Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
23 Maggio 2023 — Compito n. 00119

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: Mereu

Cognome: Losu

Matricola: 2 0 4 6 2 1 2

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	■	□	■	■	□	□	□	□	■	■	■	□	■	□	■	□
F	□	■	□	□	■	■	■	■	□	□	□	■	□	■	□	■
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

---

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = e^{6\,t}\,(4 + y^2(t))\,.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.
1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 9$.
1C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$.
1D) Se $y(0) = 4$, la soluzione è crescente in un intorno dell'origine.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 2\,y'(t) + 3\,y(t) = 15\,.$$

2A) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 0$.
2B) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$, si ha $y''(0) = 9$.
2C) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 2$.
2D) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, la soluzione dell'equazione è concava in un intorno dell'origine.

---

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1)\qquad \begin{cases} y'(t) = 3\,y(t) + e^{3\,t} + 9\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

3A) Si ha $y'(0) > 0$.
3B) La funzione $y_0(t) = 2\,e^{3\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).
3C) La soluzione di (1) è $y(t) = (t + 3)\,e^{3\,t} - 3$.
3D) Si ha

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0\,.$$

$\lambda^2 - 11\lambda + 18$

---

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1)\qquad y''(t) + A\,y'(t) + B\,y(t) = 0\,.$$

4A) Se $A = B = 0$, i polinomi di primo grado non sono soluzioni di (1).
4B) Se $A = -11$ e $B = 18$, la funzione $y(t) = 5\,e^{9\,t}$ non è soluzione di (1).
4C) Se $A = -14$ e $B = 49$, la funzione $y(t) = 3\,t\,e^{7\,t}$ è soluzione di (1).
4D) Se $A = 0$ e $B = 9$, esistono soluzioni non nulle di (1) che non sono periodiche.

Docente
□ DelaTorre Pedraza
□ Orsina

4a OVVIAMENTE PER $y(t) = at + b$ SI HA $y''(t) = 0$!

	Cognome	Nome	Matricola	Compito 00119

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \qquad y'(t) = 5\,(y(t)+7)\,\cos(5\,t)\,.$$

a) Quante soluzioni di (1) verificano la condizione $y(0) = 4$? E quante le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 35$?
b) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(5) = -7$.
c) Calcolare $T_2(y(t); 0)$, dove $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.
d) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

a) per $y(0)=4$, C'È 1 SOLUZIONE, PER $\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=35 \end{cases}$ C'È 1 SOLUZIONE.

b) $y(t)=-7$

c) $y'(0)=35$ $\quad y''(t)=5y'(t)\cos(5t)-25(y(t)+7)\sin(5t)$

$y''(0)=175$ $\quad T_2(y(t);0)=35t+\frac{175}{2}t^2$

d)

$y(0)=0$

$f(t)=5\cos(5t) \to F(t)=\int 5\cos(5z) = 5\cdot\frac{1}{5}\sin(5t)=\sin(5t)$

$g(t)=y(t)+7 \qquad G(t)=\ln(t+7)$

$\ln(y(t)+7)=\sin(5t)+\ln(7)$

$y(t)=7e^{\sin(5t)}-7$

Cognome	Nome	Matricola	Compito 00119

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y''(t) - 18\,y'(t) + 81\,y(t) = 486\,, \\ y(0) = 7\,, \quad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha (1)? E quante tali che $y''(0) = 485$?
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).
c) Determinare una soluzione particolare dell'equazione di (1), e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1).
d) Determinare la soluzione di (1).

---

a) 1) ha 1 SOLUZIONE, SE $y''(0) = 485$, $\to$

$485 + 81 \cdot (7) = 486$ NON HA SOLUZIONI

b) $P(\lambda) \to \lambda^2 - 18\lambda + 81 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = (C + Dt)e^{9t}$

c) cerco una sol. della forma $\bar{y}(t) = Q$ $\qquad \bar{y}'(t) = \bar{y}''(t) = 0$

$81 \cdot Q = 486 \Rightarrow Q = 6$

$y(t) = (C + Dt)e^{9t} + 6$

$y'(t) = De^{9t} + 9(C + Dt)e^{9t}$

d) $y(0) = 7 \to 7 = C + 6 \to C = 1$

$y'(0) = 0 \to D + 9C = 0 \to D + 9 = 0 \to D = -9$

$y(t) = (1 - 9t)e^{9t} + 6$

Soluzioni del compito 00119

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = \mathrm{e}^{6\,t}\,(4 + y^2(t))\,.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.

