| | 1A | 1B | 1C | 1D | 2A | 2B | 2C | 2D | 3A | 3B | 3C | 3D | 4A | 4B | 4C | 4D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **V** | ■ | ■ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | ■ | ■ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ |
| **F** | □ | □ | ■ | ■ | ■ | □ | ■ | ■ | □ | □ | ■ | ■ | ■ | □ | ■ | ■ |
| **C** | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |

**1)** Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 3\,y'(t) + 4\,y(t) = 0\,.$$

**1A)** L'equazione ha infinite soluzioni.
**1B)** Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(5) = 5$.
**1C)** Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(8) = 2$ e $y'(8) = 4$.
**1D)** Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che

$$y(4) = 6\,,\ y'(4) = 8\,,\ y''(4) = 49\,.$$

---

**2)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 12\,y'(t) + 32\,y(t) = 160\,. \tag{1}$$

**2A)** Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + 12L + 32$.
**2B)** La funzione $y_0(t) = 4\,e^{4\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).
**2C)** La funzione $\overline{y}(t) = 6$ è una soluzione particolare di (1).
**2D)** Se $y(0) = 6$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

---

**3)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y(t) + B\,y(t) = 0\,,\quad A\,,B \in \mathbb{R}\,.$$

**3A)** Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + A\,L + B$.
**3B)** Se $A = 0$ e $B = -25$, la funzione $y(t) = 6\,e^{5\,t} - 9\,e^{-5\,t}$ è soluzione dell'equazione.
**3C)** Se $A = -4$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 3$ è soluzione dell'equazione.
**3D)** Se $A = -10$ e $B = 29$, la funzione $y(t) = 5\,e^{5\,t}\,\sin(2\,t)$ non è soluzione dell'equazione.

---

**4)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 7\,y'(t) = -21\,.$$

**4A)** Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C\,e^{7\,t}$.
**4B)** Esistono soluzioni costanti dell'equazione.
**4C)** La funzione $\overline{y}(t) = 3t$ non è soluzione dell'equazione.
**4D)** Se $y(0) = 3$ e $y'(0) = 3$, la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

---

**5)** Si consideri l'equazione differenziale

(1) $$y''(t) - 11\,y'(t) + 28\,y(t) = -3\,e^{4t}.$$

**a)** Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
**b)** Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
**c)** Trovare una soluzione particolare di (1).
**d)** Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

a) $\lambda^2 - 11\lambda + 28 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{11 \pm \sqrt{121 - 4(28)}}{2} = \dfrac{11 \pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow 7 \\ \searrow 4 \end{matrix}$

b) $y_0(t) = Ce^{7t} + De^{4t}$

c) $\bar{y}(t) = tae^{4t} \quad \bar{y}'(t) = ae^{4t}[4t+1] =$

$\bar{y}''(t) = ae^{4t}[16t+8]$

$ae^{4t}[16t+8] - ae^{4t}[-11(4t+1)] + ae^{4t}[28t]$

$ae^{4t}[16t+8-11(4t+1)+28t] = ae^{t}[-3] = -3ae^{t}$

$-3ae^{t} = -3e^{t} \rightarrow a = 1$

$\bar{y}(t) = te^{4t}$

d) $y(t) = Ce^{7t} + e^{4t}[D+t]$

$y'(t) = 7Ce^{7t} + 4e^{4t}[D+t] + e^{4t}$

$0 = C\cdot e^0 + e^0[D+0] = C + D = 0 \Rightarrow C = -D$

$1 = 7C\cdot e^0 + 4\cdot e^0[D+0] + e^0 \quad \boxed{y(t) = te^{4t}}$

$1 = 7C + 4D + 1 \rightarrow 7C = -4D \rightarrow 7C = 4C \rightarrow C = D = 0$

**6)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 14\,y'(t) + 49\,y(t) = 2\,e^{7t}\,. \tag{1}$$

**a)** Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
**b)** Si trovi una soluzione particolare di (1).
**c)** Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$.
**d)** Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 4$ e $y'(0) = 0$.

ⓐ $P(\lambda) \to \lambda^2 - 14\lambda + 49 = 0 \to \lambda_{1,2} = \frac{14}{2} = 7$

$$y_0(t) = (C + Dt)e^{7t}$$

ⓑ $\bar{y}(t) = t^2 a e^{7t} \quad \bar{y}'(t) = a e^{7t}[2t + 7t^2]$

$$\bar{y}''(t) = a e^{7t}[28t + 49t^2 + 2]$$

$$a e^{7t}[2 + 28t + 49t^2 - 28t - 98t^2 + 49t^2] = 2e^{7t}$$

$$2ae^{7t} = 2e^{7t} \Longrightarrow a = 1$$

$$\bar{y}(t) = t^2 e^{7t}$$

QUINDI $\quad y(t) = (C + Dt)e^{7t} + t^2 e^{7t}$

$$y(t) = e^{7t}[t^2 + Dt + C]$$

$$y'(t) = 7e^{7t}[t^2 + Dt + C] + e^{7t}[2t + D]$$

$y(t) = e^{7t}\left[t^2 + Dt + C\right] \qquad y'(t) = 7e^{7t}\left[t^2 + Dt + C\right] + e^{7t}\left[2t + D\right]$

(c) $y(0) = 0 \qquad y'(0) = 4$

$0 = C \rightarrow \qquad y(t) = e^{7t}\left[t^2 + 4t\right]$

$4 = 7C + D \rightarrow D = 4$

(d) $y(0) = 4 \qquad y'(0) = 0$

$4 = C \qquad 0 = 7C + D \rightarrow \quad 0 = 28 + D \rightarrow D = -2$

$$y(t) = e^{7t}\left[t^2 - 28t + 4\right]$$