Глава 1

Постановка задачи

Необходимо решить уравнение переноса с дробной производной Римана-Лиувилля по времени:

$$\begin{cases} D_t^\alpha c + (uc)_x = f(x,t) \\ J_t^{1-\alpha} c\big|_{t=0} = \phi(x) \\ c\big|_{x=0} = \psi(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

Простейший случай предполагает $u = const$.

Глава 2

Аналитическое решение

2.1 Задача без источника с постоянной скоростью

Для первого приближения принимается упрощение: скорость переноса $u(x, t)$ принимается за постоянную

$$u(x, t) \equiv u = const, \tag{2.1}$$

также считаем задачу без источников $f(x, t) \equiv 0$, тогда система () принимает вид

$$\begin{cases} D_t^\alpha c + uc_x = 0 \\ J_t^{1-\alpha} c\big|_{t=0} = \phi(x) \\ c\big|_{x=0} = \psi(t) \end{cases} \tag{2.2}$$

Тогда применяем преобразование Лапласа $L_t(f(t))$ к главному уравнению системы, учитывая свойство

$$L_t(D_t^\alpha f(t))(s) = s^\alpha f^* - I_t^{1-\alpha} f\big|_{t=0}, \tag{2.3}$$

и получаем

$$s^\alpha c^*(x, s) - \phi(x) + uc_x^*(x, s) = 0, \tag{2.4}$$

$$c^*(x, s) = \frac{\phi(x)}{s^\alpha + uD_x}. \tag{2.5}$$

С использованием свойства

$$L_t(e_\alpha^{\lambda t}) = \frac{1}{s^\alpha - \lambda} \tag{2.6}$$

где

$$e_\alpha^{\lambda t} = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\inf} \frac{\lambda^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha+\alpha)} \tag{2.7}$$

Тогда получаем решение

$$c(x,t) = e_\alpha^{utD_x} \phi(x), \tag{2.8}$$

$$c(x,t) = \sum_{k=0}^{\inf} \frac{(-u)^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha+\alpha)} D_x^k \phi(x), \tag{2.9}$$

Глава 3

Численное решение

3.1 Преобразования системы

Численный расчет исходного уравнения проблематичен, так как в момент $t = 0$ в уравнении присутствует интегрируемая особенность (сингулярность). Поэтому производятся преобразование:

$$w = J_t^{1-\alpha} c - \phi(x), \tag{3.1}$$

$$c = D_t^{1-\alpha} \left(w + \phi(x) \right) = D_t^{1-\alpha} w + \phi(x) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tag{3.2}$$

Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} w_t + u \left(D_t^{1-\alpha} \left(w + \phi\left(x\right) \right) \right)_x = f(x,t) \\ w\big|_{t=0} = 0 \\ D_t^{1-\alpha} \left(w + \phi(x) \right)\big|_{x=0} = \psi(t) \end{cases} \tag{3.3}$$

или

$$\begin{cases} w_t + u \left(D_t^{1-\alpha} w \right)_x = f(x,t) - u\phi_x\left(x\right) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ w\big|_{t=0} = 0 \\ D_t^{1-\alpha} w\big|_{x=0} = \psi(t) - \phi(0) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \end{cases} \tag{3.4}$$

3.2 Численная схема

На текущий момент реализована неявная численная схема второго порядка точности по пространству.

Далее временные слои обзначены верхним индексом n, $n = 0, 1, ...$, где $n = 0$ соответствует начальному состоянию системы. Пространственные координаты обозначены через нижний индекс i, $i = \overline{0, nx}$, где $i = 0$ соответствует левой границе расчетной области, $i = nx$ — правой.

Обозначим $\tilde{w}_i^n = D_t^{1-\alpha} w\big|_{t=t^n}$ — вычисленная на временном шаге n в точке i производная Римана-Лиувилля поля w по времени.

Тогда схема выглядит следующим образом

$$\frac{w_0^{n+1} - w_0^n}{\Delta t} + u\frac{\tilde{w}_1^{n+1} - \left(\psi^{n+1} - \phi_0 \frac{\left(t^{n+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)}{\Delta x} = f_0^{n+1} - u\phi_0' \frac{\left(t^n\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3.5)$$

$$\frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\Delta t} + u\frac{\tilde{w}_{i+1}^{n+1} - \tilde{w}_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = f_i^{n+1} - u\phi_i' \frac{\left(t^n\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, i = \overline{1, nx-1} \quad (3.6)$$

$$\frac{w_{nx}^{n+1} - w_{nx}^n}{\Delta t} + u\frac{\tilde{w}_{nx}^{n+1} - \tilde{w}_{nx-1}^{n+1}}{\Delta x} = f_{nx}^{n+1} - u\phi_{nx}' \frac{\left(t^n\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3.7)$$

Вычисление $\tilde{w}_i^n$ производится с использованием приближения Грюнвальда-Летникова

$$\tilde{w}_i^{n+1} = \sum_{k=0}^{\min(m,n+1)} \frac{(-1)^k}{\Delta t^{1-\alpha}} \binom{1-\alpha}{k} w_i^{n+1-k} = \frac{w_i^{n+1}}{\Delta t^{1-\alpha}} + \sum_{k=1}^{\min(m,n+1)} \frac{(-1)^k}{\Delta t^{1-\alpha}} \binom{1-\alpha}{k} w_i^{n+1-k}, \quad (3.8)$$

где m — параметр «длины памяти», определяющий количество слагаемых в приближении.

Таким образом, общий алгоритм на временном шаге $n+1$:

$$\begin{aligned} w_0^{n+1} + \Delta t^\alpha u \frac{w_1^{n+1}}{\Delta x} = w_0^n + \Delta t \Bigg(& f_i^{n+1} - u\phi_i' \frac{\left(t^n\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ & - \left(\frac{u}{\Delta x} \sum_{k=1}^{\min(m,n+1)} \frac{(-1)^k}{\Delta t^{1-\alpha}} \binom{1-\alpha}{k} w_1^{n+1-k} \right. \\ & \left. - \frac{u}{\Delta x}\psi^{n+1} + \frac{u}{\Delta x}\phi_0 \frac{\left(t^{n+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \Bigg) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$
\begin{aligned}
w_i^{n+1} + \Delta t^{\alpha} u \frac{w_{i+1}^{n+1} - w_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = w_i^n + \Delta t \Bigg(f_i^{n+1} - u\phi_i' \frac{\left(t^n\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \\
- \Bigg(\frac{u}{2\Delta x} \sum_{k=1}^{\min(m,n+1)} \frac{(-1)^k}{\Delta t^{1-\alpha}} \binom{1-\alpha}{k} w_{i+1}^{n+1-k} \\
- \frac{u}{2\Delta x} \sum_{k=1}^{\min(m,n+1)} \frac{(-1)^k}{\Delta t^{1-\alpha}} \binom{1-\alpha}{k} w_{i-1}^{n+1-k} \Bigg) \Bigg)
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Полученная матрица системы является трехдиагональной и решается методом прогонки