Marco Casu

Automazione

Sapienza Università di Roma

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica
Dipartimento di Informatica

Questo documento è distribuito sotto la licenza GNU, è un resoconto degli appunti (eventualmente integrati con libri di testo) tratti dalle lezioni del corso di Automazione per la laurea triennale in Informatica. Se dovessi notare errori, ti prego di segnalarmeli.

Nota bene : Essendo questi appunti di un corso esterno alla facoltà di Informatica, è presente un capitolo "Complementi" che può risultare utile al lettore.

INDICE

CAPITOLO

1 COMPLEMENTI

1.1 La Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace è una *trasformata integrale*, nello specifico, è una funzione che associa ad una funzione di variabile reale, una funzione di variabile complessa.

Definizione (Trasformata di Laplace) : : Sia f una funzione di variabile reale, nulla in $(-\infty, 0)$, si chiama trasformata di Laplace di f la funzione

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\ dx \qquad p \in \mathbb{C}$$

Essendo $p = \alpha + i\beta$ una variabile complessa, la funzione integranda si può riscrivere

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\ dx = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\beta)x} f(x)\ dx$$

Ricordando l'identità di Eulero

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Si ha

$$e^{-(\alpha+\beta i)x} = e^{-\alpha x} \cdot e^{-\beta i x} = \tag{1.1}$$

$$e^{-\alpha x} \cdot \Big(\cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x)\Big) = e^{-\alpha x} \cdot \Big(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\Big) = \tag{1.2}$$

$$e^{-\alpha x}\cos(\beta x) - ie^{-\alpha x}\sin(\beta x) \tag{1.3}$$

Quindi

$$\mathcal{L}[f](p) = \mathcal{L}[f](\alpha + i\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\beta)x} f(x)\ dx =$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos(\beta x) f(x) - ie^{-\alpha x}\sin(\beta x) f(x)\ dx =$$

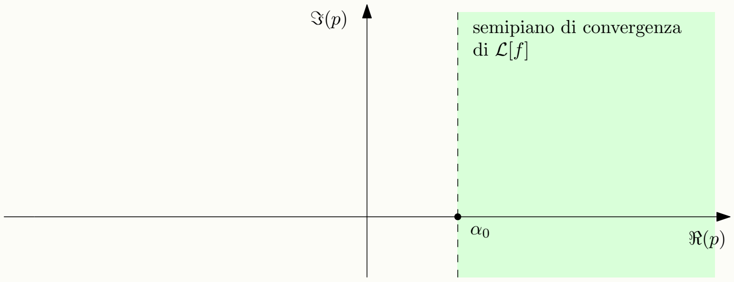
$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos(\beta x) f(x)\ dx - i\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin(\beta x) f(x)\ dx$$

Se l'integrale $\mathcal{L}[f](\alpha + i\beta)$ converge per un certo $\alpha \in \mathbb{R}$, allora converge per $p = \alpha + i\beta$ per ogni altro $\beta \in \mathbb{R}$. Se per f esiste almeno un $p \in \mathbb{C}$ tale che $\mathcal{L}[f](p) < \infty$, allora f si dice *trasformabile secondo Laplace*.

In generale, se $\mathcal{L}[f](p) < \infty$ per $p = p_0$, allora è definita anche nel semipiano complesso

$$\{p \in \mathbb{C} \mid \Re(p) > \Re(p_0)\}$$

Sia α_0 l'estremo inferiore dell'insieme $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \mathcal{L}[f](p) < \infty \wedge \Re(p) > \alpha\}$, allora il semipiano $\{p \in \mathbb{C} \| \Re(p) > \alpha_0\}$ è detto **semipiano di convergenza**.



Vediamo un esempio di trasformata, si consideri

$$H(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \geq 0 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

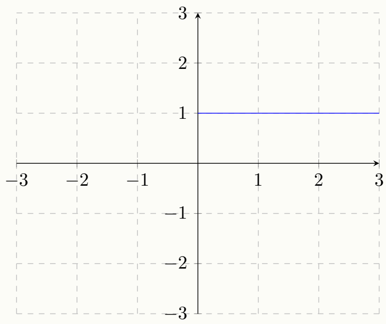


Figura 1.1: Funzione di Heaviside

Si calcola

$$\mathcal{L}[H](p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} \cdot 1 \; dx = \lim_{T \to +\infty} \mathcal{L}[H](p) = \int_0^{T} e^{-px} \cdot 1 \; dx = \lim_{T \to +\infty} \left[-\frac{e^{-px}}{p} \right]_0^T =$$

$$\lim_{T \to +\infty} -\frac{e^{-pT}}{p} - \left[-\frac{e^{-p0}}{p} \right] = \lim_{T \to +\infty} -\frac{e^{-pT}}{p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$$

Il cui semipiano di convergenza risulta essere $\Re(p) > 0$.

