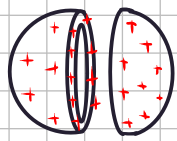
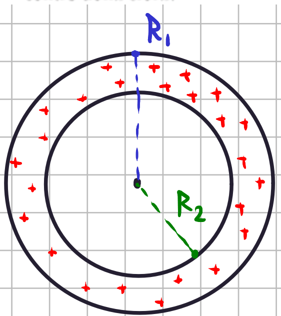
[2] Nel vuoto, una sfera di raggio R_1 ha una cavità centrale di raggio R_2 ($R_2 < R_1$). Una carica q è uniformemente distribuita nella regione di spazio compresa tra R_1 e R_2. Determinare il campo elettrico in funzione della distanza r dal centro della sfera.





Uso la legge di Gauss per calcolare E a dist. r dal centro.

Denoto S_r la superficie sferica di raggio r.

Se $r<R_2$, $\oint_{S_r} \bar{E}\, d\bar{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot$ carica interna, ma non ci sono cariche interne a R_2, quindi $\oint_{S_r} \bar{E}\, d\bar{s} = 0 \Rightarrow \boxed{E=0}$ se $r<R_2$.

Se $r>R_1$, la carica interna a S_r e' tutta q, quindi $\oint_{S_r} \bar{E}\, d\bar{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

Bisogna calcolare $\oint_{S_r} \bar{E}\, d\bar{s}$, ma in ogni punto della superficie $\bar{E}$ e' normale a $d\bar{s} \Rightarrow \oint_{S_r} E\, ds = 4\pi r^2 E$ allora $4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}}$

Voglio ora, per $R_2 \le r \le R_1$, calcolare il volume in cui e' contenuta la carica. $q_{int} = \iiint_{\tau_s} dq = \lambda \iiint_{\tau_s} d\tau$ si cambia variabile di integrazione considerando la sfera infinitesima $ds = 4\pi r^2 dr$. $q_{int}(S_r) = \lambda \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{R_2}^{r} 4\pi x^2 dx = \lambda \frac{4\pi}{\varepsilon_0}\left[\frac{r^3}{3} - \frac{R_2^3}{3}\right]$

Quindi $\oint_{S_r} \bar{E}\, d\bar{s} = \lambda \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \cdot \frac{r^3 - R_2^3}{3} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \lambda \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \cdot \frac{r^3-R_2^3}{3} \Rightarrow E = \frac{r^3 - R_2^3}{3 \cdot r^2 \varepsilon_0} \cdot \lambda$

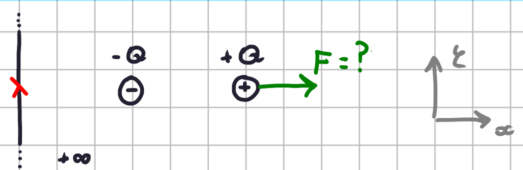
voglio esplicitare λ. $V\lambda = q \Rightarrow \lambda = \frac{1}{V} \cdot q$ $V = \int_{R_2}^{R_1} 4\pi x^2 dx = 4\pi \left[\frac{R_1^3}{2} - \frac{R_2^3}{2}\right]$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{\frac{R_1^3}{3} - \frac{R_2^3}{3}} \Rightarrow E = \frac{r^3 - R_2^3}{3 \cdot r^2 \varepsilon_0} \frac{q}{4\pi} \frac{1}{\frac{R_1^3}{3} - \frac{R_2^3}{3}} = \boxed{\frac{q}{r^2 \varepsilon_0 4\pi} \cdot \frac{r^3 - R_2^3}{R_1^3 - R_2^3}}$$

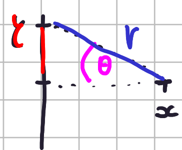
---

[3] A distanza a da una distribuzione lineare uniforme infinitamente estesa di carica elettrica avente densità λ, è posta una carica puntiforme $-Q$. Si chiede la forza che si esercita su una carica puntiforme $+Q$ posta a distanza $2a$ dal filo, sulla direzione radiale uscente dal filo e passante per la carica $-Q$. ($a = 1\,\mathrm{cm}$, $\lambda = +10\,\mathrm{nC/m}$, $Q = 1\,\mathrm{nC}$)

La situazione e' illustrata in figura



Calcolo la forza esercitata dal filo: $E\cos\theta = E_x(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{r^2} dz \cos\theta$ sia θ l'angolo fra $\hat{r}$ e l'asse x



$\Rightarrow r\cos\theta = x \Rightarrow r^2 = \frac{x^2}{\cos^2\theta}$ inoltre $\frac{z}{x} = \tan\theta$ quindi

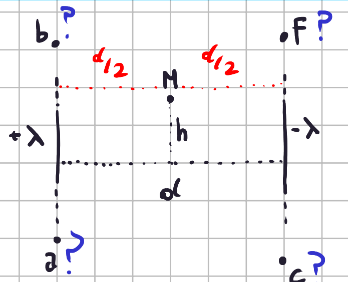
$dz = x\, d(\tan\theta) = \frac{x}{\cos^2\theta} d\theta \Rightarrow E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{\cos^2\theta}{x^2} \cdot \frac{x}{\cos^2\theta} d\theta \cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta =$

