

Алгебра. Неофициальный конспект

Лектор: Алексей Владимирович Степанов
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

1	Гомологическая алгебра	2
1.1	Абелевы категории	2
1.2	Комплексы	4
1.3	Гомологии	5
1.4	Функторы между абелевыми категориями	8
1.5	Резольвенты	11
1.6	Резольвенты. Левый производный функтор	12
1.6.1	Длинная точная последовательность левых производных функторов	14
1.7	Производные функторы для \otimes	17
1.8	Производные функторы для Hom	18
1.9	Гомологии и когомологии групп	19
2	Теория Галуа	21
2.1	Базовые понятия про расширения полей	21
2.1.1	Алгебраическое замыкание одного поля в другом	22
2.1.2	Поле разложения	23
2.1.3	Сепарабельность	27
2.1.4	О сепарабельных расширениях	31
2.2	Соответствие Галуа	31

Глава 1

Гомологическая алгебра

Лекция I 12 февраля 2024 г.

1.1 Абелевы категории

Напомним некоторые определения из предыдущей лекции.

Определение 1.1.1 (Предаддитивная категория \mathcal{A}). $\forall A, B \in \mathcal{A} : \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ образует абелеву группу, и везде, где определена, выполнена дистрибутивность:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad (\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

Определение 1.1.2 (Бипроизведение). Такая диаграмма, что

$$A \begin{array}{c} \xleftarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\iota_1} \end{array} C \begin{array}{c} \xleftarrow{\pi_2} \\ \xrightarrow{\iota_2} \end{array} B$$

1. $\pi_1 \iota_1 = \text{id}_A$.
2. $\pi_2 \iota_2 = \text{id}_B$.
3. $\iota_2 \pi_2 + \iota_1 \pi_1 = \text{id}_C$.
4. $\pi_2 \iota_1 = 0$.
5. $\pi_1 \iota_2 = 0$.

Определение 1.1.3 (Аддитивная категория). Предаддитивная категория с финальным объектом и произведениями (любых двух объектов).

Эквивалентно, существуют инициальный объект и копроизведения, эквивалентно существуют нулевой объект и бипроизведения.

Определение 1.1.4 (Предабелева категория). Аддитивная категория, в которой у всех морфизмов есть ядро и коядро.

Определение 1.1.5 ((Ко)нормальный мономорфизм (эпиморфизм)). Он является (ко)эквалайзером (какой-то, неважно какой, пары стрелок).

Определение 1.1.6 (Абелева категория). Предабелева категория, в которой все мономорфизмы нормальны.

Пусть \mathcal{C} — категория. Вспомним про категорию стрелок $Arr\mathcal{C}$, в которой объекты — стрелки из $Mod(\mathcal{C})$, множество морфизмов между ϕ, ψ — это

$$Mor_{Arr\mathcal{C}}(\phi, \psi) = \{(\alpha, \beta) | \alpha : source(\phi) \rightarrow source(\psi), \beta : target(\phi) \rightarrow target(\psi), \beta\phi = \psi\alpha\}$$

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\phi} & \bullet \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \bullet & \xrightarrow{\psi} & \bullet \end{array}$$

Далее будем обозначать за $\ker f$ ядро стрелки, как уравнитель стрелки и нуля, а за $Ker f := source(\ker f)$ — объект (в конкретных категориях типа $mod-R$ это докатегорное понятие ядра — подмодуль без стрелки-вложения).

Лемма 1.1.1. \ker, coker — функторы $Arr\mathcal{A} \rightarrow Arr\mathcal{A}$.

Доказательство. Достаточно доказать для ядер, для коядер двойственно.

Определим действие \ker на морфизмах:

$$\begin{array}{ccccc} Ker f & \xrightarrow{\ker f} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow \exists! \phi & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ Ker f' & \xrightarrow{\ker f'} & A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

$f \cdot \ker f = 0 \Rightarrow \beta \cdot f \cdot \ker f = 0 \Rightarrow f' \cdot \alpha \cdot \ker f = 0$, откуда по универсальному свойству ядра $\exists! \phi : \ker f' \cdot \phi = \alpha \cdot \ker f$.

Положим $\ker(\alpha, \beta) = (\phi, \alpha)$. Далее несложно проверить, что данное определение сохраняет композицию и id . \square

Определение 1.1.7 (Точный функтор). Функтор, сохраняющий ядра и коядра.

Интересный факт (Теорема Фрейда — Митчелла (Freyd — Mitchell)). Для любой малой абелевой категории \mathcal{A} : $\exists R \in Ring$ (необязательно коммутативное кольцо с единицей) и строгий, полный, точный функтор $\mathcal{A} \rightarrow mod-R$.

Предложение 1.1.1. Для всякого морфизма $f : A \rightarrow B$ найдётся пунктирная стрелка, делающая диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccccccc} Ker f & \xrightarrow{\ker f} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\text{coker } f} & CoKer f \\ & & \downarrow \text{coker } \ker f & & \uparrow \ker \text{coker } f & & \\ & & CoKer \ker f & \xrightarrow{\exists!} & Ker \text{coker } f & & \end{array}$$

Более того, в абелевой категории эта стрелка — изоморфизм.

Доказательство. Следует из эпи-моно разложения, доказанного на прошлой лекции, или из теоремы Митчелла.

Само построение пунктирной стрелки получается из универсальных свойств, а доказательство того, что это — изо — непростое. \square

Лемма 1.1.2. Пусть \mathcal{C} — полная подкатегория в абелевой категории \mathcal{A} . Следующие условия равносильны

- \mathcal{C} является абелевой.
- — $0_{\mathcal{A}} \in \mathcal{C}$, здесь, как обычно, $0_{\mathcal{A}}$ — нулевой объект категории \mathcal{A} .
- — \mathcal{C} содержит бипроизведение любых двух своих объектов.

– Ядра и коядра (взятые в \mathcal{A}) любых морфизмов из \mathcal{C} лежат в \mathcal{C} .

Доказательство.

\Leftarrow . Очевидно.

\Rightarrow . Чуть сложнее, доказывать не будем (и использовать тоже). \square

1.2 Комплексы

Если противное не оговорено, то всё происходит в абелевой категории \mathcal{A} , большими буквами обозначены объекты данной категории, маленькими — морфизмы.

Определение 1.2.1 (Комплекс). Такая диаграмма, что $\forall k \in \mathbb{Z} : d_k \cdot d_{k+1} = 0$.

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{d_n} C_n \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots$$

Альтернативно, комплекс можно рассматривать, как функтор из категории (\mathbb{Z}, \geq) (полученной из частично упорядоченного множества) в \mathcal{A} (при котором образ композиции любых двух нетождественных морфизмов нулевой). Таким образом, комплексы — полная подкатегория в категории этих функторов.

Ещё один, следующий, взгляд на комплексы работает только для конкретной категории, уже вложенной в R -модули.

Определение 1.2.2 (Градуированный объект). $C_\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C_n$ с морфизмом $d : C_\bullet \rightarrow C_\bullet$, таким, что $d(C_n) \subset C_{n+p}$ для некоторой фиксированной *степени объекта* p (чаще всего она равна ± 1).

Определение 1.2.3 (Дифференциальный модуль). Градуированный объект (C_\bullet, d) со свойством $d^2 = 0$.

Определение 1.2.4 (Комплекс). Дифференциальный модуль степени -1 .

При развороте стрелок получается дифференциальный модуль степени $+1$, также известный, как *кокомплекс*:

$$\cdots \xleftarrow{d^{n+2}} C^{n+1} \xleftarrow{d^{n+1}} C^n \xleftarrow{d^n} C^{n-1} \xleftarrow{d^{n-1}} \cdots$$

Предостережение. У кокомплекса несколько другая нумерация стрелок, но мы их практически не будем использовать.

Определение 1.2.5 (Сдвиг комплекса (C_\bullet, d) на $p \in \mathbb{Z}$). Комплекс $(C[p]_\bullet, d[p])$, где $C[p]_n = C_{n+p}$ и $d[p]_n = d_{n+p}$.

Иногда при сдвиге комплекса определяют $d[p]_n = (-1)^p d_{n+p}$, но мы так делать не будем.

Лекция II

19 февраля 2024 г.

Определение 1.2.6 (Морфизм дифференциальных модулей $\bigoplus A_n \rightarrow \bigoplus B_n$). Такое $f : \bigoplus A_n \rightarrow \bigoplus B_n$, что $f(A_n) \subset B_n$, и диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} A_{n+1} & \xrightarrow{d_n^A} & A_n \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ B_{n+1} & \xrightarrow{d_n^B} & B_n \end{array}$$

На языке абелевых категорий, надо рассматривать не одно отображение f , так как отношение $f(A_n) \subset B_n$ не выражается, а серию морфизмов $f_n : A_n \rightarrow B_n$.

Для всякого морфизма f коммутативна диаграмма в категории комплексов:

$$\begin{array}{ccc} A[1] & \xrightarrow{d^A} & A \\ \downarrow f[1] & & \downarrow f \\ B[1] & \xrightarrow{d^B} & B \end{array}$$

Если рассматривать комплексы, как функторы из категории (\mathbb{Z}, \geq) , то морфизмы между комплексами — естественные преобразования между функторами.

Теорема 1.2.1. Категория комплексов абелева.

Доказательство.

Лемма 1.2.1. Если \mathcal{C} — малая категория, \mathcal{A} — абелева, то $\text{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ — тоже абелева категория.

Доказательство леммы.

Нулевой объект — функтор 0 , сопоставляющий каждому объекту $0_{\mathcal{A}}$, и каждой стрелке — нуль-стрелку.

Для двух функторов \mathcal{F}, \mathcal{G} : $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(C) = \mathcal{F}(C) \oplus \mathcal{G}(C)$.

Если $\eta \in \text{Mor}_{\text{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{A})}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ (то есть η — естественное преобразование $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$), то $(\text{Ker } \eta)(C) = \text{Ker}(\eta_C)$.

ker определяется аналогично лемме (лемма 1.1.1). Аналогично с коядрами.

Далее по-хорошему надо проверить, что выполняются все универсальные свойства, но мы этого делать не будем. \square

Ссылаемся на (лемма 1.1.2).

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d_n^A} & A_n & \xrightarrow{d_{n-1}^A} & A_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{d_n^B} & B_n & \xrightarrow{d_{n-1}^B} & B_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} \oplus B_{n+1} & \xrightarrow{d_n^{A \oplus B}} & A_n \oplus B_n & \xrightarrow{d_{n-1}^{A \oplus B}} & A_{n-1} \oplus B_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Если $d^A \cdot d^A = 0$, и $d^B \cdot d^B = 0$, то (из теоремы Митчелла уж точно очевидно) $d^{A \oplus B} \cdot d^{A \oplus B} = 0$.

Ядра тоже являются комплексами, так как на языке конкретных категорий это просто подмодули. Двойственно с коядрами. \square

1.3 Гомологии

Дифференциал d является морфизмом комплексов $d : C[1] \rightarrow C$ (по-хорошему, $C[1]_{\bullet} \rightarrow C_{\bullet}$, но точку будем опускать):

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_n} & C_n & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow d_n & & \downarrow d_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{d_{n-1}} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Ниже мы по произвольному комплексу C строим новые комплексы.

Определение 1.3.1 (Циклы). Комплекс $Z = Z(C) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker } d[-1]$.

Определение 1.3.2 (Границы). Комплекс $B = B(C) \stackrel{def}{=} \text{Im } d[-1]$.

По определению, образ — это ядро коядра: $\text{Im } \phi \stackrel{def}{=} \text{Ker}(\text{coker } \phi)$. В абелевой категории канонически $\text{Im } \phi \cong \text{CoIm } \phi \stackrel{def}{=} \text{CoKer}(\text{ker } \phi)$.

На языке конкретных категорий, так как $d^2 = 0$, то $B \subset Z$, и можно определить фактормодуль $H := Z/B$ — *гомологии*.

То же самое можно сказать на языке универсальных свойств, хотя в будущем мы, ссылаясь на теорему Митчелла, будем всё писать исключительно в терминах элементов.

$$\begin{array}{ccccccc} Z[1] & \xrightarrow{z[1]} & C[1] & \xrightarrow{d} & C & \xrightarrow{d[-1]} & C[-1] \\ & & \downarrow b & \searrow \alpha & \uparrow z & & \\ & & B & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\text{coker } \beta} & H \xrightarrow{\quad} 0 \end{array}$$

Построение H в терминах универсальных свойств. Так как $d[-1] \cdot d = 0$, то можно пропуститьсь через ядро: $\exists! \alpha : z \cdot \alpha = d$.

Далее, $z \cdot \alpha \cdot z[1] = d \cdot z[1] = 0$, а так как z — моно, то $\alpha \cdot z[1] = 0$. Значит, можно пропуститьсь через коядро, то есть $\exists! \beta : \beta b = \alpha$. Далее H определяется, как коядро β . \square

Следствие 1.3.1. В комплексах Z, B, H нулевые дифференциалы.

Доказательство. Из диаграммы следует, что в комплексе Z нулевые дифференциалы. B состоит из подмодулей в Z , H — из фактормодулей, понятно, что там дифференциалы тоже нулевые. \square

Примеры (Гомологии окружности).

- Рассмотрим окружность, как симплициальное множество: 

Построим $C_0 = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ — свободная абелева группа на $\{a, b\}$, $C_1 = \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ — тоже свободная абелева группа, но на образующих $\{x, y\}$. Вместо \mathbb{Z} можно было взять любое другое кольцо.

Все остальные элементы комплекса объявляются нулями.

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

Определим d_1 , как «конец минус начало»: $\begin{cases} d_1(x) = b - a, \\ d_1(y) = a - b \end{cases}$.

$$\text{Теперь } \begin{cases} Z_0 = C_0 \\ Z_1 = \mathbb{Z}(x + y) \end{cases} \quad \begin{cases} B_0 = \mathbb{Z}(b - a) \\ B_1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} H_0 = Z_0/B_0 = (\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b)/\mathbb{Z}(b - a) \cong \mathbb{Z} \\ H_1 = Z_1/B_1 = \mathbb{Z}(x + y) \cong \mathbb{Z} \end{cases}.$$

- Теперь триангулируем окружность по-другому:  $\begin{cases} d_1(x) = b - a, \\ d_1(y) = c - b, \\ d_1(z) = a - c \end{cases}$.

$$\text{Теперь } \begin{cases} Z_0 = C_0 \\ Z_1 = \mathbb{Z}(x + y + z) \end{cases}, \quad \begin{cases} B_0 = \mathbb{Z}(b - a) + \mathbb{Z}(c - b) \\ B_1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} H_0 \cong \mathbb{Z} \\ H_1 = \mathbb{Z}(x + y + z)/0 \cong \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ответ получился тот же самый, и это не случайно — есть теорема, что сингулярные/симплициальные гомологии (они равны для клеточных пространств) не зависят от триангуляции.

Упражнение 1.3.1. Триангулировать сферу, и вычислить гомологии. Дифференциал от треугольника ABC (ориентация — порядок вершин — важна) определяют, как его обход вдоль периметра: $AB + BC + CA$.

Теорема 1.3.1 (Длинная точная последовательность гомологий). Пусть имеется точная последовательность комплексов $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$.

Существует длинная точная последовательность гомологических групп

$$\dots \longrightarrow H' \longrightarrow H \longrightarrow H'' \longrightarrow H'[-1] \longrightarrow H[-1] \longrightarrow \dots$$

где связующий морфизм δ будет построен в доказательстве.

Более того, это всё функториально: если есть другая короткая точная последовательность, и морфизм между ними, то по отношению к ним найдётся естественный морфизм полученных длинных точных последовательностей гомологий.

