Esercizio 1. Un'associazione è formata da 25 iscritti. Tra questi devono essere scelti un presidente ed un segretario.

1) Quanti sono i modi possibili per ricoprire le due cariche?

2) Se gli individui vengono scelti a caso per ricoprire le cariche, qual è la probabilità che un assegnato membro dell'associazione ne ricopra una?

1) È il caso di estrazioni ordinate con rimpiazzo: $25 \cdot 24$

SCELTA PRESIDENTE (25), SCELTA SEGRETARIO (24)

2) Lo spazio degli eventi é: $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_i \in \{1, \dots, 25\} \wedge \omega_1 \neq \omega_2\}$, $|\Omega| = 25 \cdot 24$

$A_1 = \{\text{MEMBRO } x \text{ È PRESIDENTE}\} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = x\}$, $|A_1| = 1 \cdot 24$

$A_2 = \{\text{MEMBRO } x \text{ È SEGRETARIO}\} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_2 = x\}$, $|A_2| = 1 \cdot 24$

$\Rightarrow A = \{\text{MEMBRO } x \text{ RICOPRE UNA CARICA}\} = A_1 \cup A_2$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{24}{24 \cdot 25} + \frac{24}{24 \cdot 25} - 0 = \frac{2}{25}$

! $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Esercizio 2. Quanti sono gli anagrammi (anche senza senso) delle parole: RISO, PATATE e COZZE.

RISO: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ PATATE $= \frac{6!}{2!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 180$ COZZE: $\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Esercizio 3. Sia S un insieme di cardinalità n. Quanti sono i sottoinsiemi di S di cardinalità k (con $k = 0, \dots, n$)?

Devo scegliere K elementi da S, non conta l'ordine! $\Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ = sottoinsiemi di cardinalitá K, per $K = 0, \dots n \Rightarrow$ Tutti i sottoinsiemi: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Esercizio 4. Un compito di esame prevede di rispondere (esattamente) a 10 domande tra le 13 proposte.

1) In quanti modi si possono scegliere le domande?

2) Supponendo che le prime due domade siano obbligatorie, in quanti modi si possono scegliere le domande?

3) Supponendo sia richiesto di rispondere alla prima o alla seconda domanda (ma non ad entrambe), in quanti modi si possono scegliere le domande?

1) $\binom{13}{10}$ 2) $\binom{11}{8}$ 3) $2 \cdot \binom{11}{9}$

Esercizio 5. Alfredo e Bianca escono la sera con 5 amici. Cominciano la serata con un aperitivo al bar. Davanti al bancone ci sono 7 sgabelli vuoti in fila e ciascuno sceglie uno sgabello a caso. Qual è la probabilità che Alfredo e Bianca si siedano vicini? Dopo si recano al ristorante, dove gli viene assegnato un tavolo rotondo con 7 sedie e ciascuno sceglie una sedia a caso. Qual è la probabilità che Alfredo e Bianca si siedano vicini?

$\Omega = \{\text{COMBINAZIONI DI POSTI}\} = \{(\omega_1 \dots \omega_7) \mid \omega_i \in \{1, 2 \dots, 7\} \wedge i \neq j \Rightarrow \omega_i \neq \omega_j\}$, $|\Omega| = 7!$

ho che 1 :: Alfredo, 2 :: Bianca. POSTI: $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{7}$

$A_i = \{$Alfredo e Bianca sono nei posti $i - j$ dove $|i - j| = 1\}$, $|A_i| = 5!$

Coppie posti vicini $= 12$, $A = \{$Alfredo e Bianca sono vicini$\} = 12 \cdot 5! \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{12 \cdot 5!}{7!} = \frac{2}{7}$

Se il tavolo e' rotondo, coppie posti vicini $= 14 \Rightarrow \mathbb{P}(\{\text{sono vicini}\}) = \frac{14 \cdot 5!}{7!} = \frac{1}{3}$

Esercizio 6. Vengono estratte 5 carte a caso da un mazzo di 52 carte francesi. Calcolare la probabilità di ottenere:

1) poker;
2) colore;
3) full;
4) doppia coppia (ma non un full);
5) tris (ma né poker né full).

