Esercizio 1. Calcolare $\det A$ con

$$A := \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Calcolarlo con un opportuno sviluppo di Laplace e, in alternativa, tramite la riduzione a scala.

Riduco a scala e tengo conto degli scambi di righe ' variabili K.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A_3 = A_3 - \frac{1}{3}A_1} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A_3 = A_3 + \frac{2}{3}A_2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix} = S \Rightarrow \begin{cases} \det(S) = -7 \\ K = 0 \end{cases} \Rightarrow \det(A) = (-1)^0 \cdot (-7) = -7$$

Esercizio 2. Utilizzando un opportuno sviluppo di Laplace, calcolare

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

e determinare per quali valori di k la matrice è invertibile.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & K & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{1}]{\text{SVILUPPO RIGA}} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & K & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{3}]{\text{SVILUPPO RIGA}} \left((-1)^4 \cdot 2 \cdot \det \begin{bmatrix} K & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + (-1)^7 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & K \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

Ora utilizzo la formula nota del det. per matrici 2×2:

$$2 \cdot \det \begin{bmatrix} K & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & K \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2(K - 1) - (-1 - K) = 2K - 2 + 1 + K = 3K - 1$$

LA MATRICE È INVERTIBILE SE E SOLO SE $K \neq \frac{1}{3}$

Esercizio 3. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} a & b & l & m \\ c & d & n & p \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & z & w \end{vmatrix}.$$

Dimostrare che

$$\det A = \det B = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

Faccio lo sviluppo di Laplace per A sulla terza colonna

$$\det(A) = (-1)^4 \cdot 0 \cdot \det(A_{13}) + (-1)^5 \cdot 0 \cdot \det(A_{23}) + (-1)^6 \cdot g \cdot \det\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ x & y & w \end{bmatrix} + (-1)^7 \cdot z \cdot \det\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & h \end{bmatrix}$$

$= g \cdot \det\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ x & y & w \end{bmatrix} - z \cdot \det\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & h \end{bmatrix} =$ sviluppo entrambe sulla terza colonna:

$$= g \cdot \left((-1)^6 \cdot w \cdot \det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right) - z \cdot \left((-1)^6 \cdot h \cdot \det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right) = gw \cdot \det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - zh \cdot \det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \boxed{(gw - zh)} = \det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \boxed{\det\begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}} \Rightarrow \det(A) = \det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \det\begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

Faccio lo sviluppo di Laplace per B sulla terza riga

$\det(B) = (-1)^6 \cdot g \cdot \det\begin{bmatrix} a & b & m \\ c & d & p \\ 0 & 0 & w \end{bmatrix} + (-1)^7 \cdot h \cdot \det\begin{bmatrix} a & b & l \\ c & d & n \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} =$ SVILUPPO SU 3° RIGA

$$= g \cdot \left(w \cdot \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) - h \cdot \left(z \cdot \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (gw - hz) \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det(A)$$

Esercizio 4. Consideriamo $V = \mathbb{R}_2[t]$ e l'applicazione $T : V \to V$ che associa ad un polinomio la sua derivata: $T(p) := p'$. Sappiamo che T è lineare. Determinare la matrice A associata a T nella base canonica di V, $\mathcal{E} := \{1, t, t^2\}$, presa come base di partenza e come base di arrivo.
Calcolare $\det A$.

SIA $\bar{v} \in V \Rightarrow \bar{v} = 1 \cdot x_1 + t \cdot x_2 + t^2 \cdot x_3$ $\quad T(\bar{v}) = 1 \cdot y_1 + t \cdot y_2 + t^2 \cdot y_3$

$$T(x_1 + t x_2 + t^2 x_3) = x_1 T(1) + x_2 T(t) + x_3 T(t^2)$$

$\mathcal{E} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{vmatrix} \right\}$! SO COME È FATTA T $\Rightarrow T\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad T\left(\begin{vmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad T\left(\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 0 \\ 2t \\ 0 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} T(\bar{v}) = \; & x_1 \left(0 \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{vmatrix} \right) + \\ & x_2 \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{vmatrix} \right) + \\ & x_3 \left(0 \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned} \Rightarrow M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essendo che $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T)$ ha una riga con tutti zeri non è invertibile! Ha il determinante uguale a 0.

NOTA CURIOSA:

Questa matrice rappresenta l'applicazione che associa ad un polinomio di secondo grado la sua derivata. È definita su una matrice 3x3, ma noi sappiamo che l'applicazione inversa della derivazione, esiste, ed è l'integrazione (per il teo. fondamentale del calcolo integrale), l'integrazione associa ad un polinomio di grado n, un polinomio di grado n+1, è quindi ovvio che in questo spazio vettoriale di dimensione 3 è impossibile definire l'applicazione di integrazione, in quanto l'applicazione T dovrebbe essere definita da R_3[t]⟶R_3[t], necessitando di una mat. 4x4.