

# Алгебра. Неофициальный конспект

Лектор: Николай Александрович Вавилов

Конспектировал Леонид Данилевич

II семестр, весна 2023 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Вычислительная линейная алгебра</b>	<b>4</b>
1.1	Элементарные преобразования	4
1.1.1	Элементарные трансвекции	4
1.1.2	Элементарные псевдоотражения	5
1.1.3	Действия элементарных преобразований на матрицах	6
1.2	Матрицы перестановки	7
1.3	Классификация линейных отображений над полем. Канонический вид линейного отображения	8
1.4	Комбинаторная эквивалентность матриц	9
1.4.1	Элементарная эквивалентность матриц	10
1.4.2	Ранг матрицы над полем. Различные определения ранга над кольцом	11
1.4.3	Системы линейных уравнений	12
1.4.4	Векторная запись системы линейных уравнений. Теорема Кронекера — Капелли	13
1.4.5	Решение систем линейных уравнений методом Гаусса	13
1.4.6	Определитель по Вейерштрассу	14
1.4.7	Знак перестановки. Определение через декремент	14
1.4.8	Знак перестановки. Определение через инверсии	15
1.4.9	Знакопеременное определение определителя	16
1.4.10	Существование определителя (удовлетворяющего условиям Вейерштрасса)	16
1.4.11	Единственность определителя (удовлетворяющего условиям Вейерштрасса)	17
1.5	Мультипликативность определителя	17
1.5.1	Блочные матрицы	18
1.5.2	Определитель блочно треугольной матрицы	18
1.5.3	Мультипликативность определителя	19
1.5.4	Миноры, разложение по строке, определитель по Лапласу	19
1.5.5	Формула Крамера, теорема Крамера	20
1.6	Определители некоторых матриц	20
1.6.1	Определитель Вандермонда	21
1.6.2	Пфаффианы	21
<b>2</b>	<b>Многочлены</b>	<b>22</b>
2.1	Гомоморфизм эвалюации	22
2.2	Число корней многочлена над областью целостности	23
2.3	Формальное и функциональное равенство многочленов	24
2.4	Задача интерполяции с простыми узлами	24
2.5	Локализация или кольца частных	25
2.5.1	Мультипликативные системы	25
2.5.2	Построение кольца частных	26
2.5.3	Универсальное свойство кольца частных	27
2.5.4	Кольцо частных в терминах элементов	28
2.5.5	Примеры колец частных	28
2.6	Поле частных факториального кольца	28
2.7	Рациональные дроби	29
2.8	Разложение на простейшие дроби	30

2.9	Факториальность кольца многочленов . . . . .	31
2.9.1	Примитивные многочлены . . . . .	31
2.9.2	Теорема Гаусса . . . . .	32
2.10	Дифференцирование алгебр . . . . .	33
2.10.1	Операции над дифференцированиями . . . . .	34
2.10.2	Дифференцирование кольца многочленов, теорема Лейбница — Бернулли . . . . .	34
2.11	Алгебраические и трансцендентные элементы; минимальный многочлен . . . . .	35
2.11.1	Что можно сказать, если $A$ — область целостности? . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Канонические формы линейных операторов</b>	<b>37</b>
3.1	Инвариантные подпространства . . . . .	37
3.2	Собственные подпространства. Собственные числа . . . . .	38
3.3	Характеристический многочлен оператора . . . . .	39
3.4	Геометрическая и алгебраическая кратности собственного числа . . . . .	39
3.5	Корневые векторы. Корневое подпространство . . . . .	40
3.6	Теорема Кэли — Гамильтона . . . . .	41
3.6.1	Алгебраическое доказательство . . . . .	41
3.6.2	Геометрическое доказательство . . . . .	42
3.7	Примарное разложение . . . . .	43
3.7.1	Минимальный многочлен вектора относительно оператора . . . . .	43
3.7.2	Ядро операторного многочлена . . . . .	43
3.7.3	Примарное разложение . . . . .	44
3.8	Теорема о жордановой форме . . . . .	44
3.8.1	Жорданов базис нильпотентного оператора . . . . .	45
3.9	Сепарабельные многочлены, совершенные поля . . . . .	46
3.10	Разложение Жордана — Шевалле . . . . .	47
3.11	Вещественные жордановы формы . . . . .	48
3.12	Циклические подпространства, фробениусовы клетки . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Классификация модулей над PID</b>	<b>50</b>
4.1	Нормальная форма Смита . . . . .	50
4.1.1	Над евклидовым кольцом . . . . .	50
4.1.2	Над PID . . . . .	51
4.2	Подмодули кручения, модули без кручения . . . . .	52
4.3	Формулировка основных теорем о строении конечнопорождённых модулей над PID . . . . .	53
4.3.1	Вложение конечнопорождённых модулей без кручения в свободные модули . . . . .	53
4.4	Согласованный выбор базисов в свободном модуле и его подмодуле . . . . .	54
4.4.1	Частные случаи . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Геометрия пространств со скалярным произведением</b>	<b>56</b>
5.1	Скалярные произведения . . . . .	56
5.1.1	«Классификация» билинейных скалярных произведений . . . . .	57
5.2	Матрица Грама скалярного произведения . . . . .	57
5.3	Скалярное произведение и двойственные пространства . . . . .	58
5.4	Классификация пространств со скалярным произведением . . . . .	59
5.5	Ортогональное дополнение . . . . .	60
5.5.1	Ортогональная прямая сумма . . . . .	61
5.5.2	Теорема об ортогональном дополнении . . . . .	61
5.5.3	Теорема Лагранжа о существовании ортогонального базиса в квадратичном пространстве . . . . .	63
5.6	Введение в теорию (Диксона — ) Витта. Классификация симплектических пространств . . . . .	63
5.6.1	Выделение гиперболических плоскостей . . . . .	63
5.6.2	Классификация симплектических пространств . . . . .	64
5.7	Квадратические пространства. Квадратичные формы . . . . .	64
5.7.1	Квадратичная форма в координатах . . . . .	65
5.8	Классификация квадратичных пространств . . . . .	65
5.8.1	Над квадратично замкнутым полем . . . . .	65

5.8.2	Над полем вещественных чисел (закон инерции Сильвестра)	66
5.9	Теория (Диксона — ) Витта	67
5.9.1	Ортогональные отражения	68
5.9.2	Доказательство теоремы Витта о продолжении для невырожденных подпространств	68
5.9.3	Доказательство теоремы Витта о продолжении для невырожденного пространства	69
5.10	Полуторалинейные скалярные произведения	70
5.10.1	Полулинейные отображения, инволюции	70
5.10.2	Полуторалинейные скалярные произведения	71
5.10.3	Вещественная и мнимая часть эрмитова скалярного произведения	72
<b>6</b>	<b>Теория групп</b>	<b>74</b>
6.1	Действия групп	74
6.1.1	Действия групп на множествах	74
6.1.2	Действие группы на себе. Теорема Кэли	75
6.1.3	Действие группы на однородных пространствах. Обобщённая теорема Кэли	76
6.2	Классификация $G$ -множеств	78
6.3	Конечные группы	79
6.3.1	Центр $p$ -группы, теоремы Коши	79
6.3.2	Теоремы Силова	80
6.4	Тождества с коммутаторами	82
6.5	Прямое произведение двух подгрупп	83
6.5.1	Прямое произведение нескольких подгрупп	84
6.5.2	Прямое произведение многих подгрупп	84
6.6	Полупрямое произведение	84
6.7	Группы порядка $pq$	85
6.8	Крохотный кусок комбинаторной теории групп	86
6.8.1	Свободные группы	86
6.8.2	Задание группы образующими соотношениями	89

# Глава 1

## Вычислительная линейная алгебра

### Лекция I

14 февраля 2023 г.

#### 1.1 Элементарные преобразования

Пусть  $R$  — ассоциативное кольцо с единицей. Займёмся изучением некоторых особенных видов (пока квадратных) матриц  $M(n, R)$ .

##### 1.1.1 Элементарные трансвекции

**Определение 1.1.1** (Элементарная трансвекция).  $t_{i,j}(\xi) = e + \xi \cdot e_{i,j}$  для  $i \neq j, \xi \in R$ . Иными словами, матрица вида

$$i \begin{pmatrix} & & j \\ 1 & & 0 \\ & \ddots & \xi \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

**Определение 1.1.2** (Элементарные преобразования первого типа, или трансвекции). Группа по умножению, порождённая элементарными трансвекциями.

В частности,  $t_{1,2}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $t_{2,1}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix}$ .

**Лемма 1.1.1** (Аддитивность трансвекций по  $\xi$ ).  $t_{i,j}(\xi) \cdot t_{i,j}(\zeta) = t_{i,j}(\xi + \zeta)$ . Иными словами,  $t_{i,j} : R \rightarrow GL(n, R)$  — гомоморфизм для любых  $1 \leq i \neq j \leq n$ .

*Доказательство.* Посчитаем  $t_{i,j}(\xi) \cdot t_{i,j}(\zeta)$ . Это можно сделать так:

$$(e + \xi e_{i,j})(e + \zeta e_{i,j}) = e + \xi e_{i,j} + \zeta e_{i,j} + \xi \zeta e_{i,j} e_{i,j}, \text{ последнее слагаемое } 0, \text{ так как } i \neq j.$$

а можно так:

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \xi + \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Последняя выкладка работает и для матриц произвольного размера, так как в вычислении на самом деле используются лишь 2 различных индекса —  $i$  и  $j$ . При замене из на 1 и 2 ничего не поменяется, так как определение умножения не опирается на порядок строк или столбцов.

Такой трюк позволяет компактно записывать вычисления с большими матрицами, мало отличающимися от нейтральной  $e$ .  $\square$

**Следствие 1.1.1.**  $t_{i,j}(\xi)^{-1} = t_{i,j}(-\xi)$ , откуда  $t_{i,j}(\xi) \in GL(n, R) \stackrel{def}{=} M(n, R)^*$ .

**Лемма 1.1.2** (Коммутационная формула Шевалле). *Мультипликативный коммутатор двух трансвекций — часто трансвекция:*

$$[t_{i,j}(\xi), t_{h,k}(\zeta)] = \begin{cases} t_{i,k}(\xi\zeta), & i \neq k \wedge j = h \\ t_{h,j}(-\zeta\xi), & i = k \wedge j \neq h \\ e, & i \neq k \wedge j \neq h \\ \text{что-то}, & i = k \wedge j = h \end{cases}$$

(Мультипликативный коммутатор  $[x, y] \stackrel{def}{=} xyx^{-1}y^{-1}$ )

*Доказательство.* Можно тупо записать огромные формулы:

$$\begin{aligned} [t_{i,j}(\xi), t_{h,k}(\zeta)] &= t_{i,j}(\xi) \cdot t_{h,k}(\zeta) \cdot t_{i,j}(-\xi) \cdot t_{h,k}(-\zeta) = (e + \xi e_{i,j})(e + \zeta e_{h,k})(e - \xi e_{i,j})(e - \zeta e_{h,k}) = \\ &= \dots = e + \xi\zeta\delta_{j,h}e_{i,k} - \zeta\xi\delta_{k,i}e_{h,j} + \zeta\xi\zeta\delta_{k,i}\delta_{j,h}e_{h,k} - \xi\zeta\xi\delta_{j,h}\delta_{k,i}e_{i,j} + \xi\zeta\xi\zeta\delta_{j,h}\delta_{k,i}\delta_{j,h}e_{i,k} \end{aligned}$$

~~Какая боль это писать... И ведь никто не прочтает и не проверит...~~ Прошу прощения, был неправ.

Члены с коэффициентами вида  $\xi^2$  или  $\xi^2\zeta$ , то есть те, где есть квадрат чего-то, точно обнуляются, так как по определению трансвекции  $i \neq j, k \neq h$ . Имея записанное, проверить, что лемма говорит правду — легко.

(Ещё можно поумножать матрицы  $3 \times 3$  или  $4 \times 4$  — тут ещё разбор случаев, когда какие индексы совпадают. Кайф)  $\square$

## 1.1.2 Элементарные псевдоотражения

**Определение 1.1.3** (Элементарное псевдоотражение). Матрица вида  $d_i(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{i,i}$ , где  $i \neq j, \varepsilon \in R^*$ . Иными словами, матрица вида

$$d_i(\varepsilon) = \begin{matrix} & i \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \varepsilon & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

**Определение 1.1.4** (Элементарные преобразования второго типа, или псевдоотражения). Группа по умножению, порождённая элементарными псевдоотражениями.

**Лемма 1.1.3** (Мультипликативность псевдоотражений по  $\varepsilon$ ).  $d_i(\varepsilon)d_i(\theta) = d_i(\varepsilon\theta)$ . Иными словами,  $d_i : R^* \rightarrow GL(n, R)$  — гомоморфизм для любого  $1 \leq i \leq n$ .

*Доказательство.* Здесь есть всего один индекс, умножим матрицы  $1 \times 1$ :  $(\varepsilon) \cdot (\theta) = (\varepsilon\theta)$ .  $\square$

**Следствие 1.1.2.**  $d_i(\varepsilon)^{-1} = d_i(\varepsilon^{-1})$ , откуда  $d_i(\varepsilon) \in GL(n, R)$ .

*Замечание.* Псевдоотражения — подгруппа обратимых элементов в диагональных матрицах

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

Так как умножаются диагональные матрицы покомпонентно, то справедливость (лемма 1.1.3) очевидна ещё и с другой стороны.

**Лемма 1.1.4.**  $[d_i(\varepsilon), d_j(\theta)] = \begin{cases} d_i([\varepsilon, \theta]), & i = j \\ e, & i \neq j \end{cases}$  — в частности, псевдоотражения с разными индексами коммутируют, а с одинаковыми — коммутируют, если коммутируют параметры.

**Лемма 1.1.5.**  $d_i(\varepsilon)t_{j,k}(\xi)d_i(\varepsilon)^{-1} = \begin{cases} t_{j,k}(\varepsilon\xi), & i = j \\ t_{j,k}(\xi\varepsilon^{-1}), & i = k \\ t_{j,k}(\xi), & \text{иначе} \end{cases}$

*Доказательство.*

Если  $i = j = 1 \wedge k = 2$ , то

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon\xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Если  $i = k = 1 \wedge j = 2$ , то

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ \xi\varepsilon^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi\varepsilon^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Наконец, если  $i \neq j, k$ , то домножение на псевдоотражение справа домножит  $i$ -й столбец на  $\varepsilon^{-1}$ , слева —  $i$ -ю строчку на  $\varepsilon$ , так как единственный ненулевой элемент в них — 1 на пересечении, то  $t_{j,k}(\xi)$  останется прежней.  $\square$

### 1.1.3 Действия элементарных преобразований на матрицах

**Лемма 1.1.6.** Элементарная трансвекция действует на матрицу  $x$  слева следующим образом:

$$t_{h,k}(\xi) \cdot \begin{pmatrix} x_{1,*} \\ \vdots \\ x_{h,*} \\ \vdots \\ x_{n,*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,*} \\ \vdots \\ x_{h,*} + \xi x_{k,*} \\ \vdots \\ x_{n,*} \end{pmatrix}$$

**Лемма 1.1.7.** Элементарное псевдоотражение действует на матрицу  $x$  слева следующим образом:

$$d_h(\varepsilon) \cdot \begin{pmatrix} x_{1,*} \\ \vdots \\ x_{h,*} \\ \vdots \\ x_{n,*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,*} \\ \vdots \\ \varepsilon x_{h,*} \\ \vdots \\ x_{n,*} \end{pmatrix}$$

**Лемма 1.1.8.** Элементарная трансвекция действует на матрицу  $x$  справа следующим образом:

$$(x_{*,1} \quad \dots \quad x_{*,h} \quad \dots \quad x_{*,n}) \cdot t_{h,k}(\xi) = (x_{*,1} \quad \dots \quad x_{*,h} + x_{*,k}\xi \quad \dots \quad x_{*,n})$$

**Лемма 1.1.9.** Элементарное псевдоотражение действует на матрицу  $x$  справа следующим образом:

$$(x_{*,1} \quad \dots \quad x_{*,h} \quad \dots \quad x_{*,n}) \cdot d_h(\varepsilon) = (x_{*,1} \quad \dots \quad x_{*,h}\varepsilon \quad \dots \quad x_{*,n})$$

**Определение 1.1.5** (Элементарная подгруппа).  $E(n, R) \stackrel{\text{def}}{=} \langle t_{i,j}(\xi) | \xi \in R, 1 \leq i \neq j \leq n \rangle \leq GL(n, R)$  — подгруппа в группе обратимых матриц, состоящая из трансвекций.

Используя  $D(n, R)$  как подгруппу в  $GL(n, R)$ , состоящую из обратимых диагональных матриц, можно ввести определение:

**Определение 1.1.6** (Полная элементарная подгруппа).  $GE(n, R) \stackrel{\text{def}}{=} \langle E(n, R), D(n, R) \rangle \leq GL(n, R)$  — подгруппа в группе обратимых матриц, порождённая трансвекциями и псевдоотражениями.

**Факт 1.1.1.**  $GE(n, R) = E(n, R) \cdot D(n, R)$ .

*Доказательство.* Всякий элемент  $g \in GE(n, R)$  по определению представим в виде  $e_1 d_1 \dots e_m d_m$ , где  $e_i \in E(n, R), d_i \in D(n, R)$ . Согласно (лемма 1.1.5)  $d_i e_{i+1} d_i^{-1} \in E(n, R)$ , то есть можно постепенно перекидывать элементы из  $E(n, R)$  в начало произведения.  $\square$

## Лекция II

15 февраля 2023 г.

Положим за  $d_{i,j}(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} d_i(\varepsilon) d_j(\varepsilon^{-1})$ , где  $i \neq j, \varepsilon \in R^*$ .

**Теорема 1.1.1.**  $d_{i,j}(\varepsilon)$  является произведением 4 элементарных трансвекций.

*Доказательство.* Будем двигаться назад: чтобы получить  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  из  $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$ , добавим

- первую строчку ко второй с коэффициентом  $\varepsilon^{-1}$ ,
- вторую строчку к первой с коэффициентом  $1 - \varepsilon$ ,
- первую строчку ко второй с коэффициентом  $-1$ ,
- вторую строчку к первой с коэффициентом  $1 - \varepsilon^{-1}$ .

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^{-1} - 1 \\ 1 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^{-1} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом,  $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 + \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 + \varepsilon^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . (Как было правильно замечено, в формуле порядок матриц пришлось развернуть, и прибавления строчек заменить на вычитания. Поэтому знаки в матрицах противоположны заявленным) В общем случае  $d_{i,j}(\varepsilon) = t_{i,j}(-\varepsilon^{-1}) t_{j,i}(-1 + \varepsilon) t_{i,j}(1) t_{j,i}(-1 + \varepsilon^{-1})$ . Операции можно было совершать не над строками, а над столбцами: например, можно то же произведение транспозиций применить к  $e$  не слева, а справа.  $\square$

## 1.2 Матрицы перестановки

**Определение 1.2.1** (Мономиальная матрица  $x$ ). В каждой строке  $x$  и каждом столбце  $x$  единственный элемент, не равный 0 (причём он обратим).

Множество мономиальных матриц обозначают  $N(n, R)$ , и это подгруппа в  $GL(n, R)$ .

**Определение 1.2.2** (Матрица перестановки). Такая мономиальная матрица, что все её ненулевые элементы равны 1.

Множество всех матриц перестановки обозначают  $W_n$ , это тоже подгруппа  $GL(n, R)$ .

**Определение 1.2.3** (Означенная (signed) матрица перестановки). Такая мономиальная матрица, что все её ненулевые элементы равны  $\pm 1$ .

Матрица перестановки переставляет элементы базиса, изоморфны  $S_n$ , означенные матрицы перестановки переставляют означенный базис, изоморфны октаэдральной группе.

**Определение 1.2.4** (Октаэдральная группа). Положим  $X := \{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\}$  ( $|X| = 2n$ ).

$$\text{Oct}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\pi \in S_X \mid \pi(-i) = -\pi(i)\} \leq S_X$$



Имеет место изоморфизм  $S_n \cong W_n$ ,  $\pi \mapsto (\pi)$ ,  $(\pi)_{i,j} = \delta_{i,\pi(j)}$ . Можно проверить, что  $(\pi)(\rho) = (\pi \cdot \rho)$ .

Так как перестановки порождаются транспозициями, то матрицы перестановки порождаются матрицами транспозиций  $w_{i,j} = e - e_{i,i} - e_{j,j} + e_{i,j} + e_{j,i}$ .

Так определённые  $w_{i,j}$  — элементарные преобразования третьего вида.

**Следствие 1.2.1.**  $W_n = \langle \{w_{i,j} | i+1 = j\} \rangle$ . Это абсолютный аналог утверждения, что симметрическая группа  $S_n$  порождена фундаментальными транспозициями.

**Лемма 1.2.1.** Умножение на  $w$  слева переставляет строки, справа — переставляет столбцы. В частности,  $w_{1,2} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,*} \\ x_{2,*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{2,*} \\ x_{1,*} \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} x_{*,1} & x_{*,2} \end{pmatrix} \cdot w_{1,2} = \begin{pmatrix} x_{2,*} & x_{1,*} \end{pmatrix}$

Преобразования третьего типа выражаются через преобразования первого и второго типа:

**Определение 1.2.5.**

$$w_{i,j}(\varepsilon) = t_{i,j}(\varepsilon)t_{j,i}(-\varepsilon^{-1})t_{i,j}(\varepsilon) \in E(n, R)$$

Проще говоря, матрица где все строчки и столбцы как у единичной матрицы  $e$  кроме тех, что с номерами  $i, j$ :

$$w_{i,j}(\varepsilon) \stackrel{def}{=} \begin{matrix} & i & j \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

**Лемма 1.2.2.**  $w_{i,j} = w_{i,j}(1) \cdot d_i(-1) = d_j(-1)w_{i,j}(1) \in GE(n, R)$

### 1.3 Классификация линейных отображений над полем. Канонический вид линейного отображения

Модуль над полем (то есть векторное пространство) с точностью до изоморфизма определяется своей размерностью. А чем определяется (с точностью до изоморфизма, естественно) линейное отображение?

**Определение 1.3.1** (Изоморфность линейных отображений  $\phi : U \rightarrow V$  и  $\psi : W \rightarrow Z$ ). Существуют два изоморфизма  $U \cong W$  и  $V \cong Z$ , такие, что диаграмма коммутативна.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi} & V \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ W & \xrightarrow{\psi} & Z \end{array}$$

**Определение 1.3.2** (Ранг линейного отображения  $\phi$ ). Размерность образа:  $\text{rk}(\phi) \stackrel{def}{=} \dim(\text{Im}(\phi))$ .

**Теорема 1.3.1.**  $(U, V, \phi) \cong (W, Z, \psi) \iff \begin{cases} \dim(U) = \dim(W) \\ \dim(V) = \dim(Z) \\ \text{rk}(\phi) = \text{rk}(\psi) \end{cases}.$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . Очевидно.

$\Leftarrow$ . Так как  $\phi, \psi : U \rightarrow V$  — линейные отображения, то можно считать, что они заданы, как домножения на матрицу. Получаем аналогичный вопрос: когда можно одну матрицу привести к другой при замене базиса в  $U$  и замене базиса в  $V$ , то есть при домножении на **обратимые** матрицы слева и справа?

**Теорема 1.3.2.** Для любого линейного отображения  $\phi : U \rightarrow V$  можно так выбрать базисы в  $U$  и в  $V$ , чтобы матрица отображения имела вид  $\left( \begin{array}{c|c} e & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$  — *окаймлённая* единичная матрица (здесь  $e$  — квадратная единичная матрица,  $0$  — матрицы из нулей произвольного размера).

*Доказательство.* Обозначим  $n = \dim(U)$ ,  $m = \dim(V)$ .

- Выберем базис  $\text{Ker}(\phi)$ ;  $\dim(\text{Ker}(\phi)) = n - r$ . Обозначим этот базис  $u_{r+1}, \dots, u_n$ .
- Дополним до базиса  $U$ :  $u_1, \dots, u_r$  — относительный базис  $U/\text{Ker}(\phi)$ .
- Рассмотрим  $\phi(u_1), \dots, \phi(u_r)$  — базис  $\text{Im}(\phi)$ .
- Дополним этот базис до базиса  $V$ .

В данных базисах матрица линейного отображения — действительно окаймлённая матрица.

□

Таким образом, всякое линейное отображение имеет лишь 3 инварианта — параметры окаймлённой матрицы, а это и есть  $\text{rk}(\phi)$ ,  $\dim(U)$ ,  $\dim(V)$ .

□

## 1.4 Комбинаторная эквивалентность матриц

Пусть  $x \in M(m, n, K)$ , где  $K$  — поле (рассуждения также можно обобщить до случая тела).

К какому виду можно привести  $x$  элементарными преобразованиями над строками?

**Теорема 1.4.1.** Для любого  $x \in M(m, n, K)$ :  $\exists h \in GE(m, K)$ :  $hx$  имеет специальный (*строково-эшелонированный*) вид:

1. В каждой строке ведущий элемент (pivot) — первый ненулевой элемент — равен 1.
2. В каждой следующей строке ведущий элемент правее, чем в предыдущей.
3. Элементы над ведущими равны 0.
4. Последние строки состоят из нулей.

$$\left( \begin{array}{cccccc} 1 & * & 0 & * & 0 & * \\ & & 1 & * & 0 & * \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 & * \\ \hline 0 & & \dots & & 0 & \\ & & \vdots & & & \\ 0 & & \dots & & 0 & \end{array} \right)$$

*Доказательство.* Рассмотрим наименьший номер ненулевого столбца  $j$ :  $a_{*,j} \neq 0$ . Перестановкой строк можно добиться того, что  $a_{1,j} \neq 0$ . Поделим строку  $a_{1,*}$  на  $a_{1,j}$ , теперь первая строчка соответствует строково-эшелонированному виду.

Вычитая эту строку из следующих с правильными коэффициентами получаем, что  $a_{*,j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Кроме того, надо занулить коэффициенты выше, буде такие найдутся (они будут в последующих шагах индукции). Таким образом, дальше (к следующим строкам матрицы) можно применить индукцию — она оборвётся либо когда закончатся строки, либо останутся только строки из нулей.

□

**Следствие 1.4.1** (Комбинаторная эквивалентность). *Всякую матрицу преобразованиями над строками и перестановкой столбцов можно привести к следующему виду (ступенчатый вид):*

$$\forall x \in M(m, n, K), \exists h \in GE(m, K), w \in W_n : hxw = \left( \begin{array}{c|c} e & * \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

где  $e$  — квадратная матрица некоего размера  $r \times r$ , а остальные блоки — произвольного размера.

Таким образом, две матрицы комбинаторно эквивалентны, если одна может быть получена из другой элементарными преобразованиями над строками и перестановкой столбцов, или, что аналогично, они обе могут быть приведены к одному ступенчатому виду.

## Лекция III

21 февраля 2023 г.

### 1.4.1 Элементарная эквивалентность матриц

В этом параграфе  $K$  опять-таки поле.

**Теорема 1.4.2.**  $x \in M(m, n, K) \Rightarrow \exists g \in GE(m, K), h \in GE(n, K) : gxh = \left( \begin{array}{c|c} e & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$  — окаймлённая единичная матрица размера  $r \times r$ .

*Доказательство.* В предыдущем вопросе мы доказали, что можно подобрать такие  $g, w : gxw$  — окаймлённая единичная матрица, у которой справа сверху мусор. Этот мусор можно вынести, поочерёдно вычитая столбцы слева (в которых все элементы равны 0, кроме одного — 1), домноженные на правильный коэффициент.  $\square$

Две матрицы элементарно эквивалентны, если ни могут быть приведены к одному окаймлённому виду.

Две матрицы  $x, y \in M(m, n, K)$  строго элементарно эквивалентны, если  $\exists g \in E(m, K), h \in E(n, K) : y = gxh$ , то есть разрешены только элементарные трансвекции первого рода.

**Теорема 1.4.3.**  $x \in M(m, n, K) \Rightarrow \exists g \in E(m, K), h \in E(n, K) : gxh$  — либо окаймлённая единичная матрица  $r \times r$ , либо  $d_m(\varepsilon)$  (в случае  $m = n = r$ ):

$$gxh = \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c|c} e & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \\ d_m(\varepsilon) \end{array} \right]$$

*Замечание.* Такой  $\varepsilon$  равен определителю (определителю Дьёдоне) матрицы  $x$ ,  $\det(x)$  (либо если матрица не строго эквивалентна псевдоотражению, то  $\det(x) = 0$ ). К сожалению, такой способ определить определитель не обобщается даже на кольца (даже коммутативные).

*Доказательство.* Вспомним доказательство предыдущей теоремы о комбинаторной эквивалентности матриц, и применим к нему лемму о  $d_i(\varepsilon)d_j(\varepsilon^{-1}) \in E(n, K)$ . Таким образом можно всякий раз кроме последней строки применять эту лемму, и обойтись преобразованиями первого типа, чтобы выставить все, кроме быть может одной, единицы в главной диагонали.  $\square$

*Замечание.* Всё вышеописанное применимо к телу. Для тела определитель Дьёдоне лежит в  $\{0\} \cup T^*/[T^*, T^*]$ .

## 1.4.2 Ранг матрицы над полем. Различные определения ранга над кольцом

### Тензорный и скелетный ранги

Рассмотрим матрицу над полем  $x \in M(m, n, K)$ .

Для коммутативного кольца  $R$  определим

**Определение 1.4.1** (Внешнее произведение, outer tensor). Матрица  $uv$ , где  $u \in R^m, v \in {}^n R$ .

Внешнее произведение — это матрица ранга 1.

**Определение 1.4.2** (Ранг матрицы  $x \in M(m, n, K)$ ). Наименьшее  $r$ , такое что существуют  $r$  матриц ранга 1, таких, что  $x$  равен их сумме. Обозначают  $rk(x)$ , иногда для определённости называют *тензорным* рангом.

**Теорема 1.4.4.** Ранг матрицы  $x \in M(n, m, R)$  равен наименьшему числу  $r$ , такому, что  $\exists y \in M(n, r, R)$  и  $z \in M(r, m, R)$ , такие, что

$$x = yz$$

Иногда такое  $r$  называют *скелетным* рангом, но скелетный ранг всегда равен тензорному рангу.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . Если  $x = u_1 v_1 + \dots + u_r v_r$ , то

$$x = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow. x = yz = ye^2 z = (y(e_{1,1} + \dots + e_{r,r})) \cdot ((e_{1,1} + \dots + e_{r,r})z) = y_{*,1} z_{1,*} + \dots + y_{*,r} z_{r,*}. \quad \square$$

### Строчный и столбцовый ранги

**Определение 1.4.3** (Строчный ранг матрицы,  $\text{rk}(x)$ ). Ранг модуля, порождённого строками  $x$ , если этот модуль **свободен**.

**Определение 1.4.4** (Столбцовый ранг матрицы,  $\text{crk}(x)$ ). Ранг модуля, порождённого столбцами  $x$ , если этот модуль **свободен**.

*Замечание.* Строчный ранг и столбцовый не обязаны существовать. Для коммутативного кольца если оба существуют, то они равны. В таком случае их общее значение называют *внешним* рангом,  $\text{ork}(x)$ .

*Интересный факт.* Внешний ранг всегда не меньше тензорного ранга.

**Теорема 1.4.5.** Если  $K$  — поле, то тензорный ранг матрицы совпадает с её строчными и столбцовыми рангами, а ещё равен  $r$  из теоремы о комбинаторной эквивалентности матриц (следствие 1.4.1).

*Доказательство.* Переходя  $x \rightsquigarrow gx$ , где  $g \in GE(m, K)$  — элементарная матрица, мы переходим к пространству строк, содержащемуся в пространстве строк  $x$ .

Так как  $g$  обратимо, то пространства строк совпадают. Аналогично для столбцов,  $\text{crk}(x) = \text{crk}(xh)$ , и пространства столбцов совпадают.

Заметим, что преобразований над строками достаточно, чтобы получить эшелонированную матрицу с единичным блоком  $r \times r$ , то есть  $r$  линейно независимых строк. Применив далее преобразования над столбцами, приведём матрицу к каноническому виду — окаймлённой единичной, причём ранг её будет тот же  $r$ .

Если же аналогичные действия проделать сначала над столбцами, то получится столбцово-эшелонированная матрица с единичным блоком  $\tilde{r} \times \tilde{r}$ . Так как канонический вид матрицы единственен (теорема 1.3.1), то  $r = \tilde{r}$ .

Отсюда получается, что  $r = \text{srk}(x) = \text{grk}(x) = \text{rk}(x)$ , где последнее — ранг линейного отображения. Кроме того, отсюда вытекают факты, что строчный ранг не меняется при столбцовых преобразованиях, а столбцовый — при строчных.  $\square$

*Замечание.* Без использования понятия о ранге линейного отображения можно так доказать то, что элементарные преобразования над строчками не меняют и столбцовый ранг тоже: если какое-то подмножество столбцов было линейно зависимо:  $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_s u_s = 0$ , то и после применения элементарного преобразования эта комбинация осталась нулевой:

$$\lambda_1(u_1 g) + \dots + \lambda_s(u_s g) = 0$$

**Определение 1.4.5** (Ранг по минору,  $\text{mrk}(x)$ ). Наибольший размер минора, имеющего ненулевой определитель.

*Интересный факт.*  $\text{mrk}(x) \leq \text{rk}(x)$ .

*Интересный факт* (Теорема о базисном миноре). Над полем  $\text{mrk}(x) = \text{rk}(x)$ .

### 1.4.3 Системы линейных уравнений

Пусть мы всё ещё работаем над полем.

Рассмотрим линейное отображение  $\phi : K^n \rightarrow K^m$ . Пусть  $u \in K^m$ .

**Определение 1.4.6** (Система линейных уравнений). Уравнение  $\phi(x) = u$ , где неизвестный  $x \in K^n$ .

Уравнение называется системой уравнений, потому что традиционно, выбрав базисы, можно запи-

сать  $\phi(x) = ax$ , где  $a \in M(m, n, K)$ ,  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ , и система уравнений приобретает вид  $ax = u$ .

