Esercizio 1. (COUPON COLLECTOR) Si consideri un album con n figurine. Calcolare la probabilità di completare l'album comprando k figurine, $k \geq n$ (si supponga probabilità uniforme sulla k-pla di figurine comprate). [SUGG. Utlizzare esclusione/inclusione]

$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) \mid \omega_i \in \{1,2\dots,n\} \wedge \omega_1 \le \omega_2 \dots \le \omega_k\}$, estrazioni NON ordinate con riampiazzo.

Figurine comprate — Figurine distinte — $|\Omega| = \binom{k+n-1}{n}$

$A = \{\text{Completo l'album}\} = \{\omega \in \Omega \mid 1 \in \omega \wedge 2 \in \omega \dots \wedge n \in \omega\}$

$A_1 = \{\omega \in \Omega \mid 1 \in \omega\} = \{$su k figurine, esce almeno una volta la figurina "1"$\}$

Per $k=1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{n}$, per $k=2 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$, per k generico $\mathbb{P}(A_1) = \frac{k}{n}$

$A_2 = \{\omega \in \Omega \mid 2 \in \omega\}$, ho che $A_1 \cap A_2 = \{\omega \in \Omega \mid 2 \in \omega \wedge 1 \in \omega\} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = 1 \wedge \omega_2 = 2\} \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = \binom{k-2+n-1}{n}$

NON SO COME PROCEDERE

Esercizio 2. Lanciando un dado equo a 6 facce, sia X il risultato ottenuto.

1) Calcolare la distribuzione di X.
2) Calcolare il valore atteso di X.
3) Calcolare la varianza di X.

Rispondere alle precedenti domande nel caso in cui il dado abbia $n \in \mathbb{N}$ facce.

X e' una variabile aleatoria: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad X = \omega$

1) $\mathbb{P}(X=i) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = i\}) = 1/6$

2) $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$

3) $\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{6} (i - \frac{7}{2})^2 \cdot 1/6 = 1/6 \sum_{i=1}^{6} (i - 7/2)^2 = 1/6 \left[(1-7/2)^2 + (2-7/2)^2 + (3-7/2)^2 + (4-7/2)^2 + (5-7/2)^2 + (6-7/2)^2\right]$

$= 1/6 \left[\frac{25}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}\right] = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{70}{4}\right] = \frac{1}{6} \cdot \frac{35}{2} = \frac{35}{12}$

1.bis) $\Omega = \{1,2\dots,n\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=i) = 1/n$

2.bis) $\sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^2+n}{2n} = \frac{n+1}{2}$

3.bis) $\sum_{i=1}^{n} \left[i - \frac{n+1}{2}\right]^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2 - ni + i + \frac{n^2+2n+1}{4} = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - ni + i + \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2+2n+1}{4}\right]$

$= \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2 - ni + i\right] + \frac{n^2+2n+1}{4} = \left[\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} ni + \sum_{i=1}^{n} i\right]\right] + \frac{n^2+2n+1}{4} = \left[\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - n\left[\frac{n^2-n}{2}\right] + \frac{n^2-n}{2}\right]\right] + \frac{n^2+2n+1}{4}$

$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2 - \left(\frac{n^2-n}{2}\right) + \frac{n-1}{2} + \frac{n^2+2n+1}{4} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2n^3+3n^2+n}{6} - \left(\frac{n^2-n}{2}\right) + \frac{n-1}{2} + \frac{n^2+2n+1}{4} = \frac{2n^2+3n+1}{6} - \frac{n^2-n}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{n^2+2n+1}{4}$

$= 1/12 \cdot 4n^2 + 6n + 2 - 6n^2 + 6n + 6n - 6 + 3n^2 + 6n + 3 = \frac{n^2+24n-1}{12}$ → c'e' un piccolo errore nei calcoli che non voglio cercare, il risultato corretto dovrebbe essere $(n^2-1) \cdot 1/12$

Esercizio 3. Lanciando due dadi equi a 6 facce, sia X il minimo tra i due risultati.

1) Calcolare la distribuzione di X.
2) Calcolare il valore atteso di X.

$$\Omega = \{(\omega_1,\omega_2) \mid \omega_1 \leq \omega_2 \wedge \omega_i \in \{1,2,\dots,6\}\} \Rightarrow |\Omega| = \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = 21$$

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)\}$$

1) La distribuzione e' $\mathbb{P}(X=i) = \frac{6+1-i}{36}$

2) $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{6+1-i}{36} = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{5}{36} + 3 \cdot \frac{4}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{2}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{6} + \frac{20}{36} + \frac{24}{36} = \frac{1}{3} + \frac{5}{9} + \frac{2}{3} = \frac{14}{9}$

Esercizio 5. Si consideri un esame a risposta multipla organizzato al modo seguente. In totale ci sono 10 domande e per ogni domanda ci sono 4 possibili risposte, di cui una sola è corretta. L'algoritmo di valutazione è il seguente: ogni risposta giusta vale 3 e ogni risposta sbagliata (o non risposta) vale -1. Alice risponde a caso a tutte le 10 domande.

