

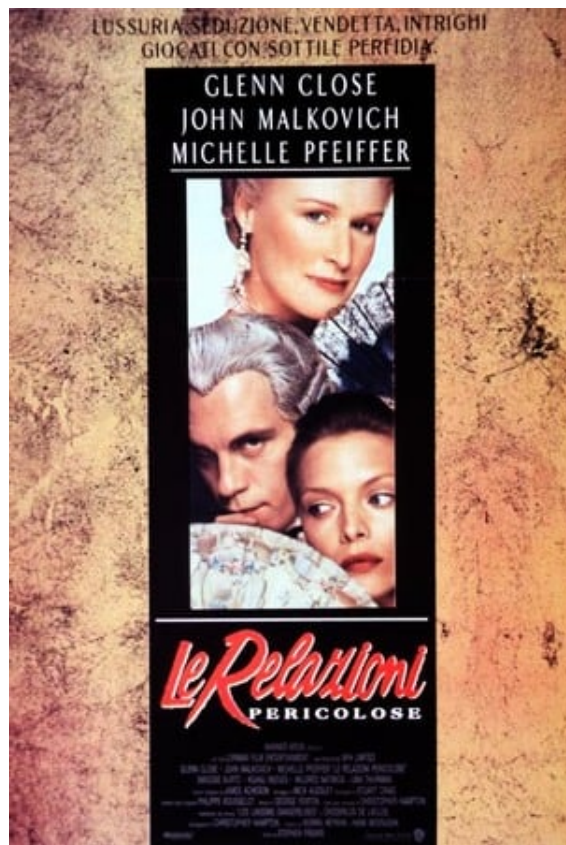
Metodi Matematici per l'Informatica - Dispensa 12

(a.a. 22/23, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (lorenzo.carlucci@uniroma1.it)

1 Relazioni

Il concetto di *relazione* è fondamentale in Matematica e Informatica, nonché nel linguaggio naturale. Come modelli intuitivi di ciò che intendiamo per *relazione* prendiamo per esempio: “ a è padre di b ”, dove a e b sono due esseri umani; oppure: “ n è minore di m ” dove n, m sono numeri naturali. Si vede facilmente che, a differenza delle funzioni: una relazione non è ovunque definita e può ‘far corrispondere’ allo stesso ‘input’ (a) più di un ‘output’ (i suoi figli). Questa è la differenza fondamentale tra *funzioni* e *relazioni*.



1.1 Definizione di Relazione

Al livello insiemistico formalizziamo il concetto di relazione in modo analogo a quanto fatto per le funzioni.

Definizione 1. Siano A e B due insiemi. Una relazione R tra A e B (o su A e B) è un sottinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$, ossia un insieme di coppie ordinate di tipo (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$; senza ulteriori vincoli.

Se R è una relazione tra A e B , e $a \in A$ e $b \in B$ scriviamo $R(a, b)$ o anche aRb per $(a, b) \in R$.

Osservazione 1. Una relazione tra A e B si distingue da una funzione per i seguenti due punti fondamentali:

1. Possono esistere elementi $a \in A$ che non sono in relazione con nessun elemento di B .
2. Possono esistere elementi $a \in A$ che sono in relazione con più di un elemento di B .

Esempio 1. Sia A l'insieme degli esseri umani e B l'insieme dei cani. La proprietà che vale di una coppia $(a, b) \in A \times B$ se e solo se “ a è il padrone di b ” è una relazione su A .

Esempio 2. Sia A l'insieme dei numeri naturali e B l'insieme dei numeri razionali. La proprietà che vale di una coppia $(a, b) \in A \times B$ se e solo se $0 \leq b \leq a$ è una relazione tra A e B .

Osservazione 2. Il caso in cui $A = B$ ha una particolare importanza. Se $R \subseteq A \times A$ diciamo che R è una *relazione su* A . Ogni relazione può essere vista come una relazione su un singolo insieme. Sia infatti $R \subseteq A \times B$. Allora R è anche un sottinsieme di $(A \cup B) \times (A \cup B)$ e dunque è una relazione su $C = A \cup B$.

