

Marco Casu

~ Automazione ~

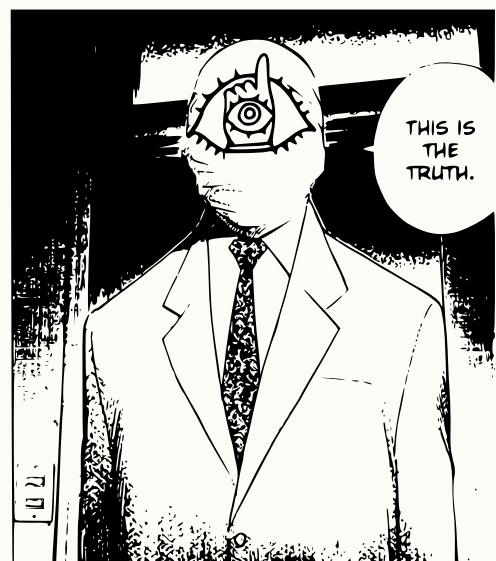


SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica
Dipartimento di Informatica

Questo documento è distribuito sotto la licenza [GNU](#), è un resoconto degli appunti (eventualmente integrati con libri di testo) tratti dalle lezioni del corso di Automazione per la laurea triennale in Informatica. Se dovessi notare errori, ti prego di segnalarmeli.

Nota bene : Essendo questi appunti di un corso esterno alla facoltà di Informatica, è presente un capitolo "Complementi" che può risultare utile al lettore.



INDICE

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Architetture per l'Automazione Industriale | 3 |
| 1.1 | Introduzione | 3 |
| 1.2 | Processi Industriali | 8 |
| 1.2.1 | Sistema di Controllo | 9 |
| 2 | Complementi | 11 |
| 2.1 | La Trasformata di Laplace | 11 |
| 2.1.1 | Proprietà della Trasformata | 12 |
| 2.1.2 | Trasformata inversa | 14 |
| 2.1.3 | Trasformate note | 15 |
| 2.1.4 | Funzione di trasferimento | 15 |

ARCHITETTURE PER L'AUTOMAZIONE INDUSTRIALE

1.1 Introduzione

Con il termine *Automazione*, si intende la trasformazione di un processo pre-esistente, al fine di renderlo autonomo, riducendo o sostituendo del tutto l'intervento umano, verrà trattata l'automazione dei processi industriali e manifatturieri, e del loro controllo e supervisione. I sistemi presi in considerazione evolvono nel tempo e reagiscono ad eventi, che ne cambiano lo stato, e scaturiscono dei feedback, per un eventuale correzione dell'errore.

Con sistema *autonomo* si intende un sistema in cui viene ridotto l'intervento umano. L'*Automatica* si occupa di sfruttare gli strumenti dell'informatica per l'automazione, acquisendo informazioni dal mondo fisico tramite appositi sensori, per poi essere elaborate su un sistema di controllo (calcolatore), o una rete di calcolatori, che implementa dei protocolli standard per l'industria. Differentemente da altri contesti, come la trasmissione (ad esempio, di un video in streaming) nelle reti dell'automazione i ritardi risultano critici, e vanno ridotti al minimo.

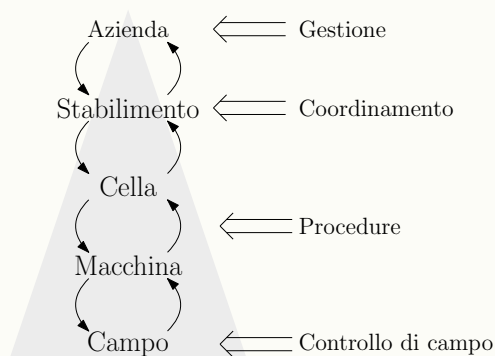


Figura 1.1: Piramide CIM

La *piramide CIM*, mostrata in figura 1.1 schematizza la gestione di un processo industriale e delle sue procedure, ogni strato comunica con quelli adiacenti scambiandosi informazioni, nei livelli più alti, le informazioni sono più *raffinate* ed astratte, nei livelli più bassi sono più grezze, ad esempio

- Al livello azienda viene decisa la produzione di un articolo (che coinvolgerà l'utilizzo di un braccio robotico)
- Al livello macchina, l'informazione che arriverà al braccio sarà semplicemente relativi ai gradi in cui i suoi giunti devono ruotare
- Al livello di campo, l'informazione comprenderà semplicemente il voltaggio da applicare alla macchina in questione per avere l'effetto desiderato.

Con **cella**, si intende un unità composta da più macchine, in cui viene scambiato e lavorato del materiale per compiere delle azioni, il *controllo delle procedure* si occupa delle **macchine**, ed uno **stabilimento** è un complesso di celle/parti e catene di montaggio. nel livello di campo, vengono utilizzati vari dispositivi, quali

- motori elettrici, servomotori, encoder
- azionatori di valvole, dynamo tachimetrici, sensori di temperatura

Tali sensori presenteranno stesso un comportamento lineare, ad esempio, se una tensione x causa una rotazione di y giri per minuti, allora una tensione $2x$ causerà una rotazione di $2y$. Anche se tali dispositivi non si prestano ad un comportamento lineare, ne verrà causata una volontaria linearizzazione, correggendone il comportamento.

Argomento centrale saranno i regolatori *PID*, la cui definizione, come molte altre trattate in questo capitolo, sarà ripresa ed approfondita in seguito. tali regolatori agiscono su delle grandezze di campo.

