

Матанализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков
Конспектировал Леонид Данилевич

III семестр, осень 2023 г.

Оглавление

| | | |
|----------|--|-----------|
| 0.1 | Литература | 3 |
| 1 | Теория меры | 4 |
| 1.1 | Меры | 5 |
| 1.2 | Обобщения | 7 |
| 1.2.1 | Область задания меры (системы множеств) | 7 |
| 1.3 | Поговорим про интеграл | 8 |
| 1.3.1 | Про счётную аддитивность | 10 |
| 1.3.2 | Продолжение меры | 12 |
| 1.3.3 | Предмера | 15 |
| 1.4 | Структура измеримых множеств | 18 |
| 1.4.1 | Множества меры нуль | 18 |
| 1.4.2 | σ -множества и $\delta\sigma$ -множества | 18 |
| 1.4.3 | σ -конечность | 19 |
| 1.4.4 | Полнота | 20 |
| 1.4.5 | Двоичные (диадические) кубы | 21 |
| 1.5 | Поведение меры Лебега при линейных отображениях | 22 |
| 2 | Интеграл Лебега | 25 |
| 2.1 | Измеримые отображения | 26 |
| 2.2 | Грани и предельные переходы | 28 |
| 2.3 | Интеграл | 29 |
| 2.4 | Применения теоремы Леви. Свойства интеграла | 30 |
| 2.5 | Интегралы от знакопеременных функций | 31 |
| 2.5.1 | Про линейность интеграла | 32 |
| 2.6 | Виды сходимости | 34 |
| 2.7 | Классы L^p | 35 |
| 2.7.1 | Приближение функций из класса L^p | 36 |
| 2.7.2 | Связь интегралов Лебега и Римана | 39 |
| 2.8 | Теоремы Тонелли и Фубини | 40 |
| 2.8.1 | Как применять | 43 |
| 2.9 | Свёртки. Приближение функций с помощью свёрток | 43 |
| 2.9.1 | Меры с плотностью | 44 |
| 2.9.2 | Образ меры | 44 |
| 2.9.3 | Свойства свёртки | 45 |
| 2.9.4 | Слегка другой способ построения аппроксимативной единицы | 48 |
| 2.10 | Преобразования меры при дифференцируемом отображении | 49 |
| 2.11 | Мера Лебега на поверхностях | 52 |
| 2.11.1 | Частный случай линейного f | 52 |
| 2.11.2 | p -мера Хаусдорфа | 52 |
| 2.12 | Некоторые конкретные интегралы | 57 |
| 3 | Элементы общей теории меры | 59 |
| 3.1 | Разложение Хана | 60 |
| 3.2 | Интеграл комплексных функций | 61 |

| | | |
|-------|--|----|
| 3.2.1 | Интеграл по комплексной мере | 63 |
| 3.3 | Разложение Лебега | 64 |

0.1 Литература

1. Б. М. Макаров «Теория меры и интеграла»
2. ? «Интеграл Лебега»
3. Халмош «Теория меры»

Глава 1

Теория меры

Лекция I

6 сентября 2023 г.

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция.

Для того, чтобы интеграл Римана — Дарбу существовал, нам надо, чтобы она была какой-то хорошей — с ограниченными колебаниями, часто просто требуется кусочная непрерывность. А как быть иначе?

Запишем такое, не совсем верное рассуждение.

Рассуждение. Пусть $|f(x)| \leq M$ при $x \in [a, b]$. Разобьём отрезок $[-M, M]$ в объединение промежутков $[-M, M] = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k$, будем считать, что $\forall k : |I_k| < \varepsilon$.

Обозначим за $e_j := f^{-1}(I_j)$. Видно, что $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_k = [a, b]$ — прообразы отрезков I_j образуют разбиение $[a, b]$.

Оценим суммы Дарбу следующим образом:

$$S_{\Delta} f \leq \sum_{j=1}^k \beta_j |e_j| \quad s_{\Delta} f \geq \sum_{j=1}^k \alpha_j |e_j|$$

где $|e|$ — «длина» множества e .

Заметим, что верхние и нижние суммы близки: $S_{\Delta} f - s_{\Delta} f = \sum_{j=1}^k (\beta_j - \alpha_j) |e_j| \leq \varepsilon \sum_{j=1}^k |e_j| = \varepsilon(b-a)$.

Таким образом, проинтегрировали любую ограниченную функцию. В чём проблема? \square

Как естественным образом определить длину множества $|e|$?

Надо, чтобы длина была аддитивной: $|e \sqcup f| = |e| + |f|$.

Замечание. Можно аддитивно определить длину на всех подмножествах $[a, b]$, но такое определение не конструктивно, и к тому же не единственно. Дальше мы определим *меру Лебега*, которая позволяет измерять многие, но всё же далеко не все множества — можно построить контрпримеры с помощью аксиомы выбора.

Пусть I — конечный промежуток, $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ — тоже конечные промежутки, такие, что $I = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} I_j$.

Также хочется, чтобы предельные переходы выполнялись: $|I| = \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|$. Это называется *счётной аддитивностью*.

1.1 Меры

Пусть X — множество, $\mathcal{A} \subset 2^X$ — система его подмножеств. Пока будем считать только, что $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Определение 1.1.1 (Функция множества). *Вещественная функция множества $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, или комплексная функция множества $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$.*

Вещественная функция множества $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ называется *неотрицательной*.

Иногда также разрешают функции приобретать значения на расширенной прямой $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} = [0, +\infty]$.

Определение 1.1.2 (Мера). Аддитивная функция $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$.

Аддитивность означает, что в случае $e_1, \dots, e_k \in \mathcal{A}$, если $e := \bigsqcup_{j=1}^k e_j \in \mathcal{A}$, то $\phi(e) = \phi(e_1) + \dots + \phi(e_k)$.

Замечание. Если ϕ — аддитивная функция, то $\phi(\emptyset) = \phi(\emptyset) + \phi(\emptyset)$, откуда $\phi(\emptyset) = 0$ (формально, $\phi(\emptyset) = \infty$ тоже подходит, но тогда из аддитивности $\phi \equiv +\infty$, это скучный случай).

Примеры.

- Пусть $\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$ — совокупность конечных промежутков, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ — совокупность всех промежутков.

Тогда для обоих семейств можно ввести меру $\phi(I) = |I|$.

Заметим, что аддитивность действительно выполняется: если отрезок $\langle a, b \rangle$ разбит на отрезки $\langle a_0, a_1 \rangle, \dots, \langle a_{n-1}, a_n \rangle$, где $a_0 = a, a_n = b$, то и правда

$$b - a = \sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1})$$

- То же самое можно сделать в \mathbb{R}^n : введём множества ограниченных и всех прямоугольных параллелепипедов.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) &= \{I_1 \times \dots \times I_n \mid \text{все } I_j \text{ — конечные промежутки}\} \\ \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) &= \{I_1 \times \dots \times I_n \mid \text{все } I_j \text{ — промежутки}\} \end{aligned}$$

Обозначим за V_n объём на \mathcal{P} : $V_n(I_1 \times \dots \times I_n) = |I_1| \cdot \dots \cdot |I_n|$, где бесконечность в произведении трактуется так: если есть хотя бы один ноль, то произведение равно нулю, иначе бесконечно.

Почему эта мера аддитивна?

Пусть $Q, Q_1, \dots, Q_k \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, причём $Q = \bigsqcup_{j=1}^k Q_j$.

Лемма 1.1.1. $V_n(Q) = \sum_{j=1}^k V_n(Q_j)$.

Доказательство. Пусть f — функция на Q , определим

$$J(f) = \int_{I_n} \left(\dots \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots \right) dx_n$$

J , правда, определён не всегда — иногда какая-то промежуточная функция может быть не интегрируема по Риману — Дарбу.

J корректно определена для некоторой совокупности функций, которые образуют линейное пространство.

Рассмотрим $K = \delta_1 \times \cdots \times \delta_n \subset Q$. Тогда для χ_K — характеристической функции K — J определён, причём $J(\chi_K) = |\delta_1| \cdot \dots \cdot |\delta_n| = V_n(K)$.

Отсюда видно, что так как $\chi_Q = \sum_{j=1}^k \chi_{Q_j}$, то $V_n(Q) = \sum_{j=1}^k V_n(Q_j)$. \square

Пусть $\phi : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ — аддитивная функция множеств. ϕ называется *счётно аддитивной*, если для $a \in \mathcal{A}$, $\{a_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ верно $a = \bigsqcup_{j=1}^\infty a_j \Rightarrow \phi(a) = \sum_{j=1}^\infty \phi(a_j)$.

Теорема 1.1.1. Объём в \mathbb{R}^n — счётно аддитивная функция на $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ (и на $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ тоже, но пока не надо).

Доказательство.

Лемма 1.1.2. Пусть $Q_1, \dots, Q_k, Q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$.

1. Если Q_1, \dots, Q_k попарно не пересекаются, и $\forall j : Q_j \subset Q$, то $\sum_{j=1}^k V_n(Q_j) \leq V_n(Q)$.

2. Если $Q \subset \bigcup_{j=1}^k Q_j$ (условий на дизъюнктность нет), то $V_n(Q) \leq \sum_{j=1}^k V_n(Q_j)$.

Доказательство леммы.

1. $\sum_{j=1}^k \chi_{Q_j} \leq \chi_Q$ (поточечно), применяем ранее определённый функционал J .
2. $\sum_{j=1}^k \chi_{Q_j} \geq \chi_Q$ (поточечно), применяем ранее определённый функционал J .

\square

Пусть $Q, Q_j \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, где $j \in \mathbb{N}$, $Q = \bigsqcup_{j=1}^\infty Q_j$.

- Рассмотрим k параллелепипедов $Q_1, \dots, Q_k \subset Q$. Применяя лемму, получаем $\sum_{j=1}^k V_n(Q_j) \leq V_n(Q)$. Это верно для каждого k , переходя к пределу сразу получаем $\sum_{j=1}^\infty V_n(Q_j) \leq V_n(Q)$.

Замечание. Эта часть верна для любой аддитивной меры.

- Докажем обратное: $\sum_{j=1}^\infty V_n(Q_j) \geq V_n(Q)$.

Пусть $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$. Если $\exists s : I_s = 0$, то доказывать нечего.

Выберем $\varepsilon > 0$. Существуют замкнутые отрезки $\overline{I}_1, \dots, \overline{I}_s$, такие, что $\overline{I}_j \subset I_j$, причём для $\overline{Q} = \overline{I}_1 \times \cdots \times \overline{I}_n$ его объём уменьшился несильно: $V_n(Q) \leq V_n(\overline{Q}) + \varepsilon$.

Аналогично раздуем составляющие параллелепипеды: $\forall j \in \mathbb{N}$ построим $\widetilde{Q}_j = \widetilde{I}_1 \times \cdots \times \widetilde{I}_n$, так что открытый интервал $\widetilde{I}_j \supset I_j$, причём $V_n(\widetilde{Q}_j) \leq V_n(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$.

Теперь замкнутый параллелепипед покрывается открытыми, значит, можно выбрать конечное подпокрытие, сразу получив оценку (для некоего $k \in \mathbb{N}$)

$$V_n(Q) - \varepsilon \leq \sum_{j=1}^k \left(V_n(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \leq \sum_{j=1}^\infty \left(V_n(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right)$$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем требуемое $V_n(Q) \leq \sum_{j=1}^\infty V_n(Q_j)$. \square

1.2 Обобщения

1.2.1 Область задания меры (системы множеств)

Пусть X — множество, \mathcal{A} — система его подмножеств ($\emptyset \in \mathcal{A}$).

Определение 1.2.1 (Кольцо). Система множеств \mathcal{A} , такая что $\forall a, b \in \mathcal{A} : (a \cap b), (a \cup b), (a \setminus b) \in \mathcal{A}$.

Пример (Кольцо). Объединения конечного числа отрезков (или даже параллелепипедов (теорема 1.2.1)) ($\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ или $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$).

Определение 1.2.2 (Алгебра). Кольцо \mathcal{A} , такое что $X \in \mathcal{A}$.

Замечание. В алгебре $\forall a \in \mathcal{A} : a^c \in \mathcal{A}$. В частности, из-за законов де Моргана достаточно проверять только одно из $(a \cup b), (a \cap b) \in \mathcal{A}$

Определение 1.2.3 (Полукольцо). Система множеств $\mathcal{A} \subset 2^X$, такое что $\forall a, b \in \mathcal{A} : (a \cap b) \in \mathcal{A}$, а разность $(a \setminus b)$ есть объединение конечного числа попарно непересекающихся подмножеств из \mathcal{A} .

Пример (Полукольцо). Отрезки и конечные отрезки (или даже параллелепипеды (теорема 1.2.1)) ($\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ или $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$).

Пусть X, Y — множества, $\mathcal{A} \subset 2^X, \mathcal{B} \subset 2^Y$ — полукольца.

Определение 1.2.4 (Обобщённый прямоугольник). Произведение $a \times b$, где $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$.

Теорема 1.2.1. Множество обобщённых прямоугольников $\mathcal{C} = \{a \times b | a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$ есть полукольцо в $X \times Y$.

Доказательство.

- $\emptyset \in \mathcal{C} : \emptyset \times \emptyset = \emptyset$.
- $(a_1 \times b_1) \cap (a_2 \times b_2) = (a_1 \cap a_2) \times (b_1 \cap b_2)$, поэтому \mathcal{C} замкнуто относительно пересечения.
- Рассмотрим $u, v \in \mathcal{C}$. $u \setminus v = u \setminus (u \cap v)$, поэтому можно считать, что $v \subset u$.

Пусть $u = a_1 \times b_1, v = a_2 \times b_2$. Так как $v \subset u$, то $b_2 \subset b_1, a_2 \subset a_1$. Пусть $a_1 \setminus a_2 = \bigsqcup_{s=1}^n e_s$,
 $b_1 \setminus b_2 = \bigsqcup_{t=1}^m f_t$.

Несложно видеть, что $u \setminus v = \left(a_2 \sqcup \bigsqcup_{s=1}^n e_s \right) \times \left(b_2 \sqcup \bigsqcup_{t=1}^m f_t \right) \setminus (a_2 \times b_2)$, что есть объединение $(n+1)(m+1) - 1$ понятного обобщённого прямоугольника. \square

Замечание. Даже если \mathcal{A} и \mathcal{B} — кольца или алгебры, множества обобщённых прямоугольников могут всё равно образовывать лишь полукольцо.

Определение 1.2.5 (Мера на полукольце). Неотрицательная аддитивная функция множества (возможно, принимающая значения $+\infty$).

Пусть $\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$ — полукольцо конечных отрезков, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — нестрого возрастающая функция.

Определение 1.2.6 (Квазидлина, порождённая f). $\mu_f(\langle a, b \rangle) \stackrel{\text{def}}{=} f(b) - f(a)$.

Эта квазидлина, понятное дело, аддитивна, но не для всех функций она счётно аддитивна.

Контрпример. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$. Тогда $1 = f([0, 1)) \neq \sum_{i=1}^{\infty} f\left(\left[1 - \frac{1}{2^i-1}, 1 - \frac{1}{2^i}\right)\right) = 0$

Теорема 1.2.2. Пускай $\mathcal{A} \subset 2^X, \mathcal{B} \subset 2^Y$ — полукольца, μ и ν на них — (конечные) меры, определим меру на произведении

$$\gamma(u \times v) := \mu(u) \cdot \nu(v)$$

Утверждается, что γ аддитивна (теорема 1.3.1)

Лекция II

8 сентября 2023 г.

Пусть \mathcal{A} — полукольцо подмножеств 2^X .

Определение 1.2.7 (Кольцо, порождённое \mathcal{A}). $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \bigsqcup_{j=1}^k d_j \mid d_j \in \mathcal{A} \right\}$ — всевозможные конечные дизъюнктные объединения.

Лемма 1.2.1. $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ есть кольцо подмножеств 2^X .

Доказательство. Пусть $u = c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s; v = d_1 \sqcup \dots \sqcup d_t$.

- Проверим, что $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ замкнуто относительно пересечения. В самом деле,

$$u \cap v = \bigsqcup_{i,j} (c_i \cap d_j)$$

- Проверим, что $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ замкнуто относительно разности: индукция по t .

База: $t = 1$.

$$(c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s) \setminus d_1 = (c_1 \setminus d_1) \sqcup \dots \sqcup (c_s \setminus d_1)$$

Переход:

$$(c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s) \setminus (d_1 \sqcup \dots \sqcup d_t) = \left((c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s) \setminus (d_1 \sqcup \dots \sqcup d_{t-1}) \right) \setminus d_t$$

- Проверим, что $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ замкнуто относительно объединения.

$$u \cup v = (u \setminus v) \sqcup (v \setminus u) \sqcup (u \cap v)$$

□

Пусть $\mathcal{B} \subset 2^X$ — полукольцо. Среди всех колец, $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}$ есть наименьшее — это их пересечение.

Факт 1.2.1. Это кольцо \mathcal{C} получается, как $\mathcal{R}(\mathcal{B})$.

1.3 Поговорим про интеграл

$\mathcal{A} \subset 2^X$ — полукольцо, $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ — мера.

Определение 1.3.1 (Простая функция (относительно \mathcal{A})). Функция вида $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{e_i}$, где $e_i \in \mathcal{A}$, $\forall 1 \leq i < j \leq k : e_i \cap e_j = \emptyset$.

Определим «хиленький интеграл», который пока не будем обозначать \int :

Определение 1.3.2 (Интеграл от простой функции по мере μ). $I_\mu(f) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(e_j)$, если это имеет смысл (считается, что $0 \cdot \infty = 0$, но $(-\infty) + (+\infty)$ не определено).

Лемма 1.3.1. Интеграл от простой функции не зависит от её представления в виде суммы.

Доказательство. Пусть $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{e_i} = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{e'_j}$, где $\alpha_i, \beta_j \neq 0$.

Обозначим $A = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ (кстати, носитель $\text{supp } f \stackrel{\text{def}}{=} \text{Cl}\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$). Очевидно, (e_1, \dots, e_k) , как и (e'_1, \dots, e'_m) — разбиения A . У них есть общее измельчение e'' , причём на

каждом элементе $e''_{i,j} := e_i \cap e'_j$ выполняется $\alpha_i = \beta_j$, откуда оба интеграла от простой функции — через e и через e' — совпадают с определением через e'' :

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(e_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^m e_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \alpha_i \mu(e_{i,j}) = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^k e_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(e'_j)$$

Если какой-то e_i бесконечен, то один из конечного числа кусочков, на которые мы его разобьём ($e_i \cap e'_j$) тоже будет бесконечным, поэтому в случае бесконечностей (если обе суммы определены) обе суммы будут бесконечностями одного знака. \square

Свойства (Интеграл от простой функции).

- $I_\mu(c \cdot f) = c \cdot I_\mu(f)$
- Если f, g — простые функции, то $f + g$ — тоже простая, причём $I_\mu(f + g) = I_\mu(f) + I_\mu(g)$ (если в сумме двух интегралов нет бесконечностей разных знаков).

Доказательство. Пусть $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{e_i}$; $g = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{e'_j}$, где $\alpha_i, \beta_j \neq 0$.

Положим $A := \bigsqcup_i e_i$; $B := \bigsqcup_j e'_j$. Рассмотрим $(A \setminus B), (B \setminus A), (A \cap B)$ — все они лежат в $\mathcal{R}(\mathcal{A})$.

Будем считать, что (e_1, \dots, e_k) , как разбиение A , измельчено так, что оно уважает разбиение $(A \setminus B) \sqcup (A \cap B) = A$.

Аналогично считаем, что e' уважает разбиение $(B \setminus A) \sqcup (B \cap A) = B$.

Теперь $\mathcal{E} := \{e_i \in \{e_i\}_{i=1}^k \mid e_i \subset A \cap B\}$ и $\mathcal{E}' := \{e'_j \in \{e'_j\}_{j=1}^m \mid e'_j \subset A \cap B\}$ — разбиения $A \cap B$. Измельчим те элементы, которые попали в \mathcal{E} и \mathcal{E}' , теперь ещё считаем, что e и e' уважают друг друга. Можно считать, что и f , и g определены на разбиениях $\{e_i\}_{i=1}^k \cup \{e'_j\}_{j=1}^m$, и теперь по определению $f + g$ является простой функцией, и $I(f + g) = I(f) + I(g)$. \square

- Для двух простых интегрируемых функций $f \leq g \Rightarrow I_\mu(f) \leq I_\mu(g)$.

Доказательство. Если интегралы — бесконечности одного знака, то доказывать нечего.

Иначе $I_\mu(g)$ и $I_\mu(-f)$ не являются бесконечностями разного знака, то есть определено

$$I_\mu(g - f) = I_\mu(g) - I_\mu(f)$$

Но $(g - f)$ — функция неотрицательная, по определению её интеграл неотрицателен. \square

Лемма 1.3.2. Пусть \mathcal{A} — полукольцо с мерой μ ; $a, a_1, \dots, a_k \in \mathcal{A}$.

- Если a_j попарно дизъюнкты, причём $a_j \subset a$, то $\sum_{j=1}^k \mu(a_j) \leq \mu(a)$.
- Если $a \subset \bigcup_{j=1}^k a_j$ (условий на дизъюнктность нет), то $\mu(a) \leq \sum_{j=1}^k \mu(a_j)$.

Доказательство.

- $I_\mu(\chi_{\bigcup a_j}) \leq I_\mu(\chi_a)$ так как $\chi_{\bigcup a_j} \leq \chi_a$.
- $I_\mu(\chi_{\bigcup a_j}) \geq I_\mu(\chi_a)$, так как $\chi_{\bigcup a_j} \geq \chi_a$. \square

Теорема 1.3.1. Пусть $\mathcal{A} \subset 2^X, \mathcal{B} \subset 2^Y$ — полукольца обобщённых прямоугольников. Положим $\mathcal{C} := \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, это полукольцо подмножеств $X \times Y$.

Пусть μ — мера на \mathcal{A} , ν — мера на \mathcal{B} . Определим произведение мер $(\mu \otimes \nu)(a \times b) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(a)\nu(b)$.

Утверждается, что $\mu \otimes \nu$ — мера на \mathcal{C} .

Доказательство. Докажем аддитивность. Пусть $P = a \times b$, причём $P = \bigsqcup_{j=1}^k P_j$, где $P_j = a_j \times b_j$.

Проверим, что $(\mu \otimes \nu)(P) \stackrel{?}{=} \sum_{j=1}^k (\mu \otimes \nu)(P_j)$.

Разделим переменные: $\chi_{c \times d}(s, t) = \chi_c(s) \cdot \chi_d(t)$.

Дано, что $\chi_P = \sum_{j=1}^k \chi_{P_j}$, то есть $\chi_a(s)\chi_b(t) = \sum_{j=1}^k \chi_{a_j}(s)\chi_{b_j}(t)$.

Интегрируем ($I_{\nu, t}$ означает интеграл по мере ν функции от переменной t при фиксированном s):

$$\begin{aligned} I_{\nu, t}(\chi_a(s)\chi_b(t)) &= \sum_{j=1}^k I_{\nu, t}(\chi_{a_j}(s) \cdot \chi_{b_j}(t)) \Rightarrow \chi_a(s)\nu(b) = \sum_{j=1}^k \chi_{a_j}(s) \cdot \nu(b_j) \\ I_{\mu}(\chi_a(s)\nu(b)) &= \sum_{j=1}^k I_{\mu}(\chi_{a_j}(s) \cdot \nu(b_j)) \Rightarrow \mu(a)\nu(b) = \sum_{j=1}^k \mu(a_j)\nu(b_j) \end{aligned}$$

Данное доказательство также допускает бесконечные меры. □

Замечание. Пусть μ — мера на полукольце \mathcal{A} . Для $e \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ положим $\bar{\mu}(e) = I_{\mu}(\chi_e)$.

Введённая $\bar{\mu}$ — мера на $\mathcal{R}(\mathcal{A})$, понятно, что это единственно возможное продолжение — единственная (аддитивная) мера на $\mathcal{R}(\mathcal{A})$, такая, что её сужение на \mathcal{A} совпадает с μ .

Замечание. Если меру определять на кольце, а не на полукольце, то аддитивность достаточно проверять для двух множеств: $e_1, e_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \Rightarrow e_1 \cup e_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$.

1.3.1 Про счётную аддитивность

Определение 1.3.3 (Регулярная мера μ). Мера, удовлетворяющая условиям:

1. $\forall a \in \mathcal{A} : \mu(a) = \inf \{ \mu(U) \mid U \supset a; U \text{ открыто}; U \in \mathcal{A} \}$.
2. $\forall a \in \mathcal{A} : \mu(a) = \sup \{ \mu(U) \mid K \subset a; K \text{ компактно}; K \in \mathcal{A} \}$.

Пример (Регулярная мера). Мера Лебега на $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$.

Предостережение. Для полукольца возможно бесконечных параллелепипедов теорема Александра не применима: $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ не регулярно сверху, всякий параллелепипед, содержащий $\mathbb{R} \times \{0\}$ уже имеет бесконечную меру.

Теорема 1.3.2 (А. Д. Александров). Пусть X — топологическое пространство, $\mathcal{A} \subset 2^X$ — полукольцо, μ — регулярная мера на \mathcal{A} .

Утверждается, что μ счётно аддитивна.

