

Calcolo delle Probabilità

Marco Casu



Contents

1	Il Modello Probabilistico	3
1.1	Il Problema dei Compleanni	3
1.2	Assiomi della probabilità	4
2	Calcolo Combinatorio	5
2.1	Principio fondamentale del calcolo combinatorio	5
2.2	Modelli del calcolo combinatorio	6
2.2.1	Caso 1 - Estrazioni Ordinate con Rimpiazzo	6
2.2.2	Caso 2 - Estrazioni Ordinate senza Rimpiazzo	6
2.2.3	Caso 3 - Estrazioni non Ordinate senza Rimpiazzo	7
2.2.4	Caso 4 - Estrazioni non Ordinate con Rimpiazzo	8
2.3	Principio di Esclusione/Inclusione	8
2.4	Il Multinomio	8
2.5	Problema degli Accoppiamenti	9
3	Spazi di Probabilità Notevoli	10
3.1	Spazi di Probabilità Prodotto	10
3.1.1	Indipendenza di Eventi	10
3.2	Schema di Bernoulli	11
3.3	Probabilità Condizionata	12
3.3.1	Formula di Probabilità Composte	12
3.3.2	Formula di Probabilità Totale	13
3.3.3	Formula di Bayes	13
3.3.4	Mappa sulla Probabilità Condizionata	14
3.4	Passeggiata Aleatoria	15
3.4.1	La Rovina del Giocatore	15
3.4.2	Modellizzazione	15
4	Variabili Aleatorie	19
4.1	Valore Atteso	20
4.1.1	Linearità del Valore Atteso	21
4.2	Varianza	21
4.3	Variabili Aleatorie Note	22
4.3.1	Variabile Aleatoria Certa	22
4.3.2	Variabile Aleatoria di Bernoulli	22
4.3.3	Variabile Aleatoria Binomiale	23
4.4	Variabili Aleatorie Indipendenti	24

1 Il Modello Probabilistico

1.1 Il Problema dei Compleanni

Quante sono le probabilità che in un gruppo di 25 persone, 2 di queste siano nate lo stesso giorno? Procediamo nel **modellizzare** tale problema. Le possibili date di nascita sono 365.

$$PossibiliDate = \{1, 2, 3, 4, \dots, 365\}$$

Intervistando un singolo individuo, questo può darmi 365 risposte, la probabilità che quindi un individuo di nome *Tizio* sia nato lo specifico giorno i è di 1 su 365.

$$\mathbb{P}(\textit{Tizio} \text{ è nato il giorno } i) = \frac{1}{365}$$

Tale probabilità si dice **uniforme** perchè tutti i 365 esiti hanno la stessa probabilità di $\frac{1}{365}$ di risultare. Adesso, quante sono le probabilità che *Tizio* sia nato il giorno i e *Caio* il giorno j ?

$$\mathbb{P}(\textit{Tizio} \text{ è nato } i \text{ e } \textit{Caio} \text{ è nato } j) = \mathbb{P}(\textit{Tizio} \text{ è nato il giorno } i) \cdot \mathbb{P}(\textit{Caio} \text{ è nato il giorno } j)$$

Questo si chiama **concetto di indipendenza**, ed è ovvio che le probabilità sono

precisamente $\frac{1}{365} \cdot \frac{1}{365} = \left(\frac{1}{365}\right)^2$. Quindi probabilità che 25 persone siano nate in 25 giorni pre determinati sono precisamente :

$$\mathbb{P}(a_1 \text{ è nato } i_1, a_2 \text{ è nato } i_2, \dots, a_{25} \text{ è nato } i_{25}) = \left(\frac{1}{365}\right)^{25}$$

Queste sono le probabilità che 25 persone siano nate lo stesso giorno, a noi ci interessano però le probabilità che almeno 2 persone siano nate lo stesso giorno. Prima di fare ciò andiamo a definire quello che si dice **modello probabilistico**.

Chiamiamo Ω lo spazio degli eventi elementare (in seguito verrà definito in modo formale), Ossia l'insieme di tutti i possibili risultati dell'esperimento. Sia l'esperimento in questo caso, la data di nascita per k persone, il nostro Ω sarà l'insieme di tutte le possibili combinazioni lunghe 25 di numeri da 1 a 365, che sono precisamente $|\Omega| = 365^{25}$. La probabilità uniforme che un certo evento dello spazio degli eventi $\Omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ accada è $\mathbb{P}(\omega_i) = \frac{1}{|\Omega|}$. Definiamo

adesso un evento **binario**, ossia un evento che ha come risposta, o sì o no, ossia le probabilità che esso accada e che esso non accada. Definiamo l'evento A come l'evento in cui almeno 2 persone fanno il compleanno lo stesso giorno.

$$A = \{\omega \in \Omega : \exists \omega_i, \omega_j \in \omega | i \neq j \wedge \omega_i = \omega_j\}$$

Quindi tale A è un sotto-insieme di Ω in cui tutti gli elementi hanno almeno 2 date uguali.

Presa con $|A|$ la cardinalità di tale sotto-insieme, le probabilità che tale evento accada sono :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Piuttosto che trovare l'evento in cui ci sono almeno 2 persone con lo stesso compleanno, è più facile trovare il suo **complementare**, ossia l'evento in cui nessuno fa il compleanno lo stesso giorno.

$$A^c = \{\omega \in \Omega | \forall i \neq j, \omega_i \neq \omega_j\}$$

Una volta trovata la probabilità di A^c , sapremo che $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$.

essendo $k = 25$ e $n = 365 \rightarrow |A^c| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots \cdot (n-k+1) \implies \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{|A^c|}{365^{25}}$

Vediamo una tabella di possibili risultati al variare di k (numero di persone) :

k	4	16	22	23	63
$\mathbb{P}(A)$	0.06	0.28	0.42	0.50	0.99

Risulta chiaro come, intervistando 25 persone, c'è una probabilità superiore al 50 % che almeno due di esse condividano il compleanno.

1.2 Assiomi della probabilità

Definiamo adesso formalmente il **modello probabilistico**, esso ha 3 ingredienti :

1 - Lo Spazio degli Eventi Elementari

Detto anche *spazio campionario*, non è altro che l'insieme di tutti i possibili esiti dell'esperimento, e viene denominato con Ω . Ad esempio, se l'esperimento è il lancio di una moneta, si avrà $\Omega = \{\text{Testa}, \text{Croce}\}$. Nel caso dell'esperimento dei compleanni, lo spazio campionario sarà composto da tutte le possibili combinazioni lunghe k (numero di persone alla quale si chiede la data di nascita) di numeri da 1 a 365 (i giorni esistenti). Per la maggior parte dei casi analizzati in questo corso, Ω sarà un insieme finito. Si indica con $|\Omega|$ la cardinalità dello spazio campionario, ossia il numero dei suoi elementi.

2 - Algebra degli Eventi

Prima di definire l'algebra degli eventi, dichiariamo cos'è un **evento**, ossia una *domanda binaria* sull'esito dell'esperimento, in termini matematici, è un qualsiasi sotto-insieme Ω , compresi gli elementi singoli di Ω , detti **eventi elementari**. Se l'esperimento è il lancio di un dado, i possibili esiti sono $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, vogliamo definire l'evento A come la probabilità che l'esito del lancio sia un numero maggiore di 4, esso non è altro che un sotto-insieme dello spazio campionario, ossia $A = \{\omega \in \Omega | \omega \geq 4\} = \{4, 5, 6\}$.

Su tali eventi sono definite delle operazioni insiemistiche di unione, intersezione e complemento.

L'Algebra degli Eventi, definita con il simbolo \mathcal{A} , è l'insieme chiuso¹ di *tutti i possibili sotto-insiemi* dello spazio campionario, ossia tutti i possibili eventi (anche non elementari) per la quale si può misurare la probabilità. *Ad esempio*, se prendiamo il caso del dado

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, l'evento in cui il risultato sia 2 o 3, è l'unione dei due eventi elementari $A = \{2\}$ e $B = \{3\} \rightarrow C = A \cup B = \{2, 3\}$. Si noti che $|\Omega| = n \implies |\mathcal{A}| = 2^n$

3 - La Funzione Probabilità La probabilità di un determinato evento appartenente ad \mathcal{A} è misurata tramite una funzione definita come $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$, essa associa ad ogni elemento dell'algebra degli eventi, una probabilità misurata tra 0 ed 1, dove 0 indica che l'evento è impossibile, ed 1 che l'evento è certo. La funzione \mathbb{P} deve soddisfare 3 condizioni :

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ La probabilità dell'insieme vuoto è 0.
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ La probabilità che si verifichi un evento di Ω è l'evento certo.
- \mathbb{P} è una funzione *additiva*, ossia che per due eventi disgiunti A e B , nel senso che $A \cap B = \emptyset$, vale che $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Vediamo adesso **alcune considerazioni** riguardo gli assiomi appena enunciati.

