

Metodi Matematici per l'Informatica - Esercizi 1

(a.a. 22/23, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (carlucci@di.uniroma1.it)

Nota: Leggere con attenzione e spirito critico le tracce. Gli esercizi indicati con un asterisco sono più difficili di quelli che potrete incontrare all'esame.

1 Esercizi sui conteggi

Esercizio 1 *In una paninERIA potete comporre il vostro panino scegliendo tra 5 tipi di pane e 8 farciture. Quanti sono i possibili panini?*

Esercizio 2 *In una paninERIA potete comporre il vostro panino scegliendo tra 5 tipi di pane e 7 farciture vegane, 6 farciture senza lattosio e 4 salse. Quanti sono i possibili panini completi (con un tipo di pane, un tipo di farcitura e una salsa)?*

Esercizio 3 *In una competizione gareggiano 10 atleti, di cui 3 italiani, 4 tedeschi e 3 inglesi. Tutti gli atleti arrivano al traguardo e non ci sono arrivi simultanei.*

- *Quanti sono gli ordini di arrivo possibili?*
- *Quante sono le possibili salite al podio? (i.e., primi tre classificati)*
- *Se i primi 5 classificati passano il turno, quanti sono i possibili passaggi di turno?*
- *Quanti sono gli ordini di arrivo con un inglese al primo posto?*
- *Quanti sono gli ordini di arrivo con un inglese all'ultimo posto?*
- *I tre atleti italiani si chiamano Tizio, Caio e Sempronio. Quanti sono gli ordini di arrivo in cui Tizio arriva prima di Caio? E quanti quelli in cui Caio arriva prima di Tizio?*
- *Quanti sono gli ordini di arrivo in cui Tizio arriva prima di Caio e Caio prima di Sempronio?*

Esercizio 4 *In una classe di 90 studenti 50 sono iscritti a Informatica e 40 a Matematica.*

- *Quante delegazioni di 6 rappresentanti posso formare?*
- *Quante delegazioni di 6 rappresentanti con 3 rappresentanti di Informatica e 3 di Matematica posso formare?*
- *Quante delegazioni di 6 rappresentanti con uno di Matematica e 5 di Informatica?*
- *Quante delegazioni di 6 rappresentanti con almeno uno di Matematica e almeno uno di Informatica? (Suggerimento: dividere in tipi le possibili delegazioni).*

Esercizio 5 *In una classe di 100 studenti 30 sono di Matematica, 60 di Informatica e 10 di Fisica. Quante delegazioni di 5 posso formare con almeno un rappresentante di ogni materia?*

Esercizio 6 Consideriamo il sistema di targhe formato da 2 lettere 3 cifre e 2 lettere, usando le 26 lettere dell'alfabeto latino.

- Quante targhe finiscono con A?
- Quante targhe finiscono con B e contengono una sola B?
- Quante targhe contengono almeno una C?
- Quante targhe contengono una sola D? (Suggerimento: dividere in tipi)
- Quante targhe contengono almeno una C e finiscono con Z?
- Quante targhe contengono esattamente una B e esattamente una Z?

Esercizio 7 Quanti sono i modi di formare due squadre da 8 da un gruppo di 16 persone?

Esercizio 8 Un sondaggio condotto su 45 persone ha dato i risultati seguenti: a 22 piace il mare, a 15 la montagna, a 8 la collina, a 13 mare e montagna, a 6 montagna e collina, a 4 mare e collina, a 4 studenti piacciono tutte e tre. A quanti studenti piace il mare o la montagna o la collina?

Esercizio 9 Un sondaggio condotto su 35 studenti ha dato i risultati seguenti: a 22 piace Programmazione, a 15 Algebra, a 8 Logica, a 25 Programmazione e Algebra, a 19 Algebra e Logica, a 14 Programmazione e Logica, a 13 studenti piacciono tutte e tre le materie. A quanti studenti piace almeno una materia?

Esercizio 10 Quante sono le partizioni di un insieme di 18 persone in 3 gruppi da 6?

Esercizio 11 Il mio ristorante ha tre tavoli da 3 posti ciascuno. In quanti modi posso far sedere 12 clienti?

Esercizio 12 Consideriamo l'intervallo chiuso $[0, 20]$. In quanti modi posso dividerlo in 9 intervalli

$$[0, a_1), [a_1, a_2), [a_2, a_3), \dots, [a_8, n]$$

dove $a_1 < a_2 < \dots < a_8 < n$ con gli a_i naturali positivi? In quanti modi posso dividerlo in 12 intervalli? Esiste una formula generale per questo problema?