Доказательство. Рассмотрим $a \in \mathcal{A}, \{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$. Пусть $a = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} a_j$. Для доказательства $\mu(a) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(a_j)$ покажем неравенства в обе стороны.

- $\forall k \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^k \mu(a_j) \leq \mu(a)$ (лемма 1.3.2), производим предельный переход.

- Если $\mu(a_j) = \infty$, или $\mu(a) = 0$, то доказывать нечего.

Выберем $\varepsilon > 0$. Найдём такие $U_j, K \in \mathcal{A}$, что U_j открыты, K компактно, $U_j \supset a_j, K \subset a$, причём $\mu(U_j) \leq \mu(a_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$ и $\mu(K) \geq \mu(a) - \varepsilon$.

Так как из открытого покрытия компакта можно выделить конечное подпокрытие (и пусть N — максимальный номер элемента подпокрытия), то

$$\mu(a) - \varepsilon \leq \mu(K) \leq \sum_{j=1}^N \mu(U_j) \leq \sum_{j=1}^N \left(\mu(a_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(a_j) + \varepsilon$$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем необходимое. \square

Примеры (Счётно-аддитивные меры).

- Пусть X — (возможно бесконечное) множество, \mathcal{A} — семейство всех его конечных подмножеств. Можно определить $\mu(a) = \#(a)$ — мощность множества $a \in \mathcal{A}$.

Она счётно-аддитивная, так как если $a = \bigcup_{j=1}^{\infty} a_j$, причём $a \in \mathcal{A}$, то почти все (кроме конечного числа) $a_j = \emptyset$.

- Можно продолжить эту меру на 2^X :

$$\mu(b) = \begin{cases} \#(b), & b \text{ конечно} \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Пусть $\{\xi_x\}_{x \in X} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ — числовое семейство. Можно определить $\nu : 2^X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, \nu(e) = \sum_{x \in e} \xi_x$.

Если семейство суммируемо, то мера конечна.

Лекция III

20 сентября 2023 г.

Вспомним, что мы определяли квазидлину $\mu_f(\langle a, b \rangle) = f(b) - f(a)$ для возрастающей функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (определение 1.2.6). Это функция может быть не счётно аддитивной, что случается, если f разрывна.

Поправим это определение, чтобы мера стала счётно-аддитивной. Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — возрастающая функция.

Рассмотрим $\mathcal{P}(\langle a, b \rangle)$ — полукольцо промежутков, содержащихся в $\langle a, b \rangle$, и произвольно доопределим f на некотором открытом интервале, содержащем $\langle a, b \rangle$ (скажем, если $a \in \langle a, b \rangle$, то есть $\langle a, b \rangle$ замкнут слева, то положим $f(a - \varepsilon) = f(a) - \varepsilon$ для $\varepsilon \in (0, 1)$).

Определение 1.3.4 (Стилтьесова длина). Длина, определённая по формуле

$$\mu_f(\langle c, d \rangle) = \begin{cases} f(d-) - f(c-), & \langle c, d \rangle = [c, d) \\ f(d-) - f(c+), & \langle c, d \rangle = (c, d) \\ f(d+) - f(c+), & \langle c, d \rangle = (c, d] \\ f(d+) - f(c-), & \langle c, d \rangle = [c, d] \end{cases}$$

где $f(x_0+) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ и $f(x_0-) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$.

Предложение 1.3.1. Стилтьесова длина счётно аддитивна.

Доказательство. Выполняется теорема Александрова. Проверим, например, что для полуинтервала $[c, d)$ мера регулярна.

Рассмотрим $\varepsilon > 0$, для открытого подмножества, содержащего $[c, d]$ выберем $(c - \delta, d)$. Для достаточно маленьких δ : $f((c - \delta) +) > f(c -) - \varepsilon$. В качестве компактного подмножества, содержащегося в $[c, d]$, выберем $[c, d - \delta]$. При достаточно маленьких δ : $f((d - \delta) +) > f(d -) - \varepsilon$.

Также можно проверить регулярность для бесконечных промежутков. \square

1.3.2 Продолжение меры

Продолжать можно только счётно-аддитивные меры, иначе будет неоднозначно.

Определение 1.3.5 (σ -алгебра). Такая алгебра множеств $\mathcal{A} \subset 2^X$, что она замкнута относительно счётных операций: если семейство $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ лежит в \mathcal{A} , то $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ и $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Теорема 1.3.3. Пусть $\mathcal{C} \subset 2^X$ — система подмножеств X . Тогда в X есть наименьшая σ -алгебра, содержащая \mathcal{C} .

Доказательство. Пересечение любого множества σ -алгебр — σ -алгебра. Хотя бы одна есть — это 2^X . Тогда в качестве наименьшей подойдёт пересечение всех σ -алгебр, содержащих \mathcal{C} . \square

Теорема 1.3.4. Пусть $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ — полукольцо всех конечных прямоугольных параллелепипедов, а \mathcal{A} — наименьшая σ -алгебра, содержащая $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$.

Тогда объём на $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ единственным образом продолжается до счётно аддитивной меры λ_n — n -мерной меры Лебега на \mathcal{A} .

Доказательство. Мы это докажем здесь (теорема 1.3.6). Сейчас приведём схему доказательства.

- Обозначим n -мерный объём на параллелепипедах из $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ за v_n . Построим $v_n \rightsquigarrow v_n^*$, заданную на $2^{\mathbb{R}^n}$, которая не будет даже аддитивной.

Тем не менее, для всякого $P \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$: $v_n^*(a) = v_n(P)$

- Теперь сузим v_n^* на некоторую σ -алгебру, содержащую $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, причём там эта функция будет уже и аддитивной, и счётно аддитивной. \square

Факт 1.3.1. Все открытые, а значит, и все замкнутые множества, лежат в наименьшей σ -алгебре \mathcal{A} , содержащей $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Открытое множество представимо, как объединение кубов с рациональными координатами вершин, содержащихся в нём. \square

Пусть Y — топологическое пространство.

Определение 1.3.6 (Борелевская σ -алгебра). Наименьшая σ -алгебра подмножеств множества Y , содержащая все открытые множества. Обозначают $\mathcal{B}(Y)$.

Замечание. Выше определённая \mathcal{A} совпадает с $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Факт 1.3.2. Пусть \mathcal{A} — алгебра подмножеств множества X . Следующие утверждения эквивалентны.

1. \mathcal{A} — σ -алгебра.
2. Для всех $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ верно, что $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.
3. Для всех $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ верно, что $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.
4. Для всех $A_i \in \mathcal{A}$, таких что $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ верно, что $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.
5. Для всех $A_i \in \mathcal{A}$, таких, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ верно, что $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

6. Для всех $A_i \in \mathcal{A}$, таких, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ для $i \neq j$ верно, что $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Доказательство.

2 \iff 3 Закон де Моргана.

1 \iff (2 \wedge 3) По определению.

2 \Rightarrow 4 Очевидно.

4 \Rightarrow 2 Положим $\bar{A}_i := A_1 \cup \dots \cup A_i$. Тогда \bar{A}_i возрастают по включению, и $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bar{A}_i \in \mathcal{A}$.

4 \iff 5 Тоже закон де Моргана.

4 \Rightarrow 6 Пусть $A_i \in \mathcal{A}$, причём $A_i \cap A_j = \emptyset$ для $i \neq j$. Выберем $\tilde{A}_i := A_1 \cup \dots \cup A_i$. Согласно (4) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{A}_i \in \mathcal{A}$.

6 \Rightarrow 4 Пусть $A_i \in \mathcal{A}$, причём $A_i \subset A_{i+1}$. Положим $e_1 = A_1$, $e_j = A_j \setminus A_{j-1}$ для $j \geq 2$. Тогда $e_i \cap e_j = \emptyset$ для $i \neq j$, и $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} e_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$. \square

Факт 1.3.3. Пусть $\mathcal{A} \subset 2^X$ — σ -алгебра, μ — мера на \mathcal{A} . Следующие условия эквивалентны.

1. μ счётно аддитивна.

2. Если $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ для $i \neq j$, то $\mu\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$.

3. Если $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, то $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$.

Доказательство.

1 \iff 2 Так как \mathcal{A} — σ -алгебра, то $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ автоматически лежит в \mathcal{A} , и 1 тавтологично 2.

2 \Rightarrow 3 Пускай $A_1 \subset A_2 \subset \dots$. Введём $e_1 = A_1$, $e_j = A_j \setminus A_{j-1}$ для $j \geq 2$. $e_i \cap e_j = \emptyset$ для $i \neq j$. Тогда $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(e_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n e_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

3 \Rightarrow 2 То же самое в обратном порядке. \square

Предостережение. Монотонность по убывающим последовательностям не выполняется:

Рассмотрим на кольце $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ убывающие по включению множества $A_n := (n, +\infty)$. Несмотря на то, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, всё-таки $\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu(\emptyset) = 0 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \infty$.

Теорема 1.3.5. Если $B_i \in \mathcal{A}$, $B_1 \supset B_2 \supset \dots$, причём $\mu(B_1) < +\infty$, то $\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(B_j)$.

Доказательство. Положим $A_i = B_1 \setminus B_i$.

Тогда $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i = B_1 \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, и $\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \mu(B_1) - \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu(B_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(B_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(B_1) - \mu(B_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$

Так как $\mu(B_1)$ конечна, то все производимые вычитания справедливы — не происходит вычитания бесконечности из бесконечности. \square

Замечание. Если мера конечна, то справедливо и обратное.

Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо его подмножеств, μ — мера на \mathcal{P} (аддитивная, но не факт, что счётно-аддитивная).

Определение 1.3.7 (Внешняя мера, построенная по μ). Функция μ^* , заданная на 2^X , определяемая по формуле

$$\mu^*(e) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(a_j) \mid a_j \in \mathcal{P}, e \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} a_j \right\}$$

Свойства.

- $\mu^*(\emptyset) = 0$. Так, покрытие счётным количеством пустых множеств имеет суммарную меру 0.
- $e_1 \subset e_2 \Rightarrow \mu^*(e_1) \leq \mu^*(e_2)$ — монотонность.
- Внешняя мера совсем не факт, что является мерой (то есть аддитивна). Тем не менее, верна *счётная полуаддитивность*: $e \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \Rightarrow \mu^*(e) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(e_i)$.

Доказательство. Если хотя бы одно из $\mu^*(e_i)$ бесконечно, то доказывать нечего. Далее считаем, что $\forall i : \mu^*(e_i)$ конечно.

Выберем $\varepsilon > 0$. По определению внешней меры $\forall i, k \in \mathbb{N} : \exists a_{i,k} \in \mathcal{P}$, такие, что $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} a_{i,k} \supset e_i$, причём $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(a_{i,k}) \leq \mu^*(e_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$.

Тогда $e \subset \bigcup_{i,k \in \mathbb{N}} a_{i,k}$ и $\mu^*(e) \leq \sum_{i,k} \mu(a_{i,k}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(a_{i,k}) \leq \sum_i \mu^*(e_i) + \varepsilon$. □

- Если μ счётно аддитивна, то $\mu^*|_{\mathcal{P}} = \mu$.

Доказательство. Для $b \in \mathcal{P} : \mu^*(b) \leq \mu(b)$, так как можно выбрать покрытие из одного элемента.

Докажем, что $\mu(b) \leq \mu^*(b)$. Рассмотрим кольцо $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ — совокупность дизъюнктивных объединений $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_s$, где $e_i \in \mathcal{P}$. Мера μ единственным образом продолжается до меры $\bar{\mu}$ на $\mathcal{R}(\mathcal{P})$.

Лемма 1.3.3. $\forall e \subset X : \mu^*(e) = \mu^\Delta(e) := \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(c_j) \mid \{c_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P} \text{ и } e \subset \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} c_i \right\}$

Доказательство леммы.

$\mu^*(e) \leq \mu^\Delta(e)$, так как всякое дизъюнктивное покрытие является покрытием.

Если $e \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} a_i$, то можно рассмотреть дизъюнктивное покрытие множествами $\bar{a}_i := a_i \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_{i-1})$.

Так как $\bar{a}_j \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$ и $\bar{a}_j \subset a_j$, то $\bar{\mu}(\bar{a}_j) \leq \mu(a_j)$.

Согласно свойству $\mathcal{R}(\mathcal{P})$: $\bar{a}_j = \bigsqcup_{s=1}^{k_j} e_{j,s}$, где при данном j все $e_{j,s}$ попарно не пересекаются. Но при разных j они тем более не пересекаются, они лежат в разных \bar{a}_j .

Таким образом, $\bigsqcup_{j,s} e_{j,s} \supset e$, откуда $\mu^\Delta(e) \leq \sum_{j,s} \mu(e_{j,s}) = \sum_j \bar{\mu}(\bar{a}_j) \leq \sum_j \mu(a_j)$. Переходя к инфимуму, получаем $\mu^\Delta(e) \leq \mu^*(e)$. □

Используя лемму, рассмотрим произвольное дизъюнктное покрытие $e_j \in \mathcal{P}$ такое, что $\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} e_j \supset e$. Введём $\tilde{e}_j := e_j \cap e$. Для них $\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} \tilde{e}_j = e$.

Согласно счётной аддитивности $\mu(e) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(\tilde{e}_j) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(e_j)$. Переходя к инфимуму, получаем искомое. \square

Контрпример (Счётная аддитивность важна). Пусть l_f — квазидлина, порождённая функцией $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

Покажем, что внешняя мера l_f^* везде равна нулю. Рассмотрим счётное покрытие прямой $\mathbb{R} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}_0} [n, n+1) \sqcup \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} [-2^n, -2^{n-1})$. Квазидлины всех составляющих полуинтервала равны 0, значит, внешняя мера прямой равна 0, но тогда по монотонности и внешние меры всех подмножеств тоже равны 0.

Лекция IV

27 сентября 2023 г.

1.3.3 Предмера

Пусть X — множество.

Вещи, обладающие свойствами внешней меры будут возникать у нас разными способами, поэтому удобно уже сейчас обобщить это понятие, аксиоматизировав его.

Определение 1.3.8 (Предмера). Функция $\gamma : 2^X \rightarrow \mathbb{R}_+$, обладающая свойствами

1. $\gamma(\emptyset) = 0$.
2. Монотонность $a \subset b \Rightarrow \gamma(a) \leq \gamma(b)$.
3. Счётная полуаддитивность $a \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} a_j \Rightarrow \gamma(a) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a_j)$.

Замечание. Из 3. следует 2., проверяется выбором $a_i = \begin{cases} b, & i = 1 \\ \emptyset, & i > 1 \end{cases}$. Более того, можно не требовать положительности, она следует из монотонности по отношению к пустому множеству.

Определение 1.3.9 (γ -измеримое множество $e \subset X$).

$$\forall a \subset X : \gamma(a) = \gamma(a \cap e) + \gamma(a \setminus e) = \gamma(a \cap e) + \gamma(a \cap e^c)$$

Теорема 1.3.6 (Лебег — Каратеодори). Совокупность Σ всех γ -измеримых множеств образует σ -алгебру, на которой функция $\gamma|_{\Sigma}$ счётно-аддитивна.

Дополнение. Если $\gamma = \mu^*$, где μ — мера на полукольце \mathcal{P} , то все множества из \mathcal{P} автоматически γ -измеримы.

Дополнение. Если μ счётно аддитивна на исходном полукольце \mathcal{P} , то $\mu^*|_{\mathcal{P}} = \mu$.

Доказательство.

- Покажем, что Σ — алгебра множеств.
 - Определение симметрично относительно e и e^c , поэтому $e \in \Sigma \iff e^c \in \Sigma$.
 - $\emptyset \in \Sigma$ прямо из определения. Используя предыдущий пункт, $X \in \Sigma$.

- Пусть $e_1, e_2 \in \Sigma$. Проверим, что $e_1 \cap e_2 \in \Sigma$. Рассмотрим произвольное $a \subset X$. Запишем измеримость для e_1 при пересечении с a и измеримость для e_2 при пересечении с $a \cap e_1$.

$$\begin{aligned}\gamma(a) &= \gamma(a \cap e_1) + \gamma(a \cap e_1^c) \\ \gamma(a \cap e_1) &= \gamma(a \cap e_1 \cap e_2) + \gamma(a \cap e_1 \cap e_2^c)\end{aligned}$$

Отсюда подстановкой получаем

$$\gamma(a) = \gamma(a \cap e_1 \cap e_2) + \underbrace{\gamma(a \cap e_1 \cap e_2^c) + \gamma(a \cap e_1^c)}_{\text{хотим показать, что это } \gamma(a \cap (e_1 \cap e_2)^c)}$$

Записав измеримость e_1 при пересечении с $a \cap (e_1^c \cup e_2^c)$, получаем

$$\begin{aligned}\gamma(a \cap (e_1^c \cup e_2^c)) &= \gamma(a \cap (e_1^c \cup e_2^c) \cap e_1) + \gamma(a \cap (e_1^c \cup e_2^c) \cap e_1^c) = \\ &= \gamma(a \cap e_1 \cap e_2^c) + \gamma(a \cap e_1^c)\end{aligned}$$

- Так как $(e_1 \cup e_2)^c = (e_1^c \cap e_2^c)^c$ и $(e_1 \setminus e_2) = e_1 \cap e_2^c$, то Σ — действительно алгебра.

- Проверим «усиленную аддитивность»: для произвольного $a \subset X$, $b_1, b_2 \in \Sigma$, $b_1 \cap b_2 = \emptyset \Rightarrow$

$$\gamma(a \cap (b_1 \sqcup b_2)) = \gamma(a \cap b_1) + \gamma(a \cap b_2)$$

Данный факт потребуется для доказательства того, что Σ — σ -алгебра.

Доказательство напрямую следует из измеримости b_1 при пересечении с $a \cap (b_1 \cup b_2)$.

Отсюда по индукции видно, что для попарно непересекающихся $b_1, \dots, b_n \in \Sigma$:

$$\gamma\left(a \cap \bigsqcup_{j=1}^n b_j\right) = \sum_{j=1}^n \gamma(a \cap b_j)$$

- Проверим, что Σ является σ -алгеброй. Для этого достаточно проверить, что для счётного семейства $b_i \in \Sigma$: $b := \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} b_j \in \Sigma$.

Чтобы доказать измеримость множества e , достаточно проверить неравенство $\gamma(a) \geq \gamma(a \cap e) + \gamma(a \setminus e)$, потому что неравенство в другую сторону следует из счётной полуаддитивности. Дополнительно можно считать, что $\gamma(a)$ конечно.

Выберем произвольное $a \in X$, для него

$$\gamma(a) = \gamma(a \cap (b_1 \sqcup \dots \sqcup b_n)) + \gamma(a \setminus (b_1 \sqcup \dots \sqcup b_n)) \geq \left(\sum_{j=1}^n \gamma(a \cap b_j) \right) + \gamma(a \setminus b)$$

Переходя к пределу $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\gamma(a) \geq \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a \cap b_j) \right) + \gamma(a \setminus b)$$

Так как $a \cap b = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} (a \cap b_j)$, то из счётной полуаддитивности $\gamma(a \cap b) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a \cap b_j)$. Отсюда

$$\gamma(a) \geq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma(a \cap b_j) \right) + \gamma(a \setminus b) \geq \gamma(a \cap b) + \gamma(a \setminus b)$$

- Проверим, что $\gamma|_{\Sigma}$ — «усиленно счётно-аддитивная мера», то есть для счётного семейства дизъюнктивных $b_j \in \Sigma$ $\left(b := \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} b_j\right)$ и произвольного $\forall a \in X$:

$$\gamma\left(a \cap \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} b_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a \cap b_j)$$

При $a = X$ свойство обращается в обычную счётную аддитивность, но усиленная даётся даром, так что докажем и её тоже.

С одной стороны, из счётной аддитивности γ : $\gamma(a \cap b) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a \cap b_j)$. С другой стороны,

$$\gamma(a \cap b) \geq \gamma(a \cap (b_1 \cup \dots \cup b_n)) = \sum_{j=1}^n \gamma(a \cap b_j)$$

и можно перейти к пределу по n .

- Докажем первое дополнение.

Достаточно показать, что для любого $e \in \mathcal{P}, a \in X$: $\mu^*(a) \geq \mu^*(a \cap e) + \mu^*(a \setminus e)$, обратное следует из полуаддитивности внешней меры.

Рассмотрим произвольное счётное покрытие $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ множества a элементами множества \mathcal{P} .

– Во-первых, по определению внешней меры $\mu^*(a \cap e) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(c_i \cap e)$

– Во-вторых, оценим $\mu^*(a \setminus e)$.

Каждое $b_i := c_i \setminus e$ представимо в виде конечного объединения $b_i = \bigcup_{j=1}^{s_i} d_i^{(j)}$, где $d_i^{(j)} \in \mathcal{P}$ попарно дизъюнкты.

$\{d_i^{(j)}\}_{i,j}$ — счётная совокупность множеств из \mathcal{A} , покрывающая $a \setminus e$.

– Таким образом

$$\mu^*(a \cap e) + \mu^*(a \setminus e) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(\mu(c_i \cap e) + \sum_{j=1}^{s_i} \mu(d_i^{(j)}) \right)}_{\mu(c_i)}$$

Переходя к инфимуму по всем покрытиям, получаем

$$\mu^*(a \cap e) + \mu^*(a \setminus e) \leq \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(c_i) = \mu^*(a)$$

- Наконец, для доказательства второго дополнения сошлёмся на четвёртый пункт свойств внешней меры (определение 1.3.7). \square

Определение 1.3.10 (Стандартное продолжение меры μ на полукольце $\mathcal{P} \subset 2^X$). Построенные данным образом Σ , и сужение $\mu^*|_{\Sigma}$ — счётно-аддитивная мера на σ -алгебре.

Примеры.

- Пусть v_n — объём на системе конечных n -мерных прямоугольных параллелепипедов (со сторонами, параллельными координатным осям).

Стандартное продолжение данной меры — *мера Лебега* λ_n , полученное множество $\Sigma \subset 2^X$ — множество *измеримых по Лебегу* множеств. Все Борелевские множества, разумеется, измеримы по Лебегу (определение 1.3.6), но обратное неверно — измеримых множеств сильно больше (предложение 1.4.1).

- Пусть λ_f — Стильесова длина, порождённая нестрого возрастающей функцией f . Она счётно аддитивна на полукольце промежутков. Её стандартное продолжение — *мера Лебега* — *Стильеса*. Здесь полученные измеримые множества — элементы Σ — вообще говоря, могут зависеть от f (при одной функции, порождающей меру, множество $x \subset X$ измеримо, но не при другой)

1.4 Структура измеримых множеств

1.4.1 Множества меры нуль

Факт 1.4.1. Пусть γ — предмера на X , рассмотрим такое подмножество $e \subset X$, что $\gamma(e) = 0$. Тогда e является γ -измеримым. В частности, все подмножества e имеют меру 0 (в частности измеримы).

Доказательство. Проверим, что $\forall a \subset X : \gamma(a) \geq \gamma(a \cap e) + \gamma(a \setminus e)$.

Это так: по монотонности $\gamma(a \cap e) \leq \gamma(e) = 0$ и $\gamma(a \setminus e) \leq \gamma(a)$. □

Пусть $\gamma = \mu^*$, где μ — счётно-аддитивная мера на полукольце \mathcal{P} .

Факт 1.4.2. Множество $e \subset X$ — множество меры нуль $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists$ счётное семейство $b_i \in \mathcal{P}$, таких, что $\bigcup_i b_i \supset e$, и $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(b_i) < \varepsilon$.

Примеры (Множества меры нуль).

- Точка.
- Конечное или счётное число точек (например, \mathbb{Q}).
- Канторово множество — на n -м шаге его мера равна $(\frac{2}{3})^n$.

Предложение 1.4.1. Так как канторово множество континуально, то все его подмножества (коих $2^{|\mathbb{R}|}$) имеют меру нуль и измеримы по Лебегу. Отсюда получаем, что всего измеримых множеств на прямой $2^{|\mathbb{R}|}$, так как это уже мощность всех подмножеств прямой.

С другой стороны, Борелевских множеств всего континуум.

Схема доказательства. Пусть \mathcal{A}_0 — все интервалы с рациональными границами. Их счётное число. Но это пока даже не алгебра.

Обозначим за \mathcal{A}_1 все их счётные объединения, их континуально. Но это пока не σ -алгебра.

За \mathcal{A}_2 обозначим все счётные пересечения множеств из \mathcal{A}_1 . За \mathcal{A}_3 обозначим все счётные объединения множеств из \mathcal{A}_2 .

И так далее. Заведём трансфинитную индукцию, на первом несчётном ординале всё перестанет меняться. Объединение не более чем континуального числа континуальных множеств континуально. □

Определение 1.4.1 (Свойство точек множества X выполняется почти всюду). Множество точек, где оно не выполняется, имеет меру нуль.

Пусть \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X , μ — счётно аддитивная мера на \mathcal{P} . Стандартное продолжение часто тоже будем обозначать через μ , иногда через $\bar{\mu}$.

1.4.2 σ -множества и $\delta\sigma$ -множества

Определение 1.4.2 (σ -множество относительно \mathcal{P}). Объединение счётного семейства элементов \mathcal{P} .

Все σ -множества измеримы.

Предложение 1.4.2. Если $e \subset X$ μ -измеримо, то $\mu(e) = \inf \{\mu(b) | e \subset b, b - \sigma\text{-множество}\}$.

