Metodi Matematici per l'Informatica - Esercizi 3
(a.a. 21/22, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (`carlucci@di.uniroma1.it`)

Nota: Gli esercizi riguardano relazioni di equivalenza e di ordine.

Esercizio 1 *Sia* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *Sia* $R \subseteq A \times A$ *la relazione seguente:*

$$R = \{(1, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (2, 5)\}.$$

1. *Scrivere la rappresentazione di* R *come matrice e come grafo diretto.*
2. *Calcolare le composte* $R \circ R$, $(R \circ R) \circ R$ *con grafo e matrice.*
3. *Calcolare la chiusura transitiva di* R.

Esercizio 2 *Siano* R_1 *e* R_2 *due relazioni di equivalenza su un insieme* A. *Sia* R *la relazione su* A *definita come segue:*

$$aRb \text{ se e solo se } (aR_1b \text{ e } aR_2b).$$

R *è una relazione di equivalenza?*

Esercizio 3 *Siano* R *e* S *due relazioni di equivalenza sullo stesso insieme* A. *Quali dei punti seguenti sono veri e quali falsi?*

1. $R \cup S$ *è una relazione di equivalenza.*
2. $R - S$ *è una relazione di equivalenza.*

Esercizio 4 *Per definizione una relazione* R *è di equivalenza sse è riflessiva, simmetrica e transitiva. Consideriamo il seguente argomento: se* aRb *allora* bRa *per simmetria; dunque* aRa *per transitività. Dunque per ogni* $a \in A$ *vale* aRa *e* R *è riflessiva. Dunque una relazione* R *è di equivalenza sse è simmetrica e transitiva. L'argomento è corretto? Se no, perché?*

Esercizio 5 *Sia* R *una relazione riflessiva e che soddisfa la seguente proprietà: per ogni* $a, b, c \in A$ *se* aRb *e* aRc *allora* bRc. *Dimostrare che* R *è una relazione di equivalenza.*

Esercizio 6 *Siano* R *e* S *due relazioni d'ordine sullo stesso insieme* A. *Quali dei punti seguenti sono veri e quali falsi?*

1. $R \cap S$ *è un ordine.*
2. $R \cup S$ *è un ordine.*
3. $R - S$ *è un ordine.*

Esercizio 7 *Sia* S *un insieme. Sia* $A = \{f : f : S \to \mathbb{R}\}$ *(l'insieme delle funzioni con dominio* S *e codominio* $\mathbb{R}$*). Definiamo la relazione* $R \subseteq A \times A$ *come segue:*

$$fRg \text{ se e solo se per ogni } x \in S \text{ vale } f(x) \leq g(x)\}.$$

Dimostrare che la relazione R *è un ordine parziale. Si tratta anche di un ordine totale?*

Esercizio 8 *Sia R una relazione transitiva sugli interi $\mathbb{Z}$ tale che per ogni $z, z' \in \mathbb{Z}$, se $|z - z'| = 5$ allora $(z, z') \in R$. R è una relazione di equivalenza?*

Esercizio 9 *Sia $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la relazione così definita:*

$$(a, b)R(c, d) \text{ se e solo se } a \geq b \,\&\, c \leq d.$$

Di quali proprietà gode R?

Esercizio 10 *Sia R una relazione di ordine parziale su un insieme A. Definiamo aR^*b se e solo se aRb e $a \neq b$. Dimostrare i seguenti punti.*

1. *Per ogni $a, b \in A$: se aR^*b allora non vale bRa.*
2. *Per ogni $a, b \in A$ vale al massimo una tra le seguenti: aR^*b, $b = a$, bR^*a.*
3. *Per ogni $a, b, c \in A$: se aR^*b e bRc allora aR^*c.*
4. *Per ogni $a, b, c \in A$: se aRb e bR^*c allora aR^*c.*

Esercizio 11 *Per una relazione $R \subseteq A \times A$ denotiamo con $R^{-1} = \{(a', a) : (a, a') \in R\}$ la sua inversa. Dimostrare che se R è un ordine su A allora R^{-1} è un ordine su A.*

Esercizio 12 *Dato un insieme A denotiamo con D_A la relazione $\{(a, a) : a \in A\}$ su A, detta diagonale di A. Dimostrare che una relazione $R \subseteq A \times A$ è antisimmetrica se $R \cap R^{-1} \subseteq D_A$.*

Esercizio 13 *Sia $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la relazione sui numeri reali definita come segue:*

$$(r, s) \in S \text{ se e solo se } r^2 = s^2.$$

Dimostrare che S è una equivalenza. Descrivere le sue classi di equivalenza.

