Metodi Matematici per l'Informatica - Esercizi 5
(a.a. 22/23, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (lorenzo.carlucci@uniroma1.it)

Nota Alcuni degli esercizi seguenti sono tratti da E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic* e da M. D. Davis, R. Sigal e E. J. Weyuker, *Computability, Complexity, and Languages.*

1 Conseguenza logica, valori di verità

Esercizio 1 *I seguenti punti sono veri o falsi? In entrambi i casi dimostrare.*

1. $A, B \models C$ *se e solo se* $A \models (B \to C)$
2. *Se* $A \models B$ *o* $A \models C$ *allora* $A \models (B \lor C)$
3. *Se* $A \models B$ *o* $A \models C$ *allora* $(A \lor B) \models C$
4. *Se* $A \models B$ *o* $A \models C$ *allora* $A \models (B \land C)$
5. *Se* $A \models B$ *e* $A \models C$ *allora* $A \models (B \lor C)$
6. *Se* $A \models B$ *e* $A \models C$ *allora* $B \models C$
7. *Se* $A \models \neg A$ *allora* $\neg A \in \texttt{TAUT}$
8. *Se* $A, B \models C$ *allora* ($A \models C$ *o* $B \models C$)
9. *Se* $A \models C$ *allora* $A, B \models C$
10. $A \models B$ *se e solo se* $\neg B \models \neg A$
11. *Se* $A \models (B \lor C)$ *allora* $A \models B$ *o* $A \models C$
12. $A, (A \to B), \neg(B \to C) \models D$ *equivale e* $A \land B \land \neg C \land \neg D \in \mathrm{UnSat}$
13. *Se esiste* B *tale che* $A \not\models B$ *allora* A *non è insoddisfacibile.*

Esercizio 2 *I seguenti punti sono veri o falsi? In entrambi i casi dimostrare.*

1. *Se* $T \models (A \lor B)$ *allora* $T \models A$ *o* $T \models B$.
2. *Sia* T *tale che* $T \models (A \to B)$. *Se* $T \cup \{B\}$ *è insoddisfacibile allora* $T \cup \{A\}$ *è insoddisfacibile.*
3. *Sia* T *tale che* $T \models (A \to B)$. *Se* $T \cup \{A\}$ *è insoddisfacibile allora* $T \cup \{B\}$ *è insoddisfacibile.*
4. T *è completa se e solo se per ogni* A, B: $T \not\models (A \to B)$ *vale se e solo se* $T \models A$ *e* $T \models \neg B$.

Esercizio 3 *Se so che* $A \to B$ *ha valore* 1*, che cosa posso concludere del valore di verità delle proposizioni seguenti?*

$$((A \lor C) \to (B \lor C)), \quad ((A \land C) \to (B \land C)), \quad ((\neg A \land B) \leftrightarrow (A \lor B))$$

Esercizio 4 *Se so che $A \leftrightarrow B$ ha valore 0, che cosa posso concludere del valore di verità delle proposizioni seguenti?*

$$(A \wedge B), \ \ (A \vee B), \ \ (A \to B), \ \ ((A \wedge C) \leftrightarrow (B \wedge C))$$

Esercizio 5 *Se so che $A \leftrightarrow B$ ha valore 1, che cosa posso concludere del valore di verità delle proposizioni seguenti?*

$$(A \wedge B), \ \ (A \vee B), \ \ (A \to B), \ \ ((A \wedge C) \leftrightarrow (B \wedge C))$$

Esercizio 6 *Dimostrare che*

$$A \wedge (A \vee B) \equiv A$$

(Suggerimento: dimostrare che $A \to (A \wedge (A \vee B))$ e $(A \wedge (A \vee B)) \to A$ sono entrambe tautologie)

Esercizio 7 *Dimostrare le seguenti equivalenze logiche.*

1. $A \to B \equiv A \leftrightarrow (A \wedge B)$
2. $A \to B \equiv B \leftrightarrow (A \vee B)$
3. $A \wedge B \equiv (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \vee B)$
4. $A \leftrightarrow B \equiv (A \vee B) \to (A \wedge B)$

Esercizio 8 *Vero o Falso?*

1. $((p_1 \to p_2) \wedge (\neg p_3 \to \neg p_2) \wedge (p_1 \wedge \neg p_3)) \in Unsat$;
2. *Se $\neg A$ è una tautologia allora $A \vee (A \to C)$ è una tautologia;*
3. *Se A non è insoddisfacibile allora esiste un B soddisfacibile tale che $B \models A$ e $A \not\models B$.*

Esercizio 9 *Se $A \notin UnSat$ allora esiste $B \notin UnSat$ tale che $B \models A$ e $A \not\models B$.*

Esercizio 10 *Trovare A, B tali che $\neg(A \wedge B) \in Taut$, trovare A, B tali che $\neg(A \to B) \in Taut$, trovare A, B tali che $\neg(A \wedge B)$ e $\neg(A \to B)$ siano entrambe in $Taut$.*

Esercizio 11 *Consideriamo la seguente formula*

$$p\#(q \to (p * q))$$

Per quale scelta di connettivi da sostituire a $\#$ e $*$ (nell'ordine) la proposizione risultante è una tautologia?