Доказательство. Так как по определению $\mu(e) = \mu^*(e) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(c_i) \mid c_i \in \mathcal{P}, \bigcup_i c_i \supset e \right\}$ то можно выбрать в качестве $b := \bigcup_i c_i$, $b - \sigma$ -множество. \square

Замечание. Любое σ -множество b представимо в виде дизъюнктного объединения счётного числа элементов $d_j \in \mathcal{P}$.

Так как d_j дизъюнктны, то $\mu(b) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(d_j)$, вот такая простая формула меры σ -множества.

Теорема 1.4.1. Если $c - \mu$ -измеримое множество, и $\mu(c) < \infty$, то \exists убывающая по включению последовательность σ -множеств b_k , таких, что $\bigcap_{k=1}^{\infty} b_k \supset c$ и $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} b_k\right) = \mu(c)$. Иначе говоря, если $\tilde{c} := \bigcap_{k=1}^{\infty} b_k$, то $\mu(\tilde{c} \setminus c) = 0$.

Доказательство. Положим $\tilde{b}_k - \sigma$ -множество, такое, что $\tilde{b}_k \supset c$, причём $\mu(\tilde{b}_k) < \mu(c) + \frac{1}{k}$. Назначим $b_k = \tilde{b}_1 \cap \dots \cap \tilde{b}_k$.

Лемма 1.4.1. Пересечение двух (а значит, и конечного числа) σ -множеств — σ -множество.

Доказательство леммы.

Если $u = \bigcup_{i=1}^{\infty} e_i, v = \bigcup_{j=1}^{\infty} g_j$, где $e_i, g_j \in \mathcal{P}$, то $u \cap v = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} (e_i \cap g_j)$ \square

Согласно лемме $b_k - \sigma$ -множество. Так как $\mu(b_k) \leq \mu(c) + \frac{1}{k}$, то $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} b_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(b_k) = \mu(c)$. \square

Определение 1.4.3 ($\delta\sigma$ -множество относительно \mathcal{P}). Пересечение счётного семейства σ -множеств.

1.4.3 σ -конечность

Определение 1.4.4 (σ -конечная мера μ). Такая мера, что $\exists E_1 \subset E_2 \subset \dots$, все $E_i \in \Sigma$, все $\mu(E_i) < +\infty$, причём $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.

Примеры.

- Считаящая мера на несчётном множестве не является σ -конечной.
- Мера Лебега в \mathbb{R}^n σ -конечна.

Лекция V

30 сентября 2023 г.

По-прежнему, $\mathcal{A} -$ полукольцо, $\mu -$ мера на \mathcal{A} , обозначим её стандартное продолжение тоже за μ .

Теорема 1.4.2. Пусть стандартное продолжение меры μ на полукольце \mathcal{P} σ -конечно. Пусть $d \subset X - \mu$ -измеримо. Тогда $\exists \delta\sigma$ -множество $D \supset d$, такое, что $\mu(D \setminus d) = 0$.

Доказательство.

Лемма 1.4.2. Пространство X σ -конечно, если и только если $\exists e_1, e_2, \dots \subset X: \mu(e_i) < \infty$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty} e_i = X$.

Доказательство леммы.

Как обычно, если σ -конечно, то $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ в объединении дают X , рассмотрим $e_i := E_{i+1} \setminus E_i$. Наоборот, если даны e_i , то $E_i := \bigcup_{j=1}^i e_j$. \square

Выберем $\varepsilon > 0$.

Пусть $e_i \in \Sigma$ — измеримы, причём $\mu(e_i) < \infty$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty} e_i = X$. Обозначим за $d_i := d \cap e_i$. Тогда $\forall i: \mu(d_i) < \infty$. Согласно (теорема 1.4.1): $\exists \sigma$ -множество $D_i: \mu(D_i \setminus d_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Тогда подойдёт $D := \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i: \mu(D \setminus d) < \varepsilon$.

Но отсюда пересечение D по всем $\varepsilon = \frac{1}{N}$ даёт подходящее $\delta\sigma$ -множество. \square

1.4.4 Полнота

Пусть $\mathcal{C} \subset 2^X$ — σ -алгебра, на которой задана счётно-аддитивная мера ν .

Пусть \mathcal{A} — полукольцо, лежащее в \mathcal{C} , μ — счётно-аддитивная мера на \mathcal{A} , $\bar{\mu}$ — стандартное продолжение меры (на μ -измеримые множества, пусть они составляют Σ).

Пусть ν — мера на \mathcal{C} , такая, что $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$, причём μ — σ -конечна.

Определение 1.4.5 (Полная мера). Такая счётно-аддитивная мера ν на σ -алгебре \mathcal{C} , что $\forall b \in \mathcal{C}: \nu(b) = 0 \Rightarrow \forall a \subset b: a \in \mathcal{C}$.

Теорема 1.4.3. Меры ν и $\bar{\mu}$ совпадают на $\Sigma \cap \mathcal{C}$, а если ν полна, то $\Sigma \subset \mathcal{C}$.

Доказательство.

- Пусть $A \in \Sigma$ есть σ -множество относительно полукольца \mathcal{A} . Тогда $A = a_1 \sqcup a_2 \sqcup \dots$, где $a_j \in \mathcal{A}$

Отсюда $A \in \mathcal{C}$, причём $\nu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(a_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(a_j) = \bar{\mu}(A)$.

- Пусть $B \in \Sigma$ — $\delta\sigma$ -множество относительно полукольца \mathcal{A} , то есть $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, где A_k — σ -множества (дополнительно считаем, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots$).

Тогда $B \in \mathcal{C}$. Если $\bar{\mu}(B) < \infty$, то множества A_j тоже можно выбрать конечной меры.

Тогда $\nu(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\mu}(A_k) = \bar{\mu}(B)$.

- Пускай $E \in \mathcal{C} \cap \Sigma$. Найдётся такое $\delta\sigma$ -множество $E_1 \supset E: \bar{\mu}(E_1 \setminus E) = 0$ (если E бесконечно, то это следует из σ -конечности μ), причём так как E_1 — $\delta\sigma$ -множество относительно \mathcal{A} , то про него уже известно, что $\nu(E_1) = \bar{\mu}(E_1)$. Тогда $E_1 \setminus E$ тоже содержится в $\mathcal{C} \cap \Sigma$.

Лемма 1.4.3. Если $b \in \mathcal{C} \cap \Sigma$, причём $\bar{\mu}(b) = 0$, то $\nu(b) = 0$.

Доказательство леммы.

Найдётся b_1 — $\delta\sigma$ -множество, такое, что $b_1 \supset b$ и $\bar{\mu}(b_1) = 0$. Тогда $\nu(b_1) = \bar{\mu}(b_1) = 0$, откуда $\nu(b) \leq \nu(b_1) = 0$. \square

Лемма влечёт $\nu(E_1 \setminus E) = 0$. Отсюда на всех множествах из $\mathcal{C} \cap \Sigma$ меры $\bar{\mu}$ и ν совпадают.

- Проверим, что если ν полна, то $\Sigma \subset \mathcal{C}$.

Если $\bar{\mu}(e) = 0$, то $e \in \mathcal{C}$, так как найдётся $\delta\sigma$ -множество $e_1 \supset e$: $\bar{\mu}(e_1) = 0$. Из полноты меры ν автоматически $e \in \mathcal{C}$.

Теперь рассмотрим $D \in \Sigma$. Найдётся $\delta\sigma$ -множество $\bar{D} \supset D$, такое, что $\bar{\mu}(\bar{D} \setminus D) = 0$, то есть $\bar{D} \setminus D \in \mathcal{C}$. Таким образом, $D \in \mathcal{C}$, причём $\nu(\bar{D} \setminus D) = 0$. \square

1.4.5 Двоичные (диадические) кубы

Определение 1.4.6 (Двоичный отрезок ранга n). Отрезок вида $I_n^{(k)} := [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ (здесь $n, k \in \mathbb{Z}$).

Заметим, что $\forall n \in \mathbb{Z} : \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_n^{(k)} = \mathbb{R}$, причём любые двоичные отрезки либо не пересекаются, либо вложены.

Определение 1.4.7 (Двоичные кубы ранга n). Произведения $I_1 \times \cdots \times I_d$, где I_j — двоичные отрезки ранга n .

Любые двоичные кубы тоже либо не пересекаются, либо вложены.

Теорема 1.4.4. Пусть G — открытое множество в \mathbb{R}^n .

Тогда $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, где Q_j — попарно не пересекающиеся двоичные кубы, (быть может, какие-нибудь $Q_j = \emptyset$) (иными словами, G — дизъюнктное объединение не более чем счётного числа каких-то двоичных кубов).

Доказательство. Рассмотрим точки $x \in G$. Для каждой точки выберем двоичный куб $Q \ni x$, полностью содержащийся в G .

Объединение всех таких кубов даст G . Чтобы кубы не пересекались, мы оставим только кубы положительного ранга, а среди них — максимальные по включению. (Если множество неограниченное, то максимального включения среди **всех** кубов может не найтись, надо ограничить их размер, поэтому мы взяли только кубы положительного ранга) \square

Вспомним про $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ — полукольцо ограниченных прямоугольных параллелепипедов, на котором есть мера — n -мерный объём v_n . Σ — σ -алгебра измеримых по Лебегу множеств (относительно v_n), λ_n — стандартное продолжение v_n .

Теперь обозначим $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ — полукольцо всех двоичных кубов в \mathbb{R}^n . Положим $\rho_n = v_n|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$. По теореме Лебега — Каратеодори получаем стандартное продолжение μ на множество $\Sigma_1 \subset 2^{\mathbb{R}^n}$.

Тогда $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C} = \Sigma$, откуда $\Sigma_1 \subset \Sigma$, $\mu = \lambda_n|_{\Sigma_1}$.

Также понятно, что все открытые множества являются счётными объединениями кубов из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, откуда $\Sigma \subset \Sigma_1$, то есть на самом деле $\Sigma = \Sigma_1$.

Наконец, так как обе меры совпадают на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то они равны (теорема 1.4.3).

Лекция VI

4 октября 2023 г.

Теорема 1.4.5. Пусть λ_n — мера Лебега в \mathbb{R}^n , Σ — σ -алгебра измеримых по Лебегу множеств.

1. Мера Лебега инвариантна относительно сдвига: если $e \in \Sigma, t \in \mathbb{R}^n : e + t \in \Sigma, \lambda_n(e + t) = \lambda_n(e)$.
2. Если ν — мера, заданная на этой σ -алгебре Σ , и ν инвариантна относительно сдвига ($\forall e \in \Sigma, t \in \mathbb{R}^n : \nu(e + t) = \nu(e)$), то тогда $\exists c \geq 0 : \forall e \in \Sigma : \nu(e) = c\lambda_n(e)$.

Доказательство.

1. Достаточно доказать, что внешняя мера $\rho = v_n^*$ инвариантна относительно сдвига.

$\rho(a) = \inf \sum_j v_n(e_j)$ по всем e_j , таким, что их объединения покрывают a . Но

$$\bigcup_j e_j \supset a \iff \bigcup_j (e_j - t) \supset (a - t)$$

Измеримость по Лебегу тоже легко проверить:

$$\rho(a) = \rho(a \cap e) + \rho(a \setminus e) \iff \rho(a - t) = \rho((a - t) \cap (e - t)) + \rho((a - t) \setminus (e - t))$$

2. Обозначим за $c := \frac{\nu(Q_0)}{\lambda_n(Q_0)}$, где Q_0 — какой-то фиксированный двоичный куб ранга 0. Тем самым, $\nu(Q) = cv_n(Q)$ для любого двоичного куба ранга 1 (инвариантность при сдвиге).

Может так случиться, что $c = 0$. Тогда в силу счётной аддитивности и σ -конечности мера всего пространства равна 0.

Заметим, что 2^n кубов ранга k дают в объединении куб ранга $k - 1$:

$$\left[0, \frac{1}{2^{k-1}}\right)^n = \left(\left[0, \frac{1}{2^k}\right) \sqcup \left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right)\right)^n$$

Тем самым, мы по индукции получаем, что на всех двоичных кубах меры ν и λ_n отличаются в c раз.

Дальше применяя теорему о единственности для меры $\rho = \frac{\nu}{c}$, получаем, что $\rho \equiv \lambda_n$ — объём можно задать на двоичных кубах.

Полнота ν получается автоматически из того, что ν задана на всей Σ . В самом деле, всякое множество меры нуль является подмножеством $\delta\sigma$ -множества меры нуль. \square

1.5 Поведение меры Лебега при линейных отображениях

Пусть $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, $e \in \Sigma$. Чему равна $\lambda_n(Te)$?

Пусть (X, \mathcal{A}_X) и (Y, \mathcal{A}_Y) — пары из множеств и σ -алгебр их подмножеств.

Определение 1.5.1 (Измеримое отображение $F : X \rightarrow Y$ (относительно данных σ -алгебр)). Такое отображение F , что $\forall a \in \mathcal{A}_Y : F^{-1}(a) \in \mathcal{A}_X$.

В частном случае $\mathcal{A}_X = \mathcal{B}(X)$ и $\mathcal{A}_Y = \mathcal{B}(Y)$ измеримое отображение называется *измеримым по Борелю*.

Лемма 1.5.1. *Всякое непрерывное отображение $F : X \rightarrow Y$ измеримо по Борелю.*

Доказательство. Положим $\mathcal{C} := \{e \in Y \mid F^{-1}(e) \in \mathcal{B}(X)\}$. \mathcal{C} — σ -алгебра, так как взятие прообраза коммутирует со всеми теоретико-множественными операциями (даже несчётными).

Так как прообраз открытого открыт, то \mathcal{C} содержит все открытые множества. Это сразу влечёт, что $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}(Y)$, а тогда и подавно $\forall e \in \mathcal{B}(Y) : F^{-1}(e) \in \mathcal{B}(X)$. \square

Для счётно-аддитивной меры ν , заданной на \mathcal{A}_X можно ввести её образ.

Определение 1.5.2 (Образ меры μ при (измеримом) отображении F). Мера ρ , заданная на \mathcal{A}_Y следующим образом: $\rho(e) = \mu(F^{-1}(e))$.

Пусть $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно. Рассмотрим образ меры $\mu(e) := \lambda_n(F^{-1}(e))$. Если $e \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, то $F^{-1}(e) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, и формула имеет смысл: $\mu(e)$ определена.

Иначе же, (если e — измеримое по Лебегу, но не борелевское (например, e — какое-то неприятное множество меры нуль)) может произойти что угодно. Его прообраз может быть вообще неизмеримым по Лебегу.

Образ же даже Борелевского множества необязательно измерим по Лебегу. Так, $\eta(e) := \lambda_n(\Phi(e))$ для непрерывного (даже инъективного) Φ может быть не определена на каком-то борелевском множестве. Чтобы таких проблем не было, надо требовать непрерывность обратного отображения.

Факт 1.5.1. Пусть $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченные открытые множества, $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$ — гомеоморфизм. Введём меру ν на G_1 : $\nu(e) = \lambda_n(\Phi(e))$. Тогда ν корректно определена на $\mathcal{B}(G_1)$.

Пусть $a \subset G_1$ — измеримое по Лебегу множество, $\lambda_n(a) = 0$. Тогда хочется, чтобы выполнялось $\nu(a) = 0$. В таком случае $\nu(e) = \lambda_n(\Phi(e))$ будет определена на всех измеримых по Лебегу множествах (всякое измеримое по Лебегу множество — разность $\delta\sigma$ -множества, и множества меры нуль).

Пусть G_1, G_2 — открытые множества в \mathbb{R}^n , $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$ — гомеоморфизм. В терминах измеримости сказанное выше можно переформулировать в виде: тогда Φ^{-1} измеримо по Борелю, и если Φ липшицево, то Φ^{-1} измеримо по Лебегу.

Теорема 1.5.1. Пусть $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$ — C -липшицево отображение, пусть $A \subset G_1$ — меры нуль. Тогда $\Phi(A)$ тоже имеет меру нуль.

Доказательство.

Лемма 1.5.2. Пусть $e \subset \mathbb{R}^n$. Тогда e есть множество меры нуль $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} : e \subset \bigcup_i a_i$, причём

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } a_i)^n < \varepsilon$$

Доказательство леммы.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_n(e) = 0 &\iff \lambda_n^*(e) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \{Q_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ — такое семейство двоичных кубов, что } \sum_{i=1}^{\infty} v_n(Q_i) < \varepsilon. \text{ Учитывая, что } v_n(Q_i) = \left(\frac{\text{diam } Q_i}{\sqrt{n}}\right)^n \text{ сразу получаем} \\ &\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } Q_i)^n < n^{n/2} \varepsilon. \end{aligned}$$

\Leftarrow Всякое множество a_i содержится в кубе (необязательно двоичном) Q_i со стороны $\text{diam}(a_i)$ (проекция на любую координатную ось не больше $\text{diam}(a_i)$).

□

Пусть открытое $e \subset G_1$ имеет меру нуль, предположим, что $\text{dist}(e, G_1^c) > 0$. Тем самым, $\forall \varepsilon > 0 : \exists a_i \subset \mathbb{R}^n : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} a_i \supset e, \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(a_i))^n < \varepsilon$. Можно считать, что все a_i пересекают e , тогда при маленьких $\varepsilon : a_i \subset G_1$.

Тем самым, $\text{diam}(\Phi(a_i)) \leq C \cdot \text{diam}(a_i)$, и $\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(\Phi(a_i))^n \leq C^n \cdot \varepsilon$

Если же $\text{dist}(e, G_1^c) = 0$, то воспользуемся теоремой об исчерпывающей последовательности компактов (теорема 1.5.2). Найдутся компактные $K_i \subset G_1$, в объединении дающие G_1 . Для множества меры нуль $a \subset G_1$ заметим, что оно является объединением счётного числа множеств $a_i = a \cap K_i$, отделённых от границы. □

Теорема 1.5.2 (Об исчерпывающей последовательности компактов). Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — открыто, тогда существует $\exists \{K_i\}_{i \in \mathbb{N}} : K_i \subset \text{Int}(K_{i+1})$, причём $\bigcup_i K_i = G$.

Доказательство. Если $G = \mathbb{R}^n$, то выберем $K_i = \overline{B_i}(0)$.

Иначе положим $\tilde{K}_i = \left\{ x \in G \mid \text{dist}(x, G^c) \geq \frac{1}{i} \right\}$. Несложно видеть, что $\bigcup_i \tilde{K}_i = G$ — это следует из замкнутости G^c . Из непрерывности функции расстояния (она даже липшицева) \tilde{K}_i тоже замкнуто.

Наконец, $\tilde{K}_i \subset \text{Int } \tilde{K}_{i+1}$. Если G неограничено, то \tilde{K}_i может быть некомпактно хотя и замкнуто. Чтобы избежать этой проблемы, положим $K_i = \tilde{K}_i \cap \overline{B_i(0)}$. \square

Замечание. В \mathbb{R}^n любая координатная гиперплоскость имеет лебегову меру нуль: например, она представима в виде объединения счётного числа гиперквадратиков меры нуль.

Итак, с чего мы начали. Пусть $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение.

Теорема 1.5.3. $\forall e \in \Sigma : \lambda_n(Te) = |\det T| \cdot \lambda_n(e)$, где определитель взят в каком-то ортонормированном базисе.

Доказательство.

- Пусть T — невырожденное отображение, $\det T \neq 0$. Тогда это гомеоморфизм \mathbb{R}^n на себя. В любом случае, T липшицево, например, с константой $\|T\|$.

Таким образом, если положить $\nu = \lambda_n \circ T$, то окажется, что ν — корректно определённая счётно-аддитивная мера на σ -алгебре измеримых по Лебегу множеств. Заметим, что ν инвариантна относительно сдвига: $\forall t \in \mathbb{R}^n. \lambda_n(Te + Tt) = \lambda_n(Te)$. Таким образом (теорема 1.4.5): $\exists c : \nu = c\lambda_n$. Осталось проверить, что $c = |\det T|$.

- Если T — ортогональное преобразование, то оно сохраняет расстояния, и $\det T = \pm 1$. Выберем B — замкнутый шар положительного радиуса с центром в 0. Тогда $TB = B$, но мера шара не равна 0 (в него можно засунуть кубик положительного диаметра), откуда $c = 1$.
- **Следствия.** Если E — собственное линейное подпространство \mathbb{R}^n , то его мера λ_n равна 0. Ортогональным преобразованием его можно перевести в координатную гиперплоскость.

Другим следствие предыдущего пункта является то, что меру Лебега можно начинать строить с любого ортонормированного базиса в \mathbb{R}^n . Мера сохраняется при всяких поворотах и симметриях.

- Воспользуемся полярным разложением оператора. Это значит, что для невырожденного линейного $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: $\exists U, A : T = UA$, где U — ортогональный оператор, а A — эрмитов (диагональный в каком-то базисе). Тогда посчитаем для измеримого $a \in \mathbb{R}^n$ $\lambda_n(Ta) = \lambda_n(UAa) = \lambda_n(Aa)$ Будем считать, что мера Лебега построена в том базисе, в котором A диагонален.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Всякий куб $Q \subset \mathbb{R}^n$ после применения A переходит в параллелепипед со сторонами $|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|$. Действительно, $\lambda_n(AQ) = |\alpha_1| \cdot \dots \cdot |\alpha_n| \cdot \lambda_n(Q) = |\det A| \cdot \lambda_n(Q)$.

- Если T вырождено, то $\text{Im}(T)$ — линейное подпространство в \mathbb{R}^n , так как $Te \subset T(\mathbb{R}^n)$, то мера Te тоже нуль. \square

Глава 2

Интеграл Лебега

Пусть имеется тройка (X, Σ, μ) , где X — множество, $\Sigma \subset 2^X$ — σ -алгебра, μ — счётно-аддитивная мера на Σ .

Определим для некоторых функций $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ интеграл $\int_X f d\mu$.

Раньше мы уже определяли интеграл от простой функции $f = \sum_i c_i \chi_{e_i}$, равный $I(f) = \sum_i c_i \mu(e_i)$. В качестве e_i теперь можно брать произвольные измеримые множества, что уже сильно увеличивает разнообразие простых функций.

Определение 2.0.1 (Простая функция $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ относительно σ -алгебры Σ). Функция вида $g(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{e_i}$, $c_i \in \mathbb{R}$, $e_i \in \Sigma$. Можно считать, что $e_i \cap e_j = \emptyset$ для $i \neq j$.

Лекция VII

18 октября 2023 г.

Теорема 2.0.1 (Малая теорема Леви). Пусть g_1, g_2, \dots — счётное семейство неотрицательных простых функций; пусть g — ещё одна простая функция. Предположим, что $\forall x \in X : g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots$, причём $g_j(x) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} g(x)$ (можно записать $g_n(x) \nearrow g(x)$). Тогда $\lim_{j \rightarrow \infty} I(g_j) = I(g)$.

Доказательство. Сложность заключается в том, что число ступенек у g_j может неограниченно расти.

Заметим, что так как g_j неотрицательны, то $I(g_j)$ всегда определён (число из \mathbb{R} или $+\infty$).

Если $\exists j : I(g_j) = +\infty$, то $I(g) = +\infty$, и доказывать нечего. Далее считаем, что $\forall j : I(g_j) \in \mathbb{R}$.

Так как g простая, то $g = \sum_{s=1}^n c_s \chi_{e_s}$, где e_s — попарно дизъюнктные множества из Σ . Положим $g_j^s := g_j \cdot \chi_{e_s}$. Эти функции тоже простые.

Зафиксируем s ($1 \leq s \leq n$), зафиксируем $x \in e_s$, посмотрим на $\lim_{j \rightarrow \infty} g_j^s(x) = c_s \chi_{e_s}$. Проверим предельное соотношение для интегралов: так как s пробегает конечное множество значений, то достаточно доказать только для одного значения. Далее считаем, что $g = c \chi_e$.

Тем самым, утверждение свелось к следующему: для $e \in \Sigma$, для последовательности простых функций g_j , таких, что поточечно $0 \leq g_1 \leq \dots \leq g_j \leq g_{j+1} \leq \dots \leq c \chi_e = g$, причём $\forall x \in X : \lim_{j \rightarrow \infty} g_j(x) = c \chi_e(x)$, необходимо и достаточно показать, что $I(g_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} I(c \chi_e) = c \mu(e)$.

Рассмотрим $d \in (0, c)$. Положим $E_n := \{x | g_n(x) > d\}$. Понятно, что $E_n \subset e$, причём $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = e$.

Обозначим $h_n = d \cdot \chi_{E_n}$. По определению E_n : $h_n \leq g_n$. Таким образом,

$$\underbrace{I(h_n)}_{d \cdot \mu(E_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d \cdot \mu(e)} \leq I(g_n) \leq \underbrace{I(g)}_{c \cdot \mu(e)}$$

Так как $I(g_j) \leq I(g_{j+1})$, то существует предел $V = \lim_{j \rightarrow \infty} I(g_j)$. Отсюда $d \cdot \mu(e) \leq V \leq c \cdot \mu(e)$, причём это верно для любого $d < c$. \square

2.1 Измеримые отображения

Пускай (X, \mathcal{A}_X) , (Y, \mathcal{A}_Y) — множества и σ -алгебры соответствующих подмножеств. $F : X \rightarrow Y$.

Вспомним определение измеримости (определение 1.5.1):

Определение 2.1.1 (Измеримое отображение $F : X \rightarrow Y$ (относительно данных σ -алгебр)). Такое отображение F , что $\forall c \in \mathcal{A}_Y : F^{-1}(c) \in \mathcal{A}_X$.

