Metodi Matematici per l'Informatica - Dispensa 8
(a.a. 22/23, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (`lorenzo.carlucci@uniroma1.it`)

1 Funzioni

In Informatica una funzione è l'associazione di un input a un output. L'input può essere di vario genere: numerico, simbolico, etc. e così l'output. Parliamo di *funzione* quando siamo sicuri che a un input in entrata corrisponderà almeno un output in uscita.

Più astrattamente poniamo la seguente definizione sufficientemente generale.

Definizione 1 (Funzione) *Una funzione è una associazione tra elementi di un insieme I (detto dominio) ed elementi di un insieme O (detto codominio) in modo tale che ogni elemento del dominio venga associato un unico elemento del codominio. Denotiamo una funzione da un dominio I a un codominio O come segue:*

$$f : I \to O$$

In generale I e O sono due insiemi arbitrari. Ogni elemento $x \in I$ viene associato (o mappato) da f in un unico elemento $y \in O$. In questo caso scriviamo $f(x) = y$ e diciamo che y è immagine di x via f.

Definizione 2 (Immagine e pre-immagine di un elemento) *Sia $f : X \to Y$ è una funzione. Se $y \in Y$ e $x \in X$ sono tali che $f(x) = y$ chiamiamo y una immagine di x via f e x una pre-immagine di y via f.*

Esempio 1 *Se associo a ogni individuo i suoi figli non ottengo una funzione se interpreto l'associazione come una associazione con dominio gli individui e codominio gli individui: lo stesso individuo può avere più figli o nessun figlio – violando così la definizione di funzione.*

Ottengo però una funzione se interpreto l'associazione come una associazione con dominio gli individui e codominio i sottinsiemi di individui: associo a ogni individuo l'insieme di tutti i suoi figli. Se non ha figli, l'insieme associato è un insieme vuoto. Indicando con I l'insieme degli individui, questa funzione è di tipo: $p : I \to \mathcal{P}(I)$.

Esempio 2 *Sia A un insieme. Se associo a ogni elemento $a \in A$ tutti suoi soprainsiemi in A ottengo una funzione f di tipo:*

$$f : A \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$$

in quanto l'immagine di un elemento del dominio è un insieme di sottinsiemi di A.

Esempio 3 *Sia A un insieme. Se associo a ogni sottinsieme di A la sua cardinalità ottengo una funzione f di tipo:*

$$f : \mathcal{P}(A) \to \mathbf{N},$$

dato che gli elementi del dominio sono i sottinsiemi di A e i valori possibili sono i naturali.

Se A ha cardinalità n so che l'associazione descritta sopra è una funzione di tipo:

$$g : \mathcal{P}(A) \to \{0, 1, 2, \ldots, 2^n\},$$

Considerando la f definita sopra, posso affermare correttamente che se A ha cardinalità n allora $f(\mathcal{P}(A)) \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, 2^n\}$.

Osservazione 1 *Si noti che secondo la definizione proposta una funzione non è identificabile semplicemente come una regola di associazione di elementi di un insieme a elementi di un altro insieme. La specifica di una funzione contiene la specifica del suo dominio e del suo codominio. Due funzioni in questo senso possono differire (a livello di definizione) anche se la regola che le definisce è la stessa. A volte, seguendo l'uso comune, identificheremo la funzione con la regola.*

Esempio 4 *La stessa regola di calcolo, per es.* $x \mapsto x - 1$ *dà luogo a differenti funzioni a seconda di come dichiariamo dominio e codominio. Per esempio,* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, *con* $f(x) = x - 1$ *è una funzione con dominio* $\mathbb{Z}$ *e codominio* $\mathbb{Z}$. *Si tratta di una funzione perché per ogni elemento* x *del dominio* $\mathbb{Z}$ *esiste ed è unico l'elemento* y *del codominio* $\mathbb{Z}$ *che viene associato a* x *da* f.

Al contrario una dichiarazione del tipo $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *con* $g(x) = x - 1$ *non è una buona dichiarazione di funzione perché l'elemento* 0 *del dominio* $\mathbf{N}$ *non ha una immagine nel codominio* $\mathbf{N}$. *Se invece scriviamo* $h : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \cup \{-1\}$ *con* $h(x) = x - 1$ *oppure* $h' : \mathbf{N} \setminus \{0\} \to \mathbf{N}$ *con* $h'(x) = x - 1$ *abbiamo due dichiarazioni corrette di funzione.*

Esempio 5 *L'associazione a un numero* x *del suo quadrato* x^2 *ha senso in molti contesti. Specificando in modi diversi dominio e codominio di una tale associazione d luogo – secondo la definizione – a diverse funzioni. Per esempio,*

$$f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

è il quadrato preso sui naturali, mentre

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

è il quadrato definito sui reali. In senso tecnico, si tratta di due funzioni differenti che possono avere proprietà differenti.