Esempio 3. Sia A l'insieme degli esseri umani. La proprietà che vale di una coppia $(a_1, a_2) \in A \times A$ se e solo se a_1 è padre di a_2 è una relazione

Esempio 4. Sia A l'insieme dei naturali. $a \leq b$, $a < b$, “ a divide b senza resto”, “ a è un multiplo di b ” sono relazioni su A .

Esempio 5. Sia A l'insieme di utenti di Facebook. La relazione che sussiste tra $a_1, a_2 \in A$ se e solo se a_1 è amico di a_2 è una relazione su A .

Esempio 6. Sia A l'insieme degli utenti di Instagram. La relazione che sussiste tra $a_1, a_2 \in A$ se e solo se a_1 segue a_2 è una relazione su A .

1.2 Rappresentazioni di Relazioni

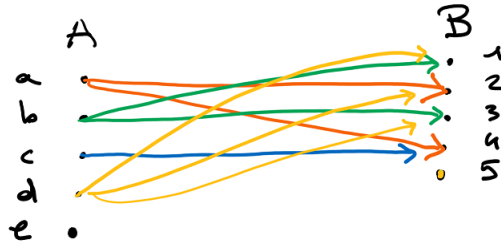
Come per le funzioni esistono molti modi di rappresentare una relazione.

1.2.1 Grafi Diretti

Per rappresentare una relazione R tra A e B rappresentiamo a sinistra gli elementi di A e a destra quelli di B . Disegniamo una freccia da un elemento a di A a un elemento b di B se e solo se $(a, b) \in R$.

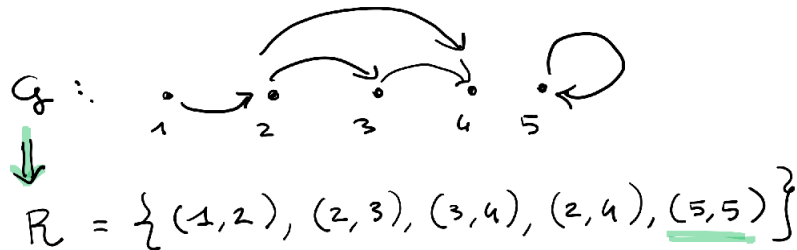
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$R = \{(\underline{1}, \underline{2}), (\underline{1}, \underline{4}), (\underline{2}, \underline{1}), (\underline{2}, \underline{3}), (\underline{3}, \underline{4}), (\underline{4}, \underline{1}), (\underline{4}, \underline{2}), (\underline{4}, \underline{3})\}$$



Nel caso di una relazione R su un singolo insieme A possiamo disegnare una volta sola gli elementi di A e disegnare una freccia tra ogni coppia (a_1, a_2) di elementi di A per cui vale $(a_1, a_2) \in R$.

Un diagramma a frecce di questo tipo è detto un *grafo semplice diretto* o *digrafo*. Si noti che possono esistere frecce che partono da un punto e puntano allo stesso punto: questo accade se aRa (il punto a è in relazione con se stesso; si pensi, per esempio alla relazione $a \leq a$). Non può accadere che ci siano due frecce distinte con stessa origine e stessa destinazione!



1.2.2 Matrici

Si può usare una matrice con valori 0, 1. Questa rappresentazione è particolarmente importante perché è usata per rappresentare relazioni nei calcolatori elettronici e ne permette una manipolazione abbastanza efficiente.

Se R è una relazione tra $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, la matrice di R , denotata M_R è una matrice $n \times m$ definita come segue:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{se } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

In altre parole: le righe corrispondono agli elementi di A : a_1, a_2, \dots, a_n ; le colonne a elementi di B : b_1, b_2, \dots, b_m e nella cella (i, j) scriviamo 1 se sussiste la relazione R tra a_i e b_j e 0 se non sussiste. I valori 1 e 0 indicano il *valore di verità* di $R(a_i, b_j)$.

