

Marco Casu

# ♪ Fisica ♪



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica  
Dipartimento di Informatica

Questo documento è distribuito sotto la licenza [GNU](#), è un resoconto degli appunti (eventualmente integrati con libri di testo) tratti dalle lezioni del corso di Fisica per la laurea triennale in Informatica. Se dovessi notare errori, ti prego di segnalaralmeli.



# INDICE

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
1.1	Il metodo scientifico . . . . .	4
1.2	Spostamento, Velocità e Grandezze Fisiche . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Cinematica</b>	<b>9</b>
2.1	I Moti . . . . .	10
2.1.1	Rettilineo Uniforme . . . . .	10
2.1.2	Uniformemente Accelerato . . . . .	10
2.1.3	Caduta dei Gravi . . . . .	11
2.1.4	Moto del Proiettile . . . . .	12
2.1.5	Moto Circolare Uniforme . . . . .	13
2.1.6	Moto Armonico . . . . .	16
2.2	Moti Relativi . . . . .	17
2.3	Esercizi sul Punto Materiale . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Dinamica</b>	<b>21</b>
3.1	Forze . . . . .	21
3.1.1	Forza Elastica . . . . .	22
3.1.2	Reazione Normale . . . . .	22
3.1.3	Attrito . . . . .	23
3.2	Impulso e Lavoro . . . . .	25
3.2.1	Lavoro ed Energia Potenziale . . . . .	26
3.2.2	Forze Conservative . . . . .	27
3.2.3	Potenza . . . . .	31
3.3	Forze Apparenti . . . . .	33
3.4	Momento . . . . .	35
3.5	Sistemi di Punti Materiali . . . . .	38
3.5.1	Urti . . . . .	39
3.5.2	Sistemi Continui . . . . .	43
3.5.3	Rotazione di un Corpo Rigido . . . . .	44
3.6	Rotolamento . . . . .	45
3.7	Sistemi Equivalenti di Forze . . . . .	47
3.8	Esercizi sulla Meccanica . . . . .	49
3.9	Fluidi e Spinta di Archimede . . . . .	50

---

<b>4 Il Campo Elettrico</b>	<b>51</b>
4.1 La Forza Elettrica . . . . .	51
4.1.1 Campi Elettrici Noti . . . . .	53
4.2 La Legge di Gauss . . . . .	58
4.2.1 Alcune Applicazioni . . . . .	61
4.3 Lavoro e Circuitazione del Campo Elettrico . . . . .	62
4.3.1 Calcolo Esplicito del Potenziale . . . . .	64
4.3.2 Esempi . . . . .	67
4.4 Conduttori . . . . .	68
4.4.1 Effetto delle Punte . . . . .	69
4.5 Potenziale e Momento del Dipolo . . . . .	70
4.6 Capacità dei Conduttori . . . . .	72
4.6.1 Condensatori ed Induzione Completa . . . . .	72
4.6.2 Collegamento di Condensatori . . . . .	74
4.6.3 Energia del Condensatore . . . . .	76
<b>5 Corrente Elettrica</b>	<b>79</b>
5.1 Intensità di Corrente . . . . .	79
5.1.1 Collegamento di Resistenze . . . . .	81
5.2 Campo Elettromotore . . . . .	82
5.3 Risoluzione di Circuiti . . . . .	85
5.4 Potenza e Andamento del Circuito . . . . .	88
<b>6 Il Campo Magnetico</b>	<b>92</b>
6.1 Sorgenti del Campo Magnetico . . . . .	93
6.1.1 Campi Generati da Fili . . . . .	94
6.2 Legge di Ampere . . . . .	96
6.2.1 Definizione di Ampere . . . . .	100
6.3 Flusso del Campo Magnetico . . . . .	101
6.3.1 Campo Elettrico e Magnetico del Solenoide	104
6.4 Induttanza . . . . .	107
6.4.1 Autoinduttanza del Solenoide . . . . .	108
6.5 Induttore nel Circuito . . . . .	108
6.6 Legge di Ampere-Maxwell . . . . .	113
<b>7 Onde Elettromagnetiche</b>	<b>115</b>
7.1 Forme Differenziali delle Equazioni di Maxwell . . . . .	115
7.1.1 Divergenza e Rotore . . . . .	115
7.2 Equazione delle Onde . . . . .	121
7.2.1 Soluzione : Onda Piana . . . . .	123
7.2.2 Energia delle Onde . . . . .	128
7.2.3 Vettore di Poynting . . . . .	129

## CAPITOLO

# 1

## INTRODUZIONE

### 1.1 Il metodo scientifico

La nascita del metodo scientifico è dovuta a Galileo Galilei, se i filosofi greci stabilivano leggi empiriche senza necessariamente dimostrarle, Galileo introdusse una verifica sperimentale a quelle che erano le sue digressioni.

Un **esperimento**, è una verifica sperimentale delle ipotesi, utile a ricavare valori numerici oggettivi per le misure delle grandezze fisiche. L'avvento del cannocchiale permise un osservazione più accurata dei corpi celesti, questi che venivano crediti perfetti, si rivelarono per quello che sono, la Luna con i suoi accavallamenti e "mari", mostrava una conformazione della sua crosta tutto fuorché perfetta. Oltre al già

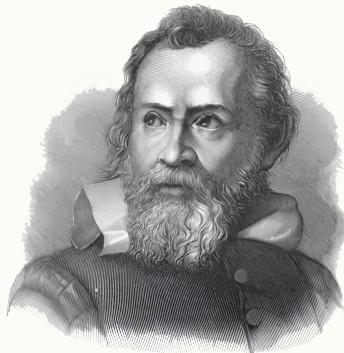


Figura 1.1: Galileo Galilei

citato cannocchiale, erano necessari ulteriori strumenti per le osservazioni dei corpi celesti, era necessario misurare in maniera precisa ed affidabile lo scorrere del tempo. Misurare il tempo vuol dire confrontare due eventi, ad esempio, il sorgere del sole con il movimento periodico riferito ad un misuratore (come l'orologio).

Galileo per le sue misure realizzò un orologio ad acqua, utilizzando un recipiente nella quale riporre un piccolo foro sul fondo, in modo tale che l'acqua cadesse a gocce a velocità costante, così facendo, lo scorrere del tempo era proporzionale al volume dell'acqua perso dal recipiente.

Una **grandezza fisica** è un entità alla quale si attribuisce una specifica definizione, utilizzabile per

descrivere un fenomeno fisico, per tali entità devono valere i criteri di uguaglianza e sommabilità.

Uno degli argomenti su cui si soffermò Galileo fu il *moto dei gravi*, in particolare il moto dei corpi in caduta libera. Secondo la fisica aristotelica del tempo, un corpo tanto più pesante era, tanto più rapidamente cadeva.

Galileo fu critico nei riguardi di questa visione, osservò che in realtà, ogni corpo cade verso il suolo con la stessa accelerazione, il motivo per il quale una piuma cade più rapidamente di una sfera di piombo non riguarda la loro massa, bensì la resistenza dell'aria nei confronti del loro materiale e della loro forma. Trovò inoltre che la distanza percorsa durante la caduta di un oggetto è proporzionale al quadrato del tempo impiegato per percorrerla.

Galileo con un esperimento riguardante i piani osservò il seguente fatto : *se si lascia scivolare un corpo su un piano inclinato ad altezza  $h$  per poi farlo risalire su un altro piano inclinato, questo tendeva a risalire fino alla stessa altezza  $h$ .*

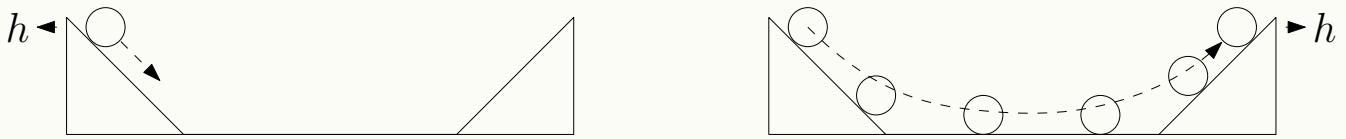


Figura 1.2: caduta sul piano inclinato

Inoltre, notò che questo fenomeno non è condizionato dal seno dell'angolo del piano, bensì esclusivamente dall'altezza.

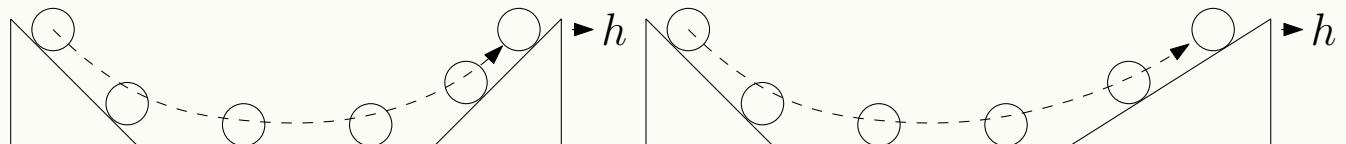


Figura 1.3: inclinazioni differenti

Per osservare tale risultato dovette ridurre le azioni spurie dell'attrito dell'aria. Più il percorso era liscio, più l'attrito risultava debole, e più il corpo tendeva ad avvicinarsi all'altezza originale  $h$ . Con tale ragionamento ipotizzò che se l'attrito dovesse essere stato nullo, allora il corpo sarebbe tornato precisamente all'altezza  $h$ .

Dato questo per vero, riducendo il valore dell'angolo sarebbe stato possibile far percorrere al corpo una distanza maggiore. Se il secondo piano avesse avuto inclinazione nulla, allora il grave avrebbe continuato a muoversi in avanti a velocità costante.

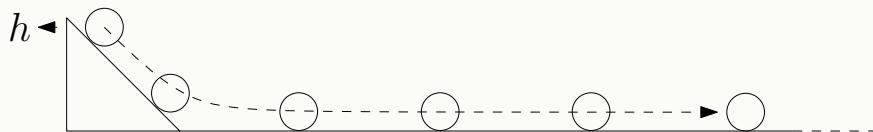


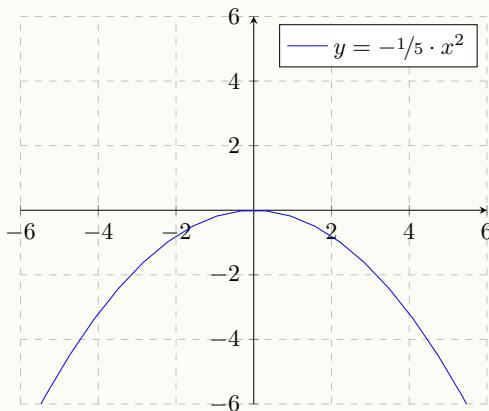
Figura 1.4: inclinazione nulla

Tale principio è noto come **legge d'Inerzia**, eliminando gli attriti, lo stato di moto naturale inalterato di un corpo è quello di moto rettilineo uniforme (a velocità costante) indefinitamente.

Essendo la scienza sempre stata impiegata anche in ambito bellico, Galileo studiò il moto dei proiettili,

che fino a quel momento si credeva fosse costantemente orizzontale, fino al momento in cui il proiettile perdeva il suo "impeto" cadendo a terra. Egli si rese conto che i proiettili sono soggetti sia alla forza impressa dal colpo (orizzontale), sia a quella verticale impressa verso il basso.

La forza impressa dal colpo gli dà una velocità costante, in quanto non è soggetto ad ulteriori accelerazioni orizzontalmente, quella verticale invece provoca un moto uniformemente accelerato, la distanza percorsa in verticale è proporzionale al quadrato del tempo impiegato a percorrerla, la combinazione dei due moti risulta in un arco di parabola.



Galileo, chiamò  $x$  la direzione orizzontale, ed  $y$  quella verticale, partendo da  $(x, y) = (0, 0)$ , e sapendo che lo spazio percorso in  $x$  è proporzionale al tempo, mentre quello percorso in  $y$  è proporzionale al quadrato del tempo, si ha

$$x = a \cdot t \quad y = b \cdot t^2$$

Con alcuni passaggi algebrici si trova esattamente la nota equazione della parabola

$$y = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$$



## 1.2 Spostamento, Velocità e Grandezze Fisiche

Il **moto**, è uno dei fenomeni fisici più classici, che necessita di una definizione e rappresentazione formale, è il cambiamento di una posizione rispetto al tempo.

Un classico esempio di sistema di riferimento è il piano cartesiano, in cui un punto nello spazio, è identificato da tre coordinate

$$(x(t), y(t), z(t))$$

In funzione del tempo  $t$ . Può essere rappresentato anche da un vettore posizione  $\bar{r}(t)$ , descritto dalla lunghezza e dagli angoli rispetto gli assi del piano e la proiezione delle sue componenti, nel caso bidimensionale, sia  $r$  il modulo del vettore  $\bar{r}$ :

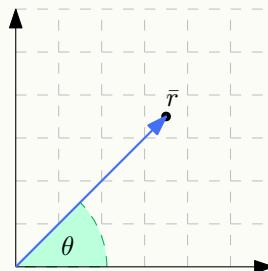


Figura 1.5:  $\bar{r} = (r, \theta)$

Risulta possibile passare dalle coordinate cartesiane a quelle descritte con l'angolo tramite le seguenti trasformazioni

$$\begin{cases} r \cos(\theta) = x \\ r \sin(\theta) = y \end{cases}$$

Inoltre

$$r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = x^2 + y^2$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctan(y/x)$$

Le componenti di  $\bar{r}$  dipendono dal sistema di riferimento. Posso definire uno *spostamento nel tempo*, tramite il vettore  $\bar{r}$  in un istante  $t$ , ed il medesimo vettore in un istante  $t + \Delta t$ , dove  $\Delta t$  rappresenta una variazione temporale. Una volta definiti i vettori  $\bar{r}(t)$  e  $\bar{r}(t + \Delta t)$ , si definisce il **vettore spostamento** come la loro differenza algebrica, ossia  $\Delta\bar{r} = \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)$ .



Si vogliono rappresentare i vettori in maniera più formale, rispetto che alla classica notazione  $\bar{v} = (x, y, z)$ . Si fa uso dei versori

$$\bar{i} = (1, 0, 0) \quad \bar{j} = (0, 1, 0) \quad \bar{k} = (0, 0, 1)$$

per definire un vettore come somma dei versori scalati con appositi coefficienti, che rappresentano le componenti del vettore :

$$\bar{v} = (x, y, z) = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

Ogni componente della somma è la proiezione del vettore su uno dei tre assi. Si osservi come il vettore spostamento non dipende dal sistema di riferimento.

Il vettore spostamento  $\Delta\bar{r}$  varia a sua volta nel tempo, descrivendo quindi il moto di un punto, la **velocità media** di tale spostamento si definisce tramite il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta\bar{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}$$

Si può definire anche la velocità media scalare, se lo spostamento avviene su un percorso già definito, e non è necessaria informazione sulla direzione, è possibile rappresentarlo con uno scalare  $s(t)$ , e  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  rappresenta la velocità media scalare.

La velocità media non è molto precisa come informazione, in quanto non descrive il moto di un corpo (la sua traiettoria) a pieno, si vuole quindi dare una misura di una velocità *istantanea*, si fa quindi tendere a zero la differenza di tempo :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}$$

Tale grandezza si denota  $\frac{d\bar{r}}{dt}$ , è la derivata dello spostamento rispetto al tempo, verrà nominata semplicemente **velocità**, e denotata  $\bar{v}$ , rappresenta lo spostamento istantaneo ed è tangente alla curva dello spostamento. Si definisce anche la velocità scalare  $\frac{ds}{dt}$ , ed è il modulo della velocità.

Una volta definite delle quantità come spostamento e velocità, è necessario definire delle *grandezze fisiche* ed introdurre delle *unità di misura*. Il vettore  $\bar{r}$  ha le dimensioni di una lunghezza, la dimensione lunghezza [ $l$ ] è espressa in metri  $m$ , il sistema internazionale definisce

$$(m, kg, s) = (\text{metri}, \text{kilogrammi}, \text{secondi})$$

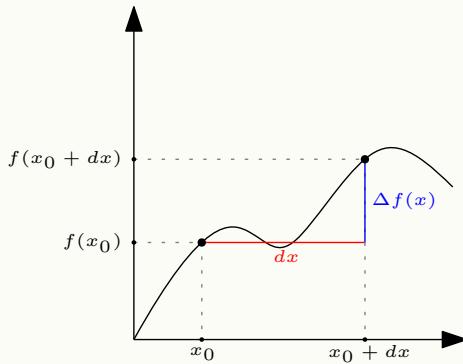
La dimensione del tempo [ $t$ ] è espressa in secondi  $s$ . Esistono alcune grandezze dette adimensionali, un esempio sono gli angoli, misurati in gradi o radianti.

La velocità, è una grandezza derivata, essendo un rapporto fra lo spostamento ed il tempo, si misura in

metri al secondo :  $m/s$ , rappresenta, appunto la distanza in metri percorsa in 1 secondo. Le grandezze possono essere convertite, ad esempio, considerando i kilometri - orari si ha che

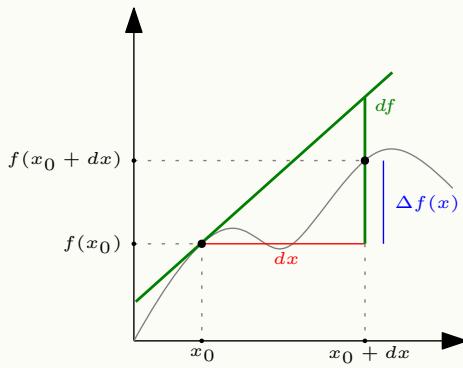
$$1m/s = \frac{10^{-3}}{1/3600} km/h = 10^{-3} \cdot 3600 km/h = 3.6 km/h$$

Introduciamo adesso il concetto di **differenziale**, si consideri una generica funzione  $f(x)$  in un punto  $x_0$ , ed il suo rapporto incrementale per una variazione  $dx$ .



Il segmento denotato  $\Delta f(x)$  rappresenta l'incremento effettivo della funzione, e vale  $f(x_0 + dx) - f(x_0)$ .

Definisco ora il **differenziale** di  $f$  come una **linearizzazione** della funzione, ossia, si considera nel punto  $x_0$  una retta tangente alla curva di  $f$ .



Il differenziale  $df$  da una stima dell'incremento, considerando una funzione lineare (in questo caso bidimensionale, una retta).

Denotando con  $f'$  la derivata di  $f$  si ha

$$df = f' \cdot dx$$

$$\frac{df}{dx} = f'$$

Le funzioni lineari sono più semplici di quelle non lineari, il punto di tale differenziale è che, quando l'incremento  $dx$  tende a zero, l'incremento effettivo della funzione e l'incremento "stimato" dato dal differenziale tendono allo stesso valore.

$$\lim_{dx \rightarrow 0} f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot dx$$

## CAPITOLO

# 2

## CINEMATICA

Si è introdotto il vettore spostamento  $\Delta\bar{r}$ , con la sua relativa formulazione infinitesima di velocità  $\bar{v}$ , come derivata del vettore posizione  $\bar{r}$ . Un'altra grandezza fondamentale nello studio del moto dei corpi è la variazione della velocità, definita come il limite del rapporto incrementale di quest'ultima rispetto al tempo. Tale grandezza prende il nome di **accelerazione**

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a}$$

L'accelerazione  $\bar{a}$ , o  $a$  se riferita ad una grandezza scalare, si misura in  $m/s^2$ , di cui l'unità, indica che ad ogni secondo, la velocità aumenta di  $1m/s$ , ovviamente anche essa può dipendere dal tempo.

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

Si consideri adesso lo spostamento in forma scalare  $s(t)$ , definito su una traiettoria curvilinea già definita

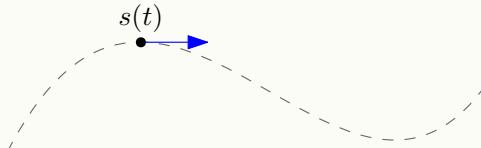


Figura 2.1: velocità scalare

Di quest'ultima ne voglio ricavare la sua versione vettoriale, sia  $\bar{\tau}(t)$  il versore tangente alla curva prestabilita, nell'immagine 2.1, evidenziato in blu. Si avrà che la velocità vettoriale sarà

$$\bar{v}(t) = \dot{s}(t) \cdot \bar{\tau}(t)$$

Appunto sulla notazione :  $\dot{s}$  è la derivata prima di  $s$ .  $\ddot{s}$  è la derivata seconda di  $s$ . A questo punto è possibile riscrivere l'accelerazione nella seguente forma :

$$\bar{a} = \frac{d}{dt} \bar{v}(t) = \ddot{s}(t) \cdot \bar{\tau}(t) + \dot{s}(t) \cdot \dot{\bar{\tau}}(t)$$

Si è quindi divisa l'accelerazione in due componenti distinte, la componente  $\ddot{s}(t) \cdot \bar{\tau}(t)$  è nota come **accelerazione tangenziale** e rappresenta la variazione nel tempo del modulo della velocità. L'altra componente, verrà ripresa in seguito, ha a che fare con la curvatura della traiettoria.

## 2.1 I Moti

### 2.1.1 Rettilineo Uniforme

Il moto rettilineo uniforme, secondo la legge d'Inerzia, descrive il moto naturale degli oggetti quando non sono soggetti a forze. Tale moto è contraddistinto dal fatto che l'accelerazione sia nulla, e la velocità costante, (per semplicità, verranno trattate le grandezze in forma scalare).

$$\frac{dv}{dt} = 0 \implies v = v_0 \text{ costante}$$

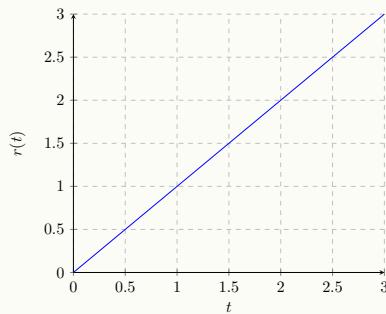
Si può ricavare facilmente l'equazione dello spostamento  $r$  in un lasso di tempo che va da  $t_0$  fissato, ad un  $t$  generico

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} = v &= v_0 \implies dr = v_0 dt \implies \int_{r(t_0)}^{r(t)} dr = \int_{t_0}^t v_0 dt \\ \int_{t_0}^t v_0 dt &= v_0 \int_{t_0}^t dt = v_0(t - t_0) \end{aligned}$$

Si ha che

$$r(t) = r(t_0) + v_0(t - t_0)$$

L'equazione che descrive il moto rettilineo uniforme è lineare



### 2.1.2 Uniformemente Accelerato

La caratteristica del moto uniformemente accelerato è quella di avere un accelerazione costante  $a = a_0$ , si avrà che

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = a_0 &\implies dv = a_0 dt \implies \int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^t a_0 dt \implies \\ v(t) &= v(t_0) + a_0(t - t_0) \end{aligned}$$

Per semplicità, si definisce  $v_0 = v(t_0)$  la velocità iniziale. A questo punto, avendo nota l'equazione della velocità, si ricava la legge oraria, sia  $x_0 = x(t_0)$  la posizione iniziale

$$\frac{dx}{dt} = v \implies \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^t v dt = \int_{t_0}^t v_0 + a_0(t - t_0) dt = v_0 \int_{t_0}^t dt + a_0 \int_{t_0}^t (t - t_0) dt$$

Considero  $t' = t - t_0 \implies dt' = dt$

$$v_0 \int_{t_0}^t dt + a_0 \int_{t_0}^t (t - t_0) dt = v_0 \int_{t_0}^t dt + a_0 \int_0^{t-t_0} t' dt' = v_0(t - t_0) + \left[ \frac{1}{2} a_0 t' \right]_0^{t-t_0}$$

La soluzione oraria è quindi

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 \cdot (t - t_0)^2$$

Essa risulta essere l'equazione della parabola, nel caso più semplice in cui la posizione iniziale è 0, ed il tempo iniziale pure, si ha

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2$$

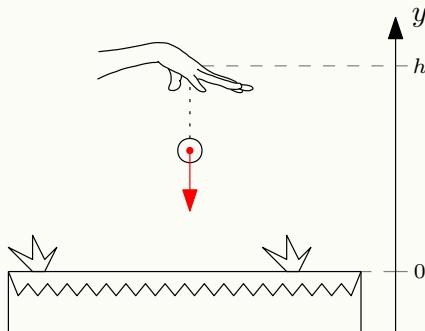
lo spazio percorso è proporzionale al tempo al quadrato.

### 2.1.3 Caduta dei Gravi

La caduta degli oggetti verso il suolo è descritta dal moto uniformemente accelerato. Ogni oggetto nel campo gravitazionale terrestre, all'altezza del mare, subisce un'accelerazione di gravità pari a

$$g \simeq 9.81 \text{ m/s}^2$$

diretta verso il centro della terra.



Definiamo un sistema di riferimento in cui il suolo rappresenta lo zero, ed un corpo viene lasciato cadere da un'altezza  $h$ . Per semplicità, il tempo iniziale  $t_0$  è uguale a 0.

La legge orario che descrive la posizione  $y$  dell'oggetto è la seguente

$$\begin{cases} y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = \frac{dy}{dt} = -gt \end{cases}$$

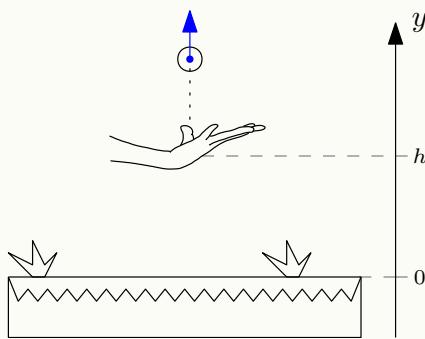
È possibile calcolare l'istante  $t^*$  in cui l'oggetto toccherà il suolo :

$$y(t^*) = 0 \implies h - \frac{1}{2}gt^{*2} = 0 \quad (2.1)$$

$$h = \frac{1}{2}gt^{*2} \quad (2.2)$$

$$2\frac{h}{g} = t^{*2} \quad (2.3)$$

$$t^* = \sqrt{2\frac{h}{g}} \quad (2.4)$$



Se l'oggetto venisse inizialmente lanciato verso l'alto, si avrebbe una velocità iniziale  $v_0$  diversa da zero. La forza di gravità agirà sulla velocità dell'oggetto, facendola diminuire fino a farla diventare negativa, facendolo ricadere verso il suolo.

L'equazione oraria sarebbe

$$\begin{cases} y(t) = h + v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = \frac{dy}{dt} = v_0 - gt \end{cases}$$

È possibile trovare il punto più alto raggiunto dal grave, esso sarà il punto in cui la velocità passerà da essere positiva (l'oggetto si allontana dal suolo) ad essere negativa (l'oggetto si avvicina al suolo), raggiungerà quindi il punto più alto nell'istante  $t^*$  in cui la velocità è nulla.

$$v(t^*) = 0 \implies v_0 - gt^* = 0 \implies t^* = \frac{v_0}{g}$$

La quota massima raggiunta sarà quindi

$$y(v_0/g) = h + v_0 v_0/g - \frac{1}{2} g (v_0/g)^2 = \quad (2.5)$$

$$h + \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \quad (2.6)$$

$$h + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \quad (2.7)$$

È possibile riscrivere l'equazione del moto uniformemente accelerato in funzione dello *spazio percorso* partendo da un punto  $x_0$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v = v_0 + a t \end{cases} \implies x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} (v - v_0) t \implies x - x_0 = \frac{1}{2} (v_0 + v) t$$

#### 2.1.4 Moto del Proiettile

Si vuole modellizzare la traiettoria di un proiettile, sparato con una certa angolazione, si considera quindi il piano cartesiano  $(x, y)$ , e la legge oraria sarà descritta da un vettore  $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$  che ne descrive lo spostamento sui due assi.

Il proiettile è soggetto a due forze, la prima è la velocità orizzontale, data al tempo  $t_0$  dallo sparo, la seconda è l'accelerazione di gravità, che gli conferisce una velocità verticale uniformemente accelerata. Denotiamo  $v_x$  e  $v_y$  le due velocità,  $(x_0, y_0)$  la posizione iniziale, e  $(v_{y0}, v_{x0})$  la velocità iniziale. Per semplicità, l'istante di inizio sarà 0.

$$\begin{cases} y(t) = y_0 + v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y(t) = v_{y0} - g t \end{cases} \quad \text{verticalmente}$$

$$x(t) = x_0 + v_{x0} t \quad \text{orizzontalmente}$$

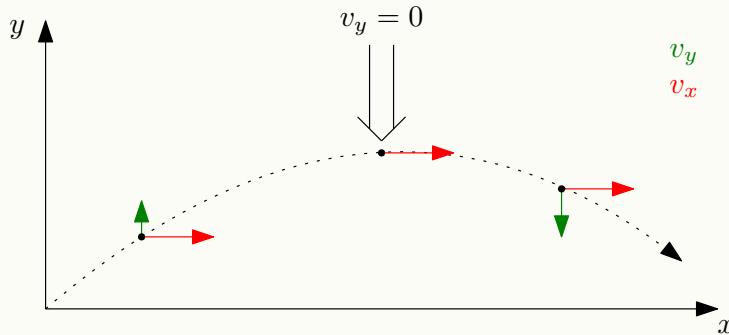


Figura 2.2: moto del proiettile

L'altezza massima si ha nell'istante  $t^*$  in cui  $v_y(t^*) = 0 \implies t^* = \frac{v_{y0}}{g}$ . Con il termine *gittata*, si intende la distanza  $R$  percorsa dal proiettile orizzontalmente, essa è uguale a  $R = v_{x0} \cdot t_{tot}$ , dove  $t_{tot}$  è l'istante in cui il proiettile raggiunge il suolo, terminando la traiettoria e vale  $t_{tot} = 2 \frac{v_{y0}}{g}$ .

$$R = v_{x0} \cdot 2 \frac{v_{y0}}{g}$$

La velocità totale iniziale del proiettile, risulta essere

$$v_0 = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}$$

Si può esprimere la gittata in funzione dell'angolo  $\theta$  in cui si lancia il proiettile rispetto l'asse delle ascisse

$$R(\theta) = 2 \frac{v_0 \sin(\theta) v_0 \cos(\theta)}{g} = 2 \frac{v_0^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{g}$$

A tal punto, si vuole esprimere l'angolo  $\theta$  che massimizza la gittata. Essendo che  $R(\theta)$  descrive la variazione della gittata al variare di  $\theta$ , è necessario trovare l'angolo in cui la derivata di  $R$  si annulla, si considera

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{2v_0^2}{g}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$$

Si pone a zero e si risolve per  $\theta$

$$\frac{2v_0^2}{g}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = 0 \implies (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = 0 \quad (2.8)$$

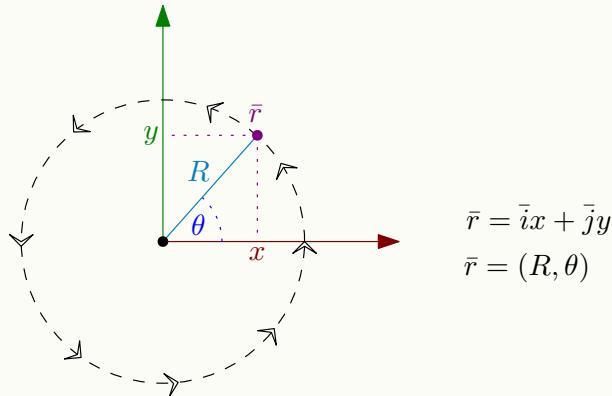
$$(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = 0 \implies \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta) \quad (2.9)$$

$$\cos^2(\theta) = \sin^2(\theta) \implies \theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \quad (2.10)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \quad (2.11)$$

### 2.1.5 Moto Circolare Uniforme

Si vuole descrivere il moto di un corpo, che rotea attorno ad un centro il cui modulo della velocità è costante. È importante specificare che il modulo sia costante, in quanto la velocità costante indica una non-variazione della direzione, invece nel moto circolare, la direzione cambia nel tempo, quindi vi sarà un accelerazione non nulla.



Sia  $\bar{v}$  la velocità, essendo il modulo costante, denoteremo  $|\bar{v}| = v_0$ . Si considera ora la velocità scalare  $s$ , di cui si ricorda

$$\frac{ds}{dt} = v_0$$

Inoltre, sapendo che  $\frac{s}{R} = \theta$ , si pone

$$\frac{ds}{R} = d\theta \implies \frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{d\theta}{dt} = v_0$$

Denotiamo  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ , tale termine descrive la variazione dell'angolo nel tempo ed è denominato **velocità angolare**. Il fatto che la velocità dipenda dal raggio  $R$ , descrive il fatto che a parità di velocità angolare, un oggetto che si muove su un cerchio di raggio minore va meno veloce.

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \qquad \frac{ds}{dt} = R\omega \qquad v_0 = R\omega$$

La velocità angolare si misura in radianti al secondo, essendo i radianti adimensionali, l'unità di misura è  $1/s = 1 Hz$ , detta anche *frequenza*. Si può esprimere anche  $\omega = \frac{2\pi}{t}$  dove  $t$  rappresenta il tempo impiegato per fare un giro intero, detto anche *periodo*. Si pone la frequenza  $\frac{1}{t} = \nu$  e si ha

$$\frac{2\pi}{t} 1/s = 2\pi\nu \text{ Hz}$$

Si ha quindi la velocità angolare  $\omega$ , si vuole però rappresentare il vettore velocità  $\bar{v}$ , serve prima definire il vettore velocità angolare  $\bar{\omega}$ , ossia un vettore il cui modulo è uguale alla velocità angolare

$$|\bar{\omega}| = \omega = \frac{v}{R}$$

Il vettore  $\omega$ , essendo che deve rappresentare una rotazione, deve definire

- la velocità di rotazione
- il piano di rotazione
- il verso della rotazione

Un piano, può essere definito dal suo *vettore normale*, ossia il vettore ortogonale ai due vettori le cui combinazioni lineari generano tutti i punti del piano. Inoltre, il verso di tale vettore, definisce anche il verso di rotazione.

$$\bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{v}$$

rispetta infatti

$$|\bar{\omega} \times \bar{r}| = |\bar{v}| \implies \omega R \sin \theta = v \implies \omega R = v$$

Questo perché  $\bar{\omega}$  e  $\bar{r}$  sono ortogonali, quindi il modulo del prodotto vettoriale equivale al prodotto dei moduli. Si ricordi che il vettore spostamento si muove sempre sul cerchio di raggio  $R$ , per questo  $|\bar{r}| = R$ .

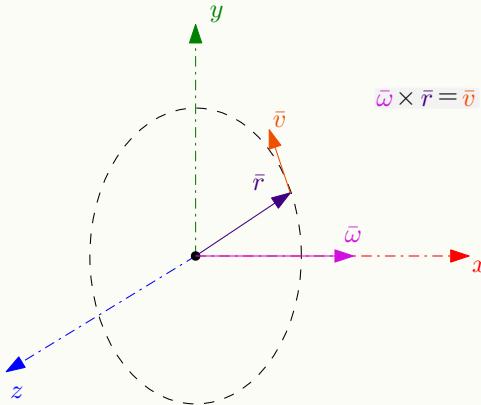


Figura 2.3: vettore velocità angolare

Per convenzione, la rotazione avviene in senso antiorario intorno al vettore, se lo si osserva dal punto diretto dal suo verso.

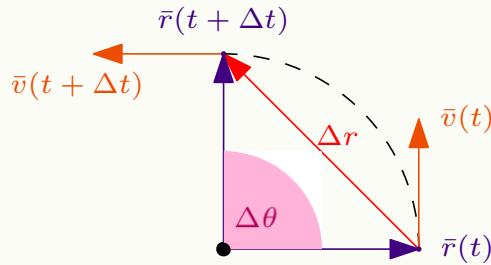


Una volta stabilito il vettore velocità, si vuole trovare l'accelerazione, derivandola

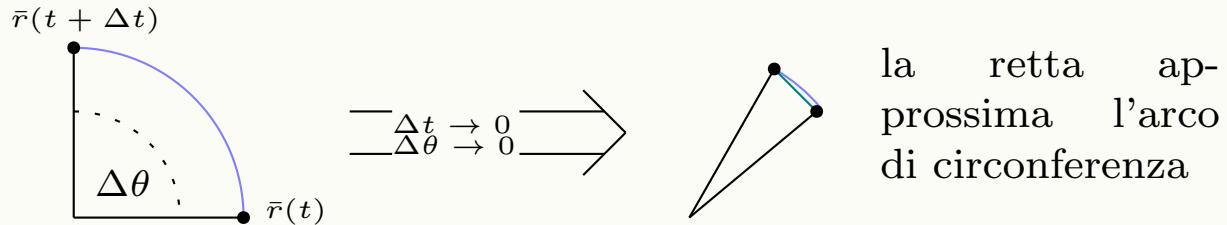
$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)}{\Delta t}$$

Definiamo  $\Delta\theta$  l'angolo formato dal vettore  $\bar{r}(t + \Delta t)$  con il vettore  $\bar{r}(t)$ , definisce la variazione dell'angolo nel tempo, è chiaro che se  $\Delta t \rightarrow 0$  allora  $\Delta\theta \rightarrow 0$ .

Differentemente, il vettore  $\Delta \bar{v} = \bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)$ , tende a puntare al centro del cerchio attorno a cui il punto rotea, il vettore accelerazione sarà quindi sempre diretto verso il polo di rotazione. Trovata la sua direzione, se ne vuole stabilire l'intensità, ossia il suo modulo  $|\bar{a}| = a$ .



Se  $\Delta t$  tende a zero, l'arco di curva fra i punti  $\bar{r}(t)$  e  $\bar{r}(t + \Delta t)$  è approssimabile ad una retta fra i due punti, che sappiamo essere di lunghezza  $|\Delta \bar{r}| = \Delta r$



Inoltre, il rapporto fra  $\Delta r$  e il raggio è proprio uguale all'angolo, quindi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{R} = \Delta \theta$$

Inoltre, anche considerando il vettore  $\Delta \bar{v}$ , esso rispetto al vettore velocità permette di trovare il medesimo angolo

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{v} = \Delta \theta$$

Quindi

$$|\Delta \bar{v}| = v \Delta \theta = \frac{\Delta r}{R} v$$

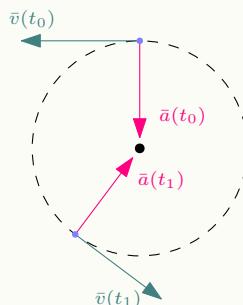
Indicando con  $v$  il modulo di  $\bar{v}$ , si ha che

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta r}{R} v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \frac{v}{R}$$

Appare come secondo termine proprio la derivata dello spostamento

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{R} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v}{R} \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \right) = \frac{v}{R} v \Rightarrow$$

$$\boxed{|\ddot{r}| = a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R}$$



Si ricordi come il vettore accelerazione può essere scritto come somma di due componenti che rappresentano l'accelerazione tangenziale, ossia la variazione del modulo della velocità, e l'**accelerazione normale**, che descrive il variare della direzione della velocità. Nel caso del moto circolare uniforme, l'accelerazione

ha componente tangenziale nulla, è solo normale e diretta verso il centro del cerchio, ed ha intensità  $\frac{v^2}{R}$ .

Quando un moto di un punto  $\bar{r}$  segue una traiettoria curva (ma non circolare uniforme), preso un istante fissato  $t_0$ , l'accelerazione normale è diretta verso il centro del cerchio che approssima la curva nell'istante dato e che contenga  $\bar{r}(t_0)$ , come mostrato in figura 2.5.

A tal punto è possibile descrivere un moto qualsiasi definendo la sua accelerazione normale e tangenziale. Il moto circolare uniforme è il particolare caso in cui l'accelerazione tangenziale è nulla.

$$\begin{cases} \bar{v}(t) = \bar{\omega}(t) \times \bar{r}(t) \\ \bar{a}_t(t) = \frac{d\bar{\omega}}{dt}(t)|\bar{r}|(t) \text{ accelerazione tangenziale} \\ \bar{a}_n(t) = \frac{\bar{v}(t)^2}{\bar{r}(t)} \text{ accelerazione normale} \end{cases}$$

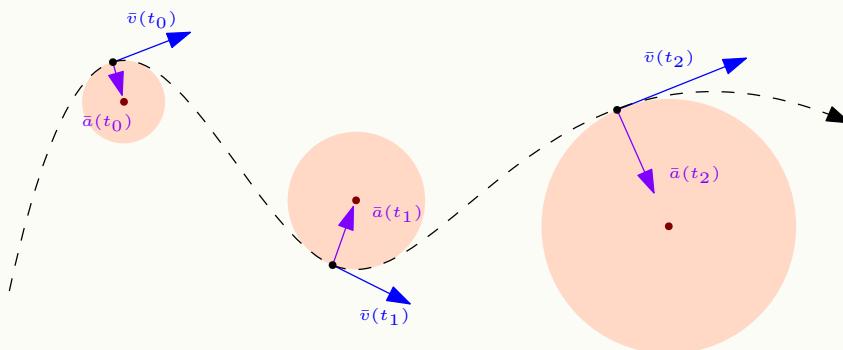


Figura 2.4: Cerchio osculatore

### 2.1.6 Moto Armonico

Il moto armonico vuole descrivere il comportamento oscillatorio e periodico di un punto. Si può descrivere come la proiezione su uno degli assi del moto circolare uniforme.

$$x(t) = R \cos(\theta(t)) = R \cos(\omega t)$$

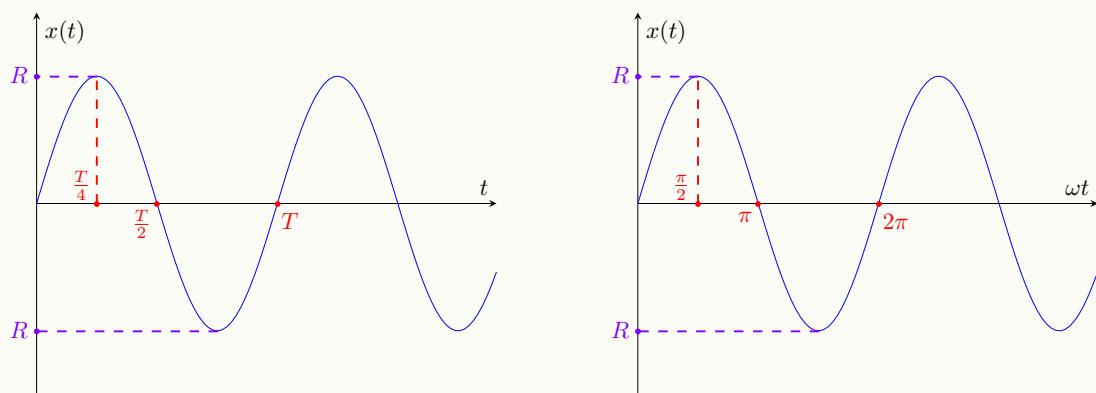


Figura 2.5:  $x(t) = R \cos(\omega t)$

La costante  $R$  si chiama *ampiezza* del moto, mentre  $\omega$  si chiama *pulsazione*. La funzione  $x$  del moto è armonica di periodo  $T$ , ossia  $x(t+T) = x(t)$ . Essendo che l'argomento della funzione trigonometrica deve variare di  $2\pi$  si ha

$$\omega(t+T) - \omega t = 2\pi \implies \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Si definisce  $\nu = \frac{1}{T}$  una nuova grandezza denominata *frequenza* di moto.

Si vuole trovare la velocità, ossia

$$v(t) = \frac{d}{dt} R \cos(\omega t) = -R\omega \sin(\omega t)$$

La velocità massima si ha in  $-R\omega \sin(\omega t) = 0 \implies \sin(\omega t) = 0$ , ossia nei punti in cui  $x$  incontra l'asse delle ascisse. L'accelerazione vale

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} - R\omega \sin(\omega t) = -R\omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 x(t)$$

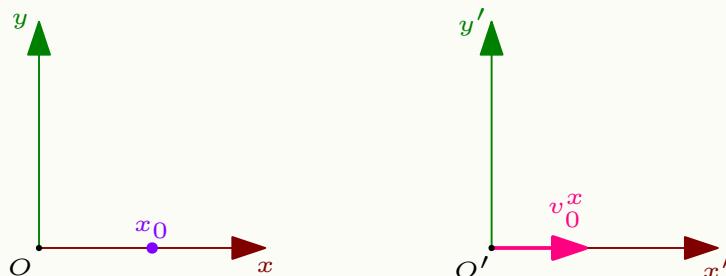
Si noti come l'accelerazione dipende dalla posizione, la sua forza è proprio opposta ad essa, si dice infatti che il moto oscillatorio è dettato da una *forza di richiamo*.



## 2.2 Moti Relativi

La velocità è relativa, le caratteristiche di un punto sono legate al suo sistema di riferimento, e al suo sistema di coordinate. Il moto di un punto può essere osservato diversamente da due sistemi di riferimento differenti.

Si considerino due sistemi di riferimento  $O$  e  $O'$ , per semplicità, siano il piano cartesiano, di coordinate (rispettivamente)  $x, y$  e  $x', y'$ . Supponiamo inoltre, che all'origine dei tempi, essi si trovino nella stessa posizione, e che il sistema  $O'$  si muova con velocità costante  $\bar{v} = (v_0^x, 0)$ .



Vi è poi un punto nello spazio, che secondo il sistema di riferimento  $O$ , è fermo, ed ha coordinate  $x_0$ . Si vuole trovare tale punto nel sistema di riferimento  $O'$ . Tale sistema, si allontana da  $O$  ad una velocità costante  $v_0^x$ , intuitivamente, avendo  $O$  una velocità "assoluta" nulla, vedrà allontanarsi il punto  $x_0$  a velocità  $v_0^x$ . La velocità è de facto relativa al sistema di riferimento, non esiste quindi una velocità assoluta, ma si sceglie arbitrariamente un sistema di riferimento da considerare fisso, l'altro sistema sarà detto "mobile", ed il moto in esso, sarà detto "relativo".

$$x'_0 = x_0 - v_0^x t$$

In generale, la formula per il *passaggio di coordinate* è la seguente:

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \\ t \end{cases} \implies \begin{cases} x' = x - v_0^x t \\ y' = y - v_0^y t \\ z' = z - v_0^z t \\ t' = t \text{ il tempo è assoluto} \end{cases}$$

Dove  $\bar{v}_0 = (v_0^x, v_0^y, v_0^z)$  è la velocità del secondo sistema di riferimento.

Il moto del punto nel sistema di riferimento fisso, visto dal sistema di riferimento relativo, è detto *moto di trascinamento*, nell'esempio trattato, tale moto è una traslazione, si dice infatti moto di trascinamento traslatorio. Denoteremo

$\bar{v}_a$  velocità assoluta  
 $\bar{v}_r$  velocità relativa  
 $\bar{v}_t$  velocità traslatoria

$$\bar{v}_a(t) = \bar{v}_r(t) + \bar{v}_t \quad \text{composizione delle velocità}$$

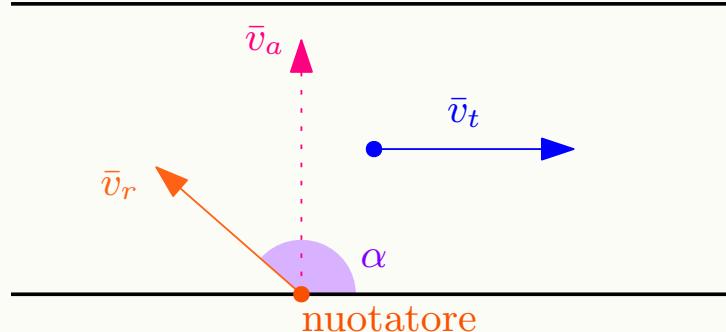
Ne consegue che

$$a_a(t) = \frac{d}{dt} v_a(t) = \frac{d}{dt} v_r(t) + v_t = a_r$$

Se la velocità è costante, l'accelerazione assoluta, come quella relativa risulterà nulla, in tale configurazione il sistema è detto **inerziale**.

