Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 7
12 Maggio 2023 — Compito n. 00041

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	■	■	□	□	■	■	□	■	■	□	■	■	■	☑	☑	□
F	□	□	■	■	□	□	■	□	□	■	□	□	□	☒	☒	■
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

NON NE SONO SICURO

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) L'equazione differenziale
$$y'(t) = 2\,t + 3\,t^2$$
è del primo ordine.

1B) L'equazione differenziale
$$11\,y'(t)\,y''(t) + 10\,[y(t)]^3 = 0$$
è del secondo ordine.

1C) L'equazione differenziale
$$[\sin(6\,y'(t))]' = 0$$
è del primo ordine.

1D) L'equazione differenziale
$$2\,t\,y^{(1)}(t) + 7\,t^2\,y^{(2)}(t) + 2\,t^3\,y^{(3)}(t) = 0$$
è del secondo ordine.

2) Si consideri l'equazione differenziale
$$y'(t) = 8\,y(t) + 5\,.$$

2A) L'equazione ha infinite soluzioni.
2B) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 6$.
2C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 6$ e $y'(0) = 48$.
2D) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 6$ e $y'(0) = 53$.

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = e^{4\,t^2}\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

3A) Esiste un'unica soluzione di (1).
3B) La soluzione si può scrivere esplicitamente in termini di funzioni elementari.
3C) Si ha $y'(0) = 1$.
3D) Si ha $y''(0) = 0$.

4) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = -6\,y(t) + 30\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

4A) La funzione $Q\,e^{-6\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1) per ogni Q in $\mathbb{R}$.
4B) L'equazione di (1) ha come soluzione

SI, È UNA POSSIBILE SOLUZIONE
$$y(t) = 5\,.$$

$y(t) = Qe^{-6t} + 5$

4C) Si ha $y''(0) = -180$.
4D) Si ha
$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = -5\,.$$

$Q \in \mathbb{R}$

4B! UNA SOL. PARTICOLARE È

$\bar{y}(t) = \left(\int 30 \cdot e^{6t}\right) \cdot e^{-6t} = 30\,\frac{e^{6t}}{6} \cdot e^{-6t} =$

$= 5 \cdot e^{-6t} \cdot e^{6t} = 5 \cdot e^{-6t+6t} = 5 \cdot e^{0} = 5 \cdot 1 = 5$

QUINDI $\bar{y}(t) = 5$

Docente
□ DelaTorre Pedraza
□ Orsina

4C! per il 4C so che

$y(0) = 0$, QUINDI
SE $t = 0$:
$y'(0) = -6 \cdot 0 + 30 = 30 \Rightarrow y'(0) = 30$

$y''(t) = -6\,y'(t) \Rightarrow y''(0) = -6 \cdot y'(0) = -6 \cdot 30 =$

$\Rightarrow y''(0) = -180$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00041**

5) Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine

(1) $$y'(t) = f(t)\,.$$

Scrivere tutte le soluzioni di (1) se

$$\textbf{a)}\ f(t) = 4\,t + 6\,,\quad \textbf{b)}\ f(t) = \cos(3\,t)\,,\quad \textbf{c)}\ f(t) = (8\,t + 3)\,e^{t}\,,\quad \textbf{d)}\ f(t) = \frac{3\,t}{1 + 2\,t^2}\,.$$

---

a) $y'(t) = 4t + 6 \Longrightarrow y(t) = \int^t [4s + 6]\,ds = y(t) = \frac{4t^2}{2} + 6t = 2t^2 + 6t + C$ con $C \in \mathbb{R}$

b) $y'(t) = \cos(3t) \Longrightarrow y(t) = \int^t \cos(3s)\,ds = \frac{\sin(3t)}{3} + C$ con $C \in \mathbb{R}$

c) $y'(t) = (8t+3)e^t \Longrightarrow y(t) = \int (8t+3)e^t\,dt = \begin{cases} a = 8 \\ a + b = 3 \end{cases} \begin{cases} a = 8 \\ b = -5 \end{cases} \Longrightarrow (8t-5)e^t + C$ con $C \in \mathbb{R}$

d) $\int \frac{3t}{1+2t^2} = \int \frac{4t}{1+2t^2} - \frac{t}{1+2t^2} = \int \frac{4t}{1+2t^2} - \frac{1}{4}\int \frac{4t}{1+2t^2} = \log(|1+2t^2|) - \frac{\log(|1+2t^2|)}{4} = \frac{3\log(1+2t^2)}{4} + c$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00041**

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = 10\,y(t) - 7\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha l'equazione di (1)? E quante soluzioni ha (1)?
b) Scrivere l'equazione omogenea associata all'equazione di (1), e scriverne tutte le soluzioni.
c) Trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1).
d) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1) e la soluzione di (1).

