Esercizio 1. Svolgere gli esercizi 4.1, 4.2 e 4.3 del libro.

4.1) Sia $\bar v \in V$, so che $\lambda\cdot\bar v = \lambda\cdot\begin{vmatrix} v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda\cdot v_1\\ \lambda\cdot v_2\\ \vdots\\ \lambda\cdot v_n\end{vmatrix}$, quindi $0\cdot\begin{vmatrix} v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\cdot v_1\\ 0\cdot v_2\\ \vdots\\ 0\cdot v_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{vmatrix} = \bar 0$.

4.2) Sia $\bar v\in V$, ho che $(-1)\cdot\bar v = (-1)\cdot\begin{vmatrix} v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}(-1)v_1\\ (-1)v_2\\ \vdots\\ (-1)v_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-v_1\\ -v_2\\ \vdots\\ -v_n\end{vmatrix} = -\bar v =$ inverso di $\bar v$.

Inoltre, $(-1)\cdot\bar v+\bar v = -\bar v+\bar v = \begin{vmatrix}-v_1\\ -v_2\\ \vdots\\ -v_n\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-v_1+v_1\\ -v_2+v_2\\ \vdots\\ -v_n+v_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{vmatrix} = \bar 0$. L'inverso di $\bar v$ e' unico, infatti,

sia $\bar w$ un altro inverso di $\bar v$, ho che: $-\bar v+\bar v=\bar 0=\bar w+\bar v \Rightarrow -\bar v+\bar v=\bar w+\bar v \Rightarrow -\bar v=\bar w+\bar v+(-\bar v)\Rightarrow -\bar v=\bar w+\bar 0=\bar w$.

4.3) $\lambda\cdot\bar v = \begin{vmatrix}\lambda\cdot v_1\\ \lambda\cdot v_2\\ \lambda\cdot v_3\end{vmatrix}$, ma $\forall i$, $\lambda\cdot v_i$ e' un valore nel campo $\mathbb{K}$, essendo che un campo e' privo di divisori dello zero, $\lambda\cdot v_i=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \vee v_i=0$. Quindi $\lambda\cdot\bar v=\bar 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}\lambda\cdot v_1\\ \vdots\\ \lambda\cdot v_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{vmatrix}$ ma $\begin{vmatrix}\lambda\cdot v_1\\ \vdots\\ \lambda\cdot v_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{vmatrix} \Leftrightarrow \lambda=0\vee v_i=0\ \forall i$. ma $v_i=0\ \forall i \Leftrightarrow \bar v = \begin{vmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{vmatrix} \Leftrightarrow \bar v=\bar 0$.

Esercizio 2. Stabilire se l'insieme $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alle operazioni:

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y'),\qquad k(x,y)=(kx,-ky),\quad \forall k\in\mathbb{R}.$$

Verifico le proprieta' degli spazi vettoriali, cominciando dal prodotto per uno scalare:

$\lambda\cdot\left(\begin{vmatrix}x\\ y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}w\\ z\end{vmatrix}\right) = \lambda\left(\begin{vmatrix}x+w\\ y+z\end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix}\lambda(x+w)\\ -\lambda(y+z)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda x+\lambda w\\ -\lambda y-\lambda z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda x\\ -\lambda y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda w\\ -\lambda z\end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix}x\\ y\end{vmatrix}+\lambda\begin{vmatrix}w\\ z\end{vmatrix} \Rightarrow$ e' verificato.

Noto che $1\cdot\begin{vmatrix}x\\ y\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1\cdot x\\ -1\cdot y\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x\\ -y\end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix}x\\ y\end{vmatrix}$ quindi NON e' uno spazio vettoriale.

Esercizio 3. Abbiamo visto che $\mathbb{R}[x]$, l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$, è uno spazio vettoriale.
Verificare che $\mathbb{R}_3[x]\subset\mathbb{R}[x]$, l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a tre, è un sottospazio di $\mathbb{R}[x]$ ed è quindi lui stesso uno spazio vettoriale (Osservazione 4.3 nel libro).

Si consideri il sottoinsieme

$$W=\{p(x)\in\mathbb{R}_3[x]\mid p(1)=0\}\subset\mathbb{R}_3[x]$$

Stabilire se W è un sottospazio. Stesso esercizio per

$$U=\{q(x)\in\mathbb{R}_3[x]\mid q(2)=4\}.$$

- Siano $p_1,p_2\in\mathbb{R}_3[x]$, dimostro che: $p_1+p_2 = (ax^3+bx^2+cx+d)+(a'x^3+b'x^2+c'x+d') = (a+a')x^3+(b+b')x^2+(c+c')x+d+d' \in \mathrm{Span}(x^3,x^2,x,1)=\mathbb{R}_3[x]$.

