

Математический анализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Комплексный анализ | 2 |
| 1.1 | Интеграл от дифференциальной формы вдоль кусочно-гладкого пути | 3 |
| 1.1.1 | Про дифференциальные формы | 3 |
| 1.1.2 | Про интегрирование | 3 |
| 1.1.3 | Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути | 4 |
| 1.1.4 | Сумма путей | 4 |
| 1.1.5 | Альтернативное определение | 4 |
| 1.1.6 | (Не)зависимость от параметризации | 6 |
| 1.2 | Условия существования первообразной у дифференциальной формы | 6 |
| 1.3 | Операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ | 9 |
| 1.3.1 | Связь с голоморфными функциями | 10 |
| 1.4 | Гармонические функции | 18 |
| 1.5 | Первообразная от замкнутой формы вдоль непрерывного пути | 19 |
| 1.5.1 | Наводящие предположения | 19 |
| 1.5.2 | Требуемые свойства | 19 |
| 1.5.3 | О гомотопности путей | 21 |
| 1.6 | Ряды Лорана | 22 |
| 1.7 | Изолированные особенности голоморфных функций | 24 |
| 1.8 | Вычеты | 26 |
| 1.8.1 | Как вычислять вычеты | 26 |
| 1.8.2 | Индекс замкнутого пути относительно точки | 27 |
| 1.8.3 | Обобщение интеграла $\frac{\sin x}{x}$ | 28 |
| 1.8.4 | 2-я формула замены переменной | 29 |
| 1.8.5 | О логарифме | 30 |
| 1.9 | Принцип аргумента и теорема Руше | 32 |
| 1.10 | Сходимость аналитических функций | 33 |
| 1.10.1 | Нормальные семейства | 35 |
| 1.11 | Целые функции | 38 |
| 1.11.1 | Построение целых функций с заданными нулями | 38 |
| 1.11.2 | Упрощённый вид множителей Вейерштрасса | 39 |
| 1.11.3 | Разложение синуса в произведение | 40 |
| 1.11.4 | Γ -функция Эйлера | 42 |
| 1.11.5 | Эйлеров интеграл | 45 |
| 1.11.6 | Формула Стирлинга | 45 |
| 1.12 | Рациональные и полиномиальные приближения | 47 |

Глава 1

Комплексный анализ

Лекция I

16 февраля 2024 г.

Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, где открытое $G \subset \mathbb{C}$.

Определение 1.0.1 (f голоморфна в $z_0 \in G$). $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \stackrel{\text{def}}{=} f'(z_0)$.

Во втором семестре мы проверяли, что $f = u + iv$ (где $u, v : G \rightarrow \mathbb{R}$) голоморфна в $z_0 \iff f$ дифференцируема в вещественном смысле, и выполняются уравнения Коши — Римана:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Определение 1.0.2 (f аналитична в G). $\forall z_0 \in G : \exists c_j \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \quad (*)$$

где ряд сходится не только при $z = z_0$.

Теорема 1.0.1. f аналитична в $G \iff f$ голоморфна во всех точках G .

Доказательство.

\Rightarrow . Доказали во втором семестре, несложно.

\Leftarrow . Скоро займёмся, время пришло. □

Из представления (*) следует, что производная в точке z считается почленно: $f'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j (z - z_0)^{j-1}$. В частности, отсюда получается, что $f'(z_0) = c_1$, и вообще $f^{(n)}(z_0) = j! \cdot c_j$.

Вскоре мы увидим, что ситуация разительно отличается от вещественной: в вещественном случае были разные классы — дифференцируемые функции, C^1 , C^∞ , аналитичные, и множество промежуточных классов.

В комплексном же случае, если функция хотя бы один раз дифференцируема, то окажется, что этого достаточно, чтобы она была не просто дифференцируема, а непрерывно дифференцируема, бесконечно дифференцируема, и даже аналитична.

1.1 Интеграл от дифференциальной формы вдоль кусочно-гладкого пути

1.1.1 Про дифференциальные формы

Определение 1.1.1 (Линейная функция $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$). $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n : l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y)$.

Определение 1.1.2 (Линейная форма на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$). Функция двух переменных $\phi : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, линейная по второму аргументу.

В пространстве \mathbb{R}^n имеется базис (e_j) : $h = e_1 h_1 + \dots + e_n h_n$.

Тем самым, $\phi(x, h) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\phi(x, e_j)}_{=: g_j(x)} h_j = \sum_{j=1}^n g_j(x) h_j$.

Введём *базисные линейные формы* $dx_j(u, h) = h_j$, игнорирующую первую координату, и возвращающую j -ю компоненту второго аргумента. Теперь $\phi(x, h)$ разложилась в сумму $\sum_{j=1}^n g_j dx_j$.

Пример. Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ — дифференцируемая в G функция. Заметим, что её дифференциал $df(x, _)$ — в точности линейная форма на G .

При разложении по базису получится $df(x, _) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j$.

Вскоре мы увидим, что далеко не всякая линейная форма является чьим-то дифференциалом.

Если $\phi = \sum_{j=1}^n g_j dx_j$ — дифференциал функции f , то непременно $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Тот факт, что ϕ является дифференциалом f , можно сказать наоборот: f является первообразной ϕ .

1.1.2 Про интегрирование

Рассмотрим монотонную функцию $\Phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Как и при определении стилтьесовой длины, будем считать, что Φ определена на некотором открытом множестве, содержащем $\langle a, b \rangle$. Обозначим за l_Φ стилтьесову длину, отвечающую функции Φ .

Пускай λ_Φ — продолжение стилтьесовой длины l_Φ по Лебегу — Каратеодори.

Она, как водится, определена на некоторой Σ -алгебре, в которой есть борелевские множества, но измеримы могут быть и какие-то другие множества, зависящие от конкретной функции Φ .

Примеры.

- Так, функция $\phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ порождает дельта-меру δ_0 , относительно которой все множества измеримы.

Кроме того, эта мера сингулярна относительно стандартной меры Лебега.

- Может показаться, что так происходит из-за разрывности ϕ , но это не так.

Рекурсивно определим канторову лестницу $C : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$:



Построив по данной функции стильесову длину λ_C , мы получим меру, сосредоточенную на канторовом множестве меры нуль.

Её носитель — само канторово множество, так как на всех отрезках вне канторова множества λ_C равна нулю. Она сингулярна относительно стандартной меры Лебега на \mathbb{R} , и её измеримые множества разительно отличаются от измеримых множеств меры Лебега.

По мере Стильеса можно интегрировать: если v является λ_Φ измеримой (в частности, измерима по Борелю и непрерывна), то определён интеграл $\int_{\langle a, b \rangle} v d\lambda_\Phi$. Иногда пишут просто $\int_{\langle a, b \rangle} v d\Phi$.

Теперь пусть $I = [a, b]$, и $\Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. В таком случае $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$, где некие Φ_1, Φ_2 возрастают. Можно определить знакопеременную меру $\lambda_\Psi \stackrel{def}{=} \lambda_{\Phi_1} - \lambda_{\Phi_2}$, понятно, что определение корректно.

1.1.3 Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути

Пускай $\gamma : [a, b] \rightarrow G \subset \mathbb{R}^n$ — спрямляемый путь (путь конечной длины). Пускай $U = \sum_{j=1}^n u_j dx_j$ — дифференциальная форма в области G . Если не сказано противное, будем считать, что u_j — непрерывные функции.

Определение 1.1.3 (Интеграл от U вдоль пути γ). $\int_\gamma U \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^n \int_{[a, b]} u_j(\gamma(t)) d\gamma_j(t)$.

Здесь $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Так как путь спрямляем, то все γ_j — ограниченной вариации, каждая порождает свою меру Стильеса, и определение интегрирует композицию $U \circ \gamma$ по данной мере.

1.1.4 Сумма путей

Пускай имеются два отрезка $[a, c]$ и $[c, d]$, и на них заданы пути $\gamma_1 : [a, c] \rightarrow G$, $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow G$. Предположим, что $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$.

Тогда можно устроить путь $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a, d] \rightarrow G$, $\gamma(t) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, c] \\ \gamma_2(t), & t \in [c, d] \end{cases}$.

Замечание. Интеграл аддитивен по множеству: $\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} U = \int_{\gamma_1} U + \int_{\gamma_2} U$.

1.1.5 Альтернативное определение

Далее мы не интересуемся никакими чудесами вроде канторовых лестниц, и считаем, что Φ такова, что λ_Φ абсолютно непрерывна относительно стандартной меры Лебега.

А раз так, то по теореме Радона — Никодима \exists суммируемая $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что

$$\lambda_\Phi(e) = \int_e w(x) dx \quad (+)$$

Факт 1.1.1. Формула (+) заведомо верна, если Φ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, тогда $w = \Phi'$.

Доказательство. Введём меру $\nu(e) = \int_e \Phi'(x) dx$, заданную на измеримых по Лебегу множествах. Φ' непрерывна, и, следовательно, измерима.

Если $\langle c, d \rangle \subset [a, b]$, то $\nu(\langle c, d \rangle) = \int_{\langle c, d \rangle} \Phi'(x) dx = \Phi(d) - \Phi(c) = l_\Phi(\langle c, d \rangle)$.

Таким образом, из теоремы единственности, продолжение l_Φ по Лебегу — Каратеодори совпадает с $\int_e \Phi'(x) dx$. \square

Замечание. Утверждение (факт 1.1.1) сохраняет силу, если Φ непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема.

Далее где-то используется Φ , а где-то β , надо убедиться, что это везде одно и то же, и заменить. Пускай $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, кусочно-непрерывно дифференцируемая: $\exists a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$, такие, что β непрерывно дифференцируема на $[a_s, a_{s+1}]$ при $0 \leq s < k$. Введём $\rho(e) = \int_e \beta'(x) dx$ — это знакопеременная вещественная мера.

У данной меры возникают (см. разложение Хана) положительная и отрицательная части $\rho_+(e) \stackrel{def}{=} \int_e (\beta')_+(x) dx$ и $\rho_-(e) \stackrel{def}{=} \int_e (\beta')_-(x) dx$

Если обозначить за $\Phi_+(t) = \int_0^t (\beta')_+(x) dx$ и $\Phi_-(t) = \int_0^t (\beta')_-(x) dx$, то окажется, что соответствующие меры Стильеса совпадают с ρ_+ и ρ_- .

Более того, $\beta = \Phi_+ - \Phi_-$ — получили разложение функции ограниченной вариации в положительную и отрицательную части.

Замечание. Это разложение экономнее, чем то, которое было получено ранее — ранее в качестве Φ_+ выбиралась вариация Φ .

Если всё, что написано выше, собрать вместе, то получится

$$\boxed{\int_{[s,t]} v d\Phi = \int_{[s,t]} v(x) \beta'(x) dx}$$

Далее «гладкий» используется, как синоним к непрерывно-дифференцируемому.

Следствие 1.1.1 (Можно считать определением). Если $U = \sum_{j=1}^n u_j dx_j$ — дифференциальная форма в G с непрерывными коэффициентами, а $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow G$ — спрямляемый кусочно-гладкий путь, то

$$\int_\gamma U = \sum_{j=1}^n \int_a^b u_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt$$

1.1.6 (Не)зависимость от параметризации

Пускай $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — кусочно-гладкий путь, $\psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ — гладкий гомеоморфизм.

Теперь $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$ — перепараметризация γ

Лемма 1.1.1. Для всякой формы U :

$$\int_{\tilde{\gamma}} U = \pm \int_{\gamma} U$$

Знак $+$ выбирается, если ψ возрастает, и $-$ если убывает.

Доказательство. Предположим, что γ — гладкий путь, иначе применяем к кусочкам гладкости по отдельности.

$$\int_{\tilde{\gamma}} U = \sum_{j=1}^n \int_c^d u_j(\gamma(\psi(t))) \gamma'_j(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt = \left\| \begin{array}{l} \tau = \psi(t) \\ d\tau = \psi'(t) dt \end{array} \right\| = \sum_{j=1}^n \int_{\psi(c)}^{\psi(d)} u_j(\gamma(\tau)) \gamma'_j(\tau) d\tau = \pm \int_{\gamma} U \quad \square$$

Про ψ также можно считать, что это он не гладкий, а лишь кусочно-гладкий.

Тем самым, можно определить сумму путей для несовпадающих отрезков: для двух путей $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow G, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow G$ (при условии $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$) можно один их отрезков-прообразов линейным возрастающим преобразованием перевести в отрезок, соприкасающийся со вторым (например, $t \mapsto t + (b - c)$).

Также есть понятие обратного пути $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$. Для любой формы U :

$$\int_{\gamma \oplus \gamma^-} U = \int_{\gamma} U + \int_{\gamma^-} U = \int_{\gamma} U - \int_{\gamma} U = 0$$

1.2 Условия существования первообразной у дифференциальной формы

Теорема 1.2.1. Если у дифференциальной формы U в открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ имеется первообразная F , то для всякого кусочно-гладкого пути $\gamma : [a, b] \rightarrow G$

$$\int_{\gamma} U = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Доказательство. $U = \sum_{j=1}^n g_j dx_j$, где $g_j(w) = \frac{\partial}{\partial x_j} F(w)$. Считаем, что путь гладкий.

$$\int_{\gamma} U = \sum_{j=1}^n \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_j} F(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (F \circ \gamma)(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Если же путь всего лишь кусочно-гладкий, то надо разбить отрезок на подотрезки гладкости, и сложить. \square

Следствие 1.2.1. Если у дифференциальной формы U есть первообразная, то её интегралы по всем путям с данными началом и концом, равны.

Оказывается, верно и обратное.

Лекция II
26 февраля 2024 г.

Лемма 1.2.1. Пусть G — область в \mathbb{R}^n , тогда любые две её точки можно соединить ломаной (кусочно-линейным путём).

Доказательство. Выберем $x_0 \in G$, положим $U = \{y \in G \mid \text{существует ломаная в } G \text{ с началом в } x_0 \text{ и концом в } y\}$.

Покажем, что U открыто. Пусть $y \in U$, тогда найдётся шарик $B_\varepsilon(y) \subset G$, и $B_\varepsilon(y) \subset U$ — можно добавить одно звено к ломаной $x_0 \rightsquigarrow y$.

Покажем, что U замкнуто. Пусть $z \in G$ — предельная точка для U . Найдётся $B_\varepsilon(z) \subset G$, так как z — предельная, то $\exists y \in B_\varepsilon(z) \cap U$. Значит, $z \in U$ — можно добавить одно звено $y \rightarrow z$. \square

Замечание. Имея кусочно-линейный путь $\gamma : [a, b] \rightarrow G$, соединяющий $A, B \in G$, несложно получить бесконечно дифференцируемый путь, соединяющий их:

Пусть $\gamma_1 : [a-1, b+1] \rightarrow G, \gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a, b] \\ \gamma(a), & t \in [a-1, a] \\ \gamma(b), & t \in [b, b+1] \end{cases}$. Теперь, сворачивая γ_1 с аппрокс-

мативной единицей с достаточно большим номером и достаточно малым компактным носителем, получим бесконечно дифференцируемый путь, соединяющий A и B .

Теорема 1.2.2. Пусть $\Phi = \sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j$ — непрерывная дифференциальная форма в G (то есть коэффициенты непрерывны в G). Следующие условия эквивалентны.

1. $\int \Phi$ есть первообразная F , то есть функция $F \in C^1(G) : dF = \Phi$ (иными словами, $\forall j : \frac{\partial}{\partial x_j} F = f_j$).
2. Для всех кусочно-гладких путей γ с фиксированными началом и концом $\gamma(a) = \gamma_a, \gamma(b) = \gamma_b$: $\int_\gamma \Phi$ не зависит от γ (а только от начала и конца).
3. Для любой кусочно-гладкой петли (то есть замкнутого пути) γ в G : $\int_\gamma \Phi = 0$.

Доказательство. Мы уже доказали ранее цепочку импликаций $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2)$. Далее доказываем $(2) \Rightarrow (1)$.

Предъявим кандидат в первообразную. Зафиксируем $x_0 \in G$, выберем $x \in G$, пусть γ — произвольный кусочно-гладкий путь с началом в x_0 и концом в x . Определим $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\gamma \Phi$. Согласно посылке, F корректно определена — не зависит от выбора пути.

Покажем, что частные производные F существуют, и равны f_j . Тогда они получатся непрерывными, то есть F — дифференцируемой, и окажется, что F — первообразная Φ .

Пусть e_1, \dots, e_n — стандартные базисные орты в \mathbb{R}^n . Рассмотрим $\frac{F(x+te_j) - F(x)}{t}$.

При малых t : отрезок между x и $x+te_j$ лежит внутри G . Пусть γ_1 — путь, соединяющий x_0 и x , l — отрезок от x до $x+te_j$.

$$\frac{F(x+te_j) - F(x)}{t} = \frac{1}{t} \left(\int_{\gamma_1 \oplus l} \Phi - \int_{\gamma_1} \Phi \right) = \frac{1}{t} \int_l \Phi = \frac{1}{t} \int_0^t f_j(x + \tau e_j) d\tau \xrightarrow{t \rightarrow 0} f_j(x) \quad \square$$

Определение 1.2.1 (Прямоугольник на плоскости). Множество вида $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$.

Область G на плоскости будем называть *удобной*, если $\exists x_0 \in G : \forall y \in G : \exists$ прямоугольник $P \subset G$, содержащий точки x и y .

Примеры (Удобные области).

- $\text{Int } Q$, если Q — прямоугольник. В качестве центра x_0 подойдёт любая точка.

- $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < r\}$. В качестве центра x_0 стоит взять центр, иначе не получится:



Определение 1.2.2 (Ориентированная граница прямоугольника P). Петля γ , обходящая границу $P = [a, b] \times [c, d]$ против часовой стрелки, то есть вот так:



$$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4.$$

Для прямоугольника P будем обозначать за ∂P в зависимости от контекста либо границу P , как топологического подмножества \mathbb{R}^2 , либо путь, обходящий границу P против часовой стрелки.

Следствие 1.2.2 (Дополнение к (теорема 1.2.2)). Если G — удобная область на плоскости, то к трём эквивалентным условиям (теорема 1.2.2) можно добавить

$$4. \forall P \subset G : \int_{\partial P} \Phi = 0.$$

Доказательство. (3) \Rightarrow (4) ясно, докажем (4) \Rightarrow (1).