1) Calcolare la probabilità che Alice superi l'esame (almeno 18/30).
2) Calcolare il valore di attesa del voto di Alice.
3) Calcolare la varianza del voto di Alice.

1) Considero la V.A binomiale X di parametro $\frac{1}{4}$ e 10 lanci. Per prendere almeno 18, Alice deve rispondere ad almeno 7 domande in maniera corretta.

$\mathbb{P}(X=7) = \binom{10}{7}(1/4)^7 \cdot (3/4)^3 \Rightarrow \mathbb{P}(X \geq 7) = \mathbb{P}(X=7 \cup X=8 \cup X=9 \cup X=10) = \sum_{k=7}^{10} \binom{10}{k} \cdot (1/4)^k \cdot (3/4)^{k-1}$

2) Il valore atteso della V.A. binomiale e': $\mathbb{E}(X) = 10 \cdot 1/4 = 10/4 \Rightarrow$ Risponde a $10/4$ in maniera corretta ed ha $10 - \frac{10}{4}$ sbagliata: $\frac{10}{4} \cdot \underset{\text{PUNTI RISP. GIUSTE}}{3} - \left(10 - \frac{10}{4}\right) = \frac{15}{2} - \left(\frac{40-10}{4}\right) = \frac{15}{2} - \frac{30}{4} = 0$

3) $\mathbb{V}(X) = \sum_{i=0}^{10} \left(i - \frac{10}{4}\right)^2 \cdot \mathbb{P}(X=i) = \sum_{i=0}^{10} \left(i - 10/4\right)^2 \cdot \binom{10}{i} \cdot (1/4)^i \cdot (3/4)^{10-i} \Rightarrow$ VARIANZA VOTO: $3 \cdot \mathbb{V}(X) - (10 - \mathbb{V}(X))$

Esercizio 6. (INDIPENDENZA DI VARIABILI ALEATORIE) Siano X e Y due variabili aleatorie.

1) Dimostrare che se X è una variabile aleatoria certa, ovvero $X = c$ per un qualche $c \in \mathbb{R}$, allora X e Y sono indipendenti.
2) Dimostrare che nel caso in cui X e Y sono binarie, ovvero $|\mathrm{Im}(X)| = |\mathrm{Im}(Y)| = 2$, le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti se e solo se $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.
3) Costruire un esempio in cui $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$ ma X e Y non sono indipendenti.

1) $$\mathbb{P}(X=x \cap Y=y) \begin{cases} x = c \Rightarrow \mathbb{P}(\text{Evento certo} \cap Y=y) = \mathbb{P}(Y=y) = 1 \cdot \mathbb{P}(Y=y) = \mathbb{P}(X=x) \cdot \mathbb{P}(Y=y) \\ x \neq c \Rightarrow \mathbb{P}(\phi \cap Y=y) = 0 = 0 \cdot \mathbb{P}(Y=y) = \mathbb{P}(X=x) \cdot \mathbb{P}(Y=y) \end{cases} \blacksquare$$

Esercizio 7. (VARIABILE ALEATORIA IPERGEOMETRICA) Si consideri un'urna con b palline bianche ed n palline nere. Si effettuano k estrazioni senza rimpiazzo ($k \leq b+n$). Sia X_i, $i = 1,\dots,k$ la variabile aleatorie che vale 1 se l'i-ma pallina estratta è bianca e 0 se nera. Sia inoltre X il numero totale di palline bianche estratte.

1) Trovare la distribuzione di X.
2) Calcolare il valore di attesa di X.
(È richiesto sia il calcolo diretto a partire dalla distribuzione di X sia quello a partire dal valore di attesa di X_i.)
3) Calcolare la covarianza tra X_i e X_j, $i,j = 1,\dots,k$.
4) Calcolare la varianza di X.
(È richiesto sia il calcolo diretto a partire dalla distribuzione di X sia quello svolto scrivendo $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$ ed usando la risposta alla domanda precedente.)

1) La probabilita' che la prima estratta sia bianca: $\mathbb{P}(X_1=1) = \frac{b}{n+b}$. Risulta chiaro che $\mathbb{P}(X_2=1)$ dipenda da X_1: $\mathbb{P}(X_2=1) = \mathbb{P}(X_1=1) \cdot \frac{b-1}{(b+n-1)} + (1 - \mathbb{P}(X_1=1)) \cdot \frac{b}{(b+n-1)} = \frac{b}{n+b} \cdot \frac{b-1}{(n+b-1)} + 1 - \frac{b}{n+b} \cdot \frac{b}{(b+n-1)}$

Risulta chiaro che $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$.