Математический анализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

Глава 1

Комплексный анализ

Лекция I

16 февраля 2024 г.

Пусть $f : G \to \mathbb{C}$, где открытое $G \subset \mathbb{C}$.

Определение 1.0.1 (f голоморфна в $z_0 \in G$)**.** $\exists \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \overset{def}{=} f'(z_0)$.

Во втором семестре мы проверяли, что $f = u + iv$ (где $u, v : G \to \mathbb{R}$) голоморфна в $z_0 \iff f$ дифференцируема в вещественном смысле, и выполняются уравнения Коши — Римана:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Определение 1.0.2 (f аналитична в G)**.** $\forall z_0 \in G : \exists c_j \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \tag{$*$}$$

где ряд сходится не только при $z = z_0$.

Теорема 1.0.1. f аналитична в $G \iff f$ голоморфна во всех точках G.

Доказательство.

- $\Rightarrow$. Доказали во втором семестре, несложно.
- $\Leftarrow$. Скоро займёмся, время пришло. □

Из представления ($*$) следует, что производная в точке z считается почленно: $f'(z) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} j c_j (z - z_0)^{j-1}$. В частности, отсюда получается, что $f'(z_0) = c_1$, и вообще $f^{(n)}(z_0) = j! \cdot c_j$.

Вскоре мы увидим, что ситуация разительно отличается от вещественной: в вещественном случае были разные классы — дифференцируемые функции, C^1, C^∞, аналитичные, и множество промежуточных классов.

В комплексном же случае, если функция хотя бы один раз дифференцируема, то окажется, что этого достаточно, чтобы она была не просто дифференцируема, а непрерывно дифференцируема, бесконечно дифференцируема, и даже аналитична.

1.1 Интеграл от дифференциальной формы вдоль кусочно-гладкого пути

1.1.1 Про дифференциальные формы

Определение 1.1.1 (Линейная функция $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$)**.** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n : l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y)$.

Определение 1.1.2 (Линейная форма на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$)**.** Функция двух переменных $\phi : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, линейная по второму аргументу.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ имеется базис (e_j): $h = e_1 h_1 + \dots + e_n h_n$.

Тем самым, $\phi(x, h) = \sum\limits_{j=1}^{n} \underbrace{\phi(x, e_j)}_{=:g_j(x)} h_j = \sum\limits_{j=1}^{n} g_j(x) h_j$.

Введём *базисные линейные формы* $\mathrm{d}x_j(u, h) = h_j$, игнорирующую первую координату, и возвращающая j-ю компоненту второго аргумента. Теперь $\phi(x, h)$ разложилась в сумму $\sum\limits_{j=1}^{n} g_j \,\mathrm{d}x_j$.

Пример. Пусть $f : G \to \mathbb{C}$ — дифференцируемая в G функция. Заметим, что её дифференциал $\mathrm{d}_f(x, \_)$ — в точности линейная форма на G.

При разложении по базису получится $\mathrm{d}_f(x, \_) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \,\mathrm{d}x_j$.

Вскоре мы увидим, что далеко не всякая линейная форма является чьим-то дифференциалом.

Если $\phi = \sum\limits_{j=1}^{n} g_j \,\mathrm{d}x_j$ — дифференциал функции f, то непременно $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Тот факт, что ϕ является дифференциалом f, можно сказать наоборот: f является первообразной ϕ.

1.1.2 Про интегрирование

Рассмотрим монотонную функцию $\Phi : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$. Как и при определении стилтьесовой длины, будем считать, что Φ определена на некотором открытом множестве, содержащем $\langle a, b \rangle$. Обозначим за l_Φ стилтьесову длину, отвечающую функции Φ.

Пускай λ_Φ — продолжение стилтьесовой длины l_Φ по Лебегу — Каратеодори.

Она, как водится, определена на некоторой Σ-алгебре, в которой есть борелевские множества, но измеримы могут быть и какие-то другие множества, зависящие от конкретной функции Φ.

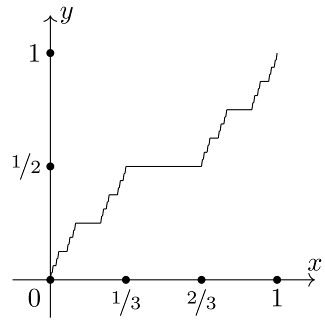
Примеры.

- Так, функция $\phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$ порождает дельта-меру δ_0, относительно которой все множества измеримы.

  Кроме того, эта мера сингулярна относительно стандартной меры Лебега.

- Может показаться, что так происходит из-за разрывности ϕ, но это не так.

Рекурсивно определим канторову лестницу $C : [0, 1] \to [0, 1]$:



Построив по данной функции стилтьесову длину λ_C, мы получим меру, сосредоточенную на канторовом множестве меры нуль.

Её носитель — само канторово множество, так как на всех отрезках вне канторова множества λ_C равна нулю. Она сингулярна относительно стандартной меры Лебега на $\mathbb{R}$, и её измеримые множества разительно отличаются от измеримых множеств меры Лебега.

По мере Стилтьеса можно интегрировать: если v является λ_Φ измеримой (в частности, измерима по Борелю и непрерывна), то определён интеграл $\int\limits_{\langle a,b\rangle} v \, \mathrm{d}\lambda_\Phi$ Иногда пишут просто $\int\limits_{\langle a,b\rangle} v \, \mathrm{d}\Phi$.

Теперь пусть $I = [a, b]$, и $\Psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. В таком случае $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$, где некие Φ_1, Φ_2 возрастают. Можно определить знакопеременную меру $\lambda_\Psi \overset{def}{=} \lambda_{\Phi_1} - \lambda_{\Phi_2}$, понятно, что определение корректно.

1.1.3 Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути

Пускай $\gamma : [a, b] \to G \subset \mathbb{R}^n$ — спрямляемый путь (путь конечной длины). Пускай $U = \sum\limits_{j=1}^{n} u_j \, \mathrm{d}x_j$ — дифференциальная форма в области G. Если не сказано противное, будем считать, что u_j — непрерывные функции.

Определение 1.1.3 (Интеграл от U вдоль пути γ)**.** $\int\limits_\gamma U \overset{def}{=} \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{[a,b]} u_j(\gamma(t)) \, \mathrm{d}\gamma_j(t)$.

Здесь $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Так как путь спрямляем, то все γ_j — ограниченной вариации, каждая порождает свою меру Стилтьеса, и определение интегрирует композицию $U \circ \gamma$ по данной мере.

1.1.4 Сумма путей

Пускай имеются два отрезка $[a, c]$ и $[c, d]$, и на них заданы пути $\gamma_1 : [a, c] \to G$, $\gamma_2 : [c, d] \to G$. Предположим, что $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$.

Тогда можно устроить путь $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a, d] \to G$, $\gamma(t) \overset{def}{=} \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, c] \\ \gamma_2(t), & t \in [c, d] \end{cases}$.

Замечание. Интеграл аддитивен по множеству: $\int\limits_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} U = \int\limits_{\gamma_1} U + \int\limits_{\gamma_2} U$.

1.1.5 Альтернативное определение

Далее мы не интересуемся никакими чудесами вроде канторовых лестниц, и считаем, что Φ такова, что λ_Φ абсолютно непрерывна относительно стандартной меры Лебега.

А раз так, то по теореме Радона — Никодима $\exists$ суммируемая $w : [a,b] \to \mathbb{R}$, такая, что

$$\lambda_\Phi(e) = \int\limits_e w(x)\,\mathrm{d}x \tag{+}$$

Факт 1.1.1. *Формула (+) заведомо верна, если Φ непрерывно дифференцируема на $[a,b]$, тогда $w = \Phi'$.*

Доказательство. Введём меру $\nu(e) = \int\limits_e \Phi'(x)\,\mathrm{d}x$, заданную на измеримых по Лебегу множествах. Φ' непрерывна, и, следовательно, измерима.

Если $\langle c,d\rangle \subset [a,b]$, то $\nu(\langle c,d\rangle) = \int\limits_{\langle c,d\rangle} \Phi'(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(d) - \Phi(c) = l_\Phi(\langle c,d\rangle)$.

Таким образом, из теоремы единственности, продолжение l_Φ по Лебегу — Каратеодори совпадает с $\int\limits_e \Phi'(x)\,\mathrm{d}x$. $\square$

Замечание. Утверждение (факт 1.1.1) сохраняет силу, если Φ непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема.

Далее где-то используется Φ, а где-то β, надо убедиться, что это везде одно и то же, и заменить.
Пускай $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, кусочно-непрерывно дифференцируемая: $\exists a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$, такие, что β непрерывно дифференцируема на $[a_s, a_{s+1}]$ при $0 \leqslant s < k$. Введём $\rho(e) = \int\limits_e \beta'(x)\,\mathrm{d}x$ — это знакопеременная вещественная мера.

У данной меры возникают (см. разложение Хана) положительная и отрицательная части $\rho_+(e) \overset{def}{=} \int\limits_e (\beta')_+(x)\,\mathrm{d}x$ и $\rho_-(e) \overset{def}{=} \int\limits_e (\beta')_-(x)\,\mathrm{d}x$

Если обозначить за $\Phi_+(t) = \int\limits_0^t (\beta')_+(x)\,\mathrm{d}x$ и $\Phi_-(t) = \int\limits_0^t (\beta')_-(x)\,\mathrm{d}x$, то окажется, что соответствующие меры Стилтьеса совпадают с ρ_+ и ρ_-.

Более того, $\beta = \Phi_+ - \Phi_-$ — получили разложение функции ограниченной вариации в положительную и отрицательную части.

Замечание. Это разложение экономнее, чем то, которое было получено ранее — ранее в качестве Φ_+ выбиралась вариация Φ.

Если всё, что написано выше, собрать вместе, то получится

$$\boxed{\int\limits_{[s,t]} v\,\mathrm{d}\Phi = \int\limits_{[s,t]} v(x)\beta'(x)\,\mathrm{d}x}$$

Далее «гладкий» используется, как синоним к непрерывно-дифференцируемому.

Следствие 1.1.1 (Можно считать определением)**.** *Если $U = \sum\limits_{j=1}^n u_j\,\mathrm{d}x_j$ — дифференциальная форма в G с непрерывными коэффициентами, а $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a,b] \to G$ — спрямляемый кусочно-гладкий путь, то*

$$\int\limits_\gamma U = \sum_{j=1}^n \int\limits_a^b u_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t$$

1.1.6 (Не)зависимость от параметризации

Пускай $\gamma : [a, b] \to G$ — кусочно-гладкий путь, $\psi : [c, d] \to [a, b]$ — гладкий гомеоморфизм.

Теперь $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$ — перепараметризация γ

Лемма 1.1.1. *Для всякой формы U:*

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} U = \pm \int\limits_{\gamma} U$$

Знак + выбирается, если ψ возрастает, и − — если убывает.

Доказательство. Предположим, что γ — гладкий путь, иначе применяем к кусочкам гладкости по отдельности.

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} U = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{c}^{d} u_j(\gamma(\psi(t)))\gamma_j'(\psi(t)) \cdot \psi'(t) \,\mathrm{d}t = \left\| \begin{array}{c} \tau = \psi(t) \\ \mathrm{d}\tau = \psi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right\| = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\psi(c)}^{\psi(d)} u_j(\gamma(\tau))\gamma_j'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \pm \int\limits_{\gamma} U \quad \square$$

Про ψ также можно считать, что это он не гладкий, а лишь кусочно-гладкий.

Тем самым, можно определить сумму путей для несоприкасающихся отрезков: для двух путей $\gamma_1 : [a, b] \to G, \gamma_2 : [c, d] \to G$ (при условии $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$) можно один их отрезков-прообразов линейным возрастающим преобразованием перевести в отрезок, соприкасающийся со вторым (например, $t \mapsto t + (b - c)$).