Osservazione 2 *Si nota anche che se* $f : X \to Y$ *è una funzione, allora sono funzioni anche tutte le associazioni da elementi di* X *a elementi di* Z *per qualunque soprainsieme* Z *di* Y *definita esattamente come* f. *Analogamente sono funzioni tutte le associazioni di tipo* $W \to Y$ *per ogni sottinsieme* $W \subseteq X$ *di* X, *definite esattamente come* f.

Osservazione 3 *Attenzione! Nella nostra definizione di funzione ci sono due componenti fondamentali che possono causare confusione:*

1. *Una funzione deve essere definita su tutti gli elementi del suo dominio.*

2. *Non è detto che tutti gli elementi del codominio della funzione siano immagini di elementi del dominio!*

Gli elementi del codominio di una funzione $f : I \to O$ *sono in generale un sottinsieme del codominio* O.

L'insieme $\{s \in O : \text{ esiste un } t \in I \text{ tale che } f(t) = s\}$ viene detta l'immagine di f su I e denotata con $f(I)$. In generale si ha $f(I) \subseteq O$, ma non necessariamente si ha $f(I) = O$.

Analogamente possiamo definire *l'immagine via* f di un qualunque *sottinsieme* A del dominio I: Sia $A \subseteq I$. L'immagine via f di A, denotata con $f(A)$ è l'insieme di tutti e soli gli elementi del codominio O che hanno una pre-immagine di A. In simboli:

$$f(A) = \{y \in O : \text{ esiste un } x \in A \text{ tale che} f(x) = y\}.$$

Se $f : I \to O$ e $A \subseteq I$ vale sempre $f(A) \subseteq f(I)$. Per dimostrarlo scriviamo le definizioni dei due insiemi.

$$f(I) = \{y \in O \mid \text{ esiste } x \in I \text{ t.c. } f(x) = y\},$$

$$f(A) = \{y \in O \mid \text{ esiste } x \in A \text{ t.c. } f(x) = y\},$$

Sia y arbitrario in $f(A)$. Per definizione $y \in O$ e per qualche $x \in A$ abbiamo $f(x) = y$. Dato che $A \subseteq I$ vale che $y \in O$ e per qualche $x\ inI$ abbiamo $f(x) = y$. Dunque $y \in f(I)$.

Funzioni come insiemi Nella Matematica moderna è abituale *identificare* una funzione con un insieme che corrisponde a tutti i punti del suo grafico. Una funzione $f : I \to O$ associa a ogni elemento $x \in I$ (*l'argomento*) un unico elemento $y \in O$ (*il valore*), che denotiamo con $f(x)$. Una associazione di questo tipo viene codificata come la coppia ordinata (x, y). Se conosco tutte le coppie ordinate (argomento, valore), conosco completamente f. Di fatto una funzione $f : I \to O$ viene identificata con l'insieme delle coppie ordinate (argomento, valore), ossia con $\{(x, y) : x \in I, y \in O, f(x) = y\}$.

Dati due insiemi A, B denotiamo con $A \times B$ l'insieme delle coppie ordinate di tipo (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$. Questo insieme viene detto il *prodotto cartesiano* di A per B. Tecnicamente dunque, una funzione $f : I \to O$ è un sottinsieme del prodotto cartesiano $I \times O$. Inoltre, per ogni elemento $x \in I$ esiste un unico elemento $y \in O$ tale che $(x, y) \in f$.

Possiamo dare la seguente definizione astratta di funzione.

Definizione 3 (Funzione (definizione insiemistica)) *Siano A, B insiemi. Una funzione $f : A \to B$ è un sottinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ tale che per ogni $a \in A$ esiste uno e un solo $b \in B$ tale che $(a, b) \in f$.*

La definizione insiemistica di funzione data sopra è anche detta *estensionale* in quanto una funzione è identificata con l'insieme delle coppie argomento/valore e gli insiemi sono oggetti *estensionali* nel senso che due insiemi con la stessa *estensione* (= gli stessi elementi) sono lo stesso insieme. Al concetto estensionale di funzione si contrappone quello *intensionale*: la stessa funzione può essere ovviamente descritta da diverse regole di associazione o da diverse formule chiuse che danno luogo allo stesso insieme di coppie ordinate argomento/valore. Per esempio la funzione descritta dalla regola $f(x) = x + 1$ (sui naturali) è ovviamente la stessa descritta di quella descritta dalla regola $g(x) = ((x + 1) \times 2) : 2$ o dalla regola $h(x) = x + 1 - 2$. Analogamente esistono sempre molti (più precisamente infiniti) programmi (sintatticamente) distinti che associano esattamente gli stessi output agli stessi input. Queste diverse regole e questi diversi programmi per la stessa funzione vengono considerati *intensionalmente* differenti ma *estensionalmente* identici.