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2 .., \omega_5) \mid \omega_i \in \{1, 2 .., 52\} \wedge \omega_1 < \omega_2 .. < \omega_5\} \Rightarrow |\Omega| = \binom{52}{5}$

1) Fisso le 4 carte del poker, moltiplicato $13 \leftarrow$ POSSIBILI VALORI, e rimane una carta a caso delle 48 rimaste: $|\text{Poker}| = 48 \cdot 13 \Rightarrow \mathbb{P}(\text{Poker}) = 48 \cdot 13 \cdot 1/\binom{52}{5} \simeq 0{,}00024$

2) 5 carte dello stesso seme: $\binom{13}{5} \leftarrow$ le 4 carte dello stesso seme, moltiplicato 4 Possibili semi

$|\text{Colore}| = 4 \cdot \binom{13}{5} \Rightarrow \mathbb{P}(\text{Colore}) = 4 \cdot \binom{13}{5} \cdot 1/\binom{52}{5} \simeq 0{,}001$

3) prendo 3 carte dalle 4 dello stesso valore $\binom{4}{3} \cdot \underbrace{13}_{\text{POSSIBILI VALORI}}$ moltiplico per $\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{coppia}} \cdot 12 \rightarrow$ POSSIBILI VALORI -1

$|\text{Full}| = 13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3}\binom{4}{2} \Rightarrow \mathbb{P}(\text{Full}) = 13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3}\binom{4}{2} \cdot 1/\binom{52}{5} \simeq 0{,}001$

4) Coppia $\binom{4}{2} \cdot \underbrace{13}_{\text{POSSIBILI VALORI}}$ · un'altra coppia $\binom{4}{2} \cdot \underbrace{12}_{\text{DIVERSI DA QUELLA PRIMA}}$ moltiplico $(\underbrace{48}_{\text{CARTE RIMANENTI}} - 4) \rightarrow$ comporterebbero un Full

$|\text{Coppia}| = 44 \cdot 13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \Rightarrow \mathbb{P}(\text{Coppia}) = 44 \cdot 13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 1/\binom{52}{5} \simeq 0{,}09$

5) Scelgo le 3 del tris da 4: $\binom{4}{3} \cdot \underbrace{13}_{\text{Possibili valori}}$ rimangono le 2 carte rimanenti: $\binom{49-1}{2}$ (comporterebbe il poker) $\Rightarrow \binom{4}{3} \cdot 13 \cdot \binom{48}{2} \rightarrow$ potrebbero essere coppia (comporterebbe Full)

devo sottrarre i casi del full: $\mathbb{P}(\text{Tris}) = \left[13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{48}{2} - \underbrace{13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3}\binom{4}{2}}_{\text{Full}}\right] \cdot 1/\binom{52}{5} \simeq 0{,}02$

Esercizio 7. In un dipartimento di Psicostoria, le aule I e II possono accogliere 50 studenti ciascuna, mentre l'aula III può accoglierne 100. Per seguire il corso di probabilità in tali aule, 200 matricole vengono divise in tre gruppi (di 50, 50 e 100 studenti).

1) In quanti modi si possono creare i tre gruppi, ed in quanti modi si possono assegnare nelle tre aule?

Alyona e Bogdana vorrebbero seguire il corso insieme per aiutarsi nello studio, ma vorrebbero evitare di ritrovarsi in classe con l'insopportabile Vadik.

2) Calcolare la probabilità che tale desiderio si avveri.

1) Devo suddividere 200 biglie in 3 scatole da: 50, 50, 100, si utilizza la formula del multinomio: $\frac{200!}{100! \cdot 50! \cdot 50!}$, si possono assegnare in 2 modi, i due gruppi piu' piccoli nelle aule I e II.

