Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 8
19 Maggio 2023 — Compito n. 00145

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: Moror

Cognome: Rosu

Matricola: 2 0 4 6 2 1 2

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	■	□	□	■	■	■	□	□	□	■	■	□	□	□	■	□
F	□	■	■	□	□	□	■	■	■	□	□	■	■	■	□	■
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 4\,y'(t) + 4\,y(t) = 0\,.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.
1B) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(6) = 3$.
1C) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(6) = 7$ e $y'(6) = 8$.
1D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che

$$y(6) = 5\,,\ y'(6) = 6\,,\ y''(6) = 44\,.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 15\,y'(t) + 54\,y(t) = 432\,. \tag{1}$$

2A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 15L + 54$.
2B) La funzione $y_0(t) = 7\,e^{6\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).
2C) La funzione $\overline{y}(t) = 9$ è una soluzione particolare di (1).
2D) Se $y(0) = 9$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y(t) + B\,y(t) = 0\,, \quad A\,,B \in \mathbb{R}\,.$$

3A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - A\,L + B$.
3B) Se $A = 0$ e $B = -16$, la funzione $y(t) = 4\,e^{4\,t} - 11\,e^{-4\,t}$ è soluzione dell'equazione.
3C) Se $A = -4$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 2$ è soluzione dell'equazione.
3D) Se $A = -12$ e $B = 45$, la funzione $y(t) = 4\,e^{6\,t}\,\sin(3\,t)$ non è soluzione dell'equazione.

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 7\,y'(t) = -56\,.$$

4A) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C\,e^{7\,t}$.
4B) Esistono soluzioni costanti dell'equazione.
4C) La funzione $\overline{y}(t) = 8\,t$ è soluzione dell'equazione.
4D) Se $y(0) = 7$ e $y'(0) = 8$, la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

Docente
☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

5) Si consideri l'equazione differenziale

(1) $$y''(t) - 14\,y'(t) + 33\,y(t) = -8\,e^{3\,t}\,.$$

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
c) Trovare una soluzione particolare di (1).
d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

---

a) $P(\lambda) \to \lambda^2 - 14\lambda + 33 = 0$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{14 \pm \sqrt{196-132}}{2} = 7 \pm 4$ $\nearrow 11$ $\searrow 3$

b) $y_0(t) = Ce^{3t} + De^{11t}$

c) CERCO $\bar{y}(t) = Qe^{3t}$, MA È SOLUZIONE DI $y_0(t)$.

QUINDI CERCO $\bar{y}(t) = Qte^{3t}$

$\bar{y}'(t) = Qe^{3t} + 3Qte^{3t}$

$\bar{y}''(t) = 6Qe^{3t} + 9Qte^{3t}$

$6Qe^{3t} + 9Qte^{3t} - 14Qe^{3t} - 42Qte^{3t} + 33Qte^{3t} = -8e^{3t}$

$-8Qe^{3t} + Qte^{3t}[9 - 42 + 33] = -8e^{3t} \Rightarrow -8Qe^{3t} = -8e^{3t} \Rightarrow Q = 1$

$\bar{y}(t) = te^{3t}$

$y(t) = e^{3t}[C + t] + De^{11t}$

d) $y'(t) = 3e^{3t}[C+t] + e^{3t} + 11De^{11t}$

$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C + D \Rightarrow C = -D$

$C = D = 0$

$y'(0) = 1 \Rightarrow 1 = 3C + 1 + 11D \Rightarrow 3C + 11D = 0 \Rightarrow 3C = -11D \Rightarrow C = -\frac{11}{3}D$

$y(t) = te^{3t}$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00145**

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 4\,y'(t) + 4\,y(t) = 2\,e^{2\,t}\,. \tag{1}$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
b) Si trovi una soluzione particolare di (1).
c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$.
d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$.

