Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 9
19 Maggio 2023 — Compito n. 00021

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: Marco

Cognome: Rossi

Matricola: 2 0 4 6 2 1 2

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	■	■	□	■	□	■	□	■	■	■	□	■	□	□	□	■
F	□	□	■	□	■	□	■	□	□	□	■	□	■	■	■	□
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 5\,y'(t) + 7\,y(t) = 0\,.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.
1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(7) = 5$.
1C) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(6) = 8$ e $y'(6) = 8$.
1D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che

$$y(5) = 4\,,\ y'(5) = 7\,,\ y''(5) = 69\,.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \qquad y''(t) - 14\,y'(t) + 45\,y(t) = 180\,.$$

2A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + 14L + 45$.
2B) La funzione $y_0(t) = 8\,e^{5\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).
2C) La funzione $\overline{y}(t) = 5$ è una soluzione particolare di (1).
2D) Se $y(0) = 4$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y(t) + B\,y(t) = 0\,, \quad A\,,B \in \mathbb{R}\,.$$

3A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + A\,L + B$.
3B) Se $A = 0$ e $B = -25$, la funzione $y(t) = 6\,e^{5\,t} - 7\,e^{-5\,t}$ è soluzione dell'equazione.
3C) Se $A = -4$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 2$ non è soluzione dell'equazione.
3D) Se $A = -12$ e $B = 85$, la funzione $y(t) = 3\,e^{6\,t}\,\sin(7\,t)$ è soluzione dell'equazione.

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 7\,y'(t) = -21\,.$$

4A) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C\,e^{7\,t}$.
4B) Esistono soluzioni costanti dell'equazione.
4C) La funzione $\overline{y}(t) = 3\,t$ non è soluzione dell'equazione.
4D) Se $y(0) = 6$ e $y'(0) = 3$, la soluzione dell'equazione è un polinomio di primo grado.

Docente
□ DelaTorre Pedraza
□ Orsina

Cognome Nome Matricola Compito 00021

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \qquad y''(t) - 17\,y'(t) + 70\,y(t) = -3\,e^{7\,t}\,.$$

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
c) Trovare una soluzione particolare di (1).
d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

(a) $p(\lambda) \to \lambda^2 - 17\lambda + 70 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289-280}}{2} = \frac{17 \pm 3}{2} \begin{cases} 7 \\ 10 \end{cases}$

(b) $y_0(t) = Ce^{7t} + De^{10t}$

(c) cerco $\bar{y}(t) = Qte^{7t}$

$y'(t) = Qe^{7t} + 7Qte^{7t}$

$y''(t) = 7Qe^{7t} + 7Qe^{7t} + 49Qte^{7t} = 14Qe^{7t} + 49Qte^{7t}$

$14Qe^{7t} + 49Qte^{7t} - 17Qe^{7t} - 119Qte^{7t} + 70Qte^{7t} = -3e^{7t}$

$-3Qe^{7t} = -3e^{7t} \to Q = 1$

$\bar{y}(t) = te^{7t}$

(d) $y(t) = e^{7t}(C+t) + De^{10t}$

$y(0) = C + D = 0 \to C = -D$

$y'(t) = 7e^{7t}(C+t) + e^{7t} + 10De^{10t}$

$y'(0) = 7C + 1 + 10D = 1$

$y'(0) = -7D + 10D = 0$

$3D = 0$

$y(t) = te^{7t}$

☐☐☐☐☐☐☐☐	**Cognome**	**Nome**	**Matricola**	**Compito 00021**

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 16\,y'(t) + 64\,y(t) = 2\,e^{8\,t}\,. \qquad (1)$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
b) Si trovi una soluzione particolare di (1).
c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 7$.
d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 5$ e $y'(0) = 0$.

