Teorema del valore medio

Ottimizzazione :

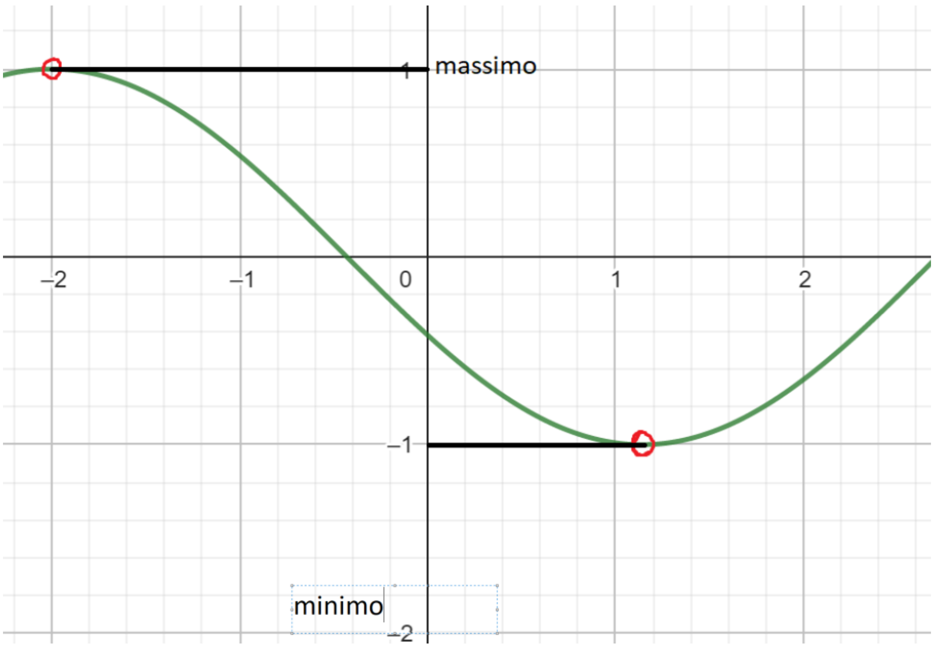
Definizione : data una funzione f in un intervallo $\mathbb{R}$, cioè $f\,: I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

M è il massimo globale di f in I se $\forall x \in I \;\; f(x) \leq M$

$M = f(x_0), x_0 =$ punto massimo globale

m è il minimo globale di f in I se $\forall x \in I \;\; f(x) \geq m$

$$m = f(x_0), x_0 = \text{punto massimo globale}$$



M è un **massimo locale** se esiste $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in I$ tale che $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

$$f(x) \leq f(x_0) = M = Max\ f(x)$$

m è un **minimo locale** se esiste $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in I$ tale che $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

$$f(x) \geq f(x_0) = m = Min\ f(x)$$

Teorema di Fermat

Se $f\, : [a, b] \rightarrow\, \mathbb{R}$ è derivabile in (a, b) e $x_0 \in (a, b)$ è un punto estremale (con estremale si intende un estremo, cioè il minimo o il massimo) locale, allora la derivata si annulla in x_0.

$$f'(x_0) = 0$$

Esempi :

$f(x) = x^3$ in $[-1,1]$ $\;f'(x) = 3x^2$
$f'(x) = 0, 0$ non è un punto estremale

$$\forall x > 0 \;\; f(x) > 0 \quad \forall x < 0 \quad f(x) < 0$$

Se non è 0, non è un punto estremale.

$f(x) = x^2$ in $[-1,1]$

Altro esempio

$$f(0) = 0 \leq x^2 \rightarrow f'(x) = 2x < f'(0) = 0$$

Dimostrazione del teorema di Fermat

x_0 è un punto di minimo locale

$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ sappiamo $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0 \quad h < \varepsilon$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$$

Il limite destro e sinistro devono essere uguali. Non possono essere sia maggiori che minori di 0, quindi sono entrambi uguali a 0. Siccome esiste f è derivabile in x_0, esiste finito $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$

Altro esempio :

$$f(x) = |x| \geq 0 = f(x)$$

Siccome f non è derivabile in 0, non si può applicare il teorema di Fermat.