Esempio 7. Sia $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 2), (4, 2), (4, 4)\}$.

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Inversione

Come per le funzioni è naturale considerare l'inversione di una relazione. L'inversa della relazione “ a è padre di b ” è la relazione “ b è figlio di a ”.

Definizione 2 (Relazione Inversa). Se $R \subseteq A \times B$ denotiamo con R^{-1} (inversa di R) il sottinsieme di $B \times A$ definito come segue:

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}.$$

A differenza di quanto accade con le funzioni, una relazione possiede sempre un'inversa: se $R \subseteq A \times B$ allora definiamo R^{-1} (relazione inversa di R) il sottinsieme di $B \times A$ contenente tutte e sole le coppie ordinate (b, a) tali che $(a, b) \in R$.

Esempio 8. Sia $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 6, 8\}$. Sia R la seguente relazione:

$$\{(2, 2), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (4, 8)\}.$$

Calcolare l'inverso di R partendo dalla sua elencazione insiemistica è semplicissimo: basta invertire le coppie:

$$R^{-1} = \{(2, 2), (6, 2), (6, 3), (8, 4)\}.$$

In un digrafo basta invertire la direzione delle frecce:



Vediamo cosa succede se usiamo la rappresentazione matriciale.

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osservando le due matrici ci accorgiamo che $M_{R^{-1}}$ si ottiene da M_R facendo diventare le righe delle colonne! La prima colonna di $M_{R^{-1}}$ è identica alla prima riga di M_R ; la seconda colonna di $M_{R^{-1}}$ è identica alla seconda riga di M_R , e così per la terza.

Esercizio 1. Convincersi che l'osservazione di sopra vale in generale.

L'operazione che trasforma una matrice M in un'altra matrice M' facendo diventare righe di M' le colonne di M si chiama in Algebra Lineare *trasposizione*, e M' è detta *matrice trasposta* di M .

In termini di matrici dunque l'inversione di relazioni corrisponde alla trasposizione. Questo fatto risulta utile nella pratica informatica per poter calcolare l'inversa di una relazione salvata come una matrice binaria.

Proposizione 1. La matrice di R^{-1} è la trasposta della matrice di R .

Osservazione 3. Sia aRb se e solo se “ a è fratello di b ”. Cos’è l’inversa di R ? Si vede facilmente che l’inversa di R coincide con R : se a è fratello di b allora b è fratello di a e viceversa. Una relazione che gode di questa proprietà viene detta *simmetrica*.

Più formalmente: una relazione $R \subseteq A \times A$ è *simmetrica* se vale: Per ogni $a_1, a_2 \in A$

$$(a_1, a_2) \in R \text{ se e solo se } (a_2, a_1) \in R.$$

(Domanda: cambia qualcosa se usiamo una implicazione semplice invece di una doppia implicazione nella definizione di relazione simmetrica?)

Si osserva facilmente che se R è simmetrica allora $R = R^{-1}$. Infatti: sia $(a_1, a_2) \in R$; dimostriamo che $(a_1, a_2) \in R^{-1}$. Dato che R è simmetrica se $(a_1, a_2) \in R$ allora $(a_2, a_1) \in R$. Per definizione di R^{-1} : se $(a_2, a_1) \in R$ allora $(a_1, a_2) \in R^{-1}$. Abbiamo così dimostrato l’inclusione $R \subseteq R^{-1}$. Dimostriamo ora l’inversa: siano $(a_1, a_2) \in R^{-1}$. Per definizione questo implica $(a_2, a_1) \in R$. Ma R è simmetrica e dunque abbiamo $(a_1, a_2) \in R$. Abbiamo così dimostrato l’inclusione $R^{-1} \subseteq R$. Dunque $R = R^{-1}$.

