Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
28 Aprile 2023 — Compito n. 00013

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | 2 | 0 | 4 | 6 | 2 | 1 | 2 |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	□	■	■	■	□	□	■	■	□	■	■	□	■	■	■	□
F	■	□	□	□	■	■	□	□	■	□	□	■	□	□	□	■
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

---

1) Sia

$$F(t) = \int_0^t [4\,x^2 + \cos^2(7\,x)]\,dx$$

1A) La funzione $F(t)$ non è derivabile per qualche t in $\mathbb{R}$.
1B) Si ha $F'(0) = 1$.
1C) La funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.
1D) Si ha $F(9) > 0$.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (6x^2 + 8x + 2)\,dx = 0\,.$$

2B)

$$\int_0^{\frac{1}{5}} 50\,x\,\mathrm{e}^{5\,x}\,dx = 2\,\mathrm{e}\,.$$

2C)

$$\int_0^{4\,\pi} \cos(2\,x)\,dx = 0\,.$$

2D)

$$\frac{2}{1\cancel{4}}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\overset{2}{\cancel{8}}\,x}{3 + x^2}\,dx = 4\,\log(2)\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-2}^{2} [2\,x^3 + \sin(4\,x)]\,dx \neq 0\,.$$

3B)

$$\int_{-7}^{7} [9\,x^2 + 2\,x\,|x|]\,dx > 0\,.$$

3C)

$$\int_{-4}^{5} [4\,x^3 + 6\,x]\,dx > 0\,.$$

3D)

$$\int_{-5}^{4} \frac{x^3}{7 + x^2}\,dx > 0\,.$$

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\int_8^{16} \frac{dx}{x - 4} = \log(3)\,.$$

4B)

$$\int_{11}^{26} \frac{dx}{(x-6)^2} = \frac{3}{20}\,.$$

4C)

$$\int_9^{10} \frac{dx}{(x-6)\,(x-8)} = \frac{1}{2}\,\log(3/2)\,.$$

4D)

$$\int_{-7}^{-6} \frac{dx}{x^2 + 14\,x + 50} = 1\,.$$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00013**

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

a) $f(x) = x\,\sin(15\,x)$, $\displaystyle\int_0^{5\pi} f(x)\,dx$, $\frac{1}{3}\pi$ **b)** $g(x) = x^2\,e^{8\,x^3}$, $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{4}} g(x)\,dx$, $\frac{e^{32}-1}{24}$

c) $h(x) = (6x^2 + 23x + 11)\,e^x$, $\displaystyle\int_{-\frac{11}{6}}^{0} h(x)\,dx$, 0 **d)** $k(x) = \dfrac{1}{1+49\,x^2}$, $\displaystyle\int_0^1 k(x)\,dx$.

$$a)\ \int_0^{5\pi} x\sin(15x) = \left[\begin{array}{l} y = 15x \\ dx = \frac{dy}{15} \end{array}\right. \to \int_0^{75\pi} \frac{y}{15}\cdot\sin(y)\frac{1}{15}dy = \frac{1}{15^2}\int_0^{75\pi} y\sin(y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{15^2}\left[-y\cos(y) + \int_0^{75\pi}\cos(y)\right] = \frac{1}{15^2}\left[-y\cos(y)\right] = \frac{1}{15^2}\left[+75\pi\right] = \frac{75}{225}\pi = \frac{1}{3}\pi$$

$$b)\ \int_0^{\sqrt[3]{4}} x^2 e^{8x^3} = \left[\begin{array}{l} y = 8x^3 \\ dy = 24x^2 \\ dx = \frac{dy}{24x^2} \end{array}\right. = \frac{1}{24}\int_0^{32} e^y = \frac{e^{32}}{24} - \frac{e^0}{24} = \frac{e^{32}-1}{24}$$

$$c)\ \int_{-\frac{11}{6}}^{0} (6x^2+23x+11)e^x = \left\{\begin{array}{l} a = 6 \\ 12 + b = 23 \\ b + c = 11 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} a = 6 \\ b = 11 \\ c = 0 \end{array}\right. = (6x^2+11x)e^x = \left(6\cdot\frac{121}{36} - \frac{121}{6}\right)e^{-\frac{11}{6}} - 0 = 0$$

$$d)\ \int_0^1 \frac{dx}{1+49x^2} = \left[\begin{array}{l} y = 7x \\ dy = 7dx \\ dx = \frac{dy}{7} \end{array}\right] = \frac{1}{7}\int_0^7 \frac{1}{1+y^2}dy = \frac{\arctan(7)}{7}$$

□□□□□□□□ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00013**

6) Sia

$$F(t) = \int_0^t [11\,e^{x^2} + 2]\,dx\,.$$

a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
b) Calcolare $F(0)$ e $F'(\sqrt{8})$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è una funzione crescente e dispari.
d) Dimostrare che

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = +\infty\,.$$

Soluzioni del compito 00013

1) Sia

$$F(t) = \int_0^t [4\,x^2 + \cos^2(7\,x)]\,dx$$

1A) La funzione $F(t)$ non è derivabile per qualche t in $\mathbb{R}$.

