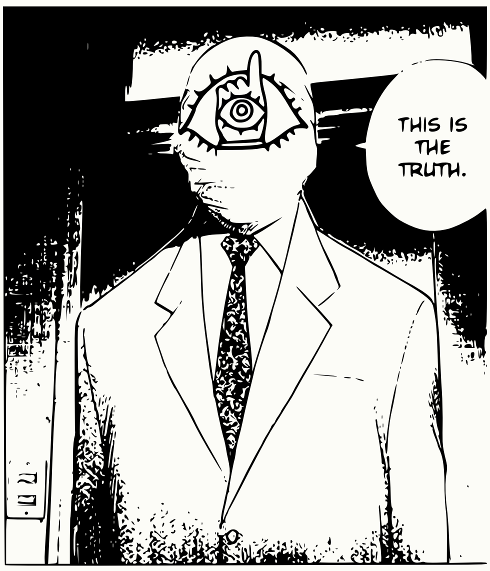
Marco Casu

Fisica

Sapienza
Università di Roma

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica
Dipartimento di Informatica

Questo documento è distribuito sotto la licenza GNU, è un resoconto degli appunti (eventualmente integrati con libri di testo) tratti dalle lezioni del corso di Fisica per la laurea triennale in Informatica. Se dovessi notare errori, ti prego di segnalarmeli.



INDICE

CAPITOLO

1 INTRODUZIONE

1.1 Il metodo scientifico

La nascita del metodo scientifico è dovuta a Galileo Galilei, se i filosofi greci stabilivano leggi empiriche senza necessariamente dimostrarle, Galileo introdusse una verifica sperimentale a quelle che erano le sue digressioni.

Un **esperimento**, è una verifica sperimentale delle ipotesi, utile a ricavare valori numerici oggettivi per le misure delle grandezze fisiche. L'avvento del cannocchiale permise un osservazione più accurata dei corpi celesti, questi che venivano creduti perfetti, si rivelarono per quello che sono, la Luna con i suoi accavallamenti e "mari", mostrava una conformazione della sua crosta tutto fuorché perfetta. Oltre al già

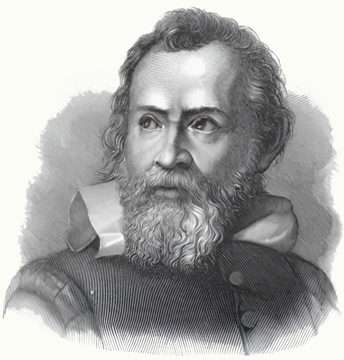


Figura 1.1: Galileo Galilei

citato cannocchiale, erano necessari ulteriori strumenti per le osservazioni dei corpi celesti, era necessario misurare in maniera precisa ed affidabile lo scorrere del tempo. Misurare il tempo vuol dire confrontare due eventi, ad esempio, il sorgere del sole con il movimento periodico riferito ad un misuratore (come l'orologio).

Galileo per le sue misure realizzò un orologio ad acqua, utilizzando un recipiente nella quale riporre un piccolo foro sul fondo, in modo tale che l'acqua cadesse a gocce a velocità costante, così facendo, lo scorrere del tempo era proporzionale al volume dell'acqua perso dall recipiente.

Una **grandezza fisica** è un entità alla quale si attribuisce una specifica definizione, utilizzabile per descrivere un fenomeno fisico, per tali entità devono valere i criteri di uguaglianza e sommabilità.

Uno degli argomenti su cui si soffermò Galileo fu il *moto dei gravi*, in particolare il moto dei corpi in caduta libera. Secondo la fisica aristotelica del tempo, un corpo tanto più pesante era, tanto più rapidamente cadeva.

Galileo fu critico nei riguardi di questa visione, osservò che in realtà, ogni corpo cade verso il suolo con la stessa accelerazione, il motivo per il quale una piuma cade più rapidamente di una sfera di piombo non riguarda la loro massa, bensì la resistenza dell'aria nei confronti del loro materiale e della loro forma. Trovò inoltre che la distanza percorsa durante la caduta di un oggetto è proporzionale al quadrato del tempo impiegato per percorrerla.

Galileo con un esperimento riguardante i piani osservò il seguente fatto : *se si lascia scivolare un corpo su un piano inclinato ad altezza h per poi farlo risalire su un altro piano inclinato, questo tendeva a risalire fino alla stessa altezza h.*

Figura 1.2: caduta sul piano inclinato

Inoltre, notò che questo fenomeno non è condizionato dal seno dell'angolo del piano, bensì esclusivamente dall'altezza.

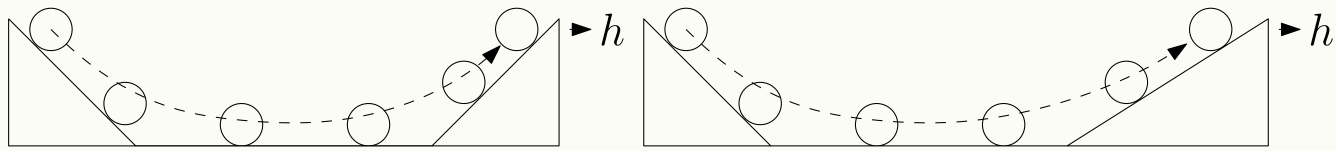


Figura 1.3: inclinazioni differenti

Per osservare tale risultato dovette ridurre le azioni spurie dell'attrito dell'aria. Più il percorso era liscio, più l'attrito risultava debole, e più il corpo tendeva ad avvicinarsi all'altezza originale h. Con tale ragionamento ipotizzò che se l'attrito dovesse essere stato nullo, allora il corpo sarebbe tornato precisamente all'altezza h.

Dato questo per vero, riducendo il valore dell'angolo sarebbe stato possibile far percorrere al corpo una distanza maggiore. Se il secondo piano avesse avuto inclinazione nulla, allora il grave avrebbe continuato a muoversi in avanti a velocità costante.

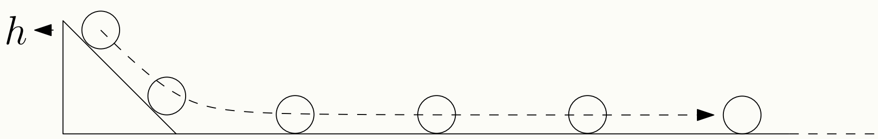
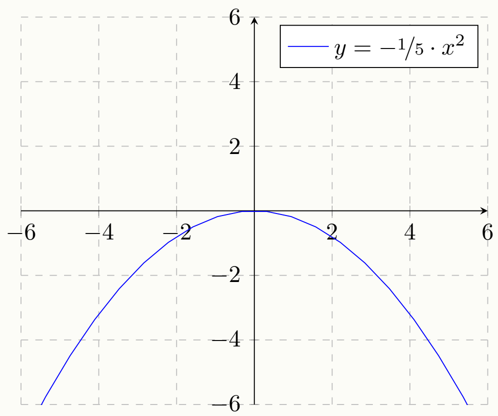


Figura 1.4: inclinazione nulla

Tale principio è noto come **legge d'Inerzia**, eliminando gli attriti, lo stato di moto naturale inalterato di un corpo è quello di moto rettilineo uniforme (a velocità costante) indefinitamente.

Essendo la scienza sempre stata impiegata anche in ambito bellico, Galileo studiò il moto dei proiettili, che fino a quel momento si credeva fosse costantemente orizzontale, fino al momento in cui il proiettile perdeva il suo "impeto" cadendo a terra. Egli si rese conto che i proiettili sono soggetti sia alla forza impressa dal colpo (orizzontale), sia a quella verticale impressa verso il basso.

La forza impressa dal colpo gli da una velocità costante, in quanto non è soggetto ad ulteriori accelerazioni orizzontalmente, quella verticale invece provoca un moto uniformemente accelerato, la distanza percorsa in verticale è proporzionale al quadrato del tempo impiegato a percorrerla, la combinazione dei due moti risulta in un arco di parabola.



Galileo, chiamò x la direzione orizzontale, ed y quella verticale, partendo da $(x, y) = (0, 0)$, e sapendo che lo spazio percorso in x è proporzionale ale tempo, mentre quello percorso in y è proporzionale al quadrato del tempo, si ha

$$x = a \cdot t \qquad y = b \cdot t^2$$

Con alcuni passaggi algebrici si trova esattamente la nota equazione della parabola

$$y = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$$

1.2 Spostamento, Velocità e Grandezze Fisiche

Il **moto**, è uno dei fenomeni fisici più classici, che necessita di una definizione e rappresentazione formale, è il cambiamento di una posizione rispetto al tempo.

Un classico esempio di sistema di riferimento è il piano cartesiano, in cui un punto nello spazio, è identificato da tre coordinate

$$(x(t), y(t), z(t))$$

In funzione del tempo t. Può essere rappresentato anche da un vettore posizione $\bar{r}(t)$, descritto dalla lunghezza e dagli angoli rispetto gli assi del piano e la proiezione delle sue componenti, nel caso bi-dimensionale, sia r il modulo del vettore $\bar{r}$:

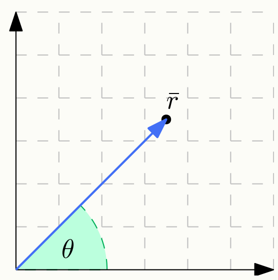


Figura 1.5: $\bar{r} = (r, \theta)$

Risulta possibile passare dalle coordinate cartesiane a quelle descritte con l'angolo tramite le seguenti trasformazioni

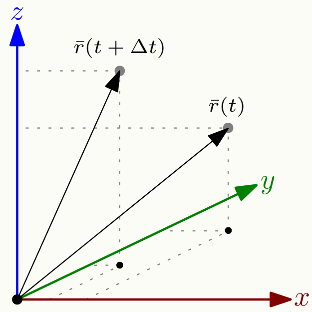
$$\begin{cases} r\cos(\theta) = x \\ r\sin(\theta) = y \end{cases}$$

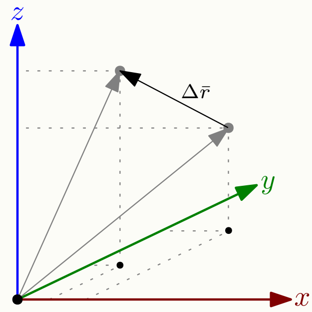
Inoltre

$$r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = x^2 + y^2$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \arctan(y/x)$$

Le componenti di $\bar{r}$ dipendono dal sistema di riferimento. Posso definire uno *spostamento nel tempo*, tramite il vettore $\bar{r}$ in un istante t, ed il medesimo vettore in un istante $t + \Delta t$, dove Δt rappresenta una variazione temporale. Una volta definiti i vettori $\bar{r}(t)$ e $\bar{r}(t + \Delta t)$, si definisce il **vettore spostamento** come la loro differenza algebrica, ossia $\Delta\bar{r} = \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)$.





Si vogliono rappresentare i vettori in maniera più formale, rispetto che alla classica notazione $\bar{v} = (x, y, z)$. Si fa uso dei versori

$$\bar{i} = (1, 0, 0) \quad \bar{j} = (0, 1, 0) \quad \bar{k} = (0, 0, 1)$$

per definire un vettore come somma dei versori scalati con appositi coefficienti, che rappresentano le componenti del vettore :

$$\bar{v} = (x, y, z) = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

Ogni componente della somma è la proiezione del vettore su uno dei tre assi. Si osservi come il vettore spostamente non dipende dal sistema di riferimento.

Il vettore spostamento $\Delta\bar{r}$ varia a sua volta nel tempo, descrivendo quindi il moto di un punto, la **velocità media** di tale spostamento si definisce tramite il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta\bar{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}$$

Si può definire anche la velocità media scalare, se lo spostamento avviene su un percorso già definito, e non è necessaria informazione sulla direzione, è possibile rappresentarlo con uno scalare $s(t)$, e $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ rappresenta la velocità media scalare.

La velocità media non è molto precisa come informazione, in quanto non descrive il moto di un corpo (la sua traiettoria) a pieno, si vuole quindi dare una misura di una velocità *istantanea*, si fa quindi tendere a zero la differenza di tempo :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}$$

Tale grandezza si denota $\frac{d\bar{r}}{dt}$, è la derivata dello spostamento rispetto al tempo, verrà nominata semplicemente **velocità**, e denotata $\bar{v}$, rappresenta lo spostamento istantaneo ed è tangente alla curva dello spostamento. Si definisce anche la velocità scalare $\frac{ds}{dt}$, ed è il modulo della velocità.

