

# Дифференциальная геометрия. Неофициальный конспект

Лектор: Нина Дмитриевна Лебедева  
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

# Оглавление

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Основные понятия</b>  | <b>2</b> |
| 1.1      | Гладкие многообразия   | 2        |
| 1.1.1    | Гладкие отображения  | 3        |
| 1.1.2    | Касательное пространство   | 5        |
| 1.1.3    | Структура векторного пространства на $T_p M$                       | 6        |
| 1.2      | Касательное расслоение   | 6        |
| 1.2.1    | Дифференциал гладкого отображения                                  | 6        |
| 1.3      | Гладкие векторные поля   | 7        |
| 1.4      | Гладкие подмногообразия  | 8        |
| 1.5      | Риманова структура   | 9        |
| 1.5.1    | Длина путей  | 10       |
| 1.5.2    | О внутренней метрике   | 11       |
| 1.6      | Плоскость Лобачевского   | 13       |
| 1.6.1    | Модель в верхней полуплоскости                                     | 13       |
| 1.6.2    | Аксиомы плоскости Лобачевского                                     | 16       |
| 1.6.3    | Модель Пуанкаре в круге  | 18       |
| 1.7      | Касательный вектор как дифференцирование                           | 19       |
| 1.8      | Скобка Ли векторных полей  | 20       |
| 1.8.1    | Выражение для скобки Ли в координатах                              | 21       |
| 1.8.2    | Пространство $\mathcal{X}(M)$ вместе со скобкой Ли, как алгебра Ли | 21       |
| 1.8.3    | Специфичные свойства скобки Ли векторных полей                     | 21       |
| 1.9      | Тензоры на многообразии  | 22       |
| 1.9.1    | Поведение скобки Ли при отображениях                               | 23       |
| 1.10     | Аффинные связности   | 24       |
| 1.10.1   | Симметричная связность   | 25       |
| 1.10.2   | Символы Кристоффеля  | 26       |
| 1.10.3   | Единственность связности Леви-Чивиты                               | 26       |
| 1.11     | Ковариантная производная вдоль пути                                | 26       |
| 1.12     | Геодезические в римановых многообразиях                            | 27       |
| 1.12.1   | Уравнение геодезической  | 27       |
| 1.12.2   | Параллельный перенос вдоль пути                                    | 28       |
| 1.13     | Лемма Гаусса. Геодезические  | 30       |
| 1.14     | Тензор кривизны  | 32       |
| 1.15     | Полугеодезические координаты                                       | 33       |
| 1.16     | Формула Гаусса — Бонне   | 34       |
| 1.16.1   | Ориентация   | 34       |
| 1.16.2   | Вращение векторного поля вдоль кривой. Поворот кривой              | 34       |
| 1.17     | Пространства постоянной кривизны. Сравнение треугольников          | 37       |
| 1.17.1   | Теоремы сравнения  | 38       |
| 1.18     | Полнота. Теорема Хопфа — Ринова                                    | 38       |

# Глава 1

## Основные понятия

### Лекция I

14 февраля 2024 г.

#### 1.1 Гладкие многообразия

**Определение 1.1.1** (Топологическое многообразие). Хаусдорфово топологическое пространство  $M$  со счётной базой, такое что  $\forall x \in M : \exists U \ni x : U \sim \mathbb{R}^n$ . Данное число  $n$  называется *размерностью* многообразия, пишут  $\dim M = n$ , или же часто пишут это число верхним индексом:  $M^n$ .

Далее пусть  $M^n$  — топологическое многообразие.

**Определение 1.1.2** (Карта). Пара из открытого  $U \subset M^n$ , и гомеоморфизма  $\phi : U \rightarrow \Omega$ , где открытое  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .  $U$  называется *носителем карты*.

«В половине случаев в литературе картой называется обратное отображение».

**Определение 1.1.3** (Атлас). Набор карт  $(U_i, \phi_i)$ , таких, что  $\bigcup_i U_i = M$ .

Пусть даны две карты  $(U, \phi)$  и  $(V, \psi)$ . Далее удобно считать, что их носители пересекаются:  $U \cap V \neq \emptyset$ , иначе определение не несёт смысла.

**Определение 1.1.4** (Отображение перехода). Отображение  $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ . Обозначается  $f_{\phi\psi}$ .

**Определение 1.1.5** (Карты  $(U, \phi)$  и  $(V, \psi)$  согласованы). Отображение перехода и ему обратное гладкие.

**Определение 1.1.6** (Гладкий атлас). Атлас, такой, что любые две карты согласованы.

Далее все атласы предполагаются гладкими.

**Определение 1.1.7** (Атласы эквивалентны). Их объединение (то есть все карты из первого и из второго атласа вместе взятые) — тоже гладкий атлас.

**Предложение 1.1.1.** *Эквивалентность атласов — отношение эквивалентности.*

**Определение 1.1.8** (Гладкая структура на многообразии). Максимальный гладкий атлас (атлас, к которому нельзя добавить карт).

*Замечание.* К атласу можно добавить произвольное количество карт, согласованных с теми, что в атласе, и они будут согласованы между собой. В частности, для задания гладкой структуры достаточно произвольного атласа  $A$ : в  $A$  можно добавить всевозможные карты, согласованные с картами из  $A$ , и он станет максимальным.

**Определение 1.1.9** (Гладкое многообразие). Многообразие с гладкой структурой.

Примеры (Атласы).

- Стандартная гладкая структура на  $\mathbb{R}^n$  задаётся атласом  $\{(\mathbb{R}^n, \text{id})\}$ .
- В частности, стандартная структура на  $\mathbb{R}^1$  задаётся атласом  $\{(\mathbb{R}^1, [x \mapsto x])\}$ .
- Можно задать нестандартную структуру на  $\mathbb{R}^1$ :  $\{(\mathbb{R}^1, [x \mapsto x^3])\}$ .

*Предостережение.* Это действительно гладкая структура, хотя обратное отображение  $[x \mapsto x^{1/3}]$  не гладкое. Тем не менее, определение и не требует гладкости от него.

- Пусть  $f = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x, & x \leq 0 \end{cases}$ . Тогда  $\{(\mathbb{R}^1, f)\}$  — тоже гладкий атлас на  $\mathbb{R}^1$ .

Тем не менее, любые два атласа из приведённых выше атласов на  $\mathbb{R}^1$  не эквивалентны — отображения перехода получаются не гладкими.

- Гладкая структура на сфере задаётся двумя картами: пусть  $S^2$  — сфера с северным полюсом  $N$  и южным  $S$ , пусть  $f, g$  — стереографические проекции с данными полюсами. Тогда  $\{(S^2 \setminus \{N\}, f), (S^2 \setminus \{S\}, g)\}$  — атлас.

*Замечание.* Если  $M$  — гладкое многообразие, и открытое  $W \subset M$ , то на  $W$  естественным образом определена гладкая структура, наследующаяся с  $M$ .

### 1.1.1 Гладкие отображения

Пусть  $M^m, N^n$  — гладкие многообразия,  $A_M, A_N$  — соответствующие атласы. Рассмотрим отображение  $f : M \rightarrow N$ .

**Определение 1.1.10** (Координатное представление  $f$  в картах  $(U, \phi)$  на  $M$  и  $(V, \psi)$  на  $N$ ). Такое  $\tilde{f} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$ , что диаграмма коммутативна везде, где определена (то есть  $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$  на  $\phi(U \cap f^{-1}(V))$ ).

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ \phi(U) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \psi(V) \end{array}$$

Далее считаем, что  $f : M \rightarrow N$  непрерывна (эквивалентно, все координатные представления непрерывны).

**Определение 1.1.11** ( $f$  гладкое). Любое координатное представление — гладкое.

**Определение 1.1.12** ( $f$  — гладкое в точке  $x \in M$ ). Найдётся окрестность  $U_x \ni x$  и карты  $(U, \phi), (V, \psi)$  (где  $V \ni y := f(x)$ ), такие, что  $U_x \subset U$  и сужение на  $U_x$  координатного представления  $f$  — гладко.

*Свойства* (Гладкие отображения).

- Гладкость в точке не зависит от выбора карт.
- Гладкость отображения не зависит от выбора атласа в одном классе эквивалентности.
- Отображение гладкое  $\iff$  оно гладкое в любой точке. На лекции было доказательство  $\Leftarrow$ .
- Пусть  $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow K$  гладкие. Тогда их композиция  $g \circ f$  гладкая.
- Тождественное отображение гладкое, если в образе и прообразе выбраны эквивалентные атласы.
- Определение гладкости отображения совпадает с определением гладкости из матанализа (если считать, что  $M \subset \mathbb{R}^m, N \subset \mathbb{R}^n$  открыты, и порождающие атласы наследуют структуры  $\mathbb{R}^m$  и  $\mathbb{R}^n$ ).

**Определение 1.1.13** (Диффеоморфизм  $f : M \rightarrow N$ ). Гладкое  $f$ , такое, что  $f^{-1}$  — тоже гладкое.

**Определение 1.1.14** (Многообразия  $M$  и  $N$  диффеоморфны). Между ними существует диффеоморфизм.

Понятно, что диффеоморфность — отношение эквивалентности.

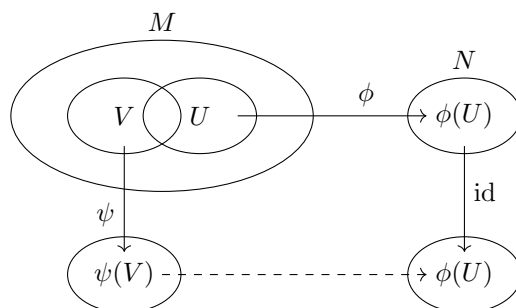
**Утверждение 1.1.1.** Если  $M^m \stackrel{\text{диф}}{\sim} N^n$ , то  $m = n$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную  $x \in M$ . Пусть  $f : M \rightarrow N$  — диффеоморфизм, пусть  $\tilde{f}$  — его координатное представление. Тогда  $\tilde{f}^{-1}$  — координатное представление  $f^{-1}$ , откуда  $\tilde{f}^{-1}$  — тоже гладкое. Рассмотрим дифференциал  $d_x \tilde{f}(\_)$ , это изоморфизм векторных пространств, значит,  $m = n$ .  $\square$

По умолчанию всегда считается, что на  $\mathbb{R}^m$  введена стандартная гладкая структура.

**Предложение 1.1.2.** Пусть  $M$  — гладкое многообразие, тогда карта — диффеоморфизм между  $U$  и  $\phi(U)$ . Обратно, любой диффеоморфизм между открытым подмножеством  $W \subset M$  и областью  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  — карта.

*Доказательство.*



Гладкость карты, как диффеоморфизма, эквивалентна тому, что карта согласована с остальными в атласе: пунктирная стрелка  $\psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$  одновременно является и отображением перехода между картами  $(U, \phi)$  и  $(V, \psi)$ , и координатным представлением  $\phi$  в картах  $(V, \psi)$ ,  $(U, \text{id})$ .  $\square$

**Следствие 1.1.1.** Диффеоморфизм  $f : M \rightarrow N$  задаёт естественную биекцию между картами  $M$  и картами  $N$  (а ещё между (максимальными) атласами  $M$  и (максимальными) атласами  $N$ ).

## Лекция II

21 февраля 2024 г.

*Пример* (Диффеоморфизм). Ранее приводились неэквивалентные карты  $(\mathbb{R}, \text{id})$  и  $(\mathbb{R}, [x \mapsto x^3])$ . Вещественные прямые с данными картами диффеоморфны:  $[x \mapsto x^3]$  — диффеоморфизм, ему обратный  $[x \mapsto \sqrt[3]{x}]$  (где, как в школе,  $\sqrt[3]{x} = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}$ ).

Таким образом, создать две недиффеоморфные структуры на одном и том же многообразии не то чтобы просто.

*Интересный факт.* Пусть  $M$  —  $n$ -мерное многообразие.

Если  $\begin{cases} n < 4, & \text{на нём существует единственная гладкая структура} \\ n = 4, & \text{на нём существует бесконечно много гладких структур.} \\ n > 4, & \text{на нём существует конечное число гладких структур} \end{cases}$

В частности, при  $n > 4$ : если  $M^n = \mathbb{R}^n$ , то гладкая структура единственна.

### 1.1.2 Касательное пространство

Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $p \in M$ . Пусть  $\alpha, \beta : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M$  — гладкие (естественно, в смысле отображения многообразий) кривые, такие, что  $\alpha(0) = p = \beta(0)$ .

**Определение 1.1.15** ( $\alpha$  и  $\beta$  соприкасаются в  $p$ ). В любой карте  $(U, \phi)$  (где  $U \ni p$ ) их производные в нуле совпадают:  $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$ .

*Предостережение.* Определение требует совпадение векторов скорости, а не просто параллельности или сонаправленности.

*Свойства* (Соприкасающиеся кривые).

- Соприкасаемость кривых в какой-то конкретной точке — отношение эквивалентности.
- Соприкасаемость не зависит от выбора карты: достаточно проверить в любой одной, содержащей  $p$ .

*Доказательство.* Пусть  $(U, \phi), (V, \psi)$  — две карты, содержащие точку  $p$ , отображение  $f_{\phi\psi} = \psi \circ \phi^{-1}$  гладкое, значит, его дифференциал переводит равные векторы в равные.  $\square$

**Определение 1.1.16** (Касательный вектор в точке  $p \in M$ ). Класс эквивалентности соприкасающихся в точке  $p$  кривых.

Множество всех касательных векторов — *касательное пространство*, обозначают  $T_p M$ .

#### Координаты касательного вектора

Пусть  $p \in M$ , и  $(U, \phi)$  — карта, содержащая  $p$ .

**Определение 1.1.17** (Координатное представление вектора  $v = [\alpha] \in T_p M$ ). Вектор скорости данной кривой в данной карте  $v_\phi \stackrel{\text{def}}{=} (\phi \circ \alpha)'(0)$ .

Понятно, что определение не зависит от выбора представителя — кривой  $\alpha$ .

Также координаты  $v_\phi$  в  $\mathbb{R}^n$  называют *координатами  $v$  в карте  $\phi$* .

*Свойства* (Координатное представление).

- $\forall p \in M, \forall (U, \phi) : p \in U \Rightarrow$  координатное представление — биекция  $T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n, v \mapsto v_\phi$ .

*Доказательство.* Это инъекция, так как если образы  $u, v$  равны, то по определению  $u$  и  $v$  соприкасаются.

Это сюръекция:  $\forall w \in \mathbb{R}^n$  можно рассмотреть кривую  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \gamma(t) := wt + \phi(p)$ . Координаты  $[\phi^{-1} \circ \gamma]$  в карте  $\phi$  как раз окажутся равными  $w$ .  $\square$

#### Преобразование координатного представления в зависимости от карты

**Утверждение 1.1.2.** Пусть  $M^n \ni p$  — гладкое многообразие и точка,  $(U, \phi)$  и  $(V, \psi)$  — карты, содержащие  $p$ . Тогда  $v_\psi = d_{\phi(p)} f_{\phi\psi}(v_\phi)$ .

*Доказательство.* Пусть  $v = [\alpha]$ . Тогда  $v_\phi = (\phi \circ \alpha)'(0)$ ,  $v_\psi = (\psi \circ \alpha)'(0)$ , и действительно, так как  $f_{\phi\psi} = \psi \circ \phi^{-1}$ , то  $v_\psi = (f_{\phi\psi} \circ \phi \circ \alpha)'(0)$ . Дифференцируя композицию, получаем утверждение.  $\square$

Следствием данного утверждения является альтернативное определение касательного вектора:

**Определение 1.1.18** (Касательный вектор в точке  $p \in M$ ). Отображение из множества всех карт, содержащих точку  $p$  (обозначим их  $\mathcal{M}_p$ ) в  $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{M}_p \rightarrow \mathbb{R}^n$$

такое, что выполнены соотношения (утверждение 1.1.2).

Можно показать, что данное определение, и определение через соприкасающиеся кривые, эквивалентны.

Это определение сродни тому определению тензора, которое говорит: «Тензор — это многомерная матрица чисел, преобразующихся при замене базиса следующим образом. . . »

### 1.1.3 Структура векторного пространства на $T_p M$

Зафиксируем  $p \in M$ , и карту  $(U, \phi)$ , содержащую  $p$ . Пусть  $v, w \in T_p M$ .

**Определение 1.1.19** (Сумма векторов  $v$  и  $w$ ). Такой вектор  $v + w$ , что  $(v + w)_\phi = v_\phi + w_\phi$ .

**Определение 1.1.20** (Растяжение вектора  $v$  с коэффициентом  $\alpha$ ). Такой вектор  $\alpha v$ , что  $(\alpha v)_\phi = \alpha \cdot v_\phi$ .

Иными словами, у нас была биекция  $T_p M$  с векторным пространством, и мы просто перенесли структуру векторного пространства с  $\mathbb{R}^n$  на  $T_p M$ . Определение не зависит от выбора карты, так как замена координат касательных векторов при переходе между картами — изоморфизм векторных пространств (дифференциал — линейный оператор).

*Замечание.* Из определения получается, что  $v \rightarrow v_\phi$  — изоморфизм векторных пространств.

## 1.2 Касательное расслоение

Как множество,  $T(M) = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$ . Оказывается, на  $T(M)$  можно естественно ввести топологию и гладкую структуру размерности  $2n$ . Преобразуем определение атласа так, чтобы это случилось одновременно.

**Утверждение 1.2.1** (Атлас для множества). Пусть  $X$  — множество с картами  $(U, \phi)$ , то есть парами  $(U, \phi)$  где  $U \subset X$ , и каждая  $\phi$  — биекция  $U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . При этом  $X = \bigcup U$

Потребуем для любых двух карт  $(U, \phi)$  и  $(V, \psi)$ :  $\phi(U \cap V)$  открыто (в частности,  $\phi(U)$  открыто), и потребуем, чтобы все функции перехода  $f_{\phi\psi} = \psi \circ \phi^{-1}$  были гладкими.

Введём на  $X$  топологию:  $W \subset X$  открыто, если  $\forall (U, \phi) : \phi(U \cap W)$  открыто, и предположим, что топология получилась хаусдорфовой, и что на  $X$  есть счётная база.

Тогда утверждается, что данная процедура задаёт на  $X$  одновременно и топологию, и гладкую структуру.

Зададим такую гладкую структуру на  $T(M)$ . Обозначим  $TU = \bigsqcup_{p \in U} T_p M$ . Можно рассматривать  $TU$  как множество пар, состоящих из точки и вектора:  $TU = \{(p, v) | p \in U, v \in T_p M\}$ .

Пусть имеется карта  $(U, \phi)$  на  $M$ . Построим по ней карту

$$\begin{aligned} \Phi : TU &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (p, v) &\mapsto (\phi(p), v_\phi) \end{aligned}$$

Проверим согласованность: пусть  $(U, \phi)$  и  $(V, \psi)$  — две карты на  $M$ . По ним построены карты  $(TU, \Phi)$  и  $(TV, \Psi)$  соответственно. Тогда  $(\Psi \circ \Phi^{-1})(p, v) = ((\psi \circ \phi^{-1})(p), d_{\phi(p)} f_{\phi\psi}(v))$ , видно, что  $\Psi \circ \Phi^{-1}$  гладко.