Также есть понятие обратного пути $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$. Для любой формы U:

$$\int\limits_{\gamma\oplus\gamma^-} U = \int\limits_{\gamma} U + \int\limits_{\gamma^-} U = \int\limits_{\gamma} U - \int\limits_{\gamma} U = 0$$

1.2 Условия существования первообразной у дифференциальной формы

Теорема 1.2.1. Если у дифференциальной формы U в открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ имеется первообразная F, то для всякого кусочно-гладкого пути $\gamma : [a, b] \to G$

$$\int\limits_{\gamma} U = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Доказательство. $U = \sum\limits_{j=1}^{n} g_j \,\mathrm{d}x_j$, где $g_j(w) = \frac{\partial}{\partial x_j} F(w)$. Считаем, что путь гладкий.

$$\int\limits_{\gamma} U = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{a}^{b} \frac{\partial}{\partial x_j} F(\gamma(t))\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F \circ \gamma)(t)\,\mathrm{d}t = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Если же путь всего лишь кусочно-гладкий, то надо разбить отрезок на подотрезки гладкости, и сложить. $\square$

Следствие 1.2.1. *Если у дифференциальной формы U есть первообразная, то её интегралы по всем путям с данными началом и концом, равны.*

Оказывается, верно и обратное.

Лекция II

26 февраля 2024 г.

Лемма 1.2.1. *Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, тогда любые две её точки можно соединить ломаной (кусочно-линейным путём).*

Доказательство. Выберем $x_0 \in G$, положим $U = \{y \in G | \text{существует ломаная в } G \text{ с началом в } x_0 \text{ и концом в } y\}$.

Покажем, что U открыто. Пусть $y \in U$, тогда найдётся шарик $B_\varepsilon(y) \subset G$, и $B_\varepsilon(y) \subset U$ — можно добавить одно звено к ломаной $x_0 \rightsquigarrow y$.

Покажем, что U замкнуто. Пусть $z \in G$ — предельная точка для U. Найдётся $B_\varepsilon(z) \subset G$, так как z — предельная, то $\exists y \in B_\varepsilon(z) \cap U$. Значит, $z \in U$ — можно добавить одно звено $y \to z$. □

Замечание. Имея кусочно-линейный путь $\gamma : [a, b] \to G$, соединяющий $A, B \in G$, несложно получить бесконечно дифференцируемый путь, соединяющий их:

Пусть $\gamma_1 : [a-1, b+1] \to G, \gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a,b] \\ \gamma(a), & t \in [a-1, a] \\ \gamma(b), & t \in [b, b+1] \end{cases}$. Теперь, сворачивая γ_1 с аппроксимативной единицей с достаточно большим номером и достаточно малым компактным носителем, получим бесконечно дифференцируемый путь, соединяющий A и B.

Теорема 1.2.2. Пусть $\Phi = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(x)\,\mathrm{d}x_j$ — *непрерывная* дифференциальная форма в G (то есть коэффициенты непрерывны в G). Следующие условия эквивалентны.

1. У Φ есть первообразная F, то есть функция $F \in C^1(G) : \mathrm{d}F = \Phi$ (иными словами, $\forall j : \frac{\partial}{\partial x_j} F = f_j$).
2. Для всех кусочно-гладких путей γ с фиксированными началом и концом $\gamma(a) = \gamma_a, \gamma(b) = \gamma_b$: $\int\limits_\gamma \Phi$ не зависит от γ (а только от начала и конца).
3. Для любой кусочно-гладкой петли (то есть замкнутого пути) γ в G: $\int\limits_\gamma \Phi = 0$.

Доказательство. Мы уже доказали ранее цепочку импликаций $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2)$. Далее доказываем $(2) \Rightarrow (1)$.

Предъявим кандидат в первообразную. Зафиксируем $x_0 \in G$, выберем $x \in G$, пусть γ — произвольный кусочно-гладкий путь с началом в x_0 и концом в x. Определим $F(x) \overset{def}{=} \int\limits_\gamma \Phi$. Согласно посылке, F корректно определена — не зависит от выбора пути.

Покажем, что частные производные F существуют, и равны f_j. Тогда они получатся непрерывными, то есть F — дифференцируемой, и окажется, что F — первообразная Φ.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — стандартные базисные орты в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим $\frac{F(x+te_j)-F(x)}{t}$.

При малых t: отрезок между x и $x + te_j$ лежит внутри G. Пусть γ_1 — путь, соединяющий x_0 и x, l — отрезок от x до $x + te_j$.

$$\frac{F(x+te_j) - F(x)}{t} = \frac{1}{t}\left(\int\limits_{\gamma_1 \oplus l} \Phi - \int\limits_{\gamma_1} \Phi\right) = \frac{1}{t}\int\limits_{l} \Phi = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f_j(x + \tau e_j)\,\mathrm{d}\tau \xrightarrow[t \to 0]{} f_j(x) \qquad \square$$

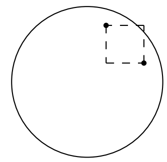
Определение 1.2.1 (Прямоугольник на плоскости)**.** Множество вида $[a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$.

Область G на плоскости будем называть *удобной*, если $\exists x_0 \in G : \forall y \in G : \exists$ прямоугольник $P \subset G$, содержащий точки x и y.

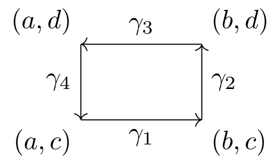
Примеры (Удобные области).

- $\operatorname{Int} Q$, если Q — прямоугольник. В качестве центра x_0 подойдёт любая точка.

- $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \big| |x - x_0| < r\}$. В качестве центра x_0 стоит взять центр, иначе не получится:



Определение 1.2.2 (Ориентированная граница прямоугольника P)**.** Петля γ, обходящая границу $P = [a, b] \times [c, d]$ против часовой стрелки, то есть вот так:



$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$.

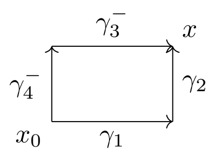
Для прямоугольника P будем обозначать за ∂P в зависимости от контекста либо границу P, как топологического подмножества $\mathbb{R}^2$, либо путь, обходящий границу P против часовой стрелки.

Следствие 1.2.2 (Дополнение к (теорема 1.2.2))**.** *Если G — удобная область на плоскости, то к трём эквивалентным условиям (теорема 1.2.2) можно добавить*

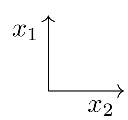
4. $\forall P \subset G : \int\limits_{\partial P} \Phi = 0.$

Доказательство. (3) $\Rightarrow$ (4) ясно, докажем (4) $\Rightarrow$ (1).

Пусть $x_0 \in G$ — центр удобной области, определим $F(x) = \int\limits_{\delta} \Phi$, где δ — это либо $\delta_1 \coloneqq \gamma_1 \oplus \gamma_2$ либо $\delta_2 \coloneqq \gamma_4^- \oplus \gamma_3^-$ (вне зависимости от выбора δ получится одно и то же).



Далее, чтобы проверить $\frac{\partial}{\partial x_1} F = f_1$ и $\frac{\partial}{\partial x_2} F = f_2$, воспользуемся подходящим представлением: пусть орт выглядит так:



тогда для проверки $\frac{\partial}{\partial x_1} F = f_1$ удобно воспользоваться определением F через δ_1, для проверки $\frac{\partial}{\partial x_2} F = f_2$ — определением через δ_2. Далее повторяем рассуждение из (теорема 1.2.2). $\square$

Пусть $\Phi = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(x)\,\mathrm{d}x_j$ — непрерывная дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1.2.3 (Форма Φ точна)**.** Существует первообразная F в $G : \mathrm{d}F = \Phi$.

Определение 1.2.4 (Форма Φ замкнута)**.** Форма Φ локально точна ($\forall x_0 \in G : \exists U \ni x_0$: $\Phi\big|_U$ точна).

Понятно, что точная форма замкнута, но точность из замкнутости не следует: чуть позднее мы определим $\mathrm{d}z$, и покажем, что $\frac{\mathrm{d}z}{z}$ — замкнутая, но не точная форма на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Теорема 1.2.3. Пусть Φ — дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$. Следующие условия эквивалентны:

1. Φ замкнута.

2. $\forall x_0 \in G : \exists V \ni x_0 : \forall$ кусочно-гладкого замкнутого пути γ с носителем в V: $\int\limits_\gamma \Phi = 0$.

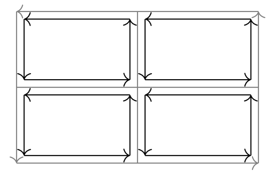
Если $n = 2$, то дополнительно появляются ещё два условия:

3. $\forall z \in G : \exists \underset{\ni z}{V_z} \subset G : \forall P \subset V_z : \int\limits_{\partial P} \Phi = 0$.

4. $\forall P \subset G : \int\limits_{\partial P} \Phi = 0$.

Доказательство. Докажем, что (3) $\Rightarrow$ (4), остальное уже доказано выше.

Заметим, что границу прямоугольника P можно представить, как сумму границ четырёх прямоугольников вдвое меньшего диаметра:



Таким образом, чтобы доказать, что интеграл по границе большого прямоугольника P нулевой, разобьём его на достаточно маленькие прямоугольники, по ним-то интеграл нуль. Чтобы это формализовать, вспомним лемму Лебега о покрытии:

Теорема 1.2.4 (Лемма Лебега). Пусть K — компакт в метрическом пространстве, $\{U_j\}_{j \in J}$ — открытое покрытие компакта K. Тогда $\exists \delta > 0 : \forall A \subset K : \operatorname{diam} A < \delta \Rightarrow \exists j \in J : A \subset U_j$.

Применяя лемму Лебега для покрытия P окрестностями $\{V_z\}_{z \in P}$, получим такое число δ. Теперь надо разбить границу прямоугольника P в сумму границ прямоугольников диаметра меньше δ, а посылка теоремы говорит, что интеграл по ним уже нуль. $\square$

1.3 Операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$

Как известно, $\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$, то есть $\forall z \in \mathbb{C} : z = x + iy$, аналогично $\overline{z} = x - iy$.

Рассмотрим z и $\overline{z}$, как функции $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto x \pm iy$. Теперь $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y$ и $\mathrm{d}\overline{z} = \mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y$ образуют базис в пространстве дифференциальных форм (тех, которые не зависят от точки), обратное преобразование выглядит так:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z + \mathrm{d}\overline{z}}{2} \\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}z - \mathrm{d}\overline{z}}{2i} \end{cases}$$

Рассмотрим форму $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, \Phi(x, y) = \alpha(x, y)\,\mathrm{d}x + \beta(x, y)\,\mathrm{d}y$. Перепишем её в новом базисе:

$$\Phi(x, y) = \frac{\alpha(x, y)}{2}(\mathrm{d}z + \mathrm{d}\overline{z}) + \frac{\beta(x, y)}{2i}(\mathrm{d}z - \mathrm{d}\overline{z}) = \frac{\alpha(x, y) - i\beta(x, y)}{2}\,\mathrm{d}z + \frac{\alpha(x, y) + i\beta(x, y)}{2}\,\mathrm{d}\overline{z}$$

Теперь пусть Φ — точная форма, то есть $\Phi = \mathrm{d}F$, и тогда $\alpha(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}F(x, y)$ и $\beta(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}F(x, y)$. Теперь

$$\mathrm{d}F = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right)\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right)\mathrm{d}\overline{z}$$

Определение 1.3.1 ($\frac{\partial F}{\partial z}$). Коэффициент, стоящий перед $\mathrm{d}z$, то есть $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right)$.

Определение 1.3.2 ($\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}$). Коэффициент, стоящий перед $\mathrm{d}\overline{z}$, то есть $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right)$.

Иначе говоря, мы ввели операторы $\frac{\partial}{\partial z} \overset{def}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \overset{def}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ так, что

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial}{\partial z}F\,\mathrm{d}z + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}F\,\mathrm{d}\overline{z}$$

1.3.1 Связь с голоморфными функциями

Пусть $F = u + iv$, где $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Запишем

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)$$

В правой части равенства получились выражения из уравнений Коши — Римана.

