

# Матанализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков  
Конспектировал Леонид Данилевич

II семестр, весна 2023 г.

# Оглавление

0.1	Вокруг формулы Тейлора . . . . .	2
0.1.1	Достаточное условие существования локального экстремума . . . . .	2
0.1.2	Ряд Ньютона . . . . .	2
0.1.3	Формула Тейлора с остатком в интегральной форме . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Введение в многомерный анализ</b>	<b>5</b>
1.0.1	О геометрии пространства $\mathbb{R}^n$ . . . . .	5
1.0.2	О скалярных функциях $F : (U \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	11
1.0.3	Замечания про градиент . . . . .	15
1.1	Теорема об обратной функции . . . . .	16
1.2	Гладкие многообразия . . . . .	18
1.2.1	Касательные векторы . . . . .	18
1.2.2	Многообразия, вложенные в $n$ -мерное евклидово пространство . . . . .	20
1.2.3	Теорема о неявной функции . . . . .	21
1.3	Длина пути . . . . .	24
1.3.1	Длина гладкого пути . . . . .	27
1.4	Естественная параметризация . . . . .	28
1.5	Про комплексные числа . . . . .	29
1.5.1	Простое вращение . . . . .	30
1.5.2	Формулы Тейлора и ряд Тейлора для функций $\Gamma, \sin, \cos$ . . . . .	31
1.5.3	Обратные тригонометрические функции . . . . .	32
1.5.4	Формула Эйлера . . . . .	33
1.6	Дифференцирование высших порядков . . . . .	33
1.7	Формула Тейлора функции нескольких переменных . . . . .	35
1.7.1	Независимость частных производных от порядка дифференцирования . . . . .	36
<b>2</b>	<b>Несобственные интегралы и компания</b>	<b>38</b>
2.1	Одна из ситуаций . . . . .	38
2.2	Сравнение рядов и интегралов . . . . .	39
2.2.1	Частичные суммы гармонического ряда и постоянная Эйлера — Маскерони . . . . .	40
2.2.2	Формула Стирлинга . . . . .	40
2.3	Суммируемые семейства . . . . .	41
2.3.1	Применения . . . . .	44
2.4	Степенные ряды . . . . .	45
2.4.1	Признак Коши сходимости ряда . . . . .	45
2.4.2	Аналитические функции . . . . .	46
2.5	Дифференцировании по комплексному аргументу. Голоморфные функции . . . . .	47
2.5.1	Связь комплексного дифференцирования и двумерного дифференцирования . . . . .	47
2.6	Суммирование последовательностей и рядов . . . . .	49
2.6.1	Метод Чезаро . . . . .	49
2.6.2	Матричные методы суммирования. Метод Тёплица . . . . .	50
2.6.3	Метод Абеля — Пуассона . . . . .	51
2.7	Перестановка предельных переходов . . . . .	52
2.7.1	Применение . . . . .	54

<b>3</b>	<b>Выпуклые и вогнутые функции</b>	<b>58</b>
3.1	Бесконечные произведения . . . . .	62
3.1.1	О сходящихся произведениях . . . . .	63

# Лекция I

14 февраля 2023 г.

## 0.1 Вокруг формулы Тейлора

В данном разделе будет небольшое количество фактов, касающихся формулы Тейлора.

### 0.1.1 Достаточное условие существования локального экстремума

Пусть  $I = \langle a, b \rangle$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$ .

Как известно, если у  $f$  в  $x_0$  локальный экстремум, то  $f'(x_0) = 0$  (если производная в  $x_0$  вообще существует).

Иногда непонятно, экстремум является локальным максимумом или минимумом.

**Теорема 0.1.1.** Если функция  $f$  дифференцируема в некоторой окрестности  $x_0 \in (a, b)$ , причём  $\exists f'(x_0) = 0$  и  $\exists f''(x_0)$ , то

- если  $f''(x_0) > 0$ , то  $f$  имеет локальный минимум в  $x_0$ ;
- если  $f''(x_0) < 0$ , то  $f$  имеет локальный максимум в  $x_0$ .

*Доказательство.* Запишем формулу Тейлора для  $f$  в точке  $x_0$ :

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_0(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \alpha(x)$$

Запишем определение о-маленького:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : |\alpha(x)| < \varepsilon \cdot (x - x_0)^2$$

Рассмотрим случай  $f''(x_0) > 0$ . Получаем  $f(x) \geq f(x_0) + (\frac{1}{2}f''(x_0) - \varepsilon)(x - x_0)^2$  при  $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ . Приняв  $\varepsilon = \frac{1}{4}f''(x_0)$  получаем, что  $f(x)$  в достаточно маленькой проколотой окрестности  $x_0$  больше  $f(x_0)$ , откуда  $x_0$  — действительно точка локального минимума.  $\square$

### 0.1.2 Ряд Ньютона

Рассмотрим формулу Тейлора для  $h(x) := (1 + x)^r$  в окрестности 0, где  $r \in \mathbb{R}$ . Можно считать, что  $h$  определена на всех  $x > -1$ .

$$h^{(n)}(x) = r \cdot (r - 1) \cdot \dots \cdot (r - n + 1)(1 + x)^{r-n} \Rightarrow h^{(n)}(0) = r \cdot \dots \cdot (r - n + 1)$$

Запишем формулу Тейлора до  $x^k$  с остаточным членом в форме Лагранжа.

$$h(x) = \sum_{n=0}^k \frac{r \cdot \dots \cdot (r - n + 1)}{n!} x^n + \frac{r \cdot \dots \cdot (r - k)}{(k+1)!} (1 + \xi)^{r-k-1} \cdot x^{k+1}, \text{ где } \xi \in [0, x]$$

Для краткости обозначим  $\binom{r}{n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r \cdot \dots \cdot (r - n + 1)}{n!} x^n$ , что согласуется с определением биномиальных коэффициентов для натуральных чисел.

В таком случае формула упрощается до

$$h(x) = \sum_{n=0}^k \binom{r}{n} x^n + \binom{r}{k+1} (1 + \xi)^{r-k-1} \cdot x^{k+1}$$

Откинув остаточный член, получим *ряд Ньютона* — ряд Тейлора для функции  $(1 + x)^r$  в окрестности 0:  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$ .

**Факт 0.1.1.** Если  $|x| < 1$ , то ряд Ньютона сходится (к какому-то числу). Более того, для произвольного  $b \in (0, 1)$ , ряд сходится равномерно при  $x \in [-b, b]$ .

*Доказательство.* Оценим числа  $\left| \binom{r}{n} \right|$ . Из определения видно, что

$$\binom{r}{n+1} = \binom{r}{n} \cdot \frac{r-n}{n+1} = \binom{r}{n} \left( \frac{r+1}{n+1} - 1 \right)$$

1.  $n \leq r$ . Первые несколько слагаемых ряда, на сходимость не влияют.
2.  $n > r \geq 0$ . Здесь  $\left| \frac{r+1}{n+1} - 1 \right| < 1$ , откуда  $\left| \binom{r}{n} \right| \leq C_r^+$ , где  $C_r^+$  — максимальный биномиальный коэффициент  $\binom{r}{n}$  для  $n \leq r$ .
3.  $r < 0$ . Для любого  $\delta > 0$ :  $\left| \frac{r+1}{n+1} - 1 \right| < 1 + \delta$  при достаточно большом  $n$ . Зафиксируем  $\delta$  и назовём эту границу  $n_0$ . В этом случае, обозначив за  $C_r^-$  максимальный биномиальный коэффициент  $\binom{r}{n}$  при  $n \leq n_0$ , получаем

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left| \binom{r}{n} \right| \cdot |x|^n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} C_r^- (1 + \delta)^{n-n_0} \cdot b^n$$

Выбрав настолько маленькое  $\delta$ , что  $(1 + \delta)b < 1$ , получаем равномерную сходимость — ряд оценивается сверху геометрической прогрессией.  $\square$

### 0.1.3 Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

**Теорема 0.1.2.** Пусть  $I$  — отрезок,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $n + 1$  раз непрерывно дифференцируема на  $I$ . Для произвольных  $l, h \in I$ :

$$f(h) = \underbrace{f(l) + \frac{f^{(1)}(l)}{1!}(h-l) + \frac{f^{(2)}(l)}{2!}(h-l)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(l)}{n!}(h-l)^n}_{\text{стандартные слагаемые}} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_l^h f^{(n+1)}(t) \cdot (h-t)^n dt}_{\text{остаток в интегральной форме}}$$

*Доказательство.* Индукция по  $n$ .

База:  $n = 0$ ,  $f$  1 раз непрерывно дифференцируема. Формула Тейлора обращается в  $f(h) = f(l) + \int_l^h f'(t) dt$  — очевидно верно.

Переход: Доказываем для  $n + 1$ , считая, что для  $n$  уже доказано.  $f \in C^{(n+2)}(I)$ . Запишем остаток в интегральной форме для формулы Тейлора порядка  $n$ .

$$s := \frac{1}{n!} \int_l^h f^{(n+1)}(t) \cdot (h-t)^n dt = -\frac{1}{n!} \int_l^h f^{(n+1)}(t) \cdot d\left((h-t)^{n+1} \cdot \frac{1}{n+1}\right) =$$

проинтегрируем по частям

$$= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \cdot (h-t)^{n+1} \Big|_{t=l}^{t=h} + \frac{1}{(n+1)!} \int_l^h (h-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt$$

Видим, что если подставить пределы интегрирования, то как раз и получится необходимое:

$$s = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(l) \cdot (h-l)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_l^h (h-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \quad \square$$

Оценим остаток в интегральной форме, заменив переменную под интегралом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \int_l^h f^{(n+1)}(t) \cdot (h-t)^n dt = \\ & \left\| t = l + (h-l)w = hw + l(1-w); \quad h-t = (h-l)(1-w) \right\| \\ & = \frac{(h-l)^n}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(hw + l(1-w)) \cdot (1-w)^n dw \end{aligned}$$

В частности, при  $l = 0$ , формула упрощается до  $s = \frac{h^n}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(hw)(1-w)^n dw$ .

**Теорема 0.1.3.** Ряд Ньютона сходится к  $(1+x)^r$  на  $(-1, 1)$ . Если  $r > 0$ , то в точке  $x = 1$  сходимость тоже наблюдается.

*Доказательство.* Применим формулу Тейлора с интегральным остатком к  $(1+x)^r$ :

$$(1+x)^r = \left( \sum_{k=0}^n \binom{r}{k} x^k \right) + s \quad \text{где } s = \frac{1}{n!} \cdot (r \cdot \dots \cdot (r-n)) \int_0^1 (1+xw)^{r-n-1} (1-w)^n dw$$

Для доказательства теоремы необходимо и достаточно показать  $s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

1. Пусть  $x \in [0, 1]$ ,  $n > r$ . В таком случае  $(1+xw)^{r-n-1} < 1$  и интеграл можно оценить сверху:

$$\int_0^1 (1+xw)^{r-n-1} (1-w)^n dw \leq \int_0^1 (1-w)^n dw = -\frac{1}{n+1} (1-w)^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

(a) Если здесь  $r \geq 0$ , то  $\left| \frac{r \cdot \dots \cdot (r-n)}{n!} \right| \leq C_r^+$ , и действительно  $s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

(b) Если здесь  $r < 0$ , то считаем, что  $x \in [0, 1)$ , тогда  $\left| \frac{r \cdot \dots \cdot (r-n)}{n!} \right| \leq C_r^- \cdot (1+\delta)^n$ , где  $\delta > 0$  можно выбирать сколь угодно близким к нулю. Выбрав  $\delta$  так, что  $x(1+\delta) < 1$ , мы тоже увидим, что  $s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

2. Теперь пусть  $x \in (-1, 0]$ .

$$\text{Обозначим } I = \int_0^1 (1+xw)^{r-n-1} (1-w)^n dw = \int_0^1 (1+xw)^{r-1} \cdot \left( \frac{1-w}{1+xw} \right)^n dw.$$

Для данного  $r$  оценим  $|(1+xw)^{r-1}| \leq C_r(x)$ . Тогда  $|I| \leq C_r(x) \cdot \int_0^1 \left( \frac{1-w}{1+xw} \right)^n dw$ . Воспользуемся тем, что  $\left( \frac{1-w}{1+xw} \right) \leq 1 - w(1-|x|)$  (проверка раскрытием скобок):

$$1-w \leq (1-|x|w)(1-w(1-|x|)) = 1-|x|w - w + |x|w^2 + w|x| - w^2|x|^2 = 1-w + |x|(1-|x|)w^2$$

Таким образом

$$\begin{aligned} |I| & \leq C_r(x) \int_0^1 (1-w(1-|x|))^n dw = C_r(x) \cdot \frac{-1}{1-|x|} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (1-w(1-|x|))^{n+1} \Big|_{w=0}^{w=1} = \\ & = \frac{1}{n+1} \cdot C_r(x) \frac{1-|x|^{n+1}}{1-|x|} \end{aligned}$$

Опять получаем  $s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

□

# Глава 1

## Введение в многомерный анализ

### Лекция II

17 февраля 2023 г.

Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  — открытое подмножество, дана некоторая функция

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Рассмотрим некую точку  $x \in G$ .

**Определение 1.0.1** ( $f$  дифференцируема в точке  $x$ ).  $\exists L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейное отображение (оператор), такое, что

$$f(y) - f(x) = L(y - x) + o(|y - x|)$$

#### 1.0.1 О геометрии пространства $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ раз}}$ .  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_j \in \mathbb{R}\}$  — состоит из *точек* или *векторов*. Сумма векторов, умножение вектора на число понятны; рассмотрим скалярное произведение двух элементов  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

$$\langle x, y \rangle \stackrel{\text{def}}{=} x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

**Свойства:**

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ .
- Линейность по каждому аргументу:  $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle$ .
- $\langle x, x \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ . Число не меньше 0, равенство достигается, когда все координаты нулевые.

**Определение 1.0.2** (Длина вектора).

$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

- Неравенство Коши — Буняковского — Шварца (КБШ)

$$\langle x, y \rangle \leq |x| \cdot |y|$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $t \in \mathbb{R}$ . Запишем  $\langle x + ty, x + ty \rangle \geq 0$ .

$$\langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle \geq 0$$

Если  $y = 0$ , то исходное неравенство очевидное; иначе выше написан квадратный трёхчлен, который неотрицателен, то есть его дискриминант не превышает 0:  $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$ .  $\square$

**Следствие 1.0.1** (Неравенство треугольника для длины).  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : |x + y| \leq |x| + |y|$ .

*Доказательство.*

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$$

□

- Введём метрику:  $d(x, y) = |x - y|$ . Несложно проверить всё три свойства, которым функция должна удовлетворять, чтобы быть метрикой. В том числе неравенство треугольника:

$$d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|$$

- Метрика инвариантна относительно сдвига; при домножении всех координат на одно и то же число, метрика тоже умножается на это число.

**Факт 1.0.1.** Пусть  $u, u^{(k)} \in \mathbb{R}^n$  (где  $k \in \mathbb{N}$ ).

*Условие*

$$\left| u - u^{(k)} \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

означает покомпонентную сходимость.

*Доказательство.* Несложно оценить из неравенства  $x - y \leq |x_i - y_i|$  — расстояние хотя бы разность координатных проекций. □

Стандартный базис векторов в  $\mathbb{R}^n$  :  $e_j = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_j, \dots, 0)$ .

**Определение 1.0.3** ( $x, y \in \mathbb{R}^n$  ортогональны).  $\langle x, y \rangle = 0$ .

**Лемма 1.0.1.** Если  $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$  все ненулевые и попарно ортогональны, то они линейно независимы.

*Доказательство.* Рассмотрим вещественные числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ .

$$x := \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$$

Заметим, что  $\langle u_i, x \rangle = \alpha_i |u_i|^2$ .

Таким образом, если  $x \in \langle u_1, \dots, u_m \rangle$ , то его коэффициенты в линейной комбинации равны  $\frac{\langle x, u_j \rangle}{|u_j|^2}$ . □

Если векторы  $u_j$  имеет единичную длину, то эти коэффициенты равны  $\langle x, u_j \rangle$ .

**Определение 1.0.4** (Система векторов называется ортонормированной).  $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j}$ .

**Теорема 1.0.1.** Пусть  $E$  — линейное подпространство в  $\mathbb{R}^n$ ,  $d = \dim(E)$ . Тогда в  $E$  существует ортонормированная система из  $d$  векторов.

*Доказательство.* Будем действовать по индукции. Пусть на  $k$ -м шаге построена ортонормированная система из  $k$  векторов  $u_1, \dots, u_k$ .

Если  $k < d$ , то  $\exists v \in E \setminus E_k$ , где  $E_k = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ .

Тогда вектор  $\tilde{v} = v - (\langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_k \rangle u_k) \in E \setminus E_k$  тоже; несложно проверить, что  $\tilde{v}$  ортогонален всякому вектору из  $u_1, \dots, u_k$ .

Теперь возьмём пропорциональный ему вектор, длины 1, и добавим в ортонормированную систему. □



Построенная система — линейно независима, называется ортонормированным базисом пространства.

Если рассмотреть разложение векторов  $x, y$  по ортонормированному базису, то скалярное произведение будет вычисляться по прежней формуле. *Линейное подпространство евклидова пространства евклидово.*

Пусть  $L_1, L_2$  — линейные пространства. Отображение  $T : L_1 \rightarrow L_2$  называется линейным оператором, если оно линейно.

### Ортогональный проектор на подпространство

**Теорема 1.0.2.** Пусть  $E$  — линейное подпространство в  $\mathbb{R}^n$ . Для всякого  $x \in \mathbb{R}^n : \exists! a, b \in \mathbb{R}^n : a \in E, b \perp E \wedge x = a + b$ .

*Доказательство.*

- Единственность: вычтем соответствующие разложения, если они вдруг не единственны. Получим с одной стороны вектор из  $E$ , а с другой стороны — ему перпендикулярный.
- Разложим по ортонормированному базису с помощью скалярных произведений.  $\square$

**Определение 1.0.5** (Ортогональный проектор). Отображение, сопоставляющее вектору  $x$  этот самый вектор  $a \in E$ .

## Лекция III

21 февраля 2023 г.

Можно рассмотреть такое определение проектора: линейное отображение  $T : L \rightarrow L$ , такое что  $T(L) = R$  и  $T|_R = \text{id}_R$ .

Отсюда сразу получается  $T^2 = T$ , что тоже можно взять за определение, а не за свойство.

Таким свойствам удовлетворяет, например, ортогональный проектор  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ , такой, что  $(x - Px) \perp Px$ .

Для подпространства  $E \subset \mathbb{R}^n$  можно определить ортогональное дополнение  $E^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n | y \perp E\} = \text{Ker } P$ .

Очевидно, что  $(I - P)$  — ортогональный проектор на  $E^\perp$ , где  $I$  — тождественный оператор.

Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  — открытое множество, а  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  — произвольное отображение.

Для точки  $x \in G$  говорят, что  $F$  дифференцируема в точке  $x$ , если  $\exists T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейный оператор, такой, что  $F(y) - F(x) = T(x - y) + o(|x - y|)$ .

Для пущей строгости можно записать

$$F(y) - F(x) = T(x - y) + \alpha(x - y)$$

где  $\alpha : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$  для некой окрестности нуля  $U_0$ , причём  $|\alpha(v)| = o(|v|)$ . Так как теперь  $|\alpha(v)|$  и  $|v|$  — скалярные величины, то записывать  $o$ -малое точно корректно.

Оператор  $T$  называют дифференциалом (дифференциальным отображением)  $F$  и записывают  $dF(x, \cdot) = dF_x(\cdot)$ . Заметим, что определение полностью согласуется с определением одномерного дифференциала.

Прежде всего рассмотрим несколько свойств линейных операторов.

Пусть  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линеен. Обозначим  $\{e_j\}_{j=1}^n$  — ортонормированный базис пространства  $\mathbb{R}^n$ , а  $\{g_k\}_{k=1}^m$  — ортонормированный базис  $\mathbb{R}^m$ .

По определению базиса  $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ , откуда конечно же по линейности  $Tx = \sum_{j=1}^n x_j \cdot T e_j$ .

С другой стороны  $Te_j = \sum_{k=1}^m a_{k,j} g_k$ , как разложения  $Te_j$  по стандартному базису  $g$ .

Итого получаем  $Tx = \sum_{k=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j \right) g_k$ , где  $a_{k,j}$  — матрица отображения  $T$ .

**Следствие 1.0.2.**  $T$  — непрерывное (покомпонентная сходимость) отображение  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

На самом деле выполняется условие, намного более сильное, чем просто непрерывность:

**Предложение 1.0.1.**  $T$  удовлетворяет условию Липшица:  $\exists A \in \mathbb{R} : \forall u, v \in \mathbb{R}^n : |Tu - Tv| \leq A|u - v|$ .

Эквивалентная запись:  $\forall x \in \mathbb{R}^n : |Tx| \leq A|x|$ .

*Доказательство.*  $|Tx|^2 = \sum_{k=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j \right)^2 \leq_{\text{КБШ}} \sum_{k=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{k,j}^2 \right) \left( \sum_{j=1}^m x_j^2 \right) = |x|^2 \sum_{k,j} a_{k,j}^2$ .

Теперь видно, что условие Липшица действительно выполняется, для  $A = \sqrt{\sum_{k,j} a_{k,j}^2}$ . □

Полученная константа  $A$  редко бывает самой плотной оценкой, а плотная оценка очень интересна, хотя и сложно вычислима.

Определим её. Пусть  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейный оператор.

**Определение 1.0.6** (Норма оператора  $T$ ).  $\|T\| \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ A \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}^n : |Tx| \leq A|x| \right\}$ .

**Предложение 1.0.2.**  $\|T\| = \sup \left\{ |Tx| \mid |x| \leq 1 \right\} = \sup \left\{ |Tx| \mid |x| = 1 \right\}$ .

*Доказательство.* Очевидно, супремумы достигаются из компактности и теоремы Вейерштрасса. Обозначим  $\alpha = \sup \left\{ |Tx| \mid |x| \leq 1 \right\}$ ;  $\beta = \sup \left\{ |Tx| \mid |x| = 1 \right\}$ ;  $\gamma = \|T\|$ .

Заметим, что в определении нормы можно  $\inf$  заменить на  $\min$ , так как в нестрогом неравенстве можно перейти к пределу.

Несложно видеть из определения, что  $\beta \leq \alpha \leq \gamma$ . Докажем, что  $\gamma \leq \beta$ .

Докажем, что  $\forall x \in \mathbb{R}^n : |Tx| \leq \beta|x|$ .

- Если  $x = 0$ , то неравенство очевидно верно.
- Если  $x \neq 0$ , то  $\left| \frac{x}{|x|} \right| = 1$ , и можно применить к нему определение  $\beta$ :

$$T \left( \frac{x}{|x|} \right) \leq \beta \Rightarrow Tx \leq \beta|x| \quad \square$$

**Факт 1.0.2.** Из линейности  $T$  можно брать супремум (но он уже не будет достигаться) и по открытому шару тоже:  $\|T\| = \sup \left\{ |Tx| \mid |x| < 1 \right\}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим точку  $x$  на сфере, где равенство выполняется с точностью до  $\varepsilon$ , немного отступим от неё. □

**Теорема 1.0.3** (Свойства нормы).

1.  $\|T\| = 0 \iff \forall x : Tx = 0$ .
2.  $\|aT\| = |a| \cdot \|T\|$
3.  $\|T_1\| + \|T_2\| \geq \|T_1 + T_2\|$ .

*Доказательство.*

$$\|T_1 + T_2\| = \sup_{|x| \leq 1} |(T_1 + T_2)(x)| = \sup_{|x| \leq 1} |T_1(x) + T_2(x)| \leq \sup_{|x| \leq 1} |T_1(x)| + |T_2(x)| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$$

□

Введём метрику  $\rho(T_1, T_2) = \|T_1 - T_2\|$ .

Эта метрика задаёт отнюдь не новую топологию на пространстве линейных операторов. Чтобы это увидеть, перейдём к матрицам линейных отображений.

Воспользовавшись оценкой  $\|T\| \leq \sqrt{\sum_{k,j} (a_{k,j})^2}$  мы сразу видим, что поэлементная сходимость матриц влечёт стремление  $\sqrt{\sum_{k,j} (a_{k,j} - b_{k,j})^2} \rightarrow 0$ , то есть нормы близких матриц близки. Обратное тоже верно — если норма разности операторов стремится к нулю, то их матрицы покомпонентно сходятся.

$Te_j = \sum_{k=1}^m a_{k,j} g_k$ , откуда можно извлечь коэффициенты матрицы:  $a_{k,j}(T) = \langle Te_j, g_k \rangle$ .

Обозначим  $|||T||| = \sqrt{\sum_{k,j} a_{k,j}(T)^2}$ .