Una volta definite delle quantità come spostamento e velocità, è necessario definire delle *grandezze fisiche* ed introdurre delle *unità di misura*. Il vettore $\bar{r}$ ha le dimensioni di una lunghezza, la dimensione lunghezza $[l]$ è espressa in metri m, il sistema internazionale definisce

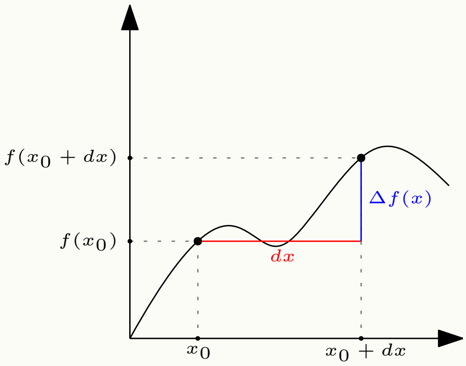
$$(m, kg, s) = \text{ (metri, kilogrammi, secondi)}$$

La dimensione del tempo $[t]$ è espressa in secondi s. Esistono alcune grandezze dette adimensionali, un esempio sono gli angoli, misurati in gradi o radianti.

La velocità, è una grandezza derivata, essendo un rapporto fra lo spostamento ed il tempo, si misura in metri al secondo : $^m/_s$, rappresenta, appunto la distanza in metri percorsa in 1 secondo. Le grandezze possono essere convertite, ad esempio, considerando i kilometri - orari si ha che

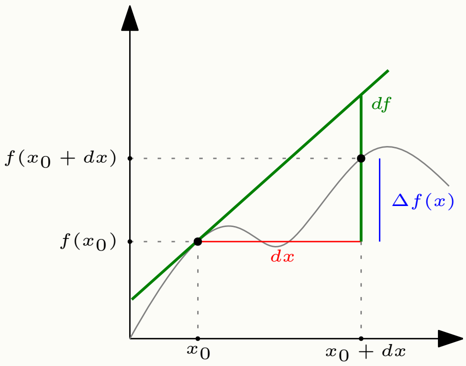
$$1^m/_s = \frac{10^{-3}}{^1/_{3600}}{}^{km}/_h = 10^{-3} \cdot 3600^{km}/_h = 3.6^{km}/_h$$

Introduciamo adesso il concetto di **differenziale**, si consideri una generica funzione $f(x)$ in un punto x_0, ed il suo rapporto incrementale per una variazione dx.



Il segmento denotato $\Delta f(x)$ rappresenta l'incremento effettivo della funzione, e vale $f(x_0 + dx) - f(x_0)$.

Definisco ora il **differenziale** di f come una **linearizzazione** della funzione, ossia, si considera nel punto x_0 una retta tangente alla curva di f.



Il differenziale df da una stima dell'incremento, considerando una funzione lineare (in questo caso bidimensionale, una retta).

Denotando con f' la derivata di f si ha

$$df = f' \cdot dx$$

$$\frac{df}{dx} = f'$$

Le funzioni lineari sono più semplici di quelle non lineari, il punto di tale differenziale è che, quando l'incremento dx tende a zero, l'incremento effettivo della funzione e l'incremento "stimato" dato dal differenziale tendono allo stesso valore.

$$\lim_{dx \to 0} f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot dx$$

CAPITOLO

2

CINEMATICA

Si è introdotto il vettore spostamento $\delta\bar{r}$, con la sua relativa formulazione infinitesima di velocità $\bar{v}$, come derivata del vettore posizione $\bar{r}$. Un'altra grandezza fondamentale nello studio del moto dei corpi è la variazione della velocità, definita come il limite del rapporto incrementale di quest'ultima rispetto al tempo. Tale grandezza prende il nome di **accelerazione**

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a}$$

L'accelerazione $\bar{a}$, o a se riferita ad una grandezza scalare, si misura in m/s^2, di cui l'unità, indica che ad ogni secondo, la velocità aumenta di $1 m/s$, ovviamente anche'essa può dipendere dal tempo.

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

Si consideri adesso lo spostamento in forma scalare $s(t)$, definito su una traiettoria curvilinea già definita

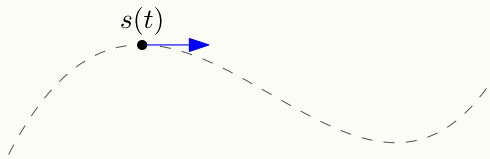


Figura 2.1: velocità scalare

Di quest'ultima ne voglio ricavare la sua versione vettoriale, sia $\bar{\tau}(t)$ il versore tangente alla curva prestabilita, nell'immagine 2.1, evidenziato in blu. Si avrà che la velocità vettoriale sarà

$$\bar{v}(t) = \dot{s}(t) \cdot \bar{\tau}(t)$$

Appunto sulla notazione : $\dot{s}$ è la derivata prima di s. $\ddot{s}$ è la derivata seconda di s. A questo punto è possibile riscrivere l'accelerazione nella seguente forma :

$$\bar{a} = \frac{d}{dt}\bar{v}(t) = \ddot{s}(t) \cdot \bar{\tau}(t) + \dot{s}(t) \cdot \dot{\bar{\tau}}(t)$$

Si è quindi divisa l'accelerazione in due componenti distinte, la componente $\ddot{s}(t) \cdot \bar{\tau}(t)$ è nota come **accelerazione tangenziale** e rappresenta la variazione nel tempo del modulo della velocità. L'altra componente, verrà ripresa in seguito, ha a che fare con la curvatura della traiettoria.

2.1 I Moti

2.1.1 Rettilineo Uniforme

Il moto rettilineo uniforme, secondo la legge d'Inerzia, descrive il moto naturale degli oggetti quando non sono soggetti a forze. Tale moto è contraddistinto dal fatto che l'accelerazione sia nulla, e la velocità costante, (per semplicità, verranno trattate le grandezze in forma scalare).

$$\frac{dv}{dt} = 0 \implies v = v_0 \text{ costante}$$

Si può ricavare facilmente l'equazione dello spostamento r in un lasso di tempo che va da t_0 fissato, ad un t generico

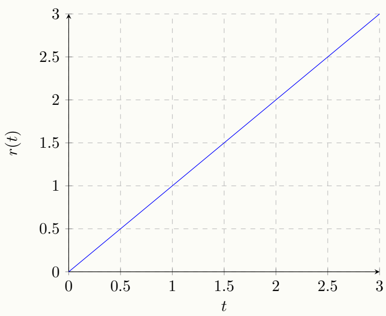
$$\frac{dr}{dt} = v = v_0 \implies dr = vd_0t \implies \int_{r(t_0)}^{r(t)} dr = \int_{t_0}^{t} v_0 dt$$

$$\int_{t_0}^{t} v_0 dt = v_0 \int_{t_0}^{t} dt = v_0(t - t_0)$$

Si ha che

$$r(t) = r(t_0) + v_0(t - t_0)$$

L'equazione che descrive il moto rettilineo uniforme è lineare



2.1.2 Uniformemente Accelerato

La caratteristica del moto uniformemente accelerato è quella di avere un accelerazione costante $a = a_0$, si avrà che

$$\frac{dv}{dt} = a_0 \implies dv = a_0 dt \implies \int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} a dt \implies$$

$$v(t) = v(t_0) + a_0(t - t_0)$$

Per semplicità, si definisce $v_0 = v(t_0)$ la velocità iniziale. A questo punto, avendo nota l'equazione della velocità, si ricava la legge oraria, sia $x_0 = x(x)$ la posizione iniziale

$$\frac{dx}{dt} = v \implies \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v dt = \int_{t_0}^{t} v_0 + a_0(t - t_0) dt = v_0 \int_{t_0}^{t} dt + a_0 \int_{t_0}^{t} (t - t_0) dt$$

Considero $t' = t - t_0 \implies dt' = dt$

$$v_0 \int_{t_0}^{t} dt + a_0 \int_{t_0}^{t} (t - t_0) dt = v_0 \int_{t_0}^{t} dt + a_0 \int_{0}^{t-t_0} t' dt' = v_0(t - t_0) + \left[\frac{1}{2} a_0 t'\right]_0^{t-t_0}$$

La soluzione oraria è quindi

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 \cdot (t - t_0)^2$$

Essa risulta essere l'equazione della parabola, nel caso più semplice in cui la posizione iniziale è 0, ed il tempo iniziale pure, si ha

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t$$

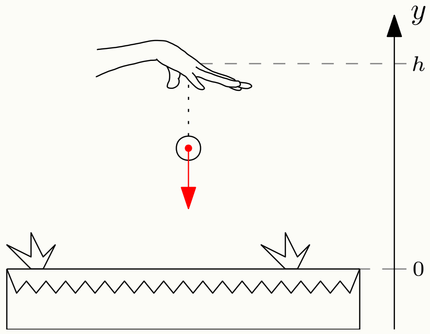
lo spazio percorso è proporzionale al tempo al quadrato.

2.1.3 Caduta dei Gravi

La caduta degli oggetti verso il suolo è descritta dal moto uniformemente accelerato. Ogni oggetto nel campo gravitazionale terrestre, all'altezza del mare, subisce un accelerazione di gravità pari a

$$g \simeq 9.81 {}^{m}/_{s^2}$$

diretta verso il centro della terra.



Definiamo un sistema di riferimento in cui il suolo rappresenta lo zero, ed un corpo viene lasciato cadere da un altezza h. Per semplicità, il tempo iniziale t_0 è uguale a 0.

La legge orario che descrive la posizione y dell'oggetto è la segunete

$$\begin{cases} y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = \dfrac{dy}{dt} = -gt \end{cases}$$

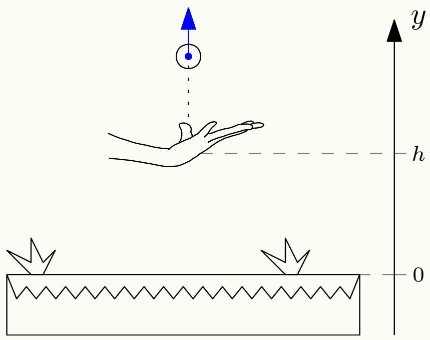
È possibile calcolare l'istante t^* in cui l'oggetto toccherà il suolo :

$$y(t^*) = 0 \implies h - \frac{1}{2}gt^{*2} = 0 \tag{2.1}$$

$$h = \frac{1}{2}gt^{*2} \tag{2.2}$$

$$2\frac{h}{g} = t^{*2} \tag{2.3}$$

$$t^* = \sqrt{2\frac{h}{g}} \tag{2.4}$$



Se l'oggetto venisse inizialmente lanciato verso l'alto, si avrebbe una velocità iniziale v_0 diversa da zero. La forza di gravità agirà sulla velocità dell'oggetto, facendola diminuire fino a farla diventare negativa, facendolo ricadere verso il suolo.

L'equazione oraria sarebbe

$$\begin{cases} y(t) = h + v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = \dfrac{dy}{dt} = v_0 - gt \end{cases}$$

È possibile trovare il punto più alto raggiunto dal grave, esso sarà il punto in cui la velocità passerà da essere positiva (l'oggetto si allontana dal suolo) ad essere negativa (l'oggetto si avvicina al suolo), raggiungerà quindi il punto più alto nell'istante t^* in cui la velocità è nulla.

$$v(t^*) = 0 \implies v_0 - gt^* = 0 \implies t^* = \frac{v_0}{g}$$

La quota massima raggiunta sarà quindi

$$t({}^{v_0}/_g) = h + v_0{}^{v_0}/_g - \frac{1}{2}g({}^{v_0}/_g)^2 = \tag{2.5}$$

$$h + \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0}{2g} = \tag{2.6}$$

$$h + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \tag{2.7}$$

È possibile riscrivere l'equazione del moto uniformemente accelerato in funzione dello *spazio percorso* partendo da un punto x_0

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v = v_0 + at \end{cases} \implies x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}(v - v_0)t \implies x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

2.1.4 Moto del Proiettile

Si vuole modellizzare la traiettoria di un proiettile, sparato con una certa angolazione, si considera quindi il piano cartesiano (x, y), e la legge oraria sarà descritta da un vettore $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$ che ne descrive lo spostamento sui due assi.