Un altro semplice ragionamento ci convince che se una relazione R su A coincide con il proprio inverso R^{-1} allora è necessariamente simmetrica. Assumiamo che R su A sia tale che $R = R^{-1}$. Per dimostrare che R è simmetrica dobbiamo dimostrare che per ogni $a_1, a_2 \in A$, $(a_1, a_2) \in R$ se e solo se $(a_2, a_1) \in R$. Dato che $R = R^{-1}$ (per ipotesi) abbiamo che, per $a_1, a_2 \in A$ qualunque, vale $(a_1, a_2) \in R$ sse $(a_1, a_2) \in R^{-1}$. Questo per definizione di R^{-1} vale se e solo se $(a_2, a_1) \in R$. Abbiamo così dimostrato che R è simmetrica.

3 Composizione di Relazioni

Come accade per le funzioni, risulta naturale considerare la composizione di relazioni.

Per esempio, se R è la relazione tale che aRb se solo se “ a è padre di b ” e S è la relazione tale che cSd se e solo se “ c è marito di d ” la relazione “composta” è la relazione T tale che aTd se e solo se “ a è suocero di d ”.

Se aRb se e solo se a è fratello di b e cSd sse c è marito di d la relazione composta è aTd sse a è cognato di d .

Per comporre due relazioni R e S occorre che R sia una relazione tra A e B e S sia una relazione tra B e C . In questo caso possiamo definire la loro composizione come segue.

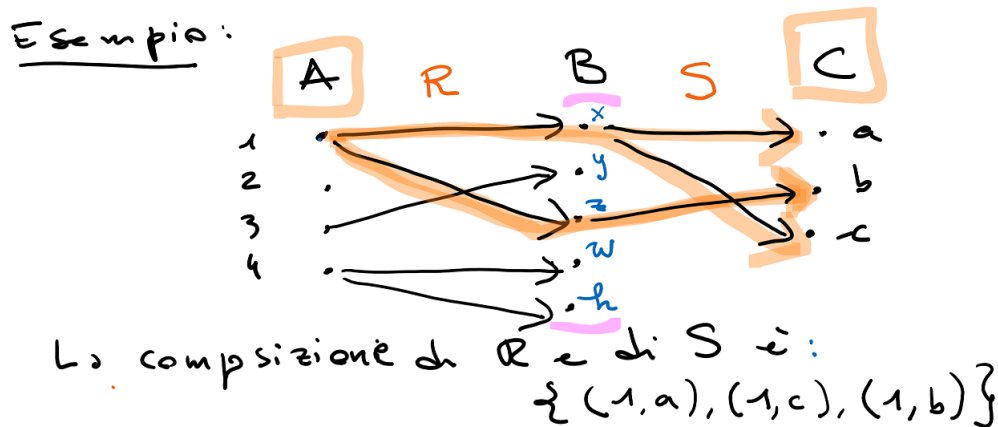
Definizione 3 (Composizione di Relazioni). Se $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq B \times C$, la relazione composta o composizione di R e S è la relazione tra A e C che sussiste tra $a \in A$ e $c \in C$ se e solo se **esiste un** $b \in B$ tale che

$$aRb \text{ e } bSc.$$

La relazione composta viene denotata $(S \circ R)$.

Quando componiamo una relazione con se stessa parliamo di *iterazione*. Questa operazione corrisponde alla formazione di concetti molto naturali. Per esempio, la composta della relazione P “ a è padre di b ” corrisponde alla relazione “ a è nonno di b ”. Se componiamo di nuovo, ottenendo $P \circ (P \circ P)$ otteniamo la relazione “ a è bisnonno di b ”, etc.

Esempio 9. Nella rappresentazione a frecce l’operazione di composizione è molto intuitiva:



Esempio 10. Sia $R = \{(a, b), (b, b), (b, d), (c, a), (d, a)\}$ $S = \{(a, d), (a, b), (b, c), (d, b)\}$.