**Упражнение 1.2.1.** Получилось хаусдорфовое пространство со счётной базой.

### 1.2.1 Дифференциал гладкого отображения

Пусть  $M$  и  $N$  — гладкие многообразия, и есть гладкое отображение  $f : M \rightarrow N$ . Зафиксируем  $p \in M$ .

**Определение 1.2.1** (Дифференциал  $f$  в точке  $p$ ). Отображение  $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ , заданное следующим образом:  $d_p f : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ .

**Утверждение 1.2.2.** *Определение дифференциала не зависит от выбора представителей.*

*Доказательство.* Пусть  $\alpha \sim \beta$  — две кривые,  $\alpha(0) = \beta(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = \beta'(0) = v$ .

Проверим, что  $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$ . Достаточно проверить, что совпадают координатные представления.

Выберем две карты  $(U, \phi)$  и  $(V, \psi)$  (где  $U \ni p$ ,  $V \ni f(p)$ ). Координатное представление  $f$  — это  $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ .

Дифференциал  $\tilde{f}$  переносит координаты представления векторов из  $T_p M$  в координаты представления векторов из  $T_{f(p)} N$ :

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \alpha &= \tilde{f} \circ \phi \circ \alpha \quad \text{и} \quad \psi \circ f \circ \beta = \tilde{f} \circ \phi \circ \beta \\ (\psi \circ (f \circ \alpha))'(0) &= d_{\phi(p)} \tilde{f}((\phi \circ \alpha)'(0)) = d_{\phi(p)} \tilde{f}((\phi \circ \beta)'(0)) = (\psi \circ (f \circ \beta))'(0) \end{aligned} \quad \square$$

Нетрудно заметить, что  $(d_p f(v))_\psi = (d_{f(p)} \tilde{f})(v_\phi)$  в обозначениях из доказательства выше (и  $v = [\alpha]$ ).

**Следствие 1.2.1.**  $d_p f$  — линейное отображение.

## Лекция III

28 февраля 2024 г.

*Замечание.* Можно естественным образом определить дифференциал на всём пространстве  $TM$  вот так:  $Tf : TM \rightarrow TN$ . На вектор  $v \in T_p M$  отображение  $Tf$  действует понятным образом:  $v \mapsto d_p f(v)$ .

Если  $U \subset \mathbb{R}^n$ , то касательное пространство  $TU$  естественным образом отождествляется с  $U \times \mathbb{R}^n$ .

### 1.3 Гладкие векторные поля

Пусть  $M$  — гладкое многообразие, выберем произвольное подмножество  $A \subset M$ .

**Определение 1.3.1** (Непрерывное векторное поле на  $A$ ). Непрерывное отображение  $X : A \rightarrow TM$ , такое, что  $\forall p \in A : X(p) \in T_p M$ . Часто пишут  $X_p$  вместо  $X(p)$ .

**Определение 1.3.2** (Гладкое векторное поле на  $A$ ). Векторное поле  $X : A \rightarrow TM$ , такое, что  $\exists$  открытое  $U \subset M : U \supset A$ , и  $X$  продолжается на  $U$ , как гладкое векторное поле (то есть гладкое отображение  $U \rightarrow TM$ , являющееся непрерывным векторным полем).

Для гладкого многообразия  $M$  будем обозначать пространство всех гладких векторных полей за  $\mathcal{X}(M)$ .

Пусть в  $M$  имеется карта  $(U, \phi)$ . Векторные поля задавались на подмножестве  $A \subset M$ , а не на всём многообразии, так как один из самых частых примеров гладкого векторного поля — *координатное векторное поле* — задаётся лишь в карте  $U$ :

**Определение 1.3.3** (Координатное векторное поле, соответствующее  $i$ -й координате). Векторное поле  $V_i : U \rightarrow TM$ , такое, что  $d\phi(V_i) = e_i$  (с координатами  $V_i(p)_\phi = e_i$ ).

**Лемма 1.3.1.** Пусть имеется открытое  $U \subset \mathbb{R}^n$ , и компактное  $K \subset U$ . Утверждается, что  $\forall V \supset K : \text{Cl } V \subset U \Rightarrow$  можно построить гладкую функцию  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , такую, что  $f|_K = 1$ ,  $f|_{\mathbb{R}^n \setminus V} = 0$ .

*Доказательство.*  $\mathbb{R}^n \setminus V$  замкнуто, значит,  $d := \text{dist}(\mathbb{R}^n \setminus V, K) > 0$ . Функция  $\chi_K$  почти подходит, только она не гладкая. Немножко увеличим носитель: рассмотрим  $W := U_{d/2}(K) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, K) < \frac{d}{2}\}$ . Для  $\chi_W$  условие выполняется и в окрестности  $K$ , а, значит, подойдёт свёртка  $\chi_W \circ g_{\frac{d}{2}}$ , где  $g_{\frac{d}{2}}$  — подходящая аппроксимативная единица, гладкая функция с компактным носителем, равная нулю вне  $B_{\frac{d}{2}}(0)$ .  $\square$



**Следствие 1.3.1.** Пусть  $V_i$  — координатное поле карты  $(U, \phi)$ . Тогда  $\forall K \subset U : \exists$  векторное поле  $\tilde{V}_i : \tilde{V}_i|_K = V_i, \tilde{V}_i|_{M \setminus U} \equiv 0$ .

Иными словами, всегда немного уменьшив карту, можно продолжить координатное векторное поле на всё многообразие.

## 1.4 Гладкие подмногообразия

Пусть  $M^m$  — гладкое многообразие размерности  $m$ .

**Определение 1.4.1** (Гладкое подмногообразие размерности  $n \leq m$ ). Подмножество  $N \subset M$ , такое, что  $\forall p \in N : \exists$  выпрямляющая карта  $(U, \phi)$  (карта на  $M$ ), такая, что  $U \ni p$  и  $\phi(U) \cap \mathbb{R}^n = \phi(N \cap U)$ .

Здесь имеется в виду, что  $\phi$  действует в  $\mathbb{R}^m$ , и имеется определённое вложение  $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$  (скажем, в  $\mathbb{R}^m$  выбран базис, и на первые  $n$  векторов натянуто  $\mathbb{R}^n$ ).

**Утверждение 1.4.1.** На  $N$  каноническим образом индуцируется гладкая структура из  $M$ . Карты на  $N$  — сужения выпрямляющих карт (карте  $(U, \phi)$  отвечает карта  $(N \cap U, \psi)$ , где  $\psi : N \cap U \rightarrow \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m, \psi(x) = \phi(x)$ ).

*Доказательство.* Согласованность карт на  $N$  следует из согласованности карт на  $M$ . □

Пусть  $N^n, M^m$  — гладкие многообразия.

**Определение 1.4.2** (Погружение  $f : N \rightarrow M$ ). Гладкое отображение  $f : N \rightarrow M$ , такое, что  $\forall p \in N : d_p f$  — инъекция. Само  $f$  не обязано быть инъекцией.

Понятно, что такое возможно только при  $n \leq m$ .

**Определение 1.4.3** (Вложение  $f : N \rightarrow M$ ). Погружение  $f : N \rightarrow M$ , которое является топологическим вложением, то есть гомеоморфизмом на образ.

*Примеры.*

- В случае поверхностей размерности 2 погружение подмногообразия размерности 1 — кривой — называлось регулярной параметризацией.
- Петля слева является погружением, но даже инъективная петля справа вложением не является: в выделенной точке топология не совпадает с топологией интервала.



**Предложение 1.4.1.**

1. Погружение локально является вложением:  $\forall x \in N : \exists U_x \ni x : f|_{U_x}$  — вложение.
2. Образ вложения — гладкое подмногообразие.

*Доказательство.* Достаточно доказать для случая открытых  $N \subset \mathbb{R}^n, M \cong \mathbb{R}^m$ , потому что карты — диффеоморфизмы, и определения сохраняются при диффеоморфизмах.

Зафиксируем  $x \in N$ . Введём координаты в  $\mathbb{R}^m$ , выделив первые  $n$  координат, так, чтобы подпространство, натянутое на них, совпадало с  $d_x f(\mathbb{R}^n)$ .

Также прибавим (в смысле  $\oplus$ ) к пространству  $\mathbb{R}^n$ , содержащему  $N$ , слагаемое  $\mathbb{R}^{m-n}$ .

**Лемма 1.4.1.** Существуют  $W \ni x, W' \ni f(x)$ , и диффеоморфизм  $\phi : W \rightarrow W' : \phi|_{N \cap W} = f$  (обе окрестности  $m$ -мерные:  $W \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{m-n}, W' \in \mathbb{R}^m$ ).

*Доказательство леммы.*

Обозначим координаты в  $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{m-n}$  за  $(\xi, \zeta)$ , и определим  $\phi(\xi, \zeta) = f(\xi) + (0, \zeta)$ . Дифференциал  $d_x \phi = (d_x f, \text{id})$  невырожден (матрица блочно-диагональна), и  $\phi|_N = f$ .

По теореме об обратной функции  $\exists W : \phi|_W$  — диффеоморфизм.  $\square$

1. Образ  $\phi|_{N \cap W}$  — подмногообразие  $W' \cap \mathbb{R}^n \subset N$ .  $\phi^{-1}|_{W'}$  — выпрямляющая карта,
2.  $\phi$  — гомеоморфизм на образ  $\Rightarrow f|_{N \cap W}$  — топологическое вложение и гомеоморфизм. Значит, локально погружение — вложение.
3. Так как  $f$  — топологическое вложение, то  $f(N)$  — подмногообразие.  $\square$

## Лекция IV

6 марта 2024 г.

*Контрпример.* Тожественное отображение между прямыми с разными атласами  $(\mathbb{R}, x^3) \rightarrow (\mathbb{R}, \text{id})$  — не вложение (и даже не погружение). Ему соответствует координатное представление  $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ , которое не является гладким в нуле.

Пусть  $N \subset M$  — гладкое подмногообразие. Отображение  $\text{in} : N \hookrightarrow M$  можно рассматривать, как вложение многообразий.

**Утверждение 1.4.2.** *Следующие определения подмногообразия равносильны:*

- Подмножество  $N \subset M$  с выпрямляющими картами.
- Образ вложения некоторого многообразия.

*Интересный факт* (Теорема Уитни). Для любого гладкого многообразия  $M^m$  существует вложение  $M^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ .

## 1.5 Риманова структура

Пусть дано гладкое многообразие  $M^m$ .

**Определение 1.5.1** (Риманова структура на  $M^m$ ). Совокупность (положительно определённых) скалярных произведений  $\{g_x\}_{x \in M}$  ( $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}, g_x = \langle \_, \_ \rangle_x$ ). Иначе это называют *метрическим тензором*.

Напомним, что  $\mathcal{X}(M)$  — пространство гладких векторных полей на  $M$ .

**Определение 1.5.2** (Гладкая риманова структура на  $M^m$ ). Такая риманова структура, что  $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ : отображение  $M \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \langle X_x, Y_x \rangle_x$  гладко

Далее везде будем говорить *риманово многообразие* для гладкого многообразия с гладкой римановой структурой.

*Пример.* Пример (гладкого) метрического тензора для поверхностей — первая квадратичная форма.

Пусть заданы два римановых многообразия  $(M, \langle \_, \_ \rangle)$  и  $(N, \langle \_, \_ \rangle)$ .

**Определение 1.5.3** (Изометрия между  $M$  и  $N$ ). Диффеоморфизм  $f : M \rightarrow N$ , сохраняющий скалярные произведения:  $\forall x \in M : \forall v, w \in T_x M : \langle v, w \rangle_x = \langle d_x f(v), d_x f(w) \rangle_{f(x)}$ .

*Примеры.*

- Пусть имеется вложение гладкого многообразия  $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . В соответствии с ним на  $M^m$  можно естественным образом задать риманову метрику:

$$\forall x \in M : \forall v, w \in T_x M : \langle v, w \rangle_x := \langle d_x f(v), d_x f(w) \rangle_{f(x)}$$

Так как  $d_p f$  инъективен, то скалярное произведение получится невырожденным.

В предыдущем семестре в точности это происходило с вложением поверхности в  $\mathbb{R}^3$ .

- Пусть на многообразии  $N^n$  задана риманова структура, и имеется вложение  $f : M^m \rightarrow N^n$ . Тогда абсолютно аналогично можно задать риманову метрику на  $M^m$ :

$$\forall x \in M : \forall v, w \in T_x M : \langle v, w \rangle_x := \langle d_x f(v), d_x f(w) \rangle_{f(x)}$$

- В обоих пунктах можно ослабить требования на  $f$ : достаточно, чтобы  $f$  было погружением.

Пусть  $(M^m, g)$  — риманово многообразие,  $(U, \phi)$  — карта:  $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^m$ . Выберем в  $\mathbb{R}^m$  ортонормированный базис  $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ . Базисный вектор  $e_i$  — координатное представление вектора  $d_x \phi^{-1}(e_i)$ , и  $(d_x \phi^{-1}(e_i))_{1 \leq i \leq m}$  — базис  $T_x M$ .

Для краткости записи в дальнейшем будет использоваться запись  $E_i := d_\phi^{-1}(e_i)$ , если карта ясна из контекста. В этой карте  $E_i$  — *координатные векторные поля*.

Можно записать координаты метрического тензора  $g_x$  в данных базисных векторах  $E_i$ , получатся *метрические коэффициенты для карты*  $(U, \phi)$ :  $(g_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$ .

Для векторов  $X = X_1 E_1 + \dots + X_m E_m$  и  $Y = Y_1 E_1 + \dots + Y_m E_m$ :

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i,j} X_i g_{i,j} Y_j$$

**Теорема 1.5.1.**  $g_{i,j}$  — гладкие во всех картах  $\iff$  метрический тензор  $g$  гладок.

*Доказательство.*

$\Leftarrow$ . В определении гладкого метрического тензора были  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , но на прошлой лекции мы обсудили, что координатное поле можно продлить с любого компакта: (следствие 1.3.1).

Проверим гладкость метрического тензора в карте  $(U, \phi)$ . Пусть  $p \in U$ , захватим точку  $p$  открытым множеством  $V \ni p : \text{Cl } V \subset U$ . Согласно (следствие 1.3.1), можно продлить координатные векторные поля  $E_i$  и  $E_j$ , получив некоторые поля  $\bar{E}_i$  и  $\bar{E}_j$ , совпадающие с  $E_i$  и  $E_j$  на  $V$ .

$g(\bar{E}_i, \bar{E}_j)$  — гладкая функция, совпадающая с  $g_{i,j}$  на  $V$ .

$\Rightarrow$ . Рассмотрим гладкие векторные поля  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ .

Проверим гладкость в точке  $x \in M$ . Рассмотрим произвольную карту  $(U, \phi)$ , содержащую  $x$ . Распишем  $X = \sum_i \xi_i E_i, Y = \sum_j \eta_j E_j$ . Так как поля гладкие, то  $\xi_i, \eta_j : M \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкие функции.

$$\text{Получается, } \langle X, Y \rangle_x = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \langle E_i, E_j \rangle_x = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j g_{i,j}. \quad \square$$

*Пример.* Пусть многообразие  $M^m$  покрыто одной картой  $(M, \phi)$ . Для задание римановой структуры на  $M$  необходимо и достаточно ввести  $m \times m$  гладких метрических коэффициентов  $g_{i,j} : M \rightarrow \mathbb{R}$  так, что матрица  $(g_{i,j})$  всюду положительно определена.

В случае покрытия  $M$  несколькими картами так может не получиться, надо ещё проверять согласованность, что может быть неудобно.

### 1.5.1 Длина путей

Пусть  $v \in T_x M$ .

**Определение 1.5.4** (Длина вектора  $v$ ).  $|v| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle v, v \rangle_x}$ .

Теперь  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  — кусочно-гладкая кривая (имеется разбиение  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$ , такое, что  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  — гладкая).

**Определение 1.5.5** (Длина кривой).  $L(\gamma) = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)| dt$ . Длина  $\gamma'$  определена: из гладкости  $\forall t \in (t_i, t_{i+1}) : \gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ .

Пусть  $(M, g)$  — связное риманово многообразие,  $x, y \in M$  — две точки.

**Определение 1.5.6** (Расстояние между точками  $x, y$ ).  $d_l(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\gamma} l(\gamma)$ , где инфимум берётся по всем кусочно гладким  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , таким, что  $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$ .

**Теорема 1.5.2.**

1.  $d_l$  — метрика
2. Топология, порождённая  $d_l$  совпадает с исходной топологией  $\Omega M$ .

*Доказательство.*

1. Проверим три аксиомы метрики.

- Меняя направление пути, получаем  $d_l(x, y) = d_l(y, x)$ .
- Выберем  $\varepsilon > 0$ , найдутся две кусочно гладкие кривые  $\gamma_{x,y}$  и  $\gamma_{y,z}$ , почти оптимально соединяющие  $x, y$  и  $y, z$  соответственно ( $l(\gamma_{x,y}) \leq d(x, y) + \varepsilon$ ;  $l(\gamma_{y,z}) \leq d(y, z) + \varepsilon$ ). Конкатенируя  $\gamma_{x,y} \cdot \gamma_{y,z}$ , получаем  $d_l(x, z) \leq d_l(x, y) + d_l(y, z) + 2\varepsilon$ . Устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем неравенство треугольника.
- Проверим положительную определённость.

**Лемма 1.5.1.**  $\forall x \in M : \exists$  карта  $(U, \phi)$ , содержащая  $x$ , такая, что  $\forall \varepsilon > 0 : \exists V \subset U$  ( $V \ni x$ ), причём  $\phi|_V : V \rightarrow \phi(V)$   $(1 \pm \varepsilon)$ -билипшицево:

$$\forall a, b \in V : (1 - \varepsilon)|\phi(a) - \phi(b)| \leq d_l(a, b) \leq (1 + \varepsilon)|\phi(a) - \phi(b)|$$

Отсюда сразу получается, что  $\forall \gamma : [c, d] \rightarrow V$ :

$$(1 - \varepsilon) \cdot l(\phi \circ \gamma) \leq l(\gamma) \leq (1 + \varepsilon) \cdot l(\phi \circ \gamma)$$

*Доказательство леммы.*

Выберем ортонормированный базис  $X_1, \dots, X_m$  в  $T_x M$  (такой найдётся, так как скалярное произведение положительно определено).

Выберем произвольную карту  $(U, \phi)$ , содержащую  $x$ .  $d_x \phi(X_1), \dots, d_x \phi(X_m)$  — базис в  $\mathbb{R}^m$ , его можно линейным преобразованием  $L$  перевести в ортонормированный. Далее считаем, что он уже ортонормирован (можно заменить карту  $\phi$  на  $L \circ \phi$ ).

