

# Алгебра. Неофициальный конспект

Лектор: Алексей Владимирович Степанов  
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Гомологическая алгебра</b>	<b>2</b>
1.1	Абелевы категории . . . . .	2
1.2	Комплексы . . . . .	4
1.3	Гомологии . . . . .	5
1.4	Функторы между абелевыми категориями . . . . .	8
1.5	Резольвенты . . . . .	11
1.6	Резольвенты. Левый производный функтор . . . . .	12
1.6.1	Длинная точная последовательность левых производных функторов . . . . .	14
1.7	Производные функторы для $\otimes$ . . . . .	17
1.8	Производные функторы для $\text{Hom}$ . . . . .	18
1.9	Гомологии и когомологии групп . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Теория Галуа</b>	<b>21</b>
2.1	Базовые понятия про расширения полей . . . . .	21
2.1.1	Алгебраическое замыкание одного поля в другом . . . . .	22
2.1.2	Поле разложения . . . . .	23

# Глава 1

## Гомологическая алгебра

### Лекция I 12 февраля 2024 г.

#### 1.1 Абелевы категории

Напомним некоторые определения из предыдущей лекции.

**Определение 1.1.1** (Предаддитивная категория  $\mathcal{A}$ ).  $\forall A, B \in \mathcal{A} : \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$  образует абелеву группу, и везде, где определена, выполнена дистрибутивность:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad (\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

**Определение 1.1.2** (Бипроизведение). Такая диаграмма, что

$$A \begin{array}{c} \xleftarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\iota_1} \end{array} C \begin{array}{c} \xleftarrow{\pi_2} \\ \xrightarrow{\iota_2} \end{array} B$$

1.  $\pi_1 \iota_1 = \text{id}_A$ .
2.  $\pi_2 \iota_2 = \text{id}_B$ .
3.  $\iota_2 \pi_2 + \iota_1 \pi_1 = \text{id}_C$ .
4.  $\pi_2 \iota_1 = 0$ .
5.  $\pi_1 \iota_2 = 0$ .

**Определение 1.1.3** (Аддитивная категория). Предаддитивная категория с финальным объектом и произведениями (любых двух объектов).

Эквивалентно, существуют инициальный объект и копроизведения, эквивалентно существуют нулевой объект и бипроизведения.

**Определение 1.1.4** (Предабелева категория). Аддитивная категория, в которой у всех морфизмов есть ядро и коядро.

**Определение 1.1.5** ((Ко)нормальный мономорфизм (эпиморфизм)). Он является (ко)эквалайзером (какой-то, неважно какой, пары стрелок).

**Определение 1.1.6** (Абелева категория). Предабелева категория, в которой все мономорфизмы нормальны.

Пусть  $\mathcal{C}$  — категория. Вспомним про категорию стрелок  $Arr\mathcal{C}$ , в которой объекты — стрелки из  $Mor(\mathcal{C})$ , множество морфизмов между  $\phi, \psi$  — это

$$Mor_{Arr\mathcal{C}}(\phi, \psi) = \{(\alpha, \beta) | \alpha : source(\phi) \rightarrow source(\psi), \beta : target(\phi) \rightarrow target(\psi), \beta\phi = \psi\alpha\}$$

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\phi} & \bullet \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \bullet & \xrightarrow{\psi} & \bullet \end{array}$$

Далее будем обозначать за  $\ker f$  ядро стрелки, как уравнитель стрелки и нуля, а за  $Ker f := source(\ker f)$  — объект (в конкретных категориях типа  $mod\text{-}R$  это докатегорное понятие ядра — подмодуль без стрелки-вложения).

**Лемма 1.1.1.**  $\ker, \text{coker}$  — функторы  $Arr\mathcal{A} \rightarrow Arr\mathcal{A}$ .

*Доказательство.* Достаточно доказать для ядер, для коядер двойственно.

Определим действие  $\ker$  на морфизмах:

$$\begin{array}{ccccc} Ker f & \xrightarrow{\ker f} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow \exists! \phi & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ Ker f' & \xrightarrow{\ker f'} & A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

$f \cdot \ker f = 0 \Rightarrow \beta \cdot f \cdot \ker f = 0 \Rightarrow f' \cdot \alpha \cdot \ker f = 0$ , откуда по универсальному свойству ядра  $\exists! \phi : \ker f' \cdot \phi = \alpha \cdot \ker f$ .

Положим  $\ker(\alpha, \beta) = (\phi, \alpha)$ . Далее несложно проверить, что данное определение сохраняет композицию и  $id$ .  $\square$

**Определение 1.1.7** (Точный функтор). Функтор, сохраняющий ядра и коядра.

*Интересный факт* (Теорема Фрейда — Митчелла (Freyd — Mitchell)). Для любой малой абелевой категории  $\mathcal{A}$ :  $\exists R \in Ring$  (необязательно коммутативное кольцо с единицей) и строгий, полный, точный функтор  $\mathcal{A} \rightarrow mod\text{-}R$ .

**Предложение 1.1.1.** Для всякого морфизма  $f : A \rightarrow B$  найдётся пунктирная стрелка, делающая диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccccccc} Ker f & \xrightarrow{\ker f} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\text{coker } f} & CoKer f \\ & & \downarrow \text{coker } \ker f & & \uparrow \ker \text{coker } f & & \\ & & CoKer \ker f & \dashrightarrow^{\exists!} & Ker \text{coker } f & & \end{array}$$

Более того, в абелевой категории эта стрелка — изоморфизм.

*Доказательство.* Следует из эпи-моно разложения, доказанного на прошлой лекции, или из теоремы Митчелла.

Само построение пунктирной стрелки получается из универсальных свойств, а доказательство того, что это — изо — непростое.  $\square$

**Лемма 1.1.2.** Пусть  $\mathcal{C}$  — полная подкатегория в абелевой категории  $\mathcal{A}$ . Следующие условия равносильны

- $\mathcal{C}$  является абелевой.
- —  $0_{\mathcal{A}} \in \mathcal{C}$ , здесь, как обычно,  $0_{\mathcal{A}}$  — нулевой объект категории  $\mathcal{A}$ .
- —  $\mathcal{C}$  содержит бипроизведение любых двух своих объектов.

– Ядра и коядра (взятые в  $\mathcal{A}$ ) любых морфизмов из  $\mathcal{C}$  лежат в  $\mathcal{C}$ .

*Доказательство.*

$\Leftarrow$ . Очевидно.

$\Rightarrow$ . Чуть сложнее, доказывать не будем (и использовать тоже).  $\square$

## 1.2 Комплексы

Если противное не оговорено, то всё происходит в абелевой категории  $\mathcal{A}$ , большими буквами обозначены объекты данной категории, маленькими — морфизмы.

**Определение 1.2.1** (Комплекс). Такая диаграмма, что  $\forall k \in \mathbb{Z} : d_k \cdot d_{k+1} = 0$ .

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{d_n} C_n \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots$$

Альтернативно, комплекс можно рассматривать, как функтор из категории  $(\mathbb{Z}, \geq)$  (полученной из частично упорядоченного множества) в  $\mathcal{A}$  (при котором образ композиции любых двух нетождественных морфизмов нулевой). Таким образом, комплексы — полная подкатегория в категории этих функторов.

Ещё один, следующий, взгляд на комплексы работает только для конкретной категории, уже вложенной в  $R$ -модули.

**Определение 1.2.2** (Градуированный объект).  $C_\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C_n$  с морфизмом  $d : C_\bullet \rightarrow C_\bullet$ , таким, что  $d(C_n) \subset C_{n+p}$  для некоторой фиксированной *степени объекта*  $p$  (чаще всего она равна  $\pm 1$ ).

**Определение 1.2.3** (Дифференциальный модуль). Градуированный объект  $(C_\bullet, d)$  со свойством  $d^2 = 0$ .

**Определение 1.2.4** (Комплекс). Дифференциальный модуль степени  $-1$ .

При развороте стрелок получается дифференциальный модуль степени  $+1$ , также известный, как *кокомплекс*:

$$\cdots \xleftarrow{d^{n+2}} C^{n+1} \xleftarrow{d^{n+1}} C^n \xleftarrow{d^n} C^{n-1} \xleftarrow{d^{n-1}} \cdots$$

*Предостережение.* У кокомплекса несколько другая нумерация стрелок, но мы их практически не будем использовать.

**Определение 1.2.5** (Сдвиг комплекса  $(C_\bullet, d)$  на  $p \in \mathbb{Z}$ ). Комплекс  $(C[p]_\bullet, d[p])$ , где  $C[p]_n = C_{n+p}$  и  $d[p]_n = d_{n+p}$ .

Иногда при сдвиге комплекса определяют  $d[p]_n = (-1)^p d_{n+p}$ , но мы так делать не будем.

## Лекция II

19 февраля 2023 г.

**Определение 1.2.6** (Морфизм дифференциальных модулей  $\bigoplus A_n \rightarrow \bigoplus B_n$ ). Такое  $f : \bigoplus A_n \rightarrow \bigoplus B_n$ , что  $f(A_n) \subset B_n$ , и диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} A_{n+1} & \xrightarrow{d_n^A} & A_n \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ B_{n+1} & \xrightarrow{d_n^B} & B_n \end{array}$$

На языке абелевых категорий, надо рассматривать не одно отображение  $f$ , так как отношение  $f(A_n) \subset B_n$  не выражается, а серию морфизмов  $f_n : A_n \rightarrow B_n$ .

