Appunti pre-esonero calcolo integrale - Integrali

Integrazione secondo Riemann

💡 Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si dice che f è **integrabile secondo Riemann** se dati:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} min_{[x_k, x_{k+1}]} = \underline{S}$$ e

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} max_{[x_k, x_{k+1}]} = \overline{S_n}$$

Si verifica che $\overline{S} = \underline{S}$, allora **l'integrale definito** nell'intervallo $[a, b]$ di $f(x)$ viene denominato con :

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Integrale assoluto

Vale il seguente teorema :

💡 $$|\int_a^b f(x)\, dx| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Monotonia dell'integrale

Vale il seguente teorema :

💡 Se $f \leq g$, allora $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx|$

Teorema fondamentale del calcolo Integrale

💡 Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia il suo integrale : $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ con $t \in [a, b]$, allora vale che : $F'(x) = f(t)\ \forall t \in [a, b]$

Integrali immediati

Derivate

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$\log(x)$	$\frac{1}{x}$
$arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Integrali

f	$\int f$
x^α	$\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1}$
e^x	e^x
$cos(x)$	$sin(x)$
$sin(x)$	$-cos(x)$
$\frac{1}{x}$	$\log(x)$ se $x > 0$
$\frac{1}{x}$	$\log(\|x\|)$ se $x \neq 0$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctan(x)$
e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx}$
$cos(kx)$	$\frac{sin(kx)}{k}$
$sin(kx)$	$-\frac{cos(kx)}{k}$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln(\|f(x)\|)$
$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$	$arctan(f(x))$
$\cos^2(x)$	$\frac{x+sin(x)cos(x)}{2}$
$\sin^2(x)$	$\frac{x-sin(x)cos(x)}{2}$
α^x	$\frac{\alpha^x}{\ln(\alpha)}$

$$\int [e^{\alpha x} cos(\beta x)] = \frac{e^{\alpha x} \cdot (\alpha cos(\beta x) + \beta sin(\beta x))}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\int [x^n \cdot \log(x)] = \frac{x^{n+1}}{n+1} \log(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$\int [e^{\alpha x} sin(\beta x)] = \frac{e^{\alpha x} \cdot (\alpha \sin(\beta x) + \beta \cos(\beta x))}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Formule

Detto questo, ricapitoliamo tutte le formule viste con le 3 possibili casistiche :

$$\text{Si vuole integrare } \int \frac{1}{1x^2 + ax + b} dx$$

- **Caso 1 :**

$$x_0 = x_1 \implies \int \frac{dx}{(x - x_0)^2} = \frac{1}{x_0 - x}$$

- **Caso 2 :**

$$x_0 \neq x_1 \implies \int \frac{dx}{(x - x_0)(x - x_1)} = \frac{1}{x_0 - x_1} \cdot \ln(|\frac{x - x_0}{x - x_1}|)$$

- **Caso 3 :**

$$x_0, x_1 \in \mathbb{C} \implies \int \frac{dx}{x^2 + ax + b} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan(\frac{2x + a}{\sqrt{-\Delta}})$$

Integrazione per parti

💡 $$\int [f'(x)g(x)]dx = f(x)g(x) - \int [f(x)g'(x)]dx$$

Regole di buona derivazione

Abbiamo i 3 seguenti integrali :

$\int [x^2 \cdot e^x]dx$	Regola Derivare **sempre** la parte polinomiale,

$$\int [x^2 \cdot cos(x)]dx$$

$$\int [x^2 \cdot sin(x)]dx$$

integrare sempre le funzioni ($e^x, cos(x), sin(x)$)

Integrale di un polinomio di grado n

Possiamo fare alcune osservazioni quando si parla di **calcolare l'integrale di un polinomio** di grado , prendiamo come esempio la funzione $f(x) = (x^2 - x - 1)e^x$ dove abbiamo il seguente polinomio $(x^2 - x - 1)$ che definiremo come $P_n(x)$, con n il grado del polinomio.

