Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 8
19 Maggio 2023 — Compito n. 00097

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ⊠ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ☐☐☐☐☐☐☐

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

---

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 2\,y'(t) + 3\,y(t) = 0\,.$$

1A) L'equazione ha un'unica soluzione.
1B) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(2) = 3$.
1C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(4) = 3$ e $y'(4) = 6$.
1D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che

$$y(3) = 2\,,\ y'(3) = 7\,,\ y''(3) = 25\,.$$

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 11\,y'(t) + 28\,y(t) = 84\,. \tag{1}$$

2A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 11L + 28$.
2B) La funzione $y_0(t) = 4\,e^{4\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).
2C) La funzione $\overline{y}(t) = 3$ è una soluzione particolare di (1).
2D) Se $y(0) = 3$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

---

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y(t) + B\,y(t) = 0\,, \quad A\,, B \in \mathbb{R}\,.$$

3A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + A\,L + B$.
3B) Se $A = 0$ e $B = -25$, la funzione $y(t) = 6\,e^{5\,t} - 9\,e^{-5\,t}$ non è soluzione dell'equazione.
3C) Se $A = -4$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 6$ non è soluzione dell'equazione.
3D) Se $A = -10$ e $B = 29$, la funzione $y(t) = 2\,e^{5\,t}\,\sin(2\,t)$ è soluzione dell'equazione.

---

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 5\,y'(t) = -30\,.$$

4A) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C + D\,e^{5\,t}$.
4B) Esistono soluzioni costanti dell'equazione.
4C) La funzione $\overline{y}(t) = 6\,t$ non è soluzione dell'equazione.
4D) Se $y(0) = 6$ e $y'(0) = 6$, la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

Docente
☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00097**

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 18\,y'(t) + 72\,y(t) = -6\,\mathrm{e}^{6\,t}\,. \tag{1}$$

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
c) Trovare una soluzione particolare di (1).
d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00097**

---

6) Si consideri l'equazione differenziale

(1) $$y''(t) - 4\,y'(t) + 4\,y(t) = 2\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
b) Si trovi una soluzione particolare di (1).
c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$.
d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 7$ e $y'(0) = 0$.

Soluzioni del compito 00097

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 2\,y'(t) + 3\,y(t) = 0\,.$$

1A) L'equazione ha un'unica soluzione.

Falso: Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali.

1B) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(2) = 3$.

Falso: L'equazione ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali. Assegnando una sola condizione, si "fissa" uno solo dei due parametri, e quindi l'equazione ha infinite soluzioni tali che $y(2) = 3$.

1C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(4) = 3$ e $y'(4) = 6$.

Vero: Assegnando due condizioni, una sulla funzione e una sulla derivata, si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione.

1D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che

$$y(3) = 2\,,\ y'(3) = 7\,,\ y''(3) = 25\,.$$

Vero: Se $y(3) = 2$ e $y'(3) = 7$, dall'equazione segue che deve essere

$$0 = y''(3) + 2\,y'(3) + 3\,y(3) = y''(3) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 7 = y''(3) + 25\,,$$

da cui segue che $y''(3) = -25$. Pertanto, l'unica soluzione dell'equazione che soddisfa le condizioni $y(3) = 2$ e $y'(3) = 7$ è tale che $y''(3) = -25 \neq 25$; in altre parole, non esistono soluzioni dell'equazione che soddisfano le tre condizioni richieste.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 11\,y'(t) + 28\,y(t) = 84\,. \tag{1}$$

2A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 11L + 28$.

Vero: Sostituendo y'' con L^2, y' con L e y con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 - 11L + 28\,.$$

2B) La funzione $y_0(t) = 4\,\mathrm{e}^{4\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

Vero: Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 11L + 28$, che si annulla per $L_1 = 4$ e $L_2 = 7$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{4\,t} + D\,\mathrm{e}^{7\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 4$ e $D = 0$, si ha che $y_0(t) = 4\,\mathrm{e}^{4\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).
Alternativamente, se $y_1(t) = \mathrm{e}^{4\,t}$ si ha, derivando,

$$y_1'(t) = 4\,\mathrm{e}^{4\,t}\,, \qquad y_1''(t) = 16\,\mathrm{e}^{4\,t}\,,$$

e, sostituendo nell'equazione,

$$y_1''(t) - 11\,y_1'(t) + 28\,y_1(t) = [16 - 11 \cdot 4 + 28]\,\mathrm{e}^{4\,t} = 0 \cdot \mathrm{e}^{4\,t} = 0\,,$$

e quindi $y_1(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1). Dato che tale equazione è lineare, anche $y_0(t) = 4\,y_1(t)$ è soluzione dell'omogenea.

