

#### Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 7 12 Maggio 2023 — Compito n. 00042

Istruzioni: le prime due caselle  $(\mathbf{V} / \mathbf{F})$  permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "C" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.

Per selezionare una casella, annerirla completamente:  $\blacksquare$  (non  $\boxtimes$  o  $\boxdot$ ).

Nome:	Murly

Cognome:



Matricola:

2046212	2	0	4	6	2	1	2
---------	---	---	---	---	---	---	---

## 1B 1C 1D 2A 2B 2C

#### 1A 1B 1C 1D 2A 2B 2C 2D 3A 3B 3C 3D 4A 4B 4C 4D

	 	 	 	 		 •	 	 	
$\mathbf{V}$					#	4			
$\mathbf{F}$		-							
$\mathbf{C}$									

- 1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.
- 1A) L'equazione differenziale

$$y'(t) = 8t + 3t^2$$

è del primo ordine.

1B) L'equazione differenziale

$$11 y'(t) y''(t) + 10 [y(t)]^3 = 0$$

è del secondo ordine.

1C) L'equazione differenziale

$$[\sin(3y'(t))]' = 0$$

è del secondo ordine.

**1D)** L'equazione differenziale

$$2t y^{(1)}(t) + 5t^2 y^{(2)}(t) + 4t^3 y^{(3)}(t) = 0$$

è del secondo ordine.

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 4y(t) + 3$$
.

- 2A) L'equazione ha un numero finito di soluzioni.
- **2B)** Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che y(0) = 3.
- **2C)** Non esistono soluzioni dell'equazione tali che y(0) = 3 e y'(0) = 12.
- **2D)** Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che y(0) = 3 e y'(0) = 15.

3) Si consideri il problema di Cauchy

(1) 
$$\begin{cases} y'(t) = e^{3t^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

- **3A)** Esiste un'unica soluzione di (1).
- **3B)** La soluzione non si può scrivere esplicitamente in termini di funzioni elementari.
- **3C)** Si ha y'(0) = 1.
- **3D**) Si ha y''(0) = 0.
- 4) Si consideri il problema di Cauchy

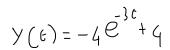
(1) 
$$\begin{cases} y'(t) = -3y(t) + 12, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

- **4A)** La funzione  $Q e^{-3t}$  è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1) per ogni Q in  $\mathbb{R}$ .
- **4B)** L'equazione di (1) ha come soluzione

$$y(t) = -4$$
.

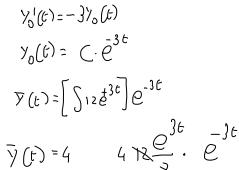
- **4C)** Si ha y''(0) = 36.
- **4D**) Si ha

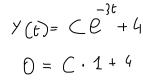
$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 4.$$



#### Docente

- ☐ DelaTorre Pedraza
  - Orsina







Nome

Matricola

Compito 00042

5) Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine

$$y'(t) = f(t).$$

Scrivere tutte le soluzioni di (1) se

**a)** 
$$f(t) = 4t + 4$$
, **b)**  $f(t) = \cos(6t)$ , **c)**  $f(t) = (6t + 5)e^{t}$ , **d)**  $f(t) = \frac{11t}{1 + 6t^{2}}$ .

(b) 
$$\lambda_{(f)} = \cos(ee) = \lambda_{\frac{4}{5}} = \frac{e}{4} = \frac{e}{4}$$

(c) 
$$Y'(t) = (6t+5)e^{t}$$
  $Y(t) = (6t+5)e^{t} + 6e^{t} = (6t+5)e^{t} + 6e^{t} = e^{t}(6t+5-6)e^{t}$   
 $Y(t) = e^{t}(6t+5)e^{t}$ 

$$y(c) = \frac{11t}{1+6t^2}$$

$$\int \frac{11x}{1+6x^2} = \int \frac{12x}{1+6x^2} - \frac{x}{1+6x} = \log(14+6x^2) - \frac{1}{12} \int \frac{12x}{1+6x^2} = \frac{1}{1+6x^2}$$

$$Y(t) = lm(1+6t^2) - \frac{lm(1+6t^2)}{12}$$



Cognome

Nome

Matricola

Compito 00042

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 8y(t) - 13\\ y(0) = 0. \end{cases}$$

- a) Quante soluzioni ha l'equazione di (1)? E quante soluzioni ha (1)?
- b) Scrivere l'equazione omogenea associata all'equazione di (1), e scriverne tutte le soluzioni.
- c) Trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1).
- d) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1) e la soluzione di (1).