Коэффициенты метрического тензора в этой карте  $g_{i,j}$  таковы, что  $g_{i,j}(x) = \delta_{i,j}$ .

Из непрерывности  $g_{i,j} : \forall \varepsilon > 0 : \exists V \subset U : \forall y \in V, v \in T_y M$ :

$$(1 - \varepsilon)|v| \leq |d_y \phi(v)| \leq (1 + \varepsilon)|v| \quad \square$$

2. Применяем (лемма 1.5.1) для  $\varepsilon = 1/2$ . Из билипшицевости сразу получается совпадение топологий.  $\square$

## 1.5.2 О внутренней метрике

Более частым случаем является определение расстояния, как инфимум длин всех кривых, а не только кусочно-гладких. Однако риманова структура на многообразии определяет лишь метрику в каждой точке, а непосредственных средств для вычисления длин непрерывных путей риманова структура не предоставляет.

Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство,  $\gamma : [c, d] \rightarrow X$  — (непрерывный) путь. Его длину можно определить по формуле  $L_d(\gamma) = \sup \sum_i d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$ , где супремум берётся по всем разбиениям  $c = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = d$ . Пусть  $x, y \in X$ .

**Определение 1.5.7** (Внутренняя метрика, порождённая метрикой  $d$ ).  $d_I(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\gamma} L_d(\gamma)$ , где инфимум берётся по всем непрерывным  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , таким, что  $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$ . **Не уверен в правильности этого определения.**

Из неравенства треугольника сразу получается  $d_I \geq d$  (для всякой кривой  $\gamma$ , соединяющей точки  $x$  и  $y$ :  $L_d(\gamma) \geq d(x, y)$  по определению супремума).

В силу теоремы, которую мы скоро докажем (теорема 1.5.3), имеет место равенство  $(d_I)_I = d_I$ . Это позволяет ввести следующее определение.

**Определение 1.5.8** (Внутренняя метрика). Метрика  $d$ , совпадающая с внутренней метрикой, порождённой  $d$ .

Конечно, не все метрики — внутренние.

*Пример* (Не внутренняя метрика). Рассмотрим окружность  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ . Метрика, индуцированная с  $\mathbb{R}^2$  на  $S^1$  — не внутренняя: расстояние между диаметрально-противоположными точками равно 2, но не существует пути, их соединяющего, длиной меньше  $\pi$ .

## Лекция V

13 марта 2024 г.

В этой лекции везде  $\hat{\gamma}$  обозначают кусочно-гладкие кривые, а  $\gamma$  — произвольные (непрерывные) кривые.

**Определение 1.5.9** (Длина кусочно-гладкой кривой  $\hat{\gamma}$ ). Число  $L(\hat{\gamma}) \stackrel{\text{def}}{=} \int |\hat{\gamma}'|$ .

Построим внутреннюю метрику, порождённую длинами кривых  $d_L$ :  $d_L(x, y) = \inf_{\hat{\gamma}} L(\hat{\gamma})$ . По произвольной метрике  $d$  можно определить длину кривых по формуле  $L_d(\gamma) = \sup \sum_i d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$ .

Что будет, если по формуле для длин кривых построить метрику, а потом согласно этой метрике научиться измерять длины кривых?

**Утверждение 1.5.1.** Для всякой кусочно-гладкой кривой  $\hat{\gamma} : [a, b] \rightarrow M$ :  $L_{d_L}(\hat{\gamma}) \leq L(\hat{\gamma})$ .

*Доказательство.* Выберем  $\varepsilon > 0$ , по определению длины, построенной по метрике, найдётся разбиение  $a = t_0 < \dots < t_k = b$ , такое, что  $L_{d_L}(\hat{\gamma}) \leq \sum_{i=0}^{k-1} d_L(\hat{\gamma}(t_i), \hat{\gamma}(t_{i+1})) + \varepsilon$ .

Теперь оценим  $d_L(\hat{\gamma}(t_i), \hat{\gamma}(t_{i+1})) \leq L(\hat{\gamma}|_{[t_i, t_{i+1}]})$ . Устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем искомое неравенство в силу аддитивности длины.  $\square$

**Теорема 1.5.3.**  $d_L$  — внутренняя метрика:  $\forall x, y \in M : d_L(x, y) = \inf_{\gamma} L_{d_L}(\gamma)$ , где инфимум берётся по всем непрерывным путям  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ ;  $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$ .

*Доказательство.* Для любой кривой  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , такой, что  $\begin{cases} \gamma(a) = x \\ \gamma(b) = y \end{cases}$  верно, что  $d_L(x, y) \leq L_{d_L}(\gamma)$ : можно в качестве разбиения выбрать  $a = t_0 < t_1 = b$ .

Тем самым, достаточно для всякого  $\varepsilon > 0$  предъявить кривую  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , соединяющую  $x$  и  $y$ , так, что  $L_{d_L}(\gamma) \leq d_L(x, y) + \varepsilon$ .

**Лемма 1.5.2.** *Функция длины  $L$  от кусочно-гладких кривых полунепрерывна снизу: если  $\hat{\gamma}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \hat{\gamma}$  поточечно, то  $\varliminf_{n \rightarrow \infty} L(\hat{\gamma}_n) \geq L(\hat{\gamma})$ .*

*Доказательство леммы.*

Выберем  $\varepsilon > 0$ ; согласно (лемма 1.5.1) каждая точка  $\hat{\gamma}$  вместе с некоторой окрестностью покрывается картой, так что

$$(1 - \varepsilon)L_{\text{map}}(\phi \circ \hat{\gamma}|_{[t_j, t_{j+1}]}) \leq L(\hat{\gamma}|_{[t_j, t_{j+1}]}) \leq (1 + \varepsilon)L_{\text{map}}(\phi \circ \hat{\gamma}|_{[t_j, t_{j+1}]})$$

где  $L_{\text{map}}$  — длина кривой в  $\mathbb{R}^n$ .

Так как  $\hat{\gamma}([a, b])$  — компакт, то можно выделить конечное количество таких карт. Начиная с некоторого номера, все точки  $\hat{\gamma}_n$  тоже лежат в соответствующих картах.

В евклидовом пространстве полунепрерывность снизу есть:  $\varliminf_{n \rightarrow \infty} L_{\text{map}}(\phi \circ \hat{\gamma}_n) \geq L_{\text{map}}(\phi \circ \hat{\gamma})$ , значит,  $\frac{1}{1-\varepsilon} \varliminf_{n \rightarrow \infty} L(\hat{\gamma}_n) \geq \frac{1}{1+\varepsilon} L(\hat{\gamma})$ . Устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем искомое утверждение.  $\square$

Возьмём кусочно-гладкую кривую  $\hat{\gamma}$ , соединяющую  $x$  и  $y$  так, что  $d_L(x, y) \geq L(\hat{\gamma}) + \varepsilon$  (она берётся из определения  $d_L$ ). Осталось доказать следующую лемму.

**Лемма 1.5.3.** *Для кусочно-гладких кривых:  $L(\hat{\gamma}) = L_{d_L}(\hat{\gamma})$ .*

*Доказательство леммы.*

В силу (утверждение 1.5.1) достаточно доказать, что  $L(\hat{\gamma}) \leq L_{d_L}(\hat{\gamma})$ .

Выберем  $\varepsilon > 0$ . По определению супремума:  $L_{d_L}(\hat{\gamma}) \geq \sum_{i=1}^N d_L(\hat{\gamma}(t_i), \hat{\gamma}(t_{i+1}))$ . Теперь для каждой пары точек  $\hat{\gamma}(t_i), \hat{\gamma}(t_{i+1})$  найдётся кривая  $\hat{h}_i$ , соединяющая их так, что  $d_L(\hat{\gamma}(t_i), \hat{\gamma}(t_{i+1})) \geq L(\hat{h}_i) - \frac{\varepsilon}{N}$ . Обозначим за  $\hat{h} = \hat{h}_1 \cdot \dots \cdot \hat{h}_{N-1}$ , цепочка неравенств показывает  $L_{d_L}(\hat{\gamma}) \geq L(\hat{h}) - \varepsilon$ . При стремлении  $\varepsilon \rightarrow 0$  происходит поточечное стремление  $\hat{h} \rightarrow \hat{\gamma}$ , откуда согласно (лемма 1.5.2) мы получаем искомое неравенство. **Про поточечное стремление не очень ясно.**  $\square$

$\square$

## 1.6 Плоскость Лобачевского

Плоскость Лобачевского — двумерное многообразие постоянной кривизны  $-1$ . При этом евклидова плоскость  $\mathbb{R}^2$  имеет постоянную кривизну, равную 0, а сфера  $S^2$  — постоянную положительную кривизну 1. Плоскость Лобачевского по важности сравнима с этими двумя объектами, но вложить в трёхмерное пространство её не получится. Поэтому мы её изучаем вместе с римановой геометрией, явно определяя метрический тензор.

### 1.6.1 Модель в верхней полуплоскости

Как гладкое многообразие, *плоскость Лобачевского*  $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$  — открытое подмногообразие евклидовой плоскости, покрываемое одной тождественной картой.

Зададим метрический тензор на  $\mathbb{H}^2$  формулой  $g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$ . Карта отождествляет касательные пространства  $\mathbb{H}^2$  и верхней полуплоскости  $\mathbb{R}^2$ , как векторные пространства, но скалярное произведение в этих касательных пространствах различается:  $\forall v \in T_{(x,y)}\mathbb{H}^2 : |v|_{\mathbb{H}} = \frac{1}{y}|v|_E$ . Здесь  $|\cdot|_{\mathbb{H}}$  и  $|\cdot|_E$  — длины векторов в касательной плоскости к точке на плоскости Лобачевского, либо, соответственно, на евклидовой полуплоскости.

У гладкой кривой  $\hat{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  (в координатной записи  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ) вектор скорости равен  $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ , а длина кривой в плоскости Лобачевского равна  $L(\hat{\gamma}) = \int |\hat{\gamma}'|_{\mathbb{H}} = \int \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{y} dt$ .

Пусть  $f : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$  — диффеоморфизм римановых многообразий.

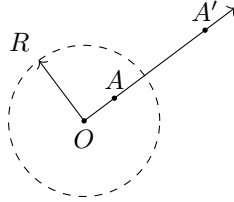
**Определение 1.6.1** ( $f$  конформно).  $f$  сохраняет углы, то есть  $\forall p \in M : d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  — гомотетия:  $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \forall v \in T_p M : |d_p f(v)|_N = \lambda |v|_M$ , число  $\lambda$  называют *коэффициентом конформности*.

Две метрики  $g_1$  и  $g_2$  на одном многообразии  $M$  называют *конформными*, если  $\text{id}_M$  конформно. В частности, если одна из метрик евклидова (с метрическим тензором  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ), то метрический тензор второй имеет вид  $\begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$ , где  $\lambda$  — конформный фактор.

Тем самым, плоскость Лобачевского имеет конформную метрику, конформный фактор в точке  $(x, y)$  равен  $\frac{1}{y}$ .

Известное нетривиальное конформное отображение — *инверсия*.

**Определение 1.6.2** (Инверсия  $\mathbb{R}^n$  относительно точки  $O \in \mathbb{R}^n$  и сферы радиуса  $R$ ). Отображение  $I : \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ , при котором точка  $A$  переходит в такую точку  $A'$  на луче  $OA$ , что  $|OA| \cdot |OA'| = R^2$ . Иначе говоря,  $\overrightarrow{OA'} = \frac{R^2}{|OA|^2} \overrightarrow{OA}$ .



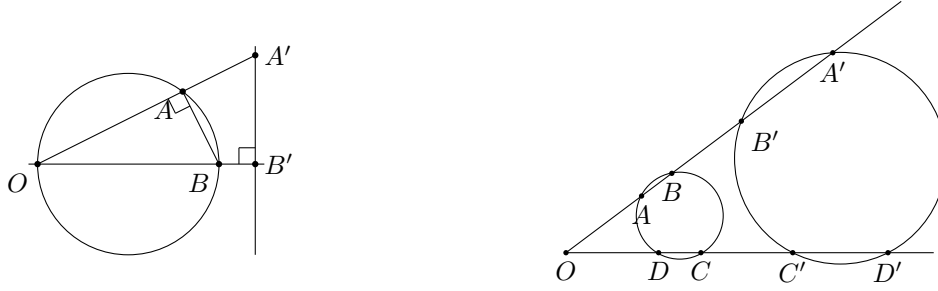
*Замечание.* Инверсия — инволюция, то есть  $I^2 = \text{id}$

**Теорема 1.6.1.** Инверсия — конформное отображение, его конформный фактор в точке  $A$  равен  $\lambda(A) = \frac{R^2}{|OA|^2}$ . При инверсии плоскости окружности и прямые переходят в окружности и прямые.

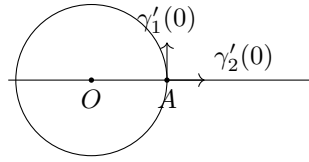
*Доказательство.*

2. Сначала покажем, что окружности и прямые переходят в окружности и прямые. На рисунках  $O$  — центр инверсии, а образы точек при инверсии называются теми же буквами с добавлением штриха.

- На левом рисунке показано, как окружность, проходящая через центр инверсии, переходит в прямую: если  $OB$  — диаметр окружности, то прямая, перпендикулярная  $OB$ , и проходящая через  $B'$  — образ окружности. В самом деле, для любой пары точек  $A$  и  $A'$  треугольники  $OAB$  и  $OB'A'$  подобны; угол  $OAB$  прямой, если и только если  $A$  на окружности, а угол  $OB'A'$  прямой, если и только если  $A'$  на прямой.



- На правом рисунке изображены точки  $A, B, C, D$ , лежащие на окружности, не содержащей ни внутри себя, ни на границе, центра инверсии. Тогда (ссылка на факт из школьной геометрии)  $|OA| \cdot |OB| = |OC| \cdot |OD|$ , применяя определение инверсии получаем  $|OA'| \cdot |OB'| = |OC'| \cdot |OD'|$ , откуда (применяя обратный факт) точки  $A', B', C', D'$  тоже лежат на одной окружности.
  - Случай, когда центр инверсии лежит внутри одной из окружностей аналогичен предыдущему, тогда центр инверсии лежит внутри и образа этой окружности.
  - Наконец, прямая, проходящая через центр инверсии, при инверсии переходит в себя.
1. Для проверки, что  $\lambda(A) = \frac{R^2}{|OA|^2}$ , достаточно рассмотреть все плоскости, содержащие прямую  $OA$ . Пусть  $\gamma_1$  — параметризация одномерной окружности радиуса  $OA$ ,  $\gamma_1(0) = A$ , и  $\gamma_2$  — параметризация луча  $OA$ ,  $\gamma_2(0) = A$ :



Векторы  $\gamma_1'(0)$  и  $\gamma_2'(0)$  образуют базис  $T_A \mathbb{R}^2$ . Применим инверсию к картинке.

- $(I \circ \gamma_1)(t) = \frac{R^2}{|OA|^2} \gamma_1(t)$ , откуда  $|(I \circ \gamma_1)'(0)| = \frac{R^2}{|OA|^2} |\gamma_1'(0)|$ .
- $(I \circ \gamma_2)(t) = \frac{R^2}{|\gamma_2(t)|^2} \gamma_2(t)$ , откуда  $|(I \circ \gamma_2)'(0)| = \left| \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{R^2}{|\gamma_2(t)|} \right| = \frac{R^2}{|OA|^2} \cdot |\gamma_2'(0)|$ .  $\square$

*Замечание.* Стереографическая проекция — сужение инверсии — сохраняет углы.

В модели плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости имеется *абсолют* — прямая  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$ .

**Определение 1.6.3** (Изометрия). Дiffeоморфизм, сохраняющий метрику ( $|\cdot|$  или  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — достаточно что-то одно из двух).

**Теорема 1.6.2.** Следующие отображения — изометрии плоскости Лобачевского:

1. Сдвиг  $S_c : (x, y) \mapsto (x + c, y)$ .
2. Отражение  $R_c : (x, y) \mapsto (2c - x, y)$ .
3. Гомотетия с центром на абсолюте и положительным коэффициентом.
4. Инверсия с центром на абсолюте.

*Доказательство.* Надо просто проверить, что данные отображения сохраняют  $|\cdot|$ .

1., 2. Очевидно.

3. Такая гомотетия сопряжена при помощи сдвига гомотетии с центром в  $(0, 0)$ . Пусть  $f : (x, y) \mapsto (kx, ky)$ , тогда  $\forall v \in T_{(x_0, y_0)} \mathbb{H}^2 : |d_{(x_0, y_0)} f(v)|_E = k|v|_E$ , и так как конформный фактор в  $(kx_0, ky_0)$  в  $k$  раз меньше фактора в  $(x_0, y_0)$ , то действительно  $|d_{(x_0, y_0)} f(v)|_{\mathbb{H}} = |v|_{\mathbb{H}}$ .



4. В силу доказанного выше, достаточно проверить для инверсии с центром в  $O = (0, 0)$  и радиусом  $R = 1$ . Такая инверсия действует по правилу  $I : (x_0, y_0) \mapsto (\frac{x_0}{r^2}, \frac{y_0}{r^2})$ , где  $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ . Согласно (теорема 1.6.1), в евклидовой метрике  $\forall v \in T_{(x_0, y_0)}\mathbb{H}^2 : |d_{(x_0, y_0)}I(v)|_E = \frac{1}{r^2}|v|_E$ . Получаем

$$|d_{(x_0, y_0)}I(v)|_{\mathbb{H}} = \frac{|d_{(x_0, y_0)}I(v)|_E}{y_0/r^2} = \frac{|v|_E}{y_0} = |v|_{\mathbb{H}} \quad \square$$

**Определение 1.6.4** (Движение плоскости Лобачевского). Изометрия плоскости Лобачевского, получаемая композицией пунктов (1 – 4) из (теорема 1.6.2).

Когда-нибудь докажем, **или нет**, что других изометрий у плоскости Лобачевского нет.

Плоскость Лобачевского удобно представлять, как  $\mathbb{C}_+ \stackrel{def}{=} \{z \in \mathbb{C} | \Im z > 0\}$ . В этом случае все движения записываются в виде

$$\begin{cases} z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, & \text{где } a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0 \\ z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, & \text{где } a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc < 0 \end{cases}$$

Так как  $I(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ , то несложно проверить, что это группа, и (1 – 4) из (теорема 1.6.2) — её образующие.

**Определение 1.6.5** (Прямые в плоскости Лобачевского). Прямые, перпендикулярные абсолюту, и окружности, перпендикулярные абсолюту (то есть с центром на нём).

**Теорема 1.6.3.** Через любые две точки плоскости Лобачевского проходит единственная *прямая*, и её отрезок реализует кратчайшее расстояние между данными точками.

