

Дифференциальные уравнения и динамические системы.  
Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Юрьевич Пилюгин  
Конспектировал Леонид Данилевич

III семестр, осень 2023 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Интегрирование уравнений первого порядка</b>	<b>4</b>
1.1	Уравнения первого порядка, разрешённые относительно частных производных . . . . .	6
1.2	Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными . . . . .	7
1.3	Замена переменных . . . . .	7
1.4	Линейное дифференциальное уравнение первого порядка . . . . .	8
1.5	Уравнение Бернулли . . . . .	9
1.6	Уравнение Рикатти . . . . .	9
1.7	Дифференциальное уравнение 1 порядка в симметричной форме. Уравнение Пфаффа . . . . .	10
1.7.1	Уравнение в полных дифференциалах . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Системы дифференциальных уравнений</b>	<b>12</b>
2.1	Системы, разрешённые относительно старших производных . . . . .	12
2.1.1	Векторная запись нормальной системы . . . . .	13
2.2	Существование и единственность решения задачи Коши . . . . .	13
2.2.1	Теорема Пеано о существовании решения . . . . .	13
2.2.2	Теорема Пикара о существовании и единственности решения . . . . .	16
2.2.3	Теорема о существовании и единственности решения методом сжимающих отображений . . . . .	19
2.3	Продолжимость решений . . . . .	20
2.4	Линейные системы дифференциальных уравнений . . . . .	22
2.4.1	Однородные линейные системы дифференциальных уравнений . . . . .	22
2.5	Линейные системы с постоянными коэффициентами . . . . .	23
2.5.1	Метод Эйлера . . . . .	24
2.5.2	Матричная экспонента . . . . .	24
2.5.3	Вычисление матричной экспоненты . . . . .	25
2.5.4	Оценка фундаментальной матрицы . . . . .	26
2.6	Случай Лаппо-Данилевского . . . . .	26
2.7	Неоднородные линейные системы . . . . .	27
2.8	Периодические линейные системы . . . . .	27
2.9	Формула Остроградского — Лиувилля (формула Якоби) . . . . .	29
2.10	Неоднородные линейные системы со специальной правой частью . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Линейные дифференциальные уравнения</b>	<b>32</b>
3.1	Однородное линейное уравнение . . . . .	33
3.1.1	Линейная независимость решений . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Зависимость решений от начальных данных и параметров</b>	<b>35</b>
4.1	Дифференцируемость решений по начальным данным и параметрам. . . . .	37
<b>5</b>	<b>Автономные системы</b>	<b>42</b>
5.1	Виды траекторий . . . . .	42
5.1.1	Точка покоя . . . . .	42
5.1.2	Замкнутая траектория . . . . .	42
5.1.3	Обыкновенная траектория . . . . .	43

5.2	Классификация Пуанкаре . . . . .	43
-----	----------------------------------	----

## **Литература**

1. Юрий Николаевич Бибиков. «Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений»
2. Владимир Игоревич Арнольд. «Обыкновенные дифференциальные уравнения»
3. Сергей Юрьевич Пилюгин «Пространства динамических систем»

# Глава 1

## Интегрирование уравнений первого порядка

### Лекция I

1 сентября 2023 г.

Обыкновенное дифференциальное уравнение — уравнение, в которой независимая переменная (в обыкновенных — скалярная) обычно обозначается  $x$ , а искомая функция —  $y(x)$ .

Дифференциальное уравнение порядка  $m$  — уравнение вида  $f(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0$ .

Основателем теории дифференциальных уравнений (и современного анализа вообще) считается Исаак Ньютон. Важным примером дифференциального уравнения можно считать уравнение движения материальной точки по прямой — сила, действующая на точку как-то зависит от времени, координаты точки, и её скорости, получается уравнение  $m\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ .

Ищем функцию  $y(x)$  из уравнения  $y' = f(x, y)$ .

В данном курсе всегда будем предполагать, что функция  $f$  (*правая часть дифференциального уравнения*) непрерывна.

Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{x,y}^2$  — *область* (открытое связное множество), причём  $f \in C(G)$ , то есть  $f$  непрерывна в данной области.

Функция  $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  называется решением уравнения  $y' = f(x, y)$  на промежутке  $(a, b)$ , если

1.  $y$  дифференцируема.
2.  $\{(x, y(x)) | x \in (a, b)\} \subset G$ .
3. Выполняется равенство  $y'(x) \equiv f(x, y(x))$  при  $x \in (a, b)$ .

*Замечание.* Две функции, заданные на разных промежутках — разные решения.

*Примеры.*

- $y' = ky$ , где  $k \in \mathbb{R}$ . В качестве  $G$  естественно брать всю плоскость  $\mathbb{R}_{x,y}^2$ . Из анализа известно, что любая функция  $y(x) = C \cdot e^{kx}$  является решением на любом промежутке.

*Замечание.* В данном случае ни  $C = 0$ , ни  $k = 0$  не являются проблемой.

**Определение 1.0.1** (Интегральная кривая). График произвольного решения.

Интегральные кривые данного уравнения покрывают всю плоскость: через каждую точку плоскости проходит одна из кривых, как на картинке ниже.

- Рассмотрим уравнение  $y' = \frac{1}{2y}$ . Функция не определена при  $y = 0$ , естественно возникают две области  $G_1 = \{(x, y) | y > 0\}$  и  $G_2 = \{(x, y) | y < 0\}$ . На каждой из них функция определена и непрерывна.

$$y'(x) = \frac{1}{2y(x)} \Rightarrow 2y(x)y'(x) = 1 \Rightarrow (y^2(x))' = 1$$

Теперь уже из анализа понятно, что  $y^2(x)$  имеет вид  $x + C$  для некой константы  $C$ .

В  $G_1$  решением является  $y(x) = \sqrt{x + C}$ , в  $G_2$  —  $y(x) = -\sqrt{x + C}$ . Эти решения определены не для всех значений  $x$ , а только для тех, где  $x + C > 0$  (равенство нулю также недопустимо, необходимо существование производной).

Обычно у дифференциального уравнения бесконечно много решений, даже не принимая в расчёт, что они могут быть заданы на разных промежутках.

Естественно искать решения с некоторыми свойствами — ограниченные решения, периодические решения, так далее.

Основное время мы посвятим так называемой **задаче Коши**. В неё фиксирована точка  $(x_0, y_0) \in G$ , а функция  $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  называется *решением задачи Коши с начальными данными*  $(x_0, y_0)$ , если  $y$  — решение на  $(a, b)$ , причём  $x_0 \in (a, b)$ ,  $y(x_0) = y_0$ . Геометрический смысл задачи Коши — решение с интегральной кривой, проходящей через  $(x_0, y_0)$ .

В вопросе о единственности решения Коши простое определение дать непросто — всякое решение на каком-то интервале можно сузить на меньший интервал, и никакое решение абсолютно единственным являться не может.

**Определение 1.0.2** (Точка единственности решения задачи Коши). Точка  $(x_0, y_0) \in G$ , такая, что для любых двух решений  $y_1(x), y_2(x)$  задачи Коши с начальными данными  $(x_0, y_0)$  существует интервал  $(\alpha, \beta) \ni x_0$ , такой, что  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  при  $x \in (\alpha, \beta)$ .

*Контрпример.*

Рассмотрим уравнение  $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ . Здесь правая часть определена и непрерывна на всей плоскости.

Рассмотрим задачу Коши с начальными данными  $(0, 0)$ .

Есть очевидное решение  $y'(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$ .

Есть решение  $y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$ . Это тоже решение, так как функция дифференцируема всюду (в том числе в нуле), причём равенство выполняется.

Эти два решения не совпадают ни на каком интервале, содержащем 0, таким образом  $(0, 0)$  точкой единственности данной задачи Коши не является.

Тем не менее, вскоре мы увидим, что, например, точка  $(1, 1)$  — точка единственности соответствующей задачи Коши.

**Теорема 1.0.1** (Теорема существования). Если правая часть непрерывна в данной области  $G$ , то для любой точки  $(x_0, y_0) \in G$  существует решение задачи Коши.

*Доказательство.* Теорема Пеано с существованием решения: (2.2.1). □

**Теорема 1.0.2** (Теорема единственности). Если  $f$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}$  обе непрерывны в данной области  $G$ , любая точка  $(x_0, y_0) \in G$  — точка единственности.

*Доказательство.* Любая из теорем существования и единственности: (2.2.2) или (2.2.4). □

Если выполнены оба условия, то  $G$  — область существования и единственности.

Рассмотрим уравнение  $y' = f(x, y)$  на  $G$ . Рассмотрим точку  $(x_0, y_0)$ , и проведём через эту точку соответствующую интегральную кривую. В точке  $(x_0, y_0)$  к ней можно провести касательную, её угловой коэффициент будет  $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ .

**Определение 1.0.3** (Поле направлений). Проведём через каждую точку  $(x_0, y_0)$  отрезок с угловым коэффициентом  $f(x_0, y_0)$ .

**Факт 1.0.1.**  $y(x)$  — решение на промежутке  $(a, b) \iff \forall x \in (a, b) : y'(x)$  касается отрезка из поля направлений (соответствующего точке  $(x, y(x))$ ).

Вопрос о решении уравнений достаточно сложный, сейчас мы будем рассматривать несколько типов уравнений, для которых решения можно находить «в более или менее явном виде».

## 1.1 Уравнения первого порядка, разрешённые относительно частных производных

Рассмотрим уравнение  $y' = f(x, y)$ ,  $f \in C(G)$ .

Функция  $u : H \rightarrow \mathbb{R}$ , где область  $H \subset G$ , называется (первым) интегралом уравнения в  $H$ , если

1.  $u \in C^1(H)$ .
2.  $\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$  в  $H$ .
3. Для любого решения  $y(x)$  на  $(a, b)$ , такого, что  $\forall x \in (a, b) : (x, y(x)) \in H$  функция  $u(x, y(x))$  является постоянной на  $x \in (a, b)$ .

Вспомним точную формулировку теоремы о неявной функции.

**Теорема 1.1.1** (О неявной функции). Рассмотрим функцию  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $H \subset \mathbb{R}^2$ , такую, что  $F \in C^1(H)$ ,  $\exists (x_0, y_0) \in H : F(x_0, y_0) = 0$ , причём  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ .

Тогда существуют два интервала  $I, J \subset \mathbb{R}$  ( $I \ni x_0, J \ni y_0$ ), и существует функция  $z \in C^1(I)$ , такая, что

$$F(x, y) = 0, x \in I, y \in J \iff y = z(x)$$

**Теорема 1.1.2** (Об интеграле). Пусть  $u(x, y)$  — интеграл в  $H \subset G$ . Тогда  $\forall (x_0, y_0) \in H$  найдутся интервалы  $I \ni x_0, J \ni y_0$ , и  $\exists Y \in C^1(I)$ , такие что

1.  $Y$  — решение задачи Коши с начальными данными  $(x_0, y_0)$
2.  $\forall (x, y) \in I \times J : u(x, y) = u(x_0, y_0) \iff y = Y(x)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $F(x, y) := u(x, y) - u(x_0, y_0)$ . Функция  $F$  удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции ( $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$  по определению интеграла).

По теореме о неявной функции  $\exists z(x)$ , такая, что  $F(\cdot, \cdot)$  на множестве  $I \times J$  обнуляется ровно на точках вида  $(x, z(x))$ .

С другой стороны, по теореме существования найдётся решение  $y(x)$  на промежутке  $I_0 \ni x_0$ . Можно сузить  $I_0$  так, чтобы  $I_0 \subset I, y(I_0) \subset J$ . По определению интеграла  $u(x, y(x))$  постоянно, то есть равно  $u(x_0, y(x_0))$ .

Отсюда видим, что сужение  $z$  на  $I_0 \times J_0$  и является искомой функцией  $Y$  — неким сужением  $y$ .  $\square$

Лекция II  
8 сентября 2023 г.  
 $y' = f(x), f \in C(a, b)$

Из анализа известно, что для любой точки  $(x_0, y_0) \in (a, b) \times \mathbb{R}$  существует и единственно решение, проходящее через данную точку

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$$

## 1.2 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$$y' = m(x)n(y)$$

где  $m \in C(a, b), n \in C(\alpha, \beta)$ .

Имеет смысл искать решение в области  $G = (a, b) \times (\alpha, \beta)$ .

Предположим, что  $\exists y_0 \in (\alpha, \beta) : n(y_0) = 0$ . Тогда в числе прочих решений есть  $y(x) \equiv y_0$ , определённая при  $x \in (a, b)$ .

Теперь что происходит в прочих местах? Пусть  $I = (\alpha', \beta')$  выбрано так, что  $\forall y \in I : n(y) \neq 0$ . Обозначим  $I_0 = (a, b)$ . Выберем  $x_0 \in I_0, y_0 \in I$ .

При подстановке  $y'(x) = m(x)n(y(x))$  получаем уравнение  $\frac{y'(x)}{n(y(x))} = m(x)$ , что можно проинтегрировать.

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{y'(t)}{n(y(t))} dt &= \int_{x_0}^x m(s) ds \\ \left\| \begin{aligned} y(t) &= z & y'(t) dt &= dz \end{aligned} \right\| \\ \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dz}{n(z)} &= \int_{x_0}^x m(s) ds \end{aligned}$$

Введём две первообразные  $M(x) = \int m(x) dx$  (определена на  $(a, b)$ ) и  $N(y) = \int \frac{dy}{n(y)}$  (определена на  $I$ ).

Тогда мы получаем равенство  $N(y(x)) - M(x) = N(y(x_0)) - M(x_0)$ . Отсюда мы получаем *интеграл*  $U(x, y) = N(y) - M(x)$ . В самом деле,

- $U \in C^1((a, b) \times (\alpha', \beta'))$ .
- $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{n(y)} \neq 0$ .
- Для всякого решения  $y(x)$

$$\frac{d}{dx} U(x, y(x)) = \frac{\partial}{\partial x} U(x, y(x)) + \frac{\partial}{\partial y} U(x, y(x)) \cdot y'(x) = -m(x) + \frac{1}{n(y(x))} m(x) n(y(x)) = 0$$

## 1.3 Замена переменных

В уравнении  $y' = f(x, y)$  можно ввести новую независимую переменную  $v$ , и новую искомую функцию  $w$ , связанные тождествами

$$x = V(v, w) \quad y = W(v, w)$$

Подставив, мы получим новое дифференциальное уравнение, которое может быть легче решить.

*Примеры.*



- $y' = f(ax + by)$ . Будем считать, что  $ab \neq 0$ , иначе неинтересно. Оставив  $x$  независимой переменной, заменим  $w = ax + by$ . Теперь  $w' = a + by' = a + bf(w)$ , что есть уравнение с разделяющимися переменными.
- Ещё одним примером является уже знакомое нам уравнение с разделяющимися переменными  $y' = m(x)n(y)$  при  $n(y(x)) \neq 0$ . Тут, заменив,  $w = \int n(y) dy = N(y)$  получаем уравнение  $\frac{dw}{dx} = \frac{1}{n(y)} \cdot y' = m(x)$ .

## 1.4 Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = p(x)y + q(x)$$

где  $p, q \in C(a, b)$ . Обозначив  $f(x, y) = p(x)y + q(x)$  на области  $G = (a, b) \times \mathbb{R}$ , видим, что  $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$ , откуда  $G$  — область существования и единственности.

1. Рассмотрим *однородное уравнение*  $y'(x) = p(x)y$ , как бы заменив  $q(x)$  на 0.

- $y(x) \equiv 0$  — решение на  $x \in (a, b)$ .
- Рассмотрим  $G_+ = \{(x, y) | x \in (a, b), y > 0\}$ . Пусть  $(x_0, y_0) \in G_+$ .

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{dy}{y(t)} &= \int_{x_0}^x p(s) ds \\ \log(y(x)) - \log(y(x_0)) &= \int_{x_0}^x p(s) ds \\ y(x) &= y_0 \cdot \exp \left( \int_{x_0}^x p(s) ds \right) \end{aligned}$$

Это решение, проходящее через точку  $(x_0, y_0)$ .

- Для области  $G_-$  аналогичные рассуждения выдают тот же ответ  $y(x) = y_0 \cdot \exp \left( \int_{x_0}^x p(s) ds \right)$ .

Таким образом, множество всех решений — это  $\left\{ y(x) = y_0 \cdot \exp \left( \int_{x_0}^x p(s) ds \right) \middle| (x_0, y_0) \in G \right\}$ , причём здесь записано единственное решение, проходящее через  $(x_0, y_0)$ . Тем не менее, пока то, что  $G$  — область существования и единственности даёт гарантии лишь локальной единственности, и то, что никаких других решений нет (кроме сужений данного), мы докажем позднее (??).

