Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 5
14 Aprile 2023 — Compito n. 00058

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	■	□	■	□	■	■	■	□	■	■	■	☒	■	■	■	□
F	□	■	□	■	□	□	□	■	□	□	□	■	□	□	□	■
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

1A) La funzione $f(x) = 3x^2 - 5x + 6$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.
1B) Esistono intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ su cui la funzione $f(x) = |x-2|$ non è integrabile.
1C) Esistono intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ su cui la funzione $f(x) = \frac{x+5}{x-4}$ non è integrabile.
1D) Esistono intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ su cui la funzione $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ non è integrabile.

$x^2-4=(x-2)(x+2) \to \frac{x^2-4}{x-2} = x+2$

2) Sia

$$F(t) = \int_0^t x\, e^{2x^4}\, dx\,.$$

2A) La funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
2B) Si ha $F'(0) = 0$.
2C) La funzione $F(t)$ è una funzione pari.
2D) La funzione $F(t)$ è decrescente per $t \geq 0$.

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A) La funzione $x^2 \sin(x^3)$ si integra per sostituzione.
3B) La funzione $x^5 \sin(x)$ si integra per parti.
3C) La funzione $x^{11} \sin(x^2)$ si integra per sostituzione prima, e per parti poi.
3D) La funzione $f(x) = x^{12} \arctan(x)$ si integra per parti prima, e per sostituzione poi.

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A) Si ha

$$\int_2^{13} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{13}{2}\right).$$

4B) Si ha

$$\int_{15}^{20} \frac{dx}{x-5} = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

$\ln\left(\frac{20-5}{15-5}\right) = \ln\frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{10}_{2}}$

4C) Si ha

$$\int_{10}^{40} \frac{dx}{4-x} = -\ln(6)\,.$$

$-\int \frac{1}{x-4} =$

$-\ln(x-4)\Big|_{10}^{40}$

$-\ln\left(\frac{36}{6}\right) = -\ln(6)$

4D) Si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{4x-11} = \ln\left(\frac{7}{11}\right).$$

$\frac{1}{4}\int \frac{4}{4x-11} = \frac{1}{4}\Big[\ln(4x-11)\Big]\Big|_0^1$

$\frac{1}{4}\Big[\ln(|-7|) - \ln(-11)\Big] = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{7}{11}\right)$

Docente
□ DelaTorre Pedraza
□ Orsina

Cognome Nome Matricola Compito 00058

5) Calcolare una primitiva delle seguenti funzioni

a1) $x\,\sin(x)$, **a2)** $x^3\,e^x$, **b1)** $x^2\,\ln(x)$, **b2)** $(x^2-3x+3)\,e^x$,

c1) $x\,e^{2\,x}$, **c2)** $x\,\cos(4\,x)$, **d1)** $e^{\sqrt{x}}$, **d2)** $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$,

a1) $\int x\sin x = \left| \begin{matrix} f'(x)=\sin(x) & f(x)=-\cos(x) \\ g(x)=x & g'(x)=1 \end{matrix} \right. \to -x\cos(x)+\int\cos(x) = -x\cos(x)+\sin(x)$

a2) $\int x^3e^x = x^3e^x - 3\int x^2e^x = x^3e^x-3\left[x^2e^x - 2\int xe^x\right] = x^3e^x-3\left[x^2e^x-2\left[xe^x-e^x\right]\right]=$

b1) $\int x^2\ln(x) = \left| \begin{matrix} f'(x)=x^2 & f(x)=\frac{x^3}{3} \\ g(x)=\ln(x) & g'(x)=\frac{1}{x} \end{matrix} \right. \to \frac{x^3}{3}\ln(x)-\int\frac{x^3}{3x} = \frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{1}{3}\int x^2 = \frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{x^3}{9}$

b2) $\int(x^2-3x+3)e^x \Rightarrow x^2-3x+3 = ax^2+x(2a+b)+(b+c)$ $\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=-3 \\ b+c=3 \end{cases}$ $\begin{cases} a=1 \\ 2+b=-3 \\ b+c=3 \end{cases}$ $\begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=3-b \end{cases}$ $\begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=8 \end{cases}$

$= e^x(x^2-5x+8)$

c1) $\int xe^{2x} \to \left| \begin{matrix} y=2x \\ dy=2dx \\ dx=\frac{dy}{2} \end{matrix} \right. \to \int\frac{y}{2}e^y\frac{1}{2}dy = \frac{1}{4}\int ye^ydy = \frac{1}{4}\left[ye^y-e^y\right] = \frac{1}{4}\left[2xe^{2x}-e^{2x}\right] = \frac{2xe^{2x}-e^{2x}}{4}$

c2) $\int x\cos(4x) = \left| \begin{matrix} y=4x \\ dy=4dx \\ dx=\frac{dy}{4} \end{matrix} \right. \to \int\frac{1}{4}y\cos(y)\frac{1}{4}dy = \frac{1}{16}\int y\cos(y)dy = \frac{1}{16}\left[y\sin(y)+\int\sin(y)\right] = \frac{1}{16}\left[+y\sin(y)+\cos(y)\right]$

