Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
23 Maggio 2023 — Compito n. 00062

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: Mores

Cognome: Losu

Matricola: 2 0 4 6 2 1 2

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	■	□	■	□	■	□	□	■	■	□	■	■	□	□	□	□
F	□	■	□	■	□	■	■	□	□	■	□	□	■	■	■	■
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = e^{9t}\,(4 + y^2(t))\,.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.
1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 2$.
1C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$.
1D) Se $y(0) = 5$, la soluzione è decrescente in un intorno dell'origine.

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 5\,y'(t) + 3\,y(t) = 15\,.$$

2A) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 0$.
2B) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$, si ha $y''(0) = 0$.
2C) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 5$.
2D) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, la soluzione dell'equazione è convessa in un intorno dell'origine.

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1)\qquad \begin{cases} y'(t) = 4\,y(t) + e^{4t} + 20\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

3A) Si ha $y'(0) > 0$.
3B) La funzione $y_0(t) = 3\,e^{4t}$ non è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).
3C) La soluzione di (1) è $y(t) = (t+5)\,e^{4t} - 5$.
3D) Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty\,.$$

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1)\qquad y''(t) + A\,y'(t) + B\,y(t) = 0\,.$$

4A) Se $A = B = 0$, i polinomi di primo grado non sono soluzioni di (1).
4B) Se $A = -13$ e $B = 40$, la funzione $y(t) = 9\,e^{5t}$ non è soluzione di (1).
4C) Se $A = -12$ e $B = 36$, la funzione $y(t) = 9\,t\,e^{6t}$ non è soluzione di (1).
4D) Se $A = 0$ e $B = 9$, esistono soluzioni non nulle di (1) che non sono periodiche.

Docente
□ DelaTorre Pedraza
■ Orsina

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00062**

5) Si consideri l'equazione differenziale

(1) $$y'(t) = 4\,(y(t)+6)\,\cos(4\,t)\,.$$

a) Quante soluzioni di (1) verificano la condizione $y(0) = 10$? E quante le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 24$?
b) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(6) = -6$.
c) Calcolare $T_2(y(t);0)$, dove $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.
d) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

---

a) 1, 1.

b) $y(t) = -6$

$24t + 48t^2$

c)

d) $F(t) = \sin(4t)$ $\quad G = \int \frac{1}{s+6} = \ln(s+6)$

$\ln(y(t)+6) = \ln(6) + \sin(4t)$

$y(t) = 6e^{\sin(4t)} - 6$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00062**

6) Si consideri il problema di Cauchy

$195 + 49 \cdot 5 = 196$

$$(1) \qquad \begin{cases} y''(t) - 14\, y'(t) + 49\, y(t) = 196\,, \\ y(0) = 5\,, \quad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha (1)? E quante tali che $y''(0) = 195$?

b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

c) Determinare una soluzione particolare dell'equazione di (1), e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1).

d) Determinare la soluzione di (1).

a) 1, 0

b) $y_0(t) =$

$196 - 4(\quad = 0$ $\qquad \frac{14}{2} = 7$ $\qquad (C + Dt)e^{7t}$

c) $Q = \frac{196}{49} = 4$ $\qquad y(t) = (C + Dt)e^{7t} + 4$

$5 = C + 4$

d) $y'(t) = De^{7t} + 7(C + Dt)e^{7t}$

$(1 - 7t)e^{7t} + 4$

$C = 1$

$D + 7 \quad = 0$

Soluzioni del compito 00062

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = \mathrm{e}^{9\,t}\,(4 + y^2(t))\,.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.

Vero: Essendo un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, l'equazione ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro reale.

1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 2$.

Falso: Assegnando la condizione iniziale $y(0) = 2$, si ottiene un problema di Cacuhy per un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che ha un'unica soluzione.

1C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$.

Vero: Se si assegna la condizione $y(0) = 0$, si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che ha un'unica soluzione. Per tale soluzione si ha

$$y'(0) = \mathrm{e}^{9\cdot 0}\,(4 + y^2(0)) = 1 \cdot (4 + 0) = 4\,.$$

Si ha quindi che la condizione $y'(0) = 4$ è automaticamente soddisfatta, e quindi la soluzione esiste ed è unica.

1D) Se $y(0) = 5$, la soluzione è decrescente in un intorno dell'origine.

Falso: Se $y(0) = 5$, si ha

$$y'(0) = \mathrm{e}^{9\cdot 0}\,(4 + y^2(0)) = 1 \cdot (4 + 25) = 29 > 0\,.$$

Per il teorema della permanenza del segno, $y'(t) \geq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi la soluzione è crescente in tale intorno.
Alternativamente, e prescindendo dalla condizione iniziale, era sufficiente osservare che

$$y'(t) = \mathrm{e}^{9\,t}\,(1 + y^2(t)) \geq \mathrm{e}^{9\,t} \geq 0\,,$$

e quindi *ogni* soluzione dell'equazione è crescente.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 5\,y'(t) + 3\,y(t) = 15\,.$$

2A) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 0$.

