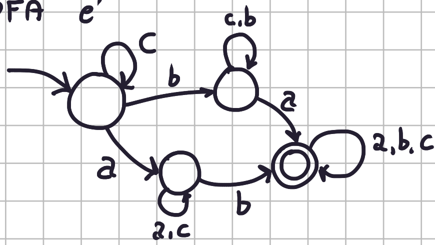
1 Automi — 10 Points

- Si scriva un'espressione regolare per il linguaggio costituito dall'insieme di stringhe su alfabeto $\{a, b, c\}$ contenenti almeno una a ed almeno una b. Si determini un DFA che riconosca lo stesso linguaggio.
- Definire la forma normale di Chomsky per grammatiche acontestuali. Dimostrare che ogni linguaggio acontestuale è generato da una grammatica acontestuale in forma normale di Chomsky.

Il DFA e'



$L = \{ \omega \in \{a,b,c\}^* \text{ t.c. } \exists i,j \;\; i \neq j, \;\; \omega[i] = a \land \omega[j] = b \}$

l'espressione regolare e' $r = (\Sigma^* a \Sigma^* b \Sigma^*) \cup (\Sigma^* b \Sigma^* a \Sigma^*)$

Una grammatica e' in CNF se ogni sua regola e' del tipo:
$A \to BC$ oppure $A \to u$ dove $B \neq S \land C \neq S$ se S e' la variabile inziale.
$A, B, C \in V$, $u \in \Sigma$ e $S \to \varepsilon$ e' permessa. Va dimostrato che se G e' una grammatica, esiste G_N in CNF tale che $L(G) = L(G_N)$.
Sia $G = \{V, \Sigma, S, R\}$ e $G_N = \{V_N, \Sigma, S_0, R_N\}$, si ha che $S_0 \to S \in R$.
$\forall$ regola $A \to \varepsilon$, si elimina, e se esiste $B \to uAv$, si aggiunge in R_N $B \to uv$ dove $u, v \in (\Sigma \cup V)^*$. Se $A \to B \in R$ e $A, B \in V$, per ogni $C \to uAv$ si aggiunge in R_N $C \to uBv$. Si considerano le regole $A \to u_1 u_2 \cdots u_k$, si aggiunge
$A \to u_1 U_1 \quad U_1 \to u_2 U_2 \quad U_2 \to u_3 U_3 \cdots U_{k-2} \to u_{k-1} u_k$. Per ogni regola $A \to uB$ oppure $A \to Bu$ si aggiunge $A \to A_1 B$ e $A_1 \to u$. Al termine G_N genera $L(G)$.

2 Calcolabilità — 10 Points

- Per $k \in \mathbb{N}$, siano $L_1, \ldots, L_k$ linguaggi arbitrari su un alfabeto Σ. Si assuma che: (i) $L_i \cap L_j = \emptyset$, per ogni $i \neq j$; (ii) $L_1 \cup \cdots \cup L_k = \Sigma^*$; (iii) L_i è Turing-riconoscibile, per ogni $i \in [k]$. Dimostrare che i linguaggi $L_1, \ldots, L_k$ sono decidibili.
- Dimostrare che il linguaggio $E_{TM} = \{\langle M \rangle : M \text{ è una TM ed } L(M) = \emptyset\}$ è indecidibile.

Sia L_i con i Fissato, questo e' riconoscibile, e' decidibile se $\overline{L_i}$ e' riconoscibile. $\exists L_i^1, L_i^2, L_i^3 \ldots L_i^k$ t.c. $\bigcup_{\ell}^{k} L_i^{\ell} = L_j$ e $L_j = \overline{L_i}$ e l'unione di piu' linguaggi riconoscibili e' un linguaggio riconoscibile $\Rightarrow L_i$ e' decidibile.

$A_{TM} \leq_m E_{TM} \Rightarrow \exists R$ t.c. $\omega \in A_{TM} \Leftrightarrow R(\omega) \in E_{TM}$. R ha in input M, ω. Si comporta così:

- Su input M, ω
- costruisce M'
  - M' su input x:
  - rifiuta se $x \neq \omega$
  - accetta se $M(\omega)$ rifiuta
- restituisce M'

Se $\langle M, \omega \rangle \in A_{TM} \Rightarrow R(\langle M, \omega \rangle) = M'$ e $M' \begin{cases} \text{rifiuta} & \text{se } x \neq \omega \\ \text{rifiuta} & \text{se } M(\omega) = 1 \end{cases} \Rightarrow \langle M, \omega \rangle \in A_{TM} \Rightarrow L(M') = \emptyset$

Se $\langle M, \omega \rangle \notin A_{TM} \Rightarrow R(\langle M, \omega \rangle) = M'$ e $M' \begin{cases} \text{rifiuta} & \text{se } x \neq \omega \\ \text{accetta} & \text{se } M(\omega) = 0 \end{cases} \Rightarrow \langle M, \omega \rangle \notin A_{TM} \Rightarrow L(M') \neq \emptyset$

3 Complessità 10 Points

- Si consideri la classe di linguaggi decidibili in tempo quasi polinomiale, ovvero

$$\mathsf{QP} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathsf{DTIME}(n^{(\log n)^k}).$$

Siano L_1 ed L_2 due linguaggi. Stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa: Se $L_1 \leq_p^m L_2$ ed $L_2 \in \mathsf{QP}$, allora $L_1 \in \mathsf{QP}$. Motivare la risposta.

- Definire le classi di complessità PSPACE ed NPSPACE. Dimostrare che PSPACE = NPSPACE.

Se L_1 si riduce in tempo polinomiale ad L_2, allora se la riduzione ha costo $O(n^l) \Rightarrow L_1$ può essere deciso in $O(n^l + n^{\log^k n}) = O(n^{\log^k n}) \Rightarrow$ l'aff. e' vera.

$PSPACE = \bigcup_k Dspace(n^k)$

$NPSPACE = \bigcup_k Nspace(n^k)$

$\Rightarrow$ e' banale che $PSPACE \subseteq NPSPACE$, bisogna dimostrare che $NPSPACE \subseteq PSPACE$

essendo che $NSPACE(f(n)) \subseteq DSPACE(f^2(n))$

$\Rightarrow NPSPACE \subseteq PSPACE$