Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Abbiamo visto nel compito del 20/11 che questi 3 vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$ in questa nuova base di $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$ risolvo il sistema $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$ Applico Gauss

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} A_2 - 2A_1 \\ A_3 - 2A_1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} A_2 \leftrightarrow A_3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} A_3 - \frac{5}{7}A_2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & -3/7 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -7\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\frac{3}{7}\alpha_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -7\alpha_2 - 2 \cdot 7/3 = 0 \\ \alpha_3 = -7/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -7\alpha_2 = \frac{14}{3} \\ \alpha_3 = -7/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = -\frac{14}{3} \cdot \frac{1}{7} = -\frac{2}{3} \\ \alpha_3 = -7/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{7}{3} + \frac{6}{3} = -\frac{1}{3} \\ \alpha_2 = -\frac{2}{3} \\ \alpha_3 = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si consideri il sottoinsieme

$$W := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

Verificare che W è un sottospazio, trovarne la dimensione e determinarne una base.

$(a+b+c)+(a'+b'+c') = \underline{a+b+c} + \underline{a'+b'+c'} =$ IPOTESI $= \underline{0} + \underline{0} = 0$ una base e' $\left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix} \right\}$ ha dim. 1.

Esercizio 3. Consideriamo $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ i sottospazi di $M_{nn}(\mathbb{R})$ costituiti rispettivamente dalle matrici simmetriche e antisimmetriche.
Dimostrare che

$$M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$$

Suggerimento: per dimostrare che $M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ osservate che se $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ allora $A = \frac{A+A^t}{2} + \frac{A-A^t}{2}$.

Come prima cosa, so che una matrice A puo' essere scritta nella forma $\frac{A+A^t}{2} + \frac{A-A^t}{2}$ dato che : $\forall a_{ij} = \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2} + \frac{a_{ij}-a_{ji}}{2} = \frac{2a_{ij}+a_{ji}-a_{ji}}{2} = a_{ij}$

inoltre, $\frac{A+A^t}{2}$ e' una matrice simmetrica, sia $a_{ij} \in A$, la matrice $\frac{A+A^t}{2}$ avra', $\forall_{ij}$: $\left(\frac{A+A^t}{2}\right)_{ij} = \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2} = \frac{a_{ji}+a_{ij}}{2} = \left(\frac{A+A^t}{2}\right)_{ji}$. Analogamente $\frac{A-A^t}{2}$ e' una matrice antisimmetrica:

$$\left(\frac{A-A^t}{2}\right)_{ij} = \frac{a_{ij}-a_{ji}}{2} \wedge \left(\frac{A-A^t}{2}\right)_{ji} = \frac{a_{ji}-a_{ij}}{2} = (-1) \cdot \frac{a_{ij}-a_{ji}}{2} = -\left(\frac{A-A^t}{2}\right)_{ij}$$

Sia $\mathcal{B}_s$ la base delle matrici simmetriche, e $\mathcal{B}_\mathcal{A}$ la base delle matrici antisimmetriche.
$\mathcal{S}_{nn} = \mathrm{Span}(\mathcal{B}_s)$ e $\mathcal{A}_{nn} = \mathrm{Span}(\mathcal{B}_\mathcal{A})$, una qualsiasi $A \in M_{nn} \in \mathrm{Span}(\mathcal{B}_s, \mathcal{B}_\mathcal{A})$,
$\dim(M_{nn}) = n^2$, allora $M_{nn} = \mathcal{A}_{nn} \oplus \mathcal{S}_{nn} \Leftrightarrow \dim(\mathcal{A}_{nn}) + \dim(\mathcal{S}_{nn}) = n^2$

$$\begin{cases} \dim(\mathcal{S}_n) = \frac{n^2+n}{2} \\ \dim(\mathcal{A}_n) = \frac{n^2-n}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{n^2+n}{2} + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n+n^2-n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Esercizio 4. Sia $V=\mathbb{R}^3$. Consideriamo i sottospazi
$$U=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^3 \mid x_1-x_2-x_3=0\},\quad W=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^3\mid x_1+2x_2+x_3=0\}.$$
Decidere se $\mathbb{R}^3=U\oplus V$. Decidere se $U+W=\mathbb{R}^3$.

noto che $U=\left\{\bar{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\bar{x}=0\right\} = \begin{cases}x_1=x_2+x_3\\x_2=t_1\\x_3=t_2\end{cases} \Rightarrow t_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}=\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right)\Rightarrow \dim(U)=2$

