

Marco Casu

# ♪ Automazione ♪



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica  
Dipartimento di Informatica

Questo documento è distribuito sotto la licenza [GNU](#), è un resoconto degli appunti (eventualmente integrati con libri di testo) tratti dalle lezioni del corso di Automazione per la laurea triennale in Informatica. Se dovessi notare errori, ti prego di segnalarli.

Nota bene : Essendo questi appunti di un corso esterno alla facoltà di Informatica, è presente un capitolo "Complementi" che può risultare utile al lettore.



# INDICE

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1 L'Automazione Industriale</b>                           | <b>4</b>  |
| 1.1 Introduzione . . . . .                                   | 4         |
| 1.2 Processi Industriali . . . . .                           | 9         |
| 1.2.1 Sistema di Controllo . . . . .                         | 10        |
| 1.3 Analisi dei Sistemi di Produzione . . . . .              | 13        |
| 1.3.1 Linee di Trasferta . . . . .                           | 14        |
| 1.3.2 Flow Shop . . . . .                                    | 19        |
| 1.4 Sistema di Supporto . . . . .                            | 22        |
| 1.5 La Piramide CIM . . . . .                                | 23        |
| 1.5.1 Livelli della Piramide . . . . .                       | 23        |
| 1.5.2 Auto-diagnostica . . . . .                             | 26        |
| 1.5.3 Architetture per il Controllo . . . . .                | 27        |
| 1.6 Industria 4.0 . . . . .                                  | 30        |
| 1.6.1 Tecnologie Abilitanti . . . . .                        | 31        |
| 1.6.2 Modelli di Business . . . . .                          | 32        |
| 1.6.3 Industria 5.0 . . . . .                                | 35        |
| <b>2 Reti per l'Automazione</b>                              | <b>37</b> |
| 2.1 Sistemi di Comunicazione . . . . .                       | 37        |
| 2.2 Classificazione ed Architetture delle Reti . . . . .     | 39        |
| 2.2.1 Tipologie di Reti . . . . .                            | 40        |
| <b>3 Sistemi di Controllo Real Time</b>                      | <b>43</b> |
| 3.1 Parallelismo e Programmazione Concorrente . . . . .      | 44        |
| 3.2 Il Problema dello Scheduling . . . . .                   | 46        |
| 3.2.1 Classificazione degli Algoritmi . . . . .              | 47        |
| 3.2.2 Scheduling di Task Periodici . . . . .                 | 48        |
| 3.2.3 Utilizzo del Processore . . . . .                      | 50        |
| 3.3 Gli Algoritmi di Scheduling . . . . .                    | 50        |
| 3.3.1 Rate Monotoning Priority Ordering (RMPO) . . . . .     | 50        |
| 3.3.2 Earliest Deadline First (EDF) . . . . .                | 52        |
| 3.3.3 Deadline Monotoning Priority Ordering (DMPO) . . . . . | 54        |
| 3.3.4 Time Scheduling (TS) . . . . .                         | 54        |
| 3.4 Scheduling di Task Misti . . . . .                       | 56        |

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>4 Complementi</b>  | <b>57</b> |
| 4.1 La Trasformata di Laplace . . . . .                             | 57        |
| 4.1.1 Proprietà della Trasformata . . . . .                         | 58        |
| 4.1.2 Trasformata inversa . . . . .                                 | 60        |
| 4.1.3 Trasformate note . . . . .                                    | 61        |
| 4.1.4 Funzione di trasferimento . . . . .                           | 61        |
| 4.1.5 Zeri e Poli . . . . .   | 63        |
| 4.1.6 Coefficiente di Smorzamento e Pulsazione Naturale . . . . .   | 64        |
| 4.1.7 Espansione in Fratti Semplici . . . . .                       | 66        |
| 4.2 Elementi di Teoria dei Sistemi e Controlli Automatici . . . . . | 66        |
| 4.2.1 Equilibrio . . . . .  | 68        |
| 4.2.2 Rappresentazione con Matrici . . . . .                        | 68        |
| 4.2.3 Stabilità di un Sistema . . . . .                             | 70        |
| 4.2.4 Studio di $e^{At}$ per la Stabilità . . . . .                 | 73        |
| 4.2.5 Raggiungibilità e Osservabilità . . . . .                     | 77        |
| 4.2.6 Schemi a Blocchi . . . . .                                    | 78        |
| 4.2.7 Risposta allo Scalino . . . . .                               | 81        |

## CAPITOLO

# 1

## L'AUTOMAZIONE INDUSTRIALE

### 1.1 Introduzione

Con il termine *Automazione*, si intende la trasformazione di un processo pre-esistente, al fine di renderlo autonomo, riducendo o sostituendo del tutto l'intervento umano, verrà trattata l'automazione dei processi industriali e manifatturieri, e del loro controllo e supervisione. I sistemi presi in considerazione evolvono nel tempo e reagiscono ad eventi, che ne cambiano lo stato, e scaturiscono dei feedback, per un eventuale correzione dell'errore.

Con sistema *autonomo* si intende un sistema in cui viene ridotto l'intervento umano. L'*Automatica* si occupa di sfruttare gli strumenti dell'informatica per l'automazione, acquisendo informazioni dal mondo fisico tramite appositi sensori, per poi essere elaborate su un sistema di controllo (calcolatore), o una rete di calcolatori, che implementa dei protocolli standard per l'industria. Differentemente da altri contesti, come la trasmissione (ad esempio, di un video in streaming) nelle reti dell'automazione i ritardi risultano critici, e vanno ridotti al minimo.

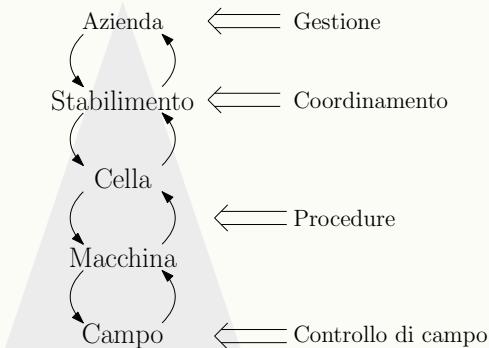


Figura 1.1: Piramide CIM

La *piramide CIM*, mostrata in figura 1.1 schematizza la gestione di un processo industriale e delle sue procedure, ogni strato comunica con quelli adiacenti scambiandosi informazioni, nei livelli più alti, le informazioni sono più *raffinate* ed astratte, nei livelli più bassi sono più *grezze*, ad esempio

- Al livello azienda viene decisa la produzione di un articolo (che coinvolgerà l'utilizzo di un braccio robotico)

- Al livello macchina, l'informazione che arriverà al braccio sarà semplicemente relativa ai gradi in cui i suoi giunti devono ruotare
- Al livello di campo, l'informazione comprenderà semplicemente il voltaggio da applicare alla macchina in questione per avere l'effetto desiderato.

Con **cella**, si intende un'unità composta da più macchine, in cui viene scambiato e lavorato del materiale per compiere delle azioni, il *controllo delle procedure* si occupa delle **macchine**, ed uno **stabilimento** è un complesso di celle/parti e catene di montaggio. Nel livello di campo, vengono utilizzati vari dispositivi, quali

- motori elettrici, servomotori, encoder
- azionatori di valvole, dinamo tachimetriche, sensori di temperatura

Tali sensori presenteranno un comportamento lineare, ad esempio, se una tensione  $x$  causa una rotazione di  $y$  giri per minuto, allora una tensione  $2x$  causerà una rotazione di  $2y$ . Anche se tali dispositivi non si prestano ad un comportamento lineare, ne verrà causata una volontaria linearizzazione, correggendo il comportamento.

Argomento centrale saranno i regolatori *PID*, la cui definizione, come molte altre trattate in questo capitolo, sarà ripresa ed approfondita in seguito. Tali regolatori agiscono su delle grandezze di campo.

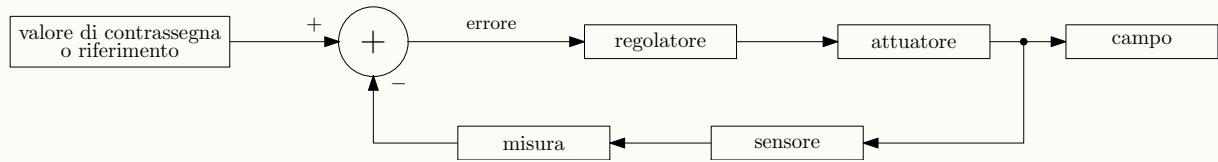


Figura 1.2: schematizzazione del regolatore PID

Si consideri il seguente esempio di regolatore, vi è una stufa che deve riscaldare una stanza, ed un sensore che ne misura la temperatura, il valore da raggiungere, detto *setpoint*, è di 20 gradi celsius. Si supponga che il sensore, una volta rilevata la temperatura, debba accendere e spegnere la stufa in modo che si raggiunga la temperatura adeguata.

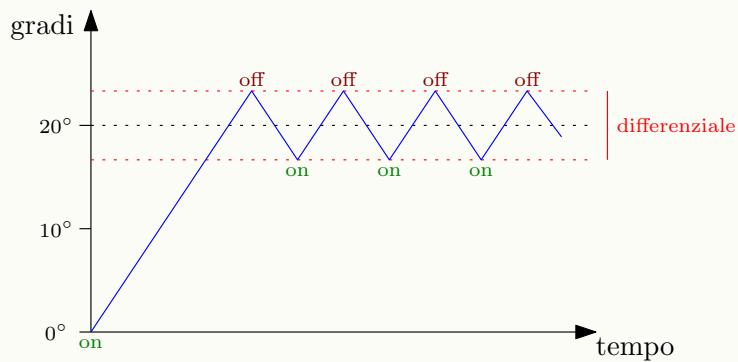


Figura 1.3: Azioni sulla stufa

In figura 1.3, il differenziale rappresenta un margine di differenza rispetto il setpoint, quando la temperatura è sotto il limite inferiore, la stufa viene accesa, quando è oltre il limite superiore, viene spenta (è chiaro che la velocità con la quale la temperatura cambia dipende dalle capacità della stufa e dalla dispersione del calore nella stanza).

Ridurre il valore del differenziale costringerebbe la temperatura ad assestarsi sempre di più sul valore desiderato, ma ciò, comporterebbe un'accensione/spegnimento della stufa più frequente, aumentando lo *sforzo di controllo*, è quindi, in questo caso, accettabile un differenziale di  $2^\circ$ .

Tale modello di controllo è il più semplice che ci sia, esistono ovviamente altri modi di regolare un segnale in modo che esso raggiunga il valore desiderato, ad esempio, calcolare l'errore  $e$  (ossia la differenza fra il valore desiderato ed il valore effettivo) e scalarlo ad una certa costante  $K_p$  per poi utilizzare tale valore nella regolazione del segnale.



Figura 1.4: Regolatore proporzionale

Anche se la variazione della temperatura è continua nel tempo, il suo superare una certa soglia è un evento, i PLC (controllori logici programmabili) agiscono sulle misure di campo, un noto linguaggio utilizzato per descriverne il funzionamento è noto come *Sequential Flow Chart (SFC)*.

Nei sistemi di automazione industriale vengono prediletti controllori e sensori distribuiti piuttosto che centralizzati, se ne vuole dare una dimostrazione pratica con il seguente esempio : Siano dati i due modi per trasportare un oggetto su un nastro trasportatore

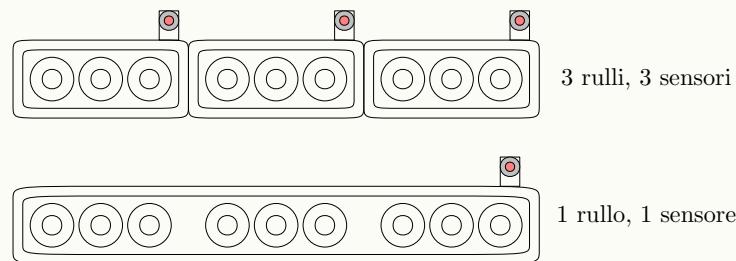


Figura 1.5: Rulli

Ogni nastro ha un sensore, se un oggetto è rilevato sopra il nastro, allora il motore si attiva. Risulta più efficiente la soluzione con 3 nastri in quanto sarà adoperata solamente la zona del nastro in cui è rilevato l'oggetto, piuttosto che l'intero nastro.

Per la modellizzazione di sistemi autonomi verranno adoperati automi a stati finiti, ampiamente trattati nel corso di **Automi, Calcolabilità e Complessità**, e *Reti di Petri*. Una rete di Petri, non è altro che un grafo bipartito, in cui ogni nodo appartiene ad un'insieme fra

- nodi *posto*
- nodi *transizione*

Inoltre, i nodi posto possono essere annotati con dei pallini neri, detti *token*, essi rappresentano lo stato del sistema in quanto indicano che delle risorse (in senso generale) sono disponibili in un posto, permettendo eventualmente una transizione. Ogni arco del grafo collega un nodo posto ad un nodo transizione.

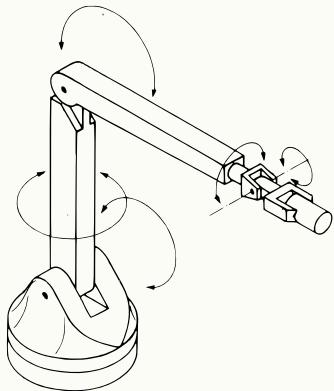


Figura 1.6: Esempio di una rete di Petri

Le macchine per l'automazione possono essere di vari tipi, ad esempio, comprendere un unico attuatore, e più meccanismi di attuazione del moto che utilizzano una sola fonte. Un altro tipo di macchine sono quelle a *controllo numerico*, macchine programmate per fare compiti elementari periodicamente.

Quando in un processo produttivo il materiale viene trasformato in maniera continuativa (come nell'industria farmaceutica o alimentare) si parla di **produzione continua**. Nel caso in cui i materiali sono processati in quantità finite e determinate si parla di **produzione a lotti**, le pause fra la lavorazione di un lotto e l'altro sono dovute al fatto che è necessario trasformare solo una determinata quantità di materiale grezzo.

L'automazione industriale fa largo utilizzo dei *robot*, bracci meccanici che presentano diversi gradi di libertà, ossia giunti, che possono ruotare attorno un certo asse.



L'organo terminale, posto alla fine del braccio (in un certo senso, la sua "mano"), può assumere una certa configurazione (posizione e direzione) a seconda della rotazione di ogni giunto del braccio. Si può dire che la posizione finale  $p$  e la sua direzione sono in funzione degli angoli  $\theta_1, \theta_2 \dots, \theta_n$  di rotazione di ogni giunto.

La procedura di comando da far eseguire al robot si traduce in una funzione nel tempo che descrive in che modo deve variare la rotazione di ogni singolo giunto, quest'ultima al livello di campo, si traduce nell'attuazione dei motori elettrici posti sui giunti.



Altri tipi di macchine per la movimentazione oltre i robot sono i rulli o i carrelli automatici, questi ultimi inizialmente potevano muoversi seguendo un percorso stabilito da magneti posti sul terreno, vengono dotati di sensori di prossimità per evitare collisioni. I carrelli moderni non sono limitati da percorsi prestabiliti, sono autonomi e possono fare percorsi arbitrari, che vengono calcolati da un elaboratore che ha la "visione" completa di essi.

Sorge spontaneo chiedersi quale sia la differenza fra Automazione e Robotica.

- *Analogie* : Entrambe coinvolgono l'informatica ed i calcolatori, interfacciandosi con il mondo fisico, entrambe sfruttano conoscenze e tecnologie multi-disciplinari.
- *Differenze* : La robotica mostra la fattibilità di una soluzione, l'automazione si occupa di porsi delle domande riguardo tale soluzione, fra cui l'efficienza, l'ottimalità, la fattibilità e l'affidabilità.

Formalmente, si definisce **processo** la *trasformazione* di *materiali* in *prodotti*. Tale trasformazione richiede

- Energia
- Informazione
- Controllo

Anche la costruzione di uno strumento per la caccia da parte di un uomo primitivo è un processo, in quel caso, l'energia è data dai muscoli del corpo, l'informazione viene dai sensi, quali vista e tatto, ed il controllo avviene da parte del cervello.



Lo scopo dell'automazione nel tempo è stato quello di sostituire o eliminare l'intervento dell'uomo nei processi, spesso è faticoso e pericoloso fornire energia, e l'uomo non ha le capacità sufficienti per gestire in maniera precisa l'informazione ed il controllo.

Il **primo passo** di industrializzazione è stato quello di sostituire l'energia fornita dall'uomo con l'energia naturale ed animale, durante la prima rivoluzione industriale, dove la produzione dipendeva da macchine azionate tramite potenza meccanica derivante da fonti energetiche come mulini.

Il **secondo passo** riguarda la sostituzione delle operazioni di controllo, un importante esempio fu il *regolatore di velocità* di Watt (1785), fu la prima applicazione di regolatore automatico, e sfruttava la forza centrifuga di due masse in rotazione per regolare la velocità di una macchina a vapore.

Il funzionamento è semplice, il vapore passante per la valvola fa aumentare la velocità di rotazione del regolatore, per la forza centrifuga, le masse poste sulla valvola a farfalla si allontanano, alzandosi, qui la gravità oppone resistenza facendo chiudere la valvola essendo che le masse tendono ad avvicinarsi al suolo, facendone diminuire la velocità di rotazione. Tali automatismi sono compresi dalla teoria dei controlli automatici, che definisce l'azione di comando più efficace per ottenere il comportamento desiderato a seguito di una certa misurazione fisica.

Il **terzo passo** riguarda la gestione delle informazioni mediante sistemi combinatori/sequenziali che al verificarsi di determinate condizioni reagiscono con operazioni di base. La prima generazione di controllori prevedeva circuiti elettronici composti da bobine e relé, essi erano ingombranti e lenti nell'acquisizione delle informazioni, inoltre la loro logica era prestabilita e ridefinirla scaturiva una modifica sostanziale del circuito.

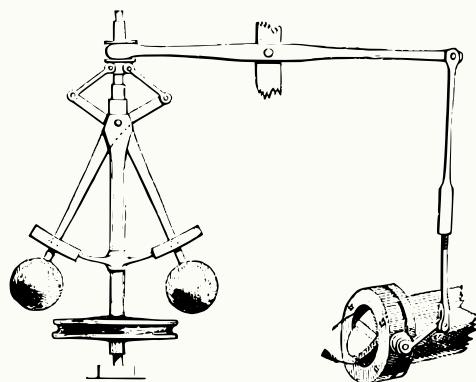


Figura 1.7: regolatore di Watt

Con l'avvento dei semiconduttori si è introdotta la seconda generazione di controllori, basati su schede elettroniche stampate, riducendo i costi ed aumentando l'efficienza, non risolvendo però il problema della bassa flessibilità, in quanto tali schede erano progettate per gestire una specifica logica.

La terza generazione di controllori vede i microprocessori protagonisti, grazie all'evoluzione dell'elettronica e dell'informatica sono ad oggi utilizzabili schede riprogrammabili (PLC) altamente flessibili, capaci di eseguire un generico algoritmo logico sequenziale.

| Rivoluzione Industriale | Periodo Temporale      | Tecnologie e Caratteristiche  |
|-------------------------|------------------------|---|
| prima                   | 1785 – metà 19° secolo | utilizzo di macchine azionate da energia meccanica (vapore, acqua)  |
| seconda                 | fine 19° secolo – 1970 | azionamento elettrico delle macchine e produzione di massa basata sulla divisione del lavoro (catene di montaggio)  |
| terza                   | 1970 – oggi            | utilizzo dell'elettronica e delle tecnologie dell'informazione (IT) per aumentare il livello di automazione di attività complesse (CNC, robot e computer)   |
| quarta                  | oggi – futuro          | sviluppo di macchine sensorizzate e intelligenti, interconnesse tra loro e con internet, con la raccolta, analisi e uso di grandi quantità di informazioni (Big data), per una specializzazione di massa del prodotto, l'integrazione della catena produttiva (supply and value chains) e una maggiore efficienza |



## 1.2 Processi Industriali

I sistemi di produzione automatizzati sono composti da diverse componenti

- processo produttivo - movimentazioni meccaniche, attuazioni, trasformazioni fisiche e chimiche
- sistema di controllo - uno o più dispositivi messi in comunicazione con il processo produttivo, che possono agire su di esso riducendo l'intervento umano.
- impianto di produzione - macchinari, edifici, componenti

Si considerino i seguenti esempi di produzione industriale

- **produzione di energia elettrica**

- materie prime (input continuo) : combustibile fossile, ossigeno
- prodotto (output continuo) : energia elettrica misurata in Kilowatt/ore
- impianto necessario : tubature, caldaia, turbine, bruciatori, pompe, valvole, camini, edifici di sostegno e di contenimento, sensori

- **produzione di vernice**

- materie prime (input continuo) : resine, coloranti, acqua, additivi
- prodotto (output discreto) : barattoli di vernice
- impianto necessario : reattori (dove avvengono le reazioni principali), miscelatori, riscaldatori, tubature, pompe, valvole, edificio di sostegno e di contenimento, sensori

- **produzione di parti meccaniche di motori**

- materie prime (input discreto) : pezzo metallico grezzo
- prodotto (output discreto) : componente del motore
- impianto necessario : macchina con mandrini per la meccanica (fresatura, foratura, ...), sistema di controllo numerico (posizionamento corretto dell'utensile del mandrino), dispositivo di cambio utensile automatico, protezioni, sistemi di scarico trucioli

### 1.2.1 Sistema di Controllo

Il sistema di controllo interagisce con il processo attraverso *sensori* e *trasduttori*. Acquisiscono informazioni dal mondo fisico (pressione, temperatura) e le convertono in segnali facilmente analizzabili e controllabili (segnali elettrici).

Un esempio di sensore per misurare la forza, consiste in un circuito il cui resistore viene deformato quando rilevata una pressione sul sensore, variandone la resistenza.

Una volta raccolte le informazioni, è possibile cambiare le variabili di controllo del processo per ottenere il comportamento desiderato. Solitamente, il segnale di controllo è a bassa potenza, non sufficiente per correggere il comportamento di grossi attuatori, a tal proposito sono adoperati gli *amplificatori*. Le informazioni sono elaborate da un apposito calcolatore che può essere inglobato o esterno alla macchina in questione.

Nei sistemi di controllo è stata definita una normativa, nota come IEC61499 per normalizzare il funzionamento generale di tali dispositivi. In particolare, un sistema di controllo deve rifarsi ai seguenti punti

- è un sistema informatico che elabora informazioni ed esegue/applica algoritmi.
- è costituito da vari dispositivi che comunicano attraverso un'apposita rete.
- i dispositivi devono implementare delle funzionalità, denominate *applicazioni*.
- tali applicazioni possono essere distribuite fra i vari dispositivi.
- i dispositivi devono interfacciarsi con la rete e con il processo, inoltre le applicazioni costituiscono le loro *risorse*.
- in generale, una *risorsa* è costituita da
  - una o più applicazioni
  - funzioni che collegano dati ed eventi
  - funzioni di pianificazione delle attività (un sistema operativo)

Si definisce **Manufacturing** l'insieme dei processi produttivi da applicare per ottenere un prodotto finale desiderato, a partire da materiali grezzi. Richiede

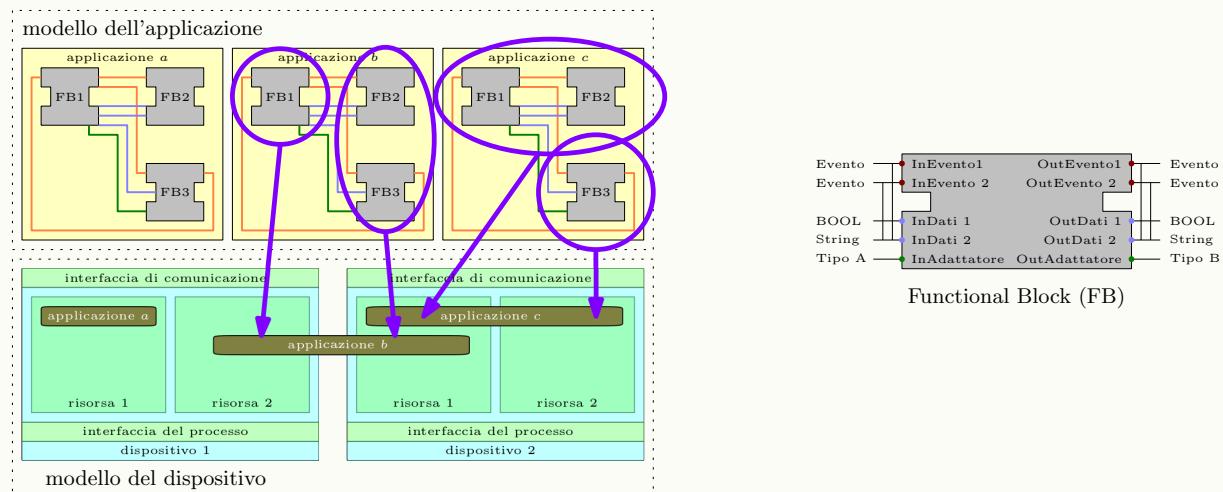
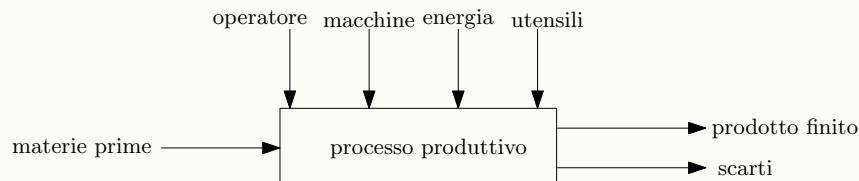


Figura 1.8: schematizzazione di un sistema di controllo

- energia
- macchine
- intervento umano
- informazioni

Da un punto di vista economico, è il processo che da valore aggiunto ai materiali utilizzati.



Spesso di questi processi produttivi ce ne sono molteplici messi a catena, in modo che l'output di un processo sia l'input di un altro. Si consideri il seguente esempio che schematizza un sistema di produzione del cemento. Il cemento viene prodotto a partire da calcare pure ed argilla, viene mandato nel frantocio

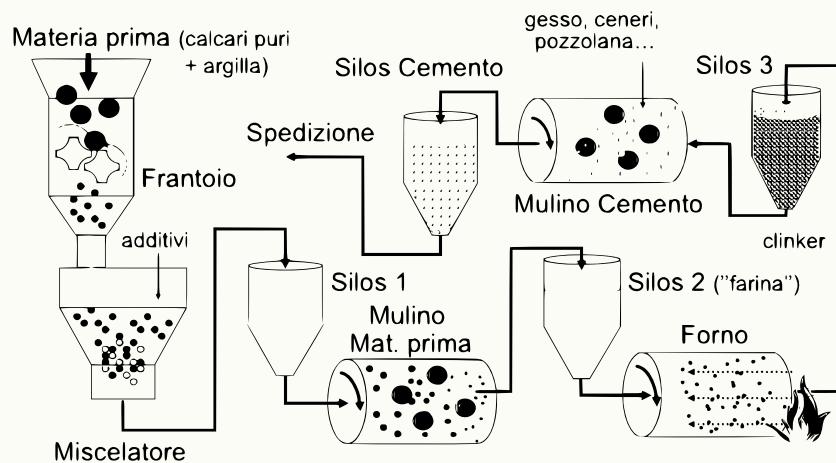


Figura 1.9: Cementificio : schema

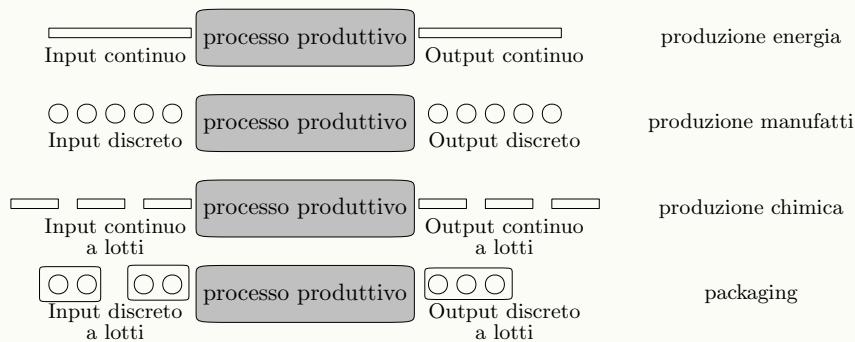
per essere tritato, ciò che ne esce viene mescolato per poi venire accumulato in un silos. Quest'ultimo, funge da *buffer*, ossia un accumulo del prodotto non ancora terminato durante la sequenza di produzione,

utile nel sincronizzare la catena, qui viene riempito totalmente prima di passare allo step successivo. Il primo mulino esegue una fase di pre riscaldamento, il calore utilizzato deriva dall'energia termica scartata dal forno principale ad alte temperature.

Il processo consiste in una *sequenza di operazioni elementari* di varia natura

- lavorazione e assemblaggio
- trasporto e stoccaggio
- verifica, test, e coordinamento

Fin'ora è stata evidenziata la *numerabilità* delle materie prime o del prodotto finale di un certo processo, a tal proposito, è possibile classificare i processi produttivi nel seguente modo



- **processi continui** : Trattano la trasformazione continua nel tempo della materia, energia e quantità di moto. L'obiettivo è mantenere uniforme nel tempo la qualità del prodotto, gli scambi avvengono sulle variabili fisiche.
- **processi a lotti** : Possono essere sia continui che discreti, il lavoro finale necessita di una specifica, e finita, quantità di materia prima per essere prodotto. Segue una determinata sequenza di lavorazione detta *ricetta*, il processo si intorrempe fra un lotto ed un altro. Obiettivo dell'automazione è la definizione delle ricette, garantire un uso corretto delle risorse e realizzare tale sistemi in modo che siano ripetibili.
- **processi semi continui** : La produzione avviene in lotti o batch, con fasi di lavorazione continue intervallate da pause per il cambio di prodotto o la pulizia dell'impianto
- **processi discreti** : Si lavora su singoli prodotti, materiali numerabili, è una produzione tipica dell'industria manifatturiera.

I sistemi di controllo dei processi prevedono azioni di tipo *logico* oppure *diretto*

|                   | Controllo logico   | Controllo diretto   |
|-------------------|--|---|
| Processi continui | coordinamento complessivo<br>avviamento<br>e spegnimento guasti e emergenze  | controlli primari<br>(livelli, temperature, pressioni)<br>controlli asserviti (portata pompe,<br>posizione valvole) |
| Processi a lotti  | controllo delle ricette<br>supervisione impianto<br>avviamento e spegnimento guasti<br>e emergenze<br>allocazione risorse impianto | controlli primari (livelli,<br>temperature, pressioni)<br>controlli asserviti (portata pompe,<br>posizione valvole) |
| Processi discreti | controllo sequenze di lavoro<br>delle singole macchine<br>supervisione impianto<br>avviamento e spegnimento<br>guasti e emergenze  | controlli asserviti (posizionamento,<br>velocità<br>motori elettrici)   |

- *regolazione* : Portare un segnale ad un determinato valore di riferimento

- **asservimento** : Far sì che il segnale segua una certa dinamica nel tempo

Il *controllo diretto* riguarda il rilevamento di grandezze fisiche analogiche da parte di sensori posti sul campo, tali valori continui nel tempo vengono convertiti in segnali digitali, confrontandoli poi con il valore di riferimento, dando l'azione di comando per correggere il comportamento delle variabili.

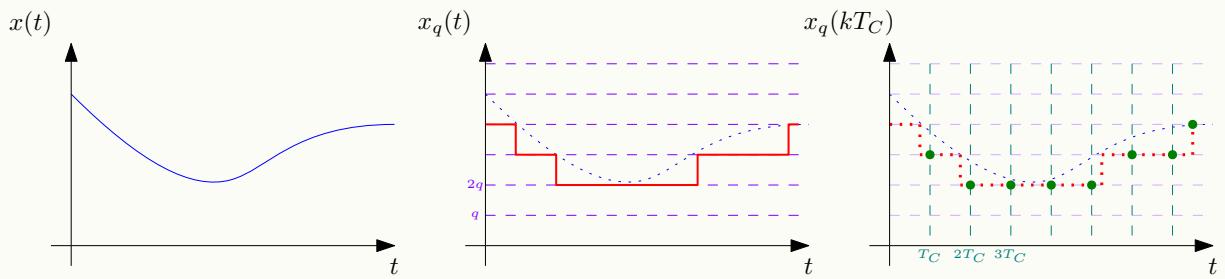
1. I sensori forniscono un segnale **analogico**  $x(t)$  continuo nel tempo (temperatura, posizione)
2. Tale segnale viene **quantizzato**, denotato  $x_q(t)$ , costringendolo ad assumere un numero limitato di valori prestabiliti  $\Delta$ , separati da un'ampiezza  $q$ , il numero di bit necessari a rappresentare i valori del segnale sarà  $n = \log_2(\Delta/q)$

$$x_q(t) = \lfloor \frac{x(t)}{q} \rfloor \cdot q$$

3. Il segnale analogico quantizzato viene poi **campionato**, ossia, viene valutato esclusivamente in determinati intervalli di tempo separati da un tempo di campionamento  $T_C$

$$x_q(t) \rightarrow x_q(kT_C) \quad t \in \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{Z}$$

4. A tal punto si ha un **segnale digitale** codificato in numeri binari che può essere elaborato su un sistema di controllo digitale.