Для всякого морфизма  $f$  коммутативна диаграмма в категории комплексов:

$$\begin{array}{ccc} A[1] & \xrightarrow{d^A} & A \\ \downarrow f[1] & & \downarrow f \\ B[1] & \xrightarrow{d^B} & B \end{array}$$

Если рассматривать комплексы, как функторы из категории  $(\mathbb{Z}, \geq)$ , то морфизмы между комплексами — естественные преобразования между функторами.

**Теорема 1.2.1.** Категория комплексов абелева.

*Доказательство.*

**Лемма 1.2.1.** Если  $\mathcal{C}$  — малая категория,  $\mathcal{A}$  — абелева, то  $\text{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  — тоже абелева категория.

*Доказательство леммы.*

Нулевой объект — функтор  $0$ , сопоставляющий каждому объекту  $0_{\mathcal{A}}$ , и каждой стрелке — нуль-стрелку.

Для двух функторов  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ :  $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(C) = \mathcal{F}(C) \oplus \mathcal{G}(C)$ .

Если  $\eta \in \text{Mor}_{\text{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{A})}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  (то есть  $\eta$  — естественное преобразование  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ), то  $(\text{Ker } \eta)(C) = \text{Ker}(\eta_C)$ .

Аналогично (лемма 1.1.1), определяется  $\text{ker}$ . Аналогично с коядрами.

Далее по-хорошему надо проверить, что выполняются все универсальные свойства, но мы этого делать не будем.  $\square$

Ссылаемся на (лемма 1.1.2).

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d_n^A} & A_n & \xrightarrow{d_{n-1}^A} & A_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{d_n^B} & B_n & \xrightarrow{d_{n-1}^B} & B_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} \oplus B_{n+1} & \xrightarrow{d_n^{A \oplus B}} & A_n \oplus B_n & \xrightarrow{d_{n-1}^{A \oplus B}} & A_{n-1} \oplus B_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Если  $d^A \cdot d^A = 0$ , и  $d^B \cdot d^B = 0$ , то (из теоремы Митчелла уж точно очевидно)  $d^{A \oplus B} \cdot d^{A \oplus B} = 0$ .

Ядра тоже являются комплексами, так как на языке конкретных категорий это просто подмодули. Двойственно с коядрами.  $\square$

## 1.3 Гомологии

Дифференциал  $d$  является морфизмом комплексов  $d : C[1] \rightarrow C$  (по-хорошему,  $C[1]_{\bullet} \rightarrow C_{\bullet}$ , но точку будем опускать):

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_n} & C_n & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow d_n & & \downarrow d_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{d_{n-1}} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Ниже мы по произвольному комплексу  $C$  строим новые комплексы.

**Определение 1.3.1** (Циклы). Комплекс  $Z = Z(C) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker } d[-1]$ .

**Определение 1.3.2** (Границы). Комплекс  $B = B(C) \stackrel{def}{=} \text{Im } d[-1]$ .

По определению, образ — это ядро коядра:  $\text{Im } \phi \stackrel{def}{=} \text{Ker}(\text{coker } \phi)$ . В абелевой категории канонически  $\text{Im } \phi \cong \text{CoIm } \phi \stackrel{def}{=} \text{CoKer}(\text{ker } \phi)$ .

На языке конкретных категорий, так как  $d^2 = 0$ , то  $B \subset Z$ , и можно определить фактормодуль  $H := Z/B$  — *гомологии*.

То же самое можно сказать на языке универсальных свойств, хотя в будущем мы, ссылаясь на теорему Митчелла, будем всё писать исключительно в терминах элементов.

$$\begin{array}{ccccccc} Z[1] & \xrightarrow{z[1]} & C[1] & \xrightarrow{d} & C & \xrightarrow{d[-1]} & C[-1] \\ & & \downarrow b & \searrow \alpha & \uparrow z & & \\ & & B & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\text{coker } \beta} & H \cdots \cdots \cdots 0 \end{array}$$

*Построение  $H$  в терминах универсальных свойств.* Так как  $d[-1] \cdot d = 0$ , то можно пропуститьсь через ядро:  $\exists! \alpha : z \cdot \alpha = d$ .

Далее,  $z \cdot \alpha \cdot z[1] = d \cdot z[1] = 0$ , а так как  $z$  — моно, то  $\alpha \cdot z[1] = 0$ . Значит, можно пропуститьсь через коядро, то есть  $\exists! \beta : \beta b = \alpha$ . Далее  $H$  определяется, как коядро  $\beta$ .  $\square$

**Следствие 1.3.1.** В комплексах  $Z, B, H$  нулевые дифференциалы.

*Доказательство.* Из диаграммы следует, что в комплексе  $Z$  нулевые дифференциалы.  $B$  состоит из подмодулей в  $Z$ ,  $H$  — из фактормодулей, понятно, что там дифференциалы тоже нулевые.  $\square$

*Примеры* (Гомологии окружности).

- Рассмотрим окружность, как симплициальное множество: 

Построим  $C_0 = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$  — свободная абелева группа на  $\{a, b\}$ ,  $C_1 = \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$  — тоже свободная абелева группа, но на образующих  $\{x, y\}$ . Вместо  $\mathbb{Z}$  можно было взять любое другое кольцо.

Все остальные элементы комплекса объявляются нулями.

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

Определим  $d_1$ , как «конец минус начало»:  $\begin{cases} d_1(x) = b - a, \\ d_1(y) = a - b \end{cases}$ .

$$\text{Теперь } \begin{cases} Z_0 = C_0 \\ Z_1 = \mathbb{Z}(x + y) \end{cases} \quad \begin{cases} B_0 = \mathbb{Z}(b - a) \\ B_1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} H_0 = Z_0/B_0 = (\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b)/\mathbb{Z}(b - a) \cong \mathbb{Z} \\ H_1 = Z_1/B_1 = \mathbb{Z}(x + y) \cong \mathbb{Z} \end{cases}.$$

- Теперь триангулируем окружность по-другому:   $\begin{cases} d_1(x) = b - a, \\ d_1(y) = c - b, \\ d_1(z) = a - c \end{cases}$ .

$$\text{Теперь } \begin{cases} Z_0 = C_0 \\ Z_1 = \mathbb{Z}(x + y + z) \end{cases}, \quad \begin{cases} B_0 = \mathbb{Z}(b - a) + \mathbb{Z}(c - b) \\ B_1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} H_0 \cong \mathbb{Z} \\ H_1 = \mathbb{Z}(x + y + z)/0 \cong \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ответ получился тот же самый, и это не случайно — есть теорема, что сингулярные/симплициальные гомологии (они равны для клеточных пространств) не зависят от триангуляции.

**Упражнение 1.3.1.** Триангулировать сферу, и вычислить гомологии. Дифференциал от треугольника  $ABC$  (ориентация — порядок вершин — важна) определяют, как его обход вдоль периметра:  $AB + BC + CA$ .

**Теорема 1.3.1** (Длинная точная последовательность гомологий). Пусть имеется точная последовательность комплексов  $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ .

Существует длинная точная последовательность гомологических групп

$$\dots \longrightarrow H' \longrightarrow H \longrightarrow H'' \longrightarrow H'[-1] \longrightarrow H[-1] \longrightarrow \dots$$

где связующий морфизм  $\delta$  будет построен в доказательстве.

Более того, это всё функториально: если есть другая короткая точная последовательность, и морфизм между ними, то по отношению к ним найдётся естественный морфизм полученных длинных точных последовательностей гомологий.

*Доказательство.* Сначала строим  $\delta$ .

Для  $z \in Z_n''$ , обозначим за  $[z]$  класс  $z$  в  $H_n''$ .

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A'_n & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{\pi} & A''_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d' & & \downarrow d & & \downarrow d'' \\ 0 & \longrightarrow & A'_{n-1} & \xrightarrow{i} & A_{n-1} & \longrightarrow & A''_{n-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Положим  $\delta([z]) := [i^{-1}(d(\pi^{-1}(z)))]$ , где  $\pi^{-1}(z)$  — произвольный прообраз (он есть, так как  $\pi$  сюръективно).

Дальше надо проверить, что определение корректно, и последовательность точна. Это типичный диаграммный поиск, который невозможно записывать, и его несложно воспроизвести самостоятельно.  $\square$

## Лекция III

4 марта 2023 г.

Теперь приведём другое доказательство существования длинной точной последовательности гомологий, опирающееся на лемму о змее.

**Лемма 1.3.1** (О змее). Пусть даны два комплекса  $A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$  и  $0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B''$ , и морфизм между ними. Тогда имеется длинная точная последовательность из пунктирных стрелок.

Короткие стрелки получены из действия соответственных функторов (ядра и коядра), а связующий гомоморфизм определён  $\delta$  определён в доказательстве, и естественен (функториален).

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } \phi' & \dashrightarrow & \text{Ker } \phi & \dashrightarrow & \text{Ker } \phi'' & & \\ \downarrow \ker \phi' & & \downarrow \ker \phi & & \downarrow \ker \phi'' & & \\ A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi'' & & \delta \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' \\ \downarrow \text{coker } \phi' & & \downarrow \text{coker } \phi & & \downarrow \text{coker } \phi'' & & \\ & \dashrightarrow & \text{CoKer } \phi' & \dashrightarrow & \text{CoKer } \phi & \dashrightarrow & \text{CoKer } \phi'' \end{array}$$

*Доказательство.* Диаграммный поиск.  $\square$



**Теорема 1.3.2** (Длинная точная последовательность гомологий на бис). Пусть имеется точная последовательность комплексов  $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ .

Существует длинная точная последовательность гомологических групп

$$\dots \longrightarrow H' \longrightarrow H \longrightarrow H'' \longrightarrow H'[-1] \longrightarrow H[-1] \longrightarrow \dots$$

где связующий морфизм  $\delta$  будет построен в доказательстве.