$W=\left\{\bar x\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{cases}x_1=-2x_2-x_3\\x_2=t_1\\x_3=t_2\end{cases}\right\}\Rightarrow W=\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)\Rightarrow\dim(W)=2$

$\dim(W)+\dim(U)=2+2=4>3=\dim(\mathbb{R}^3)\Rightarrow U\oplus W\neq\mathbb{R}$ non sono in somma diretta. Vediamo se generano $\mathbb{R}^3$:

$U\cap W=\left\{\bar x\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{cases}x_1-x_2-x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}\right\}=\left\{\bar x\in\mathbb{R}^3\mid\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&2&1\\0&0&0\end{bmatrix}\bar x=\bar 0\right\}=\left\{\bar x\in\mathbb{R}^3\mid\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\bar x=\bar 0\right\}=\begin{cases}x_1-x_2-x_3=0\\x_2+2x_3=0\end{cases}$

$\begin{cases}x_1-x_2-x_3=0\\x_2+2x_3=0\end{cases}=\begin{cases}x_1=x_2+x_3\\x_2=-2x_3\\x_3=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-t\\x_2=-2t\\x_3=t\end{cases}\Rightarrow U\cap W=\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}\right)\Rightarrow\dim(U\cap W)=1\Rightarrow\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-1$

$=2+2-1=3\Rightarrow U+W=3.$

Esercizio 5. Consideriamo i sottospazi $U=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^3\mid x_1-x_2-x_3=0\}$ e $W=\mathrm{Span}((1,1,1))$. Decidere se $\mathbb{R}^3=U\oplus V$.

So che $U=\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right)\Rightarrow\dim(U)=2$. Inoltre $\dim(W)=1$, vediamo se $\dim(U\cap W)=0$

$W=\left\{\bar x\in\mathbb{R}^3\mid\begin{cases}x_1=x_2\\x_2=t\end{cases} t\in\mathbb{R}\right\}\Rightarrow W\cap U=\left\{\bar x\in\mathbb{R}^3\mid\begin{cases}x_1-x_2-x_3=0\\x_1=x_2=x_3\end{cases}\right.\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_1-x_1=0\\x_1=x_2=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-2x_1=0\\x_1=x_2=x_3\end{cases}\Rightarrow\left.\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}\right\}=\bar 0$

$\dim(U\cap W)=0\Rightarrow\mathbb{R}^3=U\oplus W.$

Esercizio 6. Sia $W\subset\mathbb{R}^4$ il sottospazio $W=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^4\mid x_1+x_3+x_4=0\}$.
6.1. Determinando una base di W, verificare che $\dim W=3$.
6.2. Determinare un supplementare di W (e cioè un sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ tale che $W\oplus U=\mathbb{R}^4$; determinare U vuol dire qui dare U tramite una sua base.)
Determinare un secondo supplementare di W, U', distinto da U.
Suggerimento per 6.2: Che dimensione ci aspettiamo per U?

$W=\{\bar x\in\mathbb{R}^4\mid x_1+x_3+x_4=0\}=\begin{cases}x_4=-x_1-x_3\\x_1=t_1\\x_2=t_2\\x_3=t_3\end{cases}=\begin{cases}x_4=-t_2-t_3\\x_1=t_1\\x_2=t_2\\x_3=t_3\end{cases}=\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)\Rightarrow\dim(W)=3$

Voglio trovare U tale che $U\oplus W=\mathbb{R}^4$, considero:

$$\begin{vmatrix}0&-1&-1&1&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&1\end{vmatrix}\ \text{riduco a scala}\Rightarrow\begin{vmatrix}1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&1\\0&-1&-1&1&0&0&0\end{vmatrix}\ A_4+A_2\ \begin{vmatrix}1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&1\\0&0&-1&1&0&1&0\end{vmatrix}\ A_4+A_3\ \begin{vmatrix}1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&1&1\end{vmatrix}$$

PIVOT

è A SCALA!

quindi $\begin{vmatrix}0\\1\\0\\0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1\\0\\1\\0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1\\0\\0\\1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1\\0\\0\\0\end{vmatrix}$ generano $\mathbb{R}^4$, allora $U=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$. $U'=\begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

Preambolo all'esercizio 7. Se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $A\underline{x}=\underline{0}$ e se W è un secondo sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $B\underline{x}=\underline{0}$, allora $U\cap W$, che sappiamo essere un sottospazio, è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $C\underline{x}=\underline{0}$ con $C=\begin{vmatrix}A\\B\end{vmatrix}$.

