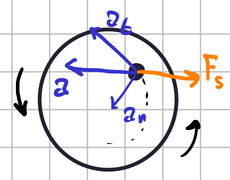
[1] Un disco posizionato orizzontalmente viene messo in rotazione attorno al proprio asse con un'accelerazione angolare $\frac{d\omega}{dt} = 0.3\,\mathrm{rad/s^2}$ partendo da fermo all'istante $t = 0$. Si chiede qual è il coefficiente di attrito della superficie del disco, sapendo che un oggetto, da considerarsi come un punto materiale, appoggiato a una distanza $R = 5\,\mathrm{cm}$ dal centro si distacca dalla sua posizione di riposo al tempo $\bar{t} = 7\,\mathrm{s}$.

Se l'accelerazione e' $\dot{\omega} = 0.3$, allora la velocita' angolare e' $\omega(t) = 0.3 \cdot t \ \frac{rad}{sec}$ un oggetto a distanza $R = 5\ cm = 0.05\ m$ ha un'accelerazione tangenziale $a_t = \dot{\omega} \cdot R = 0.3 \cdot 0.05 = 0.015\ \frac{m}{s^2}$ ed una normale $a_n = \omega^2 R = (0.3)^2 \cdot t^2 \cdot 0.05 =$ $a_n = 0.0045 \cdot t^2\ \frac{m}{s^2}$. In $\bar{t} = 7$, l'accelerazione totale e'

$a = ((0.0045 \cdot (7)^2)^2 + 0.015^2)^{1/2} = (0.048 + 0.0002)^{1/2} \approx 0{,}2\ \frac{m}{s^2}$



L'attrito F_s soddisfa $F_s \leq \mu_s R_n$, la Forza alla quale e' soggetto il punto e' $F = m \cdot 0.2 \Rightarrow m0.2 \leq \mu_s R_n \Rightarrow m0.2 \leq \mu_s mg \Rightarrow \mu_s = \frac{0.2}{g} \approx 0.02$

[2] Una massa puntiforme è posta su una piattaforma ruotante con velocità angolare iniziale $\omega_0 = 1\,\mathrm{rad/s}$, alla distanza $r = 20\,\mathrm{cm}$ dall'asse di rotazione, dove rimane ferma. Se all'istante $t = 0$ si imprime alla piattaforma un'accelerazione angolare $\gamma = \dot{\omega} = 2\,\mathrm{rad/s^2}$ costante, la massa inizia a muoversi dopo un'intervallo di tempo $t_1 = 1\,\mathrm{s}$. Calcolare il coefficiente di attrito tra massa e piattaforma.

$\dot{\omega}(t) = 2$ trovo la velocita' $d\omega = 2 \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega(t)} d\omega = \int_0^t 2 \Rightarrow \omega(t) = 1 + 2t$

$t_1 = 1 \Rightarrow \omega(1) = 3 \Rightarrow a_n(1) = 3^2 \cdot 0.2 = 1.8\ \frac{m}{s^2}$

$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega R}{dt} = R \cdot \dot{\omega} = 2 \cdot 0.2 = 0.4 \Rightarrow a = (1.8^2 + 0.4^2)^{1/2} = 1.84\ \frac{m}{s^2}$

$\Rightarrow F_s \leq \mu_s R_n \Rightarrow m \cdot 1.84 \leq \mu_s mg \Rightarrow \mu_s = \frac{1.84}{g} = 0.187$

[3] Una palla, rimbalzando sul pavimento, perde il 20% della sua energia cinetica. Determinare con che velocità dovrà essere lanciata verticalmente verso il basso da una altezza di $h = 10\,\mathrm{m}$ dal pavimento per vederla rimbalzare alla stessa altezza h. (Si trascuri la resistenza dell'aria).

Idea 1)

L'energia meccanica iniziale (che diremo nel punto A) e' $E_m(A) = U(A) + T(A) = U(A)$ $= mgh + \frac{1}{2} m v_0^2$. Lasciata cadere, la palla avra' una velocita' $v(t) = -v_0 - gt$, tocca terra in $t = \sqrt{2\frac{h}{g}} \Rightarrow$ la vel. con il quale arriva a terra e' $v_t = -v_0 - g\sqrt{2\frac{h}{g}} = -v_0 - 14$

Un istante prima dell'impatto: $T = \frac{1}{2} m (-v_0 - 14)^2$. Dopo l'impatto si avra $T = \frac{1}{2}m(-v_0-14)^2 \cdot 0.8$, essendo che la massa rimane cost. la velocita' post impalto e' v_1 t.c.

CAMBIO SEGNO

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(-v_0-14)^2 \cdot 0.8 \Rightarrow v_1^2 = (-v_0-14)^2 \cdot 0.8 \Rightarrow v_1 = \sqrt{0.8}(-v_0-14) = v_0 \cdot 0.9 + 12.6$$

$v_1 = 0.9v_0 + 12.6$ deve riportare la massa a quota h.

$$y(t) = (0.9v_0+12.6)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v(t^*) = 0 \Rightarrow t^* = (0.9v_0+12.6) \cdot \frac{1}{g}$$

CORPO SI FERMA

$$y(t^*) = \text{quota massima} = h \Rightarrow \frac{1}{g}(0.9v_0+12.6)^2 - \frac{1}{2}g\frac{1}{g^2}(0.9v_0+12.6)^2 = h$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2g}(0.9v_0+12.6)^2 = h \Rightarrow \frac{1}{19.6}(0.9 \cdot v_0 + 12.6)^2 - 10 = 0 \Rightarrow v_0 \approx 1.55\ \frac{m}{s^2}$$

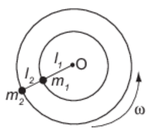
Idea 2)

