Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
23 Maggio 2023 — Compito n. 00026

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: | | | | | | | |

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

---

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = e^{6\,t}\,(4 + y^2(t))\,.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.
1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 9$.
1C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$.
1D) Se $y(0) = 4$, la soluzione è decrescente in un intorno dell'origine.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 7\,y'(t) + 4\,y(t) = 20\,.$$

2A) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 0$.
2B) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$, si ha $y''(0) = -8$.
2C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 7$.
2D) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, la soluzione dell'equazione è concava in un intorno dell'origine.

---

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1)\qquad \begin{cases} y'(t) = 7\,y(t) + e^{7\,t} + 21\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

3A) Si ha $y'(0) < 0$.
3B) La funzione $y_0(t) = 8\,e^{7\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).
3C) La soluzione di (1) è $y(t) = (t+3)\,e^{7\,t} - 3$.
3D) Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0\,.$$

---

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1)\qquad y''(t) + A\,y'(t) + B\,y(t) = 0\,.$$

4A) Se $A = B = 0$, i polinomi di primo grado sono soluzioni di (1).
4B) Se $A = -13$ e $B = 40$, la funzione $y(t) = 4\,e^{8\,t}$ è soluzione di (1).
4C) Se $A = -8$ e $B = 16$, la funzione $y(t) = 5\,t\,e^{4\,t}$ non è soluzione di (1).
4D) Se $A = 0$ e $B = 9$, tutte le soluzioni non nulle di (1) sono periodiche.

Docente
☐ DelaTorre Pedraza
☐ Orsina

□□□□□□□□ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00026**

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

(1) $$y'(t) = 3\,(y(t) + 4)\,\cos(3\,t)\,.$$

a) Quante soluzioni di (1) verificano la condizione $y(0) = 7$? E quante le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 12$?
b) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(6) = -4$.
c) Calcolare $T_2(y(t); 0)$, dove $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.
d) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00026**

---

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y''(t) - 4\,y'(t) + 4\,y(t) = 8\,, \\ y(0) = 3\,, \quad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha (1)? E quante tali che $y''(0) = 7$?
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).
c) Determinare una soluzione particolare dell'equazione di (1), e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1).
d) Determinare la soluzione di (1).

Soluzioni del compito 00026

1) Si consideri l'equazione differenziale
$$y'(t) = \mathrm{e}^{6\,t}\,(4 + y^2(t))\,.$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.

Vero: Essendo un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, l'equazione ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro reale.

1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 9$.

Falso: Assegnando la condizione iniziale $y(0) = 9$, si ottiene un problema di Cacuhy per un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che ha un'unica soluzione.

1C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$.

Vero: Se si assegna la condizione $y(0) = 0$, si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che ha un'unica soluzione. Per tale soluzione si ha
$$y'(0) = \mathrm{e}^{6\cdot 0}\,(4 + y^2(0)) = 1 \cdot (4 + 0) = 4\,.$$
Si ha quindi che la condizione $y'(0) = 4$ è automaticamente soddisfatta, e quindi la soluzione esiste ed è unica.

1D) Se $y(0) = 4$, la soluzione è decrescente in un intorno dell'origine.

Falso: Se $y(0) = 4$, si ha
$$y'(0) = \mathrm{e}^{6\cdot 0}\,(4 + y^2(0)) = 1 \cdot (4 + 16) = 20 > 0\,.$$
Per il teorema della permanenza del segno, $y'(t) \geq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi la soluzione è crescente in tale intorno.
Alternativamente, e prescindendo dalla condizione iniziale, era sufficiente osservare che
$$y'(t) = \mathrm{e}^{6\,t}\,(1 + y^2(t)) \geq \mathrm{e}^{6\,t} \geq 0\,,$$
e quindi *ogni* soluzione dell'equazione è crescente.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale
$$y''(t) - 7\,y'(t) + 4\,y(t) = 20\,.$$

2A) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 0$.

Falso: Se si assegnano le condizioni iniziali $y(0) = 5$ e $y'(0) = 0$, si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, che ha un'unica soluzione. Per tale soluzione, si ha
$$y''(0) = 20 + 7\,y'(0) - 4\,y(0) = 20 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot 5 = 20 - 20 = 0\,,$$
cosicché la condizione $y''(0) = 0$ è automaticamente soddisfatta, e quindi la soluzione esiste ed è unica.

2B) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$, si ha $y''(0) = -8$.

Falso: Con le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$ si ha, per l'unica soluzione del problema,
$$y''(0) = 20 + 7\,y'(0) - 4\,y(0) = 20 + 7 \cdot 4 - 4 \cdot 0 = 48 \neq -8\,.$$

2C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 7$.