Более того, это всё функториально.

*Доказательство.* Длинная точная последовательность комплексов означает наличие следующей коммутативной диаграммы (где строки точны, и столбцы — комплексы)

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & A'_n & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & A''_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d'_n & & \downarrow d_n & & \downarrow d''_n \\ 0 & \longrightarrow & A'_{n-1} & \longrightarrow & A_{n-1} & \longrightarrow & A''_{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Пусть циклы, границы и гомологии в комплексе  $A$  обозначаются  $Z_\bullet, B_\bullet, H_\bullet$  соответственно, в  $A' - Z'_\bullet, B'_\bullet, H'_\bullet$ , в  $A'' - Z''_\bullet, B''_\bullet, H''_\bullet$ . Из коммутативности диаграммы  $B'_n$  вправо уходит в  $B_n$ , а  $B_n$ , в свою очередь — в  $B''_n$ .

Чтобы воспользоваться леммой о змее, построим следующую диаграмму, взяв коядро верхней строки, ядро — нижней, и дорисовав сверху — ядра вертикальных стрелок, снизу — коядра.

$$\begin{array}{ccccccc} & H'_n & & H_n & & H''_n & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & A'_n/B'_n & \longrightarrow & A_n/B_n & \longrightarrow & A''_n/B''_n & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \tilde{d}'_n & & \downarrow \tilde{d}_n & & \downarrow \tilde{d}''_n & \\ 0 & \longrightarrow & Z'_{n-1} & \longrightarrow & Z_{n-1} & \longrightarrow & Z''_{n-1} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H'_{n-1} & & H_{n-1} & & H''_{n-1} \end{array}$$

Обоснуем, каким образом получилась такая диаграмма. По определению  $d_n(B_n) = \{0\}$ , поэтому  $A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1}$  пропускается через фактор, и получается отображение  $\tilde{d}_n : A_n/B_n \rightarrow A_{n-1}$ . Так как  $A$  — комплекс, то  $\tilde{d}_n(A_n/B_n) \subset Z_{n-1}$ , можно сузить codomain, получая  $\tilde{d}_n$ . По определению  $H_n = Z_n/B_n$ , поэтому действительно  $H_n = \text{Ker}(d_n)$ . В свою очередь,  $H_{n-1} = Z_{n-1}/B_{n-1}$ , и это действительно  $\text{CoKer}(d_n)$ .

Отображение  $A_n \rightarrow A''_n$  было эпиморфизмом, после взятия коядра эпиморфизмом оно и осталось. Двойственно,  $A'_{n-1} \rightarrow A_{n-1}$  было мономорфизмом, мономорфизмом оно и осталось.

Применяя лемму о змее, получаем утверждение теоремы. □

## 1.4 Функторы между абелевыми категориями

Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — абелевы категории.

**Определение 1.4.1** (Аддитивный функтор  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ). Такой функтор, что  $\forall \alpha, \beta \in \text{Mor}(\mathcal{A}) : \mathcal{F}(\alpha + \beta) = \mathcal{F}(\alpha) + \mathcal{F}(\beta)$  всегда, когда определено.

Рассмотрим произвольную короткую точную последовательность  $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$  в  $\mathcal{A}$ . Подействовав на неё функтором  $\mathcal{F}$ , мы получим последовательность  $0 \rightarrow \mathcal{F}(A') \rightarrow \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A'') \rightarrow 0$ . Точность, вообще говоря, пропадёт, но если  $\mathcal{F}$  сохраняет точность в каком-то члене для всех таких коротких точных последовательностей, то функтор  $\mathcal{F}$  имеет соответствующее название:

1. Если всегда имеется точность в члене  $\mathcal{F}(A)$ , то  $\mathcal{F}$  — *полуточный функтор*.
2. Если всегда имеется точность в членах  $\mathcal{F}(A')$  и  $\mathcal{F}(A)$ , то  $\mathcal{F}$  — *точный слева функтор*.
3. Если всегда имеется точность в членах  $\mathcal{F}(A)$  и  $\mathcal{F}(A'')$ , то  $\mathcal{F}$  — *точный справа функтор*.
4. Если всякая короткая точная последовательность переходит в короткую точную последовательность, то  $\mathcal{F}$  — *точный функтор*.

**Лемма 1.4.1.** Пусть  $\mathcal{F}$  — аддитивный функтор. Следующие условия эквивалентны:

1.  $\mathcal{F}$  *точен справа*.
2.  $\mathcal{F}$  *сохраняет нуль и коядра*:  $\mathcal{F}(0) = 0, \mathcal{F}(\text{coker}(\phi)) = \text{coker}(\mathcal{F}(\phi))$ .
3.  $\mathcal{F}$  *сохраняет конечные копределы*.

*Доказательство.*

- (3)  $\Rightarrow$  (2) Коядро — конечный копредел, поэтому очевидно.
- (2)  $\Rightarrow$  (3) В свою очередь, копроизведение в абелевой категории — бипроизведение, а это «внутренний объект», поэтому всякий аддитивный функтор сохраняет его.
- (2)  $\Rightarrow$  (1) Короткая точная последовательность  $A' \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{\psi} A'' \rightarrow 0$  характеризуется свойствами  $\psi = \text{coker } \phi, 0 = \text{coker } \psi$ .
- (1)  $\Rightarrow$  (2) Рассмотрим произвольный  $\phi : A' \rightarrow A$ . У него есть эпи-моно разложение  $\phi = \mu \varepsilon$  ( $\mu$  — моно,  $\varepsilon$  — эпи), и  $\text{coker}(\mu \varepsilon) = \text{coker}(\mu)$ , так как  $\varepsilon$  — эпиморфизм. Значит, без потери общности  $\phi$  — мономорфизм.

Тогда последовательность  $0 \rightarrow A' \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{\text{coker } \phi} \text{CoKer } \phi \rightarrow 0$  точна, и так как  $\mathcal{F}$  — *точен справа*, то  $\mathcal{F}(\text{coker } \phi) = \text{coker}(\mathcal{F}(\phi))$ .

Также *точный справа* функтор сохраняет нуль:  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\text{id}} A \rightarrow 0 \rightarrow 0$  переходит в  $\mathcal{F}(A) \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(0) \rightarrow 0$ .  $\square$

**Следствие 1.4.1.** Левый сопряжённый функтор *точен справа*.

*Доказательство.* Он сохраняет копределы.  $\square$

Копредел (который является левым сопряжённым к диагональному  $\Delta$ ) сохраняет копределы, значит, *точен справа*. Другими словами, копределы коммутируют.

К сожалению, в лемме о змее это не помогает в доказательстве того, что последовательность точна в члене  $\text{Ker } \phi$ , так как нет точной последовательности  $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ .

При доказательстве существования длинной точной последовательности гомологий на бис, мы использовали, что коядро точно справа, ядро — точно слева.

## Лекция IV

11 марта 2023 г.

**Факт 1.4.1.** Если *точный справа* функтор сохраняет мономорфизмы, то функтор *точен*. Двойственно, *точный слева* функтор, сохраняющий эпиморфизмы, *точен*.

*Доказательство.* Условия как раз означают, что короткая точная последовательность отображается в короткую точную последовательность.  $\square$

Пусть имеются комплексы  $X_\bullet$  и  $X'_\bullet$ , и между ними морфизмы  $f, g$ .

**Определение 1.4.2** (Морфизмы  $f$  и  $g$  гомотопны). Существует семейство морфизмов  $s_k : X_{k-1} \rightarrow X'_k$ , таких, что  $f_n - g_n = d'_n s_{n+1} + s_n d_{n-1}$ . При этом диаграмма ниже **не обязана** быть коммутативной.

$$\begin{array}{ccccccc} X_{n+1} & \xrightarrow{d_n} & X_n & \xrightarrow{d_{n-1}} & X_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-2}} & \cdots \xrightarrow{d_0} X_0 \\ \downarrow f_{n+1} & \downarrow g_{n+1} & \downarrow f_n & \downarrow g_n & \downarrow f_{n-1} & \downarrow g_{n-1} & \downarrow f_0 \\ X'_{n+1} & \xrightarrow{d'_n} & X'_n & \xrightarrow{d'_{n-1}} & X'_{n-1} & \xrightarrow{d'_{n-2}} & \cdots \xrightarrow{d'_0} X'_0 \end{array}$$

(Дополнительные стрелки в оригинале:  $s_{n+1}$  от  $X_{n+1}$  к  $X'_n$ ,  $s_n$  от  $X_n$  к  $X'_{n-1}$ ,  $s_{n-1}$  от  $X_{n-1}$  к  $X'_{n-2}$ ,  $s_0$  от  $X_0$  к  $X'_0$ )

Пишут  $f \simeq g$ .

А почему это то же самое, что и гомотопность в топологии?

**Теорема 1.4.1.** Если два морфизма комплексов  $f, g : X \rightarrow X'$  гомотопны, то  $H(f) = H(g)$  (гомологии являются функтором, и действуют не только на комплексах, но и на морфизмах между ними).

*Доказательство.* Докажем, что  $H(f - g) = 0$ .

Рассмотрим  $\bar{x} \in H_n(X)$ . У него имеется прообраз  $x \in Z_n$ .

Заметим, что  $H(f_n - g_n)(\bar{x}) = \overline{(f_n - g_n)(x)} = \overline{d'_n(s_{n+1}(x)) + s_n(d_{n-1}(x))}$ . Первое слагаемое равно нулю, так как  $d'_n(\cdots) \in B_n(X')$ , а второе — так как  $x \in \text{Ker } d_{n-1}$ .  $\square$

*Замечание.* Если  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  — аддитивный функтор, и  $f \simeq g$  — морфизмы комплексов с объектами из  $\mathcal{A}$ , то (допуская вольность речи можно писать  $\mathcal{F}(f)$ )  $\mathcal{F}(f) \simeq \mathcal{F}(g)$ .