$= \frac{4x\sin(4x)+\cos(4x)}{16} = \frac{x\sin(4x)}{4}+\frac{\cos(4x)}{16}$

d1) $\int e^{\sqrt{x}} \Rightarrow \left| \begin{matrix} y=\sqrt{x} \\ dy=\frac{1}{2\sqrt{x}}dy \\ dx=2\sqrt{x}\,dy \end{matrix} \right. \to 2\int ye^ydy = 2\left[ye^y-e^y\right] = 2\left[\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x}}\right]$

d2) $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} = \left| \begin{matrix} y=\frac{1}{x} \\ dy=-\frac{1}{x^2}dx \\ dx=-x^2dx \end{matrix} \right. = -\int\frac{e^y}{x^3}x^2dy = -\int\frac{1}{x}\frac{e^y}{1}\frac{1}{x^2}x^2dy = -\int ye^ydy = -(e^yy-e^y) =$

$= -e^yy+e^y = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}+e^{\frac{1}{x}} = \left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

Cognome	Nome	Matricola	Compito 00058

6)

a1) - a2) Trovare una primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 10x + 25}$ e calcolare $\displaystyle\int_6^7 f(x)\,dx$.

b1) - b2) Trovare una primitiva di $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 7x + 12}$ e calcolare $\displaystyle\int_5^6 g(x)\,dx$.

c1) - c2) Trovare una primitiva di $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 8x + 25}$ e calcolare $\displaystyle\int_4^7 h(x)\,dx$.

d1) - d2) Trovare una primitiva di $k(x) = \dfrac{2x - 10}{x^2 - 11x + 28}$ e di $j(x) = \dfrac{x^3}{4 + x^2}$.

---

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-10x+25}$ $\quad x_0, x_1 = \dfrac{10 \pm \sqrt{100-4(25)}}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \to \displaystyle\int \frac{1}{(x-5)^2} = \frac{1}{5-x}$ $\quad \displaystyle\int_6^7 \frac{1}{(x-5)^2} = \frac{1}{5-x}\Big|_6^7 = \frac{1}{5-7} - \frac{1}{5-6} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-7x+12} =$ $\quad \Delta = 49 - 4(12) = 1$ $\quad x_1, x_0 = \dfrac{7 \pm 1}{2} \nearrow 3, \searrow 4$ $\quad \to \ln\left(\left|\dfrac{x-4}{x-3}\right|\right) \to \displaystyle\int_5^6 \frac{1}{x^2-7x+12} = \ln\left(\left|\frac{x-4}{x-3}\right|\right)\Big|_5^6 = \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$

c) $\displaystyle\int_4^7 \frac{1}{x^2-8x+25} =$ $\quad \Delta = 64 - 4(25) = -36$ $\quad \Rightarrow \dfrac{2}{6}\arctan\left(\dfrac{2x-8}{6}\right)\Big|_4^7 = \dfrac{1}{3}\left[\arctan\left(\dfrac{14-8}{6}\right) - \arctan(0)\right] = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$

d) $\displaystyle\int \frac{2x-10}{x^2-11x+28} = \int \frac{2x-11}{x^2-11x+28} + \frac{1}{x^2-11x+28} = \ln\left(\left|x^2-11x+28\right|\right) + \int \frac{1}{x^2-11x+28} = \frac{1}{3}\ln\left(\left|\frac{x-7}{x-4}\right|\right) + \ln\left(\left|x^2-11x+28\right|\right)$

$x_0, x_1 = \dfrac{11 \pm 3}{2} \nearrow 7, \searrow 4$ $\qquad \Delta = 11^2 - 4(28) = 9$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00058**

7) Trovare una primitiva di

a1) $x\,e^{5\,x}$, **a2)** $e^x\,\sin(2\,x)$, **b1)** $\sin^2(5\,x)$, **b2)** $\cos^3(5\,x)$,

c1) $(8x+5)\,e^x$, **c2)** $(7x^2-4x+2)\,e^x$, **d1)** $x^2\,\ln(5\,x)$, **d2)** $12\,x\,\arctan(6\,x)$.

a1) $\int x e^{5x} = \left| \begin{array}{l} y=5x \\ dy=5dx \\ dx=\frac{dy}{5} \end{array}\right. \to \frac{1}{25}\int y e^y = \frac{1}{25}\left[ye^y - e^y\right] = \frac{e^{5x}(5x-1)}{25}$

a2) $\int e^x \sin(2x) = e^x\cos(2x) - \int e^x\cos(2x) = e^x\cos(2x) - \left[-e^x\sin(2x) + \int e^x\sin(2x)\right] = e^x\cos(2x) + e^x\sin(x) - \int e^x\sin(2x)$