Vero: Essendo un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, l'equazione ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro reale.

1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 9$.

Falso: Assegnando la condizione iniziale $y(0) = 9$, si ottiene un problema di Cacuhy per un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che ha un'unica soluzione.

1C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$.

Vero: Se si assegna la condizione $y(0) = 0$, si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che ha un'unica soluzione. Per tale soluzione si ha

$$y'(0) = \mathrm{e}^{6\cdot 0}\,(4 + y^2(0)) = 1 \cdot (4 + 0) = 4\,.$$

Si ha quindi che la condizione $y'(0) = 4$ è automaticamente soddisfatta, e quindi la soluzione esiste ed è unica.

1D) Se $y(0) = 4$, la soluzione è crescente in un intorno dell'origine.

Vero: Se $y(0) = 4$, si ha

$$y'(0) = \mathrm{e}^{6\cdot 0}\,(4 + y^2(0)) = 1 \cdot (4 + 16) = 20 > 0\,.$$

Per il teorema della permanenza del segno, $y'(t) \geq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi la soluzione è crescente in tale intorno.
Alternativamente, e prescindendo dalla condizione iniziale, era sufficiente osservare che

$$y'(t) = \mathrm{e}^{6\,t}\,(1 + y^2(t)) \geq \mathrm{e}^{6\,t} \geq 0\,,$$

e quindi *ogni* soluzione dell'equazione è crescente.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 2\,y'(t) + 3\,y(t) = 15\,.$$

2A) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 0$.

Falso: Se si assegnano le condizioni iniziali $y(0) = 5$ e $y'(0) = 0$, si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, che ha un'unica soluzione. Per tale soluzione, si ha

$$y''(0) = 15 + 2\,y'(0) - 3\,y(0) = 15 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 5 = 15 - 15 = 0\,,$$

cosicché la condizione $y''(0) = 0$ è automaticamente soddisfatta, e quindi la soluzione esiste ed è unica.

2B) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$, si ha $y''(0) = 9$.

Falso: Con le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$ si ha, per l'unica soluzione del problema,

$$y''(0) = 15 + 2\,y'(0) - 3\,y(0) = 15 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 0 = 21 \neq 9\,.$$

2C) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 2$.

Falso: Se $y(t)$ è soluzione di (1), sostituendo $t = 0$ nell'equazione si trova

$$y''(0) - 2\,y'(0) + 3\,y(0) = 15\,.$$

Se $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 2$, si ha

$$2 - 2 \cdot 1 + 3\,y(0) = 15\,,$$

da cui segue $y(0) = 5$. Consideriamo ora l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 5$ e $y'(0) = 1$. Per tale soluzione si ha, ovviamente, $y''(0) = 2$, e quindi esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 2$.

2D) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, la soluzione dell'equazione è concava in un intorno dell'origine.

Falso: Se $y(0) = y'(0) = 0$ si ha, per l'unica soluzione dell'equazione, che

$$y''(0) = 15 + 2\,y'(0) - 3\,y(0) = 15 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 15 > 0\,.$$

Per il teorema della permanenza del segno, si ha $y''(t) \geq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi $y(t)$ è convessa in tale intorno.

