Esercizio 1. Si assuma che - in media - il 2% della popolazione sia mancina. Dato un campione di 100 individui, utilizzando l'approssimazione di Poisson della binomiale, calcolare la probabilità che almeno 3 siano mancini.

probabilita' che un individuo sia mancino : $\frac{2}{100}$, consideriamo una V.A. $X \sim Bin(100, \frac{2}{100})$,

$\mathbb{P}(X=3) = \binom{100}{3}\left(\frac{2}{100}\right)^3 \cdot \left(\frac{98}{100}\right)^{97} \simeq 0{,}2$. Consideriamo $Y^{(n)} \sim Poisson(\underbrace{2}_{\text{tasso di MANCINI su 100 PERSONE}})$

$\mathbb{P}(Y^{(100)} = k) = e^{-2} \cdot \frac{2^k}{k!}$, $\mathbb{P}(X^{(100)} \geq 3) = 1 - \underline{\mathbb{P}(Y^{(100)} < 3)}$

! $\mathbb{P}(Y^{(100)} < 3) = \mathbb{P}(Y^{(100)} = 0 \cup Y^{(100)} = 1 \cup Y^{(100)} = 2) = \sum_{k=0}^{2} e^{-2} \cdot \frac{2^k}{k!} = e^{-2} \cdot \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!}\right) = 5e^{-2} \Rightarrow \mathbb{P}(X^{(100)} \geq 3) = 1 - 5e^{-2} \simeq 0.32$

Esercizio 2. Una moneta con probabilità di testa pari a $p \in (0,1)$ viene lanciata un numero di volte aleatorio (indipendente dai risultati dei lanci della moneta) con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Trovare le distribuzioni del numero totale di teste e croci otteneute e dimostrare che queste due variabili aleatorie sono indipendenti.

$\{$Numero di lanci$\} = X \sim Poisson(\lambda) \Rightarrow \mathbb{P}(\{$sono k lanci$\}) = \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

$T := \{$Numero di teste su X lanci$\}$, la prob. che il numero di teste sia k e' condizionata dal numero di lanci : $\mathbb{P}(T=k) = \mathbb{P}(\underbrace{X \geq k}_{\text{LANCI} \geq \text{TESTE}}) \cdot \mathbb{P}(T = k | X \geq k) : \sum_{\underbrace{\ell = k}_{\text{LANCI}}}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^\ell}{\ell!} \cdot \binom{\ell}{k} p^k \cdot (1-p)^{\ell - k} \overset{\text{wolfram}}{=} e^{-\lambda \cdot p} \cdot \frac{\lambda p^k}{k!}$

Esercizio 3. Ogni giorno Carlo riceve un numero aleatorio X di email, che possiamo pensare come una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Ogni email, indipendentemente dalle altre e dal numero totale di email ricevute, è spam con probabilità p e legittima con probabilità $1-p$, $p \in (0,1)$. Siano Y e Z rispettivamente il numero di email di spam e di email legittime ricevute oggi da Carlo.

1) Calcolare la distribuzione di Y e quella di Z.

2) Dire se Y e Z siano o meno indipendenti. In caso affermativo dimostrarlo, in caso contrario dare un controesempio.

M = Numero di email $\sim Poisson(\lambda) \Rightarrow \mathbb{P}(M = m) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^m}{m!}$ dove $\lambda :=$ tasso email x unita' di tempo

1) Se Y e' il numero di email spam ricevute, $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(\{$si ricevono ALMENO k email e k di queste sono spam$\}) = \mathbb{P}(M \geq k) \cdot \mathbb{P}(Y = k | M \geq k)$

- $\mathbb{P}(M \geq k) = \mathbb{P}(M = k \cup M = k+1 \ldots M = k + \infty) = \sum_{i=k}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$