*Доказательство.* При движении прямые переходят в прямые, поэтому достаточно доказать эту теорему для случая двух точек, находящихся на одной вертикальной прямой. В самом деле, несложно построить окружность с центром на абсолюте, проходящую через две данные точки, и инверсией перевести её в вертикальную прямую.

Итак, через две точки  $(x_0, y_1)$  и  $(x_0, y_2)$  очевидным образом проходит всего одна прямая — вертикальная евклидова прямая. Если кусочно-гладкий путь  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  соединяет данные точки, то его длина равна  $\sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} |y|}{d} t \geq \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{y |y|}{d} t$ , и равенство наблюдается только при  $x' \equiv 0$ .

Иными словами, любой путь при проекции на прямую  $x = x_0$  не увеличивает свою длину, причём понятно, что путь будет кратчайшим, если он монотонный.  $\square$

## Лекция VI

20 марта 2024 г.

### 1.6.2 Аксиомы плоскости Лобачевского

«На самом деле, аксиом много, и их можно по-разному выбирать»

Аксиомы аналогичны евклидовым, выпишем некоторые из них:

1. Через любые две точки проходит единственная прямая (евклидова окружность с центром на абсолюте или вертикальная прямая).
2. Прямая разбивает плоскость на две части: любой отрезок, соединяющий две точки, пересекает данную прямую не более, чем в одной точке, и точки быются на два класса эквивалентности относительно данного отношения.
3. Аксиома параллельных не верна: через одну точку можно провести много прямых, параллельных данной (не пересекающих данную).

На данной картинке синим нарисованы некоторые прямые, проходящие через точку  $p$ , не пересекая данную зелёную прямую  $l$ :



*Интересный факт.* Это равносильно тому, что не существует точки  $O$ , в которой можно произвести гомотегию, то есть такое отображение  $H : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  с коэффициентом  $\lambda \in \mathbb{R}$ , что  $H(O) = O, d(H(A), H(B)) = \lambda d(A, B)$ .

#### 4. Однородность движения.

**Определение 1.6.6** (Флаг). Тройка из точки, луча и полуплоскости, расположенных так:



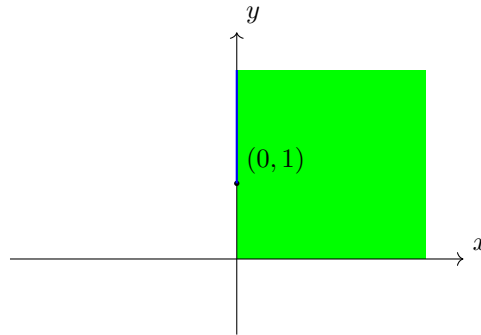
Говоря словами, берётся точка, из прямой (в смысле гиперболической плоскости — евклидова прямая либо окружность), проходящей через данную точку, оставляется только одна половина — луч, и так как прямая делит плоскость на две части, то также выбирается одна из частей — полуплоскость.

Аксиома однородности движения говорит, что любой такой флаг (набор из точки, луча и полуплоскости), переводится в любой другой флаг движением.

**Предложение 1.6.1.** Докажем, что данная аксиома верна в нашей модели.

*Доказательство.* Достаточно доказать, что в данный флаг можно перевести любой другой.

В качестве фиксированного флага выберем флаг  $[(0, 1), \text{вверх, вправо}]$ :



Рассмотрим другой флаг, характеризующийся точкой  $p$ , и выберем на луче другую точку  $q$ . Пусть  $d := d(p, q)$ . Переведём точки  $p$  и  $q$  в точки  $(0, 1)$  и  $(0, e^d)$  соответственно:

- Если  $p$  и  $q$  не лежат на одной вертикальной прямой, то прямая, проходящая через них — евклидова окружность с центром на абсолюте. Пусть она пересекает абсolut в точке  $X$  (и ещё какой-то), сделав инверсию в  $X$ , мы сведёмся к следующему случаю.
- Теперь  $p$  и  $q$  лежат на одной вертикальной прямой, пересекающей абсolut в точке  $Y$ . Если  $p$  выше  $q$ , то сделаем инверсию в  $Y$ , теперь  $p$  ниже  $q$ .
- Далее гомотетией с центром в  $Y$  переведём  $p$  в  $(0, 1)$ . Так как все проделанные преобразования — изометрии, а последняя сохраняет вертикальную прямую  $pq$ , то  $q$  перейдёт в точку  $(0, e^d)$ .
- Чтобы совместить флаги, осталось, если нужно, сделать отражение относительно прямой  $x = 0$  (точки и лучи уже совмещены, но надо ещё совместить полуплоскости).  $\square$

5. Неравенство треугольника:  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ , и равенство имеет место только когда  $z \in [x, y]$  (разумеется, отрезок — множество точек гиперболической прямой  $xy$ , лежащих между  $x$  и  $y$ ).

### 1.6.3 Модель Пуанкаре в круге

Обозначим модель Лобачевского в верхней полуплоскости  $\mathbb{H}_L$ . Сделаем инверсию  $I$  модели Лобачевского относительно  $A = (0, -1)$  с коэффициентом  $K = \sqrt{2}$ .

Абсolut  $y = 0$  перешёл в окружность, проходящую через точки  $(0, 2)$  (образ  $(0, 1)$ ) и  $(0, 0)$  (образ бесконечно удалённой). Из симметрии относительно прямой  $x = 0$  получаем, что абсolut перешёл в окружность  $\omega := \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ .

Данная модель, получающаяся при инверсии модели Лобачевского в верхней полуплоскости, называется *моделью Пуанкаре в круге*, обозначим её  $\mathbb{H}_P$ . Так как инверсия конформна, а  $\langle v, w \rangle_{\mathbb{H}_P} = \langle dI(v), dI(w) \rangle_{\mathbb{H}_L}$ , то метрика осталась конформной.

Роль прямых теперь играют диаметры  $\omega$  и дуги окружностей, ортогональных  $\omega$  (инверсия сохраняет углы, а все прямые ортогональны абсолюту).

**Теорема 1.6.4.** Конформный фактор метрики равен  $\frac{2}{1-x^2-y^2}$ . Иными словами, для  $v \in T_{(x,y)}\mathbb{H}_P$ :  $|v|_{\mathbb{H}_P} = \frac{2}{1-x^2-y^2} |v|_E$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $(x_0, y_0) \in \mathbb{H}_P$ . Пусть  $(x_1, y_1) = I(x_0, y_0)$ . Конформный фактор гиперболической плоскости в модели Лобачевского в точке  $(x_1, y_1)$  равен  $\frac{1}{y_1}$ .

Пусть при инверсии с центром в точке  $A = (0, -1)$  точка  $B$  переходит в  $B'$ . Тогда имеется равенство  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'} \frac{R^2}{|AB'|^2}$ . Выразим  $y_1$  через  $x_0, y_0$  (здесь  $r = \sqrt{x_0^2 + (y_0 + 1)^2}$ ):

$$y_1 = -1 + (y_0 + 1) \cdot \frac{2}{x_0^2 + (y_0 + 1)^2} = \frac{-x_0^2 - y_0^2 + 1}{r^2}$$

С другой стороны, конформный фактор инверсии равен  $\lambda_I = \frac{2}{r^2} |v|_E$ .

Получаем для  $v \in T_{(x_0, y_0)}\mathbb{H}_P$ : так как инверсия  $I$  сохраняет метрику (мы просто так определили метрику на  $\mathbb{H}_P$ ), то  $|v|_{\mathbb{H}_P} = |d_{(x_0, y_0)} I(v)|_{H_L} = \frac{|dI(v)|_E}{y_1} = \frac{2}{1-x_0^2-y_0^2}$ .

Можно записать теперь, что матрица Грама имеет вид  $\begin{pmatrix} \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2} \end{pmatrix} |v|_E$ .  $\square$

Теперь несложно проверить, что никаких изометрий плоскости Лобачевского, кроме объявленных в теореме 1.6.2) нет. Так как движения действуют транзитивно на флагах, то достаточно увидеть, что движения содержат стабилизатор любого флага (здесь применяется лемма о действии

групп, доказанная в курсе комплексного анализа при изучении автоморфизмов  $\widehat{\mathbb{C}}$ . При этом всякая изометрия, оставляющая в модели Лобачевского центр круга  $(0, 0)$ , оставляет на месте и все окружности  $x^2 + y^2 = r^2$  для  $r \in (0, 1)$ . Рассмотрим изометрии, стабилизирующие следующий флаг:



Рассмотрим окружность  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ . Она изометрична евклидовой окружности (конформный фактор во всех точках одинаков), очевидно, что любая изометрия, стабилизирующая данный флаг, действует на ней тождественно.

Так как изометрия сохраняет прямые, в частности, диаметры окружности  $x^2 + y^2 = 1$ , то изометрия, тождественно действующая на окружности  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$  тождественно действует на всём круге. Тем самым, стабилизатор каждой точки тривиален, то есть движения совпадают с изометриями.

## 1.7 Касательный вектор как дифференцирование

Пусть  $M$  — гладкое многообразие.  $\mathcal{F}(M)$  — множество гладких функций,  $\mathcal{X}(M)$  — множество гладких векторных полей.

Естественным образом,  $\mathcal{F}(M)$  и  $\mathcal{X}(M)$  образуют векторные пространства над  $\mathbb{R}$ . При этом, на  $\mathcal{F}(M)$  также есть поточечное умножение, и  $\mathcal{F}(M)$  таким образом формируют ассоциативную, коммутативную  $\mathbb{R}$ -алгебру. А ещё  $\mathcal{X}(M)$  также является модулем над  $\mathcal{F}(M)$  — относительно поточечного умножения.

Как известно из курса алгебры, дифференциальный оператор  $D$  на  $\mathbb{R}$ -алгебре  $A$  — это такой  $\mathbb{R}$ -линейный оператор  $D : A \rightarrow A$ , что выполнено правило Лейбница:  $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$ . Все дифференцирования образуют  $\mathbb{R}$ -линейное пространство  $\text{Der}(A)$ .

Для алгебры  $\mathcal{F}(M)$  всякий  $X \in \mathcal{X}(M)$  индуцирует дифференцирование  $D_X$ :

$$f \in \mathcal{F}(M) \mapsto D_X(f) \in \mathcal{F}(M), \text{ определённый так: } (D_X(f))(x) = d_x f(X_x)$$

Правило Лейбница выполнено, так как оно имеет место при дифференцировании произведения.

**Факт 1.7.1.** *Отображение  $\mathcal{X}(M) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{F}(M)), X \mapsto D_X$  — гомоморфизм  $\mathbb{R}$ -векторных пространств.*

*Доказательство.* Несложно проверить. □

Далее применение дифференцирования, индуцированного векторным полем  $X$ , к функции  $f$  обозначается просто  $X(f)$ .

**Теорема 1.7.1.** *Выше определённое отображение  $\mathcal{X}(M) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{F}(M))$  является изоморфизмом.*

*Доказательство.*

**Лемма 1.7.1.** *Зафиксируем  $p \in M$ .*

*Пусть  $\bar{D} : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  —  $\mathbb{R}$ -линейное отображение, такое, что  $\bar{D}(f \cdot g) = \bar{D}(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \bar{D}(g)$ . Например, подходит отображение «продифференцировать взять значение в точке  $p$ ».*

1. Тогда  $\exists! v \in T_p M : \bar{D} = D_v \stackrel{\text{def}}{=} [f \mapsto d_p f(v)]$ .
  2. Несложно получить координаты этого вектора  $v$ . Рассмотрим карту  $(U, \phi)$ , содержащую точку  $p$ . В  $\mathbb{R}^n$  есть координаты  $x_1, \dots, x_n$ , пусть  $(\tilde{x}_i)_{i=1}^n \subset \mathcal{F}(M)$  — функции, отвечающие координатам ( $\tilde{x}_i = \phi^{-1} \circ x_i$ ).
- Утверждается, что  $v_i = \bar{D}(\tilde{x}_i)$ .

Доказательство леммы.

Заметим, что  $\bar{D}(\text{const}) = 0$  (проверим для  $f \equiv 1 : \bar{D}(1) = \bar{D}(1) \cdot 1 + 1 \cdot \bar{D}(1) = 2\bar{D}(1)$ ).

Далее проверим, что  $\bar{D}$  локально: если  $f|_{U_p} = g|_{U_p}$ , то  $\bar{D}(f) = \bar{D}(g)$ . Сконструируем такую «шапочку»  $h \in \mathcal{F}(M)$ , что  $h(p) = 1$ , и  $h|_{M \setminus U_p} \equiv 0$ . Для проверки локальности заметим, что  $f|_{U_p} = g|_{U_p} \iff f \cdot h = g \cdot h$ . Выкладка

$$\bar{D}(f \cdot h = g \cdot h) = \begin{cases} \bar{D}(f) \cdot h(p) + f(p) + \bar{D}(h) \\ \bar{D}(g) \cdot h(p) + g(p) + \bar{D}(h) \end{cases}$$

показывает локальность.

Теперь убедимся, что такой вектор  $v \in T_p M$ , если существует, то единственен. Для этого проверим равенства во втором пункте, явно задающие координаты  $v$ . Пусть  $\phi$  — карта,  $v = (v_1, \dots, v_n)$ . Так как  $D_v(\tilde{x}_i) = v_i$ , то отсюда следует второй пункт.

Теперь докажем существование такого вектора  $v \in T_p M$ . Зафиксируем карту  $(U, \phi)$ , содержащую  $p$ . Положим  $v_i := D(E_i)$ , и убедимся, что вектор  $(v_1, \dots, v_n)$  задаёт  $\bar{D}$ .

**Лемма 1.7.2** (Адамар). Пусть  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Тогда  $\exists g_1, \dots, g_n$  — гладкие, такие, что  $f(x) - f(0) = \sum_i g_i(x) \cdot x_i$ .

Доказательство леммы.

Положим  $g_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$ . Они подходят:

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \cdot x_i dt = \sum_{i=1}^n g_i(x) \cdot x_i \quad \square$$

Можно считать, что  $\phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ . Выберем  $\tilde{f} \in \mathcal{F}(M)$ , применим к  $f := \phi \circ \tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  лемму Адамара, получим функции  $g_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Обозначим  $\tilde{g}_i := \phi^{-1} \circ g_i$ , получили разложение  $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(p) + \sum_{i=1}^n \tilde{g}_i(x) \tilde{x}_i$ . Теперь распишем

$$\begin{aligned} \bar{D}(\tilde{f}) &= \bar{D}\left(\tilde{f}(p) + \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \cdot \tilde{g}_i(x)\right) = \sum_{i=1}^n \bar{D}(\tilde{x}_i \cdot \tilde{g}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{D}(\tilde{x}_i) \cdot \tilde{g}_i + \underbrace{\tilde{x}_i}_{=0} \cdot \bar{D}(\tilde{g}_i) = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \tilde{g}_i \end{aligned}$$

Так как  $g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ , то действительно  $\bar{D}(\tilde{f}) = D_v(\tilde{f})$ . □

Рассмотрим дифференцирование  $D \in \text{Der}(\mathcal{F}(M))$ . Согласно лемме,  $\forall p \in M : \exists! v_p \in T_p M$ , такой, что отображение  $f \mapsto D(f)(p)$  совпадает с  $f \mapsto D_{v_p}(f)$ . Это показывает инъективность  $\mathcal{X}(M) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{F}(M))$ , а для сюръективности надо убедиться, что полученное поле  $p \mapsto v_p$  гладкое.

Проверим гладкость  $p \mapsto v_p$  в карте. Лемма даёт координатное представление  $(v_p)_i = D(\tilde{x}_i)(p)$ , это действительно гладкая функция. Осталось сказать, что для проверки гладкости достаточно проверить гладкость координат.  $\square$

## Лекция VII

27 марта 2024 г.

### 1.8 Скобка Ли векторных полей

Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ .

**Определение 1.8.1** (Скобка Ли векторных полей). Отображение  $[-, -] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ , сопоставляющее двум полям  $X, Y$  векторное поле, отвечающее дифференцированию

$$X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad ([-])$$

Иными словами,  $[X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f))$ .

Проверим, что  $([-])$  является дифференцированием. Линейность очевидна; правило Лейбница говорит, что должно быть равенство такого

$$[X, Y](f \cdot g) = ([X, Y]f) \cdot g + f \cdot ([X, Y]g) = (X(Y(f)) - Y(X(f))) \cdot g + f \cdot (X(Y(g)) - Y(X(g)))$$

и такого выражений:

$$\begin{aligned} [X, Y](f \cdot g) &= X(Y(f \cdot g)) - Y(X(f \cdot g)) = X(Y(f) \cdot g + f \cdot Y(g)) - Y(X(f) \cdot g + f \cdot X(g)) = \\ &= X(Y(f)) \cdot g + \cancel{Y(f) \cdot X(g)} + \cancel{X(f) \cdot Y(g)} + f \cdot X(Y(g)) - Y(X(f)) \cdot g - \cancel{X(f) \cdot Y(g)} - \cancel{Y(f) \cdot X(g)} - f \cdot Y(X(g)) \end{aligned}$$

#### 1.8.1 Выражение для скобки Ли в координатах

Пусть  $X, Y$  — два гладких векторных поля,  $\phi : U \rightarrow \Omega$  — карта.

Введём  $\tilde{x}_i := x_i \circ \phi$ , запишем (где  $X_\phi \stackrel{\text{def}}{=} d\phi \circ X \circ \phi^{-1}$  — векторное поле на  $\mathbb{R}^n$ )

$$[X, Y]_i = D_{[X, Y]}(\tilde{x}_i) = D_{[X_\phi, Y_\phi]}(x_i) = [X_\phi, Y_\phi]_i = X_\phi(Y_\phi(x_i)) - Y_\phi(X_\phi(x_i)) = X_\phi(Y_i) - Y_\phi(X_i)$$

#### 1.8.2 Пространство $\mathcal{X}(M)$ вместе со скобкой Ли, как алгебра Ли

Чтобы проверить, что  $\mathcal{X}(M)$  образует алгебру Ли, убедимся, что выполнены три аксиомы алгебр Ли:

1. Линейность по обоим аргументам:  $\forall \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}, X, Y \in \mathcal{X}(M)$ :

$$\begin{aligned} [\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y] &= \alpha_1 [X_1, Y] + \alpha_2 [X_2, Y] \\ [X, \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2] &= \beta_1 [X, Y_1] + \beta_2 [X, Y_2] \end{aligned}$$

2. Кососимметричность:  $[X, Y] = -[Y, X]$ , или же (эквивалентно) антисимметричность  $[X, X] = 0$ .

3. Тождество Якоби  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ .

Все три свойства следуют из того, что изоморфизм  $\mathbb{R}$ -векторных пространств  $\mathcal{X}(M) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{F}(M))$  сохраняет скобку Ли (просто по определению скобки Ли на  $\mathcal{X}(M)$ ). То, что для любой алгебры  $A$ :  $\text{Der}(A)$  — алгебра Ли — известный факт. Проверим тождество Якоби:  $\forall X, Y, Z \in \text{Der}(A), \forall a \in A$ :

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]](a) &= X([Y, Z](a)) - [Y, Z](X(a)) = \\ &= X(Y(Z(a))) - X(Z(Y(a))) - Y(Z(X(a))) + Z(Y(X(a))) \end{aligned}$$

Записывая аналогичные равенства для  $[Y, [Z, X]]$  и  $[Z, [X, Y]]$ , и складывая, получим 0 — всё сократится.

