



Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 8
19 Maggio 2023 — Compito n. 00145

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ☐ (non ☐ o ☐).

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.

1B) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(6) = 3$.

1C) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(6) = 7$ e $y'(6) = 8$.

1D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(6) = 5$, $y'(6) = 6$, $y''(6) = 44$.

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y''(t) - 15y'(t) + 54y(t) = 432.$$

2A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 15L + 54$.

2B) La funzione $y_0(t) = 7e^{6t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

2C) La funzione $\bar{y}(t) = 9$ è una soluzione particolare di (1).

2D) Se $y(0) = 9$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + Ay(t) + By(t) = 0, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

3A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - AL + B$.

3B) Se $A = 0$ e $B = -16$, la funzione $y(t) = 4e^{4t} - 11e^{-4t}$ è soluzione dell'equazione.

3C) Se $A = -4$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 2$ è soluzione dell'equazione.

3D) Se $A = -12$ e $B = 45$, la funzione $y(t) = 4e^{6t} \sin(3t)$ non è soluzione dell'equazione.

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 7y'(t) = -56.$$

4A) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = Ce^{7t}$.

4B) Esistono soluzioni costanti dell'equazione.

4C) La funzione $\bar{y}(t) = 8t$ è soluzione dell'equazione.

4D) Se $y(0) = 7$ e $y'(0) = 8$, la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

Docente

- ☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00145

5) Si consideri l'equazione differenziale

(1)
$$y''(t) - 14y'(t) + 33y(t) = -8e^{3t}.$$

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.

b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).

c) Trovare una soluzione particolare di (1).

d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

--	--	--	--	--	--	--	--

Cognome

Nome

Matricola

Compito 00145

6) Si consideri l'equazione differenziale

(1)

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 2e^{2t}.$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).

b) Si trovi una soluzione particolare di (1).

c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$.

d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$.

Soluzioni del compito 00145

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.

Vero: Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali.

1B) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(6) = 3$.

Falso: L'equazione ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali. Assegnando una sola condizione, si “fissa” uno solo dei due parametri, e quindi l'equazione ha infinite soluzioni tali che $y(6) = 3$.

1C) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(6) = 7$ e $y'(6) = 8$.

Falso: Assegnando due condizioni, una sulla funzione e una sulla derivata, si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione.

1D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che

$$y(6) = 5, \quad y'(6) = 6, \quad y''(6) = 44.$$

Vero: Se $y(6) = 5$ e $y'(6) = 6$, dall'equazione segue che deve essere

$$0 = y''(6) + 4y'(6) + 4y(6) = y''(6) + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = y''(6) + 44,$$

da cui segue che $y''(6) = -44$. Pertanto, l'unica soluzione dell'equazione che soddisfa le condizioni $y(6) = 5$ e $y'(6) = 6$ è tale che $y''(6) = -44 \neq 44$; in altre parole, non esistono soluzioni dell'equazione che soddisfano le tre condizioni richieste.

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y''(t) - 15y'(t) + 54y(t) = 432.$$

2A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 15L + 54$.

Vero: Sostituendo y'' con L^2 , y' con L e y con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 - 15L + 54.$$

2B) La funzione $y_0(t) = 7e^{6t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

Vero: Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 15L + 54$, che si annulla per $L_1 = 6$ e $L_2 = 9$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = Ce^{6t} + De^{9t},$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 7$ e $D = 0$, si ha che $y_0(t) = 7e^{6t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

Alternativamente, se $y_1(t) = e^{6t}$ si ha, derivando,

$$y_1'(t) = 6e^{6t}, \quad y_1''(t) = 36e^{6t},$$

e, sostituendo nell'equazione,

$$y_1''(t) - 15y_1'(t) + 54y_1(t) = [36 - 15 \cdot 6 + 54]e^{6t} = 0 \cdot e^{6t} = 0,$$

e quindi $y_1(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1). Dato che tale equazione è lineare, anche $y_0(t) = 7y_1(t)$ è soluzione dell'omogenea.

2C) La funzione $\bar{y}(t) = 9$ è una soluzione particolare di (1).