2. **Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной).** Будем искать решения неоднородного уравнения  $y' = p(x)y + q(x)$  в виде  $y(x) = c(x) \exp \left( \int_{x_0}^x p(s) ds \right)$ , где  $c \in C^1(a, b)$ .

$$\text{Продифференцировав, получим } y'(x) = c'(x) \exp \left( \int_{x_0}^x p(s) ds \right) + c(x)p(x) \exp \left( \int_{x_0}^x p(s) ds \right).$$

Хочется, чтобы выполнялось равенство  $y'(x) = p(x)y + q(x)$ , это эквивалентно равенству

$c'(x) \exp \left( \int_{x_0}^x p(s) ds \right) = q(x)$ , откуда получаем

$$c(x) = \int q(x) \exp \left( - \int_{x_0}^x p(s) ds \right) dx$$

3. Заметим, что если  $y_1(x)$  — решение неоднородного уравнения ( $y'(x) = p(x)y + q(x)$ ),  $y_2(x)$  — решение соответствующего однородного ( $y'(x) = p(x)y$ ), то  $y_1 + y_2$  — тоже решение данного неоднородного уравнения.

Получаем довольно громоздкую формулу для решения задачи Коши

$$y(x) = \exp \left( \int_{x_0}^x p(t) dt \right) \cdot \left( y_0 + \int_{x_0}^x q(t) \exp \left( \int_{x_0}^t p(s) ds \right) dt \right)$$

## 1.5 Уравнение Бернулли

$$y' = p(x)y + q(x)y^m$$

При  $m = 0, 1$  уравнение обращается в ранее рассмотренное линейное дифференциальное.

Если  $m > 0$ , то  $y \equiv 0$  является решением, теперь ограничим уравнение на область  $y > 0$ .

$$\begin{aligned} y' &= p(x)y + q(x)y^m \\ \frac{y'}{y^m} &= p(x)y^{1-m} + q(x) \\ \| w = y^{1-m} \| \\ w' &= (1-m)y^{-m} \cdot y' \\ \frac{1}{1-m} w' &= p(x)w + q(x) \end{aligned}$$

## 1.6 Уравнение Рикатти

$$y' = ay^2 + bx^\alpha, \quad ab \neq 0$$

Бернулли показал, что уравнение Рикатти можно проинтегрировать для  $\alpha \in \left\{ \frac{-4k}{2k-1} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ ; а после этого (в 1841 году) Лиувилль показал, что при данных  $\alpha$  (и ещё при  $\alpha = -2$ ) уравнение интегрируется, а при всех остальных — **не интегрируется вообще**.

Рассмотрим класс элементарных функций — {степенные, показательные, суммы, произведения, логарифм...} и замкнём его относительно конечного числа взятий композиций, взятий обратных и взятий первообразных. Лиувилль показал, что ни одно решение уравнения Рикатти при  $\alpha$ , не являющимся показателем Бернулли, не принадлежит данному классу, именно поэтому интегрированием никак не получить решение уравнения Рикатти.

После этого теория дифференциальных уравнений пошла по другому пути — перестали искать новые виды интегрировать решения, зато стали искать методы получать свойства решений, не получая их самих.

Лекция III  
15 сентября 2023 г.

## 1.7 Дифференциальное уравнение 1 порядка в симметричной форме. Уравнение Пфаффа

**Определение 1.7.1** (Дифференциальная 1-форма). Выражение вида  $F = m(x, y) dx + n(x, y) dy$ , где  $m, n \in C^1(G)$ , причём  $\forall (x, y) \in G : \begin{cases} m(x, y) \neq 0 \\ n(x, y) \neq 0 \end{cases}$ . Рассматривается пока как некий формальный объект.

**Определение 1.7.2** (Интегральная кривая формы  $F$ ). Векторнозначная функция  $\gamma : (a, b) \rightarrow G$ ,  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  — регулярная гладкая кривая, такая, что  $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1(a, b)$ ,  $(\dot{\gamma}_1)^2 + (\dot{\gamma}_2)^2 \neq 0$ , и наконец  $m(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + n(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t) \equiv 0$ .

Сведём уравнение Пфаффа  $F = 0$  к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Рассмотрим два уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m(x, y)}{n(x, y)} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{n(x, y)}{m(x, y)}$$

В первом  $y$  искомая функция,  $x$  — независимая переменная, во втором — наоборот.

Рассмотрим  $t_0 \in (a, b)$ . Здесь  $\dot{\gamma}_1(t_0) \neq 0$  (или  $\dot{\gamma}_2(t_0)$ , несущественно). Значит,  $\exists (\alpha, \beta) \subset (a, b) : \forall t \in (\alpha, \beta) : \dot{\gamma}_1(t) \neq 0$ .

На данном промежутке  $\gamma_1$  обратима, уравнение  $\gamma_1(t) = x$  разрешимо единственным образом:  $\exists \gamma_1^{-1}(x) =: t$ .

Положим  $y(x) = \gamma_2(\gamma_1^{-1}(x))$ . Проверим, что это решение

$$\frac{dy}{dx} = \dot{\gamma}_2(\gamma_1^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\dot{\gamma}_1(\gamma_1^{-1}(x))} = \frac{\dot{\gamma}_2(t)}{\dot{\gamma}_1(t)} = -\frac{m(y(t))}{n(\gamma(t))} = -\frac{m(x, y)}{n(x, y)}$$

Таким образом, наличие интегральной кривой  $\gamma$  параметрически задаёт решение уравнения Пфаффа.

*Замечание.* Верно и обратное: пусть  $y(x)$  — решение уравнения  $\frac{dy}{dx} = -\frac{m(x, y)}{n(x, y)}$ . Здесь подойдёт  $\gamma(t) = (t, y(t))$ . Теперь  $\dot{\gamma}_1 = 1, \dot{\gamma}_2 = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} = -\frac{m(x, y)}{n(x, y)} = -\frac{m(\gamma_1, \gamma_2)}{n(\gamma_1, \gamma_2)}$ . Теперь несложно убедиться в равенстве  $m(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + n(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t) \equiv 0$

*Замечание.* Уравнение Пфаффа стоит понимать, как совокупность двух вышеприведённых уравнений

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m(x, y)}{n(x, y)} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{n(x, y)}{m(x, y)}$$

Деление на дифференциал можно формализовать, но лектор делать этого не собирается.

### 1.7.1 Уравнение в полных дифференциалах

Рассмотрим такое уравнение Пфаффа

$$F = m(x, y) dx + n(x, y) dy = 0$$

что существует  $U(x, y), U \in C^2(G)$ , такая, что  $m = \frac{\partial U}{\partial x}, n = \frac{\partial U}{\partial y}$ .

В этом случае  $F$  называется *точной формой*.

**Теорема 1.7.1.** Если  $F$  — точная форма, то  $\forall (x_0, y_0) \in G : \exists$  окрестность  $V \ni (x_0, y_0)$ , такая, что  $U$  является интегралом одного из двух уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m}{n} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{n}{m}$$

*Доказательство.* Предположим, что  $n(x_0, y_0) \neq 0$ . Тогда  $\exists V \ni (x_0, y_0) : \forall (x, y) \in V : n(x, y) \neq 0$ .

Рассмотрим уравнение  $\frac{dy}{dx} = -\frac{m}{n}$  в  $V$ . Действительно,  $U \in C^1$ , частная производная по  $y$  не обнуляется, осталось проверить, что на некоем промежутке  $(a, b)$  интеграл от решения постоянен.

$$\frac{d}{dy}U(x, y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y(x)) \cdot y'(x) = m + n \frac{dy}{dx} = m + n \cdot \left(-\frac{m}{n}\right) \equiv 0$$

□

Это очень удобно, но как проверять, что форма точная?

Если  $F$  — точная форма, то выполнены условия

$$\frac{\partial m}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial n}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

оказывается, данное условие не только необходимое, но и в некотором роде достаточное.

**Теорема 1.7.2.** Докажем достаточность для прямоугольника  $(a, b) \times (\alpha, \beta)$ .

Если условия выполнены на прямоугольнике, то  $F$  — точная функция.

*Доказательство.* Построим  $U \in C^2(G)$  с заданными частными производными.

$$U := \int_{x_0}^x m(s, y) ds + \phi(y), \quad \phi \in C^2$$

Найдём  $\phi$  так, чтобы выполнялось второе равенство.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x m(s, y) ds + \phi'(y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial m}{\partial y}(s, y) ds + \phi'(y) = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial n}{\partial s}(s, y) ds + \phi'(y) = n(x, y) - n(x_0, y) + \phi'(y) \stackrel{\text{хотим}}{=} n(x, y) \end{aligned}$$

Значит, надо выбрать  $\phi'(y) = n(x_0, y)$ , откуда в качестве  $\phi$  подходит  $\int_{y_0}^y n(x_0, t) dt$ .

Получившаяся формула не выглядит симметричной:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x m(s, y) ds + \int_{y_0}^y n(x_0, t) dt$$

Тем, что  $F$  задана на прямоугольнике мы пользовались тогда, когда записали данный интеграл — путь интегрирования должен быть внутри области задания  $F$ . □

Если же  $F$  не является точной формой, то ищется *интегрирующий множитель*  $\mu(x, y)$ ,  $\mu \in C^1$ ,  $\mu \neq 0$ , такая, что  $\mu F$  — точная форма.

Тогда уравнения  $F = 0$  и  $\mu F = 0$  эквивалентны.

Простой пример, когда можно найти интегрирующий множитель — уравнение с разделяющимися переменными  $m(x)n(y) dx + dy = 0$ .

Если  $n(y) \neq 0$ , то в качестве множителя подойдёт  $\frac{1}{n(y)}$ . Получится форма  $m(x) dx + \frac{1}{n(y)} dy = 0$ , которая уже точна.

## Глава 2

# Системы дифференциальных уравнений

Будем обозначать независимую переменную  $t$ , а производные по  $t$  — точкой:  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ .

### 2.1 Системы, разрешённые относительно старших производных

Ищем  $n$  функций  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ , фиксируем  $n$  натуральных чисел  $m_1, \dots, m_n$ .

Записаны  $n$  уравнений вида

$$\frac{d^{m_j} x_j}{dt^{m_j}} = f_j(t, x_1, \dots, x_1^{(m_1-1)}, x_2, \dots, x_2^{(m_2-1)}, \dots, x_n, \dots, x_n^{(m_n-1)})$$

Данная система называется системой порядка  $m$ , где  $m = m_1 + \dots + m_n$ .

*Примеры* (Важные частные случаи).

- Нормальная система.  $m_1 = \dots = m_n = 1$ . Здесь все уравнения упрощаются до

$$\dot{x}_j = f_j(t, x_1, \dots, x_n)$$

- Дифференциальное уравнение порядка  $m$  при  $n = 1$ .

$$x^{(m)} = f(t, x, \dots, x^{(m-1)})$$

На самом деле, любое уравнение несложно свести к нормальной системе. Покажем это на примере уравнения порядка  $m$ .

Рассмотрим нормальную систему с  $m$  искомыми функциями  $y_0, \dots, y_{m-1}$  вида

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = y_1 \\ \dot{y}_1 = y_2 \\ \dots \\ \dot{y}_{m-2} = y_{m-1} \\ \dot{y}_{m-1} = f(t, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) \end{cases}$$

Тогда если  $x(t)$  — решение уравнения порядка  $m$ , то в качестве решений системы подойдут  $y_k = x^{(k)}$ , и наоборот, если нашлись  $\{y_k\}_{k=0}^{m-1}$  — решение системы, то  $x = y_0$  является решением уравнения.

### 2.1.1 Векторная запись нормальной системы

$$\text{Введём } x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, x) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ \vdots \\ f_n(t, x) \end{pmatrix} \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} \quad \int f \, dt = \begin{pmatrix} \int f_1 \, dt \\ \vdots \\ \int f_n \, dt \end{pmatrix}$$

Условимся в качестве нормы вектора считать максимум модуля его координат  $|x| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ .

**Определение 2.1.1** (Решение на  $(a, b)$ ).  $x: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , такое, что

- $\exists \dot{x}(t)$  на  $(a, b)$ .
- $(t, x(t)) \in G, t \in (a, b)$ .
- $\dot{x}(t) \equiv f(t, x(t)), t \in (a, b)$ .

**Определение 2.1.2** (Решение задачи Коши с начальными данными  $(t_0, x_0)$  на  $(a, b)$ ).  $x: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , такое, что

1.  $x(t)$  — решение на  $(t_0, x_0)$
2.  $x(t_0) = x_0$ .

## 2.2 Существование и единственность решения задачи Коши

Введём эквивалентное интегральное уравнение  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_s) \, ds$ .

**Определение 2.2.1** (Решение интегрального уравнения на  $(a, b)$ ).  $x: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , такое что

1.  $x \in C^1$
2.  $(t, x(t)) \in G, t \in (a, b)$
3. Выполнено равенство  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_s) \, ds, t \in (a, b)$ .

**Лемма 2.2.1** (Об эквивалентности интегрального уравнения). Функция  $x(t)$  — решение задачи Коши с начальными данными  $(t_0, x_0)$ , если и только если  $\dot{x}(t)$  — решение эквивалентного интегрального уравнения.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . (1)  $\Rightarrow$  (1), (2)  $\Rightarrow$  (2), (3) тоже как-то тривиально доказывается

$\Leftarrow$ .  $f(t, x(t)) \in C \Rightarrow \exists \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(s, x_s) \, ds$ . (2)  $\Rightarrow$  (2), (3) получается дифференцированием равенства

$$\frac{d}{dt} \left( x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds \right) = f(t, x(t)). \quad \square$$

## Лекция IV

22 сентября 2023 г.

### 2.2.1 Теорема Пеано о существовании решения

Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,x}^{n+1}$ . Рассмотрим решение  $x(t)$  с условием  $\dot{x} = f(t, x)$ .

Ранее мы рассматривали решения на интервале  $x: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , такие, что уравнение обращается в верное равенство.

Позволим себе расширить множество решений, на концах отрезка вычисляя односторонние производные. Заметим, что  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$  — по-прежнему эквивалентное интегральное уравнение.

**Теорема 2.2.1** (Пеано, о существовании решения). Если  $f \in C(G)$ , то  $\forall (x_0, t_0) \in G : \exists$  решение задачи Коши с начальными данными  $(t_0, x_0)$ .

*Доказательство.* Сведёмся к разрешимости эквивалентного интегрального уравнения. Зафиксируем  $(t_0, x_0) \in G$ , введём  $\alpha, \beta > 0$  так, что параллелепипед  $R = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\} \subset G$ .

Выберем  $M > 0 : |f(t, x(t))| \leq M$  в  $R$ . Пусть  $h := \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$ . Докажем существование решения на замкнутом промежутке  $[t_0 - h, t_0 + h]$  — *промежутке Пеано*. Для простоты докажем существование решения на  $[t_0, t_0 + h]$ , слева будет аналогично.

Зафиксируем  $N \in \mathbb{N}$ , разобьём  $[t_0, t_0 + h]$  на  $N$  равных кусков точками  $t_k + \frac{kh}{N}$ . Построим на этом разбиении *ломаную Эйлера*  $g(t)$ .  $g(t)$  будет определяться индуктивно: поочерёдно для  $k = 1..N$  положим  $g(t) = g(t_k) + f(t_k, g(t_k))(t - t_k)$  на  $t_{k-1}, t_k$ , что определено, если  $(t_k, g(t_k)) \in G$ . В частности, изначально положим  $g(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0)$  на  $[t_0, t_1]$ .

У этой ломаной есть производные во всех внутренних точках звеньев. Определим также  $\dot{g}(t_k)$ .  $\dot{g}(t_0) := f(t_0, x_0)$  и  $\dot{g}(t_k) = \lim_{t \rightarrow t_k-0} \dot{g}(t)$ .

**Лемма 2.2.2.** Докажем, по индукции для  $k = 1..N$ , что для  $t \in [t_0, t_k]$

1.  $g(t)$  определена
2.  $|g(t) - x_0| \leq M(t - t_0)$
3.  $g(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \dot{g}(s) ds$

*Доказательство леммы.*

База: Для  $k = 1$   $g$  определена на  $[t_0, t_1]$ , как записано выше.  $|g(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(t_0, x_0) ds \right| \leq M(t - t_0) = Mh$ , так как  $(t_0, x_0) \in R$ , откуда  $|f(t_0, x_0)| \leq R$ . Также (3) очевидно, так как на данном единственном звене  $g$  линейна.