**Факт 1.4.2.** Быть гомотопными — отношение эквивалентности.

*Доказательство.* Рефлексивность:  $\forall n : s_n = 0$ . Симметричность:  $s_n := -s_n$ . Транзитивность:

$$\begin{cases} f_n - g_n = d'_n s_{n+1} + s_n d_{n-1} \\ g_n - h_n = d'_n r_{n+1} + r_n d_{n-1} \end{cases} \Rightarrow f_n - h_n = d'_n (s_{n+1} + r_{n+1}) + (s_n + r_n) d_{n-1} \quad \square$$

**Определение 1.4.3** (Два комплекса  $X$  и  $X'$  гомотопически эквивалентны). Существуют морфизмы комплексов  $f : X \rightarrow X'$  и  $g : X' \rightarrow X$ , такие, что  $fg \simeq \text{id}_{X'}$  и  $gf \simeq \text{id}_X$ . Данные морфизмы  $f$  и  $g$  называют гомотопическими эквивалентностями.

**Факт 1.4.3.** Если  $X$  и  $X'$  гомотопически эквивалентны, то  $H(X) \cong H(X')$ .

**Определение 1.4.4** (Квазиизоморфизм  $f : X \rightarrow X'$ ). Морфизм  $f$ , такой, что  $H(f)$  — изоморфизм.

**Факт 1.4.4.** Гомотопическая эквивалентность — квазиизоморфизм.

**Определение 1.4.5** (Комплекс  $X$  ацикличен).  $X$  точен, то есть  $H(X) = 0$ .

**Определение 1.4.6** (Комплекс  $X$  стягиваем).  $\text{id}_X \simeq 0_X$ .

*Замечание.* Из (теорема 1.4.1) следует, что стягиваемый комплекс ацикличен.

Обратное, вообще говоря, неверно. Стягиваемый комплекс сохраняется под действием функторов, а ациклический — может и не сохраниться.

## 1.5 Резольвенты

Пусть  $\mathcal{A}$  — абелева категория,  $P \in \mathcal{A}$ .

**Определение 1.5.1** (Объект  $P$  проективен).  $\forall \phi : A \rightarrow B: \phi \text{ — эпи} \Rightarrow \forall \psi : P \rightarrow B: \exists \theta : P \rightarrow A$ , причём диаграмма коммутует. При этом  $\theta$  должно найтись какое-то, не факт, что оно единственно.

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \swarrow \exists \theta & \downarrow \forall \psi & \\ A & \xrightarrow{\forall \phi} B & \longrightarrow 0 \end{array}$$

**Факт 1.5.1.** В  $\mathcal{Set}$  все множества — проективные объекты.

**Теорема 1.5.1.** Пусть  $\mathcal{A} = R\text{-mod}$ . Модуль  $P$  проективен  $\iff P$  является прямым слагаемым свободного модуля.

*Доказательство.*

1. Свободный модуль проективен: пусть  $\{p_\alpha\}$  — базис  $P$ . Определим  $\theta(p_\alpha) = \psi(\phi^{-1}(p_\alpha))$ , где прообраз выбран произвольно, и продолжим по линейности.
2. Прямое слагаемое проективного модуля проективно. Рассмотрим каноническое вложение  $M \hookrightarrow M \oplus N$ , где  $M \oplus N$  — проективен.

$$\begin{array}{ccc} & M & \longrightarrow M \oplus N \\ & \downarrow \psi & \swarrow \text{---} \\ A & \longrightarrow B & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Определим  $M \oplus N \rightarrow B, (m, n) \mapsto \psi(m)$ . Так как  $M \oplus N$  проективен, то найдётся  $M \oplus N \rightarrow A$ , и композиция  $M \rightarrow M \oplus N \rightarrow A$  подходит в качестве морфизма, который должен найтись из определения проективного модуля.

3. Пусть  $P$  проективен. Возьмём свободный модуль  $F$ , сюръективно накрывающий  $P$  (например, подойдёт свободный модуль на всех элементах  $P$ , но на практике, конечно, удобно брать модуль поменьше).

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \swarrow \exists & \downarrow \text{id} & \\ F & \xrightarrow{\pi} P & \end{array}$$

Так как модуль проективен, то найдётся пунктирная стрелка. Значит,  $F \cong P \oplus \text{Ker } \pi$  ( $\forall f \in F : \pi^{-1}(f) = P(f) + \text{Ker } \pi$ ).  $\square$

*Примеры.*

- Пусть  $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ . Тогда  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  является  $R$ -модулем, но  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , значит, модули  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  все проективны.
- Можно предъявить проективный модуль, исходя из топологического факта о том, что шар нельзя причисать.

**Определение 1.5.2** (Проективная резольвента модуля  $M$ ). Ациклический комплекс вида  $\cdots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ , где  $P_i$  — проективные модули.

В будущем докажем, что любые две проективные резольвенты гомотопически эквивалентны.

**Определение 1.5.3** (В категории  $\mathcal{A}$  достаточно много проективных объектов).  $\forall A \in \mathcal{A}$  найдётся проективный объект  $P \in \mathcal{A}$  вместе с эпиморфизмом  $P \twoheadrightarrow A$ .

Если в нашей категории  $\mathcal{A}$  достаточно много проективных объектов, то у всякого модуля  $M$  найдётся резольвента — надо просто подряд накрывать возникающие ядра.

# Лекция V

18 марта 2024 г.

## 1.6 Резольвенты. Левый производный функтор

Зафиксируем некоторый аддитивный функтор  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , который обычно будет точен справа. Пусть у объекта  $A \in \mathcal{A}$  имеется проективная резольвента, которую я выделил стрелками  $\rightsquigarrow$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightsquigarrow & P_1 & \rightsquigarrow & P_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \rightsquigarrow & 0 \end{array}$$

Иными словами, проективная резольвента — это некоторый морфизм комплексов  $P$  и  $A_\bullet$ . Под комплексом  $A_\bullet$  подразумевается такой комплекс, в котором в нулевой градуировке сидит  $A$ , а в остальных — нули (следовательно, все дифференциалы — тоже нули).

Раз  $\mathcal{F}$  точен справа, то он сохраняет нуль. Применим  $\mathcal{F}$  к верхней строчке. Тогда получится комплекс вида

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}(P_1) \longrightarrow \mathcal{F}(P_0) \longrightarrow 0$$

Чуть ниже мы определим  $L_n \mathcal{F}(A) := H_n \mathcal{F}(P)$  — левый производный функтор, измеряющий неточность  $\mathcal{F}$  — но пока, например, неясна корректность (независимость от резольвенты) такого определения.

**Теорема 1.6.1.** Пусть  $P_i$  проективные, сверху комплекс (и ноль в верхней строчке вообще-то неважен), снизу — точный комплекс.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \\ \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

Тогда найдутся пунктирные стрелки, и они определены с точностью до гомотопии.

*Доказательство.*

- Сначала построим  $f_i : P_i \rightarrow Q_i$ .  
 $Q_0 \rightarrow B$  сюръективно, значит, найдётся  $f_0$ , такое, что квадрат коммутативен.
- Далее по индукции: пусть построены  $f_0, \dots, f_n$ .

$$\begin{array}{ccccc} P_{n+1} & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & P_{n-1} \\ \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ Q_{n+1} & \longrightarrow & Q_n & \xrightarrow{d_{n-1}^Q} & Q_{n-1} \end{array}$$

Хочется заполнить стрелку  $P_{n+1} \rightarrow Q_{n+1}$ , воспользовавшись проективностью  $P_{n+1}$ . Для этого надо найти сюръективное  $Q_{n+1} \rightarrow ?$ . Так как внизу — точная последовательность, то  $Q_{n+1} \rightarrow \text{Ker}(d_{n-1}^Q)$  подойдёт: оно сюръективно, так как  $P_{n+1} \rightarrow P_{n-1}$  нулевой,

а квадрат  $\begin{array}{ccc} P_n & \longrightarrow & P_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_n & \longrightarrow & Q_{n-1} \end{array}$  коммутативен. Тем самым, по определению проективного модуля  $\exists f_{n+1}$ .

- Теперь пусть имеются два морфизма комплексов, продолжающих  $f$ ,  $f_i$  и  $g_i$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A \\ & & f_1 \downarrow & \downarrow g_1 & f_0 \downarrow & \downarrow g_0 & \downarrow f \\ \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

Распишем разность: пусть  $h_i := f_i - g_i$ . Понятно, что  $A \rightarrow Q_0$  надо взять нулевым.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & h_1 \downarrow & \swarrow s_0 & h_0 \downarrow & \swarrow 0 & \downarrow 0 \\ \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

$s_0$  строится по основному свойству проективного модуля  $P_0$ : ведь  $h_0(P_0) \subset \text{Ker}(d_{-1}^Q) = \text{Im } d_0^Q$

- Далее индукция. Пусть построены  $s_0, \dots, s_{n-1}$ , строим  $s_n$ .

$$\begin{array}{ccccccc} & & P_n & \xrightarrow{d_{n-1}^P} & P_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-2}^P} & P_{n-2} \\ & \swarrow s_n & \downarrow h_n & \swarrow s_{n-1} & \downarrow h_{n-1} & \swarrow s_{n-2} & \\ Q_{n+1} & \xrightarrow{d_n^Q} & Q_n & \xrightarrow{d_{n-1}^Q} & Q_{n-1} & & \end{array}$$

Хочется, чтобы выполнялось  $h_n = d_n^Q s_n + s_{n-1} d_{n-1}^P$ , эквивалентно  $d_n^Q s_n = h_n - s_{n-1} d_{n-1}^P$ .