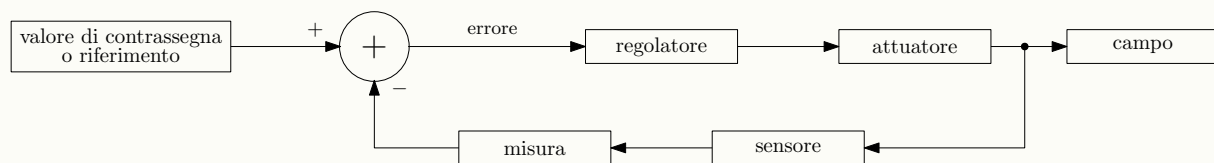


Figura 1.2: schematizzazione del regolatore PID

Si consideri il seguente esempio di regolatore, vi è una stufa che deve riscaldare una stanza, ed un sensore che ne misura la temperatura, il valore da raggiungere, detto *setpoint*, è di 20 gradi celcius. Si supponga che il sensore, una volta rilevata la temperatura, debba accendere e spegnere la stufa in modo che si raggiunga la temperatura adeguata.

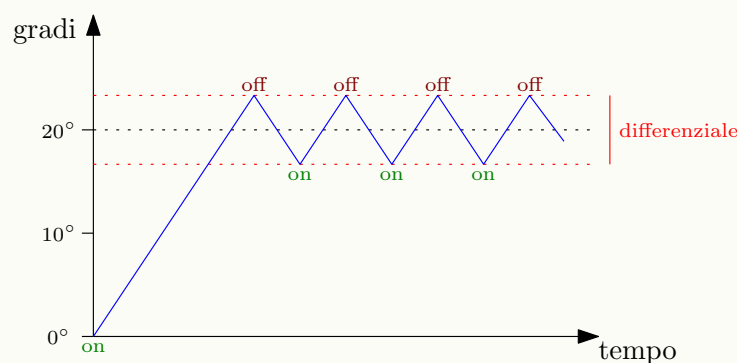


Figura 1.3: Azioni sulla stufa

In figura 1.3, il differenziale rappresenta un margine di differenza rispetto il setpoint, quando la temperatura è sotto il limite inferiore, la stufa viene accesa, quando è oltre il limite superiore, viene spenta (è chiaro che la velocità con la quale la temperatura cambia dipende dalle capacità della stufa e dalla

dispersione del calore nella stanza).

Ridurre il valore del differenziale costringerebbe la temperatura ad assestarsi sempre di più sul valore desiderato, ma ciò, comporterebbe un'accensione/spengimento della stufa più frequente, aumentando lo *sforzo di controllo*, è quindi, in questo caso, accettabile un differenziale di 2° .

Tale modello di controllo è il più semplice che ci sia, esistono ovviamente altri modi di regolare un segnale in modo che esso raggiunga il valore desiderato, ad esempio, calcolare l'errore e (ossia la differenza fra il valore desiderato ed il valore effettivo) e moltiplicarlo ad una certa costante K_p per poi utilizzare tale valore nella regolazione del segnale.

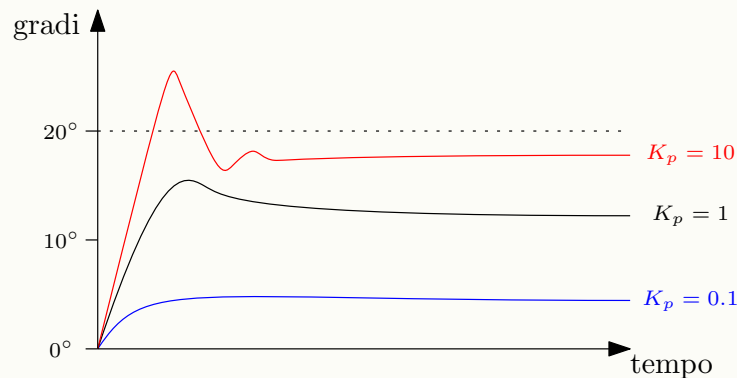


Figura 1.4: Regolatore proporzionale

Anche se la variazione della temperatura è continua nel tempo, il suo superare una certa soglia è un evento, i PLC (controllori logici programmabili) agiscono sulle misure di campo, un noto linguaggio utilizzato per descriverne il funzionamento è noto come *Sequential Flow Chart (SFL)*.

Nei sistemi di automazione industriale vengono prediletti controllori e sensori distribuiti piuttosto che centralizzati, se ne vuole dare una dimostrazione pratica con il seguente esempio : Si considerino i due seguenti modi per trasportare un oggetto su un nastro trasportatore :

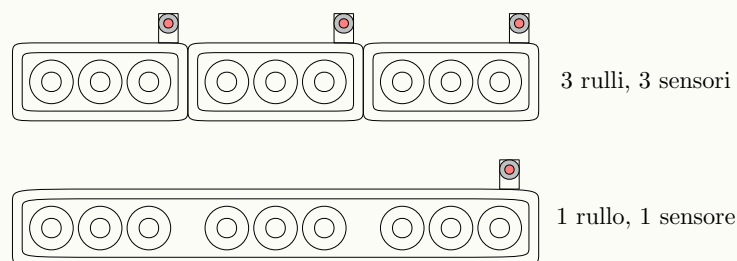


Figura 1.5: Rulli

Ogni nastro ha un sensore, se un oggetto è rilevato sopra il nastro, allora il motore si attiva. Risulta più efficiente la soluzione con 3 nastri in quanti sarà adoperata solamente la zona del nastro in cui è rilevato l'oggetto, piuttosto che l'intero nastro.

