

Алгебра. Неофициальный конспект

Лектор: Алексей Владимирович Степанов
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

1	Гомологическая алгебра	2
1.1	Абелевы категории	2
1.2	Комплéксы	4
1.2.1	Гомологии	5

Глава 1

Гомологическая алгебра

Лекция I 12 февраля 2024 г.

1.1 Абелевы категории

Напомним некоторые определения из предыдущей лекции.

Определение 1.1.1 (Предаддитивная категория \mathcal{A}). $\forall A, B \in \mathcal{A} : \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ образует абелеву группу, и везде, где определена, выполнена дистрибутивность:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad (\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

Определение 1.1.2 (Бипроизведение). Такая диаграмма, что

$$A \begin{array}{c} \xleftarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\iota_1} \end{array} C \begin{array}{c} \xleftarrow{\pi_2} \\ \xrightarrow{\iota_2} \end{array} B$$

1. $\pi_1 \iota_1 = \text{id}_A$.
2. $\pi_2 \iota_2 = \text{id}_B$.
3. $\iota_2 \pi_2 + \iota_1 \pi_1 = \text{id}_C$.
4. $\pi_2 \iota_1 = 0$.
5. $\pi_1 \iota_2 = 0$.

Определение 1.1.3 (Аддитивная категория). Предаддитивная категория с финальным объектом и произведениями (любых двух объектов).

Эквивалентно, существуют инициальный объект и копроизведения, эквивалентно существуют нулевой объект и бипроизведения.

Определение 1.1.4 (Предабелева категория). Аддитивная категория, в которой у всех морфизмов есть ядро и коядро.

Определение 1.1.5 ((Ко)нормальный мономорфизм (эпиморфизм)). Он является (ко)эквалайзером (какой-то, неважно какой, пары стрелок).

Определение 1.1.6 (Абелева категория). Предабелева категория, в которой все мономорфизмы нормальны.

Пусть \mathcal{C} — категория. Вспомним про категорию стрелок $Arr\mathcal{C}$, в которой объекты — стрелки из $Mor(\mathcal{C})$, множество морфизмов между ϕ, ψ — это

$$Mor_{Arr\mathcal{C}}(\phi, \psi) = \{(\alpha, \beta) | \alpha : source(\phi) \rightarrow source(\psi), \beta : target(\phi) \rightarrow target(\psi), \beta\phi = \psi\alpha\}$$

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\phi} & \bullet \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \bullet & \xrightarrow{\psi} & \bullet \end{array}$$

Далее будем обозначать за $\ker f$ ядро стрелки, как уравнитель стрелки и нуля, а за $Ker f := source(\ker f)$ — объект (в конкретных категориях типа $mod\text{-}R$ это докатегорное понятие ядра — подмодуль без стрелки-вложения).

Лемма 1.1.1. \ker, coker — функторы $Arr\mathcal{A} \rightarrow Arr\mathcal{A}$.

Доказательство. Достаточно доказать для ядер, для коядер двойственно.

Определим действие \ker на морфизмах:

$$\begin{array}{ccccc} Ker f & \xrightarrow{\ker f} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow \exists! \phi & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ Ker f' & \xrightarrow{\ker f'} & A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

$f \cdot \ker f = 0 \Rightarrow \beta \cdot f \cdot \ker f = 0 \Rightarrow f' \cdot \alpha \cdot \ker f = 0$, откуда по универсальному свойству ядра $\exists! \phi : \ker f' \cdot \phi = \alpha \cdot \ker f$.

Положим $\ker(\alpha, \beta) = (\phi, \alpha)$. Далее несложно проверить, что данное определение сохраняет композицию и id . \square

Определение 1.1.7 (Точный функтор). Функтор, сохраняющий ядра и коядра.

Интересный факт (Теорема Фрейда — Митчелла (Freyd — Mitchell)). Для любой малой абелевой категории \mathcal{A} : $\exists R \in Ring$ (необязательно коммутативное кольцо с единицей) и строгий, полный, точный функтор $\mathcal{A} \rightarrow mod\text{-}R$.

