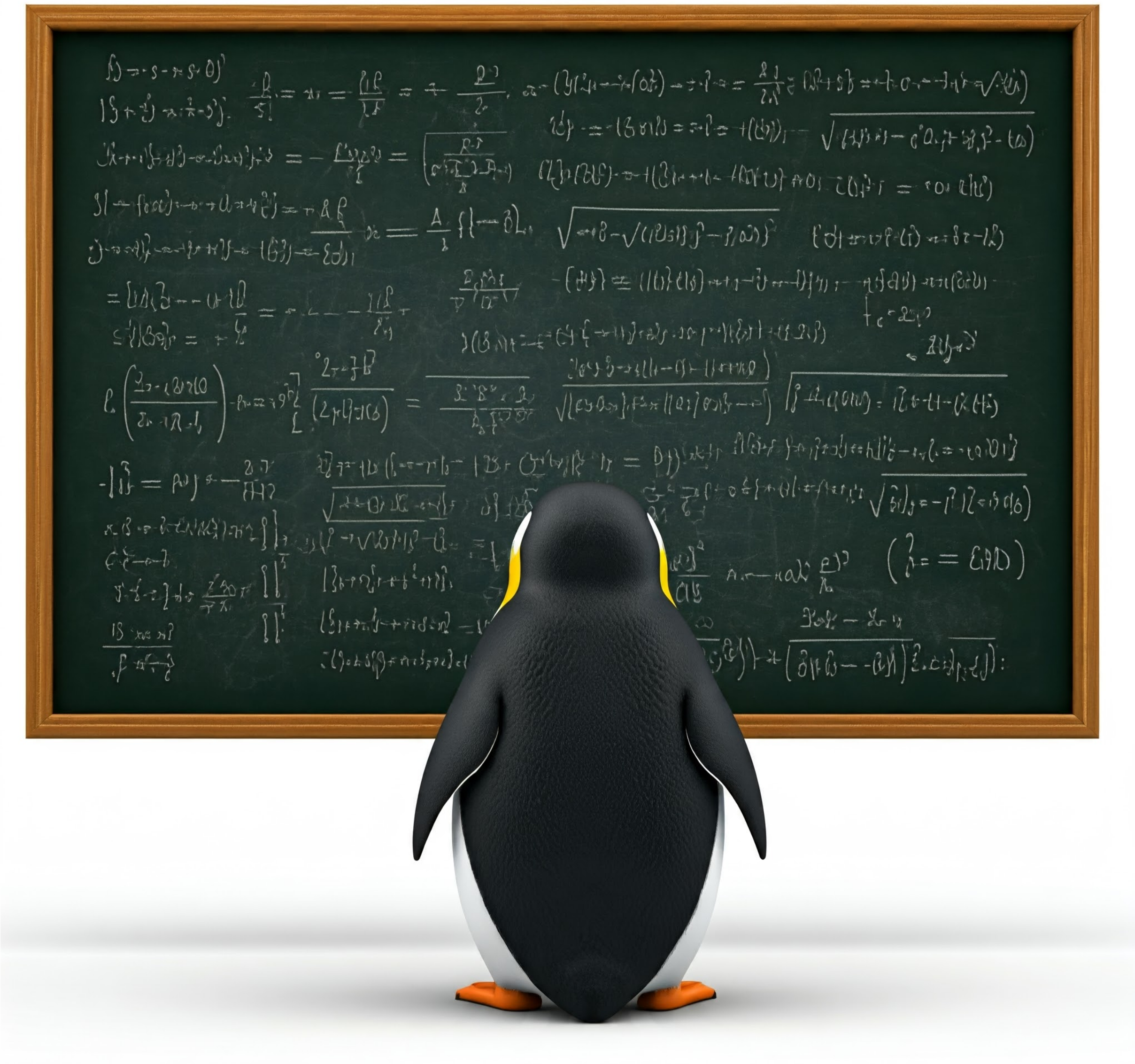
Calcolo Integrale



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica
Dipartimento di Informatica

nota bene : questi appunti sono estremamente riassuntivi, non possono essere sostituiti completamente al libro di testo.

INDICE

1 Serie numeriche **3**
1.1 Convergenza . . . 3
1.1.1 Serie geometriche . . . 4
1.1.2 Serie armoniche . . . 4
1.1.3 Teoremi sulle serie e criteri di convergenza . . . 5
1.1.4 Diagramma di flusso per le serie . . . 7
1.2 Serie di Taylor . . . 8
1.2.1 Polinomio di Taylor . . . 8
1.2.2 Calcolo delle derivate . . . 9
1.2.3 Serie di Taylor notevoli . . . 10
1.3 Serie di potenze . . . 10
1.3.1 Raggio di convergenza . . . 11
1.3.2 Calcolo del raggio . . . 12

2 Integrali **14**
2.1 Integrale di Riemann . . . 14
2.1.1 Criteri di integrabilità . . . 17

CAPITOLO

1 SERIE NUMERICHE

Definizione : Una serie numerica, è una successione costruita a partire da altre successioni. Il valore n-esimo è la somma di tutti i valori precedenti della successione.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ con } n \in \mathbb{Z}^+$$

Ad esempio

$$a_n = n^2 \implies S_3 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

1.1 Convergenza

La somma molto spesso viene valutata per n che tende all'infinito, un altro esempio di serie numerica è il seguente

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Una serie numerica viene caratterizzata dalla sua *convergenza*.

