

Algebra. Laurea in Informatica a.a. 2023-2024

Canale 1.

Esame scritto di prova.

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.

30 DICEMBRE 2023

Nome e Cognome: Marco Casu

Numero di Matricola: _____

email istituzionale: _____

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	7	
3	6	
4	6	
5	7	
Totale	33	

ATTENZIONE:

- I compiti disordinati o poco leggibili non saranno neanche corretti.
- Spiegare il procedimento ed i calcoli eseguiti, e **giustificare ogni risposta**. La valutazione terrà conto della presentazione: leggibilità, grammatica, sintassi, ordine, chiarezza, capacità di sintesi.
- Una risposta giusta con giustificazione sbagliata viene valutata ≤ 0 .
- Scrivete le risposte negli appositi riquadri.
- I fogli di brutta non saranno accettati; consegnare esclusivamente questi fogli.
- Tutti i dispositivi elettronici (smartphones, tablets, PC, etc, etc) devono essere spenti ed in borsa.
- Non sono ammessi libri o appunti ad eccezione di un formulario di una pagina A4.

Esercizio 1 (di teoria). 4 o 5 domande di teoria; 1 o 2 dimostrazioni. Ad esempio:

- (1) Definire la funzione φ di Eulero ed enunciare il teorema di Eulero.
- (2)
- (3)
- (4)
- (5)

Svolgimento.

La funzione di Eulero, indicata con φ , è una funzione che associa ad ogni numero naturale n , un valore rappresentante la quantità di numeri naturali minori di n , CO-PRIMI con n .

Teorema di Eulero: Sia a ed n due numeri interi, se $\text{MCD}(a, n) = 1$ allora:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

La funzione φ è moltiplicativa: $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Esercizio 2.

Determinare le soluzioni del seguente sistema di equazioni congruenziali

$$\begin{cases} 12387^{8525}x \equiv 1 \pmod{10} \\ 13x + 7 \equiv 0 \pmod{12} \end{cases}$$

Soluzione.

Sono interessato a trovare il valore di $12387^{8525} \pmod{10}$, sia ϕ la Funzione di Eulero: $\phi(10) = \phi(5 \cdot 2) = \phi(5) \cdot \phi(2) = 4 \cdot 1 = 4$, adesso noto che $8525 = 8524 + 1 = (2131 \cdot 4) + 1$

quindi $12387^{8525} = 12387^{(2131 \cdot 4) + 1} = 12387^{(2131 \cdot 4) \cdot 4} \cdot 12387 \pmod{10}$ per il teo. di Eulero

$\equiv 1 \cdot 12387 \equiv 7 \pmod{10}$. Riscrivo il sistema:

$$\begin{cases} 7x \equiv 1 \pmod{10} \\ 13x \equiv -7 \pmod{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x \equiv 1 \pmod{10} \\ 13x \equiv 5 \pmod{12} \end{cases} \xrightarrow{\text{MOLTIPLICO PER L'INVERSO DI 7 IN } \mathbb{Z}_{10}} \begin{cases} 3 \cdot 7x \equiv 3 \pmod{10} \\ 13x \equiv 5 \pmod{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{10} \\ x \equiv 5 \pmod{12} \end{cases}$$

Risolvo per sostituzione:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{10} \\ x = 5 + 12K \quad K \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 5 + 12K \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow 12K \equiv -2 \pmod{10} \Rightarrow 2K \equiv 8 \pmod{10} \Rightarrow K \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow K = 4 + 10t \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = 5 + 12 \cdot (4 + 10t) = 5 + 12 \cdot 4 + 12 \cdot 10t = 53 + 120t \equiv 53 \pmod{120}$$

Risposta:

53 (mod 120)

Esercizio 3.

Siano H e K due sottogruppi di un gruppo G . Denotiamo con 1_G l'elemento neutro in G . Consideriamo il prodotto diretto $H \times K$ con la sua naturale struttura di gruppo e l'applicazione

$$f : H \times K \ni (h, k) \rightarrow hk \in G$$

- (1) verificare che f è iniettiva se e solo se $H \cap K = \{1_G\}$ (equivalentemente, f è non-iniettiva se e solo se $H \cap K \neq \{1_G\}$).
- (2) verificare che f è un omomorfismo di gruppi se e solo se $\forall h \in H, \forall k \in K$ si ha $hk = kh$.

Soluzione.

