Esame 23 Gennaio 2019

Esercizio 1

i) In quanti modi posso distribuire 9 palline in 3 scatole, ognuna da 3 palline?
Uso il multinomio: $\binom{9}{3,3,3} = \frac{9!}{3!\cdot 3!\cdot 3!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 5\cdot 2}{3}$.

ii) È una permutazione: $9!$

iii) Prendo 3 studenti per il primo gruppo: $\binom{9}{3}$, poi i restanti per il secondo: $\binom{6}{3}$ e gli ultimi 3: $\binom{3}{3}=1$, ma divido per le permutazioni dei 3 gruppi: $\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}\cdot\frac{1}{3!}$

iv) Creo il primo gruppo: $\binom{9}{5}$ poi il secondo $\binom{4}{2}$, poi il terzo: $\binom{2}{2}=1$, e divido per le permutazioni dei 2 gruppi da 2: $\binom{9}{5}\cdot\binom{4}{2}\cdot\frac{1}{2} = \binom{9}{5}\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 2}\cdot\frac{1}{2} = \binom{9}{5}\cdot 3$

v) Ovviamente, in un solo modo: 1.

Esercizio 2

i) Uso la formula delle prob. totali: $A := \{$pesco moneta 2 teste$\}$, $B := \{$pesco moneta 2 croci$\}$
$N := \{$pesco moneta normale$\}$. $T = \{$ottengo testa$\}$ $C = \{$ottengo croce$\}$

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(T|A) + \mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(T|B) + \mathbb{P}(N)\cdot\mathbb{P}(T|N) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{3}{10}\cdot 0 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$$

ii) Uso la formula di Bayes:
$$\mathbb{P}(A|T) = \frac{\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(T|A)}{\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(T|A) + \mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(T|B) + \mathbb{P}(N)\cdot\mathbb{P}(T|N)} = \frac{(1/2)}{(3/5)} = \frac{5}{6}$$

Esercizio 3

i) Considero $X \sim Binom(10, \frac{1}{4})$ la variabile che conta le risposte giuste di Alice.
$(10-X)$ sono le risposte sbagliate, il voto è: $V = X\cdot 3 + (10-X)\cdot(-1)$, per prendere 18:
$18 = X\cdot 3 + (10-X)\cdot(-1) \Rightarrow 18 = 3X - 10 + X \Rightarrow 4X = 28 \Rightarrow X = \frac{28}{4} \Rightarrow X = 7 \Rightarrow$ Alice deve rispondere a 7 domande:
$$\mathbb{P}(X=7) = \binom{10}{7}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{5\cdot 8}{3}\cdot\frac{1}{4^7}\cdot\frac{27}{64} = \frac{5}{3}\cdot\frac{27}{4^7}$$

ii) Il valore di attesa della binomiale è: $10\cdot\frac{1}{4} = \frac{10}{4} \Rightarrow V = \frac{10}{4}\cdot 3 - \left(10 - \frac{10}{4}\right) = \frac{30}{4} - \frac{30}{4} = 0$

iii) La varianza di X è $10\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}$ ← Varianza delle risposte (non del voto)

Esercizio 4

i) Il numero di persone è $P \sim Poisson(1000) \Rightarrow \mathbb{E}(P) = 1000 \Rightarrow$ Omosessuali in sala: $1000\cdot 0.05 = 50$.

ii) Il numero di omosessuali è dato da $G \sim Poisson(50)$, ed ha distribuzione:
$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(G=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{50}{n}\right)^k\cdot\left(1-\frac{50}{n}\right)^k = \frac{50^k}{k!}\cdot e^{-50}$$