Il proiettile è soggetto a due forze, la prima è la velocità orizzontale, data al tempo t_0 dallo sparo, la seconda è l'accelerazione di gravità, che gli conferisce una velocità verticale uniformemente accelerata. Denotiamo v_x e v_y le due velocità, (x_0, y_0) la posizione iniziale, e (v_{y0}, v_{x0}) la velocità iniziale. Per semplicità, l'istante di inizio sarà 0.

$$\begin{cases} y(t) = y_0 + v_{y0} t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y(t) = v_{y_0} - gt \end{cases} \quad \text{verticalmente}$$

$$x(t) = x_0 + v_{x_0} t \text{ orizzontalmente}$$

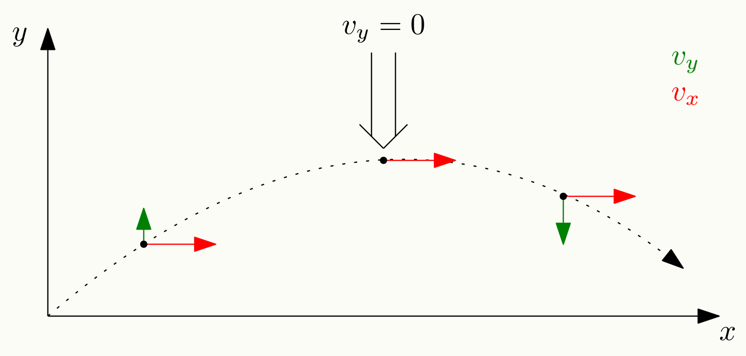


Figura 2.2: moto del proiettile

L'altezza massima si ha nell'istante t^* in cui $v_y(t^*) = 0 \implies t^* = \frac{v_{y_0}}{g}$. Con il termine *gittata*, si intende la distanza R percorsa dal proiettile orizzontalmente, essa è uguale a $R = v_{x_0} \cdot t_{tot}$, dove t_{tot} è l'istante in cui il proiettile raggiunge il suolo, terminando la traiettoria e vale $t_{tot} = 2\frac{v_{y_0}}{g}$.

$$R = v_{x_0} \cdot 2\frac{v_{y_0}}{g}$$

La velocità totale iniziale del proiettile, risulta essere

$$v_0 = \sqrt{v_{x_0}^2 + v_{x_y}^2}$$

Si può esprimere la gittata in funzione dell'angolo θ in cui si lancia il proiettile rispetto l'asse delle ascisse

$$R(\theta) = \frac{2v_0^2 \sin(\theta)\cos(\theta)}{g}$$

A tal punto, si vuole esprimere l'angolo θ che massimizza la gittata. Essendo che $R(\theta)$ descrive la variazione della gittata al variare di θ, è necessario trovare l'angolo in cui la derivata di R si annulla, si considera

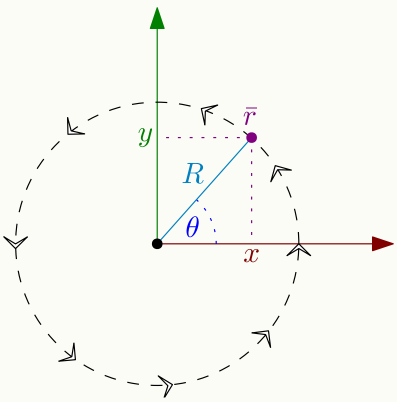
$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{2v_0^2}{g}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$$

Si pone a zero e si risolve per θ

$$\begin{aligned} \frac{2v_0^2}{g}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = 0 \implies \quad & (2.8) \\ (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = 0 \implies \quad & (2.9) \\ \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta) \implies \quad & (2.10) \\ \theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \quad & (2.11) \end{aligned}$$

2.1.5 Moto Circolare Uniforme

Si vuole descrivere il moto di un corpo, che rotea attorno ad un centro il cui modulo della velocità è costante. È importante specificare che il modulo sia costante, in quanto la velocità costante indica una non-variazione della direzione, invece nel moto circolare, la direzione cambia nel tempo, quindi vi sarà un accelerazione non nulla.



$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y$$
$$\bar{r} = (R, \theta)$$

Sia $\bar{v}$ la velocità, essendo il modulo costante, denoteremo $|\bar{v}| = v_0$. Si considera ora la velocità scalare s, di cui si ricorda

$$\frac{ds}{dt} = v_0$$

Inoltre, sapendo che $\frac{s}{R} = \theta$, si pone

$$\frac{ds}{R} = d\theta \implies \frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{d\theta}{dt} = v_0$$

Denotiamo $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$, tale termine descrive la variazione dell'angolo nel tempo ed è denominato **velocità angolare**. Il fatto che la velocità dipenda dal raggio R, descrive il fatto che a parità di velocità angolare, un oggetto che si muove su un cerchio di raggio minore va meno veloce.

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \qquad \frac{ds}{dt} = R\omega \qquad v_0 = R\omega$$

La velocità angolare si misura in radianti al secondo, essendo i radianti adimensionali, l'unità di misura è $1/s = 1Hz$, detta anche *frequenza*. Si può esprimere anche $\omega = \frac{2\pi}{t}$ dove t rappresenta il tempo impiegato per fare un giro intero, detto anche *periodo*. Si pone la frequenza $\frac{1}{t} = \nu$ e si ha

$$\frac{2\pi}{t} 1/s = 2\pi\nu \; Hz$$

Si ha quindi la velocità angolare ω, si vuole però rappresentare il vettore velocità $\bar{v}$, serve prima definire il vettore velocità angolare $\bar{\omega}$, ossia un vettore il cui modulo è uguale alla velocità angolare

$$|\bar{\omega}| = \omega = \frac{v}{R}$$

Il vettore ω, essendo che deve rappresentare una rotazione, deve definire

- la velocità di rotazione
- il piano di rotazione
- il verso della rotazione

Un piano, può essere definito dal suo *vettore normale*, ossia il vettore ortogonale ai due vettori le cui combinazioni lineari generano tutti i punti del piano. Inoltre, il verso di tale vettore, definisce anche il verso di rotazione.

$$\bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{v}$$

rispetta infatti

$$|\bar{\omega} \times \bar{r}| = |\bar{v}| \implies \omega R = v$$

Si ricordi che il vettore spostamento si muove sempre sul cerchio di raggio R, per questo $\bar{r} = R$.

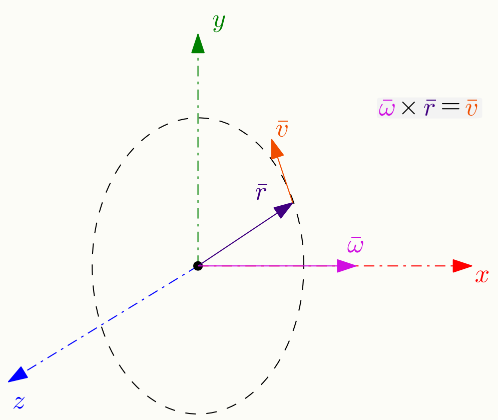


Figura 2.3: vettore velocità angolare

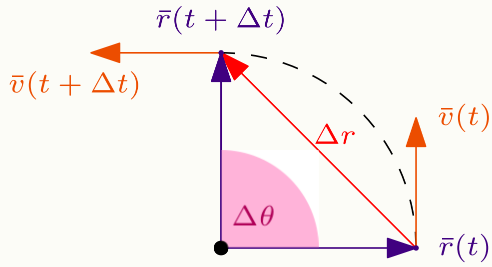
Per convenzione, la rotazione avviene in senso antiorario intorno al vettore, se lo si osserva dal punto diretto dal suo verso.

Una volta stabilito il vettore velocità, si vuole trovare l'accelerazione, derivandola

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$$

Definiamo $\Delta\theta$ l'angolo formato dal vettore $\bar{r}(t+\Delta t)$ con il vettore $\bar{r}(t)$, definisce la variazione dell'angolo nel tempo, è chiaro che se $\Delta t \to 0$ allora $\Delta\theta \to 0$.

Differentemente, il vettore $\Delta\bar{v} = \bar{v}(t+\Delta t) - \bar{v}(t)$, tende a puntare al centro del cerchio attorno a cui il punto rotea. Trovata la sua direzione, se ne vuole stabilire l'intensita, ossia il suo modulo $|\bar{a}| = a$.



Se Δt tende a zero, l'arco di curva è approssimabile ad una retta fra i due punti, che sappiamo essere di lunghezza $|\Delta\bar{r}| = \Delta r$, inoltre, il rapporto fra quest'ultimo ed il raggio è proprio uguale all'angolo, quindi

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{R} = \Delta\theta$$

Inoltre, anche considerando il vettore $\Delta\bar{v}$, esso rispetto al vettore velocità permette di trovare il medesimo angolo

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{v}}{v} = \Delta\theta$$

Quindi

$$|\Delta\bar{v}| = v\Delta\theta = \frac{\Delta r}{R}v$$

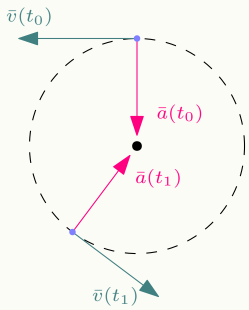
Indicando con v il modulo di $\bar{v}$, si ha che

$$a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v}{R}\frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Appare come secondo termine proprio la derivata dello spostamento

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v}{R}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v}{r}(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}) \implies$$

$$|\bar{a}| = a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$



Si ricordi come il vettore accelerazione può essere scritto come somma di due componenti che rappresentano l'accelerazione tangenziale, ossia la variazione del modulo della velocità, e **l'accelerazione normale**, che descrive il variare della direzione della velocità. Nel caso del moto rettilineo uniforme, l'accelerazione ha componente tangenziale nulla, è solo normale e diretta verso il centro del cerchio, ed ha intensità $\frac{v^2}{R}$.

Quando un moto di un punto $\bar{r}$ segue una traiettoria curva (ma non circolare uniforme), preso un istante fissato t_0, l'accelerazione normale è diretta verso il centro del cerchio che approssima la curva nell'istante dato e che contenga $\bar{r}(t_0)$, come mostrato in figura 2.5.

A tal punto è possibile descrivere un moto qualsiasi definendo la sua accelerazione normale e tangenziale. Il moto circolare uniforme è il particolare caso in cui l'accelerazione tangenziale è nulla.

$$\begin{cases}\bar{v}(t) = \bar{\omega}(t)\times\bar{r}(t)\\ \bar{a}_t(t) = \frac{d\bar{\omega}}{dt}(t)|\bar{r}|(t) \text{ accelerazione tangenziale}\\ \bar{a}_n(t) = \frac{\bar{v}(t)^2}{\bar{r}(t)} \text{ accelerazione normale}\end{cases}$$

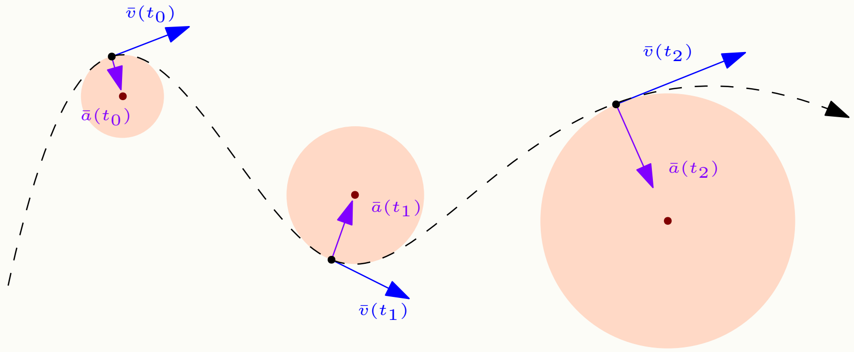


Figura 2.4: Cerchio osculatore

2.1.6 Moto Armonico

Il moto armonico vuole descrivere il comportamento oscillatorio e periodico di un punto. Si può descrivere come la proiezione su uno degli assi del moto circolare uniforme.

$$x(t) = R\cos(\theta(t)) = R\cos(\omega t)$$

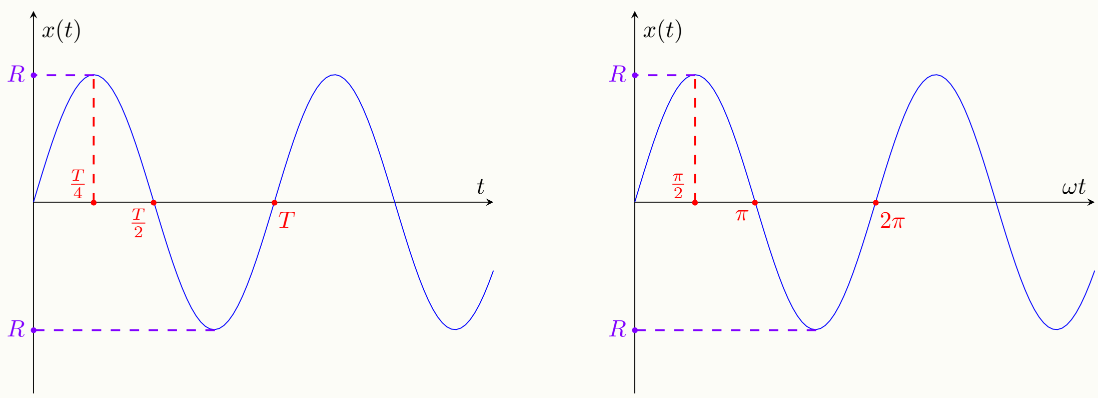


Figura 2.5: $x(t) = R\cos(\omega t)$

La costante R si chiama *ampiezza* del moto, mentre ω si chiama *pulsazione*. La funzione x del moto è armonica di periodo T, ossia $x(t+T) = x(t)$. Essendo che l'argomento della funzione trigonometrica deve variare di 2π si ha

$$\omega(t+T) - \omega t = 2\pi \implies \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Si definisce $\nu = \frac{1}{T}$ una nuova grandezza denominata *frequenza* di moto.