---

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = 3\,y(t) + \mathrm{e}^{3\,t} + 9\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Ricordiamo che la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione $y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)$, con la condizione $y(0) = y_0$ è data da

$$(2) \qquad y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\left[y_0 + \int_0^t b(s)\,\mathrm{e}^{-A(s)}\,ds\right],$$

dove

$$A(t) = \int_0^t a(s)\,ds\,.$$

Nel nostro caso, $a(t) = 3$ e $b(t) = \mathrm{e}^{3\,t} + 9$ e quindi

$$A(t) = \int_0^t 3\,ds = 3\,t\,.$$

Applicando la (2) con $y_0 = 0$ si ha

$$y(t) = \mathrm{e}^{3\,t}\int_0^t [\mathrm{e}^{3\,s} + 9]\,\mathrm{e}^{-3\,s}\,ds = \mathrm{e}^{3\,t}\,[s - 3\,\mathrm{e}^{-3\,s}]\Big|_0^t = \mathrm{e}^{3\,t}\,[t - 3\,\mathrm{e}^{-3\,t} + 3]\,,$$

e quindi, semplificando,

$$(3) \qquad y(t) = (t+3)\,\mathrm{e}^{3\,t} - 3\,.$$

3A) Si ha $y'(0) > 0$.

Vero: Sostituendo la condizione iniziale $y(0) = 0$ nell'equazione, si ha

$$y'(0) = 3\,y(0) + \mathrm{e}^{3\cdot 0} + 15 = 3\cdot 0 + 1 + 15 = 16 > 0\,.$$

3B) La funzione $y_0(t) = 2\,\mathrm{e}^{3\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

Vero: L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0'(t) = 3\,y_0(t)\,,$$

Se $y_0(t) = 2\,\mathrm{e}^{3\,t}$, si ha

$$y_0'(t) = 6\,\mathrm{e}^{3\,t} = 3\cdot(2\,\mathrm{e}^{3\,t}) = 3\,y_0(t)\,,$$

e quindi $y_0(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata.

3C) La soluzione di (1) è $y(t) = (t+3)\,\mathrm{e}^{3\,t} - 3$.

Vero: Per la (3), la funzione proposta è l'unica soluzione di (1).

3D) Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0\,.$$

Falso: Dalla (3) segue che

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} [(t-3)\,\mathrm{e}^{3\,t} + 3] = +\infty \neq 0\,.$$

---

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y'(t) + B\,y(t) = 0\,. \tag{1}$$

4A) Se $A = B = 0$, i polinomi di primo grado non sono soluzioni di (1).

Falso: Se $A = B = 0$, (1) diventa

$$y''(t) = 0\,.$$

Se $y(t)$ è un polinomio di primo grado, si ha $y(t) = a\,t + b$ per qualche a e b reali. Pertanto, $y'(t) = a$ e quindi $y''(t) = 0$. Ne segue che i polinomi di grado 1 sono soluzioni di (1).

4B) Se $A = -11$ e $B = 18$, la funzione $y(t) = 5\,e^{9\,t}$ non è soluzione di (1).

Falso: Se $A = -11$ e $B = 18$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 - 11\,L + 18\,,$$

che ha come soluzioni $L_1 = 2$ e $L_2 = 9$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = C\,e^{2\,t} + D\,e^{9\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 0$ e $D = 5$, si vede che $y(t) = 5\,e^{9\,t}$ è soluzione di (1).

4C) Se $A = -14$ e $B = 49$, la funzione $y(t) = 3\,t\,e^{7\,t}$ è soluzione di (1).

Vero: Se $A = -14$ e $B = 49$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 - 14\,L + 49\,,$$

che ha come soluzioni $L_1 = L_2 = 7$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = (C + D\,t)\,e^{7\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 0$ e $D = 3$, si vede che $y(t) = 3\,t\,e^{7\,t}$ è soluzione di (1).

4D) Se $A = 0$ e $B = 9$, esistono soluzioni non nulle di (1) che non sono periodiche.

Falso: Se $A = 0$ e $B = 9$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 + 9\,,$$

che ha come soluzioni $L_{1,2} = \pm\,3\,i$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = C\,\cos(3\,t) + D\,\sin(3\,t)\,,$$

con C e D numeri reali, e sono quindi periodiche (di periodo $T = \frac{2\pi}{3}$).