Esercizio 13 Quanti sono i modi di dividere in due parti non vuote un insieme di n elementi?

Esercizio 14 Dimostrare con doppio conteggio la seguente identità

$$k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}.$$

Esercizio 15 Dimostrare con doppio conteggio la seguente identità

$$\binom{n}{2} \times \binom{n-2}{k-2} = \binom{n}{k} \times \binom{k}{2}.$$

Esercizio 16 (*) Dare una dimostrazione combinatoria della seguente identità (somma di termini in una colonna del Triangolo di Tartaglia-Pascal), dove $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^n \binom{i-1}{k-1}$$

Esercizio 17 (*) Dimostrare usando le proprietà del coefficiente binomiale che

$$3^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k.$$

(Suggerimento: scrivere 3 come un binomio).

Esercizio 18 La mia nave ha 24 posti: 10 sono sul ponte e 14 nella stiva. In quanti modi posso accomodare 16 viaggiatori di cui 5 hanno un biglietto per il ponte e 9 per la stiva?

Esercizio 19 Un branco di gorilla è formato tipicamente da 3 maschi e 7 femmine. Consideriamo una popolazione di gorilla composta da 30 maschi e 60 femmine.

- Quanti branchi posso formare?
- Se il 10% dei maschi e il 50% delle femmine è portatore di un gene speciale, quanti branchi posso formare composti interamente da portatori di quel gene?
- Se ci sono due maschi alfa, quanti branchi posso formare contenenti un unico maschio alfa?
- Se ci sono due maschi alfa, quanti branchi posso formare contenenti almeno un maschio alfa?

Esercizio 20 Estraggo simultaneamente 5 numeri da un'urna contenente i numeri da 1 a 100.

- Quante estrazioni possibili?
- Quante estrazioni con esattamente un numero dispari?
- Quante estrazioni con esattamente due numeri pari?
- Quante estrazioni con almeno un numero dispari?

Esercizio 21 7 amici vanno in pizzeria. Ciascuno sceglie un tipo di pizza tra i 14 tipi disponibili. Quante possibili ordinazioni può ricevere il pizzaiolo? (N.B. l'ordine non importa).

Esercizio 22 Voglio spendere 15 euro dal mio fruttivendolo e posso scegliere tra 9 tipi di frutti, tutti venduti 1 euro al pezzo:

- Se voglio almeno un frutto di ogni tipo, quanti modi ho di fare la spesa?
- Se non voglio prendere più di due frutti dello stesso tipo?

Esercizio 23 Quante coppie di parole (anche insensate) posso formare dalla parola Anarchia? (per es. anarchia, harci-naa, etc).

Esercizio 24 In quanti modi posso distribuire 18 biscotti tra 4 bambini dando almeno 2 e al massimo 5 biscotti a ciascun bambino?

(Suggerimento: ridurre a un problema con un solo vincolo).

Esercizio 25 Consideriamo l'equazione $x + y + z = 12$

- Quante sono le soluzioni non negative?
- Quante sono le soluzioni in cui ogni variabile ha almeno valore 2?
- Quante sono le soluzioni in cui ogni variabile ha valore ≤ 3 ? (Suggerimento: considerare la negazione della proprietà e usare il PIE).

Esercizio 26 • Quanti sono gli anagrammi di NINNANANNA?

- Quanti sono gli anagrammi di NINNANANNA che non iniziano con A?
- Quanti sono gli anagrammi di NINNANANNA che iniziano o finiscono con NN?

Esercizio 27 Un “anagramma” è un riordinamento delle lettere di una parola.

- Quanti sono gli anagrammi della parola PROGRAMMAZIONE?
- Quanti non iniziano con M?
- Quanti iniziano o finiscono con AM? (Suggerimento: usare il PIE)

Esercizio 28 A una lotteria vengono estratti 4 numeri tra 1 e 200 simultaneamente.

- Quante sono le estrazioni possibili?
- Quante estrazioni con esattamente 2 numeri pari?
- Quante estrazioni con almeno un numero pari?

Esercizio 29 Sia p il vostro anno di nascita. Sia q il vostro mese di nascita +5.

- Quanti sono i modi di scrivere p come somma di q interi non negativi?
- Quante sono le soluzioni intere positive dell’equazione seguente?

$$x_1 + \cdots + x_q = p$$

- Quante sequenze ordinate di 3 cifre distinte posso formare con le cifre che compongono la vostra data di nascita (GGMMAAAA)?

