Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
28 Aprile 2023 — Compito n. 00066

32/32

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: Mereo

Cognome: Rossi

Matricola: 2 0 4 6 2 1 2

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	■	□	■	■	■	□	□	□	□	■	■	■	■	■	■	□
F	□	■	□	□	□	■	■	■	■	□	□	□	□	□	□	■
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

1) Sia

$$F(t) = \int_0^t [5\,x^2 + \cos^2(7\,x)]\,dx$$

1A) La funzione $F(t)$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.
1B) Si ha $F'(0) = 0$.
1C) La funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.
1D) Si ha $F(9) > 0$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (15x^2 + 6x + 5)\,dx = 13\,.$$

2B)

$$\int_0^{\frac{1}{6}} 144\,x\,\mathrm{e}^{6\,x}\,dx = 4\,\mathrm{e}\,.$$

2C)

$$\int_0^{10\,\pi} \cos(7\,x)\,dx = 5\,.$$

2D)

$$\int_0^{\sqrt{6}} \frac{8\,x}{6 + x^2}\,dx = 8\,\log(2)\,.$$

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-6}^{6} [7\,x^3 + \sin(3\,x)]\,dx \neq 0\,.$$

3B)

$$\int_{-3}^{3} [2\,x^2 + 2\,x\,|x|]\,dx > 0\,.$$

3C)

$$\int_{-4}^{5} [9\,x^3 + 4\,x]\,dx > 0\,.$$

3D)

$$\int_{-4}^{3} \frac{x^7}{8 + x^6}\,dx < 0\,.$$

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\int_{20}^{92} \frac{dx}{x - 8} = \log(7)\,.$$

4B)

$$\int_{13}^{21} \frac{dx}{(x - 9)^2} = \frac{1}{6}\,.$$

4C)

$$\int_{10}^{11} \frac{dx}{(x - 7)\,(x - 9)} = \frac{1}{2}\,\log(3/2)\,.$$

4D)

$$\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2 + 6\,x + 10} = 1\,.$$

Cognome	Nome	Matricola	Compito 00066

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

a) $f(x) = x\sin(3x)$, $\int_0^{5\pi} f(x)\,dx$, $\frac{5}{3}\pi$ **b)** $g(x) = x^2 e^{5x^3}$, $\int_0^{\sqrt[3]{6}} g(x)\,dx$, $\frac{e^{30}-1}{15}$

c) $h(x) = (10x^2+23x+3)e^x$, 0 $\int_{-\frac{3}{10}}^{0} h(x)\,dx$, **d)** $k(x) = \frac{1}{1+4x^2}$, $\int_0^1 k(x)\,dx$. $\frac{\arctan(2)}{2}$

(a)

$$\int_0^{5\pi} x\sin(3x) = \left| \begin{array}{l} y=3x \\ dy = 3dx \\ dx = \frac{dy}{3} \\ 5\pi = 15\pi \end{array}\right. = \int_0^{15\pi} \frac{y}{3}\sin(y)\frac{1}{3}dy = \frac{1}{9}\int_0^{15\pi} y\sin(y)\,dy =$$

$f'(x)=\sin(y) \rightarrow f(y) = -\cos(y)$

$g(y)=y \rightarrow g'(y)=1$

$$= \frac{1}{9}\left[-y\cos y + \int_0^{15\pi}\cos(y)\right] =$$

$$\frac{1}{9}\left[+15\pi\right] = \frac{15}{9}\pi = \frac{5}{3}\pi$$

(b)

$$\int_0^{\sqrt[3]{6}} x^2 e^{5x^3}\,dx = \left| \begin{array}{l} y=5x^3 \\ dy = 15x^2 dx \\ dx = \frac{dy}{15x^2} \end{array}\right. = \int_0^{30} x^2 e^y \cdot \frac{1}{15x^2}dy = \frac{1}{15}\int_0^{30} e^y\,dy = \frac{1}{15}\left[e^{30} - e^0\right] = \frac{e^{30}-1}{15}$$