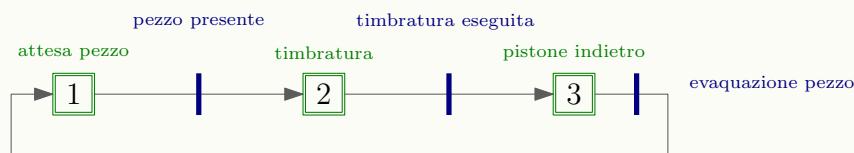
Le variabili logiche, ad esempio quelle booleane, assumono valori in un insieme numerabile, e su di esse è possibile eseguire operazioni logiche, si consideri il seguente esempio :

Il comando  $M$  è una variabile booleana che, se vera, aziona il moto di un motore elettrico. Il sensore di prossimità è descritto una variabile booleana  $P$  che è vera se ci sono ostacoli nelle vicinanze, la variabile  $C$  descrive il consenso nel voler attivare il motore.

Risulta chiaro che

$$M = C \wedge \neg P$$

Il seguente SFC (Sequential Functional Chart) descrive il comportamento logico di una timbratrice automatica.



~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~ ~\*~

## 1.3 Analisi dei Sistemi di Produzione

Si considerino i sistemi di produzione manifatturiera, quindi, discreti. Essi possono seguire diverse strutture, fra le più importanti vi sono

- **linea di trasferta** : La produzione avviene secondo una specifica sequenza, rigida e non flessibile. Un esempio tipico è la classica catena di montaggio introdotta da Ford.

- **flow shop** : Vi sono diversi macchinari, e più flussi di produzione che si alternano i macchinari diversi.
- **job shop** : Ci sono differenti percorsi, intrecciati e complessi fra i diversi macchinari e reparti dell'impianto di produzione.
- **celle di produzione** : Le singole celle contengono più macchinari, ed ognuna di queste si occupa della produzione (dall'inizio alla fine) di un singolo prodotto, mantenendola concentrata nella celle, senza che essa sia dislocata nell'impianto.
- **FMS** : Diversi flussi fra le varie celle.

Vanno considerati vari aspetti nell'analisi dei sistemi di produzione, come la trattazione dei tempi di attesa, il *WIP - work in process*, è un termine utilizzato per indicare il numero di pezzi che vengono lavorati contemporaneamente.

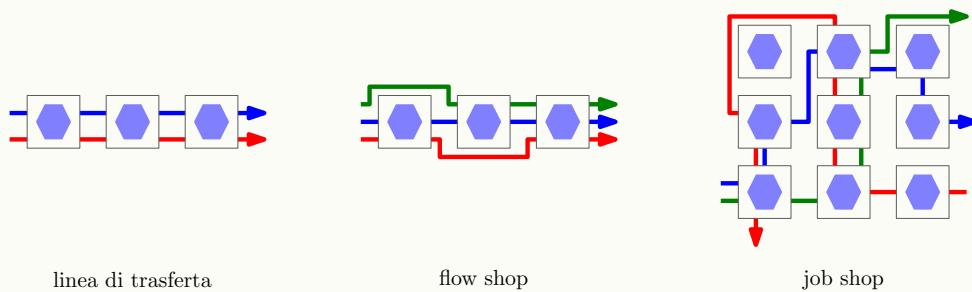


Figura 1.10: sistemi di produzione

### 1.3.1 Linee di Trasferta

Verrà trattata in questa sezione la modellizzazione delle linee di trasferta, e verranno analizzati alcuni parametri che le caratterizzano. Una linea di trasferta consiste in una serie di macchine o stazioni (macchinari adatti a più compiti) connessi sequenzialmente da un sistema di trasporto. La sequenza di produzione è rigida ed i pezzi vengono processati continuamente nel tempo senza interruzioni. Le linee possono essere sincrone (i pezzi avanzano alla stessa velocità) oppure asincrone, tramite l'installazione di appositi buffer fra una macchina e l'altra.

- *pro* : La produzione avviene per un singolo prodotto, risulta molto efficiente, il WIP è ridotto ed il trasporto dei pezzi è semplice, dato che segue un'unica direzione. I tempi di avvio sono brevi.
- *contro* : La produzione è poco flessibile ed è a rischio obsolescenza, il malfunzionamento di una macchina può causare l'interruzione dell'intera linea (single point of failure).

**Teorema (Legge di Little)** : Data una linea di trasferta, ed i seguenti parametri

- $p$  : tasso di produzione misurato in pezzi per unità di tempo
- $T_a$  : tempo necessario per l'attraversamento di una linea
- $WIP$  il work in process, il numero di pezzi che vengono lavorati contemporaneamente

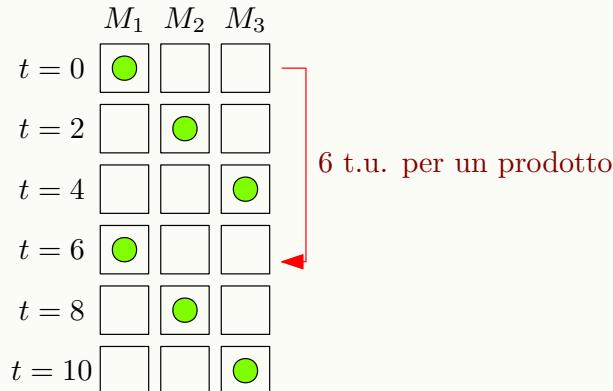
Vale la seguente relazione

$$WIP = p \cdot T_a$$

La legge si riferisce ad un sistema a regime permanente, quindi non considera l'avvio della linea, dato quindi un tasso  $p$  fisso, per ridurre il  $WIP$  è necessario ridurre il tempo necessario per l'attraversamento della linea.

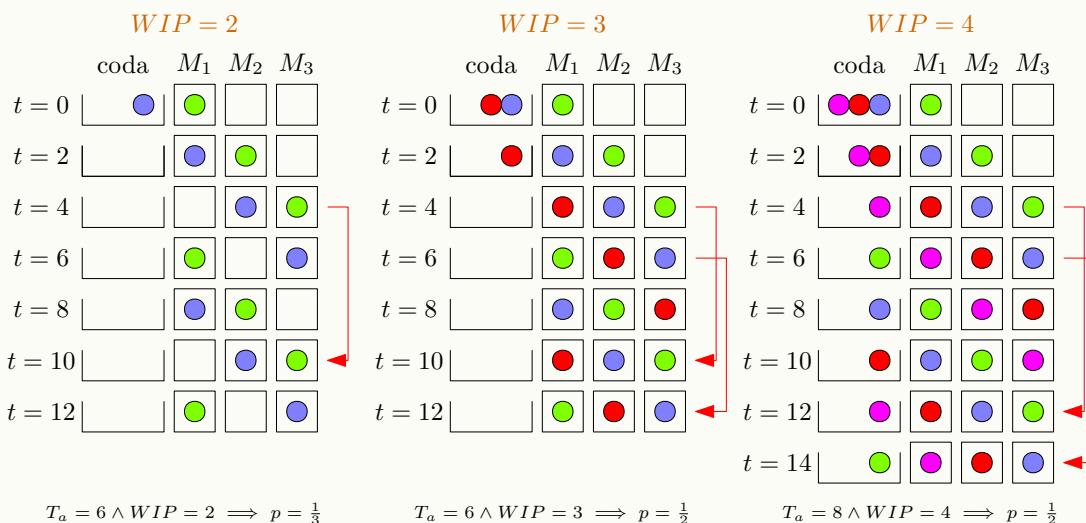
**Esempio**

Verrà considerata una linea di trasferta composta da 3 macchine  $M_1, M_2$  e  $M_3$ , i cui tempi di lavoro sono uguali e costanti  $T_1 = T_2 = T_3 = 2$ . Tale analisi è fatta a *WIP* costante.



In questo contesto, il WIP è 1, ciò significa che solamente un pezzo (indicato con una pallina verde) può occupare le 3 macchine contemporaneamente. Ogni 2 unità di tempo, il pezzo viene processato da una macchina all'altra, ci vogliono 6 unità di tempo per produrre un pezzo,  $T_a = 6$ .

$$T_a = 6 \wedge WIP = 1 \implies p = \frac{1}{6} \text{ un pezzo ogni 6 unità di tempo}$$



Si noti come nonostante il WIP aumenti, nel caso  $WIP = 4$  il tasso di produzione rimane invariato, risulta quindi fondamentale trovare il valore di WIP ottimale che minimizzi  $T_a$  e massimizzi  $p$ .

L'esempio proposto in figura 1.11 è simile a quello precedente, ma in questo caso le macchine hanno tempi di lavoro differenti, precisamente, aumentano in ordine crescente.

Con **Dimensionamento** e **Bilanciamento** di una linea di trasferta, si intende la ricerca del compromesso ideale fra l'aumento della produttività (utilizzo di più macchine) e la riduzione dei costi, a parità di tempo totale di lavorazione. Le curve in figura 1.13, descrivono l'allocazione delle lavorazioni (distribuzione del carico) in un numero fissato di  $N$  stazioni/macchine.

- maggiore è il numero di stazioni utilizzate, minore sarà il carico medio delle stazioni e maggiore il costo unitario del singolo pezzo
- minore è il numero di stazioni utilizzate, maggiore sarà il carico medio delle stazioni e maggiore il costo del rischio di effettuare lavorazioni incomplete, a causa della elevata saturazione nell'impiego dei macchinari della stazione

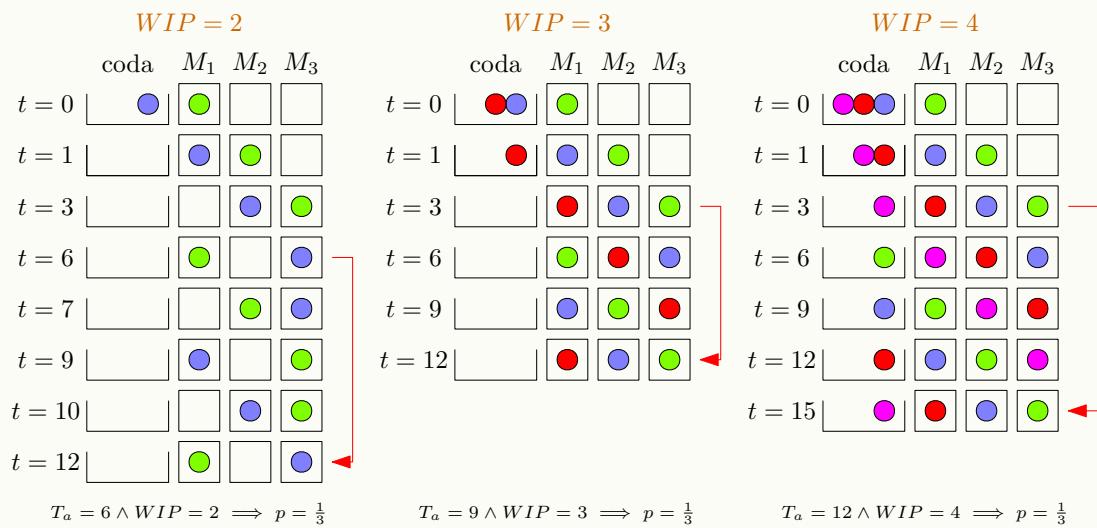
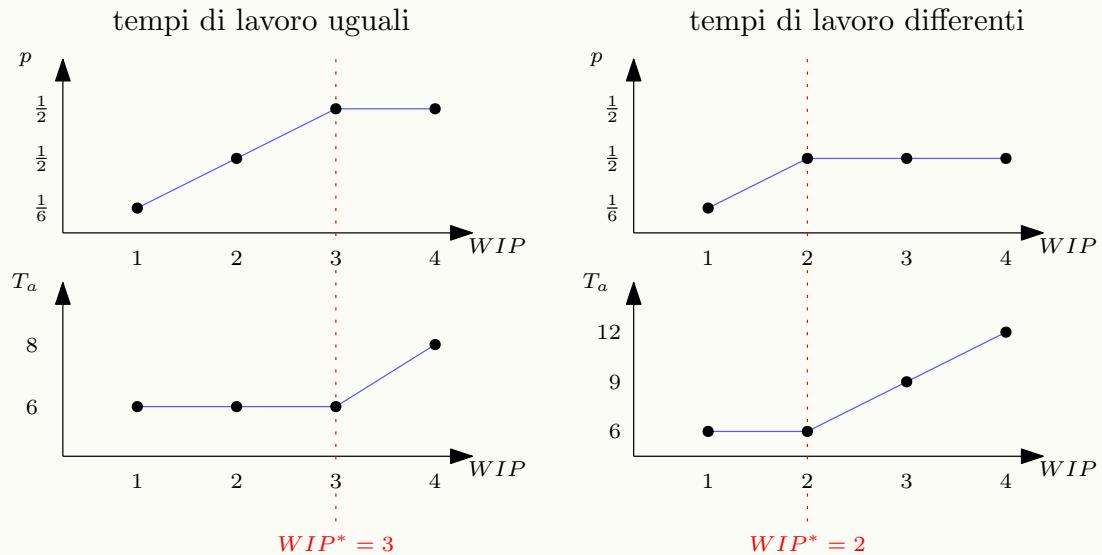
Figura 1.11:  $T_1 = 1 \quad T_2 = 2 \quad T_3 = 3$ 

Figura 1.12: Analisi in funzione del WIP



Figura 1.13: Analisi in funzione del carico su una singola macchina

Il problema del bilanciamento di una linea di trasferta è NP-completo, per questo vengono utilizzate delle euristiche di soluzione, che garantiscono una soluzione prossima a quella ottimale.

### Modello del Problema del Dimensionamento

Vi è una linea di trasferta con  $n$  macchine/stazioni, ogni macchina  $i$ -esima, ha un carico di lavoro  $C_i$  espresso in unità di tempo. La linea deve soddisfare un certo tasso di produzione  $p$  espresso in pezzi per unità di tempo. Il valore  $CMT = \frac{1}{p}$  rappresenta il *carico massimo teorico*, è chiaro che se una qualsiasi stazione ha un carico  $C_i > CMT$ , allora il tasso di produzione  $p$  non è rispettato.

Un tasso  $p = 7200 \frac{\text{pezzi}}{\text{mese}} = 10 \frac{\text{pezzi}}{\text{ora}}$  implica un carico di lavoro massimo pari a 6 minuti per pezzo.

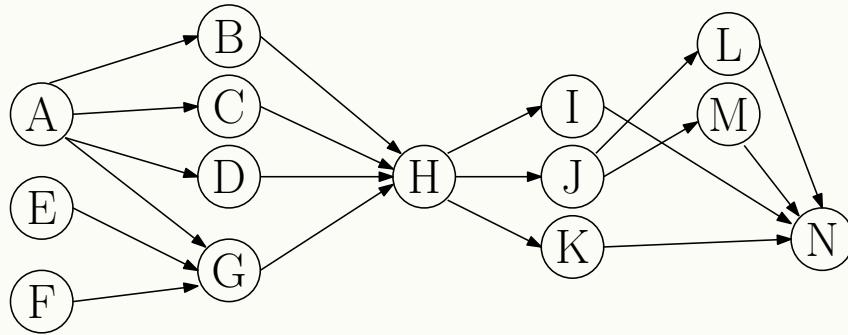
Sarebbe ideale inoltre ridurre il numero delle macchine  $n$ , dato che più macchine, equivale a dire un costo di manutenzione maggiore. Nella linea di trasferta, le varie lavorazioni da eseguire possono avere delle *dipendenze* (una lavorazione  $i$  può essere eseguita esclusivamente dopo una lavorazione  $j$ ), si possono quindi rappresentare tali dipendenze attraverso un grafo orientato.

Dato quindi un insieme di lavorazioni, si vuole trovare

- una sequenza di produzione in cui il carico di lavoro per ogni macchina sia minore del carico di lavoro massimo teorico (ammissibilità)
- tale sequenza, deve rispettare le dipendenze (ammissibilità)
- che minimizzi il numero  $n$  di macchine/stazioni

#### Esempio

| Lavorazione            | A  | B  | C  | D  | E  | F  | G       | H          | I  | J  | K  | L  | M  | N          |
|------------------------|----|----|----|----|----|----|---------|------------|----|----|----|----|----|------------|
| Tempo $T_i$ in secondi | 55 | 30 | 50 | 42 | 20 | 25 | 45      | 60         | 36 | 42 | 30 | 40 | 36 | 40         |
| lavorazioni necessarie |    | A  | A  | A  |    |    | A, E, F | B, C, D, G | H  | H  | H  | J  | J  | I, K, L, M |



La specifica del tasso di produzione è

$$p = 300 \frac{\text{pezzi}}{7h} = \frac{300}{7} \frac{\text{pezzi}}{h} = \frac{300}{3600 * 7} \frac{\text{pezzi}}{s} = \frac{1}{84} \frac{\text{pezzi}}{s}$$

Il carico massimo teorico è quindi

$$CMT = p^{-1} = 84 \text{ secondi a pezzo}$$

Essendo il tempo totale per la lavorazione di un pezzo uguale a 551 secondi, si ha che, al minimo, il numero di macchine presenti deve essere  $n = \lceil T_{tot}/CMT \rceil = \lceil 551/84 \rceil = 7$ . Per trovare una sequenza ammissibile ed ottimale, sarebbe necessaria una procedura non polinomiale, esistono quindi degli algoritmi che forniscono una soluzione ammissibile (quando possibile) tramite delle euristiche.

#### Ranked Positional Weight Technique

L'algoritmo consiste nell'assegnare ad ogni lavorazione  $i$  un peso  $PW_i$ , che consiste nel suo tempo necessario  $T_i$  sommato ai tempi di tutte le lavorazioni che dipendono da esso, direttamente ed indirettamente. In seguito, si ordinano le lavorazioni in base a tali pesi, in ordine decrescente, nell'esempio precedente si ha

| Lavorazione | A                  | B              | C              | D              | E                 | F                 | G             | H      | I  | J          | K  | L  | M  | N  |
|-------------|--------------------|----------------|----------------|----------------|-------------------|-------------------|---------------|--------|----|------------|----|----|----|----|
| $T_i$       | 55                 | 30             | 50             | 42             | 20                | 25                | 45            | 60     | 36 | 42         | 30 | 40 | 36 | 40 |
| precedenti  | B, C, D<br>G..., N | H, I<br>..., N | H, I<br>..., N | H, I<br>..., N | G, H ,<br>I,... N | G, H ,<br>I,... N | H, I<br>...,N | I...,N | N  | L, M,<br>N | N  | N  | N  |    |
| $PW_i$      | 506                | 314            | 334            | 326            | 349               | 354               | 329           | 284    | 76 | 158        | 70 | 80 | 76 | 40 |

A tal punto si ordinano secondo  $PW_i$  :

$$A \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow H \rightarrow J \rightarrow L \rightarrow I \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow N$$

Si iniziano poi a considerare le lavorazioni in quest'ordine una dopo l'altra, sommandone i tempi necessari fino a ché sono minori di  $CMT$ , ad esempio

- Considero A, che ha tempo di lavorazione 55, lo assegno alla prima stazione.  
◊ Carico della stazione 1 :  $C_1 = 55 \leq CMT$
- Considero F, che ha tempo di lavorazione 25, lo assegno alla prima stazione.  
◊ Carico della stazione 1 :  $C_1 = 80 \leq CMT$
- Considero E, che ha tempo di lavorazione 20, non posso assegnarlo alla prima stazione, dato che il carico sarebbe maggiore di  $CMT = 84$ , quindi è necessaria una nuova stazione alla quale assegno E.  
◊ Carico della stazione 2 :  $C_2 = 20 \leq CMT$
- Considero C, che ha tempo di lavorazione 50, lo assegno alla seconda stazione.  
◊ Carico della stazione 2 :  $C_2 = 70 \leq CMT$
- ...e così via

Al termine, si avrà la seguente assegnazione

| $CMT - C_i$ | 4  | 14 | 39 | 12 | 24 | 2  | 12 | 14 |
|-------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $C_i$       | 80 | 70 | 45 | 72 | 60 | 82 | 72 | 70 |
| Lavorazioni | F  | C  | G  | B  | H  | L  | M  | N  |
|             | A  | E  | D  |    | J  | I  | K  |    |
| Stazione    | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |

Il termine  $CMT - C_i$  è detto *sbilanciamento*, lo sbilanciamento medio equivale alla somma degli sbilanciamenti diviso il numero di stazioni, in questo caso  $111/8 = 13.875$  secondi, si misura in percentuale rispetto il  $CMT$ , in questo caso, si ha uno sbilanciamento di circa 16.5%.

| tempi lavorazioni           | 55 | 25 | 20 | 50 | 45 | 42 | 30                         | 60 | 42 | 40 | 36 | 36           | 30 | 40                       |        | tempi lavorazioni sulle macchine | tempi morti | distanza da CMT = 84 |
|-----------------------------|----|----|----|----|----|----|----------------------------|----|----|----|----|--------------|----|--------------------------|--------|----------------------------------|-------------|----------------------|
| macchina                    |    |    |    |    |    |    |                            |    |    |    |    |              |    |                          |        | 82 sec/pezzo                     |             |                      |
| 1                           | A  | F  | .. | .. | .. | .. | ripete A, F su nuovi pezzi | .. | .. | .. | .. | ..           | 80 |                          | A = 55 | F = 25                           | 2           | 4                    |
| 2                           |    | E  | C  | .. | .. | .. | ripete E, C su nuovi pezzi | .. | .. | .. | 70 | a regime con |    | E = 20                   | C = 50 | 12                               | 14          |                      |
| 3                           |    |    | G  | .. | .. | .. | ..                         | .. | .. | .. | 45 | avanzamento  |    | G = 45                   | -      | 37                               | 39          |                      |
| 4                           |    |    |    | D  | B  | .. | ..                         | .. | .. | .. | 72 | sincrono     |    | D = 42                   | B = 30 | 10                               | 12          |                      |
| 5                           |    |    |    |    | H  | .. | ..                         | .. | .. | .. | 60 | della linea  |    | H = 60                   | -      | 22                               | 24          |                      |
| 6                           |    |    |    |    |    | J  | L                          | .. | .. | .. | 82 | di trasferta |    | J = 42                   | L = 40 | 0                                | 2           |                      |
| 7                           |    |    |    |    |    |    | I                          | M  | .. | .. | 72 | ogni 82 sec  |    | I = 36                   | M = 36 | 10                               | 12          |                      |
| 8                           |    |    |    |    |    |    |                            | K  | N  | 70 |    |              |    | K = 30                   | N = 40 | 12                               | 14          |                      |
| tempo totale lavorazioni    |    |    |    |    |    |    | 551                        |    |    |    |    |              |    | tempo totale lavorazioni |        | 8 x 82 = 656                     |             |                      |
| (effettivo sul primo pezzo) |    |    |    |    |    |    |                            |    |    |    |    |              |    |                          |        |                                  |             |                      |

### 1.3.2 Flow Shop

Un'altro tipo di struttura per un sistema industriale è il già citato flow shop, dove vi è la produzione di diversi prodotti, che devono seguire un determinato percorso fra le macchine presenti. Ogni prodotto deve vedere  $m$  lavorazioni, e differenti prodotti, possono passare per la stessa macchina, ma necessitando di tempi differenti, quindi, sarà assegnato un tempo di lavorazione ad ogni coppia (lavorazione, prodotto). Il tempo totale di completamento  $T_{max}$ , detto **makespan**, è il valore da minimizzare, possono essere presenti dei buffer nella struttura.

Il problema si complica rispetto la linea di trasferta, in questo caso però, date per assunte delle condizioni, vi è una regola che permette di stabilire una sequenza ottimale.

**Teorema (Regola di Johnson)** : Si considera l'assunzione per cui ci sono esclusivamente 2 macchine/stazioni, denotate  $M_1$  e  $M_2$ .

Sia  $L = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$  un insieme di lavorazioni, i cui tempi per  $M_1$  sono  $\{t_{1_1}, t_{2_1}, \dots, t_{n_1}\}$ , e i tempi per  $M_2$  sono  $\{t_{1_2}, t_{2_2}, \dots, t_{n_2}\}$ . dove  $\forall i, t_{i_1} > 0 \wedge t_{i_2} > 0$ . Nella **soluzione ottimale**, la lavorazione  $l_i$  precede la lavorazione  $l_j$  se e solo se

$$\min(t_{i_1}, t_{j_1}) < \min(t_{j_1}, t_{i_2})$$

Tale teorema fornisce una procedura per trovare una soluzione ottimale, i passi sono i seguenti

1. si costruisce  $S1 = \{l_i \in L \mid t_{i_1} < t_{i_2}\}$  (lavorazioni più rapide su  $M_1$ )
2. si costruisce  $S2 = S1^C = \{l_i \in L \mid l_i \notin S1\}$  (lavorazioni più rapide su  $M_2$ )
3. Vengono schedulate le lavorazioni secondo la regola
  - prima si eseguono tutte le lavorazioni di  $S1$  in ordine crescente secondo  $t_{i_1}$
  - poi si eseguono tutte le lavorazioni di  $S2$  in ordine decrescente secondo  $t_{i_2}$

#### Esempio di Applicazione per 2 Macchine

Si hanno le seguenti lavorazioni

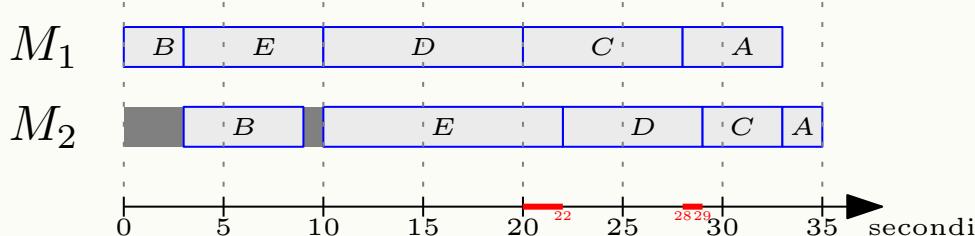
| Lavorazione | A | B | C | D  | E  | $T_{tot}$ |
|-------------|---|---|---|----|----|-----------|
| $t_{i_1}$   | 5 | 3 | 8 | 10 | 7  | 33        |
| $t_{i_2}$   | 2 | 6 | 4 | 7  | 12 | 31        |

Si costruiscono i due insiemi

- $S1 = \{B, E\}$
- $S2 = \{A, C, D\}$

Si ordinano secondo i criteri della procedura ottenendo la sequenza

$$S^* = B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A$$



Gli intervalli rossi nella linea del tempo rappresentano il *tempo sprecato*, all'istante  $t = 20$ , la lavorazione D termina su  $M_1$ , ed è pronta ad essere schedulata su  $M_2$ , ma quest'ultima è ancora impegnata nella lavorazione di E, per questo il prodotto che ha appena terminato D dovrà attendere, sarà quindi necessaria la presenza di un buffer. Situazione analoga per la lavorazione C nell'istante 28.

Non ci sono attese sulla macchina 1, le attese sulla macchina 2 sono inevitabili, ma tale procedura le minimizza. La macchina 1 è costantemente carica, si dice che  $T_{idle,1} = 0$  (non ci sono tempi di attesa). Differente è la situazione per la macchina 2 :  $T_{idle,2} = 4$ . Il tempo di lavorazione totale è  $T_{max} = 35$ .

### Generalizzazione con 3 Macchine

Sotto ulteriori ipotesi, è possibile trovare una soluzione ottimale anche in un contesto con 3 macchine (o stazioni)  $M_1, M_2, M_3$ , con relativi tempi di lavorazione  $t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}$  con  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  dove  $n$  = numero lavorazioni. Per poter trovare tale soluzione, è necessario che venga soddisfatta la seguente condizione

$$\max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} (t_{i_2}) \leq \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} (t_{i_1}) \vee \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} (t_{i_2}) \leq \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} (t_{i_3})$$

Se tale condizioni è avverata, è possibile considerare una struttura flow shop a due macchine, precisamente  $M'_1, M'_2$ , con le medesime lavorazioni, la cui soluzione è identica alla soluzione del sistema originale con 3 macchine.

Nel nuovo sistema, i nuovi tempi di lavorazione  $t'_{i_1}, t'_{i_2}$  vanno definiti come segue

- $t'_{i_1} = t_{i_1} + t_{i_2}$
- $t'_{i_2} = t_{i_2} + t_{i_3}$

### Esempio di Applicazione per 3 Macchine

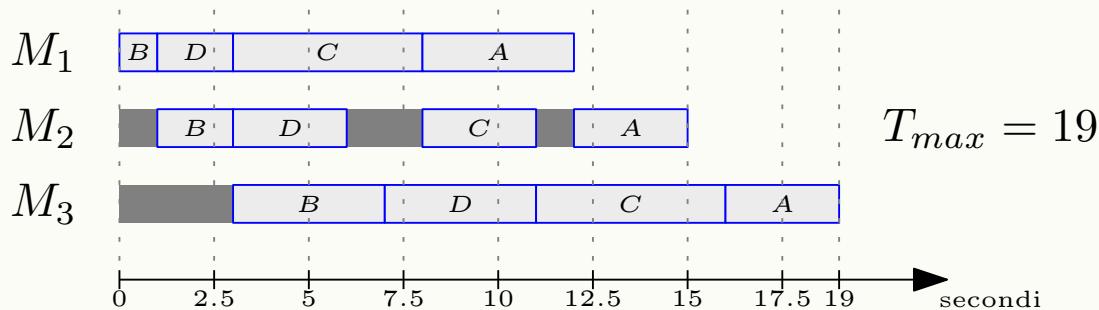
Si hanno le seguenti lavorazioni

| Lavorazione | A | B | C | D |
|-------------|---|---|---|---|
| $t_{i_1}$   | 4 | 1 | 5 | 2 |
| $t_{i_2}$   | 3 | 2 | 3 | 3 |
| $t_{i_3}$   | 3 | 4 | 5 | 3 |

La condizione  $\max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} (t_{i_2}) \leq \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} (t_{i_3})$  è soddisfatta, quindi è possibile ridurre il sistema ad uno equivalente

| Lavorazione | A | B | C | D |
|-------------|---|---|---|---|
| $t'_{i_1}$  | 7 | 3 | 8 | 5 |
| $t'_{i_2}$  | 6 | 6 | 8 | 7 |

Si applica la regola di Johnson, trovando la sequenza  $S^* = B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A$ , che verrà applicata al sistema originale con 3 macchine.



Un'altra struttura è la **produzione per reparti**, già accennata con il nome di **job shop**, in cui l'impianto è suddiviso in reparti contenenti stazioni, ed i vari prodotti devono essere passati fra i reparti attraverso sistemi di trasporto che seguono un percorso prefissato, è quindi necessario considerare il routing dei prodotti fra i reparti. Il modello job shop è caratterizzato da

- vaste categorie di prodotti, che subiscono lavorazioni con sequenze differenti
- operazioni non ripetitive ed alta flessibilità
- un maggiore work in process, i flussi lavorativi sono intricati
- elevati tempi di attraversamento, e qualità dei prodotti non sempre omogenea



Figura 1.14: job shop e celle di produzione

Quando è possibile individuare famiglie di prodotti simili con cicli di lavorazione omogenei, si identificano delle celle contenenti gruppi di macchine adatti a tale famiglia di prodotti, tale **produzione per celle** semplifica i flussi di produzione, il trasporto e la gestione, le varie celle sono indipendenti fra loro.

