Глава 1

Постановка задачи

Необходимо решить уравнение переноса с дробной производной Римана-Лиувилля по времени:

$$\begin{cases} D_t^{\alpha} c + (uc)_x = f(x,t) \\ J_t^{1-\alpha} c\big|_{t=0} = \phi(x) \\ c\big|_{x=0} = \psi(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

Простейший случай предполагает $u = const$.

Глава 2

Аналитическое решение

2.1 Задача без источника с постоянной скоростью

Для первого приближения принимается упрощение: скорость переноса $u(x,t)$ принимается за постоянную

$$u(x,t) \equiv u = const, \tag{2.1}$$

также считаем задачу без источников $f(x,t) \equiv 0$, тогда система (1.1) принимает вид

$$\begin{cases} D_t^\alpha c + uc_x = 0 \\ J_t^{1-\alpha} c\big|_{t=0} = \phi(x) \\ c\big|_{x=0} = \psi(t) \end{cases} \tag{2.2}$$

Тогда применяем преобразование Лапласа $L_t(f(t))$ к главному уравнению системы, учитывая свойство

$$L_t(D_t^\alpha f(t))(s) = s^\alpha f^* - I_t^{1-\alpha} f\big|_{t=0}, \tag{2.3}$$

и получаем

$$s^\alpha c^*(x,s) - \phi(x) + uc_x^*(x,s) = 0, \tag{2.4}$$

$$c_x^*(x,s) + \frac{s^\alpha}{u} c^*(x,s) = \frac{\phi(x)}{u}. \tag{2.5}$$

Общее решение полученного уравнения:

$$c^*(x,s) = A_0(s)e^{-\frac{s^\alpha}{u}x} + e^{-\frac{s^\alpha}{u}x}\int_0^x e^{\frac{s^\alpha}{u}\xi}\frac{\phi(\xi)}{u}d\xi. \tag{2.6}$$

С учетом граничного условия получаем

$$c^*(x,s) = \psi^*(s)e^{-\frac{s^\alpha}{u}x} + \int_0^x e^{\frac{s^\alpha}{u}(\xi-x)}\frac{\phi(\xi)}{u}d\xi. \tag{2.7}$$

Далее необходимо провести обратное преобразование Лапласа. Известны свойства

$$e^{-\frac{s^\alpha}{u}x} = E_1\left(-\frac{x}{u}s^\alpha;1\right) \tag{2.8}$$

и

$$L\left\{t^{\delta-1}e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}\left(-ct^{-\beta}\right);s\right\} = s^{-\delta}E_{1/\alpha}\left(-cs^\beta;\mu\right), \tag{2.9}$$

отсюда получаем

$$L^{-1}\left\{e^{-\frac{s^\alpha}{u}x};t\right\} = t^{-1}e^{1,0}_{1,\alpha}\left(-\frac{x}{u}t^{-\alpha}\right), \tag{2.10}$$

где $e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}$ — функция типа Райта, в случае $\alpha = \mu = 1$ совпадающая с функцией Райта Φ:

$$e^{1,\delta}_{1,\beta}(z) = \Phi\left(-\beta,\delta,z\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(-\beta n+\delta)}. \tag{2.11}$$

Тогда

$$L^{-1}\left\{e^{-\frac{s^\alpha}{u}x};t\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{u}\right)^n\frac{t^{-\alpha n-1}}{n!\Gamma(-\alpha n)}. \tag{2.12}$$

Используя также свойство преобразования Лапласа от свертки функций

$$L\left\{\left(f*g\right)(t);s\right\} = L\left\{\left(f\left(t\right);s\right\}\cdot L\left\{g\left(t\right);s\right\}, \tag{2.13}$$

где

$$\left(f*g\right)(t) = \int_0^t f\left(\eta\right)g\left(t-\eta\right)d\eta \tag{2.14}$$

— свертка функций

Получаем решение в исходных координатах:

$$
\begin{aligned}
c(x,t) = \psi(t) * \left(t^{-1} \Phi \left(-\alpha, 0, -\frac{x t^{-\alpha}}{u} \right) \right) + \\
+ \phi(x) * \left(t^{-1} \Phi \left(-\alpha, 0, -\frac{x t^{-\alpha}}{u} \right) \right),
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

