

# Дифференциальная геометрия. Неофициальный конспект

Лектор: Нина Дмитриевна Лебедева  
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Риманова геометрия</b>	<b>2</b>
1.1	Гладкие многообразия . . . . .	2
1.1.1	Гладкие отображения . . . . .	3
1.1.2	Касательное пространство . . . . .	5
1.1.3	Структура векторного пространства на $T_p M$ . . . . .	6
1.2	Касательное расслоение . . . . .	6
1.2.1	Дифференциал гладкого отображения . . . . .	6
1.3	Гладкие векторные поля . . . . .	7
1.4	Гладкие подмногообразия . . . . .	8

# Глава 1

## Риманова геометрия

### Лекция I

14 февраля 2024 г.

#### 1.1 Гладкие многообразия

**Определение 1.1.1** (Топологическое многообразие). Хаусдорфово топологическое пространство  $M$  со счётной базой, такое что  $\forall x \in M : \exists U \ni x : U \sim \mathbb{R}^n$ . Данное число  $n$  называется *размерностью* многообразия, пишут  $\dim M = n$ , или часто пишут это число верхним индексом:  $M^n$ .

Далее пусть  $M^n$  — топологическое многообразие.

**Определение 1.1.2** (Карта). Пара из открытого  $U \subset M^n$ , и гомеоморфизма  $\phi : U \rightarrow \Omega$ , где открытое  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .  $U$  называется *носителем карты*.

«В половине случаев в литературе картой называется обратное отображение».

**Определение 1.1.3** (Атлас). Набор карт  $(U_i, \phi_i)$ , таких, что  $\bigcup_i U_i = M$ .

Пусть даны две карты  $(U, \phi)$  и  $(V, \psi)$ . Далее удобно считать, что их носители пересекаются:  $U \cap V \neq \emptyset$ , иначе определение не несёт смысла.

**Определение 1.1.4** (Отображение перехода). Отображение  $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ . Обозначается  $f_{\phi\psi}$ .

**Определение 1.1.5** (Карты  $(U, \phi)$  и  $(V, \psi)$  согласованы). Отображение перехода и ему обратное гладкие.

**Определение 1.1.6** (Гладкий атлас). Атлас, такой, что любые две карты согласованы.

Далее все атласы предполагаются гладкими.

**Определение 1.1.7** (Атласы эквивалентны). Их объединение (то есть все карты из первого и из второго атласа вместе взятые) — тоже гладкий атлас.

**Предложение 1.1.1.** *Эквивалентность атласов — отношение эквивалентности.*

**Определение 1.1.8** (Гладкая структура на многообразии). Максимальный гладкий атлас (атлас, к которому нельзя добавить карт).

*Замечание.* К атласу можно добавить произвольное количество карт, согласованных с теми, что в атласе, и они будут согласованы между собой. В частности, для задания гладкой структуры достаточно произвольного атласа  $A$ : в  $A$  можно добавить всевозможные карты, согласованные с картами из  $A$ , и он станет максимальным.

**Определение 1.1.9** (Гладкое многообразие). Многообразие с гладкой структурой.

Примеры (Атласы).

- Стандартная гладкая структура на  $\mathbb{R}^n$  задаётся атласом  $\{(\mathbb{R}^n, \text{id})\}$ .
- В частности, стандартная структура на  $\mathbb{R}^1$  задаётся атласом  $\{(\mathbb{R}^1, [x \mapsto x])\}$ .
- Можно задать нестандартную структуру на  $\mathbb{R}^1$ :  $\{(\mathbb{R}^1, [x \mapsto x^3])\}$ .

*Предостережение.* Это действительно гладкая структура, хотя обратное отображение  $[x \mapsto x^{1/3}]$  не гладкое. Тем не менее, определение и не требует гладкости от него.

- Пусть  $f = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x, & x \leq 0 \end{cases}$ . Тогда  $\{(\mathbb{R}^1, f)\}$  — тоже гладкий атлас на  $\mathbb{R}^1$ .

Тем не менее, любые два атласа из приведённых выше атласов на  $\mathbb{R}^1$  не эквивалентны — отображения перехода получаются не гладкими.

- Гладкая структура на сфере задаётся двумя картами: пусть  $S^2$  — сфера с северным полюсом  $N$  и южным  $S$ , пусть  $f, g$  — стереографические проекции с данными полюсами. Тогда  $\{(S^2 \setminus \{N\}, f), (S^2 \setminus \{S\}, g)\}$  — атлас.