Quando si implementa il trasporto automatico ed un controllo tramite calcolatore nelle celle di produzione si parla di **Flexible Manufacturing/Assembly Systems (FMS/FAS)**, sono sistemi dotati di elevata flessibilità riguardo alle diverse sequenze delle lavorazioni e/o all'assegnamento di operazioni alle risorse. Sono caratterizzati da

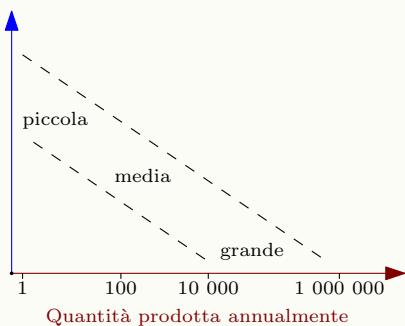
- diversi prodotti
- lavorazioni eseguite su più macchine
- assegnazione delle risorse tramite routing dei flussi
- problemi di sequenziamento locale dell'impiego delle risorse
- alto grado di automazione

È possibile individuare tre tipi di automazione industriale

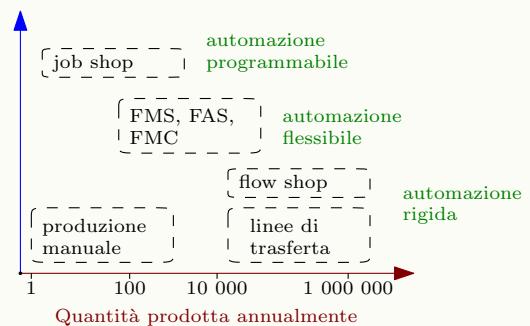
- *Automazione rigida* : La sequenza delle operazioni è fissata, sono sistemi poco flessibili (come le linee di trasferta) destinati a grandi produzioni con poca varietà di prodotto.
- *Automazione programmabile* : Si può cambiare la configurazione del flusso di produzione in modo da variare il prodotto, tipico delle industrie con produzione discreta a lotti. Vi è un tempo di attesa fra un lotto ed un altro per la riconfigurazione del flusso.
- *Automazione flessibile* : estensione dell'automazione programmabile in cui è possibile diversificare la produzione senza avere tempi morti di conversione dell'impianto, i macchinari utilizzati sono caratterizzati da un alta configurabilità.

In generale, per i sistemi di automazione, esiste una correlazione qualitativa fra la quantità di prodotto fabbricata, ed il numero di prodotti distinti.

Varietà dei prodotti



Varietà dei prodotti



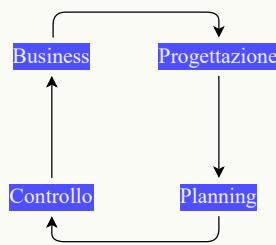


## 1.4 Sistema di Supporto

Un sistema di supporto consiste in un insieme di attività legate all'impianto di produzione, in particolare

- attività di business, quali gestione degli ordini, marketing del prodotto e considerazioni economiche
- progettazione del prodotto sulla base delle esigenze del mercato
- pianificazione ("planning") della produzione, definizione della sequenza di lavorazione, politiche di stoccaggio e rifornimento
- controllo delle attività (gestione e supervisione)

Tali attività si re-iterano in un ciclo di produzione, cosiddetto "agile".



In supporto delle attività di business vi sono

- **Enterprise Resource Planning (ERP)** : Un insieme di software volti all'automazione dell'amministrazione, della logistica, della produzione e delle risorse umane.
- **Decision Support System (DSS)** : Sistemi che hanno lo scopo, dato un insieme di dati e dei vincoli da rispettare, di migliorare il processo decisionale nell'impianto.

Inoltre le macchine sul campo vengono supportate da sensori che hanno lo scopo di raccogliere dati ed informazioni in maniera massiva, in modo da poter essere utilizzati per i modelli di intelligenza artificiale e machine learning, sfruttando appunto, tali dati per effettuare previsioni con maggiore precisione.

In supporto alle attività di progettazione vi sono

- **Computer Aided Design (CAD)** : Un insieme di strumenti informatici utili nella progettazione.
- **Computer Aided Engineering (CAE)** : Un insieme di strumenti informatici utili nella verifica delle funzionalità tramite simulazioni e modelli matematici.
- **Computer Aided Manufacturing (CAM)** : Un insieme di software utili nell'automatizzazione ed organizzazione delle sequenze di operazioni nella produzione.
- **Computer Aided Process Planning (CAPP)** : software che permette di automatizzare/ottimizzare il planning della produzione

È possibile utilizzare un modello CAD per ottenere un programma da eseguire su una CNC (macchina a controllo numerico)

- Caricamento di un modello CAD
- Impostazione del sistema di coordinate
- Impostazione di parametri
- Generazione delle istruzioni per la macchina in questione
- Invio dei dati al controllo numerico

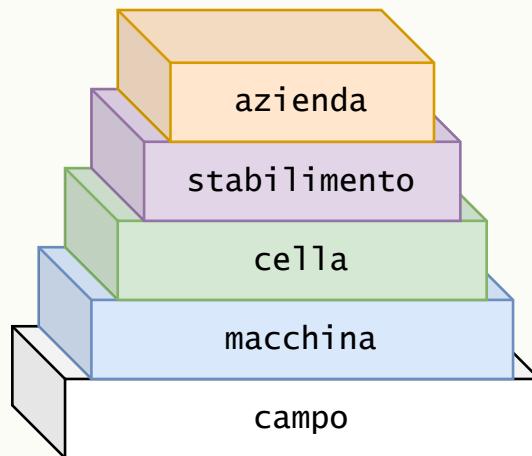


## 1.5 La Piramide CIM

Quello della piramide CIM è un modello teorico che descrive la struttura di un processo produttivo, integrata con i sistemi di automazione ed i sistemi informatici gestionali, tale modello propone diversi vantaggi

- miglioramento della qualità di produzione
- tempi e costi ridotti
- aumento della flessibilità
- diminuzione degli scarti e manutenzione predittiva
- fondamentale per conformarsi a leggi e regolamenti sulla sicurezza del processo produttivo, sulla qualità del prodotto e sulla riduzione dell'impatto ambientale

Il modello CIM è gerarchico e suddivide il processo di produzione su vari livelli, i cui elementi comunicano orizzontalmente con quelli adiacenti. Ogni livello assume che l'automazione nel livello inferiore sia ideale, nessun livello è privilegiato rispetto ad un altro.



Dai livelli superiori le informazioni sono più elaborate e di minore quantità, ed i comandi vengono dati con minore frequenza, nei livelli inferiori, ci sono più informazioni, ma sono semplici, ed i comandi vengono dati con maggiore frequenza. La comunicazione verticale è privilegiata, se più dispositivi di campo devono comunicare, devono farlo attraverso il sistema di controllo della macchina di cui fanno parte.

Al livello di macchina e campo il controllo può essere sia *logico* che *diretto* (real time), attuato da microprocessori, con il salire dei livelli nella piramide il controllo assume sempre più un carattere logico, dettato da eventi.

### 1.5.1 Livelli della Piramide

#### Livello di Campo

Tale livello contiene dispositivi quali sensori ed attuatori, in generale, i componenti hardware che eseguono le attività di produzione e controllo. Tali dispositivi interfacciano il livello superiore al livello fisico tramite segnali di ingresso ed uscita, possono inoltre comunicare informazioni sul proprio stato (auto diagnosi), oltre a ciò, sono generalmente semplici.

Sono raggruppati in semplici sistemi di controllo e i livelli superiori li assumono come dispositivi ideali, sono attrezzati di apposito hardware di controllo, quali sistemi digitali a microprocessori/sistemi embedded.



## Livello di Macchina

Una macchina raggruppa più dispositivi di campo volti al fornire una determinata funzionalità. Ad esempio, diversi motori elettrici (dispositivi di campo) possono costituire un braccio robotico (macchina) volto allo spostamento di oggetti.

Tali componenti vengono controllati tramite dei controllori logici programmabili (PLC), tramite la regolazione di variabili analogiche e la realizzazione di sequenze di operazioni.

Esempio: a livello di campo si controllano le posizioni dei singoli giunti; a livello di macchina viene pianificato il movimento del robot nello spazio operativo e la sequenza delle azioni che deve effettuare.

## Livello di Cella

Diverse macchine vengono raggruppate insieme formando delle celle di produzione, atte a produrre prodotti, anche diversi ma tecnologicamente affini, le macchine sono interconnesse fisicamente da un sistema locale di trasporto e stoccaggio. Nonostante il vincolo real time sia presente, il livello di controllo è quasi esclusivamente logico, e coordinano le macchine della cella.

## Livello di Stabilimento

Racchiude più celle e linee produttive di un impianto industriale, riceve istruzioni dal livello gestionale e le attua sotto forma di piani operativi per la produzione. I sistemi di controllo a tale livello sono denominati *SCADA* (*Supervisory Control And Data Acquisition*), tipicamente implementati in workstation. Sono sistemi di controllo che dispongono di:

- Un interfaccia con l'operatore, assente nei microcontrollori e nei PLC
- Gestione di allarmi e ricette
- Programmazione dei lavori e basi di dati del processo produttivo
- Controllo statistico e supporto alla manutenzione, potendo fare previsioni e rapporti



Figura 1.15: sala di controllo di una centrale elettrica

## Livello di Azienda

Si occupa dei processi gestionali, il sistema non è di controllo ma *decisionale*, costituito da un infrastruttura software connessa al mainframe aziendale, non esistono vincoli di tipo temporale.

Esiste uno standard (ANSI/ISA-S88.01-1995) che normalizza lo schema generale di controllo su 3 livelli gerarchici.

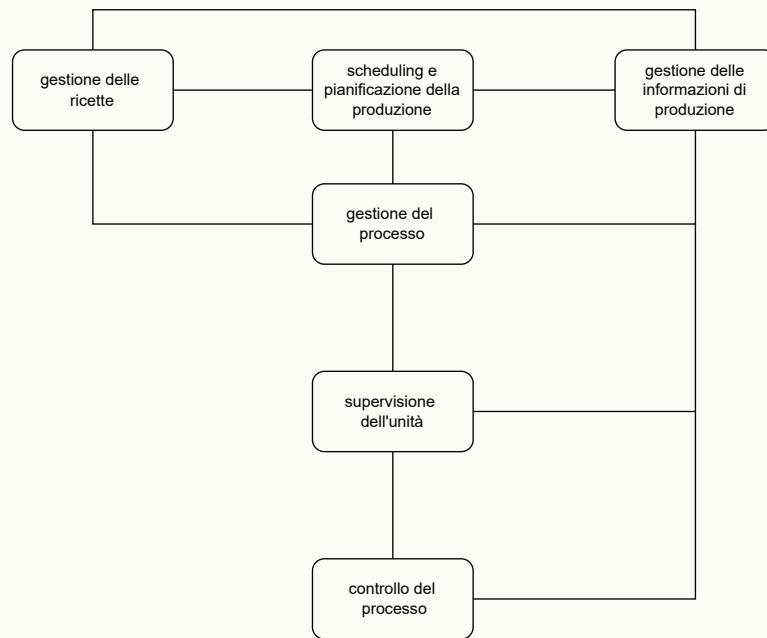
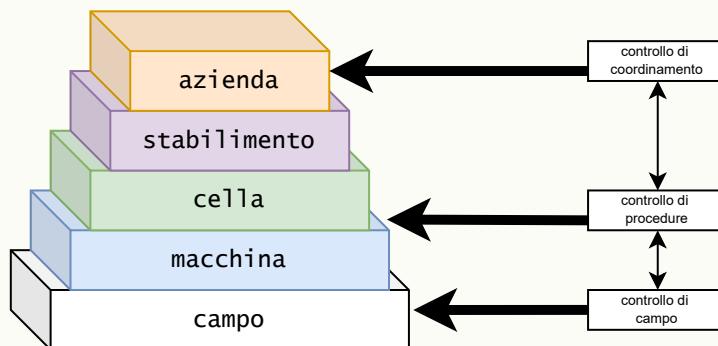


Figura 1.16: modello delle attività di controllo

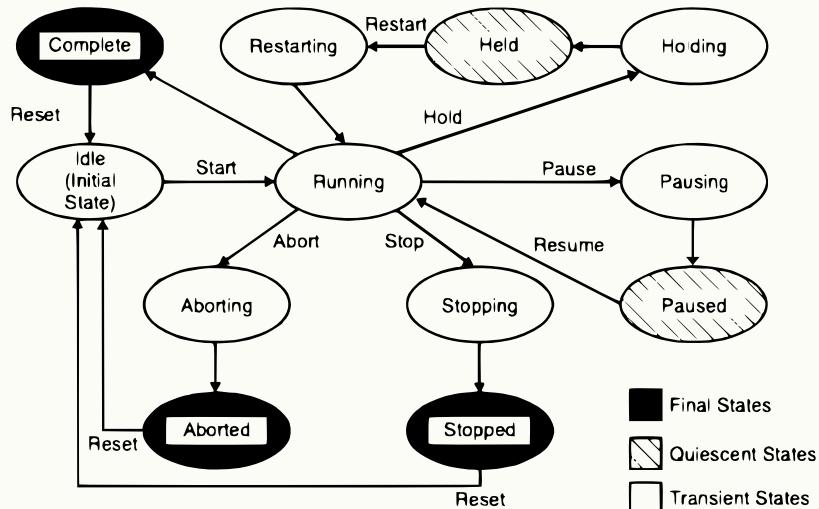
- **controllo di campo** : controllo che agisce sui dispositivi di campo, in particolare, su variabili continue, ed è implementato su dispositivi dedicati. Le informazioni sono semplici e trasmesse ad alta frequenza.
- **controllo di procedure** : riguarda il controllo dei livelli di macchina e cella della piramide, riguarda gruppi strutturati di componenti di campo, a tale livello vengono svolte funzioni di auto-diagnosica, è implementato su schede dedicate o anche su pc industriali. Prevede algoritmi più complessi di quelli del controllo di campo. Il controllo è
  - *diretto* : riguarda il controllo di gruppi di variabili continue o funzioni più avanzate
  - *logico* : coordinamento dei sistemi di campo sulla base della lista di operazioni sequenziali
- **controllo di coordinamento** : si pone al livello dello stabilimento ed opera su dati strutturati a bassa frequenza, riguarda il coordinamento e la gestione delle varie celle di produzione, vincoli temporali molto laschi.



Lo standard definisce anche un diagramma logico delle transizioni tra stati di un processo. Si noti come i due stati *Held* e *Paused* sono differenti:

- *Paused* : è scaturita da un operatore esterno (esempio : causa operazioni di verifica)

- *Held* : il processo è in attesa di un evento e viene bloccato



### 1.5.2 Auto-diagnostica

I sistemi di controllo devono avere la possibilità di generare segnali ausiliari che danno allarme di eventuali guasti nei dispositivi soggetti ad usura. Occorre individuare dei segnali dal dispositivo che possono essere valutati secondo appropriati modelli matematici.

Con *signature*, si definisce una firma del guasto, ossia una sua manifestazione sottoforma di segnale, un esempio può essere la misura tramite un accelerometro di vibrazioni in un sistema meccanico. Si sviluppano algoritmi atti all'analisi dei segnali (basati ad esempio sulla trasformata di Fourier).

Definiamo *fault* i guasti, e li denotiamo  $f$ , su di essi si formulano

- *fault detection* : rilevamento dei guasti sul sistema fisico o software
- *fault isolation* : classificazione del guasto, e distinzione di esso rispetto ad altri
- *fault identification* : determinazione del profilo temporale del guasto  $f$
- *fault accommodation* : riconfigurazione a seguito del guasto, coinvolge modifiche hardware o software

#### Rilevazione ed Isolazione

Quando un sistema dinamico è soggetto ad un possibile guasto, si definisce un sistema ausiliario detto **generatore di residuo**, il cui segnale in uscita dipenderà dalla presenza di un particolare guasto  $f$ .

Un residuo  $r$  dipende da un guasto  $f$

Nel caso in cui possono esserci più guasti, si definisce un vettore  $\bar{r}$  di residui, in cui  $r_i$  dipende da  $f_i$ . Tipicamente il residuo riproduce approssimativamente l'evoluzione temporale del guasto. Con FDI si intende l'operazione di "Fault Detection Isolation", queste ultime due possono avvenire in contemporanea, vi sono differenti modelli proposti

- *model-based* : si definisce un sistema dinamico che rappresenta il guasto (generatore di residuo)
- *signal-based* : si utilizzano esclusivamente i segnali provenienti da misure del sistema, la loro elaborazione può far luce su eventuali guasti
- *ibrido* : si combinano entrambe le tecniche

### Esempio di Residuo

Vi è un processo (soggetto a guasto) modellato dal seguente sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + bu + ef \\ y = cx \end{cases}$$

Dove  $f$  è il generico fault. Il residuo  $r$  viene implementato come osservatore di un disturbo, o di un segnale non noto (che in questo caso è  $f$ ). Rappresenta proprio la stima del disturbo al tempo  $t$ .

$$r(t) = \frac{k}{e} \left[ \frac{y(t)}{c} - \int_0^t [ax(\tau) + bu(\tau) + er(\tau)d\tau] \right] \quad \text{con } \begin{cases} k > 0 \\ r(0) = 0 \end{cases}$$

L'integrale indica che la stima del disturbo viene calcolata tenendo conto di tutti i valori passati del disturbo stesso.

Il parametro  $k$  è un guadagno che determina quanto "velocemente" l'osservatore reagisce ai cambiamenti del disturbo. Un valore di  $k$  più alto significa una risposta più rapida, ma può anche introdurre più rumore nella stima. L'evoluzione nel tempo del residuo è data da

$$\dot{r} = \frac{k}{e} \left[ \frac{\dot{y}}{c} - [ax + bu + er] \right] = \quad (1.1)$$

$$\frac{k}{e} \left[ \frac{c[ax + bu + ef]}{c} - [ax + bu + er] \right] = \quad (1.2)$$

$$\frac{k}{e} e[f - r] = k[f - r] \quad (1.3)$$

Si ha quindi l'equazione lineare del primo ordine

$$kr + \dot{r} - kf = 0$$

Si porta nel dominio di Laplace

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[kr + \dot{r} - kf](s) &= \\ k\mathcal{L}[r](s) + \mathcal{L}[\dot{r}](s) - k\mathcal{L}[f](s) &= \\ k\mathcal{L}[r](s) + s\mathcal{L}[r](s) - r(0) - k\mathcal{L}[f](s) &= \end{aligned}$$

Si ricordi come  $r(0) = 0$ . Denoto  $\mathcal{L}[f] = F$  e  $\mathcal{L}[r] = R$

$$\begin{aligned} kR(s) + sR(s) - kF(s) &= 0 \implies \\ R(s)[k + s] &= kF(s) \\ R(s) &= \frac{kF(s)}{k + s} \implies \\ \frac{R(s)}{F(s)} &= \frac{k}{k + s} = \frac{1}{1 + \frac{1}{k}s} \end{aligned}$$

Nel caso il guasto fosse costante  $f(t) = f_0$ , nel dominio del tempo si avrebbe

$$r(t) = f_0[1 - e^{-kt}]$$

#### 1.5.3 Architetture per il Controllo

Il controllo è gestito da dispositivi elettronici ed informatici, è possibile individuare 3 tipi di sistemi

- **controllori embedded** - per il controllo di campo
- **architettura a bus** - per il controllo di procedure
- **PC-based**

## Sistemi Embedded

Tali sistemi di controllo sono "fusi" alle funzionalità del dispositivo, e sono adoperati per un unico, specifico e predeterminato compito. Sono piattaforme hardware create "ad hoc", e la loro progettazione dipende dalla conoscenza dei compiti che dovranno svolgere. La realizzazione può avvenire in due modi

- singolo chip integrato (microcontrollori)
- singola scheda (DSP o FPGA)

L'hardware è semplice, vi è una CPU per gli algoritmi, una memoria per i dati ed i programmi e dei circuiti per gestire input ed output (analogici o digitali, con eventuali convertitori). Hanno un software integrato molto semplice ed è orientato all'automazione, vi è una gestione a basso livello delle risorse e delle comunicazioni.

## Microcontrollori

I microcontrollori (a singolo chip) sono nati a seguito della miniaturizzazione dell'elettronica, sono utilizzati in una grandissima varietà di applicazioni e possono essere integrati con un sistema di sviluppo per la loro programmazione.

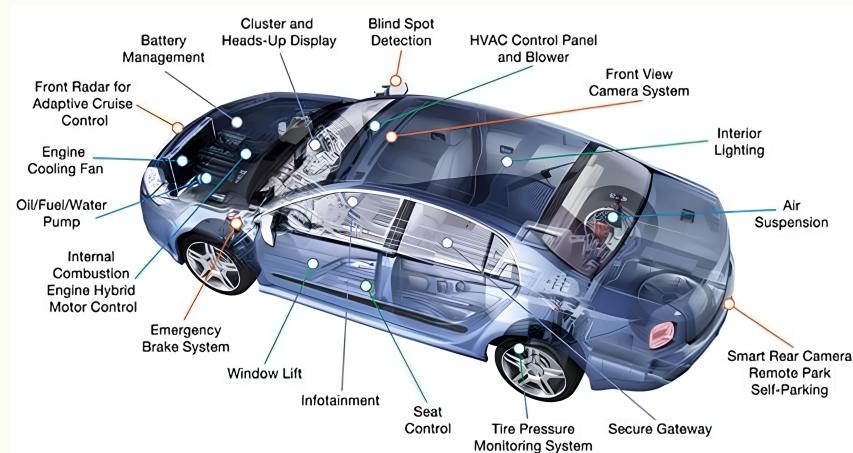


Figura 1.17: Sistemi di controllo embedded in automotive

Caratteristiche ed impieghi :

- applicazioni semplici
- basso consumo e poco spazio occupato
- numero limitato di segnali da gestire. Interfaccia utente assente
- scarsa integrazione con dispositivi simili, difficile espansione

## Singola Scheda

Prevedono più componenti standard integrati su una singola scheda, fra questi vi sono

- DSP (Digital Signal Processor) : processori atti al trattamento dei segnali ed esecuzione di funzioni su numeri interi o reali
- FPGA (Field Programmable Gate Array) : circuiti integrati riconfigurabili dall'utente per realizzare funzioni logiche complesse tramite blocchi logici e elementi di memoria

Rispetto ai microcontrollori hanno una maggiore capacità di elaborazione e possono gestire un maggior numero di segnali.

Ricapitolando, i sistemi di controllo embedded prevedono i seguenti:

- **PRO**

- combinazione hardware/software specificamente studiata
- ottimizzazione spaziale e di complessità
- minori ingombri, basso consumo
- minori costi

- **CONTRO**

- interfaccia uomo-macchina poco evoluta
- gestione di un numero limitato di segnali in input/output
- costi di progettazione (hardware e software) non irrilevanti
- poca flessibilità: modifiche ai compiti da svolgere possono rendere necessaria la progettazione di un nuovo dispositivo

Utili quando i compiti di controllo sono noti a priori.

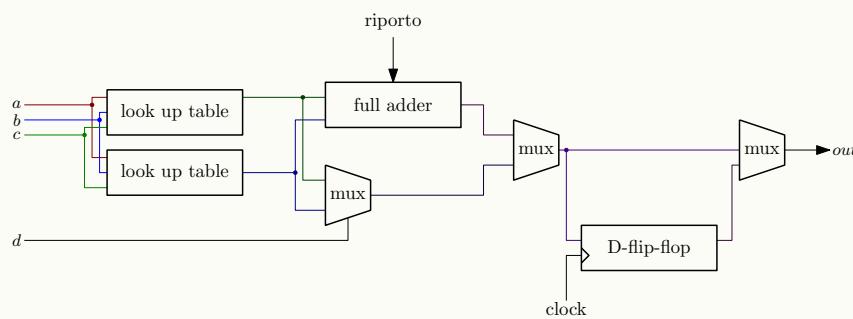


Figura 1.18: cella logica elementare in un FPGA

### Architettura a Bus

Con *bus* si intende una linea elettrica che mette in comunicazione più dispositivi, vi è una scheda madre con un bus a cui si connettono più schede, in modo da rendere modulare il sistema. Un bus è composto da diverse linee

- linee dati
- linee indirizzi
- linee di alimentazione
- linee per la comunicazione

- **PRO**

- flessibilità di progettazione
- scelta dei moduli secondo le funzionalità da implementare

- **CONTRO**

- Sistema Operativo più complesso
- gestione dei moduli interconnessi e delle comunicazioni
- vincoli real-time

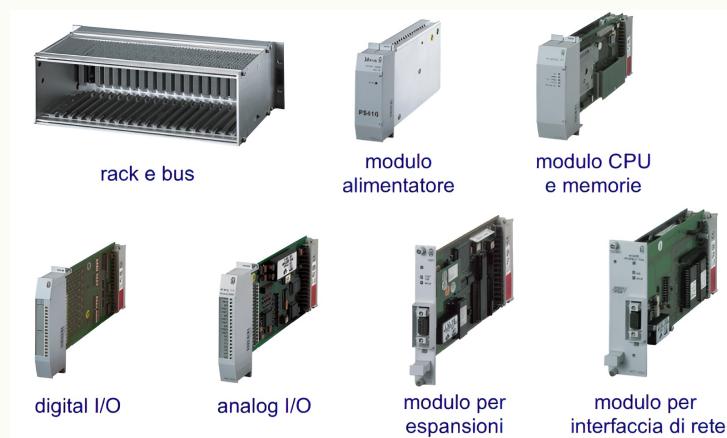


Figura 1.19: Modularità dell'architettura a bus

### PC-Based

Ultimamente, anche i comuni computer (corazzati per resistere alle condizioni sfavorevoli degli impianti) sono adoperati come sistemi di controllo, sono sistemi informatici con architettura a bus ed implementano una semplice interfaccia uomo macchina, e sono semplici da connettere alle reti informatiche.

Per far sì che risultino efficaci come sistemi di controllo, esistono appositi sistemi operativi atti all'utilizzo real time (ad esempio, RTAI-Linux). Implementano moduli/schede per l'interconnessione con un elevato numero di segnali input/output, inoltre, esistono appositi protocolli per la comunicazione fra PC e PLC.



## 1.6 Industria 4.0

La seconda rivoluzione industriale, agli inizi del XX° secolo ha introdotto la produzione di massa e la catena di montaggio classica (Ford), nei primi anni 70 l'avvento dei computer ed in particolare dei robot ha sondato la terza rivoluzione industriale, ad oggi vige l'industria 4.0 in cui le tecnologie ICT (Information and Communication Technology) pervadono i processi produttivi. Anche la presenza di dispositivi intelligenti (IOT) capaci di fornire dati sulla rete tramite sensori e comunicare in tempo reale ha modificato il modo di produrre.

### Industria 4.0:

*“the comprehensive transformation of the whole sphere of industrial production through the merging of digital technology and the internet with conventional industry”*  
 (Angela Merkel - Organization for Economic Cooperation and Development, 19 Febbraio 2014)

L'avvento di tali tecnologie ha portato un cambiamento industriale ma anche sociale, e sono diventate necessarie diverse figure professionali che richiedono abilità trasversali per gestire le nuove tecnologie. Definiamo le seguenti, **tecnologie abilitanti**

- *Soluzioni manifatturiere avanzate* : utilizzo dei robot interconnessi e riprogrammabili nell'automazione di attività precedentemente non automatizzabili.
- *Additive manufacturing* : produzione per "addizione" di materiale, resa possibile dalle stampanti 3D connesse ai sistemi CAD.
- *Realtà aumentata* : l'uso della realtà aumentata e della realtà virtuale ha permesso la simulazione di processi fisici a supporto dei processi produttivi.
- *Simulazione* : Simulazione in tempo reale del sistema di produzione in grado di migliorare il processo decisionale e predittivo tramite l'uso dei digital twin.
- *Integrazione orizzontale/verticale* : Integrazione di informazioni lungo la catena del valore, dal consumatore al fornitore.

- *Internet industriale* : Comunicazione multidirezionale diffusa tra processi produttivi e prodotti.
- *Cloud* : Uso del cloud per la raccolta dei dati in maniera distribuita.
- *Sicurezza* : Metodologie di difesa alle minacce informatiche alla quale sono soggetti i sistemi aperti ed interconnessi.
- *Big data* : Uso dei modelli volti all'analisi statistica dalle grandi quantità di dati disponibili allo scopo di estrarne informazioni.

L'uso delle tecnologie abilitanti porta vari benefici

- Flessibilità nella produzione di piccoli lotti ai costi della grande scala
- Maggiore velocità della progettazione e produzione dei prodotti
- Maggiore produttività e riduzione dei tempi morti (tempi di setup, errori e fermi macchina)
- Migliore qualità del prodotto e riduzione degli scarti grazie a sensori che monitorano la produzione in tempo reale

I sistemi ICT hanno permesso la creazione di modelli di business favoriti e definiti da apposite linee guida di sviluppo.

### 1.6.1 Tecnologie Abilitanti

I **collaborative robots**, o più semplicemente *cobots*, permettono la collaborazione fisica fra robot ed operatori rimuovendo le barriere dell'area di lavoro, questi ultimi entrano in contatto diretto, sono sensibili all'ambiente circostante grazie a sensori laser e sistemi di visione, ed appositi sistemi di controllo programmati per il riconoscimento e rilevamento di possibili urti con gli operatori. Presentano spesso strutture leggere e sono dotati di cedevolezza nei giunti, in grado di assorbire energia da urti esterni. Lo spazio di lavoro condiviso apre le possibilità a nuove applicazioni.

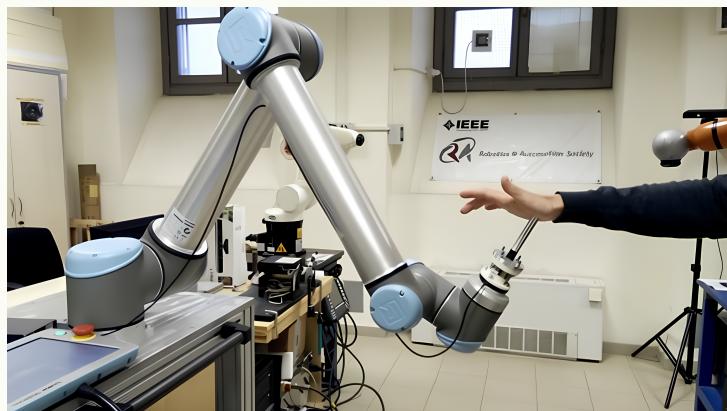


Figura 1.20: Robot collaborativo

L'**additive manufacturing** permette la produzione di oggetti tridimensionali di varia forma a partire da un modello digitale CAD, la loro produzione richiede il materiale strettamente necessario per la stampa diminuendo i residui.

I **digital twin** definiscono la programmazione e previsione dei sistemi tramite simulazioni digitali, utili durante la progettazione della linea di produzione, inoltre, in fase di esecuzione di essa è possibile eseguire in contemporanea il modello digitale in modo da supervisionare il processo.

Le tecniche di **machine learning** permettono il processamento di informazioni al fine di migliorare la qualità del prodotto grazie alla manutenzione predittiva.

L'**IOT** (Internet Of Things) riguarda i dispositivi capaci di rilevare e processare dati dal mondo fisico

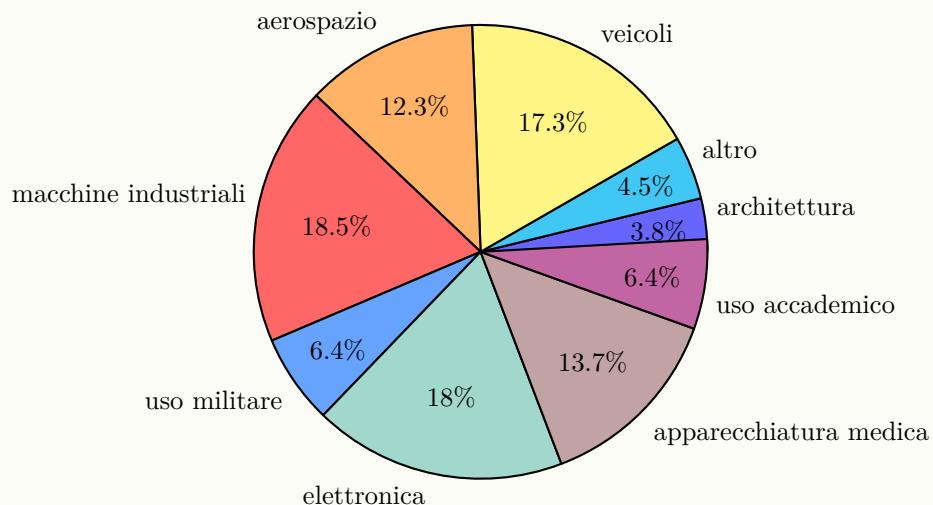


Figura 1.21: Uso della stampa 3D

(temperatura, illuminazione, umidità, ...) ha applicazioni di notevole impatto, ad esempio, in ambito medico, tali dispositivi condividono informazioni e comunicano con gli altri dispositivi e macchine connesse in rete.