- $\mathbb{P}(Y = k | M \geq k) = \frac{\mathbb{P}(Y = k \cap M \geq k)}{\mathbb{P}(M \geq k)} = \frac{\sum_{i=k}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \binom{i}{k} p^k (1-p)^{i-k}}{\sum_{i=k}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}} \Rightarrow \mathbb{P}(M \geq k) \cdot \mathbb{P}(Y = k | M \geq k) = \frac{\mathbb{P}(Y = k \cap M \geq k)}{\mathbb{P}(M \geq k)} \mathbb{P}(M \geq k)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{i=k}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \binom{i}{k} p^k (1-p)^{i-k} = e^{-\lambda \cdot p} \cdot \frac{(\lambda \cdot p)^k}{k!}$ e $\mathbb{P}(Z = k) = e^{-\lambda(1-p)} \cdot \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!}$

Esercizio 5. Da un gruppo di 7 batterie, di cui 3 nuove, 2 usate ma funzionanti e 2 difettose, ne vengono scelte 3 a caso. Siano X e Y rispettivamente il numero di batterie nuove e usate ma funzionanti tra quelle scelte.

1) Determinare la distribuzione congiunta di (X,Y) e le distribuzioni marginali di X e di Y.

2) Calcolare $\text{cov}(X,Y)$. Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?

3) Le tre batterie scelte sono montate su di un apparecchio che funziona se nessuna di esse è difettosa. Determinare la probabilità che l'apparecchio funzioni.

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \omega_i \in \{0, 1, \ldots, 7\}\}$, $|\Omega| = \binom{7}{3} = 35$

$\mathbb{P}(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{35}$ $\mathbb{P}(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{35}$ $\mathbb{P}(X=3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{4}{0}}{35} = \frac{1}{35}$

1) $\Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{3}{k} \cdot \binom{4}{3-k}}{35}$ e $\mathbb{P}(Y = \underset{k \leq 2}{k}) = \frac{\binom{2}{k}\binom{5}{3-k}}{35}$

$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{FUNZI}} \underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{USATE}} \underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{RIM}} \cdot 1/35$

in generale: $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \binom{3}{x} \cdot \binom{2}{y} \cdot \binom{2}{3-x-y} \cdot \frac{1}{35}$ $\Rightarrow$

distribuzione congiunta

y \ x	0	1	2	3
0	0	3/35	6/35	1/35
1	2/35	12/35	6/35	0
2	2/35	3/35	0	0

2) Calcolo prima il valore atteso.

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=0}^{3} i\cdot\frac{\binom{3}{i}\binom{4}{3-i}}{35}=\frac{1}{35}\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}\cdot\binom{4}{3-i}\cdot i=\frac{1}{35}\cdot\left[0+\binom{3}{1}\binom{4}{2}+\binom{3}{2}\binom{4}{1}\cdot 2+\binom{3}{3}\cdot\binom{4}{0}\cdot 3\right]=\frac{1}{35}\cdot\left[18+24+3\right]=\frac{9}{7}$$

$$\mathbb{E}(Y)=\sum_{i=0}^{2} i\,\frac{\binom{2}{i}\binom{5}{3-i}}{35}=\frac{1}{35}\cdot\left[0+\binom{2}{1}\binom{5}{2}+\binom{2}{2}\binom{5}{1}\cdot 2\right]=\frac{1}{35}\left[20+10\right]=\frac{6}{7}$$

$$\mathbb{E}(X\cdot Y)=\sum_{x=0}^{3}\sum_{y=0}^{2} x\cdot y\cdot\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\frac{1}{35}\left[0+18+2\cdot 12+3\right]=\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)=\frac{6}{7}-\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{7}=\frac{6}{7}-\frac{54}{49}=\frac{42-54}{49}=-\frac{12}{49}$$

3) Ci sono 2 batterie difettose su 7: $A::\{\text{batterie funzionanti}\}=\binom{5}{3}\Rightarrow\mathbb{P}(A)=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$

Esercizio 6. Un dado che ha una faccia blu, due rosse e tre verdi viene lanciato due volte. Siano R il numero di volte in cui il dado esibisce la faccia superiore rossa e V il numero di volte in cui il dado esibisce la faccia superiore verde.