L'energia meccanica iniziale e' $E_m = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2$, l'istante prima del rimbalzo e' $E_m' = \frac{1}{2}mv_1^2$, subito dopo $\frac{1}{2}mv_1^2 \cdot 0.8$, torna poi ad altezza h con vel. nulla : $E_m'' = mgh$

$$\begin{cases} mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 \\ E_m' = E_m'' \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 \cdot 0.8 = mgh \end{cases} \Rightarrow v_1 = \sqrt{gh2 \cdot \frac{1}{0.8}}$$

$$\Rightarrow v_0^2 = 2\left(\frac{1}{2}v_1^2 - gh\right) = gh\frac{2}{0.8} - 2gh = 245 - 196 = 49 \Rightarrow v_0 = \sqrt{49} = 7\ \frac{m}{s}$$

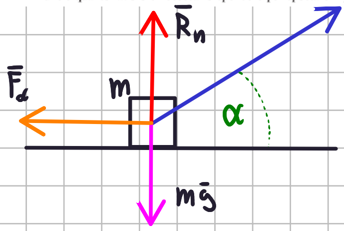
[4] Una massa puntiforme m_1 è attaccata a un estremo di una corda avente lunghezza l_1 il cui altro estremo è fissato in un punto O su di un piano orizzontale privo di attrito: la massa si muove di moto circolare uniforme su tale piano. Una seconda massa puntiforme m_2 è attaccata radialmente alla prima tramite una corda di lunghezza l_2 e si muove anch'essa di moto circolare uniforme con la stessa velocità angolare di m_1. Determinare la tensione τ_1 e τ_2 in ciascuna delle due corde. Entrambe le corde sono inestensibili e prive di massa.



Sia ω la velocita' angolare

$$F = ma \Rightarrow \begin{cases} m_1 a_1 = \tau_1 - \tau_2 \\ m_2 a_2 = \tau_2 \end{cases} \quad \text{essendo} \begin{cases} a_1 = \omega(l_1) \\ a_2 = \omega^2(l_1 + l_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau_1 = \omega^2(m_2(l_1+l_2) + m_1 l) \\ \tau_2 = m_2\omega^2(l_1+l_2) \end{cases}$$

[5] Un punto materiale di massa $m = 18\,\text{kg}$ è trascinato a velocità costante su di una superficie orizzontale scabra per mezzo di una fune inclinata di un angolo $\alpha = 20°$ rispetto alla superficie stessa. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico tra punto e superficie è $\mu_d = 0.5$, determinare la tensione $\mathbf{T}$ della fune e quanto lavoro è necessario spendere per spostare il punto di $l = 20\,\text{m}$.



essendo a velocita' costante, la forza risultante e' nulla

$$\bar{F}_d + \bar{R}_n + m\bar{g} + \bar{T} = 0 \Rightarrow \text{Si ricordi che } |\bar{F}_d| = \mu_d \cdot |R_n|$$

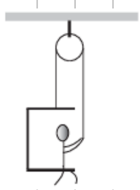
Si proietta sui due assi

$$\begin{cases} T \cdot \cos\alpha - F_d = 0 \\ R_n - mg + T \cdot \sin\alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T \cdot \cos\alpha - \mu_d R_n = 0 \\ R_n = mg - T \cdot \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow T \cdot \cos\alpha - \mu_d \left(mg - T \cdot \sin\alpha \right) = 0$$

$$\Rightarrow T \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - \frac{1}{2}\left(18 \cdot 9.8 - T \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\right) = 0 \Rightarrow T \approx 79 \text{ N}$$

$$L = \int_l T \cdot d\bar{l} = \int_0^{20} T\cos(\alpha) \cdot dx = T \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \cdot 20 \approx 1484.7 \text{ Joule}$$

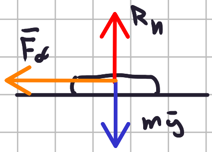
[6] Un muratore di massa $M = 100\,\text{kg}$ si trova seduto su una piattaforma di massa $m = 20$ kg in prossimità di un'impalcatura. Egli regge un estremo di una fune (inestensibile e priva di massa); l'altro estremo della fune, tramite una carrucola priva di massa fissata alla sommità dell'impalcatura, è agganciato alla piattaforma. Il muratore, per muoversi verso l'alto, tira la fune con una forza tale che la forza da lui esercitata sulla piattaforma vale $F = 500$ N. Determinare l'accelerazione del muratore, della piattaforma e la tensione della fune.



[7] Un disco metallico percorre strisciando, dopo essere stato lanciato su una superficie orizzontale scabra, una distanza $d = 5\,\mathrm{m}$ impiegando un tempo $t^* = 3\,\mathrm{s}$ prima di fermarsi. Determinare il coefficiente di attrito dinamico, μ_d, tra disco e superficie.

Le Forze che agiscono sul disco sono

$$m\cdot\bar{a} = -m\bar{g} + \bar{F}_d + \bar{R}_n$$



$$\begin{cases} x: & m a_x = -\mu_d R_n \Rightarrow m a_x = -\mu_d m g \Rightarrow a_x = -\mu_d \cdot g \\ y: & R_n = mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}\mu_d g t^2 \qquad v(3) = v_0 - \mu_d g \cdot 3 = 0 \Rightarrow v_0 = 3\mu_d g$$

$$x(3) = 5 \Rightarrow 5 = 3\mu_d g \cdot 3 - \frac{1}{2}\mu_d g\, 9 \Rightarrow \frac{9}{2}\mu_d g = 5 \Rightarrow \mu_d = \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{g} \approx 0.11$$

[8] Una massa $m = 0.1\,\mathrm{kg}$ è lanciata verticalmente verso l'alto con velocità iniziale $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$. Determinare a che altezza arriverà sapendo che, durante il percorso di salita della massa, la forza viscosa esercitata dall'aria compie un lavoro $L_A = -0.1\,\mathrm{J}$.