Figura 1.22: Un'illustrazione di come questa rivoluzione nella medicina apparirà in un tipico ospedale che fa uso di IOT

Le diverse tecnologie vengono incanalate in determinate linee guida di sviluppo, i sistemi distribuiti che permettono la circolazione rapida di informazioni sono combinati ad una centralizzazione della gestione di essi, garantendo la possibilità di controllare e monitorare in modo efficiente dati e risorse da e in qualsiasi parte dell'azienda.

Nonostante le macchine moderne siano indipendenti da un intervento continuo, devono essere supervisionate da un operatore umano, quest'ultimo deve avere la possibilità di interagire con esse in maniere intuitiva, la branca che si occupa di rendere semplice tale operazione è denominata *interazione uomo-macchina*.

### 1.6.2 Modelli di Business

2 aspetti sono fondamentali nell'industria 4.0

- Qualità delle aziende migliorata grazie all'uso delle nuove tecnologie
- Nuovi schemi di competizione del mercato basati sui nuovi modelli di business

Tali modelli di business si sono sviluppati solo dopo l'avvento delle tecnologie abilitanti che li hanno resi realizzabili.

- **Centralità del cliente** : al centro della catena del valore dell'industria, c'è il consumatore, e le aziende puntano a soddisfare le richieste di quest'ultimo, talvolta anticipandone le necessità e le richieste di servizio.
- **Economia circolare** : risponde alla necessità di passare ad un modello circolare di produzione, in cui i prodotti ed i processi manifatturieri vanno improntati al riutilizzo.

progetta → usa → ricicla → riusa

Tale modello porta un risparmio dovuto alla riduzione degli scarti e ai minori costi di approvvigionamento, nonché una notevole riduzione dell'impatto ambientale.

- **Strategie basate su ICT** : emergono nuove strategie di mercato che hanno lo scopo di portare il prodotto più vicino al consumatore, le tecnologie alla base dell'industria 4.0 mettono a disposizione una grande mole di dati utili al miglioramento dell'efficienza dell'azienda.
  - negozi online
  - servizi ad abbonamento
  - affitto di infrastrutture informatiche
- **Economia della condivisione** : modelli di condivisione di beni e servizi tramite piattaforme digitali, come i servizi di car sharing o bike sharing, irrealizzabili senza un'infrastruttura informatica, che permette il monitoraggio dello stato dei veicoli.
- **Economia del fare** : le stampanti 3D, grazie alla prototipazione rapida, hanno permesso l'insorgere di un "artigianato digitale" autoprodotto a basso costo, con uso di materiali plasmabili e anche di robot programmati.

### Cloud Automation

I robot di servizio nei centri di *Amazon* che si occupano dello stoccaggio dei prodotti funzionano grazie a degli algoritmi di instradamento che ne determinano i percorsi ottimali, tali algoritmi molto spesso risultano costosi da un punto di vista computazionale, de facto, i robot di questo tipo inviano i dati ad un server centralizzato che si occupa di eseguire gli algoritmi per poi restituire i risultati ai robot.

Un aspetto fondamentale dell'industria 4.0 è il processo di **trasformazione digitale** nelle aziende tramite l'inclusione delle tecnologie ICT, in particolare, sono identificati 6 passi fondamentali nella trasformazione, che incrementano il valore dell'azienda e del prodotto finale.

Ovviamente tale processo ha dei costi da sostenere, banalmente l'implementazione di hardware e software, inoltre, è soggetto ad errori che possono comportare rischi non di poco conto, i quali

- mancanza di una strategia chiara
- mancanza di consenso ed impegno nella leadership
- concentrazione sulle tecnologie piuttosto che sulle persone
- farsi guidare dalle tendenze senza avere una visione
- trascurare il contributo dei clienti
- voler organizzare il processo in autonomia
- sottovalutare le competenze interne
- non considerare la sicurezza dei dati

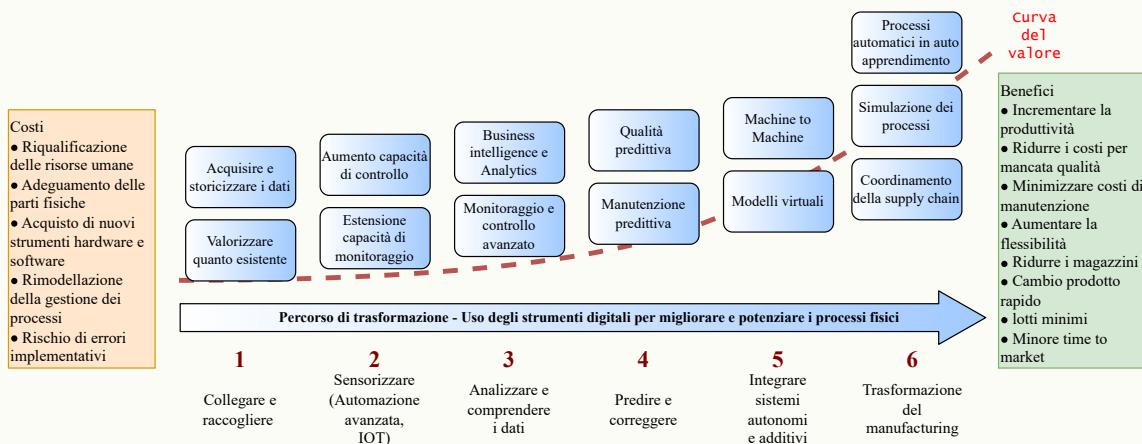


Figura 1.23: i 6 passi della trasformazione digitale

- mancanza di flessibilità
- carenza di comunicazione
- sottovalutazione delle complessità

La *McKinsey* nel 2017 ha rilasciato un rapporto riguardante le attività lavorative ed il possibile grado di automatizzazione di queste, in particolare, si hanno i seguenti risultati, su un analisi che ha coinvolto circa 2000 attività lavorative relative a circa 800 occupazioni

- Storicamente l'automazione ha aumentato la produttività del (circa) 1% all'anno
- Con le attuali tecnologie (in riferimento al 2017), è possibile automatizzare circa la metà delle attività lavorative
- Le attività che si prestano maggiormente ad essere automatizzate, sono quelle che caratterizzano lavori fisici, prevedibili e ripetitivi, che richiedono tipicamente un basse capacità cognitive. Costituiscono circa il 51% delle attività negli USA
- Le occupazioni le cui attività possono essere completamente automatizzate sono circa il 5%
- Nel 60% delle occupazioni, circa il 30% delle attività può essere automatizzato
- Il lavoro umano affiancato ai robot è necessario a garantire la crescita del PIL

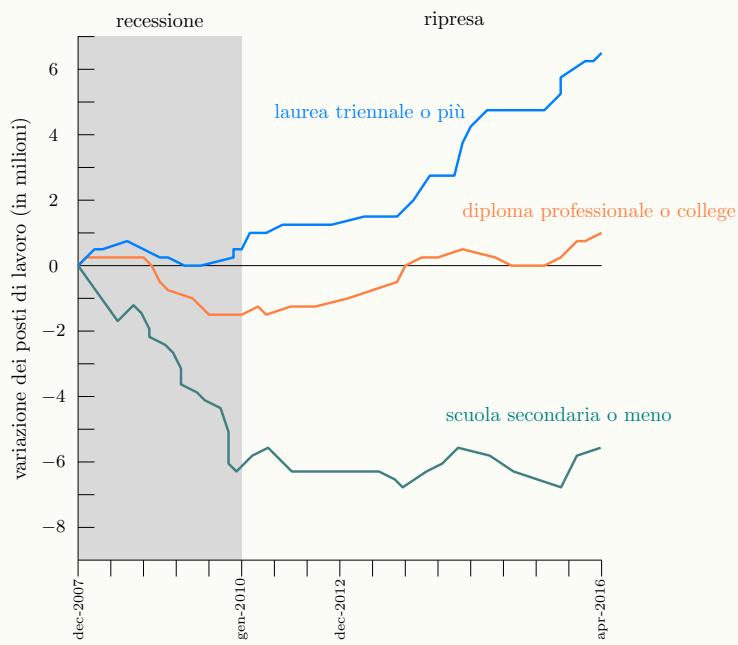
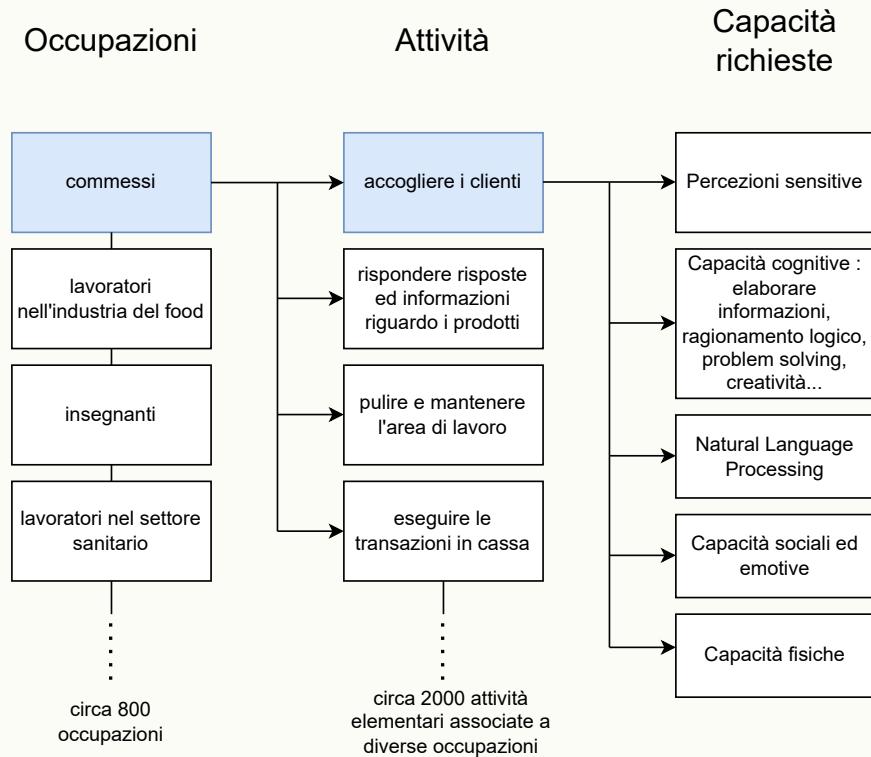


Figura 1.24: Andamento dei posti di lavoro in base al livello di educazione

### 1.6.3 Industria 5.0

La commissione Europea ha trattato un rapporto sull'industria 5.0, che mira a sviluppare il modello dell'industria 4.0 verso un'industria europea sostenibile, resiliente e centrata sulla persona. Il progetto di ricerca *Horizon Europe* punta ad investire sui progetti di ricerca che incorporino tali modelli, in Italia, il **PNNR** è un insieme di iniziative che puntano alla trasformazione dei sistemi di produzione, in particolare

1. digitalizzazione, innovazione, cultura
2. transazione al verde
3. infrastrutture per una mobilità sostenibile
4. istruzione e ricerca
5. coesione ed inclusione sociale
6. salute

Come già accennato, le parole chiave dell'industria 5.0 sono le seguenti

- **resilienza** : gestire i cambiamenti desiderati e non (ad esempio, epidemie) con una produzione industriale dotata di supporti per le infrastrutture critiche e resistente a "interruzioni".
- **centralità della persona** : mettere l'essere umano al primo posto e chiedersi cosa può fare la tecnologia per noi, e non cosa possiamo fare noi per la tecnologia, in particolare, adottarla per adattare i processi produttivi alle necessità dei lavoratori.
- **sostenibilità** : economia circolare, riduzione dei rifiuti e dell'impatto ambientale, assicurare i bisogni odierni senza mettere a repentaglio le future generazioni.

# CAPITOLO

---

## 2

# RETI PER L'AUTOMAZIONE

Molti dei concetti trattati in questo capitolo, sono considerati più approfonditamente negli appunti del corso di [Reti di Elaboratori](#).

### 2.1 Sistemi di Comunicazione

Le informazioni vengono condivise orizzontalmente e verticalmente fra i livelli della piramide CIM, in particolare

- si acquisiscono informazioni
- si elaborano strategie
- si attuano azioni correttive

I sistemi di comunicazione devono essere adeguati al garantire il flusso di informazioni fra i vari livelli della rete che differiscono nelle caratteristiche

- tipologie di dati differenti
- differenti vincoli di comunicazione (ad es. il livello di campo avrà dei vincoli real time)

È necessaria una standardizzazione dei protocolli di comunicazione digitale.



Gli elementi base di una rete sono

- Un mittente
- Un destinatario
- Un mezzo fisico sul quale viaggerà l'informazione

I dati sono sul mezzo delle informazioni fisiche (luce, tensioni elettriche), i segnali possono essere analogici o digitali, in base alla definizione del protocollo. Il tipo di trasmissione può variare a seconda di diversi fattori, quali la **direzione**

- *Simplex* : la trasmissione è unidirezionale
- *half duplex* : la trasmissione è bidirezionale ma alternata, non si può trasmettere informazione in entrambe le direzioni nello stesso momento
- *full duplex* : bidirezionale simultanea

il posizionamento dei bit

- *parallela* : i bit di un byte vengono trasmessi in parallelo su più canali, viene usata su distanze ridotte causa la facile interferenza alla quale son soggetti.
- *seriale* : il mezzo fisico è tipicamente suddiviso in "invio", "ricezione" e "massa", ed i bit di un byte sono trasmessi in sequenza uno dopo l'altro. Quest'ultima può a sua volta essere
  - sincrona : i dati sono trasmessi continuamente insieme ad un segnale di sincronizzazione
  - i dati sono trasmessi in modo irregolare a frequenza costante, con bit di sincronizzazioni incapsulati nei dati

Le reti industriali prevedono solitamente una trasmissione digitale half duplex, seriale ed asincrona.



Figura 2.1: tipi di reti e protocolli industriali

Le *Rete Enterprise* sono adottate per le informazioni gestionali e seguono il classico modello client-server, non hanno vincoli di real-time, più che la "robustezza" dell'informazione rispetto ai disturbi ambientali (che possono essere presenti in una cella), è importante la sicurezza e la riservatezza di esse. Tali reti seguono lo standard Ethernet, e sfruttano i protocolli di rete e di trasporto (ossia, IP e TCP) per garantire la ritrasmissione sicura dei dati in caso di perdite di pacchetti.

Le reti al livello di *Controllo* e *Campo* invece gestiscono le informazioni nelle celle e fra le varie macchine, i dispositivi comunicanti spesso non sono standard, ma sono PLC, controllori embedded, e dispositivi di campo, quindi è importante che i protocolli in tale livello siano flessibili ed adattabili all'eterogeneità dei

client.

Qui i dati trasmessi hanno piccole dimensioni, ma la frequenza di trasmissione è alta, e deve soddisfare i vincoli real time, per questo Ethernet non è appropriato e si utilizzano soluzioni apposite. Essendo l'ambiente industriale "ostile", i mezzi di trasmissione devono essere robusti, i ritardi nella trasmissione nella struttura ad anello dei controllori possono causare un degrado nelle prestazioni non trascurabile, è più che mai necessario *determinismo* nella trasmissione.



## 2.2 Classificazione ed Architetture delle Reti

Nel livello di campo, esistono due possibili architetture della rete da adottare che si differenziano nella topologia della rete ed altri fattori. In particolare

- **Architettura tradizionale** : Un architettura centralizzata in cui il controllore prevede un collegamento punto-punto con ogni altri dispositivo di campo.

### Vantaggi

- sistema affidabile e collaudato
- disponibilità di tutte le tipologie di strumentazione sul mercato

### Svantaggi

- elevato numero di collegamenti
- cablaggio costoso
- lavoro di stesura e protezione dei fili critico

- **Architettura a bus di campo (fieldbus)** : Un architettura che prevede la presenza di un bus centrale (la cui comunicazione è digitale) alla quale ogni dispositivo si connette direttamente.

### Vantaggi

- installazione più economica
- modularità : è facile aggiungere e rimuovere dispositivi
- tolleranza ai guasti
- condivisione delle risorse

### Svantaggi

- i dispositivi comunicano sullo stesso mezzo, è quindi necessario un protocollo di accesso al mezzo
- difficile da installare in aree pericolose



Figura 2.2: soluzioni a livello di campo

### 2.2.1 Tipologie di Reti

Una rete può essere

- **broadcast** : vi è un unico canale di comunicazione condiviso da ogni macchina sulla rete, i messaggi arrivano ad ogni nodo, i nodi scarteranno i messaggi di cui non sono destinatari. Queste possono essere a loro volta
  - *reti a bus* : canale condiviso, in ogni istante un solo nodo può trasmettere contemporaneamente, è necessario arbitraggio.
  - *reti ad anello* : i pacchetti circolano in serie su un anello, necessario arbitraggio per accessi simultanei



- **peer-to-peer** : per ogni coppia di nodi vi è una connessione dedicata, se due macchine non sono connesse fisicamente, è necessario definire un cammino fra di esse tramite appositi algoritmi di routing, se più pacchetti relativi allo stesso messaggio seguono cammini diversi, è necessario gestire anche la sequenza con cui essi vengono ricevuti. Vengono applicate a reti di dimensioni maggiori, normalmente più reti LAN sono connesse in tal modo.



- Nella maggioranza delle applicazioni più complesse, la soluzione più frequente ricade in **reti ibride**.

Esiste una scala di classificazione delle reti :

| Scala                | Tipo     | Nome completo             | Esempio        |
|----------------------|----------|---------------------------|----------------|
| Distanza ravvicinata | PAN      | Personal Area Network     | Bluetooth      |
| Edificio             | LAN      | Local Area Network        | WiFi, Ethernet |
| Città                | MAN      | Metropolitan Area Network | Cablata, DSL   |
| Paese                | WAN      | Wide Area Network         | Grandi ISP     |
| Pianeta              | Internet | La rete di tutte le reti  | L'Internet     |

La **LAN** è la rete locale, come una rete domestica, è una rete privata ed ogni terminale connesso ad essa è identificato da un indirizzo distinto dagli altri, può essere a *cavo condiviso* oppure a *commutazione* con uno switch. In tale modello di cavo condiviso il pacchetto inviato ad un dispositivo viene ricevuto da tutti, solo il destinatario lo elaborerà, tutti i restanti host lo ignoreranno.

Quest'ultimo a commutazione è il più utilizzato tutt'oggi, ogni dispositivo è direttamente collegato allo switch, ed esso è in grado di riconoscere gli host ed inviare i pacchetti esclusivamente al destinatario, riduce il traffico nella LAN.

Le reti **WAN** sono reti geografiche, vengono interconnessi dispositivi di comunicazione, necessari a città, regioni o perfino nazioni. I dispositivi in questione sono switch, router e modem, tale rete è gestita da

un grande operatore/ente di telecomunicazioni detto IPS (Internet Service Provider) che fornisce i servizi alle organizzazioni.

Una WAN può vedere i suoi dispositivi di comunicazione connessi punto-punto, oppure a commutazione, con più punti di terminazione (usata nelle dorsali di Internet), tutt'oggi è raro trovare LAN o WAN isolate, spesso sono connesse fra loro per formare una internetwork (internet), per mettere in comunicazione due LAN in città differenti tramite una WAN.

### Dispositivi di Interconnessione

Per il collegamento fra tratti di una stessa rete, oppure fra reti diverse, sono coinvolti vari dispositivi

- **repeater (ripetitore)** : amplifica e ricostituisce il segnale originale su segmenti analoghi della stessa rete [repeater RS485]
- **hub (concentratore)** : estende una rete a stella, amplifica e ricostituisce lo stesso segnale su tutte le porte, non riduce le collisioni [Ethernet hub]
- **switch (interruttore)** : come un hub, ma su una singola porta per volta, può ridurre le collisioni [Ethernet switch]
- **transceiver (ricetrasmettitore)** : connette a una stessa rete segmenti di diversa tipologia [RS232/RS485 transceiver]
- **bridge (ponte)** : connette due reti che usano lo stesso protocollo ma che hanno layer differenti al livello inferiore [Modbus RS485 / Ethernet TCP-IP bridge]
- **router (instradatore)** : connette due reti dello stesso tipo [Ethernet TCP-IP router]
- **gateway (portale)** : connette due reti di tipo diverso [Ethernet / Modbus gateway]

Nelle reti broadcast, l'accesso al canale può venire per vie di allocazione

- **statica** : il tempo viene suddiviso in time slices (quanti) e ad ogni nodo viene dedicato un intervallo periodico in cui può comunicare, nel caso non abbia nulla da trasmettere, il canale resta inutilizzato (spreco di banda).
- **dinamica** : Si suddivide in
  - controllo centralizzato : un nodo *master* determina il prossimo dispositivo che potrà comunicare tramite strategie di polling.
  - controllo decentralizzato : ogni nodo decide autonomamente se trasmettere o no.
  - sistemi a collisione : i nodi possono trasmettere, se capita che due di essi trasmettano contemporaneamente, vi sarà una *collisione* che verrà rilevata ed eventualmente risolta.

### Architettura Software

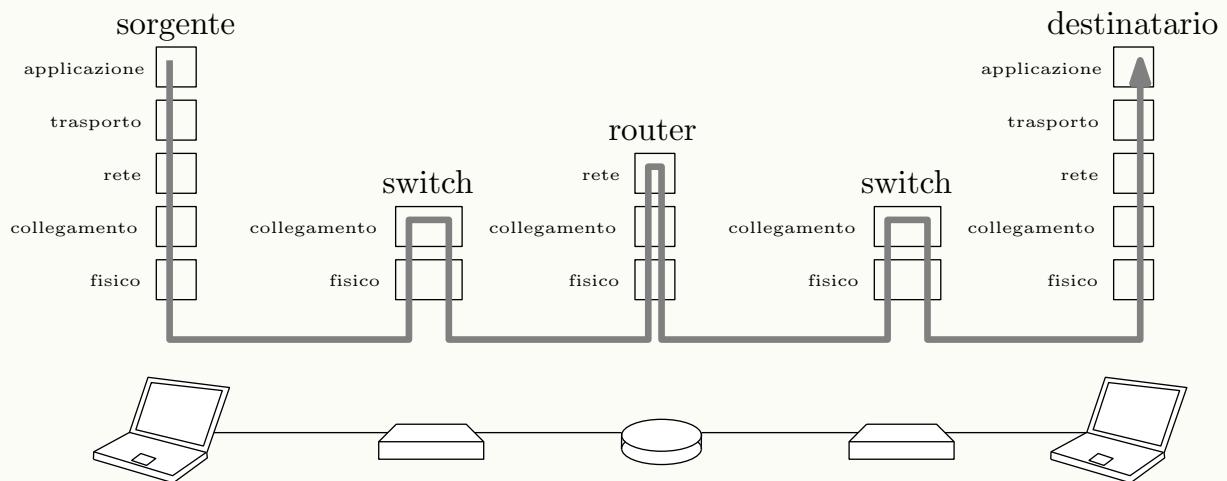
I 5 macro-livelli sulla quale si fonda la comunicazione sono i seguenti :

|              |  |
|--------------|--|
| applicazione | supporto delle applicazioni di rete                          |
| trasporto    | trasferimento dati fra processi                              |
| rete         | instradamento dei pacchetti dalla sorgente alla destinazione |
| collegamento | trasferimento di dati tra elementi di rete vicini            |
| fisico       | bit sul canale fisico (cavo o wireless)                      |

Sino ad ora i dati incapsulati che vengono comunicati sulla rete sono stati chiamati generalmente "pacchetti", vedremo che questi assumono una denominazione diversa per ogni livello. Ogni protocollo fa parte di un livello, ed anche se esistono più protocolli per un livello, ogni pacchetto che viene trasmesso usufruisce di un solo protocollo per livello. I nomi dei protocolli citati in seguito, verranno approfonditi e caratterizzati in seguito.

1. Il livello di **applicazione** è dove risiedono le applicazioni di rete che usufruiscono dei servizi di Internet, alcuni dei protocolli presenti in questo livello sono *HTTP, SMTP, FTP, DNS*, in questo livello, i pacchetti sono chiamati **messaggi**.
2. Il livello di **trasporto** si occupa del trasferimento dei messaggi dal livello di applicazione di un client al livello di applicazione del server, alcuni protocolli sono *TCP e UDP*, in questo livello, i pacchetti sono chiamati **segmenti**.
3. Il livello di **rete** riguarda l'instradamento dei segmenti dall'origine alla destinazione, un noto protocollo è l'*IP*, i pacchetti in questo livello sono detti **datagrammi**.
4. Il livello di **collegamento** si occupa della trasmissione dei datagrammi da un nodo della rete al nodo successivo sul percorso, alcuni protocolli sono *Ethernet, Wi-Fi e PPP*, lungo un percorso sorgente-destinazione, un datagramma può essere gestito anche da differenti protocolli, i pacchetti qui sono detti **frame**.
5. Il livello **fisico** riguarda il trasferimento dei singoli **bit** sul canale fisico, tramite elettricità nei cavi, oppure onde elettromagnetiche.

Durante la comunicazione, non tutti i sistemi intermedi richiedono che il messaggio venga processato su tutti i livelli, alcuni dispositivi richiedono solo alcuni layer, riducendo la complessità.



Lo strato di un livello ha una comunicazione logica/virtuale con lo stesso livello su un altro computer, ma i dati non sono trasferiti direttamente da uno strato all'altro, passano per tutti i livelli inferiori, un *protocollo* è quindi un insieme di regole che controllano il formato ed il significato dei pacchetti scambiati tra le entità *pari* all'interno di uno strato, un *servizio* invece è un insieme di primitive che uno strato offre a quello superiore, ossia :

- Quali operazioni fornisce (senza dire nulla sull'implementazione).
- Posto come interfaccia fra due strati, quello inferiore fornisce il servizio, quello superiore ne usufruisce.

# CAPITOLO

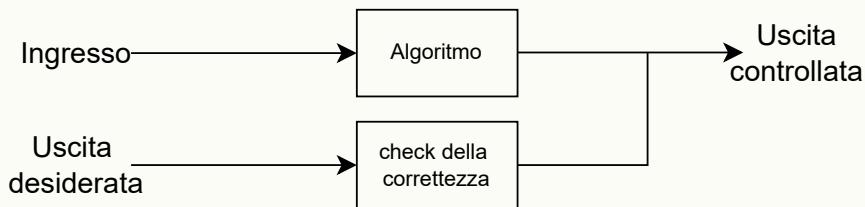
---

# 3

## SISTEMI DI CONTROLLO REAL TIME

Nell'ambito dell'automazione, è fondamentale definire un sistema di controllo che agisca in tempo reale, che implementi un algoritmo con lo scopo di eseguire i generici task di un processo produttivo, lo scopo dell'algoritmo è quello di *sequenziare* le varie operazioni in modo che rispettino dei vincoli temporali.

In un processo vi è un insieme diffusi di singoli componenti (come sensori o attuatori) che comunicano con il sistema di controllo che gestisce i riferimenti dei segnali, i valori di riferimento sono determinati dall'*algoritmo* in questione, che viene implementato attraverso gli strumenti dell'informatica.



L'algoritmo si definisce **logicamente corretto** se, definiti i dati in ingresso ed i dati in uscita, fornisce i risultati attesi. Si dice **temporalmente corretto** se i risultati forniti rispettano i vincoli di tempo (deadline) imposti. Un sistema *real time* deve essere logicamente e temporalmente corretto.

Erroneamente, si può pensare che per far sì che un sistema sia real time (rispetti i vincoli di tempo), basti rendere il sistema più veloce aumentando la potenza di calcolo, ciò non è in realtà sufficiente, è necessario che l'unità di calcolo si dedichi esclusivamente all'algoritmo di controllo, è quindi importante che sia correttamente configurato.

Un sistema deputato al real time deve dare *massima priorità* all'algoritmo di controllo, per questo i sistemi real time sono sistemi dedicati realizzati ad hoc, e non vengono utilizzati i sistemi come windows o linux, in quanto essendo general purpose, prevedono molte funzionalità (ad esempio, la gestione dell'I/O) che possono ritardare l'esecuzione dell'algoritmo.

Un sistema real time deve quindi essere *prevedibile* e *deterministico*, possiamo suddividere i task da sequenziare in due categorie

- relativi alla sicurezza
- nice to have

I task responsabili (direttamente o indirettamente) della sicurezza fisica delle persone devono avere massima priorità e la loro esecuzione deve essere strettamente deterministica, un esempio di task di questo

tipo, è l'azionamento del freno di un ascensore. I task nice to have invece, "prenotano" l'esecuzione ma potrebbero dover dare la priorità ai task più importanti, un esempio di task di questo tipo può essere l'attivazione dello stereo in un automobile (nice to have = godibile, ma non fondamentale).

Introduciamo a tal proposito due coefficienti, siano

- $r_c$  : risultati corretti
- $r_e$  : risultati elaborati
- $r_t$  : risultati ottenuti rispettando i vincoli

Si hanno

- **coefficiente logico** :  $C_l = \frac{r_c}{r_e}$
- **coefficiente temporale** :  $C_t = \frac{r_t}{r_e}$

Un sistema si dice **hard real time** se entrambi i coefficienti sono uguali ad 1. I già accennati task che hanno a che fare con l'incolumità delle persone devono essere hard real time. I sistemi **soft real time** garantiscono la correttezza temporale solamente per una certa percentuale di task.

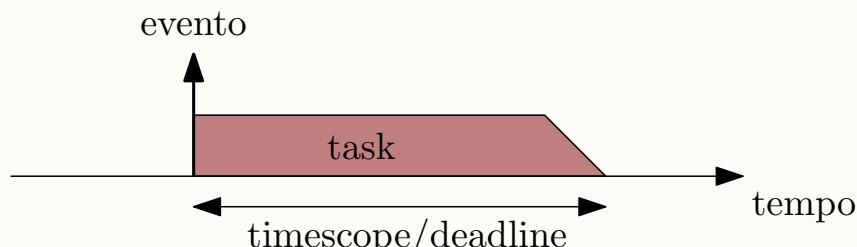
- hard real time :  $\min(C_l, C_t) = 1$
- soft real time :  $\min(C_l, C_t) < 1$

Per un generico task denotiamo  $T_i$  il tempo minimo necessario per eseguirlo, e denotiamo  $d_i$  la sua deadline (tempo massimo in cui va eseguito), il *vincolo real time*  $T_i/d_i$  da una misura sul margine di tempo rimanente fra il completamento di un task e la sua deadline, deve essere auspicabilmente minore di 1. Se è molto minore di 1, si dice che il vincolo è *largo*, se è prossimo all'unità, allora è *stretto* ed implica una programmazione sistematica.

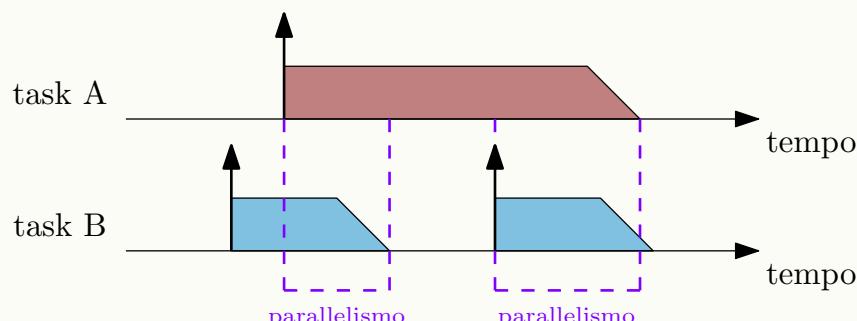
❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖ ❖

### 3.1 Parallelismo e Programmazione Concorrente

I task verranno rappresentati tramite un diagramma che prevede un asse temporale e dei blocchi rappresentanti la "vita" di tali task nel tempo.



Un *evento* avviene in un certo istante di tempo e sancisce il momento in cui il task può cominciare, tale diagramma individua l'intervallo temporale in cui il task è pronto per essere eseguito fino al momento in cui deve essere terminato. Può accadere che i timescope di due task si intersechino necessitando di un'esecuzione *parallela*.



Un sistema di controllo con  $n$  processori permette il *parallelismo reale*, in cui nello stesso istante più task vengono eseguiti in parallelo su differenti unità di calcolo. Dato che in genere, il numero dei task è sempre maggiore del numero dei processori, è necessaria la gestione del **parallelismo logico**, in cui più task vanno alternati su un singolo processore, varrà quindi l'ipotesi che l'unità di calcolo dei sistemi di controllo trattati in questo corso sia unica.

L'obiettivo è quello di disegnare un **algoritmo di scheduling**, che si occupi di decidere in che modo i task vanno sequenziati nel tempo. Molti dei concetti presenti sono ampiamente trattati negli appunti del corso di [Sistemi Operativi 1](#).