Но людям раньше нравилось много писать, поэтому они записывали

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = u_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n = u_2 \\ \dots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = u_m \end{cases}$$

## Лекция IV

22 февраля 2023 г.

**Теорема 1.4.6.** Если  $x_0$  — какое-то (частное) решение уравнения  $\phi(x) = u$ , то множество всех решений — это  $x_0 + \text{Ker}(\phi)$ .

*Доказательство.* Любое (общее) решение  $x$  удовлетворяет  $\phi(x) = u$ , откуда  $\phi(x - x_0) = 0$ , и  $x \in x_0 + \text{Ker}(\phi)$ .  $\square$

Система  $\phi(x) = 0$  называется *однородной*.

Ядро, разумеется, является подпространством; при работе над полем оно свободно, то есть

$$\text{Ker}(\phi) = \langle v_1, \dots, v_d \rangle$$

**Факт 1.4.1.**  $d = n - r$ .

Этот базис  $v_1, \dots, v_d$  называется *фундаментальной системой решений*.

**Следствие 1.4.2.** Любое решение  $x$  имеет вид  $x_0 + v_1 \lambda_1 + \dots + v_d \lambda_d$ .

### 1.4.4 Векторная запись системы линейных уравнений. Теорема Кронекера — Капелли

На самом деле теорема Кронекера — Капелли — очевидный факт, который Капелли, записывая, назвал *теорема Кронекера*, что потом при ссылках преобразовалось в текущее название.

$$a = (a_{*,1} \quad \dots \quad a_{*,n}) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Векторная запись системы линейных уравнений  $a_{*,1}x_1 + \dots + a_{*,n}x_n = u$ .

Является ли вектор  $u$  линейной комбинацией векторов  $a_{*,1}, \dots, a_{*,n}$ ?

**Теорема 1.4.7** (Кронекер — Капелли). Ответ на этот вопрос известен: когда  $u \in \langle a_{*,1}, \dots, a_{*,n} \rangle \iff \langle a_{*,1}, \dots, a_{*,n} \rangle = \langle a_{*,1}, \dots, a_{*,n}, u \rangle$ .

Иначе говоря, система  $ax = u$  совместна  $\iff \text{rk}(a) = \text{rk}(a|u)$ .

**Факт 1.4.2** (Дополнение к теореме Кронекера — Капелли). Система  $ax = u$  имеет единственное решение  $\iff \text{rk}(a) = \text{rk}(a|u) = n$ .

*Доказательство.* В этом случае  $\dim \text{Ker}(a) = \dim K^n - \dim \text{Im } a = 0$  и ядро нулевое.  $\square$

### 1.4.5 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Гаусс, может, этим методом и не решал системы, ну да ладно.

$$ax = u \quad a \in M(m, n, K) \quad x \in K^n \quad u \in K^m$$

Для любого  $g \in GL(m, K) = GE(m, K)$  умножение на матрицу слева приводит к эквивалентной системе  $gax = gu$ . Также можно перенумеровать неизвестные:

$$(gaw)(w^{-1}x) = gu, \quad w \in W_n$$

Раньше было доказано (следствие 1.4.1), что можно подобрать такие  $g \in GE(m, K), w \in W_n$ , что  $gaw$  имеет ступенчатый вид:  $(gaw|gu) = \left( \begin{array}{cc|c} e & * & * \\ 0 & 0 & \delta \end{array} \right), \delta \in \{0, 1\}^{m-r}$ . Система совместна  $\iff \delta = 0$ . Таким образом, неизвестные разбились на 2 группы: *главные*  $x_1, \dots, x_r$  и *свободные*  $x_{r+1}, \dots, x_n$ .

Систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} x_1 + & c_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{1,n}x_n = d_1 \\ \dots & \\ x_r + & c_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{r,n}x_n = d_r \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{1,r+1} \\ \vdots \\ c_{r,r+1} \end{pmatrix} x_{r+1} - \dots - \begin{pmatrix} c_{1,n} \\ \vdots \\ c_{r,n} \end{pmatrix} x_{r+1}$$

В качестве частного решения можно взять решение при занулённых свободных переменных, а в качестве базиса ядра — решения, принимая каждую свободную переменную по очереди единицей:

$$\begin{pmatrix} d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{1,n}x_n \\ \vdots \\ d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{r,n}x_n \\ \hline x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x_{r+1} + \dots + \begin{pmatrix} -c_{1,n} \\ \vdots \\ -c_{r,n} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} x_n$$

### 1.4.6 Определитель по Вейерштрассу

Пусть  $x \in M(n, R)$  — матрица над коммутативным кольцом.

В определении по Вейерштрассу матрица фигурирует, как строка столбцов  $x = (x_{*,1}, \dots, x_{*,n})$ .

**Определение 1.4.7** (Определитель по Вейерштрассу).  $\text{Det} : \underbrace{R^n \times \dots \times R^n}_n \rightarrow R$  со следующими свойствами.

1. Полилинейность:  $\text{Det}$  линейно по каждому аргументу при фиксированных остальных.
2. Антисимметричность: если два столбца совпали, то определитель — нуль.
3. Нормированность:  $\text{Det}(e_1, \dots, e_n) = \text{Det}(e) = 1$ .

Существует ли такой определитель? (Да, например, определитель Лейбница (определение 1.4.13))

Единственен ли он? (Да: (теорема 1.4.13))

**Лемма 1.4.1.** *Определитель не меняется при элементарных преобразованиях над столбцами.*

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \text{Det}(x \cdot t_{r,s}(\xi)) &= \text{Det}(x_{*,1}, \dots, x_{*,r}, \dots, x_{*,s} + x_{*,r}\xi, \dots, x_{*,n}) = \\ &= \text{Det}(x_{*,1}, \dots, x_{*,r}, \dots, x_{*,s}, \dots, x_{*,n}) + \underbrace{\text{Det}(x_{*,1}, \dots, x_{*,r}, \dots, x_{*,r}, \dots, x_{*,n})}_0 \xi \end{aligned} \quad \square$$

**Лемма 1.4.2** (Кососимметричность определителя). *При перестановке двух столбцов местами определитель меняет знак.*

*Доказательство.* Обозначим  $F(u_r, u_s) := \text{Det}(u_1, \dots, u_r, \dots, u_s, \dots, u_n)$ .

В силу линейности определителя,  $0 = F(u_r + u_s, u_r + u_s) = \underbrace{F(u_r, u_r)}_0 + F(u_r, u_s) + F(u_s, u_r) + \underbrace{F(u_s, u_s)}_0$ . □

*Замечание.* Кососимметричность следует из антисимметричности, а обратное верно только если 2 — не делитель 0 (и  $2 \neq 0$ ).

**Лемма 1.4.3.** *Если один из столбцов является линейной комбинацией остальных, то определитель равен 0.*

### 1.4.7 Знак перестановки. Определение через декремент

**Определение 1.4.8** (Декремент). Любая перестановка представима в виде произведения независимых циклов (включая тривиальные).

$$\forall \pi \in S_n : \quad \pi = \rho_1 \cdot \dots \cdot \rho_m$$

**Определение 1.4.9** (Орбита перестановки). Множество  $\{k, \pi(k), \pi(\pi(k)), \dots\} = \{\pi^l(k) | l \in \mathbb{Z}\}$  Так как перестановка обратима (является биекцией), то любые две различные орбиты не пересекаются.

*Замечание.* Количество независимых циклов  $\pi$  — количество орбит  $\pi$ .

**Определение 1.4.10** (Декремент  $\pi$ ).  $\text{decr}(\pi) \stackrel{\text{def}}{=} n - m$ , где  $\pi \in S_n$ , а  $m$  — количество независимых циклов (или орбит)  $\pi$ .

Если  $\{1, \dots, n\} = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_m$ , где  $X_1, \dots, X_m$  — орбиты перестановки, то декремент — это сумма  $\sum_{i=1}^m (|X_i| - 1)$ .

**Определение 1.4.11** (Знак перестановки).  $\text{sgn}(\pi) = (-1)^{\text{decr}(\pi)}$

**Теорема 1.4.8.**  $\text{decr}(\pi)$  — наименьшее количество транспозиций, произведение которых в некотором порядке равно  $\pi$ .

*Доказательство.* Давайте следить за длиной конкретного разложения перестановки по системе образующих транспозиций.

База:  $\text{decr}(\text{id}) = n - n = 0$ .

Переход: Всякое применение транспозиции меняет декремент на 1 (если она меняет местами элементы одного цикла  $\pi$ , то декремент увеличивается, а если из разных — то уменьшается).

В самом деле, если элементы из одного цикла меняются местами, то цикл разлагается на 2: для  $p < q$ :  $(i_p i_q)(i_1 i_2 \dots i_r) = (i_1 \dots i_{p-1} i_q \dots i_r) \cdot (i_p i_{p+1} \dots i_{q-1})$ .

Если же местами меняются элементы разных циклов, то это вычисление получается домножением равенства выше на  $(i_p i_q)$  слева:  $(i_1 i_2 \dots i_r) = (i_p i_q)(i_1 \dots i_{p-1} i_q \dots i_r) \cdot (i_p i_{p+1} \dots i_{q-1})$ .



□

## 1.4.8 Знак перестановки. Определение через инверсии

Вспользуемся тем, что  $S_n = \langle (ij), i + 1 = j \rangle$ .

**Определение 1.4.12** ( $i < j$  образуют инверсию в перестановке  $\pi \in S_n$ ).  $\pi_i > \pi_j$ .

Обозначим за  $\text{inv}(\pi)$  количество инверсий в перестановке  $\pi$ .

**Теорема 1.4.9.**  $\text{sgn}(\pi) = (-1)^{\text{inv}(\pi)} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}$ .

Ещё можно сказать, что количество инверсий равняется минимальному количеству фундаментальных транспозиций, произведение которых в некотором порядке даёт  $\pi$ .

*Доказательство.* Несложно проверить, что всякая фундаментальная транспозиция, после домножения на перестановку (неважно, слева или справа), меняет количество инверсий в ней на  $\pm 1$ .

А именно, при домножении  $\pi$  на транспозицию  $(ij)$  слева происходит смена  $\pi(i)$  и  $\pi(j)$ , пара индексов  $i$  и  $j$  либо перестаёт, либо начинает образовывать инверсию. Кроме того, все инверсии  $i, k$  меняются на инверсии  $j, k$  и наоборот, так как относительное положение индекса  $k$  относительно  $i$  или  $j$  не поменялось (транспозиция фундаментальная, поэтому  $|i - j| = 1$ ).

При домножении  $\pi$  на транспозицию  $(xy)$  справа происходит смена  $\pi(i)$  и  $\pi(j)$  где  $\pi(i) = x, \pi(j) = y$ , пара индексов  $i$  и  $j$  либо перестаёт, либо начинает образовывать инверсию. Остальные инверсии остаются прежними, так как  $|x - y| = 1$ . □

Без доказательства существования знак ещё можно определить следующим образом:

**Теорема 1.4.10.** Для  $n \geq 2$  существуют ровно два гомоморфизма  $\phi : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ . Это тождественный 1 и  $\text{sgn}$ .



*Доказательство.*  $\{\pm 1\}$  — абелева группа. Пусть  $\pi \sim \sigma \in S_n \iff \phi(\pi) = \phi(\sigma)$ .

При сопряжении аргумента  $\phi(\pi)$  не меняется:  $\phi(\sigma\pi\sigma^{-1}) = \phi(\sigma)\phi(\pi)\phi(\sigma)^{-1} = \phi(\pi)$ .

Так как все транспозиции сопряжены, то  $\phi(\tau) = \text{const}$  для всех транспозиций  $\tau$ .

Если  $\phi(\tau) = 1$ , то гомоморфизм — тождественная единица, иначе  $\phi(\tau) = -1$ , и  $\phi \equiv \text{sgn}$ .  $\square$

### 1.4.9 Знакопеременное определение определителя

Пусть  $x \in M(n, R)$ , где  $R$  — коммутативное кольцо.

**Определение 1.4.13** (Определитель по Лейбницу).  $\det(x) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \prod_{j=1}^n x_{j, \pi(j)}$ .

**Лемма 1.4.4** (Общее правило знаков). *Слагаемое  $x_{\pi(1), \rho(1)} \cdot \dots \cdot x_{\pi(n), \rho(n)}$  входит в сумму со знаком  $\text{sgn}(\pi) \cdot \text{sgn}(\rho)$ .*

*Доказательство.* В коммутативном кольце  $x_{\pi(1), \rho(1)} \cdot \dots \cdot x_{\pi(n), \rho(n)} = x_{1, \rho(\pi^{-1}(1))} \cdot \dots \cdot x_{n, \rho(\pi^{-1}(n))}$ .  $\square$

Свойства транспонирования:

1.  $x^{tt} = x$
2.  $(x + y)^t = x^t + y^t$
3.  $(xy)^t = y^t \cdot x^t$ .

Данному набору свойств удовлетворяет  $(x^t)_{j,i} \stackrel{\text{def}}{=} x_{i,j}$ . Транспонирование  $^t : M(n, R) \rightarrow M(n, R^o)$ .

**Теорема 1.4.11.**  $\det(x^t) = \det(x)$ .

*Доказательство.* Согласно правилу знаков  $\det(x^t) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \prod_{j=1}^n x_{\pi(j), j} = \det(x)$ .  $\square$

Для некоммутативного кольца  $R$  это неверно:

*Пример.* Определим алгебру Вейля  $W_1(K) = K\langle x, d \rangle / ([d, x] = 1)$  — алгебра над полем  $K$ , где  $d, x$  не коммутируют, и взят фактор по отношению  $[d, x] = 1$ . Алгебра дифференциальных операторов некоммутативна.

Говорят, в квантовой механике активно используется  $W_n(K)$ .

Если посчитать  $\text{row det} \begin{pmatrix} d & d \\ x & x \end{pmatrix} = dx - xd = 1$ .

В другую сторону:  $\text{col det} \begin{pmatrix} d & d \\ x & x \end{pmatrix} = dx - dx = 0$ .

В самом деле, столбцы линейно зависимы, а строки — нет.

## Лекция V

1 марта 2023 г.

### 1.4.10 Существование определителя (удовлетворяющего условиям Вейерштрасса)

**Теорема 1.4.12.** Определитель по Лейбницу удовлетворяет условиям Вейерштрасса

*Доказательство.*

- Линейность по столбцам. Пусть  $x_{*,r} = u + v$ . Тогда

$$\det(x) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) x_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot \underset{\substack{\parallel \\ (u+v)_{\pi(r)}}}{x_{\pi(r),r}} \cdot \dots \cdot x_{\pi(n),n}$$

В силу дистрибутивности кольца можно раскрыть скобки  $(a(b+c)d = (ab+ac)d = abd + acd)$ :

$$\det(x) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) x_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot u_{\pi(r)} \cdot \dots \cdot x_{\pi(n),n} + \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) x_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot v_{\pi(r)} \cdot \dots \cdot x_{\pi(n),n}$$

Аналогично можно выносить константу, домноженную на произвольный столбец.

- Если два столбца, пусть  $x_{*,r}$  и  $x_{*,s}$ , совпадают, то определитель равен 0:

$$\det(x) = \sum_{\pi \in A_n} x_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot x_{\pi(r),r} \cdot \dots \cdot x_{\pi(s),s} \cdot \dots \cdot x_{\pi(n),n} - \sum_{\substack{\pi \in (rs) \cdot A_n \\ \parallel \\ S_n \setminus A_n}} x_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot x_{\pi(r),r} \cdot \dots \cdot x_{\pi(s),s} \cdot \dots \cdot x_{\pi(n),n}$$

В силу равенства столбцов  $x_{*,r}$  и  $x_{*,s}$  в левой сумме все слагаемые совпадают со слагаемыми в правой сумме.

- Нормированность определителя:  $\det(e) = 1$ . Несложно видеть даже большее: определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$$

□

#### 1.4.11 Единственность определителя (удовлетворяющего условиям Вейерштрасса)

**Теорема 1.4.13.** Никакое другое отображение, кроме определителя Лейбница, не удовлетворяет условиям определителя Вейерштрасса.

*Доказательство.* Всякий столбец раскладывается по столбцовому базису  $\{e_i\}_{i=1..n}$ :

$$u_j = e_1 x_{1,j} + \dots + e_n x_{n,j}$$

Рассмотрим произвольный определитель Вейерштрасса  $\operatorname{Det}$ , и разложим его аргументы по столбцовому базису:

$$\begin{aligned} \operatorname{Det}(u_1, \dots, u_n) &= \operatorname{Det}((e_1 x_{1,1} + \dots + e_n x_{n,1}), \dots, (e_1 x_{1,n} + \dots + e_n x_{n,n})) = \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \operatorname{Det}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \cdot x_{i_1,1} \cdot \dots \cdot x_{i_n,n} = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{Det}(e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)}) \cdot x_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot x_{\pi(n),n} \end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что получили определение определителя по Лейбницу. В самом деле,  $\operatorname{Det}(e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)})$  равен знаку перестановки, так как из антисимметричности следует кососимметричность, и  $\operatorname{Det}(e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)})$  равен с точностью до знака  $\det(e)$ , а знак определителя — чётность декремента  $\pi$ . □

### 1.5 Мультипликативность определителя

$$\det(xy) = \det(x) \det(y)$$

### 1.5.1 Блочные матрицы

Рассмотрим матрицу из  $M(m, n, R)$ .

Пусть  $\mu = (m_1, \dots, m_r)$  — разбиение числа  $m$ , то есть  $m_1 + \dots + m_r = m$ , и  $\nu = (n_1, \dots, n_s)$  — разбиение  $n$ .

Разобьём элементы матрицы в соответствии с разбиением:

$$\begin{matrix} & n_1 & \dots & n_s \\ m_1 & \left( \begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array} \right) \\ \vdots & & & \\ m_r & \left( \begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array} \right) \end{matrix}$$

Подматрицу  $x^{i,j} \in M(m_i, n_j, R)$  называют *блок матрицы*  $x$  в позиции  $(i, j)$  для  $i \in [1, r], j \in [1, s]$ .

#### Операции над блочными матрицами

1. Сложение.

Рассмотрим две матрицы  $x, y$  с одинаковым разбиением на блоки.

Тогда сумма определяется поблочно  $(x + y)^{i,j} = x^{i,j} + y^{i,j}$ .

2. Умножение. Пусть  $x \in M(l, m, R), y \in M(m, n, R), \lambda = (l_1, \dots, l_q)$  — разбиение  $l$ .

Рассмотрим  $(\lambda, \mu)$  разбиение  $x$  и  $(\mu, \nu)$  разбиение  $y$ .

Тогда произведение определяется поблочно:

$$(x \cdot y)^{i,k} = \sum_{j=1}^r x^{i,j} \cdot y^{j,k}$$

Важнейший частный случай — разбиения на равные слагаемые. Так, квадратную матрицу из  $M(m \cdot n, R)$  можно разбить на  $m \times m$  блоков размера  $n \times n$ :  $M(m \cdot n, R) = M(m, M(n, R))$ .

### 1.5.2 Определитель блочно треугольной матрицы

**Теорема 1.5.1.** Рассмотрим матрицу  $x = \left( \begin{array}{c|c} y & * \\ \hline 0 & z \end{array} \right) \in M(n, R)$ . Для определённости можно положить  $y \in M(m, R), z \in M(n - m, R)$ .

Утверждается, что  $\det(x) = \det(y) \det(z)$ .

*Доказательство.* Определим подгруппы Юнга в  $S_n$ . Пусть  $\mu = (m_1, \dots, m_r)$  — разбиение  $m$ . Тогда  $\pi$  лежит в подгруппе Юнга, соответствующей разбиению  $\mu$ , если  $\forall k = 1..r : \pi(i) \in m_k \iff i \in m_k$ . Здесь запись  $i \in m_k$  означает, что  $\sum_{j=1}^{k-1} m_j < i \leq \sum_{j=1}^k m_j$ .

Иными словами, подгруппы Юнга не перемешивают элементы вне разбиения.

Такая подгруппа Юнга изоморфна  $S_{m_1} \times \dots \times S_{m_k}$ .

Для удобства будем рассматривать подгруппы Юнга размера 2: для разбиения  $n = (m, n - m)$ . Здесь определение упрощается до  $i \leq m \iff \pi(i) \leq m$ .

Итак, посчитаем определитель  $x$ . Заметим, что в формуле

$$\sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) x_{1, \pi(1)} \cdot \dots \cdot x_{n, \pi(n)}$$

суммирование можно проводить только по перестановкам из подгруппы Юнга для  $(m, n - m)$ .

В самом деле, по принципу Дирихле, если какая-то из первых  $m$  строчек попала не в первый из  $m$  столбцов, то тогда какой-то из них остался свободен, и в него попадёт что-то из следующих строчек, то есть конкретное произведение даст 0. В соответствии с этим, будем суммировать по не  $\pi \in S_n$ , а по  $(\rho, \sigma) \in S_m \times S_{n-m}$ .

$$\sum_{(\rho, \sigma) \in S_m \times S_{n-m}} \operatorname{sgn}(\rho) x_{1, \rho(1)} \cdots x_{m, \rho(m)} \cdot \operatorname{sgn}(\sigma) x_{m+1, m+\sigma(1)} \cdots x_{m+(n-m), m+\sigma(n-m)} = \det(y) \det(z)$$

□

**Следствие 1.5.1.** Для любого квадратного разбиения матрицы на блоки  $(r = s)$ , такого, что элементы ниже главной диагонали — нуль-матрицы, определитель равен произведению блочных подматриц на главной диагонали.

### 1.5.3 Мультипликативность определителя

Пусть  $x, y \in M(n, R)$ .

**Теорема 1.5.2.**  $\det(xy) = \det(x) \det(y)$

*Доказательство.* Рассмотрим блочную матрицу  $\begin{pmatrix} y & e \\ 0 & x \end{pmatrix}$ , и домножим её слева на  $\begin{pmatrix} e & 0 \\ -x & e \end{pmatrix}$  (это трансвекция, прибавляющая ко второй строчке первую, домноженную на  $-x$ ):

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ -x & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & e \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & e \\ -xy & 0 \end{pmatrix}$$

Так как это элементарное преобразование, то определитель не поменялся. Сделаем ещё пару пассов руками:

$$\begin{pmatrix} y & e \\ -xy & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -e \\ e & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & -y \\ 0 & xy \end{pmatrix}$$

Это тоже произведение парочки элементарных преобразований первого типа, значит,  $\det(y) \det(x) = \det(xy)$ , и из коммутативности кольца  $R$ , в котором мы считаем определитель, доказательство завершено. □

## Лекция VI

7 марта 2023 г.

### 1.5.4 Миноры, разложение по строке, определитель по Лапласу

$R$  — коммутативное кольцо,  $x \in M(m, n, R)$ . Выберем  $I \subset \underline{m} = \{1, \dots, m\}$ ;  $J \subset \underline{n} = \{1, \dots, n\}$  так, что  $|I| = |J| = d$ . Рассмотрим сужение матрицы  $x$  на  $I \times J$ , как матрицу из  $M(d, R)$ .

**Определение 1.5.1** (Минор  $M_{I,J}(x)$ ). Определитель матрицы  $(x_{i,j})_{i \in I, j \in J}$ .

Если же  $m - |I| = n - |J|$ , то  $\det(x_{i,j})_{i \notin I, j \notin J}$  — *дополнительный минор*, обозначается  $\overline{M}_{I,J}$ .

Особенно важен случай  $m = n$ . Здесь определён дополнительный минор

$$\overline{M}_{i,j} = \det(\text{вычеркнули из } x \text{ строку } i \text{ и столбец } j)$$

**Определение 1.5.2** (Алгебраическое дополнение к элементу  $x_{i,j}$ ).  $A_{i,j}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{i+j} \overline{M}_{i,j}(x)$ . Можно также сказать, что это определитель матрицы, где  $x_{*,j}$  и  $x_{i,*}$  заменили на нули, но  $x_{i,j}$  — на единицу.

**Теорема 1.5.3** (Разложение по строке). Для матрицы  $x \in M(n, R)$ :

$$\forall i_1, i_2 \in [1, n] : \sum_{j=1}^n x_{i_1, j} A_{i_2, j} = \begin{cases} \det(x), & i_1 = i_2 \\ 0, & i_1 \neq i_2 \end{cases}$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $i_1$ -ю строку матрицы  $x$ . Разложим её по строчному базису  $x_{i_1,*} = x_{i_1,1}f_1 + \dots + x_{i_1,n}f_n$ .

Разложим определитель в сумму  $n$  слагаемых, где  $i_1$ -я строка разложена по строчному базису.

Дальше мы можем переставлять строчки по одной, получив форму разложения по строке для  $i_1 = i_2$ .

Если же  $i_1 \neq i_2$ , то мы посчитали определитель матрицы, у которой на место строки  $i_2$  поставили строку  $i_1$ , то есть определитель матрицы с равными строками — 0.  $\square$

**Определение 1.5.3** (Определитель по Лапласу (индуктивно)).  $\det(x) = x_{1,1}A_{1,1}(x) + \dots + x_{1,n}A_{1,n}(x)$ .

*Замечание.* Вместо строк можно раскладывать по столбцам.

*Интересный факт* (Лаплас). Можно раскладывать не по одной строке, а по нескольким (по  $k$  строкам). Минор определяется выбором  $k$  столбцов.

$$\det(x) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} M_{\{i_1, \dots, i_k\} \times \{j_1, \dots, j_k\}} \cdot \overline{M}_{\{i_1, \dots, i_k\} \times \{j_1, \dots, j_k\}}$$

## 1.5.5 Формула Крамера, теорема Крамера

Формула Крамера получает по матрице её обратную.

Пусть  $x \in M(n, R)$ . Когда  $x$  обратима?

**Определение 1.5.4** (Присоединённая матрица).  $\text{adj}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (A_{i,j}(x))_{1 \leq i, j \leq n}^t = (A_{j,i}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$

**Лемма 1.5.1.**  $x \cdot \text{adj}(x) = \text{adj}(x) \cdot x = \det(x) \cdot e$ .

*Доказательство.* Раскрыть произведение матриц в сумму и применить теорему Лапласа.  $\square$

**Теорема 1.5.4** (формула Крамера). Матрица  $g$  обратима, если и только если  $\det(g) \in R^*$ . Если  $\det(g) \in R^*$ , то  $g^{-1} = \frac{1}{\det(g)} \text{adj}(g)$ .

*Доказательство.* Если  $g$  обратима, то  $\exists g^{-1} \in M(n, R)$ , откуда  $1 = \det(e) = \det(gg^{-1}) = \det(g) \cdot \det(g^{-1})$ , получается,  $\det(g)$  обратим.

Если  $\det(g) \in R^*$ , то  $\exists g^{-1} = \frac{1}{\det(g)} \text{adj}(g)$ .  $\square$

**Теорема 1.5.5** (Крамер). В поле  $K$  система  $ax = u$  ( $a \in M(n, K), u \in K^n$ ) имеет единственное решение  $\iff \det(a) \neq 0$ . Если  $\det(a) \neq 0$ , то это решение задаётся формулой  $x = a^{-1}u$ .

*Доказательство.* Если  $\det(a) \neq 0$ , то условия эквивалентны:  $ax = u \iff x = a^{-1}u$ .

Если в поле  $\det(a) = 0$ , то  $\text{rk}(a) < n$ . Тогда либо  $\text{rk}(a|u) = \text{rk}(a)$ , откуда по теореме Кронекера — Капелли  $ax = u$  совместна, но не определена, либо  $\text{rk}(a|u) > \text{rk}(a)$ , откуда система несовместна.  $\square$

## 1.6 Определители некоторых матриц

Даны  $n$  функций  $f_1, \dots, f_n : R \rightarrow R$  и  $n$  аргументов  $x_1, \dots, x_n$ .

Чаше всего полезны определители вида  $\det \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{pmatrix}$  — *альтернанты*.

Иногда также случаются определители вида  $\det \begin{pmatrix} f(x_1, x_1) & \dots & f(x_1, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_n, x_1) & \dots & f(x_n, x_n) \end{pmatrix}$

### 1.6.1 Определитель Вандермонда

**Определение 1.6.1** (Матрица Вандермонда). Альтернант для  $f_i : x \mapsto x^{i-1}$

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

**Теорема 1.6.1.**  $\det(V(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$ .

*Доказательство.*

- $\det(V(x_1, \dots, x_n))$  — многочлен от переменных  $x_1, \dots, x_n$ .
- Его степень  $0 + 1 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ .
- Профакторизуем по отношению  $(x_i - x_j)$ , отображая кольцо многочленов от  $n$  переменных в кольцо многочленов от  $n-1$  переменных. Строчки  $x_{i,*}$  и  $x_{j,*}$  стали равны, значит,  $(x_i - x_j) \mid \det(V(x_1, \dots, x_n))$ .
- Все многочлены вида  $x_i - x_j$  для  $i > j$  взаимно просты, значит,  $\prod_{i>j} (x_i - x_j) \mid \det(V(x_1, \dots, x_n))$ .  
Степень произведения тоже равна  $\frac{n(n-1)}{2}$ .
- Проверим, что константа ассоциированности между ними равна 1. Рассмотрим диагональное произведение  $1 \cdot x_2 \cdot x_3^2 \cdot \dots \cdot x_n^{n-1}$ . Входит в оба выражения со знаком  $+1$ .  $\square$

### 1.6.2 Пфаффианы

Пусть  $x \in M(n, K)$ .

**Определение 1.6.2** (Кососимметричная матрица). Матрица  $x$ , такая, что  $x^t = -x$ .

**Определение 1.6.3** (Антисимметричная матрица). Кососимметричная матрица  $x$ , такая, что  $\forall i \in [1, n] : x_{i,i} = 0$ .

*Пример.*

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$$

*Интересный факт.* Пусть  $x \in M(n, R)$  — антисимметричная матрица. Если  $n \equiv 1 \pmod{2}$ , то  $\det(x) = 0$ . Иначе  $n \equiv 0 \pmod{2}$ , тогда  $\det(x) \in R^2$ .

*Замечание.* Пфаффиан можно определить с точностью до знака, как корень из определителя.

**Определение 1.6.4** (Пфаффиан).  $\text{pf}(x)$  определён для антисимметричных матриц и удовлетворяет следующим свойствам:

1.  $\text{pf}(y \cdot x \cdot y^t) = \text{pf}(x) \cdot \det(y)$
2.  $\text{pf}(x \oplus y) = \text{pf}(x) \cdot \text{pf}(y)$ , где  $x \oplus y = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ .
3.  $\text{pf} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = +1$ .

*Интересный факт.*  $\det(x) = \text{pf} \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x^t & 0 \end{pmatrix}$ .

*Интересный факт.* Если  $x$  — порядка  $2n$ , то

$$\text{pf}(x) = \sum_{\pi \in S_{2n}} \text{sgn}(\pi) x_{\pi(1), \pi(2)} \cdot \dots \cdot x_{\pi(2n-1), \pi(2n)}$$

где сумма берётся по всем таким  $\pi$ , что  $\pi(2i-1) < \pi(2i)$ .

## Глава 2

# Многочлены

## Лекция VII

14 марта 2023 г.

В доказательстве вычисления определителя Вандермонда были два пробела, надо бы их восполнить (теорема 2.2.1).

### 2.1 Гомоморфизм эвалюации

Говоря простыми словами, подстановка элемента алгебры в многочлен.

Пусть  $R$  — коммутативное кольцо.

**Определение 2.1.1** ( $A$  — алгебра над  $R$ ). Кольцо  $A$  (часто ассоциативное, с  $1_A$ ), необязательно коммутативное, являющееся  $R$ -модулем, а ещё  $\forall x, y \in A, \lambda \in R$ : выполняется аксиома алгебры

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$

Несложно заметить вложение  $R \hookrightarrow A$ ;  $\lambda \mapsto \lambda \cdot 1_A$ . Оно вкладывает  $R$  в центр  $A$ :  $R \cdot 1_A \leq \text{Cent}(A)$ .

*Замечание.* Некоммутативность алгебры позднее будет крайне существенной, так как мы будем рассматривать  $A = M(m, R) = \text{End}_R(V)$ .

*Пример.* Рассмотрим цепочку вложений  $\mathbb{R} \leq \mathbb{C} \leq \mathbb{H}$ .  $\mathbb{C}$  и  $\mathbb{H}$  — алгебры над  $\mathbb{R}$ , но  $\mathbb{H}$  — **не**  $\mathbb{C}$ -алгебра,  $i \cdot j \neq j \cdot i$ .

Пусть  $f \in R[x]$ , обозначим  $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ .

**Определение 2.1.2** (Значение  $f$  в точке  $c \in A$ ). Обозначим  $f(c) = a_n c^n + \dots + a_1 c + a_0 \cdot 1_A$ .

*Замечание.* Интересно заметить, что мы пользовались более слабым условием, чем ассоциативность  $A$ : мы пользовались тем, что  $A$  — алгебра с ассоциативными степенями:

$$c^{i+j} = c^i \cdot c^j, \quad \text{что не зависит от разложения } i+j \text{ в сумму}$$

Зафиксируем  $f \in R[x]$ .

**Определение 2.1.3** (Полиномиальное отображение).

$$\tilde{f}: A \rightarrow A \quad c \mapsto f(c)$$

Зафиксируем  $c \in A$ .

**Определение 2.1.4** (Гомоморфизм эвалюации).

$$\text{ev}_c : R[x] \rightarrow A \quad f \mapsto f(c)$$

**Предложение 2.1.1.** Гомоморфизм эвалюации — гомоморфизм, то есть  $(f + g)(c) = f(c) + g(c)$  и  $(f \cdot g)(c) = f(c) \cdot g(c)$ .

*Замечание.* Коммутативность  $R$  действительно важна:

$$\begin{aligned} c^2 - ac - bc + ab &= \text{ev}_c(x^2 - (a + b)x + ab) = \\ &= \text{ev}_c((x - a)(x - b)) = \\ &= \text{ev}_c(x - a) \cdot \text{ev}_c(x - b) = (c - a)(c - b) = c^2 - ac - cb + ab \end{aligned}$$

Видим, что равенство выполняется, если и только если  $c$  коммутирует с  $b$ , где  $c \in A, b \in R$  — любые элементы.

