Esercizio 2 (16.1-4, [1]). Sia A un insieme, una *partizione* di A è una collezione $\{A_i\}$ di sottoinsiemi di A tali che $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$ e $\bigcup A_i = A$. Fornire un algoritmo in pseudo-codice che, data una collezione di intervalli $A = \{a_i = [s_i, f_i]\}$, determina il numero minimo di sottoinsiemi che formano una partizione di A tali che in ogni sottoinsieme A_i gli intervalli sono due a due disgiunti.

```
PartDisj(A: {[s1,f1],...,[sn,fn]}) {
    tmp = { }
    ordina A in base ai valori di si //O(n·log(n))
    i=1
    Sol={ }
    do{
        if(∀I∈tmp [si,fi]∩I=∅){
            tmp.add([si,fi])
            A.remove([si,fi])
        }
        if(i==n){
            i=1
            Sol.add(tmp)
            tmp={ }
        }
    }while(A≠∅)
    return |Sol|
}
```

Esercizio 3 (23.1-1, [1]). Sia $G = (V, E)$ un grafo non diretto e connesso con gli archi pesati. Dimostrare o confutare con un contro-esempio la seguente affermazione: se (u, v) è un arco di peso minimo, allora esiste un albero di copertura di costo minimo di G che contiene l'arco (u, v).

*ipotesi che $\omega: E(G) \to \mathbb{R}^+$

Supponiamo che T sia un MST, e che (u,v) non sia in T. Allora, essendo un albero, e' connesso, ed esiste un cammino $P(u,v)$ in T. tale cammino e' composto da una serie di archi $P(u,v) = \{e_1, e_2 \dots, e_k\} \Rightarrow \omega(P(u,v)) = \sum_{i=1}^{k} \omega(e_i)$. Essendo (u,v) di costo minino, $\forall e_i \ \ \omega(u,v) \leq e_i$. Essendo $P(u,v)$ composto da almeno 2 archi, si ha che $\omega(P(u,v)) > \omega(u,v)$, quindi considero $T' = \{T \setminus P(u,v)\} \cup \{(u,v)\}$ ovvi amente $\omega(T') < \omega(T)$, ma T era un MST $\Rightarrow$ CONTRADDIZIONE ! $\Rightarrow (u,v)$ e' in ogni MST. ∎

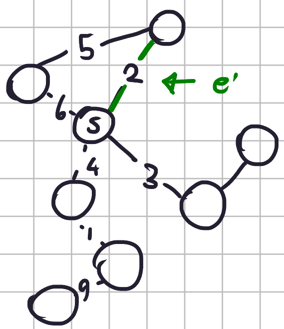
Esercizio 5 (I. Salvo). Sia $G = (V, E)$ un grado non diretto, connesso e con gli archi pesati con pesi tutti diversi e positivi. Sia T un albero di copertura di peso minimo di G, s un vertice di G e T_s l'albero dei cammini minimi da s verso tutti gli altri nodi di G. Dimostrare o confutare con un contro-esempio che T_s e T condividono almeno un arco.

Sia $U = \{u \mid (u,s) \in E(G)\}$, sia $u = \underset{u \in U}{\arg\min}(\omega(u))$, si ha che $dist(u,s) = \omega(u,s) \Rightarrow (u,s) \in T_s$.

Prop: $(u,s) \in T$

Dim: Per assurdo: $(u,s) \notin T \Rightarrow \exists\, P(u \rightsquigarrow s) \in T$, sia ω il primo nodo di tale cammino, con l'arco (u,ω), esiste un cammino da ω ad s, quindi $T \setminus \{(u,\omega)\}$ non e' piu' connesso perche' u e' distaccato, aggiungendo (u,s) diverra' connesso, e $\omega(u,s) < \omega(u,\omega)$, quindi $\omega(T) > \omega(\{T \setminus \{(u,\omega)\} \cup \{(u,s)\}\}) \Rightarrow T$ non era minimale

$\Rightarrow (u,s)$ e' nel MST $\Rightarrow T_s \cap T \neq \emptyset$ ■



← e' in T_s e in T