Soluzioni del compito 00034

1) Sia $a_k \geq 0$ una successione tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad \text{è convergente.}$$

1A) La successione $\frac{a_k}{a_k+5}$ non tende a zero.

Falso: Dato che la serie di termine generico a_k è convergente, la successione a_k è infinitesima. Pertanto,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{a_k+5} = \frac{0}{0+5} = 0\,.$$

1B) La serie di termine generico $\sin(6\,a_k)$ è divergente.

Falso: Dato che la successione a_k tende a zero (essendo la serie di termine generico a_k convergente), si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\sin(6\,a_k)}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sin(6\,a_k)}{6\,a_k}\,6 = 1\cdot 6 = 6 \in (0,+\infty)\,.$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie data converge.

1C) La serie di termine generico $\frac{\cos(a_k)}{k^7}$ è convergente.

Vero: Dato che $\cos(a_k)$ tende a 1 (si ricordi che la successione a_k tende a zero perché la serie è convergente), si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{\cos(a_k)}{k^7}}{\frac{1}{k^7}} = 1\,.$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie data ha lo stesso comportmanto della serie di termine generico $\frac{1}{k^7}$, che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 7 > 1$.

1D) La serie di termine generico $k^7\,a_k$ può divergere.

Vero: Ad esempio, se $a_k = \frac{1}{k^2}$, la serie di termine generico $k^7\,a_k = k^5$ è divergente.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

2A)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{7}{k}} - 1\right)^6 \text{ converge.}$$

Vero: Ricordando che

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,,$$

si ha

$$e^{\frac{7}{k}} - 1 \approx \frac{7}{k}\,,$$

e quindi

$$\left(e^{\frac{7}{k}} - 1\right)^6 \approx \left(\frac{7}{k}\right)^6 = \frac{7^6}{k^6}\,.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{7^6}{k^6}$ è convergente (essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 6 > 1$), la serie data converge per il criterio del confronto asintotico.

2B)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^k\, k^2}{k!} \text{ converge.}$$

Vero: Applichiamo il criterio del rapporto: si ha

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{4^{k+1}\,(k+1)^2}{(k+1)!}}{\frac{4^k\,k^2}{k!}} = \lim_{k \to +\infty} 4 \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \frac{1}{k+1} = 4 \cdot 1^2 \cdot 0 = 0 < 1\,,$$

e quindi la serie converge.

2C)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[5]{k}} \text{ converge.}$$

Vero: Dato che la successione $a_k = \frac{1}{\sqrt[5]{k}}$ è positiva, decrescente e infinitesima, la serie converge per il criterio di Leibniz.

2D)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{13\,k}}{k^{10}} \text{ diverge assolutamente.}$$

Falso: Si ha

$$\left|\frac{(-1)^{13\,k}}{k^{10}}\right| = \frac{1}{k^{10}}\,.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{1}{k^{10}}$ converge (essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 10 > 1$), la serie data converge assolutamente.

---

3) Sia $f(x) = \cos(8\,x)$.

Ricordando che

$$\cos(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, t^{2k}\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

si ha, per il principio di sostituzione,

$$f(x) = \cos(8\,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\,(8\,x)^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,8^{2k}}{(2k)!}\,x^{2k}\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

3A) Il raggio di convergenza della serie di Taylor di $f(x)$ è finito.

Falso: Dalla (1) segue che il raggio di convergenza della serie è infinito.

3B) Il coefficiente del termine di grado 2 della serie di Taylor di $f(x)$ è diverso da zero.

Vero: Dalla (1) si ha che

$$f(x) = 1 - \frac{8^2}{2}\,x^2 + \text{ termini di grado superiore a } 2\,,$$

e quindi il coefficiente del termine di grado 2 vale -32, che è diverso da zero.

3C) Se $g(x) = x^3\,f(x)$, si ha $g^{(4)}(0) = 3!$.

Falso: Dalla (1) segue che

$$g(x) = x^3\,f(x) = x^3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,8^{2k}}{(2k)!}\,x^{2k} = x^3 - \frac{8^2}{2}\,x^5 + \mathrm{o}(x^5)\,.$$

Dall'ultima espressione, si vede che $g^{(4)}(0) = 0$.

3D) Si ha $f^{(8)}(0) = 8! \cdot 8^8$.

Falso: Dalla (1), si vede facilmente che il termine di grado 8 nella serie di Taylor di $f(x)$ è

$$a_8 = \frac{(-1)^4\,8^8}{8!} = \frac{8^8}{8!}\,,$$

da cui segue che $f^{(8)}(0) = a_8 \cdot 8! = 8^8 \neq 8! \cdot 8^8$.

---

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{6^k}\,(x-5)^k\,.$$

Ricordiamo che una serie di potenze è una serie della forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\,(x-x_0)^k\,, \tag{1}$$

e che x_0 si dice il centro della serie.

4A) Il centro della serie è $x_0 = 5$.

Vero: Dalla (1), segue che il centro della serie è $x_0 = 5$.

4B) Se $a_k = 3$ per ogni k, il raggio di convergenza delle serie è $R = 6$.

