Esame 19 Settembre 2019

Esercizio 1

1) Scelgo 10 da un insieme di 13 : $\binom{13}{10}$

2) Fisso 2 domande e scelgo le restanti 8 dalle 11 disponibili : $\binom{11}{8}$

3) ho 2 opzioni per la prima domanda, scelgo le altre 9 dalle 11 disponibili : $2\cdot\binom{11}{9}$

Esercizio 2

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2), \omega_i \in \{1,2 \dots, 6\}\}, \ |\Omega| = 6^2 = 36$

1) $\mathbb{P}(R+B \geq 10 \mid R=5) = \mathbb{P}(B \geq 5) = \mathbb{P}(B=5 \vee B=6) = \mathbb{P}(B=5) + \mathbb{P}(B=6) - \mathbb{P}(B=5 \cap B=6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

2) $\mathbb{P}(R+B \geq 10 \mid \{R=5 \vee B=5\}) = \dfrac{\mathbb{P}(R+B \geq 10 \cap \{R=5 \vee B=5\})}{\mathbb{P}(\{R=5 \vee B=5\})} = \dfrac{\mathbb{P}(\{(5,6),(6,5),(5,5)\})}{(1/3)} = \frac{3}{36} \cdot 3 = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

3) $\mathbb{P}(R=5 \mid R+B \geq 10) \overset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{\mathbb{P}(R+B \geq 10 \mid R=5) \cdot \mathbb{P}(R=5)}{\mathbb{P}(R+B \geq 10 \mid R=5) \cdot \mathbb{P}(R=5) + \mathbb{P}(R+B \geq 10 \mid R=6) \cdot \mathbb{P}(R=6)} = \dfrac{(1/6) \cdot (1/3)}{(1/6) \cdot (1/3) + (\frac{1}{2}) \cdot (1/6)} = \dfrac{(1/18)}{(1/18) + (1/12)} = \frac{2}{5}$

Esercizio 3

1) Nel caso peggiore, LISTA[n] = NOME $\Rightarrow C_n = n$, piu' precisamente, $C_n \in \{1, 2 \dots n\}$.

2) La stringa puo' trovarsi in una qualsiasi posizione con probabilita' uniforme $\frac{1}{n}$,
Si ha che C_n e' una variabile "geometrica limitata" da n, con : $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(C_n = i) = 1$
La distribuzione e' costante: $\mathbb{P}(C_n = k) = \frac{1}{n}$.

3) $\mathbb{E}(C_n) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \mathbb{P}(C_i = n) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2+n}{2} = \frac{n+1}{2}$

Esercizio 4

Sappiamo che $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(\frac{S_n}{n})| < \delta) = 1$, quindi per $n \to +\infty$, $p \to \mathbb{E}(\frac{S_n}{n})$, quindi p sara' esattamente il valore di truccatura se potessimo lanciare la moneta all'infinito.

Serve trovare un $\tilde{n}$ t.c. $\mathbb{P}(|\frac{S_{\tilde{n}}}{\tilde{n}} - p| < \delta) \geq 0.95$, $\frac{S_{\tilde{n}}}{\tilde{n}} \sim \text{Binom} \Rightarrow \mathbb{E}(\frac{S_{\tilde{n}}}{\tilde{n}}) = \frac{1}{\tilde{n}} \mathbb{E}(S_{\tilde{n}}) = \frac{1}{\tilde{n}} \tilde{n} p = p$

$\Rightarrow \mathbb{P}(|\frac{S_{\tilde{n}}}{\tilde{n}} - p| \geq \delta) \leq 1 - 0.95 \Rightarrow \mathbb{P}(|\frac{S_{\tilde{n}}}{\tilde{n}} - \mathbb{E}(\frac{S_{\tilde{n}}}{\tilde{n}})| \geq \delta) \leq 0.05$, per la disuguaglianza di Chebyshev so che : $\mathbb{P}(|\frac{S_{\tilde{n}}}{\tilde{n}} - \mathbb{E}(\frac{S_{\tilde{n}}}{\tilde{n}})| \geq \delta) \leq \frac{1}{\delta^2} \cdot \mathbb{V}(\frac{S_{\tilde{n}}}{\tilde{n}}) \Rightarrow \frac{1}{\delta^2} \mathbb{V}(\frac{S_{\tilde{n}}}{\tilde{n}}) \leq 0.05$, calcolo $\mathbb{V}(\frac{S_{\tilde{n}}}{\tilde{n}})$:

$\mathbb{V}(\frac{S_{\tilde{n}}}{\tilde{n}}) = \mathbb{E}(\frac{S_{\tilde{n}}}{\tilde{n}} - \mathbb{E}(\frac{S_{\tilde{n}}}{\tilde{n}})^2) = $ per linearita' $= \frac{1}{\tilde{n}} \cdot \mathbb{V}(S_{\tilde{n}}) = \frac{1}{\tilde{n}} p \cdot (1-p) \Rightarrow \frac{1}{\delta^2} \cdot p \cdot (1-p) \leq 0.05$

NO IDEA DI COME PROSEGUIRE