Переход: Докажем для  $k + 1$ . По индукции  $g(t_k)$  определена, причём  $|g(t_k) - x_0| \leq M(t - t_0) \leq Mh \leq \beta$  и  $|t_k - t_0| \leq h \leq \alpha$ . Таким образом,  $(t_k, g(t_k)) \in R \subset G$ , откуда  $g$  определена и на  $[t_k, t_{k+1}]$ . (2) и (3) опять (как и в базе) следуют из того, что

$$g(t) = g(t_k) + f(t_k, g(t_k))(t - t_k) = x_0 + \int_{t_0}^{t_k} \dot{g}(s) ds + \int_{t_k}^t \dot{g}(s) ds = x_0 + \int_{t_0}^t \dot{g}(s) ds \quad \square$$

Теперь устремим число точек  $N$  на ломаной к  $+\infty$ .

Последовательность функций  $\Phi = \{\phi_m(t)\}_{m=1}^\infty$ , бьющих из  $[a, b]$  в  $\mathbb{R}^n$  называется

- *равномерно ограниченной*, если  $\exists H > 0 : |\phi_m(t)| \leq H$  для  $t \in [a, b], m \in \mathbb{N}$ .
- *равностепенно непрерывной*, если  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall m, t, t' : |t - t'| < \delta \Rightarrow |\phi_m(t) - \phi_m(t')| \leq \varepsilon$ .

*Интересный факт* (Лемма Арцела-Асколи). В равномерно ограниченной равностепенно непрерывной последовательности функций можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Покажем, что  $\{g_N(t)\}_{N=1}^\infty$  равномерно ограничена и равномерно непрерывна, то есть к ней применима данная лемма.

Равномерная ограниченность следует из  $\forall N, t \in [t_0, t_0 + h] : |g_N(t) - x_0| \leq M(t - t_0)$  и неравенства треугольника:  $|g_N(t)| \leq |x_0| + Mh$ . Равномерная непрерывность следует из интегрального представления:

$$|g_N(t') - g_N(t)| = \left| \int_{t'}^t \dot{g}_N(s) ds \right|, \text{ причём } \dot{g}_N(s) \text{ — значение } f \text{ в какой-то точке } R$$

Таким образом, в  $g$  найдётся сходящаяся подпоследовательность, для краткости записи будем считать, что сама  $g_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} g(t)$  на  $[t_0, t_0 + h]$ . Проверим, что  $g$  действительно является решением эквивалентного интегрального уравнения.

- $g(t)$  непрерывна, так как к ней равномерно сходятся  $g_N$ .
- $(t, g_N(t)) \in R$ , а так как  $R$  замкнуто, и имеется и поточечная сходимость, то  $(t, g(t)) \in R$ .
- Осталось показать, что  $g$  удовлетворяет самому равенству

$$g(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds$$

Для этого запишем

$$g_N(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \dot{g}_N(s) ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g_N(s)) ds + \int_{t_0}^t (\dot{g}_N(s) - f(s, g_N(s))) ds$$

Так как  $f$  равномерно непрерывна на  $R$ , то  $f(s, g_N(s)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(s, g(s))$ . Отсюда её можно заменить под интегралом, и осталось показать, что  $\left| \int_{t_0}^t (\dot{g}_N(s) - f(s, g_N(s))) ds \right|$  стремится к нулю.

Выберем  $\varepsilon > 0$ , для него найдётся такая  $\delta$ , что

$$\forall (t, x), (t', x') \in R : |t - t'| < \delta, |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(t', x') - f(t, x)| < \varepsilon$$

Рассмотрим достаточно большие  $N$ , такие, что

$$\forall t \in [t_0, t_0 + h] : \exists k : |t - t_k| < \frac{h}{N} < \delta \quad \text{и} \quad |g_N(t) - g(t)| < \delta$$

Так как  $|g_N(t_k) - g_N(t)| \leq M|t_k - t| \leq M \frac{h}{N}$ , то при достаточно больших  $N$

$$\dot{g}_N(s) - f(s, g_N(s)) ds \leq \varepsilon$$

Интегрируя по отрезку, чья длина ограничена, получаем, что весь интеграл  $\left| \int_{t_0}^t (\dot{g}_N(s) - f(s, g_N(s))) ds \right|$  стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . □

## Лекция V

29 сентября 2023 г.



## 2.2.2 Теорема Пикара о существовании и единственности решения

Пусть  $f : (G \subset \mathbb{R}_{t,x}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Определение 2.2.2** ( $f$  липшицева в  $H \subset G$ ).  $\exists L \in \mathbb{R} : \forall (t, x), (t, x') \in H : |f(t, x) - f(t, x')| \leq L|x - x'|$ . Пишут  $f \in \text{Lip}_x(H)$ .

**Определение 2.2.3** ( $f$  локально липшицева в  $G$ ).  $\forall (t_0, x_0) \in G : \exists V \ni (t_0, x_0) : f \in \text{Lip}_x(V)$ . Пишут  $f \in \text{Lip}_{x,loc}(G)$ .

Запишем  $f$  в координатном виде  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ , где  $f_i$  дифференцируема по  $x$ . Введём матрицу Якоби

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

**Определение 2.2.4** (Операторная норма  $A \in M(n, \mathbb{R})$ ).  $\|A\| = \max_{|x|=1} |Ax|$ . Здесь  $|x| = 1$  по-прежнему значит  $\max_{i=1}^n |x_i| = 1$ .

*Свойства.*

- Операторная норма произведения не превосходит произведения операторных норм:  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .
- Операторная норма степени не превосходит степени операторных норм:  $\|A^m\| \leq \|A\|^m$ .

**Лемма 2.2.3.** Если  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(G)$  (то есть матрица Якоби непрерывна в  $G$ ), то  $f \in \text{Lip}_{x,loc}(G)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $(t_0, x_0) \in G$ , найдутся такие  $\alpha, \beta > 0$ :  $R = \{(t, x) | |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\} \subset G$ . Пусть  $V = \text{Int } R$ ,  $L = \max_{(t,x) \in R} \left\| \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \right\|$ .

Тогда для  $(t, x_1), (t, x_2) \in V$  можно рассмотреть  $g(s) = f(t, sx_1 + (1-s)x_2), s \in [0, 1]$ .

$$|g(1) - g(0)| = \left| \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial s} ds \right| = \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, sx_1 + (1-s)x_2) ds \right| \leq L|x_1 - x_2|$$

□

Пусть  $f \in C(G), \text{Lip}_{x,loc}(G)$ , пусть  $K \subset G$  — компакт.

**Лемма 2.2.4.** Тогда  $f \in \text{Lip}_x(K)$ .

*Доказательство.* Предположим, что это не так. Выберем последовательность  $\{L_k\}$ , стремящуюся к бесконечности, для каждого  $k$  найдётся пара точек  $(t_k, x_k), (t_k, x'_k) \in K$ , для которых не выполнено условие Липшица.

Выберем подпоследовательность, такую, что  $(t_k, x_k, \tilde{x}_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{x}')$ .

- Если  $\tilde{x} = \tilde{x}'$ , то рассмотрим окрестность  $V \ni (\tilde{t}, \tilde{x})$ , такую, что  $f \in \text{Lip}_x(V)$ . При достаточно больших  $k$  точки  $(t_k, x_k), (t_k, x'_k) \in V$ , противоречие.
- Если же  $\tilde{x} \neq \tilde{x}'$ , то мы рассмотрим  $g(t, x, y) = \frac{f(t, x) - f(t, y)}{|x - y|}$ . Эта функция определена и непрерывна в некоторой окрестности точки  $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{x}')$ . Тогда  $\exists W \ni (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{x}'), L \in \mathbb{R} : |g(t, x, y)| \leq L$  в  $W$ .

При достаточно больших  $k : (t_k, x_k, x'_k) \in W$ , противоречие.

□

**Лемма 2.2.5** (Gronwall (Гронуолл)). Пусть  $\phi(t)$  — неотрицательна и непрерывна на  $(a, b)$ . Пусть  $\exists t_0 \in (a, b), \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \phi(t) \leq \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^t \phi(s) ds \right|$ . Утверждается, что тогда  $\phi(t) \leq \lambda e^{\mu|t-t_0|}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $t \geq t_0$ , при  $t \leq t_0$  аналогично.

$$\phi(t) \leq \lambda + \mu \int_{t_0}^t \phi(s) ds =: \Phi(t)$$

$\dot{\Phi}(t) = \mu + \phi(t) \leq \mu\Phi(t)$ , откуда  $\dot{\Phi} - \mu\Phi \leq 0$ .

$$e^{-\mu(t-t_0)} (\dot{\Phi}(t) - \mu\Phi(t)) \leq 0 \iff \frac{d}{dt}(e^{-\mu(t-t_0)}\Phi(t)) \leq 0$$

Таким образом,  $e^{-\mu(t-t_0)}\Phi(t) \leq \lambda \iff \phi(t) \leq \Phi(t) \leq \lambda e^{\mu(t-t_0)}$ . □

**Следствие 2.2.1.** Если  $\exists t_0 \in (a, b), \mu \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \phi(t) \leq \mu \left| \int_{t_0}^t \phi(s) ds \right|$ , то  $\phi(t) \equiv 0$

**Теорема 2.2.2** (Picard (Пикар)). Если  $f \in C(G), \text{Lip}_{x,loc}(G) \Rightarrow G$  — область существования и единственности.

*Доказательство.* Для начала докажем, что  $\forall (x_0, y_0) \in G$ : задача Коши разрешима.

Рассмотрим  $\alpha, \beta > 0$  такие, что  $R = \{(t, x) | |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\} \subset G$ . Выберем  $M > 0 : |f| \leq M$  в  $R$ .

Согласно лемме (2.2.4)  $f \in \text{Lip}_x(R)$ . Пусть  $h = \min\left(\alpha, \frac{\beta}{M}\right)$ .

Докажем существование решения на промежутке  $[t_0 - h, t_0 + h]$  методом *последовательных приближений Пикара*. Рассмотрим  $\{\phi_k(t)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ , определённые по правилу

$$\phi_0(t) \equiv x_0 \quad \phi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_k(s)) ds$$

**Лемма 2.2.6.**  $\forall k \in \mathbb{N}_0 : \phi_k(t)$  определена и непрерывна на  $[t_0 - h, t_0 + h]$ , и её график лежит в  $R$ .

*Доказательство леммы.*

База: При  $k = 0$  утверждение верно.

Переход: Докажем для  $k + 1$ . Так как  $(t, \phi_k(t)) \in R \subset G$ , то  $\phi_{k+1}$  определена и непрерывна на  $[t_0 - h, t_0 + h]$ . Осталось проверить, что  $|x - x_0| \leq \beta$ , что следует из  $\left| \int_{t_0}^t f(s, \phi_k(s)) ds \right| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq \beta$ . □

**Лемма 2.2.7.**  $\phi_k(t) \rightrightarrows \phi(t)$  равномерно на  $[t_0 - h, t_0 + h]$ .

*Доказательство леммы.*

Рассмотрим  $\psi_k(t) = \begin{cases} \phi_0(t), & k = 0 \\ \phi_k(t) - \phi_{k-1}(t), & k > 0 \end{cases}$ . Тогда надо показать, что ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(t)$  сходится равномерно. Воспользуемся критерием Вейерштрасса: при

$$k \geq 1 : |\psi_k(t)| \leq \frac{M}{L} \frac{|L(t-t_0)|^k}{k!}$$

Докажем это по индукции для  $t \geq t_0$  (для  $t \leq t_0$  аналогично).

База:  $|\psi_1(t)| = |\phi_1(t) - \phi_0(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds \right| \leq M(t-t_0) = \frac{M}{L} \frac{L(t-t_0)}{1}$

Переход:

$$\begin{aligned} |\psi_{k+1}(t)| &= |\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)| = \left| \int_{t_0}^t [f(s, \phi_{k+1}(s)) - f(s, \phi_k(s))] ds \right| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, \phi_{k+1}(s)) - f(s, \phi_k(s))| ds \leq L \int_{t_0}^t |\phi_k(s) - \phi_{k-1}(s)| ds \end{aligned}$$

Воспользовавшись индукционным предположением, получаем

$$|\psi_{k+1}(t)| \leq L \int_{t_0}^t \frac{M}{L} \frac{L^k (s-t_0)^k}{k!} ds = \frac{M}{L} \cdot L^{k+1} \int_0^{t-t_0} \frac{s^k}{k!} ds = \frac{M}{L} \frac{L^{k+1} (t-t_0)^{k+1}}{(k+1)!}$$

□

Отсюда моментально следует равномерная сходимость ряда  $\sum_{k \geq 0} |\psi_k(t)| \leq \sum_{k \geq 0} \frac{M}{L} \frac{(Lh)^k}{k!} = \frac{M}{L} e^{Lh}$ .

Вспомним, что  $\phi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_k(s)) ds$ . Так как  $\phi_k$  равномерно сходятся к некоторой функции  $\phi$ ,  $f$  равномерно непрерывна на своей области определения — компакте, значит,  $f(t, \phi_k(t)) \Rightarrow f(t, \phi(t))$ , откуда  $\phi$  — решение эквивалентного интегрального уравнения.

Теперь осталось доказать, что всякая точка — точка единственности. Рассмотрим  $(t_0, x_0) \in G$ , пусть есть два решения задачи Коши  $x_1(t), x_2(t)$  с этими начальными данными.

Найдётся интервал  $(a, b) \ni t_0$ , такой, что графики  $x_1, x_2$  на этом интервале лежат в параллелепипеде  $R$ ; каждое из решений удовлетворяет уравнению

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds$$

Вычитая одно решение из другого, получаем

$$|x_1(t) - x_2(t)| = \left| \int_{t_0}^t (f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))) ds \right|$$

Аргументы лежат в компакте  $R$ , значит, можно оценить

$$|x_1(t) - x_2(t)| = \left| \int_{t_0}^t (f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))) ds \right| \leq L \int_{t_0}^t |x_1(s) - x_2(s)| ds$$

Применяя следствие леммы Гронуолла (2.2.1), получаем  $x_1 - x_2 \equiv 0$ .

□

**Теорема 2.2.3** (Об области единственности). Предположим, что  $G$  — область единственности. Пусть  $x_1(t), x_2(t)$  — два решения на  $(a, b)$ . Предположим, что  $\exists t_0 \in (a, b) : x_1(t_0) = x_2(t_0)$ . Утверждается, что тогда  $x_1 \equiv x_2$ .

*Доказательство.* Множество  $\{t \in (a, b) | x_1(t) = x_2(t)\}$  замкнуто в  $(a, b)$ , рассмотрим его граничную точку. Если она есть, то в ней нарушается условие единственности.  $\square$

## Лекция VI

6 октября 2023 г.

### 2.2.3 Теорема о существовании и единственности решения методом сжимающих отображений

**Теорема 2.2.4** (О существовании решения. метод сжимающих отображений). Пусть  $\dot{x} = f(t, x), f \in C(G), \text{Lip}_{x, \text{loc}}(G), (t_0, x_0) \in G$ . Берём тот же самый параллелепипед  $R = \{(t, x) | |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\}$ , фиксируем  $M > 0$ , ограничивающее  $f$  на параллелепипеде,  $L$  — константа Липшица.

Вводим  $h = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$ . Теперь  $h$  мы будем уменьшать: рассматриваем  $h_0 \in (0, h) : Lh_0 < 1$ . Докажем существование решения на промежутке  $[t_0 - h, t_0 + h]$ .

Рассмотрим пространство  $X = \{\phi \in C^1([t_0 - h, t_0 + h] \rightarrow \mathbb{R}) | \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h] : (t, \phi(t)) \in R\}$ . Введём на  $X$  метрику  $\rho(\phi_1, \phi_2) = \max_{t \in [t_0 - h_0, t_0 + h_0]} |\phi_1(t) - \phi_2(t)|$ .

*Интересный факт.* Данная метрика превращает  $X$  в полное метрическое пространство.

Определим оператор  $\mathcal{L} : X \rightarrow X$ :

$$\mathcal{L}(\phi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) \, ds$$

Очевидно, неподвижная точка данного оператора является решением эквивалентного интегрального уравнения.

