

Esercizio 1. Consideriamo \mathbb{Z} , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ed il sottogruppo $n\mathbb{Z}$. Spiegare perché il gruppo quoziente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è ben definito ed isomorfo (di fatto, uguale) a \mathbb{Z}_n .

Il gruppo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è formato dalle classi laterali sinistre di \mathbb{Z} rispetto al sottogruppo $n\mathbb{Z} = \{n \cdot x, x \in \mathbb{Z}\}$, composto da tutti i multipli di n . Tali classi, sono del tipo $x \cdot n\mathbb{Z} = \{x \cdot 1 \cdot n, x \cdot 2 \cdot n, x \cdot 3 \cdot n \dots x \cdot k \cdot n \dots\}$, le distinte classi laterali, contengono quindi i multipli di

$$1 \cdot n\mathbb{Z} = \{n, 2n, 3n \dots kn \dots\}$$

$$2 \cdot n\mathbb{Z} = \{2n, 4n, 6n \dots 2kn \dots\}$$

⋮

$$kn\mathbb{Z} = \{kn, 2kn, 3kn \dots knn \dots\}$$

$$n \cdot n\mathbb{Z} = \{nn, 2nn, 3nn \dots hnn \dots\}$$

$$(n+1)n\mathbb{Z} = \{(n+1)n, (n+1)2n \dots (n+1)hn \dots\}$$

NOTO CHE: \Rightarrow MA SONO ANCORA I MULTIPLI DI n

$$(n+2)n\mathbb{Z} = \{(n+2)n, (n+2)2n \dots (n+2)hn \dots\}$$

$$\Rightarrow |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n$$

$$= \{n^2+2n, n^2+4n, n^2+6n \dots n^2+2hn\} = \text{RIFARE}$$

sono i multipli di $2n \dots$

Esercizio 2. Sia G il gruppo affine della retta affine numerica \mathbb{R} : per definizione $G = \{f_{a,c}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, c \in \mathbb{R}\}$ con $f_{a,c}(x) = ax + c$ e prodotto in G uguale alla composizione di applicazioni. Dopo aver verificato che G è effettivamente un sottogruppo del gruppo di tutte le bigezioni di \mathbb{R} e che non è commutativo, dimostrare che il sottoinsieme delle traslazioni $T = \{f_{1,c}, c \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo normale e che G/T è isomorfo al gruppo $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Suggerimento: definire un opportuno omomorfismo surgettivo $G \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed applicare il teorema fondamentale di omomorfismo fra gruppi.....

Dimostro che G è un sottogruppo: $f_{a,c} \circ (f_{a',c'})^{-1} = a(f_{a',c'}^{-1}(x)) + c = a(\frac{x-c'}{a'}) + c = a \cdot (x-c') \cdot \frac{1}{a'} + c = (ax - ac') \frac{1}{a'} + c = \frac{ax}{a'} - \frac{ac'}{a'} + c = x \cdot \frac{a}{a'} + (-\frac{ac'}{a'} + c) = f_{\frac{a}{a'}, -\frac{ac'}{a'} + c} \in G.$

e non è commutativo:

$$f_{a,b} \circ f_{c,d} = a(cx+d) + b \neq c(ax+b) + d = f_{c,d} \circ f_{a,b}.$$

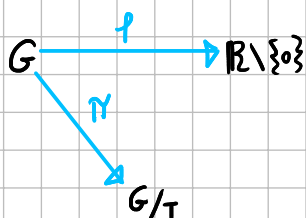
L'insieme $T = \{f_{1,c}, c \in \mathbb{R}\}$ è NORMALE, sia $f_{a,p}T$ una sua classe laterale sinistra: $= \{f_{a,p} \circ f_{1,c} \mid c \in \mathbb{R}\} = \{a(x+c) + p \mid c \in \mathbb{R}\} = \{ax + ac + p \mid c \in \mathbb{R}\} \neq \{ax + ac + p - c \mid c \in \mathbb{R}\} = f_{a,p}T.$

Definisco la PROIEZIONE CANONICA $\pi: G \rightarrow G/T$ tale che $\pi(f_{a,c}) = Tf_{a,c}.$

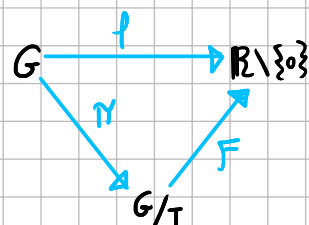
A questo punto, definisco un omomorfismo suriettivo $f: G \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $f(f_{a,c}) = f(ax+c) = \begin{cases} a \cdot ax+c & \text{se } c \neq 0 \\ 1 & \text{se } c = 0 \end{cases}$ \neq ogni elemento di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è MAPPATO.

A questo punto, (1): esiste un omomorfismo suriettivo da G ad $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(2): π è la proiezione canonica sul gruppo quoziente:



\Rightarrow per il lco. fondamentale di omomorfismo di gruppi, esiste UNICO, un ISOMORFISMO F da G/T a $\mathbb{R} \setminus \{0\}.$



Esercizio 3. Determinare il gruppo degli automorfismi del gruppo ciclico $(\mathbb{Z}_n, +)$.
 (Suggerimento: basta determinare gli omomorfismi di \mathbb{Z}_n in sé stesso che sono suriettivi; osserviamo anche che un omomorfismo di \mathbb{Z}_n in sé stesso è determinato dall'immagine di $[1]$).

So che un generico isomorfismo f deve preservare l'unità, $f(1)$ quindi sarà l'unità nel gruppo di arrivo. L'unità, genera \mathbb{Z}_n , anche $f(1)$, quindi $f(1) \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$. Abbiamo dedotto che l'unità $\hat{=}$ può essere mappata in $n-1$ valori. **PAG. 39 APPUNTI**

Esercizio 4. Sia (G, \cdot) un gruppo. Il Centro di G è l'insieme

$$Z(G) := \{z \in G \mid z \cdot g = g \cdot z \forall g \in G\}$$

Consideriamo l'applicazione $\Phi : G \rightarrow \text{Aut}(G)$ che associa a $x \in G$ l'automorfismo γ_x . Abbiamo incontrato questa applicazione nell'Esercizio 8 del compito dell'8/11/23.

- Verificare che $Z(G) = \text{Ker}\Phi$
- cosa deduciamo da questa informazione ?
- Cosa ci dice questo risultato sul sottogruppo $\text{Im}\Phi$ degli automorfismi interni ?

Il neutro di $\text{Aut}(G)$ è la funzione identità Id .

$\text{Ker}\Phi = \{x \in G \mid \gamma_x = \text{Id}\}$, ma $\gamma_x(z) = x \cdot z \cdot x^{-1}$. Considero $Z(G)$, so che è un sottogruppo, se $h \in Z(G) \Rightarrow h^{-1} \in Z(G)$. Noto che $\text{Ker}\Phi = \{x \in G \mid \gamma_x = \text{Id}\} = \{x \in G \mid x \cdot z \cdot x^{-1} = z \forall z \in G\} = \{x \in G \mid x \cdot z \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} \cdot z \forall z \in G\}$ ma $x \cdot z \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} \cdot z \iff x \in Z(G) \Rightarrow \Rightarrow \{x \in G \mid x \cdot z \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} \cdot z \forall z \in G\} = \{x \in G \mid x \in Z(G)\} = Z(G)$.