Пусть $x_0 \in G$ — центр удобной области, определим $F(x) = \int_{\delta} \Phi$, где δ — это либо $\delta_1 := \gamma_1 \oplus \gamma_2$ либо $\delta_2 := \gamma_4^- \oplus \gamma_3^-$ (вне зависимости от выбора δ получится одно и то же).



Далее, чтобы проверить $\frac{\partial}{\partial x_1} F = f_1$ и $\frac{\partial}{\partial x_2} F = f_2$, воспользуемся подходящим представлением: пусть орт выглядит так:



тогда для проверки $\frac{\partial}{\partial x_1} F = f_1$ удобно воспользоваться определением F через δ_1 , для проверки $\frac{\partial}{\partial x_2} F = f_2$ — определением через δ_2 . Далее повторяем рассуждение из (теорема 1.2.2). \square

Пусть $\Phi = \sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j$ — непрерывная дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1.2.3 (Форма Φ точна). Существует первообразная F в G : $dF = \Phi$.

Определение 1.2.4 (Форма Φ замкнута). Форма Φ локально точна ($\forall x_0 \in G : \exists U \ni x_0 : \Phi|_U$ точна).

Понятно, что точная форма замкнута, но точность из замкнутости не следует: чуть позднее мы определим dz , и покажем, что $\frac{dz}{z}$ — замкнутая, но не точная форма на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Теорема 1.2.3. Пусть Φ — дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$. Следующие условия эквивалентны:

1. Φ замкнута.

2. $\forall x_0 \in G : \exists V \ni x_0 : \forall$ кусочно-гладкого замкнутого пути γ с носителем в V : $\int_{\gamma} \Phi = 0$.

Если $n = 2$, то дополнительно появляются ещё два условия:

3. $\forall z \in G : \exists V_z \subset G : \forall P \subset V_z : \int_{\partial P} \Phi = 0$.

4. $\forall P \subset G : \int_{\partial P} \Phi = 0$.

Доказательство. Докажем, что (3) \Rightarrow (4), остальное уже доказано выше.

Заметим, что границу прямоугольника P можно представить, как сумму границ четырёх прямоугольников вдвое меньшего диаметра:



Таким образом, чтобы доказать, что интеграл по границе большого прямоугольника P нулевой, разобьём его на достаточно маленькие прямоугольники, по ним-то интеграл нуль. Чтобы это формализовать, вспомним лемму Лебега о покрытии:

Теорема 1.2.4 (Лемма Лебега). Пусть K — компакт в метрическом пространстве, $\{U_j\}_{j \in J}$ — открытое покрытие компакта K . Тогда $\exists \delta > 0 : \forall A \subset K : \text{diam } A < \delta \Rightarrow \exists j \in J : A \subset U_j$.

Применяя лемму Лебега для покрытия P окрестностями $\{V_z\}_{z \in P}$, получим такое число δ . Теперь надо разбить границу прямоугольника P в сумму границ прямоугольников диаметра меньше δ , а посылка теоремы говорит, что интеграл по ним уже нуль. \square

1.3 Операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

Как известно, $\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$, то есть $\forall z \in \mathbb{C} : z = x + iy$, аналогично $\bar{z} = x - iy$.

Рассмотрим z и \bar{z} , как функции $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x \pm iy$. Теперь $dz = dx + i dy$ и $d\bar{z} = dx - i dy$ образуют базис в пространстве дифференциальных форм (тех, которые не зависят от точки), обратное преобразование выглядит так:

$$\begin{cases} dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \\ dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \end{cases}$$

Рассмотрим форму $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = \alpha(x, y) dx + \beta(x, y) dy$. Перепишем её в новом базисе:

$$\Phi(x, y) = \frac{\alpha(x, y)}{2} (dz + d\bar{z}) + \frac{\beta(x, y)}{2i} (dz - d\bar{z}) = \frac{\alpha(x, y) - i\beta(x, y)}{2} dz + \frac{\alpha(x, y) + i\beta(x, y)}{2} d\bar{z}$$

Теперь пусть Φ — точная форма, то есть $\Phi = dF$, и тогда $\alpha(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ и $\beta(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$. Теперь

$$dF = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right) d\bar{z}$$

Определение 1.3.1 ($\frac{\partial F}{\partial z}$). Коэффициент, стоящий перед dz , то есть $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right)$.

Определение 1.3.2 ($\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$). Коэффициент, стоящий перед $d\bar{z}$, то есть $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right)$.

Иначе говоря, мы ввели операторы $\frac{\partial}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ так, что

$$dF = \frac{\partial}{\partial z} F dz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} F d\bar{z}$$

1.3.1 Связь с голоморфными функциями

Пусть $F = u + iv$, где $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Запишем

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)$$

В правой части равенства получились выражения из уравнений Коши — Римана.

Факт 1.3.1. Вещественные функции u, v удовлетворяют уравнениям Коши — Римана $\iff \frac{\partial(u+iv)}{\partial \bar{z}} \equiv 0$.

Факт 1.3.2. F голоморфна $\iff dF = \frac{\partial F}{\partial z} dz$. При этом $\frac{\partial F}{\partial z}$ есть производная F по комплексному аргументу.

Доказательство. Функция дифференцируема по комплексному аргументу \iff её дифференциал — умножение на комплексное число. \square

В основном нас будут интересовать дифференциальные формы вида $\phi(z) dz$, где ϕ — произвольная функция.

Выясним, когда у формы $\phi(z) dz = \phi(z) dx + i\phi(z) dy$ имеется первообразная, то есть функция $g : \frac{\partial g}{\partial x} = \phi, \frac{\partial g}{\partial y} = i\phi$. Заметим, что $\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{2}(\phi - i(i\phi)) = \phi$ и $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\phi + i(i\phi)) = 0$.

Утверждение 1.3.1. Форма ϕdz имеет первообразную $g \iff g$ голоморфна, и $g' = \phi$.

Теорема 1.3.1 (Коши). Если $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция (область $G \subset \mathbb{C}$), то форма $g(z) dz$ замкнута.

Доказательство. Потом. \square

Контрпример (Глобально первообразной может не быть). Пусть $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}, g : G \rightarrow \mathbb{C}, g : z \mapsto \frac{1}{z}$.

По теореме Коши у g имеется локальная первообразная — комплексный логарифм — но глобально определить не получится. Пусть $\Gamma = \partial\mathbb{T}$ — комплексная окружность, ориентируем её против часовой стрелки, а именно, рассмотрим стандартный обход окружности $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \alpha : \phi \mapsto e^{i\phi}$. Теперь убедимся, что форма не точна:

$$\int_{\alpha} \phi = \int_{\alpha} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{(e^{it})'}{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \neq 0$$

Для будущих применений также определим ориентированную против часовой стрелки границу $B_r(z_0)$, это путь $\beta(t) = z_0 + re^{it}$ для $t \in [0, 2\pi]$.

Пример. Пусть $z_0, w \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_{>0}, |w - z_0| \neq r$, пусть путь γ обходит границу $B_r(z_0)$ против часовой стрелки:



Тогда, оказывается, (посчитаем чуть позже):

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-w} = \begin{cases} 0, & |z-w| > r \\ 2\pi i, & |z-w| < r \end{cases} \quad (\circ)$$

Грубой силой этот интеграл посчитать непросто, так как w находится где угодно — внутри или снаружи круга — а интеграл, оказывается, зависит только от этих двух альтернатив.

Теорема 1.3.2 (Основная оценка интеграла вдоль пути). Пускай $\Phi = \sum_{j=1}^n f_j dx_j$ — непрерывная дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$, а $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — кусочно-гладкий путь, $K := \text{Im}(\gamma) \subset G$.

$$\text{Тогда } \left| \int_{\gamma} \Phi \right| \leq \underbrace{\sup_{x \in K} \left(\sum_{j=1}^n |f_j(x)|^2 \right)^{1/2}}_{=: A} \cdot l(\gamma).$$

Доказательство. Считаем, что γ — гладкий путь, иначе нужно разбить на кусочки гладкости.

$$\left| \int_{\gamma} \Phi \right| = \left| \int_a^b \sum_{j=1}^n f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt \right| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n |f_j(\gamma(t))|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |\gamma'_j(t)|^2 \right)^{1/2} dt \leq A \cdot \underbrace{\int_a^b \left(\sum_{j=1}^n |\gamma'_j(t)|^2 \right)^{1/2} dt}_{l(\gamma)}$$

□

Лекция III

1 марта 2024 г.

Рассмотрим дифференциальную форму $\Phi = F(z) dz$, где F — непрерывная функция в $G \subset \mathbb{C}$. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — плоский путь.

Расписав $\Phi(z) = F(z) dx + iF(z) dy$ и применив основную оценку интеграла вдоль пути, получаем

$$\left| \int_{\gamma} \Phi \right| \leq \max_{z \in K} \sqrt{|F(z)|^2 + |F(z)|^2} \cdot l(\gamma) = \sqrt{2} \max_{z \in K} |F(z)| \cdot l(\gamma)$$

Эта оценка вызывает некоторую неудовлетворённость: кажется, что $\sqrt{2}$ здесь лишний. И это действительно правда: можно расписать интеграл аккуратнее.

Пусть $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, тогда по определению

$$\int_{\gamma} \Phi = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'_1(t) + iF(\gamma(t)) \cdot \gamma'_2(t) dt = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Таким образом, интеграл от комплексной формы вдоль пути имеет более простое представление, и оно легко поддаётся более плотной оценке:

$$\left| \int_{\gamma} \Phi \right| \leq \int_a^b |F(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq \max_{z \in K} |F(z)| \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)| dt}_{l(\gamma)}$$

Посчитаем анонсированный на предыдущей лекции интеграл (о). Пусть $z_0, w \in \mathbb{C}$, $r > 0$.

- Сначала рассмотрим случай $|w - z_0| < r$. Заметим, что, согласно основной оценке интеграла, если коэффициенты равномерно стремятся к какому-то значению и интегралы ограничены, то предельный интеграл тоже сходится.

Запись ниже $\int_{|z-z_0|=r}$, и вообще все аналогичные записи, которые встретятся в дальнейшем, по умолчанию означают, что граница соответствующего множества (в данном случае — круга) обходится стандартным образом, то есть против часовой стрелки.

$$\begin{aligned} \int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z - z_0 - (w - z_0)} &= \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} dz = \\ &= \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} \left(1 + \frac{w - z_0}{z - z_0} + \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^2 + \dots \right) dz \quad (\equiv) \end{aligned}$$

На слагаемые из ряда имеется равномерная по z оценка: $\left| \frac{w-z_0}{z-z_0} \right| \leq \frac{|w-z_0|}{r} < 1$, и по теореме Вейерштрасса функциональный ряд сходится. Значит, сумму можно вынести из-под интеграла

$$(\equiv) \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} dz + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|z-z_0|=r} \frac{(w - z_0)^j}{(z - z_0)^{j+1}} dz \quad (\equiv)$$

Первое слагаемое мы умеем брать, а у каждого слагаемого из остальной суммы имеется первообразная: $\frac{1}{(z-z_0)^{j+1}} = -\frac{1}{j} \left(\frac{1}{(z-z_0)^j} \right)'$

$$(\equiv) \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi i$$

- Теперь разберёмся со случаем $|w - z_0| > r$.

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z - z_0 - (w - z_0)} = -\frac{1}{w - z_0} \int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = -\frac{1}{w - z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{|z-z_0|=r} \frac{(z - z_0)^j}{(w - z_0)^j} dz$$

Аналогично предыдущему случаю, ряд сходится абсолютно, поэтому сумму опять можно вынести из под интеграла, и в данном случае всё ещё проще: каждое слагаемое имеет первообразную, там нет отрицательных степеней z , поэтому вся сумма обращается в нуль.

Пусть $\Phi = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ — непрерывная дифференциальная форма в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 1.3.3. Если все функции $f_j \in C^1$, то следующие условия эквивалентны:

- Φ замкнута.
- $\forall 1 \leq i, j \leq n : \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ — «накрест взятые частные производные равны».

Доказательство.

\Rightarrow Выберем $x \in G$, так как форма замкнута, то $\exists U \ni x : \Phi$ имеет первообразную $F : U \rightarrow \mathbb{R}$. Тем самым, $f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$, и так как $f_i \in C^1$, то действительно $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

\Leftarrow Сначала приведём доказательство случая $n = 2$. В таком случае $\Phi = f dx + g dy$.

Согласно посылке, $h := \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$. Кстати, равенство слева равносильно одному из эквивалентных уравнений Коши — Римана.

Рассмотрим произвольный $P = [a, b] \times [c, d] \subset G$, и докажем, что $\int_{\partial P} \Phi = 0$.



То, что мы увидим сейчас, является первым заходом на *формулу Остроградского — Гаусса*. Функция h непрерывна, и можно записать на неё интеграл Лебега: $\int_P h(x, y) dx dy$. Теперь, применяя теорему Фубини, раскладываем интеграл в сумму повторных:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3^-} f(_, d) dx + \int_{\gamma_1^-} f(_, c) dx &= \int_a^b [f(x, d) - f(x, c)] dx = \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx = \\ &= \int_P h(x, y) dx dy = \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial g}{\partial x} dx \right) dy = \int_c^d [g(b, y) - g(a, y)] dy = \int_{\gamma_2} g(b, _) dy + \int_{\gamma_4} g(a, _) dy \end{aligned}$$

Итого, $\int_{\gamma_3^-} f(_, d) dx + \int_{\gamma_1^-} f(_, c) dx = \int_{\gamma_2} g(b, _) dy + \int_{\gamma_4} g(a, _) dy$, откуда действительно $\int_{\gamma} \Phi = 0$.

⇐ Теперь приведём альтернативное доказательство индукцией по n .

База: Случай $n = 1$ тривиален: теорема Ньютона — Лейбница говорит, что у непрерывной функции есть первообразная.

Переход: Пусть $n > 1$, и для $n - 1$ теорема доказана. Рассмотрим $a \in G$, и возьмём прямоугольный параллелепипед со сторонами, параллельными осям координат P такой, что $a \in \text{Int } P$. Докажем, что на P у Φ есть первообразная.

Построим $g(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{x_1} f_1(t, x_2, \dots, x_n) dt$. Обозначим $\phi_j := \frac{\partial g}{\partial x_j}$. Заметим, что $\phi_1 = \frac{\partial g}{\partial x_1} = f_1$.

Теперь рассмотрим форму $\Psi(x_1, \dots, x_n) = \phi_1 dx_1 + \dots + \phi_n dx_n$. Эта форма имеет первообразную g на параллелепипеде P .

Теперь посмотрим на $\Phi - \Psi =: h_1 dx_1 + \dots + h_n dx_n$. По построению $h_1 = 0$. По условию накрест взятые частные производные равны у Φ , и они равны у Ψ , так как у неё есть первообразная. Значит, это же верно и для разности, в частности, $\frac{\partial h_i}{\partial x_1} = \frac{\partial h_1}{\partial x_i} = 0$. Иными словами, $\forall i : h_i$ не зависит от x_1 .

А раз так, то на $\Phi - \Psi$ можно смотреть, как на форму $(n - 1)$ -й переменной, и применить индукционное предположение.

Замечание. Тут есть некоторый обман: производные $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$ могут просто не существовать.

Попробуем обойти его так: пусть $\beta \in C^\infty$, с компактным носителем. Выберем аппроксимативную единицу $\beta_t(x) = \frac{1}{t^n} \beta(\frac{x}{t})$.

Назначим $f_k^{(t)} = f_k * \beta_t$, $f_k^{(t)} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f_k$.

Далее у формы $\Phi^{(t)}$ коэффициенты $h_k^{(t)}$ не зависят от x_1 . А раз они равномерно стремятся к h_k , то и они не зависят от x_1 . Это было произнесено устно, я наверняка что-то не так записал.

□

Теорема 1.3.4 (Коши). Пусть F — голоморфная функция в открытом множестве $G \subset \mathbb{C}$. Тогда дифференциальная форма $F(z) dz$ замкнута, то есть локально $\exists S : S'(z) = F(z)$.

Замечание. Теорема совсем проста, если заранее предположить, что $F'(z)$ непрерывна (а так в итоге и должно получиться, так как F — аналитична (теорема 1.0.1)). В таком случае имеется следующее более простое доказательство.

Доказательство. Надо проверить второе уравнение Коши — Римана: $\forall z \in \mathbb{C} : \frac{\partial F}{\partial y}(z) = i \frac{\partial F}{\partial x}(z)$ (первое выполнено, так как накрест-взятые частные производные равны).

Поскольку $F(z) dz = F(z) dx + iF(z) dy$, утверждение эквивалентно (согласно (теорема 1.3.3)) тому, что $\forall z \in \mathbb{C} : \frac{\partial F}{\partial y}(z) = i \frac{\partial F}{\partial x}(z)$. Пусть $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

то есть $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$. Я вообще не понял, что произошло.

□

Теперь докажем теорему Коши вне предположения непрерывности производной.

Доказательство. Докажем от противного: пусть форма $F(z) dz$ не замкнута, $\exists P_0 \subset G : \alpha = \int_{\partial P_0} F(z) dz \neq 0$.

Будем потихонечку делить этот прямоугольник на четыре равные части: пусть $P_0 = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$.



Модуль интеграла по границе по крайней мере одного из Q_i хотя бы $\frac{|\alpha|}{4}$. Назовём этот прямоугольник P_1 , и продолжим процесс. Получим систему вложенных замкнутых прямоугольников $P_0 \supset P_1 \supset \dots$, таких, что $\left| \int_{\partial P_k} F(z) dz \right| \geq \frac{|\alpha|}{4^k}$. При этом $l(\partial P_k) = 2^{-k} l(\partial P_0)$, и $\text{diam}(P_k) = 2^{-k} \text{diam}(P_0)$.

Имеется ровно одна точка z_0 в пересечении $\bigcap_{k \geq 0} P_k$. Воспользуемся условием того, что F голоморфна в точке z_0 : $F(z) = F(z_0) + F'(z_0)(z - z_0) + \underbrace{\psi(z)}_{o(|z - z_0|)}$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |\psi(z)| \leq \varepsilon |z - z_0|$. Пусть k настолько велико, что $\text{diam } P_k < \delta$.

$$\int_{\partial P_k} F(z) dz = \int_{\partial P_k} [F(z_0) + F'(z_0)(z - z_0)] dz + \int_{\partial P_k} \psi(z) dz$$

Первый интеграл обнуляется, так как это линейная функция по z , у неё есть первообразная. Оценивая второй интеграл, получаем

$$\frac{|\alpha|}{4^k} \leq \left| \int_{\partial P_k} \psi(z) dz \right| \leq \varepsilon \text{diam } P_k \cdot l(\partial P_0) = \varepsilon \cdot 2^{-k} \text{diam } P_0 \cdot 2^{-k} l(\partial P_0) = 4^{-k} \varepsilon \cdot \text{diam } P_0 \cdot l(\partial P_0)$$

Выбирая довольно маленький ε , получаем, что $|\alpha|$ меньше любого положительного числа.