- Проверим, что  $\mathcal{L}$  бьёт в  $X$ . Пусть  $\psi = \mathcal{L}(\phi)$ . Тогда  $|\psi(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) \, ds \right|$ . Поскольку график  $\phi$  лежит в  $R$ , то  $|f(s, \phi(s))| \leq M$ , откуда величина интеграла не превосходит  $Mh_0 \leq \beta$ .
- Проверим, что  $\mathcal{L}$  — сжимающий оператор. Пусть  $\phi_1, \phi_2 \in X$ . Оценим

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{L}(\phi_1), \mathcal{L}(\phi_2)) &= \max_{t \in I} \left| \int_{t_0}^t (f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s))) \, ds \right| \leq \\ &\leq \max_{t \in I} L \left| \int_{t_0}^t \rho(\phi_1, \phi_2) \, ds \right| \leq L|t - t_0| \cdot \rho(\phi_1, \phi_2) < \rho(\phi_1, \phi_2) \end{aligned}$$

- Согласно теореме Банаха  $\mathcal{L}$  имеет единственную неподвижную точку, откуда решение интегрального уравнения существует и единственно.

*Замечание.* Если рассмотреть доказательство теоремы Банаха, то получится, что доказательство (2.2.4) по существу повторяет доказательство (2.2.2). Тем не менее, теорема Пикара чуть сильнее, в ней длина промежутка  $h$  не зависит от константы Липшица.

## 2.3 Продолжимость решений

$\dot{x} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n, f \in C(G), G$  — область единственности. Пусть  $x(t)$  — решение на  $(a, b)$ .

**Определение 2.3.1** ( $y(t)$  — продолжение  $x(t)$  вправо за  $b$ ).  $y$  — решение на  $(a, b')$ , где  $b' > b$  и  $\forall t \in (a, b) : x(t) = y(t)$ .

**Теорема 2.3.1.** Решение  $x(t)$  продолжается вправо на  $(a, b) \iff \exists \lim_{t \rightarrow b-0} x(t) = \beta$  и  $(b, \beta) \in G$ .

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . Пусть  $y$  — продолжение на  $(a, b')$ .  $b \in (a, b')$ , и  $\lim_{t \rightarrow b-0} x(t) = \lim_{t \rightarrow b-0} y(t) = y(b)$ . Так как  $y$  — решение, то  $(b, y(b)) \in G$ .

$\Leftarrow$ . Согласно теореме о существовании, для некоторого  $h$  на промежутке  $(b-h, b+h) \exists z(t) : z(b) = \beta$ .

Рассмотрим  $y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (a, b) \\ z(t), & t \geq b \end{cases}$ , определённое на  $(a, b+h)$ . Покажем, что  $y$  — решение.

Так как  $x$  не определено в  $b$ , то (2.3.1) здесь не работает. Применим следствие теоремы Лагранжа: если на  $(a, b)$  существует производная  $\dot{y}(t)$ , и  $\exists \lim_{t \rightarrow b-0} \dot{y}(t) = A$ , то тогда  $A$  — производная слева  $y(t)$  в точке  $b$ . Отсюда получаем, что производные  $y$  в точке  $b$  слева и справа равны  $\lim_{t \rightarrow b} f(t, y(t)) = f(b, \beta)$ .  $\square$

**Определение 2.3.2** (Полное (непродолжимое) решение  $x(t)$  на  $(a, b)$ ). Решение, которое не продолжимо ни вправо за  $b$ , ни влево за  $a$ .

Полные решения являются самым естественным объектом для изучения в этой теории.

**Теорема 2.3.2.** Если  $f \in C(G), G$  — область единственности, то  $\forall (t_0, x_0) \in G : \exists!$  полное решение задачи Коши с начальными данными  $(t_0, x_0)$ .

*Доказательство.*

**Лемма 2.3.1.** Пусть  $z_1, z_2$  — два произвольных решения уравнения  $z' = f(x, z)$ , не пересекающихся в точке  $(x_0, z_0)$ . Тогда решения можно склеить: например,  $z_3(x) =$

$$\begin{cases} z_1(x), & x < x_0 \\ z_2(x), & x \geq x_0 \end{cases} \text{ тоже является решением.}$$

*Доказательство леммы.*

$z_3$  дифференцируема слева от  $x_0$ , так как там она совпадает с  $z_1$ , дифференцируема справа от  $x_0$ , так как там она совпадает с  $z_2$ , и дифференцируема в  $x_0$ , так как там её производные слева и справа равны  $f(x_0, z_0)$ . Также очевидно, что действительно  $z'_3 = f(x, z_3)$ .  $\square$

$T = \{(a, b) \ni t_0 | \exists x(t) \text{ — решение задачи Коши на } (a, b) \text{ с данными } (t_0, x_0)\}$ . Положим  $A = \inf_{(a, b) \in T} a$ ;  $B = \sup_{(a, b) \in T} b$ .

Пусть  $x_A$  — решение на  $(A, b')$  для некоторого  $b' > t_0$ .

Пусть  $x_B$  — решение на  $(a', B)$  для некоторого  $a' < t_0$ .

Определим  $x(t) = \begin{cases} x_A(t), & t \leq t_0 \\ x_B(t), & t \geq t_0 \end{cases}$  на  $(A, B)$ . Оно корректно определено (2.3.1), и оно полное из определения  $T$ .

Единственность решения также имеет место: если  $x, \tilde{x}$  — два решения, совпадающие в какой-то точке  $(x_0, t_0)$ , то они равны на всех точках области определения, так как множество точек

$\{(t, y)|x(t) = y = \tilde{x}(t)\}$  замкнуто, и к граничной точке можно применить теорему об единственности.  $\square$

*Замечание.* Рассмотрим уравнение  $y' = f(y)$ , где для простоты  $f(0) = 0, \forall y > 0 : f(y) > 0$ . Область  $G = \{(x, y)|y > 0\}$  — область единственности, что следует из существования интеграла.

Таким образом, имеется полное решение, утверждается, что при достаточно малых  $x$  оно достаточно близко к нулю. В самом деле, в противном случае производная положительна и отделена от нуля.

**Теорема 2.3.3** (О полном решении и компакте). Пусть  $K \subset G$  — компакт. Тогда  $\exists \Delta = \Delta(K) > 0$ , такое, что для любого полного решения  $x(t)$  на  $(a, b)$ : если  $b < \infty$ , то  $\forall t \in (b - \Delta, b) : (t, x(t)) \notin K$ . Аналогично, если  $a > -\infty$ , то  $\forall t \in (a, a + \Delta) : (t, x(t)) \notin K$ .

*Доказательство.*  $\exists \alpha, \beta > 0 : \forall (t_0, x_0) \in K : R_{\alpha, \beta}(t_0, x_0) := \{(t, x) | |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\} \subset G$ . Здесь (наверно) используется факт о том, что непрерывная функция на компакте достигает своего наименьшего значения.

Положим  $R = \bigcup_{(t_0, x_0) \in K} R_{\alpha, \beta}(t_0, x_0)$ . Это тоже компакт. Например, это непрерывный образ произведения компактов при отображении

$$\begin{array}{ccc} K \times R_{\alpha, \beta}(0, 0) & \rightarrow & G \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

$\exists M > 0 : |f(t, x)| \leq M$  в  $R$ . Положим  $h = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$ . Мы доказывали, что  $\forall (t_0, x_0) \in K : \exists$  решение задачи Коши с начальными данными  $(t_0, x_0)$  на  $[t_0 - h, t_0 + h]$ .

Положим  $\Delta = \frac{h}{2}$ , предположим, что  $\exists t_0 \in (b - \Delta, b) : (t_0, x(t_0)) \in K$ . Обозначим за  $z(t)$  решение задачи Коши на промежутке  $[t_0, t_0 + h]$ . Склеив решения, получаем противоречие с тем, что  $x$  — полное решение.  $\square$

Рассмотрим уравнение  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$ .

**Определение 2.3.3** (Сравнимая с линейной система).  $\exists p(t), q(t) \in C^1((a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0})$ , такие, что в  $G$  выполнено неравенство.

$$|f(t, x)| \leq p(t)|x| + q(t)$$

**Теорема 2.3.4.** Любое полное решение системы, сравнимой с линейной, определено на  $(a, b)$ .

*Доказательство.* От противного: пусть  $x(t)$  — полное решение на  $(a_1, b_1) \subsetneq (a, b)$ . Для определённости  $b_1 < b$ . Выберем  $t_0 \in (a_1, b_1)$ , положим  $x_0 = x(t_0)$ .

Рассмотрим эквивалентное интегральное уравнение  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ . Здесь верно, что

$[t_0, b_1] \subset (a, b)$ , откуда  $p, q$  ограничены:  $p(t) \leq P, q(t) \leq Q$

Оценим для  $t \in [t_0, b_1]$ :

$$|x(t)| \leq |x_0| + \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \leq |x_0| + \left| \int_{t_0}^t (P|x(s)| + Q) ds \right| \leq \underbrace{|x_0| + Q|t - t_0|}_N + P \int_{t_0}^t |x(s)| ds$$

Это условие леммы Гронуолла (2.2.5). Значит, на данном промежутке  $|x(t)| \leq Ne^{P|t-t_0|} \leq Ne^{P(b_1-t_0)}$ .

Получили противоречие с предыдущей теоремой:  $b_1$  — правый конец промежутка определённости полного решения, но график не покидает компакт.  $\square$

## 2.4 Линейные системы дифференциальных уравнений

$\dot{x} = p(t)x + q(t)$ , где  $x(t), q(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $p(t) \in M_{n \times n}$ .

Раз навсегда условимся, что  $p(t) \in C(a, b)$  и  $q(t) \in C(a, b)$  тоже. Область определения правой части  $G$  можно ввести, как  $(a, b) \times \mathbb{R}^n$ .  $f \in C(G)$ ,  $\text{Lip}_{x, \text{loc}}(G)$  (так как  $\frac{\partial f}{\partial x} = p(t)$ ). Значит,  $G$  — область существования и единственности, причём  $|f(t, x)| \leq \|p(t)\| \cdot |x| + \|q(t)\|$ .

Согласно (2.3.4) всякое полное решение определено на  $(a, b)$ .

### Лекция VII

13 октября 2023 г.

Рассматриваем уравнение  $\dot{x} = p(t)x + q(t)$ , где  $x \in \mathbb{R}^n, p, q \in C(a, b)$ . Мы показали, что  $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$  — область существования и единственности, и (применим теорему об уравнениях, сравнимых с линейными) что любое полное решение определено на  $(a, b)$ .

**Теорема 2.4.1** (О существовании и единственности).

1.  $\forall (t_0, x_0) \in G$ :  $\exists$  полное решение задачи Коши с начальными данными  $(t_0, x_0)$  на  $(a, b)$ .
2. Если же  $x_1(t), x_2(t)$  — решения на  $(a, b)$ , и  $\exists (t_0, x_0) : x_1(t_0) = x_0 = x_2(t_0)$ , то тогда  $x_1 \equiv x_2$ .

#### 2.4.1 Однородные линейные системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим однородное уравнение  $\dot{x} = P(t)x$ .

*Замечание.* Теория, которая здесь излагается, применима на самом деле не только для вещественных, но и для комплексных решений — можно заменить  $\mathbb{R}^n$  на  $\mathbb{C}^n$ .

**Теорема 2.4.2.** Множество решений  $\dot{x} = P(t)x$  — векторное пространство над  $\mathbb{R}$  (или над  $\mathbb{C}$ ).

Рассмотрим матрицы  $\Phi \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ :

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \end{pmatrix}$$

где  $x_i(t)$  — решения.

**Определение 2.4.1** (Определитель Вронского (вронскиан)).  $W(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det \Phi(t)$ .

**Лемма 2.4.1.** Если  $\exists t_0 \in (a, b) : W(t_0) = 0$ , то  $W(t) \equiv 0$  на  $(a, b)$ .

*Доказательство.* Из линейной алгебры известно, что  $\exists c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \neq 0$ , такой, что  $\Phi(t_0)c = 0$ .

Рассмотрим  $y(t) = c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t)$ . Это тоже решение, но так как  $y(t_0) = 0$ , то по теореме единственности  $y \equiv 0$ . Таким образом,  $\Phi(t)c \equiv 0$ , то есть  $\det \Phi(t) \equiv 0$ .  $\square$

**Следствие 2.4.1.** Если  $\exists t_0 \in (a, b) : W(t_0) \neq 0$ , то  $W$  не обращается в нуль на  $(a, b)$ .

**Определение 2.4.2** (Фундаментальная матрица системы). Матрица  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \end{pmatrix}$  с ненулевым вронскианом.

**Теорема 2.4.3.** У любой системы существует фундаментальная матрица.

*Доказательство.* Фиксируем  $t_0 \in (a, b)$ . Пусть  $x_1^0, \dots, x_n^0$  — набор линейно независимых векторов. По теореме о существовании  $\forall k = 1..n : \exists$  решение  $x_k(t)$  задачи Коши с начальными данными  $(t_0, x_k^0)$ .

Составим  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \end{pmatrix}$ . В точке  $t_0$  вронскиан ненулевой.  $\square$

**Теорема 2.4.4** (Теорема об общем решении). Пусть  $\Phi(t)$  — фундаментальная матрица.  $\forall x(t)$  — решение линейной однородной системы  $\exists! c \in \mathbb{R}^n : x(t) = \Phi(t)c$ .

*Доказательство.* Фиксируем  $t_0 \in (a, b)$ . Обозначим  $x_0 = x(t_0)$ .

Так как  $W(t_0) \neq 0$ , то у системы  $\Phi(t_0)c = x_0$  существует единственное решение  $c \in \mathbb{R}^n$ . Но тогда  $y(t) = \Phi(t)c$  — тоже решение, по теореме о единственности  $x \equiv y$ .  $\square$

**Следствие 2.4.2.** Множество решений системы является векторным пространством размерности  $n$ .

Задача о нахождении фундаментальной матрицы, вообще говоря, неразрешима в размерности  $n \geq 2$ .

Так, рассмотрим уравнение  $\ddot{y} + t^\alpha y = 0$ . Оно сводится к линейной системе второго порядка

$$\begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = -t^\alpha y \end{cases}$$

Если  $y(t)$  — ненулевое решение, то функция  $x(t) = \frac{1}{y}\dot{y}$  будет обладать свойством

$$\dot{x} = \frac{1}{y^2}(\dot{y})^2 + \frac{1}{y}\ddot{y} = -x^2 - t^\alpha$$

Мы получили уравнение Рикатти, про которое Лиувилль доказал, что никакое нетривиальное решение не выражимо в элементарных функциях.

**Теорема 2.4.5.** Так как фундаментальная матрица  $\Phi(t)$  — строка базисных векторов — то множество всех фундаментальных матриц — это  $\Phi \cdot \text{GL}(n, \mathbb{R}) = \{\Phi \cdot g | g \in \text{GL}(n, \mathbb{R})\}$ .

**Теорема 2.4.6.** Если  $\Phi(t)$  — строка решений (необязательно фундаментальных) системы  $\dot{x} = P(t)x$ . Тогда

$$\dot{\Phi} = P \cdot \Phi$$

*Замечание* (О комплексном случае). Если  $P(t)$  — вещественная матрица, то  $x(t) = y(t) + iz(t)$  является решением для  $y, z \in C^1(\mathbb{R}^n)$  если и только если  $y$ , и  $z$  являются решениями.

**Предложение 2.4.1** (Об овеществлении фундаментальной матрицы). Пусть  $\Phi(t) = (x_1(t) \ x_2(t) \ \dots)$  — вообще говоря, комплексная фундаментальная матрица, у которой  $x_2 = \overline{x_1}$ .

Тогда  $\Psi(t) = (\Re(x_1(t)) \ \Im(x_1(t)) \ x_3 \ \dots)$  — тоже фундаментальная матрица.

*Доказательство.*

$$\Psi = \Phi \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i & 0 \\ 1/2 & -1/2i & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

$\square$

## 2.5 Линейные системы с постоянными коэффициентами

Пусть  $A \in M(n, \mathbb{R})$ , рассмотрим уравнение  $\dot{x} = Ax$ .



### 2.5.1 Метод Эйлера

Станем искать  $x(t) \neq 0$  в виде  $\gamma e^{\lambda t}$ , где  $\gamma \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ .

Это является решением ровно в тех случаях, когда  $\lambda \gamma e^{\lambda t} = A \gamma e^{\lambda t}$ , то есть  $\lambda \gamma = A \gamma$ . Иными словами,  $\lambda$  — собственное число  $A$ .

Ограничимся случаем, когда все собственные числа  $\lambda_k$  вещественные, и  $A$  диагонализуема (нет блоков размера  $\geq 2$  в нормальной жордановой форме).

$\Phi(t) = (\gamma_1 e^{\lambda_1 t} \ \dots \ \gamma_n e^{\lambda_n t})$  является фундаментальной матрицей, так как векторы  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  линейно независимы.