Если в качестве X, Y рассмотреть топологические пространства без определённых σ -алгебр, то в качестве этих σ -алгебр в X, Y можно выбрать σ -алгебры борелевских множеств $\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y)$. В таком случае F называется *измеримой по Борелю*.

Теорема 2.1.1. Пусть в Y содержится счётная база топологии \mathcal{A}_Y ; пускай \mathcal{D} — какая-нибудь (даже необязательно счётная) база для топологии в Y .

Если $\forall e \in \mathcal{D} : F^{-1}(e) \in \mathcal{A}_X$, то F измеримо по Борелю.

Доказательство. Рассмотрим открытое $G \subset Y$, докажем, что $F^{-1}(G) \in \mathcal{A}_X$.

Представим $G = \bigcup_{x \in G} a_x$, где $a_x \in \mathcal{D}$ содержит x .

Пускай \mathcal{A}_Y — счётная база топологии в Y . Для любого $x \in G$: $\exists c_x \in \mathcal{A}_Y : x \in c_x \subset a_x$, где $a_x \in \mathcal{D}$. $\bigcup_{x \in G} c_x = G$. Так как среди c_x всего счётное число различных, то можно выбрать представителей — счётное множество $X \subset G : \bigcup_{x \in X} c_x = G$. Тогда и подавно $\bigcup_{x \in X} a_x = G$.

Отсюда $F^{-1}(G) \in \mathcal{A}_X$, так как σ -алгебра выдерживает счётные операции.

Этого достаточно, так как $\{E \subset Y \mid F^{-1}(E) \in \mathcal{A}_X\}$ — σ -алгебра, и если в неё содержатся все открытые множества, то и все борелевские содержатся в ней тоже. \square

Пусть $(X, \Sigma_1), (Y, \Sigma_2), (Z, \Sigma_3)$ — множества со своими σ -алгебрами.

Рассмотрим композицию $X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{\Phi} Z$.

Теорема 2.1.2. Композиция измеримых отображений измерима.

Доказательство. $\forall e_3 \in \Sigma_3 : (\Phi \circ F)^{-1}(e) = F^{-1}(\Phi^{-1}(e))$. \square

Факт 2.1.1. Пусть X_1, X_2 — топологические пространства, $F : X_1 \rightarrow X_2$ — непрерывно. Пусть X_1, X_2 наделены своими борелевскими σ -алгебрами. Тогда F измеримо.

Доказательство. Определим $\mathcal{A} := \{e \in X_2 \mid F^{-1}(e) \in \mathcal{B}(X_1)\}$. \mathcal{A} — σ -алгебра, причём она содержит все открытые множества. \square

Следствие 2.1.1. Рассмотрим композицию $X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{\Phi} Z$. X — пространство с σ -алгеброй \mathcal{A} , Y, Z — топологические пространства с борелевскими σ -алгебрами, F измеримо, Φ непрерывно. Тогда $\Phi \circ F$ непрерывно.

(X, \mathcal{A}) — пространство с σ -алгеброй. Рассмотрим $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Предложение 2.1.1. f измеримо, если выполнено любое из следующих условий.

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} : f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A}$.
2. $\forall a, b \in \mathbb{R} : f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{A}$.
3. $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{A}$.
4. $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Согласно предыдущей теореме (1) сразу влечёт измеримость.

Проверим (3) \Rightarrow (1). Так как $(-\infty, d] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, d + 1/n)$, то

$$f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((-\infty, b) \setminus (-\infty, a]) = f^{-1}\left((-\infty, b) \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, a + 1/n)\right)$$

Всё остальное делается аналогично. □

Определение 2.1.2 (Лебеговы множества функции f). Для $a \in \mathbb{R}$ это множества вида $\{x | f(x) < a\}$, $\{x | f(x) \leq a\}$, $\{x | f(x) > a\}$, $\{x | f(x) \geq a\}$.

Таким образом, для проверки того, что f измерима, достаточно проверять измеримость только её Лебеговых множеств (достаточно какого-то одного типа).

Теперь рассмотрим отображение $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ — столбец координатных функций.

Предложение 2.1.2. F измеримо \iff все f_j измеримы.

Доказательство.

\Leftarrow . Пускай I_1, \dots, I_n — интервалы. Параллелепипеды $P = I_1 \times \dots \times I_n$ образуют базу топологии в \mathbb{R}^n . Достаточно доказать на базе, что $F^{-1}(P) \in \mathcal{A}$. $x \in F^{-1}(P) \iff F(x) \in P \iff \forall j : 1 \leq j \leq n \Rightarrow f_j(x) \in I_j$. $F^{-1}(P) = \bigcap_{j=1}^n f_j^{-1}(I_j)$.

\Rightarrow . Рассмотрим координатную проекцию $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. $\pi_j \circ F$ измеримо. □

Предложение 2.1.3. Пусть $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримы. Тогда измеримыми являются функции

- $\alpha f_1 + \beta f_2$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $f_1 \cdot f_2$.
- $\frac{f_1}{f_2}$, если $\forall x \in X : f_2(x) \neq 0$.

Доказательство. Пускай $F : X \rightarrow \mathbb{R}^2$; $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$. Согласно предыдущей теореме, оно измеримо. Скомпонуем $\psi \circ F$, где $\psi : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \alpha x + \beta y \text{ или } xy \end{matrix}$ Для частного: $\psi : \begin{matrix} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{x}{y} \end{matrix}$ □

Ниже нам будет удобно определять функцию f , принимающую бесконечные значения.

$$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Про такую функцию говорят, что она *измерима*, если $f^{-1}(+\infty), f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{A}$ и $f|_{f^{-1}(\mathbb{R})}$ измерима в обычном понимании.

К таким функциям можно применять примерно всё то, что уже доказано, только не надо складывать бесконечности разных знаков.

Факт 2.1.2. Если f (возможно) принимает значение $+\infty$, и все множества $\{x|f(x) < a\}$ лежат в \mathcal{A} , то f измерима.

Доказательство. $f^{-1}(\mathbb{R}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(-\infty, n); \{x|f(x) = +\infty\} = f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) \setminus f^{-1}(\mathbb{R}).$ □

2.2 Грани и предельные переходы

Теорема 2.2.1. Пусть $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримые функции. Пусть $f(x) = \inf_n f_n(x)$. Для простоты считаем, что $\forall x : f_n(x)$ ограничены снизу.

Тогда f измерима.

Доказательство. Рассмотрим $\{x|f(x) < a\} = \bigcup_n \{x|f_n(x) < a\}.$ □

Следствие 2.2.1. Если функция $g(x) = \sup_n f_n(x)$ всюду конечна, то функция g измерима.

Следствие 2.2.2. Пусть f_n измеримы, и $\forall x$: числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ ограничена. Тогда $\lim_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x)$ тоже измеримы.

Доказательство. Например, $\overline{\lim}_n f_n(x) = \inf_k \sup_{n \geq k} f_n(x).$ □

Теорема 2.2.2. Пусть f_n всюду конечны и измеримы, пусть $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$, где $f(x)$ — тоже конечна. Тогда f измерима.

Доказательство. Это следствие из предыдущего. □

Замечание. Пусть $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$, но допустимо, чтобы $f(x)$ принимало значения $\pm\infty$. (При этом $\forall n : f_n$ конечна)

Тогда всё равно f измерима.

Доказательство. Пусть $f(x_0) = +\infty$. Тогда $\forall N \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k : f_n(x_0) \geq N$.

Тем самым, $\{x_0|f(x_0) = +\infty\} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq k} \{x_0|f_n(x_0) \geq N\}.$ □

Определение 2.2.1 (Ступенчатая функция). $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $\exists E_1, E_2, \dots \in \mathcal{A} : E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $f|_{E_i}$ постоянна (скажем, равна c_i).

Иными словами, ступенчатая функция — функция вида $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{E_i}$.

Замечание. Всякая ступенчатая функция измерима.

Теорема 2.2.3. Если $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая функция, то \exists последовательность ступенчатых функций f_n , такая, что $f_n \rightrightarrows g$.

Если же $g \geq 0$, то \exists простые функции $f_n : f_n(x) \nearrow g(x)$ поточечно.

Доказательство.

1 Выберем $n \in \mathbb{N}$, рассмотрим двоичные интервалы $I_{j,n} = [\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})$. При фиксированном n :
 $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} I_{j,n} = \mathbb{R}$.

Пусть $E_{j,n} := g^{-1}(I_{j,n}) \in \mathcal{A}$. Определим $f_n(x) = \frac{j}{2^n}$ при $x \in E_{j,n}$. Иными словами, бьётся ось ординат, и если функция g принимает значение в некоем двоичном отрезке, то $f_n(x)$ равно нижней границе этого отрезка.

Тогда $\forall x : 0 \leq g(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$.

Заметим, что $\forall x : f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

2 Аналогично предыдущему пункту, берём полуинтервалы $[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})$, и строим f_n точно так же. Они сходятся к $g(x)$, но, увы, не простые. Тогда положим $\tilde{f}_n(x) = \min(f_n(x), n)$. Здесь $\tilde{f}_n(x)$ уже простые, по-прежнему возрастают монотонно, и всё ещё сходятся к g .

□

Замечание. Пусть g принимает ещё и значения $\pm\infty$. Тогда можно построить последовательность ступенчатых f_n , как в теореме, определённых на $g|_{g(x) \text{ конечно}}$.

$$\text{Доопределим } \hat{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & g(x) \in \mathbb{R} \\ +\infty, & g(x) = +\infty \\ -\infty, & g(x) = -\infty \end{cases}.$$

Тогда это всё ещё ступенчатые функции, и естественно считать, что они сходятся к g равномерно. На том множестве, где $g(x)$ конечно, $|f_n(x) - g(x)|$ равномерно сходится к нулю, а если $g(x)$ бесконечно, то разность, конечно, не определена, но $f_n(x) = g(x)$.

Похожую вещь можно применить и ко второму пункту теоремы.

2.3 Интеграл

Сначала научимся интегрировать неотрицательные измеримые функции.

Пусть (X, Σ, μ) — пространство с мерой, то есть μ — счётно-аддитивная мера, заданная на Σ .

Предположим, что μ — полная мера (определение 1.4.5). Если это не так, то можно продолжить μ по Лебегу — Каратеодори. Тогда в целом ничего особо не поменяется. Так, в предположении σ -конечности для продолжения меры $\tilde{\mu}$ на $\tilde{\Sigma}$: $\forall a \in \tilde{\Sigma} : \mu(a) < +\infty \Rightarrow \exists b \in \Sigma : b \supset a, \tilde{\mu}(b \setminus a) = 0$.

Пусть f — неотрицательная измеримая функция на X (возможно, принимающая значения $+\infty$).

Определим *интеграл* $J(f) = \sup \{I(g) | g \text{ — простая, } 0 \leq g \leq f\}$.

Замечание. Хотя f разрешается принимать бесконечные значения, по определению простые функции — суммы $\sum_{j=1}^N c_j \chi_{e_j}$, где $c_j \in \mathbb{R}$ (множества e_j можно считать дизъюнктными).

Определение 2.3.1 (Суммируемая (интегрируемая) функция f). $J(f) < +\infty$.

Свойства (Совсем немного простых свойств).

- Если f неотрицательная простая функция, то $J(f) = I(f)$.
- Если $f_1 \leq f_2$ — неотрицательные измеримые, то $J(f_1) \leq J(f_2)$.

Лекция VIII

25 октября 2023 г.

Пусть a, b — два числа. Для их минимума и максимума иногда используются обозначения

$$a \vee b \stackrel{\text{def}}{=} \max(a, b) \quad a \wedge b \stackrel{\text{def}}{=} \min(a, b)$$

В частности, это используется для поточечного максимума или минимума функций:

$$(f \vee g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \vee g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max(f(x), g(x))$$

Теорема 2.3.1 (Леви, для неотрицательных функций (теорема о монотонной сходимости)). Пусть f_n — измеримые функции, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$. Пускай $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Тогда $J(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n)$.

Доказательство. Если $\exists n \in \mathbb{N} : J(f_n) = +\infty$, то доказывать нечего: тогда начиная с этого места $J(f_{\geq n}) = J(f) = +\infty$. Отметим, что f измерима, как предел измеримых.

Теперь будем считать, что $\forall n : J(f_n) < +\infty$. Понятно, что $J(f) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n)$, так как

$$\{g | 0 \leq g \leq f, g \text{ — простая}\} \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{g_n | 0 \leq g_n \leq f_n, g_n \text{ — простая}\}$$

Далее мы доказываем, что $J(f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n)$.

$\forall n : \exists$ простая функция $\psi_n : 0 \leq \psi_n \leq f_n, I(\psi_n) \geq J(f_n) - \frac{1}{2^{2n}}$. Сделаем так, чтобы $\{\psi_n\}$ возрастали: $\phi_n := \psi_1 \vee \dots \vee \psi_n$. Отметим, что ϕ_n — тоже простые функции.

Лемма 2.3.1. Почти всюду (для всех x , кроме множества меры нуль) $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = f(x)$.

Доказательство леммы.

Обозначим $e_n = \{x | \phi_n(x) < f_n(x) - \frac{1}{2^n}\}$. Заметим, что тогда всё ещё $\phi_n + \frac{1}{2^n} \chi_{e_n} \leq f_n$.

Слева стоит простая функция, откуда $I\left(\underbrace{\phi_n + \frac{1}{2^n} \chi_{e_n}}_{I(\phi_n) + \frac{1}{2^n} \mu(e_n)}\right) \leq J(f_n)$. Так как $I(\phi_n) \geq J(f_n) -$

$\frac{1}{2^{2n}}$, то $\mu(e_n) \leq \frac{1}{2^n}$.

Обозначим $E_n = \bigcup_{k \geq n} e_k$. Его мера тоже не очень большая: $\mu(E_n) \leq \sum_{k \geq n} \mu(e_k) \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Так как имеется вложенность $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, то $E := \bigcap_{n \geq 0} E_n$ имеет меру нуль.

Осталось заметить, что $\phi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ везде кроме E . □

Так как по определению $J(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{I(g) | 0 \leq g \leq f, g \text{ — простая}\}$, то достаточно доказать, что для всякой простой функции $g \leq f$: $I(g) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(\phi_n)$.

Пусть $E \subset X$ — множество меры нуль, на котором $\phi_n(x) \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$. Положим $\tilde{g} = g \wedge \chi_{E^c}$ (занулим $g(x)$ при $x \in E$). Так как $\mu(E) = 0$, то $I(g) = I(\tilde{g})$.

Пусть $\tilde{\phi}_n := \phi_n \wedge \tilde{g}$. Согласно лемме, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\phi}_n(x) = \tilde{g}(x)$ всюду. Значит, согласно малой теореме Леви (теорема 2.0.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} I(\tilde{\phi}_n) = I(\tilde{g})$. Но так как $\tilde{\phi}_n \leq \phi_n$, а $I(\tilde{g}) = I(g)$, то действительно $\lim_{n \rightarrow \infty} I(\phi_n) \geq I(g)$. □

2.4 Применения теоремы Леви. Свойства интеграла

Факт 2.4.1. Пусть $f \geq 0$ — измеримая функция, положим $A := \{x | f(x) \neq 0\}$.

Тогда $J(f) = 0 \iff \mu(A) = 0$.

Доказательство.

\Leftarrow . $J(f) = \sup I(g)$, где $0 \leq g \leq f$. Из монотонности меры всякая такая g сосредоточена на множестве меры нуль. Считая интеграл g по определению, получаем нуль.

\Rightarrow . **Лемма 2.4.1** (Неравенство Чебышёва). Пусть $h \geq 0$ — неотрицательная измеримая функция, $\lambda > 0$. Тогда $\mu\{x|h(x) > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda}J(h)$.

Доказательство леммы.

Пусть $e = \{x|h(x) > \lambda\}$. Заметим, что $h \geq \lambda\chi_e$, из монотонности интеграла $J(h) \geq \lambda\mu(e)$. \square

Пусть $A_n = \{x|f(x) > \frac{1}{n}\}$. $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$. Согласно неравенству Чебышёва $\mu(A_n) \leq nJ(f) = 0$.

Таким образом, $\mu(A) = 0$. \square

Замечание. Теорема Леви сохраняет силу, если неравенство $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ выполнено почти всюду (нарушаются на множестве меры нуль), и стремление $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ тоже имеет почти всюду.

Свойства (Свойства интеграла).

- Линейность интеграла.

Пусть $f, g \geq 0$ — измеримые функции, $\alpha, \beta \geq 0$. Тогда $J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g)$.

Доказательство. Выбираем последовательность простых функций $0 \leq u_n \nearrow f$ и $0 \leq v_n \nearrow g$ почти всюду, воспользуемся линейностью предела и теоремой Леви:

$$J(\alpha f + \beta g) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(\alpha u_n + \beta v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha I(u_n) + \beta I(v_n)) = \alpha J(f) + \beta J(g) \quad \square$$

- Счётная аддитивность по множеству. Пусть $f \geq 0$ — измеримая функция, положим $\nu(e) = J(f \cdot \chi_e)$ для $e \in \Sigma$. Тогда ν — счётно аддитивная мера на σ -алгебре Σ .

Доказательство. Аддитивность следует из линейности интеграла.

Для проверки счётной аддитивности удостоверимся в монотонной непрерывности: пусть $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, где $E_j \in \Sigma$.

Определим $E := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Надо проверить, что $J(f \cdot \chi_E) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f \cdot \chi_{E_n})$.

$f \cdot \chi_E = \lim_{n \rightarrow \infty} f \cdot \chi_{E_n}$, значит, можно воспользоваться теоремой Леви. \square

2.5 Интегралы от знакопеременных функций

Пусть f — измеримая функция на X , возможно, принимающая значения $\pm\infty$. Представим $f = f_+ - f_-$, где $f_+ = f \vee 0$, $f_- = -(f \wedge 0)$. Тогда $|f| = f_+ + f_-$, причём f_+ и f_- измеримы, и обе неотрицательны.

Определение 2.5.1 (f обладает интегралом). $J(f_+) < +\infty$, или $J(f_-) < +\infty$. В таком случае $J(f) \stackrel{\text{def}}{=} J(f_+) - J(f_-)$.

Определение 2.5.2 (f суммируема (интегрируема)). Она обладает конечным интегралом, то есть $J(f_+), J(f_-) < +\infty$.

Предложение 2.5.1. f суммируема $\iff |f|$ суммируема.

Доказательство.

\Rightarrow . $J(|f|) = J(f_+) + J(f_-) < +\infty$.

\Leftarrow . $f_+, f_- \leq |f|$. \square

2.5.1 Про линейность интеграла

Пусть $f = g - h$, где $g, h \geq 0$. Тогда во всяком случае $g \geq f_+$ и $h \geq f_-$:

$$f = g - h \Rightarrow f \leq g, \text{ а так как } g \geq 0, \text{ то } f_+ \leq g \text{ тоже; } f_- = (-f)_+$$

Предложение 2.5.2. Если $f = g - h$, где g, h измеримы и неотрицательны, причём хотя бы одно из $J(g), J(h)$ конечно, то f обладает интегралом $J(f) = J(g) - J(h)$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $J(g) < +\infty$, в случае $J(h) < +\infty$ всё аналогично.

Тогда $J(f_+) < +\infty$, и f по определению обладает интегралом.

$$f = f_+ - f_- = g - h \Rightarrow f_+ + h = g + f_-$$

Для неотрицательных функций известна аддитивность, откуда $J(f_+) + J(h) = J(g) + J(f_-)$. Перенос в противоположные части конечные слагаемые $J(f_+)$ и $J(g)$, получаем

$$J(h) - J(g) = J(f_-) - J(f_+)$$

Умножая обе части на -1 , получаем искомое. \square

Следствие 2.5.1. Если f, g суммируемы (и, вообще говоря, знакопеременны), то $f + g$ тоже суммируема, и $J(f + g) = J(f) + J(g)$.

Доказательство.

$$(f_+ - f_-) + (g_+ - g_-) = (f_+ + g_+) - (f_- + g_-)$$

\square

Факт 2.5.1. Если f суммируема, $\alpha \in \mathbb{R}$, то $J(\alpha f) = \alpha J(f)$.

Свойства (Ещё свойства интеграла).

- Основная оценка интеграла: если f обладает интегралом, то $|J(f)| \leq J(|f|)$.
- Если f, g — измеримы, и обладают интегралами, причём $f \leq g$, то $J(f) \leq J(g)$.

Для $e \in \Sigma$ и измеримой функции $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, имеющей интеграл, имеется обозначение

$$\int_e f d\mu = J(f \cdot \chi_e)$$

Теорема 2.5.1 (Абсолютная непрерывность интеграла). Пускай f — суммируемая функция. Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0$: если $e \in \Sigma$, $\mu(e) < \delta$, то $\int_e |f| d\mu < \varepsilon$.

Доказательство. От противного: пусть $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists e \in \Sigma : \mu(e) < \delta$, но $\int_e |f| d\mu \geq \varepsilon$.

Рассмотрим последовательность $\delta_n = \frac{1}{2^n}$. Для каждого δ_n найдётся $e_n \in \Sigma$: $\mu(e_n) \leq \frac{1}{2^n}$, но $\int_{e_n} |f| d\mu \geq \varepsilon$.

Пусть $E_n = \bigcup_{k \geq n} e_k$, тогда из монотонности $\int_{E_n} |f| d\mu \geq \varepsilon$. С другой стороны. $\mu(E_n) \leq \sum_{k \geq n} \mu(e_k) \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Таким образом, $\mu(E_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, но с другой стороны $E_1 \supset E_2 \supset \dots$. Положим $E := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Из счётной аддитивности $\int_E |f| d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} |f| d\mu$, но левый интеграл равен нулю, как интеграл по множеству меры нуль, а правый предел — хотя бы ε . \square

Факт 2.5.2. Если f — суммируемая функция, то $\{x | f(x) \neq 0\}$ σ -конечно.

Доказательство. Применить неравенство Чебышёва (лемма 2.4.1).

$$\{x | f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n>0} \left\{x \mid |f|(x) \geq \frac{1}{n}\right\} \quad \square$$

Теорема 2.5.2 (Общая теорема Леви). Пускай f_1, f_2, \dots — измеримые функции, монотонно возрастающие: $f_n \leq f_{n+1}$.

Предположим, что f_1 суммируема. Тогда $J(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J(f)$, где $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Доказательство. Положим $h_j(x) = f_j(x) - f_1(x)$, и применим теорему Леви для неотрицательных функций. \square

Теорема 2.5.3 (Вариант теоремы Леви для рядов). Пусть u_n — неотрицательные суммируемые функции, $u(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Тогда u суммируема $\iff \sum_{n=1}^{\infty} \int_X u_n d\mu < +\infty$.

В случае монотонной сходимости почти всегда почти всё можно делать, а если сходимость не монотонна, то есть следующая теорема.

Лекция IX

1 ноября 2023 г.

Теорема 2.5.4 (Лебег, о мажорируемой сходимости). Пусть f, g — измеримые функции, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{почти всюду}} f$.

Предположим, что у f_n есть общая суммируемая мажоранта: $|f_n(x)| \leq g(x)$ и $\int_X g d\mu < +\infty$. Тогда

$$\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu.$$

Доказательство. Так как g — мажоранта, то везде на X : $|f_n(x) - f(x)| \leq 2g(x)$.

Положим $h_k(x) := \sup_{n \geq k} |f_n(x) - f(x)|$, заметим, что $h_k \searrow 0$. Так как $0 \leq h_0(x) \leq 2g(x)$, то h_0 суммируема, откуда по теореме Леви: $\int_X h_k(x) d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Осталось применить принцип двух полицейских для проинтегрированного неравенства:

$$0 \leq |f_k(x) - f(x)| \leq h_k(x) \quad \Rightarrow \quad \int_X 0 d\mu \leq \int_X |f_k(x) - f(x)| d\mu \leq \int_X h_k(x) d\mu \quad \square$$

Контрпример. Совсем без мажоранты ничего не получится. Если $X = \mathbb{R}$, и $f_n = n\chi_{[0, \frac{1}{n}]}$, то f сходится к нулю почти всюду, но интегралы у всех f_n единичные.

Лемма 2.5.1 (Фату). Пусть $f_n \geq 0$ — измеримые функции, тогда $\int_X \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

Доказательство. Положим $h_k(x) := \inf_{n \geq k} f_n(x)$. Заметим, что $h_k(x) \nearrow h(x) := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

$$\int_X h d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X h_k d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X h_k d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \quad \square$$

Следствие 2.5.2. Если измеримые $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{почти всюду}} g$, и $\int_X |g_n| d\mu \leq C$, то g суммируема, причём $\int_X |g| d\mu \leq C$.

2.6 Виды сходимости

- Сходимость почти всюду: мера множества, где сходимости нет, равна нулю.
- Сходимость по мере: $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 : \mu \left\{ x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon \right\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Определение 2.6.1 (Последовательность Коши по мере). Последовательность измеримых функций f_n , такая, что $\forall \varepsilon > 0 : \lim_{(n,m) \rightarrow \infty} \mu \left\{ x \in X \mid |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon \right\} = 0$.

Факт 2.6.1.

