Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
28 Aprile 2023 — Compito n. 00110

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: Memew

Cognome: Rossi

Matricola: 2 0 6 6 2 1 2

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	■	■	□	■	□	■	□	■	■	□	□	□	□	■	□	■
F	□	□	■	□	■	□	■	□	□	■	■	■	■	□	■	□
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

1) Sia

$$F(t) = \int_0^t [6\,x^2 + \cos^2(7\,x)]\,dx$$

1A) La funzione $F(t)$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.
1B) Si ha $F'(0) = 1$.
1C) La funzione $F(t)$ è decrescente su $\mathbb{R}$.
1D) Si ha $F(6) > 0$.

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (15x^2 + 6x + 5)\,dx = 0\,.$$

2B)

$$\int_0^{\frac{1}{3}} 36\,x\,e^{3\,x}\,dx = 4\,.$$

2C)

$$\int_0^{8\,\pi} \cos(2\,x)\,dx = 4\,.$$

2D)

$$\int_0^{\sqrt{10}} \frac{4\,x}{10 + x^2}\,dx = 2\,\log(2)\,.$$

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-6}^{6} [7\,x^3 + \sin(2\,x)]\,dx = 0\,.$$

3B)

$$\int_{-6}^{6} [7\,x^2 + 5\,x\,|x|]\,dx < 0\,.$$

3C)

$$\int_{-5}^{6} [9\,x^3 + 9\,x]\,dx = 0\,.$$

3D)

$$\int_{-3}^{2} \frac{x^5}{9 + x^4}\,dx > 0\,.$$

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\int_4^8 \frac{dx}{x - 2} = \log(2)\,.$$

4B)

$$\int_6^{12} \frac{dx}{(x - 3)^2} = \frac{2}{9}\,.$$

4C)

$$\int_8^9 \frac{dx}{(x - 5)\,(x - 7)} = \frac{1}{2}\,\log(2/3)\,.$$

4D)

$$\int_{-9}^{-8} \frac{dx}{x^2 + 18\,x + 82} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Cognome Nome Matricola Compito 00110

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

a) $f(x) = x\,\sin(3\,x)$, $\int_0^{13\,\pi} f(x)\,dx$, $\frac{13\pi}{3}$ **b)** $g(x) = x^2\,e^{5\,x^3}$, $\int_0^{\sqrt[3]{5}} g(x)\,dx$, $\frac{e^{25}-1}{15}$

c) $h(x) = (4x^2 + 15x + 7)\,e^x$, $\int_{-\frac{7}{4}}^{0} h(x)\,dx$, 0 **d)** $k(x) = \frac{1}{1+9\,x^2}$, $\int_0^1 k(x)\,dx$. $\frac{\arctan(3)}{3}$

(a) $\int_0^{13\pi} x\sin(3x) = \left| \begin{array}{l} y=3x \\ dx = \frac{dy}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{9}\int_0^{39\pi} y\sin(y)\,dy = \frac{1}{9}\left[-y\cos(y)\Big|_0^{39} + \int_0^{39\pi}\cos(y)\right] = \frac{1}{9}\left[-39\pi\cdot\cos(39\pi)\right] = \frac{\cancel{39}^{13}}{\cancel{9}_3}\pi = \frac{13\pi}{3}$

(b) $\int_0^{\sqrt[3]{5}} x^2 e^{5x^3} = \left| \begin{array}{l} y = 5x^3 \\ dy = 15x^2\,dx \\ dx = \frac{dy}{15x^2} \end{array} \right| = \frac{1}{15}\int_0^{25} e^y = \frac{e^{25}-1}{15}$

(c) $\int_{-\frac{7}{4}}^{0} (4x^2+15x+7)\,e^x$

$\int P_n(x)e^x = Q_n(x)\,e^x$ e $P_n(x) = Q_n(x) + Q_n'(x)$

QUINDI $(4x^2+5x+7) = ax^2 + (2a+b)x + (b+c)$

$\begin{cases} a = 4 \\ 2a+b = 15 \\ b+c = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 4 \\ b = 7 \\ c = 0 \end{cases}$ $(4x^2+7x)e^x\Big|_{-\frac{7}{4}}^{0} = 0 - \left[4\cdot\frac{49}{16} - \frac{49}{4}\right] = 0$