Esercizio 7. In $\mathbb{R}^4$ sono dati $U=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^4 \mid A\underline{x}=\underline{0}\}$, $W=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^4 \mid B\underline{x}=\underline{0}\}$ con $A=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U\oplus W$.

$$U:\left\{\bar{x}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=0 \\ -x_2+x_4=0 \end{cases}\right\}=\left\{\bar{x}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} 2x_1=-t_2+t_1 \\ x_2=-t_2 \\ x_3=t_1 \\ x_4=t_2 \end{cases}\right\}=\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)\Rightarrow \dim(U)=2$$

$$W=\left\{\bar{x}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x_1-x_3+2x_4=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}\right.\Rightarrow \left.\begin{cases} x_1=t_1-2t_2 \\ x_2=-t_1 \\ x_3=t_1 \\ x_4=t_2 \end{cases}\right\}=\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)\Rightarrow \dim(W)=2$$

ho che $U+W=\mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix}1\\-1\\1\\0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2\\0\\0\\1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1\\0\\1\\0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{vmatrix}\right)$. Controllo l'indip. lineare:

$$\bar{x}\;\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot\bar{x}=\bar{0}\Rightarrow \underset{\text{GAUSS}}{\text{USO}}\;\; \begin{matrix} A_2+A_1 \\ A_3-A_1 \end{matrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} A_3+A_2 \\ A_4+\frac{1}{2}A_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} A_4-\tfrac{1}{2}A_3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4=0 \\ -2x_2+x_3-2x_4=0 \\ x_3-x_4=0 \\ 1/2\, x_4=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \bar{x}=\bar{0}\Rightarrow$ Sono 4 vettori di $\mathbb{R}^4$ lin. indipendenti, quindi $\mathbb{R}^4=U\oplus W$.

Esercizio 8. Consideriamo l'applicazione lineare $L_A:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Scrivere l'espressione di L_A: $L_A\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}=\ldots$. Determinare l'immagine tramite L_A del vettore $(1,2,1)$. Determinare l'immagine tramite L_A dei vettori della base canonica. Stabilire se L_A è iniettiva.

$$L_A\left(\begin{vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{vmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1+3x_2-x_3\\2x_1+x_2-x_3\\2x_1-x_2\end{bmatrix},\quad L_A\left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1+6-1\\2+2-1\\2-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\3\\0\end{bmatrix}\qquad L_A(\bar{e}_1)=\begin{vmatrix}1\\2\\2\end{vmatrix}\quad L_A(\bar{e}_2)=\begin{vmatrix}3\\1\\-1\end{vmatrix}\quad L_A(\bar{e}_3)=\begin{vmatrix}-1\\-1\\0\end{vmatrix}$$

e' iniettiva se $\{\bar{x}\in\mathbb{R}^3 \mid A\cdot\bar{x}=\bar{0}\}=\{\bar{0}\}\Rightarrow$ RIDUCO A SCALA A: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} A_3-A_2 \\ A_2-2A_1 \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} A_3-\frac{2}{5}A_2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 3/5 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \{\bar{x}\in\mathbb{R}^3 \mid A\cdot\bar{x}=\bar{0}\}=\{\bar{0}\}$ quindi L_A e' iniettiva.

5.2 Sia V lo spazio vettoriale dell'Esempio 4.12. Definite T, S_1, $S_2\colon V\to V$ con

$$T\begin{vmatrix}x\\y\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x-y\\x\\0\end{vmatrix},\quad S_1\begin{vmatrix}x\\y\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x^2\\2y\\0\end{vmatrix},\quad S_2\begin{vmatrix}x\\y\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+1\\y\\0\end{vmatrix},$$

dimostra che T è lineare mentre S_1 ed S_2 non lo sono.

$$T\left(\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x'\\y'\end{vmatrix}\right)=T\left(\begin{vmatrix}x+x'\\y+y'\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}2x+2x'-y-y'\\x+x'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x-y\\x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2x'-y'\\y'\end{vmatrix}=T\left(\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}\right)+T\left(\begin{vmatrix}x'\\y'\end{vmatrix}\right)\qquad T\left(\lambda\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}\right)=T\left(\begin{vmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{vmatrix}\right)=\begin{matrix}2\lambda x-\lambda y\\\lambda x\end{matrix}=\lambda T\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$$

$$S_1\left(\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x'\\y'\end{vmatrix}\right)=S_1\left(\begin{vmatrix}x+x'\\y+y'\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}(x+x')^2\\2y+2y'\end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix}x^2+x'^2\\2y+2y'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x^2\\2y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x'^2\\2y'\end{vmatrix}=S_1\left(\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}\right)+S_1\left(\begin{vmatrix}x'\\y'\end{vmatrix}\right).$$

$$S_2\left(\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x'\\y'\end{vmatrix}\right)=S_2\left(\begin{vmatrix}x+x'\\y+y'\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}x+x'+1\\y+y'\end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix}x+x'+2\\y+y'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+1\\y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x'+1\\y'\end{vmatrix}=S_2\left(\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}\right)+S_2\left(\begin{vmatrix}x'\\y'\end{vmatrix}\right).$$