1.1.1 Proprietà della Trasformata

Linearità

La trasformazione di Laplace gode della proprietà di *linearità*, siano $f(p)$ e $g(p)$ due funzioni trasformabili, siano $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ due costanti complesse, se la funzione $\lambda \cdot f(p) + \mu \cdot g(p)$ è trasformabile, allora

$$\mathcal{L}[\lambda \cdot f + \mu \cdot g](p) = \lambda \mathcal{L}[f](p) + \mu \mathcal{L}[g](p)$$

Il semipiano di convergenza sarà uguale all'intersezione dei due semipiani di convergenza delle funzioni di partenza, più precisamente se

- f ha come semipiano di convergenza $\Re(p) > \alpha$
- g ha come semipiano di convergenza $\Re(p) > \beta$
- allora $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ ha come semipiano di convergenza $\Re(p) > \max\{\beta, \alpha\}$

Ritardo

Sia f una funzione trasformabile, si consideri una costante reale $a > 0$, la funzione $g(x) = f(x - a)$ è detta funzione *ritardata*.

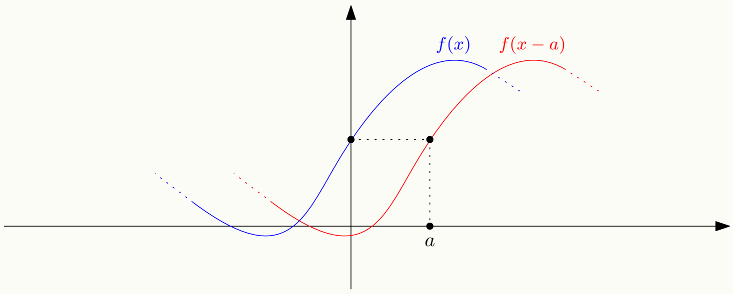


Figura 1.2: funzione ritardata

Per il calcolo della trasformata di $g(x) = f(x - a)$ si considera il cambio di variabile

$$t = x - a$$
$$x = t + a$$

Si ricordi come, se f è nulla in $(-\infty, 0)$, allora g sarà nulla in $(0, a)$.

$$\mathcal{L}[g](p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} g(x)\ dx = \int_a^{+\infty} e^{-px} f(x-a)\ dx = \int_a^{+\infty} e^{-p(t+a)} f(t)\ dx =$$

$$\int_a^{+\infty} e^{-pt-pa} f(t)\ dx = \int_a^{+\infty} e^{-pt} e^{-pa} f(t)\ dx = e^{-pa} \int_a^{+\infty} e^{-pt} f(t)\ dx = e^{-pa} \mathcal{L}[f](p)$$

Dunque si ricavano le cosiddette *formule del ritardo* :

$$\mathcal{L}[f(x-a)](p) = e^{-pa} \mathcal{L}[f(x)](p)$$

$$\mathcal{L}[e^{ax} f(x)](p) = \mathcal{L}[f](p - a)$$

Trasformazione di una derivata e di una primitiva

La seguente proprietà risulta cruciale nell'utilizzo della trasformata di Laplace per la risoluzione di equazioni differenziali. Le dimostrazioni dei seguenti risultati non saranno trattate in quanto non sono argomento di questo corso.

Sia f una funzione derivabile, la cui derivata è continua in $[0, \infty)$. Sia inoltre f' trasformabile, con semipiano di convergenza $\Re(p) > \alpha$, allora anche f è trasformabile, ha semipiano di convergenza $\Re(p) > \max\{\alpha, 0\}$, e vale la seguente identità :

$$\mathcal{L}[f'](p) = p\mathcal{L}[f](p) - f(0)$$

Si generalizza per derivate di ordine maggiore

$$\mathcal{L}[f''](p) = p^2 \mathcal{L}[f](p) - pf(0) - f'(0)$$

Analogamente, sia $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$, se f è trasformabile ed ha semipiano di convergenza $\Re(p) > \alpha$, allora anche F lo è, ha semipiano di convergenza $\Re(p) > \max\{\alpha, 0\}$ e vale che

$$\mathcal{L}[F](p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}[f](p)$$

Convoluzione

Siano f e g due funzioni integrabili secondo Riemann e nulle in $(-\infty, 0)$, l'operatore $*$ detto **convoluzione** è definito nel modo seguente

$$(f * g)(x) = \int_0^{+\infty} f(x-t)g(t)\ dt = \int_0^{+\infty} f(t)g(x-t)\ dt$$

