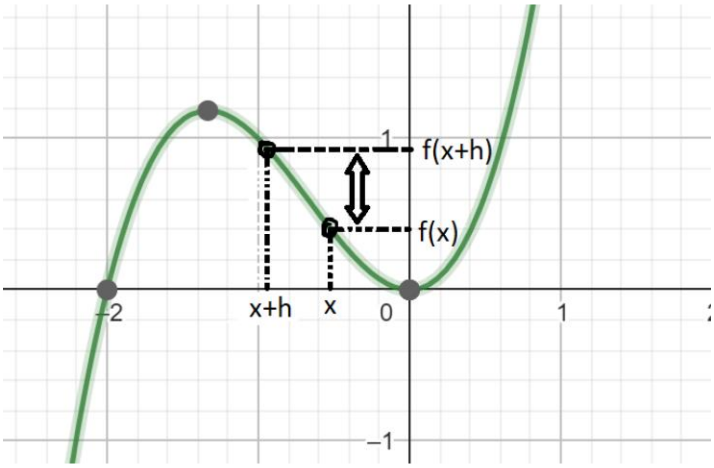
Calcolo della derivata

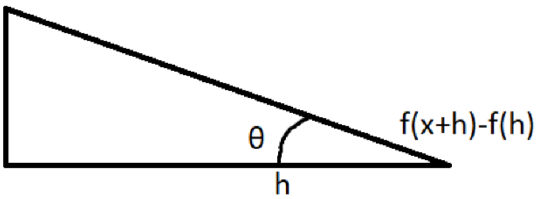
La velocità è la distanza percorsa nel tempo diviso il tempo, più minimizzo il lasso di tempo, più ho una precisa misurazione della velocità. In questo modo però non sto calcolando la crescita istantanea.

<u>Derivata di una funzione</u>



$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \in I$

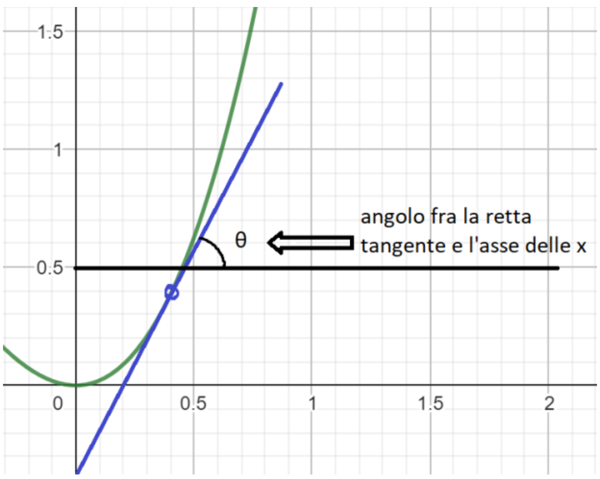
La crescita media della funzione nell'intervallo $(\mathrm{x}, \mathrm{x}+\mathrm{h})$ vale $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$



Questa crescita media si chiama rapporto incrementale.

$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$ questo limite si chiama **<u>derivata</u>** di f nel punto x. Si scrive $f'(x)$.

$f'(x)$ è la tangente dell'angolo formato dalla retta limite delle rette passanti per $(x, f(x)), (x+h, f(x+h))$ e l'asse delle x.



$$f'(x) = \tan(\theta) \text{ dove } \theta(h) \to \bar{\theta}$$

Fissato un punto $(x_0, f(x_0))$ sul grafico, la retta per quel punto è la retta tangente e la sua equazione è $y = f(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

<u>Sappiamo che :</u>

dato $f : I \to \mathbb{R}, f$ è derivabile in I se $\forall x \in I$ $\exists$ la derivata $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\boldsymbol{f(x) = 3x + 2}$ $\leftarrow$ la crescita di una retta è il suo coefficiente angolare, in questo caso 3.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{3(x+h) + 2 - (3x+2)}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

$$Regola : f(x) = x^{\alpha} \to f'(x) = \alpha \times x^{\alpha - 1}$$

$$Regola : f(x) = costante \to f'(x) = 0$$

$\boldsymbol{f(x) = x^2}$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h$$

$\lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$ $\leftarrow$ la crescita è $2x$.

$\boldsymbol{f(x) = e^x}$ $\leftarrow f'(x) = e^x$

$$Regola : f(x) = e^x \to f'(x) = e^x$$

$\boldsymbol{f(x) = log(x)}$ con x > 0

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \frac{\log(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \times \frac{1}{x}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$Regola : f(x) = \log(x) \to f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$Regola : f(x) = \cos(x) \to f'(x) = -\sin(x)$$

$$Regola : f(x) = \sin(x) \to f'(x) = \cos(x)$$

Punti di non derivabilità

$f(x) = |x|$ è derivabile in 0?

$$\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h} \qquad \underset{da\ destra}{\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h} = 1} \qquad \underset{da\ sinistra}{\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h} = -1}$$

La derivata destra è diversa da quella sinistra, quindi la derivata **non esiste**.

x_0 è un punto angoloso se esiste $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x^0+h)-f(x)}{h}$ ma non coincidono esiste una derivata destra ed una sinistra.

Altri punti di non derivabilità $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \mp\infty$

<u>Teorema</u>

Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.

Tesi : $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \longleftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(h)$

Algebra delle derivate

siano f o g due funzioni derivate in I

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x)\times g(x)]'=f'(x)\times g(x) + f(x)\times g'(x)$$

$$[hg'(x)] = \left[f\big(g(x)\big)\right]' = f'(g(x))\times g'(x)$$