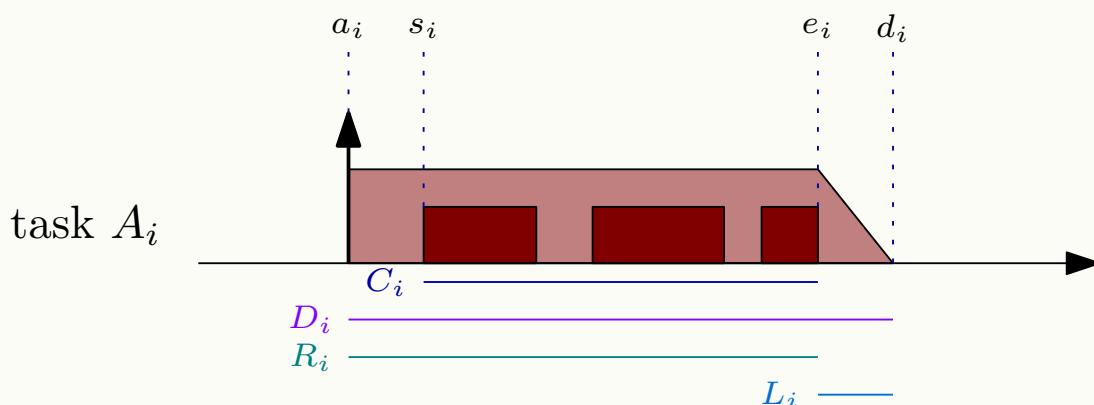
### Caratteristiche di un Task

Ogni task nell'ambiente del sistema di controllo, in un preciso istante può trovarsi in uno dei seguenti stati

- *attivo* : L'evento che lo ha scaturito è precedente all'istante attuale, e la sua deadline è futura all'istante attuale. Un task attivo inoltre può essere
  - *pronto* : attivo, ma in attesa di essere eseguito sul processore.
  - *in esecuzione* : in esecuzione sul processore.
- *Inattivo* : Il contrario di attivo.

Inoltre per ogni task  $i$  sono definiti i seguenti istanti che lo caratterizzano

- *activation time*  $a_i$  : L'istante in cui avviene l'evento che lo scaturisce.
- *start time*  $s_i$  : L'istante in cui viene eseguito sul processore per la prima volta.
- *end time*  $e_i$  : L'istante in cui l'esecuzione è terminata.
- *deadline*  $d_i$  : L'istante in cui la vita del processo non può protrarsi oltre. Inoltre, dati gli istanti presentati, si identificano 4 intervalli di tempo relativi ad un task  $i$  :
  - *computation time*  $C_i = e_i - s_i$  : il tempo effettivo impiegato sul processore.
  - *deadline relativa*  $D_i = d_i - a_i$  : la durata del suo timescope.
  - *response time*  $R_i = e_i - a_i$  : tempo impiegato per completare il task.
  - *lateness*  $L_i = e_i - d_i$  : il ritardo fra la deadline e la terminazione del processo, se tale valore è maggiore di 0 si parla di soft real time, deve auspicabilmente essere minore di 0.



Lo scheduler (unità logica che applica l'algoritmo di scheduling) deve attuare una strategia che

- Rispetti i vincoli delle risorse
- Rispetti le priorità dei task
- Massimizzi opportuni indici prestazionali

Quando un evento genera un task, questo viene messo nella *ready queue*, ossia la coda dei task pronti per essere eseguiti, l'algoritmo deve selezionare dalla coda il task successivo che verrà eseguito sull'unità di calcolo (dispatching), inoltre uno scheduler può essere **preemptive** :

Se vi è un processo *A* in esecuzione e ne arriva nella ready queue uno nuovo *B* di priorità maggiore, lo scheduler *preemptive* bloccherà l'esecuzione del processo *A* per eseguire il processo *B*, una volta terminato, *A* potrà tornare in esecuzione.

I task, possono richiedere l'accesso a delle risorse

Ad esempio, un task che si occupa della stampa di un foglio può richiedere accesso alla stampante

Inoltre queste risorse possono essere condivise fra più task, l'accesso a queste deve essere **mutualmente esclusivo**, quando un task sta utilizzando una risorsa, nessun task che la necessita può essere eseguito. I task pronti ad essere eseguiti, ma che richiedono una risorsa già in uso, vengono messi in una *blocked queue*, e saranno "bloccati" finché la risorsa di cui necessitano non tornerà disponibile.

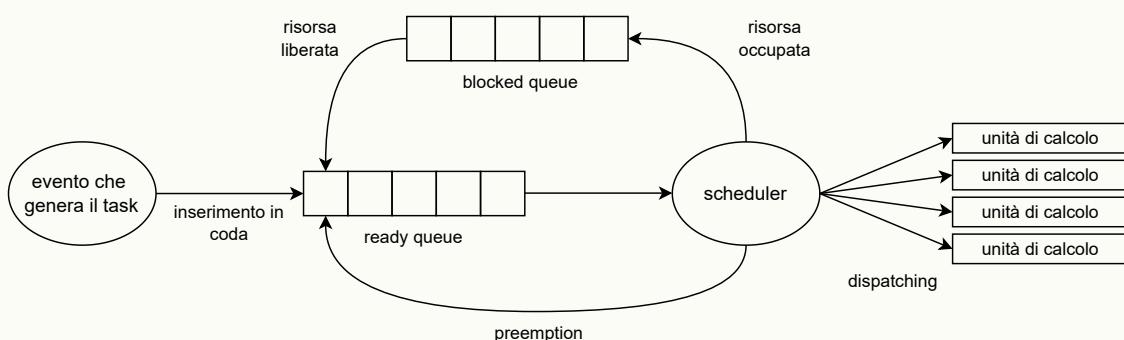


Figura 3.1: modello generico di scheduling



## 3.2 Il Problema dello Scheduling

Lo scheduling viene applicato a livello di coordinamento per la sequenziazione dei task, in particolare, il problema consiste nel sequenziare  $n$  task, a cui sono associati i rispettivi vincoli temporali e di accesso alle risorse, ci si impone una percentuale  $\pi$  di task che rispettino la correttezza temporale, e che eventualmente rispettino i vincoli di mutua esclusione nell'accesso alle risorse.

**Definizione :** Dato un insieme di task, esso è *schedulabile* se esiste almeno un algoritmo di scheduling che lo *risolve* (ne trova una sequenziazione ammissibile, ossia che rispetti i vincoli).

s Si consideri il seguente esempio, vi sono due task ( $A_1, A_2$ ), con i rispettivi vincoli temporali

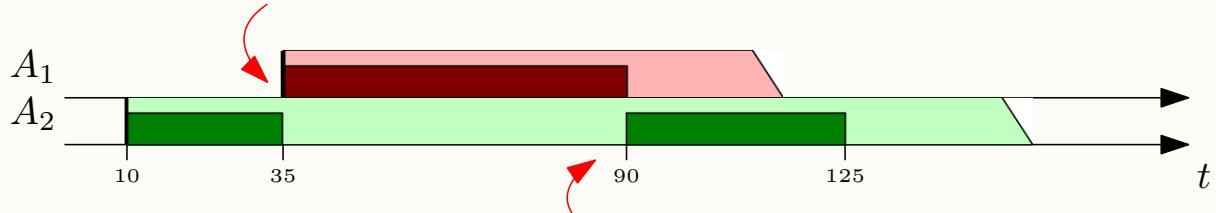
$$\begin{array}{llll} a_1 = 35 & C_1 = 55 & D_1 = 80 & d_1 = 115 \\ a_2 = 10 & C_2 = 60 & D_2 = 145 & d_2 = 155 \end{array}$$

Il tempo è misurato in generiche unità di tempo *t.u..*. Per lo scheduling di questi task, si tenta un approccio **First In First Out (FIFO)**, ossia, si schedulano i task in ordine di arrivo.



Come si vede dalla traccia dello scheduling, l'algoritmo FIFO non risolve il problema in quanto fa sì che il task  $A_1$  termini all'istante 125 nonostante la sua dead line assoluta fosse 115. Si prova allora uno scheduling FIFO ma di tipo preemptive, in cui si da priorità al task con tempo di completamento minore.

nonostante ci sia  $A_2$  in esecuzione, all'attivazione di  $A_1$ , lo scheduler gli dà la precedenza in quanto ha un tempo di completamento minore



una volta terminato  $A_1$ , il task  $A_2$  può riprendere controllo del processore

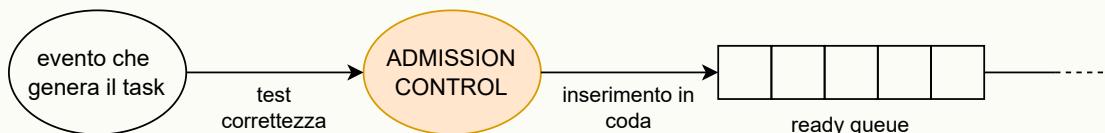
Questa serializzazione dei task è ammmissible dato che i vincoli temporali sono rispettati, l'algoritmo FIFO Preemptive risolve l'insieme ( $A_1, A_2$ ).

Ci si pone la domanda : Esiste un algoritmo generale che, dato un arbitrario numero di task con rispettivi vincoli temporali, ne trovi una serializzazione ammmissible? Si è dimostrato che il problema dello scheduling è NP-completo, non è possibile trovare una soluzione in maniera efficiente. Nell'ambito dell'automazione industriale però, è possibile concedersi ipotesi largamente semplificate che permettono di adoperare degli algoritmi che risolvano gli insiemi di task trattati in tali contesti.

### 3.2.1 Classificazione degli Algoritmi

Gli algoritmi di scheduling si classificano secondo 5 differenti parametri. Un algoritmo può essere

- **best effort** : non è hard real time,  $\pi < 1$
- **guaranteed** : è hard real time,  $\pi = 1$ , rispetta sempre i vincoli temporali, per garantire la correttezza si basa su alcuni "test" di garanzia, quando evento genera un task, vi è una fase di *admission control* in cui il task viene accettato nella ready queue solo se, la sua aggiunta all'insieme dei task lo rende ancora un insieme schedulabile.



Un altro criterio di classificazione è il seguente, uno algoritmo può essere

- **mono processore** (verranno trattati questi)
- **multi processore**

Può essere inoltre

- **preemptive** : se esso è in grado di interrompere l'esecuzione in una delle unità di calcolo di un task a minor priorità a favore dell'esecuzione di un task a maggior priorità.
- **non preemptive** : se esso non è in grado di interrompere l'esecuzione di un task quando esso è stato inviato ad una delle unità di calcolo.

Un importante distinzione è la seguente

- **offline** : Se le decisioni di scheduling sono prese prima dell'attivazione dei task, quindi la sequenza è nota a priori.

- **online** : Se le decisioni dipendono dall'ordine di arrivo dei task.

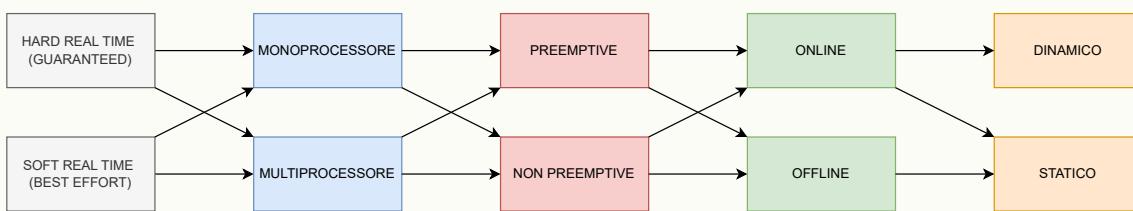
L'algoritmo FIFO è online perché le decisioni dipendono dagli activation time. L'ultima distinzione è la seguente

- **dinamico** : I parametri sulla quale si basa il dispatching (priorità) possono variare nel tempo.
- **statico** : I parametri sulla quale si basa il dispatching (priorità) sono costanti.

FIFO è un algoritmo statico che basa le priorità sull'activation time.

**Proposizione :** Un algoritmo offline è anche necessariamente statico.

**Dimostrazione :** Supponiamo per assurdo che un algoritmo offline sia dinamico, ad un certo istante  $t$ , un generico evento  $E$  comporta un cambio nei parametri su cui si basa lo scheduling, facendo cambiare l'ordine di serializzazione, tale ordine non era però noto a priori in quanto è dipeso dall'evento  $E$ , quindi è impossibile che l'algoritmo sia offline.



In generale, gli algoritmi guaranteed sono dinamici e online (hanno più gradi di libertà), ma sono anche computazionalmente più complessi.

### 3.2.2 Scheduling di Task Periodici

Nel controllo dell'automazione industriale, i task presentano delle proprietà comuni, è possibile identificare nel processo produttivo dei *cicli di lavoro* che si ripetono periodicamente. L'ipotesi di periodicità che a breve verrà definita, ha notevole impatto sulla risoluzione dei task. Come prima ipotesi, si assume che vi è un insieme finito di  $n$  task, che possono ripetersi nel tempo, ossia possono esistere più istanze dello stesso task in istanti diversi, il generico task  $A_i$  verrà ora denotato  $A_i^k$ , dove  $k$  rappresenta la sua  $k$ -esima apparizione. Anche i parametri già definiti dipenderanno da  $k$

| parametri | intervalli |
|-----------|------------|
| $a_i(k)$  | $C_i(k)$   |
| $s_i(k)$  | $D_i(k)$   |
| $e_i(k)$  | $R_i(k)$   |
| $d_i(k)$  | $L_i(k)$   |

**Osservazione :** Quando si tratta il computation time, si intende sempre il tempo di lavoro minimo possibile per completare un task. La riduzione del computation time di un task rappresenta nel mondo reale l'utilizzo di una strumentazione differente capace di eseguire lo stesso task in tempo minore. D'altro canto, l'aumento del computation time rappresenta l'acquisto di una strumentazione *più economica* che esegue lo stesso task in tempo maggiore.

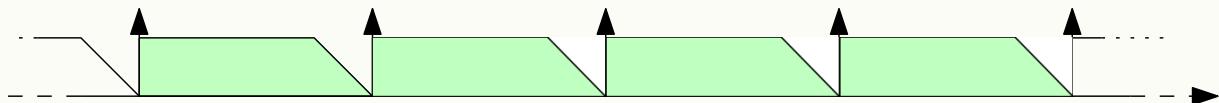
**Definizione :** Dato un task  $A_i$  di un insieme di task, si definisce **activation period** (oppure periodo di attivazione) il valore (in funzione della  $k$ -esima occorrenza) :

$$T_i(k) = a_i(k+1) - a_i(k)$$

rappresenta il periodo che intercorre fra la  $k$ -esima attivazione di un task e la sua  $k+1$ -esima attivazione. Diremo che il task  $A_i$  è **periodico** se per ogni  $k$ , l'activation period è costante

$$\text{⌚⌚ } T_i(k) = T_i(k+1) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{⌚⌚}$$

Vuol dire che il task si ripete periodicamente scandito da un certo periodo.



Inoltre, verranno formulate *ulteriori ipotesi* che da questo punto in poi devono considerarsi vere nell'ambito dei task periodici.

1. La deadline relativa di un task periodico sarà uguale al suo periodo di attivazione.
2. I task sono fra loro indipendenti (non ci sono blocking queue)
3. Il computation time  $C_i$  di un task è costante per tutte le sue istanze
4. Tutti i task condividono il primo activation time :  $\forall i, j \in [1 \dots, n] \quad a_j(1) = a_i(1)$

Definiamo adesso i parametri in gioco quando si tratta dello scheduling di task periodici. Il generico problema di scheduling prevede

- Un insieme di  $n$  task periodici ( $A_1, A_2, A_3 \dots, A_n$ )
- I *Requisiti*, ossia i periodi di attivazione per ogni task ( $T_1, T_2, T_3 \dots, T_n$ )
- I *Vincoli*, ossia i computation time per ogni task ( $C_1, C_2, C_3 \dots, C_n$ )

**Definizione :** Dato un insieme di  $n$  task periodici con rispettivi requisiti e vincoli, si definisce **fattore di utilizzazione** il coefficiente

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{T_i}$$

Il denominatore di  $U$ , ossia il minimo comune multiplo dei periodi

$$\text{mcm}(T_1, T_2 \dots, T_n)$$

rappresenta il *periodo totale del sistema*, ossia il periodo con cui l'intero insieme di task si ripete ciclicamente. È quindi opportuno restringere lo scheduling solo per le prime  $\text{mcm}(T_1, T_2 \dots, T_n)$  unità di tempo, in quanto per le successive sarà semplicemente una ripetizione di queste. Il numeratore di  $U$  invece rappresenta le unità di tempo in cui il processore è effettivamente utilizzato.

Dato un problema di scheduling, la **condizione necessaria** affinché sia risolvibile è che il fattore di utilizzazione sia minore o uguale ad 1.

$$\begin{cases} U \leq 1 & \text{possibilmente risolvibile} \\ U > 1 & \text{non risolvibile} \end{cases}$$

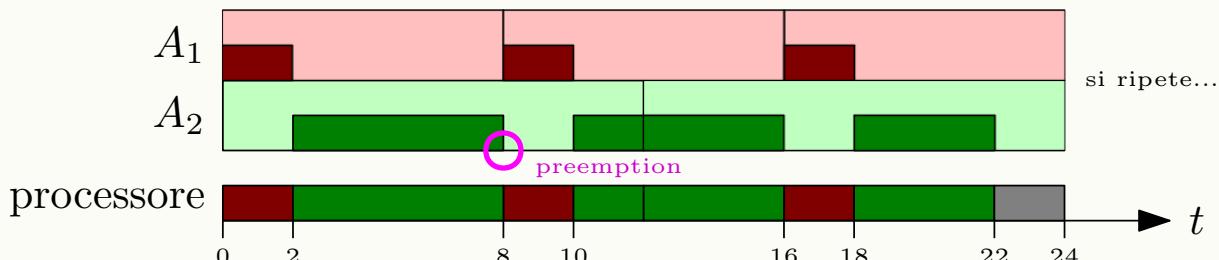
Si prenda in esempio la coppia di task

$$\begin{array}{lll} A_1 & T_1 = 8 & C_1 = 2 \\ A_2 & T_2 = 12 & C_2 = 8 \end{array}$$

Si ha

$$U = \frac{2}{8} + \frac{8}{12} = \frac{22}{24} \simeq 0.917 < 1$$

L'insieme potrebbe essere schedulabile. Verrà applicato un algoritmo preemptive che assegna maggiore priorità al task il cui activation period è minore. Verrà quindi sempre favorito il task  $A_1$ .



Si noti come nella traccia dello scheduling il lavoro effettivo sia durato 22 t.u., proprio come il numeratore del fattore  $U$ , sono infatti rimaste 2 t.u. (evidenziate in grigio) in cui la ready queue era vuota e non c'era nulla da schedulare.

### 3.2.3 Utilizzo del Processore

Si è definito il fattore di utilizzazione  $U$ , esso dipende dai computation time  $C_i$ , tale valore  $U$  può essere eventualmente massimizzato. Cosa vuol dire massimizzare  $U$ ? Renderlo il più possibile vicino ad 1, finché è minore o uguale all'unità, lo scheduling è ammissibile, è quindi possibile cercare di aumentare i valori  $C_i$ , l'aumento di tali tempi equivale ad un utilizzo di una strumentazione più lenta (quindi economica) nello svolgimento dei task. È quindi di interesse del progettista cercare di "spremere" il più possibile uno scheduling cercando di massimizzare  $U$ .

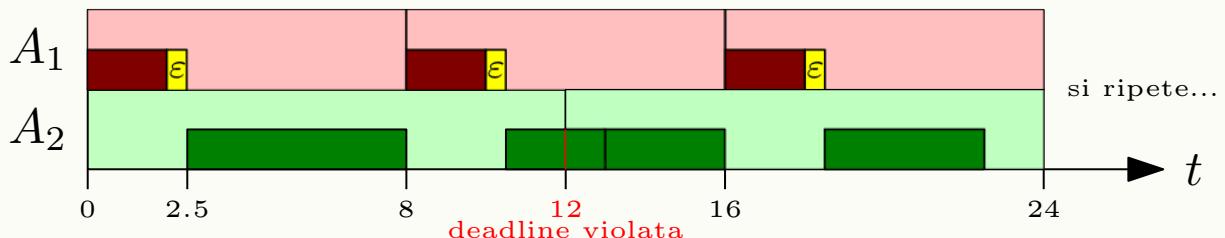
Dato un algoritmo  $F$ , un insieme di  $n$  task, e rispettivi requisiti  $T_i$ , si definisce il **fattore di utilizzazione massimo**

$$U_{max}(n, T_i, F) = \max_{\substack{C_i \in \mathbb{R}^+ \\ F \text{ soluzione}}} (n, T_i) = \max_{\substack{C_i \in \mathbb{R}^+ \\ F \text{ soluzione}}} \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{T_i} \quad \text{tale che } U_{max} \geq 1$$

**Definizione :** Dato un algoritmo di scheduling diremo che il processore è **completamente utilizzato** se, l'aumento di un qualsiasi  $C_i$  di un valore positivo qualsiasi  $\varepsilon$  rende lo scheduling inammissibile ( $U > 1$ ).

**Proposizione :** Dato un algoritmo di scheduling, se il processore è completamente utilizzato allora il suo fattore di utilizzazione è massimale :  $U = U_{max}$ . (la dimostrazione è banale)

Nell'esempio con i due task ( $A_1, A_2$ ) visto in precedenza, il processore è completamente utilizzato. infatti all'istante 12, il task  $A_2$  termina esattamente in pari con la sua deadline, l'aumentare di un qualsiasi valore  $\varepsilon$  di un computation time di uno dei due task renderebbe lo scheduling inammissibile.



Esiste un altro coefficiente che caratterizza l'efficacia di un algoritmo di scheduling, ossia il **limite superiore minimo del fattore di utilizzazione**, dato uno scheduling  $F$ , esso è il minimo fra tutti i massimi fattori di utilizzazione calcolati al variare di un qualsiasi possibile insieme di task periodici.

$$U_{lsm}(F) = \min_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ T_i \in \mathbb{R}^+}} \left( U_{max}(n, T_i, F) \right) = \min_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ T_i \in \mathbb{R}^+}} \left( \max_{\substack{C_i \in \mathbb{R}^+ \\ F \text{ soluzione}}} \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{T_i} \right)$$

Describe il carico computazionale massimo che può essere sicuramente gestito, infatti si ha la seguente proposizione.

**Proposizione :** Dati  $n$  task con rispettivi vincoli e requisiti, essi sono sicuramente schedulabili se esiste un algoritmo  $F$  tale che  $U \leq U_{lsm}(F)$ . Tale condizione è *sufficiente* per rendere l'insieme schedulabile.

~\*~\*~\*~\*~\*~\*~\*~\*~\*~\*~\*~\*~\*~\*~\*~\*~

## 3.3 Gli Algoritmi di Scheduling

In questa sezione verranno presentati diversi algoritmi per lo scheduling di task, differenti da un punto di vista della loro classificazione.

### 3.3.1 Rate Monotoning Priority Ordering (RMPO)

L'RMPO è un algoritmo che funziona esclusivamente se i task in questione sono tutti periodici, de facto, è un algoritmo preemptive che assegna la proporzionalità in modo inversamente proporzionale all'activation

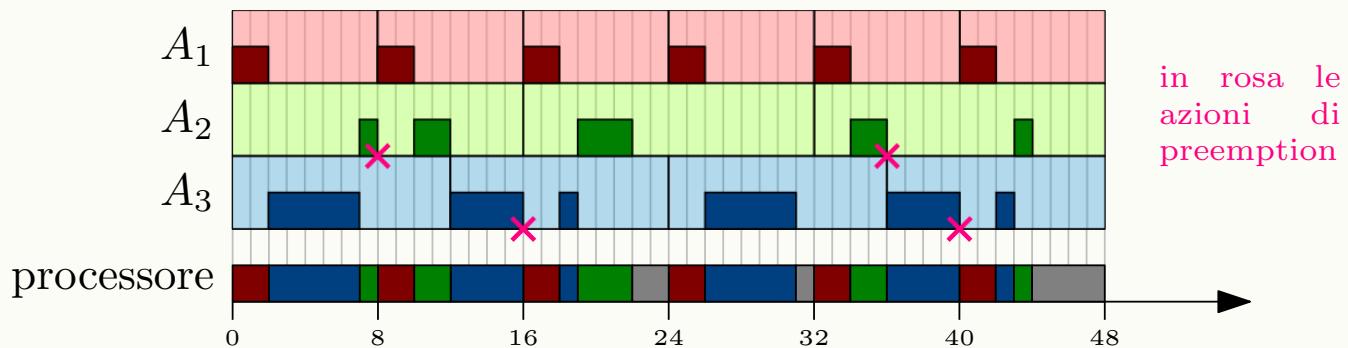
period dei task. Tale priorità non varia, lo rende quindi un algoritmo online statico. Vediamo subito un esempio di applicazione, si consideri il seguente insieme di task

$$\begin{array}{lll} A_1 & T_1 = 8 & C_1 = 2 \\ A_2 & T_2 = 16 & C_2 = 3 \\ A_3 & T_3 = 12 & C_3 = 5 \end{array}$$

Il fattore di utilizzazione è

$$U = \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \frac{5}{12} = \frac{41}{48} \simeq 8.8542 < 1$$

La condizione necessaria è soddisfatta. Il task  $A_1$  avrà sempre priorità sugli altri, si procede nel disegnare la traccia dello scheduling.



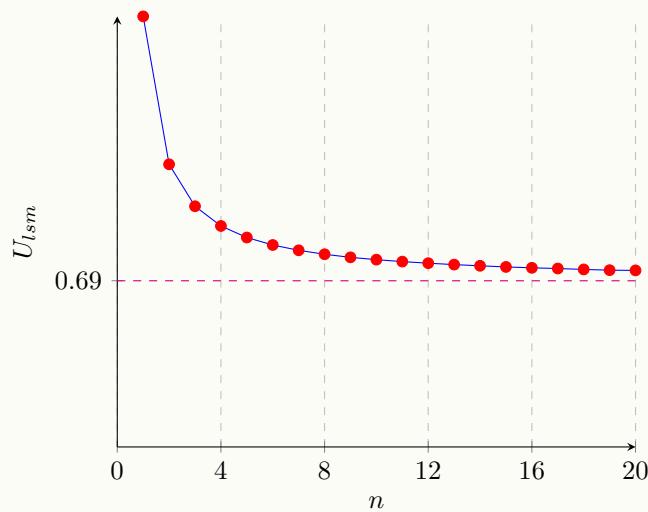
### Proprietà dell'algoritmo

**Proposizione 1 :** l'algoritmo RMPO è il miglior algoritmo statico per lo scheduling di task periodici. Se un insieme di questo tipo non è schedulabile con RMPO, non esiste alcun altro algoritmo statico capace di risolverlo.

**Proposizione 2 :** per l'RMPO, dato un numero  $n$  di task, si ha che

$$U_{lsm}(\text{RMPO}) = n(2^{\frac{1}{n}} - 1)$$

Si può tracciare il grafico di tale fattore al variare di  $n$ .



Si calcola il limite per  $n$  che tende ad infinito

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(2^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{1/n} - 1}{1/n} = \quad (3.1)$$

$$\text{de l'Hôpital} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{dn}(2^{1/n} - 1)}{\frac{d}{dn}(1/n)} = \quad (3.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{1/n} \ln(2)(-1/n^2)}{-1/n^2} = \quad (3.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{1/n} \ln(2) = \ln(2) \simeq 0.693 \quad (3.4)$$

**Osservazione :** Dato un qualsiasi insieme di task periodici, se il fattore di utilizzazione è minore di  $\ln(2)$ , allora l'insieme è sicuramente risolvibile con RMPO (condizione sufficiente).

**Definizione (Relazioni Armoniche) :** : Dato un insieme di  $n$  task, essi sono *legati da relazioni armoniche* se esiste un task  $i$  il cui periodo di attivazioni è multiplo di tutti gli altri periodi di attivazione.

$$\exists i \in [1, 2, \dots, n] \mid \forall j \in [1, 2, \dots, n] \ k_j T_j = T_i \text{ per qualche } k_j \in \mathbb{Z}$$

**Proposizione 3 :** Se un insieme di task è legato da relazioni armoniche, allora RMPO lo risolve (condizione sufficiente).

In conclusione, si è visto come RMPO sia il migliore algoritmo statico, nonostante ciò, per tutti gli insiemi di  $n$  task periodici che non sono legati da relazioni armoniche, e per cui il loro valore di utilizzazione è

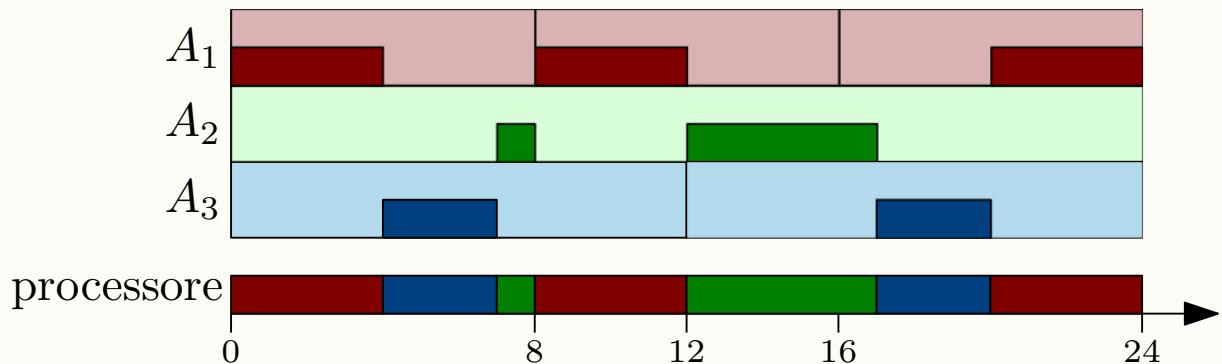
$$n(2^{\frac{1}{n}} - 1) < U \leq 1$$

non è garantita la correttezza temporale (e va verificato con la traccia dello scheduling). Esiste un algoritmo le cui assunzioni per garantire la correttezza sono più larghe, ma non è un algoritmo statico bensì dinamico.

### 3.3.2 Earliest Deadline First (EDF)

Si tratta di un algoritmo dinamico in cui il task con maggiore priorità è quello la cui deadline è più prossima nel tempo, quindi inversamente proporzionale alla deadline assoluta. In caso di deadline assoluta identica fra 2 task, favorisce quello che è stato attivato prima. Si consideri il seguente esempio :

$$\begin{array}{lll} A_1 & T_1 = 8 & C_1 = 4 \\ A_2 & T_2 = 24 & C_2 = 6 \\ A_3 & T_3 = 12 & C_3 = 3 \end{array} \quad U = \frac{4}{8} + \frac{6}{24} + \frac{3}{12} = \frac{24}{24}$$



#### Proprietà dell'algoritmo

**Proposizione :** Se per un qualsiasi insieme di task vale che  $U \leq 1$ , allora è schedulabile tramite EDF (condizione sufficiente). Significa che EDF è il *miglior algoritmo* per lo scheduling di task periodici, se un insieme non è schedulabile con EDF, allora non è schedulabile da nessun altro algoritmo.

Riassumendo, dato un insieme di task, si ha che

- Se  $U \leq \ln(2)$  sicuramente è schedulabile con RMPO
- Se i task sono  $n$  e  $U \leq n(2^{\frac{1}{n}} - 1)$  sicuramente è schedulabile con RMPO
- Se i task sono legati da relazioni armoniche e  $U \leq 1$ , sicuramente è schedulabile con RMPO
- In ogni circostanza, se  $U \leq 1$  sicuramente è schedulabile con EDF

EDF ha condizioni di schedulabilità più larghe e risulta più efficace di RMPO, è però computazionalmente più complesso, quindi sotto certe ipotesi può essere meglio RMPO. Inoltre

- RMPO funziona solamente con task periodici
- EDF funziona anche con task aperiodici, anche se per questi non valgono le condizioni sufficienti di schedulabilità.

### Esercizio

Dato il seguente insieme di task

$$\begin{array}{lll} A_1 & T_1 = 8 & C_1 = 3 \\ A_2 & T_2 = 16 & C_2 = 3 \\ A_3 & T_3 = 12 & C_3 = 5 \end{array}$$

Mostrare che è schedulabile con RMPO, in caso contrario, mostrare lo scheduling con EDF.

