Metodi Matematici per l'Informatica

Esame (a.a. 20/21, I canale) - Docente: Lorenzo Carlucci - Data: 02 Aprile 2021

Esercizio 1 *Un testo d'esame comprende 10 domande di Combinatoria, 15 domande di Logica e 10 domande di Algebra.*

1. *In quanti modi posso scegliere 10 domande?*
2. *In quanti modi posso scegliere 10 domande di cui esattamente 4 di Logica?*
3. *In quanti modi posso scegliere 10 domande di cui almeno una di Combinatoria e almeno una di Logica?*

Esercizio 2 *Sia p il vostro anno di nascita. Sia q il vostro mese di nascita $+4$.*

- *Quanti sono i modi di distribuire p noccioline tra q scimmie?*
- *Quanti sono i modi di distribuire p noccioline tra q scimmie dando almeno una nocciolina a ogni scimmia?*
- *Quante sequenze ordinate di 3 cifre distinte posso formare con le cifre che compongono la vostra data di nascita (nel formato GGMMAAAA)?*

Esercizio 3 *Siano $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$, $f : A \to B$ e $g : B \to A$. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.*

1. *Se f e g sono suriettive allora $(g \circ f)$ è suriettiva.*
2. *È possibile che $(f \circ g)$ sia l'identità su B.*
3. *Se g è la funzione costante che manda tutti gli elementi in 1 allora lo è anche $(g \circ f)$.*

Esercizio 4 *Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, sia $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 4), (3, 5)\}$ e $S = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 5)\}$ due relazioni su A.*

1. *$R \cap S$ è transitiva?*
2. *Calcolare $R \circ S$ e $S \circ R$.*
3. *Calcolare la chiusura transitiva di S.*

Esercizio 5 *Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.*

1. *L'insieme di tutte le relazioni binarie $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ ha cardinalità numerabile.*
2. *$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri primi.*
3. *Qualche funzione da $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ in $\mathbb{R}$ è suriettiva.*

Esercizio 6 *Consideriamo la sequenza di numeri definita per ricorsione come segue:* $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, *e, per* $n > 2$, $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$.

Dimostrare per Induzione semplice che, per ogni $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = A_{n+2} - 1.$$

Specificare il Caso Base, l'Ipotesi Induttiva e la dimostrazione del Passo Induttivo.

Esercizio 7 *Trovare l'errore (o gli errori) nella seguente dimostrazione per Induzione Forte.*

Tesi: Per ogni $n \geq 0$, $5 \times n = 0$.

Base: $5 \times 0 = 0$.

Passo: Assumiamo l'Ipotesi Induttiva: per ogni $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *valga* $5 \times k = 0$. *Dimostriamo che* $5 \times (k + 1) = 0$. *Siano* $\ell, p > 0$ *tali che* $k + 1 = \ell + p$ *e* $\ell, p < k + 1$. *Per ipotesi induttiva* $5 \times \ell = 0$ *e* $5 \times p = 0$. *Dunque* $5 \times (k + 1) = 5 \times (\ell + p) = (5 \times \ell) + (5 \times p) = 0 + 0 = 0$.

Esercizio 8 *A una festa vengono invitati Marco, Carla e Toni, che rilasciano le seguenti dichiarazioni.*

Marco dice: "O vengo io e non viene Toni oppure veniamo io e Carla." Carla dice: "Non vengono né Marco né Toni." Toni dice: "Marco viene e Carla non viene."

1. *Formalizzare le tre affermazioni in logica proposizionale scegliendo un linguaggio adeguato.*
2. *È possibile che tutti e tre dicano il vero? Argomentare.*
3. *Se tutti dicono il falso, chi parteciperà sicuramente alla festa? Argomentare.*

(Suggerimento: si consiglia di usare le tavole di verità).

Esercizio 9 *La seguente formula proposizionale in CNF è soddisfacibile?*

$$\{\{\neg p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{p, q\}\}.$$

Se si risponde "SI" definire un assegnamento che la soddisfa, se si risponde "NO" dimostrare l'insoddisfacibilità usando la regola di Risoluzione.

Esercizio 10 *Consideriamo il linguaggio predicativo composto da un solo simbolo di relazione a due posti* $E(x, y)$. *Il linguaggio contiene anche il simbolo* $=$ *di uguaglianza, sempre interpretato come l'identità.*

1. *Formalizzare in logica dei predicati: "E è una relazione di equivalenza".*
2. *Se l'interpretazione di* E *in una certa struttura è una relazione di equivalenza e la seguente proposizione è vera in quella struttura, quanti elementi hanno le classi di equivalenza di* E*?*

   $$\forall x \exists y \exists w (E(x, y) \wedge E(x, w) \wedge \neg(y = w) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(x = w) \wedge \forall z (E(x, z) \to ((y = z) \vee (w = z) \vee (x = z))))$$

3. *Nell'interpretazione con dominio* $\mathbb{Z}$ *in cui il simbolo* E *è interpretato come la relazione seguente:*

   $$\{(n, m) : m \in \{n - 1, n, n + 1\}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

   se la seguente proposizione è vera, che interpretazione deve avere necessariamente il simbolo di relazione E*?*

   $$\forall x \forall y \forall z ((E(x, y) \wedge E(y, z)) \to E(x, z)).$$