Calcolo Integrale

Serie Numeriche

Le serie numeriche sono successioni costruite a partire da altre successioni. Il valore n-esimo è la somma di tutti i valori precedenti della successione.

$$a_n = n^2 \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \forall n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3....\}$$

S_n è una serie a partire dalla successione a_n.

alcuni esempi

$$a_0 = 0 \to S_n = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}} a_k = 0$$

$$a_1 = 1 \to S_n = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}} a_k = n + 1$$

$$a_2 = 0 \to S_n = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}} a_k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$a_k = \frac{1}{k+1} \to S_n = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}} a_k = \frac{1}{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n+1} \simeq log_2 n = +\infty$

Convergenza, Divergenza e Non Convergenza

Se le somme parziali della successione S_n danno come risultato un valore finito, la successione si dice **convergente** :

$$\text{per } S_n = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty} a_k \text{ allora } \lim_{n \to \infty} \sum_{\mathrm{k=0}}^{n} a_k = l$$

Possiamo anche scrivere :

$$S_n = \sum_{\mathrm{k=0}}^{n} a_k < \pm\infty$$

Diversamente, se il risultato della successione vale $\pm\infty$, la successione si dice **divergente** :

$$\text{per } S_n = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty} a_k \text{ allora } \lim_{n \to \infty} \sum_{\mathrm{k=0}}^{n} a_k = \pm\infty$$

possiamo anche scrivere :

$$S_n = \sum_{\mathrm{k=0}}^{n} a_k = \pm\infty$$

Infine, se il risultato della successione non è un valore finito, ma non vale nemmeno $\pm\infty$, la successione si dice **non convergente** o **irregolare** :

$$\text{per } S_n = \sum_{\text{k=0}}^{\infty} a_k \text{ allora } \lim_{n\to\infty} \sum_{\text{k=0}}^{n} a_k \neq \pm\infty \neq l$$

Un tipico esempio di funzione non convergente è :

$$S_n = \sum_{\text{k=0}}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{se n è pari} \\ 0 & \text{se n è dispari} \end{cases}$$

è quindi ovvio che il valore della funzione sia sempre, alternandosi tra 1 e 0.

Serie geometriche

Una **serie geometrica** non è altro che una serie in cui il valore k della sommatoria è posto come esponente di un numero reale :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Dimostrazione

$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \to q * S_n = q + q^2 + q^3 ... + q^n + q^{n+1} - 1 \to q^{n+1} - 1 \to S_n(q - 1)$

Quindi $S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

Vediamo adesso che valori assume la sommatoria in base ai valori che assume la variabile reale q

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{se } q = 0 \\ n+1 & \text{se } q = 1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{se } q \neq 0, 1 \end{cases}$$

Vediamo adesso che valore assume il limite di q^k per k che tende ad infinito :

$$\lim_{k\to\infty} q^k = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ \infty & \text{se } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Vediamo ora che valore assume la sommatoria se $n \to +\infty$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} 0 & \text{se } q = 0 \\ \frac{1}{1-q} & \text{se } -1 < q < 1 \\ \infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q < -1 \end{cases}$$

Serie armoniche

Le **serie armoniche** sono semplicemente sere in cui il valore k della sommatoria è posto come denominatore della successione ed è elevato ad un numero reale

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} < \infty \to a > 1$$

Se a è maggiore di 1, la sommatoria, nonostante continui all'infinito, tenderà comunque ad un valore finito, se invece a è compreso fra 0 ed 1 la sommatoria divergerà.

Esempio:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{cos^2 k}{k^2} \leq \frac{1}{k^2} \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{cos^2 k}{k^2} < \infty$$

Teoremi

Vediamo alcuni teoremi fondamentali quando si parla di sommatorie :

Teorema condizione necessaria

Se $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k < \infty$, quindi tende ad un valore finito l, allora a_k tende a 0.

Dimostrazione:

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n \implies l_1 - l_2 = 0 \text{ quindi } a_n \to 0$$

Teorema serie a termini positivi

Vediamo alcuni teoremi importanti quando si parla di serie per le quali il valore di a_k è sempre maggiore o uguale a 0.

Se $a_k \geq 0 \ \forall k \Rightarrow S_n = \begin{cases} \text{converge} \\ \text{diverge a } \infty \end{cases}$

Se $a_k \geq 0 \ \forall k$ e $a_k \nrightarrow 0$, quindi non tende a 0, allora S_n **non è convergente.**

Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty \implies a_k \to 0$, quindi se la serie è convergente, sicuramente a_k tende a 0.

Dimostrazione:

$$\forall n \to S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}$$

Teorema del confronto

Abbiamo due successioni a_k e b_k tali che :

Se $0 < a_k < b_k$ allora:

- Se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$
- Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \implies \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$

Teorema del confronto asintotico

Sempre avendo le due successioni a_k e b_k, Se $0 < a_k, 0 < b_k$, e $\lim_{n\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l$ allora:

- Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty \iff \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$

- Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \iff \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$

Se le funzioni “crescono” allo stesso modo convergono/divergono allo stesso modo e possono essere approssimate alla stessa funzione.

Criterio del rapporto e della radice

Il **criterio del rapporto** ed il **criterio della radice** sono due diversi criteri che giungono alla stessa conclusione, hanno quindi la stessa tesi, sono definiti come :

Criterio del rapporto

Sia $a_k \geq 0$, ed abbiamo $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L$

Criterio della radice

Sia $a_k \geq 0$, ed abbiamo $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L$

Tesi

Allora $\begin{cases} \text{Se } 0 \leq L < 1 \text{ la serie converge} \\ \text{Se } L > 1 \text{ la serie diverge} \end{cases}$

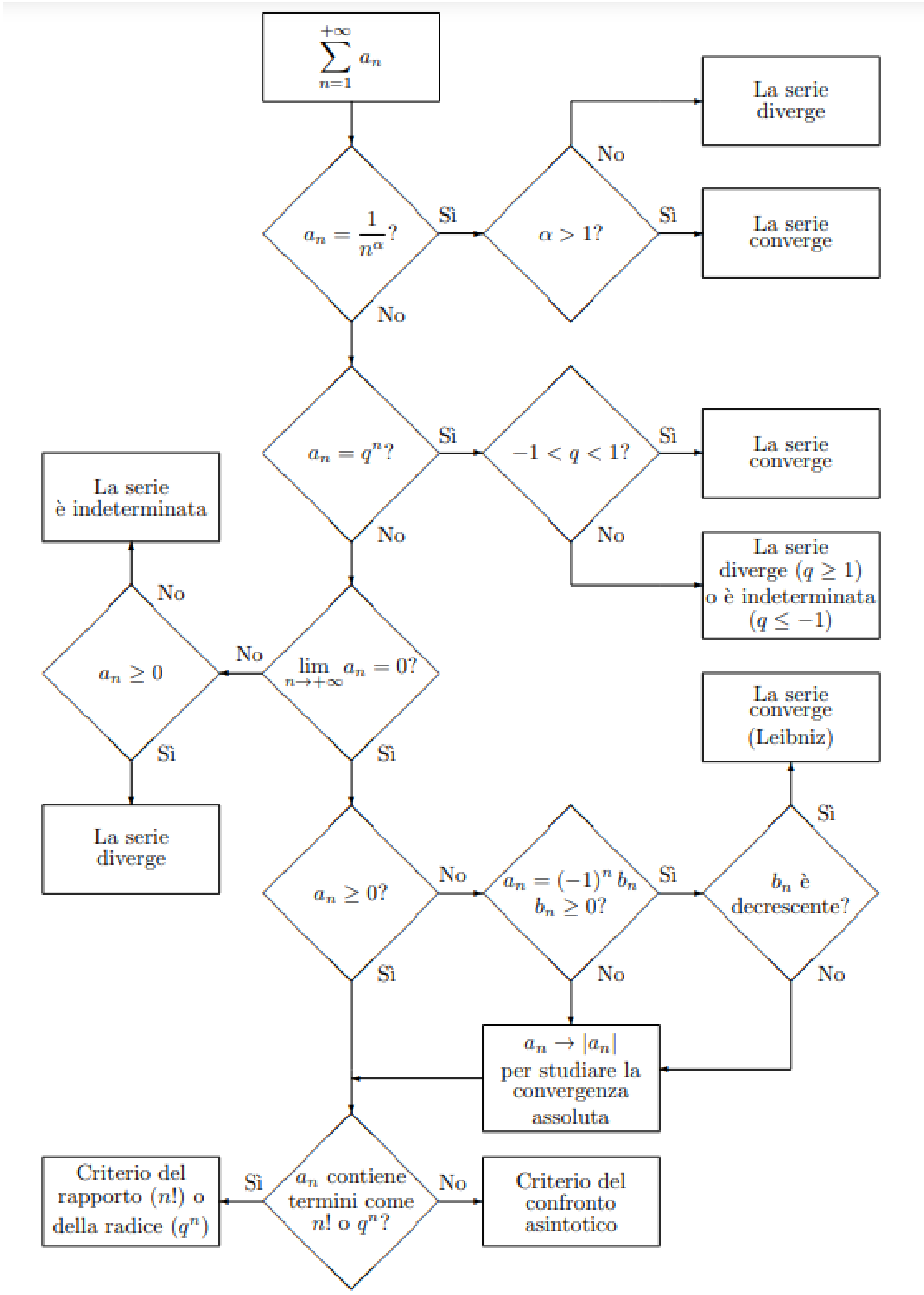
Formula di Sterling

La formula di Sterling non fa altro che descrivere quanto velocemente cresce $k!$ quando $k \to \infty$, ed essa vale :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k!}{k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}} = 1 < +\infty$$

Diagramma di flusso risoluzione di una serie

Qui sotto è a disposizione uno schema sotto-forma di diagramma di flusso da seguire per la risoluzione di una serie



Criterio di Leibniz

Se dovessimo avere una serie in cui è presente, ma non da solo $(-1)^k$, nonostante il segno non sia costante, tramite il **criterio di Leibniz** possiamo decretare se essa è convergente o meno.