  Inoltre $\lambda(ax^3+bx^2+cx+d)=\lambda ax^3+\lambda bx^2+\lambda cx+\lambda d\in \mathrm{Span}(x^3,x^2,x,1)=\mathbb{R}_3[x]\Rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ e' un sottospazio.
- Considero $W=\{p(x)\in\mathbb{R}_3[x]\mid p(1)=0\}$, quindi $p(x)\in W\Leftrightarrow p(1)=a+b+c+d=0$.

  noto che $p(x)+p'(x) = (ax^3+bx^2+cx+d)+(a'x^3+b'x^2+c'x+d') \Rightarrow x=1 \Rightarrow (a+b+c+d)+(a'+b'+c'+d') = \underbrace{0+0}_{\text{IPOTESI}}=0$

  Segue $\lambda\cdot p(x)=\lambda(ax^3+bx^2+cx+d)=\lambda ax^3+\lambda bx^2+\lambda cx+\lambda d \Rightarrow x=1\Rightarrow \lambda a+\lambda b+\lambda c+\lambda d=\lambda(\underbrace{a+b+c+d}_{\text{IPOTESI}})=\lambda\cdot 0=0$

  La conclusione e' che W e' un sottospazio.
- Ora considero $U=\{p(x)\in\mathbb{R}_3[x]\mid p(2)=4\}$, quindi $p(x)\in U\Leftrightarrow p(2)=8a+4b+2c+d=4$.

  Controesempio: considero $p(x)=x^3-4$, noto che $p(2)=8-4=4\Rightarrow p(x)\in U$ ma $3\cdot p(x)=3x^3-12$

  e $3\cdot p(2)=3\cdot 8-12=12\neq 4\Rightarrow 3\cdot p(x)\notin U\Rightarrow U$ NON e' un sottospazio.

Esercizio 4. Sia $V=\mathbb{R}[x]$ e sia $p(x)=1+x+x^2+5x^4$. Consideriamo $q(x)=x^2+5x^4$. Stabilire se $q(x)\in\mathrm{Span}(p)$.

So che $q(x)\in\mathrm{Span}(p)\Leftrightarrow q$ e p sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow q$ e p sono proporzionali

$\Leftrightarrow p(x)=\lambda\cdot q(x)\Leftrightarrow 5x^4+0\cdot x^3+x^2+x+1=\lambda\cdot(5x^4+0\cdot x^3+x^2+0\cdot x+0)\Leftrightarrow \exists\lambda\mid \begin{vmatrix}5\\ 0\\ 1\\ 1\\ 1\end{vmatrix} = \lambda\cdot\begin{vmatrix}5\\ 0\\ 0\\ 1\\ 0\end{vmatrix} \Leftrightarrow \exists\lambda\mid \begin{vmatrix}5\\ 0\\ 1\\ 1\\ 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}5\cdot\lambda\\ 0\cdot\lambda\\ 0\cdot\lambda\\ 1\cdot\lambda\\ 0\cdot\lambda\end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}\mid \lambda\cdot 0=1$ ma tale λ non esiste, quindi $q(x)\notin\mathrm{Span}(p)$.

Esercizio 5. Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(\mathbb{R})$ è detta *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j. Una matrice A è detta *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni i, j.
5.1. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche è un sottospazio.
5.2. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche è un sottospazio.

5.1) Innanzitutto noto che la matrice nulla e' simmetrica. Considero $A, B \in S_{nn}(\mathbb{R})$. noto che $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \wedge (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji}$ MA $\begin{cases} A_{ij} = A_{ij} \\ B_{ij} = B_{ij} \end{cases} \Rightarrow (A+B)_{ji} = A_{ij} + B_{ij} = (A+B)_{ij} \Rightarrow A+B \in S_{nn}$.

Controllo $\lambda \cdot A = \lambda A$ tale che $(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot A_{ij}$ MA $A_{ij} = A_{ji} \Rightarrow (\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot A_{ij} = \lambda \cdot A_{ji} = (\lambda A)_{ji} \Rightarrow \lambda \cdot A \in S_{nn}$.

5.2) Innanzitutto noto che la matrice nulla e' antisimmetrica. Considero $A, B \in \mathcal{A}_{nn}$, ho che:

$A + B = (A+B)$ tale che $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \wedge (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = -A_{ij} - B_{ij} = -(A_{ij} + B_{ij}) = -(A+B)_{ij} \Rightarrow A+B \in \mathcal{A}_{nn}$.

ho che $\lambda \cdot A = (\lambda A)$ tale che $(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot A_{ij} \wedge (\lambda A)_{ji} = \lambda \cdot A_{ji} = \lambda \cdot (-A_{ij}) = -\lambda A_{ij} = -(\lambda A)_{ij} \Rightarrow \lambda A \in \mathcal{A}_{nn}$.