Falso: Sostituendo nell'equazione si ha, essendo nulle sia la derivata prima che la derivata seconda di $\bar{y}(t)$,

$$y'' - 15y' + 54y = 54 \cdot 9 = 486 \neq 432,$$

e quindi $\bar{y}(t) = 9$ non è una soluzione particolare di (1). Cercando una soluzione particolare della forma $y(t) \equiv Q$ si vede facilmente che deve essere $Q = 8$.

2D) Se $y(0) = 9$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

Falso: Se (1) avesse una soluzione costante tale che $y(0) = 9$, chiaramente tale soluzione non può che essere $y(t) \equiv y(0) = 9$ (si noti che la condizione $y'(0) = 0$ è verificata). Sostituendo però nell'equazione $y(t) = 9$ si trova

$$y'' - 15y' + 54y = 54 \cdot 9 = 486 \neq 432,$$

e quindi $y(t) \equiv 9$ non è soluzione dell'equazione; questo vuol dire che l'unica soluzione del problema di Cauchy per (1) con le condizioni iniziali $y(0) = 9$ e $y'(0) = 0$ non è costante.

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A y(t) + B y(t) = 0, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

3A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - A L + B$.

Falso: Sostituendo y'' con L^2 , y' con L e y con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 + A L + B \neq L^2 - A L + B.$$

3B) Se $A = 0$ e $B = -16$, la funzione $y(t) = 4e^{4t} - 11e^{-4t}$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $A = 0$ e $B = -16$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 16$ che si annulla per $L = \pm 4$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C e^{4t} + D e^{-4t}.$$

Scegliendo $C = 4$ e $D = -11$, si ha che $y(t) = 4e^{4t} - 11e^{-4t}$ è soluzione dell'equazione.

3C) Se $A = -4$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 2$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $A = -4$ e $B = 0$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 4L$ che si annulla per $L = 0$ e per $L = 4$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C e^{0t} + D e^{4t} = C + D e^{4t}.$$

Scegliendo $C = 2$ e $D = 0$, si ha che $y(t) = 2$ è soluzione dell'equazione.

3D) Se $A = -12$ e $B = 45$, la funzione $y(t) = 4e^{6t} \sin(3t)$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $A = -12$ e $B = 45$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 12L + 45$, che si annulla per $L = 6 \pm 3i$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = e^{6t} [C \cos(3t) + D \sin(3t)].$$

Scegliendo $C = 0$ e $D = 4$, si ha che $y(t) = 4e^{6t} \sin(3t)$ è soluzione dell'equazione.

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 7y'(t) = -56.$$

4A) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C e^{7t}$.

Falso: Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 7L$, che si annulla per $L = 0$ e $L = 7$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C e^{0t} + D e^{7t} = C + D e^{7t},$$

con C e D numeri reali. Pertanto, non tutte le soluzioni dell'omogenea associata sono date da $y_0(t) = C e^{7t}$: mancano le soluzioni costanti.

4B) Esistono soluzioni costanti dell'equazione.

Falso: Se $y(t) \equiv Q$ è una costante, sostituendo nell'equazione si ha

$$y''(t) - 7y'(t) = 0 - 7 \cdot 0 = 0 \neq -56,$$

e quindi l'equazione non ha soluzioni costanti. Alternativamente, sappiamo dalla domanda **4A** che le costanti sono soluzioni dell'equazione omogenea, e quindi non possono essere soluzioni dell'equazione "completa".

4C) La funzione $\bar{y}(t) = 8t$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $\bar{y}(t) = 8t$, si ha $\bar{y}'(t) = 8$ e $\bar{y}''(t) = 0$. Sostituendo nell'equazione si ha

$$\bar{y}''(t) - 7\bar{y}'(t) = -7 \cdot 8 = -56,$$

e quindi $\bar{y}(t) = 8t$ è soluzione dell'equazione.

