Metodi Matematici per l'Informatica - Dispensa 5
(a.a. 22/23, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (`lorenzo.carlucci@uniroma1.it`)

1 Soluzioni di esercizi

Alcune soluzioni di esercizi (molto simili o identici a quelli assegnati e discussi in classe).

Esempio 1 *In una gara di* 8 *atleti di cui* 2 *italiani,* 3 *francesi e* 3 *spagnoli, quanti sono gli ordini di arrivo in cui i primi tre atleti hanno nazionalità diverse?*

Vediamo una soluzione che usa il PA. Ci interessa la numerosità dell'insieme

$$A = \{ \textit{ ordini di arrivo con i tre primi posti occupati da atleti di nazionalità diverse} \}.$$

Si noti che gli elementi di A sono sequenze ordinate $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ dove ogni a_i è uno tra gli 8 *atleti, gli a_i sono tutti distinti e le nazionalità di a_1, a_2, a_3 sono diverse.*

Dichiariamo i seguenti tipi, distinguendo le soluzioni (gli elementi di A) in base alle nazionalità dei primi tre arrivati al traguardo:

1. $IFS = \{$*ordini di arrivo con un Italiano primo, un Francese secondo e uno Spagnolo terzo*$\}$.
2. $ISF = \{$*ordini di arrivo con un Italiano primo, uno Spagnolo secondo e un Francese terzo*$\}$.
3. $FIS = \{$*ordini di arrivo con un Francese primo, un Italiano secondo e uno Spagnolo terzo*$\}$.
4. $FSI = \ldots$
5. $SIF = \ldots$
6. $SFI = \ldots$

Verifichiamo che si tratta di una partizione di A in 6 *parti. Esaustività: ogni elemento di A (un ordine di arrivo con i tre primi di nazionalità diverse) è ovviamente di uno dei sei tipi specificati. Viceversa: ogni elemento dell'unione dei sei tipi è un elemento di A (per es: un ordine di arrivo di tipo IFS avrà un italiano in prima, un francese in seconda e uno spagnolo in terza, ed è dunque un ordine di arrivo con i primi tre di nazionalità diverse – ossia un elemento di A. Anche l'esclusività di verifica facilmente: nessun ordine di arrivo con i primi tre di nazionalità diverse può appartenere a due diversi tipi.*

In base al PA ci resta quindi da contare le cardinalità dei tipi specificati, per poi sommarle. Si può fare facilmente con il PM:

- $\#IFS = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2.$
- $\#ISF = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2.$
- $\#FIS = 3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2.$
- $\#FSI = 3 \times 3 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$
- $\#SIF = 3 \times 3 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$

- $\#SFI = 3 \times 3 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$

Il calcolo di $\#IFS$ si giustifica così: in prima posizione ho 2 scelte (devo scegliere un Italiano), in seconda 3 scelte (un Francese) in terza 3 scelte (uno Spagnolo); in quarta posizione non ho vincolo di nazionalità e dunque posso scegliere uno qualunque dei 5 atleti restanti (8 totali meno i 3 che ho già messo nelle prime tre posizioni), in quinta uno dei 4 restanti, in sesta uno dei 3 restanti, in settima uno dei 2 restanti e in ultima l'unico restante. Si tratta di una semplice applicazione del PM. Anche in questo caso osserviamo che tutti i tipi hanno la stessa cardinalità. Dal PA otteniamo:

$$\#A = \#IFS + \#ISF + \#FIS + \#FSI + \#SIF + \#SFI = (2 \times 3^2 \times 5!) \times 6.$$

Posso anche osservare a priori che il numero di classi della partizione è dato dal numero di permutazioni delle 3 nazionalità, ossia 3×2; e che ogni classe ha lo stesso numero di elementi contati con il PM.

Esempio 2 *Consideriamo una gara di 10 atleti di cui 3 italiani, 3 inglesi e 4 tedeschi. Gli italiani si chiamano Gino, Pino e Rino. Quanti sono gli ordini di arrivo in cui Gino arriva prima di Pino?*

Soluzione 1 *Partizione. Partizioniamo in base alla posizione di arrivo di Gino. Contiamo ciascun tipo usando il PM:*

- *Gino in posizione 1:* $1 \times 9! = 9 \times 8!$.
- *Gino in posizione 2:* $8 \times 1 \times 8! = 8 \times 8!$.
- *Gino in posizione 3:* $8 \times 7 \times 1 \times 7! = 7 \times 8!$.
- *Gino in posizione 4:* $8 \times 7 \times 6 \times 1 \times 6! = 6 \times 8!$.
- *Gino in posizione 5:* $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 1 \times 5! = 5 \times 8!$.
- *Gino in posizione 6:* $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 1 \times 4! = 4 \times 8!$.
- *Gino in posizione 7:* $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 1 \times 3! = 3 \times 8!$.
- *Gino in posizione 8:* $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2! = 2 \times 8!$.
- *Gino in posizione 9:* $8!$.