Vero: Se $y(t)$ è soluzione di (1), sostituendo $t = 0$ nell'equazione si trova
$$y''(0) - 7\,y'(0) + 4\,y(0) = 20\,.$$
Se $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 7$, si ha
$$7 - 7 \cdot 1 + 4\,y(0) = 20\,,$$
da cui segue $y(0) = 5$. Consideriamo ora l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 5$ e $y'(0) = 1$. Per tale soluzione si ha, ovviamente, $y''(0) = 7$, e quindi esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 7$.

2D) Se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, la soluzione dell'equazione è concava in un intorno dell'origine.

Falso: Se $y(0) = y'(0) = 0$ si ha, per l'unica soluzione dell'equazione, che
$$y''(0) = 20 + 7\,y'(0) - 4\,y(0) = 20 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 20 > 0\,.$$
Per il teorema della permanenza del segno, si ha $y''(t) \geq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi $y(t)$ è convessa in tale intorno.

---

3) Si consideri il problema di Cauchy

(1) $$\begin{cases} y'(t) = 7\,y(t) + \mathrm{e}^{7\,t} + 21\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Ricordiamo che la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione $y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)$, con la condizione $y(0) = y_0$ è data da

(2) $$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left[y_0 + \int_0^t b(s)\,\mathrm{e}^{-A(s)}\,ds \right],$$

dove

$$A(t) = \int_0^t a(s)\,ds\,.$$

Nel nostro caso, $a(t) = 7$ e $b(t) = \mathrm{e}^{7\,t} + 21$ e quindi

$$A(t) = \int_0^t 7\,ds = 7\,t\,.$$

Applicando la (2) con $y_0 = 0$ si ha

$$y(t) = \mathrm{e}^{7\,t} \int_0^t [\mathrm{e}^{7\,s} + 21]\,\mathrm{e}^{-7\,s}\,ds = \mathrm{e}^{7\,t}\,[s - 3\,\mathrm{e}^{-7\,s}]\Big|_0^t = \mathrm{e}^{7\,t}\,[t - 3\,\mathrm{e}^{-7\,t} + 3]\,,$$

e quindi, semplificando,

(3) $$y(t) = (t + 3)\,\mathrm{e}^{7\,t} - 3\,.$$

3A) Si ha $y'(0) < 0$.

Falso: Sostituendo la condizione iniziale $y(0) = 0$ nell'equazione, si ha

$$y'(0) = 7\,y(0) + \mathrm{e}^{7\cdot 0} + 20 = 7 \cdot 0 + 1 + 20 = 21 > 0\,.$$

3B) La funzione $y_0(t) = 8\,\mathrm{e}^{7\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

Vero: L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0'(t) = 7\,y_0(t)\,,$$

Se $y_0(t) = 8\,\mathrm{e}^{7\,t}$, si ha

$$y_0'(t) = 56\,\mathrm{e}^{7\,t} = 7 \cdot (8\,\mathrm{e}^{7\,t}) = 7\,y_0(t)\,,$$

e quindi $y_0(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata.

3C) La soluzione di (1) è $y(t) = (t + 3)\,\mathrm{e}^{7\,t} - 3$.

Vero: Per la (3), la funzione proposta è l'unica soluzione di (1).

3D) Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0\,.$$

Falso: Dalla (3) segue che

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} [(t - 3)\,\mathrm{e}^{7\,t} + 3] = +\infty \neq 0\,.$$

---

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \qquad y''(t) + A\,y'(t) + B\,y(t) = 0\,.$$

4A) Se $A = B = 0$, i polinomi di primo grado sono soluzioni di (1).

Vero: Se $A = B = 0$, (1) diventa

$$y''(t) = 0\,.$$

Se $y(t)$ è un polinomio di primo grado, si ha $y(t) = a\,t + b$ per qualche a e b reali. Pertanto, $y'(t) = a$ e quindi $y''(t) = 0$. Ne segue che i polinomi di grado 1 sono soluzioni di (1).

4B) Se $A = -13$ e $B = 40$, la funzione $y(t) = 4\,\mathrm{e}^{8\,t}$ è soluzione di (1).

Vero: Se $A = -13$ e $B = 40$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 - 13\,L + 40\,,$$

che ha come soluzioni $L_1 = 8$ e $L_2 = 5$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{8\,t} + D\,\mathrm{e}^{5\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 4$ e $D = 0$, si vede che $y(t) = 4\,\mathrm{e}^{8\,t}$ è soluzione di (1).

