Комплексный анализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

Глава 1

Комплексный анализ

Лекция I

16 февраля 2024 г.

Пусть $f : G \to \mathbb{C}$, где открытое $G \subset \mathbb{C}$.

Определение 1.0.1 (f голоморфна в $z_0 \in G$)**.** $\exists \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \overset{def}{=} f'(z_0)$.

Во втором семестре мы проверяли, что $f = u + iv$ (где $u, v : G \to \mathbb{R}$) голоморфна в $z_0 \iff f$ дифференцируема в вещественном смысле, и выполняются уравнения Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Определение 1.0.2 (f аналитична в G)**.** $\forall z_0 \in G : \exists c_j \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \tag{$*$}$$

где ряд сходится не только при $z = z_0$.

Теорема 1.0.1. f аналитична в $G \iff f$ голоморфна во всех точках G.

Доказательство.

$\Rightarrow$. Доказали во втором семестре, несложно.

$\Leftarrow$. Скоро займёмся, время пришло. $\square$

Из представления $(*)$ следует, что производная в точке z считается почленно: $f'(z) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} jc_j(z - z_0)^{j-1}$. В частности, отсюда получается, что $f'(z_0) = c_1$, и вообще $f^{(n)}(z_0) = j! \cdot c_j$.

Вскоре мы увидим, что ситуация разительно отличается от вещественной: в вещественном случае были разные классы — дифференцируемые функции, C^1, C^∞, аналитичные, и множество промежуточных классов.

В комплексном же случае, если функция хотя бы один раз дифференцируема, то окажется, что этого достаточно, чтобы она была не просто дифференцируема, а непрерывно дифференцируема, бесконечно дифференцируема, и даже аналитична.

1.1 Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути

1.1.1 Про дифференциальные формы

Определение 1.1.1 (Линейная функция $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$). $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n : l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y)$.

Определение 1.1.2 (Линейная форма на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$). Функция двух переменных $\phi : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, линейная по второму аргументу.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ имеется базис (e_j): $h = e_1 h_1 + \dots + e_n h_n$.

Тем самым, $\phi(x, h) = \sum\limits_{j=1}^{n} \underbrace{\phi(x, e_j)}_{=:g_j(x)} h_j = \sum\limits_{j=1}^{n} g_j(x) h_j$.

Введём *базисные линейные формы* $\mathrm{d}x_j(u, h) = h_j$, игнорирующую первую координату, и возвращающая j-ю компоненту второго аргумента. Теперь $\phi(x, h)$ разложилась в сумму $\sum\limits_{j=1}^{n} g_j \,\mathrm{d}x_j$.

Пример. Пусть $f : G \to \mathbb{C}$ — дифференцируемая в G функция. Заметим, что её дифференциал $\mathrm{d}_f(x, \_)$ — в точности линейная форма на G.

При разложении по базису получится $\mathrm{d}_f(x, \_) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \,\mathrm{d}x_j$.

Вскоре мы увидим, что далеко не всякая линейная форма является чьим-то дифференциалом.

Если $\phi = \sum\limits_{j=1}^{n} g_j \,\mathrm{d}x_j$ — дифференциал функции f, то непременно $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Тот факт, что ϕ является дифференциалом f, можно сказать наоборот: f является первообразной ϕ.

1.1.2 Про интегрирование

Рассмотрим монотонную функцию $\Phi : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$. Как и при определении стилтьесовой длины, будем считать, что Φ определена на некотором открытом множестве, содержащем $\langle a, b \rangle$. Обозначим за l_Φ стилтьесову длину, отвечающую функции Φ.

Пускай λ_Φ — продолжение стилтьесовой длины l_Φ по Лебегу — Каратеодори.

Она, как водится, определена на некоторой Σ-алгебре, в которой есть борелевские множества, но измеримы могут быть и какие-то другие множества, зависящие от конкретной функции Φ.

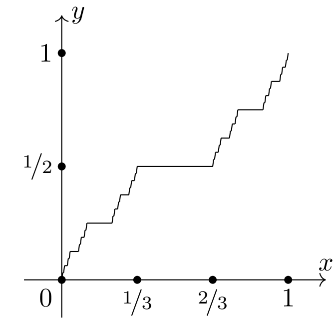
Примеры.

- Так, функция $\phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$ порождает дельта-меру δ_0, относительно которой все множества измеримы.

  Кроме того, эта мера сингулярна относительно стандартной меры Лебега.

- Может показаться, что так происходит из-за разрывности ϕ, но это не так.

Рекурсивно определим канторову лестницу $C : [0, 1] \to [0, 1]$:



Построив по данной функции стилтьесову длину λ_C, мы получим меру, сосредоточенную на канторовом множестве меры нуль.

