Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 7
12 Maggio 2023 — Compito n. 00042

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: Mario

Cognome: Rossi

Matricola: 2 0 4 6 2 1 2

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C ?	2D ?	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	■	■	■	□	□	■	□	□	■	■	■	■	■	□	□	□
F	□	□	□	■	■	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) L'equazione differenziale
$$y'(t) = 8\,t + 3\,t^2$$
è del primo ordine.

1B) L'equazione differenziale
$$11\,y'(t)\,y''(t) + 10\,[y(t)]^3 = 0$$
è del secondo ordine.

1C) L'equazione differenziale
$$[\sin(3\,y'(t))]' = 0$$
è del secondo ordine.

1D) L'equazione differenziale
$$2\,t\,y^{(1)}(t) + 5\,t^2\,y^{(2)}(t) + 4\,t^3\,y^{(3)}(t) = 0$$
è del secondo ordine.

2) Si consideri l'equazione differenziale
$$y'(t) = 4\,y(t) + 3\,.$$

2A) L'equazione ha un numero finito di soluzioni.
2B) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 3$.
2C) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 3$ e $y'(0) = 12$.
2D) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 3$ e $y'(0) = 15$.

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = \mathrm{e}^{3\,t^2}\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

3A) Esiste un'unica soluzione di (1).
3B) La soluzione non si può scrivere esplicitamente in termini di funzioni elementari.
3C) Si ha $y'(0) = 1$.
3D) Si ha $y''(0) = 0$.

4) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = -3\,y(t) + 12\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

4A) La funzione $Q\,\mathrm{e}^{-3\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1) per ogni Q in $\mathbb{R}$.
4B) L'equazione di (1) ha come soluzione
$$y(t) = -4\,.$$
4C) Si ha $y''(0) = 36$.
4D) Si ha
$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 4\,.$$

$y(t) = -4e^{-3t} + 4$

Docente
□ DelaTorre Pedraza
□ Orsina

$y_0'(t) = -3y_0(t)$

$y_0(t) = C\cdot e^{-3t}$

$\bar{y}(t) = \left[\int 12 e^{3t}\right] e^{-3t}$

$y(t) = Ce^{-3t} + 4$

$0 = C\cdot 1 + 4$

$\bar{y}(t) = 4 \qquad 4\,\cancel{12}\,\frac{e^{3t}}{\cancel{3}}\cdot e^{-3t}$

$0 = C + 4$

$y(t) = C+$

$C = -4$

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00042**

5) Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine

(1) $$y'(t) = f(t)\,.$$

Scrivere tutte le soluzioni di (1) se

$$\textbf{a)}\ f(t) = 4\,t + 4\,,\quad \textbf{b)}\ f(t) = \cos(6\,t)\,,\quad \textbf{c)}\ f(t) = (6\,t+5)\,e^t\,,\quad \textbf{d)}\ f(t) = \frac{11\,t}{1+6\,t^2}\,.$$

---

a) $y'(t) = 4t + 4 \Rightarrow y(t) = \int 4t + 4\,dt + C = y(t) = \frac{4t^2}{2} + 4t + C$

b) $y'(t) = \cos(6t) \Rightarrow$ $z = 6t$, $dt = \frac{dz}{6}$ $=$ $\frac{1}{6}\int \cos(z) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{6}\sin(6t) + C$

c) $y'(t) = (6t+5)e^t$ $\quad y(t) = (6t+5)e^t + 6\int e^t = (6t+5)e^t + 6e^t = e^t(6t+5-6)$

$y(t) = e^t(6t-1) + C$

d) $y(t) = \frac{11t}{1+6t^2}$

$$\int \frac{11x}{1+6x^2} = \int \frac{12x}{1+6x^2} - \frac{x}{1+6x^2} = \log(1+6x^2) - \frac{1}{12}\int \frac{12x}{1+6x^2} =$$

$$\log(1+6x^2) - \frac{\log(1+6x^2)}{12}$$

$$y(t) = \ln(1+6t^2) - \frac{\ln(1+6t^2)}{12}$$

Cognome Nome Matricola Compito 00042

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = 8\,y(t) - 13\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha l'equazione di (1)? E quante soluzioni ha (1)?
b) Scrivere l'equazione omogenea associata all'equazione di (1), e scriverne tutte le soluzioni.
c) Trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1).
d) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1) e la soluzione di (1).

