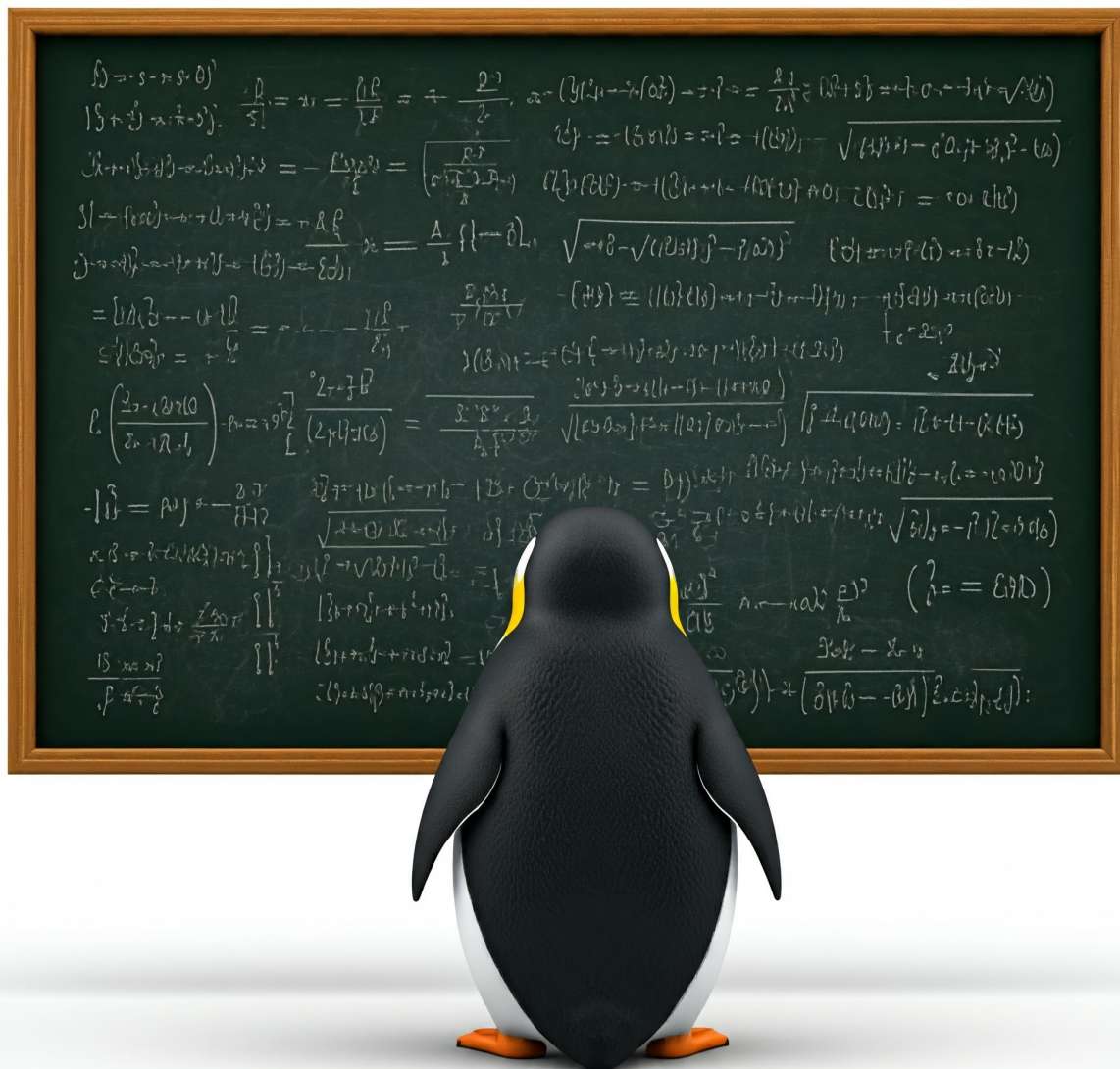


Calcolo Integrale



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica
Dipartimento di Informatica



Questo documento è distribuito sotto la licenza [GNU](#), è un resoconto degli appunti (eventualmente integrati con libri di testo) tratti dalle lezioni del corso di Calcolo Integrale per la laurea triennale in Informatica. Se dovessi notare errori, ti prego di segnalarmeli.

nota bene : questi appunti sono estremamente riassuntivi, non possono essere sostituiti completamente al libro di testo.