2) $A_1 = \{$A. e B. nell'aula I e V. in aula II$\} \Rightarrow \binom{197}{48} \cdot \binom{149}{49} \cdot \binom{100}{100}$

$A_2 = \{$A. e B. nell'aula II e V. in aula I$\} \Rightarrow \binom{197}{48} \cdot \binom{149}{49} \cdot \binom{100}{100}$

$A_3 = \{$A. e B. nell'aula I e V. in aula III$\} \Rightarrow \binom{197}{48} \cdot \binom{149}{99} \cdot \binom{50}{50}$

$A_4 = \{$A. e B. nell'aula II e V. in aula III$\} \Rightarrow \binom{197}{48} \cdot \binom{149}{99} \cdot \binom{50}{50}$

$A_5 = \{$A e B nell'aula III e V. in aula I$\} \Rightarrow \binom{197}{98} \cdot \binom{99}{49} \cdot \binom{50}{50}$

$A_5 = \{$A e B nell'aula III e V. in aula II$\} \Rightarrow \binom{197}{98} \cdot \binom{99}{49} \cdot \binom{50}{50}$

$A : \{\text{desiderio}\} = \bigcup_{i=1}^{6} A_i$

ho che $\bigcap_{i=1}^{6} A_i = \emptyset$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{6} |A_i| \cdot \frac{100! \cdot 50! \cdot 50!}{200!}$$

Esercizio 8. Sia Ω un insieme finito non-vuoto ed $H : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione data. Per ogni $\beta \geq 0$, definiamo una probabilità $\mathbb{P}_\beta$ su Ω ponendo per ogni $\omega \in \Omega$ (si ricordi che su spazi finiti la probabilità è identificata dal suo valore sui singoletti)

$$\mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = \frac{e^{-\beta H(\omega)}}{Z_\beta}$$

dove Z_β è un numero reale positivo. Poniamo inoltre

$$m := \min_{\omega \in \Omega} H(\omega) \qquad E_m := \{\omega \in \Omega \,:\, H(\omega) = m\} = H^{-1}(\{m\})$$

1) Si scriva Z_β in funzione di β (ed H).

2) Verificare che se $\beta = 0$ allora $\mathbb{P}_\beta$ è la probabilità uniforme su Ω.

3) Verificare che

$$\lim_{\beta \to +\infty} \mathbb{P}_\beta(E_m) = 1$$

(o, come si dice, che $\mathbb{P}_\beta$ si concentra sui minimi di H quando $\beta \to +\infty$).

4) Calcolare $\lim_{\beta \to +\infty} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\})$ per ogni $\omega \in \Omega$.

1) Necessariamente: $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = 1 \Rightarrow \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta \cdot H(\omega)} \cdot \frac{1}{Z_\beta} = 1 \Rightarrow \frac{1}{Z_\beta} \cdot \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta H(\omega)} = 1 \Rightarrow Z_\beta = \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta H(\omega)}$

2) Se $\beta = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_0(\omega) = \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{\sum_{\omega \in \Omega} e^0} = \frac{1}{\sum_{\omega \in \Omega} 1} = \frac{1}{|\Omega|}$ $\Leftarrow$ prob. uniforme.

3) Calcolo Z_β su $E_m \Rightarrow Z_\beta = \sum_{\omega \in E_m} e^{-\beta H(\omega)} = \sum_{\omega \in H^{-1}(\{m\})} e^{-\beta \cdot H(\omega)} = \sum_{\omega \in E_m} e^{-\beta \cdot m}$ se $\beta \to +\infty \Rightarrow Z_\beta = 0$

$\lim_{\beta \to +\infty} \frac{e^{-\beta \cdot m}}{Z_\beta} = \sum_{\omega \in E_m} \frac{e^{-\beta \cdot m}}{Z_\beta}$ Non so come proseguire