Teorema di Lagrang

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ è derivabile in (a,b) allora esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

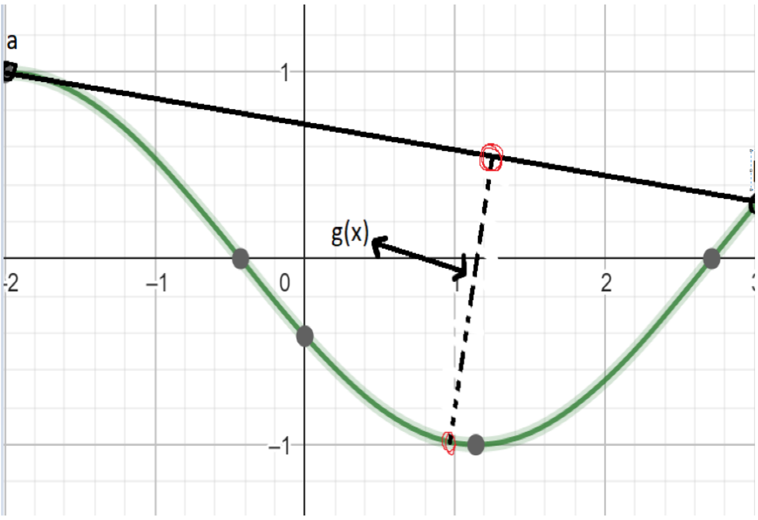
C'è un punto in (a,b) dove la derivata è uguale alla crescita media.

<u>Dimostrazione</u>

Equazione della retta che passa per $\big(a, f(a)\big)$ e $(b, f(b))$

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$
$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$
$$g(x) = 0, \qquad g(b) = a$$

$g(x)$ è la distanza tra la funzione e la retta della crescita media.



Se il massimo è interno e vale $x_0 \in (a,b) \to g'(x) = 0$

Se il minimo è interno e vale

$x \in (a,b) \to g'(x) = 0$

Se $max(g)$ e $min(g)$ sono raggiunti sugli estremi allora coincidono, g è costantemente uguale a 0.b

Teorema sulla monotone

$f(a,b) \to \mathbb{R}$, derivabile in (a,b)

f crescente in $(a,b) \longleftrightarrow f'(x) \geq 0$

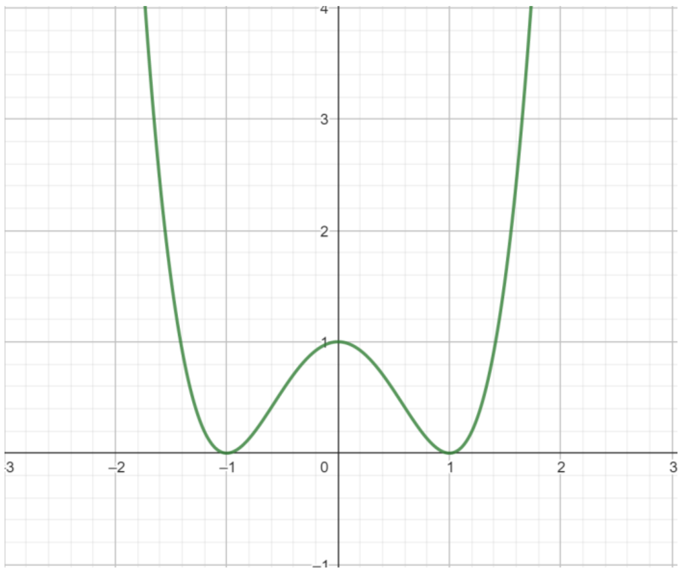
f decrescente in $(a,b) \longleftrightarrow f'(x) \leq 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Esempio

$f(x) = (1 - x^2)^2$ determinare gli intervalli di monotonie

$$f'(x) = 2(1 - x^2)(-2x) = -4x(1 - x^2) = -4x(1 + x)(1 - x)$$



$f'(x) \leq 0$ in $(-\infty, -1)$ Verso il basso

$f'(x) \leq 0$ in $(-1, 0)$ Verso l'alto

$f'(x) \leq 0$ in $(0,1)$ Verso il basso

$f'(x) \leq 0$ in $(1, +\infty)$ Verso l'alto

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \textit{Dominio di } f = \mathbb{R}\{0\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$

$$f(1) = \frac{\pi}{2} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\ (0, +\infty) \\ -\frac{\pi}{2}(-\infty, 0) \end{cases}$$

$$f(-1) = -\frac{\pi}{2} \qquad x > 0 \quad \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}\right)$$