

Formulario

Cinematica

moto rettilineo uniforme

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t \\ v_0 \text{ costante} \end{cases}$$

moto uniformemente accelerato

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \\ v(t) = v_0 + a_0 t \\ a_0 \text{ costante} \end{cases}$$

moto armonico

$$x(t) = A \sin(\phi + \omega t)$$

$$v(t) = A\omega \cos(\phi + \omega t)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\phi + \omega t) = -\omega^2 x(t)$$

$$\text{periodo} = T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{frequenza} : \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\text{pulsazione} : \omega = 2\pi\nu$$

moto circolare (R :: raggio)

$$\omega(t) = \text{velocità angolare}$$

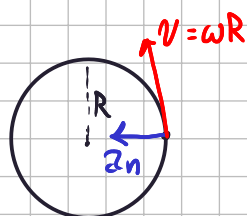
$$v = \omega R \text{ velocità tangenziale}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} \text{ accelerazione tangenziale}$$

$$a_n = \omega^2 R \text{ accelerazione normale}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \text{ acc. totale}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$



moto circ. unifor.

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(\theta(t)) \\ y(t) = R \sin(\theta(t)) \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

Dinamica

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\text{quantità di moto} \quad \vec{p} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{v}$$

$$\text{impulso} \quad I = \int_{t_0}^t \vec{F} dt \quad \text{e} \quad I = \Delta \vec{p}$$

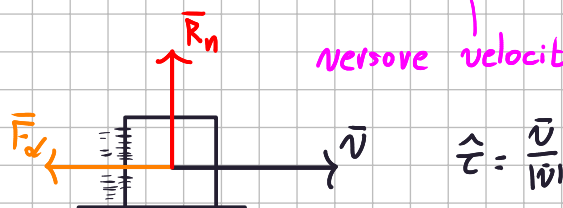
$$\text{Forza media} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{|\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)|}{t_2 - t_1}$$

Attrito

$$\text{Statico} \quad \vec{F}_s \leq \mu_s R_n \quad R_n := \text{reazione normale}$$

$$\text{Dinamico} \quad \vec{F}_d = -\mu_d \cdot R_n \cdot \hat{z}$$

verso velocità



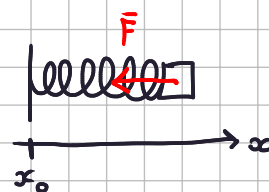
$$\text{attrito dell'aria} : \vec{F} = -b\vec{v}$$

coefficiente

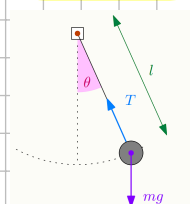
Forza Elastica

$$\vec{F} = -K(x - x_0)$$

coefficiente centro
pos



Pendolo



$$-mg \sin \theta = -m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$-mg \sin\left(\frac{s}{l}\right) = -m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\text{per } \theta \rightarrow 0 \Rightarrow -mg \frac{s}{l} = -m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

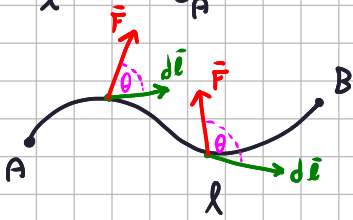
$$\Rightarrow s = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Lavoro

$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo di Forze

$$L = \int_A^B \vec{F} d\vec{\ell} = \int_A^B F d\ell \cos \theta = \Delta T$$



energia cinetica $T = \frac{1}{2} m v^2$

$$L = \frac{1}{2} m v^2(B) - \frac{1}{2} m v^2(A)$$

\vec{F} e' conservativa se

$L = -\Delta U$ dove U energia potenziale

$$\oint \vec{F} d\vec{\ell} = 0$$

Potenziale gravita' $U(y) = mgy$ ↑ altezza

Potenziale gravitazionale $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ ↑ distanza

Potenziale elastica $U(x) = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2$

Energia meccanica $E_m = U + T$
 $= U + \frac{1}{2} m v^2$

Se \vec{F} e' conservativa $\Delta E_m = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} L = \Delta T \\ L = -\Delta U \end{cases} \Rightarrow \Delta T + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta(T + U) = 0$$

$\Delta E_m = \text{LAVORO FORZE NON CONSERVATIVE}$

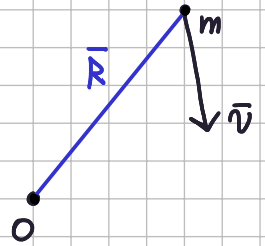
Potenza

$$P = \frac{dL}{dt}$$

Momento Angolare

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{p} = \vec{R} \times \frac{d}{dt} m \vec{v}$$

↑
quantita' di moto



momento della quantita' di moto

$$\vec{b} = \vec{R} \times m \vec{v}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} \times m \vec{v}$$

essendo $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$

$$\vec{b} = \vec{R} \times m(\vec{\omega} \times \vec{R}) = m R^2 \vec{\omega}$$

momento di inerzia $I = m R^2$

$$\vec{b} = I \vec{\omega}$$

il momento si puo' scrivere $\vec{M} = \frac{d}{dt} I \vec{\omega} = I \dot{\vec{\omega}}$ se I cost.