Falso: Se si assegnano le condizioni iniziali $y(0) = 5$ e $y'(0) = 0$, si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, che ha un'unica soluzione. Per tale soluzione, si ha

$$y''(0) = 15 + 5\,y'(0) - 3\,y(0) = 15 + 5 \cdot 0 - 3 \cdot 5 = 15 - 15 = 0\,,$$

cosicché la condizione $y''(0) = 0$ è automaticamente soddisfatta, e quindi la soluzione esiste ed è unica.

2B) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$, si ha $y''(0) = 0$.

Falso: Con le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$ si ha, per l'unica soluzione del problema,

$$y''(0) = 15 + 5\,y'(0) - 3\,y(0) = 15 + 5 \cdot 3 - 3 \cdot 0 = 30 \neq 0\,.$$

2C) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 5$.

Falso: Se $y(t)$ è soluzione di (1), sostituendo $t = 0$ nell'equazione si trova

$$y''(0) - 5\,y'(0) + 3\,y(0) = 15\,.$$

Se $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 5$, si ha

$$5 - 5 \cdot 1 + 3\,y(0) = 15\,,$$

da cui segue $y(0) = 5$. Consideriamo ora l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 5$ e $y'(0) = 1$. Per tale soluzione si ha, ovviamente, $y''(0) = 5$, e quindi esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 5$.

2D) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, la soluzione dell'equazione è convessa in un intorno dell'origine.

Vero: Se $y(0) = y'(0) = 0$ si ha, per l'unica soluzione dell'equazione, che

$$y''(0) = 15 + 5\,y'(0) - 3\,y(0) = 15 + 5 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 15 > 0\,.$$

Per il teorema della permanenza del segno, si ha $y''(t) \geq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi $y(t)$ è convessa in tale intorno.

---

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = 4\,y(t) + \mathrm{e}^{4\,t} + 20\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Ricordiamo che la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione $y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)$, con la condizione $y(0) = y_0$ è data da

$$(2) \qquad y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left[y_0 + \int_0^t b(s)\,\mathrm{e}^{-A(s)}\,ds \right],$$

dove

$$A(t) = \int_0^t a(s)\,ds\,.$$

Nel nostro caso, $a(t) = 4$ e $b(t) = \mathrm{e}^{4\,t} + 20$ e quindi

$$A(t) = \int_0^t 4\,ds = 4\,t\,.$$

Applicando la (2) con $y_0 = 0$ si ha

$$y(t) = \mathrm{e}^{4\,t} \int_0^t [\mathrm{e}^{4\,s} + 20]\,\mathrm{e}^{-4\,s}\,ds = \mathrm{e}^{4\,t}\,[s - 5\,\mathrm{e}^{-4\,s}]\Big|_0^t = \mathrm{e}^{4\,t}\,[t - 5\,\mathrm{e}^{-4\,t} + 5]\,,$$

e quindi, semplificando,

$$(3) \qquad y(t) = (t + 5)\,\mathrm{e}^{4\,t} - 5\,.$$

3A) Si ha $y'(0) > 0$.

Vero: Sostituendo la condizione iniziale $y(0) = 0$ nell'equazione, si ha

$$y'(0) = 4\,y(0) + \mathrm{e}^{4\cdot 0} + 15 = 4 \cdot 0 + 1 + 15 = 16 > 0\,.$$

3B) La funzione $y_0(t) = 3\,\mathrm{e}^{4\,t}$ non è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

Falso: L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0'(t) = 4\,y_0(t)\,,$$

Se $y_0(t) = 3\,\mathrm{e}^{4\,t}$, si ha

$$y_0'(t) = 12\,\mathrm{e}^{4\,t} = 4 \cdot (3\,\mathrm{e}^{4\,t}) = 4\,y_0(t)\,,$$

e quindi $y_0(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata.

3C) La soluzione di (1) è $y(t) = (t + 5)\,\mathrm{e}^{4\,t} - 5$.

Vero: Per la (3), la funzione proposta è l'unica soluzione di (1).

3D) Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty\,.$$

Vero: Dalla (3) segue che

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} [(t - 5)\,\mathrm{e}^{4\,t} + 5] = +\infty\,.$$

---

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y'(t) + B\,y(t) = 0\,. \tag{1}$$

4A) Se $A = B = 0$, i polinomi di primo grado non sono soluzioni di (1).

Falso: Se $A = B = 0$, (1) diventa

$$y''(t) = 0\,.$$

Se $y(t)$ è un polinomio di primo grado, si ha $y(t) = a\,t + b$ per qualche a e b reali. Pertanto, $y'(t) = a$ e quindi $y''(t) = 0$. Ne segue che i polinomi di grado 1 sono soluzioni di (1).