Abbiamo quindi una serie $S_n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k$, e abbiamo tre condizioni :

- $b_k \geq 0$ (è maggiore o uguale a 0)
- $b_k \searrow$ (è decrescente)
- $b_k \to 0$ (tende a zero)

Se tutte e 3 le condizioni sono soddisfatte, possiamo dire con certezza che la successione S_n è convergente.

Teorema di convergenza assoluta

Vediamo prima due definizioni:

Converge assolutamente

Si dice che una serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge assolutamente se $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty$

Diverge assolutamente

Si dice che una serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge assolutamente se $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \pm\infty$

possiamo quindi dire che se una serie converge assolutamente, allora converge a prescindere dal suo segno (non si può dire la stessa cosa per la divergenza).

Serie di Taylor

Il polinomio di Taylor

Se ho una funzione $f(x)$ che va da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, derivabile tutte le volte che voglio, fisso un punto n in $\mathbb{N}$ tale che il polinomio di grado n, **approssima al meglio la funzione $f(x)$**.

Quindi definiamo polinomio di Taylor il polinomio $T_{n,x_0} f(x)$, è di grado $\leq n$ e vale che :

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{n,x_0} f(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$ quindi il limite esiste e vale 0.

Si può anche riscrivere come $f(x_0) = T_{n,x_0} f(x) + o((x - x_0)^n)$, quindi la funzione nel punto x_0 equivale al suo polinomio di Taylor, più un resto, esso è **l'errore di approssimazione**, quel polinomio di grado $> n$ che manca al polinomio di Taylor per far si che sia uguale alla funzione, ed in questo caso è rappresentato come resto di Peano, utilizzando l'o-piccolo :

$o(x^{\alpha})$ (si legge “o piccolo di x^{α}) è un qualsiasi valore tale che $\lim_{x \to 0} \frac{o(x^{\alpha})}{x^{\alpha}} = 0$,

in linguaggio naturale, ciò vuol dire che $o(x^{\alpha})$, per x che tende ad un numero, cresce/decresce più rapidamente rispetto ad x^{α}, quindi rappresenta qualsiasi valore di grado superiore a ciò che è dato come argomento dell’o-piccolo.

Tornando al polinomio di Taylor, di esso possiamo dire che **esiste ed è unico**, e può essere scritto in forma esplicita come :

$$T_{n,x_0} f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Resto di Lagrange

Esiste un altro modo per rappresentare il resto dovuto all’errore di approssimazione senza l’utilizzo dell’o-piccolo, ed esso è detto resto di Lagrange:

$$f(x_0) = T_{n,x_0} f(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Vediamo adesso i polinomi di Taylor centrati in zero per le funzioni trigonometriche.

coseno

$$T_{n,0}\ cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k * x^{2k}}{(2k)!}$$

quindi :

$$cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k * x^{2k}}{(2k)!} + \frac{\pm sin(\xi) x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

Il valore a destra del più è il resto di Lagrange, e tende a 0.

seno

$$T_{n,0}\ sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k * x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

quindi :

$$sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k * x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{\pm cos(\xi) x^{2n+1}}{(2n+2)}$$

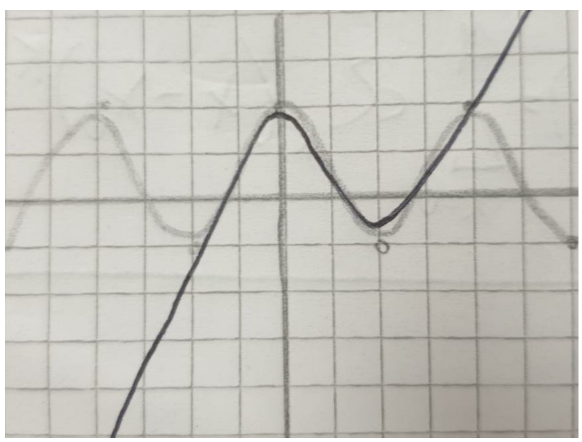
Il valore a destra del più è il resto di Lagrange, e tende a 0.

Quando il resto del polinomio di Taylor tende a 0, la funzione converge, ed essa può essere riscritta sotto-forma di **serie di Taylor** :

$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ dove a_k è il coefficiente e moltiplica x di grado k.

Esempio :

$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k$ Quindi se $x = 4,\ e^4 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} 4^k$



Si noti come graficamente, più la nostra sommatoria tende verso infinito, più il polinomio di Taylor resterà "incollato" alla funzione.

Calcolo derivate con principio di sostituzione

Se una determinata funzione può essere riscritta sotto-forma di serie di Taylor, la derivata $k - esima$ può essere riscritta come $a_k k!$ dove a_k è il coefficiente con termine di grado k.

> Se $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \implies f^{(k)}(0) = a_k k!$

Esempio :

Abbiamo la funzione $f(x) = x^3 sin(x^3)$, vogliamo trovare $f^6(0), f^{12}(0), f^{18}(0)$, quindi trovarne la derivata sesta, dodicesima e diciottesima, partiamo quindi con lo sviluppo del polinomio di Taylor (ci avvaliamo dello sviluppo noto del seno).

$x^3 sin(x^3) = \frac{1}{1!}x^6 - \frac{1}{3!}x^{12} + \frac{1}{5!}x^{18} - ...$

Adesso applichiamo la formula $f^{(k)}(0) = a_k k!$:

$f^{(6)}(0) = \frac{1}{1!}6!$

$f^{(12)}(0) = \frac{1}{3!}12!$

$f^{(18)}(0) = \frac{1}{5!}18!$

Teorema somma di derivate

La derivata di una funzione è uguale alla somma delle sue derivate.

Esempio :

Sappiamo che :

$$log(1 + x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

anche :

$$[log(1 + x)]' = [\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k]'$$

quindi :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} k * a_k x^{k-1}$$

Serie di Taylor notevoli

Sono centrate in 0.

$T_{n,0}e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^0)^{(k)}}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k \ \forall x \in \mathbb{R}$
$T_{n,0}\ cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \ \forall x \in \mathbb{R}$
$T_{n,0}\ sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \ \forall x \in \mathbb{R}$
$T_{n,0}\ f(\frac{1}{1-x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \ \forall x \in (-1,1)$
$T_{n,0}\ f(\frac{1}{1+x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k \ \forall x \in (-1,1)$
$T_{n,0}\ arctan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}2^{2k+1} \ \forall x \in (-1,1)$
$T_{n,0}\ log(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}2^{k+1} \ \forall x \in (-1,1)$

Serie di potenze

Centro e Coefficiente

Una **serie di potenze** è un oggetto determinato da due parametri :

- a_n - una successione di numeri reali, detta coefficiente
- x_0 - un numero reale detto centro della serie

Si presente così :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$$

Un tipico esempio di serie di potenze che abbiamo già trattato sono le serie di Taylor :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \ \text{ dove } \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} & \text{rappresenta il coefficiente} \\ (x-x_0)^k & \text{rappresenta il centro} \end{cases}$$

Vediamo adesso alcuni esempi di serie di potenze :

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ dove } \begin{cases} a_n = \frac{1}{k!} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$e^{x-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^k}{k!} \text{ dove } \begin{cases} a_n = \frac{1}{k!} \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

Trasformare una serie in serie di potenze

Adesso vediamo però un **esempio particolare** :

$$e^{3x-5} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(3x-5)^k}{k!}$$

Notiamo che in questo caso, la parte che dovrebbe rappresentare il centro non rispetta il *template* delle serie di potenze, dato che la x alla quale sottraiamo x_0 deve essere prodotto fra se stessa ed $1. \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(1x - x_0)^k$, invece nella nostra equazione, abbiamo $(3x-5)^k$. Dobbiamo quindi trasformare tale serie in una serie di potenza con dei passaggi algebrici.

Serie di partenza : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(3x-5)^k}{k!}$

al denominatore, raccogliamo il 3 : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(3(x-\frac{5}{3}))^k}{k!}$

Infine, portiamo il 3 fuori dalle parentesi : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k(x-\frac{5}{3})^k}{k!}$

A questo punto abbiamo ottenuto una serie di potenze :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!}(x-\frac{5}{3})^k \text{ dove } \begin{cases} a_n = \frac{3^k}{k!} \\ x_0 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Da questa dimostrazione, ne ricaviamo la formula generale :

💡 $$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k(Ax+B)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k A^k(x+\frac{B}{A})^k$$

Esempio:

Abbiamo la serie : $cos(4x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k(4x)^{2k}}{(2k)!}$

Raccogliamo il 4 : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k(4)^{2k}(x)^{2k}}{(2k)!}$

A questo punto abbiamo ottenuto la serie di potenze :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k(4)^{2k}}{(2k)!}(x)^{2k}$$

Raggio di Convergenza

Una volta ottenuta una serie di potenze, la domanda da porsi è, per quali valori $x \in \mathbb{R}$ la serie risulta convergente?

per una serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ chiamiamo $E = \{x \in \mathbb{R} \text{ tale che la serie converge}\}$, quindi l'insieme/intervallo della retta reale nella quale la serie converge.

Si ricordi che $x_0 \in E$, quindi la serie di potenze **converge sempre nel centro**, e vale a_0, tutte le serie di potenze hanno un insieme E con almeno un valore x_0.

