**Esercizio 1.** Calcolare $\det A$ con

$$A := \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Calcolarlo con un opportuno sviluppo di Laplace e, in alternativa, tramite la riduzione a scala.

Riduco a scala e tengo conto degli scambi di righe variabile K.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; A_3 = A_3 - \frac{1}{3}A_1 \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \; A_3 = A_3 + \frac{2}{3}A_2 \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix} = S \Rightarrow \begin{cases} \det(S) = -7 \\ K = 0 \end{cases} \Rightarrow \det(A) = (-1)^0 \cdot (-7) = -7$$

**Esercizio 2.** Utilizzando un opportuno sviluppo di Laplace, calcolare

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

e determinare per quali valori di $k$ la matrice è invertibile.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & K & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{SVILUPPO RIGA } 1} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & K & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \text{SVILUPPO RIGA } 3 \to \left( (-1)^4 \cdot 2 \cdot \det \begin{bmatrix} K & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + (-1)^7 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & K \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

Ora utilizzo la formula nota del det. per matrici 2×2:

$$2 \cdot \det \begin{bmatrix} K & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & K \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2(K-1) - (-1-K) = 2K - 2 + 1 + K = 3K - 1$$

LA MATRICE È INVERTIBILE SE E SOLO SE $K \neq \frac{1}{3}$

**Esercizio 3.** Consideriamo le matrici

$$A = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} a & b & l & m \\ c & d & n & p \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & z & w \end{vmatrix}.$$

Dimostrare che

$$\det A = \det B = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

per il teo. di Binet, so che $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$. mostro che

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ag+bz & ah+bw \\ cg+dw & ch+dw \end{vmatrix} \to \det = (ag+bz)(ch+dw) - (ah+bw)(cg+dw)$$

$$= \cancel{ag}ch + agdw + bzch + bzdw - \cancel{ahc}g - ahdw - bwcg - bdw^2$$

$$= agdw + b(zch + zdw - wgc - dw^2) - ahdw =$$

$$= awd(g-h) + b(zch + zdw - wgc - dw^2)$$

RIDUCO B A TRIANGOLARE

$$\begin{vmatrix} a & b & l & m \\ c & d & n & p \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & z & w \end{vmatrix} \; B_2 = B_2 - \frac{c}{a}B_1 = \begin{vmatrix} a & b & l & m \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & n - \frac{lc}{a} & p - \frac{mc}{a} \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & z & w \end{vmatrix} = B_4 = B_4 - \frac{z}{g}B_3 \sim \begin{vmatrix} a & b & l & m \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & n - \frac{lc}{a} & p - \frac{mc}{a} \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & 0 & w - \frac{hz}{g} \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = a\left(d - \frac{bc}{a}\right) g \left(w - \frac{hz}{g}\right) = (ad - bc)(gw - hz)$$

**Esercizio 4.** Consideriamo $V = \mathbb{R}_2[t]$ e l'applicazione $T : V \to V$ che associa ad un polinomio la sua derivata: $T(p) := p'$. Sappiamo che $T$ è lineare. Determinare la matrice $A$ associata a $T$ nella base canonica di $V$, $\mathcal{E} := \{1, t, t^2\}$, presa come base di partenza e come base di arrivo.
Calcolare $\det A$.

SIA $\bar{v} \in V \Rightarrow \bar{v} = 1 \cdot x_1 + t \cdot x_2 + t^2 \cdot x_3$ $\quad T(\bar{v}) = 1 \cdot y_1 + t \cdot y_2 + t^2 \cdot y_3$

$$T(x_1 + t x_2 + t^2 x_3) = x_1 T(1) + x_2 T(t) + x_3 T(t^2)$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{vmatrix} \right\}$$

! SO COME È FATTA T $\Rightarrow$ $T\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad T\left(\begin{vmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad T\left(\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 0 \\ 2t \\ 0 \end{vmatrix}$

$$T(\bar{v}) = x_1 \left( 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{vmatrix} \right) +$$
$$x_2 \left( 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{vmatrix} \right) + \Rightarrow M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$x_3 \left( 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{vmatrix} \right)$$

Essendo che $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T)$ ha una riga con tutti zeri non è invertibile! Ha il determinante uguale a 0.

NOTA CURIOSA:

Questa matrice rappresenta l'applicazione che associa ad un polinomio di secondo grado la sua derivata. È definita su una matrice 3x3, ma noi sappiamo che l'applicazione inversa della derivazione, esiste, ed è l'integrazione (per il teo. fondamentale del calcolo integrale), l'integrazione associa ad un polinomio di grado n, un polinomio di grado n+1, è quindi ovvio che in questo spazio vettoriale di dimensione 3 è impossibile definire l'applicazione di integrazione, in quanto l'applicazione T dovrebbe essere definita da R_3[t]→R_3[t], necessitando di una mat. 4x4.