Risulta ovvio che $\Omega = A \cup A^c \implies \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$. Diversamente, presi due eventi A e B *non necessariamente disgiunti*, vale che $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. Un'altra considerazione, è che \mathbb{P} è una funzione *monotona* rispetto all'inclusione di insiemi, detto formalmente $A \subseteq B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Quando si vuole misurare la probabilità di un evento in un certo esperimento, bisogna quindi costruire un modello probabilistico, definendone gli eventi elementari e la probabilità ad essi associati. Possiamo quindi definire un'altra funzione p , che ha come dominio esclusivamente

¹È un insieme chiuso rispetto alle operazioni di unione, intersezione e complemento, ossia il risultato di tali operazioni su uno o più elementi dell'insieme, è sempre parte di tale insieme.

gli eventi elementari Ω , e non gli eventi di \mathcal{A} , essa sarà denominata come **probabilità degli eventi elementari**, $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$. Risulta chiaro che $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

Ad esempio, facciamo un esperimento sul lancio di un dado truccato in cui è più probabile che esca il numero 6 piuttosto che altri :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$p(1) = p(2) = p(3) = 0.1$$

$$p(4) = p(5) = 0.2$$

$$p(6) = 0.3$$

Definiamo quindi $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$, e risulta chiaro che :

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}\right) = 1$$

La probabilità in un modello probabilistico, si dice **uniforme** se $p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} \forall \omega \in \Omega$, e significa che tutti gli eventi elementari hanno la stessa probabilità di accadere, da qui ne deriva che la probabilità di un evento $A \in \mathcal{A}$ è $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

2 Calcolo Combinatorio

Riassumiamo in questa sezione ciò che si è visto nel corso di *Metodi matematici per l'informatica*. Partiamo con un problema, si dia il caso che in un'urna ci sono 3 palline bianche e 2 palline nere, qual'è la probabilità che, estraendo due palline, la seconda sia bianca? Formalizziamo il problema secondo il modello probabilistico. L'evento elementare è l'estrazione *ordinata* di due palline $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, dove ω_1 = prima estratta e ω_2 = seconda estratta. Possiamo numerare le palline da 1 a 5, dicendo che le palline bianche sono quelle da 1 a 3, e le restanti le nere. Detto ciò, possiamo capire che l'insieme degli eventi elementari, sono tutte le coppie di numeri naturali compresi fra 1 a 5 senza ripetizioni.

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) | \omega_1, \omega_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \omega_1 \neq \omega_2\} \quad (1)$$

È di facile intuizione capire che $|\Omega| = 20$.

L'evento A invece rappresenta il sotto-insieme di Ω , dove 1,2 o 3 appaiano sempre come seconda coordinata dei suoi elementi, ossia tutte le estrazioni in cui la seconda pallina è bianca. Per calcolare $\mathbb{P}(A)$, dobbiamo capire qual'è prima la cardinalità di A , che risulta essere $|A| = 3 \cdot 4 = 12$, il 3 rappresenta le 3 possibili palline bianche della seconda estrazione, il 4 invece tutte le altre possibili rimanenti (per la quale non ci interessa il colore essendo la prima estrazione.) Fatto ciò si ha $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0.6$. La probabilità è quindi del 60%.

2.1 Principio fondamentale del calcolo combinatorio

Dati due insiemi finiti e non vuoti A e B , è possibile formare $|A| \cdot |B|$ diverse coppie ordinate prendendo un primo elemento da A ed un secondo elemento da B .

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| \quad (2)$$

Vediamo un *esempio* :

Lanciamo un dado 6 volte, quant'è la probabilità che esca almeno una delle volte 6? Diciamo che un evento elementare ω è una ennupla di 6 elementi (i lanci) composta da numeri da 1 a 6 (esiti del dado).

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6) | \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} \quad (3)$$

Risulta chiaro (per il principio moltiplicativo) che $|\Omega| = 6^6$. Dobbiamo adesso calcolare la cardinalità di $A = \{\omega \in \Omega | \exists \omega_i \in \omega \rightarrow \omega_i = 6\}$, ossia tutti gli eventi elementari in cui 6 compare almeno in un lancio. Ci risulta però più facile calcolare il suo complementare, ossia tutti gli eventi in cui 6 non compare mai, ossia ogni ennupla di 6 elementi (i lanci) composta da numeri da 1 a 5 (esiti del dado escluso il 6).

$$A^c = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6) | \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\} \quad (4)$$

Risulta chiaro (per il principio moltiplicativo) che $|A^c| = 5^6$. Avendo la $|A^c|$, possiamo trovare la probabilità dell'evento A :

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{5^6}{6^6} \simeq 0.66 \quad (5)$$

2.2 Modelli del calcolo combinatorio

Prima di parlare dei modelli del calcolo combinatorio, introduciamo un concetto importante :

Permutazione

Sia S un insieme finito e non vuoto, una *permutazione* di S è una scelta di ordine tra gli elementi di S . Le possibili permutazioni risultano essere $|S|!$.

Passiamo adesso alla presentazione di alcuni modelli fondamentali nella quale spesso ricadono i problemi di conteggio. I problemi verranno *metaforizzati* secondo il problema delle palline nelle urne.

2.2.1 Caso 1 - Estrazioni Ordinate con Rimpiazzo

Si hanno n palline dentro un'urna e si vogliono fare k estrazioni con rimpiazzo, ossia, una volta pescata una pallina, si reinserisce nell'urna (un elemento stesso può essere estratto più volte). Si tiene conto dell'ordine, quindi $\{1, 2, 3\} \neq \{1, 3, 2\}$. Per problemi di questo tipo, vale che :

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) | \omega_i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}\} \implies |\Omega| = n^k \quad (6)$$

2.2.2 Caso 2 - Estrazioni Ordinate senza Rimpiazzo

Si hanno n palline dentro un'urna e si vogliono fare k estrazioni senza rimpiazzo, ossia, una volta pescata una pallina, essa non potrà essere ripescata (gli elementi di ogni estrazione sono distinti). Si tiene conto dell'ordine, quindi $\{1, 2, 3\} \neq \{1, 3, 2\}$. Per problemi di questo tipo, vale che :

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) | \omega_i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} | i \neq j \implies \omega_i \neq \omega_j\} \implies |\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (7)$$

Esempio :

7 persone si trovano in un ascensore dentro un palazzo di 10 piani e si apprestano a scendere su un piano, quante sono le probabilità per cui tutte quante scendano su piani diversi? L'Evento elementare è composta da una ennupla di 7 elementi (le persone) composta da numeri che vanno da 1 a 10 (il piano in cui scendono). Quindi :

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_7) | \omega_i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}\}$$

Dati i modelli precedenti risulta chiaro che $|\Omega| = 10^7$ e $A = \{\text{Ognuno scende su un piano diverso}\}$ ha cardinalità $|A| = \frac{10!}{3!} \implies \mathbb{P}(A) = \frac{\frac{10!}{3!}}{10^7} \simeq 0.06$.

2.2.3 Caso 3 - Estrazioni non Ordinate senza Rimpiazzo

Si hanno n palline dentro un'urna, se ne estraggono k , ma senza tener conto dell'ordine delle palline, ad esempio, se ho le palline denominate 1, 2 e 3, estraendole, si ha che le estrazioni 123, 321, 132, 312, 231, 213 sono lo stesso evento. Come rappresento tale spazio elementare Ω a livello insiemistico? Si consideri lo spazio delle *Estrazioni Ordinate senza Rimpiazzo*, ossia:

$$A = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) | \omega_i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} | i \neq j \implies \omega_i \neq \omega_j\}$$

Stabiliamo una relazione di equivalenza su A , denominata con il simbolo \sim , per cui vale che $\omega \sim \omega'$ se e solo se differiscono solo per l'ordine.