Esercizio 30 Sia S la stringa di lettere formata concatenando il vostro nome e il vostro cognome.

- Quanti sono gli anagrammi di S ?
- Quanti anagrammi di S non iniziano con la prima lettera di S ?
- Siano a e b la prima e la seconda lettera di S . Quanti anagrammi di S iniziano o finiscono con la stringa ab ? (Suggerimento: usare il PIE a due termini).

NB: Non è necessario dare il risultato numerico finale. Si richiede la formula corretta per i valori scelti.

Esercizio 31 Consideriamo un sistema di password formato da 3 lettere (scelte le 26 lettere dell’alfabeto latino, solo maiuscole) seguite da 3 cifre seguite da un carattere speciale scelto tra \$, !, e %.

- Quante password hanno ! come ultimo simbolo?
- Quante password hanno L come prima lettera o ! come ultimo simbolo?
- Quante targhe contengono esattamente un 9 ed esattamente una P?

Esercizio 32 (*) Dimostrare che

$$\binom{13}{3} = \binom{4}{1} \times \binom{10}{3} - \binom{4}{2} \times \binom{7}{3} + \binom{4}{3} \times \binom{4}{3}.$$

(Suggerimento: Il membro a sinistra conta il numero delle soluzioni non-negative dell’equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$. Quante soluzioni esistono in cui tutte le variabili sono ≤ 2 ?).

Esercizio 33 (**) Dimostrare con doppio conteggio la seguente identità:

$$\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \times \binom{n+N-k-1}{N-1} = \sum_{i=0}^{N-1} \binom{N}{i} \times \binom{n-1}{N-1-i} \times 2^{N-i}.$$

(Suggerimento: l'espressione a sinistra può interpretarsi come la scelta di un sottinsieme qualunque di un insieme di N elementi X , e di un sottinsieme di altri $N-1$ elementi (distinti da quelli già scelti), scelti tra quelli di X e altri $n-1$ elementi aggiuntivi. Trovare una descrizione dell'espressione a destra che giustifichi l'identità.)

2 Tracce d'esame sui conteggi

Gli esercizi seguenti sono tratti da tracce d'esame degli anni passati.

Esercizio 34 Sia P la parola ottenuta scrivendo la vostra data di nascita nel formato GGMMAAAA.

Es 1. Quanti sono gli anagrammi di P ?

Es 2. Quanti anagrammi di P non iniziano con la sua ultima cifra?

Es 3. Sia ab la parola formata dalle prime due cifre di P . Quanti anagrammi di P iniziano o finiscono con ab ?

Esercizio 35 Sia p il vostro anno di nascita. Sia q il vostro mese di nascita $+5$.

Es 1. Quanti sono i modi di scrivere p come somma di q interi non negativi?

Es 2. Quante sono le soluzioni intere positive dell'equazione seguente?

$$x_1 + \cdots + x_q = p$$

Es 3. Quante sequenze ordinate di 3 cifre distinte posso formare con le cifre che compongono la vostra data di nascita (GGMMAAAA)?

NB: Non è necessario dare il risultato numerico finale. Si richiede la formula corretta per i valori scelti.

Esercizio 36 Un "anagramma" è un riordinamento delle lettere di una parola.

Es 1. Quanti sono gli anagrammi della parola PROGRAMMAZIONE?

Es 2. Quanti non iniziano con M ?

Es 3. Quanti iniziano o finiscono con AM ? (Suggerimento: usare il PIE)

Esercizio 37 A una lotteria vengono estratti 4 numeri tra 1 e 200 simultaneamente.

Es 1. Quante sono le estrazioni possibili?

Es 2. Quante estrazioni con esattamente 2 numeri pari?

Es 3. Quante estrazioni con almeno un numero pari?

Esercizio 38 Consideriamo un sistema di password formato da 4 lettere (scelte le 26 lettere dell'alfabeto latino, solo maiuscole) seguite da 3 cifre seguite da un carattere speciale scelto tra \$, !, e %.

Es 1. Quante password hanno la prima lettera del vostro nome come primo simbolo?