Надо проверить, что образ правой части лежит в  $\text{Im}(d_n^Q)$ , то есть  $\text{Ker}(d_{n-1}^Q)$ . Применим  $d_{n-1}^Q$ . Получим

$$d_{n-1}^Q h_n - d_{n-1}^Q s_{n-1} d_{n-1}^P = h_{n-1} d_{n-1}^P - (h_{n-1} - s_{n-2} d_{n-2}^P) d_{n-1}^P = 0$$

Тем самым,  $s_n$  действительно найдётся согласно свойству проективного модуля.

□

**Следствие 1.6.1.** Любые две проективные резольвенты одного и того же объекта гомотопически эквивалентны.

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & A_\bullet \\ g \uparrow & \downarrow f & \downarrow \text{id} \\ Q & \longrightarrow & A_\bullet \end{array} \quad \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & A_\bullet \\ \text{id} \downarrow & \downarrow fg & \downarrow \text{id} \\ P & \longrightarrow & A_\bullet \end{array}$$

Строим по только что доказанной теореме  $f, g$ , по теореме  $fg \simeq \text{id}_Q$  и  $gf \simeq \text{id}_Q$ .

Таким образом, определение левого производного функтора  $L_n$  корректно.

С некоторой точки зрения «правильно» рассматривать категорию комплексов с точностью до гомотопической эквивалентности, назовём её  $\mathcal{H}\mathcal{C}ompr(\mathcal{A})$ : там объекты —  $\text{Obj } \mathcal{A}$ , а группа морфизмов  $\text{Mor}_{\mathcal{H}\mathcal{C}ompr(\mathcal{A})}(P, Q) = \text{Mor}(\mathcal{C}ompr(\mathcal{A}))/\text{Ho}(P, Q)$ , где  $\text{Ho}(P, Q)$  — группа морфизмов, гомотопных 0.

*Примеры* (Что такое  $L_0$  от точного справа функтора).

- Предположим, что  $\mathcal{F}$  точен справа. Тогда

$$\mathcal{F}(P_1) \longrightarrow \mathcal{F}(P_0) \longrightarrow \mathcal{F}(A) \longrightarrow 0$$

точна.  $L_0 \mathcal{F}(A) = H_0(\mathcal{F}(P)) = \text{CoKer}(\mathcal{F}(P_1) \rightarrow \mathcal{F}(P_0))$ . Если функтор точен справа, то  $\text{CoKer}(\mathcal{F}(P_1) \rightarrow \mathcal{F}(P_0)) = \mathcal{F}(A)$ .

Тем самым,  $L_0 \mathcal{F} = \mathcal{F}$ .

- Обратно, если  $L_0\mathcal{F} = \mathcal{F}$ , то  $\mathcal{F}$  сохраняет коядра, значит, точен справа. (По-хорошему, надо ещё проверить, что  $L_0\mathcal{F}$  действует на морфизмах так же, но это банально).

**Следствие 1.6.2.** Если  $P_A, P_B$  — проективные резольвенты  $A, B$  соответственно, и  $f : A \rightarrow B$ , то  $\exists \tilde{f} : P_A \rightarrow P_B$ , делающий диаграмму коммутативной. Он определён однозначно с точностью до гомотопии.

$$\begin{array}{ccc} P_A & \longrightarrow & A_\bullet \\ \tilde{f} \downarrow & & f \downarrow \\ P_B & \longrightarrow & B_\bullet \end{array}$$

Здесь  $A_\bullet$  — комплекс, где  $A$  сосредоточен в нулевом члене.

Таким образом, морфизму  $f$  объектов из  $\mathcal{A}$  сопоставляется морфизм резольвент  $\tilde{f}$ , а он, в свою очередь, индуцирует морфизм гомологий  $H_n(P_A) \rightarrow H_n(P_B)$ . Значит, конструкция  $L$  функториальна.

### 1.6.1 Длинная точная последовательность левых производных функторов

Зафиксируем некоторый функтор  $\mathcal{F}$ . Далее мы исследуем  $L_n\mathcal{F}$ , для упрощения записи будем писать  $L_n := L_n\mathcal{F}$ .

Пусть имеется короткая точная последовательность  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  в  $\mathcal{A}$ . Построим длинную точную последовательность производных функторов. Это так говорится? Скорее всё-таки их значений на  $A, B, C$

$$\cdots \rightarrow L_1(A) \rightarrow L_1(B) \rightarrow L_1(C) \rightarrow L_0(A) \rightarrow L_0(B) \rightarrow L_0(C) \rightarrow \cdots$$

Для получения такой штуки было бы неплохо заполучить точную последовательность резольвент  $P_A \rightarrow P_B \rightarrow P_C$ , причём не абы какую, а сохраняющую свою точность под действием любого аддитивного функтора. Оказывается, это сделать несложно, и в этом нам поможет лемма о подковке.

**Лемма 1.6.1** (О подковке). Пусть  $P$  — проективный модуль, все строки и столбцы (состоящие из чёрных сплошных стрелок) точны.

$$\begin{array}{ccccccc} Q & \xrightarrow{\quad i \quad} & Q \oplus P & \xrightarrow{\quad \pi \quad} & P & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Утверждается, что диаграмму можно достроить до коммутативной, добавив зелёные пунктирные стрелки. Новые строки и столбцы также станут точны.

*Доказательство.* Так как  $P$  — проективен, а  $g$  — эпи, то найдётся сечение  $s$  такое, что  $gs = h_C$ .

$$\begin{array}{ccccccc} Q & \xrightarrow{\quad i \quad} & Q \oplus P & \xrightarrow{\quad \pi \quad} & P & & \\ \downarrow h_A & & \downarrow h_B & & \downarrow h_C & & \\ 0 \longrightarrow & A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B & \xrightarrow{\quad g \quad} & C & \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Определим стрелку  $h_B$  исходя из того, что квадраты должны в итоге получиться коммутативными. Из коммутативности левого квадрата  $h_B(u, 0) = f(h_A(u))$ . Из коммутативности правого треугольника  $h_B(0, v) = h_C(v) = gs(v)$ . Тем самым, подойдёт  $h_B(u, v) := f(h_A(u)) + s(v)$ .

При таком определении правый квадрат будет коммутативен:  $g(s(v)) = h_C(\pi(u, v)) \stackrel{?}{=} g(h_B(u, v)) = g(s(v))$ , так как  $gf = 0$ .

Также несложно убедиться, что построенный морфизм  $h_B$  — эпи (видимо, диаграммный поиск).  $\square$

**Теорема 1.6.2.** Для короткой точной последовательности  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  существует точная последовательность резольвент  $0 \rightarrow P_A \rightarrow P_B \rightarrow P_C \rightarrow 0$ , точность которой сохраняется под действием любого аддитивного функтора.

*Доказательство.* Возьмём произвольные резольвенты  $P_A, P_C$ . Резольвенту  $P_B$  будем строить пошагово, по индукции.  $(P_B)_0 := (P_A)_0 \oplus (P_C)_0$  строится прямым применением леммы о подкове.

Далее необходимо провести индукционный переход.

$$\begin{array}{ccccccc}
 (P_A)_{n+1} & \xrightarrow{\text{---}i\text{---}} & (P_A)_{n+1} \oplus (P_C)_{n+1} & \xrightarrow{\text{---}\pi\text{---}} & (P_C)_{n+1} & & \\
 \downarrow & & \downarrow d_n^B & & \downarrow & & \\
 0 \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-1}^A) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-1}^B) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-1}^C) & \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \longrightarrow & (P_A)_n & \longrightarrow & (P_B)_n & \longrightarrow & (P_C)_n & \longrightarrow 0 \\
 \downarrow d_{n-1}^A & & \downarrow d_{n-1}^B & & \downarrow d_{n-1}^C & & \\
 0 \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-2}^A) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-2}^B) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-2}^C) & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Вычленим некоторый кусочек диаграммы, и попробуем применить лемму о подкове для получения  $d_n^B$ . Для этого необходимо потребовать от стрелки  $\text{Ker}(d_{n-1}^B) \rightarrow \text{Ker}(d_{n-1}^C)$ , чтобы она была эпиморфизмом.

Докажем последнее по индукции: короткая последовательность ядер  $0 \rightarrow \text{Ker}(d_n^A) \rightarrow \text{Ker}(d_n^B) \rightarrow \text{Ker}(d_n^C) \rightarrow 0$  точна (так как ядро точно слева, то точность в остальных членах не вызывает сомнений, надо лишь проверить эпиморфность). В качестве базы здесь удобно применить лемму о змее:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & \text{Ker}(d_{-1}^A) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{-1}^B) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{-1}^C) & \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \longrightarrow & P_A & \longrightarrow & P_B & \longrightarrow & P_C & \longrightarrow 0 \\
 \downarrow d_{-1}^A & & \downarrow d_{-1}^B & & \downarrow d_{-1}^C & & \\
 0 \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

А индукционный переход я не знаю, ну, можно просто убедиться, используя определение  $d_n^B$  из леммы о подкове.

Тем самым, так как прямая сумма проективных проективна, то  $(P_A)_{n+1} \oplus (P_C)_{n+1} \twoheadrightarrow \text{Ker}(d_{n-1}^B)$ , и определение резольвенты  $B$  по индукции корректно.