La composta $(S \circ R)$ si può “calcolare” così, in base alla presentazione esplicita di tutti gli elementi di R e di S : partiamo dal primo elemento di R , ossia (a, b) e cerchiamo in S una coppia che inizi con b , ossia di tipo (b, x) per qualche $x \in C$. Per ogni coppia di questo tipo sappiamo che (a, x) è nella relazione composta $(S \circ R)$.

- $(a, c) \in (S \circ R)$ perché aRb, bSc
- $(b, c) \in (S \circ R)$ perché bRb, bSc
- $(b, b) \in (S \circ R)$ perché bRd, dSb
- $(c, b) \in (S \circ R)$ perché cRa, aSb
- $(c, d) \in (S \circ R)$ perché cRa, aSd
- $(d, b) \in (S \circ R)$ perché dRa, aSb
- $(d, d) \in (S \circ R)$ perché dRa, aSc

Esempio 11. Vediamo cosa succede se calcoliamo la composta usando la rappresentazione matriciale, applicata all'esempio precedente.

Le matrici associate a R e S sono:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si nota facilmente che la matrice di $(S \circ R)$ si ottiene facendo il prodotto righe per colonne, usando come prodotto l'AND e come somma l'OR.

$$M_R \times M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{(S \circ R)}$$

L'osservazione nell'ultimo esempio vale in generale:

Proposizione 2. La composizione di relazioni corrisponde al prodotto righe per colonne di matrici.

Esercizio 2. Dimostrare che la composizione di relazioni è associativa, ossia che

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R,$$

per $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, $T \subseteq C \times D$.

Esercizio 3. Dimostrare che la composizione di relazioni non è commutativa.

Esercizio 4. Siano $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq B \times C$. Che relazioni di inclusione sussistono tra $(S \circ R)^{-1}$ e $(R^{-1} \circ S^{-1})$?

4 Transitività

Definizione 4 (Transitività). Una relazione $R \subseteq A \times A$ è detta transitiva se vale: per ogni $a, b, c \in A$, se aRb e bRc allora aRc .



Esempio 12. La relazione aRb se e solo se a è padre b non è transitiva.

Esempio 13. La relazione aRb se e solo se a è un antenato per linea paterna di b è transitiva.

Esempio 14. La relazione di successore $R = \{(n, n+) : n \in \mathbf{N}\}$ sui naturali non è transitiva: $R(4, 5)$ e $R(5, 6)$ ma non $R(4, 6)$.

Esempio 15. La relazione $n < m$ sui naturali è transitiva.

Esempio 16. La relazione nRm se e solo se n divide m senza resto è transitiva sui naturali.

Esempio 17. La relazione aRb se e solo se a è amico di b su Facebook non è transitiva. La relazione aSb se e solo se a è follower di b su Instagram non è transitiva.

Osservazione 4. Si noti che la definizione di transitività è espressa con un quantificatore universale (per ogni $a, b, c \in A$) seguito da un condizionale (se...allora). Questa definizione *non* richiede che una relazione R soddisfi che per ogni $a, b, c \in A$ valga aRb e bRc !! Richiede invece che *se* valgono sia aRb che bRc allora deve valere anche aRc . In altre parole, una coppia (a, b) di una relazione R tale che non esiste nessuna coppia di forma (b, \cdot) in R non ha nessun effetto sulla transitività o meno di R .



Alcune zone d'ombra della definizione di relazione transitiva.

Esempio 18. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Consideriamo il seguente digrafo su A :



Innanzitutto si tratta di una relazione R su A : una relazione è un arbitrario sottinsieme di $A \times A$ e il digrafo qui sopra rappresenta graficamente la relazione corrispondente al sottinsieme vuoto: $\emptyset \subseteq A \times A$. Inoltre, per quanto possa sembrare contro-intuitivo, si tratta di una relazione transitiva su A .