5.3 Al variare di $k\in\mathbb{R}$, considera l'applicazione $T_k:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ data da

$$T_k(x)=\begin{vmatrix}kx_1+x_2\\(k+2)e^{x_2}\\x_2-x_3\end{vmatrix}.$$

Determina per quali k l'applicazione assegnata sia lineare.

$$\begin{cases} T_k\left(\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x'\\y'\\z'\end{vmatrix}\right)=T_k\left(\begin{vmatrix}x+x'\\y+y\\z+z\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}k(x+x')+y+y'\\(k+2)e^{y+y'}\\y+y'-z-z'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}k(x+x')+y+y'\\(k+2)e^{y}\cdot e^{y'}\\y+y'-z-z'\end{vmatrix} \\ T_k\left(\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}\right)+T_k\left(\begin{vmatrix}x'\\y'\\z'\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}kx+y\\(k+2)e^{y}\\y-z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}kx'+y'\\(k+2)e^{y'}\\y'-z'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}kx+kx'+y+y'\\(k+2)e^{y}+(k+2)e^{y'}\\y+y'-z-z'\end{vmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (k+2)(e^{y}+e^{y'})=(k+2)(e^{y}\cdot e^{y'})\iff k=-2$$

$$\lambda T_K\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix}Kx+y\\(K+2)e^y\\y-z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda Kx+\lambda y\\ \lambda K e^y + 2\lambda e^y\\ \lambda y - \lambda z\end{vmatrix}$$

$$T_K\left(\lambda\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}\right) = T_K\begin{vmatrix}\lambda x\\ \lambda y\\ \lambda z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}K\lambda x+\lambda y\\(K+2)e^{\lambda y}\\ \lambda y-\lambda z\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda K e^y + 2\lambda e^y = K e^{\lambda y} + 2e^{\lambda y}$$

$$\lambda K e^y - K e^{\lambda y} = 2e^{\lambda y} - 2\lambda e^y$$

$$K = \frac{2e^{\lambda y} - 2\lambda e^y}{\lambda e^y - e^{\lambda y}} = 2\frac{e^{\lambda y} - \lambda e^y}{\lambda e^y - e^{\lambda y}} = -2\frac{-e^{\lambda y} - \lambda e^y}{\lambda e^y - e^{\lambda y}} = -2$$

$$\Rightarrow T_K(\lambda \bar{x}) = \lambda T_K(\bar{x}) \Leftrightarrow K = -2$$

5.7 Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione data da $T(x) = \begin{vmatrix}x_1 + x_2\\x_1 - x_2\\x_1 - 2x_2\end{vmatrix}$. Trova $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ tale che $T = L_A$ e verifica, usando il nucleo, che T è iniettiva.

$$\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+y\\x-y\\x-2y\end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & -2\end{bmatrix},\ \mathrm{Ker}A = \left\{\bar{x}\in\mathbb{R}^2 \mid \begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}\cdot A = \bar{0}\right\} = \left\{\bar{x}\in\mathbb{R}^2 \mid \begin{cases}x_1+x_2=0\\x_1-x_2=0\\x_1-2x_2=0\end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_1-x_2=0\\x_1-2x_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x_2+x_2=0\\x_2-2x_2=0\\x_1=2x_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x_2=0\\-x_2=0\\x_1=2x_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases} \Rightarrow \mathrm{Ker}A = \{\bar{0}\} \Rightarrow T \text{ e' iniettiva.}$$

5.8 Considera l'applicazione $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $T(x) = \begin{vmatrix}x_1 + x_2 + x_3\\5x_2 + x_3\\3x_3\end{vmatrix}$. Trova $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $T = L_A$ e verifica che T è iniettiva.

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 5 & 1\\0 & 0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1+x_2+x_3\\5x_2+x_3\\3x_3\end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 5 & 1\\0 & 0 & 3\end{bmatrix} \quad \begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\5x_2+x_3=0\\3x_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\5x_2=0\\x_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\end{cases} \Rightarrow \mathrm{Ker}(T) = \{\bar{0}\} \Rightarrow \text{e' iniettiva.}$$