Точность  $0 \rightarrow P_A \rightarrow P_B \rightarrow P_C$  под действием всякого аддитивного функтора, конечно, сохраняется, так как  $(P_B)_n = (P_A)_n \oplus (P_C)_n$ , а аддитивные функторы сохраняют бипроизведение.  $\square$

**Следствие 1.6.3** (Длинная точная последовательность производных функторов). Для короткой точной последовательности  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  имеет место длинная точная последовательность

$$\cdots \rightarrow L_1(A) \rightarrow L_1(B) \rightarrow L_1(C) \rightarrow L_0(A) \rightarrow L_0(B) \rightarrow L_0(C) \rightarrow \cdots$$

*Доказательство.* Из (теорема 1.6.2) найдётся точная последовательность проективных резольвент  $0 \rightarrow P_A \rightarrow P_B \rightarrow P_C \rightarrow 0$ . Применяя  $\mathcal{F}$ , получаем точную последовательность  $0 \rightarrow \mathcal{F}(P_A) \rightarrow \mathcal{F}(P_B) \rightarrow \mathcal{F}(P_C) \rightarrow 0$ .



Возьмём у  $\mathcal{F}(P_A), \mathcal{F}(P_B), \mathcal{F}(P_C)$  гомологии. Составленная из них длинная точная гомологическая последовательность как раз и сконструирует искомую длинную точную последовательность левых производных функторов.  $\square$

*Замечание.* Если  $\mathcal{F}$  точен справа, то длинная точная последовательность производных функторов обрывается эпиморфизмом:  $L_0(B) \rightarrow L_0(C) \rightarrow 0$ .

## Лекция VI

25 марта 2024 г.

Рассмотрим формальное обобщение производных функторов.

Пусть имеется семейство  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  функторов  $\mathcal{F}_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ .

**Определение 1.6.1** ((Левая) связанная последовательность функторов). Такая последовательность функторов  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , что для любой точной последовательности  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  существует функториальная длинная точная последовательность

$$\cdots \rightarrow \mathcal{F}_1(A) \rightarrow \mathcal{F}_1(B) \rightarrow \mathcal{F}_1(C) \rightarrow \mathcal{F}_0(A) \rightarrow \mathcal{F}_0(B) \rightarrow \mathcal{F}_0(C)$$

*Пример.* Последовательность  $\{L_i \mathcal{F}\}_{i \in \mathbb{N}}$  — связанная последовательность функторов.

Заметим, что  $\forall i > 0 : L_i \mathcal{F}(P) = 0$ , если  $P$  проективен. Это очевидным образом следует из существования резольвенты  $0 \rightarrow P \rightarrow P \rightarrow 0$ . Если  $\mathcal{F}$  точен справа (а мы это предполагаем), то он сохраняет ноль. Тогда  $L_n \mathcal{F}$  — гомологии  $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{F}(P) \rightarrow 0$ , которые в нулевом члене —  $\mathcal{F}(P)$ , а в остальных — нулевые.

Оказывается, этого условия достаточно, чтобы определить связанную последовательность по нулевому элементу:

**Теорема 1.6.3.** Пусть  $\{\mathcal{F}_i\}, \{\mathcal{G}_i\}$  — две связанные последовательности функторов, такие, что имеется естественный изоморфизм  $\mathcal{F}_0 \cong \mathcal{G}_0$ , и для любого проективного  $P$ :  $\forall i > 0 : \mathcal{F}_i(P) = \mathcal{G}_i(P) = 0$ .

Также предположим, что в  $\mathcal{A}$  достаточно много проективных объектов.

Тогда  $\forall i : \mathcal{F}_i \cong \mathcal{G}_i$  — естественный изоморфизм.

*Доказательство.* Пусть  $A \in \mathcal{A}$ . Накроем  $A$  проективным, возьмём ядро, получим точную последовательность

$$0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow 0$$

Так как последовательности функторов — связаны — то имеется длинная точная последовательность:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = \mathcal{F}_1(P) & \longrightarrow & \mathcal{F}_1(A) & \longrightarrow & \mathcal{F}_0(M) & \longrightarrow & \mathcal{F}_0(P) \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ 0 = \mathcal{G}_1(P) & \longrightarrow & \mathcal{G}_1(A) & \longrightarrow & \mathcal{G}_0(M) & \longrightarrow & \mathcal{G}_0(P) \end{array}$$

Значит, имеется естественный изоморфизм ядер,  $\mathcal{F}_1(A) \cong \mathcal{G}_1(A)$ , тем самым,  $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{G}_1$  (естественность — упражнение).

Теперь займёмся индукционным переходом:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = \mathcal{F}_i(P) & \longrightarrow & \mathcal{F}_i(A) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{i-1}(M) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{i-1}(P) = 0 \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ 0 = \mathcal{G}_i(P) & \longrightarrow & \mathcal{G}_i(A) & \longrightarrow & \mathcal{G}_{i-1}(M) & \longrightarrow & \mathcal{G}_{i-1}(P) = 0 \end{array}$$

Зажав  $\mathcal{F}_i(A)$  и  $\mathcal{F}_{i-1}(M)$  между двумя нулями, мы доказали, что все четыре ненулевых объекта изоморфны (естественность, опять же, доказывается несложно).  $\square$

**Следствие 1.6.4.** Пусть  $\mathcal{F}$  точен справа (например  $\mathcal{F} = \_ \otimes M$ , где  $M$  — фиксированный модуль). Пусть  $\mathcal{F}_0 \cong \mathcal{F}$ , где  $\{\mathcal{F}_i\}$  — связанная последовательность функторов, такая, что для любого проективного  $P : \mathcal{F}(P) = 0$ .

По-прежнему предполагаем, что в  $\mathcal{A}$  достаточно много проективных объектов.

Тогда  $\forall i \in \mathbb{N} : \mathcal{F}_i \cong L_i \mathcal{F}$ .

## 1.7 Производные функторы для $\otimes$

Пусть  $R$  — необязательно коммутативное кольцо с единицей,  $M \in \text{mod-}R, N \in R\text{-mod}$ , напомним, что тогда  $M \otimes_R N \in \mathcal{A}$ .

Изучим производные функторы тензорного произведения (функтор тензорного произведения точен справа, так как он — левый сопряжённый к  $\text{Hom}$ ). Обозначим  $\text{LTor}_i(M, \_) \stackrel{\text{def}}{=} L_i(M \otimes \_)$ ,  $\text{RTor}_i(\_, N) \stackrel{\text{def}}{=} L_i(\_ \otimes N)$ .

*Примеры.*

- Изучим  $\text{Tor}_1(M, R/aR)$ , где  $R$  — коммутативная область целостности. Для  $R/aR$  несложно написать проективную резольвенту:  $0 \rightarrow R \xrightarrow{a} R \rightarrow R/aR \rightarrow 0$  ( $a(m) = am$ ).

Тензорно домножая на  $M$ , мы получаем  $0 \rightarrow M \xrightarrow{m \otimes r \mapsto m \otimes ar} M \rightarrow M \otimes R/aR \rightarrow 0$ . Так как кольцо коммутативное, то тензорное произведение —  $\text{mod-}R$ , поэтому  $m \otimes r \mapsto m \otimes ar$  — тоже просто отображение умножения на  $a$ .

Так как естественно  $M \otimes R/aR \cong M/aM \otimes R \cong M/aM$ , то гомологии в среднем члене — нуль, а в левом члене —  $a$ -*кручение* в  $M$ , то есть  $\{x \in M \mid ax = 0\}$ .

**Теорема 1.7.1.** Имеет место естественный изоморфизм:  $\forall i : \text{LTor}_i \cong \text{RTor}_i$ .

*Идея доказательства.*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & P_1 \otimes Q_1 & \longrightarrow & P_0 \otimes Q_1 & \longrightarrow & M \otimes Q_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & P_1 \otimes Q_0 & \longrightarrow & P_0 \otimes Q_0 & \longrightarrow & M \otimes Q_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & P_1 \otimes N & \longrightarrow & P_0 \otimes N & \longrightarrow & M \otimes N \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

Домножение на свободный объект — точный справа функтор — из дистрибутивности тензорного произведения. Домножение на проективный объект — точный справа функтор — опять же из дистрибутивности.

Все строки точны, кроме нижней, и все столбцы точны, кроме правого, в которых мы и хотим посчитать гомологии, и доказать, что они равны.

Заведём тотальный комплекс  $\text{Tot}(M, N)_n := \bigoplus_{i=0}^n P_i \otimes Q_{n-i}$ , и теперь надо определить дифференциал  $D$ . Необходимо, чтобы выполнялось требование  $D^2 = 0$ , поэтому абы какой не подойдёт.

Пусть  $d_p : P \rightarrow P_{p-1}$ ,  $d_q : Q_q \rightarrow Q_{q-1}$  — дифференциалы резольвент, определим

$$\begin{aligned}
 D_{p,q} : P_p \otimes Q_q &\rightarrow \text{Tot}(M, N)_{p+q-1} \\
 (x \otimes y) &\mapsto d_p(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes d_q(y)
 \end{aligned}$$

Теперь полный дифференциал  $D_n = \bigoplus_{p+q=n} D_{p,q} : \text{Tot}(M, N)_{p+q} \rightarrow \text{Tot}_{p+q-1}$ .

**Упражнение 1.7.1.**  $D_{n-1} \cdot D_n = 0$ .

Осталось показать, что гомологии нижней строки, как и гомологии правого столбца, совпадают с гомологиями тотального комплекса.  $\square$

## 1.8 Производные функторы для Hom

Теперь разберёмся с функторами Hom — эти функторы являются правыми сопряжёнными к  $\otimes$ , поэтому точны слева.