### 1.8.3 Специфические свойства скобки Ли векторных полей

Пусть  $f, g \in \mathcal{F}(M)$ .

*Свойства* (Скобка Ли векторных полей).

- $[f \cdot X, Y] = f \cdot [X, Y] - Y(f) \cdot X$ .

*Доказательство.* Применим к  $h \in \mathcal{F}(M)$ :

$$[f \cdot X, Y](h) = (f \cdot X)(Y(h)) - Y((f \cdot X)(h)) = (f \cdot X)(Y(h)) - Y(f \cdot X(h)) \stackrel{(\equiv)}{=}$$

Так как  $(f \cdot X)(\dots)$  — это производные по направлению, то это равно  $f \cdot X(\dots)$ .

$$\stackrel{(\equiv)}{=} f \cdot (X(Y(h))) - Y(f) \cdot X(h) - f \cdot Y(X(h)) \quad \square$$

- $[X, g \cdot Y] = g \cdot [X, Y] + X(g) \cdot Y$ .

*Доказательство.* Ради разнообразия, выведем из первого и кососимметричности

$$[X, g \cdot Y] = -[g \cdot Y, X] = -(g \cdot [Y, X] - X(g) \cdot Y) = g \cdot [X, Y] + X(g) \cdot Y \quad \square$$

- $[f \cdot X, g \cdot Y] = f \cdot g \cdot [X, Y] + f \cdot X(g) \cdot Y - g(Y(f)) \cdot X$ .

*Доказательство.*

$$[f \cdot X, g \cdot Y] = g \cdot [f \cdot X, Y] + (f \cdot X)(g) \cdot Y = g \cdot (f \cdot [X, Y] - Y(f) \cdot X) + (f \cdot X)(g) \cdot Y \quad \square$$

**Определение 1.8.2** (Группа Ли). Гладкое многообразие, являющееся топологической группой: умножение  $G \times G \rightarrow G$  и взятие обратного  $G \rightarrow G$  — гладкие отображения.

*Пример* (Группы Ли). Различные линейные группы:  $GL(n, \mathbb{R})$ ,  $SL(n, \mathbb{R})$ ,  $O(n, \mathbb{R})$ , ...

Всякий элемент  $g \in G$  действует на группе левыми и правыми трансляциями:  $L_g : x \mapsto gx$ ,  $R_g : x \mapsto xg$ .

**Определение 1.8.3** (Левинвариантное векторное поле  $X$ ). Такое поле, что  $\forall g \in G : dL_g(X) = X$ .

Выберем ортонормированный базис  $(x_1, \dots, x_n) \in T_1(G)$  ( $1 \in G$  — единица в группе), и распространим  $x_1, \dots, x_n$  до левинвариантных векторных полей  $X_1, \dots, X_n$  соответствующим дифференциалом  $L_g$  (действие транзитивно, поэтому,  $X_1, \dots, X_n$  определены всюду). Это будут векторные поля, отвечающие за ортонормированные базисы во всех точках группы.

Можно определить левинвариантную метрику: для  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in T_g(G) : \langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle = \langle d_1 L_g(X), d_1 L_g(Y) \rangle$ .

## 1.9 Тензоры на многообразии

Пусть  $V$  — векторное пространство.

**Определение 1.9.1** (Тензор типа  $(k, m)$ ). Тензор  $\underbrace{(V^* \otimes \dots \otimes V^*)}_k \otimes \underbrace{(V \otimes \dots \otimes V)}_m$

Мы будем рассматривать только тензоры типа  $(k, 0)$  и  $(k, 1)$ , что, как известно, можно рассматривать, как полилинейные отображения

$$\underbrace{V \times \dots \times V}_k \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \underbrace{V \times \dots \times V}_k \rightarrow V \quad \text{соответственно}$$

Далее в качестве  $V$  выступает касательное пространство к данной точке.

**Определение 1.9.2** (Тензор (тензорное поле) на  $M$  типа  $(k, 0)$ ). Семейство  $\{F_x\}_{x \in M}$  тензоров валентности  $(k, 0)$  вместе со следующим условием гладкости:

$$\forall X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M) : F(X_1, \dots, X_k) \in \mathcal{F}(M)$$

*Пример* (Тензор типа  $(n, 0)$ ).

Риманова метрика на  $n$ -мерном многообразии. Так, стоп, это же тензор типа  $(2, 0)$ , разве нет?

*Контрпример* (Не тензор).

Символ Кристоффеля  $\Gamma_{i,j}^k$  не является записью какого-то тензора в координатах: отображение  $F(X, Y) = \nabla_X Y$  не  $\mathcal{F}(M)$ -линейно:  $\nabla_X(f \cdot Y) = X \cdot f + f \cdot \nabla_X(Y)$ .

**Определение 1.9.3** (Тензор (тензорное поле) на  $M$  типа  $(k, 1)$ ). Семейство  $\{F_x\}_{x \in M}$  тензоров валентности  $(k, 1)$  вместе со следующим условием гладкости:

$$\forall X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M) : F(X_1, \dots, X_k) \in \mathcal{X}(M)$$

Таким образом, тензорному полю на  $M$  сопоставляется  $\mathbb{R}$ -полилинейное (и даже  $\mathcal{F}(M)$ -полилинейное)

$$F : \mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{F}(M) \\ \mathcal{X}(M) \end{bmatrix}$$

**Теорема 1.9.1.** Если  $F : \mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{F}(M) \\ \mathcal{X}(M) \end{bmatrix}$  является  $\mathcal{F}(M)$ -полилинейным, то  $F$  является гладким тензорным полем.

*Доказательство.*

1. Докажем локально случай  $k = 1$ .

Проверим локальность. Рассмотрим  $p \in U$ . Пусть  $X|_U = Y|_U$ .  $(F(X))(p) = (F(Y))(p)$ . Пусть  $h$  — гладкий спуск с единицы,  $h|_{U'} \equiv 1, h|_{M \setminus U} \equiv 0$ , где  $p \in U' \subset U$ .

Теперь  $h \cdot F(Y) = h \cdot F(X) = F(hX) = F(hY)$ .

2. Достаточно доказать для  $X \in \mathcal{X}(M)$ , что значение  $(F(X))(p)$  зависит только от  $X_p$ . Доказав, мы построим семейство, отвечающее  $F$ .

Зафиксируем карту  $(U, \phi)$ . Выберем базис  $e_1, \dots, e_n$ , ему отвечают координатные векторные поля  $E_i$ . Согласно  $\mathcal{F}(M)$ -линейности все раскладывается в сумму  $X_i \cdot F_i$ .

(Распространим координатное векторное поле, используя гладкий спуск с единицы:  $\tilde{E}_i|_U \equiv 0$  в дополнении карты). Из локальности

$$F(X) = F(X_1 \tilde{E}_1 + \dots + X_n \cdot \tilde{E}_n)$$

3. Случай  $k \neq 1$  сводится к предыдущему последовательным применением. □

## Лекция VIII

3 апреля 2024 г.

Пусть  $E_i, E_j$  — координатные поля. Имеется такой факт, что  $[E_i, E_j] = 0$ .

*Доказательство.*  $[X, Y]^\phi = (Y^\phi)'_{X^\phi} - (X^\phi)'_{Y^\phi} = 0$ . □

Вообще, скобка Ли — мера некоммутативности векторных полей, что мы докажем позже.



### 1.9.1 Поведение скобки Ли при отображениях

Пусть  $M, N$  — гладкие многообразия,  $X \in \mathcal{X}(M), Y \in \mathcal{X}(N), F : M \rightarrow N$  — гладкое.

**Определение 1.9.4** ( $F$  переводит  $X$  в  $Y$ ).  $\forall p \in M : d_p F(X_p) = Y_p$ .

Вообще говоря, если дано отображение  $F : M \rightarrow N$ , и векторное поле  $X \in \mathcal{X}(M)$ , то не всегда найдётся  $Y \in \mathcal{X}(N)$  такой, что  $X$  переходит в  $Y$  (например,  $F(p) = F(q)$ , и  $d_p F(X_p) \neq d_p F(X_q)$ ), а если и найдётся, то может быть не единственно, если  $F$  не сюръективно.

Пусть  $F : M \rightarrow N$  переводит  $X \in \mathcal{X}(M)$  в  $Y \in \mathcal{X}(N)$ .

**Лемма 1.9.1.**  $F$  переводит  $X$  в  $Y \iff \forall$  гладкого  $f : N \rightarrow \mathbb{R} : (Y(f) \circ F)(p) = X(f \circ F)(p)$ .

*Доказательство.*

$$\Rightarrow. X(f \circ F)(p) = d_p(f \circ F)(X) = (d_p f \circ dF)(X) = d_p f(Y) = (Yf)(F(p)).$$

$\Leftarrow$ . Выберем локально  $f := x_i$  — координатная функция.  $Y_i(F(p)) = ((Yx_i) \circ F)(p) = X(x_i \circ F)(p) = d(x_i \circ F)(X) = dx_i \circ dF(X) = (dF(X))_i$ . Тем самым, совпали  $i$ -е координаты полей, значит, сами поля совпали.  $\square$

**Теорема 1.9.2.** Пусть  $F : N \rightarrow M$  гладкое,  $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M), Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(N)$ . Если  $F(X_1) = Y_1$  и  $F(X_2) = Y_2$ , то  $F([X_1, X_2]) = [Y_1, Y_2]$ .

*Доказательство.* Пусть  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  — произвольная гладкая. Проверим, что  $F([X_1, X_2])$  и  $[Y_1, Y_2]$  одинаково действуют на  $f$ :

$$[Y_1, Y_2](f) = Y_1(Y_2(f)) - Y_2(Y_1(f)) = Y_1(X_2(f \circ F)) - Y_2(X_1(f \circ F)) = [X_1, X_2](f \circ F)$$

Согласно (лемма 1.9.1), имеет место равенство.  $\square$

**Следствие 1.9.1.** Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $N \subset M$  — гладкое подмногообразие.

Если  $X, Y \in \mathcal{X}(N)$  касательны к  $N$ , то и  $[X, Y]$  — касательно к  $N$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $F = \text{in}$ .  $\square$

## 1.10 Аффинные связности

Пусть  $M$  — гладкое многообразие

**Определение 1.10.1** (Аффинная связность). Отображение

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ V, W &\mapsto \nabla_V W \end{aligned}$$

со следующими свойствами:

1.  $\mathbb{R}$ -билинейность.
2.  $\mathcal{F}(M)$ -линейность по первому аргументу:  $\nabla_{f \cdot V} W = f \cdot \nabla_V W$ .
3. Правило Лейбница по второму аргументу:  $\nabla_V (f \cdot W) = V(f) \cdot W + f \cdot \nabla_V W$ .

*Примеры.*

- Обычное дифференцирование: на  $\mathbb{R}^n$  заданы векторные поля.
- Ковариантная производная на поверхности  $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$
- Покоординатное дифференцирование в карте.

**Теорема 1.10.1** (О пространстве связностей). Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $\nabla, \tilde{\nabla}$  — две аффинные связности.

1.  $\nabla - \tilde{\nabla}$  — тензор типа  $(2, 1)$ .
2. Если  $T$  — тензор типа  $(2, 1)$ ,  $\nabla$  — связность, то  $T + \nabla$  — связность.

*Доказательство.*

- Достаточно проверить  $\mathcal{F}(M)$ -линейность по второму аргументу:

$$\nabla_V(f \cdot W) - \tilde{\nabla}_V(f \cdot W) = \cancel{V(f) \cdot W} + f \cdot \nabla_V W - \cancel{V(f) \cdot W} - f \cdot \tilde{\nabla}_V W$$

- Достаточно проверить правило Лейбница:

$$(\nabla + T)_V(f \cdot W) = f(V) \cdot W + f \cdot \nabla_V W + T(V, f \cdot W) = f(V) \cdot W + f \cdot (\nabla + T)_V(W)$$

□

**Предложение 1.10.1** (Локальность аффинной связности). Пусть  $\nabla$  — аффинная связность.  $\forall V, W \in \mathcal{X}(M) : \nabla_V(W)$  зависит только от  $V_p$  и  $W$  в окрестности  $p$ .

*Доказательство.* При фиксированном втором аргументе  $\nabla_-(W)$  — тензор типа  $(1, 1)$ , значит, зависит только от  $V_p$ .

Пусть имеются два поля  $W_1, W_2$ , совпадающие в окрестности  $U_p \ni p$ . Пусть  $h$  — гладкий спуск с единицы в окрестности  $p$ ,  $h|_{U_p^c} \equiv 0$ .

$$h \cdot (\nabla_V W_2) + \underbrace{(W_2(h) \cdot V)_p}_0 = \nabla_V(h \cdot W_2) = \nabla_V(h \cdot W_1) = h \cdot (\nabla_V W_1) + \underbrace{(W_1(h) \cdot V)_p}_0$$

□

**Следствие 1.10.1.** Для аффинной связности  $\nabla$  и открытого  $U \subset M$  имеет смысл говорить о сужении  $\nabla|_U$ .

Рассмотрим карту  $\phi : (U \subset M) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Пусть  $\nabla$  — аффинная связность на  $M$ , а  $\nabla^\phi$  — координатное дифференцирование в карте. Тогда  $\nabla - \nabla^\phi$  — некоторый тензор  $\Gamma$  типа  $(2, 1)$ .

Пусть  $E_1, \dots, E_n$  — координатные векторные поля. Тогда  $\Gamma(E_i, E_j) = \Gamma_{i,j}$

**Определение 1.10.2** (Символы Кристоффеля).  $\Gamma_{i,j} = \Gamma(E_i, E_j)$ .

В отличие от символов Кристоффеля прошлого семестра, эти отвечают координатам тензора, и имеют смысл не на всём многообразии, а только в данной карте.

### 1.10.1 Симметричная связность

**Определение 1.10.3** ( $\nabla$  — симметричная связность). Такая аффинная связность  $\nabla$ , что  $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M) : \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ .

**Утверждение 1.10.1.**  $T := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$  — тензор типа  $(2, 1)$ .

*Доказательство.* Выражение антисимметрично ( $\nabla_X X - \nabla_X X - [X, X] = 0$ ) и  $\mathbb{R}$ -билинейно. Проверим  $\mathcal{F}(M)$ -билинейность по второму аргументу:

$$\begin{aligned} \nabla_X(f \cdot Y) - \nabla_{f \cdot Y} X - [X, f \cdot Y] &= \cancel{X(f) \cdot Y} + f \cdot \nabla_X Y - f \cdot \nabla_Y X - (f \cdot [X, Y] + \cancel{X(f) \cdot Y}) = \\ &= f \cdot (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \end{aligned}$$

□

Этот тензор  $T$  называется тензор кручения.

**Следствие 1.10.2.** Проверку того, что связность симметрична, достаточно осуществлять на координатных полях. Для координатных полей  $\nabla_{E_i} E_j - [E_i, E_j] = \nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{i,j}$ . Тем самым, связность симметрична  $\iff \Gamma_{i,j} = \Gamma_{j,i}$ .

Пусть  $(M, \langle \_, \_ \rangle)$  — многообразие с римановой метрикой.

**Определение 1.10.4** (Риманова связность  $\nabla$ ). Аффинная связность  $\nabla$ , согласованная с римановой метрикой:  $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ .

**Утверждение 1.10.2.**  $S := X \langle Y, Z \rangle - \langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle Y, \nabla_X Z \rangle$  — тензор типа  $(3, 0)$ .

*Доказательство.*  $\mathbb{R}$ -полилинейность по всем аргументам и  $\mathcal{F}(M)$ -линейность по первому очевидны.

По второму и третьему аргументам симметрично, проверим билинейность по второму:

$$\begin{aligned} X \langle f \cdot Y, Z \rangle - \langle \nabla_X (f \cdot Y), Z \rangle - \langle f \cdot Y, \nabla_X Z \rangle &= \\ &= \cancel{X(f) \langle Y, Z \rangle} + f \cdot X \langle Y, Z \rangle - \cancel{X(f) \langle Y, Z \rangle} - f \langle \nabla_X (Y), Z \rangle - f \langle Y, \nabla_X Z \rangle \end{aligned}$$

□

**Следствие 1.10.3.** Можно проверять римановость связности только на координатных полях.

**Определение 1.10.5** (Связность Леви-Чивиты). Симметричная риманова связность.

## Лекция IX

10 апреля 2024 г.

### 1.10.2 Символы Кристоффеля

Дадим второе определение, и поймём, что оно совпадает с первым.

**Определение 1.10.6** (Символы Кристоффеля в карте).  $\Gamma_{i,j}^\phi = \nabla_{E_i} E_j$ .

Опять же, символы первого рода  $\Gamma_{i,j;k} = \langle \Gamma_{i,j}, E_k \rangle$ , и символы второго рода  $\Gamma_{i,j} = \sum_k \Gamma_{i,j}^k E_k$ .

Это совпадает с (определение 1.10.2), так как  $\Gamma^\phi(E_i, E_j) = \nabla_{E_i} E_j - \underbrace{\nabla_{E_i}^\phi E_j}_0$ .

**Факт 1.10.1.** *Доказательство.*  $\langle \Gamma_{i,j}^k, E_l \rangle = \Gamma_{i,j}^k \cdot g_{k,l}$ . Пусть  $(g_{n,m})_{n,m}$  — матрица Грама,  $(g'_{n,m}) = (g_{n,m})^{-1}$  — обратная матрица, тогда так как  $(g_{n,m}) \begin{pmatrix} \Gamma_{i,j}^1 \\ \vdots \\ \Gamma_{i,j}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{i,j;1} \\ \vdots \\ \Gamma_{i,j;n} \end{pmatrix}$ , то  $\begin{pmatrix} \Gamma_{i,j}^1 \\ \vdots \\ \Gamma_{i,j}^n \end{pmatrix} = (g'_{n,m}) \begin{pmatrix} \Gamma_{i,j;1} \\ \vdots \\ \Gamma_{i,j;n} \end{pmatrix}$ .

Тем самым, одни символы гладкие тогда и только тогда, когда гладкие — другие. □

### 1.10.3 Единственность связности Леви-Чивиты

**Теорема 1.10.2** (Основная теорема римановой геометрии). Пусть  $(M, \langle \_, \_ \rangle)$  — риманово многообразие. Тогда существует и единственная связность Леви-Чивиты  $\nabla$ .