INDICE

1	Serie numeriche	3
1.1	Convergenza	3
1.1.1	Serie geometriche	4
1.1.2	Serie armoniche	4
1.1.3	Teoremi sulle serie e criteri di convergenza	5
1.1.4	Diagramma di flusso per le serie	7
1.2	Serie di Taylor	8
1.2.1	Polinomio di Taylor	8
1.2.2	Calcolo delle derivate	9
1.2.3	Serie di Taylor notevoli	10
1.3	Serie di potenze	10
1.3.1	Raggio di convergenza	11
1.3.2	Calcolo del raggio	12
2	Integrali	14
2.1	Integrale di Riemann	14

CAPITOLO

1

SERIE NUMERICHE

Definizione : Una serie numerica, è una successione costruita a partire da altre successioni. Il valore n -esimo è la somma di tutti i valori precedenti della successione.

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k \text{ con } n \in \mathbb{Z}^+$$

Ad esempio

$$a_n = n^2 \implies S_3 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

1.1 Convergenza

La somma molto spesso viene valutata per n che tende all'infinito, un altro esempio di serie numerica è il seguente

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Una serie numerica viene caratterizzata dalla sua *convergenza*.

Definizione : Una serie numerica S_n si dice **convergente** se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = l$$

Si scrive anche

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k < \pm\infty$$

Diversamente, se la somma degli infiniti termini della serie vale $\pm\infty$, la serie si dice *divergente*, un classico esempio di serie divergente è il seguente

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 \dots = \infty$$

Infine una serie può non essere divergente, ma nemmeno convergente, ossia non è definito un valore alla quale converge, si dice *non convergente* o *irregolare*, un tipico esempio è

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$$

1.1.1 Serie geometriche

Una serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ si dice serie **geometrica** se a_k è della forma q^k , ossia quando il valore k -esimo della sommatoria è posto come esponente ad un numero reale.

Proposizione : vale la seguente

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Dimostrazione : Si consideri

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + q^3 \cdots + q^n$$

si moltiplicano entrambi i membri per $(1 - q)$

$$(1 - q) \cdot S_n = (1 - q) \cdot \left(\sum_{k=0}^n q^k \right) = 1 + q + q^2 + q^3 \cdots + q^n \implies (1 - q) \cdot S_n = 1 - q^{n+1}$$

Divido entrambi i membri per $(1 - q)$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{(1 - q)} \blacksquare$$

Considerando q^k , assume diversi valori per $k \rightarrow \infty$ in base ai valori di q

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q^k = \begin{cases} 0 & \text{se } q \in (-1, 1) \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ \infty & \text{se } q > 1 \\ \text{indeterminato} & \text{se } q < -1 \end{cases}$$

Di una serie geometrica, è possibile stabilirne il carattere in base al valore di q , di fatto si ha che

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} 0 & \text{se } q = 0 \\ \frac{1}{1-q} & \text{se } q \in (-1, 1) \\ \infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{indeterminato} & \text{se } q < -1 \end{cases}$$

1.1.2 Serie armoniche

Una serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ si dice serie **armonica** se il valore k -esimo della sommatoria è posto come denominatore della successione, ed è elevato ad un numero reale.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^a} \quad a \in \mathbb{R}$$

Se l'esponente reale a è maggiore di 1, la sommatoria converge, se invece è compreso fra 0 ed 1, diverge.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^a} = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \text{se } a > 1 \\ \infty & \text{se } a \in [0, 1] \end{cases}$$

Vediamo un esempio, si vuole sapere se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos^2(k)}{k^2}$ sia divergente oppure no. Innanzitutto, notiamo come $\cos^2(k)$ sia limitato, quindi sempre minore o uguale ad 1, come mostrato in figura 1.1.2.

$$\frac{\cos^2(k)}{k^2} \leq \frac{1}{k^2} \implies \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos^2(k)}{k^2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Essendo che $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge ad un valore finito, allora necessariamente

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos^2(k)}{k^2} < \infty$$

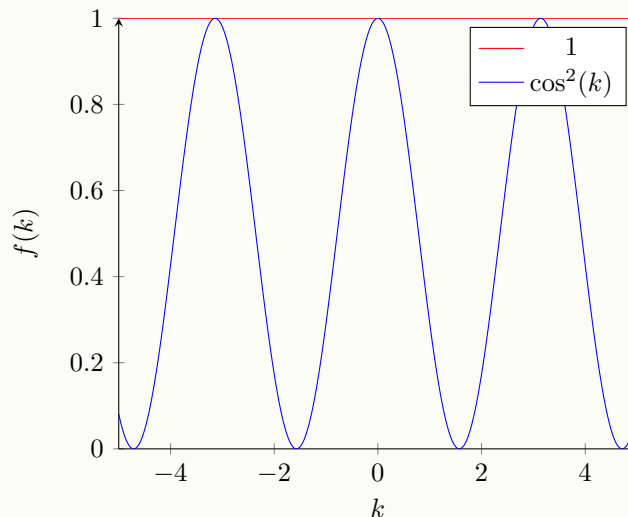


Figura 1.1: coseno limitato

1.1.3 Teoremi sulle serie e criteri di convergenza

In questa sezione verranno presentati alcuni teoremi fondamentali riguardo la convergenza delle serie.