Definizione : Una serie numerica S_n si dice **convergente** se

$$\lim_{n \to \infty} S_n = l$$

Si scrive anche

$$S_n = \sum_{\mathrm{k}=0}^{n} a_k < \pm\infty$$

Diversamente, se la somma degli infiniti termini della serie vale $\pm\infty$, la serie si dice *divergente*, un classico esempio di serie divergente è il seguente

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 \dots = \infty$$

Infine una serie può non essere divergente, ma nemmeno convergente, ossia non è definito un valore alla quale converge, si dice *non convergente* o *irregolare*, un tipico esempio è

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$$

1.1.1 Serie geometriche

Una serie $\sum_{\infty} a_k$ si dice serie **geometrica** se a_k è della forma q^k, ossia quando il valore k-esimo della sommatoria è posto come esponente ad un numero reale.

Proposizione : vale la seguente

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Dimostrazione : Si consideri

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 \cdots + q^n$$

si moltiplicano entrambi i membri per $(1-q)$

$$(1-q)\cdot S_n = (1-q)\cdot(\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 \cdots + q^n) \implies (1-q)\cdot S_n = 1 - q^{n+1}$$

Divido entrambi i membri per $(1-q)$

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{(1-q)} \quad \blacksquare$$

Considerando q^k, assume diversi valori per $k \to \infty$ in base ai valori di q

$$\lim_{k\to\infty} q^k = \begin{cases} 0 \text{ se } q \in (-1,1) \\ 1 \text{ se } q = 1 \\ \infty \text{ se } q > 1 \\ \text{indeterminato se } q < -1 \end{cases}$$

Di una serie geometrica, è possibile stabilirne il carattere in base al valore di q, di fatto si ha che

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} 0 \text{ se } q = 0 \\ \frac{1}{1-q} \text{ se } q \in (-1,1) \\ \infty \text{ se } q \geq 1 \\ \text{indeterminato se } q < -1 \end{cases}$$

1.1.2 Serie armoniche

Una serie $\sum_{\infty} a_k$ si dice serie **armonica** se il valore k-esimo della sommatoria è posto come denominatore della successione, ed è elevato ad un numero reale.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^a} \quad a \in \mathbb{R}$$

Se l'esponente reale a è maggiore di 1, la sommatoria converge, se invece è compreso fra 0 ed 1, diverge.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^a} = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \text{ se } a > 1 \\ \infty \text{ se } a \in [0,1] \end{cases}$$

Vediamo un esempio, si vuole sapere se la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos^2(k)}{k^2}$ sia divergente oppure no. Innanzitutto, notiamo come $\cos^2(k)$ sia limitato, quindi sempre minore o uguale ad 1, come mostrato in figura 1.1.2.

$$\frac{\cos^2(k)}{k^2} \leq \frac{1}{k^2} \implies \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos^2(k)}{k^2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Essendo che $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ converge ad un valore finito, allora necessariamente

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos^2(k)}{k^2} < \infty$$

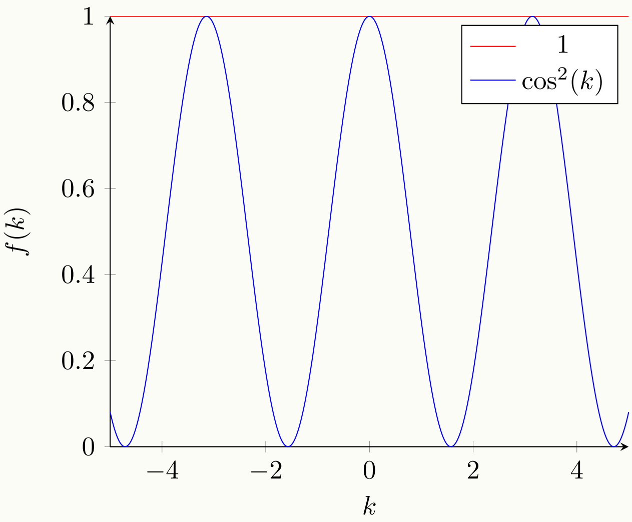


Figura 1.1: coseno limitato

1.1.3 Teoremi sulle serie e criteri di convergenza

In questa sezione verranno presentati alcuni teoremi fondamentali riguardo la convergenza delle serie.

Teorema della condizione necessaria : Sia S_n una serie convergente, del tipo

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = l \in \mathbb{R}$$

allora

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

Dimostrazione :

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k =$$
$$(a_1 + a_2 \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 \cdots + a_{n-1}) = a_n \implies \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

Teorema sulle serie a termini positivi : Sia $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, si ha che

$$a_k \geq 0 \;\; \forall k \implies S_n \begin{cases} \text{converge} \\ \text{diverge a } +\infty \end{cases}$$

Teorema del confronto : Siano a_k e b_k due successioni tali che $0 < a_k < b_k$, allora

- $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \implies \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$

Consideriamo adesso due successioni a_k e b_k tali che $0 < a_k \wedge 0 < b_k$ e $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l$, allora

- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty \iff \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \iff \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$

Questo teorema ci dice che, se due successioni si comportano asintoticamente allo stesso modo, allora le serie che le hanno come termini si comporeranno allo stesso modo riguardo la convergenza, e possono essere approssimate ad una stessa funzione.