*Доказательство.* Перепишем:  $(g_{i,j})'_{x_k} = \langle \Gamma_{k,i}, E_j \rangle + \langle E_i, \Gamma_{k,j} \rangle = \Gamma_{k,i;j} + \Gamma_{k,j;i}$ . Переставляя индексы циклически, получаем уравнения  $\begin{cases} (g_{i,j})'_{x_k} = \langle \Gamma_{k,i}, E_j \rangle + \langle E_i, \Gamma_{k,j} \rangle = \Gamma_{k,i;j} + \Gamma_{k,j;i} \\ (g_{j,k})'_{x_i} = \langle \Gamma_{i,j}, E_k \rangle + \langle E_j, \Gamma_{i,k} \rangle = \Gamma_{i,j;k} + \Gamma_{i,k;j} \\ (g_{k,i})'_{x_j} = \langle \Gamma_{j,k}, E_i \rangle + \langle E_k, \Gamma_{j,i} \rangle = \Gamma_{j,k;i} + \Gamma_{j,i;k} \end{cases}$  Так как символы симметричны, то есть  $\Gamma_{i,j}^k = \Gamma_{j,i}^k$ , то

$$\Gamma_{i,j;k} = \frac{(g_{i,k})'_{x_j} + (g_{i,k})'_{x_i} - (g_{i,j})'_{x_k}}{2} \quad (*)$$

Используя разложение  $\nabla = \nabla^\phi + \Gamma^\phi$ , получаем единственность в каждой карте, значит, и глобальная единственность.

Доказали существование связности Леви-Чивиты в карте, согласованность следует из единственности (пересечение карт — карта).  $\square$

Ковариантное дифференцирование из прошлого семестра — эта самая связность.

## 1.11 Ковариантная производная вдоль пути

Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  — гладкая (необязательно регулярная) кривая на гладком многообразии  $M$ .

**Определение 1.11.1** (Гладкое векторное поле вдоль пути  $\gamma$ ). Гладкое отображение  $V : [a, b] \rightarrow TM$ , такое, что  $\forall t \in [a, b] : V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ .

Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $\nabla$  — связность,  $\gamma$  — гладкая кривая,  $V$  — векторное поле вдоль  $\gamma$ .

**Определение 1.11.2** (Ковариантная производная  $V$  вдоль  $\gamma$ ). Отображение  $V \mapsto \frac{\nabla}{dt}V$  со следующими свойствами:

1.  $\frac{\nabla}{dt}(V + W) = \frac{\nabla}{dt}V + \frac{\nabla}{dt}W$
2.  $\frac{\nabla}{dt}(f \cdot V) = f' \cdot V + f \cdot \frac{\nabla}{dt}V$ .
3. Если  $\exists \tilde{V}$  — векторное поле на  $M$ , такое, что  $\tilde{V}(\gamma(t)) = V(t)$ , то  $\frac{\nabla}{dt}V = \nabla_{\gamma'}\tilde{V}$ .

Выглядит, как ковариантная производная (по теореме о выпрямлении всё можно сделать), но если  $\gamma' = 0$ , то там по-другому.

**Теорема 1.11.1.** Ковариантная производная вдоль пути существует и единственна.

*Доказательство.* Сначала докажем единственность. Разложим по координатам:  $V(t) = \sum_i V_i(t) \cdot E_i(\gamma(t))$ .

$$\frac{\nabla}{dt}V = \frac{\nabla}{dt} \left( \sum_i V_i(t) \cdot E_i(\gamma(t)) \right) = \sum_i \frac{dv_i}{dt} \cdot E_i + \sum_i V_i \cdot \frac{\nabla}{dt}E_i$$

Обозначим  $\gamma'(t) = \sum_i \alpha_i(t) \cdot E_i(\gamma(t))$ . Так как координатное векторное поле вдоль пути отвечает обычному координатному векторному полю, то

$$V_i \cdot \frac{\nabla}{dt}E_i = V_i \cdot \alpha_j \Gamma_{i,j}$$

Этого достаточно для единственности, распишем подробнее, чтобы показать существование

$$\frac{\nabla}{dt}V = \sum_i V'_i \cdot E_i + \sum_{i,j,k} V_j \alpha_k \Gamma_{j,k}^i E_i \quad (**)$$

Существование, опять же, получается из единственности и соответствующей формулы: покроем носитель открытыми множествами  $W_i$ , таких, что  $\forall W_i : \exists(U, \phi) : U \supset W_i$ . Далее несложно проверить, что определение при помощи формулы (\*\*) даёт корректно определённую ковариантную производную вдоль пути. На пересечениях всё согласовано из единственности.  $\square$

## 1.12 Геодезические в римановых многообразиях

Далее везде на гладком многообразии  $M$  определён гладкий метрический тензор, и  $\nabla$  — связность Леви-Чивиты.

Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  — гладкая кривая.

**Определение 1.12.1** ( $\gamma$  — геодезическая). Такая кривая  $\gamma$ , что ковариантная производная её вектора скорости вдоль неё самой нулевая:  $\frac{\nabla}{dt}\gamma' = 0$ .

Пусть кривая натурально параметризована:  $|\gamma'| \equiv 1$ . Тогда кривизна  $K_\gamma = \left| \frac{\nabla}{dt}\gamma' \right|$ .

**Утверждение 1.12.1.** Кривая геодезическая  $\iff K_\gamma \equiv 0$ .

*Свойства.*

- Если  $\gamma$  — геодезическая, то  $|\gamma'| = \text{const}$ :  $\frac{d}{dt} \langle \gamma', \gamma' \rangle = \left\langle \frac{d}{dt}\gamma', \gamma' \right\rangle + \left\langle \gamma', \frac{d}{dt}\gamma' \right\rangle = 0$  (докажем позже, что так можно).
- Если  $\gamma$  — геодезическая, то  $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(at + b)$  — тоже.

*Доказательство.*  $\tilde{\gamma}' = a \cdot \gamma'$ , откуда  $\frac{\nabla}{dt}\tilde{\gamma}' = a^2 \frac{\nabla_{\gamma'} dt'}{\gamma} = 0$ . □

### 1.12.1 Уравнение геодезической

Пусть в карте  $\tilde{\gamma} = \phi \circ \gamma = (a_1(t), \dots, a_n(t))$ , тогда  $\tilde{\gamma}'(t) = (a'_1(t), \dots, a'_n(t))$ . Запишем (\*\*):

$$\tilde{\gamma}'' = \sum_i a''_i \cdot E_i + \sum_{i,j} a_i a_j \cdot \Gamma_{i,j}^k \cdot E_k$$

Фиксируя  $E_k$ , получаем  $n$  уравнений, проиндексированных при помощи  $k$ :  $a''_k + \sum_{i,j} a_i a_j \Gamma_{i,j}^k$ .

**Теорема 1.12.1.** Пусть  $(M, \langle \_, \_ \rangle)$  — гладкое риманово многообразие,  $\nabla$  — связность Леви-Чивиты,  $p \in M, v \in T_p M$ .

Тогда  $\exists \varepsilon > 0, \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  — такая геодезическая, что  $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$ .

*Доказательство.* Решаем систему дифференциальных уравнений второго порядка. □

### 1.12.2 Параллельный перенос вдоль пути

Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  — гладкая кривая,  $V$  — гладкое векторное поле вдоль  $\gamma$ .

**Определение 1.12.2** ( $V$  параллельно вдоль  $\gamma$ ).  $\frac{\nabla}{dt}V \equiv 0$ .

В частности, вектор скорости геодезической параллелен вдоль неё.

**Теорема 1.12.2.** Пусть  $p \in M, v_0 \in T_p M$ .  $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = p$ . Утверждается, что  $\exists! V(t)$  — векторное поле вдоль  $\gamma$ , параллельное вдоль  $\gamma$ , такое, что  $V(0) = v_0$ .

*Доказательство.* Опять запишем (\*\*):  $\frac{\nabla}{dt}V = 0 = \sum_i V'_i \cdot E_i + \sum_{i,j,k} V_j a_k \Gamma_{j,k}^i \cdot E_i$ . Получили  $n$  уравнений первого порядка с необходимым количеством начальных данных. Значит,  $\exists!$  решение на всей области определения. □

**Определение 1.12.3** (Параллельный перенос вектора  $v_0$  вдоль  $\gamma$  в точку  $\gamma(t_*)$ ). Значение векторного поля вдоль  $\gamma$ , параллельного  $\gamma$ , в точке  $t_*$ .

Обозначим за  $P_{t_1}^{t_2} : T_{\gamma(t_1)} M \rightarrow T_{\gamma(t_2)} M$  отображение переноса вектора.

*Замечание.* Параллельный перенос — линейное отображение, так как свойство быть параллельным вдоль пути сохраняется при взятии линейных комбинаций.

*Свойства.*

- Пусть  $X, Y$  — векторные поля, параллельные вдоль  $\gamma$ . Тогда  $\langle X(t), Y(t) \rangle = \text{const}$ .

$$0 = \frac{d}{dt} \langle X(t), Y(t) \rangle = \left\langle \frac{\nabla}{dt} X, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{\nabla}{dt} Y \right\rangle$$

**Следствие 1.12.1.** Вдоль пути наблюдается изоморфизм векторных пространств  $T_p M$  и  $T_q M$ .

**Предложение 1.12.1.** Пусть  $t_0 \in [a, b]$  Тогда  $\frac{\nabla}{dt} X = \frac{d}{dt} (P_t^{t_0} X(t))$

*Доказательство.* Выберем базис  $(B_i)_i$  и разнесём его параллельными переносами. Получили на всей кривой базис из параллельных векторных полей.

Запишем  $X = \sum_i X_i B_i$ . Тогда

$$\frac{\nabla X}{dt} = \sum_i x'_i \cdot B_i + \sum_i x_i \cdot \underbrace{\frac{\nabla}{dt} B_i}_0$$

□

Зафиксируем  $p \in M, v \in T_p M$ .

**Определение 1.12.4** (Экспоненциальное отображение). Частично определённое отображение  $\exp_p : (\subset T_p M) \rightarrow M$ , такое, что  $\exp_p(v)$  — это  $\gamma(1)$ , где  $\gamma$  — геодезическая с начальными данными  $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$ .  $\exp_p(v)$  определено если и только если геодезическая с такими параметрами определена в 1.

Также определяют  $\exp : (\subset TM) \rightarrow M$ , определённое поточечно. В курсе дифференциальных уравнений доказывались соответствующие теоремы, из которых видно, что  $\exp$  — гладкое отображение, однозначно определённое на некотором открытом подмножестве  $TM$ .

## Лекция X

17 апреля 2024 г.

Докажем утверждение

**Утверждение 1.12.2.** Пусть  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  — кривая на римановом многообразии,  $\nabla$  — связность Леви-Чивиты,  $X, Y$  — гладкие векторные поля вдоль  $\gamma$ . Тогда

$$\frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle = \left\langle \frac{\nabla}{dt} X, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{\nabla}{dt} Y \right\rangle$$

*Доказательство.* Пусть  $(U, \phi)$  — карта, и  $E_i$  — координатные векторные поля. Разложим  $X = \sum_i x_i E_i$  и  $Y = \sum_j y_j E_j$ . Преобразуем левую часть:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i,j} \langle x_i E_i, y_j E_j \rangle = (x_i, y_j)' \cdot g_{i,j} + x_i y_j \cdot \frac{dg_{i,j}}{dt}, \text{ где } \frac{dg_{i,j}}{dt} = \underbrace{\tilde{\gamma}'_k}_{a_k} \cdot (g_{i,j})'_{x_k} = a_k \cdot (\Gamma_{i,k;j} + \Gamma_{j,k;i})$$

Теперь преобразуем правую часть, воспользовавшись (\*\*):

$$\sum_k \left\langle x'_i E_i + \sum_{i,j} a_i x_j \Gamma_{i,j,k} E_k \right\rangle + \sum_i \left\langle x_i E_i, y'_k E_k + \sum_{j,k} a_j y_k \Gamma_{j,k,i} \right\rangle$$

Несложно видеть, что выражения равны. □

Пусть  $M^2$  — риманово многообразие,  $\gamma$  — геодезическая. Вектор  $\gamma'$  параллелен вдоль  $\gamma$ . Выберем какой-нибудь вектор  $v \in T_{\gamma(0)} M, v \perp \gamma'(0)$ , и разнесём его вдоль  $\gamma$ . Из сохранения скалярного произведения мы получим ортонормированный базис вдоль  $\gamma$ .

*Свойства* (Экспонента).

- Прямо по определению получаем  $\exp(tv) = \gamma_v(t)$ . Тем самым, для фиксированного  $v \in TM$ : отображение  $t \mapsto \exp(tv)$  — геодезическая с вектором скорости  $v$  в нуле.
- $\forall p \in M : d_p \exp_p = \text{id}$  — напрямую следует из предыдущего.

**Следствие 1.12.2.** По теореме об обратной функции  $\exp_p$  — локальный диффеоморфизм окрестностей  $0 \in T_p M$  и  $p \in M$ .

Рассматриваем риманово многообразие со связностью Леви-Чивиты  $(M, \langle \_, \_ \rangle, \nabla)$ .

**Определение 1.12.5** (Радиус инъективности  $M$  в точке  $p$ ). Число

$$r_{\text{inj}}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{r \in \mathbb{R}_{>0} \mid \exp_p : (B_r(0) \subset T_p M) \rightarrow M \text{ — диффеоморфизм на образ}\}$$

Бывают различные причины того, что радиус инъективности конечен:

- В цилиндре геодезические встречаются
- В некомпактном они могут уткнуться в «край»
- Геодезические могут сойтись

**Определение 1.12.6** (Радиус инъективности многообразия  $M$ ). Число  $r_{\text{inj}}(M) = \inf_{p \in M} r_{\text{inj}}(p)$ .

**Теорема 1.12.3.** Радиус инъективности локально отделён от нуля:  $\forall p \in M : \exists \varepsilon > 0, U \ni p : \inf_{x \in U} r_{\text{inj}}(x) > \varepsilon$ .

*Доказательство.* Определим  $F : TM \rightarrow M \times M$ ,  $\underbrace{v_p}_{\in T_p M} \mapsto (\exp_p v_p, p)$ . Изучим его дифференциал в  $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ .  $F(0, x) = (x, x)$  и  $F(\xi_p, p) = (\xi_p, p)$ , откуда

$$\frac{\partial F}{\partial(x, \xi)} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ E & E \end{pmatrix} \text{ — невырожден}$$

Получаем, что  $F$  — локальный диффеоморфизм.

Тем самым, имеется открытое подмножество в  $TM$ , и в нём есть параллелепипед  $V \times W$ , где  $p \in V \subset M$  и  $0 \in W \subset T_p M$ . Отсюда получаем, что и требовалось доказать (но почему-то надо ещё воспользоваться непрерывностью метрического тензора?..) Видимо, предполагалось немного другое определение  $F$ , в карте, чтобы можно было пользоваться теоремой об обратной функции.  $\square$

Пусть  $D$  — декартовы координаты в  $T_p M$ ,  $P$  — полярные (отображения  $T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ).  $U \ni p$  — окрестность, на которую  $\exp_p$  отображается диффеоморфизм.

**Определение 1.12.7** (Нормальные геодезические координаты в окрестности  $p \in M$ ).  $D \circ (\exp_p^{-1})$

**Определение 1.12.8** (Полярные геодезические координаты в окрестности  $p \in M$ ).  $P \circ (\exp_p^{-1})$

## 1.13 Лемма Гаусса. Геодезические

Пусть  $(M, \langle \_, \_ \rangle, \nabla)$  — риманово многообразие со связностью Леви-Чивиты,  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  — гладкая кривая.

**Определение 1.13.1** (Гладкая вариация  $\gamma$ ). Гладкое отображение  $Q : [a, b] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$ , такое, что  $Q(\_, 0) \equiv \gamma$ . Отображения  $\gamma_\tau := Q(\_, \tau)$  называют *продольными линиями вариации*, а  $\delta_t := Q(t, \_)$  — *поперечными линиями*. Вариация называется *геодезической*, если все продольные линии  $\gamma_\tau$  — геодезические.

**Определение 1.13.2** (Поле вариации  $Q$ ). Векторы скорости поперечных линий  $\delta'$  (можно рассматривать его, как гладкое поле вдоль  $\gamma$ , заданное по формуле  $\delta'_t(0)$ , можно — везде как что?)

Заметим, что  $\frac{\partial Q}{\partial t}$  — векторные поля вдоль соответствующих поперечных линий, и  $\frac{\partial Q}{\partial \tau}$  — векторные поля вдоль продольных линий.

**Лемма 1.13.1.**  $\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{\nabla}{d\tau} \frac{\partial Q}{\partial t}$ . Если бы векторные поля индуцировались из соответствующего поля на многообразии, то это была бы обычная перестановка производных, но  $Q$  необязательно инъективно.

*Доказательство.* Разложим в карте  $\phi \circ Q = (x_1(t, \tau), \dots, x_n(t, \tau))$

Посмотрим на векторы скорости продольных линий  $\frac{\partial Q}{\partial t} = \gamma'_\tau(t) = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial t}(t, \tau) E_i$ . и поперечных  $\frac{\partial Q}{\partial \tau} = \delta'_t(\tau) = \frac{\partial x_i}{\partial \tau} E_j$ . Подставляя в (\*\*), ( $a_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$ ), получаем

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} E_i + \sum_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \tau} \Gamma_{i,j}$$

Выражение симметрично относительно  $t$  и  $\tau$ . □

**Теорема 1.13.1** (Лемма Гаусса).  $(M, \langle \_, \_ \rangle, \nabla)$  — многообразие со связностью Леви-Чивиты,  $v \in T_p M$  таков, что определена  $\exp_p(v)$ .

Отождествим  $T_p M = T_v T_p M$ .  $\forall w \in T_p M, w \perp v \Rightarrow d_v \exp_p(v) \perp d_v \exp(w)$ .

*Доказательство.* Построим вариацию  $V(\tau) = \cos \tau \cdot v + \sin \tau \cdot w$ , далее  $Q(t, \tau) := \exp(t \cdot V(\tau))$ . Так как экспонента  $\exp_p$  определена в некоторой окрестности  $v$ , то вариация  $Q$  определена в некоторой окрестности  $v$ .

Заметим, что  $Q$  — геодезическая вариация. Обозначим соответствующие векторные поля  $X := \frac{\partial Q}{\partial t}$  и  $Y := \frac{\partial Q}{\partial \tau}$ ,  $\gamma_0$  — геодезическая  $t \mapsto \exp_p(tv)$ .

Продифференцируем  $\langle X, Y \rangle$  вдоль  $\gamma_0$ :

$$\frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle = \left\langle \frac{\nabla}{dt} X, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{\nabla}{dt} Y \right\rangle = 0 + \left\langle X, \frac{\nabla}{d\tau} X \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \underbrace{\langle X, X \rangle}_{|V|^2}$$

Тем самым,  $\langle X, Y \rangle = \text{const}$ . Так как  $|Y| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ , то  $\langle X, Y \rangle \equiv 0$ .