(a) $P(\lambda) \to \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{4}{2} = 2$ $\qquad y_0(t) = (C + Dt)e^{2t}$

(b)

cerco $\bar{y}(t) = Qe^{2t}$, MA È SOL. DI $y_0(t)$.

cerco $\bar{y}(t) = Qte^{2t}$, MA È SOL. DI $y_0(t)$.

cerco:

$\bar{y}(t) = Qt^2e^{2t} = \qquad = Qe^{2t}[t^2]$

$\bar{y}'(t) = 2Qte^{2t} + 2Qt^2e^{2t} \qquad = Qe^{2t}[2t + 2t^2]$

$\bar{y}''(t) = 2Qe^{2t} + 8Qte^{2t} + 4Qt^2e^{2t} = Qe^{2t}[2 + 8t + 4t^2]$

$Qe^{2t}[2 + 8t + 4t^2] + Qe^{2t}[-8t - 8t^2] + Qe^{2t}[4t^2] = 2e^{2t}$

$Qe^{2t}[2 + 8t + 4t^2 - 8t - 8t^2 + 4t^2] = 2e^{2t}$

$Qe^{2t}\,2 = 2e^{2t} \Longrightarrow Q = 1 \qquad \bar{y}(t) = t^2e^{2t}$

$y(t) = e^{2t}(t^2 + Dt + C)$

$y'(t) = 2e^{2t}(t^2 + Dt + C) + e^{2t}(2t + D)$

(c)

$y(0) = 0 \to C = 0$

$y'(0) = 3 \to 2C + D = 3 \Rightarrow D = 3 - 2C \to D = 3$ $\qquad y(t) = e^{2t}(t^2 + 3t)$

(d)

$y(0) = 2 \to C = 2$

$y'(0) = 0 \to 2C + D = 0 \to 4 + D = 0 \to D = -4$ $\qquad y(t) = e^{2t}(t^2 - 4t + 2)$

0 errori

Soluzioni del compito 00145

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 4\,y'(t) + 4\,y(t) = 0\,.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.

Vero: Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali.

1B) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(6) = 3$.

Falso: L'equazione ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali. Assegnando una sola condizione, si "fissa" uno solo dei due parametri, e quindi l'equazione ha infinite soluzioni tali che $y(6) = 3$.

1C) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(6) = 7$ e $y'(6) = 8$.

Falso: Assegnando due condizioni, una sulla funzione e una sulla derivata, si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione.

1D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che

$$y(6) = 5\,,\ y'(6) = 6\,,\ y''(6) = 44\,.$$

Vero: Se $y(6) = 5$ e $y'(6) = 6$, dall'equazione segue che deve essere

$$0 = y''(6) + 4\,y'(6) + 4\,y(6) = y''(6) + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = y''(6) + 44\,,$$

da cui segue che $y''(6) = -44$. Pertanto, l'unica soluzione dell'equazione che soddisfa le condizioni $y(6) = 5$ e $y'(6) = 6$ è tale che $y''(6) = -44 \neq 44$; in altre parole, non esistono soluzioni dell'equazione che soddisfano le tre condizioni richieste.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

(1) $$y''(t) - 15\,y'(t) + 54\,y(t) = 432\,.$$

2A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 15L + 54$.

Vero: Sostituendo y'' con L^2, y' con L e y con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 - 15L + 54\,.$$

2B) La funzione $y_0(t) = 7\,\mathrm{e}^{6\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

Vero: Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 15L + 54$, che si annulla per $L_1 = 6$ e $L_2 = 9$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{6\,t} + D\,\mathrm{e}^{9\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 7$ e $D = 0$, si ha che $y_0(t) = 7\,\mathrm{e}^{6\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).
Alternativamente, se $y_1(t) = \mathrm{e}^{6\,t}$ si ha, derivando,

$$y_1'(t) = 6\,\mathrm{e}^{6\,t}\,, \qquad y_1''(t) = 36\,\mathrm{e}^{6\,t}\,,$$

e, sostituendo nell'equazione,

$$y_1''(t) - 15\,y_1'(t) + 54\,y_1(t) = [36 - 15 \cdot 6 + 54]\,\mathrm{e}^{6\,t} = 0 \cdot \mathrm{e}^{6\,t} = 0\,,$$

e quindi $y_1(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1). Dato che tale equazione è lineare, anche $y_0(t) = 7\,y_1(t)$ è soluzione dell'omogenea.

2C) La funzione $\overline{y}(t) = 9$ è una soluzione particolare di (1).

Falso: Sostituendo nell'equazione si ha, essendo nulle sia la derivata prima che la derivata seconda di $\overline{y}(t)$,

$$y'' - 15\,y' + 54\,y = 54 \cdot 9 = 486 \neq 432\,,$$

e quindi $\overline{y}(t) = 9$ non è una soluzione particolare di (1). Cercando una soluzione particolare della forma $y(t) \equiv Q$ si vede facilmente che deve essere $Q = 8$.