4B) Se $A = -13$ e $B = 40$, la funzione $y(t) = 9\,\mathrm{e}^{5\,t}$ non è soluzione di (1).

Falso: Se $A = -13$ e $B = 40$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 - 13\,L + 40\,,$$

che ha come soluzioni $L_1 = 8$ e $L_2 = 5$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{8\,t} + D\,\mathrm{e}^{5\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 0$ e $D = 9$, si vede che $y(t) = 9\,\mathrm{e}^{5\,t}$ è soluzione di (1).

4C) Se $A = -12$ e $B = 36$, la funzione $y(t) = 9\,t\,\mathrm{e}^{6\,t}$ non è soluzione di (1).

Falso: Se $A = -12$ e $B = 36$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 - 12\,L + 36\,,$$

che ha come soluzioni $L_1 = L_2 = 6$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{6\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 0$ e $D = 9$, si vede che $y(t) = 9\,t\,\mathrm{e}^{6\,t}$ è soluzione di (1).

4D) Se $A = 0$ e $B = 9$, esistono soluzioni non nulle di (1) che non sono periodiche.

Falso: Se $A = 0$ e $B = 9$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 + 9\,,$$

che ha come soluzioni $L_{1,2} = \pm\,3\,i$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = C\,\cos(3\,t) + D\,\sin(3\,t)\,,$$

con C e D numeri reali, e sono quindi periodiche (di periodo $T = \frac{2\pi}{3}$).

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 4\,(y(t)+6)\,\cos(4\,t)\,. \tag{1}$$

a) Quante soluzioni di (1) verificano la condizione $y(0) = 10$? E quante le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 24$?
b) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(6) = -6$.
c) Calcolare $T_2(y(t); 0)$, dove $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.
d) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

Soluzione:
Osserviamo preliminarmente che l'equazione (1) è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(t)\,g(y(t))\,,$$

con

$$f(t) = 4\,\cos(4\,t)\,, \qquad g(s) = s+6\,. \tag{2}$$

a) Assegnando ad (1) la condizione iniziale $y(0) = 10$ si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine, che ha un'unica soluzione. Analogamente, esiste un'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$; per tale soluzione si ha, sostituendo $t = 0$,

$$y'(0) = 4\,(y(0)+6)\,\cos(4\cdot 0) = 4\cdot 6\cdot 1 = 24\,,$$

cosicché la condizione $y'(0) = 24$ è automaticamente soddisfatta dall'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$. Ne segue pertanto che esiste un'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 24$.

b) Dato che la funzione $g(s)$ in (2) è tale che $g(-6) = -6+6 = 0$, la funzione $y(t) = -6$ è una soluzione costante di (1). Dato che soddisfa la condizione $y(6) = -6$, è la soluzione di (1) tale che $y(6) = -6$ (essendo tale soluzione unica).

c) Se $y(0) = 0$ abbiamo, sostituendo nell'equazione $t = 0$,

$$y'(0) = 4\,(y(0)+6)\,\cos(4\cdot 0) = 4\cdot 6\cdot 1 = 24\,.$$

Derivando l'equazione, si ha poi

$$y''(t) = 4\,y'(t)\,\cos(4\,t) - 16\,(y(t)+6)\,\sin(4\,t)\,.$$

Calcolando questa espressione in $t = 0$, si ha

$$y''(0) = 4\,y'(0)\,\cos(4\cdot 0) - 16\,(y(0)+6)\,\sin(4\cdot 0) = 4\cdot 24\cdot 1 - 16\cdot 6\cdot 0 = 96\,.$$

Si ha quindi

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)\,t + \frac{y''(0)}{2}\,t^2 = 0 + 24\,t + \frac{96}{2}\,t^2 = 24\,t + 48\,t^2\,.$$

d) Dato che l'equazione è a variabili separabili, e che $y(t) \equiv y(0) = 0$ non è soluzione dell'equazione (come si verifica facilmente), dividiamo per $y(t)+6$, ottenendo l'equazione equivalente

$$\frac{y'(t)}{y(t)+6} = 4\,\cos(4\,t)\,.$$

Integrando tra 0 e s, si ha

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{y(t)+6}\,dt = \int_0^s 4\,\cos(4\,t)\,dt = \sin(4\,t)\Big|_0^s = \sin(4\,s)\,.$$

Per quanto riguarda il primo integrale, con la sostituzione $z = y(t)$, da cui $y'(t)\,dt = dz$, si ha (ricordando che $y(0) = 0$)