Случаи комплексных собственных чисел или недиагонализуемой  $A$  здесь рассматривать не будем.

### 2.5.2 Матричная экспонента

Пусть  $A \in M(n, \mathbb{C})$ . Рассмотрим полное метрическое пространство  $M(n, \mathbb{C})$  с расстоянием  $\rho(A, B) = \|A - B\|$  — операторной нормой.

**Определение 2.5.1** (Матричная экспонента).

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

**Факт 2.5.1.** Матричная экспонента определена корректно; ряд  $e^A$  сходится.

*Доказательство.* В силу полноты пространства достаточно доказать, что последовательность  $\Sigma_m := \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k$  фундаментальна. Для  $m > l$  оценим

$$\|\Sigma_m - \Sigma_l\| = \left\| \sum_{k=l+1}^m \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=l+1}^m \frac{1}{k!} \|A\|^k$$

Если обозначить  $\sigma_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \|A\|^k$ , то  $\|\Sigma_m - \Sigma_l\| \leq \sigma_m - \sigma_l$ . Так как ряд для скалярной экспоненты сходится, то при  $\sigma_m - \sigma_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$ . □

*Свойства* (Матричная экспонента).

- Пусть  $A$  и  $B$  сопряжены:  $B = S^{-1}AS$ . Тогда  $e^B = S^{-1}e^A S$ .

*Доказательство.* Частичные суммы полностью совпадают: сопряжение — автоморфизм. □

- Для  $a, b \in \mathbb{C}$ :  $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ . Для **коммутирующих** матриц  $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ :

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B$$

*Доказательство.* Так как ряды для матричных экспонент сходятся абсолютно (достаточно требовать абсолютной сходимости только для одного ряда), то можно записать

$$e^A \cdot e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot \frac{B^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+k)!} \binom{m+k}{k} A^k B^m$$

Так как  $A$  и  $B$  коммутируют, то это  $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} (A+B)^s = e^{A+B}$ . □

- Рассмотрим  $A \in M(n, \mathbb{C}), t \in \mathbb{C}$ . Тогда  $\frac{d}{dt} e^{At} = A \cdot e^{At}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $\Sigma_m := \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k t^k$ .

$$\frac{d}{dt} \Sigma_m = A \Sigma_{m-1}$$

Так как ряд сходится абсолютно (этого достаточно?), то его производная — предел производных частичных сумм.  $\square$

## Лекция VIII

20 октября 2023 г.

Мы остановились на том, что рассматривалось уравнение  $\dot{x} = Ax$ , где  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Так как  $\frac{d}{dt} e^{At} = A \cdot e^{At}$ , то несложно видеть, что  $e^{At} = (x_1, \dots, x_n)$  — фундаментальная матрица решений.

В частности, при  $t = 0$ :  $e^0 = e$ , вронскиан не равен нулю при  $t = 0$  (значит, всегда).

### 2.5.3 Вычисление матричной экспоненты

Рассмотрим матрицу  $A \in M(n, \mathbb{R})$ .

Согласно теореме Жордана (жорданова нормальная форма)  $\exists S \in GL(n, \mathbb{R}) : S^{-1}AS = J = \text{diag}(J_1, \dots, J_p)$ , где

$$J_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \text{ — жорданова клетка некоего размера с неким собственным числом } \lambda$$

Разложим  $J$  в сумму диагональной и нильпотентной матрицы:  $J = \lambda E + I$ , где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Так как экспонента коммутирует с сопряжением ( $S^{-1}e^{At}S = e^{S^{-1}AS \cdot t} = e^{Jt}$ ), то чтобы вычислить  $e^{At}$  достаточно вычислять экспоненту от жордановой нормальной формы.

$$(Jt)^k = \text{diag}((J_1 t)^k, \dots, (J_p t)^k) \quad e^{Jt} = \text{diag}(e^{J_1 t}, \dots, e^{J_p t})$$

Научимся вычислять экспоненту от жордановой клетки.  $e^{Jt} = e^{\lambda Et + It}$ .

Так как  $\lambda E$  и  $I$  коммутируют, то  $e^{\lambda Et + It} = e^{\lambda Et} \cdot e^{It}$ .

$$\text{Дальше считается } e^{\lambda Et} = \text{diag}(e^{\lambda t}, \dots, e^{\lambda t}) \text{ и } e^{It} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (It)^k = \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & t \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Если  $S^{-1}e^{At}S = e^{Jt}$ , то  $e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$  — фундаментальная матрица решений.

Так как  $S$  обратима, то в качестве фундаментальной матрицы можно взять и просто матрицу  $Se^{Jt}$ . Помимо того, что данное вычисление требует на одно матричное умножение меньше, есть ещё одно объяснение, почему фундаментальное решение правильно выражать в таком виде.

В методе Эйлера  $\dot{x} = Ax$  и ищется решение в виде  $\gamma e^{\lambda t}$ , где  $\lambda$  — собственное число  $A$ , и  $\gamma$  — соответствующий собственный вектор.

Если  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  — собственные числа  $A$ , и каждое — кратности 1, то жорданова форма —  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Тогда  $e^{Jt} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$ .

Жорданова форма была взята из сопряжения  $S^{-1}AS = J \iff AS = SJ$ . Обозначив  $S = (\gamma_1 \dots \gamma_n)$ , получаем  $A(\gamma_1 \dots \gamma_n) = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Таким образом, столбцы матрицы  $S$  — в точности собственные векторы, получаемые в методе Эйлера.

## 2.5.4 Оценка фундаментальной матрицы

Рассматриваем систему  $\dot{x} = Ax$ , ей соответствует фундаментальная матрица  $\Phi(t) = e^{At}$ .

**Теорема 2.5.1.** Предположим, что для всех собственных чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ :  $\exists a \in \mathbb{R} : \forall k : a > \Re(\lambda_k)$ .

Тогда  $\exists C > 0 : \|e^{at}\| \leq C e^{at}$  при  $t \geq 0$ .

*Доказательство.*  $J = S^{-1}AS \Rightarrow e^{Jt} = S^{-1}e^{At}S \Rightarrow e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$ .

Всякий элемент матрицы  $e^{Jt}$  — это либо нуль, либо функция от  $t$  вида  $\frac{e^{\lambda_p t}}{k!} \cdot \text{Poly}(t)$ ,  $k \leq n$ . Если умножить каждый элемент на  $e^{-at}$ , то видно

$$\left| e^{-at} \frac{e^{\lambda_p t}}{k!} \right| = \frac{1}{k!} e^{(\Re(\lambda_p) - a)t} \text{Poly}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Тогда для любого элемента матрицы  $j_{l,m}$ , стоящего на позиции  $(l, m)$  в матрице  $e^{-at}e^{Jt} : \exists c_{l,m} > 0 : |e^{-at} \cdot j_{l,m}| \leq c_{l,m}$  при  $t \geq 0$  — непрерывная функция, убывающая к нулю на  $+\infty$  ограничена.

Тогда и норма  $\|e^{-at}e^{Jt}\|$  ограничена некоей константой  $C_0$ , откуда  $\|e^{Jt}\| \leq C_0 e^{at}$  при  $t \geq 0$ .  $\square$

## 2.6 Случай Лаппо-Данилевского

Хотя в общем случае системы  $\dot{x} = A(t)x$  неразрешимы, можно ещё в одном случае выписать фундаментальную матрицу для системы  $\dot{x} = A(t)x$  с непостоянными коэффициентами.

Пусть  $A \in C(a, b)$ .

**Теорема 2.6.1.** Пусть существует  $t_0 \in (a, b) : A(t) \cdot \left( \int_{t_0}^t A(s) ds \right) = \left( \int_{t_0}^t A(s) ds \right) \cdot A(t)$ . Тогда

$\exp \left( \int_{t_0}^t A(s) ds \right)$  — фундаментальная матрица.

*Доказательство.* Рассмотрим производную экспоненты  $\frac{d}{dt} e^{I(t)}$ , где обозначили  $I(t) := \int_{t_0}^t A(s) ds$ .

Частичная сумма для производной равна  $\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (I(t))^k = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \frac{d}{dt} \underbrace{(I(t) \cdot \dots \cdot I(t))}_k$  Так как  $I(t)$  коммутирует с  $A(t)$ , то данная сумма раскрывается в

$$A(t) \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} I(t)^k \xrightarrow{m \rightarrow \infty} A(t) e^{I(t)}$$

$\square$

## 2.7 Неоднородные линейные системы

Теперь рассматриваем неоднородную систему  $\dot{x} = p(t)x + q(t)$ , где  $p, q \in C(a, b)$ ,  $p(t) \in M(n, \mathbb{R})$  — матрица,  $q(t) \in \mathbb{R}^n$  — вектор.

Параллельно с этим рассмотрим соответствующую однородную систему  $\dot{x} = p(t)x$ , пусть  $\Phi(t)$  — её фундаментальная матрица.

**Теорема 2.7.1.** Если  $y(t)$  — некое решение неоднородной системы, то всякое решение представимо в виде  $y(t) + \Phi(t)c$ , где  $c \in \mathbb{R}^n$ .

*Доказательство.* Пусть  $\tilde{y}(t)$  — какое-то решение неоднородной системы. Рассмотрим разность  $\tilde{y} - y$ , она является решением однородной системы.  $\square$

Для поиска данного решения неоднородной системы  $y(t)$  мы воспользуемся методом Лагранжа — вариации постоянной. Ищем  $y(t)$  в виде  $\Phi(t)\alpha(t)$ , где  $\alpha \in C(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n)$ .

$$\dot{y} = \Phi(t) \cdot \dot{\alpha} + \dot{\Phi}(t) \cdot \alpha = \Phi(t)\dot{\alpha} + p(t)\Phi(t)\alpha$$

Получается равенство  $\Phi(t)\dot{\alpha} = q(t)$ .  $\dot{\alpha} = \Phi^{-1}(t)q(t)$  ( $\Phi$  обратима и непрерывна, так как вронскиан ненулевой, и элементы обратной матрицы можно явно выразить).

Подойдёт  $\alpha = \int \Phi^{-1}(t)q(t) dt$ . Тогда решением является

$$y(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)q(t) dt$$

## 2.8 Периодические линейные системы

Периодические системы — системы вида  $\dot{x} = p(t)x + q(t)$ , где  $x \in \mathbb{R}^n, p, q \in C(\mathbb{R})$ , причём  $\exists \omega > 0 : p(t + \omega) \equiv p(t), q(t + \omega) \equiv q(t)$ .

**Лемма 2.8.1.** Если  $x(t)$  — решение системы, то его сдвиг на период  $y(t) = x(t + \omega)$  — тоже решение.

Рассмотрим однородную периодическую систему  $\dot{x} = p(t)x$ .

**Теорема 2.8.1** (Флоке (Floquet)). Если  $\Phi(t)$  — фундаментальная матрица однородной системы, то  $\exists G(t), R$  — матрицы, такие, что  $G$  —  $\omega$ -периодична,  $R$  постоянна, и имеет место представление  $\Phi(t) = G(t)e^{Rt}$ .

*Доказательство.*

**Лемма 2.8.2** (О существовании логарифма). Пусть  $B \in M(n, \mathbb{C})$ . Тогда  $\det B \neq 0 \iff \exists A : e^A = B$ .

*Доказательство леммы.*

$\Leftarrow$ . Можно сослаться на алгебру: собственные числа экспоненты — экспоненты собственных чисел  $A$ . Можно рассмотреть  $e^{At}$ , как фундаментальную матрицу, в ней столбцы линейно независимы.

$\Rightarrow$ . Докажем существование логарифма у жордановой клетки: в нормальной жордановой форме матрица является прямой суммой жордановых клеток.

$$J = \text{diag}(J_1, \dots, J_s) \Rightarrow \log J = \text{diag}(\log J_1, \dots, \log J_s)$$

**Лемма 2.8.3.** Пусть  $I_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$  — нильпотентная матрица

размера  $r \times r$ . Пусть  $\lambda \neq 0$ . Рассмотрим  $Z = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \left(\frac{I_r}{\lambda}\right)^p$ .

$$\text{Тогда } e^Z = E + \frac{I_r}{\lambda}.$$

*Доказательство леммы.*

На самом деле  $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \left(\frac{I_r}{\lambda}\right)^p$  — конечная сумма, так как начиная со слагаемого под номером  $r$  суммируются нули.

Из анализа известно, что при  $z \in \mathbb{C}$ :  $\exp(\log(1+z)) = 1+z$ , то есть

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} z^p \right)^k = 1+z$$

$$\text{Определим } \sigma_m := \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left( \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} z^p \right)^k$$

Тогда видно, что  $\sigma_{m+1} - \sigma_m = z^m \cdot (\text{какая-то аналитическая функция})$ . Написав  $\sigma_m(z) = a_0^{(m)} + a_1^{(m)}z + \dots + a_m^{(m)}z^m + \dots$ , получаем, что в частной сумме  $\sigma_{m+1}(z)$  коэффициенты перед  $z^0, \dots, z^m$  такие же.

Тогда при  $k \geq m$ :  $\sigma_k(z) = 1+z+\dots+z^m(\dots)$ .

Если же рассмотреть вместо  $z$  матрицу  $\frac{I_r}{\lambda}$ , то результат вычислений будет такой же, но большие степени обнуляются. Тогда

$$\sigma_m(e^z) = E_r + \frac{I_r}{\lambda} + 0 \quad e^Z = E_r - \frac{I_r}{\lambda}$$

□

## Лекция IX

27 октября 2023 г.

Таким образом, при  $\lambda \neq 0$ : если  $J_s = \lambda E_r + I_r$ , то  $\log(J_s) = \log(\lambda)E_r + Z$  (можно для проверки взять экспоненту, она раскроется в правильную вещь, так как  $E_r$  коммутирует с  $Z$ ).

Так как сопряжение — автоморфизм, то показав существование логарифма у жордановой клетки, мы показали существование логарифма у произвольной матрицы.

Разумеется, логарифм не единственный.

□

Возьмём фундаментальную матрицу  $\Phi(t)$ . Матрица  $\Phi(t + \omega)$  — тоже фундаментальная матрица.

Значит, найдётся матрица  $B \in GL(n, \mathbb{C}) : \forall t : \Phi(t + \omega) = \Phi(t)B$ . Так как  $B$  невырождена, то можно рассмотреть  $R = \frac{1}{\omega} \log B, G(t) = \Phi(t)e^{-Rt}$ .

Тогда, конечно,  $\Phi(t) = G(t) \cdot e^{Rt}$ , покажем периодичность  $G(t)$ .

$$G(t + \omega) = \Phi(t + \omega)e^{-R(t+\omega)} = \Phi(t)B \cdot \underbrace{e^{-R\omega}}_{e^{-\log(B)} = B^{-1}} \cdot e^{-Rt} = \Phi(t)e^{-Rt} = G(t)$$

□

*Доказательство.*

□

Найденная в теореме Флоке матрица  $B$  — *матрица монодромии*. Пусть  $\mu_i$  — собственные числа  $B$ . Их называют *мультипликаторы*, и они не зависят от выбранной фундаментальной матрицы  $\Phi(t)$ .

*Доказательство.* Выберем другую фундаментальную матрицу  $\Phi_1(t)$ . Её соответствует другая матрица монодромии  $B_1 : \Phi_1(t + \omega) = \Phi_1(t)B_1$ .

Но один базис можно выразить через другой:  $\exists S : \Phi_1(t) = \Phi(t)S$ . Тогда

$$\Phi(t)SB_1 = \Phi_1(t)B_1 = \Phi_1(t + \omega) = \Phi(t + \omega)S = \Phi(t)BS$$

Отсюда  $B_1 = S^{-1}BS$ , а у сопряжённых матриц спектры совпадают.

□

**Теорема 2.8.2** (О мультипликаторах). Число  $\mu$  является мультипликатором  $\iff \exists$  ненулевое решение  $X(t)$ , такое, что  $X(t + \omega) = X(t)\mu$ .

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . Фиксируем фундаментальную матрицу  $\Phi(t)$ , такую, что  $\Phi(0) = E$ .

Её матрица монодромии  $B = \Phi(\omega)$ . Значит,  $\mu$  — собственное число  $\Phi(\omega)$ , ему соответствует собственный вектор  $x_0 \neq 0$ . Тогда заметим, что  $x(t) = \Phi(t)x_0$  обладает искомым свойством.

