Questo foglio contiene alcuni esercizi tratti da testi di esame della laurea triennale in matematica.

Esercizio 1. Si dispone di una lista di 12 persone divise in tre gruppi, rispettivamente indicati con A,B e C, di 4 persone. Una commissione viene formata scegliendo a caso 2 persone distinte tra le 12.

a) Calcolare la probabilità che le due persone selezionate siano delle stesso gruppo.

In effetti, la procedura per la formazione della commissione è più macchinosa[1]. Prima vengono selezionate due terne dalle 12 persone e vengono inserite in due urne, poi si sceglie a caso un commissario da ciasuna urna. Si ha pieno controllo sulla scelta delle due terne, ma non sull'estrazione dalle due urne; si vuole organizzare le due terne in modo da non privilegiare alcun gruppo e minimizzare la probabilità che i due commissari siano dello stesso gruppo.

b) Supponendo di inserire nella prima urna e nella seconda urna persona del gruppo A, una del gruppo B ed una del gruppo C, calcolare la probabilità che i due commissari selezionati siano dello stesso gruppo.

c) Supponendo di inserire nella prima urna due persone del gruppo A ed una del gruppo C e nella seconda urna due persone del gruppo B ed una del gruppo C, calcolare la probabilità che i due commissari selezionati siano dello stesso gruppo.

d) Mostrare che è possibile effettuare una scelta aleatoria delle due terne in modo che i due commissari selezionati sono certamente di gruppi diversi e siano: uno del gruppo A e uno del gruppo B, uno del gruppo A e uno del gruppo C oppure uno del gruppo B e uno del gruppo C con la stessa probabilità (quindi pari a 1/3).

a) $\Omega = \{(\omega_1,\omega_2) \mid 1 \le \omega_1 < \omega_2 \le 12\} \Rightarrow |\Omega| = \binom{12}{2} \Rightarrow \{1\ldots4\}$: GRUPPO A, $\{5\ldots8\}$ GRUPPO B, $\{9..12\}$ GRUPPO C.

$A = \{$due sono nello stesso gruppo$\}$, considero $A^c = \{$gruppi diversi$\}$

$A_1^c = \{$sono del gruppo A-B$\}$ $A_2^c = \{$sono del gruppo A-C$\}$ $A_3^c = \{$sono del gruppo B-C$\}$

$\forall i \in \{1,2,3\},\ A_i^c = \binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1} \Rightarrow A^c = \bigcup_{i=1}^{3} A_i^c \Rightarrow A^c = 3\cdot4\cdot4 = 48 \Rightarrow A = 1-\mathbb{P}(A^c) = 1-\frac{48}{\binom{12}{2}} = \frac{3}{11}$

b) ho 2 urne, in ognuna ci sono 3 persone di gruppi diversi. Considero:

$B^i = \{$pesco 2 persone del gruppo $i\} = \{$La prima e' del gruppo $i \wedge$ la seconda e' del gruppo $i\}$

$\Rightarrow$ Le due pescate sono indipendenti! $\mathbb{P}(B^i) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Ho $B = \{$pesco 2 dello stesso gruppo$\}$

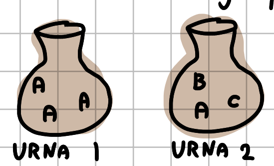
$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in\{A,B,C\}} \mathbb{P}(B_i) = 3\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$

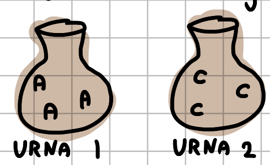
c) In questo caso devo distinguere i casi, considero $C_i = \{$due del gruppo $i\}$

Noto che solo le persone del gruppo C si trovano in entrambe le urne:

$\mathbb{P}(\{$due dello stesso gruppo$\}) = \mathbb{P}(C_c) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

d) Per essere di gruppi diversi, almeno una terna deve contenere tutti membri di un solo gruppo, si dividono quindi le 12 persone in 4 terne, 3 terne conterranno i membri di un unico gruppo, una terna avra' ogni membro di gruppi diversi.

Esempio : 

oppure 

in cui

A:: un membro del gruppo A
B:: un membro del gruppo B
C:: un membro del gruppo C

Calcoliamo la probabilita' che si ottengano due commissari dei gruppi A e B:

$AB = \{$nell'urna 1 pesco A, nell'urna 2 pesco B$\}$ $BA = \{$nell'urna 1 pesco B, nell'urna 2 pesco A$\}$

$\mathbb{P}(A_1) = \{$nell'urna 1 pesco A$\} = \underbrace{\frac{1}{4}\cdot1}_{\text{terna con tutte A}} + \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}_{\text{terna con }\{A,B,C\}} = \frac{1}{3}$ devo considerare $\mathbb{P}(\underbrace{B_2}_{\text{nell' urna 2 pesco B}} \mid A_1) = \frac{\mathbb{P}(B_2 \cap A_1)}{\mathbb{P}(A_1)} = 3\cdot\mathbb{P}(B_2\cap A_1)$

trovo $\mathbb{P}(B_2\cap A_1) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{URNA 1}=\{A,A,A\}}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{URNA 1}=\{A,B,C\}}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{18} \Rightarrow \mathbb{P}(B_2|A_1) = 3\cdot\frac{7}{18} = \frac{7}{6} \Rightarrow \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B_2|A_1) = \frac{7}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{18}$

TUTTO SBAGLIATO $\Rightarrow$ DA RIFARE (IL PUNTO d)

$\mathbb{P}(BA)$ = identica : $\frac{7}{18} \Rightarrow \mathbb{P}($pesco due dei gruppi A-B$) = 2\frac{7}{18} = \frac{7}{9}$

Esercizio 2. Alice (A), Barbara (B) e Carlo (C) competono tra loro in un torneo con le seguenti modalità. Nel primo incontro si sfidano A e B. Il vincitore gioca poi contro C, se vince anche questo incontro è proclamato vincitore assoluto; se invece vince C, costui gioca contro il perdente dell'incontro precedente e così di seguito. Il primo giocatore a vincere due incontri consecutivi vince il torneo. Si tenga presente che A,B,C hanno la stessa abilità nel gioco e pertanto ogni incontro è vinto da uno dei due contendenti con probabilità 1/2.

a) Calcolare la probabilità che il torneo finisca dopo n incontri, $n \geq 2$.

b) Calcolare le probabilità di vittoria per A,B e C.

c) Il torneo potrebbe non avere mai termine?