Se f è trasformabile, e $|g|$ lo è, nello stesso semipiano, allora $f * g$ è trasformabile e vale

$$\mathcal{L}[f * g](p) = \mathcal{L}[f](p) \cdot \mathcal{L}[g](p)$$

Derivata ed Integrale della trasformata di Laplace

Essendo $\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}\ dx$ si ha

$$\frac{d}{dp}\mathcal{L}[f](p) = \frac{d}{dp}\int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}\ dx$$
$$\frac{d}{dp}\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dp}(f(x)e^{-px})\ dx$$
$$\frac{d}{dp}\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} -xf(x)e^{-px}\ dx$$
$$\frac{d}{dp}\mathcal{L}[f](p) = \mathcal{L}[-xf(x)](p)$$

Generalizzando, per ogni $n \geq 0$

☞ $$\frac{d^n}{dp^n}\mathcal{L}[f](p) = \mathcal{L}[-(1)^n x^n f(x)](p)$$ ☜

Esempio di calcolo : Si vuole trovare

$$\mathcal{L}[x \sin(\omega x)](p)$$

Essendo

$$\mathcal{L}[\sin(\omega x)](p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

Ho che

$$\mathcal{L}[x\sin(\omega x)](p) = -\frac{d}{dp}\mathcal{L}[\sin(\omega x)](p) = -\frac{d}{dp}\Big(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\Big) = \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$$

Trascurando il procedimento, la formula per l'integrale di una trasformata è la seguente

☞ $$\int_p^{+\infty} \mathcal{L}[f](s)\ \ ds = \mathcal{L}[\frac{f(x)}{x}](p)$$ ☜

1.1.2 Trasformata inversa

La funzione che associa ad ogni funzione trasformabile la sua trasformata, è iniettiva, se $F(p)$ è una trasformata di Laplace, esiste un unica funzione f tale che $\mathcal{L}[f](p) = F(p)$. Data F, è possibile ottenere la funzione di base su cui si è effettuata la trasformata, tale operazione è detta *trasformazione inversa* di Laplace, si indica con $\mathcal{L}^{-1}$

$$\mathcal{L}[f] = F$$
$$\mathcal{L}^{-1}[F] = f$$

Le formule di trasformazione derivate dalle proprietà (raggruppate alla fine di questa sezione), se lette al contrario valgono come formule di anti-trasformata.

Esempio di calcolo : Ricordando che $\mathcal{L}[e^{-ax}](p) = \frac{1}{p+a}$, si vuole calcolare la trasformata inversa di

$$\frac{2}{p+3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{p+3}](x) = \tag{1.4}$$
$$2 \cdot \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p+3}](x) = \tag{1.5}$$
$$2 \cdot e^{-3x} \cdot H(x) \tag{1.6}$$

Una funzione risultante da un anti trasformata va moltiplicata per la funzione di Heaviside $H(x)$ in quanto deve essere nulla in $(-\infty, 0)$. **Esempio di calcolo** : Si vuole trovare l'anti trasformata di

$$F(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}$$

Riscrivo la funzione

$$\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p^3+p} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}$$

Applicando la linearità ho

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}](x) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p}](x) - \mathcal{L}^{-1}[\frac{p}{p^2+1}](x) = \tag{1.7}$$
$$H(x) - \cos(x) \cdot H(x) = H(x)(1 - \cos(x)) \tag{1.8}$$

1.1.3 Trasformate note

Funzione	Trasformata	Semipiano di convergenza
1	$\frac{1}{p}$	$\Re(p) > 0$
e^{-ax}	$\frac{1}{p+a}$	$\Re(p) > -\Re(a)$
x	$\frac{1}{p^2}$	$\Re(p) > 0$
x^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\Re(p) > 0 \; n \in \mathbb{N}$
$\sin(\omega x)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\Re(p) > 0$
$\cos(\omega x)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\Re(p) > 0$
δ	1	$p \in \mathbb{C}$
$\cosh(ax)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\Re(p) > \|\Re(a)\|$
$\sinh(ax)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\Re(p) > \|\Re(a)\|$

Funzione di trasferimento

Come già accennato, la trasformata di Laplace è utile nella risoluzione di equazioni differenziali. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b(t) \qquad \begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