Adesso, avendo un polinomio di grado n, moltiplicato ad una funzione e^x, vediamo come si comporta con l'operazione di derivazione :

- Definiamo $f(x) = Q_n(x)e^x$
- Facendone la derivata si ottiene $f'(x) = Q'_n(x)e^x + Q_n(x)e^x$
- Che è uguale ha $(Q'_n(x) + Q_n(x))e^x$

Chiamiamo $(Q'_n(x) + Q_n(x)) = P_n(x)$ e notiamo che :

la derivata di un polinomio di grado n moltiplicato ad un esponenziale, è uguale ad un altro polinomio, sempre di grado n moltiplicato ad un esponenziale

Essendo l'integrale l'operazione inversa della derivata, è ovvio che :

$$\int [P_n(x)e^x]dx = Q_n(x)e^x$$

è possibile quindi ricavare $Q_n(x)$ tramite $P_n(x)$ con un **sistema di equazioni**, perchè so che :

💡 $Q_n(x) + Q'_n(x) = P_n(x)$

Proviamo adesso a calcolare l'integrale della funzione iniziale $f(x) = (x^2 - x - 1)e^x$.

$P_2(x) = x^2 - x - 1 \implies x^2 - x - 1 = Q_2(x) + Q'_2(x)$ Dato che $Q_2(x)$ è un polinomio di secondo grado : $Q_2(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad$ con $\ a \neq 0$.

Bisogni quindi trovare i valori di $a, b\ $ e $\ c$.

Sappiamo che $Q'_2(x) = (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)' = 2a \cdot x + b$, quindi $Q_2(x) + Q'_2(x) = ax^2 + (2a + b)x + (b + c)$ abbiamo quindi logicamente che :

Informazioni su integrali non calcolabili

Una funzione f è **dispari** quando è verificata la condizione $f(-x) = -f(x)$

Una funzione f è **pari** quando è verificata la condizione $f(-x) = f(x)$

Si consideri $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)dx$, se $a = 0$ allora si verifica che :

$$\text{se } f(x) \text{ è pari} \to f'(x) \text{ sarà dispari}, \ \text{ se } f(x) \text{ è dispari} \to \int f(x) \text{ è pari}$$

Inoltre, se una funzione f è **pari**, ed il suo intervallo è simmetrico, si verifica che :

💡 Se f è pari :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Inoltre, se una funzione f è **dispari**, ed il suo intervallo è simmetrico, si verifica che :

💡 Se f è dispari :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Sappiamo che $F'(t) = f(t)$, se $f(t)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ e non presenta punti angolosi, $F(t)$ è **derivabile** su tutto $\mathbb{R}$.

Se la derivata di F, ossia f, è positiva sempre, quindi $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, allora F sarà strettamente crescente, inoltre, ricordando che $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$, la funzione $F(t)$ se strettamente crescente, sarà < 0 per ogni $t < a$, e maggiore di 0 per ogni $t > a$.

Inoltre, si vuole sapere se $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t)$ esiste, ed eventualmente se vale $\pm\infty$ oppure $L \in \mathbb{R}$.

Quindi si vede $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx$.

Si vede $f(x)$ che valori può assumere, nel caso può assumere un valore **minimo** c, sappiamo che $f(x) \geq c$, quindi per forza di cose $F(t) \geq \displaystyle\int_a^t c\,dx$, se $c > 0$, allora

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t c\,dx = +\infty,$$

dato che $f(x) \geq c$, per criterio del confronto asintotico, anche $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty$.

Vogliamo poi dimostrare che $F(t) = \displaystyle\int_{-1}^t f(x)dx$ non sia **ne pari ne dispari**, sapendo che $f(x)$ è crescente, sicuramente non può essere pari, dato che le uniche funzioni pari crescenti sono le costanti. sappiamo che $F(-1) = \int_{-1}^{-1} f(x)dx = 0$, quindi, se fosse dispari $-F(1) = 0$, dato che se una funzione è dispari, vale che $f(-x) = -f(x)$.

però $-F(1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$ non può essere uguale a 0 dato che $f(x)$ è crescente, e valendo 0 in $t = -1$, sicuramente da -1 in poi sarà positiva, sicuramente non uguale a 0, quindi non è dispari.

