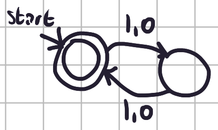
1 Automi — 10 Points

- Dimostrare che il linguaggio $L = \{w : w \text{ termina con } 0 \text{ oppure ha lunghezza pari}\}$ è regolare.
- Definire le grammatiche acontestuali e dimostrare che ogni grammatica acontestuale ne ammette una equivalente in forma normale di Chomsky. Mostrare che in una grammatica in forma normale di Chomsky ogni derivazione di una stringa w tale che $|w| = n$ richiede al più $2n - 1$ passi (per ogni $n \geq 1$).

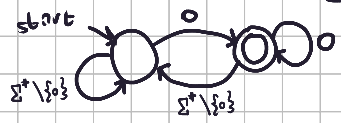
Si noti come $L = L_1 \cup L_2$ dove $L_1 : \{\omega \mid |\omega| \% 2 = 0\}$ e $L_2 : \{\omega 0 \mid \omega \in \Sigma^*\}$. Data la chiusura di REG, occorre mostrare che L_1 ed L_2 sono regolari.

Il DFA accetta L_1:



L_1 e' regolare

Il DFA accetta L_2:



L_2 e' regolare

Essendo L_1 ed L_2 in REG, allora $L_1 \cup L_2 = L \in REG$

Una CFG e' in CNF se, ogni regola e' della forma

- $A \to CB$
- $A \to u$

dove $A, B, C \in V$, $u \in \Gamma$, $C \neq S$, $B \neq S$

Ed e' permessa la regola $S \to \varepsilon$.

Le seguenti procedure mostrano come trasformare una qualsiasi grammatica in CNF. Sia data $G = \{V, \Gamma, R, S\}$ Definisco $G' = \{V', \Gamma, R', S_0\}$

in R' si aggiunge R e $S_0 \to S$

Le seguenti procedure trasformano le regole di R' rendendo G' in CNF

- Per ogni regola $A \to \varepsilon$, si rimuove, e per ogni $B \to uAv$ si aggiunge $B \to uv$
- Per ogni $A \to B$ si rimuove, e per ogni $B \to uv\cdots$ si aggiunge $A \to uv\cdots$
- Per ogni $A \to u_1 u_2 \cdots u_n$ con $u_i \in V \cup \Gamma$ si aggiungono

  $-A \to u_1 A_1$ $\quad -A_1 \to u_2 A_2 \cdots$ $\quad A_{n-2} \to u_{n-1} u_n$

- Per ogni $A \to Bu$ con $B \in V$ e $u \in \Gamma$ si aggiunge

  $A \to BU$ $\quad U \to u$

infine $L(G') = L(G)$ e G e' in CNF.

Dimostro che se $|\omega| = n$ e G (in CNF) la produce, usa al piu' $2n-1$ passi:

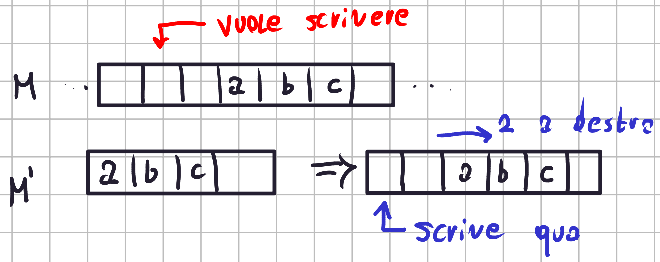
- Caso base: $n = 1$, la regola e' per forza $S \to u$ e usa $2 \cdot 1 - 1 = 1$ passo
- Si assume vero per $|\omega| = n-1$
- Sia ω che richiede $2n-1$ passi, allora $S \to AB$ e A e B insieme

richiedono $2(n-k)-1+2k-1$ passi, per ipotesi, le stringhe di A e B hanno lunghezza $n-k$ e $k \Rightarrow A \to x$, $B \to y$ e $\omega = xy \Rightarrow |\omega| = n-k+k = n$. ∎