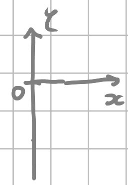
$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x} 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} \Rightarrow F = q\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 2a} = \frac{10}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 0.01} = \frac{250}{\pi\varepsilon_0}\, nN \Rightarrow F_{tot} = F + \frac{-2q}{4\pi\varepsilon_0} a$

$= \frac{250}{\pi\varepsilon_0} - \frac{50}{\pi\varepsilon_0} = \boxed{\frac{200}{\pi\varepsilon_0}}\, nN$

[4] Due distribuzioni rettilinee indefinite di carica, nel vuoto, sono tra loro parallele a distanza d e hanno una densità lineica di carica $+\lambda$ e $-\lambda$, rispettivamente. Determinare il vettore campo elettrico in un punto M equidistante dai fili, a distanza h dal loro piano. ($\lambda = 1\,\mu\mathrm{C/m}$, $d = 2\,\mathrm{cm}$, $h = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$)

La situazione e' quella illustrata in Figura →





$$dE'(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda\, dy}{y^2+\frac{1}{4}d^2}$$

$$r = \sqrt{y^2+\left(\tfrac{d}{2}\right)^2}$$

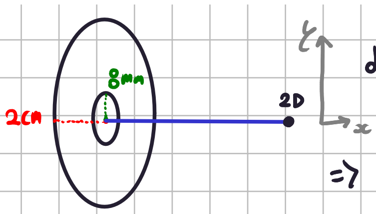
$$\Rightarrow E'(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{1}{y^2+\frac{1}{4}d^2}\,dy = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{d}\arctan\left(\frac{2b}{d}\right) - \frac{2}{d}\arctan\left(\frac{2a}{d}\right)\right]$$

a, b, c, F ignoti

$$\boxed{E(M) = E' + E''}$$

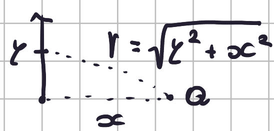
$$\Rightarrow E''(M) = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_c^F \frac{1}{y^2+\frac{1}{4}d^2}\,dy = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{d}\arctan\left(\frac{2F}{d}\right) - \frac{2}{d}\arctan\left(\frac{2c}{d}\right)\right]$$

[5] Una moneta metallica di diametro esterno $D = 2\,\mathrm{cm}$, forata al centro con foro di diametro $d = 8\,\mathrm{mm}$ e sufficientemente sottile da poter trascurare lo spessore, possiede una carica $Q = 5\,\mathrm{pC}$ disposta uniformemente sulla sua superficie. Si determini il valore del campo elettrico prodotto dalla carica presente sulla moneta in un punto dell'asse a distanza $L = 2D$ dal piano della moneta.



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dS}{r^2}$$ considero $dS = 2\pi y\, dy$ anello di spessore infinitesimo

$$\Rightarrow E = \int_d^D \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^3}\,2\pi y\,dy$$ calcolo r :

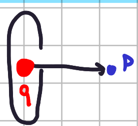


$$\Rightarrow E = \frac{2\pi\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_d^D \frac{y}{(y^2+x^2)^{3/2}}\,dy \Rightarrow \begin{cases} t = x^2+y^2 \\ dt = 2y\,dy \\ y\,dy = \frac{dt}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = d \Rightarrow t = x^2+d^2 \\ y = D \Rightarrow t = x^2+D^2 \end{cases}$$

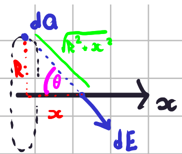
$$\Rightarrow E = \frac{2\pi\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x^2+d^2}^{x^2+D^2}\frac{1}{2}\,\frac{1}{t^{3/2}}\,dt = \frac{\lambda x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+D^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+d^2}}\right]$$

calcolo in $x = 2D \Rightarrow \dfrac{\lambda D}{\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{\sqrt{3D^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2D^2+d^2}}\right] = \boxed{\dfrac{5\cdot 10^{-12}\cdot 2\cdot 10^{-2}}{\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{\sqrt{3\cdot 2\cdot 10^{-4}}} - \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 2\cdot 10^{-4}+8\cdot 10^{-6}}}\right]}$

[6] Una carica $q = 20\,\mathrm{nC}$ è distribuita uniformemente lungo una circonferenza di raggio $R = 9\,\mathrm{cm}$; al centro O della circonferenza è posta una carica puntiforme $Q = -100\,\mathrm{nC}$. Calcolare il lavoro necessario per portare la carica Q dal punto O al punto P, posto sull'asse della circonferenza, a distanza $d = R^{0.5}$ da O.



Si vuole trovare il valore di $\vec{E}$ lungo il segmento OP.



