

**Esercizio 1.1** (Nodi gemelli). Dato un grafo  $G$  tale che  $|V(G)| \geq 2$ , dimostrare che esistono almeno due nodi distinti con lo stesso grado

Supponiamo che ogni nodo ha grado diverso, ordiniamo tali nodi nel modo seguente:

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  con  $i > j \Rightarrow \deg(v_i) > \deg(v_j)$ . Il nodo  $v_1$  ha  $k \geq 1$  adiacenti, il nodo  $v_2$  ha  $k' > k \geq 1$  adiacenti, e' chiaro che il nodo  $v_n$  avra' ALMENO  $n$  adiacenti, ma ci sono al piu'  $n-1$  nodi che possono essergli adiacenti  $\Rightarrow$  CONTRADDIZIONE.

**Esercizio 1.2** (Grafo complementare). Dato un grafo  $G$ , definiamo  $\bar{G}$  come grafo complementare di  $G$  se per ogni arco  $(u, v)$  si verifica che  $(u, v) \in E(G)$  se e solo se  $(u, v) \notin E(\bar{G})$ . Dimostrare che almeno uno tra  $G$  e  $\bar{G}$  è connesso.