2 Calcolabilità 10 Points

- Si consideri una definizione alternativa di macchina di Turing in cui il nastro di lavoro è infinito in entrambe le direzioni. Mostrare formalmente che tale definizione è equivalente a quella data in classe (ovvero, nastro di lavoro infinito in una sola direzione).
- Dimostrare che il linguaggio $A_{TM} = \{\langle M, w\rangle : M \text{ è una TM che accetta } w\}$ è indecidibile. Dimostrare che il linguaggio $\overline{A_{TM}}$ non è Turing-riconoscibile.

Sia M la TM con nastro infinito in entrambe le direzioni, sia M' una TM classica. Questa puo' simulare tranquillamente M, quando M vude scrivere su una zona a sinistra distante K celle dalla prima, M' dovra' spostare a destra di K celle ogni carattere del nastro e scrivere sulla prima cella a sinistra.



Assumo che A_{TM} e' decidibile e H lo decide.

Definisco $D(\langle M\rangle) = \overline{H(\langle M, \langle M\rangle\rangle)} = \overline{M(\langle M\rangle)}$

ipotesi

Allora $D(\langle D\rangle) = \overline{H(\langle D, \langle D\rangle\rangle)} = \overline{D(\langle D\rangle)}$ e' una contraddizione $\Rightarrow$ H non esiste.

Sapendo che

- A_{TM} e' riconoscibile
- A_{TM} e' indecidibile

$\Rightarrow \overline{A_{TM}}$ non e' riconoscibile. ■

3 Complessità 10 Points

- Si consideri il linguaggio $4COL = \{G : G$ è un grafo 4-colorabile$\}$. Mostrare che $4COL \leq_m^p SAT$.
- Enunciare e dimostrare il teorema di gerarchia di spazio. Utilizzare il teorema per mostrare che $PSPACE \subsetneq EXPSPACE$.

Sia $G=(V,E)$ il grafo, $V=\{1,2,\dots,n\}$ definisco $\phi(x_1,x_1',x_2,x_2',\dots x_n,x_n')$ definita come segue $\phi_G = \bigwedge_{(i,j)\in E} \phi_{i,j}$ e $\phi_{i,j} = \overline{(x_i \leftrightarrow x_j)\wedge(x_i' \leftrightarrow x_j')}$

(x_i, x_i') codificano un colore del nodo i e $\phi_{i,j}$ impone che i nodi adiacenti (i,j) abbiano colori diversi. $G \in 4COL \leftrightarrow \phi_G \in SAT$.

Teo di gerarchia di spazio

- Siano $S_1(n)$ e $S_2(n)$ tale che $S_2(n) = \Omega(S_1(n))$, allora $\exists L \in Space(S_2)$ t.c. $L \notin Space(S_1)$.

Dimo: Sia $[\cdot]_{TM}$ una funzione che associa ad una stringa una TM.

Definisco D t.c.

- Su input x, considera $[x]_{TM} = M$
- esegue $M(x)$
- Se termina usando $S_1(n)$ celle, D ritorna il contrario di M.

$L(D) \in Space(S_2)$. Assumo che Q decide $L(D)$ in spazio $S_1(n)$.

Considero x_Q t.c. $[x_Q]_{TM} = Q$

Considero $D(x_Q)$:

- interpreta $[x_Q]_{TM} = Q$
- esegue $Q(x_Q)$
- $Q(x_Q)$ termina usando $S_1(n)$ celle quindi D fa l'opposto

allora $D(x_Q) \neq Q(x_Q) \Rightarrow$ non esiste Q che decide $L(D)$ in $Space(S_1)$. ∎

Essendo $\forall k$ $n^k = \Omega(2^{n^k})$, per il teorema, $\forall k$ esiste $L \in Space(2^{n^k})$ e $L \notin Space(n^k) \Rightarrow PSPACE \subsetneq EXPSPACE$.