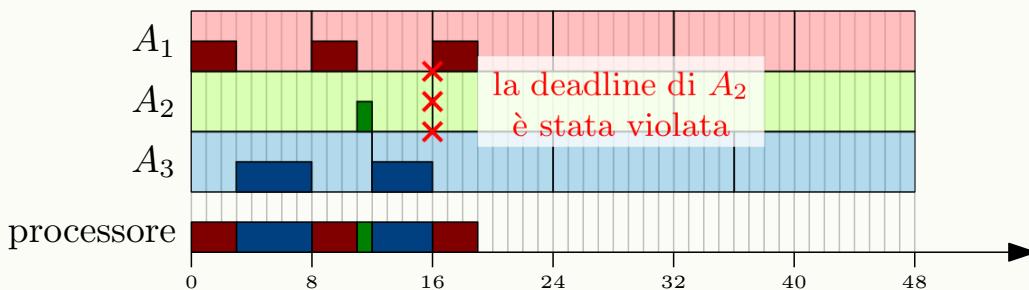
Come prima cosa, si calcola il fattore di utilizzazione

$$U = \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{5}{12} = \frac{47}{48} < 1$$

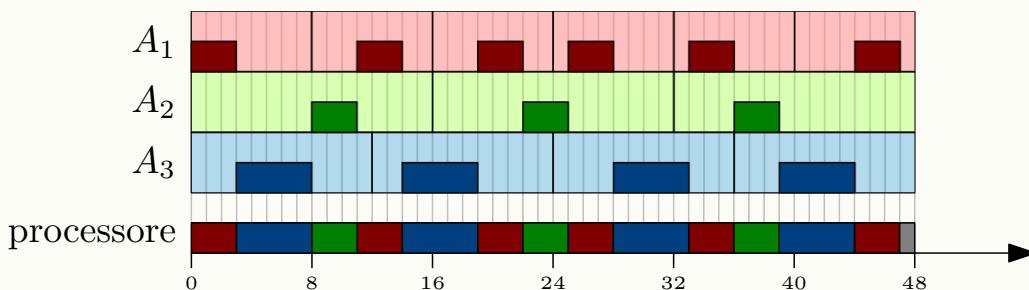
Si ha che

$$n(2^{\frac{1}{n}} - 1) = 3(2^{\frac{1}{3}} - 1) \simeq 0.779 < \frac{47}{48}$$

quindi le condizioni sufficienti non sono soddisfatte, è necessario disegnare la traccia dello scheduling.



RMPO non funziona, si tenta con EDF



Essendo il fattore di utilizzazione minore di 1 era certo che EDF sarebbe riuscito a schedulare l'insieme, lasciando l'ultima unità temporale libera.

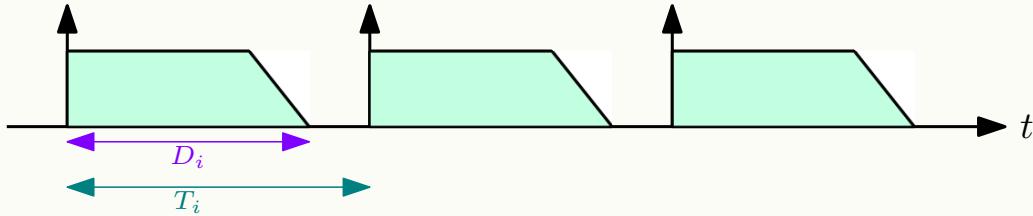
### 3.3.3 Deadline Monotonic Priority Ordering (DMPO)

Fin'ora l'ipotesi dei task periodici ha permesso la formulazione di algoritmi efficienti capaci di schedulare un qualsiasi insieme di task che rispetti determinati requisiti, più o meno laschi.

Si considera adesso un insieme di task **periodici generalizzati**, che differiscono dai task periodici classici per un vincolo : Non è necessariamente vero che la deadline relativa ed il activation period coincidano. Un insieme di task rispetta ora le seguenti ipotesi

1. La deadline relativa di un task periodico sarà **minore o uguale** al suo periodo di attivazione.
2. I task sono fra loro indipendenti (non ci sono blocking queue)
3. Il computation time  $C_i$  di un task è costante per tutte le sue istanze
4. Tutti i task condividono il primo activation time :  $\forall i, j \in [1 \dots, n] \quad a_j(1) = a_i(1)$

$$T_i \geq D_i$$



Bisogna definire il *coefficiente di utilizzazione relativo* :

$$U_{rel} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{D_i} \geq U = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{T_i}$$

L'algoritmo *DMPO* generalizza l'*RMPO*, opera nel campo dei task periodici generalizzati ed assegna un valore di priorità inversamente proporzionale alla deadline relativa di ogni processo. È un algoritmo preemptive e statico perché le deadline relative sono costanti.

**Proposizione 1 :** È il migliore algoritmo statico per i task periodici generalizzati.

**Proposizione 2 :** Se un algoritmo statico risolve un insieme di task periodici generalizzati, anche DMPO lo risolve.

**Proposizione 3 :** (Condizione sufficiente) un insieme di  $n$  task periodici generalizzati è *sicuramente schedulabile* se

$$U_{rel} \leq n(2^{1/n} - 1)$$

**Osservazione :** La condizione sufficiente di schedulabilità è più stretta rispetto a quella del RMPO dato che  $U \leq U_{rel}$

$$\begin{cases} U \leq n(2^{1/n} - 1) & \text{condizione RMPO} \\ U_{rel} \leq n(2^{1/n} - 1) & \text{condizione DMPO} \end{cases} \quad U \leq n(2^{1/n} - 1) \not\Rightarrow U_{rel} \leq n(2^{1/n} - 1)$$

DMPO può fallire dove RMPO riesce.

### 3.3.4 Time Scheduling (TS)

L'algoritmo *TS* opera nel campo dei task periodici classici ( $T_i = D_i$ ) ed è un algoritmo offline e non preemptive, è quindi estremamente semplice in termini di complessità computazionale e garantisce un alto grado di determinismo.

L'algoritmo prevede una *discretizzazione* dell'asse temporale in intervalli di tempo regolari chiamati **time slices**.



Si definiscono due coefficienti

- **minor cycle** :  $\text{MCD}(T_i)$
- **major cycle** :  $\text{mcm}(T_i)$

**Nota :** Ha senso parlare di MCD e mcm nel contesto degli activation period che sono intervalli temporali? Anche se nel mondo fisico  $T_i \in \mathbb{R}^+$ , è più che ammissibile permettersi un rilassamento ingegneristico e trattare i periodi temporali come numeri in  $\mathbb{N}$ , tutti i periodi saranno multipli interi di una determinata time unit.

Per applicare TS, è necessario che

$$\forall i \quad C_i \leq \text{MCD}(T_1, T_2, \dots, T_n)$$

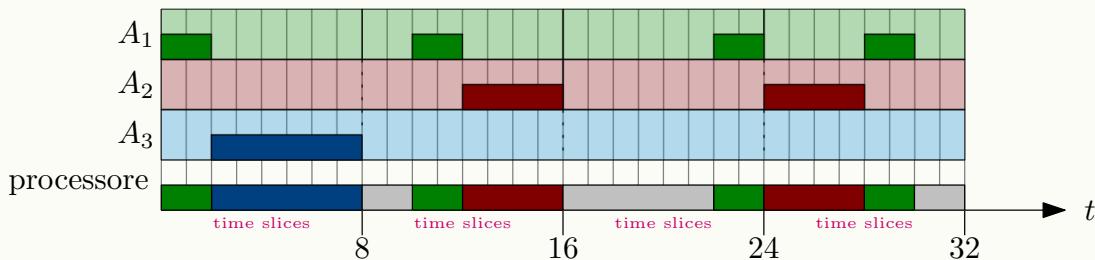
L'asse temporale viene suddiviso in time slices grandi quanto il minor cycle, una volta fatto ciò, è possibile *schedulare in maniera arbitraria* i task sulle time slices in modo tale che

- ogni time slices ha almeno uno o più task
- un task viene interamente schedulato su una singola time slices, non può essere suddiviso

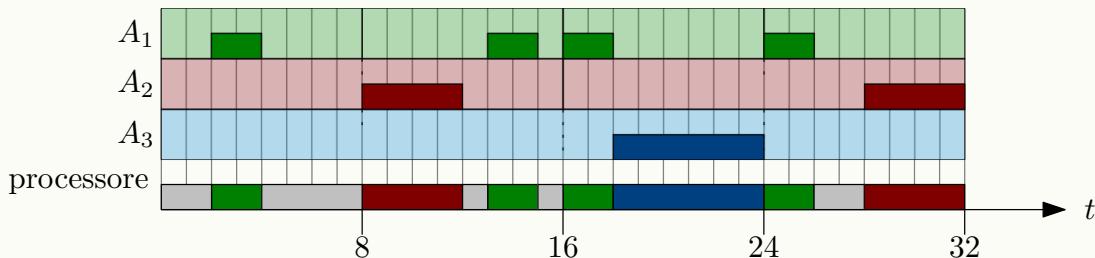
Lo scheduling dell'intero insieme sarà periodico, di periodo uguale al major cycle. **Esempio**

$$\begin{array}{lll} A_1 & T_1 = 8 & C_1 = 2 \\ A_2 & T_2 = 16 & C_2 = 4 \\ A_3 & T_3 = 32 & C_3 = 6 \end{array} \quad U = \frac{22}{32} < \ln(2) \text{ RMPO lo risolve}$$

Si vuole applicare TS, si ha che il minor cycle è  $\text{MCD}(8, 16, 32) = 8$  ed il major cycle è  $\text{mcm}(8, 16, 32) = 32$ .



Esistono più scheduling equivalenti, quello corretto non è univoco.



L'algoritmo time scheduling è estremamente semplice ed immediato nella computazione, è però caratterizzato anche da **poca flessibilità** e **poca robustezza**, essendo lo scheduling deciso a priori un cambiamento nella trama dovuto a ritardi non prevedibili di task potrebbe causare la violazione del vincolo di correttezza temporale, è quindi un algoritmo da applicare in contesti *strettamente deterministicici* e gestisce esclusivamente task periodici.



### 3.4 Scheduling di Task Misti

Riguardo la piramide CIM : è vero che nel livello di campo i task sono relativi ad attuazioni e rilevazioni da parte di macchine e sensori, task strettamente rigidi, deterministici, immersi in un ciclo di produzione che li rende strettamente periodici.

Salendo sulla piramide, i tempi di reazione si allargano ed i task assumono una connotazione di controllo e gestione piuttosto che azionamento meccanico/elettrico, persistono sempre cicli periodici, ma potrebbero essere inclusi anche dei task **aperiodici**, il cui avvenimento può essere condizionale ed asincrono, quindi non predeterminato. Un esempio di task aperiodico può essere la gestione di un allarme oppure la gestione dell'input da parte di un utente.

Un insieme di task può quindi contenere task periodici e task aperiodici, si dice che l'insieme di task è *misto*, come prima cosa, in base alla natura del task, bisogna suddividere i task aperiodici in

- aperiodici hard real time (Es. gestione di allarmi riguardanti l'incolumità fisica degli operatori)
- aperiodici soft real time (Es. interazione con il display da parte dell'utente)

**Idea :** Si vogliono trasformare i task aperiodici in task periodici equivalenti

**Ipotesi :**

1. Dato un task aperiodico hard real time  $A_i$ , si assume di conoscere il *minimo intervallo di occorrenza* di esso denotato  $T_i^{\min}$ , è impossibile che  $A_i$  entri due volte nella coda dei task pronti in due istanti che distano meno di  $T_i^{\min}$ .
2. Si assume inoltre di essere a conoscenza del *massimo tempo di computazione*  $C_i^{\max}$ , è impossibile che il task occupi la CPU per più di  $C_i^{\max}$  t.u.

Dati dei task periodici

$$\begin{aligned} & (n, T_1 \dots, T_n) \\ & (C_1 \dots, C_n) \end{aligned}$$

e dei task aperiodici trasformati in periodici

$$\begin{aligned} & (m, T_1^{\min} \dots, T_m^{\min}) \\ & (C_1^{\max} \dots, C_m^{\max}) \end{aligned}$$

Si considera l'insieme dei task che rappresenta un problema equivalentemente periodico

$$\begin{aligned} & (n + m, T_1 \dots, T_n, T_1^{\min} \dots, T_m^{\min}) \\ & (C_1 \dots, C_n, C_1^{\max} \dots, C_m^{\max}) \end{aligned}$$

i task aperiodici hard real time vengono resi task periodici equivalenti

È chiaro che la CPU dedicherà delle unità di tempo a task aperiodici come se fossero periodici, causando un inevitabile spreco di computazione nel caso questi non dovessero sussistere.

I task soft real time (che sono altrettanto diffusi) possono essere gestiti in maniera best effort.

## CAPITOLO

# 4

## COMPLEMENTI

### 4.1 La Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace è una *trasformata integrale*, nello specifico, è una funzione che associa ad una funzione di variabile reale, una funzione di variabile complessa.

**Definizione (Trasformata di Laplace) :** : Sia  $f$  una funzione di variabile reale, nulla in  $(-\infty, 0)$ , si chiama trasformata di Laplace di  $f$  la funzione

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx \quad p \in \mathbb{C}$$

Essendo  $p = \alpha + i\beta$  una variabile complessa, la funzione integranda si può riscrivere

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\beta)x} f(x) dx$$

Ricordando l'identità di Eulero

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

Si ha

$$e^{-(\alpha+i\beta)x} = e^{-\alpha x} \cdot e^{-\beta ix} = \quad (4.1)$$

$$e^{-\alpha x} \cdot (\cos(-\beta x) + i \sin(-\beta x)) = e^{-\alpha x} \cdot (\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)) = \quad (4.2)$$

$$e^{-\alpha x} \cos(\beta x) - i e^{-\alpha x} \sin(\beta x) \quad (4.3)$$

Quindi

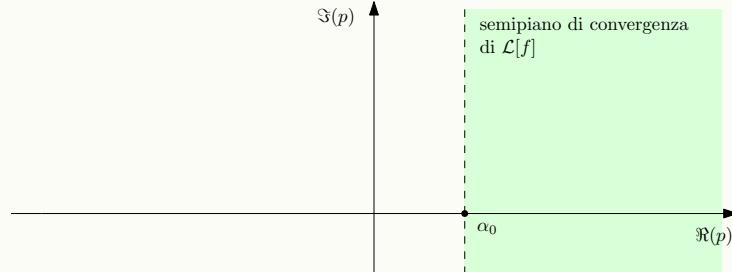
$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](p) &= \mathcal{L}[f](\alpha + i\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\beta)x} f(x) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x) f(x) - i e^{-\alpha x} \sin(\beta x) f(x) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x) f(x) dx - i \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin(\beta x) f(x) dx \end{aligned}$$

Se l'integrale  $\mathcal{L}[f](\alpha + i\beta)$  converge per un certo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , allora converge per  $p = \alpha + i\beta$  per ogni altro  $\beta \in \mathbb{R}$ . Se per  $f$  esiste almeno un  $p \in \mathbb{C}$  tale che  $\mathcal{L}[f](p) < \infty$ , allora  $f$  si dice *trasformabile secondo Laplace*.

In generale, se  $\mathcal{L}[f](p) < \infty$  per  $p = p_0$ , allora è definita anche nel semipiano complesso

$$\{p \in \mathbb{C} \mid \Re(p) > \Re(p_0)\}$$

Sia  $\alpha_0$  l'estremo inferiore dell'insieme  $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \mathcal{L}[f](p) < \infty \wedge \Re(p) > \alpha\}$ , allora il semipiano  $\{p \in \mathbb{C} \mid \Re(p) > \alpha_0\}$  è detto **semipiano di convergenza**.



Vediamo un esempio di trasformata, si consideri

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

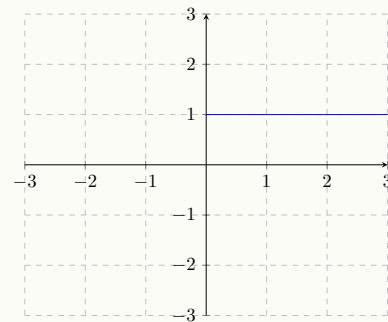


Figura 4.1: Funzione di Heaviside

Si calcola

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[H](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-px} \cdot 1 \, dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[H](p) = \int_0^T e^{-px} \cdot 1 \, dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{e^{-px}}{p} \right]_0^T = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} -\frac{e^{-pT}}{p} - \left[ -\frac{e^{-p0}}{p} \right] = \lim_{T \rightarrow +\infty} -\frac{e^{-pT}}{p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Il cui semipiano di convergenza risulta essere  $\Re(p) > 0$ .

### 4.1.1 Proprietà della Trasformata

#### Linearità

La trasformazione di Laplace gode della proprietà di *linearità*, siano  $f(p)$  e  $g(p)$  due funzioni trasformabili, siano  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  due costanti complesse, se la funzione  $\lambda \cdot f(p) + \mu \cdot g(p)$  è trasformabile, allora

$$\mathcal{L}[\lambda \cdot f + \mu \cdot g](p) = \lambda \mathcal{L}[f](p) + \mu \mathcal{L}[g](p)$$

Il semipiano di convergenza sarà uguale all'intersezione dei due semipiani di convergenza delle funzioni di partenza, più precisamente se

- $f$  ha come semipiano di convergenza  $\Re(p) > \alpha$
- $g$  ha come semipiano di convergenza  $\Re(p) > \beta$
- allora  $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$  ha come semipiano di convergenza  $\Re(p) > \max\{\beta, \alpha\}$

## Ritardo

Sia  $f$  una funzione trasformabile, si consideri una costante reale  $a > 0$ , la funzione  $g(x) = f(x - a)$  è detta funzione *ritardata*.

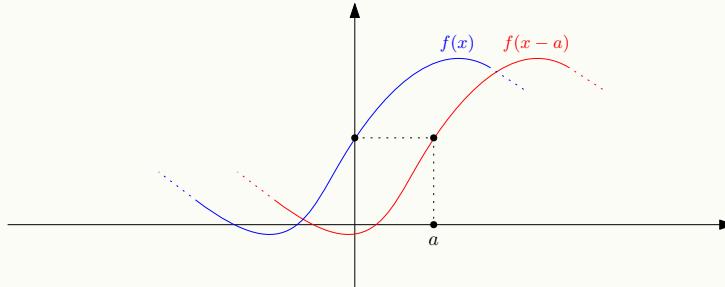


Figura 4.2: funzione ritardata

Per il calcolo della trasformata di  $g(x) = f(x - a)$  si considera il cambio di variabile

$$\begin{aligned} t &= x - a \\ x &= t + a \end{aligned}$$

Si ricordi come, se  $f$  è nulla in  $(-\infty, 0)$ , allora  $g$  sarà nulla in  $(0, a)$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-px} g(x) dx = \int_a^{+\infty} e^{-pt} f(x-a) dx = \int_a^{+\infty} e^{-p(t+a)} f(t) dx = \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-pt-pa} f(t) dx = \int_a^{+\infty} e^{-pt} e^{-pa} f(t) dx = e^{-pa} \int_a^{+\infty} e^{-pt} f(t) dx = e^{-pa} \mathcal{L}[f](p) \end{aligned}$$

Dunque si ricavano le cosiddette *formule del ritardo* :

$$\mathcal{L}[f(x-a)](p) = e^{-pa} \mathcal{L}[f(x)](p)$$

$$\mathcal{L}[e^{ax} f(x)](p) = \mathcal{L}[f](p-a)$$

## Trasformazione di una derivata e di una primitiva

La seguente proprietà risulta cruciale nell'utilizzo della trasformata di Laplace per la risoluzione di equazioni differenziali. Le dimostrazioni dei seguenti risultati non saranno trattate in quanto non sono argomento di questo corso.

Sia  $f$  una funzione derivabile, la cui derivata è continua in  $[0, \infty)$ . Sia inoltre  $f'$  trasformabile, con semipiano di convergenza  $\Re(p) > \alpha$ , allora anche  $f$  è trasformabile, ha semipiano di convergenza  $\Re(p) > \max\{\alpha, 0\}$ , e vale la seguente identità :

$$\mathcal{L}[f'](p) = p\mathcal{L}[f](p) - f(0)$$

Si generalizza per derivate di ordine maggiore

$$\mathcal{L}[f''](p) = p^2\mathcal{L}[f](p) - pf(0) - f'(0)$$

Analogamente, sia  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , se  $f$  è trasformabile ed ha semipiano di convergenza  $\Re(p) > \alpha$ , allora anche  $F$  lo è, ha semipiano di convergenza  $\Re(p) > \max\{\alpha, 0\}$  e vale che

$$\mathcal{L}[F](p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}[f](p)$$

## Convoluzione

Siano  $f$  e  $g$  due funzioni integrabili secondo Riemann e nulle in  $(-\infty, 0)$ , l'operatore  $*$  detto **convoluzione** è definito nel modo seguente

$$(f * g)(x) = \int_0^{+\infty} f(x-t)g(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$$

Se  $f$  è trasformabile, e  $|g|$  lo è, nello stesso semipiano, allora  $f * g$  è trasformabile e vale

$$\mathcal{L}[f * g](p) = \mathcal{L}[f](p) \cdot \mathcal{L}[g](p)$$

## Derivata ed Integrale della trasformata di Laplace

Essendo  $\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px} dx$  si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \mathcal{L}[f](p) &= \frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px} dx \\ \frac{d}{dp} \mathcal{L}[f](p) &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dp}(f(x)e^{-px}) dx \\ \frac{d}{dp} \mathcal{L}[f](p) &= \int_0^{+\infty} -xf(x)e^{-px} dx \\ \frac{d}{dp} \mathcal{L}[f](p) &= \mathcal{L}[-xf(x)](p) \end{aligned}$$

Generalizzando, per ogni  $n \geq 0$

$$\frac{d^n}{dp^n} \mathcal{L}[f](p) = \mathcal{L}[-(1)^n x^n f(x)](p)$$

**Esempio di calcolo :** Si vuole trovare

$$\mathcal{L}[x \sin(\omega x)](p)$$

Essendo

$$\mathcal{L}[\sin(\omega x)](p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Ho che

$$\mathcal{L}[x \sin(\omega x)](p) = -\frac{d}{dp} \mathcal{L}[\sin(\omega x)](p) = -\frac{d}{dp} \left( \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right) = \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$$

Trascurando il procedimento, la formula per l'integrale di una trasformata è la seguente

$$\int_p^{+\infty} \mathcal{L}[f](s) ds = \mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right](p)$$

### 4.1.2 Trasformata inversa

La funzione che associa ad ogni funzione trasformabile la sua trasformata, è iniettiva, se  $F(p)$  è una trasformata di Laplace, esiste un'unica funzione  $f$  tale che  $\mathcal{L}[f](p) = F(p)$ . Data  $F$ , è possibile ottenere la funzione di base su cui si è effettuata la trasformata, tale operazione è detta *trasformazione inversa* di Laplace, si indica con  $\mathcal{L}^{-1}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f] &= F \\ \mathcal{L}^{-1}[F] &= f \end{aligned}$$

Le formule di trasformazione derivate dalle proprietà (raggruppate alla fine di questa sezione), se lette al contrario valgono come formule di anti-trasformata.

**Esempio di calcolo :** Ricordando che  $\mathcal{L}[e^{-ax}](p) = \frac{1}{p+a}$ , si vuole calcolare la trasformata inversa di

$$\frac{2}{p+3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{p+3}\right](x) = \quad (4.4)$$

$$2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+3}\right](x) = \quad (4.5)$$

$$2 \cdot e^{-3x} \cdot H(x) \quad (4.6)$$

Una funzione risultante da un anti trasformata va moltiplicata per la funzione di Heaviside  $H(x)$  in quanto deve essere nulla in  $(-\infty, 0)$ . **Esempio di calcolo :** Si vuole trovare l'anti trasformata di

$$F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)}$$

Riscrivo la funzione

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p^3 + p} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}$$

Applicando la linearità ho

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}\right](x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right](x) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2 + 1}\right](x) = \quad (4.7)$$

$$H(x) - \cos(x) \cdot H(x) = H(x)(1 - \cos(x)) \quad (4.8)$$

### 4.1.3 Trasformate note

| Funzione         | Trasformata                     | Semipiano di convergenza        |
|------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 1                | $\frac{1}{p}$                   | $\Re(p) > 0$                    |
| $e^{-ax}$        | $\frac{1}{p+a}$                 | $\Re(p) > -\Re(a)$              |
| $x$              | $\frac{1}{p^2}$                 | $\Re(p) > 0$                    |
| $x^n$            | $\frac{n!}{p^{n+1}}$            | $\Re(p) > 0 \ n \in \mathbb{N}$ |
| $\sin(\omega x)$ | $\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ | $\Re(p) > 0$                    |
| $\cos(\omega x)$ | $\frac{p}{p^2 + \omega^2}$      | $\Re(p) > 0$                    |
| $\delta$         | 1                               | $p \in \mathbb{C}$              |
| $\cosh(ax)$      | $\frac{p}{p^2 - a^2}$           | $\Re(p) >  \Re(a) $             |
| $\sinh(ax)$      | $\frac{a}{p^2 - a^2}$           | $\Re(p) >  \Re(a) $             |

### 4.1.4 Funzione di trasferimento

Come già accennato, la trasformata di Laplace è utile nella risoluzione di equazioni differenziali. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b(t) \quad \begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

Si applica la trasformata all'equazione, ottenendo

$$\mathcal{L}[a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y](p) = \mathcal{L}[b](p)$$

si applica la linearità

$$a_0 \mathcal{L}[y''](p) + a_1 \mathcal{L}[y'](p) + a_2 \mathcal{L}[y](p) = \mathcal{L}[b](p)$$

Chiamo

$$\mathcal{L}[y](p) = Y(p) \quad \mathcal{L}[b](p) = B(p)$$

ed applico le proprietà della trasformazione di una derivata

$$a_0(p^2Y(p) - p\alpha - \beta) + a_1(pY(p) - \alpha) + a_2Y(p) = B(p)$$

$$a_0 p^2 Y(p) - a_0 p \alpha - a_0 \beta + a_1 p Y(p) - a_1 \alpha + a_2 Y(p) = B(p)$$

esplícito  $Y(p)$  :

$$Y(p)(a_0p^2 + a_1p + a_2) = B(p) + a_0p\alpha + a_0\beta + a_1\alpha$$

$$Y(p) = \frac{1}{(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)} B(p) + a_0 p \alpha + a_0 \beta + a_1 \alpha$$

Pongo

$$S(p) = \frac{1}{(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)}$$

Tale  $S$  è detta **funzione di trasferimento**, se le condizioni iniziali sono entrambe nulle, ossia  $\alpha = \beta = 0$ , si ha

$$Y(p) = S(p) \cdot B(p)$$

$$\mathcal{L}[y](p) = S(p) \cdot \mathcal{L}[b](p)$$

Ricordando la convoluzione di una trasformata, si ha che

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[S \cdot B](t)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[S](t) * \mathcal{L}^{-1}[B](t)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[S](t) * b(t)$$

Le seguenti formule hanno un significato fisico notevole, supponiamo che vi sia un sistema fisico caratterizzato da un ingresso  $b(t)$ , ed un uscita  $y(t)$ , ad esempio,  $b(t)$  è una forza, e  $y(t)$  il moto di una particella. Trovare esplicitamente il moto  $y$  non è banale, è possibile quindi applicare la trasformata, passando nel dominio complesso di Laplace, per poi risolvere l'equazione ed applicare l'anti trasformata, trovando così il moto.

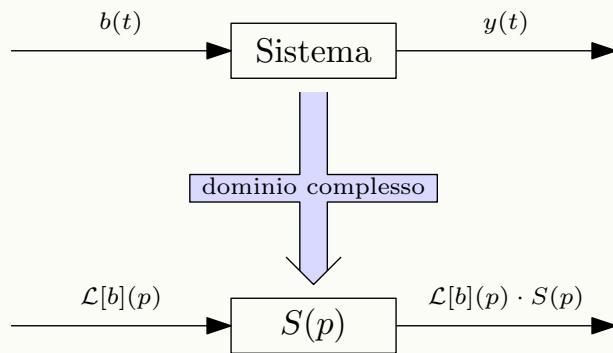


Figura 4.3: Funzione di Trasferimento

La funzione  $S(p)$  quindi caratterizza totalmente il sistema fisico nel dominio di Laplace, in quanto basta moltiplicarla alla trasformata del segnale in ingresso per ottenere la trasformata del segnale in uscita.

**Esempio di calcolo :** Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 0 \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Si applica la trasformazione di Laplace

$$\mathcal{L}[y''](p) + 4\mathcal{L}[y'](p) + 3\mathcal{L}[y](p) = 0$$

Chiamando  $\mathcal{L}[y](p) = Y(p)$ , si ha

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + 4pY(p) - 4y(0) + 3Y(p) = 0$$

$$Y(p)(p^2 + 4p + 3) - 1 = 0$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3} = \frac{1}{(p+1)(p+3)} = \frac{A}{(p+1)} + \frac{B}{(p+3)}$$

dove  $A = \frac{1}{p+1}$  se  $p = -3$  e  $B = \frac{1}{p+3}$  se  $p = -1$ , quindi

$$A = \frac{1}{(-3)+1} = -\frac{1}{2}$$

$$B = \frac{1}{(-1)+3} = \frac{1}{2}$$

Quindi

$$Y(p) = -\frac{1}{2} \frac{1}{p+3} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+1}$$

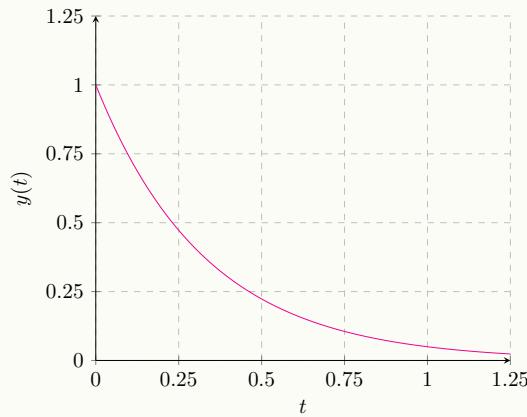
Si applica l'anti trasformata

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{p+3} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+1}\right](t)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+3}\right](t) + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right](t)$$

Ricordando che  $\mathcal{L}[e^{-ax}](p) = \frac{1}{p+a}$  si ha

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}\right)H(t)$$



#### 4.1.5 Zeri e Poli

Riprendiamo in analisi la seguente EDO che descrive un sistema

$$a_0y''(t) + a_1y'(t) + a_2y(t) = 0 \quad \begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Nella seguente notazione, verrà utilizzata  $s$  per la variabile complessa, applicando la trasformata si ottiene

$$a_0(s^2Y(s) - sy_0) + a_1(sY(s) - y_0) + a_2Y(s) = 0$$



$$a_0 s^2 Y(s) - a_0 s y_0 + a_1 s Y(s) - a_1 y_0 + a_2 Y(s) = 0$$

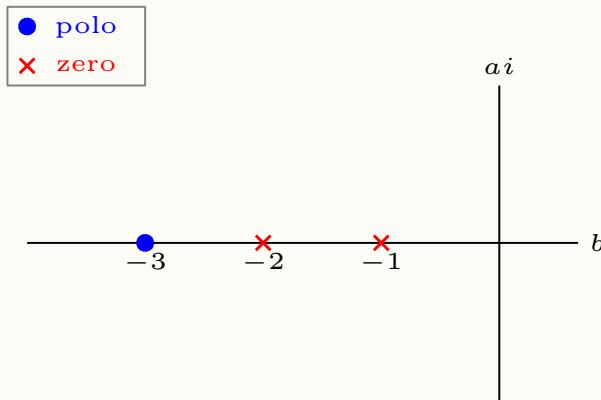
Si risolve per  $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{y_0(a_0 s + a_1)}{(a_0 s^2 + a_1 s + a_2)} = \frac{p(s)}{q(s)}$$

Il polinomio al denominatore  $q(s) = (a_0 s^2 + a_1 s + a_2)$  si dice **equazione caratteristica** e le sue radici, dette **poli**, determinano il carattere della risposta nel tempo del sistema. Le radici del numeratore  $p(s)$  sono dette **zeri** del sistema. Ai poli, la funzione  $Y(s)$  va all'infinito, sugli zeri invece va a zero. Il numero di zeri è sempre minore o uguale al numero dei poli.

**Esempio :** Supponiamo che  $a_0 = 1$ ,  $a_2 = 2$  e  $a_1 = 3$ , l'equazione diventa

$$Y(s) = \frac{y_0(s+3)}{(s^2 + 3s + 2)} = \frac{y_0(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$



Dato un sistema descritto da un EDO, una volta ottenuta la sua evoluzione nel tempo grazie alla trasformazione di Laplace, è utile studiare il *valore finale* della risposta, detto anche *stato stazionario*, sia  $y(t)$  tale risposta, si vuole determinare l'evoluzione del sistema per  $t$  che tende ad infinito.