где свертка в первом слагаемом берется по переменной t, во втором — по x. Или, разворачивая в интегральный вид:

$$
\begin{aligned}
c(x,t) = \int_0^t \psi(t-\eta) \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{u} \right)^n \frac{\eta^{-\alpha n - 1}}{n! \Gamma(-\alpha n)} d\eta \\
+ \int_0^x \phi(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\xi - x}{u} \right)^n \frac{t^{-\alpha n - 1}}{n! \Gamma(-\alpha n)} d\xi
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Глава 3

Численное решение

3.1 Преобразования системы

Численный расчет исходного уравнения проблематичен, так как в момент $t = 0$ в уравнении присутствует интегрируемая особенность (сингулярность). Поэтому производятся преобразование:

$$w = J_t^{1-\alpha} c - \phi(x), \tag{3.1}$$

$$c = D_t^{1-\alpha} \left(w + \phi(x) \right) = D_t^{1-\alpha} w + \phi(x) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tag{3.2}$$

Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} w_t + u \left(D_t^{1-\alpha} \left(w + \phi\left(x\right) \right) \right)_x = f(x,t) \\ w\big|_{t=0} = 0 \\ D_t^{1-\alpha} \left(w + \phi(x) \right)\big|_{x=0} = \psi(t) \end{cases} \tag{3.3}$$

или

$$\begin{cases} w_t + u \left(D_t^{1-\alpha} w \right)_x = f(x,t) - u\phi_x\left(x\right) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ w\big|_{t=0} = 0 \\ D_t^{1-\alpha} w\big|_{x=0} = \psi(t) - \phi(0) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \end{cases} \tag{3.4}$$

3.2 Численная схема

На текущий момент реализована неявная численная схема второго порядка точности по пространству.

Далее временные слои обзначены верхним индексом n, $n = 0, 1, ...,$ где $n = 0$ соответствует начальному состоянию системы. Пространственные координаты обозначены через нижний индекс i, $i = \overline{0, nx}$, где $i = 0$ соответствует левой границе расчетной области, $i = nx$ — правой.

Обозначим $\tilde{w}_i^n = D_t^{1-\alpha} w\Big|_{t=t^n}$ — вычисленная на временном шаге n в точке i производная Римана-Лиувилля поля w по времени.

Тогда схема выглядит следующим образом

$$\frac{w_0^{n+1} - w_0^n}{\Delta t} + u \frac{\tilde{w}_1^{n+1} - \left(\psi^{n+1} - \phi_0 \frac{\left(t^{n+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)}{\Delta x} = f_0^{n+1} - u\phi_0' \frac{\left(t^n\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3.5)$$

$$\frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\Delta t} + u \frac{\tilde{w}_{i+1}^{n+1} - \tilde{w}_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = f_i^{n+1} - u\phi_i' \frac{\left(t^n\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, i = \overline{1, nx-1} \quad (3.6)$$

$$\frac{w_{nx}^{n+1} - w_{nx}^n}{\Delta t} + u \frac{\tilde{w}_{nx}^{n+1} - \tilde{w}_{nx-1}^{n+1}}{\Delta x} = f_{nx}^{n+1} - u\phi_{nx}' \frac{\left(t^n\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3.7)$$

Вычисление $\tilde{w}_i^n$ производится с использованием приближения Грюнвальда-Летникова

$$\tilde{w}_i^{n+1} = \sum_{k=0}^{\min(m,n+1)} \frac{(-1)^k}{\Delta t^{1-\alpha}} \binom{1-\alpha}{k} w_i^{n+1-k} = \frac{w_i^{n+1}}{\Delta t^{1-\alpha}} + \sum_{k=1}^{\min(m,n+1)} \frac{(-1)^k}{\Delta t^{1-\alpha}} \binom{1-\alpha}{k} w_i^{n+1-k}, \quad (3.8)$$

где m — параметр «длины памяти», определяющий количество слагаемых в приближении.