**Факт 1.0.3.**  $|a_{k,j}(T)| \leq \|T\| \leq |||T|||$ .

**Теорема 1.0.4.**  $T_s, T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (где  $s \in \mathbb{N}$ ) — линейные операторы. Следующие условия эквивалентны:

- $|||T_s - T||| \rightarrow 0$ .
- $\|T_s - T\| \rightarrow 0$ .
- $\forall k, j : a_{k,j}(T_s - T) \rightarrow 0$ .

*Доказательство.* Собрать факты выше. □

Так как  $|||T|||$  — длина вектора в  $\mathbb{R}^{nm}$ , то можно считать, что пространство операторов тоже евклидово.

**Предложение 1.0.3.** Пусть  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^m \xrightarrow{S} \mathbb{R}^l$ , где  $T, S$  — линейные операторы. Тогда  $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$ .

*Доказательство.*  $\forall x \in \mathbb{R}^n : |(S \circ T)(x)| \leq \|S\| \cdot |Tx| \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot |x|$ . □

*Замечание.* В будущем часто при композиции линейных операторов будет записываться, как произведение, в том числе слитно  $(ST)$ .

Оценим снизу норму инъективных линейных операторов.

$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейный оператор — инъективен, если  $\text{Ker } T = \{0\}$ . Очевидно, необходимым условием является  $m \geq n$ .

**Теорема 1.0.5.** Следующие условия эквивалентны:

1.  $\text{Ker } T = \{0\}$ .
2.  $\exists m > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n : |Tx| \geq m|x|$ .

*Доказательство.*

$\Leftarrow$ . Очевидно.

$\Rightarrow$ . Рассмотрим единичную сферу  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ . Она компактна, так как ограничена и замкнута.

Введём непрерывную функцию  $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}; \phi(x) = |Tx|$ . Очевидно,  $\forall x \neq 0 : \phi(x) > 0$ .

По теореме Вейерштрасса  $\phi$  где-то достигает своё наименьшее значение. Пусть  $m = \min_{x \in S} \phi(x)$ , причём  $m = \phi(x_0)$ . Тогда  $\left| T \left( \frac{x}{|x|} \right) \right| \geq m \Rightarrow |Tx| \geq m|x|$ .  $\square$

*Другой вариант доказательства.* Пусть  $E = T(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$  — евклидово подпространство.

$E$  само евклидово, можно считать, что  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — биекция. Тогда обратное к  $T$  — тоже линейный оператор, значит, у него есть норма, то есть  $\forall y \in E : \exists C \in \mathbb{R} : |T^{-1}y| \leq C|y|$ .

Собственно, это и требовалось доказать.  $\square$

## Лекция IV

28 февраля 2023 г.

В терминах  $\varepsilon$  и  $\delta$  дифференцируемость можно записать так:

Для функции  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , заданной на открытом множестве  $U$  и точки  $x_0 \in U$ :

$\exists A$  — линейный оператор, такой, что  $\forall x \in U : F(x) = F(x_0) + A(x - x_0) + o(|x - x_0|)$

Определим  $\phi(x) = F(x) - F(x_0) - A(x - x_0)$ , определённую на  $U$ .

Необходимым и достаточным условием является  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall x \in U : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\phi(x)| \leq \varepsilon \cdot |x - x_0|$ .

**Факт 1.0.4.** Если  $F$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то  $F$  непрерывна в точке  $x_0$ . Более того, выполняется локальное условие Липшица:

$$\exists C \in \mathbb{R} : |F(x) - F(x_0)| \leq C|x - x_0| \text{ при достаточно малом } x - x_0$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= A(x - x_0) + \phi(x) \Rightarrow \\ |F(x) - F(x_0)| &\leq \|A\| \cdot |x - x_0| + \varepsilon \cdot |x - x_0| = (\|A\| + \varepsilon) \cdot |x - x_0| \end{aligned} \quad \square$$

**Предложение 1.0.4.** У данной функции  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  в данной точке  $x_0 \in U$  существует не более одного дифференциала.

*Доказательство.* От противного: нашлись  $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — дифференциалы  $F$  в  $x_0$ .

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= A(x - x_0) + o(|x - x_0|) \\ F(x) - F(x_0) &= B(x - x_0) + o(|x - x_0|) \\ &\Downarrow \\ (B - A)(x - x_0) &= o(|x - x_0|) \end{aligned}$$

Положим  $C = B - A$ . Если  $C \neq 0$ , то  $\exists h \in \mathbb{R}^n : C(h) \neq 0$ .

Рассмотрев  $t \in \mathbb{R}$ , получаем  $C(h) = \frac{C(th)}{t \cdot |h|} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ , противоречие.  $\square$

*Примеры* (Простейшие дифференцируемые отображения).

- Постоянное отображение (дифференциал — 0).
- Линейное отображение (дифференциал совпадает с самим отображением).

**Теорема 1.0.6** (О композиции дифференцируемых отображений). Пусть  $U \in \mathbb{R}^n, V \in \mathbb{R}^m$  — открытые множества.

При данных отображениях  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  и  $G : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ , таких, что  $F(U) \subset V$ , выберем точки  $x_0 \in U$  и  $y_0 = F(x_0)$ .

При сделанных предположениях, если  $F$  дифференцируема в  $x_0$  с дифференциалом  $A$ ,  $G$  дифференцируема в  $y_0$  с дифференциалом  $B$ , то  $G \circ F$  дифференцируема в  $x_0$  с дифференциалом  $BA$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_0) + A(x - x_0) + \phi(x), & |\phi(x)| &= o(|x - x_0|) \\ G(y) &= G(y_0) + B(y - y_0) + \psi(y), & |\psi(y)| &= o(|y - y_0|) \\ \text{подставим } y &:= F(x), y_0 := F(x_0) & (\text{область определения позволяет}) \\ (G \circ F)(x) &= (G \circ F)(x_0) + B(F(x) - F(x_0)) + \psi(F(x)) \\ (G \circ F)(x) &= (G \circ F)(x_0) + BA(x - x_0) + B(\phi(x)) + \psi(F(x)) \end{aligned}$$

Покажем, что  $\gamma(x) := B(\phi(x)) + \psi(F(x)) = o(|x - x_0|)$ .

$$\begin{aligned} \gamma(x) &\leq \underbrace{|B(\phi(x))|}_{\leq \|B\| \cdot |\phi(x)| = o(|x - x_0|)} + \underbrace{|\psi(F(x))|}_{o(|x - x_0|) \text{ из-за локальной липшицевости } F} \\ &\leq o(|x - x_0|) + o(|x - x_0|) = o(|x - x_0|) \end{aligned}$$

□

**Теорема 1.0.7.** Если  $U \subset \mathbb{R}^n$  — открытое множество, а  $F_1, F_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  — дифференцируемы в точке  $x_0$ , то для  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$d(\alpha F_1 + \beta F_2)(x_0, \cdot) = \alpha \cdot dF_1(x_0, \cdot) + \beta \cdot dF_2(x_0, \cdot)$$

Пусть  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  — отображение.

**Определение 1.0.7** (Координатные проекции  $F$ ). Разложим  $F(x)$  по стандартному базису:  $F(x) = \sum_{i=1}^m a_i e_i$ .

Тогда координатными проекциями называются функции  $F_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $F_j(x) = a_j$ .

**Теорема 1.0.8.** Пусть  $U \in \mathbb{R}^n$  открыто. Утверждается, что  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  дифференцируема в  $x_0 \in U$  если и только если  $\forall j = 1..m : F_j$  дифференцируема в  $x_0$ .

Более того,  $dF(x_0, h) = (dF_1(x_0, h), \dots, dF_m(x_0, h))$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . Рассмотрим линейный оператор  $T_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , сопоставляющий  $y \in \mathbb{R}^m$  его  $j$ -ю координату в разложении по стандартному базису.  $F_j = T_j \circ F$  — дифференцируема, как композиция. Утверждение про матрицу дифференциала  $F$  следует из того, что матрица дифференциала  $T_j$  — это  $(0, \dots, \underset{j}{1}, \dots, 0)$

$\Leftarrow$ . Если все  $F_j$  дифференцируемы, то  $F_j(x) - F_j(x_0) = A_j(x - x_0) + o(|x - x_0|)$ , откуда

$$F(x) - F(x_0) = (A_1(x - x_0), \dots, A_m(x - x_0)) + (\phi_1(x), \dots, \phi_m(x))$$

Несложно видеть, что это дифференцируемость  $F$  по определению. □

## 1.0.2 О скалярных функциях $F : (U \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$

*Замечание.* Пусть  $G : U \rightarrow \mathbb{R}$  — скалярная функция, дифференцируемая в  $x_0 \in U$ , то есть

$$G(x) - G(x_0) = A(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

где  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — линейный функционал.

Разложим  $A(y) = A(y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) = y_1 A(e_1) + \dots + y_n A(e_n)$ . Положим  $\xi_j = A(e_j) \in \mathbb{R}$ , тогда  $A(y) = \langle y, \xi \rangle$ .

Пусть  $F$  дифференцируема в  $x_0 \in U$ , тогда  $\exists \xi : F(x) - F(x_0) = \langle x - x_0, \xi \rangle + o(|x - x_0|)$ . Таким образом, дифференциальный оператор для  $F$  — скалярное произведение  $\langle x - x_0, \xi \rangle$ , где  $\xi$  называется *градиентом*  $F$  в точке  $x_0$ . Обозначается  $\text{grad}_{x_0} f$ , или (иногда)  $\text{grad} f(x_0)$  (имея в виду  $(\text{grad} f)(x_0)$ ).

## Лекция V

3 марта 2023 г.

Пусть  $I \subset \mathbb{R}$  — открытый отрезок  $I = (a, b)$ .

Рассмотрим  $g : I \rightarrow U$ , дифференцируемую в точке  $t_0 \in (a, b)$ . Как и раньше,  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Функцию  $g$  такого вида называют *векторнозначная функция*.

Рассмотрим координатные функции  $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ .  $g$  дифференцируема в  $t_0 \in (a, b) \iff$  все  $g_j$  дифференцируемы в  $t_0$ .

Но  $g_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема, если  $\exists g'_j(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g_j(t) - g_j(t_0)}{t - t_0}$ .

Найдём дифференциал функции  $g$ :

$$g(t) - g(t_0) = (g_1(t) - g_1(t_0), \dots, g_n(t) - g_n(t_0)) = (g'_1(t_0), \dots, g'_n(t_0)) (t - t_0) + o(|t - t_0|)$$

Таким образом

$$(g'_1(t_0), \dots, g'_n(t_0)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}$$

**Определение 1.0.8** (Производная векторнозначной функции  $g$ ). Соответствующий вектор  $(g'_1(t_0), \dots, g'_n(t_0))$ .

В частности, если  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  — координата частицы в зависимости от времени, то её производная — трёхмерный вектор, вектор скорости частицы.

В случае функции  $g$  такого вида её дифференциал  $dg(t_0, h) = g'(t_0) \cdot h$ .

Теперь рассмотрим композицию  $F = f \circ g$ , где  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g : I \rightarrow U$  рассмотрены выше.

Пусть  $g$  дифференцируема в  $t_0$ ,  $x_0 = g(t_0)$ ,  $f$  дифференцируема в  $x_0$ . Тогда согласно (теорема 1.0.6)  $F$  дифференцируема в  $t_0$ , её дифференциал равен композиции дифференциалов  $f$  и  $g$ .

$$\begin{aligned} df(x_0, u) &= \langle u, \text{grad}_{x_0} f \rangle \\ dg(t_0, h) &= g'(t_0) \cdot h \\ \Downarrow \\ dF(t_0, h) &= \langle g'(t_0) \cdot h, \text{grad}_{x_0} f \rangle = \langle g'(t_0), \text{grad}_{x_0} f \rangle \cdot h \end{aligned}$$

Но  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  — одномерная функция, дифференцируемость означает существование одномерного предела. Отсюда  $F'(t_0) = \langle g'(t_0), \text{grad}_{x_0} f \rangle$ .

Пусть  $e \in \mathbb{R}^n$ ,  $g : I \rightarrow U$ . Определим  $g(t) = x_0 + t \cdot e$ , где  $I$  — настолько маленький интервал (содержащий 0), что  $g(I) \subset U$ .

В таком случае  $F'(0)$  записывается более явно:  $F'(0) = \langle e, \text{grad}_{x_0} f \rangle$ . С другой стороны,  $F'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$ .

Мы проверили, что если  $f$  дифференцируема, то предел выше существует (и равен  $\langle e, \text{grad}_{x_0} f \rangle$ ). Этот предел называется *производной  $f$  по направлению  $e$* .

Выберем в качестве  $e$  стандартный орт:  $e \in \{e_j\}_{j=1}^n = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0)$

**Определение 1.0.9** (Частная производная  $f$  по  $j$ -й координате). Производная  $f$  по направлению  $e_j$ . Обозначается  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$

Тем самым,

$$\text{grad}_{x_0} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Теперь рассмотрим более общий случай:  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  дифференцируема в  $x_0 \in U$ . Как известно,  $h = (h_1, \dots, h_m)$ , где  $h_j$  — соответствующие координатные функции.

Запишем дифференциал  $h$  в виде столбца:

$$dh(x_0, u) = \begin{pmatrix} dh_1(x_0, u) \\ \vdots \\ dh_m(x_0, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \text{grad}_{x_0} h_1, u \rangle \\ \vdots \\ \langle \text{grad}_{x_0} h_m, u \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x_0), & \dots, & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(x_0), & \dots, & \frac{\partial h_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Получили следующий результат: матрицы дифференциала отображения  $h$  в точке  $x_0$  выглядит так:

$$\left( \frac{\partial h_k}{\partial x_j}(x_0) \right)_{j=1..n}^{k=1..m} \text{ где } k \text{ — номер строки, а } j \text{ — номер столбца}$$

При этом, если  $h$  дифференцируема в  $x_0$ , то существуют все частные производные.

*Контрпример* (Если частные производные в  $x_0$  в направлении всех ортов существуют, то совсем не обязательно отображение дифференцируемо). Например,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Очевидно,  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ , но сужение функции на прямую  $y = x$  претерпевает в нуле разрыв:  $f(t, t) = \frac{1}{2}$  при  $t \neq 0$ .

Также можно найти недифференцируемую функцию, у которой есть частные производные по всем направлениям.

«Но жить-то как-то надо»

**Теорема 1.0.9.** Пусть  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $U \subset \mathbb{R}^n$ .

При условии, что в некоторой окрестности точки  $x_0 \in U$  частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$  существуют, причём непрерывны в точке  $x_0$ ,  $f$  дифференцируема в  $x_0$ .

*Доказательство.* Для удобства доказательства выберем  $n = 2$ . Утверждается, что при больших  $n$  всё то же самое, но писанины больше.

При  $n = 2$  обозначим  $x_0 = (u_0, v_0)$ ,  $x = (u, v)$ .

Из непрерывности производных

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(y) \right| < \varepsilon, \quad j = 1, 2$$

Запишем

$$f(x) - f(x_0) = f(u, v) - f(u_0, v_0) = (f(u, v) - f(u_0, v)) + (f(u_0, v) - f(u_0, v_0))$$

Применим к данным двум разностям формулу Лагранжа.

$$f(x) - f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(\theta_u, v) \cdot (u - u_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, \eta) \cdot (v - v_0) \text{ где } \theta_u \text{ между } u \text{ и } u_0, \eta \text{ между } v \text{ и } v_0$$

Преобразуем выражение, прибавив и вычтя ожидаемое изменение функции — произведение производной и изменение аргумента.

$$f(x) - f(x_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot (u - u_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot (v - v_0) \right) + \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial u}(\theta_v, v) - \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \right) (u - u_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, \eta) - \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \right) (v - v_0)}_R$$

Первая пара скобок содержит  $\langle \text{grad}_{x_0} f, x - x_0 \rangle$ , докажем, что остальное мало.

Зафиксируем некий  $\varepsilon > 0$ , выберем  $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ , где  $\delta$  — функция от  $\varepsilon$  из непрерывности производных.

Тогда все точки  $(u_0, v_0), (u_0, \eta), (\theta_v, v)$  находятся на расстоянии меньше  $\delta$  друг от друга.

Применяя КБШ, получаем, что  $|R| \leq \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} \cdot |x - x_0| \leq \sqrt{2} \cdot \varepsilon |x - x_0|$ .  $\square$

**Определение 1.0.10** (Путь). Непрерывное отображение  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Образ пути  $\gamma([a, b])$  называется *носителем* пути.

*Интересный факт.* Кривая Пеано — путь, у которого носитель — квадрат  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Пусть  $\gamma$  дифференцируема на  $(a, b)$ , и  $U$  — открытое множество, такое, что  $\gamma([a, b]) \subset U$ .

Рассмотрим скалярную функцию  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , дифференцируемую везде на  $U$ .

Зададим  $\phi = f \circ \gamma$ . Несложно видеть, что  $\phi$  непрерывна на  $[a, b]$ , дифференцируема на  $(a, b)$ .

Запишем производную  $\phi$ :

$$\phi'(t) = \langle \text{grad}_{\gamma(t)} f, \gamma'(t) \rangle$$

Применим формулу Лагранжа:  $c, d \in [a, b] \Rightarrow \exists \xi \in [\min(c, d), \max(c, d)]$ :

$$\phi(d) - \phi(c) = \phi'(\xi)(d - c)$$

Обозначим  $y = \gamma(c), x = \gamma(d)$ , тогда  $f(y) - f(x) = \langle \text{grad}_{\gamma(\xi)}(f), \gamma'(\xi) \rangle (d - c)$

Получился многомерный вариант формулы Лагранжа.

## Лекция VI

7 марта 2023 г.

Рассмотрим частный вариант формулы выше:  $[\alpha, \beta] = [0, 1], U$  — шар с центром в  $a$ , содержащий  $b$ . Зададим путь прямолинейно:  $\gamma(t) = a + t(b - a), t \in [0, 1]$ .

Запишем:

$$f(b) - f(a) = \langle \text{grad}_u f, b - a \rangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(u)(b_j - a_j)$$

**Факт 1.0.5.** Если функция  $f$  дифференцируема на всём открытом множестве  $G$ , а точки  $a, b$  — концы некоего отрезка, содержащегося в  $G$  целиком, то на этом отрезке найдётся точка  $u$ , удовлетворяющая условиям.

**Следствие 1.0.3.**  $|f(b) - f(a)| \leq \sup_{u \in [a, b]} |\text{grad}_u f| \cdot |b - a|$ , где  $[a, b] = \{a + t(b - a) | t \in [0, 1]\}$ .

**Теорема 1.0.10** (Векторный вариант предыдущей). Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$  — открытое множество,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  дифференцируемо во всех точках  $U$ .

Если  $[a, b] \subset U$ , то  $\exists u \in [a, b] : |F(b) - F(a)| \leq |dF(u, b - a)|$ .

*Доказательство.*



**Лемма 1.0.2 (О двойственности).** Пусть  $x \in \mathbb{R}^k$ , тогда  $|x| = \max \{ \langle x, y \rangle \mid y \in \mathbb{R}^k, |y| \leq 1 \}$ .

*Доказательство леммы.*

Согласно КБШ  $\langle x, y \rangle \leq |x|$ .

Если  $x = 0$ , то доказывать нечего, иначе при  $y = \frac{x}{|x|}$  достигается равенство.  $\square$

Согласно лемме,  $\exists e \in \mathbb{R}^m : |e| = 1$ , причём  $|F(b) - F(a)| = \langle F(b) - F(a), e \rangle$ .

Рассмотрим скалярную функцию  $f : U \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \langle F(x), e \rangle$ .  $f$  дифференцируема, как линейная комбинация координатных функций  $F$ .

Применив для  $f$  формулу Лагранжа, получаем:  $\exists u \in [a, b] : f(b) - f(a) = \langle \text{grad}_u f, b - a \rangle$ .

Совместив всё полученное:

$$|F(b) - F(a)| = \langle F(b) - F(a), e \rangle = |f(b) - f(a)| = |\langle \text{grad}_u f, b - a \rangle|$$

Посчитаем градиент. Для этого разложим  $F, e$  по базису:  $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)), e = (e_1, \dots, e_m)$ . Тогда получаем явное представление  $f(x) = \sum_{j=1}^m f_j(x)e_j$ . Отсюда  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) \cdot e_j$ .

Продолжим оценку:

$$|\langle \text{grad}_u f, b - a \rangle| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(u) \cdot (b_k - a_k) \right| = \left| \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(u) (b_k - a_k) e_j \right| = |\langle dF(u, b - a), e \rangle| \leq |dF(u, b - a)|$$

$\square$

*Контрпример* (Равенства, вообще говоря, может не быть).  $n = 1, m = 2$  — отображение из прямой в плоскость.

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

Рассмотрим  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = (0, 1) - (1, 0) = (-1, 1)$ .

$$|f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)| = \sqrt{2}$$

Предположим, что нашлась точка  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) : \sqrt{2} = |f'(\theta)\frac{\pi}{2}|$ . Но  $|f'(\theta)| = |(-\sin \theta, \cos \theta)| = 1$ , и равенство не выполняется: всегда  $\sqrt{2} \approx 1.41 < \frac{\pi}{2} \approx 1.57$ .

**Следствие 1.0.4.**  $|F(b) - F(a)| \leq \|dF(u, \cdot)\| \cdot |b - a|$ .

### 1.0.3 Замечания про градиент

1. Необходимое условие существования локального экстремума.

Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  — функция,  $x_0 \in X$ ;

**Определение 1.0.11** ( $g$  имеет локальный максимум в точке  $x_0$ ). Существует окрестность  $\overset{o}{U}_\varepsilon(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}_\varepsilon(x_0) : g(x) \leq g(x_0)$ .

Также бывают *строгие локальный минимум и максимум*.

Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n, f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , причём  $f$  имеет локальный экстремум в точке  $x_0 \in U$ .

**Теорема 1.0.11.** Если  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то  $\text{grad}_{x_0} f = (0, \dots, 0)$ .

*Доказательство.* Пусть  $v = \text{grad}_f(x_0) \neq (0, \dots, 0)$ , то есть  $\langle v, v \rangle > 0$ . Рассмотрим малое  $t$ , при котором в частности  $x_0 + tv \in U$ , при нём  $f(x_0 + tv) - f(x_0) = \langle v, tv \rangle + \phi(tv)$ , где  $|\phi(h)| = o(h)$ . Таким образом, если  $v \neq (0, \dots, 0)$ , то найдётся малое  $t$ , такое, что  $f(x_0 + tv) > f(x_0)$ .  $\square$

Условие, разумеется, не является достаточным (даже в одномерной теории).

2. Про скорость роста в разных направлениях. Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

Если  $f$  дифференцируема в  $x_0 \in U$ , то для единичного вектора  $e$  определена в окрестности 0 одномерная функция  $\phi_e(t) = f(x_0 + te)$ .

По определению  $\frac{\partial f}{\partial e} = \phi'_e(0) = \langle \text{grad}_f(x_0), e \rangle$ .

*Замечание.* Из КБШ видно, что  $f$  растёт быстрее всего в направлении  $e_0 = \frac{\text{grad}_f(x_0)}{|\text{grad}_f(x_0)|}$  (если  $\text{grad}_f(x_0) \neq 0$ ).

Кроме того,  $f$  убывает быстрее всего в направлении против градиента.

## Лекция VII

10 марта 2023 г.

### 1.1 Теорема об обратной функции

Докажем теорему, аналогичную одномерной теореме про производную обратного отображения.

Пусть  $G$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ , а  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  — отображение, дифференцируемое во всех точках  $G$ .

Выберем  $x_0 \in G$ , такую, что  $F$  непрерывно дифференцируема в  $x_0$ , то есть  $\|dF(x_0, \cdot) - dF(x, \cdot)\| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ .

Иными словами,  $\forall j, k : \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_0)$ .

Положим  $A$  — матрица  $dF(x_0, \cdot)$  — матрица линейного отображения. Пусть  $\text{Ker } dF(x_0, \cdot) = \{0\}$ , то есть  $\det A \neq 0$ . Здесь существенно, что  $F$  действует из пространства размерности  $n$  в пространство той же размерности.

**Теорема 1.1.1** (Об обратной функции). При сделанных предположениях  $\exists U$  — окрестность точки  $x_0$ , такая, что  $F|_U$  — биекция между  $U$  и  $F(U)$ .

Утверждается, что  $F(U)$  содержит  $V$  — некоторую окрестность точки  $y_0 := F(x_0)$ , причём на  $V$  существует обратное к  $F$  отображение.

Утверждается, что  $F^{-1}$  дифференцируема в точке  $y_0$  и  $dF^{-1}(y_0, \cdot) = A^{-1}$ .

*Доказательство.*

**Лемма 1.1.1** (Лемма о билипшицевости). Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  — открыто,  $H : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  — отображение.

Предположим, что  $H$  дифференцируема в  $G$ , причём в  $x_0 \in G$  дифференцируемость непрерывная.