**Teorema (valore finale) :** : Sia  $y(t)$  una funzione e  $Y(s)$  la sua trasformata di Laplace, se  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) < \infty$  allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s)$$

**Definizione (Stabilità) :** Un sistema dinamico è *stabile* se e solo se tutti i poli della sua funzione di trasferimento hanno parte reale negativa.

#### 4.1.6 Coefficiente di Smorzamento e Pulsazione Naturale

Il coefficiente di smorzamento  $\zeta$  e la pulsazione naturale  $\omega_n$  sono due parametri fondamentali che caratterizzano il comportamento di un sistema dinamico, e sono strettamente legati alla posizione dei poli nel piano complesso  $s$  della funzione di trasferimento.

Una EDO del secondo ordine, se analizzata nel dominio di Laplace, avrà al più due poli.

**Claim :** La trasformata di Laplace di una EDO di ordine  $n$  avrà al più  $n$  poli.

La generica trasformazione di Laplace di una EDO omogenea di ordine 2 ha la seguente forma

$$Y(s) = \frac{a_0 s \alpha + a_0 \beta + a_1 \alpha}{(a_0 s^2 + a_1 s + a_2)}$$

La funzione caratteristica ha  $a_0 s^2 + a_1 s + a_2$  due poli, siano questi  $s_1, s_2$ , si pongono

$$\begin{aligned} s_1 &= -\zeta \omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \\ s_2 &= -\zeta \omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned}$$

I termini  $\zeta$  e  $\omega_n$  sono, rispettivamente, il coefficiente di smorzamento e la pulsazione naturale del sistema descritto dalla EDO. In generale, una tipica funzione di trasferimento del secondo ordine è della forma

$$G(S) = K \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Il calcolo di tali termini avviene confrontando i valori del denominatore a quelli della funzione generica.

### Esempio

Si ha la seguente funzione di trasferimento

$$10 \frac{1}{s^2 + 4s + 16}$$

Si ha

$$K = 10$$

$$2\zeta\omega_n = 4$$

$$\omega_n^2 = 16$$

Allora

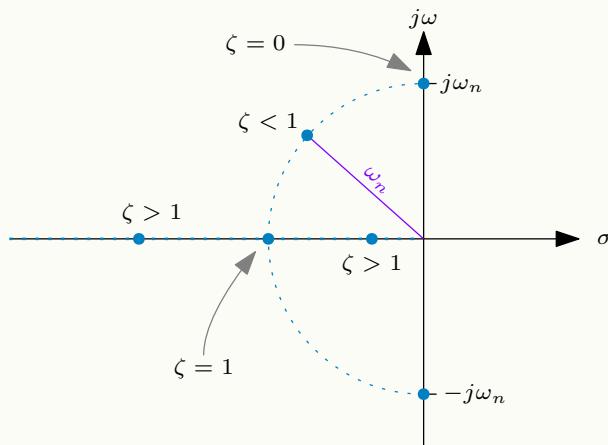
$$\omega_n = \sqrt{16} = 4 \implies \quad (4.9)$$

$$2\zeta \cdot 4 = 4 \implies 2\zeta = 1 \implies \zeta = \frac{1}{2} \quad (4.10)$$

Un sistema può essere

- **sotto smorzato** se  $\zeta < 1$
- **criticamente smorzato** se  $\zeta = 1$
- **sovra smorzato** se  $\zeta > 1$

Soffermiamoci sulla rappresentazione polare dei poli della funzione di trasferimento,  $\omega_n$  e  $\zeta$  sono numeri reali, i poli quindi, per definizione, saranno valori reali se  $\zeta \geq 1$ , in quanto il termine sotto radice nella definizione di questi si annullerebbe, differentemente, se  $\zeta = 0$ , il termine a sinistra si annullerebbe, e rimarrebbe esclusivamente il valore immaginario.



I poli sono, o entrambi reali, oppure complessi e coniugati.

- finché  $\zeta$  è minore di 1, i poli, definiti  $-\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$  avranno parte immaginaria, e si troveranno sul semicerchio di circonferenza  $\omega_n$
- se  $\zeta = 0$ , allora i poli avranno parte reale nulla e si troveranno sull'asse immaginario
- se  $\zeta \geq 1$ , allora il termine sotto radice non sarà immaginario quindi i poli vivranno sull'asse reale. Se ciò avviene, il sistema è stabile.

### 4.1.7 Espansione in Fratti Semplici

Consideriamo una generica funzione di trasferimento di un sistema, nella forma

$$F(S) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Tali funzioni saranno sempre di tale forma,  $N(s)$  e  $D(s)$  sono i polinomi, sia  $r$  il grado di  $N$  e sia  $q$  il grado di  $D$ , si avranno

- $r$  zeri  $z_1, z_2 \dots, z_r \in \mathbb{C}$ 
  - di molteplicità  $m_j$  con  $j = 1 \dots, r$
- $q$  poli  $p_1, p_2 \dots, p_q \in \mathbb{C}$ 
  - di molteplicità  $n_i$  con  $i = 1 \dots, q$

La funzione  $F(S)$  può essere scritta nella forma

$$F(S) = K \frac{(s - z_1)^{m_1}(s - z_2)^{m_2} \dots (s - z_r)^{m_r}}{(s - p_1)^{n_1}(s - p_2)^{n_2} \dots (s - p_r)^{n_q}}$$

Applicare l'anti-trasformata ad una funzione di questo tipo è difficile, infatti è possibile riscrivere  $F(s)$  come segue

$$\begin{aligned} F(S) &= \frac{C_{1,1}}{(s - p_1)} + \dots + \frac{C_{1,n_1}}{(s - p_1)^{n_1}} + \dots \\ &= \frac{C_{2,1}}{(s - p_2)} + \dots + \frac{C_{2,n_2}}{(s - p_2)^{n_2}} + \dots \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{C_{q,1}}{(s - p_q)} + \dots + \frac{C_{q,n_q}}{(s - p_q)^{n_q}} + \dots \end{aligned}$$

In tale forma è semplice calcolare l'anti trasformata grazie alla proprietà di linearità, infatti, il risultato è noto

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{C_{i,j}}{(s - p_i)^j} \right] (t) = \frac{C_{i,j}}{(j-1)!} t^{j-1} e^{p_i t} \cdot H(t)$$

A questo punto è necessario poter calcolare i coefficienti  $C_{i,j}$ . [da continuare](#)

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

## 4.2 Elementi di Teoria dei Sistemi e Controlli Automatici

Possiamo rappresentare un sistema dinamico (a tempo continuo) come un processo che date  $m$  entrate restituisce  $p$  uscite, convenzionalmente, definiamo  $u$  l'entrata del sistema e  $y$  l'uscita.

$$\bar{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad \bar{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$



Verranno trattati i sistemi a dimensione finita, essi sono caratterizzati da delle cosiddette *variabili di stato* (o da un vettore di stato)

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Un sistema ad  $n$  variabili di stato è detto di ordine  $n$ .

Un sistema verrà analizzato per un intervallo di tempo  $t \geq t_0$ , quindi a partire da un istante di partenza  $t_0$ , per poter calcolare  $y(t)$  per  $t > t_0$  è *necessario* conoscere  $\bar{x}(t_0)$ . Un sistema dinamico è rappresentato come segue

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

nel caso scalare,  $f$  e  $g$  descrivono il comportamento del sistema, generalmente sono grandezze associate ad accumuli di energie, masse ecc... Per brevità di notazione verrà scritto

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{cases}$$

Il sistema si dice **tempo invariante** se  $f$  e  $g$  non dipendono da  $t$ .

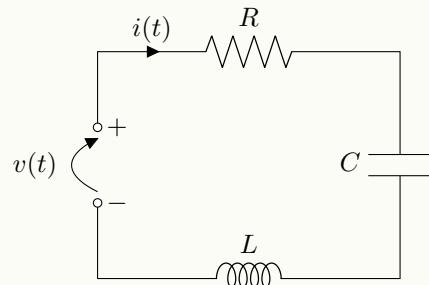
Il sistema si dice **lineare** se  $f$  e  $g$  sono lineari in  $x, u$ .

Il sistema si dice **monovariabile** se l'ingresso e l'uscita sono funzioni ad una variabile. Altrimenti si dice multivariabile.

Ci occuperemo di sistemi **LTI**, ossia lineari e tempo invarianti. L'andamento delle variabili di stato  $\bar{x}$  è detto *movimento dello stato*, mentre l'andamento delle variabili  $\bar{y}$  è il *movimento dell'uscita*. Per i sistemi stazionari è lecito assumere che l'istante iniziale  $t_0$  sia 0.

### Esempio

Si consideri il circuito  $RLC$  mostrato in figura



le tensioni ai margini della resistenza, del condensatore e dell'induttore sono precisamente

$$\begin{aligned} v_L(t) &= Li'(t) \\ v_R(t) &= Ri(t) \\ v_C(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \end{aligned}$$

La legge di Kirchoff delle tensioni stabilisce che

$$v(t) = v_L(t) + v_R(t) + v_C(t)$$

quindi

$$v(t) = Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$

derivando rispetto a  $t$  si ottiene

$$\begin{cases} v'(t) = Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C} i(t) \\ y(t) = i(t) \quad \text{uscita} \end{cases} \quad v$$

Tale modello è quello di un sistema lineare tempo invariante, la tensione rappresenta l'ingresso del sistema ed in base a questa è possibile ricavarne la corrente. Consideriamo una tensione costante di  $v(t) = v_0$

$$0 = Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C} i(t)$$

Si pongono i termini

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\omega_n = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$$

La soluzione di tale equazione è nota

$$i(t) = i_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_n t)$$

### 4.2.1 Equilibrio

Consideriamo il generico sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases}$$

Se esiste un'ingresso  $u(t) = u_0$  costante per cui il movimento dello stato è costante  $x(t) = x_0$ , allora  $x_0$  è detto *stato di equilibrio*. Tutti gli stati di equilibrio si trovano al variare di  $u_0$ . Analogamente per le *uscite di equilibrio* in cui  $y(t) = y_0$  per un ingresso costante  $u(t) = u_0$ . Per trovare l'equilibrio di un sistema si risolve l'equazione

$$f(x, u_0) = 0$$

trovando  $x_0$ , per poi sostituire  $x_0$  e  $u_0$  nella variabile d'uscita

$$y_0 = g(x_0, u_0)$$

### 4.2.2 Rappresentazione con Matrici

Un sistema dinamico monovariabile (SISO) con  $n$  variabili di stato  $x_1, x_2, \dots, x_n$  è rappresentato (nel caso generale) come segue

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1u \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_1u \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_1u \\ y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + du \end{cases}$$

L'uscita è una combinazione lineare di variabili di stato e dell'ingresso (chiameremo anche "controllo" la variabile di ingresso  $u$ ). Per comodità si può rappresentare il sistema in forma matriciale

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \text{Mat}(n \times n) \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$C = [c_1 \quad \dots \quad c_n] \quad D = d \in \mathbb{R}$$

Il sistema si scrive in forma compatta

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

L'equilibrio si pone con  $u(t) = u_0$

$$Ax + Bu_0 = 0 \implies Ax = -Bu_0$$

Se il determinante della matrice  $A$  è diverso da zero, allora esiste un unico stato di equilibrio

$$\det(A) \neq 0 \implies x_0 = -A^{-1}Bu_0$$

Quindi, sostituendo l'ingresso costante e lo stato di equilibrio all'uscita si ottiene l'unica uscita costante  $y_0$

$$y_0 = Cx_0 + Du_0 = C(-A^{-1})Bu_0 + Du_0 = (-CA^{-1}B + D)u_0 = \mu u_0$$

Il termine  $\mu = (-CA^{-1}B + D)$  è detto **guadagno statico**. È un numero reale in quanto

- $-CA^{-1}$  è il prodotto fra una matrice  $n \times 1$  con una matrice  $n \times n$ , quindi è una matrice  $n \times 1$
- $-CA^{-1}B$  è il prodotto di una matrice  $n \times 1$  con una matrice  $1 \times n$ , è quindi uno scalare.
- $-CA^{-1}B \cdot D$  è il prodotto di due scalari



Se il determinante della matrice  $A$  è uguale a 0, allora il sistema ricade in uno dei seguenti casi

- esistono infiniti stati ed uscite di equilibrio
- non esistono stati o uscite di equilibrio

Un sistema SISO di ordine 1 (caso scalare) ammette una soluzione nota, il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) + du(t) \end{cases}$$

Dato  $x(0) = x_0$  e  $t \geq 0$  ha variabile di stato

$$x(t) = x_0 \cdot e^{at} + \int_0^t e^{(at-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

Nel caso generale di un sistema SISO di ordine  $n$ , ossia

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \text{con } \begin{array}{ll} A \in \text{mat}(n \times n) & B \in \text{mat}(n \times 1) \\ C \in \text{mat}(1 \times n) & D \in \mathbb{R} \end{array}$$

Dato  $x(0) = \bar{x}_0 \in \text{mat}(n \times 1)$  e per  $t \geq 0$  il vettore di stato vale

$$x(t) = \bar{x}_0 \cdot e^{At} + \int_0^t e^{(At-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Può sembrare complicato, analizziamo i singoli termini della formula

- $A \cdot t$  è il prodotto di uno scalare per una matrice  $n \times n$ , ogni entrata della matrice sarà moltiplicata alla variabile  $t$ , è quindi a sua volta una matrice  $n \times n$ .
- l'esponenziale di una matrice verrà definito a breve, se  $A$  è una matrice  $n \times n$ , allora anche  $e^A$  lo è.
- $Bu(t)$  è il prodotto di una matrice  $n \times 1$  con uno scalare  $u(t)$ , quindi  $B$  vedrà ogni entrata moltiplicata per  $u(t)$ .  $Bu(t)$  è una matrice  $n \times 1$ .
- $e^{(At-\tau)}$  è una matrice  $n \times n$  e viene moltiplicata per  $Bu(t)$  che è una matrice  $n \times 1$ , quindi  $e^{(At-\tau)} \cdot Bu(t)$  sarà una matrice  $n \times 1$ . Analogamente, anche  $\bar{x}_0 \cdot e^{At}$  lo sarà.
- $x(t)$  sarà quindi una somma di due matrici  $n \times 1$ .

**Definizione (Matrice esponenziale) :** Sia  $A$  una matrice, si definisce la *matrice esponenziale*  $e^A$  come segue

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \dots$$

dove  $I = A^0$  è la matrice identità (tutte le entrate sono 1).

Nella formula compare il termine  $e^{At}$ , la sua espressione segue dalla definizione appena data

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = I + \frac{A^2 t^2}{2} + \frac{A^3 t^3}{6} + \dots$$

L'evoluzione dello stato può essere rappresentata anche come segue

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t)$$

dove

$$x_l(t) = \bar{x}_0 \cdot e^{At}$$

$$x_f(t) = \int_0^t e^{(At-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Il termine  $x_l(t)$  è detto **movimento libero** e rappresenta l'evoluzione "autonoma" del sistema quando l'ingresso  $u(t)$  è nullo. Dipende linearmente da  $\bar{x}_0$ .

Il termine  $x_f(t)$  è detto **movimento forzato** e rappresenta il comportamento del sistema influenzato dall'ingresso  $u(t)$ , da cui appunto, dipende linearmente.

Lo stesso concetto si applica per l'uscita del sistema  $y$ , questa infatti può essere un *uscita libera* (l'ingresso è nulla) o un *uscita forzata*.

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

$$y(t) = \bar{C}x_0 \cdot e^{At} + \int_0^t C e^{(At-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)$$

$$y_l(t) = \bar{C}x_0 \cdot e^{At}$$

$$y_f(t) = \int_0^t C e^{(At-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)$$

Ovviamente i sistemi possono avere anche più ingressi e più uscite, nel caso generale di un sistema *MIMO* di ordine  $n$  con  $m$  ingressi e  $p$  uscite si ha

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$\begin{aligned} x &\in \mathbb{R}^n \\ u &\in \mathbb{R}^m \\ y &\in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

e

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in Mat(n \times n) \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \in Mat(n \times m)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & \dots & c_{pn} \end{bmatrix} \in Mat(p \times n) \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & \dots & d_{pm} \end{bmatrix} \in Mat(p \times m)$$

### 4.2.3 Stabilità di un Sistema

La *stabilità* è una proprietà associata ai sistemi dinamici, in particolare ci occuperemo di

- stabilità dell'equilibrio
- stabilità del sistema

La stabilità dell'equilibrio è una proprietà che possono avere gli stati di equilibrio di un sistema. Informalmente, Uno stato di equilibrio si dice stabile se, dopo una piccola perturbazione, il sistema tende spontaneamente a ritornare alla sua condizione iniziale. In altre parole, le piccole deviazioni dall'equilibrio vengono corrette automaticamente.

**Definizione (Stabilità) :** Sia  $x_0$  uno stato di equilibrio, esso è stabile se e solo se

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tale che} \\ \|x(0) - x_0\| \leq \delta(\varepsilon) \implies \|x(t) - x_0\| \leq \varepsilon, \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

$\delta(\varepsilon)$  è un intorno più piccolo di  $\varepsilon$ .

Per ogni valore infinitesimale  $\varepsilon$ , se  $x(0) = x(t_0)$  (il vettore di stato nell'istante iniziale) ha una distanza  $\delta(\varepsilon) < \varepsilon$  da un punto di equilibrio  $x_0$ , allora la distanza fra ogni possibile valore dello stato  $x(t) \forall t \geq 0$  avrà una distanza minore o uguale ad  $\varepsilon$  dal punto di equilibrio.

In termini più qualitativi, un punto di equilibrio è localmente stabile se qualunque evoluzione che nasce da uno stato iniziale vicino rimane vicina per tutti gli istanti successivi, comunque si scelga il massimo scostamento ammesso dall'equilibrio per tutta l'evoluzione del sistema nel tempo. A perturbazioni limitate corrispondono variazioni limitate dell'evoluzione.

vettore di stato :  $x = (x_1, x_2)$

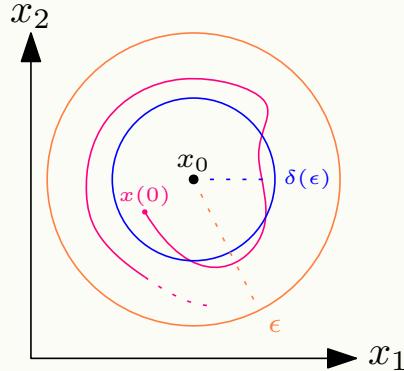


Figura 4.4: vettore di stato in un sistema stabile di ordine 2

Se la condizione non è verificata, il punto di equilibrio  $x_0$  si definisce **instabile**. La distanza iniziale fra  $x(0)$  ed il punto di equilibrio  $x_0$  rappresenta la *perturbazione*.

Un punto di equilibrio può essere anche **asintoticamente stabile** se, si verifica la condizione di stabilità, ed in più è anche vero che al passare del tempo l'evoluzione dello stato converge al punto di equilibrio.

$$\exists \delta_a > 0 \mid \|x(0) - x_0\| < \delta_a \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_0\| = 0$$

vettore di stato :  $x = (x_1, x_2)$

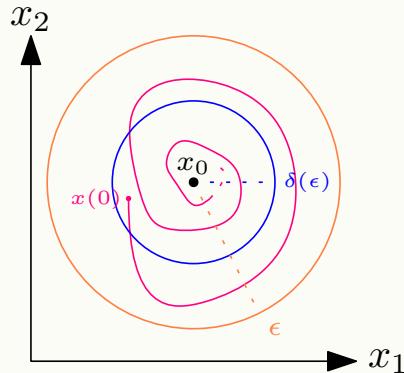


Figura 4.5: vettore di stato in un sistema stabile asintoticamente di ordine 2

Le condizioni introdotte devono essere verificate per un qualsiasi valore iniziale  $x(0)$ , ed una volta definito l'intorno di  $\delta(\varepsilon)$  (o  $\delta_a$  nel caso asintotico), qualunque scelta di  $x(0)$  (ossia, qualunque perturbazione) deve comportare le condizioni di soddisfacimento.

La stabilità non è un valore correlato ad uno stato di equilibrio ma è una caratteristica del sistema nella sua globalità

Il sistema è in una **condizione di equilibrio** se, dato un ingresso costante  $u(t) = u_0$  ed uno stato di equilibrio  $x_0$ , all'istante iniziale non riceve perturbazione, ossia il valore del vettore di stato all'inizio è già quello dello stato di equilibrio.

$$\begin{aligned} x_0 &\text{ è uno stato di equilibrio} \\ x(0) &= x_0 \\ u(t) = u_0 &\text{ è l'ingresso che causa lo stato di equilibrio} \end{aligned}$$

In tal caso il sistema *stabile*, non essendo perturbato rimane nello stato di equilibrio

$$x(t) = x_0 \cdot e^{At} + \int_0^t e^{(At-\tau)} Bu_0 d\tau = x_0 \quad \forall t \geq 0$$

Il sistema parte in **condizioni di perturbazione** quando lo stato iniziale  $x(0)$  dista di un certo valore  $\delta x$  dallo stato di equilibrio  $x_0$

$$x(0) = x_0 + \delta x$$

Il movimento è perturbato e si avrà che  $x(t) \neq x_0 \quad \forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}(x_0 + \delta x) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu_0 d\tau = \\ &e^{At}\delta x + e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu_0 d\tau = \end{aligned}$$

i due termini a destra della somma sono quelli della condizione di equilibrio :

$$e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu_0 d\tau = x_0$$

quindi si avrà che

$$x(t) = e^{At}\delta x + x_0$$

$$\leftarrow \quad x(t) - x_0 = e^{At} \quad \rightarrow \quad \boxed{\delta x}$$

Quest'ultima equazione rende chiaro il concetto che *la stabilità dipende da  $e^{At}$* .

- **stabilità** : se  $e^{At}$  è limitata, allora  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - x_0$  sarà un valore finito, quindi l'evoluzione dello stato non si scosta di più di un certo valore dallo stato di equilibrio.
- **stabilità asintotica** : se  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$ , allora  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - x_0 = 0$ , quindi l'evoluzione dello stato tenderà ad avvicinarsi sempre di più al valore di equilibrio.
- **instabilità** : se  $e^{At}$  diverge, allora per  $t \rightarrow \infty$  lo stato del sistema si allontanerà sempre di più dallo stato di equilibrio.

### Proprietà dei sistemi asintoticamente stabili

1. Un sistema asintoticamente stabile, se spostato dallo stato di equilibrio (perturbazione), tende a tornarci.
2. Ha un *unico stato di equilibrio* ed il determinante di  $A$  è 0.
3. Il movimento libero del sistema tende a zero e si annulla (dato che la matrice  $e^{At}$  tende a zero) quindi il movimento dello stato dipende *asintoticamente* solo dall'ingresso  $u(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_f(t)$$

4. Se l'ingresso è nullo  $u(t) = 0$ , allora, per un qualsiasi stato iniziale  $x(0)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(0) \cdot e^{At} + \int_0^t e^{(At-\tau)} B0 d\tau = \quad (4.11)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(0) \cdot e^{At} = 0 \quad (4.12)$$

Quindi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

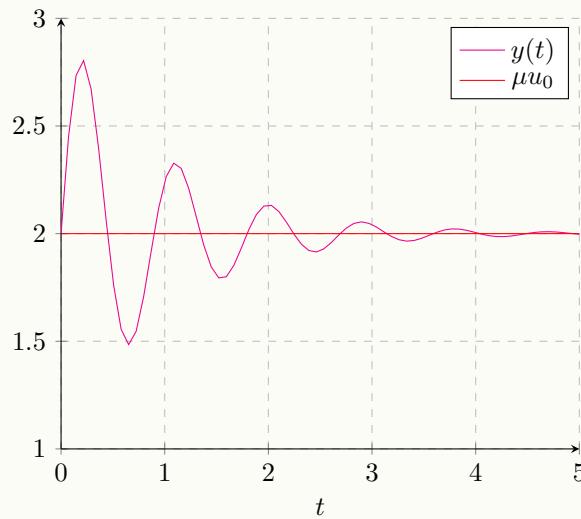
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

La condizione si verifica anche se  $u$  è del tipo  $u(t) = \begin{cases} \text{qualsiasi se } 0 \leq t < t^* \\ 0 \text{ se } t \geq t^* \end{cases}$

5. Se l'ingresso è costante allora  $u(t) = u_0$  allora l'uscita  $y(t)$  tende a

$$y_0 = \mu u_0 = (-CA^{-1}B + D)u_0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \mu u_0$$



6. Se l'ingresso  $u(t)$  è limitato, allora anche l'uscita  $y(t)$  è limitata.

$$\|u(t)\| < K \implies \exists H \mid \|y(t)\| < H$$

tale proprietà è detta *stabilità esterna* e tutti i sistemi asintoticamente stabili ne godono. Un sistema però, può godere della proprietà di stabilità esterna anche senza essere asintoticamente stabile

stabilità asintotica  $\implies$  stabilità esterna  
stabilità esterna  $\not\implies$  stabilità asintotica

#### 4.2.4 Studio di $e^{At}$ per la Stabilità

Consideriamo il generico sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Le proprietà della matrice  $A$  decretano la stabilità del sistema. Si individuano 4 casi distinti.

##### Caso 1 : $A$ diagonale

Supponiamo che  $A$  sia una matrice diagonale

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & s_n \end{bmatrix}$$

I termini  $s_1, s_2 \dots, s_n$  sono gli autovalori di  $A$ , allora

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{s_n t} \end{bmatrix}$$

Allora

- $\forall i, s_i \leq 0$  se tutte le entrate della matrice sono  $e^{s_i t}$  ed  $s_i$  è minore o uguale a zero, allora per  $t \rightarrow \infty$  ogni termine  $e^{s_i t}$  tenderà ad un valore finito, quindi il sistema è **stabile**.
- $\forall i, s_i < 0$  se tutte le entrate della matrice sono  $e^{s_i t}$  ed  $s_i$  è strettamente minore di 0, allora ogni termine della matrice tenderà a zero, quindi  $A$  tenderà a zero, allora il sistema è **asintoticamente stabile**.
- $\exists i \mid s_i > 0$  se un singolo termine  $s_i$  è maggiore di zero, allora  $e^{s_i t}$  tenderà ad infinito, la matrice non è limitata quindi il sistema è **instabile**.

### Caso 2 : $A$ ha autovalori reali distinti

Siano  $s_1, s_2 \dots, s_n$  gli autovalori di  $A$ , sono tutti distinti quindi

$$s_1 \neq s_2 \neq \dots \neq s_n$$

Sappiamo allora che esiste una matrice  $M$  per cui

$$A = M \tilde{A} M^{-1} \quad \text{dove} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} s_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & s_n \end{bmatrix}$$

Allora si studia l'andamento della matrice  $M \tilde{A} M^{-1}$ .

**Esempio :** Si ha il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 6x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 5x_2 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

trovo gli autovalori

$$P(\lambda) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+2 & -6 \\ 2 & s-5 \end{bmatrix} = (s+2)(s-5) + 12 = (s-2)(s-1) \implies \begin{cases} s_1 = 1 \\ s_2 = 2 \end{cases}$$

Bisogna trovare la matrice  $M$ , si ricordi essere la matrice le cui righe sono gli autovettori  $v, u$  di  $A$

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = s_1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} -2v_1 + 6v_2 = v_1 \\ -2v_1 + 5v_2 = v_2 \end{cases} \implies 2v_2 = v_1 \implies v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = s_2 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} -2u_1 + 6u_2 = 2u_1 \\ -2u_1 + 5u_2 = 2u_2 \end{cases} \implies u_1 = 3/2u_2 \implies u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = M^{-1} A M = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

quindi

$$e^{At} = M e^{\hat{A}t} M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^t - 3e^{2t} & -6e^t + 6e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -3e^t + 4e^{2t} \end{bmatrix}$$

Il sistema è instabile.

**Caso 3 :  $A$  ha autovalori complessi distinti**

Consideriamo il caso in cui  $A$  è una matrice  $2 \times 2$ , i suoi autovalori  $s_1, s_2$  sono del tipo

$$s_1 = \sigma + j\omega \quad s_2 = \sigma - j\omega$$

Si ricordi che

se una matrice quadrata a valori reali ha autovalori complessi, allora essi compaiono come coppie di complessi coniugati.

In tal caso, ci sono 3 possibili casi

1.  $\operatorname{Re}(s_i) \leq 0, \forall i$  Se ogni autovalore ha parte reale minore o uguale a zero, il sistema è stabile.
2.  $\operatorname{Re}(s_i) < 0, \forall i$  Se ogni autovalore ha parte reale strettamente minore di zero, il sistema è asintoticamente stabile.
3.  $\exists i | \operatorname{Re}(s_i) > 0$  se esiste un solo autovalore con parte reale positiva il sistema è instabile.

**Caso 4 :  $A$  ha autovalori multipli**

Supponiamo che  $A$  abbia degli autovalori multipli, ossia, esistono almeno due autovalori identici, prendiamo in esame una matrice diagonale

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad s_1 = s_2 = \alpha$$

L'andamento di  $e^{At}$  dipende da  $\alpha$ , consideriamo una matrice non diagonalizzabile

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad s_1 = s_2 = \alpha$$

Allora

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \dots$$

La matrice conterrà termini del tipo  $e^{\alpha t}$  o  $te^{\alpha t}$ , quindi la stabilità dipenderà da  $\alpha$

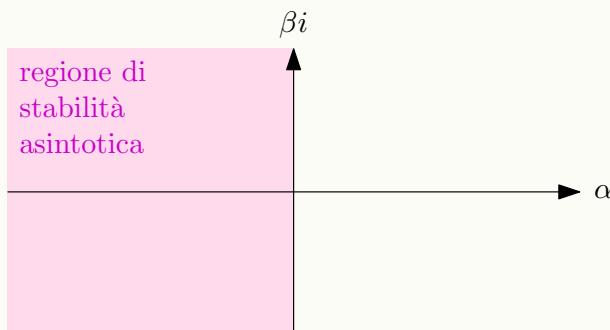
1.  $\alpha = 0$  instabilità
2.  $\alpha < 0$  stabile asintoticamente
3.  $\alpha > 0$  instabilità

Generalizzando ad una matrice  $n \times n$ , ci saranno autovalori multipli con diverse molteplicità, e la matrice conterrà termini del tipo

$$t^k e^{sk}$$

dove  $k$  dipende dalla molteplicità di  $s$ , anche in questo caso

- $\operatorname{Re}(s_i) < 0, \forall i$  Se ogni autovalore ha parte reale strettamente minore di zero, il sistema è asintoticamente stabile.
- $\exists i | \operatorname{Re}(s_i) > 0$  se esiste un solo autovalore con parte reale positiva il sistema è instabile.
- nel caso gli autovalori hanno tutti parte reale minore di zero, ma ce ne sta uno con parte reale uguale a zero, il sistema potrebbe essere stabile (non asintoticamente) oppure instabile.





Esistono anche altri criteri per lo studio della stabilità basati sullo studio della matrice  $A$

- **criterio 1** : Se  $A$  è triangolare il sistema è stabile asintoticamente
- **criterio 2** : Se la traccia di  $A$  è negativa il sistema è stabile asintoticamente, se invece è positiva il sistema è instabile.
- **criterio 3** : Se il determinante di  $A$  è diverso da zero allora il sistema è asintoticamente stabile.

In generale, se  $A$  ha tutti gli autovalori con parte reale strettamente negativa, il sistema è asintoticamente stabile.

### Criterio di Routh

Il criterio esposto in questa sezione permette lo studio della stabilità di un sistema tramite la costruzione di una apposita tabella.

### 4.2.5 Raggiungibilità e Osservabilità

**Definizione (raggiungibilità) :** Con *raggiungibilità* si definisce la proprietà di un sistema dinamico di poter assumere un prefissato valore agendo sull'ingresso.

Si consideri un generico sistema lineare, uno stato  $\tilde{x}$  si dirà *raggiungibile* se esiste un ingresso  $\tilde{u}(t)$  tale che il movimento forzato del sistema con tale ingresso risulti proprio  $\tilde{x}$ . La raggiungibilità dipende esclusivamente dall'equazione di stato e non ha nulla a che vedere con l'uscita  $y$ .