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dl}{\sqrt{x^2+R^2}} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_C dE_x \Rightarrow \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{dl}{r^2}\cos\theta$$

$\Rightarrow r$ e θ non dipendono da $dl \Rightarrow E = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\cos\theta}{r^2}\displaystyle\int_C dl = \dfrac{\cos\theta\cdot q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

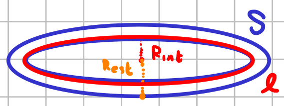
Si vuole esprimere in funzione di x

$$r\cos\theta = x \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \frac{xq}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{xq}{(R^2+x^2)^{3/2}}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow L = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{R^{0.5}}\frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\,dx =$$

$$= \boxed{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{R^2+R}} + \frac{1}{R}\right]}$$

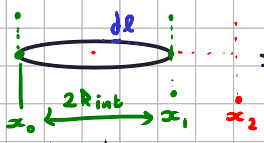
[7] Un tubo metallico, da considerarsi infinitamente lungo con raggio interno R_{int} ed esterno R_{est}, viene caricato con una carica che si dispone con densità per unità di lunghezza uniforme pari a λ. Scrivete le espressioni sia del campo elettrico, sia del potenziale elettrostatico in funzione della distanza r dall'asse del tubo per $0 < r < \infty$

$dQ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2}$ bisogna integrare sul tubo, posso considerare degli anelli infinitesimi



e poi integrare sulla lunghezza del tubo.

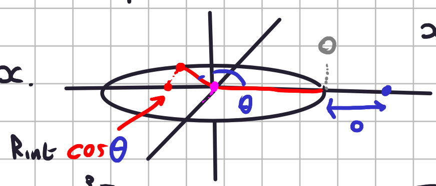
campo anello inf: $\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{dl}{r^2} =$



$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{1}{x^2}\,dl$ bisogna trovare

r dipende da dl

la relazione fra dl ed x.



$x + R_{int}\cos\theta$ per $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$x + R_{int} + R_{int}\cos\theta$ per $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(x+R_{int}\cos\theta)^2}\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{1}{(x+R_{int}+R_{int}\cos\theta)^2}\,d\theta\right]$$

NON so come continuare

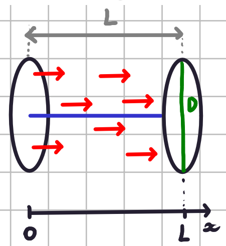
---

[8] Due cariche puntiformi q_1 e q_2 sono poste nel vuoto a una distanza d l'una dall'altra. Calcolare il lavoro che è necessario fare per ridurre la distanza di separazione fino al valore $d/2$.

$V_1(d) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{d}$ $\quad V_1(\frac{d}{2}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{d} \Rightarrow L = \Delta U = q_2\Delta V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{d}$

---

[10] Un filo isolante con carica distribuita uniformemente con densità lineica $\lambda = 70\,\mathrm{nC\cdot m^{-1}}$ è inserito e teso tra le armature circolari di un condensatore sottile, carico a $V = 2500\,\mathrm{V}$, parallelamente a queste e passante per il loro asse comune. Se su di esso si esercita una forza di modulo $F = 2.5\,\mathrm{mN}$, si chiede quale sia il diametro D delle armature, sapendo che esse distano di un tratto $L = 3\,\mathrm{mm}$. (Si trascurino gli effetti di bordo del condensatore)



Voglio trovare E all'interno del condensatore, so che il campo generato da un disco carico di raggio a e' $E(x) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma x\left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$

quindi $E(x) = \frac{\sigma x}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}D^2}}\right)$

$\frac{x}{x}$ perche' l'integrale e' su [0, L]

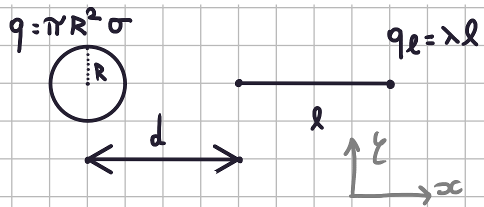
$$dF = dQ\cdot E = \lambda dx\cdot E \Rightarrow F = \lambda\int_0^L \frac{\sigma x}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}D^2}}\right)dx = \frac{\lambda\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^L \frac{x}{|x|} + \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}D^2}}\,dx =$$

$$\frac{\lambda\sigma}{\varepsilon_0}L + \frac{\lambda\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^L\frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}D^2}}\,dx = \frac{\lambda\sigma}{\varepsilon_0}L + \frac{\lambda\sigma}{\varepsilon_0}\left[\sqrt{\frac{1}{4}D^2+L^2} - \frac{D}{2}\right] = \frac{\lambda\sigma}{\varepsilon_0}\left[L + \sqrt{\frac{1}{4}D^2+L^2} - \frac{D}{2}\right]$$

RISOLVERE PER D

Se il condensatore si assume ideale, $F = QE = \lambda D\frac{V}{L} \Rightarrow D = \frac{L}{\lambda V}F \Rightarrow D = 4.3\ \mathrm{cm}$

[14] Nel vuoto, una carica positiva q è uniformemente distribuita su una superficie sferica non conduttrice di raggio R. A distanza d ($d > R$) dal centro delle superficie sferica e in direzione radiale, è posto un sottile segmento non conduttore di lunghezza l che porta una carica positiva distribuita con densità lineica uniforme λ. Determinare l'espressione della forza con cui si respingono le due distribuzioni di carica.

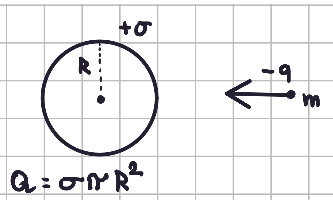


il campo generato dalla sfera e' identico ad un campo generato da una carica $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{1}{r^2}$

la carica dq' sulla linea subisce $dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{dq'}{r^2}$ bisogna integrare sulla linea l

$$F = \int_l dF = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{1}{r^2}\,dq = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{1}{r^2}\,dl = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_d^{d+l}\frac{1}{x^2}\,dx = \boxed{\frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{(d+l)^2}+\frac{1}{d^2}\right]}$$

[15] Una sfera cava di raggio R priva di massa e fissa nello spazio vuoto, possiede una densità di carica superficiale $+\sigma$. Una carica puntiforme $-q$ di massa m si trova all'infinito ed è attratta dalla sfera. Si determini la velocità con la quale la carica puntiforme arriverà nel centro della sfera supponendo che essa possieda un piccolo pertugio attraverso il quale la carica può passare.



Il potenziale della sfera all'esterno e' $V(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, si assume che la massa ha velocita' nulla all'inizio. L'energia meccanica si conserva $\Delta E_m = 0 \Rightarrow -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{1}{2}mv_r^2 = 0 \Rightarrow v_r^2 = \frac{1}{m}\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow$

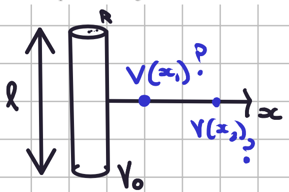
La velocita' con cui giunge in un punto distante r dal centro e' $v_r = \sqrt{\frac{1}{m}\cdot\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 r}}$

Questo vale per $r \geq R$. All'interno della sfera per il teo. di Gauss, il campo e' nullo, quindi lo e' anche il potenziale

$$\Rightarrow E_m(\text{centro}) = \frac{1}{2}m\underset{\uparrow}{v_c^2} \Rightarrow \boxed{v_c = v_R = \frac{q\cdot Q}{2m\pi\varepsilon_0 R}}$$

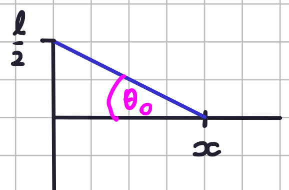
vel. al centro

[16] Un cilindro conduttore di raggio R e lunghezza l, con $l \gg R$, posto nel vuoto, possiede una carica positiva con densità areica di carica σ sulla superficie laterale e si trova a potenziale V_0. Si determini come varia il potenziale nei punti equidistanti dagli estremi del cilindro distanti r dal suo asse ($0 < r < \infty$).



Voglio prima calcolare E sull'asse x, $E = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint_C \frac{1}{r^2}\,dC$ essendo $l \gg C$ approssimo il cilindro ad un filo $\Rightarrow E = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{1}{r^2}\,d\bar{l}$

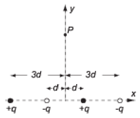
ma so che in questo caso (PAG. 56 APPUNTI) $E(x) = \frac{\sigma}{x\,4\pi\varepsilon_0}2\sin\theta_0$

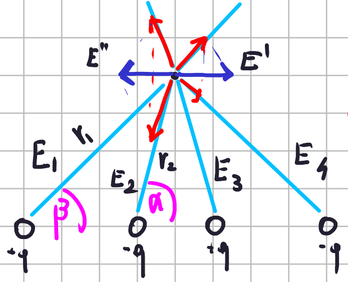


$$\sqrt{x^2+\left(\tfrac{l}{2}\right)^2}\cos\theta_0 = x \Rightarrow \theta_0 = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}}\right)$$

$$V_x(r) = \int_r^\infty E\,dx = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{1}{x}\sin\theta_0\,dx = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{1}{x}dx - \int_r^\infty \frac{x}{x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}\,dx$$

[20] Quattro cariche elettriche puntiformi, q, identiche in valore assoluto, di cui due positive e due negative, sono disposte lungo l'asse delle x, in maniera simmetrica rispetto all'asse delle y, a distanza d e $3d$ da quest'ultimo, come mostrato nella figura. Determinare, se esiste, il punto P sull'asse delle y dove il campo elettrico creato dalle cariche è nullo.





$r_1 \cos\beta = 3d$

$r_2 \cos\alpha = d$

Oss: il campo ha componente nulla sull'asse y

$r_1 \cos\beta = 3d \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{3d}{r_1}$

$r_2 \cos\alpha = d \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{d}{r_2}$

$$E' = E_1 \cos\beta + E_4 \cos\beta = 2E_1 \cos\beta$$

$$E = 0 \iff E' = -E''$$

$$-E'' = E_2 \cos\alpha + E_3 \cos\alpha = 2E_2 \cos\alpha$$

$\Rightarrow$

$$\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1^2} \cos\beta = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{3d^2+y^2}^2} \cos\beta \Rightarrow \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{3d}{3d^2+y^2}$$

$$\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_2^2} \cos\alpha = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{d^2+y^2}^2} \cos\alpha \Rightarrow \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{d}{d^2+y^2}$$

trovare y_0 per cui

$$\Rightarrow \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} d \left(\frac{3}{3d^2+y_0^2} - \frac{1}{d^2+y_0^2} \right) = 0$$

[21] Una carica $q = 10^{-9}$ C è uniformemente distribuita in una sfera di raggio R. Il potenziale in un punto P a distanza $R/2$ vale $V(P) = 10^3$ V, supponendo nullo il potenziale all'infinito. Determinare il valore di R.

