$\boxed{5.8}$ Considera l'applicazione $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $T(x) = \begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ 5x_2+x_3 \\ 3x_3 \end{vmatrix}$. Trova $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $T = L_A$ e verifica che T è iniettiva.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad Ker\, L_A = \{\bar{x} \mid \bar{x}A = \bar{0}\} = \left\{\bar{x} \mid x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}1\\5\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} = 0\right\} = \{\bar{0}\} \Rightarrow T \text{ e' iniettiva.}$$

Esercizio 2. Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Scrivere l'espressione di L_A, $L_A\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \ldots$. Determinare la dimensione del nucleo di L_A. Determinare una base per lo spazio immagine.

$$L_A\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) = \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ -2x_2 + 5x_3 \end{cases} \qquad KerL_A = \left\{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 = 0 \\ -2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}\right\} \text{ uso il metodo di Gauss:}$$

$$\text{PASSO 1}: p_1 = 1, \quad -\frac{2}{1} \cdot A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} + A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow A \equiv \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\text{PASSO 2}: p_1 = 2, \quad -\frac{-2}{2} = 1 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} + A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A \equiv \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$KerL_A = \left\{\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases}\right\} = \left\{\alpha_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix}1\\5\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$$= Span\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\5\\0\end{bmatrix}\right)$$ DA COMPLETARE

Esercizio 3. Spiegare perché esiste ed è unica l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1,1,1) = (2,3,2), \quad F(0,1,1) = (1,3,2), \quad F(0,1,-1) = (1,1,-2).$$

(Per ragioni tipografiche scriveremo spesso i vettori di $\mathbb{R}^n$ per righe.) Determinare l'immagine tramite F degli elementi della base canonica: $\underline{e}_1 = (1,0,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0)$, $\underline{e}_3 = (0,0,1)$. (*Suggerimento*: esprimere i vettori della base canonica come combinazioni lineari dei vettori $(1,1,1)$, $(0,1,1)$, $(0,1,-1)$ e applicare la linearità.)

$$e_1 = 1 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$F\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = F\left((-1)\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = -F\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) + F\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\-3\\-2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$F\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = F\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\4\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$$

$$e^3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$F\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = F\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}F\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) - \frac{1}{2}F\left(\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

Esercizio 4. Siano V e W due spazi vettoriali e $T : V \to W$ un'applicazione lineare. Sia $n = \dim V$ e $m = \dim W$.
4.1 Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
se $n > m$ l'applicazione lineare T non può essere iniettiva.
4.2. Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
se $n < m$ l'applicazione lineare T non può essere suriettiva.
Giustificate la vostra risposta.

4.1 Se $\dim W = m$ e $T: V \to W$, allora $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rango}(T) \leq m$, per il teo. della dim. T e' iniettiva $\Leftrightarrow rg(T) = \dim(V) = n$, ma $n > m \geq rg(T) \Rightarrow$ $n > rg(T) \Rightarrow T$ non e' iniettiva.

4.2 Dal punto precedente, si e' visto che $rg(T) \leq m$, per il teo. della dim. T e' suriettiva $\Leftrightarrow rg(T) = \dim(W) = m$, non e' detto a priori che $rg(T) \neq \dim(W)$, quindi la prop. e' falsa.