Esercizio 1. Dimostrare le seguenti relazioni insiemistiche:

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$
$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$
$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$$

a) Si dimostra per doppia inclusione. $\boxed{(A\cup B)\cap C\subseteq(A\cap C)\cup(B\cap C)}$: Sia $x\in(A\cup B)\cap C$, allora $x\in A\cup B\wedge x\in C\Rightarrow(x\in A\vee x\in)\wedge x\in C\Rightarrow x\in A\cap C\vee x\in B\cap C\Rightarrow x\in(A\cap C)\cup(A\cap B)$.

$\boxed{(A\cap C)\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap C}$: Se $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in A\cap C\vee x\in B\cap C\Rightarrow x\in C\wedge(x\in A\vee x\in B)\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap C$. ■

b) Doppia inclusione: $\boxed{(A\cap B)\cup C\subseteq(A\cup C)\cap(B\cup C)}$: Se $x\in(A\cap B)\cup C\Rightarrow x\in(A\cap B)\vee x\in C\Rightarrow$ $(x\in A\wedge x\in B)\vee x\in C\Rightarrow(x\in A\vee x\in C)\wedge(x\in B\vee x\in C)\Rightarrow x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

$\boxed{(A\cup C)\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup C}$: Se $x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)\Rightarrow(x\in A\vee x\in C)\wedge(x\in B\vee x\in C)\Rightarrow$

Se $x\notin C\Rightarrow x\in A\wedge x\in B\Rightarrow x\in A\cap B\Rightarrow(x\in A\cap B)\vee x\in C\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup C$. ■

c) Doppia inclusione: $\boxed{(A\cap B)^c\subseteq A^c\cup B^c}$: Se $x\in(A\cap B)^c\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\notin A\vee x\notin B$ $\Rightarrow x\in A^c\underset{\leftarrow\text{XOR}}{\oplus}x\in B^c\Rightarrow x\in A^c\cup B^c$. $\boxed{A^c\cup B^c\subseteq(A\cap B)^c}$: Se $x\in A^c\cup B^c\Rightarrow x\in A^c\vee x\in B^c\Rightarrow$ $x\notin A\vee x\notin B\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\in(A\cap B)^c$. ■

Esercizio 2. Siano A,B due insiemi. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti

i) $A\subset B$

ii) $A\cap B=A$

ii) $A\cup B=B$

Si dimostra in maniera circolare: $\boxed{(i)\Rightarrow(ii)}$: Se $A\subset B\Rightarrow\forall x\in A, x\in B\Rightarrow\forall x\in A, x\in A\cap B\Rightarrow A=A\cap B$.

$\boxed{(ii)\Rightarrow(iii)}$: Se $A\cap B=A\Rightarrow\forall x\in A, x\in B\Rightarrow\forall x\in B, x\in A\vee x\in B\Rightarrow x\in A\Rightarrow x\in B\Rightarrow x\in A\vee x\in B\Rightarrow x\in B$ $\Rightarrow A\cup B=B$. $\boxed{(iii)\Rightarrow(i)}$: Se $A\cup B=B$, $\nexists x\in A\mid x\notin B\Rightarrow\forall x\in A, x\in B\Rightarrow A\subset B$. ■

Esercizio 3. Sia A, B e C tre insiemi non necessariamnte disgiunti. Esprimere $|A\cup B\cup C|$ in termini delle cardinalità di A, B, C e delle loro intersezioni.

Se $A\cap B\neq\emptyset$, allora $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

- $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

Esercizio 4. Dopo aver intervistato 50 studenti si raccolgono i seguenti dati: 25 hanno studiato francese, 20 hanno studiato tedesco e 5 hanno studiato entrambe le lingue. Calcolare

1) quanti studenti hanno studiato solo francese,

2) quanti studenti hanno studiato solo tedesco,

3) quanti studenti non hanno studiato né francese né tedesco.

$F:=\{\text{hanno studiato francese}\}$ $T:=\{\text{hanno studiato tedesco}\}$ $S:=\{\text{totale studenti}\}$

Si ha che $|S|=50$, $|F|=25$, $|T|=|20|$, $|F\cap T|=5$, $F\cap T\subset F\wedge F\cap T\subset T$.

1) di 25 studenti che hanno studiato francese, 5 di questi hanno studiato anche tedesco, quindi solo 20 studenti hanno studiato solo francese.

