Marco Casu

Automi, Calcolabilità e Complessità

Sapienza
Università di Roma

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica
Dipartimento di Informatica

Questo documento è distribuito sotto la licenza GNU, è un resoconto degli appunti (eventualmente integrati con libri di testo) tratti dalle lezioni del corso di Automi, Calcolabilità e Complessità per la laurea triennale in Informatica. Se dovessi notare errori, ti prego di segnalarmeli.

INDICE

1 Automi **3**
1.1 Linguaggi Regolari 3

CAPITOLO

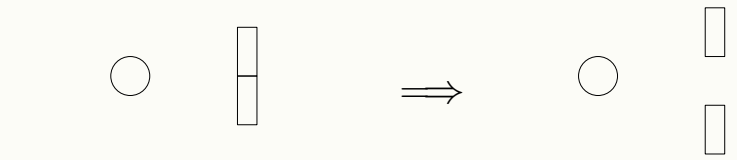
1

AUTOMI

1.1 Linguaggi Regolari

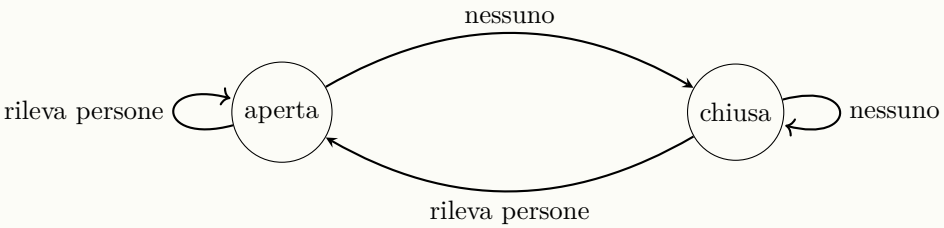
Un *automa a stati finiti* è, seppure limitato nella memoria e nella gestione dell'input, il più semplice modello di computazione. Un automa può interagire con l'input esclusivamente "scorrendolo" in maniera sequenziale.

Esempio : Si vuole modellare una semplice porta con sensore, che si apre quando qualcuno si trova nelle vicinanze.



una persona si trova davanti la porta — la porta si apre

Un automa che modella il problema è il seguente :



Un automa ha alcuni stati speciali, come quello iniziale, indicato con un apposita freccia, e degli stati detti *di accettazione*, ossia stati in cui deve necessariamente terminare la computazione per essere definita valida, vengono rappresentati con un doppio cerchio.

Il modello di calcolo degli automi è riconducibile al concetto di *linguaggio regolare*, che verrà formalizzato in seguito, segue ora una definizione formale di automa.

Definizione (DFA) : : Un DFA (Deterministic Finite Automa) è una 5-tupla, $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ di cui

- Q è l'insieme degli stati possibili
- Σ è l'alfabeto che compone le stringhe in input

- δ è una mappa $Q \times \Sigma \to Q$ detta *funzione di transizione.*
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale.
- $F \subseteq Q$ è l'insieme degli stati di accettazione.

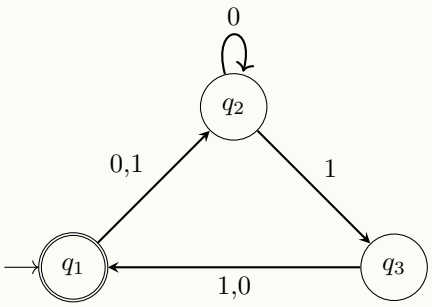


Figura 1.1: semplice automa

Nell'esempio in figura 1.1, si ha che

- $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $F = \{q_1\}$
- $q_0 = q_1$
- $\delta =$

	0	1
q_1	q_2	q_2
q_2	q_2	q_3
q_3	q_1	q_1

Sia D un DFA, chiamiamo **linguaggio dell'automa**, e denotiamo $L(D)$, l'insieme delle stringhe che date in input a D fanno si che D termini su uno stato di accettazione. Per definire formalmente un linguaggio

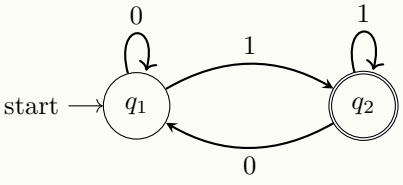


Figura 1.2: il linguaggio di tale automa risulta essere composto dalle stringhe che terminano con 1

di un automa, è necessario introdurre la **funzione di transizione estesa**:

$$\delta^*(q, \epsilon) = \delta(q, \epsilon)$$

$$\delta^*(q, ax) = \delta^*(\delta(q, a), x)$$

dove

$$a \in \Sigma, \quad x \in \Sigma^*, \quad \epsilon = \text{ stringa vuota}$$

Σ^* è l'insieme di tutte le stringhe formate dall'alfabeto Σ. Passiamo ora alla definizione di **configurazione**, essa rappresenta lo stato dell'automa ad un certo punto della computazione, essa è formata da una coppia

$$Q \times \Sigma^*$$

Rappresentante uno stato, ed una stringa di input rimanente da computare.

Un **passo della computazione** in un automa rappresenta una transizione da una configurazione ad un altra, è una relazione binaria $\vdash_D : Q \times \Sigma^*$ tale che

$$(p, ax) \vdash_D (q, x) \iff \delta(p, a) = q \quad \text{dove} \quad p, q \in Q, \;\; a \in \Sigma, \;\; x \in \Sigma^*$$

Si può estendere la definizione di passo di computazione, considerando la sua *chiusura transitiva* $\vdash_D^*$. Essa si ottiene aggiungendo a $\vdash_D$ tutte le coppie in $Q \times \Sigma^*$ che rendono la relazione chiusa rispetto la riflessività e rispetto la transitività.

$$(q, aby) \vdash_D (p, by) \;\wedge\; (p, by) \vdash_D (ry) \implies (q, aby) \vdash_D^* (r, y)$$

Ad esempio, nell'automa in figura 1.2, risulta chiaro che

$$\begin{cases} (q_1, 011) \vdash_D (q_1, 11) \\ (q_1, 11) \vdash_D (q_2, 1) \\ (q_2, 1) \vdash_D (q_2, \epsilon) \end{cases} \implies (q_1, 011) \vdash_D^* (q_2, \epsilon)$$

Inoltre

$$\delta^*(q_1, 011) = \delta^*(q_1, 11)$$

Se non specificato diversamente, con ϵ verrà indicata la stringa vuota.