2D) Se $y(0) = 9$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

Falso: Se (1) avesse una soluzione costante tale che $y(0) = 9$, chiaramente tale soluzione non può che essere $y(t) \equiv y(0) = 9$ (si noti che la condizione $y'(0) = 0$ è verificata). Sostituendo però nell'equazione $y(t) = 9$ si trova

$$y'' - 15\,y' + 54\,y = 54 \cdot 9 = 486 \neq 432\,,$$

e quindi $y(t) \equiv 9$ non è soluzione dell'equazione; questo vuol dire che l'unica soluzione del problema di Cauchy per (1) con le condizioni iniziali $y(0) = 9$ e $y'(0) = 0$ non è costante.

---

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y(t) + B\,y(t) = 0\,, \quad A\,, B \in \mathbb{R}\,.$$

3A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - A\,L + B$.

Falso: Sostituendo y'' con L^2, y' con L e y con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 + A\,L + B \neq L^2 - A\,L + B\,.$$

3B) Se $A = 0$ e $B = -16$, la funzione $y(t) = 4\,\mathrm{e}^{4\,t} - 11\,\mathrm{e}^{-4\,t}$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $A = 0$ e $B = -16$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 16$ che si annulla per $L = \pm 4$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{4\,t} + D\,\mathrm{e}^{-4\,t}\,.$$

Scegliendo $C = 4$ e $D = -11$, si ha che $y(t) = 4\,\mathrm{e}^{4\,t} - 11\,\mathrm{e}^{-4\,t}$ è soluzione dell'equazione.

3C) Se $A = -4$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 2$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $A = -4$ e $B = 0$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 4\,L$ che si annulla per $L = 0$ e per $L = 4$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{0\,t} + D\,\mathrm{e}^{4\,t} = C + D\,\mathrm{e}^{4\,t}\,.$$

Scegliendo $C = 2$ e $D = 0$, si ha che $y(t) = 2$ è soluzione dell'equazione.

3D) Se $A = -12$ e $B = 45$, la funzione $y(t) = 4\,\mathrm{e}^{6\,t}\,\sin(3\,t)$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $A = -12$ e $B = 45$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 12\,L + 45$, che si annulla per $L = 6 \pm 3\,i$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{6\,t}[C\,\cos(3\,t) + D\,\sin(3\,t)]\,.$$

Scegliendo $C = 0$ e $D = 4$, si ha che $y(t) = 4\,\mathrm{e}^{6\,t}\,\sin(3\,t)$ è soluzione dell'equazione.

---

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 7\,y'(t) = -56\,.$$

4A) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{7\,t}$.

Falso: Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 7\,L$, che si annulla per $L = 0$ e $L = 7$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{0\cdot t} + D\,\mathrm{e}^{7\,t} = C + D\,\mathrm{e}^{7\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Pertanto, non tutte le soluzioni dell'omogenea associata sono date da $y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{7\,t}$: mancano le soluzioni costanti.

4B) Esistono soluzioni costanti dell'equazione.

Falso: Se $y(t) \equiv Q$ è una costante, sostituendo nell'equazione si ha

$$y''(t) - 7\,y'(t) = 0 - 7\cdot 0 = 0 \neq -56\,,$$

e quindi l'equazione non ha soluzioni costanti. Alternativamente, sappiamo dalla domanda **4A** che le costanti sono soluzioni dell'equazione omogenea, e quindi non possono essere soluzioni dell'equazione "completa".

4C) La funzione $\overline{y}(t) = 8\,t$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $\overline{y}(t) = 8\,t$, si ha $\overline{y}'(t) = 8$ e $\overline{y}''(t) = 0$. Sostituendo nell'equazione si ha

$$\overline{y}''(t) - 7\,\overline{y}'(t) = -7\cdot 8 = -56\,,$$

e quindi $\overline{y}(t) = 8\,t$ è soluzione dell'equazione.

4D) Se $y(0) = 7$ e $y'(0) = 8$, la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

Falso: Sappiamo già, dagli esercizi **4A** e **4C**, che tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C + D\,\mathrm{e}^{7\,t} + 8\,t\,,$$

con C e D numeri reali. Pertanto,

$$y'(t) = 7\,D\,\mathrm{e}^{6\,t} + 8\,.$$

Pertanto, assegnando le condizioni iniziali, si ha

$$7 = C + D\,, \qquad 8 = 7\,D + 8\,.$$

Dalla seconda si ricava $D = 0$, e sostituendo nella prima si ricava $C = 7$. Ne segue che l'unica soluzione dell'equazione è

$$y(t) = 7 + 8\,t\,,$$

che è un polinomio di primo grado (e quindi non è un'esponenziale).