Vediamo ora cosa si intende con raggio di convergenza :

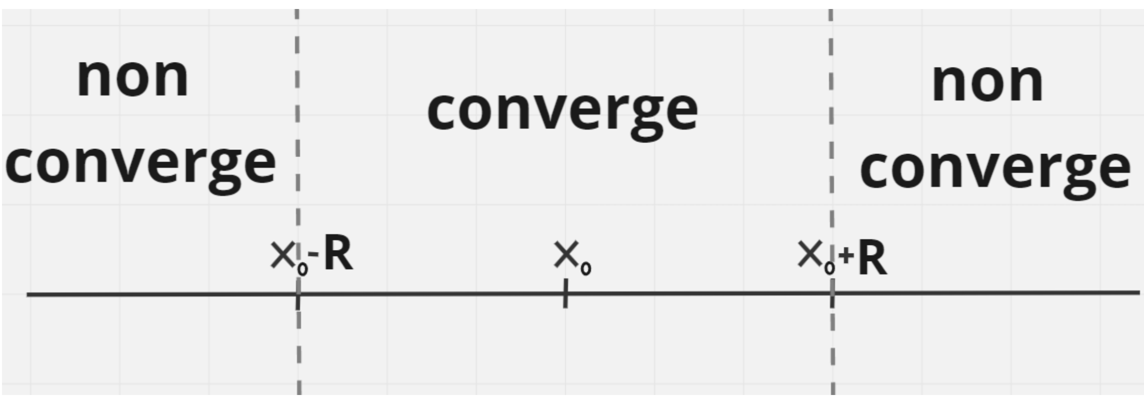
Definizione

Esiste un certo $R \in [0, +\infty]$ tale che $\begin{cases} \text{se } |x - x_0| < R \text{ la serie converge} \\ \text{se } |x - x_0| > R \text{ la serie non converge} \end{cases}$

Chiamiamo R **raggio di convergenza**, quindi esiste un intervallo $[x_0 - R, x_0 + R]$ nella quale la serie converge.

In base ai possibili valori di R, abbiamo 3 casistiche :

- $R = 0 \implies E = \{x_0\}$ Se il raggio di convergenza è uguale a 0, l'insieme E avrà un solo valore, ed esso sarà il centro x_0.
- $R = +\infty \implies E = \mathbb{R}$ Se il raggio di convergenza è infinito, la serie convergerà sempre, quindi in tutta la retta reale.
- $0 < R < +\infty \implies E = [x_0 - R, x_0 + R]$ Se R è un valore finito diverso da 0, la serie convergerà solamente se $|x - x_0| < R$. Attenzione! Non è sempre detto che i punti $x_0 - R$ e $x_0 + R$ siano inclusi in E.



Abbiamo detto che non sappiamo precisamente se la serie nei punti $x_0 - R$ e $x_0 + R$ converga, quindi bisogna studiare la serie in questi specifici punti :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k \text{ diventa } \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k R^k \text{ per } x_0 + R \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k R^k \text{ per } x_0 - R \end{cases}$$

Calcolo del raggio di convergenza

Adesso data una serie vogliamo saper calcolare R, bastano pochi passaggi :

Abbiamo la serie di potenze $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - x_0)^k$ e ci importa trovare il valore di L :

Si può usare il **criterio del rapporto** o il **criterio della radice** :

$$L = \lim_{k \to +\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Una volta trovato L, abbiamo 3 casistiche :

- Se $L = 0$, allora $R = +\infty$
- Se $L = +\infty$, allora $R = 0$
- Se $0 < L < +\infty$, allora $R = \frac{1}{L}$

In un certo senso possiamo dire che $R = \frac{1}{L}$.

Esercizi esplicativi

Vediamo adesso 2 esercizi per capire come trovare E per una serie di potenze.

Esercizio 1

Abbiamo la serie :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x-5)^k}{k+1} \quad \text{Raccolgo il } 2^k \text{ ed ottengo } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k+1}(x - \frac{5}{2})^k$$

Quindi $a_k = \frac{2^k}{k+1}$ e $x_0 = \frac{5}{2}$

Adesso troviamo L con il criterio della radice :

$$L = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{\frac{2^k}{k+1}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{2}{\sqrt[k]{k+1}} = 2$$

Quindi $R = \frac{1}{2}$ e la serie converge solo se $|x - x_0| < \frac{1}{2}$.

Bisogna adesso controllare se la serie converge nei punti $x_0 - R = 2$ ed $x_0 + R = 3$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2x-5)^k}{k+1} \text{ diventa } \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(6-5)^k}{k+1} \text{ per } x_0+R=3 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(4-5)^k}{k+1} \text{ per } x_0-R=2 \end{cases}$$

Studiamo la convergenza di queste serie :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(6-5)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1^k}{k+1} \text{ diverge} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(4-5)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1} \text{ converge per Leibnitz} \end{cases}$$

Infine come risultato abbiamo $E=[2,3)$

Esercizio 2

Abbiamo la serie :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(y^2-1)^{2k}}{k+1}$! non è una serie di potenze, quindi chiamo $x=(y^2-1)^2$ e riscrivo la serie :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k+1}$ Adesso che abbiamo una serie di potenze possiamo studiarla :

$a_k=\frac{1}{k+1}$ e $x_0=0$

Troviamo L con il criterio del rapporto :

$$L=\lim_{k\to+\infty}\frac{a_{k+1}}{a_l}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{1}{k+2}}{\frac{1}{k+1}}=1 \text{ quindi } R=1.$$

Bisogna adesso controllare se la serie converge nei punti $x_0-R=-1$ ed $x_0+R=1$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k+1} \text{ diventa } \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k+1} \text{ per } x_0+R=1 \text{ diverge} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1} \text{ per } x_0-R=-1 \text{ converge} \end{cases}$$

Per la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1}$ abbiamo $E_x = [-1, 1)$, converge per $-1 \leq x = (y^2-1)^2 =< 1$

Troviamo allora la convergenza della serie iniziale $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(y^2-1)^{2k}}{k+1}$ risolvendo la disequazione:

$$-1 \leq (y^2-1)^2 =< 1 \begin{cases} -1 \leq (y^2-1)^2 \text{ sempre vero} \\ (y^2-1)^2 < 1 \implies y^2 - 1 < 1 \implies y < \sqrt{2} \end{cases}$$

Infine come risultato abbiamo $E = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \backslash \{0\}$

Teorema di infinità derivabilità

❗ Il nome di questo teorema non è stato specificato a lezione, è stato scritto quindi "Teorema di infinità derivabilità" in maniera del tutto **non ufficiale**.

Abbiamo una funzione $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$ derivabile infinite volte in E. Quindi :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$$

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) a_k (x-x_0)^{k-2}$$

$$f'''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)(k-2) a_k (x-x_0)^{k-3}$$

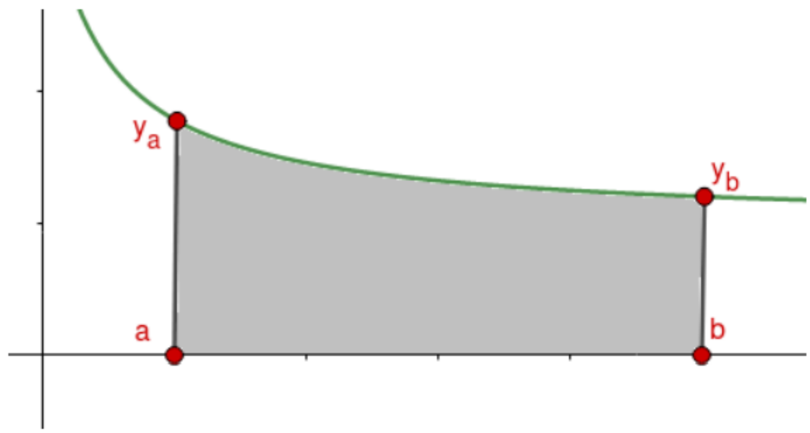
Andando avanti è chiara la formula generale :

💡 $f^{(k)}(x_0) = k! a_k$

Integrali

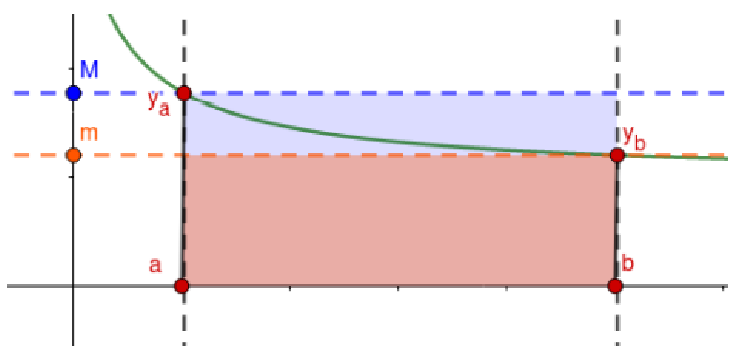
Definizione

Immaginiamo di voler calcolare l'area della figura sottostante ad una certa funzione $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$



Non essendo però tale figura un poligono, risulta difficile calcolarne semplicemente l'area dato che non possiamo trovare una formula precisa, dobbiamo quindi scomporre l'area in diversi piccoli poligoni in modo da **approssimare** il calcolo dell'area rendendolo estremamente vicino a quello originale.

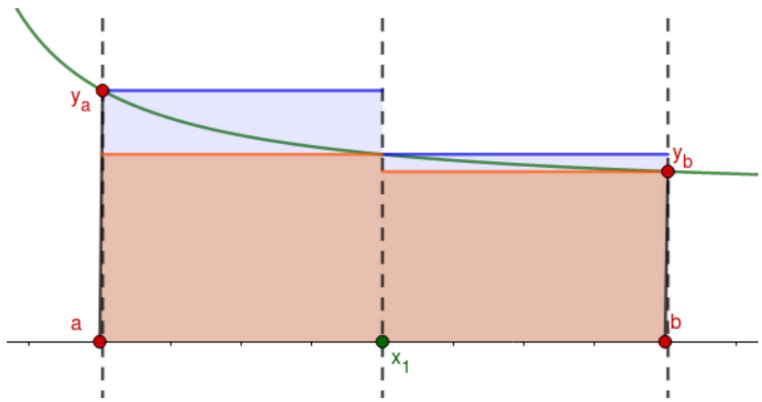
Immaginiamo una retta $r(x) = M$, dove M è uguale al'estremo superiore della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$. Dopodichè pensiamo ad una retta $g(x) = m$, dove m è uguale al'estremo inferiore della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$. Troviamo quindi due rettangoli, uno con base $b - a$ ed altezza M (quindi dall'area di $(b - a) \cdot M$) , ed uno con base $b - a$ ed altezza m (quindi dall'area di $(b - a) \cdot m$).