Teorema della condizione necessaria : Sia S_n una serie convergente, del tipo

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = l \in \mathbb{R}$$

allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$$

Dimostrazione :

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = (a_1 + a_2 \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 \cdots + a_{n-1}) = a_n \implies \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$$

Teorema sulle serie a termini positivi : Sia $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, si ha che

$$a_k \geq 0 \quad \forall k \implies S_n \begin{cases} \text{converge} \\ \text{diverge a } +\infty \end{cases}$$

Teorema del confronto : Siano a_k e b_k due successioni tali che $0 < a_k < b_k$, allora

- $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \implies \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$

Consideriamo adesso due successioni a_k e b_k tali che $0 < a_k \wedge 0 < b_k$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = l$, allora

- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty \iff \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \iff \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$

Questo teorema ci dice che, se due successioni si comportano asintoticamente allo stesso modo, allora le serie che le hanno come termini si comporranno allo stesso modo riguardo la convergenza, e possono essere approssimate ad una stessa funzione.

Il seguente criterio è detto *del rapporto e della radice*, sono in realtà due differenti criteri, con premesse differenti ma che espongono la stessa tesi. Sia $a_k \geq 0$, tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L \neq 1 \quad \text{oppure} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = L \neq 1$$



allora

$$\begin{cases} \text{la serie converge se } L \in [0, 1) \\ \text{la serie converge se } L > 1 \end{cases}$$

La seguente formula è detta formula di **Sterling** e descrive il comportamento asintotico della funzione fattoriale, riguardo la velocità della sua crescita verso infinito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x!}{x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}} = 1$$

Teorema del criterio di Leibniz : Si consideri una serie, in cui è presente il termine $(-1)^k$, nonostante il segno non sia costante, tale criterio permette di decretare la convergenza della serie. La serie in questione è del tipo

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot b_k$$

dove b_k è una successione che soddisfa le seguenti condizioni :

1. b_k è sempre maggiore di zero
2. b_k è decrescente
3. b_k tende a zero

In tal caso, la serie S_n è convergente.

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ una serie, si dice che essa **converge assolutamente** se