(c)

$$\int_{-\frac{3}{10}}^{0} (10x^2+23x+3)e^x = \begin{cases} a=10 \\ 20+b=23 \\ b+c=3 \end{cases} \begin{cases} a=10 \\ b=3 \\ c=0 \end{cases} \rightarrow (10x^2+3x)e^x \Big|_{-\frac{3}{10}}^{0} = 0 - \left[\frac{9}{10} + \frac{9}{10}\right]e^{-\frac{3}{10}}$$

$$\left[(10\cdot 0^3 + 3\cdot 0)e^0\right] - \left[\left(10\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)^2 + 3\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)\right)e^{-\frac{3}{10}}\right] = -\left[\left(\frac{9}{10} - \frac{9}{10}\right)e^{-\frac{3}{10}}\right] = 0$$

(d)

$$\int_0^1 \frac{1}{1+4x^2}dx = \left| \begin{array}{l} y=2x \\ dx = \frac{dy}{2} \end{array}\right. = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\left[\arctan(2x)\right]_0^1 = \frac{\arctan(2)}{2}$$

Cognome	Nome	Matricola	Compito 00066

6) Sia

$$F(t) = \int_0^t [11\,\mathrm{e}^{x^2} + 10]\,dx\,.$$

a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
b) Calcolare $F(0)$ e $F'(\sqrt{5})$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è una funzione crescente e dispari.
d) Dimostrare che

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,.$$

---

a) F e' derivabile per Teo. F.C. Integrale $F'(t) = \underbrace{11e^{t^2}+10}_{\text{CONTINUA}}$

b) $F(0) = 0$ $\quad F(\sqrt{5}) = 11e^5+10$

c) F e' crescente perché $F'(t) > 0$, dispari perché $F'(t) =$ PARI e $\int_0^t$ parte da 0

d) $F(t) \geq \int_0^t 10$, $\lim_{t\to\infty} \int_0^t 10 = +\infty$ quindi per confronto $\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty$

Soluzioni del compito 00066

1) Sia

$$F(t) = \int_0^t [5\,x^2 + \cos^2(7\,x)]\,dx$$

1A) La funzione $F(t)$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Vero: Dato che la funzione $x \mapsto 5\,x^2 + \cos^2(7\,x)$ è continua su $\mathbb{R}$, la funzione $F(t)$ è derivabile su $\mathbb{R}$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale, e si ha $F'(t) = 5\,x^2 + \cos^2(7\,t)$.

1B) Si ha $F'(0) = 0$.

Falso: Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(t) = 5\,t^2 + \cos^2(7\,t)$, si ha $F'(0) = 1 \neq 0$.

1C) La funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

Vero: Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(t) = 5\,t^2 + \cos^2(7\,t)$, si ha $F'(t) \geq 0$ per ogni t in $\mathbb{R}$, e quindi la funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

1D) Si ha $F(9) > 0$.

Vero: Dato che la funzione $F(t)$ è crescente (si veda l'esercizio **1C**), si ha

$$F(9) > F(0) = 0\,.$$

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (15x^2 + 6x + 5)\,dx = 13\,.$$

Vero: Dato che

$$\int (15x^2 + 6x + 5)\,dx = \frac{15}{3}\,x^3 + \frac{6}{2}\,x^2 + 5\,x = 5\,x^3 + 3\,x^2 + 5\,x + c\,,$$

si ha

$$\int_0^1 (15x^2 + 6x + 5)\,dx = 5\,x^3 + 3\,x^2 + 5\,x\Big|_0^1 = 5 + 3 + 5 = 13\,.$$