Тогда  $\exists U \ni x_0$ ,  $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x_1, x_2 \in U : |H(x_1) - H(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|$ .

Более того, если  $\text{Ker } dF(x_0, \cdot) = \{0\}$ , то можно выбрать эту окрестность  $U$  вместе так, что ещё и  $\exists c \in \mathbb{R} : \forall x_1, x_2 \in U : |H(x_1) - H(x_2)| \geq c|x_1 - x_2|$ .

*Доказательство леммы.*

Обозначим  $A = dF(x_0, \cdot)$  — матрица дифференциала. Положим  $H_1(x) = H(x) - Ax$ . Тогда  $dH_1(x, \cdot) = dH(x, \cdot) - A$ .

Из непрерывности дифференциала в  $x_0$  следует  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow \|dH(x, \cdot) - A\| \leq \varepsilon$ .

Таким образом,  $\forall u, v \in \overline{B}_\delta(x_0) : \underbrace{|H_1(u) - H_1(v)|}_{|(H(u) - H(v)) - A(u - v)|} \leq \varepsilon \cdot |u - v|$  — здесь мы пользуемся

неравенством Коши — Лагранжа для дифференциала на пути.

Раскрыв модуль, получаем  $|A(u - v)| - \varepsilon|u - v| \leq |H(u) - H(v)| \leq |A(u - v)| + \varepsilon|u - v|$ .

Выбрав  $\varepsilon = 1$  получаем оценку сверху — липшицевость функции  $H$ . Теперь надо доказать билипшицевость — липшицевость  $H^{-1}$ .

Это правда, так как (теорема 1.0.5)  $\exists m > 0 : \forall w \in \mathbb{R}^n : |Aw| \geq m|w|$ , выберем  $\varepsilon = m/2$ .  $\square$

**Лемма 1.1.2.** Рассмотрим матрицы линейных отображений  $A$  и  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Предположим, что  $A$  обратима, и  $\|A_k - A\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

Тогда для достаточно больших  $k$  :  $A_k$  обратима, причём  $\|A_k^{-1} - A^{-1}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

*Доказательство леммы.*

Согласно (теорема 1.0.5)  $\exists m > 0 : \forall w \in \mathbb{R}^n : |Aw| \geq m|w|$ .

Заметим, что

$$|A_k w| \geq |Aw| - |(A - A_k)w| \geq (m - \|A - A_k\|) \cdot |w|$$

Так как  $A_k$  стремится к  $A$  по норме, то при достаточно больших  $k$ :  $m - \|A - A_k\| > \frac{m}{2}$ .

Это показывает, что  $A_k$  обратимы, начиная с некоторого места. Сходимость  $A_k^{-1}$  к  $A^{-1}$  можно показать покомпонентно, можно следующей выкладкой:

$$\|A^{-1} - A_k^{-1}\| = \|A^{-1} \cdot (A_k - A) \cdot A_k^{-1}\| \leq \underbrace{\|A^{-1}\|}_{\text{const}} \cdot \underbrace{\|A_k - A\|}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} \cdot \underbrace{\|A_k^{-1}\|}_{\leq 3m/2}$$

$\square$

Из леммы о билипшицевости получаем  $\exists \rho, c, C > 0 : \forall u, v \in \overline{B}_\rho(x_0)$ :

$$c|u - v| \leq |F(u) - F(v)| \leq C|u - v|$$

В частности,  $F$  инъективна.

Найдём такое  $\eta$ , что  $\overline{B}_\eta(y_0) \subset F(\overline{B}_\rho(x_0))$ .

Рассмотрим  $y \in \overline{B}_\eta(y_0)$ , решим уравнение  $F(x) = y$ , где  $x$  надо найти в  $\overline{B}_\rho(x_0)$ . Для решения заведём  $\Phi : \overline{B}_\rho(x_0) \rightarrow \mathbb{R} : \Phi(x) := |F(x) - y|^2$ . По теореме Вейерштрасса она где-нибудь достигает своего наименьшего значения, пусть в точке  $z \in \overline{B}_\rho(x_0)$ .

Покажем, что для достаточно малого  $\eta$  решение лежит не на границе:  $|x_0 - z| < \rho$ . Докажем это от противного.

Пусть  $|z - x_0| = \rho$ , оценим

$$\Phi(z) \underset{\text{по определению } z}{\leq} \Phi(x_0) = |y_0 - y|^2 \leq \eta^2$$

Ещё оценим

$$|F(z) - y| \geq |F(z) - F(x_0)| - |y_0 - y| \geq c|z - x_0| - \eta = c\rho - \eta$$

Выберем  $\eta$  настолько маленьким, что  $c\rho - \eta > \eta$ . Тогда  $|F(z) - y|^2 \geq \eta^2$ , противоречие.

А раз решение лежит не на границе шара, то  $F(z) = y$  — иначе можно пойти против градиента и уменьшиться ещё сильнее. Получается, градиент нулевой.

Для любого  $\varepsilon > 0$  при выборе достаточно маленького  $\rho : \forall z \in \overline{B}_\rho(x_0) : \|dF(z, \cdot) - A\| \leq \varepsilon$ , то есть  $dF(z, \cdot)$  обратимо. Запишем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(z) = 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(z) \cdot (f_j(z) - y_j)$$

Из обратимости  $dF(z, \cdot)$  следует невырожденность матрицы  $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$  (это та же, но транспонированная), откуда при домножении матрицы на вектор  $f(z) - y$  не получится нуля — единственным решением зануления градиента является  $f(z) = y$ .

Таким образом, при  $\eta < \frac{\varepsilon \rho}{2}$  все решения уравнений  $F(x) = y$  лежат внутри  $\overline{B}_\rho(x_0)$ . Часть про выбор окрестности  $V \subset F(U)$  доказана.

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= A \cdot (x - x_0) + \phi(x), \text{ где } |\phi(x)| = o(|x - x_0|) \\ \forall y \in \overline{B}_\eta(y_0) : \exists x \in \overline{B}_{\rho(x_0)} : F(x) &= y \\ y - y_0 &= A(F^{-1}(y) - F^{-1}(y_0)) + \phi(F^{-1}(y)) \\ B &:= A^{-1} \\ F^{-1}(y) - F^{-1}(y_0) &= B(y - y_0) - B\phi(F^{-1}(y)) \end{aligned}$$

Осталось показать, что  $B\phi(F^{-1}(y)) = o(|y - y_0|)$ . Применение линейного оператора  $B$  на малeness не влияет, он билипшицев. Также билипшицевы  $F$  и  $F^{-1}$ , так как  $\phi(x) = o(|x - x_0|)$ , то  $B\phi(F^{-1}(y)) = o(|y - y_0|)$ .  $\square$

## Лекция VIII

14 марта 2023 г.

В предыдущей лекции мы показали следующее. Рассмотрим открытое  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ , такие, что  $F$  непрерывно дифференцируема всюду.

Если в некой точке  $x_0 \in G$  наблюдается невырожденный оператор  $dF(x_0, \cdot)$ , то при  $x$ , близких к  $x_0$ ,  $dF(x, \cdot)$  тоже невырождены, функция  $F^{-1}$  существует и дифференцируема вблизи  $F(x_0)$ .

В частности, использовалась лемма, близкая к следующей.

**Лемма 1.1.3.** Пусть  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейный оператор, такой, что  $\text{Ker } T = \{0\}$ .

Тогда  $\exists \varepsilon > 0$ , такой, что для любого линейного оператора  $\forall S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : \|S - T\| < \varepsilon \Rightarrow \text{Ker } S = \{0\}$ .

*Доказательство.* Воспользуемся тем, что  $\exists m > 0 : |Tx| \geq m|x|$ . Тогда  $|Sx| \geq |Tx| - |(S - T)x| \geq (m - |\varepsilon|)|x|$ .  $\square$

**Следствие 1.1.1.** Если  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывно дифференцируемое отображение, такое, что  $dF(x, \cdot)$  невырождено для  $x \in U$ , то  $F(U)$  открыто в  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.2 Гладкие многообразия

### 1.2.1 Касательные векторы

Пусть  $x_0 \in A \subset \mathbb{R}^n$ , где  $A$  — произвольное множество.

**Определение 1.2.1** (Касательный к  $A$  вектор  $e \in \mathbb{R}^n$ ). Для  $t \in \mathbb{R} : \text{dist}(x_0 + te, A) = o(|t|)$  при  $t \rightarrow 0$ .

*Замечание.* Для  $x_0$  — внутренней точки  $A$  — все векторы — касательные.

**Теорема 1.2.1.** Пусть  $F : (U \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема,  $x_0 \in U$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

Пусть  $F|_{A \cap U}$  имеет локальный экстремум в  $x_0$ . Тогда для касательного к  $A$  вектора  $e \in \mathbb{R}^n$  :  $dF(x_0, e) = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $e \in \mathbb{R}^n$  — касательный вектор к  $A$  в  $x_0$ . Пойдём от противного:  $d := dF(x_0, e) \neq 0$ .

Посмотрим на  $F(x_0 + te) - F(x_0)$ . Для любого  $t \in \mathbb{R} : \exists x_t \in A : |x_0 + te - x_t| \leq 2 \text{dist}(x_0 + te, A)$  по определению расстояния.

Запишем определение дифференцируемости  $F$  в  $x_0$ .

$$F(x_t) - F(x_0) = dF(x_0, x_t - x_0) + \underbrace{\phi(t)}_{o(|t|)} = dF(x_0, te) + dF(x_0, x_t - x_0 - te) + \underbrace{\phi(t)}_{o(|t|)}$$

Так как  $|dF(x_0, x_t - x_0 - te)| \leq \|dF(x_0, \cdot)\| \cdot |x_t - x_0 - te| \leq 2\|dF(x_0, \cdot)\| \cdot |\text{dist}(x_0 + te, A)| = o(t)$ , то

$$F(x_t) - F(x_0) = dF(x_0, te) + o(|t|) = t \cdot d + o(|t|)$$

Получили, что  $F|_{A \cap U}$  не имеет локального экстремума в  $x_0$ , противоречие.  $\square$

Пусть  $\Phi : (U \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ , где  $m \geq n$ .

Предположим, что  $\Phi$  дифференцируема в  $U$  и непрерывно дифференцируема в  $x_0 \in U$ . Также предположим, что  $\Phi$  билипшицева на своей области определения.

Положим  $A = \Phi(U)$ , предположим, что  $\text{Ker } d\Phi(x_0, \cdot) = \{0\}$  (что следует из билипшицевости).

**Теорема 1.2.2.** При сделанных предположениях множество касательных векторов к  $A$  в точке  $y_0 := \Phi(x_0)$  есть  $d\Phi(x_0, \mathbb{R}^n)$ .

*Доказательство.* Обозначим  $L := d\Phi(x_0, \cdot)$ .

$\Rightarrow$ . Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$ , назовём  $e = Lx$ , докажем, что  $e$  — касательный вектор. Ну, в самом деле,  $\text{dist}(A, y_0 + te) \leq |\Phi(x_0 + tx) - (y_0 + te)| = |\Phi(x_0 + tx) - \Phi(x_0) - tLx|$ . Точка  $\Phi(x_0 + tx)$  была подобрана таким хитрым образом, что

$$\Phi(x_0 + tx) - \Phi(x_0) - tLx = L(tx) + \psi(t) - tLx = \psi(t), \quad \text{где } |\psi(t)| = o(|t|)$$

$\Leftarrow$ . Пусть  $e$  — касательный вектор  $A$  в точке  $x_0$ . Найдём  $x \in \mathbb{R}^n : e = Lx$ .

По определению касательного вектора.

$$\alpha(t) := \text{dist}(y_0 + te, A) = o(|t|)$$

Выберем  $y_t \in A : |y_0 + te - y_t| \leq 2 \text{dist}(y_0 + te, A) = 2\alpha(t)$ . Отсюда  $|y_t - y_0| \leq C_1|t|$  для некой константы  $C_1 \in \mathbb{R}$ .

$y_t = \Phi(x_t)$  для некоего  $x_t$  вблизи  $x_0$ . Ввиду билипшицевости

$$|y_t - y_0| = |\Phi(x_t) - \Phi(x_0)| \geq C_2|x_t - x_0| \quad \Rightarrow \quad |x_t - x_0| \leq C_3|t|$$

Запишем

$$te + y_t - (y_0 + te) = y_t - y_0 = \Phi(x_t) - \Phi(x_0) = L(x_t - x_0) + \beta(x_t)$$

где  $|\beta(x_t)| = o(|x_t - x_0|)$ , или же (см.  $C_3$ )  $\beta(x_t) = o(|t|)$ . Поделим равенство на  $t$ :

$$e + \underbrace{\frac{y_t - (y_0 + te)}{t}}_{o(1)} = L \left( \frac{x_t - x_0}{t} \right) + \underbrace{\frac{\beta(x_t)}{t}}_{o(1)}$$

Заметим, что  $\left| \frac{x_t - x_0}{t} \right| \leq C_3$  — точки  $\frac{x_t - x_0}{t}$  лежат в замкнутом шаре. Выбрав последовательность  $t_n \rightarrow 0$ , так, что будет сходимость (всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность), получим  $\frac{x_{t_n} - x_0}{t_n} \xrightarrow{t \rightarrow 0} x$ , где вектор  $x \in \mathbb{R}^n$  — искомый: переходя к пределу сразу получаем  $e = L(x)$ .

□

## 1.2.2 Многообразия, вложенные в $n$ -мерное евклидово пространство

**Определение 1.2.2** ( $n$ -мерное многообразие). Хаусдорфовое, со счётной базой, топологическое пространство  $X$ , у каждой точки которого есть окрестность, гомеоморфная  $B^n$ .

Пускай  $F : (U \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$  — отображение.

**Определение 1.2.3** ( $F$  непрерывно дифференцируема  $k$  раз). Все частные производные всех координатных функций до порядка  $k$  включительно существуют и непрерывны.

Пишут  $F \in C^{(k)}$ .

**Определение 1.2.4** (Карта (локальная)). Отображение  $h : B^n \rightarrow X$ , являющееся гомеоморфизмом на свой образ.

**Определение 1.2.5** (Атлас). Семейство локальных карт  $\{h_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ , таких, что  $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} h_\alpha(B_n) = X$

Такое семейство карт позволяет в каждой маленькой области  $X$  ввести свои *координаты, параметризовать*  $X$ .

Пусть  $U_\alpha = h_\alpha(B^n)$ ,  $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ . Если  $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ , то возникает дилемма — координаты какого шара использовать?

Функцию  $\phi_{\alpha\beta} = h_\beta^{-1} \circ h_\alpha$ , переводящую координаты  $h_\alpha$  в координаты  $h_\beta$ , называют *отображением перехода*.

**Определение 1.2.6** ( $X$  — гладкое многообразие класса  $C^{(k)}$ ). Многообразие с фиксированным атласом, в котором все отображения перехода принадлежат классу  $C^{(k)}$ .

*Пример.* Рассмотрим в качестве  $X$  график модуля  $X := \{(x, |x|) | x \in \mathbb{R}\}$ .

$X$  гомеоморфно  $\mathbb{R}$ . Если рассмотреть атлас, состоящий из  $(a, b) \mapsto ((a, |a|), (b, |b|))$ , то все функции перехода будут тождественными, то есть  $X \in C^{(\infty)}$ .

Это противоречит интуиции (ведь модуль далеко не гладок в нуле), скоро мы определим гладкость многообразия в соответствии с объемлющим пространством.

# Лекция IX

17 марта 2023 г.

Пусть  $F : (G \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ , где  $m > n$  (можно также рассматривать случай  $m = n$ , но в таком случае ничего интересного не будет). По-прежнему дифференцируема в некоторой окрестности  $x_0$ , непрерывно дифференцируема в  $x_0$ .

Рассмотрим  $x_0 \in G$ , считаем, что  $F$  — билипшицева на всём множестве  $G$ .

Обозначим  $D = dF(x_0, \cdot)$ , предположим, что он невырожден. Параметризуем множество  $F(G)$ .

$L := D(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$  — касательное подпространство к  $F(G)$  в точке  $y_0 := F(x_0)$ . Заметим, что  $\dim L = n$ .

Положим  $N := L^\perp$ . Таким образом,  $\mathbb{R}^m = L \oplus N$ . Введём ортогональный проектор  $P : \mathbb{R}^m \rightarrow L$ .

Выделим из  $F$  составляющую  $F_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow L$ ;  $F_1(x) = PF(x)$ . Её дифференциал  $dF_1(x_0, \cdot) = PD$ , что равно  $D$ , так как  $D(\mathbb{R}^n) = L$  — проектор ничего не меняет.

В  $V$  — некоторой окрестности точки  $Py_0$  — существует обратное отображение  $\phi = F_1^{-1}$ ;  $\phi : V \rightarrow G$ .

Введём  $H : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ ;  $H(u) = (F \circ \phi)(u)$ .  $H(V)$  — кусок множества  $F(G)$ ,  $H$  — его локальная карта.

Произвольный вектор  $u \in V$  после применения  $H$  раскладывается в пару  $H(u) = (a, b)$ , где  $\mathbb{R}^m$  рассматривается, как  $L \oplus N$  и  $a \in L, b \in N$ .  $a = PH(u) = PF\phi(u) = u$ , так как  $\phi$  — обратная к  $PF$ . Таким образом, первая компонента вектора  $H(u)$  — просто  $u$ . Вторая компонента вектора  $\psi(u) := (\text{id} - P)H(u)$ , какая-то гладкая функция.

Получили «новую параметризацию»  $F(G)$ . Локальной картой  $y_0 \in F(G)$  является  $H(u) = (u, \psi(u))$ , где  $u \in V$ .

Таким образом, локально многообразие  $F$  — график какого-то непрерывного отображения  $\psi$ . Найдём его дифференциал:  $d\psi(y_0, \cdot) = (\text{id} - P)dH(y_0, \cdot) = (\text{id} - P)d(F \circ \phi)(y_0, \cdot) = (I - P)Dd\phi(y_0, \cdot)$ . Получается 0, так как  $(I - P)D = 0$  —  $D$  проектирует на  $L$ , после чего  $I - P$  отображает в нуль.

Таким образом,  $L$  — *касательное подпространство* (иногда говорят *касательная плоскость*) к  $F(G)$  в точке  $y_0$ . Любопытно заметить, что чтобы найти обратную к  $H$  функцию, надо спроектировать  $H(u)$  на касательную плоскость.

### 1.2.3 Теорема о неявной функции

Рассмотрим уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Оно задаёт сферу в  $\mathbb{R}^3$ , которая является многообразием:  $\forall (x_0, y_0, z_0) \in S$ . Если  $x$  близок к  $x_0 > 0$ , то  $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$  и получаем локальную карту. Аналогично для  $x_0 < 0$ . Если же  $x_0$  неотделим от нуля, то надо выражать другую координату.

Обобщим.

Пусть задано отображение  $f : (U \subset \mathbb{R}^{n+m}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , непрерывно дифференцируемое всюду в  $U$ . В продолжении теоремы векторы  $z \in \mathbb{R}^{n+m}$  будем раскладывать на две компоненты  $(x, y) \in X \oplus Y$ , где  $\dim X = n, \dim Y = m$  (необязательно  $X \perp Y$ ).

Пусть  $c \in \mathbb{R}^n$ . Для примера со сферой выше  $m + n = 3, n = 1$ .

Рассмотрим множество точек  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m \mid f(a, b) = c\}$  — найдём подпространства уровня  $f$ . Пусть оно непусто:  $\exists a_0, b_0 : f(a_0, b_0) = c$ .

Найдём функцию  $h : \left( \overset{o}{U}_\delta(b_0) \subset \mathbb{R}^m \right) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , такую, что  $\forall y \in \overset{o}{U}_\delta(b_0) : f(h(y), y) = c$ .

Обозначим  $D = df((a_0, b_0), \cdot)$ . Обозначим  $D|_X = A, D|_Y = B$ . Предположим, что  $D|_X$  невырожден.

**Теорема 1.2.3** (О неявной функции). При сделанных предположениях  $\exists \overset{o}{U}_\delta(b_0) \subset \mathbb{R}^m : \exists ! h : \overset{o}{U}_\delta(b_0) \rightarrow \mathbb{R}^n : f(h(y), y) = c$ .

Более того, полученная функция  $h$  непрерывно дифференцируема.

*Доказательство.* Введём  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$ ;  $F(x, y) = (f(x, y), y)$ . Найдём дифференциал:

$$\begin{aligned} F(x, y) - F(a_0, b_0) &= (f(x, y) - f(a_0, b_0), y - b_0) = \\ &= (D(x, y) + \underbrace{\phi(x, y)}_{o(|b_0 - y|)}, y - b_0) = (a_0(x - a_0) + b_0(y - b_0), y - b_0) + o(|b_0 - y|) \end{aligned}$$

Таким образом  $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^{n+m} : dF((a_0, b_0), (u, v)) = L(u, v) = (Au + Bv, v)$ .

Если  $L(u, v) = 0$ , то  $v = 0$ , откуда  $Bv = 0$ , откуда  $Au = 0 \Rightarrow u = 0$ , так как  $A$  невырожден. Таким образом,  $L$  невырожден, к  $F$  применима теорема об обратном отображении.

$$F(a_0, b_0) = (f(a_0, b_0), b_0) = (c_0, b_0)$$

Рассмотрим  $W$  — окрестность  $(a_0, b_0)$ , такую, что  $\exists G = F^{-1}$ , заданная на  $W$ , причём  $G$  непрерывно дифференцируема в этой окрестности.

Так как  $G(u, v) = (*, v)$ , то  $\exists \psi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\psi$  непрерывно дифференцируема на  $W$ . Таким образом  $\forall (u, v) \in W : F(\psi(u, v), v) = (u, v)$ .

Определим  $h(v) := \psi(c, v)$ . В самом деле, видим, что  $h$  определена на некоторой окрестности  $b_0$ , причём  $h(b_0) = c$ .  $\square$

## Лекция X

21 марта 2023 г.

Продолжим теорему, доказанную на предыдущей лекции: найдём дифференциалы.

Мы показали, что существует формула для отображения  $\phi$  в точке  $b$ .  $D = d\phi(b, \cdot)$ . Так как  $f(\phi(y), y) \equiv c$  при  $y$ , близких к  $b$ , то

$$0 = d(f(\phi(y), y)) = AD + B$$

Так как  $A$  обратима, то  $D = -A^{-1}B$ .

*Пример.*  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ . На плоскости задана кривая соотношением  $f(x, y) = c$ , где  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Если  $f(a, b) = c$ , то (при условии  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$ )  $\exists \phi(y) : f(\phi(y), y) \equiv c$  при  $|y - b| < \delta$ .

Производная этой функции  $\phi'(b) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}$ .

Пусть  $U \subset \mathbb{R}^k; f : U \rightarrow \mathbb{R}^n; (a, b) \in U$ , где  $k > n$ . Предположим, что  $\forall u \in U$  ранг матрицы Якоби равен  $n$ , то есть максимально возможный.

$$\text{rk} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(u) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(u) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k}(u) \end{pmatrix} = n$$

Рассмотрим множество решений относительно  $u$  уравнения  $f(u) = c$ . Решения называются *множествами уровня* отображения  $f$ .  $L_c = \{u | f(u) = c\}$ .

Пусть  $f(u_0) = c$ .

Выберем минор матрицы порядка  $n$  с ненулевым определителем. Переупорядочим столбцы так, чтобы первые  $n$  были линейно независимы.

Обозначим за  $X$  пространство, натянутое на первые  $n$  координат, за  $Y$  — последние  $k - n$  координат.

$\mathbb{R}^k = X \oplus Y$ , окрестность точки  $u_0$  описывается локальной картой вида  $H(y) := (\phi(y), y), y \in Y$ , причём  $y$  близко к проекции  $u_0$  на  $Y$ .

$V$  — окрестность точки  $u_0$  на  $L_c$ , которая накрывается локальной картой  $H$ .  $H^{-1}(z) = Qz$ , где  $Q$  — ортогональный проектор на  $Y$ .

Покажем гладкость отображения переходами между картами.  $H_1(y) = (\phi_1(y), y), H_2(y) = (\phi_2(y), y)$ .

Посмотрим на  $H_2^{-1}H_1$ , где задано. Это  $QH_1$ , что несомненно является гладким отображением, как композиция.

Таким образом,  $L_c$  —  $(k - n)$  мерное гладкое многообразие.



Займёмся описанием касательной плоскости —  $\text{Im } d\phi(u_0, \cdot)$  не очень удобно, так как  $\phi$  вполне может не быть задана явно.

**Теорема 1.2.4.** При сделанных предположениях об  $f$  (матрица Якоби — максимального ранга), если  $L_c \neq \emptyset$ , то

$$\forall u_0 : f(u_0) = c \Rightarrow \text{Ker}(df(u_0, \cdot)) — \text{касательное подпространство к } L_c \text{ в точке } u_0$$

*Доказательство.* Пусть  $N$  — касательное подпространство к  $L_c$  в точке  $u_0$ .  $\dim N = k - n = m$ .