Il lavoro e' la variazione dell'energia meccanica

E_m iniziale: $\frac{1}{2}m v_0^2 = 0.05\cdot 4 = 0.2$

E_m Finale : $mgh = 0.98h$

$$mgh - \frac{1}{2}m v_0^2 = -0.1 \Rightarrow 0.1\cdot 9.8\cdot h - \frac{1}{2}\cdot 0.1\cdot 4 = -0.1$$

$$\Rightarrow h \approx 0.1\ \mathrm{m}$$

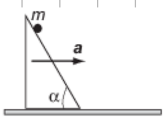
[10] Un punto materiale viene lanciato verso l'alto dal suolo lunare con una velocità $v = 30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Determinare a quale altezza arriverà sapendo che la massa e il diametro della Luna valgono $M_L = 7.36\times 10^{22}\,\mathrm{kg}$ e $d_L = 3476\,\mathrm{km}$, rispettivamente.

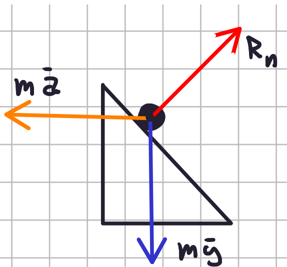
$$F_G = G\cdot\frac{M\cdot m}{r^2} = m\cdot G\cdot\frac{7.36\cdot 10^{22}}{(1738\cdot 10^3)^2} \approx m\,G\cdot 2.4\cdot 10^{10} \approx m\cdot 1.62624 \Rightarrow a = -1.62624$$

$$r = \frac{d_L}{2}$$

$$z(t) = 30t - \frac{1}{2}(1.626)t^2 \Rightarrow \text{quota max} = \frac{1}{2}\frac{(30)^2}{(1.626)} \approx 276\ \mathrm{m}$$

[11] Una massa puntiforme $m = 2\,\mathrm{kg}$ posta con velocità nulla su un piano liscio inclinato di un angolo $\alpha = 60°$ rispetto all'orizzontale e avente un'accelerazione orizzontale a costante, rimane in equilibrio. Trovare il valore di a.





$$\bar{R}_n - m\bar{a} - m\bar{g} = 0$$

$$\begin{cases} -ma + R_n \sin\alpha = 0 \\ -mg + R_n\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma = mg\tan\alpha \\ R_n = mg\frac{1}{\cos\alpha} \end{cases} \Rightarrow a = g\tan\alpha \approx 17\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

[14] Sopra una piattaforma circolare disposta in un piano orizzontale e girevole attorno a un asse di rotazione verticale e passante per il suo centro, è posta una moneta a una distanza $d = 30\,\mathrm{cm}$ dall'asse di rotazione. Inizialmente il sistema è fermo; aumentando la velocità di rotazione si osserva che la moneta scivola sulla piattaforma quando la sua velocità è $v = 50\,\mathrm{cm/s}$. Determinare il coefficiente di attrito statico tra moneta e piattaforma.

Forza al momento del distacco

Altrito statico: $F_s \leq \mu_s R_n \Rightarrow \mu_s \leq \frac{F_s}{R_n} = \frac{F'}{mg}$

nel momento del distacco: $v = 50 \frac{cm}{s} \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{50}{30} = 5/3 \frac{rad}{sec}$

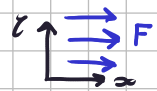
$\Rightarrow a_n = \omega^2 R = \frac{25}{9} \cdot 30 = \frac{250}{3} \frac{cm}{sec^2} = \frac{5}{6} \frac{m}{sec^2}$

Forza centripeta $T = m\frac{5}{6} \Rightarrow \mu_s = \frac{T}{mg} = \frac{5}{6 \cdot 9.8} \approx 0.08$

---

[15] Un punto materiale inizialmente fermo è sottoposto a una forza costante $F = 98\,\mathrm{N}$ in un sistema di riferimento inerziale e, conseguentemente, acquista una velocità di $98\,\mathrm{m/s}$ in $10\,\mathrm{s}$. Calcolare la massa del punto materiale e il lavoro compiuto dalla forza.

Considero un sistema in cui la Forza e' diretta sull'asse x.



$F = ma \Rightarrow a = \frac{98}{m}$

$v = \frac{98}{m} t \qquad v(10) = 98 \Rightarrow \frac{98}{m} \cdot 10 = 98 \Rightarrow m = 10$

$x(t) = \frac{1}{2} 9.8\, t^2 \qquad x(10) = \frac{1}{2} 9.8 \cdot 100 = 490\ m \Rightarrow L = 98 \cdot 490 = 48\ KJ$

---

[16] Una forza orizzontale costante $F = 10\,\mathrm{N}$ è necessaria per muovere un oggetto a velocità costante $v = 5\,\mathrm{m/s}$ lungo una superficie orizzontale scabra. Qual è la potenza sviluppata dalla forza? Quanto lavoro fa la forza in un intervallo di tempo $\Delta t = 30$ minuti?

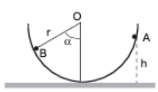
$x(t) = 5t \Rightarrow x(30\ \text{minuti}) = x(1800) = 9000\ m$

$L = 9000 \cdot 10 = 90\ kJ$

$L(t) = 5t \cdot 10 = 50t \Rightarrow P = \frac{dL}{dt} = 50\ W$

---

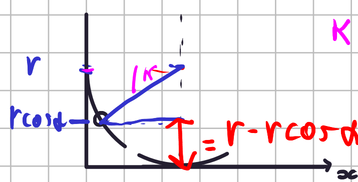
[17] Una massa puntiforme m cade, partendo da ferma dal punto A a un'altezza h, lungo una guida semicircolare liscia di raggio r disposta in un piano verticale e rigidamente fissata a un piano orizzontale. Determinare la reazione vincolare $\mathbf{R}$ nel punto B. ($m = 100\,\mathrm{g}$, $r = 20\,\mathrm{cm}$, $h = 15\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 60°$)