□

Теорема 1.3.5 (Об устранимой особенности замкнутой дифференциальной формы). Пусть $\Phi = f dx + g dy$ — непрерывная дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{C}$.

Если $z_0 \in G$, и Φ замкнута в $G \setminus \{z_0\}$, то Φ замкнута в G .

Доказательство. Докажем, что $\forall P \subset G : \int_{\partial P} \Phi = 0$. Рассмотрим случаи.

- Если $z_0 \notin P$, то интеграл нуль по условию.
- Если $z_0 \in \text{Int } P$, то данный случай сводится к следующему: разобьём прямоугольник на два так, чтобы z_0 оказалось на границе:



- Если $z_0 \in \partial P$, то отступим на ε , интеграл по границе P_ε будет нулём: $\int_{\partial P_\varepsilon} \Phi = 0$.

Заметим, что $\int_{\partial P_\varepsilon} \Phi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial P} \Phi$, так как коэффициенты дифференциальной формы равномерно непрерывны в некоторой окрестности P . Значит, $\int_{\partial P} \Phi = 0$.

□

Теорема 1.3.6 (Малая интегральная формула Коши). Пусть f — голоморфна в области G , $B = B(z_0, r)$ — круг, $\overline{B} \subset G$. Тогда $\forall z \in B$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Доказательство. Докажем для некоего фиксированного $z \in B$.

Рассмотрим функцию $g(\zeta) = \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$. g голоморфна в области $G \setminus \{z\}$. Тем самым, $g(\zeta) d\zeta$ — замкнутая форма в $G \setminus \{z\}$, а по теореме об устранимой особенности $g(\zeta) d\zeta$ замкнута в G (определим по непрерывности $g(z) := f'(z)$).

Но так как круг — удобная область, то у g имеется первообразная в некотором круге $B(z_0, r(1 + \varepsilon))$ (где $\varepsilon > 0$ настолько мал, что $B(z_0, r(1 + \varepsilon)) \subset G$),

Тем самым, $\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta = 0$, откуда

$$\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \cdot \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i \cdot f(z)$$

□

Следствие 1.3.1 (Теорема Коши). Если функция голоморфна в области $G \subset \mathbb{C}$, то $\forall z_0 \in G$ функция f (в некоторой окрестности) раскладывается в некоторый степенной ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, причём радиус сходимости хотя бы $\text{dist}(z_0, \partial G)$.

Доказательство. Пусть $r \in (0, \text{dist}(z_0, \partial G))$. Рассмотрим $B = B_r(z_0)$. Так как $B \subset G$, то для точки $z \in B$ получаем

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} (z - z_0)^j \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \end{aligned}$$

Абсолютная равномерная сходимость в круге радиус r при $r < \text{dist}(z_0, \partial G)$ имеется по тем же причинам, что и при доказательстве (о).

Таким образом, мы получили степенной ряд, и так как коэффициенты степенного ряда, раз определены, не зависят от радиуса круга ($c_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}$), то радиус сходимости данного ряда хотя бы $\text{dist}(z_0, \partial G)$. \square

Лекция IV

12 марта 2024 г.

Замечание. Интегральную форму Коши можно спокойно дифференцировать: так,

$$\frac{d}{dz} f(z) = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

В общем случае

$$\frac{d^k}{dz^k} f(z) = \frac{d^k}{dz^k} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

Определение 1.3.3 (Целая (entire) функция). Голоморфная функция, заданная в \mathbb{C} .

Выберем $z_0 = 0$. Согласно (следствие 1.3.1), получаем $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$, где $c_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}} d\zeta$, причём имеется абсолютная сходимость везде в \mathbb{C} .

Теорема 1.3.7. Если f целая, и $|f(z)| = \mathcal{O}(z^N)$ при $|z| \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty$, то f — многочлен степени не более N .

Доказательство. Из определения \mathcal{O} : $\exists C, a \in \mathbb{R} : |f(z)| \leq C|z|^N$ при $|z| > a$.

Выберем $r > a$, и оценим: $|c_j| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{j+1}} ire^{i\theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Cr^N}{r^j} d\theta = \frac{Cr^N}{r^j}$. Получается, при $j > N : |c_j|$ меньше любого наперёд заданного положительного числа. \square

Следствие 1.3.2 (Теорема Лиувилля). Ограниченная целая функция постоянна.

Следствие 1.3.3 (Основная теорема алгебры). $\forall p \in \mathbb{C}[z] : \deg p > 0 \Rightarrow \exists z_0 \in \mathbb{C} : p(z_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $p(z) = \sum_{j=0}^N c_j z^j$, где $N > 0$ и $c_N \neq 0$.

Пойдём от противного: пусть $\forall z \in \mathbb{C} : p(z) \neq 0$.

Рассмотрим $f(z) := \frac{1}{p(z)}$.

- С одной стороны, это целая функция: $\frac{d}{dz} f(z) = -\frac{p'(z)}{p(z)^2}$.

- С другой стороны, f ограничена: оценим $|p(z)| \geq |z|^N \left(|c_N| - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{|c_j|}{|z|^{N-j}} \right)$, откуда для достаточно больших $|z|$: $|p(z)| \geq \frac{|c_N|}{2} |z|^N$.
Тем самым, $p(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \infty$, то есть $f(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$. А при малых $|z|$: f ограничена, как непрерывная функция на компакте.
- Тем самым, по теореме Лиувилля, $f \equiv \text{const}$, то есть $p \equiv \text{const}$. Противоречие, мы предполагали $\deg p > 0$. \square

Теорема 1.3.8 (Теорема о среднем). Пусть $z_0 \in G$, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна в G . Выберем $r < \text{dist}(z_0, \partial G)$. Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

Доказательство. Посчитаем $f(z_0)$ по интегральной формуле:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it}) ire^{it}}{re^{it}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

\square

Это действительно среднее в обычном смысле: f проинтегрирована по окружности по мере Лебега, и интеграл поделили на меру окружности.

Теорема 1.3.9 (Принцип максимума модуля). Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ — непостоянная голоморфная функция. Тогда $|f| : z \mapsto |f(z)|$ не может достигать наибольшего значения при $z \in G$.

Доказательство. Пойдём от противного: пусть $\exists z_0 \in G : \forall z \in G : |f(z)| \leq |f(z_0)|$. Выберем $r > 0 : B(z_0, r) \subset G$, и докажем, что $|f|$ постоянна в $B(z_0, r)$. Пусть $\rho < r$, по теореме о среднем

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(z_0 + \rho e^{it})|}_{\leq |f(z_0)|} dt, \text{ причём равенство достигается только если}$$

$\forall t \in [0, 2\pi] : |f(z_0 + \rho e^{it})| = |f(z_0)|$ (если $\exists t_0 \in (0, 2\pi) : |f(z_0 + \rho e^{it_0})| < |f(z_0)|$), то по непрерывности $\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) : |f(z_0 + \rho e^{it})| < |f(z_0)| - \varepsilon$, то есть на промежутке $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ интеграл строго меньше требуемого значения).

Лемма 1.3.1. Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна, и $\exists z_0 \in G : f'(z_0) \neq 0$. Тогда $\exists U \ni z_0 : f(z_0) \in \text{Int } f(U)$.

Доказательство леммы.

Теорема об обратной функции. \square

Тем самым, $\forall z \in B(z_0, r) : f'(z) = 0$ (так как $|f(z)|$ — максимум).

Далее применяем теорему единственности, доказанную во II семестре: f и константа, равная $|f(z_0)|$ совпадают на множестве с предельной точкой, значит, они совпадают везде в G . \square

Следствие 1.3.4. Пусть G — ограниченная область, $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна в G . Тогда $\forall z \in G : |f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|$.

Доказательство. f достигает своё наибольшее значение на компакте \overline{G} , но согласно принципу максимума, это значение достигается не внутри G . \square

1.4 Гармонические функции

Запишем теорему о среднем для $f : G \rightarrow \mathbb{C}$:

$$f(z_0) = \int_1 2\pi(f(z_0) + re^{it}) dt$$

Пусть $f = u + iv$, где u, v — вещественные функции в G . Теорема о среднем говорит, что

$$u(z_0) = \int_1 2\pi(u(z_0) + re^{it}) dt \quad v(z_0) = \int_1 2\pi(v(z_0) + re^{it}) dt$$

Так как f аналитична, то в вещественном смысле $u, v \in C^\infty(G)$.

Запишем уравнения Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Дифференцируя второй раз, получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

Это так называемое *уравнение Лапласа*: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Обобщим. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — область, пусть $f \in C^2(G)$.

Определение 1.4.1 (f — гармоническая функция в G). $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$.

Оператор $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ называется *оператором Лапласа*, и понятно, что гармонические функции — в точности такие u , что $\Delta u = 0$.

Утверждение 1.4.1. Если $u \in C^2(G)$, где область $G \subset \mathbb{R}^2$, то локально существует голоморфная $f : u = \Re f$. Иными словами, $\forall z_0 \in G : \exists U \ni z_0, \exists$ аналитическая $f : U \rightarrow \mathbb{C} : u = \Re f$.

Доказательство. Пусть $\phi := \frac{\partial u}{\partial x}, \psi := -\frac{\partial u}{\partial y}$. Тогда $\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$, то есть $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ везде в G .

Раз накрест-взятые частные производные совпадают, то дифференциальная форма $\phi dx + \psi dy$ замкнута, значит, локально имеется первообразная.

Зафиксируем точку $z_0 \in G$, имеется некоторый шарик $B \ni z_0$, в котором есть первообразная v :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \phi = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Это уравнения Коши — Римана, значит, $f := u + iv$ голоморфна в B . □

Теорема 1.4.1 (Морера). Пусть $f : (G \subset \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна. Следующие условия эквивалентны.

1. f голоморфна в G .
2. f аналитична в G .
3. Дифференциальная форма $f(z) dz$ замкнута.

Доказательство. (1) \iff (2) уже доказано: (теорема 1.0.1) и (следствие 1.3.1).

(1) \Rightarrow (3) доказано тоже: (теорема 1.3.1).

Докажем (3) \Rightarrow (2). Пусть F — первообразная формы $f(z) dz$ в круге $B(z_0, r) \subset G$. F голоморфна в $B(z_0, r)$, и $\forall z \in D : F'(z) = f(z)$.

Значит, F раскладывается в степенной ряд $F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$. Отсюда $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j(z-z_0)^{j-1}$. □

1.5 Первообразная от замкнутой формы вдоль непрерывного пути

1.5.1 Наводящие предположения

Пусть $f dx + g dy$ — непрерывная дифференциальная форма в G , предположим, что она точная: имеется первообразная F .

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — кусочно-гладкий путь. Ранее было получено, что $\int_{\gamma} f dx + g dy = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

Давайте обобщим интеграл вдоль пути: пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — произвольный непрерывный путь. Положим по определению $\int_{\gamma} f dx + g dy \stackrel{def}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

Теперь пусть $f dx + g dy$ всего лишь замкнута. Выберем $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ так, что $\forall j : \gamma([t_j, t_{j+1}])$ лежит в области G_j , в которой у формы $f dx + g dy$ есть первообразная F_j . Попробуем определить

$$\int_{\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}} f dx + g dy \stackrel{def}{=} F_j(\gamma(t_{j+1})) - F_j(\gamma(t_j))$$

и

$$\int_{\gamma} f dx + g dy \stackrel{def}{=} \sum_{j=0}^{k-1} F_j(\gamma(t_{j+1})) - F_j(\gamma(t_j))$$

Проблема в том, чтобы доказать, что определение корректно — не зависит от выбора разбиения $a = t_0 < \dots < t_k = b$.

1.5.2 Требуемые свойства

Пусть $\Phi = f dx + g dy$ — замкнутая форма в области $G \subset \mathbb{C}$, и $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — путь.

Определение 1.5.1 (Первообразная формы Φ вдоль пути γ). Такая функция $v : [a, b] \rightarrow G$:

- $\forall t \in [a, b] : \exists U \ni \gamma(t), \varepsilon > 0$ и найдётся первообразная F для Φ на U , такая, что

$$\forall \tau \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) : v(\tau) = F(\gamma(\tau))$$

Факт 1.5.1. Функция v , если существует, непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Непрерывность в какой-то конкретной точке следует из непрерывности композиции $F \circ \gamma$. \square

Теорема 1.5.1. Первообразная замкнутой дифференциальной формы вдоль пути γ всегда существует, и любые две отличаются на константу.

Доказательство. Сначала докажем существование. Для всех $t \in [a, b]$ выберем окрестность $U_t := B(\gamma(t), r_t)$, где r_t настолько мал, что в U_t есть первообразная.

Семейство $\{U_t\}_{t \in [a, b]}$ образуют открытое покрытие $\gamma([a, b])$. По лемме Лебега $\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in [a, b] : B(\gamma(t), \varepsilon)$ содержится в каком-то $U_{t'}$. Применяя теорему Кантора о равномерной непрерывности, получаем существование разбиения $a = t_0 < \dots < t_k = b$, такое, что $\gamma([t_j, t_{j+1}])$ лежит в одном из U_t .

Произвольно выберем $v(a)$. Построим $v|_{[t_j, t_{j+1}]}$ индукцией по j .

База: Пусть $\gamma([t_0, t_1]) \subset U_0$, и имеется первообразная F_0 на U_0 . Определим $v(\tau) = F_0(\gamma(\tau))$ при $\tau \in [t_0, t_1]$.

Переход: Пусть $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subset U_j, F_j$ — первообразная Φ на U_j . Найдётся такое $\delta > 0$: $\gamma([t_j - \delta, t_{j+1}]) \subset U_j$, значит, $U_j \cap U_{j-1} \neq \emptyset$. Это пересечение связно, на нём имеются две первообразные, F_{j-1} и F_j .

Добавим константу к F_j так, чтобы $F_j \equiv F_{j-1}$ при $t \in [t_j - \delta, t_j]$, и определим $v(\tau) = F_j(\gamma(\tau))$ при $\tau \in [t_j, t_{j+1}]$. Окрестность U_j захватывает отрезок $[t_j - \delta, t_{j+1}]$, значит, для точек во внутренности выполнено условие из определения первообразной.

Докажем единственность: рассмотрим точку $t \in [a, b]$. Найдутся два круга $U, V \ni \gamma(t)$, и первообразные F, H формы Φ в этих окрестностях, такие, что $u(\tau) = F(\gamma(\tau))$ и $v(\tau) = H(\gamma(\tau))$ при τ , достаточно близких к t .

Тем самым, $u - v$ локально постоянна, но локально постоянная функция на связном множестве — константа (образ любого элемента из образа открыто-замкнуто). \square

Лекция V

15 марта 2024 г.

Теперь определим интеграл $\int_{\gamma} \Phi = v(b) - v(a)$, где v — первообразная для Φ вдоль пути γ , получившаяся из (теорема 1.5.1). Теперь интеграл определён для любой замкнутой формы вдоль пути (однако для кусочно-гладкого пути интеграл (определение 1.1.3) был определён для необязательно замкнутой формы).

Свойства (Свойства первообразной вдоль пути).

- Аддитивность по дифференциальной форме: $\int_{\gamma} (\Phi + \Psi) = \int_{\gamma} \Phi + \int_{\gamma} \Psi$.
- Аддитивность вдоль пути: $\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} \Phi = \int_{\gamma_1} \Phi + \int_{\gamma_2} \Phi$.
- Если γ — кусочно-гладкий путь, то определение совпадает со старым.

Доказательство. γ' существует везде, кроме, может быть, конечного множества.

При помощи леммы Лебега разобьём отрезок точками $a = t_0 < \dots < t_k = b$ так, что $\forall j < k : \exists U_j \supset \gamma([t_j, t_{j+1}])$ такая, что на U_j найдётся первообразная H_j :

$$\forall \tau \in [t_j, t_{j+1}] : F(\tau) = H_j(\gamma(\tau))$$

И старый, и новый интегралы аддитивны вдоль пути. Несложно видеть, что в обоих определениях $\int_{\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}} \Phi$ совпадают. \square

- Так как путь γ необязательно дифференцируем, то основную оценку интеграла вдоль пути распространить на новое определение проблематично: длины может не существовать.
- Пусть $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ — гомеоморфизм, $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — путь, тогда

$$\int_{\gamma} \Phi = \pm \int_{\gamma \circ \phi} \Phi$$

где знак зависит от того, возрастает ϕ , или убывает.

Причина. Если F — первообразная Φ вдоль пути γ , то $F \circ \phi$ — первообразная для Φ вдоль пути $\gamma \circ \phi$. \square

1.5.3 О гомотопности путей

Пусть $K = [0, 1] \times [a, b]$ — квадрат гомотопии.

Определение 1.5.2 (Гомотопия). Непрерывное отображение $\Gamma : K \rightarrow \mathbb{C}$.

Положим $\gamma_s := \Gamma(s, _)$. Как водится, γ_0, γ_1 — два пути $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, и существование Γ по определению влечёт гомотопность этих путей.

Пути $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow G$ *гомотопны в G* , если найдётся гомотопия $\Gamma : K \rightarrow G$.

Будем говорить о гомотопности двух замкнутых путей γ_1 и γ_2 при условии существования гомотопии $\Gamma : K \rightarrow G$, соединяющей γ_1 и γ_2 в классе замкнутых путей: $\forall s \in [0, 1] : \Gamma(s, a) = \Gamma(s, b)$.

Гомотопность путей — отношение эквивалентности, также как и гомотопность замкнутых путей.

Определение 1.5.3 (Односвязная область). Область, в которой всякий замкнутый путь гомотопен постоянному. Иными словами, фундаментальная группа тривиальна.

Определение 1.5.4 (Звёздная область $A \subset \mathbb{R}^n$). Такая область, что для некоторого *центра* $z_0 \in A$: $\forall z \in A : \{z_0 + s(z - z_0) | s \in [0, 1]\} \subset A$.



Факт 1.5.2. Всякая звёздная область A односвязна.

Доказательство. Прогомотопируем путь $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ при помощи

$$\begin{aligned} \Gamma : [0, 1] \times [a, b] &\rightarrow K \\ \tau, t &\mapsto z_0\tau + (1 - \tau)\gamma(t) \end{aligned}$$

□

Пример (Неодносвязная область). Пусть A — звёздная область, выкинем точку $w_0 \in A$.



