\lambda\sigma}{\varepsilon_0}L + \frac{\lambda\sigma}{\varepsilon_0}\left[\sqrt{\frac{1}{4}D^2+L^2} - \frac{D}{2}\right] = \frac{\lambda\sigma}{\varepsilon_0}\left[L + \sqrt{\frac{1}{4}D^2+L^2} - \frac{D}{2}\right]$$

RISOLVERE PER D

Se il condensatore si assume ideale, $F = QE = \lambda D\frac{V}{L} \Rightarrow D = \frac{L}{\lambda V}F \Rightarrow D = \boxed{4.3\ \mathrm{cm}}$

[12] Un filo rettilineo indefinito carico con densità lineica di carica λ, si trova nel vuoto a una distanza D dal bordo più vicino di una striscia rettilinea indefinita, di spessore trascurabile e larga l, complanare con il filo e a esso parallela avente densità di carica areica σ. Si ricavi la forza per unità di lunghezza che viene esercitata sul filo.

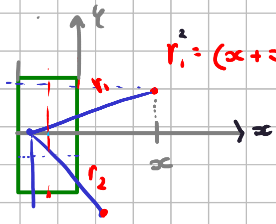




$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dQ}{r^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ds}{r^2}$$

Voglio calcolare il campo E generato dalla striscia

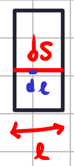
$$= dE(x,y) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}ds \Rightarrow E(x,y) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{1}{x^2+y^2}dS =$$



$r_1^2 = (x+x_0)^2+y^2$

y Fissato

integro su un tratto dS



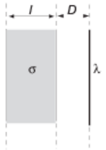
$$dE(x,y) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{ds}\frac{1}{r^2}\,dl$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{-l}\frac{1}{(x+x_0)^2+y^2}\,dx_0 = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0 y}\left[\arctan\left(\frac{x-l}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$

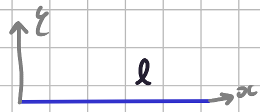
$$= E = \int_0^{-r}\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0 y'}\left[\arctan\left(\frac{x-l}{y'}\right) - \arctan\left(\frac{x}{y'}\right)\right]dy_0$$

$y' = (y-y_0)^2$

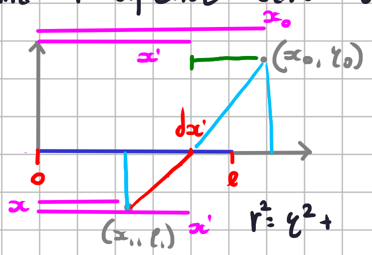
[12] Un filo rettilineo indefinito carico con densità lineica di carica λ, si trova nel vuoto a una distanza D dal bordo più vicino di una striscia rettilinea indefinita, di spessore trascurabile e larga l, complanare con il filo e a esso parallela avente densità di carica areica σ. Si ricavi la forza per unità di lunghezza che viene esercitata sul filo.



Si consideri un Filo di lunghezza l



si vuole calcolare E_l in ogni punto del piano x,y. $dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dl}{r^2} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{dl}{r^2}$ voglio integrare da 0 ad l ma r dipende dalla variabile di integrazione



$r^2 = y^2 +$

per $x \geq l$ $\quad E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l \frac{dx'}{(x-x')^2+y^2}$

per $0 \leq x \leq l$ $\quad E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l \frac{dx}{x^2+y^2}$

per $x < 0$ $\quad E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l \frac{dx'}{(x+x')^2+y^2}$