2) Analogamente, solo 15 studenti hanno studiato solo tedesco.

3) Studenti totali che hanno studiato: $F\cup T$ e $|F\cup T|=|F|+|T|-|F\cap T|=25+20-5=40$. Quindi gli studenti che non hanno studiato sono $50-40=10$.

Esercizio 5. Dopo aver intervistato 60 persone si raccolgono i seguenti dati: 25 leggono Topolino, 26 leggono Tex, 23 leggono Diabolik. Inoltre, 9 leggono sia Topolino sia Tex, 11 sia Topolino sia Diabolik, 8 sia sia Tex sia Diabolik. Infine, 3 leggono tutti e tre i periodici. Calcolare

1) quanti leggono solo Topolino,
2) quanti leggono solo Tex,
3) quanti leggono solo Diabolik,
4) quanti leggono almeno uno dei tre periodici,
5) quanti leggono uno solo dei tre periodici,
6) quanti non leggono alcuno dei tre periodici.

M:: topolino T:: tex D:: diabolik

1) $|M|=25$, $|M\cap T|=9$ $|M\cap D|=11$, Solo topolino: $|M|-|M\cap D|-|M\cap T|+|M\cap D\cap T|=25-9-11+3=8$

2) $|T|=26$, Solo tex: $|T|-|T\cap M|-|T\cap D|+|T\cap M\cap D|=26-9-8+3=12$

3) $|D|=23$, Solo diabolik: $|D|-|D\cap T|-|D\cap M|+|T\cap M\cap D|=23-11-8+3=7$

4) Voglio trovare $|M\cup T\cup D|=|M|+|T|+|D|-|M\cap T|-|M\cap D|-|T\cap D|+|M\cap T\cap D|=74-9-11-8+3=49$

5) La somma dei primi 3 punti: $8+12+7=27$

6) Il totale senza chi legge almeno un periodico: $60-49=11$

Esercizio 6. Sia $(\Omega,\mathbb{P})$ uno spazio di probabilità, e siano A, B e C tre eventi. Supponiamo di sapere $A\cap B\cap C=\emptyset$ e $\mathbb{P}(A\cap C)=1/5$ e $\mathbb{P}(B\cap C)=2/5$.

1) Calcolare $\mathbb{P}((A\cup B)\cap C)$
2) Quali sono i possibili valori di $\mathbb{P}(A\cap B)$? (Ad esempio, può essere $\mathbb{P}(A\cap B)=1$?)

1) $\mathbb{P}((A\cup B)\cap C)=\mathbb{P}((A\cap C)\cup(B\cap C))=\mathbb{P}(A\cap C)+\mathbb{P}(B\cap C)-\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=1/5+2/5=3/5$

2) Se $A\cap B=\emptyset\Rightarrow\mathbb{P}(A\cap B)=0$ e rispetterebbe l'ipotesi che $A\cap B\cap C=\emptyset$, supponiamo che $A\cap B$ sia il complementare di $(A\cap C)\cup(B\cap C)$: $\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap C)\leq 1\Rightarrow$
$\mathbb{P}(A\cap B)\leq 1-(\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap C))\Rightarrow\mathbb{P}(A\cap B)\leq 1-(1/5+2/5)=1-3/5=2/5\Rightarrow\mathbb{P}(A\cap B)\in[0,2/5]$.

Esercizio 7.

1) Se $\mathbb{P}(A)=1/3$ e $\mathbb{P}(B^c)=1/4$, A e B possono essere eventi disgiunti?
2) Se $\mathbb{P}(A)=1/4$ e $\mathbb{P}(A\cup B)=3/4$, quanto vale $\mathbb{P}(B)$ nel caso che A e B siano disgiunti?
3) Se $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=3/8$, può verificarsi che $\mathbb{P}(A\cup B)=1/4$? E $\mathbb{P}(A\cup B)=7/8$?
4) Siano $\mathbb{P}(A)=3/4$ e $\mathbb{P}(B)=3/8$. Si verifichi che $1/8\leq\mathbb{P}(A\cap B)\leq 3/8$.
5) Si dimostri la diseguaglianza:

$$\mathbb{P}(A\cap B)\geq\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-1$$

1) Se $A\cap B=\emptyset$, allora $A\subseteq B^c$, $\Rightarrow|A|\leq|B^c|\Rightarrow\mathbb{P}(A)\leq\mathbb{P}(B^c)$, ma $\mathbb{P}(A)=1/3$ e $\mathbb{P}(B^c)=1/4$. Non sono disgiunti.