Так как  $\Phi(t)$  невырождена, то  $x(t) \neq 0$ .

$$\begin{aligned} x(t + \omega) &= \Phi(t + \omega)x_0 = \\ &= (\Phi(t + \omega) = \Phi(t)\Phi(\omega), \text{ как фундаментальные матрицы, совпадающие в нуле}) \\ &= \Phi(t)\Phi(\omega)x_0 = \Phi(t)\mu x_0 = \mu x(t) \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ . Примерно то же самое.

□

## 2.9 Формула Остроградского — Лиувилля (формула Якоби)

Рассмотрим линейную однородную систему  $\dot{x} = P(t)x$ , где  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Пусть  $\Phi(t) = (x_1 \ \cdots \ x_n)$  — фундаментальная матрица.

Пусть  $W(t) = \det \Phi(t)$  — вронскиан.

**Теорема 2.9.1** (Формула Остроградского — Лиувилля (формула Якоби)). Тогда  $\frac{d}{dt}W(t) = \text{tr}(P(t))W(t)$ .

Доказательство.

### Как дифференцируется определитель?

Рассмотрим определитель  $\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{vmatrix}$ .

Тогда

$$\frac{d}{dt}\Delta = \begin{vmatrix} \dot{a}_{1,1}(t) & \cdots & \dot{a}_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & \cdots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \dot{a}_{1,1}(t) & \cdots & \dot{a}_{1,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1}(t) & \cdots & a_{n-1,n}(t) \\ \dot{a}_{n,1}(t) & \cdots & \dot{a}_{n,n}(t) \end{vmatrix}$$

Здесь берётся сумма  $n$  определителей, в  $i$ -м в  $i$ -й строчке стоят производные функций.

Теперь запишем  $\frac{d}{dt}W(t) = W_1(t) + \cdots + W_n(t)$ , где  $W_i(t)$  — описанные выше компоненты.

Пусть  $x_i(t) = \begin{pmatrix} x_i^{(1)} \\ \vdots \\ x_i^{(n)} \end{pmatrix}$  — решения из фундаментальной матрицы.

$$W_1 = \begin{vmatrix} \dot{x}_1^{(1)} & \cdots & \dot{x}_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Так как  $x_i$  — решение, то можно выразить  $\dot{x}_i^{(1)} = p_{1,1}x_i^{(1)} + \cdots + p_{1,n}x_i^{(n)}$

В матрице  $W_1$  вычтем из первой строчки все строчки с номерами  $i \geq 2$ , умноженные на  $p_{1,i}$ . Останется матрица

$$\begin{pmatrix} p_{1,1}x_1^{(1)} & \cdots & p_{1,1}x_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Тогда получается, что  $W_1 = p_{1,1}W$ , и  $\frac{d}{dt}W = W_1 + \cdots + W_n = (p_{1,1} + \cdots + p_{n,n})W$ .  $\square$

## 2.10 Неоднородные линейные системы со специальной правой частью

Рассмотрим систему  $\dot{x} = Ax + q(t)$ , где  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $q(t)$  имеет вид

$$q(t) = e^{\alpha t} \cdot \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}$$

где  $r_1(t), \dots, r_n(t)$  — многочлены.

Положим  $m$  — максимальная степень многочлена  $r_i$ ,  $k$  — максимальный размер жордановых клеток (в жордановой форме матрицы  $A$ ), соответствующих собственному числу  $\alpha$  (если таких клеток нет, то  $k = 0$ ).

**Утверждение 2.10.1.** Существует решение в виде  $x(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix}$ , где  $p_i$  — многочлены степени не больше  $k + m$ .

*Доказательство.* Считаем, что  $A$  — в жордановой форме. При линейной замене степени многочленов увеличиться не могут.

Рассмотрим блок  $J_s(\beta) = \begin{pmatrix} \beta & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \beta \end{pmatrix}$ , пусть  $\beta \neq \alpha$ . Получаются уравнения

$$\dot{x}_1 = \beta x_1 + x_2 + e^{\alpha t} q_1(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_s = \beta x_s + e^{\alpha t} q_s(t)$$

Решая уравнения последовательно, снизу вверх, получаем  $x_s = v(t)e^{\beta t}$ , откуда

$$\dot{x}_s = \dot{v}(t)e^{\beta t} + \beta x_s \Rightarrow \dot{v} = e^{(\alpha-\beta)t} q_s$$

При интегрировании произведения экспоненты (с ненулевым показателем) и многочлена получится произведение экспоненты и многочлена той же степени.

Таким образом, если  $\alpha \neq \beta$ , то все решения найдутся степени не выше  $m$ .

Если же  $\alpha = \beta$ , то рассматривается блок  $J_s(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix}$

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 + x_2 + e^{\alpha t} q_1(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_s = \alpha x_s + e^{\alpha t} q_s(t)$$

Представив  $x_s = v(t) \cdot e^{\alpha t}$  получаем на  $v$  уравнение без экспоненты:  $\dot{v} = q_s$ . При интегрировании степень вырастет на единицу.

Тогда степени многочленов в результате вырастут не больше, чем на  $k$  (от изначальной степени правой части  $m$ ).  $\square$



## Глава 3

# Линейные дифференциальные уравнения

Пусть  $t$  — независимая переменная,  $x$  — искомая функция. Линейное дифференциальное уравнение имеет вид

$$x^{(n)} + p_1 x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = q(t)$$

где предполагается, что функции  $p_1, \dots, p_n, q \in C(a, b)$ .

Решением является функция  $x \in C^n(a, b)$ , удовлетворяющую уравнению.

Сопоставим данному уравнению систему с неизвестными  $y_1, \dots, y_n$ .

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = y_n \\ \dot{y}_n = -p_n y_1 - \dots - p_1 y_n + q \end{cases}$$

Если  $y_1, \dots, y_n$  — решение данной системы, то функция  $x(t) \equiv y_1$  — решение данного уравнения, причём  $\dot{x} \equiv y_2, \dots, x^{(n-1)} \equiv y_n$ .

При постановке задачи Коши для уравнения надо зафиксировать точку  $t_0 \in (a, b)$  и  $n$  чисел  $x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ , и ищем решение  $x(t)$ , такое, что

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Задача Коши разрешима, надо рассмотреть решение системы, такое, что

$$y(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \\ \vdots \\ x_0^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Оно найдётся из теоремы о существовании и единственности.

Решение  $x$  лежит в классе  $C^n$ , так как его  $n$ -я производная выражается через производные меньших порядков и непрерывные функции.

## 3.1 Однородное линейное уравнение

Однородное — уравнение с нулевой правой частью  $q(t)$ .

**Теорема 3.1.1.** Множество решений — векторное пространство.

Пусть  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  — решения. Сопоставим им вронскиан  $W(t) = W(t, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ .

Рассмотрим линейную систему, соответствующую данному уравнению  $\dot{y} = P(t)y$ . Тогда для компонент вектора-решения  $y_1, \dots, y_n$ , полученных из решений  $x_1, \dots, x_n$ :  $W(t, y_1, \dots, y_n) = W(t, x_1, \dots, x_n)$  — матрицы равны.

### 3.1.1 Линейная независимость решений

Решения  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  линейно независимы на  $(a, b)$ , если из соотношения

$$c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t) = 0$$

следует, что  $c_1 = \cdots = c_n = 0$ .

Иначе они линейно зависимы.

**Лемма 3.1.1.** Следующие три утверждения равносильны.

1.  $W(t) \equiv 0$
2.  $\exists t_0 : W(t_0) = 0$
3. Решения  $x_1, \dots, x_n$  линейно зависимы.

*Доказательство.* Докажем  $(2) \Rightarrow (3)$ , остальное очевидно. Рассмотрим линейную алгебраическую систему  $\begin{pmatrix} x_1(t_0) & \cdots & x_n(t_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0$ . Так как вронскиан равен нулю, то имеется ненулевой вектор-решение  $c$ .

Тогда  $z(t) = (x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$  — решение, и в точке  $t_0 : z(t_0) = 0$ . Продифференцируем  $z$ .

$\dot{z} = (\dot{x}_1 \ \cdots \ \dot{x}_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ , и в точке  $t_0 : z(t_0) = 0$ .

Далее получаем, что все производные до  $n - 1$  включительно равны нулю, по теореме единственности:  $z(t) \equiv 0$ .  $\square$

Лекция X

3 ноября 2023 г.

//todo

Лекция XI

10 ноября 2023 г.

Уравнению  $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$  сопоставляется система порядка  $n$ :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = y_n \\ \dot{y}_n = -p_n y_1 - \dots - p_1 y_n \end{cases}$$

Набору решений уравнения сопоставляется вронскиан  $W(t, x_1, \dots, x_n) = W(t, y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$ . По формуле Остроградского — Лиувилля  $\frac{dW}{dt} = \text{tr } P(t)W$ .

Применяя формулу к уравнению  $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ , видим, что матрица уравнения — это

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ -p_n & \dots & \dots & -p_1 \end{pmatrix}$$

Таким образом,  $\frac{dW}{dt} = -p_1 W$ .

## Глава 4

# Зависимость решений от начальных данных и параметров

Рассмотрим уравнение  $\dot{x} = f(t, x, \mu)$ , где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mu$  — какой-то параметр.

Здесь рассматривают задачу Коши с начальными данными  $(\tau, \xi)$  с фиксированным параметром  $\mu \in \mathbb{R}^m$ . Будем его обозначать  $x(t, \tau, \xi, \mu)$ .

Далее считаем, что  $f \in C, \text{Lip}_{x, \text{loc}}(G \times M)$ , где  $G \subset \mathbb{R}_{t,x}^{n+1}$  — область,  $M \subset \mathbb{R}_\mu^m$  — открытое множество.

Общая теория говорит, что для любых  $(t, \xi, \mu) \in G \times M$  найдётся единственное непродолжимое решение, и обозначим за  $I(\tau, \xi, \mu)$  максимальный промежуток, на котором данное решение определено.

**Лемма 4.0.1** (Об оценке разности решений). *Рассмотрим две системы  $\dot{x} = f(t, x)$  и  $\dot{y} = g(t, y)$ . Пусть  $f, g \in C(G)$ , где  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  — область.*

*Известно, что  $f \in \text{Lip}_x(G)$  с константой Липшица  $L$ ,  $\exists N, m$ :  $|f| \leq N$  и  $|f(t, x) - g(t, x)| \leq m$  в  $G$ .*

*Пусть  $x(t_0) = x_0, y(\tau_0) = y_0, t_0, \tau_0 \in (a, b)$ , и графики данных решений лежат в  $G$ :  $(t, x(t)), (\tau, y(\tau)) \in G$  при  $t, \tau \in (a, b)$ .*

*Тогда  $|x(t) - y(t)| \leq (|x_0 - y_0| + N|t_0 - \tau_0| + m(b-a))e^{L(b-a)}$ .*

**Доказательство.** Для каждого из решений можно написать эквивалентное интегральное уравнение:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds = x_0 + \int_{t_0}^{\tau_0} f(s, x(s)) ds + \int_{\tau_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \text{и} \quad y(t) = y_0 + \int_{\tau_0}^t g(s, y(s)) ds$$

Вычтем одно из другого и оценим.

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |x_0 - y_0| + N|t_0 - \tau_0| + \left| \int_{\tau_0}^t (f(s, x(s)) - g(s, y(s))) ds \right| \leq \\ &\leq |x_0 - y_0| + N|t_0 - \tau_0| + \left| \int_{\tau_0}^t \underbrace{(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))}_{\leq L|x(s) - y(s)|} ds \right| + \left| \int_{\tau_0}^t \underbrace{(f(s, y(s)) - g(s, y(s)))}_{\leq m} ds \right| \end{aligned}$$

Это условия леммы Гронуолла (2.2.5):

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| + N|t_0 - \tau_0| + m(b - a) + L \left| \int_{\tau_0}^t |x(s) - y(s)| ds \right|$$

Отсюда  $|x(t) - y(t)| \leq (|x_0 - y_0| + N|t_0 - \tau_0| + m(b - a))e^{L|t - \tau_0|}$ .  $\square$

Интересно заметить, что оценка линейно зависит от  $b - a$  и от  $t_0 - \tau_0$ , но экспоненциально — от константы Липшица и длины промежутка.

**Теорема 4.0.1** (О непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметров). Пусть  $\dot{x} = f(t, x, \mu)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^m$ ,  $f \in C$ ,  $\text{Lip}_{x, \text{loc}}(G \times M)$ .

Зафиксируем  $(\tau_0, \xi_0, \mu_0) \in G \times M$ . Утверждается, что  $\forall \varepsilon > 0, \forall [a, b] \in I(\tau_0, \xi_0, \mu_0) : \exists \delta : \forall (\tau, \xi, \mu) \in G \times M$ :

$$\begin{cases} |\tau - \tau_0| < \delta \\ |\xi - \xi_0| < \delta \\ |\mu - \mu_0| < \delta \end{cases} \Rightarrow [a, b] \subset I(\tau, \xi, \mu) \text{ и } \forall t \in [a, b] : |x(t, \tau, \xi, \mu) - x(t, \tau_0, \xi_0, \mu_0)| < \varepsilon$$

*Доказательство.* Можно считать, что  $\tau_0 \in (a, b)$  — отрезок  $[a, b]$  берётся любой, лежащий в  $I(\tau_0, \xi_0, \mu_0)$ , и его в случае надобности можно расширить.

Рассмотрим  $R_0 = \left\{ (t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \mid |x - x(t, \tau_0, \xi_0, \mu_0)| \leq \varepsilon \right\}$ . При малых  $\varepsilon : R_0 \subset G$ .

Также пусть  $\left\{ \mu \mid |\mu - \mu_0| \leq \varepsilon \right\} \subset M$ .

$R := R_0 \times \left\{ \mu \mid |\mu - \mu_0| \leq \varepsilon \right\}$ .

На нём  $|f(t, x, \mu)| \leq N$ ,  $f \in \text{Lip}_x(R)$ , пусть  $L$  — константа Липшица.

Выберем  $\delta_1 > 0 : \delta_1(1 + N + (b - a))e^{L(b-a)} < \varepsilon$ .

Из равномерной непрерывности  $f$  получаем, что  $\exists \delta \in (0, \delta_1) : |\mu - \mu_0| < \delta \Rightarrow \forall (t, x) \in R_0 : |f(t, x, \mu) - f(t, x, \mu_0)| < \delta_1$ . Если потребуется, уменьшим  $\delta$  так, что  $|\tau - \tau_0| < \delta \Rightarrow \tau \in (a, b)$ . Заметим, что  $\delta(1 + N) < \varepsilon$ .

Утверждается, что  $\delta$  — искомое.

- $y(t) := \underbrace{|x(t, \tau, \xi, \mu)|}_{x(t)} - \underbrace{|x(t, \tau_0, \xi_0, \mu_0)|}_{x_0(t)}$ . Докажем, что  $|y(t)| < \varepsilon$  для  $t \in [a, b] \cap I(\tau, \xi, \mu)$ .

$$|y(\tau)| = \left| x(\tau) - x_0 - \int_{\tau_0}^{\tau} f(s, x(s), \mu_0) ds \right| \leq |\xi - \xi_0| + \left| \int_{\tau_0}^{\tau} f(s, x(s), \mu_0) ds \right| < \delta + N\delta < \varepsilon. \text{ Таким образом } (\tau, x(\tau)) \in R_0.$$

От противного: пусть не всегда  $|y(t)| < \varepsilon$ . Выберем первый момент  $t' \in [a, b] \cap I(\tau, \xi, \mu)$ , когда  $|y(t)|$  стал равен  $\varepsilon$ . Без потери общности  $t' < \tau$ .

$$y(t') = \varepsilon, y(t) < \varepsilon \text{ при } t \in [\tau, t']$$

Применим лемму об оценке разности решений  $f(t, x, \mu)$  и  $f(t, x, \mu_0)$ .

$$|y(t)| < (\delta + N\delta + \delta_1(b - a)) \cdot e^{L(b-a)} < \varepsilon, \text{ это противоречие.}$$

- Покажем, что  $I(\tau, \xi, \mu) \supset [a, b]$ . Согласно теореме о максимальном решении  $I(\tau, \xi, \mu) = (\alpha, \beta)$  — некий интервал.

Если  $I(\tau, \xi, \mu) \not\supset [a, b]$ , то, например,  $\beta < b$ . Тогда по теореме о полном решении на компакте при приближении к  $t \rightarrow \beta$  решение  $x(t, \tau, \xi, \mu)$  должно покинуть компакт  $R_0$ , но в предыдущем пункте доказано, что такого не происходит.  $\square$

**Следствие 4.0.1** (Теорема об интегральной непрерывности). *Рассматривается нормальная система без параметров  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f \in C, \text{Lip}_{x, \text{loc}}(G)$ .*

*Зафиксируем  $(\tau_0, \xi_0) \in G$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0, \forall [a, b] \in I(\tau_0, \xi_0): \exists \delta > 0 : \forall (\tau, \xi) \in G : |\tau - \tau_0| < \delta, |\xi - \xi_0| < \delta \Rightarrow [a, b] \subset I(\tau, \xi)$  и при  $t \in [a, b]$   $|x(t, \tau, \xi) - x(t, \tau_0, \xi_0)| < \varepsilon$*

## Лекция XII

17 ноября 2023 г.