*Замечание.* Если  $M$  — гладкое многообразие, и открытое  $W \subset M$ , то на  $W$  естественным образом определена гладкая структура, наследующаяся с  $M$ .

### 1.1.1 Гладкие отображения

Пусть  $M^m, N^n$  — гладкие многообразия,  $A_M, A_N$  — соответствующие атласы. Рассмотрим отображение  $f : M \rightarrow N$ .

**Определение 1.1.10** (Координатное представление  $f$  в картах  $(U, \phi)$  на  $M$  и  $(V, \psi)$  на  $N$ ). Такое  $\tilde{f} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$ , что диаграмма коммутативна везде, где определена (то есть  $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$  на  $\phi(U \cap f^{-1}(V))$ ).

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ \phi(U) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \psi(V) \end{array}$$

Далее считаем, что  $f : M \rightarrow N$  непрерывна (эквивалентно, все координатные представления непрерывны).

**Определение 1.1.11** ( $f$  гладкое). Любое координатное представление — гладкое.

**Определение 1.1.12** ( $f$  — гладкое в точке  $x \in M$ ). Найдётся окрестность  $U_x \ni x$  и карты  $(U, \phi)$ ,  $(V, \psi)$  (где  $V \ni y := f(x)$ ), такие, что  $U_x \subset U$  и сужение на  $U_x$  координатного представления  $f$  — гладко.

*Свойства* (Гладкие отображения).

- Гладкость в точке не зависит от выбора карт.
- Гладкость отображения не зависит от выбора атласа в одном классе эквивалентности.
- Отображение гладкое  $\iff$  оно гладкое в любой точке. На лекции было доказательство  $\Leftarrow$ .
- Пусть  $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow K$  гладкие. Тогда их композиция  $g \circ f$  гладкая.
- Тожественное отображение гладкое, если в образе и прообразе выбраны эквивалентные атласы.
- Определение гладкости отображения совпадает с определением гладкости из матанализа (если считать, что  $M \subset \mathbb{R}^n$  открыто, и порождающий атлас состоит из тождественной карты)

**Определение 1.1.13** (Диффеоморфизм  $f : M \rightarrow N$ ). Гладкое  $f$ , такое, что  $f^{-1}$  — тоже гладкое.

**Определение 1.1.14** (Многообразия  $M$  и  $N$  диффеоморфны). Между ними существует диффеоморфизм.

Понятно, что диффеоморфность — отношение эквивалентности.

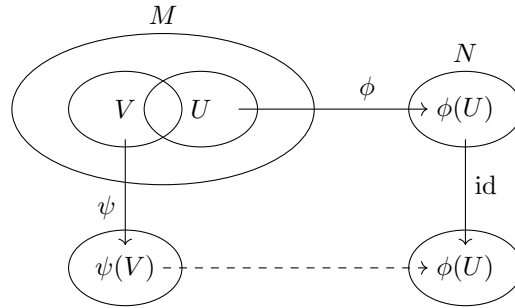
**Утверждение 1.1.1.** Если  $M^m \stackrel{\text{диф}}{\sim} N^n$ , то  $m = n$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную  $x \in M$ . Пусть  $f : M \rightarrow N$  — диффеоморфизм, пусть  $\tilde{f}$  — его координатное представление. Тогда  $\tilde{f}^{-1}$  — координатное представление  $f^{-1}$ , откуда  $\tilde{f}^{-1}$  — тоже гладкое. Рассмотрим дифференциал  $d_x \tilde{f}(\_)$ , это изоморфизм векторных пространств, значит,  $m = n$ .  $\square$

По умолчанию всегда считается, что на  $\mathbb{R}^m$  введена стандартная гладкая структура.

**Предложение 1.1.2.** Пусть  $M$  — гладкое многообразие, тогда карта — диффеоморфизм между  $U$  и  $\phi(U)$ . Обратно, любой диффеоморфизм между открытым подмножеством  $W \subset M$  и областью  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  — карта.