2) So che $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)\Rightarrow 3/4=1/4+\mathbb{P}(B)-0\Rightarrow\mathbb{P}(B)=3/4-1/4=1/2$

3) Il valore minimo di $\mathbb{P}(A\cup B)=3/8>1/4$, il valore massimo, nel caso $A\cap B\neq 0$, e' $2\cdot 3/8=6/8<7/8$,
nessuno dei due casi puo' verificarsi.

4) Il valore massimo di $\mathbb{P}(A\cap B)$ si verifica se $B\subset A\Rightarrow A\cap B=B\Rightarrow\mathbb{P}(A\cap B)\leq\mathbb{P}(B)=3/8$.
Si ha che $A\cap B\neq 0$ dato che $\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)>1$, la probabilita' e' minima se $A\cup B=\Omega$:
$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)\Rightarrow 1=3/4+3/8-\mathbb{P}(A\cap B)\Rightarrow\mathbb{P}(A\cap B)=3/4+3/8-1=\frac{1}{8}\Rightarrow 1/8\leq\mathbb{P}(A\cap B)\leq 3/8$.

5) $\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A\cup B)+\mathbb{P}(A\cap B)\Rightarrow\mathbb{P}(A\cap B)\geq\mathbb{P}(A\cup B)+\mathbb{P}(A\cap B)-1\Leftrightarrow 0\geq\mathbb{P}(A\cup B)-1\Leftrightarrow\mathbb{P}(A\cup B)\leq 1$

Esercizio 8. Si lanciano 2 dadi equi, uno di colore rosso, l'altro di colore blu.

1) Descrivere lo spazio degli eventi elementari Ω.

2) Descrivere, come sottoinsiemi di Ω, i seguenti eventi: "il dado rosso vale 5", "uno dei due dadi vale 5", "entrambi i dadi valgono 5", "nessun dado vale 5", "la somma dei dadi vale 5".

3) Calcolare la probabilità degli eventi nel punto precedente.

$\Omega = \{(\omega_1,\omega_2) \in \{1,2,3,4,5,6\}^2\}$, ω_1 e' il dado rosso, ω_2 quello blu.

$A = \{\text{il rosso vale } 5\} = \{(\omega_1,\omega_2) \in \Omega \mid \omega_1 = 5\}$, $|A| = 1 \cdot 6 = 6 \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$B = \{\text{uno dei due vale } 5\} = \{(\omega_1,\omega_2) \in \Omega \mid \omega_1 = 5 \vee \omega_2 = 5\}$, $|B^c| = 5 \cdot 5 = 25$, $\mathbb{P}(B) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

$C = \{\text{entrambi sono } 5\} = \{(5,5)\}$, $|C| = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(C) = 1/36$

$D = \{\text{nessun dado vale } 5\} = B^c$, $\mathbb{P}(D) = 25/36$

$E = \{\text{la somma vale } 5\} = \{(\omega_1,\omega_2) \in \Omega \mid \omega_1 + \omega_2 = 5\} = \{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\} \Rightarrow \mathbb{P}(E) = 4/36 = \frac{1}{9}$

Esercizio 9. (Asintotica del problema dei compleanni) Sia

$$p_N(k) = 1 - \frac{N(N-1)\cdots(N-k+1)}{N^k}$$

la probabilità per il problema dei compleanni. Si osservi che, per k fissato, $p_N(k)$ è un polinomio in $1/N$. Si consideri l'asintotica per k fisso e $N \to \infty$.

1) Dimostrare che

$$p_N(k) = C_1(k)\frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)$$

e calcolare $C_1(k)$.

2) Dimostrare che

$$p_N(k) = C_1(k)\frac{1}{N} + C_2(k)\frac{1}{N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

e calcolare $C_2(k)$.

FISSATO

1) $$\lim_{N \to +\infty} 1 - \frac{N(N-1)\cdots(N-K+1)}{N^K} = 1 - \lim_{N \to +\infty} \frac{N}{N} \cdot \frac{(N-1)}{N} \cdots \frac{N-K+1}{N} = 1 - 1 = 0$$