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \qquad y''(t) - 14\,y'(t) + 33\,y(t) = -8\,\mathrm{e}^{3\,t}\,.$$

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
c) Trovare una soluzione particolare di (1).
d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Soluzione:
a) Sostituendo in (1) L^2 a y'', L a y' e 1 a y, si trova

$$P(L) = L^2 - 14\,L + 33\,,$$

che si annulla per $L_1 = 3$ e per $L_2 = 11$.

b) Usando le radici del polinomio caratteristico calcolate al punto precedente, abbiamo che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1) sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{3\,t} + D\,\mathrm{e}^{11\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

c) Dato che $g(t) = \mathrm{e}^{3\,t}$ è una soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\overline{y}(t) = Q\,t\,\mathrm{e}^{3\,t}\,.$$

Si ha

$$\overline{y}'(t) = Q\,(1 + 3\,t)\,\mathrm{e}^{3\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = Q\,(6 + 9\,t)\,\mathrm{e}^{3\,t}\,.$$

Sostituendo in (1) si ha

$$\overline{y}'' - 14\,\overline{y} + 33\,\overline{y} = Q\,\mathrm{e}^{3\,t}\,[6 + 9\,t - 14\,(1 + 3\,t) + 33\,t] = -8\,Q\,\mathrm{e}^{3\,t}\,,$$

e quindi $\overline{y}(t)$ è soluzione di (1) se Q è tale che

$$-8\,Q\,\mathrm{e}^{3\,t} = -8\,\mathrm{e}^{3\,t}\,,$$

da cui segue $Q = 1$ e quindi

$$\overline{y}(t) = t\,\mathrm{e}^{3\,t}\,.$$

d) Da **b)** e **c)** abbiamo che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C\,\mathrm{e}^{3\,t} + D\,\mathrm{e}^{11\,t} + t\,\mathrm{e}^{3\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Dato che

$$y'(t) = 3\,C\,\mathrm{e}^{3\,t} + 11\,D\,\mathrm{e}^{11\,t} + \mathrm{e}^{3\,t} + 3\,t\,\mathrm{e}^{3\,t}\,,$$

si ha $y(0) = C + D$ e $y'(0) = 3\,C + 11\,D + 1$. Imponendo le condizioni iniziali, si ha che deve essere $C + D = 0$ e $3\,C + 11\,D + 1 = 1$, da cui si ricava facilmente $C = D = 0$. Ne segue che l'unica soluzione di (1) che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ è

$$y(t) = t\,\mathrm{e}^{3\,t}\,.$$

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 4\,y'(t) + 4\,y(t) = 2\,\mathrm{e}^{2\,t}\,. \tag{1}$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
b) Si trovi una soluzione particolare di (1).
c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$.
d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$.

Soluzione:
a) Il polinomio caratteristico è $P(L) = L^2 - 4\,L + 4$, che si annulla per $L_1 = L_2 = 2$. Conseguentemente, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata ad (1) sono date da

$$y_0(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{2\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

b) Dato che sia $\mathrm{e}^{2\,t}$ che $t\,\mathrm{e}^{2\,t}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare di (1) della forma

$$\overline{y}(t) = Q\,t^2\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$

Derivando, si ha

$$\overline{y}'(t) = Q\,(2t + 2\,t^2)\,\mathrm{e}^{2\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = Q\,(2 + 8\,t + 4\,t^2)\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$\overline{y}'' - 4\,\overline{y}' + 4\,\overline{y}(t) = Q\,\mathrm{e}^{2\,t}\,[2 + 8\,t + 4\,t^2 - 4\,(2t + 2\,t^2) + 4\,t^2] = 2\,Q\,\mathrm{e}^{2\,t}\,,$$

da cui segue che $\overline{y}(t)$ è soluzione di (1) se $Q = 1$. Si ha dunque che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = (C + D\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{2\,t}\,,$$

da cui segue, derivando, che

$$y'(t) = (2\,C + D + (2\,D + 2)\,t + 2\,t^2)\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$

Pertanto

$$y(0) = C\,, \qquad y'(0) = 2\,C + D\,. \tag{2}$$

c) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 0$ e $2\,C + D = 3$, da cui $C = 0$ e $D = 3$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (3\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$

d) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 2$ e $2\,C + D = 0$, da cui $D = -4$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (2 - 4\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$