Её носитель — само канторово множество, так как на всех отрезках вне канторова множества λ_C равна нулю. Она сингулярна относительно стандартной меры Лебега на $\mathbb{R}$, и её измеримые множества разительно отличаются от измеримых множеств меры Лебега.

По мере Стилтьеса можно интегрировать: если v является λ_Φ измеримой (в частности, измерима по Борелю, или даже непрерывна), то определён интеграл $\int\limits_{\langle a,b\rangle} v \,\mathrm{d}\lambda_\Phi$ Иногда пишут просто $\int\limits_{\langle a,b\rangle} v \,\mathrm{d}\Phi$.

Теперь пусть $I = [a, b]$, и $\Psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. В таком случае $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$, где некие Φ_1, Φ_2 возрастают. Можно определить знакопеременную меру $\lambda_\Psi \overset{def}{=} \lambda_{\Phi_1} - \lambda_{\Phi_2}$, понятно, что определение корректно.

1.1.3 Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути

Пускай $\gamma : [a, b] \to G \subset \mathbb{R}^n$ — спрямляемый путь (путь конечной длины). Пускай $U = \sum\limits_{j=1}^{n} u_j \,\mathrm{d}x_j$ — дифференциальная форма в области G. Если не сказано противное, будем считать, что u_j — непрерывные функции.

Определение 1.1.3 (Интеграл от U вдоль пути γ)**.** $\int\limits_\gamma U \overset{def}{=} \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{[a,b]} u_j(\gamma(t)) \,\mathrm{d}\gamma_j(t)$.

Здесь $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Так как путь спрямляем, то все γ_j — ограниченной вариации, каждая порождает свою меру Стилтьеса, и определение интегрирует композицию $U \circ \gamma$ по данной мере.

1.1.4 Сумма путей

Пускай имеются два отрезка $[a, c]$ и $[c, d]$, и на них заданы пути $\gamma_1 : [a, c] \to G$, $\gamma_2 : [c, d] \to G$. Предположим, что $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$.

Тогда можно устроить путь $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a, d] \to G$, $\gamma(t) \overset{def}{=} \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, c] \\ \gamma_2(t), & t \in [c, d] \end{cases}$.

Замечание. Интеграл аддитивен по множеству: $\int\limits_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} U = \int\limits_{\gamma_1} U + \int\limits_{\gamma_2} U$.

1.1.5 Альтернативное определение

Далее мы не интересуемся никакими чудесами вроде канторовых лестниц, и считаем, что Φ такова, что λ_Φ абсолютно непрерывна относительно стандартной меры Лебега.

А раз так, то по теореме Радона — Никодима $\exists$ суммируемая $w : [a,b] \to \mathbb{R}$, такая, что

$$\lambda_\Phi(e) = \int\limits_e w(x)\,\mathrm{d}x \tag{+}$$

Факт 1.1.1. *Формула (+) заведомо верна, если Φ непрерывно дифференцируема на $[a,b]$, тогда $w = \Phi'$.*

Доказательство. Введём меру $\nu(e) = \int\limits_e \Phi'(x)\,\mathrm{d}x$, заданную на измеримых по Лебегу множествах. Φ' непрерывна, и, следовательно, измерима.

Если $\langle c,d\rangle \subset [a,b]$, то $\nu(\langle c,d\rangle) = \int\limits_{\langle c,d\rangle} \Phi'(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(d) - \Phi(c) = l_\Phi(\langle c,d\rangle)$.

Таким образом, из теоремы единственности, продолжение l_Φ по Лебегу — Каратеодори совпадает с $\int\limits_e \Phi'(x)\,\mathrm{d}x$. $\square$

Замечание. Утверждение (факт 1.1.1) сохраняет силу, если Φ непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема.

Далее где-то используется Φ, а где-то β, надо убедиться, что это везде одно и то же, и заменить.
Пускай $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, кусочно-непрерывно дифференцируемая: $\exists a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$, такие, что β непрерывно дифференцируема на $[a_s, a_{s+1}]$ при $0 \leqslant s < k$. Введём $\rho(e) = \int\limits_e \beta'(x)\,\mathrm{d}x$ — это знакопеременная вещественная мера.

У данной меры возникают (см. разложение Хана) положительная и отрицательная части $\rho_+(e) \overset{def}{=} \int\limits_e (\beta')_+(x)\,\mathrm{d}x$ и $\rho_-(e) \overset{def}{=} \int\limits_e (\beta')_-(x)\,\mathrm{d}x$

Если обозначить за $\Phi_+(t) = \int\limits_0^t (\beta')_+(x)\,\mathrm{d}x$ и $\Phi_-(t) = \int\limits_0^t (\beta')_-(x)\,\mathrm{d}x$, то окажется, что соответствующие меры Стилтьеса совпадают с ρ_+ и ρ_-.