All'interno della sfera il potenziale é $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{3}{2}R - \dfrac{r^2}{2R^3}\right)$ quindi

$$\Rightarrow \frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{3}{2}R - \frac{R^2}{8R^3}\right) = 10^3 \text{ V}$$

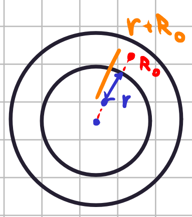
Si risolve per R

[22] È data una distribuzione di carica a simmetria sferica di densità uniforme ρ contenuta in un guscio sferico di raggio interno R e raggio esterno $3R$. Determinare il valore del potenziale $V(0)$ al centro, in funzione del raggio e della densità di carica, potendo assumere nullo il potenziale in punti infinitamente distanti dalla distribuzione di carica.

Il campo elettrico di una superfice sferica carica e' $E_s = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{r}{R^3}$

$$\Rightarrow E = \int_R^{3R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R_0^3} 4\pi R_0^2 \, dR_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \int_R^{3R} \frac{r}{R_0} dR_0$$

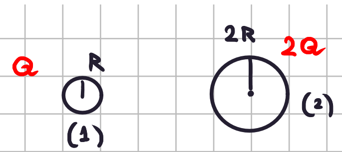
ma qual'e' la relazione fra r ed R_0?



$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \int_R^{3R} \frac{r+R_0}{R_0} dR_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0}\left[r\int_R^{3R} \frac{1}{R_0} dR_0 + \int_R^{3R} dR_0\right] = \frac{Q}{\varepsilon_0}\left[r \log(3) + 2R\right]$$

all'interno della sfera

[23] È data una sfera conduttrice isolata di carica Q_1 e di raggio $R_1 = 5$cm centrata in O. Sostituendo tale sfera con un'altra di raggio $R_2 = 2R_1$ e di carica $Q_2 = 2Q_1$ sempre centrata in O, a quale distanza R^* da O l'energia contenuta nel volume di spazio sferico corrispondente, è uguale per le due situazioni?



$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

energia in R^* per (1): $$\int_R^{R^*} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2} \int_R^{R^*} \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_R^{R^*} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R^*} - \frac{1}{R}\right]$$

(2): $$\int_{2R}^{R^*} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{4Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_{2R}^{R^*} \frac{dr}{r^2} = \frac{4Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R^*} - \frac{1}{2R}\right] \Rightarrow \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R^*} - \frac{1}{2R}\right] = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R^*} - \frac{1}{R}\right]$$

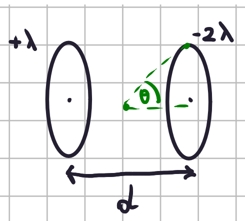
risolvo per R^*

$$\frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R^*}-\frac{1}{2R}\right]=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R^*}-\frac{1}{R}\right]$$

$$\frac{2\pi\varepsilon_0 R^*}{Q^2}-\frac{4\pi\varepsilon_0 R}{Q^2}=\frac{8\pi\varepsilon_0 R^*}{Q^2}-\frac{8\pi\varepsilon_0 R}{Q^2}$$

$$\frac{2\pi\varepsilon_0}{Q^2}\left[R^*-2R-4R^*+4R\right]=0 \Rightarrow \frac{2\pi\varepsilon_0}{Q^2}\left[-3R^*+2R\right]=0 \Rightarrow 3R^*=2R \Rightarrow R^*=\frac{2}{3}R$$

[24] Nel vuoto, su due sottili anelli circolari identici, di raggio R, tra loro coassiali e distanti d, è uniformemente distribuita una carica elettrica con diverse densità $+\lambda$ e -2λ. Determinare il vettore campo elettrico in un generico punto P posto tra i due anelli lungo il loro asse comune.



trovo la formula generale del campo per 1 anello carico

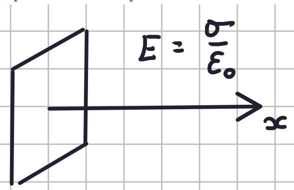
$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dl}{r^2} \qquad dE_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dl}{r^2}\cos\theta$$

$$E=\int_l dE_x=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int_l \cos\theta\, dl=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\cos\theta\, 2\pi R=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0 r^2}\cos\theta\, R$$

ma $r=\sqrt{x^2+R^2}$ e $\cos\theta=\frac{x}{r} \Rightarrow \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\frac{x}{r^3}=\frac{\sigma R x}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{(x^2+R^2)^{3/2}}$

nel punto $P:(x_0,0) \Rightarrow E(x_0)=\frac{\lambda R x_0}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{(x_0^2+R^2)^{3/2}}-\frac{2\lambda R(x_0+d)}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{((x_0+d)^2+R^2)^{3/2}}$

[25] È data nel vuoto una distribuzione piana indefinita di carica positiva con densità areica di carica $\sigma = 1\,\mu\mathrm{C/m}^2$. Si determini la distanza tra due superfici equipotenziali tra le quali esiste una differenza di potenziale $\Delta V = 100\,\mathrm{V}$.



