Esercizio 1. Consideriamo $\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ed il sottogruppo $n\mathbb{Z}$. Spiegare perché il gruppo quoziente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è ben definito ed isomorfo (di fatto, uguale) a $\mathbb{Z}_n$.

Il gruppo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e' formato dalle classi laterali sinistre di $\mathbb{Z}$ rispetto il sottogruppo $n\mathbb{Z} = \{n\cdot x, x \in \mathbb{Z}\}$, composto da tutti i multipli di n. Tali classi, sono del tipo $x\cdot n\mathbb{Z} = \{x\cdot 1\cdot n, x\cdot 2\cdot n, x\cdot 3\cdot n \dots x\cdot K\cdot n \dots\}$, le distinte classi laterali, contengono quindi i multipli di:

$1\cdot n\mathbb{Z} = \{n, 2n, 3n \dots hn \dots\}$
$2\cdot n\mathbb{Z} = \{2n, 4n, 6n \dots 2\cdot hn \dots\}$
$\vdots$
$Kn\mathbb{Z}\ \{kn, 2kn, 3Kn \dots Khn\}$
$n\cdot n\mathbb{Z} = \{nn, 2nn, 3nn \dots hnn \dots\}$

$(n+1)n\mathbb{Z} = \{(n+1)n, (n+1)2n \dots (n+1)hn \dots\}$

NOTO CHE: $\Rightarrow$ MA SONO ANCORA I MULTIPLI DI n

$(n+2)n\mathbb{Z} = \{(n+2)n, (n+2)2n \dots (n+2)hn$

$= \{n^2+2n, n^2+4n, n^2+6n \dots n^2+2hn\} =$ RIFARE

sono i multipli di $2n$...

$\Rightarrow |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n$

Esercizio 2. Sia G il gruppo affine della retta affine numerica $\mathbb{R}$: **per definizione** $G = \{f_{a,c}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, c \in \mathbb{R}\}$ con $f_{a,c}(x) = ax + c$ e prodotto in G uguale alla composizione di applicazioni. Dopo aver verificato che G è effettivamente un sottogruppo del gruppo di tutte le bigezioni di $\mathbb{R}$ e che non è commutativo, dimostrare che il sottoinsieme delle traslazioni $T = \{f_{1,c}, c \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo normale e che G/T è isomorfo al gruppo $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
Suggerimento: definire un opportuno omomorfismo surgettivo $G \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed applicare il teorema fondamentale di omomorfismo fra gruppi.....

Dimostro che G e' un sottogruppo: $f_{a,c}\circ(f_{a',c'})^{-1} = a(f^{-1}_{a',c'}(x))+c = a\left(\frac{x-c'}{a'}\right)+c$
$= a\cdot(x-c')\cdot\frac{1}{a'}+c = (ax-ac')\frac{1}{a'}+c = \frac{ax}{a'}-\frac{ac'}{a'}+c = x\cdot\frac{a}{a'}+\left(-\frac{ac'}{a'}+c\right) = f_{\frac{a}{a'},-\frac{ac'}{a'}+c} \in G.$

e non e' commutativo:

$f_{a,b}\circ f_{c,d} = a(cx+d)+b \neq c(ax+b)d = f_{c,d}\circ f_{a,b}.$

L'insieme $T = \{f_{1,c}, c\in\mathbb{R}\}$ e' NORMALE, sia $f_{\alpha,\beta}T$ una sua classe laterale sinistra:
$= \{f_{\alpha\beta}\circ f_{1,c}\ \ c\in\mathbb{R}\} = \{\alpha(x+c)+\beta\ \ c\in\mathbb{R}\} = \{\alpha x+\alpha c+\beta\ \ c\in\mathbb{R}\}$! $\exists \alpha',\beta' \mid \alpha'=\alpha \wedge \beta'=\alpha c+\beta-c\quad Tf_{\alpha'\beta'} =$
$= \{f_{1,c}\circ f_{\alpha',\beta'}\ \ c\in\mathbb{R}\} = \{(\alpha'x+\beta')+c\ \ c\in\mathbb{R}\} = \{\alpha'x+\beta'+c\ \ c\in\mathbb{R}\} = \{\alpha x+\alpha c+\beta-c+c\} = f_{\alpha,\beta}T.$

Definisco la PROIEZIONE CANONICA $\pi: G \to G/T$ tale che $\pi(f_{a,c}) = Tf_{a,c}$.

A questo punto, definisco un omomorfismo SURIETTIVO $f: G \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tale che $f(f_{a,c}) = f(ax+c) = \begin{cases} 0\cdot ax+c & \text{se } c\neq 0 \\ 1 & \text{se } c=0 \end{cases}$ $\Leftarrow$ ogni elemento di $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e' MAPPATO.

A questo punto, (1): esiste un omomorfismo suriettivo da G ad $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(2): π e' la proiezione canonica sul gruppo quoziente:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ G/T & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ per il teo. fondamentale di omomorfismo di gruppi, $\Rightarrow$ esiste UNICO, un ISOMORFISMO F da G/T a $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ G/T \arrow[ur, "F"] & \end{tikzcd}$$

Esercizio 3. Determinare il gruppo degli automorfismi del gruppo ciclico $(\mathbb{Z}_n,+)$. (Suggerimento: basta determinare gli omomorfismi di $\mathbb{Z}_n$ in sé stesso che sono suriettivi; osserviamo anche che un omomorfismo di $\mathbb{Z}_n$ is sé stesso è determinato dall'immagine di [1]....).

So che un generico isomorfismo f deve preservare l'unita', $f(1)$ quindi sara' l'unita' nel gruppo di arrivo. L'unita', genera $\mathbb{Z}_n$, anche $f(1)$, quindi $f(1) \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$. Abbiamo dedotto che l'unita' 1 puo' essere mappata in $n-1$ valori. PAG. 39 APPUNTI

Esercizio 4. Sia $(G,\cdot)$ un gruppo. Il Centro di G è l'insieme

$$Z(G) := \{z \in G \mid z \cdot g = g \cdot z \ \forall g \in G\}$$

Consideriamo l'applicazione $\Phi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ che associa a $x \in G$ l'automorfismo γ_x. Abbiamo incontrato questa applicazione nell'Esercizio 8 del compito dell'8/11/23.

- Verificare che $Z(G) = \mathrm{Ker}\Phi$
- cosa deduciamo da questa informazione ?
- Cosa ci dice questo risultato sul sottogruppo $\mathrm{Im}\Phi$ degli automorfismi interni ?

Il neutro di $\mathrm{Aut}(G)$ e' la funzione identita' Id.

$\mathrm{Ker}\Phi = \{x \in G \mid \gamma_x = Id\}$, ma $\gamma_x(a) = x \cdot a \cdot x^{-1}$. Considero $Z(G)$, so che e' un sottogruppo, se $h \in Z(G) \Rightarrow h^{-1} \in Z(G)$. Noto che $\mathrm{Ker}\Phi = \{x \in G \mid \gamma_x = Id\} = \{x \in G \mid x \cdot a \cdot x^{-1} = a \ \forall a \in G\} =$

$\{x \in G \mid x \cdot a \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} \cdot a \ \forall a \in G\}$ ma $x \cdot a \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} \cdot a \iff x \in Z(G) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x \in G \mid x \cdot a \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} \cdot a \ \forall a \in G\} = \{x \in G \mid x \in Z(G)\} = Z(G).$