Таким образом, общий алгоритм на временном шаге $n+1$:

$$\begin{aligned} w_0^{n+1} + \Delta t^\alpha u \frac{w_1^{n+1}}{\Delta x} = w_0^n + \Delta t \Bigg(& f_i^{n+1} - u\phi_i' \frac{\left(t^n\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ & - \left(\frac{u}{\Delta x} \sum_{k=1}^{\min(m,n+1)} \frac{(-1)^k}{\Delta t^{1-\alpha}} \binom{1-\alpha}{k} w_1^{n+1-k} \right. \\ & \left. - \frac{u}{\Delta x}\psi^{n+1} + \frac{u}{\Delta x}\phi_0 \frac{\left(t^{n+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \Bigg) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$
\begin{aligned}
w_i^{n+1} + \Delta t^{\alpha} u \frac{w_{i+1}^{n+1} - w_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = w_i^n + \Delta t \Bigg(& f_i^{n+1} - u\phi_i' \frac{(t^n)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \\
& - \Bigg(\frac{u}{2\Delta x} \sum_{k=1}^{\min(m,n+1)} \frac{(-1)^k}{\Delta t^{1-\alpha}} \binom{1-\alpha}{k} w_{i+1}^{n+1-k} \\
& - \frac{u}{2\Delta x} \sum_{k=1}^{\min(m,n+1)} \frac{(-1)^k}{\Delta t^{1-\alpha}} \binom{1-\alpha}{k} w_{i-1}^{n+1-k} \Bigg) \Bigg)
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Полученная матрица системы является трехдиагональной и решается методом прогонки

Глава 4

Результаты расчетов

4.1 Перенос в постоянном равномерном поле скоростей

Скорость принимается постоянной на всем пространстве с течением времени. Источник нулевой, начальной распределение — функция-шапочка:

$$v = const \tag{4.1}$$

$$f(x,t) \equiv 0 \tag{4.2}$$

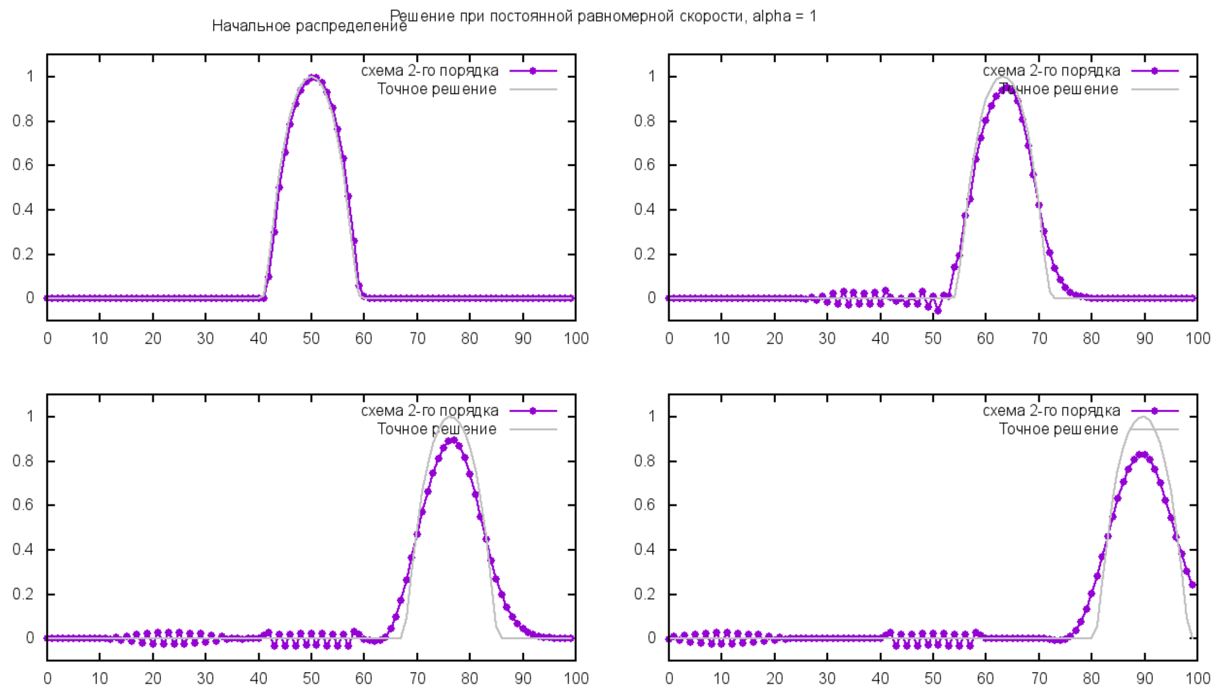
$$\phi(x) = \exp\left(-\frac{a^2}{a^2 - (x-b)^2} + 1\right) \tag{4.3}$$