Infatti, la definizione di transitività prevede che per ogni scelta di $a, b, c \in A$ (non necessariamente distinti), se si dà il caso che aRb e bRc allora deve darsi il caso che aRc .

Se non si dà mai una configurazione di tipo aRb e bRc per qualche $a, b, c \in A$, la pre-condizione della definizione di transitività non è mai verificata, e in questo caso (come accade in un comando *if ... then*) l'implicazione è vera. Si dice che è *vera a vuoto*.

Esempio 19. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Consideriamo la relazione $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$. Anche in questo caso si tratta di una relazione transitiva. Infatti, per ogni configurazione di tipo $aRbRc$ si ha anche aRc . Le uniche configurazioni di questo tipo sono $1R1R1$, $2R2R2$, $3R3R3$ e $4R4R4$. In tutti i casi la post-condizione dell'implicazione che definisce la transitività è verificata: $1R1$, $2R2$, $3R$ e $4R$.

Esempio 20. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Consideriamo la relazione $R = \{(1, 2), (3, 4), (1, 5)\}$. Anche in questo caso si tratta di una relazione transitiva. Infatti, non ci sono configurazioni di tipo $aRbRc$! La pre-condizione è vera a vuoto.

Osservazione 5. La definizione di transitività di una relazione ha la forma di una quantificazione universale (per ogni $a, b, c \in A$) seguita da un condizionale (se ... allora). Si tratta di una forma piuttosto comune ed è importante capirne bene le condizioni di verità. Consideriamo per esempio la sua negazione, che devo usare ogni volta che voglio dimostrare che una certa relazione R non è transitiva. Procedendo passo passo abbiamo

R NON è transitiva

sse

NON è vero che (Per ogni $a, b, c \in A$: Se aRb e bRc allora aRc).

sse

C'è almeno una scelta di $a, b, c \in A$ tali che NON è vero che (SE aRb e bRc ALLORA aRc)

sse

C'è almeno una scelta di $a, b, c \in A$ tali che aRb e bRc ma NON aRc ,

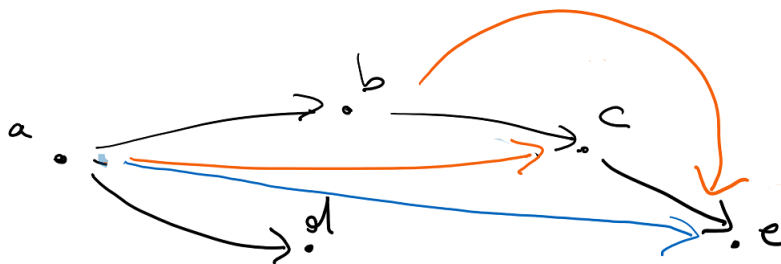
ossia

Esistono $a, b, c \in A$ tali che aRb E bRc E NON aRc .

Esempio 21. La relazione $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 5), (5, 2), (3, 4)\}$ su $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ non è transitiva. Per dimostrarlo è sufficiente esibire una scelta di a, b, c tali che $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$ ma $(a, c) \notin R$. Una scelta di questo tipo è, per esempio $a = 1$, $b = 3$, $c = 4$.

5 Chiusura Transitiva

Esempio 22. La relazione R_1 rappresentata con righe NERE nel digrafo seguente non è transitiva: per esempio, aR_1b e bR_1c ma non vale aR_1c ; analogamente: bR_1c e cR_1e ma non vale bR_1e . Si noti che il fatto che aR_1d ma non ci siano frecce uscenti da d non è rilevante per stabilire se R_1 è transitiva!!



La relazione R_2 rappresentata dalla righe NERE e dalla righe ARANZIONI è ottenuta cercando di rimediare ai due controesempi indicati sopra alla non-transitività di R_1 . Ma neanche questa relazione è transitiva: vale infatti aR_2c (perché c'è una freccia arancione da a a c) e cR_2e (perché c'è una freccia nera da c a e); ma non ci sono frecce (né nere né arancioni) da a a e .