Per la modellizzazione di sistemi autonomi verranno adoperati automi a stati finiti, ampiamente trattati nel corso di [Automi](#), [Calcolabilità e Complessità](#), e [Reti di Petri](#). Una rete di Petri, non è altro che un grafo bipartito, in cui ogni nodo appartiene ad un'insieme fra

- nodi *posto*

- nodi *transizione*

Inoltre, i nodi posto possono essere annotati con dei pallini neri, detti *token*, essi rappresentano lo stato del sistema in quanto indicano che delle risorse (in senso generale) sono disponibili in un posto, permettendo eventualmente una transizione. Ogni arco del grafo collega un nodo posto ad un nodo transizione.

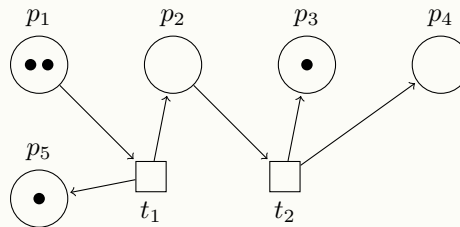
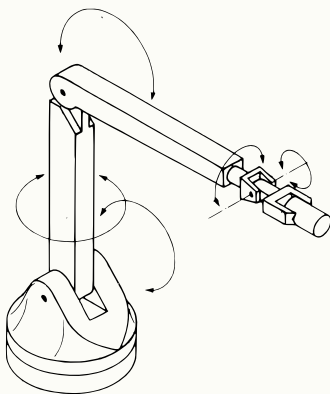


Figura 1.6: Esempio di una rete di Petri

Le macchine per l'automazione possono essere di vari tipi, ad esempio, comprendere un unico attuatore, e più meccanismi di attuazione del moto che utilizzano una sola fonte. Un altro tipo di macchine sono quelle a *controllo numerico*, macchine programmate per fare compiti elementari periodicamente.

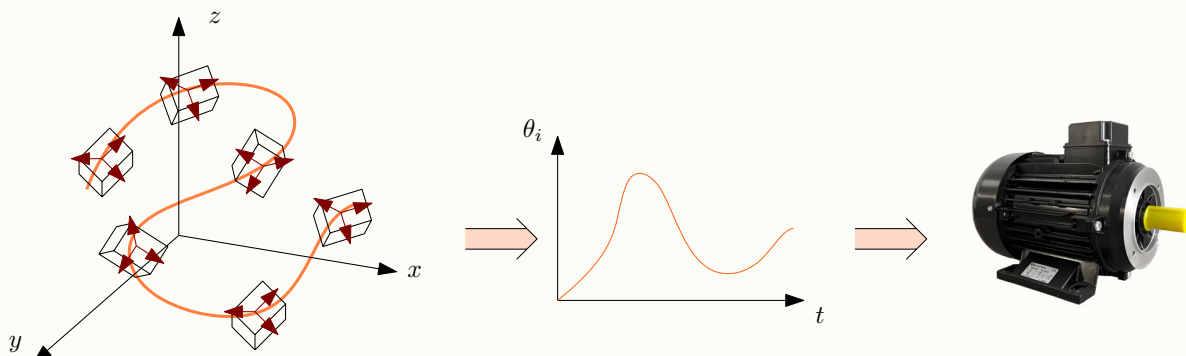
Quando in un processo produttivo il materiale viene trasformato in maniera continuativa (come nell'industria farmaceutica o alimentare) si parla di **produzione continua**. Nel caso in cui i materiali sono processati in quantità finite e determinate si parla di **produzione a lotti**, le pause dovute fra la lavorazione di un lotto e l'altro sono dovute al fatto che è necessario trasformare solo una determinata quantità di materiale grezzo.

L'automazione industriale fa largo utilizzo dei *robot*, bracci meccanici che presentano diversi gradi di libertà, ossia giunti, che possono ruotare attorno un certo asse.



L'organo terminale, posto alla fine del braccio (in un certo senso, la sua "mano"), può assumere una certa configurazione (posizione e direzione) a seconda della rotazione di ogni giunto del braccio. Si può dire che la posizione finale p e la sua direzione sono in funzione degli angoli $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ di rotazione di ogni giunto.

La procedura di comando da far eseguire al robot si traduce in una funzione nel tempo che descrive in che modo deve variare la rotazione di ogni singolo giunto, quest'ultima al livello di campo, si traduce nell'attuazione dei motori elettrici posti sui giunti.



Altri tipi di macchine per la movimentazione oltre i robot sono i rulli o i carrelli automatici, questi ultimi inizialmente potevano muoversi seguendo un percorso stabilito da magneti posti sul terreno, vengono dotati di sensori di prossimità per evitare collisioni. I carrelli moderni non sono limitati da percorsi prestabiliti, sono autonomi e possono fare percorsi arbitrari, che vengono calcolati da un elaboratore che ha la "visione" completa di essi.

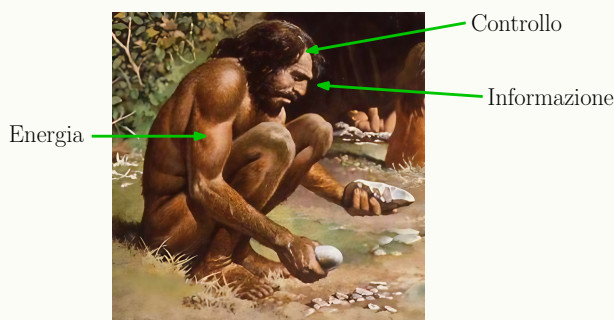
Sorge spontaneo chiedersi quale sia la differenza fra Automazione e Robotica.

