Алгебра. Неофициальный конспект

Лектор: Алексей Владимирович Степанов
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

Глава 1

Гомологическая алгебра

Лекция I

12 февраля 2024 г.

1.1 Абелевы категории

Напомним некоторые определения из предыдущей лекции.

Определение 1.1.1 (Предаддитивная категория $\mathscr{A}$). $\forall A, B \in \mathscr{A} : \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(A, B)$ образует абелеву группу, и везде, где определена, выполнена дистрибутивность:

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \qquad (\beta+\gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

Определение 1.1.2 (Бипроизведение). Такая диаграмма, что

$$A \underset{\iota_1}{\overset{\pi_1}{\leftrightarrows}} C \underset{\iota_2}{\overset{\pi_2}{\rightleftarrows}} B$$

1. $\pi_1\iota_1 = \mathrm{id}_A$.
2. $\pi_2\iota_2 = \mathrm{id}_B$.
3. $\iota_2\pi_2 + \iota_1\pi_1 = \mathrm{id}_C$.
4. $\pi_2\iota_1 = 0$.
5. $\pi_1\iota_2 = 0$.

Определение 1.1.3 (Аддитивная категория). Предаддитивная категория с финальным объектом и произведениями (любых двух объектов).

Эквивалентно, существуют инициальный объект и копроизведения, эквивалентно существуют нулевой объект и бипроизведения.

Определение 1.1.4 (Предабелева категория). Аддитивная категория, в которой у всех морфизмов есть ядро и коядро.

Определение 1.1.5 ((Ко)нормальный мономорфизм (эпиморфизм)). Он является (ко)эквалайзером (какой-то, неважно какой, пары стрелок).

Определение 1.1.6 (Абелева категория). Предабелева категория, в которой все мономорфизмы нормальны.

Пусть $\mathscr{C}$ — категория. Вспомним про категорию стрелок $\mathscr{Arr}\mathscr{C}$, в которой объекты — стрелки из $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$, морфизм между стрелками ϕ, ψ — коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\alpha"] & \bullet \arrow[d, "\beta"] \\ \bullet \arrow[r, "\psi"] & \bullet \end{tikzcd}$$

Далее будем обозначать за $\ker f$ ядро стрелки, как уравнитель стрелки и нуля, а за $\operatorname{Ker} f := \operatorname{source}(\ker f)$ — объект (в конкретных категориях типа $\mathscr{mod}\text{-}R$ это докатегорное понятие ядра — подмодуль без стрелки-вложения).

Лемма 1.1.1. $\ker, \operatorname{coker}$ — *функторы* $\mathscr{Arr}\mathscr{A} \to \mathscr{Arr}\mathscr{A}$.

Доказательство. Достаточно доказать для ядер, для коядер двойственно.

Определим действие $\ker$ на морфизмах:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} f \arrow[r, "\ker f"] \arrow[d, dashed, "\exists! \phi"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ \operatorname{Ker} f' \arrow[r, "\ker f'"] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \end{tikzcd}$$

$f \cdot \ker f = 0 \Rightarrow \beta \cdot f \cdot \ker f = 0 \Rightarrow f' \cdot \alpha \cdot \ker f = 0$, откуда по универсальному свойству ядра $\exists! \phi : \ker f' \cdot \phi = \alpha \cdot \ker f$.

Положим $\ker(\alpha, \beta) = (\phi, \alpha)$. Далее несложно проверить, что данное определение сохраняет композицию и id. $\square$

Определение 1.1.7 (Точный функтор)**.** Функтор, сохраняющий ядра и коядра.

Интересный факт (Теорема Фрейда — Митчелла (Freyd — Mitchell))*.* Для любой малой абелевой категории $\mathscr{A}$: $\exists R \in \mathscr{Ring}$ (необязательно коммутативное кольцо с единицей) и строгий, полный, точный функтор $\mathscr{A} \to \mathscr{mod}\text{-}R$.

Предложение 1.1.1. *Для всякого морфизма $f : A \to B$ найдётся пунктирная стрелка, делающая диаграмму коммутативной.*

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} f \arrow[r, "\ker f"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\operatorname{coker} f"] \arrow[d] & \operatorname{CoKer} f \\ & \operatorname{CoKer} \ker f \arrow[r, dashed, "\exists!"] & \operatorname{Ker} \operatorname{coker} f & \end{tikzcd}$$

Более того, в абелевой категории эта стрелка — изоморфизм.

Доказательство. Следует из эпи-моно разложения, доказанного на прошлой лекции, или из теоремы Митчелла.

Само построение пунктирной стрелки получается из универсальных свойств, а доказательство того, что это — изо — непростое. $\square$

Лемма 1.1.2. *Пусть $\mathscr{C}$ — полная подкатегория в абелевой категории $\mathscr{A}$. Следующие условия равносильны*

- *$\mathscr{C}$ является абелевой.*
-
  - *$0 \in \mathscr{C}$.*
  - *$\mathscr{C}$ содержит бипроизведение любых двух своих объектов.*
  - *Ядра и коядра (взятые в $\mathscr{A}$) любых морфизмов из $\mathscr{C}$ лежат в $\mathscr{C}$.*

Доказательство.

$\Leftarrow$. Очевидно.

$\Rightarrow$. Чуть сложнее, доказывать не будем (и использовать тоже). $\square$

1.2 Комплéксы

Если противное не оговорено, то всё происходит в абелевой категории $\mathscr{A}$, большими буквами обозначены объекты данной категории, маленькими — морфизмы.

Определение 1.2.1 (Комплéкс)**.** Такая диаграмма, что $\forall k \in \mathbb{Z} : d_k \cdot d_{k+1} = 0$.

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{d_n} C_n \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots$$

Альтернативно, комплекс можно рассматривать, как функтор из категории $(\mathbb{Z}, \geqslant)$ (полуенной из частивно упорядоченного множества) в $\mathscr{A}$ (при котором образ композиции любых двух нетождественных морфизмов нулевой).

Ещё один, следующий, взгляд на комплексы работает только для конкретной категории, уже вложенной в R-модули.

Определение 1.2.2 (Градуированный объект)**.** $C_\bullet = \bigoplus\limits_{n \in \mathbb{Z}} C_n$ с морфизмом $d : C_\bullet \to C_\bullet$, таким, что $d(C_n) \subset C_{n+p}$ для некоторой фиксированной *степени объекта* p (чаще всего она равна ± 1).

Определение 1.2.3 (Дифференциальный модуль)**.** Градуированный объект $(C_\bullet, d)$ со свойством $d^2 = 0$.

Определение 1.2.4 (Комплекс)**.** Дифференциальный модуль степени -1.

При развороте стрелок получается дифференциальный модуль степени $+1$, также известный, как *кокомплекс*:

$$\cdots \xleftarrow{d^{n+2}} C^{n+1} \xleftarrow{d^{n+1}} C^n \xleftarrow{d^n} C^{n-1} \xleftarrow{d^{n-1}} \cdots$$

Предостережение. У кокомплекса несколько другая нумерация стрелок, но кокомплексы мы практически не будем использовать.

Определение 1.2.5 (Сдвиг комплекса $(C_\bullet, d)$ на $p \in \mathbb{Z}$)**.** Комплекс $(C[p]_\bullet, d[p])$, где $C[p]_n = C_{n+p}$ и $d[p]_n = (-1)^p d_{n+p}$.