Esercizio 1. *Sia $V=\mathbb{R}^3$ con base canonica fissata. Consideriamo l'applicazione lineare $L_A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definita dalla matrice:*

$$A=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&3\\-3&1&3\end{vmatrix}.$$

1.1. *Determinare gli autovalori di L_A.*

1.2. *Determinare equazioni cartesiane per gli autospazi associati.*

1.3. *Per ogni autospazio determinare una base.*

1.4. *Verificare che esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per L_A. Determinare esplicitamente una tale base. Questa base è unica ?*

1.5. *Scrivere la matrice associata a L_A nella base di cui in 1.4.* (Utilizzate la definizione di matrice associata ad L_A in una base $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$; vi ricordo che questa è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $L_A(\underline{v}_j)$ nella base $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$.)

1.6 *Determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.*

1.7 *La matrice di cui in 1.6 è unica ?*

1.1 considero $\det(A-\lambda Id)=\det\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&3\\-3&1&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\cdot\det\begin{vmatrix}1-\lambda&3\\1&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\cdot\left[(1-\lambda)(3-\lambda)-3\right]=(2-\lambda)\cdot(\lambda^2-4\lambda)=(2-\lambda)(\lambda-4)\cdot\lambda$

$\Rightarrow$ gli autovalori sono 0, 2, 4.

1.2 e 1.3 $V_0=Ker(V-0\cdot id)=Ker(V)=KerL_A$ riduco a scala L_A: $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&3\\-3&1&3\end{bmatrix}$ $A_3+\frac{3}{2}A_1$: $\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&3\\0&1&3\end{vmatrix}$ A_3-A_2: $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x_1=0\\x_2=-3t\\x_3=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=-3t\\x_3=t\end{cases}\Rightarrow t\cdot\begin{bmatrix}0\\-3\\1\end{bmatrix}\Rightarrow KerL_A=Span\left(\overset{\text{BASE}}{\begin{bmatrix}0\\-3\\1\end{bmatrix}}\right)=\left\{\bar{x}\in\mathbb{R}\ \middle|\ \begin{cases}x_1=0\\x_2+3x_3=0\end{cases}\right\}$

$V_2=Ker(A-2id)=Ker\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&3\\-3&1&1\end{bmatrix}=Ker\begin{bmatrix}-3&1&1\\0&-1&3\\0&0&0\end{bmatrix}=\left\{\bar{x}\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ \begin{cases}-3x_1+x_2+x_3=0\\-x_2+3x_3=0\end{cases}\right\}$, trovo una base:

$\begin{cases}-3x_1+x_2+x_3=0\\-x_2+3x_3=0\\x_3=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=4/3\,t\\x_2=3t\\x_3=t\end{cases}\Rightarrow$ La base e' $\begin{bmatrix}4/3\\3\\1\end{bmatrix}$

$V_4=Ker\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-3&3\\-3&1&-1\end{bmatrix}=A_2+3A_3\rightarrow\begin{bmatrix}-2&0&0\\-9&0&0\\-3&1&-1\end{bmatrix}$ $A_3-\frac{2}{9}A_2\rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0\\-9&0&0\\-3&1&-1\end{bmatrix}=Ker(V_4)=\left\{\bar{x}\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ \begin{cases}x_1=0\\x_2-x_3=0\end{cases}\right\}$

trovo una base: $\begin{cases}x_1=0\\x_2-x_3=0\\x_3=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=t\\x_3=t\end{cases}\Rightarrow V_4=Span\left(\overset{\text{BASE}}{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}}\right).$

1.4 una base esiste in quanto esistono 3 autospazi, la molt. algebrica di ogni valore e' identica a quella geometrica. Una base di $\mathbb{R}^3$ e': $\begin{bmatrix}0\\-3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\9\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$.

1.5 ho $L_A\left(\begin{vmatrix}0\\-3\\1\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$ $\quad L_A\left(\begin{vmatrix}4\\9\\3\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}8\\18\\6\end{vmatrix}$ $\quad L_A\left(\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}0\\4\\4\end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}=0\cdot\begin{vmatrix}0\\-3\\1\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}4\\9\\3\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}8\\18\\6\end{vmatrix}=0\cdot\begin{vmatrix}0\\-3\\1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}4\\9\\3\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}0\\4\\4\end{vmatrix}=0\cdot\begin{vmatrix}0\\-3\\1\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}4\\9\\3\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix}\Rightarrow M=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$

1.6

Sia $\mathcal{E}$ la base canonica e $\mathcal{B}$ la base di autovettori. ho che $A=M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(L_A)$ e $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}=M$

So che $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}=(M_{\mathcal{E}\mathcal{B}})^{-1}\cdot A\cdot M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$, devo quindi trovare la matrice del cambiamento di base $M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$. Voglio vedere che coordinate hanno $\begin{vmatrix}0\\-3\\1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}4\\9\\3\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix}$ in $\mathcal{E}$.