Il seguente criterio è detto *del rapporto e della radice*, sono in realtà due differenti criteri, con premesse differenti ma che espongono la stessa tesi. Sia $a_k \geq 0$, tale che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L \neq 1 \;\; \text{oppure} \;\; \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L \neq 1$$

allora

$$\begin{cases} \text{la serie converge se } L \in [0,1) \\ \text{la serie converge se } L > 1 \end{cases}$$

La seguente formula è detta formula di **Sterling** e descrive il comportamento asintotico della funzione fattoriale, riguardo la velocità della sua crescita verso infinito

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x!}{x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}} = 1$$

Teorema del criterio di Leibniz : Si consideri una serie, in cui è presente il termine $(-1)^k$, nonostante il segno non sia costante, tale criterio permette di decretare la convergenza della serie. La serie in questione è del tipo

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot b_k$$

dove b_k è una successione che soddisfa le seguenti condizioni :

1. b_k è sempre maggiore di zero
2. b_k è decrescente
3. b_k tende a zero

In tal caso, la serie S_n è convergente.

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ una serie, si dice che essa **converge assolutamente** se

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty$$

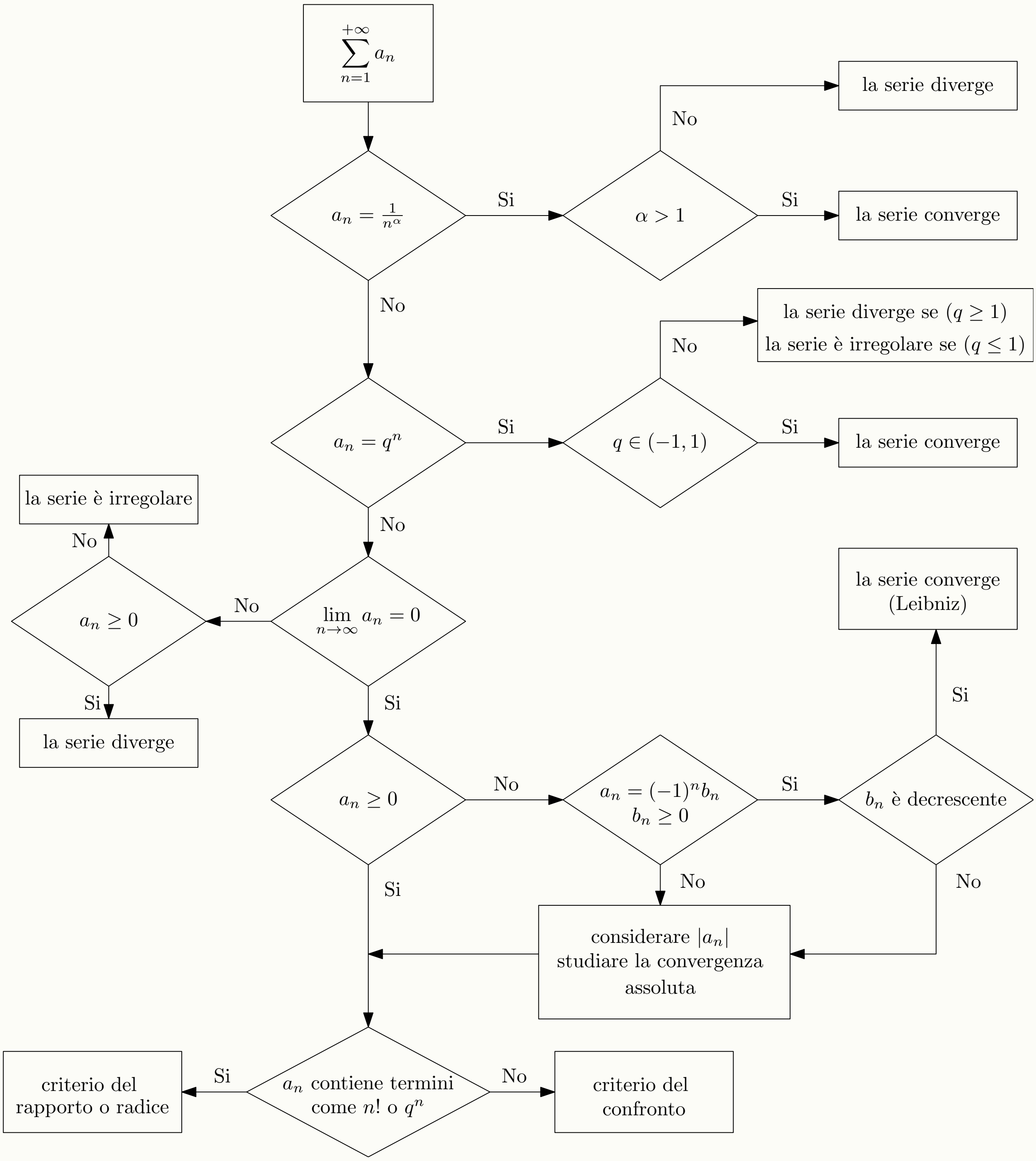
allo stesso modo, **diverge assolutamente** se

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \pm\infty$$

Teorema : Sia S_n una serie, se essa converge assolutamente, allora è convergente.

1.1.4 Diagramma di flusso per le serie

Viene lasciato a disposizione dello studente il seguente diagramma di flusso utile nello studio del carattere di una serie numerica



1.2 Serie di Taylor

1.2.1 Polinomio di Taylor

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile infinite volte, definiamo come polinomio di Taylor di f di grando n, il polinomio, appunto, di grado n, che approssima al meglio f rispetto qualsiasi altro polinomio distinto in un punto fissato x_0.