Конкретнее, имеются ковариантный  $\text{Hom}(M, \_)$ , и контравариантный  $\text{Hom}(\_, N)$ .

Для изучения точных слева функторов будем строить последовательность правых сопряжённых функторов.

**Определение 1.8.1** (Инъективный модуль  $Q$ ). Такой модуль  $Q$ , что для любой инъекции  $A \hookrightarrow B$ , и для любого морфизма  $A \rightarrow Q$ , существует морфизм  $B \rightarrow Q$  такой, что диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & B \\ \downarrow & \swarrow \exists & \\ Q & & \end{array}$$

*Интересный факт.* Инъективный модуль — делимый модуль, то есть  $\forall r \in R \setminus \{0\}, q \in M : \exists x \in M : rx = q$ .

В одну сторону доказательство очевидно — в качестве  $A$  надо взять кольцо  $R$ , а в качестве  $B$  — поле частных  $R$ .

В категории, где *достаточно много инъективных объектов*, двойственно проективной, строится инъективная резольвента, в которой коядро предыдущего морфизма вкладывается в следующий инъективный модуль:

$$0 \rightarrow N \rightarrow Q_0 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow \dots$$

Далее аналогично определяются правые производные функторы, в частности, имеется комплекс

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, Q_0) \rightarrow \text{Hom}(M, Q_1) \rightarrow \dots$$

Гомологии такого комплекса обозначают  $\text{Ext}^i(M, N)$ .

Построив проективную резольвенту для  $M: \dots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ . Применяя к этой последовательности контравариантный Hom, получаем  $0 \rightarrow \text{Hom}(P_0, N) \rightarrow \text{Hom}(P_1, N) \rightarrow \dots$ . Гомологии этого комплекса обозначают  $\text{Ext}^i(M, N)$  (это уже другой Ext, но они, как и Tor, естественно изоморфны, доказательство абсолютно аналогично)

Название Ext происходит от extensions, элементы  $\text{Ext}^1$  находятся в биекции с классами коротких точных последовательностей  $0 \rightarrow M \rightarrow ? \rightarrow N \rightarrow 0$ . В качестве среднего члена всегда подойдёт  $M \oplus N$ , но, может быть, и ещё что-то, и за это отвечает Ext.

Для функторов Ext более высокой степени надо брать более длинные последовательности.

## Лекция VII

1 апреля 2024 г.

Пусть  $M, N \in \text{mod-}R$ .

**Определение 1.8.2** (Расширение  $N$  при помощи  $M$ ). Точная последовательность  $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0$ .

Морфизм расширений  $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0$  и  $0 \rightarrow M \rightarrow X' \rightarrow N \rightarrow 0$  — такая стрелка  $X \rightarrow X'$ , что два получившихся треугольника коммутативны.

**Теорема 1.8.1.**  $\text{Ext}^1(M, N)$  естественно изоморфен множеству классов изоморфизмов расширений  $N$  при помощи  $M$ .

*Доказательство.* Рассмотрим расширение  $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0$ . Запишем длинную точную последовательность для  $\text{Ext}^1(\_, N)$  и данной короткой точной последовательности.

$$\text{Ext}^1(N, M) \longleftarrow \text{Hom}(M, M) \longleftarrow \text{Hom}(X, M) \longleftarrow \text{Hom}(N, M) \longleftarrow 0$$

Теперь построим  $x \in \text{Ext}^1(N, M) \cong \text{Ext}^1(M, N)$ , как образ  $\text{id} \in \text{Hom}(M, M)$ .

Теперь построим стрелку обратно: накроем  $N$  проективным объектом:  $0 \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow 0$ .

$$0 = \text{Ext}^1(P, M) \longleftarrow \text{Ext}^1(N, M) \longleftarrow \text{Hom}(A, M) \longleftarrow \text{Hom}(P, M) \longleftarrow \text{Hom}(N, M)$$

Так как домножение на проективный модуль — точный функтор, то  $\text{Ext}^1(P, M) = 0$ . Теперь пусть  $X$  — пушアウト диаграммы  $M \xleftarrow{\beta} A \rightarrow P$ . Следующая диаграмма будет коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & P & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & X & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Далее можно проверить, что в одну сторону эти отображения взаимно обратны:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 = \text{Ext}^1(P, M) & \longleftarrow & \text{Ext}^1(N, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(A, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(P, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(N, M) \\ & & \uparrow ? & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \text{Ext}^1(N, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(M, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(X, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(N, M) \end{array}$$

$\text{id} \in \text{Hom}(M, M)$  уходит вверх при  $\_ \cdot \beta$  в  $\beta$ , далее влево — в  $x$  по определению  $x$ . Если же отправить  $\text{id}$  вправо, то он тоже уйдёт в  $x$ . **Почему?** И надо ещё проверить, что  $? = \text{id}$ .  $\square$

Далее идёт отступление про то, что быть определённым с точностью изоморфизма, и быть определённым — разные вещи, и я не справился это записать.

Если же хочется изучить всё кручение  $M$ , то оказывается,  $\text{Tor}_1(M, F/R) = \{x \in M \mid \exists a \in R \setminus \{0\} : ax = 0\}$  (здесь  $F/R$  — фактор  $R$ -модулей). Здесь используется, что  $F/R = \varinjlim R/aR$ , значит,  $\text{Tor}_1(F/R, M) = \varinjlim \text{Tor}_1(R/aR, M)$ .

## 1.9 Гомологии и когомологии групп

Пусть  $G$  — группа,  $A$  — абелева группа, на которой действует  $G$ . Иными словами,  $A$  —  $\mathbb{Z}[G]$ -модуль.

Рассматриваем  $\mathbb{Z}$ , либо как кольцо, либо как  $\mathbb{Z}[G]$ -модуль с тривиальным действием  $G$ .

Определим гомологии  $H_n(G, A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$  (верхний индекс  $\mathbb{Z}[G]$  указывает, что мы работаем в категории  $\mathbb{Z}[G]$ -модулей). Также определим когомологии  $H^n(G, A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^n(\mathbb{Z}, A)$ .

Запишем проективную резольвенту по первому аргументу.

- Пусть  $P_n$  — свободный  $\mathbb{Z}$ -модуль с базисом  $\{(g_0, \dots, g_n) \mid g_i \in G\}$ . По совместительству  $P_n$  — свободный  $\mathbb{Z}[G]$ -модуль с базисом  $\{(1, g_1, \dots, g_n) \mid g_i \in G\}$  и действием  $g \cdot (g_0, \dots, g_n) = (gg_0, \dots, gg_n)$ .

- Теперь определим гомоморфизмы.

$$\cdots \longrightarrow P_0 = \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Граничные гомоморфизмы определены так:  $d_n(g_0, \dots, g_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (g_0, \dots, \widehat{g_i}, \dots, g_n)$ . Несложно проверить, что  $d_{n-1} \cdot d_n = 0$ .

- Посчитаем нулевые гомологии и когомологии группы  $G$ .  $H_0(G, A) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ .

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[G]/I_G$ , где  $I_G = \text{Ker}(\phi)$ , здесь  $\phi : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$  —  $\mathbb{Z}$ -линейный гомоморфизм аугментации, определённый на базисе  $g \mapsto 1$ . Иными словами,  $I_G = \langle g - 1 | g \in G \rangle = \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g \cdot g \mid \sum_{g \in G} \alpha_g = 0 \right\}$ , все суммы финитные.

Тем самым,  $H_0(G, A) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \cong A/(I_G A)$  — *коинварианты*.  $I_G A = \langle ga - a | g \in G, a \in A \rangle$ .

- Теперь посчитаем когомологии.  $H^0(G, A) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ . Всякому гомоморфизму  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$  можно  $\phi(1)$ . Из  $G$ -линейности  $\forall g \in G : \phi(1) = \phi(g \cdot 1) = g \cdot \phi(1)$ , значит,  $\phi(1) \in A^G \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A | \forall g \in G : ga = a\}$  — *инварианты*. Значит, нулевые когомологии — инварианты.

- $H_1(G, \mathbb{Z}) = G^{\text{ab}} \stackrel{\text{def}}{=} G/[G, G]$ .

- $H^1(G, A) = \text{Der}(G, A)$  — множество скрещённых гомоморфизмов.

Скрещенный гомоморфизм — это такое отображение  $\phi : G \rightarrow A$ , которое обладает свойством  $\phi(gh) = g \cdot \phi(h) + \phi(g)$ .

- $H_2(G, \mathbb{Z}) = ?$  Предположим, что имеется точная последовательность групп  $0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1$ , то есть  $G \cong F/R$ .

$$\text{Тогда } H_2(G, \mathbb{Z}) = \frac{R \cap [F, F]}{[R, F]}.$$

Если  $[G, G] = G$  ( $G$  совершенна), то существует универсальное центральное расширение  $\pi : S \twoheadrightarrow G$ , то есть  $\text{Ker}(\pi) \in C(S)$ , и

$$\begin{array}{ccc} S & \twoheadrightarrow & G \\ & \searrow \exists! & \uparrow \forall \text{ центрального расширения} \\ & & H \end{array}$$

В этом случае  $H_2(G, \mathbb{Z}) = \text{Ker } \pi$ . Например, в случае  $G = SL_n(F) : S = \text{St}_n(F)$  — *группа Штейнберга*. Ядро  $\text{St}_n(F) \twoheadrightarrow SL_n(F)$  — это  $K_{2,n}(F) = H_2(G, \mathbb{Z})$ . Для  $n \geq 5$  от поля ничего не зависит.

## Глава 2

# Теория Галуа

## Лекция VIII

15 апреля 2024 г.