Интеграл $\frac{dz}{z - w_0}$ по маленькой окружности ω , обходящей w_0 , равен $2\pi i$, значит, путь не стягиваем.

Теорема 1.5.2 (Первообразная вдоль гомотопии). Пусть $K = [0, 1] \times [a, b]$ — квадрат, $\Gamma : K \rightarrow G$ — гомотопия, и $\Phi = f dx + g dy$ — замкнутая дифференциальная форма в G . Тогда $\exists F : K \rightarrow \mathbb{C}$ — *первообразная формы Φ вдоль гомотопии Γ* , то есть такая функция, что $\forall (s, t) \in K : \exists U \ni (s, t) : U \subset G, \exists \delta > 0 : \exists \Phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ — первообразная формы F , такая, что

$$\begin{cases} |\sigma - s| < \delta \\ |\tau - t| < \delta \end{cases} \Rightarrow F(\sigma, \tau) = H(\Gamma(\sigma, \tau))$$

Доказательство. Покроем множество $\Gamma(K)$ кругами $U \subset G$, такими что в каждом круге U у Φ есть первообразная H_U .

По лемме Лебега $\exists \rho > 0 : \forall e \subset K : \text{diam}(e) < \rho \Rightarrow e$ лежит в одном из кругов данного покрытия.

Разобьём квадрат гомотопии K на прямоугольники диаметра меньше ρ :



Аналогично доказательству (теорема 1.2.2), в каждом горизонтальном прямоугольнике найдётся первообразная F_j , а дальше их надо сшить. Сшить несложно: вдоль горизонтального отрезка — пересечения прямоугольников — $F_j|_{\dots} = F_{j+1}|_{\dots}$. Так как это — первообразные вдоль пути, то они отличаются на константу. Значит, можно изменить все F_j на константы так, чтобы их склейка была непрерывной функцией.

Дальше надо проверить, что действительно получилась первообразная на квадрате. Выберем точку $(s, t) \in K$. Если точка попала внутрь какого-то прямоугольника, то можно выбрать окрестность, лежащую внутри прямоугольника, иначе чуть сложнее, но несильно. \square

Теорема 1.5.3. Интегралы от замкнутой формы Φ по гомотопным замкнутым путям равны.

Доказательство. Определим $w(t) := \int_{\gamma_t} \Phi$ для всех $t \in [0, 1]$.

Пусть F — первообразная для формы Φ вдоль гомотопии Γ . Понятно, что $w(t) = F(t, b) - F(t, a)$.

Докажем, что w локально постоянна на $[0, 1]$, следствием будет, что w постоянна, что и требуется доказать.

$\forall (\alpha, \beta) \in [0, 1] \times [a, b]: \exists \delta > 0$, круг U и первообразная H_U , такие, что

$$\begin{cases} |\alpha - \alpha'| < \delta \\ |\beta - \beta'| < \delta \end{cases} \Rightarrow F(\alpha', \beta') = H_U(\Gamma(\alpha', \beta'))$$

Пусть U_1, U_2 — такие шары для (t, b) и (t, a) соответственно. Тогда для τ , достаточно близких к t , выполнено $w(t) = H_{U_1}(\Gamma(t, b)) - H_{U_2}(\Gamma(t, a))$. H_1, H_2 — две первообразные в одной окрестности, они отличаются на константу, а $\Gamma(t, a) \equiv \Gamma(t, b)$, поэтому w локально постоянна. \square

Замечание. Если очень хочется, то можно соединить пути $\gamma_0 : [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{C}$ и $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$ гомотопией $\Gamma : K \rightarrow \mathbb{C}$, где $K := \{(t, s) | t \in [0, 1], s \in [a_t, b_t]\}$ (a_t, b_t — какие-то непрерывные функции от t , такие, что $a_t < b_t$).

1.6 Ряды Лорана

Ряд Лорана $f(z)$ — ряд вида $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$.

Говорят, что ряд Лорана сходится в точке z , если оба ряда $f_+(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$ и $f_-(z) = \sum_{n < 0} c_n (z - z_0)^n$ сходятся.

Первый ряд степенной, имеется некий радиус сходимости r_+ , такой, что $|z - z_0| < r_+ \Rightarrow f_+$ сходится. При замене переменной $w := \frac{1}{z - z_0}$, $f_-(1/w)$ становится степенным рядом от w , сходящимся при $w < \frac{1}{r_-}$.

Таким образом, ряд сходится абсолютно внутри «кольца» $\{z \in \mathbb{C} | r_- < |z - z_0| < r_+\}$:



Теорема 1.6.1. Пусть $0 \leq r_- < r_+ \leq \infty$, функция f голоморфна в «кольце» $K := \{z \in \mathbb{C} | r_- < |z| < r_+\}$.

Тогда f представима в K сходящимся рядом Лорана.

Доказательство. Пусть $z \in K$. Определим $\phi_z : K \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi_z(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \neq z \\ f'(z), & \zeta = z \end{cases}$.

Согласно (теорема 1.3.5), форма $\phi_z(\zeta) d\zeta$ замкнута в K .

Выберем $r, R \in \mathbb{R}$ так, что $r_- < r < |z| < R < r_+$. Для $\rho \in \mathbb{R}$ определим $\gamma_\rho : [0, 2\pi] \rightarrow K$, $\gamma_\rho(t) := \rho e^{it}$. Пути γ_R и γ_r гомотопны, значит, $\int_{\gamma_R} \phi_z(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_r} \phi_z(\zeta) d\zeta$. А именно,

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

Преобразовывая, получаем

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \underbrace{\int_{\gamma_R} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta}_{2\pi i} - f(z) \underbrace{\int_{\gamma_r} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta}_0$$

Тем самым, получили *малую интегральную форму Коши для кольца*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right)$$

Осталось преобразовать дроби в ряды:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = \int_{\gamma_R} \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \cdot (z - z_0)^j \\ \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = -\frac{1}{z - z_0} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} d\zeta = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_r} f(\zeta) (\zeta - z_0)^k d\zeta \cdot \frac{1}{(z - z_0)^k} \end{aligned}$$

Сходимость степенная, имеется признак Вейерштрасса, можно поменять местами сумму и интеграл, поэтому все преобразования законны.

При замене $j = -k - 1$, второе выражение преобразуется в форму

$$- \sum_{j=-1}^{-\infty} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \cdot (z - z_0)^j$$

Теперь можно заметить, что интегралы вдоль γ_r и γ_R равны, так как особенностей у интегралов — слагаемых в ряде — в кольце нет. Окончательно получаем

$$f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j (z - z_0)^j, \text{ где } c_j = \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \text{ для любого } \rho \in (r_-, r_+)$$

□

Лекция VI

22 марта 2024 г.

Ряд Лорана $g(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j z^j$ принято раскладывать на две части — *регулярную* $\sum_{j \geq 0} c_j (z - z_0)^j$ и *главную* $\sum_{j < 0} c_j (z - z_0)^j$.

Если ряд Лорана изучать в маленькой окрестности z_0 , то главная часть асимптотически больше. Регулярная же сходится на всей комплексной плоскости.

1.7 Изолированные особенности голоморфных функций

Пусть область $G \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in G$, f задана и аналитична в $G \setminus \{z_0\}$. Тогда говорят, что f *имеет особенность в z_0* .

Возможны случаи:

1. f ограничена вблизи z_0 .

Точка z_0 называется *устранимой особенностью*, так как в силу (теорема 1.7.1) $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

2. $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

Точка z_0 называется *полюсом*.

3. f не имеет предела в z_0 .

Точка z_0 называется *существенно особой точкой*.

Теорема 1.7.1. В первом случае — f ограничена вблизи z_0 — f единственным образом продолжается до аналитической функции в области G .

Доказательство. Выберем $R > 0$ такой, что $B(z_0, R) \subset G$. f разложится в некоторый ряд Лорана при $0 < |z - z_0| < R$.

Запишем $c_j = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{it})(\rho e^{it})^{-j-1} \cdot \rho e^{it} dt$ и грубо оценим коэффициенты главной части ($j < 0$). Пусть $|f| \leq C$ внутри круга $B(z_0, R)$ для некоторой константы C .

$$|c_j| \leq \frac{C}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^{-j} dt = C \rho^{-j}$$

Устремляя $\rho \rightarrow 0$, получаем $c_j = 0$. Тем самым, f раскладывается в ряд Тейлора в окрестности z_0 . □

Запишем несколько другую классификацию особенностей точки, опирающуюся на ряд Лорана $f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j (z - z_0)^j$.

I При всяком $j < 0$: $c_j = 0$.

II Множество $\mathcal{A} := \{j < 0 | c_j \neq 0\}$ конечно.

III Множество $\mathcal{A} := \{j < 0 | c_j \neq 0\}$ бесконечно.

Понятно, что I эквивалентно 1.

Теорема 1.7.2. На самом деле, $\text{II} \iff 2, \text{III} \iff 3$.

Доказательство.

$\text{II} \Rightarrow 2$ Пусть $k = -\min \mathcal{A}$.

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} \cdots + c_0 + \sum_{j>0} c_j (z-z_0)^j = \frac{1}{z-z_0}^k (c_{-k} + c_{-k+1} + \cdots) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$$

При этом $g(z_0) \neq 0$ и $g(z)$ аналитична. Тем самым, $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

$2 \Rightarrow \text{II}$ Положим $h(z) := \frac{1}{f(z)}$ в некоторой окрестности z_0 .

h аналитична при $z \neq z_0$, и $\lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = 0$, значит, h имеет устранимую особенность в z_0 . **Может что-то пропустить.** Пусть k — наименьший номер, такой, что $b_k \neq 0$, где b_k — коэффициент из разложения h в ряд Тейлора:

$$h(z) = b_k (z-z_0)^k + b_{k+1} (z-z_0)^{k+1} \cdots = (z-z_0)^k (b_k + b_{k+1} (z-z_0) + \cdots) = (z-z_0)^k \cdot u(z)$$

u аналитична вблизи z_0 , и $u(z_0) = b_k \neq 0$.

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \frac{1}{u(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^k} (c_0 + c_1 (z-z_0) + \cdots)$$

Почленно деля, действительно получаем, что $f(z)$ имеет конечное число ненулевых членов в разложении в ряд Лорана. \square

Пусть z_0 — полюс f , $k := -\min \{j < 0 | c_j \neq 0\}$. Число k называется *порядком* полюса z_0 .

Если же g аналитична в z_0 , $g(z_0) = 0$, $g \not\equiv 0$, то $g(z) = \sum_{j \geq 0} a_j (z-z_0)^j$, положим $l := \min \{j | a_j \neq 0\}$.

Число l — *порядок* f .

Факт 1.7.1. f имеет полюс порядка k в $z_0 \iff \frac{1}{f}$ имеет ноль порядка k в z_0 .

Интересный факт (Теорема Пикара). Пусть z_0 — существенно особая точка аналитической функции f . Тогда $\forall \varepsilon > 0 : f(\{z | 0 < |z - z_0| < \varepsilon\})$ есть \mathbb{C} , кроме, может быть, двух точек.

Мы докажем более простой вариант теоремы Пикара.

Теорема 1.7.3 (Сохоцкий). Пусть z_0 — существенно особая точка аналитической функции f . Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \mathcal{B} := f(\{z | 0 < |z - z_0| < \varepsilon\})$ плотно в \mathbb{C} .

Доказательство. От противного: пусть $\exists w_0 \notin \overline{\mathcal{B}}$, то есть $\exists \delta > 0 : B(w_0, \delta) \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

Определим

$$h : B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{1}{f(z) - w_0}$$

Хотя h и имеет особенность при $z = z_0$, но h ограничена, то есть особенность устранима. $f(z) = \frac{1}{h(z)} + w_0$, и так как h аналитична в z_0 , то особенность в z_0 — то ли тоже устранимая особенность, то ли полюс, но уж никак z_0 — не существенно особая точка. \square

Пример. Возьмём $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. У подынтегральной функции в нуле особенность устранимая, а с бесконечностью есть некоторые проблемы. Впрочем, избавимся и от нуля в области интегрирования:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x} dx \quad (\equiv)$$

Запишем формулу Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Интегрируя по всей оси $\frac{\cos x}{x}$, мы получим ноль из-за нечётности, поэтому можно продолжить равенство так:

$$(\equiv) \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon < |x| < R} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

Теперь перейдём к функции, аналитической в комплексной плоскости: $\phi(z) := \frac{e^{iz}}{z}$.

Введём путь $\Gamma = [\varepsilon \rightarrow R] \cdot \gamma_R \cdot [-R \rightarrow -\varepsilon] \rightarrow \gamma_\varepsilon$, где $[a \rightarrow b]$ — путь, проходящий отрезок $[a, b]$ в направлении от a к b , а $\begin{cases} \gamma_R(t) = Re^{it}, & t \in [0, \pi] \\ \gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{i(\pi-t)}, & t \in [0, \pi] \end{cases}$.

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \phi(z) dz = \int_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{i(\pi-t)}}}{\varepsilon e^{i(\pi-t)}} \varepsilon i e^{i(\pi-t)} dt = \int_0^\pi i e^{i\varepsilon e^{i(\pi-t)}} dt \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{подынтегральное выражение равномерно сходится к } i} -i\pi$$

$$\int_{\gamma_R} \phi(z) dz = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} R i e^{it} dt = i \int_0^\pi e^{iRe^{it}} dt$$

Оценим $e^{iRe^{it}} = e^{iR \cos t - R \sin t} = e^{iR \cos t} \cdot e^{-R \sin t}$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости интеграл по γ_R будет нулём.

...

Этот интеграл получилось так взять, так как у ϕ была особенность в нуле, и мы её обошли. А иногда особенности находятся внутри пути интегрирования, в таком случае приговаривается *формула в вычетax*.

1.8 Вычеты

Пусть f задана и голоморфна в $G \setminus \{z_0\}$, где G — область, $z_0 \in G$ — изолированная особенность.

Вблизи z_0 f раскладывается в ряд Лорана $f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j (z - z_0)^j$.

Определение 1.8.1 (Вычет функции f в точке z_0). Коэффициент c_{-1} , обозначается $\text{Res}_{z_0} f$.

Этот коэффициент так важен, так как у $c_j (z - z_0)^j$ при $j \neq -1$ имеется первообразная в G , и при интегрировании по окружности, обходящей z_0 , пропадут все коэффициенты ряда Лорана, кроме вычета.

1.8.1 Как вычислять вычеты

У нас есть формула для вычисления коэффициентов ряда Лорана, но она получается интегрированием, а мы как раз и хотим использовать вычеты, чтобы уметь удобно интегрировать. Поэтому иногда пригождаются следующие частные случаи:

- Пусть z_0 — полюс функции f степени k :

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + f_+(z)$$

где f_+ — аналитическая вблизи z_0 .

Домножая f на $(z - z_0)^k$, получаем аналитическую

$$(z - z_0)^k f = c_{-k} + c_{-k+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{k-1} + (z - z_0)^k \cdot f_+(z)$$

Теперь можно найти $\text{Res}_{z_0} f$ по формуле: $\text{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} [(z - z_0)^k f(z)] \Big|_{z=z_0}$.

- Пусть $k = 1$ — у f имеется полюс первого порядка. Тогда дифференцировать не надо, и формула вырождается в

$$\text{Res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

- Возьмём ещё более частный случай: $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, где g, h аналитичны в окрестности z_0 , $g(z_0) \neq 0$, а h имеет простой нуль в z_0 (нуль кратности 1).

$$\text{Res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)(z - z_0)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)} = \frac{g(z)}{h'(z)}$$

1.8.2 Индекс замкнутого пути относительно точки

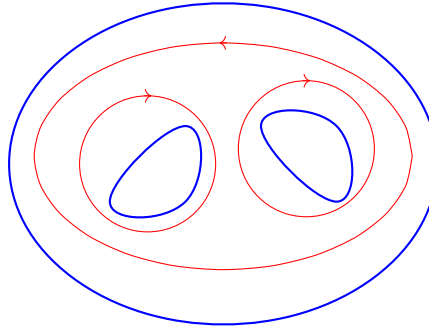
Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область, Φ — замкнутая дифференциальная форма в G . Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — какие-то замкнутые пути с носителем в G . Обозначим $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$.

Определим интеграл от формы Φ по данной совокупности путей $\int_{\Gamma} \Phi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \Phi$.

Назовём систему путей Γ *правильной*, если для всякой аналитической функции f в G : $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.

Примеры (Правильные системы путей).

- $|\Gamma| = 1$. Если γ_1 гомотопен тождественному, то Γ , конечно, правильная.
- В частности, любой замкнутый путь в односвязной области формирует правильную систему из одного пути.
- Пусть в кольце имеются два пути γ_1, γ_2 , обходящие концентрические окружности в противоположных направлениях. Тогда $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ — правильная система, так как $\gamma_1 \sim \gamma_2^-$.
- Рассмотрим область, ограниченную синими линиями с двумя дырками. В ней система из красных путей правильная, так как можно разложить их в сумму двух зелёных стягиваемых путей:



Пусть γ — петля в \mathbb{C} , $z_0 \notin \text{Im}(\gamma)$.

Определение 1.8.2 (Индекс пути γ относительно z_0). Значение интеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$. Обозначается $\text{Ind}_{z_0} \gamma$.

Индекс означает число раз, которые мы обошли вокруг данной точки с учётом ориентации, но пока непонятно даже, почему индекс — целое число.

Это определение очевидным образом распространяется на систему путей: $\forall \gamma_j \in \Gamma : z_0 \notin \text{Im}(\gamma) \Rightarrow$ определён $\text{Ind}_{z_0} \Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z-z_0}$

Свойства (Свойства индекса, докажем потом).

- $\text{Ind}_{z_0} \gamma \in \mathbb{Z}$.
- Функция $[z_0 \mapsto \text{Ind}_{z_0} \gamma]$ постоянна на каждой компоненте связности $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$.
- На неограниченной компоненте связности $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$ индекс равен нулю.

Теорема 1.8.1 (Формула вычетов). Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область, Γ — правильная система путей в G , $f : G \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитическая функция, и z_1, \dots, z_k — особенности. Если все точки z_j не лежат на носителе системы путей Γ , то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^k \text{Res}_{z_j} f \cdot \text{Ind}_{z_j} \Gamma \right)$$

Доказательство. Для каждой точки z_j имеется r_+ , такой, что $B(z_j, r_+) \setminus \{z_j\} \subset G$. Тем самым, в окрестности точки z_j функция f разложима в ряд Лорана, и его главная часть сходится везде кроме z_j .

