Exercise 1: consider the following linear program

$$\min 2x_1 + 4x_2 + 2x_3$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 \le 1$$
$$-x + 2x_2 + x_3 \ge 1$$
$$3x_2 - 6x_3 = 0$$
$$x_1, x_3 \ge 0$$

a) State the dual of the problem

b) Determine if $x = [0, 2/5, 1/5]^T$ is an optimal solution to the problem

La matrice dei vincoli e' $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ la trasposta e' $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ il duale e'

$$(D) = \begin{cases} \max \; y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \ge 2 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 4 \\ 3y_1 + y_2 - 6y_3 \ge 2 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \le 0,\ y_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Si assume che $x^* = [0 \;\; \frac{2}{5} \;\; \frac{1}{5}]^T$ sia sol. per $(P) \Rightarrow$ essendo le variabili x_2, x_3 slack per x^*_3 il vincoli 2, 3 sono binding per (D) per y^* sol. oltimale.

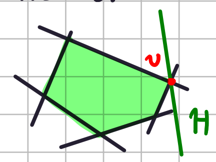
$$(D) = \begin{cases} \max \; y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \ge 2 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 4 \\ 3y_1 + y_2 - 6y_3 = 2 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \le 0,\ y_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exercise 2: Consider the polyhedron $P = \{x \mid Ax \le b, x \ge 0\}$. Let $v \in P$. Prove that v is a vertex of P if and only if there exists a vector c such that v is the *unique* optimal basic feasible solution to the problem

$$\max_{x \in P} c^T x$$

i) Se v e' un vertice, per DEF: $\exists\, c, \alpha$ t.c. $c^T v = \alpha \wedge c^T x < \alpha \ \forall x \in P \setminus \{v\} \Rightarrow$ il problema $\max_{x \in P} c^T x$ ha come unica soluzione v.

ii) Sia v una BFS per un LP:



$$\begin{cases} \max \ c^T x \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \forall x \in P \setminus \{v\},\ c^T x < \underset{\alpha}{\underset{\shortparallel}{c^T v}}$$

$\Rightarrow H = \{x : c^T x = \alpha\}$ e' l'iperpiano che separa v dal resto di P.

Exercise 3: Let G be a bipartite graph with vertex set $A \cup B$ such that $|A| = |B|$. Give a linear programming formulation to find the maximum cardinality matching G, that is a matching M in G which maximizes $|M|$. Give a proof or justification that your formulation gives a correct optimal solution.

Il vettore delle variabili rappresenta gli archi, $x_i = 1$ se l'arco e' nel matching, altrimenti e' 0. Essendo che si vuole massimizzare il numero di archi, la funzione obiettivo e':

$$\max \sum_{i=1}^{|V(G)|} x_i$$

I vincoli impongono che gli archi non abbiano punti in comune

$$\forall v \in V(G), \quad \sum_{e \in \delta(v)} x_e \le 1$$

↳ al piu' un arco tocca tale nodo

dove $\delta(v) = \{\text{ARCHI CHE TOCCANO } v\}$

Si impone $x_i \in \{0,1\}\ \forall i$. Per il teo. di Edmonds per i grafi bipartiti, si puo' formulare il problema come un LP, i vertici saranno vettori di numeri interi:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\sum_{i=1}^{|V(G)|} x_i \\ \forall v \in V(G), \ \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e \le 1 \\ \forall i, \quad 0 \le x_i \le 1 \end{cases}$$

Exercise 4: consider the linear program

$$\begin{aligned} \min\ & 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

Beginning with the basis $\{1, 2\}$, apply the simplex method to solve the linear program.

trasformo il problema in Forma di massimizzazione.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} x_3 + x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{3} x_3 + \frac{1}{3} \\ z = \frac{20}{3} x_3 - 3x_4 - \frac{8}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{2}{5} - \frac{3}{5} x_1 + \frac{3}{5} x_4 \\ x_2 = +\frac{1}{5} x_1 - \frac{1}{5} x_4 + \frac{1}{5} \\ z = -4x_1 + x_4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -3x_2 + 1 \\ x_4 = x_1 - 5x_2 + 1 \\ z = -3x_1 - x_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

L'ottimo e' -1

$\text{BFS} = [0 \ 0 \ 1 \ 1]^T$