1. Если $\mu(X) < \infty$, то из сходимости $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{почти всюду}} f$ следует сходимость по мере $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$.
2. Из сходимости по мере $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$ следует, что найдётся сходящаяся подпоследовательность $n_1 < n_2 < \dots : f_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{почти всюду}} f$.

Докажем даже более сильное утверждение: для последовательности Коши по мере f_n найдётся измеримая f , и сходящаяся к ней подпоследовательность $n_1 < n_2 < \dots : f_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{почти всюду}} f$.

Доказательство.

1. Пусть $\varepsilon > 0$, обозначим $A_n := \{x \in X \mid \exists k \geq n : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Они вложены: $A_1 \supset A_2 \supset \dots$.

Отметим, что A_n измеримы, и пусть $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. На множестве A нет сходимости: $f_n \not\xrightarrow{} f$.

Но раз есть сходимость почти всюду, то $\mu(A) = 0$, то есть (так как мера конечна) $\mu(A_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

2. Найдутся такие $N_1 \leq N_2 \leq \dots$, что $\mu \left\{ x \in X \mid \forall n, m \geq N_k : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{2^k} \right\} \leq \frac{1}{2^k}$.

Положим $E_k := \left\{ x \in X \mid |f_{N_k}(x) - f_{N_{k+1}}(x)| \leq \frac{1}{2^k} \right\}$. $\mu(X \setminus E_k) \leq \frac{1}{2^k}$. Пусть $\tilde{E}_k = \bigcap_{n \geq k} E_n$,

тогда $\mu(X \setminus \tilde{E}_k) = \mu \left(\bigcup_{n \geq k} (X \setminus E_n) \right) \leq \sum_{n \geq k} \mu(X \setminus E_n) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.

Если $x \in \tilde{E}_k \Rightarrow \forall n \geq k : |f_{N_n}(x) - f_{N_{n+1}}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$, то есть $\forall x \in \tilde{E}_k : \sum_{j=1}^{\infty} |f_{N_j}(x) - f_{N_{j+1}}(x)|$ сходится.

А тогда эта сумма сходится и на $\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k$. Это влечёт $\forall x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k : \exists \lim_{k \rightarrow \infty} f_{N_k}(x)$. К этому

пределу f_{N_k} сходятся почти всюду: мера $X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} (X \setminus \tilde{E}_k)$ равна нулю. \square

Факт 2.6.2. Также для последовательности Коши по мере f_n найдётся измеримая f , такая, что $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$.

Доказательство. Выберем, как выше, подпоследовательность $f_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{почти всюду}} f$.

Зафиксируем $\varepsilon, \delta > 0$.

Так как подпоследовательность — тоже последовательность Коши, то $\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall m, l > N_1 : \mu \{x \in X \mid |f_{n_m} - f_{n_l}| > \varepsilon\} < \delta$. Устремляя $l \rightarrow \infty$, получаем $\forall m > N_1 : \mu \{x \in X \mid |f_{n_m} - f| > \varepsilon\} \leq \delta$.

Далее из того, что исходная последовательность — тоже последовательность Коши, получаем, что $\exists N_2 : \forall m, l > N_2 : \mu \{x \in X \mid |f_m - f_l| > \varepsilon\} < \delta$.

Из неравенства треугольника $\forall n > \max(n_{N_1}, N_2) : \mu \{x \in X \mid |f_n - f| > 2\varepsilon\} \leq \delta$. \square

Контрпримеры.

- Последовательность функций $f_n := \chi_{[n, n+1]}$ сходится почти всюду к 0, но сходимости по мере нет (факт 2.6.1 не работает, так как мера бесконечна).
- Пусть $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ — гармоническое число. Обозначим за $\{x\}$ дробную часть числа $x \in \mathbb{R}$.

$f_n := \begin{cases} \chi_{\{H_n\}, \{H_{n+1}\}}, & \{H_n\} < \{H_{n+1}\} \\ \chi_{\{H_n\}, 1] + \chi_{[0, \{H_{n+1}\}]}, & \{H_n\} > \{H_{n+1}\} \end{cases}$ — последовательность Коши по мере, которая сходится по мере к 0, но сходимости нет нигде на $[0, 1]$.

2.7 Классы L^p

Определим $L^p(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ — измерима, и } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$. Как видно из первой буквы, класс назван в честь Лебега.

В дальнейшем мы будем считать, что $p \geq 1$.

Функции $f \in L^p(\mu)$ отвечает норма $\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$. По этой норме, как и по всякой другой, можно построить метрику $d(., .)$.

Теорема 2.7.1. В случае $p \geq 1$: d — реально метрика на $L^p(\mu)$. Чтобы выполнялась положительная определённость ($\|f\| = 0 \iff f = 0$), будем рассматривать функции определённые с точностью до меры нуль на X . Иными словами $\|f\| = 0 \iff f = 0$ почти всюду (факт 2.4.1).

Доказательство.

Лемма 2.7.1 (Неравенство Гёльдера). Пусть $p, q > 1$ — сопряжённые показатели ($1/p + 1/q = 1$), тогда для $f \in L^p, g \in L^q$: $fg \in L^1$, и $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

Доказательство леммы.

Неравенство однородное, можно считать $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$ — для этого надо заменить $f \rightsquigarrow \frac{f}{\left(\int_X |f|^p \right)^{1/p}}$ и $g \rightsquigarrow \frac{g}{\left(\int_X |g|^q \right)^{1/q}}$.

Для $a, b > 0$ имеется неравенство Юнга (доказывали через выпуклость \exp): $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$. Применяя его, получаем $|f(x)| \cdot |g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}$. Интегрируя, получаем искомое $\int_X |f(x)| \cdot |g(x)| d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. \square

Теперь проверим неравенство треугольника $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$. Для данной нормы оно носит название *неравенства Минковского*.

$$\|f + g\|_{L^p}^p = \int_X |f + g|^p d\mu = \int_X |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu \leq \int_X |f| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu \quad (\leq)$$

Применив к каждому слагаемому неравенство Гёльдера ($|f + g|^{p-1} \in L^q$, так как $\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu = \int_X |f + g|^p d\mu \leq 2^p \int_X \max(f, g)^p d\mu \leq 2^p \int_X (|f|^p + |g|^p) d\mu$), получаем

$$(\leq) (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

Далее делим обе части неравенства на $\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$, и остаётся

$$\underbrace{\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1-\frac{1}{q}}}_{\|f+g\|_{L^p}} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \quad \square$$

Теорема 2.7.2. $L^p(\mu)$ — полно.

Доказательство. Рассмотрим последовательность Коши $f_n \in L^p(\mu)$, и пусть $E_{k,l} := \{x \in X \mid |f_k(x) - f_l(x)| > \delta\}$.

По определению последовательности Коши $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : k, l \geq N \Rightarrow \int_X |f_k - f_l|^p < \varepsilon^p$.

Тогда $\forall k, l \geq N : \mu(E_{k,l}) = \mu\{x \in X \mid |f_k(x) - f_l(x)|^p > \delta^p\} \leq \frac{\varepsilon^p}{\delta^p}$. Значит, f_n — последовательность Коши по мере.

Пусть $f_{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f$ почти всюду, тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall j, s > N : \int_X |f_{k_j} - f_{k_s}|^p < \varepsilon$. Устремляя $s \rightarrow \infty$, по лемме Фату получаем $\int_X |f_{k_j} - f|^p \leq \varepsilon$. Значит, f — предел подпоследовательности f_{k_j} , и из неравенства треугольника и фундаментальности можно показать, что f — предел. \square

Лекция X

8 ноября 2023 г.

2.7.1 Приближение функций из класса L^p

В дальнейшем часто будем обозначать меру множества X за $|X|$.

Теорема 2.7.3. Пусть (X, Σ, μ) — пространство с полной мерой. Тогда простые функции образуют плотное множество в $L^p(\mu)$ при $1 \leq p < +\infty$.

Доказательство. Всякая простая функция имеет вид $\phi = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{e_j}$, дизъюнктные $e_j \in \Sigma$. Если $\phi \in L^p(\mu)$, то меры всех e_j , таких, что $\alpha_j \neq 0$, конечны.

Пусть $f \in L^p(\mu)$, разложим $f = f_+ - f_-$. Приближим f_+ и f_- по отдельности. Тем самым, без потери общности $f \geq 0$.

Раз f измерима, то существует последовательность простых функций $\phi_n \in L^p(\mu) : 0 \leq \phi_n \leq f$, $\phi_n \nearrow f$ почти всюду.

Так как $f - \phi_n \searrow 0$ почти всюду, то $|f - \phi_n|^p \searrow 0$ почти всюду. Применяем теорему Леви, и действительно получаем, что $\int_X |f - \phi_n|^p d\mu \rightarrow 0$. \square

Пусть мера μ получена продолжением по Лебегу — Каратеодори из меры ν на полукольце $\mathcal{A} \subset \Sigma$.

Простые функции, полученные из полукольца \mathcal{A} (то есть вида $u = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{a_j}, a_j \in \mathcal{A}$) будем называть *элементарными*.

Теорема 2.7.4. При сделанных предположениях элементарные функции образуют плотное множество в $L^p(\mu)$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$. Пускай $f \in L^p(\mu)$. $\exists \phi = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{e_j}, e_j \in \Sigma$ — простая функция, хорошо приближающая $f : \|f - \phi\|_{L^p} < \varepsilon$. Теперь достаточно приблизить ϕ , или даже каждое слагаемое ϕ элементарными функциями.

Для всякого $\delta > 0, e_j \in \Sigma$ найдём множество $a_j \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) : \|\chi_{a_j} - \chi_{e_j}\|_{L^p} < \delta$.

$\phi \in L^p(\mu) \Rightarrow \forall j : \mu(e_j) < \infty \Rightarrow \forall j : \exists A_j - \sigma$ -множество, такое, что $\mu(A_j \setminus e_j) < \frac{\delta}{2}$.

Как σ -множество, $A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} b_k, b_k \in \mathcal{A}$. Положим $a_j^{(s)} = \bigcup_{k=1}^s b_k \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$.

Но тогда

$$\int_X |\chi_{a_j^{(s)}} - \chi_{e_j}|^p d\mu = \int_X |\chi_{a_j^{(s)}} - \chi_{e_j}| d\mu \leq \int_X |\chi_{a_j^{(s)}} - \chi_{A_j}| d\mu + \int_X |\chi_{A_j} - \chi_{e_j}| d\mu \underset{\text{при больших } s}{\leq} \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \quad \square$$

Следствие 2.7.1. *Линейные комбинации характеристических функций конечных прямоугольных параллелепипедов (или диадических кубов) образуют плотное множество в $L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < +\infty$).*

Следствие 2.7.2. *Непрерывные функции с компактным носителем плотны в $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого двоичного куба K : \exists непрерывная функция v с компактным носителем $\|\chi_K - v\|_{L^p} < \varepsilon$. Приближим $\chi_{[\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}]}$ ломаной, которая равна 1 на $[\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}]$, и равна нулю вне $\varepsilon/2$ -окрестности $[\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}]$.

Теперь если n — любое, то $K = I_1 \times \dots \times I_n$, перемножим функции, приближающие I_j . \square

Пусть $t \in \mathbb{R}^n, f$ — функция на \mathbb{R}^n . Тогда *сдвиг* f на t — это $f_t(x) = f(x+t)$ (иногда пишут минус).

Теорема 2.7.5 (Непрерывность сдвига в среднем). Если $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < +\infty$, то $\|f - f_t\|_{L^p} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдём v — непрерывную функцию с компактным носителем, такую, что $\|f - v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$.

$$\|f - f_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \|f - v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v - v_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v_t - f_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq 2\varepsilon + \|v - v_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Осталось доказать ту же теорему для непрерывной функции с компактным носителем, а она очевидна из теоремы Кантора — v равномерно непрерывна.

Чуть подробнее: выберем $\delta > 0$, найдётся шар \overline{B} , такой, что он содержит δ -окрестность $\text{supp}(v)$. На нём $\forall \varepsilon' > 0 : \exists \delta' \in (0, \delta) : |x - y| < \delta' \Rightarrow |v(x) - v(y)| < \varepsilon'$. Интегрируя по шару \overline{B} с конечной мерой, получаем $\|v - v_t\| \leq |\overline{B}| \varepsilon'^{1/p}$ и ε' можно сделать сколь угодно малым. \square

Замечание (Следствие неравенства Гёльдера). $\mu(X) < +\infty \Rightarrow L^p(\mu) \subset L^s(\mu)$ для $p \geq s$.

Доказательство. При $p = s$ доказывать нечего, считаем $p > s$. Положим $r = \frac{p}{s} > 1$, к нему есть сопряжённый показатель r' .

Пускай $f \in L^p(\mu)$.

$$\int_X |f|^s d\mu = \int_X |f|^s \cdot 1 d\mu \leq \left(\int_X (|f|^s)^r d\mu \right)^{1/r} \cdot \left(\int_X (1)^{r'} d\mu \right)^{1/r'} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/r} \cdot \mu(X)^{1/r'}$$

\square

Отсюда видно, что $\|f\|_{L^s(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \cdot \mu(X)^{\frac{1}{sr'}}$, это особенно красиво при *вероятностной мере* — $\mu(X) = 1$.

В случае бесконечной меры ($\mu(X) = \infty$) следствие можно применять к функциям, сосредоточенных на множествах конечной меры.

Введём ещё пространство $L^\infty(\mu)$ — множество функций, таких, что $\exists A \in \mathbb{R}_{\geq 0} : |f| \leq A$ почти всюду.

$L^\infty(\mu)$ — класс всех *существенно ограниченных* функций.

Если f — существенно ограниченная функция, то среди всех существенных верхних границ $\{K \mid |f(x)| \leq K \text{ почти всюду}\}$ найдётся инфимум: Назовём её

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf \{K \mid K \text{ есть существенная верхняя грань для } f\}$$

Теорема 2.7.6. Пусть $A = \operatorname{ess\,sup} f$, тогда A — существенная граница f .

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$, тогда $A + \frac{1}{n}$ — существенная верхняя граница f . Тем самым, $\exists E_n : |E_n| = 0, |f(x)| \leq A + \frac{1}{n}$ при $x \notin E_n$. Выберем $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Тогда $|f(x)| \leq A$ при $x \notin E$, но $\mu(E) = 0$. \square

Замечание. Пусть f существенно ограничена, $A = \operatorname{ess\,sup} f$. Тогда $\exists E : \mu(E) = 0$ и $\sup_{x \in X \setminus E} f(x) = A$.

Определение 2.7.1 (Норма $f \in L^\infty(\mu)$). $\|f\|_{L^\infty(\mu)} = \operatorname{ess\,sup}_X |f|$.

Если в пространстве L^∞ отождествить функции, отличающиеся на множестве меры нуль, то $\|\cdot\|$ станет нормой.

Расстояние между функциями в данном пространстве $d(f, g) = \|f - g\|$, неравенство треугольника здесь очевидно:

$$\|u + v\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}$$

Теорема 2.7.7. $L^\infty(\mu)$ полно.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность Коши в $L^\infty(\mu)$, то есть $\operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| \xrightarrow{(n,m) \rightarrow \infty} 0$.

Тогда найдутся множества $E_{n,m} : \operatorname{ess\,sup} |f_n - f_m| = \sup_{x \notin E_{n,m}} |f_n(x) - f_m(x)|$.

Положим $E = \bigcup_{n,m} E_{n,m}$, $\mu E = 0$. Тогда $\{f_n|_{X \setminus E}\}_n$ — последовательность Коши на пространстве ограниченных функций на $X \setminus E$. Тем самым, $f_n \rightrightarrows f$ равномерно на $X \setminus E$. Доопределим f на E как угодно, её класс эквивалентности в L^∞ не поменяется. \square

В неравенстве Гёльдера до сих пор рассматривались $p, p' : \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ при $1 < p, p' < \infty$. Если же подставить одно из p, p' равным 1, то второе станет равным ∞ . Естественно считать 1 и ∞ сопряжёнными показателями.

Неравенство Гёльдера говорило, что $\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \cdot \|g\|_{L^{p'}(\mu)}$.

Факт 2.7.1. Неравенство Гёльдера сохраняется при $p = 1$ или $p = \infty$.

Доказательство. Пусть $p = 1$. $|f(x)| \cdot |g(x)| \leq |f(x)| \cdot \|g\|_{L^\infty(\mu)}$ почти всюду. Интегрируя это неравенство, получаем

$$\int_X |f| \cdot |g| d\mu \leq \int_X |f(x)| d\mu \cdot \|g\|_{L^\infty(\mu)} = \|f\|_{L^1(\mu)} \cdot \|g\|_{L^\infty(\mu)} \quad \square$$

Факт 2.7.2. Пусть $\mu(X) = 1$. Тогда $\|f\|_{L^p(\mu)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)}$ при любом $p < \infty$.

Доказательство.

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_X \|f\|_{L^\infty(\mu)}^p d\mu \right)^{1/p} = \|f\|_{L^\infty(\mu)} \cdot \mu(X)^{1/p}$$

В частности, из данного доказательства следует, что при $\mu(X) < +\infty$: $L^p(\mu) \supset L^\infty(\mu)$. \square

Пусть $\mu(X) = 1$. Зафиксируем измеримую f , рассмотрим возрастающую функцию

$$p \mapsto \|f\|_{L^p(\mu)}$$

Если $f \notin L^p(\mu)$, то будем считать $\|f\|_{L^p} = \infty$.

Упражнение 2.7.1. $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$.

2.7.2 Связь интегралов Лебега и Римана

Теорема 2.7.8. Пусть f — функция на отрезке $\langle a, b \rangle$, интегрируемая по Риману — Дарбу. Тогда f суммируема, и интеграл Лебега такой же.

Доказательство. В данной постановке простые функции — линейные комбинации характеристических функций отрезков, $\phi = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{I_j}$. В этой лекции они назывались элементарными.

Простые функции интегрируемы и по Риману, и по Лебегу, и интеграл у них один и тот же.

Пусть $\langle a, b \rangle = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k$ — разбиение $\Delta = \{I_1, \dots, I_k\}$.

Зададим $\phi_\Delta = \sum_{j=1}^k \left(\sup_{I_j} f \right) \chi_{I_j}$, $\psi_\Delta = \sum_{j=1}^k \left(\inf_{I_j} f \right) \chi_{I_j}$. Тогда $\int_{\langle a, b \rangle} \phi_\Delta$ — верхняя сумма Дарбу для f по отрезку $\langle a, b \rangle$, $\int_{\langle a, b \rangle} \psi_\Delta$ — нижняя сумма Дарбу.

Понятно, что $\psi_\Delta \leq f \leq \phi_\Delta$ всюду на $\langle a, b \rangle$, причём для измельчения Δ' верно, что

$$\psi_\Delta \leq \psi_{\Delta'} \leq f \leq \phi_{\Delta'} \leq \phi_\Delta$$

Критерием интегрируемости по Риману является то, что $\text{osc}_{I_j} f$ могут быть сколь угодно малыми, то есть $\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta : \int_{\langle a, b \rangle} (\phi_\Delta - \psi_\Delta) \leq \varepsilon$.

Выберем последовательность $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, построим разбиения Δ_n так, что каждое следующее является измельчением предыдущего.

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{R}} (\phi_n - \psi_n) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} |\phi_n - \psi_n| d\lambda < \frac{1}{n}.$$

Отсюда следует, что существует последовательность индексов n_j , таких, что $\phi_{n_j} - \psi_{n_j} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ почти всюду. Таким образом, ψ_{n_j} и ϕ_{n_j} стремятся к f почти всюду, тем самым f измерима!

Теперь $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_{n_j} \leq$ интеграл Лебега или Римана $f \leq \int_{\mathbb{R}^n} \phi_{n_j}$. \square

Интересный факт (Теорема Лебега). Функция f на конечном отрезке интегрируема по Риману \iff множество точек разрыва f имеет меру нуль.

Замечание. Пусть $f \geq 0$, f интегрируема в смысле Римана несобственным образом на конечном или бесконечном интервале $\langle \alpha, \beta \rangle$. Тогда f суммируема на $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Доказательство. Например, пусть особенность на конце β : f интегрируема по Риману на любом интервале $\langle \alpha, \beta - \delta \rangle$, причём $\exists \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta - \delta} f(x) dx$. Пускай $f_n = f \cdot \chi_{\langle \alpha, \beta - \frac{1}{n} \rangle}$. Тогда $f_n \nearrow f$, по теореме Леви предельная функция тоже суммируема, причём её интеграл — предел интегралов f_n . \square

Замечание. Если функция знакопеременна, то интегрировать всё ещё бывает полезно в несобственном смысле: $\frac{\sin x}{x}$ не суммируема на $[0, \infty)$, но можно писать

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Лекция XI

15 ноября 2023 г.

2.8 Теоремы Тонелли и Фубини

Рассмотрим два пространства с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ (\mathcal{A}, \mathcal{B} — σ -алгебры, μ, ν — счётно-аддитивные меры на \mathcal{A} и \mathcal{B} соответственно).

Рассмотрим полукольцо $\mathcal{P} = X \times Y$ обобщённых прямоугольников: $c \in \mathcal{P} \iff c = a \times b$ для $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$.

Предложение 2.8.1. Мера $\lambda := \mu \otimes \nu$ на \mathcal{P} ($\lambda(a \times b) := \mu(a)\nu(b)$) счётно-аддитивна.

Доказательство. Выберем $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}, \{b_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}, \{c_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$ так, что $c_j = a_j \times b_j$. Пусть c_j дизъюнкты; положим $c := \bigsqcup_{j=1}^{\infty} c_j$, пусть $c \in \mathcal{P}$, то есть $\exists a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B} : c = a \times b$.

Надо проверить, что $\lambda(c) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(c_j)$.

Рассмотрим равенство $\chi_a(x)\chi_b(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{a_j}(x)\chi_{b_j}(y)$. При каждом фиксированном x обе части — измеримые функции от y .

Интегрируя, получаем по теореме Леви

$$\underbrace{\chi_a(x) \int_Y \chi_b(y) d\nu(y)}_{\nu(b)} = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{a_j}(x) \underbrace{\int_Y \chi_{b_j}(y) d\nu(y)}_{\nu(b_j)}$$

Это равенство опять интегрируется, уже по x . В результате действительно получаем $\mu(a)\nu(b) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(a_j)\nu(b_j)$. □

Применяя теорему Лебега — Каратеодори, можно продолжить меру λ , результат тоже обозначают $\mu \otimes \nu$, и называют *произведением мер* μ и ν .

Пусть имеется несколько пространств с мерой $(X_1, \mu_1), \dots, (X_n, \mu_n)$. Можно определить меру произведения $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$. В произведении, вообще говоря, надо указать порядок, но оказывается, что произведение мер ассоциативно.

Пример. Рассмотрим $\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Пусть λ_n, λ_k — стандартные меры Лебега на \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^k . Тогда оказывается, что $\lambda_n \otimes \lambda_k = \lambda_{n+k}$.

Можно заметить, что на обобщённых прямоугольниках мера произведения одна и та же, и применяя теорему об единственности, получаем $\lambda_n \otimes \lambda_k = \lambda_{n+k}$. (причём на самом деле неважно, что обобщённые прямоугольники берутся из евклидова пространства, это проверяет ассоциативность в общем виде)

Пускай $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ — пространства со счётно-аддитивными мерами, обе меры полны и обе σ -конечны. В теоремах Тонелли и Фубини теоретически можно обойтись и без этих двух условий, но требуются дополнительные слова. Пусть $\lambda = \mu \otimes \nu$.

Теорема 2.8.1 (Тонелли). Пусть f — λ -измеримая функция на $X \times Y$, $f \geq 0$. Тогда

1. Для μ -почти всех $x \in X$: $f(x, _)$ измерима на Y .
2. Функция $\phi(x) := \int_Y f(x, _) d\nu$ измерима на X .
3. $\int_X \phi(x) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f d\lambda$.

Доказательство. Назовём измеримую функцию $f \geq 0$ допустимой, если она определена на $X \times Y$, и удовлетворяет всем трём условиям.

1. Если $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, то $\chi_{a \times b}$ допустима: $\chi_{a \times b}(x, y) = \chi_a(x)\chi_b(y)$.
2. Неотрицательные элементарные функции, построенные по полукольцу \mathcal{P} , допустимы:
 - Если f, g — допустимы, $\alpha, \beta \geq 0$, то $\alpha f + \beta g$ тоже допустима.
 - Если f, g — допустимы и f суммируема, причём $0 \leq g \leq f$, то $f - g$ тоже допустима.

Доказательство. Пусть $\phi(x) = \int_X f(x, _) d\nu$. В силу 3. она суммируема, откуда ϕ конечна почти всюду. Пусть $\psi(x) = \int_X g(x, _) d\nu$. Так как $\psi \leq \phi$, то ψ тоже конечна почти всюду, тогда дальше всё хорошо. \square

3. Пусть f_n — допустимые функции на $X \times Y$, пусть $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, пусть $f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y)$. Автоматически f измерима. Тогда f тоже допустима.

Доказательство. Пускай $E_n = \{x \in X | f_n(x, _) \text{ не измерима}\}$. $\forall n : \mu E_n = 0$, так как f_n допустимы. Положим $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, $\mu E = 0$.

$x \notin E \Rightarrow$ все функции $f_n(x, _)$ измеримы на Y . Имеется монотонная сходимость $f_n \nearrow f$, значит $f(x, _)$ тоже измерима на Y при $x \notin E$.