$\left| \begin{array}{ll} f'(x)=\sin(x) & \int f = -\cos(x) \\ g(x)=\cos(x) & g'(x) = -\sin(x) \end{array}\right.$

b1) $\int \sin^2(5x) = \left| \begin{array}{l} y=5x \\ dx=\frac{dy}{5} \end{array}\right. = \frac{1}{5}\int \sin^2(y) = \frac{1}{5}\left[-\cos(y)\sin(y) - \int\cos(x)\sin(x)\right] = \frac{1}{5}\left[-\cos(y)\sin(y) - \left[-\cos^2(y) + \int\sin^2(y)\right]\right]$

$\frac{1}{5}\left[-\cos(y)\sin(y) + \cos^2(y) - \int\sin^2(y)\right] = \frac{-\cos(5x)\sin(5x)+\cos^2(5x)}{25} = \int\sin^2(5x)$

$$\int\sin^2(5x) = \frac{-\cos(5x)\sin(5x)+\cos^2(5x)}{25}$$

c1) $\int(8x+5)e^x = \left| \begin{array}{l} f'(x)=e^x \\ g(x)=8x+5 \end{array}\right. = e^x(8x+5) - 8\int e^x = e^x(8x+5) - 8e^x = 8xe^x - 8e^x + 5e^x =$

$= e^x(8x-3)$

c2) $\int(7x^2-4x+2)e^x \quad \begin{cases} a=1 \\ 2a+b=-4 \\ b+c=2 \end{cases} \begin{cases} a=1 \\ 2+b=-4 \\ b+c=2 \end{cases} \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ -6+c=2 \end{cases} \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=8 \end{cases} = (x^2-6x+8)e^x$

d1) $\int x^2\ln(5x) = \left| \begin{array}{l} y=5x \\ \frac{dy}{5}=dx \end{array}\right. = \frac{1}{5}\int x^2\ln(y)\,dy = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{25}\int y^2\ln(y) = \begin{array}{ll} f'(x)=y^2 & f(x)=\frac{y^3}{3} \\ g(x)=\ln(x) & g'(x)=\frac{1}{x} \end{array} \to \frac{1}{125}\left[\ln(y)\frac{y^3}{3} - \int\frac{y^3}{3y}\right] = \frac{1}{125}\left[\ln(y)\frac{y^3}{3} - \frac{y^3}{9}\right] = \frac{y^3(3\ln(y)-1)}{1125}$

$= \frac{(5x)^3(3\ln(5x)-1)}{1125} = \frac{125x^3(3\ln(5x)-1)}{1125} = \frac{x^3(3\ln(5x-1))}{9}$

d2) $\int 12x\arctan(6x) = \left| \begin{array}{l} y=6x \\ \frac{dy}{6}=dx \end{array}\right. \to \frac{1}{3}\int y\arctan(y) \to \left| \begin{array}{ll} f'(x)=y & f(x)=\frac{y^2}{2} \\ g(y)=\arctan(y) & g'(y)=\frac{1}{y^2+1} \end{array}\right. = \frac{1}{3}\left[\frac{\arctan(y)y^2}{2} - \int\frac{y^2}{2y^2+2}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{\arctan(y)y^2}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+\frac{1}{y}}dy\right]$

$\frac{1}{3}\left[\frac{\arctan(y)y^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\int\frac{1}{1+\frac{1}{y}}dy\right]\right] = \left| \begin{array}{l} z=\frac{1}{y} \\ dz=-\frac{1}{y^2}dy \\ dy=-dz\,y^2 \end{array}\right. = \frac{1}{3}\left[\frac{\arctan(y)y^2}{2} + \frac{1}{2}\left[\int\frac{1}{1+z}\frac{1}{z^2}dz\right]\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{\arctan(y)y^2}{2} + \frac{1}{2}\left[\int z^{-2} + \int z^{-3}\right]\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{\arctan(y)y^2}{2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2}\right]\right]$

$\frac{1}{3}\left[\arctan(6x)18x^2 + \frac{1}{2}\left[-y - \frac{y^2}{2}\right]\right] = \frac{1}{3}\left[\arctan(6x)\cdot 18x + \left[-\frac{6x}{2}\right] - \left[\frac{36x}{4}\right]\right] = \frac{\arctan(6x)18x - 3x - 9x}{3} = \arctan(6x)6x^2 - 4x$

Soluzioni del compito 00058

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

1A) La funzione $f(x) = 3x^2 - 5x + 6$ è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

Vero: Dal momento che la funzione $f(x) = 3x^2 - 5x + 6$ è una funzione continua, è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

1B) Esistono intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ su cui la funzione $f(x) = |x - 2|$ non è integrabile.

Falso: Dal momento che la funzione $f(x) = |x - 2|$ è una funzione continua, è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

1C) Esistono intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ su cui la funzione $f(x) = \frac{x+5}{x-4}$ non è integrabile.

Vero: Dal momento che la funzione è illimitata (sia superiormente che inferiormente) in ogni intervallo chiuso e limitato che contenga $x = 4$ al suo interno (ad esempio: l'intervallo $[3, 5]$), la funzione non è integrabile su tali intervalli.