$20 \sin(30)$

$r \sin(k)$

$k = 180 - 90 - 60 = 3$



$= r - r\cos\alpha = r(1-\cos\alpha)$

voglio determinare $h' = y(B)$

$\Rightarrow h' = r(1-\cos\alpha) = 20(1 - \frac{1}{2}) = 10\ cm$

$E_m(A) = mgh$

$E_m(B) = mgh' + \frac{1}{2}mv^2$

$\Rightarrow mgh = mgh' + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 0{,}1 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}15 = 0{,}1 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot v^2 \Rightarrow v \approx \frac{9.8}{10} \frac{m}{s}$

$\Rightarrow T = a_n \cdot m = \omega^2 R \cdot m = \frac{v^2}{R} \cdot m = \frac{(0.98)^2}{0.2} \cdot 0.1 \approx 0.48\ N$

$\frac{v}{R} = \omega$

$a_n = \omega^2 R$

$\frac{v^2}{R}$

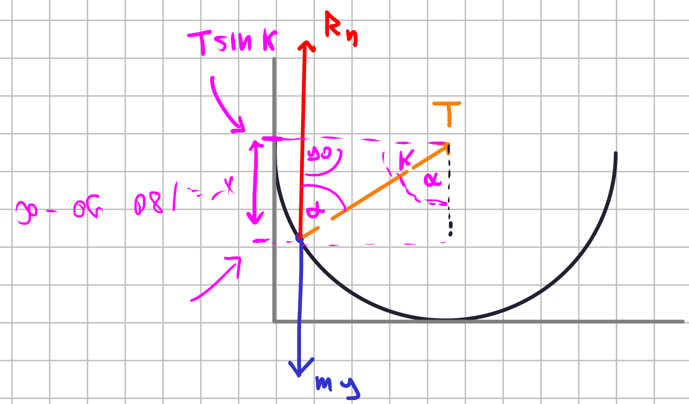
$mg = 9.8\cdot 0.1 = 0.98\ N$

$R_n = mg - T\cdot\sin(K)$

$K = 180 - 90 - \alpha = 30°$

$R_n = 0.1\cdot 9.8 - 0.48\cdot\sin(30°) =$

$= 0.98 - 0.48\cdot\frac{1}{2} \approx 0{,}7\ N$



[18] Un punto materiale è soggetto ad un campo di forze centrali, la cui energia potenziale varia secondo la legge: $U(r) = -a/r + b/r^3$, con a e b costanti. Calcolare:

a) come varia la forza in funzione di r, indicando dove è repulsiva e dove è attrattiva;

b) la posizione di equilibrio stabile del corpo;

c) l'energia cinetica del corpo quando giunge nella posizione di equilibrio dopo essere partito dall'infinito con velocità trascurabile.

$U(r) = \int_{\infty}^{r} F\,dr \qquad F = \frac{dU}{dr}$

$\Rightarrow F(r) = a\frac{1}{r^2} - 3b\frac{1}{r^4}$

$F = 0 \iff a\frac{1}{r^2} = 3b\frac{1}{r^4} \Rightarrow a = 3b\frac{1}{r^2} \Rightarrow a\cdot r^2 = 3b \Rightarrow r = \sqrt{3\frac{b}{a}} = eq$

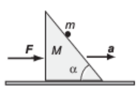
$E_m(\infty) = U(\infty) + \frac{1}{2}mv^2 = 0$

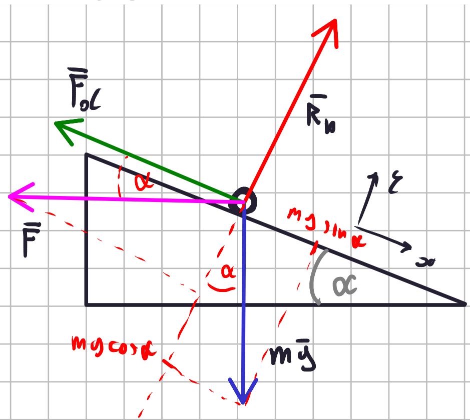
trascurabile $=0$

$E_m(eq) = U(eq) + \frac{1}{2}mv^2 = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = U(eq) = a\frac{1}{\sqrt{3\frac{b}{a}}} - \frac{b}{\left(3\frac{b}{a}\right)^{3/2}}$

[19] Una massa puntiforme $m = 50\,g$ si trova su di un piano scabro ($\mu_d = 0.4$), inclinato di una angolo $\alpha = 45°$ e avente massa $M = 500\,g$, spinto lungo un piano orizzontale liscio da una forza costante **F**. Determinare il modulo della forza affinché la massa m scivoli lungo il piano con velocità costante.





essendo la velocita' costante, la Forza e' nulla: $\bar{F}_d + m\bar{g} + \bar{F} + \bar{R}_n = 0$

proietto sugli assi

$$\begin{cases} x: & -F_d - F\cos\alpha + mg\cos(180-90-\alpha) = \overset{\mu_d R_n}{\overset{\shortparallel}{F_d}} + F\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0 \\ z: & R_n - mg\cos\alpha - F\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_d R_n + \overset{ma}{\overset{\shortparallel}{F}}\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0 \\ R_n = mg\cos\alpha + F\sin\alpha = mg\cos\alpha + ma\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu_d \cdot (mg\cos\alpha + ma\sin\alpha) + ma\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0$$

Sostituisco con i valori numerici e risolvo per a

$$\Rightarrow 0{,}4 \cdot \left(0.05 \cdot 9{,}8 \cdot \cos\frac{\pi}{4} + 0.05 \cdot a \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) + 0.05 \cdot a \cdot \cos\frac{\pi}{4} - 0{,}05 \cdot 9{,}8 \sin\frac{\pi}{4} = 0$$

$$\Rightarrow a = 4{,}2 \, \frac{m}{s^2} \Rightarrow F = (M+m)a = 0.55 \cdot 4.2 = 2.31 \text{ N}$$

[20] Su di un punto materiale di massa $m = 1$ kg agisce una forza avente direzione costante e modulo variabile nel tempo secondo la legge $F(t) = 3t^2$ N. Se la massa parte da ferma, quale sarà la sua velocità dopo 2 s?

