Appunti per esonero calcolo integrale Serie numeriche

Limiti notevoli

esponenziali e logaritmici

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

2) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{nx} = e^{na}$

5) $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$

6) $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$

7) $\lim_{x\to 0}\lg_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\lg_e a}$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{\lg_a(1+x)}{x} = \lg_a e = \frac{1}{\ln a}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = a$

11) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{ax} = 1$

12) $\lim_{x\to 0}x^r\lg_a x = 0 \quad \forall a\in R^+-\{1\}, \forall r\in R^+$

13) $\lim_{x\to 0}\frac{\lg_a x}{x^r} = 0 \quad \forall a\in R^+-\{1\}, \forall r\in R^+$

14) $\lim_{x\to+\infty}x^r a^x = \lim_{x\to+\infty}a^x \quad \forall a\in R^+-\{1\}, \forall r\in R^+$

15) $\lim_{x\to-\infty}|x|^r a^x = \lim_{x\to-\infty}a^x \quad \forall a\in R^+-\{1\}, \forall r\in R^+$

16) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^r} = \lim_{x\to+\infty}a^x \quad \forall r\in R^+$

17) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^r}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}a^x \quad \forall r\in R^+$

18) $\lim_{x\to-\infty}e^x x^r = 0 \quad \forall r\in R^+$

goniometrici

1) $\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x} = 1$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{sen\ ax}{bx} = \frac{a}{b}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{tg\ x}{x} = 1$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{tg\ ax}{bx} = \frac{a}{b}$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{arcsen\ x}{x} = 1$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{arcsen\ ax}{bx} = \frac{a}{b}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{arctg\ x}{x} = 1$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{arctg\ ax}{bx} = \frac{a}{b}$

11) $\lim_{x\to 0}\frac{senh\ x}{x} = 1$

12) $\lim_{x\to 0}\frac{settsenh\ x}{x} = 1$

13) $\lim_{x\to 0}\frac{tgh\ x}{x} = 1$

14) $\lim_{x\to 0}\frac{settgh\ x}{x} = 1$

15) $\lim_{x\to 0}\frac{x-sen\ x}{x^3} = \frac{1}{6}$

16) $\lim_{x\to 0}\frac{x-arctg\ x}{x^3} = \frac{1}{3}$

Serie di Taylor notevoli

Sono centrate in 0.

$T_{n,0}e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^0)^{(k)}}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k \ \forall x \in \mathbb{R}$
$T_{n,0}\ cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \ \forall x \in \mathbb{R}$
$T_{n,0}\ sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \ \forall x \in \mathbb{R}$
$T_{n,0}\ f(\frac{1}{1-x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \ \forall x \in (-1,1)$
$T_{n,0}\ f(\frac{1}{1+x}) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^k \ \forall x \in (-1,1)$
$T_{n,0}\ arctan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}2^{2k+1} \ \forall x \in (-1,1)$
$T_{n,0}\ log(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}2^{k+1} \ \forall x \in (-1,1)$

Teoremi

Vediamo alcuni teoremi fondamentali quando si parla di sommatorie :

Teorema condizione necessaria

Se $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k < \infty$, quindi tende ad un valore finito l, allora a_k tende a 0.

Dimostrazione:

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n \implies l_1 - l_2 = 0 \text{ quindi } a_n \to 0$$

Teorema serie a termini positivi

Vediamo alcuni teoremi importanti quando si parla di serie per le quali il valore di a_k è sempre maggiore o uguale a 0.

Se $a_k \geq 0 \; \forall k \Rightarrow S_n = \begin{cases} \text{converge} \\ \text{diverge a } \infty \end{cases}$

Se $a_k \geq 0 \; \forall k$ e $a_k \nrightarrow 0$, quindi non tende a 0, allora S_n **non è convergente.**

Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty \implies a_k \to 0$, quindi se la serie è convergente, sicuramente a_k tende a 0.