1D) Esistono intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ su cui la funzione $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ non è integrabile.

Falso: Dal momento che $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, si ha, se $x \neq 2$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2\,.$$

Ne consegue che la funzione $f(x)$ coincide, in tutti punti tranne $x = 2$, con la funzione continua $g(x) = x + 2$, che è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$; dunque, anche la funzione $f(x)$ è integrabile su tali intervalli.

---

2) Sia

$$F(t) = \int_0^t x\,\mathrm{e}^{2\,x^4}\,dx\,.$$

2A) La funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.

Vero: Dal momento che la funzione $f(x) = x\,\mathrm{e}^{2\,x^4}$ è una funzione continua, per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $F(t)$ è derivabile, e si ha

$$F'(t) = f(t) = t\,\mathrm{e}^{2\,t^4} \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

2B) Si ha $F'(0) = 0$.

Vero: Dato che $F'(t) = t\,\mathrm{e}^{2\,t^4}$ (si veda la domanda 2A), si ha $F'(0) = 0$.

2C) La funzione $F(t)$ è una funzione pari.

Vero: Dal momento che la funzione $f(x) = x\,\mathrm{e}^{2\,x^4}$ è una funzione dispari, la funzione $F(t)$ è una funzione pari. Infatti,

$$F(-t) = \int_0^{-t} x\,\mathrm{e}^{2\,x^4}\,dx = \left[\begin{array}{c} y = -x \\ dy = -dx \end{array}\right] = -\int_0^t (-y)\,\mathrm{e}^{2\,(-y)^4}\,dy = \int_0^t y\,\mathrm{e}^{2\,y^4}\,dy = F(t)\,.$$

2D) La funzione $F(t)$ è decrescente per $t \geq 0$.

Falso: Dato che $F'(t) = t\,\mathrm{e}^{2\,t^4}$ (si veda la domanda 2A), si ha $F'(t) \geq 0$ per $t \geq 0$, e quindi la funzione $F(t)$ è crescente su tale insieme (e quindi non è decrescente).

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A) La funzione $x^2 \sin(x^3)$ si integra per sostituzione.

Vero: Infatti, definendo $y = x^3$, da cui $dy = 3x^2\,dx$, si ha

$$\int x^2 \sin(x^3)\,dx = \frac{1}{3} \int \sin(y)\,dy\,,$$

che è un integrale immediato.

3B) La funzione $x^5 \sin(x)$ si integra per parti.

Vero: Infatti, derivando il termine polinomiale x^5 e integrando la funzione trigonometrica, si ha

$$\int x^5 \sin(x)\,dx = -x^5 \cos(x) + 5 \int x^4 \cos(x)\,dx\,.$$

Il procedimento continua 4 volte, finché non si arriva ad un integrale immediato (di $\sin(x)$ o di $\cos(x)$).

3C) La funzione $x^{11} \sin(x^2)$ si integra per sostituzione prima, e per parti poi.

Vero: Infatti, definendo $y = x^2$, da cui $dy = 2x\,dx$, si ha

$$\int x^{11} \sin(x^2)\,dx = \int (x^2)^5 \sin(x^2)\,x\,dx = \frac{1}{2} \int y^5 \sin(y)\,dy\,,$$

e l'ultimo integrale si svolge per parti (si veda la domanda 3B).

3D) La funzione $f(x) = x^{12} \arctan(x)$ si integra per parti prima, e per sostituzione poi.

Vero: Infatti, integrando il monomio e derivando l'arcotangente, si ha

$$\int x^{12} \arctan(x)\,dx = \frac{x^{13}}{13} \arctan(x) - \frac{1}{13} \int \frac{x^{13}}{1+x^2}\,dx\,.$$

L'ultimo integrale si svolge per sostituzione, ponendo $y = 1 + x^2$, da cui $dy = 2x\,dx$. Si ha

$$\int \frac{x^{13}}{1+x^2}\,dx = \int \frac{(x^2)^6}{1+x^2}\,x\,dx = \frac{1}{2} \int \frac{(y-1)^6}{y}\,dy\,,$$

e quest'ultimo integrale, dopo aver sviluppato la potenza del binomio, è la somma di 7 integrali immediati.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A) Si ha

$$\int_2^{13} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{13}{2}\right).$$

Vero: Infatti, si ha

$$\int_2^{13} \frac{dx}{x} = \ln(|x|)\Big|_2^{13} = \ln(13) - \ln(2) = \ln\left(\frac{13}{2}\right).$$

4B) Si ha

$$\int_{15}^{20} \frac{dx}{x-5} = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Vero: Infatti,

$$\int_{15}^{20} \frac{dx}{x-5} = \ln(|x-5|)\Big|_{15}^{20} = \ln(15) - \ln(10) = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