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{1}{m} 3t^2 = 3t^2 \Rightarrow v(t) = \int_0^t a \, d\tau = t^3 \Rightarrow v(2) = 8 \, \frac{m}{s}$$

[21] Un punto materiale di massa m si muove su un piano orizzontale scabro lungo una traiettoria circolare di raggio r; esso inizia il moto con velocità v_0 e dopo il primo giro la sua velocità è $1/2v_0$. Determinare il valore del coefficiente di attrito dinamico del piano, μ_d, e il numero totale di giri che il punto riuscirà a descrivere.

$$T_{in} = \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad T_{Fin} = \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{2} v_0\right)^2$$

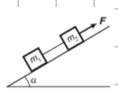
$$\Delta E_m = \text{lavoro forze non cons} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{2} v_0\right)^2 = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 - \frac{1}{4} v_0^2\right) = \frac{1}{2} m \frac{3}{4} v_0^2 = \frac{3}{8} m v_0^2$$

$$\int_0^{2\pi r} \mu_d mg = \frac{3}{8} m v_0^2 \Rightarrow 2\pi r \mu_d mg = \frac{3}{8} v_0^2 \Rightarrow \mu_d = \frac{3 \cdot v_0^2}{16\pi r g}$$

n = numero giri

$$\Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{2} m v_0^2}_{\Delta T = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2} = \int_0^{2\pi r n} \mu_d mg \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = 2\pi r n \mu_d mg \Rightarrow n = \frac{1}{2} \frac{m v_0^2}{2\pi r \mu_d mg} = \frac{16\pi r g \, m v_0^2}{3 v_0^2 \cdot 4\pi r mg} = \frac{4}{3}$$

[22] Due punti materiali di massa m_1 ed m_2 collegati da un filo inestensibile e privo di massa, sono tirati con velocità costante da una forza **F** lungo un piano inclinato scabro: il piano e la forza sono inclinati di un angolo α rispetto all'orizzontale. Determinare la tensione τ del filo. ($m_1 = m_2 = 1$ kg; $\mu_d = 0.5$; $\alpha = \pi/6$).

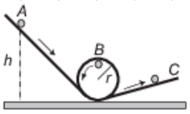


$$\bar{F} + \bar{R}_n + m\bar{g} = 0 \Rightarrow \begin{cases} F - mg\sin\alpha - \mu_d R_n = 0 \\ R_n = mg\cos\alpha \end{cases} \quad \text{essendo } F = ma_0$$

$$\Rightarrow ma_0 - mg\sin\alpha - \mu_d mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow a_0 = g\sin\alpha + \mu_d g\cos\alpha = 9.8\sin\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} 9.8\cos\frac{\pi}{6} = 9.14 \, \frac{m}{s^2}$$

il corpo m_1 e' soggetto a $\tau = m_1 \cdot a_0 = 9.14$ N

[24] Un punto materiale di massa m scorre senza attrito lungo la guida liscia, mostrata a lato, posta in un piano verticale. Partendo da fermo dalla posizione A a un'altezza h, il punto scivola lungo la guida, scorre internamente a quest'ultima nella parte circolare di raggio r (sempre rimanendo aderente alla guida) e poi continua il moto verso C. Si chiede: a) La velocità e l'accelerazione della massa m nella sommità della parte circolare della traiettoria (punto B); b) Qual è il valore minimo di h per il quale la massa m giunge nel punto B senza staccarsi dalla guida?



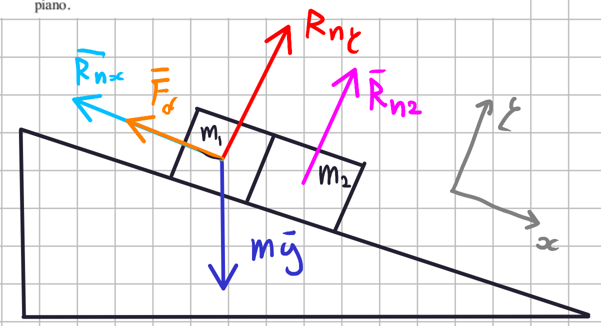
l'energia meccanica iniziale e' mgh. Nel punto B e' $mg2r + \frac{1}{2}mv^2 = mgh$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = gh - 2gr \Rightarrow v = \sqrt{2g(h-2r)} \Rightarrow a = \frac{v^2}{r} = \frac{2gh-4gr}{r}$$

$$\frac{v_{min}^2}{r} \geq g \Rightarrow v_{min} = \sqrt{gr} \quad \Rightarrow mgh = mg2r + \frac{1}{2}mgr$$ risolvo per h

$$h = r\left(2+\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}r$$

[25] Due blocchetti, di massa $m_1 = 0.5\,\text{kg}$ e $m_2 = 0.7\,\text{kg}$, sufficientemente piccoli da potersi considerare puntiformi, sono appoggiati su un piano, inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale, e presentano coefficienti di attrito rispettivamente eguali a $\mu_1 = 0.1$ e $\mu_2 = 0.2$. Si chiede per quale valore massimo dell'angolo α si può inclinare il piano senza fare slittare i due blocchetti, pensando che il primo si appoggi a contatto col secondo dalla parte più in alto del piano.



