Esercizio 1. Si consideri una classe con 9 studenti. Il docente prepara 3 compiti diversi ed ogni compito viene assegnato a 3 studenti.

1) In quanti modi si possono abbinare i 9 studenti ai 3 compiti?
2) Se il docente avesse invece preparato 9 compiti diversi, in quanti modi si sarebbero potuti abbinare i 9 studenti ai 9 compiti?

Si consideri ora la medisima classe di 9 studenti.

3) In quanti modi si possono partizionare i 9 studenti in 3 gruppi, ognuno dei quali con 3 studenti?
4) In quanti modi si possono partizionare i 9 studenti in 3 gruppi, uno dei quali con 5 studenti e i rimanenti due con 2 studenti ognuno?
5) In quanti modi si possono partizionare i 9 studenti in 9 gruppi, ognuno dei quali con un singolo studente?

1) distribuisco 9 studenti in 3 compiti : $\binom{9}{3,3,3} = \frac{9!}{3!\cdot 3!\cdot 3!} = \frac{9!}{3\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2} = \frac{8!}{3\cdot 8} = \frac{7!}{3} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 2 = 1680$

2) $\Omega = \{(\omega_1 .. \omega_9), \omega_i \in \{1..9\} \mid i \neq J \Rightarrow \omega_i \neq \omega_J\} \Rightarrow |\Omega| = 9!$

3) distribuisco 9 studenti in 3 gruppi NON DISTINTI : $\frac{9!}{3!3!3!}$

ma $\underbrace{(A,B,C)}_{\text{GRUPPO 1}}, \underbrace{(D,E,F)}_{\text{GRUPPO 2}}, \underbrace{(G,H,I)}_{\text{GRUPPO 3}} = \underbrace{(D,E,F)}_{\text{GRUPPO 1}}, \underbrace{(G,H,I)}_{\text{GRUPPO 2}}, \underbrace{(A,B,C)}_{\text{GRUPPO 3}}$ divido per le 6 possibili permutazioni di 3 gruppi : $\frac{9!}{3!3!3!} \cdot 1/3! = \frac{1680}{6} = \frac{840}{3} = 280$

4) $\frac{9!}{5!\cdot 2\cdot 2}$ diviso 2 perche': $(A,B,C,D,E)(F,G)(H,I) = (A,B,C,D,E)(H,I)(F,G) \Rightarrow \frac{9!}{5!\,8} = 9\cdot 7\cdot 6 = 378$

5) in un solo modo! $\frac{9!}{1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1} \cdot \frac{1}{9!} = 1$

Esercizio 2. Un mazzo di carte napoletane è costituito da 40 carte di 4 semi distinti (denominati denari, coppe, spade e bastoni), numerate dall'asso al re.
In una partita di tresette si distribuiscono 10 carte a ciascuno dei 4 giocatori. Un giocatore ottiene una *napoletana* se riceve asso, due e tre dello stesso seme.
Voi siete al tavolo, e ricevete la vostra mano di 10 carte.

1) Calcolare la probabilità che otteniate una napoletana di bastoni (asso, due e tre di bastoni).
2) Calcolare la probabilità che otteniate contemporaneamente una napoletana di bastoni e di coppe.
3) Calcolare la probabilità che otteniate almeno una napoletana.

$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_{10}), \omega_i \in \{1,2,\dots,40\} \mid i \neq J \Rightarrow \omega_i \neq \omega_J\}, \quad |\Omega| = \frac{40!}{30!\,10!}$

1) $A = \{$NAPOLETANA di bastoni$\}$: Fisso 3 carte e distribuisco le restanti : $|A| = \frac{37!}{30!\,7!}$

$\mathbb{P}(A) = \frac{37!}{30!\,7!} \cdot \frac{30!\,10!}{40!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{38\cdot 39\cdot 40} = \frac{3}{247} \simeq 0{,}01$

2) $B = \{$NAPOLETANA di bastoni e coppe$\}$: Fisso 6 carte! : $\binom{34}{4} \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{34!}{4!\,30!} \cdot \frac{30!\cdot 10!}{40!} = \frac{1}{18278} \simeq 0{,}00005$

3) $C = \{$ALMENO 1 NAPOLETANA$\}$, considero : $C_1 = \{$esattamente 3 NAPOLETANE$\} \Rightarrow \binom{31}{1} \cdot 4$ POSSIBILI SEMI

$C_2 = \{$esattamente 2 NAPOLETANE$\}$: $\binom{34}{4} \cdot \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{POSSIBILI SEMI}}$ da Finire!

Esercizio 3. Carletto deve fare il compito in classe di matematica. Nel sussidiario ci sono 50 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 30 di geometria non commutativa e 10 di statistica bayesiana. Carletto non sa assolutamente nulla di tali materie, impara quindi a memoria 20 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 10 di geometria non commutativa e 5 di statistica bayesiana. Al momento del compito, Carletto svolge solo gli esercizi che ha imparato a memoria.