# (2) l'aquesione y'(E)=87(6)-13 ha infinite socuzioni, il probleme ol' CAUCHY me lu 1

$$\frac{1}{2}(t) = \frac{3}{2}(t)$$

$$A(t) = 8t$$

$$\overline{y}(t) = \left[ b(s) \cdot e^{A(t)} \right] e^{A(t)}$$

$$\overline{y}(t) = \begin{bmatrix} t \\ b(s) \cdot \overline{e} \end{bmatrix} e^{A(t)} = \begin{bmatrix} b(t) = -13 \\ A(t) = -13 \end{bmatrix} e^{8t}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} b(s) \cdot \overline{e} \\ b(s) \end{bmatrix} e^{8t}$$

$$\overline{y}(t) = \left[ -13 \right]^{t} e^{-8t} = -13 \cdot \left[ -\frac{e^{-8t}}{8} \right] e^{8t} = \frac{13}{8} e^{-8t} \cdot e^{8t} = \frac{13}{8} e^{-8t+8t}$$

$$\overline{y}(t) = \frac{13}{8}$$



$$\gamma(t) = \overline{\gamma}(t) + \gamma(t)$$

$$\overline{y}(t) = \frac{13}{8}$$

$$\gamma_{o}(t) = c \cdot e^{\delta t}$$

$$\gamma(t) = C \cdot e^{t} + \frac{13}{8}$$

$$\Rightarrow \forall (t) = C \cdot e^{8t} + \frac{13}{8}$$

$$0 = C \cdot e_0 + \frac{2}{3}$$

DATO

$$\bigcirc = C + \frac{13}{8} \implies C = -\frac{13}{8}$$

) (o) = 0

$$\gamma(t) = -\frac{13}{8}e^{8t} + \frac{13}{8} = \frac{13}{8}\left[-e^{8t} + 1\right]$$

### Soluzioni del compito 00042

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

Ricordiamo che un'equazione differenziale si dice di ordine  $n \ge 1$  se la derivata di ordine massimo della funzione incognita y(t) è la derivata  $y^{(n)}(t)$ .

1A) L'equazione differenziale

$$y'(t) = 8t + 3t^2$$

è del primo ordine.

**Vero:** Infatti vi compare la derivata prima di y(t), e non derivate di ordine superiore.

1B) L'equazione differenziale

$$11 y'(t) y''(t) + 10 [y(t)]^3 = 0$$

è del secondo ordine.

**Vero:** Infatti vi compare la derivata seconda di y(t), e non derivate di ordine superiore.

1C) L'equazione differenziale

$$[\sin(3y'(t))]' = 0$$

è del secondo ordine.

Vero: Infatti, derivando si ha

$$3\cos(3y'(t))y''(t) = 0,$$

e quindi l'equazione è del secondo ordine.

1D) L'equazione differenziale

$$2t y^{(1)}(t) + 5t^2 y^{(2)}(t) + 4t^3 y^{(3)}(t) = 0$$

è del secondo ordine.

**Falso:** Infatti vi compare la derivata terza di y(t), e non derivate di ordine superiore.

#### 2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 4y(t) + 3$$
.

#### 2A) L'equazione ha un numero finito di soluzioni.

Falso: Essendo un'equazione del primo ordine, ha infinite soluzioni, dipendenti da un'unica costante reale.

#### **2B)** Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che y(0) = 3.

**Vero:** Assegnando la condizione iniziale y(0) = 3 si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione.

#### **2C)** Non esistono soluzioni dell'equazione tali che y(0) = 3 e y'(0) = 12.

**Vero:** Se y'(0) = 3, sostituendo nell'equazione si ha

$$y'(0) = 4y(0) + 3 = 4 \cdot 3 + 3 = 15 \neq 12$$
,

e quindi non esiste alcuna soluzione dell'equazione che verifica le due condizioni assegnate.

#### **2D)** Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che y(0) = 3 e y'(0) = 15.

**Vero:** Sappiamo già che esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che y(0) = 3 (si veda la domanda **2B**). Dall'equazione, scritta per t = 0, si ricava

$$y'(0) = 4y(0) + 3 = 4 \cdot 3 + 3 = 15$$
,

e quindi la seconda condizione è automaticamente verificata.

3) Si consideri il problema di Cauchy

(1) 
$$\begin{cases} y'(t) = e^{3t^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Integrando tra 0 e s si ha, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$y(s) - y(0) = \int_0^s y'(t) dt = \int_0^s e^{3t^2} dt$$

da cui, ricordando che y(0)=0, segue che l'unica soluzione del problema di Cauchy è data da:

(2) 
$$y(s) = \int_0^s e^{3t^2} dt.$$

**3A)** Esiste un'unica soluzione di (1).

Vero: Trattandosi di un problema di Cauchy, esiste un'unica soluzione (si veda anche (2)).

3B) La soluzione non si può scrivere esplicitamente in termini di funzioni elementari.

Vero: La soluzione è data da (2), e l'integrale non si sa calcolare esplicitamente.

**3C)** Si ha y'(0) = 1.

**Vero:** Sostituendo t=0 nell'equazione si trova

$$y'(0) = e^{3 \cdot 0^2} = 1$$
.

**3D)** Si ha y''(0) = 0.

Vero: Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = [y'(t)]' = [e^{3t^2}]' = 6te^{3t^2},$$

da cui segue che

$$y''(0) = 6 \cdot 0 \cdot e^{3 \cdot 0^2} = 0.$$

4) Si consideri il problema di Cauchy

(1) 
$$\begin{cases} y'(t) = -3y(t) + 12, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

(2) 
$$y'(t) = -3y(t).$$

**4A)** La funzione  $Q e^{-3t}$  è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1) per ogni Q in  $\mathbb{R}$ .

**Vero:** Se  $y(t) = Q e^{-3t}$ , allora

$$y'(t) = -Q \cdot 3e^{-3t} = -3 \cdot [Qe^{-3t}] = -3y(t),$$

e quindi la funzione proposta risolve la (2), ovvero l'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

**4B)** L'equazione di (1) ha come soluzione

$$y(t) = -4$$
.

**Falso:** Sostituendo y = -4 nell'equazione di (1) si ha

$$0 \neq 24 = -3 \cdot (-4) + 12,$$

e quindi y(t) = -4 non è soluzione dell'equazione.

**4C)** Si ha y''(0) = 36.

Falso: Iniziamo con l'osservare che dall'equazione, e dalla condizione iniziale, segue che

$$y'(0) = -3y(0) + 12 = -3 \cdot 0 + 12 = 12$$
.

Inoltre, derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = -3y'(t),$$

e quindi

$$y''(0) = -3y'(0) = -3 \cdot 12 = -36 \neq 36$$
.

**4D**) Si ha

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 4.$$

**Vero:** Sappiamo, dalle domande **4A** e **4B** che  $y_0(t) = Q e^{-3t}$  è soluzione dell'equazione omogenea associata (qualsiasi sia Q numero reale) e che  $\overline{y}(t) = 4$  è soluzione (particolare) dell'equazione. Per la teoria generale delle equazioni lineari, le funzioni della forma

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = Q e^{-3t} + 4$$

sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione di (1). Assegnando la condizione iniziale, si trova

$$0 = y(0) = Q + 4$$
,

da cui Q = -4. Ne segue che

$$y(t) = -4e^{-3t} + 4 = 4(1 - e^{-3t})$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy (1), ed è tale che

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} 4(1 - e^{-3t}) = 4.$$

5) Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine

$$(1) y'(t) = f(t).$$

Scrivere tutte le soluzioni di (1) se

**a)** 
$$f(t) = 4t + 4$$
, **b)**  $f(t) = \cos(6t)$ , **c)**  $f(t) = (6t + 5)e^{t}$ , **d)**  $f(t) = \frac{11t}{1 + 6t^{2}}$ .

#### Soluzione:

L'equazione differenziale y'(t) = f(t) si può riformulare così: "la funzione y(t) è una primitiva di f(t)." Pertanto, trovare tutte le soluzioni di (1) è equivalente a trovare tutte le primitive di f(t), ovvero — come è noto... — è equivalente ad integrare f(t).

a) Dato che

$$\int [4\,t + 4]\,dt = 2\,t^2 + 4\,t\,,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = 2t^2 + 4t + c,$$

con c costante arbitraria.

b) Dato che

$$\int \cos(6t) dt = \frac{\sin(6t)}{6},$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = \frac{\sin(6t)}{6} + c,$$

con c costante arbitraria.

c) Dato che, integrando per parti,

$$\int (6t+5) e^t dt = (6t+5) e^t - \int 6 e^t dt = (6t-1) e^t,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = (6t - 1)e^t + c$$
,

con c costante arbitraria.

d) Dato che

$$\int \frac{11 t}{1+6 t^2} dt = \frac{11}{12} \int \frac{12 t dt}{1+6 t^2} = \frac{11}{12} \ln(1+6 t^2),$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = \frac{11}{12} \ln(1 + 6t^2) + c,$$

con c costante arbitraria.

6) Si consideri il problema di Cauchy

(1) 
$$\begin{cases} y'(t) = 8y(t) - 13, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

- a) Quante soluzioni ha l'equazione di (1)? E quante soluzioni ha (1)?
- b) Scrivere l'equazione omogenea associata all'equazione di (1), e scriverne tutte le soluzioni.
- c) Trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1).
- d) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1) e la soluzione di (1).

#### Soluzione:

- a) L'equazione di (1) ha infinite soluzioni (dipendenti da un parametro reale), mentre il problema di Cauchy (1) ha un'unica soluzione.
- b) L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0'(t) = 8 y_0(t) ,$$

le cui soluzioni sono date (per quanto visto a lezione) da

$$y_0(t) = A e^{8t},$$

con A costante reale arbitraria.

c) Per trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1), cerchiamo

$$\overline{y}(t) = C$$
,

con C costante reale. Sostituendo, si ha che deve essere

$$0 = 8C - 13$$

da cui segue  $C = \frac{13}{8}$ . d) Per quanto visto a lezione, tutte le soluzioni dell'equazione di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = A e^{8t} + \frac{13}{8},$$

con A costante reale arbitraria. Assegnando la condizione iniziale, si ha che deve essere

$$0 = A e^{8 \cdot 0} + \frac{13}{8} = A + \frac{13}{8} ,$$

da cui segue che  $A=-\frac{13}{8}$  e quindi l'unica soluzione di (1) è data da

$$y(t) = -\frac{13}{8}e^{8t} + \frac{13}{8} = \frac{13}{8}[1 - e^{8t}].$$