Более того, $\beta = \Phi_+ - \Phi_-$ — получили разложение функции ограниченной вариации в положительную и отрицательную части.

Замечание. Это разложение экономнее, чем то, которое было получено ранее — ранее в качестве Φ_+ выбиралась вариация Φ.

Если всё, что написано выше, собрать вместе, то получится

$$\boxed{\int\limits_{[s,t]} v\,\mathrm{d}\Phi = \int\limits_{[s,t]} v(x)\beta'(x)\,\mathrm{d}x}$$

Далее «гладкий» используется, как синоним к непрерывно-дифференцируемому.

Следствие 1.1.1 (Можно считать определением)**.** *Если $U = \sum\limits_{j=1}^n u_j\,\mathrm{d}x_j$ — дифференциальная форма в G с непрерывными коэффициентами, а $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a,b] \to G$ — спрямляемый кусочно-гладкий путь, то*

$$\int\limits_\gamma U = \sum_{j=1}^n \int\limits_a^b u_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t$$

1.1.6 (Не)зависимость от параметризации

Пускай $\gamma : [a, b] \to G$ — кусочно-гладкий путь, $\psi : [c, d] \to [a, b]$ — гладкий гомеоморфизм.

Теперь $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$ — перепараметризация γ

Лемма 1.1.1. *Для всякой формы U:*

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} U = \pm \int\limits_{\gamma} U$$

Знак + выбирается, если ψ возрастает, и − — если убывает.

Доказательство. Предположим, что γ — гладкий путь, иначе применяем к кусочкам гладкости по отдельности.

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} U = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{c}^{d} u_j(\gamma(\psi(t)))\gamma_j'(\psi(t)) \cdot \psi'(t)\,\mathrm{d}t = \left\| \begin{array}{c} \tau = \psi(t) \\ \mathrm{d}\tau = \psi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right\| = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\psi(c)}^{\psi(d)} u_j(\gamma(\tau))\gamma_j'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \pm \int\limits_{\gamma} U \quad \square$$

Про ψ также можно считать, что это он не гладкий, а лишь кусочно-гладкий.

Тем самым, можно определить сумму путей для несоприкасающихся отрезков: для двух путей $\gamma_1 : [a, b] \to G, \gamma_2 : [c, d] \to G$ (при условии $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$) можно один их отрезков-прообразов линейным возрастающим преобразованием перевести в отрезок, соприкасающийся со вторым (например, $t \mapsto t + (b - c)$).

Также есть понятие обратного пути $\gamma_{-1}(t) = \gamma(a + b - t)$. Для любой формы U:

$$\int\limits_{\gamma \oplus \gamma_{-1}} U = \int\limits_{\gamma} U + \int\limits_{\gamma_{-1}} U = \int\limits_{\gamma} U - \int\limits_{\gamma} U = 0$$

1.2 Условия существования первообразной у дифференциальной формы

Теорема 1.2.1. Если у дифференциальной формы U в открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ имеется первообразная F, то для всякого кусочно-гладкого пути $\gamma : [a, b] \to G$

$$\int\limits_{\gamma} U = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Доказательство. $U = \sum\limits_{j=1}^{n} g_j\,\mathrm{d}x_j$, где $g_j(w) = \frac{\partial}{\partial x_j} F(w)$. Считаем, что путь гладкий.

$$\int\limits_{\gamma} U = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{a}^{b} \frac{\partial}{\partial x_j} F(\gamma(t))\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F \circ \gamma)(t)\,\mathrm{d}t = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Если же путь всего лишь кусочно-гладкий, то надо разбить отрезок на подотрезки гладкости, и сложить. $\square$

Следствие 1.2.1. *Если у дифференциальной формы U есть первообразная, то её интегралы по всем путям с данными началом и концом, равны.*

Оказывается, верно и обратное.

Теорема 1.2.2. Пусть дифференциальная форма U с непрерывными коэффициентами в области G такова, что $\forall x, y \in G : \exists c \in \mathbb{C} : \forall$ кусочно-гладкого пути γ с началом в x и концом в y: $\int\limits_{\gamma} U = c$.

Эквивалентно, для всех замкнутых кусочно-гладких путей $\gamma : \int\limits_{\gamma} U = 0$.

Тогда U обладает первообразной.

Доказательство.

Лемма 1.2.1. *Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, тогда любые две её точки можно соединить ломаной (кусочно-линейным путём).*

Доказательство леммы.

$\square$

$\square$