Si vuole trovare la velocità, ossia

$$v(t) = \frac{d}{dt}R\cos(\omega t) = -R\omega\sin(\omega t)$$

La velocità massima si ha in $-R\omega\sin(\omega t) = 0 \implies \sin(\omega t) = 0$, ossia nei punti in cui x incontra l'asse delle ascisse. L'accelerazione vale

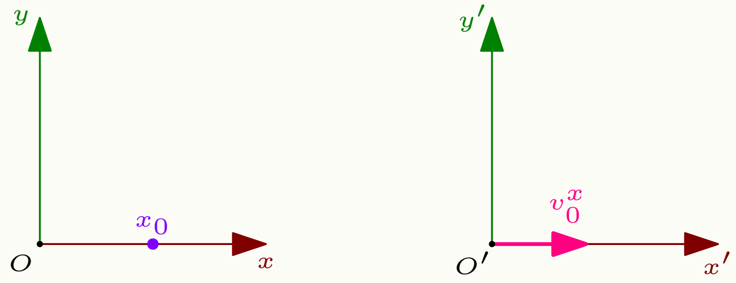
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} - R\omega\sin(\omega t) = -R\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 x(t)$$

Si noti come l'accelerazione dipende dalla posizione, la sua forza è proprio opposta ad essa, si dice infatti che il moto oscillatorio è dettato da una *forza di richiamo*.

2.2 Moti Relativi

La velocità è relativa, le caratteristiche di un punto sono legate al suo sistema di riferimento, e al suo sistema di coordinate. Il moto di un punto può essere osservato diversamente da due sistemi di riferimento differenti.

Si considerino due sistemi di riferimento O e O', per semplicità, siano il piano cartesiano, di cordinate (rispettivamente) x, y e x', y'. Supponiamo inoltre, che all'origine dei tempi, essi si trovino nella stessa posizione, e che il sistema O' si muova con velocità costante $\bar{v} = (v_0^x, 0)$.



Vi è poi un punto nello spazio, che secondo il sistema di riferimento O, è fermo, ed ha cordinate x_0. Si vuole trovare tale punto nel sistema di riferimento O'. Tale sistema, si allontana da O ad una velocità costante v_0^x, intuitivamente, avendo O una velocità "assoluta" nulla, vedrà allontanarsi il punto x_0 a velocità v_0^x. La velocità è de facto relativa al sistema di riferimento, non esiste quindi una velocità assoluta, ma si sceglie arbitrariamente un sistema di riferimento da considerare fisso, l'altro sistema sarà detto "mobile", ed il moto in esso, sarà detto "relativo".

$$x_0' = x_0 - v_0^x t$$

In generale, la formula per il *passaggio di coordinate* è la seguente

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \\ t \end{cases} \implies \begin{cases} x' = x - v_0^x t \\ y' = y - v_0^y t \\ z' = z - v_0^z t \\ t' = t \text{ il tempo è assoluto} \end{cases}$$

Dove $\bar{v}_0 = (v_0^x, v_0^y, v_0^z)$ è la velocità del secondo sistema di riferimento.

Il moto del punto nel sistema di riferimento fisso, visto dal sistema di riferimento relativo, è detto *moto di trascinamento*, nell'esempio trattato, tale moto è una traslazione, si dice infatti moto di trascinamento traslatorio. Denoteremo

$\bar{v}_a$ velocità assoluta
$\bar{v}_r$ velocità relativa
$\bar{v}_t$ velocità traslatoria

$$\bar{v}_a(t) = \bar{v}_r(t) + \bar{v}_t \qquad \textbf{composizione delle velocità}$$

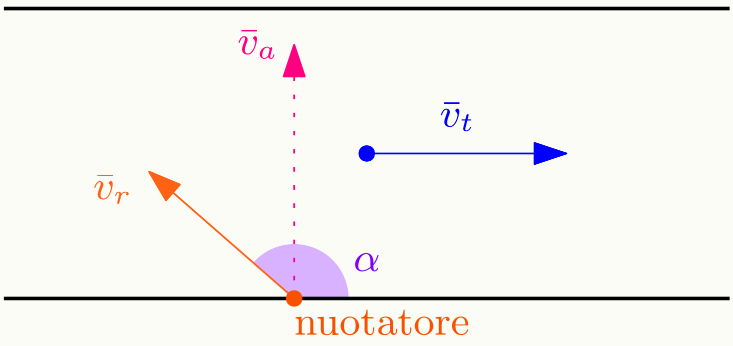
Ne consegue che

$$a_a(t) = \frac{d}{dt}v_a(t) = \frac{d}{dt}v_r(t) + v_t = a_r$$

Se la velocità è costante, l'accelerazione assoluta, come quella relativa risulterà nulla, in tale configurazione il sistema è detto **inerziale**.

Esempio (nuotatore) : Si consideri un fiume in cui una corrente spinge chiunque vi sia all'interno con una velocità costante $\bar{v}_t$, un nuotatore, vuole attraversare il fiume in linea retta, la sua velocità è $\bar{v}_r$, tale che $|\bar{v}_r| > |\bar{v}_t|$.

Partendo da una sponda, il nuotatore deve decidere in che direzione nuotare per far si che la sua velocità si bilanci con la corrente del fiume, facendo risultare il suo moto assoluto $\bar{v}_a$ in modo che attraversi il fiume in linea retta.



Si vuole trovare l'angolo α fra la velocità relativa e quella di trascinamento per far si che la velocità assoluta sull'asse delle parallelo alle sponde sia nulla.

$$v_r \sin(\alpha) = -v_t \implies \alpha = -\arcsin(\frac{v_t}{v_r})$$

Si consideri ora un sistema non inerziale, ossia in cui la velocità di trascinamento dipende dal tempo

$$\bar{v}_a(t) = \bar{v}_r(t) + \bar{v}_t(t)$$

Ne consegue che l'accelerazione di trascinamento non è nulla.

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c$$

Il termine $\bar{a}_c$ risulta ambiguo, essa è detta *forza di Coriolis*, è una forza apparente (si tratteranno in seguito), e si manifesta quando il sistema di riferimento sta ruotando, si ha che

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$$

Dove $\bar{\omega}$ è il vettore velocità angolare del sistema in rotazione. Un tipico esempio di manifestazione di tale accelerazione è il seguente : Ci si trova su una giostra che sta ruotando, si lancia un oggetto davanti a se, la traiettoria di tale oggetto non sarà dritta come voluto, ma curverà verso l'esterno della giostra.

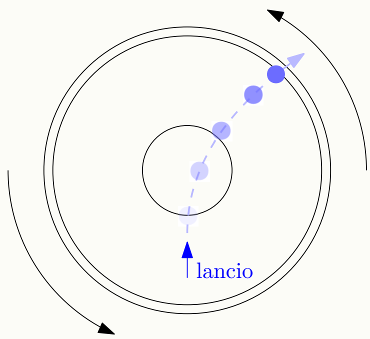


Figura 2.6: Forza di Coriolis

2.3 Esercizi sul Punto Materiale

Esercizio 1)

Un punto materiale si muove su una traiettoria rettilinea con un accelerazione $a = -4t^{m}/_{s^2}$, all'istante $t = 0$, ha una velocità iniziale di $v_0 = 2^{m}/_{s}$. Quanto spazio percorrerà prima di fermarsi?
Si vuole trovare la legge della velocità

$$v(t) = \int_0^t a\ dt + v_0 = -2t^2 + v_0$$

La legge oraria dello spostamento sarà

$$s(t) = \int_0^t v\ dt = v_0 t - \frac{2}{3}t^3$$

Il punto si fermerà quando la velocità sarà uguale a zero, sia t_1 l'istante in cui ciò avviene

$$v(t_1) = 0 \implies -2{t_1}^2 + v_0 = 0 \implies t_1 = \sqrt{\frac{v_0}{2}}$$

All'istante t_1, lo spazio percorso sarà

$$s(t_1) = v_0 t_1 - \frac{2}{3}{t_1}^3 = v_0\sqrt{\frac{v_0}{2}} - \frac{2}{3}(\sqrt{\frac{v_0}{2}})^3$$

Sapendo che $v_0 = 2{}^m/_s$

$$2\sqrt{\frac{2}{2}} - \frac{2}{3}(\sqrt{\frac{2}{2}})^3 = \frac{4}{3}m$$

Esercizio 2)

All'istante $t = 0s$ un punto materiale parte da fermo e si mette in moto su una traiettoria circolare di raggio $R = 225m$, continua il suo moto fino all'istante $t_1 = 10s$, la velocità del punto, cresce linearmente con il tempo, e all'istante t_1 lo spazio percorso è di $150m$. Si determini il modulo dell'accelerazione all'istante t_1.
Se la velocità cresce linearmente con il tempo, il suo modulo sarà del tipo

$$v(t) = v(0) + a_t t = 0 + a_t t = a_t t$$

dove con a_t si definisce l'accelerazione tangenziale. La legge dello spostamento è

$$s(t) = s(0) + \int_0^t a_t t dt = \frac{1}{2}a_t t^2$$

L'accelerazione tangenziale è quindi

$$a_t = 2\frac{s(t)}{t^2}$$

All'istante t_1, l'accelerazione tangenziale sarà

$$a_t(t_1) = 2\frac{s(t_1)}{(t_1)^2} = 2\frac{150}{(10)^2} = 3{}^m/_{s^2}$$

È nota la formula dell'accelerazione normale

$$a_n(t_1) = \frac{v(t_1)^2}{R} = \frac{v(10)^2}{225} = \frac{3 \cdot 10^2}{225} = \frac{900}{225} = 4{}^m/_{s^2}$$

L'accelerazione sarà quindi

$$a(t_1) = \sqrt{a_t^2(t_1) + a_n^2(t_1)} = \sqrt{9+16} = 5{}^m/_{s^2}$$

Esercizio 3)

Un aereo vola con velocità costante v_0, seguendo una rotta rettilinea inclinata verso il basso di un angolo α rispetto all'orizzonte. Se il pilota volesse centrare un bersaglio a terra sganciando una massa puntiforme da una quota h, a quale distanza d dal bersaglio dovrebbe sganciarla?