4C) Si ha

$$\int_{10}^{40} \frac{dx}{4-x} = -\ln(6).$$

Vero: Infatti,

$$\int_{10}^{40} \frac{dx}{4-x} = -\int_{10}^{40} \frac{dx}{x-4} = -\ln(|x-4|)\Big|_{10}^{40} = -\ln(36) + \ln(6) = -\ln(6).$$

4D) Si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{4\,x-11} = \ln\left(\frac{7}{11}\right).$$

Falso: Infatti, con la sostituzione $y = 4\,x - 11$, da cui $dy = 4\,dx$, si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{4\,x-11} = \frac{1}{4}\int_{-11}^{-7} \frac{dy}{y} = \frac{\ln(|y|)}{4}\Big|_{-11}^{-7} = \frac{\ln(7)-\ln(11)}{4} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{7}{11}\right) \neq \ln\left(\frac{7}{11}\right).$$

5) Calcolare una primitiva delle seguenti funzioni

$$\mathbf{a1})\ x\,\sin(x)\,,\qquad \mathbf{a2})\ x^3\,\mathrm{e}^x\,,\qquad \mathbf{b1})\ x^2\,\ln(x)\,,\qquad \mathbf{b2})\ (x^2-3x+3)\,\mathrm{e}^x\,,$$

$$\mathbf{c1})\ x\,\mathrm{e}^{2\,x}\,,\qquad \mathbf{c2})\ x\,\cos(4\,x)\,,\qquad \mathbf{d1})\ \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,,\qquad \mathbf{d2})\ \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,,$$

Soluzione:

a1) Integriamo per parti, derivando x e integrando $\sin(x)$:

$$\int x\,\sin(x)\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=\sin(x) & \to & f(x)=-\cos(x) \\ g(x)=x & \to & g'(x)=1 \end{array}\right] = -x\,\cos(x) - \int(-\cos(x))\,dx\,,$$

da cui

$$\int x\,\sin(x)\,dx = -x\,\cos(x)+\sin(x)\,.$$

a1) Integriamo per parti, derivando x^3 e integrando e^x:

$$\int x^3\,\mathrm{e}^x\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=\mathrm{e}^x & \to & f(x)=\mathrm{e}^x \\ g(x)=x^3 & \to & g'(x)=3\,x^2 \end{array}\right] = x^3\,\mathrm{e}^x - 3\int x^2\,\mathrm{e}^x\,dx\,.$$

Per l'integrale rimasto, integriamo per parti, derivando x^2 e integrando e^x:

$$\int x^2\,\mathrm{e}^x\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=\mathrm{e}^x & \to & f(x)=\mathrm{e}^x \\ g(x)=x^2 & \to & g'(x)=2\,x \end{array}\right] = x^2\,\mathrm{e}^x - 2\int x\,\mathrm{e}^x\,dx\,.$$

Per l'ultimo integrale, integriamo per parti, derivando x e integrando e^x:

$$\int x\,\mathrm{e}^x\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=\mathrm{e}^x & \to & f(x)=\mathrm{e}^x \\ g(x)=x & \to & g'(x)=1 \end{array}\right] = x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,dx = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\,.$$

Rimettendo insieme i risultati, si ha

$$\int x^3\,\mathrm{e}^x = x^3\,\mathrm{e}^x - 3\,x^2\,\mathrm{e}^x + 6\,x\,\mathrm{e}^x - 6\,\mathrm{e}^x = (x^3-3x^2+6x-6)\,\mathrm{e}^x\,.$$

b1) Integriamo per parti, derivando $\ln(x)$ e integrando x^2:

$$\int x^2\,\ln(x)\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=x^2 & \to & f(x)=\frac{x^3}{3} \\ g(x)=\ln(x) & \to & g'(x)=\frac{1}{x} \end{array}\right] = \frac{x^3\,\ln(x)}{3} - \int\frac{x^3}{3}\,\frac{1}{x}\,dx\,,$$

da cui

$$\int x^2\,\ln(x)\,dx = \frac{x^3\,\ln(x)}{3} - \int\frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3\,\ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{9}\,(3\,\ln(x)-1)\,.$$

b2) Ricordiamo il seguente risultato: se $P(x)$ è un polinomio, allora

$$\int P(x)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio dello stesso grado di $P(x)$ e tale che

$$Q(x)+Q'(x)=P(x)\,.$$

Pertanto,

$$\int(x^2-3x+3)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio di secondo grado tale che

$$Q(x)+Q'(x)=x^2-3x+3\,.$$

Scrivendo $Q(x)=a\,x^2+b\,x+c$, si ha $Q'(x)=2a\,x+b$, da cui

$$Q'(x)+Q(x)=a\,x^2+(2a+b)\,x+(b+c)=x^2-3x+3\,,$$

e quindi,per il principio di identità dei polinomi, deve essere $a = 1$, $2a + b = -3$ e $b + c = 3$, da cui segue $a = 1$, $b = -5$ e $c = 8$. In definitiva,