Обозначим оператор  $D := df(u_0, \cdot)$ .  $D : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  — сюръекция. Тогда  $\dim \text{Ker } D = m$ .

Покажем, что  $N \subset \text{Ker } D$ . Так как их размерности совпадают, то мы докажем совпадение.

Пусть  $x \in N$ , то есть  $\alpha(t) := \text{dist}(u_0 + tx, L_c) = o(|t|)$ . Для всякого достаточно маленького  $t > 0$  :  $\exists x_t \in L_c : \text{dist}(u_0 + tx, x_t) \leq 2\alpha(t)$ .

Запишем

$$0 = f(x_t) - f(u_0) = D(x_t - u_0) + \phi(x_t), \text{ где } \phi(y) = o(|y - u_0|)$$

Так как  $|x_t - u_0| \leq |tx + x_t - u_0| + |tx| \leq C|t|$  при  $t$ , близких к 0. Тем самым,  $\phi(y_t) = o(|t|)$ .

$$0 = D(x_t + tx - u_0) - D(tx) + \phi(x_t)$$

Так как  $D(x_t + tx - u_0) \leq \|D\| \cdot |x_t + tx - u_0| \leq 2\|D\|\alpha(t) = o(|t|)$ , то поделив на  $t$  последнее равенство, получаем

$$0 = \frac{D(x_t + tx - u_0)}{t} - Dx + \frac{\phi(x_t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} -Dx$$

Отсюда действительно получается  $Dx = 0$ . □

**Теорема 1.2.5** (О множителях Лагранжа). Пусть  $f_1, \dots, f_n : (U \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}$ , где по-прежнему  $k \geq n$ . Пусть все  $f_j$  непрерывно дифференцируемы.

Рассмотрим  $L$  — множество тех  $x \in U : f_1(x) = c_1, f_2(x) = c_2, \dots, f_n(x) = c_n$ .

Пусть  $x_0 \in L$ , а ещё произвольная функция  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  — тоже непрерывно дифференцируема.

Пусть векторы  $\text{grad}_{f_i}(x_0)$  линейно независимы, а  $f|_L$  имеет локальный экстремум в точке  $x_0$ .

При сделанных предположениях  $\exists \{\lambda_i\}_{i=1}^n$  — множители Лагранжа, такие, что  $\text{grad}_f(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{grad}_{f_i}(x_0)$

*Доказательство.* Положим  $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ . Матрица Якоби  $F$  получается  $J := \begin{pmatrix} \text{grad}_{f_1}(x) \\ \vdots \\ \text{grad}_{f_n}(x) \end{pmatrix}$ . Линейная независимость строчек при  $x = x_0$  означает, что матрица имеет ранг  $n$ .

Для  $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$  получается  $L = \{x | F(x) = c\}$ .

Для  $N$  — касательного подпространства к  $L$  в точке  $x_0$  выполнено условие  $\text{grad}_{x_0} f \perp N$ ,  $\text{grad}_{x_0} f \in N^\perp$ .

Заметим, что  $Ju = 0 \iff \forall j : \langle u, \text{grad}_{f_j}(x_0) \rangle = 0 \iff u \in \text{Lin}\{\text{grad}_{f_j}(x_0)\}^\perp$ .

Так как  $\text{grad}_f(x_0) \perp N = \text{Ker } J$ , то  $\text{grad}_f(x_0) \in \text{Lin}\{\text{grad}_{f_j}(x_0)\}$ . □

Пусть  $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$  — промежуток общего вида,  $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$  — векторнозначная функция.

Если  $g$  дифференцируема в точке  $x_0$ ,  $g = (g_1 \ \dots \ g_n)^t$ , то  $dg(x_0, h) = (g'_1(x_0) \ \dots \ g'_n(x_0))^t \cdot h$ .

Функцию  $g$  можно рассматривать, как описание движения материальной точки, например.

Вектор  $g'(x_0) = (g'_1(x_0), \dots, g'_n(x_0))$  называют *производной* функции  $g$ . Заметим, что определение  $g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$  по-прежнему выполняется.

Также выполняется неравенство Лагранжа:  $\forall t_1, t_2 : \exists c$  между  $t_1, t_2 : |g(t_1) - g(t_2)| \leq |g'(c)| \cdot |t_1 - t_2|$ .

**Определение 1.2.7** (Определённый интеграл векторнозначной функции). Для  $\alpha, \beta \in (a, b)$ :

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dt \stackrel{\text{def}}{=} \left( \int_{\alpha}^{\beta} g_1(x) dt \ \dots \ \int_{\alpha}^{\beta} g_n(x) dt \right)$$

**Факт 1.2.1** (Основная оценка интеграла).

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |g(t)| dt \quad \text{или} \quad \left( \sum_{j=1}^n \left( \int_{\alpha}^{\beta} g_j(t) dt \right)^2 \right)^{1/2} \leq \int_{\alpha}^{\beta} \left( \sum_{j=1}^n (g_j(t))^2 \right)^{1/2} dt$$

*Доказательство.* Докажем в предположении, что все  $g_j$  кусочно-непрерывны на  $[\alpha, \beta]$ . В общем случае надо обосновывать, почему  $|g|$  интегрируема по Риману, это останется в качестве упражнения.

Пусть  $y = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt \in \mathbb{R}^n$ . Рассмотрим  $e \in \mathbb{R}^n$ , такой, что  $|e| = 1, |y| = \langle y, e \rangle = |y|$ .

Введём  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \phi(t) = \langle g(t), e \rangle = \sum_{j=1}^n g_j(t) \xi_j$ , где  $e = (\xi_1 \ \dots \ \xi_n)$ . Запишем

$$\left| \left\langle \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt, e \right\rangle \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \phi(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\phi(t)| dt \leq \int_{\alpha}^{\beta} |g(t)| dt$$

□

### 1.3 Длина пути

Пусть задана кривая. Как найти её длину? Приближим её ломаной, длина ломаной — сумма длин отрезков. Если приближения разными ломаными имеют тенденцию куда-то стремиться, то это число называют длиной ломаной.

Кривую, вообще говоря, можно определить как множество точек, а можно — как отображение.

Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывное отображение. Рассмотрим  $T := \{t_i\}_{i=0}^k \subset \mathbb{R} : a \leq t_1 < \dots < t_k \leq b$ .

Определим приближение длины ломаной  $S(\gamma, T) = |\gamma(t_1) - \gamma(t_0)| + \dots + |\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)|$ .

**Определение 1.3.1** (Спрямолинейная кривая  $\gamma$ ). Числа  $S(\gamma, T)$  ограничены сверху. В таком случае супремум этих чисел называют длиной пути  $\gamma$ .

Для  $[c, d] \subset [a, b]$  у прямолинейного пути определена *длина сужения*  $l(\gamma, [c, d])$  — длина пути  $\gamma|_{[c, d]}$ .

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — произвольное отображение. Здесь определим такую же, как для пути, функцию  $S(f, T) = |f(t_1) - f(t_0)| + \dots + |f(t_{k-1}) - f(t_k)|$ .

**Определение 1.3.2** ( $f$  имеет ограниченную вариацию). Все суммы  $S(f, T)$  ограничены сверху. В таком случае их супремум называют *вариацией*  $V(f, [a, b])$ .

1. Пусть  $T_1, T_2$  — два набора точек на  $[a, b]$ . Если  $T_1 \subset T_2$ , то  $S(f, T_1) \leq S(f, T_2)$ . Достаточно понять, что это выполняется, если  $T_2 = T_1 \cup \{pt\}$ . В самом деле,  $|f(t_j) - f(t_{j+1})|$  заменяется на  $|f(t_j) - f(pt)| + |f(pt) - f(t_{j+1})|$ , что не меньше.
2. Можно ослабить условия на точки, считая, что  $t_j \leq t_{j+1}$ .
3. Если  $f, g$  — функции ограниченной вариации,  $c, d \in \mathbb{R}$ , то  $cf + dg$  — тоже функция ограниченной вариации.

Конкретнее,  $V(cf + dg, [a, b]) \leq |c|V(f, [a, b]) + |d|V(g, [a, b])$ .

$$\sum_{j=1}^k |(cf + dg)(t_j) - (cf + dg)(t_{j-1})| \leq |c| \sum_{j=1}^k |f(t_j) - f(t_{j-1})| + |d| \sum_{j=1}^k |g(t_j) - g(t_{j-1})|$$

4. Если  $f$  — функция ограниченной вариации на  $[\alpha, \beta]$  и на  $[\beta, \gamma]$ , то  $f$  — функция ограниченной вариации на  $[\alpha, \gamma]$ .

$$V(f, [\alpha, \gamma]) = V(f, [\alpha, \beta]) + V(f, [\beta, \gamma])$$

Пусть  $T$  — набор точек в  $[\alpha, \gamma]$ , причём  $T_1 = T \cap [\alpha, \beta]$ , а  $T_2 = T \cap [\beta, \gamma]$ . Считаем, что  $\beta \in T$ . Тогда  $S(f, T) = S(f, T_1) + S(f, T_2)$ . Переходя к супремуму по  $T$ , получаем  $V(f, [\alpha, \gamma]) \leq V(f, [\alpha, \beta]) + V(f, [\beta, \gamma])$ .

Обратное неравенство получается примерно так же.

*Замечание.*  $f$  ограниченной вариации  $\Rightarrow f$  ограничена.

*Замечание.*  $f$  постоянна  $\iff V(f, [a, b]) = 0$ .

### Теорема 1.3.1.

1. Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Рассмотрим координатные функции  $f = (f_1 \dots f_n)$ . Следующие условия эквивалентны:
  - $f$  — ограниченной вариации.
  - Все  $f_j$  — ограниченной вариации.
2. Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Следующие условия эквивалентны:
  - $f$  — ограниченной вариации.
  - $f = \phi_1 - \phi_2$ , где  $\phi_1, \phi_2$  — возрастают на отрезке  $[a, b]$ .

*Доказательство.*

1.  $\Rightarrow$ . Пусть  $t, s \in [a, b]$ .  $|f_j(t) - f_j(s)| \leq |f(t) - f(s)|$ . Таким образом, для всякого конечного набора  $T \subset [a, b] : S(f_j, T) \leq S(f, T) \leq V(f, [a, b])$ .  
 $\Leftarrow$ .  $f(t) = \sum_{j=1}^n f_j(t)e_j$ . Таким образом,  $f$  — сумма функций ограниченной вариации.
2.  $\Leftarrow$ . Возрастающая функция есть функция ограниченной вариации:

$$S(\phi, T) = \sum_{j=1}^k |\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^k (\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})) = \phi(t_k) - \phi(t_0) \Rightarrow V(\phi, [a, b]) = \phi(b) - \phi(a)$$

Значит,  $f$  — конечной вариации, как сумма двух функций конечной вариации.

$\Rightarrow$ . Обозначим  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; u(t) = V(f, [a, t])$ . Докажем, что  $v(t) := u(t) - f(t)$  возрастает.

Рассмотрим  $s < t \in [a, b]$ . Заметим, что  $f(t) - f(s) \leq |f(t) - f(s)| \leq V(f, [s, t]) = u(t) - u(s)$ . Отсюда  $u(t) - f(t) \geq u(s) - f(s)$ , действительно,  $v(t)$  возрастает.

Осталось заметить, что  $v$  тоже возрастает,  $f = u - v$ .

□

*Замечание.* Если  $f$  — непрерывная скалярная функция, то получившиеся в доказательство  $\phi_1, \phi_2$  тоже непрерывны.

## Лекция XI

24 марта 2023 г.

**Теорема 1.3.2.** Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — векторнозначная функция, имеющая ограниченную вариацию.

Введём функцию  $V : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, V(t) = V(f, [a, t])$ . Утверждается, что  $\forall x_0 \in [a, b]: f$  непрерывна в  $x_0 \Rightarrow V$  непрерывна в  $x_0$ .

*Доказательство.* Докажем, что  $V$  непрерывна слева в точке  $t_0$ , где  $t_0 > a$ .  $V$  возрастающая функция. Выберем  $\varepsilon > 0$ , найдём точку  $s < t_0$ , такую, что  $V(t_0) - V(s) > \varepsilon/2$ .

Так как  $V(t)$  — супремум сумм, участвующих в определении вариации  $V(f, [a, t])$ , то найдётся последовательность точек  $s_0 < \dots < s_k, s_j \in [a, t_0]$ , такая, что  $\sum_{j=1}^k |f(s_{j-1}) - f(s_j)| > V(t_0) - \varepsilon/2$ .

Из непрерывности:  $\exists \delta : \forall u \in (t_0 - \delta; t_0) : |f(u) - f(t_0)| < \varepsilon/2$ . Добавим точек так, чтобы выполнялись условия  $s_k = t_0, s_{k-1} \in (t_0 - \delta, t_0)$ .  $\sum_{j=1}^k |f(s_{j-1}) - f(s_j)| > V(t_0) - \varepsilon/2$  по-прежнему выполнено.

Теперь заметим, что  $V(f, [a, s_{k-1}]) \geq \sum_{j=1}^{k-1} |f(s_{j-1}) - f(s_j)|$ . Комбинируя неравенства, получаем  $V(f, [a, s_{k-1}]) \geq V(f, [a, t_0]) - \varepsilon$ . Точка  $s_{k-1}$  подходит в качестве  $s$ . □

*Замечание.* Если  $f$  — непрерывная скалярная функция, то во всех точках непрерывности  $f$  функции  $\phi_1$  и  $\phi_2$  тоже непрерывны.

Вспомним, что *носитель пути*  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — его образ ( $\text{Im } \gamma$ ). *Начало пути* — точка  $\gamma(a)$ , *конец пути* — точка  $\gamma(b)$ .

Предположим, что  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — путь,  $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  — гомеоморфизм подотрезков  $\mathbb{R}$ . Иными словами, непрерывная, строго монотонная функция.

Утверждается, что  $f \circ \phi$  имеет ограниченную вариацию  $\iff f$  имеет ограниченную вариацию. Более того, в этом случае вариации совпадают.

*Доказательство.* Всякой сумме  $\sum_{j=1}^k |(f \circ \phi)(s_{j-1}) - (f \circ \phi)(s_j)|$  соответствует сумма  $\sum_{j=1}^k |(f)(\phi(s_{j-1})) - (f)(\phi(s_j))|$ . Их супремумы равны, а если точки  $s_0, \dots, s_k$  образуют монотонную последовательность отрезка  $[a, b]$  (либо  $a \leq s_0 < \dots < s_k \leq b$ , либо  $a \leq s_k < \dots < s_0 \leq b$ ). Их образ — точки  $\phi(s_0), \dots, \phi(s_k)$  — тоже образуют монотонную последовательность отрезка, причём  $\phi$  обратимо, все разбиения отрезка достигаются. □

**Определение 1.3.3** (Простая дуга). Такой путь  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , что  $\gamma$  — инъекция.

Тогда  $\gamma$  — гомеоморфизм между отрезком  $[a, b]$  и своим носителем  $\gamma([a, b])$ . Это следует из того, что компактность прообраза влечёт компактность образа, а замкнутость образа влечёт замкнутость прообраза (плюс и  $[a, b]$ , и  $\gamma([a, b])$  ограничены).

Пусть  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow L, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow L$  — простые дуги, причём  $\gamma_1([a, b]) = \gamma_2([c, d]) = L$ .

Тогда оказывается, что длины путей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  равны: для  $\phi : \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$  — гомеоморфизма —  $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \phi$ .

Таким образом, о длине носителя простой дуги можно говорить вне зависимости от пути, параметризующего его.

Рассмотрим простую дугу — верхнюю полуокружность  $x^2 + y^2 = 1$ , где  $y \geq 0$ . Это простая дуга, так как можно параметризовать в виде  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $\gamma : x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})$ .

**Определение 1.3.4** (Число  $\pi$ ). Длина данной дуги полуокружности.

Пусть  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — изометрическое отображение. Тогда  $V(A \circ f, [a, b]) = V(f, [a, b])$  — это видно из взаимнооднозначного соответствия между суммами при подсчёте вариации.

Отсюда следует, что длина нижней полуокружности  $x^2 + y^2 = 1, y \leq 0$  — тоже  $\pi$ .

### 1.3.1 Длина гладкого пути

Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — путь, причём  $\gamma \in C^{(1)}$ . А именно: запишем его через координатные функции,  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$ , все производные  $\gamma'_j(t)$  существуют и непрерывны при  $t \in [a, b]$ . Такой путь называется *гладким*.

**Теорема 1.3.3.** Всякий гладкий путь спрямляем, причём его длина равна

$$l(\gamma, [a, b]) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n (\gamma'_j(t))^2} dt$$

*Доказательство.* Пусть  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = b$ . Запишем сумму, получающуюся при вычислении вариации:  $\sum_{i=1}^k |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$ .

Пусть  $I_1, \dots, I_k$  — попарно непересекающиеся (за исключением, быть может, концов) замкнутые отрезки,  $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ . Видим, что всякому разбиению из точек  $\{t_i\}_{i=0}^k$  соответствует разбиение из отрезков  $\{I_i\}_{i=1}^k$ .

Согласно неравенству Лагранжа:  $|\gamma(t_{i-1}) - \gamma(t_i)| \leq |\gamma'(\xi)| \cdot |t_i - t_{i-1}|$ , где  $\xi \in [t_i, t_{i+1}]$ .

Продолжим неравенство:

$$|\gamma(t_{i-1}) - \gamma(t_i)| \leq |\gamma'(\xi)| \cdot |t_{i-1} - t_i| \leq \sup_{u \in [t_i, t_{i+1}]} |\gamma'(u)| \cdot |t_{i-1} - t_i|$$

В правой части неравенства получилось слагаемое из верхней суммы Дарбу для  $\gamma'$ .

Положим  $\varepsilon > 0$ , выберем такое разбиение  $\{t_i\}_{i=0}^k$ , что  $\sum_{i=1}^k |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \geq l(\gamma, [a, b]) - \varepsilon$ .

Измельчим соответствующее разбиение  $\{I_i\}_{i=1}^k$ , превратив его в разбиение  $\{J_j\}_{j=1}^s$ , такое, что

$$\sum_{j=1}^s \sup_{t \in J_j} |\gamma'(t)| \cdot |J_j| \leq \int_a^b \gamma'(t) dt + \varepsilon.$$

Теперь в качестве точек  $\{t_i\}_{i=1}^k$  рассмотрим концы отрезков  $\{J_j\}_{j=1}^s$ .  $\sum_{j=1}^s |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \geq l(\gamma, [a, b]) - \varepsilon$  по-прежнему верно.

Таким образом, мы доказали, что  $l(\gamma, [a, b]) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$  — с точностью до  $\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  можно выбрать сколь угодно малым.

Рассмотрим произвольные  $x < y \in [a, b]$ . Для них верны неравенства

$$|\gamma(y) - \gamma(x)| \leq l(\gamma, [x, y]) \leq \int_x^y |\gamma'(t)| dt$$

Поделив это на  $y - x$ , получим

$$\left| \frac{\gamma(y) - \gamma(x)}{y - x} \right| \leq \frac{l(\gamma, [a, y]) - l(\gamma, [a, x])}{y - x} \leq \frac{1}{y - x} \int_x^y \gamma'(t) dt$$

Обозначим  $L(u) := l(\gamma, [a, u])$ . Устремим  $y \rightarrow x_+$ , получим  $|\gamma'(x)| \leq \underset{\text{справа}}{L'(x)} \leq \underset{\text{слева}}{|\gamma'(x)|}$ , то есть по принципу о двух полицейских наступает равенство. Аналогичным образом получается  $L'(u)$ .

Тогда очевидно  $L(u) = \int_a^u |\gamma'(t)| dt + C$  для некой константы  $C$ . Так как  $L(a) = 0$ , то  $C = 0$ .  $\square$

«Если всё хорошо», то для скалярной функции  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  должно выполняться  $V(g, [a, b]) = \int_a^b |g'(t)| dt$ .

*Пример* (Когда не совсем всё хорошо). Вариация возрастающей функции  $g(t) = \sqrt{t}$  равна  $g(1) - g(0) = 1$ . При подсчёте по формуле, получаем  $V(g, [0, 1]) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ . Интеграл этот не существует, производная в нуле не определена.

Если посчитать  $V(g, [\varepsilon, 1]) = \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ , то получится  $2 - 2\sqrt{\varepsilon}$ . Здесь возникает понятие о несобственном интеграле — при стремлении  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## Лекция XII

31 марта 2023 г.

### 1.4 Естественная параметризация

Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — спрямляемый путь.

Выберем  $t_0 \in [a, b]$ , обозначим  $\phi(t) = \begin{cases} l(\gamma, [t_0, t]), & t \geq t_0 \\ -l(\gamma, [t, t_0]), & t < t_0 \end{cases}$ . Функция  $\phi$  возрастает и непрерывна.

Обозначим  $\phi([a, b]) = [\alpha, \beta]$ .

**Определение 1.4.1** (Движение без задержек). Такой путь  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , что  $\forall [c, d] \subset [a, b] : c < d \Rightarrow l(\gamma, [c, d]) > 0$ .

При движении без задержек  $\phi$  строго возрастает, значит, есть биекция  $\psi = \phi^{-1} : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ .

Введём  $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n; \tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$ .

Рассмотрим  $[\delta, \rho] \subset [\alpha, \beta]$ . Положим  $c = \psi(\delta), d = \psi(\rho)$ .

Заметим, что  $\rho - \gamma = \phi(d) - \phi(c) = l(\gamma, [c, d]) = l(\tilde{\gamma}, [\delta, \rho])$ .

При такой параметризации для любого отрезка  $I : l(\tilde{\gamma}, I) = |I|$ . Отображение  $\psi$  называется *естественной параметризацией пути*  $\gamma$ ;  $\tilde{\gamma}$  — тот же путь, *параметризованный естественным образом*.

Пусть теперь  $\gamma$  — гладкий путь, то есть  $\gamma \in C^{(1)}$ . Тогда для  $\phi$  имеется формула:

$$\phi(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(t)| dt$$

Было бы удобно, чтобы путь  $\gamma$  был движением без задержек. Предположим ещё больше:  $\gamma'(s) \neq 0$  для любого  $s \in [a, b]$ . Это называется *безостановочным движением*.

Отсюда видим  $\phi'(t) = |\gamma'(t)|$  по теореме Ньютона — Лейбница, откуда  $\psi'(\tau) = \frac{1}{\phi'(\psi(\tau))}$  и наконец

$$\tilde{\gamma}'(\tau) = \gamma'(\psi(\tau)) \cdot \psi'(\tau) = \frac{\gamma'(\psi(\tau))}{\phi'(\psi(\tau))} = \frac{\gamma'(\psi(\tau))}{|\gamma'(\psi(\tau))|}$$

Таким образом,  $|\tilde{\gamma}'(\tau)| = 1$ , что и стоило ожидать при условии  $\forall I : l(\tilde{\gamma}, I) = |I|$ .

*Замечание.* Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — спрямляемый путь, предположим, что  $\gamma'$  существует и непрерывна на интервале  $(a, b)$ . Тогда тоже есть функция  $\phi(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(t)| dt$ , определённая при  $t, t_0 \in (a, b)$ .

Более того, у функции  $\phi$  есть пределы при  $t \rightarrow a$  или  $t \rightarrow b$ .

$$l(\gamma, [a, b]) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0} l(\gamma, [a + \varepsilon, b - \delta]) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\delta}$$

*Пример.* Рассмотрим путь  $\kappa(t) = [t, \sqrt{t}]$ . Для него  $\kappa'(t) = (1, \frac{1}{2\sqrt{t}})$ ;  $|\kappa'(t)| = \sqrt{1 + \frac{1}{4t}}$ .

Тогда

$$l(\kappa, [0, 1]) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l(\kappa, [\varepsilon, 1]) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4t}} dt$$

Об интеграле  $\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4t}} dt$  говорят, что он существует в *несобственном смысле*; в данном случае он очевидно существует, так как обе координаты пути монотонны, то есть путь — ограниченной вариации.

## 1.5 Про комплексные числа

Рассмотрим комплексную плоскость  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ;  $x + iy \leftrightarrow (x, y)$ . Я буду обозначать вещественную часть  $\Re(x + iy) = x$  и мнимую часть  $\Im(x + iy) = y$ .

Всякую функцию  $g : (\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  можно рассматривать, как векторнозначную функцию со значением в  $\mathbb{R}^2$ ; в частности, их можно дифференцировать.

Пусть  $g(x) = (g_1(x) \ g_2(x)) = g_1(x) + ig_2(x)$ . Тогда  $g'(x) = (g'_1(x) \ g'_2(x)) = g'_1(x) + ig'_2(x)$ .

Комплекснозначные функции наследуют все свойства векторнозначных функций, но вдобавок тут появляются некоторые дополнительные операции. Так, комплексные числа можно перемножать.

