

Глава 1

Постановка задачи

Необходимо решить уравнение переноса с дробной производной Римана-Лиувилля по времени:

$$\begin{cases} D_t^\alpha c + (uc)_x = f(x, t) \\ J_t^{1-\alpha} c|_{t=0} = \phi(x) \\ c|_{x=0} = \psi(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

Простейший случай предполагает $u = \text{const}$.

Глава 2

Аналитическое решение

2.1 Задача без источника с постоянной скоростью

Для первого приближения принимается упрощение: скорость переноса $u(x, t)$ принимается за постоянную

$$u(x, t) \equiv u = \text{const}, \quad (2.1)$$

также считаем задачу без источников $f(x, t) \equiv 0$, тогда система (1.1) принимает вид

$$\begin{cases} D_t^\alpha c + uc_x = 0 \\ J_t^{1-\alpha} c|_{t=0} = \phi(x) \\ c|_{x=0} = \psi(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

Тогда применяем преобразование Лапласа $L_t(f(t))$ к главному уравнению системы, учитывая свойство

$$L_t(D_t^\alpha f(t))(s) = s^\alpha f^* - I_t^{1-\alpha} f|_{t=0}, \quad (2.3)$$

и получаем

$$s^\alpha c^*(x, s) - \phi(x) + uc_x^*(x, s) = 0, \quad (2.4)$$

$$c_x^*(x, s) + \frac{s^\alpha}{u} c^*(x, s) = \phi(x). \quad (2.5)$$

Общее решение полученного уравнения:

$$c^*(x, s) = A_0(s)e^{-\frac{s^\alpha}{u}x} + e^{-\frac{s^\alpha}{u}x} \int_0^x e^{\frac{s^\alpha}{u}\xi} \frac{\phi(\xi)}{u} d\xi. \quad (2.6)$$

С учетом граничного условия получаем

$$c^*(x, s) = \psi^*(s)e^{-\frac{s^\alpha}{u}x} + \int_0^x e^{\frac{s^\alpha}{u}(\xi-x)} \frac{\phi(\xi)}{u} d\xi. \quad (2.7)$$

Далее необходимо провести обратное преобразование Лапласа. Известны свойства

$$e^{-\frac{s^\alpha}{u}x} = E_1\left(-\frac{x}{u}s^\alpha; 1\right) \quad (2.8)$$

и

$$L\left\{t^{\delta-1}e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(-ct^{-\beta}); s\right\} = s^{-\delta}E_{1/\alpha}(-cs^\beta; \mu), \quad (2.9)$$

отсюда получаем

$$L^{-1}\left\{e^{-\frac{s^\alpha}{u}x}; t\right\} = t^{-1}e_{1,\alpha}^{1,0}\left(-\frac{x}{u}t^{-\alpha}\right), \quad (2.10)$$

где $e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}$ — функция типа Райта, в случае $\alpha = \mu = 1$ совпадающая с функцией Райта

$$e_{1,\beta}^{1,\delta}(z) = \phi(-\beta, \delta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(-\beta n + \delta)}. \quad (2.11)$$

Тогда

$$L^{-1}\left\{e^{-\frac{s^\alpha}{u}x}; t\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{u}\right)^n \frac{t^{-\alpha n - 1}}{n!\Gamma(-\alpha n)}. \quad (2.12)$$

Используя также свойство преобразования Лапласа от свертки функций

$$L\{(f * g)(t); s\} = L\{f(t); s\} \cdot L\{g(t); s\}, \quad (2.13)$$

где

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\eta) g(t - \eta) d\eta \quad (2.14)$$

— свертка функций, получаем решение в исходных координатах:

$$\begin{aligned} c(x, t) = & \int_0^t \psi(t - \eta) \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{u}\right)^n \frac{\eta^{-\alpha n - 1}}{n!\Gamma(-\alpha n)} d\eta \\ & + \int_0^x \frac{\phi(\xi)}{u} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\xi - x}{u}\right)^n \frac{t^{-\alpha n - 1}}{n!\Gamma(-\alpha n)} d\xi \end{aligned} \quad (2.15)$$