Пусть g_1, \dots, g_k — главные части рядов Лорана для f в точках z_1, \dots, z_k соответственно. Функция $h(z) := f(z) - g_1(z) - \dots - g_k(z)$ — аналитическая функция в области G , так как она имеет конечное число особых точек, в которых ограничена.

Так как Γ — правильная, то $\int_{\Gamma} h(z) dz = 0$. Тем самым, мы получили

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k \int_{\Gamma} g_j(z) dz$$

Посчитаем $\int_{\Gamma} g_j(z) dz$. Распишем

$$g_j(z) = \frac{\text{Res}_{z_j} g}{z - z_j} + \underbrace{\frac{a_1}{(z - z_j)^2} + \dots + \frac{a_{s-1}}{(z - z_j)^s} + \dots}_{h_j(z)}$$

У h_j имеется первообразная, так как ряд Лорана можно интегрировать и дифференцировать почленно — доказательство аналогично одному для степенных рядов. Значит, $\int_{\Gamma} g_j(z) dz = (\text{Res}_{z_j} f) 2\pi i$.

$\text{Ind}_{z_0} \Gamma$ (очевидно, $\text{Res}_{z_j} g_j = \text{Res}_{z_j} f$). □

Лекция VII

29 марта 2024 г.

1.8.3 Обобщение интеграла $\frac{\sin x}{x}$

Обозначим $\mathbb{C}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{x + iy | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_{>0}\}$.

Пусть f аналитична в $\{x + iy | y > -\varepsilon\}$, кроме конечного числа особых точек в \mathbb{C}_+ , назовём их z_1, \dots, z_n . В $\{x + iy | -\varepsilon < y < 0\}$, получается, у f особенностей нет.

Предложение 1.8.1. Пусть при $\theta \in [0, \pi]$, $R > 0$: $|f(Re^{i\theta})R|$ ограничена в \mathbb{C}_+ , причём $\forall \theta \in [0, \pi]$: $\lim_{R \rightarrow \infty} f(Re^{i\theta})R = 0$.

Например, $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, где g, h — многочлены, $\deg g < \deg h$.

Тогда $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{z_j} f$. Здесь $\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R$, то есть особенности несобственного интеграла на плюс-минус бесконечностях могут сокращать друг друга.

Доказательство. Проинтегрируем f по синему пути, где полуокружность — радиуса R :



Пусть R — настолько большое, что все особые точки в \mathbb{C}_+ содержатся во внутренней области, отсекаемой данным путём. Оценим интеграл по верхней полуокружности:

$$\int_0^{\pi} f(Re^{it}) iRe^{it} dt \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{\text{теорема Лебега о мажорируемой сходимости}} 0$$

Далее применяем формулу в вычетах.

Из гомотопности зелёной окружности и синего пути в $\mathbb{C}_+ \setminus \{z_j\}$ получаем, что их индексы равны 1 — ведь интеграл $\frac{dz}{z-z_0}$ по окружности мы знаем. \square

1.8.4 2-я формула замены переменной

Пусть $\Phi = f dx + g dy$ — замкнутая дифференциальная форма в G , $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — путь, рассмотрим интеграл $\int_{\gamma} \Phi$. Изменение параметризации для γ — 1-я формула замены переменной.

Теперь пусть $g : G_1 \rightarrow G_2$ — голоморфная функция, f — голоморфная функция в G_2 , $\gamma : [a, b] \rightarrow G_1$ — непрерывный путь, $\Phi = f(z) dz$. Тогда

$$\int_{g \circ \gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (f \circ g)(z) g'(z) dz$$

Наводящее соображение: пусть путь γ — кусочно-гладкий, $\rho(t) := g(\gamma(t))$. Тогда

$$\int_{\rho} f(z) dz = \int_a^b f(\rho(t)) \rho'(t) dt = \int_a^b f(g(\gamma(t))) g'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} (f \circ g)(z) \cdot g'(z) dz$$

Но нам эта формула пригодится в случае негладкого пути.

Пусть $\rho = g \circ \gamma$ — путь в области G_2 , ϕ — первообразная для формы $f(z) dz$ вдоль ρ .

Рассмотрим $t_0 \in [a, b]$. $\exists U \ni \rho(t_0)$ — окрестность, такая, что на ней есть первообразная Φ для $f(z) dz$. Значит, $\exists \delta > 0 : \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \Phi(\rho(t))$.

Положим $z_0 := \gamma(t_0)$. $\exists V \ni z_0 : g(V) \subset U$ из непрерывности g . $\forall w \in U : \Phi'(w) = f(w)$. Запишем

$$\forall z \in V : (\Phi \circ g)'(z) = \Phi'(g(z)) \cdot g'(z)$$

Тем самым, $\Phi \circ g$ есть первообразная для $(\Phi \circ g) \cdot g'$ в V . Значит, $\phi \circ g$ — первообразная для формы $f(g(z)) \cdot g'(z) dz$ вдоль пути γ .

Пусть γ — замкнутый путь, не проходящий через z_0 . По определению

$$\text{Ind}_{z_0} \gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

Применим функцию $[z \mapsto z - z_0]$. Согласно 2-й формуле замены переменной,

$$\text{Ind}_{z_0} \gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - z_0} \frac{dz}{z} = \text{Ind}_0(\gamma - z_0)$$

Следствие 1.8.1. *Индекс пути γ относительно z_0 — локально постоянная функция от z_0 .*

Доказательство. Пусть z_0 — точка вне носителя γ . Выберем настолько маленькое $\delta > 0$, что $B(z_0, \delta) \cap \gamma([a, b]) = \emptyset$.

Рассмотрим $z_1 \in B(z_0, \delta)$, и докажем, что $\text{Ind}_{z_0} \gamma = \text{Ind}_{z_1} \gamma$. Определим гомотопию путей $\gamma - z_0$ и $\gamma - z_1$:

$$\Gamma(t, \tau) := (1 - \tau)(\gamma(t) - z_0) + \tau(\gamma(t) - z_1) = \gamma(t) - ((1 - \tau)z_0 + \tau z_1)$$

Эта гомотопия не проходит через 0, значит, интегралы по $\gamma - z_0$ и $\gamma - z_1$ равны. □

Следствие 1.8.2. *Индекс постоянен на каждой компоненте связности $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$.*

Следствие 1.8.3. $\text{Ind}_{z_0} \gamma = 0$ на неограниченной компоненте связности $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$.

Доказательство. Оценим $\int_{\gamma - z_0} \frac{dw}{w}$ при достаточно большом $|z_0|$. Для такого z_0 носитель пути $\gamma - z_0$ лежит в некоторой полуплоскости, не содержащей нуля. Полуплоскость односвязна, это даже звёздная область, в ней путь стягиваем, значит, интеграл равен нулю. □

1.8.5 О логарифме

Логарифм — это функция, обратная к экспоненте, а экспонента имеет период $2\pi i$.

Пусть $w \in \mathbb{C}$.

1. Логарифм w — любое $z \in \mathbb{C} : e^z = w$.
2. У $w = 0$ логарифма нет; если z — одно из значений логарифма w , то все остальные значения имеют вид $\{z + 2\pi i k | k \in \mathbb{Z}\}$.
3. Для $w \neq 0 : e = |w|e^{i\theta}$, где $\theta \in \mathbb{R}$. Комплексное число $\log |w| + i\theta$ — одно из значений логарифма.

Пусть G — область.

Определение 1.8.3 (Функция ϕ в G — ветвь логарифма в G). ϕ непрерывна в G , и $e^{\phi(z)} = z$ для $z \in G$.

Факт 1.8.1. *Всякая ветвь логарифма обязательно голоморфна в G , и $\phi'(z) = \frac{1}{z}$.*

Доказательство. Рассмотрим $z_0 \in G, U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\} \subset G$. Так как производная экспоненты (как вещественной функции $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$) невырождена, то при достаточно малом δ у экспоненты имеется обратная $\psi : e^{\psi(z)} = z$ при $z \in U$.

С другой стороны, $e^{\phi(z)} = z$ при $z \in U$. Значит, $\phi - \psi$ — непрерывная функция, принимающая значения в дискретном множестве $\{2\pi ik \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Значит, это константа.

Тем самым, ϕ дифференцируема, и $\phi'(z) = \frac{1}{z}$. \square

Теорема 1.8.2. Во всякой односвязной области G : $0 \notin G \Rightarrow \exists$ непрерывная ветвь логарифма.

Доказательство. Напрямую следует из (теорема 1.8.3) для тождественного отображения. \square

Пусть $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитическая.

Определение 1.8.4 ($\Phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ — ветвь логарифма функции F). $\forall z \in G : e^{\Phi(z)} = F(z)$.

Замечание. В определении можно требовать лишь непрерывности Φ , аналитичность получится автоматически.

Теорема 1.8.3. Если G — односвязная область, $\forall z \in G : F(z) \neq 0$, то в G существует ветвь логарифма для F .

Доказательство. Функция $\frac{F'(z)}{F(z)}$ — голоморфна в G . Форма $\frac{F'(z)}{F(z)} dz$ замкнута в G , значит, имеется первообразная ϕ — голоморфная в G функция, такая, что $\psi'(z) = \frac{F'(z)}{F(z)}$.

$$\left(\frac{e^{\psi(z)}}{F(z)} \right)' = \frac{e^{\psi(z)} \cdot \psi'(z) F(z) - F'(z) e^{\psi(z)}}{F(z)^2}$$

По построению ψ числитель равен нулю. Тем самым, $e^{\psi(z)} = c \cdot F(z)$. $\exists a \in \mathbb{C} : c = e^a$. Положим $\phi := \psi - a$, это искомая ветвь логарифма. \square

Замечание. Не всякая первообразная для $\frac{F'}{F}$ есть ветвь логарифма — логарифмы отличаются на целые кратные $2\pi i$, а первообразные — на произвольную константу. Однако если ψ — первообразная $\frac{F'}{F}$, и $\exists z_0 \in \mathbb{C} : e^{\psi(z_0)} = F(z_0)$, то ψ — ветвь логарифма для F .

Замечание. Если ψ — ветвь логарифма, то все ветви логарифма имеют вид $\{\psi + 2\pi ik \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Данная функция $\frac{F'}{F}$ называется *логарифмической производной*.

Пусть G — область, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфна, $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — путь, $\forall z \in \gamma([a, b]) : f(z) \neq 0$.

Определение 1.8.5 (Ветвь логарифма вдоль пути γ). Функция $\phi : [a, b] \rightarrow G$, такая что $\forall t_0 \in [a, b] : \exists \delta > 0, \exists U \ni \gamma(t)$, и существует ветвь логарифма ψ функции f в U , такая, что

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \psi(\gamma(t))$$

Теорема 1.8.4. При сделанных предположениях существует ветвь логарифма f вдоль пути γ . При этом любые две ветви отличаются на $2\pi ik$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\frac{f'}{f}$, аналитическую в некоторой окрестности $\gamma([a, b])$. Пусть ϕ — первообразная для $\frac{f'}{f}$ вдоль γ .

$\forall t_0 \in [a, b] : \exists \delta > 0, \exists U \ni \gamma(t_0)$ вместе с первообразной ψ функции $\frac{f'}{f}$:

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \psi(\gamma(t))$$

Существует c , вообще говоря, зависящая от t , такая, что $e^{\psi(z)} = cf(z)$. При $|t - t_0| < \delta : e^{\phi(t)} = e^{\psi(\gamma(t))} = cf(\gamma(t))$. Значит, $\frac{e^{\phi(s)}}{f(\gamma(s))}$ локально постоянна на $[a, b]$, то есть оказалось, что c всё-таки не зависит от t .

Найдётся $a \in \mathbb{C} : c = e^a$. Теперь $\tilde{\phi} := \phi - a$ — тоже первообразная для $\frac{f'}{f}$ вдоль γ , причём $e^{\psi(\gamma(t)) - a} = f(\gamma(t))$. Так как $\psi - a$ — тоже первообразная в U для $\frac{f'}{f}$, то $\tilde{\psi}$ — ветвь логарифма. \square

В частности, для $f(z) = z - z_0$, и пути γ , не проходящего через z_0 , получается ветвь логарифма $z - z_0$ вдоль γ . **Что?**

Пусть $w \in \mathbb{C}$. Все значения логарифма спрятаны в формуле $\log w = \log |w| + i \operatorname{Arg} w$, где $\operatorname{Arg} w \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \theta \mid e^{i\theta} = \frac{w}{|w|} \right\}$.

Пусть $G \neq 0$.

Определение 1.8.6 (Непрерывная ветвь аргумента в области G). Непрерывная функция $v : G \rightarrow \mathbb{R} : \forall z \in G : v(z) \in \operatorname{Arg}(z)$

Факт 1.8.2. В области G существует непрерывная ветвь логарифма \iff в G существует непрерывная ветвь аргумента.

Определение 1.8.7 (Ветвь аргумента вдоль пути γ). Функция $\phi : [a, b] \rightarrow G$, такая что $\forall t_0 \in [a, b] : \exists \delta > 0, \exists U \ni \gamma(t_0)$, и существует ветвь аргумента ψ функции f в U , такая, что

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \psi(\gamma(t))$$

В качестве ветви аргумента всегда можно выбрать мнимую часть ветви логарифма.

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — путь, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитическая, предположим, что $f(z) \neq 0$ на $\gamma([a, b])$.

Пусть u — ветвь логарифма для f вдоль γ .

Определение 1.8.8 (Приращение логарифма вдоль γ). $u(b) - u(a)$.

Определение 1.8.9 (Приращение аргумента вдоль γ). $\Im(u(b) - u(a))$.

Пусть теперь γ — петля. Тогда $\Re(u(b) - u(a)) = 0$, и вообще, $u(b) - u(a) = 2\pi i k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$.

Лекция VIII

5 апреля 2024 г.

1.9 Принцип аргумента и теорема Руше

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ — простой замкнутый путь, $\gamma(a) = \gamma(b)$. Положим $D := \gamma([a, b])$.

Интересный факт (Теорема Жордана). $\mathbb{C} \setminus D$ состоит из двух компонент связности. Одна из них — G — ограничена, и $\forall z \in G : \operatorname{Ind}_z \gamma = \pm 1$.

Если $\operatorname{Ind}_z \gamma = 1$, то γ называют положительно ориентированной, иначе — отрицательно ориентированной.

Определение 1.9.1 (Жорданова область). Область, граница которой — простой замкнутый путь.

Теорема 1.9.1 (Принцип аргумента). Пусть G — жорданова область, ∂G — носитель простого замкнутого пути γ , ориентированного положительно.

f — аналитическая в окрестности \overline{G} , кроме, может быть, конечного числа полюсов внутри G . Более того, $\forall w \in \partial G : f(w) \neq 0$.

Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \cdot (\text{приращение аргумента } f \text{ вдоль } \gamma) = (\text{число нулей } f \text{ в } G) - (\text{число полюсов } f \text{ в } G)$$

Нули и полюса надо учитывать с кратностью.

Доказательство. Левая часть есть $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$. Это интеграл по простому замкнутому пути; посчитаем его с помощью вычетов f внутри G .

Рассмотрим $z_0 \in G$. Пусть вблизи z_0 : $f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$, где g аналитична вблизи z_0 , причём $g(z_0) \neq 0$.

$$f'(z) = k \cdot (z - z_0)^{k-1} g(z) + (z - z_0)^k g'(z) \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

$\frac{g'(z)}{g(z)}$ аналитична в окрестности z_0 , тем самым, вычет логарифмической производной $\frac{f'(z)}{f(z)}$ в z_0 равен k .

Пусть u_1, \dots, u_s — нули f внутри G кратностей b_1, \dots, b_s соответственно; пусть v_1, \dots, v_t — полюса f кратностей l_1, \dots, l_t соответственно. Суммируя вычеты, получаем $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^s k_j - \sum_{j=1}^t l_j$. \square

Теорема 1.9.2 (Теорема Руше). Пусть G — жорданова область с положительно ориентированной границей — носителем замкнутого пути γ .

Функции f, g аналитичны в окрестности \overline{G} . Пусть $\forall z \in \partial G : |f(z)| > |g(z)|$. В частности, $\forall z \in \partial G : |f(z)| \neq 0, |(f+g)(z)| \neq 0$.

Тогда f и $f+g$ имеют одинаковое число нулей в G .

Доказательство. Согласно принципу аргумента, число нулей $(f+g)$ в G равно $\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)} dz$.

В то же время, f имеет внутри G ровно $\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ нулей.

Надо доказать, что интегралы равны, вычтем их:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} \right) dz$$

Теперь преобразуем выражение в скобках:

$$\begin{aligned} \left(\cdot \right) &= \frac{\cancel{f'(z)} \cdot \cancel{f(z)} + g'(z) \cdot f(z) - \cancel{f'(z)} \cdot \cancel{f(z)} - f'(z) \cdot g(z)}{(f(z) + g(z)) \cdot f(z)} = \\ &= \frac{g'(z)f(z) - f'(z)g(z)}{f(z)^2} \cdot \frac{f(z)}{f(z) + g(z)} = \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right)' \cdot \frac{1}{1 + \frac{g(z)}{f(z)}} \end{aligned}$$

Обозначим $\Phi(z) := 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$. Тем самым, надо доказать, что $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} dz = 0$. При этом, $\forall z \in \partial G :$

$\frac{|f(z)|}{|g(z)|} < 1$. Из непрерывности $\exists \delta > 0 : \frac{|f(z)|}{|g(z)|} < 1 - \delta$.

Применим к интегралу формулу замены переменной: $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Phi \circ \gamma} \frac{dw}{w}$. При этом носитель пути $\Phi \circ \gamma$ лежит внутри $B(1, 1 - \delta)$, значит, путь гомотопен тождественному, и гомотопия не задевает нуля. Действительно, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Phi \circ \gamma} \frac{dw}{w} = 0$. \square

1.10 Сходимость аналитических функций

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Пускай $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность функций $h_n : G \rightarrow \mathbb{C}$.

Равномерная сходимость на компактах

Пусть $h : G \rightarrow \mathbb{C}$ — ещё функция. Говорят, что h_n сходятся к h ($h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$), если \forall компакта $K \subset G$: $h_n|_K \rightrightarrows h|_K$.

В дальнейшем, говоря о сходимости аналитических функций, будем подразумевать именно равномерную сходимость на компактах.

Теорема 1.10.1 (Вейерштрасс, 1-я). Пусть все $h_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитичны, и $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$. Тогда h аналитична в G .