La relazione R_3 rappresentata dalle frecce NERE, ARANCIONI e AZZURRE è transitiva. L'ho ottenuta rimediando al controesempio visto sopra alla transitività di R_2 , aggiungendo la freccia da a a e . Non ho creato in questo modo nuove configurazioni del tipo $(x, y) \in R_3$ e $(y, z) \in R_3$ ma $(x, z) \notin R_3$.

Con R_3 abbiamo ottenuta una *estensione* della relazione iniziale, nel senso che $R_1 \subseteq R_3$; inoltre questa estensione è *transitiva*. La relazione R_3 è inoltre la più piccola relazione che estende R_1 e che è transitiva. Qui “più piccola” può intendersi come: “ottenuta aggiungendo a R_1 il minor numero di frecce.

L'idea di estendere una relazione R non-transitiva a una relazione R^* transitiva è molto naturale.

Risulta infatti naturale in molti contesti considerare l'insieme che otteniamo “percorrendo” una relazione non transitiva e raccogliendo gli elementi che incontriamo: per esempio, se consideriamo la relazione aRb se a è amico di b su Facebook, può essere utile mettere in relazione a non solo con tutti i suoi amici, ma anche con gli amici degli amici di a , gli amici degli amici di a ; ossia la “comunità” cui a fa riferimento, o l'insieme degli individui “raggiungibili” da a attraverso la relazione di amicizia.

Se la relazione iniziale rappresenta l'esistenza di una strada tra due città, l'idea di “percorrere” la relazione corrisponde all'idea di “essere raggiungibile”.

Vogliamo ottenere una relazione R^T che estende R , ossia tale che $R \subseteq R^T$ e che sia transitiva. Inoltre è naturale volere identificare la *più piccola relazione* di questo tipo. Nel caso di una relazione R su un insieme A finito, possiamo intendere “la più piccola” come quella contenente il minor numero di coppie, ma questo perde di senso se A è infinito. Il terzo punto della definizione qui sotto rimedia a questo problema offrendo una definizione di “minima” o “più piccola” in termini di inclusione insiemistica che vale sia per il caso finito che per il caso infinito. Questa condizione viene espressa richiedendo che ogni relazione che soddisfa le prime due condizioni (ossia estende R ed è transitiva) contenga la chiusura transitiva.

Definizione 5 (Chiusura Transitiva di una relazione). *Chiamiamo chiusura transitiva di R la più piccola relazione transitiva che estende R , ossia la relazione R^T tale che:*

1. $R \subseteq R^T$.
2. R^T è transitiva.
3. Se S estende R ed è transitiva allora $R^T \subseteq S$.

Se escludiamo anche solo una coppia dalla chiusura transitiva R^T di una relazione R , necessariamente violiamo o il fatto che la relazione estende R o il fatto che è transitiva.

Esempio 23. Se R è la relazione su \mathbf{N} tale che nRm se e solo se $m = n + 1$, la chiusura transitiva contiene tutte e sole le coppie di naturali (x, y) tali che $x < y$. Se togliamo anche una sola coppia (x, y) o violiamo che la relazione risultante estende il successore (questo accade se la coppia è tale che $y = x + 1$) oppure violiamo la transitività (questo accade se la coppia è tale che $y = x + n$ per $n > 1$).

Esempio 24. Data una mappa di strade a senso unico che collegano città (aRb se e solo se c'è una strada che parte dalla città a e arriva alla città b), la chiusura transitiva contiene tutte e sole le coppie di città (x, y) tali che esiste un itinerario che porta da x a y .

Definizione 6 (Cammino). Sia R una relazione su A . Siano $a, b \in A$. Diciamo che esiste un cammino di lunghezza $\ell \geq 1$ da a verso b se esistono elementi $x_1, \dots, x_{\ell-1}$ in A tali che $aRx_1Rx_2 \dots Rx_{\ell-1}Rb$.