Esempi di esercizi svolti

d1) - d2) Trovare una primitiva di $k(x) = \dfrac{2x-15}{x^2-16x+60}$ e di $j(x) = \dfrac{x^3}{6+x^2}$.

d1) Osserviamo che si ha
$$\frac{2x-15}{x^2-16x+60} = \frac{2x-16}{x^2-16x+60} + \frac{1}{x^2-16x+60}\,.$$
Dal momento che al numeratore compare la derivata del denominatore, si ha
$$\int \frac{2x-16}{x^2-16x+60}\,dx = \ln(|x^2-16x+60|)\,.$$
Per calcolare il secondo integrale, osserviamo che si ha $x^2-16x+60 = (x-10)\,(x-6)$. Con conti analoghi a quelli visti nello svolgimento dell'esercizio **b1) - b2)** si ha che
$$\frac{1}{x^2-16x+60} = \frac{1}{(x-10)\,(x-6)} = \frac{1}{4\,(x-10)} - \frac{1}{4\,(x-6)}\,,$$
cosicché
$$\int \frac{dx}{x^2-16x+60} = \int \left[\frac{1}{4\,(x-10)} - \frac{1}{4\,(x-6)}\right] dx = \frac{1}{4}\,\ln\left(\left|\frac{x-10}{x-6}\right|\right).$$
Mettendo insieme i risultati trovati, si ha
$$\int \frac{2x-15}{x^2-16x+60} = \ln(|x^2-16x+60|) + \frac{1}{4}\,\ln\left(\left|\frac{x-10}{x-6}\right|\right).$$

d2) Scriviamo
$$\frac{x^3}{6+x^2} = \frac{x^3+6\,x-6\,x}{6+x^2} = x - \frac{6\,x}{6+x^2}\,.$$
Abbiamo quindi
$$\int \frac{x^3}{6+x^2}\,dx = \int \left[x - \frac{6\,x}{6+x^2}\right] dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{6\,x}{6+x^2}\,dx\,.$$
Per calcolare l'ultimo integrale, poniamo $y = 6+x^2$, da cui $dy = 2x\,dx$, e otteniamo
$$\int \frac{6\,x}{6+x^2}\,dx = \int \frac{3\,dy}{y} = 3\,\ln(|y|) = 3\,\ln(x^2+6)\,,$$
dove si è tolto il modulo dato che la funzione x^2+6 è positiva. In definitiva,
$$\int \frac{x^3}{6+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - 3\,\ln(x^2+6)\,.$$

c1) $(2x+5)\,\mathrm{e}^x$, **c2)** $(5x^2-5x+10)\,\mathrm{e}^x$, **d1)** $x^2\,\ln(7\,x)$, **d2)** $12\,x\,\arctan(6\,x)$.

c1) Integriamo per parti, derivando il binomio e integrando l'esponenziale. Si ha

$$\int (2x+5)\,\mathrm{e}^x\,dx = (2x+5)\,\mathrm{e}^x - 2\int \mathrm{e}^x\,dx = (2x+3)\,\mathrm{e}^x\,.$$

c2) Sappiamo che si ha

$$\int (5x^2-5x+10)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio di secondo grado tale che $Q(x)+Q'(x)=5x^2-5x+10$. Se $Q(x)=a\,x^2+b\,x+c$ è un generico polinomio di secondo grado, si ha

$$Q(x)+Q'(x) = a\,x^2+(2a+b)\,x+(b+c)\,,$$

e imponendo che si abbia $Q(x)+Q'(x)=5x^2-5x+10$ si ha che deve essere

$$a=5\,,\qquad 2a+b=-5\,,\qquad b+c=10\,,$$

da cui si ricava facilmente che

$$a=5\,,\qquad b=-15\,,\qquad c=25\,,$$

e quindi

$$\int (5x^2-5x+10)\,\mathrm{e}^x\,dx = (5x^2-15x+25)\,\mathrm{e}^x\,.$$

d1) Integriamo per parti, derivando il logaritmo e integrando x^2. Si ha

$$\int x^2\,\ln(7\,x)\,dx = \frac{x^3}{3}\,\ln(7\,x) - \frac{1}{3}\int x^3\,\frac{7}{7\,x}\,dx = \frac{x^3}{3}\,\ln(7\,x) - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{9}[3\,\ln(7\,x)-1]\,.$$

d2) Integriamo per parti, integrando il monomio e derivando l'arcotangente. Si ha

$$\int 12\,x\,\arctan(6\,x)\,dx = 6\,x^2\,\arctan(6\,x) - \int \frac{36\,x^2}{1+36\,x^2}\,dx\,.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, aggiungiamo e togliamo 1 al numeratore:

$$\int \frac{36\,x^2}{1+36\,x^2}\,dx = \int \frac{1+36\,x^2-1}{1+36\,x^2}\,dx = \int \left[1-\frac{1}{1+36\,x^2}\right]dx = x - \int \frac{dx}{1+36\,x^2}\,.$$

