

Дифференциальная геометрия. Неофициальный конспект

Лектор: Нина Дмитриевна Лебедева
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

1	Риманова геометрия	2
1.1	Гладкие многообразия	2
1.1.1	Гладкие отображения	3
1.1.2	Касательное пространство	5
1.1.3	Структура векторного пространства на $T_p M$	6
1.2	Касательное расслоение	6
1.2.1	Дифференциал гладкого отображения	6
1.3	Гладкие векторные поля	7
1.4	Гладкие подмногообразия	8

Глава 1

Риманова геометрия

Лекция I

14 февраля 2024 г.

1.1 Гладкие многообразия

Определение 1.1.1 (Топологическое многообразие). Хаусдорфово топологическое пространство M со счётной базой, такое что $\forall x \in M : \exists U \ni x : U \sim \mathbb{R}^n$. Данное число n называется *размерностью* многообразия, пишут $\dim M = n$, или часто пишут это число верхним индексом: M^n .

Далее пусть M^n — топологическое многообразие.

Определение 1.1.2 (Карта). Пара из открытого $U \subset M^n$, и гомеоморфизма $\phi : U \rightarrow \Omega$, где открытое $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. U называется *носителем карты*.

«В половине случаев в литературе картой называется обратное отображение».

Определение 1.1.3 (Атлас). Набор карт (U_i, ϕ_i) , таких, что $\bigcup_i U_i = M$.

Пусть даны две карты (U, ϕ) и (V, ψ) . Далее удобно считать, что их носители пересекаются: $U \cap V \neq \emptyset$, иначе определение не несёт смысла.

Определение 1.1.4 (Отображение перехода). Отображение $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$. Обозначается $f_{\phi\psi}$.

Определение 1.1.5 (Карты (U, ϕ) и (V, ψ) согласованы). Отображение перехода и ему обратное гладкие.

Определение 1.1.6 (Гладкий атлас). Атлас, такой, что любые две карты согласованы.

Далее все атласы предполагаются гладкими.

Определение 1.1.7 (Атласы эквивалентны). Их объединение (то есть все карты из первого и из второго атласа вместе взятые) — тоже гладкий атлас.

Предложение 1.1.1. *Эквивалентность атласов — отношение эквивалентности.*

Определение 1.1.8 (Гладкая структура на многообразии). Максимальный гладкий атлас (атлас, к которому нельзя добавить карт).

Замечание. К атласу можно добавить произвольное количество карт, согласованных с теми, что в атласе, и они будут согласованы между собой. В частности, для задания гладкой структуры достаточно произвольного атласа A : в A можно добавить всевозможные карты, согласованные с картами из A , и он станет максимальным.

Определение 1.1.9 (Гладкое многообразие). Многообразие с гладкой структурой.

Примеры (Атласы).

- Стандартная гладкая структура на \mathbb{R}^n задаётся атласом $\{(\mathbb{R}^n, \text{id})\}$.
- В частности, стандартная структура на \mathbb{R}^1 задаётся атласом $\{(\mathbb{R}^1, [x \mapsto x])\}$.
- Можно задать нестандартную структуру на \mathbb{R}^1 : $\{(\mathbb{R}^1, [x \mapsto x^3])\}$.

Предостережение. Это действительно гладкая структура, хотя обратное отображение $[x \mapsto x^{1/3}]$ не гладкое. Тем не менее, определение и не требует гладкости от него.

- Пусть $f = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x, & x \leq 0 \end{cases}$. Тогда $\{(\mathbb{R}^1, f)\}$ — тоже гладкий атлас на \mathbb{R}^1 .

Тем не менее, любые два атласа из приведённых выше атласов на \mathbb{R}^1 не эквивалентны — отображения перехода получаются не гладкими.

- Гладкая структура на сфере задаётся двумя картами: пусть S^2 — сфера с северным полюсом N и южным S , пусть f, g — стереографические проекции с данными полюсами. Тогда $\{(S^2 \setminus \{N\}, f), (S^2 \setminus \{S\}, g)\}$ — атлас.