*Доказательство.*



Гладкость карты, как диффеоморфизма, эквивалентна тому, что карта согласована с остальными в атласе: пунктирная стрелка  $\psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$  одновременно является и отображением перехода между картами  $(U, \phi)$  и  $(V, \psi)$ , и координатным представлением  $\phi$  в картах  $(V, \psi)$ ,  $(U, \text{id})$ .  $\square$

**Следствие 1.1.1.** Диффеоморфизм  $f : M \rightarrow N$  задаёт естественную биекцию между картами  $M$  и картами  $N$  (а ещё между (максимальными) атласами  $M$  и (максимальными) атласами  $N$ ).

## Лекция II

21 февраля 2024 г.

*Пример (Диффеоморфизм).* Ранее приводились неэквивалентные карты  $(\mathbb{R}, \text{id})$  и  $(\mathbb{R}, [x \mapsto x^3])$ . Вещественные прямые с данными картами диффеоморфны:  $[x \mapsto x^3]$  — диффеоморфизм, ему обратный  $[x \mapsto \sqrt[3]{x}]$  (где, как в школе,  $\sqrt[3]{x} = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}$ ).

Таким образом, создать две недиффеоморфные структуры на одном и том же многообразии не то чтобы просто.

*Интересный факт.* Пусть  $M$  —  $n$ -мерное многообразие.

Если  $\begin{cases} n < 4, & \text{на нём существует единственная гладкая структура} \\ n = 4, & \text{на нём существует бесконечно много гладких структур.} \\ n > 4, & \text{на нём существует конечное число гладких структур} \end{cases}$

В частности, при  $n > 4$ : если  $M^n = \mathbb{R}^n$ , то гладкая структура единственна.

### 1.1.2 Касательное пространство

Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $p \in M$ . Пусть  $\alpha, \beta : (\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M$  — гладкие (естественно, в смысле отображения многообразий) кривые, такие, что  $\alpha(0) = p = \beta(0)$ .

**Определение 1.1.15** ( $\alpha$  и  $\beta$  соприкасаются в  $p$ ). В любой карте  $(U, \phi)$  (где  $U \ni p$ ) их производные в нуле совпадают:  $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$ .

*Предостережение.* Определение требует совпадение векторов скорости, а не просто параллельности или сонаправленности.

*Свойства* (Соприкасающиеся кривые).

- Соприкасаемость кривых в какой-то конкретной точке — отношение эквивалентности.
- Соприкасаемость не зависит от выбора карты: достаточно проверить в любой одной, содержащей  $p$ .

*Доказательство.* Пусть  $(U, \phi), (V, \psi)$  — две карты, содержащие точку  $p$ , отображение  $f_{\phi\psi} = \psi \circ \phi^{-1}$  гладкое, значит, оно переводит равные векторы в равные.  $\square$

**Определение 1.1.16** (Касательный вектор в точке  $p \in M$ ). Класс эквивалентности соприкасающихся в точке  $p$  кривых.

Множество всех касательных векторов — *касательное пространство*, обозначают  $T_p M$ .

#### Координаты касательного вектора

Пусть  $p \in M$ , и  $(U, \phi)$  — карта, содержащая  $p$ .

**Определение 1.1.17** (Координатное представление вектора  $v = [\alpha] \in T_p M$ ). Вектор скорости данной кривой в данной карте  $v_\phi \stackrel{\text{def}}{=} (\phi \circ \alpha)'(0)$ .

Понятно, что определение не зависит от выбора представителя — кривой  $\alpha$ .

Также координаты  $v_\phi$  в  $\mathbb{R}^n$  называют *координатами  $v$  в карте  $\phi$* .

*Свойства* (Координатное представление).

- $\forall p \in M, \forall (U, \phi) : p \in U \Rightarrow$  координатное представление — биекция 
$$\begin{array}{ccc} T_p M & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ v & \mapsto & v_\phi \end{array}$$

*Доказательство.* Это инъекция, так как если образы  $u, v$  равны, то по определению  $u$  и  $v$  соприкасаются.

Это сюръекция:  $\forall w \in \mathbb{R}^n$  можно рассмотреть кривую  $\gamma(t) := wt + \phi(p)$ . Координаты  $[\phi^{-1} \circ \gamma]$  в карте  $\phi$  как раз окажутся равными  $w$ .  $\square$

#### Преобразование координатного представления в зависимости от карты

**Утверждение 1.1.2.** Пусть  $M^n \ni p$  — гладкое многообразие и точка,  $(U, \phi)$  и  $(V, \psi)$  — карты, содержащие  $p$ . Тогда  $v_\psi = d_{\phi(p)} f_{\phi\psi}(v_\phi)$ .

