

# Metodi Matematici per l'Informatica

Esame (a.a. 20/21, I canale) - Docente: Lorenzo Carlucci - Data: 9 Settembre 2021

## Parte 1

**Esercizio 1** Consideriamo un sistema di password formato da 5 lettere (scelte le 26 lettere dell'alfabeto latino, solo maiuscole) seguite da 2 cifre seguite da 2 caratteri speciale scelto tra \$, !, e %.

1. Quante password hanno la prima lettera del vostro nome come primo simbolo?
2. Quante password hanno L come prima lettera o ! come ultimo simbolo?
3. Quante targhe contengono esattamente un 9 ed esattamente una P?

**Esercizio 2** Un gelataio offre 6 gusti alla frutta, 7 creme e 5 varietà di cioccolato.

1. Quanti gelati da 5 gusti posso comporre?
2. Quanti gelati a 4 gusti con esattamente 2 alla frutta?
3. Quanti gelati a 5 gusti di cui almeno uno alla frutta e almeno uno al cioccolato?

**Esercizio 3** Sia  $f : X \rightarrow Y$  e siano  $A$  e  $B$  due sottinsiemi del dominio  $X$  (ossia  $A \subseteq X$  e  $B \subseteq X$ ). Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false. (NB: per un qualunque  $S \subseteq X$  con  $f(S)$  si indica l'insieme  $\{y \in Y : \text{ per qualche } s \in S \text{ vale } f(s) = y\}$ ).

1.  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .
2.  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .
3.  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cup f(B)$ .

**Esercizio 4** Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1.  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{X \subseteq \mathbb{N} : X \text{ di cardinalità infinita}\}$  è numerabile.
2. Esistono infinite funzioni suriettive da  $\mathbb{R}$  in  $\{0, -1, -2, -3, \dots\}$ .
3. Ogni funzione da  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  è iniettiva.

**Esercizio 5** Consideriamo la seguente relazione  $\prec$  definita su coppie di intervalli chiusi della retta reale:  $[x, y] \prec [w, z]$  se e solo se  $[x, y] \subseteq [w, z]$  oppure  $y < w$ . Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1. La relazione  $\prec$  è riflessiva.
2. La relazione  $\prec$  è antisimmetrica.
3. La relazione  $\prec$  è transitiva.

## Parte 2

**Esercizio 6** Dimostrare per Induzione che, per ogni  $n \geq 0$ ,  $n = 3 \cdot a + b$  per qualche  $a, b \in \mathbb{N}$  con  $0 \leq b < 3$ . Specificare il Caso Base, l'Ipotesi Induttiva e la dimostrazione del Passo Induttivo.

**Esercizio 7** Trovare l'errore (o gli errori) nella seguente dimostrazione per induzione forte.

**Tesi:** Per ogni  $n \geq 0$ ,  $7 \times n = 0$ .

**Base:** Se  $n = 0$  allora  $7 \times n = 7 \times 0 = 0$ .

**Passo:** Assumiamo che la tesi sia vera per tutti i numeri da 0 a  $n$ , per un generico intero  $n \geq 0$ . Dimostriamo che è vera per  $n + 1$ . Possiamo scrivere  $n + 1 = a + b$  con  $a, b$  interi  $0 \leq a, b \leq n$ . Per Ipotesi Induttiva abbiamo  $7 \times a = 0$  e  $7 \times b = 0$ . Dunque  $7 \times (n + 1) = 7 \times (a + b) = 7 \times a + 7 \times b = 0 + 0 = 0$ .

**Esercizio 8** Il vostro aereo ha tre pulsanti: sul primo e sul secondo è scritto: "Questo pulsante non innesca il pilota automatico", mentre sul terzo è scritto: "Il primo pulsante innesca il pilota automatico". Sapete che solo uno dei pulsanti innesca il pilota automatico e che solo una delle scritte sui pulsanti è vera. Formalizzare i dati del problema in logica proposizionale e decidere (usando un metodo a piacere) quale pulsante innesca il pilota automatico.

**Esercizio 9** La seguente formula proposizionale in CNF è soddisfacibile?

$$\{\{\neg p, \neg q, r\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{p, q, \neg r\}\}.$$

Se si risponde "SI" definire un assegnamento che la soddisfa, se si risponde "NO" dimostrare l'insoddisfacibilità usando la regola di Risoluzione.

**Esercizio 10** Consideriamo i seguenti due enunciati predicativi contenenti il simbolo  $R$  di relazione binaria.

1.  $\exists y \forall x R(x, y) \rightarrow \forall x \exists y R(x, y)$ .

2.  $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \neg(x = y))$ .

Se il vostro mese di nascita è pari specificare una interpretazione in cui il primo enunciato è vero e una interpretazione in cui il secondo è falso. Se il vostro mese di nascita è dispari specificare una interpretazione in cui il primo enunciato è falso e una interpretazione in cui il secondo enunciato è vero. Indicare in ciascun caso il dominio della struttura e le interpretazioni del simbolo  $R$ .