---

a) $P(\lambda) = \lambda^2 - 16\lambda + 64 = 0 \qquad y_0(t) = (C + Dt)e^{8t}$

b) $\bar{y}(t) = at^2e^{8t}$

$\bar{y}'(t) = 2ate^{8t} + 8at^2e^{8t}$

$y''(t) = 32ate^{8t} + 64at^2e^{8t} + 2ae^{8t}$

$\cancel{32ate^{8t}} + \cancel{64at^2e^{8t}} + 2ae^{8t} - \cancel{32ate^{8t}} - \cancel{128at^2e^{8t}} + \cancel{64at^2e^{8t}} = 2e^{8t}$

$2ae^{8t} = 2e^{8t} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \bar{y}(t) = t^2e^{8t}$

$y(t) = (t^2 + Dt + C)e^{8t}$

$y'(t) = (2t + D)e^{8t} + (t^2 + Dt + C)8e^{8t}$

c)

$y(0) = 0 \to 0 = (0 + 0 + C)1 \to C = 0$

$y'(0) = 7 \to 7 = D + 8C \to 7 = D$

$y(t) = (t^2 + 7t)e^{8t}$

d)

$y(0) = 5 \to C = 5$

$y'(0) = 0 \to 0 = D + 8C \to 0 = D + 40 \to D = -40$

$y(t) = (t^2 - 40t + 5)e^{8t}$

Soluzioni del compito 00021

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 5\,y'(t) + 7\,y(t) = 0\,.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.

Vero: Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali.

1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(7) = 5$.

Vero: L'equazione ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali. Assegnando una sola condizione, si "fissa" uno solo dei due parametri, e quindi l'equazione ha infinite soluzioni tali che $y(7) = 5$.

1C) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(6) = 8$ e $y'(6) = 8$.

Falso: Assegnando due condizioni, una sulla funzione e una sulla derivata, si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione.

1D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che

$$y(5) = 4\,,\ y'(5) = 7\,,\ y''(5) = 69\,.$$

Vero: Se $y(5) = 4$ e $y'(5) = 7$, dall'equazione segue che deve essere

$$0 = y''(5) + 5\,y'(5) + 7\,y(5) = y''(5) + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 7 = y''(5) + 69\,,$$

da cui segue che $y''(5) = -69$. Pertanto, l'unica soluzione dell'equazione che soddisfa le condizioni $y(5) = 4$ e $y'(5) = 7$ è tale che $y''(5) = -69 \neq 69$; in altre parole, non esistono soluzioni dell'equazione che soddisfano le tre condizioni richieste.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 14\,y'(t) + 45\,y(t) = 180\,. \tag{1}$$

2A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + 14L + 45$.

Falso: Sostituendo y'' con L^2, y' con L e y con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 - 14L + 45 \neq L^2 + 14L + 45\,.$$

2B) La funzione $y_0(t) = 8\,\mathrm{e}^{5\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

Vero: Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 14L + 45$, che si annulla per $L_1 = 5$ e $L_2 = 9$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{5\,t} + D\,\mathrm{e}^{9\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 8$ e $D = 0$, si ha che $y_0(t) = 8\,\mathrm{e}^{5\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).
Alternativamente, se $y_1(t) = \mathrm{e}^{5\,t}$ si ha, derivando,

$$y_1'(t) = 5\,\mathrm{e}^{5\,t}\,, \qquad y_1''(t) = 25\,\mathrm{e}^{5\,t}\,,$$

e, sostituendo nell'equazione,

$$y_1''(t) - 14\,y_1'(t) + 45\,y_1(t) = [25 - 14 \cdot 5 + 45]\,\mathrm{e}^{5\,t} = 0 \cdot \mathrm{e}^{5\,t} = 0\,,$$

e quindi $y_1(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1). Dato che tale equazione è lineare, anche $y_0(t) = 8\,y_1(t)$ è soluzione dell'omogenea.

2C) La funzione $\overline{y}(t) = 5$ è una soluzione particolare di (1).

Falso: Sostituendo nell'equazione si ha, essendo nulle sia la derivata prima che la derivata seconda di $\overline{y}(t)$,

$$y'' - 14\,y' + 45\,y = 45 \cdot 5 = 225 \neq 180\,,$$

e quindi $\overline{y}(t) = 5$ non è una soluzione particolare di (1). Cercando una soluzione particolare della forma $y(t) \equiv Q$ si vede facilmente che deve essere $Q = 4$.