Sistema di Punti

le forze interne si annullano. n punti

$$\vec{F}_{(est)} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i$$

pos. di ogni punto

centro di massa $\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$

vel. del sistema (centro di massa)

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \vec{v}_c \quad \text{Somma masse} \quad M = \sum m_i$$

\Rightarrow quantita' di moto del sistema

$$\vec{p}_c = M \vec{v}_c = \sum m_i \vec{v}_i$$

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_c = \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{(est)}$$

Urti

• elastici: la quantità di moto si conserva.

2 corpi

Masses: m_1, m_2
vel. post urto v_1, v_2
vel. pre urto u_1, u_2

Cons. quantità di moto

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

cons. energia cinetica

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Momento sistema di punti

$$\begin{cases} \vec{M}_i = \frac{d\vec{b}_i}{dt} + \vec{v}_0 \times \vec{r}_i \\ \vdots \\ \vec{M}_n = \frac{d\vec{b}_n}{dt} + \vec{v}_0 \times \vec{r}_n \end{cases}$$

i momenti interni del sistema si annullano

$$\left(\frac{d}{dt} \sum \vec{b}_i \right) + \vec{v}_0 \times \left(\sum \vec{r}_i \right)$$

Si può riscrivere

$$\frac{d}{dt} \left(\sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right) + \vec{v}_0 \times \left(\sum \vec{r}_i \right)$$

Il momento del sistema non è uguale alla somma dei momenti

Sistema Continuo

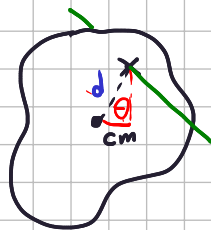
per un oggetto puntiforme $I = R m^2$

$$dI = R^2 dm = R^2 \lambda dR \Rightarrow \lambda \text{ densità: } \frac{dm}{dR} = \lambda$$

$$I = \int_S dI$$

← sup. oggetto

Pendolo Composto



d = dist. centro di massa - punto inf.

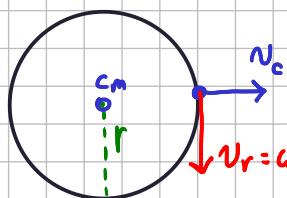
$$-m g \cdot d \cdot \theta = -I_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad \text{per } \theta \rightarrow 0$$

I_0 = momento di inerzia con polo in cm

$$I_0 = I_{cm} + m \cdot d^2$$

↑ momento in. centro massa

Rotolamento



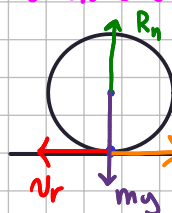
Velocità centro di massa

Velocità di rotazione

$$v_a = v_c + v_r$$

↑ vel. assoluta di ogni punto

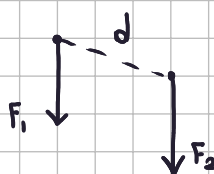
$|v_c| = |v_r| \Rightarrow$ rotolamento puro



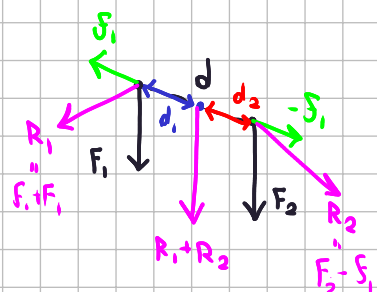
nel punto di contatto

$$F_d = \mu R_n = \mu m g$$

Sistemi eq. di Forze



$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{F_1}$$



Campo Elettrico

Coloumb

q esercita su q_0 $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q_0}{r^2} \hat{r}$
 $r := \text{dist}(q, q_0)$

Campo Elettrico

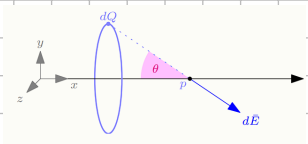
$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

q_0 immersa in \vec{E} sente $\vec{F} = q_0 \vec{E}$

Sistema di cariche: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$

Sup. carica: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{dQ}{r^2} \hat{r}$

Anello Carico



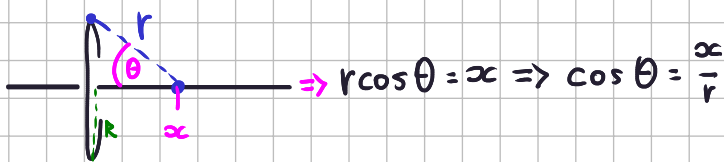
$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \cos\alpha$$

λ densita' $\Rightarrow dQ = \lambda dl$

$dl = \text{punto circonferenza}$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\lambda dl}{r^2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos\theta Q$$

non dipende dal punto sulla circ.



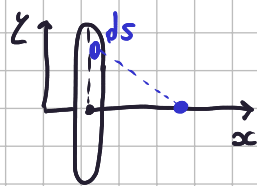
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3} Q$$

dipende da x raggio

$r = \sqrt{R^2 + x^2}$

Disco Carico

$$dQ = \lambda dS \quad dS = \text{sup. infinitesima}$$



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\lambda dS}{r^2}$$

superf.

Cambio:

$dS = \text{anello infinitesimo}$
 \hookrightarrow spessore anello



$$dS = (2\pi r) \cdot dr$$

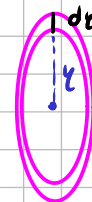
raggio

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot dQ$$

dens. \hookrightarrow dist $x = \text{raggio } r \text{ anello}$

$$dQ = \sigma \cdot (2\pi r) dr$$

sup. anello inf.



RAGGIO DISCO $\rightarrow R$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sigma 2\pi \cdot x \int_0^R \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dr$$

$$E(x) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

Piano Carico

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