Possiamo concettualizzare quanto segue anche così: in ogni caso abbiamo 8 posizioni da assegnare liberamente tra gli 8 atleti che non sono Gino e Pino. Se Gino è in posizione t, Pino ha $10 - t$ posizioni in cui cadere. Dunque la soluzione con Gino in posizione t conta $8! \times (10 - t)$.

Possiamo raccogliere il fattore $8!$ e scrivere in modo compatto la soluzione di sopra come segue

$$8! \times (1 + 2 + 3 + \cdots + 9).$$

Soluzione 2 *La posizione di Gino e di Pino sono determinate univocamente da 2 posizioni tra le 10 possibili. L'ordine non ci interessa perché sappiamo che vogliamo contare solo quelle in cui Gino arriva prima di Pino; dunque l'indicazione, per esempio, delle posizioni 7 e 2 corrisponde a un ordine di arrivo in cui Gino è in posizione 2 e Pino in 7. Interpretiamo allo stesso modo una specifica di posizioni 2 e 7. Le possibili posizioni di Gino e Pino sono dunque quante i sottinsiemi di 2 elementi scelti tra 10, dunque sono $\binom{10}{2}$. A ognuna di queste corrispondono $8!$ ordini possibili di arrivo riempiendo le 8 posizioni restanti con gli 8 atleti restanti. La soluzione è dunque $C_{10,2} \times 8! = \binom{10}{2} \times 8!$.*

Si noti che la soluzione (per fortuna!) coincide con la precedente. Basta osservare che $1 + 2 + \cdots + 9 = (10 \times 9) : 2$ (secondo la formula per la somma dei primi n numeri naturali $1 + 2 + \cdots + n$ che è $((n + 1)n) : 2$, che dimostreremo più avanti).

Soluzione 3 *Si osserva che ogni ordine di arrivo è di uno tra i due seguenti tipi: o Gino arriva prima di Pino o Pino prima di Gino. Dunque gli ordini che ci interessano sono la metà degli ordini totali. Gli ordini totali sono $10!$ dunque gli ordini in cui Gino arriva prima di Pino sono $10! : 2$. Ovviamente coincide con le soluzioni precedenti: $10! : 2 = C_{10,2} \times 8! = ((10 \times 9) : 2) \times 8!$.*

Esempio 3 *In un gruppo di* 80 *individui di cui* 40 *maschi e* 40 *femmine vogliamo scegliere una delegazione di* 4 *rappresentanti. Le possibili delegazioni sono* $C_{80,4}$ *ossia i sottinsiemi di* 4 *elementi dell'insieme di partenza. Il genere non ci interessa.*

Quante sono invece le delegazioni con 2 individui per gruppo? Possiamo concettualizzare così: dobbiamo scegliere 2 rappresentanti maschi e 2 rappresentanti femmine. Applicando il PM il numero desiderato sarà dato dal prodotto. Le scelte di 2 rappresentanti maschi sono $\binom{40}{2}$ *e le scelte di rappresentanti femmine sono* $\binom{40}{2}$. *Il numero di scelte che soddisfano la richiesta è dunque*

$$\binom{40}{2} \times \binom{40}{2}$$

(In classe abbiamo analizzata la proposta di soluzione $\binom{40}{2}+\binom{40}{2}$. *Siete invitati a confrontarla con la soluzione di sopra cercando di indicare il più precisamente possibile perché la soluzione è scorretta).*

Consideriamo ora il caso in cui vogliamo formare una delegazione di 4 di cui un solo maschio e 3 femmine. Per il PM la prima scelta è tra i 40 maschi e la seconda tra le possibili scelte di 3 femmine tra le 40 totali. Dunque la soluzione è $40 \times \binom{40}{3}$.

Consideriamo ora il problema di contare le delegazioni da 4 che contengono almeno un rappresentante per genere. In classe abbiamo analizzato alcune soluzioni proposte da voi.