4C) Se $A = -8$ e $B = 16$, la funzione $y(t) = 5\,t\,\mathrm{e}^{4\,t}$ non è soluzione di (1).

Falso: Se $A = -8$ e $B = 16$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 - 8\,L + 16\,,$$

che ha come soluzioni $L_1 = L_2 = 4$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{4\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 0$ e $D = 5$, si vede che $y(t) = 5\,t\,\mathrm{e}^{4\,t}$ è soluzione di (1).

4D) Se $A = 0$ e $B = 9$, tutte le soluzioni non nulle di (1) sono periodiche.

Vero: Se $A = 0$ e $B = 9$, il polinomio caratteristico associato all'equazione (1) è

$$P(L) = L^2 + 9\,,$$

che ha come soluzioni $L_{1,2} = \pm\,3\,i$. Pertanto, tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = C\,\cos(3\,t) + D\,\sin(3\,t)\,,$$

con C e D numeri reali, e sono quindi periodiche (di periodo $T = \frac{2\pi}{3}$).

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 3\,(y(t)+4)\,\cos(3\,t)\,. \tag{1}$$

a) Quante soluzioni di (1) verificano la condizione $y(0) = 7$? E quante le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 12$?
b) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(6) = -4$.
c) Calcolare $T_2(y(t); 0)$, dove $y(t)$ è la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.
d) Determinare la soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$.

Soluzione:
Osserviamo preliminarmente che l'equazione (1) è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(t)\,g(y(t))\,,$$

con

$$f(t) = 3\,\cos(3\,t)\,, \qquad g(s) = s+4\,. \tag{2}$$

a) Assegnando ad (1) la condizione iniziale $y(0) = 7$ si ottiene un problema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine, che ha un'unica soluzione. Analogamente, esiste un'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$; per tale soluzione si ha, sostituendo $t = 0$,

$$y'(0) = 3\,(y(0)+4)\,\cos(3\cdot 0) = 3\cdot 4\cdot 1 = 12\,,$$

cosicché la condizione $y'(0) = 12$ è automaticamente soddisfatta dall'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$. Ne segue pertanto che esiste un'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 12$.

b) Dato che la funzione $g(s)$ in (2) è tale che $g(-4) = -4+4 = 0$, la funzione $y(t) = -4$ è una soluzione costante di (1). Dato che soddisfa la condizione $y(6) = -4$, è la soluzione di (1) tale che $y(6) = -4$ (essendo tale soluzione unica).

c) Se $y(0) = 0$ abbiamo, sostituendo nell'equazione $t = 0$,

$$y'(0) = 3\,(y(0)+4)\,\cos(3\cdot 0) = 3\cdot 4\cdot 1 = 12\,.$$

Derivando l'equazione, si ha poi

$$y''(t) = 3\,y'(t)\,\cos(3\,t) - 9\,(y(t)+4)\,\sin(3\,t)\,.$$

Calcolando questa espressione in $t = 0$, si ha

$$y''(0) = 3\,y'(0)\,\cos(3\cdot 0) - 9\,(y(0)+4)\,\sin(3\cdot 0) = 3\cdot 12\cdot 1 - 9\cdot 4\cdot 0 = 36\,.$$

Si ha quindi

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)\,t + \frac{y''(0)}{2}\,t^2 = 0 + 12\,t + \frac{36}{2}\,t^2 = 12\,t + 18\,t^2\,.$$

d) Dato che l'equazione è a variabili separabili, e che $y(t) \equiv y(0) = 0$ non è soluzione dell'equazione (come si verifica facilmente), dividiamo per $y(t)+4$, ottenendo l'equazione equivalente

$$\frac{y'(t)}{y(t)+4} = 3\,\cos(3\,t)\,.$$

Integrando tra 0 e s, si ha

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{y(t)+4}\,dt = \int_0^s 3\,\cos(3\,t)\,dt = \sin(3\,t)\Big|_0^s = \sin(3\,s)\,.$$

Per quanto riguarda il primo integrale, con la sostituzione $z = y(t)$, da cui $y'(t)\,dt = dz$, si ha (ricordando che $y(0) = 0$)