Замечание. Если M — гладкое многообразие, и открытое $W \subset M$, то на W естественным образом определена гладкая структура, наследующаяся с M .

1.1.1 Гладкие отображения

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия, A_M, A_N — соответствующие атласы. Рассмотрим отображение $f : M \rightarrow N$.

Определение 1.1.10 (Координатное представление f в картах (U, ϕ) на M и (V, ψ) на N). Такое $\tilde{f} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$, что диаграмма коммутативна везде, где определена (то есть $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ на $\phi(U \cap f^{-1}(V))$).

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ \phi(U) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \psi(V) \end{array}$$

Далее считаем, что $f : M \rightarrow N$ непрерывна (эквивалентно, все координатные представления непрерывны).

Определение 1.1.11 (f гладкое). Любое координатное представление — гладкое.

Определение 1.1.12 (f — гладкое в точке $x \in M$). Найдётся окрестность $U_x \ni x$ и карты (U, ϕ) , (V, ψ) (где $V \ni y := f(x)$), такие, что $U_x \subset U$ и сужение на U_x координатного представления f — гладко.

Свойства (Гладкие отображения).

- Гладкость в точке не зависит от выбора карт.
- Гладкость отображения не зависит от выбора атласа в одном классе эквивалентности.
- Отображение гладкое \iff оно гладкое в любой точке. На лекции было доказательство \Leftarrow .
- Пусть $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow K$ гладкие. Тогда их композиция $g \circ f$ гладкая.
- Тожественное отображение гладкое, если в образе и прообразе выбраны эквивалентные атласы.
- Определение гладкости отображения совпадает с определением гладкости из матанализа (если считать, что $M \subset \mathbb{R}^n$ открыто, и порождающий атлас состоит из тождественной карты)

Определение 1.1.13 (Диффеоморфизм $f : M \rightarrow N$). Гладкое f , такое, что f^{-1} — тоже гладкое.

Определение 1.1.14 (Многообразия M и N диффеоморфны). Между ними существует диффеоморфизм.

Понятно, что диффеоморфность — отношение эквивалентности.

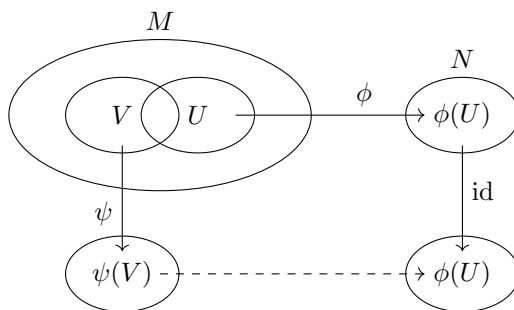
Утверждение 1.1.1. Если $M^m \stackrel{\text{диф}}{\sim} N^n$, то $m = n$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную $x \in M$. Пусть $f : M \rightarrow N$ — диффеоморфизм, пусть \tilde{f} — его координатное представление. Тогда \tilde{f}^{-1} — координатное представление f^{-1} , откуда \tilde{f}^{-1} — тоже гладкое. Рассмотрим дифференциал $d_x \tilde{f}(_)$, это изоморфизм векторных пространств, значит, $m = n$. \square

По умолчанию всегда считается, что на \mathbb{R}^m введена стандартная гладкая структура.

Предложение 1.1.2. Пусть M — гладкое многообразие, тогда карта — диффеоморфизм между U и $\phi(U)$. Обратно, любой диффеоморфизм между открытым подмножеством $W \subset M$ и областью $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — карта.

Доказательство.