Глава 3

Численное решение

3.1 Преобразования системы

Численный расчет исходного уравнения проблематичен, так как в момент $t = 0$ в уравнении присутствует интегрируемая особенность (сингулярность). Поэтому производится преобразование:

$$w = J_t^{1-\alpha} c - \phi(x), \quad (3.1)$$

$$c = D_t^{1-\alpha} (w + \phi(x)) = D_t^{1-\alpha} w + \phi(x) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (3.2)$$

Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} w_t + u (D_t^{1-\alpha} (w + \phi(x)))_x = f(x, t) \\ w|_{t=0} = 0 \\ D_t^{1-\alpha} (w + \phi(x))|_{x=0} = \psi(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

или

$$\begin{cases} w_t + u (D_t^{1-\alpha} w)_x = f(x, t) - u \phi_x(x) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ w|_{t=0} = 0 \\ D_t^{1-\alpha} w|_{x=0} = \psi(t) - \phi(0) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \end{cases} \quad (3.4)$$

3.2 Численная схема

На текущий момент реализована неявная численная схема второго порядка точности по пространству.

Далее временные слои обозначены верхним индексом n , $n = 0, 1, \dots$, где $n = 0$ соответствует начальному состоянию системы. Пространственные координаты обозначены через нижний индекс i , $i = \overline{0, nx}$, где $i = 0$ соответствует левой границе расчетной области, $i = nx$ — правой.

Обозначим $\tilde{w}_i^n = D_t^{1-\alpha} w|_{t=t^n}$ — вычисленная на временном шаге n в точке i производная Римана-Лиувилля поля w по времени.

Тогда схема выглядит следующим образом

$$\frac{w_0^{n+1} - w_0^n}{\Delta t} + u \frac{\tilde{w}_1^{n+1} - \left(\psi^{n+1} - \phi_0 \frac{(t^{n+1})^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right)}{\Delta x} = f_0^{n+1} - u \phi'_0 \frac{(t^n)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3.5)$$

$$\frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\Delta t} + u \frac{\tilde{w}_{i+1}^{n+1} - \tilde{w}_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = f_i^{n+1} - u \phi'_i \frac{(t^n)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, i = \overline{1, nx-1} \quad (3.6)$$

$$\frac{w_{nx}^{n+1} - w_{nx}^n}{\Delta t} + u \frac{\tilde{w}_{nx}^{n+1} - \tilde{w}_{nx-1}^{n+1}}{\Delta x} = f_{nx}^{n+1} - u \phi'_{nx} \frac{(t^n)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3.7)$$

Вычисление \tilde{w}_i^n производится с использованием приближения Грюнвальда-Летникова

$$\tilde{w}_i^{n+1} = \sum_{k=0}^{\min(m, n+1)} \frac{(-1)^k}{\Delta t^{1-\alpha}} \binom{1-\alpha}{k} w_i^{n+1-k} = \frac{w_i^{n+1}}{\Delta t^{1-\alpha}} + \sum_{k=1}^{\min(m, n+1)} \frac{(-1)^k}{\Delta t^{1-\alpha}} \binom{1-\alpha}{k} w_i^{n+1-k}, \quad (3.8)$$

где m — параметр «длины памяти», определяющий количество слагаемых в приближении.

Таким образом, общий алгоритм на временном шаге $n + 1$:

$$\begin{aligned} w_0^{n+1} + \Delta t^\alpha u \frac{w_1^{n+1}}{\Delta x} = & w_0^n + \Delta t \left(f_0^{n+1} - u \phi'_0 \frac{(t^n)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right. \\ & - \left(\frac{u}{\Delta x} \sum_{k=1}^{\min(m, n+1)} \frac{(-1)^k}{\Delta t^{1-\alpha}} \binom{1-\alpha}{k} w_1^{n+1-k} \right. \\ & \left. \left. - \frac{u}{\Delta x} \psi^{n+1} + \frac{u}{\Delta x} \phi_0 \frac{(t^{n+1})^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
w_i^{n+1} + \Delta t^\alpha u \frac{w_{i+1}^{n+1} - w_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = & w_i^n + \Delta t \left(f_i^{n+1} - u \phi_i' \frac{(t^n)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \right. \\
& - \left(\frac{u}{2\Delta x} \sum_{k=1}^{\min(m, n+1)} \frac{(-1)^k}{\Delta t^{1-\alpha}} \binom{1-\alpha}{k} w_{i+1}^{n+1-k} \right. \\
& \left. \left. - \frac{u}{2\Delta x} \sum_{k=1}^{\min(m, n+1)} \frac{(-1)^k}{\Delta t^{1-\alpha}} \binom{1-\alpha}{k} w_{i-1}^{n+1-k} \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Полученная матрица системы является трехдиагональной и решается методом прогонки

Глава 4

Результаты расчетов

4.1 Перенос в постоянном равномерном поле скоростей

Скорость принимается постоянной на всем пространстве с течением времени. Источник нулевой, начальной распределение — функция-шапочка:

$$v = const \quad (4.1)$$

$$f(x, t) \equiv 0 \quad (4.2)$$

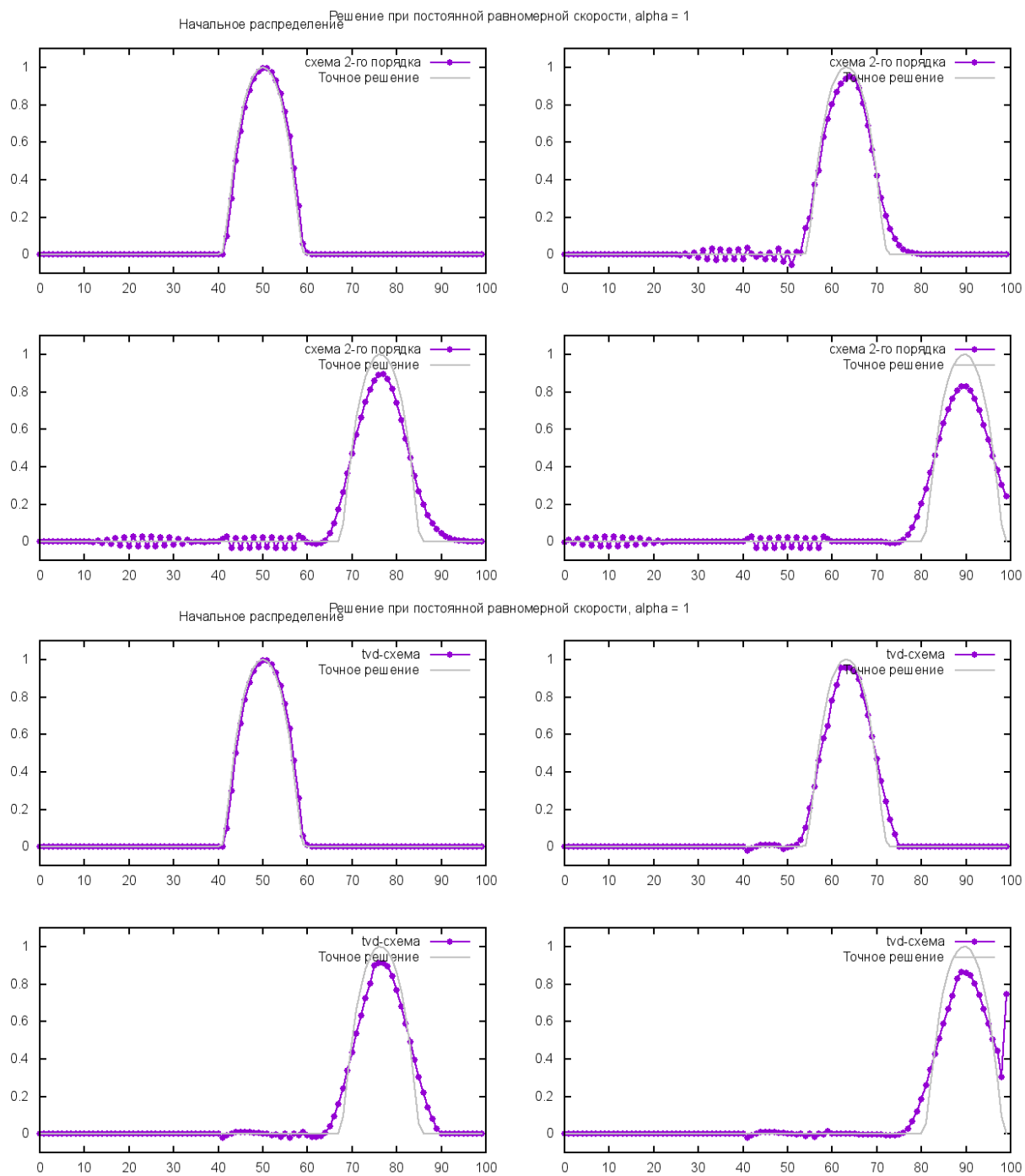
$$\phi(x) = \exp \left(-\frac{a^2}{a^2 - (x - b)^2} + 1 \right) \quad (4.3)$$

