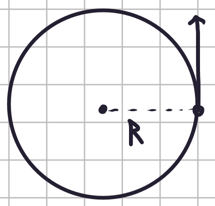
[1] All'istante $t = 0$ un punto materiale, partendo da fermo, si mette in moto su una traiettoria circolare, giacente su un piano orizzontale liscio, di raggio $R = 225\,\mathrm{m}$. Fino all'istante $t_1 = 10\,\mathrm{s}$, la velocità cresce linearmente con il tempo e lo spazio percorso è di $150\,\mathrm{m}$. Determinare il modulo dell'accelerazione nell'istante t_1.



v = lineare $= Kt$ per qualche $K \in \mathbb{R}^+$

$a = \frac{d}{dt} Kt = K \Rightarrow$ accelerazione costante

dist. percorsa $:= x(t) = \int_0^t K\tau \, d\tau = K \frac{t^2}{2}$

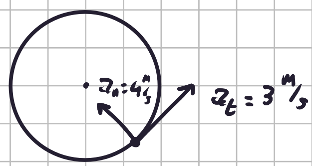
Sappiamo che:

$x(t_1) = 150$ m $\Rightarrow K \cdot \frac{10^2}{2} = 150 \Rightarrow K \cdot 50 = 150 \Rightarrow K = \frac{150}{50} = 3$ m/s²

$t_1 = 10$

$v(t_1) = Kt_1 = 3 \cdot 10 = 30 \frac{m}{s} \Rightarrow$ l'accelerazione normale e' $\frac{v^2}{R}$

$\Rightarrow \frac{v^2(t_1)}{R} = \frac{30^2}{225} = \frac{900}{225} = 4 \frac{m}{s^2}$



$\Rightarrow$ l'accelerazione totale e' $\sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \frac{m}{s}$

---

[2] Un punto materiale si muove su una traiettoria rettilinea con accelerazione dipendente dal tempo, $a = -4t\,\mathrm{ms}^{-2}$. Se all'istante $t = 0$ il punto parte con una velocità $v_0 = 2\,\mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$, quanto spazio percorrerà prima di fermarsi?

$dv = -4t \Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_0^t -4t \Rightarrow v(t) - v_0 = -2t^2 \Rightarrow v(t) = 2 - 2t^2$

il punto si ferma in t^* dove $v(t^*) = 0 \Rightarrow 2 - 2t^{*2} = 0 \Rightarrow 2t^{*2} = 2 \Rightarrow t^* = \sqrt{1} = 1$

$dx = 2 - 2t^2 \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t 2 - 2t^2 \, dt \Rightarrow x(t) = 2t - 2\frac{t^3}{3}$

$x(t^*) = 2 - \frac{2}{3} \approx 1.33$ m

---

[3] Un treno affrontando una curva con raggio costante $r = 150\,\mathrm{m}$, rallenta di moto uniformemente decelerato passando, in un tempo $t = 15\,\mathrm{s}$, da $90\,\mathrm{km/h}$ all'inizio della curva a $50\,\mathrm{km/h}$ alla fine della curva. Determinare il modulo dell'accelerazione del treno nel momento in cui la sua velocità è di $50\,\mathrm{km/h}$, assumendo che in questo istante esso continui a decelerare.

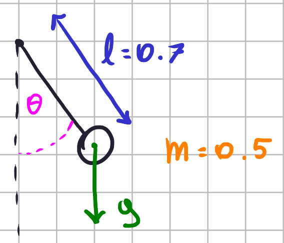
$v_A = 90 \frac{km}{h} = 25 \frac{m}{s}$ $\qquad v_B = 50 \frac{km}{h} = 13.8 \frac{m}{s}$

$a_n = \frac{v^2}{R}$ in $B \Rightarrow \frac{13.8^2}{150} \approx 1.3 \frac{m}{s^2}$

$a_t = \frac{|13.8 - 25|}{15} = 0.7 \frac{m}{s^2} \Rightarrow a = \sqrt{0.7^2 + 1.3^2} = 1.5 \frac{m}{s^2}$

acc. media

[4] All'istante $t = 0$ un pendolo semplice di massa $m = 0.5\,\text{kg}$ e lunghezza $l = 0.7\,\text{m}$ parte da fermo a un angolo $\theta = 30\,°$ con la verticale. Determinare, all'istante $t = 0$, il modulo dell'accelerazione tangenziale, dell'accelerazione normale e dell'accelerazione angolare.



eq.