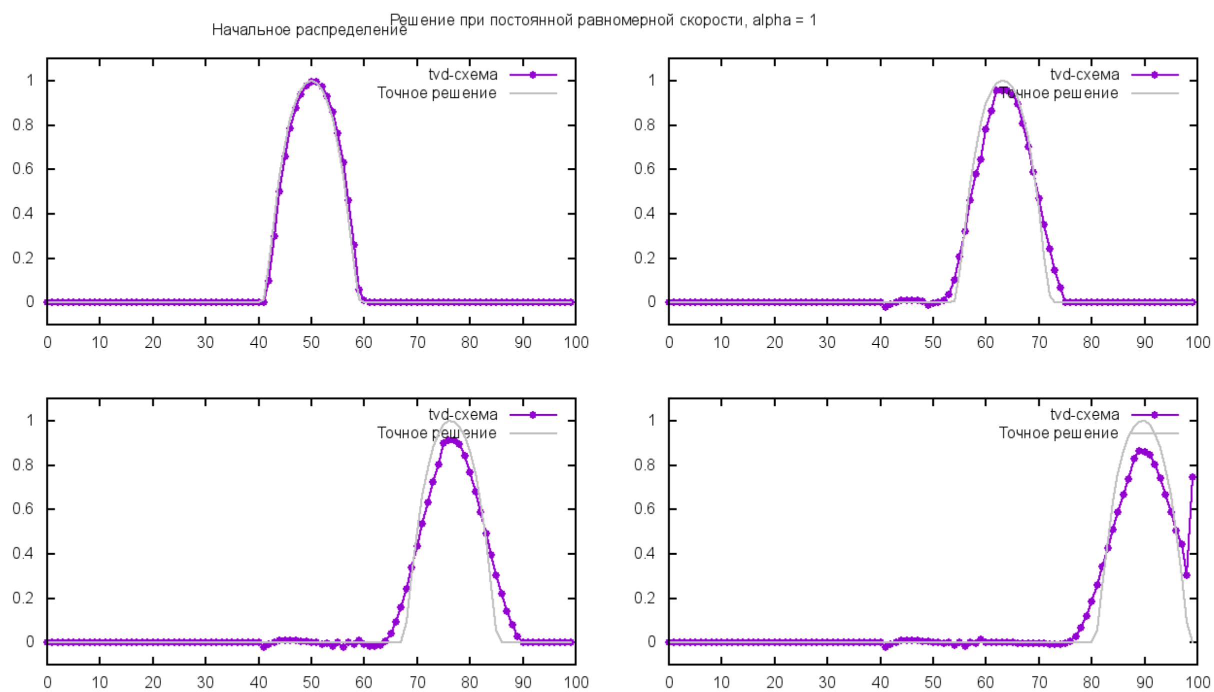
При $\alpha = 1$ получаем обычное уравнение переноса. Численное решение принимает вид:

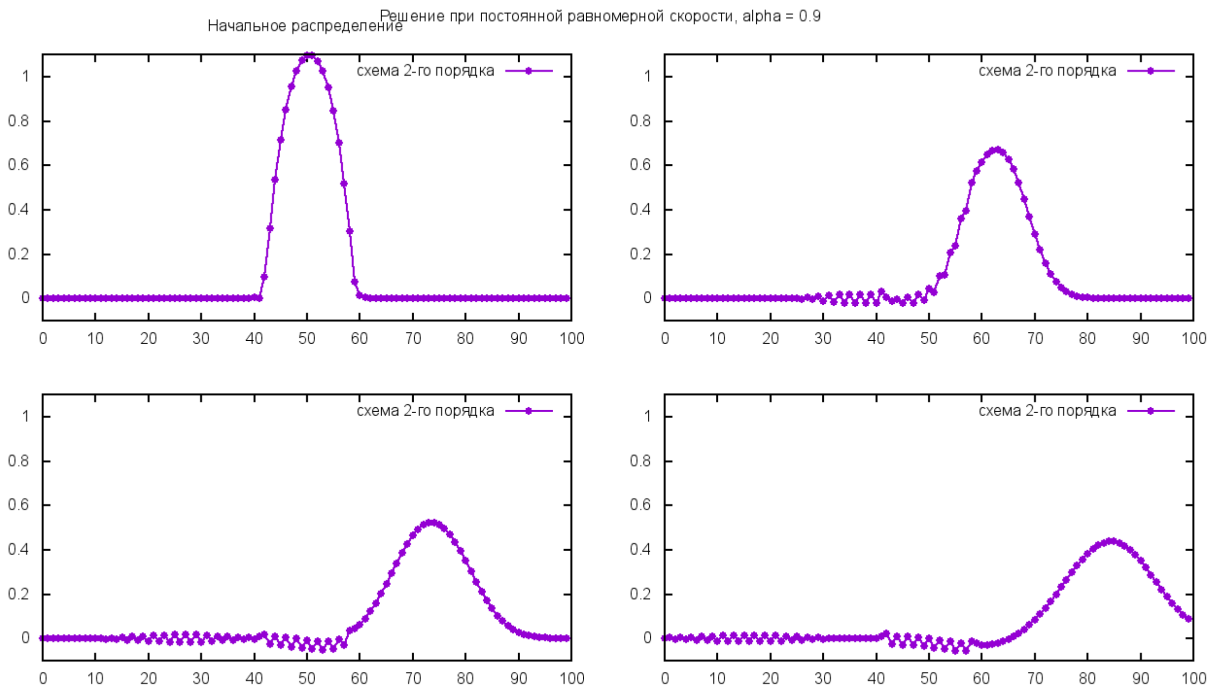
Для дробного $\alpha = 0.9$ была применена та же TVD-схема, получены решения

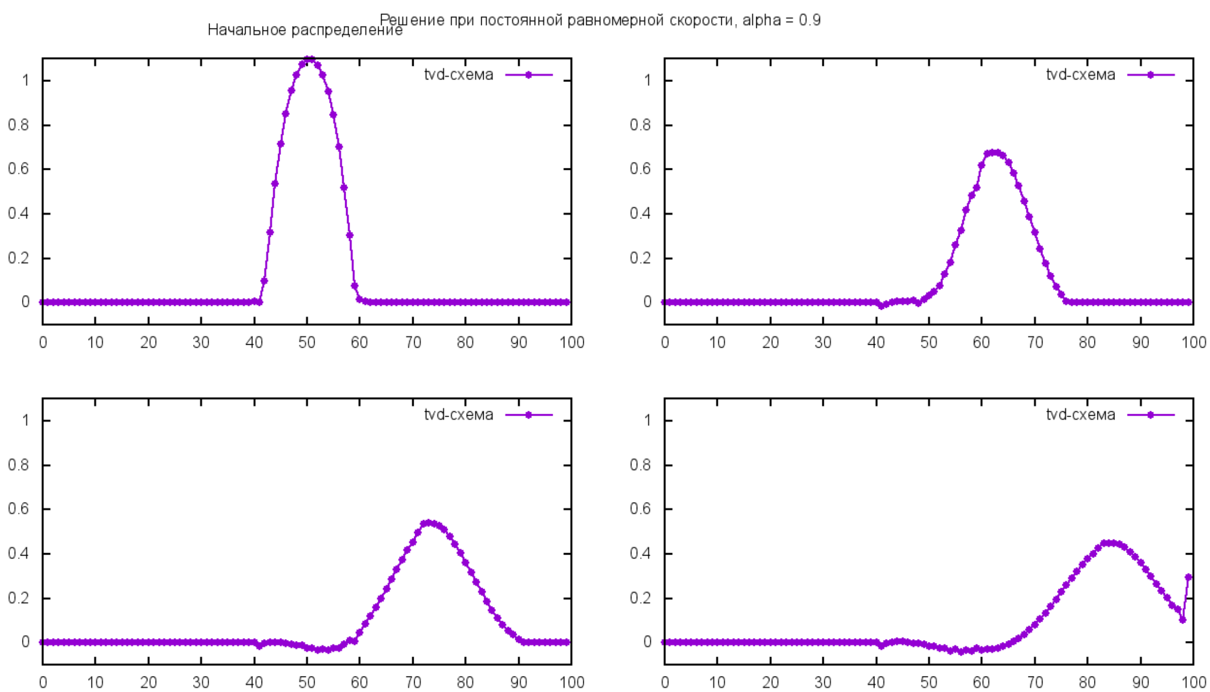
Также получены решения для $\alpha = 0.7$:

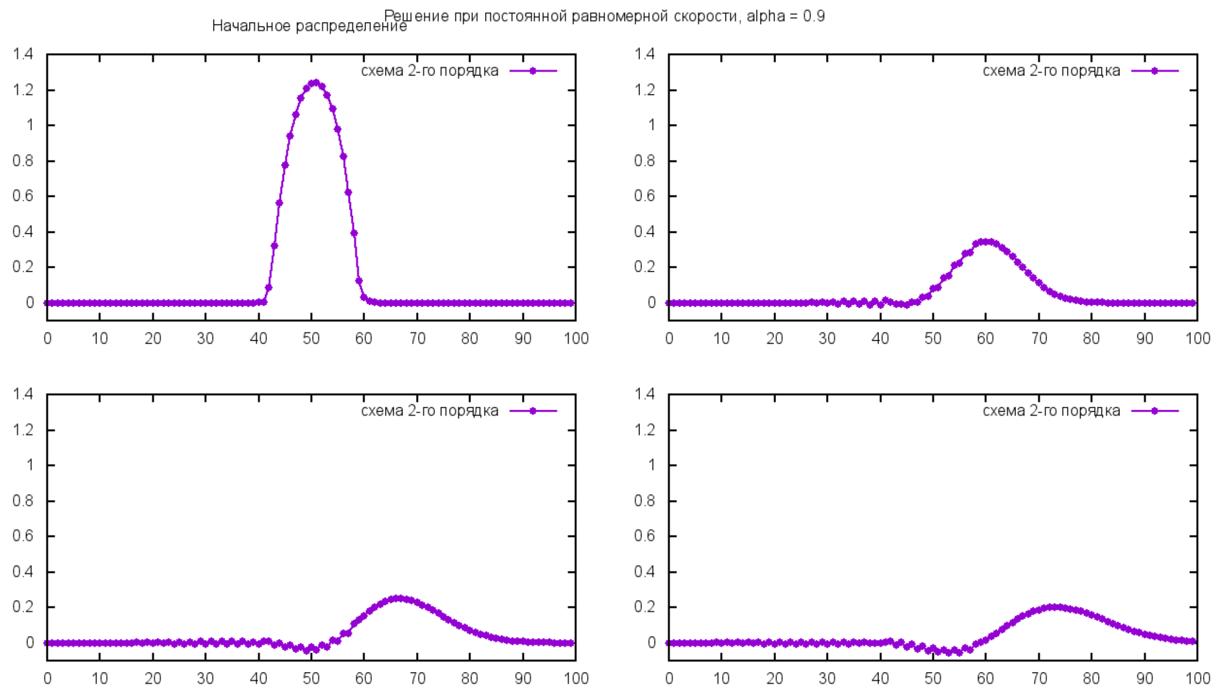
Также получены решения для $\alpha = 0.5$:

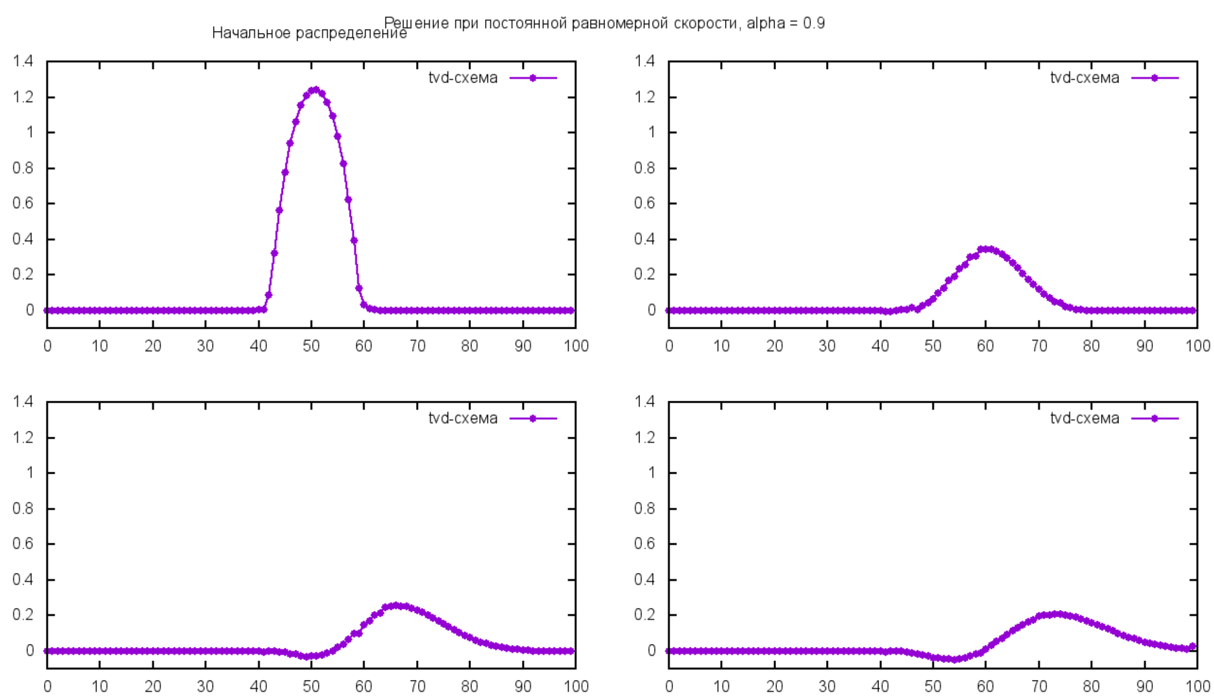

Начальное распределение
Решение при постоянной равномерной скорости, alpha = 1
схема 2-го порядка
Точное решение

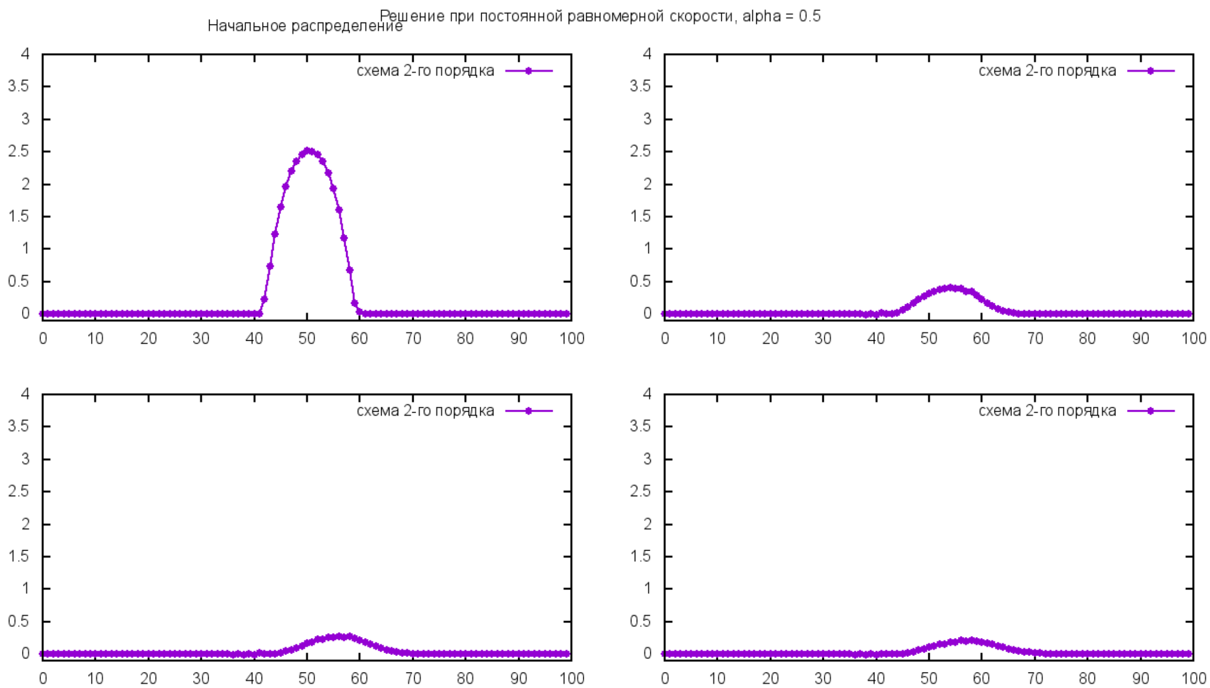

Начальное распределение
Решение при постоянной равномерной скорости, alpha = 1
tvd-схема
Точное решение