Факт 1.3.1. *Вещественные функции u, v удовлетворяют уравнениям Коши — Римана $\iff$ $\frac{\partial(u+iv)}{\partial \overline{z}} \equiv 0$.*

Факт 1.3.2. *F голоморфна $\iff$ $\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial z}\,\mathrm{d}z$. При этом $\frac{\partial F}{\partial z}$ есть производная F по комплексному аргументу.*

Доказательство. Функция дифференцируема по комплексному аргументу $\iff$ её дифференциал — умножение на комплексное число. $\square$

В основном нас будут интересовать дифференциальные формы вида $\phi(z)\,\mathrm{d}z$, где ϕ — произвольная функция.

Выясним, когда у формы $\phi(z)\,\mathrm{d}z = \phi(z)\,\mathrm{d}x + i\phi(z)\,\mathrm{d}y$ имеется первообразная, то есть функция $g : \frac{\partial g}{\partial x} = \phi, \frac{\partial g}{\partial y} = i\phi$. Заметим, что $\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{2}(\phi - i(i\phi)) = \phi$ и $\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\phi + i(i\phi)) = 0$.

Утверждение 1.3.1. *Форма $\phi\,\mathrm{d}z$ имеет первообразную g $\iff$ g голоморфна, и $g' = \phi$.*

Теорема 1.3.1 (Коши)**.** Если $g : G \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция (область $G \subset \mathbb{C}$), то форма $g(z)\,\mathrm{d}z$ замкнута.

Доказательство. Потом. $\square$

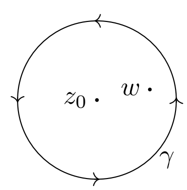
Контрпример (Глобально первообразной может не быть). Пусть $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}, g : G \to \mathbb{C}, g : z \mapsto \frac{1}{z}$.

По теореме Коши у g имеется локальная первообразная — комплексный логарифм — но глобально определить не получится. Пусть $\Gamma = \partial\mathbb{T}$ — комплексная окружность, ориентируем её против часовой стрелки, а именно, рассмотрим стандартный обход окружности $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\alpha : \phi \mapsto e^{i\phi}$. Теперь убедимся, что форма не точна:

$$\int\limits_{\alpha} \phi = \int\limits_{\alpha} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\left(e^{it}\right)'}{e^{it}}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi i \neq 0$$

Для будущих применений также определим ориентированную против часовой стрелки границу $B_r(z_0)$, это путь $\beta(t) = z_0 + re^{it}$ для $t \in [0, 2\pi]$.

Пример. Пусть $z_0, w \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_{>0}$, $|w - z_0| \neq r$, пусть путь γ обходит границу $B_r(z_0)$ против часовой стрелки:



Тогда, оказывается, (посчитаем чуть позже):

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z-w} = \begin{cases} 0, & |z-w| > r \\ 2\pi i, & |z-w| < r \end{cases} \tag{$\circ$}$$

Грубой силой этот интеграл посчитать непросто, так как w находится где угодно — внутри или снаружи круга — а интеграл, оказывается, зависит только от этих двух альтернатив.

Теорема 1.3.2 (Основная оценка интеграла вдоль пути)**.** Пускай $\Phi = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j \, \mathrm{d}x_j$ — непрерывная дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$, а $\gamma : [a,b] \to G$ — кусочно-гладкий путь, $K \coloneqq \operatorname{Im}(\gamma) \subset G$.

Тогда $\left|\int\limits_{\gamma} \Phi\right| \leqslant \underbrace{\sup\limits_{x\in K} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |f_j(x)|^2\right)^{1/2}}_{=:A} \cdot l(\gamma)$.

Доказательство. Считаем, что γ — гладкий путь, иначе нужно разбить на кусочки гладкости.

$$\left|\int\limits_{\gamma} \Phi\right| = \left|\int\limits_{a}^{b} \sum_{j=1}^{n} f_j\left(\gamma(t)\right) \gamma_j'(t) \, \mathrm{d}t\right| \underset{\text{КБШ}}{\leqslant} \int\limits_{a}^{b} \left(\sum_{j=1}^{n} |f_j(\gamma(t))|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j'(t)|^2\right)^{1/2} \mathrm{d}t \leqslant A \cdot \underbrace{\int\limits_{a}^{b} \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j'(t)|^2\right)^{1/2} \mathrm{d}t}_{l(\gamma)}$$

□

Лекция III

1 марта 2024 г.

Рассмотрим дифференциальную форму $\Phi = F(z) \, \mathrm{d}z$, где F — непрерывная функция в $G \subset \mathbb{C}$. Пусть $\gamma : [a,b] \to G$ — плоский путь.

Расписав $\Phi(z) = F(z) \, \mathrm{d}x + iF(z) \, \mathrm{d}y$ и применив основную оценку интеграла вдоль пути, получаем

$$\left|\int\limits_{\gamma} \Phi\right| \leqslant \max_{z\in K} \sqrt{|F(z)|^2 + |F(z)|^2} \cdot l(\gamma) = \sqrt{2} \max_{z\in K} |F(z)| \cdot l(\gamma)$$

Эта оценка вызывает некоторую неудовлетворённость: кажется, что $\sqrt{2}$ здесь лишний. И это действительно правда: можно расписать интеграл аккуратнее.

Пусть $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, тогда по определению

$$\int\limits_{\gamma} \Phi = \int\limits_{a}^{b} F(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) + iF(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t) \, \mathrm{d}t = \int\limits_{a}^{b} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t$$

Таким образом, интеграл от комплексной формы вдоль пути имеет более простое представление, и оно легко поддаётся более плотной оценке:

$$\left|\int\limits_{\gamma} \Phi\right| \leqslant \int\limits_{a}^{b} |F(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \max_{z\in K} |F(z)| \underbrace{\int\limits_{a}^{b} |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t}_{l(\gamma)}$$

Посчитаем анонсированный на предыдущей лекции интеграл ($\circ$). Пусть $z_0, w \in \mathbb{C}$, $r > 0$.

- Сначала рассмотрим случай $|w - z_0| < r$. Заметим, что, согласно основной оценке интеграла, если коэффициенты равномерно стремятся к какому-то значению и интегралы ограничены, то предельный интеграл тоже сходится.

  Запись ниже $\int\limits_{|z-z_0|=r}$, и вообще все аналогичные записи, которые встретятся в дальнейшем, по умолчанию означают, что граница соответствующего множества (в данном случае — круга) обходится стандартным образом, то есть против часовой стрелки.

$$\int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0 - (w - z_0)} = \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} \,\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} \left(1 + \frac{w - z_0}{z - z_0} + \left(\frac{w - z_0}{z - z_0}\right)^2 + \dots\right) \mathrm{d}z \;=$$

  На слагаемые из ряда имеется равномерная по z оценка: $\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right| \leqslant \frac{|w-z_0|}{r} < 1$, и по теореме Вейерштрасса функциональный ряд сходится. Значит, сумму можно вынести из-под интеграла

$$= \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} \,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{(w - z_0)^j}{(z - z_0)^{j+1}} \,\mathrm{d}z \;=$$

  Первое слагаемое мы умеем брать, а у каждого слагаемого из остальной суммы имеется первообразная: $\frac{1}{(z-z_0)^{j+1}} = -\frac{1}{j}\left(\frac{1}{(z-z_0)^j}\right)'$

$$= \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} \,\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}} \,\mathrm{d}t = 2\pi i$$

- Теперь разберёмся со случаем $|w - z_0| > r$.

$$\int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0 - (w - z_0)} = -\frac{1}{w - z_0} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = -\frac{1}{w - z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{(z - z_0)^j}{(w - z_0)^j} \,\mathrm{d}z$$

  Аналогично предыдущему случаю, ряд сходится абсолютно, поэтому сумму опять можно вынести из под интеграла, и в данном случае всё ещё проще: каждое слагаемое имеет первообразную, там нет отрицательных степеней z, поэтому вся сумма обращается в нуль.

Пусть $\Phi = f_1 \,\mathrm{d}x_1 + \dots + f_n \,\mathrm{d}x_n$ — непрерывная дифференциальная форма в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 1.3.3. Если все функции $f_j \in C^1$, то следующие условия эквивалентны:

- Φ замкнута.
- $\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n : \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ — «накрест взятые частные производные равны».

Доказательство.

$\Rightarrow$ Выберем $x \in G$, так как форма замкнута, то $\exists U \ni x : \Phi$ имеет первообразную $F : U \to \mathbb{R}$. Тем самым, $f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$, и так как $f_i \in C^1$, то действительно $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

$\Leftarrow$ Сначала приведём доказательство случая $n = 2$. В таком случае $\Phi = f \,\mathrm{d}x + g \,\mathrm{d}y$.

  Согласно посылке, $h := \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$. Кстати, равенство слева равносильно одному из эквивалентных уравнений Коши — Римана.

Рассмотрим произвольный $P = [a,b] \times [c,d] \subset G$, и докажем, что $\int\limits_{\partial P} \Phi = 0$.

$$\begin{tikzcd}
(a,d) \arrow[d, "\gamma_4"'] & (b,d) \arrow[l, "\gamma_3"'] \\
(a,c) \arrow[r, "\gamma_1"'] & (b,c) \arrow[u, "\gamma_2"']
\end{tikzcd}$$

То, что мы увидим сейчас, является первым заходом на *формулу Остроградского — Гаусса*. Функция h непрерывна, и можно записать на неё интеграл Лебега: $\int\limits_P h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Теперь, применяя теорему Фубини, раскладываем интеграл в сумму повторных:

$$\int\limits_{\gamma_3^-} f(\_, d)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\gamma_1^-} f(\_, c)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b [f(x,d) - f(x,c)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_P h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_c^d [g(b,y) - g(a,y)]\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\gamma_2} g(b, \_)\,\mathrm{d}y + \int\limits_{\gamma_4} g(a, \_)\,\mathrm{d}y$$

Итого, $\int\limits_{\gamma_3^-} f(\_, d)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\gamma_1^-} f(\_, c)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\gamma_2} g(b, \_)\,\mathrm{d}y + \int\limits_{\gamma_4} g(a, \_)\,\mathrm{d}y$, откуда действительно $\int\limits_\gamma \Phi = 0$.

$\Leftarrow$ Теперь приведём альтернативное доказательство индукцией по n.

<u>База:</u> Случай $n = 1$ тривиален: теорема Ньютона — Лейбница говорит, что у непрерывной функции есть первообразная.

<u>Переход:</u> Пусть $n > 1$, и для $n - 1$ теорема доказана. Рассмотрим $a \in G$, и возьмём прямоугольный параллелепипед со сторонами, параллельными осям координат P такой, что $a \in \operatorname{Int} P$. Докажем, что на P у Φ есть первообразная.

Построим $g(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{a_1}^{x_1} f_1(t, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}t$. Обозначим $\phi_j \coloneqq \frac{\partial g}{\partial x_j}$. Заметим, что $\phi_1 = \frac{\partial g}{\partial x_1} = f_1$.

Теперь рассмотрим форму $\Psi(x_1, \ldots, x_n) = \phi_1\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \phi_n\,\mathrm{d}x_n$. Эта форма имеет первообразную g на параллелепипеде P.

Теперь посмотрим на $\Phi - \Psi \eqqcolon h_1\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + h_n\,\mathrm{d}x_n$. По построению $h_1 = 0$. По условию накрест взятые частные производные равны у Φ, и они равны у Ψ, так как у неё есть первообразная. Значит, это же верно и для разности, в частности, $\frac{\partial h_i}{\partial x_1} = \frac{\partial h_1}{\partial x_i} = 0$. Иными словами, $\forall i : h_i$ не зависит от x_1.

А раз так, то на $\Phi - \Psi$ можно смотреть, как на форму $(n-1)$-й переменной, и применить индукционное предположение.

Замечание. Тут есть некоторый обман: производные $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$ могут просто не существовать.

Попробуем обойти его так: пусть $\beta \in C^\infty$, с компактным носителем. Выберем аппроксимативную единицу $\beta_t(x) = \frac{1}{t^n}\beta(\frac{x}{t})$.

Назначим $f_k^{(t)} = f_k * \beta_t$, $f_k^{(t)} \underset{t \to 0}{\rightrightarrows} f_k$.

Далее у формы $\Phi^{(t)}$ коэффициенты $h_k^{(t)}$ не зависят от x_1. А раз они равномерно стремятся к h_k, то и они не зависят от x_1. Это было произнесено устно, я наверняка что-то не так записал.

