Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale e $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ vettori linearmente indipendenti. Verificare che se $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, $c_j \neq 0\ \forall j$, allora i vettori

$$c_1\underline{v}_1, \ldots, c_k\underline{v}_k$$

sono anche linearmente indipendenti.

Si ha che $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 \cdots + \alpha_k \underline{v}_k = \bar{0} \iff \alpha_1 = \alpha_2 \ldots = \alpha_k = 0$, i vettori non sono nulli, quindi:

$\alpha_1 c_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 c_2 \underline{v}_2 \ldots + \alpha_k c_k \underline{v}_k = \bar{0} \iff \forall i \in \{1,2,\ldots,k\}, \alpha_i c_i = 0 \iff \alpha_i = 0$ quindi

$\alpha_1 c_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 c_2 \underline{v}_2 \ldots + \alpha_k c_k \underline{v}_k = \bar{0} \iff \forall i \in \{1,2,\ldots,k\}, \alpha_i = 0 \Rightarrow$ sono indipendenti.

Esercizio 2. In $M_{33}(\mathbb{R})$ consideriamo il sottospazio $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche ed il sottospazio $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche.
Determinare una base di $M_{33}(\mathbb{R})$.
Determinare una base del sottospazio $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ e una base del sottospazio $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$.

per determinare una base di $M_{33}(\mathbb{R})$, considero le seguenti 9 matrici non proporzionali:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&1&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{bmatrix} \right\}$$

GLI ALTRI 2 NON LI FACCIO

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1\\2\\2 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 3\\1\\-1 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} -1\\-1\\0 \end{vmatrix}$$

Verificare che questi 3 vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$.

So che $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3, quindi mi serve verificare che $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ siano linearmente indipendenti, so che, dei vettori sono linearmente indipendenti, se e solo se, nessuno e' comb. lin. degli altri:

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1\\2\alpha_1\\2\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\alpha_2\\\alpha_2\\-\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1+3\alpha_2\\2\alpha_1+\alpha_2\\2\alpha_1-\alpha_2 \end{bmatrix} \neq \underline{v}_3 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \qquad \underline{v}_3 \notin \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$$

$2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \iff \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{1}{2} \lor \alpha_1 = \alpha_2 = 0$, se $\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 = \bar{0} \neq \underline{v}_3$, se

$$\alpha_1 = \beta \text{ e } \alpha_2 = 2\beta \Rightarrow \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} \beta + 3\cdot 2\beta\\2\beta+2\beta\\0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\beta\\4\beta\\0 \end{bmatrix} \neq \underline{v}_3 \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

$$\alpha_2\underline{v}_2+\alpha_3\underline{v}_3=\begin{bmatrix}3\alpha_2\\ \alpha_2\\ -\alpha_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\alpha_3\\ -\alpha_3\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\alpha_2-\alpha_3\\ \alpha_2-\alpha_3\\ -\alpha_2\end{bmatrix}\neq\underline{v}_1 \quad \forall\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R} \qquad \underline{v}_1\notin \mathrm{Span}(\underline{v}_2,\underline{v}_3)$$

$$\alpha_2\underline{v}_2+\alpha_3\underline{v}_3=\underline{v}_1 \Leftrightarrow -\alpha_2=(-2)\wedge -2-\alpha_3=2\wedge -6-\alpha_3=1$$

$$\Rightarrow -\alpha_2=(-2)\wedge\alpha_3=-4\wedge -6-\alpha_3=1 \Rightarrow \boxed{-6+4=1} \text{ ASSURDO! } \alpha_2\underline{v}_2+\alpha_3\underline{v}_3\neq\underline{v}_1 \ \forall\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$$

$$\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_3\underline{v}_3=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ 2\alpha_1\\ 2\alpha_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\alpha_3\\ -\alpha_3\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1-\alpha_3\\ 2\alpha_1-\alpha_3\\ 2\alpha_1\end{bmatrix}\neq\underline{v}_2 \quad \forall\alpha_1,\alpha_3\in\mathbb{R} \qquad \underline{v}_2\notin \mathrm{Span}(\underline{v}_1,\underline{v}_3)$$