1) Costruire la tabella della distribuzione congiunta di (R, V).
2) Determinare la distribuzione di $Z = \max\{R, V\}$ e calcolare $\mathbb{E}(Z)$ e $\mathbb{V}(Z)$.

1) R e' una V.A binomiale, si fanno 2 lanci e con prob. $\frac{1}{3}$ la faccia esce rossa.

$$R\sim\mathrm{binom}\left(2,\tfrac{1}{3}\right)\Rightarrow\mathbb{P}(R=K)=\binom{2}{K}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^{K}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^{2-K}\Rightarrow R=\begin{cases}0 & \text{con prob.}=4/9\\ 1 & \text{con prob.}=4/9\\ 2 & \text{con prob.}=1/9\end{cases}$$

$K=0,1,2$

$$V\sim\mathrm{binom}\left(2,\tfrac{1}{2}\right)\Rightarrow\mathbb{P}(V=K)=\binom{2}{K}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{K}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2-K}=\binom{2}{K}\cdot\frac{1}{4}\Rightarrow V=\begin{cases}0 & \text{con prob.}=1/4\\ 1 & \text{con prob.}=1/2\\ 2 & \text{con prob.}=1/4\end{cases}$$

Nota: i due lanci sono indipendenti fra loro
$\mathbb{P}(\text{LANCIO }1=x,\text{LANCIO }2=y)$ $=$ $\mathbb{P}(\text{LANCIO }1=x)\cdot\mathbb{P}(\text{LANCIO }2=y)$

La V.A. congiunta (R,V) ha immagine: $\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1),(2,0),(0,2)\}$

Tabella:

V \ R	0	1	2
0	1/36	1/9	1/9
1	1/6	1/3	0
2	1/4	0	0

$\mathbb{P}((R,V)=(0,0))=\{2\text{ volte una faccia blu}\}=1/36$ $\quad\mathbb{P}((R,V)=(1,0))=\{\text{ROSSA E BLU}\}=\frac{1}{9}$

$\mathbb{P}((R,V)=(0,1))=\frac{1}{6}$ $\quad\mathbb{P}((R,V)=(1,1))=\frac{1}{3}$ $\quad\mathbb{P}((R,V)=(2,0))=1/9$ $\quad\mathbb{P}((R,V)=(0,2))=1/4$

2) Voglio trovare $Z=\max(R,V)$, sicuramente: $\mathrm{Im}(Z)=\{0,1,2\}$, e' facile da trovare:

$$Z=0\Leftrightarrow(R,V)=(0,0)\Rightarrow\mathbb{P}(Z=0)=\mathbb{P}((R,V)=(0,0))=\frac{1}{36}$$

$$Z=1\Leftrightarrow(R,V)=(1,0)\vee(1,1)\vee(0,1)\Rightarrow\mathbb{P}(Z=1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}=\frac{11}{18}$$

$$Z=2\Leftrightarrow(R,V)=(2,0)\vee(0,2)\Rightarrow\mathbb{P}(Z=2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{13}{36}$$

$$\mathbb{E}(Z)=\sum_{i=0}^{2} i\cdot\mathbb{P}(Z=i)=\frac{11}{18}+2\cdot\frac{13}{36}=\frac{22+26}{36}=\frac{48}{36}=\frac{4}{3}$$

$$\mathbb{V}(Z)=\sum_{i=0}^{2}\left(i-\tfrac{4}{3}\right)^{2}\mathbb{P}(Z=i)=\frac{1}{36}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^{2}+\frac{11}{18}\cdot\left(1-\frac{4}{3}\right)^{2}+\frac{13}{36}\cdot\left(2-\frac{4}{3}\right)^{2}=\frac{1}{36}\cdot\frac{16}{9}+\frac{11}{18}\cdot\frac{1}{9}+\frac{13}{36}\cdot\frac{4}{9}=\frac{5}{18}$$