$$\int (x^2 - 3x + 3)\, e^x\, dx = (x^2 - 5x + 8)\, e^x\,.$$

c1) Sostituiamo $y = 2\,x$, da cui $dy = 2\,dx$; si ha

$$\int x\, e^{2\,x}\, dx = \frac{1}{4} \int y\, e^y\, dy\,.$$

L'ultimo integrale si svolge per parti:

$$\int y\, e^y\, dy = \left[\begin{array}{ccc} f'(x) = e^y & \to & f(x) = e^y \\ g(x) = y & \to & g'(x) = 1 \end{array} \right] = y\, e^y - \int e^y\, dy = (y - 1)\, e^y\,,$$

e quindi

$$\int x\, e^{2\,x}\, dx = \frac{(2\,x - 1)\, e^{2\,x}}{4}\,.$$

c2) Sostituiamo $y = 4\,x$, da cui $dy = 4\,dx$; si ha

$$\int x\, \cos(4\,x)\, dx = \frac{1}{16} \int y\, \cos(y)\, dy\,.$$

L'ultimo integrale si svolge per parti:

$$\int y\, \cos(y)\, dy = \left[\begin{array}{ccc} f'(x) = \cos(y) & \to & f(x) = \sin(y) \\ g(x) = y & \to & g'(x) = 1 \end{array} \right] = y\, \sin(y) - \int \sin(y)\, dy = y\, \sin(y) + \cos(y)\,,$$

e quindi

$$\int x\, \cos(4\,x)\, dx = \frac{4\,x\, \sin(4\,x) + \cos(4\,x)}{16}\,.$$

d1) Sostituiamo $x = y^2$, da cui $dx = 2\,y\,dy$. Pertanto,

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx = 2 \int e^y\, y\, dy\,.$$

Svolgendo l'ultimo integrale per parti, si ha

$$\int y\, e^y\, dy = \left[\begin{array}{ccc} f'(x) = e^y & \to & f(x) = e^y \\ g(x) = y & \to & g'(x) = 1 \end{array} \right] = y\, e^y - \int e^y\, dy = (y - 1)\, e^y\,,$$

da cui segue che

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx = 2\,(\sqrt{x} - 1)\, e^{\sqrt{x}}\,.$$

d2) Sostituiamo $y = \frac{1}{x}$, da cui $dy = -\frac{dx}{x^2}$. Pertanto,

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\, dx = \int \frac{e^{\frac{1}{y}}}{x}\, \frac{dx}{x^2} = -\int y\, e^y\, dy\,.$$

Svolgendo l'ultimo integrale per parti, come nell'esercizio **d1)**, si ha

$$\int y\, e^y\, dy = (y - 1)\, e^y\,,$$

da cui segue che

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\, dx = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}\,.$$

6)

a1) - a2) Trovare una primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 10x + 25}$ e calcolare $\displaystyle\int_6^7 f(x)\,dx$.

b1) - b2) Trovare una primitiva di $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 7x + 12}$ e calcolare $\displaystyle\int_5^6 g(x)\,dx$.

c1) - c2) Trovare una primitiva di $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 8x + 25}$ e calcolare $\displaystyle\int_4^7 h(x)\,dx$.

d1) - d2) Trovare una primitiva di $k(x) = \dfrac{2x - 10}{x^2 - 11x + 28}$ e di $j(x) = \dfrac{x^3}{4 + x^2}$.

Soluzione:

a1) - a2) Osserviamo che si ha $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$. Pertanto,

$$\int \frac{dx}{x^2 - 10x + 25} = \int \frac{dx}{(x-5)^2} = -\frac{1}{x-5},$$

e quindi

$$\int_6^7 \frac{dx}{x^2 - 10x + 25} = -\frac{1}{x-5}\Big|_6^7 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

b1) - b2) Osserviamo che si ha $x^2 - 7x + 12 = (x-4)\,(x-3)$. Cerchiamo dunque A e B tali che

$$\frac{1}{(x-4)\,(x-3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-3}.$$

Moltiplicando una volta per $x - 4$ e una volta per $x - 3$ si ottiene

$$\frac{1}{x-3} = A + B\,\frac{x-4}{x-3} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x-4} = A\,\frac{x-3}{x-4} + B.$$

Scegliendo $x = 4$ nella prima e $x = 3$ nella seconda, si trova $A = \frac{1}{1} = -B$, cosicché

$$\frac{1}{x^2 - 7x + 12} = \frac{1}{(x-4)\,(x-3)} = \frac{1}{1\,(x-4)} - \frac{1}{1\,(x-3)},$$

da cui segue che

$$\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 12} = \int \left[\frac{1}{1\,(x-4)} - \frac{1}{1\,(x-3)}\right] dx = \frac{\ln(|x-4|) - \ln(|x-3|)}{1} = \frac{1}{1}\,\ln\left(\left|\frac{x-4}{x-3}\right|\right).$$