- *Analogie* : Entrambe coinvolgono l'informatica ed i calcolatori, interfacciandosi con il mondo fisico, entrambe sfruttano conoscenze e tecnologie multi-disciplinari.
- *Differenze* : La robotica mostra la fattibilità di una soluzione, l'automazione si occupa di porsi delle domande riguardo tale soluzione, fra cui l'efficienza, l'ottimalità, la fattibilità e l'affidabilità.

Formalmente, si definisce **processo** la *trasformazione* di *materiali* in *prodotti*. Tale trasformazione richiede

- Energia
- Informazione
- Controllo

Anche la costruzione di uno strumento per la caccia da parte di un uomo primitivo è un processo, in quel caso, l'energia è data dai muscoli del corpo, l'informazione viene dai sensi, quali vista e tatto, ed il controllo avviene da parte del cervello.



Lo scopo dell'automazione nel tempo è stato quello di sostituire o eliminare l'intervento dell'uomo nei processi, spesso è faticoso e pericoloso fornire energia, e l'uomo non ha le capacità sufficienti per gestire in maniera precisa l'informazione ed il controllo.

Il **primo passo** di industrializzazione è stato quello di sostituire l'energia fornita dall'uomo con l'energia naturale ed animale, durante la prima rivoluzione industriale, dove la produzione dipendeva da macchine azionate tramite potenza meccanica derivante da fonti energetiche come mulini.

Il **secondo passo** riguarda la sostituzione delle operazioni di controllo, un importante esempio fu il *regolatore di velocità* di Watt (1785), fu la prima applicazione di regolatore automatico, e sfruttava la forza centrifuga di due masse in rotazione per regolare la velocità di una macchina a vapore.

Il funzionamento è semplice, il vapore passante per la valvola fa aumentare la velocità di rotazione del regolatore, per la forza centrifuga, le masse poste sulla valvola a farfalla si allontanano, alzandosi, qui la gravità oppone resistenza facendo chiudere la valvola essendo che le masse tendono ad avvicinarsi al suolo, facendone diminuire la velocità di rotazione. Tali automatismi sono compresi dalla teoria dei controlli automatici, che definisce l'azione di comando più efficace per ottenere il comportamento desiderato a seguito di una certa misurazione fisica.

Il **terzo passo** riguarda la gestione delle informazioni mediante sistemi combinatorici/sequenziali che al verificarsi di determinate condizioni reagiscono con operazioni di base. La prima generazione di controllori prevedeva circuiti elettronici composti da bobine e relé, essi erano ingombranti e lenti nell'acquisizione delle informazioni, inoltre la loro logica era prestabilita e ridefinirla scaturiva una modifica sostanziale del circuito.

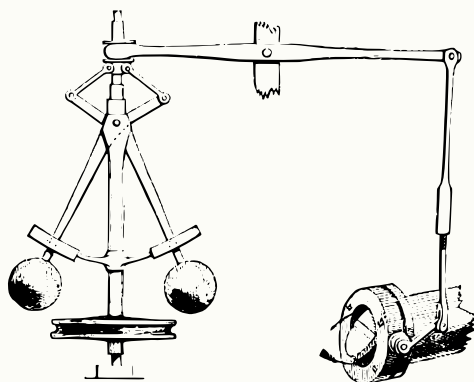


Figura 1.7: regolatore di Watt

Con l'avvento dei semiconduttori si è introdotta la seconda generazione di controllori, basati su schede elettroniche stampate, riducendo i costi ed aumentando l'efficienza, non risolvendo però il problema della bassa flessibilità, in quanto tali schede erano progettate per gestire una specifica logica.

La terza generazione di controllori vede i microprocessori protagonisti, grazie all'evoluzione dell'elettronica e dell'informatica sono ad oggi utilizzabili schede riprogrammabili (PLC) altamente flessibile, capaci di eseguire un generico algoritmo logico sequenziale.

| Rivoluzione Industriale | Periodo Temporale | Tecnologie e Caratteristiche |
|-------------------------|------------------------|---|
| prima | 1785 – metà 19° secolo | utilizzo di macchine azionate da energia meccanica (vapore, acqua) |
| seconda | fine 19° secolo – 1970 | azionamento elettrico delle macchine e produzione di massa basata sulla divisione del lavoro (catene di montaggio) |
| terza | 1970 – oggi | utilizzo dell'elettronica e delle tecnologie dell'informazione (IT) per aumentare il livello di automazione di attività complesse (CNC, robot e computer) |
| quarta | oggi – futuro | sviluppo di macchine sensorizzate e intelligenti, interconnesse tra loro e con internet, con la raccolta, analisi e uso di grandi quantità di informazioni (Big data), per una specializzazione di massa del prodotto, l'integrazione della catena produttiva (supply and value chains) e una maggiore efficienza |



1.2 Processi Industriali

I sistemi di produzione automatizzati sono composti da diverse componenti

- processo produttivo - movimentazioni meccaniche, attuazioni, trasformazioni fisiche e chimiche
- sistema di controllo - uno o più dispositivi messi in comunicazione con il processo produttivo, potendo agire su di esso riducendo l'intervento umano.
- impianto di produzione - macchinari, edifici, componenti

Si considerino i seguenti esempi di produzione industriale



- **produzione di energia elettrica**

- materie prime (input continuo) : combustibile fossile, ossigeno
- prodotto (output continuo) : energia elettrica misurata in Kilowatt/ore
- impianto necessario : tubature, caldaia, turbine, bruciatori, pompe, valvole, camini, edifici di sostegno e di contenimento, sensori