$\begin{vmatrix}0\\-3\\1\end{vmatrix}=0\cdot\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}+(-3)\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$ $\quad\begin{vmatrix}4\\9\\3\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}+9\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$ $\quad\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix}=0\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$

$M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}0&4&0\\-3&9&1\\1&3&1\end{bmatrix}$ **1.7** No, esistono infinite basi, quindi infinite matrici.

Esercizio 2. *Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$F(1,1,0) = (-1,3,0), \quad F(0,1,0) = (0,1,0), \quad F(0,1,1) = (2,-1,1)$$

2.1 *Verificare che la matrice associata ad F nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è*

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.2 *Stabilire se F è diagonalizzabile ed in caso affermativo trovare una base di autovettori e la matrice associata ad F in questa base. Studiare l'iniettività e la suriettività di F.*

2.3 *Calcolare A^{1222}.*

2.1 $\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1\\1\\0\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix} \Rightarrow F\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix} = F\left(\begin{vmatrix}1\\1\\0\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}\right) = F\begin{vmatrix}1\\1\\0\end{vmatrix} - F\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-1\\3\\0\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-1\\2\\0\end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix} \Rightarrow F\left(\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}\right) = F\left(\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix}2\\-1\\1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2\\-2\\1\end{vmatrix}$

2.2 Come prima cosa trovo gli autovalori.

$$\det(A-\lambda id) = \det\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot\det\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) = (1-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

gli autovalori sono 1 di cui $molt(1) = 2$ e -1 di cui $molt(-1) = 1$.

trovo $V_1 = Ker(A - 1\cdot id) = Ker\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = Ker\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = Span\left(\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix}\right) \Rightarrow \dim V_1 = 2$

$V_{-1} = Ker(A + id) = Ker\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = Ker\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = Span\left(\begin{vmatrix}-1\\0\\1\end{vmatrix}\right) \Rightarrow \dim V_{-1} = 1 \Rightarrow F$ e' diagonalizzabile.

La base di Autovettori e' $\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1\\0\\1\end{vmatrix}$, la matrice associata ad F e' $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ ha $\det = -1 \neq 0$

quindi e' iniettiva, inoltre $rg(D) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim Ker D = 3 - 0 = 3 \Rightarrow F$ e' suriettiva.

Esercizio 3. *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[X]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Sia data l'applicazione*

$$T : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$$
$$p \mapsto 2p - p(-1)(X^2 - X).$$

3.1 *Verificare che T è lineare, descriverne l'immagine, e determinarne una base per il nucleo.*

3.2 *Scrivere la matrice associata a T nella base $\mathcal{F} := \{2, -X, X^2\}$, scelta come base di partenza e come base di arrivo.*

3.1
$$\left.\begin{array}{l} T((ax^2+bx+c)+(a'x^2+b'x+c')) = T((a+a')x^2+(b+b')x+c+c') = 2(a+a')x^2+2(b+b')x+2c+2c'-(a+a'-b-b'+c+c')(x^2-x) \\ T(ax^2+bx+c)+T(a'x^2+b'x+c') = 2ax^2+2bx+2c-(a-b+c)(x^2-x)+2a'x^2+2b'x+2c'-(a'-b'+c')(x^2-x) \end{array}\right\} \text{UGUALI}$$

$$T(\lambda(ax^2+bx+c)) = T(\lambda ax^2+\lambda bx+\lambda c) = 2\lambda ax^2+2\lambda bx+2\lambda c-(\lambda a-\lambda b+\lambda c)(x^2-x) = \lambda[2ax^2+2bx+2c-(a-b+c)(x^2-x)] = \lambda\cdot T(ax^2+bx+c)$$

3.2 Vedo come si comporta T sulla base $\{2, -x, x^2\}$

$T(2) = 4 - 2x^2 + 2 = 2\begin{vmatrix}2\\0\\0\end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix}0\\-x\\0\end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix}0\\0\\x^2\end{vmatrix}$ $\quad T(-x) = -x^2 - x = 0\cdot\begin{vmatrix}2\\0\\0\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}0\\-x\\0\end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix}0\\0\\x^2\end{vmatrix}$ $\quad T(x^2) = x^2 + x = 0\cdot\begin{vmatrix}2\\0\\0\end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix}0\\-x\\0\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}0\\0\\x^2\end{vmatrix}$

ho la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$