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty$$

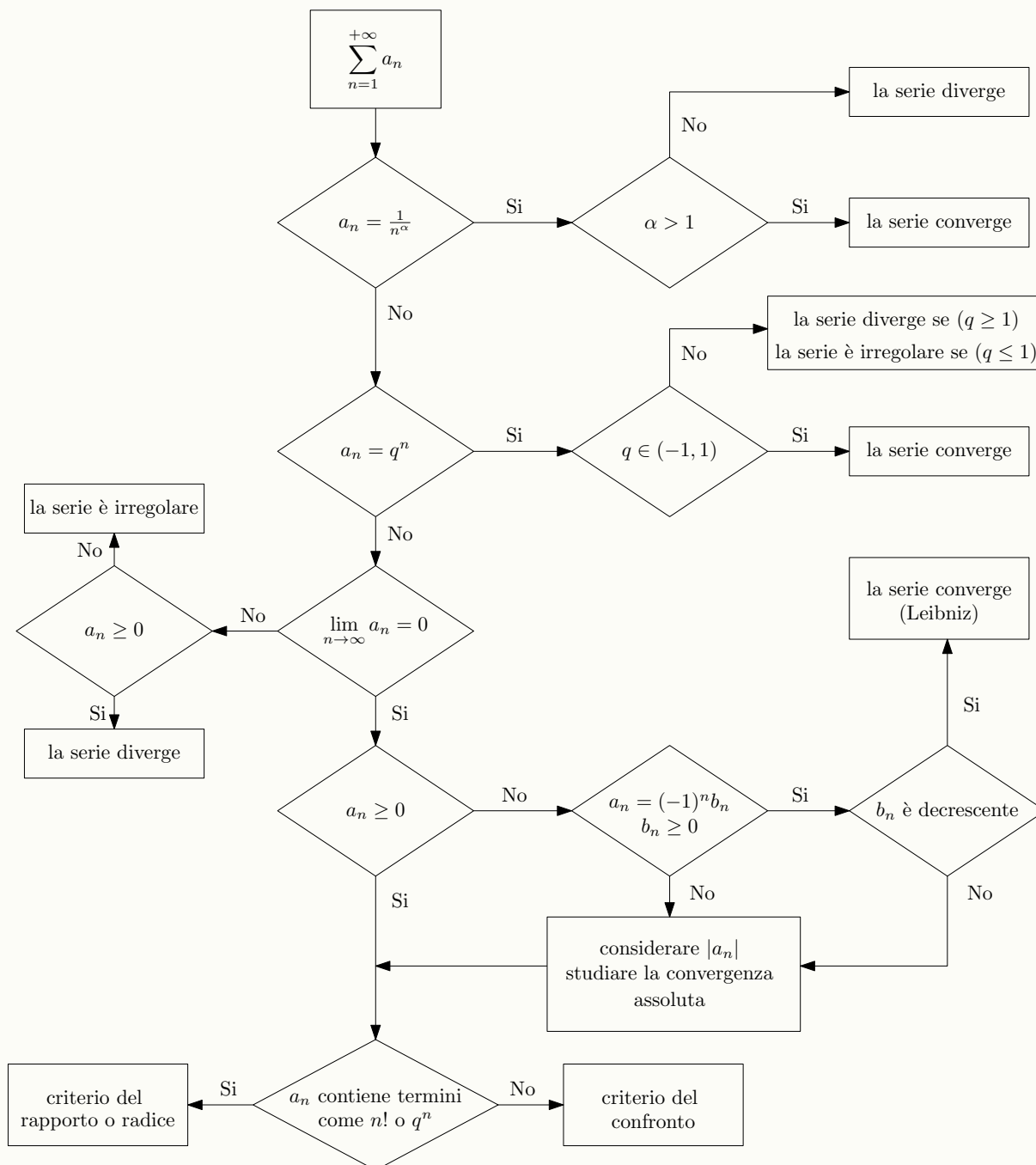
allo stesso modo, **diverge assolutamente** se

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \pm\infty$$

Teorema : Sia S_n una serie, se essa converge assolutamente, allora è convergente.

1.1.4 Diagramma di flusso per le serie

Viene lasciato a disposizione dello studente il seguente diagramma di flusso utile nello studio del carattere di una serie numerica



1.2 Serie di Taylor

1.2.1 Polinomio di Taylor

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile infinite volte, definiamo come polinomio di Taylor di f di grado n , il polinomio, appunto, di grado n , che approssima al meglio f rispetto qualsiasi altro polinomio distinto in un punto fissato x_0 .

Indichiamo tale polinomio $T_{n,x_0}(f(x))$, il grado può essere anche minore di n , vale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_{n,x_0}(f(x))}{(x - x_0)^n} = 0$$

Si può scrivere che

$$f(x) = T_{n,x_0}(f(x)) + o((x - x_0)^n)$$

tale funzione nel punto fissato è identica al suo polinomio di Taylor, a meno di un errore di approssimazione dato dalla presenza del termine $o((x - x_0)^n)$.

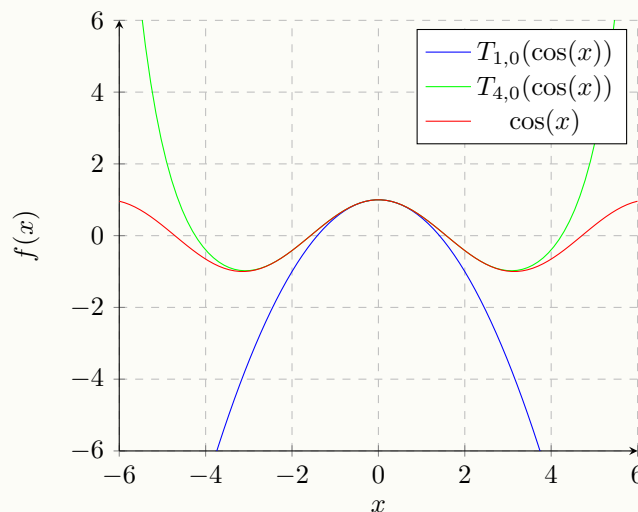


Figura 1.2: Polinomio di Taylor

Il polinomio di Taylor di una funzione esiste ed è **unico**, ed è descritto esplicitamente dalla seguente

$$T_{n,x_0}(f(x)) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

con $f^{(k)}$ si intende la derivata k -esima di f . Il resto del polinomio può essere scritto anche sotto una diversa forma detta resto di Lagrange

$$f(x) = T_{n,x_0}(f(x)) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Per le funzioni note, come quelle trigonometriche o per la funzione esponenziale, vi sono degli sviluppi noti, vediamo alcuni fissati nel punto $x_0 = 0$

$$T_{n,0}(\cos(x)) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

$$T_{n,0}(\sin(x)) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Quando il resto di Lagrange tende a zero, il polinomio di Taylor converge alla funzione che approssima, ed essa può essere riscritta in tali termini