**Определение 2.1.5** (Гомоморфизм  $R$ -алгебр). Отображение  $\phi : A \rightarrow B$ , такое, что  $\forall x, y \in A, \lambda \in R$ :

1.  $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$ .
  2.  $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ .
  3.  $\phi(1_A) = 1_B$ .
  4.  $\phi(\lambda x) = \lambda \phi(x)$ .
- } Унитарный гомоморфизм колец

Пусть  $\{*\}$  — произвольное одноэлементное множество, *синглетон*.

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \xrightarrow{* \mapsto x} & R[x] \\ & \searrow * \mapsto c & \swarrow \text{ev}_c \\ & A & \end{array}$$

**Теорема 2.1.1.** Кольцо многочленов  $R[x]$  обладает **универсальным свойством**: существует и единственен гомоморфизм  $R$ -алгебр  $R[x] \rightarrow A$ , делающий диаграмму выше коммутативной.

Это гомоморфизм эвалюации  $\text{ev}_c$ .

*Доказательство.* Существование уже доказано, единственность следует из определения гомоморфизма алгебр.  $\square$

Эту теорему можно принять за определение кольца многочленов от одной переменной: кольцо многочленов — такая  $R$ -алгебра, что, вложив  $R$  в произвольную  $R$ -алгебру  $A$ , останется ровно один способ ввести гомоморфизм из кольца многочленов в алгебру.

Тем не менее, это не совсем правда — само кольцо  $R$ , разумеется, является  $R$ -алгеброй с данным свойством. Точной формулировки я не нашёл.

## 2.2 Число корней многочлена над областью целостности

Пусть  $f \in R[x]$ , где  $R$  — область целостности.

**Определение 2.2.1** (Корень / нуль  $f$ ). Такой элемент  $c \in R$ , что  $f(c) = 0$ .

**Определение 2.2.2** (Кратность корня  $c$  многочлена  $f$ ). Число  $m \in \mathbb{N}_0$ , такое, что  $(x - c)^m \parallel f$ .

**Теорема 2.2.1** (Безу).  $f(c)$  — остаток от деления  $f$  на  $x - c$ .

$$f = (x - c)g + f(c) \quad \Rightarrow \quad f(c) = 0 \iff x - c \mid f$$

**Следствие 2.2.1.**  $c$  — корень  $f$  кратности  $m \iff f = (x - c)^m g$ , где  $g(c) \neq 0$ .



**Следствие 2.2.2** (Обобщённая теорема Безу). Для  $R$ , являющейся областью целостности:

Пусть  $c_1, \dots, c_s$  — различные корни  $f$  кратностей  $m_1, \dots, m_s$  соответственно. Тогда  $f = (x - c_1)^{m_1} \dots (x - c_s)^{m_s} \cdot g$ , где  $g(c_1), \dots, g(c_s) \neq 0$ .

*Доказательство.* Индукция по количеству различных корней, использующая при переходе теорему Безу.  $\square$

**Следствие 2.2.3.** У любого многочлена  $f \in R[x]$ , где  $R$  — область целостности — количество корней с учётом кратности не превосходит  $n$ .

*Контрпримеры* (Существование области целостности).

- $x^2 - 5x \in (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[x]$  имеет корни  $\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{5}$ .
- В булевом кольце  $R = (2^X, \triangle, \cap)$  все элементы — идемпотенты, все — корни  $x^2 - x$ .
- $R = M(2, R)$ . У многочлена  $x^2$  есть корень  $0$  кратности 2, есть корень  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- $R = \mathbb{H}$  — над телом кватернионов у многочлена  $x^2 + 1$  даже не 6 корней  $(\pm i, \pm j, \pm k)$ , а целая сфера, континуум корней. Здесь проблема не в делителях нуля, а в отсутствии коммутативности.

## 2.3 Формальное и функциональное равенство многочленов

Пусть  $f, g \in R[x]$ . *Формальное равенство* многочленов  $f = g$  — равенство всех коэффициентов — равенство элементов кольца многочленов.

Всякий многочлен определяет полиномиальную функцию вычисления значения.

**Определение 2.3.1** (Функциональное равенство многочленов).  $\tilde{f} = \tilde{g} \stackrel{def}{\iff} \forall c \in R : f(c) = g(c)$ .

**Теорема 2.3.1.** Для бесконечной области целостности  $R$ :

$$f = g \iff \tilde{f} = \tilde{g}$$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . Очевидно.

$\Leftarrow$ . Если  $\max(\deg f, \deg g) \leq n$ , и  $c_0, \dots, c_n \in R$  — попарно различные точки, то равенство  $\forall i : f(c_i) = g(c_i)$  влечёт равенство  $f = g$ .

В самом деле, разность  $f - g$  имеет степень не больше  $\max(\deg f, \deg g)$ , и обнуляется в  $n + 1$  точке.  $\square$

## 2.4 Задача интерполяции с простыми узлами

Пусть  $K$  — поле,  $c_0, \dots, c_n \in K$  — попарно различные элементы,  $b_0, \dots, b_n \in K$  — произвольные элементы.

**Теорема 2.4.1** (Задача Лагранжа). Существует и единственен многочлен степени не выше  $n + 1$ , решающий интерполяционную задачу с простыми узлами.

$$\begin{array}{c|cccc} x & c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ \hline f(x) & b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{array}$$

*Доказательство Ньютона — Грегори.* Индукция по  $n$ .  $\square$

*Доказательство Вандермонда.* Запишем систему уравнений относительно  $a_0, \dots, a_n$ .

$$\begin{aligned} f(c_0) &= a_n c_0^n + \dots + a_1 c_0 + a_0 = b_0 \\ &\dots \\ f(c_n) &= a_n c_n^n + \dots + a_1 c_n + a_0 = b_n \end{aligned}$$

Заметим, что так как все  $c_i$  различны, то определитель матрицы данной системы — определитель Вандермонда  $V(c_0, \dots, c_n)$ .

$\prod_{i>j} (c_i - c_j) \neq 0 \Rightarrow$  система имеет единственное решение.  $\square$

*Доказательство.* Решим задачу попроще:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & c_0 & \dots & c_i & \dots & c_n \\ \hline f(x) & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{array}$$

Её решением будет многочлен

$$f_i = \frac{(x - c_0) \cdot \dots \cdot \widehat{(x - c_i)} \cdot \dots \cdot (x - c_n)}{(c_i - c_0) \cdot \dots \cdot \widehat{(c_i - c_i)} \cdot \dots \cdot (c_i - c_n)}$$

Теперь можно просто взять линейную комбинацию:  $f = \sum_{i=0}^n b_i \cdot f_i$ .  $\square$

## Лекция VIII

15 марта 2023 г.

### 2.5 Локализация или кольца частных

Пусть  $K$  — поле.

Хотим вложить кольцо многочленов  $K[x]$  в какое-то поле  $K(x)$ .

Возьмём любое кольцо  $R$ , построим по нему поле частных  $Q(R)$ . Если  $R$  — область целостности, то всё тривиально, а если есть делители нуля, то чуть сложнее.

#### 2.5.1 Мультипликативные системы

Пусть  $R$  — произвольное коммутативное кольцо с единицей. Строить кольцо частных некоммутативного кольца можно, но намного сложнее.

Рассмотрим произвольное подмножество  $S \subset R$ .

**Определение 2.5.1** ( $S$  — мультипликативная система).

- Аксиома полугруппы:  $S$  замкнуто относительно умножения,  $\forall u, v \in S : uv \in S$ .
- Аксиома моноида:  $1 \in S$ .
- Аксиома нетривиальности:  $0 \notin S$ .

Мы собираемся сопоставить паре  $(R, S)$  кольцо, в котором элементы  $S$  обратимы — кольцо  $S^{-1}R$ .

*Примеры* (Мультипликативные системы).

- $S \leq R^*$  — тривиальная мультипликативная система.
- $S = \text{Reg}(R)$  — множество элементов, на которые можно сокращать. В частности, если  $R$  — область целостности, то  $\text{Reg}(R) = R \setminus \{0\}$ .

- Пусть  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$  — простой идеал:  $\forall xy \in \mathfrak{p} : (x \in \mathfrak{p} \vee y \in \mathfrak{p})$ . Тогда  $R \setminus \mathfrak{p}$  является мультипликативной системой.

В кольце  $(R \setminus \mathfrak{p})^{-1}R$  остался всего один максимальный идеал —  $\mathfrak{p}$ .

- Главная мультипликативная система. Рассмотрим  $s \in R \setminus \text{Nil}(R)$ . Где  $\text{Nil}(R) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)} \mathfrak{p}$   
 $(\text{Nil}(R) = \{x \in R \mid \exists m \in \mathbb{N} : x^m = 0\})$

В качестве множества  $S$  рассмотрим  $\langle 1, s, s^2, \dots \rangle$ . Это аналогично построению кольца десятичных дробей  $\mathbb{Z}[\frac{1}{10}] = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{5}]$ . Вообще, обращение двух (конечного числа) элементов  $s, t \in R$  равносильно обращению их произведения  $st$ .

## 2.5.2 Построение кольца частных

Обратимся к истокам: как строить дроби из множества  $\mathbb{Q}$ ? Это такие  $\frac{m}{n}$ , что  $n \neq 0$ .  $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \iff m_1 n_2 = m_2 n_1$ .

Рассмотрим произведение  $R \times S = \{(u, v) \mid u \in R, v \in S\}$ , где  $S$  — мультипликативная система.

Введём отношение эквивалентности  $(x, u) \sim (y, v)$ , если  $\exists w \in S : (xv - yu)w = 0$ . Напрашивающееся решение  $xv - yu = 0$  не соблюдает корректность: если  $(xv - yu)$  в новом кольце — не 0, то  $w$  нельзя обратить.

**Лемма 2.5.1.**  $\sim$  — отношение эквивалентности.

*Доказательство.* «Всё очевидно, кроме транзитивности. Но транзитивность тоже очевидна»

Пусть  $(x, u) \sim (y, v) \sim (z, w)$ . Тогда  $\exists s, t \in S$ :

$$\left. \begin{array}{l} (xv - yu)s = 0 \\ (yw - zv)t = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} | \cdot wt \\ | \cdot us \end{array} + \\ (xw - zu)vst = 0$$

□

**Определение 2.5.2** (Кольцо частных  $R$  относительно мультипликативной системы  $S$ ). Так построенное  $S^{-1}R \stackrel{\text{def}}{=} R \times S / \sim$  с операциями, определёнными ниже. Запись  $S^{-1}R$  здесь следует понимать, как неделимый символ.

Пара  $(x, u)$  содержится в классе эквивалентности, обозначаемом  $\frac{x}{u}$ .

Операции определены следующим образом:

- $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{xv + yu}{uv}$ .
- $\frac{x}{u} \cdot \frac{y}{v} = \frac{xy}{uv}$ .
- $1_{S^{-1}R} = \frac{1}{1}$ .

**Лемма 2.5.2.** Операции определены корректно.

*Доказательство.* Пусть  $\frac{x}{u} = \frac{x'}{u'}$ . Тогда  $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{x'}{u'} + \frac{y}{v}$ , так как

$$\begin{aligned} \frac{xv + yu}{uv} &= \frac{x'v + yu'}{u'v} \\ (xv + yu) \cdot (u'v) &= (x'v + yu') \cdot (uv) \\ \exists w = (xu' - x'u)w &= 0, \text{ так как } \frac{x}{u} = \frac{x'}{u'} \\ ((xv + yu)u'v - (x'v + yu')uv)w &= 0 \\ (xu' - x'u)v^2w &= 0 \text{ — сошлось} \end{aligned}$$

□

**Теорема 2.5.1.** Эти операции превращают  $S^{-1}R$  в коммутативное кольцо с единицей, и отображение  $\phi_S : R \rightarrow S^{-1}R$ ;  $x \mapsto \frac{x}{1}$  является гомоморфизмом колец. При этом  $\phi_S(S) \subset (S^{-1}R)^*$ .

Гомоморфизм  $\phi_S$  называется *гомоморфизм локализации*.

*Доказательство.* Проверка всех свойств — утомительное занятие, которое приведено не будет.

Если  $x \in S$ , то элемент  $\frac{x}{1}$  действительно обратим, так как  $\frac{x}{1} \cdot \frac{1}{x} = 1_{R^{-1}S}$ . □

### 2.5.3 Универсальное свойство кольца частных

Пусть  $S \subset R$  — мультипликативная система. Определим  $S^{-1}R$ .

Например, найдём гомоморфизм  $\psi : R \rightarrow A$ , где  $A$  — другое коммутативное кольцо с единицей. Если  $\psi(S) \leq A^*$ , то подходящее кольцо частных нашлось.

**Определение 2.5.3** (Кольцо  $S^{-1}R$ ). Коммутативное кольцо с единицей и гомоморфизмом  $\phi_S : R \rightarrow S^{-1}R$ , таким, что  $\phi_S(S) \subset (S^{-1}R)^*$ , обладающее универсальным свойством:  $\forall A$  — коммутативное кольцо с единицей,  $\forall \psi : R \rightarrow A$  — гомоморфизм, такой, что  $\psi(S) \subset A^*$ ,  $\exists!$  гомоморфизм  $\eta : S^{-1}R \rightarrow A$ , делающий диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\phi_S} & S^{-1}R \\ & \searrow \psi & \swarrow \eta \\ & A & \end{array}$$

Таким образом, всякий гомоморфизм  $\psi : R \rightarrow A$  пропускается через кольцо частных.

**Теорема 2.5.2.** Построенное в предыдущем параграфе кольцо дробей действительно обладает универсальным свойством.

*Доказательство.*  $S^{-1}R = \left\{ \frac{x}{u} \mid x \in R, u \in S \right\}$ . Определим гомоморфизм  $\eta : S^{-1}R \rightarrow A$  как  $\eta\left(\frac{x}{u}\right) = \psi(x)\psi(u)^{-1}$ .

Проверим, что он определён корректно:

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} \iff \exists w \in S : (xv - yu)w = 0 \Rightarrow (\psi(x)\psi(v) - \psi(y)\psi(u))\psi(w) = 0$$

На  $\psi(w)$  можно сократить, получаем что надо:

$$\psi(x)\psi(y)^{-1} = \psi(u)\psi(v)^{-1}$$

Проверим, что  $\eta$  — гомоморфизм.

$$\begin{aligned} \eta\left(\frac{x}{u} + \frac{y}{v}\right) &= \eta\left(\frac{xv + yu}{uv}\right) = \\ &= (\psi(x)\psi(v) + \psi(y)\psi(u))\psi(u)^{-1}\psi(v)^{-1} = \psi(x)\psi(u)^{-1} + \psi(y)\psi(v)^{-1} = \eta\left(\frac{x}{u}\right) + \eta\left(\frac{y}{v}\right) \end{aligned}$$

Осталось проверить единственность: возьмём любой гомоморфизм  $\eta'$ , делающий диаграмму коммутативной. Почему он равен  $\eta$ ?

Так как диаграмма коммутативна, то  $\eta'(\psi_S(x)) = \psi(x)$ , то есть  $\eta'\left(\frac{x}{1}\right) = \psi(x)$ .

Проверим совпадение  $\eta = \eta'$  для дроби  $\frac{x}{u}$ . Так как  $\psi(u) \in A^*$ , то  $\psi(x) = \eta'\left(\frac{x}{1}\right) = \eta'\left(\frac{x}{u}\right) \cdot \eta'\left(\frac{u}{1}\right) = \eta'\left(\frac{x}{u}\right)\psi(u)$ . Сократив на  $\psi(u)$  (оно обратимо в  $A$ ), действительно получаем  $\eta'\left(\frac{x}{u}\right) = \psi(x)\psi(u)^{-1}$ . Значит,  $\eta'$  действительно совпадает с  $\eta$ . □

*Замечание.* Воспользовавшись универсальным свойством, нетривиально (но можно, переходя к пределам в теории категорий) доказать, что кольцо частных существует. Но мы уже его построили в предыдущем параграфе, поэтому оно несомненно существует.

## 2.5.4 Кольцо частных в терминах элементов

**Определение 2.5.4** (Кольцо  $S^{-1}R$ ).  $S^{-1}R$  — кольцо вместе с гомоморфизмом  $\phi_S : R \rightarrow S^{-1}R$ , таким, что

1.  $\phi_S(S) \subset (S^{-1}R)^*$ .
2.  $\forall y \in S^{-1}R$  представим в виде  $y = \phi_S(x)\phi_S(u)^{-1}$ , где  $x \in R, u \in S$ .
3. Если  $\phi_S(x) = 0$ , то  $\exists u \in S : xu = 0$ .

**Теорема 2.5.3.** Построенное кольцо  $S^{-1}R$  (определение 2.5.2) обладает этими свойствами. Любое кольцо  $A$  с гомоморфизмом  $\psi : R \rightarrow A$ , обладающее этими свойствами, изоморфно  $S^{-1}R$ :

1.  $\psi(S) \leq A^*$
2.  $\forall y \in A, y = \psi(x)\psi(u)^{-1}$
3.  $\psi(x) = 0 \iff \exists u \in S : xu = 0$ .

## 2.5.5 Примеры колец частных

*Примеры.*

- $S \leq R^*$  — тривиальная мультипликативная система.  $S^{-1}R = R$ .
- $S = \text{Reg}(R)$ . В таком случае  $S^{-1}R = Q(R)$  — полное кольцо частных. Здесь выполнено вложение  $R \hookrightarrow Q(R)$ . Если  $R$  — область целостности, то  $\text{Reg}(R) = R \setminus \{0\}$ , тогда  $Q(R)$  — поле, *поле частных*.

Примеры полей частных:  $Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ ,  $Q(\mathbb{Z}[i]) = \mathbb{Q}[i]$ ,  $Q(K[x]) = K(x)$ ,  $Q(K[[x]]) = K((x))$ .

# Лекция IX

18 марта 2023 г.

Любое конечное число главных локализаций представимо в виде одной локализации — по их произведению: Если Любая локализация — предел главных локализаций. Здесь должно быть больше информации на эту тему.

## 2.6 Поле частных факториального кольца

$R$  — UFD,  $K = Q(R) = \left\{ \frac{x}{y} \mid x, y \in R, y \neq 0 \right\}$ .

**Теорема 2.6.1.** Всякий элемент  $Q(R)$  допускает представление в виде

$$up_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_s^{m_s}, \quad m_i \in \mathbb{Z}$$

в единственном виде, где  $p_i$  — попарно неассоциированные неприводимые элементы.

*Доказательство.*  $v_p\left(\frac{x}{y}\right) = v_p(x) - v_p(y)$ . □

$p$ -адические показатели обладают обычными свойствами:

1.  $v_p\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w}\right) = v_p\left(\frac{x}{y}\right) + v_p\left(\frac{z}{w}\right)$ .
2.  $v_p\left(\frac{x}{y} + \frac{z}{w}\right) \geq \min\left(v_p\left(\frac{x}{y}\right) + v_p\left(\frac{z}{w}\right)\right)$ .

Любопытно заметить, что  $R = \{x \in Q(R) \mid \forall p \in \text{Irr}(R) : v_p(x) \geq 0\}$ .

---

Пусть  $R \hookrightarrow A$ .

**Определение 2.6.1** ( $x \in A$  — целое над  $R$ ).  $x$  — корень многочлена  $f \in \mathbb{R}[t]$ , такого, что старший коэффициент  $\text{lc}(f) = 1$ . Наименьшая степень  $f$ , имеющего своим корнем  $x$ , называется *степенью*  $x$ .

*Интересный факт.* Множество целых над  $R$  образует кольцо.

Есть доказательство через тензорное произведение (сумму), есть — через симметрические многочлены и кронекеровское произведение (сумму).

В частности,  $\mathbb{A}$  — целые алгебраические числа над  $\mathbb{Z}$  (а просто алгебраические числа можно обозначить  $\overline{\mathbb{Q}}$ ).

**Определение 2.6.2** (Целозамкнутое кольцо  $R$ ). Любой элемент  $x \in Q(R)$ , являющийся целым над  $R$ , принадлежит  $R$ .

**Лемма 2.6.1** (Лемма Гаусса).  $R$  —  $UFD \Rightarrow R$  — целозамкнуто. В частности, кольцо  $\mathbb{Z}$  целозамкнуто, то есть  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{A} = \mathbb{Z}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\frac{x}{y}$  — корень  $f \in R[t]$ . Можно считать, что  $x$  и  $y$  взаимно просты — иначе на общий множитель можно сократить.

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{x}{y}\right) + a_0 = 0$$

Умножив на  $y^n$ , получим равенство в  $R$ :

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1}y + \dots + a_1xy^{n-1} + a_0y^n = 0$$

Рассмотрим любой неприводимый  $p \mid y$ . Он делит все слагаемые, кроме первого, значит, делит первое слагаемое тоже (типичное рассуждение).

Значит,  $y \in R^*$ , значит,  $\frac{x}{y} \in R$ . □

## 2.7 Рациональные дроби

Рассмотрим кольцо многочленов над полем  $K$ .

Оно является областью целостности ( $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$ ), значит, определено  $Q(K[t]) = K(t)$  — *поле рациональных дробей* над  $K$ . Часто его также называют полем рациональных функций. Тем не менее, элементы,  $K(t)$  вообще говоря, функциями не являются, например, потому что многие нетривиальные функции не определены на  $K$ .

А именно,  $f \in K[t] \rightsquigarrow (\tilde{f} : K \rightarrow K)$ . Это единственный гомоморфизм из  $K[t]$  в  $K$ , и согласованно определить аналогичный гомоморфизм на  $K(t)$  не представляется возможным. При сложении двух функций  $\frac{f}{g} \in K(t) \rightsquigarrow \left(\tilde{\frac{f}{g}} : c \mapsto \frac{f(c)}{g(c)}\right)$  их области определения пересекаются. Решением матанализа является рассматривать рациональные функции, как частичные — определённые не везде.

Ещё проблемой является вопрос — равны ли рациональные «функции»  $\frac{1}{t}$  и  $\frac{t-1}{t(t-1)}$ ? Можно говорить о равенстве в любой окрестности, которая может быть открыта как в стандартном смысле, так и в топологии Зарисского. В таком случае разные рациональные функции (например,  $\frac{1}{t}$  и  $\frac{t-1}{t(t-1)}$ ) объединяются в классы эквивалентности — *ростки функций*.

Ещё можно определить функции на одноточечной компактификации  $K$ , в народе называемой

сферой Римана — проективной прямой  $\mathbb{P}'(K) = K \cup \{\infty\}$ . В таком случае  $\frac{f}{g}(\infty) = \begin{cases} 0, & \deg(f) < \deg(g) \\ \infty, & \deg(f) > \deg(g) \\ \frac{\text{lc}(f)}{\text{lc}(g)}, & \deg(f) = \deg(g) \end{cases}$ .

В точках же  $c \in K$ , таких, что  $(x - c)^{m_1} \parallel f, (x - c)^{m_2} \parallel g$  и  $m_2 > m_1$ ,  $\frac{f}{g}(c) = \infty$  по определению.

**Определение 2.7.1** (Степень рациональной функции).  $\deg\left(\frac{f}{g}\right) = \deg f - \deg g$ .

**Определение 2.7.2** (Полуправильная дробь  $\frac{f}{g} \in K(t)$ ).  $\deg\left(\frac{f}{g}\right) \leq 0$ .

**Определение 2.7.3** (Правильная дробь  $\frac{f}{g} \in K(t)$ ).  $\deg\left(\frac{f}{g}\right) < 0$ .

**Лемма 2.7.1.** Степень удовлетворяет обычным условиям:  $\forall \alpha, \beta \in K(t)$ :

- $\deg(\alpha \cdot \beta) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$ .
- $\deg(\alpha + \beta) \leq \max(\deg(\alpha), \deg(\beta))$ .

**Следствие 2.7.1.** Правильные и полуправильные дроби образуют подкольцо (правильные — кольцо без единицы).

**Теорема 2.7.1.** Пусть  $\alpha \in K(t)$ . Для любого представления  $\alpha = \frac{f}{g}$  допускается единственное представление в виде  $\frac{f}{g} = q + \frac{r}{g}$ , где  $q \in K[t]$ ,  $\frac{r}{g}$  — правильная рациональная дробь.

Более того, для любого такого представления многочлен  $r$  один и тот же.

*Доказательство.* Запись эквивалентна  $f = qg + r$  ( $q, r \in K[t]$ ,  $\deg r < \deg g$ ), а такое представление единственно, так как деление с остатком в  $K[t]$  даёт единственный результат.

Единственность  $r$  следует от противного:  $\frac{f_1}{g_1} + r_1 = \frac{f_2}{g_2} \Rightarrow \underbrace{\frac{f_1}{g_1} - \frac{f_2}{g_2}}_{\text{правильная дробь}} = \underbrace{r_2 - r_1}_{\text{многочлен}}$ . Равенство

наступает только если  $r_1 - r_2 = 0$  □

**Определение 2.7.4** (Запись  $\frac{f}{g}$  несократима).  $f \perp g$ .

## 2.8 Разложение на простейшие дроби

Предположим, что мы в XVIII веке ищем интеграл  $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ .

**Определение 2.8.1** (Примарная дробь  $\frac{f}{g} \in K(t)$ ).  $g = p^m$  для  $p \in \text{Irr}(K[t])$  и  $\deg f < \deg g$ .

**Определение 2.8.2** (Простейшая дробь  $\frac{f}{g} \in K(t)$ ). Примарная дробь, такая, что  $\deg f < \deg p$ .

В частности, простейшими дробями являются  $\frac{x^i}{p^m}$  для  $0 \leq i < \deg p$ .

**Теорема 2.8.1.** Любая рациональная дробь допускает единственное представление в виде суммы многочлена и простейших дробей с различными знаменателями.

*Доказательство.*

- Выделим целую (полиномиальную) часть. Отныне считаем, что  $\frac{f}{g}$  — правильная.
- Если  $g \perp h$  и  $\deg gh > \deg f$  то  $\frac{f}{gh}$  представима, как сумма правильных дробей  $\frac{f_1}{g} + \frac{f_2}{h}$ :

Так как  $K[t]$  — PID, то  $g$  и  $h$  — комаксимальны:  $gK[t] + hK[t] = K[t]$ , то есть  $\exists u, v \in K[t] : gu + hv = 1$ . Получаем

$$\frac{f}{gh} = \frac{fgu}{gh} + \frac{fhv}{gh} = \frac{fu}{h} + \frac{fv}{g}$$

Поделим  $fv$  на  $g$  с остатком:  $fv = qg + r$ . Равенство переписывается в виде  $\frac{f}{gh} = \left(\frac{fu}{h} + q\right) + \frac{r}{g}$ . В скобках стоит правильная дробь, как разность двух правильных дробей.

Получили разложение на правильные дроби.

Применив для  $g = p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_s^{m_s}$ , получаем разложение на примарные дроби.

- Покажем, что примарная дробь есть сумма простейших:

Рассмотрим примарную дробь  $\frac{f}{p^m}$ . Поделим  $f$  на  $p$  с остатком:  $f = qp + r$ .

$$\frac{f}{p^m} = \frac{qp + r}{p^m} = \frac{q}{p^{m-1}} + \frac{r}{p^m}$$

Первая дробь по индукции разложима на простейшие, вторая — уже простейшая.

- Единственность разложения: если представление не единственно, то существует нетривиальная линейная зависимость:

$$\sum_{i,j} \frac{f_{i,j}}{p_i^j} = 0$$

где  $\deg(f_{i,j}) < \deg(p_i)$ ,  $p_i$  — неприводимые многочлены.

Сконцентрируемся на  $p_n$ . Пусть суммирование для  $i = n$  идёт по  $j = 1..m$ . Разобьём сумму:

$$- \sum_{i \neq n, j} \frac{f_{i,j}}{p_i^j} - \sum_{j < m} \frac{f_{n,j}}{p_n^j} = \frac{f_{n,m}}{p_n^m}$$

Посчитаем  $p_n$ -адический показатель обеих частей, получим противоречие:  $\geq m_1 + 1 / = m_1$ .  $\square$

**Следствие 2.8.1.** Базис кольца многочленов счётен —  $1, t, t^2, \dots$ .

Базис кольца рациональных дробей  $K(t)$  счётен только если  $K$  не более, чем счётно. А именно, это  $\{t^i \mid i \in \mathbb{N}_0\} \cup \left\{ \frac{t^i}{p^m} \mid 0 \leq i < \deg p, p - \text{нормированный} \right\}$ .

С аксиомой выбора это эквивалентно тому, что базис  $K(t)$  равномошен  $K$  для бесконечного  $K$ .

*Пример.* Над  $\mathbb{C}$  любой неприводимый нормированный многочлен — это  $x - c$  для  $c \in \mathbb{C}$ . Базис правильных дробей получается  $\left\{ \frac{1}{(x-c)^m} \mid m \in \mathbb{N} \right\}$ .

## 2.9 Факториальность кольца многочленов

**Теорема 2.9.2** (Теорема Гаусса).  $R - \text{UFD} \Rightarrow R[t] - \text{UFD}$ .

### 2.9.1 Примитивные многочлены

Пусть  $f \in R[t]$ ,  $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ .

**Определение 2.9.1** (Содержание многочлена  $f$ ).  $\text{Cont}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \gcd(a_n, \dots, a_0)$ .

**Определение 2.9.2** (Примитивный многочлен  $f$ ).  $\text{Cont}(f) = 1$ .

**Определение 2.9.3** (Сильно примитивный многочлен  $f$ ).  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — комаксимальны (возможно,  $a_1, \dots, a_n$  комаксимальны, я не справился узнать, где правда).

**Лемма 2.9.1.** Всякий многочлен представим в виде произведения его содержания и примитивного многочлена.

**Лемма 2.9.2.** Если  $af \sim bg$ , где  $a, b \in R \setminus \{0\}$ ,  $f, g \in R[t]$  — примитивные многочлены, то  $a \sim b, f \sim g$ .

*Доказательство.*  $af \cdot u = bg$ , где  $u \in (R[t])^* = R^*$ . Отсюда степени многочленов равны. Пусть  $f = a_n x^n + \dots + a_0$ ;  $g = b_n x^n + \dots + b_0$ .

$$a \gcd(a_n, \dots, a_0) = \gcd(aa_n, \dots, aa_0) = \gcd(bb_n, \dots, bb_0) = b \gcd(b_n, \dots, b_0)$$

откуда  $a \sim b$ . Отсюда  $f \sim g$ .  $\square$



**Лемма 2.9.3** (Лемма Гаусса). Если  $f, g \in R[t]$  — примитивные многочлены, то  $f \sim g$  в  $R[t] \iff f \sim g$  в  $K[t]$ .

*Доказательство.*  $f \sim g$  в  $K[t] \Rightarrow (\frac{a}{b})f = g \Rightarrow af = bg$ . По предыдущей лемме  $f \sim g$ .  $\square$

**Лемма 2.9.4** (Лемма Гаусса).  $\forall f, g \in R[t] : \forall p \in \text{Irr}(R) : v_p(fg) = v_p(f) + v_p(g)$  где  $v_p(f) = \min(v_p(a_0), \dots, v_p(a_n))$ .

В частности,  $\text{Cont}(f \cdot g) = \text{Cont}(f) \cdot \text{Cont}(g)$ .

В частности, примитивные многочлены образуют мультипликативную систему.

*Доказательство.* Введём  $r$  — наименьший номер, такой, что  $p^{v_p(f)+1} \nmid a_r$  и  $s$  — наименьший номер, такой, что  $p^{v_p(g)+1} \nmid b_s$ .

Рассмотрим  $f \cdot g$ , а именно, его коэффициент при  $t^{r+s}$ . Это

$$\underbrace{a_{r+s}b_0 + \dots + a_r b_s}_{\vdots p^{v_p(f)+v_p(g)+1}} + \underbrace{\dots + a_0 b_{r+s}}_{\vdots p^{v_p(f)+v_p(g)+1}}$$

Но средний коэффициент делится **точно** на  $p^{v_p(f)+v_p(g)}$ , значит,  $v_p(f \cdot g) \leq v_p(f) + v_p(g)$ . (Оценка снизу очевидна)  $\square$

Пусть  $R$  — UFD,  $K = Q(R)$ .

**Теорема 2.9.1** (Теорема Гаусса). Для всякого  $f \in R[t] : f \in \text{Irr}(R[t]) \Rightarrow f \in \text{Irr}(K[t])$ .

*Доказательство.* Пусть  $f = gh$  в  $K[t]$ . Запишем

$$g = \frac{a_m}{b_m} t^m + \dots + \frac{a_0}{b_0}; \quad h = \frac{c_n}{d_n} t^n + \dots + \frac{c_0}{d_0}$$

где  $a_i, c_i \in R; b_i, d_i \in R \setminus \{0\}$ . Обозначим  $B = \prod b_i, D = \prod d_i$ . Получаем

$$BD \cdot f = Bg \cdot Dh = \text{Cont}(Bg) \cdot \text{Cont}(Dh) \cdot \tilde{g} \cdot \tilde{h}, \quad \text{где} \begin{cases} \tilde{g} = Bg/\text{Cont}(Bg) \\ \tilde{h} = Dh/\text{Cont}(Dh) \end{cases}$$

Согласно предыдущей лемме  $\tilde{g} \cdot \tilde{h}$  тоже неприводимый, а ещё тогда  $f \sim \tilde{g} \cdot \tilde{h}$  в  $R[t]$  ( $f$  неприводим по условию теоремы). Так как  $f$  неприводим, то  $\deg g = 0$  или  $\deg h = 0$ , то есть  $f$  неприводим и в  $K[t]$ .  $\square$

**Следствие 2.9.1.** Для всякого примитивного  $f \in R[t] : f \in \text{Irr}(R[t]) \iff f \in \text{Irr}(K[t])$ .

*Замечание.* Обратное следствие неверно для не примитивных многочленов:  $2x - 2 \in \mathbb{Z}[x]$  не является неприводимым, но  $2x - 2 \in \mathbb{Q}[t]$  — неприводимый элемент.

