Esercizi su Equazioni di ricorrenza

1. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$

$T(1) = \Theta(1)$

metodo iterativo

inizio sviluppando l'equazione:

$$T(n) = 2 \cdot \left[2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \Theta\left(\frac{n}{2}\right)\right] + \Theta(n)$$

$$T(n) = 2 \cdot \left[2 \cdot \left[2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \Theta\left(\frac{n}{2^2}\right)\right] + \Theta\left(\frac{n}{2}\right)\right] + \Theta(n)$$

$$T(n) = 2^3\, T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 2^2\Theta\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2\Theta\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

RISULTA CHIARO CHE

$$T(n) = 2^K\, T\left(\frac{n}{2^K}\right) + \sum_{i=0}^{K-1} 2^i \Theta\left(\frac{n}{2^i}\right)$$

$$T(n) = 2^K\, T\left(\frac{n}{2^K}\right) + \Theta(n) \sum_{i=0}^{K-1} 1$$

$$T(n) = 2^K\, T\left(\frac{n}{2^K}\right) + \Theta(n) \cdot K - 1$$

l'iterazione viene eseguita fino al caso base, ossia $T(1) = \Theta(1)$.

quando $\frac{n}{2^k} = 1$? se $n = 2^k$, QUINDI

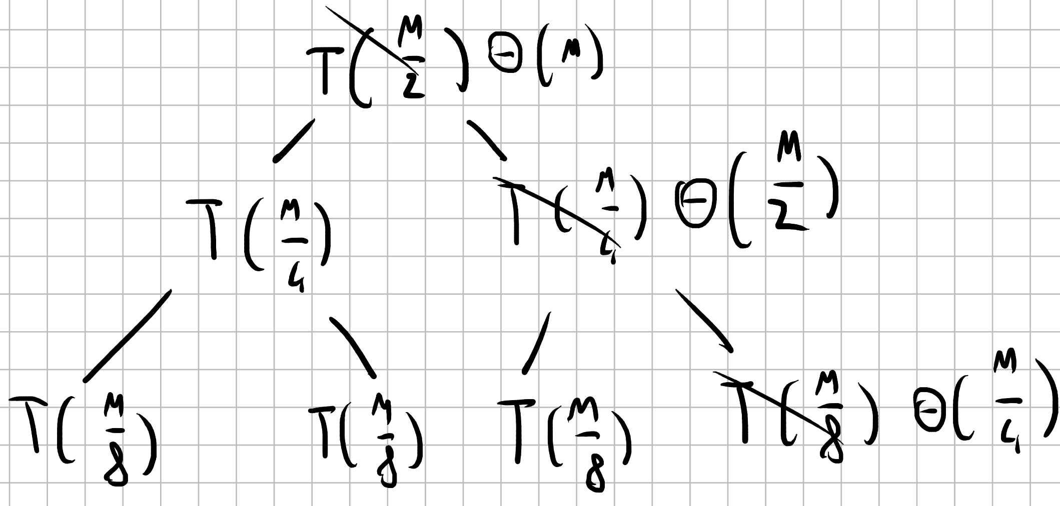
se $k = \log_2(n)$, dato che $n = 2^{\log_2 n}$

RISCRIVO:

$$T(n) = \log_2(n)\,\Theta(1) + \Theta(n) \cdot \log_2(n) - 1$$

$$T(n) = \Theta(\log(n)) + \Theta(n \cdot \log(n))$$

$$T(n) = \Theta(n \log(n))$$



Metodo principale

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$

$T(1) = \Theta(1)$

$a = 2$

$b = 2$

$f(n) = \Theta(n)$

$\log_a b = \log_2 2 = 1$

notiamo che $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

$\downarrow$

$\Theta(n) = \Theta(n)$

QUINDI, SECONDO IL SECONDO CASO DEL TEOREMA PRINCIPALE:

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log(n)\right)$$

OSSIA:

$$T(n) = \Theta\left(n \log(n)\right)$$

Metodo di sostituzione

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) \qquad T(1) = \Theta(1) \implies T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + c \qquad T(1) = d$$

si vuole dimostrare che

$$T(n) = O(n \cdot \log(n))$$

ossia

$$T(n) \leq K \cdot n \log(n)$$

dove K e' una costante arbitraria

CASO BASE

$$T(1) = d \implies d \leq K \cdot 1 \cdot \log_2(1) \implies d \leq 0$$

il caso base non puo' essere dimostrato per $T(1)$ allora:

$$T(2) = 2T(1) + c = 2d + c$$

$$T(2) \leq K2 \cdot \log 2$$

$$2d + c \leq K2 \implies d + \frac{c}{2} \leq K$$

IPOTESI INDUTTIVA

$\forall m < n$ vale che $T(m) \leq K \cdot m \log(m)$

PASSO INDUTTIVO

$$T(n) \leq K \cdot n \log(n)$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + c \quad \text{quindi}$$

$$2T\left(\frac{n}{2}\right) + c \le K \cdot n \log(n) \ !$$

SAPPIAMO CHE $\forall m < n, \ T(m) \le K m \log(m)$

E CHE $\frac{n}{2} < n$, quindi

$$T\left(\frac{n}{2}\right) \le K \cdot \frac{n}{2} \log\left(\frac{n}{2}\right)$$

! SE VOGLIAMO APPROSSIMARE a CON b, AVENDO $a \le b$ E $a \le c$, RISCRIVIAMO $\boxed{b \le c}$

RISCRIVIAMO

$$2\left[K \frac{n}{2} \log\left(\frac{n}{2}\right)\right] + c \le K n \log(n)$$

$$K n \log\left(\frac{n}{2}\right) + c \le K n \log(n)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$Kn\left[\log(n) - \log(2)\right] + c \le Kn \log(n)$$

$$Kn \log(n) - Kn + c \le Kn \log(n)$$

$$c \le Kn + Kn \log(n) - Kn \log(n)$$

$$c \le Kn$$