### 4.1 Дифференцируемость решений по начальным данным и параметрам.

Рассмотрим нормальную систему  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Предположим,  $f, \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \in C(G)$ .  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$  — матрица Якоби  $f$ .

Рассмотрим  $x(t, \tau, \xi_0)$  на  $I(\tau, \xi_0)$ . Обозначим матрицу Якоби решения за  $\mathcal{F}(t) := \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, \tau, \xi_0))$ . Ещё рассмотрим линейную систему  $\dot{y} = \mathcal{F}(t)y$  — систему в вариациях на решении  $x(t, \tau, \xi_0)$ .

**Теорема 4.1.1** (О дифференцируемости по  $\xi$ ). Существует частная производная

$$v(t) := \left. \frac{\partial x(t, \tau, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0}$$

на  $I(\tau, \xi_0)$ , и  $v(t)$  — фундаментальная матрица системы в вариациях, причём  $v(\tau) = E$ .

*Доказательство.*

**Лемма 4.1.1.** *Назовём  $R \subset G$  выпуклым по  $x$ , если для любых  $(t, x), (t, y) \in R$ :  $R$  содержит отрезок между ними.*

*Пусть  $R$  — выпуклый по  $x$  компакт в  $G$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall (t, x), (t, y) \in R$ :*

$$(y - x) < \delta \Rightarrow \left| f(t, y) - f(t, x) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, y) \cdot (y - x) \right| \leq \varepsilon |x - y|$$

*Доказательство леммы.*

Рассмотрим  $(t, x), (t, y) \in R$ , введём  $u(s) = x + s(y - x)$  — параметризация второй координаты отрезка. Тогда

$$\begin{aligned} f(t, y) - f(t, x) &= \int_0^1 \frac{\partial f(t, u(s))}{\partial s} ds = \left( \int_0^1 \frac{\partial f(t, u(s))}{\partial x} ds \right) (y - x) \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial x}(t, y)(y - x) = \int_0^1 -\frac{\partial f}{\partial x}(t, y)(y - x) ds \end{aligned}$$

Складывая эти оценки, получаем

$$f(t, y) - f(t, x) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, y) \cdot (y - x) = (y - x) \int_0^1 \frac{\partial f(t, u(s))}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}(t, y) ds$$

Далее надо воспользоваться компактностью  $R$ , при достаточно малых  $\delta$  подынтегральное выражение по норме не превосходит  $\varepsilon$  (конкретнее?).  $\square$

$$v(t) = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим  $i$ -й столбец  $v(t)$ , покажем, что он существует, и является решением системы в вариациях.

Рассмотрим произвольный  $[a, b] \subset I(\tau, \xi_0)$ . Пусть  $\tau \in (a, b)$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ . Определим

$$R = \{(t, x) | t \in [a, b], |x - x(t, \tau, \xi_0)| \leq \varepsilon\}$$

Пусть  $L$  — константа Липшица (чего? видимо  $f$ ) по  $x$  в компакте  $R$ .

Рассмотрим  $\xi = \xi_0 + he_i$ , здесь  $e_i$  —  $i$ -й орт. По теореме об интегральной непрерывности  $\exists h_0 > 0 : |h| < h_0 \Rightarrow (t, x(t, \tau, \xi_0 + he_i)) \in R$  при  $t \in [a, b]$ . Такие  $h$  дальше будут рассматриваться.

Введём  $g(t) = x(t, \tau, \xi_0 + he_i) - x(t, \tau, \xi_0)$ . В лемме об оценке разности решений возникала оценка  $|\xi - \tilde{\xi}| + N|\tau - \tilde{\tau}| + m(b-a)e^{L(b-a)}$ . В нашем случае второе и третье слагаемое равны нулю, получается  $|g(t)| \leq |\xi - \xi_0|e^{L(b-a)} = |h|e^{L(b-a)}$ .

$$\dot{g} = f(t, x(t, \tau, \xi_0 + he_i)) - f(t, x(t, \tau, \xi_0)) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, \tau, \xi_0))}_{\text{матрица системы в вариациях}} g(t) + \underbrace{\Gamma(t, h)}_{\text{мало}}.$$

Утверждается, что  $\frac{|\Gamma(t, h)|}{|h|} \xrightarrow[t \in [a, b]]{} 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Это следует из леммы (4.1.1):  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |g(t)| < \delta \Rightarrow |\Gamma(t, h)| \leq \varepsilon |g(t)|$ . Иными словами,  $\forall \varepsilon > 0 : \exists h_1(\varepsilon) : |g| < h_1(\varepsilon) \Rightarrow |\Gamma| \leq \varepsilon |g|$ .

Но  $|g| \leq |h|e^{L(b-a)}$ , поэтому если  $|h| < h_1(\varepsilon)$ , то  $|\Gamma| \leq \varepsilon |h|e^{L(b-a)}$ , или же  $\frac{|\Gamma|}{|h|} \leq \varepsilon e^{L(b-a)}$ , и стремление  $\frac{|\Gamma|}{|h|} \rightarrow 0$  действительно равномерно.

Теперь рассмотрим  $\phi(t) = \frac{g(t)}{h}$ . Если окажется, что  $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \phi(t)$ , то это и будет  $\frac{\partial x}{\partial \xi_i}$ .

Для этого вычтем предполагаемый предел следующим образом: рассмотрим решение  $\psi(t)$  системы  $\dot{y} = \mathcal{F}(t)y$  с начальным условием  $\psi(\tau) = e_i$ .

Так как  $\dot{g} = \mathcal{F}(t)g + \Gamma$ , то  $\frac{\dot{g}}{h} = \mathcal{F}(t)\frac{g}{h} + \gamma$ , где  $|\gamma| \xrightarrow[t \in [a, b]]{} 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Рассмотрим ещё систему  $\dot{\phi}(\tau) = \mathcal{F}(t)\phi + \gamma$  с начальным условием  $\phi(\tau) = \frac{1}{h}(\xi_0 + he_i - \xi_0) = e_0$ .

Итак, у нас есть две системы

$$\begin{aligned} \psi(t) &= e_i + \int_{\tau}^t \mathcal{F}(s)\psi(s) ds \\ \phi(t) &= e_i + \int_{\tau}^t (\mathcal{F}(s)\phi(s) + \gamma) ds \end{aligned}$$

Пусть  $N = \max \|\mathcal{F}(\tau)\|$  по  $t \in [a, b]$ . Оценим  $|\phi(t) - \psi(t)|$ .

$$|\phi(t) - \psi(t)| = \left| \int_{\tau}^t \mathcal{F}(s)(\phi - \psi) ds \right| + \left| \int_{\tau}^t \gamma(s) ds \right| \leq N \left| \int_{\tau}^t |\phi(s) - \psi(s)| ds \right| + \max_{t \in [a, b]} |\gamma(t)|(b-a)$$

Это условия леммы Гронвулла, откуда  $|\phi(t) - \psi(t)| \leq \max_{t \in [a, b]} |\gamma(t)| \cdot e^{N(b-a)}$ .

Действительно, мы доказали, что  $i$ -й столбец  $v(t)$  стремится к решению системы в вариациях с начальными данными  $e_i$  в точке  $\tau$  (да?).  $\square$

**Теорема 4.1.2** (О дифференцируемости по  $\tau$ ). Теперь рассматривается решение  $x(t, \tau_0, \xi)$  на его максимальном промежутке  $I(\tau_0, \xi)$ .

Пусть  $f, \frac{\partial f}{\partial x} \in C(G)$ . Система в вариациях чуть-чуть поменялась:  $\mathcal{F}(t) = f(t, x(t, \tau_0, \xi))$  и сама система  $\dot{y} = \mathcal{F}(t)y$ . Утверждается, что

$$\exists u(t) := \frac{\partial x(t, \tau, \xi)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_0}$$

и она является решением системы в вариациях с начальными данными  $u(\tau_0) = -f(\tau_0, \xi)$ .

*Замечание.* В отличие от предыдущей теоремы,  $u$  — не матрица, а всего лишь вектор  $\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \tau} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \tau} \end{pmatrix}$ .

*Доказательство.* Существование  $u(t)$  идёт без доказательства, так как оно практически дословно повторяет доказательство существования частной производной по  $\xi$ , и ничего нового там нет.

Обоснуем то, что начальное данное именно такое. При  $t = \tau : x(\tau, \tau, \xi) = \xi$ . Посчитаем частную производную обеих частей равенства по  $\tau$  при  $\tau = \tau_0$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t, \tau, \xi) = f(t, x(t, \tau, \xi))$$

???

$$f(\tau_0, \xi) = f(\tau_0, x(\tau_0, \tau_0, \xi)) + \frac{\partial x(t, \tau, \xi)}{\partial t} \Big|_{\tau=\tau_0} = 0$$

□

Вернёмся к параметризованной системе  $\dot{x} = f(t, x, \mu)$ , где  $x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^m, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \mu} \in C(G \times M), G \subset \mathbb{R}_{t,x}^{n+1}, M \subset \mathbb{R}_\mu^m$ .

Фиксируем  $x(t, \tau, \xi, \mu_0)$ , и задаёмся вопросом о существовании  $z(t) := \frac{\partial x(t, \tau, \xi, \mu)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \mu_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \mu_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \mu_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \mu_m} \end{pmatrix}$ .

Вводится  $\mathcal{F}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, \tau, \xi, \mu_0), \mu_0)$ .

**Теорема 4.1.3.** При этих условиях  $\exists z(t)$  на  $I(\tau, \xi, \mu_0)$ , причём  $\dot{z} = \mathcal{F}(t)z + \frac{\partial f}{\partial \mu}(t, x(t, \tau, \xi, \mu_0), \mu_0)$  и  $z(\tau) = 0$ .

*Доказательство.* Введём вспомогательную переменную  $y = \begin{pmatrix} x \\ \mu \end{pmatrix}$ , и введём векторнозначную функцию  $\tilde{f}(t, y) = \begin{pmatrix} f(t, x, \mu) \\ 0 \end{pmatrix}$ , бьющую в  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

Если  $x(t, \tau, \xi, \mu)$  — решение изначальной системы, то пара  $\begin{pmatrix} x \\ \mu \end{pmatrix}$  — решение системы  $\dot{y} = \tilde{f}(t, y)$ .

Теперь можно пользоваться теоремой о дифференцируемости по начальным данным. Введём  $\eta = \begin{pmatrix} \xi \\ \mu \end{pmatrix}$ , пусть  $\zeta = \frac{\partial \eta}{\partial(\xi, \mu)}$ .

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \zeta, \text{ где } \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial \mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

С другой стороны,  $\zeta = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ 0 & E \end{pmatrix}, \dot{\zeta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial \mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ 0 & E \end{pmatrix}$ . Отсюда можно извлечь

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \mu} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial \mu}$$

$z(\tau) = 0$  очевидно из определения.

□



# Лекция XIII

1 декабря 2023 г.

//todo

# Лекция XIV

2 декабря 2023 г.

//todo

# Лекция XV

8 декабря 2023 г.

В прошлый раз была доказана теорема Коши: если  $f$  — аналитическая функция, то решение уравнения  $\dot{x} = f(t, x)$  тоже аналитическое.

**Теорема 4.1.4** (Коши, для линейных систем). Рассмотрим задачу Коши с нулевыми начальными данными  $(t_0, x_0) = (0, 0)$  в рамках системы  $\dot{x} = p(t)x + q(t)$ , где  $x \in \mathbb{R}^n, p \in M_{n \times n}(\mathbb{R}), q \in \mathbb{R}^n$ , причём коэффициенты аналитические:  $p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)} t^k, q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{(k)} t^k$ , и они сходятся при  $|t| < r_0$ , здесь  $r_0 > 0$ .

Тогда утверждается, что у решения  $x$  имеется тот же радиус сходимости  $r_0$ .

*Доказательство.* Пусть решение представимо в виде  $x = (x_1, \dots, x_n), x_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(i)} t^k$ .

Эти коэффициенты получены так: формально дифференцируя, получаем  $\dot{x}_i = \sum_{l=1}^{\infty} l a_l^{(i)} t^{l-1}$ , значит

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(i)} t^k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,j}^{(k)} t^k \underbrace{\left( \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(j)} t^l \right)}_{x_j} + \sum_{k=0}^{\infty} q_k^{(i)} t^k$$

Приравнявая коэффициенты при равных степенях  $t$ , получаем

$$\begin{cases} t^0 : a_1^{(i)} = q_0^{(i)} \\ t^1 : 2a_2^{(i)} = \sum_{j=1}^n p_{i,j}^{(0)} a_1^{(j)} + q_1^{(i)} \\ \vdots \end{cases}$$

В общем виде, это записывается так:  $t^{m-1} : m a_m^{(i)} = P_m \left( p_{i,j}^{(k)}, a_l^{(j)}, q_i^{(m-1)} \right)_{k \leq m-1, l \leq m-1}$ , здесь  $P_m$  — некий многочлен с неотрицательными коэффициентами (они получены произведением и суммой членов).

Теперь надо построить мажорирующую систему. Берём  $r \in (0, r_0)$ . Трюк Коши говорит, что если подставить такое  $r$ , то члены будут ограничены, то есть  $\exists M \in \mathbb{R} : \left| p_{i,j}^{(k)} r^k \right| \leq M$ , или же  $\left| p_{i,j}^{(k)} \right| \leq \frac{M}{r^k}$ .

Аналогично  $\left| q_i^{(k)} \right| \leq \frac{M}{r^k}$ .

В качестве мажорантной системы возьмём систему с искомыми функциями  $z_1, \dots, z_n$ , определёнными так:  $\dot{z}_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{r^k} t^k z_j + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{r^k} t^k$ . Эти геометрические прогрессии можно просуммировать:

$$\dot{z}_i = \sum_{j=0}^n \frac{M}{1 - \frac{t}{r}} z_j + \frac{M}{1 - \frac{t}{r}}$$

Мажорирующая система линейна, её решение можно получить так: пусть  $z_1 = \dots = z_n = u$ , тогда  $\dot{u} = \frac{M}{1-t}(nu + 1)$ . Это линейное уравнение первого порядка, коэффициенты аналитичны при  $|t| < r$ . В прошлой лекции была получена формула, в которой коэффициенты — тоже аналитические функции при  $|t| < r$ .

Получив оценку на сходимость мажорирующей системы, мы уже всё доказали.  $\square$

## Глава 5

# Автономные системы

*Автономные системы* — системы, у которых правая часть не зависит от  $t$ .

А именно, рассматривается система  $\dot{x} = f(x)$ , где предполагается, что  $f \in \text{Lip}_{x,loc}(H)$ ,  $H \subset \mathbb{R}_x^n$  — область. Так как  $f$  локально липшицева по аргументу, то она непрерывна. Пространство, где ищутся решения —  $\mathbb{R}_x^n$  — *фазовое пространство*.

Можно применить общую теорию к области  $G = \mathbb{R} \times H \subset \mathbb{R}_{t,x}^{n+1}$ , получается,  $H$  — область существования и единственности.

**Теорема 5.0.1.** Если  $x(t)$  — решение на  $(a, b)$ , то  $\forall c \in \mathbb{R}$ : сдвиг решения  $x(t + c)$  — решение на  $(a - c, b - c)$ .

**Определение 5.0.1** (Траектория). Проекция интегральной кривой на фазовое пространство.

Траектория не зависит от сдвига, и, вообще говоря (кроме вырожденных случаев), это — гладкая кривая, по которой можно понять и направление движения решения.

Пусть  $x_0 \in H$ , выберем главным решением  $\phi(t, x_0) := x(t, 0, x_0)$  — решение задачи Коши с начальным данным  $x(0) = x_0$ . По определению  $\phi(0, x_0) = x_0$ . Максимальный промежуток решения  $\phi(t, x_0)$  будет обозначаться за  $I(x_0)$ .

**Теорема 5.0.2** (Групповое свойство автономных систем). Если  $s, t, t + s \in I(x_0)$ , то  $\phi(t + s, x_0) = \phi(t, \phi(s, x_0))$ .

