

# Матанализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков  
Конспектировал Леонид Данилевич

I семестр, осень 2022 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение в теорию множеств</b>	<b>3</b>
1.1	Некоторые формулы . . . . .	3
1.1.1	Формулы де Моргана . . . . .	3
1.1.2	Связь пересечения и объединения . . . . .	3
1.2	Примеры множеств . . . . .	3
1.2.1	Отрезки . . . . .	3
1.3	Отображения . . . . .	4
1.3.1	Образ множества . . . . .	4
1.3.2	Виды отображений . . . . .	4
1.3.3	Прообраз . . . . .	4
1.3.4	Функции . . . . .	5
1.4	Упорядоченные пары . . . . .	5
1.4.1	Декартово произведение . . . . .	5
1.5	Прочие определения . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Вещественные числа</b>	<b>7</b>
2.1	Аксиомы вещественных чисел . . . . .	7
2.2	Неравенства . . . . .	8
2.2.1	Модуль числа . . . . .	8
2.2.2	Ещё о подмножествах прямой . . . . .	9
2.3	Ещё три аксиомы вещественных чисел . . . . .	9
2.3.1	Аксиома Архимеда . . . . .	9
2.3.2	Аксиома индукции . . . . .	9
2.3.3	Аксиома Кантора — Дедекинда . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Грани, замкнутость, предельные точки, пределы</b>	<b>12</b>
3.0.1	Небольшая серия определений и теорем из топологии . . . . .	13
3.0.2	Десятичная запись вещественного числа . . . . .	15
3.1	Пределы . . . . .	16
3.1.1	Определение предела . . . . .	16
3.1.2	Примеры . . . . .	17
3.1.3	Свойства . . . . .	18
3.1.4	Обозначения предела . . . . .	18
3.1.5	Предел в терминах неравенств . . . . .	18
3.1.6	Арифметические действия с пределами . . . . .	20
3.1.7	Теорема Вейерштрасса об ограниченной возрастающей функции . . . . .	22
3.1.8	Гармонические ряды . . . . .	24
3.1.9	Предел последовательности . . . . .	24
3.2	Ряды . . . . .	28
3.2.1	Примеры . . . . .	28
3.2.2	Критерий Коши для рядов . . . . .	28
3.2.3	Преобразование Абеля . . . . .	29
3.3	Верхние и нижние пределы . . . . .	30
3.3.1	Свойства . . . . .	30

3.4	Бесконечные пределы . . . . .	33
3.5	Пределы справа и слева . . . . .	34
3.6	Классификация разрывов . . . . .	34
3.7	Непрерывные функции на замкнутых конечных множествах . . . . .	34
3.8	Степени и корни . . . . .	37
3.8.1	Свойства . . . . .	38
3.9	(Асимптотическое) сравнение функций. $\mathcal{O}$ и $o$ символика. . . . .	38
<b>4</b>	<b>Дифференцирование</b>	<b>40</b>
4.0.1	Резюме определений дифференцируемости . . . . .	40
4.0.2	Арифметические свойства дифференцирования . . . . .	40
4.0.3	О суперпозиции (композиции) . . . . .	41
4.0.4	Производная $x^n$ . . . . .	42
4.0.5	Производная обратного отображения . . . . .	42
4.1	Смыслы производной . . . . .	43
4.1.1	Скорость точки . . . . .	43
4.1.2	Касательные . . . . .	43
4.2	Связь производной и монотонности . . . . .	43
4.2.1	Локальные максимум и минимум . . . . .	44
4.2.2	Поведение функции на отрезке . . . . .	44
4.3	Формула Тейлора . . . . .	47
4.3.1	Построение многочлена Тейлора . . . . .	47
4.3.2	Формула Бинома Ньютона . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Первообразная</b>	<b>51</b>
5.1	Про дифференциальные формы . . . . .	51
5.2	Первообразные элементарных функций . . . . .	52
5.3	Сложный дифференциал . . . . .	52
5.4	Интегрирование по частям . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Интеграл</b>	<b>54</b>
6.1	Интеграл Римана — Дарбу . . . . .	54
6.1.1	Интуиция . . . . .	54
6.1.2	Определение . . . . .	55
6.2	Достаточный признак интегрируемости . . . . .	56
6.3	Свойства интеграла по Риману — Дарбу . . . . .	57
6.4	Критерий интегрируемости по Риману — Дарбу . . . . .	58
6.5	Связь между интегралом и первообразной . . . . .	60
6.5.1	Теорема Ньютона — Лейбница . . . . .	60
6.5.2	Замена переменной под интегралом . . . . .	61
6.6	Логарифм и экспонента . . . . .	63
6.6.1	Свойства . . . . .	63

# Лекция I

2 сентября 2022 г.

## Хорошие книги

1. Курс московского университета, Зорич. Математический анализ, 2 тома.
2. Учебное пособие СПбГУ на первые 2 семестра. О. Л. Виноградов
3. Г. М. Фихтенгольц. Основы матанализа или что-то такое. Несколько устарело, много примеров.
4. В. П. Хавин. `contains`(«основы»)
5. Основы математического анализа, У. Рудин. Короткая и плотная (информация за первые 2 семестра)

# Глава 1

## Введение в теорию множеств

Принадлежность  $x \in X$ , объединение  $X \cup Y$ , пересечение  $X \cap Y$ , разность  $X \setminus Y$ , задание свойством  $X \setminus Y = \{x \in X | x \notin Y\}$ , дополнение (до универсума) (пример: дополнение до множества целых чисел  $\mathbb{Z}$ )  $A^c = \mathbb{Z} \setminus A$ ,  $A^{cc} = A$ .

### 1.1 Некоторые формулы

#### 1.1.1 Формулы де Моргана

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Доказательство.

$$x \in (A \cup B)^c \iff x \notin A \cup B \iff x \notin A \wedge x \notin B \iff x \in A^c \wedge x \in B^c \iff x \in A^c \cap B^c. \quad \square$$

Доказательство второй формулы де Моргана получается аналогично, или же из первой, заменой  $A$  на  $A^c$  и  $B$  на  $B^c$ , и применением  $A^{cc} = A$ .

#### 1.1.2 Связь пересечения и объединения

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \text{ и двойственная ей } (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

### 1.2 Примеры множеств

Множество всех целых чисел  $\mathbb{Z}$ , его подмножества  $\mathbb{Z}^+ = \{n \in \mathbb{Z} | n \geq 0\} = \mathbb{N}_0$  всех неотрицательных целых чисел и  $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} | n > 0\}$  всех натуральных чисел.

Множество рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ .

Множество вещественных чисел  $\mathbb{R}$ .

#### 1.2.1 Отрезки

Пускай  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Определение 1.2.1** (Отрезки).

- $[a; b] \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$  — отрезок (сегмент);
- $(a; b) \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$  — интервал;
- $[a; b) \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$  — полуинтервал;

- $(a; b] \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$  — ещё полуинтервал.

На лекциях будут использоваться термин интервал для всех четырёх типов отрезков. Иногда будут накладываться дополнительные требования  $a \leq b$ . Вообще говоря, все отрезки определены при  $a > b$  и совпадают с пустым множеством  $\emptyset$ .

## 1.3 Отображения

Понятие *отображения*  $f : X \rightarrow Y$  не имеет чёткого определения и, насколько я понял, задаётся околоаксиоматически.

Пусть даны множества  $X, Y$  и некое правило, по которому каждому элементу множества  $X$  сопоставляется однозначно определённый элемент  $Y$ . Для таких элементов  $x \in X, y \in Y$  пишут  $y = f(x)$ .

$X$  является областью определения отображения  $f$ , а  $Y$  — множество значений  $f$ . Необязательно каждый элемент  $Y$  является значением  $f$  в некой точке. Отображение характеризуется двумя данными множествами и «правилом».

Например,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1 \\ g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 \end{aligned}$$

### 1.3.1 Образ множества

Примечание: Знак  $\subset$  ниже используется в качестве  $\subseteq$ .

Пусть  $F : X \rightarrow Y$  — отображение. Для  $A \subset X$  образ множества  $A$  при отображении  $F$ :  $F(A) \stackrel{def}{=} \{y \in Y | y = F(x), x \in A\}$ . Очевидно,  $F(A) \subset Y$ .

Например, для выше определённого  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$  образом  $[0; 1]$  является  $f([0; 1]) = [1; 3]$ .

### 1.3.2 Виды отображений

Пусть  $f(X) = Y$ ; тогда говорят, что  $f$  — отображение  $X$  на  $Y$  (*сюръекция*). А именно, для  $f : X \rightarrow Y$  — сюръекция  $\iff f(X) = Y$ .

**Определение 1.3.1** (Инъекция или взаимно-однозначное отображение).  $f$  является инъекцией, если для  $\forall x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$ .

**Определение 1.3.2** (Обратное отображение). Для инъективного отображения  $f : X \rightarrow Y$  это  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ .  $f^{-1}(y)$  определяется как тот единственный элемент  $x \in X$ , для которого  $f(x) = y$ .

Для определённого выше  $f$ :  $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$ .

Для  $g$  и прочих неинъективных отображений обратного отображения не существует, чтобы его создать, надо сузить область определения. Так, для  $g' : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , для всех  $x \in \mathbb{R}^+$  равного  $g$  ( $g' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ) обратное отображение уже существует, это функция извлечения арифметического квадратного корня.

**Определение 1.3.3** (Сужение). Для  $f : X \rightarrow Y$  сужение  $f$  на  $X_1 \subset X$  — отображение  $f_1$  из  $X_1$  в  $Y$ , действующее по тому же правилу, что и  $f$ . Обозначают  $f_1 = f|_{X_1}$ .

**Определение 1.3.4** (Биекция). Одновременно инъекция и сюръекция.

### 1.3.3 Прообраз

Пусть дано отображение  $f : X \rightarrow Y$ ;  $B \subset Y$ .

**Определение 1.3.5** (Прообраз  $B$  при отображении  $f$ ).  $f^{-1}(B) \stackrel{def}{=} \{x \in X | f(x) \in B\}$ .

*Замечание.*  $f^{-1}(x)$  для одного элемента множества  $x \in X$  может быть не определено, если  $f$  не является инъекцией.

Пример:  $g^{-1}([-2; -1]) = \emptyset$ ;  $g^{-1}([1; 4]) = [-2; -1] \cup [1; 2]$ .

### 1.3.4 Функции

**Определение 1.3.6** (Функция). Отображение из  $X \subset \mathbb{R}$  в  $Y \subset \mathbb{R}$ .

Позже надмножества  $X$  и  $Y$  будут расширены))

Примеры:

- Линейная функция  $f(x) = ax + b$ .
- Многочлен  $h(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i = 0, 1, \dots, n$ .
- $\phi(x) = \frac{1}{x}$ ,  $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;  $Y = \mathbb{R}$ .
- Показательная функция, логарифмическая, тригонометрические.
- Рациональная функция  $\psi(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ .
- Показательная функция.
- Знак числа  $s(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$
- Функция Дирихле  $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :  $D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{I} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$  ( $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ )
- Функция Римана (определение 3.1.5)

## Лекция II

5 сентября 2022 г.

### 1.4 Упорядоченные пары

Два элемента любой природы; указано, кто первый, а кто — второй. Обозначается  $(a, b)$ , где  $a$  — первый элемент, а  $b$  — второй элемент. Позволена пара двух равных элементов  $a = b$ .

#### 1.4.1 Декартово произведение

Пусть  $X, Y$  — 2 множества.

**Определение 1.4.1** (Декартово произведение).  $X \times Y \stackrel{def}{=} \{(x, y) | x \in X \wedge y \in Y\}$ . Например,  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  — евклидова плоскость.

Позволив себе некую неформальность, можно сказать, что  $(X \times Y) \times Z$  — множество упорядоченных троек, трёхмерное евклидово пространство.

Обозначим  $\mathbb{R}^n = \prod_{i=1}^n \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$

## 1.5 Прочие определения

**Определение 1.5.1** (Равномощность (реже эквивалентность)). Два множества  $X, Y$  равномощны, если  $\exists$  биекция  $f : X \rightarrow Y$ .

**Определение 1.5.2** (Конечное множество). Множество  $A$  называется *конечным*, если оно равномощно некоторому множеству  $\{1, 2, \dots, n\}$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ . В противном случае  $A$  называется *бесконечным*.

Например,  $\mathbb{N}$  бесконечно.

**Теорема 1.5.1** (Кантор).  $\mathbb{N}$  не равномощно  $\mathbb{R}$ .

---

$f : X \rightarrow Y$  — произвольное отображение. Обозначим  $f(x)$  — тот элемент из  $Y$ , который ставится в соответствие  $x \in X$ .

*Семейство* — другой способ записи отображения. Пишут  $\{f_x\}_{x \in X}$  и подразумевают  $f_x = f(x)$ .

---

**Определение 1.5.3** (Последовательность). Отображение  $a : \mathbb{N} \rightarrow Y$  для произвольного множества  $Y$ .

Запись последовательности в виде семейства:  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .  $a_n \in Y$ .

**Определение 1.5.4** (Конечная последовательность). Отображение  $a : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow Y$  для произвольного множества  $Y$  и некоторого  $n \in \mathbb{N}$ .

Запись конечной последовательности в виде семейства:  $\{a_i\}_{i=1}^n = \{a_i\}_{1 \leq i \leq n}$ .  $a_n \in Y$ .

*Замечание.* Конечная последовательность не является последовательностью.

---

Пусть  $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  — семейство множеств. Тогда объединение и пересечение соответственно:

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{x | \exists y \in \Gamma : x \in A_y\}$$
$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{x | \forall y \in \Gamma : x \in A_y\}$$

---

$f : X \rightarrow Y$ .  $\Gamma_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in X \times Y | y = f(x)\} = \{(x, f(x))\}_{x \in X}$

Пусть  $X, Y$  — множества,  $B \subset X \times Y$ .

$B$  — график некоторого отображения из  $X$  в  $Y \iff \forall x \in X : \exists! y \in Y : (x, y) \in B$ .

*Доказательство.* Очевидно. □



## Глава 2

# Вещественные числа

Множество вещественных чисел  $\mathbb{R}$ .

### 2.1 Аксиомы вещественных чисел

1. Сложение:  $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , результат называется суммой и обозначается  $a+b$  для  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Свойства сложения:

- Коммутативность  $x + y = y + x$
- Ассоциативность  $x + (y + z) = (x + y) + z$
- Нулевой элемент:  $\exists! 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$ .

*Замечание:* единственность нуля выводима: в самом деле, пусть  $0, 0'$  — нули.

- Тогда по определению нуля  $0 + 0' = 0 = 0'$ .
- Противоположный элемент:  $\forall x \in \mathbb{R} : \exists! y \in \mathbb{R} : x + y = 0$ .  $y$  обозначают  $-x$ .

*Замечание:* Единственность противоположного элемента тоже выводима: в самом деле, пусть  $x + y = 0 \wedge x + y' = 0$ . Тогда  $y = y + (x + y') = (y + x) + y' = y'$ .

2. Умножение:  $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , результат называется произведением и обозначается  $a \cdot b = ab$  для  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Свойства умножения:

- Коммутативность  $x \cdot y = y \cdot x$
- Ассоциативность  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- Элемент единица:  $\exists! 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = x$ .

*Замечание:* единственность единицы выводима абсолютно аналогично единственности нуля.

- Обратный элемент:  $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R} : \exists! y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$ .  $y$  обозначают  $x^{-1}$  или  $\frac{1}{x}$ .

*Замечание:* Единственность обратного элемента тоже выводима абсолютно аналогично.

- Дистрибутивность умножения относительно сложения:  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ .

*Следствие:*  $0 \cdot x = 0$ . В самом деле,  $0 = 0 + 0$  и отсюда  $0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$ , а добавив противоположное к  $0 \cdot x$  получим  $0 \cdot x = 0$

*Следствие:*  $-x = (-1) \cdot x$ . В самом деле,  $1 + (-1) = 0 \Rightarrow 1 \cdot x + (-1) \cdot x = 0 \cdot x$ , откуда всё видно.

- $0 \neq 1$ .

3. Порядок. Отношение « $<$ » между вещественными числами. Формально, для множества  $X$  отношение между его элементами — это подмножество  $L \subset X \times X$  и  $x < y \iff (x, y) \in L$ .

- Асимметричность  $\forall x : \neg(x < x)$ .
- $\forall x, y \in \mathbb{R} : x = y \vee x < y \vee y < x$ .
- Транзитивность для трёх попарно различных  $x, y, z \in \mathbb{R} : x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$ .
- $x < y \wedge a \in \mathbb{R} \Rightarrow x + a < y + a$ .
- $x < y \wedge a > 0 \Rightarrow ax < ay$ .

*Замечание:* Пусть  $x < y \wedge a < 0$ . Тогда  $a + (-a) < -a \Rightarrow -a > 0$ .  $(-a)x < (-a)y \Rightarrow 0 < -ay + ax \Rightarrow ay < ax$ .

*Замечание:* Пусть  $x < y \wedge a < b$ . Тогда  $x + a < y + a$ , но из  $a < b \Rightarrow y + a < y + b$ , откуда по транзитивности  $x + a < y + b$ .

**Факт:** Пусть  $x \in \mathbb{R} \wedge \forall t > 0 : x \leq t$ . Тогда  $x = 0 \vee x < 0$ .

*Доказательство.* От противного. Пусть  $x > 0$ . Тогда  $\exists t = \frac{1}{2}x > 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x > \frac{1}{2}x \Rightarrow x > \frac{1}{2}x$ . Противоречие.  $\square$

## Лекция III

9 сентября 2022 г.

### 2.2 Неравенства

$a, b \in \mathbb{R}; a < b$ . Тогда ещё пишут так:  $b > a$ .

Ещё  $a \leq b \iff a < b \vee a = b$ ;  $a \geq b \iff a > b \vee a = b$ .

**Факт 2.2.1.**  $a \leq b \wedge b \leq a \iff a = b$ .

*Доказательство.* От противного.  $\square$

#### 2.2.1 Модуль числа

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow |x| \stackrel{def}{=} \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

**Свойства модуля**

$$\begin{aligned} -|x| &\leq x \leq |x| \\ a > 0 \wedge -a &\leq x \leq a \Rightarrow |x| \leq a \end{aligned}$$

*Доказательство.*  $\left. \begin{aligned} -|x| &\leq x \leq |x| \\ -|y| &\leq y \leq |y| \end{aligned} \right\} \Rightarrow |x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$ .  $\square$

Неравенство треугольника для суммы:  $|x + y| \leq |x| + |y|$  или для разности:  $|x| - |y| \leq |x - y|$ .

*Доказательство.*  $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$   $\square$

Заметим, что из этого факта следует  $|y| - |x| \leq |x - y| \Rightarrow ||y| - |x|| \leq |x - y|$ .

### 2.2.2 Ещё о подмножествах прямой

Длина любого из отрезков  $[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$  при условии  $a \leq b$  равна  $b - a$ .

#### Лучи

$a \in \mathbb{R}$  создаёт следующие лучи:

- $[a; +\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\};$
- $(a; +\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} | x > a\};$
- $(-\infty; a] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\};$
- $(-\infty; a) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} | x < a\}.$

$a$  называется началом луча.

**Определение 2.2.1** (Ограниченность). Для подмножества прямой  $E \subset \mathbb{R} : E$  ограничено сверху (снизу), если  $\exists a \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \leq a$  ( $x \geq a$ ). Любое такое число  $a$  для множества  $E$  называется верхней (нижней) границей.

## 2.3 Ещё три аксиомы вещественных чисел

Ниже приведены аксиомы, отличающие  $\mathbb{R}$  от произвольного упорядоченного поля.

### 2.3.1 Аксиома Архимеда

Множество  $\mathbb{N}$  натуральных чисел не ограничено сверху.

**Следствие 2.3.1.**  $\forall x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : x \leq n$ .

*Доказательство.* От противного. □

**Следствие 2.3.2.** Пусть  $x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x \leq \frac{1}{n}$ . Тогда  $x \leq 0$ .

*Доказательство.* От противного. □

### 2.3.2 Аксиома индукции

Для  $\emptyset \neq E \subset \mathbb{N} : \exists$  наименьший элемент  $n : \forall m \in E : m \geq n$ .

*Замечание.* Пусть  $E \subset \mathbb{Z}$ . Если  $E$  — ограничено снизу, то в  $E$  есть наименьший элемент.

*Доказательство.* Пусть  $a$  — нижняя граница. Тогда  $\exists k \in \mathbb{N} : k > -a$ . Несложно видеть, что  $-k$  — тоже нижняя граница множества  $E$ . Тогда  $\{k + n | n \in E\} \subset \mathbb{N}$ , дальше понятно. □

*Замечание.* Пусть  $I = \langle a; b \rangle$ , где каждая граница может быть как включена, так и нет.  $b > a$ .  $s \in \mathbb{R}_+$ . Тогда  $\exists r \in \mathbb{Q} : rs \in I$ . Заметим, что для  $s = 1$  это равносильно тому, что в любом невырожденном отрезке есть рациональное число.

*Доказательство.*  $d := b - a$  — длина отрезка. Найдём  $q \in \mathbb{N} : \frac{s}{q} < \frac{d}{2}$ . Оно есть из аксиомы Архимеда. Назовём  $E := \left\{ m \in \mathbb{Z} \mid m \frac{s}{q} \geq b \right\}$ . Так как  $m \geq \frac{bq}{s}$ , то в  $E$  есть наименьший элемент  $m_0$ . Рассмотрим тогда  $(m_0 - 1) \frac{s}{q}$ . Тогда с одной стороны  $(m_0 - 1) \frac{s}{q} < b$ , а с другой —  $(m_0 - 1) \frac{s}{q} \geq b - \frac{s}{q} > b - \frac{d}{2} > a$ .  $\square$

*Замечание.* Отсюда любое утверждение можно доказать по индукции, по следующей схеме:

Пусть  $S_1, S_2, \dots$  — утверждения. Предположим, что

1.  $S_1$  истинно
2. Для  $n > 1$ :  $S_n$  следует из  $S_{n-1}$ .

Тогда все утверждения верны.

*Доказательство.* От противного. Пусть  $W = \{n \in \mathbb{N} \mid \neg S_n\}$ . Если  $W \neq \emptyset$ , то в  $W$  есть наименьший элемент, для которого можно показать, что это не так. Противоречие.  $\square$

**Факт 2.3.1** (Неравенство Бернулли).  $\forall a \geq -1, n \in \mathbb{N} : (1 + a)^n \geq 1 + an$

*Доказательство.* По индукции. А именно,  $S_n := (1 + a)^n \geq (1 + an)$ . Проверим, что  $S_1$  верно. В самом деле,  $S_1 = (1 + a)^1 \geq (1 + a \cdot 1)$ . Это верно. Далее, проверим переход  $S_n \Rightarrow S_{n+1}$  для  $n \geq 1$ .  $(1 + a)^n \geq (1 + an) \Rightarrow (1 + an) \cdot (1 + a) = 1 + a(n + 1) + a^2n \geq 1 + a(n + 1)$ .  $\square$

**Следствие 2.3.3.** Для данного  $a > 0$  множество  $\{(1 + a)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  не ограничено.

### 2.3.3 Аксиома Кантора — Дедекинда

**Определение 2.3.1** (Щель). Два множества  $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}$  образуют щель, если  $\forall x \in A, y \in B : x \leq y$ .

**Факт 2.3.2.** Любое число из одного множества — граница другого множества.

Говорят, что щель содержит число  $x$ , если  $\forall a \in A, b \in B : a \leq x \leq b$ .

**Формулировка аксиомы:** Любая щель содержит по крайней мере одно вещественное число.

*Замечание.*  $\mathbb{Q}$  — множество рациональных чисел;  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ . Несложно видеть, что лишь последняя аксиома позволяет различить  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{R}$ .

**Факт 2.3.3.**  $\nexists r \in \mathbb{Q} : r^2 = 2$

*Доказательство.* Предположим, что есть. НУО  $r > 0$ , так как для  $r = 0$  утверждение неверно, а из  $r^2 = 2 \Rightarrow (-r)^2 = 2$ . Тогда  $r \in \mathbb{Q} : \exists p, q \in \mathbb{Z} : \frac{p}{q} = r \wedge (p; q) = 1$ . Круглыми скобками обозначен наибольший общий делитель двух данных чисел. Тогда  $\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$ . Справа чётное число, откуда  $p$  чётно, но тогда обе части уравнения делятся на 4 и  $q$  чётно. Значит, наибольший общий делитель  $p$  и  $q$  делится на 2 и не равен 1. Противоречие.  $\square$

## Лекция IV

12 сентября 2022 г.

**Теорема 2.3.1.**  $\exists! r \in \mathbb{R}_{>0} : r^2 = 2$

*Доказательство.* Воспользуемся аксиомой Кантора — Дедекинда.

Пусть  $A := \{x \in \mathbb{R} | x > 0 \wedge x^2 < 2\}$ ;  $B := \{x \in \mathbb{R} | x > 0 \wedge x^2 > 2\}$ . Они образуют щель, так как  $\forall x \in A, y \in B : x \leq y$ . От противного: пусть  $\exists x \in A, y \in B : x > y$ . Но так как  $x, y > 0$ , то неравенство можно возвести в квадрат и получить противоречие — из транзитивности с  $2 : x^2 < y^2$ .

*Замечание.* Возведение в квадрат возможно из транзитивности:  $x < y \Rightarrow \begin{cases} \cdot x & x^2 < xy \\ \cdot y & xy < y^2 \end{cases}$

Рассмотрим вещественное число  $c \in \mathbb{R}$ , лежащее в этой щели.

**Лемма 2.3.1.** *В множестве  $A$  нет наибольшего числа, в множестве  $B$  — нет наименьшего.*

*Доказательство леммы.*

- Пусть  $y \in B$ . Докажем, что  $\exists \varepsilon \in (0; 1) : y - \varepsilon \in B$ . Надо выбрать  $\varepsilon$  так, чтобы  $(y - \varepsilon)^2 > 2 \iff y^2 - 2y\varepsilon + \varepsilon^2 > 2$ . Тогда подойдёт любое  $\varepsilon < \min\left(\frac{y^2 - 2}{2y}, 1\right)$ .
- Пусть  $x \in A$ . Найдём  $\varepsilon \in (0; 1) : (x + \varepsilon)^2 < 2 \iff x^2 + 2x\varepsilon + \varepsilon^2 < 2$ . Но — чудесное дело —  $\varepsilon^2 < \varepsilon$ . Тогда подойдут все  $\varepsilon < \min\left(\frac{2 - x^2}{2x + 1}, 1\right)$ . Возьмём любой такой.

□

Отлично, а почему  $c^2 = 2$ ? От противного. Тогда  $c^2 < 2 \vee c^2 > 2$ . Тогда — из  $c > 0$  —  $c \in A \vee c \in B$ . Но заметим, что в любом случае оно не окажется наибольшим (наименьшим) элементом — потому что таких нет. Значит,  $c$  не лежит в щели. Противоречие. Отсюда  $c^2 = 2$ .

Теперь докажем, что положительное число, при возведении в квадрат дающее 2 единственно. От противного: пусть  $c_1, c_2 > 0 : \begin{cases} c_1^2 = 2 \\ c_2^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow (c_1 - c_2)(c_1 + c_2) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$ . □

Обозначим данное число  $\sqrt{2}$

**Следствие 2.3.4.** *На любом невырожденном отрезке  $\langle a; b \rangle$  есть иррациональное число. Для этого рассмотрим рациональное кратное  $\sqrt{2}$ , попадающее в этот отрезок — применение леммы с предыдущей лекции.*

## Глава 3

# Грани, замкнутость, предельные точки, пределы

Пусть  $\emptyset \neq A \in \mathbb{R}$  — ограниченное сверху множество. По определению  $\exists x \in \mathbb{R} : \forall a \in A : a \leq x$ . Пусть  $B$  — множество всех верхних границ для  $A$ .

**Теорема 3.0.1.** В множестве  $B$  существует наименьший элемент.

*Доказательство.*

*Замечание.* Несложно убедиться, что для пустого множества это неправда, а для  $A = (0; 1)$  или же  $A = [0; 1]$  это верно.

Заметим, что  $(A; B)$  — щель по определению. Тогда  $\exists c \in \mathbb{R}$ , лежащее в этой щели.

$\forall a \in A, x \in B : a \leq c \leq x$ . Из левого знака  $c$  — верхняя граница для  $A$ , т. е.  $c \in B$ . Из правого знака  $c$  — наименьший элемент в  $B$ .  $\square$

**Факт 3.0.1.** Теорема эквивалентна аксиоме Кантора — Дедекинда, и можно постулировать любую из них.

**Определение 3.0.1** ((Точная) верхняя) грань). Это число  $c$  называется (точной) верхней гранью множества  $A$ , иначе говоря супремум (supremum).  $c = \sup A$ .

Аналогичная теорема верна для непустого множества  $A$ , ограниченного снизу. Здесь точная нижняя грань называется инфимум (infimum).  $c = \inf A$ .

**Теорема 3.0.2** (Об описании граней). Пусть  $A \subset \mathbb{R}$  — множество, ограниченное сверху (внизу). Следующие условия эквивалентны:

1.  $c$  — супремум (инфимум) множества  $A$ .
2.  $c$  — верхняя (нижняя) граница для  $A$  и  $\forall \varepsilon > 0 : \exists y \in A : c - \varepsilon < y (y < c + \varepsilon)$ .

*Доказательство.*

- (1)  $\Rightarrow$  (2)

Так как  $c$  — наименьший (наибольший) элемент множества границ, то  $c - \frac{\varepsilon}{2}$  или  $(c + \frac{\varepsilon}{2})$  уже не является границей. Значит, есть элемент из  $A$ , больший  $c - \varepsilon$  (меньший  $c + \varepsilon$ ).

- (2)  $\Rightarrow$  (1)

Пусть  $c$  удовлетворяет условию (2). Докажем, что  $c$  — наименьшая (наибольшая) верхняя граница. Если не так, то есть число меньше (больше)  $c$ , всё ещё являющееся верхней (нижней) границей. Тогда получаем противоречие с (2).  $\square$

### 3.0.1 Небольшая серия определений и теорем из топологии

**Определение 3.0.2** (Окрестность). Пусть  $x \in \mathbb{R}$ . Окрестностью точки  $x$  называется любой интервал вида  $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$  для  $\varepsilon > 0$ . Для данного  $\varepsilon$  окрестность называется « $\varepsilon$ -окрестность». Число  $x$  называется центром окрестности, и  $\varepsilon$  — радиусом. Обозначают  $U_\varepsilon(x) = V_\varepsilon(x)$ .

**Определение 3.0.3** (Проколотая окрестность). Окрестность за вычетом точки  $x$ . Обозначается  $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x) = \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x)$ .  $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon; x) \cup (x; x + \varepsilon)$ .

**Определение 3.0.4** (Предельная точка). Точка  $x$  называется предельной точкой для  $A \subset \mathbb{R}$ , если  $\forall \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x) : \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ . Предельные точки множества  $A$  обозначаются  $A'$ .

**Факт 3.0.2.** Предельными точками  $(0; 1)$  являются все точки отрезка  $[0; 1]$ . Ровно такие же предельные точки есть у множества  $(0; 1) \cup \{2\}$ . Здесь 2 — изолированная точка.

**Определение 3.0.5** (Изолированные точки). Точка  $x$  называется изолированной для  $A$ , если  $x \in A$  и  $x$  не является предельной точкой множества  $A$ .

## Лекция V

16 сентября 2022 г.

**Предложение 3.0.1.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A$  — ограничено сверху (внизу). Пусть  $\sup A \notin A$  ( $\inf A \notin A$ ). Тогда  $\sup A$  ( $\inf A$ ) — предельная точка множества  $A$ .

*Доказательство для  $\sup A$ .* Пусть  $x = \sup A$ ;  $x \notin A$ . Рассмотрим любую  $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x)$ . По теореме об описании супремума  $\exists y \in A : y > x - \varepsilon$ . Так как  $x \notin A$ , то  $y \neq x$ . Тогда по определению  $x$  — предельная точка  $A$ .  $\square$

**Определение 3.0.6** (Замкнутое множество). Множество, содержащее все свои предельные точки.

Примеры:	Замкнутые множества	$\{x\}$	$[a; b]$	$\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$	$\emptyset$
	Не замкнутые множества:	$[a; b)$	$(a; b)$	$\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$	

**Теорема 3.0.3** (О связности отрезка). Пусть  $a < b$ , тогда отрезок  $[a; b]$  нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых множеств

*Доказательство.* От противного: пусть  $E_1, E_2 \in [a; b]$ ,  $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ ,  $E_1 \cup E_2 = [a; b]$ .  $\exists E \in \{E_1, E_2\} : \sup E \neq b$ .

**Лемма 3.0.1.** Замкнутое (непустое) множество содержит свои грани, каждую — если она есть.

*Доказательство леммы.*

Пусть  $x = \sup C$ . Если  $x \notin C$ , то  $x$  — предельная точка  $C$ , откуда из замкнутости всё же  $x \in C$ .  $\square$

В самом деле, если у обоих  $\sup E = b$ , то  $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ . Без потери общности  $b \in E_1 \Rightarrow \sup E_1 = b$ ;  $\sup E_2 < b$ . Тогда  $(\sup E_2; b] \in E_1$ , откуда  $\sup E_2 \in E'_1 = E_1$ , противоречие.  $\square$

**Теорема 3.0.4** (Об описании чисел в щели). Пусть  $(A; B)$  — щель. Тогда множество чисел, лежащих в щели —  $[\sup A; \inf B]$ .

*Доказательство.* Так как  $A, B \neq \emptyset$ , то  $\exists \sup A, \exists \inf B$ .

$\Rightarrow$ . Рассмотрим  $z$  в щели. Тогда  $z$  — верхняя граница  $A$  и нижняя граница  $B$ , откуда  $z \geq \sup A$ ;  $z \leq \inf B$ .

$\Leftarrow$ . Если  $z \in [\sup A; \inf B]$ , то  $z \geq \sup A$  и  $z$  — верхняя граница  $A$ . Аналогично  $z$  — нижняя граница  $B$ , откуда  $z$  лежит в щели.  $\square$

**Определение 3.0.7** (Узкая щель). Щель, в которой лежит ровно одно число. Щель  $(A; B)$  — узкая  $\iff \sup A = \inf B$ .

**Предложение 3.0.2.** Пусть  $(A; B)$  — щель. Следующие условия эквивалентны:

1. Щель  $(A; B)$  — узкая.
2.  $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in A, y \in B : y - x < \varepsilon$

*Доказательство.* (2)  $\Rightarrow$  (1). От противного:  $\exists x, y \in (A; B) : x < y$ . Тогда  $x$  — верхняя граница  $A$ ,  $y$  — нижняя граница  $B$ , и для  $\varepsilon = y - x$  получаем противоречие.

(1)  $\Rightarrow$  (2): Из (1):  $\sup A = \inf B = p$ . Так как супремум и инфимум — точные грани, то  $\forall \varepsilon > 0 : A \cap [p - \frac{\varepsilon}{3}; p] \neq \emptyset \wedge B \cap [p; p + \frac{\varepsilon}{3}] \neq \emptyset$  (если не так, то существует более точная грань).  $\square$

**Теорема 3.0.5** (Теорема о вложенных отрезках). Рассмотрим последовательность непустых отрезков  $\{[a_n; b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Говорят, что это последовательность вложенных отрезков, если  $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$ .

Такая последовательность имеет непустое пересечение  $\left( \bigcap_{i \in \mathbb{N}} [a_i; b_i] \right) \neq \emptyset$ ;

$\exists x : \forall i \in \mathbb{N} : x \in [a_i; b_i]$ .

Это пересечение состоит из одной точки  $\iff$  среди этих отрезков встречаются отрезки со сколь угодно малой длиной.

*Доказательство.* Благодаря вложенности,  $a_n \leq a_{n+1} \wedge b_n \geq b_{n+1}$ . Благодаря транзитивности  $\forall n \leq m \in \mathbb{N} : a_n \leq a_m \wedge b_n \geq b_m$ .

Покажем, что  $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n < b_m$ . Для  $n \leq m : a_n \leq a_m \leq b_m$ . Для  $n > m : a_n \leq b_n \leq b_m$ . Отсюда  $(\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}})$  — щель. Тогда число в данной щели  $z : \forall i \in \mathbb{N} : a_i \leq z \leq b_i$ .

Про единственность пересечения: пересечение  $\left( \bigcap_{i \in \mathbb{N}} [a_i; b_i] \right)$  одноточечно  $\iff$  щель  $(A; B)$  — узкая.

Пусть щель узкая, докажем, что есть сколь угодно маленький отрезок:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in A, y \in B : y - x < \varepsilon$ . Пусть  $x = a_i, y = b_j$  для неких  $i, j \in \mathbb{N}$ . Тогда для  $n = \max(i, j) : |b_n - a_n| < \varepsilon$ .  $\square$

**Факт 3.0.3.** Теорема эквивалентна аксиоме Кантора — Дедекинда

## Лекция VI

17 сентября 2022 г.

**Теорема 3.0.6** (О компактности (первая форма)). Вторая форма приведена здесь: (теорема 3.1.18).

Всякое непустое ограниченное бесконечное множество  $A \subset \mathbb{R}$  имеет предельную точку.

*Доказательство.* Раз  $A$  ограничено, то  $\exists a_0, b_0 \in \mathbb{R} : a_0 < b_0 \wedge A \subset [a_0; b_0]$ .

Обозначим  $c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$ . На  $i$ -м шаге рассмотрим два отрезка  $[a_i; c_i]$  и  $[c_i; b_i]$  и выберем среди них тот, который при пересечении с множеством  $A$  остаётся бесконечным множеством. Формульно,

$$[a_{i+1}, b_{i+1}] = \begin{cases} [a_i, c_i], & |A \cap [a_i; c_i]| = \infty \\ [c_i, b_i], & \text{otherwise}^* \end{cases}$$

\* — от противного легко получить, что здесь  $|[c_i; b_i] \cap A| = \infty$ , так как  $|[a_i; b_i] \cap A| = \infty$ .

Так как  $b_{i+1} - a_{i+1} = \frac{b_i - a_i}{2}$ , то из индукции  $b_i - a_i = (b_0 - a_0) \cdot 2^{-i}$ . Например, из неравенства Бернулли и аксиомы Архимеда, эта последовательность длин содержит сколь угодно малые числа.



Таким образом, в данной последовательности отрезков каждый следующий вложен в предыдущий, и применима теорема о вложенных отрезках.  $\exists! P \in \left( \bigcap_{i \in \mathbb{N}_0} [a_i; b_i] \right)$ .

**Факт 3.0.4.**  $P$  является искомой предельной точкой.

Для доказательства достаточно убедиться, что  $\forall \varepsilon > 0 : A \cap \overset{\circ}{V}_\varepsilon(P) \neq \emptyset$ . И в самом деле, найдём  $n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \varepsilon$ . По построению отрезков  $[a_n; b_n] \cap A = \infty$ . Так как  $[a_n; b_n] \cap \overset{\circ}{V}_\varepsilon(P) = [a_n; b_n] \setminus \{P\}$ , то  $|\overset{\circ}{V}_\varepsilon(P) \cap A| = \infty$ , откуда непусто.  $\square$

**Определение 3.0.8** (Замыкание множества  $A$ ). Обозначается  $\overline{A}$ , или  $\text{Cl } A$ , или  $\text{Clos } A$ .  $\text{Clos } A \stackrel{\text{def}}{=} A \cup A'$  — объединение множества и его предельных точек.

**Предложение 3.0.3.**  $\text{Clos } A$  — замкнутое множество, то есть  $(\text{Clos } A)' \subset \text{Clos } A$ .

*Доказательство.* Пусть  $X \in (\text{Clos } A)'$ .

Покажем, что  $X \in \text{Clos } A$ . Для этого убедимся, что  $\forall \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{V}_\varepsilon(X) \cap A \neq \emptyset$ , то есть  $X \in A'$ .

Поскольку  $X \in (\text{Clos } A)'$ , то  $\exists Y \in \text{Clos } A \cap \overset{\circ}{V}_\varepsilon(X)$ .

1. Если  $Y \in A$ , то  $Y$  содержится в искомом пересечении  $\overset{\circ}{V}_\varepsilon(X) \cap A$
2. Иначе  $Y \in A'$ . Заметим, что  $|XY| < \varepsilon$ . Тогда по определению  $\exists Z \in \overset{\circ}{V}_{\varepsilon - |XY|}(Y) \cap A$ . В таком случае  $Z$  лежит в искомом пересечении.

$\square$

### 3.0.2 Десятичная запись вещественного числа

Рассмотрим  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Для такого  $\exists! n \in \mathbb{N}_0 : n \leq x < n + 1$ .  $n = [x]$ . Назовём десятичной записью неотрицательного числа  $x$  конкатенацию десятичной записи целого числа  $[x]$ , запятой, и некоего остатка, идентичного для всех чисел, эквивалентных отношением  $\simeq : x \simeq y \iff (x - y) \in \mathbb{Z}$ . Для отрицательных чисел  $x$  запись является записью  $-x$  с минусом в начале.

Рассмотрим десятичную запись чисел  $x \in [0; 1)$ . Разобьём отрезок на 10 подотрезков  $I_i = \left[ \frac{i}{10}; \frac{i+1}{10} \right)$ ,  $i \in \{0, \dots, 9\}$ . Это разбиение, поэтому  $\exists! j_1 \in [0; 10) \cap \mathbb{N}_0 : x \in I_{j_1}$ . Допишем  $j_1$  в конец числа. Разобьём аналогично полуинтервал  $I_{j_1}$  на 10 равных частей  $\left[ \frac{j_1}{10} + \frac{i}{10^2}; \frac{j_1}{10} + \frac{i+1}{10^2} \right)$ ,  $i \in \{0, \dots, 9\}$ .

**Факт 3.0.5.** Десятичная запись числа однозначно определяет число.

*Доказательство.* От противного. Пусть запись  $x$  и  $y$  совпадают. Но заметим, что на  $k$ -м шагу длина рассматриваемых интервалов  $\frac{1}{10^k}$ , поэтому рано или поздно встретится интервал длиной меньше  $|y - x|$ , и они попадут в разные интервалы. Тогда на первой такой позиции, что  $x$  и  $y$  попадут в разные интервалы, цифры не совпадут.  $\square$

**Факт 3.0.6.** Десятичная запись, оканчивающаяся на бесконечную последовательность 9, не соответствует ни одному числу.

*Вопрос.* Являются ли десятичной записью все остальные подходящие по формату строки?

Рассмотрим вложенную последовательность полуинтервалов  $[a_i; b_i)$ , каждый из которых содержит данное число.  $b_i - a_i = \frac{1}{10^i}$ . Заметим, что для доказательства, что ответ на проблему утвердительный, необходимо и достаточно доказать, что пересечение  $\left( \bigcap_{i \in \mathbb{N}} [a_i; b_i) \right) \neq \emptyset$ .

**Факт 3.0.7.** Пусть задана последовательность вложенных полуинтервалов  $[l_i, r_i) \neq \emptyset$ . Среди них есть сколь угодно малые. Пересечение этих полуинтервалов пусто  $\iff \exists n \in \mathbb{N} : \forall i > n : r_i = r_n$ .

*Доказательство.* Пусть  $\{X\} = \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} [l_i, r_i)\right)$  — по теореме о вложенных отрезках это множество действительно состоит из одной точки. Тогда  $\forall i \in \mathbb{N} : X \in [l_i, r_i)$ .

Что означает, что  $X \notin \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} [l_i, r_i)\right)$ ? Это означает, что  $\exists k \in \mathbb{N} : X \notin [l_k, r_k)$ . Но это эквивалентно тому, что  $X \notin [l_j, r_j) \forall j \geq k$ . Однако  $X \in [l_j, r_j) \forall j \geq k$ . Отсюда  $X = r_j \forall j \geq k$ .  $\square$

## Лекция VII

24 сентября 2022 г.

### 3.1 Пределы

Функция:  $f : A \rightarrow \mathbb{R} : A \subset \mathbb{R}$ . На доске во время лекций были приведены графики функций ниже.

$$1. f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

**Определение 3.1.1** (Характеристическая функция  $B \subset \mathbb{R}$ ).  $\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$ .

$$2. f(x) = \chi_{[0;1)}.$$

$$3. f(x) = x.$$

$$4. \text{Функция Дирихле } D = \chi_{\mathbb{Q}}.$$

$$5. f(x) = \chi_{\{0\} \cup [1;2]}.$$

$$6. f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 10, & x = 0 \end{cases}.$$

Поведение функции вблизи в точке 0 — нас интересуют проколотые окрестности точки 0. Поведение функций 1 и 2 вблизи нуля разное — слева от нуля в любой окрестности  $f_1(x) = 1$ , но  $f_2(x) = 0$ .

Поведение функций 1, 3, 5 вблизи нуля схожи — в проколотой окрестности нуля они близки к какому-то одному значению.

Функции 2, 4, 6 в этом отношении плохие.

7. Рассмотрим  $f(x) = \chi_{(0;1)}$ , определённую на  $A = (0; +\infty)$ . Поведение функции в точке 0 тоже является хорошим — для маленькой окрестности нуля там, где она задана, там она равна 1.

8.  $f(x) = x$ ;  $\text{dom}_f = A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ . Опять похожая на первую, хорошая, функция.

*Хорошая функция — есть предел.*

#### 3.1.1 Определение предела

Предел последовательности — предел функции, определённой на натуральных числах.

Пусть дана функция, определённая на множестве  $A \subset \mathbb{R}$ . О пределе в точке  $x_0$  можно говорить, только если  $x_0 \in A'$  — предельная точка  $A$ .  $x_0$  может не лежать в  $A$ . Формально,  $A = \mathbb{N}$  не содержит предельных точек. Однако нам будет удобно считать бесконечность предельной точкой  $\mathbb{N}$ .

**Определение 3.1.2** (Окрестность точки  $+\infty$ ). Любой луч вида  $(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$ .

**Определение 3.1.3** (Окрестность точки  $-\infty$ ). Любой луч вида  $(-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$ .

Эти же окрестности будем считать проколотыми, так как они не содержат саму бесконечность.

Говорят, что  $+\infty$  есть предельная точка  $A$ , если в любой (проколотой) окрестности точки  $+\infty$  есть точки множества  $A$ . Это определение показывает схожесть конечных и бесконечных предельных точек. Говоря же более простым языком —  $A$  не ограничено сверху. В частности  $+\infty$  — предельная точка  $\mathbb{N}$ .

**Определение 3.1.4** (Конечный предел). Число  $c \in \mathbb{R}$  называется пределом функции  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$ , если  $\forall U(c) : \exists \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap A) \subset U(c)$ .

### 3.1.2 Примеры

Так, предел функции  $f(x) = |x|$  в нуле равен нулю, так как для окрестности  $U(c)$  можно взять окрестность  $\overset{\circ}{V}(0)$  такого же радиуса.

По тем же самым причинам предел функции  $f(x) = \begin{cases} -(x-1), & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$  в  $x_0 = 1$  тоже 0 — опять подойдёт окрестность такого же радиуса.

**Факт 3.1.1.** Функция Дирихле  $D = \chi_{\mathbb{Q}}$  не имеет предела ни в одной точке.  $\text{dom}_D = \mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Предельными точками  $\mathbb{R}$  являются  $\mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ .

От противного: пусть  $c \in \mathbb{R}$ : предел функции  $D$  в некой точке  $x_0$ . Но рассмотрим тогда окрестность  $U(c) = (c - \frac{1}{10}; c + \frac{1}{10})$ . По определению предела  $\exists \overset{\circ}{V}(x_0) : D(\overset{\circ}{V}(x_0)) \subset U$ . Но  $D(\overset{\circ}{V}(x_0))$  одновременно содержит и 0 и 1, а  $U$  имеет диаметр всего  $\frac{1}{5}$ . Значит, предела нет.  $\square$

$f(n) = \frac{(-1)^n}{n}$  для  $n \in \mathbb{N}$ . Предельной точкой  $\mathbb{N}$  является только  $+\infty$ . В ней предел равен 0.

*Вот, почему:* Рассмотрим некую окрестность нуля  $U_\varepsilon(0) = (-\varepsilon; +\varepsilon)$ . Надо найти  $a \in \mathbb{R} : \forall n > a : f(n) \in U$ , то есть  $|f(n)| < \varepsilon$ . Получается, необходимо  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , или же  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Окрестность нашлась, предел существует и равен 0.  $\square$

$f(n) = (-1)^n$  для  $n \in \mathbb{N}$ . Предела на бесконечности нет, показывается от противного аналогично функции Дирихле.

**Определение 3.1.5** (Функция Римана). Пусть  $r \in \mathbb{Q}$ . Тогда  $\exists! q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z} : r = \frac{p}{q}$  и дробь несократима. Тогда функция Римана  $r(x) = \begin{cases} 0, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{I} \\ \frac{1}{q}, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ .

**Факт 3.1.2.** В любой конечной точке предел функции Римана равен 0.

*Доказательство.* Очевидно, что никакого предела, кроме 0 не бывает, так как сужение функции Римана на  $\mathbb{I}$  имеет предел 0 в любой точке. Проверим, что 0 — предел в  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим  $U(0) = (-\varepsilon; +\varepsilon)$ . Найдём для каждой такой подходящую окрестность точки  $x_0$ , найти  $\overset{\circ}{V}_\delta(x_0) : r(\overset{\circ}{V}_\delta(x_0)) \subset U$ . Если  $t \in \overset{\circ}{V}_\delta(x_0) \wedge t \in \mathbb{I}$ , то  $r(t) \in U$ .

Таким образом, нас интересуют точки  $t \in \mathbb{Q}$ . Заметим, что любые два числа со знаменателем  $q$  отстоят друг от друга по крайней мере на  $\frac{1}{q}$ . Но выберем тогда  $\delta$  настолько маленькой, чтобы все числа со знаменателем  $q > \frac{10}{\varepsilon}$  не попадали в  $\overset{\circ}{V}_\delta(x_0)$ .

Почему так можно сделать? Если  $x_0$  — рациональное число с маленьким знаменателем  $q \leq \frac{10}{\varepsilon}$ , то выберем окрестность, чтобы не захватить других чисел такого вида. Иначе в окрестность может

попасть число с маленьким знаменателем, но мы уменьшим окрестность, чтобы данное число было не ближе, чем на границе окрестности.

Так можно сделать всегда, так как в окрестности фиксированного радиуса есть конечное количество чисел со знаменателем  $q \leq \frac{10}{\varepsilon}$ , можно найти ближайшие к  $x_0$ .  $\square$

### 3.1.3 Свойства

**Теорема 3.1.1** (Единственность предела). Если предел функции  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ( $A \subset \mathbb{R}$ ) в точке  $x_0 \in (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$  — предельной точке  $A$  — существует, то он единственный. Не может быть двух разных.

*Доказательство.* Предположим противное:  $c_1 \neq c_2$  — пределы для  $f$  в точке  $x_0$ . Тогда  $\exists U_1(c_1), U_2(c_2) : U_1(c_1) \cap U_2(c_2) = \emptyset$  — непересекающиеся окрестности точек  $c_1$  и  $c_2$  соответственно. Такие можно найти, взяв их радиусом  $0 < \varepsilon < \frac{|c_1 - c_2|}{2}$ . Из определения предела:  $\exists \overset{\circ}{V}_1(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_1(x_0)) \subset U_1$ . Кроме того,  $\exists \overset{\circ}{V}_2(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_2(x_0)) \subset U_2$ . Но тогда внутри  $\overset{\circ}{V}_{1 \cap 2}(x_0) := \overset{\circ}{V}_1(x_0) \cap \overset{\circ}{V}_2(x_0)$  — одной из этих двух окрестностей — функция  $f$  не может существовать:  $f(\overset{\circ}{V}_{1 \cap 2}(x_0) \cap A) \subset (U_1 \cap U_2) = \emptyset$ . Но  $x_0$  — предельная точка, откуда пересечение  $\overset{\circ}{V}_{1 \cap 2}(x_0) \cap A$  непусто, противоречие.  $\square$

### 3.1.4 Обозначения предела

Предел функции  $f$  в точке  $x_0$  обозначается  $\lim_{x \rightarrow x_0} f = c$ , или  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$ , или  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c$ . Запись  $\lim_{x_0} f = c$  значит, что предел у  $f$  в точке  $x_0$  существует и равен  $c$ .

## Лекция VIII

26 сентября 2022 г.

*Замечание.*  $A \subset \mathbb{R}; x_0 \in A', f : A \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in A : f(x) = c$ . Тогда  $\lim_{x_0} f = c$  — предел существует и равен  $c$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $U(c)$ . Для произвольной  $\overset{\circ}{V}(x_0) : f(\overset{\circ}{V}(x_0) \cap A) \subset U$  — верно, так как  $f(A) = \{c\}$ .  $\square$

*Замечание.*  $A \subset \mathbb{R}; x_0 \in A', f : A \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in A : f(x) = x$ . Тогда  $\lim_{x_0} f = x_0$  для произвольной конечной точки  $x_0$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $U_\varepsilon(x_0)$ . Для  $\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0)$  такого же радиуса, что и  $U_\varepsilon(x_0)$ :  $f(\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap A) \subset U_\varepsilon(x_0)$  — верно, так как  $f = \text{id}$ .  $\square$

### 3.1.5 Предел в терминах неравенств

Пусть  $x \in \mathbb{R}$ . Любая её окрестность имеет вид  $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ .  
 $y \in U_\varepsilon(x_0) \iff |y - x| < \varepsilon$ .

Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Проколотая окрестность  $\overset{\circ}{V}_\delta(\alpha)$  имеет вид  $(\alpha - \delta; \alpha + \delta) \setminus \{\alpha\}$ .  
 $y \in \overset{\circ}{V}_\delta(\alpha) \iff y \neq \alpha \wedge |y - \alpha| < \delta$ .

$\lim_{x_0} f = c \iff \forall U(c) : \exists \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) : f(\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap A) \subset U$ .

$$\begin{aligned}
x_0 \in \mathbb{R} : \lim_{x_0} f = c &\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : ((x \in A \wedge |x - x_0| < \delta \wedge x \neq x_0) \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon). \\
x_0 = +\infty : \lim_{+\infty} f = c &\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists a : ((x \in A \wedge x > a) \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon). \\
x_0 = -\infty : \lim_{-\infty} f = c &\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists a : ((x \in A \wedge x < a) \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon).
\end{aligned}$$

Пусть  $P$  — свойство функции; пусть  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  — функция: пусть  $x_0 \in A'$ .

Говорят, что функция  $f$  обладает свойством  $P$  вблизи точки  $x_0$ , если  $\exists \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) : f|_{\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap A}$  — сужение  $f$  на  $\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap A$  — обладает свойством  $P$ .

**Теорема 3.1.2.** Пусть  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ .  $x_0 \in A'$ . Если  $\lim_{x_0} f = c$  и  $\lim_{x_0} g = d$ , при чём  $c < d$ , то  $f(x) < g(x)$  вблизи  $x_0$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $\varepsilon < \frac{d-c}{2}$ . Для такого  $\varepsilon$  существуют окрестности  $\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0)$  и  $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)$  такие, что функции  $f$  и  $g$  в этих окрестностях принимают значения, близкие к  $c$  и  $d$  соответственно. Тогда  $\forall x \in \left( \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) \cap A \right)$  неравенство верно.  $\square$

*Замечание.* Отсюда ещё раз следует единственность предела: если  $\lim_{x_0} f = c$  и  $\lim_{x_0} f = d$ ,  $c < d$ , то в некой окрестности  $x_0$ :  $f(x) < f(x)$ .

**Теорема 3.1.3** (Предельный переход в неравенствах).  $u, v : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$ ,  $u(x) \leq v(x)$  вблизи  $x_0$ . Если  $\lim_{x_0} u = \alpha$  и  $\lim_{x_0} v = \beta$ , то  $\alpha \leq \beta$ .

*Доказательство.* От противного.  $\square$

*Замечание.* Если в окрестности  $x_0$ :  $u(x) < v(x)$ , то это не значит, что  $\lim_{x_0} u < \lim_{x_0} v$  даже в случае существования этих пределов. Так, можно взять вблизи  $x_0 = 0$  функции  $u(x) = 0$  и  $v(x) = x$ , определённые на  $(0; +\infty)$ .

**Теорема 3.1.4** (Теорема о двух полицейских).  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$ ;  $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Предположим, что  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  вблизи  $x_0$ . Также положим, что  $\lim_{x_0} f = c = \lim_{x_0} h$ . Тогда  $\lim_{x_0} g = c$

*Доказательство.*

Рассмотрим  $\overset{\circ}{V}_1(x_0)$  такую, что на ней выполняется неравенство.

$$\forall U(c) : \exists \overset{\circ}{V}_2(x_0) \text{ такая, что } f\left(\overset{\circ}{V}_2(x_0)\right) \subset U(c) \text{ и } g\left(\overset{\circ}{V}_2(x_0)\right) \subset U(c).$$

Тогда  $\forall U(c) : \overset{\circ}{V}_3(x_0) = \overset{\circ}{V}_1(x_0) \cap \overset{\circ}{V}_2(x_0)$  такова, что  $f\left(\overset{\circ}{V}_3(x_0)\right) \subset U(c)$  и по определению  $\lim_{x_0} f = c$ .  $\square$

$$\text{Замечание. } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \iff \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - c) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - c| = 0$$

*Доказательство.*

Если расписать по определению любое из трёх выражений, то получим одно и то же:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) : \forall x \in \left( \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap A \right) \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$$

$\square$

*Замечание.* Функция имеет (конечный (другие пока не определяли)) предел вблизи  $x_0$ , значит, она ограничена вблизи  $x_0$ .

**Определение 3.1.6** (Ограниченная функция). Функция  $h : B \rightarrow \mathbb{R}$  ограничена (снизу, сверху, без уточнений), если  $h(B)$  ограничено (снизу, сверху, без уточнений).

$h$  ограничена сверху:  $\exists M : \forall x \in B : h(x) \leq M$

$h$  ограничена снизу:  $\exists M : \forall x \in B : h(x) \geq M$

$h$  ограничена:  $(\exists M, N : \forall x \in B : h \leq h(x) \leq N) \iff (\exists K : \forall x \in B : |h(x) - K| \leq K)$

*Доказательство.*

Пусть  $\lim_{x_0} f = c$ . Рассмотрим любую окрестность точки  $c$ , например, радиусом 1 :  $U_1(c)$ . Для такой окрестности  $c$  существует окрестность  $\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0)$  такая, что  $f\left(\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap \text{dom } f\right) \subset U_1(c)$ . Значит,  $f$  ограничена на  $\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0)$ .  $\square$

### 3.1.6 Арифметические действия с пределами

**Теорема 3.1.5** (Предел суммы).  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A' \Rightarrow \lim_{x_0}(f + g) = \lim_{x_0} f + \lim_{x_0} g$ . Если правая часть существует, то существует и левая, причём выполняется равенство.

$$(f + g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x)$$

*Доказательство.*

Пусть  $\lim_{x_0} f = a, \lim_{x_0} g = b$ .

$$\exists \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap A : |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда  $|f(x) + g(x) - (a + b)| \leq |f(x) - a| + |g(x) - b| < \varepsilon$ .  $\square$

**Теорема 3.1.6** (Предел произведения числа и функции).  $\alpha \in \mathbb{R}; f : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A' \Rightarrow \lim_{x_0}(\alpha f) = \alpha \lim_{x_0} f$ . Если правая часть существует, то существует и левая, причём выполняется равенство.

$$(\alpha f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha \cdot f(x))$$

*Доказательство.*

$\alpha = 0$  — ясно.

$\alpha \neq 0$  — применим определение предела для  $f$  с радиусом  $\frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ :

$$\exists \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap A : |f(x) - c| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}. \text{ Тогда для такой же окрестности } |(\alpha f)(x) - \alpha c| < \varepsilon$$

$\square$

## Лекция IX

30 сентября 2022 г.

$A \subset \mathbb{R}; x_0 \in A'; f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Для  $B \subset A$  определено сужение  $f|_B$ .

**Теорема 3.1.7** (Предел сужения). Если  $x_0 \in B'$  и  $\exists \lim_{x_0} f$ , то  $\lim_{x_0} (f|_B) = \lim_{x_0} f$ .

Так, для  $f : [0; 1] \cup [2; 3] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} x, & x \in [0; 1] \\ 3, & x \in [2; 3] \end{cases}$ , в  $x_0$  существует предел в  $x_0 = 1$ :  $\lim_1 f = 1$ .

Он сохраняется при сужении на  $[0; 1)$ , но не при сужении на  $[2; 3]$  — в таком случае 1 перестает быть предельной точкой.

*Замечание.* При сужении может появиться предел, если его раньше не было. Так, для  $f = \chi_{[0;1]} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\nexists \lim_1 f$ , но  $\exists \lim_1 f|_{[0;1]} = 1$ .

*Доказательство.* Пусть  $c = \lim_{x_0} f$ . Тогда  $\forall U(c) : \exists \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap A : f(x) \in U(c)$ . Тогда для сужения это тоже верно.  $\square$

**Теорема 3.1.8** (Частичное обращение). Если  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $B$  имеет вид  $A \cap W$  для некоей окрестности  $W = \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0)$ , и  $\exists \lim_{x_0} f|_B$ , то  $\exists \lim_{x_0} f$ . Можно даже сказать точнее:  $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} f|_B$ .

*Доказательство.* Запишем условие существования предела для сужения:

$$\forall U(c) : \exists \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) : f\left(\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap B\right) = f\left(\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap A \cap W\right) \subset U(c)$$

Отсюда  $f\left(\left(\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap W\right) \cap A\right) \subset U(c)$ , а  $\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap W$  — некая окрестность  $x_0$ .  $\square$

**Теорема 3.1.9.** Пусть  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$ . Если  $\lim_{x_0} f = 0$  и  $g$  ограничена вблизи  $x_0$ , то  $\lim_{x_0} (f \cdot g) = 0$ .

*Доказательство.* Можно считать, что  $g$  определена только на той окрестности, на которой она ограничена. Тогда  $\exists M \in \mathbb{R} : |g(x)| \leq M$ . Отсюда  $0 \leq |(f \cdot g)(x)| \leq M|f(x)|$ . По теореме о двух блястителях закона  $(f \cdot g)$  стремится к 0 вблизи  $x_0$ .  $\square$

**Теорема 3.1.10** (Предел произведения).  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}; x_0 \in A'$ . Тогда  $\lim_{x_0} (f \cdot g) = \lim_{x_0} f \cdot \lim_{x_0} g$ . Как и прежде, запись читается так: если существует правая часть, то левая тоже существует и равна ей.

*Доказательство.* Положим  $a = \lim_{x_0} f; b = \lim_{x_0} g$ . Утверждение теоремы эквивалентно следующему:  $\lim_{x_0} |fg - ab| = 0$ . Но заметим, что

$$f(x)g(x) - ab = \underbrace{(f(x) - a)}_{\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0} \underbrace{g(x)}_{\text{ограничена}} + \underbrace{a}_{\text{константа}} \underbrace{(g(x) - b)}_{\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0}$$

Несложно видеть, что данная сумма стремится к нулю, так как в каждой паре один из множителей ограничен, а другой — стремится к нулю.  $\square$

В отличие от предела произведения, предел частного может не существовать, равно если частное ограничено  $\left(\frac{|x|}{x}\right)$  или неограничено  $\left(\frac{1}{x}\right)$

**Теорема 3.1.11** (Предел частного).  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$ . Если  $\exists \lim_{x_0} g : \lim_{x_0} g \neq 0$ , то формула  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  задаёт функцию, определённую вблизи  $x_0$  и

$$\left(\lim_{x_0} h = \lim_{x_0} \left(\frac{f}{g}\right)\right) = \frac{\lim_{x_0} f}{\lim_{x_0} g}$$

Здесь левая часть существует, если существует правая, то есть пределы  $\lim_{x_0} f, \lim_{x_0} g$  существуют, и  $\lim_{x_0} g \neq 0$ . В случае выполнения всех условий левая часть равна правой.

*Доказательство.*

Положим  $a = \lim_{x_0} f; b = \lim_{x_0} g$ .

**Лемма 3.1.1.** Функция  $g$  отделена от нуля вблизи  $x_0$ , то есть  $\exists \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap A : \|g(x)\| \geq \frac{|b|}{2}$ .

Доказательство леммы.

Для  $\varepsilon = \frac{|b|}{10} : \exists \overset{o}{V}_\varepsilon(x_0) : \forall x \in \overset{o}{V}_\varepsilon(x_0) \cap A : |g(x) - b| < \varepsilon$ . Тогда для  $\forall x \in \overset{o}{V}_\varepsilon(x_0) \cap A : |g(x)| \geq \|b\| - \frac{|b|}{10} \geq \frac{|b|}{2}$ .  $\square$

Докажем, что  $\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a}{b}$  стремится к нулю:  $\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a}{b} = \frac{bf(x) - ag(x)}{b \cdot g(x)} = \underbrace{(bf(x) - ag(x))}_{\xrightarrow{x \rightarrow x_0} ba - ab = 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{b \cdot g(x)}}_{\text{ограничена, } |\dots| \leq \frac{2}{|b|^2}}$ .  $\square$

Так, рассмотрим  $f \equiv c \Rightarrow \lim_{x_0} f = c$  и  $g(x) = x \Rightarrow \lim_{x_0} g = x_0$ .

**Следствие 3.1.1.** Пусть  $P$  — многочлен:  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ . Тогда  $\forall x_0 \in \mathbb{R} : \lim_{x_0} P = P(x_0)$ .

**Следствие 3.1.2.** Пусть  $Q$  — другой многочлен; введём рациональную функцию  $U(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , заданную на множестве  $\{x \in \mathbb{R} | Q(x) \neq 0\}$ . Тогда для  $x_0 \in \text{dom } U : \left( \lim_{x_0} U = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \left( U(x_0) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \right)$ .

**Определение 3.1.7** (Непрерывная функция). Пусть  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Для  $x \in A \cap A'$  говорят, что  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , если  $\exists \lim_{x_0} f$  и  $\lim_{x_0} f = f(x_0)$ .

Видим, что многочлен непрерывен везде на  $\mathbb{R}$ , а рациональная функция — везде на своей области определения.

Рассмотрим  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть  $q \in \mathbb{R}$ . Определим  $h(n) = h_n = q + q + \dots + q^n$ .

Что можно сказать о существовании предела  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n$ ?

Заметим, что  $(1 + \dots + q^n)(1 - q) = 1 - q^{n+1}$ .

1. Для  $q = 1 : h_n = n + 1$  — функция не ограничена ни в какой окрестности  $+\infty$ , значит, предела нет.

Иначе  $q \neq 1 : h_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$ .

2.  $q = -1$  и  $h_n = \begin{cases} 1, & 2|n \\ 0, & 2 \nmid n \end{cases}$ . Значения чередуются, предела нет.

3.  $|q| > 1$ . Предела нет,  $|h_n| \geq \left| \frac{1}{1 - q} \right| \cdot (|q|^n - 1)$  неограничена  $\left( h_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \right.$  по-прежнему  $\left. \right)$ .

4.  $|q| < 1$  и  $\lim_{+\infty} h = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$ . В самом деле,  $q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , что можно получить, например, применяя неравенство Бернулли для  $\frac{1}{|q|}$ .

## Лекция X

3 октября 2022 г.

### 3.1.7 Теорема Вейерштрасса об ограниченной возрастающей функции

**Определение 3.1.8** (Возрастающая функция  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ ).  $\forall x_1, x_2 \in B : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ . Говорят о *строгом возрастании*, если  $\forall x_1, x_2 \in B : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

Аналогично для (строгого) убывания.



Пусть  $A \subset \mathbb{R}$ .

1.  $A$  ограничено сверху и  $(x_0 = \sup A) \notin A$ . Тогда  $x_0 \in A'$ .
2.  $A$  не ограничено сверху,  $x_0 = +\infty$ .

**Теорема 3.1.12** (Вейерштрасс). Пусть  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , возрастает, ограничена сверху. Тогда  $\exists \lim_{x_0} f$ .

*Доказательство.*

$C := f(A)$ .  $f$  ограничена  $\Rightarrow \exists c = \sup C$ . Докажем, что  $c = \lim_{x_0} f$ .

Рассмотрим  $\forall \varepsilon > 0$ . По теореме об описании супремума  $\exists d \in C : d > c - \varepsilon$ ;  $\exists y \in A : f(y) = d > c - \varepsilon$ . Тогда для окрестности  $\overset{\circ}{V}_\delta(x_0) = \{u \in A | y < u < x_0\} : \forall u \in \overset{\circ}{V}_\delta(x_0) : d = f(y) \leq f(u) \leq c$ . Таким образом, при  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V}_\delta(x_0) : c - \varepsilon \leq f(u) \leq c$  и  $c$  — предел по определению.  $\square$

**Теорема 3.1.13** (Дополнение предыдущей). Пусть  $A \subset \mathbb{R}$ ; предельная (необязательно конечная) точка  $x_0 \in A'$ , причём  $A \subset (x_0; +\infty)$ . Тогда

- Если  $f$  ограничена снизу и возрастает, то  $\exists \lim_{x_0} f = \inf_{x \in A} f(x)$
- Если  $f$  ограничена сверху и убывает, то  $\exists \lim_{x_0} f = \sup_{x \in A} f(x)$

Для  $x_0$ , определённого выше, и монотонной ограниченной функции:

*Замечание.*  $\lim_{x_0} f = \begin{cases} \sup f(A), & f \text{ возрастает} \\ \inf f(A), & f \text{ убывает} \end{cases}$ .

Для  $a > 0$  и  $0 < b < 1 : f(n) = a + ab + \dots + ab^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{1-b}$ . Так как  $f$  возрастает, то число  $\frac{a}{1-b}$  — не только  $\lim_{+\infty} f$ , но и  $\sup f : \forall n \in \mathbb{N} : f(n) \leq \frac{a}{1-b}$ .

Рассмотрим  $g(n) = \left( \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \right) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$ , где  $n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ (n-1)! \cdot n, & n > 0 \end{cases} = \left( \prod_{i=1}^n i \right) = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ .

**Факт 3.1.3.**  $\exists \lim_{+\infty} g(n)$ .  $e \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{+\infty} g(n)$ .

*Доказательство.*

Достаточно проверить, что  $g(\mathbb{N})$  ограничено сверху.

Заметим, что  $g(n) = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n} \right)$  для  $n \geq 3$ . Отсюда

$$g(n) \leq 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) \leq 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} = 2\frac{13}{18}$$

Отсюда ( $g$  возрастает) видно, что  $\lim_{+\infty} g(n)$  существует, и  $\lim_{+\infty} g(n) < 3$ . Несложно вычислить первые несколько десятичных знаков числа  $e = 2,71828\dots$ .  $\square$

**Теорема 3.1.14.** Число  $e$  иррационально

*Доказательство.*

Пусть  $e = \frac{p}{q}$  для некоторых  $p, q \in \mathbb{N}$ . Оценками на  $e$  получаем, что  $q \geq 2$ . Рассмотрим число

$$q!e = q! \left( 1 + \dots + \frac{1}{q!} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{(q+1)(q+2) \cdot \dots \cdot n} \right)$$

Однако  $\left( \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{(q+1)(q+2) \cdot \dots \cdot n} \right) \leq \left( \frac{1}{q+1} + \dots + \frac{1}{(q+1)^{n-q}} \right) < \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) \leq \frac{1}{2}$ , откуда  $q!e$  никак не может быть целым. Противоречие.  $\square$

### 3.1.8 Гармонические ряды

Пусть  $a > 0$ . Когда  $h(n) = 1 + \frac{1}{2^a} + \dots + \frac{1}{n^a}$  ограничена сверху? При каких  $a : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} h$ ?

*Замечание.* Понятие степени  $n^a$  будет определено позже, предполагается, что все с ним знакомы.

**Теорема 3.1.15.** Пусть  $b_1 \geq b_2 \geq \dots$  — убывающая последовательность неотрицательных чисел. Следующие условия эквивалентны:

1.  $\sum_{j=1}^n b_j$  ограничена сверху.
2.  $\sum_{k=1}^n 2^k b_{2^k}$  ограничена сверху.

*Доказательство.*

(1)  $\Rightarrow$  (2). Рассмотрим  $\forall n \in \mathbb{N}. \exists! l \in \mathbb{N} : 2^l \leq n < 2^{l+1}$ .

$$\sum_{j=1}^n b_j \leq b_1 + (b_2 + b_3) + (b_4 + \dots + b_7) + \dots + (b_{2^l} + \dots + b_{2^{l+1}-1}) \leq b_1 + \sum_{k=1}^l 2^k b_{2^k}$$

(2)  $\Rightarrow$  (1). Рассмотрим  $\forall l \in \mathbb{N}$ .

$$\sum_{k=1}^l 2^k b_{2^k} = 2 \left( b_2 + (b_4 + b_4) + \dots + \underbrace{(b_{2^l} + \dots + b_{2^l})}_{2^{l-1}} \right) \leq 2 \left( b_1 + (b_2 + b_3) + \dots \right) \leq 2 \sum_{j=1}^{2^l} b_j$$

Из этих двух неравенств несложно видеть, что неограниченность одной последовательности непременно влечёт неограниченность другой.  $\square$

**Следствие 3.1.3.** Пусть  $b_j = \frac{1}{j^a}$ . Тогда  $2^j b_{2^j} = 2^j \frac{1}{2^{ja}} = (2^{1-a})^j$ . Но сумма  $\sum_{j=1}^n (2^{1-a})^j$  ограничена если и только если  $2^{1-a} < 1$ . Частный случай равенства единице:  $a = 1 : 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$  не ограничена.

**Следствие 3.1.4.** Для  $a = 2 : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$ .

Эйлер показал, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$ .

**Следствие 3.1.5.**  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(\log k)^\alpha} \iff \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n 2^j \frac{1}{2^j (\log 2^j)^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^\alpha} \iff \alpha > 1$

## Лекция XI

7 октября 2022 г.

### 3.1.9 Предел последовательности

Последовательность  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  или  $\{a(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ .  $\exists! x_0 \in \mathbb{N}' = \{+\infty\}$ .

Определение:  $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \in \mathbb{N} : (n > N \Rightarrow |a_n - c| < \varepsilon)$ . Очевидно, что можно считать, что  $N \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 3.1.16.** Последовательность  $a_n$  сходится к  $c \iff \forall \varepsilon > 0 : \left\{ n \in \mathbb{N} : |a_n - c| > \varepsilon \right\}$  конечно.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . Если последовательность сходится, то обратное неравенство выполняется начиная с некоторого места, тогда  $|a_n - c| > \varepsilon$  может выполняться только в некоторых точках до данного места; этих точек конечное количество.

$\Leftarrow$ . Если  $\left\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - c| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$  конечно, то в нём существует максимальный элемент  $N$ . Тогда  $\forall n > N : |a_n - c| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ .  $\square$

**Определение 3.1.9** (Перестановка множества  $\mathbb{N}$ ). Биекция  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

**Определение 3.1.10** (Перестановка последовательности  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ). Любая последовательность вида  $\{a_{\phi(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ , где  $\phi$  — перестановка  $\mathbb{N}$ .

**Следствие 3.1.6.** Если последовательность  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c$ , то любая перестановка  $a_{\phi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c$ . Верно и обратное — если какая-то перестановка имеет предел, то такой же имеет и исходная последовательность (рассмотреть обратную перестановку).

**Определение 3.1.11** (Подпоследовательность  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ). Любая последовательность вида  $a_{k_n}$ , где последовательность натуральных чисел  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  возрастает:  $k_1 < k_2 < \dots$ .

**Теорема 3.1.17.** Если последовательность  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  сходится к  $c$ , то любая подпоследовательность  $\{a_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  тоже сходится к  $c$ .

*Доказательство.* Верно по теореме о сужении функций.  $\square$

**Теорема 3.1.18** (О компактности (вторая форма)). Первая форма приведена здесь: (теорема 3.0.6). Любая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.

*Доказательство.* Рассмотрим  $E = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

- $E$  конечно.

Утверждается, что существует подпоследовательность  $\{a_{b_n}\}$ , у которой все значения одинаковы:  $a_{b_n} = a_{b_m}$ . Ну, в самом деле: от противного, если каждое значение из  $E$  последовательность принимает конечное количество раз, то её прообраз оказывается конечным.

- $E$  бесконечно.

Согласно первой форме теоремы о компактности  $\exists c \in \mathbb{R}$ , являющаяся предельной для  $E$  :  $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in E : 0 < |x - c| < \varepsilon$ .

Найдём последовательность  $k_n$  так, чтобы  $\{a_{k_n}\}$  сходилась к  $c$  по индукции. А именно, найдём такую последовательность индексов  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , чтобы выполнялось  $|a_{k_n} - c| < \frac{1}{n}$ . По определению предельной точки в любой окрестности  $c$  есть точка. Тогда возьмём такую окрестность, чтобы её радиус был меньше  $\frac{1}{n}$ , да ещё и все ранее выбранные точки не попали в неё. Так можно будет выбрать точку  $a_{k_n}$  для любого  $n$ .

После данного действия у нас есть  $\{a_{k_n}\}$ , которая сходится к  $c$  ( $k_n$  — какая-то последовательность индексов). Заметим, что та перестановка, в которой  $\{k_n\}$  возрастает, тогда тоже сходится к  $c$ , но она уже является подпоследовательностью  $\{a_n\}$ .  $\square$

**Теорема 3.1.19.** Сходящаяся последовательность  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ограничена

*Доказательство.* По теореме для функций, имеющих предел,  $\exists \overset{\circ}{V}_\varepsilon(+\infty)$  такая, что  $a \left( \overset{\circ}{V}_\varepsilon(+\infty) \right)$  ограничена. В нашем случае  $\overset{\circ}{V}_\varepsilon(+\infty) = (N; +\infty)$  для некоего  $n \in \mathbb{N}$ . Но множество  $\{a_1, \dots, a_N\}$  конечно, поэтому тоже ограничено.  $\square$

**Теорема 3.1.20** (Предельные точки в терминах последовательностей).  $A \subset \mathbb{R}; x_0 \in \mathbb{R}$ . Следующие условия эквивалентны:

$$(x_0 \in A') \iff \left( \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (A \setminus \{x_0\}) : x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0 \right)$$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ .  $\forall n : \exists x_n \in \overset{o}{V}_{\frac{1}{n}}(x_0) \iff \exists x_n : |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ . Тогда по теореме о двух полицейских  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$ .

$\Leftarrow$ . Рассмотрим окрестность  $\overset{o}{V}_\varepsilon(x_0)$ . Тогда  $\exists N : \forall n > N : x_n \in \overset{o}{V}_\varepsilon(x_0)$ . □

**Предложение 3.1.1.**  $A \subset \mathbb{R}; x_0 \in \left(\overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} A \cup A'\right) \iff \exists \{x_n\} \subset A : x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$ .

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . Если  $x_0 \in \overline{A}$ , то либо  $x_0 \in A$  — тогда рассмотрим последовательность  $\mathbb{N} \rightarrow \{x_0\}$ , либо  $x_0 \in A'$  — тогда см. предыдущую теорему.

$\Leftarrow$ . Рассмотрим данную последовательность. Если её предел  $x_0 = x_n$  для некоего  $n$ , то  $x_0 \in A$ . Иначе  $\forall n \in \mathbb{N} : x_0 \neq x_n$ , тогда  $x_0 \in A'$ . □

**Предложение 3.1.2** (Бесконечная предельная точка ( $x_0 = \pm\infty$ )).  $+\infty$  ( $-\infty$ ) — предельная точка для  $A \iff \forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in A : x_n > n$  ( $x_n < -n$ )).

**Теорема 3.1.21** (Предел функции в терминах последовательностей).  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$  и  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Следующие условия эквивалентны:

$$\left(\lim_{x_0} f = c\right) \iff \left(\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\} : (x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = c)\right)$$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . Дано:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in A : (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon)$ . Пусть  $\{x_n\} \subset A \setminus \{x_0\}; x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$ . Тогда  $\exists N : \forall n > N : |x_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - c| < \varepsilon$ .

$\Leftarrow$ . Дано:  $\forall \{x_n\} : (x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N : (n > N \Rightarrow |f(x_n) - c| < \varepsilon))$ .

## Лекция XII

10 октября 2022 г.

Пойдём от противного: пусть  $c$  не есть предел функции  $f$  в точке  $x_0$ . То есть

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x \in \left(\overset{o}{V}_\delta(x_0) \cap A\right) : |f(x) - c| \geq \varepsilon$$

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ ; возьмём последовательность  $\delta_n = \frac{1}{n}$ . Тогда

$$\forall \delta_n : \exists x_n \in A : 0 < |x_n - x_0| < \delta_n \wedge |f(x_n) - c| \geq \varepsilon$$

Противоречие, мы построили последовательность. □

**Определение 3.1.12** (Колебание функции на множестве). Рассмотрим  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $B \subset \mathbb{R}$ . Для  $b \in B$ , такой что  $g$  ограничена на  $b$ , колебания  $\text{osc}_b g \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{|f(x) - f(y)| : x, y \in b\}$ .

Определение корректно, так как из ограниченности функции  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in b : |f(x)| < M$ , откуда  $\{|f(x) - f(y)| : x, y \in b\}$  ограничено сверху числом  $2M$ , а значит, имеет супремум.

**Лемма 3.1.2.**

$$\text{osc}_b g = \sup \{g(x) - g(y) : x, y \in b\} = \sup_{x \in b} g(x) - \inf_{x \in b} g(x)$$

*Доказательство леммы.*

- $X = \{|g(x) - g(y)| | x, y \in b\}$ ;  $Y = \{g(x) - g(y) | x, y \in b\}$ . Тогда понятно, что  $X = \{y | y \in Y\} \cup \{-y | y \in Y\}$ , откуда  $\sup X = \sup Y$ .

Для произвольного ограниченного значением  $M$  отображения  $f : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$  верно следующее:

$$\text{Пусть } X := \sup_{(v,w) \in V \times W} f(v, w). \text{ Выполняется } X = \sup_{v \in V} \sup_{w \in W} f(v, w)$$

В самом деле, с одной стороны  $\forall (v, w) \in (V \times W) : X \geq f(v, w) \Rightarrow X \geq \sup_{w \in W} f(v, w) \Rightarrow X \geq \sup_{v \in V} \sup_{w \in W} f(v, w)$ .

С другой стороны,  $\forall \rho > 0 : \exists (v, w) \in (V \times W) : f(v, w) > X - \rho$ . Тогда  $\sup_{v \in V} \sup_{w \in W} f(v, w) \geq X - \rho$ .

Из этих двух неравенств получаем равенство.

$$\bullet \sup_{x, y \in b} (g(x) - g(y)) = \sup_{x \in b} \sup_{y \in b} (g(x) - g(y)) = \sup_{x \in b} g(x) + \sup_{y \in b} (-g(y)) = \sup_{x \in b} g(x) - \inf_{y \in b} g(y)$$

Здесь пользовались тем, что  $\sup_{x \in X} (f(x) + c) = (\sup_{x \in X} f(x)) + c$  и  $\sup_{x \in X} f(x) = - \inf_{x \in X} (-f(x))$ .  $\square$

**Теорема 3.1.22** (Критерий Коши существования предела). Для  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  и произвольной  $x_0 \in A'$ :

1.  $f$  имеет предел в  $x_0$ .
2.  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) : \forall x, y \in \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ .  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) : \forall z \in \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) : |f(z) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$  Но тогда  $\forall x, y \in \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) : |f(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |f(y) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ , откуда  $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - c| + |f(y) - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

$\Leftarrow$ . Дано:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) : \text{osc}_{\left(\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap A\right)} f \leq \varepsilon$ . Функция  $f$  ограничена вблизи  $x_0$ : применим

условие для  $\varepsilon = 1$ , найдём  $\overset{\circ}{V}_1(x_0) : \forall x, y \in \left(\overset{\circ}{V}_1(x_0) \cap A\right) : |f(x) - f(y)| < 1$ . Тогда для фиксированного  $y \in \left(\overset{\circ}{V}_1(x_0) \cap A\right) : \forall x \in \left(\overset{\circ}{V}_1(x_0) \cap A\right) : |f(x) - f(y)| < 1 \iff f(x) \in [f(y) - 1; f(y) + 1]$ . Тогда рассмотрим сужение  $f$  на окрестность, в которой она ограничена и докажем существование предела у сужения.

Рассмотрим  $v$  — совокупность всех окрестностей точки  $x_0$ . Пусть  $\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \in v$ . Обозначим

$$l\left(\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0)\right) = \inf_{x \in \left(\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap A\right)} f(x); \quad h\left(\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0)\right) = \sup_{x \in \left(\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap A\right)} f(x)$$

Пусть  $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) \subset \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0)$ ,  $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0), \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \in v$ . Тогда верно следующее:

$$l\left(\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0)\right) \leq l\left(\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)\right) \leq h\left(\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)\right) \leq h\left(\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0)\right)$$

Введём  $L = \left\{ l\left(\overset{\circ}{w}\right) \middle| \overset{\circ}{w} \in v \right\}$  и  $H = \left\{ h\left(\overset{\circ}{w}\right) \middle| \overset{\circ}{w} \in v \right\}$ . Эти два множества образуют щель. Более того, щель — узкая, так как  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) : \sup_{x \in A \cap \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0)} f(x) - \inf_{y \in A \cap \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0)} f(y) \leq \varepsilon$ . Значит,  $\exists! c \in (L; H)$ .

Докажем, что  $c = \lim_{x_0} f$ . Рассмотрим произвольный  $\varepsilon > 0$ , найдём  $\overset{o}{V}_\varepsilon(x_0)$  так, чтобы  $h\left(\overset{o}{V}_\varepsilon(x_0)\right) - l\left(\overset{o}{V}_\varepsilon(x_0)\right) < \varepsilon$ . Но так как  $\forall x \in \overset{o}{V}_\varepsilon(x_0) : c, f(x) \in \left[l\left(\overset{o}{V}_\varepsilon(x_0)\right), h\left(\overset{o}{V}_\varepsilon(x_0)\right)\right]$ , то получили, что  $|f(x) - c| < \varepsilon$   $\square$

**Факт 3.1.4.** Теорема эквивалентна аксиоме Кантора — Дедекинда

## 3.2 Ряды

Рассмотрим последовательность  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ . Обозначим ряд символом  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

**Определение 3.2.1** (Частичная сумма).  $S_n \stackrel{def}{=} a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$ .

**Определение 3.2.2** (Сходящийся ряд). Ряд, последовательность частичных сумм которого сходится. Иначе ряд расходится.

У сходящегося ряда  $S = \lim_n S_n$  называется суммой ряда.

### 3.2.1 Примеры

- Геометрическая прогрессия  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ . При  $|q| < 1$  сходится к  $\frac{1}{1-q}$ ; при  $|q| \geq 1$  расходится.
- Гармонические ряды  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ . Сходится  $\iff a > 1$ .
- $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$  — сходится к числу  $e$ .

Пусть  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — последовательность. Введём последовательность  $d_n = \begin{cases} a_n, & n = 1 \\ a_n - a_{n-1}, & n > 1 \end{cases}$ . Рассмотрим ряд  $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k$ . Несложно видеть, что его частичные суммы совпадают с последовательностью  $\{a_k\}$ . В частности, ряд  $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k$  сходится  $\iff$  последовательность  $a_n$  имеет предел, причём если это верно, то  $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k = \lim_{+\infty} a_n$ .

## Лекция XIII

14 октября 2022 г.

### 3.2.2 Критерий Коши для рядов

Рассмотрим ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ . Его сходимость равносильна сходимости последовательности частичных сумм  $\{s_k\}$ . Применяя критерий Коши, получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall k, n > N : |s_k - s_n| < \varepsilon$$

Считая  $n > k$ , получаем  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall k > n > N : |a_{n+1} + \dots + a_k| < \varepsilon$ .

**Следствие 3.2.1.** Если ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$  сходится, то  $a_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $k = n + 1$  выше. Другой способ — написать  $a_m = s_m - s_{m-1}$ , но при стремлении  $m$  к бесконечности  $s_m - s_{m-1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} s - s = 0$ , где  $s$  — предел последовательности частичных сумм.  $\square$

*Замечание.* Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится, хотя и выполняется условие  $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**Теорема 3.2.1** (О сравнении рядов). Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  таковы, что  $|a_n| \leq b_n$ , то из сходимости  $b_n$  следует сходимость  $a_n$ .

*Доказательство.* Запишем критерий Коши для ряда  $b$ :  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall k > n > N : b_{n+1} + \dots + b_k < \varepsilon$ . Но тогда  $|a_{n+1} + \dots + a_k| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_k| \leq b_{n+1} + \dots + b_k < \varepsilon$  и ряд  $a_n$  сходится по критерию Коши.  $\square$

Как известно,  $e \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ . Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n!}$  для ограниченной последовательности  $\{d_n\} \subset \mathbb{R}$ . Пусть последовательность ограничена числом  $M$ . Тогда  $\left| \frac{d_n}{n!} \right| \leq M \cdot \frac{1}{n!}$ , и по теореме о сравнении рядов ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n!}$  сходится.

**Определение 3.2.3** (Абсолютная сходимость). Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится абсолютно, если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  сходится.

*Замечание.* По теореме о сравнении рядов, из абсолютной сходимости следует сходимость.

*Доказательство.* Рассмотрим  $b_n = |a_n|$  в теореме о сходимости.  $\square$

*Замечание.* Обратное в общем случае неверно: так, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  сходится, но не абсолютно.

Чтобы проверить это утверждение, применим преобразование Абеля.

### 3.2.3 Преобразование Абеля

Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_i a_i$ , где  $a_i \geq a_{i+1} \geq 0$ . Обозначим  $\sigma_n := \sum_{i=1}^n \beta_i$ . Тогда если  $\{\sigma_i\}$  ограничена, то ряд сходится.

*Доказательство.*

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3 + \dots + \beta_n a_n = \sigma_1 a_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) a_2 + (\sigma_3 - \sigma_2) a_3 + \dots + (\sigma_n - \sigma_{n-1}) a_n.$$

Перегруппируем слагаемые, чтобы за скобками стояли не  $a_i$ , а  $\sigma_i$ :

$$\sigma_1(a_1 - a_2) + \sigma_2(a_2 - a_3) + \dots + \sigma_n a_n.$$

Применив ограниченность последовательности  $\{\sigma_i\}$ , получим  $|\sigma_j(a_j - a_{j+1})| \leq |\sigma_j|(a_j - a_{j+1}) \leq M(a_j - a_{j+1})$ . Но тогда по теореме о сравнении ряд сходится, так как сходится ряд

$$t_k = \sum_{j=1}^{\infty} M(a_j - a_{j+1})$$

В самом деле,  $M(a_1 - a_2) + M(a_2 - a_3) + \dots + M(a_n - a_{n+1}) = M(a_1 - a_n)$ , то есть сумма ряда не больше  $Ma_1$ .

*Замечание.* Здесь у меня небольшой обман, надо ещё сказать, что  $\sigma_n a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  или (что то же самое, так как  $\{\sigma_i\}$  ограничена)  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Иначе остаётся слагаемое  $\sigma_n a_n$ , вносящее существенный вклад.  $\square$

Применив преобразование Абеля к ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  для  $\beta_i = (-1)^n$  и  $a_n = \frac{1}{n}$  действительно получим его сходимость. То, что он не сходится абсолютно, следует из того, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится.

*Замечание.* Через преобразование Абеля можно доказать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}$ .

*Замечание.* Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ; пусть  $a_n \geq 0$ . Ряд сходится  $\iff$  частичные суммы ограничены сверху.

*Доказательство.* Частичные суммы нестрого возрастают и ограничены.  $\square$

В связи с этим, если для  $a_n \geq 0$  ряд  $\sum_{n=0}^{\infty}$  сходится, то часто записывают  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ .

### 3.3 Верхние и нижние пределы

Рассмотрим функцию  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$ .

Считаем, что функция  $f$  ограничена (достаточно считать вблизи  $x_0$ , после чего сузить область определения). Рассмотрим некую окрестность  $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)$ . Пусть  $U = \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) \cap A$ . Тогда  $\text{osc}_U f = \sup_{x \in U} f(x) - \inf_{y \in U} f(y)$ . Обозначим  $h\left(\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)\right) = \sup_{x \in U} f(x)$ ;  $l\left(\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)\right) = \inf_{x \in U} f(x)$ . Кроме того,  $v$  — множество окрестностей точки  $x_0$ .

Тогда множества  $L = \left\{ l\left(\overset{\circ}{w}\right) \middle| \overset{\circ}{w} \in v \right\}$  и  $H = \left\{ h\left(\overset{\circ}{w}\right) \middle| \overset{\circ}{w} \in v \right\}$  образуют щель, причём числа в этой щели — отрезок  $[\sup L; \inf H]$ .

**Определение 3.3.1** (Верхний предел). Число  $\inf H$  называется верхним пределом функции  $f$  в точке  $x_0$ . Обозначают  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$  или  $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

**Определение 3.3.2** (Нижний предел). Число  $\sup L$  называется нижним пределом функции  $f$  в точке  $x_0$ . Обозначают  $\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$  или  $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

#### 3.3.1 Свойства

1.  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = - \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} (-f(x))$ .

2. **Теорема 3.3.1** (Об описании верхнего предела). Следующие условия эквивалентны:

- a)  $d = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$

- b)  $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap A : f(x) < d + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \forall \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \exists x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap A : f(x) > d - \varepsilon \end{cases}$

*Доказательство.*

$$\Rightarrow. d = \inf_{\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) \in v} h\left(\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)\right). \text{ Тогда по свойству инфимума } \forall \varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V}_\delta(x_0) : h\left(\overset{\circ}{V}_\delta(x_0)\right) < d + \varepsilon, \text{ то есть } \sup_{x \in \overset{\circ}{V}_\delta(x_0) \cap A} h(x) < d + \varepsilon, \text{ откуда следует первое условие в конъюнкции.}$$



$$\begin{aligned} \text{А ещё } \forall \varepsilon > 0, \forall \overset{\circ}{V}_\delta(x_0) : d \leq h\left(\overset{\circ}{V}_\delta(x_0)\right) = \sup_{x \in \overset{\circ}{V}_\delta(x_0) \cap A} f(x) \Rightarrow \exists y \in \overset{\circ}{V}_\delta(x_0) : f(y) > \\ h\left(\overset{\circ}{V}_\delta(x_0)\right) - \varepsilon \geq d - \varepsilon. \end{aligned}$$

⇐. Лекция здесь внезапно кончилась.

## Лекция XIV

17 октября 2022 г.

Рассмотрим произвольный  $\varepsilon > 0$ . Согласно первому условию из (b), для него есть окрестность  $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : f(x) \leq d + \varepsilon$ , то есть  $h\left(\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\right) \leq d + \varepsilon$ . Но тогда  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f = \inf_{\overset{\circ}{w}} h\left(\overset{\circ}{w}\right) \leq d + \varepsilon \Rightarrow \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f \leq d$ .

Рассмотрим произвольный  $\varepsilon > 0$ . Согласно второму условию из (b), для любой его окрестности  $\overset{\circ}{V}_\delta(x_0) : \exists x \in \overset{\circ}{V}_\delta(x_0) : f(x) > d - \varepsilon$ , то есть  $h\left(\overset{\circ}{V}_\delta(x_0)\right) \geq d - \varepsilon$ . Но тогда  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f = \inf_{\overset{\circ}{w}} h\left(\overset{\circ}{w}\right) \geq d - \varepsilon$ , откуда  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f \geq d$ .  $\square$

3. Аналогичная теорема верна для нижнего предела:

**Теорема 3.3.2** (Об описании нижнего предела). Следующие условия эквивалентны:

- a)  $d = \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- b)  $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap A : f(x) > d - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \forall \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \exists x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap A : f(x) < d + \varepsilon \end{cases}$

*Доказательство.* Домножить  $f$  на  $-1$  и применить  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} (-f)(x)$ .  $\square$

Здесь интересно рассмотреть в качестве примеров функции  $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$  или даже  $\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x$  вблизи нуля.

4. **Теорема 3.3.3.** Пусть  $f : A \rightarrow \mathbb{R}; x_0 \in A'$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (a)  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f = d$ .
- (b)  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = d$ .

*Доказательство.*

$$\Rightarrow. \forall \varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap A : f(x) \in (d - \varepsilon; d + \varepsilon).$$

Тогда  $h\left(\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\right) \leq d + \varepsilon$  и  $l\left(\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\right) \geq d - \varepsilon$ , а навесив супремумы и инфимумы:  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf_{\overset{\circ}{w}} h\left(\overset{\circ}{w}\right) \leq d + \varepsilon$  и  $\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{\overset{\circ}{w}} l\left(\overset{\circ}{w}\right) \geq d - \varepsilon$ . Так как  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , то они оба равны  $d$ .

⇐. По теореме об описании верхнего предела  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0) : \forall x \in A \cap \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0) : f(x) < d + \varepsilon$ . С другой стороны, по теореме об описании нижнего предела  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V}_{\delta_2}(x_0) : \forall x \in A \cap \overset{\circ}{V}_{\delta_2}(x_0) : f(x) > d - \varepsilon$ . Но тогда  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V}_{\min(\delta_1, \delta_2)}(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{V}_{\min(\delta_1, \delta_2)}(x_0) : f(x) \in (d - \varepsilon; d + \varepsilon)$ .  $\square$

$$5. \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} (af)(x) = \begin{cases} a \cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x), & a > 0 \\ 0, & a = 0. \\ a \cdot \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x), & a < 0 \end{cases}$$

Так, для верхнего предела  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} (af)(x) = \inf_{\overset{\circ}{w}} \sup_{x \in \overset{\circ}{w} \cap A} (af)(x) = \inf_{\overset{\circ}{w}} a \sup_{x \in \overset{\circ}{w} \cap A} f(x) = a \inf_{\overset{\circ}{w}} \sup_{x \in \overset{\circ}{w} \cap A} f(x)$ .

6. **Теорема 3.3.4.** Пусть  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  — две ограниченные функции на  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$ . Тогда

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) + \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

*Доказательство.* Обозначим  $F = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$  и  $G = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

Для  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$  — минимальная из подходящих для  $f$  и  $g$  окрестностей:  $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : f(x) < F + \varepsilon \wedge g(x) < G + \varepsilon$ . Тогда  $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : f(x) + g(x) < F + G + 2\varepsilon$ , то есть  $h\left(\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\right) = \sup_{x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap A} (f(x) + g(x)) \leq F + G + 2\varepsilon$ , откуда  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \inf_{\overset{\circ}{w}} \sup_{x \in \overset{\circ}{w}} (f + g)(x) \leq F + G + 2\varepsilon$ .  $\square$

В теореме не наблюдается равенства, так как, например, для  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  и для  $g(x) = \sin\left(-\frac{1}{x}\right)$  их сумма имеет верхний предел вовсе не 2.

7. Вариант для нижних пределов:

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \geq \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) + \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

8. **Следствие 3.3.1.** Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g$ , то  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g$ .

*Доказательство.* С одной стороны  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g$ , но с другой стороны  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} (f + g - g)(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g$   $\square$

9. Формулы для верхних и нижних пределов.

I.  $x_0 \in A' \cap \mathbb{R}$ .

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$  введём обозначения

$$h'(\delta) = h\left(\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\right) = \sup \{f(x) | 0 < |x - x_0| < \delta \wedge x \in A\}$$

$$l'(\delta) = l\left(\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\right) = \inf \{f(x) | 0 < |x - x_0| < \delta \wedge x \in A\}$$

Тогда на  $l', h' : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  можно посмотреть, как на функции. Заметим, что  $h'(\delta)$  нестро-го возрастает, а  $l'(\delta)$  нестро-го убывает — просто потому что для  $\delta_1 < \delta_2$  множества вложены  $\{f(x) | 0 < |x - x_0| < \delta_1 \wedge x \in A\} \subset \{f(x) | 0 < |x - x_0| < \delta_2 \wedge x \in A\}$ .

Но тогда

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \inf_{\delta > 0} h'(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} h'(\delta) \\ \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \sup_{\delta > 0} l'(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} l'(\delta) \end{aligned}$$

II.  $x_0 \in A' \cap \{\pm\infty\}$ . Рассмотрим для определённости  $x_0 = +\infty$ . Окрестности такой точки — лучи  $(M; +\infty)$ .

$$h'(M) = \sup \{f(x) | x > M, x \in A\}$$

$$l'(M) = \inf \{f(x) | x > M, x \in A\}$$

Аналогично (I)  $h', l' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — функции, причём  $h'$  убывает, а  $l'$  возрастает. В таком случае

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \inf_M h'(M) = \lim_{h \rightarrow +\infty} h'(M)$$

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sup_M l'(M) = \lim_{M \rightarrow +\infty} l'(M)$$

*Замечание.* Ввиду монотонности  $l'$  и  $h'$  можно считать, что  $M \in B$ , где  $B \subset \mathbb{R}$  и  $B$  — не ограничено.

В частности, для последовательности: пусть  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — ограниченная последовательность. Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{i \rightarrow +\infty} \sup_{j > i} x_j = \inf_{i \in \mathbb{N}} \sup_{j > i} x_j$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{i \rightarrow +\infty} \inf_{j > i} x_j = \sup_{i \in \mathbb{N}} \inf_{j > i} x_j$$

## Лекция XV

21 октября 2022 г.

### 3.4 Бесконечные пределы

Пусть  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in A'$ .

**Определение 3.4.1** (Предел  $+\infty$ ).  $f$  имеет предел  $+\infty$  в точке  $x_0$ , если

$$\forall \overset{\circ}{U}_\varepsilon(+\infty) : \exists \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) : f(x) \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(+\infty)]$$

Так, для  $f : (0; +\infty); f : x \mapsto \frac{1}{x} : \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .

Аналогично определён предел  $-\infty$ .

Тогда для  $f : (-\infty; 0); f : x \mapsto \frac{1}{x} : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ .

**Определение 3.4.2** (Стремление к  $\infty$ ).  $f$  стремится к бесконечности в точке  $x_0$ , если  $|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ .

Так,  $\frac{1}{x}$  стремится к  $\infty$  в нуле, или  $\{(-1)^n n\}_{n \in \mathbb{N}}$  стремится к бесконечности при  $n \rightarrow +\infty$ .

**Предложение 3.4.1.**

- Если  $f$  стремится к бесконечности, то  $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0$ .
- Если  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$  и  $g(x) \neq 0$  вблизи 0, то  $\frac{1}{g}$  стремится к бесконечности вблизи точки  $x_0$ .

*Доказательство.*

- Надо доказать импликацию

$$\left( \forall M : \exists \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) : \forall x \in \left( \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) \cap A \right) |f(x)| > M \right) \Rightarrow \left( \forall \varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) : \forall x \in \left( \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap A \right) : \left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon \right)$$

Подойдёт для  $\varepsilon : M = \frac{1}{\varepsilon}$  и точно такая же окрестность.

- Здесь, наоборот, подойдёт  $\varepsilon = \frac{1}{M}$  и точно такая же окрестность. □

### 3.5 Пределы справа и слева

$f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in (A' \cap \mathbb{R})$ .

Предположим, что  $x_0$  — по-прежнему предельная точка для  $A \cap (x_0; +\infty)$ . Так, для  $A = (0; 1) \cup \{2\}$  это предположение верно для  $x_0 \in [0; 1)$  и неверно для  $x_0 \in [1; +\infty)$ .

**Определение 3.5.1** (Предел справа). Если  $\exists \lim_{x_0+} f|_{A \cap (x_0; +\infty)} = c$ , то  $c$  называется пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  справа.

Обозначают  $\lim_{x_0+} f$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ .

Предположим, что  $x$  — по-прежнему предельная точка для  $A \cap (-\infty; x_0)$ .

**Определение 3.5.2** (Предел слева). Если  $\exists \lim_{x_0-} f|_{A \cap (-\infty; x_0)} = c$ , то  $c$  называется пределом функции  $f$  в точке  $x_0$  слева.

Обозначают  $\lim_{x_0-} f$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ .

Пример: функция  $f(x) = \begin{cases} 3, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$  имеет пределы:  $\lim_{1-} f = 3; \quad \lim_{1+} f = 1$ .

$h(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} : \quad \nexists \lim_{0+} h; \quad \lim_{0-} h = 0$ .

*Предостережение.* Не путать левые и правые пределы с верхними и нижними.

**Теорема 3.5.1.** Пусть  $x_0$  — предельная точка и для  $A \cap (x_0; +\infty)$ , и для  $A \cap (-\infty; x_0)$ . Следующие условия эквиваленты:

1.  $f$  имеет предел в точке  $x_0$ .
2.  $f$  имеет предел и слева, и справа, и они равны.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . Предел есть как у  $f$ , так и у её сужений на  $A \cap (x_0; +\infty)$  и на  $A \cap (-\infty; x_0)$ .

$\Leftarrow$ . Запишем условия существования обоих пределов, выберем минимальную из двух окрестностей. □

### 3.6 Классификация разрывов

Пусть  $x_0 \in A$ ,  $x_0$  — предельная точка для  $A$ . Пусть функция не является непрерывной (определение 3.1.7), то есть предела нет, либо он существует, но не равен  $f(x_0)$ , то говорят, что  $f$  имеет (претерпевает) разрыв в  $x_0$ .

- Разрыв первого рода: устранимый разрыв:  $\exists \lim_{x_0} f \neq f(x_0)$ .
- Разрыв первого рода: скачок  $\exists \lim_{x_0+} f; \exists \lim_{x_0-} f; \quad \lim_{x_0+} f \neq \lim_{x_0-} f$ .
- Разрыв второго рода — всё остальное.

### 3.7 Непрерывные функции на замкнутых конечных множествах

$f : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A$ .

Определим непрерывные функции немного по-другому:

**Определение 3.7.1** ( $f$  непрерывна в  $x_0$ ).  $\forall U(f(x_0)) : \exists V(x_0) : f(V(x_0) \cap A) \subset U(f(x_0))$ .

Это определение утверждает, что в изолированной точке  $x_0 \in A$  функция также непрерывна.

В предельной же точке  $x_0 \in A'$  непрерывная функция, согласно определению, имеет предел, равный  $f(x_0)$ .

**Определение 3.7.2** (Функция  $f$  непрерывна на множестве  $A$ ). Функция  $f$  непрерывна на всех точках множества  $A$ .

**Факт 3.7.1.** Для  $f, g$  — непрерывных функций в точке  $x_0$ , то для  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  в точке  $x_0$  непрерывны также их линейные комбинации  $\alpha f + \beta g$  и произведение  $fg$ .

Если  $g(x_0) \neq 0$ , то  $\frac{1}{g}$  тоже непрерывна в  $x_0$ .

*Доказательство.* Если  $x_0$  — изолированная точка, то утверждение тривиально.

Иначе  $x_0 \in A'$  и утверждение следует из соответствующих теорем о пределах.  $\square$

Непрерывность в точке  $x_0$  в терминах неравенств:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in A : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

**Теорема 3.7.1** (Непрерывность на языке последовательностей). Функция  $f$  непрерывна в  $x_0 \in A \iff$  для всякой последовательности  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ , стремящейся к  $x_0$ :  $f(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_0)$ .

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ .

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in A : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \quad \forall \delta > 0 : \exists N : (n > N \Rightarrow |y_n - x_0| < \delta)$$

Скрестив эти два условия, получаем  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : |f(y_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

$\Leftarrow$ . От противного: если  $f$  не непрерывна в  $x_0$ , то  $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists y \in A : |y - x_0| < \delta \wedge |f(y) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ .

Тогда возьмём  $\delta_n = \frac{1}{n}$ . Находим  $y = y_n$  из строчки выше, получаем противоречие.  $\square$

## Лекция XVI

24 октября 2022 г.

Пусть  $A \subset \mathbb{R}$  — замкнутое ограниченное множество;  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция.

**Теорема 3.7.2** (Вейерштрасс, 1-я). Функция  $f$  при заданных условиях ограничена на  $A$ .

*Доказательство.* От противного:  $f$  не ограничена. Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in A : |f(x_n)| > n$ . Так как  $\{x_n\} \subset A$ , то  $\{x_n\}$  ограничена.

Значит, в ней есть сходящаяся подпоследовательность  $\{x_{n_j}\}$  (теорема 3.1.18). Пусть последовательность  $\{x_{n_j}\}$  сходится к  $z$ . Отсюда последовательность  $f(x_{n_j})$  сходится к  $f(z)$ , но так не может быть, потому что  $f(x_{n_j})$  не ограничена, а  $f(z)$  — вполне себе реальное значение.  $\square$

**Теорема 3.7.3** (Вейерштрасс, 2-я). Функция  $f$  при заданных условиях принимает свои наибольшее и наименьшее значения.

*Доказательство.* Так как она ограничена, то из предыдущей теоремы

$$\exists l := \inf f(A) \text{ и } \exists M := \sup f(A)$$

Докажем, что эти значения достигаются, без потери общности докажем про супремум. Так как  $M = \sup f(A)$ , то  $\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in A : f(x_n) > M - \frac{1}{n}$ .

У этой последовательности  $\{x_n\}$  также существует сходящаяся подпоследовательность  $\{x_{n_j}\}$  (теорема 3.1.18). Пусть  $z = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j}$ . Тогда рассмотрим  $f(z)$ . Так как  $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$ , то  $f(z) \geq M$ . Но  $f(x_n) \leq M$  заведомо, ведь  $M$  — супремум. Отсюда  $f(z) = M$ .  $\square$

**Теорема 3.7.4** (Дарбу, о промежуточных значениях). Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Здесь  $\langle a, b \rangle$  — отрезок, луч, или даже прямая, у которого концы могут быть как включены, так и нет.

Рассмотрим  $\alpha, \beta \in \langle a, b \rangle$  ( $\alpha < \beta$ ). Пусть  $x = f(\alpha), y = f(\beta)$ . Тогда

$$\forall z \in (\min(x, y), \max(x, y)) : \exists \gamma \in (\alpha, \beta) : f(\gamma) = z$$

*Доказательство.* От противного: пусть  $\exists \alpha, \beta, z : z \in (\min(x, y), \max(x, y))$  такие, что  $z \notin f((\alpha; \beta))$ .

Обозначим  $L = \{u \in [\alpha; \beta] | f(u) \leq z\}$  и  $H = \{u \in [\alpha; \beta] | f(u) \geq z\}$ .

По противному предположению  $L \cap H = \emptyset$ . С другой стороны,  $L \cap H = [\alpha; \beta]$ .

Докажем, что  $L$  и  $H$  замкнуты, без потери общности докажем это для  $L$ . Рассмотрим некую последовательность  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L$ . Так как  $\forall u_n \in \{u_n\} : f(u_n) \leq z$ , то  $f(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n) \leq z$ , т. е.  $L$  замкнуто.

Таким образом, мы пришли к противоречию, так как по теореме о связности отрезка (теорема 3.0.3) это невозможно.  $\square$

**Следствие 3.7.1.** Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция. Следующие условия эквивалентны:

1.  $f$  инъекция
2.  $f$  строго монотонная (строго возрастает или строго убывает).

*Доказательство.*

$\Leftarrow$ . Очевидно.

$\Rightarrow$ . Докажем, что  $f$  является нестрого монотонной. От противного: предположим противное.

$$\text{Тогда } \exists \alpha < \beta < \gamma : \alpha, \beta, \gamma \in \langle a, b \rangle : \begin{cases} f(\alpha) < f(\beta) \\ f(\gamma) < f(\beta) \end{cases} \vee \begin{cases} f(\alpha) > f(\beta) \\ f(\gamma) > f(\beta) \end{cases}$$

*Замечание.* На самом деле, отрицанием монотонности является  $\exists c_1 < c_2$  и  $c_3 < c_4$  такие, что

$$(f(c_1) < f(c_2)) \wedge (f(c_3) > f(c_4))$$

Разбором случаев можно получить существование искомых трёх точек, но этот разбор случаев не будет приведён.

В случае  $\begin{cases} f(\alpha) < f(\beta) \\ f(\gamma) < f(\beta) \end{cases}$  без потери общности предположим, что  $f(\alpha) \leq f(\gamma)$ . Тогда по теореме о промежуточном значении  $f$  принимает значение  $f(\alpha)$  на отрезке  $[\beta; \gamma]$ . Получили противоречие с инъективностью.

Аналогично можно доказать в другом случае.

Отсюда  $f$  нестрого монотонна, а из-за инъективности — строго.  $\square$

**Следствие 3.7.2.** Для непрерывной функции  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  образ всякого замкнутого отрезка  $[\alpha, \beta]$  есть замкнутый отрезок.

*Доказательство.* По теореме Вейерштрасса у образа есть минимальное и максимальное значение. По теореме Дарбу все значения между ними достигаются.  $\square$

**Теорема 3.7.5.** Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Среди следующих двух условий любые два влекут третье:

1.  $f$  непрерывна и инъективна.
2.  $f$  строго монотонна.
3. Образ любого замкнутого отрезка есть замкнутый отрезок.

*Доказательство.*

- $(1) \wedge (3) \Rightarrow (2)$  — см. выше, верно даже  $(1) \Rightarrow (2)$ .
- $(1) \wedge (2) \Rightarrow (3)$  — см. выше, верно даже  $(1) \Rightarrow (3)$ .
- $(2) \wedge (3) \Rightarrow (1)$ . Инъективность следует из (2). Докажем, что  $f$  непрерывна. Предположим, что  $f$  строго возрастает (иначе можно рассмотреть  $-f$ ).

Рассмотрим  $x_0 \in \langle a, b \rangle$  такой, что  $f$  претерпевает разрыв в точке  $x_0$ .

—  $x_0 \in (a, b)$ .

Так как  $f$  строго монотонна, то

$$\exists u := \lim_{y \rightarrow x_0 -} f(y) \wedge \exists v := \lim_{y \rightarrow x_0 +} f(y)$$

так как  $f$  слева от  $x_0$  возрастает и ограничена числом  $x_0$ , аналогично справа.

Разрыв означает  $u \neq v$ . Так как  $u \leq f(x_0) \leq v$ , то либо  $u < f(x_0)$  (в этом случае значения из  $(u; f(x_0))$  не достигаются нигде на  $\langle a, b \rangle$ ), либо  $f(x_0) < v$  (в этом случае значения из  $(f(x_0), v)$  не достигаются нигде на  $\langle a, b \rangle$ ).

В любом случае, есть непрерывный отрезок, строго внутри которого лежит  $x_0$ , тогда его образом не является непрерывный отрезок, противоречие.

— Теперь пусть  $x_0 = a$  и  $f$  разрывна в  $x_0$ .

На самом деле тогда всё будет абсолютно аналогично,  $\lim_{y \rightarrow x_0 + 0} f(y) > f(x_0)$ . Здесь образом малого отрезка  $[x_0; x_0 + \varepsilon]$ , такого, что  $\varepsilon < b - a$ . Опять же не является непрерывный отрезок.

□

**Следствие 3.7.3.** Если  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — строго монотонная непрерывная функция, то  $f^{-1} : I \rightarrow [a, b]$  тоже непрерывна.

## Лекция XVII

3 ноября 2022 г.

### 3.8 Степени и корни

**Теорема 3.8.1.** Пусть  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и инъективна. Из непрерывности  $I := g([a, b])$  — отрезок ( $I = [\min(g(a), g(b)), \max(g(a), g(b))]$ ).

Пусть  $h = g^{-1} : I \rightarrow [a, b]$ . Тогда  $h$  непрерывна.

*Доказательство.*

$h$  строго монотонна, так как  $g$  строго монотонна.

$h$ , как обратная функция, инъективна.

□

Пусть  $g_k : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^k$  для фиксированного  $k \in \mathbb{N}$ .

Рассмотрим ей обратную  $h_k : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ . Формально, мы доказывали, что такая обратная существует и монотонна для функций, непрерывных на отрезке. Но можно сузить функцию  $g_k$  на любой сколь угодно большой отрезок  $[0; b]$ , откуда получим, что  $h_k$  существует и непрерывна в любой точке  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ .

**Определение 3.8.1** (Корень натуральной степени).  $\sqrt[k]{x} \stackrel{\text{def}}{=} h_k(x)$ , где  $h_k$  определена выше.

**Определение 3.8.2** (Степень с рациональным положительным показателем).  $x^r \stackrel{def}{=} \sqrt[n]{x^m}$  для  $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ , где  $r = \frac{m}{n}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ .

Заметим, что из определения (обратной функции)  $\sqrt[n]{y}$  — единственное положительное число  $u$  :  $u^n = y$ .

Пусть  $\frac{k}{l} = \frac{m}{n}$ . Чтобы показать корректность определения степени с рациональным положительным показателем, докажем, что  $\sqrt[l]{x^k} = \sqrt[n]{x^m}$ . Это равенство равносильно тому, что  $\left(\sqrt[l]{x^k}\right)^n = x^m$ .

**Факт 3.8.1.**  $\sqrt[n]{v^b} = (\sqrt[n]{v})^b$ . В самом деле,  $v^b \stackrel{?}{=} (\sqrt[n]{v})^{bn} = (\sqrt[n]{v})^{ab} = v^b$ .

Применив факт, получим левую часть, равной  $\sqrt[l]{x^{kn}}$ . Но так как  $l \mid kn$ , то мы можем «сократить» на этот множитель, получив искомое  $x^m$ .

Таким образом, определение степени с рациональным положительным показателем корректно. Более того, несложно видеть, что оно согласовано с определением натуральной степени.

### 3.8.1 Свойства

- $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$ . Можно проверить, что обе части равенства при возведении в степень  $n$  дают  $xy$ .
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$ . Так же можно проверить.
- $(x^{r_1})^{r_2} = x^{r_1 \cdot r_2}$

*Доказательство.* Пусть  $r_1 = \frac{k}{l}, r_2 = \frac{m}{n}$

$$\sqrt[n]{(\sqrt[l]{x^k})^m} = \sqrt[n]{\sqrt[l]{x^{km}}} = \sqrt[nl]{x^{km}}$$

□

- $x^{r_1} \cdot x^{r_2} = x^{r_1+r_2}$ .

*Доказательство.* Пусть  $r_1 = \frac{k}{l}, r_2 = \frac{m}{n}$

$$\sqrt[l]{x^{kn}} \cdot \sqrt[n]{x^{ml}} = \sqrt[nl]{x^{kn+ml}} = x^{r_1+r_2}$$

□

**Определение 3.8.3** (Степень с произвольным рациональным показателем). Для положительных уже определено, определим для остальных: Для  $x > 0$  :  $x^q \stackrel{def}{=} \begin{cases} 1, & q = 0 \\ \frac{1}{x^{-q}}, & q < 0 \end{cases}$

## 3.9 (Асимптотическое) сравнение функций. $\mathcal{O}$ и $o$ символика.

Пусть  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $A \subset \mathbb{R}$ .

**Определение 3.9.1** ( $f$  есть  $\mathcal{O}(g)$  на  $A$ ).  $\exists C : \forall x \in A : |f(x)| \leq C|g(x)|$ .

Обозначают  $f = \mathcal{O}(g)$ . Это исторически сложившаяся запись, в которой  $=$  некоммутативно.

В связи с такой записью, также пишут  $\text{expression}_1 = \text{expression}_2 + \mathcal{O}(\text{something})$ .

Можно говорить об этом на подмножествах  $A$ , а можно просто сузить функции.

- $f = \mathcal{O}(g), g = \mathcal{O}(h) \Rightarrow f = \mathcal{O}(h)$ .

*Доказательство.* Константы, получающиеся при оценке, перемножаются.

□



- $\phi_1 = \mathcal{O}(\psi_1), \phi_2 = \mathcal{O}(\psi_2) \Rightarrow \phi_1\phi_2 = \mathcal{O}(\psi_1\psi_2)$ .
- $f = \mathcal{O}(1) \Rightarrow f$  ограничена.

Можно сравнивать «асимптотическое» поведение функций в данной точке: пусть  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$ .

**Определение 3.9.2** ( $f$  есть  $o(g)$  в точке  $x_0$ ).

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) : \forall x \in \left( \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) \cap A \right) : |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$$

Обозначают  $f = o(g)$  в  $x_0$ .

Так,  $o(1)$  — стремящиеся к нулю функции.

**Факт 3.9.1.** Если  $\forall x \in A \setminus \{x_0\} : f(x) \neq 0$ , то  $f = o(g) \iff \lim_{x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

*Доказательство.* Поделить определение на  $|g(x)|$ . □

**Факт 3.9.2.** Если  $f = o(g)$ , то  $f = \mathcal{O}(g)$  вблизи  $x_0$ .

**Предложение 3.9.1.** Пусть  $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$  и  $x_0 \in A'$ .

1. Если  $f = o(g)$  в  $x_0$  и  $g = \mathcal{O}(h)$  вблизи  $x_0$ , то  $f = o(h)$  в  $x_0$ .
2. Если  $f = \mathcal{O}(g)$  вблизи  $x_0$  и  $g = o(h)$  в  $x_0$ , то  $f = o(h)$  в  $x_0$ .

*Доказательство.* Докажем первый пункт:

$$\exists \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) : \exists c : |g(x)| \leq C |h(x)| \text{ в } \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) \cap A.$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) : |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|. \text{ Можно считать, что } \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \subset \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0).$$

$$\forall x \in \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0) \cap A : |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \leq C \cdot \varepsilon |h(x)|. \quad \square$$

Пусть  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A'$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ .

**Определение 3.9.3** ( $f$  бесконечно малая в  $x_0$ ).  $\lim_{x_0} f = 0$

**Определение 3.9.4** ( $f$  бесконечно большая в  $x_0$ ).  $\lim_{x_0} |f| = +\infty$

**Факт 3.9.3.**  $f$  бесконечно малая и не обращается в ноль вблизи  $x_0 \iff \frac{1}{f}$  бесконечно большая.

**Определение 3.9.5** ( $f$  — бесконечно малая величина более высокого порядка, чем  $g$  в точке  $x_0$ ).  $\lim_{x_0} f = 0$ ;  $\lim_{x_0} g = 0$ ;  $f = o(g)$ .

Так,  $x^2$  — бесконечно малая более высокого порядка, чем  $x$  в нуле.

**Определение 3.9.6** ( $f$  — бесконечно большая величина более высокого порядка, чем  $g$  в точке  $x_0$ ).  $\lim_{x_0} |f| = +\infty$ ;  $\lim_{x_0} |g| = +\infty$ ;  $g = o(f)$ .

Так,  $x^2$  — бесконечно большая более высокого порядка, чем  $x$  на  $\infty$ .

## Глава 4

# Дифференцирование

### Лекция XVIII

12 ноября 2022 г.

А что было? Я прогульщик. . .

### Лекция XIX

14 ноября 2022 г.

#### 4.0.1 Резюме определений дифференцируемости

Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Предложение 4.0.1.** Следующие условия эквивалентны:

1.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{def}}{=} f'(x_0)$ .
2.  $\exists g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывная в  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ , такая, что  $f(x) - f(x_0) = g(x) \cdot (x - x_0)$ .
3.  $\exists c \in \mathbb{R} : f(x) - f(x_0) = c \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$  при  $x \rightarrow x_0$ .

*Доказательство.*

- (1)  $\Rightarrow$  (2). Достаточно рассмотреть  $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0 \\ f'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$ .
- (2)  $\Rightarrow$  (3).  $f(x) - f(x_0) = g(x_0) \cdot (x - x_0) + (g(x) - g(x_0)) \cdot (x - x_0)$ , причём  $g(x) - g(x_0) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ .
- (3)  $\Rightarrow$  (1).  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c + o(1)$ . □

**Определение 4.0.1** (Линейный дифференциал).  $d_f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$ .

#### 4.0.2 Арифметические свойства дифференцирования

**Предложение 4.0.2.** Если  $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , обе дифференцируемы в  $x_0$ , то

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

*Доказательство.*

$$\frac{(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(x_0)}{x - x_0} = \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \alpha \cdot f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

□

**Предложение 4.0.3.** Если  $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , обе дифференцируемы в  $x_0$ , то

$$(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$$

*Доказательство.*  $\exists \phi, \psi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывные в  $x_0$ , такие, что  $f(x) - f(x_0) = \phi(x) \cdot (x - x_0)$  и  $g(x) - g(x_0) = \psi(x) \cdot (x - x_0)$ .

Тогда

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) &= \\ (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0)) &= \\ \phi(x) \cdot (x - x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \psi(x) \cdot (x - x_0) &= \\ h(x) \cdot (x - x_0) \end{aligned}$$

где  $h(x) = \phi(x) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \psi(x)$  — непрерывна в  $x_0$ . □

### 4.0.3 О суперпозиции (композиции)

*Замечание.* Для  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , такой, что  $f$  непрерывна в  $x_0 \in E$ .

Положим  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \supset f(E)$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ , так, что  $g$  непрерывна в  $y_0 = f(x_0)$ .

Докажем, что  $g \circ f$  непрерывна в  $x_0$ .

*Доказательство.* Пусть  $z_0 = g(y_0)$ . Рассмотрим окрестность  $W(z_0)$ . Из непрерывности  $g : \exists V(y_0) : g(V(y_0)) \subset W(z_0)$ .

Кроме этого,  $\exists U(x_0) : f(U(x_0)) \subset V(y_0)$ . Значит,  $g(f(U(x_0))) \subset W(z_0)$  и  $g \circ f$  непрерывна по определению. □

**Следствие 4.0.1.** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $u_0 \in E'$ , в которой  $f$  существует (однако не обязательно непрерывна), для  $A \supset f(E)$  рассмотрим  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывную в  $v_0 = f(u_0)$ .

Если  $\exists \lim_{x \rightarrow u_0} f(x) = c$ , то  $\lim_{x \rightarrow u_0} (g \circ f)(x) = g(c)$ .

*Замечание.* Условие непрерывности  $g$  нельзя отбросить:  $h(x) = (\chi_{\{0\}}) \circ (x \cdot \sin(\frac{1}{x}))$  не имеет предела в нуле, в точках  $\frac{1}{\pi \cdot n}$  она равна 1, в остальных — 0.

*Доказательство.* Рассмотрим  $f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq u_0 \\ \lim_{x \rightarrow u_0} f(x), & x = u_0 \end{cases}$ .  $f_1$  уже непрерывна в  $u_0$ , значит,  $g \circ f_1$

непрерывна в  $u_0$ . □

### Производная композиции

**Теорема 4.0.1.** Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $f(\langle a, b \rangle) \subset \langle c, d \rangle$ ;  $g : \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ .

Если  $f$  дифференцируема в  $x_0 \in \langle a, b \rangle$  и  $g$  дифференцируема в  $y_0 = f(x_0)$ , то  $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$ .

*Замечание.* В старых книжках можно встретить доказательство вида

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

которое было бы корректным при условии  $f(x) \neq f(x_0)$  вблизи  $x_0$ .

Однако это вовсе не обязано выполняться, наиболее простым способом обойти это ограничение является возня с функциями  $\phi$  и  $\psi$ , как ниже.

*Доказательство.*

$\exists \phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывная в  $x_0$ , такая, что  $f(x) - f(x_0) = \phi(x) \cdot (x - x_0)$ .

$\exists \psi : \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывная в  $y_0$ , такая, что  $g(y) - g(y_0) = \psi(y) \cdot (y - y_0)$ .

Подставим во второе равенство  $y = f(x) : g(y) - g(y_0) = \psi(f(x)) \cdot (f(x) - f(x_0)) = \psi(f(x)) \cdot \phi(x) \cdot (x - x_0)$ .

Так как  $h(x) = \psi(f(x)) \cdot \phi(x)$  непрерывна в  $x_0$ , то в самом деле  $f(g(x))$  дифференцируема в  $x_0$ .

Сама производная  $(g \circ f)'(x_0) = h(x_0) = \psi(f(x_0))\phi(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ .  $\square$

#### 4.0.4 Производная $x^n$

**Факт 4.0.1.**  $(x^n)' = nx^{n-1}$  для  $n \in \mathbb{N}$

*Доказательство.* По индукции.

- $n = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$

- $(x \cdot x^n)' = x' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n$ .  $\square$

*Замечание.* Для  $f \equiv c$  — константы:  $f'(x_0) = 0$ .

**Факт 4.0.2.**  $(x^n)' = nx^{n-1}$  для  $n \in \mathbb{Z}$

*Доказательство.* По индукции.

- $n = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x \cdot x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$

- $(\frac{1}{x}) \cdot (x^n)' = (\frac{1}{x})' \cdot x^n + \frac{1}{x} \cdot (x^n)' = -x^{n-2} + \frac{1}{x} \cdot nx^{n-1} = (n-1)x^{n-2}$ .  $\square$

**Следствие 4.0.2.** Для  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} : \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $h(x) = \frac{1}{x}$  и продифференцировать  $h \circ f$ .  $\square$

**Следствие 4.0.3.** Если  $f$  и  $g$  дифференцируемы в  $x_0$  и  $g(x_0) \neq 0$ , то  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) + f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)''(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0) \cdot \frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ .

#### 4.0.5 Производная обратного отображения

Для инъективного отображения  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , дифференцируемого в  $x_0 \in \langle a, b \rangle$  положим  $y_0 = f(x_0)$ .

В предположении непрерывности  $f^{-1}$  в точке  $y_0$  и того, что  $f(\langle a, b \rangle)$  — отрезок:

**Теорема 4.0.2.** При сделанных предположениях и условии  $f'(x_0) \neq 0$ :  $f^{-1}$  дифференцируема в  $y_0$ , причём  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f(y_0))}$ .

*Замечание.* Если  $f$  непрерывна не только в точке  $x_0$ , но на всём отрезке  $\langle a, b \rangle$ , то автоматически следуют условия  $f(\langle a, b \rangle)$  — отрезок, и  $f'(y_0)$  — непрерывна.

*Доказательство.*

$\exists \phi : \langle a, b \rangle$ , непрерывная в  $x_0$ , такая, что  $f(x) - f(x_0) = \phi(x) \cdot (x - x_0)$ .

Положим  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ , и вообще  $x = f^{-1}(y)$ .

Тогда  $y - y_0 = f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0)) = \phi(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$ , откуда сразу получаем (в предположении  $\phi(f^{-1}(y)) \neq 0$  вблизи  $y_0$ , или же  $f'(f^{-1}(y_0)) \neq 0$ )  $\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\phi(f^{-1}(y_0))}$ .  $\square$

## Лекция XX

18 ноября 2022 г.

### 4.1 Смыслы производной

#### 4.1.1 Скорость точки

Пусть материальная точка движется по прямой, её положение на прямой в момент времени  $t$  — это  $x(t)$  ( $t \in \langle a, b \rangle$ ).

Рассмотрев  $c, d \in \langle a, b \rangle$ , (можно считать  $c < d$ ), получаем среднюю скорость движения  $\frac{x(d) - x(c)}{d - c}$ .

Предел при  $c \rightarrow d$ :  $v(t) = x'(t)$ .

#### 4.1.2 Касательные

Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$ .

Пусть  $f$  дифференцируема в  $x_0$ ; обозначим  $l(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ .

Тогда  $f(x) - l(x) = o(x - x_0), x \rightarrow x_0$ . Из всего пучка прямых, проходящих через  $x_0$ :  $l(x)$  единственная удовлетворяет данному свойству.

График функции  $l(x)$  называют *касательной*. Коэффициент угла наклона касательной является пределом коэффициентов углов наклона секущих.

### 4.2 Связь производной и монотонности

Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$ .

**Определение 4.2.1** ( $f$  возрастает в точке  $x_0$ ).  $\exists \delta > 0 : \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq f(x_0), & x \leq x_0 \\ f(x) \geq f(x_0), & x \geq x_0 \end{cases}$ .

При строгом возрастании неравенства строгие.

При (строгом) убывании тоже понятно что (например,  $-f$  (строго) возрастает).

**Теорема 4.2.1.** Пусть  $f$  дифференцируема в точке  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ .

Если  $f'(x_0) > 0$ , то  $f$  строго возрастает в точке  $x_0$ .

Если  $f$  нестрого возрастает в точке  $x_0$ , то  $f'(x_0) \geq 0$ .

*Доказательство.*

(1)  $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \phi(x)$ , где  $\phi(x) = o(x - x_0)$ , то есть

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \langle a, b \rangle : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\phi(x)| < \varepsilon \cdot |x - x_0|$$

Если  $x > x_0$ , то  $f(x) - f(x_0) > f'(x_0) \cdot (x - x_0) - \varepsilon \cdot |x - x_0| = (f'(x_0) - \varepsilon) \cdot |x - x_0|$ , откуда при выборе  $\varepsilon < f'(x_0)$  в самом деле получаем строгое возрастание.

Случай  $x < x_0$  рассматривается аналогично.

(2) Раз  $f$  нестрого возрастает в  $x_0$ , то  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$  вблизи  $x_0$ . По теореме о предельном переходе в неравенствах, получаем  $f'(x_0) \geq 0$ .  $\square$

## 4.2.1 Локальные максимум и минимум

**Определение 4.2.2** ( $f$  имеет локальный максимум в  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ ).

$$\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap \langle a, b \rangle : f(x) \leq f(x_0)$$

**Определение 4.2.3** ( $f$  имеет строгий локальный максимум в  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ ).

$$\exists \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) \cap \langle a, b \rangle : f(x) < f(x_0)$$

Если точка является точкой или локального минимума, или локального максимума, то её называют *точкой локального экстремума*.

**Теорема 4.2.2** (Необходимое условие существования локального экстремума). Пусть  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  имеет локальный экстремум в  $x_0 \in (a, b)$ .

Если  $\exists f'(x_0)$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

*Доказательство.* Пойдём от противного: либо  $f'(x_0) > 0$  (тогда  $f$  строго возрастает в  $x_0$ ), либо  $f'(x_0) < 0$  (тогда  $f$  строго убывает в  $x_0$ ).

Так как как справа, так и слева от  $x_0$  есть точки области определения  $f$ , то в любом случае получаем противоречие.  $\square$

## 4.2.2 Поведение функции на отрезке

Назовём функцию  $f$  *хорошей* на отрезке  $[a, b]$ , если она непрерывна на  $[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$ .

Этого определения не было на лекции, но я хочу его ввести, так как оно часто будет встречаться.

**Теорема 4.2.3** (Ролль). Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $a < b$ , причём она хорошая (подраздел 4.2.2).

При условии  $f(a) = f(b) : \exists c \in [a, b] : f'(c) = 0$ .

*Доказательство.* По второй теореме Вейерштрасса (теорема 3.7.3) функция достигает на отрезке свои глобальные максимальное и минимальное значение.

Одно из них не равно  $f(a) = f(b)$  (если вдруг оба равны, то функция — константа, откуда  $f'(x) = 0$  везде).

Тогда в этой точке  $c$  достигается локальный экстремум, и  $f'(c) = 0$ .  $\square$

---

Пусть  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — две хорошие на  $[a, b]$  функции (подраздел 4.2.2).

Найдём  $\alpha \in \mathbb{R} : f(x) + \alpha \cdot g(x)$  удовлетворяет условию теоремы Ролля.

$$f(a) + \alpha \cdot g(a) = f(b) + \alpha \cdot g(b) \Rightarrow \alpha(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a).$$

Предположим, что  $g(b) \neq g(a)$ . В таком случае  $\alpha = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ , и к функции  $f(x) + \alpha \cdot g(x)$  применима теорема Ролля:

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) + \alpha \cdot g'(c) = 0$$

$$\text{Отсюда } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = f'(c).$$

$$\text{При условии } \forall t \in (a, b) : g'(t) \neq 0 \text{ получаем } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

**Теорема 4.2.4** (Формула Коши). При сделанных предположениях, а именно:  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — две хорошие на  $[a, b]$  функции (подраздел 4.2.2), и  $g(a) \neq g(b)$  и  $\forall t \in (a, b) : g'(t) \neq 0$  выполняется условие

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

*Доказательство.* Смотри выше. □

*Замечание.* Формула работает и для  $b < a$ . В любом случае (при хороших  $f, g$  (подраздел 4.2.2)),

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

**Следствие 4.2.1** (Формула Лагранжа). При  $g(x) = x$  формула Коши приобретает вид

$$\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

*Замечание.* Формула работает и для  $b < a$ . В любом случае (при выполнении условий на непрерывность и дифференцируемость  $f$ ),  $\exists c \in (\min(a, b), \max(a, b)) : f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$ .

*Замечание.* Формулу можно читать в таком свете: для хорошей (см. выше) функции  $f$ , есть касательная к точке внутри интервала  $(a, b)$ , параллельная секущей, проходящей через  $(a, f(a))$  и  $(b, f(b))$ .

Формула Лагранжа довольно полезна даже в вычислениях: если известно  $f(a)$  и  $f'(x)$  ограничена, причём  $b - a$  мало, то можно оценить  $f(b)$ .

**Следствие 4.2.2.** Если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$ , то при условии  $\forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$ :  $f$  — константа.

*Доказательство.* От противного, применить формулу Лагранжа к  $u, v : f(u) \neq f(v)$ . □

**Следствие 4.2.3.** Если  $f'(x) \geq 0$  на  $(a, b)$  и  $f(x)$  дифференцируема на  $[a, b]$ , то  $f$  нестрого возрастает на  $[a, b]$ .

При строгом неравенстве — строгое возрастание.

*Доказательство.* Применить формулу Лагранжа. □

**Следствие 4.2.4.** Если  $g$  непрерывна на  $[a, b]$ , дифференцируема на  $(a, b)$ , и  $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$ . Тогда производная  $g'(x)$  одного знака на  $(a, b)$ .

*Доказательство.* Пусть  $u, v \in [a, b]$ . Тогда  $\exists c \in (a, b) : f(v) - f(u) = f'(c) \cdot (v - u) \neq 0$ .

Отсюда видим, что  $f$  инъективна, то есть она строго возрастает (или убывает).

Эту же штуку она делает в каждой точке, откуда в каждой точке — определённый знак производной. □

*Замечание.* Отсюда видим, что условие  $g(b) \neq g(a)$  в формуле Коши (теорема 4.2.4) — лишнее.

Пример того, что производная непрерывной функции необязательно непрерывна, даже если существует:

Рассмотрим

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Функция непрерывна:  $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x} = x \cdot \sin(\frac{1}{x}) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

Более того, она дифференцируема в каждой точке:

$$f'(0) = 0; \quad f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0$$

Тем не менее, несложно видеть, что в нуле производная претерпевает разрыв второго рода.

## Лекция XXI

21 ноября 2022 г.

Пусть  $f, g : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируемы на области определения.

**Теорема 4.2.5** (Простейший вариант правила Лопиталья). Пусть  $\lim_a f = \lim_a g = 0$ . При условии  $g'(x) \neq 0$  вблизи  $a$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = d \in \mathbb{R}$ :  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = d$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $\varepsilon > 0$ , для него  $\exists \delta > 0 : \forall x \in (a, b) : |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - d \right| < \varepsilon$ .

Пусть  $y \in (a; b)$ . Доопределим  $f(a) = g(a) = 0$ , получим условие правила Коши (теорема 4.2.4).

Получается,  $\exists c \in (a, y) : \frac{f(y)}{g(y)} = \frac{f(y)-f(a)}{g(y)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ , откуда рассмотрев  $|a - y| < \delta$ , получаем  $\left| \frac{f(y)}{g(y)} - d \right| < \varepsilon$ , что и есть определение предела  $\lim_y \frac{f}{g} = d$ .  $\square$

**Следствие 4.2.5.** Пусть  $\phi$  хорошая на  $[a, b]$  (подраздел 4.2.2). Предположим, что  $\exists \lim_{t \rightarrow a+} \phi'(t) = d$ .

Возьмём  $g(x) = x - a$ ,  $f(x) = \phi(x) - \phi(a)$ . Тогда по правилу Лопиталья  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = d$ , что является определением производной справа.

Иными словами, если у производной есть предел справа, и в предельной точке она определена, то она там непрерывна справа (равна пределу справа).

Это значит, что производная, как функция, если уж претерпевает разрыв, то обязательно второго рода.

**Предложение 4.2.1** (О среднем значении производной). Пусть  $f$  — дифференцируема на  $(a, b)$ . Рассмотрим  $\alpha, \beta \in (a, b) : \alpha \neq \beta$ .

Для любого  $v \in (f'(\alpha), f'(\beta)) : \exists \gamma \in \overset{\circ}{I}_{\alpha, \beta} : f'(\gamma) = v$ .

*Доказательство.*

Положим  $g(x) = f(x) - vx$ . Видим, что  $g'(x) = f'(x) - v$ . Тогда получается, что  $g'(x)$  принимает значения разных знаков в  $\alpha, \beta \Rightarrow \exists \gamma \in I_{\alpha, \beta} : g'(\gamma) = 0$ .

Например, из теоремы Вейерштрасса, производная в экстремуме равна 0.  $\square$

**Теорема 4.2.6** (Ещё вариант правила Лопиталья). Пусть  $f, g$  — дифференцируемы на  $(a, b)$ , причём  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = +\infty$ .

Если  $\exists \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = d$ , то для любых  $a < s < t < b : \exists c \in (s, t) : \frac{f(s)-f(t)}{g(s)-g(t)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ .

Рассмотрим какой-нибудь  $\varepsilon > 0$ . Для него  $\exists \delta > 0 : \forall y \in (a, b) : |y - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - d \right| < \varepsilon$ .

Будем считать, что  $t < a + \delta$ , зафиксируем его такое.

$$d - \varepsilon < \frac{f(s) - f(t)}{g(s) - g(t)} < d + \varepsilon \iff d - \varepsilon < \frac{f(s)}{g(s)} \frac{1 - \frac{f(t)}{f(s)}}{1 - \frac{g(t)}{g(s)}} < d + \varepsilon$$



При уменьшении  $s$   $f(s)$ , как и  $g(s)$ , становится всё больше, поэтому  $\frac{1 - \frac{f(t)}{f(s)}}{1 - \frac{g(t)}{g(s)}}$  начиная с некоторого места — положительна.

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow a+} \frac{1 - \frac{f(t)}{f(s)}}{1 - \frac{g(t)}{g(s)}} (d - \varepsilon) \leq \overline{\lim}_{s \rightarrow a+} \leq \frac{1 - \frac{f(t)}{f(s)}}{1 - \frac{g(t)}{g(s)}} (d + \varepsilon)$$

Несложно видеть, что  $\lim_{s \rightarrow a+} \frac{1 - \frac{f(t)}{f(s)}}{1 - \frac{g(t)}{g(s)}} = 1$ , откуда из предыдущего равенства:  $d - \varepsilon \leq \overline{\lim}_{s \rightarrow a+} \frac{f(s)}{g(s)} \leq d + \varepsilon$ . Это же верно и для нижних пределов, получаем равенство предела  $d$ .

## 4.3 Формула Тейлора

Пусть  $f : (a, b)$ . Возьмём  $t \in (a, b)$ . Будем считать, что  $f$  непрерывна в  $t$  (или даже на  $(a, b)$ ).

**Определение 4.3.1** (Многочлен Тейлора функции  $f$  в точке  $t$  порядка  $n$ ). Такой многочлен  $p$  степени не больше  $n$ , что  $f(x) - p(x) = o((x - t)^n)$  при  $x \rightarrow t$ .

*Примеры.*

- Многочлен Тейлора порядка 0 — это константа,  $p(x) = c$ . По определению,  $f(x) - c = o(1) \Rightarrow c = \lim_t f = f(t)$ .
- Многочлен Тейлора порядка 1 — линейный,  $p(x) = \alpha \cdot (x - t) + \beta$ . По определению  $f(x) - \alpha \cdot (x - t) - \beta = o(x - t) \Rightarrow f(t) = \beta, \alpha = f'(t)$ .

### 4.3.1 Построение многочлена Тейлора

При работе с многочленами Тейлора будем предполагать, что у функции по крайней мере в точке  $t$  имеется по крайней мере  $n$ -я производная ( $f^{(n+1)} \stackrel{\text{def}}{=} (f^{(n)})'$  — производная, взятая  $n + 1$  раз).

Построим многочлен  $p$  степени не больше  $n$ , такой, что

$$\begin{aligned} p(t) &= a_0 \\ p'(t) &= p^{(1)}(t) = a_1 \\ &\dots \\ p^{(n)}(t) &= a_n \end{aligned}$$

, где  $a_0, \dots, a_n$  где  $a_i$  — наперёд заданные числа.

Утверждается, что такой многочлен существует и единственен.

Рассмотрим произвольный  $p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_0$ .

Преобразуем выражение:  $p(x) = c_n((x - t) + t)^n + ((x - t) + t)^{n-1} + \dots + c_0$ .

Раскроем скобки так, чтобы получить  $p(x) = d_n(x - t)^n + d_{n-1}(x - t)^{n-1} + \dots + d_0$ .

Заметим, что

$$\begin{aligned} p(x) &= d_n(x - t)^n + \dots + d_3(x - t)^3 + d_2(x - t)^2 + d_1(x - t) + d_0 \\ p'(x) &= n \cdot d_n(x - t)^{n-1} + \dots + 3 \cdot d_3(x - t)^2 + 2 \cdot d_2(x - t) + 1! \cdot d_1 \\ p^{(2)}(x) &= n(n - 1) \cdot d_n(x - t)^{n-2} + \dots + 3 \cdot 2 \cdot d_3(x - t) + 2! \cdot d_2 \\ p^{(3)}(x) &= n(n - 1)(n - 2) \cdot d_n(x - t)^{n-3} + \dots + 3! \cdot d_3 \end{aligned}$$

Вообще, по индукции можно доказать, что  $p^{(k)}(0) = k! \cdot d_k$ .

# Лекция XXII

25 ноября 2022 г.

Итак, мы поняли, что  $\exists! p \in \mathbb{R}[x] : \deg p \leq n$  и его производные — заранее назначенные  $p^{(k)}(x_0) = \alpha_k$ .

Его можно представить в виде  $p(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\alpha_j}{j!} (x - x_0)^j$ .

## 4.3.2 Формула Бинома Ньютона

Рассмотрим многочлен  $q(x) = (x + a)^n$ .

Чтобы записать его в каноническом для многочлена виде, заметим, что

$$q^{(k)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (x+a)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} a^{n-k}$$

$$q^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} a^{n-k}$$

Но производные прямо связаны с коэффициентами многочлена, как мы знаем из разложения в ряд Тейлора в нуле. Получается,  $q(x) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \cdot \frac{n!}{(n-j)!} a^{n-j} x^j = \binom{n}{j} a^{n-j} x^j$ . О да, мы вывели формулу Бинома Ньютона!

---

**Предложение 4.3.1.** В данной точке  $y$   $f$  не может быть более одного многочлена Тейлора порядка  $n$  (для любого фиксированного  $n$  и данной точки  $x_0$ ).

*Доказательство.* От противного: пусть есть два многочлена,  $p, q$ .

Тогда  $r(x) = p(x) - q(x) = (f(x) - q(x)) - (f(x) - p(x)) = o((x - x_0)^n)$ . Получается,  $r(x) = o((x - x_0)^n)$ , но так как  $\deg r \leq n$ , то  $r(x) = 0$ .

(Вот почему: пусть  $r(x) = a_j(x - x_0)^j + \dots + a_n(x - x_0)^n = o((x - x_0)^n)$ , где  $a_j \neq 0$  — первый ненулевой коэффициент. Тогда  $a_j + (x - x_0)(a_{j+1} + \dots + a_n(x - x_0)^{n-j}) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a_j \neq o((x - x_0)^{n-j})$ .  $\square$ )

**Теорема 4.3.1** (Локальная формула Тейлора). Пусть  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема на  $(a, b)$  хотя бы  $n - 1$  раз; пусть  $f, f^{(1)}, \dots, f^{(n-1)}$  непрерывны на  $(a, b)$ .

Рассмотрим  $x_0 \in (a, b)$  и предположим, что  $\exists f^{(n)}(x_0)$ .

В таком случае существует единственный многочлен Тейлора порядка  $n$  для  $f$  в точке  $x_0$ , причём

$$p(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

*Замечание.* Так как  $f^{(k)}$  дифференцируема на  $(a, b)$ , то она там непрерывна; таким образом, условие непрерывности в теореме имеет смысл только для  $f^{(n-1)}$ .

*Доказательство.*

Рассмотрим  $r(x) = f(x) - p(x)$ . Заметим, что  $r^{(j)}(x_0) = 0$  для  $j = 0, \dots, n$ .

**Лемма 4.3.1.** Пусть  $r : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  — произвольная функция;  $x_0 \in (a, b)$ .

Предположим, что у  $r$  есть  $n - 1$  производная на  $(a, b)$ , а также  $\exists r^{(n)}(x_0)$ , причём  $r(x_0) = r'(x_0) = \dots = r^{(n)}(x_0) = 0$ .

Тогда  $r(x) = o((x - x_0)^n)$ .

*Доказательство леммы.*

Индукция по  $n$ .

База:  $n = 1$ :  $r(x_0) = 0$ ;  $\exists r'(x_0) = 0$ .

По определению  $r(x) - r(x_0) = r'(x_0) \cdot (x - x_0) + p(x - x_0)$ , тем самым,  $r(x) = o(x - x_0)$ .

Переход: докажем для  $n + 1$ .

Применим формулу Лагранжа:  $r(x) - r(x_0) = r'(c)(x - x_0)$ , где  $c$  — строго между  $x$  и  $x_0$ .

$r'$  удовлетворяет условию леммы с индексом  $n$ , получается,  $r'(x) = o((x - x_0)^n)$ .

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow r'(x) < \varepsilon \cdot |x - x_0|$$

Тогда получается  $r(x) = |r'(c)| \cdot |x - x_0| \leq \varepsilon \cdot |c - x_0|^n \cdot |x - x_0| \leq \varepsilon \cdot |x - x_0|^{n+1}$ .

□

Из леммы получаем, что  $r(x) = o((x - x_0)^n)$ , откуда в самом деле  $p$  — многочлен Тейлора для  $f$ . □

*Пример.*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{\cos(x) - 1} = ?$

Заметим, что  $\sin(x) = \sin(x)$ , 0 в нуле;  $\sin'(x) = \cos(x)$ , 1 в нуле;  $\sin''(x) = -\sin(x)$ , 0 в нуле.

Заметим, что  $\cos(x) = \cos(x)$ , 1 в нуле;  $\cos'(x) = -\sin(x)$ , 0 в нуле;  $\cos''(x) = -\cos(x)$ , -1 в нуле.

$$\text{Тогда } \frac{\sin(x) - x}{\cos(x) - 1} = \frac{(x + o(x^2)) - x}{(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - 1} = \frac{o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0.$$

---

Итак, вот локальная формула Тейлора:

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + o((x - x_0)^n)$$

где  $o((x - x_0)^n)$  — остаточный член в форме Пеано.

**Теорема 4.3.2.** Пусть  $f$  имеет  $n$  непрерывных производных на  $(a, b)$ , причём даже  $\exists f^{(n+1)}$  на  $(a, b)$ .

Тогда

$$\forall x \neq x_0 \in (a, b) : \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

где  $\xi$  — какая-то точка строго между  $x$  и  $x_0$ .

Здесь  $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$  — остаток в форме Лагранжа.

*Замечание.* Можно не требовать непрерывность ни одной производной, так как мы знаем про существование следующих.

*Доказательство.*

Обозначим  $r(x) = f(x) - p(x)$ .

**Лемма 4.3.2.** Пусть  $r$  дифференцируема  $n + 1$  раз на  $(a, b)$ ; пусть  $r(x_0) = r'(x_0) = \dots = r^{(n)}(x_0) = 0$ .

Тогда  $\forall x \neq x_0 : \exists \xi$  строго между  $x$  и  $x_0$ , такая, что  $r(x) = \frac{r^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ .

Доказательство леммы.

Индукция по  $n$ .

База:  $n = 0$ .

В таком случае  $r(x) = r(x) - r(x_0) = r'(\xi) \cdot (x - x_0)$  — просто формула Лагранжа.

Переход: докажем для  $n + 1$ .

Рассмотрим  $f(x) = r(x)$  и  $g(x) = (x - x_0)^{n+2}$ ;  $g'(x) = (n + 2)(x - x_0)^{n+1}$ , после чего применим формулу Коши:

$$\frac{r(x)}{(x - x_0)^{n+2}} = \frac{r'(c)}{(n + 2)(c - x_0)^{n+1}}, \text{ где } c \text{ строго между } x \text{ и } x_0.$$

Теперь воспользуемся индукционным предположением для  $r'$ :

$$r'(c) = \frac{r^{(n+2)}(\xi)}{(n + 1)!} (c - x_0)^{n+1}$$
$$r(x) = (x - x_0)^{n+2} \cdot \frac{1}{(n + 2)!} \cdot \frac{r^{(n+2)}(\xi)}{(c - x_0)^{n+1}} (c - x_0)^{n+1} = \frac{r^{(n+2)}(\xi)}{(n + 2)!} (x - x_0)^{n+2}$$

□

Используя тот факт, что  $r^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ , так как  $p$  — многочлен степени не больше  $n$ , получаем искомое равенство. □

## Лекция XXIII

28 ноября 2022 г.

Давайте посчитаем  $\sqrt[3]{9}$ .

Для этого воспользуемся рядом Тейлора, нам придётся дифференцировать  $x^r$ , где  $r \in \mathbb{Q}$ .

Пусть  $r = \frac{p}{q}$ ;  $p, q \in \mathbb{N}$ . Выразим  $\left(x^{\frac{1}{q}}\right)' = \frac{1}{q \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{q-1}}$ , как производную обратной функции.

Упростив, получаем  $\left(x^{\frac{1}{q}}\right)' = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}$ . Теперь можно заметить, что  $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$ , откуда  $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = p \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p-1}{q} + \frac{1-q}{q}} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$ , откуда мы видим, что формула  $(x^r)' = r x^{r-1}$  применима не только к целым, но и к рациональным степеням.

Представим  $\sqrt[3]{9} = (8 + 1)^{\frac{1}{3}}$  — найдём рядом точный куб  $2^3 = 8$ . Записав ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получаем для  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f^{(2)}(\xi)(x - x_0)^2 = x_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} x_0^{-\frac{2}{3}} (x - x_0) + \frac{2}{9 \cdot 2} (\xi)^{-\frac{5}{3}} (x - x_0)^2$$

где  $\xi \in (x_0, x)$ . Подставим  $x = 9, x_0 = 8$

$$2 + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{9} \xi^{-\frac{5}{3}}$$

Пока  $\xi$  меняется от 8 до 9, член  $\xi^{-\frac{5}{3}}$  меняется очень мало: очевидно,  $\xi^{-\frac{5}{3}}$  монотонно по  $\xi$ , причём

$$8^{-\frac{5}{3}} - 9^{-\frac{5}{3}} = \frac{9^{\frac{5}{3}} - 8^{\frac{5}{3}}}{(8 \cdot 9)^{\frac{5}{3}}} = \frac{9^2 - 8^2}{9^{\frac{1}{3}} + (9 \cdot 8)^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{(8 \cdot 9)^{\frac{5}{3}}} \leq \frac{17}{6} \cdot \frac{1}{1024} \leq 0,003$$

то есть ошибка при вычислении точного значения  $\sqrt[3]{9}$  при помощи ряда Тейлора порядка всего 2 уже очень мала.

## Глава 5

# Первообразная

Пусть дана функция  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Определение 5.0.1** (Первообразная  $f$  на  $\langle a, b \rangle$ ). Такая функция  $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , дифференцируемая на  $\langle a, b \rangle$ , такая, что  $F'(x) = f(x)$  для  $x \in \langle a, b \rangle$ .

*Замечание.* Как известно, у производной могут быть разрывы только первого рода (следствие 4.2.5), поэтому первообразной точно нет у функции, претерпевающей где-то разрыв первого рода.

Так, нет первообразной у функции  $f(x) = \text{sign}(x)$  на  $(-\infty; +\infty)$ .

**Факт 5.0.1.** Если у функции  $f$  есть две первообразные,  $F_1$  и  $F_2$ , то  $F_1 = F_2 + c$ , где  $c \in \mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $F = F_1 - F_2$ . Её производная равна нулю (следствие 4.2.2), значит, она постоянна.  $\square$

**Следствие 5.0.1.** Если  $F_1$  — первообразная, то множество всех первообразных — как раз  $\{F_1 + C | C \in \mathbb{R}\}$ .

**Теорема 5.0.1.** У любой непрерывной функции есть первообразная.

*Доказательство.* Будет потом.  $\square$

## 5.1 Про дифференциальные формы

Ниже написанное может казаться казуистикой, но оно будет полезно при работе с функциями от нескольких переменных.

«На самом деле», первообразные бывают не столько у функций, сколько у дифференциальных форм.

**Определение 5.1.1** (Линейная функция). Функция вида  $\phi(h) = a \cdot h$ , где  $a \in \mathbb{R}$ .

**Определение 5.1.2** (Дифференциальная форма). Произвольное отображение

$$\Phi : \langle l, r \rangle \rightarrow \{\text{линейные функции}\}$$

В качестве примера можно рассмотреть дифференциал (определение 4.0.1).

$$\Phi : x \mapsto d_f(x, h) = f'(x) \cdot h$$

Более того, из определения видно, что всякая дифференциальная форма имеет вид  $\Phi : x \mapsto a(x) \cdot h$ , где уже  $a : \langle l, r \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — произвольная функция.

Введём обозначение для дифференциала функции  $f$ , как линейной формы:  $df = (\Phi : x \mapsto f'(x) \cdot h)$ .

Дифференциал линейной функции  $f(x) = x$  — линейная форма  $\Phi : x \mapsto 1 \cdot h$ ; это линейная форма, в каждой точке которой сидит линейная функция с коэффициентом 1. Его можно также обозначить  $dx$ .

Вместо не очень хорошей записи  $a(x) \cdot h$  (что такое в ней  $h$ ?) будем записывать линейные формы так:  $a \cdot dx$ .

Теперь скажем, что функция  $F$  — первообразная дифференциальной формы  $\Phi$ , если  $dF = \Phi$ . Это определение согласуется с ранее данным: пусть  $\Phi = a dx$ , и  $dF = F' dx$ ; мы ищем такую функцию  $F$ , что  $F' = a$ .

Пусть  $a(x) dx$  — дифференциальная форма на  $\langle l, r \rangle$ . Тогда следующим значком

$$\int a(x) dx$$

обозначают множество всех первообразных данной линейной формы.

## 5.2 Первообразные элементарных функций

Так,  $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$  при  $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ . Можно ещё написать первообразные некоторых интересных функций, которые мы ещё не прошли:

- $\int \sin x dx = -\cos x + C$ .
- $e^x dx = e^x + C$ .
- $x^{-1} dx = \log x + C$ .

## 5.3 Сложный дифференциал

Давайте напишем дифференциал композиции.

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

поэтому

$$d(f \circ g) = f'(g(x))g'(x) dx$$

Здесь  $x$  после дифференциала  $dx$ , и  $x$  внутри скобок от вызова функций — разные сущности: внутри скобок — точка, в которой мы вычисляем значение, чтобы узнать, чему равна производная; после значка  $d$  это — название линейной функции с коэффициентом 1. Правильнее было бы написать  $d(f \circ g) = f'(g(\cdot))g'(\cdot) dx$ . Если заметить, что  $g'(\cdot) dx = dg$ , то получим  $d(f \circ g) = (f' \circ g) dg$ .

Отсюда  $\int (f' \circ g) dg = \int (f \circ g) dx$ .

Теперь, например, можно посчитать  $\int x \sin(x^2) dx = \int \sin(x^2) d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \int \sin(x^2) dx^2 = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + C$

По просьбам трудящихся, на лекции ещё посчитали

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} \underset{y=\cos x}{=} - \int \frac{dy}{y} = -\log(y) + C = -\log(\cos x) + C$$

(написанное выше — например, интеграл на  $(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2})$ , но нельзя сказать, что это интеграл на  $(-\infty; +\infty)$  — интегрируемая функция не везде определена).

## 5.4 Интегрирование по частям

Так как  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ , то  $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$ .

Формула интегрирования по частям:  $\int f dg = fg - \int g df$ .

Применим её для  $\int \log x \, dx$ :

$$\int \log x \cdot dx = x \log x - \int x \cdot d(\log x) = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - x + C$$

Или вот ещё пример:  $\int \sin x \cdot e^x \, dx$ .

$$\int \sin x \cdot de^x = e^x \sin x - \int \cos x \cdot e^x \, dx = e^x \sin x - \int \cos x \cdot de^x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int \sin x \cdot e^x \, dx$$

Интеграл пришёл сам в себя, получается,  $\int e^x \sin x \, dx + \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$  (сумма по Минковскому), или же  $\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C$ .

*Замечание.* На самом деле, мы получили, что *если интеграл существует*, то он равен этому выражению.

Чтобы показать, что он существует, можно либо сослаться на теорему о том, что первообразная у непрерывной функции существует, либо просто проверить — продифференцировав полученное выражение обратно.

---

Иногда бывает, что в интеграле  $\int f(x) \, dx$  под дифференциал ничего загнать не получается.

Бывает полезно рассмотреть  $y = \phi(x)$ . Тогда получается, что  $dy = \phi'(x) \, dx$ , откуда  $dx = \frac{1}{\phi'(x)} \, dy$ .

После этого

$$\int f(x) \, dx = \int f(\phi^{-1}(y)) \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(y))} \, dy$$

## Лекция XXIV

2 декабря 2022 г.

Посчитаем ещё один интеграл:

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx, \text{ при } -1 \leq x \leq 1$$

Попробуем замену  $x = \sin t$ , при  $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ .

$$\int \sqrt{1-x^2} \cdot dx = \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot d\sin t =$$

Корень равен  $\cos t$ , потому что при данных  $t$ :  $\cos t \geq 0$ .

$$= \int \cos^2 t \cdot dt = \int \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = \frac{1}{4} \int \cos(2t) \, d(2t) + \frac{1}{2} \int dt = \frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{1}{2} t + C$$

## Глава 6

# Интеграл

На самом деле, то, что мы выше называли интегралом (даже значок рисовали) — первообразная.

Само слово интеграл — это о каком-то суммировании потока входящих и исходящих средств, вопрос — сколько в итоге получилось?

**Определение 6.0.1** (Функционал). Отображение:  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $X$  — множество любой природы.

Пусть  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , отрезок  $I \subset A$ . Определим интеграл  $J(f, I)$ . Он по возможности должен удовлетворять следующим свойствам:

1.  $J(f, I_1 \sqcup I_2) = J(f, I_1) + J(f, I_2)$  — если что-то набралось сначала на одном отрезке, потом на другом, то в результате получилась сумма.
2.  $J(\alpha f_1 + \beta f_2, I) = \alpha J(f_1, I) + \beta J(f_2, I)$  — если есть какая-то платформа, которая едет с одной скоростью, а на ней что-то едет с другой скоростью, то оно сложится в таком виде.
3.  $J(1, [a, b]) = b - a$  — если что-то набирается со скоростью 1, то и наберётся столько, в течение какого времени набиралось.
4.  $f \geq 0 \Rightarrow J(f, I) \geq 0$  — если вода наливалась, то в итоге она налилась. В силу линейности получаем отсюда  $J(f, I) \geq J(g, I)$ , если во всех точках  $f(x) \geq g(x)$ .

## 6.1 Интеграл Римана — Дарбу

### 6.1.1 Интуиция

Пусть  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Разобьём отрезок на более маленькие части, необязательно равные:  $I = \bigsqcup_i I_i$ .

На всяком отрезке возьмём инфимум (для этого потребуем от функции ограниченности), получим

ступенчатую (кусочно постоянную) функцию  $g : I \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} \inf I_1, & x \in I_1 \\ \vdots \\ \inf I_i, & x \in I_i \\ \vdots \end{cases}$ . Иначе говоря,

$$g = \sum_k c_k \cdot \chi_{I_k}.$$

Отсюда видим вывод:

$$J(f, I) \geq J(g, I) = \sum_i c_k |I_k|$$

Аналогично, определим  $h = \sum_k d_k \chi_{I_k}$ , где  $d_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$ .



Таким образом, как бы мы не разбивали отрезок, будет наблюдаться неравенство

$$J(g, I) \leq J(f, I) \leq J(h, I)$$

Если же мы разобьём  $I$  на достаточно малые кусочки, то можно надеяться, что суммы  $J(g, I)$  и  $J(h, I)$  будут близки.

### 6.1.2 Определение

Пусть  $I = \langle a, b \rangle$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Рассмотрим ограниченную функцию  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Определение 6.1.1** (Разбиение отрезка). Совокупность отрезков  $I_1, \dots, I_n : I = \bigsqcup_{i=1}^n I_i$ , где  $n \in \mathbb{N}$ .

Отрезкам не запрещено быть пустыми, или вырождаться в точку.

**Определение 6.1.2** (Измельчение разбиения). Разбиение  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$  — измельчение разбиения  $I_1, \dots, I_n$ , если  $\forall \Delta_s : \exists I_t : \Delta_s \subset I_t$ .

**Лемма 6.1.1.** У любых двух разбиений есть общее измельчение.

*Доказательство.* Рассмотрим два разбиения  $I = \bigsqcup_{k=1}^N I'_k$  и  $I = \bigsqcup_{j=1}^T I''_j$ .

Тогда (так как пересечение двух отрезков — отрезок) семейство  $\{I'_k \cap I''_j\}_{k=1..N, j=1..T}$  является их общим измельчением.  $\square$

Рассмотрим некое  $\mathcal{A}$  — разбиение отрезка  $I$ . Теперь будем считать, что  $\emptyset \notin \mathcal{A}$ .

**Определение 6.1.3** (Сумма Дарбу по разбиению  $\mathcal{A}$ ).

- Верхняя:  $S_{\mathcal{A}}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{I \in \mathcal{A}} \left( \sup_{x \in I} f(x) \right) \cdot |I|$ .
- Нижняя:  $s_{\mathcal{A}}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{I \in \mathcal{A}} \left( \inf_{x \in I} f(x) \right) \cdot |I|$ .

Из определения очевидно, что  $s_{\mathcal{A}}(f) \leq S_{\mathcal{A}}(f)$

**Лемма 6.1.2.** Для любых двух разбиений  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  выполняется неравенство  $s_{\mathcal{A}}(f) \leq S_{\mathcal{B}}(f)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим их общее измельчение  $\mathcal{C}$ .

**Лемма 6.1.3.** Если  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{E}$  — два разбиения, причём  $\mathcal{E}$  — измельчение разбиения  $\mathcal{D}$ , то

$$s_{\mathcal{D}}(f) \leq s_{\mathcal{E}}(f) \leq S_{\mathcal{E}}(f) \leq S_{\mathcal{D}}(f)$$

*Доказательство леммы.*

$$S_{\mathcal{D}}(f) = \sum_{I_i \in \mathcal{D}} \left( \sup_{s \in I_i} f(x) \right) \cdot |I_i|$$

Рассмотрим одно слагаемое:

$$\left( \sup_{s \in I_i} f(x) \right) \cdot |I_i| = \sum_{\Delta_k \subset I_i} \sup_{x \in I_j} f(x)$$

Очевидно, если брать супремум не по  $I_i$ , а по  $\Delta_k \subset I_i$ , то получится только меньше.

$$\left( \sup_{s \in I_i} f(x) \right) \cdot |I_i| \geq \sum_{\Delta_k \subset I_i} \sup_{x \in \Delta_k} f(x)$$

Чтобы доказать для нижних сумм Дарбу, можно заменить  $f$  на  $-f$ .  $\square$

Таким образом,  $S_A(f) \geq S_C(f) \geq s_C(f) \geq s_B(f)$ .  $\square$

**Следствие 6.1.1.** Пусть  $U$  — множество всех верхних сумм для  $f$ , а  $V$  — множество всех нижних сумм.

Согласно лемме,  $(V, U)$  — щель. Положим  $\bar{I}(f) := \inf U$  и  $\underline{I}(f) := \sup V$ . Получается, в щели лежат числа  $[\underline{I}(f); \bar{I}(f)]$ .

**Определение 6.1.4** (Верхний интеграл Дарбу от  $f$  по  $I$ ). Выше определённая  $\bar{I}(f)$ .

**Определение 6.1.5** (Нижний интеграл Дарбу от  $f$  по  $I$ ). Выше определённая  $\underline{I}(f)$ .

**Определение 6.1.6** (Интеграл Дарбу от  $f$  по  $I$ ). Если  $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$ , то это число — *интеграл* функции  $f$  на отрезке  $\langle a, b \rangle$  (обозначают  $I(f)$ ), а функция — интегрируема по Риману — Дарбу на  $[a, b]$ .

*Примеры.*

- Функция Дирихле  $D = \chi_{\mathbb{Q}}$  не интегрируема по Риману — Дарбу на  $[0; 1]$ : на всяком отрезке её супремум 1, а инфимум — 0.
- Пусть  $\Delta \subset I$ . Найдём интеграл от  $f = \chi_{\Delta}$ .

Рассмотрим разбиение  $\{J_1, \Delta, J_2\}$ , где  $J_1$  и  $J_2$  — левая и правая половинки  $I \setminus \Delta$ .

В нём верхние и нижние суммы Дарбу совпали, поэтому можно утверждать, что в щели точно лежит одно число —  $|\Delta|$ .

**Факт 6.1.1.** Если  $f \leq g$  на  $\langle a, b \rangle$ , то  $I(f) \leq I(g)$ , так как  $\bar{I}(f) \leq \bar{I}(g)$ .

Представим себе  $f(x) = \frac{1}{x}$  на  $(0, 1]$ . Она там непрерывна; для всякого  $x_0 \in (0; 1] : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall x \in (0; 1] : |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon$ . Несложно видеть, что у данной функции  $\delta$  хотя и существует, но зависит не только от  $\varepsilon$ , но ещё и от  $x_0$ .

**Определение 6.1.7** (Равномерно непрерывная функция). Такая функция  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , что

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_0, x \in A : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

## Лекция XXV

5 декабря 2022 г.

### 6.2 Достаточный признак интегрируемости

**Теорема 6.2.1** (Кантор). Пусть  $E$  — замкнутое ограниченное множество, а  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция. Тогда эта функция автоматически равномерно непрерывна.

*Доказательство.* От противного: пусть  $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x, y \in E : |x - y| < \delta$ , но  $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ . Зафиксируем такой  $\varepsilon$ ; рассмотрим последовательность  $\delta_n = \frac{1}{n}$ , сопоставим всякому соответствующие  $x, y \in E$ .

Согласно второй теореме о компактности (теорема 3.1.18) существует возрастающая последовательность индексов  $n_j : x_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x \in E$ . Используя  $|x_n - y_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , получаем, что  $y_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x$ .

Подставим посылку теоремы:  $\forall n \in \mathbb{N} : |f(x_{n_j}) - f(y_{n_j})| \geq \varepsilon$ . Но такого не может быть,  $f(x_{n_j}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f(x)$ , и  $f(y_{n_j}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f(x)$ .  $\square$

**Теорема 6.2.2.** На замкнутом отрезке  $[a, b]$  все непрерывные функции интегрируемы по Риману.

*Доказательство.* Рассмотрим какую-нибудь непрерывную  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Согласно теореме Кантора (теорема 6.2.1), она равномерно непрерывна:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Рассмотрим  $J = \langle l, r \rangle \subset [a, b]$  — некий отрезок. Если  $|J| < \delta(\varepsilon)$ , то  $\text{osc}_J f \leq \varepsilon$ .

$$\text{osc}_J f = \sup_{x, y \in J} |f(x) - f(y)| = \sup_{x \in J} f(x) - \inf_{y \in J} f(y) \leq \varepsilon$$

Пусть  $\mathcal{E}$  — произвольное разбиение отрезка  $I$  на отрезки длины меньше  $\delta$ . Посчитаем на нём суммы Дарбу:

$$S_{\mathcal{E}} = \sum_{e \in \mathcal{E}} (\sup_e f) \cdot |e|$$

$$s_{\mathcal{E}} = \sum_{e \in \mathcal{E}} (\inf_e f) \cdot |e|$$

Вычислим разности сумм  $S_{\mathcal{E}} - s_{\mathcal{E}} \leq \sum_{e \in \mathcal{E}} \varepsilon \cdot |e| = \varepsilon \cdot |b - a|$ .

Получается,  $\forall \varepsilon > 0$  : найдётся разбиение  $\mathcal{E}$ , такое, что  $S_{\mathcal{E}} - s_{\mathcal{E}} \leq \varepsilon \cdot |b - a|$ . Так как  $|b - a|$  — константа, то отсюда сразу вытекает, что множества нижних и верхних сумм Дарбу образуют узкую щель.  $\square$

**Задача 6.2.1** (Упражнение). Интегрируема ли по Риману — Дарбу функция Римана  $R$  (определение 3.1.5)?

1.  $R$  непрерывна во всех иррациональных точках; разрывна во всех рациональных точках.
2.  $R$  интегрируема по Риману — Дарбу на любом конечном отрезке.

### 6.3 Свойства интеграла по Риману — Дарбу

1. Монотонность. Пусть  $f, g : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ . Если  $\forall x \in \Delta : f(x) < g(x)$ , то  $\bar{I}(f) \leq \bar{I}(g)$  и  $\underline{I}(f) \leq \underline{I}(g)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольное  $\mathcal{E}$  — разбиение отрезка  $\Delta$ .

$$S_{\mathcal{E}}(f) = \sum_{e \in \mathcal{E}} (\sup_e f) \cdot |e| \leq \sum_{e \in \mathcal{E}} (\sup_e g) \cdot |e| = S_{\mathcal{E}}(g)$$

$$s_{\mathcal{E}}(f) = \sum_{e \in \mathcal{E}} (\inf_e f) \cdot |e| \leq \sum_{e \in \mathcal{E}} (\inf_e g) \cdot |e| = s_{\mathcal{E}}(g) \quad \square$$

**Следствие 6.3.1.** Если  $f$  и  $g$  интегрируемы, то  $I(f) \leq I(g)$ .

2. Согласованность с домножением на константу. Пусть  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  ограничена,  $\alpha \geq 0$ ,  $\mathcal{E}$  — разбиение  $\Delta$ . Тогда  $S_{\mathcal{E}}(\alpha f) = \alpha S_{\mathcal{E}}(f)$  и  $s_{\mathcal{E}}(\alpha f) = \alpha s_{\mathcal{E}}(f)$ .

**Следствие 6.3.2.**  $\bar{I}(\alpha f) = \alpha \cdot \bar{I}(f)$  и  $\underline{I}(\alpha f) = \alpha \cdot \underline{I}(f)$ .

**Следствие 6.3.3.** Если  $f$  интегрируема, то  $\exists I(\alpha f) = \alpha I(f)$ .

3. Сумма. Согласованность с домножением на -1. Пусть  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  ограничена,  $\alpha \geq 0$ ,  $\mathcal{E}$  — разбиение  $\Delta$ . Тогда  $S_{\mathcal{E}}(-f) = -s_{\mathcal{E}}(f)$  и  $s_{\mathcal{E}}(-f) = -S_{\mathcal{E}}(f)$ .

**Следствие 6.3.4.**  $\bar{I}(-f) = -\underline{I}(f)$  и  $\underline{I}(-f) = -\bar{I}(f)$ .

**Следствие 6.3.5.** Если  $f$  интегрируема, то  $\exists I(-f) = -I(f)$ .

**Следствие 6.3.6.** Если  $f$  интегрируема и  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то  $\exists I(\alpha f) = \alpha I(f)$ .

4. Пусть  $f, g : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $\bar{I}(f + g) \leq \bar{I}(f) + \bar{I}(g)$  и  $\underline{I}(f + g) \leq \underline{I}(f) + \underline{I}(g)$ .

*Доказательство.*

$$\bar{I}(f+g) \leq S_{\mathcal{E}}(f+g) = \sum_{e \in \mathcal{E}} \sup_e (f+g) \cdot |e| \leq \sum_{e \in \mathcal{E}} (\sup_e f \cdot |e| + \sup_e g \cdot |e|) = S_{\mathcal{E}}(f) + S_{\mathcal{E}}(g)$$

Отсюда получаем, что  $\forall \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  — разбиений  $\Delta$  — выполняется  $\bar{I}(f+g) \leq S_{\mathcal{F}_1}(f) + S_{\mathcal{F}_2}(g)$  (для доказательства рассмотрим общее измельчение).

Взяв в неравенстве инфимум сначала по всем  $\mathcal{F}_1$ , потом по всем  $\mathcal{F}_2$ , получим

$$\bar{I}(f+g) \leq \bar{I}(f) + \bar{I}(g)$$

Отсюда

$$\underline{I}(f+g) = -\bar{I}((-f) + (-g)) \geq -\bar{I}(-f) - \bar{I}(-g) = \underline{I}(f) + \underline{I}(g) \quad \square$$

**Следствие 6.3.7.** Если  $f, g$  интегрируемы на  $\Delta$ , то  $f+g$  тоже интегрируема, причём  $I(f+g) = I(f) + I(g)$ .

## 6.4 Критерий интегрируемости по Риману — Дарбу

**Теорема 6.4.1** (Критерий интегрируемости по Риману — Дарбу). Следующие условия эквивалентны:

1. Ограниченная функция  $f$  на отрезке  $\Delta$  интегрируема на нём по Риману — Дарбу.
2.  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \mathcal{E}$  — разбиение  $\Delta$ , такое, что  $\sum_{e \in \mathcal{E}} (\text{osc}_e f) \cdot |e| < \varepsilon$ .

*Доказательство.*

$\Leftarrow$ .

$$\varepsilon > \sum_{e \in \mathcal{E}} (\text{osc}_e f) \cdot |e| = S_{\mathcal{E}}(f) - s_{\mathcal{E}}(f)$$

Значит, щель узкая, и интеграл существует.

$\Rightarrow$ . Щель узкая, значит,  $\exists \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  — разбиения  $\Delta$ , такие, что  $S_{\mathcal{F}_1} - s_{\mathcal{F}_2} < \varepsilon$ . Тогда берём  $\mathcal{E}$  — общее измельчение  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$ . По-прежнему,  $S_{\mathcal{E}} - s_{\mathcal{E}} < \varepsilon$ , получается,  $\mathcal{E}$  — искомое разбиение для данного  $\varepsilon$ .  $\square$

**Предложение 6.4.1** (Основная оценка интеграла). Если  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема на отрезке  $\Delta$ , то  $|f|$  тоже интегрируема, и  $|I(f)| \leq I(|f|)$ .

*Доказательство.* Заметим, что

$$\forall J \subset A : \text{osc}_J |f| = \sup_{x, y \in J} ||f(x)| - |f(y)|| \leq \sup_{x, y \in J} |f(x) - f(y)| = \text{osc}_J f$$

Теперь просто применим критерий:  $f$  интегрируема, значит,  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \mathcal{E}$  — разбиение  $\Delta$ , такое, что  $\sum_{e \in \mathcal{E}} (\text{osc}_e f) \cdot |e| < \varepsilon$ , откуда  $\sum_{e \in \mathcal{E}} (\text{osc}_e |f|) \cdot |e| < \varepsilon$  и подавно.  $\square$

*Контрпример.* Обратное неверно: функция  $d = D - \frac{1}{2}$  — сдвинутая функция Дирихле — интегрируема только под модулем.

## Лекция XXVI

9 декабря 2022 г.

**Предложение 6.4.2.** Если  $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — интегрируемы по Риману — Дарбу, то  $f \cdot g$  тоже интегрируема.

*Доказательство.* По определению,  $f$  и  $g$  — ограничены, пусть константой  $M$ .

Рассмотрим  $e \subset \langle a, b \rangle$ , оценим  $\text{osc}_e(f \cdot g)$ .

$$x, y \in e: |f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |f(x)(g(x) - g(y)) + (f(x) - f(y))g(y)| \leq M \cdot \text{osc}_e g + M \cdot \text{osc}_e f$$

Отсюда вытекает  $\text{osc}_e(f \cdot g) \leq M(\text{osc}_e f + \text{osc}_e g)$ .

Рассмотрим произвольный  $\varepsilon > 0$ , найдём разбиение отрезка  $\langle a, b \rangle$ , такое, что

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \mathcal{A}} \text{osc}_e f \cdot |e| &\leq \frac{\varepsilon}{2M} \\ \sum_{e \in \mathcal{A}} \text{osc}_e g \cdot |e| &\leq \frac{\varepsilon}{2M} \end{aligned}$$

Они найдётся согласно критерию интегрируемости (чтобы  $\mathcal{A}$  было общее, рассмотрим измельчение).

Тогда для  $f \cdot g$  на разбиении  $\mathcal{A}$  сумма колебаний не превосходит  $\varepsilon$ , выполняется критерий.  $\square$

**Следствие 6.4.1.** Пусть  $\Delta = \langle a, b \rangle$ ;  $J = \langle \alpha, \beta \rangle$ ;  $J \subset \Delta$ . Пусть  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема по Риману — Дарбу. Тогда, используя, что  $\chi_J : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  тоже интегрируема, несложно получить, что  $f|_J$  — тоже интегрируема.

Обозначим получившийся интеграл на подотрезке  $\int_J f = \int_{\alpha}^{\beta} f = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} I(f \cdot \chi_J)$ .

Пусть  $J = J_1 \sqcup J_2$ , где  $J, J_1, J_2$  — отрезки. Заметим, что

$$\int_J f = I(f \cdot \chi_J) = I(f \cdot \chi_{J_1} + f \cdot \chi_{J_2}) = I(f \cdot \chi_{J_1}) + I(f \cdot \chi_{J_2}) = \int_{J_1} f + \int_{J_2} f$$

**Куда относить концы?**

$J = \emptyset \Rightarrow \chi_J = 0 \Rightarrow \int_J f = 0$ .  $J = \{a\} \Rightarrow \int_J f = 0$  тоже:  $I(f \cdot \chi_{\{a\}}) = f(a) \cdot \underbrace{I(\chi_{\{a\}})}_{=0} = 0$ .

Отсюда сразу следует, что запись  $\int_{\alpha}^{\beta} f \stackrel{\text{def}}{=} I_J f$  для  $J = \langle \alpha, \beta \rangle$  корректна — нам не важно, включаются ли конца отрезка  $J$ .

В частности, получаем, что  $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx$  для  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ .

Основная оценка интеграла:  $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$ .

**Следствие 6.4.2.** Если  $|f(x)| \leq M$  на  $(\alpha, \beta)$ , то  $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq M \cdot (\beta - \alpha)$ .

**Определение 6.4.1.** Если  $\beta < \alpha$ , то  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$ .

При таком определении  $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx$  при любом относительном порядке  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Основная оценка интегрирования тоже остаётся верной:  $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx \leq M \cdot |\alpha - \beta|$ .

## 6.5 Связь между интегралом и первообразной

Пусть  $I = \langle \alpha, \beta \rangle$  — отрезок, возможно, бесконечной длины.

Рассмотрим  $f : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , такую, что для всякого замкнутого отрезка  $\Delta \subset I$  функция интегрируема на  $\Delta$ .

Пусть  $t_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$ . Обозначим  $F : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $F(t) = \int_{t_0}^t f(x) dx$ .

Пусть  $\Delta \ni t_0$  — замкнутый отрезок ( $\Delta \subset \langle \alpha, \beta \rangle$ ). На нём функция интегрируема, ограничена константой  $M$ .

Заметим, что  $\forall t_1, t_2 \in \langle \alpha, \beta \rangle$ :

$$F(t_1) - F(t_2) = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx \right| \leq |t_1 - t_2| \cdot M$$

Получается,  $F$  непрерывна на  $\Delta$ , но так как  $\Delta$  можно взять сколь угодно большим, то вообще говоря,  $F$  непрерывна даже на  $\langle \alpha, \beta \rangle$ .

Однако на любом замкнутом отрезке  $F$  равномерно непрерывна:  $F(t_1) - F(t_2) \leq |t_1 - t_2| \cdot M$ . Из формулы следует даже большее:

**Определение 6.5.1** (Условие Липшица).  $h : e \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет условию Липшица, если  $\exists A > 0 : \forall t_1, t_2 : |h(t_1) - h(t_2)| \leq A|t_1 - t_2|$ .

### 6.5.1 Теорема Ньютона — Лейбница

**Теорема 6.5.1** (Ньютон — Лейбниц). Пусть  $f : \langle \alpha, \beta \rangle$  непрерывна на отрезке  $\langle \alpha, \beta \rangle$ , причём  $t_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$ .

Тогда функция  $F(t) = \int_{t_0}^t f(x) dx$ , которую мы только что рассматривали, есть первообразная для  $f$ .

*Доказательство.* Докажем более сильное утверждение: пусть  $f$  интегрируема на всяком замкнутом отрезке  $\Delta \subset I$ ; тогда  $F'(u)$  существует и равно  $f(u)$  в каждой точке  $u$ , где  $f$  непрерывна.

Рассмотрим такое  $u \in \langle \alpha, \beta \rangle$ , где  $f$  непрерывна.

Рассмотрим  $\varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in I : |x - u| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(u)| \leq \varepsilon$ .

Посчитаем производную  $\frac{F(x) - F(u)}{x - u}$  при  $x \rightarrow u$ . Так как мы хотим доказать, что это  $f(u)$ , то запишем

$$\frac{F(t) - F(u)}{t - u} - f(u) = \frac{\int_u^t f(x) dx}{t - u} - f(u) = \frac{1}{t - u} \left( \int_u^t f(x) dx - \int_u^t \underbrace{f(u)}_{\text{const}} dx \right) = \frac{1}{t - u} \int_u^t (f(x) - f(u)) dx$$

Пусть  $|t - u| \leq \delta$ , тогда  $|x - u| \leq \delta$ , где  $x$  — под интегралом. Тогда  $|f(x) - f(u)| \leq \varepsilon$  по непрерывности, и получаем

$$\left| \frac{F(t) - F(u)}{t - u} - f(u) \right| \leq \frac{1}{t - u} \cdot |t - u| \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

Тем самым, действительно,  $\frac{F(t) - F(u)}{t - u} \xrightarrow{t \rightarrow u} f(u)$ . □

**Следствие 6.5.1** (Формула Ньютона — Лейбница). Пусть  $f$  непрерывна на  $I = \langle \alpha, \beta \rangle$ ; пусть  $\Phi$  — произвольная первообразная  $f$  на  $\alpha, \beta$ .

Тогда  $\forall a, b \in \langle \alpha, \beta \rangle : \int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a)$ .

*Доказательство.* Пусть  $t_0 \in I$ , функция  $F(t) = \int_{t_0}^t f(x) dx$  является первообразной для  $f$ .

Но тогда  $\exists C \in \mathbb{R} : \Phi(t) = F(t) + C$ . Отсюда получаем

$$\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a) = \int_{t_0}^b f(x) dx - \int_{t_0}^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \square$$

*Пример.*  $\int_0^1 x dx = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$ .

### 6.5.2 Замена переменной под интегралом

$f(\phi(x))' = f'(\phi(x)) \cdot \phi'(x)$  Предположим, что  $f, \phi, f', \phi'$  непрерывны на своей области определения:  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , причём  $\Delta \supset \phi(I)$ , и  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ .

Тем самым  $f(\phi(x))$  — первообразная для правой части.

$$\int_a^b f'(\phi(x))\phi'(x) dx = f(\phi(b)) - f(\phi(a))$$

С другой стороны,

$$\int_a^b f'(\phi(x))\phi'(x) dx = f(v) - f(u) = \int_u^v f'(s) ds$$

где  $u = \phi(a)$ , и  $v = \phi(b)$ .

## Лекция XXVII

10 декабря 2022 г.

skipped

## Лекция XXVIII

12 декабря 2022 г.

$f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$  — последовательность функций. Ряд  $\sum_{i=1}^n f_n(x)$  сходится поточечно к функции  $S : A \rightarrow \mathbb{R}$ , если частичные суммы сходятся для каждого  $x$  сходятся.

Равномерно — если частичные суммы сходятся к  $S$  равномерно.

**Теорема 6.5.2** (Критерий Вейерштрасса). Пусть  $d_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , где  $\sum_{i=1}^{\infty} d_i < \infty$ .

Если  $\forall i \in \mathbb{N} : \forall x \in A : |f_n(x)| \leq d_n$ , то ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)$  сходится абсолютно и равномерно.

*Доказательство.* Обозначим  $S_k(x) := \sum_{i=1}^k f_i(x)$ . Применим критерий Коши:

$$\forall n > k : |S_n(x) - S_k(x)| = |f_{k+1}(x) + \dots + f_n(x)| \leq |f_{k+1}(x)| + \dots + |f_n(x)| \leq d_{k+1} + \dots + d_n$$

При достаточно большом  $k$ , согласно критерию Коши для числового ряда  $d_n$ , сумма  $|d_{k+1}| + \dots + |d_n|$  достаточно мала.  $\square$

Здесь интересно писать бесконечный ряд Тейлора и смотреть, куда и где он сходится.

*Пример* (Непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция). Определим

$$f_1(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq \frac{1}{2} \\ \text{функция имеет период } 1 \end{cases} \quad \text{в точках } \frac{1}{2}\mathbb{Z} \text{ нет производной, в остальных — она } \pm 1.$$

$$f_2(x) = \frac{1}{4}f_1(4x) = \begin{cases} \frac{1}{4}|x|, & |x| \leq \frac{1}{8} \\ \text{функция имеет период } \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{в точках } \frac{1}{8}\mathbb{Z} \text{ нет производной, в остальных — она } \pm 1.$$

$$f_3(x) = \frac{1}{4}f_2(4x) = \begin{cases} \frac{1}{16}|x|, & |x| \leq \frac{1}{32} \\ \text{функция имеет период } \frac{1}{16} \end{cases} \quad \text{в точках } \frac{1}{32}\mathbb{Z} \text{ нет производной, в остальных — она } \pm 1.$$

Тогда функция  $F := \sum_{i=1}^n$  корректно определена, так как ряд сходится по критерию Вейерштрасса:  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}$ . Так как ряд сходится равномерно, а слагаемые непрерывны, то  $F$  — тоже непрерывна.

Тем не менее, она нигде не дифференцируема: для любого  $n \in \mathbb{N}$  можно выбрать  $h_n = \pm \frac{1}{4^n}$ , так, что  $\frac{f_n(x+h_n) - f_n(x)}{h_n} = \pm 1$ .

$$\text{Тогда } \frac{f_n(x+h_n) - f_n(x)}{h_n} = \begin{cases} \pm 1, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}.$$

Запишем  $\frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} = \sum_{j=1}^n \frac{f_j(x+h_n) - f_j(x)}{h_n}$ . При чётных  $n$  эта сумма чётна, при нечётных — нечётна, значит, производной не существует — последовательность не сходится.

**Теорема 6.5.3** (Предельный переход под знаком интеграла). Пусть  $f_n$  заданы на конечном отрезке  $I$ , и все интегрируемы по Риману — Дарбу.

Если  $f_n \rightrightarrows f$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I f(x) dx$ .

*Доказательство.*

$$\left| \int_I f_n(x) dx - \int_I f(x) dx \right| = \left| \int_I (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \underbrace{\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|}_{\text{мало из-за равномерности}} \cdot |I| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \square$$

*Замечание.* На самом деле, если  $f_n \rightarrow f$  поточечно, причём  $\forall n : \exists A : \forall x \in I : |f_n(x)| \leq A$ , то заключение теоремы верно тоже.

**Задача 6.5.1.** Пусть  $f_n$  заданы на отрезке  $\langle a, b \rangle$  и дифференцируемы. Пусть  $f_n \rightrightarrows f$ . При каких дополнительных условиях  $\exists f'$ , причём  $f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$ ?

**Теорема 6.5.4.**  $I$  — отрезок,  $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , а ещё имеется функция  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Известно, что  $f_n$  дифференцируемы всюду на  $I$ ,  $f_n \rightrightarrows f$ , а  $f'_n \rightrightarrows \phi$ .

Тогда  $f$  дифференцируема, причём  $f' = \phi$ .

Упражнение: можно ослабить условие  $f_n \rightrightarrows f$ , на следующее:  $\exists x_0 \in I : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ .

*Доказательство.* Применим критерий Коши к равномерному схождению производных:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall k, m > N, x \in I : |f'_k(x) - f'_m(x)| \leq \varepsilon$ .



Пусть  $x \neq y \in I$ , а ещё  $g(x) = f_k(x) - f_m(x)$ . Запишем формулу Лагранжа:  $\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = g'(\xi)$ , где  $\xi$  найдётся между  $x$  и  $y$ .

Раскрыв  $g$  по определению, получаем  $\left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f_m(x) - f_m(y)}{x - y} \right| = |f'_k(\xi) - f'_m(\xi)| \leq \varepsilon$ , где  $\xi$  найдётся между  $x$  и  $y$ . Если при фиксированном  $k$  устремить  $m$  к  $+\infty$ , получится неравенство  $\left| \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq \varepsilon$ .

Оно же переписывается в виде  $\frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} - \varepsilon \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f_k(x) - f_k(y)}{x - y} + \varepsilon$ . Теперь при фиксированном  $x$  устремим  $y \rightarrow x$ . Получим  $f'_k(x) \leq \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \overline{\lim}_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq f'_k(x) + \varepsilon$ .

Теперь их сходимости  $f_k$  к  $\phi$  получаем, что  $\exists N'$  (можно считать  $N' \geq N$ ), такое, что  $\forall k > N' : |f_k(x) - \phi(x)| \leq \varepsilon$ .

Таким образом,

$$\phi(x) - 2\varepsilon \leq \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \overline{\lim}_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \phi(x) + 2\varepsilon \quad \square$$

## 6.6 Логарифм и экспонента

**Определение 6.6.1** (Натуральный логарифм).  $\log : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $\log t = \int_1^t \frac{1}{x} dx$ .

Подынтегральная функция непрерывна на луче, поэтому в любой точке определение корректно, интеграл существует.

### 6.6.1 Свойства

1.  $\log(t_1 t_2) = \log(t_1) + \log(t_2)$ , где  $t_1, t_2 > 0$ .

*Доказательство.*

$$\log(t_1 t_2) = \int_1^{t_1 t_2} \frac{dx}{x} = \int_1^{t_1} \frac{dx}{x} + \int_{t_1}^{t_1 t_2} \frac{dx}{x}$$

При замене  $y = \frac{x}{t_1}$  второе слагаемое преобразуется к виду  $\int_1^{t_2} \frac{dy}{y}$ . □

2. Логарифм строго монотонен, так как  $(\log t)' = \frac{1}{t}$  по теореме Ньютона — Лейбница.
3.  $\log 1 = 0$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \log'(1) = 1$ .

**Теорема 6.6.1** (Теорема единственности). Пусть  $L : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция, причём  $L(t_1 t_2) = L(t_1) + L(t_2)$ , причём  $\exists x \neq 0 : L(x \neq 0) \neq 0$ .

Тогда  $\exists C \neq 0 : \forall x > 0 : L(x) = C \cdot \log(x)$ .

*Доказательство.*

$$L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1) \Rightarrow L(1) = 0$$

Заметим, что  $L$  дифференцируема... □