Esercizio 2. Siano X_i, $i = 1, 2$ variabili aleatorie uniformi in $[0, 1]$ indipendenti.

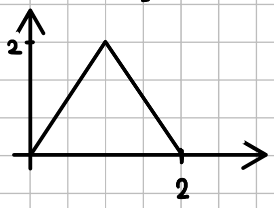
1) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di $X_1 + X_2$.
2) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di $\max\{X_1, X_2\}$.
3) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di $\min\{X_1, X_2\}$.

1) la somma di due continue ed indipendenti e' la convoluzione:

$Z = X_1+X_2 \Rightarrow f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x)\,dx$ Essendo che $X_1, X_2 \in [0,1]$, allora $Z \in [0,2]$, quindi non e' nulla solo in questo intervallo. Inoltre $f_{X_2}(z-x) \neq 0 \Leftrightarrow z-x \in [0,1]$

$:: \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x)\cdot f_{X_2}(z-x) =$ $z\in[1,2] \Rightarrow \int_z^2 1\,dx = 2-z$; $z\in[0,1] \Rightarrow \int_0^z 1\,dx = z$ $\Rightarrow f_Z(z) = \begin{cases} z & \text{se } 0\le z\le 1 \\ 2-z & \text{se } 1<z\le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

GRAFICO:



$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(x)\,dx = 1$

2) Considero $M = \max(X_1, X_2) \Rightarrow \mathbb{P}(M\le x) = \mathbb{P}(X_1\le x \wedge X_2 \le x)$, ma X_1 e X_2 sono indipendenti:

$= \mathbb{P}(X_1\le x)\cdot\mathbb{P}(X_2\le x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X_1}(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{x} f_{X_2}(x)\,dx = \int_0^x f_{X_1}(x)\,dx \cdot \int_0^x f_{X_2}(x)\,dx = x\Big|_0^x \cdot x\Big|_0^x = (x-0)\cdot(x-0) = x^2$

3) Considero $Y = \min(X_1, X_2) \Rightarrow \mathbb{P}(Y\le y) = \mathbb{P}(X_1\le y \vee X_2\le y) = \mathbb{P}(X_1\le y) + \mathbb{P}(X_2\le y) - \mathbb{P}(X_1\le y \wedge X_2\le y) =$

$= \int_0^y f_{X_1}(y)\,dy + \int_0^y f_{X_2}(y)\,dy - f_M(y) = y+y-y^2 = 2y-y^2$

Esercizio 5. Sia X la variabile aleatoria continua con densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k & \text{se } x \in [0, k] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1) Trovare il valore di k.
2) Calcolare $\mathbb{P}(1 \le X \le 2)$.

1) Per la normalizzazione: $\int_0^k \frac16 x + k\,dx = 1 \Leftrightarrow \frac16\int_0^k x\,dx + k\cdot\int_0^k 1\,dx = \left[\frac{x^2}{12}\right]_0^k + \left[k\cdot x\right]_0^k = \frac{k^2}{12} + k^2 = \frac{13}{12}k^2 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{12}{13}}$

2) Essendo che $f(x)\neq 0 \Leftrightarrow x\in\left[0, \sqrt{\frac{12}{13}}\right]$, si ha che $\mathbb{P}(1\le X\le 2) = (1-\mathbb{P}(X<1))\cdot\mathbb{P}(X\le 2) = (1-1)\cdot 1 = 0$

Esercizio 6. Siano U una variabile aleatoria uniforme in $[0, 1]$ e V una variabile aleatoria indipendente da U uniforme in $[-1, 1]$.

1) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di V^2.
2) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di $\log(1/U)$.
3) Calcolare $\mathbb{P}(U \le V)$.

1) $f_V(x) = \begin{cases} \frac12 & \text{se } -1\le x\le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \Rightarrow \mathbb{P}(V^2\le k) = \mathbb{P}(V\le\sqrt{k}) = \frac12\int_{-1}^{\sqrt{k}} 1\,dx = \frac12\left[x\right]_{-1}^{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}+1}{2}$

2) $\mathbb{P}(\log(\frac{1}{u})\le k) = \mathbb{P}(-\log(u)\le k) = \mathbb{P}(U>e^{-k}) = 1-\mathbb{P}(U<e^{-k}) = 1-\int_0^{e^{-k}} 1\,dx = 1-e^{-k}$

Esercizio 7. Alice (A) e Bob (B) si sfidano con le seguenti modalità. A scrive 1 o 2 su un foglio e B deve indovinare il numero scritto da A. Se A ha scritto $i \in \{1, 2\}$ e B indovina allora A paga i euro a B. Se invece B non indovina allora B paga 0.75 euro ad A.
Si supponga che B adotti una strategia casuale dichiarando 1 con probabilità p e 2 con probabilità $1 - p$.

1) Supponendo che A abbia scritto 1 determinare il guadagno medio di B.
2) Supponendo che A abbia scritto 2 determinare il guadagno medio di B.
3) Determinare il valore di p che massimizza il minimo tra i 2 guadagni medi precedenti.

Si supponga che A adotti una strategia casuale scrivendo 1 con probabilità q e 2 con probabilità $1 - q$.

4) Supponendo che B dichiari 1 determinare la perdita media di A.
5) Supponendo che B dichiari 2 determinare la perdita media di A.
6) Determinare il valore di q che minimizza la massima tra le 2 perdite medie precedenti.

Confrontare le risposte ai punti 3 e 6.

1) Vincita media di A: $1\cdot p - 0.75\cdot(1-p) = p + \frac34 p - \frac34 = \frac74 p - \frac34$

2) $2\cdot(1-p) - \frac34 p = 2-2p-\frac34 p = 2-\frac{11}{4}p$

3) $2-\frac{11}{4}p = p\frac74 - \frac34 \Rightarrow 2+\frac34 = p\left(\frac74+\frac{11}{4}\right) \Rightarrow p = \frac{11}{18}$

4) $\frac34(1-q) - q = \frac34 - \frac34 q - q = \frac34 - \frac74 q$

5) $\frac34 q - 2(1-q) = \frac34 q - 2 + 2q = \frac{11}{4}q - 2$

6) $\frac{11}{4}q - 2 = \frac34 - \frac74 q \Rightarrow \left(\frac{11}{4}+\frac74\right)q = \frac34 + 2 \Rightarrow q = \frac{11}{18}$