---

a) l'equazione di (1) ha INFINITE SOLUZIONI, il problema di Cauchy (1) ha 1 soluzione.

b) $y_0'(t) = 10\,y_0(t)$ $\qquad y_0(t) = Q e^{10t}$ CON $Q \in \mathbb{R}$

c) $\bar{y}(t) = \left(\int -7 \cdot e^{-10t}\right) e^{10t} = \left(-7 \cdot -\frac{e^{-10t}}{10}\right) e^{10t} = \frac{7}{10} e^{-10t} \cdot e^{10t} = \frac{7}{10}$

d) $y(t) = Q e^{10t} + \frac{7}{10}$ $\qquad y(0) = Q e^{0} + \frac{7}{10} \Rightarrow Q + \frac{7}{10} \Rightarrow Q = -\frac{7}{10}$

SOLU

$$\begin{cases} y'(t) = 10y(t) - 7 \\ y(0) = 0 \end{cases} = \quad y(t) = -\frac{7}{10} e^{10t} + \frac{7}{10}$$

Soluzioni del compito 00041

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

Ricordiamo che un'equazione differenziale si dice di ordine $n \geq 1$ se la derivata di ordine massimo della funzione incognita $y(t)$ è la derivata $y^{(n)}(t)$.

1A) L'equazione differenziale

$$y'(t) = 2\,t + 3\,t^2$$

è del primo ordine.

Vero: Infatti vi compare la derivata prima di $y(t)$, e non derivate di ordine superiore.

1B) L'equazione differenziale

$$11\,y'(t)\,y''(t) + 10\,[y(t)]^3 = 0$$

è del secondo ordine.

Vero: Infatti vi compare la derivata seconda di $y(t)$, e non derivate di ordine superiore.

1C) L'equazione differenziale

$$[\sin(6\,y'(t))]' = 0$$

è del primo ordine.

Falso: Infatti, derivando si ha

$$6\,\cos(6\,y'(t))\,y''(t) = 0\,,$$

e quindi l'equazione è del secondo ordine.

1D) L'equazione differenziale

$$2\,t\,y^{(1)}(t) + 7\,t^2\,y^{(2)}(t) + 2\,t^3\,y^{(3)}(t) = 0$$

è del secondo ordine.

Falso: Infatti vi compare la derivata terza di $y(t)$, e non derivate di ordine superiore.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 8\,y(t) + 5\,.$$

2A) L'equazione ha infinite soluzioni.

Vero: Essendo un'equazione del primo ordine, ha infinite soluzioni, dipendenti da un'unica costante reale.

2B) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 6$.

Vero: Assegnando la condizione iniziale $y(0) = 6$ si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione.

2C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 6$ e $y'(0) = 48$.

Falso: Se $y'(0) = 6$, sostituendo nell'equazione si ha

$$y'(0) = 8\,y(0) + 5 = 8 \cdot 6 + 5 = 53 \neq 48\,,$$

e quindi non esiste alcuna soluzione dell'equazione che verifica le due condizioni assegnate.

2D) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 6$ e $y'(0) = 53$.

Vero: Sappiamo già che esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 6$ (si veda la domanda **2B**). Dall'equazione, scritta per $t = 0$, si ricava

$$y'(0) = 8\,y(0) + 5 = 8 \cdot 6 + 5 = 53\,,$$

e quindi la seconda condizione è automaticamente verificata.

---

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = \mathrm{e}^{4\,t^2}\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Integrando tra 0 e s si ha, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$y(s) - y(0) = \int_0^s y'(t)\,dt = \int_0^s \mathrm{e}^{4\,t^2}\,dt\,,$$

da cui, ricordando che $y(0) = 0$, segue che l'unica soluzione del problema di Cauchy è data da:

$$(2) \qquad y(s) = \int_0^s \mathrm{e}^{4\,t^2}\,dt\,.$$

3A) Esiste un'unica soluzione di (1).

Vero: Trattandosi di un problema di Cauchy, esiste un'unica soluzione (si veda anche (2)).

3B) La soluzione si può scrivere esplicitamente in termini di funzioni elementari.

Falso: La soluzione è data da (2), e l'integrale non si sa calcolare esplicitamente.

3C) Si ha $y'(0) = 1$.

Vero: Sostituendo $t = 0$ nell'equazione si trova

$$y'(0) = \mathrm{e}^{4\cdot 0^2} = 1\,.$$

3D) Si ha $y''(0) = 0$.

Vero: Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = [y'(t)]' = [\mathrm{e}^{4\,t^2}]' = 8\,t\,\mathrm{e}^{4\,t^2}\,,$$

da cui segue che

$$y''(0) = 8 \cdot 0 \cdot \mathrm{e}^{4\cdot 0^2} = 0\,.$$

---

4) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = -6\,y(t) + 30\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$(2) \qquad y'(t) = -6\,y(t)\,.$$

4A) La funzione $Q\,\mathrm{e}^{-6\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1) per ogni Q in $\mathbb{R}$.

Vero: Se $y(t) = Q\,\mathrm{e}^{-6\,t}$, allora

$$y'(t) = -Q \cdot 6\,\mathrm{e}^{-6\,t} = -6 \cdot [Q\,\mathrm{e}^{-6\,t}] = -6\,y(t)\,,$$

e quindi la funzione proposta risolve la (2), ovvero l'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

4B) L'equazione di (1) ha come soluzione

$$y(t) = 5\,.$$

Vero: Basta sostituire...

