

Metodi Matematici per l'Informatica

Esame (a.a. 20/21, I canale) - Docente: Lorenzo Carlucci - Data: 1 Luglio 2021

Parte 1

Esercizio 1 Consideriamo un sistema di password formato da 4 lettere (scelte le 26 lettere dell'alfabeto latino, solo maiuscole) seguite da 3 cifre seguite da un carattere speciale scelto tra \$, !, e %.

1. Quante password hanno la prima lettera del vostro nome come primo simbolo?
2. Quante password hanno L come prima lettera o ! come ultimo simbolo?
3. Quante targhe contengono esattamente un 9 ed esattamente una P?

Esercizio 2 Un testo d'esame comprende 5 domande di Combinatoria, 10 domande di Logica e 5 domande di Algebra.

1. In quanti modi posso scegliere 10 domande?
2. In quanti modi posso scegliere 10 domande di cui esattamente 4 di Logica?
3. In quanti modi posso scegliere 10 domande di cui almeno una di Combinatoria e almeno una di Logica?

Esercizio 3 Siano $f : X \rightarrow Y$ e $g : Z \rightarrow W$ dove $Z \subseteq X$ e $W \subseteq Y$. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false. NB: per un qualunque $S \subseteq X$ con $f(S)$ si denota l'insieme $\{y \in Y : \text{per qualche } s \in S \text{ vale } f(s) = y\}$. Analogamente per $g(S)$.

1. Se f è iniettiva allora g è iniettiva.
2. $f(X - Z) = f(X) - f(Z)$.
3. $Y = f(X) \cup g(Z)$.

Esercizio 4 Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\mathbb{N}\}$ è numerabile.
2. Esistono infinite funzioni iniettive da \mathbb{Q} in $\{0, -1, -2, -3, \dots\}$.
3. Ogni funzione da \mathbb{N} in \mathbb{R} è non suriettiva.

Esercizio 5 Consideriamo la seguente relazione \prec definita su coppie di intervalli chiusi della retta reale: $[x, y] \prec [w, z]$ se e solo se $[x, y] = [w, z]$ oppure $y < w$. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1. La relazione \prec è riflessiva.
2. La relazione \prec è antisimmetrica.
3. La relazione \prec è transitiva.

Parte 2

Esercizio 6 Dimostrare per Induzione che, per ogni $n \geq 1$, se X e Y sono insiemi di n elementi, il numero di funzioni biettive tra X e Y è $n!$.

1. Caso Base:
2. L'ipotesi induttiva (che posso assumere quando dimostro il caso generico $n + 1$) è:
3. Dimostrazione del passo induttivo:

Esercizio 7 Dimostrare per Induzione Forte che per ogni $n \geq 0$ vale

$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

dove gli F_i sono i numeri di Fibonacci definiti come segue: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, e, per $i \geq 2$, $F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$.

1. Caso Base:
2. L'Ipotesi Induttiva Forte (che posso assumere quando dimostro il caso generico $n > 0$) è:
3. Dimostrazione del passo induttivo:

Esercizio 8 A una festa vengono invitati Mario, Claudia e Gianni, che rilasciano le seguenti dichiarazioni.

Mario dice: "O vengo io e non viene Gianni o vengono Gianni e Claudia." Claudia dice: "O vengono Mario e Gianni o nessuno dei due." Gianni dice: "Se non viene Mario viene Claudia."

1. Formalizzare le tre affermazioni in logica proposizionale scegliendo un linguaggio adeguato.
2. È possibile che tutti e tre dicano il vero? Argomentare.
3. Se tutti dicono il falso, chi parteciperà sicuramente alla festa? Argomentare.

(Suggerimento: si consiglia di usare le tavole di verità).

Esercizio 9 La seguente formula proposizionale in CNF è soddisfacibile?

$$\{\{\neg p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{p, q\}\}.$$

Se si risponde "SI" definire un assegnamento che la soddisfa, se si risponde "NO" dimostrare l'insoddisfacibilità usando la regola di Risoluzione.

Esercizio 10 Consideriamo il linguaggio predicativo composto da un predicato $T(x, y)$ per "il programma x su input y termina".

1. Tradurre in linguaggio formale: Esiste un programma che termina su tutti gli input.
2. Tradurre in linguaggio naturale: $\forall y \exists x T(x, y) \wedge \forall y \exists x \neg T(x, y)$.
3. L'enunciato al punto precedente è soddisfacibile?