Доказательство. Достаточно доказать, что \forall прямоугольника $\bar{P} \subset G$: $\int_{\partial P} h(z) dz = 0$. Это ясно из равномерной сходимости на компактах:

$$\left| \int_{\partial P} (h(z) - h_n(z)) dz \right| \leq \sup_{z \in \partial P} |h_n(z) - h(z)| \cdot l(\partial P)$$

Далее достаточно применить теорему Мореры (теорема 1.4.1). □

Теорема 1.10.2 (Вейерштрасс, 2-я). Пусть все $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитичны, и $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$, где аналитичная $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Тогда $f'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'$.

Доказательство. Пусть $K = DB(w_0, r)$ — круг, $\bar{K} \subset G$. Понятно, $\exists R > r : \overline{B(w_0, R)} \subset G$. Рассмотрим $z \in K$.

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - w_0| = R} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - w_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = f'(z)$$

К пределу под интегралом можно перейти, так как сходимость равномерна в \bar{K} , знаменатель отделён от нуля числом $R - r$. Более того, видно, что сходимость равномерна в \bar{K} .

Пусть $S \subset G$ — компакт. $\forall s \in S : \exists K_s$ — круг с центром в s , такой, что $\bar{K}_s \subset G$. Внутренности этих кругов покрывают S , выберем конечное подпокрытие.

На каждом из кругов конечного подпокрытия имеется равномерная сходимость. Стало быть, имеется равномерная сходимость на S . □

Лемма 1.10.1. Пусть f_n, f — аналитические функции в области G , $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$, f не равна тождественному нулю.

Пусть D — круг, $D \subset G$, предположим, что f имеет нуль в D . Тогда для всех достаточно больших n : f_n имеет нуль в круге D .

Доказательство. Пусть $f(z_0) = 0$. Уменьшая D , можем считать, что $D = B(z_0, r)$ — круг, такой, что $\bar{D} \subset G$.

По теореме единственности f не постоянна в D .

Разложим f в ряд Тейлора в D :

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Ряд сходится в некоторой окрестности \bar{D} . $a_0 = 0$, но не все коэффициенты равны нулю. Распишем

$$f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z), \quad g(z_0) \neq 0, \text{ где } g \text{ аналитична в окрестности } \bar{D}$$

Пусть $\rho \leq r$ выбрано так, что $\forall z : |z - z_0| \leq \rho \Rightarrow |g(z)| > \delta > 0$. Оценим f при $|z - z_0| = \rho : |f(z)| = |z - z_0|^k \cdot |g(z)| \geq \rho^k \delta$.

Разложим $f_n(z) = f(z) + (f_n(z) - f(z))$. При достаточно больших $n : |f_n(z) - f(z)| < \rho^k \delta$, по теореме Руше f_n имеет нуль внутри D . \square

Определение 1.10.1 (Однолистная функция $f : G \rightarrow \mathbb{C}$). Инъективная аналитическая функция f .

Теорема 1.10.3. Пусть f_n — последовательность однолистных функций в области G , $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$. Тогда либо $f \equiv \text{const}$, либо f — тоже однолистка.

Доказательство. Предположим, что $\exists z_0, z_1 \in G : z_0 \neq z_1$ и $w := f(z_0) = f(z_1)$. Построим $g(z) := f(z) - w$, $g_n(z) := f_n(z) - w$. Сходимость сохранилась.

Пусть U_0, U_1 — круги с центрами в z_0 и z_1 соответственно, $U_0 \cap U_1 = \emptyset, U_0, U_1 \subset G$. Функция g имеет нуль в каждом из U_1, U_2 . Предположим, что $g \not\equiv 0$, значит, при достаточно большом $n : g_n$ имеет нуль как в U_1 , так и в U_2 . Но g_n однолистка, значит, всё же $g \equiv 0$. \square

Теорема 1.10.4 (Риман). Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область. Следующие условия эквивалентны:

1. G односвязна, $G \neq \mathbb{C}$.
2. \exists однолистка $\phi : G \rightarrow \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Доказательство. Потом. \square

1.10.1 Нормальные семейства

Пусть дано множество A аналитических функций в области G .

Определение 1.10.2 (Нормальное множество A). Такое A , что \forall компакта $K \subset G : \exists C \in \mathbb{R} : \forall z \in K, \forall f \in A : |f(z)| \leq C$.

Теорема 1.10.5. Следующие условия эквивалентны:

1. Множество A нормально.
2. $\forall \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, f_n \in A$: найдётся сходящаяся подпоследовательность $n_1 < n_2 < \dots : \exists f : f_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f$.

Доказательство.

(2) \Rightarrow (1) Предположим противное: $\exists K \subset G : \forall m \in \mathbb{N} : \exists f_m \in A : \sup_{z \in K} |f_m(z)| > m$.

Согласно посылке, существует сходящаяся подпоследовательность $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, такая, что $\exists f : f_{m_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ равномерно на K . f ограничена на K , значит, начиная с некоторого места, f_{m_k} тоже ограничены. Противоречие.

(1) \Rightarrow (2)

Лемма 1.10.2. Рассмотрим счётный набор последовательностей

$$\begin{cases} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots \\ x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \dots \\ \vdots \end{cases}$$

Пусть каждая последовательность ограничена: $\forall n \in \mathbb{N} : \exists M^{(n)} : \forall j : |x_j^{(n)}| < M^{(n)}$. Тогда $\exists k_1 < k_2 < \dots$ — подпоследовательность индексов, такая, что $\forall n \in \mathbb{N} : \exists x^{(n)} : x_{k_j}^{(n)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x^{(n)}$.

Доказательство леммы.

Пусть $\{k_j^{(1)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ — такая подпоследовательность индексов, что $\exists x^{(1)} : x_{k_j^{(1)}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x^{(1)}$. Выберем из этой последовательности индексов подпоследовательность индексов $\{k_j^{(2)}\}_{j \in \mathbb{N}}$, что $\exists x^{(2)} : x_{k_j^{(2)}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x^{(2)}$. И так далее.

Тем самым, мы получим счётное количество последовательностей индексов, таких, что $k^{(n+1)}$ — подпоследовательность $k^{(n)}$, и $\forall n \in \mathbb{N} : \exists x^{(n)} : x_{k_j^{(n)}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x^{(n)}$.

А теперь возьмём диагональ: $k_j := k_j^{(j)}$. □

□

Лекция IX

12 апреля 2024 г.

todo

Лекция X

19 апреля 2024 г.

Теорема 1.10.6 (Риман). Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область. Следующие условия эквивалентны:

1. G односвязна, $G \neq \mathbb{C}$.
2. \exists однолистная сюръекция $\phi : G \rightarrow \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Доказательство. На прошлой лекции свели к случаю $G \subset \mathbb{D}, G \ni 0$.

Введём $\mathcal{A} := \{f : G \rightarrow \mathbb{D} \mid f(0) = 0 \text{ и } f \text{ однолистна}\}$. Доказали, что существует $f \in \mathcal{A}$, такая, что $|f'(0)|$ максимально.

Далее пойдём от противного: пусть $\exists a \in \mathbb{D} : a \notin \text{Im}(f)$. Введём $\phi := v \circ f$, где $v(w) := \frac{w-a}{1-\bar{a}w}$ — некоторое преобразование Мёбиуса. $\phi(z) := \frac{f(z)-a}{1-\bar{a}f(z)}$.

К сожалению, пока $\phi \notin \mathcal{A} : \phi(0) \neq 0$, и вообще $\phi(z) \neq 0$ везде. Но раз так, то у ϕ имеется ветвь логарифма Φ . Так как $\Re \log(u) = \log|u|$, то $\forall z \in G : \Re \Phi(z) < 0$. При помощи другого дробно-линейного преобразования переведём левую полуплоскость обратно в $\mathbb{D} : g(z) := \frac{\Phi(z)-\Phi(0)}{\Phi(z)+\Phi(0)}$. Утверждается, что $g \in \mathcal{A} : g(0) = 0$, и преобразование $w \mapsto \frac{w-a}{w+\bar{a}}$ однолистно стреляет в круг \mathbb{D} .

Осталось получить противоречие, получив в результате вычислений, что $|g'(0)| > |f'(0)|$.

$$\begin{aligned} g'(z) &= \left(1 - \frac{2\Re \Phi(0)}{\Phi(z) + \bar{\Phi}(0)}\right)' = \frac{2\Re(\Phi(0))}{(\Phi(z) + \bar{\Phi}(0))^2} \Phi'(z) = \frac{2\Re(\Phi(0))}{(\Phi(z) + \bar{\Phi}(0))^2} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \\ &= \frac{2\Re(\Phi(0))}{(\Phi(z) + \bar{\Phi}(0))^2} \frac{1}{\phi(z)} \cdot \frac{(1 - \bar{a}f(z)) \cdot f'(z) + \bar{a} \cdot f'(z)(f(z) - a)}{(1 - \bar{a}f(z))^2} \end{aligned}$$

Подставляя 0, получаем

$$g'(0) = \frac{2\Re \Phi(0)}{(2\Re \Phi(0))^2 - a} \cdot \frac{f'(0)(1 - |a|^2)}{1}$$

Тем самым, $|g'(0)| = \frac{1}{2 \log(\frac{1}{|a|})} \frac{1-|a|^2}{|a|} \cdot |f'(0)|$. Осталось убедиться, что для $t := |a| \in (0, 1)$ выполнено неравенство $\frac{1-t^2}{2t \log(\frac{1}{t})} > 1$. Это эквивалентно неравенству $\frac{1-t^2}{t} - 2 \log\left(\frac{1}{t}\right) > 0$. При $t = 1$ левая часть равняется нулю, и производная левой части $\left(\frac{1}{t} - t + 2 \log(t)\right) = -\frac{1}{t^2} - 1 - \frac{2}{t} = -\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 < 0$. □

Пусть $f_1, f_2 : G \rightarrow \mathbb{D}$ — возможно различные однолистные отображения. Тогда $f_2^{-1} \circ f_1$ — однолистное отображение круга \mathbb{D} на себя. Например, это может быть каким-то преобразованием Мёбиуса, но оказывается, что ими всё и исчерпывается.

Определение 1.10.3 (Автоморфизм области G). Однолистное отображение $G \rightarrow G$.

Вообще практически все односвязные области эквивалентны (при помощи однолистной сюръекции) кругу, как говорит только что доказанная теорема Римана, но есть ещё две области — \mathbb{C} и $\widehat{\mathbb{C}}$, имеющие другую природу.

Сначала займёмся автоморфизмами \mathbb{C} .

Теорема 1.10.7. Автоморфизмы \mathbb{C} — линейные функции $z \mapsto az + b$ при $a \neq 0$.

Доказательство. Пускай $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — ещё какой-то автоморфизм \mathbb{C} . Тем самым, f — целая, то есть $f = a_0 + a_1 z + \dots$

Если $a_j \neq 0$ для бесконечного множества индексов j , то ∞ — существенно особая точка (в ряду Лорана $f(\frac{1}{z})$ бесконечно много ненулевых членов). Так как $\forall z \in \mathbb{C} : f'(z) \neq 0$, то f — открытое отображение. Отсюда $f(\mathbb{D})$ открыто. С другой стороны, по теореме Сохоцкого $f(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\})$ всюду плотно в \mathbb{C} . Значит, $\exists w \in f(\mathbb{D}) \cap f(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\})$, и это противоречие с однолистностью f .

Тем самым, f — многочлен, и если $\deg f \geq 2$, то f' имеет корень, опять-таки противоречие с однолистностью. Получается, f — линейная функция, или константа, но константа не подходит. \square

Замечание. $\widehat{\mathbb{C}}$ односвязна, так как топологически это — сфера, что видно из стереографической проекции.

Теорема 1.10.8. Автоморфизмы $\widehat{\mathbb{C}}$ — дробно-линейные отображения $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ при $ad - bc \neq 0$.

Доказательство.

Лемма 1.10.3 (О действии групп). Пусть группа Γ действует на множестве X ;

$H \leq X$ — подгруппа. Если $\exists x \in X : H \supset \Gamma_x$ ($\Gamma_x \stackrel{\text{def}}{=} \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma x = x\}$ — стабилизатор x), и H действует на X транзитивно ($\forall x, y \in X : \exists \gamma \in H : \gamma x = y$), то $H = \Gamma$.

Доказательство леммы.

Рассмотрим какой-то $\gamma \in \Gamma$. Пусть $\gamma(x) = y$. Из транзитивности $\exists \delta \in H : \delta y = x$. Тем самым, $\delta \gamma x = x$, то есть $\delta \gamma \in H \Rightarrow \gamma \in H$. \square

\square

Введём в качестве Γ группу всех однолистных отображений $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, и в качестве $H \leq \Gamma$ — подгруппу дробно-линейных отображений.

Легко видеть, что H действует на \mathbb{C} транзитивно: скажем, любая точка лежит в одной орбите с ∞ : $\forall z_0 \in \mathbb{C} : \frac{1}{z-z_0} \Big|_{z=z_0} = \infty$. С другой стороны, стабилизатор ∞ — автоморфизмы \mathbb{C} , и так как они лежат в H , то $H = \Gamma$.

Лемма 1.10.4 (Шварц). Пусть $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ — аналитическая функция, такая, что $f(0) = 0$. Тогда $\forall z \in \mathbb{D} : |f(z)| \leq |z|$. При этом если $\exists z \in \mathbb{D} \setminus \{0\} : |f(z)| = |z|$, то $\exists c \in \mathbb{C} (|c| = 1) : f(z) = cz$.

Доказательство.

- Пусть дополнительно f задана в круге радиуса $R > 1$ с центром в 0. Рассмотрим $g(z) := \frac{f(z)}{z}$ — она аналитична в круге $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$, так как в нуле — устранимая особенность.

При $|z| = 1 : |g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{1} = 1$. Согласно принципу максимума модуля (теорема 1.3.9), $|g| \leq 1$ везде.

- Теперь такого предположения о f не имеется. Выберем $R > 1$. Определим $f_R(z) := f\left(\frac{z}{R}\right)$. Согласно предыдущему пункту $\forall z \in \mathbb{D} : |f_R(z)| \leq |z|$. Устремляя $R \rightarrow 1$, получаем искомое неравенство.
- Осталось разобраться со случаем равенства внутри круга. Пусть $\exists z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\} : |f(z_0)| = |z_0|$. Тем самым, $g(z) := \frac{f(z)}{z}$ достигает своё наибольшее значение внутри круга, то есть $g \equiv c = \text{const}$. Подставляя z_0 , получаем $|c| = 1$. \square

Пусть Γ — группа всех автоморфизмов круга \mathbb{D} . Вычислим стабилизатор $0 \in \mathbb{D}$. Пусть $\phi \in \Gamma_0$ — аналитическая биекция, такая, что $\phi(0) = 0$. То же верно и для ϕ^{-1} .

По лемме Шварца $|\phi(z)| \leq |z|$, но применяя её же к ϕ^{-1} , получаем $z = \phi^{-1}(\phi(z)) \Rightarrow |z| = |\phi^{-1}(\phi(z))| \leq |\phi(z)|$. Тем самым, $|\phi(z)| = |z|$ во всех точках, и по лемме Шварца ϕ — гомотетия с коэффициентом c ($|c| = 1$).

Группа преобразований Мёбиуса $\left\{ w \mapsto c \cdot \frac{w-a}{1-\bar{a}w} \mid a \in \mathbb{D}, |c| = 1 \right\}$ содержит при $a = 0$ гомотетии с данными коэффициентами, и действует транзитивно на \mathbb{D} : любая $a \in \mathbb{D}$ переводится соответствующим преобразованием в нуль.

Упражнение 1.10.1. Проверить, что группа Мёбиуса — действительно группа, то есть замкнута относительно умножения и взятия обратного.

Факт 1.10.1 (Конформность однолистного отображения). Пусть G — область, $z_0 \in G$, $\Phi : G \rightarrow G$ — однолистные отображения. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ — два регулярно параметризованных пути ($\gamma'_1 \neq 0, \gamma'_2 \neq 0$), причём $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$. Проводя касательные к носителям γ_1, γ_2 в z_0 , получаем угол, его косинус можно посчитать по формуле $\frac{\langle \gamma'_1(t_1), \gamma'_2(t_2) \rangle}{|\gamma'_1(t_1)| \cdot |\gamma'_2(t_2)|}$.

Поддействуем при помощи Φ на данную картинку. $\tilde{\gamma}_j := \Phi \circ \gamma_j$ при $j := 1, 2$. Несложно посчитать, что $\tilde{\gamma}'_j(t_j) = \Phi'(z_0) \cdot \gamma'_j(t_j)$, что действительно сохраняет косинус угла.

Такие отображения, сохраняющие углы, называют *конформными*. В силу исторических причин, говоря про однолистные отображения, часто добавляют слово «конформные», а сама наука зовётся теорией конформных отображений, хотя, как мы только что видели, однолистность сильнее.

1.11 Целые функции

Определение 1.11.1 (Целая функция). Аналитическая $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

1.11.1 Построение целых функций с заданными нулями

Пусть $f \not\equiv 0$ — целая, $N := \{a \in \mathbb{C} \mid f(a) = 0\}$. По теореме единственности N не имеет предельных точек. В частности, все нули изолированы, откуда множество нулей не более, чем счётно.

Нули удобно считать с учётом кратности, получая при этом мультимножество N .

Пронумеруем $N = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, удобно считать, что $|a_0| \leq |a_1| \leq \dots$.

Теорема 1.11.1 (Вейерштрасс). Существует целая функция f , мультимножество нулей которой совпадает с данным мультимножеством $N = \{a_0, a_1, \dots\}$. Считаем $|a_0| \leq |a_1| \leq \dots$. Дополнительно предполагается, что $|a_j| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$. Кажется, это необходимое и достаточное условие того, что у N нет предельных точек

Доказательство. Если бы нулей было конечное количество, то многочлен $(z - a_0) \cdot \dots \cdot (z - a_N)$ подошёл бы, но нулей, увы, бесконечно. Предположим, что $0 \notin N$ (это не ограничивает общность: выкинем 0 из N , построим f , потом домножим на нужную степень z^k), и заметим, что произведение $\left(1 - \frac{z}{a_0}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{z}{a_N}\right)$ тоже решает задачу в случае конечного N .

В бесконечном же случае стоит озаботиться вопросом сходимости. Во втором семестре мы проверяли, что сходимость $\prod_{j=0}^{\infty} a_j$ **не к нулю** эквивалентна сходимости ряда $\sum_{j=0}^{\infty} \log(a_j)$, где $\log : (\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]) \rightarrow \mathbb{C}$ — главная ветвь логарифма.