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Un esempio concreto è quello della funzione esponenziale

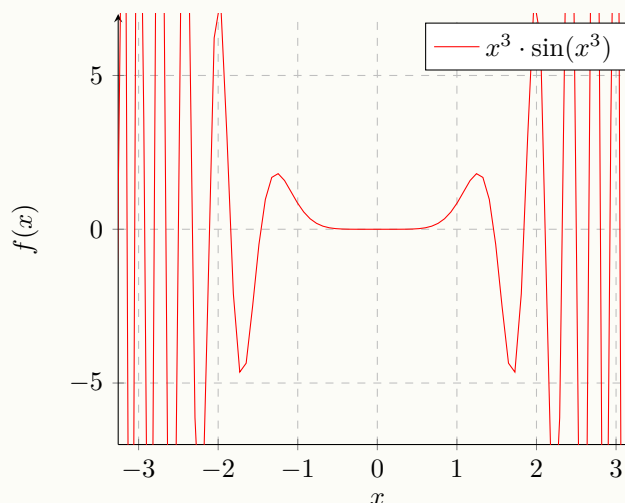
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

1.2.2 Calcolo delle derivate

Se una funzione ammette una scrittura sottoforma di serie di Taylor, allora la sua derivata k -esima può essere scritta come $a_k \cdot k!$, dove a_k è il coefficiente del termine di grado k della serie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k \implies f^{(k)}(0) = a_k \cdot k!$$

Esempio : Si consideri la funzione $f(x) = x^3 \cdot \sin(x^3)$, si vogliono trovare i valori di $f^{(6)}(0)$, $f^{(12)}(0)$ e $f^{(18)}(0)$, senza dover trovare le rispettive funzioni derivate esplicite (processo che richiederebbe una quantità di tempo considerevole).



Conoscendo lo sviluppo noto del seno, possiamo ricavare la seguente

$$x^3 \cdot \sin(x^3) = \frac{1}{1!}x^6 - \frac{1}{3!}x^{12} + \frac{1}{5!}x^{18} - \dots$$

Applichiamo la formula appena presentata e troviamo che

$$f^{(6)}(0) = 6! \quad f^{(12)}(0) = \frac{1}{3!}12! \quad f^{(18)}(0) = \frac{1}{5!}18!$$

Teorema sulla somma di derivate : la derivata di una somma di funzioni, è uguale alla somma delle derivate delle singole funzioni

$$\left[a(x) + b(x) + c(x) + d(x) + \dots \right]' = \left[a'(x) + b'(x) + c'(x) + d'(x) + \dots \right]$$

Ad esempio, se

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$



allora

$$f'(x) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k \right]'$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cdot x^k]'$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k \cdot x^{k-1}$$

1.2.3 Serie di Taylor notevoli

Vi è riportata una tabella con gli sviluppi noti centrati in 0

$T_{n,0}(e^x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^0)^{(k)}}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$T_{n,0}(\cos(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$T_{n,0}(\sin(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$T_{n,0}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \quad \forall x \in (-1, 1)$
$T_{n,0}\left(\frac{1}{1+x}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k \quad \forall x \in (-1, 1)$
$T_{n,0}(\arctan(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad \forall x \in (-1, 1)$
$T_{n,0}(\log(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad \forall x \in (-1, 1)$



1.3 Serie di potenze

Una serie di potenze è un particolare tipo di serie numerica, nello specifico, è determinata da due parametri

- a_n - una successione di numeri reali detta **coefficiente**
- x_0 - un numero reale detto **centro** della serie

Una serie si presenta in tal modo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$$

Le serie di Taylor sono un tipico esempio di serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} & \text{rappresenta il coefficiente} \\ x_0 & \text{rappresenta il centro} \end{cases}$$

Altri esempi di serie di potenze sono

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{k!} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$e^{x-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^k}{k!} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{k!} \\ x_0 = 2 \end{cases}$$



Risulterà utile, data una serie numerica che non è una serie di potenze, eseguire opportuni passi algebrici per ricavarne una equivalente, che però rispetti la proprietà di essere una serie di potenze.