Esercizio 7. I componenti elettronici prodotti in una fabbrica sono difettosi, l'uno indipendentemente dall'altro, con probabilità p e funzionanti con probabilità $1-p$, $p \in (0,1)$. Vengono sottoposti ad un controllo di qualità con la seguente modalità: ogni componente, l'uno indipendentemente dall'altro, viene ispezionato con probabilità α e non ispezionato con probabilità $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Un componente trovato difettoso viene scartato, mentre gli altri vengono messi in commercio. Si supponga di avere n componenti prodotti dalla fabbrica.

1) Calcolare la distribuzione del numero di componenti che vengono scartati dopo il controllo di qualità.

2) Sapendo che il numero di componenti scartati dopo il controllo di qualità è pari a k, $k = 0, 1, \ldots, n$, calcolare la distribuzione dei componenti difettosi tra gli $n-k$ messi in commercio.

1) Essendo che, ogni componente viene scartato se e solo se viene controllato ed e' difettoso. $\mathbb{P}(\{i \text{ viene scartato}\}) = \mathbb{P}(i \text{ e' difettoso}, i \text{ viene controllato}) \underset{\text{INDIPENDENZA}}{=} p \cdot \alpha$

Considero: $\{\text{Componenti scartati su } n\} = X \sim \text{binom}(n, p \cdot \alpha) \Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}(p\alpha)^k \cdot (1-p\alpha)^{n-k}$

2) Siano $\{\text{Componenti difettosi su } n-k \text{ in commercio}\} = Y \sim \text{binom}(n-k, p)$ Voglio $\mathbb{P}(Y=d \mid X=k)$

prima trovo $\mathbb{P}(Y=d) = \binom{n-k}{d} p^d \cdot p^{(n-k-d)} \Rightarrow \mathbb{P}(Y=d \mid X=k) = \dfrac{\mathbb{P}(Y=d \cap X=k)}{\mathbb{P}(X=k)}$ Voglio trovare $\mathbb{P}(Y=d \cap X=k)$

$\mathbb{P}(Y=d \cap X=k) :: d \text{ difettosi su } n-k = \binom{n-k}{d} p^d \cdot p^{(n-k-d)} = \mathbb{P}(Y=d)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y=d \mid X=k) = \frac{\binom{n-k}{d} p^d \cdot p^{(n-k-d)}}{\binom{n}{k}(p\alpha)^k \cdot (1-p\alpha)^{n-k}}$$

Esercizio 8. Siano X, Y due variabili aleatorie di Bernoulli di parametro p e indipendenti. Siano inoltre

$$Z = X(1-Y) \quad \text{e} \quad W = 1 - XY.$$

1) Qual è la distribuzione congiunta di (Z, W)?

2) Quali sono le distribuzioni marginali di Z e W?

3) Per quali valori di p le variabili aleatorie Z e W sono indipendenti?

Costruisco delle tavole di verità:

X	Y	Z	W
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0

$\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}(X=1, Y=0) = p - p^2 \Rightarrow \mathbb{P}(Z=0) = 1 - p + p^2$

$\Rightarrow \mathbb{P}(W=0) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) = p^2 \Rightarrow \mathbb{P}(W=1) = 1 - p^2$

$\Rightarrow \mathbb{P}((Z,W) = (0,0)) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) = p^2$ $\quad \mathbb{P}((Z,W) = (0,1)) = \mathbb{P}(X=0, Y=0 \vee X=0, Y=1) = (1-p)(1-p) + (1-p) \cdot p$

$\mathbb{P}((Z,W) = (1,0)) = 0$ $\quad \mathbb{P}((Z,W) = (1,1)) = \mathbb{P}(X=1, Y=0) = p \cdot (1-p)$