(d) $\int_0^1 \frac{1}{1+9x^2} = \left| \begin{array}{l} y = 3x \\ dx = \frac{dy}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int_0^{3} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{3} = \frac{\arctan(y)}{3}\Big|_0^3 = \frac{\arctan(3)}{3}$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00110**

6) Sia

$$F(t) = \int_0^t [5\,e^{x^2} + 8]\,dx\,.$$

a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
b) Calcolare $F(0)$ e $F'(\sqrt{7})$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è una funzione crescente e dispari.
d) Dimostrare che

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,.$$

(a) $F(t)$ e' derivabile dato che, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, $F'(t) = 5e^{t^2}+8$, essendo la sua derivata CONTINUA su $\mathbb{R}$, e' derivabile $\forall t \in \mathbb{R}$

(b) $F(0) = 0$, $F(\sqrt{7}) = 5 \cdot e^{\sqrt{7}^2} + 8 = 5 \cdot e^7 + 8$

(c) $F(t)$ e' crescente perche' la sua derivata e' sempre ≥ 0.
e' dispari perche' parte da 0 e la sua derivata e' pari

(d) $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = +\infty$ perche' $F(t) \geq \int_0^t 8\,d\cancel{x}$ e

$\lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^t 8\,dx = \lim\limits_{t\to+\infty} 8t = +\infty$, quindi per criterio del CONFRONTO ASINTOTICO anche $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = +\infty$

Soluzioni del compito 00110

1) Sia
$$F(t) = \int_0^t [6\,x^2 + \cos^2(7\,x)]\,dx$$

1A) La funzione $F(t)$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Vero: Dato che la funzione $x \mapsto 6\,x^2 + \cos^2(7\,x)$ è continua su $\mathbb{R}$, la funzione $F(t)$ è derivabile su $\mathbb{R}$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale, e si ha $F'(t) = 6\,x^2 + \cos^2(7\,t)$.

1B) Si ha $F'(0) = 1$.

Vero: Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(t) = 6\,t^2 + \cos^2(7\,t)$, si ha $F'(0) = 1$.

1C) La funzione $F(t)$ è decrescente su $\mathbb{R}$.

Falso: Dato che per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(t) = 6\,t^2 + \cos^2(7\,t)$, si ha $F'(t) \geq 0$ per ogni t in $\mathbb{R}$, e quindi la funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

1D) Si ha $F(6) > 0$.

Vero: Dato che la funzione $F(t)$ è crescente (si veda l'esercizio **1C**), si ha
$$F(6) > F(0) = 0\,.$$

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A)

$$\int_0^1 (15x^2 + 6x + 5)\, dx = 0\,.$$

Falso: Dato che

$$\int (15x^2 + 6x + 5)\, dx = \frac{15}{3}\, x^3 + \frac{6}{2}\, x^2 + 5\, x = 5\, x^3 + 3\, x^2 + 5\, x + c\,,$$

si ha

$$\int_0^1 (15x^2 + 6x + 5)\, dx = 5\, x^3 + 3\, x^2 + 5\, x\Big|_0^1 = 5 + 3 + 5 = 13 \neq 0\,.$$

Alternativamente, si poteva osservare che l'integrale non poteva essere uguale a zero perché la funzione integranda è strettamente positiva sull'intervallo di integrazione.