**Esempio (nuotatore)** : Si consideri un fiume in cui una corrente spinge chiunque vi sia all'interno con una velocità costante  $\bar{v}_t$ , un nuotatore, vuole attraversare il fiume in linea retta, la sua velocità è  $\bar{v}_r$ , tale che  $|\bar{v}_r| > |\bar{v}_t|$ .

Partendo da una sponda, il nuotatore deve decidere in che direzione nuotare per far sì che la sua velocità si bilanci con la corrente del fiume, facendo risultare il suo moto assoluto  $\bar{v}_a$  in modo che attraversi il fiume in linea retta.



Si vuole trovare l'angolo  $\alpha$  fra la velocità relativa e quella di trascinamento per far sì che la velocità assoluta sull'asse parallelo alle sponde sia nulla.

$$v_r \sin(\alpha) = -v_t \implies \alpha = -\arcsin\left(\frac{v_t}{v_r}\right)$$

Si consideri ora un sistema non inerziale, ossia in cui la velocità di trascinamento dipende dal tempo

$$\bar{v}_a(t) = \bar{v}_r(t) + \bar{v}_t(t)$$

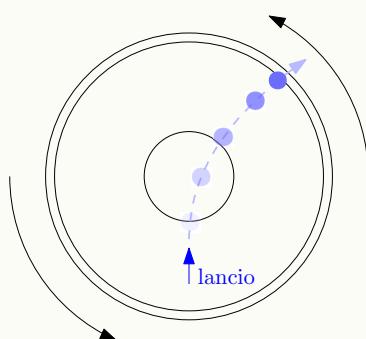
Ne consegue che l'accelerazione di trascinamento non è nulla.

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c$$

Il termine  $\bar{a}_c$  risulta ambiguo, essa è detta *forza di Coriolis*, è una forza apparente (si tratteranno in seguito), e si manifesta quando il sistema di riferimento sta ruotando, si ha che

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$$

Dove  $\bar{\omega}$  è il vettore velocità angolare del sistema in rotazione. Un tipico esempio di manifestazione di tale accelerazione è il seguente : Ci si trova su una giostra che sta ruotando, si lancia un oggetto davanti a se, la traiettoria di tale oggetto non sarà dritta come voluto, ma curverà verso l'esterno della giostra.



## 2.3 Esercizi sul Punto Materiale

### Esercizio 1)

Un punto materiale si muove su una traiettoria rettilinea con un accelerazione  $a = -4t^m/s^2$ , all'istante  $t = 0$ , ha una velocità iniziale di  $v_0 = 2m/s$ . Quanto spazio percorrerà prima di fermarsi? Si vuole trovare la legge della velocità

$$v(t) = \int_0^t a(t) dt + v_0 = -2t^2 + v_0$$

La legge oraria dello spostamento sarà

$$s(t) = \int_0^t v(t) dt = v_0 t - \frac{2}{3}t^3$$

Il punto si fermerà quando la velocità sarà uguale a zero, sia  $t_1$  l'istante in cui ciò avviene

$$v(t_1) = 0 \implies -2t_1^2 + v_0 = 0 \implies t_1 = \sqrt{\frac{v_0}{2}}$$

All'istante  $t_1$ , lo spazio percorso sarà

$$s(t_1) = v_0 t_1 - \frac{2}{3}t_1^3 = v_0 \sqrt{\frac{v_0}{2}} - \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{v_0}{2}}\right)^3$$

Sapendo che  $v_0 = 2m/s$

$$2\sqrt{\frac{2}{2}} - \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{2}{2}}\right)^3 = \frac{4}{3}m$$

### Esercizio 2)

All'istante  $t = 0$  un punto materiale parte da fermo e si mette in moto su una traiettoria circolare di raggio  $R = 225m$ , continua il suo moto fino all'istante  $t_1 = 10s$ , la velocità del punto, cresce linearmente con il tempo, e all'istante  $t_1$  lo spazio percorso è di  $150m$ . Si determini il modulo dell'accelerazione all'istante  $t_1$ .

Se la velocità cresce linearmente con il tempo, il suo modulo sarà del tipo

$$v(t) = v(0) + a_t t = 0 + a_t t = a_t t$$

dove con  $a_t$  si definisce l'accelerazione tangenziale. La legge dello spostamento è

$$s(t) = s(0) + \int_0^t a_t t dt = \frac{1}{2}a_t t^2$$

L'accelerazione tangenziale è quindi

$$a_t = 2 \frac{s(t)}{t^2}$$

All'istante  $t_1$ , l'accelerazione tangenziale sarà

$$a_t(t_1) = 2 \frac{s(t_1)}{(t_1)^2} = 2 \frac{150}{(10)^2} = 3m/s^2$$

È nota la formula dell'accelerazione normale

$$a_n(t_1) = \frac{v(t_1)^2}{R} = \frac{v(10)^2}{225} = \frac{3 \cdot 10^2}{225} = \frac{900}{225} = 4m/s^2$$

L'accelerazione sarà quindi

$$a(t_1) = \sqrt{a_t^2(t_1) + a_n^2(t_1)} = \sqrt{9 + 16} = 5m/s^2$$

**Esercizio 3)**

Un aereo vola con velocità costante  $v_0$ , seguendo una rotta rettilinea inclinata verso il basso di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzonte. Se il pilota volesse centrare un bersaglio a terra sganciando una massa puntiforme da una quota  $h$ , a quale distanza  $d$  dal bersaglio dovrebbe sganciarla?

Ci si vuole assicurare che, la bomba, la cui velocità dipenderà da quella iniziale data dall'aereo, e dall'accelerazione di gravità, incroci l'asse delle ascisse nel punto del bersaglio, che dista  $d$  dall'aereo. Si vuole far sì che tale bomba percorra una distanza  $d$  sull'asse delle ascisse, ed una distanza  $h$  sull'asse delle ordinate. La velocità  $\bar{v} = (v_x, v_y)$  di tale bomba risulta essere

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \alpha \\ v_y(t) = v_0 \sin \alpha + gt \end{cases}$$

Lo spostamento sarà rispettivamente

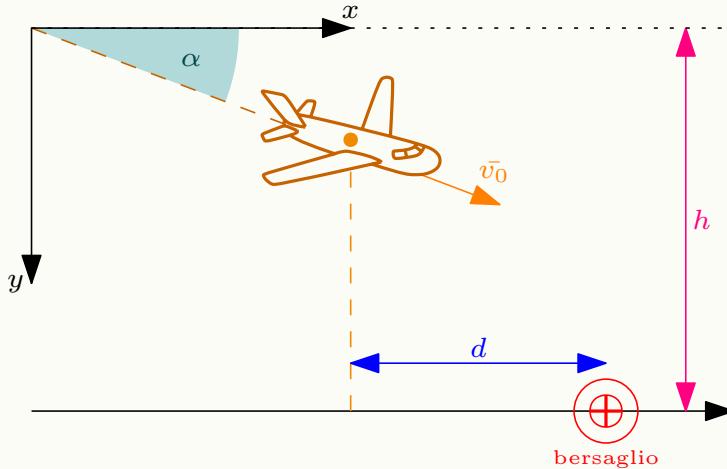


Figura 2.6: schema esercizio 3

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha t \\ y(t) = v_0 \sin \alpha t + \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Sia  $t^*$  l'istante in cui la bomba colpisce il bersaglio

$$x(t^*) = d = v_0 \cos \alpha t^*$$

$$y(t^*) = h = v_0 \sin \alpha t^* + \frac{gt^{*2}}{2}$$

Si risolve il sistema per trovare tale istante

$$\begin{cases} v_0 \sin \alpha t^* + \frac{gt^{*2}}{2} = h \\ v_0 \cos \alpha t^* = d \end{cases} \implies t^* = -\frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} \sin^2 \alpha + \frac{2h}{g}}$$

Quindi

$$d = v_0 \cos \alpha \left( -\frac{v_0}{g} \sin \alpha + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} \sin^2 \alpha + \frac{2h}{g}} \right)$$

## CAPITOLO

# 3

## DINAMICA

### 3.1 Forze

Newton considerò il principio di inerzia e lo fece suo, definì i 3 principi della dinamica

#### Primo Principio

Lo stato naturale di un corpo in assenza di perturbazioni è quello di moto rettilineo uniforme

#### Secondo Principio

**Definizione :** Si definisce *quantità di moto* il prodotto della velocità di un corpo per la sua massa

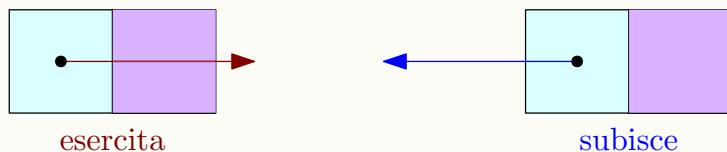
$$\bar{p} = m \cdot \bar{v}$$

Definiamo *forza* il fenomeno capace di perturbare i corpi, ed equivale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto.

$$\text{Def} \quad \bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} \quad \text{Def}$$

#### Terzo Principio

*Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.* Quando un corpo in un punto *A* esercita una forza su un altro corpo in un punto *B*, esso subisce una reazione uguale in intensità e diretta lungo la congiungente dei due punti.



$\bar{F}$  modellizza una generica forza, la massa  $m$  che compare nella sua formula è detta massa inerziale. Una forza di cui risente ogni abitante sulla terra è la forza peso

$$\bar{F} \equiv m_g \bar{g}$$

dove  $m_g$  è detta massa gravitazionale, nel caso in cui dovesse coincidere con quella inerziale, si avrebbe che  $\bar{a} = \bar{g}$ . La legge di gravitazione universale, da cui si ricava la forza peso, descrive la forza che attrae un corpo di massa  $m$  verso un altro di massa  $M$

$$\bar{F} = -G \frac{mM}{|\bar{r}|^2} \hat{r}$$

Dove  $\hat{r}$  è il versore che congiunge i due corpi. La forza di gravità è quindi proporzionale alle masse dei corpi, e diminuisce con l'aumentare della distanza al quadrato.

### 3.1.1 Forza Elastica

Un'altra forza presente nella vita quotidiana è quella elastica, modellizza macroscopicamente, il comportamento di una molla.

$$\bar{F} = k(\bar{r} - \bar{r}_0)$$

Dove  $\bar{r}$  è la posizione del corpo che subisce la forza,  $\bar{r}_0$  è uno specifico punto nello spazio detto equilibrio, e  $k$  è una costante detta *costante di elasticità*, scriviamo nel caso unidimensionale

$$F = k \cdot (x - x_0)$$

Più ci si allontana dal punto di equilibrio, più la forza aumenta, ed essa è nulla proprio in tale punto. Si vuole descrivere il moto di un corpo soggetto a forza elastica. Per semplicità, si consideri  $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} F &= -kx \\ F &= m \frac{d^2x}{dt^2} \implies \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \end{aligned}$$

La soluzione dell'equazione differenziale, ossia la legge oraria di un corpo soggetto a forza elastica, è la seguente

$$A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$A$  e  $\phi$  sono due costanti che dipendono dalle condizioni iniziali  $x(0)$  e  $v(0)$ . La relazione è la seguente

$$x(0) = A \cos \phi$$

La legge della velocità si ottiene derivando  $x$

$$v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

Quindi

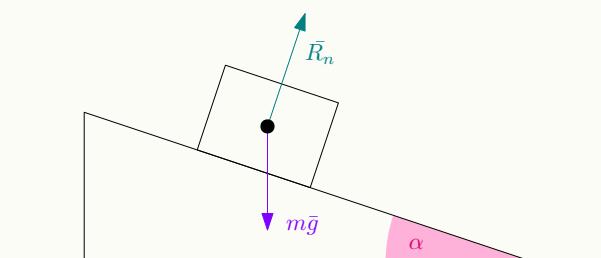
$$v(0) = -A\omega_0 \sin \phi \implies \frac{v(0)}{\omega_0} = -A \sin \phi$$

Si considerino i quadrati

$$\begin{cases} x(0)^2 = (A \cos \phi)^2 \\ (\frac{v(0)}{\omega_0})^2 = (-A \sin \phi)^2 \end{cases} \implies \begin{cases} \phi = -\arctan(\frac{v(0)}{\omega_0 x(0)}) \\ A = \sqrt{x(0)^2 + (\frac{v(0)}{\omega_0})^2} \end{cases}$$

### 3.1.2 Reazione Normale

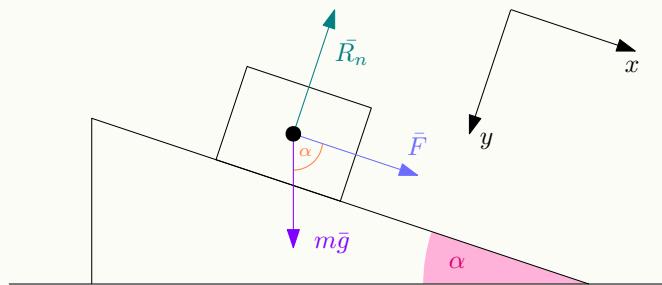
Si consideri un corpo di massa  $m$  posto su un piano inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto l'orizzonte (il cui attrito è nullo). Il corpo è soggetto alla forza peso, perché allora non sfonda il piano cadendo verso il centro della terra? Esso è soggetto ad una reazione normale  $\bar{R}_n$ , ossia una forza la cui direzione è la normale della superficie su cui poggia. Il piano costituisce un vincolo, si parla infatti di *reazione vincolare*.



Il corpo, sarà soggetto alla somma delle due forze

$$\bar{F} = m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{R}_n$$

Tenedrà quindi ad accelerare lungo l'asse del piano, si vuole trovare il moto di tale corpo. Consideriamo un sistema di riferimento in cui l'asse delle  $y$  è parallela alla reazione normale, e l'asse delle  $x$  forma un angolo  $\alpha$  con l'orizzonte (in modo da essere ortogonale ad  $y$ ).



Si vuole quindi trovare l'accelerazione lungo  $x$ , bisogna proiettare entrambe le forze su tale asse. Come si può vedere dall'immagine, la reazione normale non esercita alcuna forza su tale asse, ma esclusivamente sull'asse delle  $y$

$$|\bar{R}_n| = \sin \alpha |\bar{R}_n|$$

La reazione normale  $R_n$  controbilancia la forza peso, e fa sì che lo spostamento sull'asse  $y$  sia nullo (il corpo non sfonda il piano).

$$F_y = |\bar{R}_n| = m|\bar{g}| \sin \alpha \implies -m|\bar{g}| \sin \alpha + |\bar{R}_n| = 0$$

Lungo l'asse delle ascisse  $x$ , la reazione normale non ha effetto, lo ha esclusivamente la forza di gravità, la sua proiezione sarà quindi

$$F_x = mg \cos \alpha \implies ma_x = mg \cos \alpha \implies a_x = g \cos \alpha$$

A questo punto si può trovare il moto del corpo sull'asse delle  $x$

$$x(t) = \left(\frac{1}{2}g \cos \alpha\right) \cdot t^2$$

### 3.1.3 Attrito

Nell'esempio precedente del piano inclinato si è trascurato l'attrito, tale forza si manifesta a seguito di uno strisciamento fra due corpi, ed è dovuta all'asperità dei materiali a livello microscopico. È fondamentale considerarlo quando si devono calcolare le forze in una situazione reale.

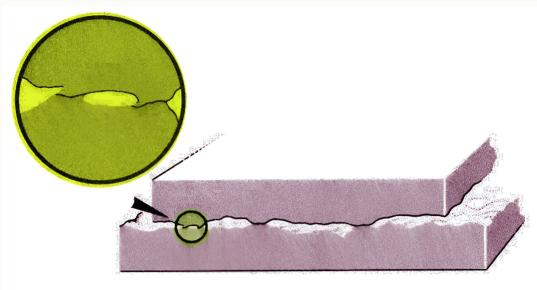


Figura 3.1: asperità dei materiali

L'attrito si presenta sotto due aspetti

- **attrito statico** : Forza esercitata su un corpo fermo su una superficie, si manifesta quando il corpo subisce una forza che prova a spostarlo, opponendosi ad essa mantenendo fermo il corpo

- **attrito dinamico** : Forza esercitata su un corpo in movimento che si sposta strisciando su una superficie

La modellizzazione dell'attrito prevede tale suddivisione, quando un corpo su una superficie subisce una forza  $\bar{F}$ , è anche soggetto ad una forza di attrito statico  $\bar{F}_s$ , essa si oppone alla prima, de facto è uguale in intensità e direzione, ma il verso è contrario. Se la forza applicata varia, l'attrito varierà con essa.

In una situazione reale però, quando si spinge un oggetto, aumentando l'intensità il corpo inizierà a muoversi, esiste quindi una forza di soglia sotto il quale l'attrito statico vale, una volta raggiunta tale soglia, il corpo si muoverà, e sarà soggetto ad attrito dinamico. In generale, tale soglia è descritta da

$$F_s \leq \mu_s \cdot R_n$$

Dove  $R_n$  è il modulo della reazione normale che subisce il corpo che poggia sulla superficie, e  $\mu_s$  è il *coefficiente di attrito statico*, e dipende dal materiale dei corpi. Essendo tale attrito proporzionale alla reazione normale, risulta chiaro ora il perché gli oggetti posti su un piano inclinato necessitano di meno forza per essere spostati.

Quindi  $F_s$  è sempre uguale alla forza applicata sul corpo ma contraria di verso finché il suo modulo è minore di  $\mu_s \cdot R_n$ . Se tale modulo è maggiore, allora il corpo sarà soggetto ad un attrito dinamico  $\bar{F}_d$

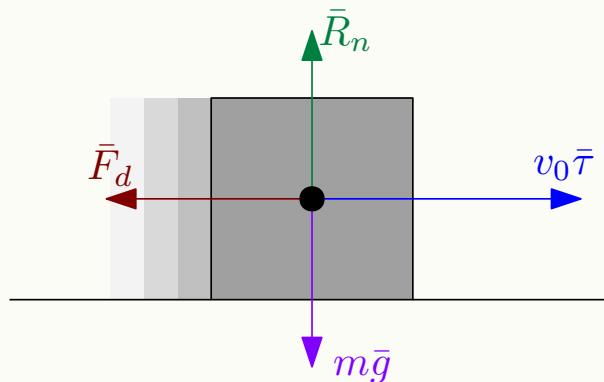
$$\bar{F}_d = -\mu_d \cdot R_n \cdot \bar{\tau}$$

$\mu_d$  è il coefficiente di attrito dinamico, tipicamente, per uno stesso materiale  $\mu_s > \mu_d$ .  $\bar{\tau}$  è il versore parallelo alla velocità  $\bar{v}_0$  del corpo che subisce tale attrito,  $\bar{\tau} = \frac{\bar{v}_0}{|\bar{v}_0|}$ . La decelerazione che subirà il corpo che si muove su una superficie piana sarà

$$m\bar{a} = -\mu_d R_n \bar{\tau} \implies m\bar{a} = -\mu_d mg \bar{\tau} \implies |\bar{a}| = -\mu_d g$$

Nella formula, si è sostituito  $R_n$  ad  $mg$ , in quanto il modulo di tali forze è lo stesso, come già visto

$$R_n - mg = 0$$



Si noti come la decelerazione subita non dipende dalla massa del corpo, ma esclusivamente dalla reazione normale e dalla costante di attrito dinamico. Si ricavano le leggi della velocità e dello spostamento (nel caso unidimensionale) di un corpo che viene lanciato su una superficie con una velocità iniziale  $v_0$

$$v = v_0 - \mu_d g t$$

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} \mu_d g t^2$$

Il corpo si fermerà nell'istante  $t_1$  in cui  $v(t_1) = 0$

$$v(t_1) = 0 \implies v_0 - \mu_d g t_1 = 0 \implies t_1 = \frac{v_0}{\mu_d g}$$

E lo spazio percorso sarà

$$x(t_1) = v_0 t_1 - \frac{1}{2} \mu_d g t_1^2 = v_0 \left( \frac{v_0}{\mu_d g} \right) - \frac{1}{2} \mu_d g \left( \frac{v_0}{\mu_d g} \right)^2 = \frac{v_0^2}{2 \mu_d g}$$

## Misuratore di Attrito

Il seguente esempio, mostra com'è possibile sfruttare un piano inclinato, la cui inclinazione  $\alpha$  è variabile, per misurare la costante di attrito statico e dinamico di un corpo. Supponiamo quindi, di posare un corpo su tale piano, la cui inclinazione iniziale è nulla. Cominciando a sollevare il piano (variando  $\alpha$ ), il corpo rimarrà in uno stato di quiete, finché non avrà forza a sufficienza da superare l'attrito statico. Tale soglia equivale a

$$mg \sin \alpha$$

L'attrito statico è limitato da tale valore, sia  $\alpha_1$  il massimo valore dell'angolo per cui il corpo non si muove, in tal caso si ha

$$mg \sin \alpha_1 = \mu_s mg \cos \alpha_1 \implies \mu_s = \tan \alpha_1$$

Si consideri adesso l'insieme dei valori  $\alpha > \alpha_1$ , per cui il corpo si muove ed è soggetto ad attrito dinamico. In particolare la sua forza sarà

$$ma = m \sin \alpha - \mu_d R_n$$

Si varia l'angolo  $\alpha$  per trovare il punto in cui il corpo non subisce più accelerazione, ossia  $a = 0$ . Sia  $\alpha_2$  tale valore

$$mg \sin \alpha_2 - \mu_d R_n = 0$$

Si ricordi  $R_n = mg \cos \alpha_2$

$$mg \sin \alpha_2 = \mu_d mg \cos \alpha_2 \implies \mu_d = \tan \alpha_2$$

~ ~

## 3.2 Impulso e Lavoro

Si è visto come la dinamica permette di descrivere le equazioni del moto tramite le forze, in certi casi, non è chiara l'evoluzione nel tempo di una determinata forza, ma è comunque possibile avere informazioni globali sul suo comportamento grazie ad un'integrazione. Si consideri l'integrazione della forza nel tempo in un dato intervallo  $[t_1, t_2]$

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt$$

Le dimensioni sono espresse in  $mv$ , massa per velocità. Precisamente

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt = \quad (3.1)$$

$$m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\bar{v}}{dt} dt = \quad (3.2)$$

$$m \int_{\bar{v}_1}^{\bar{v}_2} d\bar{v} = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \quad (3.3)$$

$$m(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \quad (3.4)$$

Risulta essere la variazione della quantità di moto, tale grandezza è nota come **impulso**

$$I = \Delta \bar{p}$$

Se la forza non è nota analiticamente, è possibile considerare la *forza media* come il rapporto fra l'impulso e la variazione nel tempo, sia  $t_2 = t_1 + \Delta t$

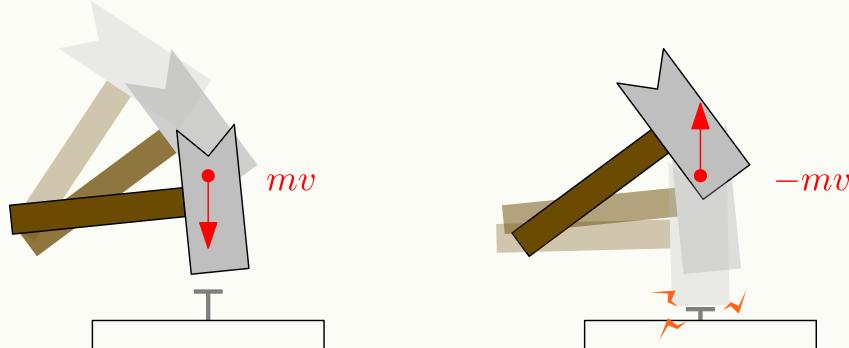
$$\frac{I}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt$$

Risulta utile nella descrizione dei fenomeni che agiscono in un breve lasso di tempo con una certa intensità, come gli urti, dette forze impulsive.

**Esempio :** Quando si vuole inserire un chiodo in una tavola di legno, si colpisce con un martello il chiodo. Se provassimo a salire sul chiodo applicheremmo una forza pari al nostro peso, che è di gran lunga superiore al peso del martello, ciònonostante, il chiodo non entrerebbe nella fessura, la forza non

sarebbe necessaria.

Quanta forza viene trasmessa allora al colpo del chiodo sul martello? Supponiamo che il chiodo non assorba forza, e la rifletta completamente, ciò significa che rifletterà una quantità di moto pari alla quantità di moto applicata. Sia  $mv$  la quantità di moto iniziale, il martello una volta colpito il chiodo avrà una quantità di moto  $-mv$ , la differenza sarà quindi  $\Delta p = 2mv$ .



Supponiamo che il martello pesi  $0.5\text{kg}$ , che arrivi sul chiodo ad una velocità pari a  $5\frac{\text{m}}{\text{s}}$ , la sua quantità di moto sarà quindi  $0.5 \cdot 5 = 2.5\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}$ . L'evoluzione della forza nel tempo in cui colpisce il chiodo non è nota, ma è possibile stabilire la forza media tramite l'espressione  $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ , supponiamo che il lasso di tempo in cui il martello colpisce il chiodo sia di  $10^{-3}\text{s}$ . Allora la forza media sarebbe

$$\frac{2.5}{10^{-3}}\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2500\text{N}$$

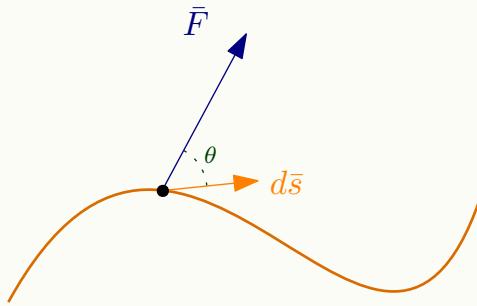
### 3.2.1 Lavoro ed Energia Potenziale

Quindi l'impulso deriva dall'integrazione della forza rispetto al tempo, essa può essere derivata anche rispetto allo spazio. Supponiamo che vi siano una curva che unisce i punti  $A$  e  $B$ , definiamo **lavoro** l'integrale di un campo di forze lungo la curva

$$L = \int_A^B \bar{F} d\bar{s}$$

Dove  $d\bar{s}$  rappresenta lo spostamento infinitesimo lungo la curva, e  $\bar{F} d\bar{s}$  è il prodotto scalare, di cui

$$|\bar{F} d\bar{s}| = F ds \cos \theta$$



il lavoro rappresenta l'energia trasferita al sistema che si sposta lungo la curva, se la curva è percorsa in direzione opposta alla forza, questa toglierà energia al sistema, se è percorso nello stesso verso, darà energia al sistema

Le dimensioni del lavoro sono  $\text{ml}^2\text{t}^{-2}$ , l'unità di misura è il *joule* e si denota  $J$ . Il lavoro può essere descritto come segue (si assuma che la massa della forza sia costante)

$$L = \int_A^B \frac{dm\bar{v}}{dt} d\bar{s} = \quad (3.5)$$

$$\int_A^B m d\bar{v} \frac{d\bar{s}}{dt} \quad (3.6)$$

essendo  $\frac{d\bar{s}}{dt} = \bar{v}$

$$\int_A^B m\bar{v}d\bar{v} \quad (3.7)$$

Tralasciando momentaneamente l'espressione del lavoro, si noti come

$$\bar{v} \cdot \bar{v} = vv \cos \alpha = v^2 \text{ differenziando} \quad (3.8)$$

$$\bar{v}d\bar{v} + d\bar{v}\bar{v} = dv^2 \implies \quad (3.9)$$

$$2d\bar{v} \cdot \bar{v} = d\bar{v}\bar{v} = \frac{1}{2}dv^2 \quad (3.10)$$

quindi, tornando al lavoro

$$\int_A^B m\bar{v}d\bar{v} = m \int_{v_1^2}^{v_2^2} dv^2$$

Dove  $v_1$  e  $v_2$  sono le velocità, rispettivamente, in  $A$  ed in  $B$  (velocità iniziale e velocità finale)

$$m \int_{v_1^2}^{v_2^2} dv^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

**Definizione :** Definiamo **energia cinetica** la grandezza  $T = \frac{1}{2}mv^2$ .

quindi

$$L = \Delta T$$

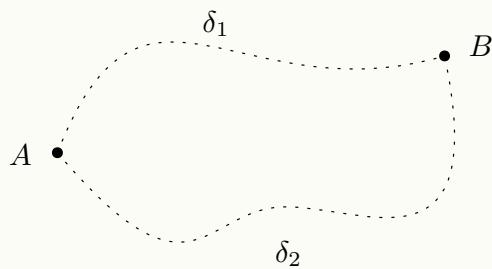
Il lavoro è *la variazione dell'energia cinetica*.

### 3.2.2 Forze Conservative

Vediamo ora una particolare classe di forze, ossia quelle *conservative*.

**Definizione :** Una forza è detta **conservativa** se il lavoro valutato su una curva fra due punti  $A$  e  $B$  è indipendente dal percorso considerato. Siano  $\delta_1$  e  $\delta_2$  due curve differenti, che però hanno entrambe  $A$  e  $B$  come punti di congiunzione,  $\bar{F}$  è conservativa se

$$\int_{\delta_1} \bar{F}d\bar{s} = \int_{\delta_2} \bar{F}d\bar{s}$$



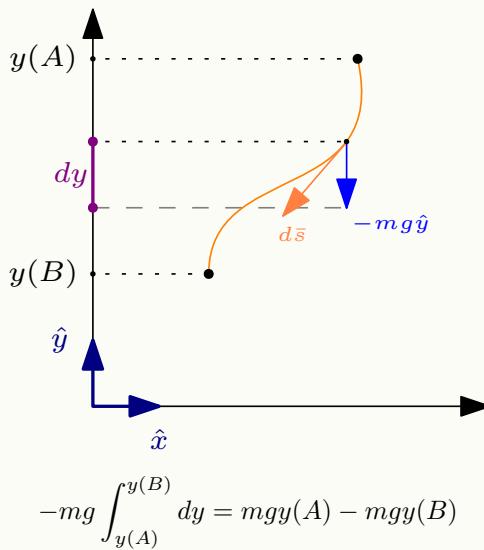
Un esempio di forza conservativa è la forza di gravità  $\bar{F}_g = m\bar{g}$ , che riscreveremo  $-mg\hat{y}$

$$L = \int_A^B -mg\hat{y}d\bar{s} = -mg \int_A^B \hat{y}d\bar{s}$$

Si consideri il termine  $\hat{y}d\bar{s}$ , il modulo di  $d\bar{s}$  è infinitesimo, mentre il modulo di  $\hat{y}$  è 1. Il loro prodotto scalare non è altro che lo spostamento infinitesimo lungo l'asse  $y$

$$-mg \int_A^B \hat{y}d\bar{s} = -mg \int_{y(A)}^{y(B)} dy$$

Definiamo  $y(A)$  come la coordinata  $y$  del punto  $A$ , analogo per  $y(B)$ .



Definiamo  $mgy = U(y)$  **energia potenziale** della gravità

$$L = -mg \int_{y(A)}^{y(B)} dy = U(A) - U(B) = -\Delta U$$

Nelle forze conservative, il lavoro su una curva che congiunge i punti  $A, B$  è pari alla differenza dell'energia potenziale calcolata sui due punti.

L'energia potenziale  $U$  è definita anche per le altre forze, non esclusivamente per la forza di gravità, che in tal caso è servita come esempio. La gravità è una forza *uniforme*

tutte le forze uniformi sono conservative

Anche la forza gravitazionale definita da Newton è conservativa

$$\bar{F}_G = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$$

Dove  $\hat{r}$  è il versore che va dal corpo di massa  $m$  a quello di massa  $M$ , ed  $r$  è la distanza fra i due corpi. Tale forza è detta *centrale*, in ogni punto è diretta verso un punto  $O$ , l'intensità dipende solamente dalla distanza  $r$  dal punto. Il lavoro su una curva che congiunge i punti  $A, B$  risulta essere

$$\int_A^B \bar{F}_G d\bar{s} = \int_A^B -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} d\bar{s} = -GMm \int_A^B \frac{\hat{r}}{r^2} d\bar{s}$$

$\hat{r}$  ed  $r^2$  non possono essere portati fuori dall'integrale dato che sono variabili e dipendono dalla posizione. Sia  $OP$  il vettore che va dal punto  $P$ , posizione del corpo soggetto alla forza, all'origine della forza  $O$ , ossia il vettore di lunghezza  $r$ . In tal caso si ridefinisce  $\hat{r} = \frac{OP}{|OP|}$ .

Sia  $F_G(r)$  il modulo della forza, esso dipende da  $r$ , tale che

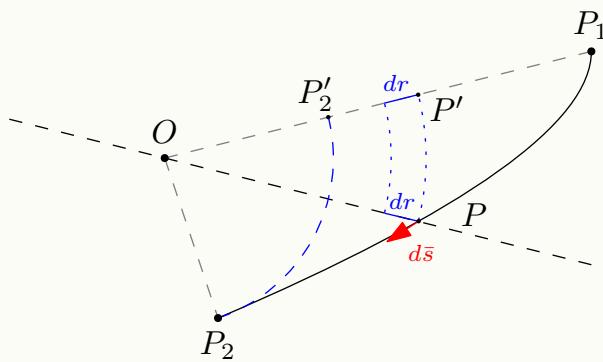
$$\bar{F}_G(r) = F_G(r) \hat{r}$$

Si consideri un percorso qualsiasi  $C$  che congiunga due punti  $P_1$  e  $P_2$ , in corrispondenza di uno spostamento infinitesimo  $d\bar{s}$  lungo tale percorso a partire da una posizione  $P$ , il lavoro infinitesimo sarà

$$dL = \bar{F}_G d\bar{s} = F_G(r) dr$$

Dove  $dr$  è la proiezione di  $d\bar{s}$  su  $OP$ .

$$\hat{r} \cdot d\bar{s} = dr$$



lo spostamento  $dr$  è indipendente dal percorso scelto

$$-GMm \int_A^B \frac{\hat{r}}{r^2} d\bar{s} = -GMm \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2}$$

Dove  $r_A$  ed  $r_B$  sono le distanze dall'origine dei punti  $A$  e  $B$

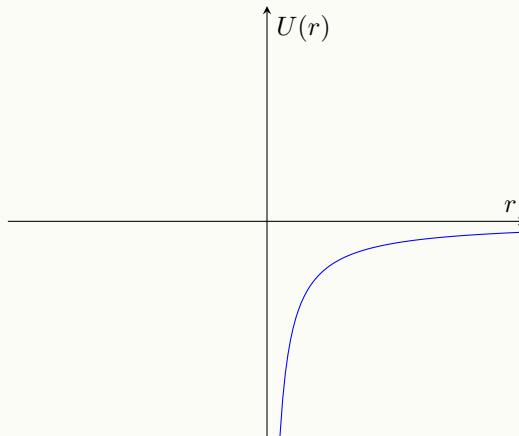
$$-GMm \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = GMm \frac{1}{r_B} - GMm \frac{1}{r_A}$$

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad \text{energia potenziale gravitazionale}$$

Inoltre

$$\lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{GMm}{r} = 0 \implies U(\infty) = 0$$

La forza di gravitazione a distanza infinita non compie lavoro.



Anche la forza elastica è conservativa, consideriamo il caso unidimensionale (per semplicità, il punto di equilibrio è 0)

$$\begin{aligned} \bar{F} &= -kx\hat{x} \\ L &= -k \int_{x_1}^{x_2} x\hat{x} d\bar{s} = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2) \\ U(x) &= \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{energia potenziale elastica} \end{aligned}$$

Abbiamo definito il lavoro come

$$L = \Delta T$$

Ed il lavoro per le forze conservative come

$$L = -\Delta U$$

Perché le forze si dicono *conservative*? Se una forza è conservativa, si ha

$$\Delta T + \Delta U = 0 \implies \Delta(T + U) = 0$$

**Definizione :** la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale è detta **energia meccanica**

$$E_m = T + U$$

Per le forze conservative

$$\Delta(T + U) = \Delta E_m = 0$$

Il nome "conservativo" deriva dal fatto che tali forze *conservano l'energia meccanica*, infatti la variazione di essa è nulla.

Si vuole calcolare l'energia meccanica totale di un corpo di massa  $m$  che si trova in un orbita circolare di un pianeta di massa  $M$  a distanza  $R$ , l'energia meccanica è la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica.

$$U = -\frac{GmM}{R} \quad T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2R} \implies E_{mecc} = \frac{GMm}{2R} - \frac{GmM}{R} = -\frac{GmM}{2R}$$

**Definizione ( velocità di fuga ) :** La velocità di fuga di un corpo, è la velocità necessaria (a partire da una distanza  $R$  dal corpo) per poter allontanarsi all'infinito con velocità zero.

Sia  $v_f$  tale velocità, l'energia cinetica del corpo deve egualare il potenziale gravitazionale

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \implies v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

La velocità di fuga non dipende dalla massa del corpo che deve raggiungere l'infinito. Supponiamo di voler calcolare la velocità di fuga per il pianeta terra partendo dalla superficie

$$R = 6370\text{km} \simeq 6370000\text{m} \quad M \simeq 5.972 \cdot 10^{24}\text{kg} \quad G \simeq 6.67 \cdot 10^{-11}$$

$$v_f(\text{terra}) \simeq \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}}{6370000}} \simeq 11183\text{m/s}$$

Consideriamo un punto materiale soggetto a forze, esse possono essere conservative oppure non conservative, il lavoro totale sarà uguale alla somma dei lavori delle forze. Indichiamo con  $L_c$  la somma dei lavori delle forze conservative e con  $L_{nc}$  la somma dei lavori delle forze non conservative

$$L_{tot} = L_c + L_{nc}$$

Sappiamo essere uguale alla differenza dell'energia cinetica

$$L_c + L_{nc} = \Delta T$$

Sappiamo inoltre che il lavoro delle forze conservative è pari a  $-\Delta U$

$$-\Delta U + L_{nc} = \Delta T \implies L_{nc} = \Delta T + \Delta U = \Delta(T + U) = \Delta(E_{mecc})$$

Ne consegue che

il lavoro totale svolto dalle forze non conservative è pari alla variazione dell'energia meccanica

**Esercizio :** Bisogna lanciare un razzo di massa  $m$  in orbita partendo dall'equatore, quant'è il lavoro totale che deve fare il motore?

Sappiamo che il lavoro del motore è

$$L_{mot} = \Delta(T + U) = (T_f - T_i) + (U_f - U_i)$$

L'energia cinetica iniziale è quella posta all'equatore, la velocità di rotazione è circa  $v_{eq} = 1674\text{km/h}$ , l'energia cinetica iniziale sarà quindi

$$T_i = \frac{1}{2}mv_{eq}^2$$

L'energia potenziale gravitazionale è nota, sia  $R_t$  il raggio della terra, e sia  $R$  la distanza dell'orbita dal centro

$$U_i = U(R_t) = -\frac{GM_{terra}m}{R_t}$$

$$U_f = U(R) = -\frac{GM_{terra}m}{R}$$

Per trovare l'energia cinetica finale  $T_f$  bisogna trovare la velocità necessaria per stare in orbita

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{MG}{R}}$$

Quindi

$$T_f = \frac{1}{2}m(\sqrt{\frac{MG}{R}})^2 = \frac{GMm}{2R}$$

Il lavoro totale del motore sarà quindi

$$L_{mot} = \frac{GMm}{2R} - \frac{1}{2}mv_{eq}^2 - \frac{GMm}{R} + \frac{GMm}{R_t}$$

### 3.2.3 Potenza

Per un essere umano medio, sollevare un peso di 10 kg non è un'impresa faticosa, a patto che il tempo in cui egli impiega per sollevarlo sia abbastanza lasco. Sarebbe impossibile per chiunque infatti, sollevare un peso di 10kg in un tempo pari a  $10^{-3}$  secondi, la potenza necessaria sarebbe troppo elevata.

**Definizione (Potenza) :** : Definiamo **potenza** la derivata del lavoro rispetto al tempo

$$\text{↗ } P = \frac{dL}{dt} \text{ ↗ }$$

essendo il lavoro l'energia che una forza trasferisce ad un sistema, la potenza è la variazione nel tempo dell'energia trasferita.

Si misura in *Watt* :  $W = \frac{J}{s}$ . Ricordando che  $L = \int_{\delta} \bar{F} \cdot d\bar{s}$ , la potenza si può scrivere anche

$$P = \bar{F} \cdot \frac{d\bar{s}}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v}$$

la potenza è data dal prodotto della forza applicata e della velocità con cui il punto di applicazione della forza si muove.

Consideriamo un razzo nello spazio (assenza di attrito dell'aria), il cui motore fornisce una *potenza costante*  $P_0$ , in tal caso, qual'è il moto del razzo? La forza sarà pari a

$$F = \frac{P_0}{v}$$

Quindi

$$\frac{P_0}{v} = m \frac{dv}{dt}$$

Si risolve l'equazione differenziale

$$\int_0^t \frac{P_0}{m} dt = \int_{v(0)}^{v(t)} v dv \implies \frac{P_0}{m} t = \frac{v^2}{2} \implies v(t) = \sqrt{\frac{2P_0}{m}} \sqrt{t}$$

### Velocità Limite

La forza impressa dall'attrito dell'aria cresce di intensità insieme alla velocità del corpo che la subisce. Essa è modellizzabile come segue

$$\bar{F}_a = -\bar{v}b$$

Dove  $\bar{v}$  è la velocità del corpo che la subisce, e  $b$  è un coefficiente che dipende da vari fattori (ad esempio, la forma del corpo). Si consideri un oggetto che viene lasciato cadere da una certa altezza da fermo. Su di esso agiranno due forze : l'attrito dell'aria e la forza di gravità

$$\bar{F} = m\bar{g} - b\bar{v}$$

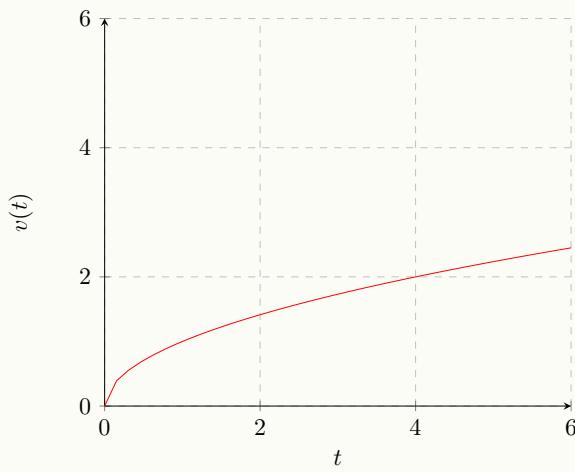


Figura 3.2: andamento della velocità a potenza costante

Per semplicità, si considera la forma scalare

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv$$

Si vuole risolvere l'equazione differenziale, per sostituzione, chiamo

$$x = mg - bv \implies dv = \frac{1}{b} dx$$

Quindi si ha

$$x = -\frac{m}{b} \frac{dx}{dt}$$

si integra

$$x = -\frac{m}{b} \frac{dx}{dt} \implies \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{x} = -\frac{m}{b} \frac{dt}{dx} \implies \quad (3.12)$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{b}{m} dt \quad (3.13)$$

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{x} dx = -\frac{b}{m} \int_0^t dt \quad (3.14)$$

$$\ln(|x|) \Big|_{x(0)}^{x(t)} = -\frac{b}{m} t \quad (3.15)$$

$$\ln\left(\left|\frac{x(t)}{x(0)}\right|\right) = -\frac{b}{m} t \quad (3.16)$$

$$\frac{x(t)}{x(0)} = e^{-\frac{b}{m} t} \quad (3.17)$$

$$x(t) = x(0)e^{-\frac{b}{m} t} \quad (3.18)$$

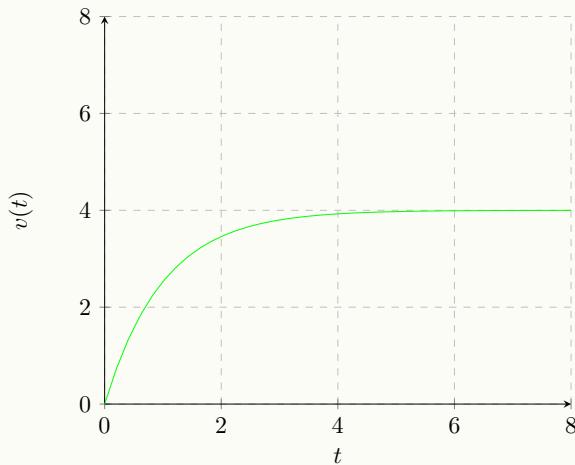
Denotiamo  $x_0 = x(0)$ , si trova la velocità sostituendo

$$x = mg - bv \quad (3.19)$$

$$x_0 e^{-\frac{b}{m} t} = mg - bv(t) \quad (3.20)$$

$$v(t) = \frac{mg}{b} \left(1 - x_0 e^{-\frac{b}{m} t}\right) \quad (3.21)$$

Per  $t \rightarrow \infty$  il termine dentro la parentesi tende ad 1, la velocità limite è  $\frac{mg}{b}$



### 3.3 Forze Apparenti

Abbiamo visto come, le velocità si compongono in sistemi di riferimento diversi

$$v_a = v_r + v_t \text{ velocità assoluta, relativa e di trascinamento}$$

Per l'accelerazione

$$a_a = a_r + a_t + a_c \text{ l'ultimo termine è l'accelerazione di Coriolis}$$

Le leggi della dinamica sono valide nei sistemi di riferimento non inerziali

$$F = ma$$

In quelli non inerziali sono presenti le altre componenti dell'accelerazione

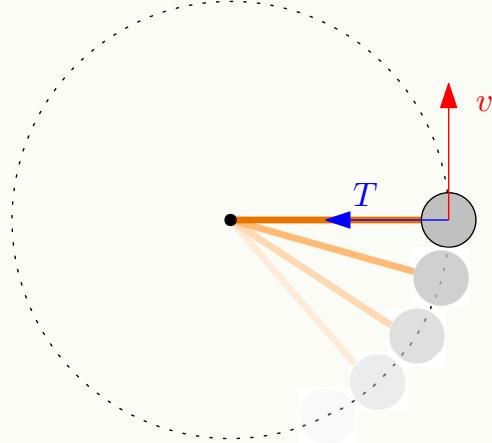
$$F = ma_a = ma_r + ma_t + ma_c$$

Ma in un sistema di riferimento non vi è alcuna forza visibile che determina le accelerazioni di trascinamento e di Coriolis. Definiamo la componente

$$ma_r$$

**forza reale**, in quanto è determinata da un accelerazione nel sistema di riferimento assoluto, le altre forze  $ma_t + ma_c$  sono dette **forze apparenti**, se presenti, si è necessariamente in un sistema di riferimento non inerziale. Il concetto verrà esplicitato nel seguente esempio.

