Metodi Matematici per l'Informatica - Esercizi 2
(a.a. 22/23, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (`lorenzo.carlucci@uniroma1.it`)

1 Funzioni

Esercizio 1 *Se esiste una funzione $f : X \to Y$ suriettiva allora esiste una funzione $g : Y \to X$ iniettiva. Vero o falso? Se si risponde "vero", dare una dimostrazione; se si risponde "falso" dare un controesempio.*

Esercizio 2 *Se esiste una funzione $f : X \to Y$ iniettiva allora esiste una funzione $g : Y \to X$ suriettiva. Vero o falso? Se si risponde "vero", dare una dimostrazione; se si risponde "falso" dare un controesempio.*

Esercizio 3 *Ogni funzione può scriversi come composizione di una funzione iniettiva e di una funzione suriettiva: per ogni $f : X \to Y$ esiste un insieme Z tale che esiste una funzione $h : Z \to Y$ iniettiva ed esiste una funzione $g : X \to Z$ tali che $f = h \circ g$. Dimostrare.*

(Suggerimento: se considero f come funzione da X alla sua immagine via f, ossia $f(X)$, che funzione ottengo?)

Esercizio 4 *In molti testi di Matematica per il Liceo e di Analisi Matematica si dimostra che una funzione è* invertibile *se è iniettiva. Perché in base alle nostre definizioni questo è falso? Come deve essere modificata la definizione di funzione affinché questo sia vero?*

Esercizio 5 *L'insieme $\{(x, y) : x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, 3x + y = 4\}$ è una funzione da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$?*

Esercizio 6 *Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ è iniettiva. La funzione è anche suriettiva?*

Esercizio 7 *Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita da $f(a, b) = (a + b, a + 2b)$ è una biiezione.*

Esercizio 8 *Quante sono le funzioni f da $\{a, b, c, d, e\}$ a $\{1, 2, 3, 4\}$? Quante sono suriettive, quante iniettive e quante biiettive?*

Esercizio 9 *Quante sono le funzioni f da $\{a, b, c, d\}$ a $\{1, 2, 3, 4\}$? Quante sono suriettive, quante iniettive e quante biiettive?*

Esercizio 10 *Se la composta $(g \circ f)$ è iniettiva, cosa posso dire di f e di g?*

Esercizio 11 *Se la composta $(g \circ f)$ è suriettiva, cosa posso dire di f e di g?*

Esercizio 12 *Sia $f : X \to Y$ e $A, B \subseteq Y$. Dimostrare che $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.*

Esercizio 13 *Sia $f : A \to B$ e $X, Y \subseteq A$. Dimostrare che $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$.*

Esercizio 14 *Sia $f : X \to Y$ e $A \subseteq X$. Che posso dire delle relazioni tra $f(X \setminus A)$ e $f(X) \setminus f(A)$?*

Esercizio 15 *Sia $f : X \to Y$ biiettiva. Dimostrare che i seguenti punti sono tutti equivalenti tra loro, per una funzione $g : Y \to X$:*

1. $g = f^{-1}$
2. $g \circ f$ è l'identità su X
3. $f \circ g$ è l'identità su Y

(Suggerimento: Dimostrare che due punti qui sopra sono equivalenti significa dimostrare che uno implica l'altro e viceversa. Si possono prendere i punti due a due e dimostrare che si implicano a vicenda; in questo modo devo dimostrare $\binom{3}{2}$ equivalenze. Altrimenti posso creare un circolo di implicazioni, dimostrando: 1 implica 2, 2 implica 3 e 3 implica 1. Per dimostrare una implicazione dal punto i al punto j: assumo che sia vero i, e con una serie di passi di ragionamento o equivalenze algebriche deduco j; altrimenti assumo i e assumo che j sia falso e raggiungo una contraddizione.)

Esercizio 16 *Siano $f : X \to Y$ e e $g : Z \to W$ dove $Z \subseteq X$ e $W \subseteq Y$. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.*

1. Se f è suriettiva allora g è suriettiva.
2. $f(X - Z) = f(X) - g(Z)$.
3. $Y = f(X) \cup g(Z)$.

Esercizio 17 *Si possono trovare insiemi X, Y, Z e funzioni $f : X \to Z$ e $g : Y \to Z$ tali che $X \cap Y = \emptyset$, f e g sono iniettive ma la funzione $h : (X \cup Y) \to Z$ definita come segue non è iniettiva? $h(w) = f(w)$ se $w \in X$ e $h(w) = g(w)$ se $w \in Y$. Se si risponde sì dare un esempio esplicito, se si risponde no argomentare.*

Esercizio 18 *Sia $f : X \to Y$ e siano A e B due sottinsiemi del dominio X. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false. (NB: per un qualunque $S \subseteq X$ con $f(S)$ si indica l'insieme $\{y \in Y :$ per qualche $s \in S$ vale $f(s) = y\}$).*

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cup f(B)$.