Pertanto,

$$\int_5^6 \frac{dx}{x^2 - 7x + 12} = \frac{1}{1}\,\ln\left(\left|\frac{x-4}{x-3}\right|\right)\Big|_5^6 = \frac{1}{1}\left[\ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{1}\,\ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

c1) - c2) Osserviamo che si ha $x^2 - 8x + 25 = (x-4)^2 + 9$. Possiamo allora scrivere

$$x^2 - 8x + 25 = 9\left[1 + \left(\frac{x-4}{3}\right)^2\right],$$

e quindi si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 25} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x-4}{3}\right)^2}.$$

Con la sostituzione $y = \frac{x-4}{3}$, da cui $dy = \frac{dx}{3}$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 25} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{3}\,\arctan(y) = \frac{1}{3}\,\arctan\left(\frac{x-4}{3}\right).$$

Si ha pertanto

$$\int_4^7 \frac{dx}{x^2 - 8x + 25} = \frac{1}{3}\,\arctan\left(\frac{x-4}{3}\right)\Big|_4^7 = \frac{\arctan(1) - \arctan(0)}{3} = \frac{\pi}{12}.$$

d1) Osserviamo che si ha
$$\frac{2x-10}{x^2-11x+28} = \frac{2x-11}{x^2-11x+28} + \frac{1}{x^2-11x+28}\,.$$
Dal momento che al numeratore compare la derivata del denominatore, si ha
$$\int \frac{2x-11}{x^2-11x+28}\,dx = \ln(|x^2-11x+28|)\,.$$
Per calcolare il secondo integrale, osserviamo che si ha $x^2-11x+28 = (x-7)\,(x-4)$. Con conti analoghi a quelli visti nello svolgimento dell'esercizio **b1) - b2)** si ha che
$$\frac{1}{x^2-11x+28} = \frac{1}{(x-7)\,(x-4)} = \frac{1}{3\,(x-7)} - \frac{1}{3\,(x-4)}\,,$$
cosicché
$$\int \frac{dx}{x^2-11x+28} = \int \left[\frac{1}{3\,(x-7)} - \frac{1}{3\,(x-4)}\right] dx = \frac{1}{3}\,\ln\left(\left|\frac{x-7}{x-4}\right|\right).$$
Mettendo insieme i risultati trovati, si ha
$$\int \frac{2x-10}{x^2-11x+28} = \ln(|x^2-11x+28|) + \frac{1}{3}\,\ln\left(\left|\frac{x-7}{x-4}\right|\right).$$

d2) Scriviamo
$$\frac{x^3}{4+x^2} = \frac{x^3+4\,x-4\,x}{4+x^2} = x - \frac{4\,x}{4+x^2}\,.$$
Abbiamo quindi
$$\int \frac{x^3}{4+x^2}\,dx = \int \left[x - \frac{4\,x}{4+x^2}\right] dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{4\,x}{4+x^2}\,dx\,.$$
Per calcolare l'ultimo integrale, poniamo $y = 4+x^2$, da cui $dy = 2x\,dx$, e otteniamo
$$\int \frac{4\,x}{4+x^2}\,dx = \int \frac{2\,dy}{y} = 2\,\ln(|y|) = 2\,\ln(x^2+4)\,,$$
dove si è tolto il modulo dato che la funzione x^2+4 è positiva. In definitiva,
$$\int \frac{x^3}{4+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - 2\,\ln(x^2+4)\,.$$

7) Trovare una primitiva di

$$\textbf{a1)}\ x\,e^{5\,x}\,,\qquad \textbf{a2)}\ e^x\,\sin(2\,x)\,,\qquad \textbf{b1)}\ \sin^2(5\,x)\,,\qquad \textbf{b2)}\ \cos^3(5\,x)\,,$$

$$\textbf{c1)}\ (8x+5)\,e^x\,,\qquad \textbf{c2)}\ (7x^2-4x+2)\,e^x\,,\qquad \textbf{d1)}\ x^2\,\ln(5\,x)\,,\qquad \textbf{d2)}\ 12\,x\,\arctan(6\,x)\,.$$

Soluzione:

a1) Integriamo per parti, derivando x e integrando $e^{5\,x}$. Si ha

$$\int x\,e^{5\,x}\,dx = \frac{x}{5}\,e^{5\,x} - \frac{1}{5}\int e^{5\,x}\,dx = \frac{x}{5}\,e^{5\,x} - \frac{1}{25}\,e^{5\,x} = \frac{5\,x-1}{25}\,e^{5\,x}\,.$$

a2) Integriamo per parti, derivando $\sin(2\,x)$ e integrando l'esponenziale. Si ha

$$\int e^x\,\sin(2\,x)\,dx = e^x\,\sin(2\,x) - 2\int e^x\,\cos(2\,x)\,dx\,.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, operiamo per parti, derivando $\cos(2\,x)$ e integrando l'esponenziale. Si ha

$$\int e^x\,\cos(2\,x)\,dx = e^x\,\cos(2\,x) + 2\int e^x\,\sin(2\,x)\,dx\,.$$

Mettendo insieme i risultati, si ha

$$\int e^x\,\sin(2\,x)\,dx = e^x\,[\sin(2\,x) - 2\,\cos(2\,x)] - 4\int e^x\,\sin(2\,x)\,dx\,,$$

da cui si ricava (portando l'integrale a secondo membro a sinistra)

$$\int e^x\,\sin(2\,x)\,dx = \frac{e^x}{5}[\sin(2\,x) - 2\,\cos(2\,x)]\,.$$

b1) Integriamo per parti, derivando e integrando $\sin(5\,x)$. Si ha

$$\int \sin^2(5\,x)\,dx = \int \sin(5\,x)\,\sin(5\,x)\,dx = -\frac{1}{5}\,\sin(5\,x)\,\cos(5\,x) + \int \cos^2(5\,x)\,dx\,.$$