$\square$

Теорема 1.3.4 (Коши)**.** Пусть F — голоморфная функция в открытом множестве $G \subset \mathbb{C}$. Тогда дифференциальная форма $F(z)\,\mathrm{d}z$ замкнута, то есть локально $\exists S : S'(z) = F(z)$.

Замечание. Теорема совсем проста, если заранее предположить, что $F'(z)$ непрерывна (а так в итоге и должно получиться, так как F — аналитична (теорема 1.0.1)). В таком случае имеется следующее более простое доказательство.

Доказательство. Надо проверить второе уравнение Коши — Римана: $\forall z \in \mathbb{C} : \frac{\partial F}{\partial y}(z) = i\frac{\partial F}{\partial x}(z)$ (первое выполнено, так как накрест-взятые частные производные равны).

Поскольку $F(z)\,\mathrm{d}z = F(z)\,\mathrm{d}x + iF(z)\,\mathrm{d}y$, утверждение эквивалентно (согласно (теорема 1.3.3)) тому, что $\forall z \in \mathbb{C} : \frac{\partial F}{\partial y}(z) = i\frac{\partial F}{\partial x}(z)$. Пусть $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

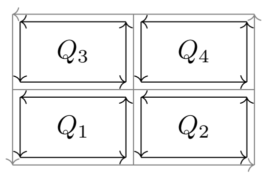
$$\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} \underset{?}{=} i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

то есть $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$. Я вообще не понял, что произошло. $\square$

Теперь докажем теорему Коши вне предположения непрерывности производной.

Доказательство. Докажем от противного: пусть форма $F(z)\,\mathrm{d}z$ не замкнута, $\exists P_0 \subset G : \alpha = \int\limits_{\partial P_0} F(z)\,\mathrm{d}z \neq 0$.

Будем потихонечку делить этот прямоугольник на четыре равные части: пусть $P_0 = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$.



Модуль интеграла по границе по крайней мере одного из Q_i хотя бы $\frac{|\alpha|}{4}$. Назовём этот прямоугольник P_1, и продолжим процесс. Получим систему вложенных замкнутых прямоугольников $P_0 \supset P_1 \supset \ldots$, таких, что $\left|\int\limits_{\partial P_k} F(z)\,\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{|\alpha|}{4^k}$. При этом $l(\partial P_k) = 2^{-k} l(\partial P_0)$, и $\operatorname{diam}(P_k) = 2^{-k}\operatorname{diam}(P_0)$.

Имеется ровно одна точка z_0 в пересечении $\bigcap\limits_{k \geqslant 0} P_k$. Воспользуемся условием того, что F голоморфна в точке z_0: $F(z) = F(z_0) + F'(z_0)(z - z_0) + \underbrace{\psi(z)}_{o(|z - z_0|)}$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |\psi(z)| \leqslant \varepsilon|z - z_0|$. Пусть k настолько велико, что $\operatorname{diam} P_k < \delta$.

$$\int\limits_{\partial P_k} F(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\partial P_k} [F(z_0) + F'(z_0)(z - z_0)]\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\partial P_k} \psi(z)\,\mathrm{d}z$$

Первый интеграл обнуляется, так как это линейная функция по z, у неё есть первообразная. Оценивая второй интеграл, получаем

$$\frac{|\alpha|}{4^k} \leqslant \left|\int\limits_{\partial P_k} \psi(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \varepsilon \operatorname{diam} P_k \cdot l(\partial P_0) = \varepsilon \cdot 2^{-k} \operatorname{diam} P_0 \cdot 2^{-k} l(\partial P_0) = 4^{-k}\varepsilon \cdot \operatorname{diam} P_0 \cdot l(\partial P_0)$$

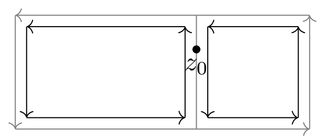
Выбирая довольно маленький ε, получаем, что $|\alpha|$ меньше любого положительного числа. $\square$

Теорема 1.3.5 (Об устранимой особенности замкнутой дифференциальной формы)**.** Пускай $\Phi = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ — непрерывная дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{C}$.

Если $z_0 \in G$, и Φ замкнута в $G \setminus \{z_0\}$, то Φ замкнута в G.

Доказательство. Докажем, что $\forall P \subset G : \int\limits_{\partial P} \Phi = 0$. Рассмотрим случаи.

- Если $z_0 \notin P$, то интеграл нуль по условию.
- Если $z_0 \in \operatorname{Int} P$, то данный случай сводится к следующему: разобьём прямоугольник на два так, чтобы z_0 оказалось на границе:



- Если $z_0 \in \partial P$, то отступим на ε, интеграл по границе P_ε будет нулём: $\int\limits_{\partial P_\varepsilon} \Phi = 0$.

  Заметим, что $\int\limits_{\partial P_\varepsilon} \Phi \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \int\limits_{\partial P} \Phi$, так как коэффициенты дифференциальной формы равномерно непрерывны в некоторой окрестности P. Значит, $\int\limits_{\partial P} \Phi = 0$.

$\square$

Теорема 1.3.6 (Малая интегральная формула Коши)**.** Пусть f — голоморфна в области G, $B = B(z_0, r)$ — круг, $\overline{B} \subset G$. Тогда $\forall z \in B$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

Доказательство. Докажем для некоего фиксированного $z \in B$.

Рассмотрим функцию $g(\zeta) = \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}$. g голоморфна в области $G \setminus \{z\}$. Тем самым, $g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ — замкнутая форма в $G \setminus \{z\}$, а по теореме об устранимой особенности $g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ замкнута в G (доопределим по непрерывности $g(z) \coloneqq f'(z)$).

Но так как круг — удобная область, то у g имеется первообразная в некотором круге $B(z_0, r(1+\varepsilon))$ (где $\varepsilon > 0$ настолько мал, что $B(z_0, r(1+\varepsilon)) \subset G$),

Тем самым, $\int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = 0$, откуда

$$\int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = f(z) \cdot \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi i \cdot f(z)$$

$\square$

Следствие 1.3.1 (Теорема Коши)**.** *Если функция голоморфна в области $G \subset \mathbb{C}$, то $\forall z_0 \in G$ функция f (в некоторой окрестности) раскладывается в некоторый степенной ряд $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, причём радиус сходимости хотя бы* $\operatorname{dist}(z_0, \partial G)$.

Доказательство. Пусть $r \in (0, \operatorname{dist}(z_0, \partial G))$. Рассмотрим $B = B_r(z_0)$. Так как $B \subset G$, то для точки $z \in B$ получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \,\mathrm{d}\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} f(\zeta) \,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} (z - z_0)^j \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} \,\mathrm{d}\zeta$$

Абсолютная равномерная сходимость в круге радиус r при $r < \operatorname{dist}(z_0, \partial G)$ имеется по тем же причинам, что и при доказательстве (∘).

Таким образом, мы получили степенной ряд, и так как коэффициенты степенного ряда, раз определены, не зависят от радиуса круга ($c_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}$), то радиус сходимости данного ряда хотя бы $\operatorname{dist}(z_0, \partial G)$. □

Лекция IV

12 марта 2024 г.

Замечание. Интегральную форму Коши можно спокойно дифференцировать: так,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta \right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} \,\mathrm{d}\zeta$$

В общем случае

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k} f(z) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta \right) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \,\mathrm{d}\zeta$$

Определение 1.3.3 (Целая (entire) функция)**.** Голоморфная функция, заданная в $\mathbb{C}$.

Выберем $z_0 = 0$. Согласно (следствие 1.3.1), получаем $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j$, где $c_j = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}} \,\mathrm{d}\zeta$, причём имеется абсолютная сходимость везде в $\mathbb{C}$.

Теорема 1.3.7. Если f целая, и $|f(z)| = \mathcal{O}(z^N)$ при $|z| \underset{z \to \infty}{\longrightarrow} \infty$, то f — многочлен степени не более N.

Доказательство. Из определения $\mathcal{O} : \exists C, a \in \mathbb{R} : |f(z)| \leqslant C|z|^N$ при $|z| > a$.

Выберем $r > a$, и оценим: $|c_j| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f\left(re^{i\theta}\right)}{(re^{i\theta})^{j+1}} ire^{i\theta} \,\mathrm{d}\theta \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{Cr^N}{r^j} \,\mathrm{d}\theta = \frac{Cr^N}{r^j}$. Получается, при $j > N : |c_j|$ меньше любого наперёд заданного положительного числа. □

Следствие 1.3.2 (Теорема Лиувилля)**.** *Ограниченная целая функция постоянна.*

Следствие 1.3.3 (Основная теорема алгебры)**.** $\forall p \in \mathbb{C}[z] : \deg p > 0 \Rightarrow \exists z_0 \in \mathbb{C} : p(z_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $p(z) = \sum\limits_{j=0}^{N} c_j z^j$, где $N > 0$ и $c_N \neq 0$.

Пойдём от противного: пусть $\forall z \in \mathbb{C} : p(z) \neq 0$.

Рассмотрим $f(z) \coloneqq \frac{1}{p(z)}$.

- С одной стороны, это целая функция: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z) = -\frac{p'(z)}{p(z)^2}$.

- С другой стороны, f ограничена: оценим $|p(z)| \geqslant |z^N| \left(|c_N| - \sum\limits_{j=0}^{N-1} \frac{|c_j|}{|z|^{N-j}}\right)$, откуда для достаточно больших $|z|: |p(z)| \geqslant \frac{|c_N|}{2}|z|^N$.

  Тем самым, $p(z) \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, то есть $f(z) \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0$. А при малых $|z|: f$ ограничена, как непрерывная функция на компакте.

- Тем самым, по теореме Лиувилля, $f \equiv \mathrm{const}$, то есть $p \equiv \mathrm{const}$. Противоречие, мы предполагали $\deg p > 0$. $\square$

Теорема 1.3.8 (Теорема о среднем)**.** Пусть $z_0 \in G, f : G \to \mathbb{C}$ голоморфна в G. Выберем $r < \mathrm{dist}(z_0, \partial G)$. Тогда

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,\mathrm{d}t}$$

Доказательство. Посчитаем $f(z_0)$ по интегральной формуле:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it}) ire^{it}}{re^{it}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,\mathrm{d}t$$

$\square$

Это действительно среднее в обычном смысле: f проинтегрирована по окружности по мере Лебега, и интеграл поделили на меру окружности.

Теорема 1.3.9 (Принцип максимума модуля)**.** Пусть $f : G \to \mathbb{C}$ — непостоянная голоморфная функция. Тогда $|f| : z \mapsto |f(z)|$ не может достигать наибольшего значения при $z \in G$.

Доказательство. Пойдём от противного: пусть $\exists z_0 \in G : \forall z \in G : |f(z)| \leqslant |f(z_0)|$. Выберем $r > 0 : B(z_0, r) \subset G$, и докажем, что $|f|$ постоянна в $B(z_0, r)$. Пусть $\rho < r$, по теореме о среднем $|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it})\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \underbrace{|f(z_0 + \rho e^{it})|}_{\leqslant |f(z_0)|}\mathrm{d}t$, причём равенство достигается только если $\forall t \in [0, 2\pi] : |f(z_0 + \rho e^{it})| = |f(z_0)|$ (если $\exists t_0 \in (0, 2\pi) : |f(z_0 + \rho e^{it_0}| < |f(z_0)|$), то по непрерывности $\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) : |f(z_0 + \rho e^{it}| < |f(z_0)| - \varepsilon$, то есть на промежутке $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ интеграл строго меньше требуемого значения).

> **Лемма 1.3.1.** *Пусть $f : G \to \mathbb{C}$ голоморфна, и $\exists z_0 \in G : f'(z_0) \neq 0$. Тогда $\exists U \ni z_0 : f(z_0) \in \mathrm{Int}\, f(U)$.*
>
> *Доказательство леммы.*
>
> Теорема об обратной функции. $\square$

Тем самым, $\forall z \in B(z_0, r) : f'(z) = 0$ (так как $|f(z)|$ — максимум).