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{y(t)+6}\,dt = \int_{y(0)}^{y(s)} \frac{dz}{z+6} = \log(|z+6|)\Big|_0^{y(s)} = \log(|y(s)+6|) - \log(6) = \log\Big(\frac{y(s)+6}{6}\Big)\,,$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che $y(s)+6 \geq 0$ in un intorno di $t=0$ dato che $y(0)+6 = 0+6 = 6 > 0$. Si ha quindi che la soluzione di (1) tale che $y(0)=0$ verifica l'identità

$$\log\left(\frac{y(s)+6}{6}\right) = \sin(4\,s)\,,$$

da cui segue che

$$\frac{y(s)+6}{6} = \mathrm{e}^{4\,s}\,,$$

e quindi che

$$y(s) = 6\,\mathrm{e}^{\sin(4\,s)} - 6\,.$$

Si noti che l'equazione (1) può essere riscritta nella forma

$$y'(t) = 4\,\cos(4\,t)\,y(t) + 24\,\cos(4\,t)\,,$$

e quindi è anche della forma

$$y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)\,,$$

con

$$a(t) = 4\,\cos(4\,t)\,, \qquad b(t) = 24\,\cos(4\,t)\,.$$

Per tale equazione, assegnando la condizione $y(0)=0$, si ha la formula risolutiva

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\left(\int_0^t b(s)\,\mathrm{e}^{-A(s)}\,ds\right), \tag{3}$$

dove

$$A(t) = \int_0^t a(s)\,ds = \int_0^t 4\,\cos(4\,s)\,ds = \sin(4\,s)\Big|_0^t = \sin(4\,t)\,.$$

Pertanto, dalla (3) si ha che

$$y(t) = \mathrm{e}^{\sin(4\,t)}\left(24\int_0^t \cos(4\,s)\,\mathrm{e}^{-\sin(4\,s)}\,ds\right).$$

Per calcolare l'ulitmo integrale, poniamo $z = \sin(4\,s)$, da cui $dz = 4\,\cos(4\,s)\,ds$. Si ha quindi

$$24\int_0^t \cos(4\,s)\,\mathrm{e}^{-\sin(4\,s)}\,ds = 6\int_0^{\sin(4\,t)} \mathrm{e}^{-z}\,dz = 6\,(1-\mathrm{e}^{-\sin(4\,t)})\,,$$

cosicché la soluzione di (1) tale che $y(0)=0$ è data da

$$y(t) = 6\,\mathrm{e}^{\sin(4\,t)}\,(1-\mathrm{e}^{-\sin(4\,t)}) = 6\,\mathrm{e}^{\sin(4\,t)} - 6\,,$$

come trovato in precedenza.

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y''(t) - 14\,y'(t) + 49\,y(t) = 196\,, \\ y(0) = 5\,, \quad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha (1)? E quante tali che $y''(0) = 195$?
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).
c) Determinare una soluzione particolare dell'equazione di (1), e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1).
d) Determinare la soluzione di (1).

Soluzione:
a) Il problema di Cauchy (1) ha un'unica soluzione. Se $y(t)$ è tale soluzione, si ha, sostituendo $t = 0$ nell'equazione, che

$$y''(0) = y''(0) - 14 \cdot 0 + 49 \cdot 0 = y''(0) - 14\,y'(0) + 49\,y(0) = 196\,.$$

Pertanto, per tale soluzione si ha $y''(0) = 196 \neq 195$, e quindi non esistono soluzioni di (1) tali che $y''(0) = 195$.

b) L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0''(t) - 14\,y_0'(t) + 49\,y_0(t) = 0\,,$$

il cui polinomio caratteristico è

$$P(L) = L^2 - 14\,L + 49\,,$$

che ha come soluzioni $L_{1,2} = 7$. Ne segue pertanto che tutte le soluzioni di (2) sono date da

$$y_0(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{7\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

c) Dato che le funzioni costanti non sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione di (1) nella forma $\overline{y}(t) = Q$, con Q numero reale. Sostituendo, e dato che $\overline{y}'(t) = \overline{y}''(t) = 0$, si ha che deve essere

$$\overline{y}''(t) - 14\,\overline{y}'(t) + 49\,\overline{y}(t) = 49\,Q = 196\,,$$

da cui segue $Q = 4$. Ne segue che tutte le soluzioni dell'equazione di (1) sono date da

$$(2) \qquad y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{7\,t} + 4\,.$$

d) Se $y(t)$ è data da (2), si ha, derivando,

$$y'(t) = D\,\mathrm{e}^{7\,t} + 7\,(C + D\,t)\,\mathrm{e}^{7\,t}\,.$$

Pertanto,

$$y(0) = C + 4\,, \qquad y'(0) = D + 7\,C\,.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 5$ e $y'(0) = 0$, si ha

$$C = 1\,, \qquad D = -7\,C = -7\,,$$

e quindi l'unica soluzione di (1) è data da

$$y(t) = (1 - 7\,t)\,\mathrm{e}^{7\,t} + 4\,.$$