Foglio 7 esercizio 2

Voglio prima di tutto dimostrare che G sia un sottogruppo, prima però serve un osservazione : Se G è un gruppo ogni elemento $ax + c \in G$ ha un inverso, ed esso è : $(ax+c)^{-1} = \dfrac{x-c}{a}$.
Verifico che G sia un sottogruppo di tutte le bigezioni in $\mathbb{R}$:

$$(a'x+c')\circ(a''x+c'')^{-1} = (a'x+c')\circ(\frac{x-c''}{a''}) = a'(\frac{x-c''}{a''})+c' = \frac{a'x-c''a'}{a''}+c \tag{1}$$

$$= (\frac{a'x}{a''}-\frac{a'c''}{a''})+c' = (x\frac{a'}{a''}-\frac{a'c''}{a''})+c' = x(\frac{a'}{a''}-\frac{a'c''}{a''})+c' \in G \tag{2}$$

quindi G è un sottogruppo, e dimostro che non è commutativo :

$$\begin{cases}(a'x+c')\circ(a''x+c'') = a'(a''x+c'')+c' \\ (a''x+c'')\circ(a'x+c') = a''(a'x+c')+c''\end{cases} \implies (a'x+c')\circ(a''x+c'') \neq (a''x+c'')\circ(a'x+c') \tag{3}$$

Considero adesso un sottogruppo particolare di G, ossia $T = \{f_{1,c}, c \in \mathbb{R}\} = \{x+c, c \in \mathbb{R}\}$, dimostro che è un sottogruppo :

$$(x+c')\circ(x+c'')^{-1} = (x+c')\circ(x-c'') = (x-c'')+c' = x+(c'-c'') \in T \tag{4}$$

Inoltre definisco le classi laterali sinistre di T, ossia : $gT = \{g\circ t, g\in G, t\in T\}$ che sono tutte le funzioni del tipo :

$$g = ax+c \implies gT = \{(ax+c)\circ(x+c'), (ax+c)\circ(x+c''), (ax+c)\circ(x+c''')...\} \tag{5}$$

Le classi laterali destre di T, ossia : $Tg = \{t\circ g, g\in G, t\in T\}$ che sono tutte le funzioni del tipo :

$$g = ax+c \implies gT = \{(x+c')\circ(ax+c), (x+c'')\circ(ax+c), (x+c''')\circ(ax+c)...\} \tag{6}$$

Adesso noto che :

$$\begin{cases}(x+c')\circ(ax+c) = ax+c+c' \\ (ax+c)\circ(x+c') = ax+c+ac'\end{cases} \tag{7}$$

(dimostrazione omessa)Noto che le classi laterali destre e sinistre sono le stesse, quindi T è un sottogruppo normale, e posso definire il gruppo di tutte le classi laterali, ossia il gruppo quoziente $^{G}/_{T}$, con l'operazione $gT * hT = (g\circ h)T$.
Adesso, definisco un'applicazione suriettiva $\varphi : G \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, tale che :

$$\varphi(ax+c) = a \tag{8}$$

E definisco il suo nucleo

$$Ker\varphi = \{ax+c|\varphi(ax+c) = 1 \iff a = 1\} = \{x+c, c\in\mathbb{R}\} \tag{9}$$

Osservazione fondamentale : Noto che $Ker\varphi = T$! Definisco π la proiezione canonica :

$$\pi(ax+c) = (ax+c)T \tag{10}$$

Noto che per il teorema fondamentale di omomorfismo di gruppi, esiste un **unico isomorfismo** $F : {}^{G}/_{Ker\varphi} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tale che $\varphi = \pi\circ F$, essendo $Ker\varphi = T$, so che $^{G}/_{T}$ è isomorfo a $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.