Esempio : $\omega = \{1, 2, 3\}, \omega' = \{3, 1, 2\} \iff \omega \sim \omega'$. L'insieme degli eventi elementari per rappresentare le *Estrazioni non Ordinate senza Rimpiazzo* non è altro che l'insieme quoziente di A su \sim , ossia l'insieme di tutte le sue classi di equivalenza.

$$\Omega = A/\sim$$

Possiamo scegliere come rappresentanti delle classi di equivalenza, quegli elementi in cui le palline sono ordinate in ordine crescente, in tal modo, lo spazio elementare è anche rappresentabile come :

$$\{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) | \omega_i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \wedge i < j \implies \omega_i < \omega_j\}$$

Qual'è però la cardinalità di Ω in questo caso? Possiamo considerare la cardinalità di A , divisa per il numero di elementi in ogni classe di equivalenza. Essendo che ogni classe di equivalenza non è altro permutazione di k elementi, esse avranno ognuna $k!$ elementi, da qui risulta chiara la cardinalità del nostro spazio degli eventi :

$$\text{sia } [\omega] \in A/\sim, \text{ si ha } |\Omega| = \frac{|A|}{|[\omega]|} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \text{ si denota come } \binom{n}{k} \quad (8)$$

Tradotto in linguaggio umano, $\binom{n}{k}$ indica il numero di modi di scegliere k elementi da un insieme n . Tale conteggio è anche detto **combinazione semplice**. Vale la proprietà :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

Binomio di Newton

$$\text{Siano } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}, \text{ vale che } (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

2.2.4 Caso 4 - Estrazioni non Ordinate con Rimpiazzo

Consideriamo il lancio di 2 dadi identici, senza considerare l'ordine. Abbiamo che l'evento elementare è la coppia di numeri da 1 a 6 (senza contare l'ordine, quindi consideriamo la classe di equivalenza in cui i due dadi hanno esito in ordine crescente), lo spazio risulta quindi : $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) | 1 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq 6\}$

Se i due dadi fossero distinti e l'ordine avesse importanza, i possibili eventi sarebbero 6^2 , ma in questo caso, non risulta la scelta naturale, dato che gli eventi (a, b) e (b, a) sono identici.

È il caso di un *estrazione non ordinata con rimpiazzo*, dato che estraggo due palline, senza contare l'ordine, con la possibilità di poter estrarre due volte la stessa pallina.

Se ho n palline e faccio k estrazioni, il numero di estrazioni possibili non ordinate con rimpiazzo risulta essere :

$$\binom{n+k-1}{k} \quad (9)$$

Tornando al problema dei dadi, i possibili esiti sono :

$$\binom{6+2-1}{2} = \frac{(6+2-1)!}{2!(6+2-1-2)!} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

2.3 Principio di Esclusione/Inclusione

Siano $A, B, C \subset \Omega$ tre eventi non necessariamente disgiunti di uno spazio di probabilità, se volessi calcolare la probabilità di $A \cup B$, dovrei fare la somma delle probabilità di A e B , sottraendo la probabilità dell'intersezione. Già con 3 eventi, se volessi la probabilità dovrei fare :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Quando si parla quindi di un numero elevato di eventi, il calcolo risulta difficile, ed è descritto dalla seguente formula :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2, \dots, \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 < i_1 < i_2, \dots, < i_k < n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}, \dots, \cap A_{i_k}) \quad (10)$$

2.4 Il Multinomio

Esaminiamo il problema in cui si vogliono distribuire n oggetti distinti in k scatole distinte, in modo che ciascuna di esse contenga nell'ordine n_1, n_2, \dots, n_k oggetti, per cui $\sum_{i=1}^n n_i = n$. In quanti modi posso effettuare tale suddivisione? Ci sono $\binom{n}{n_1}$ scelte per la prima scatola, $\binom{n-n_1}{n_2}$ per la seconda e così via, fino a $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$, che si denota con $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$, e rappresenta il numero di suddivisioni di n oggetti distinti in k gruppi distinti con, rispettivamente n_1, n_2, \dots, n_k oggetti.

Esempio : Vi sono 10 poliziotti, se 5 di essi devono pattugliare due strade, 2 di essi restare in stazione ed altri 3 stare in riserva, quanti sono i modi possibili di assegnare i 3 compiti ai 10 poliziotti?

$$\binom{10}{5, 2, 3} = \frac{10!}{5! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{30240}{12} = 2520$$

2.5 Problema degli Accoppiamenti

Poniamo un esempio, c'è una festa con n invitati, ogni invitato porta con sé un ombrello, al termine della festa ogni invitato se ne va prendendo un ombrello a caso, qual'è la probabilità che nessun invitato riprenda il proprio ombrello? Se il numero di persone n tende ad infinito, come si comporta tale probabilità?

Si dice che in uno spazio di probabilità, se un evento elementare composto da una lista a_1, a_2, \dots, a_n che possono assumere valori da 1 ad n , se un elemento a_i assume valore i , esso si dice **punto fisso**, quindi possiamo tradurre il problema degli ombrelli (considerando ogni persona come un elemento dell'evento elementare, ed i valori che possono assumere come gli ombrelli) come : Qual'è la probabilità che una permutazione di n non abbia punti fissi?

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) | i \neq j \implies \omega_i \neq \omega_j | \omega_k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}\} \text{ dove } |\Omega| = n!$$

$$B = \{\text{permutazioni senza punti fissi}\} = \{\omega \in \Omega | \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \omega_i \neq i\}$$

Poniamo il complementare di B , ossia $B^c = A = \{\text{la permutazione ha almeno un punto fisso}\}$, e distinguiamolo in n sotto eventi, ossia $A_1 = \{\omega_1 \text{ è un punto fisso}\}$ poi $A_2 = \{\omega_2 \text{ è un punto fisso}\}$ e così via per ogni punto. Sapremo così che $A = A_1 \cup A_2, \dots, \cup A_n$. Calcoliamo la cardinalità di un singolo evento A_i , risulta facile, dato che poniamo un punto fisso su $\omega_i = i$ e poi il resto è una permutazione normale. $|A_i| = (n-1)!$, quindi $\mathbb{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

Quindi per calcolare la probabilità di A dobbiamo sommare le probabilità di ogni A_i , ma ovviamente tali sotto-eventi *non sono disgiunti*, quindi dobbiamo sottrarre le intersezioni. Notiamo come $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$, perchè fissiamo entrambi i punti i, j e ed il resto è una semplice permutazione. Questo fino a k intersezioni : $|A_1 \cap A_2, \dots, \cap A_k| = (n-k)!$. Quindi : $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2, \dots, \cap A_k) = \frac{(n-k)!}{n!}$. A questo punto applichiamo qui il **principio di esclusione/inclusione** :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{i=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 < i_1 < i_2, \dots, < i_k < n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}, \dots, \cap A_{i_k}) \quad (11)$$

Ma sappiamo che $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2, \dots, \cap A_k) = \frac{(n-k)!}{n!}$ quindi riscriviamo :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{i=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 < i_1 < i_2, \dots, < i_k < n} \frac{(n-k)!}{n!} \quad (12)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{i=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} \quad (13)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{i=1}^n (-1)^{k+1} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{(n-k)!}{n!} \quad (14)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{i=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} \quad (15)$$

Essendo A il complementare di B :

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \sum_{i=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} \quad (16)$$

Con n che tende ad infinito si ha :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B) = 1 - \sum_{i=1}^n (-1)^k \frac{1}{k!} = \frac{1}{e} \quad (17)$$

Quindi la probabilità che in una permutazione non vi siano punti fissi è **costante**, e vale esattamente $\frac{1}{e}$.

