

Esercizio 1. Sia $\phi: G \rightarrow G'$ un isomorfismo. Verificare che l'applicazione inversa $\phi^{-1}: G' \rightarrow G$ è anche un isomorfismo

Siano $x, y \in G$, si ha che $\phi(x) = x'$ e $\phi(y) = y'$. Considero ϕ^{-1} :

Per ipotesi: $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) = x' + y'$

$\phi^{-1}(x' + y') = \text{APPLICO L'IPOTESI: } \phi^{-1}(\phi(x) + \phi(y)) = \phi^{-1}(\phi(x+y)) = x+y = \phi^{-1}(x') + \phi^{-1}(y')$.

Esercizio 2. Sia R il rettangolo di lati $2a$ e $2b$, con $a > b$, dato da

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq a, |y| \leq b\}$$

Sia G il gruppo di tutte le gigezioni di \mathbb{R}^2 in sé stesso, con la composizione come operazione. Consideriamo il sottoinsieme V_4 costituito dall'identità $\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$, denotata semplicemente con 1 , e da:

$a := R_\pi$, la rotazione di π in senso antiorario

$b := S_{\text{asser}}$, la simmetria (o ribaltamento) rispetto all'asse x

$c := S_{\text{asser}}$, la simmetria (o ribaltamento) rispetto all'asse y .

Verificate che V_4 è un sottogruppo di ordine 4 di G detto il gruppo di Klein. Scrivete la tabella moltiplicativa.

Vero o Falso: V_4 è isomorfo a \mathbb{Z}_4 . Spiegare.

Come prima cosa, scrivo la tabella moltiplicativa.

o	id	R_π	S_x	S_y
id	id	R_π	S_x	S_y
R_π	R_π	id	S_y	S_x
S_x	S_x	S_y	id	R_π
S_y	S_y	S_x	R_π	id

in azzurro ho scritto le composizioni "banali"

le operazioni son definite in tal modo:

$$S_x(a, b) = (-a, b) \quad S_y(a, b) = (a, -b) \quad R_\pi(a, b) = (-a, -b)$$

Le applicazioni composte a se stesse danno l'identità;

G è un gruppo commutativo.

$$(S_x \circ S_y)(a, b) = S_x(S_y(a, b)) = S_x(a, -b) = (-a, -b) = R_\pi(a, b)$$

$$(S_x \circ R_\pi)(a, b) = S_x(R_\pi(a, b)) = S_x(-a, -b) = (a, -b) = S_y(a, b)$$

$$(S_y \circ R_\pi)(a, b) = S_y(R_\pi(a, b)) = S_y(-a, -b) = (a, b) = S_x(a, b)$$

Si ha che $\forall a, b \in G, a \circ b \in G$, **INOLTRE**, $\forall a \in G, a^{-1} \in G$, dato che:

$$R_\pi^{-1} = R_\pi \quad \text{id}^{-1} = \text{id} \quad S_x^{-1} = S_x \quad S_y^{-1} = S_y$$

$$\begin{cases} R_\pi(a, b) = (a \cdot (-1), b \cdot (-1)) = (-a, -b) \\ R_\pi^{-1}(-a, -b) = (a, b) = (-a \cdot (-1), -b \cdot (-1)) \end{cases} \begin{cases} S_x(a, b) = (a \cdot (-1), b) = (-a, b) \\ S_x^{-1}(-a, b) = (a, b) = (-a \cdot (-1), b) \end{cases} \begin{cases} S_y(a, b) = (a, b \cdot (-1)) = (a, -b) \\ S_y^{-1}(a, -b) = (a, b) = (a, -b \cdot (-1)) \end{cases}$$

Quindi $\forall a, b \in G \Rightarrow a \circ b^{-1} = a \circ h \ (h \in G) \Rightarrow a \circ h \in G$. G è un sottogruppo.

\mathbb{Z}_4 NON è isomorfo a G in quanto tutti gli elementi di G

composti a se stessi danno l'identità. In $(\mathbb{Z}_4, +)$ ciò non perviene, in

quanto gli unici elementi che hanno inverso identico a loro stessi

sono $\{[0], [2]\}$, quindi non esiste NESSUN isomorfismo che conservi le

operazioni, in quanto ESISTERANNO sempre 2 elementi tali che $\phi(a+a) \neq \phi(a) + \phi(a)$.

Esercizio 3. Verificare che un gruppo di ordine p , con p primo, è necessariamente ciclico.

Se un gruppo è di ordine p , allora è isomorfo a \mathbb{Z}_p , e sappiamo che

\mathbb{Z}_p è ciclico, generato da 1.