Vi è una corda lunga  $R$  che tiene una pallina di massa  $m$  che sta ruotando a velocità tangenziale  $v$ . La corda applica una forza  $T$  sulla pallina detta tensione che impedisce che la pallina esca dalla traiettoria circolare.



Per far sì che la pallina non scappi, la corda deve esercitare una tensione  $T = m\frac{v^2}{R}$ . Si ipotizzi ora di prendere come sistema di riferimento la pallina : Ci si trova su di essa, e non si avverte nessuno spostamento, la velocità assoluta è nulla. Si nota però, che vi è la corda che sta esercitando una forza, quindi anche un'accelerazione, ma la forza percepita è nulla.

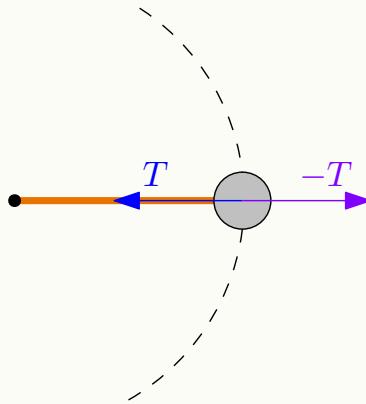
$$F = 0$$

$$T = \frac{mv^2}{R} : \text{forza esercitata sulla pallina}$$

Deve *necessariamente* esistere una forza apparente  $F_{app}$  che controbilancia la tensione della corda

$$\frac{mv^2}{R} + F_{app} = 0 \implies F_{app} = -\frac{mv^2}{R}$$

La forza alla quale è soggetta la pallina è contraria alla tensione, spinge verso "l'esterno" della curva ed è la *forza centrifuga*.

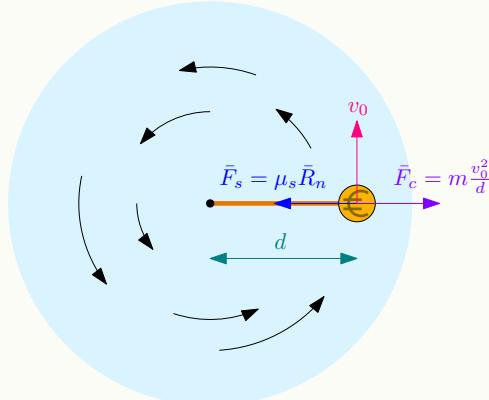


### Esercizio sulla forza centrifuga

Vi è una piattaforma circolare che ruota, sulla quale è riposta una moneta ad una distanza di  $d = 30\text{cm}$  dal centro della piattaforma. La piattaforma inizia ad accelerare, e la moneta risente dell'accelerazione, ma rimane ferma grazie all'attrito statico. Quando la piattaforma raggiunge una velocità tangenziale di  $50\text{cm/s}$ , la moneta si stacca dalla piattaforma. Si vuole trovare il coefficiente di attrito statico  $\mu_s$ .

Sulla moneta agiscono due forze, una forza centrifuga che tende a spostarla verso l'esterno, ed una forza di attrito statico che si oppone ad essa.

- attrito statico  $\bar{F}_s = \mu_s \bar{R}_n = \mu_s mg$
- forza centrifuga  $\bar{F}_c = m \frac{v_0^2}{d}$



Si risolve per l'attrito statico

$$\mu_s = m \frac{v_0^2}{dg}$$

La velocità alla quale la pallina parte e la distanza dal centro sono note

$$\mu_s = \frac{50\text{cm}/\text{s}}{30\text{cm} \cdot g^{\text{m}/\text{s}^2}} = \frac{5}{3}g$$

### Esercizio sul piano inclinato in movimento

Si consideri un piano inclinato (di angolo  $\alpha$  e di massa  $M$ ) in movimento su una superficie scabra di attrito  $\mu_d$ . Su di esso, è riposto un oggetto approssimabile ad un punto materiale di massa  $m$ . Il piano è spinto da una forza  $\bar{F}$ . Si vuole trovare il valore di  $\bar{F}$  per cui l'oggetto posto sul piano scivoli su di esso a velocità costante. Il corpo risente di una forza apparente  $\bar{F}_{app} = m\bar{a}$ , se esso scivola a velocità costante,

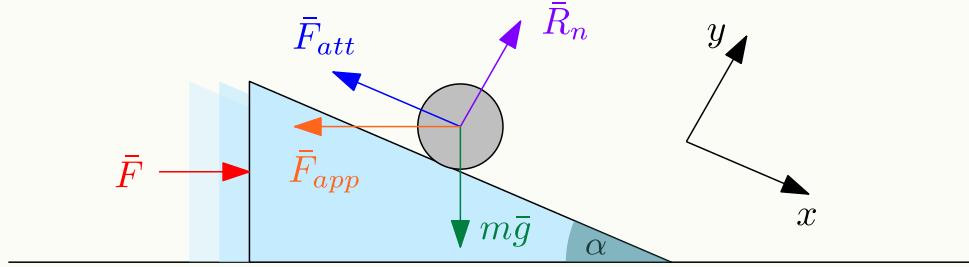


Figura 3.3: Diagramma delle forze subite dal corpo che scivola sul piano

la somma delle forze dovrà essere nulla

$$\bar{F}_{att} + m\bar{a} + \bar{R}_n + m\bar{g} = 0$$

Dato il sistema di riferimento mostrato in figura, si vuole trovare il modulo della forza apparente  $m\bar{a}$  (la direzione è nota). Si considera la formula che eguaglia le forze a zero, proiettandola su entrambi gli assi

$$\bar{F}_{att} + m\bar{a} + \bar{R}_n + m\bar{g} = 0 \quad (3.22)$$

$$-\mu_d R_n \hat{x} + m\bar{a} + \bar{R}_n + m\bar{g} = 0 \quad (3.23)$$

$$\begin{cases} -\mu_d R_n + m\bar{a} \cos \alpha + mg \cos \alpha = 0 \\ m\bar{a} \sin \alpha + R_n + mg \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\begin{cases} m\bar{a} = \frac{\mu_d R_n}{\cos \alpha} - mg \\ R_n = -mg \sin \alpha - m\bar{a} \sin \alpha \end{cases} \quad (3.25)$$

$$m\bar{a} = \frac{\mu_d (-mg \sin \alpha - m\bar{a} \sin \alpha)}{\cos \alpha} - mg \quad (3.26)$$

$$m\bar{a} = -\mu_d mg \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \mu_d m\bar{a} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - mg \quad (3.27)$$

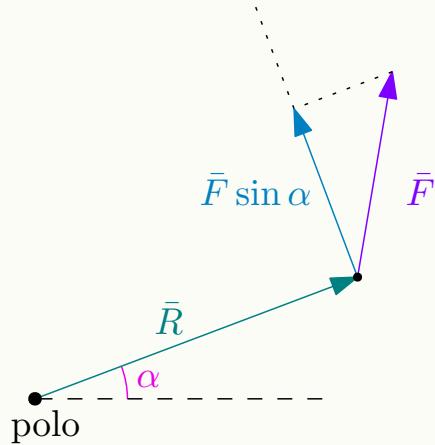
$$m\bar{a}(1 + \mu_d \tan \alpha) = -\mu_d \tan \alpha - mg \quad (3.28)$$

$$m\bar{a} = \frac{-\mu_d \tan \alpha - mg}{1 + \mu_d \tan \alpha} \quad (3.29)$$

∞ ~ ~ ∞ ~ ~ ∞ ~ ~ ∞ ~ ~ ∞ ~ ~ ∞ ~ ~ ∞ ~ ~ ∞ ~ ~ ∞ ~ ~ ∞ ~ ~ ∞ ~ ~

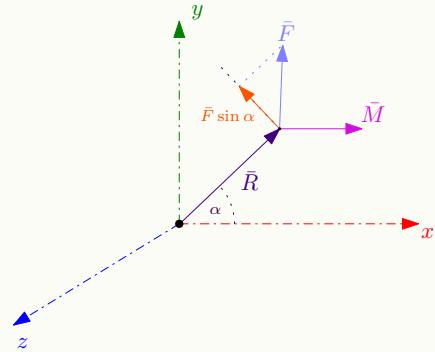
## 3.4 Momento

Si vuole modellizzare la rotazione di un corpo secondo le regole della dinamica, definiamo *polo* il punto intorno alla quale rotea il corpo. Una generica forza in presenza di un polo può essere rappresentata con due componenti.



La componente  $\bar{R}$  è il vettore che va dal polo al corpo su cui si applica la forza, l'altra componente è la proiezione della forza sul vettore ortogonale al vettore  $R$ . Dato un polo, definiamo il vettore

$$\bar{M} = \bar{R} \times \bar{F} \sin \alpha$$



Il vettore  $\bar{M}$  è detto **momento** e la sua direzione è normale al piano di rotazione, si misura in Newton per metro  $N \cdot m$ . Se dovessimo scriverlo in analogia con la formula della forza  $\bar{F} = m\bar{a}$ , si può scrivere

$$\bar{M} = \bar{R} \times \frac{d\bar{m}\bar{v}}{dt}$$

Si definisce **momento della quantità di moto** la grandezza

$$\bar{b} = \bar{R} \times m\bar{v}$$

Derivando il momento della quantità di moto si ha

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{R} \times m\bar{v}) = \frac{d}{dt}\bar{R} \times m\bar{v} + \bar{R} \times \frac{d}{dt}m\bar{v} = \frac{d}{dt}\bar{R} \times m\bar{v} + \bar{M}$$

quindi

$$\bar{M} = \frac{d\bar{b}}{dt} - \frac{d\bar{R}}{dt} \times m\bar{v}$$

Il vettore  $\bar{R}$  indica la distanza assoluta fra il polo ed il corpo, tale distanza dipende dalla posizione del polo (distanza di trascinamento) e dalla posizione del corpo (distanza relativa).

$$\bar{R} = \bar{R}_r + \bar{R}_t$$

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{d\bar{R}_r}{dt} + \frac{d\bar{R}_t}{dt} = \bar{v} - \bar{v}_0$$

Indichiamo con  $\bar{v}$  la velocità del corpo e con  $\bar{v}_0$  la velocità del polo, il momento si può quindi riscrivere

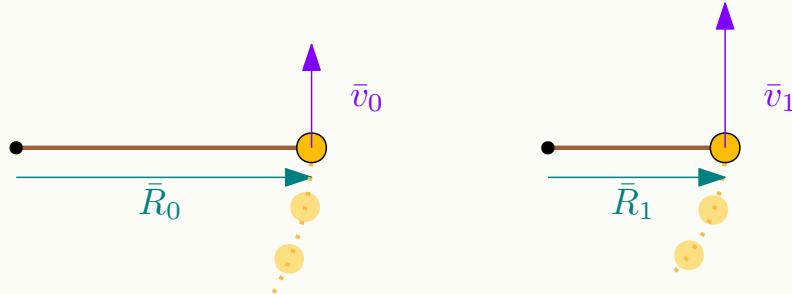
$$\bar{M} = \frac{d\bar{b}}{dt} - \frac{d\bar{R}}{dt} \times m\bar{v} \implies$$

$$\bar{M} = \frac{d\bar{b}}{dt} - (\bar{v} - \bar{v}_0) \times m\bar{v} = \frac{d\bar{b}}{dt} - \bar{v} \times m\bar{v} + \bar{v}_0 \times m\bar{v}$$

essendo  $\bar{v} \times m\bar{v} = 0$ , si ha

$$\bar{M} = \frac{d\bar{b}}{dt} + \bar{v}_0 \times m\bar{v} = \frac{d\bar{b}}{dt} + \bar{v}_0 \times \bar{p}$$

Il momento della quantità di moto  $\bar{b}$  *si conserva*, si consideri una sfera attaccata ad una corda che ruota attorno ad un polo al tempo  $t_0$ , esso avrà una quantità di moto di modulo  $|\bar{b}_0| = R_0 m v_0$ . Si ipotizzi che al tempo  $t_1$  la corda si sia accorciata, avvicinando la pallina al polo, essa ha quindi subito una forza  $\bar{T}$  diretta verso il polo, il modulo del momento della quantità di moto sarà ora  $|\bar{b}_1| = R_1 m v_1$  con  $R_0 > R_1$ . Si ricordi che il modulo di  $\bar{b}_1$  e  $\bar{b}_0$  è uguale al prodotto dei moduli perché i vettori sono ortogonali. Essendo  $\bar{T}$  parallela al vettore  $\bar{R}(t)$ , non influisce sul momento.



$$R_0 m v_0 = R_1 m v_1 \implies R_0 v_0 = R_1 v_1 \implies v_1 = v_0 \frac{R_0}{R_1}$$

Il momento non cambia dato che il momento di  $\bar{T}$  rispetto al polo è nullo  $\bar{T} \times \bar{R} = 0$ , ma variando la distanza, dovrà aumentare la velocità di rotazione.

La velocità tangenziale di un corpo che rotea attorno ad un polo può essere espressa come  $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{R}$ , quindi si ha

$$\bar{b} = \bar{R} \times m(\bar{\omega} \times \bar{R}) = mR^2\bar{\omega} = I\bar{\omega}$$

Definiamo ( $mR^2$ ) **momento di inerzia**.

$$\bar{M} = \frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\bar{\omega})$$

Assumendo che  $I$  sia costante (la massa non varia e la distanza dal polo è sempre la stessa)

$$\bar{M} = I \frac{d\bar{\omega}}{dt}$$

### Seconda legge di Keplero

La seconda legge di Keplero afferma che, in un'orbita ellittica, a parità di aree formate dagli archi percorsi sull'ellisse, il tempo impiegato per percorrerli è identico.

Si osservi l'immagine 3.4, se l'area  $A_1$  coincide con l'area  $A_2$ , allora il corpo in orbita sull'ellisse impiegherà lo stesso tempo per percorrere gli archi  $a_1$  e  $a_2$ .

Definiamo la **velocità aereaolare** il rapporto fra l'area della sezione di ellisse data da un arco percorso ed il tempo per percorrere l'arco.

$$A = \frac{\text{area}}{t}$$

Si consideri uno spostamento infinitesimo in un tempo  $dt$  sul percorso, in tal caso, l'arco è approssimabile ad una retta, l'area percorsa è quindi uguale alla metà dell'area del rombo composta dal vettore spostamento con il vettore velocità.

$$dA = \bar{r} \times \bar{v} dt$$

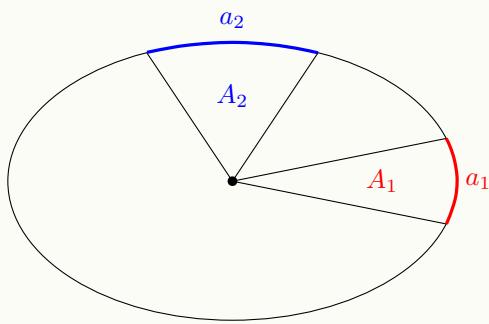
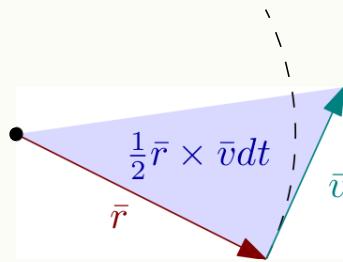


Figura 3.4: Aree percorse



Ma  $\bar{r} \times \bar{v}$  è proprio il momento della quantità di moto  $\bar{b}$

$$dA = \bar{b}dt$$

Si divide per  $dt$

$$\frac{dA}{dt} = \bar{b}$$

Ma il momento della quantità di moto si conserva, quindi la derivata della velocità aereolare è costante.

### 3.5 Sistemi di Punti Materiali

Consideriamo un sistema in cui sono presenti  $n$  punti materiali, ogni singolo punto  $i$ -esimo ha una massa  $m_i$  ed una velocità  $v_i$ . Il moto di ogni punto del sistema è descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} F_1 = m_1 a_1 \\ F_2 = m_2 a_2 \\ \vdots \\ F_n = m_n a_n \end{cases}$$

(per semplicità, si rappresentano i vettori  $F_i$ ,  $a_i$  e  $v_i$  senza la notazione con la barra sopra). Descrivere il moto di ogni singolo punto è molto complicato, ogni punto può generare forze che interagiscono con i restanti punti (ad esempio, cariche positive su negative) e trovare una soluzione analitica dei moti di ogni punto è impossibile. Si applicano quindi opportune semplificazioni, innanzitutto è possibile scrivere

$$\sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n m_i a_i$$

Conviene dividere le forze in forze esterne (derivanti dall'esterno del sistema, ad esempio : gravità) e forze interne (derivanti da fenomeni interni del sistema, ad esempio : urti fra i punti).

$$\sum_{i=1}^n F_i^{(est)} + \sum_{i=1}^n F_i^{(int)} = \sum_{i=1}^n m_i a_i$$

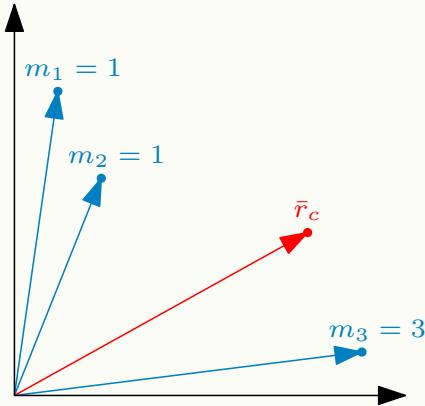
Inoltre, la somma delle forze interne del sistema è zero (ad esempio, una particella carica positivamente applica una forza  $E$  su una carica negativamente, e a sua volta risente di una forza  $-E$ ).

$$\sum_{i=1}^n F_i^{(est)} = \sum_{i=1}^n m_i a_i = F^{(est)}$$

Definiamo ora una gradezza relativa ad un sistema di punti, ossia il **centro di massa** definito come segue

$$\bar{r}_c = \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Non è altro che la somma dei vettori posizione di ogni punto pesata per la massa di ognuno di essi.



Considero anche la derivata del centro di massa, che rappresenta la velocità di esso, quindi dell'intero sistema di punti

$$\frac{d\bar{r}_c}{dt} = \bar{v}_c$$

Sia  $M$  la somma delle masse di ogni punto, si ha la quantità di moto del sistema :

$$\bar{p}_c = M \bar{v}_c = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i$$

La sua derivata è proprio uguale alla somma delle forze esterne agenti sul sistema

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \right) = \sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_i = F^{(est)}$$

Se le forze esterne sono assenti, allora la quantità di moto dell'intero sistema si conserva (la sua derivata è nulla, è quindi costante nel tempo).

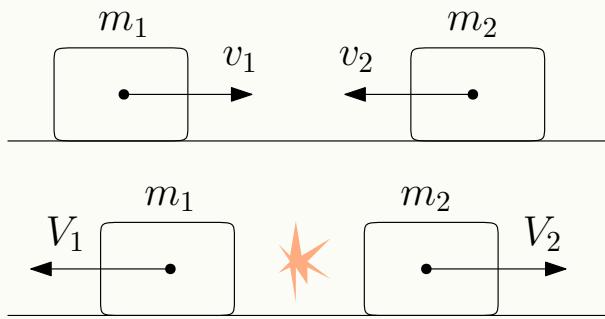
### 3.5.1 Urto

La conservazione della quantità di moto permette di analizzare gli urti fra i corpi, il fenomeno in cui avviene un'interazione da cui si trasferisce un impulso. Esistono due tipi di urti

- **urti elastici** : L'energia cinetica si conserva, la quantità di moto trasferita è identica a quella scaricata (no dissipazione).
- **urti anelastici** : Dell'energia viene assorbita (i corpi subiscono delle deformazioni) oppure dissipata.

Quando si analizza un urto, esso avviene in un istante brevissimo in cui è possibile trascurare le forze esterne. Consideriamo un urto elastico fra due corpi, siano  $v_1, v_2$  le velocità dei corpi prima dell'urto e  $V_1, V_2$  le velocità dei corpi dopo l'urto, siano  $m_1, m_2$  le masse. Sapendo che quantità di moto ed energia cinetica si conservano, è possibile scrivere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 & \text{cons. energia cinetica} \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 & \text{cons. quantità di moto} \end{cases}$$



Si vuole calcolare esplicitamente, date le velocità e le masse iniziali, le velocità dei due corpi dopo l'urto, si consideri un **caso semplificato** in cui uno dei due corpi ha velocità iniziale nulla, quindi :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 \\ m_1v_1 = m_1V_1 + m_2V_2 \end{cases}$$

Si risolve il sistema

$$\begin{cases} m_1v_1^2 = \frac{m_2^2}{m_1}V_2^2 + m_1v_1^2 - 2m_2V_2v_1 + m_2V_2^2 \\ V_1 = \frac{m_2}{m_1}V_2 - v_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_2^2\left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right) = 2m_2v_1V_2 \\ V_1 = \frac{m_2}{m_1}V_2 - v_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_2 = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2} \\ V_1 = \frac{m_2}{m_1}V_2 - v_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_2 = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2} \\ V_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_2 = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2} \\ V_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_1 \end{cases}$$

Un qualsiasi caso in cui entrambi i corpi si muovono può essere generalizzato a questo imponendo un sistema di riferimento assoluto per uno dei due corpi. Si pone  $\gamma = \frac{m_1}{m_2}$  e si ha

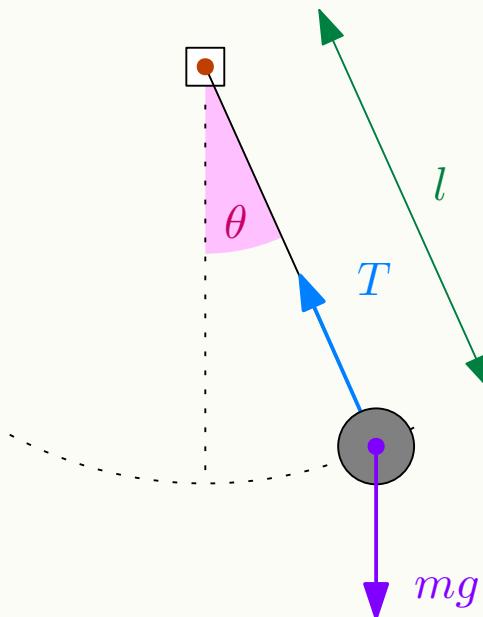
$$\begin{cases} V_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}v_1 \\ V_2 = \frac{2\gamma v_1}{\gamma + 1} \end{cases}$$

Nello scambio di impulsi è caratterizzante la discrepanza fra le due masse, in generale il fattore  $\gamma$  rappresenta tale discrepanza e tale procedimento è analogo anche ad altri contesti della fisica,  $\gamma$  è il *rapporto fra le impedanze*. Se  $\gamma = 1$ , vi è una completa trasmissione, il corpo inizialmente in moto verrà frenato dall'urto, ed il corpo inizialmente fermo inizierà a muoversi con la stessa velocità che il primo corpo aveva in origine.

## Il Pendolo

Si vuole descrivere il moto di un pendolo, tale pendolo è caratterizzato da un filo di lunghezza  $l$  che applica su una sfera di massa  $m$  una tensione  $T$  costringendolo ad oscillare per via della forza  $g$  di gravità.

Si considera un sistema di riferimento curvilineo sempre ortogonale al vettore  $T$ , il cui angolo con il vettore gravità  $g$  è  $\theta$ .



Il moto sulla traiettoria  $S$  della sfera è

$$-mg \sin \theta = -m \frac{d^2 S}{dt^2}$$

Se  $l$  è la lunghezza del filo, allora  $\theta = \frac{S}{l}$

$$-mg \sin\left(\frac{S}{l}\right) = -m \frac{d^2 S}{dt^2}$$

L'equazione differenziale non è lineare e quindi difficile trovare una soluzione analitica, si può però approssimare il moto per piccole variazioni di angolo

$$\sin\left(\frac{S}{l}\right) \approx \frac{S}{l}$$

Quindi

$$\begin{aligned} -mg \frac{S}{l} &= -m \frac{d^2 S}{dt^2} \\ \frac{d^2 S}{dt^2} + \frac{g}{l} S &= 0 \end{aligned}$$

è l'equazione del moto armonico

$$S = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Dove  $A$  e  $\varphi$  dipendono dalle condizioni iniziali, e

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

### Esercizio : Carrucola e piano inclinato

Si consideri un piano inclinato (di un angolo  $\alpha$ ) su cui è presente un corpo di massa  $m_2$ , attaccato ad una corda che lo congiunge ad un altro corpo di massa  $m_1$  tramite una carrucola, proprio come mostrato in figura 3.5. Inoltre, la tensione che il filo applica sul primo corpo è  $T_1$ , quella che applica sul secondo corpo è  $T_2$ . Il corpo sul piano inoltre (se in movimento) è sottoposto ad un'attrito dinamico  $\mu_d$ .

Si ipotizzi che il corpo di massa  $m_1$  cada verso il basso, spostando il corpo di massa  $m_2$  verso sinistra. Per il primo corpo, si considera un sistema di riferimento in cui l'asse delle ordinate è parallelo alla direzione della gravità, per il secondo corpo si considera un sistema di riferimento in cui l'asse delle ascisse forma un angolo  $\alpha$  con la linea dell'orizzonte.

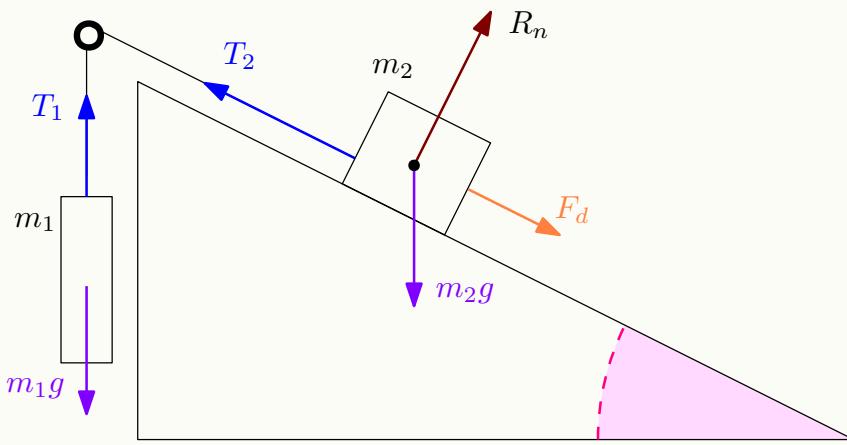


Figura 3.5: Schema delle forze

Analizziamo il moto del primo corpo, la sua forza avrà componente nulla sull'asse delle ascisse, sull'asse delle ordinate sarà

$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1$$

Il secondo corpo, si sposterà solamente lungo il piano, la sua forza avrà componente nulla sull'asse delle ordinate.

$$\begin{cases} T_2 - F_d + m_2 g \sin \alpha = m_2 a_2 \\ R_n - m_2 g \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Si ricordi che \$F\_d = \mu\_d R\_n\$

$$\begin{cases} T_2 - \mu_d R_n + m_2 g \sin \alpha = m_2 a_2 \\ R_n - m_2 g \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

A tal punto si considerano due ulteriori ipotesi

- La massa del filo è trascurabile, quindi \$T\_1 = T\_2 = T\$
- Il filo è inestensibile, quindi \$a\_1 = a\_2 = a\$

Allora si può riscrivere il sistema per trovare \$a\$

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a \\ T - \mu_d R_n + m_2 g \sin \alpha = m_2 a \\ R_n - m_2 g \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = m_1(g + a) \\ T - \mu_d(m_2 g \cos \alpha) + m_2 g \sin \alpha = m_2 a \\ R_n = m_2 g \cos \alpha \end{cases}$$

A questo punto si risolve per \$a\$

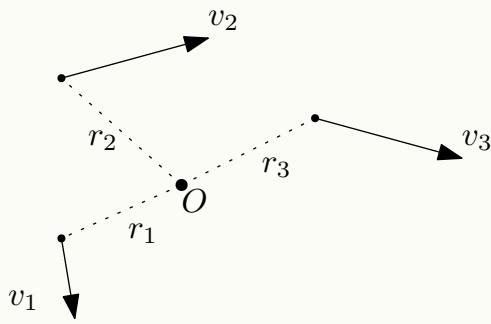
$$-m_1(g + a) - \mu_d(m_2 g \cos \alpha) + m_2 g \sin \alpha = m_2 a$$

$$a = \frac{m_2 g \sin \alpha - \mu_d m_2 g \cos \alpha - m_1 g}{m_1 + m_2}$$

è l'accelerazione del corpo 1 sull'asse verticale e del corpo 2 sul piano.

### Momento di un Sistema di Punti

Come si è considerata la forza totale di un sistema è possibile considerare il momento. Si consideri un insieme di punti con diverse velocità, ed un'unico polo.



Sia  $v_0$  la velocità del polo, il sistema dei momenti è

$$\begin{cases} M_1 = \frac{db_1}{dt} + v_0 \times r_1 \\ M_2 = \frac{db_2}{dt} + v_0 \times r_2 \\ \dots \\ M_n = \frac{db_n}{dt} + v_0 \times r_n \end{cases}$$

Essendo che le forze interne si annullano, anche i momenti interni si annullano. Si consideri la somma dei momenti

$$\left( \frac{d}{dt} \sum b_i \right) + v_0 \times \left( \sum r_i \right)$$

si può riscrivere

$$\frac{d}{dt} \left( \sum r_i \times m_i v_i \right) + v_0 \times \left( \sum r_i \right)$$

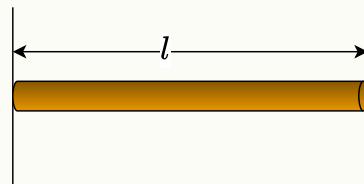
Sebbene la somma delle quantità di moto sia la quantità di moto del centro di massa di un sistema, la somma dei momenti non è il momento del centro di massa.

### 3.5.2 Sistemi Continui

Quando un punto di massa  $m$  rotea su una circonferenza di raggio  $r$  con una velocità angolare  $\omega$  sappiamo identificare momento, quantità di moto del momento e momento di inerzia

$$\bar{M} = I\dot{\omega} \quad \bar{b} = I\omega \quad I = rm^2$$

Cosa si può dire dei corpi continui? Si vuole trovare il momento di inerzia di un bastone di legno di lunghezza  $l$  che rotea attorno un certo asse.



Sia  $M$  la massa totale del bastone, non sappiamo come calcolare il momento di inerzia  $I$  del bastone intero, ma è possibile considerare un tratto infinitesimo del bastone approssimabile ad un punto materiale, sia  $x$  la distanza dal centro dell'asse al tratto infinitesimo, il momento di inerzia elementare sarà quindi.

$$dI = x^2 dM$$

Allora

$$I = \int dI = \int x^2 dM$$

È necessario trovare una grandezza che metta in relazione la massa con la distanza del punto dall'asse (lunghezza), si definisce quindi la **densità**

$$\frac{dM}{dl} = \lambda$$

Quindi

$$I = \int_0^l x^2 \lambda dx$$

Si considera la densità un valore costante, tale che la massa

$$M = \int_0^l \lambda dx = \lambda l$$

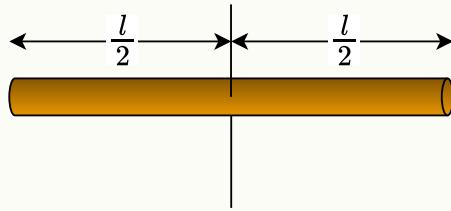
È possibile calcolare il momento di inerzia

$$I = \int_0^l x^2 \lambda dx = \lambda \int_0^l x^2 dx = \lambda \frac{l^3}{3}$$

Si può esprimere in funzione della massa

$$I = \frac{1}{3} M l^2$$

Si consideri il seguente esempio in cui l'asse di rotazione viene posto al centro del bastone.

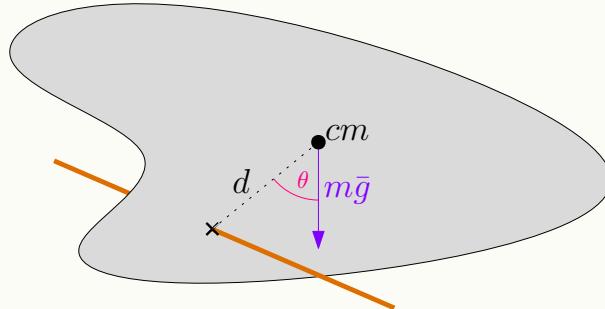


In questo caso cambiano gli estremi di integrazione

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \lambda dx = \frac{1}{3} \lambda x^3 \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{3} \lambda \left[ \frac{l^3}{8} - \left( -\frac{l^3}{8} \right) \right] = \frac{1}{12} M l^2$$

### 3.5.3 Rotazione di un Corpo Rigido

Definiamo il cosiddetto *pendolo composto*, si consideri corpo continuo arbitrario (verrà rappresentato come una lamina di ferro), tale corpo, ha un centro di massa *cm*. Si "infilza" il corpo con un asse in un certo punto.



Sia  $d$  la distanza dal punto di infilzamento ed il centro di massa, e sia  $\theta$  l'angolo compreso fra il vettore gravità ed il vettore che va dal punto di infilzamento ed il centro di massa (di lunghezza  $d$ ). Il corpo comincerà a ruotare attorno il punto di infilzamento, se ne vuole calcolare il momento. Sia  $I_0$  il momento di inerzia del punto di infilzamento con polo nel centro di massa, l'equazione del moto è

$$-mgd \sin \theta = -I_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Si approssima per  $\theta$  piccoli dove  $\sin \theta \simeq \theta$

$$-mgd\theta = -I_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mgd}{I_0} = 0$$

È l'equazione del moto armonico, troviamo velocità angolare e periodo

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I_0}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{Mgd}}$$

Come varia il periodo  $T$  al variare di  $d$ ? Apparentemente, potrebbe sembrare che  $T$  si comporti come

$$T(d) \propto \frac{1}{\sqrt{d}}$$

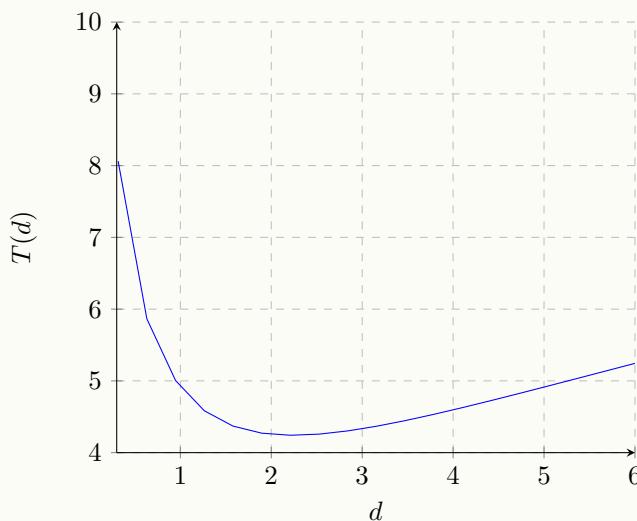
ma ciò è errato, in quanto va considerato il momento di inerzia che dipende proprio da  $d$ , infatti

$$I_0 = I_{cm} + md^2$$

Dove  $I_{cm}$  è il momento di inerzia del centro di massa, ed è costante. Si ha quindi

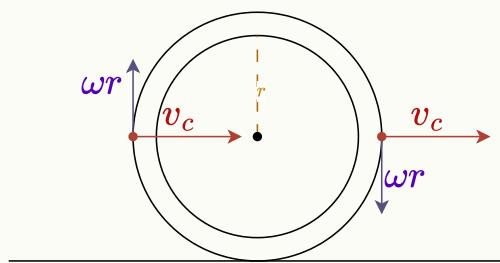
$$T(d) = 2\pi \sqrt{\frac{I_{cm} + md^2}{mgd}}$$

Quindi, se infilzassimo il corpo esattamente nel centro di massa,  $d = 0 \implies T = \infty \implies$  non ci sarebbero oscillazioni. Più il corpo viene infilzato lontano dal suo centro di massa, più le oscillazioni saranno frequenti.



## 3.6 Rotolamento

In questa sezione verrà definito il rotolamento di una ruota. Si consideri appunto, una ruota di una auto che si muove, in ogni istante, un punto materiale che si trova sulla frontiera della ruota ha una velocità che è composizione di 2 velocità : La velocità di traslazione (del centro di massa)  $v_c$  e la velocità tangenziale  $\omega r$  di rotazione attorno al centro.



La velocità totale del punto è  $v = v_c + \omega r$ , nel preciso punto di contatto della ruota con il suolo, la velocità angolare sarà di eguale direzione ma verso opposto della velocità di traslazione. La condizione di **puro rotolamento** si ha quando  $|\omega r| = |v_c|$ .

Si consideri adesso una ruota di raggio  $R$  e massa  $M$  sollevata dal suolo, a cui viene data una velocità angolare  $\omega$ . Abbassando pian piano la ruota, arriverà un istante in cui tocca il suolo, in quell'istante preciso, l'*attrito dinamico* costituisce una forza esterna.

$$F_d R = I \dot{\omega}$$

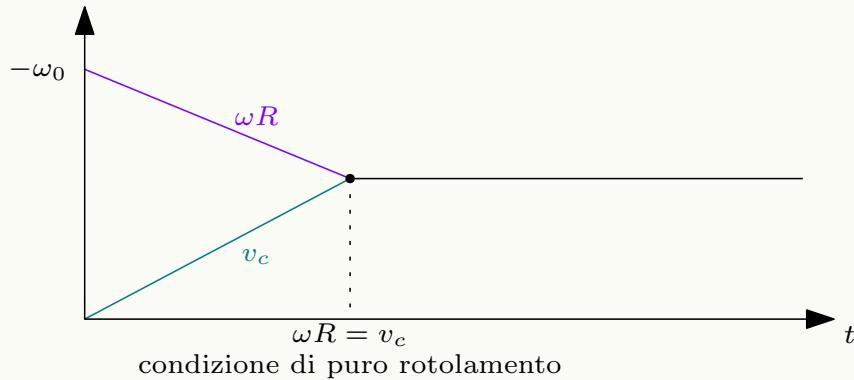
Si vuole descrivere il moto del centro di massa, sia  $x_{cm}$  la sua posizione

$$\begin{cases} x_{cm}(t) = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 + \frac{1}{2} \frac{F_d}{M} t^2 \\ v_{cm} = a_{cm} t = \frac{F_d}{M} t \end{cases}$$

La velocità angolare invece andrà diminuendo, sia  $\omega_0$  la velocità angolare iniziale

$$\omega = -\omega_0 + \dot{\omega} t + \frac{F_d R}{I} t$$

Lo strisciamento fa diminuire la velocità angolare.



### Rotolamento su un Piano Inclinato

Si consideri un generico corpo su un piano inclinato posto ad un'altezza  $h$ , essendo che l'energia cinetica si conserva, la sua energia cinetica iniziale è identica a quella finale

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgh$$

La velocità del corpo una volta finita la corsa sul piano sarà

$$v = \sqrt{2gh}$$

Supponiamo ora che sul piano ci sia un disco che rotola. L'energia cinetica è

$$\frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Essa si conserva quindi

$$\frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = mgh$$

L'energia potenziale si "suddividerà" fra la componente traslatoria e la componente rotatoria, per un disco,  $I = \frac{1}{2} m R^2$ , la velocità di traslazione a fine corsa sarà

$$v_c = \sqrt{mgh \frac{1}{m + I/R^2}} = \sqrt{\frac{2mgh}{m + 1/2m}} = \sqrt{2/3} \sqrt{2gh}$$

Quindi la velocità del corpo che ruota sarà minore della velocità del corpo che striscia, dato che l'energia di traslazione mancante a tale corpo sarà contenuta nella velocità di rotazione acquisita.

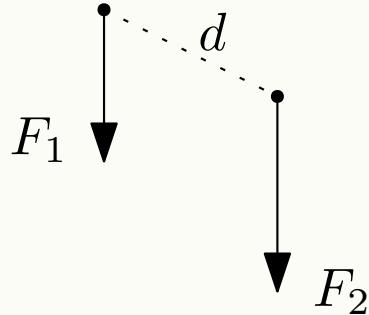


### 3.7 Sistemi Equivalenti di Forze

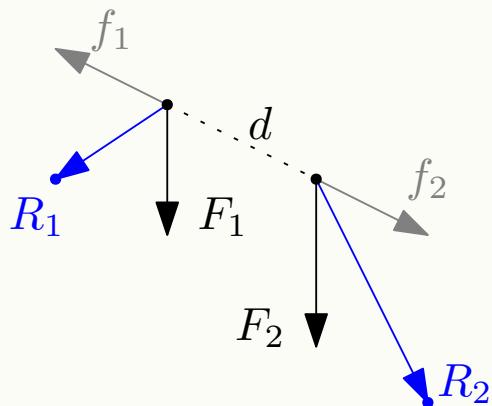
Date due forze applicate ad un sistema, si vuole trovare una forza unica risultante che sia equivalente alle due (se sostituita alle forze originali, la dinamica del sistema rimane invariata). Verranno analizzati 3 casi.

#### Caso 1

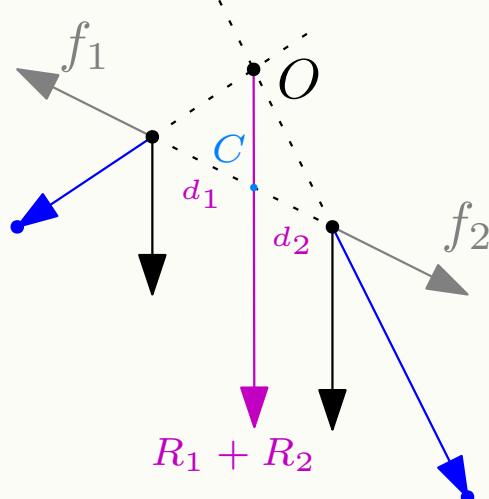
Si considerano due forze parallele  $F_1$  ed  $F_2$  applicate in due punti, distanti  $d$ .



Definisco sull'asse che congiunge i due punti due forze uguali e contrarie (di intensità arbitraria)  $f_1, f_2$ , considerando poi altra due forze risultanti  $R_1 = F_1 + f_1$  ed  $R_2 = F_2 + f_2$ .



Si considera il punto  $O$  come incontro dei prolungamenti di  $R_1$  e  $R_2$ , in cui si applica  $R_1 + R_2$ , il cui incontro con l'asse congiungente i due punti originali sarà chiamato  $C$  e sarà il punto in cui, dovrà essere applicata la forza  $F_1 + F_2$  per rendere il sistema equivalente..



In ogni punto i momenti delle forze saranno equivalenti

$$\bar{M}_F = \bar{M}_{F_1} + \bar{M}_{F_2}$$

Il momento applicato nel punto  $C$  sarà nullo quindi

$$0 = F_1 d_1 - F_2 d_2 \implies \frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{F_1}$$

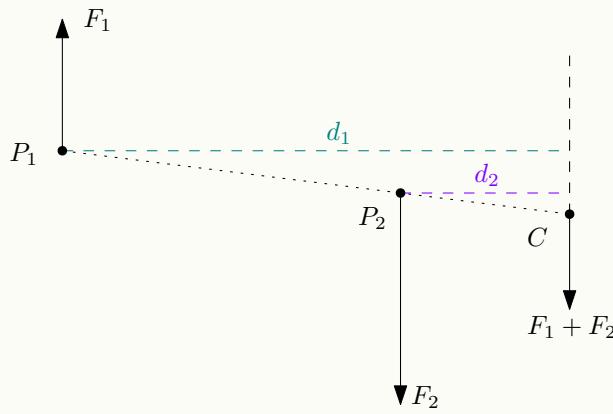
Trovando  $d_1, d_2$  si definisce il preciso punto di applicazione della forza equivalente.

### Caso 2

Si considerano adesso due forze parallele ma in verso opposto, applicate nei punti  $P_1$  e  $P_2$ , aventi intensità diverse. La forza risultante avrà intensità pari alla differenza fra le due forze, e sarà diretta nel verso della forza con intensità maggiore.

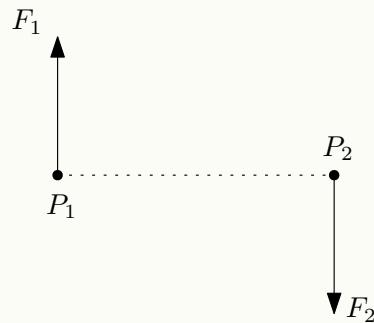
Il punto di applicazione  $C$ , si troverà sulla retta che congiunge  $P_1$  e  $P_2$ , in una posizione determinata dalla relazione

$$-F_1 d_1 + F_2 d_2 = 0 \implies \frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{F_1}$$



### Caso 3 : Coppia

Si considerino due forze parallele dirette in verso opposto e di uguale intensità  $F_1 = -F_2$ . In questo specifico caso, non è possibile riprodurre l'effetto delle due forze con una singola forza.



In questo specifico caso, la somma dei momenti delle due forze è *invariante rispetto il punto di applicazione*, sia  $O$  un generico punto

$$M = M_1 + M_2 = OP_1 \times F_1 + OP_2 \times F_2 = OP_1 \times F_1 + OP_2 \times (-F_1) = \quad (3.30)$$

$$F_1(OP_1 - OP_2) = P_2 P_1 \times F_1 \quad (3.31)$$

Il momento della coppia di forze è normale al piano delle due forze, sia  $b$  la distanza fra  $P_1$  e  $P_2$ , l'intensità della forza è  $|F_1|b = |F_2|b$ . La coppia è un sistema di forze **irriducibile** ed è completamente individuata dal suo momento.

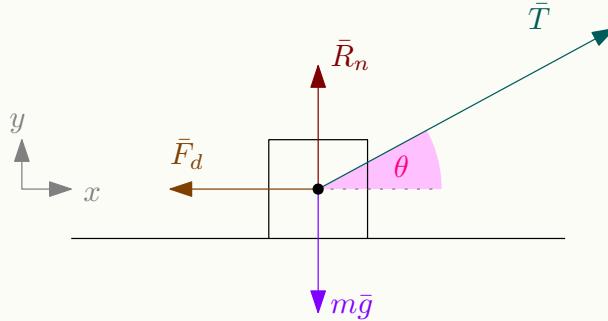
Un momento di forze può essere rappresentato per mezzo di una qualsiasi coppia di forze che ha quel momento.



## 3.8 Esercizi sulla Meccanica

### Esercizio 1

Un corpo di massa  $m = 18\text{kg}$  è trascinato da una fune che applica una tensione  $\bar{T}$  il cui angolo con il suolo è  $\theta$ , e si muove a velocità costante  $v$ . È sottoposto ad un'attrito dinamico  $\mu_d = 0.15$ . Si vuole determinare la forza  $\bar{T}$ .