3 Spazi di Probabilità Notevoli

3.1 Spazi di Probabilità Prodotto

Consideriamo due esperimenti :

- Lancio una moneta equa
- Viene misurata la temperatura in Brasile (che può variare dai 10 ai 50 gradi)

Per i due esperimenti diversi abbiamo due spazi di probabilità differenti, (Ω_1, \mathbb{P}_1) e (Ω_2, \mathbb{P}_2) , considerando l'esperimento congiunti, essendo essi totalmente indipendenti (non si influenzano fra loro), possiamo immaginare ogni evento come una coppia composta dal primo evento elementare ed il secondo evento elementare, costruendo un nuovo spazio elementare come prodotto cartesiani dei primi due : $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) | \omega_1 \in \{T, C\}, \omega_2 \in \mathbb{N} | 10 \leq \omega_2 \leq 50\}$$

Se i due esperimenti non si influenzano, la scelta naturale è la **probabilità prodotto** :

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = \mathbb{P}_1(\{\omega_1\}) \cdot \mathbb{P}_2(\{\omega_2\}) \quad (18)$$

Devo verificare che $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$, ho che :

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}_1(\{\omega_1\}) \cdot \mathbb{P}_2(\{\omega_2\}) \quad (19)$$

$$\sum_{\omega_1 \in \Omega_1} \mathbb{P}_1(\{\omega_1\}) \cdot \sum_{\omega_2 \in \Omega_2} \mathbb{P}_2(\{\omega_2\}) = 1 \cdot 1 = 1 \quad \blacksquare \quad (20)$$

Se \mathbb{P}_1 e \mathbb{P}_2 sono probabilità uniformi su Ω_1 e Ω_2 , allora $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \cdot \mathbb{P}_2$ è uniforme su $\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2$. Si dimostra facilmente :

$$\mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_2\}) = \mathbb{P}_1(\omega_1) \cdot \mathbb{P}_2(\omega_2) = \frac{1}{|\Omega_1|} \cdot \frac{1}{|\Omega_2|} = \frac{1}{|\Omega_1 \times \Omega_2|} = \frac{1}{|\Omega|}$$

3.1.1 Indipendenza di Eventi

Sia \mathbb{P} la funzione probabilità, che in un certo modello probabilistico soddisfa la seguente condizione di *compatibilità* : Sia $A \subset \Omega$ un evento particolare, per cui posso decidere l'esito dell'esperimento osservando esclusivamente (Ω_1, \mathbb{P}_1) , tale che $\forall A_1 \in \Omega_1, A = A_1 \times \Omega_2$. In matematica, tale A è detto *cilindro*. Vale che $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_1(A)_1$.

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{(\omega_1, \omega_2) \in A_1 \times \Omega_2} \mathbb{P}_1(\omega_1) \cdot \mathbb{P}_2(\omega_2) = \sum_{\omega_1 \in A_1} \mathbb{P}_1(\omega_1) \cdot \sum_{\omega_2 \in \Omega_2} \mathbb{P}_2(\omega_2) = \sum_{\omega_1 \in A_1} \mathbb{P}_1(\omega_1) \cdot 1 = \mathbb{P}_1(A)_1$$

Se esiste un evento B , che è un evento particolare, per cui posso decidere l'esito dell'esperimento osservando esclusivamente (Ω_2, \mathbb{P}_2) (analogamente al primo caso), risulta che $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$. Tali eventi non si *influenzano* fra loro :

In un modello probabilistico (Ω, \mathbb{P}) , due eventi $A, B \subseteq \Omega$ sono detti **indipendenti** se :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Tale relazione di *indipendenza* è data esclusivamente dalla funzione probabilità, non è una proprietà insiemistica.

Esempio : Estraggo a caso una carta fra un mazzo di 40. $\Omega = \{\omega | 1 \leq \omega \leq 40\}$, ed ho i due eventi $A = \{ \text{Estraggo un } 7 \}$ e

$B = \{ \text{Estraggo una carta di denara} \}$, tali eventi sono indipendenti, dato che l'estrazione di un 7, in nessun modo condiziona la probabilità di estrarre una carta di denara, e viceversa.

Infatti $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{40} = \mathbb{P}(A \cap B)$.

Discutiamo adesso l'**indipendenza fra 3 eventi**. $A, B, C \subseteq \Omega$, si dicono *indipendenti* se sono soddisfatte le seguenti condizioni :

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C), \mathbb{P}(C \cap B) = \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$

Passiamo al caso generale, n eventi $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ si dicono **indipendenti** quando, presa una qualunque sotto-famiglia di tali insiemi, la probabilità di tale intersezione *fattorizza* :

$$\forall k | 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \mathbb{P}(A_{i_2}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k})$$

Ad esempio, in uno schema di probabilità prodotto, se prendo $A_1 \subset \Omega_1, A_2 \subset \Omega_2, \dots, A_n \subset \Omega_n$, risulta che tali eventi sono tutti indipendenti fra loro.

3.2 Schema di Bernoulli

Apriamo una digressione su un noto schema probabilistico. Vi è un *esperimento binario*² ripetuto n volte, gli esiti di tale risultato vengono codificati con 0 ed 1, quindi si ha :

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) | \omega_i \in \{0, 1\}\}$. Lo schema è quello di uno spazio di probabilità prodotto, dove (Ω_i, \mathbb{P}_i) definisce ogni lancio . Si definisce una costante reale $p \in [0, 1]$, tale che, per ogni singolo lancio risulta che :

- $\mathbb{P}_i(\{1\}) = p$
- $\mathbb{P}_i(\{0\}) = 1 - p$

Ovviamente se $p = \frac{1}{2}$, la probabilità è uniforme. Scegliendo diversi lanci, risulta che :

²Un esperimento con due esiti (ad esempio il lancio di una moneta)

$n = 2 \implies \Omega = \{00, 01, 10, 11\}$ con $\mathbb{P}(00) = (1 - p)^2$, $\mathbb{P}(11) = p^2$, $\mathbb{P}(01) = \mathbb{P}(10) = p(1 - p)$

$n = 3 \implies \Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ con $\mathbb{P}(000) = (1 - p)^3$, $\mathbb{P}(111) = p^3$...ecc

In generale, per n lanci risulta che :

Sia $A \in \Omega$: $\mathbb{P}(A) = p^{\text{occorrenze di 1 in } A} \cdot (1 - p)^{\text{occorrenze di 0 in } A}$

Qui risulta comoda la codifica binaria perchè posso scrivere tale probabilità come :

$$\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)\}) = p^{\sum_{i=1}^n \omega_i}$$

Per un evento A in cui si ottiene k volte 1 ed $n - k$ volte 0, la sua probabilità risulta essere :

$$\mathbb{P}(A) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Tale formula è detta **distribuzione binomiale**.

3.3 Probabilità Condizionata

Vie è una scatola con dentro 3 palline bianche e 2 nere, si fanno 2 estrazioni ordinate senza rimpiazzo. Qual'è la probabilità che, dopo averne pescata una bianca, se ne peschi un'altra bianca? Vogliamo sapere la probabilità di un evento A , dando però una condizione, ossia che si sia già causato l'evento B .

Definizione Importante : Consideriamo uno spazio di probabilità Ω, \mathbb{P} , e siano $A, B \subseteq \Omega$, denominiamo $\mathbb{P}(A|B)$ la probabilità che A si verifichi, con la condizione che B si sia già verificato, e vale esattamente $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Osservazione : Se la probabilità è uniforme, si ha che $\mathbb{P}(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$.

Esempio : Si dia il caso in cui si lancia 2 volte una moneta, qual'è la probabilità che al secondo lancio esca testa, sapendo che al primo lancio è uscito testa? $E = \{TT\}$ è l'evento in cui esce entrambe volte testa, ed $F = \{TT, TC\}$ l'evento corrispondente all'uscita di testa nel primo lancio. Si ha che $\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$.