Indichiamo tale polinomio $T_{n,x_0}(f(x))$, il grado può essere anche minore di n, vale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{n,x_0}(f(x))}{(x - x_0)^n} = 0$$

Si può scrivere che

$$f(x_0) = T_{n,x_0}(f(x)) + o((x - x_0)^n)$$

tale funzione nel punto fissato è identica al suo polinomio di Taylor, a meno di un errore di approssimazione dato dalla presenza del termine $o((x - x_0)^n)$.

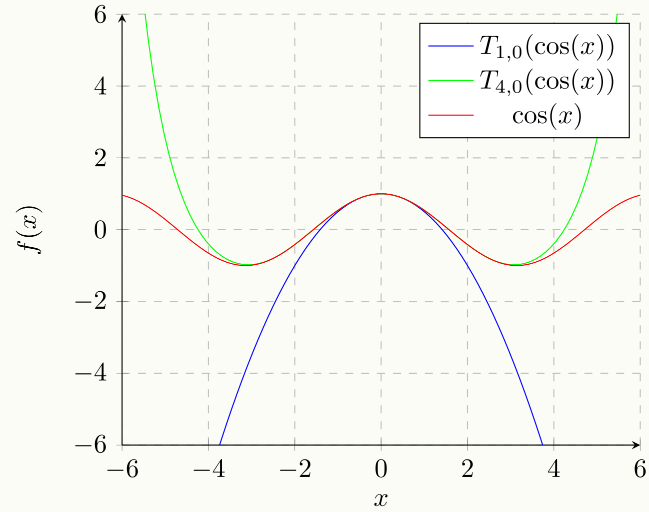


Figura 1.2: Polinomio di Taylor

Il polinomio di Taylor di una funzione esiste ed è **unico**, ed è descritto esplicitamente dalla seguente

$$T_{n,x_0}(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

con $f^{(k)}$ si intende la derivata k-esima di f. Il resto del polinomio può essere scritto anche sotto una diversa forma detta resto di Lagrange

$$f(x_0) = T_{n,x_0}(f(x)) + \frac{f^{(n+1)(x_0)}}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Per le funzioni note, come quelle trigonometriche o per la funzione esponenziale, vi sono degli sviluppi noti, vediamone alcuni fissati nel punto $x_0 = 0$

$$T_{n,0}(\cos(x)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

$$T_{n,0}(\sin(x)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Quando il resto di Lagrange tende a zero, il polinomio di Taylor converge alla funzione che approssima, ed essa può essere riscritta in tali termini

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Un esempio concreto è quello della funzione esponenziale

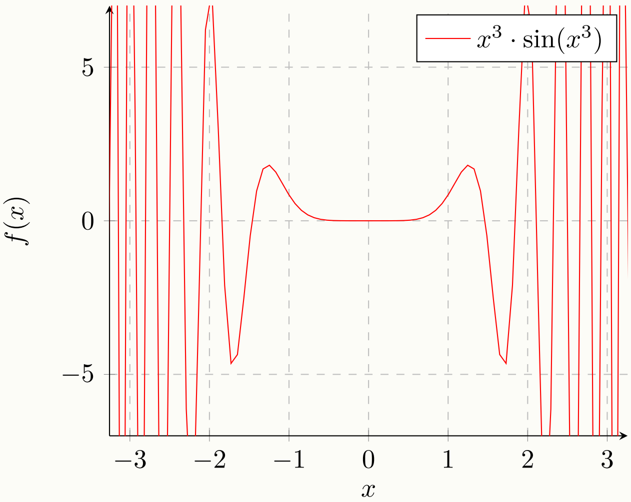
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

1.2.2 Calcolo delle derivate

Se una funzione ammette una scrittura sottoforma di serie di Taylor, allora la sua derivata k-esima può essere scritta come $a_k \cdot k!$, dove a_k è il coefficiente del termine di grado k della serie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k \implies f^{(k)}(0) = a_k \cdot k!$$

Esempio : Si consideri la funzione $f(x) = x^3 \cdot \sin(x^3)$, si vogliono trovare i valori di $f^{(6)}(0)$, $f^{(12)}(0)$ e $f^{(18)}(0)$, senza dover trovare le rispettive funzioni derivate esplicite (processo che richiederebbe una quantità di tempo considerevole).



Conoscendo lo sviluppo noto del seno, possiamo ricavare la seguente

$$x^3 \cdot \sin(x^3) = \frac{1}{1!}x^6 - \frac{1}{3!}x^{12} + \frac{1}{5!}x^{18} - \dots$$

Applichiamo la formula appena presentata e troviamo che

$$f^{(6)}(0) = 6! \qquad f^{(12)}(0) = \frac{1}{3!}12! \qquad f^{(18)}(0) = \frac{1}{5!}18!$$

Teorema sulla somma di derivate : la derivata di una somma di funzioni, è uguale alla somma delle derivate delle singole funzioni

$$\Big[a(x) + b(x) + c(x) + d(x) + \dots\Big]' = \Big[a'(x) + b'(x) + c'(x) + d'(x) + \dots\Big]$$

Ad esempio, se

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

allora

$$f'(x) = \Big[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k\Big]'$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cdot x^k]'$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k \cdot x^{k-1}$$

1.2.3 Serie di Taylor notevoli

Vi è riportata una tabella con gli sviluppi noti centrati in 0

$T_{n,0}(e^x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^0)^{(k)}}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$T_{n,0}(\cos(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$T_{n,0}(\sin(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$T_{n,0}(\frac{1}{1-x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \quad \forall x \in (-1,1)$
$T_{n,0}(\frac{1}{1+x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k \quad \forall x \in (-1,1)$
$T_{n,0}(\arctan(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} 2^{2k+1} \quad \forall x \in (-1,1)$
$T_{n,0}(\log(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} 2^{k+1} \quad \forall x \in (-1,1)$