Se l'area originale che vogliamo trovare è A, possiamo dire con certezza che :

$$m \cdot (b - a) \leq A \leq M \cdot (b - a)$$

Notiamo quindi che la nostra area è sicuramente più piccola del rettangolo con altezza M, e sicuramente più grande del rettangolo con altezza m. Il calcolo dell'area è però ancora troppo impreciso, possiamo quindi **suddividere il problema in due figure** , raddoppiando il numero di rettangoli.



Adesso abbiamo un valore M ed un valore m per ognuna delle due figure, definiti negli intervalli $[a, x_1]$ e $[x_1, b]$, dove x_1 corrisponde al punto medio tra a e b. abbiamo adesso 5 variabili :

- $x_1 = \frac{b-a}{2}$ - Il punto medio fra a e b
- M_0 - L'estremo superiore di $f(x)$ nell'intervallo $[a, x_1]$
- m_0 - L'estremo inferiore di $f(x)$ nell'intervallo $[a, x_1]$
- M_1 - L'estremo superiore di $f(x)$ nell'intervallo $[x_1, b]$
- m_1 - L'estremo inferiore di $f(x)$ nell'intervallo $[x_1, b]$

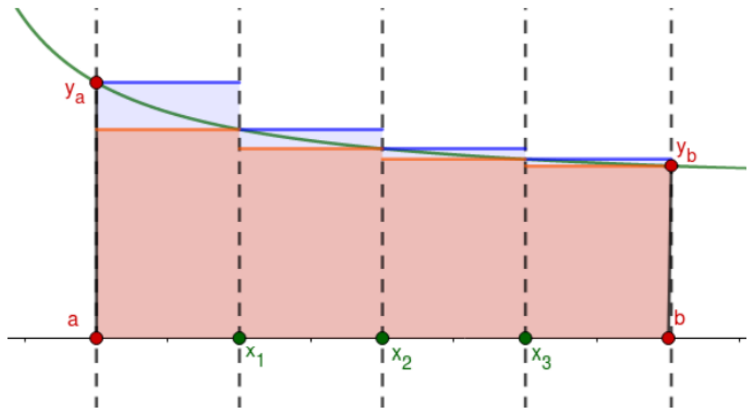
A questo punto, abbiamo una più precisa stima di A, cioè :

$$m_0 \cdot \frac{(b-a)}{2} + m_1 \cdot \frac{(b-a)}{2} \leq A \leq M_0 \cdot \frac{(b-a)}{2} + M_1 \cdot \frac{(b-a)}{2}$$

si può riscrivere come :

$$(m_0 + m_1) \cdot \frac{(b-a)}{2} \le A \le (M_0 + M_1) \cdot \frac{(b-a)}{2}$$

l’approssimazione risulta più accurata, ma possiamo **dividere ancora** una volta i rettangoli :



A questo punto, è ovvio che :

$$(m_0 + m_1 + m_2 + m_3) \cdot \frac{(b-a)}{4} \le A \le (M_0 + M_1 + M_2 + M_3) \cdot \frac{(b-a)}{4}$$

Che si può riscrivere come :

$$\frac{b-a}{2^2} \sum_{k=0}^{2^2-1} m_k \le A \le \frac{b-a}{2^2} \sum_{k=0}^{2^2-1} M_k$$

Ricordando che m_k e M_k corrispondono al **minimo ed il massimo dell’intervallo k-esimo**, troviamo la seguente **forma generalizzata** :

$$\frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} min_{[x_k, x_{k+1}]} \le A \le \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} max_{[x_k, x_{k+1}]}$$

Chiamiamo il termine a sinistra $\underline{S_n}$, e corrisponde alla somma dei rettangoli minori, e chiamiamo il termine a destra $\overline{S_n}$, che corrisponde alla somma dei rettangoli maggiori ,n corrisponde al numero di suddivisioni e ogni x_k corrisponde a $a + k \cdot \frac{b-a}{2}$

A questo punto è ovvio che, **all’aumentare di** n, si suddivide la figura in sempre più rettangoli, sempre più piccoli, **approssimando sempre più precisamente** l’area A della figura sottostante ad $f(x)$, dunque, se n dovesse tendere ad infinito, arriveremo ad un punto in cui l'area sarà uguale ad $\underline{S_n}$, che è a sua volta uguale ad $\overline{S_n}$. Dunque, se ad una funzione è applicabile tale concetto, viene detta **integrabile secondo Riemann**.

Integrazione secondo Riemann

💡 Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si dice che f è **integrabile secondo Riemann** se dati:

$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} min_{[x_k, x_{k+1}]} = \underline{S}$ e $\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} max_{[x_k, x_{k+1}]} = \overline{S_n}$

Si verifica che $\overline{S} = \underline{S}$, allora **l'integrale definito** nell'intervallo $[a, b]$ di $f(x)$ viene denominato con :

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Esempio

Si calcoli l'integrale definito in $[0, 1]$ di $f(x) = x$

$$\int_0^1 x\, dx$$

Essendo la funzione monotona crescente, il minimo dell'intervallo è sempre il valore assunto nell'estremo sinistro, ossia $f(x_k)$, ed il massimo corrisponde al suo estremo destro, ossia $f(x_{k+1})$.

$$min_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_k) = a + k \cdot \frac{b-a}{2^n} = \frac{k}{2^n}$$

$$max_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_{k+1}) = a + (k+1) \cdot \frac{b-a}{2^n} = \frac{k+1}{2^n}$$

Calcoliamo i valori di $\overline{S}$ e $\underline{S}$.

💡 Si ricordi che $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

$$\underline{S} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} min_{[x_k, x_{k+1}]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-0}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} k$$

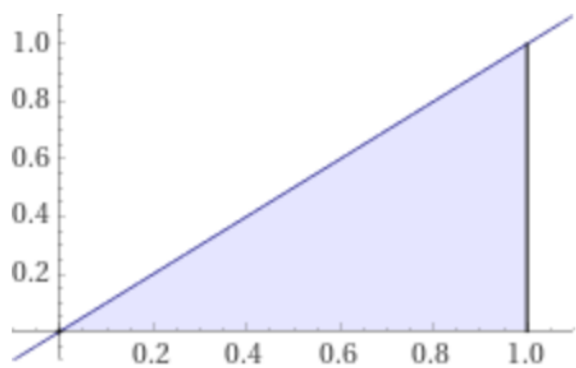
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2^n-1)\cdot 2^n}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}-2^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{S} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} max_{[x_k, x_{k+1}]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-0}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k+1}{2^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} k+1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} k+1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2^n+1)\cdot 2^n}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}+2^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}$$

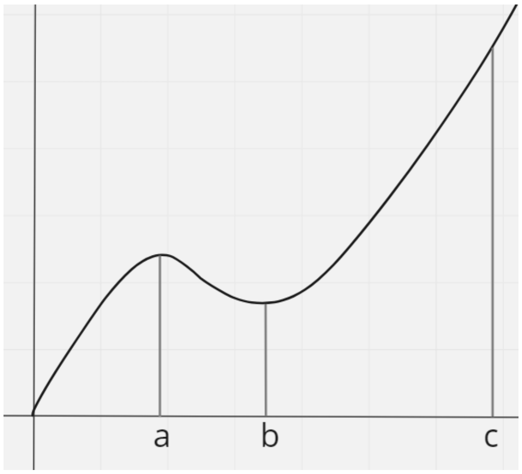
Concludiamo quindi che :

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$



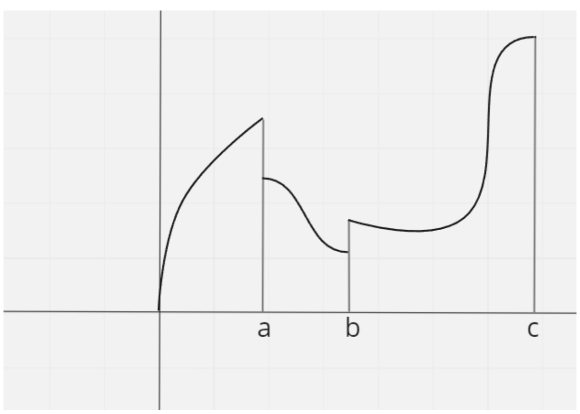
Una funzione per essere **integrabile** deve essere **limitata**, soddisfatta tale condizione, è sicuramente integrabile se monotona, o suddivisibile in in intervalli monotoni.

Teoremi di integrabilità



$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x\ )dx + \int_b^c f(x)\, dx$$

La **continuità** è quindi **fondamentale** per far si che una funzione sia integrabile, come per la monotonia, una funzione discontinua, è comunque integrabile se suddivisibile in intervalli continui.