2B)

$$\int_0^{\frac{1}{3}} 36\, x\, \mathrm{e}^{3\,x}\, dx = 4\,.$$

Vero: Si ha, con la sostituzione $y = 3\,x$, da cui $dy = 3\,x$,

$$\int_0^{\frac{1}{3}} 36\, x\, \mathrm{e}^{3\,x}\, dx = 4 \int_0^{\frac{1}{3}} (3\,x)\, \mathrm{e}^{3\,x}\, (3\, dx) = 4 \int_0^1 y\, \mathrm{e}^y\, dy\,.$$

Dato che una primitiva di $y\,\mathrm{e}^y$ è $(y-1)\,\mathrm{e}^y$, si ha

$$\int_0^{\frac{1}{3}} 36\, x\, \mathrm{e}^{3\,x}\, dx = 4\,(y-1)\,\mathrm{e}^y\Big|_0^1 = 4\,.$$

2C)

$$\int_0^{8\,\pi} \cos(2\,x)\, dx = 4\,.$$

Falso: Si ha

$$\int_0^{8\,\pi} \cos(2\,x)\, dx = \frac{\sin(2\,x)}{2}\Big|_0^{8\,\pi} = \frac{\sin(16\,\pi) - \sin(0)}{2} = 0 \neq 4\,.$$

2D)

$$\int_0^{\sqrt{10}} \frac{4\,x}{10 + x^2}\, dx = 2\, \log(2)\,.$$

Vero: Dato che

$$\frac{4\,x}{10 + x^2} = 2\, \frac{2x}{10 + x^2} = 2\, \frac{(10 + x^2)'}{10 + x^2}\,,$$

si ha

$$\int_0^{\sqrt{10}} \frac{4\,x}{10 + x^2}\, dx = 2\, \log(10 + x^2)\Big|_0^{\sqrt{10}} = 2\,[\log(20) - \log(10)] = 2\, \log(20/10) = 2\, \log(2)\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A)

$$\int_{-6}^{6} [7\,x^3 + \sin(2\,x)]\,dx = 0\,.$$

Vero: La funzione integranda è dispari, e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine. Pertanto, l'integrale vale zero.

3B)

$$\int_{-6}^{6} [7\,x^2 + 5\,x\,|x|]\,dx < 0\,.$$

Falso: La funzione $x \mapsto 7\,x^2$ è pari, mentre la funzione $x \mapsto 5\,x\,|x|$ è dispari. Dato che l'intervallo è simmetrico rispetto all'origine, si ha

$$\int_{-6}^{6} [7\,x^2 + 5\,x\,|x|]\,dx = \int_{-6}^{6} 7\,x^2\,dx = 2\int_{0}^{6} 7\,x^2\,dx > 0\,,$$

dato che la funzione integranda è positiva.

3C)

$$\int_{-5}^{6} [9\,x^3 + 9\,x]\,dx = 0\,.$$

Falso: La funzione integranda è dispari; pertanto, si ha

$$\int_{-5}^{6} [9\,x^3 + 9\,x]\,dx = \int_{-5}^{5} [9\,x^3 + 9\,x]\,dx + \int_{5}^{6} [9\,x^3 + 9\,x]\,dx = \int_{5}^{6} [9\,x^3 + 9\,x]\,dx\,,$$

e l'ultimo integrale è positivo essendo l'integrale di una funzione positiva.

3D)

$$\int_{-3}^{2} \frac{x^5}{9 + x^4}\,dx > 0\,.$$

Falso: Dato che la funzione integranda è dispari, si ha

$$\int_{-3}^{2} \frac{x^5}{9 + x^4}\,dx = \int_{-3}^{-2} \frac{x^5}{9 + x^4}\,dx + \int_{-2}^{2} \frac{x^5}{9 + x^4}\,dx = \int_{-3}^{-2} \frac{x^5}{9 + x^4}\,dx < 0\,,$$

dato che la funzione integranda è negativa.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A)

$$\int_4^8 \frac{dx}{x-2} = \log(2)\,.$$

Falso: Si ha

$$\int_4^8 \frac{dx}{x-2} = \log(|x-2|)\Big|_4^8 = \log(6) - \log(2) = \log(6/2) = \log(3) \neq \log(2)\,.$$