*Доказательство.* Пусть  $v = [\alpha]$ . Тогда  $v_\phi = (\phi \circ \alpha)'(0)$ ,  $v_\psi = (\psi \circ \alpha)'(0)$ , и действительно, так как  $f_{\phi\psi} = \psi \circ \phi^{-1}$ , то  $v_\psi = (f_{\phi\psi} \circ \phi \circ \alpha)'(0)$ . Дифференцируя композицию, получаем утверждение.  $\square$

Следствием данного утверждения является альтернативное определение касательного вектора:

**Определение 1.1.18** (Касательные векторы в точке  $p \in M$ ). Отображение из множества всех карт, содержащих точку  $p$  (обозначим их  $\mathcal{M}_p$ ) в  $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{M}_p \rightarrow \mathbb{R}^n$$

такое, что выполнены соотношения (утверждение 1.1.2).

Это определение сродни тому определению тензора, которое говорит: «Тензор — это многомерная матрица чисел, преобразующихся при замене базиса следующим образом. . . »

### 1.1.3 Структура векторного пространства на $T_p M$

Зафиксируем  $p \in M$ , и карту  $(U, \phi)$ , содержащую  $p$ . Пусть  $v, w \in T_p M$ .

**Определение 1.1.19** (Сумма векторов  $v$  и  $w$ ). Такой вектор  $v + w$ , что  $(v + w)_\phi = v_\phi + w_\phi$ .

**Определение 1.1.20** (Растяжение вектора  $v$  с коэффициентом  $\alpha$ ). Такой вектор  $\alpha v$ , что  $(\alpha v)_\phi = \alpha \cdot v_\phi$ .

Иными словами, у нас была биекция  $T_p M$  с векторным пространством, и мы просто перенесли структуру векторного пространства с  $\mathbb{R}^n$  на  $T_p M$ . Определение не зависит от выбора карты, так как замена координат касательных векторов при переходе между картами — изоморфизм векторных пространств (дифференциал — линейный оператор).

*Замечание.* Из определения получается, что  $v \mapsto v_\phi$  — изоморфизм векторных пространств.

## 1.2 Касательное расслоение

Как множество,  $T(M) = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$ . Оказывается, на  $T(M)$  можно естественно ввести топологию и гладкую структуру размерности  $2n$ . Преобразуем определение атласа так, чтобы это случилось одновременно.

**Утверждение 1.2.1** (Атлас для множества). Пусть  $X$  — множество с картами  $(U, \phi)$ , то есть парами  $(U, \phi)$  где  $U \subset X$ , и каждая  $\phi$  — биекция  $U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . При этом  $X = \bigcup U$

Потребуем для любых двух карт  $(U, \phi)$  и  $(V, \psi)$ :  $\phi(U \cap V)$  открыто (в частности,  $\phi(U)$  открыто), и потребуем, чтобы все функции перехода  $f_{\phi\psi} = \psi \circ \phi^{-1}$  были гладкими.

Введём на  $X$  топологию:  $W \subset X$  открыто, если  $\forall (U, \phi) : \phi(U \cap W)$  открыто, и предположим, что топология получилась хаусдорфовой, и на  $X$  есть счётная база.

Тогда утверждается, что данная процедура задаёт на  $X$  одновременно и топологию, и гладкую структуру.

Зададим такую гладкую структуру на  $T(M)$ . Обозначим  $TU = \bigsqcup_{p \in U} T_p M$ . Можно рассматривать  $TU = \{(p, v) | p \in U, v \in T_p M\}$ .

Пусть имеется карта  $(U, \phi)$  на  $M$ . Построим по ней карту

$$\begin{aligned} \Phi : TU &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (p, v) &\mapsto (\phi(p), v_\phi) \end{aligned}$$

Проверим согласованность: пусть  $(U, \phi)$  и  $(V, \psi)$  — две карты на  $M$ . По ним построены карты  $(TU, \Phi)$  и  $(TV, \Psi)$  соответственно. Тогда  $(\Psi \circ \Phi^{-1})(p, v) = ((\psi \circ \phi^{-1})(p), d_{\phi(p)} f_{\phi\psi}(v))$ , видно, что  $\Psi \circ \Phi^{-1}$  гладко.

