Metodi Matematici per l'Informatica - Dispensa 1
(a.a. 22/23, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (`lorenzo.carlucci@uniroma1.it`)

Combinatoria = arte/tecnica del contare insiemi finiti. Alcune domande tipiche della Combinatoria:

- Quante targhe è possibile formare nel sistema attualmente in uso in Italia (ogni targa è composta da una sequenza di 2 lettere, 3 cifre, 2 lettere)? Quante di queste targhe contengono almeno una T e almeno un 9?
- Quanti numeri primi esistono tra 1 e 1 milione?
- Quanti sono gli esiti del lancio di 2 dadi a 6 facce, distinguendo il risultato del primo dado da quello del secondo? E quanti sono gli esiti se non distinguiamo tra i due dadi?
- Quanti modi ho di vestirmi se il mio guardaroba è composto da 3 giacche, 2 camicie, 4 pantaloni e 3 paia di scarpe, assumendo che uso un capo di ogni tipo e non mescolo scarpe di paia diverse? Quanti modi ho di vestirmi se assumo di usare al più un capo di ogni tipo? Quanti modi ho di vestirmi per la giornata "mezzi nudi", in cui è regola mettere o la camicia o il pantalone (e un capo di ogni altro tipo)?
- Se in una elezione si presentano 15 liste ciascuna composta di 8 candidati e il voto consiste nello scegliere una lista e nell'indicare al più 3 preferenze tra i candidati di quella lista, quanti sono gli esiti possibili del voto?
- Quanti modi ho di ottenere il numero 30 come somma di 4 numeri interi non negativi, contando l'ordine degli addendi? Quanti modi ho di ottenere 30 con numeri interi positivi senza contare l'ordine degli addendi?

1 Principio Moltiplicativo

Esempio 1 *Se ho 5 cani e 4 gatti, quante coppie cane/gatto posso formare? La risposta è* 5×4. *Si osservi che ci interessa contare tutte le possibili coppie, non solo quelle che posso formare simultaneamente.*

Esempio 2 *Se ho 5 cani e 4 gatti e 8 topi, quanti trio cane/gatto/topo posso formare? La risposta è* $5 \times 4 \times 8$.

Esempio 3 *Quanti modi ho di vestirmi se il mio guardaroba è composto da 3 giacche, 2 camicie, 4 pantaloni e 3 paia di scarpe, assumendo che uso un capo di ogni tipo e non mescolo scarpe di paia diverse? Ho* $3 \times 2 \times 4 \times 3$ *modi di vestirmi.*

Esempio 4 *Quante targhe è possibile formare nel sistema attualmente in uso in Italia (ogni targa è composta da una sequenza di 2 lettere, 3 cifre, 2 lettere)? Assumendo di usare l'alfabeto latino (composto di 26 lettere) le targhe possibili sono*

$$26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 = 26^2 \times 10^3 \times 26^2 = 456976000.$$

Esempio 5 *Quante sequenze/stringhe composte di* 0 *e di* 1 *di lunghezza* n *esistono? Ho* 2 *scelte per la prima posizione,* 2 *per la seconda, etc. fino all'*n*-esima. Dunque sono* $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ termini}} = 2^n$ *sequenze possibili.*

Il Principio Moltiplicativo è un principio estremamente intuitivo che permette di risolvere un numero sorprendente di problemi di conteggio anche non banali.

Principio Moltiplicativo

Principio Moltiplicativo (PM): Se scelgo un primo oggetto tra m_1, un secondo oggetto tra m_2, ... un ultimo (t-esimo) oggetto tra m_t, ho $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_t$ possibili scelte.

Gli esempi visti sopra era *statici* nel senso che sapevamo a priori tra quanti elementi si sceglieva per ogni posizione (le quantità m_i). In alcuni casi di applicazione del PM questa informazione va ricavata, facendo attenzione ai dati del problema. Il caso tipico è quello di scelte consecutive di elementi in uno stesso insieme. Se l'insieme di partenza ha n elementi avrò $m_1 = n$ possibilità per la prima scelta, $m_2 = n - 1$ per la seconda, $m_3 = n - 2$ per la terza, e così via.

Esempio 6 *Se ho 5 cani, quante coppie formate da due cani posso formare, contando come coppie distinte le coppie del tipo (Fido, Bob) e (Bob, Fido)? La risposta è* 5×4*. Si osservi che ci interessa contare tutte le possibili coppie, non solo quelle che posso formare simultaneamente.*

Esempio 7 *Se da un'urna contenente i numeri* $1, 2, 3, \ldots, 100$ *estraggo in successione due numeri quante sono le possibili estrazioni? Come osservato in classe la domanda va specificata come segue: i numeri estratti* non *vengono rimessi nell'urna dopo l'estrazione (questa è la tipica estrazione dei numeri a Tombola o alla Lotteria). Inoltre con per* possibili estrazioni *si intende le possibili sequenze ordinate dei primi tre numeri estratti (quindi le sequenze* $(8, 12, 49)$ *e* $(49, 12, 8)$ *contano come* estrazioni *distinte).*

Sono 100×99*. Abbiamo applicato il PM, osservando che scelgo il primo numero tra 10 mentre il secondo numero è scelto tra 9 (tutti i numeri di partenza tranne quello estratto per primo). Se estraggo* 3 *numeri lo stesso ragionamento dà* $100 \times 99 \times 98$*; e così via.*

Problemi con vincoli aggiuntivi Il PM è piuttosto flessibile e si presta facilmente a problemi di conteggio con una varietà di vincoli. Importante in ciascun caso è individuare in che modo i vincoli determinano la numerosità delle scelte (gli m_i del PM).