(a) l'equazione $y'(t)=8y(t)-13$ ha INFINITE SOLUZIONI, il problema di CAUCHY ne ha 1

(b) $y_0'(t)=8y_0(t)$ $\qquad A(t)=8t$ $\qquad y_0(t)=Ce^{8t}$ $\quad \forall C\in\mathbb{R}$

(c) SI RICORDI CHE

$\bar{y}(t)=\left[\int^t b(s)\cdot e^{-A(t)}\right]e^{A(t)}$ $\qquad b(t)=-13$, $\quad A(t)=\int 8=8t$ $\implies \bar{y}(t)=\left[\int^t -13\cdot e^{-8t}\right]\cdot e^{8t}$

$$\bar{y}(t)=\left[-13\int^t e^{-8t}\right]\cdot e^{8t}=-13\cdot\left[-\frac{e^{-8t}}{8}\right]e^{8t}=\frac{13}{8}e^{-8t}\cdot e^{8t}=\frac{13}{8}e^{-8t+8t}=\frac{13}{8}e^0$$

$$\bar{y}(t)=\frac{13}{8}$$

(d) SI RICORDI CHE

$y(t)=\bar{y}(t)+y_0(t)$

$\bar{y}(t)=\frac{13}{8}$ $\implies y(t)=C\cdot e^{8t}+\frac{13}{8}$

$y_0(t)=C\cdot e^{8t}$

DATO CHE $y(0)=0$

$0=C\cdot e^0+\frac{13}{8}$

$0=C+\frac{13}{8}\implies C=-\frac{13}{8}$

QUINDI $\quad y(t)=-\frac{13}{8}e^{8t}+\frac{13}{8}=\frac{13}{8}\left[-e^{8t}+1\right]$

Soluzioni del compito 00042

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

Ricordiamo che un'equazione differenziale si dice di ordine $n \geq 1$ se la derivata di ordine massimo della funzione incognita $y(t)$ è la derivata $y^{(n)}(t)$.

1A) L'equazione differenziale

$$y'(t) = 8\,t + 3\,t^2$$

è del primo ordine.

Vero: Infatti vi compare la derivata prima di $y(t)$, e non derivate di ordine superiore.

1B) L'equazione differenziale

$$11\,y'(t)\,y''(t) + 10\,[y(t)]^3 = 0$$

è del secondo ordine.

Vero: Infatti vi compare la derivata seconda di $y(t)$, e non derivate di ordine superiore.

1C) L'equazione differenziale

$$[\sin(3\,y'(t))]' = 0$$

è del secondo ordine.

Vero: Infatti, derivando si ha

$$3\,\cos(3\,y'(t))\,y''(t) = 0\,,$$

e quindi l'equazione è del secondo ordine.

1D) L'equazione differenziale

$$2\,t\,y^{(1)}(t) + 5\,t^2\,y^{(2)}(t) + 4\,t^3\,y^{(3)}(t) = 0$$

è del secondo ordine.

Falso: Infatti vi compare la derivata terza di $y(t)$, e non derivate di ordine superiore.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 4\,y(t) + 3\,.$$

2A) L'equazione ha un numero finito di soluzioni.

Falso: Essendo un'equazione del primo ordine, ha infinite soluzioni, dipendenti da un'unica costante reale.

2B) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 3$.

Vero: Assegnando la condizione iniziale $y(0) = 3$ si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione.

2C) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 3$ e $y'(0) = 12$.