Questa funzione è integrabile

Linearità dell'integrale

Se abbiamo due funzioni f e g, entrambe integrabili in $\mathbb{R}$, vale il seguente **teorema** :

💡 Se $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$ è integrabile in $[a, b]$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]\ dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\ dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\ dx$$

Inoltre se f e g sono integrabili, è integrabile anche $f \cdot g$, ma tale prodotto non è uguale al prodotto degli integrali. $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)]\ dx \neq \int_a^b f(x)\ dx \cdot \int_a^b g(x)\ dx$

Integrale assoluto

Vale il seguente teorema :

💡 $|\int_a^b f(x)\ dx| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$

Monotonia dell'integrale

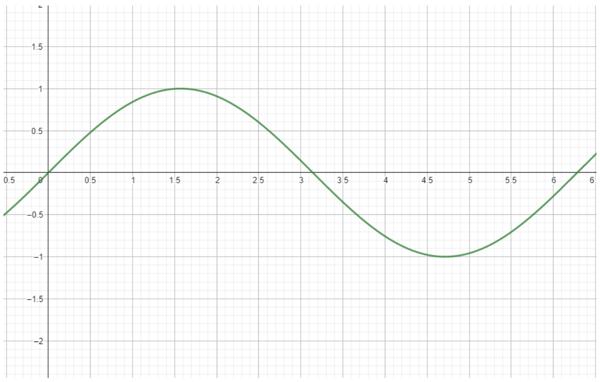
Vale il seguente teorema :

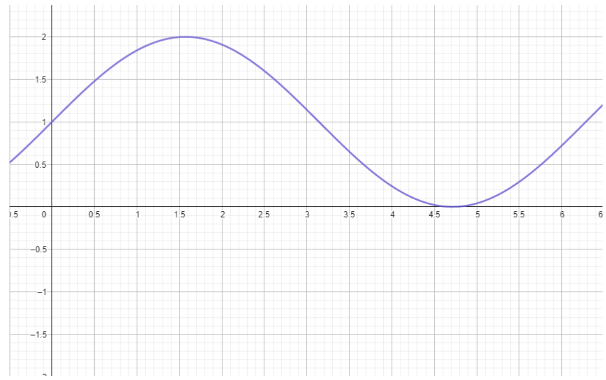
💡 Se $f \leq g$, allora $\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx|$

Integrale di una funzione negativa

Fino ad ora abbiamo visto il calcolo dell'area al di sotto di una funzione, dando per scontato che la funzione si trovi sempre sopra l'asse delle ascisse, ma come dovremmo fare se fosse richiesto il calcolo dell'integrale di una funzione che non è sempre positiva?

$f(x)$ $\qquad\qquad$ $f(x) + q$

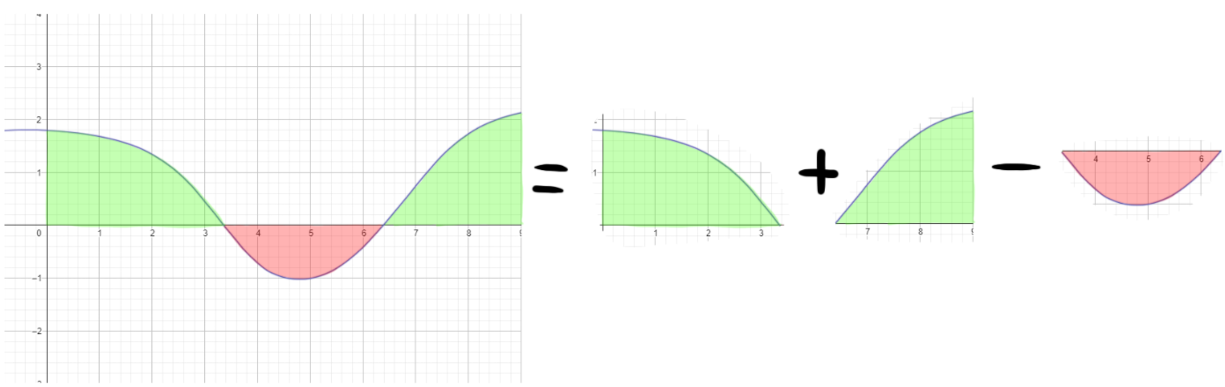




A sinistra abbiamo la nostra funzione $f(x)$ della quale vogliamo calcolarne l'integrale, notiamo che per un certo intervallo la funzione è negativa, poniamo q, il valore necessario da sommare alla funzione, per far si che traslandola, sia sempre positiva. L'integrale di $f(x)$ vale :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [f(x)+q]\,dx - q\cdot(b-a)$$

È come se stessimo calcolando l'area della funzione se fosse positiva, per poi sottrarne la parte che dovrebbe essere sotto l'asse delle ascisse, in linguaggio più semplice, l'integrale di una funzione, equivale alla somma di tutte le aree di intervalli positivi, alla quale viene sottratta la somma delle aree negli intervalli negativi.

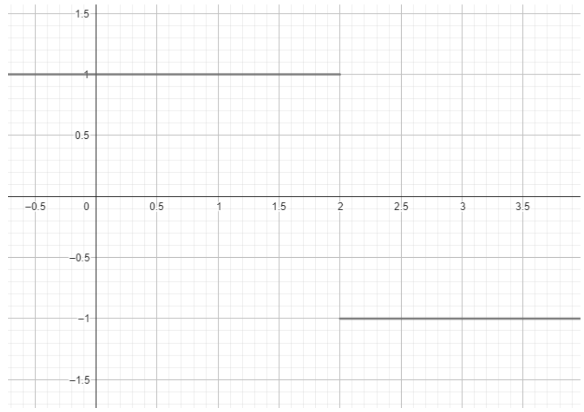


Inoltre, vale il seguente teorema :

> 💡 $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx \quad \text{con} \quad a<b<c$$

Esempio:

Abbiamo la seguente funzione definita a tratti : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < 2 \\ -1 & \text{if } x \geq 2 \end{cases}$



Vogliamo calcolarne l'area nell'intervallo $[0, 3]$. Quindi $\int_0^3 f(x)\,dx$.

Sappiamo che la funzione è positiva nell'intervallo $[0, 2)$, e negativa nell'intervallo $[2, 3]$.

Quindi possiamo dire che $\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx$

Dato che è una funzione costante, l'integrale vale $f(x) \cdot (b - a)$, quindi :

$$\int_0^3 f(x)\,dx = 1 \cdot (2 - 0) - 1 \cdot (3 - 2) = 2 - 1 = 1$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Fino ad ora abbiamo visto cos'è un integrale e come viene stimato il suo valore geometricamente, ma nello specifico come si calcola l'integrale di una funzione? Per questo, esiste un importante teorema.

💡 Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia il suo integrale :

$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ con $t \in [a, b]$, allora vale che :

$F'(x) = f(t)\ \forall t \in [a, b]$

Il linguaggio naturale, l'integrale è **l'operazione inversa della derivata**, ossia la derivata di un integrale, è la funzione stessa dalla quale è stata calcolata quell'area.

Per calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$, bisogna trovare quella funzione F tale che :

$$F : \begin{cases} F'(x) = f(x)\ \forall x \\ F(a) = 0 \end{cases} \implies \int_a^b f(x)\,dx = F(b)$$

L'integrale di $f(x)$ è $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$.

Definizione di primitiva

💡 Una funzione $G(x)$ tale che $G'(x) = f(x)$, si dice una **primitiva** di $f(x)$.
Tutte le primitive di $f(x)$ sono della **forma** : $H(x) = G(x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$, dove c rappresenta una **qualsiasi costante** reale.

$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$ dove G è una qualsiasi primitiva di f.

Esempio :

Si calcoli l'integrale di $f(x) = 2x$ nell'intervallo $[2, 5]$.

$$\int_2^5 2x\,dx$$

Sappiamo che la derivata di $x^2 + c$ con $c \in \mathbb{R}$, è proprio $2x$, quindi $F(x) = x^2$ è una **primitiva** di $2x$. Quindi :

$$\int_2^5 2x\,dx = F(5) - F(2) = 25 - 4 = 21$$

Tabella integrali elementali

Ci sono alcune funzioni elementali della quale è noto il valore dell'integrale, basta eseguire l'operazione inversa della derivata :

Derivate

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$\log(x)$	$\frac{1}{x}$
$arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Integrali

f	$\int f$
x^α	$\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1}$
e^x	e^x
$cos(x)$	$sin(x)$
$sin(x)$	$-cos(x)$
$\frac{1}{x}$	$\log(x)$ se $x > 0$
$\frac{1}{x}$	$\log(\lvert x\rvert)$ se $x \neq 0$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctan(x)$
e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx}$
$cos(kx)$	$\frac{sin(kx)}{k}$
$sin(kx)$	$-\frac{cos(kx)}{k}$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln(\lvert f(x)\rvert)$
$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$	$arctan(f(x))$

$$\int [e^{\alpha x} cos(\beta x)] = \frac{e^{\alpha x} \cdot (\alpha cos(\beta x) + \beta sin(\beta x))}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\int [x^n \cdot \log(x)] = \frac{x^{n+1}}{n+1} \log(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

Esempio di risoluzione

$$\int_2^4 [cos(x) + x^3]dx = \int_2^4 cos(x)dx = \int_2^4 x^3 dx = [sin(4) - sin(2)] + [\frac{4^4}{4} + \frac{2^4}{4}]$$

$$\int_{-6}^{-3} \frac{1}{x}dx = \log(|-3|) - \log(|-6|) = \log(3) - \log(6) = \log(\frac{3}{6}) = \log(\frac{1}{2})$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = arctan(1) - arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

Integrali non elementali

Sappiamo come si calcola l'integrale di una funzione elementale, ma adesso è importante sapere anche come si calcola l'integrale di una funzione composta. Prendiamo una funzione :

$$\text{per } f(x) = e^{3x} \text{ calcoliamo } \int_0^1 e^{3x}dx \text{ troviamo quindi } G\ t.c.\ G'(x) = e^{3x}$$

Ricordando la serie di Taylor, possiamo approssimare la funzione dicendo che

$e^{3x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!}$ Quindi $\int_0^1 e^{3x}dx = \int_0^1 [\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!}]dx$

Con un passaggio algebrico, possiamo separare la x dal resto della funzione, e portarla fuori dall'integrale :

$\int_0^1 [\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!}]dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3)^k}{k!} \cdot \int_0^1 x^k dx$ Una volta trovato ciò, possiamo procedere :

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3)^k}{k!} \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k \cdot x^{k+1}}{(k+1)!}$ poniamo $h = k+1 \implies \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{h-1} \cdot x^h}{h!} =$

$= -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^h}{h!} = -\frac{1}{3} \cdot (e^{3/x} - 1) \leftarrow$ risultato

Tale metodo seppur corretto, risulta troppo tedioso e lungo, per questo esiste una formula generalizzata senza dover ricorrere alla serie di potenze.