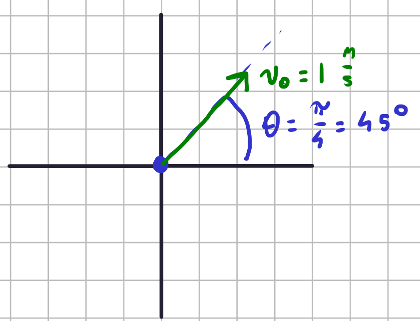
$$-mg \sin\theta = -m \underbrace{\frac{d^2 s}{dt^2}}_{\text{acc. tang}}$$

$$g \sin\theta = \frac{d^2 s}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^3 s}{dt^2} = 9.8 \cdot \sin(30) = 4{,}9 \ \frac{m}{s^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad \text{ma} \quad v \text{ e' } 0 \text{ all'inizio} \Rightarrow a_n = 0 \ \frac{m}{s^2}. \qquad \text{vel. angolare} = \omega = \frac{v}{l}$$

$$\dot{\omega} = \frac{d}{dt}\frac{v}{l} = \frac{1}{l}\, 4.9 = 7 \ \frac{m}{s^2}$$

[5] All'istante $t = 0$ una massa puntiforme ferma nell'origine di un sistema cartesiano (x, y) posto su un piano orizzontale liscio, parte con una velocità $v_0 = 1\,\text{m/s}$ diretta con un angolo $\theta = \pi/4$ rispetto al semiasse positivo delle x. La massa è sottoposta a un'accelerazione $\mathbf{a} = -g\mathbf{i} - g/2\mathbf{j}$, dove $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ sono i versori degli assi x e y, rispettivamente, e g il modulo dell'accelerazione di gravità. Determinare la componente della velocità vettoriale della massa nell'istante in cui la sua posizione sul semiasse positivo delle x è massima.



$$\bar{a} = -g\,\hat{i} - \frac{g}{2}\,\hat{j}$$

$$\begin{cases} a_x = -g \\ a_y = -\frac{g}{2} \end{cases}$$

Calcolo vel. iniziale sugli assi

$$v_x(0) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0.7$$

$$v_y(0) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0.7$$

$$dv_x = a_x \Rightarrow \int_{v_x(0)}^{v_x(t)} dv_x = \int_0^t -g \Rightarrow v_x - 0.7 = -gt \Rightarrow v_x = 0.7 - gt$$

$$dv_y = a_y \Rightarrow v_y - 0.7 = \int_0^t -\frac{1}{2}g \Rightarrow v_y - 0.7 = -\frac{1}{2}gt \Rightarrow v_y = 0.7 - \frac{1}{2}gt$$

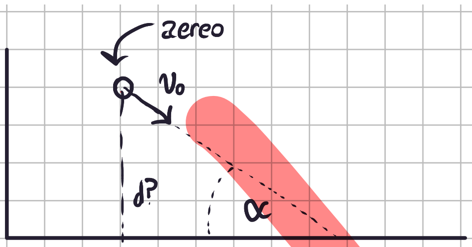
$$\bar{v} = (0.7 - gt)\,\hat{i} + \left(0.7 - \frac{1}{2}gt\right)\hat{j}$$

trovo t' per cui $v_x(t') = 0 \Rightarrow 0.7 - gt' = 0 \Rightarrow t' = \frac{0.7}{g} = 0{,}07$

$$\Rightarrow \bar{v}(t') = 0 + \hat{j}\left(0.7 - \frac{1}{2}g\,\frac{0.7}{g}\right) = \hat{j}\left(0.7 - \frac{1}{2}\,0.7\right) = \hat{j}\,\frac{1}{2}\,0.7$$

[6] Un aereo vola con velocità costante v_0 seguendo una rotta rettilinea inclinata verso ll basso di un angolo α rispetto all'orizzonte. Se il pilota volesse centrare un bersaglio a terra sganciando una massa puntiforme da una quota h, a quale distanza d dal bersaglio dovrebbe sganciarla?

[6] Un aereo vola con velocità costante v_0 seguendo una rotta rettilinea inclinata verso Il basso di un angolo α rispetto all'orizzonte. Se il pilota volesse centrare un bersaglio a terra sganciando una massa puntiforme da una quota h, a quale distanza d dal bersaglio dovrebbe sganciarla?



Sull'asse y, il corpo sganciato ha velocità

$$v_y = -(v_0 \sin\alpha + \underbrace{g}_{\text{gravità}})$$

deve sganciarlo ad una dist. d per cui l'oggetto tocca terra

$\Rightarrow r_y = 0$ nel momento in cui $r_x + d$

distanza percorsa sull'asse x deve essere d quando $r_y = 0$

$$\begin{cases} v_y = -(v_0 \sin\alpha + g) \\ v_x = v_0 \cos\alpha \end{cases}$$

$$dr_y = v_y \Rightarrow \int_h^{r_y(t)} dr_y = -\int_0^t v_0 \sin\alpha + g \Rightarrow r_y(t) = h - (v_0 \sin\alpha + g)t$$

$$r_y(t') = 0 \Rightarrow t' = \frac{h}{v_0 \sin\alpha + g}$$

$$dr_x = v_x \Rightarrow \int_{r_x(0)}^{r_x(t)} dr_x = \int_0^t v_0 \cos\alpha \Rightarrow r_x(t) = r_x(0) + v_0 \cos\alpha\, t$$

$r_x(0)$: punto di sgancio

in t' secondi, sull'asse x devono essere percorsi $r_x - b$ metri

d -