Доказательство. Сначала строим δ .

Для $z \in Z_n''$, обозначим за $[z]$ класс z в H_n'' .

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A'_n & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{\pi} & A''_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d' & & \downarrow d & & \downarrow d'' \\ 0 & \longrightarrow & A'_{n-1} & \xrightarrow{i} & A_{n-1} & \longrightarrow & A''_{n-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Положим $\delta([z]) := [i^{-1}(d(\pi^{-1}(z)))]$, где $\pi^{-1}(z)$ — произвольный прообраз (он есть, так как π сюръективно).

Дальше надо проверить, что определение корректно, и последовательность точна. Это типичный диаграммный поиск, который невозможно записывать, и его несложно воспроизвести самостоятельно. \square

Лекция III

4 марта 2024 г.

Теперь приведём другое доказательство существования длинной точной последовательности гомологий, опирающееся на лемму о змее.

Лемма 1.3.1 (О змее). Пусть даны два комплекса $A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ и $0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B''$, и морфизм между ними. Тогда имеется длинная точная последовательность из пунктирных стрелок.

Короткие стрелки получены из действия соответственных функторов (ядра и коядра), а связующий гомоморфизм определён δ определён в доказательстве, и естественен (функториален).

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } \phi' & \dashrightarrow & \text{Ker } \phi & \dashrightarrow & \text{Ker } \phi'' & & \\ \downarrow \ker \phi' & & \downarrow \ker \phi & & \downarrow \ker \phi'' & & \\ A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi'' & & \delta \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' \\ \downarrow \text{coker } \phi' & & \downarrow \text{coker } \phi & & \downarrow \text{coker } \phi'' & & \\ & \dashrightarrow & \text{CoKer } \phi' & \dashrightarrow & \text{CoKer } \phi & \dashrightarrow & \text{CoKer } \phi'' \end{array}$$

Доказательство. Диаграммный поиск. \square

Теорема 1.3.2 (Длинная точная последовательность гомологий на бис). Пусть имеется точная последовательность комплексов $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$.

Существует длинная точная последовательность гомологических групп

$$\dots \longrightarrow H' \longrightarrow H \longrightarrow H'' \longrightarrow H'[-1] \longrightarrow H[-1] \longrightarrow \dots$$

где связующий морфизм δ будет построен в доказательстве.

Более того, это всё функториально.

Доказательство. Длинная точная последовательность комплексов означает наличие следующей коммутативной диаграммы (где строки точны, и столбцы — комплексы)

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & A'_n & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & A''_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d'_n & & \downarrow d_n & & \downarrow d''_n \\ 0 & \longrightarrow & A'_{n-1} & \longrightarrow & A_{n-1} & \longrightarrow & A''_{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Пусть циклы, границы и гомологии в комплексе A обозначаются $Z_\bullet, B_\bullet, H_\bullet$ соответственно, в $A' - Z'_\bullet, B'_\bullet, H'_\bullet$, в $A'' - Z''_\bullet, B''_\bullet, H''_\bullet$. Из коммутативности диаграммы B'_n вправо уходит в B_n , а B_n , в свою очередь — в B''_n .

Чтобы воспользоваться леммой о змее, построим следующую диаграмму, взяв коядро верхней строки, ядро — нижней, и дорисовав сверху — ядра вертикальных стрелок, снизу — коядра.

$$\begin{array}{ccccccc} & H'_n & & H_n & & H''_n & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & A'_n/B'_n & \longrightarrow & A_n/B_n & \longrightarrow & A''_n/B''_n & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \tilde{d}'_n & & \downarrow \tilde{d}_n & & \downarrow \tilde{d}''_n & \\ 0 & \longrightarrow & Z'_{n-1} & \longrightarrow & Z_{n-1} & \longrightarrow & Z''_{n-1} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H'_{n-1} & & H_{n-1} & & H''_{n-1} \end{array}$$

Обоснуем, каким образом получилась такая диаграмма. По определению $d_n(B_n) = \{0\}$, поэтому $A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1}$ пропускается через фактор, и получается отображение $\tilde{d}_n : A_n/B_n \rightarrow A_{n-1}$. Так как A — комплекс, то $\tilde{d}_n(A_n/B_n) \subset Z_{n-1}$, можно сузить codomain, получая \tilde{d}_n . По определению $H_n = Z_n/B_n$, поэтому действительно $H_n = \text{Ker}(d_n)$. В свою очередь, $H_{n-1} = Z_{n-1}/B_{n-1}$, и это действительно $\text{CoKer}(d_n)$.

Отображение $A_n \rightarrow A''_n$ было эпиморфизмом, после взятия коядра эпиморфизмом оно и осталось. Двойственно, $A'_{n-1} \rightarrow A_{n-1}$ было мономорфизмом, мономорфизмом оно и осталось.

Применяя лемму о змее, получаем утверждение теоремы. □

1.4 Функторы между абелевыми категориями

Пусть \mathcal{A}, \mathcal{B} — абелевы категории.

Определение 1.4.1 (Аддитивный функтор $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$). Такой функтор, что $\forall \alpha, \beta \in \text{Mor}(\mathcal{A}) : \mathcal{F}(\alpha + \beta) = \mathcal{F}(\alpha) + \mathcal{F}(\beta)$ всегда, когда определено.

Рассмотрим произвольную короткую точную последовательность $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ в \mathcal{A} . Подействовав на неё функтором \mathcal{F} , мы получим последовательность $0 \rightarrow \mathcal{F}(A') \rightarrow \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A'') \rightarrow 0$. Точность, вообще говоря, пропадёт, но если \mathcal{F} сохраняет точность в каком-то члене для всех таких коротких точных последовательностей, то функтор \mathcal{F} имеет соответствующее название:

1. Если всегда имеется точность в члене $\mathcal{F}(A)$, то \mathcal{F} — *полуточный функтор*.
2. Если всегда имеется точность в членах $\mathcal{F}(A')$ и $\mathcal{F}(A)$, то \mathcal{F} — *точный слева функтор*.
3. Если всегда имеется точность в членах $\mathcal{F}(A)$ и $\mathcal{F}(A'')$, то \mathcal{F} — *точный справа функтор*.
4. Если всякая короткая точная последовательность переходит в короткую точную последовательность, то \mathcal{F} — *точный функтор*.

Лемма 1.4.1. Пусть \mathcal{F} — аддитивный функтор. Следующие условия эквивалентны:

1. \mathcal{F} точен справа.
2. \mathcal{F} сохраняет нуль и коядра: $\mathcal{F}(0) = 0, \mathcal{F}(\text{coker}(\phi)) = \text{coker}(\mathcal{F}(\phi))$.
3. \mathcal{F} сохраняет конечные копределы.

Доказательство.

- (3) \Rightarrow (2) Коядро — конечный копредел, поэтому очевидно.
- (2) \Rightarrow (3) В свою очередь, копроизведение в абелевой категории — бипроизведение, а это «внутренний объект», поэтому всякий аддитивный функтор сохраняет его.
- (2) \Rightarrow (1) Короткая точная последовательность $A' \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{\psi} A'' \rightarrow 0$ характеризуется свойствами $\psi = \text{coker } \phi, 0 = \text{coker } \psi$.
- (1) \Rightarrow (2) Рассмотрим произвольный $\phi : A' \rightarrow A$. У него есть эпи-моно разложение $\phi = \mu \varepsilon$ (μ — моно, ε — эпи), и $\text{coker}(\mu \varepsilon) = \text{coker}(\mu)$, так как ε — эпиморфизм. Значит, без потери общности ϕ — мономорфизм.

Тогда последовательность $0 \rightarrow A' \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{\text{coker } \phi} \text{CoKer } \phi \rightarrow 0$ точна, и так как \mathcal{F} — точен справа, то $\mathcal{F}(\text{coker } \phi) = \text{coker}(\mathcal{F}(\phi))$.

Также точный справа функтор сохраняет нуль: $0 \rightarrow A \xrightarrow{\text{id}} A \rightarrow 0 \rightarrow 0$ переходит в $\mathcal{F}(A) \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(0) \rightarrow 0$. \square

Следствие 1.4.1. Левый сопряжённый функтор точен справа.

Доказательство. Он сохраняет копределы. \square

Копредел (который является левым сопряжённым к диагональному Δ) сохраняет копределы, значит, точен справа. Другими словами, копределы коммутируют.

К сожалению, в лемме о змее это не помогает в доказательстве того, что последовательность точна в члене $\text{Ker } \phi$, так как нет точной последовательности $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$.

При доказательстве существования длинной точной последовательности гомологий на бис, мы использовали, что коядро точно справа, ядро — точно слева.

Лекция IV

11 марта 2024 г.

Факт 1.4.1. Если точный справа функтор сохраняет мономорфизмы, то функтор точен. Двойственно, точный слева функтор, сохраняющий эпиморфизмы, точен.

Доказательство. Условия как раз означают, что короткая точная последовательность отображается в короткую точную последовательность. \square

Пусть имеются комплексы X_\bullet и X'_\bullet , и между ними морфизмы f, g .

Определение 1.4.2 (Морфизмы f и g гомотопны). Существует семейство морфизмов $s_k : X_{k-1} \rightarrow X'_k$, таких, что $f_n - g_n = d'_n s_{n+1} + s_n d_{n-1}$. При этом диаграмма ниже **не обязана** быть коммутативной.

$$\begin{array}{ccccccc} X_{n+1} & \xrightarrow{d_n} & X_n & \xrightarrow{d_{n-1}} & X_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-2}} & \cdots \xrightarrow{d_0} X_0 \\ \downarrow f_{n+1} & \downarrow g_{n+1} & \downarrow f_n & \downarrow g_n & \downarrow f_{n-1} & \downarrow g_{n-1} & \downarrow f_0 \\ X'_{n+1} & \xrightarrow{d'_n} & X'_n & \xrightarrow{d'_{n-1}} & X'_{n-1} & \xrightarrow{d'_{n-2}} & \cdots \xrightarrow{d'_0} X'_0 \end{array}$$

(Дополнительные стрелки в оригинале: s_{n+1} от X_{n+1} к X'_n , s_n от X_n к X'_{n-1} , s_{n-1} от X_{n-1} к X'_{n-2} , s_0 от X_0 к X'_{-1})

Пишут $f \simeq g$.

А почему это то же самое, что и гомотопность в топологии?

Теорема 1.4.1. Если два морфизма комплексов $f, g : X \rightarrow X'$ гомотопны, то $H(f) = H(g)$ (гомологии являются функтором, и действуют не только на комплексах, но и на морфизмах между ними).

Доказательство. Докажем, что $H(f - g) = 0$.

Рассмотрим $\bar{x} \in H_n(X)$. У него имеется прообраз $x \in Z_n$.

Заметим, что $H(f_n - g_n)(\bar{x}) = \overline{(f_n - g_n)(x)} = \overline{d'_n(s_{n+1}(x)) + s_n(d_{n-1}(x))}$. Первое слагаемое равно нулю, так как $d'_n(\cdots) \in B_n(X')$, а второе — так как $x \in \text{Ker } d_{n-1}$. \square

Замечание. Если $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ — аддитивный функтор, и $f \simeq g$ — морфизмы комплексов с объектами из \mathcal{A} , то (допуская вольность речи можно писать $\mathcal{F}(f)$) $\mathcal{F}(f) \simeq \mathcal{F}(g)$.

Факт 1.4.2. Быть гомотопными — отношение эквивалентности.

Доказательство. Рефлексивность: $\forall n : s_n = 0$. Симметричность: $s_n := -s_n$. Транзитивность:

$$\begin{cases} f_n - g_n = d'_n s_{n+1} + s_n d_{n-1} \\ g_n - h_n = d'_n r_{n+1} + r_n d_{n-1} \end{cases} \Rightarrow f_n - h_n = d'_n (s_{n+1} + r_{n+1}) + (s_n + r_n) d_{n-1} \quad \square$$

Определение 1.4.3 (Два комплекса X и X' гомотопически эквивалентны). Существуют морфизмы комплексов $f : X \rightarrow X'$ и $g : X' \rightarrow X$, такие, что $fg \simeq \text{id}_{X'}$ и $gf \simeq \text{id}_X$. Данные морфизмы f и g называют *гомотопическими эквивалентностями*.

Факт 1.4.3. Если X и X' гомотопически эквивалентны, то $H(X) \cong H(X')$.

Определение 1.4.4 (Квазиизоморфизм $f : X \rightarrow X'$). Морфизм f , такой, что $H(f)$ — изоморфизм.

Факт 1.4.4. Гомотопическая эквивалентность — квазиизоморфизм.

Определение 1.4.5 (Комплекс X ацикличен). X точен, то есть $H(X) = 0$.

Определение 1.4.6 (Комплекс X стягиваем). $\text{id}_X \simeq 0_X$.

Замечание. Из (теорема 1.4.1) следует, что стягиваемый комплекс ацикличен.

Обратное, вообще говоря, неверно. Стягиваемый комплекс сохраняется под действием функторов, а ациклический — может и не сохраниться.

1.5 Резольвенты

Пусть \mathcal{A} — абелева категория, $P \in \mathcal{A}$.

Определение 1.5.1 (Объект P проективен). $\forall \phi : A \rightarrow B: \phi \text{ — эпи} \Rightarrow \forall \psi : P \rightarrow B: \exists \theta : P \rightarrow A$, причём диаграмма коммутует. При этом θ должно найтись какое-то, не факт, что оно единственно.

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \swarrow \exists \theta & \downarrow \forall \psi & \\ A & \xrightarrow{\forall \phi} B & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Факт 1.5.1. В $\mathcal{S}et$ все множества — проективные объекты.

Теорема 1.5.1. Пусть $\mathcal{A} = R\text{-mod}$. Модуль P проективен $\iff P$ является прямым слагаемым свободного модуля.

Доказательство.

1. Свободный модуль проективен: пусть $\{p_\alpha\}$ — базис P . Определим $\theta(p_\alpha) = \psi(\phi^{-1}(p_\alpha))$, где прообраз выбран произвольно, и продолжим по линейности.
2. Прямое слагаемое проективного модуля проективно. Рассмотрим каноническое вложение $M \hookrightarrow M \oplus N$, где $M \oplus N$ — проективен.

$$\begin{array}{ccc} & M & \longrightarrow M \oplus N \\ & \downarrow \psi & \swarrow \text{---} \\ A & \longrightarrow B & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Определим $M \oplus N \rightarrow B, (m, n) \mapsto \psi(m)$. Так как $M \oplus N$ проективен, то найдётся $M \oplus N \rightarrow A$, и композиция $M \rightarrow M \oplus N \rightarrow A$ подходит в качестве морфизма, который должен найтись из определения проективного модуля.

3. Пусть P проективен. Возьмём свободный модуль F , сюръективно накрывающий P (например, подойдёт свободный модуль на всех элементах P , но на практике, конечно, удобно брать модуль поменьше).

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \swarrow \exists & \downarrow \text{id} & \\ F & \xrightarrow{\pi} P & \end{array}$$

Так как модуль проективен, то найдётся пунктирная стрелка. Значит, $F \cong P \oplus \text{Ker } \pi$ ($\forall f \in F : \pi^{-1}(f) = P(f) + \text{Ker } \pi$). \square

Примеры.

- Пусть $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Тогда $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ является R -модулем, но $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, значит, модули $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ все проективны.
- Можно предъявить проективный модуль, исходя из топологического факта о том, что шар нельзя причисать.

Определение 1.5.2 (Проективная резольвента модуля M). Ациклический комплекс вида $\cdots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, где P_i — проективные модули.