Гладкость карты, как диффеоморфизма, эквивалентна тому, что карта согласована с остальными в атласе: пунктирная стрелка $\psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$ одновременно является и отображением перехода между картами (U, ϕ) и (V, ψ) , и координатным представлением ϕ в картах (V, ψ) , (U, id) . \square

Следствие 1.1.1. Диффеоморфизм $f : M \rightarrow N$ задаёт естественную биекцию между картами M и картами N (а ещё между (максимальными) атласами M и (максимальными) атласами N).

Лекция II

21 февраля 2024 г.

Пример (Диффеоморфизм). Ранее приводились неэквивалентные карты (\mathbb{R}, id) и $(\mathbb{R}, [x \mapsto x^3])$. Вещественные прямые с данными картами диффеоморфны: $[x \mapsto x^3]$ — диффеоморфизм, ему обратный $[x \mapsto \sqrt[3]{x}]$ (где, как в школе, $\sqrt[3]{x} = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}$).

Таким образом, создать две недиффеоморфные структуры на одном и том же многообразии не то чтобы просто.

Интересный факт. Пусть M — n -мерное многообразие.

Если $\begin{cases} n < 4, & \text{на нём существует единственная гладкая структура} \\ n = 4, & \text{на нём существует бесконечно много гладких структур.} \\ n > 4, & \text{на нём существует конечное число гладких структур} \end{cases}$

В частности, при $n > 4$: если $M^n = \mathbb{R}^n$, то гладкая структура единственна.

1.1.2 Касательное пространство

Пусть M — гладкое многообразие, $p \in M$. Пусть $\alpha, \beta : (\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M$ — гладкие (естественно, в смысле отображения многообразий) кривые, такие, что $\alpha(0) = p = \beta(0)$.

Определение 1.1.15 (α и β соприкасаются в p). В любой карте (U, ϕ) (где $U \ni p$) их производные в нуле совпадают: $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$.

Предостережение. Определение требует совпадение векторов скорости, а не просто параллельности или сонаправленности.

Свойства (Соприкасающиеся кривые).

- Соприкасаемость кривых в какой-то конкретной точке — отношение эквивалентности.
- Соприкасаемость не зависит от выбора карты: достаточно проверить в любой одной, содержащей p .

Доказательство. Пусть $(U, \phi), (V, \psi)$ — две карты, содержащие точку p , отображение $f_{\phi\psi} = \psi \circ \phi^{-1}$ гладкое, значит, оно переводит равные векторы в равные. \square

Определение 1.1.16 (Касательный вектор в точке $p \in M$). Класс эквивалентности соприкасающихся в точке p кривых.

Множество всех касательных векторов — *касательное пространство*, обозначают $T_p M$.

Координаты касательного вектора

Пусть $p \in M$, и (U, ϕ) — карта, содержащая p .

Определение 1.1.17 (Координатное представление вектора $v = [\alpha] \in T_p M$). Вектор скорости данной кривой в данной карте $v_\phi \stackrel{\text{def}}{=} (\phi \circ \alpha)'(0)$.

Понятно, что определение не зависит от выбора представителя — кривой α .

Также координаты v_ϕ в \mathbb{R}^n называют *координатами v в карте ϕ* .

Свойства (Координатное представление).

- $\forall p \in M, \forall (U, \phi) : p \in U \Rightarrow$ координатное представление — биекция
$$\begin{array}{ccc} T_p M & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ v & \mapsto & v_\phi \end{array}$$

Доказательство. Это инъекция, так как если образы u, v равны, то по определению u и v соприкасаются.

Это сюръекция: $\forall w \in \mathbb{R}^n$ можно рассмотреть кривую $\gamma(t) := wt + \phi(p)$. Координаты $[\phi^{-1} \circ \gamma]$ в карте ϕ как раз окажутся равными w . \square

Преобразование координатного представления в зависимости от карты

Утверждение 1.1.2. Пусть $M^n \ni p$ — гладкое многообразие и точка, (U, ϕ) и (V, ψ) — карты, содержащие p . Тогда $v_\psi = d_{\phi(p)} f_{\phi\psi}(v_\phi)$.