Funzioni a più argomenti Siamo abituati a trattare con funzioni con più di un argomento (per esempio, la somma). Secondo la definizione di funzione che abbiamo dato una funzione a due argomenti viene formalizzata come una associazione definita su insieme di coppie ordinate. Analogamente una funzione di tre argomenti viene formalizzata come associazione definita su un insieme di triple ordinate, e così per una funzione di n argomenti.

Abbiamo dato come primitiva la nozione di sequenza ordinata di elementi (n-pla ordinata). Per convenienza indichiamo con $A \times B$ l'insieme delle coppie ordinate (a, b) dove $a \in A$ e $b \in B$. $A \times B$ è un insieme e viene detto prodotto cartesiano di A e B. Una funzione a due input come la somma viene quindi formalizzata come una associazione tra elementi di $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ e elementi di $\mathbf{N}$, ossia è dichiarata come segue:

$$s : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}.$$

Il prodotto cartesiano di un insieme A per se stesso $A \times A$ viene anche denotato con A^2.

Analogamente se $A_1, \ldots, A_n$ sono insiemi definiamo il loro prodotto cartesiano, indicato con $A_1 \times \cdots \times A_n$ come l'insieme di tutte le n-ple ordinate $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dove $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$.

Si osserva che è possibile definire l'insieme delle triple, quadruple, n-ple ordinate iterando il prodotto cartesiano a due argomenti. Se A è un insieme, il prodotto cartesiano n-esimo di A viene denotato con A^n. Una funzione di tipo $f : A^n \to B$ è una funzione che ha per dominio l'insieme delle n-ple ordinate di elementi di A e per codominio B.

Rappresentazioni di funzioni Esistono diversi modi di rappresentare una funzione (in particolare una funzione con dominio finito) che risultano comodi e adatti in diverse situazioni.

1. Rappresentazione grafica Una funzione da un dominio I a un codominio O si può rappresentare graficamente su un piano cartesiano. Numero le ascisse con gli elementi del dominio e le ordinate con gli elementi del codominio e segno un punto in (x, y) se $f(x) = y$ come facciamo usualmente in Analisi. Dal grafico posso giudicare se si tratti di una funzione: a ogni punto in ascissa deve corrispondere uno e un solo punto in ordinata.

2. Rappresentazione diagrammatica Una funzione da un dominio finito I a un codominio finito O si può rappresentare con un diagramma a frecce disegnando a sinistra tanti pallini quanti sono gli elementi di I e a destra tanti pallini quanti sono gli elementi di O e mettendo una freccia da sinistra a destra tra ogni elemento di I e la sua immagine secondo f. Dal diagramma posso giudicare se si tratti di una funzione: da ogni punto a sinistra deve uscire esattamente una freccia.

3. Rappresentazione tabulare Una funzione può rappresentarsi in molti casi in forma tabulare enumerando sulla prima riga gli elementi del dominio e sulla seconda riga i corrispondenti elementi del codominio.

Anche funzioni a dominio infinito possono rappresentarsi tabularmente, ma tale rappresentazione è sempre ambigua, perché si può continuare in infiniti modi diversi mantenendo la proprietà di essere una funzione!

4. Rappresentazione algebrica Una rappresentazione con formula è spesso conveniente, specie se si tratta di funzioni con dominio infinito. Un caso particolare è una definizione per ricorsione, particolarmente adatta quando si tratta di funzioni con dominio i numeri naturali.

2 Iniezioni, Suriezioni, Biiezioni

Alcuni tipi particolari di funzione emergono naturalmente da semplici problemi di conteggio.

Esempio 6 *Voglio distribuire tutti i miei 8 giochi tra i 5 figli dei miei amici. In quanti modi posso farlo? Sappiamo già rispondere: ho* 5 *possibilità per assegnare il primo gioco,* 5 *per assegnare il secondo, etc. Dunque ho* 5^8 *possibili assegnazioni. Posso rappresentare il problema come l'associazione di un gioco a un bambino, ossia come una funzione dal dominio* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *(giochi) al codominio* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *(bambini). Che si tratti di una funzione segue dall'ovvietà che non posso dare lo stesso gioco a due bambini diversi! Questo semplice problema di conteggio corrisponde dunque al concetto generico di funzione:* **sto contando le funzioni** *dal dominio* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *al codominio* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Il concetto generale di funzione (su dominio finito) corrisponde quindi esattamente a quello di distribuzione con ripetizione. In generale il numero di funzioni con dominio di cardinalità k e codominio di cardinalità n sono $D'_{n,k} = n^k$.