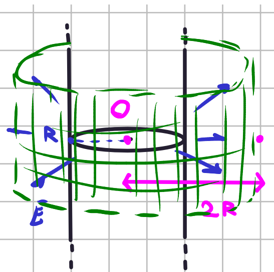
$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$V_{A,B}=\int_A^B E=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}dx=\frac{x_2\sigma}{\varepsilon_0}-\frac{x_1\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{x_2\sigma}{\varepsilon_0}-\frac{x_1\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow 8.8\cdot10^6 x_1-8.8\cdot10^6 x_2=100\,\mathrm{V}$$

$$(x_1-x_2)=\frac{1\cdot10^2}{8.8\cdot10^6}\,\mathrm{m}=8{,}8\cdot10^{-4}\,\mathrm{m}=0{,}88\,\mathrm{mm}$$

[26] Una carica positiva è distribuita con densità volumica uniforme ρ in un cilindro indefinito di raggio R. Si determini la differenza di potenziale tra un punto O sull'asse del cilindro e un punto P a distanza $2R$ dall'asse.



$$2\pi r L E=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_L \rho\, dl \Rightarrow 2\pi r L E=\frac{1}{\varepsilon_0}\pi r^2 L\rho \qquad r\le R$$

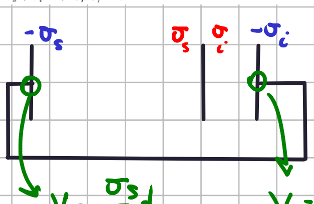
$$2\pi r L E=\frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho \Rightarrow 2\pi r L E=\frac{1}{\varepsilon_0}\pi R^2 L\rho \qquad r\ge R$$

$$r\le R \Rightarrow E=\frac{1}{2\varepsilon_0}r\rho$$

$$r\ge R \Rightarrow E=\frac{1}{2\varepsilon_0}\rho\frac{R^2}{r}$$

$$\Rightarrow \Delta V=\int_0^R\frac{1}{2\varepsilon_0}r\rho\, dr+\int_R^{2R}\frac{1}{2\varepsilon_0}\rho\frac{R^2}{r}dr=\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}\left(1+2\ln(2)\right)$$

[27] Tre identiche larghe piastre metalliche sono disposte nel vuoto orizzontalmente e parallelamente tra loro: la distanza della piastra centrale da quella superiore e inferiore è $d_s = 4\,\mathrm{mm}$ e $d_i = 1\,\mathrm{mm}$, rispettivamente. Un filo metallico collega la lastra superiore con quella inferiore mentre alla lastra centrale, isolata, viene data una carica positiva che si distribuisce con una densità di carica σ_s sulla faccia superiore e σ_i su quella inferiore. Determinare σ_s e σ_i sapendo che $\sigma_s + \sigma_i = +20\,\mu\mathrm{C/m^2}$.



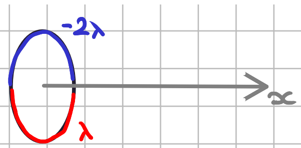
$V = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_0} d_s \qquad V = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_0} d_i$

$$\begin{cases} \sigma_s + \sigma_i = 20 \\ \frac{\sigma_s}{\varepsilon_0} d_s - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_0} d_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma_s = \frac{d_i}{d_s}\sigma_i \Rightarrow \sigma_s = \frac{1}{4}(20 - \sigma_s) \Rightarrow \sigma_s + \frac{\sigma_s}{4} = 5 \Rightarrow \frac{5}{4}\sigma_s = 5 \Rightarrow$$

$\sigma_s = 4\,\mu C$

$\sigma_i = 16\,\mu C$

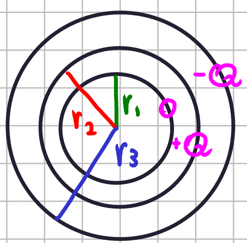
[28] È data una distribuzione lineica di carica lungo una circonferenza di centro O e raggio R; la densità lineica di carica è positiva, $+\lambda$, per metà della lunghezza della circonferenza, e negativa, -2λ ($\lambda > 0$), per l'altra metà. Si determini la componente del campo elettrico nella direzione dell'asse della circonferenza in un punto P sull'asse stesso a distanza x da O.



$\lambda \pi R - \lambda 2\pi R = -\lambda \pi R$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2}\cos\theta \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\cos\theta\int dQ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\cos\theta\left[\lambda\int_0^{\pi} dl - 2\lambda\int_0^{\pi} dl\right] = \boxed{-\frac{\lambda R}{4\,\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{r^3}}$$

[29] Tre sottili gusci sferici metallici di raggio r_1, r_2 ed r_3 con $r_1 \le r_2 \le r_3$, sono disposti concentricamente nel vuoto; il guscio più piccolo è scarico, quello di raggio r_2 possiede una carica $+Q$ e quello maggiore possiede una carica $-Q$. Si determini il campo elettrico e il potenziale in ogni punto dello spazio, potendo assumere nullo il potenziale all'infinito.