- **produzione di vernice**

- materie prime (input continuo) : resine, coloranti, acqua, additivi
- prodotto (output discreto) : barattoli di vernice
- impianto necessario : reattori (dove avvengono le reazioni principali), miscelatori, riscaldatori, tubature, pompe, valvole, edificio di sostegno e di contenimento, sensori

- **produzione di parti meccaniche di motori**

- materie prime (input discreto) : pezzo metallico grezzo
- prodotto (output discreto) : componenti del motore
- impianto necessario : macchina con mandrini per la meccanica (fresatura, foratura, ...), sistema di controllo numerico (posizionamento corretto dell'utensile del mandrino), dispositivo di cambio utensile automatico, protezioni, sistemi di scarico trucioli

1.2.1 Sistema di Controllo

Il sistema di controllo interagisce con il processo attraverso *sensori* e *trasduttori*. Acquisiscono informazioni dal mondo fisico (pressione, temperatura) e le convertono in segnali facilmente analizzabili e controllabili (segnali elettrici).

Un esempio di sensore per misurare la forza, consiste in un circuito il cui resistore viene deformato quando rilevata una pressione sul sensore, variandone la resistenza.

Una volta raccolte le informazioni, è possibile cambiare le variabili di controllo del processo per ottenere il comportamento desiderato. Solitamente, il segnale di controllo è a bassa potenza, non sufficiente per correggere il comportamento di grossi attuatori, a tal proposito sono adoperati gli *amplificatori*. Le informazioni sono elaborate da un apposito calcolatore che può essere inglobato o esterno alla macchina in questione.

Nei sistemi di controllo è stata definita una normativa, nota come IEC61499 per normalizzare il funzionamento generale di tali dispositivi. In particolare, deve un sistema di controllo deve rifarsi ai seguenti punti

- è un sistema informatico che elabora informazioni ed esegue/applica algoritmi.
- è costituito da vari dispositivi che comunicano attraverso un'apposita rete.
- i dispositivi devono implementare delle funzionalità, denominate *applicazioni*.
- tali applicazioni possono essere distribuite fra i vari dispositivi.
- i dispositivi devono interfacciarsi con la rete e con il processo, inoltre le applicazioni costituiscono le loro *risorse*.
- in particolare, una *risorsa* è costituita da
 - una o più applicazioni
 - funzioni che collegano dati ed eventi
 - funzioni di pianificazione delle attività (un sistema operativo)

Si definisce **Manufacturing** l'insieme dei processi produttivi da applicare per ottenere un prodotto finale desiderato, a partire da materiali grezzi. Richiede

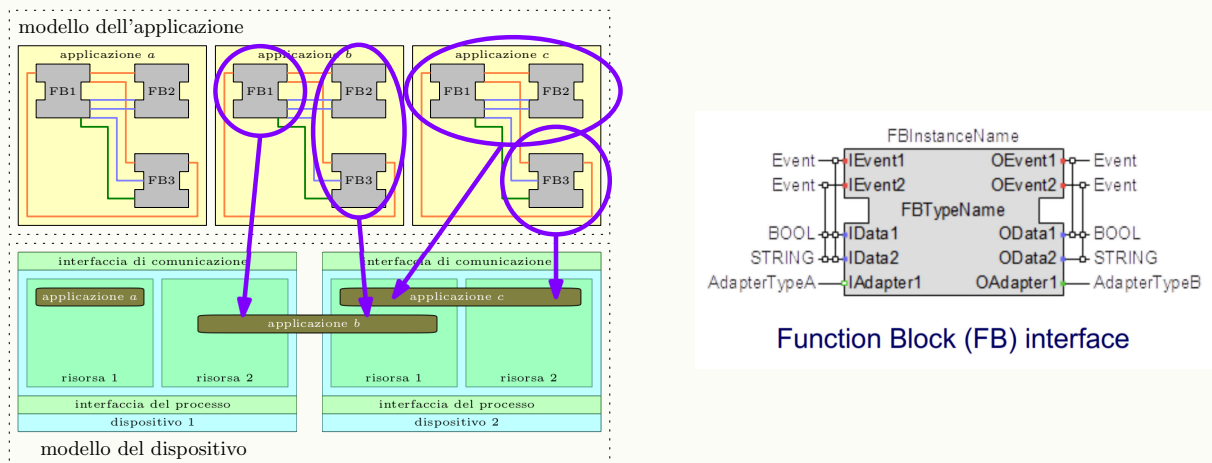
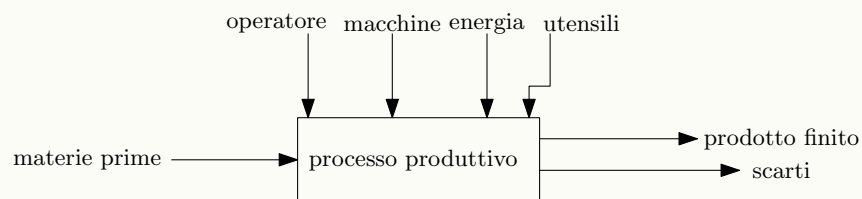


Figura 1.8: schematizzazione di un sistema di controllo

- energia
- macchine
- intervento umano
- informazioni

Da un punto di vista economico, è il processo che dà valore aggiunto ai materiali utilizzati.



CAPITOLO

2

COMPLEMENTI

2.1 La Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace è una *trasformata integrale*, nello specifico, è una funzione che associa ad una funzione di variabile reale, una funzione di variabile complessa.

