Riprendendo il polinomio di Taylor

Come già detto, prendiamo una funzione f derivabile $n-$ volte in x_0 :

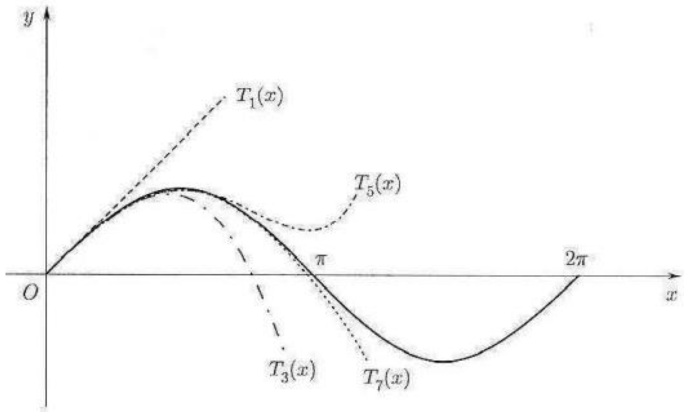
$$T_n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Riscritto sottoforma di sommatoria :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Teorema : se f è n-volte derivabile in un intorno di x_0 allora :

$f(x) = T_n(x-x_0) + o((x-x_0)^n)$ cioè $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-T_n(x-x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$



Vediamo come all'aumentare del grado del polinomio di Taylor, esso approssimi sempre più correttamente la funzione:

Teorema : Resto di Lagrange

Supponiamo che f sia $n+1$ volte derivabile in un intorno di x_0, allora esiste :

$$c \ \in (x_0, x), \big(x \in (x, x_0)\big) \ tale \ che \ f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

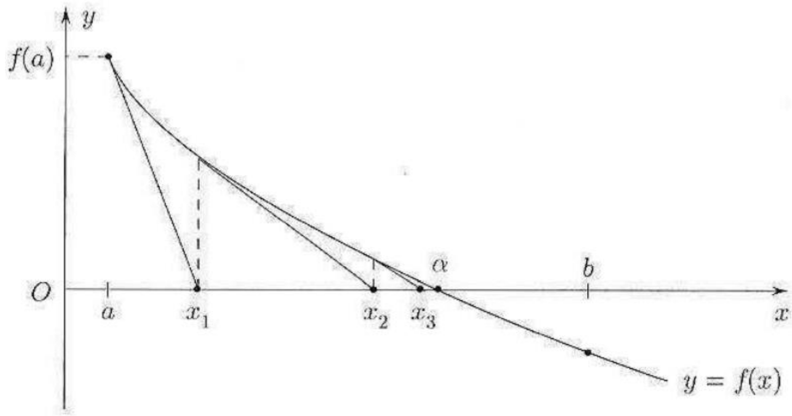
Metodo di Newton

Di una funzione $f(x) = 0$ supponiamo ci sia un'unica soluzione $x = \alpha$ all'interno di un intervallo $[a.b]$. Il **metodo di Newton** serve a dare una **valutazione approssimata** di α, costruendo una successione convergente di α, tale successione è definita in modo **ricorsivo**.

Sia assegna un primo termine x_0, si assegna poi una legge per calcolare x_{n+1} a partire da x_n. In questo modo x_n può partire da x_0, con n iterazioni del medesimo algoritmo.

Si parte prendendo un punto $x_0 = a$ e sostituendo ad f la retta tangente al suo grafico nel punto $(a, f(a))$, tale retta ha equazione : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, risolviamo quindi $f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = 0$ ed otteniamo $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \to$ prima approssimazione di a.

Procediamo con x_1, quindi prendiamo la retta tangente nel punto $(x_1, f(x_1))$, risolvendo l'equazione $f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = 0$ ed otteniamo $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \rightarrow$ seconda approssimazione di α. Proseguendo così.



Continuando in tal modo, si perviene alla **legge di ricorrenza** :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$