**Упражнение 1.2.1.** Получилось хаусдорфовое пространство со счётной базой.

### 1.2.1 Дифференциал гладкого отображения

Пусть  $M$  и  $N$  — гладкие многообразия, и есть гладкое отображение  $f : M \rightarrow N$ . Зафиксируем  $p \in M$ .

**Определение 1.2.1** (Дифференциал  $f$  в точке  $p$ ). Отображение  $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ , заданное следующим образом:  $d_p f : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ .

**Утверждение 1.2.2.** Определение дифференциала не зависит от выбора представителей.

*Доказательство.* Пусть  $\alpha \sim \beta$  — две кривые,  $\alpha(0) = \beta(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = \beta'(0) = v$ .

Проверим, что  $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$ . Достаточно проверить, что совпадают координатные представления.

Выберем две карты  $(U, \phi)$  и  $(V, \psi)$  (где  $U \ni p$ ,  $V \ni f(p)$ ). Координатное представление  $f$  — это  $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ .

Дифференциал  $\tilde{f}$  переносит координаты представления векторов из  $T_p M$  в координаты представления векторов из  $T_{f(p)} N$ :

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \alpha &= \tilde{f} \circ \phi \circ \alpha \quad \text{и} \quad \psi \circ f \circ \beta = \tilde{f} \circ \phi \circ \beta \\ (\psi \circ (f \circ \alpha))'(0) &= d_{\phi(p)} \tilde{f}((\phi \circ \alpha)'(0)) = d_{\phi(p)} \tilde{f}((\phi \circ \beta)'(0)) = (\psi \circ (f \circ \beta))'(0) \end{aligned} \quad \square$$

Нетрудно заметить, что  $(d_p f(v))_\psi = (d_{f(p)} \tilde{f})(v_\phi)$  в обозначениях из доказательства выше (и  $v = [\alpha]$ ).

**Следствие 1.2.1.**  $d_p f$  — линейное отображение.

## Лекция III

28 февраля 2024 г.

*Замечание.* Можно естественным образом определить дифференциал на всём пространстве  $Tf : TM \rightarrow TN$ . На вектор  $v \in T_p M$   $Tf$  действует понятным образом:  $v \mapsto d_p f(v)$ .

Если  $U \subset \mathbb{R}^n$ , то касательное пространство  $TU$  естественным образом отождествляется с  $U \times \mathbb{R}^n$ .

### 1.3 Гладкие векторные поля

Пусть  $M$  — гладкое многообразие, выберем произвольное подмножество  $A \subset M$ .

**Определение 1.3.1** (Непрерывное векторное поле на  $A$ ). Непрерывное отображение  $X : A \rightarrow TM$ , такое, что  $\forall p \in A : X(p) \in T_p M$ .

**Определение 1.3.2** (Гладкое векторное поле на  $A$ ). Векторное поле  $X : A \rightarrow TM$ , такое, что  $\exists$  открытое  $U \subset M : U \supset A$ , и  $X$  продолжается на  $U$ , как гладкое векторное поле (то есть гладкое отображение, являющееся непрерывным векторным полем).

Для гладкого многообразия  $M$  будем обозначать пространство всех гладких векторных полей за  $\mathcal{X}(M)$ .

Пусть в  $M$  имеется карта  $(U, \phi)$ .

**Определение 1.3.3** (Координатное векторное поле, соответствующее  $i$ -й координате). Векторное поле  $V_i : U \rightarrow TM$ , такое, что  $d\phi(V_i) = e_i$  ( $V_i(p) = e_i$ ) **Или что-то похожее, я не очень понял**

**Лемма 1.3.1.** Пусть имеется открытое  $U \subset \mathbb{R}^n$ , и компактное  $K \subset U$ . Утверждается, что  $\forall V \supset K : \text{Cl } V \subset U \Rightarrow$  можно построить гладкую функцию  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , такую, что  $f|_K = 1$ ,  $f|_{\mathbb{R}^n \setminus V} = 0$ .

*Доказательство.* **На лекции шло без доказательства.**  $\mathbb{R}^n \setminus V$  замкнуто,  $d := \text{dist}(\mathbb{R}^n \setminus V, K) > 0$ , свернём  $\chi_{\text{todo}}$   $\square$

**Следствие 1.3.1.** Пусть  $V_i$  — координатное поле карты  $(U, \phi)$ . Тогда  $\forall K \subset U : \exists$  векторное поле  $\tilde{V}_i : \tilde{V}_i|_K = V_i, \tilde{V}_i|_{M \setminus U} \equiv 0$ .

