19 settembre 2024

Exercise 2: consider the standard form polyhedron $P = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$. Suppose that the matrix A of dimension $m \times n$ has linearly independent rows, and all basic feasible solutions are non-degenerate. Let x be an element of P that has exactly m positive components.

i. Show that x is a basic feasible solution
ii. Show that the result of part (i) is false if the non-degeneracy assumption is removed.

Sia $\mathcal{B}=\{i : x_i \neq 0\}$, $A_{\mathcal{B}}$ e' una matrice $m \times m$, data l'assunzione che A ha le righe lin. indipendenti $\Rightarrow A_{\mathcal{B}}$ ha rango m ed e' non singolare $\Rightarrow \mathcal{B}$ e' una base valida ed x e' la BFS associata. Se l'ipotesi sulle sol. non degenere fosse Falsa, non si potrebbe affermare che $\mathcal{B}$ e' la base correlata ad x.

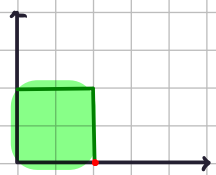
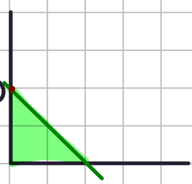
settembre 2023

Exercise 3: show an example of linear problem (P) and its dual (D) such that:

a) (P) is feasible and (D) is feasible
b) (P) is unfeasible and (D) is unfeasible

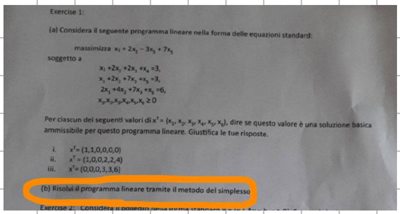
a) Se un LP e' ammissibile e limitato, anche il suo duale lo e'.

$$(P) = \begin{cases} \max & x_1 \\ \text{s.t.} & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (D) = \begin{cases} \min & y_1 + y_2 \\ & y_1 + y_2 \leq 1 \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

(P)  (D) 

b) Provo con un LP uguale al duale e non ammissibile, sia $\alpha \in (0, \infty)$

$$\begin{cases} \max & 3x_1 + 3x_2 \\ & \alpha x_2 \leq -3 \\ & -\alpha x_1 \leq -3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{il duale e'} \quad \begin{cases} \min & -3y_1 - 3y_2 \\ & -\alpha y_2 \geq 3 \\ & \alpha y_1 \geq 3 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \max & 3y_1 + 3y_2 \\ & \alpha y_2 \leq -3 \\ & -\alpha y_1 \leq -3 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$


Exercise 1:

(a) Considera il seguente programma lineare nella forma delle equazioni standard:

massimizza $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_5$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_5 &= 3, \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_6 &= 6, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Per ciascun dei seguenti valori di $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, dire se questo valore è una soluzione basica ammissibile per questo programma lineare. Giustifica le tue risposte.

i. $x^T = (1,1,0,0,0,0)$
ii. $x^T = (1,0,0,2,2,4)$
iii. $x^T = (0,0,0,3,3,6)$

(b) Risolvi il programma lineare tramite il metodo del simplesso

La matrice dei vincoli e' $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) e' la BFS associata a $B = \{4, 5, 6\}$, la (ii) non e' BFS perche' ha piu' di m termini diversi da 0.

La (i) potrebbe essere una BFS degenere. Risolvo col simplesso:

$$\begin{cases} x_4 = -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3 \\ x_5 = -x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 3 \\ x_6 = -2x_1 - 4x_2 - 7x_3 + 6 \\ z = -6x_1 - 12x_2 - 52x_3 + 21 \end{cases}$$

e' ottimale, la sol e' $\Rightarrow (0\ 0\ 0\ 3\ 3\ 6)^T$ e il massimo e' 21.