Consideriamo la serie

$$e^{3x-5} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(3x-5)^k}{k!}$$

Notiamo come, se non fosse presente il 3 nel termine sotto esponente, essa sarebbe una serie di potenze, applichiamo i dovuti passaggi algebrici

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(3x-5)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(3(x-\frac{5}{3}))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k \cdot ((x-\frac{5}{3}))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!} (x-\frac{5}{3})^k$$

Si noti come la serie equivalente è una serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!} (x-\frac{5}{3})^k \text{ dove } \begin{cases} a_n = \frac{3^k}{k!} \\ x_0 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Da qui, è chiara la formula generale

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k (Ax+B)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k A^k (x+\frac{B}{A})^k$$

Vediamo un altro *esempio* di trasformazione, si consideri

$$\cos(4x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (4x)^{2k}}{(2k)!}$$

si raccoglie il 4

$$\cos(4x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (4)^{2k} (x)^{2k}}{(2k)!}$$

ora la forma della serie è quella di una serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (4)^{2k}}{(2k)!} (x)^{2k}$$

1.3.1 Raggio di convergenza

Sia $S_n(x)$ una serie di potenze, un quesito a tal proposito risulta essere : *per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie converge?* Data una serie di potenze $S_n(x)$, definiamo $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}$ l'intervallo della retta reale per cui la serie converge.

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R} | S_n(x) \text{ converge} \}$$

Proposizione : Ogni serie di potenze converge sempre nel centro : $x_0 \in \mathcal{E}$.

Definizione : Sia $S_n(x)$ una serie di potenze con centro x_0 , esiste un numero reale $R \in [0, \infty]$ tale che

$$\begin{cases} S_n(x) \text{ converge se } |x-x_0| < R \\ S_n(x) \text{ diverge se } |x-x_0| > R \end{cases}$$

Tale R è detto **raggio di convergenza**, a questo punto l'intervallo di convergenza è definito esplicitamente

$$\mathcal{E} = [x_0 - R, x_0 + R]$$

Se $R = 0$, allora la serie converge esclusivamente nel centro, se $R = \infty$, la serie converge su tutta la retta reale. Nel caso di R finito e diverso da zero, non è necessariamente vero che la serie converga nei punti $x_0 - R$ e $x_0 + R$.

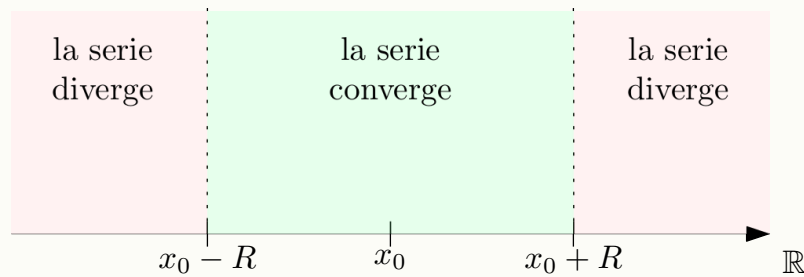


Figura 1.3: raggio di convergenza

Essendo che nei punti $x_0 - R$ e $x_0 + R$ non è chiaro se una serie di potenze converga, risulta necessario studiarla specificatamente.

$$\text{per } \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k \text{ si considerano } \begin{cases} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k R^k & \text{per } x_0 + R \\ \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k R^k & \text{per } x_0 - R \end{cases}$$

1.3.2 Calcolo del raggio

Data una serie di potenze, si vuole ricavare il valore del raggio R . A tal proposito, sarà necessario trovare un altro valore caratterizzante associato alla serie, che denoteremo L , tale L non è altro che il valore determinante nel criterio della radice e del rapporto in valore assoluto. Sia $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$ la serie di potenze in questione, si ha che

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Tale valore è (definizione poco rigorosa) l'inverso del raggio di convergenza, de facto

- $L = 0 \implies R = \infty$
- $L = \infty \implies R = 0$
- $0 < L < \infty \implies R = \frac{1}{L}$

Esercizio : Si vuole trovare \mathcal{E} per la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x-5)^k}{k+1}$$

Si raccoglie 2^k

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k+1} \left(x - \frac{5}{2}\right)^k$$

Si ottengono coefficiente e centro, rispettivamente $a_k = \frac{2^k}{k+1}$ e $x_0 = \frac{5}{2}$. Si calcola L applicando il criterio della radice

