Глава 1

Постановка задачи

Необходимо решить уравнение переноса с дробной производной Римана-Лиувилля по времени:

$$\begin{cases} D_t^{\alpha} c + (uc)_x = f(x,t) \\ J_t^{1-\alpha} c\big|_{t=0} = \phi(x) \\ c\big|_{x=0} = \psi(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

Простейший случай предполагает $u = const$.

Глава 2

Численное решение

2.1 Преобразования системы

Численный расчет исходного уравнения проблематичен, так как в момент $t = 0$ в уравнении присутствует интегрируемая особенность (сингулярность). Поэтому производятся преобразование:

$$w = J_t^{1-\alpha} c - \phi(x), \tag{2.1}$$

$$c = D_t^{1-\alpha} \left(w + \phi(x)\right) = D_t^{1-\alpha} w + \phi(x) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tag{2.2}$$

Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} w_t + u \left(D_t^{1-\alpha} \left(w + \phi\left(x\right)\right)\right)_x = f(x,t) \\ w\big|_{t=0} = 0 \\ D_t^{1-\alpha} \left(w + \phi(x)\right)\big|_{x=0} = \psi(t) \end{cases} \tag{2.3}$$

или

$$\begin{cases} w_t + u \left(D_t^{1-\alpha} w\right)_x = f(x,t) - u\phi_x\left(x\right) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ w\big|_{t=0} = 0 \\ D_t^{1-\alpha} w\big|_{x=0} = \psi(t) - \phi(0) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \end{cases} \tag{2.4}$$

2.2 Численная схема

На текущий момент реализована неявная численная схема второго порядка точности по пространству.

Далее временные слои обзначены верхним индексом n, $n = 0, 1, ...,$ где $n = 0$ соответствует начальному состоянию системы. Пространственные координаты обозначены через нижний индекс i, $i = \overline{0, nx}$, где $i = 0$ соответствует левой границе расчетной области, $i = nx$ — правой.

Обозначим $\tilde{w}_i^n = D_t^{1-\alpha} w\Big|_{t=t^n}$ — вычисленная на временном шаге n в точке i производная Римана-Лиувилля поля w по времени.

Тогда схема выглядит следующим образом

$$\frac{w_0^{n+1} - w_0^n}{\Delta t} + u \frac{\tilde{w}_1^{n+1} - \left(\psi^{n+1} - \phi_0 \frac{\left(t^{n+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)}{\Delta x} = f_0^{n+1} - u\phi_0' \frac{\left(t^n\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (2.5)$$

$$\frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\Delta t} + u \frac{\tilde{w}_{i+1}^{n+1} - \tilde{w}_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = f_i^{n+1} - u\phi_i' \frac{\left(t^n\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, i = \overline{1, nx-1} \qquad (2.6)$$

$$\frac{w_{nx}^{n+1} - w_{nx}^n}{\Delta t} + u \frac{\tilde{w}_{nx}^{n+1} - \tilde{w}_{nx-1}^{n+1}}{\Delta x} = f_{nx}^{n+1} - u\phi_{nx}' \frac{\left(t^n\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad (2.7)$$

Вычисление $\tilde{w}_i^n$ производится с использованием приближения Грюнвальда-Летникова

$$\tilde{w}_i^{n+1} = \sum_{k=0}^{\min(m,n+1)} \frac{(-1)^k}{\Delta t^{1-\alpha}} \binom{1-\alpha}{k} w_i^{n+1-k} = \frac{w_i^{n+1}}{\Delta t^{1-\alpha}} + \sum_{k=1}^{\min(m,n+1)} \frac{(-1)^k}{\Delta t^{1-\alpha}} \binom{1-\alpha}{k} w_i^{n+1-k}, \quad (2.8)$$

где m — параметр «длины памяти», определяющий количество слагаемых в приближении.

Таким образом, общий алгоритм на временном шаге $n+1$:

$$\begin{aligned} w_0^{n+1} + \Delta t^\alpha u \frac{w_1^{n+1}}{\Delta x} = w_0^n + \Delta t \Bigg(& f_i^{n+1} - u\phi_i' \frac{\left(t^n\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ & - \left(\frac{u}{\Delta x} \sum_{k=1}^{\min(m,n+1)} \frac{(-1)^k}{\Delta t^{1-\alpha}} \binom{1-\alpha}{k} w_1^{n+1-k} \right. \\ & \left. - \frac{u}{\Delta x} \psi^{n+1} + \frac{u}{\Delta x} \phi_0 \frac{\left(t^{n+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \Bigg) \end{aligned} \qquad (2.9)$$

$$w_i^{n+1} + \Delta t^{\alpha} u \frac{w_{i+1}^{n+1} - w_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = w_i^n + \Delta t \left(f_i^{n+1} - u\phi_i' \frac{(t^n)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right.$$
$$\left(\frac{u}{2\Delta x} \sum_{k=1}^{\min(m,n+1)} \frac{(-1)^k}{\Delta t^{1-\alpha}} \binom{1-\alpha}{k} w_{i+1}^{n+1-k} \right.$$
$$\left. \left. - \frac{u}{2\Delta x} \sum_{k=1}^{\min(m,n+1)} \frac{(-1)^k}{\Delta t^{1-\alpha}} \binom{1-\alpha}{k} w_{i-1}^{n+1-k} \right) \right) \tag{2.10}$$

Полученная матрица системы является трехдиагональной и решается методом прогонки