Essendo

$$\bar{F}_d + \bar{R}_n + m\bar{g} + \bar{T} = m\bar{a}$$

ed essendo l'accelerazione nulla, si ha

$$\bar{F}_d + \bar{R}_n + m\bar{g} + \bar{T} = 0$$

Si proiettano le forze sui due assi

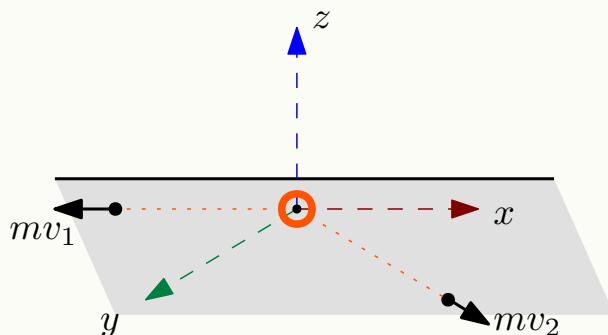
$$\begin{cases} x : T \cos \theta - F_d = 0 \implies T \cos \theta - \mu_d R_n = 0 \\ y : T \sin \theta + R_n - mg = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\begin{cases} x : T \cos \theta - \mu_d R_n mg + \mu_d T \sin \theta = 0 \\ y : R_n = mg - T \sin \theta \end{cases} \quad (3.33)$$

$$T = \frac{\mu_d mg}{\cos \theta + \mu_d \sin \theta} \quad (3.34)$$

### Esercizio 2

Una caldaia esplode e si divide in tre pezzi. I primi due sono di massa  $m$  e hanno eguali velocità in modulo ma ortogonali fra loro e parallele al suolo. Il terzo pezzo ha massa  $3m$ . Se ne determini la velocità  $v_3$ .



Essendo la caldaia ferma prima dell'esplosione, aveva quantità di moto  $\bar{p}$  nulla. La quantità di moto dopo l'esplosione è invece

$$mv_1 + mv_2 + 3mv_3$$

La quantità di moto si conserva, quindi

$$mv_1 + mv_2 + 3mv_3 = 0 \quad (3.35)$$

$$3mv_3 = -(mv_1 + mv_2) \quad (3.36)$$

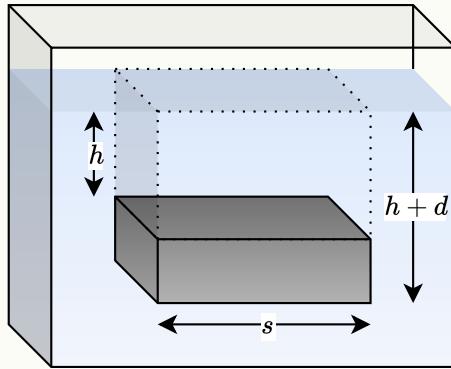
$$v_3 = \frac{-(mv_1 + mv_2)}{3m} \quad (3.37)$$

$$v_3 = \frac{-(v_1 + v_2)}{3} \quad (3.38)$$



### 3.9 Fluidi e Spinta di Archimede

Si consideri un contenitore d'acqua in cui è riposto un parallelepipedo di lato  $s$ , immerso ad una profondità  $h$  dalla superficie.



L'acqua sopra il parallelepipedo ha un volume  $sh$  ed è sottoposta ad un'accelerazione di gravità  $\bar{g}$ . Sia  $\rho$  la densità (uniforme) dell'acqua, il peso dell'acqua sopra il parallelepipedo è

$$m\bar{g} = sh\rho\bar{g}$$

si definisce **pressione** il rapporto fra la forza ed una superficie  $S$ , l'unità di misura è il *pascal* e si misura in Newton su metro quadro  $\frac{N}{m^2}$ , il parallelepipedo è sottoposto ad una pressione di

$$p = \frac{\bar{F}}{S} = \rho\bar{g}hs$$

Anche l'aria ha un fluido ed ha un peso, la densità dell'aria è circa 1000 volte minore di quella dell'acqua, per i primi 10 km di atmosfera, l'aria imprime su ciò che si trova sulla superficie terrestre una forza peso equivalente a quella che imprimerebbero 10 metri d'acqua.

Il parallelepipedo ha uno spessore  $d$ , la pressione che l'oggetto sente sul fondo è

$$p\rho\bar{g}(h + d)s$$

Essendo questo soggetto ad entrambe le pressioni, si considera la differenza di pressione

$$\delta p = \rho ghs - \rho g(h + d)s = -\rho gds$$

Il corpo è quindi soggetto ad una forza che lo spinge verso l'alto, questa è detta *spinta di archimede*.

## CAPITOLO

# 4

## IL CAMPO ELETTRICO

Gli atomi sono i costituenti della materia, sono formati da un nucleo (protoni e neutroni) e da elettroni che si trovano attorno ad esso. In passato sono stati osservati fenomeni di forza elettrica senza però conoscerne le cause. Ad esempio, strofinando una bacchetta di vetro su un maglione di lana si potrà osservare che questa acquisirà la proprietà di attirare a se (esercitare una forza) su oggetti leggeri (come un pezzo di carta).

La **carica** è una proprietà fondamentale della materia, si misura in *Coloumb C*, ed è quantizzata, in particolare, la carica elementare è quella posseduta da un protone o da un elettrone, questi ultimi infatti hanno carica di eguale modulo, ma segno opposto.

Particella	Carica (C)
elettrone	$-1.602177335 \cdot 10^{-19}$
protone	$+1.602177335 \cdot 10^{-19}$
neutrone	0

Essendo che in un atomo il numero dei protoni coincide con il numero degli elettroni, questo risulta elettricamente neutro, quando si strofina la bacchetta di vetro sulla lana, questa riesce a "strappare" degli elettroni, e caricarsi negativamente, acquisendo una carica non neutra.

### 4.1 La Forza Elettrica

La **Forza Elettrica** è una forza che agisce sui corpi carichi, in particolare, un corpo carico negativamente eserciterà una forza attrattiva sui corpi carichi positivamente, e repulsiva sui corpi carichi negativamente. Analogamente per i corpi carichi positivamente.



Si considerino due corpi carichi, di carica  $q$  e  $q_0$ , sia  $\hat{r}$  il versore congiungente il primo corpo con il secondo, e sia  $r$  la loro distanza. Il corpo di carica  $q$  eserciterà sul corpo di carica  $q_0$  una forza

$$\bar{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q_0}{r^2} \hat{r}$$

Il termine  $\epsilon_0$  è detta **costante dielettrica nel vuoto** e vale

$$\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

**Esempio :** L'elettrone ed il protone di un atomo di idrogeno si trovano ad una distanza media di

$$r = 0.53 \cdot 10^{-10} m$$

La forza applicata sulle particelle ha modulo

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{-(1.602177335 \cdot 10^{-19})^2}{(0.53 \cdot 10^{-10})^2} = 8.20 \cdot 10^{-8} N$$

È possibile rappresentare l'interazione elettrica prodotta da una carica come un campo di forze, che ne illustra appunto l'azione. Il problema è che ogni carica esercita una forza su altre cariche, ma queste ultime a loro volta perturbano il campo elettrico generato dalla prima. Dall'equazione della forza di Coulomb si può scrivere

$$\frac{\bar{F}}{q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{r}$$

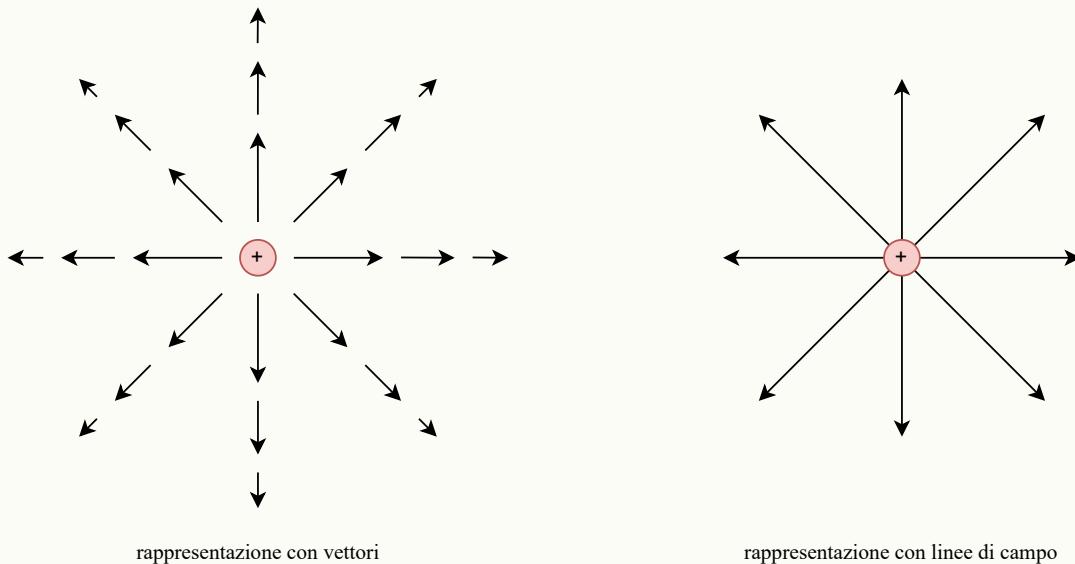
Supponendo che  $q_2$  sia una carica di "sonda", ossia abbastanza piccola rispetto  $q_1$  da rendere la sua perturbazione della forza trascurabile, si definisce il **Campo Elettrico**

$$\bar{E} = \lim_{q_2 \rightarrow 0} \frac{\bar{F}}{q_2} \frac{N}{C}$$

L'unità di misura è Newton su Coloumb.  $\bar{E}$  rappresenta l'effetto elettrico di una sola carica ed è definito in tutto lo spazio.

La carica, la cui unità di misura è il Coloumb  $C$ , non ha una dimensione assenteante, ma ha una dimensione derivata dalla corrente  $I$ , che si misura in Ampere  $A = \frac{C}{s}$  (verrà trattata in seguito). Le dimensioni del campo elettrico sono quindi  $[m\tau^{-3}I^{-1}]$ .

È possibile rappresentare graficamente un campo elettrico, disegnando sul piano (nel caso a due dimensioni) o nello spazio (nel caso a tre dimensioni) delle frecce che rappresentino la forza in ogni punto, la cui lunghezza è proporzionale all'intensità.



È anche possibile rappresentare il campo tramite delle *linee di campo*, ossia delle curve mai incidenti che in ogni punto sono tangenti al campo elettrico, quest'ultima rappresentazione è spesso privilegiata.

Dato un campo elettrico  $\bar{E}$ , la forza che agisce su una carica  $q_0$  è

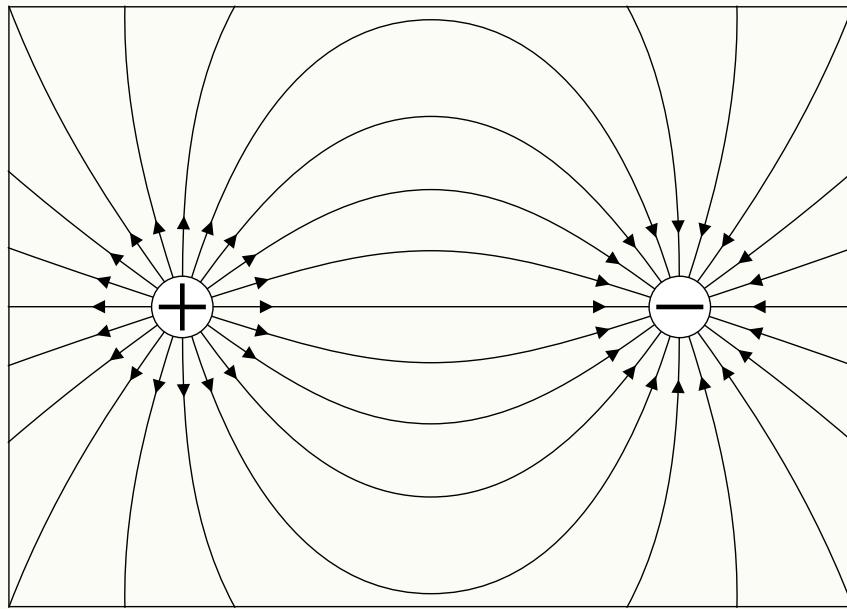
$$\bar{F} = \bar{E} q_0$$

**Definizione :** un **dipolo elettrico** è un sistema di due cariche puntiformi uguali in modulo ma di segno opposto.

Il campo elettrico totale generato dal sistema è uguale, punto per punto, alla somma dei campi elettrici generati da ognuna delle due cariche.

$$\bar{E}_{tot} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{+Q}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{r_2^2} \hat{r}_2$$

Le linee di campo del dipolo elettrico congiungono la carica  $+Q$  alla carica  $-Q$  esclusa una delle due linee parallele alla retta congiungente.



Senza dimostrazione, il campo elettrico generato dal dipolo diminuisce di intensità al variare della distanza come  $\frac{1}{r^3}$ . In generale, un sistema di  $n$  cariche genera il campo

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Una carica può anche essere distribuita su una superficie (o eventualmente su un volume)  $S$ , in quel caso il campo elettrico vale

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{dQ}{r^2} \hat{r}$$

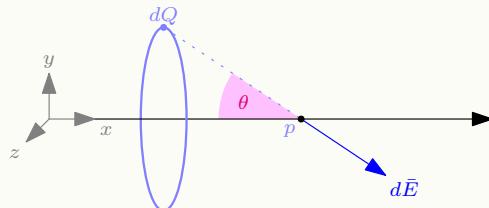
dove  $dQ$  è la carica nella porzione infinitesima della superficie.

### 4.1.1 Campi Elettrici Noti

In questa sezione verranno presentati alcuni risultati notevoli di campi generati da determinate sorgenti.

#### Campo generato da un anello

Si vuole determinare l'intensità del campo elettrico generato da un anello (con carica uniforme) su un asse passante tale anello ed ortogonale ad esso, come mostrato in figura.

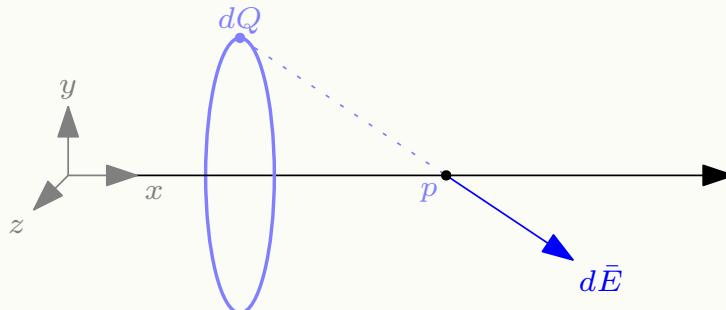


Per ipotesi il contributo elementare della carica  $dQ$  è indipendente dalla sua posizione sull'anello in quanto la densità di carica  $\lambda$  è uniforme

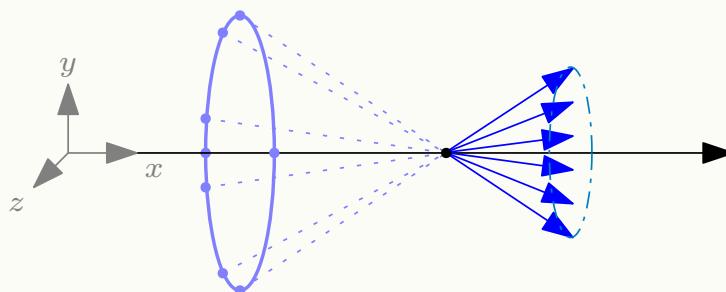
$$dQ = \lambda dl$$

dove  $l \in [0, 2\pi]$  rappresenta la posizione di frammento infinitesimale sull'anello. Il contributo elementare al campo elettrico sarà

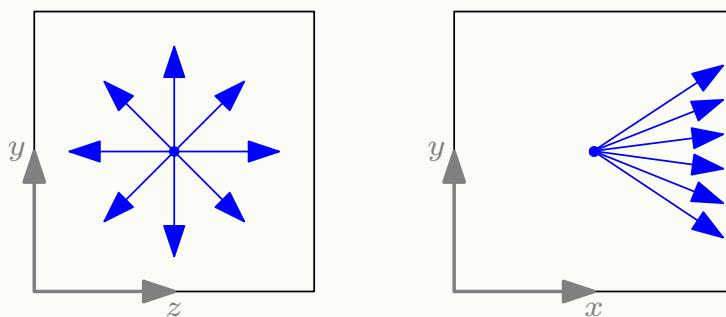
$$d\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \hat{r}$$



È chiaro che ogni contributo di campo infinitesimale avrà componente nulla sull'asse delle  $z$ . Vanno quindi analizzate le componenti sull'asse delle  $x$  e delle  $y$ . Le forze in un punto  $p$  dell'anello formeranno una forma a "ventaglio".



Tale "ventaglio" avrà componente nulla lungo  $y$  in quanto le forze si annullano fra loro. Avrà valore esclusivamente lungo la componente  $x$ .



Quindi

$$\bar{E} = \int dE_x$$

Essendo  $dE_x = dE \cos \theta$ , dove  $\theta$  è l'angolo compreso fra l'asse  $x$  e la forza elementare.

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{r^2} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\lambda dl}{r^2} \cos \theta$$

Dove l'insieme di integrazione  $A$  è la curva dell'anello. Fissato un punto  $p$ , si noti come sia  $r$  (la distanza) che  $\theta$  non dipendono dalla posizione del frammento infinitesimo di anello  $dl$ , quindi è possibile portarli fuori dall'integrale.

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} \int_A \lambda dl$$

Essendo  $\int_A \lambda dl = \int dQ = Q$  si ha

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} Q$$

Si vuole scrivere in una forma più comoda solamente in funzione di  $x$ , si noti come

$$r \cos\theta = x \implies \cos\theta = \frac{x}{r}$$

quindi

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{r^3} Q$$

Inoltre anche la distanza  $r$  dipende esclusivamente da  $x$ , sia  $R$  il raggio dell'anello, si ha

$$r = \sqrt{x^2 + R^2}$$

in definitiva

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} Q$$

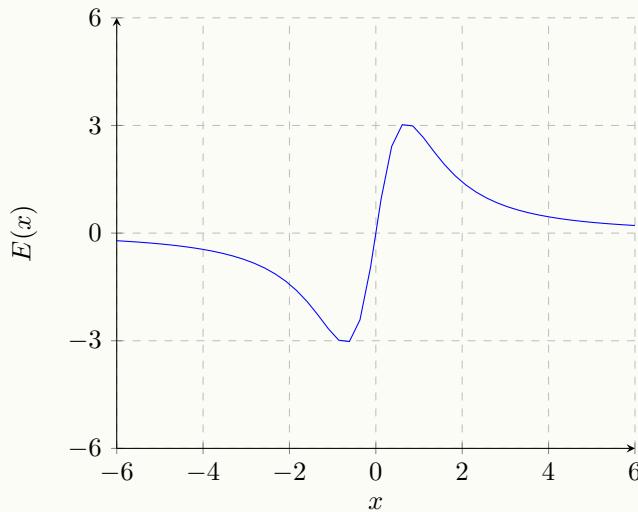
A che distanza  $x$  il campo elettrico è massimo? Si fa la derivata

$$\frac{d\bar{E}}{dx} = \frac{Q(R^2 - 2x^2)}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + x^2)^{5/2}}$$

Si pone uguale a zero

$$\frac{Q(R^2 - 2x^2)}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + x^2)^{5/2}} = 0 \iff x = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Il seguente grafico riporta l'andamento qualitativo dell'intensità del campo elettrico in questione al variare di  $x$ .

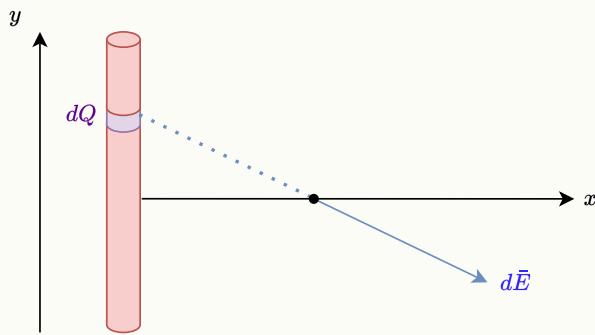


### Campo generato da una bacchetta (nota : vedi pag 49)

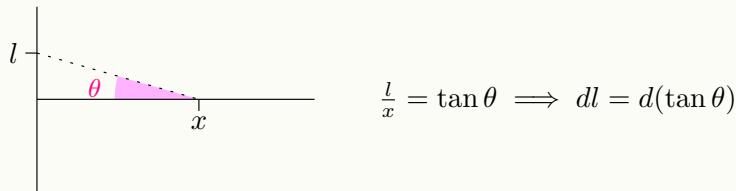
Si consideri ora una bacchetta carica  $l$  parallela all'asse  $y$ , si vuole determinare l'intensità del campo elettrico generato dalla bacchetta lungo l'asse  $x$ . La carica totale della bacchetta è  $Q$ , il contributo di carica elementare è  $dQ = \lambda dl$  dove  $\lambda$  è la densità di carica, assunta uniforme.

In questo caso i contributi elementari del campo elettrico  $d\bar{E}$  su un punto avranno, visualizzati insieme come vettori, una forma triangolare, e la formulazione del campo totale è la stessa.

$$\bar{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_l \frac{dl}{r^2} \cos\theta$$



Sebbene la formula del campo elettrico coincida con quella nel caso dell'anello carico, adesso la distanza  $r$  dalla sorgente di carica e l'angolo  $\theta$  formato dall'asse delle  $x$  e la retta congiungente di  $x$  e la sorgente non sono indipendenti.



La derivata della tangente è  $\cos^{-2} \theta$ , quindi

$$dl = \frac{x}{\cos^2 \theta} d\theta \quad \text{allora} \quad r \cos \theta = x \implies r^2 = \frac{x^2}{\cos^2 \theta}$$

$$\bar{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{x}{\cos^2 \theta} d\theta \frac{\cos^3 \theta}{x^2} = \frac{\lambda}{x4\pi\varepsilon_0} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos \theta d\theta$$

$\theta_0$  è l'angolo quando la sorgente di carica è l'estremità della bacchetta e dipende da  $x$ .

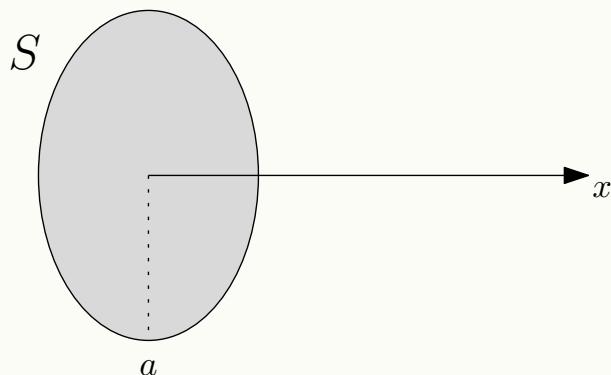
$$\bar{E} = \frac{\lambda}{x4\pi\varepsilon_0} 2 \sin(\theta_0(x))$$

Se la bacchetta è infinita,  $\theta_0$  tende a 90 gradi.

$$\frac{\lambda}{x4\pi\varepsilon_0} 2 \sin(\pi/2) = \frac{2\lambda}{x4\pi\varepsilon_0}$$

### Campo generato da un disco

Si consideri il disco  $S$  di raggio  $a$  e carica totale  $Q$  mostrato in figura.



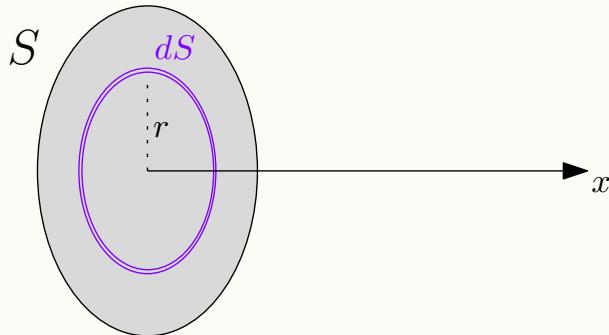
La carica infinitesima  $dQ$  è data da  $\lambda dS$ . Il campo elettrico sarà

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\lambda dS}{r^2} \hat{r}$$

È possibile considerare ogni contributo infinitesimo  $dS$  come un anello infinitesimo di raggio  $r$

$$dS = (2\pi r)dr$$

e l'anello infinitesimo  $dS$  genera il campo elettrico infinitesimo  $d\bar{E}$ .



Il campo generato da un anello carico è noto, si ha

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dQ \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Dove  $dQ$  è la carica infinitesimale che può essere scritta, usando la densità  $\sigma$  come

$$dQ = (\sigma 2\pi y dy)$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma 2\pi y dy \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Si assume che  $\sigma$  sia uniforme. A questo punto sarà necessario integrare ogni anello sul raggio  $a$  del disco

$$E = \int_0^a dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma 2\pi x \int_0^a \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy$$

Si risolve per sostituzione

$$t = x^2 + y^2 \implies 2ydy = 2t \quad \begin{cases} y = 0 \implies t = x^2 \\ y = a \implies t = x^2 + a^2 \end{cases}$$

$$E = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma x \int_{x^2}^{x^2 + a^2} \frac{t^{-3/2}}{2} dt = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma x \left( \frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right)$$

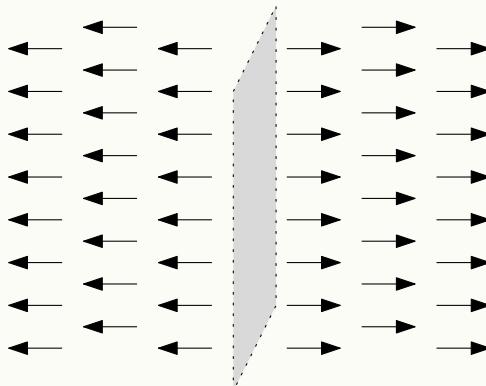
$$E = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma x \left( \frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right)$$

### Piano Carico

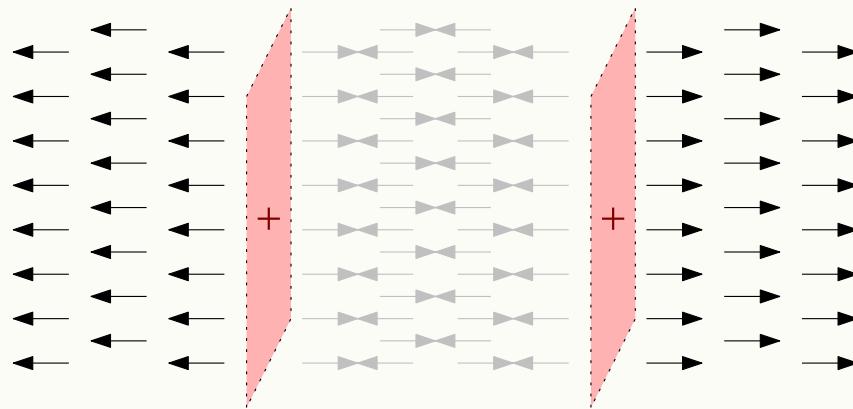
Considerando il risultato appena ottenuto, è possibile fare il limite del campo elettrico generato da un disco per il raggio  $a$  che tende all'infinito, ossia facendo tendere il disco ad un piano, in particolare, parallelo agli assi  $y, z$ .

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma x \left( \frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma x \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{x}{|x|} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

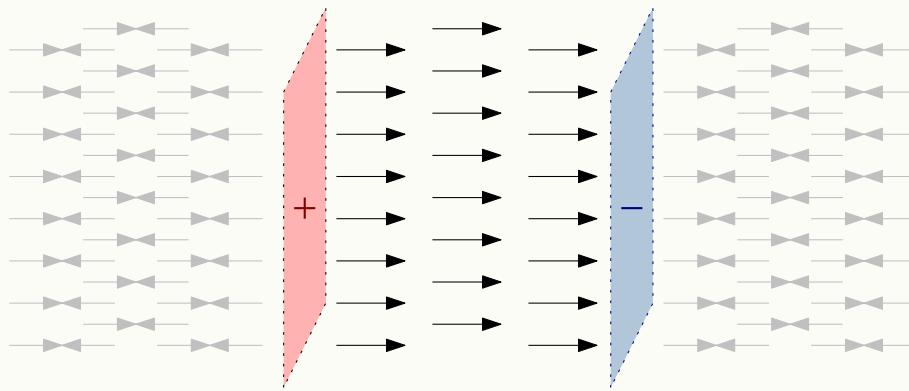
Il campo elettrico generato da un piano carico infinito è **uniforme**, tale risultato è di notevole importanza.



Se vengono posti in vicinanza due piani carichi (di carica eguale), in ogni punto le forze si sommeranno vettorialmente, nello spazio compreso fra i due piani, le forze saranno uguali ed opposte e si annulleranno.



Considerano due piani di cariche opposte ma identiche in modulo, si avrà l'effetto opposto, il campo elettrico si annullerà nello spazio non compreso fra i due piani.



In particolare, quest'ultima configurazione è alla base del funzionamento del **condensatore**, ossia un componente elettrico composto da due lastre parallele, che se caricate permettono di accumulare energia sotto forma di campo elettrico.

Riconsiderando il disco finito carico, risulta naturale porsi una domanda, per  $x \rightarrow \infty$  (ci si allontana indefinitamente dal disco) che valore assume il campo elettrico? Essendo il campo elettrico del disco

$$E = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma x \left( \frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right)$$

❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖

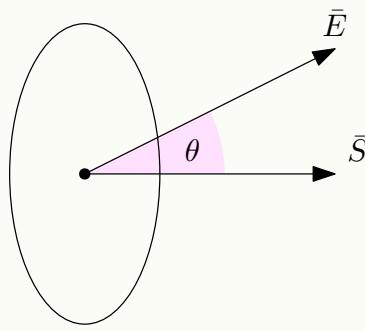
## 4.2 La Legge di Gauss

Tale sezione si occuperà di esporre una proprietà dei campi vettoriali che dipendono dall'inverso del quadrato della distanza (proprio come il campo elettrico).

**Definizione (Flusso) :** Sia  $S$  una superficie, e sia  $\bar{S}$  il vettore normale a tale superficie, di modulo uguale all'area di  $S$ . Il flusso del campo  $\bar{E}$  attraverso  $S$  è dato da

$$\phi = \bar{E} \cdot \bar{S} = ES \cos \theta$$

Se  $\bar{S}$  è ortogonale al campo  $\bar{E}$  ( $\theta = \pi/2$ ), allora il flusso è nullo. Il flusso si misura in  $\frac{Nm^2}{C}$ .



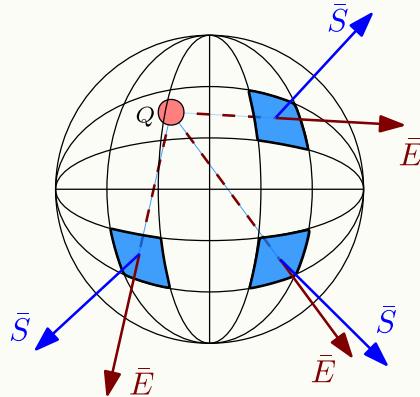
Il campo elettrico  $\bar{E}$ , a meno che non sia uniforme, varia in ogni punto infinitesimo, il flusso va quindi espresso per una superficie infinitesima  $dS$

$$d\phi = \bar{E} d\bar{S}$$

Data una superficie finita  $S$ , il flusso totale del campo elettrico su di essa è dato dall'integrale del flusso infinitesimo su tutta la superficie

$$\phi = \int_S d\phi = \int_S \bar{E} d\bar{S}$$

Esiste una proprietà interessante del campo elettrico, quando si calcola il flusso per una superficie chiusa.



**Teorema (Legge di Gauss) :** Sia  $S$  una superficie *chiusa*, e sia  $\bar{E}$  il campo elettrico generato da una carica puntiforme  $q$  interna alla superficie. Si ha che

$$\oint_S d\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

**Dimostrazione :** Si consideri il campo elettrico generato da una carica puntiforme  $q$

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Si calcola il flusso attraverso una superficie infinitesima  $dS$ , di cui  $\hat{s}$  è il versore (di modulo unitario) normale, alla superficie, e conseguentemente  $dS\hat{s}$  è il vettore normale.

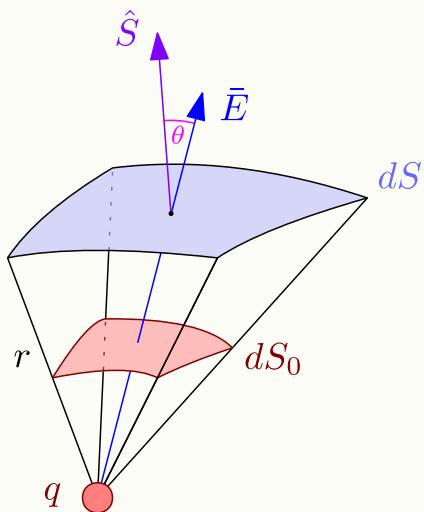
$$d\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} (\hat{r} \cdot \hat{s}) dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \cos\theta dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dS_0$$

denoto  $dS \cos\theta = dS_0$ , questa è la proiezione di  $dS$  sul piano perpendicolare a  $\hat{r}$  (quindi al campo elettrico), come si può notare in figura 4.1. Riscrivendo

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dS_0}{r^2}$$

Si mette in evidenza il termine  $\frac{dS_0}{r^2}$ , che per definizione, è la *proiezione ortogonale* al raggio uscente dal punto  $q$  passante per  $dS$ , ossia l'*angolo solido infinitesimo*  $d\Omega$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

Figura 4.1: proiezione di  $dS$ 

Essendo  $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$  costante, è chiaro che il flusso infinitesimo dipende esclusivamente dall'angolo solido  $d\Omega$ , e quest'ultimo non dipende né dalla superficie scelta né dalla sua distanza dalla carica. Il flusso attraverso una superficie finita  $S$  è

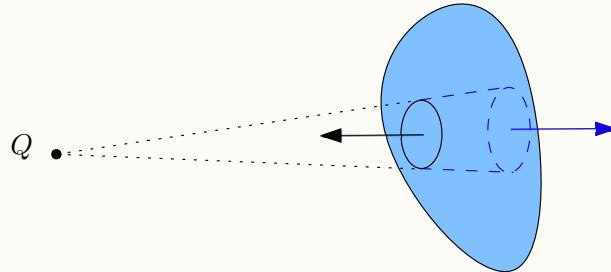
$$\phi = \int_S d\phi = \int_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dS_0}{r^2} = \int \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int d\Omega$$

L'angolo solido totale di una superficie chiusa è  $4\pi$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

■

Si può considerare anche il caso in cui la carica sorgente del campo è esterna alla superficie, tale caso è banale in quanto il campo elettrico "entra" nella superficie tante volte quante ne "esce", ogni flusso infinitesimo si annulla.



Il flusso su una superficie chiusa del campo generato da una carica esterna alla superficie è nullo.

$$\phi = 0$$

Piuttosto che suddividere i casi in cui la carica è esterna o interna è possibile scrivere la legge di Gauss in maniera più formale, indicando con  $\tau_S$  il volume carico (con densità di carica  $\rho$ ) di cui  $S$  è la frontiera.

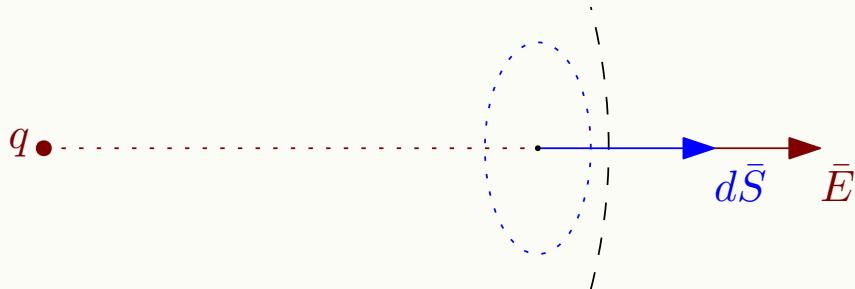
$$\oint_S \bar{E} d\bar{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\tau_S} \rho d\tau_S$$

Questa è nota come **prima equazione di Maxwell**.

### 4.2.1 Alcune Applicazioni

In questa sezione verrà utilizzata la legge di Gauss per ricavare la formula del campo elettrico in alcune situazioni di simmetria.

Si consideri il campo generato da una carica puntiforme  $q$ , è noto il valore del flusso  $\phi$  ma non del campo  $\bar{E}$ . Si considera il flusso su una superficie sferica con centro nella carica  $q$ , è chiaro che in questa situazione ogni superficie orientata infinitesima  $d\bar{S}$  è normale al campo  $\bar{E}$ .



In ogni punto il flusso infinitesimo è  $d\phi = \bar{E}d\bar{S} = EdS \cos(0) = EdS$  Inoltre data la simmetria sferica, il campo  $\bar{E}$  dipende esclusivamente dalla distanza  $r$  dalla sorgente, quindi

$$\phi = \oint \bar{E}d\bar{S} = \bar{E} \oint d\bar{S}$$

L'integrale di superficie  $\oint d\bar{S}$  equivale alla superficie di una sfera, ossia  $4\pi r^2$ , quindi

$$\phi = E4\pi r^2$$

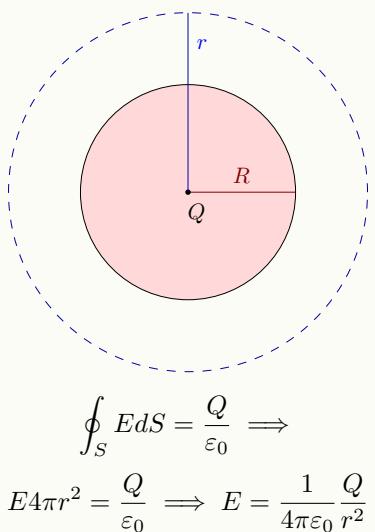
Inoltre, sappiamo per la legge di Gauss che

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

in conclusione

$$E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \implies E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

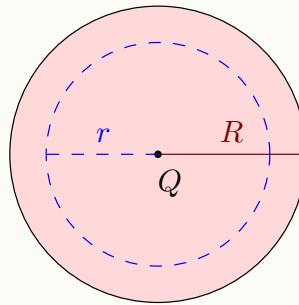
Si consideri ora un volume sferico  $\tau$  di raggio  $R$  elettricamente carico, la cui densità di carica  $\rho$  è uniforme e la carica è  $Q = \tau\rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ . Si vuole trovare l'espressione del campo elettrico  $E$  avendo nota la legge di Gauss. Si considera una superficie Gaussiana (sferica) con centro nel centro di  $\tau$  e raggio  $r \geq R$ .



In questo caso il campo elettrico della sfera risulta identico al campo di una carica puntiforme!

In situazioni di simmetria sferica il campo elettrico è identico a quello di una carica puntiforme

Si vuole adesso analizzare il caso in cui la superficie ha raggio minore o uguale al raggio della sfera carica  $R \geq r$ .



Sappiamo per la legge di Gauss che il contributo del volume esterno ad  $S$  è nullo, andrà quindi considerato esclusivamente il volume compreso da  $S$ .

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\tau_S} \rho d\tau_S = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} r^3$$

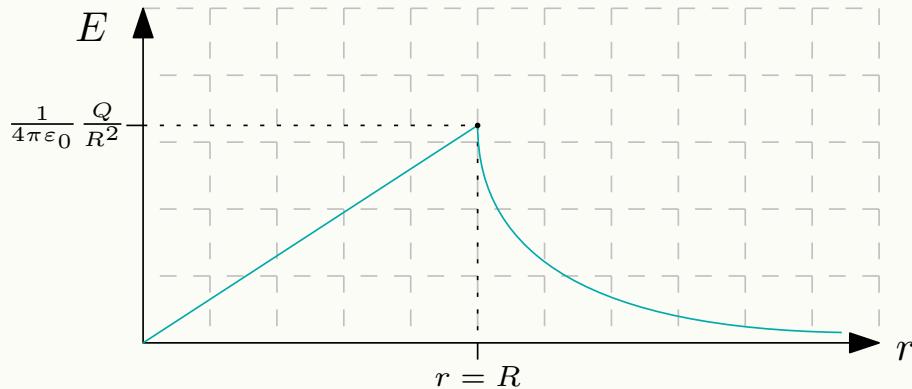
Quindi

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} r^3 \rho \implies E 4\pi = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} r \rho \implies E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4}{3} r \rho = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

In questo caso  $E$  è proporzionale alla distanza  $r$ , si può esprimere in funzione di  $Q$

$$E = \frac{Q}{3\varepsilon_0} \frac{r}{4/3\pi R^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^3}$$

Al centro si ha  $r = 0 \implies E = 0$ . Il campo elettrico è massimo sulla superficie  $r = R$ , è lineare per  $r$  quando il raggio della sfera è maggiore di quello della superficie, ed è proporzionale a  $\frac{1}{r^2}$  quando il raggio della sfera è minore della superficie. L'andamento qualitativo è il seguente.



~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~

### 4.3 Lavoro e Circuitazione del Campo Elettrico

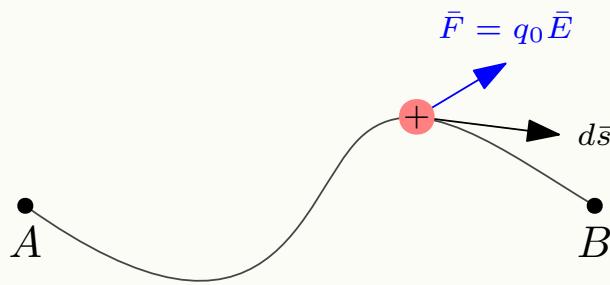
Si consideri il campo elettrico  $\bar{E}$  ed una carica  $q_0$ .

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q_0} \implies \bar{F} = q_0 \bar{E}$$

$\bar{F}$  è la forza elettrica che agisce su tale carica. Essendo una forza, si può considerare il *lavoro* su una curva  $C$  che congiunge due punti  $A, B$

$$L = \int_C \bar{F} d\bar{s} = q_0 \int_C \bar{E} d\bar{s}$$

È un integrale di linea, il termine  $\frac{L}{q_0} = \int_C \bar{E} d\bar{s}$  si definisce *tensione elettrica* fra i due punti  $A$  e  $B$ .

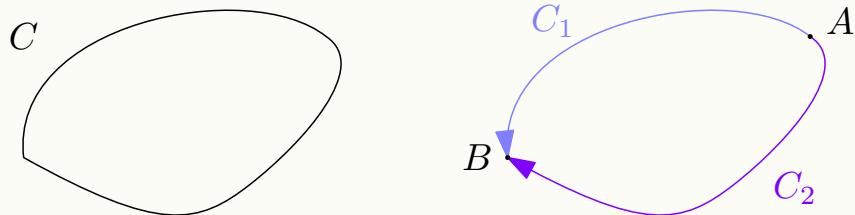


Si considerino due curve  $C_1$  e  $C_2$ , diverse, ma entrambe congiungono i punti  $A, B$ . Il lavoro della forza elettrica sulle due curve generalmente è diverso.

$$L_1 = q_0 \int_{C_1} \bar{E} d\bar{s} \neq L_2 = q_0 \int_{C_2} \bar{E} d\bar{s}$$

Considerando una curva chiusa  $C$ , questa si può considerare come due curve  $C_1$  e  $C_2$ . Il lavoro sulla curva chiusa è pari al lavoro su  $C_1$ , più il lavoro su  $C_2$  percorsa al contrario.

$$L = q_0 \oint_C \bar{E} d\bar{s} = q_0 \int_{C_1} \bar{E} d\bar{s} - q_0 \int_{C_2} \bar{E} d\bar{s} = L_1 - L_2$$



Per una curva chiusa  $C$ , si definisce la **forza elettromotrice** l'integrale di linea del campo elettrico lungo  $C$

$$\mathcal{E} = \oint_C \bar{E} d\bar{s} \implies L = q_0 \mathcal{E}$$

Un integrale di linea su una curva chiusa è anche detto *circuitazione*.

La forza di Coulomb è *conservativa*, quindi il lavoro su una curva dipende esclusivamente dalla posizione dei punti sulla quale si calcola, e non dal percorso scelto.

$$L = q_0 \int_C \bar{E} d\bar{s} = q_0 \int_A^B \bar{E} d\bar{s} = U(B) - U(A)$$

Dove  $U$  è l'energia potenziale elettrostatica. Si definisce il *potenziale elettrostatico* come

$$V = U \frac{1}{q_0}$$

L'unità di misura è il Volt. Il campo elettrico  $\bar{E}$  si può misurare anche come Volt su metri :  $\frac{V}{m}$ . Si ha quindi

$$\int_A^B \bar{E} d\bar{s} = V(B) - V(A) = \Delta V$$

Il termine  $\Delta V$  è detto **differenza di potenziale**. Il lavoro  $L$  su una curva che congiunge i due punti  $A$  e  $B$  si può scrivere quindi come

$$L = q_0(V(B) - V(A)) = -q_0 \Delta V$$

Infatti il lavoro di una forza conservativa è proprio la differenza dell'energia potenziale (moltiplicata per -1)

$$L = -q_0 \Delta V = -\Delta U$$

Si consideri ora la circuitazione lungo una curva chiusa  $C$ , ossia la forza elettromotrice. Una curva chiusa può essere vista come una curva che congiunge il punto  $A$  con se stesso  $A$ .

$$\mathcal{E} = \oint_C \bar{E} d\bar{s} = \oint_A^A \bar{E} d\bar{s}$$

Essendo la forza elettrostatica *conservativa* si ha

$$\oint_A^A \bar{E} d\bar{s} = V(A) - V(A) = 0$$

quindi la *circuitazione* del campo elettrostatico, e conseguentemente il lavoro lungo una curva chiusa, sono uguali a zero.

$$\mathcal{E} = 0$$

### 4.3.1 Calcolo Esplicito del Potenziale

Si vuole calcolare la formula esplicita del potenziale. Si consideri il caso più semplice, ossia quello di una carica puntiforme  $q$ . Il lavoro della forza elettrostatica  $\bar{F}$  che agisce su una carica  $q_0$  per uno spostamento elementare  $d\bar{s}$  è

$$dL = \bar{F} d\bar{s} = q_0 \bar{E} d\bar{s} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\bar{s}}{r^2} \hat{r} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

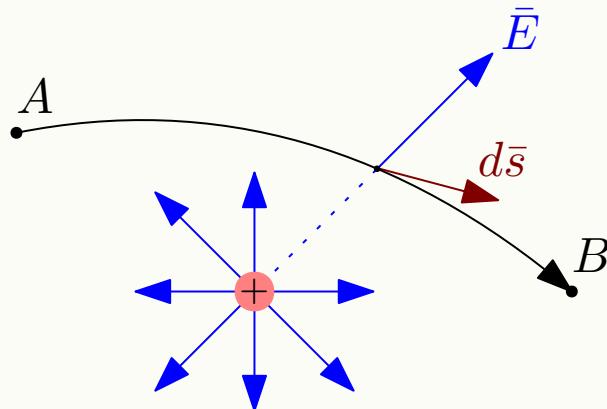
Essendo  $\hat{r}$  unitario si ha che  $\hat{r} d\bar{s} = dr$ . Ne consegue

$$Ed\bar{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

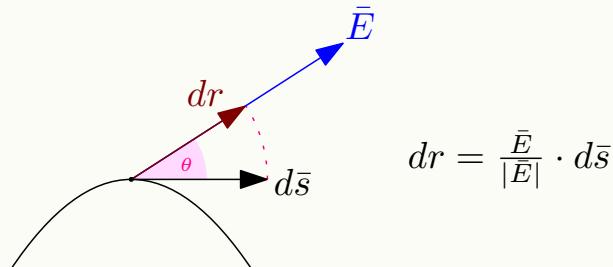
Si integra su un percorso che congiunge  $A$  a  $B$

$$\mathcal{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B}$$

Dove  $r_A$  è la distanza fra la carica  $q$  e  $A$ , e  $r_B$  è la distanza fra la carica  $q$  e  $B$ .