2B)

$$\int_0^{\frac{1}{6}} 144\,x\,\mathrm{e}^{6\,x}\,dx = 4\,\mathrm{e}\,.$$

Falso: Si ha, con la sostituzione $y = 6\,x$, da cui $dy = 6\,x$,

$$\int_0^{\frac{1}{6}} 144\,x\,\mathrm{e}^{6\,x}\,dx = 4\int_0^{\frac{1}{6}} (6\,x)\,\mathrm{e}^{6\,x}\,(6\,dx) = 4\int_0^1 y\,\mathrm{e}^y\,dy\,.$$

Dato che una primitiva di $y\,\mathrm{e}^y$ è $(y-1)\,\mathrm{e}^y$, si ha

$$\int_0^{\frac{1}{6}} 144\,x\,\mathrm{e}^{6\,x}\,dx = 4\,(y-1)\,\mathrm{e}^y\Big|_0^1 = 4 \neq 4\,\mathrm{e}\,.$$

2C)

$$\int_0^{10\,\pi} \cos(7\,x)\,dx = 5\,.$$

Falso: Si ha

$$\int_0^{10\,\pi} \cos(7\,x)\,dx = \frac{\sin(7\,x)}{7}\Big|_0^{10\,\pi} = \frac{\sin(70\,\pi) - \sin(0)}{7} = 0 \neq 5\,.$$

2D)

$$\int_0^{\sqrt{6}} \frac{8\,x}{6 + x^2}\,dx = 8\,\log(2)\,.$$

Falso: Dato che

$$\frac{8\,x}{6 + x^2} = 4\,\frac{2x}{6 + x^2} = 4\,\frac{(6 + x^2)'}{6 + x^2}\,,$$

si ha

$$\int_0^{\sqrt{6}} \frac{8\,x}{6 + x^2}\,dx = 4\,\log(6 + x^2)\Big|_0^{\sqrt{6}} = 4\,[\log(12) - \log(6)] = 4\,\log(12/6) = 4\,\log(2) \neq 8\,\log(2)\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-6}^{6} [7\,x^3 + \sin(3\,x)]\,dx \neq 0\,.$$

Falso: La funzione integranda è dispari, e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine. Pertanto, l'integrale vale zero.

3B)

$$\int_{-3}^{3} [2\,x^2 + 2\,x\,|x|]\,dx > 0\,.$$

Vero: La funzione $x \mapsto 2\,x^2$ è pari, mentre la funzione $x \mapsto 2\,x\,|x|$ è dispari. Dato che l'intervallo è simmetrico rispetto all'origine, si ha

$$\int_{-3}^{3} [2\,x^2 + 2\,x\,|x|]\,dx = \int_{-3}^{3} 2\,x^2\,dx = 2\int_{0}^{3} 2\,x^2\,dx > 0\,,$$

dato che la funzione integranda è positiva.

3C)

$$\int_{-4}^{5} [9\,x^3 + 4\,x]\,dx > 0\,.$$

Vero: La funzione integranda è dispari; pertanto, si ha

$$\int_{-4}^{5} [9\,x^3 + 4\,x]\,dx = \int_{-4}^{4} [9\,x^3 + 4\,x]\,dx + \int_{4}^{5} [9\,x^3 + 4\,x]\,dx = \int_{4}^{5} [9\,x^3 + 4\,x]\,dx\,,$$

e l'ultimo integrale è positivo essendo l'integrale di una funzione positiva.

3D)

$$\int_{-4}^{3} \frac{x^7}{8 + x^6}\,dx < 0\,.$$

Vero: Dato che la funzione integranda è dispari, si ha

$$\int_{-4}^{3} \frac{x^7}{8 + x^6}\,dx = \int_{-4}^{-3} \frac{x^7}{8 + x^6}\,dx + \int_{-3}^{3} \frac{x^7}{8 + x^6}\,dx = \int_{-4}^{-3} \frac{x^7}{8 + x^6}\,dx < 0\,,$$

dato che la funzione integranda è negativa.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\int_{20}^{92} \frac{dx}{x-8} = \log(7)\,.$$