(1) Risulta chiaro che l'elemento neutro di $H \times K$ sia $(1_G, 1_G)$
 Se $H \cap K \neq \{1_G\} \Leftrightarrow \exists \alpha \in H \cap K \Leftrightarrow \exists \alpha \in H \wedge \exists \alpha \in K \Leftrightarrow \exists \alpha' \in H \wedge \exists \alpha' \in K \Leftrightarrow \exists \alpha' \in H \cap K$
 $\Leftrightarrow \exists (\alpha, \alpha') \in H \times K$ ma $f((\alpha, \alpha')) = \alpha \cdot \alpha' = 1_G$, quindi se $H \cap K = \{1_G\}$
 non esiste nessun elemento in $H \times K$ tale che l'inverso sia in $H \times K$, quindi
 l'unico elemento $(h, k) \in H \times K$ | $f((h, k)) = 1_G$ è $(1_G, 1_G)$, $\Rightarrow \text{Ker } f = \{(1_G, 1_G)\}$
 $\Leftrightarrow f$ è iniettiva.

(2) f è un omomorfismo se $f((h, k) * (h', k')) = f((h, k)) \cdot f((h', k'))$, noto che:

$$f((h, k) * (h', k')) = f((h \cdot h', k \cdot k')) = h \cdot h' \cdot k \cdot k' = h k h' k' \Leftrightarrow \forall h \in H, \forall k \in K \text{ si ha } hk = kh.$$

$$hk \cdot h' k' = f((h, k)) \cdot f((h', k'))$$

Esercizio 4.

Si considerino le permutazioni di S_8

$$\alpha := (46) \circ (173) \circ (125), \quad \beta := (87543) \circ (12), \quad \gamma := (123) \circ (864) \circ (87).$$

1. Determinare la decomposizione in cicli *disgiunti* di queste 3 permutazioni.
2. Determinare il segno ¹ di ognuna di esse.
3. Stabilire se tra esse ce ne sono due coniugate e, in caso affermativo, trovare una permutazione τ che le coniuga.

Soluzione.

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & 6 & 7 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 5 \ 7 \ 3)(4 \ 6) = (1 \ 3)(1 \ 7)(1 \ 5)(1 \ 2)(4 \ 6) \text{ e' dispari!} \end{aligned}$$

$$\beta = (8 \ 7 \ 5 \ 4 \ 3)(1 \ 2) \text{ e' gia' in cicli disgiunti} = (8 \ 3)(8 \ 4)(8 \ 5)(8 \ 7)(1 \ 2) \text{ e' dispari!}$$

$$\gamma = (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3)(4 \ 8 \ 7 \ 6)$$

$$= (1 \ 3)(1 \ 2)(4 \ 6)(4 \ 7)(4 \ 8) \text{ e' dispari!}$$

α e β condividono la stessa struttura ciclica, quindi sono coniugate.

$$\text{trovo } \tau \text{ tale che } \beta = \tau \alpha \tau^{-1} : \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Verifica:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & 6 & 7 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 8 & 2 & 4 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 5 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = (1 \ 2)(3 \ 8 \ 7 \ 5 \ 4) \end{aligned}$$

Risposta:

¹ovvero la parità

Esercizio 5. Sia $A \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia $L_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da A .

1. Scrivere l'espressione esplicita di L_A :

$$L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

2. Determinare una base di $\text{Im}(L_A)$ e una base di $\text{Ker}(L_A)$.

3. Determinare equazioni cartesiane per $\text{Im}(L_A)$.

Soluzione.

(1) $L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 5x_2 + x_4 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \\ -3x_2 + 2x_3 + x_4 \\ -x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 \end{pmatrix}$ (2) riduco a scala con Gauss

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_3=A_3+A_1, A_4=A_4+2A_1} \begin{pmatrix} -1 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_3=A_3-A_2, A_4=A_4+A_2} \begin{pmatrix} -1 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{pivot sono nelle colonne 1, 2 e 3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 21 & 6 \end{pmatrix}$$

(3): considero $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ riduco: $\begin{pmatrix} -1 & 7 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_3=A_3+A_1, A_4=A_4+2A_1} \begin{pmatrix} -1 & 7 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 11 & 2 \\ 0 & 21 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2+x_4 \\ x_1+2x_4 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{A_3=A_3+\frac{11}{3}A_2, A_4=A_4+\frac{21}{3}A_2} \begin{pmatrix} -1 & 7 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{28}{3} \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2+x_4+\frac{11}{3}x_3 \\ x_1+2x_2+\frac{11}{3}x_3 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = A_4 - \frac{20 \cdot 28}{3} A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{28}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2+x_4+\frac{11}{3}x_3 \\ x_1+2x_2+\frac{11}{3}x_3 - \frac{20 \cdot 28}{3} (x_2+x_4+\frac{11}{3}x_3) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 + 2x_2 + \frac{560}{3}x_2 + \frac{11}{3}x_3 + \frac{560}{3} \cdot \frac{11}{3}x_3 + \frac{560}{3}x_4 = 0$$

DA RIFARE

$$x_1 + \frac{566}{3}x_2 + \frac{11}{3}x_3 + \frac{6160}{9}x_3 + \frac{560}{3}x_4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + \frac{566}{3}x_2 + \frac{6193}{9}x_3 + \frac{560}{3}x_4 = 0$$

Risposta: