



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 8
19 Maggio 2023 — Compito n. 00097

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella “**C**” serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
 Per selezionare una casella, annerirla completamente: **■** (non **☒** o **☐**).

Nome: Mario
 Cognome: Lozu
 Matricola: 2046212

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>							

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 0.$$

- 1A)** L'equazione ha un'unica soluzione.
1B) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(2) = 3$.
1C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(4) = 3$ e $y'(4) = 6$.
1D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che

$$y(3) = 2, \quad y'(3) = 7, \quad y''(3) = 25.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y''(t) - 11y'(t) + 28y(t) = 84.$$

- 2A)** Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 11L + 28$.
2B) La funzione $y_0(t) = 4e^{4t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).
2C) La funzione $\bar{y}(t) = 3$ è una soluzione particolare di (1).
2D) Se $y(0) = 3$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A y(t) + B y(t) = 0, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

- 3A)** Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + AL + B$.
3B) Se $A = 0$ e $B = -25$, la funzione $y(t) = 6e^{5t} - 9e^{-5t}$ non è soluzione dell'equazione.
3C) Se $A = -4$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 6$ non è soluzione dell'equazione.
3D) Se $A = -10$ e $B = 29$, la funzione $y(t) = 2e^{5t} \sin(2t)$ è soluzione dell'equazione.

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 5y'(t) = -30.$$

- 4A)** Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C + D e^{5t}$.
4B) Esistono soluzioni costanti dell'equazione.
4C) La funzione $\bar{y}(t) = 6t$ non è soluzione dell'equazione.
4D) Se $y(0) = 6$ e $y'(0) = 6$, la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

Docente

- DelaTorre Pedraza
 Orsina

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00097

5) Si consideri l'equazione differenziale

(1) $y''(t) - 18y'(t) + 72y(t) = -6e^{6t}$.

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.

b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).

c) Trovare una soluzione particolare di (1).

d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

$$\textcircled{a} P(\lambda) \rightarrow \lambda^2 - 18\lambda + 72 = 0 \Rightarrow D = 324 - 4(72) = 36 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{18 \pm 6}{2} \rightarrow \begin{cases} 12 \\ 6 \end{cases}$$

$$\textcircled{b} \quad y_p(t) = C e^{6t} + D e^{12t}$$

\textcircled{c} osservando che $-6e^{6t}$ è sol. dell'omogenea associata, cerco una sol. gene $\bar{y}(t) = tQ e^{6t}$

$$\bar{y}(t) = Q e^{6t} + 6Qte^{6t}$$

$$\bar{y}'(t) = 12Qe^{6t} + 36Qte^{6t}$$

$$12Qe^{6t} + 36Qte^{6t} - 18Qe^{6t} - 108Qte^{6t} + 72Qe^{6t} = -6e^{6t} \Rightarrow Q = 1$$

$$\textcircled{d} \quad y(t) = t e^{6t} \quad y(t) = C e^{6t} + D e^{12t} + t e^{6t}$$

$$y(t) = e^{6t}(C+t) + D e^{12t}$$

$$y'(t) = (C+t)6e^{6t} + e^{6t} + 12D e^{12t}$$

$$y(0) = 0 \rightarrow 0 = C + D$$

$$y'(0) = 1 \rightarrow 1 = 6C + 1 + 12D = 1 \rightarrow 6C + 12D = 0 \rightarrow 6C = -12 \rightarrow C = -2D$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = C - 6C = 0 \rightarrow C = 0 = D \end{array} \right.$$

$$y(t) = t e^{6t}$$



Cognome

Nome

Matricola

Compito 00097

6) Si consideri l'equazione differenziale

(1)

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 2e^{2t}.$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).

b) Si trovi una soluzione particolare di (1).

c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$.d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 7$ e $y'(0) = 0$.

$$\textcircled{a} \quad (C+Dt)e^{2t} = y(t)$$

$$\textcircled{b} \quad \bar{y}(t) = Qt^2 e^{2t}$$

$$\bar{y}'(t) = 2Qt e^{2t} + 2Qt^2 e^{2t}$$

$$\bar{y}''(t) = 8Qt e^{2t} + 4Qt^2 e^{2t} + 2Qe^{2t}$$

ho che

$$8Qt e^{2t} + 4Qt^2 e^{2t} + 2Qe^{2t} - 8Qt e^{2t} - 8Qt^2 e^{2t} + 4Qt^2 e^{2t} = 2e^{2t}$$

$$2Qe^{2t} = 2e^{2t} \Rightarrow Q = 1$$

$$\text{QUINDI} \quad \bar{y}(t) = t^2 e^{2t}$$

$$y(t) = (C+Dt)e^{2t} + t^2 e^{2t}$$

$$y'(t) = 2te^{2t} + 2t^2 e^{2t} + De^{2t} + 2(C+Dt)e^{2t}$$

$$\textcircled{c} \quad \begin{aligned} y(0) &= 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} C=0 \\ D+2C=2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} C=0 \\ D=2 \end{array} \right. \\ y'(0) &= 2 \quad \end{aligned} \quad y(t) = 2te^{2t} + t^2 e^{2t} = te^{2t}(2+t)$$

$$\textcircled{d} \quad \begin{aligned} y(0) &= 7 \quad \left\{ \begin{array}{l} C=7 \\ D+2C=0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} C=7 \\ D=-14 \end{array} \right. \quad y(t) = (7-14t+t^2)e^{2t} \\ y'(0) &= 0 \quad \end{aligned}$$

Soluzioni del compito 00097

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 0.$$

1A) L'equazione ha un'unica soluzione.

Falso: Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali.

1B) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(2) = 3$.

Falso: L'equazione ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali. Assegnando una sola condizione, si "fissa" uno solo dei due parametri, e quindi l'equazione ha infinite soluzioni tali che $y(2) = 3$.

1C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(4) = 3$ e $y'(4) = 6$.

Vero: Assegnando due condizioni, una sulla funzione e una sulla derivata, si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione.

1D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che

$$y(3) = 2, \quad y'(3) = 7, \quad y''(3) = 25.$$

Vero: Se $y(3) = 2$ e $y'(3) = 7$, dall'equazione segue che deve essere

$$0 = y''(3) + 2y'(3) + 3y(3) = y''(3) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 7 = y''(3) + 25,$$

da cui segue che $y''(3) = -25$. Pertanto, l'unica soluzione dell'equazione che soddisfa le condizioni $y(3) = 2$ e $y'(3) = 7$ è tale che $y''(3) = -25 \neq 25$; in altre parole, non esistono soluzioni dell'equazione che soddisfano le tre condizioni richieste.

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y''(t) - 11y'(t) + 28y(t) = 84.$$

2A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 11L + 28$.

Vero: Sostituendo y'' con L^2 , y' con L e y con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 - 11L + 28.$$

2B) La funzione $y_0(t) = 4e^{4t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

Vero: Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 11L + 28$, che si annulla per $L_1 = 4$ e $L_2 = 7$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C e^{4t} + D e^{7t},$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 4$ e $D = 0$, si ha che $y_0(t) = 4e^{4t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

Alternativamente, se $y_1(t) = e^{4t}$ si ha, derivando,

$$y'_1(t) = 4e^{4t}, \quad y''_1(t) = 16e^{4t},$$

e, sostituendo nell'equazione,

$$y''_1(t) - 11y'_1(t) + 28y_1(t) = [16 - 11 \cdot 4 + 28] e^{4t} = 0 \cdot e^{4t} = 0,$$

e quindi $y_1(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1). Dato che tale equazione è lineare, anche $y_0(t) = 4y_1(t)$ è soluzione dell'omogenea.

