Metodi Matematici per l'Informatica

Esame (a.a. 20/21, I canale) - Docente: Lorenzo Carlucci - Data: 06 Giugno 2021

Esercizio 1 *Sia S la parola formata dalla concatenazione del vostro nome e del vostro cognome. Per esempio MARIOROSSI.*

1. *Quanti sono gli anagrammi di S?*
2. *Quanti sono gli anagrammi di S che non iniziano con la prima lettera di S?*
3. *Quanti sono gli anagrammi di S che non iniziano né finiscono con la prima lettera di S?*

Esercizio 2 *Un gruppo musicale ha composto 10 brani in inglese e 10 in italiano.*

1. *In quanti modi si possono scegliere 6 brani da inserire in un disco?*
2. *In quanti modi si possono scegliere 3 brani in inglese e 3 brani in italiano da inserire in un disco, e tra questi un solo brano (in inglese o in italiano) da pubblicare come singolo?*
3. *In quanti modi si possono scegliere 3 brani in italiano e 3 brani in inglese da inserire in un disco, e tra questi un singolo in inglese e un singolo in italiano?*

Esercizio 3 *Siano $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \setminus \{2\} \to \mathbb{N}$ due funzioni. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.*

1. *Se f è suriettiva allora g non è la sua inversa.*
2. *È possibile che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $(g \circ f)(n) = n$.*
3. *Se g è la funzione identità allora lo è anche $(g \circ f)$.*

Esercizio 4 *Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, siano $R = \{(1, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$ e $S = \{(2, 1), (2, 4), (4, 5)\}$ due relazioni su A.*

1. *$R \cup S$ è transitiva?*
2. *Calcolare $S \circ S$.*
3. *Calcolare la chiusura transitiva di R.*

Esercizio 5 *Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.*

1. *L'insieme delle sequenze binarie infinite contenenti un numero finito di 1 non è numerabile.*
2. *Sia S un insieme. Se $S \cup S$ ha la stessa cardinalità di S allora S è infinito.*
3. *Qualche funzione di tipo $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ è suriettiva.*

Esercizio 6 *Dimostrare per Induzione che il prodotto di tre numeri interi positivi consecutivi è sempre un multiplo di* 6. *Specificare caso base, ipotesi induttiva e passo induttivo.*

Esercizio 7 *Trovare l'errore (o gli errori) nella seguente dimostrazione per Induzione.*

Tesi*: Se il massimo di due numeri naturali è un numero naturale allora i due numeri sono uguali.*

Dimostriamo la tesi dimostrando la seguente proposizione: Per ogni $k \geq 0$*, per ogni* n, m *naturali, se* $\max(n, m) = k$ *allora* $n = m$.

Base*: Caso* $k = 0$. *Siano* n, m *naturali tali che* $\max(n, m) = 0$. *Ovviamente* $n = m = 0$.

Passo*: Assumiamo l'***Ipotesi Induttiva***: per ogni* $k \geq 0$*, per ogni* n, m *naturali, se* $\max(n, m) = k$ *allora* $n = m$. *Dimostriamo che la tesi vale anche per* $k+1$*, ossia: per ogni* n, m *naturali, se* $\max(n, m) = k + 1$ *allora* $n = m$. *Siano* n, m *naturali tali che* $\max(n, m) = k + 1$. *Dunque* $\max(n - 1, m - 1) = k$. *Per ipotesi induttiva segue* $n - 1 = m - 1$. *Dunque* $n = m$.

Esercizio 8 *Formalizzare le seguenti frasi in un linguaggio proposizionale adeguato e decidere se sono logicamente equivalenti o meno (argomentare).*

1. *Se la linea si interrompe o la batteria è scarica, mentre il cellulare è in modalità di invio allora il cellulare passa alla modalità di sicurezza.*
2. *Se la linea si interrompe, allora il cellulare deve passare in modalità di sicurezza se è in modalità di invio, e se il cellulare è in modalità di invio, passa in modalità di sicurezza se la batteria è scarica.*

(Suggerimento: tavole di verità o equivalenze logiche notevoli).

Esercizio 9 *La seguente formula proposizionale in CNF è soddisfacibile?*

$$\{\{p, q\}, \{p, r\}, \{\neg p, r\}, \{r, s\}, \{r, \neg q\}, \{\neg s, \neg q\}, \{\neg r\}\}.$$

Se si risponde "SI" definire un assegnamento che la soddisfa, se si risponde "NO" dimostrare l'insoddisfacibilità usando la regola di Risoluzione.

Esercizio 10 *Consideriamo il linguaggio predicativo* $\mathcal{L}$ *composto da un solo simbolo di relazione a due posti* $E(x, y)$*, un simbolo di costante* c *e il simbolo di uguaglianza* $=$.

1. *Tradurre nel linguaggio formale* $\mathcal{L}$ *la seguente proposizione, indicando le interpretazioni dei simboli usati: "Tutti gli amici di Carlo hanno anche almeno un altro amico".*
2. *Tradurre in linguaggio naturale il seguente enunciato formale nel linguaggio* $\mathcal{L}$ *interpretando* $E(x, y)$ *come "*x *è amico di* y*" e* c *come Carlo:*

$$\exists x \exists z \forall y (\neg E(x, c) \wedge E(z, c) \wedge (E(x, y) \leftrightarrow \neg E(z, y))).$$

3. *Nell'interpretazione con dominio* $\mathbb{N}$ *in cui il simbolo* E *è interpretato come la relazione seguente:*

$$\{(n, m) : m = n + 1\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

se la seguente proposizione è vera in questa interpretazione, che interpretazione deve necessariamente avere il simbolo di costante c*?*

$$\neg \exists x E(c, x).$$