Esercizio 12 *Se v è un assegnamento tale che $v(p) = 1 = v(q)$ e $v(r) = 0$, determinare il valore di $v(F)$ per ognuna delle seguenti formule F:*

1. $p \leftrightarrow (\neg q \vee r)$
2. $(q \vee \neg r) \to p$
3. $(q \vee p) \to (q \to \neg r)$
4. $(q \to \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow r)$

2 Formalizzazione in Logica Proposizionale

Esercizio 13 *Formalizzare i seguenti enunciati usando il linguaggio proposizionale composto da variabili $f_{i,j}$ per $i \in \{1,2,3\}$ e $j \in \{1,2,3,4\}$ con il significato intuitivo di $f(i) = j$.*

1. *f è la funzione costante con dominio $\{1,2,3\}$ e valore 4.*
2. *f è una relazione funzionale (i.e., una funzione) con dominio $\{1,2,3\}$ e immagine contenuta in $\{1,2,3,4\}$.*
3. *f è una funzione suriettiva con dominio contenuto in $\{1,2,3\}$ e codominio $\{1,2,3,4\}$.*
4. *f è una funzione iniettiva con dominio $\{1,2,3\}$ e codominio $\{1,2,3,4\}$.*

Esercizio 14 *Formalizzare i seguenti enunciati usando il linguaggio proposizionale composto da variabili a_i e b_i con $i \in \{1,2,3,4\}$ con significato intuitivo $i \in A$ e $i \in B$, rispettivamente.*

1. *A è un sottinsieme non vuoto di $\{1,2,3,4\}$.*
2. *A e B sono sottinsiemi non vuoti di $\{1,2,3,4\}$ tali che $A \cap B = \varnothing$.*
3. *A e B sono sottinsiemi non vuoti di $\{1,2,3,4\}$ tali che $A \cup B = \{1,2,3,4\}$.*
4. *A e B sono sottinsiemi non vuoti di $\{1,2,3,4\}$ tali che $A \subset B$ e $A \neq B$.*

Esercizio 15 *Individuare un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ e una teoria T in $\mathcal{L}$ che catturi la nozione di "essere una configurazione lecita nel gioco del Tris".*

Esercizio 16 *Formalizzare le seguenti frasi in linguaggio proposizionale e decidere se l'ultima frase è conseguenza logica dell'insieme delle precedenti (usando tavole di verità o un ragionamento sulla definizione di conseguenza logica).*

1. *Se il Partito dei Logici vince le elezioni le tasse cresceranno se il deficit resterà alto.*
2. *Se il Partito dei Logici vince le elezioni, il deficit resterà alto.*
3. *Se il Partito dei Logici vince le elezioni, cresceranno le tasse.*

Esercizio 17 *Formalizzare le seguenti frasi in linguaggio proposizionale e decidere se l'ultima è conseguenza logica dell'insieme delle precedenti (usando tavole di verità o un ragionamento sulla definizione di conseguenza logica).*

1. *Se il numero n finisce con 0 è divisibile per 5.*
2. *Il numero n non è divisibile per 5.*
3. *Il numero n non finisce con 0.*

Esercizio 18 *Formalizzare le seguenti frasi in linguaggio proposizionale e decidere se l'ultima è conseguenza logica dell'insieme delle precedenti (usando tavole di verità o un ragionamento sulla definizione di conseguenza logica).*

1. *O il testimone è stato minacciato o, se Giulia si è suicidata, ha lasciato un biglietto.*
2. *Se il testimone è stato minacciato, allora Giulia non si è suicidata.*
3. *Se ha lasciato un biglietto allora Giulia si è suicidata.*

Esercizio 19 *Formalizzare le seguenti frasi in linguaggio proposizionale e decidere se l'ultima è conseguenza logica dell'insieme delle precedenti (usando tavole di verità o un ragionamento sulla definizione di conseguenza logica).*

1. *Il contratto è valido se la costruzione viene completata entro il 30 Novembre.*
2. *La costruzione viene completata entro il 30 Novembre se e solo se l'elettricista finisce il lavoro entro il 10 Novembre.*
3. *La banca perde i soldi se e solo se il contratto è invalidato.*
4. *L'elettricista finisce il lavoro entro il 10 Novembre se e solo se la banca perde i soldi.*

Esercizio 20 *Per preparare una festa Marta chiede le preferenze ai suoi possibili invitati Dario, Bruna, Carlo e Anna. Formalizzare le asserzioni seguenti e indicare quali sono i possibili insieme di invitati compatibili. Indicare se l'ultima proposizione è conseguenza logica delle precedenti.*