Legge di Gauss

$E(r \le r_1)$

$$\oint_{S_r} E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\tau} \rho \Rightarrow 4\pi r^2 E = 0 \Rightarrow E(r \le r_1) = 0$$

Analogamente $E(r_1 \le r \le r_2) = 0$

Considero $r_2 \le r \le r_3 \Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r_2 \le r \le r_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$

$r \ge r_3 \Rightarrow 4\pi r^2 E = 0 \Rightarrow E(r \ge r_3) = 0$

in definitiva $\boxed{E(r) =} \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} & \text{se } r \in [r_2, r_3] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$V(r \ge r_3) = 0$

$V(r_2 \le r \le r_3) = \boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_3} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

$$V(r \le r_2) = \int_r^{\infty} E\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_2}^{r_3}\frac{1}{r^2}\,dr = \boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_3} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}}$$

[30] Due sfere conduttrici isolate di raggi $R_1 = 2\,\mathrm{cm}$ e $R_2 = 4\,\mathrm{cm}$ cm sono poste a una distanza d molto maggiore dei loro raggi e hanno una piccola carica positiva pari a $Q_1 = Q_2 = Q$. Vengono in seguito portate a contatto e separate di nuovo alla stessa distanza di prima. Trovare l'espressione per il rapporto tra le forze di repulsione alla distanza d prima (F) e dopo (F') il contatto e il suo valore numerico.

$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{r^2}$

$\sigma_1 = \frac{Q}{4\pi R_1^2} \qquad \sigma_2 = \frac{Q}{4\pi R_2^2}$

nel contatto cambia la carica (effetto punte): $\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{Q}{4\pi R_2 R_1} \Rightarrow Q_1 = \frac{R_1}{R_2} Q = \frac{1}{2} Q$

$\Rightarrow Q_2 = 2Q - \frac{1}{2}Q = \frac{3}{2}Q$

carica tot. origin.

$$\Rightarrow F' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{F}{F'} = \frac{3}{2}$$

[31] Calcolare l'energia potenziale elettrostatica U spettante ad una sfera isolata, posta nel vuoto, di raggio R e uniformemente carica con carica totale Q.

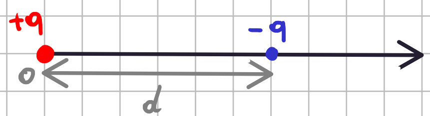
So che $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \Rightarrow U = \int_\tau u\, d\tau$ ← VOLUME ENERGIA

VOLUME DI rag. r

$$E(r \geq R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \Rightarrow U(r) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\int_R^r \frac{1}{r^4}4\pi r^2\, dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^r \frac{1}{r^2}\, dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right] \Rightarrow \text{per } r \to \infty \quad \boxed{U_1 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}}$$

$$E(r \leq R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r}{R^3} \Rightarrow U_2(r) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\cdot\frac{4\pi}{R^6}\int_0^R \frac{1}{r^2}\, dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R^6}\int_0^R r^4\, dr = \boxed{\frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}} \qquad \boxed{U = U_1 + U_2}$$

[33] Due cariche puntiformi, $+q$ e $-q$ sono poste sul semiasse positivo dell'asse x: la prima nell'origine dell'asse, la seconda a distanza d da essa. Si determini il potenziale, V, e il vettore campo elettrico, $\mathbf{E}$, in ogni punto dell'asse x.

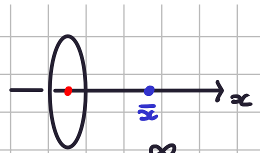


$$\bar{E}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(x-d)^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x^2} - (x^2 - 2dx + d^2)^{-1}\right] = -\frac{2x + d^2}{x^4 - 2x^3 + x^2 d^2}\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right]\hat{i}$$

[34] Il potenziale all'interno di una sfera carica dipende solo dalla distanza r dal centro secondo la legge $V(r) = ar^2 + b$ dove a e b sono costanti. Trovare la distribuzione della densità di carica ρ.

$$E = -\frac{\partial V}{\partial r} = -2ar \qquad E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, d\tau \Rightarrow -8a\pi r^3 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \rho = -6 \cdot a \cdot \varepsilon_0$$

[35] Lungo l'asse di un sottile anello uniformemente carico posto nel vuoto, in un punto a distanza $\overline{x} = 1\,\mathrm{m}$ dal centro dell'anello, il campo elettrico ha intensità $50\,\mathrm{V/m}$ mentre il potenziale è di $100\,\mathrm{V}$ (supponendo nullo il potenziale all'infinito). Si determini la carica dell'anello.