È ora esplicito che il lavoro non dipende dal percorso scelto. Si ricordi che  $dr$  è la proiezione di  $d\bar{s}$  lungo  $\bar{E}$ .



Il lavoro corrispondente per una carica  $q_0$  è quindi

$$L = \mathcal{E}q_0 = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r_B} = U(A) - U(B)$$

$$\mathcal{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} = V(A) - V(B)$$

A distanza infinita dalla carica sorgente, il lavoro è nullo.

$$\int_r^\infty \bar{E} d\bar{s} = V(r) - V(\infty) = V(r)$$

Si conclude che *il potenziale generato da una carica puntiforme  $q$*  è

$$\text{potenziale} \quad V(r) = \int_r^\infty \bar{E} d\bar{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{potenziale}$$

e l'energia potenziale di una carica  $q_0$  che risente del campo generato da  $q$  è

$$\text{potenziale} \quad U(r) = q_0 V(r) = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{potenziale}$$

Per il principio di sovrapposizione, le forze vettoriali si sommano.

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}$$

Si estende facilmente ad un sistema di  $n$  cariche. L'integrale di linea lungo una curva che congiunge  $A, B$  è

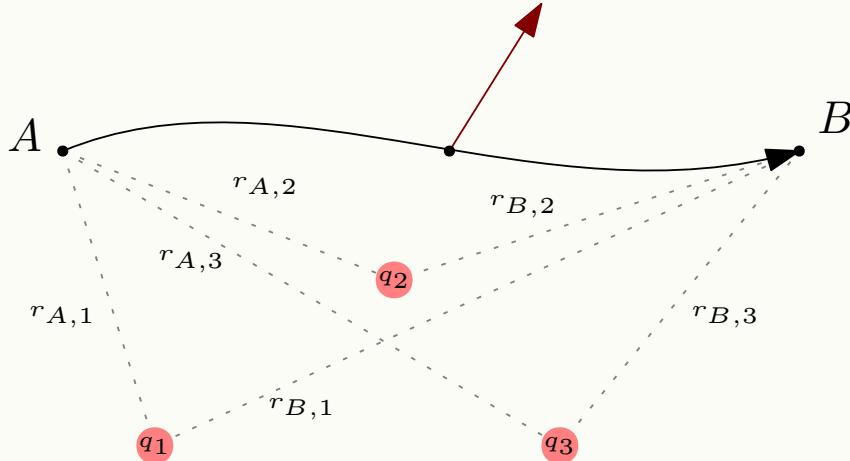
$$\sum_{i=1}^n \int_A^B \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} dr$$

Avendo noti i risultati precedenti, si ha

$$V(A) - V(B) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{A,i}^2} dr - \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{B,i}^2} dr$$

Il termine  $r_{A,i}$  indica la distanza fra l' $i$ -esima carica  $q_i$  ed il punto  $A$ . Analogamente per  $r_{B,i}$ .

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3$$



Il potenziale generato in un punto  $r$  è

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

Dove  $r_i$  è la distanza fra l' $i$ -esima carica ed il punto  $r$ . Si può estendere ad un solido continuo  $\tau$  con carica  $Q$  e densità di carica  $\sigma$ , tale che  $\int_\tau \sigma d\tau = Q$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\tau \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\tau \frac{\sigma d\tau}{r}$$

**Definizione (Operatore nabla) :** In  $\mathbb{R}^3$ , con sistema di coordinate cartesiane  $x, y, z$ , con versori  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ , si definisce l'operatore nabla

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

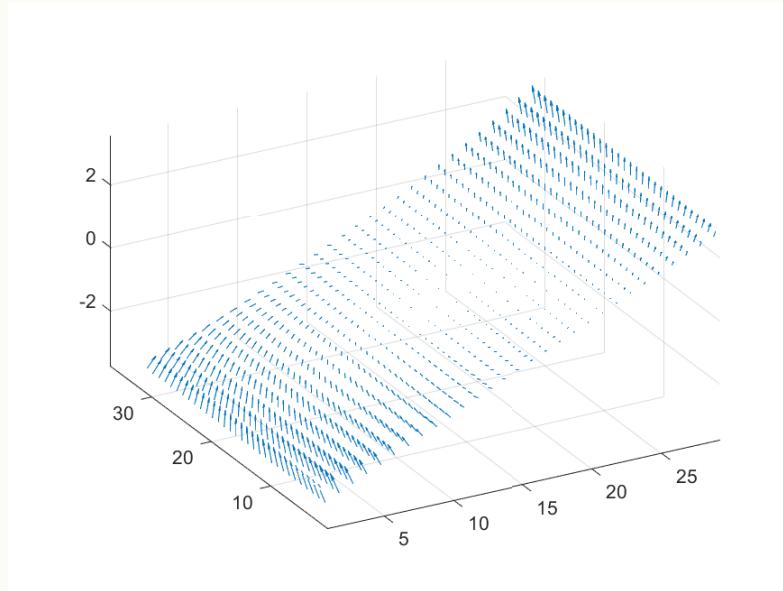
**Definizione (Gradiente) :** Il gradiente di una funzione scalare  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  è il prodotto fra  $f$  e l'operatore nabla  $\nabla$ , ed è uguale al vettore le cui componenti sono le derivate parziali di  $f$  rispetto  $x, y$  e  $z$ .

$$\nabla f = f \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

Il gradiente trasforma una funzione scalare in un campo vettoriale.

**Esempio :** La funzione  $f(x, y, z) = x^2y$  ha gradiente

$$\nabla f = 2xy\hat{x} + x^2\hat{y} + 0\hat{z} = (2xy, x^2, 0)$$



Si vuole introdurre ora una relazione che coinvolge il gradiente. Si consideri uno spostamento elementare  $d\bar{s} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$ , che unisce i punti

$$\begin{aligned} A &= (x, y, z) \\ B &= (x + dx, y + dy, z + dz) \end{aligned}$$

La differenza di potenziale infinitesima in questi due punti è

$$dV = V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz) = -\bar{E}d\bar{s} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

ricordando che

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \bar{E} d\bar{s}$$

si ha che  $dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$  Quindi

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \implies \bar{E} = \left( -\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z} \right) = -\nabla V$$

Ma allora il campo elettrico è uguale al gradiente del potenziale elettrostatico cambiato di segno

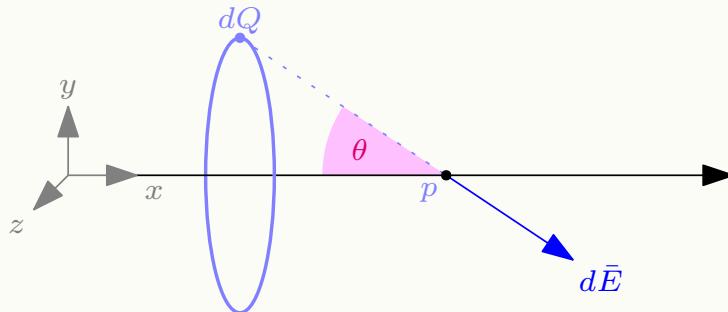
$$\leftarrow \bar{E} = -\nabla V \rightarrow$$

Ne consegue che la forza alla quale è soggetta una carica  $\bar{F} = q_0 \bar{E}$  è uguale al gradiente dell'energia potenziale cambiata di segno

$$\leftarrow \bar{F} = -\nabla U \rightarrow$$

### 4.3.2 Esempi

Si consideri ancora una volta un anello carico  $A$  di raggio  $R$ , si vuole trovare il valore del potenziale elettrico lungo l'asse ortogonale ad esso passante per il centro.



$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_A \frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} \int_A dQ = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Si vuole esprimere in funzione di  $x$

$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

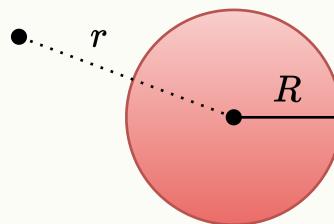
Il campo elettrico è

$$\bar{E} = -\nabla V = \begin{bmatrix} -\frac{\partial V}{\partial x} \\ -\frac{\partial V}{\partial y} \\ -\frac{\partial V}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Ma le componenti di  $V$  sono nulle sugli assi  $y$  e  $z$ , quindi

$$\bar{E} = E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

Si consideri adesso la sfera di metallo carica (uniformemente) di raggio  $R$  e carica  $Q$ , si vuole descrivere il potenziale elettrostatico  $V$  in funzione della distanza  $r$  dal centro della sfera.



Si ricordi che il campo elettrico generato da una sfera varia nei casi in cui la distanza  $r$  dal centro sia minore o maggiore della sfera.

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{r^2 4\pi\varepsilon_0} & r \geq R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \frac{r}{R^3} & r \leq R \end{cases}$$

Si può calcolare il potenziale elettrostatico nei due casi integrando  $E$  (in forma scalare, il suo modulo dipende solo dalla distanza).

**caso esterno**  $r \geq R$

$$\int_r^\infty Edr = V(r) - V(\infty) = V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}$$

**caso interno**  $r \leq R$

$$\int_R^r Edr = V(R) - V(r)$$

Il potenziale sulla superficie è

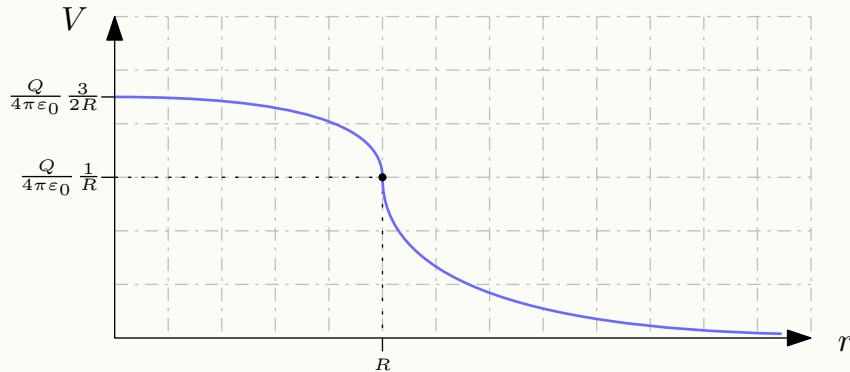
$$V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R}$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_R^r Edr &= \frac{Q}{R^3 4\pi\varepsilon_0} \int_R^r r dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R} - V(r) \implies \\ \frac{Q}{R^3 4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R} - V(r) \implies \\ \frac{Q}{R^3 4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R} &= V(r) \\ V(r) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} - \frac{r^2}{2R^3} \right) \end{aligned}$$

A distanza nulla si ha

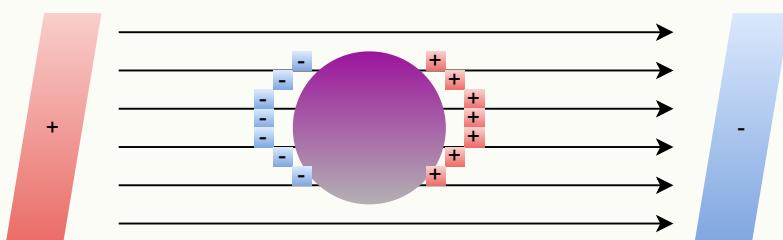
$$V(0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3}{2R}$$



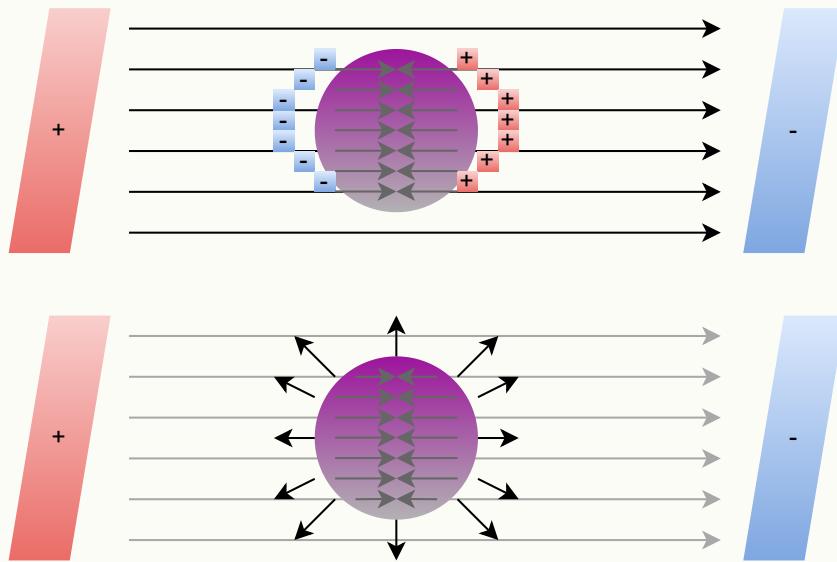
❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖

## 4.4 Conduttori

I materiali conduttori permettono agli elettroni di cui sono composti di muoversi liberamente nel reticolo cristallino della materia. Quando un materiale conduttore è immerso in un campo elettrico, questo vedrà i protoni (cariche positive) e gli elettroni (cariche negative) subire l'effetto del campo, polarizzandosi, generando a sua volta un campo elettrico che disturberà quello esterno.



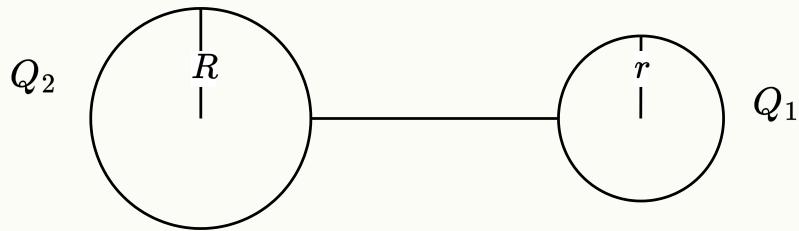
Il campo sulla superficie del conduttore sarà normale ad essa, all'interno del conduttore, il campo elettrico esterno si annulla con quello interno.



Nella prossimità del conduttore, il campo elettrico è distorto dalle cariche che si dispongono sulla superficie.

#### 4.4.1 Effetto delle Punte

Si consideri un sistema composto da due sfere, rispettivamente di raggio  $r$  ed  $R$  (con  $r < R$ ), composte di un materiale conduttore, unite da un filo (di spessore trascurabile) a sua volta conduttore. Caricando il sistema, la carica si distribuirà sulla superficie di entrambe le sfere.



Diremo che  $Q_1$  è la carica sulla prima sfera, e  $Q_2$  la carica sulla seconda, la carica totale è  $Q = Q_1 + Q_2$ . Si vuole stabilire il rapporto  $\frac{Q_1}{Q_2}$ . È noto che il potenziale è lo stesso, essendo

$$V_1 = V_2$$

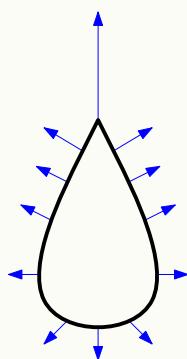
si ha

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R}$$

ne consegue che

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{r}{R}$$



Siano  $\sigma_1, \sigma_2$  le densità di carica tali che

$$Q_1 = \sigma_1 4\pi r^2 \quad Q_2 = \sigma_2 4\pi R^2$$

allora

$$\frac{R^2}{r^2} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \implies \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R}{r}$$

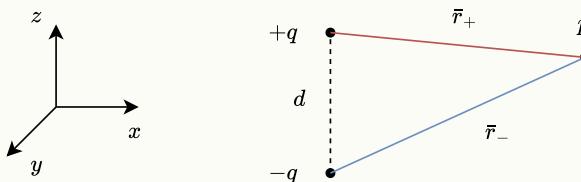
Il campo elettrico è più forte sulla superficie della sfera di raggio minore.

*effetto delle punte* : il campo è più intenso dove la curvatura è maggiore

❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖

## 4.5 Potenziale e Momento del Dipolo

La molecola di idrogeno (la più semplice che ci sia in natura) è composta da un protone (carica positiva) ed un elettrone (carica negativa), il neutrone ha carica nulla. Il *dipolo elettrico* è un semplice modello per le molecole. Si consideri un dipolo in un sistema di riferimento cartesiano, dove l'asse  $z$  è parallelo alla retta congiungente le due cariche, e  $d$  è la distanza fra esse.



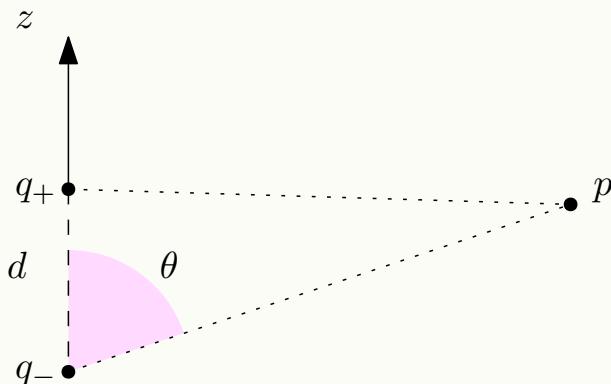
Si vuole calcolare il potenziale del campo elettrico generato dal dipolo, in un generico punto  $p$ , denotiamo  $\bar{r}_-$  il vettore congiungente  $-q$  a  $p$ , e  $\bar{r}_+$  il vettore congiungente  $+q$  a  $p$ .

$$V(p) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_- r_+}$$

Se si considera un punto  $p$  molto distante dal dipolo, in particolare, per cui  $r_+$  ed  $r_-$  sono molto maggiori di  $d$ , si possono approssimare le due rette considerandole come una unica.

$$\begin{aligned} r_+ &>> d \\ r_- &>> d \end{aligned} \implies \bar{r}_+ \simeq \bar{r}_- \simeq \bar{r}$$

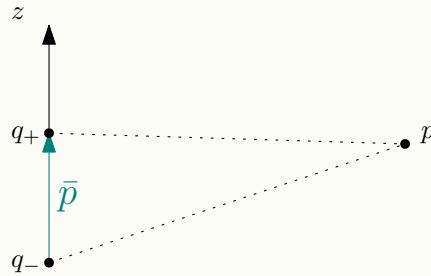
Se  $\theta$  è l'angolo fra  $\bar{r}_-$  ed il segmento  $q_- q_+$  (di lunghezza  $d$ ), la differenza fra  $r_-$  ed  $r_+$  si può approssimare a  $d \cos \theta$ .



$$V(p) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_- r_+} \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

Si definisce **momento del dipolo** il vettore  $\bar{p}$  tale che

$$|\bar{p}| = qd$$



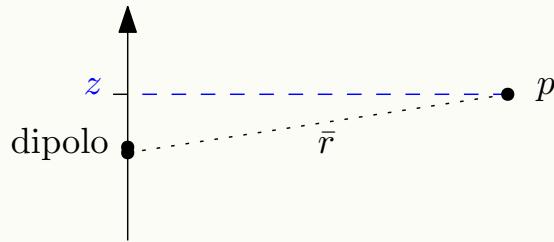
**Appunto sulla notazione :** Con  $\bar{p}$  si denota il vettore momento del dipolo, con  $p$  non si denota il suo modulo, bensì il punto su cui si è considerato il potenziale.

Sia  $\hat{r} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} = \frac{\bar{r}}{r}$ , si ha che

$$V(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{p} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{p} \cdot \bar{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\bar{p}| \cdot \bar{r}}{r^3}$$

Se  $\bar{p}$  è parallelo al versore  $\hat{z}$ , allora il prodotto scalare  $\bar{p} \cdot \bar{r}$  sarà uguale al modulo di  $\bar{p}$  moltiplicato per la coordinata  $z$  di  $\bar{r}$

$$V(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\bar{p}| z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

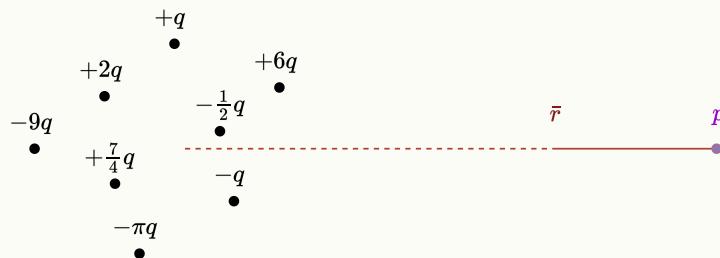


è possibile calcolare il campo elettrico considerando il gradiente del potenziale, ad esempio, per al coordinata  $x$  il campo vale

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{|\bar{p}| z}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{r^3} \right)$$

Analogamente si possono calcolare  $E_y$  e  $E_z$ .

Si consideri ora un sistema di cariche diffuse nello spazio, per cui  $d$  è la distanza massima fra ogni coppia di cariche. Si vuole considerare il potenziale in un punto molto distante dal sistema rispetto a  $d$ , in modo che si possa considerare (in modo approssimato) un'unica distanza  $r$  dal punto ed il sistema.



Sia  $Q = \sum q_i$  la somma delle cariche, questa rappresenta la carica del sistema. Il potenziale  $V$  del sistema sarà dato dallo sviluppo in multipoli

- il primo termine dello sviluppo è il potenziale del sistema approssimato ad un'unica carica è  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

- se  $\bar{p} = \sum \bar{p}_i$  è la somma di tutti i possibili momenti dei dipoli considerando ogni coppia di cariche, si considera come secondo termine il potenziale dato il momento totale  $\bar{p}$ , ossia  $\frac{\hat{r} \cdot \bar{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
- si considera poi il quadripolo, andando avanti finché il numero totale delle cariche del sistema lo permette

$$V_{\text{sistema}} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{p} \cdot \hat{r}}{r^2} + \frac{\text{momento quadripolo}}{r^3} + \dots$$

~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~

## 4.6 Capacità dei Conduttori

Nei materiali conduttori, come il metallo, gli elettroni sono liberi di muoversi nella struttura atomica del materiale. Un campo elettrico  $\bar{E}$  può causare una disposizione specifica delle cariche, queste sono fisse, nella condizione elettrostatica non vi è movimento di cariche, all'interno del conduttore si ha che il campo elettrico è nullo

$$\bar{E} = 0$$

Ciò implica che il flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa contenuta all'interno della superficie del conduttore è a sua volta nullo.

$$\oint_S \bar{E} d\bar{S} = \oint_S 0 d\bar{S} = 0$$

Inoltre, risulta che il potenziale elettrico è costante in ogni punto del conduttore, siano  $p_1$  e  $p_2$  due punti qualsiasi si ha

$$V(p_1) - V(p_2) = \int_{p_1}^{p_2} \bar{E} \cdot d\bar{s} = 0 \implies V(p_1) = V(p_2) = V$$

Si dice quindi che il conduttore è **equipotenziale**.

un conduttore immerso in un campo elettrostatico, fa sì che il campo all'interno della sua superficie, sia nullo, e ciò comporta che la superficie sia equipotenziale

Si consideri una sfera di materiale conduttore di carica  $Q$  e di potenziale  $V$



Si definisce **capacità del conduttore** il rapporto

$$C = \frac{Q}{V}$$

e si misura in *Farad*. Un Farad equivale ad un Coulomb su un Volt  $F = \frac{C}{V}$ . Tale valore dipende dalla forma del conduttore, nel caso della sfera, sia  $R$  il raggio, il potenziale sappiamo essere

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

La capacità è quindi

$$C = Q \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \right)^{-1} = 4\pi\epsilon_0 R$$

### 4.6.1 Condensatori ed Induzione Completa

In alcune situazioni, ci sono due conduttori alla quale si può associare una sola capacità, si dice che si è nella situazione di *induzione completa*. Si consideri il caso del condensatore, in cui ci sono due lastre di materiale conduttore poste ad una distanza  $d$ , di carica eguale e opposta, dove  $A$  è la superficie delle lastre. Il campo elettrico si approssima ad un campo uniforme come se le lastre fossero piani infiniti. Il

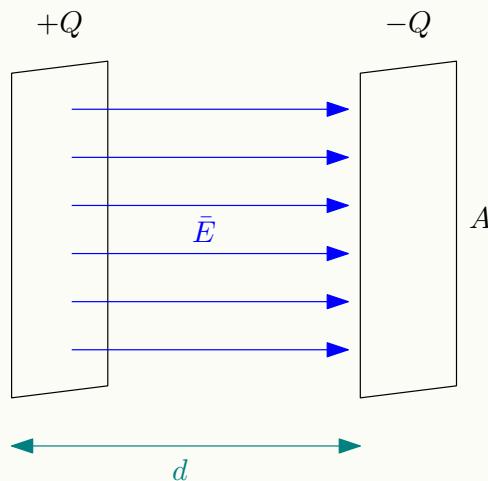


Figura 4.2: condensatore piano

condensatore è equipotenziale, sia  $V$  il potenziale, la capacità del condensatore è

$$C = \frac{Q}{V}$$

se  $\sigma$  è la densità di carica, abbiamo visto che il campo elettrico del condensatore è

$$\bar{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Essendo  $\bar{E}$  definito esclusivamente nel volume contenuto dalle due lastre, il potenziale risulta

$$V = \int_0^\infty \bar{E} = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = d \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

La carica totale  $Q$  è data dall'integrale della densità di carica su tutta la superficie, considerando la densità uniforme si ha

$$Q = \sigma A$$

la capacità è

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{V} = \frac{\sigma A}{d \frac{\sigma}{\varepsilon_0}} = \frac{\sigma A \varepsilon_0}{d \sigma} \implies C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

Si vuole calcolare ora la capacità del *condensatore sferico*, composto da due gusci sferici concentrici di materiale conduttore, entrambi carichi, il primo di carica  $-Q$ , il secondo di carica  $+Q$ . Il potenziale del primo guscio (quello più interno) è

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R_1}$$

Il potenziale del secondo guscio è

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R_2}$$

Se  $d$  è la distanza fra le due sfere, la differenza di potenziale risulta essere

$$\Delta V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \frac{d}{R_1 R_2}$$

La capacità del sistema è data dalla differenza delle due capacità, che in questo caso è uguale alla carica fratto la d.d.p. Risulta essere

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{d}$$

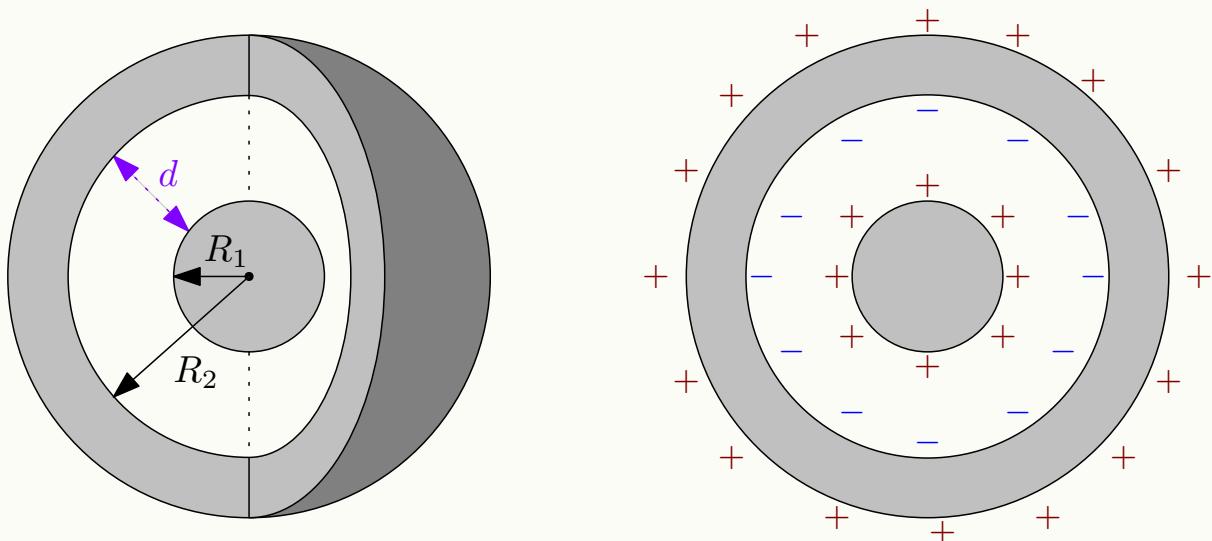


Figura 4.3: condensatore sferico

Sapendo che le superfici delle due sfere sono rispettivamente

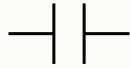
$$\begin{aligned} S_1 &= 4\pi R_1^2 \\ S_2 &= 4\pi R_2^2 \end{aligned}$$

La capacità si può esprimere anche in funzione di queste ultime

$$C = \epsilon_0 \frac{\sqrt{S_1} \sqrt{S_2}}{d}$$

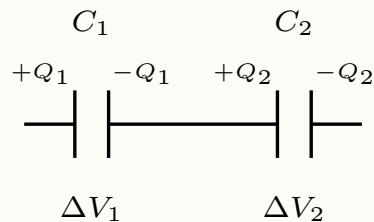
#### 4.6.2 Collegamento di Condensatori

Nell'ambito dei circuiti elettrici (che verranno trattati in seguito) il condensatore si indica con il simbolo

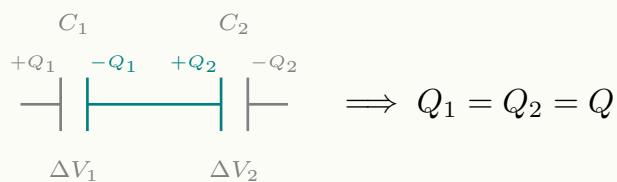


Questi possono essere disposti in serie oppure in parallelo.

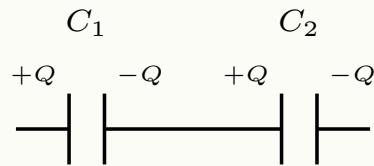
##### Condensatori in Serie



La parte interna del circuito rappresenta un conduttore isolato, deve quindi essere elettricamente neutro e ne consegue che



La situazione è quindi la seguente



$$\Delta V_1 \quad \Delta V_2$$

$$C_1 = \frac{Q}{\Delta V_1}$$

$$C_2 = \frac{Q}{\Delta V_2}$$

essendo la tensione ai capi dei due condensatori

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

si ha

$$\Delta V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \implies Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

Ne consegue che la capacità equivalente  $C$  soddisfa

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

quindi

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Quindi due condensatori in serie sono equivalenti ad un condensatore la cui capacità è la somma degli inversi delle capacità dei due condensatori iniziali.

Tale formula si può generalizzare ad una serie di  $n$  condensatori

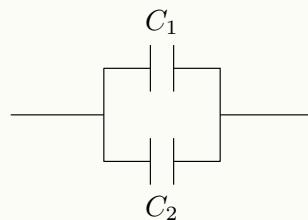
$$\begin{array}{ccccccc} C_1 & C_2 & C_3 & \dots & C_n & & \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \dots & \text{---} & \text{---} & \end{array} \quad \frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

ne consegue

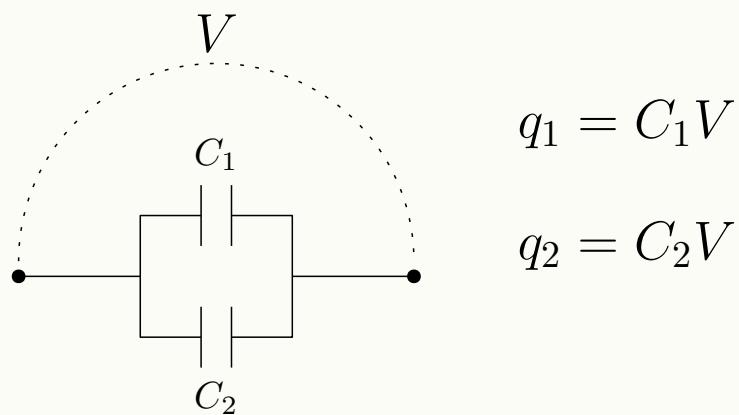
$$C = \left( \prod_{i=1}^n C_i \right) \left( \sum_{i=1}^n C_i \right)^{-1}$$

### Condensatori in Parallello

Due condensatori sono collegati in parallelo come nell'immagine seguente



Essendo ciascuno dei conduttori equipotenziale, la differenza di potenziale dei due conduttori è la stessa



La carica globale è quindi

$$Q = q_1 + q_2 = V(C_1 + C_2)$$

La capacità equivalente è quindi

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{V(C_1 + C_2)}{V} = C_1 + C_2$$

Per un sistema di \$n\$ condensatori in parallelo si ha

$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

### 4.6.3 Energia del Condensatore

Quando un condensatore si carica, passa da uno stato in cui la carica sulle armature è 0, ad uno stato in cui la carica è, rispettivamente, \$+q\$ e \$-q\$, con una differenza di potenziale \$V = \frac{q}{C}\$ fra le armature. Tale separazione di cariche, richiede un lavoro. Si può immaginare che la carica di un condensatore avvenga sottraendo una carica \$dq\$ da un armatura e portandola ad un'altra, fino ad avere la situazione in cui le cariche sulle armature sono eguali ma opposte, ricordando che la carica totale è nulla in ogni istante.

Si consideri la seguente situazione

- la differenza di potenziale fra le due armature è \$V'\$, è stata già trasferita in totale una carica \$q' = CV'
- si sposta un ulteriore carica infinitesimale \$dq'
- il lavoro infinitesimale per spostare tale carica sarà \$dL = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'

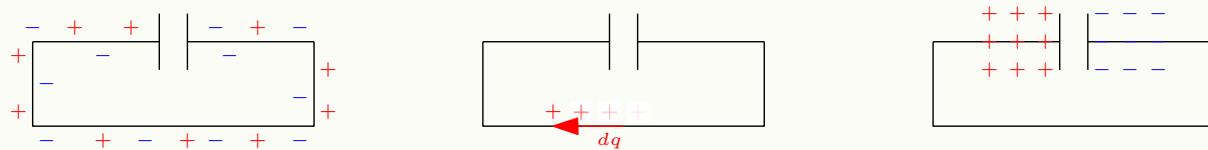
Il lavoro complessivo per separare totalmente le cariche sarà

$$L = \int dL = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C}$$

dipende solo dalla capacità del condensatore e dalla carica trasportata

A tale lavoro, si oppone la forza fra le cariche che sono repulsive quando dello stesso segno, de facto, tale lavoro che viene effettuato contro la forza elettrostatica viene immagazzinato nel sistema sotto forma di energia potenziale \$U\_e\$, detta **energia potenziale elettrostatica**, assumendo che l'energia sia nulla quando \$q = 0\$, si ricava che \$L = U\_e\$:

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV$$



condizione naturale

separazione cariche

condensatore carico

Si consideri il condensatore piano, di cui conosciamo il campo elettrico e la differenza di potenziale

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad V = Ed$$

Dove  $d$  è la distanza fra le due armature. Sapendo che  $A$  è la superficie delle due lastre, si ha che

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0} \implies Q = EA\epsilon_0$$

L'energia potenziale elettrostatica del condensatore piano è quindi

$$U_e = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}Q \frac{Q}{C} = \frac{1}{2} \frac{E^2 A^2 \epsilon_0^2}{C}$$

sapendo che la capacità del condensatore piano è  $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$  si ha

$$U_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 (Ad)$$

$Ad$  è il prodotto fra la distanza delle armature e la superficie, è quindi il volume contenuto fra le due armature dove è contenuto il campo elettrico. Allora se

$$U_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \cdot (\text{volume})$$

il termine  $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$  si definisce **densità di energia**

$$U_e = \int_{\tau} u d\tau = \int_{\tau} \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 d\tau = uAd$$

### Esercizio

Si consideri un conduttore sferico di raggio  $R$ , carica  $Q$  e differenza di potenziale  $V$ . È noto che la capacità è

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

Si vuole trovare  $U_e$  integrando sul volume dello spazio in cui è contenuto il campo, ossia in tutto lo spazio esclusa la zona coperta dal conduttore.

Si consideri un punto distante  $r > R$  dal centro della sfera, una sfera infinitesima di raggio  $r$  ha un volume infinitesimo  $d\tau = 4\pi r^2 dr$ , si integra quindi in  $dr$

$$U_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_{\tau} E^2 d\tau = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_R^{\infty} E^2 (4\pi r^2) dr = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

Segue il calcolo dell'integrale

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_R^\infty E^2(4\pi r^2)dr = \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 (4\pi r^2)dr = \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_R^\infty \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{Q^2}{r^2} (4\pi r^2)dr = \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 4\pi \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2} Q^2 \int_R^\infty \frac{r^2}{r^4} dr = \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{2} Q^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_R^\infty r^{-2} dr = \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{2} Q^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right) \Big|_R^\infty = \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\infty}\right) = \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R} \quad (4.8)$$

in conclusione

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R}$$

Ci si pone la seguente domanda, qual'è la regione di spazio (volume sferico) in cui è contenuta il 90% dell'energia totale? Si deve trovare  $R^* > R$  tale che

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_R^{R^*} E^2(4\pi r^2)dr = \frac{9}{10} U_e$$

Si ha che

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_R^{R^*} E^2(4\pi r^2)dr = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^*}\right)$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^*}\right) &= \frac{9}{10} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R} \implies \\ \frac{1}{R} - \frac{1}{R^*} &= \frac{9}{10} \frac{1}{R} \implies \frac{1}{R^*} = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{9}{10}\right) \implies \\ R^* &= 10R \end{aligned}$$

Quindi, il 90% dell'energia totale contenuta in tutto lo spazio (infinito) risiede una sfera di raggio a malapena 10 volte quello del conduttore.

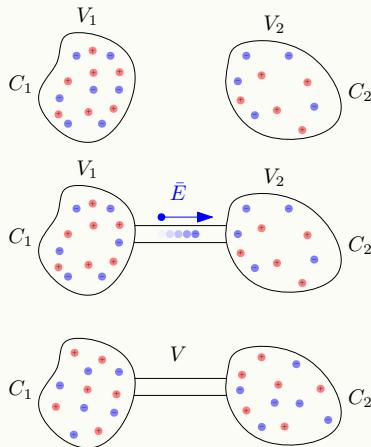
## CAPITOLO

# 5

## CORRENTE ELETTRICA

### 5.1 Intensità di Corrente

Si considerino due conduttori isolati  $C_1$  e  $C_2$  con potenziali  $V_1$  e  $V_2$ .



Quando questi sono messi a contatto (da un materiale conduttore di volume trascurabile) si raggiunge una condizione di equilibrio che li porterà allo stesso potenziale  $V$ , in tale processo, un certo numero di elettroni passa da un conduttore ad un altro sotto l'effetto del campo  $\bar{E}$  dovuto alla differenza di potenziale  $\Delta V = V_1 - V_2$ . Tale movimento di cariche è detto *corrente elettrica*, e dura per un lasso di tempo molto breve, necessario al trasferimento delle cariche per raggiungere la condizione di equilibrio del potenziale  $V$ .

La corrente è quindi uno spostamento di cariche nel tempo, può essere descritta dal vettore *densità di corrente*  $\bar{j}$ , il cui modulo è uguale a

$$|\bar{j}| = \frac{dQ}{dsdt}$$

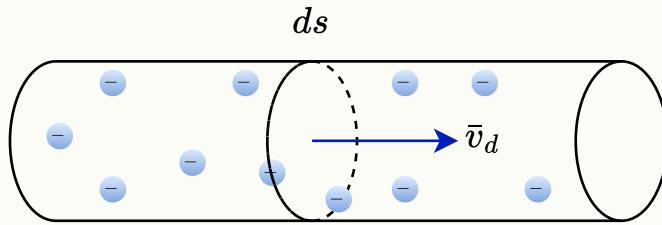
equivalente ad una carica infinitesima  $dQ$  che attraversa una superficie infinitesima  $ds$  in un lasso di tempo infinitesimo  $dt$ . La corrente è costituita da un movimento di elettroni liberi, denotata con  $e^-$  la carica fondamentale dell'elettrone, questo si muove perché soggetto ad una forza data dal campo elettrico e dalla differenza di potenziale.

$$\bar{F} = \bar{E}e^- = m\bar{a}$$

La velocità degli elettroni che compongono una corrente è detta *velocità di deriva*, la sua trattazione verrà omessa, basti sapere che è costante ed uguale a

$$v_d = 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$\bar{j}$  rappresenta in qualche modo un *flusso di cariche* come il flusso di un liquido che passa per un tubo. Si consideri una sezione trasversale  $ds$  di un conduttore, di cui  $d\bar{s}$  è il vettore superficie.



La carica che passa in  $ds$  in un tempo  $dt$  è

$$dt(\bar{v}_d \cdot d\bar{s})$$

Sia  $n$  il numero di portatori di carica (elettroni) per unità di volume, si ha che

$$\bar{j} = ne^{-}\bar{v}_d$$

Si definisce l'**intensità di corrente** l'integrale della densità di corrente su tutta la superficie attraversata

$$\oint \bar{j} d\bar{s} = I$$

e si misura in Ampere A.

Vi è un legame intrinseco fra l'intensità di corrente, più comunemente chiamata corrente, e fra la differenza di potenziale, in particolare, queste sono proporzionali

$$V = RI \quad I = \frac{V}{R} \quad \text{prima legge di Ohm}$$

Il fattore  $R$ , che si misura in  $\frac{\text{Volt}}{\text{Ampere}} = \Omega$  (l'unità di misura è l'ohm) si chiama **resistenza**, e si oppone al passaggio della corrente, questa dipende dalla sezione del conduttore, dalla lunghezza e dal materiale di cui è composto. In particolare

$$R = \rho l \frac{1}{A}$$

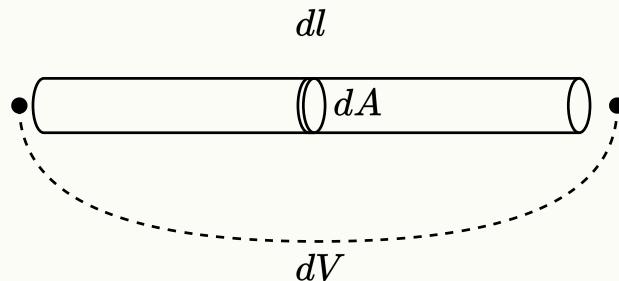
Dove

- $l$  è la lunghezza
- $A$  è la superficie della sezione
- $\rho$  è un coefficiente detto *resistività* e dipende dal materiale e dalla temperatura.

$\rho$  è definibile come "densità di resistenza", si misura in metri per ohm  $m \cdot \Omega$ , ed in condizioni regolari, se  $t^\circ$  è la temperatura e  $\alpha$  è un coefficiente che dipende dal materiale, vale

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t^\circ)$$

Si consideri un conduttore filiforme, ed un suo tratto di filo  $dl$  con sezione  $dA$ , con ai capi posta una differenza di potenziale  $dV$ .



Scrivendo la prima legge di Ohm in forma locale, si ha che

$$dV = \rho \frac{dl}{dA} \bar{j} dA = \rho dl \bar{j}$$

quindi

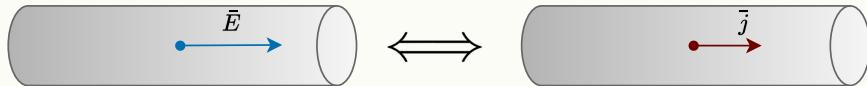
$$\frac{dV}{dl} = \rho \bar{j}$$

Essendo  $l$  una misura di spazio, il termine  $\frac{dV}{dl}$  non è altro che il gradiente di  $V$

$$\frac{dV}{dl} = \left[ \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right] = \nabla V$$

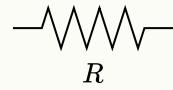
Ma allora  $\nabla V = \rho \bar{j}$  Ma il gradiente del potenziale elettrostatico (cambiato di segno) è proprio il campo elettrico, quindi, punto per punto

$$\bar{E} = \rho \bar{j}$$

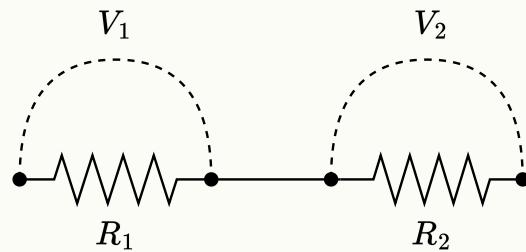


### 5.1.1 Collegamento di Resistenze

Le resistenze, come i condensatori, possono essere poste in serie ed in parallelo, e se ne può ricavare una resistenza equivalente. Si indicano con il seguente simbolo



Lo schema di due resistenze in serie è il seguente



Si indicano  $V_1$  e  $V_2$  le d.d.p. La corrente  $I$  è costante, per la prima legge di ohm si ha quindi che

$$V_1 = \frac{R_1}{I} \quad V_2 = \frac{R_2}{I}$$

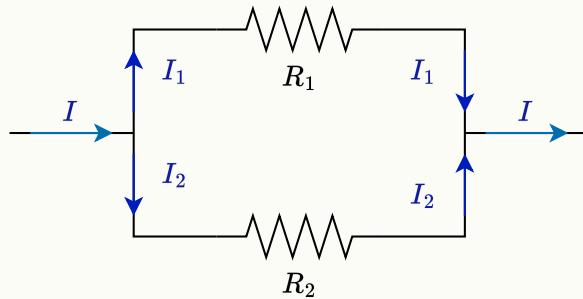
ne consegue che la differenza di potenziale ai capi della serie è

$$V = V_1 + V_2 = \frac{R_1 + R_2}{I} = \frac{R}{I}$$

Le due resistenze in serie sono quindi equivalenti ad una resistenza il cui valore è la somma delle due.

$$R = R_1 + R_2$$

Si consideri ora il seguente schema in cui due resistenze sono poste in parallelo



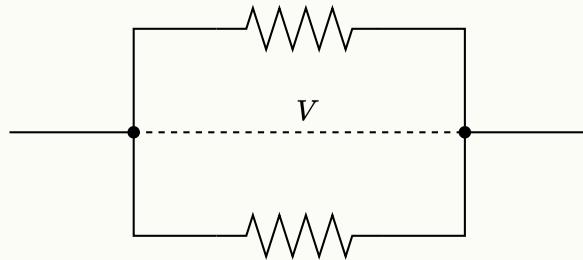
La corrente si distribuisce sui due rami, in maniera non uniforme, infatti, tenderà ad esserci più intensità di corrente la dove c'è meno resistenza, in particolare la *partizione di corrente* risponde alla seguente identità

$$R_1 I_1 = R_2 I_2$$

Inoltre la corrente si conserva

$$I = I_1 + I_2$$

la differenza di potenziale ai capi delle due resistenze è la stessa



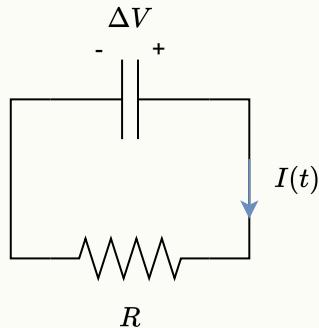
Quindi

$$\begin{cases} V = R_1 I_1 \\ V = R_2 I_2 \end{cases} \implies I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \implies \frac{I}{V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \implies R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪

## 5.2 Campo Elettromotore

Consideriamo un circuito composto da un condensatore  $C$  carico (di carica  $Q$ ) all'istante  $t = 0$  ed una resistenza  $R$ . La corrente è nulla se non c'è differenza di potenziale, si vuole quindi mantenere una differenza di potenziale costante.

