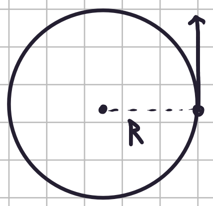
[1] All'istante $t = 0$ un punto materiale, partendo da fermo, si mette in moto su una traiettoria circolare, giacente su un piano orizzontale liscio, di raggio $R = 225\,\mathrm{m}$. Fino all'istante $t_1 = 10\,\mathrm{s}$, la velocità cresce linearmente con il tempo e lo spazio percorso è di $150\,\mathrm{m}$. Determinare il modulo dell'accelerazione nell'istante t_1.



$v =$ lineare $= Kt$ per qualche $K \in \mathbb{R}^+$

$a = \frac{d}{dt} Kt = K \Rightarrow$ accelerazione costante

dist. percorsa $:= x(t) = \int_0^t K\tau \, d\tau = K \frac{t^2}{2}$

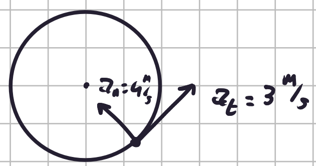
Sappiamo che:

$x(t_1) = 150$ m $\Rightarrow K \cdot \frac{10^2}{2} = 150 \Rightarrow K \cdot 50 = 150 \Rightarrow K = \frac{150}{50} = 3 \; m/s^2$

$t_1 = 10$

$v(t_1) = Kt_1 = 3 \cdot 10 = 30 \frac{m}{s} \Rightarrow$ l'accelerazione normale e' $\frac{v^2}{R}$

$\Rightarrow \frac{v^2(t_1)}{R} = \frac{30^2}{225} = \frac{900}{225} = 4 \frac{m}{s^2}$



$\Rightarrow$ l'accelerazione totale e' $\sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \frac{m}{s}$

---

[2] Un punto materiale si muove su una traiettoria rettilinea con accelerazione dipendente dal tempo, $a = -4t\,\mathrm{ms}^{-2}$. Se all'istante $t = 0$ il punto parte con una velocità $v_0 = 2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, quanto spazio percorrerà prima di fermarsi?

$dv = -4t \Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_0^t -4t \Rightarrow v(t) - v_0 = -2t^2 \Rightarrow v(t) = 2 - 2t^2$

il punto si ferma in t^* dove $v(t^*) = 0 \Rightarrow 2 - 2t^{*2} = 0 \Rightarrow 2t^{*2} = 2 \Rightarrow t^* = \sqrt{1} = 1$

$dx = 2 - 2t^2 \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t 2 - 2t^2 \, dt \Rightarrow x(t) = 2t - 2\frac{t^3}{3}$

$x(t^*) = 2 - \frac{2}{3} \approx 1.33$ m

---

[3] Un treno affrontando una curva con raggio costante $r = 150\,\mathrm{m}$, rallenta di moto uniformemente decelerato passando, in un tempo $t = 15\,\mathrm{s}$, da $90\,\mathrm{km/h}$ all'inizio della curva a $50\,\mathrm{km/h}$ alla fine della curva. Determinare il modulo dell'accelerazione del treno nel momento in cui la sua velocità è di $50\,\mathrm{km/h}$, assumendo che in questo istante esso continui a decelerare.

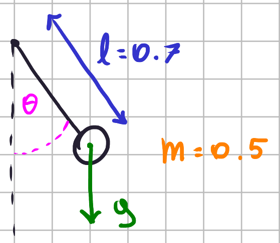
$v_A = 90 \frac{km}{h} = 25 \frac{m}{s}$ $\quad$ $v_B = 50 \frac{km}{h} = 13.8 \frac{m}{s}$

$a_n = \frac{v^2}{R}$ in $B \Rightarrow \frac{13.8^2}{150} \approx 1.3 \frac{m}{s^2}$

$a_t = \frac{|13.8 - 25|}{15} = 0.7 \frac{m}{s^2} \Rightarrow a = \sqrt{0.7^2 + 1.3^2} = 1.5 \frac{m}{s^2}$

acc. media

[4] All'istante $t = 0$ un pendolo semplice di massa $m = 0.5\,\mathrm{kg}$ e lunghezza $l = 0.7\,\mathrm{m}$ parte da fermo a un angolo $\theta = 30\,°$ con la verticale. Determinare, all'istante $t = 0$, il modulo dell'accelerazione tangenziale, dell'accelerazione normale e dell'accelerazione angolare.



eq.

