Esercizio 1. Si assuma che - in media - il 2% della popolazione sia mancina. Dato un campione di 100 individui, utilizzando l'approssimazione di Poisson della binomiale, calcolare la probabilità che almeno 3 siano mancini.

probabilita' che un individuo sia mancino : $\frac{2}{100}$, Consideriamo una V.A. $X \sim Bin(100, \frac{2}{100})$,

$\mathbb{P}(X=3) = \binom{100}{3}\left(\frac{2}{100}\right)^3 \cdot \left(\frac{98}{100}\right)^{97} \simeq 0{,}2$. Consideriamo $Y^{(n)} \sim Poisson(\underset{\uparrow}{2})$ tasso di MANCINI su 100 PERSONE

$\mathbb{P}(Y^{(100)} = k) = e^{-2} \cdot \frac{2^k}{k!}$, $\mathbb{P}(X^{(100)} \geq 3) = 1 - \underline{\mathbb{P}(Y^{(100)} < 3)}$

! $\mathbb{P}(Y^{(100)} < 3) = \mathbb{P}(Y^{(100)} = 0 \cup Y^{(100)} = 1 \cup Y^{(100)} = 2) = \sum_{k=0}^{2} e^{-2} \cdot \frac{2^k}{k!} = e^{-2} \cdot \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!}\right) = 5e^{-2} \Rightarrow \mathbb{P}(X^{(100)} \geq 3) = 1 - 5e^{-2} \simeq 0.32$

Esercizio 2. Una moneta con probabilità di testa pari a $p \in (0,1)$ viene lanciata un numero di volte aleatorio (indipendente dai risultati dei lanci della moneta) con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Trovare le distribuzioni del numero totale di teste e croci otteneute e dimostrare che queste due variabili aleatorie sono indipendenti.

{Numero di lanci} $= X \sim Poisson(\lambda) \Rightarrow \mathbb{P}(\{\text{sono } k \text{ lanci}\}) = \mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

T: {Numero di teste su X lanci}, la prob. che il numero di teste sia k e' condizionata dal numero di lanci: $\mathbb{P}(T=k) = \underbrace{\mathbb{P}(X \geq k)}_{\text{LANCI} \geq \text{TESTE}} \cdot \mathbb{P}(T=k \mid X \geq k) : \sum_{\ell=k}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^\ell}{\ell!} \cdot \binom{\ell}{k} p^k \cdot (1-p)^{\ell-k} \overset{\text{wolfram}}{=} e^{-\lambda \cdot p} \cdot \frac{\lambda p^k}{k!}$

ℓ ↳ LANCI

Esercizio 3. Ogni giorno Carlo riceve un numero aleatorio X di email, che possiamo pensare come una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Ogni email, indipendentemente dalle altre e dal numero totale di email ricevute, è spam con probabilità p e legittima con probabilità $1-p$, $p \in (0,1)$. Siano Y e Z rispettivamente il numero di email di spam e di email legittime ricevute oggi da Carlo.

1) Calcolare la distribuzione di Y e quella di Z.

2) Dire se Y e Z siano o meno indipendenti. In caso affermativo dimostrarlo, in caso contrario dare un controesempio.

M = Numero di email $\sim Poisson(\lambda) \Rightarrow \mathbb{P}(M=m) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^m}{m!}$ dove $\lambda :=$ tasso email x unita' di tempo

1) Se Y e' il numero di email spam ricevute, $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(\{$si ricevono ALMENO k email e k di queste sono spam$\}) = \mathbb{P}(M \geq k) \cdot \mathbb{P}(Y=k \mid M \geq k)$

- $\mathbb{P}(M \geq k) = \mathbb{P}(M = k \cup M = k+1 \dots M = k+N) = \sum_{i=k}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$

- $\mathbb{P}(Y=k \mid M \geq k) = \frac{\mathbb{P}(Y=k \cap M \geq k)}{\mathbb{P}(M \geq k)} = \frac{\sum_{i=k}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \binom{i}{k} p^k (1-p)^{i-k}}{\sum_{i=k}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}} \Rightarrow \mathbb{P}(M \geq k) \cdot \mathbb{P}(Y=k \mid M \geq k) = \frac{\mathbb{P}(Y=k \cap M \geq k)}{\mathbb{P}(M \geq k)} \mathbb{P}(M \geq k)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(Y=k) = \sum_{i=k}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \binom{i}{k} p^k (1-p)^{i-k} = e^{-\lambda \cdot p} \cdot \frac{(\lambda \cdot p)^k}{k!}$ e $\mathbb{P}(Z=k) = e^{-\lambda(1-p)} \cdot \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!}$

Esercizio 5. Da un gruppo di 7 batterie, di cui 3 nuove, 2 usate ma funzionanti e 2 difettose, ne vengono scelte 3 a caso. Siano X e Y rispettivamente il numero di batterie nuove e usate ma funzionanti tra quelle scelte.