Иными словами, всегда немного уменьшив карту, можно продолжить координатное векторное поле на всё многообразие.



## 1.4 Гладкие подмногообразия

Пусть  $M^m$  — гладкое многообразие размерности  $m$ .

**Определение 1.4.1** (Гладкое подмногообразие размерности  $n \leq m$ ). Подмножество  $N \subset M$ , такое, что  $\forall x \in N : \exists$  выпрямляющая карта  $(U, \phi)$  (карта на  $M$ ), такая, что  $U \ni x$  и  $\phi(U) \cap \mathbb{R}^n = \phi(N \cap U)$ .

Здесь имеется в виду, что  $\phi$  действует в  $\mathbb{R}^m$ , где как-то введены координаты, и имеется определённое вложение  $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ .

**Утверждение 1.4.1.** На  $N$  каноническим образом индуцируется гладкая структура из  $M$ . Карты на  $N$  — сужения выпрямляющих карт (карте  $(U, \phi)$  отвечает карта  $N \cap U, \psi$ , где  $\psi : N \cap U \rightarrow \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\psi(x) = \phi(x)$ ).

*Доказательство.* Согласованность карт на  $N$  следует из согласованности карт на  $M$ .  $\square$

Пусть  $N^n, M^m$  — гладкие многообразия.

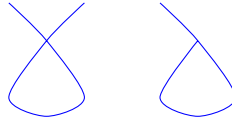
**Определение 1.4.2** (Погружение  $f : N \rightarrow M$ ). Гладкое отображение  $f : N \rightarrow M$ , такое, что  $\forall p \in N : d_p f$  — инъекция. Само  $f$  не обязано быть инъекцией.

Понятно, что такое возможно только при  $n \leq m$ .

**Определение 1.4.3** (Вложение  $f : N \rightarrow M$ ). Инъективное погружение  $f : N \rightarrow M$ .

*Примеры.*

- В случае поверхностей размерности 2 погружение подмногообразия размерности 1 — кривой — называлось регулярной параметризацией.
- Петля слева является погружением, но даже инъективная петля справа



// Петля является погружением, но даже девятка не является вложением

**Предложение 1.4.1.**

1. Погружение локально является вложением:  $\forall x \in N : \exists U_x \ni x : f|_{U_x}$  — вложение.
2. Образ вложения — гладкое подмногообразие.

*С доказательством этого очевидного предположения возникли неожиданные проблемы, я что-то написал ниже, за правильность не ручаюсь.*

*Доказательство.* Достаточно доказать для случая открытых  $N \subset \mathbb{R}^n$ ,  $M = \mathbb{R}^m$ , потому что карты — диффеоморфизмы, и определения сохраняются при диффеоморфизмах.

Зафиксируем  $x \in N$ . Введём координаты в  $\mathbb{R}^m$ , выделив первые  $n$  координат, так, чтобы подпространство, натянутое на них, совпадало с  $d_x f(\mathbb{R}^n)$ .

Также домножим пространство, содержащее  $N$ , на  $\mathbb{R}^{m-n}$ .

**Лемма 1.4.1.** Существует  $W \ni x, W' \ni f(x), \phi : W \rightarrow W' : \phi|_{N \cap W} = f$  ( $W \in \mathbb{R}^m, W' \in \mathbb{R}^m$ ).

*Доказательство леммы.*

Обозначим координаты в  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$  за  $(\xi, \zeta)$ , и определим  $\phi(x + \xi, \eta) = f(x) + f(\xi) + (0, \eta)$ . Действительно, дифференциал  $d_x \phi = (df, \text{id})$  невырожден.

По теореме об обратной функции  $\exists W : \phi|_W$  — диффеоморфизм.  $\square$

1. Образ  $f|_{N \cap W}$  — подмногообразие  $W \cap \mathbb{R}^n \subset N$ .  $\phi^{-1}|_{W'}$  — выпрямляющая карта,
2.  $\phi$  — гомеоморфизм на образ  $\Rightarrow f|_{N \cap W}$  — топологическое вложение и гомеоморфизм. Значит, локально погружение — вложение.
3. Так как  $f$  — топологическое вложение, то  $f(N)$  — подмногообразие.

□