В точке  $t = 1, \tau = 0$  это как раз означает ортогональность соответствующих производных. □

**Следствие 1.13.1.** Применяя экспоненту к сфере с радиусом, получим сферу на многообразии, которая будет перпендикулярна радиусу, входящему в неё.

## Лекция XI

24 апреля 2024 г.

Пусть  $a, b \in M$ , где  $M$  — риманово многообразие со связностью Леви-Чивиты  $\nabla$ .

**Определение 1.13.3** (Кратчайшая между  $a$  и  $b$ ). Кусочно-гладкая кривая  $\gamma : [c, d] \rightarrow M$ , реализующая расстояние между точками:  $L(\gamma) = \text{dist}(a, b) = \inf_{\tilde{\gamma}} L(\tilde{\gamma})$ , где  $\gamma, \tilde{\gamma}$  соединяют  $a$  и  $b$ . Также кратчайшие называют *отрезками*.

**Теорема 1.13.2.** Пусть  $p \in M, r_0 < r_{\text{inj}}(p), v \in T_p M, |v| = r_0$ . Тогда кривая  $\gamma_0 : t \mapsto \exp_p(t \cdot v)$ , определённая на  $[0, 1]$  — единственная (с точностью до перепараметризации) кратчайшая между своими концами.

*Доказательство.* Убедимся, что  $\forall \gamma : [0, L] \rightarrow M : \gamma(0) = p, \gamma(L) = \gamma_0(1) \Rightarrow L(\gamma) \geq L(\gamma_0)$ , и равенство имеет место лишь тогда, когда  $\gamma$  — перепараметризация  $\gamma_0$ .

В полярных координатах, индуцированных экспонентой,  $\gamma_0$  идёт по радиусу, и мы сейчас будем проецировать  $\gamma$  на этот же радиус.

Можно считать, что  $\forall t \in (0, L) : 0 < |\exp^{-1}(\gamma(t))| < r_0$ : удовлетворяя этим границам, мы только уменьшаем длину  $\gamma$  (быть может, после этого кривая  $\gamma$  будет заканчиваться в другой точке сферы радиуса  $r_0$ ).

Поднимем  $\gamma$  до  $\tilde{\gamma} := \exp_p^{-1} \circ \gamma$ , и представим  $\tilde{\gamma} = \rho(t) \cdot u(t)$ , где  $\rho(t) = |\tilde{\gamma}|, u(t) = \frac{\tilde{\gamma}}{|\tilde{\gamma}|}$ . Вычислим производную.  $\tilde{\gamma}' = \rho' \cdot u + \rho \cdot u'$ , и так как  $\langle u, u \rangle = 1$ , то  $u' \perp u$ .



Так как  $\gamma = \exp_p \circ \tilde{\gamma}$ , то  $\gamma' = \underbrace{d\tilde{\gamma}(t) \exp(u)}_{v_1} \cdot \rho' + \underbrace{d\tilde{\gamma}(t) \exp(u')}_{v_2} \cdot \rho$ . По лемме Гаусса  $v_1 \perp v_2$ , откуда  $|\gamma'|^2 = (\rho')^2 + \rho^2 \cdot (d\tilde{\gamma}(t) \exp(u'))^2$ . Тем самым,  $|\gamma'| \geq |\rho'|$ , и равенство на всей области определения достигается только при  $u \equiv \text{const}$ . Также понятно, что  $\rho$  должен монотонно возрастать, иначе  $\int |\rho'|$  будет больше минимума.  $\square$

**Определение 1.13.4** (Кривая  $\gamma : (0, L) \rightarrow M$  — локально кратчайшая).  $\forall t_0 \in (0, L) : \exists \varepsilon : \gamma|_{[-\varepsilon - t_0; \varepsilon + t_0]}$  — кратчайшая.

*Контрпример* (Локально кратчайшая, но не кратчайшая). Экватор на сфере.

**Следствие 1.13.2.**

- Геodesические — локально кратчайшие.
- $\forall p \in M : \exists U_p : p \in U_p \subset M : \forall x, y \in U_p$ : между  $x$  и  $y$  имеется единственная кратчайшая.

*Доказательство.* Подойдёт  $U_p := B_{\frac{r_{\text{inj}}(p)}{4}}(p) : \forall x, y \in U_p : x \in B_{r_{\text{inj}}}(y) \supset B_{\frac{r_{\text{inj}}}{2}}(y)$   $\square$

- $\gamma$  — геодезическая  $\iff \gamma$  — локально кратчайшая.

*Доказательство.* Согласно предыдущему пункту, кратчайшие локально единственны. Геодезические тоже, и согласно (теорема 1.13.2), они локально совпадают.  $\square$

## 1.14 Тензор кривизны

$M$  — риманово многообразие со связностью Леви-Чивиты  $\nabla$ .

Пусть  $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$ .

**Определение 1.14.1** (Преобразование кривизны).  $R(X, Y)Z \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$ .

**Лемма 1.14.1.** Преобразование кривизны — тензор типа  $(3, 1)$ .

*Доказательство.*  $\mathbb{R}$ -полилинейность очевидна из формулы, надо проверить  $\mathcal{F}(M)$ -полилинейность.

Пусть  $f \in \mathcal{F}(M)$ , проверим тензориальность по  $Z$ :

$$\begin{aligned} R(X, Y)(f \cdot Z) &= \nabla_X (Y(f) \cdot Z + f \cdot \nabla_X Z) - \nabla_Y (X(f)Z + f \cdot \nabla_X Z) - (f \cdot \nabla_{[X, Y]} Z + ([X, Y](f)) \cdot Z) = \\ &= X(Y(f)) \cdot Z + Y(f) \cdot \nabla_X Z + X(f) \cdot \nabla_Y Z + f \cdot \nabla_X \nabla_Y Z - \\ &\quad - (Y(X(f)) \cdot Z + X(f) \cdot \nabla_Y Z + Y(f) \cdot \nabla_X Z + f \cdot \nabla_Y \nabla_X Z) - (f \cdot \nabla_{[X, Y]} Z + [X, Y]Z) \end{aligned}$$

Теперь убедимся в тензориальности по  $Y$ :

$$R(X, f \cdot Y)Z = \nabla_X (f \cdot \nabla_Y Z) - f \cdot \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, f \cdot Y]} Z = (X \cdot f) \cdot \nabla_Y Z + f \cdot \nabla_X \nabla_Y Z - f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_{[X, Y]} Z - (Xf) \nabla_Y Z$$

Ура, сошлось. Тензориальность по  $X$  следует из кососимметричности по  $X$  и  $Y$ .  $\square$

**Определение 1.14.2** (Тензор кривизны).  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle$ .

Теперь пусть  $p \in M$ , и зафиксирована двумерная плоскость  $\sigma \leq T_p M$  с базисом  $(u, v)$ . Преобразование и тензор кривизны — вещи, с которыми просто работать, а геометрический смысл кривизны заключается в секционной кривизне.

*Интересный факт.* Тензор кривизны восстанавливается из секционной кривизны.

**Определение 1.14.3** (Секционная кривизна).  $K_\sigma(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle R(u, v)v, u \rangle}{|u \wedge v|^2}$ , где  $u \wedge v$  — смешанное произведение, то есть  $|u \wedge v| = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$ , если  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  и  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  в некотором **ортонормированном базисе**.

**Лемма 1.14.2.** Докажем, что секционная кривизна  $K_\sigma$  не зависит от выбора базиса  $(u, v)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $R(u, v)$ , как линейный оператор  $T_p M \rightarrow T_p M$ . Воспользуемся линейностью и кососимметричностью...  $\square$

Можно вспомнить выражение для гауссовой кривизны из предыдущего семестра

$$K = \frac{\langle \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y, X \rangle}{\det I}$$

в котором не было скобки Ли, но для координатных полей скобка Ли равна нулю, так что аналогия получается полная. Тем самым, можно сразу сказать, что  $K_\sigma(S^n) = 1$ , и вскоре мы покажем, что  $K_\sigma(\mathbb{H}^n) = -1$ .

//геометрический смысл — сходящиеся и расходящиеся геодезические

**Теорема 1.14.1.**

$$-\langle R(Y, X)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$$

*Доказательство.* Первое очевидно из определения.

Для проверки кососимметричности билинейной формы  $Z, W \mapsto \langle R(X, Y)Z, W \rangle$  достаточно проверить, что  $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$ . Запишем

$$\begin{aligned} X \langle Z, Z \rangle &= 2 \langle \nabla_X Z, Z \rangle \Rightarrow YX \langle Z, Z \rangle = 2(\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle) \\ [X, Y] \langle Z, Z \rangle &= 2 \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle = 2 \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle \end{aligned}$$

Должно сойтись  $\square$

## 1.15 Полугеодезические координаты

Пусть  $M^2$  — двумерное многообразие,  $X, Y \in \mathcal{F}(M)$  — координаты, причём  $|X| = 1$  и  $X \perp Y$ . Метрический тензор в этом базисе имеет вид  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$ , где  $G = \langle Y, Y \rangle$ .

*Пример* (Полугеодезические координаты). Полярные координаты (то есть координаты  $(\rho, \phi)$  на  $\mathbb{R}^2$ ).

**Задача 1.15.1.** Общий вид полугеодезических координат — эквидистанты от некоторой гладкой регулярной кривой.

## Лекция XII

8 мая 2024 г.

**Теорема 1.15.1.** В полугеодезических координатах первая координатная линия — геодезическая:  $\nabla_X X = 0$ , причём  $\nabla_X Y = \nabla_Y X = \frac{G'_X}{2G} Y$ .

*Доказательство.*

1.  $\nabla_X Y = \nabla_Y X$ , так как для координатных векторных полей  $[X, Y] = 0 = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ .
2.  $0 = X \langle X, X \rangle = 2 \langle \nabla_X X, X \rangle$
3.  $0 = Y \langle X, X \rangle = 2 \langle \nabla_Y X, X \rangle$
4.  $0 = X \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_X X, Y \rangle + \langle X, \nabla_X Y \rangle$ .
5. Так как  $X$  и  $Y$  — базис, то  $\nabla_X X \perp X, Y \Rightarrow \nabla_X X = 0$ .
6.  $\langle Y, Y \rangle = G \Rightarrow G'_X = 2 \langle \nabla_X Y, Y \rangle$ . Из (3) получаем  $\langle \nabla_X Y, X \rangle = 0 \Rightarrow \nabla_X Y \parallel Y$ . Тем самым,  $\nabla_X Y = \frac{\langle \nabla_X Y, Y \rangle \cdot Y}{\langle Y, Y \rangle} = \frac{G'_X}{2G} Y$ .  $\square$

**Теорема 1.15.2** (О выражении секционной кривизны в полугеодезических координатах). В полугеодезических координатах  $K = -\frac{\sqrt{G}''_{X,X}}{\sqrt{G}} = -\frac{|Y|'_{X,X}}{|Y|}$ .

*Доказательство.* Посчитаем по определению гауссову кривизну  $K = K_{X \wedge Y} = -\frac{\langle R(X,Y)X,Y \rangle}{|X \wedge Y|^2}$ . Во-первых,  $|X \wedge Y|^2 = G$ . Далее скобка Ли отсутствует, так как поля координатные:

$$\begin{aligned} R(X,Y)X &= \nabla_X \nabla_Y X - \nabla_Y \underbrace{\nabla_X X}_0 = \nabla_X \left( \frac{G'_X}{2G} Y \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{G''_{X,X} G - G'^2_X}{G} \cdot Y + \frac{G'_X}{2G} \nabla_X Y \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{2G''_{X,X} G - G'^2_X}{2G^2} \right) Y \end{aligned}$$

Сравним с выражением  $\frac{\sqrt{f}''}{\sqrt{f}} = \frac{1}{2} \left( \frac{f''}{f} - \frac{(f')^2}{2f^2} \right)$  □

**Утверждение 1.15.1.**  $K(\mathbb{H}^2) = -1$ .

*Доказательство.* Возьмём модель в верхней полуплоскости. Введём полугеодезические координаты, запараметризав  $r(u,v) = (v, e^u)$ . Это действительно полугеодезические координаты:  $X = r'_u = (0, e^u)$ ,  $Y = r'_v = (1, 0)$ , и  $X \perp Y$ ,  $|X|_{\mathbb{H}^2}^2 = \frac{e^{2u}}{e^{2u}} = 1$ .

Посчитаем  $G = |Y|_{\mathbb{H}^2}^2 = \frac{1}{e^{2u}}$ . Воспользуемся формулой:  $K = -\frac{\frac{d^2}{du^2}(e^{-u})}{e^{-u}} = -1$ . □

Итак,  $K(S^2) = 1$ ,  $K(\mathbb{H}^2) = -1$ . Немного порисовав, видим, что кривизна показывает, сходятся или расходятся геодезические.

## 1.16 Формула Гаусса — Бонне

### 1.16.1 Ориентация

Пусть  $V$  —  $n$ -мерное пространство над  $\mathbb{R}$ , и  $\mathcal{B}(V)$  — множество всевозможных базисов. Напомним следующие определения:

**Определение 1.16.1** ( $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(V)$  одинаково ориентированы).  $\det(B_1 \rightsquigarrow B_2) > 0$ .

**Определение 1.16.2** ( $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(V)$  против. ориентированы).  $\det(B_1 \rightsquigarrow B_2) < 0$ .

**Определение 1.16.3** (Ориентация  $V$ ). Отображение  $\tau : \mathcal{B}(V) \rightarrow \{-1, 1\}$ , такое, что  $\tau(B_1) \cdot \tau(B_2) = \text{sign}(\det(B_1 \rightsquigarrow B_2))$ .

Пусть  $M^n$  — гладкое многообразие. Обозначим за  $\mathcal{B}(TM) = \bigcup_{x \in M} \mathcal{B}(T_x M)$  все базисы во всех касательных пространствах. Введём на нём топологию подмножества, индуцированную с  $\underbrace{TM \times \cdots \times TM}_n$ .

**Определение 1.16.4** (Ориентация  $M$ ). Непрерывное отображение  $\tau : \mathcal{B}(TM) \rightarrow \{-1, 1\}$ , такое, что  $\forall x \in M : \tau|_{T_x M}$  — ориентация на  $T_x M$ . Если ориентация существует, то многообразие *ориентируемо*.

### 1.16.2 Вращение векторного поля вдоль кривой. Поворот кривой

Пусть  $(M^2, \langle \_, \_ \rangle)$  — двумерное риманово многообразие, и  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  — кусочно-гладкая кривая,  $W$  — векторное поле вдоль  $\gamma$ .

**Определение 1.16.5** ( $W$  — кусочно-гладкое и кусочно-непрерывное).  $\exists a = t_1 \leq \dots \leq t_n = b : W|_{[t_i, t_{i+1}]}$  — гладкое. Данное разбиение может никак не соотноситься с разбиением кусочной гладкости для самой кривой  $\gamma$ .

При этом для точки  $t_i$  из разбиения гладкости для  $W$  обозначим  $W_- := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_-} W(t_i + \varepsilon)$ ,  $W_+ := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} W(t_i + \varepsilon)$ . По техническим причинам потребуем  $W_- \neq -W_+$ . Пусть  $M^2$  ориентировано, то есть имеются понятия лево, право, по часовой стрелке, против часовой стрелки. Пусть в  $t_i$  имеется излом векторного поля  $W$ , обозначим за  $\theta_i$  ориентированный угол между  $W_-$  и  $W_+$ :  

$$\theta_i = \begin{cases} \angle(W_-, W_+), & W_- \rightarrow W_+ \text{ поворачивается против часовой стрелки} \\ -\angle(W_-, W_+), & \text{иначе} \end{cases}$$
. Теперь  $W$  — кусочно гладкое векторное поле вдоль  $\gamma$ ,  $|W| = 1$ . Пусть  $\widetilde{W}$  — такое, что  $(W, \widetilde{W})$  — ортонормированный положительно ориентированный базис.

**Определение 1.16.6** (Вращение векторного поля  $W$  вдоль  $\gamma$ ).  $\text{rot}_\gamma W = \int_a^b \left\langle \frac{\nabla}{dt} W, \widetilde{W} \right\rangle dt + \theta_1 + \dots + \theta_n$ .

Пусть  $\gamma$  — кусочно-гладкая,  $|\gamma'| = 1$ ,  $W = \gamma'$ . Тогда  $m := \widetilde{W}$  — ориентированная нормаль к  $\gamma$ .

**Определение 1.16.7** (Геодезическая кривизна).  $K_\gamma = \left\langle \frac{\nabla \gamma'}{dt}, m \right\rangle$ . Ещё её называют *кривизной кривой со знаком*.

**Определение 1.16.8** (Полная кривизна  $\gamma$  со знаком).  $\psi(\gamma) = \text{rot}_\gamma \gamma'$ . Ещё говорят *поворот кривой*.

**Теорема 1.16.1.** Пусть  $\gamma : [0, L] \rightarrow M$  — кусочно-гладкая петля,  $\gamma'(0) = \gamma'(L)$ ,  $W$  — кусочно-непрерывное кусочно-гладкое векторное поле вдоль  $\gamma$  (и тоже  $W(0) = W(L)$ ).

Тогда параллельный перенос  $P_0^L : T_{\gamma(0)}M \rightarrow T_{\gamma(L)}M$  — поворот на угол  $\text{rot}_\gamma W$ .

*Доказательство.* Пусть  $E$  — векторное поле вдоль  $\gamma$ , параллельное вдоль  $\gamma$ , такое, что  $E(0) = W(0)$ .

Сопоставим  $E \rightsquigarrow \widetilde{E}$  и  $W \rightsquigarrow \widetilde{W}$ .  $\begin{cases} W = \cos \alpha E + \sin \alpha \widetilde{E} \\ \widetilde{W} = -\sin \alpha E + \cos \alpha \widetilde{E} \end{cases}$  Можно выбрать  $\alpha$  (единственным образом с точностью до глобального сдвига на  $2\pi k$ ) так, что это — кусочно-непрерывный аргумент с разрывами в точках излома  $< \pi$ .

$\frac{\nabla W}{dt} = -\sin \alpha \cdot \alpha' E + \cos \alpha \cdot \alpha' \widetilde{E}$ , откуда  $\left\langle \frac{\nabla W}{dt}, \widetilde{W} \right\rangle = \alpha'$ .

Сначала пусть  $W$  — гладкое.  $\text{rot}_\gamma W = \int_0^L \left\langle \frac{\nabla W}{dt}, \widetilde{W} \right\rangle dt = \int_0^L \alpha' = \alpha(L) - \alpha(0) = \alpha(L)$ . В общем более-менее всё.

Теперь если есть изломы  $W$  в точках  $t_i$ , то

$$\text{rot}_\gamma W = \sum_{i=1}^s \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\nabla W}{dt}, \widetilde{W} \right\rangle dt + \theta_i = \sum_{i=1}^s (\alpha(t_{i+1})_- - \alpha(t_i)_+) + (\alpha(t_{i+1})_+ - \alpha(t_{i+1})_-)$$

и всё сокращается □

**Следствие 1.16.1.** Если  $W_1, W_2$  — как в условии теоремы, то  $\text{rot}_\gamma W_1 \equiv \text{rot}_\gamma W_2 \pmod{2\pi}$ .