Soluzione 1 *Uso il passaggio al complemento! Il vincolo che mi interessa è di contenere almeno un rappresentante per genere. Chiamiamo* V *questo vincolo. A livello insiemistico* V *può identificarsi con un sottinsieme dell'insieme* A *di tutte le delegazioni da* 4. *Vogliamo contare* V *contando il suo complemento* $A \setminus V$, *ossia quante sono le delegazioni che* non soddisfano il vincolo V. *Le delegazioni che non soddisfano* V *sono quelle per cui è falso che contengano almeno un rappresentante per genere. Dunque sono delegazioni che non contengono rappresentanti maschili oppure non contengo rappresentati femminili. Si tratta di delegazioni composte unicamente da maschi oppure unicamente da femmine. Le delegazioni composte solo da maschi sono* $\binom{40}{4}$ *mentre le delegazioni composte solo da femmine sono* $\binom{40}{4}$. *Il numero di delegazioni che non soddisfano il vincolo* V *è dunque* $\binom{40}{4}+\binom{40}{4}$. *Si osservi che abbiamo usato qui il PA: per contare* $A \setminus V$ *lo abbiamo suddiviso in due tipi esaustivi e disgiunti: le delegazioni di soli maschi e quelle di sole femmine, e abbiamo contato sepratamente le cardinalità dei due tipi. Concludiamo sottraendo il numero delle delegazioni che non soddisfano il vincolo dal totale delle delegazioni:*

$$\binom{80}{4} - \left(\binom{40}{4} + \binom{40}{4}\right) = \binom{80}{4} - \binom{40}{4} - \binom{40}{4}.$$

Soluzione 2 *Tipizzazione diretta! In questo caso vogliamo suddividere in tipi esclusivi ed esaustivi l'insieme che vogliamo contare, ossia l'insieme delle delegazioni che soddisfano il vincolo* V. *Dopo un po' di tentativi abbiamo considerato la seguente proposta di tipizzazione:*

1. *Tipo 1: Delegazioni con 1 maschio e 3 femmine;*
2. *Tipo 2: Delegazioni con 2 maschi e 2 femmine;*
3. *Tipo 3: Delegazioni con 3 maschi e 1 femmina.*

Si verifica facilmente che questa tipizzazione dà luogo a una partizione dell'insieme V *che ci interessa. Per il PA basta quindi contare la cardinalità dei singoli tipi e poi sommare.*

Le delegazioni di tipo 1 sono $40 \times \binom{40}{3}$ *(scelgo un maschio e poi un insieme di 3 femmine). Le delegazioni di tipo 2 sono* $\binom{40}{2} \times \binom{40}{2}$ *(lo abbiamo visto prima). Le delefazioni di tipo 3 sono* $\binom{40}{3} \times 40$ *(scelgo un insieme di 3 maschi e poi scelgo una femmina). Le delegazioni che soddisfano il vincolo* V *sono dunque:*

$$40 \times \binom{40}{3} + \binom{40}{2} \times \binom{40}{2} + \binom{40}{3} \times 40.$$

Possiamo vedere le due soluzioni precedenti danno due modi diversi di contare la stessa quantità. Per questo possiamo senz'altro concludere che la quantità espressa dalle formule ottenute nei due casi è la stessa, dunque:

$$\underbrace{\binom{80}{4} - \binom{40}{4} - \binom{40}{4}}_{Sol.1} = \underbrace{40 \times \binom{40}{3} + \binom{40}{2} \times \binom{40}{2} + \binom{40}{3} \times 40}_{Sol.2}.$$

pseudo-Soluzione *Consideriamo la seguente proposta di soluzione. Ragiono così: per formare una delegazione con il vincolo V richiesto scelgo un maschio tra i 40, una femmina tra le 40, e infine scelgo* 2 *individui tra tutti i restanti* 78 *(senza alcun vincolo di genere). Quest'ultima scelta corrisponde a contare i sottinsiemi di 2 elementi scelti tra 78. Per il PM ottengo che la soluzione è*

$$40 \times 40 \times \binom{78}{2}.$$

Attenzione! Confrontate il valore numerico ottenuto a quello delle due soluzioni precedenti.... Cosa c'è che non va? Qual è l'errore nel ragionamento?