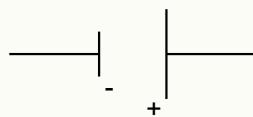


Il potenziale ai capi della resistenza dipenderà dalla corrente  $V(t) = RI(t)$ , in pochi istanti le cariche sul condensatore si distribuiranno su tutto il materiale conduttore, scaricandolo, rendendo poi nulla la differenza di potenziale, e quindi la corrente. Si ricordi come

- le cariche si muovono se sottoposte ad una forza
- c'è una forza alla quale sono sottoposte le cariche se c'è un campo elettrico  $\vec{E}$
- il campo elettrico è il gradiente del potenziale  $V$ , ossia la variazione nello spazio
- se non c'è differenza di potenziale il gradiente è nullo, non c'è campo, quindi non c'è movimento di cariche

Per far sì che la corrente sia costante, serve una forza non conservativa che mantenga costante la differenza di potenziale  $\Delta V$  fra due conduttori a contatto (ossia fra due punti diversi di uno stesso conduttore), in modo che il flusso degli elettroni sia costante e si generi una corrente elettrica.

Si definisce **generatore di forza elettromotrice** un qualsiasi dispositivo che permetta di mantenere la differenza di potenziale fra due punti di un conduttore. Il simbolo del generatore è il seguente



indica l'addensamento di cariche di segno opposto sulle due estremità, dette polo positivo e polo negativo.

Si è visto come la legge di Ohm mette in relazione la differenza di potenziale e la corrente

$$V = RI$$

Quando si tratta l'ambito dei circuiti spesso si indica con  $V$  la differenza di potenziale (come fatto anche nelle sezioni precedenti), anche se tale simbolo è più generalmente utilizzato per denotare il potenziale elettrico, è più corretto scrivere

$$\Delta V = RI$$

sappiamo che la differenza di potenziale è

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} d\vec{s} = RI$$

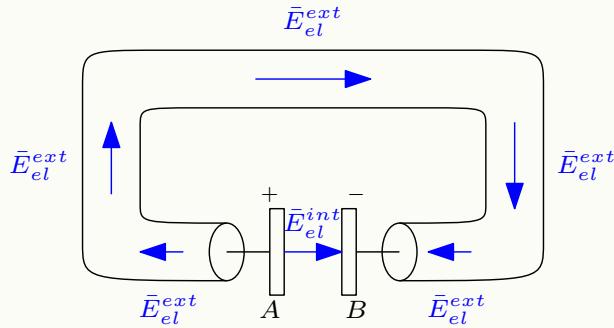
applicata ad un circuito chiuso si ha

$$\oint \bar{E} d\bar{s} = RI$$

il primo membro è la definizione di forza elettromotrice, ne consegue che

per avere una corrente  $i$  è necessaria una forza elettromotrice, ossia un campo elettrico la cui circuitazione non sia nulla

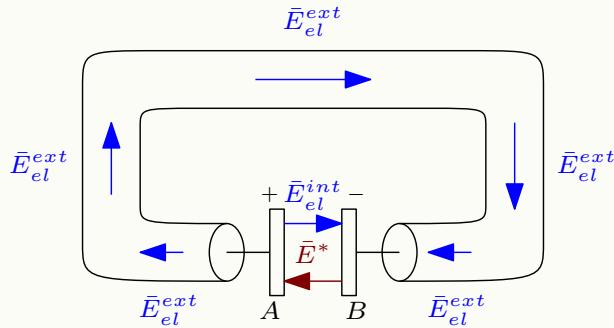
Sappiamo che il campo elettrostatico è conservativo ed ha circuitazione nulla, per avere della corrente è necessaria una forza non conservativa. Non è quindi il campo elettrostatico a far circolare la corrente. Denotiamo  $\bar{E}_{el}$  il campo elettrostatico. Si consideri un circuito formato da un conduttore ed un generatore di forza elettromotrice che genera un flusso di corrente  $\bar{j}$



Il campo  $\bar{E}_{el}$  è diretto da un polo all'altro del generatore dentro il conduttore, dato che ha la stessa direzione del flusso  $\bar{j}$ . Definiamo  $E_{el}^{ext}$  il campo elettrico contenuto all'esterno del generatore, nel filo conduttore, e  $E_{el}^{int}$  il campo elettrico contenuto nel generatore, ricordando che la circuitazione del campo elettrostatico è nulla, è chiaro che

$$\oint \bar{E}_{el} d\bar{s} = \int_A^B \bar{E}_{el}^{int} d\bar{s} + \int_A^B \bar{E}_{el}^{ext} d\bar{s} = 0$$

Essendo  $\oint \bar{E}_{el} d\bar{s} = 0$ , il passaggio delle cariche dal polo  $B$  al polo  $A$  *non può avvenire* per via di  $\bar{E}_{el}$ , è quindi necessariamente presente (all'interno del generatore) un campo elettrico  $\bar{E}^*$  di natura non elettrostatica, definito **campo elettromotore**.



Il campo elettrico totale è quindi

$$\bar{E}$$

che vale

- $\bar{E} = \bar{E}^* + E_{el}$  all'interno del generatore
- $\bar{E} = E_{el}$  fuori dal generatore, nel conduttore

$\bar{E}^*$  è nullo all'esterno del generatore. la forza elettromotrice di  $\bar{E}$ , ossia la sua circuitazione, coincide con l'integrale del campo elettromotore  $\bar{E}^*$  su una linea interna al generatore che va da  $B$  ad  $A$

$$\mathcal{E} = \oint \bar{E} d\bar{s} = \int_A^B \bar{E}_{el} d\bar{s} + \int_B^A (\bar{E}^* + \bar{E}_{el}) d\bar{s} = \int_B^A \bar{E}^* d\bar{s}$$

All'interno del generatore, una carica  $dq$  è spostata da  $B$  ad  $A$  con una forza

$$d\bar{F}^* = dq\bar{E}^*$$

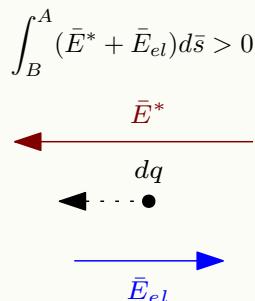
che deve vincere la forza che si oppone

$$d\bar{F}_{el} = dq\bar{E}_{el}$$

Il campo elettromotore è definito come

$$\bar{E}^* = \frac{d\bar{F}^*}{dq}$$

per far sì che tale forza vinca su quella del campo elettrostatico, e che ci sia un moto delle cariche nel verso desiderato, deve essere che  $|\bar{E}^*| > |\bar{E}_{el}|$  tale che



Un generatore non ideale è caratterizzato da una resistenza interna  $r$  tale che

$$\int_B^A (\bar{E}^* + \bar{E}_{el}) d\bar{s} = rI$$

che estende la legge di Ohm all'interno del generatore, considerando anche la resistenza del conduttore esterno si ha che

$$\mathcal{E} = (R + r)I \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

Da questa ricaviamo che

$$RI = \mathcal{E} - rI$$

ma  $RI$  sappiamo essere la differenza di potenziale

$$V_A - V_B = RI = \mathcal{E} - rI$$

quando la corrente è nulla  $I = 0$  si ha

$$V_A - V_B = \mathcal{E}$$

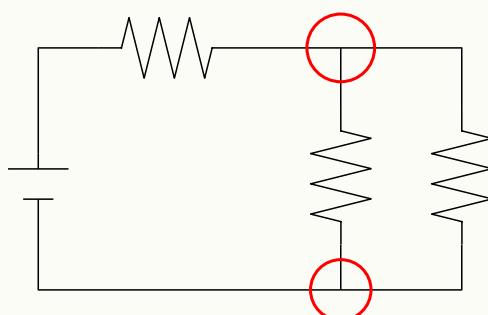
la forza elettromotrice è quindi uguale alla differenza di potenziale misurata ai capi del generatore quando la corrente è nulla (a circuito aperto).

♪ ♪ ♪ ♪ ♪ ♪ ♪ ♪ ♪ ♪ ♪

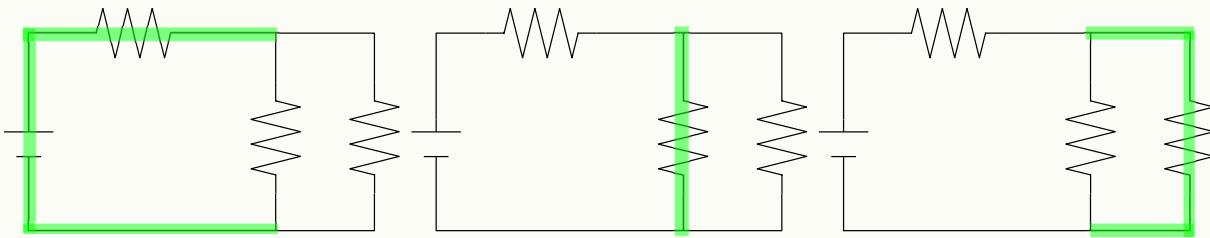
### 5.3 Risoluzione di Circuiti

In questa sezione verrà trattata la risoluzione di un semplice circuito, al fine di calcolarne le correnti sui rami e le tensioni ai capi di due nodi.

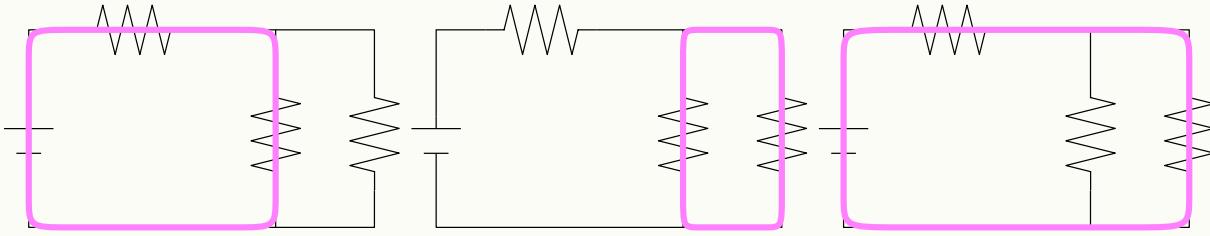
**Definizione :** un **nodo** è un punto di confluenza di 3 o più conduttori.



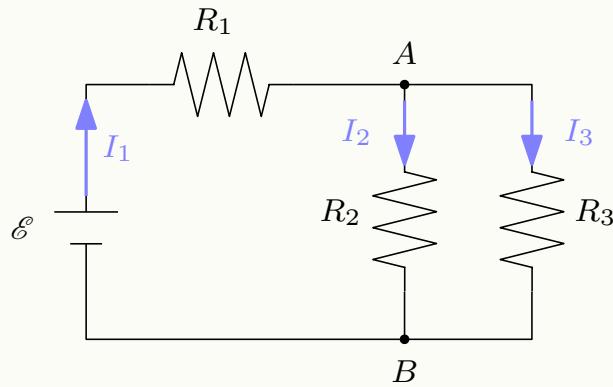
**Definizione :** un **ramo** è una qualsiasi parte del circuito compresa fra due nodi.



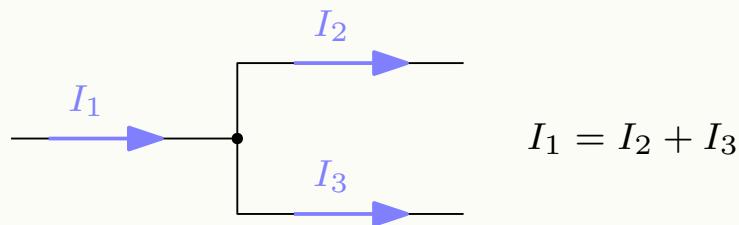
**Definizione :** una **maglia** è un qualunque percorso chiuso nel circuito che partendo da un nodo, vi ritorna.



Ogni ramo del seguente circuito ha una corrente  $I_i$



**prima legge di Kirchhoff** : le correnti entranti in un ramo sono uguali a quelle uscenti



Questo vuol dire che la somma delle correnti passanti per un nodo è zero, per convenzione, quelle entranti sono positive, e quelle uscenti sono negative. Quindi per il circuito mostrato in figura le correnti sui nodi sono

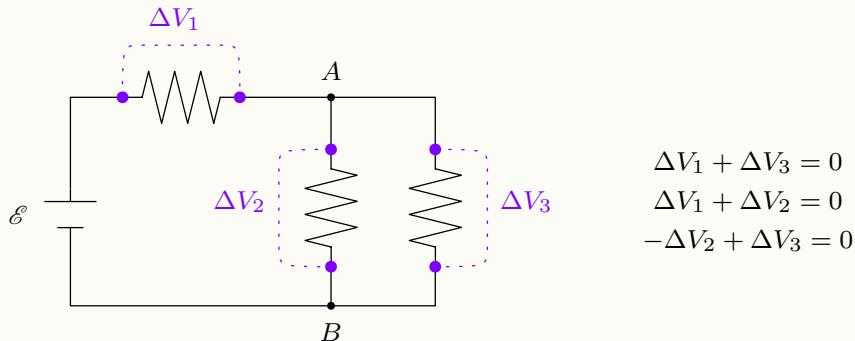
$$\begin{array}{ll} \text{nodo } A & I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ \text{nodo } B & -I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{array}$$

la differenza di potenziale ai capi della prima resistenza è  $V_1 = R_1 I_1$ .

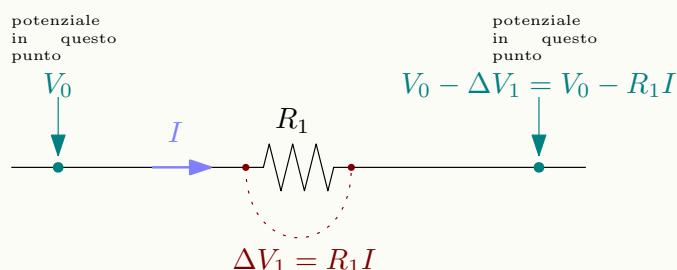
**seconda legge di Kirchhoff** : la somma algebrica delle d.d.p. agenti tra le coppie di punti nello spazio che formano una qualsiasi sequenza chiusa (maglia) è uguale a zero

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = 0$$

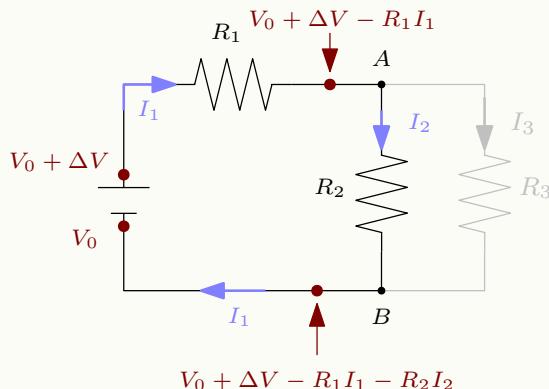
Ai capi di ciascuna resistenza vi è una differenza di potenziale, queste vengono chiamate anche *cadute di tensione*, dato che tra un punto che precede la resistenza ed un punto che la segue, il potenziale diminuisce. Spesso la d.d.p. viene anche denotata *tensione*.



Le tensioni ai capi di due resistenze che vengono attraversate dalla corrente in senso opposte vanno considerate di segno opposto. La seguente immagine descrive la caduta di tensione.



Si consideri il circuito esemplificativo prima utilizzato, le tensioni ed i potenziali sulla prima maglia sono riportati in seguito.  $V_0$  è il potenziale sul polo negativo del generatore, e  $V_0 + \Delta V$  sul polo positivo.



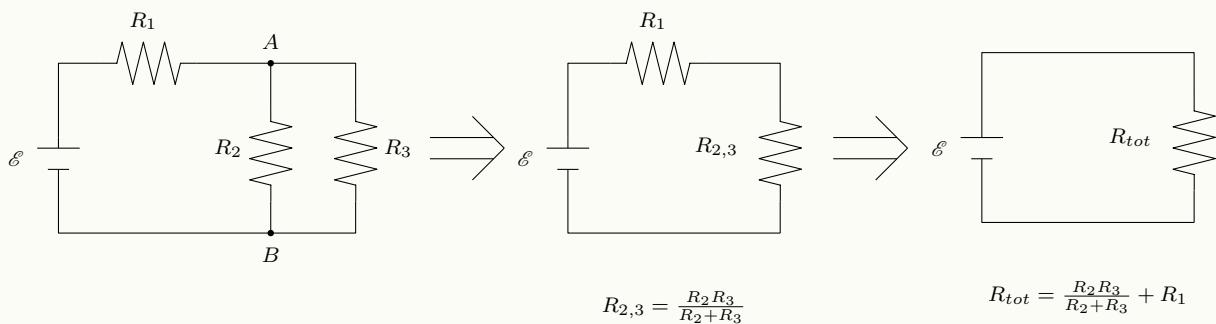
Si noti come

$$V_0 = V_0 + \Delta V + R_1 I_1 + R_2 I_2$$

Per la regola del partitore di corrente è anche vero che

$$V_0 = V_0 + \Delta V + R_1 I_1 + R_3 I_3$$

Inoltre, applicando le regole delle resistenze in serie ed in parallelo, è possibile trovare un circuito equivalente composto da un'unica resistenza.



quindi

$$\Delta V = R_{tot} I_1$$

$$\Delta V = \left( \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_1 \right) I_1$$

♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪

## 5.4 Potenza e Andamento del Circuito

Il lavoro infinitesimo compiuto per spostare una carica infinitesimale  $dq$  da un punto  $A$  ad un punto  $B$ , sottoposti ad una differenza di potenziale  $\Delta V$  è

$$dL = dq \int_A^B E = dq(V(B) - V(A)) = \Delta V dq$$

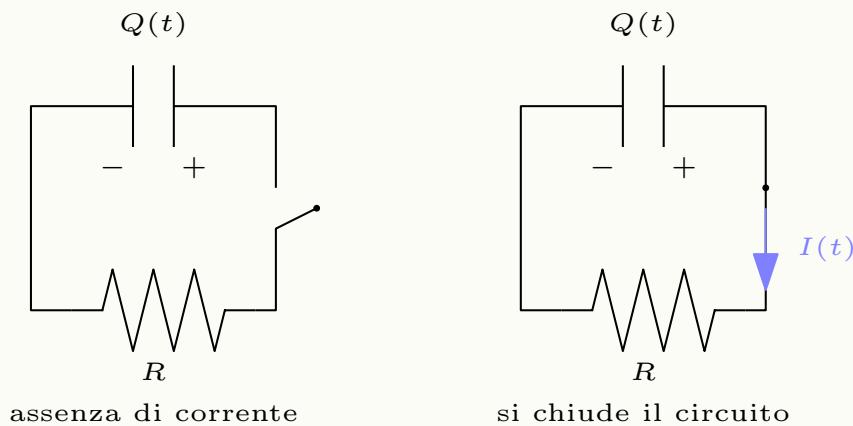
Si definisce la **potenza** come

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{\Delta V dq}{dt} = \Delta V I \frac{\text{Jau}}{\text{sec}}$$

In un sistema in cui vale la legge di Ohm, si può riscrivere come

$$P = RI^2$$

Si vuole determinare l'andamento nel tempo della carica di un condensatore quando collegato ad un circuito chiuso.



la differenza di potenziale ai capi del condensatore è  $\frac{Q(t)}{C}$ , ai capi della resistenza è  $RI(t)$ , applicando la seconda legge di Kirchhoff si ha che

$$\frac{Q(t)}{C} - I(t)R = 0$$

Per definizione

$$I = \frac{dq}{dt}$$

anche se  $q = Q$ , quando il condensatore si scarica la corrente aumenta, è corretto scrivere

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt}$$

quindi

$$\frac{Q(t)}{C} - \left( -\frac{dQ(t)}{dt} \right) = 0$$

$$R \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{Q(t)}{C}$$

si risolve l'equazione differenziale

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC}$$

$$\int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{dQ}{Q} = - \int_0^t \frac{1}{RC} dt$$

$Q_0$  è la carica iniziale del condensatore.

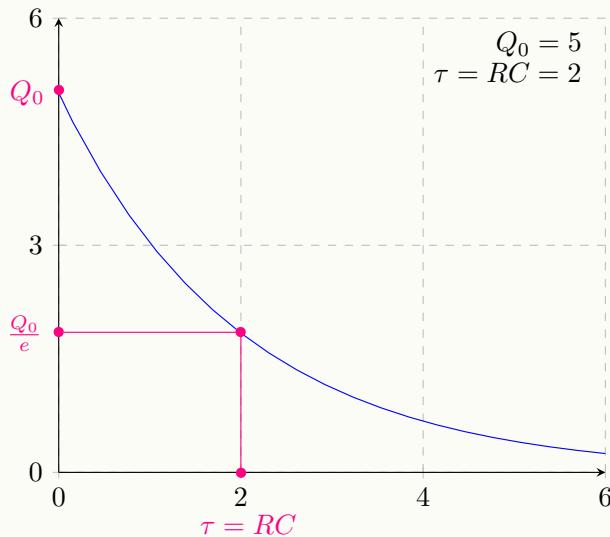
$$\ln\left(\frac{Q(t)}{Q_0}\right) = -\frac{1}{RC}t$$

$$\frac{Q(t)}{Q_0} = e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Il termine  $\tau = RC$  è un tempo *caratteristico*, indica che dopo  $RC$  unità di tempo, il condensatore si sarà scaricato raggiungendo una carica  $\frac{Q_0}{e}$

$$Q(RC) = Q_0 e^{-\frac{RC}{RC}} = Q_0 e^{-1} = \frac{Q_0}{e}$$



Sapendo che

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt}$$

si può trovare l'andamento nel tempo della corrente

$$I(t) = -\frac{d}{dt}\left(Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

$$I(t) = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Ma  $\frac{Q_0}{RC} = \frac{V_0}{I} = I_0$  è la corrente al tempo  $t = 0$

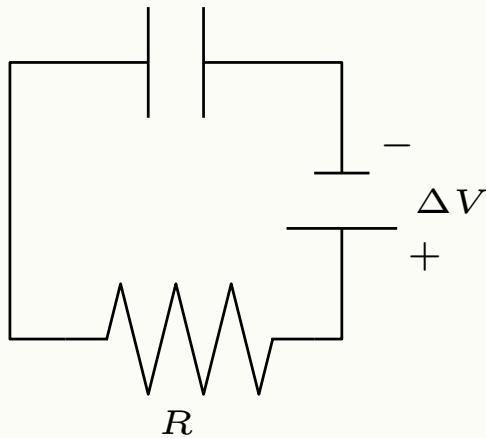
$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Il profilo temporale della differenza di potenziale è

$$\Delta V(t) = I(t)R = RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Vogliamo adesso valutare l'andamento temporale di un condensatore (di carica iniziale  $Q_0$ , che per semplicità sarà nulla) che si carica per il passaggio di una corrente grazie ad una differenza di potenziale costante (quindi applicando una forza elettromotrice).

$$Q(0) = 0$$



Sempre per la seconda legge di Kirchhoff, è vero che

$$\Delta V - IR - \frac{Q}{C} = 0$$

In questo caso la corrente carica il condensatore quindi

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

allora

$$\Delta V - \frac{dQ}{dt}R - \frac{Q}{C} = 0$$

è un'equazione differenziale non omogenea, si risolve per sostituzione ponendo

$$x = \Delta V - \frac{Q}{C}$$

ne consegue che

$$\frac{dQ}{dt} \Rightarrow dx = -\frac{dQ}{C} \Rightarrow dQ = -Cdx$$

l'equazione diventa

$$RC \frac{dx}{dt} + x = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{RC}x$$

La forma di questa edo è quindi identica a quella precedente, quindi la soluzione è immediata

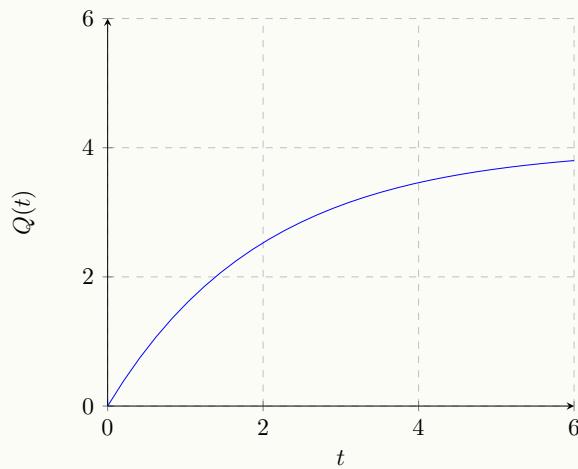
$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

sostituendo

$$\Delta V - Q(t) \frac{1}{C} = \Delta V e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$Q(t) = \Delta V C (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

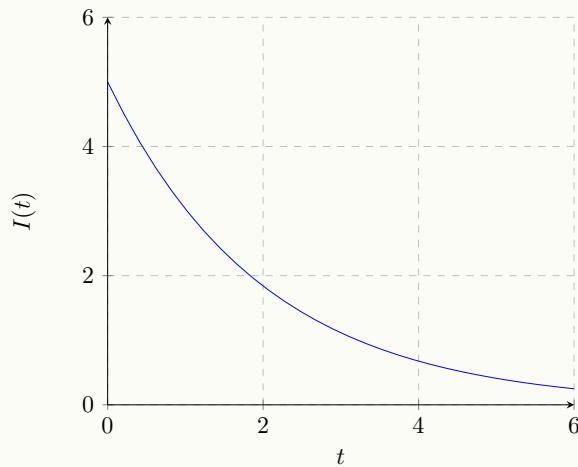
Anche in questo caso  $\tau = RC$  è il tempo caratteristico, dopo  $\tau$  unità di tempo il condensatore avrà raggiunto una carica pari a  $(1 - e^{-1})Q_\infty$ , dove  $Q_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t)$ . Quando il condensatore sarà completamente carico a regime, non ci sarà più corrente.



la corrente è proprio la derivata della carica

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{\Delta V C}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\Delta V}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

la corrente varia da  $\frac{\Delta V}{R}$  a 0.



In generale l'andamento della carica di un condensatore è descritto dall'equazione

$$a + b e^{-\frac{t}{\tau}}$$

al variare dei parametri  $a, b$ .

CAPITOLO

---

6

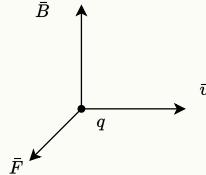
# IL CAMPO MAGNETICO

Se nello spazio è presente una carica puntiforme  $q$ , sappiamo che, se su di essa agisce una forza  $\bar{F}$ , allora deve essere presente un campo elettrico  $\bar{E}$

$$\bar{F} = q\bar{E}$$

Supponiamo che questa carica abbia una velocità  $\bar{v}$ . Se c'è una forza  $\bar{F}$  ortogonale a  $\bar{v}$ , allora esiste un altro campo di forze che interagisce con le cariche in velocità, si definisce il vettore **campo magnetico**  $\bar{B}$ , descritto dalla seguente formula detta **forza di Lorentz**

$$\bar{F} = q(\bar{v} \times \bar{B})$$



è la forza che agisce su una carica  $q$  che si muove a velocità  $\bar{v}$  in presenza di un campo magnetico, l'unità di misura di quest'ultimo è il *Tesla* T. Ci occuperemo in seguito di definire le sorgenti del campo magnetico, si consideri per ora solo un altro campo di forze nello spazio come può essere il campo elettrico.

Una carica elementare  $dq$  di corrente che percorre un tratto di filo conduttore risente di una forza pari a

$$dq(\bar{v}_d \times \bar{B})$$

Come mostrato in figura 6.1, dove  $\bar{v}_d$  è la velocità di deriva. Si consideri una curva  $l$  che rappresenta un filo conduttore, ed un tratto infinitesimo  $dl$ , è noto che il vettore del flusso della corrente è

$$\bar{j} = ne^- \bar{v}_d = ndq \bar{v}_d$$

si ha che

$$dq \bar{v}_d = \bar{j} d\tau$$

dove  $d\tau$  è il volume infinitesimo in cui passa la corrente, che può essere descritto dalla sezione infinitesima del filo  $ds$  e dal tratto infinitesimo  $d\bar{l}$

$$dq \bar{v}_d = \bar{j} d\bar{l} ds$$

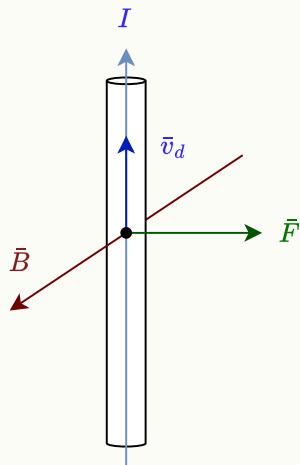


Figura 6.1: forza che agisce su un filo conduttore

ma  $\bar{j}ds = I$

$$dq\bar{v}_d = Id\bar{l}$$

la forza che agisce sul tratto infinitesimo è

$$d\bar{F} = I(d\bar{l} \times \bar{B})$$

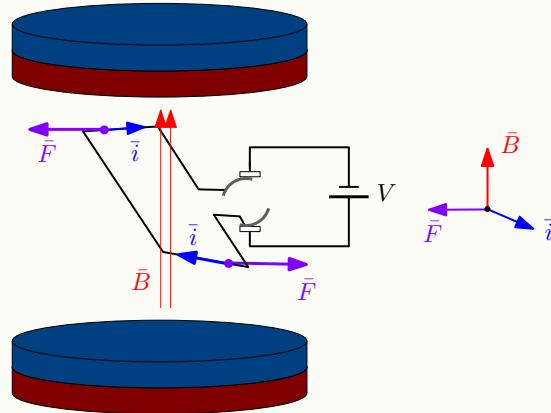
per ottenere la forza totale bisogna integrare sulla curva  $l$

$$\bar{F} = \int_l I(d\bar{l} \times \bar{B})$$

Se il campo magnetico è uniforme ed il tratto di filo è rettilineo ed è descritto dal vettore  $\bar{l}$ , allora la forza è

$$\bar{F} = I(\bar{l} \times \bar{B})$$

Questa legge permette la costruzione dei motori elettrici, come riportato in figura:



## 6.1 Sorgenti del Campo Magnetico

Abbiamo definito il campo magnetico quando una carica subisce una forza (di Lorentz) in movimento, occupiamoci ora di definire la sorgente del campo e la sua descrizione quantitativa.

*una carica in movimento genera un campo magnetico*

Tale affermazione si formalizza con la **prima legge di Laplace**

$$\text{L} \quad \bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q(\bar{v} \times \hat{r}) \frac{1}{r^2} \quad \text{R}$$

Questa è la formula di un campo generato da una carica  $q$  che si muove a velocità  $\bar{v}$ , calcolato in un punto distante  $r$  dalla carica.  $\hat{r}$  è il versore che congiunge la carica al punto in cui si considera il campo.

$\mu_0$  è la *costante di permeabilità magnetica* nel vuoto. Si misura in  $\frac{T}{A} m = \frac{W_b}{Am}$ .

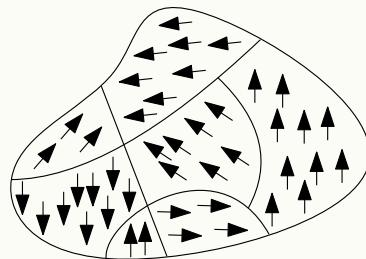
Applichiamo la prima legge di Laplace al linguaggio della corrente elettrica, dove  $q\bar{v}$  viene descritto da  $I\bar{d}\bar{l}$ , dove  $d\bar{l}$  è il tratto di filo conduttore infinitesimo. Si ha

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I(d\bar{l} \times \hat{r}) \frac{1}{r^2}$$

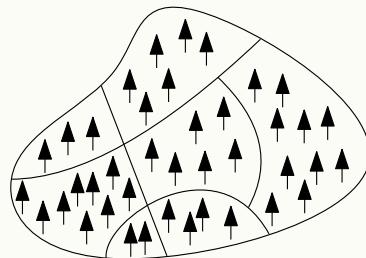
Nel caso di un mezzo generale, al posto di  $\mu_0$  si considera  $\mu = \mu_0 \mu_r$ ,  $\mu_r$  è una costante di permeabilità relativa al mezzo in cui si calcola il campo.

- i materiali per cui  $\mu_r < 1$  sono detti *diamagnetici* e diminuiscono l'effetto del campo magnetico.
- i materiali per cui  $\mu_r > 1$  sono detti *paramagnetici* e aumentano l'effetto del campo magnetico.
- i materiali per cui  $\mu_r \gg 1$  sono detti *ferromagnetici*.

Ogni elettrone, ha un momento magnetico, ossia un campo generato da esso (come se ruotasse su se stesso), i materiali ferro magnetici sono composti microscopicamente da delle regioni dette *domini di Weiss*, dentro tali regioni, gli elettroni hanno un momento magnetico polarizzato identicamente.



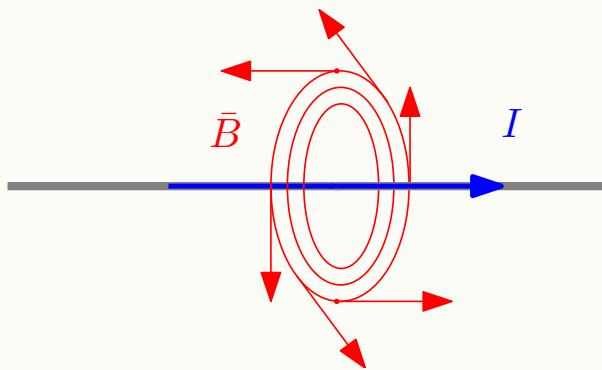
Essendo che in regioni diverse le polarizzazioni sono differenti, i momenti magnetici si annullano, ed il materiale globalmente non risulta magnetizzato. Se si applica un campo magnetico, i momenti si allineano, ed il materiale viene *magnetizzato*, e tale effetto permanerà anche quando il campo magnetico che l'ha generato cesserà di esistere.



Sopra una temperatura di soglia (temperatura di Curie), i materiali ferromagnetici perdono la loro magnetizzazione.

### 6.1.1 Campi Generati da Fili

Consideriamo alcuni esempi canonici di campi magnetici generati da una corrente che scorre su dei fili conduttori, si consideri appunto un filo percorso da corrente. Essendo che in ogni punto il campo è ortogonale alla velocità delle cariche, il campo magnetico comporrà delle "spire" che avvolgono il filo.



Il contributo infinitesimo in un punto distante  $r$  dato da un tratto infinitesimo di filo  $d\bar{l}$  di modulo  $d\bar{l}$  sarà

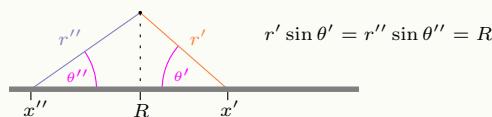
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\bar{l} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dx \sin \theta}{r^2}$$

sarà necessario integrare su tutto il filo

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{dx \sin \theta}{r^2}$$

Si vuole cambiare variabile di integrazione considerando l'angolo  $\theta$

$$r \sin \theta = R \implies r^2 = \frac{R^2}{\sin^2 \theta} \implies \frac{R}{x} = \tan \theta$$



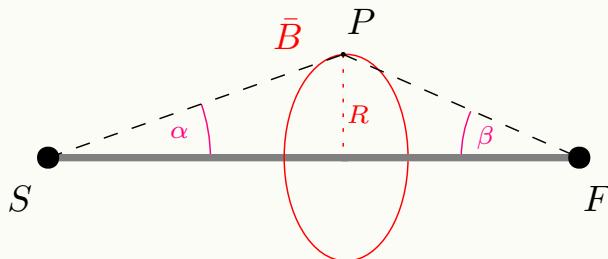
$$\implies x = \frac{R}{\tan \theta} = R \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \implies dx = R \left( -\frac{1}{\sin^2 \theta} \right) d\theta$$

Quindi

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \sin^3 \theta R \frac{-d\theta}{\sin^2 \theta} \frac{1}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \beta - \cos \alpha)$$

Dove

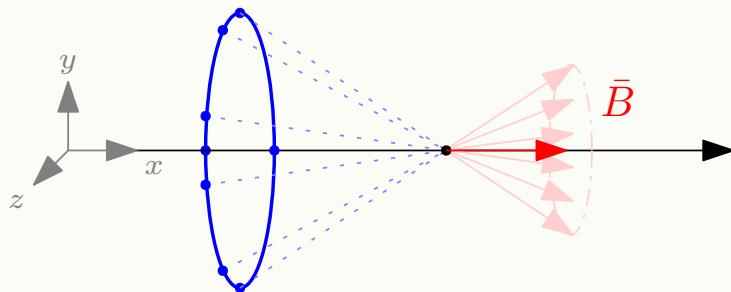
- $\alpha$  l'angolo fra il segmento  $SP$  e l'asse parallelo al filo
  - $S$  è il punto di inizio del filo
  - $P$  è il punto in cui si calcola il campo magnetico
- $\beta$  l'angolo fra il segmento  $FP$  e l'asse parallelo al filo
  - $F$  è il punto di inizio del filo
  - $P$  è il punto in cui si calcola il campo magnetico



Se il filo è infinitamente lungo, allora  $\alpha \rightarrow 0$  e  $\beta \rightarrow \pi$ , in tal caso il campo vale

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Consideriamo adesso il campo magnetico generato da una spira in cui scorre corrente, in particolare, si è interessati alla componente  $B_x$  del campo, ossia sulla retta che passa per il centro della spira. In maniera simile al campo elettrico generato da un anello carico, in un punto si formeranno delle linee di campo a "ventaglio" le cui componenti opposte si annulleranno.



Infine il campo magnetico sarà diretto lungo l'asse  $x$ .

$$dB_x = dB \sin \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \sin \theta$$

$$B_x = \int dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \theta \int_l dl$$

sia  $a$  il raggio della spira e  $2\pi a = \int_l dl$  la circonferenza

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \theta 2\pi a$$

ma  $\sin \theta = \frac{a}{r}$

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2r^3} a^2$$

si può esprimere lungo la componente  $x$ , dato che  $r = (a^2 + x^2)^{1/2}$

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Al centro della spira  $x = 0$  si ha

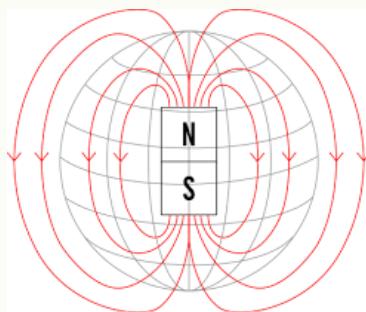
$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

~~\*~ ~~~\*~ ~~~\*~ ~~~\*~ ~~~\*~ ~~~\*~ ~~~\*~ ~~~\*~ ~~~\*~

## 6.2 Legge di Ampere

Vediamo alcune proprietà del campo magnetico, innanzitutto è importante sapere che il flusso del campo magnetico su una qualsiasi superficie chiusa  $S$  è nullo, dato che le linee di campo sono sempre chiuse, per ogni linea entrante nella superficie ce ne è una uscente.

$$\oint_S \bar{B} d\bar{s} = 0$$



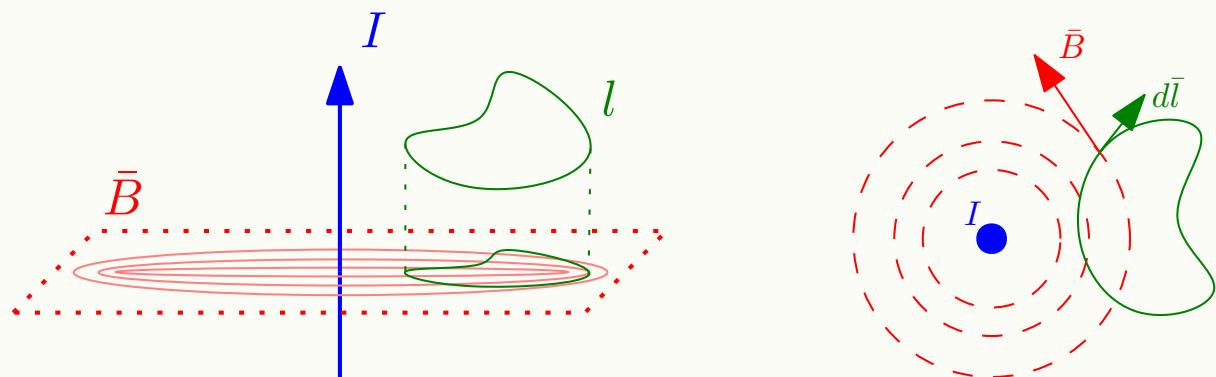
Consideriamo adesso la *circuitazione del campo magnetico*, per semplicità considereremo il campo generato da un filo rettilineo infinito percorso da corrente. La circuitazione è l'integrale su una linea chiusa  $l$ , questa, può essere *concatenata* o meno al filo percorso.

**Definizione :** una linea chiusa  $l$  si dice *concatenata* ad una retta  $R$  se, per ogni possibile superficie  $S_l$  la cui frontiera è  $l$ , esiste sempre almeno un punto  $x$  tale che  $x \in S_l \cup R$ .

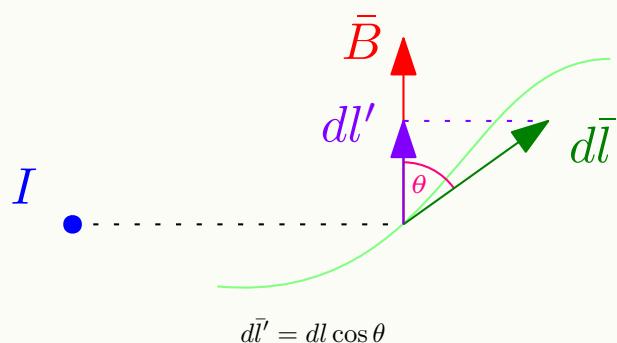
Informalmente, una linea chiusa è concatenata al filo percorso da corrente se ogni superficie che ha tale linea come frontiera, è attraversata almeno in un punto dal filo.



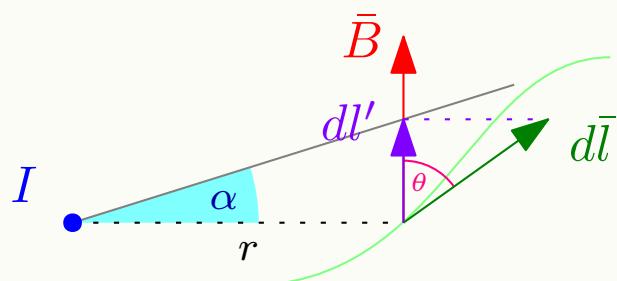
Sappiamo che il campo magnetico generato dal filo ha delle curve che sono circonferenze intorno ad esso, si vuole fare il prodotto scalare fra questo e le componenti infinitesimali  $d\bar{l}$  della curva  $dl$ . Come prima cosa, si proietta la curva  $l$  sul piano in cui giacciono le linee di campo.



si proietta  $d\bar{l}$  sul vettore  $\bar{B}$



Si considera poi l'angolo  $\alpha$  mostrato in figura



Sia  $r$  la distanza fra il filo ed il punto considerato, si ha che

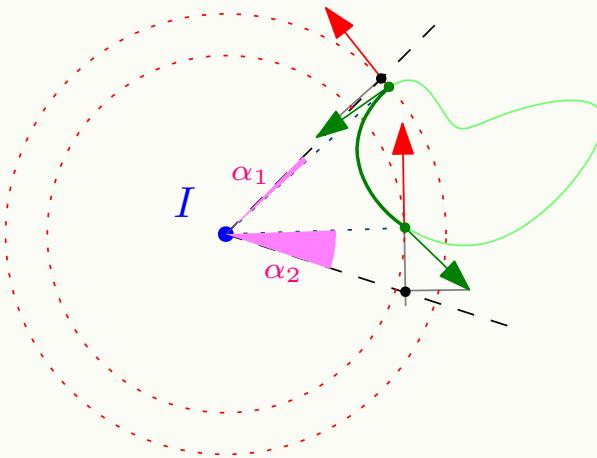
$$\frac{d\bar{l}}{r} = d\alpha$$

quindi

$$\bar{B}d\bar{l} = Bd\bar{l}' = Brd\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}rd\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi}d\alpha$$

A questo punto si può integrare sulla linea considerando  $\alpha$  come variabile di integrazione. Da un punto con angolo  $\alpha_1$  ad un punto con angolo  $\alpha_2$  si ha

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

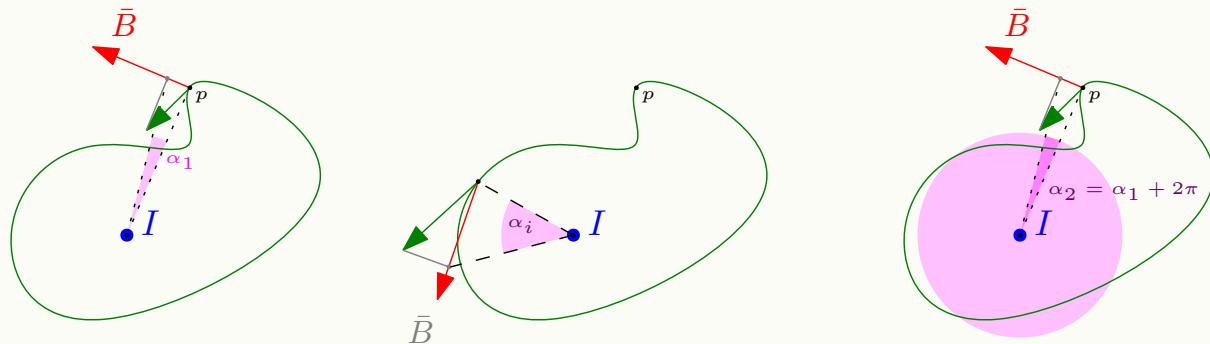


In una curva chiusa non concatenata, gli angoli  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  coincidono, ne consegue che la circuitazione è nulla

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}(0) = 0$$

Se la curva è *concatenata*, c'è una variazione di  $2\pi$  fra l'angolo iniziale e quello finale.

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}(2\pi) = \mu_0 I$$



La prima legge di Ampere afferma che la circuitazione del campo magnetico è uguale al prodotto fra la costante  $\mu_0$  e la corrente che scorre nel filo con cui la linea considerata è concatenata.

$$\oint_l \bar{B}d\bar{l} = \mu_0 I_{concatenata}$$

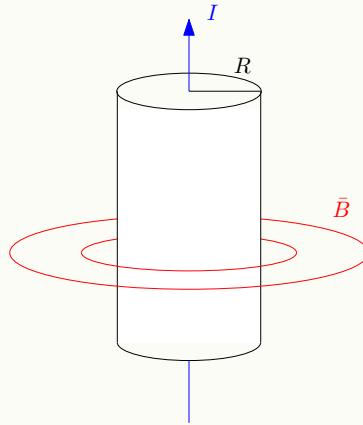
Ricordando che  $I$  è il flusso del vettore densità di corrente  $\bar{j}$ , si può esprimere in maniera più formale la corrente concatenata come

$$\oint_l \bar{B}d\bar{l} = \mu_0 \int_{S_l} \bar{j}d\bar{S}$$

dove  $S_l$  è una superficie che ha  $l$  come frontiera.

questa identità è valida solo se  $I$  non dipende dal tempo

In situazioni di simmetria, la legge di Ampere permette di calcolare il campo magnetico. Se ne vuole dare un esempio, si consideri ora un filo cilindrico di raggio  $R$  percorso da corrente, le linee di campo, come nel caso del filo unidimensionale (senza spessore) sono circonferenze concentriche centrate nell'asse passante per il centro del filo.