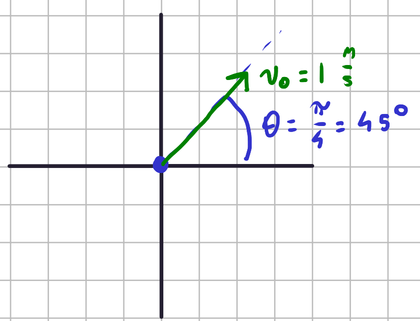
$$-mg\sin\theta = -m\frac{d^2s}{dt^2} \quad \text{acc. tang}$$

$$g\sin\theta = \frac{d^2s}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = 9.8\cdot\sin(30) = 4{,}9\ \frac{m}{s^2}$$

$a_n = \frac{v^2}{R}$ ma v e' 0 all'inizio $\Rightarrow a_n = 0\ \frac{m}{s^2}$. vel. angolare $= \omega = \frac{v}{l}$

$$\dot\omega = \frac{d}{dt}\frac{v}{l} = \frac{1}{l}\,4.9 = 7\ \frac{m}{s^2}$$

[5] All'istante $t = 0$ una massa puntiforme ferma nell'origine di un sistema cartesiano (x, y) posto su un piano orizzontale liscio, parte con una velocità $v_0 = 1\,\mathrm{m/s}$ diretta con un angolo $\theta = \pi/4$ rispetto al semiasse positivo delle x. La massa è sottoposta a un'accelerazione $\mathbf{a} = -g\mathbf{i} - g/2\mathbf{j}$, dove $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ sono i versori degli assi x e y, rispettivamente, e g il modulo dell'accelerazione di gravità. Determinare la componente della velocità vettoriale della massa nell'istante in cui la sua posizione sul semiasse positivo delle x è massima.



$$\bar a = -g\,\hat i - \frac{g}{2}\,\hat j$$

$$\begin{cases} a_x = -g \\ a_y = -\frac{g}{2} \end{cases}$$

Calcolo vel. iniziale sugli assi

$$v_x(0) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0.7$$

$$v_y(0) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0.7$$

$$dv_x = a_x \Rightarrow \int_{v_x(0)}^{v_x(t)} dv_x = \int_0^t -g \Rightarrow v_x - 0.7 = -gt \Rightarrow v_x = 0.7 - gt$$

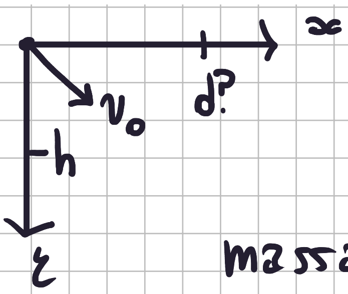
$$dv_y = a_y \Rightarrow v_y - 0.7 = \int_0^t -\frac{1}{2}g \Rightarrow v_y - 0.7 = -\frac{1}{2}gt \Rightarrow v_y = 0.7 - \frac{1}{2}gt$$

$$\bar v = (0.7 - gt)\,\hat i + \left(0.7 - \frac{1}{2}gt\right)\hat j$$

trovo t' per cui $v_x(t') = 0 \Rightarrow 0.7 - gt' = 0 \Rightarrow t' = \frac{0.7}{g} = 0{,}07$

$$\Rightarrow \bar v(t') = 0 + \hat j\left(0.7 - \frac{1}{2}g\,\frac{0.7}{g}\right) = \hat j\left(0.7 - \frac{1}{2}\,0.7\right) = \hat j\,\frac{1}{2}\,0.7$$

[6] Un aereo vola con velocità costante v_0 seguendo una rotta rettilinea inclinata verso ll basso di un angolo α rispetto all'orizzonte. Se il pilota volesse centrare un bersaglio a terra sganciando una massa puntiforme da una quota h, a quale distanza d dal bersaglio dovrebbe sganciarla?