Osservazione 6. La Definizione precedente è così predisposta da includere come caso particolare quello di due punti a e b tali che aRb . In questo caso si può correttamente affermare che esiste un cammino di lunghezza 1 da a verso b : $\ell = 1$ e la condizione *esistono* $x_1, \dots, x_{\ell-1}$ è vera a vuoto.

Data $R \subseteq A \times A$ consideriamo la relazione di *raggiungibilità* (anche detta *connettività*), definita come

$$R^c = \{(a, b) \in A \times A : \text{esiste un cammino di lunghezza } \ell \geq 1 \text{ da } a \text{ verso } b\}.$$

Questa relazione è intuitivamente connessa all'idea di chiusura transitiva: sicuramente stiamo mettendo frecce da a a c ogni volta che abbiamo una configurazione di tipo $aRbRc$, ma anche frecce da a a d se abbiamo una configurazione $aRbRcRd$, etc.

Esempio 25. Consideriamo la relazione $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ su $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Proviamo a estendere R in modo da ottenere una relazione transitiva.

Dato che $(1, 2) \in R$ e $(2, 3) \in R$, devo aggiungere la coppia $(1, 3)$. Dato che $(2, 3) \in R$ e $(3, 4) \in R$, devo aggiungere la coppia $(2, 4)$.

Chiamiamo R^{++} la relazione ottenuta aggiungendo queste coppie, ossia $R^{++} = R \cup \{(1, 3), (2, 4)\}$.

R^{++} non è transitiva: infatti $(1, 3) \in R^{++}$ e $(3, 4) \in R^{++}$ ma $(1, 4) \notin R^{++}$.

Aggiungiamo la coppia $(1, 4)$. Chiamiamo R^{+++} la relazione così ottenuta, ossia $R^{+++} = R \cup R^{++} \cup \{(1, 4)\}$.

R^{+++} è transitiva: per tutti i possibili casi in cui si verifica la pre-condizione della definizione di transitività è vera anche la conclusione.

Ripercorrendo quanto appena fatto, osserviamo che $R^{++} = R \cup (R \circ R)$. Infatti per definizione $R \circ R$ contiene tutte e sole le coppie (a, c) tali che esiste un $b \in A$ tale che $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$. Questo è il caso per la coppia $(1, 3)$ (esistono $(1, 2)$ e $(2, 3)$ in R) e per la coppia $(2, 4)$ (esistono $(2, 3)$ e $(3, 4)$ in R).

Analogamente, R^{+++} è uguale a $R \cup (R \circ R) \cup ((R \circ R) \circ R)$. Per definizione infatti, $(x, y) \in (R \circ R) \circ R$ se e solo se esiste $z \in A$ tale che $(x, z) \in (R \circ R)$ e $(z, y) \in R$. Questo è il caso solo per la coppia $(1, 4)$: infatti $(1, 3) \in R \circ R$ e $(3, 4) \in R$.

In base all'esempio precedente, la chiusura transitiva di una relazione R è strettamente collegata con le relazioni ottenute componendo R con se stessa.

Data R , definiamo una successione di relazioni:

$$R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R \circ R \circ R, R^4 = R \circ R \circ R \circ R, \dots$$

In generale possiamo porre: $R^1 = R$ e $R^{n+1} = (R^n) \circ R$ per $n \geq 1$.

Consideriamo l'unione di tutte le R_n , ponendo

$$R^\infty = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} R^n.$$

Si ricorda che una coppia (x, y) appartiene all'unione infinita $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} R^n$ se e solo se esiste un $n \in \mathbf{N}$ tale che $(x, y) \in R^n$ (ossia se e solo se appartiene a uno dei termini dell'unione).

Dimostreremo che R^c e R^∞ sono due modi di vedere la stessa relazione: entrambi coincidono con la chiusura transitiva di R .