Vero: Dato che la funzione $x \mapsto 4\,x^2 + \cos^2(7\,x)$ è continua su $\mathbb{R}$, la funzione $F(t)$ è derivabile su $\mathbb{R}$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale, e si ha $F'(t) = 4\,x^2 + \cos^2(7\,t)$.

1B) Si ha $F'(0) = 1$.

Vero: Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(t) = 4\,t^2 + \cos^2(7\,t)$, si ha $F'(0) = 1$.

1C) La funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

Vero: Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(t) = 4\,t^2 + \cos^2(7\,t)$, si ha $F'(t) \geq 0$ per ogni t in $\mathbb{R}$, e quindi la funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

1D) Si ha $F(9) > 0$.

Vero: Dato che la funzione $F(t)$ è crescente (si veda l'esercizio **1C**), si ha

$$F(9) > F(0) = 0\,.$$

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (6x^2 + 8x + 2)\,dx = 0\,.$$

Falso: Dato che

$$\int (6x^2 + 8x + 2)\,dx = \frac{6}{3}\,x^3 + \frac{8}{2}\,x^2 + 2\,x = 2\,x^3 + 4\,x^2 + 2\,x + c\,,$$

si ha

$$\int_0^1 (6x^2 + 8x + 2)\,dx = 2\,x^3 + 4\,x^2 + 2\,x\Big|_0^1 = 2 + 4 + 2 = 8 \neq 0\,.$$

Alternativamente, si poteva osservare che l'integrale non poteva essere uguale a zero perché la funzione integranda è strettamente positiva sull'intervallo di integrazione.

2B)

$$\int_0^{\frac{1}{5}} 50\,x\,\mathrm{e}^{5\,x}\,dx = 2\,\mathrm{e}\,.$$

Falso: Si ha, con la sostituzione $y = 5\,x$, da cui $dy = 5\,x$,

$$\int_0^{\frac{1}{5}} 50\,x\,\mathrm{e}^{5\,x}\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{5}} (5\,x)\,\mathrm{e}^{5\,x}\,(5\,dx) = 2\int_0^1 y\,\mathrm{e}^y\,dy\,.$$

Dato che una primitiva di $y\,\mathrm{e}^y$ è $(y-1)\,\mathrm{e}^y$, si ha

$$\int_0^{\frac{1}{5}} 50\,x\,\mathrm{e}^{5\,x}\,dx = 2\,(y-1)\,\mathrm{e}^y\Big|_0^1 = 2 \neq 2\,\mathrm{e}\,.$$

2C)

$$\int_0^{4\,\pi} \cos(2\,x)\,dx = 0\,.$$

Vero: Si ha

$$\int_0^{4\,\pi} \cos(2\,x)\,dx = \frac{\sin(2\,x)}{2}\Big|_0^{4\,\pi} = \frac{\sin(8\,\pi) - \sin(0)}{2} = 0\,.$$

2D)

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{8\,x}{3 + x^2}\,dx = 4\,\log(2)\,.$$

Vero: Dato che

$$\frac{8\,x}{3 + x^2} = 4\,\frac{2x}{3 + x^2} = 4\,\frac{(3 + x^2)'}{3 + x^2}\,,$$

si ha

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{8\,x}{3 + x^2}\,dx = 4\,\log(3 + x^2)\Big|_0^{\sqrt{3}} = 4\,[\log(6) - \log(3)] = 4\,\log(6/3) = 4\,\log(2)\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-2}^{2} [2\,x^3 + \sin(4\,x)]\,dx \neq 0\,.$$

Falso: La funzione integranda è dispari, e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine. Pertanto, l'integrale vale zero.

3B)

$$\int_{-7}^{7} [9\,x^2 + 2\,x\,|x|]\,dx > 0\,.$$

Vero: La funzione $x \mapsto 9\,x^2$ è pari, mentre la funzione $x \mapsto 2\,x\,|x|$ è dispari. Dato che l'intervallo è simmetrico rispetto all'origine, si ha

$$\int_{-7}^{7} [9\,x^2 + 2\,x\,|x|]\,dx = \int_{-7}^{7} 9\,x^2\,dx = 2\int_{0}^{7} 9\,x^2\,dx > 0\,,$$

dato che la funzione integranda è positiva.