Consideriamo una curva chiusa  $l$ , concatenata, che per semplicità, è una circonferenza di raggio  $r$ , si vuole calcolare la circuitazione del campo magnetico lungo tale curva. Consideriamo separatamente i casi in cui la circonferenza della curva sia maggiore o minore alla circonferenza del cilindro.

**caso 1)**  $r > R$

$$\oint_l \bar{B} d\bar{l}$$

visto che il campo magnetico e la curva sono sempre paralleli in ogni punto (dato che le linee di campo sono circonferenze), il prodotto scalare è il prodotto fra i due moduli.

$$\oint_l \bar{B} d\bar{l} = \oint_l B dl = B \oint_l dl$$

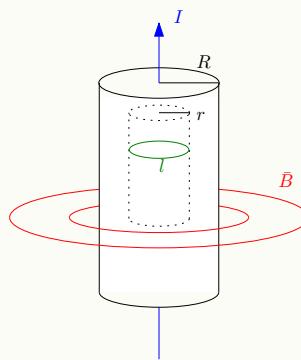
Per la legge di Ampere si ha che

$$B \oint_l dl = \mu_0 I$$

quindi, essendo  $\oint_l dl = 2\pi r$

$$B 2\pi r = \mu_0 I \implies B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

**caso 2)**  $r < R$ , in questo caso, cambia la corrente  $I$ , in quanto non si deve considerare tutta la sezione di filo, ma solamente una sottosezione cilндrica di raggio  $r$ .



Va considerata solamente la corrente  $I'$  passante per al sezione  $S$  di raggio  $r$ , ossia

$$I' = \int_S \bar{j} d\bar{S} =$$

ma la direzione di  $\bar{j}$  è parallela alla normale di  $S$  quindi si può considerare il prodotto dei due moduli.

$$I' = \int_0^r jdS$$

per la legge di Ampere si ha che

$$B2\pi r = \mu_0 I' = \mu_0 j \int_0^r dS$$

La superficie della sezione cilindrica  $S$  di raggio  $r$  è  $\pi r^2$

$$B2\pi r = \mu_0 j \pi r^2$$

$$B = \frac{\mu_0 j \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j r}{2}$$

### 6.2.1 Definizione di Ampere

In questa sezione verrà definita l'unità di misura della corrente. Si considerino 2 fili conduttori in cui scorre corrente, paralleli ad una distanza  $d$ . Le correnti sono rispettivamente  $I_1$  e  $I_2$ . I fili sono lunghi  $l$ , e descritti dal vettore  $\bar{l}$ .

Questi generano due campi magnetici

$$\bar{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

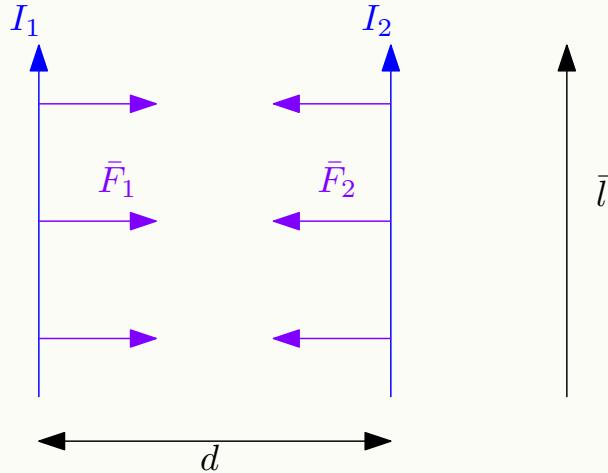
$$\bar{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}$$

il primo filo risentirà di una forza

$$\bar{F}_1 = I_1 \bar{l} \times \bar{B}_2$$

il secondo filo risentirà di una forza

$$\bar{F}_2 = I_2 \bar{l} \times \bar{B}_1$$



Si consideri ora la forza per unità di lunghezza

$$\frac{\bar{F}_2}{l} = I_2 l B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1 I_2$$

se le due correnti sono uguali  $I_1 = I_2 = I$ , si ha

$$\frac{\bar{F}_2}{l} = I_2 l B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi d} I^2$$

Si considera una distanza  $d = 1$  metro. E si applica una corrente nulla. Si aumenta la corrente fino a raggiungere un valore  $i^*$  tale che la forza su unità di lunghezza risulta essere

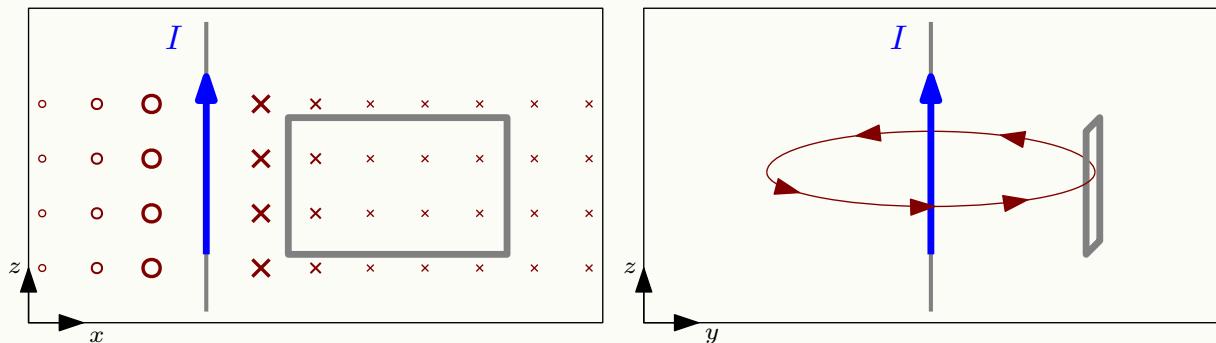
$$\frac{\mu_0}{2\pi} (i^*)^2 = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Tale corrente  $i^*$  definisce 1 unità di Ampere.



### 6.3 Flusso del Campo Magnetico

Il campo magnetico, può generare una corrente elettrica. Si consideri un filo percorso da corrente parallelo all'asse verticale  $z$ , ed un circuito chiuso che giace sul piano  $xz$ .



Si ricordi che le frecce indicano le linee di campo entranti nel foglio, ed i cerchi le linee di campo uscenti. L'intensità del campo magnetico decresce con la distanza  $r$  dal filo

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

muovendo il circuito sull'asse orizzontale  $x$ , si verifica un fenomeno particolare, inizia a scorrere corrente, quando invece ci si ferma, la corrente cessa.

Sembra che in qualche modo il campo magnetico generi una forza elettromotrice, ossia un campo elettrico non conservativo

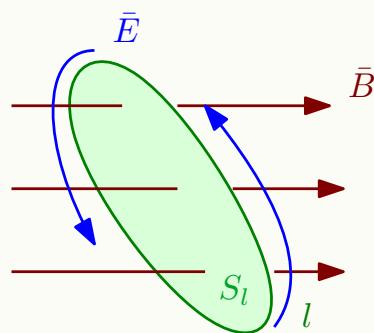
$$\oint_l \bar{E} d\bar{l} \neq 0$$

**Teorema :** La legge di **Faraday-Neumann-Lenz** afferma che la circuitazione del campo elettrico su una curva chiusa  $l$  è uguale alla variazione nel tempo del flusso del campo magnetico (cambiato di segno) su una superficie  $S_l$  di cui  $l$  è frontiera.

$$\oint_l \bar{E} d\bar{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S_l} \bar{B} d\bar{S}$$

Tale enunciato è anche noto come *legge di induzione elettromagnetica*, nell'esempio del circuito chiuso in presenza del campo generato dal filo percorso dalla corrente  $I$ , il flusso può variare

- muovendo il circuito
- muovendo il filo in cui scorre  $I$
- variando la corrente  $I$



Tale principio è alla base dei generatori elettrici, in cui si fanno girare delle bobine immerse in un campo magnetico, generando della corrente elettrica.

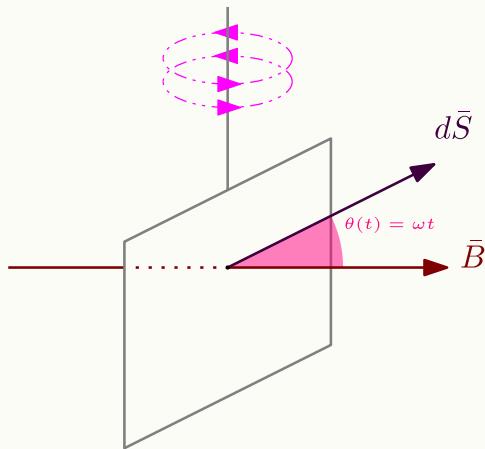
Si consideri un circuito di forma quadrata, in grado di roteare grazie ad un perno. I lati del circuito

hanno lunghezza  $l$ , la sezione è quindi  $S = l^2$ . Sia  $\theta(t) = \omega t$  la velocità di rotazione del perno, il flusso del campo magnetico sulla superficie  $S$  è

$$\phi = SB \cos(\theta(t))$$

ossia

$$\phi = SB \cos(\omega t)$$



Si considera la derivata del flusso rispetto al tempo cambiata di segno

$$-\frac{d\phi}{dt} = SB\omega \sin(\omega t)$$

Questa, è la circuitazione del campo elettrico nel circuito, ossia la forza elettromotrice, essendo che  $V = RI$ , se  $R$  è la resistenza del conduttore, su questo scorrerà una corrente alternata:

$$I = \frac{1}{R} SB\omega \sin(\omega t)$$

Nella legge di induzione elettromagnetica, è presente un segno — per descrivere il fatto che la corrente generata si *oppone alla variazione del flusso*. Si consideri un campo magnetico entrante, quindi di flusso negativo

$$\phi_B < 0$$

ruotando il circuito, il flusso aumenta (il flusso negativo diminuisce, avvicinandosi allo zero), quindi

$$\frac{d\phi_B}{dt} > 0$$

allora

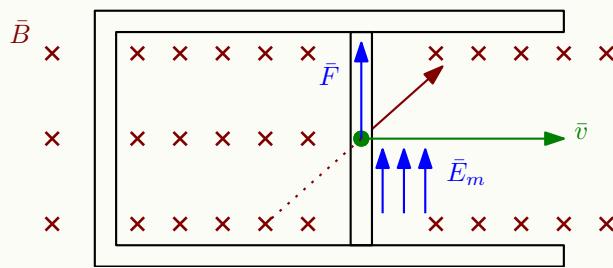
$$\text{f.e.m} = -\frac{d\phi_B}{dt} < 0$$

La corrente quindi scorrerà in verso antiorario. La corrente a sua volta genera un campo magnetico *entrante*, quindi si oppone alla diminuzione del campo entrante.

- flusso entrante diminuisce  $\implies$  la corrente crea un flusso entrante
- flusso uscente diminuisce  $\implies$  la corrente crea un flusso uscente
- flusso uscente aumenta  $\implies$  la corrente crea un flusso entrante
- flusso entrante aumenta  $\implies$  la corrente crea un flusso uscente

Il fenomeno di induzione elettromagnetica è spiegabile grazie alla relatività, vi è un caso particolare che può essere spiegato con la forza di Lorentz.

Si consideri un circuito di forma rettangolare, in cui un lato mobile, si sta spostando verso destra a velocità costante  $\bar{v}$ , inoltre, il circuito è immerso in un campo magnetico  $\bar{B}$ .



Le cariche nel circuito sono soggette ad una forza di Lorentz

$$\bar{F} = q\bar{v} \times \bar{B}$$

Vi è un campo elettromotore

$$\bar{E}_m = \frac{\bar{F}}{q} = \bar{v} \times \bar{B}$$

essendo  $\bar{B}$  e  $\bar{v}$  ortogonali, il modulo del prodotto vettoriale è uguale al prodotto dei due moduli

$$E_m = vB$$

la forza elettromotrice è data dall'integrale sul circuito, essendo il campo elettromotore presente solo nel lato mobile, verrà considerata solo questa componente. Sia  $l$  la lunghezza del lato, allora

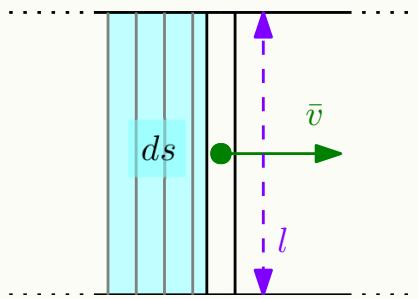
$$\text{f.e.m.} = vBl$$

Si vuole calcolare ora la forza elettromotrice usando la legge di Faraday, e verificare che i risultati sono i medesimi. In un tempo infinitesimo  $dt$ , la sbarra si muove di una distanza

$$vdt$$

Come sezione, bisogna considerare quella "spazzata" dalla sbarra che si muove, la sezione infinitesima è data da

$$ds = lvdt$$



Si calcola ora la derivata del flusso

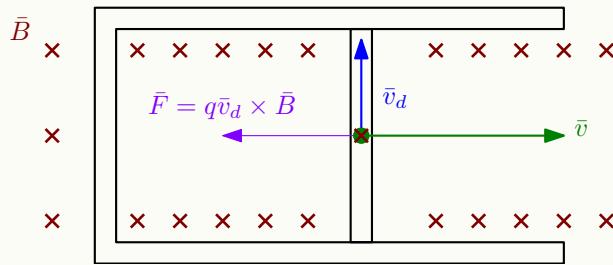
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} B ds = B \frac{lvdt}{dt} = Blv$$

il risultato è il medesimo. Nel circuito (la cui resistenza è  $R$ ) circolerà una corrente

$$I = \frac{vBl}{R}$$

Essendo che vi è una corrente, le cariche presenti nel circuito si muoveranno alla velocità di deriva  $\bar{v}_d$ , essendo immerse in un campo magnetico, queste saranno soggette ad una forza di Lorentz, la cui direzione è opposta a quella della velocità  $\bar{v}$  del lato mobile.

Tale forza, detta *contro elettro motrice*, si oppone alla forza che sposta il lato mobile.



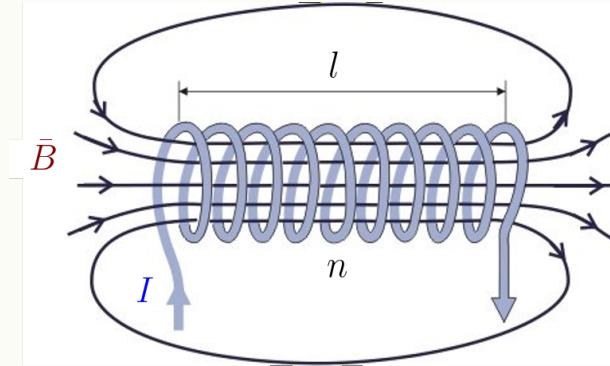
Fino ad ora, abbiamo descritto il campo elettrico ed il campo magnetico con 3 (delle 4) equazioni di Maxwell:

$$\oint_S \bar{E} d\bar{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau_S} \rho d\tau \quad \oint_S \bar{B} d\bar{S} = 0 \quad \oint_l \bar{E} d\bar{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S_l} \bar{B} d\bar{S}$$

La quarta equazione sarà data dalla legge di Ampere estesa al caso di una corrente variabile nel tempo.

### 6.3.1 Campo Elettrico e Magnetico del Solenoide

Si consideri un filo conduttore che ha la forma di un solenoide, composto da  $n$  spire, la cui lunghezza totale è  $l$



Il campo magnetico  $\bar{B}$  all'interno delle spire è uniforme, e vale

$$B = \frac{1}{l} \mu_0 n I$$

dove  $I$  è la corrente che scorre nel conduttore, esprimiamo il campo sempre in forma scalare dato che la direzione è la stessa in ogni punto (all'interno delle spire). Supponiamo che  $I$  sia variabile nel tempo

$$B = \frac{1}{l} \mu_0 n I(t)$$

In particolare, che sia lineare, definita (per qualche  $a$ ) come  $I(t) = at$

$$B = \frac{1}{l} \mu_0 n a t$$

Sia  $S$  la sezione di una spira, si consideri il flusso in tale superficie, essendo che la normale di  $S$  è parallela al campo magnetico, il flusso (attraverso una spira) sarà proprio

$$\phi_1(t) = \frac{1}{l} n S \mu_0 a t$$

il flusso totale attraverso  $n$  spire non è altro che la somma dei contributi di ogni spira

$$\phi(t) = n \cdot \frac{1}{l} n S \mu_0 a t = \frac{1}{l} n^2 S \mu_0 a t$$

la derivata del flusso rispetto al tempo è

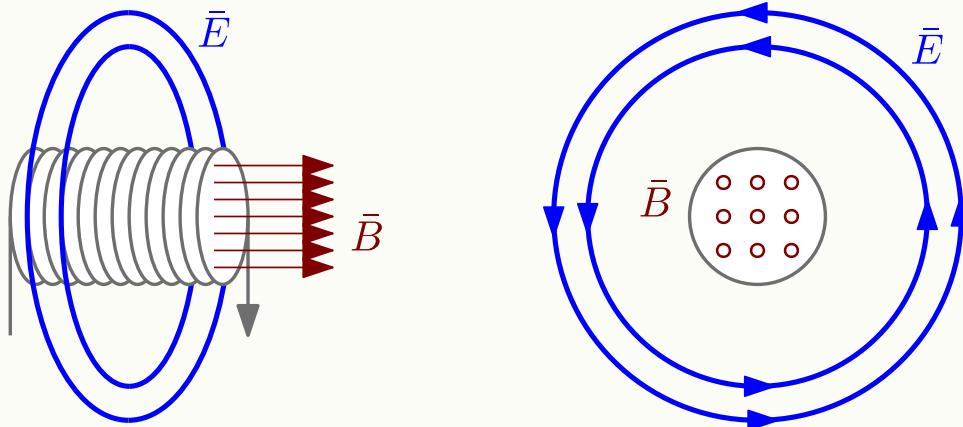
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{l} n^2 S \mu_0 a$$

Ma quindi, ci sarà una forza elettromotrice  $E$  sulla frontiera della sezione  $S$ , in generale, su una circonferenza di raggio  $r$  la f.e.m. sarà

$$E2\pi r = \frac{1}{l}n^2 S \mu_0 a \implies E = \frac{1}{l2\pi r} n^2 S \mu_0 a$$

Risulta comodo scriverlo come

$$E = \left( \frac{1}{l2\pi} n^2 S \mu_0 a \right) \frac{1}{r}$$



Si noti come il termine dentro le parentesi, ossia  $C = \left( \frac{1}{l2\pi} n^2 S \mu_0 a \right)$  è costante, il campo

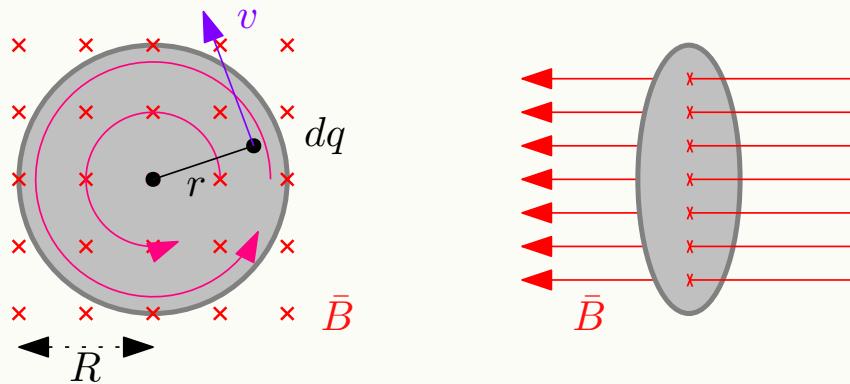
$$E = C \frac{1}{r}$$

generato dalla variazione del flusso ha intensità inversamente proporzionale alla distanza.

- la variazione della corrente nel solenoide ha causato una variazione del flusso
- la variazione del flusso ha causato una corrente indotta (legge di Faraday-Neumann-Lenz)

### Esempio

Si consideri un disco (di raggio  $R$ ) di materiale conduttore, immerso in un campo magnetico uniforme, le cui linee di campo sono entranti nella superficie del disco.



Supponiamo che il disco rotei ad una certa velocità tangenziale, una carica infinitesima  $dq$  posta a distanza  $r$  dal centro, si muove a velocità  $v$ , dato che la velocità è sempre ortogonale alle linee di campo, la carica sarà soggetta ad una forza di Lorentz

$$dF = dqvB$$

La velocità  $v$  della carica dipende dalla sua distanza  $r$  dal centro, ed è  $v(r) = \omega r$

$$dF = dq\omega r B$$

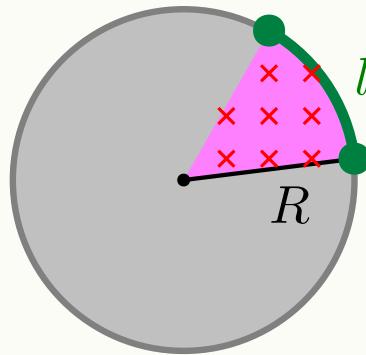
il campo elettrico infinitesimo  $dE$  è dato da

$$dE = \frac{dF}{dq} = \omega r B$$

per il campo totale, bisogna integrare su tutta la superficie del disco, ossia da  $r = 0$  a  $r = R$

$$E = \int_0^R B \omega r dr = B \omega \int_0^R r dr = \frac{\omega B R^2}{2}$$

Vogliamo ora calcolarlo utilizzando la legge di Faraday-Neumann-Lenz, il flusso deve essere calcolato attraverso "spazzata" dal raggio del disco.



Si consideri una variazione infinitesima dell'arco di curva, ossia  $dl$ , in tal modo, è possibile approssimare l'arco ad una retta, facendo sì che l'area spazzata  $A$  sia un triangolo, calcolandola in modo semplice

$$A = \frac{1}{2} R dl$$

per  $\alpha$  che tende a 0



Il flusso infinitesimo attraverso questa è dato da

$$d\phi = \frac{1}{2} R dl B$$

Si ricordi che è bastato fare il prodotto dei moduli in quanto la superficie del disco è ortogonale alle linee di campo magnetico. A questo punto, avendo il flusso infinitesimo, se ne vuole calcolare la derivata rispetto al tempo

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} R dl B \frac{1}{dt}$$

ma attenzione, il termine  $\frac{dl}{dt}$  è la derivata rispetto al tempo dell'arco di curva  $l$ , questa non è altro che la velocità tangenziale  $\omega R$ , quindi

$$\frac{1}{2} R dl B \frac{1}{dt} = \frac{1}{2} R B \frac{dl}{dt} = \frac{1}{2} R B R \omega$$

Ne consegue che

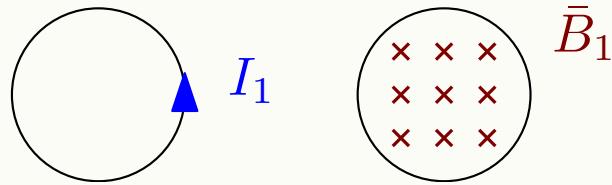
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega B R^2}{2}$$

proprio come calcolato precedentemente applicando la regola della forza di Lorentz.



## 6.4 Induttanza

Si considerino due circuiti posti uno di fronte all'altro, nella seguente configurazione



nel primo circuito scorre una corrente  $I_1$ , il campo magnetico  $\bar{B}_1$  generato è entrante nella superficie di cui il circuito 2 è frontiera. Il flusso sul secondo circuito sarà

$$\phi_2 = I_1 M_{2,1}$$

dove  $M_{2,1}$  è un coefficiente che dipende dalle proprietà geometriche dei circuiti. Se la corrente  $I_1$  varia nel tempo, allora varia anche  $\bar{B}_1$ , e di conseguenza il flusso  $\phi_2$ , ne consegue che ci sarà una circuitazione del campo elettrico (fem) non nulla nel secondo circuito, e scorrerà una corrente  $I_2$ .

$$I_2 = \frac{\text{fem}}{R_2} = -\frac{d\phi_2}{dt} = -M_{2,1} \frac{d\phi_2}{dt}$$

Inoltre, il campo magnetico creato da  $I_1$ , causerà una variazione di flusso sulla superficie di cui lo stesso circuito su cui scorre  $I_1$  è frontiera, questa, sarà opposta ad  $I_1$

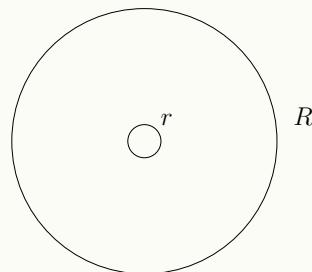
$$\phi_1 = LI_1$$

$$I'_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = L \frac{dI_1}{dt}$$

$L$  è il coefficiente  $M_{1,1}$ . Il circuito ha un *auto induttanza* interna.

### Esercizio : Calcolo del Coefficiente di Induttanza

Si considerino due circuiti, a forma di circonferenza e concentrici, di raggio  $R$  ed  $r$ , con  $r$  molto piccolo rispetto ad  $R$ .



Siano

- $I_r$  la corrente che scorre nel circuito di raggio  $r$
- $I_R$  la corrente che scorre nel circuito di raggio  $R$

Si vuole calcolare il flusso  $\phi_R$  attraverso la superficie di  $R$  del campo magnetico  $\bar{B}_r$  generato da  $I_r$ .

$$\phi_R = M_{2,1} I_r$$

**Osservazione :**  $M_{1,2} = M_{2,1}$

Risulta più semplice calcolare il flusso attraverso la superficie del circuito più piccolo

$$\phi_r = M_{1,2} I_R = M_{2,1} I_R$$

Essendo  $r$  molto più piccolo di  $R$ , si può approssimare il campo magnetico che lo attraversa, considerandolo uniforme e di intensità uguale a quella che ha al centro della circonferenza, quindi

$$\bar{B}_R = \frac{\mu_0 I_R}{2R}$$

ma allora, se  $\pi r^2$  è la superficie del circuito più piccolo, ed il campo è uniforme, il flusso attraverso  $r$  sarà

$$\phi_r = \frac{\mu_0 I_R}{2R} \pi r^2$$

ne consegue che

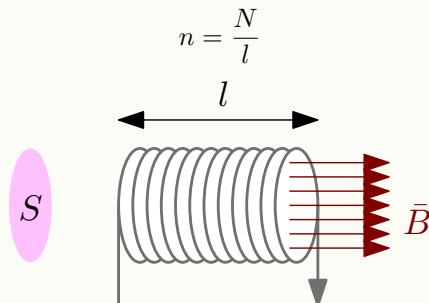
$$M_{2,1} = \frac{\phi_r}{I_R} = \frac{\mu_0 \pi r^2}{2R}$$

### 6.4.1 Autoinduttanza del Solenoide

Si consideri il solenoide, sappiamo che il campo magnetico all'interno del volume circoscritto dalle spire è uniforme e vale

$$B = \mu_0 n I$$

dove  $I$  è la corrente che scorre nel solenoide e  $n$  è il rapporto fra il numero delle spire  $N$  e la lunghezza  $l$  totale del solenoide



Il campo magnetico ha un flusso attraverso la propria superficie, questo vale

$$\phi = NSB$$

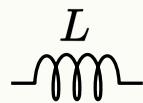
dove  $S$  è la sezione di ogni spira. Il coefficiente di induttanza vale

$$L = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0 n I S N}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$$

~\*~

## 6.5 Induttore nel Circuito

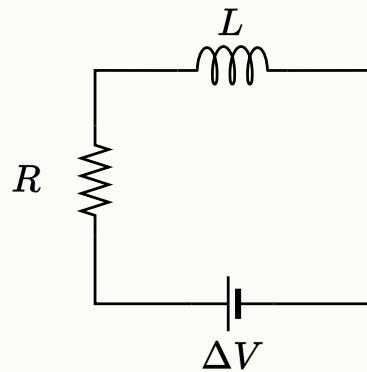
Ogni circuito, ha un induttanza intrinseca, dovuta al fatto che il campo magnetico generato dalla corrente interagisce con il circuito stesso quando la corrente varia (e conseguentemente, ne varia il flusso). Nei circuiti, il componente che fa da induttanza (ossia, l'induttore) viene rappresentato con il simbolo di un solenoide



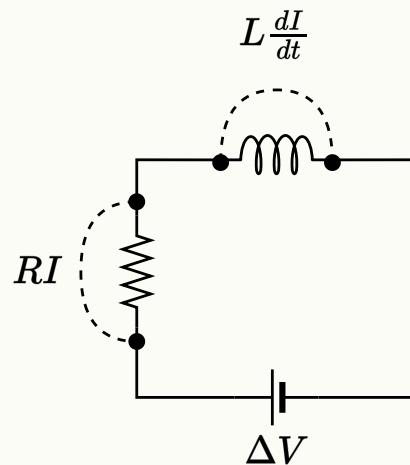
indicando con  $L$  il coefficiente di induttanza. La differenza di potenziale ai capi di un induttore dipende dalla variazione della corrente, ed è uguale a

$$\Delta V_L = L \frac{dI}{dt}$$

Si consideri il seguente circuito  $RL$ , ossia in cui è presente un generatore di forza elettromotrice, una resistenza ed un induttore.



Si è nell'ipotesi di corrente continua, con  $\Delta V$  costante. Si considera la differenza di potenziale ai capi di ogni componente



Applicando la legge di Kirchhoff delle maglie, si ha che

$$\Delta V - RI - L \frac{dI}{dt} = 0$$

allora risolvendo l'equazione differenziale è possibile trovare l'andamento della corrente (a partire dall'istante  $t = 0$  in cui la corrente è nulla). Si riscrive

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\Delta V}{L} - \frac{RI}{L}$$

Si applica una sostituzione

$$x(t) = \frac{\Delta V}{L} t - \frac{RI(t)}{L}$$

allora

$$dx = -\frac{R}{L} dI \implies dI = -\frac{R}{L} dx$$

allora l'equazione differenziale in  $x$  diventa

$$-\frac{dx}{dt} \frac{R}{L} = x$$

moltiplico entrambi i termini per  $\frac{dt}{x}$

$$\begin{aligned} -\frac{dx}{x} \frac{R}{L} dt &= dt \\ \frac{dx}{x} &= -\frac{L}{R} dt \end{aligned}$$

ponendo  $x(0) = x_0$ , sappiamo che la soluzione è

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{L}{R}t}$$

Essendo che

$$x(t) = \frac{\Delta V}{L} - \frac{RI(t)}{L}$$

e che  $I(0) = 0$  ne conseguue

$$x_0 = \frac{\Delta V}{L}$$

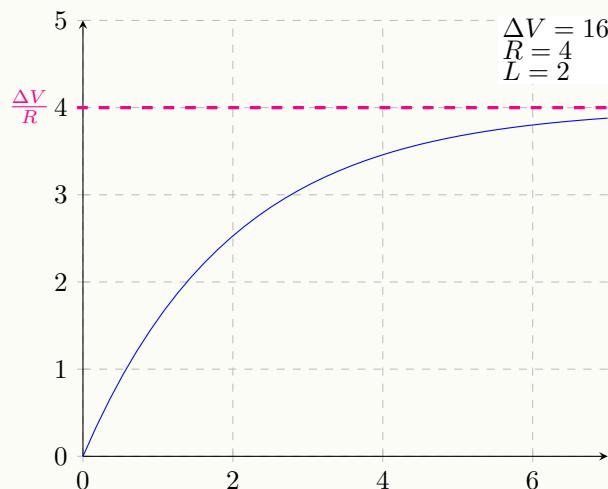
quindi (ponendo anche  $\tau = \frac{R}{L}$ )

$$x(t) = \frac{\Delta V}{L} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Si sostituisce  $x$  con  $I$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{L} - \frac{R}{L} I(t) &= \frac{\Delta V}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ I(t) &= \frac{\Delta V}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \end{aligned}$$

Quindi a regime permanente, per  $t \rightarrow \infty$ , la corrente si assesterà sul valore nominale  $\frac{\Delta V}{R}$ , prima di ciò però, l'induttore si oppone all'aumentare della corrente, facendo sì che l'andamento verso il valore di regime sia esponenziale ma non istantaneo.

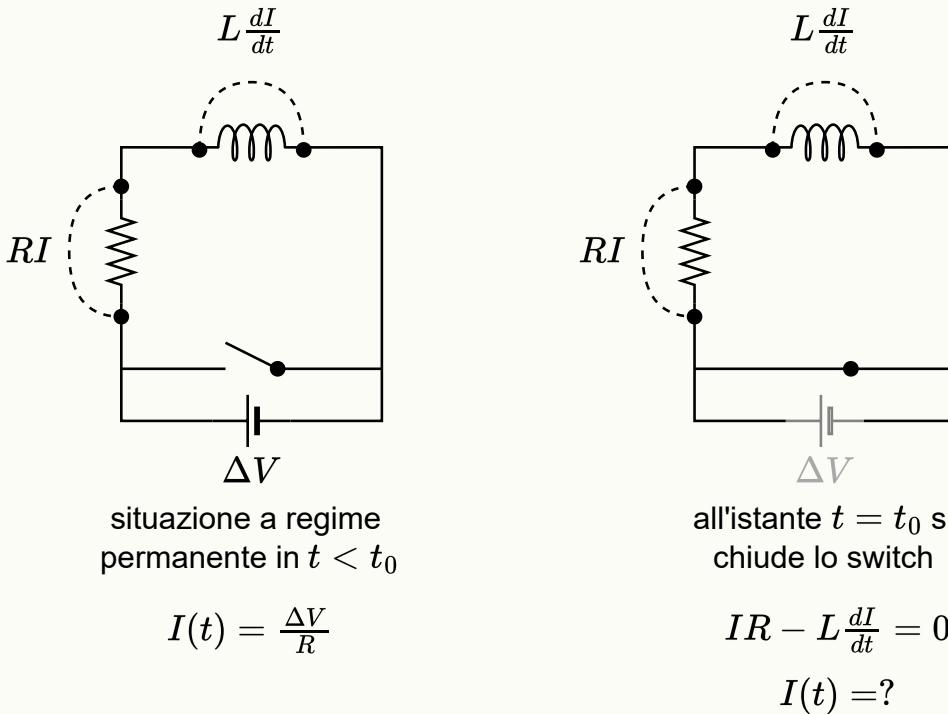


durante la fase di salita della corrente, l'induttore accumula energia sotto forma di campo magnetico

Si vuole considerare adesso, la situazione in cui da una fase di regime (corrente massima  $I = \frac{\Delta V}{R}$ ), si cortocircuita il generatore, azzerando la forza elettrica motrice.

In un caso privo di induttore, la corrente, che ha l'espressione  $I = \frac{\Delta V}{R}$ , dovrebbe immediatamente azzerarsi dal momento che viene a mancare il termine  $\Delta V$ , vedremo come, ci sarà una fase di decrescita esponenziale, dato che l'induttore aveva accumulato energia sotto forma di campo magnetico, e la scaricherà come corrente cercando di opporsi alla variazione (negativa) di quest'ultima.

La situazione è illustrata dalla figura seguente



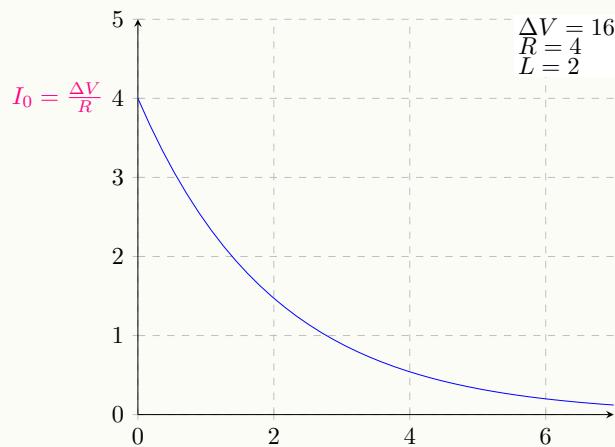
La corrente per  $t \geq t_0$  (per semplicità  $t_0 = 0$ ) soddisferà l'equazione differenziale

$$IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \implies$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$$

La soluzione di questa equazione differenziale è nota

$$I(t) = I(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\Delta V}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



L'energia immagazzinata dall'induttore si ri-trasformerà in corrente che rallenterà la decrescita di  $I$  verso lo zero.

Si vuole trovare l'energia immagazzinata  $E_{nrgy}$ , sappiamo che la potenza  $P$  ha espressione

$$P = RI^2$$

quindi

$$P = R \frac{\Delta V^2}{R^2} e^{-2\frac{t}{\tau}}$$

La potenza elettrica in un lasso di tempo infinitesimo è  $Pdt = R \frac{\Delta V^2}{R^2} e^{-2\frac{t}{\tau}} dt$ . L'energia totale immagazzinata  $E_{nrgy}$  è l'integrale di questo termine per  $t$  che va da 0 ad infinito.

$$\begin{aligned} E_{nrgy} &= \int_0^\infty R \frac{\Delta V^2}{R^2} e^{-2\frac{t}{\tau}} dt = \frac{\Delta V^2}{R} \int_0^\infty e^{-2\frac{t}{\tau}} dt = \\ &= \frac{\Delta V^2}{R} \left[ -\frac{1}{2} e^{-2\frac{t}{\tau}} \right]_0^\infty = \frac{\Delta V^2}{R} \frac{\tau}{2} = \frac{\Delta V^2}{R} \frac{L}{2R} = \frac{1}{2} L \frac{\Delta V^2}{R^2} \end{aligned}$$

ma  $\frac{\Delta V}{R} = I(0) = I_0$  quindi

$$E_{nrgy} = \frac{1}{2} L I_0^2$$

Consideriamo adesso il caso specifico dell'energia immagazzinata da un induttore di forma solenoidale, dati

- $N$  numero di spire/avvolgimenti
- $l$  lunghezza solenoide
- $S$  superficie della sezione di ogni spira

Abbiamo visto come il coefficiente di induttanza  $L$  vale

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$$

Ne consegue che, l'energia immagazzinata è

$$E_{nrgy} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{l} S I_0^2$$

Nel caso del solenoide, è noto il campo magnetico all'interno del volume cilindrico circoscritto dalle spire

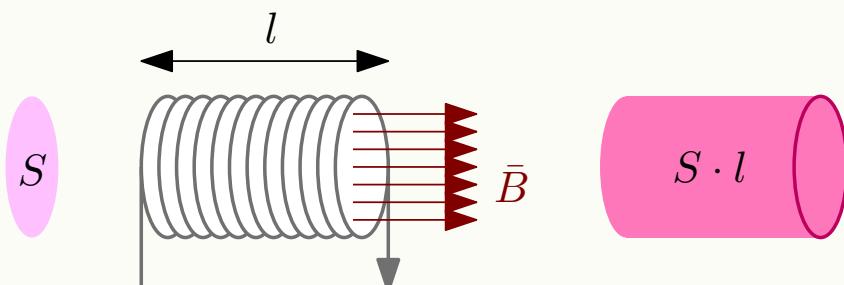
$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

si considera il quadrato

$$B^2 = \mu_0^2 \frac{N^2}{l^2} I^2$$

ma allora si può riscrivere l'energia immagazzinata in funzione di  $B$

$$E_{nrgy} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2 \cdot Sl$$



Si noti come il termine  $Sl$  nella formula dell'energia è proprio il volume circoscritto dalle spire *in cui è contenuto il campo magnetico*, ma allora, l'energia è uguale al volume in cui è contenuto il campo, per un fattore, tale fattore assume il carattere di **densità di energia del campo magnetico**

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2$$



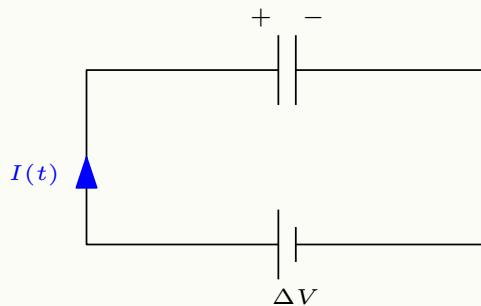
## 6.6 Legge di Ampere-Maxwell

Abbiamo visto la legge di Ampere

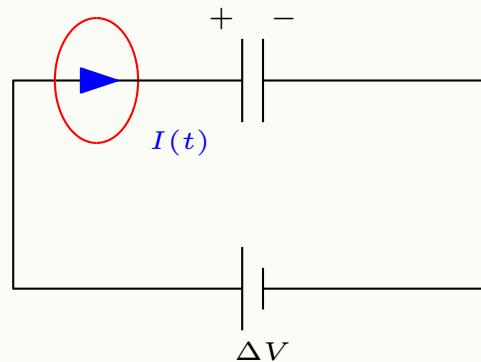
$$\oint_l \bar{B} d\bar{l} = \mu_0 \int_{S_l} \bar{j} d\bar{s}$$

Il problema è che la legge di Ampere non è valida nei casi in cui il vettore  $\bar{j}$ , e conseguentemente la corrente  $I$ , dipendono dal tempo.

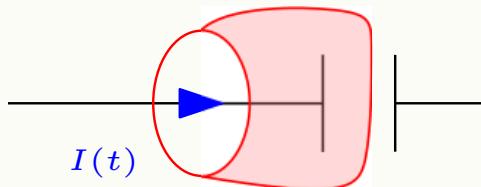
Il seguente esempio è una facile dimostrazione della non validità della legge di Ampere, si consideri un circuito con un generatore di forza elettromotrice ed un condensatore. C'è una corrente  $I(t)$  variabile nel tempo che carica il condensatore.



C'è un problema, durante la carica del condensatore, è presente una corrente  $I(t)$ , che genera un campo magnetico  $\bar{B}$ .



C'è un problema, esiste una curva  $l$ , in cui la circuitazione del campo magnetico non è nulla, ed è identica a  $\mu_0 I$ , nonostante  $l$  non sia concatenata al filo in cui scorre corrente.



è quindi necessario rivedere l'equazione di Ampere per far sì che sia valida anche in situazioni in cui la corrente non è stazionaria. Maxwell modificò la legge aggiungendo un termine, definendo la **legge di Ampere-Maxwell**

$$\oint_l \bar{B} d\bar{l} = \mu_0 \int_{S_l} \bar{j} d\bar{s} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_l} \bar{E} d\bar{s}$$

Si considera un termine aggiuntivo, ossia la derivata del flusso del campo elettrico calcolata sulla stessa superficie che ha  $l$  come frontiera.

Verifichiamo se funziona nel caso del condensatore (ideale), di cui sappiamo che il campo è uniforme e vale

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

dove  $\sigma$  è la densità di carica sulle lastre. Il flusso del campo attraverso la superficie della lastra è

$$\phi_E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} A$$

Dove  $A$  è la superficie della lastra. Essendo che nel caso di corrente non stazionaria il condensatore si sta caricando (o scaricando), la densità di carica varia nel tempo, e sua volta il flusso

$$\phi_E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} A$$

la derivata del flusso vale

$$\frac{d}{dt} \phi_E(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} \frac{A}{\epsilon_0}$$

ma attenzione, il prodotto densità per superficie è proprio la carica totale, quindi il termine  $A \frac{d\sigma(t)}{dt}$  è uguale alla derivata della carica  $Q$  nel tempo

$$\frac{d}{dt} \phi_E(t) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dQ}{dt}$$

E infatti la derivata della carica nel tempo è proprio una corrente, in questo caso è detta **corrente di spostamento**.

## CAPITOLO

# 7

## ONDE ELETTRONAGNETICHE

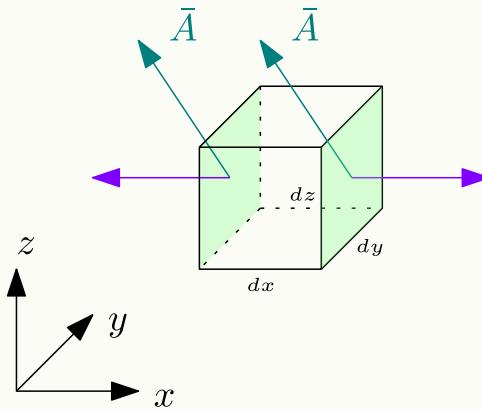
### 7.1 Forme Differenziali delle Equazioni di Maxwell

#### 7.1.1 Divergenza e Rotore

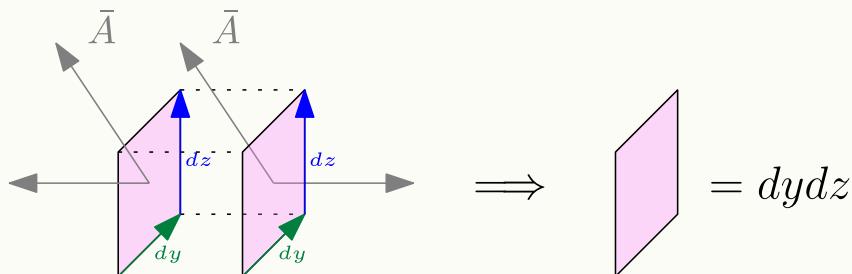
Sia  $\bar{A}$  un generico campo vettoriale e sia  $S$  una superficie chiusa. Sappiamo che il flusso di  $\bar{A}$  rispetto ad  $S$  è

$$\oint_S \bar{A} d\bar{s}$$

Si consideri una superficie chiusa infinitesimale, un cubetto  $d\tau$ , in questa, il campo vettoriale  $\bar{A}$  è uniforme. Consideriamo il flusso attraverso questo, consideriamo le due superfici del cubo parallele al piano  $yz$ , ossia, le cui normali sono parallele all'asse  $x$ .



i lati del volumetto  $d\tau$  sono  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ . Le facce del cubo la cui normale è parallela all'asse  $x$ , è  $dz dy$



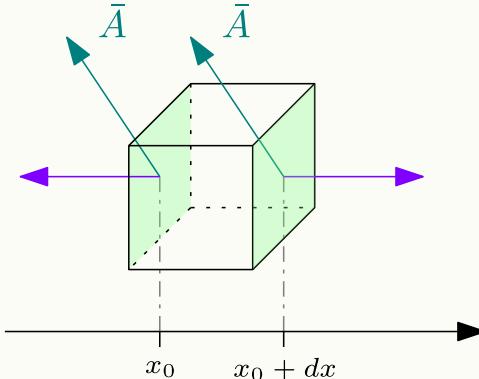
Considerando le proiezioni di  $\bar{A}$  sugli assi, ossia

$$A_x \quad A_y \quad A_z$$

si ha che il flusso di  $\bar{A}$  lungo le due superfici infinitesime  $dydz$  è

$$A_x dydz + A_y dydz + A_z dydz$$

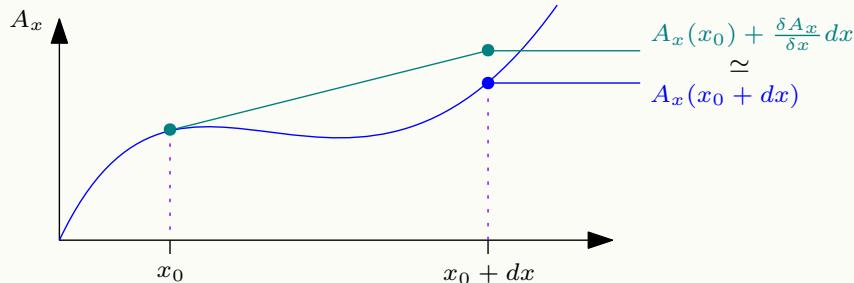
Consideriamo singolarmente il termine  $A_x dydz$ , sia  $x_0$  il punto in cui risiede la coordinata  $x$  della superficie  $dydz$



Le due superfici hanno le normali di direzione identica ma verso opposto, per convenzione, la superficie più a sinistra sarà  $-dydz$ , quella a destra  $dydz$ . Osservando anche l'immagine, ne consegue che il termine  $A_x dydz$  è uguale al valore di  $A_x$  nel punto  $x_0$  moltiplicato per  $-dydz$  (flusso sulla faccia a sinistra) mentre il flusso sulla faccia di destra è uguale al valore di  $A_x$  nel punto  $x_0 + dx$ , dato che le due facce distano  $dx$ , moltiplicato appunto a  $dydz$

$$A_x dydz = -A_x(x_0) dydz + A_x(x_0 + dx) dydz$$

Ma essendo  $dx$  uno spostamento infinitesimo, è possibile considerare il differenziale di  $A_x$



Quindi

$$A_x(x_0 + dx) = A_x(x_0) + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx$$

Ma allora il flusso sulle facce la cui normale è parallela all'asse  $x$  risulta essere

$$-A_x(x_0) dydz + A_x(x_0) + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dydz$$

I primi due termini si annullano, il flusso è quindi

$$A_x dydz = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dydz$$

Analogamente, si avrà che

$$A_y dx dz = \frac{\partial A_y}{\partial x} dx dy dz$$

$$A_z dx dy = \frac{\partial A_z}{\partial x} dx dy dz$$

Il flusso attraverso tutte le facce del cubo infinitesimo  $d\tau$  sarà quindi

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial A_y}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial A_z}{\partial x} dx dy dz = \\ (\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial x}) dx dy dz$$

Ma *attenzione*, il prodotto  $dx dy dz$  non è altro che il volume  $d\tau$

$$(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial x}) d\tau$$

**Definizione (Divergenza) :** Dato un campo vettoriale  $\bar{A}$ , definiamo **divergenza** di  $\bar{A}$ , e denotiamo  $\nabla \cdot \bar{A}$  lo scalare

$$\nabla \cdot \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

**Appunto sulla notazione :** Non è da confondersi con il gradiente di un campo vettoriale, che si denota  $\nabla \bar{A}$ , ed è un vettore le cui componenti sono le derivate parziali di  $\bar{A}$  rispetto gli assi.