h : fisso

Nel momento dello sgancio, la massa subisce un'accel. di $g \approx 9.8 \frac{m}{s}$

$$\Rightarrow a_z = 9.8 \Rightarrow dv_z = a_z \Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} dv_z = \int_0^t g\, dt$$

$$\Rightarrow v_z(t) = v_0 \sin\alpha + gt$$

$$\Rightarrow r_z(t) = v_0 \sin\alpha\, t + \frac{1}{2} g t^2$$

Sia t' l'istante in cui la massa raggiunge la terra (percorre h m)

$$h = v_0 \sin\alpha\, t' + \frac{1}{2} g t'^2 \Rightarrow h = t'\left(v_0 \sin\alpha + \frac{1}{2} g t'\right)$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha \Rightarrow r_x = v_0 \cos\alpha\, t$$

pongo $r_x(t') = d$

$$\Rightarrow v_0 \cos\alpha\, t' = d \Rightarrow t' = \frac{d}{v_0 \cos\alpha}$$

Si vede d in funzione di h

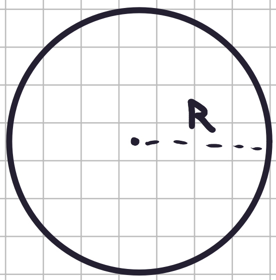
$$\Rightarrow h = \frac{d}{v_0 \cos\alpha}\left(v_0 \sin\alpha + \frac{g}{2} \frac{d}{v_0 \cos\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \quad d \tan\alpha + \frac{g}{2} d^2 \tan\alpha - h = 0$$

$$\Delta = \tan^2\alpha + 2g \tan\alpha\, h$$

$$d = \frac{-\tan\alpha \pm \sqrt{\Delta}}{g \tan\alpha}$$

[7] Un punto materiale si muove lungo una traiettoria circolare di raggio $R = 250\,\mathrm{m}$. Dall'istante iniziale $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ all'istante $t_1 = 10\,\mathrm{s}$ la sua velocità cresce quadraticamente con il tempo ($v = kt^2$); in tale intervallo di tempo, il punto materiale percorre uno spazio $\Delta s = 250\,\mathrm{m}$. Determinare il modulo dell'accelerazione all'istante t_1.



$$v = kt^2$$

$$a_t = \frac{d}{dt} kt^2 = 2kt$$

$$v(t_1) = v(10) = k \cdot 100$$

$$ds = v \Rightarrow \int_{s(0)}^{s(t)} ds = \int_0^t v \Rightarrow s(t) - s(0) = k\frac{t^3}{3}$$

$$s(t_0) = 0$$

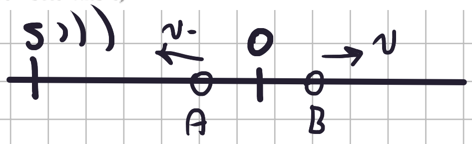
$$s(t_1) = 250\ \mathrm{m} \Rightarrow \quad 250 = k\frac{10^3}{3} \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad a_t(10) = 2\,\frac{3}{4}\,10 = 15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\Rightarrow v(10) = \frac{3}{4}10^2 = 75\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \Rightarrow \quad a_n(10) = \frac{75^2}{250} = 22.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\Rightarrow a(t_1) = \sqrt{15^2 + 22.5^2} = 27\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

[8] Due osservatori, A e B, si muovono in versi opposti lungo l'asse delle x con la stessa velocità v, costante. Quando, all'istante $t = 0$, si trovano nello stesso punto O, un suono viene emesso da una sorgente sonora S posta sull'asse delle x a distanza d da O. Determinare il valore di v e d sapendo che l'osservatore A che si sta muovendo verso la sorgente percepisce il suono all'istante $t_A = 8\,\mathrm{s}$, mentre l'altro osservatore percepisce il suono all'istante $t_B = 10\,\mathrm{s}$. (La velocità del suono in aria vale: $v_S = 340\,\mathrm{m/s}$, indipendentemente dal moto dell'osservatore)



$v_A = -v \qquad v_S = 340$

$v_B = v$

$O = 0$

$S = -d$

$x_A = -vt \qquad x_B = vt \qquad x_S = -d + 340t$

$$\begin{cases} -v \cdot 8 = -d + 340 \cdot 8 \\ v \cdot 10 = -d + 3400 \end{cases} \qquad \begin{cases} v = \frac{d}{8} - 340 \\ \frac{10}{8} d - 3400 = -d + 3400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 3022 \frac{1}{8} - 340 \\ d = 3022 \text{ m} \end{cases} \qquad \begin{cases} v = 37.75 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ d = 3022 \text{ m} \end{cases}$$