2C) La funzione $\overline{y}(t) = 3$ è una soluzione particolare di (1).

Vero: Sostituendo nell'equazione si ha, essendo nulle sia la derivata prima che la derivata seconda di $\overline{y}(t)$,

$$y'' - 11\,y' + 28\,y = 28 \cdot 3 = 84\,,$$

e quindi $\overline{y}(t) = 3$ è una soluzione particolare di (1).

2D) Se $y(0) = 3$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

Vero: Come detto nell'esercizio **2C**, la funzione $y(t) \equiv 3$ è soluzione dell'equazione (1). Dato che soddisfa inoltre le condizioni $y(0) = 3$ e $y'(0) = 0$, la funzione $y(t) \equiv 3$ è soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale del secondo ordine, e quindi è l'unica soluzione di (1) che soddisfa tali condizioni.

---

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y(t) + B\,y(t) = 0\,, \quad A\,,B \in \mathbb{R}\,.$$

3A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + A\,L + B$.

Vero: Sostituendo y'' con L^2, y' con L e y con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 + A\,L + B\,.$$

3B) Se $A = 0$ e $B = -25$, la funzione $y(t) = 6\,\mathrm{e}^{5\,t} - 9\,\mathrm{e}^{-5\,t}$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $A = 0$ e $B = -25$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 25$ che si annulla per $L = \pm 5$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{5\,t} + D\,\mathrm{e}^{-5\,t}\,.$$

Scegliendo $C = 6$ e $D = -9$, si ha che $y(t) = 6\,\mathrm{e}^{5\,t} - 9\,\mathrm{e}^{-5\,t}$ è soluzione dell'equazione.

3C) Se $A = -4$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 6$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $A = -4$ e $B = 0$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 4\,L$ che si annulla per $L = 0$ e per $L = 4$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{0\,t} + D\,\mathrm{e}^{4\,t} = C + D\,\mathrm{e}^{4\,t}\,.$$

Scegliendo $C = 6$ e $D = 0$, si ha che $y(t) = 6$ è soluzione dell'equazione.

3D) Se $A = -10$ e $B = 29$, la funzione $y(t) = 2\,\mathrm{e}^{5\,t}\,\sin(2\,t)$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $A = -10$ e $B = 29$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 10\,L + 29$, che si annulla per $L = 5 \pm 2\,i$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{5\,t}[C\,\cos(2\,t) + D\,\sin(2\,t)]\,.$$

Scegliendo $C = 0$ e $D = 2$, si ha che $y(t) = 2\,\mathrm{e}^{5\,t}\,\sin(2\,t)$ è soluzione dell'equazione.

---

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 5\,y'(t) = -30\,.$$

4A) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C + D\,\mathrm{e}^{5\,t}$.

Vero: Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 5\,L$, che si annulla per $L = 0$ e $L = 5$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{0\cdot t} + D\,\mathrm{e}^{5\,t} = C + D\,\mathrm{e}^{5\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

4B) Esistono soluzioni costanti dell'equazione.

Falso: Se $y(t) \equiv Q$ è una costante, sostituendo nell'equazione si ha

$$y''(t) - 5\,y'(t) = 0 - 5\cdot 0 = 0 \neq -30\,,$$

e quindi l'equazione non ha soluzioni costanti. Alternativamente, sappiamo dalla domanda **4A** che le costanti sono soluzioni dell'equazione omogenea, e quindi non possono essere soluzioni dell'equazione "completa".

4C) La funzione $\overline{y}(t) = 6\,t$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $\overline{y}(t) = 6\,t$, si ha $\overline{y}'(t) = 6$ e $\overline{y}''(t) = 0$. Sostituendo nell'equazione si ha

$$\overline{y}''(t) - 5\,\overline{y}'(t) = -5\cdot 6 = -30\,,$$

e quindi $\overline{y}(t) = 6\,t$ è soluzione dell'equazione.

4D) Se $y(0) = 6$ e $y'(0) = 6$, la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

Falso: Sappiamo già, dagli esercizi **4A** e **4C**, che tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C + D\,\mathrm{e}^{5\,t} + 6\,t\,,$$

con C e D numeri reali. Pertanto,

$$y'(t) = 5\,D\,\mathrm{e}^{5\,t} + 6\,.$$

Pertanto, assegnando le condizioni iniziali, si ha

$$6 = C + D\,, \qquad 6 = 5\,D + 6\,.$$

Dalla seconda si ricava $D = 0$, e sostituendo nella prima si ricava $C = 6$. Ne segue che l'unica soluzione dell'equazione è

$$y(t) = 6 + 6\,t\,,$$

che è un polinomio di primo grado (e quindi non è un'esponenziale).