1. *Se Dario viene vengono anche Bruna e Carlo.*
2. *Carlo viene solo se Bruna e Anna non vengono.*
3. *Se Dario viene allora se Carlo non viene viene Anna.*
4. *Carlo viene solo se Dario non viene ma, se Dario viene, Bruna non viene.*
5. *Condizione necessaria e sufficiente perché venga Anna è che se Bruna e Carlo non vengono, venga Dario.*
6. *Anna, Bruna e Carlo vengono se e solo se Dario non viene ma, se Anna e Bruna non vengono, allora Dario viene solo se viene Carlo.*

Esercizio 21 *Siete morti e vi trovate davanti a tre porte: una bianca, una rossa e una verde, ciascuna custodita da un guardiano. Il guardiano della porta bianca dice: "Questa porta conduce al Paradiso e, se la porta verde conduce al Paradiso, allora anche la rossa." Il guardiano della porta rossa dice: "Né la porta bianca né la verde conducono al Paradiso." Il guardiano della porta verde dice: "La porta bianca conduce al Paradiso, ma la porta rossa no." Sapete che tutti e tre i guardiani mentono. Formalizzare il problema in logica proposizionale in modo da decidere quale porta scegliere (se volete andare in Paradiso).*

Esercizio 22 *Siete in un paese abitato soltanto da due tipi di persone: i sinceri (che dicono sempre la verità) e i bugiardi (che dicono sempre il falso); entrambi i tipi rispondono soltanto a domande sì/no. Diretti alla capitale, giungete a un incrocio, presieduto da un abitante del luogo. Scrivere una domanda (a risposta sì/no) che vi permetta con certezza di individuare quale delle due strade dell'incrocio conduce alla capitale. (Suggerimento: considerate la variabile p per "Tu sei sincero" e la variabile q per "La strada a destra porta alla capitale". Scrivere una formula proposizionale usando p e q in modo tale che la sua tavola di verità assicuri che, se l'abitante del luogo risponde di sì alla domanda espressa dalla vostra proposizione, q è vera, e viceversa).*

Esercizio 23 *Un giocatore di strada particolarmente incline alla logica vi propone la seguente variante del gioco delle tre carte: vi mostra tre carte coperte ciascuna con una scritta. La prima e la seconda dicono "L'asso non è qui". La terza dice: "L'asso è la carta due". Sapete che solo una delle carte è un asso e che solo una delle scritte è vera. Formalizzare in logica proposizionale e decidere quale carta è l'asso (usando le tavole di verità).*

Esercizio 24 *Considerate la mappa di Norvegia, Svezia, Finlandia e Russia. Formulare l'asserzione: "esiste una colorazione in tre colori tale che due nazioni confinanti hanno colori diversi" usando il linguaggio proposizionale composto dalle variabili $p_{i,j,c}$ dove i, j variano nell'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ e c varia in $\{1, 2, 3\}$, indicando il significato intuitivo delle variabili. Decidere se la formula è soddisfacibile (usando un metodo a piacere).*

3 Soddisfacibilità, Risoluzione

Esercizio 25 *Determinare quale dei seguenti insieme di formule è soddisfacibile, usando un metodo a piacere:*

1. $\{p \to q, q \to r, (r \vee s) \to \neg q\}$
2. $\{\neg(\neg q \vee p), p \vee \neg r, q \to \neg r\}$
3. $\{s \to q, p \vee \neg q, \neg(s \wedge p), s\}$

Esercizio 26 *Decidere se la seguente formula in CNF è soddisfacibile, usando la regola di Risoluzione.*

$$\{\{p, \neg q, r, s\}, \{\neg p, q, \neg r\}, \{\neg r, s\}, \{\neg q, r\}, \{p, \neg s\}\}$$

Esercizio 27 *Decidere se la seguente formula in CNF è soddisfacibile, usando la regola di Risoluzione.*

$$\{\{p, q, r\}, \{\neg q, p\}, \{\neg p, \neg r\}\}$$

Esercizio 28 *Decidere se la seguente formula in CNF è soddisfacibile, usando la regola di Risoluzione.*

$$\{\{p, q\}, \{\neg q, p\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$$

Esercizio 29 *Decidere se la seguente formula in CNF è soddisfacibile, usando la regola di Risoluzione.*

$$\{\{\neg p, \neg q, r\}, \{\neg p, \neg q, s\}, \{\neg p_1, \neg q_1, r_1\}, \{\neg r_1, \neg s, s_1\}, \{p\}, \{q\}, \{q_1\}, \{p_1\}, \{\neg s_1\}\}$$

Esercizio 30 *Decidere se la seguente formula in CNF è soddisfacibile, usando la regola di Risoluzione.*

$$\{\{p, \neg q\}, \{r, p\}, \{\neg p, \neg q\}, \{\neg p, s\}, \{q, \neg r\}, \{q, \neg s\}\}$$