3.3.1 Formula di Probabilità Composte

Possiamo usare il concetto di probabilità condizionata per esprimere la probabilità di un evento, a seguito di una sequenza di eventi che si condizionano fra loro, si dia il caso che in una scatola vi sono b palline bianche e n palline nere, faccio k estrazioni. Chiamiamo $A_1 = \{\text{la prima è nera}\}$, $A_2 = \{\text{la seconda è nera}\}$ fino ad $A_k = \{\text{la } k\text{-esima è nera}\}$. La probabilità che tutte le palline siano nere, sarà uguale alla composizione di tutti questi eventi riguardo la i -esima estrazione, ma si noti come, l'evento in cui le prime i palline sono nere, è uguale alla probabilità che la i -esima sia nera con la condizione che le $i - 1$ palline precedenti siano nere.

$$\mathbb{P}(\{\text{tutte nere}\}) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \cdot \mathbb{P}(A_k|A_1 \cap \dots, A_{k-1}) = \quad (21)$$

$$= \mathbb{P}(A_1) \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} \cdot \dots \cdot \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots, A_k)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots, A_{k-1})} = \text{per semplificazione} = \quad (22)$$

$$= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots, A_k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) \quad (23)$$

3.3.2 Formula di Probabilità Totale

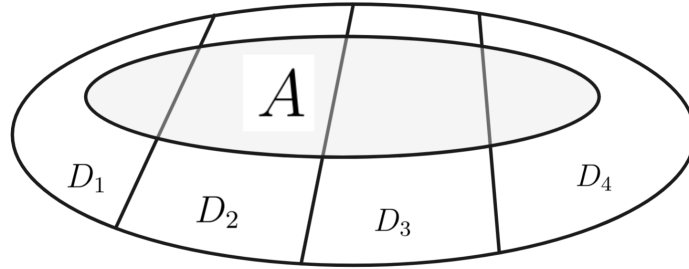
Vediamo adesso il caso in cui, voglio che si verifichi un determinato evento, che può avere probabilità diverse a seconda della condizione verificatasi prima.

Vediamo un *esempio* : Si lancia una moneta equa, se esce testa, si pesca una pallina da un sacco contenente 2 palline nere e 3 bianche, se esce croce, si pesca una pallina da un sacco contenente 2 palline nere ed una bianca. È chiaro che, l'esito della moneta, condiziona la probabilità che la pallina estratta sia bianca. Se le condizioni che possono influire sulla probabilità dell'evento sono *disgiunte*, in questo caso lo sono perchè, o esce testa, o esce croce, la probabilità sarà uguale a :

$$\mathbb{P}(\{\text{si estrae una bianca}\}) = \mathbb{P}(T)\mathbb{P}(\{\text{esce bianca}\}|T) + \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(\{\text{esce bianca}\}|C) \quad (24)$$

In generale, sia Ω, \mathbb{P} uno spazio di probabilità, se $D_1, D_2, D_3, \dots, D_k$ è una partizione di Ω , tale che $\bigcup_{i=1}^k D_i = \Omega$, e sia $A \subseteq \Omega$ un evento che segue uno degli eventi D_i , la probabilità di A vale :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(D_i)\mathbb{P}(A|D_i) \quad (25)$$



3.3.3 Formula di Bayes

Questo è il caso analogamente opposto a quello visto precedentemente, sia $D_1, D_2, D_3, \dots, D_k$ una partizione di Ω , e sia $A \subseteq \Omega$ un evento che segue uno degli eventi D_i , sapendo che si è verificato A , possiamo calcolare la probabilità che si sia verificato un singolo D_i :

$$\mathbb{P}(D_i|A) = \frac{\mathbb{P}(D_i) \cdot \mathbb{P}(A|D_i)}{\sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}(D_j) \cdot \mathbb{P}(A|D_j)} \quad (26)$$

Osservazione : Se A, B sono eventi disgiunti, allora $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Vediamo adesso un esempio facile di applicazione della formula delle probabilità totali, per ricavare il valore di una probabilità appartenente non banale. Si consideri lo schema di Bernoulli 3.2, su n lanci, qual'è la probabilità che esca testa, un numero pari di volte? Voglio procedere *ricorsivamente* in n , similmente a come si risolvono le equazioni di ricorrenza viste nel corso di [Algoritmi 1](#).

Definisco $A_n = \{\text{Su } n \text{ lanci, testa esce un numero pari di volte}\}$ e $p_n = \mathbb{P}(A_n)$. Procedo utilizzando la formula delle probabilità totali, definendo le partizioni :

- $D_1 = \{\omega \in \Omega | \omega_1 = 0\}$ - al primo lancio esce croce, ovviamente $\mathbb{P}(D_1) = 1 - p$
- $D_2 = \{\omega \in \Omega | \omega_1 = 1\}$ - al primo lancio esce testa, ovviamente $\mathbb{P}(D_2) = p$

Ed ottengo :

$$p_n = \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}(A_n|D_1) + \mathbb{P}(D_2)\mathbb{P}(A_n|D_2) \quad (27)$$

Dove $\mathbb{P}(A_n|D_1)$ rappresenta la probabilità che Su $n - 1$ lanci, testa esce un numero pari di volte, e $\mathbb{P}(A_n|D_2)$ rappresenta la probabilità che Su $n - 1$ lanci, testa esce un numero dispari di volte. Quindi l'equazione si può riscrivere come :

$$p_n = (1 - p)p_{n-1} + p(1 - p_{n-1}) \quad (28)$$

Abbiamo definito una relazione *ricorsiva*, che tramite passaggi algebrici può essere espressa in forma esplicita.

3.3.4 Mappa sulla Probabilità Condizionata

Quando si vuole calcolare la probabilità di un evento con la condizioni che un'altro evento si sia verificato, è possibile applicare la formula che abbiamo visto all'inizio di questo paragrafo. Un'altra via da seguire però, può essere quella di considerare un **nuovo spazio di probabilità**, in cui si considerano come eventi elementari, esclusivamente quelli che già includono che la condizione si sia verificata.

Se A è l'evento condizionante, posso considerare : l'applicazione:

$$B \subset \Omega, B \rightarrow \mathbb{P}(B|A)$$

Ossia la mappa che ad ogni evento di Ω , associa la sua probabilità con condizione A verificata. Tale mappa, è ancora una funzione di probabilità, sullo spazio degli eventi A , ciò è di facile dimostrazione:

$$\forall B \subset A, \mathbb{P}(B|A) \in [0, 1] \quad (29)$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset|A) = 0 \\ \mathbb{P}(A|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1 \end{cases} \quad (30)$$

Inoltre, tale funzione è additiva :

$$B_1, B_2 \subset A, \mathbb{P}(B_1 \cup B_2|A) = \mathbb{P}(B_1|A) + \mathbb{P}(B_2|A) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}((B_1 \cup B_2) \cap A)}{\mathbb{P}(A)} &= \frac{\mathbb{P}((B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A))}{\mathbb{P}(A)} \implies \text{per additività di } \mathbb{P} \implies \\ &= \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} + \frac{\mathbb{P}(B_2 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \end{aligned}$$

Osservazione 1 : Se \mathbb{P} è la probabilità uniforme su Ω , preso l'evento fissato $A \subset \Omega$, l'applicazione $B \subset \Omega, B \rightarrow \mathbb{P}(B|A)$ è anche essa ancora una probabilità uniforme.

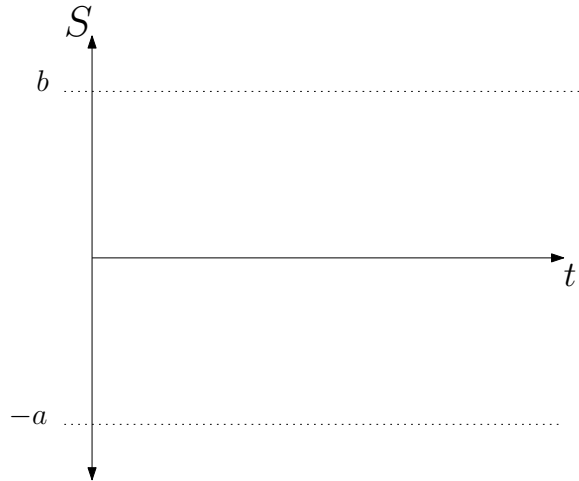
3.4 Passeggiata Aleatoria

3.4.1 La Rovina del Giocatore

Introduciamo adesso un'altro problema meno banale rispetto a quello appena visto, che richiede sempre l'applicazione della formula delle probabilità totali. Ci sono due giocatori A e B , che giocano ad un gioco generico, scommettendo dei soldi. Ogni volta che un giocatore vince, riceve 1 euro dall'altro. A ha probabilità di vittoria uguale a p , e B ha probabilità di vittoria uguale a $1 - p$, A inizia il gioco con un capitale pari ad a euro, e B inizia con un capitale pari a b euro. Giocano senza sosta, finché uno dei due giocatori non si rovina (finisce tutto il capitale). Qual'è la probabilità che A oppure B si rovini?