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 5\,(y(t)+7)\,\cos(5\,t)\,. \tag{1}$$

a) Quante soluzioni di (1) verificano la condizione $y(0) = 4$? E quante le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 35$?
b) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(5) = -7$.
c) Calcolare $T_2(y(t); 0)$, dove $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.
d) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

Soluzione:
Osserviamo preliminarmente che l'equazione (1) è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(t)\,g(y(t))\,,$$

con

$$f(t) = 5\,\cos(5\,t)\,, \qquad g(s) = s+7\,. \tag{2}$$

a) Assegnando ad (1) la condizione iniziale $y(0) = 4$ si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine, che ha un'unica soluzione. Analogamente, esiste un'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$; per tale soluzione si ha, sostituendo $t = 0$,

$$y'(0) = 5\,(y(0)+7)\,\cos(5\cdot 0) = 5\cdot 7\cdot 1 = 35\,,$$

cosicché la condizione $y'(0) = 35$ è automaticamente soddisfatta dall'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$. Ne segue pertanto che esiste un'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 35$.

b) Dato che la funzione $g(s)$ in (2) è tale che $g(-7) = -7+7 = 0$, la funzione $y(t) = -7$ è una soluzione costante di (1). Dato che soddisfa la condizione $y(5) = -7$, è la soluzione di (1) tale che $y(5) = -7$ (essendo tale soluzione unica).

c) Se $y(0) = 0$ abbiamo, sostituendo nell'equazione $t = 0$,

$$y'(0) = 5\,(y(0)+7)\,\cos(5\cdot 0) = 5\cdot 7\cdot 1 = 35\,.$$

Derivando l'equazione, si ha poi

$$y''(t) = 5\,y'(t)\,\cos(5\,t) - 25\,(y(t)+7)\,\sin(5\,t)\,.$$

Calcolando questa espressione in $t = 0$, si ha

$$y''(0) = 5\,y'(0)\,\cos(5\cdot 0) - 25\,(y(0)+7)\,\sin(5\cdot 0) = 5\cdot 35\cdot 1 - 25\cdot 7\cdot 0 = 175\,.$$

Si ha quindi

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)\,t + \frac{y''(0)}{2}\,t^2 = 0 + 35\,t + \frac{175}{2}\,t^2 = 35\,t + \frac{175}{2}\,t^2\,.$$

d) Dato che l'equazione è a variabili separabili, e che $y(t) \equiv y(0) = 0$ non è soluzione dell'equazione (come si verifica facilmente), dividiamo per $y(t)+7$, ottenendo l'equazione equivalente

$$\frac{y'(t)}{y(t)+7} = 5\,\cos(5\,t)\,.$$

Integrando tra 0 e s, si ha

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{y(t)+7}\,dt = \int_0^s 5\,\cos(5\,t)\,dt = \sin(5\,t)\Big|_0^s = \sin(5\,s)\,.$$

Per quanto riguarda il primo integrale, con la sostituzione $z = y(t)$, da cui $y'(t)\,dt = dz$, si ha (ricordando che $y(0) = 0$)

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{y(t)+7}\,dt = \int_{y(0)}^{y(s)} \frac{dz}{z+7} = \log(|z+7|)\Big|_0^{y(s)} = \log(|y(s)+7|) - \log(7) = \log\Big(\frac{y(s)+7}{7}\Big)\,,$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che $y(s)+7 \geq 0$ in un intorno di $t=0$ dato che $y(0)+7 = 0+7 = 7 > 0$. Si ha quindi che la soluzione di (1) tale che $y(0)=0$ verifica l'identità

$$\log\left(\frac{y(s)+7}{7}\right) = \sin(5\,s)\,,$$

da cui segue che

$$\frac{y(s)+7}{7} = \mathrm{e}^{5\,s}\,,$$

e quindi che

$$y(s) = 7\,\mathrm{e}^{\sin(5\,s)} - 7\,.$$

Si noti che l'equazione (1) può essere riscritta nella forma

$$y'(t) = 5\,\cos(5\,t)\,y(t) + 35\,\cos(5\,t)\,,$$

e quindi è anche della forma

$$y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)\,,$$

con

$$a(t) = 5\,\cos(5\,t)\,, \qquad b(t) = 35\,\cos(5\,t)\,.$$

Per tale equazione, assegnando la condizione $y(0)=0$, si ha la formula risolutiva

