Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 8
18 Maggio 2023 — Compito n. 00145

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: Manar

Cognome: Cosu

Matricola: 2 0 4 6 2 1 2

$f(t) = \sin(t)$

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	□	■	■	■	□	□	■	■	■	□	■	■	■	■	■	■
F	■	□	□	□	■	■	□	□	□	■	□	□	□	□	□	□
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = (12t + 4)\, y(t) + A\, e^{6t^2+4t}\,.$$

1A) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(6) = 11$.
1B) Se $A = 0$, la funzione $y(t) = 5\, e^{6t^2+4t}$ è soluzione dell'equazione.
1C) La funzione $y(t) = (6 + A\,t)\, e^{6t^2+4t}$ è soluzione dell'equazione.
1D) Se $y(0) = 0$ e $A = 5$, si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty\,.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 2\,\cos(t)\, y(t) + 11\,\sin(t)\,\cos(t)\,.$$

2A) Se $y(0) = 0$, si ha $y'(0) \neq 0$.
2B) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = 2$.
2C) Se $y(0) = 3$, la soluzione $y(t)$ è crescente in un intorno di $t = 0$.
2D) Se $y(\frac{\pi}{2}) = 7$, si ha $T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = 7$.

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{e^{y(t)} - 1}{e^{y(t)}}\, \cos(t)\,.$$

3A) L'equazione è a variabili separabili.
3B) Se $y(0) = 0$, la soluzione $y(t)$ non è costante.
3C) Se $y(0) = 2$, non esiste $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$.
3D) Se $y(0) = \ln(8)$, si ha $e^{y(t)}$ $e^{\sin(t)} + 1$

$$y(s) = \ln(7\, e^{\sin(s)} + 1)\,.$$

4) Si consideri l'equazione differenziale $y'(t) = t\,(y(t)^3 - 81 y(t))$.

4A) Se $y(0) = 9$, la soluzione è costante.
4B) Se $y(0) = 1$, si ha $y'(0) = 0$.
4C) Se $y(0) = -1$, si ha $T_2(y(t); 0) = -1 + 40\,t^2$.
4D) Se $y(0) = 1$, la soluzione ha un minimo relativo per $t = 0$.

Docente
☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

3C il problema

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{e^{y(t)} - 1}{e^{y(t)}} \cos(t) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

NON PUO' AVERE $t_0 > 0$ t.c. $y(t_0) = 0$ perchè,

esiste la funzione COSTANTE $y(t) = 0$ CHE GIA' SODDISFA

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{e^{y(t)-1}}{e^{y(t)}} \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

QUINDI IL PROBLEMA AVREBBE 2 SOLUZIONI

5) Si consideri il problema di Cauchy

(1) $$\begin{cases} y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

a) Si risolva (1) se $a(t) = -8$, $b(t) = 11$ e $y_0 = 0$.
b) Si risolva (1) se $a(t) = \sin(t)$, $b(t) = 6\,\sin(t)$ e $y(0) = \pi$.
c) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 1 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = e^{2\,t}$, $b(t) = 5\,\cos(t)$ e $y_0 = 7$.
d) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = 4\,t$, $b(t) = 9\,t^2$ e $y_0 = 5$.

a) $y'(t) = -8y(t) + 11 \qquad y(0) = 0$

$$y(t) = e^{-8t}\left[\int_0^t 11 e^{8s}\,ds\right] = e^{-8t}\left[11\int_0^t e^{8s}\right] = e^{-8t}\left[11\left[\frac{e^{8t}}{8} - \frac{1}{8}\right]\right] =$$

$$= e^{-8t}\left[\frac{11}{8}e^{8t} - \frac{11}{8}\right] = \frac{11}{8} - e^{-8t}\frac{11}{8} = \frac{11}{8}\left[1 - e^{-8t}\right]$$