3.4.2 Modellizzazione

Tale problema ha un'interpretazione geometrica ben precisa, e viene modellizzato in uno schema definito come *passeggiata aleatoria*. Si consideri il piano $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}$:

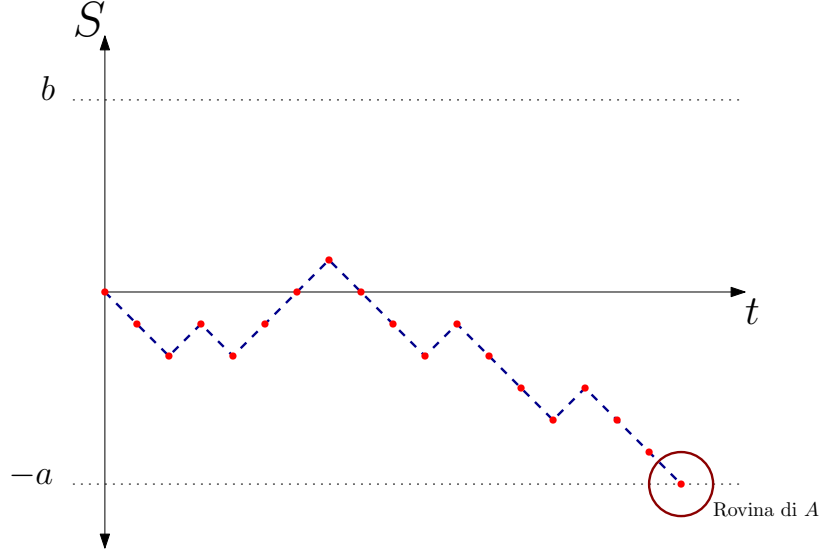


l'asse delle ascisse t rappresenta il tempo, o il numero di giocate fatte, mentre quello delle ordinate S rappresenta la somma in denaro vinta da A , ci sono poi due asintoti orizzontali nelle posizioni $S = b$ e $S = -a$. Ad ogni coppia t, S è associato un valore denominato S_n , che identifica l'istante di gioco, ossia la somma vinta (o persa se in negativo) da A al tempo $t = n$. All'avanzare del tempo, ossia delle giocate, la crescita o discesa di S_n dipende dalle probabilità che A vinca o no, se A vince al tempo i , nel tempo $i + 1$, S_n crescerà di un'unità, altrimenti decrescerà.

- $t = 0 \implies S_0 = 0$
- $t = 1 \implies S_1 = \begin{cases} +1 & \text{con probabilità } p \\ -1 & \text{con probabilità } 1 - p \end{cases}$
- $t = 2 \implies S_2 = S_1 + \begin{cases} +1 & \text{con probabilità } p \\ -1 & \text{con probabilità } 1 - p \end{cases}$
- ...
- $t = n + 1 \implies S_{n+1} = \sum_{i=1}^n S_i + \begin{cases} +1 & \text{con probabilità } p \\ -1 & \text{con probabilità } 1 - p \end{cases}$

Quindi nel grafico, S_n "spostandosi" verso destra, oscillerà avvicinandosi sempre di più o a b o a $-a$, con ovvio significato :

- $S_n = b \implies$ il giocatore B si è rovinato, ha vinto A .
- $S_n = -a \implies$ il giocatore A si è rovinato, ha vinto B .



La probabilità che A si rovini è quindi equivalente alla probabilità che S_n raggiunga $-a$, si può calcolare tale valore utilizzando la formula delle probabilità totali.

Introduciamo un nuovo parametro, ossia x , che equivale ad S_0 , ossia quanto vale S all'inizio del gioco, fin'ora, abbiamo dato per scontato che si partisse sempre da una condizione di parità, dove $x = 0$. Definiamo quindi $\alpha(x)$ la probabilità che S_n raggiunga $-a$ da un punto di partenza x , e $\beta(x)$ la probabilità che S_n raggiunga b da un punto di partenza x . Ovviamente se $x = 0$ siamo nel caso iniziale, ma ad ogni passo, x incrementerà o decremterà di 1. Definiamo quindi $S_n^{(x)}$ come la somma vinta da A nell'istante $t = n$, dove però $S_0^{(x)} \neq 0 = x$. Vediamo come si definisce in questo caso una relazione ricorsiva, utilizzo la formula della probabilità totale :

$$\beta(x) = \mathbb{P}(S_n + = 1) \cdot \mathbb{P}(B \text{ si rovina} | S_n + = 1) + \mathbb{P}(S_n - = 1) \cdot \mathbb{P}(B \text{ si rovina} | S_n - = 1) \quad (32)$$

Ne consegue :

$$\beta(x) = p \cdot \beta(x + 1) + (1 - p) \cdot \beta(x - 1) \text{ finché } x = -a \vee x = b \quad (33)$$

Abbiamo quindi definito una relazione ricorsiva :

$$\begin{cases} \beta(x) = p \cdot \beta(x + 1) + (1 - p) \cdot \beta(x - 1) \\ \beta(b) = 1 \\ \beta(-a) = 0 \end{cases}$$

Sviluppiamo il calcolo per ottenere la formula esplicita, iniziando a calcolare l'incremento :

$$(p + (1 - p))\beta(x) = p \cdot \beta(x + 1) + (1 - p) \cdot \beta(x - 1) \iff p(\beta(x + 1) - \beta(x)) = (1 - p)(\beta(x) - \beta(x - 1)) \quad (34)$$

$$\Longleftrightarrow \beta(x+1) - \beta(x) = \frac{1-p}{p}(\beta(x) - \beta(x-1)) \quad (35)$$

Gli incrementi sono quindi *proporzionali* e non lineari (simile alla funzione esponenziale). Avendo trovato adesso il valore ad ogni incremento generico, procediamo calcolando l'incremento ad ogni passo :

- passo 0) $\beta(-a) = 0$
- passo 1) $\beta(-a+1) = \beta(-a+1) - \beta(-a) = \beta(-a+1) - 0 = \gamma$

Abbiamo definito γ come l'incremento ad ogni passo

- passo 2) $\beta(-a+2) = \beta(-a+1) + \beta(-a+2) - \beta(-a+1) + \frac{1-p}{p}\gamma = \gamma + \gamma\frac{1-p}{p}$
- passo 3)

$$\beta(-a+3) = \beta(-a+2) + \beta(-a+3) - \beta(-a+2) = \beta(-a+2) + \frac{1-p}{p}[\beta(-a+2) - \beta(-a+1)] =$$

$$\gamma + \gamma\frac{1-p}{p} + \gamma\left(\frac{1-p}{p}\right)^2$$
- ...
- $\beta(x) = \gamma\left[1 + \frac{1-p}{p} + \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \left(\frac{1-p}{p}\right)^3 \dots + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{x+a-1}\right]$

Quindi si ha che

$$\beta(x) = \gamma \cdot \sum_{k=0}^{x+a-1} \left(\frac{1-p}{p}\right)^k = \gamma \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{x+a}}{1 - \frac{1-p}{p}} \quad (36)$$

Per trovare γ , poniamo :

$$\beta(b) = 1 = \gamma \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{b+a}}{1 - \frac{1-p}{p}} \implies \gamma = \frac{1 - \frac{1-p}{p}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{b+a}} \quad (37)$$

Quindi, in forma esplicita :

$$\beta(x) = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{x+a}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{b+a}} \quad (38)$$

Osservazione : la probabilità che il gioco non finisca mai è 0, infatti presi i due eventi della rovina di A e di B , si ha che :

$$\alpha(a) + \beta(b) = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{x+b}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{b+a}} + \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{x+a}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{b+a}} = 1 \quad (39)$$

La somma dei due eventi disgiunti è 1, quindi, necessariamente si causerà la rovina di uno dei due giocatori.