Предложение 1.1.1. Для всякого морфизма $f : A \rightarrow B$ найдётся пунктирная стрелка, делающая диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccccccc} Ker f & \xrightarrow{\ker f} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\text{coker } f} & CoKer f \\ & & \downarrow \text{coker } \ker f & & \uparrow \ker \text{coker } f & & \\ & & CoKer \ker f & \dashrightarrow^{\exists!} & Ker \text{coker } f & & \end{array}$$

Более того, в абелевой категории эта стрелка — изоморфизм.

Доказательство. Следует из эпи-моно разложения, доказанного на прошлой лекции, или из теоремы Митчелла.

Само построение пунктирной стрелки получается из универсальных свойств, а доказательство того, что это — изо — непростое. \square

Лемма 1.1.2. Пусть \mathcal{C} — полная подкатегория в абелевой категории \mathcal{A} . Следующие условия равносильны

- \mathcal{C} является абелевой.
- — $0_{\mathcal{A}} \in \mathcal{C}$, здесь, как обычно, $0_{\mathcal{A}}$ — нулевой объект категории \mathcal{A} .
- — \mathcal{C} содержит бипроизведение любых двух своих объектов.

– Ядра и коядра (взятые в \mathcal{A}) любых морфизмов из \mathcal{C} лежат в \mathcal{C} .

Доказательство.

\Leftarrow . Очевидно.

\Rightarrow . Чуть сложнее, доказывать не будем (и использовать тоже). \square

1.2 Комплексы

Если противное не оговорено, то всё происходит в абелевой категории \mathcal{A} , большими буквами обозначены объекты данной категории, маленькими — морфизмы.

Определение 1.2.1 (Комплекс). Такая диаграмма, что $\forall k \in \mathbb{Z} : d_k \cdot d_{k+1} = 0$.

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{d_n} C_n \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots$$

Альтернативно, комплекс можно рассматривать, как функтор из категории (\mathbb{Z}, \geq) (полученной из частично упорядоченного множества) в \mathcal{A} (при котором образ композиции любых двух нетождественных морфизмов нулевой). Таким образом, комплексы — полная подкатегория в категории этих функторов.

Ещё один, следующий, взгляд на комплексы работает только для конкретной категории, уже вложенной в R -модули.

Определение 1.2.2 (Градуированный объект). $C_\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C_n$ с морфизмом $d : C_\bullet \rightarrow C_\bullet$, таким, что $d(C_n) \subset C_{n+p}$ для некоторой фиксированной *степени объекта* p (чаще всего она равна ± 1).

Определение 1.2.3 (Дифференциальный модуль). Градуированный объект (C_\bullet, d) со свойством $d^2 = 0$.

Определение 1.2.4 (Комплекс). Дифференциальный модуль степени -1 .

При развороте стрелок получается дифференциальный модуль степени $+1$, также известный, как *кокомплекс*:

$$\cdots \xleftarrow{d^{n+2}} C^{n+1} \xleftarrow{d^{n+1}} C^n \xleftarrow{d^n} C^{n-1} \xleftarrow{d^{n-1}} \cdots$$

Предостережение. У кокомплекса несколько другая нумерация стрелок, но мы их практически не будем использовать.

Определение 1.2.5 (Сдвиг комплекса (C_\bullet, d) на $p \in \mathbb{Z}$). Комплекс $(C[p]_\bullet, d[p])$, где $C[p]_n = C_{n+p}$ и $d[p]_n = (-1)^p d_{n+p}$.

$(-1)^p$ в данном определении имеет непонятную цель, но, видимо, людям так удобнее.

Лекция II

19 февраля 2023 г.