4D) Se $y(0) = 7$ e $y'(0) = 8$, la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

Falso: Sappiamo già, dagli esercizi **4A** e **4C**, che tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = C + D e^{7t} + 8t,$$

con C e D numeri reali. Pertanto,

$$y'(t) = 7D e^{6t} + 8.$$

Pertanto, assegnando le condizioni iniziali, si ha

$$7 = C + D, \quad 8 = 7D + 8.$$

Dalla seconda si ricava $D = 0$, e sostituendo nella prima si ricava $C = 7$. Ne segue che l'unica soluzione dell'equazione è

$$y(t) = 7 + 8t,$$

che è un polinomio di primo grado (e quindi non è un'esponenziale).

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y''(t) - 14y'(t) + 33y(t) = -8e^{3t}.$$

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.

b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).

c) Trovare una soluzione particolare di (1).

d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Soluzione:

a) Sostituendo in (1) L^2 a y'' , L a y' e 1 a y , si trova

$$P(L) = L^2 - 14L + 33,$$

che si annulla per $L_1 = 3$ e per $L_2 = 11$.

b) Usando le radici del polinomio caratteristico calcolate al punto precedente, abbiamo che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1) sono date da

$$y_0(t) = C e^{3t} + D e^{11t},$$

con C e D numeri reali.

c) Dato che $g(t) = e^{3t}$ è una soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(t) = Q t e^{3t}.$$

Si ha

$$\bar{y}'(t) = Q(1 + 3t)e^{3t}, \quad \bar{y}''(t) = Q(6 + 9t)e^{3t}.$$

Sostituendo in (1) si ha

$$\bar{y}'' - 14\bar{y}' + 33\bar{y} = Q e^{3t} [6 + 9t - 14(1 + 3t) + 33t] = -8Q e^{3t},$$

e quindi $\bar{y}(t)$ è soluzione di (1) se Q è tale che

$$-8Q e^{3t} = -8e^{3t},$$

da cui segue $Q = 1$ e quindi

$$\bar{y}(t) = t e^{3t}.$$

d) Da b) e c) abbiamo che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = C e^{3t} + D e^{11t} + t e^{3t},$$

con C e D numeri reali. Dato che

$$y'(t) = 3C e^{3t} + 11D e^{11t} + e^{3t} + 3t e^{3t},$$

si ha $y(0) = C + D$ e $y'(0) = 3C + 11D + 1$. Imponendo le condizioni iniziali, si ha che deve essere $C + D = 0$ e $3C + 11D + 1 = 1$, da cui si ricava facilmente $C = D = 0$. Ne segue che l'unica soluzione di (1) che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ è

$$y(t) = t e^{3t}.$$

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 2e^{2t}.$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).

b) Si trovi una soluzione particolare di (1).

c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$.

d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$.

Soluzione:

a) Il polinomio caratteristico è $P(L) = L^2 - 4L + 4$, che si annulla per $L_1 = L_2 = 2$. Conseguentemente, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata ad (1) sono date da

$$y_0(t) = (C + Dt)e^{2t},$$

con C e D numeri reali.

b) Dato che sia e^{2t} che $t e^{2t}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare di (1) della forma

$$\bar{y}(t) = Q t^2 e^{2t}.$$

Derivando, si ha

$$\bar{y}'(t) = Q(2t + 2t^2)e^{2t}, \quad \bar{y}''(t) = Q(2 + 8t + 4t^2)e^{2t}.$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$\bar{y}'' - 4\bar{y}' + 4\bar{y}(t) = Q e^{2t} [2 + 8t + 4t^2 - 4(2t + 2t^2) + 4t^2] = 2Q e^{2t},$$

da cui segue che $\bar{y}(t)$ è soluzione di (1) se $Q = 1$. Si ha dunque che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = (C + Dt + t^2)e^{2t},$$

da cui segue, derivando, che

$$y'(t) = (2C + D + (2D + 2)t + 2t^2)e^{2t}.$$

Pertanto

$$(2) \quad y(0) = C, \quad y'(0) = 2C + D.$$

c) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 0$ e $2C + D = 3$, da cui $C = 0$ e $D = 3$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (3t + t^2)e^{2t}.$$

d) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 2$ e $2C + D = 0$, da cui $D = -4$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (2 - 4t + t^2)e^{2t}.$$