### 2.1 Базовые понятия про расширения полей

Мы будем изучать расширения полей, и базовое поле будем обозначать  $F$  (от английского Field), а расширенное —  $K$  (от немецкого Körper). Имеется теоретико-множественное включение  $F \subset K$ , и включение полей обозначается  $K/F$  (это не надо путать с факторкольцом, никаких факторов здесь не берётся, просто общепринятое обозначение).

$K$  является векторным пространством над  $F$ , и  $\dim_F K \stackrel{\text{def}}{=} [K : F]$  — *степень расширения*.

Для элемента  $\alpha \in K$  поле  $F(\alpha)$  — наименьшее подполе в  $K$ , содержащее  $F$  и  $\alpha$ .

**Лемма 2.1.1** (О простых расширениях). *Либо  $F(\alpha) \cong F(t)$  — поле дробно-рациональных функций, оно же поле частных  $K[t]$ , его общий элемент имеет вид  $\frac{p}{q}$  ( $p \in F[t], q \in F[t]^*$ ).*

*Либо  $F(\alpha) \cong F[t]/(p)$ , где  $p \in F[t]$  — неприводимый. В этом случае  $\deg p$  — степень расширения.*

*Доказательство.* Рассмотрим гомоморфизм  $F$ -алгебр  $\phi : F[t] \rightarrow F(\alpha), t \mapsto \alpha$ .

- Если  $\text{Ker } \phi = \{0\}$ , то  $\text{Im } \phi \cong F[t]$ . Тем самым,  $F(\alpha) \supset \text{Im } \phi$ , а раз  $F(\alpha)$  — поле, то оно содержит и поле частных  $Q(\text{Im } \phi) \cong Q(F[t])$ .

Так как  $F[t]$  — наименьшее подполе, то  $F(\alpha) \cong F(t)$ .

- Иначе, так как многочлены — PID — то  $\text{Ker } \phi = p \cdot F[t]$ , и  $\text{Im } \phi \cong F[t]/(p)$ . То, что  $p$  неприводим, легко видеть от противного: если  $p = rs$ , то один из  $r, s$  ассоциирован с  $p$ , иначе в кольце появляются делители нуля.

Тем самым, раз  $p$  неприводим, то  $(p)$  — максимальный идеал, откуда  $\text{Im } \phi \cong F[t]/(p)$  — уже поле. Базисом  $F[t]/(p)$  над  $K$  является, например,  $(1, \bar{t}, \dots, \bar{t}^{\deg(p)-1})$ .

□

В первом случае  $F(\alpha) \cong F(t)$  элемент  $\alpha \in K$  называется *трансцендентным*.

Во втором случае  $F(\alpha) \cong F[t]/(p)$  элемент  $\alpha \in K$  называется *алгебраическим*. В таком случае  $p \in F[t]$  — *минимальный многочлен*  $\alpha$ . Таким образом,  $F(\alpha) = F[\alpha]$ , где  $F[\alpha]$  — наименьшее кольцо в  $K$ , содержащее  $F$  и  $\alpha$ .

В случае расширений колец вместо слова алгебраический используют *целый* при дополнительном условии унитарности минимального многочлена.

**Определение 2.1.1** (Алгебраическое расширение  $K/F$ ). Такое расширение, что  $\forall \alpha \in K$ :  $\alpha$  — алгебраический. Иначе ( $\exists \alpha \in K$ :  $\alpha$  — трансцендентный) расширение называют трансцендентным.

**Определение 2.1.2** (Конечное расширение  $F/K$ ). Расширение конечной степени:  $[K : F] < \infty$ .

Конечные и алгебраические расширения тесно связаны между собой, но, конечно, существует бесконечное алгебраическое расширение. Например,  $\mathbb{Q}(\sqrt{p} | p \in \mathbb{P})$  — имеет бесконечную степень над  $\mathbb{Q}$ , так как корни из простых чисел линейно независимы над  $\mathbb{Q}$  (что ещё надо обосновать).

**Лемма 2.1.2.** Пусть имеется композиция расширений  $L/K/F$ . Тогда  $[L : F] = [L : K] \cdot [K : F]$ .

*Доказательство.* Пусть  $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$  — базис  $K$  над  $F$ , и  $(b_\beta)_{\beta \in B}$  — базис  $L$  над  $K$ .

Тогда несложно видеть, что  $(a_\alpha \cdot b_\beta)_{\alpha \in A, \beta \in B}$  — базис  $L$  над  $F$ . □

**Теорема 2.1.1.** Следующие условия равносильны

1. Расширение  $K/F$  конечно.
2.  $K/F$  — алгебраическое и конечнопрождённое.
3.  $K = F[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ , где все  $\alpha_i$  алгебраичны над  $F$ .

*Доказательство.*

(3)  $\Rightarrow$  (1) Индукция по  $n$ .

База:  $n = 0 \Rightarrow K = F$ .

Переход:  $F[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = F[\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}][\alpha_n]$ . Так как  $\alpha_n$  алгебраично над  $F$ , то оно алгебраично и над  $F[\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}]$  (впрочем, степень трансцендентности при увеличении поля может стать меньше).

(1)  $\Rightarrow$  (2) **Лемма 2.1.3.** Любой элемент конечного расширения  $K/F$  алгебраический.

*Доказательство леммы.*

Рассмотрим  $\alpha \in K$ . Так как расширение конечно, то  $1, \alpha, \alpha^2, \dots$  линейно зависимы. Выбрав линейную зависимость  $\beta_0 + \beta_1 \alpha + \dots + \beta_d \alpha^d = 0$ . Тогда  $\beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_d t^d$  аннулирует  $\alpha$ , то есть ядро  $\phi$  из доказательства (лемма 2.1.1) ненулевое. □

Пусть  $[K : F] = d$ , значит,  $K$  имеет базис  $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  над  $F$ . Тогда  $K$  порождено элементами  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$  даже просто как векторное пространство, а не как  $F$ -алгебра □

(2)  $\Rightarrow$  (3) Тавтологично.

## 2.1.1 Алгебраическое замыкание одного поля в другом

Пусть имеется расширение полей  $K/F$ , тогда  $\text{Int}_K F \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in K | \alpha \text{ алгебраичен над } F\}$  — целое (алгебраическое) замыкание  $F$  в  $K$ .

$\text{Int}_K F$  является полем:  $\forall \alpha, \beta \in \text{Int}_K F$ :  $\alpha - \beta, \alpha + \beta, \alpha \cdot \beta, \frac{\alpha}{\beta}$  (последнее при  $\beta \neq 0$ ) лежат в  $F[\alpha, \beta]$ , а это — конечное расширение согласно (теорема 2.1.1).

Пусть  $X \subset K$ , где по-прежнему  $K/F$ .

**Определение 2.1.3** ( $X$  алгебраически независим над  $F$ ).  $\forall f \in F[t_1, \dots, t_m], \forall x_1, \dots, x_m \in X$  (где  $x_i$  попарно различны):  $f(x_1, \dots, x_m) \neq 0$ .

Иными словами, отображение из универсальной  $F$ -алгебры, порождённой элементами  $X$  в  $F[X]$  (определённое на образующих  $x \mapsto x$ ) имеет нулевое ядро.

**Определение 2.1.4** (Линейная оболочка  $X$  над  $F$ ).  $\langle X \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \text{Int}_K F(X)$ .

**Определение 2.1.5** ( $X$  — (алгебраический) базис расширения  $K/F$ ). Алгебраически независимое  $X$  такое, что  $\langle X \rangle = K$ . При этом  $|X|$  называется *степенью трансцендентности*  $K/F$ .

*Пример.* В кольце  $F(t)$ :  $\{t\}$  — базис трансцендентности.

Для алгебраического базиса  $X$  верны те же аксиомы, что и для базиса векторных полей:

1. todo
2. todo
3. todo

**Теорема 2.1.2.** Степень трансцендентности не зависит от выбора базиса.

*Доказательство.* Аналогично подобному факту из линейной алгебры. □

## 2.1.2 Поле разложения

Пусть  $F$  — поле,  $f \in F[t]$ .

**Определение 2.1.6** (Поле разложения  $f$  над  $F$ ). Поле  $F_f/F$ , в котором  $f$  раскладывается на линейные множители, и вкладывающееся (**не факт**, что единственным образом) в любое другое поле, обладающее тем же свойством.

*Примеры.*

- $F = \mathbb{R}, f = t^2 + 1$ . В этом случае  $F_f \cong \mathbb{C}$ .
- $F = \mathbb{Q}, f = t^3 - 2$ . В этом случае  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$  — не поле разложения, оно вкладывается в  $\mathbb{R}$ , а  $f$  в  $\mathbb{R}$  на линейные множители не раскладывается.

Надо присоединить ещё какой-то корень  $f$ , достаточно присоединить какой-то  $\sqrt[3]{1}$ , отличный от 1; это то же самое, что присоединить  $\sqrt{-3}$ . Тем самым, поле разложения  $\mathbb{Q}_f \cong \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3}]$ .

**Теорема 2.1.3.** Для любого  $f \in F[t]$  существует его поле разложения.

*Доказательство.* Индукция по  $\deg f$ .

База:  $\deg f = 1 \Rightarrow F_f = F$ .

Переход: Пусть  $f = pg$ , где  $p$  — неприводим.

Пусть  $E := F[t]/(p)$ . В  $E$ :  $\alpha := \bar{t} = t + (p)$  — корень  $p$ .

Над  $E$ :  $f(t) = (t - \alpha) \cdot h(t)$  для некоторого  $h$ :  $\deg h = \deg f - 1$ . Положим  $F_f := E_h$ ,  $E_h$  существует по индукционному предположению. □