Ci si vuole assicurare che, la bomba, la cui velocità dipenderà da quella iniziale data dall'aereo, e dall'accelerazione di gravità, incroci l'asse delle ascisse nel punto del bersaglio, che dista d dall'aereo. Si vuole far si che tale bomba percorrà una distanza d sull'asse delle ascisse, ed una distanza h sull'asse delle ordinate. La velocità $\bar{v} = (v_x, v_y)$ di tale bomba risulta essere

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = v_0 \sin\alpha + gt \end{cases}$$

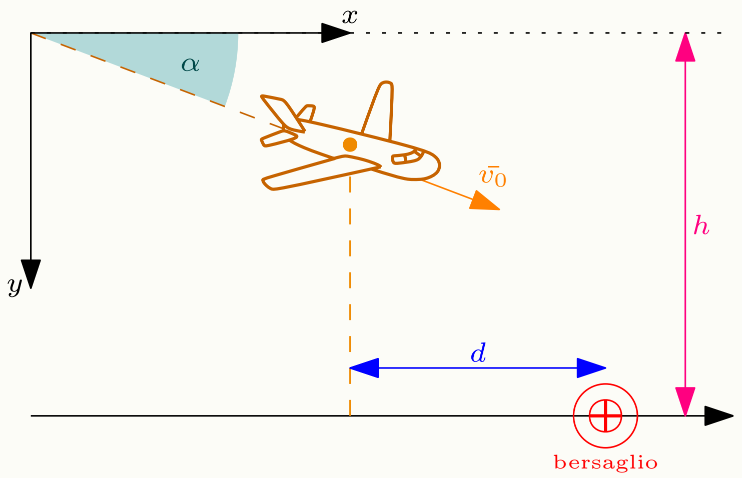


Figura 2.7: schema esercizio 3

Lo spostamento sarà rispettivamente

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha t \\ y(t) = v_0 \sin \alpha + \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Sia t^* l'istante in cui la bomba colpisce il bersaglio

$$x(t^*) = d = v_0 \cos \alpha t^*$$

$$y(t^*) = h = v_0 \sin \alpha + \frac{gt^{*2}}{2}$$

Si risolve il sistema per trovare tale istante

$$\begin{cases} v_0 \sin \alpha + \dfrac{gt^{*2}}{2} = h \\ v_0 \cos \alpha t^= d* \end{cases} \implies t^* = -\frac{v_0}{g} \sin \alpha + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} \sin^2 \alpha + \frac{2h}{g}}$$

Quindi

$$d = v_0 \cos \alpha \left(-\frac{v_0}{g} \sin \alpha + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} \sin^2 \alpha + \frac{2h}{g}} \right)$$

CAPITOLO

3

DINAMICA

3.1 Forze

Newton considerò il principio di inersia e lo fece suo, definì i 3 principi della dinamica

Primo Principio

Lo stato naturale di un corpo in assenza di perturbazioni è quello di moto rettilineo uniforme

Secondo Principio

Definizione : Si definisce *quantità di moto* il prodotto della velocità di un corpo per la sua massa

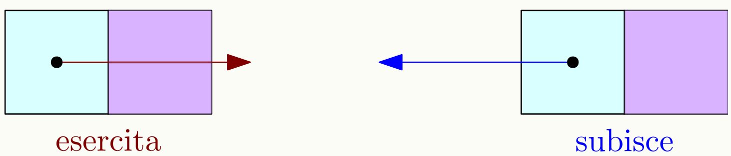
$$\bar{p} = m \cdot \bar{v}$$

Definiamo *forza* il fenomeno capace di perturbare i corpi, ed equivale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto.

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$$

Terzo Principio

Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria. Quando un corpo in un punto A esercita una forza su un altro corpo in un punto B, esso subisce una reazione uguale in intensità e diretta lungo la congiungente dei due punti.



$\bar{F}$ modellizza una generica forza, la massa m che compare nella sua formula è detta massa inerziale. Una forza di cui risente ogni abitante sulla terra è la forza peso

$$\bar{F} \equiv m_g \bar{g}$$

dove m_g è detta massa gravitazionale, nel caso in cui dovesse coincidere con quella inerziale, si avrebbe che $\bar{a} = \bar{g}$. La legge di gravitazione universale, da cui si ricava la forza peso, descrive la forza che attrae un corpo di massa m verso un altro di massa M

$$\bar{F} = -G\frac{mM}{|\bar{r}|^2}\bar{r}$$

Dove $\bar{r}$ è il vettore che congiunge i due corpi. La forza di gravità è quindi proporzionale alle masse dei corpi, e diminiusce con l'aumentare della distanza al quadrato.

3.1.1 Forza Elastica

Un'altra forza presente nella vita quotidiana è quella elastica, modellizza macroscopicamente, il comportamento di una molla.

$$\bar{F} = k(\bar{r} - \bar{r}_0)$$

Dove $\bar{r}$ è la posizione del corpo che subisce la forza, $\bar{r}_0$ è uno specifico punto nello spazio detto equilibrio, e k è una costante detta *costante di elasticità*, scriviamo nel caso unidimensionale

$$F = k \cdot (x - x_0)$$

Più ci si allontana dal punto di equilibrio, più la forza aumenta, ed essa è nulla proprio in tale punto. Si vuole descrivere il moto di un corpo soggetto a forza elastica. Per semplicità, si consideri $x_0 = 0$

$$\begin{matrix} F = -kx \\ F = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \end{matrix} \implies \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

La soluzione dell'equazione differenziale, ossia la legge oraria di un corpo soggetto a forza elastica, è la seguente

$$A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

A e ϕ sono due costanti che dipendono dalle condizioni iniziali $x(0)$ e $v(0)$. La relazione è la seguente

$$x(0) = A\cos\phi$$

La legge della velocità si ottiene derivando x

$$v(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \phi)$$

Quindi

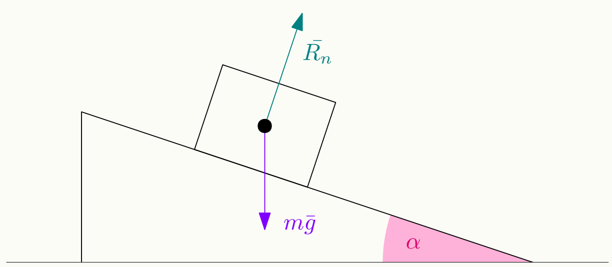
$$v(0) = -A\omega_0\sin\phi \implies \frac{v(0)}{\omega_0} = -A\sin\phi$$

Si considerino i quadrati

$$\begin{cases} x(0)^2 = (A\cos\phi)^2 \\ (\frac{v(0)}{\omega_0})^2 = (-A\sin\phi)^2 \end{cases} \implies \begin{cases} \phi = -\arctan(\dfrac{v(0)}{w_0 x(0)}) \\ A = \sqrt{x(0)^2 + (\dfrac{v(0)}{w_0})^2} \end{cases}$$

3.1.2 Reazione Normale

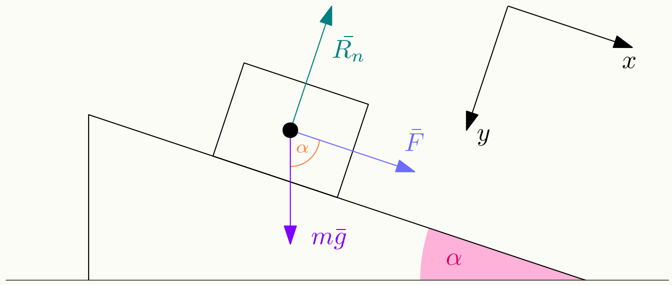
Si consideri un corpo di massa m posto su un piano inclinato di un angolo α rispetto l'orizzonte (il cui attrito è nullo). Il corpo è soggetto alla forza peso, perché allora non sfonda il piano cadendo verso il centro della terra? Esso è soggetto ad una reazione normale $\bar{R}_n$, ossia una forza la cui direzione è la normale della superficie su cui poggia. Il piano costituisce un vincolo, si parla infatti di *reazione vincolare*.



Il corpo, sarà soggetto alla somma delle due forze

$$\bar{F} = m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{R_n}$$

Tenedrà quindi ad accelerare lungo l'asse del piano, si vuole trovare il moto di tale corpo. Consideriamo un sistema di riferimento in cui l'asse delle y è parallela alla reazione normale, e l'asse delle x forma un angolo α con l'orizzonte.



Si vuole quindi trovare l'accelerazione lungo x, bisogna proiettare entrambe le forze su tale asse. Come si può vedere dall'immagine, la reazione normale non esercita alcuna forza su tale asse, ma esclusivamente sull'asse delle y

$$|\bar{R_n}| = \sin\alpha|\bar{R_n}|$$

in particolare, una forza che controbilancia quella peso, e fa si che il suo spostamento sull'asse y sia nullo.

$$-m|\bar{g}|\sin\alpha + |\bar{R_n}| = 0$$

Lungo l'asse delle ascisse, la proiezione della forza sarà

$$F_x = mg\cos\alpha \implies ma_x = mg\cos\alpha = a_x = g\cos\alpha$$

A questo punto si può trovare il moto del corpo sull'asse delle x

$$x(t) = \frac{1}{2}g\sin\alpha t^2$$

3.1.3 Attrito

Nell'esempio precedente del piano inclinato si è trascurato l'attrito, tale forza si manifesta a seguito di uno strusciamento fra due corpi, ed è dovuta all'asperità dei materiali a livello microscopico. È fondamentale considerarlo quando si devono calcolare le forze in una situazione reale.

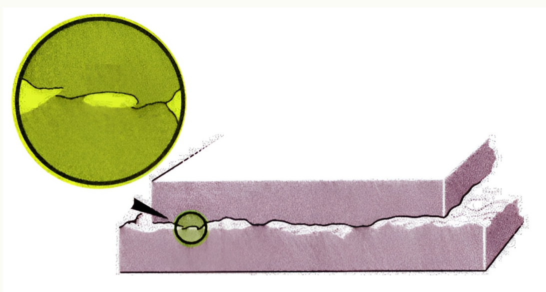


Figura 3.1: asperità dei materiali

L'attrito si presenta sotto due aspetti

- **attrito statico** : Forza esercitata su un corpo fermo su una superficie, che subisce una forza
- **attrito dinamico** : Forza esercitata su un corpo in movimento che si sposta strisciando su una superficie

La modellizzazione dell'attrito prevede tale suddivisione, quando un corpo su una superficie subisce una forza $\bar{F}$, è anche soggetto ad una forza di attrito statico $\bar{F}_s$, essa si oppone alla prima, de facto è uguale in intensità e direzione, ma il verso è contrario. Se la forza applicata varia, l'attrito varierà con essa.

In una situazione reale però, quando si spinge un oggetto, aumentando l'intensità il corpo inizierà a muoversi, esiste quindi una forza di soglia sotto il quale l'attrito statico vale, una volta raggiunta tale soglia, il corpo si muoverà, e sarà soggetto ad attrito dinamico. In generale, tale soglia è descritta da

$$F_s \leq \mu_s \cdot R_n$$

Dove R_n è il modulo della reazione normale che subisce il corpo che poggia sulla superficie, e μ_s è il *coefficente di attrito statico*, e dipende dal materiale dei corpi. Essendo tale attrito proporzionale alla reazione normale, risulta chiaro ora il perché gli oggetti posti su un piano inclinato necessitano di meno forza per essere spostati.

Quindi F_s è sempre uguale alla forza applicata sul corpo ma contraria di verso finché il suo modulo è minore di $\mu_s \cdot R_n$. Se tale modulo è maggiore, allora il corpo sarà soggetto ad un attrito dinamico $\bar{F}_d$

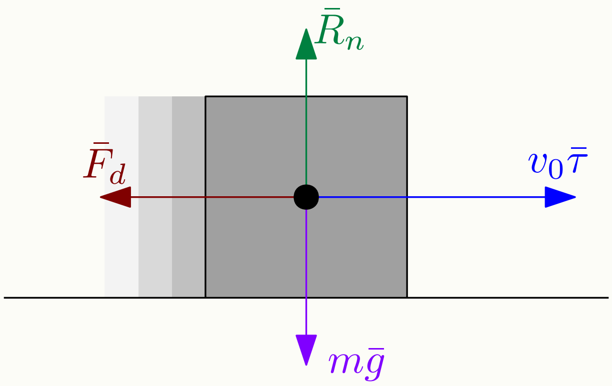
$$\bar{F}_d = -\mu_d \cdot R_n \cdot \bar{\tau}$$

μ_d è il coefficiete di attrito dinamico, tipicamente, per uno stesso materiale $\mu_s > \mu_d$. τ è il versore parallelo alla velocità del corpo che subisce tale attrito. La decelerazione che subirà il corpo che si muove su una superficie sarà

$$m\bar{a} = -\mu_d R_n \bar{\tau} \implies m\bar{a} = -\mu_d m g \bar{\tau} \implies |\bar{a}| = -\mu_d g$$

Nella formula, si è sostituito R_n ad mg, in quanto il modulo di tali forze è lo stesso, come già visto

$$R_n - mg = 0$$



Si noti come la decelerazione subita non dipende dalla massa del corpo, ma esclusivamente dalla reazione normale e dalla costante di attrito dinamico. Si ricavano le leggi della velocità e dello spostamento (nel caso unidimensionale)

$$v = v_0 - \mu_d g t$$

$$x = v_0 t - \frac{1}{2}\mu_d g t^2$$

Il corpo si fermerà nell'istante t_1 in cui $v(t_1) = 0$

$$v(t_1) = 0 \implies v_0 - \mu_d g t_1 = 0 \implies t_1 = \frac{v_0}{\mu_d g}$$

E lo spazio percorso sarà

$$x(t_1) = v_0 t_1 - -\frac{1}{2}\mu_d g {t_1}^2 = v_0(\frac{v_0}{\mu_d g}) - \frac{1}{2}\mu_d g (\frac{v_0}{\mu_d g})^2 = \frac{v_0^2}{2\mu_d g}$$