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\frac{2^k}{k+1}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt[k]{k+1}} = 2$$

Si ha che $R = \frac{1}{2}$ e la serie converge per $|x - x_0| < \frac{1}{2}$. Si studia la serie nei punti critici $x_0 - R = 2$ e $x_0 + R = 3$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x-5)^k}{k+1} \text{ diventa } \begin{cases} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(6-5)^k}{k+1} & \text{per } x_0 + R = 3 \\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(4-5)^k}{k+1} & \text{per } x_0 - R = 2 \end{cases}$$



La convergenza risulta essere

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(6-5)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1^k}{k+1} \text{ diverge} \\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(4-5)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \text{ converge per Leibnitz} \end{cases}$$

A questo punto si ha l'insieme di convergenza $\mathcal{E} = [2, 3)$.

Esercizio : Si vuole trovare \mathcal{E} per la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(y^2 - 1)^{2k}}{k+1}$$

Si noti come non è una serie di potenze, si applica una sostituzione definendo $x = (y^2 - 1)^2$, riscrivendo la serie come

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1}$$

Si ottengono coefficiente e centro, rispettivamente $a_k = \frac{1}{k+1}$ e $x_0 = 0$. Si calcola L applicando il criterio della radice

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{k+2}}{\frac{1}{k+1}} = 1 \implies R = 1$$

Si studia la serie nei punti critici $x_0 - R = -1$ e $x_0 + R = 1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1} \text{ diventa } \begin{cases} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} & \text{per } x_0 + R = 1 \text{ diverge} \\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} & \text{per } x_0 - R = -1 \text{ converge} \end{cases}$$

Ricordando che $x = (y^2 - 1)^2$, si trova la convergenza della serie iniziale risolvendo la disequazione

$$-1 \leq (y^2 - 1)^2 < 1 \begin{cases} -1 \leq (y^2 - 1)^2 \text{ sempre vero} \\ (y^2 - 1)^2 < 1 \implies y^2 - 1 < 1 \implies y < \sqrt{2} \end{cases}$$

Si ha quindi che $\mathcal{E} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$.

Proposizione : Sia f una funzione derivabile infinite volte, definita come serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$$

si ha che

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{☞} \end{array} \right. f^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k \left. \begin{array}{l} \text{☞} \end{array} \right\}$$

CAPITOLO

2

INTEGRALI

2.1 Integrale di Riemann

La teoria dell'integrazione è vasta ed estesa, e fa riferimento alla *teoria della misura*, in questo corso, verrà trattata l'integrazione nella sua formulazione più semplice.

L'integrale di una funzione di variabile reale, viene calcolato in uno specifico intervallo, e rappresenta la somma dei contributi infinitesimi della funzione, risulta intuitivo se analizzato secondo il suo significato geometrico.

Si consideri una generica funzione $f(x)$, di cui si vuole calcolare l'area sottesa alla curva nel suo grafo, limitata da un certo intervallo $[a, b]$, come in figura 2.1. Non essendo la figura un poligono, non è possibile

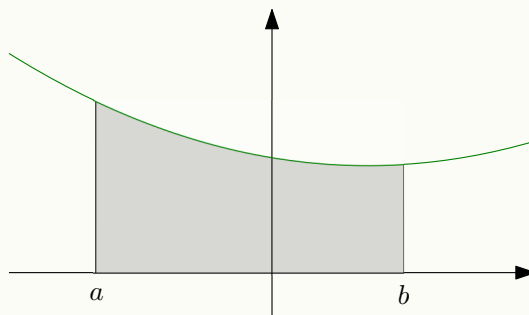


Figura 2.1: Area sottesa

utilizzare una formula esplicita per l'area, è possibile però, utilizzare dei poligoni per approssimare l'area ed avere una stima del valore effettivo.

Si consideri una retta parallela all'asse delle ascisse e tangente all'estremo superiore di $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$, che denotiamo M , ed una retta dello stesso tipo, ma tangente all'estremo inferiore, denotato m . Si considerano quindi i due rettangoli di area $(b - a) \cdot M$ e $(b - a) \cdot m$, come in figura 2.2. Sia A l'area effettiva sottesa alla curva, si ha ovviamente che

$$(b - a) \cdot m < A < (b - a) \cdot M$$

L'area A è sicuramente più piccola del rettangolo di altezza M , e sicuramente più grande del rettangolo di altezza m . Tale stima risulta (o può risultare, in base al tipo di curva) imprecisa, può essere utile infatti