Рассмотрим бесконечное произведение $\prod_{j=0}^{\infty} u_j(z)$, где u_j — аналитические функции. Будем говорить, что данное *произведение сходится*, если \forall компакта $K \subset G : \exists M \in \mathbb{N} : \forall j \geq M, z \in K : u_j(z) \neq 0$, и произведение $\prod_{j \geq N} u_j(z)$ сходится на K равномерно.

Определим *множители Вейерштрасса*:

$$u_j(z) := \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) \cdot \exp\left(-\left(\frac{z}{a_j} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_j}\right)^2 + \dots + \frac{1}{j-1}\left(\frac{z}{a_{j-1}}\right)^{j-1}\right)\right)$$

Показатель экспоненты подогнан так, чтобы при взятии логарифма много чего сократилось (а $\log(1-w) = w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} + \dots$ при $|w| < 1$, например, потому что этот ряд совпадает с рядом для вещественного логарифма на $\mathbb{R}_{>0}$, и имеется теорема единственности)

Осталось показать, что произведение $\prod_{j=0}^{\infty} u_j(z)$ сходится равномерно на компактах, и её нули — в точности a_j с учётом кратности.

Определим компакт $K := \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{|a_N|}{2}\right\}$, и покажем, что $\prod_{j \geq N} u_j(z)$ сходится равномерно на K .

$$u_j(z) = \exp\left(\log\left(1 - \frac{z}{a_j}\right) - \frac{z}{a_j} - \dots - \frac{1}{j-1}\left(\frac{z}{a_j}\right)^{j-1}\right) = \exp\left(\sum_{s \geq j} \frac{1}{s} \left(\frac{z}{a_j}\right)^s\right)$$

При этом $\log\left(1 - \frac{z}{a_j}\right)$ определён, так как $|z| < |a_j|$. Оценим

$$\left|\sum_{s \geq j} \frac{1}{s} \left(\frac{z}{a_j}\right)^s\right| \leq \left|\sum_{s \geq j} \left(\frac{z}{a_j}\right)^s\right| \leq \left|\sum_{s \geq j} \left|\frac{a_N}{2a_j}\right|^s\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

Убедимся, что ряд из логарифмов равномерно сходится:

$$\left|\sum_{j \geq N} \sum_{s \geq j} \frac{1}{s} \left(\frac{z}{a_j}\right)^s\right| \leq \sum_{j \geq N} \left(\frac{1}{2}\right)^j \leq 1$$

Получается, данное произведение $\prod_{j \geq 0} u_j(z)$ подходит. □

Лекция XI

26 апреля 2024 г.

1.11.2 Упрощённый вид множителей Вейерштрасса

Если известно, насколько быстро происходит стремление $|a_j| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$, то можно утверждать наличие сходимости и при множителях Вейерштрасса более простого вида.

1. Если $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{|a_n|} < \infty$, то никаких премудростей не надо: $\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right)$ сходится.

Доказательство. Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$, и рассмотрим компакт $K := \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{1}{2}a_N\right\}$. Надо доказать, что $\sum_{j \geq N} \log\left(1 - \frac{z}{a_j}\right)$ сходится.

Под логарифмом стоят выражения вида $1-t$, где $|t| \leq \frac{1}{2}$. Разложим в ряд и оценим: $\log(1-t) = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots = t \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \dots\right) \leq t \cdot C$, где $C := \sum_{n \geq 1} \frac{(1/2)^{n-1}}{n}$. Этой оценки достаточно: $\sum_{j \geq N} \left| \log \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) \right| \leq \sum_{j \geq N} C \left| \frac{z}{a_j} \right|$, что сходится равномерно по $z \in K$. \square

2. Если $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{|a_n|^2} < \infty$, то хватит первого члена при разложении логарифма в ряд: $\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) e^{\frac{z}{a_j}}$ сходится.

Доказательство. Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$, и рассмотрим компакт $K := \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{1}{2} a_N\right\}$. Надо доказать, что $\sum_{j \geq N} \log \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) \cdot \frac{z}{a_j}$ сходится.

Разложим в ряд и оценим: $\log(1-t)t = t^2 + \frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{3} + \dots = t^2 \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \dots\right) \leq t^2 \cdot C$, где $C := \sum_{n \geq 1} \frac{(1/2)^{n-1}}{n}$. Этой оценки достаточно: $\sum_{j \geq N} \left| \log \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) \frac{z}{a_j} \right| \leq \sum_{j \geq N} C \left| \frac{z}{a_j} \right|^2$, что сходится равномерно по $z \in K$. \square

Замечание. Понятно, что целая функция с данным мультимножеством нулей не единственна — можно взять любую другую целую функцию без нулей (скажем, экспоненту), и домножить на неё.

Следствие 1.11.1. Пусть $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — целая функция с бесконечным числом нулей, и g — произведение Вейерштрасса по нулям функции f (неважно, общего вида, или с упрощёнными множителями).

Тогда \exists целая $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$: $f = ge^h$.

Доказательство. $\frac{f}{g}$ — целая функция (там, где у g нули, у f — нули той же кратности, поэтому все особенности устранимы). По той же причине $\forall z \in \mathbb{C} : \frac{f}{g}(z) \neq 0$. Тем самым, у неё есть ветвь логарифма, выберем какую-то ветвь h , она как раз подходит. \square

Пусть G — область, f аналитична в G кроме некоторого множества полюсов. Такая функция называется *мероморфной в G* . Так как полюса по определению изолированы, то их не более, чем счётное количество.

Мероморфную в \mathbb{C} функцию называют мероморфной.

Следствие 1.11.2. f мероморфна $\iff \exists$ целые $g_1, g_2 : f = \frac{g_1}{g_2}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\frac{1}{f}$. Она не равна тождественно нулю.

Пусть g — произведение Вейерштрасса по нулям функции $\frac{1}{f}$, $g \cdot f$ — целая функция. \square

1.11.3 Разложение синуса в произведение

Разложим синус в произведение, построив произведение Вейерштрасса по его нулям. А где нули синуса? $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$.

$$\sin z = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1 \iff z \in \{j \cdot \pi \mid j \in \mathbb{Z}\}$$

Как видим, сумма обратных квадратов сходится, поэтому можно записать произведение Вейерштрасса в виде

$$z \cdot \prod_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{j\pi}\right) e^{\frac{z}{j\pi}}$$

где произведение берётся в порядке возрастания модулей j . Иными словами,

$$z \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\substack{j \leq N \\ j \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{j\pi}\right) e^{\frac{z}{j\pi}} = z \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right) = z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$$

Как мы выяснили, \exists целая $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : \sin(z) = e^{h(z)} z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$

Факт 1.11.1. $h \equiv 0$ подойдёт (понятно, что если это правда, то $2\pi ik$ для $k \in \mathbb{Z}$ тоже подойдёт).

Доказательство.

Замечание (О логарифмической производной). Пусть ϕ — аналитическая функция, как известно, её логарифмическая производная $\frac{\phi'}{\phi}$. Как видно из записи, она не зависит от того, какая ветвь логарифма где взята.

Если $\phi = \phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_k$, то несложно посчитать, что $\frac{\phi'}{\phi} = \frac{\phi'_1}{\phi_1} + \dots + \frac{\phi'_k}{\phi_k}$. Утверждается, что формула сохраняется и для бесконечного произведения.

Пусть произведение $\prod_{j=1}^{\infty} \phi_j(z)$ сходится равномерно на любом компакте, не содержащем нулей функций ϕ_j . Пусть K — такой компакт, то есть $(\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_n)(z) \rightrightarrows \phi(z)$ равномерно. Тогда $(\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_n)'(z) \rightrightarrows \phi'(z)$ на этом же компакте, и как следствие, $\frac{\phi'_1(z)}{\phi_1(z)} + \dots + \frac{\phi'_n(z)}{\phi_n(z)} = \frac{(\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_n)'(z)}{(\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_n)(z)} \rightrightarrows \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$

- Возьмём логарифмическую производную обеих частей равенства $\sin(z) = e^{h(z)} \cdot z \cdot \prod_{|j| \leq N, j \neq 0} \left(1 - \frac{z}{j\pi}\right)$:

$$\frac{\cos z}{\sin z} = h'(z) + \frac{1}{z} - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|j| \leq N, j \neq 0} \frac{1}{j\pi} \frac{1}{1 - \frac{z}{j\pi}} = h'(z) + \frac{1}{z} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|j| \leq N, j \neq 0} \frac{1}{z - j\pi}$$

Отлично, у нас имеется равномерная сходимост на компактах, продифференцируем ещё раз:

$$1 - \operatorname{ctg}(z)^2 = h''(z) - \frac{1}{z^2} - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|j| \leq N, j \neq 0} \frac{1}{(z - j\pi)^2}$$

- Проведём окружность Γ_k с центром в нуле, и радиусом $\pi(k + \frac{1}{2})$, и докажем, что h'' ограничена на Γ_k некоторой константой C , не зависящей от k .

Понятно $\frac{1}{z^2} \leq \frac{4}{\pi^2}$, оценим при $z \in \Gamma_k : \frac{1}{|z - j\pi|^2} \leq \frac{1}{(k + \frac{1}{2} - |j|)^2 \pi^2}$. Кажется, это не совсем правда, но может и вообще правда. Осталось оценить котангенс:

$$\operatorname{ctg}(z) = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

Раскладывая $z = x + iy$, получаем

$$|\operatorname{ctg}(z)| = \left| \frac{e^{-y} e^{ix} + e^y e^{-ix}}{e^{-y} e^{ix} - e^y e^{-ix}} \right|$$

Выберем $\varepsilon < \frac{\pi}{4}$, и оценим котангенс вблизи вещественной оси (периодичность и непрерывность котангенса в круге радиуса 2ε), и при $|y| \geq \varepsilon$:

$$\left| \frac{e^{-y} e^{ix} + e^y e^{-ix}}{e^{-y} e^{ix} - e^y e^{-ix}} \right| \leq \frac{e^y + e^{-y}}{|e^{-y} - e^y|} = \frac{e^y + e^{-y}}{e^{|y|} - e^{-|y|}} = \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{2y} - 1} \leq 1 + \frac{2}{e^{2\varepsilon} - 1}$$

- Тем самым, на Γ_k : h'' ограничена C , по принципу максимума h'' ограничена внутри круга этой же константой, значит, h'' вообще ограничена.

Согласно теореме Лиувилля, $h'' = \text{const}$, тем самым, $h(z) = A + Bz + Cz^2$ для некоторых $A, B, C \in \mathbb{C}$.

- Подставим $h(z) = A + Bz + Cz^2$:

$$\frac{\cos z}{\sin z} = B + 2Cz + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|j| \leq N} \frac{1}{z - j\pi}$$

Здесь все слагаемые 2π -периодичны, кроме $2Cz$. Вывод один: $C = 0$

- Теперь подставим $\frac{\sin z}{z} = e^{A+Bz} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$. В силу чётности $B = 0$.
- Обозначим $D := e^A \cdot \frac{\sin z}{z} = D \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$. Сопоставляя значения в 0, получаем $D = 1$.

□

Ура,

$$\sin z = z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$$

Попутно мы выяснили, что

$$\text{ctg}(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|j| \leq N} \frac{1}{z - j\pi} = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - j^2\pi^2}$$

Ещё немного преобразуем:

$$\frac{\text{ctg } z - \frac{1}{z}}{2z} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - j^2\pi^2}$$

Подставим $z \rightarrow 0$. Слева оказывается $\frac{z \cos z - \sin z}{2z^2 \sin z} = \frac{z - \frac{z^3}{2} - z + \frac{z^3}{6} + \mathcal{O}(z^5)}{2z^3 + \mathcal{O}(z^5)} = -\frac{1}{6} + o(1)$, а справа $-\frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$, образуя знаменитую формулу, выведенную Эйлером

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

1.11.4 Г-функция Эйлера

Хотим обобщить факториал в комплексной плоскости.

Построим аналитическую функцию f в некоторой области G (где G хочется побольше), такую, что

1. $z \in G \Rightarrow z + 1 \in G$.
2. $f(z + 1) = zf(z)$ — эта формула почему-то слегка отличается от той, что у факториала.
3. $1 \in G$ и $f(1) = 1$.

Для удовлетворяющей таким условиям функции f можно заметить, что $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = (n + 1)!$.

Дополнительно потребуем $\forall z \in G : f(z) \neq 0$, например, чтобы можно было спокойно писать $z = \frac{f(z+1)}{f(z)}$.

К сожалению, не всё возможно в этой жизни. Заведомо $0 \notin G$: если $0 \in G$, то $f(1) = f(0 + 1) = 0 \cdot f(0) = 0$. Далее первое условие влечёт, что $-1, -2, -3 \notin G$.

Положим $G := \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, и построим в этой области функцию с указанными свойствами, имеющую простые полюса в выколотых точках. Она не единственна, но сейчас мы увидим наиболее естественный кандидат.

Пусть f — такая. Положим $g := \frac{1}{f}$ — целая функция с простыми нулями в $\{0, -1, -2, \dots\}$. Построим g , используя множители Вейерштрасса (h — какая-то целая):

$$g(z) = ze^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

Теперь удовлетворим функциональное уравнение: $g(z+1) = \frac{g(z)}{z}$.

$$\begin{aligned} g(z) &= ze^{h(z)} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \frac{n+z}{n} e^{-\frac{z}{n}} \\ g(z+1) &= (z+1)e^{h(z+1)} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \frac{1+n+z}{n} e^{-\frac{z}{n} - \frac{1}{n}} \\ \frac{g(z+1)}{g(z)} &= \frac{z+1}{z} e^{h(z+1)-h(z)} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1+z}{1+z} e^{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\dots-\frac{1}{N} + \log N} e^{-\log N} \end{aligned}$$

Как доказывалось во II семестре, $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} - \log N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \gamma$ — *постоянная Эйлера — Маскерони*. Итак, от функции h хочется свойства

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} e^{h(z+1)-h(z)} e^{-\gamma}$$

Самым простым решением будет взять линейную функцию $h(z) = \gamma z$. Получили

$$g(z) = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

Проверим, что $g(1) = 1$:

$$\begin{aligned} g(1) &= e^{\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} = e^{\gamma} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (N+1)}{N!} e^{-1-\frac{1}{2}-\dots-\frac{1}{N}} = \\ &= e^{\gamma} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (N+1)}{N! \cdot N} e^{-1-\frac{1}{2}-\dots-\frac{1}{N} + \log N} = 1 \end{aligned}$$

Чудесным образом ничего подкручивать не пришлось.

Лекция XII

3 мая 2024 г.

Итак, определили

$$\Gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{z} e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \quad (*)$$

Замечание. Пусть ϕ — целая функция с периодом 1. Тогда $\Gamma \cdot \phi$ тоже подходит, как функция, удовлетворяющая трём условиям из (подраздел 1.11.4)

Немного преобразовав выражение для гамма-функции, можно получить следующее:

$$\Gamma(z) = e^{-\gamma z} \frac{1}{z} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{(1+z) \cdot \dots \cdot (N+z)} e^{z(1+\dots+\frac{1}{N})} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N! \cdot e^{z \log N}}{z \cdot (1+z) \cdot \dots \cdot (N+z)}$$

Также имеется так называемая *формула дополнения*:

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{1}{z^2} \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)} = -\frac{1}{z} \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Часто её записывают немного в другом виде, домножив на z , и воспользовавшись функциональным уравнением: $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$. Кстати, отсюда видно, чему равен «факториал» от половинки: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$.

Определим $g(z) := \frac{1}{\Gamma(z)}$, это целая функция с нулями в целых неположительных точках. Значит, у g имеется непрерывная ветвь логарифма в $\mathbb{C} \setminus (-\infty; 0]$. Одна из них равна

$$\log g(z) = \log z + \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \left(1 + \frac{z}{n} \right) - \frac{z}{n} \right)$$

Про эту ветвь даже можно утверждать, что она главная, так как у неё, как и у гамма-функции, значения на вещественной оси вещественные. Дифференцируя $\log g(z)$, получаем

$$(\log(g(z)))' = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{z}{n}} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right)$$

Таким образом, $(\log \Gamma(z))' = -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right)$, и

$$(\log \Gamma(z))'' = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2} \quad (\star)$$

Следствие 1.11.3. На $\mathbb{R}_{>0}$: $\log \Gamma(z)$ есть выпуклая функция.

Теорема 1.11.2. Пусть ϕ — непрерывная положительная функция на $\mathbb{R}_{>0}$, $\phi(1) = 1$, и ϕ удовлетворяет функциональному уравнению: $\forall x \in \mathbb{R}_{>0} : x\phi(x) = \phi(x+1)$. Если $\log \phi$ выпукла, то $\forall x > 0 : \phi(x) = \Gamma(x)$.

Доказательство. В целых точках $\phi(n) = (n+1)!$, и достаточно доказать, что $\phi(x) = \Gamma(x)$ при всех $x \in (0, 1)$, функциональное уравнение влечёт равенство в остальных точках.

Определим $g(x) := \log \phi(x)$, тогда функциональное уравнение переписывается в виде $g(x+1) - g(x) = \log x$. Из выпуклости $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1, \forall x \in (0, 1)$:

$$\underbrace{\frac{g(n-1) - g(n)}{(n-1) - n}}_{\log(n-1)} \leq \frac{g(n+x) - g(n)}{(n+x) - n} \leq \underbrace{\frac{g(n+1) - g(n)}{(n+1) - n}}_{\log(n)}$$

Преобразуем средний член неравенства:

$$g(x+n) - g(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(g(x+k+1) - g(x+k) \right) + g(x) - g(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \log(x+k) + g(x) - \log((n-1)!)$$

Выражая $g(x)$, получаем

$$x \log(n-1) - \sum_{k=0}^{n-1} \log(x+k) + \log((n-1)!) < g(x) < x \log(n) - \sum_{k=0}^{n-1} \log(x+k) + \log((n-1)!)$$

Разность между левой и правой частями $x \log(n-1) - x \log(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Понятно, что $g(x) = \log \Gamma(x)$ подходит, так как удовлетворяет посылке теоремы, и так как разность между пределами стремится к нулю, то в пересечении всего одна точка. Тем самым, $g(x)$ определена однозначно. \square

1.11.5 Эйлеров интеграл

Определим

$$\Psi(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{C}$$

Когда Ψ определена, а интеграл сходится? Разложим $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$. Теперь $\Psi(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{x-1} t^{iy} dt$. На $+\infty$ экспонента мажорирует остальные члены, в нуле имеется особенность, и интеграл суммируем, если $x > 0$.