2C) La funzione $\bar{y}(t) = 3$ è una soluzione particolare di (1).

Vero: Sostituendo nell'equazione si ha, essendo nulle sia la derivata prima che la derivata seconda di $\bar{y}(t)$,

$$y'' - 11y' + 28y = 28 \cdot 3 = 84,$$

e quindi $\bar{y}(t) = 3$ è una soluzione particolare di (1).

2D) Se $y(0) = 3$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

Vero: Come detto nell'esercizio **2C**, la funzione $y(t) \equiv 3$ è soluzione dell'equazione (1). Dato che soddisfa inoltre le condizioni $y(0) = 3$ e $y'(0) = 0$, la funzione $y(t) \equiv 3$ è soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale del secondo ordine, e quindi è l'unica soluzione di (1) che soddisfa tali condizioni.

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A y(t) + B y(t) = 0, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

3A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + A L + B$.

Vero: Sostituendo y'' con L^2 , y' con L e y con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 + A L + B.$$

3B) Se $A = 0$ e $B = -25$, la funzione $y(t) = 6 e^{5t} - 9 e^{-5t}$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $A = 0$ e $B = -25$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 25$ che si annulla per $L = \pm 5$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C e^{5t} + D e^{-5t}.$$

Scegliendo $C = 6$ e $D = -9$, si ha che $y(t) = 6 e^{5t} - 9 e^{-5t}$ è soluzione dell'equazione.

3C) Se $A = -4$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 6$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $A = -4$ e $B = 0$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 4L$ che si annulla per $L = 0$ e per $L = 4$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C e^{0t} + D e^{4t} = C + D e^{4t}.$$

Scegliendo $C = 6$ e $D = 0$, si ha che $y(t) = 6$ è soluzione dell'equazione.

3D) Se $A = -10$ e $B = 29$, la funzione $y(t) = 2 e^{5t} \sin(2t)$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $A = -10$ e $B = 29$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 10L + 29$, che si annulla per $L = 5 \pm 2i$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = e^{5t}[C \cos(2t) + D \sin(2t)].$$

Scegliendo $C = 0$ e $D = 2$, si ha che $y(t) = 2 e^{5t} \sin(2t)$ è soluzione dell'equazione.

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 5y'(t) = -30.$$

4A) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C + D e^{5t}$.

Vero: Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 5L$, che si annulla per $L = 0$ e $L = 5$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C e^{0 \cdot t} + D e^{5t} = C + D e^{5t},$$

con C e D numeri reali.

4B) Esistono soluzioni costanti dell'equazione.

Falso: Se $y(t) \equiv Q$ è una costante, sostituendo nell'equazione si ha

$$y''(t) - 5y'(t) = 0 - 5 \cdot 0 = 0 \neq -30,$$

e quindi l'equazione non ha soluzioni costanti. Alternativamente, sappiamo dalla domanda **4A** che le costanti sono soluzioni dell'equazione omogenea, e quindi non possono essere soluzioni dell'equazione "completa".

4C) La funzione $\bar{y}(t) = 6t$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $\bar{y}(t) = 6t$, si ha $\bar{y}'(t) = 6$ e $\bar{y}''(t) = 0$. Sostituendo nell'equazione si ha

$$\bar{y}''(t) - 5\bar{y}'(t) = -5 \cdot 6 = -30,$$

e quindi $\bar{y}(t) = 6t$ è soluzione dell'equazione.

4D) Se $y(0) = 6$ e $y'(0) = 6$, la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

Falso: Sappiamo già, dagli esercizi **4A** e **4C**, che tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = C + D e^{5t} + 6t,$$

con C e D numeri reali. Pertanto,

$$y'(t) = 5D e^{5t} + 6.$$

Pertanto, assegnando le condizioni iniziali, si ha

$$6 = C + D, \quad 6 = 5D + 6.$$

Dalla seconda si ricava $D = 0$, e sostituendo nella prima si ricava $C = 6$. Ne segue che l'unica soluzione dell'equazione è

$$y(t) = 6 + 6t,$$

che è un polinomio di primo grado (e quindi non è un'esponenziale).