Voglio trovare $\bar{R}_{nx}$, ossia la reazione normale esercitata da m_2 su m_1 per farlo stare fermo. (denoto $m = m_1$ e $M = m_2$)

$$\begin{cases} x: & -F_d - R_{nx} + mg\sin\alpha = 0 \\ y: & -mg\cos\alpha + R_{ny} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\mu_1 mg\cos\alpha + mg\sin\alpha = R_{nx} \\ R_{ny} = mg\cos\alpha \end{cases} \quad \Rightarrow R_{nx} = mg(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha)$$

Per il 3° principio della dinamica, m_1 esercita su m_2 una forza $-R_{nx}$. Per m_2 si ha

$$\bar{F}_d + m\bar{g} + \bar{R}_{n2} - \bar{R}_{nx} = 0$$

$$\begin{cases} -F_d + Mg\sin\alpha - (R_{nx}) = 0 \\ Mg\cdot\cos\alpha - R_{n2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\mu_2 R_{n2} + Mg\sin\alpha - mg\sin\alpha + mg\mu_1\cos\alpha = 0 \\ R_{n2} = Mg\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\mu_2\cdot Mg\cos\alpha + Mg\sin\alpha - mg\sin\alpha + mg\mu_1\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow -\mu_2\cdot M\cos\alpha + M\sin\alpha - m\sin\alpha + m\mu_1\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \cos\alpha(m\mu_1 - M\mu_2) + \sin\alpha(M-m) = 0 \Rightarrow \cos\alpha(m\mu_1 - M\mu_2) = \sin\alpha(m-M)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(m-M) = m\mu_1 - M\mu_2 \Rightarrow \tan\alpha = \frac{(m\mu_1 - M\mu_2)}{m-M} = \frac{(0{,}5\cdot 0{,}1 - 0.7\cdot 0.2)}{0{,}5 - 0{,}7} = 0.45$$

$$\tan\alpha = 0.45 \Rightarrow \alpha = \arctan(0.45) \approx 0.42 \text{ rad}$$ sul libro da un risultato diverso.

[26] Un corpo di massa m si muove di moto rettilineo, dal tempo t=0 con andamento della velocità pari a $v = k\sqrt{s}$ dove s è lo spazio percorso. Trovare il lavoro totale effettuato da tutte le forze che agiscono sul corpo nel tempo t dall'inizio del moto.

Agiscono 2 Forze: la gravità, e quella che lo fa accelerare.

$v = K\sqrt{s} \Rightarrow \frac{v}{K} = \sqrt{s} \Rightarrow s = \frac{1}{K^2}v^2$ Risolvo l'equazione differenziale:

$$S = \frac{1}{K^2}\frac{ds^2}{dt^2} \Rightarrow \frac{1}{S} = K^2\frac{dt^2}{ds^2} \Rightarrow \frac{1}{S}ds^2 = K^2dt^2$$ pongo tutto sotto radice

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{s}}ds = Kdt \Rightarrow \int_0^{s(t)}\frac{1}{\sqrt{s}}ds = K\int_0^t dt \Rightarrow \int_0^{s(t)}\frac{1}{\sqrt{s}}ds = Kt$$

Applico la sostituzione $\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{s} = x \\ dx = \frac{1}{2\sqrt{s}}ds \\ ds = 2\sqrt{s}\,dx \end{cases}$

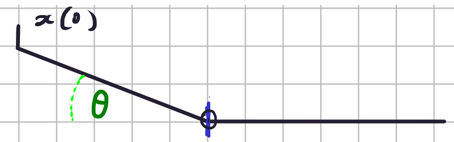
$$\Rightarrow \int_0^{x(t)}\frac{1}{x}2\sqrt{s}\,dx = Kt$$ Essendo $x = \sqrt{s}$ $$\Rightarrow \int_0^{x(t)}2\,dx = Kt \Rightarrow 2x(t) = Kt \Rightarrow 2\sqrt{s(t)} = Kt$$

$$\Rightarrow 4s(t) = K^2t^2 \Rightarrow s(t) = \frac{1}{4}K^2t^2$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{4}K^2 2t = \frac{1}{2}K^2t \Rightarrow a = \frac{1}{2}K^2, \quad F = ma = \frac{m}{2}K^2$$

$$L = \int_0^{s(t)}\frac{m}{2}K^2ds = \frac{m}{2}K^2s(t) = \frac{m}{2}K^2\cdot\frac{1}{4}K^2t^2 = \frac{m}{8}K^4t^2$$

[27] Un disco di massa $m = 50$ g scivola lungo un piano inclinato che forma un angolo $\vartheta = 30°$ con il piano orizzontale poi si ferma dopo aver percorso una distanza $L = 50$ cm sul piano. Trovare il lavoro fatto dalle forze di attrito considerando un coefficiente di attrito dinamico pari a $\mu = 0.15$ per tutti e due i piani.

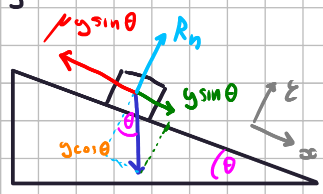


nel momento in cui arriva sul piano ha una legge oraria $x(t) = v_0t - \frac{1}{2}\mu mgt^2$

$v(t) = v_0 - \mu mgt$

$v(0) \Rightarrow t' = \frac{v_0}{\mu mg}$ $\quad x(t') = 0.5$ m

$$x(t') = 0.5 \text{ m} \Rightarrow v_0\frac{v_0}{\mu mg} - \frac{1}{2}\mu mg\frac{v_0^2}{\mu mg} = 0.5 \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu mg} = 0.5 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\mu mg}$$



in t' l'energia meccanica e' $T = \frac{1}{2}m^2\mu g$

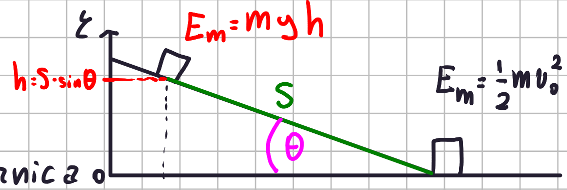
durante la discesa l'accelerazione e' $a = g\sin\theta - \mu g\cos\theta$

$v(t) = at$
$v(t') = \sqrt{\mu mg}$ $\Rightarrow at' = \sqrt{\mu mg} \Rightarrow t' = \frac{1}{a}\sqrt{\mu mg} = (g\sin\theta - \mu g\cos\theta)^{-1}\cdot\sqrt{\mu mg}$

spazio percorso in discesa

$$S = x(t') = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\cdot\mu m g = \frac{1}{2}\left(g\sin\theta - \mu g\cos\theta\right)^{-1}\cdot \mu m g \Rightarrow 0.07\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.36}$$