Ora si ha

$$\int \cos^2(5\,x)\,dx = \int [1-\sin^2(5\,x)]\,dx = x - \int \sin^2(5\,x)\,dx\,.$$

Si ha dunque

$$\int \sin^2(5\,x)\,dx = -\frac{1}{5}\,\sin(5\,x)\,\cos(5\,x) + x - \int \sin^2(5\,x)\,dx\,.$$

Portando a sinistra una parte dell'integrale a destra si ottiene

$$2\int \sin^2(5\,x)\,dx = -\frac{1}{5}\,\sin(5\,x)\,\cos(5\,x) + x\,,$$

da cui segue che

$$\int \sin^2(5\,x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{10}\,\sin(5\,x)\,\cos(5\,x)\,.$$

b2) Osserviamo che si ha

$$\cos^3(5\,x) = \cos^2(5\,x)\,\cos(5\,x) = [1-\sin^2(5\,x)]\,\cos(5\,x)\,.$$

Pertanto, con la sostituzione $y = \sin(5\,x)$, da cui $dy = 5\,\cos(5\,x)\,dx$, si ha

$$\int \cos^3(5\,x)\,dx = \int [1-\sin^2(5\,x)]\,\cos(5\,x)\,dx = \frac{1}{5}\int (1-y^2)\,dy = \frac{1}{5}\left[y - \frac{y^3}{3}\right],$$

e quindi

$$\int \cos^3(5\,x)\,dx = \frac{\sin(5\,x)}{5} - \frac{\sin^3(5\,x)}{15}\,.$$

c1) Integriamo per parti, derivando il binomio e integrando l'esponenziale. Si ha

$$\int (8x+5)\,\mathrm{e}^x\,dx = (8x+5)\,\mathrm{e}^x - 8\int \mathrm{e}^x\,dx = (8x-3)\,\mathrm{e}^x\,.$$

c2) Sappiamo che si ha

$$\int (7x^2-4x+2)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio di secondo grado tale che $Q(x)+Q'(x) = 7x^2-4x+2$. Se $Q(x) = a\,x^2+b\,x+c$ è un generico polinomio di secondo grado, si ha

$$Q(x)+Q'(x) = a\,x^2+(2a+b)\,x+(b+c)\,,$$

e imponendo che si abbia $Q(x)+Q'(x) = 7x^2-4x+2$ si ha che deve essere

$$a = 7\,,\qquad 2a+b = -4\,,\qquad b+c = 2\,,$$

da cui si ricava facilmente che

$$a = 7\,,\qquad b = -18\,,\qquad c = 20\,,$$

e quindi

$$\int (7x^2-4x+2)\,\mathrm{e}^x\,dx = (7x^2-18x+20)\,\mathrm{e}^x\,.$$

d1) Integriamo per parti, derivando il logaritmo e integrando x^2. Si ha

$$\int x^2\,\ln(5\,x)\,dx = \frac{x^3}{3}\,\ln(5\,x) - \frac{1}{3}\int x^3\,\frac{5}{5\,x}\,dx = \frac{x^3}{3}\,\ln(5\,x) - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{9}[3\,\ln(5\,x)-1]\,.$$

d2) Integriamo per parti, integrando il monomio e derivando l'arcotangente. Si ha

$$\int 12\,x\,\arctan(6\,x)\,dx = 6\,x^2\,\arctan(6\,x) - \int \frac{36\,x^2}{1+36\,x^2}\,dx\,.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, aggiungiamo e togliamo 1 al numeratore:

$$\int \frac{36\,x^2}{1+36\,x^2}\,dx = \int \frac{1+36\,x^2-1}{1+36\,x^2}\,dx = \int \left[1-\frac{1}{1+36\,x^2}\right]dx = x - \int \frac{dx}{1+36\,x^2}\,.$$

L'ultimo integrale si calcola ponendo $y = 6\,x$, da cui $dy = 6\,dx$ per ottenere

$$\int \frac{dx}{1+36\,x^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\arctan(y)}{6} = \frac{\arctan(6\,x)}{6}\,.$$

In definitiva, si ha

$$\int 12\,x\,\arctan(6\,x)\,dx = 6\,x^2\,\arctan(6\,x) - x + \frac{\arctan(6\,x)}{6}\,.$$