Vero: Si ha

$$\int_{20}^{92} \frac{dx}{x-8} = \log(|x-8|)\Big|_{20}^{92} = \log(84) - \log(12) = \log(84/12) = \log(7)\,.$$

4B)

$$\int_{13}^{21} \frac{dx}{(x-9)^2} = \frac{1}{6}\,.$$

Vero: Ricordando che

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = \frac{1}{a-x} + c\,,$$

si ha

$$\int_{13}^{21} \frac{dx}{(x-9)^2} = \frac{1}{9-x}\Big|_{13}^{21} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6}\,.$$

4C)

$$\int_{10}^{11} \frac{dx}{(x-7)\,(x-9)} = \frac{1}{2}\,\log(3/2)\,.$$

Vero: Dall'identità

$$\frac{1}{(x-7)\,(x-9)} = \frac{A}{x-9} + \frac{B}{x-7}$$

si ricava (moltiplicando per $(x-7)\,(x-9)$) che deve essere

$$1 = A\,(x-7) + B\,(x-9)\,.$$

Scegliendo $x = 7$ si ricava $B = -\frac{1}{2}$, e scegliendo $x = 9$ si ricava $A = \frac{1}{2}$. Pertanto,

$$\frac{1}{(x-7)\,(x-9)} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{x-9} - \frac{1}{x-7}\Big]\,.$$

Ne segue che

$$\int \frac{dx}{(x-7)\,(x-9)} = \frac{1}{2}\,\log\left(\left|\frac{x-9}{x-7}\right|\right) + c\,,$$

cosicché

$$\int_{10}^{11} \frac{dx}{(x-7)\,(x-9)} = \frac{1}{2}\,[\log(1/2) - \log(1/3)] = \frac{1}{2}\,\log(3/2)\,.$$

4D)

$$\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2 + 6\,x + 10} = 1\,.$$

Falso: Si ha

$$x^2 + 6\,x + 10 = (x+3)^2 + 1\,,$$

e quindi

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6\,x + 10} = \int \frac{dx}{1 + (x+3)^2}\,.$$

Con la sostituzione $y = x + 3$, da cui $dx = dy$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6\,x + 10} = \int \frac{dy}{1 + y^2} = \arctan(y) + c = \arctan(x+3) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2 + 6\,x + 10} = \arctan(x+3)\Big|_{-3}^{-2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} \neq 1\,.$$

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a)}\ f(x) = x\,\sin(3\,x)\,, \quad \int_0^{5\,\pi} f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{5\,x^3}\,, \quad \int_0^{\sqrt[3]{6}} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = (10x^2 + 23x + 3)\,\mathrm{e}^x\,, \quad \int_{-\frac{3}{10}}^{0} h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = \frac{1}{1+4\,x^2}\,, \quad \int_0^1 k(x)\,dx\,.$$

Soluzione:

a) Si ha, integrando per parti, e ponendo $f'(x) = \sin(3\,x)$, da cui $f(x) = -\frac{\cos(3\,x)}{3}$ e $g(x) = x$, da cui $g'(x) = 1$,

$$\int x\,\sin(3\,x) = -\frac{x\,\cos(3\,x)}{3} + \int 1 \cdot \frac{\cos(3\,x)}{3}\,dx = -\frac{x\,\cos(3\,x)}{3} + \frac{\sin(3\,x)}{9} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^{5\,\pi} x\,\sin(3\,x)\,dx = -\frac{x\,\cos(3\,x)}{3} + \frac{\sin(3\,x)}{9}\Big|_0^{5\,\pi} = -\frac{5\,\pi\,\cos(15\,\pi)}{3} = \frac{5}{3}\,\pi\,.$$

b) Si ha, con la sostituzione $y = 5\,x^3$, da cui $dy = 15\,x^2\,dx$ (e quindi $x^2\,dx = \frac{dy}{15}$),