Определение 1.2.6 (Морфизм дифференциальных модулей $\bigoplus A_n \rightarrow \bigoplus B_n$). Такое $f : \bigoplus A_n \rightarrow \bigoplus B_n$, что $f(A_n) \subset B_n$, и диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} A_{n+1} & \xrightarrow{d_n^A} & A_n \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ B_{n+1} & \xrightarrow{d_n^B} & B_n \end{array}$$

На языке абелевых категорий, надо рассматривать не одно отображение f , так как отношение $f(A_n) \subset B_n$ не выражается, а серию гомоморфизмов $f_n : A_n \rightarrow B_n$.

Для всякого морфизма f коммутативна диаграмма в категории комплексов (по-видимому, здесь сдвиг комплекса не использует домножение на $(-1)^p$):

$$\begin{array}{ccc} A[1] & \xrightarrow{d^A} & A \\ \downarrow f[1] & & \downarrow f \\ B[1] & \xrightarrow{d^B} & B \end{array}$$

Если рассматривать комплексы, как функторы из категории (\mathbb{Z}, \geq) , то морфизмы между комплексами — естественные преобразования между функторами.

Теорема 1.2.1. Категория комплексов абелева.

Доказательство.

Лемма 1.2.1. Если \mathcal{C} — малая категория, \mathcal{A} — абелева, то $\text{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ — тоже абелева категория.

Доказательство леммы.

Нулевой объект — функтор $\mathbb{0}$, сопоставляющий каждому объекту $0_{\mathcal{A}}$, и каждой стрелке — нуль-стрелку.

Для двух функторов \mathcal{F}, \mathcal{G} : $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(C) = \mathcal{F}(C) \oplus \mathcal{G}(C)$.

Если $\eta \in \text{Mor}_{\text{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{A})}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ (то есть η — естественное преобразование $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$), то $(\text{Ker } \eta)(C) = \text{Ker}(\eta_C)$.

Аналогично (лемма 1.1.1), определяется ker . Аналогично с коядрами.

Далее по-хорошему надо проверить, что выполняются все универсальные свойства, но мы этого делать не будем. \square

Ссылаемся на (лемма 1.1.2).

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d_n^A} & A_n & \xrightarrow{d_{n-1}^A} & A_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ \cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{d_n^B} & B_n & \xrightarrow{d_{n-1}^B} & B_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} \oplus B_{n+1} & \xrightarrow{d_n^{A \oplus B}} & A_n \oplus B_n & \xrightarrow{d_{n-1}^{A \oplus B}} & A_{n-1} \oplus B_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Если $d^A \cdot d^A = 0$, и $d^B \cdot d^B = 0$, то (из теоремы Митчелла уж точно очевидно) $d^{A \oplus B} \cdot d^{A \oplus B} = 0$.

Ядра тоже являются комплексами, так как на языке конкретных категорий это просто подмодули. Двойственно с коядрами. \square

1.2.1 Гомологии

Гомоморфизм d является морфизмом комплексов $d : C[1] \rightarrow C$ (по-хорошему, $C[1]_{\bullet} \rightarrow C_{\bullet}$, но точку будем опускать):

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_n} & C_n & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow d_n & & \downarrow d_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{d_{n-1}} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Определение 1.2.7 (Циклы). $Z = Z(C) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker } d[-1]$.

Определение 1.2.8 (Границы). $B = B(C) \stackrel{def}{=} \text{Im } d[-1]$.

По определению, образ — это ядра коядра: $\text{Im } \phi \stackrel{def}{=} \text{Ker}(\text{coker } \phi)$. В абелевой категории канонически $\text{Im } \phi \cong \text{CoIm } \phi \stackrel{def}{=} \text{CoKer}(\text{ker } \phi)$.

На языке конкретных категорий, так как $d^2 = 0$, то $B \subset Z$, и можно определить фактормодуль $H := Z/B$ — *гомологии*.