4B)

$$\int_6^{12} \frac{dx}{(x-3)^2} = \frac{2}{9}\,.$$

Vero: Ricordando che

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = \frac{1}{a-x} + c\,,$$

si ha

$$\int_6^{12} \frac{dx}{(x-3)^2} = \frac{1}{3-x}\Big|_6^{12} = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{9}\,.$$

4C)

$$\int_8^9 \frac{dx}{(x-5)\,(x-7)} = \frac{1}{2}\,\log(2/3)\,.$$

Falso: Dall'identità

$$\frac{1}{(x-5)\,(x-7)} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x-5}$$

si ricava (moltiplicando per $(x-5)\,(x-7)$) che deve essere

$$1 = A\,(x-5) + B\,(x-7)\,.$$

Scegliendo $x = 5$ si ricava $B = -\frac{1}{2}$, e scegliendo $x = 7$ si ricava $A = \frac{1}{2}$. Pertanto,

$$\frac{1}{(x-5)\,(x-7)} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-5}\Big]\,.$$

Ne segue che

$$\int \frac{dx}{(x-5)\,(x-7)} = \frac{1}{2}\,\log\left(\left|\frac{x-7}{x-5}\right|\right) + c\,,$$

cosicché

$$\int_8^9 \frac{dx}{(x-5)\,(x-7)} = \frac{1}{2}\,[\log(1/2) - \log(1/3)] = \frac{1}{2}\,\log(3/2) \neq \frac{1}{2}\,\log(2/3)\,.$$

Alternativamente, si poteva osservare che, essendo la funzione integranda positiva sull'intervallo di integrazione, l'integrale non poteva essere negativo.

4D)

$$\int_{-9}^{-8} \frac{dx}{x^2 + 18\,x + 82} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Vero: Si ha

$$x^2 + 18\,x + 82 = (x+9)^2 + 1\,,$$

e quindi

$$\int \frac{dx}{x^2 + 18\,x + 82} = \int \frac{dx}{1 + (x+9)^2}\,.$$

Con la sostituzione $y = x + 9$, da cui $dx = dy$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 + 18\,x + 82} = \int \frac{dy}{1 + y^2} = \arctan(y) + c = \arctan(x + 9) + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_{-9}^{-8} \frac{dx}{x^2 + 18\,x + 82} = \arctan(x + 9)\Big|_{-9}^{-8} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

5) Determinare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$, e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a)}\ f(x) = x\,\sin(3\,x)\,,\quad \int_0^{13\,\pi} f(x)\,dx\,,\qquad \textbf{b)}\ g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{5\,x^3}\,,\quad \int_0^{\sqrt[3]{5}} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c)}\ h(x) = (4x^2 + 15x + 7)\,\mathrm{e}^x\,,\quad \int_{-\frac{7}{4}}^{0} h(x)\,dx\,,\qquad \textbf{d)}\ k(x) = \frac{1}{1 + 9\,x^2}\,,\quad \int_0^1 k(x)\,dx\,.$$

Soluzione:

a) Si ha, integrando per parti, e ponendo $f'(x) = \sin(3\,x)$, da cui $f(x) = -\frac{\cos(3\,x)}{3}$ e $g(x) = x$, da cui $g'(x) = 1$,

$$\int x\,\sin(3\,x) = -\frac{x\,\cos(3\,x)}{3} + \int 1 \cdot \frac{\cos(3\,x)}{3}\,dx = -\frac{x\,\cos(3\,x)}{3} + \frac{\sin(3\,x)}{9} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^{13\,\pi} x\,\sin(3\,x)\,dx = -\frac{x\,\cos(3\,x)}{3} + \frac{\sin(3\,x)}{9}\Big|_0^{13\,\pi} = -\frac{13\,\pi\,\cos(39\,\pi)}{3} = \frac{13}{3}\,\pi\,.$$

b) Si ha, con la sostituzione $y = 5\,x^3$, da cui $dy = 15\,x^2\,dx$ (e quindi $x^2\,dx = \frac{dy}{15}$),