## 2.9.2 Теорема Гаусса

**Теорема 2.9.2** (Теорема Гаусса).  $R$  — UFD  $\Rightarrow R[t]$  — UFD.

*Доказательство.* Воспользуемся тем, что и  $R$  факториально, и  $K[t]$  факториально, где  $K = Q(R)$ .

$f = \text{Cont}(f) \cdot \tilde{f}$ . Разложим  $\text{Cont}(f)$  внутри UFD  $R$ .

Если  $\tilde{f}$  разложим над  $K[t]$ , то он разложим и над  $R[t]$  (теорема 2.9.1).

Так как кольцо  $K[t]$  нётерово, то процесс оборвётся, значит получили разложение  $f = up_1 \cdot \dots \cdot p_r q_1 \cdot \dots \cdot q_s$ , где  $u \in R^*, p_i \in \text{Irr}(R), q_j \in \text{Irr}(R[t])$ .

Единственность доказывается следующим образом:

$$\begin{aligned} up_1 \cdot \dots \cdot p_r q_1 \cdot \dots \cdot q_s &\sim u'p'_1 \cdot \dots \cdot p'_r q'_1 \cdot \dots \cdot q'_s \\ &\Downarrow \\ up_1 \cdot \dots \cdot p_r &\sim u'p'_1 \cdot \dots \cdot p'_r \\ q_1 \cdot \dots \cdot q_s &\sim q'_1 \cdot \dots \cdot q'_s \end{aligned}$$

$R$  факториально, поэтому первые разложения совпадают. Вторые разложения — разложения и в  $K[t]$ , поэтому они ассоциированы в  $K$  ( $K[t]$  UFD, так как это евклидово кольцо, то есть PID). Но согласно лемме Гаусса они ассоциированы и в  $R$ .  $\square$

**Следствие 2.9.2.**

- $K[t_1, \dots, t_n] — UFD$
- $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] — UFD$

## Лекция X

28 марта 2023 г.

### 2.10 Дифференцирование алгебр

Пусть  $R$  — коммутативное кольцо с единицей,  $A$  — алгебра над  $R$ .

**Определение 2.10.1** (Дифференцирование). Отображение  $D : A \rightarrow A$ , являющееся аддитивным, и удовлетворяющее *тождеству Лейбница*

$$D(xy) = Dx \cdot y + x \cdot Dy$$

$D$  называется  *$R$ -дифференцированием*, если, кроме того, оно согласовано с умножением на элемент  $R$ :  $D(\lambda x) = \lambda Dx$ .

Множество всех дифференцирований алгебры  $A$  обозначается  $\text{Der}(A)$ , множество  $R$ -дифференцирований —  $\text{Der}_R(A)$ .

**Определение 2.10.2** (Константа дифференцирования  $D$ ). Элемент  $x \in A : Dx = 0$ .

*Замечание.* Аксиома  $R$ -дифференцирования — о согласованности с домножением на элемент  $R$  — утверждает, что все элементы  $R$  — константы при вложении в  $A$ .

**Лемма 2.10.1.** Константы дифференцирования образуют подкольцо с единицей в  $R$ .

*Доказательство.* Замкнутость относительно сложения и умножения;  $D(1 \cdot 1) = D(1) \cdot 1 + 1 \cdot D(1) \Rightarrow D(1) = 0$   $\square$

**Факт 2.10.1.** Любое дифференцирование полностью определяется своими значениями на какой-то системе образующих  $x_1, \dots, x_n$  алгебры  $A$  над  $R$ .

*Доказательство.* Пусть  $\forall x_i : D_1(x_i) = D_2(x_i)$ . Введём  $D := D_1 - D_2$ .  $D(x_i) = 0$ , так как  $x_i$  — система образующих, то  $\text{Ker } D = A$ .  $\square$

*Примеры.*

$\infty$ .  $C^{(\infty)}(\mathbb{R})$  — множество бесконечно дифференцируемых функций.  $\frac{d}{dx}$  — дифференцирование.

- Внутреннее дифференцирование: для какого-то  $a \in A$ :

$$d_a : A \rightarrow A; \quad x \mapsto [a, x] = ax - xa$$

## 2.10.1 Операции над дифференцированиями

1. Сумма:  $D_1 + D_2$  является дифференцированием.
2. Домножение на скаляр:  $\forall \lambda \in R : \lambda D$  является дифференцированием.
- 1. Произведение дифференцирований дифференцированием, вообще говоря не является: квадрат дифференцирования, например, не удовлетворяет тождеству Лейбница:  $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg'' \neq f'g + fg'$ . Вторая производная является дифференцированием только в кольце характеристики 2.
3. Коммутирование:  $D_1, D_2 \in \text{Der}_R(A) \mapsto D_1D_2 - D_2D_1 = [D_1, D_2] \in \text{Der}_R(A)$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} [D_1, D_2](xy) &= D_1(D_2(xy)) - D_2(D_1(xy)) = \\ &= D_1(D_2x \cdot y + x \cdot D_2y) - D_2(D_1x \cdot y + x \cdot D_1y) = \\ &= [D_1, D_2]x \cdot y + x \cdot [D_1, D_2]y \end{aligned}$$

□

**Теорема 2.10.1.** Для любой (не предполагается ассоциативность) алгебры  $A$ :  $\text{Der}_R(A)$  является алгеброй Ли над  $R$  относительно суммы и коммутирования.

Тождества алгебры Ли  $(+, [\cdot, \cdot])$ :

1.  $[x_1 + x_2, y] = [x_1, y] + [x_2, y]$ .
2.  $[x, y_1 + y_2] = [x, y_1] + [x, y_2]$ .
3.  $[\lambda x, y] = \lambda[x, y] = [x, \lambda y]$ .
4.  $[x, x] = 0$  — тождество антикоммутативности.
5.  $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$  — тождество Якоби.

## 2.10.2 Дифференцирование кольца многочленов, теорема Лейбница — Бернулли

Рассматриваем  $R$ -алгебру  $R[x]$ .

**Определение 2.10.3** (Формальная производная многочлена). Для многочлена  $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  ( $a_i \in R$ ) это многочлен  $f' = na_n x^{n-1} + \dots + a_1$ .

Операция взятия производной часто обозначается  $\frac{d}{dx} : R[x] \rightarrow R[x], f \mapsto f'$ .

**Теорема 2.10.2** (Лейбниц — Бернулли).  $\text{Der}_R(R[x]) = R[x] \cdot \frac{d}{dx}$ . Иными словами, для любого дифференцирования  $D$  существует многочлен  $h \in R[x]$ , такой, что  $D \equiv h \cdot \frac{d}{dx}$ .

*Доказательство.*

- Эта формула задаёт дифференцирование:

В силу  $R$ -линейности достаточно проверять на стандартных мономах.

$$\begin{aligned} D(x^m \cdot x^n) &= D(x^{m+n}) = h(x) \cdot (m+n)x^{m+n-1} \\ D(x^m \cdot x^n) &= D(x^m)x^n + x^m D(x^n) = h(x)mx^{m-1} + x^m h(x)nx^{n-1} = h(x) \cdot (m+n)x^{m+n-1} \end{aligned}$$

- Пусть  $D \in \text{Der}_R(R[x])$ . Тогда  $D$  полностью определяется значением на какой-то системе образующих алгебры, например, на элементе  $x$ . Пусть  $Dx = h, h \in R[x]$ . В силу линейности достаточно доказать, что  $D = h \cdot \frac{d}{dx}$  только на стандартных мономах.

Это верно, так как для  $f_1, \dots, f_n : D(f_1 \cdot \dots \cdot f_n) = D(f_1)f_2 \cdot \dots \cdot f_n + \dots + f_1 \cdot \dots \cdot f_{n-1}D(f_n)$ . В частности, для коммутирующих  $f$  и  $Df$ :  $D(f^n) = n f^{n-1} \cdot Df$ . □

*Свойства* (Свойства производной).

- $D(f \circ g) = (Df \circ g) \cdot D(g)$ .
- Тожество для дифференцирований высших порядков:  $f'' = (f')'$ ,  $f''' = (f'')'$ ,  $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ .
- Формула Фаа ди Бруно:

$$D^n(f \circ g) = \sum \frac{n!}{m_1! 1!^{m_1} \cdot \dots \cdot m_n! n!^{m_n}} D^{(m_1 + \dots + m_n)}(f \circ g) \cdot \prod_{j=1}^n (D^j g)^{m_j}$$

где сумма берётся по всем таким  $m_1, \dots, m_n$ , что  $m_1 \cdot 1 + \dots + m_n \cdot n = n$ .

- $D(g^{-1}) = -g^{-1} \cdot Dg \cdot g^{-1}$ . Для коммутативного кольца, например,  $K(x) : \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ .

**Теорема 2.10.3.** Константы дифференцирования  $K[x]$  у  $\frac{d}{dx}$  — это  $K[x^p]$ , где  $p = \text{char}(K)$ .

## 2.11 Алгебраические и трансцендентные элементы; минимальный многочлен

Пусть  $K$  — поле,  $A$  — необязательно коммутативная  $K$ -алгебра.

Гомоморфизм эвалюации определён  $\forall c \in A : \text{ev}_c : K[x] \rightarrow A, f \mapsto f(c)$ .

У гомоморфизма есть ядро  $\text{Ker}(\text{ev}_c) \trianglelefteq K[x]$ .

- Либо  $\text{Ker}(\text{ev}_c) = \{0\}$ . В таком случае  $c \in A$  — *трансцендентный* над  $K$  элемент.
- Либо  $\text{Ker}(\text{ev}_c) \neq \{0\}$ . В таком случае  $c \in A$  — *алгебраический* над  $K$  элемент.

**Определение 2.11.1** (Минимальный многочлен для  $c \in A$ ). Многочлен  $\theta_c$ , порождающий  $\text{Ker}(\text{ev}_c)$

Все многочлены из ядра  $\text{Ker}(\text{ev}_c)$  называются *аннулирующими*. Так как  $K[x]$  — PID, то минимальный многочлен существует (и все аннулирующие многочлены делятся на минимальный).

**Определение 2.11.2** (Степень элемента  $c$  над  $K$ ). Степень  $\deg \theta_c$ .

**Теорема 2.11.1.**

- Если  $c$  — трансцендентный над  $K$ , то  $K[c] \cong K[x]$ .
- Если  $c$  — алгебраический над  $K$ , то  $K[c] \cong K[x]/(K[x]\theta_c)$  — векторное пространство над  $K$  размерности  $n := \deg \theta_c$ .

$$K[c] = \{a_0 + a_1c + \dots + a_{n-1}c^{n-1} + K[x]\theta_c \mid a_i \in K\}$$

*Доказательство.* Теорема о ядре и образе для  $\text{ev}_c$ . □

*Замечание.*  $K[c]$  — наименьшая  $K$ -подалгебра, содержащая  $c$ .

### 2.11.1 Что можно сказать, если $A$ — область целостности?

$\text{ev}_c : K[x] \rightarrow A$  — область целостности. Если  $c$  — алгебраическое, то  $K[x]/K[x]\theta_c \cong K[c] \trianglelefteq A$ .

Таким образом,  $\theta_c$  неприводим в  $K[x]$ : если  $\theta_c = \phi \cdot \psi$ , то  $\bar{\phi}$ , равно как и  $\bar{\psi}$  — делители нуля в  $K[x]/K[x]\theta_c$ .

Обозначим поле частных  $K[c]$  как  $K(c) \stackrel{\text{def}}{=} Q(K[c]) \leq Q(A)$ .

**Теорема 2.11.2.** Если  $c$  трансцендентно, то  $K(c) \cong K(x)$ . Если  $c$  алгебраическое, то  $K(c) = K[c]$ .

*Доказательство.*

- Часть про трансцендентность очевидна, так как  $K[c] \cong K[x]$ .
- Необходимо проверить, что  $K[c]$  — поле. Это верно, так как  $K[x]$  — PID, значит, идеал, порождённый неприводимым многочленом, максимален.  $\square$

## Глава 3

# Канонические формы линейных операторов

1. Конечные задачи: Рассмотрим линейное отображение  $\phi : U \rightarrow V$  из первой главы. Его канонической формой является матрица  $\left( \begin{array}{c|c} e & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$  при правильном выборе базиса в  $U$  и в  $V$ . Все инварианты, возникавшие здесь, имели дискретную природу — размерность и ранг.
2. Ручные задачи: Сейчас мы рассмотрим более сложную задачу: каноническая форма линейного оператора  $\phi : U \rightarrow U$ . Трудность состоит в том, что матрицу хочется выбрать так, чтобы базисы в  $U$  слева и справа совпадали. Здесь будут возникать непрерывные инварианты.
3. Дикие задачи: классификация пар линейных операторов  $\phi, \psi : U \rightarrow U$ . Ответ на ту задачу не найден, и, по-видимому, не будет получен, так как он позволяет классифицировать слишком много всего.

### 3.1 Инвариантные подпространства

Рассмотрим линейный оператор над полем  $K$ :  $\phi : V \rightarrow V$  ( $\phi \in \text{End}_K(V)$ ).

**Определение 3.1.1** ( $\phi$ -инвариантное подпространство  $U \leq V$ ). Такое подпространство, что  $\phi(U) \subset U$ .

$\phi$  можно ограничить на любом  $\phi$ -инвариантном подпространстве  $U$ .

*Примеры.*

- Тривиальное ( $\{0\}$ ) и несобственное ( $V$ ) подпространства инвариантны для любого оператора.
- Движение пространства  $\mathbb{R}^3$  с неподвижной точкой  $0$  — поворот (и, возможно, отражение). Ось вращения и ортогональная ей плоскость поворота инвариантны.
- $K[x]_{\leq n}$  для любого  $n \in \mathbb{N}$  инвариантно для оператора дифференцирования  $\frac{d}{dx}$ .
- Оператор сдвига бесконечномерного пространства: пусть базис пронумерован целыми числами  $\dots, u_{-1}, u_0, u_1, \dots$ . Тогда оператор сдвига определён на базисе  $\phi(u_i) = u_{i+1}$ . У него нет инвариантных подпространств, а если бы было  $\phi(u_i) = u_{i+2}$ , то были бы только бесконечномерные.

Пусть  $\dim V < \infty$ ,  $\phi \in \text{End}_K(V)$ ,  $\phi(U) \subset U$ .

**Теорема 3.1.1.** В подходящем базисе  $\phi$  имеет матрицу  $\left( \begin{array}{c|c} [\phi|_U] & * \\ \hline 0 & [\phi|_{V/U}] \end{array} \right)$

*Доказательство.*  $\phi|_{V/U} : V/U \rightarrow V/U$  определено корректно:  $\phi(v + U) = \phi(v) + U$ .

Выберем в качестве базиса произвольный базис  $U = (v_1, \dots, v_m)$ , а потом дополним его до базиса всего пространства  $(v_{m+1}, \dots, v_n)$ .

В этом базисе матрица действительно имеет такой вид.  $v_{m+1} + U, \dots, v_n + U$  — базис  $V/U$ .  $\square$

**Определение 3.1.2** (Инвариантное дополнение  $\phi$ -инвариантного пространства  $U \leq V$ ). Такое подпространство  $W \leq V$ , что оно тоже  $\phi$ -инвариантно, причём  $V = U \oplus W$ .

**Теорема 3.1.2** (Случай полной приводимости). Если  $U$  имеет инвариантное дополнение  $W$ , то в подходящем базисе  $[\phi] = \left( \begin{array}{c|c} [\phi|_U] & 0 \\ \hline 0 & [\phi|_W] \end{array} \right)$ .

*Доказательство.* Выберем в качестве базисов объединение базисов  $U$  и  $W$ .  $\square$

## 3.2 Собственные подпространства. Собственные числа

Собственные подпространства инвариантны, но, к сожалению, инвариантно не дополняемы.

Считаем, что  $K$  — поле,  $\dim_K(V) < \infty$ .

**Определение 3.2.1** (Собственный вектор оператора  $\phi$ ). Такой вектор  $v \in V$ , что  $\langle v \rangle = vK$  инвариантно относительно  $\phi$ . Иными словами,  $\phi(v) = v\lambda$  для некоторого  $\lambda \in K$ .

**Определение 3.2.2** (Собственное число оператора  $\phi$ ). Такое число  $\lambda \in K$ , что существует  $v \in V$ , такой, что  $\phi(v) = v\lambda$ .

*Примеры.*

- Если  $[\phi] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$  в некотором базисе  $(v_1, \dots, v_n)$ , то  $v_1, \dots, v_n$  — собственные векторы с соответственно собственными числами  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . *Оператор простой структуры или диагонализуемый оператор.*
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  имеет собственные числа 1 и  $-1$  — для векторов  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  соответственно.
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  не имеет собственных чисел, как оператор над полем  $\mathbb{R}$ . Как оператор над полем  $\mathbb{C}$ , оператор имеет собственные числа  $i$  и  $-i$  — для векторов  $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$  соответственно.

Оператор диагонализуем над  $\mathbb{C}$ , но не над  $\mathbb{R}$ .

**Лемма 3.2.1** (Частный случай леммы Дедекинда — Артина о линейной независимости характеров). Пусть  $v_1, \dots, v_m \in V$  — ненулевые собственные векторы, отвечающие **попарно различным** собственным числам  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ .

Тогда  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы.

*Доказательство.* Пусть  $v_1\mu_1 + \dots + v_m\mu_m = 0$  — самая короткая линейная зависимость (наименьшее  $m$ , такое, что все  $\mu_i \neq 0$ ).

При  $m = 1$  теорема верна, так как  $v_1 \neq 0$ .

При  $m \geq 2$ : запишем два равенства

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot \lambda_m = (v_1\mu_1 + \dots + v_m\mu_m)\lambda_m \\ 0 &= \phi(0) = v_1\mu_1\lambda_1 + \dots + v_m\mu_m\lambda_m \end{aligned}$$

Вычитая равенства, получаем линейную зависимость длины ровно  $m - 1$ :

$$0 = v_1 \cdot \mu_1(\lambda_1 - \lambda_m) + \dots + v_{m-1} \cdot \mu_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) \quad \square$$

**Теорема 3.2.1.** Если оператор  $\phi \in \text{End}_K(V)$  имеет  $n := \dim V$  различных собственных чисел, то он диагонализуется.

*Доказательство.* По определению существуют ненулевые  $v_1, \dots, v_n$  — собственные векторы для данных собственных чисел.

По лемме они линейно независимы, значит, образуют базис. В этом базисе  $[\phi] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$  □

### 3.3 Характеристический многочлен оператора

Пусть  $\phi \in \text{End}_K(V)$ .

**Определение 3.3.1** (Характеристический многочлен  $\chi_\phi(t)$ ). Многочлен, равный  $\det([\phi] - te)$ , где  $[\phi]$  — матрица  $\phi$  в каком-то базисе,  $e$  — единичная матрица,  $t$  — свободная переменная в многочлене.

**Лемма 3.3.1.**  $\chi_\phi$  не зависит от выбора базиса.

*Доказательство.* Любые две матрицы  $\phi$  в разных базисах,  $[\phi]_u$  и  $[\phi]_v$  сопряжены: для  $g = (u \rightsquigarrow v)$  выполняется  $g[\phi]_u g^{-1} = [\phi]_v$ .

Тогда  $\det([\phi]_v - te) = \det(g) \det([\phi]_u - te) \det(g^{-1}) = \det(g[\phi]_u g^{-1} - tge g^{-1}) = \det([\phi]_u - te)$ . □

**Определение 3.3.2** (Сингулярные собственные числа). Корни  $\chi_\phi$ . Не путать с сингулярными числами (пусть они и не определялись).

Множество  $\lambda$ , для которых  $\phi - \lambda e$  не является обратимым, называется *спектром* оператора  $\phi$ .

**Теорема 3.3.1.** Для конечномерного пространства  $V$  над полем  $K$  сингулярные собственные числа  $\phi$  совпадают с собственными числами  $\phi$ .

*Доказательство.* Зафиксируем базис и отождествим  $V = K^n$ . Также отождествим  $\phi$  и  $[\phi]$ .

Для собственного числа  $\lambda \in K$  найдётся собственный вектор  $v \in V$ , такой, что  $\phi v = v\lambda \iff (\phi - \lambda \text{id})v = 0$ .

По теореме Крамера  $\exists v \neq 0 : (\phi - \lambda \text{id})v = 0 \iff \chi_\phi(\lambda) = \det(\phi - \lambda \text{id}) = 0$ . □

*Замечание.* Выше определённые собственные числа — *правые*. Можно определить левые собственные числа:  ${}^n K \rightarrow {}^n K; u \mapsto (u)\phi$ . Всякий элемент  $\lambda \in K$ , такой, что  $(u)\phi = \lambda u$  является *левым собственным числом*. Для поля левые собственные числа и правые собственные числа совпадают с сингулярными собственными числами, то есть это всё одно и то же.

### 3.4 Геометрическая и алгебраическая кратности собственного числа

**Определение 3.4.1** (Собственное подпространство оператора  $\phi$ , отвечающее собственному числу  $\lambda$ ).  $V(\lambda) = \{v \in V \mid \phi(v) = v\lambda\}$ .

Очевидно, что  $V(\lambda)$  — это подпространство, причём его размерность равна числу различных линейно независимых векторов с собственным числом  $\lambda$ .

**Определение 3.4.2** (Геометрическая кратность собственного числа  $\lambda$ ). Размерность  $V(\lambda)$ .

**Определение 3.4.3** (Алгебраическая кратность собственного числа  $\lambda$ ). Кратность  $\lambda$  как корня  $\chi_\phi$ .

**Лемма 3.4.1.** Геометрическая кратность  $\lambda$  не превосходит алгебраической кратности.



*Доказательство.* Пусть  $m$  — геометрическая кратность  $\lambda$ . Значит,  $\exists v_1, \dots, v_m$  — линейно независимые собственные векторы для собственного числа  $\lambda$ .

Выберем базис  $V$ , дополнив  $(v_1, \dots, v_m)$ . Теперь матрица  $\phi$  имеет вид  $[\phi] = \left( \begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & * \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda & * \\ \hline & & 0 & * \end{array} \right)$ .

Очевидно, характеристический многочлен делится на  $(t - \lambda)^m$ .  $\square$

*Замечание.* Если алгебраическая кратность собственного числа равна 1, то она равна геометрической кратности.

*Примеры.*

- Рассмотрим элементарную трансвекцию в каком-то базисе  $[\phi] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

С одной стороны,  $\chi_\phi(t) = (t - 1)^2$ .

С другой стороны,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix} \lambda$  выполняется для произвольного  $\lambda$  только если  $b = 0$ , то есть геометрическая размерность единицы как собственного числа — 1, что меньше алгебраической кратности 2.

В частности, видим, что пространство не порождается собственными векторами, матрица не диагонализуема.

- Рассмотрим пространство  $K[t]_{\leq n}$  с оператором  $\phi = \frac{d}{dt}$ . В стандартном базисе:  $[\phi] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \dots & 0 \\ & 0 & 2 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & n \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix}$ .

Здесь  $\chi_\phi(t) = (-t)^{n+1}$ . Алгебраическая кратность  $n + 1$ , геометрическая — 1.

- Жорданова клетка  $J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}_n$ . Геометрическая кратность собственного числа  $\lambda$  этой клетки равна 1, алгебраическая —  $n$ .

### 3.5 Корневые векторы. Корневое подпространство

По-прежнему  $\phi \in \text{End}_K(V)$ .

**Определение 3.5.1** (Корневой вектор  $v \in V$  оператора  $\phi$ , отвечающий собственному числу  $\lambda$ ). Существует  $m \in \mathbb{N} : (\phi - \lambda \text{id})^m(v) = 0$ . Такое наименьшее  $m$  называется высотой корневого вектора.

В частности, собственный вектор — корневой вектор высоты 1.

**Определение 3.5.2** (Подпространство корневых векторов высоты, не превосходящей  $m$ ).  $V_m(\lambda) = \{v \in V | (\phi - \lambda \text{id})^m(v) = 0\}$ .

Очевидна цепочка вложений  $(V(\lambda) =) V_1(\lambda) \leq V_2(\lambda) \leq V_3(\lambda) \leq \dots$

Пространство конечномерно, цепочка стабилизируется. Можно заметить, что как только  $V_m(\lambda) = V_{m+1}(\lambda)$ , так сразу  $\forall k > m : V_k(\lambda) = V_m(\lambda)$ .

**Теорема 3.5.1.** Над алгебраически замкнутым полем всё пространство раскладывается в прямую сумму корневых подпространств, отвечающих собственному числу  $\lambda$ .

Доказательство. См. (теорема 3.7.3). □

*Пример* (Основной пример корневых векторов).

**Определение 3.5.3** (Экспоненциальные многочлены). Конечная линейная комбинация мономов  $t^m e^{\lambda t}$ , где  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $e$  — основание натурального логарифма.

Все мономы формально независимы и образуют кольцо экспоненциальных многочленов  $\text{Exp}_{\mathbb{R}}$  с умножением, определённым как обычно:

$$t^m e^{\lambda t} \cdot t^n e^{\mu t} = t^{m+n} e^{(\lambda+\mu)t}$$

Также в данном кольце определено дифференцирование  $\frac{d}{dt} (t^m e^{\lambda t}) = m t^{m-1} e^{\lambda t} + \lambda t^m e^{\lambda t}$ .

Заметим, что

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} - \lambda \text{id} \right) (t^m e^{\lambda t}) &= m t^{m-1} e^{\lambda t} \\ \left( \frac{d}{dt} - \lambda \text{id} \right)^2 (t^m e^{\lambda t}) &= m(m-1) t^{m-2} e^{\lambda t} \\ \left( \frac{d}{dt} - \lambda \text{id} \right)^m (t^m e^{\lambda t}) &= m! \cdot e^{\lambda t} \\ \left( \frac{d}{dt} - \lambda \text{id} \right)^{m+1} (t^m e^{\lambda t}) &= 0 \end{aligned}$$

Таким образом,  $t^m e^{\lambda t}$  — корневой вектор, отвечающий собственному числу  $\lambda$ , высоты  $m+1$ .

## 3.6 Теорема Кэли — Гамильтона

Отождествим эндоморфизм  $\phi$  с его матрицей  $[\phi]$ .

Заметим, что  $\chi_{\phi}(\phi) = 0$ , то есть

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Для матриц  $2 \times 2$  это заметил Гамильтон, для матриц  $3 \times 3$  — Кэли, Фробениус обобщил.

### 3.6.1 Алгебраическое доказательство

Формально, пусть  $R$  — произвольное коммутативное кольцо,  $x \in M(n, R)$ .

**Теорема 3.6.1** (Кэли — Гамильтон).  $\chi_x(x) = \text{ev}_x(\det(x - te)) = 0$ .

*Алгебраическое доказательство.* По теореме Крамера  $x^{\#} \cdot x = x \cdot x^{\#} = \det(x)e$ , где  $x^{\#} = \text{adj}(x)$ . Запишем

$$(x - te)^{\#}(x - te) = \chi_x(t)e$$

Это равенство в кольце  $M(n, R[t]) \cong M(n, R)[t]$

$$\left[ \text{изоморфизм состоит в вынесении } t \text{ за матрицы: } \begin{pmatrix} 1-t & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} t \right]$$

В равенство хочется подставить  $t \leftarrow x$ . Если получится ноль, то значит действительно  $\chi_x(x) = 0$ .

При рассмотрении данного равенства, как равенства в  $M(n, R[t])$  подстановка ничего интересного, по-видимому, не даст: мы хотим, чтобы  $x - te$  стало нулём, а подстановка даст матрицу из  $M(n, R[x])$ , где  $R[x]$  — многочлены от данной матрицы, факторкольцо кольца многочленов.

$$\left( \begin{pmatrix} x_{1,1} - t & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n} - t \end{pmatrix} \right) \Big|_{t \leftarrow x} = \begin{pmatrix} x_{1,1}e - x & \dots & x_{1,n}e \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1}e & \dots & x_{n,n}e - x \end{pmatrix}$$

Если же рассматривать данное равенство, как равенство в  $M(n, R)[t]$ , то априори подставлять  $t \leftarrow x$  нельзя, так как можно утверждать о сохранении равенства при эвалюации только если коэффициенты коммутируют с элементом алгебры, который планируется подставить.

Пусть  $(x - te)^\# = b_{n-1}t^{n-1} + b_{n-2}t^{n-2} + \dots + b_0$ , где  $b_i \in M(n, R)$ .

Пусть  $\chi_x(t) = c_n t^n + \dots + c_0$ , где  $c_i \in R$ .

В этих терминах равенство переписывается в  $M(n, R)[t]$  следующим образом

$$(b_{n-1}t^{n-1} + b_{n-2}t^{n-2} + \dots + b_0) \cdot (x - te) = (c_n t^n + \dots + c_0)e$$

**Лемма 3.6.1.** *Утверждается, что  $x$  коммутирует со всеми  $b_i$  (поэтому его можно подставить в данное равенство).*

*Доказательство леммы.*

Докажем, что матрица  $b_{n-i}$  является многочленом от  $x$  степени  $i - 1$ . Это доказывать мы будем по индукции, причём пользоваться будем написанным выше равенством в  $M(n, R)[t]$ .

Записав равенство коэффициентов при  $t^{n-i}$ , получаем

$$b_{n-i}x - b_{n-1-i}e = c_{n-i}e \text{ для } 0 \leq i < n \text{ (здесь формально } b_n = 0)$$

Сразу получаем  $b_{n-1} = -c_n e$ ;  $b_{n-1-i} = -c_{n-i}e + b_{n-i}x$ . □

Таким образом, эвалюация данного равенства  $t \leftarrow x$  сохранит его справедливость, а левая часть очевидным образом обратится в нуль. □

### 3.6.2 Геометрическое доказательство

**Определение 3.6.1** (Алгебраическое замыкание). Такое поле  $\overline{K}$ , что оно алгебраически замкнуто и все элементы  $\overline{K}$  алгебраичны над  $K$ .

*Интересный факт* (Теорема Штейница). Для любого  $K$  существует (и единственно с точностью до изоморфизма) алгебраическое замыкание  $\overline{K}$ .

*Геометрическое доказательство теоремы Кэли — Гамильтона.* Здесь будем рассматривать  $x$  как матрицу некоего  $\phi \in \text{End}_K(V)$ .

Рассмотрим многочлен  $\chi_\phi(t)$  с коэффициентами в некотором расширении  $K$  — конкретно, в алгебраическом замыкании. Будем считать  $K = \overline{K}$  — если в  $\overline{K} : \chi_\phi(\phi) = 0$ , то это же верно и в  $K$ .

У  $\chi_\phi$  есть корень, назовём его  $\lambda$ .

$$\chi_\phi(t) = (t - \lambda)f(t), \lambda \in K, f \in K[t], \deg f \leq n - 1.$$

Собственному числу  $\lambda$  соответствует вектор  $\underset{\neq 0}{v} \in V$ , такой, что  $\phi(v) = v\lambda$ . Разложим  $V$  в прямую сумму  $V = vK \oplus U$ .

$$[\phi] = \left( \begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & [\phi|_{U/vK}] \end{array} \right)$$

$$\phi|_{U/vK} =: \psi \in \text{End}_K(U).$$

Дальше будем действовать по индукции по  $n$ . Индукционное предположение звучит так:  $\forall u \in U : f(\phi)(u) \in vK$ , то есть матрица  $f(\phi)$  выглядит следующим образом:

$$[f(\phi)] = \left( \begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

Теперь  $\chi_\phi(\phi) = (\phi - \lambda \text{id})f(\phi)$  и  $\forall w \in V : (\phi - \lambda \text{id}) \cdot \underbrace{f(\phi)(v)}_{v\mu} = (\phi - \lambda \text{id})v\mu = 0$ . □

# Лекция XI

7 апреля 2023 г.

## 3.7 Примарное разложение

Самым сложным случаем оказывается тот, когда минимальный многочлен (или характеристический) имеют примарный вид — степень неприводимого.

### 3.7.1 Минимальный многочлен вектора относительно оператора

$\phi \in \text{End}(V)$ , причём  $\dim_K V < \infty$ . Рассмотрим  $v \in V, f \in K[t]$ .

**Определение 3.7.1** (Многочлен  $f$  аннулирует  $v$  относительно  $\phi$ ).  $f(\phi)(v) = 0$ , то есть  $v \in \text{Ker}(f(\phi))$ .

Теперь рассмотрим аннулятор  $\text{Ann}(\phi, v) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in K[t] \mid f(\phi)(v) = 0\}$ . Напомним, что просто аннулятор  $\text{Ann}(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in K[t] \mid f(\phi) = 0\}$ .

**Лемма 3.7.1.**  $\text{Ann}(\phi, v) \leq K[t]$ .

**Определение 3.7.2** (Минимальный многочлен вектора  $v$  относительно  $\phi$ ). Нормированный многочлен  $\theta_{\phi, v}$ , порождающий  $\text{Ann}(\phi, v)$ , как идеал.

**Лемма 3.7.2.**  $\text{Ann}(\phi) = \bigcap_{v \in V} \text{Ann}(\phi, v)$

**Следствие 3.7.1.** Для любого  $v \in V$  минимальный многочлен  $\theta_{\phi, v}$  делит минимальный многочлен  $\theta_\phi$ .

Ещё можно заметить, что так как  $\theta_\phi \mid \chi_\phi$ , то  $\theta_{\phi, v} \mid \chi_\phi$ .

**Следствие 3.7.2.** Делителей многочлена конечное число, значит,  $\{\theta_{\phi, v}\}_{v \in V}$  конечно.

### 3.7.2 Ядро операторного многочлена

Рассмотрим оператор  $\phi \in \text{End}_K(V)$ ; зафиксируем многочлен  $f \in K[t]$ . Какие векторы он аннулирует?