Vero: Se $y'(0) = 3$, sostituendo nell'equazione si ha

$$y'(0) = 4\,y(0) + 3 = 4 \cdot 3 + 3 = 15 \neq 12\,,$$

e quindi non esiste alcuna soluzione dell'equazione che verifica le due condizioni assegnate.

2D) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 3$ e $y'(0) = 15$.

Vero: Sappiamo già che esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 3$ (si veda la domanda **2B**). Dall'equazione, scritta per $t = 0$, si ricava

$$y'(0) = 4\,y(0) + 3 = 4 \cdot 3 + 3 = 15\,,$$

e quindi la seconda condizione è automaticamente verificata.

---

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} y'(t) = \mathrm{e}^{3\,t^2}\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Integrando tra 0 e s si ha, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$y(s) - y(0) = \int_0^s y'(t)\,dt = \int_0^s \mathrm{e}^{3\,t^2}\,dt\,,$$

da cui, ricordando che $y(0) = 0$, segue che l'unica soluzione del problema di Cauchy è data da:

$$\text{(2)} \qquad y(s) = \int_0^s \mathrm{e}^{3\,t^2}\,dt\,.$$

3A) Esiste un'unica soluzione di (1).

Vero: Trattandosi di un problema di Cauchy, esiste un'unica soluzione (si veda anche (2)).

3B) La soluzione non si può scrivere esplicitamente in termini di funzioni elementari.

Vero: La soluzione è data da (2), e l'integrale non si sa calcolare esplicitamente.

3C) Si ha $y'(0) = 1$.

Vero: Sostituendo $t = 0$ nell'equazione si trova

$$y'(0) = \mathrm{e}^{3\cdot 0^2} = 1\,.$$

3D) Si ha $y''(0) = 0$.

Vero: Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = [y'(t)]' = [\mathrm{e}^{3\,t^2}]' = 6\,t\,\mathrm{e}^{3\,t^2}\,,$$

da cui segue che

$$y''(0) = 6 \cdot 0 \cdot \mathrm{e}^{3\cdot 0^2} = 0\,.$$

---

4) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = -3\,y(t) + 12\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$(2) \qquad y'(t) = -3\,y(t)\,.$$

4A) La funzione $Q\,\mathrm{e}^{-3\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1) per ogni Q in $\mathbb{R}$.

Vero: Se $y(t) = Q\,\mathrm{e}^{-3\,t}$, allora

$$y'(t) = -Q \cdot 3\,\mathrm{e}^{-3\,t} = -3 \cdot [Q\,\mathrm{e}^{-3\,t}] = -3\,y(t)\,,$$

e quindi la funzione proposta risolve la (2), ovvero l'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

4B) L'equazione di (1) ha come soluzione

$$y(t) = -4\,.$$

Falso: Sostituendo $y = -4$ nell'equazione di (1) si ha

$$0 \neq 24 = -3 \cdot (-4) + 12\,,$$

e quindi $y(t) = -4$ non è soluzione dell'equazione.

4C) Si ha $y''(0) = 36$.

Falso: Iniziamo con l'osservare che dall'equazione, e dalla condizione iniziale, segue che

$$y'(0) = -3\,y(0) + 12 = -3 \cdot 0 + 12 = 12\,.$$

Inoltre, derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = -3\,y'(t)\,,$$

e quindi

$$y''(0) = -3\,y'(0) = -3 \cdot 12 = -36 \neq 36\,.$$

4D) Si ha

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 4\,.$$

Vero: Sappiamo, dalle domande **4A** e **4B** che $y_0(t) = Q\,\mathrm{e}^{-3\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata (qualsiasi sia Q numero reale) e che $\overline{y}(t) = 4$ è soluzione (particolare) dell'equazione. Per la teoria generale delle equazioni lineari, le funzioni della forma

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = Q\,\mathrm{e}^{-3\,t} + 4$$

sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione di (1). Assegnando la condizione iniziale, si trova

$$0 = y(0) = Q + 4\,,$$

da cui $Q = -4$. Ne segue che

$$y(t) = -4\,\mathrm{e}^{-3\,t} + 4 = 4\,(1 - \mathrm{e}^{-3\,t})$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy (1), ed è tale che