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y''(t) - 18y'(t) + 72y(t) = -6e^{6t}.$$

- a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
 - b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
 - c) Trovare una soluzione particolare di (1).
 - d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.
-

Soluzione:

- a) Sostituendo in (1) L^2 a y'' , L a y' e 1 a y , si trova

$$P(L) = L^2 - 18L + 72,$$

che si annulla per $L_1 = 6$ e per $L_2 = 12$.

- b) Usando le radici del polinomio caratteristico calcolate al punto precedente, abbiamo che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1) sono date da

$$y_0(t) = C e^{6t} + D e^{12t},$$

con C e D numeri reali.

- c) Dato che $g(t) = e^{6t}$ è una soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(t) = Q t e^{6t}.$$

Si ha

$$\bar{y}'(t) = Q(1 + 6t)e^{6t}, \quad \bar{y}''(t) = Q(12 + 36t)e^{6t}.$$

Sostituendo in (1) si ha

$$\bar{y}'' - 18\bar{y} + 72\bar{y} = Q e^{6t} [12 + 36t - 18(1 + 6t) + 72t] = -6Q e^{6t},$$

e quindi $\bar{y}(t)$ è soluzione di (1) se Q è tale che

$$-6Q e^{6t} = -6 e^{6t},$$

da cui segue $Q = 1$ e quindi

$$\bar{y}(t) = t e^{6t}.$$

- d) Da b) e c) abbiamo che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = C e^{6t} + D e^{12t} + t e^{6t},$$

con C e D numeri reali. Dato che

$$y'(t) = 6C e^{6t} + 12D e^{12t} + e^{6t} + 6t e^{6t},$$

si ha $y(0) = C + D$ e $y'(0) = 6C + 12D + 1$. Imponendo le condizioni iniziali, si ha che deve essere $C + D = 0$ e $6C + 12D + 1 = 1$, da cui si ricava facilmente $C = D = 0$. Ne segue che l'unica soluzione di (1) che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ è

$$y(t) = t e^{6t}.$$

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 2e^{2t}.$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).

b) Si trovi una soluzione particolare di (1).

c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$.

d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 7$ e $y'(0) = 0$.

Soluzione:

a) Il polinomio caratteristico è $P(L) = L^2 - 4L + 4$, che si annulla per $L_1 = L_2 = 2$. Conseguentemente, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata ad (1) sono date da

$$y_0(t) = (C + D t) e^{2t},$$

con C e D numeri reali.

b) Dato che sia e^{2t} che $t e^{2t}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare di (1) della forma

$$\bar{y}(t) = Q t^2 e^{2t}.$$

Derivando, si ha

$$\bar{y}'(t) = Q(2t + 2t^2)e^{2t}, \quad \bar{y}''(t) = Q(2 + 8t + 4t^2)e^{2t}.$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$\bar{y}'' - 4\bar{y}' + 4\bar{y}(t) = Q e^{2t} [2 + 8t + 4t^2 - 4(2t + 2t^2) + 4t^2] = 2Q e^{2t},$$

da cui segue che $\bar{y}(t)$ è soluzione di (1) se $Q = 1$. Si ha dunque che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = (C + D t + t^2) e^{2t},$$

da cui segue, derivando, che

$$y'(t) = (2C + D + (2D + 2)t + 2t^2)e^{2t}.$$

Pertanto

$$(2) \quad y(0) = C, \quad y'(0) = 2C + D.$$

c) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 0$ e $2C + D = 2$, da cui $C = 0$ e $D = 2$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (2t + t^2)e^{2t}.$$

d) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 7$ e $2C + D = 0$, da cui $D = -14$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (7 - 14t + t^2)e^{2t}.$$