**Лемма 3.7.3.** Если  $f, g \in K[t]$ , то  $\text{Ker}(f(\phi))$  инвариантно относительно  $g(\phi)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $v \in \text{Ker}(f(\phi))$ . Покажем  $g(\phi)(v) \in \text{Ker}(f(\phi))$ :

$$f(\phi)(g(\phi)(v)) = (f(\phi) \cdot g(\phi))(v) = (g(\phi) \cdot f(\phi))(v) = g(\phi)(\underbrace{f(\phi)(v)}_0) = 0 \quad \square$$

**Лемма 3.7.4.** Если  $f, g \in K[t], f \mid g$ , то  $\text{Ker}(f(\phi)) \leq \text{Ker}(g(\phi))$ .

*Доказательство.* Пусть  $g = hf$ . Тогда если  $f(\phi)(v) = 0$ , то  $g(\phi)(v) = (hf)(\phi)(v) = h(0) = 0$ .  $\square$

**Теорема 3.7.1.** Пусть  $f, g, h \in K[t]; f = gh$ , где  $g \perp h$  — взаимно просты.

Тогда  $\forall \phi \in \text{End}_K(V) : \text{Ker}(f(\phi)) = \text{Ker}(g(\phi)) \oplus \text{Ker}(h(\phi))$ .

*Доказательство.*

- Так как  $K[t]$  — PID, то есть кольцо Безу, то  $\exists p, q \in K[t] : pg + qh = 1$ .

Эвалюация в  $\phi$ :

$$p(\phi)g(\phi) + q(\phi)h(\phi) = \text{id}$$

Применим к произвольному вектору  $v \in V$ :

$$v = p(\phi)(g(\phi)(v)) + q(\phi)(h(\phi)(v))$$

- Покажем  $\text{Ker}(g(\phi)) \cap \text{Ker}(h(\phi)) = \{0\}$ .

В самом деле, если  $v \in \text{Ker}(g(\phi)) \cap \text{Ker}(h(\phi))$ , то  $v = 0 + 0$ .

- Покажем  $\text{Ker}(g(\phi)) + \text{Ker}(h(\phi)) = \text{Ker}(f(\phi))$ .

Пусть  $v \in \text{Ker}(f(\phi))$ . Опять же, запишем

$$v = p(\phi)(g(\phi)(v)) + q(\phi)(h(\phi)(v))$$

Первое слагаемое лежит в  $\text{Ker}(h(\phi))$ , второе — в  $\text{Ker}(g(\phi))$ .

Согласно лемме, применение  $p(\phi)$  ничего не меняет —  $p(\phi)(g(\phi)(v))$  тоже лежит в ядре  $\text{Ker}(h(\phi))$ .  $\square$

### 3.7.3 Примарное разложение

$\phi \in \text{End}_K(V)$ , рассмотрим  $\chi_\phi = (-1)^n p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_s^{m_s}$ , где  $p_i \in K[t]$  — неприводимые, нормированные многочлены.

**Определение 3.7.3** (Примарное подпространство).  $V^{p_i} = \text{Ker}(p_i^{m_i}(\phi))$  — аналог корневого подпространства.

**Теорема 3.7.2** (О примарном разложении).  $V = V^{p_1} \oplus \dots \oplus V^{p_s}$ .

*Доказательство.* Теорема Гамильтона — Кэли (теорема 3.6.1) + (теорема 3.7.1) + индукция по  $s$ .  $\square$

#### Случай алгебраически замкнутого поля

Все неприводимые многочлены имеют степень 1. В таком случае  $\chi_\phi(t) = (\lambda_1 - t)^{m_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_s - t)^{m_s}$ .

$V^{t-\lambda}$  — в точности корневое подпространство, отвечающее собственному числу  $\lambda$ .

**Теорема 3.7.3** (О корневом разложении). Если  $\chi_\phi$  разложим на линейные множители, как выше (в частности, если  $K$  — алгебраически замкнутое поле), то  $V = V^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_s}$ .

Для приведения оператора к каноническому виду достаточно привести его, ограниченного на корневые подпространства.

## 3.8 Теорема о жордановой форме

Ограничим  $\psi := \phi|_{V^{\lambda_i}}$ .

Ограниченный оператор имеет единственное собственное число;  $\chi_\psi = (\lambda - t)^n$ .

Чтобы было ещё удобнее, будем считать, что  $\lambda = 0$  — вместо  $\psi$  рассмотрим  $\psi - \lambda \text{id}_{V^\lambda}$ .

Теперь  $\chi_\psi(t) = (-t)^n$ , то есть  $\psi^n = 0$  или  $\psi$  — нильпотентен.

Как выглядит нильпотентный оператор? Например, так:

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим ещё более специфичный случай

$$J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}; \text{ прибавим } \lambda \text{id} \text{ обратно: } J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Оказывается, над полем ничего другого не бывает.

**Определение 3.8.1** (Жорданова клетка (жорданов блок) степени  $n$  с собственным числом  $\lambda$ ). Выше изображённая матрица  $J_n(\lambda)$ .

**Теорема 3.8.1.** Если  $\phi$  — оператор, такой, что его характеристический многочлен разложим над  $K$  на линейные множители:  $\chi_\phi = \prod_{i=1}^s (t - \lambda_i)^{n_i}$ , то в пространстве  $V$  существует базис, в котором матрица  $\phi$  имеет вид

$$J_{m_1}(\mu_1) \oplus \cdots \oplus J_{m_t}(\mu_t) = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\mu_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_t}(\mu_t) \end{pmatrix}$$

где  $m_1 + \cdots + m_t = n = \dim_K(V)$ , а  $\mu_i \in \{\lambda_i\}$ . Быть может,  $\mu_i = \mu_j$ , но типы жордановых клеток — пары  $(m_i, \mu_i)$  — определены однозначно.

**Определение 3.8.2** (Жорданов базис). Базис, в котором  $\phi$  имеет вышеописанный вид.

Если многочлен не разложим на линейные множители, то возникнут Фробениусовы клетки в разложении в прямую сумму. Впрочем, возникает трудный вопрос о единственности.

## Лекция XII

11 апреля 2023 г.

### 3.8.1 Жорданов базис нильпотентного оператора

Пусть  $\phi \in \text{End}(V)$  над произвольным полем, нильпотентен:  $\exists m : \phi^m = 0$ .

Обозначим за  $m$  *степень нильпотентности*  $\phi$  — наименьшее  $m$ , такое, что  $\phi^m = 0$ . По определению,  $\text{Ker}(\phi^{m-1}) \subsetneq \text{Ker}(\phi^m) = V$ .

**Лемма 3.8.1.** Если  $v_1, \dots, v_s \in \text{Ker}(\phi^{k+1})$  и линейно независимы относительно  $\text{Ker}(\phi^k)$ , то  $\phi(v_1), \dots, \phi(v_s) \in \text{Ker}(\phi^k)$  (очевидно) и линейно независимы относительно  $\text{Ker}(\phi^{k-1})$ .

*Доказательство.* Пусть  $\phi(v_1)\lambda_1 + \cdots + \phi(v_s)\lambda_s \in \text{Ker}(\phi^{k-1})$ .

Тогда  $\phi(v_1\lambda_1 + \cdots + v_s\lambda_s) \in \text{Ker}(\phi^{k-1})$ , и  $v_1\lambda_1 + \cdots + v_s\lambda_s \in \text{Ker}(\phi^k)$ , откуда  $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$ .  $\square$

Рассмотрим цепочку  $\{0\} \subsetneq \text{Ker}(\phi) \subsetneq \text{Ker}(\phi^2) \cdots \subsetneq \text{Ker}(\phi^m) = V$ .

$m$ . Пусть  $v_1^m, \dots, v_{n_1}^m$  — базис  $V$  относительно  $\text{Ker}(\phi^{m-1})$ .

$m-1$ . Рассмотрим  $\phi(v_1^m), \dots, \phi(v_{n_1}^m)$  — линейно независимые векторы  $\text{Ker}(\phi^{m-1})$  относительно  $\text{Ker}(\phi^{m-2})$ .  
Дополним их до базиса  $\text{Ker}(\phi^{m-1})$  относительно  $\text{Ker}(\phi^{m-2})$ , добавив векторы  $v_1^{m-1}, \dots, v_{n_2}^{m-1}$ .

$m-2$ . Ко всем векторам на предыдущем уровне ещё раз применим  $\phi$ :

$$\phi^2(v_1^m), \dots, \phi^2(v_{n_1}^m), \phi(v_1^{m-1}), \dots, \phi(v_{n_2}^{m-1})$$

Дополним их до базиса  $\text{Ker}(\phi^{m-2})$  относительно  $\text{Ker}(\phi^{m-3})$ , добавив векторы  $v_1^{m-2}, \dots, v_{n_3}^{m-2}$ .

$\leq m-3$ . И так далее.

1. На данном шаге получается набор векторов  $\phi^{m-1}(v_1^m), \dots, \phi^{m-1}(v_{n_1}^m), \phi^{m-2}(v_1^{m-1}), \dots, \phi^{m-2}(v_{n_2}^{m-1}), \dots$ , независимых в  $V$  относительно  $\{0\}$ .

Дополним их до абсолютного базиса  $\text{Ker}(\phi)$ , он же — относительный базис  $\text{Ker}(\phi)$  относительно  $\{0\}$ .

**Теорема 3.8.2.** Полученные векторы  $\phi^i(v_j^k)$  — базис  $V$ .

*Доказательство.* Очевидно из того, что (для  $U \leq V$ ) объединение базиса  $U$  и базиса  $V$  относительно  $U$  — базис  $V$ .  $\square$

Получили жордановы башенки следующего вида:



где цепочек высоты  $k$  будет  $n_{m-k}$ . Башне высоты  $k$  соответствует жорданова клетка  $J_k(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ . Клеток  $J_k(0)$  будет  $n_{m-k}$ , а  $\phi = \underbrace{J_m(0) \oplus \dots \oplus J_m(0)}_{n_1} \oplus \dots$

Осталось доказать единственность в некотором смысле.

Это видно из следующей выкладки:

$$\begin{aligned} n_1 &= \text{codim}(\text{Ker}(\phi^{m-1}), V) \\ n_2 &= \text{codim}(\text{Ker}(\phi^{m-2}), \text{Ker}(\phi^{m-1})) - n_1 \\ n_3 &= \text{codim}(\text{Ker}(\phi^{m-3}), \text{Ker}(\phi^{m-2})) - n_1 - n_2 \end{aligned}$$

Таким образом, количество жордановых клеток данного размера зависит только от коразмерностей ядер, не зависят от выбора базиса.

*Замечание.* Для разложения оператора  $\phi$  с характеристическим многочленом  $(t - \lambda)^n$  надо рассмотреть оператор  $\phi - \lambda \text{id}$ , после чего прибавить  $\lambda \text{id}$  обратно.

### 3.9 Сепарабельные многочлены, совершенные поля

Пусть  $f \in K[t]$ .

**Определение 3.9.1** ( $f$  — сепарабельный).  $f \perp f'$ . Так как  $K[t]$  — PID, то  $K[t]f + K[t]f' = K[t]$ .

*Пример.* Допустим,  $f(x) = (x - c)^2 g(x)$ . Тогда  $f'(x) = 2(x - c)g(x) + (x - c)^2 \cdot g'(x)$ . Это же можно записать для  $f = p^2 g$  — все многочлены такого вида не сепарабельны.

Таким образом, сепарабельный многочлен не имеет кратных корней (ни в одном расширении поля  $K$ ).

Обратно, если  $f = p_1 \cdot \dots \cdot p_m$ , где  $p_i \in K[t]$ , различны (с точностью до ассоциированности) и неприводимы **и все  $p_i$  сепарабельны**, то  $f$  сепарабелен.

**Определение 3.9.2** (Совершенное поле  $K$ ). Все неприводимые многочлены над  $K[t]$  сепарабельны.

*Примеры* (Совершенные поля).

- Любое поле характеристики 0.
- Алгебраически замкнутое поле. (Все неприводимые многочлены —  $(x - c)$ , они сепарабельны по определению).
- Все конечные поля.

*Контрпример* (Не все поля совершенны).

Пусть  $\text{char}(K) = p > 0$ . Поле  $K(x)$  несовершенно:

Рассмотрим  $y := x^{1/p}$  — элемент какого-то расширения  $K(x)$ . Он является корнем своего минимального многочлена  $\theta_y(t) := t^p - x \in K(x)[t]$ .

$\theta'_y = 0$ , значит,  $\gcd(\theta_y, \theta'_y) = \theta_y$ , откуда  $\theta_y$  не является сепарабельным.

Многочлен  $\theta_y$  неприводим ( $x^{1/p}$  не является рациональной функцией), но в расширении поля, где есть  $y$ , многочлен  $\theta_y$  разложим на линейные множители:  $\theta_y(t) = (t - y)^p$ .

К счастью, этот пример является единственным в некотором роде.

*Интересный факт.* Все совершенные поля — поля, для которых эндоморфизм Фробениуса ( $\text{Frob}_p : K \rightarrow K, \text{Frob}_p(x) = x^p$ ) сюръективен.

## 3.10 Разложение Жордана — Шевалле

Пусть  $K$  — совершенное поле.

Рассмотрим  $x \in M(n, K)$ .

**Определение 3.10.1** (Полупростая матрица). Диагонализуемая над каким-то расширением матрица. Над совершенным полем достаточно взять алгебраическое замыкание.

**Определение 3.10.2** (Унипотентная матрица). Такая матрица  $x$ , что  $x - e$  — нильпотентна, то есть все собственные числа  $x - e$  равны 0.

*Интересный факт* (Аддитивное разложение Жордана — Шевалле).  $\forall x \in M(n, K) : \exists! x_s, x_n \in M(n, K)$ , такие, что

1.  $x_s$  — полупростая.
2.  $x_n$  — нильпотентна.
3.  $x = x_s + x_n$ .
4.  $x_s x_n = x_n x_s$ .

Утверждается, что, более того, такие матрицы  $x_s$  и  $x_n$  являются многочленами от  $x$ .

*Доказательство.* Перейдём к алгебраическому замыканию  $K$ , разложим  $J_n(\lambda) = \lambda \text{id} + J_n(0)$ . Доказательство единственности сложнее.  $\square$

*Интересный факт* (Мультипликативное разложение Жордана — Шевалле).  $\forall x \in GL(n, K) : \exists! x_s, x_u \in M(n, K)$ , такие, что

1.  $x_s$  — полупростая.
2.  $x_u$  — унипотентна.
3.  $x = x_s x_u$ .
4.  $x_s x_u = x_u x_s$ .

Утверждается, что, более того, такие матрицы  $x_s$  и  $x_u$  являются многочленами от  $x$ .

## Лекция XIII

12 апреля 2023 г.



### 3.11 Вещественные жордановы формы

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{R}$ .

Рассмотрим  $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ . Что такое это в общем случае — непонятно, но здесь это значит, что для базиса  $V$   $(e_1, \dots, e_n)$  над  $\mathbb{R}$  у пространства  $V_{\mathbb{C}}$  базис —  $(e_1, \dots, e_n)$  над  $\mathbb{C}$ .

Это называется *комплексификация*  $V$ . Вещественный базис комплексификации —  $(e_1, e_1 i, \dots, e_n, e_n i)$ , где  $i$  — мнимая единица. Можно сказать, что комплексификация имеет двойную размерность.

Всякому оператору  $\phi : V \rightarrow V$  сопоставляется *комплексификация оператора*  $\phi : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ . Воспользовавшись тем, что мы зафиксировали базис, мы определим комплексификацию, как оператор с той же матрицей:  $M(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow M(n, \mathbb{C})$ .

Можно привести матрицу  $\phi$  к жордановому виду над  $\mathbb{C}$ . Вспомнив, что  $\phi$  — вещественный оператор, получаем  $\chi_{\phi}(t) \in \mathbb{R}[t]$ . Таким образом, его корни — либо вещественные числа, либо пары сопряжённых комплексных.

**Лемма 3.11.1.** *Если  $u$  — корневой вектор  $\phi$ , отвечающий собственному числу  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  высоты  $m$ , то  $\bar{u}$  — корневой вектор той же высоты и собственного числа  $\bar{\lambda}$ .*

*Доказательство.*  $(\phi - \lambda \text{id})^m(u) = 0 \Rightarrow (\overline{\phi - \lambda \text{id}})^m(\bar{u}) = 0$  — пользуемся тем, что комплексное сопряжение — автоморфизм.  $\square$

**Следствие 3.11.1.** *Жордановы клетки комплексно сопряжённых пар тоже бьются на пары одной размерности.*

Значит, для приведения комплексной жордановой формы к какой-то хорошей вещественной, надо преобразовать  $J_m(\lambda) \oplus J_m(\bar{\lambda})$ .

Вспомним, что  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  для  $\lambda = a + bi$ .

$$\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\lambda} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} a & b & 1 & 0 & & 0 \\ -b & a & 0 & 1 & & 0 \\ \hline & & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ \hline & & & & a & b \\ & & & & -b & a \end{array} \right)$$

Эти матрицы тоже сопряжены:

*Доказательство.* Если  $J_m(\lambda)$  отвечает базису  $u_1, \dots, u_m$ , то  $J_m(\bar{\lambda})$  отвечает базису  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$ .

Тогда матрица из  $M(2m, \mathbb{R})$  отвечает базису  $(\frac{u_1 + \bar{u}_1}{2}, \frac{u_1 - \bar{u}_1}{2i}, \dots) = (\Re(u_1), \Im(u_1), \dots)$ .  $\square$

Зафиксируем результат.

**Теорема 3.11.1.** Матрица любого оператора  $\phi \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$  приводится к виду прямой суммы клеток двух типов —  $J_m(\lambda)$  для  $\lambda \in \mathbb{R}$  и клеток  $J_m(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ .

При этом числа и размеры клеток определены однозначно.

### 3.12 Циклические подпространства, фробениусовы клетки

Пусть  $\phi \in \text{End}_K(V)$ ,  $v \in V$ .

**Определение 3.12.1** (Циклическое подпространство оператора  $\phi$ , порождённое вектором  $v$ ). Наименьшее  $\phi$ -инвариантное подпространство в  $V$ , содержащее  $v$ .

**Лемма 3.12.1.** *Циклическое подпространство, порождённое  $v$  — это  $\langle v, \phi(v), \phi^2(v), \dots \rangle$ .*

Если  $n = \dim V$ , то  $v, \phi(v), \dots, \phi^n(v)$  линейно зависимы. Возьмём наибольшее  $m \in \mathbb{N} : \phi^0(v), \dots, \phi^{m-1}(v)$  линейно независимы:

Значит,  $\phi^m(v) \in \langle \phi^0(v), \dots, \phi^{m-1}(v) \rangle$ :

$$\phi^m(v) = \phi^0(v)\alpha_0 + \dots + \phi^{m-1}(v)\alpha_{m-1}$$

откуда циклическое подпространство —  $\langle \phi^0(v), \dots, \phi^{m-1}(v) \rangle$ .

**Лемма 3.12.2.**  $\phi|_{\langle \phi^0(v), \dots, \phi^{m-1}(v) \rangle}$  в этом базисе имеет матрицу

$$B(f) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & 0 & \alpha_0 \\ 1 & & & \alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \alpha_{m-1} \end{pmatrix}$$

(сопровождающая матрица многочлена  $f$ , фробениусова клетка)

где  $f = t^m - \alpha_{m-1}t^{m-1} - \dots - \alpha_1t - \alpha_0$ .

*Замечание.*  $\chi_{B(f)} = (-1)^m f$ .

Разложим характеристический многочлен  $\phi$  на произведение примарных множителей  $p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_s^{m_s}$ . Пространство разложится в сумму примарных подпространств  $V = V^{p_1} \oplus \dots \oplus V^{p_s}$ , на которых  $\chi_{\phi|_{V^{p_i}}} = \pm p_i^{m_i}$ .

*Интересный факт.* Любое примарное пространство раскладывается в прямую сумму циклических.

Любой оператор приводится к прямой сумме фробениусовых клеток, отвечающих примарным многочленам.

## Глава 4

# Классификация модулей над PID

### 4.1 Нормальная форма Смита

Доказана Смитом над  $\mathbb{Z}$ , над произвольным PID — Фробениусом.

#### 4.1.1 Над евклидовым кольцом

$x \in M(m, n, R)$ , где  $R$  — евклидово кольцо с нормой  $\delta : R \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$ .

Если бы вместо кольца было поле, то матрицу можно было бы привести к окаймлённому виду

$$\left( \begin{array}{c|c} e & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

**Теорема 4.1.1.** Если  $R$  евклидово, то  $\forall x \in M(m, n, R) : \exists h \in E(m, R), g \in E(n, R)$ , такие, что

$$h x g = \left( \begin{array}{ccc|c} \varepsilon_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \varepsilon_k & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right), \text{ где } \varepsilon_1 \mid \varepsilon_2 \mid \dots \mid \varepsilon_k, \text{ причём } \varepsilon_i \text{ определены однозначно с точностью}$$

до ассоциированности.

*Доказательство.* Рассмотрим множество

$$\mathcal{M} := \{h x g \mid h \in E(m, R), g \in E(n, R)\}$$

и множество элементов матриц из  $\mathcal{M}$

$$\mathcal{D} := \{m_{i,j} \mid m \in \mathcal{M}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

- Либо  $x = 0$ , тогда она уже приведена к необходимому виду.
- Либо в множестве  $\mathcal{D}$  есть элементы кроме 0. Выберем среди них элемент с минимальной нормой  $\delta$ . Так как перестановки содержатся в  $E(n, R)$  и в  $E(m, R)$ , то можно считать, что для неких  $h, g$  этот элемент —  $(h x g)_{1,1}$ .

Заменим для удобства  $x$  на эту матрицу, теперь  $x_{1,1}$  имеет минимальную норму в  $\mathcal{D}$ .

$$\left( \begin{array}{c|ccc} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n} \\ \hline x_{2,1} & & & \\ \vdots & & * & \\ x_{m,1} & & & \end{array} \right)$$

Заметим, что  $x_{1,1}$  делит все остальные  $x_{1,j}$  и  $x_{i,1}$ , так как иначе можно было бы получить элемент меньшей нормы, чем  $\delta(x_{1,1})$  с помощью одного шага алгоритма Евклида ( $y = x_{1,1}q + r$ , где  $\delta(r) < \delta(x_{1,1})$ , значит, с помощью трансвекции получаем  $r = y - x_{1,1}q$ ).

Применим элементарные преобразования, получим

$$\left( \begin{array}{c|ccc} x_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Дальше по индукции ненулевые числа останутся только на некоем префиксе главной диагонали.

Тот факт, что  $x_{1,1} \mid x_{2,2}$  можно видеть, если прибавить вторую строчку к первой — в противном случае опять можно было бы получить элемент в  $\mathcal{D}$  меньшей нормы, чем  $x_{1,1}$ .

Единственность разложения следует из того, что результирующие  $x_{i,i}$  можно найти из формул:

$$x_{1,1} = \gcd(\mathcal{D}) = \gcd(x_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m) = \gcd(\text{миноры первого порядка})$$

$$x_{2,2} = \frac{\gcd(\text{миноры второго порядка})}{x_{1,1}}$$

$$x_{3,3} = \frac{\gcd(\text{миноры третьего порядка})}{x_{1,1} \cdot x_{2,2}}$$

Эти инварианты не меняются (с точностью до ассоциированности) при домножении на элементы  $E(n, R)$  или  $E(m, R)$ , а ещё однозначно задают нормальную форму.  $\square$

**Следствие 4.1.1.** *Над евклидовым кольцом*

$SL(n, R) = E(n, R)$  — матрицы с единичным определителем и группа, порождённая элементарными трансвекциями.

$GL(n, R) = GE(n, R)$  — обратимые матрицы и матрицы, порождённые элементарными трансвекциями и псевдоотражениями.

*Контрпример (Хитрая PID).* Возьмём локализацию  $\mathbb{Z}[t]$  относительно мультипликативной системы  $S := \langle \Phi_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ , где  $\Phi_n$  — круговой многочлен номера  $n$ , то есть минимальный многочлен над  $\mathbb{Q}$ , делящий  $x - \omega_n$ , ( $\omega_n^n = 1$ ).

В данном кольце главных идеалов  $E(n, R) \neq SL(n, R)$ .

## 4.1.2 Над PID

Пусть  $R$  — PID.

**Теорема 4.1.2.** Для матрицы  $x \in M(m, n, R)$  существует  $h \in SL(m, R), g \in SL(n, R)$ , такие, что

$$hxg = \left( \begin{array}{ccc|c} \varepsilon_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \varepsilon_k & \\ \hline & & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ где } \varepsilon_1 \mid \varepsilon_2 \mid \dots \mid \varepsilon_k, \text{ причём } \varepsilon_i \text{ определены однозначно с точностью до ассоциированности.}$$

**Лемма 4.1.1.** *Любая унимодулярная строчка (строка с комаксимальными элементами) длины 2 дополняется до матрицы с определителем 1.*

*Доказательство леммы.*

$$aR + bR = R \Rightarrow \exists u, v \in R : au + bv = 1. \text{ Матрица } \begin{pmatrix} a & b \\ -v & u \end{pmatrix} \text{ искомая: } \begin{vmatrix} a & b \\ -v & u \end{vmatrix} = 1 \quad \square$$

**Лемма 4.1.2.** *Если  $R$  — PID, то  $a \perp b \Rightarrow aR + bR = R$ .  $\exists g \in SL(2, R) : \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} d & 0 \end{pmatrix}$  где  $d = \gcd(a, b)$ .*

Доказательство леммы.

Строчку  $(a/d \quad b/d)$  надо достроить до  $SL(2, R)$ : пусть  $\begin{vmatrix} a/d & b/d \\ -u & v \end{vmatrix} = 1$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} a & b \\ u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v & -b/d \\ u & a/d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ причём } \begin{pmatrix} v & -b/d \\ u & a/d \end{pmatrix} \in SL(2, R) \quad \square$$

## Лекция XIV

18 апреля 2023 г.

Доказательство формы Смита для PID. По индукции.

Пусть  $\left( \begin{array}{c|ccc} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & & \\ x_{n,1} & & * \end{array} \right) = x \in M(m, n, R).$

Умножая справа, её можно привести к виду  $\left( \begin{array}{c|ccc} d & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ y_{n,1} & & * \end{array} \right)$ , где  $d = \gcd(x_{1,1}, \dots, x_{1,n})$ .

Дальше, умножив слева, мы приводим все к виду  $\left( \begin{array}{c|ccc} d' & \cdots & z_{1,n} \\ \vdots & & \\ 0 & & * \end{array} \right)$ , где  $d' = \gcd(d, y_{2,1}, \dots, y_{n,1})$ .

Так, умножая то справа, то слева, мы (так как PID  $\Rightarrow$  нётерово кольцо, и всякий раз идеал растёт), мы в какой-то момент придём к матрице  $\left( \begin{array}{c|ccc} \varepsilon_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & & * \end{array} \right).$

Дальше по индукции, приводим оставшуюся матрицу к диагональной.

$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \gcd(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \gcd(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & 0 \\ 0 & \text{lcm}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{pmatrix}$ , все преобразования были с определителем 1, поэтому после приведения нижнего правого прямоугольника к хорошему виду можно добиться преобразования, такие, что  $\varepsilon_1 \mid \varepsilon_2$ .  $\square$

## 4.2 Подмодули кручения, модули без кручения

Пусть  $M$  — модуль над коммутативным кольцом  $R$ .

Обычно будем предполагать, что  $R$  — область целостности.

**Определение 4.2.1** (Элемент кручения  $x \in M$ ).  $\exists \lambda \in \text{Reg } R$  — не делитель 0 — такой, что  $\lambda x = 0$ . Также такой элемент называют *периодическим*.

Обозначим  $T(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M \mid \exists \lambda \in \text{Reg } R : \lambda x = 0\}$  — множество элементов кручения.

**Лемма 4.2.1.**  $T(M) \leq M$  — подмодуль.  $T(M/T(M)) = \{0\}$ , то есть  $M/T(M)$  — модуль без кручения.

Доказательство.

- Пусть  $x, y \in T(M)$ .  $\exists \lambda, \mu \in \text{Reg } R : \lambda x = \mu y = 0$ . Тогда  $\lambda \mu (x + y) = 0$ , но  $\lambda \mu \in \text{Reg } R$ .  
Теперь покажем, что  $x \in T(M) \Rightarrow \mu x \in T(M) : \lambda(\mu x) = \mu(\lambda x) = 0$ .
- От противного: пусть  $\exists x \notin T(M), \exists \lambda \in \text{Reg } R : \lambda x \in T(M)$ . Значит,  $\exists \mu \in \text{Reg } R : \mu \lambda x = 0$ . Тогда  $x \in T(M)$  с множителем  $\mu \lambda$ .  $\square$

**Определение 4.2.2** (Модуль  $M$  без кручения).  $T(M) = \{0\}$

**Определение 4.2.3** (Модуль кручения, периодический модуль).  $T(M) = M$ .

### 4.3 Формулировка основных теорем о строении конечнопорождённых модулей над PID

Пусть  $R$  — PID,  $M$  — свободный модуль.

**Теорема 4.3.1.**

1. Подмодуль  $N$  свободного модуля свободен и  $\text{rk } N \leq \text{rk } M$ .
2. Конечнопорождённый модуль без кручения свободен.
3. Если  $M$  — конечнопорождён, то  $M \cong R^n \oplus T(M)$ .

*Доказательство.* (теорема 4.3.4) и ниже. □

**Определение 4.3.1** (Циклический модуль  $M$ ).  $M$  порождён одним элементом:  $M = Rx$ .

Посмотрим на отображение  $\phi : R \rightarrow M : \lambda \mapsto \lambda x$ . У гомоморфизма есть ядро  $\text{Ann}_R(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker}(\phi)$  — аннулятор  $x$ .

По теореме о гомоморфизме  $M \cong R / \text{Ann}_R(x)$ .

- Если  $\text{Ann}_R(x) = \{0\}$ , то модуль свободен и изоморфен  $R$ .
- Если  $\text{Ann}_R(x) \neq \{0\}$ , то  $M$  — модуль кручения. Так как  $R$  — PID, то  $\text{Ann}_R(x) = R\lambda$  для некоего  $\lambda \in R$  — для порождающего  $\text{Ann}_R(x)$ .

**Теорема 4.3.2.** Любой конечнопорождённый периодический модуль является прямой суммой циклических подмодулей.

**Следствие 4.3.1.** Любой конечнопорождённый периодический модуль является прямой суммой примарных циклических подмодулей. Примарный циклический модуль — модуль вида  $R/p_1^{m_1} R$ .

*Доказательство.* Китайская теорема об остатках:

$$R/(p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s})R \cong (R/p_1^{m_1} R) \oplus \cdots \oplus (R/p_s^{m_s} R) \quad \square$$

**Теорема 4.3.3** (О существовании согласованных базисов для подмодулей свободного модуля). Пусть  $N \leq M \cong R^n$ . Тогда  $\exists(e_1, \dots, e_n)$  — базис в  $M$ ,  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in R : \lambda_1 \mid \cdots \mid \lambda_m$ , причём  $N = \langle \lambda_1 e_1, \dots, \lambda_m e_m \rangle \cong R^m$ .

*Доказательство.* См. (теорема 4.4.1). □

#### 4.3.1 Вложение конечнопорождённых модулей без кручения в свободные модули

**Теорема 4.3.4.** Пусть  $R$  — область целостности,  $M$  — конечнопорождённый модуль без кручения. Тогда для некоего  $n$ :  $M$  можно вложить в  $R^n$  так, чтобы он имел ненулевое пересечение со всеми координатными осями.

*Доказательство.*  $M$  порождено элементами  $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$ . Пусть  $y_1, \dots, y_n \in M$  — максимальная линейно независимая система. Построим  $R^n$  на системе образующих  $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ .

Рассмотрим подмодуль в  $M \geq \langle y_1, \dots, y_n \rangle =: N$ . Построим вложение  $M \xrightarrow{\phi} N$ .  $N \cong R^n$  — просто переводим базис  $\{y_i\}$  в базис  $\{e_i\}$  — поэтому данное вложение изоморфно искомому  $M \rightarrow R^n$ .

$\forall x_i : (x_i, y_1, \dots, y_n)$  — линейно зависима система. Тогда  $\exists \lambda_i \neq 0 : \lambda_i x_i \in N$ .

Устроим вложение следующим образом: для  $\lambda = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m \neq 0$  положим

$$\phi : M \rightarrow N; \quad x \mapsto \lambda x$$

Оно инъективно, так как модуль  $M$  — без кручения.  $\phi(M) \cap Ry_i \neq \{0\}$ , так как там есть  $\lambda y_i$ .  $\square$

**Следствие 4.3.2.** 1. в (теорема 4.3.1). Если  $R$  — PID,  $M$  — свободный модуль конечного ранга, то  $\forall N \leq M$ :  $N$  свободен, причём  $\text{rk } N \leq \text{rk } M$ .

*Доказательство.* Индукция по рангу  $M$ .

База:  $\text{rk } M = 1$ ,  $M \cong R$ . Все подмодули имеют ранг 0 или 1 — это идеалы в кольце.

Переход:  $M \cong R^n$ . Построим проекцию  $\pi : R^n \rightarrow R^{n-1}$ , 
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

$N \leq M \Rightarrow \pi(N) \leq R^{n-1}$ ,  $\text{Ker}(\pi|_N) \leq \text{Ker } \pi \cong R$ . Подмодули в  $R$  мы знаем,  $\text{Ker}(\pi|_N) = \{0\}$ , либо  $\text{Ker}(\pi|_N) \cong R$ .

Воспользовавшись индукционным предположением, получаем, что  $\pi(N) \cong R^l$ , где  $l \leq n-1$ . Если  $\text{Ker}(\pi|_N) = \{0\}$ , то  $N \cong R^l$ . Иначе  $\text{Ker}(\pi) \cong R$ , тогда  $N \cong R^{l+1}$ .  $\square$

**Следствие 4.3.3.** Конечнопорождённый модуль без кручения над PID свободен.

**Теорема 4.3.5.** Если  $M$  — конечнопорождённый, то  $M = R^n \oplus T(M)$ .

*Доказательство.*  $M/T(M)$  — модуль без кручения, причём тоже конечнопорождён. Значит,  $M/T(M) \cong R^n$  для некоего  $n \in \mathbb{N}$ , то есть  $M \cong T(M) \oplus R^n$ .  $\square$

Таким образом, (теорема 4.3.1) полностью доказана.