Тем самым, $\Psi(z)$ определена при $\Re z > 0$.

Теорема 1.11.3. $\Psi(z) = \Gamma(z)$ при $z > 0$.

Доказательство.

- Ясно, что $\Psi(z) > 0$ при $z \in \mathbb{R}_{>0}$.
- Ψ аналитична при $\Re z > 0$, так как можно продифференцировать под знаком интеграла: производная суммируема.
- $\Psi(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = (-e^{-t})|_0^{\infty} = 1$.
- Убедимся, интегрируя по частям, что $x\Psi(x) = \Psi(x+1)$

$$\Psi(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = - \int_0^{\infty} t^x d(e^{-t}) dt = - (t^x e^{-t})|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt = x\Psi(x)$$

- Убедимся, что $\log \Psi$ выпукла на вещественной оси: $\forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}, \forall \alpha, \beta \in [0, 1], \alpha + \beta = 1$:

$$\log \Psi(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \log \Psi(x) + \beta \log \Psi(y)$$

$$\Psi(\alpha x + \beta y) \leq \Psi(x)^\alpha \Psi(y)^\beta$$

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha x + \beta y - 1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} (t^{x-1})^\alpha \cdot (t^{y-1})^\beta e^{-t} dt$$

что верно по неравенству Гёльдера.

- Согласно теореме единственности (теорема 1.11.2), $\Psi(z) = \Gamma(z)$ при $\Re z > 0$. □

В частности,

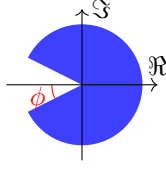
$$\sqrt{\pi} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \left\| \frac{t = x^2}{dt = 2x dx} \right\| = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

1.11.6 Формула Стирлинга

На первом курсе мы доказали, что $\exists c \in \mathbb{R} : n! \sim c\sqrt{n}n^n e^{-n}$. Так как гамма-функция определена со сдвигом, то будем преобразовывать выражение для $(n-1)!$:

$$\begin{aligned} (n-1)! &\sim c\sqrt{n-1}(n-1)^{n-1}e^{-n+1} = ce^{\frac{1}{\sqrt{n-1}}}(n-1)^ne^{-n} = \\ &= ce^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n n^ne^{-n} \sim c\frac{1}{\sqrt{n}}n^ne^{-n} \end{aligned}$$

Теорема 1.11.4. Пусть $\phi > 0$. Для $\{z \in \mathbb{C} | \arg z \in (-\pi + \phi, \pi - \phi)\}$, то есть из области без угла:



$$\log(\Gamma(z)) = \log \sqrt{2\pi} + \log \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} - z + z \log z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

Здесь логарифм и корень определены в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$, вещественные на вещественной оси. Потенцируя, получаем $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} e^{-z} e^{z \log z}$

Доказательство. Будем использовать (\star) . Положим $\phi(t) := \frac{1}{(t+z)^2}$, и приблизим $\sum_{n=1}^{\infty} \phi(n)$ интегралом. Оценим, что при замене погрешность не очень большая:

$$\phi(n) - \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \phi(t) dt = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\phi(n) - \phi(t)) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (2\phi(n) - \phi(n+t) - \phi(n-t)) dt$$

Тем самым, $\phi(n) = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \phi(t) dt + \int_0^{\frac{1}{2}} (2\phi(n) - \phi(n+t) - \phi(n-t)) dt$, и согласно (\star) :

$$(\log \Gamma(z))'' = \frac{1}{z^2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{(t+z)^2} dt}_{\int_{1/2}^{\infty} \frac{1}{(t+z)^2} dt = \frac{1}{1/2+z}} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{(n+z)^2} - \frac{1}{(n+z+t)^2} - \frac{1}{(n+z-t)^2} \right) dt$$

Дважды почленно возьмём первообразную обеих частей, пока не заботясь вопросами сходимости:

$$\begin{aligned} (\log \Gamma(z))' &\stackrel{?}{=} A - \frac{1}{z} + \log \left(z + \frac{1}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z+t} + \frac{1}{n+z-t} - \frac{2}{n+1} \right) \\ \log(\Gamma(z)) &\stackrel{?}{=} B + Az - \log z + \log \left(z + \frac{1}{2} \right) \left(z + \frac{1}{2} \right) - z + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \log \frac{(n+z)^2 - t^2}{(n+z)^2} dt \end{aligned}$$

Так как z бегает в области без угла, то $|n+z| \geq n \sin(\phi)$. Таким образом, $\log \left(1 - \frac{t^2}{(n+z)^2} \right)$ оценивается сверху конкретным числом, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \log \left(1 - \frac{t^2}{(n+z)^2} \right)$ сходится абсолютно и равномерно. В частности, сходится равномерно на компактах, значит, его можно дважды продифференцировать почленно, получится $(\log \Gamma(z))''$. Вопросы сходимости решены, $\stackrel{?}{=}$ можно заменить на $=$. Оценим остаток:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \log \left(1 - \frac{t^2}{(n+z)^2} \right) dt \leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+|z|)^2} \leq C_2 \frac{1}{|z|}$$

Заметим, что $\log \left(z + \frac{1}{2} \right) - \log(z) = \log \left(1 + \frac{1}{2z} \right) = \frac{1}{2z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$, и преобразуем

$$\left(z + \frac{1}{2} \right) \log \left(z + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + z \log z + \frac{1}{2} \log z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

Тем самым,

$$\log(\Gamma(z)) = B + Az - \frac{1}{2} \log z + z \log z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

Осталось выяснить, чему равны константы A и B . Так как мы знаем для натуральных n , что $\Gamma(n) = (n-1)! \sim ce^{-n} \frac{1}{\sqrt{n}} n^n$ при $n \rightarrow \infty$, то $A = -1$.

Теперь запишем формулу дополнения $\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin(\pi z)}$. Так как Γ вещественна на вещественной оси, или из интегральной формулы, видно, что $\Gamma(z) = \overline{\Gamma(\bar{z})}$. Тем самым, при $y \in \mathbb{R}$:

$$|\Gamma(iy)|^2 = -\frac{\pi}{iy \sin(\pi iy)} = -\frac{2\pi}{y(e^{-y\pi} - e^{y\pi})} \sim \frac{2\pi}{ye^{y\pi}}$$

С другой стороны, $\Gamma(iy) \sim e^B e^{-iy} e^{-\frac{1}{2}(\log y + \frac{\pi}{2}i)} e^{iy(\log y + \frac{\pi}{2}i)}$, откуда $|\Gamma(iy)| = e^B \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{\pi}{2}y}$. Тем самым, $e^{2B} = 2\pi$, и так как $B \in \mathbb{R}$, то $B = \log \sqrt{2\pi}$ \square

Лекция XIII

10 мая 2024 г.

todo

Лекция XIV

17 мая 2024 г.

Почему продолжение вдоль пути можно заменить продолжением вдоль цепочки областей?

Функция $t \mapsto r(B_t)$ непрерывна, и всегда положительна, значит, $s := \min_{t \in [a, b]} r(B_t) > 0$. Выберем

$\delta > 0$, и поделим отрезок точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ таким образом, что $\text{osc}_{[t_j, t_{j+1}]} \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{|\gamma(x) - \gamma(y)| : x, y \in [t_j, t_{j+1}]\} < \delta$. Пусть δ настолько мало, что $|\gamma(u) - \gamma(v)| < \delta \Rightarrow |r(u) - r(v)| < \frac{s}{10}$.

Тогда цепочка кругов B_0, \dots, B_n с центрами в $\gamma(t_j)$ такова, что $B_j \cap B_{j+1} \neq \emptyset$. Понятно, что продолжения вдоль пути γ , и вдоль цепочки кругов B_0, \dots, B_n совпадают.

Теорема 1.11.5 (Продолжение вдоль пути единственно). Пусть D_t — элементы аналитических функций, образующие аналитическое продолжение вдоль γ с направляющей функцией ϕ . Аналогично \tilde{D}_t — элементы вдоль γ с функцией $\tilde{\phi}$.

Если $D_a = \tilde{D}_a$, то $\forall t \in [a, b] : D_t = \tilde{D}_t$ и $\phi(t) = \tilde{\phi}(t)$.

Доказательство. Покажем, что $\forall t \in [a, b] : \phi(t) = \tilde{\phi}(t)$. Так как $(B_a, f_a) = D_a = \tilde{D}_a = (\tilde{B}(a), \tilde{f}_a)$, то при τ , достаточно близких к a : $\phi(\tau) = f_a(\gamma(\tau)) = \tilde{f}_a(\gamma(\tau)) = \tilde{f}_a(\gamma(\tau))$, то есть в некоторой окрестности a : $\phi = \tilde{\phi}$.

Пусть $\eta = \sup \left\{ \tau_0 \in [a, b] \mid \forall \tau \in [a, \tau_0) : \phi(\tau) = \tilde{\phi}(\tau) \right\}$. Покажем, что $\eta = b$ от противного. Рассмотрим элементы $D_\eta = (B_\eta, f_\eta)$ и $\tilde{D}_\eta = (\tilde{B}_\eta, \tilde{f}_\eta)$. При достаточно близких $\tau < \eta$: $\phi(\tau) = \tilde{\phi}(\tau)$. Это множество — кусочек отрезка, имеющий предельную точку — значит, $f_\eta = \tilde{f}_\eta$, и $\phi = \tilde{\phi}$ в некоторой окрестности η . Тем самым, η не супремум. \square

Пусть $D = (B, f)$ — элемент аналитической функции в точке ζ .

Определение 1.11.2 ($z_0 \in \mathbb{C}$ — точка ветвления для полной аналитической функции, порождённой элементом D). Такая точка $z_0 \in \mathbb{C}$, что $\exists \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ — путь с началом и концом в ζ , такой, что $\text{Ind}_{z_0} \gamma \neq 0$, и имеется аналитическое продолжение элемента D вдоль γ в элемент $\tilde{D} \neq D$.

1.12 Рациональные и полиномиальные приближения

Будем приближать функцию рациональными функциями, то есть элементами $\mathbb{C}(t)$. Нам будет достаточно правильных дробей, то есть частных многочленов $\frac{p}{q}$, где $\deg p < \deg q$. Используя разложение на простейшие дроби, можно показать, что любая функция раскладывается в сумму дробей

вида $\frac{C_j}{(z-z_j)^k}$. Однако для приближений достаточно таких дробей, в которых степень знаменателя равна 1, так как можно немножко пошевелить множители в знаменателе, сделав их различными.

Определение 1.12.1 (Рациональная дробь). Рациональная функция $\sum_{j=1}^N \frac{C_j}{z-z_j}$.

Теорема 1.12.1 (Рунге). Пусть K — компакт на плоскости, f аналитична в окрестности K . Тогда она приближается рациональными дробями: $\forall \varepsilon > 0 : \exists R(z) = \sum_{j=1}^N \frac{C_j}{z-z_j}$ — рациональная дробь, такая, что все $z_j \notin K$, и $\sup_{z \in K} |f(z) - R(z)| \leq \varepsilon$.

Если $\mathbb{C} \setminus K$ связно, то $\forall \varepsilon > 0 : \exists p \in \mathbb{C}[z]$ — многочлен, точно так же приближающий $f : \sup_{z \in K} |f(z) - p(z)| \leq \varepsilon$.

Доказательство. Напомним, что для дифференцируемой функции $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ определены частные производные $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{\partial g}{\partial y} \right)$ и $\frac{\partial}{\partial z} g = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - i \frac{\partial g}{\partial y} \right)$.

Лемма 1.12.1 (Формула Помпейю, формула Грина, Коши — Грина...). Пусть $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$ — бесконечно дифференцируемая (в вещественном смысле) функция с компактным носителем. Тогда $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$\phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(\zeta)}{z - \zeta} d\lambda_2(\zeta)$$

Доказательство леммы.

Например, если ϕ — целая, то так как она из $\mathcal{D}(\mathbb{C})$, то по теореме Лиувилля она нуль, и интеграл тоже берётся от нуля.

Зафиксируем $z \in \mathbb{C}$. Пусть $R > 0$ настолько велико, что $\text{supp } \phi \subset B(z, R)$. Введём полярные координаты с центром в z : $\zeta - z = \rho e^{i\theta}$, где $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [0, \infty]$. (Имеется некоторая неоднозначность, но она на множестве меры нуль, что не вносит никакого вклада). Пусть $F(\rho, \theta) = \phi(\zeta) = \phi(z + \rho e^{i\theta})$.

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = F'_\rho \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}} + F'_\theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}}$$

Выразим $\bar{\zeta} - \bar{z} = \rho e^{-i\theta}$, откуда $\rho^2 = (\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z})$, и $\rho^{2i\theta} = \frac{\zeta - z}{\bar{\zeta} - \bar{z}}$. Дифференцируя по $\bar{\zeta}$, получаем

$$2ie^{2i\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left((\zeta - z) \cdot \frac{1}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \right) = (\zeta - z) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\bar{\zeta} - \bar{z}} = -\frac{(\zeta - z)}{(\bar{\zeta} - \bar{z})^2}$$

Деля $\frac{\partial \theta}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} i e^{-2i\theta} \frac{\zeta - z}{(\bar{\zeta} - \bar{z})^2} = \frac{1}{2} i e^{-2i\theta} \frac{\zeta - z}{\rho^2 e^{-2i\theta}}$. Так как $2\rho \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}} = \rho e^{i\theta}$, то $\frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{e^{i\theta}}{2}$.

Теперь осталось записать интеграл:

$$\phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\bar{\partial} \phi(z)}{z - \zeta} d\lambda_2(\zeta) = \dots \text{видимо, если взять интеграл, то сойдётся}$$

□

Теперь докажем теорему Рунге по модулю формулы.

f аналитична в окрестности K , то есть на открытом $U \supset K$. \exists компактное $V \subset U : K \subset \text{Int } V$. Введём функцию $h : V \cup (\mathbb{C} \setminus U) \rightarrow \mathbb{C}$, такую, что $h|_V = f, h|_{\mathbb{C} \setminus U} \equiv 0$, и продолжим её по теореме Титце — Урысона до некоторой непрерывной функции $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Подправим g до

дифференцируемой: $g_1 := g * \alpha_t$, где α_t — стандартная аппроксимативная единица, построенная по $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$.

При достаточно малом t : g_1 аналитична в окрестности K : можно продифференцировать $\int h(w - z)\alpha_t(z) dz$ по w под знаком интеграла. Выберем $\varepsilon > 0$, и будем считать, что $\sup_K |f - g_1| < \varepsilon$.

Запишем формулу

$$g_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial g_1}{\partial \bar{z}}(\zeta)}{z - \zeta} d\lambda_2(\zeta)$$

Подынтегральное выражение — не нуль на некотором компактном множестве S , отделённом от K некоторым расстоянием d .

Пусть $S = \bigsqcup_{j=1}^N S_j$, где $\text{diam } S_j < \varepsilon$, и выберем произвольно $\zeta_j \in S_j$, дальше положим $\lambda_j = \frac{1}{\pi} \int_{S_j} \frac{\partial g_1}{\partial \bar{z}}(\zeta) d\lambda_2(\zeta)$.

Утверждается, что $\sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j}{z - \zeta_j}$ хорошо приближает g_1 на K .

$\left| g_1(z) - \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j}{z - \zeta_j} \right| = \left| \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{S_j} \left[\frac{\frac{\partial g_1}{\partial \bar{z}}(\zeta)}{z - \zeta} - \frac{\frac{\partial g_1}{\partial \bar{z}}(\zeta)}{z - \zeta_j} \right] d\lambda_2(\zeta) \right| \leq C \sum_{j=1}^N \int_{S_j} |\bar{\partial} g_1(\zeta)| \cdot \frac{|\zeta - \zeta_j|}{|z - \zeta| \cdot |z - \zeta_j|} d\lambda_2(\zeta) \leq C' \sum_{j=1}^N |S_j|^{\frac{\varepsilon}{d^2}} = C'|S|^{\frac{\varepsilon}{d^2}}$ d фиксировано. Выбирая достаточно малый ε , получаем достаточно хорошее приближение. \square

Лемма 1.12.2 (Теорема Титце — Урысона). *X нормально. Замкнутое $Y \subset X$, всякая функция $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ продолжается до непрерывной $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$.*

Доказательство. Можно считать, что $-1 \leq f \leq 1$ всюду ($|f| \leq 1$).

Пусть $F_1 := \{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{3}\}$ и $F_{-1} := \{x \in X \mid f(x) \leq -\frac{1}{3}\}$. По теореме Урысона, $\exists g : X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, такая, что $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in F_1 \\ -\frac{1}{3}, & x \in F_{-1} \end{cases}$, и всюду $-\frac{1}{3} \leq g \leq \frac{1}{3}$.

Рассмотрим $f - g$ на Y . На $F_1 \cap Y$ значения лежат в $[0, \frac{2}{3}]$, на $F_{-1} \cap Y$ значения лежат в $[-\frac{2}{3}, 0]$, а на $Y \setminus (F_1 \cup F_{-1})$ — по неравенству треугольника значения лежат в $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$. Тем самым, $\sup_{t \in Y} |f(t) - g(t)| \leq \frac{2}{3}$. С другой стороны, $\sup_{t \in X} |g(t)| \leq \frac{1}{3}$.

Обозначим $g_1 := g$, и начнём итерироваться. Сначала найдётся g_2 , такая, что $|f(t) - g_1(t) - g_2(t)| \leq (\frac{2}{3})^2$ на Y , и $|g_2(t)| \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$ на X .

По индукции получим последовательность $g_j : |g_j(t)| \leq \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{3})^{j-1}$ и $|f(t) - g_1(t) - \dots - g_j(t)| \leq (\frac{2}{3})^j$.

Теперь видно, что $g(t) = \sum_{j \geq 1} g_j(t)$ подойдёт — ряд сходится равномерно, и $|g(t)| \leq \frac{2}{3} \sum_{k \geq 0} (\frac{1}{3})^k = 1$. \square

Факт 1.12.1 (Формула Коши — Грина). *Имеется область G с гладкой границей — набором путей $\Gamma = \{\gamma_j\}$, таких, что при обходе область остаётся слева.*

Пусть ϕ — гладкая функция в окрестности G . Тогда $\forall z \in G : f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_G \frac{\bar{\partial} f(\zeta)}{z - \zeta} d\lambda_2(\zeta)$