Пусть  $g_1, g_2 : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  — обе дифференцируемы. Сохраняется формула

$$(g_1 \cdot g_2)'(t) = g_1(t)g'_2(t) + g'_1(t)g_2(t)$$

Это можно видеть, либо проверив вручную, что при перемножении комплексные производные перемножаются соответствующим образом, либо просто повторив доказательство производной произведения:

$$\frac{g_1(t)g_2(t) - g_1(s)g_2(s)}{t - s} = \frac{(g_1(t) - g_1(s))g_2(t) + g_1(s)(g_2(t) - g_2(s))}{t - s} \xrightarrow{s \rightarrow t} \lim_{s \rightarrow t} \left[ \frac{g_1(t) - g_1(s)}{t - s} + g_2(s) \frac{g_1(t) - g_1(s)}{t - s} \right]$$

То, что комплексное произведение непрерывно, следует из покоординатной непрерывности, получаем искомое равенство.

Определим для  $z = a + bi$  его длину как вектор в  $\mathbb{R}^2$  — *модуль*  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Определим для  $z = a + bi$  его *комплексно-сопряжённое*  $\bar{z} = a - bi$ . Можно заметить, что  $z\bar{z} = |z|^2$ . Также можно заметить, что для  $z \neq 0 : z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ .

Теперь изучим производные комплекснозначных функций.  $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ .  $(\bar{g})'(t) = \overline{g'(t)}$ .

Для  $g(t) \neq 0$  :  $(g'^{-1})(t) = -\frac{g'(t)}{g(t)^2}$ . Для доказательства опять же повторим вещественное доказательство:

$$\frac{1}{t-s} \left( \frac{1}{g(t)} - \frac{1}{g(s)} \right) = \frac{1}{t-s} \cdot \frac{g(s) - g(t)}{g(s)g(t)}$$

Введём на комплексной плоскости единичную окружность  $\mathbb{T} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  и единичный круг  $\mathbb{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ . Замкнутый комплексный круг обозначают  $\bar{\mathbb{D}} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ , что не следует путать с комплексным сопряжением.

**Факт 1.5.1.**  $\mathbb{T}$  — подгруппа в  $\mathbb{C}^*$  по умножению.

*Доказательство.*  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ , что следует из прямой проверки.  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z}$  для  $z \in \mathbb{T}$ .  $\square$

*Замечание.* Заметим, что для  $z = a + bi, w = c + di$  верно:

$$z\bar{w} = (a + bi)(c - di) = ac + bd + i(bc - ad)$$

Таким образом, для точек-векторов комплексной плоскости  $z, w$  их скалярное произведение равно  $\Re(z\bar{w})$ . В частности,  $z \perp w \iff z\bar{w}$  чисто мнимое число.

### 1.5.1 Простое вращение

**Определение 1.5.1** (Простое вращение). Отображение  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$  со следующими свойствами:

1.  $\gamma$  всюду дифференцируема (и всюду непрерывна).
2.  $\forall t \in \mathbb{R} : |\gamma'(t)| = 1$ .
3.  $\gamma(0) = 1, \gamma'(0) = i$ .

**Теорема 1.5.1.** Простое вращение существует и единственно.

*Замечание.* Пусть  $\phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{T}$  — гладкое отображение (класса  $C^{(1)}$ ). Продифференцируем равенство  $\phi(t) \cdot \overline{\phi(t)} = 1$ :

$$\phi(t)\overline{\phi'(t)} + \phi'(t)\overline{\phi(t)} = 0$$

Получили сумму двух комплексносопряжённых чисел, равную 0. Значит,  $2\Re(\phi'(t)\overline{\phi(t)}) = 0$ , то есть  $\phi(t) \perp \phi'(t)$ .

Таким образом,  $\exists w : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , такая, что  $\phi'(t)\overline{\phi(t)} = w(t)i$ .

Пусть  $\forall t : \phi'(t) \neq 0$ . Тогда  $w$  — непрерывная не обнуляющаяся функция, значит, она сохраняет знак.

**Определение 1.5.2** (Движение против часовой стрелки). Движение  $\phi$  по окружности, такое, что  $w(t) > 0$ . Также говорят о *движении в положительном направлении* (при движении *круг остаётся слева*).

Если  $|\phi'(t)| = 1$ , то  $|w(t)| = 1$ . Так как  $w(t)$  не меняет знак, то на самом деле  $w(t)$  — константа, не зависит от  $t$ : всегда либо  $+1$ , либо  $-1$ .

Из определения простого вращения извлекаем, что  $w(0) = 1$ . Таким образом, простое вращение происходит против часовой стрелки.

Так как  $w = 1$ , то  $\phi'(t) = i\phi(t)$ .

Если  $\phi_1, \phi_2 : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{T}$  и удовлетворяют выше написанному, то «более-менее они одинаковые».

## Лекция XIII

4 апреля 2023 г.



... Пропущена первая пара, доказали  $\exists!$  простое вращение, посмотрели на него внимательно.

$$i = \Gamma\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2i \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Так как  $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$ , то уравнение имеет единственное решение  $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### 1.5.2 Формулы Тейлора и ряд Тейлора для функций $\Gamma, \sin, \cos$

Используя основное тождество, получаем  $\Gamma^{(n)}(t) = i^n \Gamma(t)$ . Значит, записывая формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, получаем в нуле

$$\Gamma(t) = 1 + it + \frac{1}{2!} i^2 t^2 + \frac{1}{3!} i^3 t^3 + \dots + \frac{1}{n!} i^n t^n + o(t^n)$$

Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$  — векторнозначная функция, непрерывно дифференцируемая  $n+1$  раз. Как можно записать для неё формулу Тейлора?

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_j(t) \end{pmatrix}$$

Выбрав  $t_0 \in (a, b)$ , можем записать  $f_j(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f_j^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f_j^{(n+1)}(\xi_j) (t - t_0)^{n+1}$ . Эти точки  $\xi_j$  зависят от  $j$ , поэтому записать формулу Лагранжа прямо не получится.

Для оценки того, сходится ли ряд Тейлора к соответствующей функции, можно оценить  $f^{(n+1)}$  по модулю независимо от точки, на всём промежутке  $(t_0, t)$ .

Можно пойти по-другому:  $\exists \xi \in (t_0, t) : \left| f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi) (t - t_0)^{n+1}|$ .

*Доказательство.* Такое же, как и в формуле Лагранжа: рассмотрим  $u \in \mathbb{R}^n$ , такой, что  $|u| = 1$  и

$$\left\langle u, f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k \right\rangle = \left| f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k \right|$$

Введём функцию  $g(\tau) := \langle u, f(\tau) \rangle$  и запишем формулу Лагранжа для неё:

$$\begin{aligned} g(t) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k &= \frac{1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\xi) (t - t_0)^{n+1}, \quad \text{для } \xi \in (t_0, t) \\ &\Downarrow \\ \left| f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k \right| &\leq \frac{1}{(n+1)!} |u| \cdot |t - t_0|^{n+1} |f^{(n+1)}(\xi)| \end{aligned}$$

□

Итак,

$$\left| \Gamma(t) - \sum_{k=0}^n \frac{i^k}{k!} t^k \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} |t|^{n+1} \cdot |\Gamma^{(n+1)}(\xi)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |t|^{n+1}, \quad \text{для некоего } \xi \in (0, t)$$

Если  $|t| \leq R$  для некоей константы  $R \in \mathbb{R}$ , то остаточный член равномерно стремится к нулю:  $\frac{t^n}{(n+1)!} \leq \frac{R^n}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Значит, ряд Тейлора сходится для  $\Gamma(t)$  на всей вещественной оси:  $\Gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} t^k$ . Вспомним, что  $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k$ .

Взяв вещественную и мнимую часть разложения в ряд Тейлора  $\Gamma(t)$ , получим разложение в ряд Тейлора косинуса и синуса соответственно:

$$\begin{aligned}\cos(t) &= \Re \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \Re \left( \frac{i^k}{k!} t^k \right) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots \\ \sin(t) &= \Im \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \Im \left( \frac{i^k}{k!} t^k \right) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots\end{aligned}$$

**Определение 1.5.3** (Тангенс). Функция  $\operatorname{tg}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ , заданная везде, где знаменатель не обращается в ноль.

*Замечание.* Период тангенса —  $\pi$ :  $\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \operatorname{tg}(x)$ .

Тангенс строго возрастает на промежутках определённости:

$$\operatorname{tg}'(t) = \left( \frac{\sin t}{\cos t} \right)' = \frac{(\cos t)^2 + (\sin t)^2}{(\cos t)^2} = \frac{1}{(\cos t)^2}$$

### 1.5.3 Обратные тригонометрические функции

#### Арксинус

$\sin' x = \cos x$ , что больше нуля на  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Значит,  $\sin x$  возрастает на  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , обозначим  $\arcsin \stackrel{\text{def}}{=} \sin^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \text{ так как на } (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \text{ косинус положительный} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

#### Арктангенс

$\operatorname{tg}$  возрастает на  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , определим  $\operatorname{arctg} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tg}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \dots = \frac{1}{1 + x^2}$$

Очевидным следствием является  $\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}, t \in \mathbb{R}$ .

Запишем  $\frac{1-t^{n+1}}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n$ . Таким образом,  $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^n t^{2n} + \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}$ .

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt$$

Считаем, что  $|x| \leq 1$ , оценим

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt \right| \leq \int_0^{|x|} t^{2n+2} dt = \frac{1}{2n+3} |x|^{2n+3}$$

Таким образом, получаем ряд Тейлора для арктангенса:

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \dots$$

---

Запишем  $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$  для  $|x| \leq 1$ .

Ряд Ньютона для  $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$  сходится равномерно при  $|t| \leq x < 1$ . Равномерно сходящийся ряд можно проинтегрировать и получить ряд Тейлора для арксинуса.

---

Ещё раз посмотрим на сходство:  $\Gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} t^k$ ;  $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k$ . Если в ряд для экспоненты формально подставить  $t \leftarrow it$ , то получится простое вращение.

Простое вращение ещё называют *мнимой экспонентной*.  $e^{ix} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$ . В частности,  $e^{i\pi} = -1 \iff \Gamma(\pi) = 1$ .

Покамест  $e^{ix}$  — это только обозначение, не имеющее обозначение к  $e^x$  для  $x \in \mathbb{R}$ , потом мы увидим ещё причины, по которым эта запись естественна.

#### 1.5.4 Формула Эйлера

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \cos x + i \sin x; & \Gamma(-x) &= \overline{\Gamma(x)} = \cos x - i \sin x \\ &\Downarrow \\ \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; & \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}$$

Определим  $e^z \stackrel{\text{def}}{=} e^a \cdot e^{ib} = e^a \Gamma(b)$ . Основное свойство экспоненты  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$  сохраняется.

Для комплексного числа  $z \in \mathbb{C}$  определим  $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$  и  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ .

Заметим также, что  $(e^{ax})' = a \cdot e^{ax}$ , а  $(e^{ibx})' = \Gamma(bx)' = ib\Gamma(bx) = ib \cdot e^{ibx}$ , согласованность полная.

### 1.6 Дифференцирование высших порядков

Рассмотрим скалярную функцию  $f : (G \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ . Для векторнозначных функций это тоже можно делать, но получится много индексов, и в любом случае можно разобрать векторнозначную функцию на координатные скалярные функции.

Пусть  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  существуют и непрерывны для  $j = 1..n$ . При дифференцировании один раз получаем  $df(x, h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \cdot h_j =: \phi_h(x)$ , где  $h = (h_1 \dots h_n)$ .

Предположим, что возможно продифференцировать  $\phi_h(x)$  по  $x$  ещё раз:  $\frac{\partial}{\partial x_j} \phi_h(x) = \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_s} f(x) \cdot h_s$ .

Предположим, что все производные  $\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_s} f$  существуют и непрерывны. Тогда

$$d\phi_h(x, k) = \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_s} f(x) h_s k_j = D^2 f(x, h, k)$$

При каждом  $x$  полученный дифференциал  $D^2 f(x, \cdot, \cdot)$  — билинейная функция.

По определению  $D^r f(x, h^{(1)}, \dots, h^{(r)})$  — при фиксированном  $x$  это  $r$ -линейная форма по  $h^{(1)}, \dots, h^{(r)}$ .

Раскрыв, получим  $r$ -ый дифференциал  $f$  —  $r$ -линейную форму:

$$D^r f(x, h^{(1)}, \dots, h^{(r)}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_r \leq n} \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{j_r}} f(x) h_{j_1}^{(1)} \cdots h_{j_r}^{(r)} = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_r \leq n} \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_r}}(x) h_{j_1}^{(1)} \cdots h_{j_r}^{(r)}$$

Разумеется, для существования дифференциала мы предполагаем, что существуют и непрерывны все производные вплоть до  $r$ -й.

## Лекция XIV

11 апреля 2023 г.

**Определение 1.6.1** (Полилинейная функция порядка  $s$ ). Линейное по каждому из  $s$  аргументов отображение  $L : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_s \rightarrow \mathbb{R}$ . Она же —  $s$ -линейная функция.

Пусть в функцию  $L$  подставили  $h^{(1)}, \dots, h^{(s)}$ . Разложим их по базису  $h^{(j)} = \sum_{k=1}^n h_k^{(j)} e_k$  и воспользуемся линейностью:

$$L(h^{(1)}, \dots, h^{(s)}) = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_s \leq n} h_{j_1}^{(1)} \cdots h_{j_s}^{(s)} \cdot a_{j_1, \dots, j_s}$$

Все полилинейные функции имеют такой вид, причём всякая функция, имеющая такой вид — полилинейна.

$s$ -линейной функции  $L$  соответствует  $s$ -форма  $T(h) = L(h, \dots, h)$  — сужение  $L$  на диагональ. В частности, для  $s = 2$  :  $T$  — квадратичная форма.

**Определение 1.6.2** (Симметричная  $s$ -линейная форма  $L$ ). Такая, что она не зависит от перестановки векторов-аргументов.

**Теорема 1.6.1.** Если все частные производные порядка  $r$  от  $f$  непрерывны, то они не зависят от порядка дифференцирования.

*Доказательство.* Позднее. □

**Теорема 1.6.2.** Пусть  $L$  —  $s$ -линейная функция,  $T$  — соответствующая  $s$ -форма. Если  $L$  симметрична, то  $L$  однозначно восстанавливается по  $T$ .

*Пример* (Объяснение). Рассмотрим  $s = 2$ .

$$T(x + y) = L(x + y, x + y) = L(x, x) + L(x, y) + L(y, x) + L(y, y) = L(x, x) + 2L(x, y) + L(y, y)$$

$$T(x - y) = L(x - y, x - y) = L(x, x) - L(x, y) - L(y, x) + L(y, y) = L(x, x) - 2L(x, y) + L(y, y)$$

$$L(x, y) = \frac{1}{4}(T(x + y) - T(x - y))$$

*Доказательство.*

$$L(h^{(1)}, \dots, h^{(s)}) = \frac{1}{2^s s!} \left( \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s = \pm 1} (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_s) \cdot T(\varepsilon_1 h^{(1)} + \cdots + \varepsilon_s h^{(s)}) \right)$$

Проверим истинность формулы: раскроем  $T(\varepsilon_1 h^{(1)} + \cdots + \varepsilon_s h^{(s)})$  в сумму  $s^s$  слагаемых вида  $(\prod \varepsilon_i) \cdot L(\sum \varepsilon_j h^{(j)})$ . При фиксированных  $i_1, \dots, i_s$ , рассмотрим все слагаемые  $\pm L(h^{(i_1)}, \dots, h^{(i_s)})$ . Если  $i_1, \dots, i_s$  — перестановка, то слагаемое входит со знаком  $1 = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_s)^2$ , иначе найдётся  $j \neq i_1, \dots, i_s$ , тогда  $\varepsilon_j = \pm 1$  нейтрализуют друг друга, в сумме останется 0. □

Дифференциалом порядка  $r$  от  $f$  обычно считают  $r$ -форму

$$d^{(r)}f(x, h) = D^{(r)}f(x, \underbrace{h, \dots, h}_r)$$

В дальнейшем все упоминания дифференциала будут относиться к  $d^{(r)}$ .

## 1.7 Формула Тейлора функции нескольких переменных

$f : G \rightarrow \mathbb{R}$  —  $r + 1$  раз непрерывно дифференцируема (нам придётся использовать  $r + 1$ -ю производную для записи остатка).

Рассмотрим  $x_0 \in G, \overline{B_r(x_0)} \subset G, x \in B_r(x_0)$ .

Выберем настолько маленький  $\varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$ . Тогда  $x_0 + t(x - x_0) \in B_r(x_0)$  для  $t \in (-1, 1 + \varepsilon)$ .

Продифференцируем  $\phi : (-1, 1 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \phi(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$ .

Обозначим  $p = x - x_0$ , при новом обозначении  $\phi(t) = f(x_0 + tp)$ .

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + tp) p_j = \langle \text{grad}_f(x_0), p \rangle df(x_0 + tp, p) \\ \phi^{(2)}(t) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x_0 + tp) p_k p_j = d^2 f(x_0 + tp, p)\end{aligned}$$

В общем случае  $\phi^{(s)}(t) = d^{(s)}f(x_0 + tp; p)$ .

$$f(x) - f(x_0) = \phi(1) - \phi(0) = \frac{\phi'(0)}{1!} + \frac{\phi^{(2)}(0)}{2!} + \dots + \frac{\phi^{(r)}(0)}{r!} + \frac{\phi^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!}, \text{ где } \xi \in [0, 1].$$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{d^{(1)}f(x_0, x - x_0)}{1!} + \frac{d^{(2)}f(x_0, x - x_0)}{2!} + \dots + \frac{d^{(r)}f(x_0, x - x_0)}{r!}}_{r\text{-й многочлен Тейлора для } f \text{ в точке } x_0} + \frac{d^{(r+1)}f(u, x - x_0)}{(r+1)!}$$

где  $u$  лежит на отрезке с концами в точках  $x_0$  и  $x$ . Заведомо  $u \in B_r(x_0)$ .

**Предложение 1.7.1.** Пусть  $L$  —  $s$ -линейная функция на  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $\exists C \in \mathbb{R} :$

$$|L(h^{(1)}, \dots, h^{(s)})| \leq C \cdot |h^{(1)}| \cdot \dots \cdot |h^{(s)}|$$

Для соответствующей  $s$ -формы:  $|T(h)| \leq C \cdot |h|$ .

*Доказательство.* Вспомним формулу  $L(h^{(1)}, \dots, h^{(s)}) = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_s \leq n} a_{j_1, \dots, j_s} h_j^{(1)} \cdot \dots \cdot h_{j_s}^{(s)}$ . Существует такое  $A : \forall j_1, \dots, j_s : |a_{j_1, \dots, j_s}| \leq A$ , так как  $a$  — конечно.

$$\left| \sum a_{j_1, \dots, j_s} h_j^{(1)} \cdot \dots \cdot h_{j_s}^{(s)} \right| \leq A \sum_{a_{j_1, \dots, j_s}} |h_1^{(1)}| \cdot \dots \cdot |h_s^{(s)}| = A \left( |h_1^{(1)}| + \dots + |h_1^{(s)}| \right) \cdot \dots \cdot \left( |h_n^{(1)}| + \dots + |h_n^{(s)}| \right)$$

$i$ -й множитель оценивается  $\sqrt{n} \cdot |h^i|$  согласно КБШ.  $\square$

*Замечание.* Пусть  $\exists h : T(h) \neq 0$ . Тогда  $T(th) = t^s T(h)$ , то есть оценка в некотором смысле плотная.

Таким образом, в многочлене Тейлора  $k$ -е слагаемое оценивается по модулю  $\frac{1}{k!} |x - x_0|^k$

Оценим остаточный член в формуле Тейлора:  $d^{(r+1)}f(u, x - x_0)$  есть  $\frac{\partial^{r+1}}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_r}} f(u)$ . В этом шаре все производные существуют и непрерывны, значит, ограничены некой константой.

Так как  $u \in \overline{B_r(x_0)}$ , то  $|d^{(r+1)}f(u, x - x_0)| \leq C |x - x_0|^{r+1}$ .

**Теорема 1.7.1.** Пусть  $f$  —  $r + 1$  раз непрерывно дифференцируема в  $G \subset \mathbb{R}^n$ , причём  $\overline{B_r(x_0)} \subset G, x \in B_r(x_0)$ . Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^r \frac{d^{(j)}f(x_0, x - x_0)}{j!} + \mathcal{O}(|x - x_0|^{r+1})$$

или  $o(|x - x_0|^r)$

*Доказательство.* Написано выше. □

**Теорема 1.7.2** (Единственность многочлена Тейлора). Пусть  $f$  —  $r + 1$  раз непрерывно дифференцируема в  $G \subset \mathbb{R}^n$ , причём  $\overline{B_r(x_0)} \subset G, x \in B_r(x_0)$ .

Пусть  $f(x) - f(x_0) = \sum_{j=1}^r T_j(x - x_0) + o(|x - x_0|^r)$ , где  $T_j$  — некоторая  $j$ -форма.

Тогда непременно  $\forall j : T_j(h) = \frac{d^{(j)}f(x_0, h)}{j!}$ .

*Доказательство.* Аналогично одномерному случаю:

Пусть есть два представления — формула Тейлора, и ещё одно, такое:  $f(x) - f(x_0) = \sum_{j=1}^r S_j(x - x_0) + o(|x - x_0|^r)$ , где  $S_j$  —  $j$ -форма.

Вычтем одно из другого. Получим функцию  $r : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r(x) = \sum_{j=1}^r R_j(x - x_0) = o(|x - x_0|^r)$ , где  $R_j$  —  $j$ -форма.

Пусть  $k$  — наименьший индекс, такой, что  $R_k \neq 0$ , то есть найдётся вектор  $v$ , такой, что  $R_k(v) \neq 0$ .

Рассмотрим  $t \in \mathbb{R}$  в такой окрестности 0, что  $x + tv \in G$ . Для них  $r(tv) = t^k R_k(v) + o(t^{k+1})$ . Получили противоречие. □

## Лекция XV

14 апреля 2023 г.

## Лекция XVI

18 апреля 2023 г.

Упс, была лекция в пятницу, а ещё я опоздал минут на 5. To be deployed. . .

3. Форма  $V|_L$  неопределённая.  $\exists u_1, u_2 \in L : V(u_1) > 0, V(u_2) < 0$ . Так как  $u_1, u_2 \in L$ , то  $\exists a_1, a_2 \in \mathbb{R}^m : u_1 = d\Phi(t_0, a_1), u_2 = d\Phi(t_0, a_2)$ , где  $\Phi(x_0) = t_0 \in B$ .

Запишем

$$F(\Phi(t_0 + \tau u_1)) - F(\Phi(t_0))$$

где  $\tau \in (-\delta, \delta)$ .

Вычисления с прошлой лекции показывают, что  $\tau \mapsto F(\Phi(t_0 + \tau a_1))$  имеет локальный минимум при  $t = 0$ . При замене  $a_1$  на  $a_2$  получаем локальный максимум.

Значит, нет ни максимума, ни минимума.

### 1.7.1 Независимость частных производных от порядка дифференцирования

Понятно, что достаточно научиться переставлять два оператора дифференцирования.

**Теорема 1.7.3.** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^2$  — открытое множество плоскости,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, такая, что  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  существуют и непрерывны.

Тогда  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  существует и совпадает с  $\psi := \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .

*Доказательство.* Докажем в одной точке  $(x_0, y_0) \in U$ .

Выберем  $\rho > 0 : K := \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq \rho, |y - y_0| \leq \rho\} \subset U$ .

Выберем последовательность  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}, (0 < h_n \leq \rho)$ , стремящуюся к нулю.  $\phi(x) = \frac{f(x, y_0 + h_n) - f(x, y_0)}{h_n}$ .  
 $\phi_n(x) \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} f(x, y_0)$  (1).

$\phi'_n(x) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(\cdot, y_0) = \psi(x, y_0)$  (2) поточечно.

Была теорема, что при некоторых условиях тогда что?

Достаточно доказать, что сходимость в (1) и (2) равномерная.

Касательно (2):  $\exists \xi_n(x)$  между  $y_0 + h_n$  и  $y_0$  :  $\frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, y_0 + h_n) - \frac{\partial}{\partial x} f(x, y_0)}{h_n} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(x, \xi_n(x))$ . По теореме Кантора  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : |t - t_1| \leq \delta, |s - s_1| \leq \delta, (t, s), (t_1, s_1) \in K \Rightarrow |\phi(t, s) - \phi(t_1, s_1)| < \varepsilon$ .