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} 4\,(1 - \mathrm{e}^{-3\,t}) = 4\,.$$

---

5) Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine

$$y'(t) = f(t)\,. \tag{1}$$

Scrivere tutte le soluzioni di (1) se

$$\textbf{a)}\ f(t) = 4\,t + 4\,, \quad \textbf{b)}\ f(t) = \cos(6\,t)\,, \quad \textbf{c)}\ f(t) = (6\,t + 5)\,\mathrm{e}^t\,, \quad \textbf{d)}\ f(t) = \frac{11\,t}{1 + 6\,t^2}\,.$$

Soluzione:

L'equazione differenziale $y'(t) = f(t)$ si può riformulare così: "la funzione $y(t)$ è una primitiva di $f(t)$." Pertanto, trovare tutte le soluzioni di (1) è equivalente a trovare tutte le primitive di $f(t)$, ovvero — come è noto... — è equivalente ad integrare $f(t)$.

a) Dato che

$$\int [4\,t + 4]\,dt = 2\,t^2 + 4\,t\,,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = 2\,t^2 + 4\,t + c\,,$$

con c costante arbitraria.

b) Dato che

$$\int \cos(6\,t)\,dt = \frac{\sin(6\,t)}{6}\,,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = \frac{\sin(6\,t)}{6} + c\,,$$

con c costante arbitraria.

c) Dato che, integrando per parti,

$$\int (6\,t + 5)\,\mathrm{e}^t\,dt = (6\,t + 5)\,\mathrm{e}^t - \int 6\,\mathrm{e}^t\,dt = (6t - 1)\,\mathrm{e}^t\,,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = (6t - 1)\,\mathrm{e}^t + c\,,$$

con c costante arbitraria.

d) Dato che

$$\int \frac{11\,t}{1 + 6\,t^2}\,dt = \frac{11}{12}\int \frac{12\,t\,dt}{1 + 6\,t^2} = \frac{11}{12}\,\ln(1 + 6\,t^2)\,,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = \frac{11}{12}\,\ln(1 + 6\,t^2) + c\,,$$

con c costante arbitraria.

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = 8\,y(t) - 13\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha l'equazione di (1)? E quante soluzioni ha (1)?
b) Scrivere l'equazione omogenea associata all'equazione di (1), e scriverne tutte le soluzioni.
c) Trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1).
d) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1) e la soluzione di (1).

Soluzione:
a) L'equazione di (1) ha infinite soluzioni (dipendenti da un parametro reale), mentre il problema di Cauchy (1) ha un'unica soluzione.

b) L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0'(t) = 8\,y_0(t)\,,$$

le cui soluzioni sono date (per quanto visto a lezione) da

$$y_0(t) = A\,\mathrm{e}^{8\,t}\,,$$

con A costante reale arbitraria.

c) Per trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1), cerchiamo

$$\overline{y}(t) = C\,,$$

con C costante reale. Sostituendo, si ha che deve essere

$$0 = 8\,C - 13\,,$$

da cui segue $C = \frac{13}{8}$.
d) Per quanto visto a lezione, tutte le soluzioni dell'equazione di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = A\,\mathrm{e}^{8\,t} + \frac{13}{8}\,,$$

con A costante reale arbitraria. Assegnando la condizione iniziale, si ha che deve essere

$$0 = A\,\mathrm{e}^{8\cdot 0} + \frac{13}{8} = A + \frac{13}{8}\,,$$

da cui segue che $A = -\frac{13}{8}$ e quindi l'unica soluzione di (1) è data da

$$y(t) = -\frac{13}{8}\,\mathrm{e}^{8\,t} + \frac{13}{8} = \frac{13}{8}\,[1 - \mathrm{e}^{8\,t}]\,.$$