Esercizio 19 *Si possono trovare insiemi X, Y, Z e funzioni $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ tali che f è iniettiva, g è suriettiva ma la funzione composta $(g \circ f) : X \to Z$ non è né iniettiva né suriettiva? Se si risponde sì dare un esempio esplicito, se si risponde no argomentare. Si ricorda che la funzione composta $(g \circ f)$ è definita come la funzione che mappa $x \in X$ in $g(f(x)) \in Z$.*

Esercizio 20 *Siano X, Y due insiemi. Consideriamo la funzione*

$$f : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X \times Y)$$

che manda un elemento $A \times B$ (con $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$) nell'elemento $A \times B \subseteq X \times Y$.

1. f è iniettiva?
2. Dimostrare con un esempio che f non è necessariamente suriettiva.

(NB: Si ricorda che se X è un insieme con $\mathcal{P}(X)$ si denota l'insieme dei sottinsiemi di X.)

2 Domande d'esame

Esercizio 21 *Siano* $f : X \to Y$ *e* $g : Z \to W$*. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.*

1. $f \cup g$ *è una funzione con dominio* $X \cup Z$ *e codominio* $Y \cup W$*.* vero
2. *Se* $X \cap Z \neq \emptyset$ *allora* $f \cap g$ *è una funzione con dominio* $X \cap Z$ *e codominio* $Y \cap W$*.* falso
3. *Se* $Z \subseteq X$ *e* f *è iniettiva allora* g *è iniettiva.* falso

Esercizio 22 *Siano* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *e* $g : \mathbb{N} \setminus \{2\} \to \mathbb{N}$ *due funzioni. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.*

1. *Se* f *è suriettiva allora* g *non è la sua inversa.* vero
2. *È possibile che per ogni* $n \in \mathbb{N}$*,* $(g \circ f)(n) = n$*.* falso
3. *Se* g *è la funzione identità allora lo è anche* $(g \circ f)$*.* falso, sarebbe vero solo se anche f fosse la funzione identità

Esercizio 23 *Siano* $f : X \to Y$ *e* $g : Z \to W$ *dove* $Z \subseteq X$ *e* $W \subseteq Y$*. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false. NB: per un qualunque* $S \subseteq X$ *con* $f(S)$ *si denota l'insieme* $\{y \in Y : \text{ per qualche } s \in S \text{ vale } f(s) = y\}$*. Analogamente per* $g(S)$*.*

1. *Se* f *è iniettiva allora* g *è iniettiva.* falso
2. $f(X - Z) = f(X) - f(Z)$*.* falso
3. $Y = f(X) \cup g(Z)$*.* falso

Esercizio 24 *Siano* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e* $B = \{a, b, c, d\}$*,* $f : A \to B$ *e* $g : B \to A$*. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.*

1. *Se* f *e* g *sono suriettive allora* $(g \circ f)$ *è suriettiva.* vero, ma secondo i vincoli stabiliti nel testo, g non può essere suriettiva
2. *È possibile che* $(f \circ g)$ *sia l'identità su* B*.* vero
3. *Se* g *è la funzione costante che manda tutti gli elementi in* 1 *allora lo è anche* $(g \circ f)$*.* vero

Esercizio 25 *Siano* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $B = \{a, b, c\}$*,* $f : A \to B$ *e* $g : B \to A$*. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.*

1. *Se* f *e* g *sono iniettive allora* $(g \circ f)$ *è iniettiva.* vero, ma secondo i vincoli stabiliti nel testo, f non può essere iniettiva
2. *È impossibile che* $(g \circ f)$ *sia l'identità su* A*.* vero
3. *Se* g *è la funzione costante che manda tutti gli elementi in* 1 *allora lo è anche* $(g \circ f)$*.* vero

Esercizio 26 *Siano* $f : X \to Y$ *e* $g : Z \to W$ *dove* $Z \subseteq X$ *e* $W \subseteq Y$*. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false. NB: per un qualunque* $S \subseteq X$ *con* $f(S)$ *si denota l'insieme* $\{y \in Y : \text{ per qualche } s \in S \text{ vale } f(s) = y\}$*. Analogamente per* $g(S)$*.*

1. *Se* f *è suriettiva allora* g *è suriettiva.* falso
2. *Se* $Z \subseteq X$ *allora* $f(X - Z) \subseteq f(X) - f(Z)$*.* falso
3. *Se* $Z \subseteq X$ *allora* $Y = f(X) \cup g(Z)$*.* falso

Esercizio 27 *Si possono trovare insiemi X, Y, Z e funzioni $f : X \to Z$ e $g : Y \to Z$ tali che $X \cap Y = \emptyset$, f e g sono iniettive ma la funzione $h : (X \cup Y) \to Z$ definita come segue non è iniettiva? $h(w) = f(w)$ se $w \in X$ e $h(w) = g(w)$ se $w \in Y$. Se si risponde sì dare un esempio esplicito, se si risponde no argomentare.* vero

Esercizio 28 *Sia $f : X \to Y$ e siano A e B due sottinsiemi del dominio X (ossia $A \subseteq X$ e $B \subseteq X$). Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false. (NB: per un qualunque $S \subseteq X$ con $f(S)$ si indica l'insieme $\{y \in Y : \text{ per qualche } s \in S \text{ vale } f(s) = y\}$).*

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. vera sempre
2. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. falso, sarebbe vero a prescindere solo se f fosse iniettiva
3. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. vero