Заметим, что  $|y_0 - \xi_n(x)| \leq h_n < \delta$  при достаточно больших  $n$ . Значит,  $\left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x, \xi_n(x)) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y_0) \right| < \varepsilon$  при таких  $n$ .  $\square$

## Глава 2

# Несобственные интегралы и компания

### 2.1 Одна из ситуаций

$(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$  — возможно бесконечный отрезок.  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\forall [a, b] \subset (\alpha, \beta)$  пускай  $f$  интегрируема на  $[a, b]$  по Риману — Дарбу.

Если  $f$  не интегрируема по Риману — Дарбу на  $(\alpha, \beta)$ , но  $\exists \lim_{a \rightarrow \alpha, b \rightarrow \beta} \int_a^b f(x) dx$ , то говорят, что  $f$  интегрируема по отрезку  $(\alpha, \beta)$  в *несобственном смысле*.

**Определение 2.1.1** (Несобственный интеграл). Выше предложенный предел  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a \rightarrow \alpha, b \rightarrow \beta} \int_a^b f(x) dx$ .

Обозначение такое же, как и у обычного интеграла, но следует говорить, что интеграл несобственный.

1. Предел существует — «(несобственный) интеграл сходится».
2. Предела нет — «(несобственный) интеграл расходится».
3. Есть предел  $\lim_{b \rightarrow \beta-0} \int_a^b |f(x)| dx$  — «интеграл сходится абсолютно».

Применение критерия Коши:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists c < \beta : u, v \in [c, \beta) \Rightarrow \left| \int_u^v f(x) dx \right| < \varepsilon$ .

**Теорема 2.1.1.**  $f, g : [\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывны,  $\forall b < \beta$  обе интегрируемы по Риману на  $[\alpha, b]$  и  $|f| \leq g$ . Если  $\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$  сходится, то  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  сходится абсолютно.

*Доказательство.*  $\forall u < v \in [\alpha, \beta) : \left| \int_u^v f(x) dx \right| \leq \int_u^v |f(x)| dx \leq \int_u^v g(x) dx$ . □

**Следствие 2.1.1.** *Интеграл сходится абсолютно  $\Rightarrow$  интеграл сходится.*

*Примеры.*

- $\int_1^{\infty} x^{\gamma} dx$  сходится  $\iff \gamma < -1$ .
- $\int_1^{\infty} x^{\rho} dx$  сходится  $\iff \rho > -1$ .



Пусть нас интересует интеграл  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x) dx$ , при  $f, g$  непрерывных на  $[\alpha, \beta)$ ,  $f'$  непрерывна на  $(\alpha, \beta)$ .

Нас интересует предел  $b \rightarrow \beta$  выражения:

$$\int_{\alpha}^b f(x)g(x) dx = \left\| G(x) = \int_{\alpha}^x g(t) dt \right\| = \int_{\alpha}^b f(x) dG(x) = G(x)f(x) \Big|_{\alpha}^b - \int_{\alpha}^b G(x)f'(x) dx$$

Сформулируем условия на функции  $f, g$ . Предположим, что

1.  $G$  ограничена константой  $A$ .
2.  $\lim_{\beta-0} f = 0$ .
3.  $f$  монотонно убывает на  $[\alpha, \beta)$ . Тогда производная неположительна, интеграл  $\int_{\alpha}^{\beta} G(x)f'(x) dx$  сходится абсолютно:  $|G(x)f'(x)| \leq A|f'(x)| = -Af'(x)$ .

**Теорема 2.1.2.** При данных условиях интеграл  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x) dx$  сходится.

*Пример.*  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  сходится.

Заметим, что особенность есть только в  $\infty$ , будем рассматривать  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ . Положим  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \sin x$ . Тогда все условия выполнены.

## 2.2 Сравнение рядов и интегралов

Пусть  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  — монотонная функция. Тогда

$$\sum_{j=1}^n f(j) \quad \text{и} \quad \int_1^n f(x) dx$$

вещи близкие.

# Лекция XVII

21 апреля 2023 г.

Итак, пусть  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  — убывающая положительная функция. Предположим (хотя на самом деле для убывающей функции это всегда правда), что для любого  $R < \infty$ :  $f$  интегрируема по Риману — Дарбу на  $[0, R]$ .

Пусть  $A_1 < A_2 < \dots < A_j$  — возрастающая последовательность. Тогда оцениваем

$$\sum_{j=1}^k f(A_{j+1})(A_{j+1} - A_j) \leq \int_{A_1}^{A_{k+1}} f(x) dx \leq \sum_{j=1}^k f(A_j)(A_{j+1} - A_j)$$

В частном случае  $A_j = j$  получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k f(j+1) &\leq \int_1^{k+1} f(x) dx \leq \sum_{j=1}^k f(j) \\ \int_1^{k+1} f(x) dx &\leq \sum_{j=1}^k f(j) \leq \int_1^{k+1} f(x) dx + f(1) - f(k+1) \end{aligned}$$

Пусть  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ , тогда при сделанных предположениях ряд  $\sum_{j=1}^k f(j)$  сходится  $\iff \int_1^{k+1} f(x) dx$  сходится при  $k \rightarrow \infty$ .

*Замечание.* Пусть  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  расходится. Тогда, поделив неравенство, получаем

$$1 \leq \frac{\sum_{j=1}^k f(j)}{\int_1^{k+1} f(x) dx} \leq 1 + \frac{f(1) - f(k+1)}{\int_1^{k+1} f(x) dx}$$

Таким образом, по принципу двух полицейских, получаем, что  $\int_1^{k+1} f(x) dx$  и  $\sum_{j=1}^k f(j)$  — эквивалентные бесконечно большие при  $k \rightarrow \infty$ .

**Следствие 2.2.1.**  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \sim \log(k+1)$ . Кстати, так как  $\log(k+1) - \log(k) = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ , то можно написать и  $\log(k)$  вместо  $\log(k+1)$ .

Давайте теперь возьмём  $A_j = 2^j$ , где  $\{A_j\}_{j=0}^k$ . Так как  $A_{j+1} - A_j = 2^j$ , то получаем, что сходимость ряда  $\sum_{j=1}^{\infty} f(2^j)2^j$  эквивалентна сходимости интеграла  $\int_1^{\infty} f(x) dx$ .

Забавным следствием получается формулирующееся без интегралов утверждение из первого семестра о том, что ряды  $\sum_{j=1}^{\infty} f(2^j)2^j$  и  $\sum_{j=1}^{\infty} f(j)$  сходятся (или расходятся) одновременно.

*Замечание.* Аналогичные соображения для возрастающих функций, например, можно получить, что для  $s > 0$ :  $\sum_{n=1}^N n^s \sim \frac{1}{s+1} N^{s+1}$ .

## 2.2.1 Частичные суммы гармонического ряда и постоянная Эйлера — Маскерони

Оказывается, есть более сильное условие, чем  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \sim \log(k)$ .

$$\log(k+1) = \int_1^{k+1} \frac{dx}{x} = \sum_{j=1}^k \int_j^{j+1} \frac{dx}{x} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^k \int_j^{j+1} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{j} \right) dx$$

Оценив  $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{j} \right| = \left| \frac{x-j}{xj} \right| \leq \frac{1}{j^2}$ , получаем, что ряд этих штук сходится и разность

$$\log(k+1) - \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} C$$

стремится к некой постоянной  $C$  — *постоянной Эйлера — Маскерони* (на самом деле, постоянная Эйлера — Маскерони  $\gamma \stackrel{def}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \log(n)$ . Так как  $\log(k+1) - \log(k) = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ , то  $\gamma = -C$ ).

## 2.2.2 Формула Стирлинга

Получим асимптотическую оценку для факториала.

$\log(n!) = \sum_{i=1}^n \log i$ , сравним эту штуку с  $\int_1^{n+1} \log x dx$ . Как известно,  $\int \log x dx = x \log x - x + \text{const}$ .

$$\int_1^{n+1} \log x \, dx = (n+1) \log(n+1) - (n+1) + 1 = (n+1) \log(n+1) - n$$

Оценим по формуле Тейлора  $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\xi)^2}$ ,  $\xi \in [0, x]$ , откуда  $\log(1+x) = x + \phi(x)$ ,  $|\phi(x)| \leq \frac{1}{2}x^2$ .

$$\int_1^{n+1} \log x \, dx = \sum_{j=1}^n \int_1^{j+1} \log x \, dx = \sum_{j=1}^n \int_j^{j+1} (\log x - \log j) \, dx + \sum_{j=1}^n \log j$$

Для  $x \in [j, j+1]$  получаем  $\log x - \log j = \log\left(1 + \left(\frac{x-j}{j}\right)\right) = \frac{x-j}{j} + \phi\left(\frac{x-j}{j}\right)$ , где  $\left|\phi\left(\frac{x-j}{j}\right)\right| \leq \frac{1}{2} \frac{|x-j|^2}{j^2}$ .

Итак,

$$\begin{aligned} (n+1) \log(n+1) - n &= \sum_{j=1}^n \log j + \sum_{j=1}^n \int_j^{j+1} \phi\left(\frac{x-j}{j}\right) \, dx + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = \underbrace{\int_j^{j+1} (x-j) \, dx}_{1/2} \sum_{j=1}^n \log j + \frac{1}{2} \log(n+1) + \underbrace{v_n}_{\text{сходится}} \\ \left(n + \frac{1}{2}\right) \log(n+1) - n &= \log(1) + \dots + \log(n) + v_n \\ (n+1)^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} &= n! \cdot e^{v_n} \\ n^{n+\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}_{\text{стремится к } e} e^{-n} &= n! \cdot e^{v_n} \\ n! &\sim C \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \end{aligned}$$

*Интересный факт.* Появившаяся в последней строчке константа  $C = \sqrt{2\pi}$ .

## 2.3 Суммируемые семейства

Пусть есть множество проиндексированных (быть может комплексных) чисел  $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , где  $A$  — множество любой природы.

Число  $a$  называется суммой этого семейства, если  $\forall \varepsilon > 0 : \exists$  конечное подмножество  $B \subset A$ , такое, что  $\forall B \subset C \subset A : \left|a - \sum_{\alpha \in C} \xi_\alpha\right| < \varepsilon$ , где рассматриваются конечные надмножества  $C$ .

**Определение 2.3.1** (Суммируемое семейство). Семейства, у которого есть сумма. Пишут  $a = \sum_{\alpha \in A} \xi_\alpha$ .

*Замечание.* Семейство  $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in A}$  суммируемо  $\iff \{\Re(\xi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  и  $\{\Im(\xi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  оба суммируемы.

**Теорема 2.3.1.** Следующие условия эквивалентны:

1. Семейство  $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in A}$  суммируемо.
2. Суммы  $\sum_{\alpha \in C} |\xi_\alpha|$  ограничены по всем конечным  $C \subset A$ .

## Лекция XVIII

25 апреля 2023 г.

Ниже все множества  $E, e, \bar{e}$  — конечны.

**Теорема 2.3.2.** Пусть  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — числовое семейство. Следующие условия эквивалентны:

1. Семейство суммируемое.
2. Множество  $\left\{ \left| \sum_{\alpha \in e} a_\alpha \right| : e \subset A, e — конечно \right\}$  ограничено.
3. Множество  $\left\{ \sum_{\alpha \in e} |a_\alpha| : e \subset A, e — конечно \right\}$  ограничено.

*Доказательство.*

$1 \Rightarrow 2$ . Положим  $a$  — сумма семейства. Выберем  $\varepsilon = 1$ , по определению суммируемого семейства

$$\exists E \subset A : \forall e \supset E : \left| \sum_{\alpha \in e} a_\alpha - a \right| \leq 1.$$

Рассмотрим произвольное  $\bar{e} \subset A$ , положим  $e = \bar{e} \cup E$ .

$$\left| \sum_{\alpha \in \bar{e}} a_\alpha \right| = \left| \sum_{\alpha \in e} a_\alpha - \sum_{\alpha \in E \setminus \bar{e}} a_\alpha \right| \leq \underbrace{\left| \sum_{\alpha \in e} a_\alpha \right| + \sum_{\alpha \in E} |a_\alpha|}_{\text{ограничено}}$$

$3 \Rightarrow 2$  Очевидно.

$2 \Rightarrow 1, 3$ .

**Лемма 2.3.1.** Пусть  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — множество положительных чисел. Следующие условия эквивалентны:

- Семейство суммируемое.
- Множество  $\left\{ \sum_{\alpha \in e} a_\alpha : e \subset A, e — конечно \right\}$  ограничено.

Если любое из условий выполнено, то  $\sum_{\alpha \in e} a_\alpha = \sup \left\{ \sum_{\alpha \in e} a_\alpha : e \subset A \right\}$ .

*Доказательство леммы.*

$1 \Rightarrow 2$  уже доказали.

Положим  $a = \sup \left\{ \sum_{\alpha \in e} a_\alpha : e \subset A \right\}$ .

По определению супремума  $\exists E \subset A : \sum_{\alpha \in E} a_\alpha > a - \varepsilon$ . Тогда  $\forall \bar{e} \supset E : a - \varepsilon \leq \sum_{\alpha \in E} a_\alpha \leq \sum_{\alpha \in \bar{e}} a_\alpha \leq a$ .

Значит, множество суммируемо по определению.  $\square$

Разложим  $a_\alpha = b_\alpha + ic_\alpha$ . Понятно, что  $\{b_\alpha\}, \{c_\alpha\}$  удовлетворяют условию (2).

Для  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$  рассмотрим  $u_\alpha = u_\alpha^+ - u_\alpha^-$ , теперь  $\{u_\alpha\}$  разложимо в разность двух неотрицательных семейств  $\{u_\alpha^+\}$  и  $\{u_\alpha^-\}$ .

Если  $\{u_\alpha\}$  удовлетворяет условию (2), то так же удовлетворяют условию и  $\{u_\alpha^+\}$  вместе с  $\{u_\alpha^-\}$  — можно выбирать в конечное множество только положительные или только отрицательные числа.

Тогда  $a_\alpha = b_\alpha^+ - b_\alpha^- + i(c_\alpha^+ - c_\alpha^-) \Rightarrow \{a_\alpha\}$  суммируемо согласно лемме. Доказали  $2 \Rightarrow 1$ .

Чтобы доказать,  $2 \Rightarrow 3$  покажем, что  $|a_\alpha| \leq b_\alpha^+ + b_\alpha^- + c_\alpha^+ + c_\alpha^-$ .  $\square$

*Замечание.* Если  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — числовое семейство,  $u_\alpha \geq 0$ , то

$$\sum_{\alpha \in A} u_\alpha = \begin{cases} \text{сумма семейства,} & \text{если оно суммируемо} \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

**Теорема 2.3.3.** Если семейство  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$  суммируемо, то  $\{\alpha \in A \mid a_\alpha \neq 0\}$  не более, чем счётно.

*Доказательство.* Так как семейство суммируемо, то множество  $\left\{ \sum_{\alpha \in e} |a_\alpha| \mid e \subset A, e \text{ — конечно} \right\}$  ограничено неким числом  $C$ .

Выберем  $n \in \mathbb{N}$ , предположим, что нашлось  $k$  элементов  $a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_k} : |a_{\alpha_i}| \geq \frac{1}{n}$ .

Тогда  $\sum_{i=1}^k |a_{\alpha_i}| \geq \frac{k}{n}$ . Но так как эти суммы ограничены константой  $C$ , то  $k \leq nC$ , то есть  $A_n := \{\alpha \mid |a_\alpha| \geq \frac{1}{n}\}$  конечно.

Тогда  $\{\alpha \mid |a_\alpha| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  счётно.  $\square$

**Теорема 2.3.4** (О перестановках). Пусть  $\phi : A \rightarrow A$  — биекция. Тогда семейство  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$  суммируемо  $\iff$  семейство  $\{a_{\phi(\alpha)}\}_{\alpha \in A}$  суммируемо, причём их суммы совпадают, если есть.

**Предложение 2.3.1.** Пусть  $\{a_n\}$  — числовая последовательность. Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  абсолютно сходится.
2. Семейство  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  суммируемо.

При этом если условия верны, то суммы равны.

*Доказательство.* Для всякого конечного  $e \subset \mathbb{N}$  найдётся  $N := \max e$ , тогда  $\sum_{i \in e} |a_i| \leq \sum_{i=1}^N |a_i|$ .

Обратно — для всякого  $N \in \mathbb{N}$  найдётся  $e := \{1, \dots, N\}$ , тогда  $\sum_{i=1}^N |a_i| \leq \sum_{i \in e} |a_i|$ .

То, что суммы равны, тоже можно доказать, рассмотрев хвосты с суммой меньше  $\varepsilon$ .  $\square$

**Следствие 2.3.1.** Абсолютно сходящийся ряд сходится к той же сумме после любой его перестановки.

**Теорема 2.3.5** (Лейбниц). Пусть  $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ , причём  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  сходится лишь условно:  $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| = +\infty$ .

Пусть  $-\infty \leq r \leq s \leq +\infty$ . Тогда  $\exists \phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  — биекция, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_{\phi(j)} = r \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_{\phi(j)} = s$$

*Схема доказательства.* Пусть — для удобства доказательства —  $-\infty < r \leq s < +\infty$ . Упорядочим  $|a_1| \geq |a_2| \geq \dots$ . Так как  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^+$  и  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^-$  оба расходятся, то можно брать поочерёдно положительные, то отрицательные числа, бегая от границы к границе.  $\square$

Пусть  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — числовое семейство,  $\{B_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  — разбиение  $A$  на непустые множества.

**Теорема 2.3.6.** Если семейство  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$  суммируемо (с суммой  $a$ ), то все частичные семейства  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in B_\gamma}$  суммируемы (с суммой  $b_\gamma$ ), причём семейство их сумм  $\{b_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  тоже суммируемо — с суммой  $a$ .

Если все  $a_\alpha \geq 0$  (но необязательно семейство суммируемо), то  $\sum_{\alpha \in A} a_\alpha = \sum_{\gamma \in \Gamma} \left( \sum_{\alpha \in B_\gamma} a_\alpha \right)$

*Доказательство.* Докажем только последнюю строчку, остальное из неё следует, так как семейство можно разбивать на линейную комбинацию неотрицательных составляющих.

Если одно из  $b_\gamma = +\infty$ , то обе суммы равны  $+\infty$ . Дальше считаем, что все  $b_\gamma$  конечны. Покажем, что

$$\underbrace{\sup \left\{ \sum_{\alpha \in e} a_\alpha \mid e \subset A \right\}}_V = \underbrace{\sup \left\{ \sum_{\gamma \in \bar{e}} b_\gamma \mid \bar{e} \subset \Gamma \right\}}_W$$

Можно показать, что  $V \leq W$ , а ещё для любого  $\varepsilon > 0$ :  $W - \varepsilon \leq V$  — для доказательства второго неравенства суммируем лишь конечное число групп.  $\square$

## Лекция XIX

28 апреля 2023 г.

### 2.3.1 Применения

Пусть  $\sum_{n \geq 1} a_n$  и  $\sum_{n \geq 1} b_n$  — два (быть может условно) сходящихся ряда с суммами  $a$  и  $b$  соответственно.

Рассмотрим последовательность, проиндексированную парами  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} : (a_n \cdot b_k)_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}}$ .

**Теорема 2.3.7.** Если оба ряда сходятся абсолютно, то полученное семейство  $(a_n \cdot b_k)_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}}$  суммируемо, причём его сумма —  $ab$ .

*Доказательство.* Докажем суммируемость  $(a_n \cdot b_k)_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}}$ . Для этого рассмотрим семейство модулей  $(|a_n \cdot b_k|)_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}}$ . Разобьём его на группы  $B_i = \{(i, j) \mid j \in \mathbb{N}\}$ .

Сумма модулей в каждой группе  $B_i$  — это  $|a_i| \cdot B$ , где  $B = \sum_{n \geq 1} |b_i|$ .

Тогда семейство суммируемо, так как сумма сумм групп — это  $AB$ , где  $A = \sum_{n \geq 1} |a_i|$ .

Чтобы показать, что сумма семейства —  $AB$ , повторим вычисление уже без модулей.  $\square$

**Теорема 2.3.8.** Пары  $(n, k)$  всегда можно расположить в последовательность так, чтобы соответствующий ряд сходил к  $ab$ .

*Доказательство.* Подойдёт такой порядок суммирования:



$\square$

Другим популярным порядком является суммирование по диагонали:  $\sum_{N=2}^{\infty} \sum_{k+j=N} a_k b_j$ . Как ни странно, если ряды сходились абсолютно, то сумма в таком порядке даёт  $ab$ , а если сходились условно — то необязательно сойдётся (но если сойдётся, то к  $ab$ : (факт 2.6.2)).

Вспомним, что для комплексного числа  $z = x + iy$  по определению  $e^z = e^x \cdot e^{iy}$ , где  $e^{iy} = \Gamma(y)$  — простое вращение.

Экспоненту можно представить рядом:  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ;  $e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$ . Ряды сходятся абсолютно, запишем

$$e^z = \sum_{k,n} \frac{x^k \cdot (iy)^n}{k!n!} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \underbrace{\sum_{k+n=N} \binom{N}{k} x^k \cdot (iy)^n}_{(x+iy)^N} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N!}$$

Доказали, что формула для экспоненты комплексного числа верна для любого  $z \in \mathbb{C}$ , необязательно вещественного или чисто мнимого.

## 2.4 Степенные ряды

**Определение 2.4.1** (Степенной ряд). Ряд вида  $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ , где  $z_0 \in \mathbb{C}$  — фиксированная точка,  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ ,  $z$  — переменная из  $\mathbb{C}$ .

При каких  $z$  ряд сходится? Абсолютно сходится?

**Теорема 2.4.1.** Пусть степенной ряд  $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$  сходится при значении  $w$  переменной  $z$ .

Обозначим  $r = |w - z_0|$ .

Тогда ряд сходится абсолютно при  $|z - z_0| < r$ . Более того, для всякого  $r' < r$ : в круге  $|z - z_0| \leq r'$  сходимость равномерная.

*Доказательство.* Из сходимости ряда  $\exists A \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n (w - z_0)^n| \leq A$ . Если  $|z - z_0| < r$ , то

$$|a_n (z - z_0)^n| = |a_n (w - z_0)^n| \cdot \left| \frac{(z - z_0)^n}{r^n} \right| \leq A \left| \frac{(z - z_0)^n}{r^n} \right|$$

Для  $|z - z_0| < r$  получаем, что ряд мажорируется убывающей геометрической прогрессией, значит, сходится абсолютно. Если дополнительно  $|z - z_0| \leq r'$ , то можно оценить независимо от  $z$ :

$$|a_n (w - z_0)^n| \cdot \left| \frac{(z - z_0)^n}{r^n} \right| \leq |a_n (w - z_0)^n| \cdot \left| \frac{r'^n}{r^n} \right|$$

□

Выберем  $R := \sup \{w \in \mathbb{C} | \text{ряд сходится при значении } w \text{ переменной } z\}$ . Из условия теоремы следует, что ряд сходится в открытом круге с центром в  $z_0$  и радиусом  $R$  и расходится — за границей круга.

Если  $R = 0$ , то ряд сходится в одной точке  $z = z_0$ , если  $R = \infty$ , то ряд сходится на всей  $\mathbb{C}$ .

### 2.4.1 Признак Коши сходимости ряда

Пусть  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  — числовой ряд ( $a_n \in \mathbb{C}$ ).

Обозначим за  $\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ .

**Теорема 2.4.2** (Признак Коши).

1. Если  $\sigma > 1$ , то ряд расходится.

2. Если  $\sigma < 1$ , то ряд сходится абсолютно.

*Доказательство.*

1.  $\forall \varepsilon > 0$ : найдётся сколь угодно большое  $n$ :  $\sqrt[n]{|a_n|} > \sigma - \varepsilon$ . Тогда  $|a_n| > (\sigma - \varepsilon)^n > 1$ , общий член ряда не стремится к нулю.
2. Выберем  $\varepsilon > 0$  так, что  $\sigma + \varepsilon < 1$ . Начиная с некоторого места  $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sigma + \varepsilon$  и ряд мажорируется геометрической прогрессией.  $\square$

*Замечание.* Признак довольно грубый:  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$  для любого  $\alpha \in \mathbb{R}$  признак оценить не сможет — тут  $\sigma = 1$ .

Тем не менее, для степенных рядов получается неплохо: для ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n : \sigma = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0|$ .

Таким образом, для радиус сходимости  $R$  верно равенство  $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ .

*Примеры.*

- Ряд  $\sum_{n \geq 0} n^n z^n$  сходится в единственной точке:  $R = 0$ .
- Ряд  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n$  сходится на всей  $\mathbb{C} : R = \infty$ .
- Все ряды вида  $\sum_{n \geq 0} n^\alpha z^n$  сходятся в круге радиуса 1.

## 2.4.2 Аналитические функции

Пусть  $G \subset \mathbb{C}$  — открытое множество.

Рассмотрим функцию  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Определение 2.4.2** ( $f$  — аналитическая функция).  $\forall z_0 \in G : \exists B_r(z_0) \subset G : \forall z \in B_r(z_0) : f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ , то есть функция представима некоторым степенным рядом в окрестности любой точки.