b) $y'(t) = \sin(t)y(t) + 6\sin(t) \qquad y(0) = \pi$

$$e^{1-\cos(t)}\left[\pi + 6\int_0^t \sin(s)e^{\cos(s)-1}\,ds\right]$$

$$\int_0^t \sin(s)e^{\cos(s)-1}\,ds = \left| \begin{array}{l} y = \cos(s)-1 \\ dy = -\sin(s)\,ds \\ ds = -\dfrac{dy}{\sin(s)} \end{array} \right| = -\int_0^t \cancel{\sin(s)}\, e^y \left[\frac{dx}{\cancel{\sin(s)}}\right] = -\left[e^{\cos(s)-1} - e^0\right]$$

$$-e^{\cos(s)-1} + 1$$

$$e^{1-\cos(t)}\left[\pi + 6\left[-e^{\cos(s)-1} + 1\right]\right] = e^{1-\cos(t)}\left[\pi - 6e^{\cos(s)-1} + 6\right]$$

$$= \pi e^{1-\cos(t)} - 6 + 6e^{1-\cos(t)} = e^{1-\cos(t)}\left[\pi + 6\right] - 6$$

c) $y'(0) = e^{2\cdot 0}\cdot 7 + 5 = 12 \qquad T_1 = 7 + 12t$

d) $y'(t) = 4t\,y(t) + 9t^2 \qquad y''(t) = 4y(t) + 4ty'(t) + 18t$

$y(0) = 5$

$y'(0) = 0 \qquad y''(0) = 20 \qquad T_2 = 5 + 10t^2$

Cognome | Nome | Matricola | **Compito 00145**

6) Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.

a) $y'(t) = 8\,y(t) + 3$, se $y(0) = 0$.

b) $y'(t) = 10\,t\,(16 + y^2(t))$, se $y(0) = 0$.

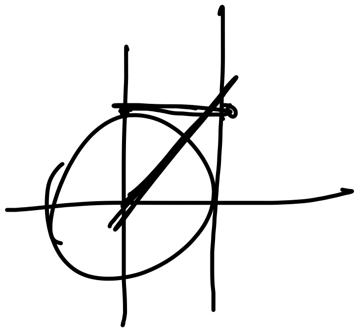
c) $y'(t) = \mathrm{e}^{-y(t)}\,\mathrm{e}^{7\,t}$, se $y(0) = 0$.

d) $y'(t) = \frac{7\,(1+y^2(t))}{y(t)}$, se $y(0) = 1$.

---

d

$$y'(t)\cdot\frac{7(1+y^2(t))}{y(t)} \qquad y(0) = 1 \qquad f(t) = 7 \qquad F(t) = 7t$$



$$\frac{1}{2}\int\frac{2s}{1+s^2} = \frac{1}{2}\ln(1+s^2)$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2(t)) = 7t + \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\ln(1+y^2(t)) = 14t + \ln(2)$$

$$y(t) = \sqrt{2e^{14t} - 1}$$

Soluzioni del compito 00145

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = (12t + 4)\, y(t) + A\, \mathrm{e}^{6t^2+4t}\,.$$

Ricordiamo la formula risolutiva per il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t)\,, \\ y(t_0) = y_0\,. \end{cases}$$

Posto

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\,,$$

si ha

$$(2) \qquad y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\, \mathrm{e}^{-A(s)}\, ds \right].$$

1A) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(6) = 11$.

Falso: Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, è sufficiente una sola condizione iniziale affinché esista un'unica soluzione.

1B) Se $A = 0$, la funzione $y(t) = 5\, \mathrm{e}^{6t^2+4t}$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $y(t) = 5\, \mathrm{e}^{6t^2+4t}$, si ha

$$y'(t) = 5\,(12t + 4)\, \mathrm{e}^{6t^2+4t} = (12t + 4)\, y(t) = (12t + 4)\, y(t) + A\, \mathrm{e}^{6t^2+4t}\,,$$

e quindi $y(t)$ è soluzione dell'equazione.

1C) La funzione $y(t) = (6 + A\, t)\, \mathrm{e}^{6t^2+4t}$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $y(t) = (6 + A\, t)\, \mathrm{e}^{6t^2+4t}$, derivando si ha

$$y'(t) = A\, \mathrm{e}^{6t^2+4t} + (6 + A\, t)\,(12t + 4)\, \mathrm{e}^{6t^2+4t} = (12t + 4)\, y(t) + A\, \mathrm{e}^{6t^2+4t}\,,$$

e quindi $y(t)$ è soluzione dell'equazione.