4C) Si ha $y''(0) = -180$.

Vero: Iniziamo con l'osservare che dall'equazione, e dalla condizione iniziale, segue che

$$y'(0) = -6\,y(0) + 30 = -6 \cdot 0 + 30 = 30\,.$$

Inoltre, derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = -6\,y'(t)\,,$$

e quindi

$$y''(0) = -6\,y'(0) = -6 \cdot 30 = -180\,.$$

4D) Si ha

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = -5\,.$$

Falso: Sappiamo, dalle domande **4A** e **4B** che $y_0(t) = Q\,\mathrm{e}^{-6\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata (qualsiasi sia Q numero reale) e che $\overline{y}(t) = 5$ è soluzione (particolare) dell'equazione. Per la teoria generale delle equazioni lineari, le funzioni della forma

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = Q\,\mathrm{e}^{-6\,t} + 5$$

sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione di (1). Assegnando la condizione iniziale, si trova

$$0 = y(0) = Q + 5\,,$$

da cui $Q = -5$. Ne segue che

$$y(t) = -5\,\mathrm{e}^{-6\,t} + 5 = 5\,(1 - \mathrm{e}^{-6\,t})$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy (1), ed è tale che

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} 5\,(1 - \mathrm{e}^{-6\,t}) = 5 \neq -5\,.$$

---

5) Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine

$$y'(t) = f(t)\,. \tag{1}$$

Scrivere tutte le soluzioni di (1) se

$$\textbf{a)}\ f(t) = 4\,t + 6\,, \quad \textbf{b)}\ f(t) = \cos(3\,t)\,, \quad \textbf{c)}\ f(t) = (8\,t + 3)\,\mathrm{e}^t\,, \quad \textbf{d)}\ f(t) = \frac{3\,t}{1 + 2\,t^2}\,.$$

Soluzione:

L'equazione differenziale $y'(t) = f(t)$ si può riformulare così: "la funzione $y(t)$ è una primitiva di $f(t)$." Pertanto, trovare tutte le soluzioni di (1) è equivalente a trovare tutte le primitive di $f(t)$, ovvero — come è noto... — è equivalente ad integrare $f(t)$.

a) Dato che

$$\int [4\,t + 6]\,dt = 2\,t^2 + 6\,t\,,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = 2\,t^2 + 6\,t + c\,,$$

con c costante arbitraria.

b) Dato che

$$\int \cos(3\,t)\,dt = \frac{\sin(3\,t)}{3}\,,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = \frac{\sin(3\,t)}{3} + c\,,$$

con c costante arbitraria.

c) Dato che, integrando per parti,

$$\int (8\,t + 3)\,\mathrm{e}^t\,dt = (8\,t + 3)\,\mathrm{e}^t - \int 8\,\mathrm{e}^t\,dt = (8t - 5)\,\mathrm{e}^t\,,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = (8t - 5)\,\mathrm{e}^t + c\,,$$

con c costante arbitraria.

d) Dato che

$$\int \frac{3\,t}{1 + 2\,t^2}\,dt = \frac{3}{4}\int \frac{4\,t\,dt}{1 + 2\,t^2} = \frac{3}{4}\,\ln(1 + 2\,t^2)\,,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = \frac{3}{4}\,\ln(1 + 2\,t^2) + c\,,$$

con c costante arbitraria.

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = 10\, y(t) - 7\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha l'equazione di (1)? E quante soluzioni ha (1)?
b) Scrivere l'equazione omogenea associata all'equazione di (1), e scriverne tutte le soluzioni.
c) Trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1).
d) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1) e la soluzione di (1).

Soluzione:
a) L'equazione di (1) ha infinite soluzioni (dipendenti da un parametro reale), mentre il problema di Cauchy (1) ha un'unica soluzione.

b) L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0'(t) = 10\, y_0(t)\,,$$

le cui soluzioni sono date (per quanto visto a lezione) da

$$y_0(t) = A\, \mathrm{e}^{10\,t}\,,$$

con A costante reale arbitraria.

c) Per trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1), cerchiamo

$$\overline{y}(t) = C\,,$$

con C costante reale. Sostituendo, si ha che deve essere

$$0 = 10\, C - 7\,,$$

da cui segue $C = \frac{7}{10}$.
d) Per quanto visto a lezione, tutte le soluzioni dell'equazione di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = A\, \mathrm{e}^{10\,t} + \frac{7}{10}\,,$$

con A costante reale arbitraria. Assegnando la condizione iniziale, si ha che deve essere

$$0 = A\, \mathrm{e}^{10\cdot 0} + \frac{7}{10} = A + \frac{7}{10}\,,$$

da cui segue che $A = -\frac{7}{10}$ e quindi l'unica soluzione di (1) è data da

$$y(t) = -\frac{7}{10}\, \mathrm{e}^{10\,t} + \frac{7}{10} = \frac{7}{10}\, [1 - \mathrm{e}^{10\,t}]\,.$$