В будущем докажем, что любые две проективные резольвенты гомотопически эквивалентны.

Определение 1.5.3 (В категории \mathcal{A} достаточно много проективных объектов). $\forall A \in \mathcal{A}$ найдётся проективный объект $P \in \mathcal{A}$ вместе с эпиморфизмом $P \twoheadrightarrow A$.

Если в нашей категории \mathcal{A} достаточно много проективных объектов, то у всякого модуля M найдётся резольвента — надо просто подряд накрывать возникающие ядра.

Лекция V

18 марта 2024 г.

1.6 Резольвенты. Левый производный функтор

Зафиксируем некоторый аддитивный функтор $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, который обычно будет точен справа. Пусть у объекта $A \in \mathcal{A}$ имеется проективная резольвента, которую я выделил стрелками \rightsquigarrow .

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightsquigarrow & P_1 & \rightsquigarrow & P_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \rightsquigarrow & 0 \end{array}$$

Иными словами, проективная резольвента — это некоторый морфизм комплексов P и A_\bullet . Под комплексом A_\bullet подразумевается такой комплекс, в котором в нулевой градуировке сидит A , а в остальных — нули (следовательно, все дифференциалы — тоже нули).

Раз \mathcal{F} точен справа, то он сохраняет нуль. Применим \mathcal{F} к верхней строчке. Тогда получится комплекс вида

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}(P_1) \longrightarrow \mathcal{F}(P_0) \longrightarrow 0$$

Чуть ниже мы определим $L_n \mathcal{F}(A) := H_n \mathcal{F}(P)$ — левый производный функтор, измеряющий неточность \mathcal{F} — но пока, например, неясна корректность (независимость от резольвенты) такого определения.

Теорема 1.6.1. Пусть P_i проективные, сверху комплекс (и ноль в верхней строчке вообще-то неважен), снизу — точный комплекс.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \\ \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

Тогда найдутся пунктирные стрелки, и они определены с точностью до гомотопии.

Доказательство.

- Сначала построим $f_i : P_i \rightarrow Q_i$.
 $Q_0 \rightarrow B$ сюръективно, значит, найдётся f_0 , такое, что квадрат коммутативен.
- Далее по индукции: пусть построены f_0, \dots, f_n .

$$\begin{array}{ccccc} P_{n+1} & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & P_{n-1} \\ \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ Q_{n+1} & \longrightarrow & Q_n & \xrightarrow{d_{n-1}^Q} & Q_{n-1} \end{array}$$

Хочется заполнить стрелку $P_{n+1} \rightarrow Q_{n+1}$, воспользовавшись проективностью P_{n+1} . Для этого надо найти сюръективное $Q_{n+1} \rightarrow ?$. Так как внизу — точная последовательность, то $Q_{n+1} \rightarrow \text{Ker}(d_{n-1}^Q)$ подойдёт: оно сюръективно, так как $P_{n+1} \rightarrow P_{n-1}$ нулевой,

а квадрат $\begin{array}{ccc} P_n & \longrightarrow & P_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_n & \longrightarrow & Q_{n-1} \end{array}$ коммутативен. Тем самым, по определению проективного модуля $\exists f_{n+1}$.

- Теперь пусть имеются два морфизма комплексов, продолжающих f , f_i и g_i .

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A \\ & & f_1 \downarrow & \downarrow g_1 & f_0 \downarrow & \downarrow g_0 & \downarrow f \\ \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

Распишем разность: пусть $h_i := f_i - g_i$. Понятно, что $A \rightarrow Q_0$ надо взять нулевым.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & h_1 \downarrow & \swarrow s_0 & h_0 \downarrow & \swarrow 0 & \downarrow 0 \\ \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

s_0 строится по основному свойству проективного модуля P_0 : ведь $h_0(P_0) \subset \text{Ker}(d_{-1}^Q) = \text{Im } d_0^Q$

- Далее индукция. Пусть построены s_0, \dots, s_{n-1} , строим s_n .

$$\begin{array}{ccccccc} & & P_n & \xrightarrow{d_{n-1}^P} & P_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-2}^P} & P_{n-2} \\ & \swarrow s_n & \downarrow h_n & \swarrow s_{n-1} & \downarrow h_{n-1} & \swarrow s_{n-2} & \\ Q_{n+1} & \xrightarrow{d_n^Q} & Q_n & \xrightarrow{d_{n-1}^Q} & Q_{n-1} & & \end{array}$$

Хочется, чтобы выполнялось $h_n = d_n^Q s_n + s_{n-1} d_{n-1}^P$, эквивалентно $d_n^Q s_n = h_n - s_{n-1} d_{n-1}^P$.

Надо проверить, что образ правой части лежит в $\text{Im}(d_n^Q)$, то есть $\text{Ker}(d_{n-1}^Q)$. Применим d_{n-1}^Q . Получим

$$d_{n-1}^Q h_n - d_{n-1}^Q s_{n-1} d_{n-1}^P = h_{n-1} d_{n-1}^P - (h_{n-1} - s_{n-2} d_{n-2}^P) d_{n-1}^P = 0$$

Тем самым, s_n действительно найдётся согласно свойству проективного модуля.

□

Следствие 1.6.1. Любые две проективные резольвенты одного и того же объекта гомотопически эквивалентны.

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & A_\bullet \\ g \uparrow & \downarrow f & \downarrow \text{id} \\ Q & \longrightarrow & A_\bullet \end{array} \quad \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & A_\bullet \\ \text{id} \downarrow & \downarrow fg & \downarrow \text{id} \\ P & \longrightarrow & A_\bullet \end{array}$$

Строим по только что доказанной теореме f, g , по теореме $fg \simeq \text{id}_Q$ и $gf \simeq \text{id}_Q$.

Таким образом, определение левого производного функтора L_n корректно.

С некоторой точки зрения «правильно» рассматривать категорию комплексов с точностью до гомотопической эквивалентности, назовём её $\mathcal{H}\mathcal{C}ompr(\mathcal{A})$: там объекты — $\text{Obj } \mathcal{A}$, а группа морфизмов $\text{Mor}_{\mathcal{H}\mathcal{C}ompr(\mathcal{A})}(P, Q) = \text{Mor}(\mathcal{C}ompr(\mathcal{A}))/\text{Ho}(P, Q)$, где $\text{Ho}(P, Q)$ — группа морфизмов, гомотопных 0.

Примеры (Что такое L_0 от точного справа функтора).

- Предположим, что \mathcal{F} точен справа. Тогда

$$\mathcal{F}(P_1) \longrightarrow \mathcal{F}(P_0) \longrightarrow \mathcal{F}(A) \longrightarrow 0$$

точна. $L_0 \mathcal{F}(A) = H_0(\mathcal{F}(P)) = \text{CoKer}(\mathcal{F}(P_1) \rightarrow \mathcal{F}(P_0))$. Если функтор точен справа, то $\text{CoKer}(\mathcal{F}(P_1) \rightarrow \mathcal{F}(P_0)) = \mathcal{F}(A)$.

Тем самым, $L_0 \mathcal{F} = \mathcal{F}$.

- Обратно, если $L_0\mathcal{F} = \mathcal{F}$, то \mathcal{F} сохраняет коядра, значит, точен справа. (По-хорошему, надо ещё проверить, что $L_0\mathcal{F}$ действует на морфизмах так же, но это банально).

Следствие 1.6.2. Если P_A, P_B — проективные резольвенты A, B соответственно, и $f : A \rightarrow B$, то $\exists \tilde{f} : P_A \rightarrow P_B$, делающий диаграмму коммутативной. Он определён однозначно с точностью до гомотопии.

$$\begin{array}{ccc} P_A & \longrightarrow & A_\bullet \\ \tilde{f} \downarrow & & f \downarrow \\ P_B & \longrightarrow & B_\bullet \end{array}$$

Здесь A_\bullet — комплекс, где A сосредоточен в нулевом члене.

Таким образом, морфизму f объектов из \mathcal{A} сопоставляется морфизм резольвент \tilde{f} , а он, в свою очередь, индуцирует морфизм гомологий $H_n(P_A) \rightarrow H_n(P_B)$. Значит, конструкция L функториальна.

1.6.1 Длинная точная последовательность левых производных функторов

Зафиксируем некоторый функтор \mathcal{F} . Далее мы исследуем $L_n\mathcal{F}$, для упрощения записи будем писать $L_n := L_n\mathcal{F}$.

Пусть имеется короткая точная последовательность $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ в \mathcal{A} . Построим длинную точную последовательность производных функторов. Это так говорится? Скорее всё-таки их значений на A, B, C

$$\cdots \rightarrow L_1(A) \rightarrow L_1(B) \rightarrow L_1(C) \rightarrow L_0(A) \rightarrow L_0(B) \rightarrow L_0(C) \rightarrow \cdots$$

Для получения такой штуки было бы неплохо заполучить точную последовательность резольвент $P_A \rightarrow P_B \rightarrow P_C$, причём не абы какую, а сохраняющую свою точность под действием любого аддитивного функтора. Оказывается, это сделать несложно, и в этом нам поможет лемма о подковке.

Лемма 1.6.1 (О подковке). Пусть P — проективный модуль, все строки и столбцы (состоящие из чёрных сплошных стрелок) точны.

$$\begin{array}{ccccccc} Q & \xrightarrow{\quad i \quad} & Q \oplus P & \xrightarrow{\quad \pi \quad} & P & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Утверждается, что диаграмму можно достроить до коммутативной, добавив зелёные пунктирные стрелки. Новые строки и столбцы также станут точны.

Доказательство. Так как P — проективен, а g — эпи, то найдётся сечение s такое, что $gs = h_C$.

$$\begin{array}{ccccccc} Q & \xrightarrow{\quad i \quad} & Q \oplus P & \xrightarrow{\quad \pi \quad} & P & & \\ \downarrow h_A & & \downarrow h_B & & \downarrow h_C & & \\ 0 \longrightarrow & A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B & \xrightarrow{\quad g \quad} & C & \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Определим стрелку h_B исходя из того, что квадраты должны в итоге получиться коммутативными. Из коммутативности левого квадрата $h_B(u, 0) = f(h_A(u))$. Из коммутативности правого треугольника $h_B(0, v) = h_C(v) = gs(v)$. Тем самым, подойдёт $h_B(u, v) := f(h_A(u)) + s(v)$.

При таком определении правый квадрат будет коммутативен: $g(s(v)) = h_C(\pi(u, v)) \stackrel{?}{=} g(h_B(u, v)) = g(s(v))$, так как $gf = 0$.

Также несложно убедиться, что построенный морфизм h_B — эпи (видимо, диаграммный поиск). \square

Теорема 1.6.2. Для короткой точной последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ существует точная последовательность резольвент $0 \rightarrow P_A \rightarrow P_B \rightarrow P_C \rightarrow 0$, точность которой сохраняется под действием любого аддитивного функтора.

Доказательство. Возьмём произвольные резольвенты P_A, P_C . Резольвенту P_B будем строить пошагово, по индукции. $(P_B)_0 := (P_A)_0 \oplus (P_C)_0$ строится прямым применением леммы о подкове.

Далее необходимо провести индукционный переход.

$$\begin{array}{ccccccc}
 (P_A)_{n+1} & \xrightarrow{\text{---}i\text{---}} & (P_A)_{n+1} \oplus (P_C)_{n+1} & \xrightarrow{\text{---}\pi\text{---}} & (P_C)_{n+1} & & \\
 \downarrow & & \downarrow d_n^B & & \downarrow & & \\
 0 \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-1}^A) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-1}^B) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-1}^C) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & (P_A)_n & \longrightarrow & (P_B)_n & \longrightarrow & (P_C)_n & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow d_{n-1}^A & & \downarrow d_{n-1}^B & & \downarrow d_{n-1}^C & \\
 0 \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-2}^A) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-2}^B) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-2}^C) & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Вычленим некоторый кусочек диаграммы, и попробуем применить лемму о подкове для получения d_n^B . Для этого необходимо потребовать от стрелки $\text{Ker}(d_{n-1}^B) \rightarrow \text{Ker}(d_{n-1}^C)$, чтобы она была эпиморфизмом.

Докажем последнее по индукции: короткая последовательность ядер $0 \rightarrow \text{Ker}(d_n^A) \rightarrow \text{Ker}(d_n^B) \rightarrow \text{Ker}(d_n^C) \rightarrow 0$ точна (так как ядро точно слева, то точность в остальных членах не вызывает сомнений, надо лишь проверить эпиморфность). В качестве базы здесь удобно применить лемму о змее:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & \text{Ker}(d_{-1}^A) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{-1}^B) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{-1}^C) & \xrightarrow{\text{---}} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & P_A & \longrightarrow & P_B & \longrightarrow & P_C & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow d_{-1}^A & & \downarrow d_{-1}^B & & \downarrow d_{-1}^C & \\
 0 \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

А индукционный переход я не знаю, ну, можно просто убедиться, используя определение d_n^B из леммы о подкове.

Тем самым, так как прямая сумма проективных проективна, то $(P_A)_{n+1} \oplus (P_C)_{n+1} \twoheadrightarrow \text{Ker}(d_{n-1}^B)$, и определение резольвенты B по индукции корректно.

Точность $0 \rightarrow P_A \rightarrow P_B \rightarrow P_C$ под действием всякого аддитивного функтора, конечно, сохраняется, так как $(P_B)_n = (P_A)_n \oplus (P_C)_n$, а аддитивные функторы сохраняют бипроизведение. \square

Следствие 1.6.3 (Длинная точная последовательность производных функторов). Для короткой точной последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ имеет место длинная точная последовательность

$$\cdots \rightarrow L_1(A) \rightarrow L_1(B) \rightarrow L_1(C) \rightarrow L_0(A) \rightarrow L_0(B) \rightarrow L_0(C) \rightarrow \cdots$$

Доказательство. Из (теорема 1.6.2) найдётся точная последовательность проективных резольвент $0 \rightarrow P_A \rightarrow P_B \rightarrow P_C \rightarrow 0$. Применяя \mathcal{F} , получаем точную последовательность $0 \rightarrow \mathcal{F}(P_A) \rightarrow \mathcal{F}(P_B) \rightarrow \mathcal{F}(P_C) \rightarrow 0$.

Возьмём у $\mathcal{F}(P_A), \mathcal{F}(P_B), \mathcal{F}(P_C)$ гомологии. Составленная из них длинная точная гомологическая последовательность как раз и сконструирует искомую длинную точную последовательность левых производных функторов. \square

Замечание. Если \mathcal{F} точен справа, то длинная точная последовательность производных функторов обрывается эпиморфизмом: $L_0(B) \rightarrow L_0(C) \rightarrow 0$.

Лекция VI

25 марта 2024 г.

Рассмотрим формальное обобщение производных функторов.

Пусть имеется семейство $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ функторов $\mathcal{F}_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$.

Определение 1.6.1 ((Левая) связанная последовательность функторов). Такая последовательность функторов $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, что для любой точной последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ существует функториальная длинная точная последовательность

$$\cdots \rightarrow \mathcal{F}_1(A) \rightarrow \mathcal{F}_1(B) \rightarrow \mathcal{F}_1(C) \rightarrow \mathcal{F}_0(A) \rightarrow \mathcal{F}_0(B) \rightarrow \mathcal{F}_0(C)$$

Пример. Последовательность $\{L_i \mathcal{F}\}_{i \in \mathbb{N}}$ — связанная последовательность функторов.

Заметим, что $\forall i > 0 : L_i \mathcal{F}(P) = 0$, если P проективен. Это очевидным образом следует из существования резольвенты $0 \rightarrow P \rightarrow P \rightarrow 0$. Если \mathcal{F} точен справа (а мы это предполагаем), то он сохраняет ноль. Тогда $L_n \mathcal{F}$ — гомологии $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{F}(P) \rightarrow 0$, которые в нулевом члене — $\mathcal{F}(P)$, а в остальных — нулевые.

Оказывается, этого условия достаточно, чтобы определить связанную последовательность по нулевому элементу:

Теорема 1.6.3. Пусть $\{\mathcal{F}_i\}, \{\mathcal{G}_i\}$ — две связанные последовательности функторов, такие, что имеется естественный изоморфизм $\mathcal{F}_0 \cong \mathcal{G}_0$, и для любого проективного P : $\forall i > 0 : \mathcal{F}_i(P) = \mathcal{G}_i(P) = 0$.

Также предположим, что в \mathcal{A} достаточно много проективных объектов.

Тогда $\forall i : \mathcal{F}_i \cong \mathcal{G}_i$ — естественный изоморфизм.

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{A}$. Накроем A проективным, возьмём ядро, получим точную последовательность

$$0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow 0$$

Так как последовательности функторов — связаны — то имеется длинная точная последовательность:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = \mathcal{F}_1(P) & \longrightarrow & \mathcal{F}_1(A) & \longrightarrow & \mathcal{F}_0(M) & \longrightarrow & \mathcal{F}_0(P) \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ 0 = \mathcal{G}_1(P) & \longrightarrow & \mathcal{G}_1(A) & \longrightarrow & \mathcal{G}_0(M) & \longrightarrow & \mathcal{G}_0(P) \end{array}$$

Значит, имеется естественный изоморфизм ядер, $\mathcal{F}_1(A) \cong \mathcal{G}_1(A)$, тем самым, $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{G}_1$ (естественность — упражнение).

Теперь займёмся индукционным переходом:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = \mathcal{F}_i(P) & \longrightarrow & \mathcal{F}_i(A) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{i-1}(M) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{i-1}(P) = 0 \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ 0 = \mathcal{G}_i(P) & \longrightarrow & \mathcal{G}_i(A) & \longrightarrow & \mathcal{G}_{i-1}(M) & \longrightarrow & \mathcal{G}_{i-1}(P) = 0 \end{array}$$

Зажав $\mathcal{F}_i(A)$ и $\mathcal{F}_{i-1}(M)$ между двумя нулями, мы доказали, что все четыре ненулевых объекта изоморфны (естественность, опять же, доказывается несложно). \square

Следствие 1.6.4. Пусть \mathcal{F} точен справа (например $\mathcal{F} = _ \otimes M$, где M — фиксированный модуль). Пусть $\mathcal{F}_0 \cong \mathcal{F}$, где $\{\mathcal{F}_i\}$ — связанная последовательность функторов, такая, что для любого проективного $P : \mathcal{F}(P) = 0$.

По-прежнему предполагаем, что в \mathcal{A} достаточно много проективных объектов.

Тогда $\forall i \in \mathbb{N} : \mathcal{F}_i \cong L_i \mathcal{F}$.

1.7 Производные функторы для \otimes

Пусть R — необязательно коммутативное кольцо с единицей, $M \in \text{mod-}R, N \in R\text{-mod}$, напомним, что тогда $M \otimes_R N \in \mathcal{A}$.

Изучим производные функторы тензорного произведения (функтор тензорного произведения точен справа, так как он — левый сопряжённый к Hom). Обозначим $\text{LTor}_i(M, _) \stackrel{\text{def}}{=} L_i(M \otimes _)$, $\text{RTor}_i(_, N) \stackrel{\text{def}}{=} L_i(_ \otimes N)$.

Примеры.

- Изучим $\text{Tor}_1(M, R/aR)$, где R — коммутативная область целостности. Для R/aR несложно написать проективную резольвенту: $0 \rightarrow R \xrightarrow{a} R \rightarrow R/aR \rightarrow 0$ ($a(m) = am$).

Тензорно домножая на M , мы получаем $0 \rightarrow M \xrightarrow{m \otimes r \mapsto m \otimes ar} M \rightarrow M \otimes R/aR \rightarrow 0$. Так как кольцо коммутативное, то тензорное произведение — $\text{mod-}R$, поэтому $m \otimes r \mapsto m \otimes ar$ — тоже просто отображение умножения на a .

Так как естественно $M \otimes R/aR \cong M/aM \otimes R \cong M/aM$, то гомологии в среднем члене — нуль, а в левом члене — a -*кручение* в M , то есть $\{x \in M \mid ax = 0\}$.

Теорема 1.7.1. Имеет место естественный изоморфизм: $\forall i : \text{LTor}_i \cong \text{RTor}_i$.

Идея доказательства.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & P_1 \otimes Q_1 & \longrightarrow & P_0 \otimes Q_1 & \longrightarrow & M \otimes Q_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & P_1 \otimes Q_0 & \longrightarrow & P_0 \otimes Q_0 & \longrightarrow & M \otimes Q_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & P_1 \otimes N & \longrightarrow & P_0 \otimes N & \longrightarrow & M \otimes N \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Домножение на свободный объект — точный справа функтор — из дистрибутивности тензорного произведения. Домножение на проективный объект — точный справа функтор — опять же из дистрибутивности.

Все строки точны, кроме нижней, и все столбцы точны, кроме правого, в которых мы и хотим посчитать гомологии, и доказать, что они равны.

Заведём тотальный комплекс $\text{Tot}(M, N)_n := \bigoplus_{i=0}^n P_i \otimes Q_{n-i}$, и теперь надо определить дифференциал D . Необходимо, чтобы выполнялось требование $D^2 = 0$, поэтому абы какой не подойдёт.

Пусть $d_p : P \rightarrow P_{p-1}$, $d_q : Q_q \rightarrow Q_{q-1}$ — дифференциалы резольвент, определим

$$\begin{aligned}
 D_{p,q} : P_p \otimes Q_q &\rightarrow \text{Tot}(M, N)_{p+q-1} \\
 (x \otimes y) &\mapsto d_p(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes d_q(y)
 \end{aligned}$$

Теперь полный дифференциал $D_n = \bigoplus_{p+q=n} D_{p,q} : \text{Tot}(M, N)_{p+q} \rightarrow \text{Tot}_{p+q-1}$.

Упражнение 1.7.1. $D_{n-1} \cdot D_n = 0$.

Осталось показать, что гомологии нижней строки, как и гомологии правого столбца, совпадают с гомологиями тотального комплекса. \square

1.8 Производные функторы для Hom

Теперь разберёмся с функторами Hom — эти функторы являются правыми сопряжёнными к \otimes , поэтому точны слева.

Конкретнее, имеются ковариантный $\text{Hom}(M, _)$, и контравариантный $\text{Hom}(_, N)$.

Для изучения точных слева функторов будем строить последовательность правых сопряжённых функторов.

Определение 1.8.1 (Инъективный модуль Q). Такой модуль Q , что для любой инъекции $A \hookrightarrow B$, и для любого морфизма $A \rightarrow Q$, существует морфизм $B \rightarrow Q$ такой, что диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & B \\ \downarrow & \swarrow \exists & \\ Q & & \end{array}$$

Интересный факт. Инъективный модуль — делимый модуль, то есть $\forall r \in R \setminus \{0\}, q \in M : \exists x \in M : rx = q$.

В одну сторону доказательство очевидно — в качестве A надо взять кольцо R , а в качестве B — поле частных R .

В категории, где *достаточно много инъективных объектов*, двойственно проективной, строится инъективная резольвента, в которой коядро предыдущего морфизма вкладывается в следующий инъективный модуль:

$$0 \rightarrow N \rightarrow Q_0 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow \dots$$

Далее аналогично определяются правые производные функторы, в частности, имеется комплекс

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, Q_0) \rightarrow \text{Hom}(M, Q_1) \rightarrow \dots$$

Гомологии такого комплекса обозначают $\text{Ext}^i(M, N)$.

Построив проективную резольвенту для $M: \dots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$. Применяя к этой последовательности контравариантный Hom, получаем $0 \rightarrow \text{Hom}(P_0, N) \rightarrow \text{Hom}(P_1, N) \rightarrow \dots$. Гомологии этого комплекса обозначают $\text{Ext}^i(M, N)$ (это уже другой Ext, но они, как и Tor, естественно изоморфны, доказательство абсолютно аналогично)

Название Ext происходит от extensions, элементы Ext^1 находятся в биекции с классами коротких точных последовательностей $0 \rightarrow M \rightarrow ? \rightarrow N \rightarrow 0$. В качестве среднего члена всегда подойдёт $M \oplus N$, но, может быть, и ещё что-то, и за это отвечает Ext.

Для функторов Ext более высокой степени надо брать более длинные последовательности.

Лекция VII

1 апреля 2024 г.

Пусть $M, N \in \text{mod-}R$.

Определение 1.8.2 (Расширение N при помощи M). Точная последовательность $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0$.

Морфизм расширений $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0$ и $0 \rightarrow M \rightarrow X' \rightarrow N \rightarrow 0$ — такая стрелка $X \rightarrow X'$, что два получившихся треугольника коммутативны.

Теорема 1.8.1. $\text{Ext}^1(M, N)$ естественно изоморфен множеству классов изоморфизмов расширений N при помощи M .

Доказательство. Рассмотрим расширение $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0$. Запишем длинную точную последовательность для $\text{Ext}^1(_, N)$ и данной короткой точной последовательности.

$$\text{Ext}^1(N, M) \longleftarrow \text{Hom}(M, M) \longleftarrow \text{Hom}(X, M) \longleftarrow \text{Hom}(N, M) \longleftarrow 0$$

Теперь построим $x \in \text{Ext}^1(N, M) \cong \text{Ext}^1(M, N)$, как образ $\text{id} \in \text{Hom}(M, M)$.

Теперь построим стрелку обратно: накроем N проективным объектом: $0 \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow 0$.

$$0 = \text{Ext}^1(P, M) \longleftarrow \text{Ext}^1(N, M) \longleftarrow \text{Hom}(A, M) \longleftarrow \text{Hom}(P, M) \longleftarrow \text{Hom}(N, M)$$

Так как домножение на проективный модуль — точный функтор, то $\text{Ext}^1(P, M) = 0$. Теперь пусть X — пушут диаграммы $M \xleftarrow{\beta} A \rightarrow P$. Следующая диаграмма будет коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & P & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & X & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Далее можно проверить, что в одну сторону эти отображения взаимно обратны:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 = \text{Ext}^1(P, M) & \longleftarrow & \text{Ext}^1(N, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(A, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(P, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(N, M) \\ & & \uparrow ? & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \text{Ext}^1(N, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(M, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(X, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(N, M) \end{array}$$

$\text{id} \in \text{Hom}(M, M)$ уходит вверх при $_ \cdot \beta$ в β , далее влево — в x по определению x . Если же отправить id вправо, то он тоже уйдёт в x . **Почему?** И надо ещё проверить, что $? = \text{id}$. \square

Далее идёт отступление про то, что быть определённым с точностью изоморфизма, и быть определённым — разные вещи, и я не справился это записать.

Если же хочется изучить всё кручение M , то оказывается, $\text{Tor}_1(M, F/R) = \{x \in M \mid \exists a \in R \setminus \{0\} : ax = 0\}$ (здесь F/R — фактор R -модулей). Здесь используется, что $F/R = \varinjlim R/aR$, значит, $\text{Tor}_1(F/R, M) = \varinjlim \text{Tor}_1(R/aR, M)$.

1.9 Гомологии и когомологии групп

Пусть G — группа, A — абелева группа, на которой действует G . Иными словами, A — $\mathbb{Z}[G]$ -модуль.

Рассматриваем \mathbb{Z} , либо как кольцо, либо как $\mathbb{Z}[G]$ -модуль с тривиальным действием G .

Определим гомологии $H_n(G, A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ (верхний индекс $\mathbb{Z}[G]$ указывает, что мы работаем в категории $\mathbb{Z}[G]$ -модулей). Также определим когомологии $H^n(G, A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^n(\mathbb{Z}, A)$.

Запишем проективную резольвенту по первому аргументу.

- Пусть P_n — свободный \mathbb{Z} -модуль с базисом $\{(g_0, \dots, g_n) \mid g_i \in G\}$. По совместительству P_n — свободный $\mathbb{Z}[G]$ -модуль с базисом $\{(1, g_1, \dots, g_n) \mid g_i \in G\}$ и действием $g \cdot (g_0, \dots, g_n) = (gg_0, \dots, gg_n)$.

- Теперь определим гомоморфизмы.

$$\cdots \longrightarrow P_0 = \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Граничные гомоморфизмы определены так: $d_n(g_0, \dots, g_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (g_0, \dots, \widehat{g_i}, \dots, g_n)$. Несложно проверить, что $d_{n-1} \cdot d_n = 0$.

- Посчитаем нулевые гомологии и когомологии группы G . $H_0(G, A) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$.

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[G]/I_G$, где $I_G = \text{Ker}(\phi)$, здесь $\phi : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$ — \mathbb{Z} -линейный гомоморфизм аугментации, определённый на базисе $g \mapsto 1$. Иными словами, $I_G = \langle g - 1 | g \in G \rangle = \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g \cdot g \mid \sum_{g \in G} \alpha_g = 0 \right\}$, все суммы финитные.

Тем самым, $H_0(G, A) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \cong A/(I_G A)$ — *коинварианты*. $I_G A = \langle ga - a | g \in G, a \in A \rangle$.

- Теперь посчитаем когомологии. $H^0(G, A) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$. Всякому гомоморфизму $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ можно $\phi(1)$. Из G -линейности $\forall g \in G : \phi(1) = \phi(g \cdot 1) = g \cdot \phi(1)$, значит, $\phi(1) \in A^G \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A | \forall g \in G : ga = a\}$ — *инварианты*. Значит, нулевые когомологии — инварианты.

- $H_1(G, \mathbb{Z}) = G^{\text{ab}} \stackrel{\text{def}}{=} G/[G, G]$.

- $H^1(G, A) = \text{Der}(G, A)$ — множество скрещённых гомоморфизмов.

Скрещенный гомоморфизм — это такое отображение $\phi : G \rightarrow A$, которое обладает свойством $\phi(gh) = g \cdot \phi(h) + \phi(g)$.

- $H_2(G, \mathbb{Z}) = ?$ Предположим, что имеется точная последовательность групп $0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1$, то есть $G \cong F/R$.

Тогда $H_2(G, \mathbb{Z}) = \frac{R \cap [F, F]}{[R, F]}$.

Если $[G, G] = G$ (G совершенна), то существует универсальное центральное расширение $\pi : S \twoheadrightarrow G$, то есть $\text{Ker}(\pi) \in C(S)$, и

$$\begin{array}{ccc} S & \twoheadrightarrow & G \\ & \searrow \exists! & \uparrow \forall \text{ центрального расширения} \\ & & H \end{array}$$

В этом случае $H_2(G, \mathbb{Z}) = \text{Ker} \pi$. Например, в случае $G = SL_n(F) : S = \text{St}_n(F)$ — *группа Стейнберга*. Ядро $\text{St}_n(F) \twoheadrightarrow SL_n(F)$ — это $K_{2,n}(F) = H_2(G, \mathbb{Z})$. Для $n \geq 5$ от поля ничего не зависит.

Глава 2

Теория Галуа

Лекция VIII

15 апреля 2024 г.

2.1 Базовые понятия про расширения полей

Мы будем изучать расширения полей, и базовое поле будем обозначать F (от английского Field), а расширенное — K (от немецкого Körper). Имеется теоретико-множественное включение $F \subset K$, и включение полей обозначается K/F (это не надо путать с факторкольцом, никаких факторов здесь не берётся, просто общепринятое обозначение).

K является векторным пространством над F , и $\dim_F K \stackrel{\text{def}}{=} [K : F]$ — *степень расширения*.

Для элемента $\alpha \in K$ поле $F(\alpha)$ — наименьшее подполе в K , содержащее F и α .

Лемма 2.1.1 (О простых расширениях). *Либо $F(\alpha) \cong F(t)$ — поле дробно-рациональных функций, оно же поле частных $K[t]$, его общий элемент имеет вид $\frac{p}{q}$ ($p \in F[t], q \in F[t]^*$).*

Либо $F(\alpha) \cong F[t]/(p)$, где $p \in F[t]$ — неприводимый. В этом случае $\deg p$ — степень расширения.

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм F -алгебр $\phi : F[t] \rightarrow F(\alpha), t \mapsto \alpha$.

- Если $\text{Ker } \phi = \{0\}$, то $\text{Im } \phi \cong F[t]$. Тем самым, $F(\alpha) \supset \text{Im } \phi$, а раз $F(\alpha)$ — поле, то оно содержит и поле частных $Q(\text{Im } \phi) \cong Q(F[t])$.

Так как $F[t]$ — наименьшее подполе, то $F(\alpha) \cong F(t)$.

- Иначе, так как многочлены — PID — то $\text{Ker } \phi = p \cdot F[t]$, и $\text{Im } \phi \cong F[t]/(p)$. То, что p неприводим, легко видеть от противного: если $p = rs$, то один из r, s ассоциирован с p , иначе в кольце появляются делители нуля.

Тем самым, раз p неприводим, то (p) — максимальный идеал, откуда $\text{Im } \phi \cong F[t]/(p)$ — уже поле. Базисом $F[t]/(p)$ над K является, например, $(1, \bar{t}, \dots, \bar{t}^{\deg(p)-1})$.

□

В первом случае $F(\alpha) \cong F(t)$ элемент $\alpha \in K$ называется *трансцендентным*.

Во втором случае $F(\alpha) \cong F[t]/(p)$ элемент $\alpha \in K$ называется *алгебраическим*. В таком случае $p \in F[t]$ — *минимальный многочлен* α . Таким образом, $F(\alpha) = F[\alpha]$, где $F[\alpha]$ — наименьшее кольцо в K , содержащее F и α .

В случае расширений колец вместо слова алгебраический используют *целый* при дополнительном условии унитарности минимального многочлена.

Определение 2.1.1 (Алгебраическое расширение K/F). Такое расширение, что $\forall \alpha \in K$: α — алгебраический. Иначе ($\exists \alpha \in K$: α — трансцендентный) расширение называют трансцендентным.

Определение 2.1.2 (Конечное расширение F/K). Расширение конечной степени: $[K : F] < \infty$.

Конечные и алгебраические расширения тесно связаны между собой, но, конечно, существует бесконечное алгебраическое расширение. Например, $\mathbb{Q}(\sqrt{p} | p \in \mathbb{P})$ — имеет бесконечную степень над \mathbb{Q} , так как корни из простых чисел линейно независимы над \mathbb{Q} (что ещё надо обосновать).

Лемма 2.1.2. Пусть имеется композиция расширений $L/K/F$. Тогда $[L : F] = [L : K] \cdot [K : F]$.

Доказательство. Пусть $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$ — базис K над F , и $(b_\beta)_{\beta \in B}$ — базис L над K .

Тогда несложно видеть, что $(a_\alpha \cdot b_\beta)_{\alpha \in A, \beta \in B}$ — базис L над F . □

Теорема 2.1.1. Следующие условия равносильны

1. Расширение K/F конечно.
2. K/F — алгебраическое и конечнопорождённое.
3. $K = F[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, где все α_i алгебраичны над F .

Доказательство.

(3) \Rightarrow (1) Индукция по n .

База: $n = 0 \Rightarrow K = F$.

Переход: $F[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = F[\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}][\alpha_n]$. Так как α_n алгебраично над F , то оно алгебраично и над $F[\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}]$ (впрочем, степень трансцендентности при увеличении поля может стать меньше).

(1) \Rightarrow (2) **Лемма 2.1.3.** Любой элемент конечного расширения K/F алгебраический.

Доказательство леммы.

Рассмотрим $\alpha \in K$. Так как расширение конечно, то $1, \alpha, \alpha^2, \dots$ линейно зависимы. Выбрав линейную зависимость $\beta_0 + \beta_1 \alpha + \dots + \beta_d \alpha^d = 0$. Тогда $\beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_d t^d$ аннулирует α , то есть ядро ϕ из доказательства (лемма 2.1.1) ненулевое. □

Пусть $[K : F] = d$, значит, K имеет базис $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ над F . Тогда K порождено элементами $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ даже просто как векторное пространство, а не как F -алгебра □

(2) \Rightarrow (3) Тавтологично.

2.1.1 Алгебраическое замыкание одного поля в другом

Пусть имеется расширение полей K/F , тогда $\text{Int}_K F \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in K | \alpha \text{ алгебраичен над } F\}$ — целое (алгебраическое) замыкание F в K .

$\text{Int}_K F$ является полем: $\forall \alpha, \beta \in \text{Int}_K F$: $\alpha - \beta, \alpha + \beta, \alpha \cdot \beta, \frac{\alpha}{\beta}$ (последнее при $\beta \neq 0$) лежат в $F[\alpha, \beta]$, а это — конечное расширение согласно (теорема 2.1.1).

Пусть $X \subset K$, где по-прежнему K/F .

Определение 2.1.3 (X алгебраически независим над F). $\forall f \in F[t_1, \dots, t_m], \forall x_1, \dots, x_m \in X$ (где x_i попарно различны): $f(x_1, \dots, x_m) \neq 0$.

Иными словами, отображение из универсальной F -алгебры, порождённой элементами X в $F[X]$ (определённое на образующих $x \mapsto x$) имеет нулевое ядро.

Определение 2.1.4 (Линейная оболочка X над F). $\langle X \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \text{Int}_K F(X)$.

Определение 2.1.5 (X — (алгебраический) базис расширения K/F). Алгебраически независимое X такое, что $\langle X \rangle = K$. При этом $|X|$ называется *степенью трансцендентности* K/F .

Пример. В кольце $F(t)$: $\{t\}$ — базис трансцендентности.

Для алгебраического базиса X верны те же аксиомы, что и для базиса векторных полей:

1. todo
2. todo
3. todo

Я не смог найти эти аксиомы, а интересно, может кто-то другой подскажет, как они выглядят?

Теорема 2.1.2. Степень трансцендентности не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Аналогично подобному факту из линейной алгебры. □

2.1.2 Поле разложения

Пусть F — поле, $f \in F[t]$.

Определение 2.1.6 (Поле разложения f над F). Поле F_f/F , в котором f раскладывается на линейные множители, и вкладывающееся (**не факт**, что единственным образом) в любое другое поле, обладающее тем же свойством.

Примеры.

- $F = \mathbb{R}, f = t^2 + 1$. В этом случае $F_f \cong \mathbb{C}$.
- $F = \mathbb{Q}, f = t^3 - 2$. В этом случае $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ — не поле разложения, оно вкладывается в \mathbb{R} , а f в \mathbb{R} на линейные множители не раскладывается.

Надо присоединить ещё какой-то корень f , достаточно присоединить какой-то $\sqrt[3]{1}$, отличный от 1; это то же самое, что присоединить $\sqrt{-3}$. Тем самым, поле разложения $\mathbb{Q}_f \cong \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3}]$.

Теорема 2.1.3. Для любого $f \in F[t]$ существует его поле разложения.

Доказательство. Индукция по $\deg f$.

База: $\deg f = 1 \Rightarrow F_f = F$.

Переход: Пусть $f = pg$, где p — неприводим.

Пусть $E := F[t]/(p)$. В E : $\alpha := \bar{t} = t + (p)$ — корень p .

Над E : $f(t) = (t - \alpha) \cdot h(t)$ для некоторого h : $\deg h = \deg f - 1$. Положим $F_f := E_h$, E_h существует по индукционному предположению.

Теперь пусть K/F — другое поле, в котором f раскладывается на линейные множители. Сначала устроим вложение $E \hookrightarrow K$, отправив α в любой корень p . Такой корень найдётся в K , так как $F[t]$ — UFD.

При этом h раскладывается в K на линейные множители, по индукции E_h вкладывается в K . □

Пусть K/F и L/F — расширения полей. Тогда гомоморфизм $\phi : K \rightarrow L$ называется *гомоморфизмом полей над F* , если он оставляет F на месте. Все гомоморфизмы полей по определению сохраняют 1, в частности, любой гомоморфизм полей инъективен ($\phi(x) = \phi(y) \iff \phi(xy^{-1}) = \phi(1) \iff xy^{-1} = 1$).

Теорема 2.1.4. Пусть K — поле, в котором $f \in F[t]$ раскладывается на линейные множители. Тогда K — поле разложения $f \iff K \cong F[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, где α_i — корни f .

Доказательство. В одну сторону видно, что построенное в (теорема 2.1.3) поле разложения действительно порождено корнями f .

В другую сторону, можно устроить гомоморфизм $K \rightarrow F[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, он сюръективен (в образе лежит F , так как гомоморфизм — над F , и в образе лежат корни α_i , так как в них отравили корни многочлена f) и инъективен (любой гомоморфизм полей инъективен). \square

Лекция IX

16 апреля 2024 г.

Лемма 2.1.4. Пусть K/F и L/F — конечные расширения, и $K \rightarrow L, L \rightarrow K$ — гомоморфизмы над F . Тогда $K \cong L$ (оба отображения — изоморфизмы).

Доказательство. Достаточно убедиться, что оба гомоморфизма биективны, а это удобно проверить, рассматривая K и L , как векторные пространства над F . Так как гомоморфизмы полей — мономорфизмы, то $\dim_F K = \dim_F L$. \square

Пусть F — конечное поле ($|F| < \infty$). В поле есть единица, и так как поле конечное, то его характеристика ненулевая: в конечной аддитивной группе поля любой элемент, в том числе 1, имеет конечный порядок. Пусть p — эта характеристика. Так как поле — область целостности, то $p \in \mathbb{P}$.

Тем самым, в F вкладывается поле из p элементов, изоморфное факторкольцу $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Обозначим поле из p элементов за \mathbb{F}_p .

Лемма 2.1.5. Любое конечное поле характеристики p содержит p^n элементов, где $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Так как F — векторное пространство над \mathbb{F}_p , то $F \stackrel{\mathbb{F}_p\text{-Vect}}{\cong} \mathbb{F}_p^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. \square

Теорема 2.1.5. Для любого простого p и любого $n \in \mathbb{N}$ существует поле из p^n элементов. При этом все такие поля изоморфны (но изоморфизмов может быть несколько).

Доказательство.

- Обозначим $q := p^n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $f \in \mathbb{F}_p[t], f(t) = t^q - t$, и посмотрим на его поле разложения $(\mathbb{F}_p)_f$. Так как в \mathbb{F}_p : $q = 0$, то $f'(t) = qt^{q-1} - 1 = -1$, что показывает, что у f нет кратных корней. Тем самым, $F := (\mathbb{F}_p)_f$ содержит по меньшей мере q элементов — корни f .
- Рассмотрим корни f в его поле разложения $X := \{x \in F \mid x^q - x = 0\} \subset F$. Заметим, что X замкнуто относительно сложения и умножения:

$$\begin{cases} x^q = x \\ y^q = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (xy)^q = xy \\ (x+y)^q = x^q + y^q = x + y \end{cases}$$

Первое следует из коммутативности, второе — из того, что p делит все биномиальные коэффициенты $\binom{q}{k}$, кроме $\binom{q}{0}$ и $\binom{q}{q}$; $x \mapsto x^p$ — эндоморфизм Фробениуса из первого семестра, а $x^q = ((x^p)^\cdot)^p$.

Тем самым, $X \leq F$ — подкольцо в F . Так как $\forall x \in X : x^{q-2} = x^{-1}$, то это даже подполе. Более того, так как $1 \in X$, то X/\mathbb{F}_p — тоже расширение полей.

С другой стороны, X содержит все корни $t^q - t$, а F — поле разложения $t^q - t$, значит, имеется и гомоморфизм $F \rightarrow X$. X/\mathbb{F}_p и F/\mathbb{F}_p конечны, откуда (лемма 2.1.4) $X = F$.

- Пусть E — произвольное поле порядка p^n . Его характеристика равна p , значит, в него вкладывается \mathbb{F}_p . $|E^*| = q - 1$, значит по теореме Лагранжа (о порядке элемента в группе) $\forall x \in E : x^{q-1} = 1$. Тем самым, f раскладывается на линейные множители и в E , откуда опять же имеется вложение $F \hookrightarrow E$. Но $|F| = |E| = q$, значит, $F \cong E$. \square

Лемма 2.1.6. Пусть F — поле. Следующие условия эквивалентны:

1. $\forall f \in F[t] \setminus F : f$ раскладывается на линейные множители в F .
2. $\forall f \in F[t] \setminus F : f$ имеет корень в F .
3. $\forall f \in F[t] \setminus F : (f \text{ неприводим} \iff \deg f = 1)$.
4. Любое алгебраическое расширение F совпадает с F .
5. Любое конечное расширение F совпадает с F .

Доказательство. Тривиально.

- (1) \Rightarrow (2) Тавтологично.
- (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow следует из теоремы Безу (α корень $\iff t - \alpha$ — делитель), \Leftarrow следует из того, что все многочлены степени 1 неприводимы.
- (3) \Rightarrow (4) Пусть E/F — алгебраическое расширение, выберем $\theta \in E$, и найдём его минимальный многочлен. Он неприводим $\Rightarrow \deg f = 1$, то есть $\theta \in F$.
- (4) \Rightarrow (5) Тавтологично.
- (5) \Rightarrow (1) Рассмотрим $f \in F[t]$. $F_f = F \Rightarrow$ все корни f лежат в F . Так как f неприводим, то $\deg f = 1$. □

Определение 2.1.7 (Алгебраически замкнутое поле). Поле F , удовлетворяющее условиям из предыдущей леммы (лемма 2.1.6).

Лемма 2.1.7. Пусть K/F — алгебраическое расширение, и любой многочлен из $F[t]$ раскладывается на линейные множители в $K[t]$. Тогда K алгебраически замкнуто.

Доказательство. Пусть f — неприводимый в $K[t]$. Без потери общности f — унитарный: $f(t) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \dots + \alpha_0$. Построим поле $E := F[\alpha_0, \dots, \alpha_n]$, расширение E/F конечно.

f тем более неприводим в E , значит, можно рассмотреть поле $L := E[t]/(f)$, расширение L/E , а

стало быть и L/F тоже конечны.

$$\begin{array}{ccc}
 & K & L \\
 \text{алгебраично} \downarrow & \nearrow & \\
 E & & \\
 \text{конечно} \downarrow & & \\
 & F &
 \end{array}$$

(стрелка от E к L помечена словом «конечно»)

f имеет корень в L , назовём его β . В силу конечности β алгебраично над F , то есть $\exists g \in F[t] : g(\beta) = 0$. Согласно посылке леммы, g разложим на множители в $K[t]$, значит, имеется вложение $\phi : F_g \hookrightarrow K$ над E . Но $f(\beta) = 0 \Rightarrow f(\phi(\beta)) = \phi(f(\beta)) = \phi(0) = 0$, то есть f имеет корень в K . □

Интересный факт. Можно ослабить посылку: если K/F — алгебраическое расширение, и любой многочлен из $F[t]$ имеет корень в K , то K алгебраически замкнуто.

Лемма 2.1.8. Пусть L/F — расширение полей, причём L алгебраически замкнуто. Тогда $\text{Int}_L F$ тоже алгебраически замкнуто.

Доказательство. Рассмотрим $f \in F[t]$. В L он раскладывается на линейные множители $f(t) = (t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_n)$, где $\alpha_i \in L$. По определению целого замыкания $\alpha_i \in \text{Int}_L F$. □

Пример. Рассмотрим расширение \mathbb{C}/\mathbb{Q} . Целые алгебраические числа $\mathbb{A} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Int}_{\mathbb{C}} \mathbb{Q}$ — алгебраически замкнутое подполе в \mathbb{C} . Оно не совпадает с \mathbb{C} , так как \mathbb{C} континуально, а $\text{Int}_{\mathbb{C}} \mathbb{Q}$ счётно.

Определение 2.1.8 (Алгебраическое замыкание поля F). Алгебраическое расширение F , являющееся алгебраически замкнутым полем. Обозначается F^{alg} .

Теорема 2.1.6. У любого поля F существует алгебраическое замыкание.

Доказательство. Рассмотрим множество многочленов $F[t]$, как множество индексов, и введём множество переменных $X := \{x_f | f \in F[t]\}$. Далее рассмотрим кольцо многочленов от этих переменных $F[X]$, и профакторизуем его по идеалу $J := (f(x_f) | f \in F[t])$.

Лемма 2.1.9. *Этот идеал не совпадает со всем кольцом: $J \neq F[X]$.*

Доказательство леммы.

Пойдём от противного: $J = F[X] \Rightarrow 1 \in J$, то есть существует конечная линейная комбинация

$$g_1 f_1(x_{f_1}) + \dots + f_m f_m(x_{f_m}) = 1, \text{ где } f_i, g_i \in F[t] \quad (\Delta)$$

Корни конечного множества многочленов мы умеем присоединять: введём $f := f_1 \cdot \dots \cdot f_m$, в F_f у каждого из f_i есть корень, назовём его β_i . Теперь устроим гомоморфизм F -алгебр

$\phi : F[X] \rightarrow F_f, \begin{cases} x_{f_i} \mapsto \beta_i \\ x_g \mapsto 0 \end{cases}$, он определён согласно универсальному свойству кольца многочленов.

В образе (Δ) обращается в равенство $0 = 1$, но в F_f это, конечно, неверно. \square

Раз $J \not\subseteq F[X]$ не совпадает со всем кольцом, то можно взять максимальный идеал \mathfrak{m} , содержащий J , и не совпадающий со всем кольцом (лемма Цорна). Факторкольцо $E_1 := F[X]/\mathfrak{m}$ является полем, в котором образ переменной x_f — корень многочлена f .

К сожалению, не факт, что E_1 алгебраически замкнуто: (лемма 2.1.7) неприменима, так как неизвестно, алгебраично ли расширение E_1/F .

Обозначим $E_0 := F$, и устроим итерации, по E_i получая E_{i+1} согласно вышеописанной процедуре. Для цепочки вложений полей $E_0 \hookrightarrow E_1 \hookrightarrow E_2 \hookrightarrow \dots$ можно рассмотреть объединение с понятными операциями. Поле $\bar{F} := \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$ уже является алгебраически замкнутым полем (любой многочлен из $\bar{F}[t]$ имеет конечное количество коэффициентов, которые все лежат в каком-то E_N , а корень можно найти в E_{N+1}).

Теперь осталось положить $F^{\text{alg}} := \text{Int}_{\bar{F}} F$, оно алгебраически замкнуто, согласно (лемма 2.1.8). \square

Лекция X

22 апреля 2024 г.

Предложение 2.1.1. *Пусть E/F — алгебраическое расширение, и L/F — такое расширение, что $\forall f \in F[t]: f$ раскладывается на линейные множители в $L[t]$. Обозначим $K := \text{Int}_L F$. Тогда*

1. *Существует вложение $\phi : E \hookrightarrow L$ над F .*
2. *Для всякого вложения $\phi: \phi(E) \subset K$.*
3. *Если E алгебраически замкнуто, то $\phi(E) = K$.*

Доказательство.

1. Образует множество $\mathcal{X} := \left\{ (\tilde{F}, \phi) \mid F \subset \tilde{F} \subset E, \phi : \tilde{F} \hookrightarrow L \right\}$. На \mathcal{X} введём частичный порядок: $(F', \phi') \preceq (F'', \phi'') \iff F' \subset F'' \text{ и } \phi'|_{F'} = \phi'$.

\mathcal{X} непусто, так как $(F, F \hookrightarrow L) \in \mathcal{X}$.

Убедимся, что здесь применима лемма Цорна: если $(F_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ — цепь, то $\tilde{F} := \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha$

вместе с $\tilde{\phi}$ — верхняя грань (где $\tilde{\phi}$ определено так: и $\forall x \in \tilde{F} : \tilde{\phi}(x) := \phi_\alpha(x)$ для произвольного α , такого, что $x \in F_\alpha$).

Тем самым, имеется максимальный элемент $(\tilde{F}, \tilde{\phi}) \in \mathcal{X}$. Предположим, что $\tilde{F} \neq E$, то есть $\exists \theta \in E \setminus \tilde{F}$. Пусть $f \in F[t]$ — минимальный многочлен θ в F , и $g \in \tilde{F}[t]$ — минимальный многочлен θ над \tilde{F} .

Отождествим \tilde{F} с его образом $\tilde{\phi}(\tilde{F}) \subset L$ (ϕ инъективно, как гомоморфизм полей).

В L многочлен f раскладывается на линейные множители. Так как $g \mid f$, то $g \in L[t]$ тоже раскладывается на линейные множители, то есть $\exists \alpha \in L : g(\alpha) = 0$. Согласно универсальному свойству простого расширения: $\tilde{F}[\theta] \cong \tilde{F}[t]/(g)$, то есть $\exists! \psi : \tilde{F}[\theta] \rightarrow \tilde{F}[\alpha]$ — гомоморфизм полей над \tilde{F} , такой, что $\psi(\theta) = \alpha$.

2. Предположим, что ϕ существует. Корень $f \in F[t]$ переходит в корень, поэтому ϕ сохраняет множество алгебраических элементов, откуда $\phi(E \subset K$.
3. Рассмотрим $\beta \in K$, это корень некоторого унитарного многочлена $f \in F[t]$. В E многочлен f раскладывается на линейные множители $f(t) = (t - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (t - \alpha_n)$, где $\alpha_i \in E$. Применяя индуцированный $\phi : E[t] \rightarrow L[t]$ к данному разложению, получаем $f(t) = (t - \phi(\alpha_1)) \cdot \dots \cdot (t - \phi(\alpha_n))$. Подставляя β , получаем, нуль. Значит, $\beta = \phi(\alpha_i)$ для некоторого i . \square

Следствие 2.1.1. Любое алгебраическое расширение F вкладывается в алгебраическое замыкание F .

Следствие 2.1.2. Алгебраическое замыкание F вкладывается в любое алгебраически замкнутое поле, содержащее F .

Следствие 2.1.3. Алгебраическое замыкание единственно с точностью до не единственного изоморфизма.

2.1.3 Сепарабельность

Пусть F — поле, $f \in F[t]$.

Определение 2.1.9 (Сепарабельный многочлен f). f не имеет кратных корней в F^{alg} .

Так как кратные корни — это корни $\gcd(f, f')$, то условие сепарабельности эквивалентно условию $\gcd(f, f') = 1$.

Если $f = \prod_{i=1}^n f_i$, где f_i неприводимы, то f сепарабелен \iff все f_i различны и сепарабельны.

Неприводимый же многочлен на сепарабельность проверять легко: $\deg f' < \deg f$, поэтому при $\deg f > 0$: $\gcd(f, f') \neq 1 \iff f' = 0$ (что бывает только в конечной характеристике).

Теперь пусть E/F — алгебраическое расширение полей.

Определение 2.1.10 ($\alpha \in E$ сепарабелен над F). Минимальный многочлен α сепарабелен.

Определение 2.1.11 (Расширение E/F сепарабельно). $\forall \alpha \in E$: $\alpha \in E$ сепарабелен над F .

Интересный факт. $F = E^{\text{Aut}(E/F)} \iff E/F$ — сепарабельное расширение. Здесь $\text{Aut}(E/F)$ — автоморфизмы E , тождественные над F , и для $G \subset \text{Aut}(E/F)$: $E^G \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E \mid \forall g \in G : gx = x\}$ — множество точек, оставляемых под действием G на месте.

Примеры (Сепарабельные и несепарабельные расширения).

- Любое расширение поля характеристики нуль сепарабельно.
- Пусть $F := \mathbb{F}_p(t^p)$, $E := \mathbb{F}_p(t)$. Рассмотрим многочлен $x^p - t^p \in F[x]$. Он неприводим над F , так как даже свободный член неприводим, и видно, что все ассоциированные с t^p — не корни.

Но над E : $x^p - t^p = (x - t)^p$, то есть $x^p - t^p \in F[x]$ неприводим и несепарабелен. И действительно, $(x^p - t^p)' = px^{p-1} = 0$.

Определение 2.1.12 (Совершенное поле F). Любое алгебраическое расширение F сепарабельно.

Упражнение 2.1.1. Верно ли, что F совершенно \iff эндоморфизм Фробениуса $\text{Frob} : F \rightarrow F, x \mapsto x^p$ сюръективен?

Примеры.

- Если $\text{char } F = 0$, то F совершенно.
- Если $|F| < \infty$, то F совершенно.

Доказательство. Рассмотрим $\theta \in F^{\text{alg}}$. $|F[\theta]| = q^n$, где $q := |F|$. Тогда $\theta^{q^n-1} = 1$ (теорема Лагранжа для мультипликативной группы $F[\theta]^*$), то есть θ — корень $t^{q^n-1} - 1$.

Этот многочлен взаимно прост со своей производной: $(t^{q^n-1} - 1)' = (q^n - 1)t^{q^n-2} = -t^{q^n-2}$, и $\gcd(-t^{q^n-2}, t^{q^n-1} - 1) = 1$.

Минимальный многочлен θ делит $t^{q^n-1} - 1$, значит, он тоже не имеет кратных корней. \square

Лекция XI

29 апреля 2024 г.

Предложение 2.1.2. Пусть E/F — алгебраическое расширение полей. Следующие условия эквивалентны:

1. E/F несепабельно.
2. Минимальный многочлен некоторого $\theta \in E$ несепабелен над F .
3. $\exists f \in F[t]$ — неприводимый в $F[t]$, такой, что $f' = 0$, причём f имеет корень в E .
4. $\exists f \in F[t]$ — неприводимый в $F[t]$, такой, что f имеет кратный корень в E .
5. $\exists f \in F[t]$ — неприводимый в $F[t]$, такой, что $\exists g \in F[t] : f(t) = g(t^p)$, причём f имеет корень в E .

Доказательство. (1) \iff (2) \Rightarrow (3) \iff (4) \Rightarrow (5) очевидно (эквивалентность (3) \iff (4) соблюдена, так как для неприводимого многочлена $f : \gcd(f, f') \neq 1 \iff f' = 0$).

Докажем (5) \Rightarrow (2). Пусть $\theta \in E$ — корень f . Подставим: $f(\theta) = g(\theta^p) = 0$. Получили $(t - \theta^p) \mid g \Rightarrow (t - \theta)^p = t^p - \theta^p \mid f$. \square

На самом деле, данное предложение говорит, что кратность любого корня неприводимого несепабельного многочлена делится на p .

Упражнение 2.1.2. Сепарабельное расширение сепарабельного расширения сепарабельно.

Используя данное предложение, несложно доказать эквивалентность из (упражнение 2.1.1):

Доказательство. Если E/F несепабельно, то найдётся неприводимый многочлен $f = (\alpha_n t^{pn} + \alpha_{n-1} t^{p(n-1)} + \dots + \alpha_0) \in F[t]$. Но так как автоморфизм Фробениуса сюръективен, то $\forall \alpha_j \in F : \exists \beta_j \in F : \beta_j^p = \alpha_j$. Получаем

$$\alpha_n t^{pn} + \alpha_{n-1} t^{p(n-1)} + \dots + \alpha_0 = (\beta_n t^{pn} + \beta_{n-1} t^{p(n-1)} + \dots + \beta_0)^p$$

что противоречит неприводимости f . \square

Определение 2.1.13 (Расширение E/F нормально). Любой неприводимый многочлен из $F[t]$, имеющий корень в E , раскладывается на линейные множители в E

Пример. $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$ не нормально, так как $t^3 - 2$ не раскладывается на линейные множители даже в \mathbb{R} .

Любое расширение несложно сделать нормальным, присоединив все корни всех неприводимых многочленов из $F[t]$, имеющих корни в E .

Определение 2.1.14 (Расширение Галуа). Конечное сепарабельное нормальное расширение.

Условие конечности иногда отсутствует, но мы другими заниматься не будем.

Определение 2.1.15 (Группа Галуа расширения Галуа E/F). Группа автоморфизмов E , тождественных на F : $\text{Gal}(E/F) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Aut}(E/F)$.

Группа автоморфизмов расширения E/F имеет смысл и не для расширения Галуа, но там не используется запись Gal .

Теорема 2.1.7. Пусть имеются расширения K/F и E/F , и $f \in F[t]$. При этом K порождено некоторыми корнями многочлена f , а в E : f раскладывается на линейные множители. Пусть n — количество вложений $K \hookrightarrow E$ над F .

1. $0 < n \leq [K : F]$
2. Если f сепарабелен, то $n = [K : F]$.
3. Если f несепарабелен, свободен от квадратов в $F[t]$, и любой неприводимый в $F[t]$ сомножитель f имеет корень в K , то $n < [K : F]$.

Доказательство. Индукция по степени расширения $[K : F]$.

База: $[K : F] = 1 \iff K = F$.

Переход: разложим $f = f_1 \cdot \dots \cdot f_n$, где неприводимые $f_i \in F[t]$. $K \neq F \Rightarrow$ не все f_i имеют степень 1. Без потери общности f_1 имеет корень в $K \setminus F$. Если такой существует, то выберем f_1 , как несепарабельный многочлен, имеющий корень в K .

Зафиксируем какое-то вложение $F[t]/(f_1) \hookrightarrow K$, отождествим $F[t]/(f_1)$ со своим образом $\tilde{F} \leq K$. Используя универсальное свойство простого расширения, получаем, что количество вложений $\tilde{F} \hookrightarrow E$ (назовём его k) равно количеству корней f_1 в E .

Если f_1 сепарабелен, то в E он имеет $\deg f_1$ корней, иначе — строго меньше.

Пусть $\phi : \tilde{F} \hookrightarrow E$ — фиксированное вложение. Отождествим \tilde{F} и $\phi(\tilde{F})$. Расширение K/\tilde{F} порождено корнями f , он по-прежнему раскладывается на линейные множители в E .

$[K : \tilde{F}] \cdot [\tilde{F} : F] = [K : F] \Rightarrow [K : \tilde{F}] < [K : F]$. По индукционному предположению существует m вложений $K \hookrightarrow E$ над \tilde{F} , где $m \leq [K : \tilde{F}]$.

Так как столько вложений имеется для каждого ϕ , то $n = km \leq [\tilde{F} : F] \cdot [K : \tilde{F}] = [K : F]$. При этом, если f сепарабелен и свободен от квадратов, то несепарабельный f_1 , имеющий корень в K , найдётся, тогда $k < [\tilde{F} : F]$ и $n < [K : F]$. \square

Следствие 2.1.4. Пусть K/F и E/F — конечные расширения.

1. Количество вложений $K \hookrightarrow E$ над F не превосходит $[K : F]$.
2. Существует расширение L/E : имеется вложение $K \hookrightarrow L$ над F .
3. Если E/F — расширение Галуа, то количество вложений $K \hookrightarrow E$ над F равно либо $[K : F]$, либо 0.

Доказательство. Пусть $K = F[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, пусть f_1, \dots, f_n — минимальные многочлены $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ соответственно.

Избавимся от ассоциированных, оставив только уникальные, и положим f равному их произведению.

Положим $L := E_f$. Теперь выполнена посылка (теорема 2.1.7), откуда количество вложений $K \hookrightarrow L$ над F не 0, но и не более $[K : F]$.

Если существует вложение $K \hookrightarrow E$ над F , то все f_i имеют корни в E и K/F сепарабельно. Тогда $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ сепарабельны над F , то есть f сепарабелен над F . А из нормальности расширения

E/F все f_i раскладываются на линейные множители в E . Тем самым, $L = E$, и (теорема 2.1.7) завершает доказательство. \square

Следствие 2.1.5. Для расширения Галуа: $|\text{Gal}(E/F)| = [E : F]$.

Теорема 2.1.8 (Лемма Артина). Пусть E — поле, и $G \leq \text{Aut}(E)$, $|G| < \infty$. Обозначим $F := E^G \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in E \mid \forall g \in G : g\alpha = \alpha\}$.

Тогда $[E : F] = |G|$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $[E : F] \leq |G|$, обратное неравенство следует из (следствие 2.1.4).

Пусть $G = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$, где $\phi_1 = 1_G = \text{id}_E$. Пусть $m > n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in E$, докажем, что $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ линейно зависимы над F .

Заведём систему линейных уравнений $\left\{ \sum_{j=1}^m \phi_j(\alpha_i) x_i = 0 \right\}_{j=1}^n$ относительно переменных x_1, \dots, x_m .

В ней уравнений меньше, чем неизвестных, поэтому по теореме о размерности пересечения имеется ненулевое решение $\beta_1, \dots, \beta_m \in E$. Без потери общности $\beta_1 = 1$ (можно все β_i поделить на β_1).

Пусть в наборе β_1, \dots, β_m наименьшее количество ненулевых элементов. Если $\exists k : \beta_k \notin F$, то $\exists l : \phi_l(\beta_k) \neq \beta_k$. Вычитая решения, получаем противоречие. \square

Лекция XII

6 мая 2024 г.

Следствие 2.1.6. Для любой группы $G \leq \text{Aut}(E)$: $\text{Aut}(E/E^G) = G$.

Доказательство. Очевидно, $G \leq \text{Aut}(E/E^G)$. По лемме Артина $|G| = [E : E^G] \geq |\text{Aut}(E/E^G)| \geq |G|$, и равенство достигается только при $G = \text{Aut}(E/E^G)$ \square

Теорема 2.1.9 (Характеризация расширений Галуа). Пусть E/F — расширение полей. Следующие условия эквивалентны:

1. E/F — расширение Галуа.
2. E — поле разложения некоторого сепарабельного $f \in F[t]$.
3. $F = E^{\text{Aut}(E/F)}$ и $[E : F] < \infty$.
4. Для некоторой конечной $G \leq \text{Aut}(E)$: $F = E^G$.

Доказательство.

(1) \Rightarrow (2) Аналогично доказательству (следствие 2.1.4). Так как E/F — расширение Галуа, то оно порождено конечным множеством элементов: $E = F[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$. Пусть $f_i \in F[t]$ — минимальный многочлен α_i , и пусть $f := f_{i_1} \cdot \dots \cdot f_{i_k}$, где перемножаются уникальные среди f_i .

f сепарабелен, как произведение взаимно простых сепарабельных многочленов, E порождено корнями f , и так как E/F нормально, то f разложим на линейные множители в E . Тем самым, $E = F_f$.

(2) \Rightarrow (3) Согласно (следствие 2.1.4), $|\text{Aut}(E/F)| = [E : F]$. Ясно, что $F \subset \tilde{F} := E^{\text{Aut}(E/F)}$. С другой стороны, по лемме Артина, $[E : \tilde{F}] = |\text{Aut}(E/F)|$, откуда $[\tilde{F} : F] = 1$.

(3) \Rightarrow (4) Согласно (теорема 2.1.7), $[E : F] < \infty \Rightarrow |\text{Aut}(E/F)| < \infty$, тем самым, $G := \text{Aut}(E/F)$ подойдёт.

- (4) \Rightarrow (1) По лемме Артина, $[E : F] = |G|$, тем самым, расширение конечно. Пусть $f \in F[t]$ — неприводимый, имеющий корень $\alpha \in E$. Рассмотрим орбиту α под действием G : $G\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$. Пусть $h(t) := (t - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (t - \alpha_m) \in E[t]$. Раскрыв скобки (по теореме Виета)

$$h(t) = t^m - s_1(\alpha_1, \dots, \alpha_m) + s_2(\alpha_1, \dots, \alpha_m) + \dots + (-1)^m s_m(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$$

где $s_k(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ — k -й основной симметрический многочлен, то есть сумма всевозможных произведений вида $\alpha_{i_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{i_k}$ по всем кортежам $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$.

Таким образом, $\forall g \in G : \exists \sigma \in S_m : g(\alpha_i) = \alpha_{\sigma(i)}$. g переставляет α_i , тем самым, коэффициенты h лежат в $E^G = F$, иными словами, $h \in F[t]$. Но раз h раскладывается на различные линейные множители в $E[t]$, то минимальный многочлен α (который делит h) тоже раскладывается на различные линейные множители в $E[t]$. Так как $\alpha \in E$ был произвольным, то E/F по определению сепарабельно и нормально. \square

2.1.4 О сепарабельных расширениях

Следствие 2.1.7. *Расширение, порождённое конечным числом сепарабельных элементов, вкладывается в расширение Галуа (и, следовательно, сепарабельно).*

Доказательство. Аналогично доказательству (следствие 2.1.4). Так как E/F — расширение Галуа, то оно порождено конечным множеством элементов: $E = F[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$. Пусть $f_i \in F[t]$ — минимальный многочлены α_i , и пусть $f := f_{i_1} \cdot \dots \cdot f_{i_k}$, где перемножаются уникальные среди f_i .

f сепарабелен, можно устроить вложение $E \hookrightarrow F_f$ (оно есть, например, согласно (следствие 2.1.4)), а F_f — расширение Галуа согласно (теорема 2.1.9). \square

Следствие 2.1.8. *Пусть K/F — расширение полей. Множество элементов K , сепарабельных над F , образует поле.*

Доказательство. $\forall \alpha, \beta \in K : F[\alpha, \beta]$ сепарабельно (следствие 2.1.7), значит, $\alpha + \beta, \alpha\beta$ и даже $\frac{\alpha}{\beta}$ (при $\beta \neq 0$) тоже сепарабельны. \square

Это поле называется *сепарабельным замыканием* F в K . Если опускают K , то подразумевается сепарабельное замыкание в $F^{\text{sep}} \subset F^{\text{alg}}$.

Определение 2.1.16 (Чисто несепарабельное расширение K/E). $\forall \alpha \in K \setminus E$: α не сепарабелен над E .

Следствие 2.1.9. *Любое алгебраическое расширение K/F раскладывается в башню сепарабельного расширения E/F и чисто несепарабельного K/E .*

Доказательство. Выберем за E сепарабельное замыкание F в K . Далее упражнение. \square

Следствие 2.1.10. *Пусть имеется башня расширений $E/K/F$, и E/F — расширение Галуа. Тогда E/K — расширение Галуа.*

Доказательство. Раз E/F — расширение Галуа, то $\exists f \in F[t] : E = F_f$, где f сепарабелен. Тогда $E = K_f$, значит, E/K — действительно расширение Галуа. \square

2.2 Соответствие Галуа

Теперь у нас всё готово, чтобы установить соответствие Галуа.

E/F — расширение Галуа, $G := \text{Gal}(E/F) = \text{Aut}(E/F)$. Пусть $\mathcal{F} := \{K \leq E | F \leq K \leq E\}$, и $\mathcal{G} := \{H \leq G\}$. Тогда имеется биекция $\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{G}$: подполе $K \in \mathcal{F}$ сопоставляется $\text{Gal}(E/K) \leq G$. Обратно, подгруппе $H \in \mathcal{G}$ сопоставляется подполе E^H .

Теорема 2.2.1 (Соответствие Галуа). Указанные выше отображения $\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{G}$ — взаимно обратные биекции, удовлетворяющие следующим свойствам:

- Монотонность по включению: $H \leq H' \leq G \Rightarrow E^{H'} \leq E^H$.
- При $H \leq H' \leq G : |H : H'| = [E^H : E^{H'}]$.
- $\forall \sigma \in G : \sigma(E^H) = E^{\sigma H \sigma^{-1}}$.
- E^H/F — расширение Галуа $\iff H \trianglelefteq G$. В этом случае $\text{Gal}(E^H/F) \cong G/H$.

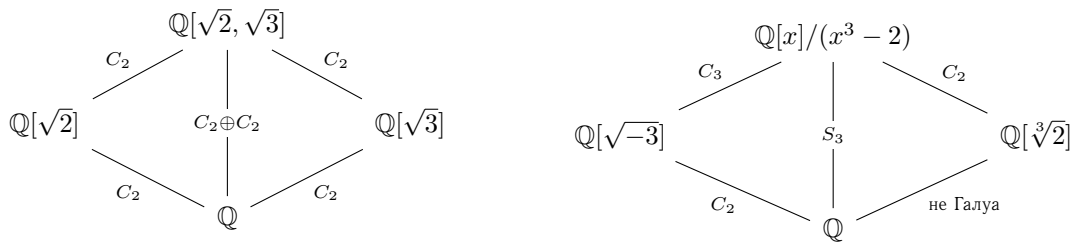
Доказательство.

- $\text{Gal}(E/E^H) = H$ — следствие из леммы Артина.
- $E^{\text{Gal}(E/K)} = K$ согласно (теорема 2.1.9). Согласно ей же, E/K — расширение Галуа.
- По теореме Лагранжа $|H' : H| = \frac{|G:H'|}{|G:H|} = \frac{[E:E^{H'}]}{[E:E^H]} = [E^{H'} : E^H]$.
- $\forall h \in H : \sigma h \sigma^{-1}(\sigma(\alpha)) = \sigma h(\alpha) = \sigma(\alpha) \Rightarrow \sigma(E^H) \leq E^{\sigma H \sigma^{-1}}$. Обратное включение получается заменой $\tilde{H} := \sigma H \sigma^{-1}$ и $\tilde{\sigma} := \sigma^{-1}$.
- $H \trianglelefteq G \iff \forall \sigma \in G : \sigma H \sigma^{-1} = H \iff \forall \sigma \in G : \sigma(E^H) = E^H$. Рассмотрим гомоморфизм $\theta : G \rightarrow \text{Aut}(E^H/F), \sigma \mapsto \sigma|_{E^H}$. Очевидно, $\text{Ker}(\theta) = H$. Покажем, что θ сюръективно. Пусть $\eta \in \text{Aut}(E^H/F)$, покажем, что $\eta \in \text{Im}(\theta)$.

Расширение E/F нормально, значит, $\exists f \in F[t] : E = F_f$. Тогда и подавно $(E^H)_f = E$. Так как $E = (E^H)_f \cong \eta(E^H)_f$, то по теореме о количестве вложений \exists хотя бы одно вложение $E \rightarrow E$ над η . Тем самым, $\text{Aut}(E^H/F) \cong G/H$. Теперь заметим, что $F = E^G = (E^H)^{G/H} \Rightarrow E^H/F$ — расширение Галуа, и $\text{Gal}(E^H/F) \cong G/H$.

Обратно: пусть E^H/F нормально, $\alpha \in E^H$ — корень некоторого многочлена $f \in F[t]$. Тогда $\forall \sigma \in G : \sigma(\alpha)$ — корень f , то есть $\sigma(E^H) = E^H$. С другой стороны, $\sigma(E^H) = E^{\sigma H \sigma^{-1}}$, и так как соответствие Галуа биективно, то $\forall \sigma \in G : \sigma H \sigma^{-1} = H$, то есть $H \trianglelefteq G$. \square

Теперь можно нарисовать некоторые картинки:



Лекция XIII

20 мая 2024 г.

Определение 2.2.1 (Решётка). Частично упорядоченное множество, в котором есть все конечные инфимумы (наибольший элемент, меньший данных) и супремумы (наименьший элемент, больший данных).

Соответствие Галуа устанавливает антиизоморфизм решёток подгрупп и подполей, где порядок индуцирован с включения.

Для K и L — подполей большого поля E — наименьшее поле, содержащее K и L , обозначают $K \cdot L$.

Предложение 2.2.1. Пусть E/F — расширение Галуа, $G := \text{Gal}(E/F)$. Выберем подгруппы $P, Q \leq G$, и соответствующие им поля $K := E^P, L := E^Q$, и рассмотрим следующую башню полей (поле выше — расширение поля ниже):



Если $K/(K \cap L)$ нормально, то и $(K \cdot L)/L$ нормально, причём $\text{Gal}(K \cdot L/L) \cong \text{Gal}(K/K \cap L)$.

Доказательство. Так как $K/K \cap L$ нормально, то $P \trianglelefteq \langle P \cup Q \rangle$. Тем самым, $\langle P \cup Q \rangle = PQ$, и $P \cap Q \trianglelefteq Q$, откуда из соответствия Галуа $K \cdot L/L$ нормально.

Согласно теореме Нётер об изоморфизме

$$\text{Gal}(KL/L) \cong \frac{Q}{Q \cap P} \cong \frac{PQ}{P} \cong \text{Gal}(K/K \cap L) \quad \square$$

Пусть $f \in F[t]$.

Определение 2.2.2 (Группа Галуа многочлена f). $\text{Gal}(f/F) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gal}(F_f/F)$. Если поле F не указано, то логично в качестве него брать наименьшее поле, содержащее коэффициенты многочлена. В характеристике нуль $F = \mathbb{Q}$ (коэффициенты многочлена f).

Пусть имеется расширение E/F , и $f \in F[t] \subset E[t]$. Из определения видно, что $E_f = E \cdot F_f = F_f$ содержит все корни f , а E_f порождено ими над E .

Таким образом, имеет место башня полей



Согласно (предложение 2.2.1), $\text{Gal}(E_f/E) \cong \text{Gal}(F_f/F \cap E) \leq \text{Gal}(F_f/F)$.

Определение 2.2.3 (Разрешимая группа G). Такая группа G , что существует субнормальный ряд с абелевыми факторами $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \dots \trianglelefteq G_n = G$ (факторы ряда — факторгруппы G_{i+1}/G_i).

Лемма 2.2.1. Группа разрешима \iff существует нормальный ряд с абелевыми факторами, то есть ряд $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \dots \trianglelefteq G_n$, где все $G_i \trianglelefteq G$.

Доказательство.

\Leftarrow . Очевидно.

\Rightarrow . Можно построить ряд по алгоритму $G_{i-1} := [G_i, G_i]$. \square

Определение 2.2.4 (Композиционный ряд). Неуплотняемый субнормальный ряд без повторений. Неуплотняемость означает, что любой фактор — простая (без нормальных подгрупп) группа.

В самом деле, если $H \trianglelefteq G_{i+1}/G_i$, то $\pi_{G_i}^{-1}(H)$ можно вставить в ряд между G_i и G_{i+1} .

Лемма 2.2.2. Любые два композиционных ряда эквивалентны. Любые два субнормальных ряда обладают эквивалентными уплотнениями. Факторы композиционного ряда изоморфны циклическим группам простого порядка.

Лемма 2.2.3. Пусть $|G| = p^n$. Тогда $\exists H \trianglelefteq G : |G : H| = p$.

Доказательство. Пусть $n \geq 1$. Центр $C \leq G$ p -группы нетривиален, значит, $\pi_C(G) = G/C$ имеет порядок строго меньше p^n . По индукции в ней есть подгруппа $\tilde{H} \leq G/C$ индекса p , тогда $|G : \pi_C^{-1}(\tilde{H})| = p$. \square

Теорема 2.2.2 (ФТНА). $\mathbb{C} = \mathbb{R}[\sqrt{-3}]$ алгебраически замкнуто.

Доказательство. Рассмотрим конечное расширение E/\mathbb{C} , тогда расширение E/\mathbb{R} тоже конечно. Вложим его в нормальное расширение E'/\mathbb{C} .

$G := \text{Gal}(E'/\mathbb{R})$, пусть $|G| = 2^k \cdot m$, где m нечётно. Пусть P — силовская 2-подгруппа в G : $|G : P| = m$. Так как $[E' : \mathbb{R}] = 2^k \cdot m$ и $[E' : E'^P] = |P| = 2^k$, то $[E'^P : \mathbb{R}] = m$.

Рассмотрим $\alpha \in E'^P$, пусть $f \in \mathbb{R}[t]$ — минимальный многочлен α . Тогда $[\mathbb{R}[\alpha] : \mathbb{R}] = \deg f \mid m$, откуда $\deg f$ нечётна. Но f неприводим над \mathbb{R} , а он нечётной степени. Используя соображения непрерывности и полноты \mathbb{R} , получаем, что $\deg f = 1$, то есть $\alpha \in \mathbb{R}$. Тем самым, $E'^P = \mathbb{R}$, соответствие Галуа говорит, что $P = G$.

$\text{Gal}(E'/\mathbb{C}) \leq \text{Gal}(E'/\mathbb{R})$, откуда $\text{Gal}(E'/\mathbb{C})$ — тоже 2-группа. Согласно (лемма 2.2.3), найдётся $H \leq \text{Gal}(E'/\mathbb{C})$ индекса 2.

Тогда $[E'^H : \mathbb{C}] = 2$, но у \mathbb{C} нет расширений степени 2 — любой квадратный многочлен над \mathbb{C} разложим в \mathbb{C} на линейные множители. Тем самым, $\text{Gal}(E'/\mathbb{C})$ тривиальна, откуда $E' = \mathbb{C}$, и у \mathbb{C} нет никаких конечных расширений. \square

Лекция XIV

21 мая 2024 г.

Теорема 2.2.3 (Дирихле, о линейной независимости характеров). Пусть H — группа, E — поле, и $\sigma_1, \dots, \sigma_n : H \rightarrow E^*$ — различные групповые гомоморфизмы. Утверждается, что $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ линейно независимы над E в пространстве всех функций $H \rightarrow E$.

Доказательство. Предположим наличие линейной зависимости:

$$\forall h \in H : \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_i(h) = 0, \text{ где } \alpha_i \in E \quad (\diamond)$$

Выберем самую короткую такую (с наименьшим n), в ней в частности все $\alpha_i \neq 0$.

Пусть $g \in H$ таков, что $\sigma_n(g) \neq \sigma_{n-1}(g)$. Запишем

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_i(g) \sigma_i(h) = 0 \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_n(g) \sigma_i(h) = 0 \end{cases}$$

где первое получено подстановкой $h \leftarrow gh$ в (\diamond) , а второе — домножением (\diamond) на $\sigma_n(g)$. Вычитая, получаем линейную зависимость меньшей длины:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (\sigma_i(g) - \sigma_n(g)) \sigma_i(h) = 0$$

При этом зависимость нетривиальна, так как $\alpha_{n-1}(\sigma_{n-1}(g) - \sigma_n(g)) \neq 0$. \square

Часто эту теорему применяют для $H = E^*$, $\sigma_i \in \text{Gal}(E/F)$: пусть E/F — расширение Галуа, пусть $n := [E : F]$, $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} = \text{Gal}(E/F) \leq \text{End}(E/F) \stackrel{\text{def}}{=} \text{End}_F(E)$.

Тогда $\dim_E(\langle \text{Gal}_F(E) \rangle) = n$ — по теореме Дирихле (теорема 2.2.3) все эндоморфизмы вида $\sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_i$ различны. С другой стороны, $\dim_F(\text{End}_F(E)) = n^2$, так как $\dim_F(E) = n$, откуда $\langle \text{Gal}_F(E) \rangle = \text{End}_F(E)$, то есть $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ — E -базис пространства $\text{End}_F(E)$.

Расширение называется тем же словом, что и его группа — так, бывают, *абелевы, циклические, разрешимые* расширения, и тому подобное.

Определение 2.2.5 ($\varepsilon \in F$ — первообразный корень n -й степени из 1). $\begin{cases} \varepsilon^n = 1 \\ \varepsilon^k \neq 1, & 0 < k < n \end{cases}$.

Если в поле есть первообразный корень степени n , то $\text{char } F \nmid n$: если $n = pm$, то $0 = \varepsilon^{pm} - 1 = (\varepsilon^m - 1)^p$, откуда ε — не первообразный.

Несложно видеть, что $\varepsilon^k = \varepsilon^m \iff k \equiv m \pmod{n}$, откуда $\varepsilon^0, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1}$ — корни n -й степени из единицы, и многочлен $t^n - 1$ раскладывается на линейные множители. Обозначим множество корней этого многочлена $\mu_n(F)$.

Лемма 2.2.4. Пусть E/F — расширение полей, и в базовом поле F есть первообразный корень степени n из 1. Следующие условия эквивалентны.

1. $E = F[\alpha]$, где $\alpha^n \in F$, и $\alpha^k \notin F$ при $0 < k < n$.
2. Расширение E/F циклическое расширение Галуа (то есть $\text{Gal}(E/F) \cong C_n$).

Доказательство.

(1) \Rightarrow (2) Многочлен $f(t) = t^n - \alpha^n \in F[t]$ имеет n различных корней $\{\alpha \varepsilon^k \mid 0 \leq k < n\}$, откуда $E = F_f$ для сепарабельного f , то есть E/F — расширение Галуа.

- Устроим отображение $\theta : \text{Gal}(E/F) \rightarrow E^*, \sigma \mapsto \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}$. Так как $\left(\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}\right)^n = \frac{\sigma(\alpha)^n}{\alpha^n} = \frac{\sigma(\alpha^n)}{\alpha^n} = \frac{\alpha^n}{\alpha^n} = 1$, то $\text{Im } \theta \subset \mu_n(F)$.
- Проверим, что это гомоморфизм групп.

$$\theta(\tau\sigma) = \frac{\tau\sigma(\alpha)}{\alpha} = \frac{\sigma(\tau(\alpha))}{\tau(\alpha)} \cdot \frac{\tau(\alpha)}{\alpha} \quad (\equiv)$$

Так как $\tau(\alpha)$ — корень f , то $\tau(\alpha) = \varepsilon^m \alpha$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Сокращая на $\varepsilon^m \in F$, получаем

$$(\equiv) \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} \cdot \frac{\tau(\alpha)}{\alpha} = \theta(\sigma)\theta(\tau) = \theta(\tau)\theta(\sigma)$$

- Проверим сюръективность. Любая собственная подгруппа μ_n имеет вид μ_k , где $k \mid n$, и если $\exists k \in \mathbb{N} : \forall \sigma \in \text{Gal}(E/F) : \frac{\sigma(\alpha)^k}{\alpha^k} = 1$, то $\forall \sigma \in \text{Gal}(E/F) : \sigma(\alpha^k) = \alpha^k$, то есть $\alpha^k \in F$. Получаем, что $k \geq n$.
- С одной стороны, $|\text{Gal}(E/F)| \geq n$ из сюръективности, с другой стороны, $[E : F] \leq n$, откуда $|\text{Gal}(E/F)| = [E : F] = n$, и из количественных соображений θ — изоморфизм.

(2) \Rightarrow (1) Пусть σ — образующая группы Галуа ($\text{Gal}(E/F) = \{1, \sigma, \dots, \sigma^{n-1}\}$). По теореме Дирихле (теорема 2.2.3), $\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k \sigma^k \neq 0$, тем самым, $\exists \beta \in E : \alpha := \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k \sigma(\beta)^k \neq 0$.

- Посчитаем

$$\sigma(\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k \sigma(\beta)^{k+1} = \sum_{i=1}^n \varepsilon^{i-1} \sigma(\beta)^i = \varepsilon^{-1} \alpha$$

Тем самым, $\sigma(\alpha^k) = \sigma(\alpha)^k = (\varepsilon^{-1} \alpha)^k = \varepsilon^{-k} \alpha^k$. В частности, α^n неподвижен под действием $\text{Gal}(E/F)$, и $\alpha^n \in F$.

– Покажем линейную независимость $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ над F , из количественных соображений будет следовать, что это базис E над F . Пусть $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k x_k = 0$ для неких $x_k \in F$.

Применяя σ^j к данному равенству, получаем $\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{-kj} \alpha^k x_k = 0$. При $j = 0, \dots, n-1$ получаются n линейных уравнений с переменными $\alpha^k x_k$. Матрица коэффициентов системы $(\varepsilon^{-kj})_{j=0..n-1}^{k=0..n-1}$ невырождена, так как её определитель — определитель Вандермонда — не нуль. \square

Лемма 2.2.5. Пусть $E := F[\varepsilon]$, где ε — первообразный корень степени n . Тогда E/F — расширение Галуа, и $\text{Gal}(E/F) \hookrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ (в частности, расширение E/F абелево).

Доказательство. Так как $\mu_n = \langle \varepsilon \rangle$, то $t^n - 1$, раскладывается на линейные множители в $F[\varepsilon]$, то есть $F[\varepsilon] = F_{t^n-1}$. Всякий элемент $\sigma \in \text{Gal}(E/F)$ однозначно определён значением $\sigma(\varepsilon)$ (так как $E = F[\varepsilon]$), при этом так как преобразование σ обратимо, то $\sigma(\varepsilon)$ — тоже первообразный корень степени n из 1.

Устроим $\pi : \text{Gal}(E/F) \hookrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, сопоставляя элементу $\sigma \in \text{Gal}(E/F)$ такой показатель $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, что $\sigma(\varepsilon) = \varepsilon^k$. Инъективность σ очевидна: $\sigma(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) \Rightarrow \sigma = \tau$. Очевидно, это гомоморфизм моноидов, и так как образ обратимых элементов обратим, то $\pi : \text{Gal}(E/F) \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ — гомоморфизм групп. \square

Определение 2.2.6 (Круговой многочлен степени n). $\Phi_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\varepsilon} (t - \varepsilon)$, где ε пробегает все первообразные корни степени n из 1 по одному разу.

Так как любой корень степени n из 1 — первообразный степени $k \mid n$, то $\prod_{k \mid n} \Phi_k(t) = \prod_{\varepsilon^n=1} (t - \varepsilon) = t^n - 1$.

Интересный факт. Для любого поля с первообразным корнем степени n из единицы $\Phi_n \in \mathbb{Z}[t] \leq \mathbb{Q}[t]$, и там он неприводим, степени $\phi(n)$ (где ϕ — euler totient function).

Пусть $f \in F[t]$ — ненулевой многочлен.

Определение 2.2.7 (Уравнение $f = 0$ разрешимо в радикалах). Все корни f (лежащие в алгебраическом замыкании F) выражаются через элементы F при помощи арифметических операций и извлечений корня. Иными словами, существуют цепочка полей $F = F_0 \hookrightarrow F_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow F_m$, где в F_m многочлен f раскладывается на линейные множители, и $F_i = F_{i-1}[\alpha_i]$, где $\beta := \alpha_i^k \in F_{i-1}$. В таком случае ещё пишут $F_i = F_{i-1}[\sqrt[n]{\beta_i}]$.

Теорема 2.2.4 (Абель — Руффини). Пусть F поле, $\text{char } F = 0$; ненулевой $f \in F[t]$. Следующие условия эквивалентны:

1. Уравнение $f = 0$ разрешимо в радикалах.
2. $\text{Gal}(F_f/F)$ разрешима.

Доказательство.

\Leftarrow . Сначала присоединим к F первообразный корень из 1 достаточно большой степени — подойдёт первообразный корень ε степени $(\deg f)!$. Положим $F_1 := F[\varepsilon]$. Иными словами, $F_1 := F_{t^{(\deg f)!}-1}$. Это расширение Галуа, так как $\text{char } F = 0$.

$\text{Gal}(f/F_1) \leq \text{Gal}(f/F)$, поэтому $G := \text{Gal}(f/F_1)$ тоже разрешима. По определению у неё существует субнормальный ряд, и **видимо так как G конечна** его можно уплотнить до композиционного $\{1\} = G_m \triangleleft G_{m-1} \triangleleft \dots \triangleleft G_1 = G$. Факторгруппы G_i/G_{i+1} — простые абелевы группы, то есть циклические, простого порядка. Положим $F_i := ((F_1)_f)^{G_i}$.

Согласно (лемма 2.2.4), F_i имеет вид $F_{i-1}[\alpha_i]$, что по определению означает разрешимость в радикалах.

\Rightarrow . По условию существует башня полей $F \hookrightarrow F_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow F_m$, где f раскладывается на линейные множители в F_m , и $F_i = F_{i-1}[\alpha_i]$, где $\alpha_i^{k_i} \in F_{i-1}$. Для применения (лемма 2.2.4) недостаёт первообразного корня.

Добавим его: $F_{m+1} := (F_m)_{t^{k-1}}$, где $k := k_1 \cdot \dots \cdot k_m$. Далее хотим получить, что $\text{Gal}(f/F)$ разрешима. Понятно, что $F_f \subset F_m$, поэтому достаточно доказать, что $\text{Aut}(F_m/F)$ разрешима, или даже $\text{Aut}(F_{m+1}/F)$ разрешима — факторгруппа разрешимой группы разрешима. В доказательстве будет использоваться соответствие Галуа, для этого дополним F_{m+1}/F до нормального: пусть E/F нормально, и $F_{m+1} \subset E$ (например, E — поле разложения минимального многочлена, аннулирующего все элементы $\varepsilon, \alpha_1, \dots, \alpha_m$).

Пусть $\text{Gal}(E/F) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Поле $\tilde{E} = F[\varepsilon, \sigma_i(\alpha_j)] \subset E$ тоже нормально над F , так как оно устойчиво под действием $\text{Gal}(E/F)$. А для этого поля есть хорошая цепочка (порождающие присоединяются по одному, все образы α_{j+1} добавляются после всех образов α_j):

$$F \subset F[\varepsilon] \subset F[\sigma_1(\alpha_1)] \subset F[\sigma_1(\alpha_1), \sigma_2(\alpha_1)] \subset \dots \subset \tilde{E}$$

Все промежуточные расширения абелевы (первое вкладывается в $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ согласно (лемма 2.2.5), остальные циклические согласно (лемма 2.2.4)). Соответствие Галуа говорит, что этой башне полей соответствует субнормальный ряд группы $\text{Gal}(\tilde{E}/F)$ с абелевыми факторами, то есть $\text{Gal}(\tilde{E}/F)$ разрешима. Её факторгруппа $\text{Gal}(F_f/F)$ тоже разрешима. \square