3C)

$$\int_{-4}^{5} [4\,x^3 + 6\,x]\,dx > 0\,.$$

Vero: La funzione integranda è dispari; pertanto, si ha

$$\int_{-4}^{5} [4\,x^3 + 6\,x]\,dx = \int_{-4}^{4} [4\,x^3 + 6\,x]\,dx + \int_{4}^{5} [4\,x^3 + 6\,x]\,dx = \int_{4}^{5} [4\,x^3 + 6\,x]\,dx\,,$$

e l'ultimo integrale è positivo essendo l'integrale di una funzione positiva.

3D)

$$\int_{-5}^{4} \frac{x^3}{7 + x^2}\,dx > 0\,.$$

Falso: Dato che la funzione integranda è dispari, si ha

$$\int_{-5}^{4} \frac{x^3}{7 + x^2}\,dx = \int_{-5}^{-4} \frac{x^3}{7 + x^2}\,dx + \int_{-4}^{4} \frac{x^3}{7 + x^2}\,dx = \int_{-5}^{-4} \frac{x^3}{7 + x^2}\,dx < 0\,,$$

dato che la funzione integranda è negativa.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)
$$\int_8^{16} \frac{dx}{x-4} = \log(3)\,.$$

Vero: Si ha
$$\int_8^{16} \frac{dx}{x-4} = \log(|x-4|)\Big|_8^{16} = \log(12) - \log(4) = \log(12/4) = \log(3)\,.$$

4B)
$$\int_{11}^{26} \frac{dx}{(x-6)^2} = \frac{3}{20}\,.$$

Vero: Ricordando che
$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = \frac{1}{a-x} + c\,,$$
si ha
$$\int_{11}^{26} \frac{dx}{(x-6)^2} = \frac{1}{6-x}\Big|_{11}^{26} = -\frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{3}{20}\,.$$

4C)
$$\int_9^{10} \frac{dx}{(x-6)\,(x-8)} = \frac{1}{2}\,\log(3/2)\,.$$

Vero: Dall'identità
$$\frac{1}{(x-6)\,(x-8)} = \frac{A}{x-8} + \frac{B}{x-6}$$
si ricava (moltiplicando per $(x-6)\,(x-8)$) che deve essere
$$1 = A\,(x-6) + B\,(x-8)\,.$$
Scegliendo $x = 6$ si ricava $B = -\frac{1}{2}$, e scegliendo $x = 8$ si ricava $A = \frac{1}{2}$. Pertanto,
$$\frac{1}{(x-6)\,(x-8)} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{x-8} - \frac{1}{x-6}\Big]\,.$$
Ne segue che
$$\int \frac{dx}{(x-6)\,(x-8)} = \frac{1}{2}\,\log\left(\Big|\frac{x-8}{x-6}\Big|\right) + c\,,$$
cosicché
$$\int_9^{10} \frac{dx}{(x-6)\,(x-8)} = \frac{1}{2}\,[\log(1/2) - \log(1/3)] = \frac{1}{2}\,\log(3/2)\,.$$

4D)
$$\int_{-7}^{-6} \frac{dx}{x^2 + 14\,x + 50} = 1\,.$$

Falso: Si ha
$$x^2 + 14\,x + 50 = (x+7)^2 + 1\,,$$
e quindi
$$\int \frac{dx}{x^2 + 14\,x + 50} = \int \frac{dx}{1 + (x+7)^2}\,.$$
Con la sostituzione $y = x + 7$, da cui $dx = dy$, si ha
$$\int \frac{dx}{x^2 + 14\,x + 50} = \int \frac{dy}{1 + y^2} = \arctan(y) + c = \arctan(x+7) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_{-7}^{-6} \frac{dx}{x^2 + 14\,x + 50} = \arctan(x+7)\Big|_{-7}^{-6} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} \neq 1\,.$$

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a)}\ f(x) = x\,\sin(15\,x)\,, \quad \int_0^{5\,\pi} f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b)}\ g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{8\,x^3}\,, \quad \int_0^{\sqrt[3]{4}} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = (6x^2 + 23x + 11)\,\mathrm{e}^x\,, \quad \int_{-\frac{11}{6}}^{0} h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d)}\ k(x) = \frac{1}{1 + 49\,x^2}\,, \quad \int_0^1 k(x)\,dx\,.$$