$$\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_3\underline{v}_3=\underline{v}_2 \Leftrightarrow 2\alpha_1=(-1)\wedge 2\alpha_1-\alpha_3=1\wedge\alpha_1-\alpha_3=3 \Rightarrow \alpha_1=-\frac{1}{2}\wedge -1-\alpha_3=1\wedge\alpha_1-\alpha_3=3$$

$$\Rightarrow \alpha_1=\frac{1}{2}\wedge\alpha_3=-2\wedge\boxed{\frac{1}{2}-2=3} \text{ ASSURDO! } \alpha_1\underline{v}_1+\alpha_3\underline{v}_3\neq\underline{v}_2 \ \forall\alpha_1,\alpha_3\in\mathbb{R}$$

nessun vettore e' comb. lineare degli altri 2, quindi sono linearmente indipendenti, e sono una base.

Esercizio 4. Sia $V=\mathbb{R}^4$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1=(1,0,1,0)\,,\ \underline{v}_2=(0,1,0,0)\,,\ \underline{v}_3=(0,0,1,0).$$

Verificare che questi 3 vettori sono linearmente indipendenti.
Determinare una base per i seguenti sottospazi:

$W_1=\mathrm{Span}(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3,\underline{v}_1+\underline{v}_2,\underline{v}_1+74\underline{v}_2-\sqrt{2}\underline{v}_3)$

$W_2=\mathrm{Span}(\underline{v}_1,\underline{v}_2)$

$W_3=\mathrm{Span}(\underline{v}_1+\underline{v}_2,\underline{v}_1-\underline{v}_2,\underline{v}_1+2\underline{v}_2,\underline{v}_1-2\underline{v}_2)$

dei vettori sono linearmente indipendenti, se e solo se, nessuno e' comb. lin. degli altri:

$$\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2=(\alpha_1,0,\alpha_1,0)+(0,\alpha_2,0,0)-(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1,0)$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1,0)=\underline{v}_3 \Leftrightarrow \alpha_1=1\wedge\alpha_1=0 \text{ IMPOSSIBILE!} \Rightarrow \underline{v}_3\notin\mathrm{Span}(\underline{v}_1,\underline{v}_2)$$

$$\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_3\underline{v}_3=(\alpha_1,0,\alpha_1,0)+(0,0,\alpha_3,0)=(\alpha_1,0,\alpha_1+\alpha_3,0)\neq\underline{v}_2 \ \forall\alpha_1,\alpha_3\in\mathbb{R}\Rightarrow\underline{v}_2\notin\mathrm{Span}(\underline{v}_1,\underline{v}_3)$$

$$\alpha_2\underline{v}_2+\alpha_3\underline{v}_3=(0,\alpha_2,0,0)+(0,0,\alpha_3,0)=(0,\alpha_2,\alpha_3,0)\neq\underline{v}_1 \ \forall\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}\Rightarrow\underline{v}_1\notin\mathrm{Span}(\underline{v}_2,\underline{v}_3)$$

$\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 5. Vero o Falso :

1 • 4 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente dipendenti
2 • 6 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^4$ sono sempre linearmente dipendenti.
3 • 4 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti

Giustificare le risposte.

1 Falso! ecco un contro esempio:

$(1,0,0,0,0,0)$ $(0,1,0,0,0,0)$ $(0,0,1,0,0,0)$ $(0,0,0,1,0,0)$

sono 4 vettori non nulli in $\mathbb{R}^6$ lin. indipendenti.

2 Vero! dei vettori sono lin dip. se e solo se uno di essi e' comb. lin. degli altri. $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 4, ha base $\mathcal{B}=\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$, e la base e' un massimale di vett. indipendenti, quindi, in $\mathbb{R}^4$ non esistono piu' di 4 vettori ind. tra loro.

3 Falso! ecco un contro esempio di 4 vett. lin. dipendenti in $\mathbb{R}^6$.

$(1,0,0,0,0,0)$ $(2,0,0,0,0,0)$ $(3,0,0,0,0,0)$ $(4,0,0,0,0,0)$

$(4,0,0,0,0,0) \in Span\big((1,0,0,0,0,0),(2,0,0,0,0,0),(3,0,0,0,0,0)\big) =$

$= (\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,0,0,0,0,0) \ \forall \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$