$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{r^3} \Rightarrow E(\bar{x}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{(R^2+1)^{3/2}} = 50 \text{ V}$$

$$V(\bar{x}) = \int_{\bar{x}}^{\infty} E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\bar{x}}^{\infty}\frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\, dx$$

$$\left[\begin{array}{l} t = R^2 + x^2 \\ dt = 2x\, dx \\ dx = \frac{1}{2x}dt \\ \bar{x} = R^2 + \bar{x}^2 \end{array}\right. \Rightarrow \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R^2+\bar{x}^2}^{\infty}\frac{x}{t^2}\frac{1}{2x}\, dt = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R^2+1}$$

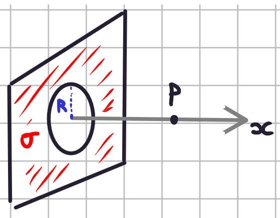
$$\begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{(R^2+1)^{3/2}} = 50 \text{ V} \\ \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R^2+1} = 100 \text{ V} \Rightarrow (R^2+1)\frac{8\pi\varepsilon_0}{Q} = \frac{1}{100} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{Q}{800\cdot\pi\cdot\varepsilon_0} - 1} \end{cases}$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{(R^2+1)^{3/2}} \Rightarrow \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\left(\frac{Q}{800\pi\varepsilon_0}\right)^{3/2}} = 50 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(800\pi\varepsilon_0)^{3/2}}{Q^{3/2}} = 50 \Rightarrow \frac{Q}{Q^{3/2}} = \frac{200\pi\varepsilon_0}{(800\pi\varepsilon_0)^{3/2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{Q}} = \frac{200\pi\varepsilon_0}{(800\pi\varepsilon_0)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{Q}} = \frac{200\pi\varepsilon_0}{(800\pi\varepsilon_0)^{3/2}} \Rightarrow \sqrt{Q} = \frac{(800\pi\varepsilon_0)^{3/2}}{200\pi\varepsilon_0} \Rightarrow Q = \frac{800^3\pi^3\varepsilon_0^3}{200^2\pi^2\varepsilon_0^2} = \frac{800^3}{200^2}\pi\varepsilon_0 = 12800\pi\varepsilon_0$$

TOTALMENTE SBAGLIATO

[37] È data nel vuoto una distribuzione piana indefinita di carica positiva con densità areica di carica σ. Nella distribuzione vi è un foro circolare di raggio R privo di carica. Si determini il campo elettrico in un punto P sull'asse del foro a distanza x da esso.



$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{r^{3/2}}\,\sigma 2\pi y\,dy$$

$$E = \frac{\sigma 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{x\,y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dy = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dy$$

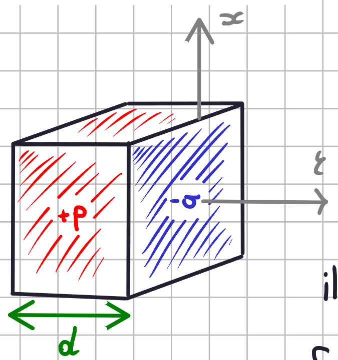
$x^2+y^2=t$
$dt = 2y\,dy$
$dy = \frac{dt}{2y}$
$R \Rightarrow x^2+R^2$

$$\Rightarrow \frac{\sigma x}{4\varepsilon_0}\int_{x^2+R^2}^\infty t^{-3/2}\,dt = \frac{\sigma x}{4\varepsilon_0}\left[-2\frac{1}{\sqrt{t}}\right]_{x^2+R^2}^\infty$$

$$\frac{\sigma x}{4\varepsilon_0}\left[-2\frac{1}{\sqrt{t}}\right]_{x^2+R^2}^\infty = \boxed{\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}}$$

---

[38] Nel vuoto uno strato piano indefinito di carica con densità superficiale $-\sigma$ è adagiato sopra una distribuzione piana indefinita di carica avente spessore d e densità volumica di carica $+\rho$. Determinare il vettore campo elettrico, $\mathbf{E}$, in tutti i punti dello spazio e riportare in un grafico l'andamento di E_y in funzione della quota y supponendo $d\rho > \sigma$.



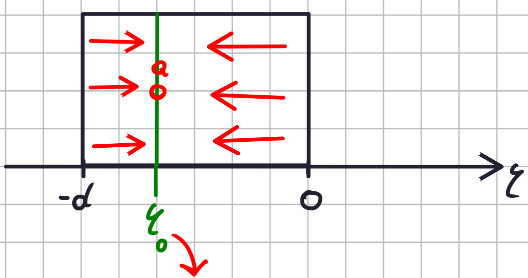
il piano ha un campo uniforme $-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ attrattivo.

- $E_\sigma(y>0) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{j}$ $\quad\hat{j}$ versore normale $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$
- $E_\sigma(y<0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{j}$

il campo di ρ lo calcolo per 3 casi diversi

- $E_\rho(y>0) = \int_z dE = \int_0^d \frac{\rho}{\varepsilon_0}dy = d\cdot\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
- $E_\rho(y<-d) = -d\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Quanto vale E_ρ nella zona contenuta nel volume? $[-d \le y \le 0]$



- $E_\rho(0 \ge y \ge -d) = (d+2y)\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Una carica qui subisce una forza repulsiva dal lato destro e sinistro

Infine

$$E(y>0) = \frac{d\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(d\rho-\sigma) = \frac{1}{\varepsilon_0}K \qquad K \in \mathbb{R}^+$$

$$E(0\ge y\ge -d) = (d+2y)\frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho d + 2y\rho + \sigma)$$

$$E(y<-d) = -\frac{d\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(-d\rho+\sigma) = -\frac{1}{\varepsilon_0}K$$