Funzioni continue in un intervallo

Riguardo il teorema di Weierstrass

Condizioni da soddisfare affinchè il teorema di Weierstrass valga:

1. L'insieme è aperto $I = (a, b)$

$$f(x) = x \text{ in } (0,1) \qquad \inf(f) = 0 \text{ il minimo non esiste}$$
$$\sup(f) = 1 \text{ il massimo non esiste}$$
$$\text{Non esiste una } x \text{ in } (0,1) \text{ tale che } f(x) = 0 \text{ o } f(x) = 1$$

2. L'insieme non è limitato

$$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R} \;\; f(x) = \frac{1}{x}$$
$$\inf(x) = 0$$
$$\text{non esiste il minimo in } [1, +\infty)$$
$$\text{dato che non esiste nessun } x \text{ in } [1, +\infty) \text{ tale che } f(x) = 0$$

3. $f(x) = \begin{cases} x \;\; in (0,1) & f[0,1] \to \mathbb{R} \\ \frac{1}{2} \; per \; x = 0 \; e \; x = 1 & f \; non \; è \; continua \; in \; 0 \; e \; 1 \end{cases}$

$$\inf(f) = 0 \quad \sup(f) = 1$$

Ma non sono massimi e minimi

Corollario :

Se f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ con f continua in $[a, b]$ allora

$\forall \, l \; \in [m, M] dove \; m = \min(f), M = \max(f) \, \exists \, x \in [a, b] tale \; che \; f(x) = l$

Funzioni monotone in I

Teorema : sia f una funzione definita in un intervallo I, allora se f è monotona in I esiste:

$$\lim_{n \to c^-} f(x) \;\; e \; \lim_{n \to c^+} f(x)$$

Dimostrazione ipotesi

$$x_1, x_2 \; \in I, x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2) \text{ se } f \text{ è monotona crescente}$$

$$x_1, x_2 \; \in I, x_1 > x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2) \text{ se } f \text{ è monotona decrescente}$$

$$\Delta = \sup\{f(x), x < c\} \; tesi : \lim_{n \to c^-} f(x) = \Delta$$
$$f(x) \leq \Delta$$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \overline{x} < c \;\; tale \; che \; f(x) > \Delta - \varepsilon$$

$$\bar{x} < x \to f(\bar{x}) < f(x)$$

in modo analogo dimostriamo che

$$\Gamma = \sup\{f(x), x > c, x \in I\} \lim_{n \to c^+} f(x) = \Gamma$$

Le funzioni monotone ma non continue hanno solo discontinuità di salto.

Funzione inversa

Teorema : $f: I \to \mathbb{R}, I\ intervallo, f\ continua\ in\ I$
f è $invertibile\ se\ e\ solo\ se$ è $monotona$
$in\ I, inoltre\ la\ funzione\ inversa$ è $continua\ e\ monotona$

Dimostrazione :

f non è monotona cioè $x_1 < x_2 < x_3\ tale\ che$
$f(x_1) < f(x_2)\ e\ f(x_2) > f(x_3)$
$\forall\ l\ \in \big(f(x_1), f(x_2)\big) \exists\ \overline{x}\ \in (x_1, x_2)\ tale\ che\ f(\bar{x}) = l$
$\forall\ k\ \in \big(f(x_3), f(x_2)\big) \exists\ \bar{\bar{x}}\ \epsilon\ (x_3, x_2) tale\ che\ f(\bar{\bar{x}}) = k$
$m \in \big(f(x_1), f(x_2)\big) \cap \big(f(x_3), f(x_2)\big) \to f(x) = m\ \ \bar{x} \in (x_1, x_2)$
$f(x) = m\ \bar{\bar{x}}\ \in (x_3, x_2)$

f è $continua\ e\ monotona$:
$y_1 < y_2 \to f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \to f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$
$f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2) \to x_1 < x_2$

f^{-1} è monotona quindi se non fosse continua avrebbe delle circostanze di salto :

$I\ in\ f^{-1}$ non sarebbe un intervallo.

$$f(x) = \begin{cases} x^{\bar{c}} + \sin^2 x > 0 \\ ax + b\ x \leq 0 \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R}$, b $\in \mathbb{R}$ f continua in $\lim_{x \to 0^+} x^2 \sin^2 x = \lim_{x \to 0^-} ax + b \to 0 = b$

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \to a = 0\ \ e\ \ b = 0$
- Non esiste $\lim_{x \to 0} f(x)$ basta perdere $b \neq 0$ perché $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$
- $f\ limitato\ inferiormente : a \leq 0 \to ax + b \geq b\ per\ x \leq 0$
  $x^2 + \sin^2 x \geq 0 \to f(x) \geq \min\{0, b\}$