Definizione (Trasformata di Laplace) : : Sia f una funzione di variabile reale, nulla in $(-\infty, 0)$, si chiama trasformata di Laplace di f la funzione

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx \quad p \in \mathbb{C}$$

Essendo $p = \alpha + i\beta$ una variabile complessa, la funzione integranda si può riscrivere

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\beta)x} f(x) dx$$

Ricordando l'identità di Eulero

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

Si ha

$$e^{-(\alpha+i\beta)x} = e^{-\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = \quad (2.1)$$

$$e^{-\alpha x} \cdot (\cos(-\beta x) + i \sin(-\beta x)) = e^{-\alpha x} \cdot (\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)) = \quad (2.2)$$

$$e^{-\alpha x} \cos(\beta x) - i e^{-\alpha x} \sin(\beta x) \quad (2.3)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](p) &= \mathcal{L}[f](\alpha + i\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\beta)x} f(x) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x) f(x) dx - i \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin(\beta x) f(x) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x) f(x) dx - i \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin(\beta x) f(x) dx \end{aligned}$$

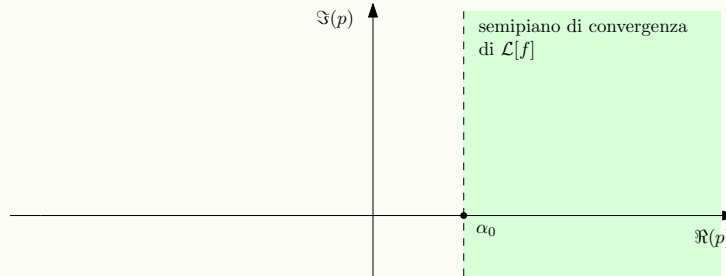
Se l'integrale $\mathcal{L}[f](\alpha + i\beta)$ converge per un certo $\alpha \in \mathbb{R}$, allora converge per $p = \alpha + i\beta$ per ogni altro $\beta \in \mathbb{R}$. Se per f esiste almeno un $p \in \mathbb{C}$ tale che $\mathcal{L}[f](p) < \infty$, allora f si dice *trasformabile secondo Laplace*.



In generale, se $\mathcal{L}[f](p) < \infty$ per $p = p_0$, allora è definita anche nel semipiano complesso

$$\{p \in \mathbb{C} \mid \Re(p) > \Re(p_0)\}$$

Sia α_0 l'estremo inferiore dell'insieme $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \mathcal{L}[f](p) < \infty \wedge \Re(p) > \alpha\}$, allora il semipiano $\{p \in \mathbb{C} \mid \Re(p) > \alpha_0\}$ è detto **semipiano di convergenza**.



Vediamo un esempio di trasformata, si consideri

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

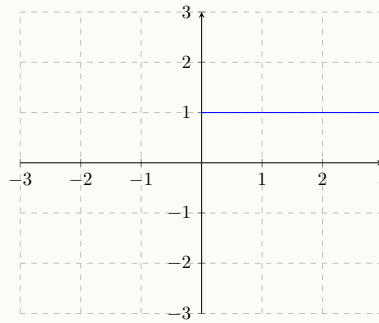


Figura 2.1: Funzione di Heaviside

Si calcola

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[H](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-px} \cdot 1 \, dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[H](p) = \int_0^T e^{-px} \cdot 1 \, dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-px}}{p} \right]_0^T = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} -\frac{e^{-pT}}{p} - \left[-\frac{e^{-p0}}{p} \right] = \lim_{T \rightarrow +\infty} -\frac{e^{-pT}}{p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Il cui semipiano di convergenza risulta essere $\Re(p) > 0$.

2.1.1 Proprietà della Trasformata

Linearità

La trasformazione di Laplace gode della proprietà di *linearità*, siano $f(p)$ e $g(p)$ due funzioni trasformabili, siano $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ due costanti complesse, se la funzione $\lambda \cdot f(p) + \mu \cdot g(p)$ è trasformabile, allora

$$\mathcal{L}[\lambda \cdot f + \mu \cdot g](p) = \lambda \mathcal{L}[f](p) + \mu \mathcal{L}[g](p)$$

Il semipiano di convergenza sarà uguale all'intersezione dei due semipiani di convergenza delle funzioni di partenza, più precisamente se

- f ha come semipiano di convergenza $\Re(p) > \alpha$
- g ha come semipiano di convergenza $\Re(p) > \beta$
- allora $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ ha come semipiano di convergenza $\Re(p) > \max\{\beta, \alpha\}$



Ritardo

Sia f una funzione trasformabile, si consideri una costante reale $a > 0$, la funzione $g(x) = f(x - a)$ è detta funzione *ritardata*.

