**Exercise 1**: Given a general linear program in equational form

$$\max c^T x \quad Ax = b \quad x \geq 0$$

Let $x$ and $y$ be optimal solutions to the problem. Prove or disprove the following statements:

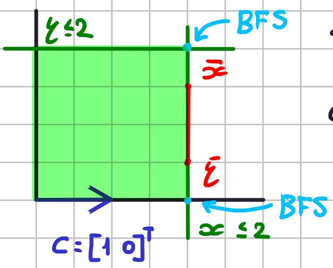
i. Any convex combination of $x$ and $y$ is also an optimal solution of the linear program. Recall that a convex combination of two points $x$ and $y$ is any point $z = \alpha x + (1 - \alpha x)$ for some $\alpha \in [0, 1]$

ii. There exists an optimal solution $z$ on the line through $x$ and $y$ which is also basic feasible solution.

**i)** Sia $\gamma$ l'ottimo $\Rightarrow c^T x = c^T y = \gamma$. Sia $z = \alpha x + (1-\alpha) y$

$c^T(\alpha x + (1-\alpha) y) = \alpha c^T x + (1-\alpha) c^T y = \alpha\gamma + (1-\alpha)\gamma = \gamma \Rightarrow c^T z = \gamma \Rightarrow z$ e' soluzione ottimale.

**ii)** Non e' necessariamente vero, se $x$ oppure $y$ sono una BFS, allora il segmento di linea comprende uno dei 2, se invece non sono BFS, sul segmento di linea non ci sara' una BFS (vertice). Il controesempio e':




sul segmento in rosso non c'e' una BFS.

$$LP = \begin{cases} \max\ x \\ \text{s.t.}\quad x \leq 2 \\ \quad\quad y \geq 2 \\ \quad\quad x, y \geq 0 \end{cases}$$

$\bar{x} = [2, \frac{3}{2}]^T \qquad \text{BFS} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

$\bar{y} = [2, \frac{1}{2}]^T$

$$L = \alpha\bar{x} + (1-\alpha)\bar{y} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x = 2 \wedge y \in [\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}] \right\}$$

$\Rightarrow L \cap \text{BFS} = \emptyset.$

**Exercise 2**: consider the primal problem **(P)**

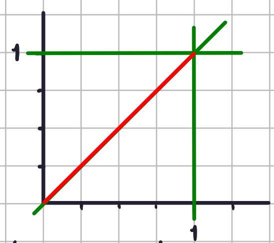
$$\max\ -p_1 x + p_2 y \quad x - y = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

State the dual problem $(D)$ and discuss the range of optimal feasible solutions to $(P)$ and $(D)$ in each of these cases:

- $p_1 < p_2$
- $p_1 = p_2$
- $p_2 < p_1$

Il problema duale e':

$$(D) = \begin{cases} \min\ y_2 + y_3 \\ y_1 + y_2 \geq -p_1 \\ -y_1 + y_3 \geq p_2 \\ y_1 \in \mathbb{R} \\ y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$




e' la retta in rosso.

**CASO $p_1 = p_2$)** Il poliedro del problema (P) e' il seguente:

Se $p_1 = p_2$, il vettore $c = [-p, p]^T$ e' parallelo alla retta delle sol. ammissibili, e tutte le sol. sono ottimali con ottimo $= 0$, per il teo della dualita' Forte, anche l'ottimo di (D) e' $0 \Rightarrow y_2, y_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 \geq -p_1 = -p_2 \\ y_1 \leq -p_2 \end{cases} \Rightarrow y_1 = -p_1 \Rightarrow$ l'unica soluzione di (D) e' $y^* = [p_1\ 0\ 0]^T$.

**CASO $p_1 > p_2$)** in tal caso, la retta parallela a $c = [-p_1, p_2]^T$ ~~interseca la retta delle soluzioni solo se passante per l'origine,~~ per ogni $(x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow c^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} < 0$

$\Rightarrow$ l'ottimo e' in $[0, 0]^T$. Riguardo (D), valgono considerazioni simili:

l'ottimo di (D) e' $0 \Rightarrow y_2, y_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 \geq -p_1 \\ -y_1 \geq p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 \geq -p_1 \\ y_1 \leq -p_2 \end{cases} \Rightarrow y_1 \in [-p_2, -p_1] \Rightarrow$

l'insieme delle sol. ottimali e' $\{[K\ 0\ 0]^T \in \mathbb{R}^3 : K \in [-p_2, -p_1]\}$

**CASO $p_1 < p_2$)** in tal caso, per (P) la sol oltimale e' $[1,1]^T$ perché'

$c^T x = -p_1 + p_2 = (p_2 - p_1) > 0 \Rightarrow$ l'oltimo di (D) e' $p_2 - p_1 \Rightarrow y_2 + y_3 = p_2 - p_1$

$\Rightarrow$ L'insieme delle sol. oltimali e' dato da $y_1, y_2, y_3$ t.c.

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq -p_1 \\ -y_1 + y_3 \geq p_2 \\ y_2 + y_3 = p_2 - p_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 \geq y_3 - p_2 \\ y_3 \geq y_1 + p \\ y_2 = p_2 - p_1 - y_3 \end{cases}$$

**Exercise 3**: give an example of a linear program with a degenerate pivot. Include a justification of why the pivot is degenerate.

Si consideri

$$\begin{cases} \max\ x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \max\ x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_5 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la sol. $x = [0\ 1\ 0\ 0\ 0]$ e' degenere perché ha delle variabili di base uguali a zero.

**Exercise 4**: solve the following linear program with the simplex method

$$\max\ 2x_1 + x_2 - x_3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8$$
$$-x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Aggiungo le slack variable e comincio con $B = \{4, 5\}$

$B = \{1, 5\}$ e' oltimale

$$\begin{cases} y_4 = -x_1 - 2x_2 - x_3 + 8 \\ y_5 = x_1 - x_2 + 2x_3 + 4 \\ z = 2x_1 + x_2 - x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -y_4 - 2x_2 - x_3 + 8 \\ y_5 = -y_4 - 3x_2 + x_3 + 12 \\ z = -2y_4 - 3x_2 - 3x_3 + 16 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la sol. oltimale al problema originale e' $x^* = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

**Exercise 5**: prove or disprove the following statement

If a linear programming problem has a unique solution, then the dual also has a unique optimal solution.

E' falso, si consideri

$$P: \begin{cases} \max\ x_1 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad D: \begin{cases} \min\ y_1 + y_2 \\ y_1 \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

infinite soluzioni

unica sol. in $y = [1\ 0]^T$