Foglio del 27/11/2023

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Abbiamo visto nel compito del 20/11 che questi 3 vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$ in questa nuova base di $\mathbb{R}^3$.

$$x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \text{ ha matrice } \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Trasformo in un sistema triangolare (inverto pos. di x e z): $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad P_1 \quad \Rightarrow -\frac{-1}{-1} = -1 \cdot A_1 = [1 \ \ -3 \ \ -1] + A_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad P_2 \quad \Rightarrow -\frac{-1}{-2} = -\frac{1}{2} \cdot A_2 = \left[0 \ \ 1 \ \ -\frac{1}{2}\right] + A_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -z + 3y + x = 0 \\ -2y + x = 1 \\ \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -z + 3y - \frac{1}{3} = 0 \\ -2y = \frac{1}{3} + 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -\frac{7}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

le coordinate di e_2 sono $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right)$

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si consideri il sottoinsieme

$$W := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

Verificare che W è un sottospazio, trovarne la dimensione e determinarne una base.

Siano $\bar{a}, \bar{b} \in W$, si ha che

$$\left.\begin{matrix} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = (a_1 + a_2 + a_3) \cdot (b_1 + b_2 + b_3) = 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} \in W$$

Il sistema ha matrice $[1 \ 1 \ 1]$, ho che $x = -y - z$ quindi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W \iff \begin{bmatrix} -z - y \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow W = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \dim(W) = 2$$

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo i sottospazi

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}, \quad W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$. Decidere se $U + W = \mathbb{R}^3$.

$$U \{ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow \{ x_1 = x_2 + x_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \dim(U) = 2$$

$$W \{ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow \{ x_3 = -x_1 - 2x_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow W = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \dim(W) = 2$$

$\mathbb{R}^3$ che e' lo spazio ambiente, ha dimensione 3, per il teorema di Grassman, $U \oplus W = \mathbb{R}^3 \iff \dim(U) + \dim(W) = 3$, ma $\dim(U) + \dim(W) = 4 \Rightarrow$ non sono somma diretta.

Consideriamo ora $U \cap W$, ossia, tutte le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 \\ 2x_3 = -3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - \frac{3}{2} x_2 \\ x_3 = -\frac{3}{2} x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} x_2 \\ x_3 = -\frac{3}{2} x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} x_2 \\ x_2 \\ -\frac{3}{2} x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow U \cap W = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -3/2 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \dim(U \cap W) = 1$$

So che $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \Rightarrow \dim(U+W) = 2 + 2 - 1 = 3$

Essendo che, lo spazio ambiente $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3, se $\dim(U+W) = \dim(\mathbb{R}^3) \iff U + W = \mathbb{R}^3$

Esercizio 5. Consideriamo i sottospazi $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ e $W = \mathrm{Span}((1, 1, 1))$. Decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

U e W sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Si ha subito che $\dim(W) = 1$.

$$U = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 + x_3\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow U = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \dim(U) = 2.$$

So che $\dim(U) + \dim(W) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) \Rightarrow U + W = \mathbb{R}^3$, inoltre,

$$\dim(U+W) = \dim(W) + \dim(U) - \dim(U \cap W) \Rightarrow$$

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(W) + \dim(U) - \dim(U \cap W) \Rightarrow 3 = 1 + 2 - \dim(U \cap W) \Rightarrow \dim(U+W) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = U \oplus W.$$

Esercizio 6. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$.
6.1. Determinando una base di W, verificare che $\dim W = 3$.
6.2. Determinare un supplementare di W (e cioè un sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ tale che $W \oplus U = \mathbb{R}^4$; determinare U vuol dire qui dare U tramite una sua base.)
Determinare un secondo supplementare di W, U', distinto da U.
Suggerimento per 6.2: Che dimensione ci aspettiamo per U?

6.1 - $W = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = -x_3 - x_4 \} \Rightarrow W = \left\{ \bar{v} \in \mathbb{R}^4 \mid \bar{v} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$\Rightarrow W = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$, verifico che questi 3 vettori siano lin. ind.:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$ quindi

costituiscono una base di $W \Rightarrow \dim(W) = 3$.

6.2 - voglio trovare $U \mid U \oplus W = \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim(U) = 1$. devo trovare $\bar{v} \in \mathbb{R}^4 \mid \bar{v}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ siano linearmente indipendenti.

provo $\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ossia $U = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow U + W = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

verifico che siano lin. indipendenti:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_4 = -\alpha_3 \\ \alpha_4 = -\alpha_1 \\ \alpha_4 = -\alpha_2 \end{cases}$$

α_4 e' inverso di α_1 e α_2, α_3 ma siamo in un campo, quindi ogni elemento ha 1 inverso! $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_4 = 2\alpha_1 \\ \alpha_4 = -\alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_4 = -2\alpha_4 \\ \alpha_4 = -\alpha_1 \end{cases} \iff \alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

quindi $\dim(U+W) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4) \Rightarrow \dim(U \cap W) = 0 \Rightarrow U \oplus W = \mathbb{R}^4$

Preambolo all'esercizio 7. Se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ e se W è un secondo sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $B\underline{x} = \underline{0}$, allora $U \cap W$, che sappiamo essere un sottospazio, è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $C\underline{x} = \underline{0}$ con $C = \left|\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right|$.

Esercizio 7. In $\mathbb{R}^4$ sono dati $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$, $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid B\underline{x} = \underline{0}\}$ con $A = \left|\begin{matrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{matrix}\right|$, $B = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right|$. Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

come prima cosa, considero $U \cap W =$

$$\left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right.$$

trovo le soluzioni:

inverto C_3 con $C_4 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ APPLICO IL METODO DI GAUSS

PASSO 1: $p_1 = -2 \Rightarrow -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2} \cdot C_1 = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} + C_4 \Rightarrow C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

PASSO 2: $p_2 = -1 \Rightarrow -\frac{1}{-1} = 1 \cdot C_2 = C_2 + C_3 \Rightarrow C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$-\frac{1/2}{-1} = \frac{1}{2} \cdot C_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \end{bmatrix} + C_4 \Rightarrow C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

PASSO 3: $p_3 = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} + C_4 \Rightarrow C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ risolvo:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + 4x_4 = 0 \\ x_3 + 4x_4 = 0 \\ 6x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + 0 = 0 \\ x_3 + 0 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim(U \cap W) = 0$$

Esercizio 8. Consideriamo l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Scrivere l'espressione di L_A: $L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \ldots.$ Determinare l'immagine tramite L_A del vettore $(1, 2, 1)$. Determinare l'immagine tramite L_A dei vettori della base canonica. Stabilire se L_A è iniettiva.

$$L_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 \end{bmatrix} \qquad L_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 + 6 - 1 \\ 2 + 2 - 1 \\ 2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = A^1 \qquad L_A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = A^2 \qquad L_A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = A^3$$

Considero $\operatorname{Ker} L_A = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases} x_1 = x_3 - x_2 \\ x_1 = \frac{x_3 - x_2}{2} \\ x_1 = -\frac{x_2}{2} \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ é iniettiva