Confronti e stime asintodiche

Prendiamo due successioni ;

$$\{a_n\}\, n \in \mathbb{N} \qquad e \qquad \{b_n\}\, n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} b^n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \begin{cases} 0 \;\; \{a_n\} \text{ è } un\ infinito\ di\ ordine\ inferiore\ a\ \{b_n\} \\ \infty \;\; \{a_n\} \text{ è } un\ infinito\ di\ ordine\ superiore\ a\ \{b_n\} \\ \quad l \in \mathbb{R}; \boldsymbol{l \neq 0}\ \{a_n\} \text{ è } dello\ stesso\ ordine\ di\ \{b_n\} \end{cases}$$

Analogamente per gli infinitesimali :

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} b^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \begin{cases} 0 \;\; \{a_n\} \text{ è } un\ infinito\ di\ ordine\ superiore\ a\ \{b_n\} \\ \infty \;\; \{a_n\} \text{ è } un\ infinito\ di\ ordine\ inferiore\ a\ \{b_n\} \\ \quad l \in \mathbb{R}; \boldsymbol{l \neq 0}\ \{a_n\} \text{ è } dello\ stesso\ ordine\ di\ \{b_n\} \end{cases}$$

Se $a_n = n^\alpha \;\; e \;\; b_n = n^\beta \quad con \;\; \alpha, \beta > 0$ allora:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{n^\beta} = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-\beta} = \begin{cases} \infty & se \;\; \alpha-\beta > 0 \\ 0 & se \;\; \alpha-\beta < 0 \\ 1 & se \;\; \alpha-\beta = 0 \end{cases}$$

Esempio:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+\sqrt{n}-n}{n^4+n^2+n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n^3}-\frac{n}{n^3}\right)}{n^4\left(1+\frac{n^2}{n^4}-\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^4}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^4} = 0$$

<u>Raccogliamo gli esponenti più grandi</u>

Osservazione :

$$2^x \geq x \quad \forall x \geq 0$$

$$2^x = (1+1)^x \geq (1+x) > x \quad non\ \grave{e}\ verificato$$
$$Ma\ considerando\ ci\grave{o}: [x] \leq x \leq [x]+1\ dove\ [x] \in \mathbb{N}$$

$$constatiamo\ che\ 2^x = (1+1)^x \geq (1+1)^{[x]} \geq 1+[x] \geq x$$

Un limite da sapere è :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} = 0 \qquad b > 1$$
$$Dimostrazione:$$
$$\frac{b^n}{n!} = \frac{b*b*b*b\ldots}{1*2*3\ldots*n} = \frac{b*b*b*b\ldots}{1*2*3\ldots*[b]} =$$

**Dimostrazione non completa*

Limiti di funzioni

Definizione : sia $x_0 \in I$ intervallo di $\mathbb{R}$, sia $l \in \mathbb{R}$

$$\cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}\ sia\ f: I\ \ \{x_0\} \to \mathbb{R}$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x) = l\ se\ \forall\ successione\ \{x_n\}\ che\ verifica\ \ x_n \in I\{x_0\}$$
$$si\ ha\ che\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$$

<u>Teorema</u> : Unicità dei limiti

Se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad con\ x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ e $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

$$si\ ha\ l_1 \neq l_2\ e\ \lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \quad e$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2\ \ se\ \{x_n\}\ t.c.\ \ x_n \to x_0$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)\ sarebbe\ uguale\ a\ l_1\ ed\ a\ \ l_2\ che\ \grave{e}\ assurdo$$