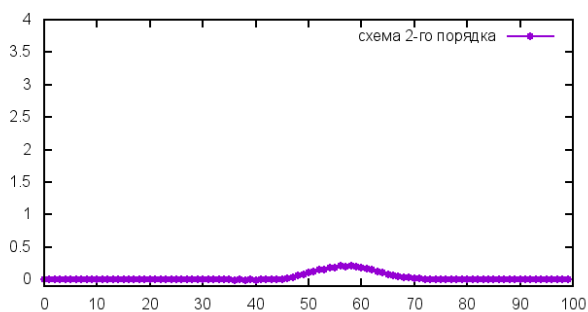
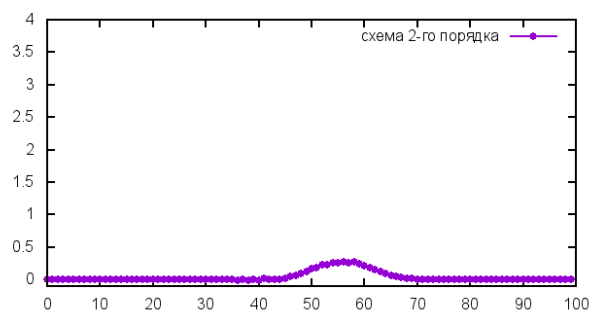
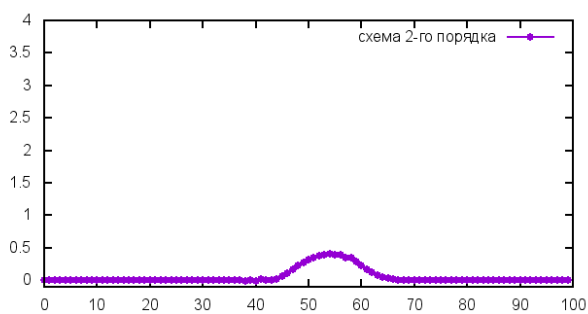
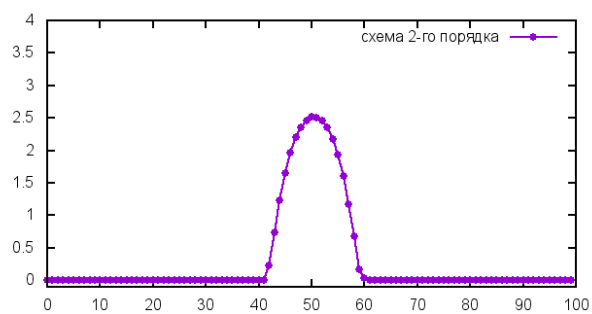
При $\alpha = 1$ получаем обычное уравнение переноса. Численное решение принимает вид:

Для дробного $\alpha = 0.9$ была применена та же TVD-схема, получены решения

Также получены решения для $\alpha = 0.7$:

Также получены решения для $\alpha = 0.5$:



Начальное распределение^{Реш}Начальное распределение^{Реш}