2D) Se $y(0) = 4$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

Vero: Come detto nell'esercizio **2C**, la funzione $y(t) \equiv 4$ è soluzione dell'equazione (1). Dato che soddisfa inoltre le condizioni $y(0) = 4$ e $y'(0) = 0$, la funzione $y(t) \equiv 4$ è soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale del secondo ordine, e quindi è l'unica soluzione di (1) che soddisfa tali condizioni.

---

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y(t) + B\,y(t) = 0\,, \quad A\,, B \in \mathbb{R}\,.$$

3A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + A\,L + B$.

Vero: Sostituendo y'' con L^2, y' con L e y con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 + A\,L + B\,.$$

3B) Se $A = 0$ e $B = -25$, la funzione $y(t) = 6\,e^{5\,t} - 7\,e^{-5\,t}$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $A = 0$ e $B = -25$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 25$ che si annulla per $L = \pm 5$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C\,e^{5\,t} + D\,e^{-5\,t}\,.$$

Scegliendo $C = 6$ e $D = -7$, si ha che $y(t) = 6\,e^{5\,t} - 7\,e^{-5\,t}$ è soluzione dell'equazione.

3C) Se $A = -4$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 2$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $A = -4$ e $B = 0$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 4\,L$ che si annulla per $L = 0$ e per $L = 4$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C\,e^{0\,t} + D\,e^{4\,t} = C + D\,e^{4\,t}\,.$$

Scegliendo $C = 2$ e $D = 0$, si ha che $y(t) = 2$ è soluzione dell'equazione.

3D) Se $A = -12$ e $B = 85$, la funzione $y(t) = 3\,e^{6\,t}\,\sin(7\,t)$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $A = -12$ e $B = 85$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 12\,L + 85$, che si annulla per $L = 6 \pm 7\,i$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = e^{6\,t}[C\,\cos(7\,t) + D\,\sin(7\,t)]\,.$$

Scegliendo $C = 0$ e $D = 3$, si ha che $y(t) = 3\,e^{6\,t}\,\sin(7\,t)$ è soluzione dell'equazione.

---

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 7\,y'(t) = -21\,.$$

4A) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C\,e^{7\,t}$.

Falso: Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 7\,L$, che si annulla per $L = 0$ e $L = 7$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C\,e^{0\cdot t} + D\,e^{7\,t} = C + D\,e^{7\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Pertanto, non tutte le soluzioni dell'omogenea associata sono date da $y_0(t) = C\,e^{7\,t}$: mancano le soluzioni costanti.

4B) Esistono soluzioni costanti dell'equazione.

Falso: Se $y(t) \equiv Q$ è una costante, sostituendo nell'equazione si ha

$$y''(t) - 7\,y'(t) = 0 - 7\cdot 0 = 0 \neq -21\,,$$

e quindi l'equazione non ha soluzioni costanti. Alternativamente, sappiamo dalla domanda **4A** che le costanti sono soluzioni dell'equazione omogenea, e quindi non possono essere soluzioni dell'equazione "completa".

4C) La funzione $\overline{y}(t) = 3\,t$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $\overline{y}(t) = 3\,t$, si ha $\overline{y}'(t) = 3$ e $\overline{y}''(t) = 0$. Sostituendo nell'equazione si ha

$$\overline{y}''(t) - 7\,\overline{y}'(t) = -7\cdot 3 = -21\,,$$

e quindi $\overline{y}(t) = 3\,t$ è soluzione dell'equazione.

4D) Se $y(0) = 6$ e $y'(0) = 3$, la soluzione dell'equazione è un polinomio di primo grado.

Vero: Sappiamo già, dagli esercizi **4A** e **4C**, che tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C + D\,e^{7\,t} + 3\,t\,,$$

con C e D numeri reali. Pertanto,

$$y'(t) = 7\,D\,e^{6\,t} + 3\,.$$

Pertanto, assegnando le condizioni iniziali, si ha

$$6 = C + D\,, \qquad 3 = 7\,D + 3\,.$$

Dalla seconda si ricava $D = 0$, e sostituendo nella prima si ricava $C = 6$. Ne segue che l'unica soluzione dell'equazione è

$$y(t) = 6 + 3\,t\,,$$

che è un polinomio di primo grado.