Esercizio 14 *Consideriamo l'insieme $F = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. Definiamo $R \subseteq F \times F$ come segue: $(a, b)R(c, d)$ se e solo se $ad = bc$. Dimostrare che R è una equivalenza. Descrivere le classi di equivalenza di $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$.*

Esercizio 15 *Sia $A = \{1, 3, 9, 27, 30\}$. Sia R la relazione di divisibilità su A: aRb se e solo se a divide b con resto 0. Definire un ordine totale R^* che estende R. Usare la dimostrazione del teorema visto in classe, scegliendo ogni volta una coppia di elementi incomparabili, fino a esaurirli tutti.*

Esercizio 16 *Sia A l'insieme dei numeri naturali da 1 a 10. Sia $R \subseteq A \times A$ la relazione di divisibilità; ossia aRb se e solo se a divide b con resto 0. Definire un ordine totale R^* che estende R.*

1 Esercizi d'esame

Esercizio 17 *Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, siano $R = \{(1, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$ e $S = \{(2, 1), (2, 4), (4, 5)\}$ due relazioni su A.*

1. *$R \cup S$ è transitiva?*
2. *Calcolare $S \circ S$.*
3. *Calcolare la chiusura transitiva di R.*

Esercizio 18 *Sia R una relazione d'ordine su un insieme A e sia S una relazione di equivalenza sullo stesso insieme A. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.*

1. $R \cap S$ è transitiva.

2. $R \cup S$ è una relazione di equivalenza.

3. $S - R$ è riflessiva.

Esercizio 19 *Consideriamo la seguente relazione $\prec$ definita su coppie di intervalli chiusi della retta reale: $[x, y] \prec [w, z]$ se e solo se $[x, y] \subseteq [w, z]$ oppure $y < w$. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.*

1. La relazione $\prec$ è riflessiva.

2. La relazione $\prec$ è antisimmetrica.

3. La relazione $\prec$ è transitiva.

Esercizio 20 *Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, sia $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 4), (3, 5)\}$ e $S = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 5)\}$ due relazioni su A.*

1. $R \cap S$ è transitiva?

2. Calcolare $R \circ S$ e $S \circ R$.

3. Calcolare la chiusura transitiva di S.

Esercizio 21 *Consideriamo la seguente relazione $\prec$ definita su coppie di intervalli chiusi della retta reale: $[x, y] \prec [w, z]$ se e solo se $[x, y] = [w, z]$ oppure $y < w$. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.*

1. La relazione $\prec$ è riflessiva.

2. La relazione $\prec$ è antisimmetrica.

3. La relazione $\prec$ è transitiva.

Esercizio 22 *Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, sia $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ e $S = \{(1, 3), (3, 5), (1, 5), (2, 4)\}$ due relazioni su A.*

1. $R \cup S$ è transitiva? falso

2. Calcolare $R \circ S$ e $S \circ R$. {(1,4)(2,5)} e {(1,4)(2,5)}

3. Calcolare la chiusura transitiva di R. {(1,5),(1,4),(1,3),(2,5),(2,4),(3,5)}

Esercizio 23 *Sia R la relazione $\{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5)\}$.*

1. R è un ordine parziale su $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

2. Calcolare $R \circ R$.

3. Calcolare la chiusura transitiva di R.

Esercizio 24 *Sia R una relazione binaria su un insieme A tale che per ogni $a \in A$ esiste $b \in A$ tale che $(a, b) \in R$. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.*

1. R è transitiva.

2. Se R è simmetrica e transitiva allora R è riflessiva.

3. Se R è riflessiva e simmetrica allora R è transitiva.