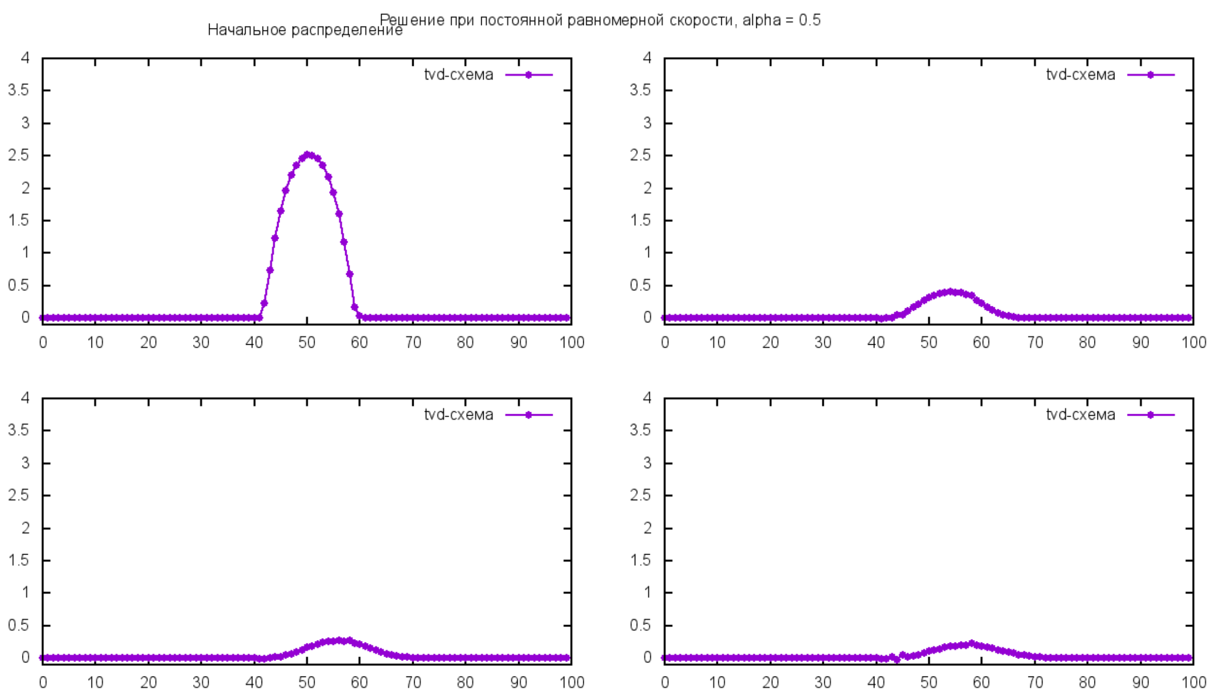

Решение при постоянной равномерной скорости, alpha = 0.9
Начальное распределение
схема 2-го порядка
схема 2-го порядка
схема 2-го порядка
схема 2-го порядка


Решение при постоянной равномерной скорости, alpha = 0.9
Начальное распределение
tvd-схема
tvd-схема
tvd-схема
tvd-схема


Решение при постоянной равномерной скорости, alpha = 0.9
Начальное распределение
схема 2-го порядка
схема 2-го порядка
схема 2-го порядка
схема 2-го порядка


Решение при постоянной равномерной скорости, alpha = 0.9
Начальное распределение
tvd-схема
tvd-схема
tvd-схема
tvd-схема


Решение при постоянной равномерной скорости, alpha = 0.5
Начальное распределение
схема 2-го порядка
схема 2-го порядка
схема 2-го порядка
схема 2-го порядка


Решение при постоянной равномерной скорости, alpha = 0.5
Начальное распределение
tvd-схема
tvd-схема
tvd-схема
tvd-схема