1D) Se $y(0) = 0$ e $A = 5$, si ha

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty\,.$$

Vero: Il problema rientra nel caso (1) con

$$a(t) = 12t + 4\,, \quad b(t) = 5\, \mathrm{e}^{6t^2+4t}\,, \qquad t_0 = 0\,, \quad y_0 = 0\,.$$

Dato che

$$A(t) = \int_0^t a(s)\, ds = \int_0^t (12s + 4)\, ds = (6s^2 + 4s)\Big|_0^t = 6t^2 + 4t\,,$$

e dato che

$$\int_0^t b(s)\, \mathrm{e}^{-A(s)}\, ds = \int_0^t 5\, \mathrm{e}^{6s^2+4s}\, \mathrm{e}^{-(6s^2+4s)}\, ds = \int_0^t 5\, ds = 5\, t\,,$$

dalla (2) si ha

$$y(t) = 5\, t\, \mathrm{e}^{6t^2+4t}\,,$$

da cui segue che

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty\,.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 2\,\cos(t)\,y(t) + 11\,\sin(t)\,\cos(t)\,.$$

Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = -2\,\sin(t)\,y(t) + 2\,\cos(t)\,y'(t) + 11\,\cos^2(t) - 11\,\sin^2(t)\,. \tag{1}$$

2A) Se $y(0) = 0$, si ha $y'(0) \neq 0$.

Falso: Dall'equazione, sostituendo $t = 0$, si ha

$$y'(0) = 2\,\cos(0)\,y(0) + 11\,\sin(0)\,\cos(0) = 2 \cdot 1 \cdot 0 + 11 \cdot 0 \cdot 1 = 0\,.$$

2B) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = 2$.

Falso: Dall'equazione con $t = 0$ si ha (si veda l'esercizio **2A**)

$$y'(0) = 0\,.$$

Dalla (1) con $t = 0$ si ha

$$y''(0) = 11 \neq 2\,,$$

dato che il primo, secondo e quarto termine si annullano.

2C) Se $y(0) = 3$, la soluzione $y(t)$ è crescente in un intorno di $t = 0$.

Vero: Dall'equazione si ha

$$y'(0) = 2 \cdot \cos(0) \cdot y(0) = 2 \cdot 3 = 6 > 0\,,$$

per ipotesi. Essendo $y'(0) > 0$, si ha $y'(t) > 0$ in un intorno dell'origine (per il teorema di permanenza del segno per funzioni continue) e quindi $y(t)$ è crescente in un intorno dell'origine.

2D) Se $y(\frac{\pi}{2}) = 7$, si ha $T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = 7$.

Vero: Dall'equazione si ha

$$y'(\tfrac{\pi}{2}) = 2\,\cos(\tfrac{\pi}{2})\,y(\tfrac{\pi}{2}) + 11\,\sin(\tfrac{\pi}{2})\,\cos(\tfrac{\pi}{2}) = 2 \cdot 0 \cdot 7 + 11 \cdot 1 \cdot 0 = 0\,.$$

Ricordando che

$$T_1(y(t); \tfrac{\pi}{2}) = y(\tfrac{\pi}{2}) + y'(\tfrac{\pi}{2})\,(t - \tfrac{\pi}{2})\,,$$

si ha

$$T_1(y(t); \tfrac{\pi}{2}) = 7\,.$$

---

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{e^{y(t)} - 1}{e^{y(t)}} \cos(t)\,.$$