Osservazione : Se $p = \frac{1}{2}$, si ha :

$$\lim_{p \rightarrow \frac{1}{2}} \beta(x) = \lim_{p \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{x+a}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{b+a}} = \frac{a+x}{a+b} \quad (40)$$

Esempio : Se A parte da 5 euro, ed ha probabilità di vittoria uguali a 0.4, e B parte da 7 euro, ed ha probabilità di vittoria uguali a 0.6, si ha che :

- La probabilità che B si rovini è : $\frac{1 - \left(\frac{1-0.4}{0.4}\right)^5}{1 - \left(\frac{1-0.4}{0.4}\right)^{5+7}} \simeq 0,05$

4 Variabili Aleatorie

Dato uno schema probabilistico (Ω, \mathbb{P}) , una **variabile aleatoria** X è una funzione su Ω a valori reali:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

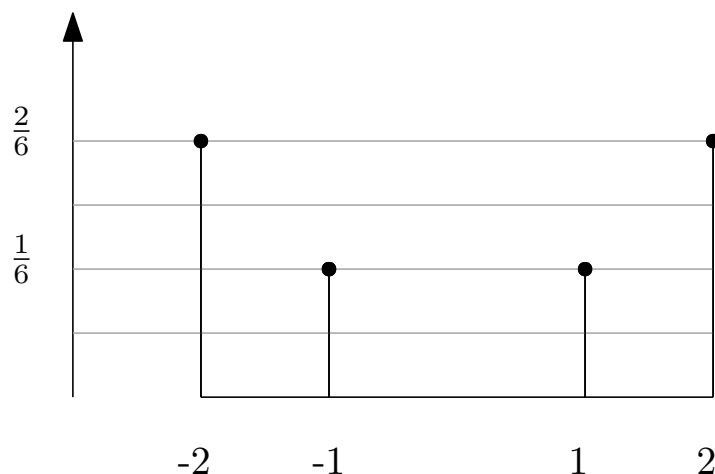
Tale variabile, rappresenta una "scommessa" sull'esito di un esperimento, ad ogni evento elementare o insieme di eventi elementari, è associato un valore reale.

Esempio : Si lancia un dado equo, e ci sono 2 giocatori, A e B . Se il dado dà come esito 1 o 2, il giocatore A paga 2 euro, se dà come esito 3, il giocatore A paga 1 euro, se dà come esito 4, il giocatore B paga 1 euro, se dà come esito 5 o 6, il giocatore B paga 2 euro, tale "pagamento" è esprimibile come variabile aleatoria, dove il suo valore rappresenta la quota vinta o persa da A :

$$X_1 = \begin{cases} -2 & \text{se } \omega = 1, 2 \\ -1 & \text{se } \omega = 3 \\ 1 & \text{se } \omega = 4 \\ 2 & \text{se } \omega = 5, 6 \end{cases}$$

In questo caso, X_1 non è iniettiva, se lo fosse però, in base al risultato della scommessa, sarebbe possibile conoscere l'esito del dado (in questo caso, se A paga 2 euro, non sappiamo se il dado abbia dato come esito 1 o 2).

Una variabile aleatoria X può essere rappresentata come un *istogramma*, dove sull'asse delle ascisse è presente l'immagine di X , e sulle ordinate la probabilità che ogni valore di X si verifichi. Per l'esempio preso in considerazione prima :



La probabilità \mathbb{P} su Ω , induce una probabilità sull'immagine della variabile aleatoria, denominata $Im(X)$, mediante la funzione \mathfrak{I} :

$$\text{Sia } x_1 \in Im(X), \mathfrak{I}(\{x_1\}) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_1\})$$

Rappresenta la probabilità che X assuma un certo valore x_1 , definisce la **distribuzione** della variabile aleatoria.

Notazione : $\mathfrak{I}(\{x_1\})$ può essere scritto anche come $\mathbb{P}(X = x_1)$

4.1 Valore Atteso

Il **valore atteso** di una variabile aleatoria X è una funzione \mathbb{E} definita nel seguente modo :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in Im(x)} x \cdot \mathfrak{P}(\{x\})$$

È dato dalla somma dei possibili valori di tale variabile, ciascuno moltiplicato per la probabilità di essere assunto (ossia di verificarsi).

Indica il valore medio che X può assumere, a seconda delle probabilità di ogni valore dell'immagine di X .

Esempio : Si lancia un dado, ci sono due giocatori A e B , la variabile aleatoria X rappresenta la quota in euro vinta da A in base all'esito del dado (se negativa, è la quota che A deve pagare a B).

$$X = \begin{cases} -1 & \text{se } \omega = 1, 2 \\ 0 & \text{se } \omega = 3 \\ 1 & \text{se } \omega = 4 \\ 2 & \text{se } \omega = 5, 6 \end{cases}$$

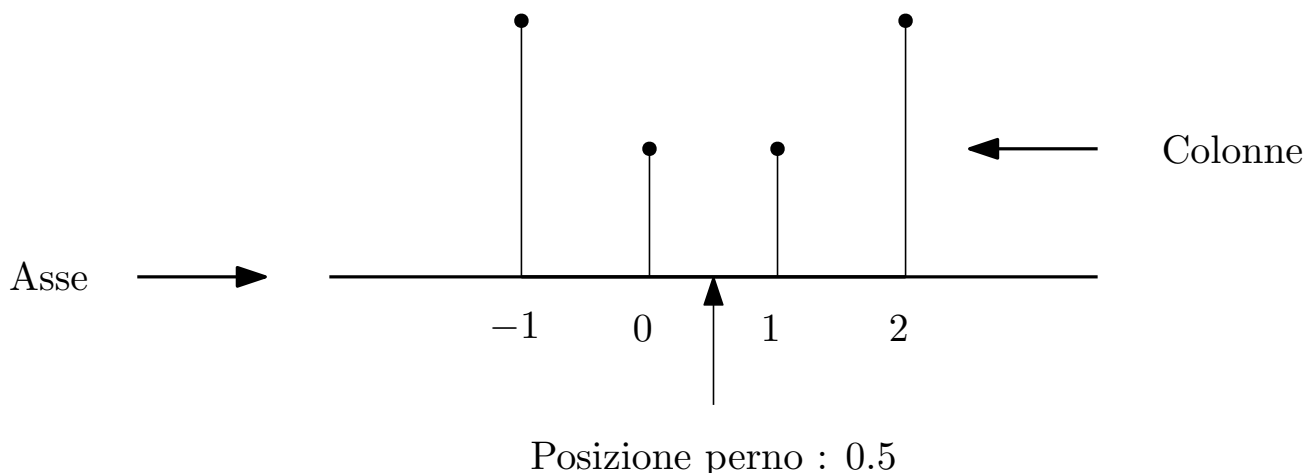
In questo gioco è ovvio che A sia avvantaggiato, dato che in soli 2 esiti su 6 dovrà pagare. In base a questo schema, A sicuramente si troverà a vincere più denaro di B , ma quanto precisamente? Tale quota, è data dal valore atteso :

$$\mathbb{E}(X) = (-1) \cdot \frac{2}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} = 0.5$$

Quindi, deduciamo che per rendere il gioco equo, A prima di ogni lancio, dovrebbe dare a B 0.5 euro.

Una possibile rappresentazione "fisica" che si può dare al valore, atteso è la seguente :

Si consideri l'istogramma di una variabile aleatoria, si immagini l'asse delle ascisse come un asse privo di massa che si appoggia su un perno, e i valori dell'immagine della variabile, come delle colonne che hanno massa uguale alla loro probabilità, il valore atteso non è altro che, la posizione in cui si deve trovare il perno per far sì che l'asse sia in equilibrio, per l'esempio precedente :



4.1.1 Linearità del Valore Atteso

Se Ω è un insieme finito, e \mathcal{V} l'insieme delle sue variabili aleatorie, ossia tutte le funzioni $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{V} assume una naturale struttura di *spazio vettoriale*.

- $\alpha \in \mathbb{R}$ ed $X \in \mathcal{V}$ si ha $(\alpha \cdot X)(\omega) = \alpha \cdot X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$
- $X, Y \in \mathcal{V}$ si ha $(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$

Effettivamente, se $|\Omega| = n$, c'è un isomorfismo canonico fra \mathcal{V} ed \mathbb{R}^n .

Il valore atteso, definito come $\mathbb{E} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ è un **applicazione lineare** :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in \mathcal{V} : \begin{cases} \mathbb{E}(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \end{cases} \quad (41)$$

Dimostrazione : Si consideri la seguente osservazione preliminare :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega | X(\omega)=x} \mathbb{P}(\{\omega\}) \cdot \sum_{x \in Im(X)} x = \sum_{x \in Im(x)} x \cdot \mathfrak{S}(\{x\})$$

Con la nuova definizione alternativa di valore atteso $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\{\omega\})$ Posso dimostrare la linearità di esso :

$$\mathbb{E}(\alpha X) = \sum_{\omega \in \Omega} (\alpha X)(\omega) \cdot \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \alpha \cdot X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\{\omega\}) = \alpha \mathbb{E}(X) \quad (42)$$

$$\mathbb{E}(X + Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (X + Y)(\omega) \cdot \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega)) \cdot \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \quad (43)$$

■

4.2 Varianza

Introduciamo un altro valore associato alle variabili aleatorie.

