Approssimazione lineare

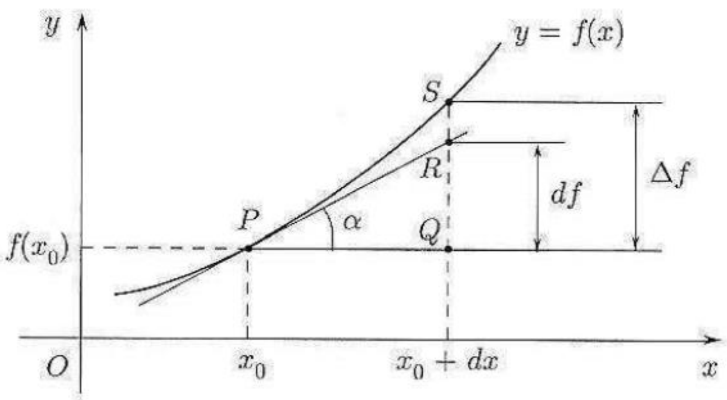
La **linearizzazione** è un operazione essenziale in matematica, consiste **nell'approssimare** una quantità, che dipende da una o più variabili in modo non lineare (quindi non intercorra una proporzione diretta, si riveda il concetto di *linearità*), fornendo informazioni sull'errore commesso.
Parliamo di linearizzazione quando vogliamo approssimare l'incremento subito da una data funzione f(quanto e come cresce sul grafico) in conseguenza di una **variazione** del suo argomento, prendendo l'argomento x_0 sommiamo ad esso dx, che sarebbe la suddetta variazione (il quale valore assoluto deve essere sempre molto piccolo, cioè $|dx| \ll 1$), e sostituiamo alla funzione f, la sua **retta tangente nel punto x_0**.

Quindi per una funzione $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0, se diamo ad x_0 un incremento dx, f subisce un incremento

$$\Delta f = f\left(x_0 + dx\right) - f(x_0)$$

Tale incremento non è proporzionale a dx, quindi non è lineare rispetto a dx.

Sostituiamo poi al grafico di f, quello della sua retta tangente nel punto P=$(x_0, f(x_0))$, e calcoliamo l'incremento per essa, che è uguale all'angolo della tangente moltiplicato all'incremento, cioè $tg(\alpha) \times dx$, che sarebbe $f'(x_0) \times dx$, dato che l'angolo della tangente è uguale alla derivata della funzione nel punto x_0, Tale incremento è uguale al segmento QR in questo grafico.



Questo incremento, che è proporzionale a dx, viene chiamato **differenziale di f** nel punto x_0, e si indica con il simbolo $df(x_0)$.

$$df(x_0) = f'(x_0) \times dx$$

L' o piccolo

Vediamo due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definite in un intorno x_0, possiamo dire che :

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \text{ per } x \to x_0$$

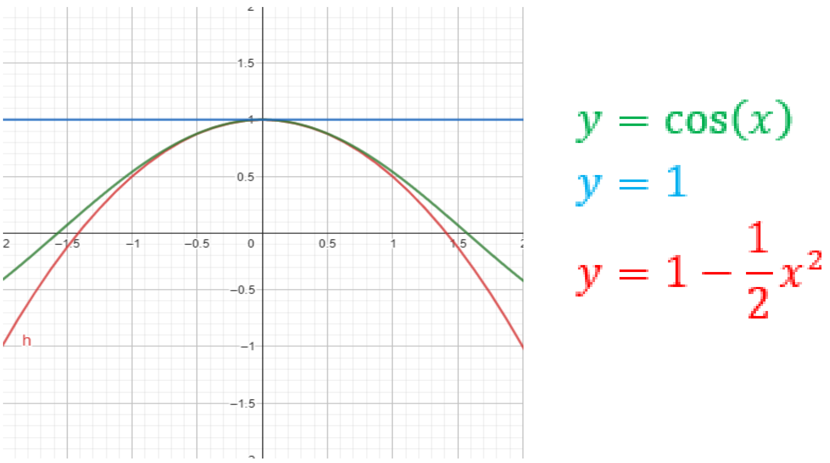
Tale scrittura si legge $f(x)$ è **o piccolo** di $g(x)$ se $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ per $x \to x_0$, vale se f è continua e derivabile in x_0, e sta ad indicare il fatto che $f(x)$ è un **infinitesimo** di ordine superiore rispetto a $g(x)$, tende quindi più velocemente a 0, in quanto il simbolo o(1) denota

una quantità infinitesima.
Vediamo un esempio, per $x \to 0$, possiamo dire che $x^2 = o(x)$, dato che tendono entrambi a 0, ma x_2 è più "rapido" a raggiungere tale valore. Si ricordi quindi : $\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$

Il polinomio di Taylor

Data una funzione f che è derivabile n-volte in x_0 o in un intorno di x_0, considerando che le derivate siano continue, qual è il **polinomio che approssima** meglio f vicino x_0? Si intende quel polinomio, che nel punto fissato, approssima la funzione meglio della sua retta tangente.

Vediamo un esempio, si prenda la funzione $\cos(x)$, nel punto 0, la sua retta tangente equivale ad $y = 0$, ma esiste una parabola $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ che approssima $\cos(x)$ meglio della sua retta tangente.



Difatti, lo scarto tra la funzione e questo polinomio di secondo grado è $o(x^2)$, tende a 0 più rapidamente di x^2.

Data una funzione f derivabile n-volte in $x = 0$, esiste solo un polinomio di grado $\leq n$, chiamato T_n con tale proprietà :

$$T_n(0) = f(0), \quad T_n'(0) = f'(0), \quad T_n''(0) = f''(x0), \ldots\ldots, \quad T_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

Questo polinomio, è detto **polinomio di MacLaurin** di $f(x)$di grado n, e vale :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \;=$$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$