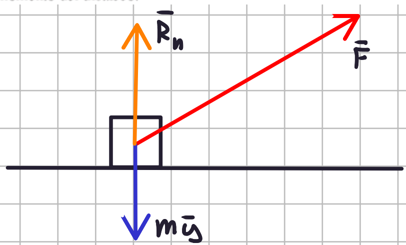
$$S = \frac{1}{2}\left(9{,}8\cdot\underbrace{\sin(30^\circ)}_{1/2} - 0{,}15\cdot 9{,}8\cdot\underbrace{\cos(30^\circ)}_{\sqrt{3}/2}\right)^{-1}\cdot 0{,}15\cdot 9{,}8\cdot 0{,}05 = 0{,}01$$



il lavoro e' la differenza dell'energia meccanica o

energia iniziale: $mg(S\cdot\sin\theta)$, quella finale e' nulla quindi $L = mgS\cdot\sin\theta = 0{,}02\,J$

[28] Al tempo $t = 0$ una forza $F = kt$ è applicata a una piccola massa m ferma su un piano orizzontale liscio. k è una costante e la forza è diretta verso l'alto con un angolo α rispetto all'orizzontale. Trovare: a) La velocità del corpo al momento del suo distacco dal piano; b) la distanza percorsa dalla massa fino al momento del distacco.



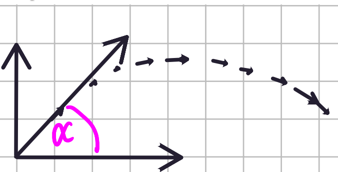
il distacco avviene quando $F\sin\alpha > mg$

$$F_y(t') = mg \Rightarrow kt'\sin\alpha = mg \Rightarrow t' = \frac{mg}{k\sin\alpha}$$

essendo $a_x(t) = kt\cos\alpha\frac{1}{m} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{6}k\cos\alpha\frac{1}{m}t^3$

la distanza percorsa e' $x(t') = \frac{1}{6}k\cos\alpha\frac{1}{m}\cdot\frac{m^3g^3}{k^3\sin^3\alpha} = \frac{1}{6}\frac{m^2}{k^2}g^3\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}$

[29] Una palla di massa $m = 130\,\mathrm{g}$ è lanciata con un angolo $\alpha = 45°$ rispetto all'orizzontale e con velocità iniziale $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}$. Determinare la dipendenza dal tempo del modulo del momento della quantità di moto della palla rispetto al punto dal quale viene lanciata; determinare, inoltre, il suo valore nel punto più alto della traiettoria.



$$\begin{cases} x(t) = 25\cos(\frac{\pi}{4})t \\ y(t) = 25\sin(\frac{\pi}{4})t - \frac{1}{2}\cdot 9.8\cdot t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = 17{,}6\cdot t \\ y(t) = 17{,}6t - 4{,}9t^2 \end{cases}$$

punto di origine: $(0,0)$

proiettile: $\bar{R} = (x(t), y(t))$

$$\bar{p} = m\bar{v} = \begin{cases} mv_x = 17{,}6\cdot 0{,}13 = 2{,}28 \\ mv_y = 2{,}28 - 1{,}27t \end{cases}$$

$$\bar{b} = \bar{R}\times m\bar{v} \Rightarrow \bar{b} = \left[(17{,}6t)\hat{i} + (17{,}6t - 4{,}9t^2)\hat{j}\right]\times\left[(2{,}28)\hat{i} + (2{,}28 - 1{,}27t)\hat{j}\right]$$

$$|\bar{b}| = \det\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 17{,}6t & 17{,}6t - 4{,}9t^2 & 0 \\ 2{,}28 & 2{,}28 - 1{,}27t & 0 \end{vmatrix} = (17{,}6t)(2{,}28 - 1{,}27t) - (17{,}6t - 4{,}9t^2)(2{,}28) =$$

$$(17{,}6t)(2{,}28 - 1{,}27t) - (17{,}6t - 4{,}9t^2)(2{,}28) \Rightarrow$$

$$b = |40{,}12t - 22{,}35t^2 - 40{,}12t + 11{,}17t^2| = 11{,}18t^2\ \mathrm{kg}\frac{m^2}{s}$$

$$\begin{cases} \text{il punto piu' alto si ha in } t^* = \frac{v_0^y}{g} \\ t^* = \frac{1}{9{,}8}25\sin(\frac{\pi}{4}) \simeq 1{,}8 \Rightarrow b(t^*) = 36{,}22 \end{cases}$$

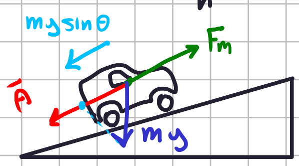
[30] Una macchina di massa $m = 1000\,\mathrm{kg}$ ha un motore della potenza massima $P_M = 100\,\mathrm{kW}$ e viaggiando su un tratto piano con velocità costante $v = 50\,\mathrm{km/h}$ esso deve erogare una potenza $P' = 50\,\mathrm{kW}$. Supponendo che tutte le forze dissipative rimangano costanti, quale sarà la massima pendenza di una salita che la macchina può affrontare mantenendo la velocità v?

La macchina si muove ed ha una forza $\bar{F}_m$ del motore ed una $\bar{A}$ contraria data dall'attrito.