1) Determinare la distribuzione congiunta di (X,Y) e le distribuzioni marginali di X e di Y.

2) Calcolare $\mathrm{cov}(X,Y)$. Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?

3) Le tre batterie scelte sono montate su di un apparecchio che funziona se nessuna di esse è difettosa. Determinare la probabilità che l'apparecchio funzioni.

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3),\ \omega_i \in \{0,1,\dots,7\}\}$, $|\Omega| = \binom{7}{3} = 35$

$\mathbb{P}(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{35}$ $\mathbb{P}(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{35}$ $\mathbb{P}(X=3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{4}{0}}{35} = \frac{1}{35}$

1) $\Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{3}{k} \cdot \binom{4}{3-k}}{35}$ e $\mathbb{P}(Y=\underset{k \leq 2}{k}) = \frac{\binom{2}{k}\binom{5}{3-k}}{35}$

$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{FUNZI}} \underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{USATE}} \underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{RIM}} \cdot 1/35$

in generale: $\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \binom{3}{x} \cdot \binom{2}{y} \cdot \binom{2}{3-x-y} \cdot \frac{1}{35}$ $\Rightarrow$

distribuzione congiunta

y \ x	0	1	2	3
0	0	3/35	6/35	1/35
1	2/35	12/35	6/35	0
2	2/35	3/35	0	0

2) Calcolo prima il valore atteso.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{3} i \cdot \frac{\binom{3}{i}\binom{4}{3-i}}{35} = \frac{1}{35}\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}\cdot\binom{4}{3-i}\cdot i = \frac{1}{35}\cdot\left[0+\binom{3}{1}\binom{4}{2}+\binom{3}{2}\binom{4}{1}\cdot 2+\binom{3}{3}\cdot\binom{4}{0}\cdot 3\right] = \frac{1}{35}\cdot[18+24+3] = \frac{9}{7}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=0}^{2} i\,\frac{\binom{2}{i}\binom{5}{3-i}}{35} = \frac{1}{35}\cdot\left[0+\binom{2}{1}\binom{5}{2}+\binom{2}{2}\binom{5}{1}\cdot 2\right] = \frac{1}{35}[20+10] = \frac{6}{7}$$

$$\mathbb{E}(X\cdot Y) = \sum_{x=0}^{3}\sum_{y=0}^{2} x\cdot y\cdot\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \frac{1}{35}\left[0+18+2\cdot 12+3\right] = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(X\,Y)-\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y) = \frac{6}{7}-\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{7} = \frac{6}{7}-\frac{54}{49} = \frac{42-54}{49} = -\frac{12}{49}$$

3) Ci sono 2 batterie difettose su 7: $A ::\{\text{batterie funzionanti}\}: \binom{5}{3} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$

Esercizio 6. Un dado che ha una faccia blu, due rosse e tre verdi viene lanciato due volte. Siano R il numero di volte in cui il dado esibisce la faccia superiore rossa e V il numero di volte in cui il dado esibisce la faccia superiore verde.

1) Costruire la tabella della distribuzione congiunta di (R, V).
2) Determinare la distribuzione di $Z = \max\{R, V\}$ e calcolare $\mathbb{E}(Z)$ e $\mathbb{V}(Z)$.

1) R e' una V.A binomiale, si fanno 2 lanci e con prob. $\frac{1}{3}$ la faccia esce rossa.

$$R\sim \text{binom}\left(2,\tfrac{1}{3}\right) \Rightarrow \mathbb{P}(R=K) = \binom{2}{K}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^{K}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^{2-K} \Rightarrow R = \begin{cases} 0 & \text{con prob.} = 4/9 \\ 1 & \text{con prob.} = 4/9 \\ 2 & \text{con prob.} = 1/9 \end{cases}$$

$K = 0,1,2$

$$V\sim \text{binom}\left(2,\tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow \mathbb{P}(V=K) = \binom{2}{K}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{K}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2-K} = \binom{2}{K}\cdot\frac{1}{4} \Rightarrow V = \begin{cases} 0 & \text{con prob.} = 1/4 \\ 1 & \text{con prob.} = 1/2 \\ 2 & \text{con prob.} = 1/4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

R \ V	0	1	2
0			
1			0
2		0	0