## 4.4 Согласованный выбор базисов в свободном модуле и его подмодуле

**Теорема 4.4.1.** Пусть  $N \leq M \cong R^n$ . Тогда  $\exists(e_1, \dots, e_n)$  — базис в  $M$ ,  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in R : \lambda_1 \mid \dots \mid \lambda_m$ , причём  $N = \langle \lambda_1 e_1, \dots, \lambda_m e_m \rangle \cong R^m$ .

*Доказательство.* Пусть  $u_1, \dots, u_n$  — базис в  $M$ ,  $v_1, \dots, v_m$  — базис в  $N$ . Разложим  $v$  по базису  $u$ :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

где  $x \in M(m, n, R)$ . При замене базиса векторы  $v, u$  домножаются слева на матрицы из  $h \in SL(m, R)$  и  $g \in SL(n, R)$  соответственно.

При этом над  $x$  будут совершаться преобразования  $x \rightsquigarrow h^{-1}xg$ , то есть  $x$  можно привести к нормальной форме Смита:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 e_1 \\ \vdots \\ \lambda_m e_m \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda_n & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \mid \dots \mid \lambda_m$$

$\square$

# Лекция XV

19 апреля 2023 г.

**Теорема 4.4.2.** Любой конечнопорождённый модуль  $M = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$  над PID является прямой суммой циклических.

*Доказательство.* Рассмотрим сюръекцию  $\phi : R^n \rightarrow M, e_i \mapsto u_i$ . Положим  $N := \text{Ker}(\phi)$ .

$N$  — подмодуль свободного модуля, он свободен. Пусть  $(v_1, \dots, v_m)$  — базис  $N$ .

Выразим базисы через матрицу перехода:  $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, x \in M(m, n, R)$ . Воспользовавшись

для  $x$  канонической формой Смита, можно выбрать согласованные базисы, так, что  $\forall i = 1..m : v_i = e_i \lambda_i$ , причём  $\lambda_1 \mid \dots \mid \lambda_m$ .

Таким образом,  $M \cong R^{n-m} \oplus (R/\lambda_1 R) \oplus \dots \oplus (R/\lambda_m R)$ .

По китайской теореме об остатках получаем, что любой модуль является прямой суммой свободных и примарных модулей.  $\square$

## 4.4.1 Частные случаи

1.  $R = \mathbb{Z}$  — конечнопорождённые абелевы группы.

Согласно ранее доказанной теореме, любая абелева группа

$$G \cong \mathbb{Z}^m \oplus \underbrace{\mathbb{Z}/p_1^{m_1} \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/p_s^{m_s} \mathbb{Z}}_{c_{p_1} m_1}$$

где  $p_i \in \mathbb{P}, m_i \in \mathbb{N}, p_i$  могут повторяться, но пары  $(p_i, m_i)$  определены однозначно.

Такие группы, соответствующие примарным числам, называются *элементарными абелевыми группами*.

К сожалению, классифицировать что-то более сложное, даже метабелевые группы (группы, содержащие абелеву подгруппу, фактор по которой абелев) — задача несоизмеримо большей сложности. Классификация метабелевых групп влечёт классификацию пары матриц над полем, а это — дикая задача.

2.  $R = K[t]$  — форма Фробениуса. Пусть  $V$  — конечномерное векторное пространство над  $K$ ,  $\phi \in \text{End}_K(V)$ .

$(V, \phi)$  имеет структуру  $K[t]$  модуля:  $t \cdot v = \phi(v)$ . Модуль, очевидно — модуль кручения (например, по теореме Кэли — Гамильтона).

Значит,  $V \cong \bigoplus K[t]/(p^m K[t])$ , на каждом подпространстве  $\phi$  имеет примарный характеристический многочлен.

Значит, любой оператор имеет базис, в котором его матрица — прямая сумма фробениусовых клеток.



## Глава 5

# Геометрия пространств со скалярным произведением

### 5.1 Скалярные произведения

$K$  — поле,  $V$  — векторное пространство над  $K$  ( $\dim V < \infty$ ).

**Определение 5.1.1** (Скалярное произведение). Отображение  $B : V \times V \rightarrow K$ , удовлетворяющее следующим свойствам:

1. Билинейность.
2. Рефлексивность  $B(u, v) = 0 \iff B(v, u) = 0$ .

**Определение 5.1.2** (Ортогональные векторы).  $u \perp v \iff B(u, v) = 0$ .

**Определение 5.1.3** (Симметрическое скалярное произведение).  $\forall u, v \in V : B(u, v) = B(v, u)$ .

**Определение 5.1.4** (Кососимметрическое скалярное произведение).  $\forall u, v \in V : B(u, v) = -B(v, u)$ .

*Замечание.* Если характеристика 2, то кососимметрическое скалярное произведение — симметрическое.

**Определение 5.1.5** (Симплектическое скалярное произведение). Любой вектор *изотропен*:  $\forall u \in V : B(u, u) = 0$ .

*Замечание.* В эрмитовом скалярном произведении  $B(u, v) = \overline{B(v, u)}$ , например, в гильбертовом пространстве над  $\mathbb{C}$ .

**Факт 5.1.1.** Симплектическое и кососимметрические произведения связаны:

*симплектическое всегда кососимметрическое, обратное верно не в характеристике 2.*

$$\begin{aligned} 0 &= B(u + v, u + v) = B(u, u) + B(u, v) + B(v, u) + B(v, u) = B(u, v) + B(v, u) \\ &B(u, u) = -B(u, u) \Rightarrow 2B(u, u) = 0 \end{aligned}$$

**Определение 5.1.6** (Невырожденное скалярное произведение).  $\forall u \in V : u \neq 0 \Rightarrow \exists v : B(u, v) \neq 0$ .

*Примеры.*

- $(K^n, B)$ , где  $B \left( \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right) = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = u^t v$ .

Если  $K = \mathbb{R}$ , то это евклидово скалярное произведение, обладающее свойствами

- Анизотропность:  $B(u, u) \neq 0$  для  $u \neq 0$ .
- Положительная определённость:  $B(u, u) \geq 0$ , причём  $B(u, u) = 0 \iff u = 0$ .

- Можно выбрать базис и  $r$ , в котором скалярное произведение имеет вид:

$$B(u, v) = u_1 v_1 + \dots + u_r v_r - u_{r+1} v_{r+1} - \dots - u_n v_n$$

Такое скалярное произведение пишут в пространстве  $\mathbb{R}^{r,s}$  ( $r + s = n$ ), самое известное — пространство Минковского  $\mathbb{R}^{3,1}$ .

- $B(u, v) = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1$  — расщепимое скалярное произведение.
- Пусть  $n = 2m$ .

$$B(u, v) = (u_1 v_2 - u_2 v_1) + \dots + (u_{2m-1} v_{2m} - u_{2m} v_{2m-1})$$

Это пример симплектического скалярного произведения.

- $V = M(n, K)$ . Здесь можно выбрать  $B(x, y) = \text{tr}(x^t y)$

### 5.1.1 «Классификация» билинейных скалярных произведений

**Теорема 5.1.1.** Любое билинейное рефлексивное  $B : V \times V \rightarrow K$  — симметрическое или симплектическое (в характеристике 2 может выполняться одновременно и то, и то).

*Доказательство.* Рассмотрим  $u, v, w \in V$ , вычислим

$$B(u, vB(u, w) - wB(u, v)) = B(u, v)B(u, w) - B(u, w)B(u, v) = 0$$

Из рефлексивности в другом порядке тоже 0:

$$0 = B(vB(u, w) - wB(u, v), u) = B(v, u)B(u, w) - B(w, u)B(u, v) \quad (5.1)$$

Подставим  $w = u$ :

$$B(u, u)(B(u, v) - B(v, u)) = 0 \quad (5.2)$$

Таким образом, если  $B(u, u) \neq 0$ , то  $\forall v : B(u, v) = B(v, u)$ , а если  $B(u, v) \neq B(v, u)$ , то  $B(u, u) = B(v, v) = 0$ .

Докажем, что если найдутся такие  $u, v \in V : B(u, v) - B(v, u) \neq 0$ , то все векторы изотропны. Пусть нашлись. Тогда выберем  $w \in V$ , предположим, что  $B(w, w) \neq 0$ .

Посчитаем

$$\begin{aligned} B(v, u + w) &= B(v, u) + B(v, w) \\ B(u + w, v) &= B(u, v) + B(w, v) \end{aligned}$$

Первые слагаемые неравны по предположению, вторые — равны, так как  $B(w, w) \neq 0$  (5.2). Значит,  $B(v, u + w) \neq B(u + w, v)$ , откуда (5.2)  $B(u + w, u + w) = 0$ .

Кроме того, из (5.1) видим, что так как  $B(u, v) \neq B(v, u)$ , но  $B(u, w) = B(w, u)$ , то  $B(u, w) = B(w, u) = 0$ . Отсюда, раскрыв скобки в  $B(u + w, u + w) = 0$  действительно получаем, что  $B(w, w) = 0$ .  $\square$

## 5.2 Матрица Грама скалярного произведения

$V, (e_1, \dots, e_n)$  — пространство и базис.

**Определение 5.2.1** (Симплектическое пространство). Пара  $(V, B)$  «пространство — скалярное произведение», если  $B$  — симплектическое.

**Определение 5.2.2** (Квадратическое пространство). Пара  $(V, B)$  «пространство — скалярное произведение», если  $B$  — симметрическое.

*Замечание.* Термин *симметрическое пространство* уже зарезервирован под что-то другое, а в связи с симметрическим скалярным произведением будут возникать квадратичные формы, поэтому термин таков.

**Определение 5.2.3** (Матрица Грама).  $G_e(B) = (B(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ .

**Лемма 5.2.1.** Записав векторы столбцами координат в данном базисе, получаем  $B(u, v) = u^t G_e(B) v$ .

*Доказательство.*

$$B(u, v) = B(u_1 e_1 + \dots + u_n e_n, v_1 e_1 + \dots + v_n e_n) = \sum_{i,j} u_i B(e_i, e_j) v_j = u^t G_e(B) v \quad \square$$

**Лемма 5.2.2.**  $B$  — симметрическое  $\iff G_e(B)$  симметрическая ( $G_e(B) = G_e(B)^t$ ).

$B$  — симплектическая  $\iff G_e(B)$  антисимметрическая ( $G_e(B)^t = -G_e(B) \wedge G_e(B)_{i,i} = 0$ ).

**Лемма 5.2.3.** Скалярное произведение  $B$  невырождено  $\iff G_e(B)$  невырождена.

*Доказательство.*  $B$  вырождено  $\iff \exists v \neq 0 : \forall u : B(u, v) = 0 \iff \forall u : u^t G_e(B) v = 0 \iff G_e(B) v = 0 \iff G_e(B)$  вырождена.  $\square$

## Лекция XVI

24 апреля 2023 г.

**Лемма 5.2.4.** При замене базиса матрица Грама преобразуется по формуле  $G_{e'}(B) = g^t G_e(B) g$ , где  $g$  — матрица перехода.

*Доказательство.* Пусть  $g$  — матрица перехода от базиса  $(e_i)_{i=1}^n$  к базису  $(e'_i)_{i=1}^n$ :

$$(e_1 \quad \dots \quad e_n) g = (e'_1 \quad \dots \quad e'_n)$$

Тогда координаты преобразуются контравариантно:  $g^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_n \end{pmatrix}.$

Получаем, что  $(gu')^t \cdot G_e(B) \cdot (gv') = (u')^t \cdot g^t G_e(B) g \cdot v'.$   $\square$

*Замечание.* Если матрица  $x$  симметрическая ( $x^t = x$ ), то  $g^t x g$  — тоже симметрическая:

$$(g^t x g)^t = g^t x^t g^{tt} = g^t x g$$

*Замечание.* Задача поиска канонической формы матриц  $x$  относительно преобразований  $g^t x g$  не решена, хотя, казалось бы, должна быть того же уровня сложности, что и каноническая форма относительно поиска базиса — сопряжения  $g^{-1} x g$ .

Это связано с тем, что идейно матрица Грама — не матрица; она имеет два индекса, оба описывающие столбцы (или оба строки). Отсюда и появляется транспонирование первого вектора.

### 5.3 Скалярное произведение и двойственные пространства

$V^* = \text{Hom}_K(V, K)$  — множество ковекторов (линейных функционалов).

Базису  $(e_1, \dots, e_n)$  сопоставляется двойственный базис  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ , такой, что  $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ .

Рассмотрим пространство всех билинейных отображений  $L(V, V; K) = \{B : V \times V \rightarrow K \mid B \text{ — билинейно}\}$ . Оказывается, есть канонический изоморфизм между  $L(V, V; K)$  и  $\text{Hom}(V, V^*)$ .

Пусть  $B : V \times V \rightarrow K$  — билинейно. Сопоставим ему парциальные отображения

$${}_u B \stackrel{\text{def}}{=} B(u, \cdot) : V \rightarrow K; \quad B_v \stackrel{\text{def}}{=} B(\cdot, v) : V \rightarrow K$$

Полученные парциальные отображения линейны.

Значит, отображение  $\tilde{B} : u \mapsto {}_u B$  бьёт из  $V$  в  $V^*$ . Более того, оно само линейно, и задаёт биекцию, не зависящую от выбора базисов.

**Теорема 5.3.1.**  $L(V, V; K) \rightarrow \text{Hom}(V, V^*)$ ;  $B \mapsto \tilde{B}$  задаёт канонический изоморфизм  $L(V, V; K) \cong \text{Hom}(V, V^*)$ .

*Доказательство.* Проверим, что отображение — гомоморфизм:  $\widetilde{B_1 + B_2} = \tilde{B}_1 + \tilde{B}_2$  и  $\widetilde{\lambda B} = \lambda \tilde{B}$ .

Проверим, что  $B \mapsto \tilde{B}$  обратимо:  $B(u, v) = \tilde{B}(u)(v)$ . Отсюда получаем инъективность, а сюръективность следует из теоремы о размерности ядра и образа — мы работаем с конечномерными пространствами.

$$\dim(L(V, V; K)) = \dim(V) \cdot \dim(V) = \dim(V) \cdot \dim(V^*) = \dim(\text{Hom}(V, V^*)). \quad \square$$

**Теорема 5.3.2.**  $B : V \times V \rightarrow K$  невырождено  $\iff \tilde{B} : V \rightarrow V^*$  — изоморфизм.

*Доказательство.*

$$\forall u \neq 0 : \exists v \in V : B(u, v) \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall u \neq 0 : B(u, \cdot) \neq 0 \quad \square$$

*Замечание.* Получается, всякий раз, когда пишут транспонирование, задают изоморфизм  $V \cong V^*$ , который никак не является каноническим. Это уже не линейная алгебра, а евклидова геометрия. Транспонированию не место в канонической линейной алгебре!

*Замечание.* Если билинейная форма симметрическая, то  $\forall u \in V : B(u, \cdot) = B(\cdot, u)$ , то есть изоморфизмы фиксирования первого и второго аргумента одинаковы.

Если билинейная форма симплектическая, то  $\forall u \in V : B(u, \cdot) = -B(\cdot, u)$ .

## 5.4 Классификация пространств со скалярным произведением

Первый шаг классификации: скалярное произведение бывает симметрическим или симплектическим.

Пусть  $(U, B_U)$  и  $(V, B_V)$  — два пространства со скалярными произведениями.

**Определение 5.4.1** (Изометрия пространств). Изоморфизм векторных пространств  $\phi : U \rightarrow V$ , сохраняющий скалярное произведение:  $B_U(u, v) = B_V(\phi(u), \phi(v))$ .

**Задача 5.4.1.** Когда  $(U, B_U) \cong (V, B_V)$ ?

Очевидные инварианты:

1. Размерность  $n = \dim U = \dim V$  — если равенства нет, то нет изоморфизма.
2. Ранг  $r := \text{rk } U \stackrel{\text{def}}{=} \text{rk}(G(B_U))$  — не зависит от выбора базиса, замена базиса — обратимая матрица.

Можно также заметить, что  $\text{rk}(G(B_U)) = \text{rk}(\tilde{B}_U)$ .

3. **Определение 5.4.2** (Дискриминант).  $\text{disc}(V) = (\det(G(B_V))) \cdot (K^*)^2$  — элемент  $K/(K^*)^2$ .

В частности,  $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^{*2} \cong \{\pm 1\}$ ;  $\mathbb{F}_q^*/\mathbb{F}_q^{*2} \cong \{\pm 1\}$  для  $q \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ .

**Определение 5.4.3** (Радикал  $V$ ).  $\text{Rad}(V) = \{u \in V \mid \forall v \in V : B(u, v) = 0\}$ . Иначе говоря,  $V^\perp$ .

Пусть  $V = \text{Rad}(V) \oplus U$ , где  $U$  — произвольное прямое слагаемое. Заметим, что  $\text{Rad}(U) = \{0\}$ , иначе  $\text{Rad}(V)$  больше, чем предполагался.

Значит, классификацию подпространств можно свести к классификации невырожденных подпространств.

**Теорема 5.4.1** (О классификации симплектических пространств).  $U \cong V \iff \begin{cases} \dim U = \dim V \\ \operatorname{rk} U = \operatorname{rk} V \end{cases}$ .

*Доказательство.* См. (теорема 5.6.2) □

**Следствие 5.4.1.** Для любой чётной размерности существует единственное невырожденное симплектическое пространство. Примерами матриц Грама для этих изоморфных пространств являются следующие матрицы

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \\ \hline -1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & -1 & & & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & & & & 0 \\ -1 & 0 & & & & \\ \hline & & & \ddots & & \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & 1 & & 0 \\ \hline 0 & & -1 & & & \\ & \ddots & & & & \\ -1 & & 0 & & & 0 \end{array} \right)$$

так пишут физики так пишут топологи так пишут алгебраисты

**Определение 5.4.4** (Квадратически замкнутое поле  $K$ ). Такое поле, что  $(K^*)^2 = K^*$ , то есть  $\forall x \in K : \exists y \in K : y^2 = x$ .

**Теорема 5.4.2.** Если  $K$  квадратически замкнуто и  $\operatorname{char}(K) \neq 2$ , то квадратические пространства  $U \cong V \iff \begin{cases} \dim(U) = \dim(V) \\ \operatorname{rk}(U) = \operatorname{rk}(V) \end{cases}$ .

*Доказательство.* См. (теорема 5.8.1). □

**Следствие 5.4.2.** В частности, над квадратически замкнутым полем в любой размерности существует единственное невырожденное квадратическое пространство.

*Интересный факт.* Над конечными полями — ровно два пространства, с дискриминантом, являющимся и не являющимся полным квадратом.

**Теорема 5.4.3** (Закон инерции Сильвестра). Над  $\mathbb{R}$  поля со скалярным произведением определяются тремя инвариантами

1.  $\dim(V) = n$ .
2.  $\operatorname{rk}(V) = r = r^+ + r^-$ .
3. Сигнатура  $s = r^+ - r^-$ .

Здесь  $r^+$  и  $r^-$  — количества положительных и отрицательных квадратов.

В матрице Грама на главной диагонали стоит  $r^+$  единиц,  $r^-$  минус единиц, остальные — нули.

*Доказательство.* См. (теорема 5.8.4) □

## Лекция XVII

25 апреля 2023 г.

### 5.5 Ортогональное дополнение

$U \leq V$  — подпространство,  $B : V \times V \rightarrow K$  — скалярное произведение.

**Определение 5.5.1** (Ортогональное дополнение).  $U^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \forall u \in U : B(u, v) = 0\}$ .

*Замечание.* Рефлексивность скалярного произведения влечёт, что можно не различать  $U^\perp$  и  ${}^\perp U$ .

*Предостережение.* Ортогональное дополнение не является дополнением: совсем не факт, что  $U \oplus U^\perp = V$ .

*Свойства.*

- $\forall U \leq V : U \cap U^\perp = \text{Rad}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in U \mid \forall u' \in U : B(u, u') = 0\}$ .
- $\text{Rad}(V) = V^\perp; \{0\}^\perp = V$ .
- $U^\perp \leq V$ .
- $U \leq U^{\perp\perp}$  (равенство в случае невырожденного  $V$ : следствие (лемма 5.5.3)).
- $U \rightsquigarrow U^\perp$  обращает включения:  $U \leq W \Rightarrow W^\perp \leq U^\perp$ .
- $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ .
- $(U \cap W)^\perp \geq U^\perp + W^\perp$  (равенство в случае невырожденного  $V$ : следствие (лемма 5.5.3)).

### 5.5.1 Ортогональная прямая сумма

$(U, B_U), (V, B_V)$  — два произвольных пространства (но либо оба симметрические, либо оба симплектические).

Определим скалярное произведение на  $U \oplus V$  следующим образом:

$$B_{U \oplus V} : (U \oplus V) \times (U \oplus V) \rightarrow K; \quad (u_1, v_2), (u_2, v_2) \mapsto B_U(u_1, u_2) + B_V(v_1, v_2)$$

Так как  $B((u, 0), (0, v)) = 0$  в данном определении, то  $(U \oplus V, B_{U \oplus V})$  — ортогональная прямая сумма.

**Лемма 5.5.1.** *Определённая выше  $B_{U \oplus V}$  — скалярное произведение на  $U \oplus V$ .*

Будем обозначать ортогональную прямую сумму  $U \boxplus V \stackrel{\text{def}}{=} (U \oplus V, B_{U \oplus V})$ .

Если  $U, W \leq V$  — лежат в одном объёмлющем пространстве, то прямая сумма  $U \boxplus W$  — внутренняя ортогональная прямая сумма — существует если

1.  $U \cap W = \{0\}$
2.  $U \perp W$  здесь эквивалентно  $U \leq W^\perp$  здесь эквивалентно  $W \leq U^\perp$ .

**Лемма 5.5.2.** *Пусть  $U$  — любое дополнение к  $\text{Rad}(V)$  :  $U \oplus \text{Rad}(V) = V$ .*

*Тогда  $V = U \boxplus \text{Rad}(V)$ , причём  $B_U$  невырождено.*

*Доказательство.* Докажем лишь часть про невырожденность, первое очевидно.

Если  $\exists u \in U, u \neq 0 : \forall v \in U : B(u, v) = 0$ , то  $\forall v \in V : v \in U + \text{Rad}(V) \Rightarrow B(u, v) = 0$  по линейности  $B$ , противоречие —  $B_U$  невырождено.  $\square$

### 5.5.2 Теорема об ортогональном дополнении

**Лемма 5.5.3.** *Если  $U$  невырождено, либо  $V$  невырождено, то имеет место  $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$ .*

*Доказательство.* Вложению  $U \xhookrightarrow{i} V$  отвечает  $V^* \xrightarrow{i^*} U^*$  — двойственное линейное отображение.

Воспользуемся отображением  $\tilde{B} : V \rightarrow V^*$ . Найдём  $\text{Ker}(V \xrightarrow{\tilde{B}} V^* \xrightarrow{i^*} U^*) = \left\{ v \in V \mid \left( \underset{\in U}{u} \mapsto B(v, u) \right) = 0 \right\}$ .

Это  $U^\perp$  по определению.

Кроме того,  $V \xrightarrow{\tilde{B}} V^* \xrightarrow{i^*} U^*$  сюръективно:

- Если  $U$  невырождено, то даже  $U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\tilde{B}} V^* \xrightarrow{i^*} U^*$  сюръективно —  $B_U$  невырождено.

• Иначе это верно, так как  $V$  невырождено и  $V \xrightarrow{\tilde{B}} V^*$  — сюръекция ( $i^*$  — просто сужение).  
Используя теорему о размерности ядра и образа получаем, что  $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$ .  $\square$

*Предостережение.* Если  $U \leq V$ ,  $V$  невырождено, то совсем необязательно  $U$  невырождено. Например,  $\dim(V) = 2$ ,  $G(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Оба пространства размерности 1, натянутые на базисные векторы, вырождены.

**Теорема 5.5.1.** Если  $U \leq V$ ,  $B_U$  невырождено, то  $V = U \boxplus U^\perp$ .

*Доказательство.*

- $U \cap U^\perp = \text{Rad}(U) = \{0\}$ .
- По определению  $U \perp U^\perp$ .
- $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$  согласно (лемма 5.5.3).  $\square$

*Замечание.* Может быть, что скалярное произведение на  $U$  невырождено, но на  $U^\perp$  — вырождено. Тем не менее,

**Теорема 5.5.2.** Если  $V$  невырождено, то  $\forall U \leq V : U = U^{\perp\perp}$ .

*Доказательство.* Согласно (лемма 5.5.3) получаем  $\dim(U) = \dim(U^{\perp\perp})$ .  $\square$

**Теорема 5.5.3.** Если из пространств  $V, U, U^\perp$  два невырождены, то и третье тоже, в этом случае разложения  $V = U \boxplus U^\perp = U^\perp \boxplus U^{\perp\perp}$  симметричны по  $U$  и  $U^\perp$ .

*Доказательство.*

- Если  $V$  невырождено, то (тривиально)  $U^{\perp\perp} \geq U$ , но согласно (лемма 5.5.3) наблюдается равенство.

Если  $U^\perp$  невырождено, то заменим  $\begin{cases} U^\perp \rightsquigarrow U^{\perp\perp} \\ U \rightsquigarrow U^\perp \end{cases}$ , в дальнейшем доказательстве невырождено  $U$ .

Таким образом,  $\forall u \in U^\perp : \exists v \in U^\perp : B(u, v) \neq 0$  (иначе данный  $u$  лежит в  $U^{\perp\perp}$ ). Но это по определению невырожденность  $U^\perp$ .

- Если  $U^\perp, U$  невырождены, то  $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$ . Из невырожденности их пересечение пусто, откуда  $V = U \oplus U^\perp$ .

$$\forall v \in V : \exists u \in U, u' \in U^\perp : v = u + u' \Rightarrow B(v, \cdot) = B(u, \cdot) + B(u', \cdot)$$

Так как  $U$  невырождено, то найдётся  $w \in U : B(u, w) \neq 0$ .  $B(u', w) = 0 \Rightarrow B(v, w) \neq 0$ .  $\square$

**Следствие 5.5.1.** Если в  $V$  нашлось невырожденное подпространство, то можно взять к нему ортогональное дополнение, матрица Грама разложится на блоки в базисах  $U$  и  $U^\perp$ :

$$G(B) = \left( \begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array} \right)$$

Дальше можно пытаться раскладывать пространство по индукции в прямую сумму одномерных.

### 5.5.3 Теорема Лагранжа о существовании ортогонального базиса в квадратичном пространстве

**Определение 5.5.2** (Ортогональный базис). Базис  $(e_1, \dots, e_n)$  пространства  $V$ , такой что  $i \neq j \Rightarrow B(e_i, e_j) = 0$ .

В ортогональном базисе матрица Грама диагональна:  $G(B) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}, a_i \in K$ .

**Теорема 5.5.4** (Лагранж).  $B : V \times V \rightarrow K$  — симметрическая форма. Если  $\text{char}(K) \neq 2$ , то в любом пространстве над  $K$  существует ортогональный базис.

*Доказательство.*

**Лемма 5.5.4.** Если  $\text{char}(K) \neq 2$ , то в пространстве с ненулевым симметрическим скалярным произведением найдётся неизотропный вектор  $v : B(v, v) \neq 0$ .

*Доказательство леммы.*

Пусть  $B(u, v) \neq 0$ . Тогда среди векторов  $u, v, u + v$  хотя бы один неизотропен:  $B(u, v) = \frac{1}{2}(B(u+v, u+v) - B(u, u) - B(v, v))$  и здесь существенно, что характеристика — не 2.  $\square$

Если  $B = 0$ , то всякий базис ортогонален, доказывать нечего.

Если  $B \neq 0$ , то проведём индукцию по размерности.

База: В одномерном пространстве любой базис ортогонален.

Переход: Найдётся неизотропный  $e_1 \in V$ , тогда согласно (теорема 5.5.3)  $V = e_1 K \oplus (e_1 K)^\perp$ , по индукционному предположению  $V = \langle e_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_{n-1} \rangle$ .  $\square$

## 5.6 Введение в теорию (Диксона — ) Витта. Классификация симплектических пространств

Теория опубликована Виттом примерно в 1936 году, но Диксон показал примерно то же в 1905, в год рождения Витта. К сожалению, работа Диксона осталась незамеченной.

### 5.6.1 Выделение гиперболических плоскостей

$B : V \times V \rightarrow K$  — произвольное скалярное произведение.

Пусть  $u \in V$  — изотропный вектор.

**Определение 5.6.1** (Анизотропное скалярное произведение).  $\forall u \in V, u \neq 0 \Rightarrow B(u, u) \neq 0$ .

*Замечание.* Анизотропные скалярные произведения изучаются в матанализе, и там хорошо, что они положительно определены. А в алгебре — это, наоборот, мешает.

**Определение 5.6.2** (Гиперболическая плоскость  $H$ ). Двумерное пространство над  $K$  с матрицей Грама  $G(B_H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  или  $G(B_H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Лемма 5.6.1.** Пусть  $B$  невырождено, нашёлся  $u \in V, u \neq 0, B(u, u) = 0$ . Если  $B$  симметрическое, то дополнительно предположим, что  $\text{char}(K) \neq 2$ .

Тогда и можно вложить в гиперболическую плоскость, то есть  $\exists v \in V : B(u, v) = 1, B(v, v) = 0$ .

*Доказательство.* В силу невырожденности  $\exists w \in V : B(u, w) \neq 0$ . Домножением  $w$  на скаляр можно добиться того, что  $B(u, w) = 1$ .



Так как  $B(u, u) = 0 \neq B(u, w)$ , то  $\langle u, w \rangle$  — пространство размерности 2. Матрица Грама данного пространства в базисе  $(u, w)$  — это  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 1 & * \end{pmatrix}$ .

Если пространство симплектическое, то матрица уже имеет искомый вид.

Иначе ( $B$  симметрическое) элементарным преобразованием получаем, что искомая гиперболическая плоскость натянута на векторы  $u, w + \alpha u$ , где  $\alpha$  подобрано таким образом, что

$$B(w + \alpha u, w + \alpha u) = 0 \Rightarrow B(w, w) + 2\alpha B(u, w) = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \frac{B(w, w)}{B(u, w)}$$

□

*Замечание.* Условие невырожденности  $B$  можно ослабить до  $u \notin \text{Rad}(V)$ .

## Лекция XVIII

26 апреля 2023 г.

**Теорема 5.6.1.** Пусть  $u \in V \setminus \text{Rad}(V)$  — изотропный вектор, причём если  $V$  квадратично, то дополнительно предполагаем, что  $\text{char}(K) \neq 2$ .

Тогда  $u$  можно включить в гиперплоскость  $H \leq V$ , такую, что  $H \oplus H^\perp = V$ .

*Доказательство.* По лемме  $H$  существует;  $H$  невырождена, значит достаточно сослаться на (лемма 5.6.1). □

### 5.6.2 Классификация симплектических пространств

Пусть  $K$  — произвольное поле,  $V$  — симплектическое пространство над  $K$ . Тогда  $V = \underbrace{H \oplus \dots \oplus H}_l \oplus \text{Rad}(V)$ .

**Теорема 5.6.2.** Два симплектических пространства  $U \cong V \iff \dim(U) = \dim(V)$  и  $\text{rk}(U) = \text{rk}(V)$ .

*Доказательство.* Количество гиперплоскостей — это  $\frac{1}{2} \text{rk}$ . Размерность радикала — это  $\dim - \text{rk}$ , причём все радикалы одной размерности изометричны. □

**Следствие 5.6.1.** Ранг симплектического пространства чётен.

**Следствие 5.6.2.** Невырожденные симплектические пространства существуют только в чётных размерностях.

## 5.7 Квадратические пространства. Квадратичные формы

$V$  — векторное пространство над  $K$ . Будем предполагать, что  $\text{char}(K) \neq 2$ , иначе всё намного сложнее.

**Определение 5.7.1** (Квадратичная форма). Отображение  $Q : V \rightarrow K$ , такое, что

1.  $Q$  — однородно степени 2:  $Q(v\lambda) = Q(v)\lambda^2$ .
2. Поляризация формы  $Q$  — билинейное (симметрическое автоматически) скалярное произведение.

**Определение 5.7.2** (Поляризация квадратичной формы  $Q$ ). Скалярное произведение

$$B(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(Q(u+v) - Q(u) - Q(v))$$

**Факт 5.7.1.** Квадратичная форма — скалярный квадрат:  $Q(v) = B(v, v)$ .

**Теорема 5.7.1.** Существует биективное соответствие между квадратичными формами и симметрическими скалярными произведениями.

*Доказательство.* В одну сторону — поляризация, в другую — скалярный квадрат.  $\square$

### 5.7.1 Квадратичная форма в координатах

Пусть  $V \ni x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ . Тогда квадратичная форма — однородный многочлен степени 2:

$$Q(x) = B(x, x) = x^t G(B) x = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i < j} 2a_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2$$

**Теорема 5.7.2** (Лагранж). Пусть  $\text{char}(K) \neq 2$ . Любая квадратичная форма  $Q : V \rightarrow K$  линейно невырожденной заменой переменных приводится к сумме квадратов:

$$Q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2, \quad a_i \in K$$

*Доказательство.* Есть ортогональный базис: (теорема 5.5.4)  $\square$

## 5.8 Классификация квадратичных пространств

### 5.8.1 Над квадратично замкнутым полем

$K^* = (K^*)^2$ ,  $\text{char}(K) \neq 2$ .

**Определение 5.8.1** (Ортонормированный базис  $V$ ). Ортогональный базис  $V$ , такой, что  $B(e_i, e_i) \in \{0, 1\}$ .

