Esercizio 1. Un dado equo viene lanciato finché non esce 5 o 6. Sia T il numero totale di lanci effettuati e X il risultato del dado nell'ultimo lancio effettuato.

1) Calcolare $\mathbb{P}(T = 3, X = 5)$.
2) Calcolare la distribuzione di T.
3) Calcolare la distribuzione di X.
4) Dire, giustificando la risposta, se sono variabili aleatorie T e X sono indipendenti.

T e' una V.A. geometrica di parametro $\mathbb{P}(\{\text{esce } 5 \text{ o } 6\}) = \frac{1}{3}$, X invece e' una V.A binaria di parametro $\frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X=5)=\mathbb{P}(X=6)=1/2$. T ed X sono indipendenti.

1) $\mathbb{P}(T=3 \cap X=5) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{54} = \frac{2}{27}$

2) $\mathbb{P}(T=K) = \left(\frac{2}{3}\right)^{K-1} \cdot \frac{1}{3}$, $\lim_{K\to\infty} \mathbb{P}(T=K) = 0 \Rightarrow$ Prima o poi escono 5 o 6.

3) $\mathbb{P}(X=i) = 1/2$

4) Sono indipendenti dato che il numero di lanci di un dado non condiziona l'esito di esso, la V.A. geometrica e' soggetta a "perdita di memoria".

Esercizio 2. Siano X_1, X_2 variabili aleatorie indipendenti uniformi in $\{1, \ldots, n\}$.

1) Calcolare la distribuzione di $X_1 + X_2$.
2) Calcolare il valore di attesa di $X_1 + X_2$.
3) Calcolare la varianza di $X_1 + X_2$.

$\mathbb{P}(X_1=K) = \mathbb{P}(X_2=K) = \frac{1}{n}$, considero $Y = X_1 + X_2 \Rightarrow Im(Y) = \{1 \ldots, 2n\}$ ma non e' piu' uniforme!

$\mathbb{P}(Y=2n) = \mathbb{P}(X_1=n, X_2=n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$

$\mathbb{P}(Y=n) = \mathbb{P}(X_1=n, X_2=0) \cup \mathbb{P}(X_1=0, X_2=n) \cup \mathbb{P}(X_1=\frac{n}{2}, X_2=\frac{n}{2}) = \frac{3}{n^2}$

2) $\mathbb{E}(X_1+X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i \cdot \mathbb{P}(X_1=i) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{2}{n} \cdot \frac{n^2-n}{2} = = n-1$

3) $\mathbb{V}(X_1+X_2) \underset{\text{INDIPENDENZA}}{=} \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(i - \frac{n-1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(i - \frac{n-1}{2}\right)^2 = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2 - ni - i + \frac{n^2-2n+1}{4}$

$= \frac{2}{n} \left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - n \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i + \frac{n^3-2n^2+n}{4} \right] = \frac{2}{n} \left[\frac{2n^3+3n^2+n}{6} - \left(\frac{n^3-n^2}{2}\right) - \left(\frac{n^2-n}{2}\right) + \frac{n^3-2n^2+n}{4} \right]$

$= \frac{2n^2+3n+1}{3} - n^2 + n - n + 1 + \frac{n^2-2n+1}{2} = \frac{4n^2+6n+2-6n^2+6+3n^2-6n+3}{6} = \frac{n^2+11}{6}$

Esercizio 4. Il tempo di rottura del componente C_i è descritto dalla variabile aleatoria T_i, $i = 1, \ldots, k$. Si assuma che le variabili aleatorie $T_1, \ldots, T_k$ siano indipendenti e che $T_i \sim \text{Geom}(p)$ con $p \in (0,1)$, $i = 1, \ldots, k$.

1) Trovare la distribuzione del tempo di rottura per il circuito C_{ser} ottenuto mettendo in serie i componenti C_1, ..., C_k.
2) Trovare la distribuzione del tempo di rottura per il circuito C_{par} ottenuto mettendo in parallelo i componenti C_1, ..., C_k.

1) Sappiamo che $\mathbb{P}(T_i=n) = (1-p)^{n-1} \cdot p$, Un circuito in serie si rompe se un solo componente si rompe: $\mathbb{P}(C_{ser} \text{ si rompe al tempo } n) = \mathbb{P}(T_1=n \vee \ldots \vee T_K=n) = \sum_{i=1}^{K} \mathbb{P}(T_i=n) = K \cdot (1-p)^{n-1} \cdot p$

2) C_{par} si rompe se tutte si rompono, $\mathbb{P}(C_{par} \text{ si rompe al tempo } n) = \{$tutte si rompono al tempo $\leq n$ ed una al tempo $n) = \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} (1-p)^i \cdot p}_{\text{si rompe al tempo } \leq n}\Big)^{K-1} \cdot \underbrace{(1-p)^{n-1} \cdot p}_{\text{UNA SI ROMPE AL TEMPO } n}$

$K-1 \to$ K-1 COMPONENTI

Esercizio 5. In uno schema di Bernoulli con probabilità di testa $p \in (0,1)$ sia X la variabile aleatoria che conta il numero di risultati consecutivi uguali al primo; ovvero $X = 1$ se il primo lancio è testa e il secondo croce oppure il primo croce ed il secondo testa, $X = 2$ se due teste e poi una croce oppure due croci e poi una testa,...

1) Trovare la distribuzione di X.

2) Calcolare il valore di attesa di X.

3) Calcolare la varianza di X.

1) Al primo lancio esce testa $\wedge$ K-teste consecutive $\vee$ esce croce $\wedge$ K-croci consecutive:

$$\mathbb{P}(X=K) = \boxed{p^K \cdot (1-p) + (1-p)^K \cdot p}$$

2) $$\mathbb{E}(X) = \sum_{K=1}^{\infty} K \cdot \left[p^K \cdot (1-p) + (1-p)^K \cdot p\right] = \sum_{i=1}^{\infty} K \cdot p^K \cdot (1-p) + \sum_{i=1}^{\infty} K \cdot (1-p)^K \cdot p = (1-p) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} K \cdot p^K + p \cdot \sum_{i=1}^{\infty} K \cdot (1-p)^K$$

! $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot c^i = \frac{1}{c}$

$$= (1-p) \cdot \frac{1}{p} + p \cdot \frac{1}{(1-p)} = \frac{(1-p)}{p} + \frac{p}{(1-p)} = \boxed{\frac{2p^2 - 2p + 1}{p - p^2}}$$

3) $$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[K - \frac{2p^2 - 2p + 1}{p - p^2}\right]^2 \cdot p^K \cdot (1-p) + (1-p)^K \cdot p$$