Algebra. Laurea in Informatica a.a. 2023-2024

Canale 1.

Esame scritto di prova.

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.

30 Dicembre 2023

Nome e Cognome: Marco Casu

Numero di Matricola: ____________________

email istituzionale: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	7	
3	6	
4	6	
5	7	
Totale	33	

ATTENZIONE:

- I compiti disordinati o poco leggibili non saranno neanche corretti.
- Spiegare il procedimento ed i calcoli eseguiti, e **giustificare ogni risposta**. La valutazione terrà conto della presentazione: leggibilità, grammatica, sintassi, ordine, chiarezza, capacità di sintesi.
- Una risposta giusta con giustificazione sbagliata viene valutata ≤ 0.
- Scrivete le risposte negli appositi riquadri.
- I fogli di brutta non saranno accettati; consegnare esclusivamente questi fogli.
- Tutti i dispositivi elettronici (smartphones, tablets, PC, etc, etc) devono essere spenti ed in borsa.
- Non sono ammessi libri o appunti ad eccezione di un formulario di una pagina A4.

Esercizio 1 (di teoria). 4 o 5 domande di teoria; 1 o 2 dimostrazioni. Ad esempio:

(1) Definire la funzione φ di Eulero ed enunciare il teorema di Eulero.
(2) ....
(3) ....
(4) ....
(5) ....

Svolgimento.

La funzione di Eulero, indicata con φ, e' una funzione che associa ad ogni numero naturale n, un valore rappresentante la quantita' di numeri naturali minori di n, CO-PRIMI con n.

Teorema di Eulero: Sia a ed n due numeri interi, se $MCD(a,n)=1$ allora:

$$a^{\varphi(n)} = 1 \pmod{n}$$

La funzione φ e' moltiplicativa: $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Esercizio 2.
Determinare le soluzioni del seguente sistema di equazioni congruenziali

$$\begin{cases} 12387^{8525}x \equiv 1(10) \\ 13x + 7 \equiv 0(12) \end{cases}$$

Soluzione.

Sono interessato a trovare il valore di 12387^{8525} mod 10, sia φ la Funzione di Eulero: $\varphi(10) = \varphi(5 \cdot 2) = \varphi(5) \cdot \varphi(2) = 4 \cdot 1 = 4$, adesso noto che $8525 = 8524 + 1 = (2131 \cdot 4) + 1$

quindi $12387^{8525} = 12387^{(2131 \cdot 4)+1} = 12387^{(2131)\cdot 4} \cdot 12387 \pmod{10}$ per il teo. di Eulero

$\equiv 1 \cdot 12387 \equiv 7 \pmod{10}$. Riscrivo il sistema:

$\begin{cases} 7x \equiv 1 \quad (10) \\ 13x \equiv -7 \quad (12) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x \equiv 1 \quad (10) \\ 13x \equiv 5 \quad (12) \end{cases} \Rightarrow$ MOLTIPLICO PER L'INVERSO DI 7 IN $\mathbb{Z}_{10}$ $13 \equiv 1 \pmod{12}$ $\Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 7x \equiv 3 \quad (10) \\ x \equiv 5 \quad (12) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 3 \quad (10) \\ x \equiv 5 \quad (12) \end{cases}$

Risolvo per sostituzione:

$\begin{cases} x \equiv 3 \quad (10) \\ x = 5 + 12K \quad K \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 5 + 12K \equiv 3 \ (10) \Rightarrow 12K \equiv -2 \ (10) \Rightarrow 2K \equiv 8 \ (10) \Rightarrow K \equiv 4 \ (10) \Rightarrow K = 4 + 10t \quad t \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = 5 + 12 \cdot (4 + 10t) = 5 + 12 \cdot 4 + 12 \cdot 10t = 53 + 120t = 53 \pmod{120}$

Risposta:

53 (mod 120)

Esercizio 3.
Siano H e K due sottogruppi di un gruppo G. Denotiamo con 1_G l'elemento neutro in G. Consideriamo il prodotto diretto $H \times G$ con la sua naturale struttura di gruppo e l'applicazione

$$f : H \times K \ni (h, k) \to hk \in G$$

(1) verificare che f è iniettiva se e solo se $H \cap K = \{1_G\}$ (equivalentemente, f è non-iniettiva se e solo se $H \cap K \neq \{1_G\}$).
(2) verificare che f è un omomorfismo di gruppi se e solo se $\forall h \in H$, $\forall k \in K$ si ha $hk = kh$.