**Теорема 5.8.1.** В любом квадратичном пространстве над квадратично замкнутым полем характеристики не 2 выполнимы следующие условия:

1. Существует ортонормированный базис.
2. У квадратичных пространств ровно 2 инварианта: размерность и ранг.
3. Любая квадратичная форма приводима к виду

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_r^2, \quad r \leq n$$

4. Всякое пространство приводимо к виду

$$V = H \boxplus \dots \boxplus H \boxplus \text{Rad}(V) \boxplus \underbrace{\langle 1 \rangle}_{\text{если } \text{rk } V \text{ нечётен}}$$

*Доказательство.* Согласно теореме Лагранжа (теорема 5.5.4) найдётся ортогональный базис  $(e_1, \dots, e_n)$ . Переупорядочим базисные векторы так, что первые  $r$  имеют ненулевой скалярный квадрат, остальные — нулевой.

После этого заменим  $e_i \rightsquigarrow \frac{e_i}{\sqrt{B(e_i, e_i)}}$ ,  $i \leq r$ .

Пункт 4 следует из того, что над таким полем (например,  $K = \mathbb{C}$ ):  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

А именно рассмотрим сначала матрицу  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases} B(e, e) = 1 \\ B(f, f) = -1 \\ B(e, f) = 0 \end{cases}$$

Выберем новый базис  $\left(\frac{e+f}{\sqrt{2}}, \frac{e-f}{\sqrt{2}}\right)$ . Для него

$$\begin{cases} B\left(\frac{e+f}{\sqrt{2}}, \frac{e+f}{\sqrt{2}}\right) = 0 \\ B\left(\frac{e+f}{\sqrt{2}}, \frac{e-f}{\sqrt{2}}\right) = 1 \\ B\left(\frac{e-f}{\sqrt{2}}, \frac{e-f}{\sqrt{2}}\right) = 0 \end{cases}$$

Таким образом, например, над полем  $\mathbb{R} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Над квадратичным полем можно заменить вектор  $v \rightsquigarrow \sqrt{-1} \cdot v$ , получается, над  $K : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .  $\square$

### 5.8.2 Над полем вещественных чисел (закон инерции Сильвестра)

Пусть  $V$  — пространство над  $\mathbb{R}$  с симметрическим скалярным произведением.

*Замечание.* Доказать также можно доказать для формально вещественных полей — числа бывают отрицательные и положительные, а множество квадратов — множество положительных чисел.

**Определение 5.8.2** (Ортонормированный базис  $(e_1, \dots, e_n)$ ). Ортогональный базис, такой, что  $B(e_i, e_i) \in \{+1, -1, 0\}$ .

**Теорема 5.8.2.** В  $V$  существует ортонормированный базис.

*Доказательство.* Согласно теореме Лагранжа (теорема 5.5.4) найдётся ортогональный базис  $(e_1, \dots, e_n)$ . Переупорядочим базисные векторы так, что первые  $r$  имеют ненулевой скалярный квадрат, остальные — нулевой.

После этого заменим  $e_i \rightsquigarrow \frac{e_i}{\sqrt{|B(e_i, e_i)|}}$ ,  $i \leq r$ .  $\square$

Таким образом, ортонормированный базис есть, характеризуется тремя числами —  $r^+, r^-, n$ . Являются ли они инвариантами?

Ограничимся невырожденными пространствами:

$$V_1 = U_1 \oplus \text{Rad}(V_1) \cong U_2 \oplus \text{Rad}(V_2) = V_2 \Rightarrow U_1 \cong U_2$$

(из-за единственности ранга  $\dim \text{Rad}(V_1) = \dim \text{Rad}(V_2)$ ; разные прямые слагаемые к одному радикалу изометричны, так как в них можно выбрать базисы, где соответствующие векторы различаются на вектор из радикала).

**Теорема 5.8.3** (Сильвестр). Обозначим  $\mathbb{R}^{p,q}$  как пространство с матрицей Грама

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ \hline & & & -1 & 0 \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & 0 & & -1 \end{array} \right)$$

где размеры блоков  $p$  и  $q$  соответственно.

Пространства  $\mathbb{R}^{p,q} \cong \mathbb{R}^{s,t}$  изометричны  $\iff (p, q) = (s, t)$ .

*Доказательство.* Обозначим за  $U^+, U^-, V^+, V^-$  пространства, натянутые на соответствующие базисные векторы.

Предположим, что  $p > s$ . Рассмотрим отображение  $U^+ \hookrightarrow U \cong V \xrightarrow{\text{pr}} V^+$ , где  $\text{pr}$  — проекция на  $V^+$  вдоль (параллельно)  $V^-$ .

Пусть  $\phi : U \cong V$ , тогда  $\phi(U^+) \leq V$ , но так как  $s < p$ , то проекция  $\text{pr}(\phi(U^+))$  имеет ненулевое ядро.

$\text{Ker}(\text{pr}) = V^-$ , значит,  $\text{Ker}(\text{pr}|_{\phi(U^+)}) \leq V^-$ . Значит, нашёлся вектор из  $U^+$ , который при изометрии попал в  $V^-$ . Но так не бывает при изометрии — значит, ядро на самом деле нулевое, противоречие.  $\square$

**Теорема 5.8.4** (Закон инерции Сильвестра). Любое квадратичное пространство над  $\mathbb{R}$  изометрично ровно одному пространству вида

$$\underbrace{\langle 1, \dots, 1 \rangle}_{r^+} \underbrace{\langle -1, \dots, -1 \rangle}_{r^-} \underbrace{\langle 0, \dots, 0 \rangle}_{n-r^+-r^-} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\langle 1 \rangle \boxplus \langle 1 \rangle}_{r^+} \boxplus \underbrace{\langle -1 \rangle \boxplus \langle -1 \rangle}_{r^-} \boxplus \underbrace{\langle 0 \rangle \boxplus \langle 0 \rangle}_{n-r^+-r^-}$$

Заметим, что пространства  $\langle 1, \dots, 1 \rangle$  и  $\langle -1, \dots, -1 \rangle$  — евклидово и антиевклидово соответственно, значит, они анизотропны.

## Лекция XIX

2 мая 2023 г.

Положим  $m = \min(r^+, r^-)$ . Получается, всякое квадратичное пространство над  $\mathbb{R}$  изометрично ровно одному пространству вида

$$\underbrace{H \boxplus \dots \boxplus H}_m \boxplus \begin{matrix} \langle 1, \dots, 1 \rangle \\ \text{или} \\ \langle -1, \dots, -1 \rangle \end{matrix} \boxplus \text{Rad}(V)$$

### 5.9 Теория (Диксона — ) Витта

**Теорема 5.9.1** (Витт о разложении). Пусть  $V$  — пространство над  $K$ ,  $\text{char}(K) \neq 2$ . Тогда

$$V = \underbrace{H \boxplus \dots \boxplus H}_s \boxplus V_0 \boxplus \text{Rad}(V)$$

причём  $s$  определено однозначно,  $V_0$  — анизотропно и определено однозначно с точностью до изометрии.

*Доказательство.* См.(теорема 5.9.7)  $\square$

**Теорема 5.9.2** (Витт о продолжении). Пусть  $V$  — пространство над  $K$ ,  $\text{char}(K) \neq 2$ , пусть  $U, W \leq V$ . Если  $\psi : U \cong W$  — изометрия, то  $\exists \phi \in \text{Isom}(V) : \phi|_U = \psi$ . Дополнительно потребуем невырожденности либо  $U$  (тогда и  $W$ ), либо  $V$ .

*Доказательство.* См. (теорема 5.9.4 and ??).  $\square$

Если всё невырождено, то эта теорема эквивалентна следующей:

**Теорема 5.9.3** (Витт о сокращении). Пусть  $U, W, V$  — невырожденные пространства над  $K$ ,  $\text{char}(K) \neq 2$ . Если  $U \boxplus V \cong W \boxplus V$ , то  $U \cong W$ .

*Доказательство.* Пусть  $\phi : U \boxplus V \cong W \boxplus V$ ; согласно теореме Витта о продолжении можно считать, что  $\phi$  оставляет  $V$  на месте ( $V \cong \phi(V)$ ). Тогда  $U \cong W$ , как ортогональные дополнения  $V$  в одном и том же пространстве.  $\square$

### 5.9.1 Ортогональные отражения

Пусть  $V$  — квадратичное пространство,  $\text{char}(K) \neq 2$ . Дополнительно предположим, что  $B \neq 0$ , выберем  $v \in V : B(v, v) \neq 0$  (такой есть, так как  $\text{char}(K) \neq 2$ ).

**Определение 5.9.1** (Ортогональное отражение относительно  $v$ ).  $w_v : V \rightarrow V$ ,  $w_v(x) = x - 2\frac{B(x, v)}{B(v, v)}v$ .

Обозначим  $L_v = \langle v \rangle^\perp$  — *зеркало отражения*. Так как  $V = \langle v \rangle \boxplus L_v$  —  $v$  анизотропен — то ортогональное отражение переводит  $v \mapsto -v$ , а каждая точка ортогональной гиперплоскости остаётся на месте.

**Лемма 5.9.1.** Пусть  $\text{char}(K) \neq 2$ ,  $B(u, u) = B(v, v) \neq 0$ . Тогда  $\exists \phi \in \text{Isom}(V) : \phi(u) = v$ .

*Доказательство.*  $u + v, u - v \in \langle u, v \rangle$ . Один из этих двух векторов анизотропен:

$$B(u + v, u - v) = B(u, u) - B(v, v) = 0$$

откуда

$$0 \neq 4B(u, u) = B((u + v) + (u - v), (u + v) + (u - v)) = B(u + v, u + v) + B(u - v, u - v)$$

Если  $u - v$  анизотропен, то  $w_{u-v}(u) = v$ . Иначе  $u + v$  анизотропен, тогда  $w_{u+v}(u) = -v$ , домножив преобразование на  $-1$  получим необходимое. Можно написать выкладку, а можно посмотреть на картинку:



*Предостережение.* Если  $B(u, u) = B(v, v) = 0$ , то необязательно  $\exists \phi \in \text{Isom}(V) : \phi(u) = v$ . Это верно только если пространство невырождено.

*Контрпример.* Пусть  $u \in V \setminus \text{Rad}(V), v \in \text{Rad}(V)$ .  $v$  ортогонален всему,  $u$  — не всему, нет изометрии, переводящей один в другой.

**Лемма 5.9.2.** Если  $V$  невырождено, то для любых ненулевых изотропных векторов  $u, v \in V : \exists \phi \in \text{Isom}(V) : \phi(u) = v$ .

### 5.9.2 Доказательство теоремы Витта о продолжении для невырожденных подпространств

**Теорема 5.9.4.** Если  $U, W \leq V, \psi : U \cong W$ , причём  $U, W$  невырождены ( $B$  симметрическое,  $\text{char}(K) \neq 2$ ). Тогда  $\exists \phi : V \cong V : \phi|_U = \psi$ .

*Доказательство.* Индукция по  $\dim(U) = \dim(W)$ .

База: (лемма 5.9.1).

Переход: Согласно (лемма 5.5.4), в  $U$  найдётся неизотропный вектор  $u \in U$ . Положим  $v = \psi(u) \in W$ .

Выберем  $\theta \in \text{Isom}(V)$ ,  $\theta(u) = v$  — такая есть согласно (лемма 5.9.1).

Заменим  $W$  на  $\theta^{-1}(W)$ , а  $\psi$  — на  $\theta^{-1}\psi$ . Достаточно доказать теорему после замены, изначально искомого  $\phi$  получится домножением полученного на  $\theta$  слева. После замены  $u = \psi(u)$ .

Применим трижды теорему об ортогональном разложении (теорема 5.5.1):

$$\begin{aligned} U &= \langle u \rangle \boxplus \langle u \rangle_U^\perp \\ W &= \langle u \rangle \boxplus \langle u \rangle_W^\perp \\ V &= \langle u \rangle \boxplus \langle u \rangle_V^\perp \end{aligned}$$

Понятно, что  $\langle u \rangle_U^\perp, \langle u \rangle_W^\perp \leq \langle u \rangle_V^\perp$ .

Ограничение  $\psi|_{\langle u \rangle_V^\perp} : \langle u \rangle_U^\perp \rightarrow \langle u \rangle_W^\perp$  — изометрия. По индукционному предположению  $\exists \eta \in \text{Isom}(\langle u \rangle_V^\perp)$ , такая, что  $\eta|_{\langle u \rangle_U^\perp} = \psi|_{\langle u \rangle_U^\perp}$ .

Тогда  $\phi = \text{id}_{\langle u \rangle} \oplus \eta$  подойдёт.  $\square$

### 5.9.3 Доказательство теоремы Витта о продолжении для невырожденного пространства

**Теорема 5.9.5.** Пусть  $U, W \leq V, \psi : U \cong W$ , причём  $V$  невырождено ( $B$  симметрическое,  $\text{char}(K) \neq 2$ ). Тогда  $\exists \phi : V \cong V : \phi|_U = \psi$ .

*Доказательство.* Сначала докажем следующее:

**Теорема 5.9.6.** Пусть  $V$  невырождено,  $U \leq V$ ,  $U = U_0 \boxplus \text{Rad}(U)$  ( $U_0$  невырождено). Тогда  $\exists$  невырожденное  $\bar{U} : U \leq \bar{U} \leq V$ , такое, что

$$\bar{U} = U_0 \boxplus \underbrace{H \boxplus \dots \boxplus H}_{d(U) := \dim(\text{Rad}(U))}$$

*Доказательство.* Индукция по  $d(U)$  — дефекту  $U$ .

Пусть  $e_1, \dots, e_s$  — базис  $\text{Rad}(U)$ . Из невырожденности  $V$  следует  $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$ .

Назовём  $W = U_0 \boxplus \langle e_1, \dots, e_{s-1} \rangle \leq U$ .  $\dim(W) = \dim(U) - 1$ ,  $\dim(W^\perp) = \dim(U^\perp) + 1$ .

Значит,  $\exists v \in W^\perp \setminus U^\perp$ . Тогда  $B(e_s, v) \neq 0$ . Согласно (лемма 5.6.1) (подпространство  $\langle e_s, v \rangle$  невырождено, так как  $B(e_s, v) \neq 0$ , но  $e_s$  изотропен) найдётся  $e_{-s} \in \langle e_s, v \rangle : B(e_{-s}, e_{-s}) = 0, B(e_s, e_{-s}) = 1$ .

Получили равенство  $U \oplus \langle e_{-s} \rangle = W \boxplus H$ , дальше действуем по индукции.  $\square$

Согласно доказанной теореме найдутся  $\bar{U}, \bar{W}$ :

$$\begin{aligned} U &\leq \bar{U} \leq V & \dim(\bar{U}) &= \dim(U) + d(U) \\ W &\leq \bar{W} \leq V & \dim(\bar{W}) &= \dim(W) + d(W) \end{aligned}$$

Пространства изоморфны, значит, их дефекты равны, то есть  $\dim(\bar{U}) = \dim(\bar{W})$ . С другой стороны,

$$U = U_0 + \text{Rad}(U) \quad W = W_0 + \text{Rad}(W)$$

Заметим, что ограничение  $\psi$  — тоже изометрия:  $\psi|_{U_0} : U_0 \cong W_0$ . Построим эту изометрию до  $\bar{\psi} : \bar{U} \cong \bar{W}$  — все гиперболические плоскости изометричны, понятно, что можно достроить так, чтобы  $\bar{\psi}(U_0) = W_0$ . Согласно предыдущей теореме (теорема 5.9.4) эту изометрию можно продолжить на всё  $V$ .  $\square$

**Теорема 5.9.7** (Витт о разложении).  $(V, B)$  — пространство над  $K$ ,  $(B$  симметрическое,  $\text{char}(K) \neq 2$ ). Тогда  $V$  представимо в виде

$$V_0 \boxplus \underbrace{H \boxplus \cdots \boxplus H}_s \boxplus \text{Rad}(V)$$

$s$  — индекс Витта

где  $V_0$  анизотропно, причём класс изометрий  $V_0$  и  $s$  определены однозначно.

*Доказательство.* Индукция по  $\dim V$ . Для начала избавимся от радикала, включив его прямым слагаемым.

Пока существуют ненулевые изотропные векторы, будем включать их в гиперболические гиперплоскости. В результате останутся только анизотропные векторы, образующие  $V_0$ .

Единственность разложения следует из теоремы Витта о сокращении: все гиперболические плоскости изометричны, на них можно сокращать.  $\square$

Такое разложение пространства на анизотропную, гиперболическую, и вырожденную части называется *разложением Витта*. Естественно выбирать ортогональный базис в анизотропной части, гиперплоскостной базис в гиперболической части (и любой — в радикале, всё равно там  $B \equiv 0$ ) — это *базис Витта*.

Пусть  $V = H_1 \boxplus \cdots \boxplus H_s$ . Выберем полученный гиперплоскостной базис  $H_i = \langle e_i, e_{-i} \rangle$ .

Определим  $U = \langle e_1, \dots, e_s \rangle, U' = \langle e_{-1}, \dots, e_{-s} \rangle$ . Получим разложение  $V = U \oplus U'$ , причём  $B_U \equiv 0$  и  $B_{U'} \equiv 0$ .

**Определение 5.9.2** (Вполне изотропное пространство  $U$ ). Все векторы  $U$  изотропны.

Если характеристика не 2, то во вполне изотропных пространствах  $B_U \equiv 0$  (иначе (лемма 5.5.4)).

**Следствие 5.9.1.** Если  $V$  невырождено, то  $V \cong V_0 \boxplus (U \oplus U')$ , где  $V_0$  анизотропно,  $U, U'$  — вполне изотропны.

**Факт 5.9.1.**  $U, U'$  — максимальные (и по размерности, и по включению) вполне изотропные подпространства в  $V$ .

*Доказательство.* Максимальность по включению очевидна — никакой вектор не добавить.

Согласно теореме Витта о сокращении, в невырожденном  $V$  все максимальные по включению вполне изотропные подпространства изометричны.

А именно, пусть  $U, \tilde{U} \leq V$  — вполне изотропные подпространства, причём  $\dim(U) < \dim(\tilde{U})$ . Тогда  $U$  изометрично некому подпространству в  $\tilde{U}$ . Изометрию можно продолжить на всё  $V$ , получается,  $U$  содержится в большем вполне изотропном подпространстве. Противоречие.  $\square$

## Лекция XX

3 мая 2023 г.

### 5.10 Полуторалинейные скалярные произведения

Иноязычно полуторалинейные называют sesquilinear, полулинейные — semilinear.

#### 5.10.1 Полулинейные отображения, инволюции

Раньше было так:  $R$  — кольцо,  $U, V$  — два модуля над ним,  $\phi: U \rightarrow V$  — линейное отображение:

$$\begin{aligned}\phi(u + v) &= \phi(u) + \phi(v) \\ \phi(v\lambda) &= \phi(v)\lambda\end{aligned}$$

Пусть теперь  $U$  —  $R$ -модуль,  $V$  —  $S$ -модуль. Что естественно понимать под морфизмом  $U \rightarrow V$ ? Первое свойство удобно сохранить:  $\phi(u + v) = \phi(u) + \phi(v)$ . Так как  $V$  — не  $R$ -модуль, то при вынесении скаляра из  $R$  надо его преобразовать в скаляр из  $S$ .

Зададим **унитальный** гомоморфизм колец  $\psi : R \rightarrow S$ .

**Определение 5.10.1** ( $\psi$ -полулинейное отображение). Такое аддитивное  $\phi : U \rightarrow V$ , что

$$\forall u \in U, \lambda \in R : \phi(u\lambda) = \phi(u)\psi(\lambda)$$

Линейное отображение можно понимать, как полулинейное, где  $R = S$ . До сих пор  $\psi$  было тождественным.

**Определение 5.10.2** (Инволюция). Антиавтоморфизм порядка 2. Часто обозначается чертой:

$$\bar{\cdot} : R \rightarrow R, \lambda \mapsto \bar{\lambda}$$

*Свойства.*

- $\overline{\lambda + \mu} = \bar{\lambda} + \bar{\mu}$  — определение антиавтоморфизма.
- $\overline{\lambda \cdot \mu} = \bar{\mu} \cdot \bar{\lambda}$  — определение антиавтоморфизма.
- $\bar{\bar{1}} = 1$ .
- $\bar{\bar{\lambda}} = \lambda$  — порядок 2.

*Примеры.*

- Комплексное сопряжение — ещё и автоморфизм, так как кольцо коммутативно.
- Кватернионное сопряжение:  $a + bi + cj + dk \mapsto a - bi - cj - dk$ .

$$\begin{aligned} w + \bar{w} &= 2a \in \mathbb{R} \\ w\bar{w} &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Инволюция на  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$ .
- Инволюция на  $\mathbb{F}_{q^2}$ :

$$\text{Frob} : \mathbb{F}_{q^2} \rightarrow \mathbb{F}_{q^2}; \quad x \mapsto x^q$$

- Пусть  $R$  — коммутативное кольцо. Тогда  $R = R^o$  и транспонирование — инволюция:  $M(n, R) \rightarrow M(n, R^o); \quad x \mapsto x^t$ .
- Главная инволюция группового кольца  $K[G] \rightarrow K[G]; \quad g \mapsto g^{-1}$ .

Пусть  $U, V$  — модули над **коммутативным** кольцом  $R$  с инволюцией.

**Определение 5.10.3** (Полулинейное отображение  $\phi : U \rightarrow V$  по отношению к инволюции). Аддитивное  $\phi$ , такое, что  $\phi(u\lambda) = \phi(u)\bar{\lambda}$ .

В 1840-е годы Эрмит ввёл это для комплексных чисел, Гамильтон — для кватернионов.

## 5.10.2 Полуторалинейные скалярные произведения

Никаких билинейных анизотропных скалярных произведений (кроме одномерных) над  $\mathbb{C}$  нет: всегда уравнение  $z^2 + w^2 = 0$  имеет решение.

А анизотропность иногда бывает удобна. Поэтому над  $\mathbb{C}$  билинейные скалярные произведения не позволяют построить такую же геометрию, как над  $\mathbb{R}$ . Эрмит предложил заменить сумму квадратов на сумму  $z\bar{z} + w\bar{w}$ , которая никогда не 0 (разве что  $z = w = 0$ ). Для этого пришлось отказаться от линейности по одному из аргументов.

---

Пусть  $K$  — поле с инволюцией,  $V$  — векторное пространство над  $K$ .



**Определение 5.10.4** (Полуторалинейная форма  $B : V \times V \rightarrow K$ ).  $B$ , линейное по одному аргументу, и полуглинейное — по второму:

$$\begin{aligned} B(u+v, w) &= B(u, w) + B(v, w) \\ B(u, v+w) &= B(u, v) + B(u, w) \\ B(u\lambda, v\mu) &= \bar{\lambda} \cdot B(u, v) \cdot \mu \text{ — для правых модулей} \\ B(\lambda u, \mu v) &= \lambda \cdot B(u, v) \cdot \bar{\mu} \text{ — для левых модулей} \end{aligned}$$

**Определение 5.10.5** (Полуторалинейное скалярное произведение). Полуторалинейная форма, в которой ортогональность симметрична:  $B(u, v) = 0 \iff B(v, u) = 0$ .

**Определение 5.10.6** (Эрмитова полуторалинейная форма). Такая форма  $B$ , что  $B(u, v) = \overline{B(v, u)}$ . Также называется *эрмитовски симметричной формой*.

*Замечание.* Казалось бы, можно ввести эрмитовски антисимметричную форму:  $B(u, v) = -\overline{B(v, u)}$ . Но смысла в этом нет: если  $B$  эрмитовски симметрична, то  $i \cdot B$  — эрмитовски антисимметрична.

*Интересный факт.* Все полуторалинейные скалярные произведения с точностью до нормировки — эрмитовски симметричны.

**Определение 5.10.7** (Унитарное пространство).  $(V, B)$ , где  $B$  — полуторалинейное эрмитово скалярное произведение.

**Определение 5.10.8** (Унитарная группа). Группа изометрий унитарного пространства:  $\{\phi | B(\phi u, \phi v) = B(u, v)\}$ .

*Пример* (Классический пример).  $V = \mathbb{C}^n$ ,  $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$   $B(u, v) = \bar{u}_1 v_1 + \dots + \bar{u}_n v_n$ .

$B$  здесь положительно определено:

- $B(u, u) \geq 0$  — положительная полуопределённость.
- Равенство наступает при  $u = 0$ .

Пространство называют *конечномерным гильбертовым* или *классическим унитарным пространством*.

Для таких пространств можно заново переизложить теорию, описанную в данной главе.

Так, матрица Грама  $G(B)$  — такая матрица, что  $B(u, v) = \bar{u}^t G(B) v$ .

**Теорема 5.10.1.** Любое эрмитово скалярное произведение над  $\mathbb{C}$  имеет вид

$$B(u, v) = \bar{u}_1 v_1 + \dots + \bar{u}_p v_p - \bar{u}_{p+1} v_{p+1} - \dots - \bar{u}_{p+q} v_{p+q}$$

Это аналог теоремы Сильвестра: всякое скалярное произведение определяется тремя числами,  $n, p, q$ .

*Набросок доказательства.*  $B(u, u) = \overline{B(u, u)} \Rightarrow B(u, u) \in \mathbb{R}$ . Домножая вектор  $u$  на  $\lambda$  получаем  $B(u\lambda, u\lambda) = \lambda \bar{\lambda} B(u, u)$ , то есть можно заменить число на любое того же знака — привести в  $\{-1, 0, +1\}$ .  $\square$

*Предостережение* (Гильбертово пространство намного сложнее евклидова). Гильбертово пространство включает в себя и симметрическое, и симплектическое произведения, причём они связаны. Об этом ниже.

### 5.10.3 Вещественная и мнимая часть эрмитова скалярного произведения

Пусть  $K = \mathbb{C}$ , рассмотрим единственную непрерывную нетривиальную инволюцию  $z \mapsto \bar{z}$ .

Пусть  $V = \mathbb{C}^n$ ,  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  — скоро будет полуторалинейным скалярным произведением

Можно «забыть про комплексную структуру»:  $V_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^{2n}$ .

Введём два новых отображения:  $A(u, v) = \Re(B(u, v)); C(u, v) = \Im(B(u, v))$ . Они скоро будут билинейными вещественными скалярными произведениями:  $A, C : V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Теорема 5.10.2.** Следующие условия эквивалентны:

1.  $B$  — эрмитово скалярное произведение (полулинейное по первому аргументу, линейное — по второму).
2. (a)  $A$  симметрическое,  $C$  симплектическое.  
 (b)  $A(ui, vi) = A(u, v); \quad C(ui, vi) = C(u, v).$   
 (c)  $A(ui, v) = C(u, v); \quad C(ui, v) = -A(u, v).$

*Доказательство.*

$$\Rightarrow. \quad (a) \quad B(u, v) = \overline{B(v, u)}.$$

$$(b) \quad B(ui, vi) = \bar{i}iB(u, v) = B(u, v).$$

$$(c) \quad A(ui, v) + iC(ui, v) = B(ui, v) = \bar{i}B(u, v) = \bar{i}(A(u, v) + iC(u, v)) = C(u, v) - iA(u, v).$$

$\Leftarrow$ . Из определения  $B(u, v) = A(u, v) + iC(u, v)$  видно, что форма линейна по отношению к вещественным числам. Запишем

$$\begin{cases} A(u, vi) = A(vi, u) = C(v, u) = -C(u, v) \\ C(u, vi) = -C(vi, u) = A(v, u) = A(u, v) \end{cases}$$

Теперь проверим линейность по второму аргументу, полулинейность по первому, эрмитовость:

$$B(u, vi) = A(u, vi) + iC(u, vi) = -C(u, v) + iA(u, v) = i(A(u, v) + iC(u, v)) = iB(u, v)$$

$$B(ui, v) = A(ui, v) + iC(ui, v) = C(u, v) - iA(u, v) = \bar{i}(A(u, v) + iC(u, v))$$

$$B(u, v) = \overline{B(v, u)}$$

□

# Глава 6

## Теория групп

### Лекция XXI

10 мая 2023 г.

#### 6.1 Действия групп

##### 6.1.1 Действия групп на множествах

Пусть  $G$  — группа,  $X$  — множество.

**Определение 6.1.1** ( $G$  действует на  $X$  слева). Задано отображение (*левое действие*)

$$\text{act} : G \times X \rightarrow X \quad g, x \mapsto gx \text{ или } {}^g x \text{ (или ещё как-то обозначается)}$$

При действии группы должны быть выполнены аксиомы:

- Внешней ассоциативности:  $h(gx) = (hg)x$ .
- Унитальности:  $1_G \cdot x = x$ .

Также говорят « $X$  —  $G$ -множество».

При правом действии  $x(hg) = (xh)g$ .

*Замечание.* Для групп любое левое  $G$ -множество можно превратить в правое и наоборот:

$$xg \rightsquigarrow g \cdot x = xg^{-1}$$

Чаше будем рассматривать левые действия — действия группы аналогичны применениям функций, а функции мы применять привыкли слева. Например, левым действиям будут соответствовать гомоморфизмы, а не антигомоморфизмы.

*Замечание.* Возникавшие у нас группы на самом деле возникали уже вместе с действиями.

*Примеры.*

- Естественное действие  $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \text{Bij}(\underline{n})$ , где  $\underline{n} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}$ . Значит,  $S_n$  естественно действует на  $\underline{n}$ :

$$S_n \times \underline{n} \rightarrow \underline{n} \quad \pi, i \mapsto \pi(i)$$

Вообще, для любого множества  $X$  (необязательно конечного):  $S_X$  действует на  $X$ .

**Лемма 6.1.1.** *Других действий нет. При фиксированных  $G, X$  действиям  $G \curvearrowright X$  биективно сопоставляются гомоморфизмы  $\phi : G \rightarrow S_X \quad g \mapsto (x \mapsto gx)$ . Отображения  $L_g : X \rightarrow X, x \mapsto gx$  называются левыми трансляциями на  $g$ .*

*Доказательство.* Определение очевидно корректно, проверим, что  $\phi$  — гомоморфизм. Аксиомами действия являются  $L_{gh} = L_g L_h$  и  $L_1 = \text{id}_X$ , откуда следует, что  $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ .

Обратно: гомоморфизму  $\phi : G \rightarrow S_X$  сопоставим ему левое действие  $G$  на  $X$ :  $gx = \phi(g)(x)$ .  $\square$

Как раз-таки правые действия соответствовали бы не гомоморфизмам, а антигомоморфизмам.

**Определение 6.1.2** (Перестановочное представление). Выше рассмотренный гомоморфизм  $\phi : G \rightarrow S_X$ .

- Естественное действие  $GL(n, R) \curvearrowright R^n$ :

$$GL(n, R) \times R^n \rightarrow R^n \quad g, u \mapsto gu$$

Левое действие — векторное представление  $GL(n, R)$  на  $R^n$ .

Также есть правое действие  ${}^n R \curvearrowright GL(n, R)$ , которому можно сопоставить  $GL(n, R) \times R^n \rightarrow R^n, g, u \mapsto g^{-t}u$  — *ковекторное представление*.

**Определение 6.1.3** (Линейные действия). Действия  $G \times V \rightarrow V$ , удовлетворяющие аксиомам  $g(u + v) = gu + gv$  и  $g(u\lambda) = (gu)\lambda$ .

**Лемма 6.1.2.** При фиксированных  $G, R^n$  линейным действиям  $G \curvearrowright R^n$  биективно соответствует гомоморфизмы  $\phi : G \rightarrow GL(n, R)$ .

**Определение 6.1.4** (Линейное представление). Вышеописанный гомоморфизм  $G \rightarrow GL(n, R)$ .

- Действие группы  $SL(2, \mathbb{C}) \times \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , где  $\overline{\mathbb{C}}$  — одноточечная компактификация  $\mathbb{C}$ , сфера Римана,  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ . Если знаменатель обнуляется, то (так как  $ad - bc = 1$ ) числитель не обнуляется, по определению  $z \mapsto \infty$ . Если  $z = \infty$ , то  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \begin{cases} \frac{a}{c}, & c \neq 0 \\ \infty, & c = 0 \end{cases}$ . Проверка того, что это действие, оставляется читателю в качестве упражнения.

## 6.1.2 Действие группы на себе. Теорема Кэли

Давайте для группы  $G$  считать, что множество  $X = G$ , посмотрим, что получится.

**Определение 6.1.5** (Левое регулярное представление). Действие  $G$  на себе левыми сдвигами:  $G \times G \rightarrow G \quad g, x \mapsto gx$ .

$L_g : G \rightarrow G, x \mapsto gx$  — левая трансляция. Так как в группе есть сокращение, то  $L_g \in S_G$

**Теорема 6.1.1** (Кэли). Отображение  $G \rightarrow S_G, g \mapsto L_g$  задаёт вложение  $G$  в  $S_G$ .

*Доказательство.*

- $L_g \in S_G$ .
- Это гомоморфизм.
- $L_h = L_g \Rightarrow h = g$  — проверим в любой точке, например, в 1:  $h = L_h(1) = L_g(1) = g$ .  $\square$

**Следствие 6.1.1.**  $|G| = n \Rightarrow G \leq S_n$ .

Это ни в коем случае не биекция, например, так как порядок  $S_{|G|} = |G|!$ , что бы это не значило для бесконечных групп.

**Определение 6.1.6** (Правое регулярное представление). Действие  $G$  на себе правыми сдвигами:  $G \times G \rightarrow G, g, x \mapsto xg^{-1}$ .

$R_g : G \rightarrow G, x \mapsto xg^{-1}$  — правая трансляция. Так как в группе есть сокращение, то  $R_g \in S_G$

*Замечание.* И правое представление, и левое представление — левые действия. Мы рассматриваем левые действия, потому что они соответствуют гомоморфизмам, а не антигомоморфизмам.

**Теорема 6.1.2** (Кэли). Отображение  $G \rightarrow S_G, g \mapsto R_g$  задаёт вложение  $G$  в  $S_G$ .

*Замечание.* Любая левая трансляция коммутирует с любой правой трансляцией:  $L_h R_g(x) = h(xg^{-1}) = (hx)g^{-1} = R_g L_h(x)$ . Таким образом, на  $G$  действует даже не сама группа  $G$ , а

$$G \times G \curvearrowright G \quad (G \times G) \times G \rightarrow G \quad (h, g), x \mapsto hxg^{-1}$$

Это, правда, уже необязательно вложение, например, в абелевой группе вообще  $L_g = R_{g^{-1}}$ .

