Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale e $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ vettori linearmente indipendenti. Verificare che se $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$, $c_j \neq 0\ \forall j$, allora i vettori

$$c_1\underline{v}_1, \dots, c_k\underline{v}_k$$

sono anche linearmente indipendenti.

$\alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2 \cdots + \alpha_k\bar{v}_k = \bar{0} \iff \alpha_1 = \alpha_2 \cdots = \alpha_k = 0$, considero: $c_1\alpha_1\bar{v}_1 + c_2\alpha_2\bar{v}_2 \cdots + c_k\alpha_k\bar{v}_k$, ho che

se $\exists \alpha_j \neq 0 \Rightarrow c_1\alpha_1\bar{v}_1 + c_2\alpha_2\bar{v}_2 \cdots + c_k\alpha_k\bar{v}_k = 0\bar{v}_1 + \cdots c_j\alpha_j\bar{v}_j \cdots + 0\bar{v}_k = \bar{0} \iff c_j = 0 \Rightarrow c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 \cdots + c_k\bar{v}_k$ sono indipendenti.

Esercizio 2. In $M_{33}(\mathbb{R})$ consideriamo il sottospazio $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche ed il sottospazio $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche.
Determinare una base di $M_{33}(\mathbb{R})$.
Determinare una base del sottospazio $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ e una base del sottospazio $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$.

$$B_M = \left\{ \begin{vmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&1&0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$B_S = \left\{ \begin{vmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\1&0&0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$B_A = \left\{ \begin{vmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{vmatrix} \right\}$$

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1\\2\\2 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 3\\1\\-1 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} -1\\-1\\0 \end{vmatrix}$$

Verificare che questi 3 vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$.

Devo verificare che siano linearmente indipendenti.

$$x_1\begin{vmatrix} 1\\2\\2 \end{vmatrix} + x_2\begin{vmatrix} 3\\1\\-1 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} -1\\-1\\0 \end{vmatrix} = \bar{0} \iff \begin{vmatrix} 1&3&-1\\2&1&-1\\2&-1&0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1\\x_2\\x \end{vmatrix} = \bar{0} \quad \text{MA} \quad \begin{vmatrix} 1&3&-1\\2&1&-1\\2&-1&0 \end{vmatrix} \overset{A_2=A_2-A_3}{=} \begin{vmatrix} 1&3&-1\\0&2&-1\\2&-1&0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{A_3=A_3-2A_1}{=} \begin{vmatrix} 1&3&-1\\0&2&-1\\0&-7&2 \end{vmatrix} \overset{A_3+\frac{7}{2}A_2}{=} \begin{vmatrix} 1&3&-1\\0&2&-1\\0&0&-\frac{5}{2} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1+3x_2-x_3=0\\ 2x_2-x_3=0\\ -\frac{5}{2}x_3=0 \end{cases} \iff \begin{vmatrix} x_1\\x_2\\x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0\\0\\0 \end{vmatrix}$$

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,0,1,0)\,,\ \underline{v}_2 = (0,1,0,0)\,,\ \underline{v}_3 = (0,0,1,0).$$

Verificare che questi 3 vettori sono linearmente indipendenti.
Determinare una base per i seguenti sottospazi:
$W_1 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_1+\underline{v}_2, \underline{v}_1+74\underline{v}_2-\sqrt{2}\underline{v}_3)$
$W_2 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$
$W_3 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1+\underline{v}_2, \underline{v}_1-\underline{v}_2, \underline{v}_1+2\underline{v}_2, \underline{v}_1-2\underline{v}_2)$

$$x_1\begin{vmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{vmatrix} + x_2\begin{vmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{vmatrix} = \bar{0} \iff \begin{cases} x_1=0\\ x_2=0\\ x_1+x_3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1=0\\ x_2=0\\ 0+x_3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1=0\\ x_2=0\\ x_3=0 \end{cases}$$

$\mathcal{B}_{W_1} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ $\quad \mathcal{B}_{W_2} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$

$$W_3 = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1\\1\\1\\0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1\\-1\\1\\0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1\\2\\1\\0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1\\-2\\1\\0 \end{vmatrix}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1&1&1&1\\1&-1&2&-2\\1&1&1&1\\0&0&0&0 \end{vmatrix} \begin{matrix} A_2=A_2-A_1\\ A_3=A_3-A_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1&1&1&1\\0&-2&1&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{vmatrix} \Rightarrow \mathcal{B}_{W_3} = \left\{\begin{vmatrix} 1\\1\\1\\0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1\\-1\\1\\0 \end{vmatrix}\right\}$$

PIVOt

Esercizio 5. Vero o Falso :

- 4 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente dipendenti
- 6 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^4$ sono sempre linearmente dipendenti.
- 4 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti

Giustificare le risposte.

- Falso, ecco un controesempio: $(1,0,0,0,0,0), (0,1,0,0,0,0), (0,0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0,0)$.
- Vero, $\mathbb{R}^4$ e' generato da 4 vettori, non esistono 6 vettori lin. indipendenti.
- Falso, possono benissimo esistere 4 vettori proporzionali in $\mathbb{R}^6$.