2 Dimostrazione per doppio conteggio

Rappresentanti con portavoce Abbiamo osservato che l'identità seguente può dimostrarsi per doppio conteggio.

$$\binom{n}{m} \times m = n \times \binom{n-1}{m-1}.$$

Riscriviamola come segue

$$\binom{n}{m} \times \binom{m}{1} = \binom{n}{1} \times \binom{n-1}{m-1}.$$

Proviamo a generalizzare ulteriormente sostituendo a 1 una variabile k. Otteniamo:

$$\binom{n}{m} \times \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{m-k}.$$

Questa identità è ancora vera (per $n \geq m \geq k > 0$?). Un modo di verificarlo è procedere generalizzando quanto abbiamo fatto sopra, ossia mostrare che l'espressione a sinistra dell'= e quella a destra *contano la stessa quantità*. L'espressione a sinistra conta i modi di scegliere una delegazione di m tra n e in essa una sotto-delegazione di k portavoce (scegliendo prima gli m membri della delegazione e poi k portavoce tra essi). Ma anche l'espressione a destra conta i modi di scegliere una delegazione di m tra n e in essa k portavoce: si scelgono prima i k portavoce tra tutti gli n individui e poi i restanti membri della commissione, che sono ovviamente $m - k$. Dunque le due espressioni sono identiche per tutte le scelte delle variabili.

Sappiamo già che $\binom{n}{k}$ conta il numero di sottinsiemi di k elementi scelti in un insieme di n elementi. Proviamo a contare in modo diverso questa collezione. Fissiamo A il nostro insieme di n elementi. Lo spazio (insieme) che vogliamo contare è quello che contiene tutti e soli i sottinsiemi di k elementi scelti in A. Voglio osservare che contare i sottinsiemi di k elementi scelti in A è equivalente a contare i sottinsiemi di $n - k$ elementi scelti in A. L'idea intuitiva è che ogni sottinsieme di k elementi in A determina in modo univoco un sottinsieme di $n - k$ elementi in A: il suo complemento. Se $S \subseteq A$ e S ha k elementi allora il complemento di S in A, che denotiamo con $A \setminus S$ è un sottinsieme di A di $n - k$ elementi. Risulta piuttosto intuitivo dunque che le due quantità seguenti sono uguali:

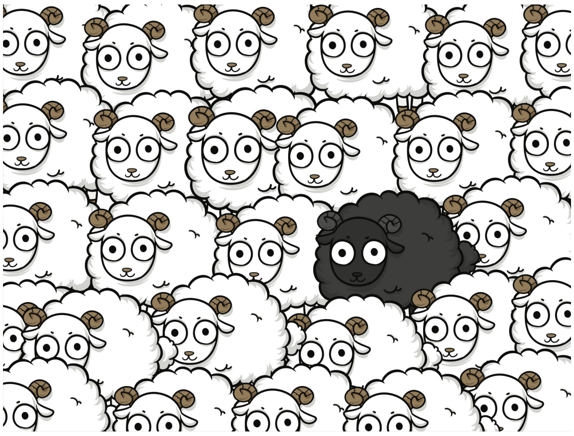
1. I sottinsiemi di A di k elementi.

2. I sottinsiemi di A di $n-k$ elementi.

La prima quantità so già che è $\binom{n}{k}$. La seconda è $\binom{n}{n-k}$. Posso dunque concludere, per doppio conteggio, la seguente identità notevole:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

L'identità è anche utile per la computazione: invece di svolgere il lungo prodotto $\binom{100}{98}$ posso calcolare $\binom{100}{2} = \frac{100 \times 99}{2}$.



Greggi con pecora nera Consideriamo ora un altro modo di contare i sottinsiemi di k elementi di un insieme A di n elementi, con $n > 0$ (ossia $A \neq \emptyset$). Immaginiamo il nostro insieme A come un gregge di n pecore. Vogliamo contare tutti i possibili sotto-greggi di k pecore scelte nel gregge. Il gregge contiene una pecora nera, denotiamola con p. Ovviamente ogni sottinsieme di k pecore scelte in A può essere di uno tra i seguenti due tipi:

1. Tipo 1 (gruppi tolleranti): contiene la pecora nera,

2. Tipo 2 (gruppi intolleranti): non contiene la pecora nera.

I gruppi del primo tipo contengono la pecora nera p e altre $k-1$ pecore scelte tra le restanti $n-1$. Il loro numero è dunque dato da $\binom{n-1}{k-1}$, ossia le scelte di $k-1$ elementi tra $n-1$. I gruppi del secondo tipo contengo k pecore scelte tra le $n-1$ pecore (tutte le pecore tranne la pecora nera). Il loro numero è dato da $\binom{n-1}{k}$ ossia le scelte di k elementi tra $n-1$. La tipizzazione è ovviamente esaustiva ed esclusiva. I due casi sopra considerati sono, tecnicamente, una partizione in due parti dell'insieme dei sottinsiemi di k elementi in A in due parti. Posso dunque concludere che:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Questa identità permette di calcolare il valore di un coefficiente binomiale ricorsivamente usando valori più piccoli.

Osservazione 1 *Su questa identità si basa il famoso Triangolo di Pascal-Tartaglia, costituito dai valori*

$$\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}, \binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2}{2}, \binom{3}{0}, \binom{3}{2}, \ldots$$

ordinati in un triangolo dall'alto verso il basso. Si invita il lettore a informarsi su questo interessante oggetto, dal quale è possibile evincere interessanti proprietà dei coefficienti binomiali.

3 Dimostrazioni per traduzione

Il doppio conteggio usato per dimostrare che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ qui sopra potrebbe non risultare convincente. Come potremmo convincere uno scettico della validità del nostro conteggio? Possiamo concettualizzare quello che abbiamo fatto come una *traduzione* da un insieme all'altro. L'insieme (o lingua) di partenza è quello dei sottinsiemi di A di k elementi, chiamiamola $\mathcal{L}_1$. L'insieme (o lingua) di arrivo è quello dei sottinsiemi di A di $n-k$ elementi, chiamianola $\mathcal{L}_2$.

Abbiamo proposto una traduzione dal primo al secondo, ossia una associazione di un elemento del secondo a ogni elemento del primo. La traduzione scelta è la seguente:

$$S \mapsto A \setminus S$$

che associa un sottinsieme S di A con k elementi al suo complemento $A \setminus S$. Per sostenere che $\mathcal{L}_2$ ha lo stesso numero di elementi di $\mathcal{L}_1$ dobbiamo assicurarci che la traduzione abbia delle buone proprietà:

1. Ogni elemento di $\mathcal{L}_1$ viene tradotto in uno e un solo elemento di $\mathcal{L}_2$.

2. Ogni elemento di $\mathcal{L}_2$ è la traduzione di almeno un elemento di $\mathcal{L}_1$.

3. Non si dà il caso che due elementi distinti di $\mathcal{L}_1$ vengano tradotti nello stesso elemento di $\mathcal{L}_2$.

Chiamiamo una traduzione con le proprietà qui sopra una *buona traduzione*. Risulta abbastanza chiaro che se ho stabilito una buona traduzione tra due insiemi posso affermare che contare gli elementi dell'uno o quello dell'altro non fa differenza. Immaginiamo infatti di contare $\mathcal{L}_1$ togliendo un elemento alla volta: ogni volta che tolgo un elemento tolgo la corrispondente traduzione in $\mathcal{L}_2$. Se la traduzione è buona ogni sottrazione di un elemento in $\mathcal{L}_1$ dà luogo a una sottrazione di un unico elemento in $\mathcal{L}_2$ e una volta esaurito $\mathcal{L}_1$ ho esaurito $\mathcal{L}_2$. Torneremo più avanti in modo più formale su questi concetti ma per il momento ci accontentiamo di questo livello di formalità.

Dobbiamo quindi convincere il nostro interlocutore scettico della bontà della nostra traduzione $S \mapsto A \setminus S$. La cosa risulta piuttosto ovvia: ogni $S \subseteq A$ ha uno e un solo complemento; ogni insieme X di $n-k$ elementi in A può vedersi come il complemento di un insieme di k elementi in A (in particolare X è il complemento di $A \setminus X$); e non si dà mai il caso che due insiemi S, S' di k elementi in A possano avere lo stesso complemento (si invita il lettore a dettagliare questa dimostrazione).

Avendo stabilito una buona traduzione possiamo dunque concludere che $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ hanno la stessa cardinalità. Dato che sappiamo contare separatamente entrambi, otteniamo l'identità desiderata:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Possiamo formulare il seguente principio generale di conteggio:

Principio della Buona Traduzione: Se posso stabilire una buona traduzione tra due insiemi A e B allora A e B hanno lo stesso numero di elementi.