Si applica la trasformata all'equazione, ottenendo

$$\mathcal{L}[a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y](p) = \mathcal{L}[b](p)$$

si applica la linearità

$$a_0\mathcal{L}[y''](p) + a_1\mathcal{L}[y'](p) + a_2\mathcal{L}[y](p) = \mathcal{L}[b](p)$$

Chiamo

$$\mathcal{L}[y](p) = Y(p) \qquad \mathcal{L}[b](p) = B(p)$$

ed applico le proprietà della trasformazione di una derivata

$$a_0(p^2Y(p) - p\alpha - \beta) + a_1(pY(p) - \alpha) + a_2Y(p) = B(p)$$

$$a_0p^2Y(p) - a_0p\alpha - a_0\beta + a_1pY(p) - a_1\alpha + a_2Y(p) = B(p)$$

esplicito $Y(p)$:

$$Y(p)(a_0p^2 + a_1p + a_2) = B(p) + a_0p\alpha + a_0\beta + a_1\alpha$$

$$Y(p) = \frac{1}{(a_0p^2 + a_1p + a_2)}B(p) + a_0p\alpha + a_0\beta + a_1\alpha$$

Pongo

$$S(p) = \frac{1}{(a_0p^2 + a_1p + a_2)}$$

Tale S è detta **funzione di trasferimento**, se le condizioni iniziali sono entrambe nulle, ossia $\alpha = \beta = 0$, si ha

$$Y(p) = S(p) \cdot B(p)$$

$$\mathcal{L}[y](p) = S(p) \cdot \mathcal{L}[b](p)$$

Ricordando la convoluzione di una trasformata, si ha che

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[S \cdot B](t)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[S](t) * \mathcal{L}^{-1}[B](t)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[S](t) * b(t)$$

Le seguenti formule hanno un significato fisico notevole, supponiamo che vi sia un sistema fisico caratterizzato da un ingresso $b(t)$, ed un uscita $y(t)$, ad esempio, $b(t)$ è una forza, e $y(t)$ il moto di una particella. Trovare esplicitamente il moto y non è banale, è possibile quindi applciare la trasformata, passando nel dominio complesso di Laplace, per poi risolvere l'equazione ed applicare l'anti trasformata, trovando così il moto.

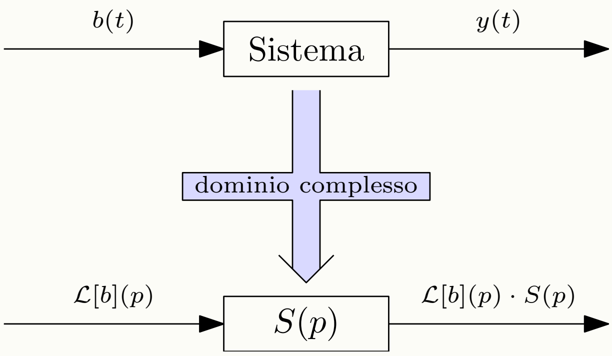


Figura 1.3: Funzione di Trasferimento

La funzione $S(p)$ quindi caratterizza totalmente il sistema fisico nel dominio di Laplace, in quanto basta moltiplicarla alla trasformata del segnale in ingresso per ottenere la trasformata del segnale in uscita.

Esempio di calcolo : Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-2t} \qquad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Si applica la trasformata di Laplace, ottenendo

$$Y(p)(p^2+2p+1)=\frac{1}{p+2}+p+2$$

$$Y(p)=\frac{1}{(p^2+2p+1)}\Big(\frac{1}{p+2}+p+2\Big)$$

ho che

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(p^2+2p+1)}\Big(\frac{1}{p+2}+p+2\Big)](t)$$

Trovo l'anti trasformata :

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(p^2+2p+1)}](t)*\mathcal{L}^{-1}[\Big(\frac{1}{p+2}+p+2\Big)](t)$$

calcolo separatamente i due termini

$$\mathcal{L}^{-1}[\Big(\frac{1}{p+2}+p+2\Big)](t)=H(t)e^{-2t}+\mathcal{L}^{-1}[p](t)+2\mathcal{L}^{-1}[1](t)=$$

$$H(t)e^{-2t}+2\delta(t)$$

passo al secondo termine

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(p^2+2p+1)}](t)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(p+1)(p+1)}](t)=H(t)te^{-t}$$

si ha

$$y(t)=H(t)te^{-t}*H(t)e^{-2t}+2\delta(t)$$

ho sbalgiato qualcosa, procedimento da rivedere