1.3 Serie di potenze

Una serie di potenze è un particolare tipo di serie numerica, nello specifico, è determinata da due parametri

- a_n - una successione di numeri reali detta **coefficiente**
- x_0 - un numero reale detto **centro** della serie

Una serie si presenta in tal modo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$$

Le serie di Taylor sono un tipico esempio di serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \text{ dove } \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} & \text{rappresenta il coefficiente} \\ x_0 & \text{rappresenta il centro} \end{cases}$$

Altri esempi di serie di potenze sono

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ dove } \begin{cases} a_n = \frac{1}{k!} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$e^{x-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^k}{k!} \text{ dove } \begin{cases} a_n = \frac{1}{k!} \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

Risulterà utile, data una serie numerica che non è una serie di potenze, eseguire opportuni passi algebrici per ricavarne una equivalente, che però rispetti la proprietà di essere una serie di potenze.

Consideriamo la serie

$$e^{3x-5} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(3x-5)^k}{k!}$$

Notiamo come, se non fosse presente il 3 nel termine sotto esponente, essa sarebbe una serie di potenze, applichiamo i dovuti passaggi algebrici

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(3x-5)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(3(x-\frac{5}{3}))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k \cdot ((x-\frac{5}{3}))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!}(x-\frac{5}{3})^k$$

Si noti come la serie equivalente è una serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!}(x-\frac{5}{3})^k \text{ dove } \begin{cases} a_n = \frac{3^k}{k!} \\ x_0 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Da qui, è chiara la formula generale

$$☞ \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(Ax+B)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k A^k (x+\frac{B}{A})^k \quad ☜$$

Vediamo un altro *esempio* di trasformazione, si consideri

$$\cos(4x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (4x)^{2k}}{(2k)!}$$

si raccoglie il 4

$$\cos(4x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (4)^{2k} (x)^{2k}}{(2k)!}$$

ora la forma della serie è quella di una serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (4)^{2k}}{(2k)!}(x)^{2k}$$

1.3.1 Raggio di convergenza

Sia $S_n(x)$ una serie di potenze, un quesito a tal proposito risulta essere : *per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie converge?* Data una serie di potenze $S_n(x)$, definiamo $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}$ l'intervallo della retta reale per cui la serie converge.

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R} | S_n(x) \text{ converge } \}$$

Proposizione : Ogni serie di potenze converge sempre nel centro : $x_0 \in \mathcal{E}$.

Definizione : Sia $S_n(x)$ una serie di potenze con centro x_0, esiste un numero reale $R \in [0, \infty]$ tale che

$$\begin{cases} S_n(x) \text{ converge se } |x-x_0| < R \\ S_n(x) \text{ diverge se } |x-x_0| > R \end{cases}$$

Tale R è detto **raggio di convergenza**, a questo punto l'intervallo di convergenza è definito esplicitamente

$$\mathcal{E} = [x_0 - R, x_0 + R]$$

Se $R = 0$, allora la serie converge esclusivamente nel centro, se $R = \infty$, la serie converge su tutta la retta reale. Nel caso di R finito e diverso da zero, non è necessariamente vero che la serie converga nei punti $x_0 - R$ e $x_0 + R$.

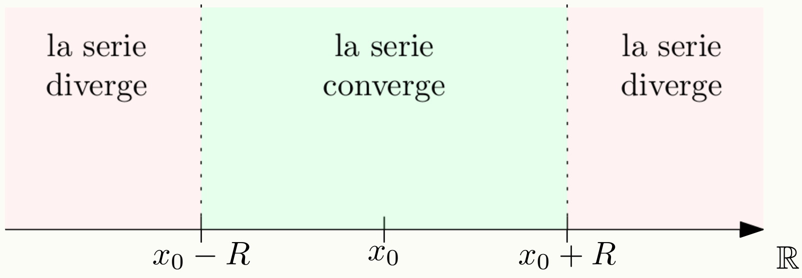


Figura 1.3: raggio di convergenza

Essendo che nei punti $x_0 - R$ e $x_0 + R$ non è chiaro se una serie di potenze converga, risulta necessario studiarla specificatamente.

$$\text{per } \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k \text{ si considerano } \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k R^k & \text{per } x_0 + R \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k R^k & \text{per } x_0 - R \end{cases}$$

1.3.2 Calcolo del raggio

Data una serie di potenze, si vuole ricavare il valore del raggio R. A tal proposito, sarà necessario trovare un altro valore caratterizzante associato alla serie, che denoteremo L, tale L non è altro che il valore determinante nel criterio della radice e del rapporto in valore assoluto. Sia $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ la serie di potenze in questione, si ha che

$$L = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Tale valore è (definizione poco rigorosa) l'inverso del raggio di convergenza, de facto

- $L = 0 \implies R = \infty$
- $L = \infty \implies R = 0$
- $0 < L < \infty \implies R = \dfrac{1}{L}$

Esercizio : Si vuole trovare $\mathcal{E}$ per la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x-5)^k}{k+1}$$