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 18\,y'(t) + 72\,y(t) = -6\,\mathrm{e}^{6\,t}\,. \tag{1}$$

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
c) Trovare una soluzione particolare di (1).
d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Soluzione:
a) Sostituendo in (1) L^2 a y'', L a y' e 1 a y, si trova

$$P(L) = L^2 - 18\,L + 72\,,$$

che si annulla per $L_1 = 6$ e per $L_2 = 12$.

b) Usando le radici del polinomio caratteristico calcolate al punto precedente, abbiamo che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1) sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{6\,t} + D\,\mathrm{e}^{12\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

c) Dato che $g(t) = \mathrm{e}^{6\,t}$ è una soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\overline{y}(t) = Q\,t\,\mathrm{e}^{6\,t}\,.$$

Si ha

$$\overline{y}'(t) = Q\,(1 + 6\,t)\,\mathrm{e}^{6\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = Q\,(12 + 36\,t)\,\mathrm{e}^{6\,t}\,.$$

Sostituendo in (1) si ha

$$\overline{y}'' - 18\,\overline{y} + 72\,\overline{y} = Q\,\mathrm{e}^{6\,t}\,[12 + 36\,t - 18\,(1 + 6\,t) + 72\,t] = -6\,Q\,\mathrm{e}^{6\,t}\,,$$

e quindi $\overline{y}(t)$ è soluzione di (1) se Q è tale che

$$-6\,Q\,\mathrm{e}^{6\,t} = -6\,\mathrm{e}^{6\,t}\,,$$

da cui segue $Q = 1$ e quindi

$$\overline{y}(t) = t\,\mathrm{e}^{6\,t}\,.$$

d) Da **b)** e **c)** abbiamo che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C\,\mathrm{e}^{6\,t} + D\,\mathrm{e}^{12\,t} + t\,\mathrm{e}^{6\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Dato che

$$y'(t) = 6\,C\,\mathrm{e}^{6\,t} + 12\,D\,\mathrm{e}^{12\,t} + \mathrm{e}^{6\,t} + 6\,t\,\mathrm{e}^{6\,t}\,,$$

si ha $y(0) = C + D$ e $y'(0) = 6\,C + 12\,D + 1$. Imponendo le condizioni iniziali, si ha che deve essere $C + D = 0$ e $6\,C + 12\,D + 1 = 1$, da cui si ricava facilmente $C = D = 0$. Ne segue che l'unica soluzione di (1) che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ è

$$y(t) = t\,\mathrm{e}^{6\,t}\,.$$

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 4\,y'(t) + 4\,y(t) = 2\,\mathrm{e}^{2\,t}\,. \tag{1}$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
b) Si trovi una soluzione particolare di (1).
c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$.
d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 7$ e $y'(0) = 0$.

Soluzione:
a) Il polinomio caratteristico è $P(L) = L^2 - 4\,L + 4$, che si annulla per $L_1 = L_2 = 2$. Conseguentemente, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata ad (1) sono date da

$$y_0(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{2\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

b) Dato che sia $\mathrm{e}^{2\,t}$ che $t\,\mathrm{e}^{2\,t}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare di (1) della forma

$$\overline{y}(t) = Q\,t^2\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$

Derivando, si ha

$$\overline{y}'(t) = Q\,(2t + 2\,t^2)\,\mathrm{e}^{2\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = Q\,(2 + 8\,t + 4\,t^2)\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$\overline{y}'' - 4\,\overline{y}' + 4\,\overline{y}(t) = Q\,\mathrm{e}^{2\,t}\,[2 + 8\,t + 4\,t^2 - 4\,(2t + 2\,t^2) + 4\,t^2] = 2\,Q\,\mathrm{e}^{2\,t}\,,$$

da cui segue che $\overline{y}(t)$ è soluzione di (1) se $Q = 1$. Si ha dunque che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = (C + D\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{2\,t}\,,$$

da cui segue, derivando, che

$$y'(t) = (2\,C + D + (2\,D + 2)\,t + 2\,t^2)\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$

Pertanto

$$y(0) = C\,, \qquad y'(0) = 2\,C + D\,. \tag{2}$$

c) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 0$ e $2\,C + D = 2$, da cui $C = 0$ e $D = 2$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (2\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$

d) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 7$ e $2\,C + D = 0$, da cui $D = -14$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (7 - 14\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$