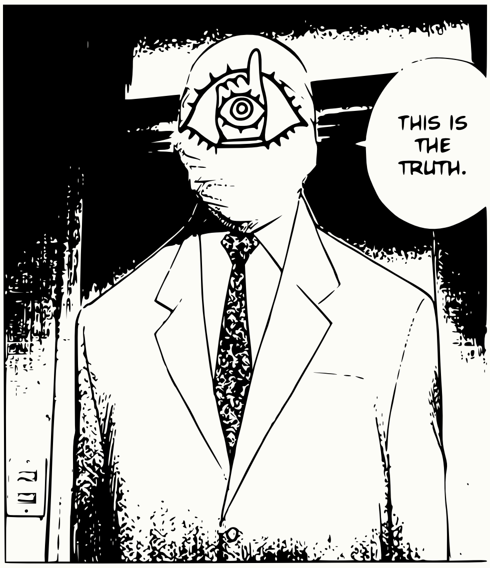
Marco Casu

Ottimizzazione

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica
Dipartimento di Informatica

Questo documento è distribuito sotto la licenza GNU, è un resoconto degli appunti (eventualmente integrati con libri di testo) tratti dalle lezioni del corso di Ottimizzazione per la laurea triennale in Informatica. Se dovessi notare errori, ti prego di segnalarmeli.



INDICE

CAPITOLO

1

FLUSSO DI UN GRAFO

1.1 Definizione e Grafo Residuo

Definizione 1 *Una **network** o **rete** $G = (V, E, c, s, t)$ è un particolare grafo diretto, in cui V ed E sono i vertici e gli archi, tali per cui è soddisfatta la condizione*

$$\forall (u, v) \in E(G), \quad \exists (v, u) \in E(G)$$

*$c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ è una funzione detta **capacità**, s e t sono due particolari vertici in $V(G)$ denominati **source** e **sink**.*

Definizione 2 *Data una network $G = (V, E, c, s, t)$, un **flusso** per G è una funzione $f : E(G) \to \mathbb{R}$ tale per cui valgono le seguenti*

1. ***skew-simmetria:*** $f(u, v) = -f(v, u), \quad \forall (u, v) \in E(G)$
2. ***capacità rispettata:*** $f(u, v) \leq c(u, v), \quad \forall (u, v) \in E(G)$
3. ***conservatività del flusso:*** $\displaystyle\sum_{(u,v)\in E(G)} f(u, v) = 0, \quad \forall v \in V(G)\backslash\{s, t\}$

Denominiamo flusso uscente dal vertice v la somma del flusso (positivo) valutato su tutti gli archi che hanno v come primo membro (che collegano v ad un'altro vertice). Analogamente (ma in maniera opposta) si definisce il flusso entrante. Dato un flusso f per una network G si definisce il **valore del flusso** la somma del flusso uscente da s

$$\text{val}(f) = \sum_{(s,u)\in E(G)} f(s.u)$$

La terza proprietà, di conservazione del flusso, asserisce che il flusso uscente da un nodo deve essere identico al flusso entrante, sia x un vertice fissato in $V(G)$

$$\sum_{\substack{(u, x) \in E(G) \\ f(u, x) > 0}} f(u, x) = -\left(\sum_{\substack{(x, u) \in E(G) \\ f(x, u) < 0}} f(x, u) \right)$$

Definizione 3 *Sia $G = (V, E, c, s, t)$ una network e f un flusso per G, il **grafo residuo** è il grafo diretto G' definito come segue*

- $\forall v \in V(G), \quad v \in V(G')$
- $(u, v) \in E(G) \wedge f(u, v) < c(u, v) \implies (u, v) \in E(G')$

*Inoltre è definita una funzione $r : E(G') \to \mathbb{R}^+$ detta **capacità residua** definita come segue*

$$r(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$$

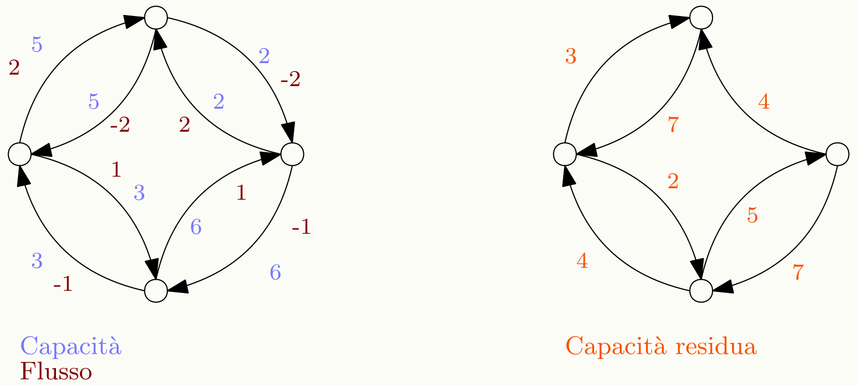


Figura 1.1: Capacità residua del flusso (evidenziato in rosso)

Si assuma che esiste un cammino P in G' da s a t, si consideri il residuo minimo valutato sugli archi contenuti nel cammino

$$\alpha = \min_{(u,v) \in E(P)} r(u, v)$$

Si definisce una funzione $f' : E(G) \to \mathbb{R}$ come segue

$$f'(u, v) = \begin{cases} f(u, v) + \alpha & \text{se} \quad (u, v) \in E(P) \\ f(u, v) - \alpha & \text{se} \quad (v, u) \in E(P) \\ f(u, v) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Proposizione 1 *f' è un flusso per G.*

Dimostrazione : Sia (u, v) un arco in G, se $(u, v) \notin E(P)$, allora $f'(u, v) = f(u, v)$ e conseguentemente $f'(v, u) = f'(v, u)$, quindi la proprietà di skew simmetria è preservata. Differentemente, se $(u, v) \in E(P)$ si avrebbe che $f'(u, v) = f(u, v) + \alpha$ e $f'(v, u) = f(v, u) - \alpha = -f(u, v) - \alpha = -(f(u, v) + \alpha)$, quindi il nuovo flusso rispetta la proprietà di skew-simmetria.

Per ogni arco $(u, v) \in E(P)$ si ha che $f'(u, v) = f(u, v) + \alpha$, α è (per definizione) minore o uguale a $r(u, v)$ quindi

$$f'(u, v) \leq f(u, v) + r(u, v)$$

Ma essendo che $f(u, v) + r(u, v) = c(u, v)$, f' rispetta la capacità.

Se $x \notin V(P)$ si avrebbe che $f'(x, u) = f(x, u)$ per ogni u adiacente ad x, allora

$$\sum_{(x,u) \in E(G)} f(x, u) = 0$$

Assumendo che $x \in V(P)$, vi è un arco uscente da x il cui flusso è aumentato di α, vi è quindi (per definizione di f') un'arco entrante in x il cui flusso è diminuito di α, quindi è ancora vero che

$$\sum_{\substack{(u, x) \in E(G) \\ f'(u, x) > 0}} f'(u, x) = -\left(\sum_{\substack{(x, u) \in E(G) \\ f'(x, u) < 0}} f'(x, u) \right)$$

la proprietà di conservazione del flusso è rispettata. ■

Il valore del nuovo flusso è uguale al valore del flusso di partenza aumentato di α

$$\text{val}(f') = \text{val}(f) + \alpha$$

Dato che un singolo arco (s, u) per qualche u è necessariamente presente nel cammino P da s a t, ed il valore di f' su (s, u) è stato aumentato di α.