Definizione di intorno

L'intorno di $C \in \mathbb{R}$ è un qualsiasi intervallo aperto che contenga C.

$$U_c = (a, b) \; tale \; che \; C \in (a, b)$$

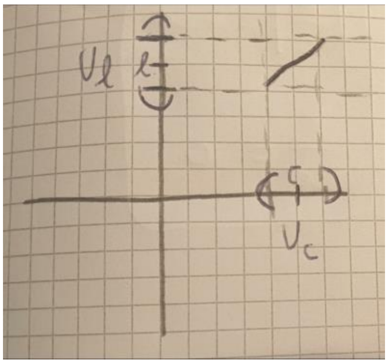
Intorno degli infiniti

$$U_{+\infty} = (a, +\infty) \qquad U_{-\infty} = (-\infty, b)$$

Definizione di "definitivamente": una proprietà vale definitivamente per $x \to C \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ se esiste un intorno di C dove vale la proprietà.

Definizione topologica :

limite dato $C \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\} = \mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{x \to C} f(x) = l$ se $\forall$ intorno U_l $\exists$ intorno $U_C \; tale \; che \; \forall \; x \in U_C\{c\} \; tale \; che \; f(x) \in U_l$



Riguardo i limiti :

$$\forall \varepsilon > 0 : U_C = (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \; \exists \; \delta \to U_C = (C - \delta, C + \delta)$$
$$\forall x \in (C - \delta, C + \delta)\{C\} \leftrightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$
$$\Updownarrow$$
$$0 < |x - C| < \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon$$

Quindi:

$$\lim_{x \to C} f(x) = l \; \text{se} \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \; tale \; che \; 0 < |x - C| < \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$C = +\infty, l \in \mathbb{R} \; \forall \; U_l \; \exists \; U_\infty \; tale \; che \; x \in U_\infty \to f(x) \in U_l$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$
$$\forall \varepsilon > 0, U_l = (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \exists \; M \to U_\infty = (M, \infty) \quad tale \; che$$
$$x \in U_\infty \to f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) x \in (M, \infty) \to x > M$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \in \mathbb{R} \; tale \; che \; \forall x > M \to |f(x) - l| < \varepsilon$$

Teorema ponte
La definizione di limite per successione e la definizione topologica sono uguali.

Proprietà dei limiti

Teorema dei carabinieri

Se $\lim_{x\to C} f(x) = l$ e $\lim_{x\to C} g(x) = l$ $C \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}$ e se $f(x) < h(x) < g(x)$ in un intorno di C $\rightarrow$ $\lim_{x\to C} h(x) = l$

Esempio:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad 0 \leftarrow -\frac{1}{x} < \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 0 < \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

Corollario

Se $\lim_{x\to C} g(x) = 0 \quad e \quad |h(x)| < g(x) \rightarrow \lim_{x\to c} h(x) = 0$

Permanenza del segno

I) Se $\lim_{x\to C} f(x) = l > 0 \rightarrow \exists\, U_C\ tale\ che\ \forall x \in U_C\{C\} \rightarrow f(x) > 0$
II) Se $f(x) > 0$ in un intorno di C allora $\lim_{x\to C} f(x) = l > 0$

Algebre dei limiti

Se $\lim_{x\to C} f(x) = l$ e $\lim_{x\to C} g(x) = k$ $, C \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$
Allora

$$\lim_{x\to C} f(x) + \lim_{x\to C} g(x) = l + k$$
$$\lim_{x\to C} f(x) \times \lim_{x\to C} g(x) = l \times k$$
$$\lim_{x\to C} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{k}\ se\ k > 0$$

L'algebra dei limiti si può estendere a $l = \pm\infty$ e $k = \pm\infty$ esclusi i casi:

$$+\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \times \infty, 1^{\infty}$$

Ricorda :

$$\left|\frac{k}{0}\right| = +\infty \quad e \quad \frac{k}{\infty} = 0$$

Teorema del cambio di variabili

$$\text{se } \lim_{x\to C} g(x) = t_0 \text{ e } \lim_{x\to t_0} f(x) = l \text{ allora } \lim_{x\to C} f(g(x)) = l$$

Esempi:

I) $\lim_{x\to 0} f\left(sin\frac{1}{x}\right)$ Non esiste

II) $\lim_{x\to 0} f\left(xsin\frac{1}{x}\right)$ Esiste e vale 0

III) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \quad f(x) = \begin{cases} 1 \; se \; x \neq 0 \\ 0 \; se \; x = 0 \end{cases}$

Definizione di continuità

F definita in I è *continua* in $x_0 \in I$ se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ci sono 2 proprietà richieste :

- Esistenza del limite
- Uguaglianza del limite con la funzione nel punto