Далее применяем теорему единственности, доказанную во II семестре: f и константа, равная $|f(z_0)|$ совпадают на множестве с предельной точкой, значит, они совпадают везде в G. $\square$

Следствие 1.3.4. *Пусть G — ограниченная область, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ голоморфна в G. Тогда $\forall z \in G$: $|f(z)| \leqslant \max\limits_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|$.*

Доказательство. f достигает своё наибольшее значение на компакте $\overline{G}$, но согласно принципу максимума, это значение достигается не внутри G. $\square$

1.4 Гармонические функции

Запишем теорему о среднем для $f : G \to \mathbb{C}$:

$$f(z_0) = \int\limits_1 2\pi(f(z_0) + re^{it})\,\mathrm{d}t$$

Пусть $f = u + iv$, где u, v — вещественные функции в G. Теорема о среднем говорит, что

$$u(z_0) = \int\limits_1 2\pi(u(z_0) + re^{it})\,\mathrm{d}t \qquad v(z_0) = \int\limits_1 2\pi(v(z_0) + re^{it})\,\mathrm{d}t$$

Так как f аналитична, то в вещественном смысле $u, v \in C^\infty(G)$.

Запишем уравнения Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Дифференцируя второй раз, получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

Это так называемое *уравнение Лапласа*: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Обобщим. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — область, пусть $f \in C^2(G)$.

Определение 1.4.1 (f — гармоническая функция в G)**.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$.

Оператор $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ называется *оператором Лапласа*, и понятно, что гармонические функции — в точности такие u, что $\Delta u = 0$.

Утверждение 1.4.1. *Если $u \in C^2(G)$, где область $G \subset \mathbb{R}^2$, то локально существует голоморфная $f : u = \Re f$. Иными словами, $\forall z_0 \in G : \exists U \ni z_0, \exists$ аналитическая $f : U \to \mathbb{C} : u = \Re f$.*

Доказательство. Пусть $\phi \coloneqq \frac{\partial u}{\partial x}, \psi \coloneqq -\frac{\partial u}{\partial y}$. Тогда $\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$, то есть $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ везде в G.

Раз накрест-взятые частные производные совпадают, то дифференциальная форма $\phi\,\mathrm{d}x + \psi\,\mathrm{d}y$ замкнута, значит, локально имеется первообразная.

Зафиксируем точку $z_0 \in G$, имеется некоторый шарик $B \ni z_0$, в котором есть первообразная v:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \phi = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Это уравнения Коши — Римана, значит, $F \coloneqq u + iv$ голоморфна в B. □

Теорема 1.4.1 (Морера)**.** Пусть $f : (G \subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ непрерывна. Следующие условия эквивалентны.

1. f голоморфна в G.
2. f аналитична в G.
3. Дифференциальная форма $f(z)\,\mathrm{d}z$ замкнута.

Доказательство. (1) $\iff$ (2) уже доказано: (теорема 1.0.1) и (следствие 1.3.1).

(1) $\Rightarrow$ (3) доказано тоже: (теорема 1.3.1).

Докажем (3) $\Rightarrow$ (2). Пусть F — первообразная формы $f(z)\,\mathrm{d}z$ в круге $B(z_0, r) \subset G$. F голоморфна в $B(z_0, r)$, и $\forall z \in D : F'(z) = f(z)$.

Значит, F раскладывается в степенной ряд $F(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j(z - z_0)^j$. Отсюда $f(z) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} j a_j (z - z_0)^{j-1}$. □

1.5 Первообразная от замкнутой формы вдоль непрерывного пути

1.5.1 Наводящие предположения

Пусть $f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ — непрерывная дифференциальная форма в G, предположим, что она точная: имеется первообразная F.

Пусть $\gamma : [a,b] \to G$ — кусочно-гладкий путь. Ранее было получено, что $\int\limits_\gamma f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

Давайте обобщим интеграл вдоль пути: пусть $\gamma : [a,b] \to G$ — произвольный непрерывный путь. Положим по определению $\int\limits_\gamma f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y \overset{def}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

Теперь пусть $f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ всего лишь замкнута. Выберем $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ так, что $\forall j : \gamma([t_j, t_{j+1}])$ лежит в области G_j, в которой у формы $f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ есть первообразная F_j. Попробуем определить

$$\int\limits_{\gamma\big|_{[t_j,t_{j+1}]}} f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y \overset{def}{=} F_j(\gamma(t_{j+1})) - F_j(\gamma(t_j))$$

и

$$\int\limits_\gamma f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y \overset{def}{=} \sum_{j=0}^{k-1} F_j(\gamma(t_{j+1})) - F_j(\gamma(t_j))$$

Проблема в том, чтобы доказать, что определение корректно — не зависит от выбора разбиения $a = t_0 < \dots < t_k = b$.

1.5.2 Требуемые свойства

Пусть $\Phi = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ — замкнутая форма в области $G \subset \mathbb{C}$, и $\gamma : [a,b] \to G$ — путь.

Определение 1.5.1 (Первообразная формы Φ вдоль пути γ)**.** Такая функция $v : [a,b] \to G$:

- $\forall t \in [a,b] : \exists U \ni \gamma(t), \varepsilon > 0$ и найдётся первообразная F для Φ на U, такая, что

$$\forall \tau \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon) : v(\tau) = F(\gamma(\tau))$$

Факт 1.5.1. *Функция v, если существует, непрерывна на $[a,b]$.*

Доказательство. Непрерывность в какой-то конкретной точке следует из непрерывности композиции $F \circ \gamma$. □

Теорема 1.5.1. Первообразная замкнутой дифференциальной формы вдоль пути γ всегда существует, и любые две отличаются на константу.

Доказательство. Сначала докажем существование. Для всех $t \in [a,b]$ выберем окрестность $U_t \coloneqq B(\gamma(t), r_t)$, где r_t настолько мал, что в U_t есть первообразная.

Семейство $\{U_t\}_{t\in[a,b]}$ образуют открытое покрытие $\gamma([a,b])$. По лемме Лебега $\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in [a,b] : B(\gamma(t), \varepsilon)$ содержится в каком-то $U_{t'}$. Применяя теорему Кантора о равномерной непрерывности, получаем существование разбиения $a = t_0 < \dots < t_k = b$, такое, что $\gamma([t_j, t_{j+1}])$ лежит в одном из U_t.

Произвольно выберем $v(a)$. Построим $v\big|_{[t_j,t_{j+1}]}$ индукцией по j.

<u>База:</u> Пусть $\gamma([t_0, t_1]) \subset U_0$, и имеется первообразная F_0 на U_0. Определим $v(\tau) = F_0(\gamma(\tau))$ при $\tau \in [t_0, t_1]$.

Переход: Пусть $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subset U_j, F_j$ — первообразная Φ на U_j. Найдётся такое $\delta > 0 : \gamma([t_j - \delta, t_{j+1}]) \subset U_j$, значит, $U_j \cap U_{j-1} \neq \varnothing$. Это пересечение связно, на нём имеются две первообразные, F_{j-1} и F_j.

Добавим константу к F_j так, чтобы $F_j \equiv F_{j-1}$ при $t \in [t_j - \delta, t_j]$, и определим $v(\tau) = F_j(\gamma(\tau))$ при $\tau \in [t_j, t_{j+1}]$. Окрестность U_j захватывает отрезок $[t_j - \delta, t_{j+1}]$, значит, для точек во внутренности выполнено условие из определения первообразной.

Докажем единственность: рассмотрим точку $t \in [a, b]$. Найдутся два круга $U, V \ni \gamma(t)$, и первообразные F, H формы Φ в этих окрестностях, такие, что $u(\tau) = F(\gamma(\tau))$ и $v(\tau) = H(\gamma(\tau))$ при τ, достаточно близких к t.

Тем самым, $u - v$ локально постоянна, но локально постоянная функция на связном множестве — константа (прообраз любого элемента из образа открыто-замкнут). $\square$

Лекция V

15 марта 2024 г.

Теперь определим интеграл $\int\limits_\gamma \Phi = v(b) - v(a)$, где v — первообразная для Φ вдоль пути γ, получившаяся из (теорема 1.5.1). Теперь интеграл определён для любой замкнутой формы вдоль пути (однако для кусочно-гладкого пути интеграл (определение 1.1.3) был определён для необязательно замкнутой формы).

Свойства (Свойства первообразной вдоль пути).

- Аддитивность по дифференциальной форме: $\int\limits_\gamma (\Phi + \Psi) = \int\limits_\gamma \Phi + \int\limits_\gamma \Psi$.
- Аддитивность вдоль пути: $\int\limits_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} \Phi = \int\limits_{\gamma_1} \Phi + \int\limits_{\gamma_2} \Phi$.
- Если γ — кусочно-гладкий путь, то определение совпадает со старым.

  Доказательство. γ' существует везде, кроме, может быть, конечного множества.

  При помощи леммы Лебега разобьём отрезок точками $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ так, что $\forall j < k : \exists U_j \supset \gamma([t_j, t_{j+1}])$ такая, что на U_j найдётся первообразная H_j:

  $$\forall \tau \in [t_j, t_{j+1}] : F(\tau) = H_j(\gamma(\tau))$$

  И старый, и новый интегралы аддитивны вдоль пути. Несложно видеть, что в обеих определениях $\int\limits_{\gamma\big|_{[t_j, t_{j+1}]}} \Phi$ совпадают. $\square$

- Так как путь γ необязательно дифференцируем, то основную оценку интеграла вдоль пути распространить на новое определение проблематично: длины может не существовать.
- Пусть $\phi : [a, b] \to [c, d]$ — гомеоморфизм, $\gamma : [a, b] \to G$ — путь, тогда

  $$\int\limits_\gamma \Phi = \pm \int\limits_{\gamma \circ \phi} \Phi$$

  где знак зависит от того, возрастает ϕ, или убывает.

  Причина. Если F — первообразная Φ вдоль пути γ, то $F \circ \phi$ — первообразная для Φ вдоль пути $\gamma \circ \phi$. $\square$

1.5.3 О гомотопности путей

Пусть $K = [0,1] \times [a,b]$ — квадрат гомотопии.

Определение 1.5.2 (Гомотопия)**.** Непрерывное отображение $\Gamma : K \to \mathbb{C}$.

Положим $\gamma_s \coloneqq \Gamma(s, \_)$. Как водится, γ_0, γ_1 — два пути $[a,b] \to \mathbb{C}$, и существование Γ по определению влечёт гомотопность этих путей.

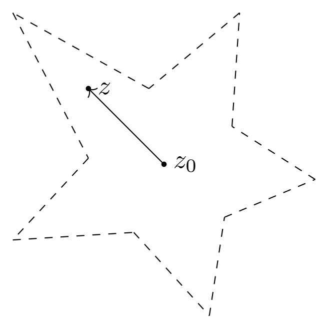
Пути $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to G$ *гомотопны в* G, если найдётся гомотопия $\Gamma : K \to G$.

Будем говорить о гомотопности двух замкнутых путей γ_1 и γ_2 при условии существования гомотопии $\Gamma : K \to G$, соединяющей γ_1 и γ_2 в классе замкнутых путей: $\forall s \in [0,1] : \Gamma(s,a) = \Gamma(s,b)$.

Гомотопность путей — отношение эквивалентности, также как и гомотопность замкнутых путей.

Определение 1.5.3 (Односвязная область)**.** Область, в которой всякий замкнутый путь гомотопен постоянному. Иными словами, фундаментальная группа тривиальна.

Определение 1.5.4 (Звёздная область $A \subset \mathbb{R}^n$)**.** Такая область, что для некоторого *центра* $z_0 \in A$: $\forall z \in A : \{z_0 + s(z - z_0) | s \in [0,1]\} \subset A$.



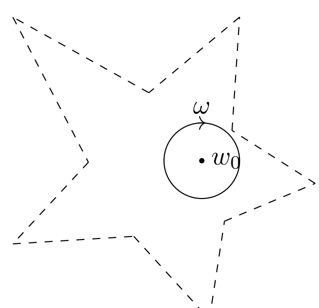
Факт 1.5.2. *Всякая звёздная область A односвязна.*

Доказательство. Прогомотопируем путь $\gamma : [a,b] \to A$ при помощи

$$\begin{aligned}\Gamma : [0,1] \times [a,b] &\to K \\ \tau, t &\mapsto z_0\tau + (1-\tau)\gamma(t)\end{aligned}$$

□

Пример (Неодносвязная область). Пусть A — звёздная область, выкинем точку $w_0 \in A$.