Esempio 8 *Quante stringhe/parole di 5 lettere posso scrivere usando le lettere $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ che non iniziano con H e che non contengo due cifre consecutive identiche? La risposta è 9^5, applicando il PM: ho infatti 9 scelte per la prima lettera (tutte tranne la H, 9 scelte per la seconda (tutte tranne la precedente), 9 scelte per la terza (tutte tranne la precedente) e così via.*

Esempio 9 *Quante parole di 3 lettere che iniziano con una vocale posso formare? Applicando il PM possiamo ragionare così: ho 5 scelte per la prima posizione, 26 per la seconda e 26 per la terza, dunque le parole possibili sono*

$$5 \times 26 \times 26.$$

Esempio 10 *A una gara di corsa partecipano 8 atleti. Quanti sono i possibili ordini arrivo, assumendo che tutti arrivino al traguardo e che non vi siano arrivi simultanei? Possiamo ragionare come sopra: vi sono 8 possibilità per la prima posizione, 7 per la seconda, 6 per la terza e così via. I possibili ordini di arrivo sono dunque:*

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1.$$

Esempio 11 *Nelle stesse condizioni dell'esempio precedente quante sono le salite al podio? Usando il PM: 8 possibilità per il primo posto, 7 per il secondo, 6 per il terzo, dunque $8 \times 7 \times 6$.*

Esempio 12 *Nelle stesse condizioni dell'esempio precedente quanti sono gli ordini di arrivo con un italiano in prima posizione, sapendo che vi sono 2 atleti italiani, 3 francesi e 3 spagnoli? Ragionando con il PM: ho 2 scelte per il primo posto, 7 per il secondo, 6 per il terzo, e così via dunque: $2 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$. (Domanda: quanti sono gli ordini di arrivo con un italiano all'ultimo posto?).*

Esempio 13 *Quante targhe finiscono con la lettera P? Usando il PM: 26 scelte per la prima lettera, 26 per la seconda, 10 per la terza (cifra), 10 per la quarta (cifra), 10 per la quinta (cifra), 26 per la sesta (lettera) e una sola per l'ultima (è vincolata a essere P), dunque*

$$26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 1.$$

Esempio 14 *Quante targhe finiscono P e non contengono altre P? Usando il PM: ho* 25 *scelte per ciascuna delle due prime posizioni, perché escludo la lettera sia P,* 10 *per ciascuna delle successive tra posizioni (cifre),* 25 *per la penultima lettera (sempre perché escludo P) e una sola per l'ultima (deve essere P). Dunque:*

$$25 \times 25 \times 10 \times 10 \times 10 \times 25 \times 1$$

Esempio 15 *Quante parole di* 5 *lettere scelte tra $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ posso formare che non contengano due lettere consecutive identiche? Questo è un caso in cui prestare attenzione ai parametri $m_1, \ldots, m_t$ del PM. Ho* 10 *scelte per la prima posizione,* 9 *per la seconda (perché non posso utilizzare la lettera usata in prima),* 9 *per la terza (perché non posso usare la lettera usata in seconda, ma posso usare quella usata in prima), e* 9 *per ciascuna delle successive (per ragionamento analogo). Dunque per il PM le soluzioni sono:*

$$10 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9.$$

2 Due figure della Combinatoria

In molti degli esempi che abbiamo visto possiamo riconoscere delle somiglianze. In particolare possiamo individuare due gruppi che corrispondono a due figure fondamentali della Combinatoria.

2.1 Disposizioni con ripetizione

Questa figura generalizza i casi in cui, nell'applicazione del PM, il fattore moltiplicativo era sempre lo stesso - per esempio il caso delle sequenze binarie di lunghezza n.

Esempio 16 *Consideriamo l'insieme $A = \{a, b, c\}$. Vogliamo contare le sequenze ordinate di lunghezza 2 di elementi scelti in A con possibili ripetizioni. Sono*

$$aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$$

Contandole con il PM abbiamo che sono $3 \times 3 = 9$, perché abbiamo 3 *scelte per il primo elemento e* 3 *scelte per il secondo.*

L'esempio si generalizza facilmente.