Dimostrazione:

$$\forall n \to S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}$$

Teorema del confronto

Abbiamo due successioni a_k e b_k tali che :

Se $0 < a_k < b_k$ allora:

- Se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$
- Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \implies \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$

Teorema del confronto asintotico

Sempre avendo le due successioni a_k e b_k, Se $0 < a_k$, $0 < b_k$, e $\lim_{n \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = l$ allora:

- Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty \iff \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$
- Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \iff \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$

Se le funzioni “crescono” allo stesso modo convergono/divergono allo stesso modo e possono essere approssimate alla stessa funzione.

Criterio del rapporto e della radice

Il **criterio del rapporto** ed il **criterio della radice** sono due diversi criteri che giungono alla stessa conclusione, hanno quindi la stessa tesi, sono definiti come :

Criterio del rapporto

Sia $a_k \geq 0$, ed abbiamo $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = L$

Criterio della radice

Sia $a_k \geq 0$, ed abbiamo $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L$

Tesi

Allora $\begin{cases} \text{Se } 0 \leq L < 1 \text{ la serie converge} \\ \text{Se } L > 1 \text{ la serie diverge} \end{cases}$

Formula di Sterling

La formula di Sterling non fa altro che descrivere quanto velocemente cresce $k!$ quando $k \to \infty$, ed essa vale :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k!}{k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}} = 1 < +\infty$$

Criterio di Leibnitz

Se dovessimo avere una serie in cui è presente, ma non da solo $(-1)^k$, nonostante il segno non sia costante, tramite il **criterio di Leibnitz** possiamo decretare se essa è convergente o meno.

Abbiamo quindi una serie $S_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$, e abbiamo tre condizioni :

- $b_k \geq 0$ (è maggiore o uguale a 0)
- $b_k \searrow$ (è decrescente)
- $b_k \to 0$ (tende a zero)

Se tutte e 3 le condizioni sono soddisfatte, possiamo dire con certezza che la successione S_n è convergente.

Teorema di convergenza assoluta

Vediamo prima due definizioni:

Converge assolutamente

Si dice che una serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge assolutamente se $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty$

Diverge assolutamente

Si dice che una serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge assolutamente se $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \pm\infty$

possiamo quindi dire che se una serie converge assolutamente, allora converge a prescindere dal suo segno (non si può dire la stessa cosa per la divergenza).

Calcolo derivate con principio di sostituzione

Se una determinata funzione può essere riscritta sotto-forma di serie di Taylor, la derivata

$k - esima$ può essere riscritta come $a_k k!$ dove a_k è il coefficiente con termine di grado k.

> Se $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \implies f^{(k)}(0) = a_k k!$

Esempio :

Abbiamo la funzione $f(x) = x^3 sin(x^3)$, vogliamo trovare $f^6(0), f^{12}(0), f^{18}(0)$, quindi trovarne la derivata sesta, dodicesima e diciottesima, partiamo quindi con lo sviluppo del polinomio di Taylor (ci avvaliamo dello sviluppo noto del seno).

$x^3 sin(x^3) = \frac{1}{1!}x^6 - \frac{1}{3!}x^{12} + \frac{1}{5!}x^{18} - ...$

Adesso applichiamo la formula $f^{(k)}(0) = a_k k!$:

$f^{(6)}(0) = \frac{1}{1!}6!$

$f^{(12)}(0) = \frac{1}{3!}12!$

$f^{(18)}(0) = \frac{1}{5!}18!$

Teorema somma di derivate

La derivata di una funzione è uguale alla somma delle sue derivate.

Esempio :

Sappiamo che :

$$log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

anche :

$$[log(1+x)]' = [\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k]'$$

quindi :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} k * a_k x^{k-1}$$

Trasformare una serie in serie di potenze

Adesso vediamo però un **esempio particolare** :

$$e^{3x-5} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(3x-5)^k}{k!}$$

Notiamo che in questo caso, la parte che dovrebbe rappresentare il centro non rispetta il *template* delle serie di potenze, dato che la x alla quale sottraiamo x_0 deve essere prodotto fra se stessa ed 1. $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(1x - x_0)^k$, invece nella nostra equazione, abbiamo $(3x-5)^k$. Dobbiamo quindi trasformare tale serie in una serie di potenza con dei passaggi algebrici.