L'ultimo integrale si calcola ponendo $y=6\,x$, da cui $dy=6\,dx$ per ottenere

$$\int \frac{dx}{1+36\,x^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\arctan(y)}{6} = \frac{\arctan(6\,x)}{6}\,.$$

In definitiva, si ha

$$\int 12\,x\,\arctan(6\,x)\,dx = 6\,x^2\,\arctan(6\,x) - x + \frac{\arctan(6\,x)}{6}\,.$$

c12) $h(x) = \dfrac{10\,x + 30}{x^2 + 6\,x + 1}\,, \quad \displaystyle\int_0^1 h(x)\,dx\,, \qquad$ **d12)** $k(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 16}\,, \quad \displaystyle\int_{-1}^1 k(x)\,dx\,,$

c12) La derivata del denominatore è:

$$[x^2 + 6\,x + 1]' = 2x + 6\,,$$

mentre il numeratore si può scrivere come:

$$10\,x + 30 = 5\,(2x + 6)\,.$$

Si ha allora

$$\int \frac{10\,x + 30}{x^2 + 6\,x + 1}\,dx = 5 \int \frac{2x + 6}{x^2 + 6\,x + 1}\,dx = 5\,\ln(|x^2 + 6\,x + 1|)\,,$$

da cui segue che

$$\int_0^1 \frac{10\,x + 30}{x^2 + 6\,x + 1}\,dx = 5\,\ln(|x^2 + 6\,x + 1|)\Big|_0^1 = 5\,[\ln(8) - \ln(1)] = 5\,\ln(8)\,.$$

d12) Si ha

$$x^3 = x^3 - 16\,x + 16\,x = x\,(x^2 - 16) + 16\,x\,,$$

e quindi

$$\frac{x^3}{x^2 - 16} = \frac{x\,(x^2 - 16) + 16\,x}{x^2 - 16} = x + \frac{16\,x}{x^2 - 16} = x + 8\,\frac{2x}{x^2 - 16}\,.$$

Ne segue che

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 16}\,dx = \int \left[x + 8\,\frac{2x}{x^2 - 16}\right] dx = \frac{x^2}{2} + 8\,\ln(|x^2 - 16|)\,,$$

e quindi che

$$\int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^2 - 16}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 8\,\ln(|x^2 - 16|)\right]\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} + 8\,\ln(15) - \frac{1}{2} - 8\,\ln(15) = 0\,.$$

$$\textbf{c12)}\ h(x) = \cos^3(x)\,, \quad \int_0^{\frac{9}{2}\pi} h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d12)}\ k(x) = \frac{4x-2}{2}\,\ln(x)\,, \quad \int_1^2 k(x)\,dx\,,$$

c12) Iniziamo a scrivere

$$\cos^3(x) = \cos^2(x)\,\cos(x) = (1-\sin^2(x))\,\cos(x)\,,$$

cosicché si tratta di calcolare

$$\int (1-\sin^2(x))\,\cos(x)\,dx\,.$$

Con la sostituzione $y = \sin(x)$, da cui $dy = \cos(x)\,dx$, si ha

$$\int (1-\sin^2(x))\,\cos(x)\,dx = \int (1-y^2)\,dy = y - \frac{y^3}{3} = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}\,.$$

Se ne deduce che

$$\int_0^{\frac{9}{2}\pi} \cos^3(x)\,dx = \Big[\sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}\Big]\Big|_0^{\frac{9}{2}\pi} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

d12) Integrando per parti (derivando il logaritmo e integrando il polinomio) si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-2}{2}\,\ln(x)\,dx &= \frac{2x^2-2\,x}{2}\,\ln(x) - \int \frac{2x^2-2\,x}{2}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{2x^2-2\,x}{2}\,\ln(x) - \int \frac{2x-2}{2}\,dx \\ &= \frac{2x^2-2\,x}{2}\,\ln(x) - \frac{x^2-2\,x}{2}\,.\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_1^2 \frac{4x-2}{2}\,\ln(x)\,dx = \Big[\frac{2x^2-2\,x}{2}\,\ln(x) - \frac{x^2-2\,x}{2}\Big]\Big|_1^2 = 2\,\ln(2) - 0 - 0 + \frac{1-2}{2} = 2\,\ln(2) - \frac{1}{2}\,.$$

2.4.5 Integrazione di $sin^k(x)$ e $cos^k(x)$

Di seguito vedremo due approcci consigliati per sviluppare gli integrali relativi alle funzioni trigonometriche del seno e del coseno a seconda del loro grado di elevazione.