Es 2. *Quante password hanno L come prima lettera o ! come ultimo simbolo?*

Es 3. *Quante targhe contengono esattamente un 9 ed esattamente una P?*

Esercizio 39 *Un testo d'esame comprende 10 domande di Combinatoria e 15 domande di Logica.*

Es 1. *In quanti modi posso scegliere 10 domande?*

Es 2. *In quanti modi posso scegliere 10 domande di cui esattamente 4 di Logica?*

Es 3. *In quanti modi posso scegliere 10 domande di cui almeno una di Combinatoria e almeno una di Logica?*

Esercizio 40 *Sia p il vostro anno di nascita. Sia q il vostro mese di nascita +3.*

Es 1. *Quanti sono i modi di scrivere p come somma di q interi non negativi?*

Es 2. *Quante sono le soluzioni intere positive dell'equazione seguente?*

$$x_1 + \cdots + x_q = p$$

Es 3. *Quante sequenze ordinate di 3 cifre distinte posso formare con le cifre che compongono la vostra data di nascita (nel formato GGMMAAAA)?*

Esercizio 41 *Un "anagramma" è un riordinamento delle lettere di una parola. Sia P la parola formata concatenando il vostro nome e il vostro cognome (per esempio per Mario Rossi P è la stringa MARIOROSSI).*

Es 1. *Quanti sono gli anagrammi della parola P ?*

Es 2. *Quanti non iniziano con la prima lettera di P ?*

Es 3. *Quanti iniziano o finiscono con le prime due lettere di P ? (Suggerimento: usare il PIE)*

Esercizio 42 *Un esame è composto da due gruppi di 5 esercizi ciascuno.*

Es 1. *Quanti sono i modi di scegliere 5 domande di cui 3 in un gruppo e 2 nell'altro?*

Es 2. *Quanti sono i modi di scegliere 5 domande di cui almeno una in ogni gruppo?*

Es 3. *Se rispondo a 7 domande e ciascuna risposta vale 1 punto se corretta e 0 se scorretta, in quanti modi posso totalizzare 5 punti (distinguendo tra le domande)?*

Esercizio 43 *Sia p il vostro anno di nascita. Sia q il vostro mese di nascita +4.*

Es 1. *Quanti sono i modi di distribuire p noccioline tra q scimmie?*

Es 2. *Quanti sono i modi di distribuire p noccioline tra q scimmie dando almeno una nocciolina a ogni scimmia?*

Es 3. *Quante sequenze ordinate di 3 cifre distinte posso formare con le cifre che compongono la vostra data di nascita (nel formato GGMMAAAA)?*

Esercizio 44 *Consideriamo un sistema di password formato da 3 lettere (scelte le 26 lettere dell'alfabeto latino, solo maiuscole) seguite da 3 cifre seguite da un carattere speciale scelto tra \$, !, e %.*

Es 1. *Quante password hanno ! come ultimo simbolo?*

Es 2. *Quante password hanno L come prima lettera o ! come ultimo simbolo?*

Es 3. *Quante targhe contengono esattamente un 9 ed esattamente una P?*

Esercizio 45 *Ho 11 perle (identiche) e 3 porci.*

Es 1. *Quanti modi ho di distribuire tutte le perle ai porci?*

Es 2. *Quanti modi con il vincolo che nessun porco riceve 0 perle?*

Es 3. *Quante modi con il vincolo che nessun porco riceve più di 4 perle? (Suggerimento: considerare la negazione della proprietà e usare il PIE).*

Esercizio 46 *Un gelataio offre 6 gusti alla frutta, 7 creme e 5 varietà di cioccolato.*

Es 1. *Quanti gelati da 5 gusti posso comporre?*

Es 2. *Quanti gelati a 4 gusti con esattamente 2 alla frutta?*

Es 3. *Quanti gelati a 5 gusti di cui almeno uno alla frutta e almeno uno al cioccolato?*

Esercizio 47 *Sia S la parola formata dalla concatenazione del vostro nome e del vostro cognome. Per esempio MARIOROSSI.*

Es 1. *Quanti sono gli anagrammi di S ?*

Es 2. *Quanti sono gli anagrammi di S che non iniziano con la prima lettera di S ?*

Es 3. *Quanti sono gli anagrammi di S che non iniziano né finiscono con la prima lettera di S ?*

Esercizio 48 *Un gruppo musicale ha composto 10 brani in inglese e 10 in italiano.*

Es 1. *In quanti modi si possono scegliere 6 brani da inserire in un disco?*

Es 2. *In quanti modi si possono scegliere 3 brani in inglese e 3 brani in italiano da inserire in un disco, e tra questi un solo brano (in inglese o in italiano) da pubblicare come singolo?*

Es 3. *In quanti modi si possono scegliere 3 brani in italiano e 3 brani in inglese da inserire in un disco, e tra questi un singolo in inglese e un singolo in italiano?*