Se $v = 50\,\frac{km}{h} = 13.8\,\frac{m}{s} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \bar{F}_m = \bar{A}$

$P' = F_m \cdot v \Rightarrow 50\,kW = F_m \cdot 50\,\frac{km}{h} \Rightarrow 50\,000 = F_m \cdot 13.8\,\frac{m}{s} \Rightarrow F_m = 3.6\ kN \Rightarrow \bar{A} = 3.6\,kN$

in pendenza



$F_m^{max} - A - mg\sin\alpha = 0$

trovo $F_m^{max} \Rightarrow 100\,kW = F_m^{max} \cdot 13.8 \Rightarrow F_m^{max} = 7{,}24\,kN$

$\Rightarrow 7240 - 3600 - 9800\sin\alpha \geq 0$

$\Rightarrow \sin\alpha \leq 0{,}371 \Rightarrow \alpha = \arcsin(0.371) \approx 0{,}38\ rad \approx 21^\circ$

[31] Due carrelli identici di massa M si muovono senza attrito, per inerzia, uno dietro l'altro con la stessa velocità costante v_0. Un uomo di massa m viaggia sul carrello posteriore e ad un certo istante $t = 0$ salta sul carrello anteriore a una velocità U relativa al suo carrello. Trovare le velocita' finali dei due carrelli.

la quantita' di moto iniziale e' $\frac{1}{2}(M+m)v_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$

carrello

1° carrello pre salto: $\frac{1}{2}(m+M)v_0^2$

1° carrello post salto: $\frac{1}{2}mU^2 + \frac{1}{2}Mv_{1F}^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(m+M)v_0^2 = \frac{1}{2}mU^2 + \frac{1}{2}Mv_{1F}^2$ Risolvo per v_{1F}

uomo

vel 1° carrello post salto

$(m+M)v_0^2 = mU^2 + Mv_{1F}^2 \Rightarrow v_{1F}^2 = \frac{1}{M}\left([m+M]v_0^2 - mU^2\right) = v_0^2\,\frac{m+M}{M} - \frac{m}{M}U^2 \Rightarrow v_{1F} = v_0\sqrt{\frac{m+M}{M}} - U\sqrt{\frac{m}{M}}$

Cons quantita' di moto

$\frac{1}{2}(M+m)v_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_{1F}^2 + \frac{1}{2}(M+m)v_{2F}^2$ Risolvo per v_{2F}

$(M+m)v_{2F}^2 = (M+m)v_0^2 + mv_0^2 - mv_{1F}^2$

$v_{2F}^2 = v_0^2 + \frac{mv_0^2}{(m+M)} - \frac{mv_{1F}^2}{(m+M)} \Rightarrow$

$v_{2F} = v_0 + \sqrt{\frac{m}{m+M}}\,v_0 - \sqrt{\frac{m}{(m+M)}}\left(v_0\sqrt{\frac{m+M}{M}} - U\sqrt{\frac{m}{M}}\right) = v_0 + \sqrt{\frac{m}{m+M}}\,v_0 - v_0\frac{m}{m+M} + U\frac{m}{\sqrt{M(m+M)}}$

[32] Un punto materiale di massa $m = 1\,\mathrm{kg}$ si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$. All'istante $t = 0$ al punto viene applicata una forza, nella stessa direzione e verso di v_0, del tipo $F = kt$, con $k = 3\,\mathrm{N/s}$. Calcolare la velocità v del corpo all'istante $t_1 = 10\,\mathrm{s}$ e il lavoro della forza nell'intervallo di tempo dato.

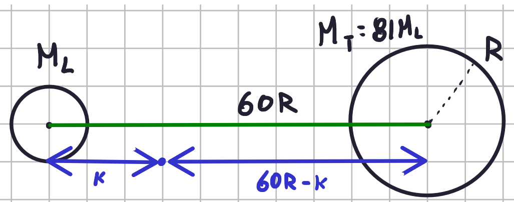
$2 + \frac{3}{2} 50$

$$F = kt = ma \Rightarrow a = kt\frac{1}{m} = 3t \Rightarrow dv = 3t \Rightarrow \int_2^{v(t)} dv = \int_0^t 3\tau\, d\tau \Rightarrow v(t) = 2 + \frac{3}{2}t^2 \Rightarrow v(10) = 153\,\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow x(t) = \int 2 + \frac{3}{2}t^2\, dt = 2t + \frac{1}{2}t^3 \Rightarrow \text{dist}: D = x(10) = 20 + 500 = 520\ m$$

$$\Rightarrow L = \Delta T = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{153^2}{2} - \frac{4}{2} = 11{,}7\ kJ$$

[39] A quale distanza dal centro della Luna è il punto in cui la risultante delle attrazioni gravitazionali della Luna e della Terra è nulla? La massa della Terra è $\eta = 81$ volte quella della Luna M_L e la distanza tra i loro centri è $n = 60$ volte più grande che il raggio della Terra R.



corpo sonda di massa m sente verso la terra e verso la luna:

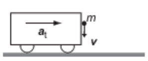
$$F_T = G\frac{m\,81M_L}{(60R-K)^2} \qquad F_L = G\frac{mM_L}{K^2}$$

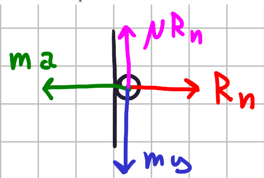
$$\Rightarrow G\frac{m\,81M_L}{(60R-K)^2} = G\frac{mM_L}{K^2}$$ RISOLVO PER K

sul libro da un risultato diverso.

$$\Rightarrow \frac{81}{60^2R^2 - 60RK + K^2} = \frac{1}{K^2} \Rightarrow \frac{1}{81}(60^2R^2) = 60RK \Rightarrow K = \frac{60}{81}R = 0.74R$$

[43] Un carrello di massa M si muove su di un piano orizzontale con accelerazione $a_t = 15\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ sotto l'effetto di una forza orizzontale F. Durante il moto una massa m aderente alla parete frontale del carrello scende lungo la parete stessa con velocità costante. Calcolare il coefficiente di attrito dinamico tra la massa m e la parete.





$$\begin{cases} ma = R_n \\ \mu R_n - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu ma - mg = 0 \Rightarrow \mu = \frac{g}{a} \approx 0{,}65$$