Osserviamo che l'equazione è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(y(t))\, g(t)\,,$$

con

$$f(s) = \frac{e^s - 1}{e^s}\,, \qquad g(t) = \cos(t)\,.$$

Dato che $f(0) = 0$, se all'equazione abbiniamo la condizione iniziale $y(0) = 0$ abbiamo la soluzione costante $y(t) \equiv 0$. Se, invece $y(0) = y_0 > 0$ allora $y(t) \neq 0$ per ogni t e possiamo separare le variabili, riscrivendo l'equazione come

$$\frac{e^{y(t)}\, y'(t)}{e^{y(t)} - 1} = \cos(t)\,.$$

Integrando tra zero e s si ha

$$\int_0^s \frac{e^{y(t)}\, y'(t)}{e^{y(t)} - 1}\, dt = \int_0^s \cos(t)\, dt = \sin(s)\,.$$

Per il primo integrale, con la sostituzione $z = y(t)$, da cui $dz = y'(t)\, dt$, si ha

$$\int_0^s \frac{e^{y(t)}\, y'(t)}{e^{y(t)} - 1}\, dt = \int_{y_0}^{y(s)} \frac{e^z}{e^z - 1}\, dz\,.$$

Con la sostituzione $w = e^z - 1$, da cui $dw = e^z\, dz$, si ha

$$\int_{y_0}^{y(s)} \frac{e^z}{e^z - 1}\, dz = \int_{e^{y_0}-1}^{e^{y(s)}-1} \frac{dw}{w} = \ln(|w|)\Big|_{e^{y_0}-1}^{e^{y(s)}-1} = \ln\left(\left|\frac{e^{y(s)} - 1}{e^{y_0} - 1}\right|\right).$$

Essendo $y_0 > 0$ possiamo levare i moduli (perché?) e scrivere che

$$\ln\left(\frac{e^{y(s)} - 1}{e^{y_0} - 1}\right) = \sin(s)\,,$$

da cui segue, dopo alcuni calcoli, che

$$y(s) = \ln[(e^{y_0} - 1)\, e^{\sin(s)} + 1]\,. \tag{1}$$

Osserviamo di passaggio che la (1) è valida anche nel caso in cui $y_0 = 0$.

3A) L'equazione è a variabili separabili.

Vero: Per quanto detto sopra, l'equazione è a variabili separabili.

3B) Se $y(0) = 0$, la soluzione $y(t)$ non è costante.

Falso: Dato che $f(y_0) = f(0) = 0$, la funzione costante $y(t) \equiv y_0 = 0$ è soluzione dell'equazione.

3C) Se $y(0) = 2$, non esiste $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$.

Vero: Se esistesse $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$, il problema di Cauchy con dato iniziale $y(t_0) = 0$ avrebbe due soluzioni: la funzione $y(t)$ che stiamo considerando (e che non è la funzione nulla dato che in $t = 0$ vale 2), e la funzione $w(t) \equiv 0$. Dato che il problema di Cauchy ha un'unica soluzione, si ha $y(t) \neq 0$ per ogni $t > 0$.

3D) Se $y(0) = \ln(8)$, si ha

$$y(s) = \ln(7\, e^{\sin(s)} + 1)\,.$$

Vero: Dalla (1), con $y_0 = \ln(8)$, da cui segue che $\mathrm{e}^{y_0} - 1 = 8 - 1 = 7$, si ha
$$y(s) = \ln(7\,\mathrm{e}^{\sin(s)} + 1)\,.$$

---

4) Si consideri l'equazione differenziale $y'(t) = t\,(y(t)^3 - 81y(t))$.

Osserviamo che l'equazione è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(y(t))\,g(t)\,,$$

con

$$f(s) = s^3 - 81s\,, \qquad g(t) = t\,. \tag{1}$$

4A) Se $y(0) = 9$, la soluzione è costante.

Vero: Se $f(s)$ è come in (1), dato che si ha $f(9) = 0$, la funzione costante $y(t) \equiv 9$ è soluzione dell'equazione.

4B) Se $y(0) = 1$, si ha $y'(0) = 0$.

Vero: Dall'equazione, scritta per $t = 0$, si ha

$$y'(0) = 0 \cdot (y(0)^3 - 81y(0)) = 0 \cdot (1 - 81) = 0\,.$$

4C) Se $y(0) = -1$, si ha $T_2(y(t); 0) = -1 + 40\,t^2$.