Dato un sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Sia  $n$  l'ordine (quindi l'ordine di  $A$ ), la **matrice di raggiungibilità** associata al sistema è

$$R = [B \ AB \ A^2B \ A^3B \ \dots \ A^{n-2}B \ A^{n-1}B]$$

Se la matrice  $B$  ha dimensione  $n \times m$  (dove  $m$  è il numero di ingressi), La matrice di raggiungibilità  $R$  avrà dimensione  $n \times nm$ .  $R$  è la matrice la cui immagine è l'insieme di tutti gli stati raggiungibili, definiamo quindi  $X^R$  lo *spazio di raggiungibilità*.

$$X^R = \text{Im}(R)$$

Il sistema si dice **completamente raggiungibile** se il rango di  $R$  è uguale ad  $n$ , in tal caso, ogni possibile stato del sistema è raggiungibile.

$$\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \ \exists \tilde{u} \text{ t.c. } x(t) = x_0 \cdot e^{at} + \int_0^t e^{(at-\tau)} b \tilde{u}(\tau) d\tau = \tilde{x}$$

Se  $m = 1 \implies R$  è quadrata, sarà sufficiente che  $\det(R) \neq 0$ . Se il sistema non è completamente raggiungibile, il rango di  $R$  (denotato  $n_r$ ) sarà inferiore ad  $n$ .

$$R = \begin{bmatrix} n & B \\ & \vdots \\ & AB \\ & \vdots \\ & A^2B \\ & \ddots \\ & nA^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Quando un sistema non è completamente raggiungibile, è possibile *isolare* la sua componente raggiungibile. Bisogna operare un *cambio di variabili* di stato per mezzo di un'apposita matrice di trasformazione  $T_r$ , si definisce

$$\hat{x}(t) = T_r x(t)$$

L'equazione del movimento dello stato si modificherà

$$\hat{\dot{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$

Quindi verranno modificate anche le matrici  $A$  e  $B$ . Come saranno fatte queste nuove matrici?

$$\begin{aligned} \hat{A} &= T_r A T_r^{-1} \\ \hat{B} &= T_r B \end{aligned}$$

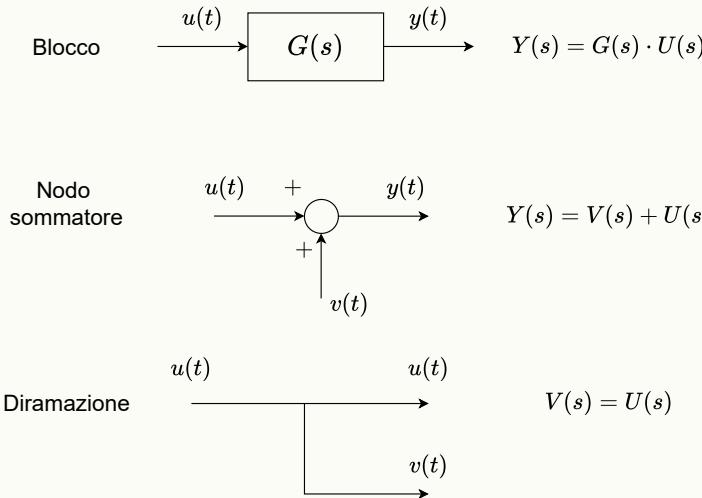
La matrice  $T_r$  deve essere invertibile, dovrà avere dimensione  $n \times n$ . Le prime  $n_r$  colonne di  $T_r$  saranno composte da  $n_r$  vettori linearmente indipendenti della matrice di raggiungibilità  $R$ , le restanti colonne saranno un completamento, ossia la matrice  $T_r$  deve avere le colonne tutte linearmente indipendenti (il determinante deve essere diverso da zero).

$$T_r = \begin{bmatrix} n & \begin{array}{c} n_r \\ \text{colonne} \\ \text{linearmente} \\ \text{indipendenti} \\ \text{prese da } R \end{array} \\ & \vdots \\ & n - n_r \\ & \begin{array}{c} \text{completamento} \end{array} \end{bmatrix}$$

Continuare

### 4.2.6 Schemi a Blocchi

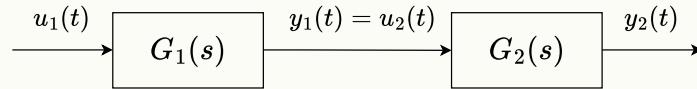
Gli schemi a blocchi costituiscono una rappresentazione grafica e schematica dei sistemi dinamici costituiti da più sistemi interconnessi fra loro, mettendone in relazione le interazioni fra essi. Durante la sezione, se  $x(t)$  è una generica funzione nel tempo, rappresenteremo con  $X(s)$  la sua trasformata di Laplace (lettera maiuscola e variabile complessa  $s$ ). Gli elementi di base degli schemi a blocchi sono i seguenti



In base alla disposizione degli elementi negli schemi a blocchi esistono diverse regole di elaborazione al fine di manipolare e trovare la funzione di trasferimento globale del sistema.

#### Blocchi in Serie

Quando sono presenti due blocchi in serie :



L'uscita globale del sistema segue la seguente formulazione

$$Y_2(s) = G_2(s)U_2(s) = G_2(s)Y_1(s) = G_2(s)G_1(s)U_1(s)$$

La funzione di trasferimento *globale* del sistema è data dal prodotto delle due funzioni di trasferimento

$$\begin{aligned} G(s) &= G_1(s)G_2(s) \\ Y_2(s) &= U(s)G(s) \end{aligned}$$

#### Blocchi in Parallello

Quando sono presenti due blocchi in parallelo, come mostrato in figura 4.6, l'uscita globale del sistema segue la seguente formulazione

$$Y(S) = Y_1(s) + Y_2(s) = U(s)G_1(s) + U(s)G_2(s) = U(s)[G_1(s) + G_2(s)]$$

#### Blocchi in Retroazione

Uno schema a *retroazione*, anche detto ad *anello chiuso* è fondamentale nella teoria dei controlli automatici, modella l'azione del misurare un errore presente fra un valore che si vuole far assumere ad una variabile (riferimento) ed il suo valore effettivo (uscita del sistema).

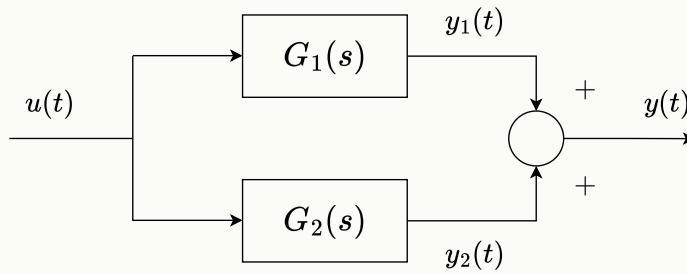


Figura 4.6: blocchi in parallelo

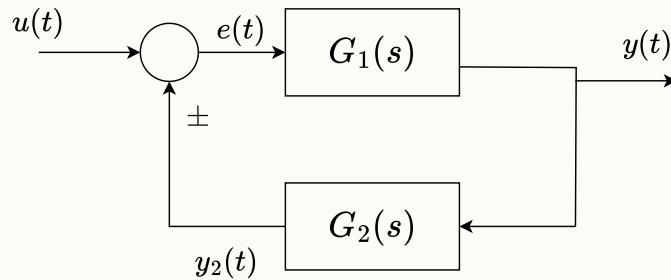


Figura 4.7: blocchi in retroazione

Si osservi la figura 4.7, la funzione di trasferimento globale è formulata come segue

$$Y(s) = E(s)G_1(s) = G_1(s)[U(s) \pm Y_2(s)] = G_1(s)[U(s) \pm G_2(s)Y(s)] \implies$$

$$Y(s)[1 \pm G_1(s)G_2(s)] = G_1(s)U(s) \implies$$

$$Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s)G_2(s)}U(s)$$

### Regole di Elaborazione

In questa sezione segue una lista di regole di elaborazione degli schemi a blocchi, che ne modificano il diagramma lasciandolo equivalente a quello originale.

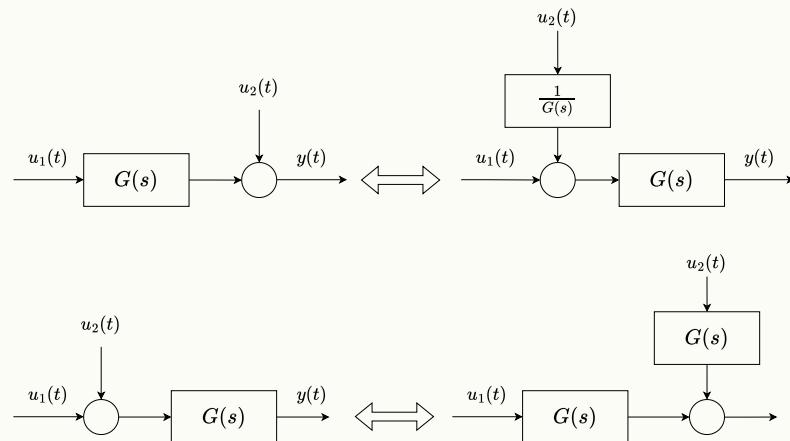


Figura 4.8: regole sullo spostamento del nodo sommatore

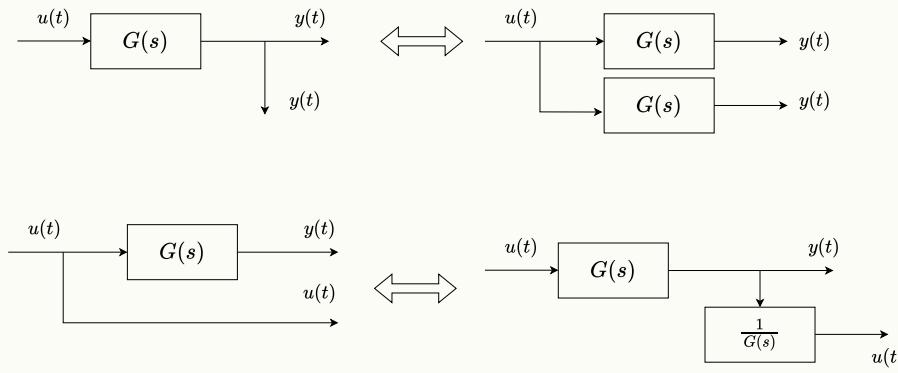


Figura 4.9: regole sullo spostamento della diramazione

La rielaborazione dello schema è lecita soltanto ai fini del calcolo della funzione di trasferimento complessiva.

### Analisi della Stabilità nei Sistemi Interconnessi

Si consideri un sistema composto da due blocchi in serie con le funzioni di trasferimento

$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

La funzione di trasferimento complessiva sappiamo essere

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

In generale i poli della funzione  $G$  è l'insieme dei poli di entrambe le funzioni, ciò implica che, se entrambe le funzioni  $G_1, G_2$  sono asintoticamente stabili (la parte reale di ogni polo è negativa), allora anche  $G$  sarà asintoticamente stabile.

Può accadere però, che vi siano delle cancellazioni, se ad esempio ci sono fattori in comune fra  $N_1(s), D_2(s)$  oppure fra  $N_2(s), D_1(s)$

esempio

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{s+3}{(s+1)s} & \Rightarrow G(s) &= \frac{(s+3)}{(s+3)(s+\pi)(s+1)s} = \frac{1}{(s+\pi)(s+1)s} \\ G_2(s) &= \frac{1}{(s+3)(s+\pi)} \end{aligned}$$

Anche se  $s_1 = -3$  era il polo di una delle due funzioni, non lo è di quella complessiva

In generale, la dinamica del sistema complessivo è "nascosta", se un polo con parte reale positiva è stato cancellato, il sistema è comunque non asintoticamente stabile anche se la funzione complessiva non presenta poli con parte reale positiva.

- Se vengono cancellati poli con parte reale positiva il sistema non è asintoticamente stabile
- Se vengono cancellati solo poli con parte reale negativa e  $G(s)$  non ha poli con parte reale positiva il sistema è asintoticamente stabile

$$\begin{array}{ccc} u(t) & \xrightarrow{\frac{1}{s-1}} & \xrightarrow{\frac{s-1}{s+2}} y(t) \end{array} \quad G(S) = \frac{s-1}{(s-1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

Il sistema è instabile anche se  $G(s)$  mostra una dinamica asintoticamente stabile.

In conclusione, il sistema complessivo è stabile se tutti i sotto sistemi sono stabili, gli autovalori del sistema complessivo sono l'unione degli autovalori dei sottosistemi.

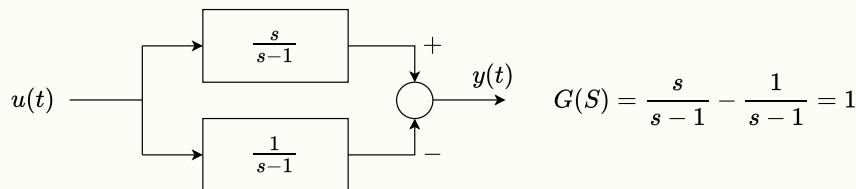
Si consideri un sistema composto da due blocchi in serie con le funzioni di trasferimento

$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

La funzione di trasferimento complessiva sappiamo essere

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{N_1(s)D_2(s) + N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Le radici del polinomio  $D_1(s)D_2(s)$  sono l'unione delle radici dei singoli polinomi, è quindi vero che i poli di  $G(s)$  sono l'unione dei poli di  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$ . Anche in questo caso però possono verificarsi delle situazioni di instabilità nascosta.



Il sistema è instabile anche se  $G(s)$  mostra una dinamica asintoticamente stabile.

In conclusione, proprio come per le interconnessioni in serie, il sistema complessivo è stabile se tutti i sotto sistemi sono stabili, gli autovalori del sistema complessivo sono l'unione degli autovalori dei sottosistemi.

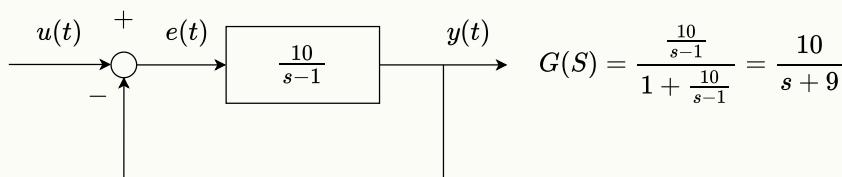
Passiamo infine al caso della connessione in retroazione, date le funzioni di trasferimento

$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

La funzione di trasferimento complessiva sappiamo essere

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{\frac{N_1(s)}{D_1(s)}}{1 + \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}} = \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}$$

I poli della funzione complessiva  $G(s)$  sono le radici del polinomio  $D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)$ , non è quindi più vero che i poli di  $G(s)$  sono l'unione dei poli di  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$ . La stabilità asintotica dei sottosistemi non implica la stabilità asintotica del sistema complessivo, e la stabilità asintotica del sistema complessivo non implica la stabilità asintotica dei sottosistemi.



Il sistema complessivo è asintoticamente stabile  
anche se il sottosistema è instabile

#### 4.2.7 Risposta allo Scalino

Dato un sistema dinamico, la sua funzione di trasferimento presenta dei parametri che descrivono l'evoluzione dell'uscita del sistema, quando viene dato come ingresso la funzione scalino

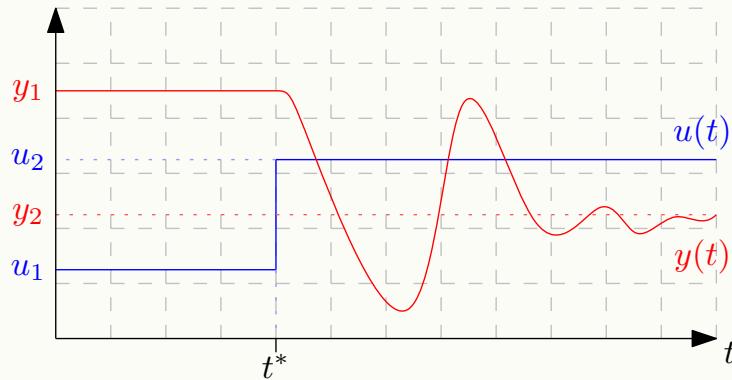
$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$



In generale, la risposta ad un ingresso che varia istantaneamente da un valore costante ad un altro.

$$u(t) = \begin{cases} u_1 & \text{se } t \geq t^* \\ u_2 & \text{se } t < t^* \end{cases}$$

Nei sistemi asintoticamente stabili, la risposta allo scalino descrive una *transizione* da uno stato di equilibrio a un altro (**risposta indiciale**).



Denominiamo l'uscita del sistema **a regime** per  $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y(\infty) = \bar{y}$$

Si definisce poi *risposta all'impulso* la risposta del sistema se l'ingresso è la delta di diraq  $\delta$ . E si definisce *risposta alla rampa* la risposta del sistema alla funzione rampa  $u(t) = t$ .

- l'impulso è la derivata dello scalino, quindi la risposta all'impulso è la derivata della risposta allo scalino.
- la rampa è l'integrale dello scalino, la risposta alla rampa è l'integrale della risposta allo scalino.

|             |             |               |                 |
|-------------|-------------|---------------|-----------------|
| funzione    | $\delta(t)$ | $H(t)$        | $H(t) \cdot t$  |
| trasformata | 1           | $\frac{1}{s}$ | $\frac{1}{s^2}$ |

Si considereranno adesso differenti casi di sistemi, in particolare del primo e del secondo ordine, ed in base ai parametri della funzione di trasferimento, essi manifesteranno differenti comportamenti nella risposta.

### Sistemi del primo ordine

**Definizione :** Un sistema dinamico si dice **strettamente proprio** se, la sua funzione di trasferimento ha il numeratore di grado strettamente inferiore al grado del denominatore. Tale proprietà dà informazione sulla velocità di risposta del sistema.

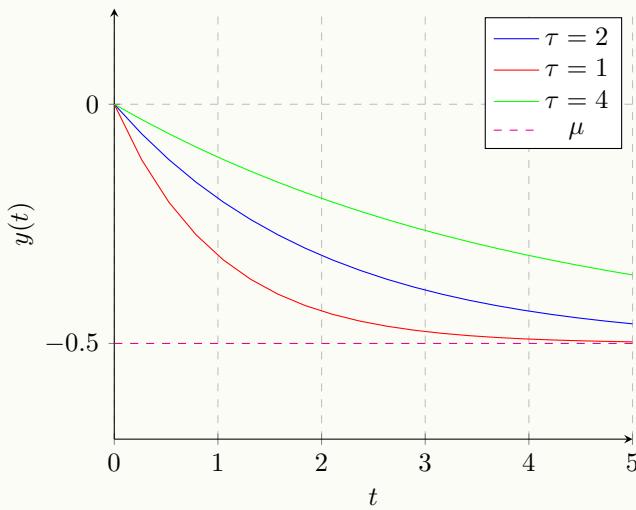
Si consideri un sistema strettamente proprio del primo ordine (una variabile di stato), avrà una funzione di trasferimento della forma

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + s\tau}$$

Asintoticamente stabile se  $\tau > 0$ . L'andamento nel tempo di tale sistema quando l'ingresso è lo scalino risulta essere

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \frac{\mu}{1 + s\tau}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{1 + s\tau} + \frac{\mu}{s}\right] = \mu(1 - e^{-t/\tau})$$

Definiamo **tempo di assestamento** il tempo necessario al movimento dell'uscita per assestarsi all'interno di un intervallo nella quale continuerà ad oscillare senza uscirne.

Figura 4.10: risposta allo scalino nel caso  $\mu = -0.5$ 

Il polo della funzione è  $-\frac{1}{\tau}$ , più  $\tau$  è piccolo, più il tempo di assestamento sarà minore. Se il valore di  $\tau$  è negativo, il polo sarà positivo quindi non ci sarà assestamento dato che il sistema è instabile (ovviamente  $e^{-\frac{t}{\tau}}$  diverge in questo caso).

Un sistema che *non* è strettamente proprio ha la trasformata di Laplace della forma

$$\mu \frac{1+sT}{1+s\tau}$$

Il suo andamento nel tempo è

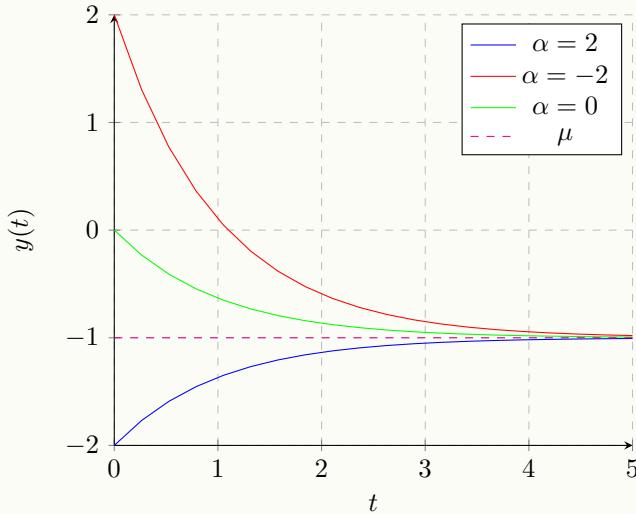
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mu \frac{1+sT}{1+s\tau}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s} + \frac{\mu(T-\tau)}{1+s\tau}\right] = \mu\left(1 + \frac{T-\tau}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Si pone in questo caso il fattore  $\alpha$  tale che

$$\alpha\tau = T$$

Allora il movimento dell'uscita è

$$y(t) = \mu\left[1 + (\alpha - 1)e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

Figura 4.11: risposta allo scalino nel caso  $\mu = -1$ ,  $\tau = 1$

Lo stato iniziale del sistema è  $\alpha\mu$  differentemente dal caso del sistema strettamente proprio in cui il valore iniziale è 0. La velocità di assestamento dipenderà sia da tale stato iniziale, che dal valore di  $\tau$ .

### Sistemi del secondo ordine

Consideriamo adesso un sistema del secondo ordine (vettore di stato  $x \in \mathbb{R}^2$ ), si vuole dare una descrizione del comportamento dell'uscita in base ad alcuni parametri della sua funzione di trasferimento. In tal caso, indetifichiamo 4 differenti casi, la funzione di trasferimento può avere

- Poli reali e nessuno zero
- Poli reali ed uno zero
- Poli complessi e nessuno zero
- Poli complessi ed uno zero

#### Poli reali e nessuno zero

La funzione di trasferimento è del tipo

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$

Si ricordi che la condizione di stabilità asintotica si ha quando i poli hanno parte reale negativa, ossia  $\tau_1 > 0 \wedge \tau_2 > 0$ . Per calcolare facilmente l'anti trasformata, occorre l'espansione della funzione in fratti semplici.

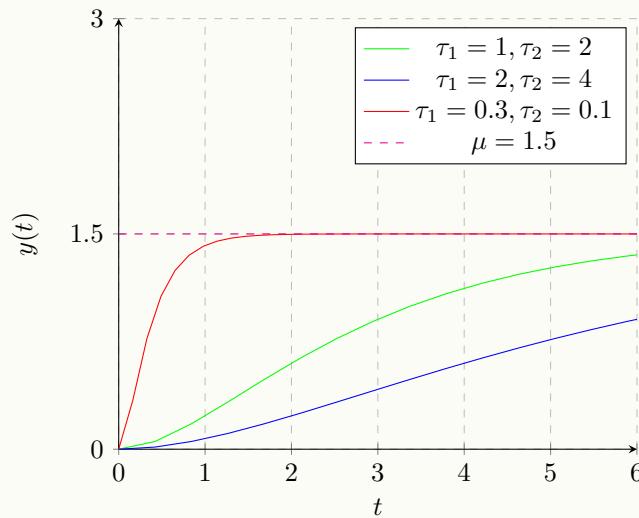
$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[G(s)\frac{1}{s}] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}\right] \\ \frac{\mu}{s(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{(1+s\tau_1)} + \frac{C}{(1+s\tau_2)} \end{aligned}$$

quindi

$$s = 0 \implies A = \frac{\mu}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} = \mu$$

$$s = -\frac{1}{\tau_1} \implies B = \frac{\mu}{s(1+s\tau_2)} = \frac{\mu}{(-\frac{1}{\tau_1})(1+(-\frac{1}{\tau_1})\tau_2)} = \frac{\mu\tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1}$$

$$s = -\frac{1}{\tau_2} \implies C = \frac{\mu}{s(1+s\tau_1)} = \frac{\mu\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2}$$



Allora

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\mu}{s} + \frac{\frac{\mu\tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1}}{(1+s\tau_1)} + \frac{\frac{\mu\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2}}{(1+s\tau_2)} \right] = \mu \left( 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right)$$

Si noti come a regime permanente la risposta tende a  $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \mu$ . Inoltre  $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ .

In questo caso in assenza di zeri, i poli più vicini all'asse immaginario sono quelli più influenti sull'andamento della risposta.

### Poli complessi e nessuno zero

La funzione di trasferimento è della forma

$$G(s) = \frac{\varrho}{(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)}$$

I poli sono complessi e coniugati, e sono  $-\sigma \pm j\omega$ , è chiaro che si ha stabilità asintotica se  $\sigma > 0$ . Si pone

$$\mu = G(0) = \frac{\varrho}{\sigma^2 + \omega^2}$$

L'uscita del sistema nel dominio di Laplace è

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{\varrho}{s(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)}$$

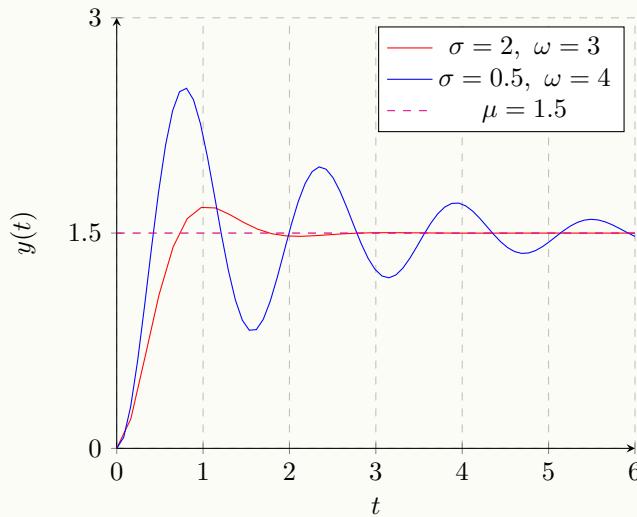
Con una diversa parametrizzazione (della quale non mostreremo il procedimento), si può riscrivere

$$Y(s) = \mu \left[ \frac{1}{s} - \frac{s + \sigma}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} - \frac{\sigma}{\omega} \frac{\omega}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} \right]$$

Applicando le anti trasformate note si mostra che

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mu \left[ 1 - e^{-\sigma t} \left( \cos(\omega t) + \frac{\sigma}{\omega} \sin(\omega t) \right) \right]$$

L'andamento della risposta consisterà in delle oscillazioni smorzate che si attenueranno su  $\mu$  andando verso l'infinito.



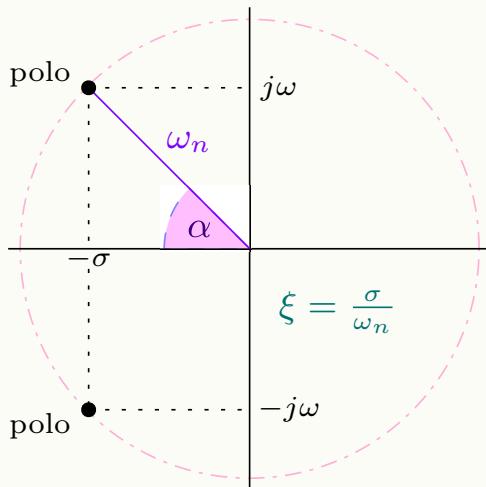
Più  $\omega$  è grande, più la frequenza delle oscillazioni è maggiore. Più  $\sigma$  è grande, più sarà rapida la risposta ad attenuarsi sul valore a regime  $\mu$ .

Si consideri la seguente parametrizzazione, si pone

$$\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega^2$$

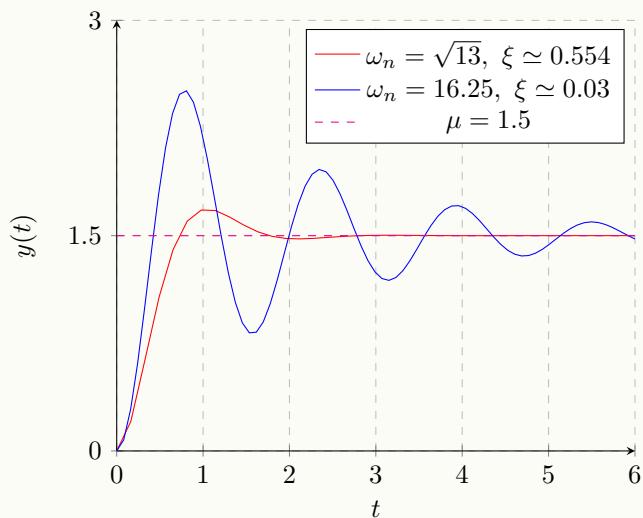
$$\omega_n \xi = \sigma$$

$$\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = \omega$$



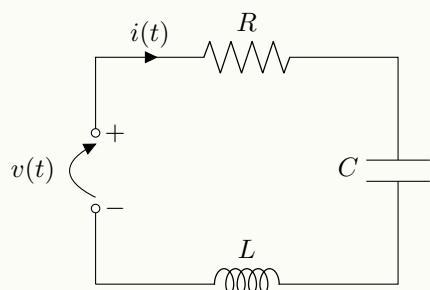
In tale modo  $\omega_n$  è il modulo dei poli ed è detta **pulsazione naturale**. Sia  $\alpha$  l'argomento dei poli, allora  $\xi = \cos \alpha$ , tale valore è detto **fattore di smorzamento**, ed è compreso fra zero ed 1. Se è uguale a 0, le oscillazioni non sono smorzate (sistema non asintoticamente stabile), se è uguale ad 1, le oscillazioni sono assenti. Più  $\xi$  è vicino ad 1 più lo smorzamento delle oscillazioni è forte.

$$G(s) = \frac{\varrho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$



### Esempio circuito RLC

Si consideri il circuito  $RLC$  mostrato in figura



Il sistema dinamico equivalente è il seguente

$$\begin{cases} Cx_1 = v - x_2 \\ Lx_2' = x_1 - Rx_2 \\ y = Rx_2 \end{cases}$$

La funzione di trasferimento equivalente è la seguente

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \frac{R}{LC}$$

Si hanno pulsazione naturale e fattore di smorzamento

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \mu = R$$

### Poli Dominanti ed Equivalenti

In una funzione di trasferimento, i poli detti *dominanti* sono quelli che forniscono il contributo maggiore nella risposta del sistema. Consideriamo una generica funzione di trasferimento (per semplicità, con poli reali e distinti)

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{\alpha_0}{s} + \frac{\alpha_1}{1+s\tau_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{1+s\tau_n}$$

L'andamento nel tempo è

$$y(t) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\tau_n} e^{-\frac{t}{\tau_n}}$$

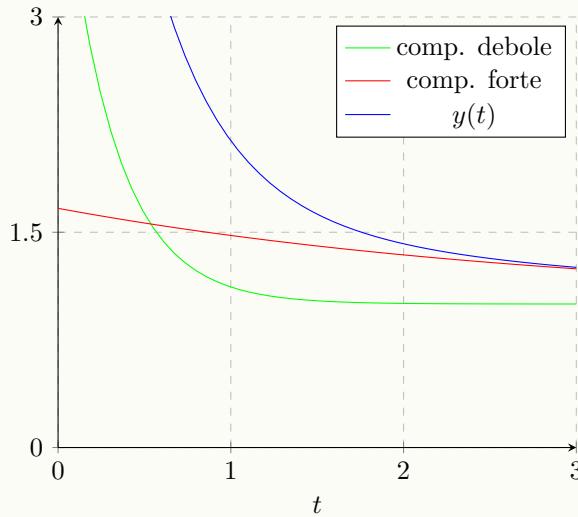
Sia  $\tau_i$  lo specifico valore per cui  $\tau_i > \tau_j \ \forall j$ , allora la componente

$$\frac{\alpha_i}{\tau_i} e^{-\frac{t}{\tau_i}}$$

Darà il maggior contributo all'andamento dell'uscita

$$y(t) \simeq \alpha_0 + \frac{\alpha_i}{\tau_i} e^{-\frac{t}{\tau_i}}$$

Il polo dominante  $-\frac{1}{\tau_i}$  sarà quello più vicino all'asse immaginario. Nel caso di poli complessi e coniugati, saranno entrambi dominanti.



È inoltre possibile approssimare una funzione di trasferimento con un *polo equivalente*, si consideri la seguente funzione (nell'ipotesi che i poli siano tutti reali negativi)

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)\dots(1+s\tau_n)} \quad \tau_i > 0$$

Si considera

$$\tau_e := \sum_{i=1}^n \tau_i$$

La funzione approssimata al polo equivalente sarà

$$G_e(s) = \frac{\mu}{(1 + s\tau_e)}$$

Ad esempio, si consideri

$$G(s) = \frac{1}{(1 + s)(1 + 0.1s)(1 + 0.5s)}$$

Si ha

$$G_e(s) = \frac{1}{1 + 1.6s}$$

La funzione approssimata al polo dominante è invece

$$G_d(s) = \frac{1}{1 + s}$$