Misuratore di Attrito

Il seguento esempio, mostra com'è possibile sfruttare un piano inclinato, la cui inclinazione α è variabile, per misurare la costante di attrito statico e dinamico di un corpo. Supponiamo quindi, di posare un corpo su tale piano, la cui inclinazione iniziale è nulla. Cominciando a sollevare il piano (variando α), il corpo rimarrà in uno stato di quiete, finché non avrà forza a sufficienza da superare l'attrito statico. Tale soglia equivale a

$$mg\sin\alpha$$

L'attrito statico è limitato da tale valore, sia α_1 il massimo valore dell'angolo per cui il corpo non si muove, in tal caso si ha

$$mg\sin\alpha_1 = \mu_s mg\cos\alpha_1 \implies \mu_s = \tan\alpha_1$$

Si consideri adesso l'insieme dei valori $\alpha > \alpha_1$, per cui il corpo si muove ed è soggetto ad attrito dinamico. In particolare la sua forza sarà

$$ma = m\sin\alpha - \mu_d R_n$$

Si varia l'angolo α per trovare il punto in cui il corpo non subisce più accelerazione, ossia $a = 0$. Sia α_2 tale valore

$$mg\sin\alpha_2 - \mu_d R_n = 0$$

Si ricordi $R_n = mg\cos\alpha_2$

$$mg\sin\alpha_2 = \mu_d mg\cos\alpha_2 \implies \mu_d = \tan\alpha_2$$

3.2 Impulso e Lavoro

Si è visto come la dinamica permette di descrivere le equazioni del moto tramite le forze, in certi casi, non è chiara l'evoluzione nel tempo di una determinata forza, ma è comunque possibile avere informazioni globali sul suo comportamento grazie ad un integrazione. Si consideri l'integrazione della forza nel tempo in un dato intervallo $[t_1, t_2]$

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt$$

Le dimensioni sono espresse in mv, massa per velocità. Precisamente

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt = \tag{3.1}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} = m\frac{d\bar{v}}{dt}dt = \tag{3.2}$$

$$m\int_{\bar{v}_1}^{\bar{v}_2} d\bar{v} = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \tag{3.3}$$

$$m(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \tag{3.4}$$

Risulta essere la variazione della quantità di moto, tale grandezza è nota come **impulso**

$$I = \Delta\bar{p}$$

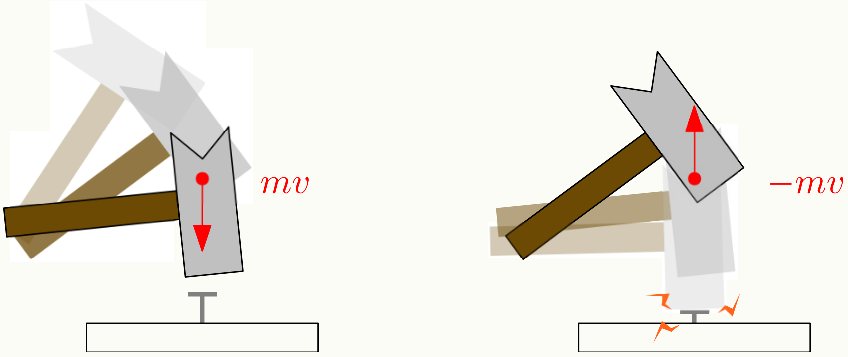
Se la forza non è nota analiticamente, è possibile considerare la *forza media* come il rapporto fra l'impulso e la variazione nel tempo, sia $t_2 = t_1 + \Delta t$

$$\frac{I}{\Delta t} = \frac{\Delta\bar{p}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt$$

Risulta utile nella descrizione dei fenomeni che agiscono in un breve lasso di tempo con una certa intensità, come gli urti, dette forze impulsive.

Esempio : Quando si vuole inserire un chiodo in una tavola di legno, si colpisce con un martello il chiodo. Se provassimo a salire sul chiodo applicheremmo una forza pari al nostro peso, che è di gran lunga superiore al peso del martello, ciònonostante, il chiodo non entrerebbe nella fessura, la forza non sarebbe necessaria.

Quanta forza viene trasmessa allora al colpo del chiodo sul martello? Supponiamo che il chiodo non assorba forza, e la rifletta completamente, ciò significa che rifletterà una quantità di moto pari alla quantità di moto applicata. Sia mv la quantità di moto iniziale, il martello una volta colpito il chiodo avrà una quantità di moto $-mv$, la differenza sarà quindi $\Delta p = 2mv$.



Supponiamo che il martello pesi $0.5kg$, che arrivi sul chiodo ad una velocità pari a $5\frac{m}{s}$, la sua quantità di moto sarà quindi $0.5 \cdot 5 = 2.5kg\frac{m}{s}$. L'evoluzione della forza nel tempo in cui colpisce il chiodo non è nota, ma è possibile stabilire la forza media tramite l'espressione $\frac{\Delta p}{\Delta t}$, supponiamo che il lasso di tempo in cui il martello colpisce il chiodo sia di $10^{-3}s$. Allora la forza media sarebbe

$$\frac{2.5}{10^{-3}}kg\frac{m}{s^2} = 2500N$$

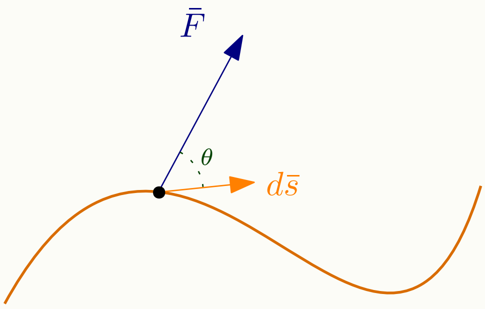
3.2.1 Lavoro ed Energia Potenziale

Quindi l'impulso deriva dall'integrazione della forza rispetto al tempo, essa può essere derivata anche rispetto allo spazio. Supponiamo che vi siano una curva che unisce i punti A e B, definiamo **lavoro** l'integrale

$$L = \int_A^B \bar{F} d\bar{s}$$

Dove $d\bar{s}$ rappresenta lo spostamento infinitesimo lungo la curva, e $\bar{F}d\bar{s}$ è il prodotto scalare, di cui

$$|\bar{F}d\bar{s}| = F ds \cos\theta$$



Le dimensioni del lavoro sono ml^2t^{-2}, l'unità di misura è il *joule* e si denota J. Il lavoro può essere descritto come segue (si assuma che la massa della forza sia costante)

$$L = \int_A^B \frac{dm\bar{v}}{dt} d\bar{s} = \tag{3.5}$$

$$\int_A^B md\bar{v}\frac{d\bar{s}}{dt} \tag{3.6}$$

essendo $\frac{d\bar{s}}{dt} = \bar{v}$

$$\int_A^B m\bar{v}d\bar{v} \tag{3.7}$$

Tralasciando momentaneamente l'espressione del lavoro, si noti come

$$\bar{v} \cdot \bar{v} = v^2 \text{ differenziando} \tag{3.8}$$
$$\bar{v}d\bar{v} + \bar{d\bar{v}}\bar{v} = dv^2 \implies \tag{3.9}$$
$$2d\bar{v} \cdot \bar{v} = d\bar{v}\bar{v} = \frac{1}{2}dv^2 \tag{3.10}$$

quindi, tornando al lavoro

$$\int_A^B m\bar{v}d\bar{v} = \int_{v_1^2}^{v_2^2} dv^2$$

Dove v_1 e v_2 sono le velocità, rispettivamente, in A ed in B (velocità iniziale e velocità finale)

$$\int_{v_1^2}^{v_2^2} dv^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Definiamo $T = \frac{1}{2}mv^2$ **energia cinetica**, quindi

$$L = \Delta T$$

Il lavoro è *la variazione dell'energia cinetica.*

3.2.2 Forze Conservative

Vediamo ora una particolare classe di forze, ossia quelle *conservative.*

Definizione : Una forza è detta **conservativa** se il lavoro valutato su una curva fra due punti A e B è indipendente dal percorso considerato. Siano δ_1 e δ_2 due curve differenti, che però hanno entrambe A e B come punti di congiunzione, $\bar{F}$ è conservativa se

$$\int_{\delta_1} \bar{F}d\bar{s} = \int_{\delta_2} \bar{F}d\bar{s}$$

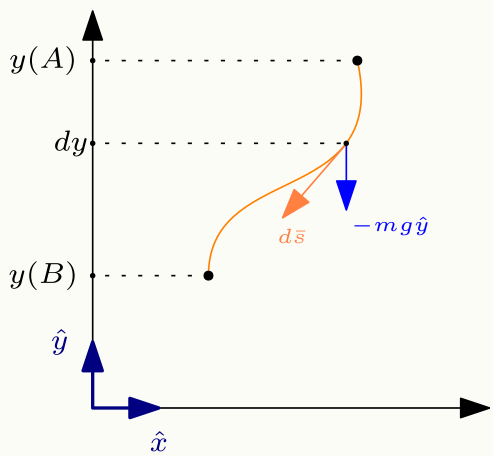
Un esempio di forza conservativa è la forza di gravità $\bar{F}_g = m\bar{g}$, che riscreveremo $-mg\hat{y}$

$$L = \int_A^B -mg\hat{y}d\bar{s} = -mg\int_A^B \hat{y}d\bar{s}$$

Si consideri il termine $\hat{y}d\bar{s}$, il modulo di $d\bar{s}$ è infinitesimo, mentre il modulo di $\hat{y}$ è 1. Il loro prodotto scalare non è altro che lo spostamento infinitesimo lungo l'asse y

$$-mg\int_A^B \hat{y}d\bar{s} = -mg\int_{y(A)}^{y(B)} dy$$

Definiamo $y(A)$ come la coordinata y del punto A, analogo per $y(B)$.



$$-mg\int_{y(A)}^{y(B)} dy = mgy(A) - mgy(B)$$

Definiamo $mgy = U(y)$ **energia potenziale**

$$L = -mg\int_{y(A)}^{y(B)} dy = U(A) - U(B) = -\Delta U$$

> Nelle forze conservative, il lavoro su una curva che congiunge i punti A, B è pari alla differenza dell'energia potenziale calcolata sui due punti.

L'energia potenziale U è definita anche per le altre forze, non esclusivamente per la forza di gravità, che in tal caso è servita come esempio. La gravità è una forza *uniforme*

> tutte le forze uniformi sono conservative

Anche la forza gravitazionale definita da Newton è conservativa

$$\bar{F}_G = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

Dove $\hat{r}$ è il versore che va dal corpo di massa m a quello di massa M, ed r è la distanza fra i due corpi. Tale forza è detta *centrale*, in ogni punto è diretta verso un punto O, l'intensità dipende solamente dalla distanza r dal puntoi. Il lavoro su una curva che congiunge i punti A, B risulta essere

$$\int_A^B \bar{F}_G d\bar{s} = \int_A^B -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}d\bar{s} = -GMm\int_A^B \frac{\hat{r}}{r^2}d\bar{s}$$

$\hat{r}$ ed r^2 non possono essere portati fuori dall'integrale dato che sono variabili e dipendono dalla posizione. Sia OP il vettore che va dal punto P, posizione del corpo soggetto alla forza, all'origine della forza O, ossia il vettore di lunghezza r. In tal caso si ridefinisce $\hat{r} = \dfrac{OP}{|OP|}$.