Integrazione per sostituzione

Abbiamo la seguente funzione composta $f(x) = e^{3x}$ e vogliamo calcolarne l'integrale. Se l'esponente fosse x, quindi una variabile cos' com'è, potremmo applicare la formula dell'integrale elementale, quindi, possiamo utilizzare il **metodo di sostituzione**, definendo una variabile $y = 3x$:

$$\int e^{3x}dx \text{ poniamo } y = 3x \implies \int e^y dx$$

Fatto ciò però, non possiamo calcolare l'integrale $\int e^y\, dx$ dato che è calcolato per dx.

dobbiamo quindi trovare dy. Se $y = 3x$, allora $dy = [3x]'dx \implies dx = \frac{dy}{3}$.

Ricapitolando

$$\int e^{3x}\, dx = \begin{bmatrix} y = 3x \\ dy = 3dx \\ dx = \frac{dy}{3} \end{bmatrix} = \int e^y \frac{dy}{3} = -\frac{1}{3}\int e^y\, dy = -\frac{1}{3}e^y = -\frac{1}{3}e^{3x}$$

💡 se $y = g(x) \implies dy = g'(x)dx$

Esempi di integrazione per sostituzione

Abbiamo il seguente integrale $\int cos(5x)\, dx$.

Vogliamo utilizzare l'integrale elementale : $\int cos(x) = sin(x)$

Allora poniamo $y = 5x$, quindi $dy = [5x]'dx = 5dx \implies dx = \frac{dy}{5}$ procedendo :

$$\int cos(5x)\, dx = \begin{bmatrix} y = 5x \\ dy = 5dx \\ dx = \frac{dy}{5} \end{bmatrix} = \int cos(y)\frac{dy}{5} = \frac{1}{5}\int cos(y)dy = \frac{1}{5} \cdot sin(5x)$$

Due metodi di risoluzione

Quando dobbiamo risolvere un integrale per sostituzione, possiamo procedere in due modi

$$\int_2^4 x^2 sin(x^3)\, dx$$

Metodo 1

Come prima cosa, calcoliamoci l'integrali ignorando momentaneamente l'intervallo.

Metodo 2

Calcoliamo l'integrale utilizzando il metodo di sostituzione, mettendo in conto che del cambio di variabile ne verrà condizionato anche l'intervallo.

$$\int x^2 sin(x^3)\ dx = \begin{bmatrix} y = x^3 \\ dy = 3x^2dx \\ x^2dx = \dfrac{dy}{3} \end{bmatrix}$$

Dato che $x^2dx = \dfrac{dy}{3}$, notando che x^2dx è presente nell'integrale da calcolare il procedimento risulta piuttosto semplice .

$$\int sin(y)\frac{dy}{3} = \frac{1}{3}\int sin(y)dy =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot -cos(y) = -\frac{cos(y)}{3} =$$

$$= -\frac{cos(x^3)}{3}$$

Una volta trovato il valore dell'integrale, non ci resta che calcolarlo nell'intervallo $[2, 4]$:

$$-\frac{cos(x^3)}{3}\Bigg|_2^4 = -\frac{cos(4^3)}{3} - -\frac{cos(2^3)}{3}$$

$$= -\frac{cos(64) + cos(8)}{3}$$

$$\int_2^4 x^2 sin(x^3)\ dx = \begin{bmatrix} y = x^3 \\ dy = 3x^2dx \\ x^2dx = \dfrac{dy}{3} \end{bmatrix}$$

Dato che $y = x^3$, se l'intervallo sull'asse delle x è $[2, 4]$, quello sull'asse delle y sarà $[2^3, 4^3]$ quindi $[8, 64]$.

$$\begin{bmatrix} y = x^3 \\ dy = 3x^2dx \\ x^2dx = \dfrac{dy}{3} \\ x = 2 \rightarrow y = 8 \\ x = 4 \rightarrow y = 64 \end{bmatrix} = \int_8^{64} sin(y)\frac{dy}{3}$$

Da qui, applicando l'integrale elementale :

$$-\frac{cos(64) + cos(8)}{3}$$

Integrazione per parti

Abbiamo la seguente funzione $f(x) = x \cdot e^x$ e vogliamo trovarne la primitiva per calcolarne l'integrale.

$$\int [x \cdot e^x]dx$$

Risulta chiaro che, è impossibile qui applicare il metodo di sostituzione, come procedere? Ricordando la formula della derivata di un prodotto, sappiamo che :

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Allora, per la proprietà di **linearità dell'integrale**, abbiamo :

$$\int [f(x) \cdot g(x)]' dx = \int [f'(x) \cdot g(x)] dx + \int [f(x) \cdot g'(x)] dx$$

Questo oggetto è una quantità nota, e con qualche passaggio algebrico troviamo la formula_

> 💡 $$\int [f'(x) g(x)] dx = f(x) g(x) - \int [f(x) g'(x)] dx$$

Quindi, quando bisogna calcolare l'integrale di un prodotto di funzioni, possiamo **battezzarne** una come $f(x)$ (per la quale sarà necessario **calcolarne la primitiva**), ed un altra $g(x)$ (per la quale sarà necessario **calcolarne la derivata**), in modo tale da **ottenere una nuova equazione**, con lo scopo di renderla più semplice e risolvibile.

Procediamo ora con il calcolo di $\int [x \cdot e^x] dx$, abbiamo due funzioni, x e e^x, bisogna decidere con parsimonia, quale delle due sarà $f'(x)$ e quale $g(x)$, in questo caso, è conveniente battezzare $f'(x) = e^x$, dato che è più facile calcolarne l'integrale, e non causerà un aumento di grado nell'equazione.

$\int [x \cdot e^x] dx \text{ battezziamo } \begin{bmatrix} f'(x) = e^x & \Longrightarrow & f(x) = e^x \\ g(x) = x & \Longrightarrow & g'(x) = 1 \end{bmatrix}$ da abbiamo l'identità :

$$\int [x \cdot e^x] dx = x e^x - \int [1 \cdot e^x] dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = (x-1) \cdot e^x$$

Se avessimo battezzato $f'(x)$ come x, e $g(x)$ come e^x, a questo punto, applicando la formula avremmo un equazione di questo tipo : $\frac{x^2}{2} e^x - \int [\frac{x^2}{2} e^x] dx$ è chiaro che ci saremmo solamente complicati il lavoro, e che sarebbe stato necessario riapplicare la formula di integrazione per parti, è quindi importante stabilire delle **regole di buona derivazione** :

Regole di buona derivazione

Abbiamo i 3 seguenti integrali :

$\int [x^2 \cdot e^x] dx$

Regola

Derivare **sempre** la parte polinomiale,

$$\int [x^2 \cdot cos(x)]dx$$

$$\int [x^2 \cdot sin(x)]dx$$

integrare sempre le funzioni ($e^x, cos(x), sin(x)$)

Spesso l'integrazione per parti va ripetuta più volte, solitamente, n volte per una funzione che presenta un polinomio di grado n, dato che ad ogni "passo", si abbassa di 1 il grado del polinomio, vediamo un esempio per la funzione $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$:

Esempio

Passo 1

$\int [x^2 \cdot e^{3x}]dx \text{ battezziamo } \begin{bmatrix} f'(x) = e^{3x} \implies f(x) = \frac{e^{3x}}{3} \\ g(x) = x^2 \implies g'(x) = 2x \end{bmatrix}$ otteniamo :

$\frac{e^{3x}}{3}x^2 - \int [\frac{e^{3x}}{3}2x]dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3} \cdot \int [xe^{3x}]dx$ adesso riapplichiamo la formula :

Passo 2

$\int [xe^{3x}]dx \text{ battezziamo } \begin{bmatrix} f'(x) = e^{3x} \implies f(x) = \frac{e^{3x}}{3} \\ g(x) = x \implies g'(x) = 1 \end{bmatrix}$ otteniamo :

$\frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3} \cdot [\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx] = e^{3x}[\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27}] \leftarrow$ ***Risultato***

Integrali pre calcolati

(N.B tali integrali noti saranno presenti sotto la tabella degli integrali elementari)

Esistono degli esempi noti di **integrali comuni**, che ci permettono di trovare il valore di un integrale senza dover ricorrere necessariamente all'integrazione per parti o al metodo di sostituzione, vediamo un **esempio** per alcuni di essi, si consideri $f(x) = e^x cos(x)$:

Passo 1

$\int [e^x cos(x)]dx \rightarrow \begin{bmatrix} f'(x) = e^x \implies f(x) = e^x \\ g(x) = cos(x) \implies g'(x) = -sin(x) \end{bmatrix}$ otteniamo :

$e^x cos(x) + \int [e^x sin(x)]dx$ continuo con l'integrazione per parti

Passo 2

$$\int [e^x sin(x)]dx \to \begin{bmatrix} f'(x) = e^x & \implies & f(x) = e^x \\ g(x) = sin(x) & \implies & g'(x) = cos(x) \end{bmatrix}$$ otteniamo :