$$\int x^2\,\mathrm{e}^{5\,x^3}\,dx = \frac{1}{15}\int \mathrm{e}^y\,dy = \frac{\mathrm{e}^y}{15} + c = \frac{\mathrm{e}^{5\,x^3}}{15} + c\,,$$

da cui segue che

$$\int_0^{\sqrt[3]{5}} x^2\,\mathrm{e}^{5\,x^3}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{5\,x^3}}{15}\Big|_0^{\sqrt[3]{5}} = \frac{\mathrm{e}^{25} - 1}{15}\,.$$

c) Ricordiamo che se $P_2(x)$ è un polinomio di grado 2, allora

$$\int P_2(x)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q_2(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

con $Q_2(x)$ un polinomio di grado 2 tale che $Q_2(x) + Q_2'(x) = P_2(x)$. Pertanto, se $Q_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, deve essere

$$Q_2(x) + Q_2'(x) = a\,x^2 + (2a + b)\,x + b + c = 4x^2 + 15x + 7\,.$$

Da questa relazione si ricava $a = 4$, $2a + b = 15$ e $b + c = 7$; risolvendo, si trova $a = 4$, $b = 7$ e $c = 0$. Pertanto,

$$\int (4x^2 + 15x + 7)\,\mathrm{e}^x\,dx = (4x^2 + 7x)\,\mathrm{e}^x + c\,,$$

da cui segue che

$$\int_{-\frac{7}{4}}^{0} (4x^2 + 15x + 7)\,\mathrm{e}^x\,dx = (4x^2 + 7x)\,\mathrm{e}^x\Big|_{-\frac{7}{4}}^{0} = 0\,.$$

d) Si ha, con la sostituzione $y = 3\,x$, da cui $dx = \frac{dy}{3}$,

$$\int \frac{dx}{1 + 9\,x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{\arctan(y)}{3} + c = \frac{\arctan(3\,x)}{3} + c\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + 9\,x^2} = \frac{\arctan(3\,x)}{3}\Big|_0^1 = \frac{\arctan(3)}{3}\,.$$

6) Sia

$$F(t) = \int_0^t [5\,\mathrm{e}^{x^2} + 8]\,dx\,.$$

a) Dimostrare che $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
b) Calcolare $F(0)$ e $F'(\sqrt{7})$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è una funzione crescente e dispari.
d) Dimostrare che

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,.$$

Soluzione:
a) La funzione $f(x) = 5\,\mathrm{e}^{x^2} + 8$ è continua su $\mathbb{R}$. Pertanto, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$ e si ha

$$F'(t) = f(t) = 5\,\mathrm{e}^{t^2} + 8\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

b) Si ha

$$F(0) = \int_0^0 [5\,\mathrm{e}^{x^2} + 8]\,dx = 0\,,$$

e, per la (1),

$$F'(\sqrt{7}) = f(\sqrt{7}) = 5\,\mathrm{e}^7 + 8\,.$$

c) Dato che per la (1) la derivata di $F(t)$ è positiva, la funzione $F(t)$ è crescente. Inoltre, dato che la funzione $f(x)$ è pari, la funzione $F(t)$ è dispari. Infatti, con la sostituzione $x = -y$, da cui $dx = -dy$,

$$F(-t) = \int_0^{-t} [5\,\mathrm{e}^{x^2} + 8]\,dx = -\int_0^t [5\,\mathrm{e}^{(-y)^2} + 8]\,dy = -\int_0^t [5\,\mathrm{e}^{y^2} + 8]\,dy = -F(t)\,.$$

d) Si ha, se $t \geq 0$, e dato che $f(x) \geq 8$,

$$F(t) = \int_0^t [5\,\mathrm{e}^{x^2} + 8]\,dx \geq \int_0^t 8\,dx = 8\,t\,,$$

da cui segue che (si noti che il limite di $F(t)$ esiste perché $F(t)$ è crescente)

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) \geq \lim_{t\to+\infty} 8\,t = +\infty\,.$$