$$\int x^2\,\mathrm{e}^{5\,x^3}\,dx = \frac{1}{15}\int \mathrm{e}^y\,dy = \frac{\mathrm{e}^y}{15} + c = \frac{\mathrm{e}^{5\,x^3}}{15} + c\,,$$

da cui segue che

$$\int_0^{\sqrt[3]{6}} x^2\,\mathrm{e}^{5\,x^3}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{5\,x^3}}{15}\Big|_0^{\sqrt[3]{6}} = \frac{\mathrm{e}^{30} - 1}{15}\,.$$

c) Ricordiamo che se $P_2(x)$ è un polinomio di grado 2, allora

$$\int P_2(x)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q_2(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

con $Q_2(x)$ un polinomio di grado 2 tale che $Q_2(x) + Q_2'(x) = P_2(x)$. Pertanto, se $Q_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, deve essere

$$Q_2(x) + Q_2'(x) = a\,x^2 + (2a+b)\,x + b + c = 10x^2 + 23x + 3\,.$$

Da questa relazione si ricava $a = 10$, $2a + b = 23$ e $b + c = 3$; risolvendo, si trova $a = 10$, $b = 3$ e $c = 0$. Pertanto,

$$\int (10x^2 + 23x + 3)\,\mathrm{e}^x\,dx = (10x^2 + 3x)\,\mathrm{e}^x + c\,,$$

da cui segue che

$$\int_{-\frac{3}{10}}^{0} (10x^2 + 23x + 3)\,\mathrm{e}^x\,dx = (10x^2 + 3x)\,\mathrm{e}^x\Big|_{-\frac{3}{10}}^{0} = 0\,.$$

d) Si ha, con la sostituzione $y = 2\,x$, da cui $dx = \frac{dy}{2}$,

$$\int \frac{dx}{1 + 4\,x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\arctan(y)}{2} + c = \frac{\arctan(2\,x)}{2} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+4\,x^2} = \frac{\arctan(2\,x)}{2}\Big|_0^1 = \frac{\arctan(2)}{2}\,.$$

6) Sia

$$F(t) = \int_0^t [11\,\mathrm{e}^{x^2} + 10]\,dx\,.$$

a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
b) Calcolare $F(0)$ e $F'(\sqrt{5})$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è una funzione crescente e dispari.
d) Dimostrare che

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,.$$

Soluzione:
a) La funzione $f(x) = 11\,\mathrm{e}^{x^2} + 10$ è continua su $\mathbb{R}$. Pertanto, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$ e si ha

$$F'(t) = f(t) = 11\,\mathrm{e}^{t^2} + 10\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

b) Si ha

$$F(0) = \int_0^0 [11\,\mathrm{e}^{x^2} + 10]\,dx = 0\,,$$

e, per la (1),

$$F'(\sqrt{5}) = f(\sqrt{5}) = 11\,\mathrm{e}^5 + 10\,.$$

c) Dato che per la (1) la derivata di $F(t)$ è positiva, la funzione $F(t)$ è crescente. Inoltre, dato che la funzione $f(x)$ è pari, la funzione $F(t)$ è dispari. Infatti, con la sostituzione $x = -y$, da cui $dx = -dy$,

$$F(-t) = \int_0^{-t} [11\,\mathrm{e}^{x^2} + 10]\,dx = -\int_0^t [11\,\mathrm{e}^{(-y)^2} + 10]\,dy = -\int_0^t [11\,\mathrm{e}^{y^2} + 10]\,dy = -F(t)\,.$$

d) Si ha, se $t \geq 0$, e dato che $f(x) \geq 10$,

$$F(t) = \int_0^t [11\,\mathrm{e}^{x^2} + 10]\,dx \geq \int_0^t 10\,dx = 10\,t\,,$$

da cui segue che (si noti che il limite di $F(t)$ esiste perché $F(t)$ è crescente)

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) \geq \lim_{t\to+\infty} 10\,t = +\infty\,.$$