Soluzione.
(1) Risulta chiaro che l'elemento neutro di $H \times K$ sia $(1_G, 1_G)$
Se $H \cap K \neq \{1_G\} \Leftrightarrow \exists \alpha \in H \cap K \Leftrightarrow \exists \alpha \in H \wedge \exists \alpha \in K \Leftrightarrow \exists \bar{\alpha}' \in H \wedge \exists \bar{\alpha}' \in K \Leftrightarrow \exists \bar{\alpha}' \in H \cap K$
$\Leftrightarrow \exists (\alpha, \bar{\alpha}') \in H \times K$ ma $f((\alpha, \bar{\alpha}')) = \alpha \cdot \bar{\alpha}' = 1_G$, quindi se $H \cap K = \{1_G\}$
non esiste nessun elemento in H tale che l'inverso sia in H, quindi
l'unico elemento $(h, k) \in H \times K \mid f((h, k)) = 1_G$ e' $(1_G, 1_G)$, $\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{(1_G, 1_G)\}$
$\Leftrightarrow f$ e' iniettiva.

(2) f e' un omomorfismo se $f((h, k) * (h', k')) = f((h, k)) \cdot f((h', k'))$, noto che:

$f((h, k) * (h', k')) = f((h \cdot h', k \cdot k')) = h \cdot h' \cdot k \cdot k' = hk\,h'k' \Leftrightarrow \forall h \in H, \forall k \in K$ si ha $hk = kh$.
$hk \cdot h'k' = f((h, k)) \cdot f((h', k'))$

Esercizio 4.
Si considerino le permutazioni di S_8

$$\alpha := (46) \circ (173) \circ (125), \quad \beta := (87543) \circ (12), \quad \gamma := (123) \circ (864) \circ (87).$$

1. Determinare la decomposizione in cicli *disgiunti* di queste 3 permutazioni.
2. Determinare il segno [1] di ognuna di esse.
3. Stabilire se tra esse ce ne sono due coniugate e, in caso affermativo, trovare una permutazione τ che le coniuga.

Soluzione.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & 6 & 7 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 5\ 7\ 3)(4\ 6) = (1\ 3)(1\ 7)(1\ 5)(1\ 2)(4\ 6) \text{ e' dispari!}$$

$\beta = (8\ 7\ 5\ 4\ 3)(1\ 2)$ e' già in cicli disgiunti $= (8\ 3)(8\ 4)(8\ 5)(8\ 7)(1\ 2)$ e' dispari!

$$\gamma = (1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)(4\ 8\ 7\ 6)$$

$= (1\ 3)(1\ 2)(4\ 6)(4\ 7)(4\ 8)$ e' dispari!

α e β condividono la stessa struttura ciclica, quindi sono coniugate.

trovo τ tale che $\beta = \tau \alpha \tau^{-1}$: $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Verifica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & 6 & 7 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 5 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 8 & 2 & 4 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 5 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 8\ 7\ 5\ 4)$$

Risposta:

[1] ovvero la parità

Esercizio 5. Sia $A \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

e sia $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da A.

1. Scrivere l'espressione esplicita di L_A:

$$L_A\left(\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{vmatrix}$$

2. Determinare una base di $\mathrm{Im}(L_A)$ e una base di $\mathrm{Ker}(L_A)$.

3. Determinare equazioni cartesiane per $\mathrm{Im}(L_A)$.

Soluzione.

(1) $L_A\left(\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2x_1+5x_2+x_4 \\ x_1+4x_2-x_3 \\ -3x_2+2x_3+x_4 \\ -x_1-7x_2+3x_3+x_4 \end{vmatrix}$, (2) Una base di $\mathrm{Im}(L_A)$ e' data dalle colonne lin. indip. di A, riduco A a scala:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{A_1 \leftrightarrow A_2} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[A_4+A_1]{A_2-2A_1} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[A_4-A_2]{A_3-A_2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ Una base dim $\mathrm{Im}(L_A)$ e' $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix}$. Trovo una base per il nucleo:

$$\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=0 \\ -3x_2+2x_3+x_4=0 \\ x_3=t_3 \\ x_4=t_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=t_3-4x_2 \\ 3x_2=2t_3+t_4 \\ x_3=t_3 \\ x_4=t_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=t_3-4(\frac{2}{3}t_3+\frac{1}{3}t_4) \\ x_2=\frac{2}{3}t_3+\frac{1}{3}t_4 \\ x_3=t_3 \\ x_4=t_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{3}t_4-\frac{5}{3}t_3 \\ x_2=\frac{2}{3}t_3+\frac{1}{3}t_4 \\ x_3=t_3 \\ x_4=t_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ker}\, L_A = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} -5/3 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$

(3) considero e riduco

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{A_4+A_1} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4+x_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A_1 \leftrightarrow A_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 0 & -3 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_4+x_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A_2-2A_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ 0 & -3 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1-2x_2 \\ x_3 \\ x_4+x_1 \end{bmatrix} \xrightarrow[A_4+4A_2]{A_3-A_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1-2x_2 \\ x_3-x_1+2x_2 \\ x_4+x_1+4x_1-2x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3+2x_2-x_1=0 \\ x_4-2x_2+5x_1 \end{cases}$$

$\leftarrow$ equazioni cartesiane.

Risposta: