Esercizio 1. Si assuma che - in media - il 2% della popolazione sia mancina. Dato un campione di 100 individui, utilizzando l'approssimazione di Poisson della binomiale, calcolare la probabilità che almeno 3 siano mancini.

probabilita' che un individuo sia mancino : $\frac{2}{100}$, consideriamo una V.A. $X \sim Bin(100, \frac{2}{100})$,

$\mathbb{P}(X=3) = \binom{100}{3}\left(\frac{2}{100}\right)^3 \cdot \left(\frac{98}{100}\right)^{97} \simeq 0{,}2$. Consideriamo $Y^{(n)} \sim Poisson(\underbrace{2}_{\text{tasso di MANCINI su 100 PERSONE}})$

$\mathbb{P}(Y^{(100)} = k) = e^{-2} \cdot \frac{2^k}{k!}$, $\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(Y^{(100)} < 3)$

! $\mathbb{P}(Y^{(100)} < 3) = \mathbb{P}(Y^{(100)} = 0 \cup Y^{(100)} = 1 \cup Y^{(100)} = 2) = \sum_{k=0}^{2} e^{-2} \cdot \frac{2^k}{k!} = e^{-2} \cdot \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!}\right) = 5e^{-2} \Rightarrow \mathbb{P}(X^{(100)} \geq 3) = 1 - 5e^{-2} \simeq 0.32$

Esercizio 2. Una moneta con probabilità di testa pari a $p \in (0,1)$ viene lanciata un numero di volte aleatorio (indipendente dai risultati dei lanci della moneta) con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Trovare le distribuzioni del numero totale di teste e croci otteneute e dimostrare che queste due variabili aleatorie sono indipendenti.

$\{\text{Numero di lanci}\} = X \sim Poisson(\lambda) \Rightarrow \mathbb{P}(\{\text{sono } k \text{ lanci}\}) = \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

$T := \{\text{Numero di teste su } X \text{ lanci}\}$, la prob. che il numero di teste sia k e' condizionata dal numero di lanci : $\mathbb{P}(T=k) = \mathbb{P}(\underbrace{X \geq k}_{\text{LANCI} \geq \text{TESTE}}) \cdot \mathbb{P}(T = k \mid X \geq k) : \sum_{\underbrace{\ell = k}_{\text{LANCI}}}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^\ell}{\ell!} \cdot \binom{\ell}{k} p^k \cdot (1-p)^{\ell-k} \overset{\text{wolfram}}{=} e^{-\lambda \cdot p} \cdot \frac{\lambda p^k}{k!}$

Esercizio 3. Ogni giorno Carlo riceve un numero aleatorio X di email, che possiamo pensare come una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Ogni email, indipendentemente dalle altre e dal numero totale di email ricevute, è spam con probabilità p e legittima con probabilità $1-p$, $p \in (0,1)$. Siano Y e Z rispettivamente il numero di email di spam e di email legittime ricevute oggi da Carlo.

1) Calcolare la distribuzione di Y e quella di Z.

2) Dire se Y e Z siano o meno indipendenti. In caso affermativo dimostrarlo, in caso contrario dare un controesempio.

$M = \text{Numero di email} \sim Poisson(\lambda) \Rightarrow \mathbb{P}(M=m) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^m}{m!}$ dove $\lambda :=$ tasso email x unita' di tempo

1) Se Y e' il numero di email spam ricevute, $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(\{\text{si ricevono ALMENO } k \text{ email e } k \text{ di queste sono spam}\}) = \mathbb{P}(M \geq k) \cdot \mathbb{P}(Y=k \mid M \geq k)$

- $\mathbb{P}(M \geq k) = \mathbb{P}(M = k \cup M = k+1 \ldots M = k+N) = \sum_{i=k}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$

- $\mathbb{P}(Y=k \mid M \geq k) = \frac{\mathbb{P}(Y=k \cap M \geq k)}{\mathbb{P}(M \geq k)} = \frac{\sum_{i=k}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \binom{i}{k} p^k (1-p)^{i-k}}{\sum_{i=k}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}} \Rightarrow \mathbb{P}(M \geq k) \cdot \mathbb{P}(Y=k \mid M \geq k) = \frac{\mathbb{P}(Y=k \cap M \geq k)}{\mathbb{P}(M \geq k)} \mathbb{P}(M \geq k)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(Y=k) = \sum_{i=k}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \binom{i}{k} p^k (1-p)^{i-k} = e^{-\lambda \cdot p} \cdot \frac{(\lambda \cdot p)^k}{k!}$ e $\mathbb{P}(Z=k) = e^{-\lambda(1-p)} \cdot \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!}$