Построим $\phi(x) = \int_Y f(x, _) d\nu$, $\phi_n(x) = \int_Y f_n(x, _) d\nu$. По теореме Леви (относительно меры ν) для $x \notin E : \phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x)$. Тем самым ϕ измерима, как предел измеримых функций.

Более того, $\phi_n \nearrow \phi$, опять по теореме Леви (относительно меры μ):

$$\int_X \phi d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \phi_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} f_n d\lambda \stackrel{\text{теорема Леви относительно } \lambda}{=} \int_{X \times Y} f d\lambda \quad \square$$

4. Пусть f_n — допустимые функции на $X \times Y$, пусть $f_1 \geq f_2 \geq \dots$, пусть $f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y)$. Автоматически f измерима. Если f_1 суммируема, то f тоже допустима.

Доказательство. Аналогично предыдущему пункту. \square

5. Если $A \subset X \times Y$ — σ -множество, то χ_A допустима.

Доказательство. Представим A в виде $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. $\sum_{j=1}^N \chi_{A_j} \nearrow \chi_A$. \square

6. Если $A \subset X \times Y$ — $\delta\sigma$ -множество конечной меры λ , то χ_A допустима.

Доказательство. Представим A в виде $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$, где $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, A_j — σ -множества конечной меры. $\chi_{A_j} \searrow \chi_A$. \square

7. Если $e \subset X \times Y$ измеримо, и $\lambda(e) = 0$, то χ_e допустимо.

Доказательство. Пусть \bar{e} — $\delta\sigma$ -множество, такое, что $\bar{e} \supset e$, и $\lambda(\bar{e}) = 0$.

Тогда $\chi_e \leq \chi_{\bar{e}}$. $\chi_{\bar{e}}$ допустима, в частности, $\chi_{\bar{e}}(x, _)$ измерима на Y для почти всех $x \in X$. Обозначив $\bar{\phi}(x) = \int_Y \chi_{\bar{e}}(x, _) d\nu$ видим, что $\bar{\phi}$ измерима на X , а так как

$$\int_X \bar{\phi} d\mu = \int_{X \times Y} \chi_{\bar{e}} d\lambda = 0$$

то $\bar{\phi}(x) = 0$ для почти всех $x \in X$.

Пусть $E = \{x \in X \mid \bar{\phi}(x) \neq 0\}$. Для $x \notin E : \int_Y \chi_{\bar{e}}(x, _) d\nu = 0$. Иными словами, $\nu\{y \in Y \mid (x, y) \in \bar{e}\} = 0$.

Но тогда из полноты меры (здесь мы ей пользуемся в первый раз) $\nu\{y \in Y \mid (x, y) \in e\} = 0$. Тогда любая функция, сосредоточенная на e , измерима, в частности, $\chi_e(x, _)$ измерима на Y .

Зная измеримость χ_e уже несложно доказать, что в пунктах 2 и 3 все интегралы равны нулю: в частности, $\phi(x) = \int_Y \chi_e(x, _) d\nu$ равна нулю всюду кроме E . \square

8. Если $A \subset X \times Y$ — измеримое множество относительно меры λ , причём $\lambda(A) < +\infty$, то χ_A допустима.

Доказательство. $\exists \delta\sigma$ -множество $\bar{A} \supset A$, такое, что $\lambda(\bar{A} \setminus A) = 0$. Применим второй \bullet из 2. $\chi_A = \chi_{\bar{A}} - \chi_{\bar{A} \setminus A}$. \square

9. Пусть f — простая функция относительно σ -алгебры λ -измеримых множеств, $f \geq 0$. Иными словами,

$$f = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{e_j}, \alpha_j \geq 0, e_i \cap e_j = \emptyset \text{ (при } i \neq j)$$

Если $\forall j : \lambda e_j < +\infty$, то f допустима.

10. Пусть f — неотрицательная измеримая функция на $X \times Y$, $\lambda\{(x, y) \mid f(x, y) \neq 0\} < +\infty$. Тогда f допустима.

Доказательство. $\exists f_n$ — простые функции, $0 \leq f_n \leq f$, $f_n \nearrow f$. Все f_n допустимы, значит и f допустима. \square

11. Все неотрицательные измеримые функции допустимы.

Доказательство. $\exists X_1 \subset X_2 \subset \dots$, такие, что $X = \bigcup_i X_i$, и все $\mu(X_i) < +\infty$. Аналогично $\exists Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$, такие, что $Y = \bigcup_i Y_i$, и все $\mu(Y_i) < +\infty$. (Здесь мы пользуемся σ -конечностью в первый раз).

Положим $f_n(x, y) = f(x, y) \chi_{X_n}(x) \chi_{Y_n}(y)$. f_n из пункта 10, значит, f допустима, так как $f_n \nearrow f$. \square

\square

Теорема 2.8.2 (Фубини). Пусть $(X, \mu), (Y, \nu)$ — два пространства с мерой, $\lambda = \mu \otimes \nu$.

Если $f \in L^1(\lambda)$, то

- Для почти всех $x \in X : \phi(x) := \int_Y f(x, _) d\nu$ суммируема на X .
- $\int_X \phi d\mu = \int_{X \times Y} f d\lambda$.

Доказательство. f суммируема $\Rightarrow f_+, f_-$ суммируемы по λ . К каждой из них применима теорема Тонелли. Вычитаем заключения теоремы Тонелли для f_+ и f_- . \square

Задача 2.8.1. Придумать функцию f , такую, что $\phi(x) := \int_Y f(x, y) d\nu$ суммируема, но $f \notin L^1(\lambda)$.

2.8.1 Как применять

Пусть f — λ -измеримая функция (про знак ничего не известно).

Чтобы доказать, что f суммируема, надо доказать, что $|f|$ суммируема.

По теореме Тонелли $|f|$ суммируема $\iff \int_X \int_Y |f|(x, y) d\nu(y) d\mu(x)$ конечен. Если интеграл сошёлся, то f тоже суммируема, и для исходной функции тоже можно сводить интеграл к повторному.

2.9 Свёртки. Приближение функций с помощью свёрток

Пусть f, g — измеримые функции на \mathbb{R}^n .

Определение 2.9.1 (Свёртка $f * g$). $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) dy$. Свёртка определена в тех точках, где интеграл определён.

Рассмотрим $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto (y, x - y)$. L линейно, значит, L, L^{-1} измеримы по Лебегу. Определив $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto f(u)g(v)$, видим, что T измерима, откуда $(T \circ L)(x, y) = f(y)g(x - y)$ тоже измерима.

Теорема 2.9.1. Если $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то $(f * g)$ определена почти всюду, и $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$.

Доказательство. Рассмотрим $\phi(x, y) = |f(x)| \cdot |g(x - y)|$. Она неотрицательна, применяем теорему Тонелли:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \phi d\lambda_{2n} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot |g(x - y)| dx \right) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x - y)| dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| dx \right) dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \end{aligned}$$

По теореме Тонелли ϕ суммируема, тем самым, $(x, y) \mapsto f(y)g(x - y)$ тоже суммируема. По теореме Фубини $(f * g)(x)$ определена для почти всех x , причём она суммируема.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x - y)| dy dx \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \quad \square$$

Замечание. Неформально говоря, если сворачивать f с какими-то хорошими свойствами, и g с какими-то другими хорошими свойствами, то свёртка обладает всеми хорошими свойствами каждой из них. В этом мы убедимся на некоторых примерах.

Утверждение 2.9.1. $f * g = g * f$ всегда, когда существует:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy = \left\| \begin{array}{l} z = x - y \\ y = x - z \end{array} \right\| = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x - z) dz$$

Упражнение 2.9.1. Свёртка ассоциативна: $f * (g * h) = (f * g) * h$ всегда, когда существует.

Лекция XII
22 ноября 2023 г.

2.9.1 Меры с плотностью

Пусть (X, Σ, μ) — пространство с мерой. Пусть $\phi \geq 0$ — измеримая функция на X .

Можно определить меру, индуцированную функцией ϕ : $\nu(e) = \int_e \phi d\mu$ для $e \in \Sigma$. Тогда ϕ называется плотностью меры ν относительно μ .

Куда должна бить ϕ ?

1. Можно считать, что $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$, но, возможно, меняет знак. Надо предположить, что либо ϕ_+ , либо ϕ_- суммируемы.

Тогда сохраняется счётная аддитивность: $e = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} e_i \Rightarrow \nu(e) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(e_i)$. Тем не менее, всякие монотонности могут перестать выполняться, так как функция перестала быть неотрицательной.

2. Можно считать, что $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$. Комплексный интеграл берётся отдельно по вещественной и мнимой частям:

$$\int_e (\alpha + \beta i) d\mu = \int_e \alpha d\mu + i \int_e \beta d\mu$$

В обоих случаях ν перестаёт быть мерой в заявленном определении, это просто какая-то счётно-аддитивная функция множества, и ϕ во всех случаях называется её плотностью.

Интегрирование по мере ν

Пусть ν определена, как выше.

Факт 2.9.1. Если $g \geq 0$ — измеримая функция на X , то $\int_X g d\nu = \int_X g \phi d\mu$.

Доказательство. Формула верна для $g = \chi_e$:

$$\int_X \chi_e d\nu = \nu(e) = \int_X \chi_e \phi d\mu$$

Значит, формула верна для неотрицательных простых функций.

Теперь пусть g — произвольная измеримая. Существуют неотрицательные простые $g_n \nearrow g$, применяем теорему Леви (два раза, в левой и правой частях равенства). \square

Следствие 2.9.1. Неотрицательная функция g ν -суммируема $\iff g\phi$ μ -суммируема.

Следствие 2.9.2. h (возможно, меняющая знак) ν -суммируема $\iff h\phi$ μ -суммируема, причём $\int_X h d\nu = \int_X h\phi d\mu$.

2.9.2 Образ меры

Пусть $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ — два пространства, \mathcal{A}, \mathcal{B} — σ -алгебры подмножеств в X и Y соответственно.

Пусть $F : X \rightarrow Y$ измеримо относительно $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Пускай $\mu \geq 0$ — счётно-аддитивная мера на (X, \mathcal{A}) . Её образ $F^0(\mu) =: \nu$ — счётно-аддитивная мера на (Y, \mathcal{B}) , такая, что $\nu(b) = \mu(F^{-1}(b))$. Счётная аддитивность следует из того, что прообраз уважает все теоретико-множественные операции.

Интегрирование по мере ν

Пусть ν определена, как выше.

$$\int_Y \chi_e d\nu = \nu(b) = \int_X \chi_{F^{-1}(b)} d\mu$$

Заметим, что $\chi_{F^{-1}(b)} = \chi_b \circ F$.

Факт 2.9.2. Если $g \geq 0$ — измеримая функция на X , то $\int_X g d\nu = \int_X g \circ F d\mu$.

Доказательство. Формула верна для $g = \chi_e$. Значит, формула верна для неотрицательных простых функций.

Теперь пусть g — произвольная измеримая. Существуют неотрицательные простые $g_n \nearrow g$, применяем теорему Леви (два раза, в левой и правой частях равенства). \square

Все замечания из предыдущего раздела повторяются:

Следствие 2.9.3. Неотрицательная функция g ν -суммируема $\iff g \circ F$ μ -суммируема.

Следствие 2.9.4. h (возможно, меняющая знак) ν -суммируема $\iff h \circ F$ μ -суммируема, причём $\int_X h d\nu = \int_X h \circ F d\mu$.

Данная формула очень полезна при замене переменной в интеграле.

Например, ранее записанное равенство $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) d\xi$ видно из данной формулы при $F(y) = x-y$ — здесь образ меры будет ей самой.

2.9.3 Свойства свёртки

Пусть $1 \leq p \leq \infty$.

Теорема 2.9.2. Если $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, то $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

Доказательство. Пусть $p = \infty$. Тогда это следует из оценки

$$|(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)| dy \leq \underbrace{\|f\|_{L^\infty}}_{\text{ess sup}(f)} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy$$

При $p = 1$ доказано выше (теорема 2.9.1).

Теперь пусть $1 < p < \infty$, q — сопряжённый к p показатель.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy \right)^p dx \stackrel{(\circledast)}{=}$$

Определим из меры Лебега новую меру с плотностью $|g(y)|$: $\nu(e) := \int_e |g(y)| dy$. Это конечная мера на \mathbb{R}^n , так как $g \in L^1$.

$$\stackrel{(\circledast)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot 1 d\nu(y) \right)^p dx \stackrel{(\circledast)}{\leq}$$

Теперь применим неравенство Гёльдера относительно данной меры ν .

$$\begin{aligned} & \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} 1^q d\nu \right)^{\frac{1}{q}} \right]^p dx = \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)| dy \right) dx \cdot \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \stackrel{\text{теорема 2.9.1}}{\leq} \|f\|_{L^p}^p \cdot \|g\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

Тем самым, $\|f * g\|_{L^p}^p \leq \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}+1} \|f\|_{L^p}^p$ и $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}$. \square

Упражнение 2.9.2 (Неравенство Юнга). Пусть $f \in L^s(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^t(\mathbb{R}^n)$, где $s, t > 1$. Предположим, что $\frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{t} - 1$, и пусть $r \geq 1$. Тогда $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^s} \|g\|_{L^t}$.

Упражнение 2.9.3. Если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, и $1 < p, q < \infty$, то $\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$, и при этом $f * g$ непрерывна и стремится к нулю на ∞ . *Что? Не верится, что свёртка двух произвольных функций непрерывна.*

Факт 2.9.3. Пусть $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = 1$. Тогда для $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ при $1 \leq p < \infty$:

$$\|f * g - f\|_{L^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p g(y) dy dx$$

Доказательство. $(f * g)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))g(y) dy$

Возьмём модуль, возведём в степень p , и проинтегрируем:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x) - f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| g(y) dy \right)^p dx$$

Далее вводим меру $\nu(e) = \int_e g(y) dy$, и опять применяем неравенство Гёльдера к $|f(x-y) - f(x)| \cdot 1$ (применяем к выражению внутри скобок):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (|f(x-y) - f(x)| \cdot 1) d\nu(y) & \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} 1^q d\nu(y) \right)^{\frac{1}{q}}}_1 = \\ & = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p g(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Далее, подставляя внутрь скобок полученную оценку, получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p g(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p dx$$

\square

Будем обозначать пространство бесконечно дифференцируемых функций на \mathbb{R}^n с компактным носителем значком $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2.9.3. Пусть u — непрерывна, с компактным носителем, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Тогда $f * u$ непрерывна. Если $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то $f * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство.

$$(f * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)u(x-y) dy \quad (\equiv)$$

Проверим непрерывность в $x_0 \in \mathbb{R}^n$, рассмотрим $B_r(x_0)$. Пусть $S := \text{supp } u$. Можно считать, что интегрирование берётся по компакту $K := \overline{B_r(x_0)} - S$.

$$(\equiv) \int_K f(y)u(x-y) dy$$

при $x \in B_r(x_0)$

Заметим, что для всякой последовательности $x_j \rightarrow x_0 : u(x_j - y) \rightarrow u(x_0 - y)$, откуда при x_j , близких к x_0 : $\exists C: |f(y)u(x_j - y)| \leq C|f(y)|$, и можно применить теорему Лебега о мажоранте:

Лемма 2.9.1. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество, $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ — интервал, $v : K \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть $\exists \frac{\partial}{\partial t} v(x, t)$, и она непрерывна на (a, b) при всяком фиксированном $x \in K$. Также предположим наличие суммируемой мажоранты w на K : для всех $t \in (a, b) : |\frac{\partial}{\partial t} v(x, t)| \leq w(x)$.

Определим $\phi(t) := \int_K v(x, t) dx$ (предполагаем, что $v(x, t)$ суммируема при всяком t). Тогда ϕ дифференцируема на (a, b) , и

$$\phi'(t_0) = \int_K \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) dx$$

Доказательство леммы.

Выберем последовательность $t_n \rightarrow t_0$, запишем разностное отношение $\frac{\phi(t_n) - \phi(t_0)}{t_n - t_0} = \int_K \frac{v(x, t_n) - v(x, t_0)}{t_n - t_0} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi'(t_0)$. По формуле Лагранжа $\frac{v(x, t_n) - v(x, t_0)}{t_n - t_0} = \frac{\partial}{\partial t} v(x, \xi)$ для некой $\xi \in (t_n, t_0)$. $|\frac{\partial}{\partial t} v(x, \xi)| \leq w(x)$, значит, у подынтегральной функции есть мажоранта, и можно перейти к пределу. \square

Заметим, что $(f * u)(x) = \int_K f(y)u(x-y) dy$, и её действительно можно дифференцировать бесконечно много раз:

$$(f * u)^{(k)}(x) = \int_K f(y)u^{(k)}(x-y) dy \quad \square$$

Замечание. Пусть $\text{supp } f = A, \text{supp } g = B$. Тогда $\text{supp}(f * g) \subset A + B$.

Определение 2.9.2 (Аппроксимативная единица для \mathbb{R}^n). Последовательность функций $g_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g_j \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} g_j = 1, \forall \delta > 0 : \int_{|y| \geq \delta} g_j(y) dy \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$

Теорема 2.9.4. Пусть g_j — аппроксимативная единица, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Тогда $f * g_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f$, то есть $\|f * g_j - f\|_{L^p} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$.

Если f непрерывна с компактным носителем (достаточно потребовать равномерной непрерывности и ограниченности), то $f * g_j \rightrightarrows f$

Доказательство. При $1 \leq p < \infty$:

$$\begin{aligned} \|f * g_j - f\|_{L^p}^p &\stackrel{\text{факт 2.9.3}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p g_j(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx \cdot g_j(y) dy = \\ &= \int_{|y| < \delta} g_j(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx dy + \int_{|y| \geq \delta} g_j(y) \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|f(x-y) - f(x)|^p}_{\leq 2^p(|f(x-y)|^p + |f(x)|^p)} dx dy \end{aligned}$$

$2^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p + |f(y)|^p dx \leq 2^{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx$, и это конечно. Значит, по определению аппроксимативной единицы второе слагаемое мало при больших j .

Для первого слагаемого применим непрерывность сдвигов для $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : |y| < \delta \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx < \varepsilon$. Значит, оно тоже маленькое.

Теперь проверим равномерную сходимость. Так как f имеет компактный носитель, то она равномерно непрерывна: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Пусть $K = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$.

$$(f * g_j)(x) - g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g_j(y) dy - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))g_j(y) dy$$

$$\begin{aligned} |(f * g_j)(x) - g(x)| &\leq \\ &\leq \int_{|y| < \delta} |f(x-y) - f(x)|g_j(y) dy + \int_{|y| \geq \delta} (|f(x-y)| + |f(x)|)g_j(y) dy \leq \\ &\leq \varepsilon + 2K \int_{|y| \geq \delta} g_j(y) dy \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

□

Факт 2.9.4. Пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L^p(\mathbb{R}^n)$ для $1 \leq p < +\infty$.

Доказательство. Построим специальную аппроксимативную единицу.

1. Пускай $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция с компактным носителем, $\phi = 0$ вне $(-1, 1)$.

$$\text{Например, } \phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}.$$

2. Положим $a := \int_{\mathbb{R}} \phi dx$. Положим $\psi := \frac{\phi}{a}$. Это функция с единичным интегралом.
3. $\Psi(x_1, \dots, x_n) := \psi(x_1) \cdot \dots \cdot \psi(x_n)$. Это функция с единичным интегралом, сосредоточенная в кубе со стороной 2 и центром в нуле.
4. В качестве аппроксимативной единицы выберем $\Psi_j(x) = j^n \Psi(jx)$. Интеграл по-прежнему равен единице, так как якобиан скалярного умножения на j в \mathbb{R}^n равен j^n .

Теперь выберем $\varepsilon > 0$, и функции $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ сопоставим g с компактным носителем, такую, что $\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon$. При больших j :

$$\|g * \Psi_j - g\|_{L^p} < \varepsilon$$

□

Лекция XIII

6 декабря 2023 г.

2.9.4 Слегка другой способ построения аппроксимативной единицы

Этот способ практически повторяет способ с предыдущей лекции, но тут не требуется уметь строить бесконечно дифференцируемую функцию с компактным носителем.

Пусть $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — суммируемая функция, отнормируем её так, что $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) dx = 1$. Теперь положим в качестве аппроксимативной единицы $\Phi_j(t) = j^n \Phi(jt)$. Интеграл по всему пространству

Φ_j равен 1, так как якобиан домножения на j в \mathbb{R}^n — это j^n . Наконец,

$$\int_{|x|>\delta} \Phi_j(x) dx = \int_{|x|>\delta} j^n \Phi(jx) dx = \int_{|x|>j\delta} \Phi(x) dx \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

Также можно вместо дискретного параметра j выбрать непрерывный параметр t . Пусть t мало, и пусть $\phi_t = \frac{1}{t^n} \Phi\left(\frac{x}{t}\right)$ — аппроксимативные единицы.

Тогда для $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$: $g * \phi_t \xrightarrow{t \rightarrow 0} g$ — разумеется правда, так как вместо обычной сходимости можно рассматривать сходимости по последовательностям, стремящимся к нулю.

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество положительной меры ($|K| > 0$). Можно также положить $\phi = \frac{\chi_K}{|K|}$, и $\phi_t(x) = \frac{1}{t} \phi\left(\frac{x}{t}\right)$. Это ещё один пример аппроксимативной единицы.

2.10 Преобразования меры при дифференцируемом отображении

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — открыто, пусть $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемая инъекция, и пусть дифференциал невырожден везде в G .

Пусть $e \subset G$ — измеримое множество. Научимся вычислять $|F(e)|$.

Теорема 2.10.1. $|F(e)| = \int_e |J_F(x)| dx$, где $J_F(x)$ — якобиан отображения F в точке x .

Прежде чем приступить к доказательству данной теоремы, вспомним несколько вещей.

Так, в условиях теоремы (можно рассмотреть исчерпывающую последовательность компактов для G , на них производная ограничена и F липшицева) для всякого измеримого $e \subset G$: $F(e)$ измеримо по Лебегу, и $|e| = 0 \Rightarrow |F(e)| = 0$.

Рассмотрим некоторое расширение понятия меры. Пусть (S, Σ) — пространство с σ -алгеброй.

Определение 2.10.1 (Знакопеременная мера). Счётно-аддитивная (необязательно положительная) функция $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Счётная аддитивность понимается в обычном смысле: для непересекающихся

$$e_j \in \Sigma : \nu\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} e_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(e_j).$$

Из определения сразу следует, что сходимость должна быть абсолютной: формула верна с любой перестановкой.

Иногда такую меру называют *зарядом* — если обычная мера является аналогом массы, распределённой по всему пространству, то знакопеременная — аналог заряда, который сокращается при разных знаках.

Примеры (Знакопеременная мера).

- Пусть $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Можно определить $\nu(e) = \int_e g(x) dx$. Интеграл счётно-аддитивен, значит, ν — знакопеременная мера.
- Есть и другие меры (например, δ_0 — мера всякого множества равна 1, если оно содержит 0, и 0 иначе.)

Пусть (S, Σ, λ) — пространство с мерой $\lambda \geq 0$; предположим, что λ — σ -конечна. Пусть ν — знакопеременная мера на Σ .

Определение 2.10.2 (ν абсолютно непрерывна относительно λ). $\forall e \in \Sigma : \lambda(e) = 0 \Rightarrow \nu(e) = 0$.

Интересный факт (Теорема Радона — Никодима). Следующие два условия эквивалентны.

- ν абсолютно непрерывна относительно λ .
- $\exists g \in L^1(\lambda) : \forall e \in \Sigma : \nu(e) = \int_e g d\lambda$.

Это весьма фундаментальная теорема, и у неё довольно длинное непростое доказательство. Нам эту теорему докажут в курсе функционального анализа, так как там есть некий трюк с гильбертовыми пространствами, позволяющий существенно упростить доказательство.

Если такая g существует, то она называется *плотностью* меры μ относительно меры λ . Также g зовут *производная Радона — Никодима*, причины к чему мы увидим ниже.

Замечание. Плотность абсолютно непрерывной меры ν единственна.

Доказательство. Если g_1, g_2 — две различные плотности, то $\forall e : \nu(e) = \int_e g_1 d\lambda = \int_e g_2 d\lambda$, и значит $\int_e (g_1 - g_2) d\lambda = 0$. Рассматривая положительные и отрицательные части этой разности, получим, что она равна нулю почти всюду, что и требовалось. \square

Замечание. $\nu \geq 0 \iff$ плотность $g \geq 0$.

Доказательство. g не может быть отрицательной на множестве положительной меры e , иначе бы было $\nu(e) < 0$ \square

Вернёмся к ситуации дифференцируемого отображения $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$. Определим $\nu(e) = |F(e)|$ — образ меры Лебега λ_n на $F(G)$ при отображении F^{-1} . ν — мера на G , определённая на той же алгебре λ_n -измеримых подмножеств $\Sigma \subset 2^G$ (да?).

Факт $|e| = 0 \Rightarrow \nu(e) = 0$ как раз и говорит, что ν абсолютно непрерывна относительно меры Лебега λ_n на G .

Рассмотрим $U = F(G)$ — открытое множество в \mathbb{R}^n . Пусть K_j — исчерпывающая последовательность компактов для U , и положим $L_j := F^{-1}(K_j)$. Тогда L_j — исчерпывающая последовательность компактов для G , но нам важно даже не то, что они компактны, а то, что $\forall j : \nu(L_j) < \infty$.