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{y(t)+4}\,dt = \int_{y(0)}^{y(s)} \frac{dz}{z+4} = \log(|z+4|)\Big|_0^{y(s)} = \log(|y(s)+4|) - \log(4) = \log\left(\frac{y(s)+4}{4}\right),$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che $y(s)+4 \geq 0$ in un intorno di $t=0$ dato che $y(0)+4 = 0+4 = 4 > 0$. Si ha quindi che la soluzione di (1) tale che $y(0)=0$ verifica l'identità

$$\log\left(\frac{y(s)+4}{4}\right) = \sin(3\,s)\,,$$

da cui segue che

$$\frac{y(s)+4}{4} = \mathrm{e}^{3\,s}\,,$$

e quindi che

$$y(s) = 4\,\mathrm{e}^{\sin(3\,s)} - 4\,.$$

Si noti che l'equazione (1) può essere riscritta nella forma

$$y'(t) = 3\,\cos(3\,t)\,y(t) + 12\,\cos(3\,t)\,,$$

e quindi è anche della forma

$$y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)\,,$$

con

$$a(t) = 3\,\cos(3\,t)\,, \qquad b(t) = 12\,\cos(3\,t)\,.$$

Per tale equazione, assegnando la condizione $y(0)=0$, si ha la formula risolutiva

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\left(\int_0^t b(s)\,\mathrm{e}^{-A(s)}\,ds\right), \tag{3}$$

dove

$$A(t) = \int_0^t a(s)\,ds = \int_0^t 3\,\cos(3\,s)\,ds = \sin(3\,s)\Big|_0^t = \sin(3\,t)\,.$$

Pertanto, dalla (3) si ha che

$$y(t) = \mathrm{e}^{\sin(3\,t)}\left(12\int_0^t \cos(3\,s)\,\mathrm{e}^{-\sin(3\,s)}\,ds\right).$$

Per calcolare l'ulitmo integrale, poniamo $z = \sin(3\,s)$, da cui $dz = 3\,\cos(3\,s)\,ds$. Si ha quindi

$$12\int_0^t \cos(3\,s)\,\mathrm{e}^{-\sin(3\,s)}\,ds = 4\int_0^{\sin(3\,t)} \mathrm{e}^{-z}\,dz = 4\,(1-\mathrm{e}^{-\sin(3\,t)})\,,$$

cosicché la soluzione di (1) tale che $y(0)=0$ è data da

$$y(t) = 4\,\mathrm{e}^{\sin(3\,t)}\,(1-\mathrm{e}^{-\sin(3\,t)}) = 4\,\mathrm{e}^{\sin(3\,t)} - 4\,,$$

come trovato in precedenza.

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y''(t) - 4\,y'(t) + 4\,y(t) = 8\,, \\ y(0) = 3\,, \quad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha (1)? E quante tali che $y''(0) = 7$?
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).
c) Determinare una soluzione particolare dell'equazione di (1), e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1).
d) Determinare la soluzione di (1).

Soluzione:
a) Il problema di Cauchy (1) ha un'unica soluzione. Se $y(t)$ è tale soluzione, si ha, sostituendo $t = 0$ nell'equazione, che

$$y''(0) = y''(0) - 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = y''(0) - 4\,y'(0) + 4\,y(0) = 8\,.$$

Pertanto, per tale soluzione si ha $y''(0) = 8 \neq 7$, e quindi non esistono soluzioni di (1) tali che $y''(0) = 7$.

b) L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0''(t) - 4\,y_0'(t) + 4\,y_0(t) = 0\,,$$

il cui polinomio caratteristico è

$$P(L) = L^2 - 4\,L + 4\,,$$

che ha come soluzioni $L_{1,2} = 2$. Ne segue pertanto che tutte le soluzioni di (2) sono date da

$$y_0(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{2\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

c) Dato che le funzioni costanti non sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione di (1) nella forma $\overline{y}(t) = Q$, con Q numero reale. Sostituendo, e dato che $\overline{y}'(t) = \overline{y}''(t) = 0$, si ha che deve essere

$$\overline{y}''(t) - 4\,\overline{y}'(t) + 4\,\overline{y}(t) = 4\,Q = 8\,,$$

da cui segue $Q = 2$. Ne segue che tutte le soluzioni dell'equazione di (1) sono date da

$$(2) \qquad y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{2\,t} + 2\,.$$

d) Se $y(t)$ è data da (2), si ha, derivando,

$$y'(t) = D\,\mathrm{e}^{2\,t} + 2\,(C + D\,t)\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$

Pertanto,

$$y(0) = C + 2\,, \qquad y'(0) = D + 2\,C\,.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 3$ e $y'(0) = 0$, si ha

$$C = 1\,, \qquad D = -2\,C = -2\,,$$

e quindi l'unica soluzione di (1) è data da

$$y(t) = (1 - 2\,t)\,\mathrm{e}^{2\,t} + 2\,.$$