4. Separo le regole con tre o più elementi a destra e le divido in regole con due elementi a destra:

$$
\begin{aligned}
&S_0 \to \cancel{ASA}|\boldsymbol{AC}|aB|a|AS|SA \\
&S \to \cancel{ASA}|\boldsymbol{AC}|aB|a|AS|SA \\
&A \to b|\cancel{ASA}|\boldsymbol{AC}|aB|a|AS|SA \\
&\boldsymbol{C \to SA} \\
&B \to b
\end{aligned}
$$

5. Converto le regole con due elementi a destra di cui almeno uno un terminale:

$$
\begin{aligned}
&S_0 \to AC|\cancel{aB}|\boldsymbol{UB}|a|AS|SA \\
&S \to AC|\cancel{aB}|\boldsymbol{UB}|a|AS|SA \\
&A \to b|AC|\cancel{aB}|\boldsymbol{UB}|a|AS|SA \\
&C \to SA \\
&\boldsymbol{U \to a} \\
&B \to b
\end{aligned}
$$

2.3 Chiusura dei linguaggi acontestuali

Chiusura dell'unione in CFL

L'unione è chiusa in CFL, cioè:

$$\forall L_1, \dots, L_k \in \text{CFL} \implies \bigcup_{i=1}^{k} L_i \in \text{CFL}$$

Dimostrazione:
Dati $L_1, \dots, L_k \in$ CFL, allora esistono le CFG $G_1, \dots, G_k$ per cui $G_i = (V_i, \Sigma_i, R_i, S_i) | L(G_i) = L_i$.
Creo la CFG $G = (V, \Sigma, R, S)$ in cui:

- S è un nuovo stato iniziale
- $V = \bigcup_{i=0}^{k} V_i \cup \{S\}$
- $\Sigma = \bigcup_{i=0}^{k} \Sigma_i$
- $R = \bigcup_{i=0}^{k} R_i \cup \{S \to S_j | j \in [1, k]\}$

Presa una strina $w \in \bigcup_{i=1}^{k} L_i$, allora $\exists j | w \in L_j$, ma visto che esiste $(S \to S_j) \in R$ allora:

$$w \in L_j \implies S_j \overset{*}{\Rightarrow} w \implies S \Rightarrow S_j \overset{*}{\Rightarrow} w \implies w \in L(G)$$

Data invece $w \in L(G)$, le uniche regole applicabili su S sono $\{S \to S_j | j \in [1, k]\}$, allora:

$$w \in L(G) \implies \exists j | S \Rightarrow S_j \overset{*}{\Rightarrow} w \implies w \in L_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} L_i$$

Quindi:

$$L_1 \cup \cdots \cup L_k = L(G_1) \cup \cdots \cup L(G_k) = L(G) \in \text{CFL}$$

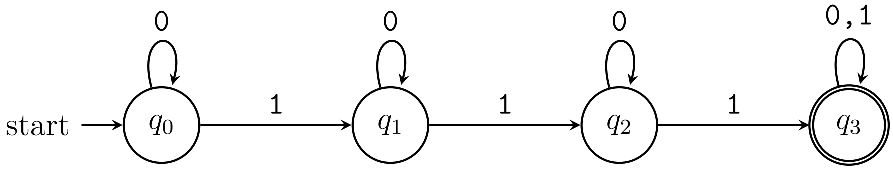
E

Esercizi

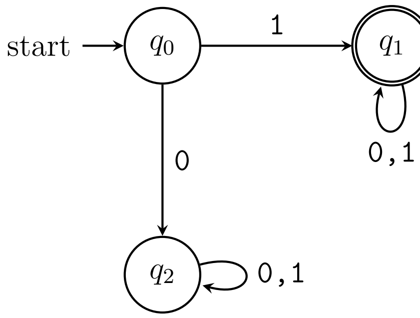
E.1 Esercizi sui linguaggi regolari

E.1.1 Costruire un automa da un linguaggio

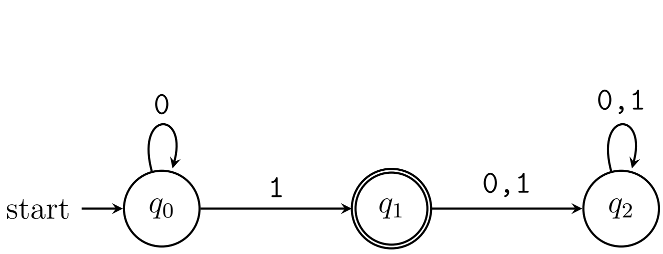
1. Dato un linguaggio $L(D) = \{x \in \{0,1\}^* | w_H(x) \geq 3\}$, per cui $w_H(x) = \{\text{numero di } 1 \text{ in } x\}$, costruire un DFA che accetta questo linguaggio:



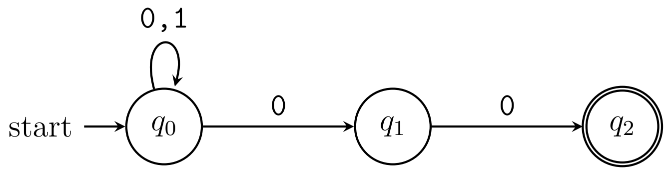
2. Dato un linguaggio $L(D) = \{x \in \{0,1\}^* | x = 1y \land y \in 0,1^*\}$, costruire un DFA che accetta questo linguaggio:



3. Dato un linguaggio $L(D) = \{x \in \{0,1\}^* | x = 0^n 1\}$, costruire un DFA che accetta questo linguaggio:



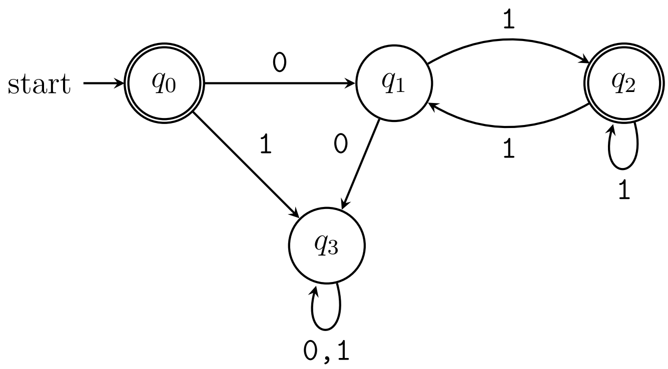
4. Dato un linguaggio $L = \{w \in \{0,1\}^* | w = x00 \ x \in \{0,1\}^*\}$, costruire un NFA che accetta questo linguaggio:



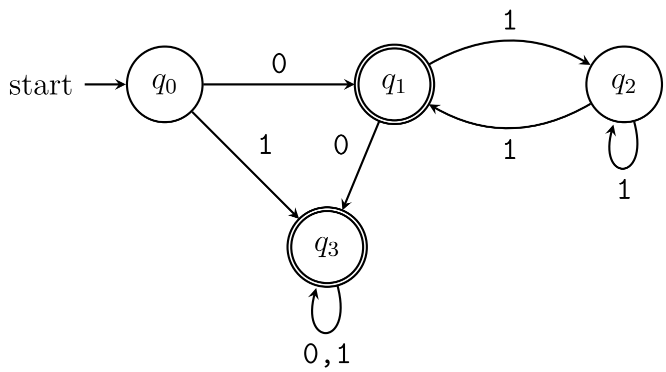
Dimostrazione per induzione:

- Caso base: $w = 00 \implies w \in L$
- Passo induttivo: $w = w'00$ $w = \{0,1\}^*$
  $w \in L$ perchè $\forall w'$ c'è sempre un ramo di computazione che si trova nello stato q_0. Quindi leggendo 00 alla fine arriva nello stato q_2, quindi $w \in L$.

5. Dato un linguaggio $L = \{w \in \{0,1\}^* | w \notin (01^+)^*\}$, costruire un DFA che accetta questo linguaggio:
   Posso creare un DFA che accetta il linguaggio complementare $\neg L = \{w \in (01^+)^*\}$:

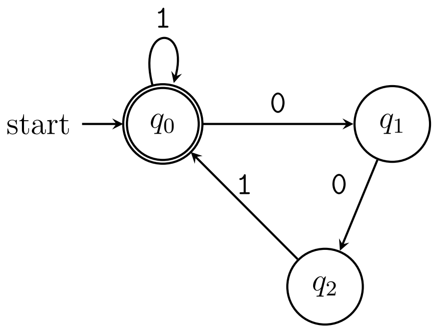


Quindi il DFA che accetta il linguaggio iniziale è quello con gli stati accettanti invertiti rispetto a quello sopra:



E.1.2 Costruire un automa da un'espressione regolare

1. Data l'espressione regolare $r = 1^*(001^+)^*$ costruire il DFA equivalente a r:



E.1.3 Dimostrare che un linguaggio non è regolare

1. Dimostrare che il linguaggio

$$L = \{ww^R | w \in \{0,1\}^*\}$$

dove w^R è w rovesciata ($w = 100 \implies w^R = 001$) non è regolare:
Presa la stringa $w = 0^p 110^p \in L$ con $|w| \geq p$ e $|xy| < p$ allora y contiene solo 0.
Scrivo $w = 0^k 0^l 0^m 110^p$ con:

- $x = 0^k$ $k \geq 0$
- $y = 0^l$ $l > 0$
- $z = 0^m 110^p$
- $k + l + m = p$

Con $i = 2$ la stringa $xy^2z = 0^k 0^{2l} 0^m 110^p \implies k + 2l + m > p \implies xy^2z \notin L \implies L$ non è regolare.

2. Dimostrare che il linguaggio

$$L = \{1^{n^2} | n \geq 0\}$$

non è regolare:
Presa la stringa $w = 1^{p^2}$ con $|w| > p$ e $|xy| < p$.
Scrivo $w = 1^k 1^l 1^{p^2-k-l}$ con:

- $x = 1^k$ $k \geq 0$
- $y = 1^l$ $l > 0$
- $z = 1^{p^2-l-k}$
- $k + l \leq p$

Con $i = 2$ la stringa $xy^2z = 1^k 1^{2l} 1^{p^2-l-k} = 1^{p^2+l} \implies p^2 < |xy^2z| < (p+1)^2 \implies xy^2z \notin L \implies L$ non è regolare.