Теперь рассмотрим *сужение меры* ν на L_j — это не совсем сужение в теоретико-множественном смысле, а просто мера, определённая на подмножествах L_j . Это сужение конечно, и тогда по теореме Радона — Никодима $\exists g \in L^1(L_j)$, такая, что $\forall e \in L_j : \nu(e) = \int_e g_j d\lambda$.

Теперь рассмотрим g_k для $k > j$. $\nu(e) = \int_e g_k d\lambda$. Понятно, что $g_k|_{L_j}$ — плотность меры ν на L_j , и получается, что эти плотности согласованы: из единственности плотности $g_k|_{L_j} = g_j$ почти всюду. Тогда они «склеиваются» в одну измеримую функцию $g : G \rightarrow \mathbb{R}$, для которой всё верно: $\forall e \in G : |F(e \cap L_j)| = \int_{e \cap L_j} g d\lambda$, и можно перейти к пределу. Не исключено, что полученная g не суммируема, что естественно — образ маленького множества даже при дифференцируемом отображении может очень сильно растянуться.

Следствие 2.10.1 (Вывод из теоремы Радона — Никодима). $\exists g : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, измеримая по Лебегу, такая, что $|F(e)| = \int_e g(x) dx$.

Таким образом, такая функция g найдётся, осталось её как-то найти, а точнее, доказать, что это $|J_F(x)|$.

Вопрос. Как искать плотность h у (вообще говоря знакопеременной) меры ν на G , если известно, что такая плотность есть?

Известно, что $\nu(e) = \int_e h(x) dx$. Предположим, что данная функция h локально суммируема: $\forall x \in G : \exists U \ni x : \int_U |h(x)| dx < \infty$. Функция, полученная из теоремы Радона — Никодима, именно такая.

Значит, плотность можно искать по кусочкам: $\forall e \in U \cap G : \nu(e) = \int_e h(x) \chi_U(x) dx$.

Интересный факт (Теорема о дифференцировании). Пусть B_r — шар (или куб) радиуса r с центром в $0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда в этих условиях ($h \in L^1(\mathbb{R}^n)$) — локально суммируема, $\nu(e) = \int_e h(x) dx$ почти всюду $h(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \nu(x + B_r)$.

В случае одномерного пространства $n = 1$ это оказывается теоремой Ньютона — Лейбница. Если h непрерывна в x , то доказательство работает то же самое, но оказывается, что это правда не только в случае непрерывной h .

Теорема 2.10.2 (Слабая теорема о дифференцировании). $\forall h \in L^1(\mathbb{R}^n) : \exists$ последовательность $r_n : r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, и почти всюду

$$\frac{1}{|B_{r_n}|} \int_{x+B_{r_n}} h(y) dy \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h(x)$$

Доказательство. Это, конечно, частный случай теоремы о дифференцировании, но зато доказывається проще.

Построим аппроксимативную единицу по функции $\phi := \frac{1}{|B_1|} \chi_{B_1}$.

Она будет иметь вид $\phi_r(x) = \frac{1}{r^n} \phi\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r^n |B_1|} \phi\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{|B_r|} \chi_{B_r}(x)$. Известно, что $h * \phi_r \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{L^1(\mathbb{R}^n)} h$.

Запишем

$$h * \phi_r = \int_{\mathbb{R}^n} h(y) \phi_r(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} h(y) \frac{1}{|B_r|} \chi_{B_r}(x - y) dy = \frac{1}{|B_r|} \int_{|x-y| < r} h(y) dy$$

Справа как раз стоит выражение, про которое мы хотим показать, что стремится к $h(x)$. Сходимость в L^1 означает сходимость по мере, а раз имеется сходимость по мере, то имеется последовательность r_n , стремящаяся к нулю, такая что $h * \phi_{r_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$ почти всюду. \square

Осталось доказать, что всюду

$$\frac{|F(x + B_r)|}{|B_r|} \xrightarrow{r \rightarrow 0} |J_F(x)| \quad (*)$$

Доказав это, мы получим, что так как левая часть почти всюду сходится к плотности h , и тогда окажется, что плотность как раз равна модулю якобиана.

Лемма 2.10.1 (Об искажении). Пусть $H : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, выберем $x_0 \in U$, пусть H непрерывно дифференцируемо и $d_H(x_0, _) = E$, тождественный оператор. Положим $y_0 := H(x_0)$. Утверждается, что $\forall \varepsilon \in (0, 1) : \exists \delta > 0 : r \in (0, \delta) \Rightarrow B_{r(1-\varepsilon)}(y_0) \subset H(B_r(x_0)) \subset B_{r(1+\varepsilon)}(y_0)$.

Доказательство. Выберем маленький $u \in \mathbb{R}^n$. По определению дифференцируемости $H(x_0 + u) = y_0 + \underbrace{d_H(x_0, u)}_u + v(u)$, где $v(u) = o(|u|)$.

Выберем $\varepsilon \in (0, 1)$, по определению o -маленького: $\exists \delta > 0 : |u| < \delta \Rightarrow |v(u)| < \varepsilon|u|$. Тогда, действительно, $r < \delta \Rightarrow |H(x_0 + u) - y_0| \leq |u| + |v(u)| \leq (1 + \varepsilon)|u| \leq (1 + \varepsilon)r$. Это доказывает правое включение.

Для доказательства левого включения возьмём H^{-1} , определённое в некоторой окрестности y_0 , причём $d_{H^{-1}}(y_0, _) = E$. Здесь уже доказано $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \rho < \delta \Rightarrow H^{-1}(B_\rho(y_0)) \subset B_{\rho(1+\varepsilon)}(x_0)$.

Применяя H ко включению, получаем $B_\rho(y_0) \subset H(B_{\rho(1+\varepsilon)}(x_0))$. Обозначив $r = \rho(1 + \varepsilon)$, получаем искомое включение, так как $B_{r(1-\varepsilon)} \subset B_{\frac{r}{1+\varepsilon}}$. \square

Приступим к доказательству (*). Пусть $A = d_F(x_0, _)$.

$$\frac{\nu(B_r(x_0))}{|B_r(x_0)|} = \frac{|F(B_r(x_0))|}{|B_r(x_0)|} = \frac{|AA^{-1}F(B_r(x_0))|}{|B_r(x_0)|} = |\det A| \frac{|A^{-1}F(B_r(x_0))|}{|B_r(x_0)|} = \left\| \phi := A^{-1}F \right\| = |J_F(x_0)| \frac{|\phi(B_r(x_0))|}{|B_r(x_0)|}$$

Но раз $\det d_\phi(x_0, _) = E$, то по лемме об искажении и принципу двух полицейских $\frac{|\phi(B_r(x_0))|}{|B_r(x_0)|} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 1$:

$$\frac{r^n(1-\varepsilon)^nv}{r^nv} = \frac{|B_{r(1-\varepsilon)}(y_0)|}{|B_r(x_0)|} \leq \frac{|\phi(B_r(x_0))|}{|B_r(x_0)|} \leq \frac{|B_{r(1+\varepsilon)}(y_0)|}{|B_r(x_0)|} = \frac{r^n(1+\varepsilon)^nv}{r^nv}$$

Лекция XIV

9 декабря 2023 г.

2.11 Мера Лебега на поверхностях

Пусть теперь $m \leq n$, и для $U \subset \mathbb{R}^m$ имеется гладкое инъективное $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ со всюду невырожденным дифференциалом.

Тогда $\forall e \subset U : f(e)$ — какая-то m -мерная поверхность в \mathbb{R}^n , и её n -мерная мера равна нулю, но есть же у поверхности какая-то площадь, и хочется уметь её вычислять.

2.11.1 Частный случай линейного f

Пусть $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный оператор. Тогда $A(\mathbb{R}^m)$ — линейное подпространство размерности m в \mathbb{R}^n , и в нём есть какая-то своя m -мерная мера Лебега.

Пусть $e \subset \mathbb{R}^m$ — измеримо. Как вычислить $A(e)$?

Выберем ортонормированные базисы e_1, \dots, e_m — в \mathbb{R}^m и g_1, \dots, g_m — в $A(\mathbb{R}^m)$. Пусть T — матрица оператора в этих базисах: $T_{i,j} = \langle Ae_i, g_j \rangle$. Тогда $\lambda(Ae) = |\det T| \cdot |e|$.

В этой формуле есть тот недостаток, что при определении T используется произвольно выбранный базис g_1, \dots, g_m в $A(\mathbb{R}^m)$. От этой проблемы можно избавиться так: $(\det T)^2 = \det(T^t T)$. Оказывается, матрица $T^t T$ выглядит приятно:

$$(T^t T)_{i,k} = \sum_{j=1}^m \langle Ae_i, g_j \rangle \langle Ae_k, g_j \rangle$$

Так как g_j — ортонормированный базис, то выше написано скалярное произведение $\langle Ae_i, Ae_k \rangle$.

Обозначим эту матрицу за $\Gamma(A)$: $\Gamma(A)_{i,k} = \langle Ae_i, Ae_k \rangle$. Эта $\Gamma(A)$ называется *матрицей Грама* для оператора A . В частности, $\det \Gamma(A)$ — *определитель Грама* для оператора A .

Тем самым, для линейного $f = A : \lambda(Ae) = (\det \Gamma(A))^{1/2} |e|$. Несложно догадаться, что для нелинейного f формула будет такая (хотя мы ещё не определили меру $f(e)$, но догадаться-то можно):

$$\lambda(f(e)) = \int_e (\det \Gamma(df(x, _)))^{1/2} dx$$

Самым главным вопросом является — как определить меру Лебега на такой поверхности.

2.11.2 p -мера Хаусдорфа

Здесь произвольное $p > 0$. Нам понадобятся только случаи $p \in \mathbb{N}$, но теорию удобнее развивать для всех положительных p . Также всё это можно проверить в произвольном метрическом пространстве.

Пусть $e \subset \mathbb{R}^n$ — любое (необязательно измеримое) подмножество. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим всевозможные не более, чем счётные, покрытия этого множества системой множеств $\{a_j\}$ ($e \subset \bigcup_j a_j$),

таких, что $\forall j : \text{diam}(a_j) \leq \varepsilon$. Назовём любое такое покрытие ε -покрытием.

Положим $\mu_p(e, \varepsilon) = \inf \sum_j \left(\frac{\text{diam } a_j}{2} \right)^p$, где инфимум берётся по всем таким покрытиям $\{a_j\}$. Двойка в знаменателе стоит «по традиции», чтобы μ_p было больше похоже на меру Лебега.

Факт 2.11.1. $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow \mu_p(e, \varepsilon_1) \geq \mu_p(e, \varepsilon_2)$.

Доказательство. Все покрытия диаметра не более ε_2 являются и покрытиями диаметра не более ε_1 . \square

Раз так, то $\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_p(e, \varepsilon) = \sup_{\varepsilon > 0} \mu_p(e, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_p^*(e)$ (где-то супремум конечен, где-то бесконечен).

Факт 2.11.2. μ_p^* — предмера на \mathbb{R}^n .

Доказательство.

- $\mu_p^*(\emptyset) = 0$.
- $e_1 \subset e_2 \Rightarrow \mu_p^*(e_1) \leq \mu_p^*(e_2)$, так как при уменьшении множества ε -покрытий становится больше, то есть $\forall \varepsilon > 0 : \mu_p(e_1, \varepsilon) \leq \mu_p(e_2, \varepsilon)$.
- Осталась счётная полуаддитивность: пусть $e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} e_k$, тогда надо проверить, что $\mu_p^*(e) \leq \sum_k \mu_p^*(e_k)$.

Доказательство. Можно считать, что $\forall k : \mu_p^*(e_k) < \infty$, иначе доказывать нечего.

Возьмём $\varepsilon > 0, \delta > 0$, для каждого k выберем ε -покрытие $\{a_{k,j}\}_j$ множества e_k , такое, что $\sum_j \left(\frac{\text{diam } a_{k,j}}{2}\right)^p < \mu_p(e_k, \varepsilon) + \frac{\delta}{2^k}$. Так как мера Хаусдорфа больше каждого из этих чисел, то они все конечны.

Таким образом, $\{a_{k,j}\}_{k,j}$ — ε -покрытие e , откуда $\mu_p(e, \varepsilon) \leq \sum_{j,k} \left(\frac{\text{diam } a_{k,j}}{2}\right)^p \leq \sum_k \mu_p(e_k, \varepsilon) + \delta$.

Устремляя $\delta \rightarrow 0$, получаем $\mu_p(e, \varepsilon) \leq \sum_k \mu_p(e_k, \varepsilon)$. \square

\square

Теперь можно применить теорему Лебега — Каратеодори, и получить настоящую меру. Хочется узнать, какие множества будут измеримыми после данной процедуры.

Факт 2.11.3. Если $\text{dist}(e_1, e_2) > 0$, то $\mu_p^*(e_1 \sqcup e_2) = \mu_p^*(e_1) + \mu_p^*(e_2)$.

Доказательство. В определении $\mu_p(e, \varepsilon)$ можно ограничиться ε -покрытиями $\{a_j\}$, такими, что $\forall j : a_j \cap e \neq \emptyset$.

В силу счётной полуаддитивности $\mu_p^*(e_1 \sqcup e_2) \leq \mu_p^*(e_1) + \mu_p^*(e_2)$.

Пусть $\delta = \text{dist}(e_1, e_2)$, рассмотрим $\varepsilon < \delta$. Пусть $\{a_j\}$ — ε -покрытие объединения, такое, что $\forall j : a_j \cap (e_1 \cup e_2) \neq \emptyset$. Тогда для каждого $j : a_j \cap e_1 = \emptyset$ либо $a_j \cap e_2 = \emptyset$. Стало быть

$$\begin{aligned} \mu_p(e_1 \sqcup e_2, \varepsilon) &= \sum_j \left(\frac{\text{diam}(a_j)}{2}\right)^p = \\ &= \sum_{j: a_j \cap e_1 \neq \emptyset} \left(\frac{\text{diam}(a_j)}{2}\right)^p + \sum_{j: a_j \cap e_2 \neq \emptyset} \left(\frac{\text{diam}(a_j)}{2}\right)^p \geq \mu_p(e_1, \varepsilon) + \mu_p(e_2, \varepsilon) \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 2.11.1. Пусть (X, d) — метрическое пространство, пусть η — предмера на X , причём $\forall e_1, e_2 \subset X : \text{dist}(e_1, e_2) > 0 \Rightarrow \eta(e_1 \sqcup e_2) = \eta(e_1) + \eta(e_2)$. Тогда все замкнутые множества в X η -измеримы.

Доказательство. Пусть $F \subset X$ замкнуто, проверим, что $\forall a \in X : \eta(a) = \eta(a \cap F) + \eta(a \setminus F)$. Из полуаддитивности достаточно проверять $\eta(a) \geq \eta(a \cap F) + \eta(a \setminus F)$.

Пусть $F_n := \{x \in X \mid \text{dist}(x, F) < \frac{1}{n}\}$. Из замкнутости F : $\bigcap_{n \geq 1} F_n = F$. Пусть $C_n := a \setminus F_n$.

Если $x \in a \cap F$, а $y \in C_n$, то разумеется $\text{dist}(x, y) \geq 1/n$. Таким образом, заведомо $\eta(a) \geq \eta(a \cap F) + \eta(C_n)$. Так как C_n , возрастая, в объединении дают $a \setminus F$, то хочется проверить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta(C_n) = \eta(a \setminus F)$. Запишем

$$a \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = C_n \sqcup \bigsqcup_{j \geq n} (C_{j+1} \setminus C_j)$$

Из счётной полуаддитивности $\eta(a \setminus F) \leq \eta(C_n) + \sum_{j \geq n} \eta(C_{j+1} \setminus C_j)$, но с другой стороны $\eta(a \setminus F) \geq \eta(C_n)$. Значит, необходимо и достаточно доказать, что $\sum_{j \geq n} \eta(C_{j+1} \setminus C_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Но это просто значит, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \eta(C_{j+1} \setminus C_j)$ сходится.

Разобьём ряд на два: $\sum_{j=2k} \eta(C_{j+1} \setminus C_j) + \sum_{j=2k+1} \eta(C_{j+1} \setminus C_j)$. Теперь все подряд идущие слагаемые отстоят друг от друга на положительное расстояние: $\text{dist}(C_{2k+1} \setminus C_{2k}, C_{2k-1} \setminus C_{2k-2}) > 0$.

Стало быть, $\forall n : \sum_{j=2k}^{j \leq n} \eta(C_{j+1} \setminus C_j) \leq \eta\left(\bigcup_{j=1}^n C_j\right) \leq \eta(a)$. Аналогично сходится ряд $\sum_{j=2k+1} \eta(C_{j+1} \setminus C_j)$. \square

Следствие 2.11.1. Все борелевские множества μ_p^* -измеримы.

Предложение 2.11.1. Пусть E_1, E_2 — два евклидовых пространства (возможно, разных размерностей). Пусть $a \subset E_1$, $\Phi : a \rightarrow E_2$ — C -липшицево отображение.

Тогда $\mu_p^*(\Phi(a)) \leq C^p(\mu_p^*(a))$.

Доказательство. Пусть $\{b_j\}$ — ε -покрытие a . Тогда $\text{diam}(\Phi(b_j)) \leq C\varepsilon$. Иными словами, $\{\Phi(b_j)\}_j$ — $C\varepsilon$ -покрытие множества $\Phi(a)$. Таким образом, $\mu_p(\Phi(a), C\varepsilon) \leq C^p \cdot \mu_p(a, \varepsilon)$. \square

Следствие 2.11.2. Мера Хаусдорфа не меняется при изометриях.

Теорема 2.11.2. Пусть $a \subset \mathbb{R}^n$ — какое-то. Пусть $\exists p > 0 : \mu_p^*(a) < \infty$. Тогда $\forall s > p : \mu_s^*(a) = 0$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$, так как $\mu_p^*(a) < \infty$, то $\exists \varepsilon$ -покрытие $\{b_j\}$ множества a , такое, что $\sum_j \left(\frac{\text{diam } b_j}{2}\right)^p \leq \mu_p^*(a) + 1$. Тогда $\sum_j \left(\frac{\text{diam } b_j}{2}\right)^s = \sum_j \left(\frac{\text{diam } b_j}{2}\right)^p \underbrace{\left(\frac{\text{diam } b_j}{2}\right)^{s-p}}_{\leq \varepsilon/2}$. Тем самым,

$$\sum_j \left(\frac{\text{diam } b_j}{2}\right)^s \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s-p} (\mu_p^*(a) + 1) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

\square

Следствие 2.11.3. Пусть $\alpha := \inf \{p > 0 \mid \mu_p^*(a) < \infty\}$. Тогда $\mu_s^*(a) = \begin{cases} 0, & s > \alpha \\ +\infty, & s < \alpha \\ \text{что-то}, & s = \alpha \end{cases}$.

Определение 2.11.1 (Хаусдорфова размерность $a \subset \mathbb{R}^n$). Вот это число α , отвечающее a . Обозначается $\dim_H(a)$.

Интересный факт. Хаусдорфова размерность стандартного Канторова множества равна $\frac{\log 2}{\log 3}$.

Теорема 2.11.3. $\dim_H(\mathbb{R}^n) = n$.

Доказательство. Пусть $K = [0, 1]^n$ — куб в \mathbb{R}^n . Докажем, что $\mu_n^*(K) \in (0, \infty)$ (или что $\mu_n(K) \in (0, \infty)$, куб — борелевское множество, поэтому неважно). Так как счётное число кубов покрывает всё \mathbb{R}^n (и при сдвиге мера не меняется), то легко показать, что размерность \mathbb{R}^n такая же, как и размерность куба.

Пусть $\{e_j\}$ — произвольное ε -покрытие куба K , и пусть b_j — шар радиуса $\text{diam}(e_j)$, содержащий e_j . Тогда $\{b_j\}$ — тоже покрытие, откуда $\sum_j |b_j| \geq |K|$. n -мерная мера Лебега шара $B_r \subset \mathbb{R}^n$ пропорциональна r^n . Для конкретности положим, что она равна cr^n .

$$1 = |K| \leq c \sum_j (\text{diam}(e_j))^n = 2^n c \cdot \sum_j \left(\frac{\text{diam}(e_j)}{2} \right)^n$$

В другую сторону пойдём так: разобьём куб K на диадические кубы ранга s , пусть K_i — диадические кубы ранга s , содержащиеся в K . Тогда $\{\bar{K}_i\}_i$ образуют ε -покрытие K при $\varepsilon = 2^{-s}\sqrt{n}$. Отсюда получаем оценку

$$\mu_n^*(K, 2^{-s}\sqrt{n}) \leq \sum_i \left(\frac{\text{diam } K_i}{2} \right)^n = 2^{sn} \cdot \left(\frac{2^{-s}\sqrt{n}}{2} \right)^n = \left(\frac{\sqrt{n}}{2} \right)^n \quad \square$$

Размерность m -мерного подпространства в \mathbb{R}^n равна m , например, потому что оно изометрично \mathbb{R}^m .

Обозначим за μ_p результат продолжения меры μ_p^* по теореме Лебега — Каратеодори.

Факт 2.11.4. $\exists C_{(m)} : C_{(m)}\mu_n = \lambda_m$.

Доказательство. μ_n не меняется при изометриях, в частности, при сдвиге. Значит, по теореме единственности, они пропорциональны. \square

Пусть $m \leq n$ (нас интересует на самом деле случай $m < n$, если равно, то всё и так известно), посмотрим на μ_m .

Понятно, что $C_{(m)}\mu_m$ совпадает с m -мерной мерой Лебега на всех m -мерных подпространствах в \mathbb{R}^n . Обозначим её за λ_m , что имеет смысл, так как оно везде совпадает с λ_m , где λ_m определено.

Теперь научимся вычислять $\lambda_m(f(e))$, где $e \subset \mathbb{R}^m$, $f : \underbrace{U}_{\supset e} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкая инъекция.

Лекция XV

13 декабря 2023 г.

Теорема 2.11.4. При сделанных предположениях $\lambda_m(f(e)) = \int_e |\det \Gamma(d_f(x, _))|^{1/2} dx$.

Доказательство.

- Сначала обоснуем вообще, что $\dim_H(f(e)) = m$.

Теорема 2.11.5 (Регулярность меры Лебега). \forall измеримого по Лебегу $e \subset \mathbb{R}^k$, $\forall \varepsilon > 0 : \exists$ открытое $U \supset e : |U \setminus e| < \varepsilon$. Кроме того, $|e| = \sup_{K \subset e} |K|$, где K — компакты (запись другая, так как мера любого компактного множества конечна).

Доказательство.

- Пусть $|e| < \infty$. Так как оно измеримо, то \exists параллелепипеды $\{P_j\}_j$, такие, что $\bigcup_j P_j \supset e$, $\left| \bigcup_j P_j \right| < |e| + \varepsilon$. Можно считать, что они открыты: параллелепипед с номером j можно раздуть так, что $\tilde{P}_j \supset P_j$ открыт, и $|\tilde{P}_j| < \frac{\varepsilon}{2j}$. Положим $U := \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{P}_j$, тогда U открыто, и $|U| < |e| + 2\varepsilon$.

Теперь если $|e| = \infty$, то воспользуемся σ -конечностью: пусть $\mathbb{R}^k = \bigcup_{s=1}^{\infty} B_s$, тогда подберём открытые $U_s \supset (e \cap B_s) : |U_s \setminus (e \cap B_s)| < \frac{\varepsilon}{2^s}$. Объединение $U := \bigcup_s U_s$ подходит: $U \supset e$, и $|U \setminus a| < \varepsilon$.

- Из предыдущего пункта можно найти подходящее замкнутое множество: пусть $a := \mathbb{R}^k \setminus e$, найдётся открытое $U \supset a, |U \setminus a| < \varepsilon$, тогда для замкнутого $F := \mathbb{R}^k \setminus U : |e \setminus F| = |U \setminus a| < \varepsilon$.

Чтобы сделать F компактным, возьмём пересечения $F_s := F \cap \overline{B_s}$, где $\mathbb{R}^k = \bigcup_{s=1}^{\infty} B_s$. Тогда легко видеть, что $|e| = \sup_s |F_s|$. \square

Возьмём исчерпывающую последовательность компактов $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \mathbb{R}^m$ ($K_i \subset \text{Int } K_{i+1}$).

Рассмотрим измеримое $E \subset K_j$. $|E| = C_{(m)} \mu_m^*(E) < +\infty$. Тем самым, согласно регулярности, найдутся вложенные компакты $\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \dots \subset E$, такие, что $|\Phi_j| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} |E|$. Положим

$$\Phi := \bigcup_{j=1}^{\infty} \Phi_j.$$

А раз так, то $f(E) = f(E \setminus \Phi) \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} f(\Phi_j)$. Значит, $f(E)$ измеримо — это объединение множества меры нуль $f(E \setminus \Phi)$, и счётного числа компактов $f(\Phi_j)$.

Получается, на измеримых подмножествах K_j корректно определена мера $\rho := \lambda_m(f)$ ($\rho(e) := \lambda_m(f(e))$).

- Пусть $\rho(e) = \lambda_m(f(e))$ — мера на U .

Лемма 2.11.1. ρ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега λ_m на U .

Доказательство леммы.