Esempio 7 *Voglio distribuire tutti i miei 3 giochi tra i 5 figli dei miei amici,* in modo che nessuno riceva più di un gioco. *In quanti modi posso farlo? Sappiamo già rispondere: ho 5 scelte per il primo gioco, 4 scelte per il secondo, etc. Ho dunque* $5\times4\times3$ *modi di distribuire i giochi rispettando il vincolo. Considerando una soluzione come una associazione di un gioco a un bambino, mi interessando le funzioni dal dominio* $\{1, 2, 3\}$ *(giochi) al codominio* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *(bambini)* escludendo quelle in cui due elementi distinti del dominio hanno la stessa immagine *(due giochi diversi vanno allo stesso amico). Una funzione di questo tipo si dice* iniettiva. *Abbiamo dunque in generale che il numero di* **funzioni iniettive** *da un dominio di cardinalità k a un codominio di cardinalità n è $D_{n,k}$ ossia il numero di disposizioni semplici di ordine k su n.*

Esempio 8 *Voglio distribuire tutti i miei* 8 *giochi tra i* 5 *figli dei miei amici* in modo che ciascuno abbia almeno un gioco. *Sappiamo già contarli (è un po' lungo, si usa il PIE). In termini di funzioni sto considerando le funzioni con dominio* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *e codominio* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *tali che* ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio. *Queste funzioni si chiamano* **funzioni suriettive**. *(Esercizio: contarle, usando il PIE).*

Gli esempi di sopra evidenziano la naturalezza dei seguenti concetti generali.

Definizione 4 (Funzione iniettiva) *Una funzione $f : I \to O$ è detta* iniettiva *se ogni elemento del codominio O è immagine di al più un elemento del dominio I.*

Osservazione 4 *La definizione di sopra si riformula in modo equivalente così: una funzione $f : I \to O$ è iniettiva se e solo se* **per ogni** $i, i' \in I$ **se** $i \neq i'$ **allora** $f(i) \neq f(i')$.

Analogamente si riformula così, nella forma contrapposta (ossia invertendo l'implicazione e negando l'antecedente e il conseguente): **per ogni** $i, i' \in I$, **se** $f(i) = f(i')$ **allora** $i = i'$.

Osservazione 5 *In termini di diagrammi una funzione è iniettiva se e solo se ogni punto del codominio ha* **al massimo** *una freccia entrante.*

In termini di grafico cartesiano una funzione è iniettiva se e solo se ogni asse verticale contiene **al più** *un punto.*

Osservazione 6 *Una funzione $f : I \to O$* **non** *è iniettiva se e solo se* **Esistono** $i, i' \in I$ *tali che* $i \neq i'$ **e** $f(i) = f(i')$.

Esempio 9 *L'associazione tra un individuo e il suo Codice Fiscale è una funzione iniettiva.*

Esempio 10 *L'associazione tra un individuo e suo padre è una funzione non iniettiva.*

Definizione 5 (Funzione suriettiva) *Una funzione $f : I \to O$ è detta* suriettiva *se ogni elemento del codominio O è immagine di <u>al meno un</u> elemento del dominio I.*

Osservazione 7 *La definizione di sopra si riformula in modo più esplicito così: una funzione $f : I \to O$ è suriettiva se e solo se* **per ogni** $o \in O$ **esiste** $i \in I$ *tale che* $f(i) = o$.

Osservazione 8 *In termini di diagrammi una funzione è suriettiva se e solo se ogni punto del codominio ha* **almeno** *una freccia entrante.*

In termini di grafico cartesiano una funzione è suriettiva se e solo se ogni asse verticale contiene **almeno** *un punto.*

Osservazione 9 *Una funzione $f : I \to O$* **non** *è suriettiva se e solo se* **esiste** $o \in O$ *tale che* **per ogni** $i \in I$ *si ha* $f(i) \neq o$.

Definizione 6 (Funzione biiettiva) *Una funzione $f : I \to O$ è detta* biiettiva *se è suriettiva e iniettiva; ossia ogni elemento del codominio O è immagine di <u>esattamente un</u> elemento del dominio I.*

Osservazione 10 *In termini di diagrammi una funzione è biiettiva se e solo se ogni punto del codominio ha* **esattamente** *una freccia entrante.*

Esercizio 1 *Consideriamo la funzione $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definita come segue: $f(x) = 1+x$. Si tratta di una funzione iniettiva? Suriettiva?*

Esercizio 2 *Consideriamo la funzione $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definita come segue: $f(x) = 1 + x^2$. Si tratta di una funzione iniettiva? Suriettiva?*

Esercizio 3 *Consideriamo la funzione $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definita come segue: $f(n) = 1 + x^3$. Si tratta di una funzione iniettiva? Suriettiva?*

Esercizio 4 *Consideriamo la funzione $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ così definita:*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \text{ è pari} \\ x-3 & \text{se } x \text{ è dispari} \end{cases}$$