Si raccoglie 2^k

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k+1}(x-\frac{5}{2})^k$$

Si ottengono coefficiente e centro, rispettivamente $a_k = \frac{2^k}{k+1}$ e $x_0 = \frac{5}{2}$. Si calcola L applicando il criterio della radice

$$L = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{2^k}{k+1}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[k]{k+1}} = 2$$

Si ha che $R = \dfrac{1}{2}$ e la serie converge per $|x - x_0| < \dfrac{1}{2}$. Si studia la serie nei punti critici $x_0 - R = 2$ e $x_0 + R = 3$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x-5)^k}{k+1} \text{ diventa } \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(6-5)^k}{k+1} & \text{per } x_0 + R = 3 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(4-5)^k}{k+1} & \text{per } x_0 - R = 2 \end{cases}$$

La convergenza risulta essere

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(6-5)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1^k}{k+1} \text{ diverge} \\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(4-5)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \text{ converge per Leibnitz} \end{cases}$$

A questo punto si ha l'insieme di convergenza $\mathcal{E} = [2, 3)$.

Esercizio : Si vuole trovare $\mathcal{E}$ per la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(y^2-1)^{2k}}{k+1}$$

Si noti come non è una serie di potenze, si applica una sostituzione definendo $x = (y^2-1)^2$, riscrivendo la serie come

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1}$$

Si ottengono coefficiente e centro, rispettivamente $a_k = \frac{1}{k+1}$ e $x_0 = 0$. Si calcola L applicando il criterio della radice

$$L = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_l} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{k+2}}{\frac{1}{k+1}} = 1 \implies R = 1$$

Si studia la serie nei punti critici $x_0 - R = -1$ e $x_0 + R = 1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1} \text{ diventa } \begin{cases} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} \quad \text{per } x_0 + R = 1 \text{ diverge} \\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \quad \text{per } x_0 - R = -1 \text{ converge} \end{cases}$$

Ricordando che $x = (y^2-1)^2$, si trova la convergenza della serie iniziale risolvendo la disequazione

$$-1 \leq (y^2-1)^2 =< 1 \begin{cases} -1 \leq (y^2-1)^2 \text{ sempre vero} \\ (y^2-1)^2 < 1 \implies y^2 - 1 < 1 \implies y < \sqrt{2} \end{cases}$$

Si ha quindi che $\mathcal{E} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \backslash \{0\}$.

Proposizione : Sia f una funzione derivabile infinite volte, definita come serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$$

si ha che

$$f^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k$$

CAPITOLO

2

INTEGRALI

2.1 Integrale di Riemann

La teoria dell'integrazione è vasta ed estesa, e fa riferimento alla *teoria della misura*, in questo corso, verrà trattata l'integrazione nella sua formulazione più semplice.

L'integrale di una funzione di variabile reale, viene calcolato in uno specifico intervallo, e rappresenta la somma dei contributi infinitesimi della funzione, risulta intuitivo se analizzato secondo il suo significato geometrico.

Si consideri una generica funzione $f(x)$, di cui si vuole calcolare l'area sottesa alla curva nel suo grafo, limitata da un certo intervallo $[a, b]$, come in figura 2.1. Non essendo la figura un poligono, non è possibile

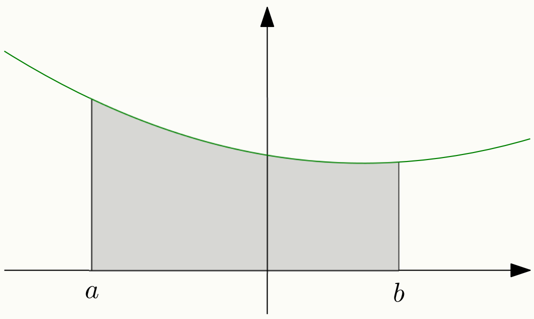


Figura 2.1: Area sottesa

utilizzare una formula esplicita per l'area, è possibile però, utilizzare dei poligoni per approssimare l'area ed avere una stima del valore effettivo.

Si consideri una retta parallela all'asse delle ascisse e tangente all'estremo superiore di $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$, che denotiamo M, ed una retta dello stesso tipo, ma tangente all'estremo inferiore, denotato m. Si considerano quindi i due rettangoli di area $(b - a) \cdot M$ e $(b - a) \cdot m$, come in figura 2.2. Sia A l'area effettiva sottesa alla curva, si ha ovviamente che

$$(b - a) \cdot m < A < (b - a) \cdot M$$

L'area A è sicuramente più piccola del rettangolo di altezza M, e sicuramente più grande del rettangolo di altezza m. Tale stima risulta (o può risultare, in base al tipo di curva) imprecisa, può essere utile infatti

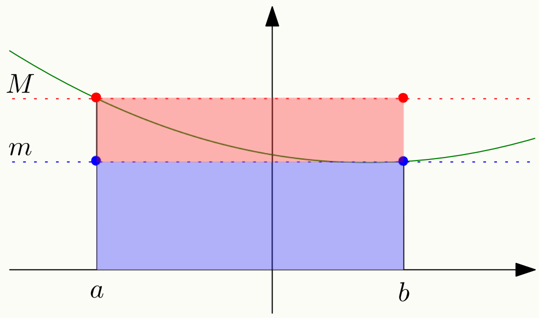


Figura 2.2: Stima con i poligoni

aumentare il numero di rettangoli che approssimano la curva, in modo da ridurre l'errore. Si considera quindi un punto medio $x_1 = \frac{b-a}{2}$, e si costruiscono i medesimi rettangoli sugli intervalli $[a, x_1]$ e $[x_1, b]$. Le variabili in gioco sono :