- Se si ha un'integrale nella forma

$$\int sin^k(x)\, dx \quad \text{oppure} \quad \int cos^k(x)\, dx$$

  dove k è una potenza **dispari**, allora è consigliato procedere per **sostituzione**

- **Esempio:** (gli stessi passaggi possono essere utilizzati **anche con il coseno**)
  - Si consideri il seguente integrale

$$\int sin^5(x)\, dx$$

  - Possiamo riscrivere tale integrale come

$$\int sin^5(x)\, dx = \int sin^4(x) \cdot sin(x)\, dx = \int (sin^2(x))^2 sin(x)\, dx$$

  - A questo punto, ricordando l'**identità trigonometrica fondamentale**, ossia $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$, possiamo riscrivere l'integrale come

$$\int (sin^2(x))^2 sin(x)\, dx = \int (1 - cos^2(x))^2 sin(x)\, dx$$

  - Procedendo per **sostituzione**, otteniamo che

$$y = cos(x)$$
$$dy = -sin(x)\, dx$$

$$\int (1 - cos^2(x))^2 sin(x)\, dx = -\int (1 - y^2)^2\, dy$$

  - Siamo quindi riusciti a **ricondurre** l'integrale di una funzione trigonometrica ad un **integrale di un polinomio**, il quale risulta estremamente semplice da calcolare

$$-\int (1 - y^2)^2\, dy = -\int 1 - 2y^2 + y^4\, dy = -y + \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5 =$$
$$-cos(x) + \frac{2}{3}cos^3(x) - \frac{1}{5}cos^5(x) + c$$

- Nel caso in cui k sia una potenza **pari**, invece, è consigliato procedere per **parti**
- **Esempio:** (gli stessi passaggi possono essere utilizzati **anche con il coseno**)
  - Si consideri il seguente integrale

$$\int sin^4(x)\ dx$$

  - Possiamo riscrivere tale integrale come

$$\int sin^4(x)\ dx = \int sin^3(x)sin(x)\ dx$$

  - Procedendo per parti, otteniamo che
    * $f'(x) = sin(x) \Longrightarrow f(x) = -cos(x)$
    * $g(x) = sin^3(x) \Longrightarrow g'(x) = 3sin^2(x)cos(x)$

$$\int sin^4(x)\ dx = -sin^3(x)cos(x) + 3\int sin^2(x)cos^2(x)\ dx$$

  - Utilizzando l'**identità trigonometrica fondamentale** otteniamo che

$$\int sin^4(x)\ dx = -sin^3(x)cos(x) + 3\int sin^2(x)(1 - sin^2(x))\ dx$$

$$\int sin^4(x)\ dx = -sin^3(x)cos(x) + 3\int sin^2(x) - 3\int sin^4(x)\ dx$$

  - A questo punto portiamo l'integrale ottenuto dall'altra parte dell'equazione

$$\int sin^4(x)\ dx + 3\int sin^4(x)\ dx = -sin^3(x)cos(x) + 3\int sin^2(x)$$

$$(1+3)\int sin^4(x)\ dx = -sin^3(x)cos(x) + 3\int sin^2(x)$$

$$4\int sin^4(x)\ dx = -sin^3(x)cos(x) + 3\int sin^2(x)$$

$$\int sin^4(x)\ dx = \frac{1}{4}\left[-sin^3(x)cos(x) + 3\int sin^2(x)\right]$$

  - Siamo quindi riusciti a **ridurre il grado** dell'integrale, poiché a questo punto ci resta da **calcolare l'integrale di** $sin^2(x)$, calcolabile utilizzando lo **stesso metodo**, per ottenere l'integrale di $sin^4(x)$

$$\frac{1}{4}\left[-sin^3(x)cos(x) + 3\int sin^2(x)\right] = \frac{-2sin^3(x)cos(x) - 3sin(x)cos(x) + 3x}{8}$$