## Лекция XIII

15 мая 2024 г.

**Теорема 1.16.2** (Формула Гаусса — Бонне).

1. Пусть двумерная риманова поверхность  $M^2$  ориентирована,  $\Delta \subset M$  — диск, и  $\partial\Delta$  — граница  $\Delta$ , причём  $\Delta$  — слева при обходе вдоль границы. Тогда  $\psi(\partial\Delta) + \iint_{\Delta} K \, dA = 2\pi$ .

2. Теперь если диски  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$  замостили какую-то открытую область  $\Delta \subset M^2$ , и  $\gamma_i$  — куски ориентированной границы  $\Delta$  ( $\Delta$  остаётся слева при обходе по  $\gamma_i$ ), то  $\psi(\gamma_1) + \dots + \psi(\gamma_k) + \iint_{\Delta} K = 2\pi\chi(\Delta)$ .

*Доказательство.*

- Докажем аддитивность формулы Гаусса — Бонне для дисков. Введём отображение Гаусса — Бонне  $GB(\Delta) = \psi(2\Delta) + \iint_{\Delta} dA - 2\pi$ , достаточно доказать, что  $GB(\Delta) = 0$ .

Пусть  $\Delta_1, \Delta_2$  — два диска с ориентированными границами  $\gamma_1 \cdot \gamma_3^-$  и  $\gamma_2 \cdot \gamma_3$  соответственно, пересекающихся по связной части границы, и  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$  — тоже диск. Пусть  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  — углы между концами разных путей.

$$\text{Тогда } \begin{cases} \psi(\partial\Delta_1) = \psi(\gamma_1) - \psi(\gamma_3) + (\pi - \alpha_1) + (\pi - \beta_1) \\ \psi(\Delta_1) = \psi(\gamma_2) + \psi(\gamma_3) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \beta_2) \\ \psi(\Delta) = \psi(\gamma_1) + \psi(\gamma_2) + (\pi - (\alpha_1 + \alpha_2)) + (\pi - (\beta_1 + \beta_2)) \end{cases}$$

Получаем  $GB(\Delta) = GB(\Delta_1) + GB(\Delta_2)$ , что показывает аддитивность формулы.

- Сначала докажем для диска  $\Delta \subset U$ , где в  $U$  есть карта  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2 = \langle X, Y \rangle$  с полугеодезическими координатами. Пусть  $s = \phi^{-1}$ ,  $X = ds(e_1)$ ,  $Y = ds(e_2)$ .

**Лемма 1.16.1** (Формула Грина). Пусть в  $\mathbb{R}^2$  есть область  $D$  с кусочно-гладкой границей  $\gamma = (x, y)$ , при обходе вдоль которой диск остаётся слева. Пусть  $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкие функции, тогда

$$\iint_D Q'_X - P'_Y dx dy = \int_{\gamma} P dx + Q dy = \int (x'P + y'Q) dt$$

*Доказательство леммы.*

Сначала докажем для простых областей, проинтегрировав формулу Ньютона — Лейбница, а затем всё сложим.  $\square$

**Лемма 1.16.2.** Пусть  $\gamma$  обходит область  $\Delta$ , в которой введены полугеодезические координаты  $\nabla_X X = 0$ . Тогда  $\text{rot}_{\gamma} X + \iint K dA = 0$

*Доказательство леммы.*

Вспомним формулу  $K = -\frac{(\sqrt{G})''_{X,X}}{\sqrt{G}}$ . Будем считать, что  $\gamma$  натурально параметризована. Теперь

$$\text{rot}_{\gamma} X = \int_X \left\langle \frac{\nabla X}{dt}, \frac{Y}{|Y|} \right\rangle = \int \left\langle \nabla_{\gamma'} X, \frac{Y}{|Y|} \right\rangle \odot$$

Пусть в карте  $\phi \circ \gamma = \tilde{\gamma} = (x(t), y(t))$ . Тогда  $\gamma' = x' \cdot X + y' \cdot Y$ , и

$$\begin{aligned} \odot &= \int \underbrace{X' \left\langle \nabla_X X, \frac{Y}{|Y|} \right\rangle}_0 + Y' \left\langle \nabla_Y X, \frac{Y}{|Y|} \right\rangle = \\ &= \int Y' \left\langle \frac{G'_X}{2G} Y, \frac{Y}{\sqrt{G}} \right\rangle = \int y' \cdot \frac{G'_X \cdot G}{2G \cdot \sqrt{G}} = \int y' (\sqrt{G})'_X dt \end{aligned}$$

Применяя формулу Грина, получаем  $\iint (\sqrt{G})''_{X,X} dx dy = \iint \frac{(\sqrt{G})''_{X,X}}{\sqrt{G}} \cdot \sqrt{G} dx dy = -\iint K dA$ .  $\square$

Введём два векторных поля  $V = \gamma'$  и  $W = X$ , и согласно (следствие 1.16.1):  $\psi(\gamma') + \iint K \, dA = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Теперь осталось доказать  $n = 1$ .

Введём непрерывное семейство метрик  $g_{i,j}^\tau = (1-\tau)g_{i,j} + \tau\delta_{i,j}$ , и заметим, что так как поворот плоской кривой равен  $2\pi$  (мы это доказывали в предыдущем семестре для гладких кривых, но это верно и для кусочно-гладких — можно сгладить либо адаптировать доказательство), то из непрерывности  $n = 1$ .

Теперь осталось сказать, что любой диск можно триангулировать так мелко, что каждый треугольник лежит в какой-то карте. Из аддитивности получаем (1).

- Теперь выведем (2). Примем без доказательства такой факт, что у любой области с кусочно-гладкими границами существует триангуляция (границы треугольников тоже кусочно-гладкие).

Триангулируем поверхность на треугольники  $\Delta_1, \dots, \Delta_\Gamma$ , и будем использовать, что все  $GB(\Delta_i) = 0$ .

Складывая  $\psi(\Delta_1) + \dots + \psi(\Delta_\Gamma) = \left( \iint_{\Delta_1} + \dots + \iint_{\Delta_\Gamma} \right) K \, dA = 2\pi\Gamma$ . Докажем, что  $\psi(\gamma_1) + \dots + \psi(\gamma_n) - \psi(\partial\Delta_1) - \dots - \psi(\partial\Delta_\Gamma) \stackrel{?}{=} 2\pi(\chi(\Delta) - \Gamma) = 2\pi(B - P)$ .

Все интегралы по отрезкам кривых сокращаются, и остаются лишь углы. Посмотрим по очереди на все вершины треугольников.

– Внутренняя вершина  $p$  степени  $d$  (соприкасающаяся с  $d$  треугольниками) вносит вклад в сумму  $-\sum_{i=1}^d (\pi - \alpha_i) = -\pi d + \sum_i \alpha_i = \pi(2 - d)$ .

– Граничная вершина  $p$  степени  $d$  (соприкасающаяся с  $d - 1$  треугольником) вносит вклад  $-\sum_{i=1}^d (\pi - \alpha_i) + \alpha = \pi(1 - d) + \sum_{i=1}^d \alpha_i + \alpha = \pi(2 - d)$ .

Осталось увидеть, что сумма по всем вершинам  $p$  величины  $(2 - d_p)$  даёт вклад  $2\pi B - \sum_{j=1}^B d_j \pi = 2\pi(B - P)$  □

## 1.17 Пространства постоянной кривизны. Сравнение треугольников

**Теорема 1.17.1.** У любой замкнутой (компактной) поверхности существует метрика постоянной кривизны, причём знак кривизны равен знаку эйлеровой характеристики.

*Доказательство.*  $\iint K = 2\pi\chi$ , утверждение про знак тривиально.

Воспользуемся теоремой о классификации двумерных поверхностей.

- Если поверхность ориентируема, то это сфера с  $g$  ручками. При  $g = 0$  это сфера, на ней есть структура постоянной кривизны. При  $g = 1$  это тор, на нём есть плоская метрика. При  $g \geq 2$  кривизна отрицательна, об этом позже.
- Если поверхность неориентируема, то ( $m = 1$ ) проективная плоскость получается, как фактормногообразие сферы, а при  $m = 2$  бутылка Клейна склеивается из квадрата.
- Иначе кривизна отрицательная. Нарисуем развёртку в виде правильного многоугольника, и поместим на гиперболической плоскости так, чтобы все углы были  $\frac{2\pi}{n}$ .

□

Пусть  $M$  — двумерное многообразие,  $K = -\frac{(\sqrt{G})''_{X,X}}{\sqrt{G}} \equiv \text{const}$ . Тогда  $(\sqrt{G})''_{X,X} = -K\sqrt{G}$ . Рассмотрим это уравнение — *уравнение Якоби* — как дифференциальное уравнение на  $\sqrt{G}$  второго

порядка. Поле  $Y$  зовётся *полем Якоби*, и уравнение Якоби можно записать и решать для произвольных размерностей.

Введём полярные координаты, полугеодезические вне центра координат. Покажем, что  $\sqrt{G} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ , и  $(\sqrt{G})'_x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ . Из симметрии достаточно доказать для произвольного луча  $\vec{v}$ . Пусть  $\vec{w} \perp \vec{v}$ ,  $|w| = 1$ .  $Y = d_{xv} \exp_p(xw)$ .

Пусть  $f(x) = d_{xv} \exp_p(xw)$ . Так как  $d_0 \exp_p = \text{id}$ , то  $|f(x)|$  — гладкая функция в окрестности 0.  $|Y|'_x = x \cdot |f|' + |f| \xrightarrow{x \rightarrow 0} d_0 \exp_p(w) = 1$ .

## Лекция XIV

22 мая 2024 г.

Получили начальные данные на дифференциальное уравнение  $\sqrt{G}(0) = 0, (\sqrt{G})'_X(0) = 1$ .

При постоянной кривизне решениями являются  $\begin{cases} \sqrt{G} = x, & K \equiv 0 \\ \sqrt{G} = \sin x, & K \equiv 1 \\ \sqrt{G} = \sinh x, & K \equiv -1 \end{cases}$  Подправляя на постоян-

ный положительный множитель, получаем  $\begin{cases} \sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K}x, & K > 0 \\ \sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh \sqrt{-K}x, & K < 0 \end{cases}$

**Теорема 1.17.2.** Пусть  $(M^2, g_M)$  и  $(N^2, g_N)$  — два двумерных многообразия, их кривизны равны и постоянны  $K_N \equiv K_M \equiv \text{const}$ ,  $p \in M, q \in N$ , и  $r < \min(r_{\text{inj}}p, r_{\text{inj}}q)$ . Вводя на шарах  $B_r(0) \subset T_pM$  и  $B_r(0) \subset T_qN$  полярные координаты, и зафиксируем некоторую изометрию  $I : T_pM \rightarrow T_qN$ . Тогда  $\exp_q \circ I \circ \exp_p^{-1}$  — изометрия окрестностей  $p$  и  $q$ . В частности, она сохраняет кривизну.

### 1.17.1 Теоремы сравнения

**Теорема 1.17.3.** Пусть  $p \in M, r < r_{\text{inj}}p$ , кривизна одного знака, но не факт, что постоянна. Следующее условие связывает длины кривых в  $B_r(0)$  и  $B_r(p)$ , между которыми действует экспонента.

1. Если  $K \geq 0$ , то  $\exp_p$  не увеличивает длины кривых.
2. Если  $K \leq 0$ , то  $\exp_p$  не уменьшает длины кривых.

*Доказательство.* Запишем уравнение  $(\sqrt{G})''_{x,x} = -K\sqrt{G}$ . Пусть  $G_1$  — решение на плоскости:  $\sqrt{G_1}''_{x,x} = 0$ , и  $\sqrt{G_2}''_{x,x} \leq 0$ . В первом случае  $\sqrt{G_1} = x$ , значит, во втором случае  $\sqrt{G_2} \leq x$ .

Аналогично для полярных координат в касательной плоскости и на поверхности:  $\sqrt{G_1} \geq \sqrt{G_2}$ . Используя формулу длины кривой  $l(\gamma) = \int \sqrt{(X')^2 + G(y')^2} dt$ , получаем, что  $G_1 \leq G_2 \Rightarrow$  длина кривых увеличивается.

Если же  $K \leq 0$ , то аналогично. □

1. Пусть  $\Delta \subset M$  — треугольник  $OAB$  из кратчайших,  $\angle AOB = \alpha$ . Возьмём на плоскости треугольник с такими же  $AO, OB$  и  $\angle AOB$ , это *треугольник сравнения с углом*.
2. Если же взять на плоскости треугольник с такими же длинами сторон (в случае, если он существует), то это *треугольник сравнения*.

Треугольник  $OAB$  маленький, если  $P(OAB) \leq \min(r_{\text{inj}}A, r_{\text{inj}}B, r_{\text{inj}}O)$ .

**Следствие 1.17.1.** Пусть  $r < r_{\text{inj}}O$ ,  $A, B \in B_r(O)$ .

1. Если  $K \geq 0$ , то в треугольнике сравнения с углом  $|\overline{AB}|_{\mathbb{R}^2} \geq |AB|_M$ .
2. Если  $K \leq 0$ , то в треугольнике сравнения с углом  $|\overline{AB}|_{\mathbb{R}^2} \leq |AB|_M$ .

Если же треугольник  $OAB$  маленький, то

1. Если  $K \geq 0$ , то в треугольнике сравнения  $\angle AOB \geq \tilde{\angle AOB}$ .

2. Если  $K \leq 0$ , то в треугольнике сравнения  $\angle AOB \leq \tilde{\angle AOB}$ .

*Доказательство.*

1. Сразу следует из предыдущей теоремы.

2. Выведем из первого пункта и теоремы косинусов. □

*Интересный факт* (Теорема Топоногова). Если  $M^n$  — полное многообразие, и  $K \geq 0$ , то для него верно заключение теоремы для больших треугольников. Если  $M^n$  — полное многообразие,  $K \leq 0$ , и  $M$  односвязно, то для него верно заключение теоремы для больших треугольников.

Односвязность важна — например, можно поиграться с цилиндром.

## 1.18 Полнота. Теорема Хопфа — Ринова

Пусть  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  — два многообразия, которые для удобства будем считать компактными. Это автоматически влечёт полноту *почему?*

$C(X, Y)$  — пространство непрерывных функций,  $d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ .

**Теорема 1.18.1** (Арцела — Асколи). Если  $f_n$  — последовательность равномерно непрерывных функций, то  $\exists f_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f_\infty$ .

Далее все пространства с внутренней метрикой:  $d(x, y) = \inf l(\gamma)$ .

**Определение 1.18.1** (Кратчайшая  $\gamma$ ).  $\text{dist}(\gamma(t_2), \gamma(t_1)) = |t_2 - t_1|$  в натуральной параметризации.

**Определение 1.18.2** ( $X$  — собственное). Все замкнутые шары  $D_r(p) = \{x \in M | \text{dist}(x, p) \leq r\}$  компактны.

Пусть  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ .

**Теорема 1.18.2.** Пусть  $X$  — компактное, с внутренней метрикой, тогда любые две точки можно соединить кратчайшей.

*Доказательство.* Пусть  $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow X$  — последовательность кривых, минимизирующая расстояние. Применяем теорему Арцела — Асколи. □

**Определение 1.18.3** (Риманово многообразие полное). Оно полное, как метрическое пространство.

**Определение 1.18.4** (Риманово многообразие геодезически полное). Любая геодезическая продолжима на интервал  $(-\infty, +\infty)$ .

Следующая теорема, разумеется, формулируется для многообразий без края.

**Теорема 1.18.3** (Хопф — Ринов). Многообразие  $M$  метрически полное  $\iff$  многообразие геодезически полное.

Если  $M$  полное, то  $M$  собственное,  $\exp_p(\bar{D}_R^{T_p M}(0)) = \bar{D}_R^M(p)$  и любые две точки соединены кратчайшей.

*Доказательство.*

**Лемма 1.18.1.** Пусть  $(X, d)$  — локально компактное, с внутренней метрикой,  $p \in X, R > 0$ , и выполнено следующее условие:  $\forall$  кратчайшей  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B_R(p)$ : можно продолжить до  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ . Тогда  $D_R(p)$  компактен.

*Доказательство леммы.*

Из локальной компактности найдётся достаточно малый  $\bar{r} > 0$ :  $D_{\bar{r}}(p)$  компактен. Пусть  $r := \sup\{\bar{r}\}$ . Предположим, что  $r < R$ , и докажем, что  $D_r(p)$  компактен. Достаточно доказать, что  $D_r(p)$  полный и вполне ограниченный ( $\forall \varepsilon : \exists$  конечная  $\varepsilon$ -сеть).



*Замечание.* Так как метрика внутренняя, то  $\forall \varepsilon > 0 : D_r \subset U_\varepsilon(B_r(p))$ .

Полнота: пусть  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — фундаментальная последовательность точек  $x_n \in D_r(p)$ . Согласно замечанию, можно считать, что  $x_n \in B_r(p)$ .

Пусть  $\gamma_n : [0, r - \varepsilon_n] \rightarrow X$  — натурально параметризованная кратчайшая, соединяющая  $p$  и  $x_n$ . Можно считать, что  $\varepsilon_n \searrow 0$ .

Пусть  $\gamma_n|_{[0, 1 - \varepsilon_1]}$ . Выберем последовательность  $(n_1)(j)$  так, что  $\gamma_{n_1(j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \gamma_\infty[0, 1 - \varepsilon_1]$ .

Проредим  $n_1(j) \supset n_2(j) \supset \dots$ , и возьмём диагональ:  $\gamma_{n_j(j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \gamma_\infty$ , где  $\gamma_\infty : [0, 1) \rightarrow X$  — кратчайшая (предел кратчайших). Согласно условию теоремы  $\gamma_\infty$  можно продолжить в точку 1, и несложно проверить, что этот конец —  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Тем самым,  $D_r$  полон. Компактность следует из вполне ограниченности:  $D_{r - \frac{\varepsilon}{2}}$  компактен, в нём есть  $\frac{\varepsilon}{2}$ -сеть.

Теперь докажем, что  $\exists \varepsilon > 0 : D_{r+\varepsilon}$  тоже компактен.  $\forall x \in X$ : выберем  $r(x) : D_{2r(x)}$  компактен. Далее выберем конечное подпокрытие из  $B_{r(x)}(x)$ , и плюс-минус всё.  $\square$

Пусть  $\gamma : [0, L) \rightarrow X$  — геодезическая в натуральной параметризации. Из полноты  $\exists x_0 := \lim_{t \rightarrow L} \gamma(t)$ .

Так как радиус инъективности отделён от нуля числом  $\frac{r_0}{2}$ , то достаточно близко к  $x_0$  геодезическую можно продолжить за  $x_0$ . Из геодезической полноты выполнено условие леммы.

Тогда любой шар компактен. Вроде всё.  $\square$