Пусть $\lambda_m(e) = 0$. Тогда $\mu_m(e) = 0$, и так как f — локально липшицева, то $\lambda_m(f(e)) = 0$. \square

По теореме Радона — Никодима: $\exists g_j : K_j \rightarrow \mathbb{R}$ — неотрицательные измеримые функции, такие, что

$$\forall e \subset K_j : \rho(e) = \lambda_m(f(e)) = \int_e g_j(x) dx \quad (*)$$

Далее, как и раньше, g_{j+1} почти всюду совпадает с g_j , поэтому $\exists g : U \rightarrow \mathbb{R}$ — искомая плотность меры.

- Осталось показать, что $g(x) = |\det \Gamma(d_f(x, _))|^{1/2}$, а это делается с помощью слабой теоремы о дифференцировании.

А именно, из слабой теоремы о дифференцировании $\exists r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 : g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_{r_n}(x)|} \int_{B_{r_n}(x)} g(y) dy$ почти всюду.

Теперь достаточно показать $\forall x \in U : \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda_m(f(B_r(x)))}{|B_r(x)|} = |\det \Gamma(d_f(x, _))|^{1/2}$.

Пусть $x_0 \in U, y_0 := f(x_0)$, тогда $\Pi := d_f(x_0, \mathbb{R}^m)$ — m -мерная касательная плоскость к f в точке x_0 . Для удобства будем считать $y_0 = 0$ (заменяем $f \rightsquigarrow f - y_0$).

В предыдущем семестре была доказана теорема о том, что $\exists V \ni 0$, такая, что $A := f(U) \cap V$ задаётся в виде $A = \{h(u) := (u, \phi(u)) | u \in W\}$, где $W \subset \Pi$ — окрестность нуля, $\phi : \Pi \rightarrow \Pi^\perp$ — некоторое непрерывно дифференцируемое отображение, причём $d_\phi(x_0, _) = 0$.

Пусть $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi$ — ортогональный проектор. Тогда P и h взаимно обратны ($P \circ h = \text{id}$).

Из непрерывной дифференцируемости ϕ : $\forall \varepsilon > 0 : \exists \rho > 0 : |u| \leq \rho \Rightarrow h$ — липшицево с константой не выше $1 + \varepsilon$:

$$h(u_1) - h(u_2) \leq |u_1 - u_2| + \underbrace{|\phi(u_1) - \phi(u_2)|}_{\leq |d_\phi(v, u_1 - u_2)|}, \text{ где некая точка } v \in [u_1, u_2].$$

Устроим $\tilde{f} : U \rightarrow \Pi, \tilde{f}(x) = Pf(x)$. Заметим, что меры $f(B_r(x_0))$ и $\tilde{f}(B_r(x_0))$ близки. В самом деле, из 1-липшицевости P : всегда $\mu_m(Pf(B_r(x_0))) \leq \mu_m(f(B_r(x_0)))$, и при $r \leq \rho$: $\mu_m(f(B_r(x_0))) = \mu_m(h(\tilde{f}(B_r(x_0)))) \leq (1 + \varepsilon)^m \mu_m(\tilde{f}(B_r(x_0)))$. Отсюда видно, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_m(\tilde{f}(B_r(x_0)))}{|B_r(x_0)|} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_m(f(B_r(x_0)))}{|B_r(x_0)|}$$

Но так как \tilde{f} — отображение между двумя m -мерными евклидовыми пространствами, то можно записать $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_m(f(B_r(x_0)))}{|B_r(x_0)|} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_m(\tilde{f}(B_r(x_0)))}{|B_r(x_0)|} = |J_{\tilde{f}}(x)|$.

Осталось заметить, что образом $d_f(x_0, -)$ является Π . Значит, P не меняет дифференциал, $d_{\tilde{f}}(x_0, -) = d_f(x_0, -)$. \square

Рассмотрим оператор $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $m < n$. Пусть e_j — стандартный базис в \mathbb{R}^m , тогда Ae_j — столбцы матрицы A .

Можно посчитать определитель Грама матрицы A : $\det(\langle Ae_i, Ae_j \rangle)_{i,j}$ по формуле Бине — Коши: $\det(A^t A) = \sum_{I \subset [n], |I|=m} \det((A^t)_I) \det(A^I) = \sum_{I \subset [n], |I|=m} \det(A^I)^2$.

Примеры (Меры поверхностей).

- Пусть $m = 1$. Рассмотрим путь $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$. $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$. Тогда $d_\gamma(x_0, -) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(x_0) \\ \vdots \\ \gamma'_n(x_0) \end{pmatrix}$, и $|G(d_\gamma(x_0, -))| = \sqrt{|\gamma'_1(x_0)|^2 + \dots + |\gamma'_n(x_0)|^2}$. Если γ инъективна, то получается формула длины пути $\int_a^b \sqrt{|\gamma'_1(x)|^2 + \dots + |\gamma'_n(x)|^2} dx$.
- Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$, и отображение представляет собой график: $F(x, y) = (x, y, \phi(x, y))$, где $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Здесь матрица Якоби $J_F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_1 \phi(x, y) & \partial_2 \phi(x, y) \end{pmatrix}$, где ∂_i — производная по i -му аргументу. Тем самым, $\mu_2(F(e)) = \int_e \sqrt{1 + (\partial_1 \phi)^2 + (\partial_2 \phi)^2} d\lambda_2$.

2.12 Некоторые конкретные интегралы

1. Заинтересуемся сходимостью $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} |x|^\alpha dx$. Сделаем полярную замену $r, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}$. Интеграл обращается в $\int_1^\infty r^{n-1} r^\alpha dr \cdot \Psi(\phi_1, \dots, \phi_n)$. Отсюда видно, что так как $\Psi(\phi_1, \dots, \phi_n)$ интегрируемо, то интеграл сходится $\iff n - 1 + \alpha < -1 \iff \alpha < -n$.
2. Вычислим $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$. Разумеется, интеграл суммируем. Пусть $I := \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$.

$$I^2 = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy \quad (\ominus)$$

Так как функция $e^{-x^2}e^{-y^2}$ суммируема на плоскости, то по теореме Фубини он равен двойному интегралу:

$$\left(\equiv \right) \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\phi = \|t = r^2\| = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} dt = \pi$$

Тем самым, $I = \sqrt{\pi}$, и из чётности функции e^{-x^2} :

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Глава 3

Элементы общей теории меры

Пусть (X, Σ) — пространство с σ -алгеброй, на которой мы будем рассматривать разные меры.

Так как у этих мер могут быть разные множества меры нуль, то при пополнении одной меры могут появиться новые элементы Σ , на которые непонятно, как продолжать другую. Поэтому здесь никаких предположений о полноте мер скорее не будет.

Здесь *мера* — счётно-аддитивная и, вообще говоря, комплексная функция $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$. Вспомним, что счётная аддитивность означает $\nu\left(\bigsqcup_j e_j\right) = \sum_j \nu(e_j)$.

В силу технических соображений мы запретим мере принимать бесконечные значения, хотя на самом деле их можно и разрешить.

Пусть $\nu = \alpha + i\beta$, где α, β — вещественные меры ($\alpha = \Re(\nu), \beta = \Im(\nu)$). Понятно, что ν счётно-аддитивна $\iff \alpha, \beta$ каждая счётно-аддитивна.

Предложение 3.0.1. Для всяких непересекающихся e_j : ряд $\sum_j \nu(e_j)$ сходится абсолютно.

Доказательство. По определению сумма не зависит от перестановок слагаемых. □

Теорема 3.0.1. Множество значений любой комплексной (**конечной**) меры ограничено.

Доказательство. В пределах данного доказательства назовём множество $a \in \Sigma$ «плохим», если $\sup\{|\nu(b)| \mid b \subset a, b \in \Sigma\} = +\infty$. Пусть наше пространство — (X, Σ) .

Лемма 3.0.1. Если e — плохое множество, и $e = e_1 \sqcup e_2$, то хотя бы одно из e_1 и e_2 — плохое.

Доказательство леммы.

От противного: если оба хорошие, то и e хорошее, так как $\forall b \subset e : b = (b \cap e_1) \cup (b \cap e_2)$, и меры $(b \cap e_1)$ и $(b \cap e_2)$ ограничены. □

Лемма 3.0.2. Если e — плохое множество, то $\exists F, G : F \sqcup G = e$, такие, что $|\nu(F)|, |\nu(G)| \geq 1$.

Доказательство леммы.

Так как e — плохое, то $\exists F : |\nu(F)| \geq |\nu(e)| + 1$. Но тогда для $G := e \setminus F : |\nu(G)| = |\nu(e) - \nu(F)| \geq |\nu(F)| - |\nu(e)| \geq 1$. □

От противного: пусть X — плохое. Тогда $\exists a, b : a \sqcup b = X$, где $|\nu(a)|, |\nu(b)| \geq 1$. Одно из них плохое, обозначим его через F_1 , а второе обозначим G_1 . Применяя ту же самую конструкцию к F_1 , получим $F_1 = F_2 \sqcup G_2$, где $|\nu(F_2)|, |\nu(G_2)| \geq 1$, причём F_2 — плохое.

И так далее, в итоге $X = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} G_j \sqcup \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j$.

Тогда $\nu\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} G_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(G_j)$, ряд не сходится (члены не стремятся к нулю, например), противоречие. \square

Лекция XVI

20 декабря 2023 г.

3.1 Разложение Хана

Сужение меры можно определить так $\mu|_E(a) \stackrel{def}{=} \mu(a \cap E)$.

Иногда сужение определяют немного по-другому: $\mu|_E(a)$ — мера, заданная как μ , но теоретико-множественно суженная на $\{b \in \Sigma | b \subset E\}$.

Разницы особой нет (конечно, предполагается, что $E \in \Sigma$), можно считать и так, и так: для множеств $a \subset E$ оба определения идентичны.

Теорема 3.1.1 (Хан). Пусть μ — **конечная** вещественная мера на (X, Σ) . Тогда $\exists E, F \in \Sigma : E \sqcup F = X$, такие, что $\mu|_E \geq 0, \mu|_F \leq 0$. Такое E , что $\mu|_E \geq 0$ называется *множеством положительности* (аналогично, F — *множество отрицательности*).

Доказательство. $\{\mu(b) | b \in \Sigma\}$ ограничено (теорема 3.0.1), пусть $M = \sup_{b \in \Sigma} \mu(b)$. Так как $\mu(\emptyset) = 0$, то $M \geq 0$. Рассмотрим два случая.

- $M = 0$. Тогда $\mu \leq 0$, и $F := X, E := \emptyset$ подходят.
- $M > 0$. По определению супремума $\exists b_k \in \Sigma : M - \frac{1}{2^k} \leq \mu(b_k) \leq M$.

Лемма 3.1.1. Пусть $b \subset X$, $\mu(b) = M - \varepsilon$. Если измеримое $e \subset b$, то $\mu(e) \geq -\varepsilon$.

Доказательство леммы.

От противного: пусть $\exists e \subset b_k : \mu(e) < -\varepsilon$. Тогда мера $b_k \setminus e$ больше супремума M . \square

Положим $\overline{b_k} = \bigcup_{n \geq k} b_n$. Оценим $\mu(\overline{b_k})$ снизу:

$$\begin{aligned} \mu(b_k \cup b_{k+1} \cup \dots \cup b_n) &= \mu(b_k) + \mu(b_{k+1} \setminus b_k) + \mu(b_{k+2} \setminus (b_k \cup b_{k+1})) + \dots + \mu(b_n \setminus (\dots)) \geq \\ &\geq \left(M - \frac{1}{2^k}\right) - \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+2}} - \dots - \frac{1}{2^n} \geq M - \frac{1}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

Переходя к пределу в силу счётной аддитивности, получаем $\mu(b_k \cup b_{k+1} \cup \dots) \geq M - \frac{1}{2^{k-1}}$.

Теперь заметим, что $\overline{b_1} \supset \overline{b_2} \supset \dots$. Положим $E := \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{b_k}$. В силу монотонной непрерывности $\mu(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\overline{b_k}) = M$ (формально, хотя бы M , но так как M — супремум всех мер, то больше быть не может).

Теперь в силу леммы все подмножества E имеют неотрицательную меру. Положим $F := X \setminus E$, все подмножества F имеют неположительную меру (от противного: если $f \subset F$ имеет положительную меру, то $\mu(E \cup f) > M$). \square

Такие $E, F \subset X$ из теоремы — *разложение Хана*. Оно единственно с точностью до множества меры нуль — если $A \subset E$ имеет меру нуль, то все его измеримые подмножества тоже имеют меру нуль, и $(E \setminus A, F \cup A)$ — тоже разложение Хана.

Теперь можно определить *положительную и отрицательную части меры* $\mu^+(a) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(a \cap E)$ и $\mu^-(a) \stackrel{\text{def}}{=} -\mu(a \cap F)$. Тогда $\mu(a) = \mu^+(a) - \mu^-(a)$, тем самым любая конечная вещественная мера есть разность двух неотрицательных.

Определение 3.1.1 (Модуль меры). $|\mu|(a) \stackrel{\text{def}}{=} \mu^+(a) + \mu^-(a)$.

Введём естественный частичный порядок на мерах: $\mu \leq \nu \iff \forall e \in \Sigma : \mu(e) \leq \nu(e)$.

Предложение 3.1.1. μ^+ есть наименьшая из неотрицательных мер $\nu : \nu \geq \mu$.

Доказательство. Пусть E, F — разложение Хана для μ . Пусть неотрицательная $\nu \geq \mu$. Тогда $\nu(a) = \nu(a \cap E) + \nu(a \cap F) \geq \mu(a \cap E) = \mu^+(a)$. \square

Замечание. $\mu^- = (-\mu)^+$.

Замечание. Пусть $g : X \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ -1, & x \in F \end{cases}$. Тогда $\mu(e) = \int_e g d|\mu|$.

Доказательство.

$$\int_e g d|\mu| = \int_{e \cap E} d|\mu| - \int_{e \cap F} d|\mu| = \int_{e \cap E} d\mu^+ - \int_{e \cap F} d\mu^- = \mu^+(e) - \mu^-(e) = \mu(e) \quad \square$$

3.2 Интеграл комплексных функций

Пусть (X, Σ) — пространство с σ -алгеброй, и ρ — неотрицательная счётно-аддитивная мера.

Пусть $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$ является Σ -измеримым (прообраз любого борелевского множества измерим). Разложим $\phi = \alpha + i\beta$, где α, β — вещественные измеримые функции.

Определим $\int_a \phi d\rho \stackrel{\text{def}}{=} \int_a \alpha d\rho + i \int_a \beta d\rho$. Данный интеграл обладает всеми свойствами, которые от него ожидаются — аддитивность, \mathbb{C} -линейность, счётная аддитивность по множеству, счётная аддитивность по функции.

Основную оценку интеграла удобно доказывать так:

$$\begin{aligned} \exists \theta \in \mathbb{R} : e^{i\theta} \int_a \phi d\rho &\in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \left| \int_a \phi d\rho \right| &= \Re \int_a e^{i\theta} \phi d\rho = \left| \int_a \Re(e^{i\theta} \phi) d\rho \right| \leq \int_a |e^{i\theta} \phi| d\rho = \int_a |\phi| d\rho \end{aligned}$$

Многие комплексные меры (как счётно-аддитивные функции множеств) как раз происходят из таких интегралов.

Пусть μ — комплексная мера на Σ .

Определение 3.2.1 (Полная вариация μ на $a \in \Sigma$). $|\mu|(a) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |\mu(e_j)| \mid e_1 \sqcup \dots \sqcup e_N = a \right\}$

Теорема 3.2.1. $|\mu|$ есть неотрицательная конечная счётно-аддитивная мера на Σ .

Доказательство. См. (теорема 3.2.2) \square

Замечание. Если μ вещественна, то $|\mu|(a) = \mu^+(a) + \mu^-(a)$, где $|\mu|$ понимается, как полная вариация.

Иными словами, не зря модуль меры и её полную вариацию обозначают одинаково.

Доказательство. Если $a \in \Sigma$, и $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_n = a$, то $\sum_{j=1}^n |\mu(e_j)| \leq \sum_{j=1}^n (\mu^+(e_j) + \mu^-(e_j)) = \mu^+(a) + \mu^-(a)$.

Обратно, разобьём $a = (a \cap E) \cup (a \cap F)$ (где E, F — разложение Хана). Тогда $|\mu|(a) \geq |\mu(a \cap E)| + |\mu(a \cap F)| = \mu^+(a) + \mu^-(a)$. \square

Лемма 3.2.1. Пусть ρ_1, ρ_2 — комплексные меры на Σ , $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Тогда $\forall a \in \Sigma : |(\alpha\rho_1 + \beta\rho_2)|(a) \leq |\alpha||\rho_1|(a) + |\beta||\rho_2|(a)$.

Доказательство. Пусть $a = e_1 \sqcup \dots \sqcup e_n$. Оценим

$$\sum_{j=1}^n |(\alpha\rho_1 + \beta\rho_2)(e_j)| \leq |\alpha| \sum_{j=1}^n |\rho_1(e_j)| + |\beta| \sum_{j=1}^n |\rho_2(e_j)| \leq |\alpha||\rho_1|(a) + |\beta||\rho_2|(a)$$

и перейдём к супремуму по всем разбиениям $a = e_1 \sqcup \dots \sqcup e_n$. \square

Следствие 3.2.1. Если ρ — комплексная мера, то $\forall a : |\rho|(a) < +\infty$.

Доказательство. Разложим $\rho = \rho_1 + i\rho_2$. ρ_1, ρ_2 — вещественные меры, их модули принимают конечные значения. \square

Предложение 3.2.1. Пусть ν — неотрицательная (необязательно конечная) мера на Σ , пусть g — комплексная суммируемая (относительно ν) функция. Определим $\mu(e) := \int_e g d\nu$.

Тогда $|\mu|(a) = \int_a |g| d\nu$.

Доказательство.

0. Пусть $g \in L^1(\nu)$. Тогда $|\mu|(a) \leq \int_a |g| d\nu$. Действительно, пусть $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_n = a$. Тогда

$$\sum_{j=1}^n |\mu(e_j)| = \sum_{j=1}^n \left| \int_{e_j} g d\nu \right| \leq \sum_{j=1}^n \int_{e_j} |g| d\nu = \int_a |g| d\nu.$$

1. Пусть $g = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{e_j}$ — простая функция, где мы считаем, что $e_j \in \Sigma$ попарно не пересекаются.

Рассмотрим разбиение $a = (a \cap e_1) \sqcup \dots \sqcup (a \cap e_k) \sqcup \left(a \setminus \bigcup_{j=1}^k e_j \right)$.

$$|\mu|(a) \geq \sum_{j=1}^k |\mu(a \cap e_j)| + \underbrace{\left| \mu \left(a \setminus \bigcup_{j=1}^k e_j \right) \right|}_{=0} = \sum_{j=1}^k \left| \int_{a \cap e_j} g d\nu \right| = \sum_{j=1}^k |c_j| \nu(a \cap e_j) = \int_a |g| d\nu$$

2. Пусть $g \in L^1(\nu)$ ($g : X \rightarrow \mathbb{C}$). Выберем $\varepsilon > 0$. Тогда так как простые функции плотны в L^1 , то $\exists h : X \rightarrow \mathbb{C}$ — простая функция, такая, что $\int_X |g - h| d\nu < \varepsilon$ (отдельно приблизим вещественную и мнимую части).

Пусть $\mu_1(a) = \int_a h d\nu$, и положим $\mu_2 := \mu - \mu_1$.

$$\mu(a) = \int_a h d\nu + \int_a (g - h) d\nu = \mu_1(a) + \mu_2(a)$$

$$\begin{cases} |\mu|(a) \leq |\mu_1|(a) + |\mu_2|(a) \\ |\mu_1|(a) \leq |\mu|(a) + |\mu_2|(a) \end{cases} \Rightarrow |\mu_1|(a) - |\mu_2|(a) \leq |\mu|(a) \leq |\mu_1|(a) + |\mu_2|(a)$$

Оценим $\mu_2(a)$:

$$|\mu_2|(a) \leq \int_a |g - h| d\nu \leq \int_X |g - h| d\nu \leq \varepsilon$$

Отсюда получается

$$\int_a |h| d\nu - \varepsilon \leq |\mu|(a) \leq \int_a |h| d\nu + \varepsilon$$

И наконец можно заменить h на g , при этом мы ошибёмся не больше, чем на ε .

$$\int_a |g| d\nu - 2\varepsilon \leq |\mu|(a) \leq \int_a |g| d\nu + 2\varepsilon$$

Устремим $\varepsilon \rightarrow 0$. □

Теперь докажем теорему, сформулированную ранее.

Теорема 3.2.2. $|\mu|$ есть неотрицательная конечная счётно-аддитивная мера на Σ .

Доказательство. Пусть μ — комплексная мера на Σ , разложим $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, где μ_1, μ_2 — вещественные меры. Пусть $\nu = \mu_1^+ + \mu_2^+ + \mu_1^- + \mu_2^-$. Все четыре слагаемых — абсолютно непрерывные меры относительно ν , то есть по теореме Радона — Никодима они представляются через плотность: $\exists g_{1,2}^\pm \in L^1(\nu) : \mu_{1,2}^\pm(e) = \int_e g_{1,2}^\pm d\nu$.

Тогда $|\mu|(e) = \int_e |g| d\nu$, и действительно получаем, что $|\mu|$ — неотрицательная конечная счётно-аддитивная мера на Σ . □

3.2.1 Интеграл по комплексной мере

Пусть $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ измерима относительно комплексной меры $\mu = \mu_1 + i\mu_2$.

Определим $\int_a g d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_a g d\mu_1^+ - \int_a g d\mu_1^- + i \left(\int_a g d\mu_2^+ - \int_a g d\mu_2^- \right)$

В данном определении предполагается, что g суммируема относительно всех четырёх мер. Оказывается, $g \in L^1(\mu_{1,2}^\pm) \iff g \in L^1(|\mu|)$, так как $\mu_{1,2}^\pm \leq |\mu|$.

Лемма 3.2.2 (Линейность по мере). Пусть ρ, σ — две комплексные меры на Σ , пусть g суммируема относительно $|\rho|$ и $|\sigma|$. Утверждается, что

$$\int_a g d(\rho + \sigma) = \int_a g d\rho + \int_a g d\sigma$$

Доказательство. Утверждается, что $\exists \lambda$ — положительная мера на Σ , относительно которой ρ, σ абсолютно непрерывны: $\exists u, v : X \rightarrow \mathbb{C}$, такие, что $\rho(e) = \int_e u d\lambda$ и $\sigma(e) = \int_e v d\lambda$. Например, в качестве λ можно взять $\rho_1^+ + \rho_1^- + \rho_2^+ + \rho_2^- + \sigma_1^+ + \sigma_1^- + \sigma_2^+ + \sigma_2^-$.

Разложим на вещественную и мнимую части $u = u_1 + iu_2, v = v_1 + iv_2$.

$$\int_a g d\rho = \int_a gu_1^+ d\lambda - \int_a gu_1^- d\lambda + i \left(\int_a gu_2^+ d\lambda - \int_a gu_2^- d\lambda \right) = \int_a gu d\lambda$$

Аналогично $\int_a g d\sigma = \int_a gv d\lambda$.

$$\int_a g d\rho + \int_a g d\sigma = \int_a g(u+v) d\lambda = \int_a g d(\rho + \sigma)$$

□

3.3 Разложение Лебега

Пусть (X, Σ, λ) — пространство с неотрицательной σ -конечной мерой $\lambda \geq 0$.

Пусть ρ — комплексная мера на Σ .

Определение 3.3.1 (ρ абсолютно непрерывна относительно λ). $\lambda(e) = 0 \Rightarrow \rho(e) = 0$.

Определение 3.3.2 (ρ сингулярна относительно λ). $\exists a \in \Sigma : \lambda(a) = 0$ и $\forall e \subset X \setminus a : |\rho|(e) = 0$.

Пример. Стандартная мера Лебега λ_1 на \mathbb{R} взаимно сингулярна точечной δ -мере δ_0 .

Теорема 3.3.1 (Лебег). Для произвольной комплексной меры ρ на Σ существует и единственно представление $\rho = \rho_1 + \rho_2$, где ρ_1 абсолютно непрерывна относительно λ , а ρ_2 сингулярна относительно λ .

Доказательство. Положим $A := \sup \{ |\rho|(e) \mid e \in \Sigma, \lambda(e) = 0 \}$. Тогда $\exists e_n \in \Sigma : |\rho|(e_n) > A - \frac{1}{n}$.

Положим $\overline{e_n} = e_n \cup e_{n+1} \cup \dots$. Тогда $\overline{e_1} \supset \overline{e_2} \supset \dots$, и положим $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{e_n}$.

В силу монотонной непрерывности $|\rho|(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} |\rho|(\overline{e_n}) = A$. Так как $\forall n : \lambda(\overline{e_n}) = 0$, то $\lambda(E) = 0$.

Разложим $\rho_1(e) := \rho(e \setminus E), \rho_2(e) := \rho(e \cap E)$. В таком представлении ρ_2 очевидно сингулярна относительно λ . Абсолютную непрерывность ρ_1 относительно λ докажем от противного.

Пусть $\exists b \in \Sigma, b \subset X \setminus E : |\rho_1|(b) > 0, \lambda(b) = 0$. Тогда определим $E_1 = E \cup b$, и окажется, что $|\rho|(E_1) = |\rho|(E) + |\rho|(b) \geq A + |\rho_1|(b) > A$, противоречие. □