Serie di partenza : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(3x-5)^k}{k!}$

al denominatore, raccogliamo il 3 : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(3(x-\frac{5}{3}))^k}{k!}$

Infine, portiamo il 3 fuori dalle parentesi : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k(x-\frac{5}{3})^k}{k!}$

A questo punto abbiamo ottenuto una serie di potenze :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!}(x-\frac{5}{3})^k \text{ dove } \begin{cases} a_n = \frac{3^k}{k!} \\ x_0 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Da questa dimostrazione, ne ricaviamo la formula generale :

💡 $$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k(Ax+B)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k A^k(x+\frac{B}{A})^k$$

Raggio di Convergenza

Una volta ottenuta una serie di potenze, la domanda da porsi è, per quali valori $x \in \mathbb{R}$ la serie risulta convergente?

per una serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ chiamiamo $E = \{x \in \mathbb{R} \text{ tale che la serie converge}\}$, quindi l'insieme/intervallo della retta reale nella quale la serie converge.

Si ricordi che $x_0 \in E$, quindi la serie di potenze **converge sempre nel centro**, e vale a_0, tutte le serie di potenze hanno un insieme E con almeno un valore x_0.

Vediamo ora cosa si intende con raggio di convergenza :

Definizione

Esiste un certo $R \in [0, +\infty]$ tale che $\begin{cases} \text{se } |x - x_0| < R \text{ la serie converge} \\ \text{se } |x - x_0| > R \text{ la serie non converge} \end{cases}$

Chiamiamo R **raggio di convergenza**, quindi esiste un intervallo $[x_0 - R, x_0 + R]$ nella quale la serie converge.

In base ai possibili valori di R, abbiamo 3 casistiche :

- $R = 0 \implies E = \{x_0\}$ Se il raggio di convergenza è uguale a 0, l'insieme E avrà un solo valore, ed esso sarà il centro x_0.
- $R = +\infty \implies E = \mathbb{R}$ Se il raggio di convergenza è infinito, la serie convergerà sempre, quindi in tutta la retta reale.
- $0 < R < +\infty \implies E = [x_0 - R, x_0 + R]$ Se R è un valore finito diverso da 0, la serie convergerà solamente se $|x - x_0| < R$. Attenzione! Non è sempre detto che i punti $x_0 - R$ e $x_0 + R$ siano inclusi in E.

Calcolo del raggio di convergenza

Adesso data una serie vogliamo saper calcolare R, bastano pochi passaggi :

Abbiamo la serie di potenze $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$ e ci importa trovare il valore di L :

Si può usare il **criterio del rapporto** o il **criterio della radice** :

$$L = \lim_{k \to +\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Una volta trovato L, abbiamo 3 casistiche :

- Se $L = 0$, allora $R = +\infty$
- Se $L = +\infty$, allora $R = 0$
- Se $0 < L < +\infty$, allora $R = \frac{1}{L}$

In un certo senso possiamo dire che $R = \frac{1}{L}$.

Teorema di infinità derivabilità

❗ Il nome di questo teorema non è stato specificato a lezione, è stato scritto quindi “Teorema di infinità derivabilità” in maniera del tutto **non ufficiale**.

Abbiamo una funzione $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$ derivabile infinite volte in E. Quindi :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$$

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) a_k (x - x_0)^{k-2}$$

$$f'''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)(k-2) a_k (x - x_0)^{k-3}$$

Andando avanti è chiara la formula generale :

💡 $f^{(k)}(x_0) = k! a_k$

Taylor sviluppi noti

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

Esempio sviluppi esercizi

$$\frac{x^2}{2} = e^x - 1 - x + \cdots$$

$$\frac{x^5}{5!} = sin(x) - x - \frac{x^3}{6} + \cdots$$

$$\frac{x^4}{2!} = cos(x) - 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots$$