- $x_1 = \frac{b-a}{2}$
- $M_0 =$ l'estremo superiore di $f(x)$ nell'intervallo $[a, x_1]$
- $m_0 =$ l'estremo inferiore di $f(x)$ nell'intervallo $[a, x_1]$
- $M_1 =$ l'estremo superiore di $f(x)$ nell'intervallo $[x_1, b]$
- $m_1 =$ l'estremo inferiore di $f(x)$ nell'intervallo $[x_1, b]$

A tal punto, tali rettangoli descrivono una stima più precisa dell'area

$$m_0 \cdot \frac{(b-a)}{2} + m_1 \cdot \frac{(b-a)}{2} \leq A \leq M_0 \cdot \frac{(b-a)}{2} + M_1 \cdot \frac{(b-a)}{2}$$

Si può riscrivere in forma più compatta

$$(m_0 + m_1) \cdot \frac{(b-a)}{2} \leq A \leq (M_0 + M_1) \cdot \frac{(b-a)}{2}$$

Sorge intuitivo pensare di poter aumentare il numero di rettangoli, in modo da rendere ancora più precisa la stima dell'area, si considerino ora 4 rettangoli, dividendo quindi in 4 intervalli l'intervallo iniziale $[a, b]$.

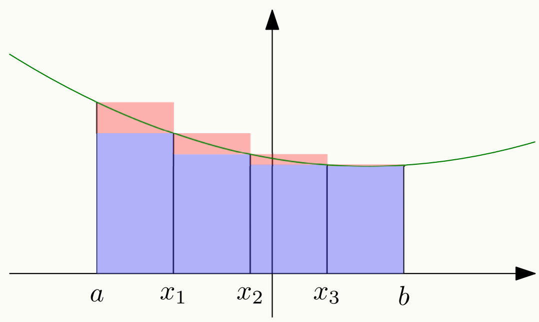


Figura 2.3: Stima con 4 poligoni

$$(m_0 + m_1 + m_2 + m_3) \cdot \frac{(b-a)}{4} \leq A \leq (M_0 + M_1 + M_2 + M_3) \cdot \frac{(b-a)}{4}$$

Che è possibile scrivere

$$\frac{b-a}{2^2} \sum_{k=0}^{2^2-1} m_k \leq A \leq \frac{b-a}{2^2} \sum_{k=0}^{2^2-1} M_k$$

Ricordando che m_k ed M_k sono rispettivamente il minimo ed il massimo di $f(x)$ nel $k-esimo$ intervallo. Generalizzando, è possibile considerare la formula per un'approssimazione di $2n$ poligoni, ossia una suddivisione dell'intervallo in n parti.

$$\frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} min_{[x_k,x_{k+1}]}(f(x)) \leq A \leq \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} max_{[x_k,x_{k+1}]}(f(x))$$

A questo punto, per semplicità, introduciamo la seguente notazione

$$\underline{S_n} = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} min_{[x_k,x_{k+1}]}(f(x))$$
$$\bar{S_n} = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} max_{[x_k,x_{k+1}]}(f(x))$$

Denominiamo $\underline{S_n}$ somme inferiori, ed approssimano per difetto l'area A, e denominiamo $\bar{S_n}$ somme superiori, che l'approssimano per eccesso. Risulta ovvio che, all'aumentare di n, la stima delle somme diventa sempre più precisa.

Definizione : Sia $f(x) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia $[a,b] \subseteq I$ un intervallo , diremo che la funzione è **integrabile secondo Riemann**, se

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S_n} = \lim_{n\to\infty}\bar{S_n} \in \mathbb{R}$$

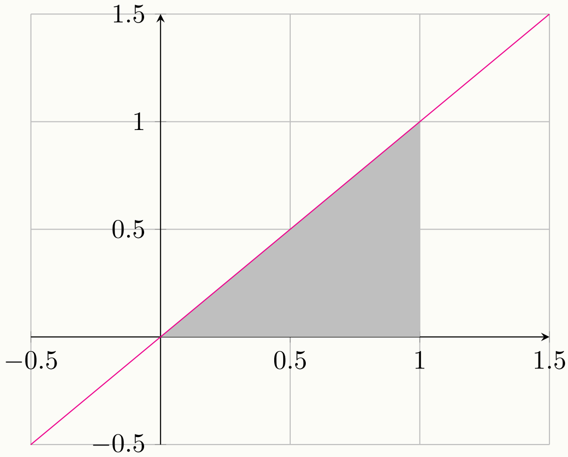
Tale limite deve tendere ad un valore finito, assume la seguente notazione

$$☞ \quad \int_a^b f(x)dx \quad ☜$$

Nota bene : Il concetto di integrale è un concetto molto più esteso e non riguarda esclusivamente il calcolo dell'area sottesa ad una curva. Quest'ultimo, è esclusivamente il suo significato geometrico per le funzioni definite (e con immagine) in $\mathbb{R}$. Il concetto intrinseco dell'integrale, è quello di essere una somma di infiniti termini/contributi, è de facto la versione *continua* di una sommatoria. Esiste una formulazione più rigorosa di integrale, nota come *integrale di Lebesgue*, ma non è assolutamente argomento di questo corso introduttivo.