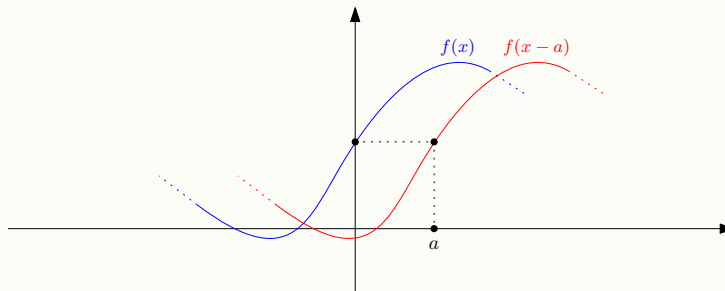


Figura 2.2: funzione ritardata

Per il calcolo della trasformata di $g(x) = f(x - a)$ si considera il cambio di variabile

$$\begin{aligned} t &= x - a \\ x &= t + a \end{aligned}$$

Si ricordi come, se f è nulla in $(-\infty, 0)$, allora g sarà nulla in $(0, a)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-px} g(x) dx = \int_a^{+\infty} e^{-px} f(x - a) dx = \int_a^{+\infty} e^{-p(t+a)} f(t) dx = \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-pt-pa} f(t) dx = \int_a^{+\infty} e^{-pt} e^{-pa} f(t) dx = e^{-pa} \int_a^{+\infty} e^{-pt} f(t) dx = e^{-pa} \mathcal{L}[f](p) \end{aligned}$$

Dunque si ricavano le cosiddette *formule del ritardo* :

$$\mathcal{L}[f(x - a)](p) = e^{-pa} \mathcal{L}[f(x)](p)$$

$$\mathcal{L}[e^{ax} f(x)](p) = \mathcal{L}[f](p - a)$$

Trasformazione di una derivata e di una primitiva

La seguente proprietà risulta cruciale nell'utilizzo della trasformata di Laplace per la risoluzione di equazioni differenziali. Le dimostrazioni dei seguenti risultati non saranno trattate in quanto non sono argomento di questo corso.

Sia f una funzione derivabile, la cui derivata è continua in $[0, \infty)$. Sia inoltre f' trasformabile, con semipiano di convergenza $\Re(p) > \alpha$, allora anche f è trasformabile, ha semipiano di convergenza $\Re(p) > \max\{\alpha, 0\}$, e vale la seguente identità :

$$\mathcal{L}[f'](p) = p\mathcal{L}[f](p) - f(0)$$

Si generalizza per derivate di ordine maggiore

$$\mathcal{L}[f''](p) = p^2 \mathcal{L}[f](p) - pf(0) - f'(0)$$

Analogamente, sia $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, se f è trasformabile ed ha semipiano di convergenza $\Re(p) > \alpha$, allora anche F lo è, ha semipiano di convergenza $\Re(p) > \max\{\alpha, 0\}$ e vale che

$$\mathcal{L}[F](p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}[f](p)$$



Convoluzione

Siano f e g due funzioni integrabili secondo Riemann e nulle in $(-\infty, 0)$, l'operatore $*$ detto **convoluzione** è definito nel modo seguente

$$(f * g)(x) = \int_0^{+\infty} f(x-t)g(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$$

Se f è trasformabile, e $|g|$ lo è, nello stesso semipiano, allora $f * g$ è trasformabile e vale

$$\mathcal{L}[f * g](p) = \mathcal{L}[f](p) \cdot \mathcal{L}[g](p)$$

Derivata ed Integrale della trasformata di Laplace

Essendo $\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px} dx$ si ha

$$\frac{d}{dp}\mathcal{L}[f](p) = \frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px} dx$$

$$\frac{d}{dp}\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dp}(f(x)e^{-px}) dx$$

$$\frac{d}{dp}\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} -xf(x)e^{-px} dx$$

$$\frac{d}{dp}\mathcal{L}[f](p) = \mathcal{L}[-xf(x)](p)$$

Generalizzando, per ogni $n \geq 0$

$$\frac{d^n}{dp^n}\mathcal{L}[f](p) = \mathcal{L}[-(1)^n x^n f(x)](p)$$

Esempio di calcolo : Si vuole trovare

$$\mathcal{L}[x \sin(\omega x)](p)$$

Essendo

$$\mathcal{L}[\sin(\omega x)](p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Ho che

$$\mathcal{L}[x \sin(\omega x)](p) = -\frac{d}{dp}\mathcal{L}[\sin(\omega x)](p) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\right) = \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$$

Trascurando il procedimento, la formula per l'integrale di una trasformata è la seguente

$$\int_p^{+\infty} \mathcal{L}[f](s) ds = \mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right](p)$$

2.1.2 Trasformata inversa

La funzione che associa ad ogni funzione trasformabile la sua trasformata, è iniettiva, se $F(p)$ è una trasformata di Laplace, esiste un'unica funzione f tale che $\mathcal{L}[f](p) = F(p)$. Data F , è possibile ottenere la funzione di base su cui si è effettuata la trasformata, tale operazione è detta *trasformazione inversa* di Laplace, si indica con \mathcal{L}^{-1}

$$\mathcal{L}[f] = F$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F] = f$$

Le formule di trasformazione derivate dalle proprietà (raggruppate alla fine di questa sezione), se lette al contrario valgono come formule di anti-trasformata.

Esempio di calcolo : Ricordando che $\mathcal{L}[e^{-ax}](p) = \frac{1}{p+a}$, si vuole calcolare la trasformata inversa di

$$\frac{2}{p+3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{p+3}\right](x) = \quad (2.4)$$

$$2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+3}\right](x) = \quad (2.5)$$

$$2 \cdot e^{-3x} \cdot H(x) \quad (2.6)$$

Una funzione risultante da un'anti trasformata va moltiplicata per la funzione di Heaviside $H(x)$ in quanto deve essere nulla in $(-\infty, 0)$. **Esempio di calcolo** : Si vuole trovare l'anti trasformata di

$$F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)}$$

Riscrivo la funzione

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p^3 + p} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}$$