*Доказательство.* Рассмотрим обе части, как функции от  $t$ . Левая часть — сдвиг какого-то решения, правая часть — какое-то решение, и при  $t = 0$  части равны друг другу.  $\square$

## 5.1 Виды траекторий

### 5.1.1 Точка покоя

**Определение 5.1.1** (Точка покоя). Такая точка  $x_0$ , что  $\phi(t, x_0) \equiv x_0$  — решение.

Несложно видеть, что точки покоя автономной системы — это  $\{x_0 \in H | f(x_0) = 0\}$ .

### 5.1.2 Замкнутая траектория

Пусть  $x_0$  — не точка покоя, причём нашли  $t_1 < t_2 : \phi(t_1, x_0) = \phi(t_2, x_0)$ . Можно считать, что при  $t \in (t_1, t_2) : \phi(t, x_0) \neq \phi(t_1, x_0)$ . Это в частности следует из того, что если  $x_0$  — не точка покоя, то любая точка траектории — не точка покоя.

Обозначим  $\omega := t_2 - t_1$ .

**Факт 5.1.1.**  $\phi(t, x_0)$  —  $\omega$ -периодическая функция (по  $t$ ).

*Доказательство.* Рассмотрим  $\psi(t) = \phi(t + \omega, x_0)$ . Это решение, как сдвиг. Оно определено хотя бы на отрезке  $[t_1 - \omega, t_2 - \omega]$ .

$$\psi(t_1) = \phi(t_1 + \omega, x_0) = \phi(t_2, x_0) = \phi(t_1, x_0)$$

Значит, по единственности  $\psi(t) \equiv \phi(t, x_0)$ . □

**Определение 5.1.2** (Замкнутая траектория). Траектория периодического решения.

Понятно, что замкнутая траектория — замкнутая несамопересекающаяся регулярная (касательный вектор не нулевой) кривая в фазовом пространстве.

### 5.1.3 Обыкновенная траектория

Пусть  $\forall t_1, t_2 \in I(x_0) : \phi(t_1, x_0) \neq \phi(t_2, x_0)$  при  $t_1 \neq t_2$ .

В таком случае траектория — просто непрерывный образ  $I(x_0)$ .

*Пример.* Рассмотрим систему  $\dot{x} = 1 + x^2$ . Тогда  $\phi(t, 0) = \operatorname{tg} t$ ,  $I(0) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , траектория — вся ось  $\mathbb{R}$ . Однако эта траектория — образ ограниченного интервала, что может быть неудобно. Попробуем несколько искусственным способом с этим ниже.

Пусть  $f$  определена на всём пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

Рассмотрим вместе с системой  $\dot{x} = f(x)$  другую систему  $\dot{y} = g(y)$ , где  $g(y) = \frac{f(y)}{1 + \|f(y)\|_{\text{euclid}}^2}$ . У новой системы  $|g(y)| < 1$ , и из теоремы об уравнениях, сравнимых с линейными (2.3.4), любое решение  $y$  продолжимо на всю ось  $\mathbb{R}$ .

Пусть  $y(t)$  — решение системы  $\dot{y} = g(y)$  с начальным условием  $y(0) = x_0$ . Рассмотрим  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(\tau) = \int_0^\tau \frac{ds}{1 + \|f(y(s))\|_{\text{euclid}}^2}$ .  $h$  — непрерывная функция,  $\dot{h} > 0$ . Пусть  $\operatorname{Im} h = I$ .

Значит, имеется обратная функция  $\theta = h^{-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $\theta(h(\tau)) = \tau$ , и, дифференцируя это равенство, получаем  $\frac{d\theta}{dt}(h(\tau)) \cdot \frac{dh}{d\tau} = 1$ . То есть

$$\frac{d\theta}{dt}(t) = \frac{d\theta}{dt}(h(\tau)) = 1 + \|f(y(\tau))\|_{\text{euclid}}^2 = 1 + \|f(y(\theta(t)))\|_{\text{euclid}}^2$$

Утверждается, что  $z(t) = y(\theta(t))$  — решение первой системы  $\dot{z} = f(z)$ . В самом деле,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dy}{d\theta}(\theta(t)) \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{f(\theta(t))}{1 + \|f(y(\theta(t)))\|_{\text{euclid}}^2} (1 + \|f(y(\theta(t)))\|_{\text{euclid}}^2) = f(z(t))$$

Таким образом получается, что решению  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  системы  $\dot{y} = f(y)$  с начальным данным  $y(0) = x_0$  соответствует некоторое решение  $z : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  системы  $\dot{z} = f(z)$  с тем же начальным данным  $z(0) = x_0$ , причём их траектории одинаковы.

Значит, если мы хотим исследовать возможные траектории автономных уравнений, нам достаточно исследовать траектории решений, определённых на всей оси.

## 5.2 Классификация Пуанкаре

Пуанкаре задавался вопросом о траекториях: все ли траектории примыкают к началу координат, и есть ли предельное положение касательных.

В случае положительного ответа на оба вопроса траектории называются *узел*, и в зависимости от количества предельных положений касательных, он называется *обыкновенный* (2), *дискритический* ( $\infty$ ), вырожденный (1).

Если же часть касательных примыкает к нулю, а часть нет, то это — *седло*.

Далее ниже приводится классификация всевозможных траекторий уравнения  $\dot{z} = Bz$ , где  $z \in \mathbb{R}^2$ ,  $B \in GL(2, \mathbb{R})$ .

Введём новую переменную  $u$ , связанную со старой равенством  $z = Su$ , где  $S \in GL(2, \mathbb{R})$  — неособая замена координат плоскости. Уравнение преобразуется к виду  $\dot{u} = S^{-1}BSu$ , и, конечно, хочется, чтобы  $A := S^{-1}BS$  было жордановой формой матрицы  $B$ .

Перейдём к привычным координатам  $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , и рассмотрим разные возможные виды  $A$ .

- $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  — собственные числа  $A$ , причём  $\lambda \neq \mu$ . Тогда уравнение сводится к

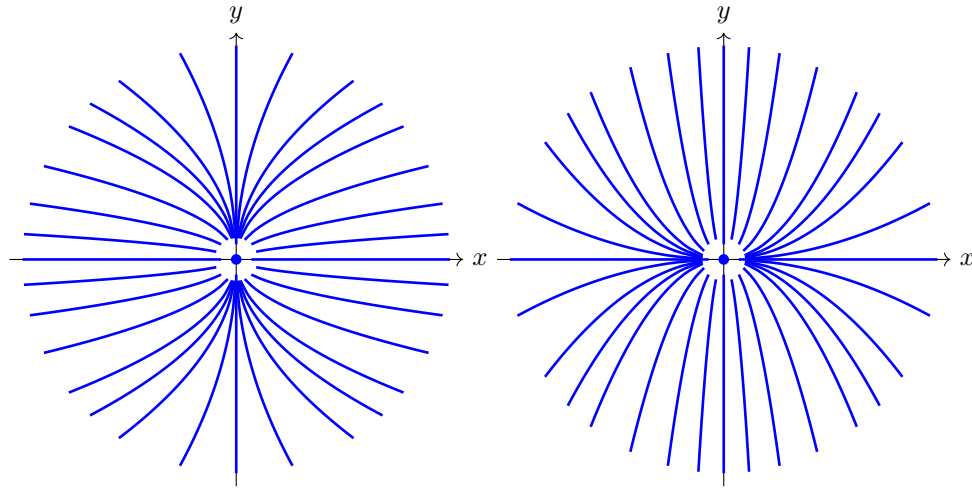
$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = \mu y \end{cases}$$

У системы есть симметрии: решению  $(x(t), y(t))$  соответствуют другие решения  $(-x, y), (x, -y), (-x, -y)$ .

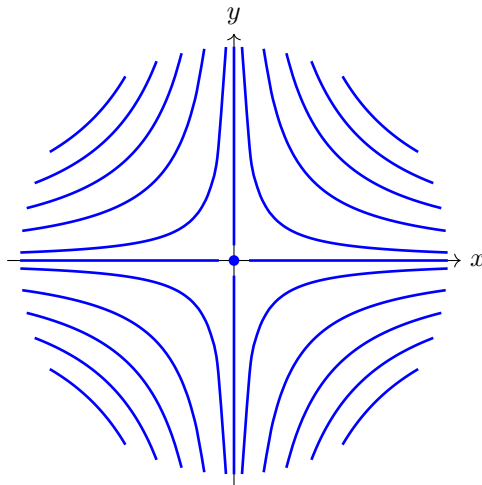
Имеется точка покоя  $(0, 0)$ . Далее, открытые полуоси тоже являются траекториями решений  $(x_0 e^{\lambda t}, 0)$  и  $(0, y_0 e^{\mu t})$ .

Теперь изобразим траекторию, лежащую внутри первой четверти.  $x(t) = x_0 e^{\lambda t}, y(t) = y_0 e^{\mu t}$ , и несложные преобразования дают  $t = \frac{1}{\lambda} \log \left( \frac{x}{x_0} \right)$  и  $y = Cx^{\frac{\mu}{\lambda}}$ .

- Если  $\mu, \lambda$  одного знака, то будут выпуклые или вогнутые возрастающие из нуля координат функции. Такое расположение траекторий называется *обыкновенный узел*.



- Если  $\mu, \lambda$  разных знаков, то будут своеобразные гиперболы. В сечении гиперболического параболоида получатся такие кривые, поэтому семейство траекторий называется *седло*.

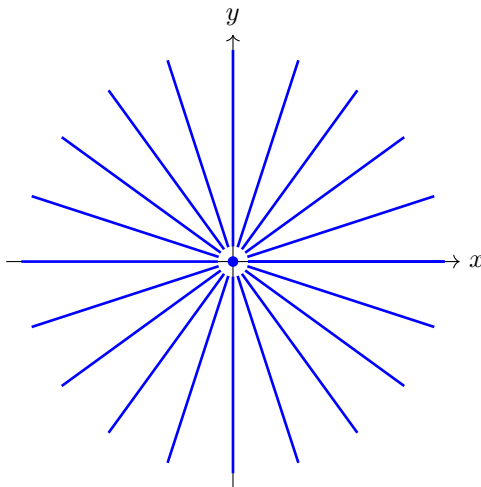


# Лекция XVI

15 декабря 2023 г.

- Теперь пусть  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  — собственные числа  $A$ , причём  $\lambda = \mu$ . Здесь жорданова форма может иметь два разных вида.

- Пусть  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ . Тогда все траектории — всевозможные лучи, исходящие из нуля координат. Такое расположение Пуанкаре назвал *дипритический узел*.



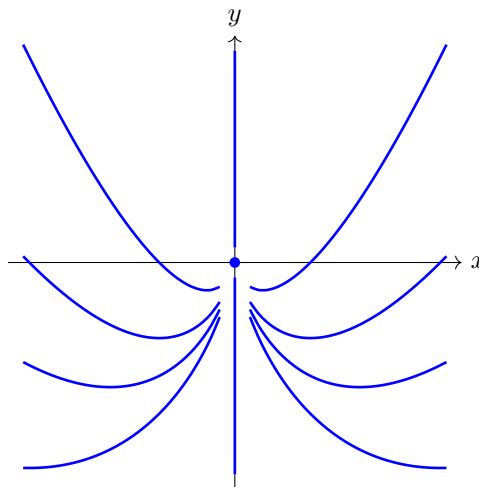
- Пусть  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ . Тогда решение системы  $\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = x + \lambda y \end{cases}$ . Здесь симметрий меньше — есть только центральная  $(x, y) \longleftrightarrow (-x, -y)$ , но нет осевых.

- \* Имеется траектория  $\begin{cases} x = 0 \\ y = y_0 e^{\lambda t} \end{cases}$ , делящая плоскость на две половинки, и картинку можно рисовать только в правой полуплоскости, а потом отражать.

- \* Пусть  $x = x_0 e^{\lambda t}$ . Тогда на  $y$  получается линейное уравнение  $\dot{y} = \lambda y + x_0 e^{\lambda t}$ . Решая его, получаем  $y = (x_0 t + C) e^{\lambda t}$

- \* Выражая  $t = \frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{x}{x_0} + C\right)$ , получаем уравнение кривых  $y = x \left(\frac{1}{\lambda} \log(x) + \tilde{C}\right)$ .  $y(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ , зато  $y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$ , и знак бесконечности противоположен знаку  $\lambda$ .

Эта траектория называется *вырожденный узел*.



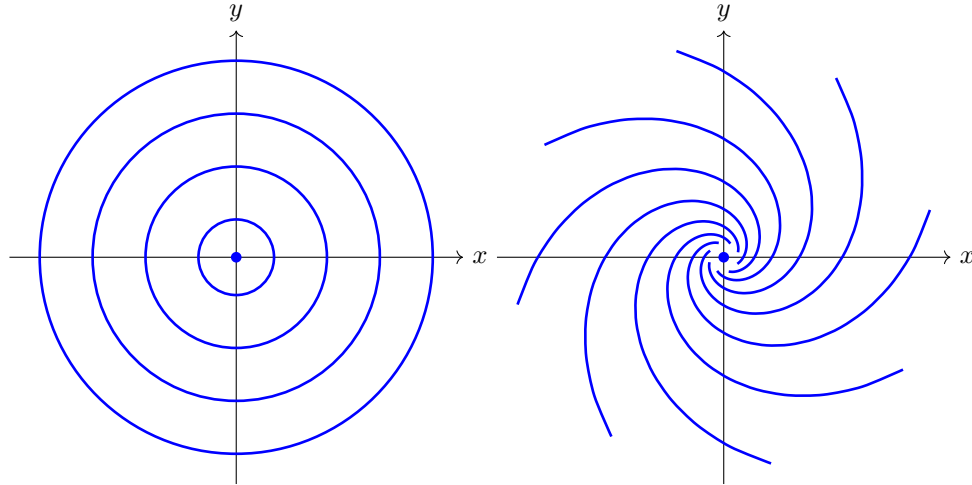
- Теперь пусть собственные числа  $B$  комплексные:  $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ . Тогда можно сопряжением привести  $B$  к виду  $A := S^{-1}BS = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ .

Тогда система имеет вид  $\begin{cases} \dot{x} = ax - yb \\ \dot{y} = bx + ay \end{cases}$ . Переходя к полярным координатам, получаем

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \phi - r \sin \phi \cdot \dot{\phi} = ar \cos \phi - br \sin \phi \\ \dot{r} \sin \phi + r \cos \phi \cdot \dot{\phi} = br \cos \phi + ar \sin \phi \end{cases}. \text{ Выражая отдельно } \dot{r} \text{ и } \dot{\phi}, \text{ получаем } \begin{cases} \dot{r} = ar \\ r\dot{\phi} = br \end{cases}.$$

Теперь данную систему несложно решить  $\begin{cases} r(t) = r_0 e^{at} \\ \phi(t) = bt + \phi_0 \end{cases}$ , и выразить, например, как функцию  $r(\phi) = r_0 e^{\frac{a}{b}(\phi - \phi_0)}$ , или  $r = \tilde{r}_0 e^{\frac{a}{b}\phi}$ .

- При  $a = 0$  экспоненты чисто мнимая, и траектории — концентрические окружности с центром в нуле. Здесь кроме точки покоя никакая к нулю не примыкают, Пуанкаре дал название *центр* этому виду траекторий.
- Наконец, если  $a \neq 0$ , то получаются логарифмические спирали, образующие *фокус* — все траектории примыкают к нулю, но ни одна не имеет предельного положения касательной.



В дополнение к данной классификации мы приведём упрощённую формулировку теоремы, которая рассматривает нелинейные системы.

*Интересный факт* (Теорема Пуанкаре). Рассматривается уравнение  $\dot{z} = Bz + F(z)$ , где  $B \in GL(2, \mathbb{R})$ ,  $F(0) = 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial z}(0) = 0$ , причём в некоторой окрестности нуля  $U : F \in C^2(U)$ .

Если собственные числа  $B$  не чисто мнимые, то существует диффеоморфизм  $h$ , переводящий окрестность нуля в окрестность нуля, такой, что  $h \in C^1$ ,  $h(0) = 0$ ,  $\frac{\partial h}{\partial z}(0) = E$ , и  $h$  отображает траектории  $\dot{z} = Bz$  на траектории  $\dot{z} = Bz + F(z)$ .

Иными словами, если траектории  $\dot{z} = Bz$  образуют не центр, то локально в нуле расположение решений линейных и нелинейных систем схожи.

*Замечание* (Проблема центра и фокуса). Даже для полиномиальных систем и на сей день не найдены необходимые и достаточные условия, при которых малое возмущение центр оставляет центром.