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\left(\int_0^t b(s)\,\mathrm{e}^{-A(s)}\,ds\right), \tag{3}$$

dove

$$A(t) = \int_0^t a(s)\,ds = \int_0^t 5\,\cos(5\,s)\,ds = \sin(5\,s)\Big|_0^t = \sin(5\,t)\,.$$

Pertanto, dalla (3) si ha che

$$y(t) = \mathrm{e}^{\sin(5\,t)}\left(35\int_0^t \cos(5\,s)\,\mathrm{e}^{-\sin(5\,s)}\,ds\right).$$

Per calcolare l'ulitmo integrale, poniamo $z = \sin(5\,s)$, da cui $dz = 5\,\cos(5\,s)\,ds$. Si ha quindi

$$35\int_0^t \cos(5\,s)\,\mathrm{e}^{-\sin(5\,s)}\,ds = 7\int_0^{\sin(5\,t)} \mathrm{e}^{-z}\,dz = 7\,(1-\mathrm{e}^{-\sin(5\,t)})\,,$$

cosicché la soluzione di (1) tale che $y(0)=0$ è data da

$$y(t) = 7\,\mathrm{e}^{\sin(5\,t)}\,(1-\mathrm{e}^{-\sin(5\,t)}) = 7\,\mathrm{e}^{\sin(5\,t)} - 7\,,$$

come trovato in precedenza.

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y''(t) - 18\,y'(t) + 81\,y(t) = 486\,, \\ y(0) = 7\,, \quad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha (1)? E quante tali che $y''(0) = 485$?
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).
c) Determinare una soluzione particolare dell'equazione di (1), e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1).
d) Determinare la soluzione di (1).

Soluzione:
a) Il problema di Cauchy (1) ha un'unica soluzione. Se $y(t)$ è tale soluzione, si ha, sostituendo $t = 0$ nell'equazione, che

$$y''(0) = y''(0) - 18 \cdot 0 + 81 \cdot 0 = y''(0) - 18\,y'(0) + 81\,y(0) = 486\,.$$

Pertanto, per tale soluzione si ha $y''(0) = 486 \neq 485$, e quindi non esistono soluzioni di (1) tali che $y''(0) = 485$.

b) L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0''(t) - 18\,y_0'(t) + 81\,y_0(t) = 0\,,$$

il cui polinomio caratteristico è

$$P(L) = L^2 - 18\,L + 81\,,$$

che ha come soluzioni $L_{1,2} = 9$. Ne segue pertanto che tutte le soluzioni di (2) sono date da

$$y_0(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{9\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

c) Dato che le funzioni costanti non sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione di (1) nella forma $\overline{y}(t) = Q$, con Q numero reale. Sostituendo, e dato che $\overline{y}'(t) = \overline{y}''(t) = 0$, si ha che deve essere

$$\overline{y}''(t) - 18\,\overline{y}'(t) + 81\,\overline{y}(t) = 81\,Q = 486\,,$$

da cui segue $Q = 6$. Ne segue che tutte le soluzioni dell'equazione di (1) sono date da

$$(2) \qquad y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{9\,t} + 6\,.$$

d) Se $y(t)$ è data da (2), si ha, derivando,

$$y'(t) = D\,\mathrm{e}^{9\,t} + 9\,(C + D\,t)\,\mathrm{e}^{9\,t}\,.$$

Pertanto,

$$y(0) = C + 6\,, \qquad y'(0) = D + 9\,C\,.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 7$ e $y'(0) = 0$, si ha

$$C = 1\,, \qquad D = -9\,C = -9\,,$$

e quindi l'unica soluzione di (1) è data da

$$y(t) = (1 - 9\,t)\,\mathrm{e}^{9\,t} + 6\,.$$