Applicando la linearità ho

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}\right](x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right](x) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2 + 1}\right](x) = \quad (2.7)$$

$$H(x) - \cos(x) \cdot H(x) = H(x)(1 - \cos(x)) \quad (2.8)$$

2.1.3 Trasformate note

| Funzione | Trasformata | Semipiano di convergenza |
|------------------|---------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | $\frac{1}{p}$ | $\Re(p) > 0$ |
| e^{-ax} | $\frac{1}{p+a}$ | $\Re(p) > -\Re(a)$ |
| x | $\frac{1}{p^2}$ | $\Re(p) > 0$ |
| x^n | $\frac{n!}{p^{n+1}}$ | $\Re(p) > 0 \quad n \in \mathbb{N}$ |
| $\sin(\omega x)$ | $\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ | $\Re(p) > 0$ |
| $\cos(\omega x)$ | $\frac{p}{p^2 + \omega^2}$ | $\Re(p) > 0$ |
| δ | 1 | $p \in \mathbb{C}$ |
| $\cosh(ax)$ | $\frac{p}{p^2 - a^2}$ | $\Re(p) > \Re(a) $ |
| $\sinh(ax)$ | $\frac{a}{p^2 - a^2}$ | $\Re(p) > \Re(a) $ |

2.1.4 Funzione di trasferimento

Come già accennato, la trasformata di Laplace è utile nella risoluzione di equazioni differenziali. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b(t) \quad \begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

Si applica la trasformata all'equazione, ottenendo

$$\mathcal{L}[a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y](p) = \mathcal{L}[b](p)$$

si applica la linearità

$$a_0 \mathcal{L}[y''](p) + a_1 \mathcal{L}[y'](p) + a_2 \mathcal{L}[y](p) = \mathcal{L}[b](p)$$

Chiamo

$$\mathcal{L}[y](p) = Y(p) \quad \mathcal{L}[b](p) = B(p)$$

ed applico le proprietà della trasformazione di una derivata

$$a_0(p^2 Y(p) - p\alpha - \beta) + a_1(pY(p) - \alpha) + a_2 Y(p) = B(p)$$

$$a_0 p^2 Y(p) - a_0 p\alpha - a_0 \beta + a_1 pY(p) - a_1 \alpha + a_2 Y(p) = B(p)$$

esplicito $Y(p)$:

$$Y(p)(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) = B(p) + a_0 p\alpha + a_0 \beta + a_1 \alpha$$

$$Y(p) = \frac{1}{(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)} B(p) + a_0 p\alpha + a_0 \beta + a_1 \alpha$$

Pongo

$$S(p) = \frac{1}{(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)}$$

Tale S è detta **funzione di trasferimento**, se le condizioni iniziali sono entrambe nulle, ossia $\alpha = \beta = 0$, si ha

$$Y(p) = S(p) \cdot B(p)$$

$$\mathcal{L}[y](p) = S(p) \cdot \mathcal{L}[b](p)$$

Ricordando la convoluzione di una trasformata, si ha che

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[S \cdot B](t)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[S](t) * \mathcal{L}^{-1}[B](t)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[S](t) * b(t)$$

Le seguenti formule hanno un significato fisico notevole, supponiamo che vi sia un sistema fisico caratterizzato da un ingresso $b(t)$, ed un uscita $y(t)$, ad esempio, $b(t)$ è una forza, e $y(t)$ il moto di una particella. Trovare esplicitamente il moto y non è banale, è possibile quindi applicare la trasformata, passando nel dominio complesso di Laplace, per poi risolvere l'equazione ed applicare l'anti trasformata, trovando così il moto.

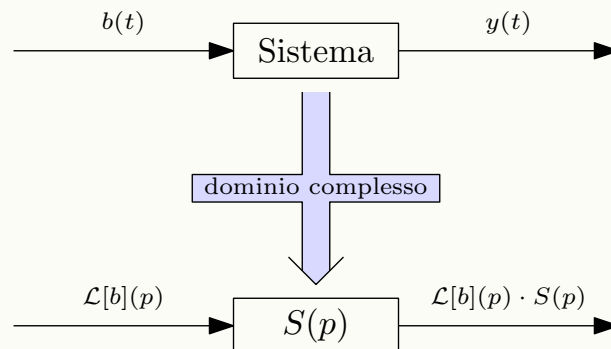


Figura 2.3: Funzione di Trasferimento

La funzione $S(p)$ quindi caratterizza totalmente il sistema fisico nel dominio di Laplace, in quanto basta moltiplicarla alla trasformata del segnale in ingresso per ottenere la trasformata del segnale in uscita.

Esempio di calcolo : Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 0 \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$



Si applica la trasformazione di Laplace

$$\mathcal{L}[y''](p) + 4\mathcal{L}[y'](p) + 3\mathcal{L}[y](p) = 0$$

Chiamando $\mathcal{L}[y](p) = Y(p)$, si ha

$$p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) + 4pY(p) - 4y(0) + 3Y(p) = 0$$

$$Y(p)(p^2 + 4p + 3) - 1 = 0$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3} = \frac{1}{(p+1)(p+3)} = \frac{A}{(p+1)} + \frac{B}{(p+3)}$$

dove $A = \frac{1}{p+1}$ se $p = -3$ e $B = \frac{1}{p+3}$ se $p = -1$, quindi

$$A = \frac{1}{(-3) + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$B = \frac{1}{(-1) + 3} = \frac{1}{2}$$

Quindi

$$Y(p) = -\frac{1}{2} \frac{1}{p+3} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+1}$$

Si applica l'anti trasformata

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{p+3} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+1}\right](t)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+3}\right](t) + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right](t)$$

Ricordando che $\mathcal{L}[e^{-ax}](p) = \frac{1}{p+a}$ si ha

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}\right)H(t)$$