Vero: Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = y(t)^3 - 81y(t) + t\,(3y(t)^2 - 81)\,y'(t)\,,$$

da cui segue che $y''(0) = 80$. Dato che dall'equazione segue che $y'(0) = 0$ (si veda l'esercizio **4B**), si ha

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)\,t + \frac{y''(0)}{2}\,t^2 = -1 + 40\,t^2\,.$$

4D) Se $y(0) = 1$, la soluzione ha un minimo relativo per $t = 0$.

Falso: Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = y(t)^3 - 81y(t) + t\,(3y(t)^2 - 81)\,y'(t)\,,$$

da cui segue che $y''(0) = -80 < 0$. Dato che dall'equazione segue che $y'(0) = 0$ (si veda l'esercizio **4B**), si ha che $t = 0$ è un punto di massimo relativo per $y(t)$.

---

5) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

a) Si risolva (1) se $a(t) = -8$, $b(t) = 11$ e $y_0 = 0$.
b) Si risolva (1) se $a(t) = \sin(t)$, $b(t) = 6\,\sin(t)$ e $y(0) = \pi$.
c) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 1 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = \mathrm{e}^{2\,t}$, $b(t) = 5\,\cos(t)$ e $y_0 = 7$.
d) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = 4\,t$, $b(t) = 9\,t^2$ e $y_0 = 5$.

Soluzione:
Ricordiamo che la soluzione del problema di Cauchy (1) è data da

$$(2) \qquad y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\left[y_0 + \int_0^t b(s)\,\mathrm{e}^{-A(s)}\,ds\right], \qquad \text{dove} \qquad A(t) = \int_0^t a(s)\,ds\,.$$

a) Dato che $a(t) = -8$, si ha

$$A(t) = -\int_0^t 8\,ds = -8\,t\,.$$

Pertanto, per la (2) si ha

$$y(t) = \mathrm{e}^{-8\,t}\left[0 + \int_0^t 11\,\mathrm{e}^{8\,s}\,ds\right] = \mathrm{e}^{-8\,t}\left[\frac{11}{8}\,\mathrm{e}^{8\,s}\Big|_0^t\right] = \frac{11}{8}\,\mathrm{e}^{-8\,t}\,[\mathrm{e}^{8\,t} - 1] = \frac{11}{8}\,[1 - \mathrm{e}^{-8\,t}]\,.$$

b) Dato che $a(t) = \sin(t)$, si ha

$$A(t) = \int_0^t \sin(s)\,ds = -\cos(s)\Big|_0^t = 1 - \cos(t)\,,$$

e quindi, per la (2),

$$y(t) = \mathrm{e}^{1-\cos(t)}\left[\pi + \int_0^t 6\,\sin(s)\,\mathrm{e}^{\cos(s)-1}\,ds\right].$$

Con il cambio di variabile $z = \cos(s) - 1$, da cui $dz = -\sin(s)\,ds$, si ha

$$\int_0^t 6\,\sin(s)\,\mathrm{e}^{\cos(s)-1}\,ds = -6\int_0^{\cos(t)-1} \mathrm{e}^z\,dz = -6\,\mathrm{e}^z\Big|_0^{\cos(t)-1} = 6(1 - \mathrm{e}^{\cos(t)-1})\,.$$

Pertanto

$$y(t) = \mathrm{e}^{1-\cos(t)}\,[\pi + 6\,(1 - \mathrm{e}^{\cos(t)-1})] = (\pi + 6)\,\mathrm{e}^{1-\cos(t)} - 6\,.$$

c) Dall'equazione si ha

$$y'(0) = \mathrm{e}^{2\cdot 0}\,y(0) + 5\,\cos(0) = 1\cdot 7 + 5 = 12\,,$$

da cui segue che

$$T_1(y(t); 0) = y(0) + y'(0)\,t = 7 + 12\,t\,.$$

d) Dall'equazione si ha

$$y'(0) = 4\cdot 0\cdot y(0) + 9\cdot 0^2 = 0\,.$$

Derivando l'equazione si ha poi

$$y''(t) = 4\,y(t) + 4\,t\,y'(t) + 18\,t\,,$$

da cui segue che

$$y''(0) = 4\,y(0) + 4\cdot 0\cdot y'(0) + 18\cdot 0 = 20\,.$$

Si ha quindi

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)\,t + \frac{y''(0)}{2}\,t^2 = 5 + 10\,t^2\,.$$

6) Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.
a) $y'(t) = 8\,y(t) + 3$, se $y(0) = 0$.
b) $y'(t) = 10\,t\,(16 + y^2(t))$, se $y(0) = 0$.
c) $y'(t) = \mathrm{e}^{-y(t)}\,\mathrm{e}^{7\,t}$, se $y(0) = 0$.
d) $y'(t) = \frac{7\,(1+y^2(t))}{y(t)}$, se $y(0) = 1$.

Soluzione:
a) Dividendo per $8\,y(t) + 3$, l'equazione è equivalente a
$$\frac{y'(t)}{8\,y(t) + 3} = 1\,.$$
Integrando tra 0 e s si ha
$$\int_0^s \frac{y'(t)}{8\,y(t) + 3}\,dt = \int_0^s 1\,dt = s\,.$$
Con la sostituzione $z = y(t)$ si ha, ricordando che $y(0) = 0$, ed osservando che $8\,y(s) + 3 > 0$ per s vicino a zero,
$$\int_0^s \frac{y'(t)}{8\,y(t) + 3}\,dt = \int_0^{y(s)} \frac{dz}{8\,z + 3} = \frac{1}{8}\,\ln(|8\,z + 3|)\Big|_0^{y(s)} = \frac{1}{8}\,[\ln(8\,y(s) + 3) - \ln(3)]\,.$$
Pertanto,
$$\frac{1}{8}\,[\ln(8\,y(s) + 3) - \ln(3)] = s\,,$$
da cui segue (dopo facili calcoli...) che
$$\frac{8\,y(s) + 3}{3} = \mathrm{e}^{8\,s}\,,$$
e quindi che
$$y(s) = \frac{3\,\mathrm{e}^{8\,s} - 3}{8}\,.$$

b) Separando le variabili, si ha che deve essere
$$\frac{y'(t)}{16 + y^2(t)} = 10\,t\,.$$
Integrando (con la consueta sostituzione $z = y(t)$) si ha
$$\int_0^{y(s)} \frac{dz}{16 + z^2} = \int_0^s 10\,t\,dt = 5\,s^2\,.$$
Dato che
$$\int \frac{dz}{16 + z^2} = \frac{1}{4}\,\arctan\left(\frac{z}{4}\right),$$
si ha
$$\frac{1}{4}\,\arctan\left(\frac{y(s)}{4}\right) = 5\,s^2\,,$$
da cui segue che
$$y(s) = 4\,\tan(20\,s^2)\,.$$

c) Separando le variabili si arriva a
$$\int_0^{y(s)} \mathrm{e}^z\,dz = \int_0^s \mathrm{e}^{7\,t}\,dt = \frac{\mathrm{e}^{7\,s} - 1}{7}\,.$$
Il primo integrale è immediato, e porta a
$$\mathrm{e}^{y(s)} - 1 = \frac{\mathrm{e}^{7\,s} - 1}{7}\,,$$

da cui

$$y(s) = \ln\left(\frac{e^{7\,s} + 6}{7}\right).$$

d) Separando le variabili si arriva a

$$\int_1^{y(s)} \frac{z}{1 + z^2}\, dz = \int_0^s 7\, dt = 7\, s\,.$$

Dato che

$$\int \frac{z}{1 + z^2}\, dz = \frac{1}{2}\, \frac{2z}{1 + z^2}\, dz = \frac{1}{2}\, \ln(1 + z^2)\,,$$

si ha

$$\frac{1}{2}\, \ln(1 + y^2(s)) - \frac{1}{2}\, \ln(2) = 7\, s\,,$$

da cui

$$y^2(s) = 2\, e^{14\, s} - 1\,,$$

e quindi

$$y(s) = \sqrt{2\, e^{14\, s} - 1}\,.$$

Perché, tra le due radici, si è scelta quella positiva?