1) Se la maestra prepara il compito scegliendo a caso, tra gli esercizi del sussidiario, 4 esercizi di geometria non commutativa, con quale probabilità Carletto riesce a svolgere tutti gli esercizi di geometria non commutativa?

Si supponga invece che la maestra prepari il compito scegliendo a caso, tra gli esercizi del sussidiario, 5 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 4 esercizi di geometria non commutativa e 1 esercizio di statistica bayesiana.

2) Quanti compiti diversi può preparare la maestra? (compiti che differiscono solo per l'ordine degli esercizi non sono considerati diversi)
3) Con quale probabilità Carletto svolge tutti i 10 esercizi?
4) Con quale probabilità Carletto svolge 3 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 2 di geometria non commutativa e 1 di statistica bayesiana?

1) $\Omega = \{$Es. di geo. non comm.$\} = \{(\omega_1, \dots, \omega_4) \mid \omega_i \in \{1..,30\} \wedge \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_4\}, \quad |\Omega| = \binom{30}{4}$

Carletto sa a memoria gli es. $\{1..,10\} \Rightarrow A = \{$es. che sa Carletto$\} = \{(\omega_1, \dots, \omega_4) \in \Omega \mid \forall \omega_i,\ \omega_i \leq 10 \wedge \omega_1 < \omega_2 .. < \omega_4\}$

$\Rightarrow |A| = \binom{10}{4} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \binom{10}{4} \cdot 1/\binom{30}{4} = \frac{2}{261} \simeq 0{,}007$

2) Puo' preparare $\binom{50}{5} \cdot \binom{30}{4} \cdot 10$ compiti.

quelli che sa carletto

3) Carletto sa a memoria gli es. $\{1 ... 35\}$, $B = \{$es. che sa carletto$\}$, $|B| = \binom{20}{5} \cdot \binom{10}{4} \cdot 5$

$\Rightarrow \mathbb{P}(B) = \binom{20}{5} \cdot \binom{10}{4} \cdot 5 \cdot \frac{1}{\binom{50}{5}\cdot\binom{30}{4}\cdot 10} \simeq 0{,}00002$

il punto (4) verra' inteso come "esattamente" e NON "almeno".

4) $C = \{3$ di eq. ell, 2 di geo., 1 di stat.$\}$, $|C| = \binom{20}{3} \cdot \binom{30}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{20}{2} \cdot 5$ rimanenti - quelli che sa

$$\mathbb{P}(C) = \binom{20}{3} \cdot \binom{30}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{20}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{\binom{50}{5}\binom{30}{4} \cdot 10} \simeq 0{,}03$$

Esercizio 4. Dimostrare il principio di esclusione/inclusione: se $A_1, \ldots, A_n$ sono eventi arbitrari allora

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mathbb{P}\big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\big).$$

Si dimostra per induzione su n numero di eventi:

- Caso base $n=1$ $\quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{1} A_i\right) = (-1)^0 \cdot \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$
- ipotesi induttiva: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \le i_1 \le \ldots i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$
- passo induttivo: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(A_{n+1} \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right]\right)$

NON SO DIMOSTRARE QUESTO PASSO

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \le i_1 \le \ldots i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}((A_{n+1} \cap A_1) \cup (A_{n+1} \cap A_2) \ldots \cup (A_{n+1} \cap A_n)) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \le i_1 \le \ldots i_k \le n+1} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. Alice (A), Barbara (B) e Carlo (C) si sfidano in un torneo con le seguenti modalità. Nel primo round si scontrano A e B. Il vincitore gioca poi contro C, se vince anche questo round è proclamato vincitore; se invece vince C, costui gioca contro il perdente del round precedente e così di seguito. Il primo a vincere due round consecutivi vince il torneo. Si tenga presente che A, B e C hanno la stessa abilità nel gioco e pertanto ogni round è vinto da uno dei due contendenti con probabilità 1/2.

1) Qualche giocatore è avvantaggiato dalle regole?
2) Calcolare la probabilità che il torneo finisca dopo n round, $n \ge 2$.
3) Calcolare le probabilità di vittoria per A, B e C.
4) Il torneo potrebbe non avere mai termine?

2) le probabilità che il torneo finisca all'n-esimo round sono $(1/2)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$

4) le prob. che finisca prima del round n sono: $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$, vediamo quali sono le prob. che finisca: $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \Rightarrow \left| i = k-1 \right| \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = -1 + \sum_{i=0}^{\infty} 1/2^i = -1 + \frac{1}{1-1/2} = -1 + \frac{1}{1/2} = 1 \because$ evento certo.