Аналогично то же самое можно сказать на языке универсальных свойств:

$$\begin{array}{ccccccc} Z[1] & \xrightarrow{z[1]} & C[1] & \xrightarrow{d} & C & \xrightarrow{d[-1]} & C[-1] \\ & & \downarrow b & \swarrow \alpha & \uparrow z & & \\ & & B & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\quad} & H \xrightarrow{\quad} 0 \end{array}$$

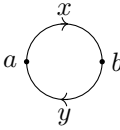
Так как $d[-1] \cdot d = 0$, то можно пропуститьсь через ядро: $\exists! \alpha : z \cdot \alpha = d$.

Далее, $z \cdot \alpha \cdot z[1] = d \cdot z[1] = 0$, а так как z — моно, то $\alpha \cdot z = 0$. Значит, можно пропуститьсь через коядро, то есть $\exists! \beta : \beta b = \alpha$. Далее H определяется, как коядро β .

Следствие 1.2.1. В комплексах Z, B, H нулевые дифференциалы.

Доказательство. Кажалось бы, мы доказали только для Z . □

Примеры (Геометрический пример).

- Рассмотрим окружность, как симплициальное множество: 

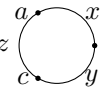
Построим $C_0 = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ — свободная абелева группа на $\{a, b\}$, $C_1 = \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ — тоже свободная абелева группа, но на образующих $\{x, y\}$. Вместо \mathbb{Z} можно было взять любое другое кольцо.

Все остальные элементы комплекса объявляются нулями.

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

Определим d_1 , как «конец минус начало»: $d_1(x) = b - a$, $d_1(y) = a - b$.

Теперь $Z_0 = C_0$, $B_1 = 0$, $Z_1 = \mathbb{Z}(x + y)$, $B_0 = \mathbb{Z}(b - a)$. Теперь $H_1 = Z_1/B_1 = \mathbb{Z}(x + y) \cong \mathbb{Z}$, и $H_0 = (\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b)/\mathbb{Z}(b - a) \cong \mathbb{Z}$

- Теперь триангулируем окружность по-другому:  $d_1(x) = b - a$, $d_1(y) = c - b$, $d_1(z) = a - c$.

Теперь $H_1 = Z_1 = \mathbb{Z}(x + y + z) \cong \mathbb{Z}$, и $B_0 = \mathbb{Z}(b + a)$, $B_0 = \mathbb{Z}(b - a) + \mathbb{Z}(c - b)$, и $H_0 = (\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b + \mathbb{Z}c)/B_0 \cong \mathbb{Z}$.

Ответ получился тот же самый, и это не случайно — есть такая теорема, что сингулярные/симплициальные гомологии (они равны для клеточных пространств) не зависят от триангуляции.

Упражнение 1.2.1. Триангулировать сферу, и вычислить гомологии.

Рассмотрим точную последовательность комплексов

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

Теорема 1.2.2. Существует длинная точная последовательность гомологических групп

$$\cdots \longrightarrow H' \longrightarrow H \longrightarrow H'' \longrightarrow H'[-1] \longrightarrow H[-1] \longrightarrow \cdots$$

где связующий морфизм δ будет построен в доказательстве.

Более того, это всё функториально: если есть другая короткая точная последовательность, и морфизм между ними, то по отношению к ним найдётся естественный морфизм полученных длинных точных последовательностей гомологий.

Доказательство. Сначала строим δ .

Для $z \in Z_n''$, обозначим за $[z]$ класс z в H_n'' .

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A'_n & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{\pi} & A''_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d' & & \downarrow d & & \downarrow d'' \\ 0 & \longrightarrow & A'_{n-1} & \xrightarrow{i} & A_{n-1} & \longrightarrow & A''_{n-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Положим $\delta([z]) := [i^{-1}(d(\pi^{-1}(z)))]$, где $\pi^{-1}(z)$ — произвольный прообраз (он есть, так как π сюръективно).

Дальше надо проверить, что определение корректно, и последовательность точна, но я не хочу это техать, доказательства не будет. □