Sia $F_G(r)$ il modulo della forza, esso dipende da r, tale che

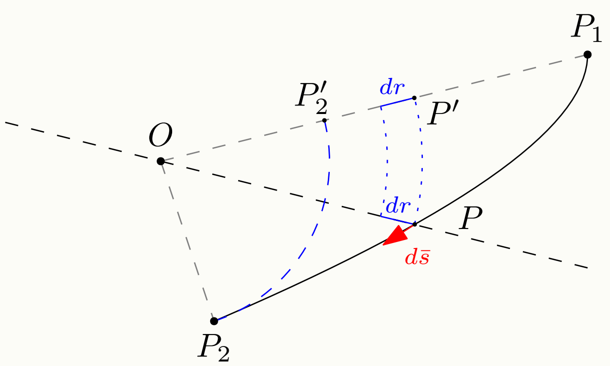
$$\bar{F}_G(r) = F_G(r)\hat{r}$$

Si consideri un percorso qualsiasi C che congiunga due punti P_1 e P_2, in corrispondenza di uno spostamento infinitesimo $d\bar{s}$ lungo tale percorso a partire da una posizione P, il lavoro infinitesimo sarà

$$dL = \bar{F}_G d\bar{s} = F_G(r)dr$$

Dove dr è la proiezione di $d\bar{s}$ su OP.

$$\hat{r} \cdot d\bar{s} = dr$$



lo spostamento dr è indipendente dal percorso scelto

$$-GMm\int_A^B \frac{\hat{r}}{r^2}d\bar{s} = -GMm\int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2}$$

Dove r_A ed r_B sono le distanze dall'origine dei punti A e B

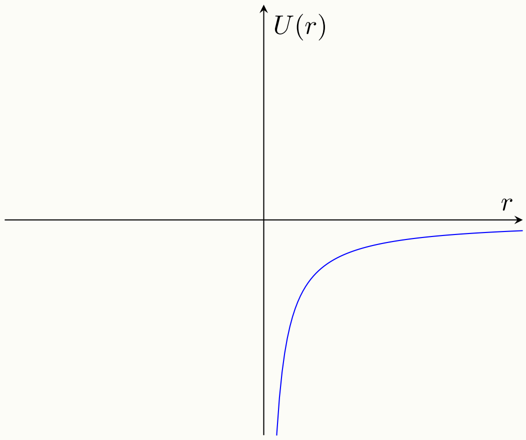
$$-GMm\int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = GMm\frac{1}{r_B} - GMm\frac{1}{r_A}$$

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad \textbf{energia potenziale gravitazionale}$$

Inoltre

$$\lim_{r\to\infty} -\frac{GMm}{r} = 0 \implies U(\infty) = 0$$

La forza di gravitazione a distanza infinita non compie lavoro.



Anche la forza elastica è conservativa, consideriamo il caso unidimensionale (per semplicità, il punto di equilibrio è 0)

$$\bar{F} = -kx\hat{x}$$

$$L = -k\int_{x_1}^{x_2} x\hat{x}d\bar{s} = -k\int_{x_1}^{x_2} xdx = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad \textbf{energia potenziale elastica}$$

Abbiamo definito il lavoro come

$$L = \Delta T$$

Ed il lavoro per le forze conservative come

$$L = -\Delta U$$

Perché le forze si dicono *conservative*? Se una forza è conservativa, si ha

$$\Delta T + \Delta U = 0 \implies \Delta(T + U) = 0$$

Si pone $E_m = T + U$, essa è detta **energia meccanica**, quindi

$$\Delta E_m = 0$$

Il nome "conservativo" deriva dal fatto che tali forze *conservano l'energia meccanica*, infatti la variazione di essa è nulla.

Si vuole calcolare l'energia meccanica totale di un corpo di massa m che si trova in un orbita circolare di un pianeta di massa M a distanza R, l'energia meccanica è la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica.

$$U = -\frac{GmM}{R} \quad T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2R} \implies E_{mecc} = \frac{GMm}{2R} - \frac{GmM}{R} = -\frac{GmM}{2R}$$

Definizione (velocità di fuga) : La velocità di fuga di un corpo, è la velocità necessaria (a partire da una distanza R dal corpo) per poter allontanarsi all'infinito con velocità zero.

Sia v_f tale velocità, l'energia cinetica del corpo deve eguagliare il potenziale gravitazionale

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \implies v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

La velocità di fuga non dipende dalla massa del corpo che deve raggiungere l'infinito. Supponiamo di voler calcolare la velocità di fuga per il pianeta terra partendo dalla superficie

$$R = 6370km \simeq 6370000m \quad M \simeq 5.972 \cdot 10^{24}kg \quad G \simeq 6.67 \cdot 10^{-11}$$

$$v_f(\text{terra}) \simeq \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}}{6370000}} \simeq 11183 {}^{m}/_{s}$$

Consideriamo un punto materiale soggetto a forze, esse possono essere conservative oppure non conservative, il lavoro totale sarà uguale alla somma dei lavori delle forze. Indichiamo con L_c la somma dei lavori delle forze conservative e con L_{nc} la somma dei lavori delle forze non conservative

$$L_{tot} = L_c + L_{nc}$$

Sappiamo essere uguale alla differenza dell'energia cinetica

$$L_c + L_{nc} = \Delta T$$

Sappiamo inoltre che il lavoro delle forze conservative è pari a $-\Delta U$

$$-\Delta U + L_{nc} = \Delta T \implies L_{nc} = \Delta T + \Delta U = \Delta(T + U) = \Delta(E_{mecc})$$

Ne consegue che

il lavoro totale svolto dalle forze non conservative è pari alla variazione dell'energia meccanica

Esercizio : Bisogna lanciare un razzo di massa m in orbita partendo dall'equatore, quant'è il lavoro totale che deve fare il motore?
Sappiamo che il lavoro del motore è

$$L_{mot} = \Delta(T + U) = (T_f - T_i) + (U_f - U_i)$$

L'energia cinetica iniziale è quella posta all'equatore, la velocità di rotazione è circa $v_{eq} = 1674 {}^{km}/_{h}$, l'energia cinetica iniziale sarà quindi

$$T_i = \frac{1}{2}mv_{eq}^2$$

L'energia potenziale gravitazionale è nota, sia R_t il raggio della terra, e sia R la distanza dell'orbita dal centro

$$U_i = U(R_t) = -\frac{GM_{terra}m}{R_t}$$

$$U_f = U(R) = -\frac{GM_{terra}m}{R}$$

Per trovare l'energia cinetica finale T_f bisogna trovare la velocità necessaria per stare in orbita

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{MG}{R}}$$

Quindi

$$T_f = \frac{1}{2}m(\sqrt{\frac{MG}{R}})^2 = \frac{GMm}{2R}$$

Il lavoro totale del motore sarà quindi

$$L_{mot} = \frac{GMm}{2R} - \frac{1}{2}mv_{eq}^2 - \frac{GMm}{R} + \frac{GMm}{R_t}$$

3.2.3 Potenza

Per un essere umano medio, sollevare un peso di 10 kg non è un'impresa faticosa, a patto che il tempo in cui egli impiega per sollevarlo sia abbastanza lasco. Sarebbe impossibile per chiunque infatti, sollevare un peso di 10kg in un tempo pari a 10^{-3} secondi, la potenza necessaria sarebbe troppo elevata.

Definizione (Potenza) : : Definiamo **potenza** la derivata del lavoro rispetto al tempo

$$P = \frac{dL}{dt}$$

Si misura in *Watt* : $W = \frac{J}{s}$. Ricordando che $L = \int_\delta \bar{F} \cdot d\bar{s}$, la potenza si può scrivere anche

$$P = \bar{F} \cdot \frac{d\bar{s}}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v}$$

Consideriamo un razzo nello spazio (assenza di attrito dell'aria), il cui motore fornisce una *potenza costante* P_0, in tal caso, qual'è il moto del razzo? La forza sarà pari a

$$F = \frac{P_0}{v}$$

Quindi

$$\frac{P_0}{v} = m\frac{dv}{dt}$$

Si risolve l'equazione differenziale

$$\int_0^t \frac{P_0}{m} dt = \int_{v(0)}^{v(t)} v dv \implies \frac{P_0}{m} t = \frac{v^2}{2} \implies v = \sqrt{\frac{2P_0}{m}}\sqrt{t}$$

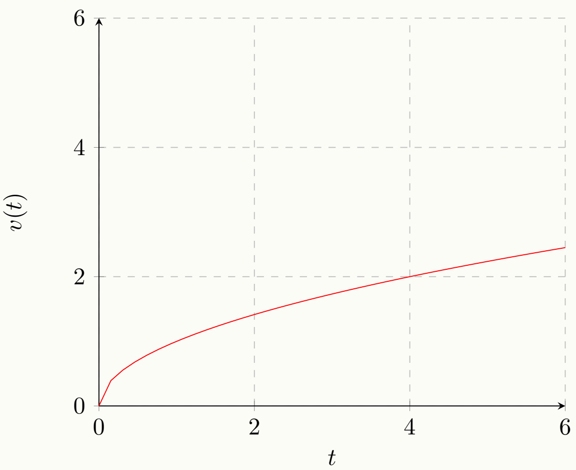


Figura 3.2: andamento della velocità a potenza costante

Velocità Limite

La forza impressa dall'attrito dell'aria cresce di intensità insieme alla velocità del corpo che la subisce. Essa è modellizzabile come segue

$$\bar{F}_a = -\bar{v}b$$

Dove $\bar{v}$ è la velocità del corpo che la subisce, e b è un coefficiente che dipende da vari fattori (ad esempio, la forma del corpo). Si consideri un oggetto che viene lasciato cadere da una certa altezza da fermo. Su di esso agiranno due forze : l'attrito dell'aria e la forza di gravità

$$\bar{F} = m\bar{g} - b\bar{v}$$

Per semplicità, si considera la forma scalare

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv$$

Si vuole risolvere l'equazione differenziale, per sostituzione, chiamo

$$x = mg - bv \implies dv = \frac{1}{b}dx$$

Quindi si ha

$$x = -\frac{m}{b}\frac{dx}{dt}$$

si integra

$$-\frac{b}{m}\int_0^t dt = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{x}dx$$
$$-\frac{b}{m}t = \ln(\frac{t}{x(0)})$$
$$x = x(0)e^{-\frac{b}{m}t} \implies v = \frac{mg}{b}(1 - e^{-\frac{b}{m}t})$$

Per $t \to \infty$ il termine dentro la parentesi tende ad 1, la velocità limite è $\frac{mg}{b}$

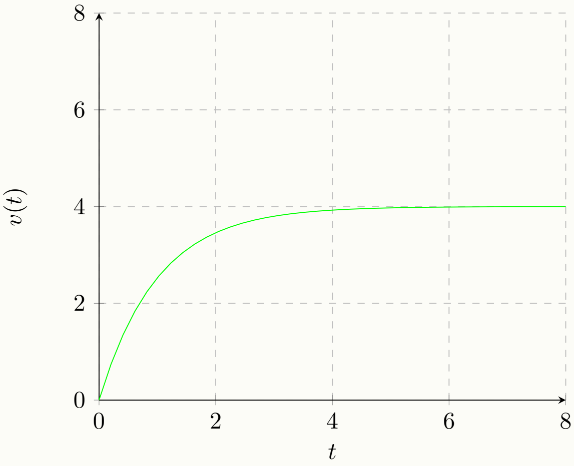


Figura 3.3: velocità limite (in questo caso è 4)

3.3 Forze Apparenti

Abbiamo visto come, le velocità si compongono in sistemi di riferimento diversi

$$v_a = v_r + v_t \text{ velocità assoluta, relativa e di trascinamento}$$

Per l'accelerazione

$$a_a = a_r + a_t + a_c \text{ l'ultimo termine è l'accelerazione di Coriolis}$$

Le leggi della dinamica sono valide nei sistemi di riferimento non inerziali

$$F = ma$$

In quelli non inerziali sono presenti le altre componenti dell'accelerazione

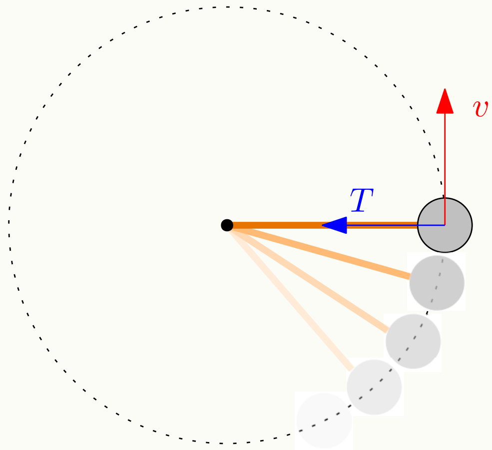
$$F = ma_a = ma_r + ma_t + ma_c$$

Ma in un sistema di riferimento non vi è alcuna forza visibile che determina le accelerazioni di trascinamento e di Coriolis. Definiamo la componente

$$ma_a$$

forza reale, in quanto è determinata da un accelerazione nel sistema di riferimento assoluto, le altre forze $ma_t + ma_c$ sono dette **forze apparenti**, se presenti, si è necessariamente in un sistema di riferimento non inerziale. Il concetto verrà esplicitato nel seguente esempio.

Vi è una corda lunga R che tiene una pallina di massa m che sta ruotando a velocità tangenziale v. La corda applica una forza T sulla pallina detta tensione che impedisce che la pallina esca dalla traiettoria circolare.