*Пример* (Аналитическая функция). Экспонента:  $e^z = e^{z_0} \cdot e^{z-z_0} = e^{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!}$ .

**Теорема 2.4.3.** Сумма степенного ряда в открытом круге сходимости есть аналитическая функция в том же круге.

*Доказательство.* Пусть  $R$  — радиус сходимости. Определим

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n, \quad D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$$

Рассмотрим  $w_0 \in D$ , докажем, что найдутся коэффициенты, такие, что  $f(z) = \sum_{n \geq 0} b_n(z - w_0)^n$  при условии  $|z - w_0| < R - |w_0 - z_0|$ . (Считаем, что  $R$  конечно) Запишем

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n \geq 0} a_n(z - w_0 - (w_0 - z_0))^n = \sum_{n \geq 0} a_n \sum_{k+j=n} \binom{n}{k} (z - w_0)^k (w_0 - z_0)^j$$

Проверим, что можно переставить знаки суммирования, что семейство суммируемое. Ну, в самом деле,

$$\sum_{n \geq 0} |a_n| \sum_{k+j=n} \binom{n}{k} |z - w_0|^k |w_0 - z_0|^j = \sum_{n \geq 0} |a_n| (|z - w_0| + |w_0 - z_0|)^n$$

что сходится при данных  $z : |z - w_0| < R - |w_0 - z_0|$ . Значит, можно раскрыть скобки, для некоторых коэффициентов получится требуемое.  $\square$



# Лекция XX

2 мая 2023 г.

**Определение 2.4.3** (Область). Связное открытое множество

**Теорема 2.4.4.** Если  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  — аналитическая функция  $f \not\equiv 0$  и  $G$  — область, то множество нулей функции не имеет предельных точек внутри  $G$ .

*Доказательство.* Обозначим  $Z(f) = \{z \in G \mid f(z) = 0\}$ .

Пусть степенной ряд  $g(z) = \sum_{n \geq 0} c_n(z - z_0)$  сходится в круге  $D := D_r(z_0), 0 < r \leq \infty$ .

Из равномерной сходимости степенного ряда получаем, что  $g$  непрерывна на  $D$ . Заметим, что  $c_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$ . Если  $c_0 \neq 0$ , то у  $g$  нет других нулей вблизи  $z_0$ .

Иначе  $c_0 = 0$ , но ряд тривиальный  $g(z) \not\equiv 0$ . Выберем наименьшее  $k \in \mathbb{N}$ :  $c_k \neq 0$ . Получаем

$$g(z) = (z - z_0)^k \underbrace{(c_k + c_{k+1}(z - z_0) + c_{k+2}(z - z_0)^2 + \dots)}_{h(z)}$$

$h(z)$  сходится в то же круге  $D$ , так как  $h(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$ , поделили на константу.

Получается,  $h(z) \neq 0$  вблизи  $z_0$ , значит и домноженная на  $(z - z_0)^k$  — тоже.

Итак, если у функции  $f$  есть нуль в точке  $w$ , то либо эта точка изолирована, либо  $f(z) \equiv 0$  в окрестности  $w$ .

Обозначим  $A = \{w \in G \mid f(z) \equiv 0 \text{ в некоторой окрестности } w\}$ .  $A$ , понятно, открыто.

Мы доказали, что любая предельная точка для  $Z(f)$  лежит в  $A$ , в частности, любая предельная точка  $A$  лежит в  $A$ . Тем самым,  $A$  замкнуто в  $G$ .  $f(z) \not\equiv 0$ , значит,  $A \neq G \Rightarrow A = \emptyset$ .  $\square$

## 2.5 Дифференцирование по комплексному аргументу. Голomorphic функции

Пусть  $\phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, t_0 \in \langle a, b \rangle$ . Тогда по определению  $\phi'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0}$ .

Пусть  $G$  — открытое множество в  $\mathbb{C}$ ,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in G$ .

**Определение 2.5.1** ( $f$  дифференцируема в  $z_0$  в комплексном смысле).  $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ .

Данный предел называется *производной*, обозначается  $f'(z_0)$ . Если предел существует, то ещё говорят, что  $f$  голоморфна в  $z_0$ .

### 2.5.1 Связь комплексного дифференцирования и двумерного дифференцирования

- Пусть  $h : (G \subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ . И область аргументов, и область значений можно отождествить с  $\mathbb{C}$  (с его подмножеством). По определению,  $h$  дифференцируема в  $z_0$ , если  $\exists A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — линейный оператор:

$$h(z) - h(z_0) = A(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

Запишем  $h = (h_1 \ h_2)$ ,  $h_1, h_2$  — координатные функции. Если  $A$  существует, то  $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{pmatrix}$ .

- Теперь пусть  $f : (G \subset \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ . Для неё координатные функции —  $u, v : (G \subset \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(z) = u(z) + i v(z)$ .

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

Умножение на комплексное число — частный случай линейного оператора.

- Таким образом, если  $f$  дифференцируема в комплексном смысле, то и в вещественном смысле (как отображение  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) тоже:  $df(z_0, h) = f'(z_0)h$ .
- Обратное неверно: пусть  $f'(z_0) = \alpha + i\beta$ ,  $h = t + is$ , где  $\alpha, \beta, t, s \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$f'(z_0)h = (\alpha + i\beta)(t + is) = (\alpha t - \beta s) + i(\beta t + \alpha s)$$

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$$

и мы видим, что при комплексном дифференцировании матрица линейного оператора имеет специальный вид, для матриц не такого вида это неверно.

- Если  $f$  дифференцируема в  $z_0$  в комплексном смысле, то (считая  $z = x_0 + iy_0$ ) необходимо и достаточно условий

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Эти условия называются *уравнения Коши — Римана*.

*Примеры* (Безобидные функции, которые не голоморфны).

- $h(z) = \Re(z)$ ;  $h(x + iy) = x$ . Здесь матрица Якоби  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , не удовлетворяет условиям Коши — Римана. Также несложно видеть, что предела  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\Re(z)}$  не существует.
- $h(z) = \bar{z}$ ;  $h(x + iy) = x - iy$ . Здесь матрица Якоби  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , не удовлетворяет условиям Коши — Римана.

**Факт 2.5.1.** Пусть  $G, U$  открыты в  $\mathbb{C}$ ,  $f : G \rightarrow U, h : U \rightarrow \mathbb{C}$  — функции,  $f$  голоморфна в  $z_0$ ,  $h$  голоморфна в  $w_0 := f(z_0)$ .

Тогда  $h \circ f$  голоморфна в  $z_0$  и  $(h \circ f)'(z_0) = h'(w_0)f'(z_0)$ .

*Доказательство.* Оператор дифференцирования — домножение на комплексное число. □

**Факт 2.5.2.** Пусть  $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$  голоморфны в  $z_0$ , тогда  $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$ .

*Доказательство.* Всякая голоморфная функция  $\phi$  непрерывна по определению:

$$\phi(z) = \phi(z_0) + \phi'(z)(z - z_0) + o(|z - z_0|) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \phi(z_0)$$

Тем самым,  $\phi$  ограничена вблизи  $z_0$ .

$$\frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}g(z) + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}f(z_0) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} f'(z_0)g(z_0) + g'(z_0)f(z_0)$$

□

**Факт 2.5.3.**  $(z^n)' = nz^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

*Доказательство.*  $1' = 0$ ;  $z' = 1 : \frac{z - z_0}{z - z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 1$ . Далее индукция. □

Тем самым, дифференцируемы все комплексные многочлены  $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ , где  $a_n \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$ . А именно,

$$p'(z_0) = a_1 + 2a_2z_0 + \dots + na_nz_0^{n-1}$$

*Интересный факт* (Теорема Коши). Следующие условия эквивалентны:

1.  $f$  голоморфна в  $G$  (в каждой точке).

2.  $f$  аналитична в  $G$ .

*Доказательство.* Докажем сильно более простую импликацию  $2 \Rightarrow 1$ . Обратную докажем в IV семестре.

Рассмотрим степенной ряд  $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ , пусть его радиус сходимости  $R > 0$ . Положим  $D := D_R(z_0)$ .

Докажем, что  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ . Вспомним определение радиуса сходимости  $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ . Для продифференцированного ряда  $\frac{1}{\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n a_{n-1}|}$ , это то же самое, значит,  $R = \rho$ .

Степенной ряд в круге радиуса  $R' < R$  сходится равномерно:  $S_N(z) := \sum_{n=0}^N a_n(z - z_0)^n$  сходятся равномерно к  $f(z)$ . Более того,  $S'_N(z) := \sum_{n=1}^N n a_n(z - z_0)^{n-1}$  сходится равномерно к продифференцированному ряду.

Разобьём функцию на координатные функции, изучим вещественные и мнимые части. Частные производные сходятся согласно вещественной теореме, значит, условия Коши — Римана в пределе выполняются, получается, степенной ряд голоморфен.  $\square$

---

Рассмотрим ряд  $\log(1+z) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ . Он сходится при  $x \in (-1, 1)$ , значит, сходится в круге радиуса 1.

Обозначим  $\phi(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$  — голоморфная функция при  $|z| < 1$ .

Интересно, верно ли, что  $e^{\phi(z)} = 1 + z$ ? Да.

*Доказательство.*  $e^{\phi(z)}$  голоморфна. По теореме Коши она аналитична. Тогда разность данных функций аналитична, так как это 0 на  $(-1, 1)$ , то это 0 везде.  $\square$

**Факт 2.5.4.** Если  $f, g$  голоморфны в точке  $z_0$ ,  $g(z_0) \neq 0$ , то для  $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$  верно:

$$h'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

**Факт 2.5.5.** Частное комплексных многочленов  $\frac{p(z)}{q(z)}$  голоморфно там, где  $q(z) \neq 0$ .

## Лекция XXI

5 мая 2023 г.

### 2.6 Суммирование последовательностей и рядов

Пусть последовательность  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  — не сходится.

Сопоставим ей последовательность  $\{b_n\}_{n \geq 0}$  согласно некоему правилу. Если оказалось, что  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ , то говорят, что  $\{a_n\}$  суммируется к  $b$  данным методом.

#### 2.6.1 Метод Чезаро

$b_n = \frac{a_0 + \dots + a_n}{n+1}$  — метод средних арифметических.

**Определение 2.6.1** (Регулярный метод суммирования). Сумма сходящейся последовательности данным методом — её предел.

**Факт 2.6.1.** Метод Чезаро регулярен.

*Доказательство.* См. (следствие 2.6.1). □

*Замечание.* Метод Чезаро, хотя и регулярен, суммирует и расходящиеся последовательности, например,  $0, 1, 0, 1, 0, \dots$  суммируется методом Чезаро к  $1/2$ .

## 2.6.2 Матричные методы суммирования. Метод Тёплица

Пусть  $T = \{t_{i,j}\}_{i,j \geq 0}$  — матрица с неотрицательными коэффициентами — *матрица Тёплица*.

Предположим, что  $\forall i : \sum_{j=0}^{\infty} t_{i,j} < \infty$ .

Положим  $b_i := \sum_{j=0}^{\infty} t_{i,j} a_j$ .

На данном месте предположим, что  $\{a_j\}$  ограничена. Если последовательность сходится, то она уж точно ограничена, а мы хотим немного расширить понятие сходящихся последовательностей. В случае  $|a_j| < A$  все  $b_i$  корректно определены.

**Определение 2.6.2** (Последовательность  $\{a_j\}$  суммируется  $T$ -методом к  $b$ ).  $b_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b$ .

Для метода Чезаро

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ddots & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \ddots & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \ddots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

**Теорема 2.6.1** (Тёплиц). Следующие условия эквивалентны:

1.  $T$ -метод регулярен.
2.  $\forall j : \lim_{i \rightarrow \infty} t_{i,j} = 0 \quad \wedge \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} t_{i,j} = 1$ .

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . Зафиксируем  $j$ , рассмотрим последовательность  $\{t_{i,j}\}_{i \geq 0}$ . Она сходится к нулю, но  $b_i = t_{i,j}$ . Значит,  $t_{i,j} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$  — необходимое условие.

Теперь рассмотрим  $\{1\}_{i \geq 0}$ . Она сходится к нулю, но  $b_i = \sum_{j=0}^{\infty} t_{i,j}$ . Значит,  $\sum_{j=0}^{\infty} t_{i,j} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 1$  — тоже необходимое условие.

$\Leftarrow$ . Пусть  $a_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} a$ . Докажем, что  $b_i$  сходится туда же.

$$b_i - a = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t_{i,j} - a = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j - a) t_{i,j} + a \underbrace{\left( \sum_{j=0}^{\infty} t_{i,j} - 1 \right)}_{\xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0}$$

Докажем, что и первое слагаемое стремится к нулю.

Так как суммы сходятся  $\sum_{j=0}^{\infty} t_{i,j} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 1$ , то они ограничены некой константой  $A$ . Выберем  $\varepsilon > 0, \exists N : \forall j > N : |a_j - a| < \varepsilon$ .

$$\sum_{j=0}^{\infty} (a_j - a)t_{i,j} = \sum_{j=0}^N (a_j - a)t_{i,j} + \sum_{j=N+1}^{\infty} (a_j - a)t_{i,j}$$

Теперь устремим  $i \rightarrow \infty$ , первое слагаемое для достаточно больших  $i$  меньше  $\varepsilon$  — конечная сумма произведений ограниченных и бесконечно малых.

Второе оценивается как  $\varepsilon A$ , получаем оценку  $\varepsilon(1 + A)$ , её можно сделать сколь угодно малой.  $\square$

**Следствие 2.6.1.** Метод Чезаро регулярен.

*Замечание.* Суммирование рядов устроено так же, как и последовательностей — суммируем частичные суммы.

Если в матрице Тёплица бывают отрицательные коэффициенты или даже произвольные комплексные, то что?

Хочется оставить формулу  $b_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t_{i,j}$ . Для этого надо наложить условие  $S_i := \sum_{j=0}^{\infty} |t_{i,j}| < \infty$ .

Необходимость понятна: рассмотреть в  $a_j := \frac{\overline{t_{i,j}}}{|t_{i,j}|}$ .

Теорема Тёплица в таком случае звучит так:

*Интересный факт* (Общая теорема Тёплица). Следующие условия эквивалентны:

1.  $T$ -метод регулярен.
2.
  - $\forall j : \lim_{i \rightarrow \infty} t_{i,j} = 0$ .
  - $\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} t_{i,j} = 1$ .
  - $\sup_i S_i < +\infty$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1) доказывается примерно так же, как доказать, что  $\sup_i S_i < +\infty$  — необходимое условие?

Это можно доказать методом скользящего горба или теоремой Штейнгауза — последнее из функционального анализа.

### 2.6.3 Метод Абеля — Пуассона

Рассмотрим необязательно сходящийся ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  с ограниченными частичными суммами  $S_n := a_0 + \dots + a_n$ .

Выберем  $r \in [0, 1)$ , составим ряды  $\phi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k a_k$ . Они сходятся.

Если  $r$  устремить к единице, то  $\phi(r)$  «как бы стремится к исходному ряду, что бы это не значило».

**Определение 2.6.3** (Суммируемый методом Абеля — Пуассона ряд). Ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ , для которого  $\exists \lim_{r \rightarrow 1-} \phi(r)$ .

*Пример.* Ряд  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  имеет сумму  $1/2$  и методом Абеля — Пуассона тоже:  $\frac{1}{1+r} = 1 - r + r^2 - \dots$

**Теорема 2.6.2.** Если исходный ряд сходится, то он суммируем методом Абеля — Пуассона с той же суммой.

*Доказательство.* Перепишем метод для последовательностей: рассмотрим  $\{d_j\}_{j \geq 0}$ . Ей соответствует ряд

$$d_0 + (d_1 - d_0) + (d_2 - d_1) + \dots$$

Запишем для  $r \in [0, 1)$  ряд

$$\phi(r) = d_0 + r(d_1 - d_0) + r^2(d_2 - d_1) + \dots \underset{\text{абсолютная сходимость}}{=} d_0(1 - r) + d_1(r - r^2) + d_2(r^2 - r^3) + \dots$$

Получили некоторый аналог методу Тёплица, но не дискретный, а непрерывный: в качестве  $t_{i,j}$  выступает  $r^j - r^{j+1}$ .

Докажем, что если  $d_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} d$ , то  $\phi(r) \xrightarrow{r \rightarrow 1-} d$ .

Достаточно доказать, что  $\phi(r_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} d$  для любой последовательности  $r_i \in [0, 1)$ , стремящейся к 1. Это верно из теоремы Тёплица.  $\square$

*Интересный факт.* Всё суммируемое методом Чезаро суммируется методом Абеля — Пуассона, но не наоборот.

### О произведении рядов

Пусть  $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j = \alpha$ ;  $\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j = \beta$ , быть может, сходящихся условно. Рассмотрим семейство  $\{\alpha_i \beta_j\}_{i,j}$  и «просуммируем по диагонали». Положим  $\gamma_n := \sum_{i+j=n} \alpha_i \beta_j$ .

**Факт 2.6.2.** Если  $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n$  сходится к  $\gamma$ , то обязательно  $\gamma = \alpha\beta$ .

*Доказательство.* Рассмотрим для  $r \in [0, 1)$  два абсолютно сходящихся ряда  $\phi(r) := \sum_{i=0}^{\infty} r^i \alpha_i$  и  $\psi(r) := \sum_{j=0}^{\infty} r^j \beta_j$ .

Запишем

$$\phi(r)\psi(r) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{i+j=n} r^i \alpha_i r^j \beta_j \right) = \sum_{n \geq 0} r^n \left( \sum_{i+j=n} \alpha_i \beta_j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \gamma_n \xrightarrow{r \rightarrow 1-} \gamma \quad \square$$

## Лекция XXII

12 мая 2023 г.

### 2.7 Перестановка предельных переходов

Вспомним теорему Стокса — Зайделя:  $\{f_n\}$  — последовательность непрерывных функций,  $\forall x : f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ .

Хочется, чтобы  $f$  была непрерывной, то есть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Так как  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , то мы хотим, чтобы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x_0)$$

С другой стороны, при переставленных пределах

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f(x_0)$$

очевидно верно. Теорема Стокса — Зайделя говорит о том, что пределы можно переставлять, если сходимость  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  равномерна.

Запишем этот результат общо.

**Теорема 2.7.1.** Пусть  $X, Y$  — хаусдорфовы топологические пространства,  $A \subset X, B \subset Y$ . Введём также  $Z$  — полное метрическое пространство (с метрикой  $\rho$ ).

Пусть  $a \in \text{Cl } A, b \in \text{Cl } B$ , причём  $a \notin A, b \notin B$ . Пускай  $F : A \times B \rightarrow Z$  — отображение.

Предположим, что  $\forall x \in A : \exists \lim_{y \rightarrow b} F(x, y) =: \phi(x)$ , сходимость не предполагается равномерной.

Предположим, что  $\forall y \in B : \exists \lim_{x \rightarrow a} F(x, y) =: \psi(y)$ , причём сходимость равномерна по  $y$ :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists U — \text{окрестность точки } a : \forall y \in B, \forall x \in U \cap A : \rho(F(x, y), \psi(y)) < \varepsilon$$

Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow a} \phi(x), \exists \lim_{y \rightarrow b} \psi(y)$ , причём они равны.

Более того,  $(a, b) \in \text{Cl}(A \times B)$ , и функция  $F$  имеет предел (в топологии произведения) в  $(a, b)$ .

*Доказательство.*

**Лемма 2.7.1** (Критерий Коши для функций). Пусть  $W$  — хаусдорфово,  $Z$  — полное метрическое.  $C \subset W; h : C \rightarrow Z$ , пусть  $c \in \text{Cl } C \setminus C$ .

Если  $\forall \varepsilon > 0 : \exists U \ni c : \forall u_1, u_2 \in U \cap C : \rho(h(u_1), h(u_2)) < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{u \rightarrow c} h(u)$ .

*Доказательство леммы.*

Выберем  $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$  для  $n \in \mathbb{N}$ , подберём  $U_n \ni c$ , как в условии леммы. Можно считать, что  $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ . Выберем  $u_n \in C \cap U_n$ .

Так как пространство  $Z$  полное, то  $\exists z = \lim_{n \rightarrow \infty} h(u_n)$ . Эта точка и будет пределом  $h$  — согласно определению предела  $z$ , посылке леммы и неравенству треугольника.  $\square$

Выберем  $\varepsilon > 0$ , для него найдётся  $U \ni a$  согласно равномерной сходимости:

$$\forall x_0 \in U \cap A : \forall y \in B : \rho(F(x_0, y), \psi(y)) < \varepsilon$$

Зафиксируем произвольный  $x_0 \in U \cap A$ .

Найдётся окрестность  $V \ni b : \forall y \in V \cap B : \rho(F(x_0, y), \phi(x_0)) < \varepsilon$ . Рассмотрим  $y, y' \in V \cap B$ :

$$\begin{aligned} \rho(\psi(y), \psi(y')) &\leq \rho(\psi(y), F(x_0, y)) + \rho(F(x_0, y), F(x_0, y')) + \rho(F(x_0, y'), \psi(y')) \leq \\ &2\varepsilon + \rho(F(x_0, y), F(x_0, y')) \leq 2\varepsilon + \rho(F(x_0, y), \phi(x_0)) + \rho(\phi(x_0), F(x_0, y')) \leq 4\varepsilon \end{aligned}$$

то есть отображение  $\psi$  удовлетворяет условию Коши.

По лемме  $\exists \lim_{y \rightarrow b} \psi(y) =: u$ .

Перейдём к пределу  $y \rightarrow b$  в неравенстве  $\rho(F(x_0, y), \psi(y)) < \varepsilon$ :

$$\rho(\phi(x_0), u) \leq \varepsilon$$

Так как  $x_0$  — произвольная точка из  $U \cap A$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = u$ .

Теперь докажем существование двойного предела:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists U \ni a : \forall x \in U \cap A, \forall y \in B : \rho(F(x, y), \psi(y)) < \varepsilon$$

$$\exists V \ni b : \forall y \in V \cap B : \rho(\psi(y), u) < \varepsilon$$

$\Downarrow$

$$(x, y) \in (U \times V) \cap (A \times B) \Rightarrow \rho(F(x, y), u) \leq \rho(F(x, y), \psi(y)) + \rho(\psi(y), u) < 2\varepsilon$$

$\square$

*Замечание.* Хаусдорфовость тут наверно и не нужна, но в анализе нехаусдорфовы пространства крайне редко встречаются. Предположим на всякий случай.

## 2.7.1 Применение

Возьмём интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Как мы уже знаем (раздел 2.1), у него есть особенность на бесконечности, и он сходится лишь условно.

Рассмотрим  $F : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $F(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$ .

Запишем несколько фактов, которые вскоре и докажем.

1.  $F(a) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$ .
2.  $F(a) \xrightarrow{a \rightarrow 0} F(0) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .
3.  $F$  дифференцируема при  $a > 0$ ,  $F'(a) = -\frac{1}{1+a^2}$ .

$$\frac{d}{da} \left( \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx \right) \underset{\text{неформально}}{=} \int_0^{\infty} \frac{d}{da} \left( e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \right) dx = - \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin x dx \underset{\text{дважды по частям}}{=} \dots = -\frac{1}{1+a^2}$$

Тем самым,  $F(a) = -\arctg(a) + C$ . Из первого пункта получаем  $C = \frac{\pi}{2}$ , из второго получаем

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

*Доказательство.* Обоснуем пункты. Для начала возьмём интеграл  $\int_c^d e^{-at} \sin t dt$  для  $0 \leq c < d, a > 0$ .

$$\begin{aligned} \int_c^d e^{-at} \sin t dt &= - \int_c^d e^{-at} d \cos t = (-e^{-at} \cos t) \Big|_c^d - a \int_c^d e^{-at} \cos t dt = \\ &= (-e^{-at} \cos t) \Big|_c^d - a \int_c^d e^{-at} d \sin t = (-e^{-at} \cos t) \Big|_c^d - (ae^{-at} \sin t) \Big|_c^d + a^2 \int_c^d e^{-at} \sin t dt \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\int_c^d e^{-at} \sin t dt = \frac{e^{-ac} \cos c - e^{-ad} \cos d - ae^{-ad} \sin d + ae^{-ac} \sin c}{1+a^2}$$

Эта штука замечательна тем, что ограничена по всем  $a, c, d$ .

Заметим, что при  $c \rightarrow 0, d \rightarrow \infty$  получается  $\frac{1}{1+a^2}$ , то есть несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-at} \sin t dt = \frac{1}{1+a^2}$$



**Лемма 2.7.2.** Пусть  $G : A \times [\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, такая, что  $\forall u \in A; G(u, \cdot)$  интегрируема по Риману на всех отрезках  $[\alpha, \beta']$  для  $\beta' \in [\alpha, \beta)$ . А здесь играет роль индексного множества.