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{25}) = \{[1], [2], [3], [4], [6], [7], [8], [9], [11], [12], [13], [14], [16], [17], [18], [19], [21], [22], [23], [24]\}$$

$$\varphi(25) = \varphi(5 \cdot 5) = \varphi(5^2) = 5^2 - 5 = 20 \Rightarrow |\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{25})| = 20. \text{ È un gruppo di ordine 20.}$$

Tale gruppo contiene tutti i numeri minori di 25 non divisibili per 5.

Ha tanti sottogruppi, quanti sono i divisori di 20. $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{25}) = \langle [2] \rangle$

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x|20\} = \{1, 2, 4, 5, 10\}$$

$$\text{ho } \langle 2^{\frac{20}{1}} \rangle = \langle 1 \rangle = \{[1]\}, \quad \langle 2^{\frac{20}{2}} \rangle = \langle 2^{10} \rangle = \langle [24] \rangle, \quad \langle 2^{\frac{20}{4}} \rangle = \langle 2^5 \rangle = \langle [7] \rangle$$

$$\langle 2^{\frac{20}{5}} \rangle = \langle [16] \rangle, \quad \langle 2^{\frac{20}{10}} \rangle = \langle [4] \rangle.$$

L'ES. 5 NON L'HO CAPITO, L'ES. 6 HA COME RISPOSTA: VERO

Esercizio 7. Sia G un gruppo abeliano e si ponga

$$T(G) := \{x \in G \mid \exists n \in \mathbb{N} \ x^n = 1_G\}.$$

(1) Provare che $T(G) \leq G$;

(2) Consideriamo $G/T(G)$. Dimostrare che ogni elemento di $G/T(G)$ diverso dall'identità e cioè ogni classe laterale $xT(G)$ diversa da $T(G)$, ha ordine infinito.

1) Siano $a, b \in T(G)$, noto che $(b^{-1})^t = (b^t)^{-1} = 1_G^{-1} = 1_G \Rightarrow b^{-1} \in T(G)$.

$$(a \cdot b^{-1})^t = \underbrace{(a \cdot b^{-1}) \cdot (a \cdot b^{-1}) \cdots (a \cdot b^{-1})}_{t \text{ volte}} = \text{PER ASSOCIATIVITÀ} = \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{t \text{ volte}} \cdot \underbrace{(b^{-1} \cdot b^{-1} \cdots b^{-1})}_{t \text{ volte}} = a^t \cdot (b^{-1})^t = 1_G \cdot 1_G = 1_G \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in T(G).$$

2) Sia (con $x \neq 1$) $xT(G) \in G/T(G)$, ossia: $\{x a, x b, \dots, x k \mid \exists n \in \mathbb{N}, a^n = 1_G\}$. Faccio un'OSSERVAZIONE:

Se $a \notin T(G)$, allora $\nexists n \in \mathbb{N} \mid a^n = 1_G \Rightarrow a \in xT(G) \neq T(G)$ a ha ordine infinito.

Considero $xT(G)^2 = xT(G) * xT(G) = x^2T(G) = \{x^2 a, x^2 b, \dots, x^2 k\}$, Se $xT(G)$ avesse

ordine finito n , ciò significherebbe che $xT(G)^n = \{x^n a, x^n b, \dots, x^n k\} = \{a, b, \dots, k\} = T(G)$

\Rightarrow questo significherebbe che: $xT(G)$ ha ordine FINITO $n \iff x^n = 1_G \iff x \in T(G)$.

Ne deduciamo che, se $x \notin T(G) \Rightarrow x \cdot T(G)$ ha ordine INFINITO.

Ma allora, se $y \in T(G)$, $yT(G) = \{y a, y b, \dots, y k\}$, ma $T(G)$ è un sottogruppo!

quindi, essendo ogni elemento di $yT(G)$ un prodotto di 2 elementi di $T(G)$,

ne segue che ogni elemento di $yT(G)$ è in $T(G) \Rightarrow yT(G) = T(G) \Rightarrow$ OGNI

classe laterale $xT(G) \neq T(G)$ ha ordine INFINITO.

Esercizio 8. Dato $x \in G$ possiamo definire l'applicazione $\gamma_x: G \rightarrow G, g \mapsto xgx^{-1}$. In formule $\gamma_x(g) := xgx^{-1}$.

Verificare che γ_x è un automorfismo di G .

Verificare che l'applicazione $G \rightarrow \text{Aut}(G)$ che associa a $x \in G$ l'automorfismo γ_x è un omomorfismo di gruppi.

Ovviamente $\Psi: G \rightarrow \text{Aut}(G)$ è un omomorfismo: $\Psi(x \cdot y) = \gamma_{xy} = \gamma_x \circ \gamma_y = \Psi(x) \circ \Psi(y)$.