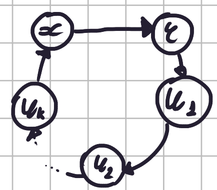
Esercizio 1. Dare lo pseudocodice di un algoritmo O(n+m) che accetta in input un grafo diretto G e un arco (x,y) e restituisce "YES" in output se esiste un vertice z e un albero di visita T di un DFS partendo da z per il quale l'arco (x,y) è un arco al indietro. Noto bene che z potrebbe essere x oppure y. Dare un argomento giustificando la correttezza dell'algoritmo.

Se (x,y) fa parte di un ciclo, allora può essere un arco all'indietro. Sia C questo ciclo

$C =$ 

$: \{(x,y), (y,u_1), (u_1,u_2), \dots (u_k,x)\}$

Allora una DFS che inizia da u_1 ha (x,y) come arco all'indietro.

```
Es1(G:grafo, (x,y): arco){
    Vis = DFS(G,y) // con un DFS controllo se esiste un percorso da y ad x
    if(Vis[x]==1){return 'Yes'}
    return 'No'
}
```

Esercizio 2. Sia A[1,...,n] un array di n elementi. Un *super majority element* di A è un elemento che occure in al minimo 2n/3 posizioni di A (quindi se n = 6, un super majority element deve occorrere al minimo 4 = 2/3 x 6 volte in A; se n = 8, deve occorrere al minimo 6 ≥ 2/3 x 8 = 5.333 volte). Assumiamo che gli elementi di A non possono essere ordinati ma si può calcolare se due elementi sono uguali (per esempio, gli elementi di A potrebbero essere stringhe). Dare il pseudocodice per un algoritmo O(n log n) che prenda in input un array A e restituisce "YES" se esiste un super majority element in A.

```
SME(A: array){
    n: A.length()
    if(n==1){return A[0]}
    if(n==2 ∧ A[0]==A[1]){return A[1]}
    a = SME(A[0:n/3])
    b = SME(A[n/3:2n/3])
    c = SME(A[2n/3:n])
    ca=0
    cb=0
    cc=0
    for(i=0,1...,n){
        ca+=(A[i]==a)
        cb+=(A[i]==b)
        cc+=(A[i]==c)
    }
    if(ca≥2·n/3){return a}
    if(cb≥2·n/3){return b}
    if(cc≥2·n/3){return c}
    return NULL
}
```

Costo : $T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + O(n) \Rightarrow O(n \cdot \log(n))$

Esercizio 3. Dare lo pseudocodice di un algoritmo che prende in input un grafo diretto aciclico con vertici colorato rosso, blu, o verde e due vertici x e y e restituisce "YES" in output se esiste un cammino da x a y con al minimo un vertice di tutti i tre colori (quindi il cammino dovrebbe avere al minimo un vertice rosso, al minimo uno blu, e al minimo uno verde). Se un tal cammino non esiste, l'algoritmo restituisce "NO" in output.

Prop: Sia λ una combinazione di colori, siano u, v, w. Se esiste un cammino λ da u a v e $(v,w) \in E(G)$, allora esiste un cammino λ da u a w.

● = 100 ● = 010 ● : 001 $C: V(G) \to \{100, 010, 001\}$

```
Colori(G: grafo, c: Funzione colore, x: nodo, y: nodo){
    n=|V(G)|
    T[n]: array lungo n
    T[x]=c[x]
    Q: coda
    Q.push(x)
    do{
        u=Q.pop()
        For each w∈u.adj{
            T[w]=T[u] OR c[w]
            Q.push(w)
        }
    }
    if(T[y]== 8){return "YES"}
    return "NO"
}
```

Esercizio 4. Dare il pseudocodice di un algoritmo che accetta in input un grafo G non diretto con pesi sugli archi e un arco (x,y) e restituisce "YES" se esiste un albero di copertura di peso minimo che non contiene l'arco (x,y).

```
Es4(G: grafo, (x,y): arco){
    a=ω(Kruskal(G))
    b=ω(Kruskal(G\{(x,y)}))
    if(a==b){return "YES"}
    return "NO"
}
```

tutti gli MST hanno identico peso!