Пусть  $g : [\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$  существует в несобственном смысле. Ещё пусть  $\forall x \in [\alpha, \beta), u \in A : |G(u, x)| \leq g(x)$ . Тогда

$$\lim_{\beta' \rightarrow \beta-} \int_{\alpha}^{\beta'} G(u, x) dx \text{ существует равномерно по } u \in A$$

*Доказательство.* Пусть  $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta)$ , для определённости считаем, что  $t_1 < t_2$ .

$$\left| \int_{\alpha}^{t_1} G(u, x) dx - \int_{\alpha}^{t_2} G(u, x) dx \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} G(u, x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{t_1} g(x) dx$$

При  $t_1 \rightarrow t_2$  эта штука стремится к 0. □

## Лекция XXIII

13 мая 2023 г.

1. Выберем  $g(x) = e^{-x}$ . При  $a \geq 1$  действительно  $|e^{-ax} \frac{\sin x}{x}| \leq g(x)$ . Значит, предел  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$  существует равномерно по  $a \geq 1$ , и  $\forall R : \exists \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$ . Значит, пределы можно переставить, получаем

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$$

Подпредельное выражение  $\int_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx = 0$ , так как подынтегральная функция на отрезке равномерно стремится к нулю.

2. Из равномерной сходимости на отрезке получаем  $\int_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx \xrightarrow{a \rightarrow 0} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx$ .

$$\int_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$$

Чтобы применить теорему о перестановке пределов надо показать, что один из пределов равномерен: например, при  $R \rightarrow \infty$  — равномерно по  $a$ .

**Факт 2.7.1.**  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$  существует равномерно по  $a \in (0, 1)$ .

*Доказательство.*  $\int_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$ , считаем, что  $R > 1$ . Первое слагаемое от  $R$  не зависит, на равномерность сходимости не влияет. Вторую проинтегрируем по частям:

Положим  $h_a(x) = \int_1^x e^{-at} \sin t \, dt$ , заметим, что  $\exists C : \forall a, x : |h_a(x)| \leq C$ .

$$\int_1^R \frac{1}{x} dh_a(x) = \underbrace{\frac{1}{x} h_a(x) \Big|_1^R}_{\rightarrow -h_a(1) \text{ равномерно по } a} + \underbrace{\int_1^R \frac{h_a(x)}{x^2} dx}_{\text{существует равномерно по } a \text{ согласно лемме}}$$

□

Значит, опять же, можно переставить пределы.

3. Теперь докажем, что можно дифференцировать под знаком интеграла, что

$$F'(a) = \int_0^\infty \frac{d}{da} \left( e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \right) dx$$

Обозначим для краткости производную по второму аргументу  $\partial_2$ .

**Лемма 2.7.3.** Пусть  $I = [\alpha, \beta]$ , а ещё есть интервал  $(c, d)$ . Пусть  $H : I \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция, причём  $\forall x \in I, t \in (c, d) : \exists \partial_2 H(x, t) =: \phi(x, t)$ , и данная производная тоже непрерывна на  $I \times (c, d)$ .

Определим  $h(t) := \int_\alpha^\beta H(x, t) dx$  — существует, так как  $H(x, t)$  непрерывна (и непрерывна при фиксированном втором аргументе).

$$\text{Тогда } h'(t) = \int_\alpha^\beta \partial_2 H(x, t) dx.$$

*Доказательство.* Пусть  $t_0 \in (c, d)$ ,  $t_0 \in \text{Int } \Delta$ ,  $\Delta \subset (c, d)$ . На  $\Delta \partial_2 H(x, t) = \phi(x, t)$  равномерно непрерывна.

$$\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \int_\alpha^\beta \frac{H(x, t) - H(x, t_0)}{t - t_0} dx$$

Давайте применим формулу Лагранжа, но ни в коем случае не под интегралом: если подставить  $\frac{H(x, t) - H(x, t_0)}{t - t_0} = \phi(x, \xi_x)$ , то под интегралом может оказаться вообще неинтегрируемая (даже неизмеримая, что бы это не значило) функция.

Воспользуемся равномерной непрерывностью:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |\phi(x, t_1) - \phi(x, t_2)| < \varepsilon$ . Выберем  $\varepsilon > 0$ , считаем, что  $t - t_0 < \delta$  — всё равно придётся переходить к пределу. Теперь  $|\phi(x, \xi_x) - \phi(x, t_0)| < \varepsilon$ , откуда

$$\left| \frac{H(x, t) - H(x, t_0)}{t - t_0} - \phi(x, t_0) \right| \leq \varepsilon \Rightarrow \left| \int_\alpha^\beta \left( \frac{H(x, t) - H(x, t_0)}{t - t_0} - \phi(x, t_0) \right) dx \right| < (\beta - \alpha)\varepsilon$$

Значит, при  $t \rightarrow t_0$  интегралы становятся равны, что и требовалось. □

К сожалению, у нас промежутки бесконечный, теорема неприменима.

Нас интересует интеграл

$$\lim_{a \rightarrow a_0} \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-a_0x}}{a - a_0} \frac{\sin x}{x} dx$$

Согласно только что доказанной лемме

$$\forall R > 0 : \lim_{a \rightarrow a_0} \int_0^R \frac{e^{-ax} - e^{-a_0x}}{a - a_0} \frac{\sin x}{x} dx = - \int_0^R e^{-a_0x} \sin x dx$$

$$\forall a \neq a_0 : \exists \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{e^{-ax} - e^{-a_0x}}{a - a_0} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-a_0x}}{a - a_0} \frac{\sin x}{x} dx$$

Докажем, что во втором равенстве предел достигается равномерно по  $a \in (U \ni a_0)$ . Рассмотрим  $a < a_0$ .

$$\int_0^R e^{-a_0x} \cdot \frac{e^{-(a-a_0)x} - 1}{a - a_0} \frac{\sin x}{x} dx$$

Подынтегральная функция оценивается по модулю как  $Ce^{-a_0x}$ , интеграл сходится равномерно, где  $|e^{-\xi} - 1| < C|\xi|$  или что-то вроде того. При  $a > a_0$  тоже что-то пишется, надо понять, как это покороче расписать.

□

## Глава 3

# Выпуклые и вогнутые функции

Пусть  $a < b \in \mathbb{R}$ , все точки отрезка  $[a, b]$  имеют вид  $a + \lambda(b - a) = (1 - \lambda)a + \lambda b, \lambda \in [0, 1]$ .

**Определение 3.0.1** (Выпуклая функция  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ ).  $\forall \alpha < a < b < \beta, \forall \lambda \in [0, 1]$ :

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

Например,  $f(x) = x^2$ .

**Определение 3.0.2** (Строго выпуклая функция  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ ).  $\forall \alpha < a < b < \beta, \forall \lambda \in (0, 1)$ :

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) < (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

Например,  $f(x) = -x^2$ .

**Определение 3.0.3** ( $f$  вогнутая).  $-f$  выпуклая.

Рассмотрим хорду, соединяющую точки  $(a, f(a))$  и  $(b, f(b))$ . Её угловой коэффициент равен  $k(a, b) := \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

**Теорема 3.0.1.** Следующие условия эквивалентны

1. Функция  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  выпукла.
2.  $\forall a < c < b \in (\alpha, \beta) : k(a, c) \leq k(c, b)$ .
3.  $\forall a < c < b \in (\alpha, \beta) : k(a, b) \leq k(c, b)$ .
4.  $\forall a < c < b \in (\alpha, \beta) : k(a, c) \leq k(a, b)$ .
5. Пусть  $u < v$ . Если  $a \leq u, b \leq v, a < b$ , то  $k(a, b) \leq k(u, v)$ .

*Доказательство.*

$5 \Rightarrow 2, 3, 4$  Частные случаи.

$1 \Rightarrow 2$  Пусть  $c = (1 - \lambda)a + \lambda b$ . Тогда

$$f(c) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b) \Rightarrow (1 - \lambda)(f(c) - f(a)) \leq \lambda(f(b) - f(c))$$

Выразив  $\lambda = \frac{c - a}{b - a}$  получаем необходимое неравенство. Заметим, что вычисления обратимы, значит, доказали ещё и  $2 \Rightarrow 1$ .

$1 \iff 3, 1 \iff 4$  Аналогично.

$2, 3, 4 \Rightarrow 5$   $k(a, b) \leq k(a, v) \leq k(u, v)$ . □

**Следствие 3.0.1.** Выпуклая функция на  $(\alpha, \beta)$  непрерывна.

*Доказательство.* Пусть  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ,  $x$  близко к  $x_0$ . Пусть  $a < b < x, x_0 < c < d$ .

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(d) - f(c)}{d - c}$$

Значит,  $\exists C : |f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|$ , то есть функция липшицева, если она задана где-то на большем замкнутом отрезке.  $\square$

**Следствие 3.0.2.** У выпуклой функции  $\forall x_0 \in (\alpha, \beta)$  существует односторонняя производная:  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  монотонна по  $x$  и ограничена. Более того,  $\forall x_0 \in (\alpha, \beta) : f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$  и  $\forall x_0, x_1 \in (\alpha, \beta) : f'_+(x_0) \leq f'_-(x_1)$ .

## Лекция XXIV

16 мая 2023 г.

**Следствие 3.0.3.** Если  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема, то  $f$  выпукла  $\iff f'$  возрастает.

*Доказательство.* В одну сторону уже доказано, в другую следует из теоремы Лагранжа:

$$\forall u < v < w \in (\alpha, \beta) : \frac{f(v) - f(u)}{v - u} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(w) - f(v)}{w - v} \quad \text{для неких } \xi_1 \in (u, v), \xi_2 \in (v, w)$$

$\square$

**Следствие 3.0.4.** Если  $f$  выпукла на  $(\alpha, \beta)$ , то  $\forall x, y \in (\alpha, \beta)$  функция лежит выше касательных:

$$f(x) \geq f'_\pm(y)(x - y) + f(y)$$

*Доказательство.* Неравенство равносильно следующему

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \geq f'_\pm(y), \quad \begin{matrix} x > y \\ x < y \end{matrix}$$

$\square$

Верно и обратное, мы для простоты докажем лишь частичное обращение:

**Лемма 3.0.1.** Если  $f$  дифференцируема на  $(\alpha, \beta)$  и  $\forall x, y \in (\alpha, \beta) : f(x) \geq f'(y)(x - y) + f(y)$ , то  $f$  выпукла.

*Доказательство.* Достаточно проверить, что  $\phi(x) := \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$  возрастает при  $x < y$ .

$$\phi'(x) = \frac{-f'(x)(y - x) + f(y) - f(x)}{(y - x)^2}$$

$\square$

*Примеры.*

- $f(x) = \sin(x)$ , определённая на  $[0, \pi/2]$ . Производная убывает, функция вогнута (граничные точки отрезка добавляем по непрерывности).

Так как график лежит под любой касательной и над любой секущей, то получаем оценку

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x, \quad x \in [0, \pi/2]$$

- $e^x$  — выпуклая функция, производная возрастает. Получается, по определению

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, 1) : e^{(1-\alpha)u + \alpha v} \leq (1 - \alpha)e^u + \alpha e^v$$

Заменим переменные:  $e^{(1-\alpha)u} = A, e^{\alpha v} = B, p = \frac{1}{1-\alpha}, q = \frac{1}{\alpha}$ . Замена обратима при условии  $A, B > 0, p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  — такие  $p, q \in (1, \infty)$  называются сопряжёнными. Неравенство превращается в *неравенство Юнга*:

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

У неравенства Юнга есть красивый геометрический смысл. Светло серая площадь — площадь под  $y = x^{p-1}$ , равна  $\frac{A^p}{p}$ . Тёмно серая площадь — площадь под (ну, точнее слева) кривой  $x = y^{q-1}$ , равна  $\frac{B^q}{q}$  — здесь мы пользуемся тем, что  $\frac{1}{p-1} = q-1$ .



Рис. 3.1: Геометрический смысл неравенство Юнга

Из рисунка видно, что действительно  $AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$ .

**Факт 3.0.1** (Неравенство Гёльдера). Пусть  $1 < p, q$  — сопряжённые показатели ( $1/p + 1/q = 1$ ). Тогда  $\forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ :

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right| \leq \left( \sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

*Доказательство.* Усилим неравенство (докажем частный случай  $a_j, b_j \geq 0$ ):

$$\sum_{j=1}^n |a_j| |b_j| \leq \left( \sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Можно считать, что  $\sum_{j=1}^n |a_j|^p = \sum_{j=1}^n |b_j|^q = 1$ : неравенство однородно, можно все  $a_j$  домножить на одно и то же  $\lambda$ . Применим неравенство Юнга к каждому слагаемому, получаем

$$\sum_{j=1}^n |a_j| |b_j| \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{p} |a_j|^p + \frac{1}{q} |b_j|^q = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^n |a_j|^p + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^n |b_j|^q = 1 \quad \square$$

**Следствие 3.0.5.** При  $p = q = 2$  неравенство Гёльдера обращается в КБШ.

**Факт 3.0.2** (Неравенство Минковского).

$$\left( \sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{j=1}^n |b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

*Доказательство.* Если  $p = 1$ , то очевидно.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p &= \sum_{j=1}^n |a_j + b_j| \cdot |a_j + b_j|^{p-1} \leq \sum_{j=1}^n |a_j| \cdot |a_j + b_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^n |b_j| \cdot |a_j + b_j|^{p-1} \leq \\ &\leq \left( \sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \sum_{j=1}^n |b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что  $(p-1)q = p$ , поделив обе части неравенства на  $\left( \sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p \right)^{\frac{1}{q}}$  получим требуемое неравенство.  $\square$

*Замечание.* Неравенства Гёльдера и Минковского также применимы для интегралов, упражнение читателю — подумать, как они выглядят.

**Следствие 3.0.6.**  $d_p(x, y) = \left( \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$  — метрика в  $\mathbb{R}^n$  (неравенство треугольника — неравенство Минковского).

**Факт 3.0.3** (Неравенство Йенсена). Пусть  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклая функция,  $x_1, \dots, x_k \in (\alpha, \beta)$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$ , причём  $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ . Тогда

$$f\left(\sum_{j=1}^k \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^k \lambda_j f(x_j)$$

*Доказательство.* Индукция по  $k$ .

База:  $k = 2$ , определение выпуклости.

Переход: Если  $\lambda_k = 0$ , то работает индукционное предположение. Если  $\lambda_k = 1$ , то остальные коэффициенты — нули, неравенство обращается в  $f(x_k) \leq f(x_k)$ .

Положим  $y := \frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{k-1} x_{k-1}}{1 - \lambda_k}$ , запишем выпуклость:

$$f((1 - \lambda_k)y + \lambda_k x_k) \leq (1 - \lambda_k)f(y) + \lambda_k f(x_k)$$

Применив индукционное предположение  $f(y) \leq \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_k} f(x_j)$ , получаем искомое неравенство.  $\square$

**Следствие 3.0.7.** Логарифм — вогнутая функция, так как производная убывает. Применим неравенство Йенсена для  $\lambda_j = \frac{1}{k}$ ,  $x_j > 0$ :

$$\log\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k}\right) \geq \sum_{j=1}^k \frac{1}{k} \log(x_j)$$

Взяв экспоненту от обеих частей, получаем неравенство о средних арифметическом и геометрическом:

$$\frac{x_1 + \dots + x_k}{k} \geq \sqrt[k]{x_1 \cdot \dots \cdot x_k}$$

## Лекция XXV

19 мая 2023 г.

**Факт 3.0.4** (Неравенство Йенсена для интегралов). Пусть  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — ограниченная функция ( $|h| \leq M$ ) интегрируемая по Риману — Дарбу. Пусть  $f : (-M - \varepsilon, M + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклая функция ( $\varepsilon > 0$  — произвольный).

Обозначив  $[a, b] = \Delta$ , утверждаем, что

$$f\left(\frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} h(x) dx\right) \leq \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} (f \circ h)(x) dx$$

*Доказательство.*

**Лемма 3.0.2.** Пусть  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — ограниченная функция ( $|h| \leq M$ ) интегрируемая по Риману — Дарбу (всё так же),  $\phi : [-M, M]$  —  $C$ -липшицева функция. Тогда  $\phi \circ h$  тоже интегрируема по Риману.

*Доказательство леммы.*

Пусть  $I \subset \Delta$  — отрезок.

$$\operatorname{osc}_I(\phi \circ h) = \sup_{x,y \in I} |\phi(h(x)) - \phi(h(y))| \leq C \sup_{x,y \in I} |h(x) - h(y)| \leq C \operatorname{osc}_I h$$

Далее применяем критерий интегрируемости по Риману — Дарбу.  $\square$

Так как  $f$  задана на большем интервале, то на  $[-M, M]$  она липшицева. Тогда согласно лемме существуют оба интеграла.

Выберем  $\varepsilon > 0$ , так как  $f$  равномерно непрерывна, то  $\exists \delta > 0 : t_1, t_2 \in [-M, M]$  и  $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$ .

Напишем суммы Дарбу, не особо важно, верхние или нижние, начиная с некоторого места они все близки. Пусть верхние.  $\exists \Delta_1, \dots, \Delta_k$  — разбиение  $\Delta$ , такое, что  $\frac{1}{|\Delta|} \left| \int_{\Delta} h(x) dx - \sum_{j=1}^k \sup_{x \in \Delta_j} h(x) |\Delta_j| \right| < \delta$  (давайте считать, что колебания  $f(h(x))$  по данному разбиению тоже  $\varepsilon$ ). Таким образом, можно применить  $f$  к обеим частям (и неравенство Йенсена), совершив ошибку не более, чем на  $\varepsilon$ :

$$f \left( \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} h(x) dx \right) - \varepsilon \leq f \left( \sum_{j=1}^k \frac{|\Delta_j|}{|\Delta|} \sup_{x \in \Delta_j} h(x) \right) \leq \sum_{j=1}^k \frac{|\Delta_j|}{|\Delta|} f \left( \sup_{x \in \Delta_j} h(x) \right)$$

Так как супремума может не существовать, то давайте сделаем оценку:  $\exists t_j \in \Delta_j : \sup_{x \in \Delta_j} h(x) \geq$

$$h(t) \geq \sup_{x \in \Delta_j} h(x) - \delta. \text{ Теперь запишем } \left| f \left( \sup_{x \in \Delta_j} h(x) \right) - f(h(t)) \right| < \varepsilon, \text{ то есть } f \left( \sup_{x \in \Delta_j} h(x) \right) \leq f(h(t)) + \varepsilon \leq \sup_{x \in \Delta_j} f(h(x)) + \varepsilon.$$

Теперь можно продолжить неравенство

$$\sum_{j=1}^k \frac{|\Delta_j|}{|\Delta|} f \left( \sup_{x \in \Delta_j} h(x) \right) \leq \frac{1}{|\Delta|} \sum_{j=1}^k |\Delta_j| \sup_{x \in \Delta_j} f(h(x)) + \frac{1}{|\Delta|} \sum_{j=1}^k |\Delta_j| \varepsilon$$

Устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем искомое неравенство.  $\square$

### 3.1 Бесконечные произведения

Пусть  $a_1, \dots, \in \mathbb{C}$ . Что логично считать под  $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$  — «бесконечным произведением»?

Если бы числа были положительными, то можно было бы их прологарифмировать и просуммировать ряд.

Положим  $\sigma_n = \prod_{j=1}^n a_j$ .

Если  $\sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , то говорят, что *произведение расходится к нулю* — ведь гипотетический ряд логарифмов действительно расходится к  $-\infty$ .

Если  $\sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma \neq 0$ , то говорят, что *произведение сходится к  $\sigma$* .

Вспомним, что  $e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$ . Отсюда видно, что  $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Логарифм хочется определить, как обратную функцию к  $z \mapsto e^z$ . Есть одна проблема:  $z \mapsto e^z$  не инъективно. А именно, оно периодически с периодом  $2\pi i$ .



Заметим, что

$$\frac{d}{dz} e^z = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dz} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = e^z$$

Таким образом,  $\operatorname{dexp}(z_0, h) = e^{z_0} \cdot h$ .

Таким образом,  $\forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \exists \varepsilon, \exists \phi : \forall |z - z_0| < \varepsilon : e^{\phi(z)} = z$ . Это отображение дифференцируемо, как обратное к невырожденно дифференцируемому:  $\phi'(z_0) = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z}$ , где  $w_0 = \phi(z_0)$ .

Пусть  $w = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ . Каким должно быть  $w$ , чтобы  $e^w = z_0$ ?

$$e^a \cdot e^{ib} = z_0 \Rightarrow \begin{cases} e^a = |z_0| \\ e^{ib} = \frac{z_0}{|z_0|} =: \zeta \end{cases}$$

Первое уравнение мы умеем решать с помощью вещественного логарифма, решениями второго уравнения являются  $\{b + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ , где  $b$  — какое-нибудь решение. Все такие решения называются аргументами.

Множество всех аргументов  $\operatorname{Arg}(\zeta)$  пишется с большой буквы. Множество всех обратных к экспоненте обозначают  $\operatorname{Log}(z_0) = \log |z_0| + i \operatorname{Arg} \frac{z_0}{|z_0|}$

Пусть  $G \subset \mathbb{C}$  — область.

**Определение 3.1.1** (Ветвь логарифма). Непрерывная функция  $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ , такая, что  $e^{\phi(z)} = z$ .

Давайте найдём какие-нибудь большие области, в которых есть ветви логарифма. Например, подойдёт  $\{x \in \mathbb{C} | x \leq 0\}$  — (запись  $x \leq 0$  может быть истинна только если  $x \in \mathbb{R}$ ).

Тогда в качестве  $\arg(z)$  ( $z$  нормируем делением на  $|z|$ ) выбираем значения аргумента из  $(-\pi, \pi)$ . Понятно, что определённая таким образом функция будет непрерывна. Определённая функция  $\arg(z)$  — *главная ветвь аргумента*, ей соответствует *главная ветвь логарифма*  $\log z = \log |z| + i \arg z$ .

Вообще говоря,  $\log(ab) \neq \log a + \log b$  — сумма значений аргументов  $a$  и  $b$  может лежать вне  $(-\pi, \pi)$ .

*Замечание.* Достаточным условием равенства  $\log(ab) = \log a + \log b$  является  $\Re a, \Re b > 0$ .

### 3.1.1 О сходящихся произведениях

По определению, произведение сходится, если  $\exists \sigma : \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : |\sigma_n - \sigma| < \varepsilon$ . Согласно тривиальной части критерия Коши

$$\forall k > n : |a_1 \cdot \dots \cdot a_k - \sigma| < \varepsilon \Rightarrow |a_1 \cdot \dots \cdot a_n - a_1 \cdot \dots \cdot a_k| < 2\varepsilon \Rightarrow |1 - a_{n+1} \cdot \dots \cdot a_k| < \frac{2\varepsilon}{|a_1 \cdot \dots \cdot a_n|}$$

$$\text{Пусть } \varepsilon < \frac{|\sigma|}{2}, \text{ тогда } |1 - a_{n+1} \cdot \dots \cdot a_k| < \frac{2\varepsilon}{\sigma - \frac{|\sigma|}{2}} \leq 4 \frac{\varepsilon}{|\sigma|}.$$

Таким образом,  $\forall \rho > 0 : \exists N : \forall k > n > N : |1 - a_{n+1} \cdot \dots \cdot a_k| < \rho$ .

Выбрав  $\rho < \frac{1}{2}$  видим, что если произведение сходится, то начиная с некоторого места все конечные произведения лежат в круге  $B_{1/2}(1)$ , в частности, лежат в полуплоскости  $\Re z > 0$ .

Пускай  $n > N, k > n$ . Сходимость исходного произведения  $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$  эквивалентна сходимости  $\prod_{j=n}^{\infty} a_j$  (разумеется, если среди  $a_1, \dots, a_{n-1}$  нет нулей). А это эквивалентно тому, что  $\exists \tilde{\sigma} : a_n \cdot \dots \cdot a_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \tilde{\sigma}$ .

Произведение  $a_n \cdot \dots \cdot a_k$ , как и все его  $2^k$  сомножителей лежат в полуплоскости  $\Re z > 0$ , значит, можно расписать  $\log(a_n \cdot \dots \cdot a_k) = \log(a_n) + \dots + \log(a_k)$ . Таким образом, сходимость произведения эквивалентна сходимости ряда  $\sum_{j=n}^{\infty} \log a_j$ .

Но можно добавить и первые слагаемые, которых конечное число.

**Теорема 3.1.1.** Пусть  $a_j \notin (\infty, 0]$ . Тогда  $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$  сходится  $\iff \sum_{j=1}^{\infty} \log a_j$  сходится.

*Замечание.* Пусть ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  сходится к  $s$ , а  $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$  сходится к  $\sigma$ .

Тогда  $e^s = \sigma$ , но равенство  $\log \sigma = s$  вполне может не выполняться.