Доказательство. Пусть $v = [\alpha]$. Тогда $v_\phi = (\phi \circ \alpha)'(0)$, $v_\psi = (\psi \circ \alpha)'(0)$, и действительно, так как $f_{\phi\psi} = \psi \circ \phi^{-1}$, то $v_\psi = (f_{\phi\psi} \circ \phi \circ \alpha)'(0)$. Дифференцируя композицию, получаем утверждение. \square

Следствием данного утверждения является альтернативное определение касательного вектора:

Определение 1.1.18 (Касательные векторы в точке $p \in M$). Отображение из множества всех карт, содержащих точку p (обозначим их \mathcal{M}_p) в \mathbb{R}^n

$$\mathcal{M}_p \rightarrow \mathbb{R}^n$$

такое, что выполнены соотношения (утверждение 1.1.2).

Это определение сродни тому определению тензора, которое говорит: «Тензор — это многомерная матрица чисел, преобразующихся при замене базиса следующим образом. . . »

1.1.3 Структура векторного пространства на $T_p M$

Зафиксируем $p \in M$, и карту (U, ϕ) , содержащую p . Пусть $v, w \in T_p M$.

Определение 1.1.19 (Сумма векторов v и w). Такой вектор $v + w$, что $(v + w)_\phi = v_\phi + w_\phi$.

Определение 1.1.20 (Растяжение вектора v с коэффициентом α). Такой вектор αv , что $(\alpha v)_\phi = \alpha \cdot v_\phi$.

Иными словами, у нас была биекция $T_p M$ с векторным пространством, и мы просто перенесли структуру векторного пространства с \mathbb{R}^n на $T_p M$. Определение не зависит от выбора карты, так как замена координат касательных векторов при переходе между картами — изоморфизм векторных пространств (дифференциал — линейный оператор).

Замечание. Из определения получается, что $v \rightarrow v_\phi$ — изоморфизм векторных пространств.

1.2 Касательное расслоение

Как множество, $T(M) = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$. Оказывается, на $T(M)$ можно естественно ввести топологию и гладкую структуру размерности $2n$. Преобразуем определение атласа так, чтобы это случилось одновременно.

Утверждение 1.2.1 (Атлас для множества). Пусть X — множество с картами (U, ϕ) , то есть парами (U, ϕ) где $U \subset X$, и каждая ϕ — биекция $U \rightarrow \mathbb{R}^n$. При этом $X = \bigcup U$

Потребуем для любых двух карт (U, ϕ) и (V, ψ) : $\phi(U \cap V)$ открыто (в частности, $\phi(U)$ открыто), и потребуем, чтобы все функции перехода $f_{\phi\psi} = \psi \circ \phi^{-1}$ были гладкими.

Введём на X топологию: $W \subset X$ открыто, если $\forall (U, \phi) : \phi(U \cap W)$ открыто, и предположим, что топология получилась хаусдорфовой, и на X есть счётная база.

Тогда утверждается, что данная процедура задаёт на X одновременно и топологию, и гладкую структуру.

Зададим такую гладкую структуру на $T(M)$. Обозначим $TU = \bigsqcup_{p \in U} T_p M$. Можно рассматривать $TU = \{(p, v) | p \in U, v \in T_p M\}$.

Пусть имеется карта (U, ϕ) на M . Построим по ней карту

$$\begin{aligned} \Phi : TU &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (p, v) &\mapsto (\phi(p), v_\phi) \end{aligned}$$

Проверим согласованность: пусть (U, ϕ) и (V, ψ) — две карты на M . По ним построены карты (TU, Φ) и (TV, Ψ) соответственно. Тогда $(\Psi \circ \Phi^{-1})(p, v) = ((\psi \circ \phi^{-1})(p), d_{\phi(p)} f_{\phi\psi}(v))$, видно, что $\Psi \circ \Phi^{-1}$ гладко.

Упражнение 1.2.1. Получилось хаусдорфовое пространство со счётной базой.

1.2.1 Дифференциал гладкого отображения

Пусть M и N — гладкие многообразия, и есть гладкое отображение $f : M \rightarrow N$. Зафиксируем $p \in M$.

Определение 1.2.1 (Дифференциал f в точке p). Отображение $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$, заданное следующим образом: $d_p f : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$.

Утверждение 1.2.2. Определение дифференциала не зависит от выбора представителей.

Доказательство. Пусть $\alpha \sim \beta$ — две кривые, $\alpha(0) = \beta(0) = p$, $\alpha'(0) = \beta'(0) = v$.

Проверим, что $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$. Достаточно проверить, что совпадают координатные представления.

Выберем две карты (U, ϕ) и (V, ψ) (где $U \ni p$, $V \ni f(p)$). Координатное представление f — это $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$.

Дифференциал \tilde{f} переносит координаты представления векторов из $T_p M$ в координаты представления векторов из $T_{f(p)} N$:

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \alpha &= \tilde{f} \circ \phi \circ \alpha \quad \text{и} \quad \psi \circ f \circ \beta = \tilde{f} \circ \phi \circ \beta \\ (\psi \circ (f \circ \alpha))'(0) &= d_{\phi(p)} \tilde{f}((\phi \circ \alpha)'(0)) = d_{\phi(p)} \tilde{f}((\phi \circ \beta)'(0)) = (\psi \circ (f \circ \beta))'(0) \end{aligned} \quad \square$$

Нетрудно заметить, что $(d_p f(v))_\psi = (d_{f(p)} \tilde{f})(v_\phi)$ в обозначениях из доказательства выше (и $v = [\alpha]$).

Следствие 1.2.1. $d_p f$ — линейное отображение.

Лекция III

28 февраля 2024 г.

Замечание. Можно естественным образом определить дифференциал на всём пространстве $Tf : TM \rightarrow TN$. На вектор $v \in T_p M$ Tf действует понятным образом: $v \mapsto d_p f(v)$.

Если $U \subset \mathbb{R}^n$, то касательное пространство TU естественным образом отождествляется с $U \times \mathbb{R}^n$.

1.3 Гладкие векторные поля

Пусть M — гладкое многообразие, выберем произвольное подмножество $A \subset M$.

Определение 1.3.1 (Непрерывное векторное поле на A). Непрерывное отображение $X : A \rightarrow TM$, такое, что $\forall p \in A : X(p) \in T_p M$.

Определение 1.3.2 (Гладкое векторное поле на A). Векторное поле $X : A \rightarrow TM$, такое, что \exists открытое $U \subset M : U \supset A$, и X продолжается на U , как гладкое векторное поле (то есть гладкое отображение, являющееся непрерывным векторным полем).

Для гладкого многообразия M будем обозначать пространство всех гладких векторных полей за $\mathcal{X}(M)$.

Пусть в M имеется карта (U, ϕ) .

Определение 1.3.3 (Координатное векторное поле, соответствующее i -й координате). Векторное поле $V_i : U \rightarrow TM$, такое, что $d\phi(V_i) = e_i$ ($V_i(p) = e_i$) **Или что-то похожее, я не очень понял**

Лемма 1.3.1. Пусть имеется открытое $U \subset \mathbb{R}^n$, и компактное $K \subset U$. Утверждается, что $\forall V \supset K : \text{Cl } V \subset U \Rightarrow$ можно построить гладкую функцию $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, такую, что $f|_K = 1$, $f|_{\mathbb{R}^n \setminus V} = 0$.

Доказательство. **На лекции шло без доказательства.** $\mathbb{R}^n \setminus V$ замкнуто, $d := \text{dist}(\mathbb{R}^n \setminus V, K) > 0$, свернём χ_{todo} \square

Следствие 1.3.1. Пусть V_i — координатное поле карты (U, ϕ) . Тогда $\forall K \subset U : \exists$ векторное поле $\tilde{V}_i : \tilde{V}_i|_K = V_i, \tilde{V}_i|_{M \setminus U} \equiv 0$.

Иными словами, всегда немного уменьшив карту, можно продолжить координатное векторное поле на всё многообразие.

1.4 Гладкие подмногообразия

Пусть M^m — гладкое многообразие размерности m .

Определение 1.4.1 (Гладкое подмногообразие размерности $n \leq m$). Подмножество $N \subset M$, такое, что $\forall x \in N : \exists$ выпрямляющая карта (U, ϕ) (карта на M), такая, что $U \ni x$ и $\phi(U) \cap \mathbb{R}^n = \phi(N \cap U)$.

Здесь имеется в виду, что ϕ действует в \mathbb{R}^m , где как-то введены координаты, и имеется определённое вложение $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$.

Утверждение 1.4.1. На N каноническим образом индуцируется гладкая структура из M . Карты на N — сужения выпрямляющих карт (карте (U, ϕ) отвечает карта $N \cap U, \psi$, где $\psi : N \cap U \rightarrow \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$, $\psi(x) = \phi(x)$).

Доказательство. Согласованность карт на N следует из согласованности карт на M . \square

Пусть N^n, M^m — гладкие многообразия.

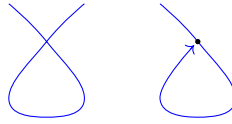
Определение 1.4.2 (Погружение $f : N \rightarrow M$). Гладкое отображение $f : N \rightarrow M$, такое, что $\forall p \in N : d_p f$ — инъекция. Само f не обязано быть инъекцией.

Понятно, что такое возможно только при $n \leq m$.

Определение 1.4.3 (Вложение $f : N \rightarrow M$). Инъективное погружение $f : N \rightarrow M$.

Примеры.

- В случае поверхностей размерности 2 погружение подмногообразия размерности 1 — кривой — называлось регулярной параметризацией.
- Петля слева является погружением, но даже инъективная петля справа вложением не является: в выделенной точке топология не совпадает с топологией интервала.



Предложение 1.4.1.

1. Погружение локально является вложением: $\forall x \in N : \exists U_x \ni x : f|_{U_x}$ — вложение.
2. Образ вложения — гладкое подмногообразие.

С доказательством этого очевидного предположения возникли неожиданные проблемы, я что-то написал ниже, за правильность не ручаюсь.

Доказательство. Достаточно доказать для случая открытых $N \subset \mathbb{R}^n$, $M = \mathbb{R}^m$, потому что карты — диффеоморфизмы, и определения сохраняются при диффеоморфизмах.

Зафиксируем $x \in N$. Введём координаты в \mathbb{R}^m , выделив первые n координат, так, чтобы подпространство, натянутое на них, совпадало с $d_x f(\mathbb{R}^n)$.

Также домножим пространство, содержащее N , на \mathbb{R}^{m-n} .

Лемма 1.4.1. Существует $W \ni x, W' \ni f(x), \phi : W \rightarrow W' : \phi|_{N \cap W} = f$ ($W \in \mathbb{R}^m, W' \in \mathbb{R}^m$).

Доказательство леммы.

Обозначим координаты в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ за (ξ, ζ) , и определим $\phi(x + \xi, \eta) = f(x) + f(\xi) + (0, \eta)$. Действительно, дифференциал $d_x \phi = (df, \text{id})$ невырожден.

По теореме об обратной функции $\exists W : \phi|_W$ — диффеоморфизм. \square

1. Образ $f|_{N \cap W}$ — подмногообразие $W \cap \mathbb{R}^n \subset N$. $\phi^{-1}|_{W'}$ — выпрямляющая карта,
2. ϕ — гомеоморфизм на образ $\Rightarrow f|_{N \cap W}$ — топологическое вложение и гомеоморфизм. Значит, локально погружение — вложение.
3. Так как f — топологическое вложение, то $f(N)$ — подмногообразие.

□