Vero: Se $a_k = 3$ per ogni k, i coefficienti della serie di potenze sono

$$b_k = \frac{3}{6^k}\,.$$

Si ha

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{b_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt[k]{3}}{6} = \frac{1}{6}\,,$$

da cui segue che il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = 6$.

4C) Se $a_k = 5^k$, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{5}{6}$.

Falso: Se $a_k = 5^k$, i coefficienti della serie di potenze sono

$$b_k = \frac{5^k}{6^k} = \left(\frac{5}{6}\right)^k\,.$$

Dato che

$$L = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{b_k} = \frac{5}{6}\,,$$

il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = \frac{6}{5} \neq \frac{5}{6}$.

4D) Se $a_k = \frac{1}{k^3}$, la serie converge per $x = 11$.

Vero: Se $a_k = \frac{1}{k^3}$ e $x = 11$ la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}\,\frac{(11-5)^k}{6^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}\,\frac{6^k}{6^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}\,,$$

e l'ultima serie è convergente essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 3 > 1$.

---

5) a) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{11} \tan\left(\frac{4\,k^{10}}{3^k}\right).$$

b) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt[6]{k}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k}\right).$$

c) Scrivere la serie di Taylor di $f(x) = x^4\,\mathrm{e}^{5\,x}$ e calcolare $f^{(3)}(0)$.
d) Data $f(x) = \cos(3\,x^2)$, si calcolino $f^{(4)}(0)$ e $f^{(5)}(0)$.

Soluzione:
a) Ricordando che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1\,, \qquad \lim_{k\to+\infty} \frac{4\,k^{10}}{3^k} = 0\,,$$

si ha

$$a_k = k^{11} \tan\left(\frac{4\,k^{10}}{3^k}\right) \approx \frac{4\,k^{21}}{3^k} = b_k\,.$$

Applicando il criterio del rapporto alla serie di termine generico b_k si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{4\,(k+1)^{21}}{3^{k+1}}\,\frac{3^k}{4\,k^{21}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{21} = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3} < 1\,,$$

e quindi la serie di termine generico b_k è convergente. Per il criterio del confronto asintotico, anche la serie di termine generico a_k è convergente.

b) Ricordando che

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\,,$$

si ha che

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k} = \frac{1}{2k^2} + \mathrm{o}(k^{-2})\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2}\,,$$

da cui segue che

$$\sqrt[6]{k}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k}\right) \approx k^{\frac{1}{6}}\,\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^{\frac{11}{6}}}\,.$$

Dato che la serie di termine generico $\frac{1}{k^{\frac{11}{6}}}$ è convergente (come serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = \frac{11}{6} > 1$, la serie data è convergente per il criterio del confronto asintotico.

c) Ricordando che

$$\mathrm{e}^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

si ha

$$\mathrm{e}^{5\,x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5^k}{k!}\,x^k\,,$$

e quindi

$$f(x) = x^4\,\mathrm{e}^{5\,x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5^k}{k!}\,x^{k+4}\,.$$

Dato che nella serie non compaiono termini di grado 3 (il grado minimo è 4, corrispondente a $k = 0$), si ha $f^{(3)}(0) = 0$.

d) Ricordando che

$$\cos(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, t^{2k} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + \mathrm{o}(t^4)\,,$$

si ha

$$f(x) = \cos(3\,x^2) = 1 - \frac{(3\,x^2)^2}{2} + \frac{(3\,x^2)^4}{24} + \mathrm{o}(x^8) = 1 - \frac{9}{2}\,x^4 + 0 \cdot x^5 + \mathrm{o}(x^5)\,,$$

da cui segue che $f^{(4)}(0) = -\frac{9}{2} \cdot 4!$ e che $f^{(5)}(0) = 0$.

6) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-4)^k}{k}\,.$$

a) Si determini il centro della serie.
b) Si determini il raggio di convergenza della serie.
c) Si determini l'insieme di convergenza della serie.
d) Si calcoli $f'(x)$.

Soluzione:
a) Ricordando che la forma generale di una serie di potenze è

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,(x-x_0)^k\,,$$

dove x_0 è il centro della serie, il centro della serie proposta è $x_0 = 4$.

b) Dato che $a_k = \frac{1}{k}$, si ha

$$L = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k+1} = 1\,,$$

da cui segue che il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{L} = 1$.

c) Dato che $R = 1$, la serie converge se x è tale che $|x-4| < 1$, ovvero se x appartiene a $(3,5)$ e non converge se $|x-4| > 1$. Rimangono da studiare i due casi $x = 5$ e $x = 3$. Sostituendo si ottengono le due serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\,, \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\,.$$

La prima diverge, mentre la seconda converge per il criterio di Leibnitz. Ne segue che l'insieme di convergenza della serie è l'intervallo $I = [3,5)$.

d) Si ha, per x in I,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\,(x-4)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (x-4)^{k-1} = \sum_{h=0}^{+\infty} (x-4)^h = \frac{1}{1-(x-4)} = \frac{1}{5-x}\,.$$