Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Abbiamo visto nel compito del 20/11 che questi 3 vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$ in questa nuova base di $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$ risolvo il sistema $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$ Applico Gauss

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} A_2 - 2A_1 \\ A_3 - 2A_1 \end{array} \rightsquigarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right| A_2 \leftrightarrow A_3 \Rightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right| A_3 - \frac{5}{7}A_2 \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/7 & 1 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -7\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\frac{3}{7}\alpha_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -7\alpha_2 - 2 \cdot 7/3 = 0 \\ \alpha_3 = -7/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -7\alpha_2 = \frac{14}{3} \\ \alpha_3 = -7/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = -\frac{14}{3} \cdot \frac{1}{7} = -\frac{2}{3} \\ \alpha_3 = -7/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{7}{3} + \frac{6}{3} = -\frac{1}{3} \\ \alpha_2 = -\frac{2}{3} \\ \alpha_3 = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si consideri il sottoinsieme

$$W := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

Verificare che W è un sottospazio, trovarne la dimensione e determinarne una base.

$(a+b+c) + (a'+b'+c') = \underline{a+b+c} + \underline{a'+b'+c'} \overset{\text{IPOTESI}}{=} \underline{0} + \underline{0} = 0$ una base e' $\left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix} \right\}$ ha dim. 1.