Definizione 1 (Disposizione con ripetizione) *Siano $n, k \geq 1$. Chiamiamo* disposizione con ripetizione *di ordine k di n oggetti una sequenza ordinata $(x_1, \ldots, x_k)$ di k oggetti scelti tra gli n totali.*

Per contarle applichiamo il PM. Indicando con $D'_{n,k}$ il numero delle disposizioni con ripetizione di ordine k di n oggetti, abbiamo che

$$D'_{n,k} = n \times n \times n \times \cdots \times n = n^k.$$

Si noti bene che in questo caso la nozione ha senso anche se k è maggiore di n.

Esempio 17 *Quante sono le sequenze di 5 lettere scelte tra A, B, C? Sono $3^5 = D'_{3,5}$.*

2.2 Disposizioni semplici

Questo caso generalizza gli esempi di applicazione del PM in cui il fattore moltiplicativo decresceva di 1 a ogni passo – il caso tipico è quello dell'estrazione in successione da un'urna.

Esempio 18 *Sia A l'insieme di tre elementi $\{a, b, c\}$. Quanti modi ci sono di formare sequenze ordinate di lunghezza $1, 2, 3$ di elementi distinti scelti in A? Le sequenze di lunghezza 1 sono solo tre:*

$$a, b, c.$$

Le sequenze di lunghezza 2 sono 6:

$$ab, ac, ba, bc, ca, cb$$

Le sequenze di lunghezza 3 sono 6:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba$$

Per contarle possiamo usare il PM: per il caso di lunghezza 2 ho 3 scelte per la prima posizione, 2 scelte per la seconda, dunque $3 \times 2 = 6$. Per il caso di lunghezza 3 ho 3 scelte per la prima posizione, 2 scelte per la seconda, 1 scelta per la terza, dunque $3 \times 2 \times 1 = 6$.

L'esempio si generalizza facilmente.

Definizione 2 (Disposizione Semplice) *Sia $1 \leq k \leq n$. Chiamiamo* disposizione semplice *di ordine k di n oggetti una sequenza ordinata $(x_1, \ldots, x_k)$ di k oggetti distinti scelti tra gli n totali.*

Posso usare il PM per contare le disposizioni semplici di ordine k di n oggetti:

Ordine 1: n scelte.
Ordine 2: $n \times (n-1)$ scelte
Ordine 3: $n \times (n-1) \times (n-2)$ scelte
...
Ordine k: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(k-1))$ scelte.

Indicando con $D_{n,k}$ il numero delle disposizioni semplici di ordine k di n oggetti abbiamo dunque che

$$D_{n,k} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(k-1))$$

Per ricordarsi l'espressione basti ricordare che consiste di k fattori.

L'espressione è ovviamente strettamente legata al fattoriale, dove con fattoriale di n intendiamo il prodotto dei fattori n, $(n-1)$, $(n-2)$, $\ldots$, 2, 1:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots 2 \times 1$$

(per convenzione $0! = 1$). Si vede facilmente che $D_{n,k}$ è il fattoriale di $n!$ troncato da un certo termine in poi. Più precisamente, abbiamo cancellato dal fattoriale di $n!$ la coda $(n-k) \times (n-(k+1)) \times \cdots \times 2 \times 1$. Si nota facilmente che questa coda è a sua volta un fattoriale, in particolare il fattoriale di $(n-k)$.

Dall'espressione di sopra per $D_{n,k}$ si ottiene quindi

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Un caso particolare è quando $n = k$. In questo caso parliamo di *permutazioni* e il loro numero è:

$$P_n = n! = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = D_{n,n},$$

ricordando che per convenzione abbiamo $0! = 1$.

Esempio 19 *Quanti sono i possibili ordini di arrivo (non simultanei) in una gara con 10 partecipanti (assumendo che tutti gli atleti arrivino al traguardo)? Sono esattamente quante le permutazioni di 10 elementi, ossia* $10! = 3628800$.

Quante sono le possibili salite sul podio (primi tre posti)? Sono $D_{10,3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$.

Esempio 20 *Se a un torneo partecipano 8 squadre scelte tra 15 e l'ordine di partenza è a sorte, quanti sono i possibili schieramenti di partenza? La domanda può distinguersi in due modi: se so quali delle 8 squadre partecipano la risposta è* $8!$*. Se invece non lo so, la risposta è* $D_{15,8} = 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$.

Esempio 21 *Non sempre il problema è posto in termini espliciti che rimandano a una delle figure della Combinatoria. Consideriamo il problema di contare in quanti modi posso inserire una P e una R in una targa. Il problema si riconduce al PM se osserviamo che vogliamo contare le coppie ordinate di possibili posizioni delle due lettere. Più precisamente, gli oggetti che vogliamo contare sono le coppie ordintate (i, j) con $i \neq j$ e $i, j \in \{1, 2, 6, 7\}$ (indicano le posizioni delle lettere nella targa). Una coppia (i, j) corrisponde a una soluzione in cui mettiamo P in posizione i e R in posizione j. Le coppie in questione si contano facilmente con il PM in quanto abbiamo 4 scelte per la prima coordinata e 3 per la seconda e dunque 4×3 scelte totali; si tratta dunque di disposizioni semplici di 2 oggetti scelti tra 4, ossia* $D_{4,2} = 4 \times 3$.