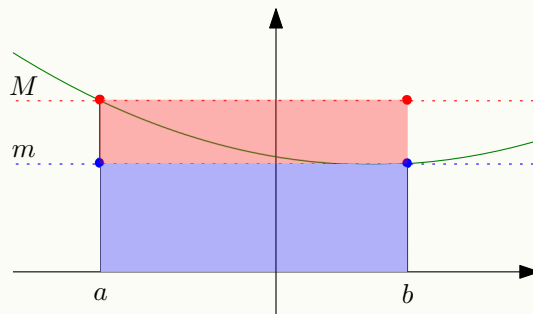


Figura 2.2: Stima con i poligoni

aumentare il numero di rettangoli che approssimano la curva, in modo da ridurre l'errore. Si considera quindi un punto medio $x_1 = \frac{b-a}{2}$, e si costruiscono i medesimi rettangoli sugli intervalli $[a, x_1]$ e $[x_1, b]$. Le variabili in gioco sono :

- $x_1 = \frac{b-a}{2}$
- $M_0 =$ l'estremo superiore di $f(x)$ nell'intervallo $[a, x_1]$
- $m_0 =$ l'estremo inferiore di $f(x)$ nell'intervallo $[a, x_1]$
- $M_1 =$ l'estremo superiore di $f(x)$ nell'intervallo $[x_1, b]$
- $m_1 =$ l'estremo inferiore di $f(x)$ nell'intervallo $[x_1, b]$

A tal punto, tali rettangoli descrivono una stima più precisa dell'area

$$m_0 \cdot \frac{(b-a)}{2} + m_1 \cdot \frac{(b-a)}{2} \leq A \leq M_0 \cdot \frac{(b-a)}{2} + M_1 \cdot \frac{(b-a)}{2}$$

Si può riscrivere in forma più compatta

$$(m_0 + m_1) \cdot \frac{(b-a)}{2} \leq A \leq (M_0 + M_1) \cdot \frac{(b-a)}{2}$$

Sorge intuitivo pensare di poter aumentare il numero di rettangoli, in modo da rendere ancora più precisa la stima dell'area, si considerino ora 4 rettangoli, dividendo quindi in 4 intervalli l'intervallo iniziale $[a, b]$.

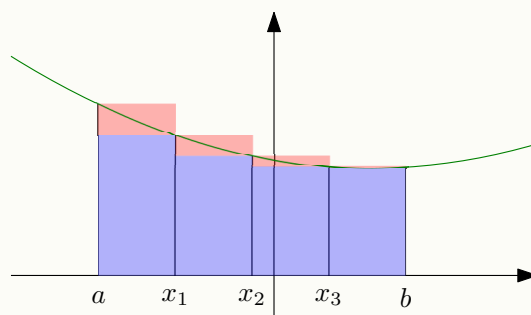


Figura 2.3: Stima con 4 poligoni

$$(m_0 + m_1 + m_2 + m_3) \cdot \frac{(b-a)}{4} \leq A \leq (M_0 + M_1 + M_2 + M_3) \cdot \frac{(b-a)}{4}$$

Che è possibile scrivere

$$\frac{b-a}{2^2} \sum_{k=0}^{2^2-1} m_k \leq A \leq \frac{b-a}{2^2} \sum_{k=0}^{2^2-1} M_k$$

Ricordando che m_k ed M_k sono rispettivamente il minimo ed il massimo di $f(x)$ nel k -esimo intervallo. Generalizzando, è possibile considerare la formula per un'approssimazione di $2n$ poligoni, ossia una suddivisione dell'intervallo in n parti.

$$\frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \min_{[x_k, x_{k+1}]}(f(x)) \leq A \leq \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \max_{[x_k, x_{k+1}]}(f(x))$$

A questo punto, per semplicità, introduciamo la seguente notazione

$$\begin{aligned} \underline{S}_n &= \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \min_{[x_k, x_{k+1}]}(f(x)) \\ \bar{S}_n &= \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \max_{[x_k, x_{k+1}]}(f(x)) \end{aligned}$$

Denominiamo \underline{S}_n somme inferiori, ed approssimano per difetto l'area A , e denominiamo \bar{S}_n somme superiori, che l'approssimano per eccesso. Risulta ovvio che, all'aumentare di n , la stima delle somme diventa sempre più precisa.

Definizione : Sia $f(x) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, e sia $[a, b] \subseteq I$ un intervallo, diremo che la funzione è **integrabile secondo Riemann**, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n \in \mathbb{R}$$

Tale limite deve tendere ad un valore finito, assume la seguente notazione

$$\int_a^b f(x) dx$$