$e^x cos(x) + e^x sin(x) - \int [e^x cos(x)]dx$ siamo tornati al punto di partenze,

apparentemente il calcolo di questo integrale potrebbe procedere all'infinito, ma si nota che :

$2\int [e^x cos(x)]dx = e^x(cos(x) + sin(x))$ ciò implica che :

$$\int [e^x cos(x)]dx = \frac{e^x(cos(x) + sin(x))}{2}$$

A questo punto possiamo notare la seguente **formula generale** :

> 💡 $$\int [e^{\alpha x} cos(\beta x)] = \frac{e^{\alpha x} \cdot (\alpha cos(\beta x) + \beta sin(\beta x))}{\alpha^2 + \beta^2}$$

vediamo un altro **esempio** , si consideri $f(x) = xlog(x)$:

Passo 1

$$\int [x \log(x)]dx \to \begin{bmatrix} f'(x) = x & \implies & f(x) = \frac{x^2}{2} \\ g(x) = \log(x) & \implies & g'(x) = \frac{1}{x} \end{bmatrix}$$ otteniamo :

$x^2 \log(x) - \int [\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}]dx$ a questo punto con alcuni passaggi algebrici noto che :

$$x^2 \log(x) - \int [\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}]dx = x^2 \log(x) - \int [\frac{x}{2}]dx = x^2 \log(x) - \frac{1}{2}\int xdx =$$

$= x^2 \log(x) - \frac{x^2}{4}$ a questo punto possiamo notare la seguente **formula generale** :

> 💡 $$\int [x^n \cdot \log(x)] = \frac{x^{n+1}}{n+1}\log(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

Integrale di un polinomio di grado n

Possiamo fare alcune osservazioni quando si parla di **calcolare l'integrale di un polinomio** di grado , prendiamo come esempio la funzione $f(x) = (x^2 - x - 1)e^x$ dove abbiamo il seguente polinomio $(x^2 - x - 1)$ che definiremo come $P_n(x)$, con n il grado del polinomio.

Adesso, avendo un polinomio di grado n, moltiplicato ad una funzione e^x, vediamo come si comporta con l'operazione di derivazione :

- Definiamo $f(x) = Q_n(x)e^x$
- Facendone la derivata si ottiene $f'(x) = Q'_n(x)e^x + Q_n(x)e^x$
- Che è uguale ha $(Q'_n(x) + Q_n(x))e^x$

Chiamiamo $(Q'_n(x) + Q_n(x)) = P_n(x)$ e notiamo che :

la derivata di un polinomio di grado n moltiplicato ad un esponenziale, è uguale ad un altro polinomio, sempre di grado n moltiplicato ad un esponenziale

Essendo l'integrale l'operazione inversa della derivata, è ovvio che :

$$\int [P_n(x)e^x]dx = Q_n(x)e^x$$

è possibile quindi ricavare $Q_n(x)$ tramite $P_n(x)$ con un **sistema di equazioni**, perchè so che :

> 💡 $Q_n(x) + Q'_n(x) = P_n(x)$

Proviamo adesso a calcolare l'integrale della funzione iniziale $f(x) = (x^2 - x - 1)e^x$.

$P_2(x) = x^2 - x - 1 \implies x^2 - x - 1 = Q_2(x) + Q'_2(x)$ Dato che $Q_2(x)$ è un polinomio di secondo grado : $Q_2(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ con $a \neq 0$.

Bisogni quindi trovare i valori di a, b e c.

Sappiamo che $Q'_2(x) = (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)' = 2a \cdot x + b$, quindi

$Q_2(x) + Q'_2(x) = ax^2 + (2a + b)x + (b + c)$ abbiamo quindi logicamente che :

È quindi ovvio che $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = -1 \\ b + c = 1 \end{cases}$ Risolvendo il sistema, si ottiene $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases}$

Finalmente sappiamo che:

$$Q_2(x) = 1 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 2 \implies \int [(x^2 - x - 1)e^x]dx = (x^2 - 3x + 2)e^x$$

Osservazioni su integrali non calcolabili

Data una **funzione integrale** : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, possiamo ricavare alcune **informazioni** su essa a partire da $f(t)$, senza dover per forza calcolarne la primitiva, ad esempio, sapendo che $f(t)$ è **continua**, possiamo dire con certezza che $F(x)$ è **continua a sua volta**.

Ricavare tali informazioni è indispensabile quando si presenta una funzione per la quale è **impossibile calcolarne l'integrale**. Vediamo la funzione :

$$F(t) = \int_0^t [e^{2x^2} + 3 \cdot \cos^2(x^2)]dx$$

Di tale funzione, abbiamo $f(x) = e^{2x^2} + 3 \cdot \cos^2(x^2)$ per la quale è impossibile calcolarne l'integrale, dato che non esistono metodi lineari per trovarne la primitiva, possiamo però dire che essendo f continua (dato che è la somma di due funzioni continue), anche F è **continua**.

Essendo continua è applicabile il **teorema fondamentale del calcolo integrale**, quindi F è derivabile sempre : $\forall t \in \mathbb{R}, F'(t) = f(t) = e^{2t^2} + 3 \cdot \cos^2(t^2)$.

Possiamo dire con certezza che $F(0) = 0$, dato che $\int_a^a f(x)dx = 0$, e possiamo dire che $f(x)$ è sempre maggiore di 0, dato che $\forall t \in \mathbb{R}\ e^{2t^2} > 0, 3 \cdot \cos^2(t^2) > 0$.

Essendo quindi $F'(x) > 0$ la funzione è s**trettamente crescente** (Si ricordi che il segno della derivata studia la crescenza), ed essendo $F(0) > 0$, arriviamo alla conclusione che la funzione $F(x) > 0\ \forall\ x > 0$.

Possiamo inoltre cercare di estrapolare informazioni riguarda la **parità/disparità** di F.

Per definizione, **l'operazione di derivazione inverte la parità** di una funzione, quindi :

$$\text{se } f(x) \text{ è pari} \rightarrow f'(x) \text{ sarà dispari, se } f(x) \text{ è dispari} \rightarrow \int f(x) \text{ è pari}$$

Inoltre se F è strettamente crescente, esiste $\lim_{t \to +\infty} F(t) = \begin{cases} L \in \mathbb{R} \\ +\infty \end{cases}$

Essendo F composta da e^{2t^2} e $3 \cdot \cos^2(t)$, sappiamo che i valori che possono assumere queste due funzioni sono contenuti nell'intervallo : $\begin{cases} [0, \infty] \text{ per } e^{2t} \\ [0, 3] \text{ per } 3cos^2(t) \end{cases}$

Quindi $f(t) = e^{2t} + 3 \cdot \cos^2(t^2)$ è sempre maggiore o uguale di 1. Allora la funzione $F(t) = \int_0^t [e^{2x^2} + 3 \cdot \cos^2(x^2)]dx \geq \int_0^t 1dx$, quest'ultima diverge, quindi F **diverge**, non è pari, e ciò è confermato dal fatto che la sua derivata, cioè $f(x) = e^{2x^2} + 3 \cdot \cos^2(x^2)$, è una funzione pari.

Informazioni ricavabili

Vediamo un riassunto di t**utte le informazioni ricavabili** da una funzione integrale senza dover calcolare l'eventuale primitiva.

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

1. La funzione $F(t)$ è derivabile? se si, quanto vale $F'(c)$ con $c \in \mathbb{R}$?
2. Per quali valori di t, $F(t) > 0$?
3. Per qualche $c < 0$, $F(c) < 0$?
4. F è pari o dispari?
5. Esiste $\lim_{t \to +\infty} F(t)$? Se si, quanto vale?

Esempio

Vediamo la seguente funzione integrale : $F(t) = \displaystyle\int [\sin(x^2) + 3]dx$

1. $\sin(x^2) + 3$ è derivabile su $\mathbb{R} \rightarrow F'(x) = \sin(x^2) + 3$, inoltre $F'(3) = \sin(9) + 3$.
2. $F(0) = 0$, sappiamo che $F'(x) = sin(x^2) + 3 > 2$, quindi F è sempre crescente, quindi $F(x) > 0 \ \forall x > 0$.
3. Vedendo il punto 2, $F(-6) < 0$.
4. Essendo $\sin(x^2) + 3$ pari, F sarà dispari.
5. Essendo $\sin(x^2) + 3 \geq 2$, $F(x) \geq \int 2dx$, ed essendo $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \int_0^t 2dx = \infty$, possiamo dire che $\displaystyle\lim_{x \to \infty} F(x) = \infty$

Integrali con polinomio di secondo grado al denominatore

Vediamo due formule di alcuni integrali immediati :

💡 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^2} dx = \frac{1}{a-x}$

💡 $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln(|ax+b|)$

Sappiamo quindi che $\displaystyle\int_3^7 \frac{dx}{x^2 - 4x + 4} = \int_3^7 \frac{dx}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2}\Bigg|_3^7$

Qui la formula risulta di facile applicazione dato che il polinomio di secondo grado è facilmente riconducibile al quadrato di un binomio, ma non sempre tale scomposizione è applicabile, vediamo quindi la seguente funzione :

$$\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$

Come prima cosa **scomponiamo in fattori** il polinomio : $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$

Riscriviamo quindi $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)(x-1)}$, e dato che $\displaystyle\frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$

per **linearità degli integrali**, riscriviamo come $\int \frac{A}{x-2}dx + \int \frac{B}{x-2}dx$, ma A e B quanto valgono? Dato che $\frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$ allora :

$$\frac{A(x-2)(x-1)}{x-2} + \frac{B(x-1)(x-2)}{x-1} = 1$$

Quindi $1 = A(x-1) + B(x-1)$, prendo $x = 1$ e $x = 2$:

$$\begin{cases} x = 1 \implies 1 = A \cdot (1-1) + B \cdot (1-2) \implies B = -1 \\ x = 2 \implies 1 = A \cdot (2-1) + B \cdot (2-2) \implies A = 1 \end{cases}$$

Adesso possiamo trovare il risultato :

$$\int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{-1}{x-2}dx = \ln(|x-2|) - \ln(|x-1|)$$

Vediamo adesso la generalizzazione del caso.