Vediamo adesso un esempio di calcolo di un integrale, si vuole calcolare

$$\int_0^1 xdx$$



Osservando il grafico, è chiaro che tale area sarà uguale ad $\frac{1}{2}$, in quanto è la metà di un quadrato di lato 1. Verifichiamo ciò con il calcolo dell'integrale. È utile un osservazione : essendo la funzione monotona crescente, per ogni intervallo il suo massimo è sempre il valore assunto all'estremo destro, mentre il minimo è sempre il valore assunto nel suo estremo sinistro.

$$min_{[x_k,x_{k+1}]}(f(x)) = f(x_k) = a + k \cdot \frac{b-a}{2^n} = \frac{k}{2^n}$$

$$max_{[x_k,x_{k+1}]}(f(x)) = f(x_{k+1}) = a + (k+1) \cdot \frac{b-a}{2^n} = \frac{k+1}{2^n}$$

Si calcolano adesso i valori delle somme superiori ed inferiori.

$$\bar{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} min_{[x_k,x_{k+1}]}(f(x)) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} k$$

Si ricordi come

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Si ha quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(2^n-1)\cdot 2^n}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}-2^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}$$

2.1.1 Criteri di integrabilità

Condizione necessaria per far si che una funzione sia integrabile in un certo intervallo, è che essa, debba essere limitata nell'intervallo in questione. Se una funzione è monotona, o suddivisibile in intervalli monotoni, è sicuramente integrabile.

Un altra condizione necessaria, è che la funzione sia continua, o suddivisibile in intervalli continui.

Proposizione : se $a \leq b \leq c$, allora

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Teorema (linearità dell'integrale) : Siano f e g due funzioni integrabili su $[a, b]$, siano α e β due costanti reali, vale che

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]\ dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\ dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\ dx$$

Inoltre, se f e g sono integrabili, allora anche il loro prodotto è integrabile, anche se l'integrale del prodotto è diverso dal prodotto degli integrali

$$\int_a^b [f(x) \cdot g(x)]dx \neq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$$

Teorema (integrale assoluto) :

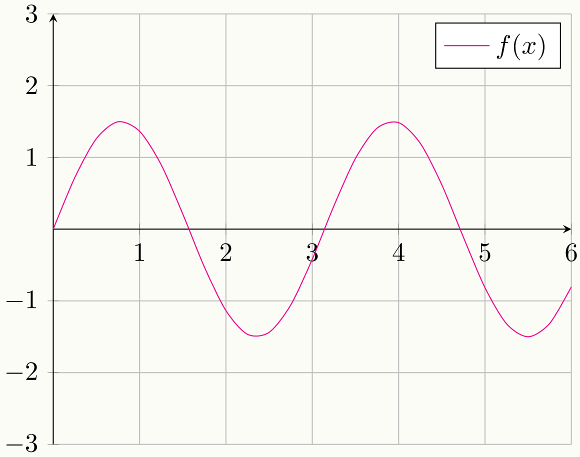
$$|\int_a^b f(x)\ dx| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$$

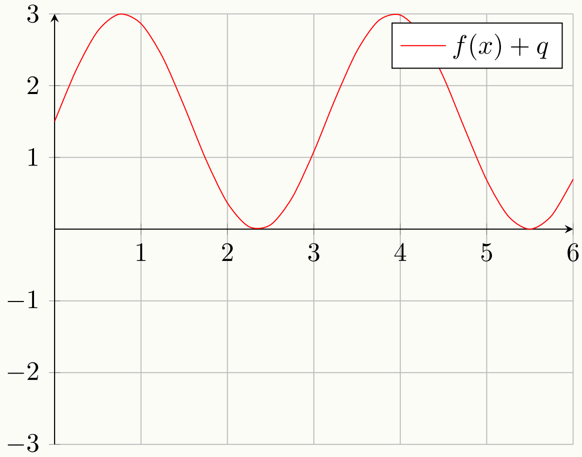
Teorema (monotonia dell'integrale) : Se $f \leq g$ allora

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$$

Fino ad ora le funzioni prese in considerazione sono esclusivamente positive, quando una funzione è negativa, l'area compresa fra la curva e l'asse delle ascisse sarà un contributo negativo alla somma totale.

Consideriamo una funzione $f(x)$, da integrare in $[a, b]$, intervallo in cui la funzione assume valori sia positivi, che negativi. Consideriamo poi un altra funzione, ossia $f(x) + q$, dove q è il valore minimo da sommare alla funzione per far si che sia sempre positiva, tale q è il minimo della funzione nell'intervallo $[a, b]$.





Si ha che

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [f(x) + q]\,dx - q \cdot (b - a)$$

È come se si stesse calcolando l'integrale della funzione esclusivamente negli intervalli in cui è positiva, per poi sottrarvi il valore dell'area negli intervalli in cui è negativa.

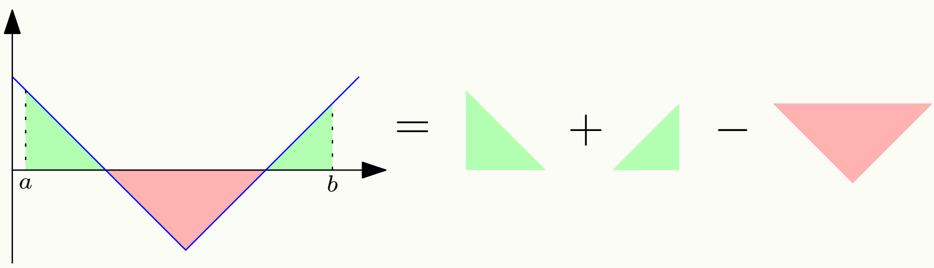


Figura 2.4: Integrale di una funzione negativa