Soluzione:

a) Si ha, integrando per parti, e ponendo $f'(x) = \sin(15\,x)$, da cui $f(x) = -\frac{\cos(15\,x)}{15}$ e $g(x) = x$, da cui $g'(x) = 1$,

$$\int x\,\sin(15\,x) = -\frac{x\,\cos(15\,x)}{15} + \int 1 \cdot \frac{\cos(15\,x)}{15}\,dx = -\frac{x\,\cos(15\,x)}{15} + \frac{\sin(15\,x)}{225} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^{5\,\pi} x\,\sin(15\,x)\,dx = -\frac{x\,\cos(15\,x)}{15} + \frac{\sin(15\,x)}{225}\Big|_0^{5\,\pi} = -\frac{5\,\pi\,\cos(75\,\pi)}{15} = \frac{1}{3}\,\pi\,.$$

b) Si ha, con la sostituzione $y = 8\,x^3$, da cui $dy = 24\,x^2\,dx$ (e quindi $x^2\,dx = \frac{dy}{24}$),

$$\int x^2\,\mathrm{e}^{8\,x^3}\,dx = \frac{1}{24}\int \mathrm{e}^y\,dy = \frac{\mathrm{e}^y}{24} + c = \frac{\mathrm{e}^{8\,x^3}}{24} + c\,,$$

da cui segue che

$$\int_0^{\sqrt[3]{4}} x^2\,\mathrm{e}^{8\,x^3}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{8\,x^3}}{24}\Big|_0^{\sqrt[3]{4}} = \frac{\mathrm{e}^{32} - 1}{24}\,.$$

c) Ricordiamo che se $P_2(x)$ è un polinomio di grado 2, allora

$$\int P_2(x)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q_2(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

con $Q_2(x)$ un polinomio di grado 2 tale che $Q_2(x) + Q_2'(x) = P_2(x)$. Pertanto, se $Q_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, deve essere

$$Q_2(x) + Q_2'(x) = a\,x^2 + (2a + b)\,x + b + c = 6x^2 + 23x + 11\,.$$

Da questa relazione si ricava $a = 6$, $2a + b = 23$ e $b + c = 11$; risolvendo, si trova $a = 6$, $b = 11$ e $c = 0$. Pertanto,

$$\int (6x^2 + 23x + 11)\,\mathrm{e}^x\,dx = (6x^2 + 11x)\,\mathrm{e}^x + c\,,$$

da cui segue che

$$\int_{-\frac{11}{6}}^{0} (6x^2 + 23x + 11)\,\mathrm{e}^x\,dx = (6x^2 + 11x)\,\mathrm{e}^x\Big|_{-\frac{11}{6}}^{0} = 0\,.$$

d) Si ha, con la sostituzione $y = 7\,x$, da cui $dx = \frac{dy}{7}$,

$$\int \frac{dx}{1 + 49\,x^2} = \frac{1}{7}\int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{\arctan(y)}{7} + c = \frac{\arctan(7\,x)}{7} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + 49\,x^2} = \frac{\arctan(7\,x)}{7}\Big|_0^1 = \frac{\arctan(7)}{7}\,.$$

6) Sia
$$F(t) = \int_0^t [11\,\mathrm{e}^{x^2} + 2]\,dx\,.$$
a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
b) Calcolare $F(0)$ e $F'(\sqrt{8})$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è una funzione crescente e dispari.
d) Dimostrare che
$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,.$$

Soluzione:
a) La funzione $f(x) = 11\,\mathrm{e}^{x^2} + 2$ è continua su $\mathbb{R}$. Pertanto, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$ e si ha

(1) $$F'(t) = f(t) = 11\,\mathrm{e}^{t^2} + 2\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

b) Si ha
$$F(0) = \int_0^0 [11\,\mathrm{e}^{x^2} + 2]\,dx = 0\,,$$
e, per la (1),
$$F'(\sqrt{8}) = f(\sqrt{8}) = 11\,\mathrm{e}^8 + 2\,.$$

c) Dato che per la (1) la derivata di $F(t)$ è positiva, la funzione $F(t)$ è crescente. Inoltre, dato che la funzione $f(x)$ è pari, la funzione $F(t)$ è dispari. Infatti, con la sostituzione $x = -y$, da cui $dx = -dy$,
$$F(-t) = \int_0^{-t} [11\,\mathrm{e}^{x^2} + 2]\,dx = -\int_0^t [11\,\mathrm{e}^{(-y)^2} + 2]\,dy = -\int_0^t [11\,\mathrm{e}^{y^2} + 2]\,dy = -F(t)\,.$$

d) Si ha, se $t \geq 0$, e dato che $f(x) \geq 2$,
$$F(t) = \int_0^t [11\,\mathrm{e}^{x^2} + 2]\,dx \geq \int_0^t 2\,dx = 2\,t\,,$$
da cui segue che (si noti che il limite di $F(t)$ esiste perché $F(t)$ è crescente)
$$\lim_{t\to+\infty} F(t) \geq \lim_{t\to+\infty} 2\,t = +\infty\,.$$