Caso generale

Abbiamo $\int \frac{dx}{x^2+ax+b} = \int \frac{dx}{(x-x_0)(x-x_1)} \quad x_0 \neq x_1$ e $x_0 > x_1$

$x_0, x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Si ricordi $\frac{1}{(x-x_0)(x-x_1)} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{x-x_1}$, quindi $1 = A(x-x_0) + B(x-x_1)$

A questo punto si ricava facilmente $A = \frac{1}{x_0-x_1}$ e $B = \frac{1}{x_1-x_0} = -A$, quindi si ha che :

💡 $$\int \frac{dx}{(x-x_0)(x-x_1)} = \frac{1}{x_0-x_1} \cdot \ln(|\frac{x-x_0}{x-x_1}|)$$

Si ricordi che per trovare x_0, x_1 si applica la formula risolutiva, trovando $\Delta = b^2 - 4ac$, se Δ dovesse però essere **negativo**, bisognerebbe trovare x_1, x_0 tali che $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, ma dato che $\Delta < 0$, x_0 ed x_1 non sarebbero contenuti all'interno dell'insieme dei numeri reali, non si può quindi applicare la formula vista in precedenza, bensì :

💡 Se $x_0, x_1 \in \mathbb{C}$, $\int \frac{dx}{x^2+ax+b} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan(\frac{2x+a}{\sqrt{-\Delta}})$ con $-\Delta = 4b - a^2$

Formule

Detto questo, ricapitoliamo tutte le formule viste con le 3 possibili casistiche :

$$\text{Si vuole integrare } \int \frac{1}{1x^2+ax+b} dx$$

- **Caso 1 :**

$$x_0 = x_1 \implies \int \frac{dx}{(x-x_0)^2} = \frac{1}{x_0 - x}$$

- **Caso 2 :**

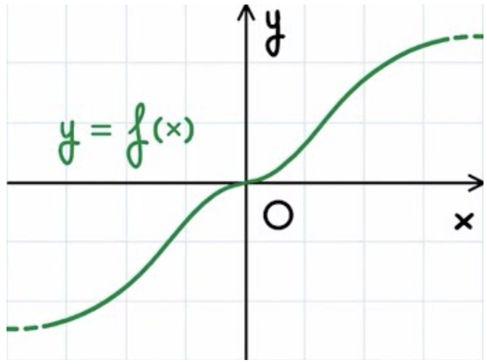
$$x_0 \neq x_1 \implies \int \frac{dx}{(x-x_0)(x-x_1)} = \frac{1}{x_0 - x_1} \cdot \ln(|\frac{x-x_0}{x-x_1}|)$$

- **Caso 3 :**

$$x_0, x_1 \in \mathbb{C} \implies \int \frac{dx}{x^2+ax+b} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan(\frac{2x+a}{\sqrt{-\Delta}})$$

Osservazioni su parità e disparità

Una funzione f è **dispari** quando è verificata la condizione $f(-x) = -f(x)$



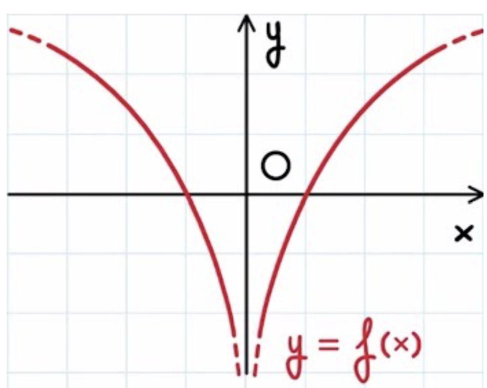
Si può dire con certezza che l'integrale di una funzione dispari, in un **intervallo simmetrico**, vale sempre 0. se $f(-x) = -f(x) \implies \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$. Dimostriamolo :

$\int_{-a}^{a} f(x)dx$ per **linearità** vale $\int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$, per sostituzione poi si pone :

$\left| \begin{array}{c} y = -x \\ x = -y \\ dx = -dy \end{array} \right| \implies -\int_{a}^{0} f(-y)dy + (-1) \cdot \int_{0}^{a} f(y)dx = \int_{a}^{0} f(y)dy + \int_{0}^{a} f(y)dy$

Che per linearità degli integrali vale $\int_{a}^{a} f(y)dy = 0$.

Una funzione f è **pari** quando è verificata la condizione $f(-x) = f(x)$



Si può dire con certezza che, se la funzione è pari in un intervallo simmetrico $[-a, a]$, il suo integrale vale due volte l'area nell'intervallo $[0, a]$.

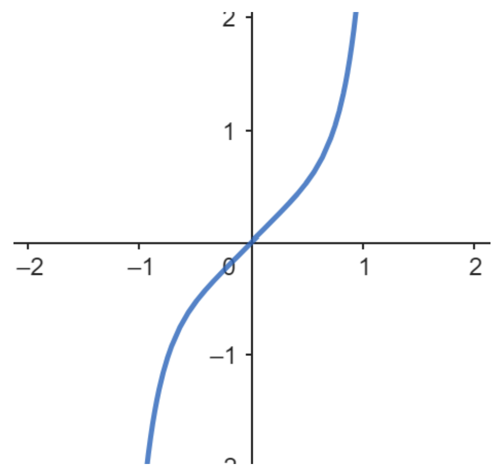
se $f(-x) = f(x) \implies \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$

Esempio

Si calcoli $\int_{-3}^{3} xe^{x^4}$, sapendo che xe^{x^4} è dispari, dato che $f(-x) = -xe^{x^4} = -f(x)$, ed il suo intervallo $[-3, 3]$ è simmetrico, $\int_{-3}^{3} xe^{x^4} = 0$.

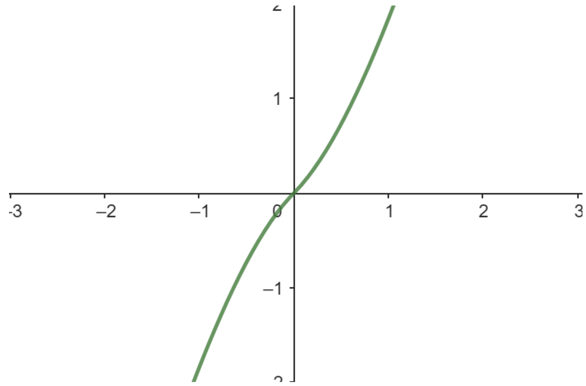
Stabilire il segno dell'integrale

Prendiamo ora la funzione $\int_{-3}^{4} xe^{x^4}dx$, si vuole stabilire la **positività** di tale integrale.



Per linearità possiamo riscriverlo come $\int_{-3}^{3} xe^{x^4}dx + \int_{3}^{4} xe^{x^4}dx$, sapendo che è una funzione dispari, il termine con intervallo simmetrico vale 0, quindi rimane solamente $\int_{3}^{4} xe^{x^4}dx$, dato che $xe^{x^4} > 0 \ \forall \ x > 0$, e abbiamo un intervallo positivo, possiamo dire con certezza che $\int_{-3}^{4} xe^{x^4}dx > 0$.

Vediamo un altro esempio, si consideri il seguente integrale $\int_{-3}^{2} [x|x| + \sin(x)]dx$ e se ne determini il segno. Esso è composto da due funzioni, entrambe dispari, quindi sarà la composizione una funzione dispari.

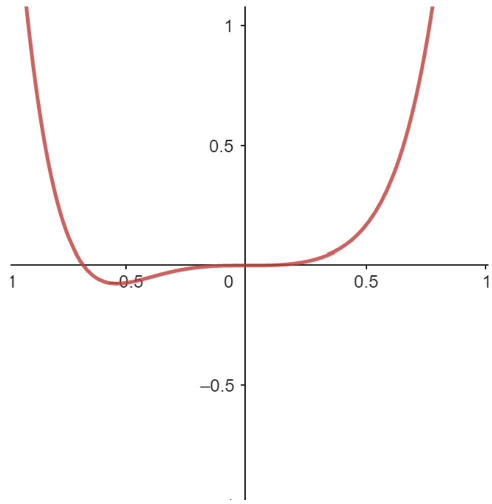


💡 Si ricordi che $\sin(x)$ è **dispari** e che $\cos(x)$ è **pari**.

Possiamo riscrivere l'integrale come $\int_{-3}^{-2} [x|x| + \sin(x)]dx + \int_{-2}^{2} [x|x| + \sin(x)]dx$

Ricordando che nell'intervallo simmetrico l'integrale di una funzione dispari vale 0, rimane solamente $\int_{-3}^{-2} [x|x| + \sin(x)]dx$, ed essendo $x|x| + \sin(x) < 0 \; \forall \; x < 0$, possiamo dire con certezza che $\int_{-3}^{2} [x|x| + \sin(x)]dx < 0$

Vediamo un ultimo esempio, si consideri il seguente integrale $\int_{-3}^{3} [x^2 \sin(x) + 3|x|^6]dx$ e se ne determini il segno. Esso è composto da due funzioni, una pari una dispari.



Per linearità possiamo riscriverlo come $\int_{-3}^{3} [x^2 \sin(x)]dx + \int_{-3}^{3} [3|x|^6]dx$, ricordando che nell'intervallo simmetrico l'integrale di una funzione dispari vale 0, rimane solamente : $\int_{-3}^{3} [3|x|^6]dx = 3 \int_{-3}^{3} |x|^6 dx$ che essendo pari vale $6 \int_{0}^{3} |x|^6 dx = 6 \cdot \frac{3^7}{7} > 0$.