La **varianza** di una variabile aleatoria è una funzione \mathbb{V} strettamente maggiore di 0, definita nel seguente modo :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{x \in Im(X)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \cdot \mathfrak{S}(\{x\})$$

È lo scarto quadratico medio, ossia, una misura di quanto i valori si discostino quadraticamente rispetto al valore atteso. Una varianza piccola, indica che la variabile aleatoria è *distribuita* vicino il valore medio.

Si consideri l'esempio visto in precedenza : si lancia un dado, ci sono due giocatori A e B , la variabile aleatoria X rappresenta la quota in euro vinta da A in base all'esito del dado (se negativa, è la quota che A deve pagare a B).

$$X_1 = \begin{cases} -1 & \text{se } \omega = 1, 2 \\ 0 & \text{se } \omega = 3 \\ 1 & \text{se } \omega = 4 \\ 2 & \text{se } \omega = 5, 6 \end{cases}$$

In questo caso la varianza rappresenta il rischio che si corre, dato che, se la possibile perdita fosse molto alta, la varianza risulterebbe a sua volta elevata. In questo caso si ha :

$$\mathbb{V}(X_1) = (-1 - 0.5)^2 \cdot \frac{2}{6} + (0 - 0.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (1 - 0.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - 0.5)^2 \cdot \frac{2}{6} \simeq 1,58 \quad (44)$$

De facto, la varianza non è elevata, in quanto il rischio di perdita, rispetto a quello di vincita, non rappresenta una grande differenza di denaro, se dovessi infatti cambiare il denaro perso si avrebbe :

$$X_2 = \begin{cases} -50 & \text{se } \omega = 1, 2 \\ 0 & \text{se } \omega = 3 \\ 1 & \text{se } \omega = 4 \\ 2 & \text{se } \omega = 5, 6 \end{cases}$$

$$\mathbb{V}(X_2) = (-50 - 0.5)^2 \cdot \frac{2}{6} + (0 - 0.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (1 - 0.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - 0.5)^2 \cdot \frac{2}{6} \simeq 850 \quad (45)$$

4.3 Variabili Aleatorie Note

In questo paragrafo vedremo i casi più comuni di variabili aleatorie.

4.3.1 Variabile Aleatoria Certa

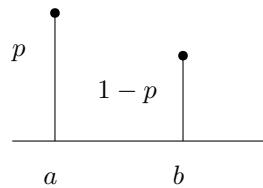
Questo è il caso in cui la variabile aleatoria X è una funzione costante:

$$\exists \tilde{x} \in \mathbb{R} | X(\omega) = \tilde{x} \forall \omega \in \Omega \text{ quindi } |Im(X)| = 1$$

Ovviamente, la varianza risulta nulla : $\mathbb{V}(X) = 0$.

4.3.2 Variabile Aleatoria di Bernoulli

Sia $p \in [0, 1]$ una costante reale, e X una variabile aleatoria che ha solamente due valori nell'immagine : $Im(X) = \{a, b\}$, dove $\Im(\{a\}) = p$ e $\Im(\{b\}) = 1 - p$. Dove rispettivamente $a = 1$ e $b = 0$.



In questo caso varianza e valore atteso valgono :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p \quad (46)$$

$$\mathbb{V}(X) = (0 - p)^2(1 - p) + (1 - p)^2p = p(1 - p)(p + 1 - p) = p(1 - p) \quad (47)$$

Se $p = \frac{1}{2}$, la varianza è massima.

4.3.3 Variabile Aleatoria Binomiale

Considerando lo schema di Bernoulli : $\Omega = \{0, 1\}^n$, dove p è la probabilità che ω_i assuma valore 1, la variabile aleatoria binomiale X conta il numero di 1, ossia $X(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i$.

Ad esempio, per $n = 2$ si ha :

$$X = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega = 00 \\ 1 & \text{se } \omega = 01 \\ 1 & \text{se } \omega = 10 \\ 2 & \text{se } \omega = 11 \end{cases}$$

Abbiamo già visto in precedenza qual'è la probabilità che il numero di 1 sia k :

$$\mathfrak{S}(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Il valore di attesa vale :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot \mathfrak{S}(\{k\}) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = n \cdot p \quad (48)$$

Possiamo sfruttare la *linearità* del valore atteso 4.1.1 per calcolare il valore atteso della variabile aleatoria binomiale senza calcoli complessi. Consideriamo X_i la variabile aleatoria definita nel seguente modo :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l}'i\text{-esimo lancio ha fatto testa} \\ 0 & \text{se l}'i\text{-esimo lancio ha fatto croce} \end{cases} \quad (49)$$

Per cui risulta $\mathbb{E}(X_i) = p$, da qui osservo che :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n p = n \cdot p \quad (50)$$

Calcoliamo adesso la varianza della variabile aleatoria di Bernoulli, ma prima facciamo un'osservazione, in generale è vero che :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Dimostrazione :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \sum_{x \in \text{Im}(X)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \cdot \mathfrak{S}(\{x\}) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X\mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \blacksquare \end{aligned}$$

Quindi calcoliamo il valore di $\mathbb{E}(X^2)$ per la variabile aleatoria di Bernoulli :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^n k^2 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (51)$$

$$= \sum_{k=1}^n 1 \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=2}^{n-1} (k-1) \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (52)$$

$$= np + \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (53)$$

Sostituisco $h = k - 2$:

$$np + n(n-1) \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)(n-2)!}{(h-2)!(n-h-2)!} p^h (1-p)^{n-h-2} = np + n(n-1) \binom{n-2}{h} p^h (1-p)^{n-h-2} \quad (54)$$

$$= np + n(n-1)p^2 \quad (55)$$

Quindi :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) + (\mathbb{E}(X))^2 = np + n(n-1)p^2 + (np)^2 = np(1-p) \quad (56)$$

Considerando

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l}'i\text{-esimo lancio ha fatto testa} \\ 0 & \text{se l}'i\text{-esimo lancio ha fatto croce} \end{cases} \quad (57)$$

Si nota che $\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i)$, sembrerebbe quindi che la varianza sia lineare, ma ciò è falso, dato che la varianza presenta uno scarto quadratico. Il fatto è che ciò è vero per la variabile aleatoria di bernoulli, perché le diverse X_i fra loro sono *indipendenti*.

4.4 Variabili Aleatorie Indipendenti

Siano $X, Y \in \mathcal{V}$ due variabili aleatorie, se $\forall x \in Im(X)$ e $\forall y \in Im(Y)$ vale che :

$$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y)$$

Le due variabili aleatorie si dicono **indipendenti**.

Proposizione : Se X ed Y sono indipendenti, vale la seguente identità :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

Detto ciò, risulta chiaro del perché, per $X = \{\text{Variabile Aleatoria di Bernoulli}\}$, si ha che $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$. Vediamo adesso, dimostriamo la *proposizione*.

Dimostrazione della proposizione : Sviluppo la varianza della somma :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{E}([X + Y - \mathbb{E}(X + Y)]^2) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X) + Y - \mathbb{E}(Y)]^2) \quad (58)$$

$$= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2 + (Y - \mathbb{E}(Y))^2 + 2((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))) \quad (59)$$

$$= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) \quad (60)$$

Il termine $2\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$ è detto *covarianza*, bisogna dimostrare che la covarianza è nulla se X ed Y sono indipendenti.

Osservazione : Se la covarianza è nulla, allora $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$, questo perché :

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) \quad (61)$$

Quindi bisogna dimostrare che, se X, Y sono indipendenti, $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

Passo finale della dimostrazione :

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)Y(\omega)\mathbb{P}(\omega) = \sum_{x \in \text{Im}(X)} x \cdot \sum_{y \in \text{Im}(Y)} y \cdot \sum_{\omega \in \Omega | X(\omega)=x \wedge Y(\omega)=y} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \quad (62)$$

Per indipendenza : $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y)$ Riscrivo :

$$\sum_{x \in \text{Im}(X)} x \mathbb{P}(X = x) \cdot \sum_{y \in \text{Im}(Y)} y \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) \quad \blacksquare \quad (63)$$