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 17\, y'(t) + 70\, y(t) = -3\, e^{7\,t}\,. \tag{1}$$

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
c) Trovare una soluzione particolare di (1).
d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Soluzione:
a) Sostituendo in (1) L^2 a y'', L a y' e 1 a y, si trova

$$P(L) = L^2 - 17\, L + 70\,,$$

che si annulla per $L_1 = 7$ e per $L_2 = 10$.

b) Usando le radici del polinomio caratteristico calcolate al punto precedente, abbiamo che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1) sono date da

$$y_0(t) = C\, e^{7\,t} + D\, e^{10\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

c) Dato che $g(t) = e^{7\,t}$ è una soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\overline{y}(t) = Q\, t\, e^{7\,t}\,.$$

Si ha

$$\overline{y}'(t) = Q\,(1 + 7\,t)\, e^{7\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = Q\,(14 + 49\,t)\, e^{7\,t}\,.$$

Sostituendo in (1) si ha

$$\overline{y}'' - 17\,\overline{y} + 70\,\overline{y} = Q\, e^{7\,t}\,[14 + 49\,t - 17\,(1 + 7\,t) + 70\,t] = -3\,Q\, e^{7\,t}\,,$$

e quindi $\overline{y}(t)$ è soluzione di (1) se Q è tale che

$$-3\,Q\, e^{7\,t} = -3\, e^{7\,t}\,,$$

da cui segue $Q = 1$ e quindi

$$\overline{y}(t) = t\, e^{7\,t}\,.$$

d) Da **b)** e **c)** abbiamo che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C\, e^{7\,t} + D\, e^{10\,t} + t\, e^{7\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Dato che

$$y'(t) = 7\,C\, e^{7\,t} + 10\,D\, e^{10\,t} + e^{7\,t} + 7\,t\, e^{7\,t}\,,$$

si ha $y(0) = C + D$ e $y'(0) = 7\,C + 10\,D + 1$. Imponendo le condizioni iniziali, si ha che deve essere $C + D = 0$ e $7\,C + 10\,D + 1 = 1$, da cui si ricava facilmente $C = D = 0$. Ne segue che l'unica soluzione di (1) che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ è

$$y(t) = t\, e^{7\,t}\,.$$

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 16\,y'(t) + 64\,y(t) = 2\,e^{8\,t}\,. \tag{1}$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
b) Si trovi una soluzione particolare di (1).
c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 7$.
d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 5$ e $y'(0) = 0$.

Soluzione:
a) Il polinomio caratteristico è $P(L) = L^2 - 16\,L + 64$, che si annulla per $L_1 = L_2 = 8$. Conseguentemente, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata ad (1) sono date da

$$y_0(t) = (C + D\,t)\,e^{8\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

b) Dato che sia $e^{8\,t}$ che $t\,e^{8\,t}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare di (1) della forma

$$\overline{y}(t) = Q\,t^2\,e^{8\,t}\,.$$

Derivando, si ha

$$\overline{y}'(t) = Q\,(2t + 8\,t^2)\,e^{8\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = Q\,(2 + 32\,t + 64\,t^2)\,e^{8\,t}\,.$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$\overline{y}'' - 16\,\overline{y}' + 64\,\overline{y}(t) = Q\,e^{8\,t}\,[2 + 32\,t + 64\,t^2 - 16\,(2t + 8\,t^2) + 64\,t^2] = 2\,Q\,e^{8\,t}\,,$$

da cui segue che $\overline{y}(t)$ è soluzione di (1) se $Q = 1$. Si ha dunque che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = (C + D\,t + t^2)\,e^{8\,t}\,,$$

da cui segue, derivando, che

$$y'(t) = (8\,C + D + (8\,D + 2)\,t + 8\,t^2)\,e^{8\,t}\,.$$

Pertanto

$$y(0) = C\,, \qquad y'(0) = 8\,C + D\,. \tag{2}$$

c) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 0$ e $8\,C + D = 7$, da cui $C = 0$ e $D = 7$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (7\,t + t^2)\,e^{8\,t}\,.$$

d) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 5$ e $8\,C + D = 0$, da cui $D = -40$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (5 - 40\,t + t^2)\,e^{8\,t}\,.$$