Per far si che la pallina non scappi, la corda deve esercitare una tensione $T = m\frac{v^2}{R}$. Si ipotizzi ora di prendere come sistema di riferimento la pallina : Ci si trova su di essa, e non si avverte nessuno spostamento, la velocità assoluta è nulla. Si nota però, che vi è la corda che sta esercitando una forza, quindi anche un accelerazione, ma ma la forza percepita è nulla.

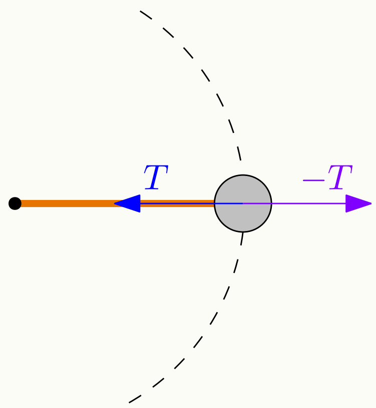
$$F = 0$$

$$T = \frac{mv^2}{R} \text{ : } \textit{forza esercitata sulla pallina}$$

Deve *necessariamente* esistere una forza apparente F_{app} che controbilancia la tensione della corda

$$\frac{mv^2}{R} + F_{app} = 0 \implies F_{app} = -\frac{mv^2}{R}$$

La forza alla quale è soggetta la pallina è contraria alla tensione, spinge verso "l'esterno" della curva ed è la *forza centrifuga*.

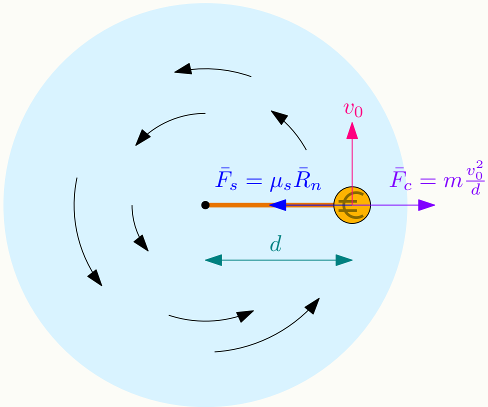


Esercizio sulla forza centrifuga

Vi è una piattaforma circolare che ruota, sulla quale è riposta una moneta ad una distanza di $R = 30cm$ dal centro della piattaforma. La piattaforma inizia ad accelerare, e la moneta risente dell'accelerazione, ma rimane ferma grazie all'attrito statico. Quando la piattaforma raggiunge una velocità tangenziale di $50^{cm}/_{s}$, la moneta si stacca dalla piattaforma. Si vuole trovare il coefficiente di attrito statico μ_s.

Sulla moneta agiscono due forze, una forza centrifuga che tende a spostarla verso l'esterno, ed una forza di attrito statico che si oppone ad essa.

- attrito statico $\bar{F}_s = \mu_s \bar{R}_n = \mu_s mg$
- forza centrifuga $\bar{F}_c = m\frac{v_0^2}{d}$



Si risolve per l'attrito statico

$$\mu_s = m\frac{v_0^2}{dg}$$

La velocità alla quale la pallina parte e la distanza dal centro sono note

$$\mu_s = \frac{50 ^{cm}/_{s}}{30cm \cdot g ^{m}/_{s^2}} = \frac{5}{3}g$$

Esercizio sul piano inclinato in movimento

Si consideri un piano inclinato (di angolo α e di massa M) in movimento su una superficie scabra di attrito μ_d. Su di esso, è riposto un oggetto approssimabile ad un punto materiale di massa m. Il piano è spinto da una forza $\bar{F}$. Si vuole trovare il valore di $\bar{F}$ per cui l'oggetto posto sul piano scivoli su di esso a velocità costante. Il corpo risente di una forza apparente $\bar{F}_{app} = m\bar{a}$, se esso scivola a velocità costante,

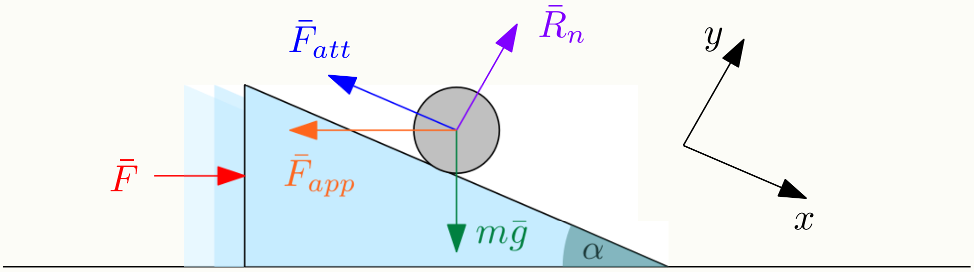


Figura 3.4: Diagramma delle forze subite dal corpo che scivola sul piano

la somma delle forze dovrà essere nulla

$$\bar{F}_{att} + m\bar{a} + \bar{R}_n + m\bar{g} = 0$$

Dato il sistema di riferimento mostrato in figura, si esegue la proiezione delle forze sugli assi

$$\begin{cases} -\mu_d R_n - ma\cos\alpha + mg\sin\alpha = 0 \\ R_n - ma\sin\alpha - mg\cos\alpha = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} -\mu_d R_n - ma\cos\alpha + mg\sin\alpha = 0 \\ R_n = ma\sin\alpha + mg\cos\alpha \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} -\mu_d(ma\sin\alpha + mg\cos\alpha) - ma\cos\alpha + mg\sin\alpha = 0 \\ R_n = ma\sin\alpha + mg\cos\alpha \end{cases} \tag{3.13}$$

$$-\mu_d(ma\sin\alpha + mg\cos\alpha) - ma\cos\alpha + mg\sin\alpha = 0 \tag{3.14}$$

$$-\mu_d ma\sin\alpha - \mu_d mg\cos\alpha - ma\cos\alpha + mg\sin\alpha = 0 \tag{3.15}$$

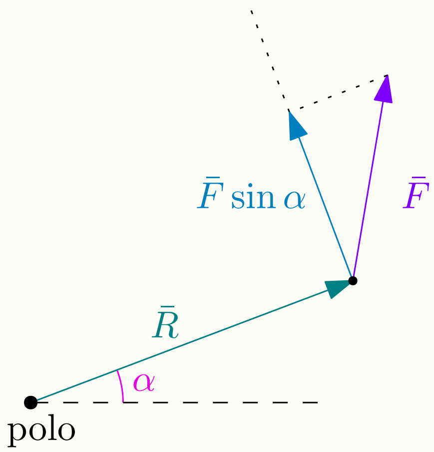
$$ma(-\mu_d\sin\alpha - \cos\alpha) - \mu_d mg\cos\alpha + mg\sin\alpha = 0 \tag{3.16}$$

$$ma(-\mu_d\sin\alpha - \cos\alpha) = \mu_d mg\cos\alpha + mg\sin\alpha \tag{3.17}$$

$$ma = \frac{1}{(-\mu_d\sin\alpha - \cos\alpha)}\mu_d mg\cos\alpha + mg\sin\alpha \text{sbagliato, da sistemare} \tag{3.18}$$

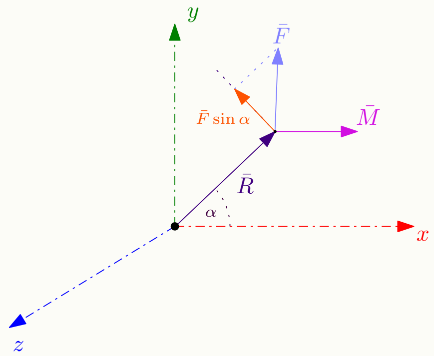
3.4 Momento

Si vuole modellizzare la rotazione di un corpo secondo le regole della dinamica, definiamo *polo* il punto intorno alla quale rotea il corpo. Una generica forza in presenza di un polo può essere rappresentata con due componenti.



La componente $\bar{R}$ è il vettore che va dal polo al corpo su cui si applica la forza, l'altra componente è la proiezione della forza sul vettore ortogonale al vettore R. Dato un polo, definiamo il vettore

$$\bar{M} = \bar{R} \times \bar{F}\sin\alpha$$



Il vettore $\bar{M}$ è detto **momento** e la sua direzione è normale al piano di rotazione, si misura in Newton per metro $N \cdot m$. Se dovessimo scriverlo in analogia con la formula della forza $\bar{F} = m\bar{a}$, si può scrivere

$$\bar{M} = \bar{R} \times \frac{d m\bar{v}}{dt}$$

Si definisce **momento della quantità di moto** la grandezza

$$\bar{b} = \bar{R} \times m\bar{v}$$

Derivando il momento della quantità di moto si ha

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{d}{dt}\bar{R} \times m\bar{v} = \frac{d}{dt}\bar{R} \times m\bar{v} + \bar{R} \times \frac{d}{dt}m\bar{v} = \frac{d}{dt}\bar{R} \times m\bar{v} + \bar{M}$$

quindi

$$\bar{M} = \frac{d\bar{b}}{dt} - \frac{d\bar{R}}{dt} \times m\bar{v}$$

Il vettore $\bar{R}$ indica la distanza assoluta fra il polo ed il corpo, tale distanza dipende dalla posizione del polo (distanza di trascinamento) e dalla posizione del corpo (distanza relativa).

$$\bar{R} = \bar{R}_r + \bar{R}_t$$

quindi

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{d\bar{R}_r}{dt} + \frac{d\bar{R}_t}{dt} = \bar{v} - \bar{v}_0$$

Indichiamo con $\bar{v}$ la velocità del corpo e con $\bar{v}_0$ la velocità del polo, il momento si può quindi riscrive

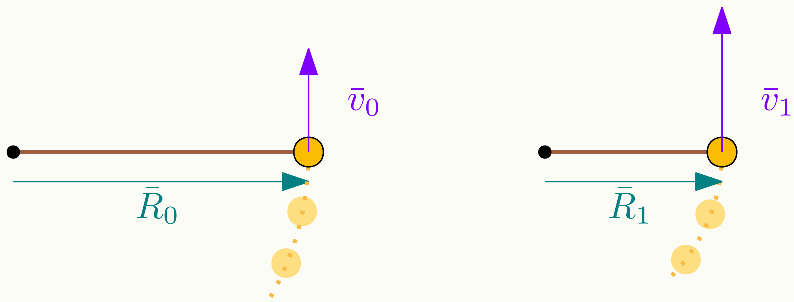
$$\bar{M} = \frac{d\bar{b}}{dt} - \frac{d\bar{R}}{dt} \times m\bar{v} \implies$$

$$\bar{M} = \frac{d\bar{b}}{dt} - (\bar{v} - \bar{v}_0) \times m\bar{v} = \frac{d\bar{b}}{dt} - \bar{v} \times m\bar{v} + \bar{v}_0 \times m\bar{v}$$

quindi

$$\bar{M} = \frac{d\bar{b}}{dt} + \bar{v}_0 \times m\bar{v} = \frac{d\bar{b}}{dt} + \bar{v}_0 \times \bar{p}$$

Il momento della quantità di moto $\bar{b}$ *si conserva*, si consideri una sfera attaccata ad una corda che ruota attorno ad un polo al tempo t_0, esso avrà una quantità di moto di modulo $|\bar{b}_0| = R_0 m v_0$. Si ipotizzi che al tempo t_1 la corda si sia accorciata, avvicinando la pallina al polo, essa ha quindi subito una forza $\bar{T}$ diretta verso il polo, il modulo del momento della quantità di moto sarà ora $|\bar{b}_1| = R_0 m v_0$ con $R_0 > R_1$. Essendo $\bar{T}$ parallela al vettore $\bar{R}(t)$, non influisce sul momento.



$$R_0 m v_0 = R_1 m v_1 \implies R_0 v_0 = R_1 v_1 \implies v_1 = \frac{R_0}{R_1}$$

Il momento non cambia dato che il momento di $\bar{T}$ rispetto al polo è nullo $\bar{T} \times \bar{R} = 0$, ma variando la distanza, dovrà aumentare la velocità di rotazione.

La velocità tangenziale di un corpo che rotea attorno ad un polo può essere espressa come $\bar{v} = \bar{o}mega \times \bar{R}$, quindi si ha

$$\bar{b} = \bar{R} \times m\bar{\omega} \times \bar{R} = m\bar{R}^2\bar{\omega} = I\bar{\omega}$$

Definiamo (mR^2) **momento di inerzia**.

$$\bar{M} = \frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\bar{\omega})$$

Assumendo che I sia costante (la massa non varia e la distanza dal polo è sempre la stessa)

$$\bar{M} = I\dot{\bar{\omega}}$$