Интеграл $\frac{\mathrm{d}z}{z - w_0}$ по маленькой окружности ω, обходящей w_0, равен $2\pi i$, значит, путь не стягиваем.

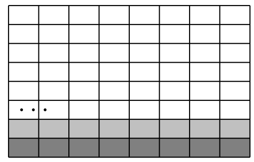
Теорема 1.5.2 (Первообразная вдоль гомотопии)**.** Пусть $K = [0,1] \times [a,b]$ — квадрат, $\Gamma : K \to G$ — гомотопия, и $\Phi = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ — замкнутая дифференциальная форма в G. Тогда $\exists F : K \to \mathbb{C}$ — *первообразная формы* Φ *вдоль гомотопии* Γ, то есть такая функция, что $\forall (s,t) \in K : \exists U \ni (s,t) : U \subset G, \exists \delta > 0 : \exists \Phi : U \to \mathbb{C}$ — первообразная формы F, такая, что

$$\begin{cases} |\sigma - s| < \delta \\ |\tau - t| < \delta \end{cases} \Rightarrow F(\sigma, \tau) = H(\Gamma(\sigma, \tau))$$

Доказательство. Покроем множество $\Gamma(K)$ кругами $U \subset G$, такими что в каждом круге U у Φ есть первообразная H_U.

По лемме Лебега $\exists \rho > 0 : \forall e \subset K : \operatorname{diam}(e) < \rho \Rightarrow e$ лежит в одном из кругов данного покрытия.

Разобьём квадрат гомотопии K на прямоугольники диаметра меньше ρ:



Аналогично доказательству (теорема 1.2.2), в каждом горизонтальном прямоугольнике найдётся первообразная F_j, а дальше их надо сшить. Сшить несложно: вдоль горизонтального отрезка — пересечения прямоугольничков — $F_j\big|_{\dots} = F_{j+1}\big|_{\dots}$. Так как это — первообразные вдоль пути, то они отличаются на константу. Значит, можно изменить все F_j на константы так, чтобы их склейка была непрерывной функцией.

Дальше надо проверить, что действительно получилась первообразная на квадрате. Выберем точку $(s,t) \in K$. Если точка попала внутрь какого-то прямоугольничка, то можно выбрать окрестность, лежащую внутри прямоугольничка, иначе чуть сложнее, но несильно. $\square$

Теорема 1.5.3. Интегралы от замкнутой формы Φ по гомотопным замкнутым путям равны.

Доказательство. Определим $w(t) \coloneqq \int\limits_{\gamma_t} \Phi$ для всех $t \in [0,1]$.

Пусть F — первообразная для формы Φ вдоль гомотопии Γ. Понятно, что $w(t) = F(t,b) - F(t,a)$.

Докажем, что w локально постоянна на $[0,1]$, следствием будет, что w постоянна, что и требуется доказать.

$\forall (\alpha, \beta) \in [0,1] \times [a,b]$: $\exists \delta > 0$, круг U и первообразная H_U, такие, что

$$\begin{cases} |\alpha - \alpha'| < \delta \\ |\beta - \beta'| < \delta \end{cases} \Rightarrow F(\alpha', \beta') = H_U(\Gamma(\alpha', \beta'))$$

Пусть U_1, U_2 — такие шары для (t,b) и (t,a) соответственно. Тогда для τ, достаточно близких к t, выполнено $w(t) = H_{U_1}(\Gamma(t,b)) - H_{U_2}(\Gamma(t,a))$. H_1, H_2 — две первообразные в одной окрестности, они отличаются на константу, а $\Gamma(t,a) \equiv \Gamma(t,b)$, поэтому w локально постоянна. $\square$

Замечание. Если очень хочется, то можно соединить пути $\gamma_0 : [a_0, b_0] \to \mathbb{C}$ и $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ гомотопией $\Gamma : K \to \mathbb{C}$, где $K \coloneqq \{(t,s) | t \in [0,1], s \in [a_t, b_t]\}$ (a_t, b_t — какие-то непрерывные функции от t, такие, что $a_t < b_t$).

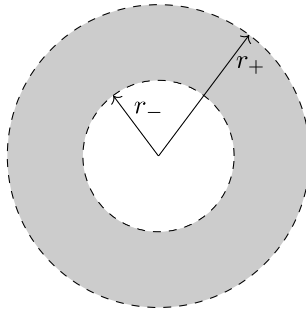
1.6 Ряды Лорана

Ряд Лорана $f(z)$ — ряд вида $f(z) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$.

Говорят, что ряд Лорана сходится в точке z, если оба ряда $f_+(z) = \sum\limits_{n \geqslant 0} c_n (z - z_0)^n$ и $f_-(z) = \sum\limits_{n < 0} c_n (z - z_0)^n$ сходятся.

Первый ряд степенной, имеется некий радиус сходимости r_+, такой, что $|z - z_0| < r_+ \Rightarrow f_+$ сходится. При замене переменной $w :- \frac{1}{z - z_0}$, $f_-({}^1/_w)$ становится степенным рядом от w, сходящимся при $w < \frac{1}{r_-}$.

Таким образом, ряд сходится абсолютно внутри «кольца» $\{z \in \mathbb{C} | r_- < |z - z_0| < r_+\}$:



Теорема 1.6.1. Пусть $0 \leqslant r_- < r_+ \leqslant \infty$, функция f голоморфна в «кольце» $K \coloneqq \{z \in \mathbb{C} | r_- < |z| < r_+\}$. Тогда f представима в K сходящимся рядом Лорана.

Доказательство. Пусть $z \in K$. Определим $\phi_z : K \to \mathbb{C}, \phi_z(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \neq z \\ f'(z), & \zeta = z \end{cases}$.

Согласно (теорема 1.3.5), форма $\phi_z(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ замкнута в K.

Выберем $r, R \in \mathbb{R}$ так, что $r_- < r < |z| < R < r_+$. Для $\rho \in \mathbb{R}$ определим $\gamma_\rho : [0, 2\pi] \to K, \gamma_\rho(t) \coloneqq \rho e^{it}$. Пути γ_R и γ_r гомотопны, значит, $\int\limits_{\gamma_r} \phi_z(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int\limits_{\gamma_R} \phi_z(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$. А именно,

$$\int\limits_{\gamma_R} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

Преобразовывая, получаем

$$\int\limits_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = f(z) \underbrace{\int\limits_{\gamma_R} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta}_{2\pi i} - f(z) \underbrace{\int\limits_{\gamma_r} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta}_{0}$$

Тем самым, получили *малую интегральную форму Коши для кольца*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \right)$$

Осталось преобразовать дроби в ряды:

$$\int\limits_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int\limits_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)}\,\mathrm{d}\zeta = \int\limits_{\gamma_R} \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}}\,\mathrm{d}\zeta \cdot (z - z_0)^j$$

$$\int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)}\,\mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{z - z_0} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}\,\mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\gamma_r} f(\zeta)(\zeta - z_0)^k\,\mathrm{d}\zeta \cdot \frac{1}{(z - z_0)^k}$$

Сходимость степенная, имеется признак Вейерштрасса, можно поменять местами сумму и интеграл, поэтому все преобразования законны.

При замене $j = -k - 1$, второе выражение преобразуется в форму

$$-\sum_{j=-1}^{-\infty} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}}\,\mathrm{d}\zeta \cdot (z - z_0)^j$$

Теперь можно заметить, что интегралы вдоль γ_r и γ_R равны, так как особенностей у интегралов — слагаемых в ряде — в кольце нет. Окончательно получаем

$$\boxed{f(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j(z-z_0)^j, \text{ где } c_j = \int\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{j+1}}\,\mathrm{d}\zeta \text{ для любого } \rho \in (r_-, r_+)}$$

□

Лекция VI

22 марта 2024 г.

Ряд Лорана $g(z) = \sum -j \in \mathbb{Z} c_j z^j$ принято раскладывать на две части — *регулярную* $\sum\limits_{j\geqslant 0} c_j(z-z_0)^j$ и *главную* $\sum\limits_{j<0} c_j(z-z_0)^j$.

Если ряд Лорана изучать в маленькой окрестности z_0, то главная часть асимптотически больше. Регулярная же сходится на всей комплексной плоскости.

1.7 Изолированные особенности голоморфных функций

Пусть область $G \subset \mathbb{C}, z_0 \in G$, f задана и аналитична в $G \setminus \{z_0\}$. Тогда говорят, что f *имеет особенность в* z_0.

Возможны случаи:

1. f ограничена вблизи z_0.

   Точка z_0 называется *устранимой особенностью*, так как в силу (теорема 1.7.1) $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

2. $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.

   Точка z_0 называется *полюсом*.

3. f не имеет предела в z_0.

   Точка z_0 называется *существенно особой точкой*.

Теорема 1.7.1. В первом случае — f ограничена вблизи z_0 — f единственным образом продолжается до аналитической функции в области G.

Доказательство. Выберем $R > 0$ такой, что $B(z_0, R) \subset G$. f разложится в некоторый ряд Лорана при $0 < |z - z_0| < R$.

Запишем $c_j = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} f(z+\rho e^{it})(\rho e^{it})^{-j-1} \cdot \rho e^{it}\,\mathrm{d}t$ и грубо оценим коэффициенты главной части ($j < 0$). Пусть $|f| \leqslant C$ внутри круга $B(z_0, R)$ для некоторой константы C.

$$|c_j| \leqslant \frac{C}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \rho^{-j}\,\mathrm{d}t = C\rho^{-j}$$

Устремляя $\rho \to 0$, получаем $c_j = 0$. Тем самым, f раскладывается в ряд Тейлора в окрестности z_0. □

Запишем несколько другую классификацию особенностей точки, опирающуюся на ряд Лорана $f(z) = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} c_j(z-z_0)^j$.

I При всяком $j < 0$: $c_j = 0$.

II Множество $\mathcal{A} \coloneqq \{j < 0 | c_j \neq 0\}$ конечно.

III Множество $\mathcal{A} \coloneqq \{j < 0 | c_j \neq 0\}$ бесконечно.

Понятно, что I эквивалентно 1.

Теорема 1.7.2. На самом деле, II $\iff$ 2, III $\iff$ 3.

Доказательство.

II $\Rightarrow$ 2 Пусть $k = -\min \mathcal{A}$.

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} \cdots + c_0 + \sum_{j>0} c_j (z-z_0)^j = \frac{1}{z-z_0}^k (c_{-k} + c_{-k+1} + \cdots) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$$

При этом $g(z_0) \neq 0$ и $g(z)$ аналитична. Тем самым, $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.

2 $\Rightarrow$ II Положим $h(z) \coloneqq \frac{1}{f(z)}$ в некоторой окрестности z_0.

h аналитична при $z \neq z_0$, и $\lim\limits_{z \to z_0} h(z) = 0$, значит, h имеет устранимую особенность в z_0. Может что-то пропустил. Пусть k — наименьший номер, такой, что $b_k \neq 0$, где b_k — коэффициент из разложения h в ряд Тейлора:

$$h(z) = b_k(z-z_0)^k + b_{k+1}(z-z_0)^{k+1} \cdots + \cdots = (z-z_0)^k (b_k + b_{k+1}(z-z_0) + \cdots) = (z-z_0)^k \cdot u(z)$$

u аналитична вблизи z_0, и $u(z_0) = b_k \neq 0$.

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \frac{1}{u(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^k} (c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots)$$

Почленно деля, действительно получаем, что $f(z)$ имеет конечное число ненулевых членов в разложении в ряд Лорана. $\square$

Пусть z_0 — полюс f, $k \coloneqq -\min\{j < 0 | c_j \neq 0\}$. Число k называется *порядком* полюса z_0.

Если же g аналитична в $z_0, g(z_0) = 0, g \not\equiv 0$, то $g(z) = \sum\limits_{j \geqslant 0} a_j (z-z_0)^j$, положим $l \coloneqq \min\{j | a_j \neq 0\}$.