Tornando al flusso attraverso le facce di un volume infinitesimo  $d\tau$ , questo si può riscrivere

$$(\nabla \cdot \bar{A}) d\tau$$

Consideriamo adesso una superficie  $S$ , ed il volume  $\tau_S$  di cui  $S$  è frontiera. Si consideri l'integrale sul volume  $\tau_S$  della divergenza del campo  $\bar{A}$ , ossia

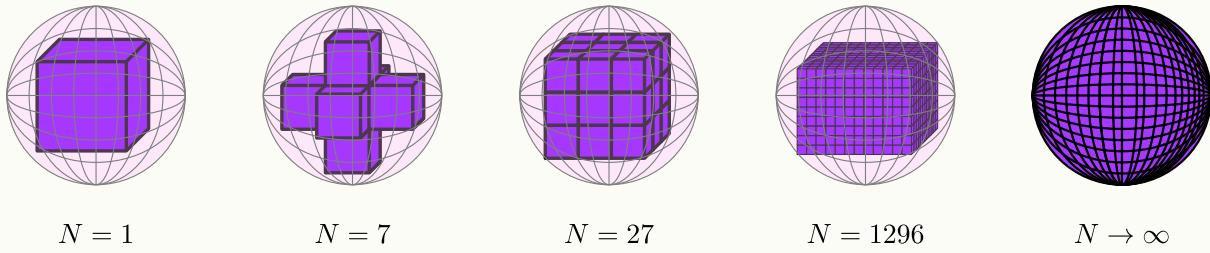
$$\iiint_{\tau_S} (\nabla \cdot \bar{A}) d\tau$$

Per semplicità scriveremo

$$\int_{\tau_S} (\nabla \cdot \bar{A}) d\tau$$

Abbiamo visto come  $(\nabla \cdot \bar{A}) d\tau$  è uguale al flusso sulle facce del volumetto infinitesimo  $d\tau$ . Nell'integrale di volume, si esegue questo prodotto per infiniti (ed infinitesimi) volumetti che rientrano nella superficie  $S$ .

$N$  : numero cubetti



$N = 1$

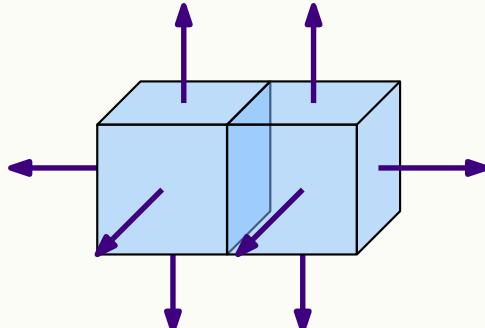
$N = 7$

$N = 27$

$N = 1296$

$N \rightarrow \infty$

I volumi, sono anche infinitamente compatti, e le facce sono tutte adiacenti, si consideri la situazione di due cubetti adiacenti.



Le normali sui lati adiacenti sono di uguale modulo, direzione ma verso opposto, queste si annullano, e rimarranno diverse da zero solo le componenti esterne, sul "bordo" del volume composto dai due cubetti, l'implicazione di questo fatto è cruciale.

Se consideriamo gli infiniti cubetti che ricoprono l'intera superficie  $S$ , la divergenza attraverso questi sarà nulla in tutti i cubetti che hanno tutte le facce adiacenti ad altre facce, questo vuol dire che il contributo all'integrale sarà dato *esclusivamente* dalle facce sul bordo, ossia quelle non adiacenti a nessun altro cubetto, ovvero, quello che *compongono la superficie  $S$* .

Ma allora, essendo che  $(\nabla \cdot \bar{A})d\tau$  non è altro che il flusso calcolato su tutte le facce del volume, l'integrale della divergenza sul volume  $\tau_S$  di cui  $S$  è frontiera, è identico al flusso del campo vettoriale  $\bar{A}$  calcolato sulla superficie  $S$ .

**Teorema (della Divergenza) :** Sia  $\bar{A}$  un campo vettoriale, sia  $S$  una superficie chiusa e sia  $\tau_S$  il volume di cui  $S$  è frontiera, allora

$$\text{→} \quad \oint_S \bar{A} d\bar{s} = \int_{\tau_S} (\nabla \cdot \bar{A}) d\tau \quad \text{→}$$

Applichiamo subito il teorema al campo elettrico, il flusso del campo elettrico su una superficie chiusa sarà

$$\oint_S \bar{E} d\bar{s} = \int_{\tau_S} (\nabla \cdot \bar{E}) d\tau$$

Ma attenzione, la legge di Gauss enuncia che

$$\oint_S \bar{E} d\bar{s} = \int_{\tau_S} \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau$$

Ma allora

$$\int_{\tau_S} (\nabla \cdot \bar{E}) d\tau = \int_{\tau_S} \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau$$

Ne consegue necessariamente che

$$\text{→} \quad \nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{→}$$

Questa è detta **prima equazione di Maxwell in forma locale**. È infatti la versione locale (e non globale) della legge di Gauss. Naturalmente, esiste anche la forma locale della seconda equazione di Maxwell, ossia quella relativa al campo magnetico:

$$\text{→} \quad \nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad \text{→}$$

**Definizione (Rotore) :** Dato un campo vettoriale  $\bar{A}$ , si definisce *rotore di*  $\bar{A}$ , e si denota  $\nabla \times \bar{A}$ , il vettore

$$\hat{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) +$$

Si ricordi che  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  sono i versori che costituiscono la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ . Il rotore si può esprimere come il determinante della seguente matrice

$$\nabla \times \bar{A} = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Come la divergenza ha permesso di scrivere le prime due equazioni di Maxwell in forma locale, esiste una forma locale anche per le due equazioni rimanenti, ossia la legge di Faraday-Neumann-Lenz e la legge di Ampere-Maxwell, in particolare, è di cruciale importanza il seguente risultato (di cui verrà omessa la dimostrazione).

A titolo informativo, i due risultati mostrati in questa sezione (come per il teorema fondamentale del calcolo integrale) sono casi particolari di un teorema generale noto come *teorema di Stokes*.

**Teorema (del Rotore) :** Sia  $\bar{A}$  un campo vettoriale, sia  $l$  una curva chiusa, e sia  $\bar{S}_l$  una superficie di cui  $l$  è frontiera. Allora si ha che

$$\oint_l \bar{A} d\bar{l} = \int_{S_l} (\nabla \times \bar{A}) d\bar{s} \quad \text{☞} \quad \text{☞}$$

Ossia, la circuitazione di  $\bar{A}$  su  $l$  è uguale al flusso del rotore di  $\bar{A}$  su una superficie di cui  $l$  è frontiera.

### Equazioni in Forma Locale

Vediamo subito le applicazioni alle ultime due equazioni di Maxwell, la legge di Faraday-Neumann-Lenz afferma che

$$\oint_l \bar{E} d\bar{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_l} \bar{B} d\bar{s}$$

Ma la circuitazione  $\bar{E}$ , per il teorema del rotore afferma che

$$\oint_l \bar{E} d\bar{l} = \int_{S_l} (\nabla \times \bar{E}) d\bar{s}$$

ma allora

$$\int_{S_l} (\nabla \times \bar{E}) d\bar{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_l} \bar{B} d\bar{s}$$

si può riscrivere portando la derivata dentro l'integrale

$$\int_{S_l} (\nabla \times \bar{E}) d\bar{s} = \int_{S_l} -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{s}$$

L'implicazione è evidente, la terza equazione di Maxwell in *forma locale* afferma che il rotore del campo elettrico è uguale alla derivata rispetto al tempo (cambiata di segno) del campo magnetico.

$$\text{☞} \quad \nabla \times \bar{E} = -\frac{d\bar{B}}{dt} \quad \text{☞} \quad \text{☞}$$

L'ultima equazione, ossia la legge di Ampere-Maxwell, afferma che

$$\oint_l \bar{B} d\bar{l} = \mu_0 \int_{S_l} \bar{j} d\bar{s} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_l} \bar{E} d\bar{s}$$

Ma per il teorema del rotore, la circuitazione del campo magnetico è anche uguale a

$$\oint_l \bar{B} d\bar{l} = \int_{S_l} (\nabla \times \bar{B}) d\bar{s}$$

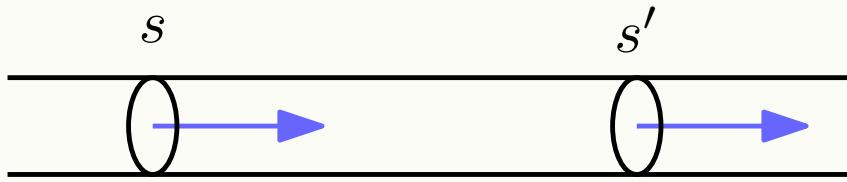
allora è verificata la seguente identità

$$\mu_0 \int_{S_l} \bar{j} d\bar{s} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_l} \bar{E} d\bar{s} = \int_{S_l} (\nabla \times \bar{B}) d\bar{s}$$

Anche questa identità ha un implicazione evidente, e determina la quarta equazione di Maxwell in *forma locale*:

$$\text{☞} \quad \nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt} \quad \text{☞} \quad \text{☞}$$

Mostriamo adesso, il procedimento con il quale Maxwell ha trovato la quarta equazione nel caso delle correnti non stazionarie. Il seguente ragionamento è valido anche per una trattazione fluido dinamica, vi è un conduttore cilindrico (o tubo) in cui scorre della corrente (o acqua), c'è quindi un flusso.



Si consideri la superficie chiusa  $S$  in cui sta scorrendo la corrente, delimitata dalle due sezioni  $s$  ed  $s'$  (la cui area è identica), il flusso attraverso tale superficie  $S$  è nullo in quanto la corrente  $\bar{j}$  è uniforme e le sezioni sono identiche, impropriamente, si può dire che

"la corrente che entra è identica alla corrente che esce"

$$\int_S \bar{j} d\bar{s} = 0$$

anche la divergenza è quindi nulla

$$\nabla \cdot \bar{j} = 0 \implies \mu_0 \nabla \cdot \bar{j} = 0$$

e questo è verificato nel caso delle correnti stazionarie. Costruiamo *ad hoc* il seguente scalare

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{B})$$

Per definizione di  $\nabla$ , si verifica facilmente che questo è sempre nullo a prescindere da quale sia il campo alla quale è applicato

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{B}) = 0$$

è quindi soddisfatta la seguente identità

$$\mu_0 \nabla \cdot \bar{j} = \nabla \cdot (\nabla \times \bar{B})$$

che vale nel caso della corrente stazionaria.

Che succede nel caso della corrente variabile? Bisogna considerare la derivata della densità di carica nel conduttore

$$\nabla \cdot \bar{j} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

allora

$$\nabla \cdot \bar{j} = -\frac{d\rho}{dt}$$

Per la legge di Gauss, sappiamo che

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \bar{E}$$

Allora si può sostituire alla formula di prima ed ottenere

$$\nabla \cdot \bar{j} = -\epsilon_0 \nabla \cdot \frac{d\bar{E}}{dt}$$

è possibile raccogliere per l'operatore Nabla

$$\nabla \cdot \left( \bar{j} + \epsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt} \right) = 0$$

*Attenzione*: Abbiamo definito prima lo scalare  $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{B})$  che è identicamente nullo, quindi è sicuramente verificata la seguente identità

$$\nabla \cdot \left( \bar{j} + \epsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt} \right) = \nabla \cdot (\nabla \times \bar{B})$$

Il termine  $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{B})$  è nullo anche se moltiplicato per un qualsiasi scalare, quindi è ancora vero che

$$\nabla \cdot \left( \bar{j} + \epsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt} \right) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times \bar{B})$$

e quindi

$$\mu_0 \nabla \cdot (\bar{j} + \varepsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt}) = \nabla \cdot (\nabla \times \bar{B})$$

è possibile semplificare dividendo per  $\nabla$  da entrambi i lati, ed ottenere la *quarta equazione di Maxwell in forma locale*

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt}$$

♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪ ♪♪♪

## 7.2 Equazione delle Onde

Le equazioni di Maxwell in forma locale sono le seguenti

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \bar{B} = 0 \\ \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Costituisce un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali, ergo, possono esistere due funzioni (campi vettoriali variabili nel tempo)  $\bar{E} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\bar{B} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  che sono soluzione dell'sistema. Per mettere "in moto" il sistema di equazioni, è necessaria la presenza di cariche che accelerano, per far sì che il campo elettrico variando nel tempo, generi un campo magnetico variabile.

Si consideri ora, un sistema in cui i campi stanno variando, ma la sorgente (cariche in movimento) sono andate perse, oppure, non sono più in movimento, si può riscrivere il sistema considerando l'assenza di cariche in movimento (assenza di corrente elettrica):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{E} = 0 \\ \nabla \cdot \bar{B} = 0 \\ \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Consideriamo la legge di Ampere-Maxwell

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

data l'identità, posso applicare il rotore ad entrambi i membri e l'identità è ancora soddisfatta

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{B}) = \nabla \times (\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t})$$

nel secondo membro ovviamente, il rotore si applica al campo  $\bar{E}$

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \bar{E})$$

**Definizione (Laplaciano) :** Si può considerare il quadrato dell'operatore nabla, detto *Laplaciano* o *Operatore di Laplace*

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Applicando il Laplaciano ad un generico campo vettoriale  $\bar{A}$  si ha la somma delle derivate parziali seconde

$$\nabla^2 \cdot \bar{A} = \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial z^2}$$

Equivale all'applicare la divergenza due volte.

**Osservazione :** Se  $\bar{A}$  è un generico campo vettoriale, il rotore del rotore di  $\bar{A}$  soddisfa la seguente identità

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \cdot \bar{A}$$

Ossia, è uguale al gradiente applicato alla divergenza, meno il laplaciano. Tornando alla legge di Ampere-Maxwell, essendo

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \bar{E})$$

dopo le ultime osservazioni, si può riscrivere

$$\nabla(\nabla \cdot \bar{B}) - \nabla^2 \cdot \bar{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \bar{E})$$

Ma nel sistema delle equazioni di Maxwell è specificato che la divergenza di  $\bar{B}$  è uguale a zero, quindi si può riscrivere

$$-\nabla^2 \cdot \bar{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \bar{E})$$

Ma attenzione, nel sistema delle equazioni di Maxwell è presente l'equazione

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

Quindi si può sostituire ed ottenere

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \cdot \bar{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right) \\ -\nabla^2 \cdot \bar{B} &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Cambiando il segno ad entrambi i membri si ha

$$\boxed{\nabla^2 \cdot \bar{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2}}$$

Ma questa è esattamente la forma generale dell'**equazione di un onda**.

### Velocità di Propagazione

Data una generica equazione di un onda

$$\nabla^2 \cdot u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Il termine  $v$  è la velocità di propagazione, nell'equazione delle onde elettromagnetiche si ha

$$\nabla^2 \cdot \bar{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2}$$

Quindi la velocità di propagazione è  $x$  dove  $\frac{1}{x^2} = \mu_0 \varepsilon_0$ . Si risolve per  $x$

$$\frac{1}{x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \quad (7.1)$$

$$x^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \quad (7.2)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (7.3)$$

Quindi la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche è  $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ , si può calcolare esplicitamente dato che i termini sono noti

- $\mu_0$  è la permeabilità magnetica nel vuoto e vale

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

- $\varepsilon_0$  è la costante dielettrica nel vuoto e vale (circa)

$$\varepsilon_0 = 8.8541878176 \cdot 10^{-12} \text{ C} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Allora la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche (nel vuoto), che denotiamo  $c$  è

$$c = \frac{1}{\sqrt{8.8541878176 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\text{H}}{\text{m}} \text{C} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}}$$

svolgendo il prodotto si trova che

$$c \simeq 2.99792485 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**è la velocità della luce nel vuoto**

### 7.2.1 Soluzione : Onda Piana

Abbiamo visto che  $\bar{E}$  e  $\bar{B}$  si comportano come onde

$$\nabla^2 \cdot \bar{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}$$

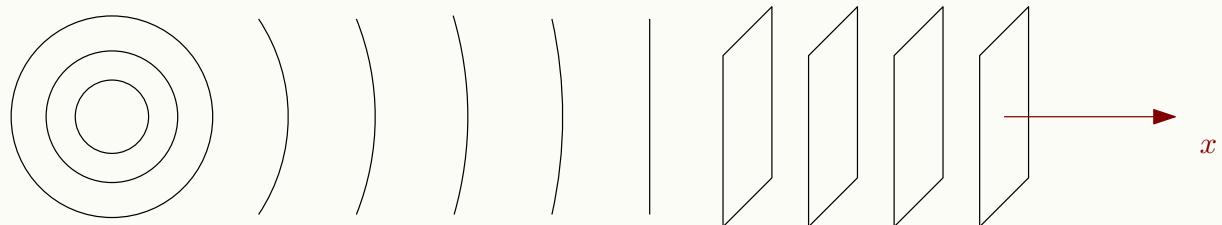
$$\nabla^2 \cdot \bar{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2}$$

Vogliamo trovare le due funzioni vettoriali che descrivono  $\bar{B}$  e  $\bar{E}$ , ossia le 6 equazioni scalari, che dipendono dal tempo e dallo spazio

$E_x(x, y, z, t)$	$B_x(x, y, z, t)$
$E_y(x, y, z, t)$	$B_y(x, y, z, t)$
$E_z(x, y, z, t)$	$B_z(x, y, z, t)$

Viviamo nell'assunzione che le onde siano piane, ossia, che i valori del campo (fissato un istante  $t$ ) dipendano esclusivamente dalla direzione di propagazione (che assumiamo essere  $x$ ).

Le onde piane a grandi distanze approssimano il fronte delle onde sferiche, inoltre, qualsiasi onda può essere espressa come sviluppo in onde piane.



Essendo che i campi non dipendono da  $y$  e  $z$ , riscriviamo

$E_x(x, t)$	$B_x(x, t)$
$E_y(x, t)$	$B_y(x, t)$
$E_z(x, t)$	$B_z(x, t)$

Scriviamo  $\mu_0 \varepsilon_0$  come  $1/c^2$ , l'equazione delle onde, sviluppando l'operatore  $\nabla^2$ , diventa

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}$$

Utilizzeremo  $\bar{E}$ , ma il procedimento sarà analogo per  $\bar{B}$ . Essendo che non dipende da  $y$  e  $z$ , le derivate seconde rispetto questi assi saranno nulle, l'equazione diventa quindi

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}$$

Questa equazione vettoriale equivale a 3 equazioni scalari

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Vogliamo trovare una funzione che soddisfi l'equazione differenziale. Cerchiamo una soluzione per una generica funzione  $f$

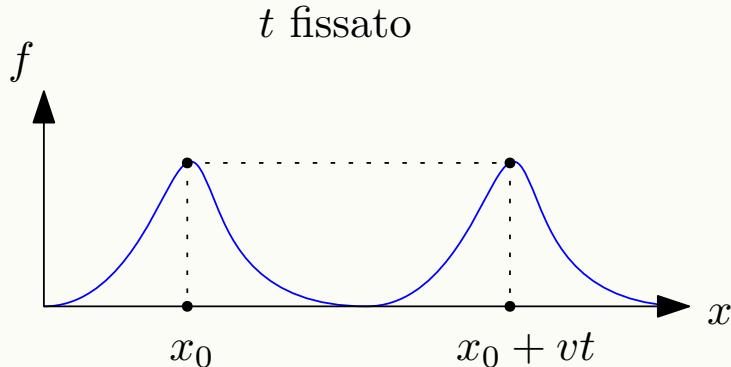
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

**Osservazione** : condizione necessaria per far sì che  $f$  sia un'onda, è che  $f$  sia in funzione di una combinazione lineare dei suoi parametri  $x$  e  $t$ .

$$f(x, y) = f(\alpha x + \beta t)$$

Poniamo  $\alpha = 1$  e  $\beta = \pm v = \pm \frac{1}{c^2}$

$$f(x \pm vt)$$



Prendiamo una generica funzione che soddisfi la condizione necessaria, ad esempio, la funzione coseno

$$f(x + vt) = \cos(x + vt)$$

Ma questa non può andar bene, in quanto  $x$  ha dimensioni di spazioe,  $t$  ha dimensioni di tempo e  $v$  ha le dimensioni di una velocità, ma l'argomento del coseno dove essere adimensionale. Si può aggiustare l'argomento considerando un parametro  $\lambda$  chiamato **lunghezza d'onda**, che la dimensione di una lunghezza

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{2\pi}{\lambda}vt\right)$$

Per semplicità scriviamo  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\cos(kx + kvt)$$

La velocità su lunghezza d'onda è la *frequenza* (inverso del periodo), da cui si può ricavare la *pulsazione*

$$\frac{v}{t} = \frac{1}{T} = \nu$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

Definiamo una generica ampiezza  $A$  per la funzione coseno, l'onda avrà la forma

$$f(x, t) = A \cos(kx \pm \omega t)$$

questa funzione soddisfa l'equazione di un'onda. Tenendolo in mente, torniamo al campo elettrico e magnetico, vogliamo usare le equazioni di Maxwell per ricavare delle ulteriori proprietà dei campi. Si ricordi che queste (una volta innescato il meccanismo, ed in assenza di corrente elettrica) sono

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{E} = 0 \\ \nabla \cdot \bar{B} = 0 \\ \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Sviluppando la prima equazione, sappiamo che

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Abbiamo detto che le onde sono piane e non dipendono dalle coordinate  $y$  e  $z$ , quindi le derivate del campo rispetto queste componenti sono nulle, rimane

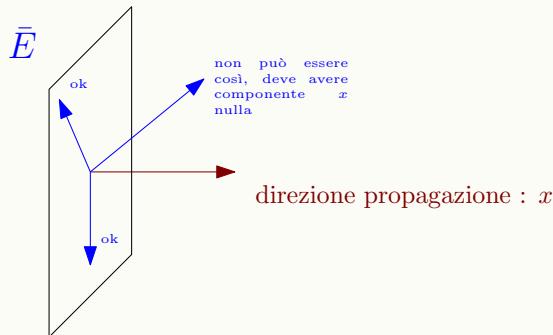
$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

la componente  $x$  del campo elettrico non dipende dalla coordinata  $x$  (verso di propagazione)

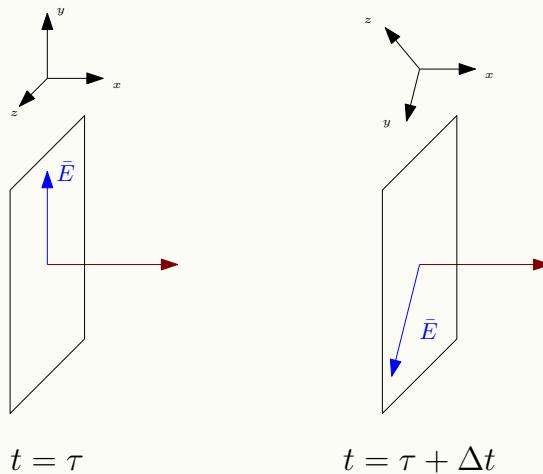
Analogamente, dalla seconda equazione di Maxwell si ricava che anche il campo magnetico ha componente  $x$  che non dipende dalla coordinata  $x$ .

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

Le onde del campo elettromagnetico sono **onde trasversali**, in ogni istante i vettori  $\bar{B}$  e  $\bar{E}$  sono nulli lungo la direzione di propagazione



Fissiamo adesso un sistema di riferimento particolare (che varia eventualmente nel tempo), dove l'asse  $y$  è sempre (in ogni istante  $t$ ) parallelo al vettore  $\bar{E}$ .



In tal sistema di riferimento, la componente  $z$  del campo  $\bar{E}$  è sempre nulla.

$$E_z = 0$$

Adesso consideriamo la terza equazione di Maxwell

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

Valutiamone la componente  $y$

$$(\nabla \times \bar{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

Ma abbiamo già visto che

- $E_x$  non dipende da  $z$
- $E_z$  è sempre nullo

ne consegue che

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$$

la componente  $y$  del campo  $\bar{B}$  non dipende dal tempo

Le funzioni dei campi diventano

$$E_y(x, t) \quad \begin{matrix} B_y(x) \\ B_z(x, t) \end{matrix}$$

Vogliamo adesso vedere le dipendenze di  $B_y$  e  $B_z$  dallo spazio, consideriamo la quarta equazione di Maxwell

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

consideriamo la componente  $z$

$$(\nabla \times \bar{B})_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

Date le precedenti osservazioni rimane che

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

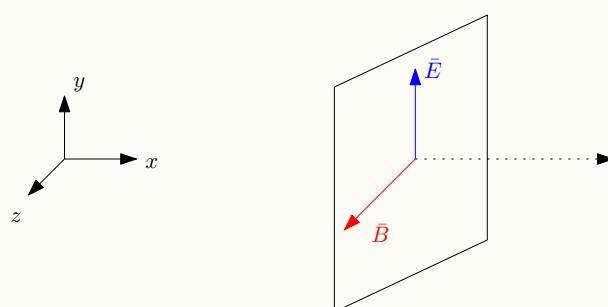
Le funzioni dei campi diventano

$$E_y(x, t) \quad B_z(x, t)$$

Ma attenzione, questo ha delle implicazioni cruciali

- Sia  $\bar{E}$  che  $\bar{B}$  hanno componente nulla sull'asse di propagazione  $x$
- $\bar{E}$  ha componente esclusivamente sull'asse  $y$  del sistema di riferimento adottato
- $\bar{B}$  ha componente nulla sull'asse  $y$ , ha quindi componente solo sull'asse  $z$
- $\bar{B}$  ha quindi componente nulla sull'asse parallelo al vettore  $\bar{E}$

In ogni istante  $\bar{E}$  e  $\bar{B}$  sono **ortogonali**



Ricordiamo che  $E_y(x, t)$  e  $E_z(x, t)$  devono soddisfare l'equazione delle onde, prima abbiamo visto che

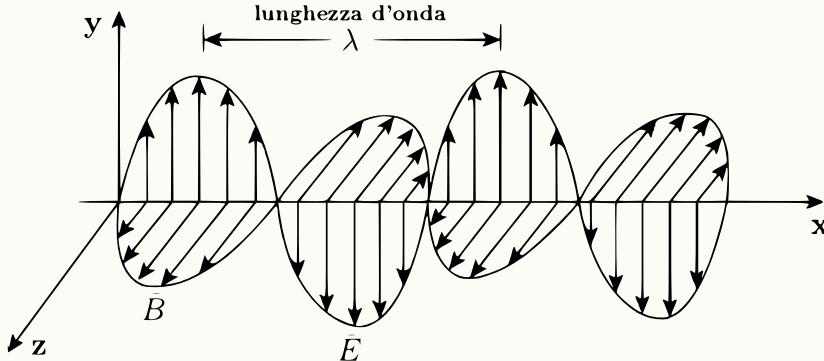
$$f(x, t) = A \cos(kx \pm \omega t)$$

è un'onda, una soluzione per le onde elettromagnetiche È

$$\bar{E}(x, y, z, t) = E_y(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$\bar{B}(x, y, z, t) = B_z(x, t) = B_0 \cos(kx - \omega t)$$

$E_0$  e  $B_0$  sono rispettivamente il modulo dei vettori  $\bar{E}$  e  $\bar{B}$ .



Vogliamo ricavare un'ulteriore proprietà, si consideri la terza equazione di Maxwell

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

in particolare, la sua componente  $z$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Essendo  $E_x$  nullo si ha

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

la derivata nello spazio di  $E$  dipende dalla derivata nel tempo di  $B$

considerando la componente  $x$  della quarta equazione si ha

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Essendo  $B_x$  nullo si ha

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

la derivata nello spazio di  $B$  dipende dalla derivata nel tempo di  $E$

Ricordando che

$$E_y(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$B_z(x, t) = B_0 \cos(kx - \omega t)$$

sostituendo all'equazione si ha che

$$-kE_0 \sin(kx - \omega t) = -B_0 \omega \sin(kx - \omega t)$$

Si può eliminare il seno da ambo le parti

$$-kE_0 = -B_0 \omega$$

C'è quindi un **ulteriore legame** fra  $E$  e  $B$ , ossia

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T} \frac{\lambda}{2\pi} = c$$

quindi

$$\text{↗} \quad E_0 = cB_0 \quad \text{↖}$$

Nella propagazione, sia la direzione che le ampiezze di  $E$  e  $B$  sono legate, si può dire che i due campi sono solo parti di uno stesso fenomeno, denominato *campo elettromagnetico*.

### 7.2.2 Energia delle Onde

Abbiamo espresso la *densità di energia* del campo elettrico

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

e del campo magnetico

$$u_B = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2$$

L'energia totale quindi che trasporta l'onda elettromagnetica è

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2$$

Sappiamo che

$$E_y(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$B_z(x, t) = B_0 \cos(kx - \omega t)$$

Fissiamo un istante  $t$  ed un punto  $x$  in cui il coseno vale 1, e l'ampiezza dei campi è quindi massima, ossia  $E_0$  e  $B_0$ , in tale istante l'energia vale

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B_0^2$$

Sapendo che  $E_0 = cB_0 \implies B_0 = E_0/c$  si può riscrivere

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\frac{E_0^2}{C^2}$$

Sapendo che  $c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$ , si ha che

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\frac{E_0^2}{C^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$$

conseguentemente

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = \varepsilon_0 E_0^2$$

analogamente

$$u = \frac{1}{\mu_0}B_0^2$$

questo è vero quando  $E$  e  $B$  hanno ampiezza massima, in generale l'energia dell'onda elettromagnetica è

$$u = \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0}B^2$$

In coordinate sferiche, l'operatore Laplaciano su una funzione  $f$  agisce

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2}$$

Le onde piane in coordinate sferiche sono del tipo

$$f = \frac{x \pm vt}{r}$$

L'intensità dei campi quindi decresce linearmente con la distanza

$$E \propto \frac{1}{r} \quad B \propto \frac{1}{r}$$

Ad esempio

$$E = \frac{E_0}{r} \cos(kx + \omega t)$$

Ricordando che l'energia dell'onda elettromagnetica è

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2$$

definiamo la grandezza **intensità dell'onda**  $J$  come l'energia che attraversa una certa superficie per unità di tempo, si misura in  $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

$$J = u \cdot c = \varepsilon_0 E^2 c = \varepsilon_0 \frac{c^2}{c} E \cdot E = \varepsilon_0 c^2 E B = \frac{1}{\mu_0} E B$$

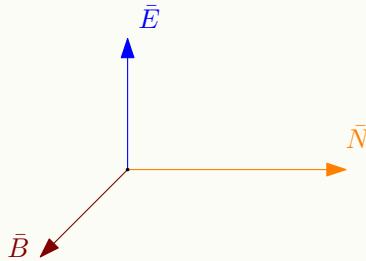
### 7.2.3 Vettore di Poynting

Il vettore di Poynting è definito in modo tale che, il suo modulo è  $J$ , e la sua direzione è quella di propagazione dell'onda elettromagnetica

$$\bar{N} = \frac{1}{\mu_0} \bar{E} \times \bar{B}$$

Essendo  $\bar{B}$  e  $\bar{E}$  ortogonali

$$|\bar{N}| = \frac{1}{\mu_0} E B = J$$



Essendo che  $E_0$  e  $B_0$  variano nel tempo l'intensità si può calcolare come intensità media facendo l'integrale sul periodo  $T$  delle onde

$$J = \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0 \int_0^T \cos^2(kx + \omega t) dt = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0$$

# Formulario

## Cinematica

moto rettilineo uniforme

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t \\ v_0 \text{ costante} \end{cases}$$

moto uniformemente accelerato

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \\ v(t) = v_0 + a_0 t \\ a_0 \text{ costante} \end{cases}$$

moto armonico

$$x(t) = A \sin(\phi + \omega t)$$

$$v(t) = A\omega \cos(\phi + \omega t)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\phi + \omega t) = -\omega^2 x(t)$$

$$\text{periodo} = T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{frequenza} = \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\text{pulsazione} = \omega = 2\pi\nu$$

moto circolare (R:: raggio)

$$\omega(t) = \text{velocità angolare}$$

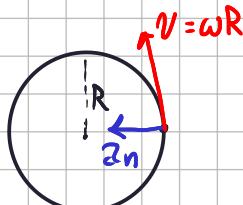
$$v = \omega R \text{ velocità tangenziale}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} \text{ accelerazione tangenziale}$$

$$a_n = \omega^2 R \text{ accelerazione normale}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \text{ acc. totale}$$

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{R}$$



moto circ. unifor.

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(\theta(t)) \\ y(t) = R \sin(\theta(t)) \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

## Dinamica

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a}$$

$$\text{quantità di moto } \bar{p} = \frac{d}{dt}(m\bar{v}) = m\bar{v}$$

$$\text{impulso } I = \int_{t_0}^t \bar{F} dt \quad \text{e} \quad I = \Delta \bar{p}$$

$$\text{Forza media} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta t} = \frac{|\bar{p}(t_2) - \bar{p}(t_1)|}{t_2 - t_1}$$

Altro

$$\text{statico} \quad \bar{F}_s \leq \mu_s R_n \quad R_n = \text{reazione normale}$$

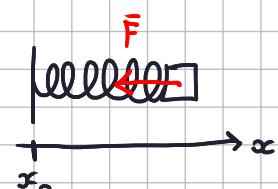
$$\text{dinamico} \quad \bar{F}_d = -\mu_d \cdot R_n \cdot \hat{\bar{z}}$$



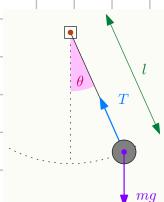
$$\text{altro dell'aria} : \bar{F} = -b \bar{v} \quad b = \text{coefficiente}$$

Forza Elastica

$$\bar{F} = -k(x - x_0) \quad \begin{matrix} \text{coff} \\ \downarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{centro} \\ \downarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{pos} \\ \uparrow \end{matrix}$$



Pendolo



$$-mg \sin \theta = -m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$-mg \sin \left( \frac{s}{l} \right) = -m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\text{per } \theta \rightarrow 0 \Rightarrow -mg \frac{s}{l} = -m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

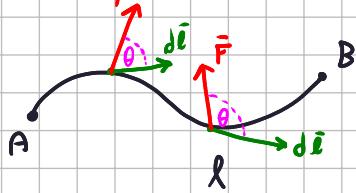
$$\Rightarrow s = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

## Lavoro

$$\bar{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ campo di Forze}$$

$$L = \int_L \bar{F} d\bar{e} = \int_A^B F dl \cos \theta = \Delta T$$



energia cinetica  $T = \frac{1}{2} m v^2$

$$L = \frac{1}{2} m v^2(B) - \frac{1}{2} m v^2(A)$$

$\bar{F}$  e' conservativa se

$$L = -\Delta U \quad \text{dove } U \text{ energia potenziale}$$

$$\oint_L \bar{F} d\bar{e} = 0$$

Potenziale gravitazionale  $U(g) = mg \gamma$  altezza

Potenziale gravitazionale  $U(r) = -\frac{GMm}{r}$  distanza

Potenziale elastica  $U(x) = \frac{1}{2} k(x - x_0)^2$

## Energia meccanica

$$E_m = U + T$$

$$= U + \frac{1}{2} m v^2$$

Se  $\bar{F}$  e' conservativa  $\Delta E_m = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} L = \Delta T \\ L = -\Delta U \end{cases} \stackrel{\text{III}}{\Rightarrow} \Delta T + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta(T+U) = 0$$

$$\Delta E_m = \frac{\text{LAVORO FORZE}}{\text{NON CONSERVATIVE}}$$

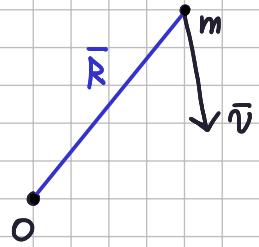
Potenza

$$P = \frac{dL}{dt}$$

## Momento Angolare

$$\bar{M} = \bar{R} \times \bar{p} = \bar{R} \times \frac{d}{dt} m \bar{v}$$

$\bar{R}$   
quantita' di moto



momento dell'a  
quantita' di moto

$$\bar{b} = \bar{R} \times m \bar{v}$$

$$\bar{M} = \frac{d\bar{b}}{dt} - \frac{d\bar{R}}{dt} \times m \bar{v}$$

essendo  $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{R}$

$$\bar{b} = \bar{R} \times m(\bar{\omega} \times \bar{R}) = mR^2 \bar{\omega}$$

momento di  
inertie  $I = mR^2$

$$\bar{b} = I \bar{\omega}$$

il momento si puo' scrivere  $\bar{M} = \frac{d}{dt} I \bar{\omega} = I \dot{\bar{\omega}}$  se I cost.

## Sistema di Punti

le forze interne si annullano. In punti

$$\bar{F}_{(\text{est})} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{z}_i$$

pos. di ogni punto

$$\text{centro di massa } \bar{r}_c = \sum_i m_i \bar{r}_i \cdot \frac{1}{\sum m_i}$$

vel. del sistema (centro di massa)

$$\frac{d\bar{r}_c}{dt} = \bar{v}_c$$

somma masse  $M = \sum_i m_i$

$\Rightarrow$  quantita' di moto del sistema

$$\bar{p}_c = M \bar{v}_c = \sum_i m_i \bar{v}_i$$

$$\frac{d}{dt} \bar{p}_c = \sum_i \frac{d}{dt} m_i \bar{v}_i = \sum_i m_i \bar{a}_i = \bar{F}_{(\text{est})}$$

# Urti

• elastici: le quantità di moto si conservano.

2 corpi

Masse:  $m_1, m_2$

Vel. post urto  $v_1, v_2$

Vel. pre urto  $v_1, v_2$

Cons. quantità di moto

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

cons. energia cinetica

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

## Momento Sistema di punti

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{M}_1 = \frac{d\bar{b}_1}{dt} + \bar{v}_0 \times \bar{r}_1 \\ \vdots \\ \bar{M}_n = \frac{d\bar{b}_n}{dt} + \bar{v}_0 \times \bar{r}_n \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{i momenti interni} \\ \text{del sistema si} \\ \text{annullano} \end{array}$$

$$\left( \frac{d}{dt} \sum \bar{b}_i \right) + \bar{v}_0 \times \left( \sum \bar{r}_i \right)$$

si può riscrivere

$$\frac{d}{dt} \left( \sum \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i \right) + \bar{v}_0 \times \left( \sum \bar{r}_i \right)$$

Il momento del sistema non è uguale alla somma dei momenti

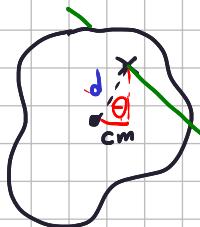
## Sistema Continuo

per un oggetto puntiforme  $I = R^2 m^2$

$$dI : R^2 dm = R^2 \lambda dR \Rightarrow \lambda \text{ densità: } \frac{dm}{dR} = \lambda$$

$$I = \int_S dI \quad \text{sup. oggetto}$$

## Pendolo Composto



$d$  = dist. centro di massa - punto inf.

per  
 $\theta \rightarrow 0$

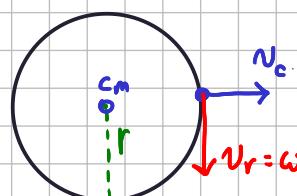
$$-mg \cdot d \cdot \theta = -I_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$I_0$  = momento di inerzia con polo in cm

$$I_0 = I_{cm} + M \cdot d^2$$

$\begin{cases} \text{momento in} \\ \text{centro} \\ \text{massa} \end{cases}$

## Rotolamento

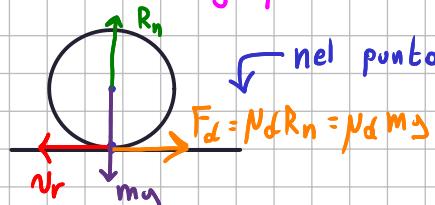


Velocità centro di massa

$$v_a = v_c + v_r$$

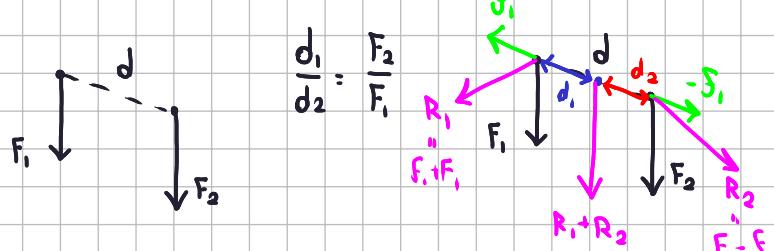
$|v_c| = |v_r| \Rightarrow$  rotolamento puro

Vel. assoluta di ogni punto



Nel punto di contatto

## Sistemi eq. di Forze



# Campo Elettrico

## Coloumb

$q$  esercita su  $q_0$   $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q_0}{r^2} \hat{r}$

$r := \text{dist}(q, q_0)$

## Campo Elettrico

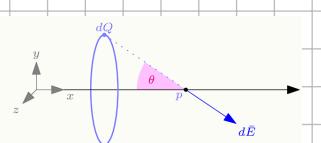
$$\bar{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\bar{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

$q_0$  immersa in  $\bar{E}$  sente  $\bar{F} = q_0 \bar{E}$

Sistema di cariche :  $\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$

Sup. carica :  $\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{dQ}{r^2} \hat{r}$

## Anello Carico



$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \cos\alpha$$

$\lambda$  densità  $\Rightarrow dQ = \lambda dl$

$dl$  = punto circonferenza

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\lambda dl}{r^2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos\theta Q$$

$\text{non dipende dal punto sulla circ.}$

$$\Rightarrow r \cos\theta = x \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma x}{r^3} Q$$

$\text{dipende da } x = \text{raggio}$

## Disco Carico

$$dQ = \lambda ds \quad ds = \text{sup. infinitesima}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\lambda ds}{r^2}$$

$\text{superf.}$

Cambio :

$$ds = \text{anello infinitesimo}$$

$\xrightarrow{\text{spessore anello}}$

$$ds = (2\pi r) \cdot dr$$

$\xrightarrow{\text{raggio}}$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \underbrace{\frac{\sigma}{(x^2 + \zeta^2)^{3/2}}}_{\text{dist } \zeta = \text{raggio } r \text{ anello}} \cdot dQ$$

$\text{dens.}$

$$dQ = \sigma \cdot (2\pi \zeta) \cdot dr$$

$\xrightarrow{\text{sup. anello inf.}}$

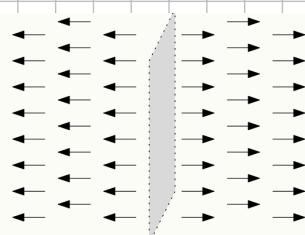
RAGGIO DISCO

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sigma \cdot 2\pi \cdot x \int_0^R \frac{\zeta}{(x^2 + \zeta^2)^{3/2}} d\zeta$$

$$E(x) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

## Piano Carico

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



## Flusso

$$\Phi = \bar{E} \cdot \bar{S} = E S \cos \theta$$

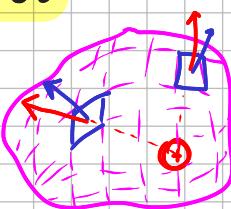
$S = \text{sup. finita}$

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \bar{E} \cdot d\bar{s}$$

## Legge di Gauss

$S := \text{sup. chiusa}$

$$\Phi = \oint_S \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



$$d\Phi = \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} d\bar{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r} d\bar{s}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$\hat{r} d\bar{s} \Rightarrow \oint d\Omega = 4\pi$

Si scrive anche

$$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_s} p d\tau$$

$\begin{matrix} \text{carica int.} \\ \text{zona sup } S \\ V_s \Rightarrow \text{volume di } S \end{matrix}$

## Campo Sfera carica



$$r \geq R \quad \Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_s} p d\tau = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_S \bar{E} \cdot d\bar{s} = E \int_S d\bar{s} = E 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$



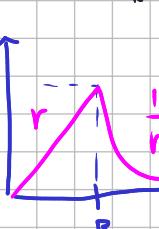
$r \leq R$

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_s} p d\tau = p \int_0^R d\tau = \frac{p}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{p}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3$$

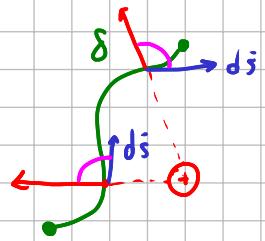
$$E = \frac{p}{\epsilon_0} \frac{1}{3} r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r}{R^3}$$

$$\frac{p}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3 = Q$$



## Circuazione

$$L = \int_C q_0 \bar{E} = q_0 \int_C \bar{E} d\bar{s}$$



Sia  $C$  una curva chiusa

$$\mathcal{E} = \oint_C \bar{E} d\bar{s} \quad \int_A^B \bar{E} d\bar{s} = V(A) - V(B) = \Delta V$$

CIRCUITATIONE

$$L = -q_0 \Delta V = -\Delta U$$

CAMPO ELETROSTATICO  $\Rightarrow$  CONSERVATIVO  $\Rightarrow \mathcal{E} = 0$

## Potenziale di una Carica

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \Rightarrow \bar{E} d\bar{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} d\bar{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr$$

$$\mathcal{E} = \int_C \bar{E} d\bar{s} = \int_A^B \bar{E} d\bar{s} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

↑ dist da Q

## Gradiente

$$\bar{E} = -\nabla V = \left[ -\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z} \right]$$