Число l — *порядок* f.

Факт 1.7.1. *f имеет полюс порядка k в z_0 $\iff$ $\frac{1}{f}$ имеет ноль порядка k в z_0.*

Интересный факт (Теорема Пикара). Пусть z_0 — существенно особая точка аналитической функции f. Тогда $\forall \varepsilon > 0 : f(\{z | 0 < |z - z_0| < \varepsilon\})$ есть $\mathbb{C}$, кроме, может быть, двух точек.

Мы докажем более простой вариант теоремы Пикара.

Теорема 1.7.3 (Сохоцкий)**.** Пусть z_0 — существенно особая точка аналитической функции f. Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \mathcal{B} \coloneqq f(\{z | 0 < |z - z_0| < \varepsilon\})$ плотно в $\mathbb{C}$.

Доказательство. От противного: пусть $\exists w_0 \notin \overline{B}$, то есть $\exists \delta > 0 : B(w_0, \delta) \cap \mathcal{B} = \varnothing$.

Определим

$$\begin{aligned} h : B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{f(z) - w_0} \end{aligned}$$

Хотя h и имеет особенность при $z = z_0$, но h ограничена, то есть особенность устранима. $f(z) = \frac{1}{h(z)} + w_0$, и так как h аналитична в z_0, то особенность в z_0 — то ли тоже устранимая особенность, то ли полюс, но уж никак z_0 — не существенно особая точка. $\square$

Пример. Возьмём $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. У подынтегральной функции в нуле особенность устранимая, а с бесконечностью есть некоторые проблемы. Впрочем, избавимся и от нуля в области интегрирования:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0, R\to\infty} \int\limits_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \;=$$

Запишем формулу Эйлера $e^{ix} = \cos x + i\sin x$. Интегрируя по всей оси $\frac{\cos x}{x}$, мы поучим нуль из-за нечётности, поэтому можно продолжить равенство так:

$$= \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon\to 0, R\to\infty} \int\limits_{\varepsilon<|x|<R} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x$$

Теперь перейдём к функции, аналитической в комплексной плоскости: $\phi(z) \coloneqq \frac{e^{iz}}{z}$.

Введём путь $\Gamma = [\varepsilon \to R]\cdot\gamma_R\cdot[-R\to-\varepsilon]\to\gamma_\varepsilon$, где $[a\to b]$ — путь, проходящий отрезок $[a,b]$ в направлении от a к b, а $\begin{cases}\gamma_R(t) = Re^{it}, & t\in[0,\pi]\\ \gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{i(\pi-t)}, & t\in[0,\pi]\end{cases}$.

$$\int\limits_{\gamma_\varepsilon} \phi(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{i(\pi-t)}}}{\varepsilon e^{i(\pi-t)}}\varepsilon i e^{i(\pi-t)}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^\pi ie^{i\varepsilon e^{i(\pi-t)}}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{подынтегральное выражение равномерно сходится к } i.} -i\pi$$

$$\int\limits_{\gamma_R} \phi(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^\pi \frac{e^iRe^{it}}{Re^{it}}Rie^{it}\,\mathrm{d}t = i\int\limits_0^\pi e^{iRe^{it}}\,\mathrm{d}t$$

Оценим $e^{iRe^{it}} = e^{iR\cos t - R\sin t} = e^{iR\cos t}\cdot e^{-R\sin t}$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости интеграл по γ_R будет нулём.

...

Этот интеграл получилось так взять, так как у ϕ была особенность в нуле, и мы её обошли. А иногда особенности находятся внутри пути интегрирования, в таком случае пригождается *формула в вычетах*.

1.8 Вычеты

Пусть f задана и голоморфна в $G\setminus\{z_0\}$, где G — область, $z_0\in G$ — изолированная особенность.

Вблизи z_0 f раскладывается в ряд Лорана $f(z) = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} c_j(z-z_0)^j$.

Определение 1.8.1 (Вычет функции f в точке z_0)**.** Коэффициент c_{-1}, обозначается $\mathrm{Res}_{z_0} f$.

Этот коэффициент так важен, так как у $c_j(z-z_0)^j$ при $j\neq-1$ имеется первообразная в G, и при интегрировании по окружности, обходящей z_0, пропадут все коэффициенты ряда Лорана, кроме вычета.

1.8.1 Как вычислять вычеты

У нас есть формула для вычисления коэффициентов ряда Лорана, но она получается интегрированием, а мы как раз и хотим использовать вычеты, чтобы уметь удобно интегрировать. Поэтому иногда пригождаются следующие частные случаи:

- Пусть z_0 — полюс функции f степени k:

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + f_+(z)$$

где f_+ — аналитическая вблизи z_0.

Домножая f на $(z-z_0)^k$, получаем аналитическую

$$(z-z_0)^k f = c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0) + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} + (z-z_0)^k \cdot f_+(z)$$

Теперь можно найти $\operatorname{Res}_{z_0} f$ по формуле: $\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{k-1} \left[(z-z_0)^k f(z)\right]\Big|_{z=z_0}$.

- Пусть $k = 1$ — у f имеется полюс первого порядка. Тогда дифференцировать не надо, и формула вырождается в
$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$$
- Возьмём ещё более частный случай: $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, где g, h аналитичны в окрестности z_0, $g(z_0) \neq 0$, а h имеет простой нуль в z_0 (нуль кратности 1).
$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)(z-z_0)}{h(z)} = \lim_{z\to z_0} g(z) \frac{z-z_0}{h(z)-h(z_0)} = \frac{g(z)}{h'(z)}$$

1.8.2 Индекс замкнутого пути относительно точки

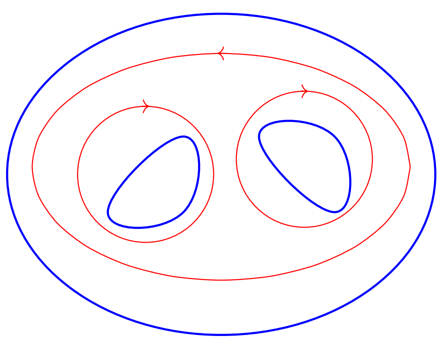
Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область, Φ — замкнутая дифференциальная форма в G. Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — какие-то замкнутые пути с носителем в G. Обозначим $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$.

Определим интеграл от формы Φ по данной совокупности путей $\int\limits_\Gamma \Phi \overset{def}{=} \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{\gamma_j} \Phi$.

Назовём систему путей Γ *правильной*, если для всякой аналитической функции f в G: $\int\limits_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Примеры (Правильные системы путей).

- $|\Gamma| = 1$. Если γ_1 гомотопен тождественному, то Γ, конечно, правильная.
- В частности, любой замкнутый путь в односвязной области формирует правильную систему из одного пути.
- Пусть в кольце имеются два пути γ_1, γ_2, обходящие концентрические окружности в противоположных направлениях. Тогда $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ — правильная система, так как $\gamma_1 \sim \gamma_2^-$.
- Рассмотрим область, ограниченную синими линиями с двумя дырками. В ней система из красных путей правильная, так как можно разложить их в сумму двух зелёных стягиваемых путей:



Пусть γ — петля в $\mathbb{C}$, $z_0 \notin \operatorname{Im}(\gamma)$.

Определение 1.8.2 (Индекс пути γ относительно z_0)**.** Значение интеграла $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}$. Обозначается $\operatorname{Ind}_{z_0} \gamma$.

Индекс означает число раз, которые мы обошли вокруг данной точки с учётом ориентации, но пока непонятно даже, почему индекс — целое число.

Это определение очевидным образом распространяется на систему путей: $\forall \gamma_j \in \Gamma : z_0 \notin \mathrm{Im}(\gamma) \Rightarrow$ определён $\mathrm{Ind}_{z_0} \Gamma \overset{def}{=} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_j} \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}$

Свойства (Свойства индекса, докажем потом).

- $\mathrm{Ind}_{z_0} \gamma \in \mathbb{Z}$.
- Функция $[z_0 \mapsto \mathrm{Ind}_{z_0} \gamma]$ постоянна на каждой компоненте связности $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$.
- На неограниченной компоненте связности $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ индекс равен нулю.

Теорема 1.8.1 (Формула вычетов)**.** Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область, Γ — правильная система путей в G, $f : G \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, и $z_1, \ldots, z_k$ — особенности. Если все точки z_j не лежат на носителе системы путей Γ, то

$$\boxed{\int\limits_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{z_j} f \cdot \mathrm{Ind}_{z_j} \Gamma \right)}$$

Доказательство. Для каждой точки z_j имеется r_+, такой, что $B(z_j, r_+) \setminus \{z_j\} \subset G$. Тем самым, в окрестности точки z_j функция f разложима в ряд Лорана, и его главная часть сходится везде кроме z_j.

Пусть $g_1, \ldots, g_k$ — главные части рядов Лорана для f в точках $z_1, \ldots, z_k$ соответственно. Функция $h(z) \coloneqq f(z) - g_1(z) - \cdots - g_k(z)$ — аналитическая функция в области G, так как она имеет конечное число особых точек, в которых ограничена.

Так как Γ — правильная, то $\int\limits_{\Gamma} h(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Тем самым, мы получили

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\Gamma} g_j(z)\,\mathrm{d}z$$

Посчитаем $\int\limits_{\Gamma} g_j(z)\,\mathrm{d}z$. Распишем

$$g_j(z) = \frac{\mathrm{Res}_{z_j} g}{z - z_j} + \underbrace{\frac{a_1}{(z-z_j)^2} + \cdots + \frac{a_{s-1}}{(z-z_j)^s} + \cdots}_{h_j(z)}$$

У h_j имеется первообразная, так как ряд Лорана можно интегрировать и дифференцировать почленно — доказательство аналогично оному для степенных рядов. Значит, $\int\limits_{\Gamma} g(z)\,\mathrm{d}z = (\mathrm{Res}_{z_j} f) 2\pi i \cdot \mathrm{Ind}_{z_0} \Gamma$ (очевидно, $\mathrm{Res}_{z_j} g_j = \mathrm{Res}_{z_j} f$). □

Лекция VII

29 марта 2024 г.

1.8.3 Обобщение интеграла $\frac{\sin x}{x}$

Обозначим $\mathbb{C}_+ \overset{def}{=} \{x + iy | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_{>0}\}$.

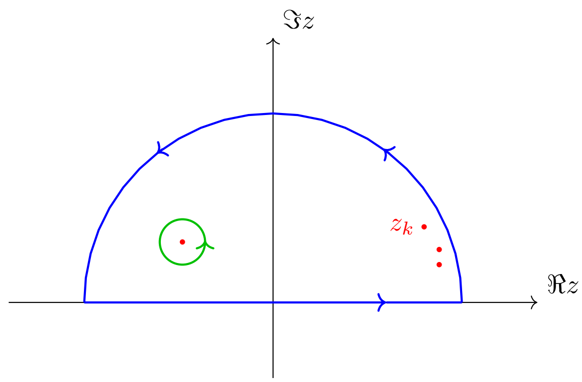
Пусть f аналитична в $\{x + iy | y > -\varepsilon\}$, кроме конечного числа особых точек в $\mathbb{C}_+$, назовём их $z_1 \ldots, z_n$. В $\{x + iy | -\varepsilon < y < 0\}$, получается, у f особенностей нет.

Предложение 1.8.1. *Пусть при* $\theta \in [0, \pi], R > 0$: $|f(Re^{i\theta})R|$ *ограничена в* $\mathbb{C}_+$*, причём* $\forall \theta \in [0, \pi]$: $\lim\limits_{R \to \infty} f(Re^{i\theta})R = 0$.

Например, $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$*, где* g, h *— многочлены,* $\deg g < \deg h$.

Тогда $\int\limits_{\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_j} f$*. Здесь* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} = \lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_{-R}^{R}$*, то есть особенности несобственного интеграла на плюс-минус бесконечностях могут сокращать друг друга.*

Доказательство. Проинтегрируем f по синему пути, где полуокружность — радиуса R:



Пусть R — настолько большое, что все особые точки в $\mathbb{C}_+$ содержатся во внутренней области, отсекаемой данным путём. Оценим интеграл по верхней полуокружности:

$$\int\limits_{0}^{\pi} f(Re^{it}) iRe^{it}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[R \to \infty]{\text{теорема Лебега о мажорируемой сходимости}} 0$$

Далее применяем формулу в вычетах.

Из гомотопности зелёной окружности и синего пути в $\mathbb{C}_+ \setminus \{z_j\}$ получаем, что их индексы равны 1 — ведь интеграл $\frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}$ по окружности мы знаем. ☐

1.8.4 2-я формула замены переменной

Пусть $\Phi = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ — замкнутая дифференциальная форма в G, $\gamma : [a, b] \to G$ — путь, рассмотрим интеграл $\int\limits_{\gamma} \Phi$. Изменение параметризации для γ — 1-я формула замены переменной.

Теперь пусть $g : G_1 \to G_2$ — голоморфная функция, f — голоморфная функция в G_2, $\gamma : [a, b] \to G_1$ — непрерывный путь, $\Phi = f(z)\,\mathrm{d}z$. Тогда

$$\int\limits_{g \circ \gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma} (f \circ g)(z) g'(z)\,\mathrm{d}z$$

Наводящее соображение: пусть путь γ — кусочно-гладкий, $\rho(t) \coloneqq g(\gamma(t))$. Тогда

$$\int\limits_{\rho} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{a}^{b} f(\rho(t))\rho'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{a}^{b} f(g(\gamma(t)))g'(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\gamma} (f \circ g)(z) \cdot g'(z)\,\mathrm{d}z$$

Но нам эта формула пригодится в случае негладкого пути.

Пусть $\rho = g \circ \gamma$ – путь в области G_2, ϕ — первообразная для формы $f(z)\,\mathrm{d}z$ вдоль ρ.

Рассмотрим $t_0 \in [a, b]$. $\exists U \ni \rho(t_0)$ — окрестность, такая, что на ней есть первообразная Φ для $f(z)\,\mathrm{d}z$. Значит, $\exists \delta > 0 : \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \Phi(\rho(t))$.

Положим $z_0 \coloneqq \gamma(t_0)$. $\exists V \ni z_0 : g(V) \subset U$ из непрерывности g. $\forall w \in U : \Phi'(w) = f(w)$. Запишем

$$\forall z \in V : (\Phi \circ g)'(z) = \Phi'(g(z)) \cdot g'(z)$$

Тем самым, $\Phi \circ g$ есть первообразная для $(\Phi \circ g) \cdot g'$ в V. Значит, $\phi \circ g$ — первообразная для формы $f(g(z)) \cdot g'(z)\,\mathrm{d}z$ вдоль пути γ.

Пусть γ — замкнутый путь, не проходящий через z_0. По определению

$$\operatorname{Ind}_{z_0} \gamma = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}$$

Применим функцию $[z \mapsto z - z_0]$. Согласно 2-й формуле замены переменной,

$$\operatorname{Ind}_{z_0} \gamma = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - z_0} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \operatorname{Ind}_0(\gamma - z_0)$$

Следствие 1.8.1. *Индекс пути γ относительно z_0 — локально постоянная функция от z_0.*

Доказательство. Пусть z_0 — точка вне носителя γ. Выберем настолько маленькое $\delta > 0$, что $B(z_0, \delta) \cap \gamma([a, b]) = \varnothing$.

Рассмотрим $z_1 \in B(z_0, \delta)$, и докажем, что $\operatorname{Ind}_{z_0} \gamma = \operatorname{Ind}_{z_1} \gamma$. Определим гомотопию путей $\gamma - z_0$ и $\gamma - z_1$:

$$\Gamma(t, \tau) \coloneqq (1 - \tau)(\gamma(t) - z_0) + \tau(\gamma(t) - z_1) = \gamma(t) - ((1 - \tau)z_0 + \tau z_1)$$

Эта гомотопия не проходит через 0, значит, интегралы по $\gamma - z_0$ и $\gamma - z_1$ равны. □

Следствие 1.8.2. *Индекс постоянен на каждой компоненте связности $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$.*

Следствие 1.8.3. $\operatorname{Ind}_{z_0} \gamma = 0$ *на неограниченной компоненте связности $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$.*

Доказательство. Оценим $\int\limits_{\gamma - z_0} \frac{\mathrm{d}w}{w}$ при достаточно большом $|z_0|$. Для такого z_0 носитель пути $\gamma - z_0$ лежит в некоторой полуплоскости, не содержащей нуля. Полуплосоксть односвязна, это даже звёздная область, в ней путь стягиваем, значит, интеграл равен нулю. □

1.8.5 О логарифме

Логарифм — это функция, обратная к экспоненте, а экспонента имеет период $2\pi i$.

Пусть $w \in \mathbb{C}$.

1. Логарифм w — любое $z \in \mathbb{C} : e^z = w$.
2. У $w = 0$ логарифма нет; если z — одно из значений логарифма w, то все остальные значения имеют вид $\{z + 2\pi i k | k \in \mathbb{Z}\}$.
3. Для $w \neq 0 : e = |w|e^{i\theta}$, где $\theta \in \mathbb{R}$. Комплексное число $\log|w| + i\theta$ — одно из значений логарифма.

Пусть G — область.

Определение 1.8.3 (Функция ϕ в G — ветвь логарифма в G)**.** ϕ непрерывна в G, и $e^{\phi(z)} = z$ для $z \in G$.

Факт 1.8.1. *Всякая ветвь логарифма обязательно голоморфна в G, и $\phi'(z) = \frac{1}{z}$.*

Доказательство. Рассмотрим $z_0 \in G, U := \{z \in \mathbb{C} || z - z_0| < \delta\} \subset G$. Так как производная экспоненты (как вещественной функции $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) невырождена, то при достаточно малом δ у экспоненты имеется обратная $\psi : e^{\psi(z)} = z$ при $z \in U$.

С другой стороны, $e^{\phi(z)} = z$ при $z \in U$. Значит, $\phi - \psi$ — непрерывная функция, принимающая значения в дискретном множестве $\{2\pi i k | k \in \mathbb{Z}\}$. Значит, это константа.

Тем самым, ϕ дифференцируема, и $\phi'(z) = \frac{1}{z}$. □

Теорема 1.8.2. Во всякой односвязной области G: $0 \notin G \Rightarrow \exists$ непрерывная ветвь логарифма.

Доказательство. Напрямую следует из (теорема 1.8.3) для тождественного отображения. □

Пусть $F : G \to \mathbb{C}$ — аналитическая.

Определение 1.8.4 ($\Phi : G \to \mathbb{C}$ — ветвь логарифма функции F)**.** $\forall z \in G : e^{\Phi(z)} = F(z)$.

Замечание. В определении можно требовать лишь непрерывности Φ, аналитичность получится автоматически.

Теорема 1.8.3. Если G — односвязная область, $\forall z \in G : F(z) \neq 0$, то в G существует ветвь логарифма для F.

Доказательство. Функция $\frac{F'(z)}{F(z)}$ — голоморфна в G. Форма $\frac{F'(z)}{F(z)}\,\mathrm{d}z$ замкнута в G, значит, имеется первообразная ϕ — голоморфная в G функция, такая, что $\psi'(z) = \frac{F'(z)}{F(z)}$.

$$\left(\frac{e^{\psi(z)}}{F(z)}\right)' = \frac{e^{\psi(z)\cdot\psi'(z)F(z) - F'(z)e^{\psi(z)}}}{F(z)^2}$$

По построению ψ числитель равен нулю. Тем самым, $e^{\psi(z)} = c \cdot F(z)$. $\exists a \in \mathbb{C} : c = e^a$. Положим $\phi := \psi - a$, это искомая ветвь логарифма. □

Замечание. Не всякая первообразная для $\frac{F'}{F}$ есть ветвь логарифма — логарифмы отличаются на целые кратные $2\pi i$, а первообразные — на произвольную константу. Однако если ψ — первообразная $\frac{F'}{F}$, и $\exists z_0 \in \mathbb{C} : e^{\psi(z_0)} = F(z_0)$, то ψ — ветвь логарифма для F.

Замечание. Если ψ — ветвь логарифма, то все ветви логарифма имеют вид $\{\psi + 2\pi i k | k \in \mathbb{Z}\}$.

Данная функция $\frac{F'}{F}$ называется *логарифмической производной*.

Пусть G — область, $f : G \to \mathbb{C}$ — голоморфна, $\gamma : [a, b] \to G$ — путь, $\forall z \in \gamma([a, b]) : f(z) \neq 0$.

Определение 1.8.5 (Ветвь логарифма вдоль пути γ)**.** Функция $\phi : [a, b] \to G$, такая что $\forall t_0 \in [a, b] :$ $\exists \delta > 0, \exists U \ni \gamma(t)$, и существует ветвь логарифма ψ функции f в U, такая, что

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \psi(\gamma(t))$$

Теорема 1.8.4. При сделанных предположениях существует ветвь логарифма f вдоль пути γ. При этом любые две ветви отличаются на $2\pi i k$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\frac{f'}{f}$, аналитическую в некоторой окрестности $\gamma([a, b])$. Пусть ϕ — первообразная для $\frac{f'}{f}$ вдоль γ.

$\forall t_0 \in [a, b] : \exists \delta > 0, \exists U \ni \gamma(t_0)$ вместе с первообразной ψ функции $\frac{f'}{f}$:

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \psi(\gamma(t))$$

Существует c, вообще говоря, зависящая от t, такая, что $e^{\psi(z)} = cf(z)$. При $|t - t_0| < \delta : e^{\phi(t)} = e^{\psi(\gamma(t))} = cf(\gamma(t))$. Значит, $\frac{e^{\phi}(s)}{f(\gamma(s))}$ локально постоянна на $[a, b]$, то есть оказалось, что c всё-таки не зависит от t.

Найдётся $a \in \mathbb{C} : c = e^a$. Теперь $\widetilde{\phi} \coloneqq \phi - a$ — тоже первообразная для $\frac{f'}{f}$ вдоль γ, причём $e^{\psi(\gamma(t))-a} = f(\gamma(t))$. Так как $\psi - a$ — тоже первообразная в U для $\frac{f'}{f}$, то $\widetilde{\psi}$ — ветвь логарифма. $\square$

В частности, для $f(z) = z - z_0$, и пути γ, не проходящего через z_0, получается ветвь логарифма $z - z_0$ вдоль γ. Что?

Пусть $w \in \mathbb{C}$. Все значения логарифма спрятаны в формуле $\log w = \log|w| + i \operatorname{Arg} w$, где $\operatorname{Arg} w \stackrel{def}{=} \left\{\theta \middle| e^{i\theta} = \frac{w}{|w|}\right\}$.

Пусть $G \notin 0$.

Определение 1.8.6 (Непрерывная ветвь аргумента в области G)**.** Непрерывная функция $v : G \to \mathbb{R} : \forall z \in G : v(z) \in \operatorname{Arg}(z)$

Факт 1.8.2. *В области G существует непрерывная ветвь логарифма $\iff$ в G существует непрерывная ветвь аргумента.*

Определение 1.8.7 (Ветвь аргумента вдоль пути γ)**.** Функция $\phi : [a, b] \to G$, такая что $\forall t_0 \in [a, b] : \exists \delta > 0, \exists U \ni \gamma(t)$, и существует ветвь аргумента ψ функции f в U, такая, что

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \psi(\gamma(t))$$

В качестве ветви аргумента всегда можно выбрать мнимую часть ветви логарифма.

Пусть $\gamma : [a, b] \to G$ — путь, $f : G \to \mathbb{C}$ — аналитическая, предположим, что $f(z) \neq 0$ на $\gamma([a, b])$.

Пусть u — ветвь логарифма для f вдоль γ.

Определение 1.8.8 (Приращение логарифма вдоль γ)**.** $u(b) - u(a)$.

Определение 1.8.9 (Приращение аргумента вдоль γ)**.** $\Im(u(b) - u(a))$.

Пусть теперь γ — петля. Тогда $\Re(u(b) - u(a)) = 0$, и вообще, $u(b) - u(a) = 2\pi i k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$.