В частности, совместив с диагонализацией  $\text{diag} : G \rightarrow G \times G, g \mapsto (g, g)$  получим действие сопряжения:  $G \times G \rightarrow G, g, x \mapsto {}^g x = gxg^{-1}$ .

Это отображение называется  $I_g : G \rightarrow G, x \mapsto gxg^{-1} = {}^g x$  — внутренний автоморфизм  $G$ . Отображение  $G \rightarrow S_G, g \mapsto I_g$  уже не является вложением, его ядро — центр группы,  $\text{Cent}(G)$ .

### 6.1.3 Действие группы на однородных пространствах. Обобщённая теорема Кэли

Зафиксируем подгруппу  $H \leq G$  — в предыдущем разделе  $H = \{1\}$ . Ей соответствует  $G/H = \{xH \mid x \in G\}$ .

**Определение 6.1.7** (Стандартное действие  $G$  на  $G/H$ ).  $L_g : G \times G/H \rightarrow G/H, g, xH \mapsto gxH$ .

Аналогично  $H \backslash G \times G \rightarrow H \backslash G, Hx, g \mapsto Hxg^{-1}$ .

Получили гомоморфизм  $G \rightarrow S_{G/H}, g \mapsto L_g$ , не обязательно являющийся вложением. Найдём ядро этого гомоморфизма.

Ядро любого гомоморфизма, вообще-то — нормальная подгруппа, а ещё ядро должно быть как-то связано с  $H$ . С  $H$  связаны две нормальные подгруппы  $G$ :  $H_G \leq H \leq H^G$  — *сердцевина*  $H$  (наибольшая нормальная подгруппа  $G$ , содержащаяся в  $H$ ) и нормальная подгруппа  $G$ , порождённая  $H$  (наименьшая нормальная подгруппа  $G$ , содержащая  $H$ ) соответственно. А именно,

$$H_G = \bigcap_{g \in G} H^g \quad H^G = \langle h^g \mid h \in H, g \in G \rangle$$

**Теорема 6.1.3** (Обобщённая теорема Кэли). Ядро гомоморфизма  $L : G \rightarrow S_{G/H}, g \mapsto L_g$  равно сердцевине —  $H_G$ .

*Доказательство.* Мы знаем, что  $L$  — гомоморфизм, вычислим его ядро.

$$\begin{aligned} g \in \text{Ker}(L) &\iff L_g = \text{id}_{G/H} \iff \forall x \in G : L_g(xH) = xH \iff \forall x \in G : gxH = xH \iff \\ &\iff \forall x \in G : x^{-1}gx \in H \iff \forall x \in G : g^x \in H \iff \forall x \in G : g \in H^{x^{-1}} \end{aligned}$$

Отсюда действительно получается, что  $g \in \text{Ker}(L) \iff \forall x \in G : g \in H^x \iff x \in H_G$ . □

Это очень сильная теорема.

**Следствие 6.1.2.**  $|G : H| = n \Rightarrow |G : H_G| \mid n!$ .

*Доказательство.*  $G/H_G \hookrightarrow S_{G/H}$ . Так как  $|G/H| = n$ , то  $|S_{G/H}| = n!$ . □

**Следствие 6.1.3** (Теорема Пуанкаре). *Подгруппа конечного индекса содержит нормальную подгруппу конечного индекса, то есть  $|G : H| < \infty \Rightarrow |G : H_G| < \infty$ .*

**Следствие 6.1.4.** *Если  $p$  — наименьшее простое, делящее порядок  $G$  и  $|G : H| = p$ , то  $H \trianglelefteq G$ .*

*Доказательство.* Согласно (следствие 6.1.2):  $|G : H_G| \mid p!$ ; помимо этого,  $|G : H_G| \mid |G|$ , откуда

$$|G : H_G| \mid \gcd(p!, |G|) = p \Rightarrow H_G = H \quad \square$$

Пусть  $X, Y$  — два  $G$ -множества. Гомоморфизмом  $G$ -множеств  $\phi : X \rightarrow Y$  называют отображение  $\phi(gx) = g\phi(x)$ . Должна быть коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\text{act}_X} & X \\ \downarrow \text{id}_G \times \phi & & \downarrow \phi \\ G \times Y & \xrightarrow{\text{act}_Y} & Y \end{array}$$

Если же на множествах действуют разные группы,  $G \curvearrowright X, H \curvearrowright Y$ , то надо ввести ещё *эквивариантное отображение*  $\psi : G \rightarrow H$ , тогда коммутативной должна быть диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\text{act}_X} & X \\ \downarrow \psi \times \phi & & \downarrow \phi \\ H \times Y & \xrightarrow{\text{act}_Y} & Y \end{array} \quad \phi(gx) = \psi(g)\phi(x)$$

## Лекция XXII

13 мая 2023 г.

Пусть  $G \curvearrowright X$ . Рассмотрим  $x \in X$ , с ним можно связать две вещи.

**Определение 6.1.8** (Орбита  $x$ ).  $Gx \stackrel{\text{def}}{=} \{gx | g \in G\} \subset X$ .

**Определение 6.1.9** (Стабилизатор  $x$ ).  $G_x \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G | gx = x\} \leq G$ . В зависимости от конкретной природы действия его также называют *централизатор, нормализатор, подгруппа изотропии*.

**Определение 6.1.10** ( $G$  действует на  $X$  транзитивно).  $X$  состоит из одной орбиты:

$$\exists x \in X : Gx = X \stackrel{\text{здесь эквивалентно}}{\iff} \forall x \in X : Gx = X \stackrel{\text{здесь эквивалентно}}{\iff} \forall x, y \in X : \exists g \in G : gx = y$$

Ещё говорят  $X$  является *однородным  $G$ -множеством*.

**Теорема 6.1.4.**  $Gx \cong G/G_x$  — изоморфизм  $G$ -множеств.

*Доказательство.* Рассмотрим  $y \in Gx \iff \exists g \in G : y = gx$ . Так как  $\forall h \in G_x : x = hx$ , то  $\forall h \in G_x : y = (gh)x$ .

Обратно:  $y = g_1x = g_2x \Rightarrow g_2^{-1}g_1x = x \Rightarrow g_2^{-1}g_1 \in G_x$ , то есть  $g_1G_x = g_2G_x$ .

Таким образом,  $g_1x = g_2x \iff g_1G_x = g_2G_x$ . Значит, можно сопоставить

$$Gx \longleftrightarrow G/G_x \quad gx \longleftrightarrow gG_x$$

Теперь проверим, что это не просто изоморфизм множеств, а изоморфизм  $G$ -множеств:

$$\forall f \in G : fy = f(gx) = (fg)x \quad \square$$

Другими словами, теорема утверждает, что никаких других однородных  $G$ -множеств, кроме факторов по стабилизаторам, нет.

**Следствие 6.1.5.**  $|Gx| = |G : G_x|$ .

**Лемма 6.1.3.** Две орбиты либо не пересекаются, либо совпадают.

*Доказательство.*  $\exists h, g \in G : hx = gy \Rightarrow y = g^{-1}hx \Rightarrow y \in Gx \Rightarrow Gy \subset Gx$ . Аналогично  $Gx \subset Gy$ .  $\square$

*Предостережение.* Пусть  $S$  — моноид, действующий на  $X$ . Тогда нужно различать орбиты и траектории.  $Sx = \{sx | s \in S\}$  — траектория.

Из того, что нашлись  $h, g \in G : hx = gy$  совсем не следует, что траектории  $x$  и  $y$  совпадают — преобразование необратимо. Чтобы получить орбиты, надо взять транзитивное замыкание траекторий:



Согласно аксиоме выбора существует система представителей — *трансверсаль* к действию  $G$  на  $X$ .

**Теорема 6.1.5.**  $X = \bigsqcup_{x \in Y} Gx$ , где  $Y$  — трансверсаль.

Для конечного трансверсали  $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_m$ , где  $X_i$  — однородные  $G$ -множества.

*Примеры.*

- Подгруппа  $H \leq G$  может действовать на группе трансляциями:  $H \curvearrowright G; h, g \mapsto hg$ . В этом случае орбиты — смежные классы  $H \backslash G$ , стабилизатор любого элемента —  $\{1\}$ . Можно выбрать трансверсаль  $T, G = \bigsqcup_{x \in T} xH$ .

Каждая орбита изоморфна  $H \curvearrowright H$ .

**Определение 6.1.11** ( $X$  — главное однородное пространство для  $G$ ).  $X \cong G$  как  $G$ -множество, то есть

$$\forall x, y \in X : \exists! g : gx = y$$

Как только изоморфизм фиксируется:  $1 \mapsto x$  для конкретного  $x$ ,  $X$  перестанет отличаться от  $G$ .

Прослеживается аналогия с евклидовым пространством, в котором не выбрали начало координат.

- $G \curvearrowright G, g, x \mapsto {}^g x = gxg^{-1}$ . В данном частном случае орбиты — *классы сопряжённых*, стабилизатор — *центральный*:  $C_G(x) = \{g \in G | {}^g x = x\}$ .

Согласно предыдущей теореме  $x^G \cong G/C_G(x)$ .

- Группа  $G$  может действовать на  $2^G$ . В данном частном случае стабилизаторы — *нормализаторы*: для  $Y \subset X: N_G(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G | {}^g Y = Y\}$ .

*Замечание.* Вычисление жордановой формы — задача вычисления трансверсали орбит группы  $GL(n, R)$ , на которой она сама  $(GL(n, R))$  действует сопряжением.

## 6.2 Классификация $G$ -множеств

Как мы уже знаем,  $\forall G$ -множества  $X: X = \bigsqcup_i X_i$ , где  $X_i$  — однородное  $G$ -множество.

Всякое же однородное  $G$ -множество изоморфно  $G/H$  для  $H \leq G$ .

Когда для двух подгрупп  $F, H \leq G: G/F \cong G/H$  — изоморфизм  $G$ -множеств?

Выберем произвольный  $x \in G$ . Пусть  $X = Gx, y \in X$ . Значит  $X \cong G/G_x$ , но так как  $X = Gy$ , то ещё и  $X \cong G/G_y$ . Рассмотрев  $h \in G_y$  (используя, что  $y = gx$  для некоего  $g \in G$ ) получаем, что  $g^{-1}hg \in G_x$ .

**Лемма 6.2.1.**  $\forall g \in G : (y = gx \Rightarrow g^{-1}G_y g = G_x)$ , то есть стабилизаторы точек в одной орбите сопряжены.

**Следствие 6.2.1.**  $F$  сопряжено с  $H \Rightarrow G/F \cong G/H$  — изоморфизм  $G$ -множеств.

**Теорема 6.2.1** (Классификация однородных пространств). Пусть  $F, H \leq G$ . Тогда  $G/F \cong G/H \iff F \sim H$  ( $F$  и  $H$  сопряжены).

*Доказательство.*

$\Leftarrow$ . Доказано выше.

$\Rightarrow$ . Пусть  $G/F \cong G/H$ . Выберем  $g \in G : F \mapsto gH$ . Стабилизатор точки  $F$  (при действии  $G \curvearrowright G/F$ ) — это  $F$ , стабилизатор точки  $gH$  (при действии  $G \curvearrowright G/H$ ) —  $gHg^{-1}$ . Значит,  $F \sim H$ .  $\square$

Таким образом, чтобы описать все  $G$ -множества, надо описать все подгруппы с точностью до сопряжения. Это, правда, дикая задача.

## 6.3 Конечные группы

Будем рассматривать конечные группы, действующие на конечных множествах.

### 6.3.1 Центр $p$ -группы, теоремы Коши

Обозначим  $\text{Fix}_G(X) = X^G \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X | \forall g \in G : gx = x\}$ . К сожалению,  $X^G$  уже ранее было задействовано в другом смысле. Очень жаль. . .

Пусть  $p \in \mathbb{P}$  — простое.

**Лемма 6.3.1.** Пусть  $\forall H \leq G : H \neq G \Rightarrow |G : H| \vdots p$ . При действии  $G \curvearrowright X : |X^G| \equiv |X| \pmod{p}$ .

*Доказательство.* Посмотрим на орбиты.  $X^G = \bigsqcup \tilde{X}_i$ , где  $\tilde{X}_i$  — одноэлементные орбиты. Значит,  $X = X^G \sqcup X_1 \cdots \sqcup X_m$ , где  $X_i$  — различные орбиты, такие, что  $|X_i| > 1$ . Так как  $|Gx_i| = |G : G_{x_i}|$ , то  $|Gx_i| \vdots p$ .  $\square$

**Определение 6.3.1** ( $G$  —  $p$ -группа).  $|G| = p^m$  для некоего  $m \in \mathbb{N}_0$ .

**Теорема 6.3.1** (Доказал Силлов, но пока ещё не теорема Силова). Если  $G$  —  $p$ -группа, то её центр нетривиален.

*Доказательство.* Рассмотрим  $G \curvearrowright G$  — действие сопряжением. Центр — множество инвариантов (неподвижных точек) этого действия. Значит,  $|\text{Cent}(G)| \equiv |G| \pmod{p}$ .  $\square$

**Следствие 6.3.1** (Нетте). Группы порядка  $p$  и  $p^2$  абелевы.

*Доказательство.* Для  $|G| = p$  её центр — она сама. Предположим, что  $|G| = p^2$ ,  $|\text{Cent}(G)| = p$ . Тогда  $|G/\text{Cent}(G)| = p$ , то есть  $G/\text{Cent}(G) \cong C_p$ , откуда  $G$  — абелева (всякий элемент  $G$  представим в виде  $g^i h$ , где  $0 \leq i < p, h \in \text{Cent}(G)$ ). Легко видеть, что они коммутируют)  $\square$

**Теорема 6.3.2** (Коши). Пусть  $|G| \vdots p$ . Тогда количество решений уравнения  $x^p = 1$  делится на  $p$ .



*Доказательство Маккея.* Положим  $X = \{(x_1, \dots, x_p) | x_i \in G; x_1 \cdot \dots \cdot x_p = 1\}$   $\cong$   $G^{p-1}$ .  
 $|X| : p$ .

Рассмотрим действие  $C_p \curvearrowright X$  оператором  $\text{RotateRight} : X \rightarrow X$ ;  $\text{RotateRight}(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p) = (x_p, x_1, \dots, x_{p-1})$  — это действие произвольной образующей  $C_p$ , остальные определяются однозначно.

Неподвижные точки  $X^{C_p}$  — это в точности  $\{(x, \dots, x) | x^p = 1\}$ . Поэтому количество решений уравнения сравнимо с  $|X|$  по модулю  $p$ .  $\square$

*Интересный факт* (Теорема Фробениуса). Если  $|G| : n$ , то количество решений уравнения  $x^n = 1$  в  $G$  делится на  $n$ .

**Следствие 6.3.2.** В частности, в группе порядка, делящегося на  $p$ , существует  $x \neq 1 : x^p = 1$  здесь эквивалентно  $o(x) = p$ .

**Следствие 6.3.3.** В  $p$ -группе нормализатор любой собственной подгруппы строго больше чем она.

### 6.3.2 Теоремы Силова

Если  $G$  — абелева, то  $G = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}, p \mid |G|} G_p$ , где  $G_p$  — примарные компоненты. В неабелевых группах будет что-то отдалённо похожее.

**Определение 6.3.2** ( $G_p \leq G$  — силовская  $p$ -подгруппа).

1.  $G_p$  —  $p$ -группа.
2.  $|G : G_p| \perp p$ .

**Теорема 6.3.3** (Силов,  $E_p$  (existence)). Пусть  $G$  — конечная группа. Для любого  $p \in \mathbb{P} : \exists H \leq G$  — силовская  $p$ -подгруппа.

**Теорема 6.3.4** (Силов,  $C_p$  (conjugacy)). Для данного  $p$  любые две силовские  $p$ -подгруппы сопряжены в  $G$ .

**Теорема 6.3.5** (Силов,  $D_p$ ). Если  $H \leq G$ ,  $H = p^l$ , то найдётся силовская  $p$ -подгруппа, содержащая  $H$ .

**Теорема 6.3.6** (Силов — Фробениус,  $F_p$  (Anzahlssatz)). Для любого  $l \in \mathbb{N}_0 : p^l \mid |G| \Rightarrow |\{H \leq G | |H| = p^l\}| \equiv 1 \pmod{p}$ .

В частности, количество силовских  $p$ -подгрупп делится на  $p$  с остатком 1.

*Пример.* Рассмотрим  $GL(n, q) \stackrel{\text{def}}{=} GL(n, \mathbb{F}_q)$ , где  $q = p^m$ .

$$|GL(n, q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \cdot \dots \cdot (q^n - q^{n-1}) = q^{n(n-1)/2} (q^n - 1) \cdot \dots \cdot (q - 1)$$

так как каждый столбец необходимо выбирать так, что он не лежит в линейной оболочке предыдущих.

Рассмотрим подгруппу  $U(n, q)$ , состоящую из верхних унитреугольных матриц  $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & 1 & * \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ .  $|U(n, q)| = q^{n(n-1)/2}$ . Значит,  $U(n, q)$  — силовская  $p$ -подгруппа в  $GL(n, q)$ .

#### Первое доказательство Фробениуса теоремы Силова

*Доказательство  $E_p$ .*  $G \xrightarrow[\text{теорема Кэли}]{} S_{|G|} \xrightarrow[\text{матрицы перестановки}]{} GL(|G|, p)$ . Пусть  $H = U(|G|, p)$  — силовская  $p$ -подгруппа в  $GL(|G|, p)$ .

Рассмотрим двойные смежные классы  $G \backslash GL(|G|, p) / H$ . Пусть  $\{x_1, \dots, x_m\}$  — трансверсаль. Согласно формуле индекса Фробениуса

$$|GL(|G|, p) : H| = |G : (G \cap x_1 H x_1^{-1})| + \dots + |G : (G \cap x_m H x_m^{-1})|$$

Так как левая часть взаимно проста с  $p$ , то  $\exists x_i : |G : (G \cap x_i H x_i^{-1})| \perp p$ . Таким образом,  $G \cap x_i H x_i^{-1}$  — силовская  $p$ -подгруппа в  $G$ .  $\square$

*Замечание.* У Фробениуса вместо  $GL(|G|, p)$  была симметрическая группа, в которой  $p$ -подгруппу построить весьма нетривиально.

*Доказательство  $C_p$  и  $D_p$ .* Пусть  $H, P \leq G$  причём  $|P| = |G|_p$ , где  $|G|_p$  —  $p$ -часть числа, наибольшая степень  $p$ , делящая  $|G|$ .

Докажем, что если  $|H| = p^m$ , то  $\exists g \in G : H^g \leq P$ .

$$H \backslash G/P = Hx_1P \sqcup \dots \sqcup Hx_sP.$$

$$p \perp |G : P| = |H : (H \cap x_1 P x_1^{-1})| + \dots + |H : (H \cap x_s P x_s^{-1})|$$

Так как  $H$  —  $p$ -группа, то в правой части — степени  $p$ . Значит,  $\exists x_i : H = H \cap x_i P x_i^{-1} \Rightarrow H^{x_i} \leq P$ .  $\square$

*Доказательство частного случая  $F_p$  — для  $p^l = |G|_p$ .* Рассмотрим множество силовских  $p$ -подгрупп  $\text{Syl}_p(G)$ . Пусть  $P \in \text{Syl}_p(G)$ , рассмотрим действие сопряжениями  $P \curvearrowright \text{Syl}_p(G)$ . Если  $Q$  — неподвижная точка действия, то  $P$  нормализует  $Q$ , то есть  $PQ = QP$ , откуда  $PQ \leq G$ .

Согласно формуле произведения  $|PQ| \mid |P| \cdot |Q|$ . Значит,  $PQ$  —  $p$ -группа. Если  $P \neq Q$ , то  $P \leq PQ$ , силовская  $p$ -подгруппа не максимальна, противоречие.

Значит, у действия ровно одна неподвижная точка, откуда  $|\text{Syl}_p(G)| \equiv 1 \pmod{p}$ .  $\square$

### Формула классов, второе доказательство Фробениуса

*Доказательство  $E_p$ .* Пусть  $|G| < \infty, p \mid |G|$ . Значит,  $\exists x \in G : o(x) = p$ .

Рассмотрим действие сопряжением  $G \curvearrowright G$ , выберем трансверсаль  $X$  к орбитам.

$$X = \text{Cent}(G) \cup \underbrace{\{x_1, \dots, x_m\}}_{\text{представители нецентральных классов}}$$

Формула классов:

$$|G| = |\text{Cent}(G)| + |G : C_G(x_1)| + \dots + |G : C_G(x_m)|$$

Индукция по  $|G|$ .

- Либо  $|\text{Cent}(G)| \geq p$ , тогда  $\exists x \in \text{Cent}(G) : x^p = 1$ , тогда  $|G/\langle x \rangle| \leq |G|$ . В факторгруппе силовская  $p$ -подгруппа уже есть,  $|Q| = p^{h-1}$ , где  $p^h = |G|_p$ . Прообраз  $Q$  в  $G$  — группа  $\pi^{-1}(Q)\langle x \rangle$ , её порядок — как нужно.
- Либо  $|\text{Cent}(G)| \not\geq p$ . Значит, из формулы классов выше  $\exists x_i : C_G(x_i) \leq G$ , но  $|G : C_G(x_i)| \perp p$ . Тогда получается, что  $|C_G(x_i)|_p = |G|_p$ , найдём силовскую  $p$ -подгруппу по индукции.  $\square$

*Пример* (Силовские  $p$ -подгруппы в  $S_n$ ). Силовская подгруппа в  $S_p$  — это  $C_p$ . Силовская подгруппа в  $S_{p^2}$  порядка  $|p^{p+1}|$  — это сплетение  $C_p \wr C_p$  — можно переставлять элементы в каждом столбце таблицы  $p \times p$ , а ещё — переставлять сами столбцы.

---

**Определение 6.3.3** ( $H \leq G$  — холловская подгруппа).  $|H| \perp |G : H|$ .

Пусть  $\pi \subset \mathbb{P}$ .

**Определение 6.3.4** ( $G$  —  $\pi$ -группа).  $p \mid |G| \Rightarrow p \in \pi$ .

**Определение 6.3.5** ( $H$  — холловская  $\pi$ -подгруппа в  $G$ ).  $H$  —  $\pi$ -группа и  $|G : H|$  взаимно прост со всеми  $p \in \pi$ .

Оказывается,  $E_\pi, C_\pi, D_\pi, F_\pi$  — ничего из этого неверно.

Но можно добавить условие разрешимости  $G$  (определение было в I семестре, есть цепочка подгрупп, фактор следующей по предыдущей абелев, последняя подгруппа тривиальна). В разрешимых группах  $E_\pi, C_\pi, D_\pi, F_\pi$  выполнены.

Более того, если для каждого  $p \in \pi$  существует холловская  $p$ -подгруппа, то сама группа разрешима??

## 6.4 Тожества с коммутаторами

Пусть  $G$  — произвольная группа.

**Определение 6.4.1** (Левонормированный коммутатор).  $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$

**Определение 6.4.2** (Коммутант).  $[G, G] = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle$ .

Из I семестра мы помним, что  $[G, G] \trianglelefteq G$ ,  $G/[G, G] = G^{\text{ab}}$  — абелева группа (абелианизация  $G$ ), причём если  $H \trianglelefteq G$ ,  $G/H$  — абелева, то  $H \geq [G, G]$ .

**Определение 6.4.3** (Взаимный коммутант).  $[F, H] = \langle [f, h] \mid f \in F, h \in H \rangle$ .

**Предложение 6.4.1.**  $H \trianglelefteq G \iff [H, G] \leq H$ .

1.  $[x, y]^{-1} = xyx^{-1}y^{-1} = yxy^{-1}x^{-1} = [y, x]$
2.  $[xy, z] = xyzy^{-1} \underbrace{x^{-1}z^{-1}}_{z^{-1}x^{-1}xz} = {}^x[y, z] \cdot [x, z]$

соответствует дистрибутивности аддитивного коммутатора  $[x, y] \stackrel{\text{def}}{=} xy - yx$  по первому аргументу.

3.  $[x, yz] = xy \underbrace{zx^{-1}z^{-1}y^{-1}}_{x^{-1}y^{-1}yx} = [x, y] \cdot {}^y[x, z]$

соответствует дистрибутивности аддитивного коммутатора по второму аргументу.

4.

**Определение 6.4.4** (Тройной коммутатор).  $[x, y, z] = [[x, y], z] = xyx^{-1}y^{-1}zyxy^{-1}x^{-1}z^{-1}$ .

**Определение 6.4.5** (Кратный коммутатор).  $[x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n]$ .

**Лемма 6.4.1** (Холл — Витт).

$$[x, y^{-1}, z^{-1}]^x \cdot [z, x^{-1}, y^{-1}]^z \cdot [y, z^{-1}, x^{-1}]^y = 1$$

*Доказательство.* «Мы оставляем читателю в качестве упражнения расписать тройные коммутаторы»  $\square$

**Определение 6.4.6.**  $[A, B, C] = [[A, B], C]$ .

**Лемма 6.4.2** (О трёх подгруппах). Пусть  $A, B, C \leq G$ ;  $H \trianglelefteq G$ . Если две из трёх

$$[A, B, C] \quad [B, C, A] \quad [C, A, B]$$

содержатся в  $H$ , то и третья — тоже.

*Доказательство.* Тожество Холла — Витта.  $\square$

# Лекция XXIII

16 мая 2023 г.

## 6.5 Прямое произведение двух подгрупп

Если  $F, H$  — произвольные группы, то определено внешнее прямое произведение — группа, в которую они обе вкладываются.

**Определение 6.5.1** (Внешнее прямое произведение).  $F, H \rightsquigarrow F \times H \stackrel{\text{def}}{=} \{(f, h) | f \in F, h \in H\}$ , где операции покомпонентны.

$$F \hookrightarrow F \times H \hookleftarrow H; \quad f \mapsto (f, 1) \quad (1, h) \mapsto h$$

Пусть теперь  $F, H \leq G$ . Когда  $G \cong F \times H$ ? Нас даже интересует естественный изоморфизм, когда вложения  $F, H \hookrightarrow F \times H$  тождественные.

**Теорема 6.5.1.**  $G$  является прямым произведением  $F$  и  $H$ , если выполнены условия

1.  $\langle F, H \rangle = G$ .
2.  $F \cap H = \{1\}$ .
3.  $F, H \trianglelefteq G$ .

*Доказательство.* Если  $G$  — прямое произведение  $F, H$ , то условия выполнены. Докажем в другую сторону.

Из 1+3 вытекает  $G = FH = HF$ , то есть  $\forall g \in G : \exists f, h, f', h' : g = fh = h'f'$ .

Из 2+3 вытекает  $[F, H] = \{1\}$ . В самом деле,

$$[f, h] = \underbrace{(fhf^{-1})}_{\in H} h^{-1} = f \underbrace{(hf^{-1}h)}_{\in F}$$

Далее получаем, что все элементы  $F, H$  коммутируют, поэтому  $\forall g \in G : \exists! f \in F, h \in H : g = fh = hf$ . Единственность легко показать от противного.

Сопоставим всякому  $g \in G : (f, h) \in F, H : fh = g$  (такая пара единственна).

$$g_1 = f_1 h_1, g_2 = f_2 h_2 \Rightarrow g_1 g_2 = (f_1 h_1)(f_2 h_2) = (f_1 f_2)(h_1 h_2) \quad \square$$

Теперь займёмся ослаблением условий теоремы.

**Определение 6.5.2** ( $G$  — центральное произведение  $F, H \leq G$ ).

1.  $\langle F, H \rangle = G$ .
2.  $[F, H] = \{1\}$ .
3.  $F, H \trianglelefteq G$ .

Доказательство остаётся прежним, по-прежнему каждому элементу  $g \in G$  можно (но уже необязательно единственным образом) сопоставить  $(f, h) \in F \times H : fh = g$ . Центральные элементы  $z \in F \cap H$  можно перебрасывать:  $g = (fz)(z^{-1}h)$  (они центральные, так как они коммутируют и с  $F$ , и с  $H$ ).

**Определение 6.5.3** ( $G$  — почти прямое произведение  $F, H \leq G$ ).

1.  $\langle F, H \rangle = G$ .
2.  $|F \cap H| < \infty$ .
3.  $F, H \trianglelefteq G$ .

**Определение 6.5.4** ( $G$  — подпрямое произведение  $F, H \leq G$ ).

1.  $G \leq F \times H$ .
2. Проекция  $G$  на  $F$  и  $H$  сюръективны.

### 6.5.1 Прямое произведение нескольких подгрупп

Пусть  $H_1, \dots, H_m \leq G$ . Когда  $G \cong H_1 \times \dots \times H_m$  естественным образом, то есть естественные включения — вложения?

**Теорема 6.5.2.**  $G$  является прямым произведением  $H_1, \dots, H_m$ , если выполнены условия

1.  $\langle H_1, \dots, H_m \rangle = G$ .
2.  $H_i \cap \langle H_1, \dots, \widehat{H_i}, \dots, H_m \rangle = \{1\} \iff H_i \cap (H_1 \cdot \dots \cdot \widehat{H_i} \cdot \dots \cdot H_m) = \{1\}$ .
3.  $H_1, \dots, H_m \trianglelefteq G$ .

*Доказательство.* Оставлено читателю в качестве упражнения. Легче всего по индукции. □

### 6.5.2 Прямое произведение многих подгрупп

Что такое  $\prod_{i \in I} G_i$ , где  $G_i \leq G, I$  — произвольное множество индексов?

Элементы произведения —  $\{(g_i)_{i \in I} | g_i \in G_i\}$ , либо  $\{(g_i)_{i \in I} | g_i \in G_i, \text{ почти все } g_i = 1\}$ . В алгебре «почти все» — все кроме конечного числа.

Обе конструкции — частный случай *ограниченного прямого произведения*:

$$\prod_{i \in I} G_i = \{(g_i)_{i \in I} | g_i \in G_i, \text{ почти все } g_i \in H_i\}$$

## 6.6 Полупрямое произведение

Пусть  $F, H \leq G$ .

**Определение 6.6.1** ( $G$  — полупрямое произведение нормальной подгруппы  $H$  и дополнительной подгруппы  $F$ ).

1.  $\langle F, H \rangle = G$ .
2.  $|F \cap H| = \{1\}$ .
3.  $H \trianglelefteq G$ .

Обозначают  $G = F \ltimes H = H \rtimes F$ .

По-прежнему  $G = FH = HF$ , но они уже необязательно коммутируют: известно лишь, что  $[F, H] \leq H$ .

$$\forall g \in G : \exists! f, f' \in F, h, h' \in H : g = fh = h'f'$$

Так как коммутант лежит в  $H$ , то на самом деле  $f = f' : h'f' = (fhf^{-1})f$ .

Как эти элементы перемножать?

$$g_1 = h_1 f_1, g_2 = h_2 f_2 \Rightarrow g_1 g_2 = (h_1 f_1)(h_2 \underbrace{f_2}_{f_1^{-1} f_1}) = (h_1 f_1 h_2 f_1^{-1})(f_1 f_2) = (h_1 \cdot {}^{f_1} h_2)(f_1 f_2)$$

*Замечание.* При перемножении  $f_1 h_1 \cdot f_2 h_2$  появляется сопряжение не элементом  $f_1$ , а элементом  $f_1^{-1}$ , что потом породит не гомоморфизмы, а антигомоморфизмы.

Пусть нам даны

1. Группы  $F$  и  $H$ .
2. Гомоморфизм  $\theta : F \rightarrow \text{Aut}(H)$ .

**Определение 6.6.2** (Полупрямое произведение, отвечающее «действию автоморфизмами»  $\theta$ ).  $H \rtimes_{\theta} F \stackrel{\text{def}}{=} \{(h, f) | h \in H, f \in F\}$  с действием, определённым так:

$$(h_1, f_1) \cdot (h_2, f_2) = (h_1 \theta(f_1)(h_2), f_1 f_2)$$

**Теорема 6.6.1.**  $H \rtimes_{\theta} F$  — группа, изоморфная полупрямому произведению своих подгрупп  $H^1 = \{(h, 1) | h \in H\}$  и  $F^1 = \{(1, f) | f \in F\}$ .

Группа является полупрямым произведением подгрупп, если факторгруппа вкладывается.

Более общим примером, примером *расширения* является конструкция  $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$  из групп единиц и десятков:

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \rightarrow 1$$

*Замечание.* Для нетривиального действия полупрямое произведение двух абелевых групп вполне может стать неабелевым.

*Примеры* (Полупрямое произведение).

- Рассмотрим следующие подгруппы в  $GL(n, K)$ :

$$B(n, K) = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \quad D(n, K) = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \quad U(n, K) = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Борелевские — (верхне) треугольные матрицы      диагональные матрицы      (верхние) унитарные матрицы

$$\boxed{B = D \ltimes U}$$

- $N(n, K)$  — группа мономиальных матриц, то есть  $N = \left\{ x \in GL(n, K) \mid \begin{cases} \forall i : \exists ! j : x_{i,j} \neq 0 \\ \forall j : \exists ! i : x_{i,j} \neq 0 \end{cases} \right\}$ .
- $W_n$  — матрицы перестановки, то есть  $W_n = \{x \in N(n, K) | \forall i, j : x_{i,j} = 0 \vee x_{i,j} = 1\}$ .  $W_n \cong S_n$ .

$$\boxed{N = W_n \ltimes D}$$

- Группа аффинных матриц  $Aff(n, K) = \left\{ \begin{pmatrix} g & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid g \in GL(n, K), u \in K^n \right\}$ . Группа отвечает аффинным движениям, то есть композиции вращения относительно начала координат (за это отвечает  $GL(n, K)$ ) и параллельного переноса (за это отвечает  $K^n$ ).

$$\begin{pmatrix} g_1 & u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_2 & u_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 g_2 & g_1 u_2 + u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{GL(n, K) \ltimes K^n = Aff(n, K)}$$

## 6.7 Группы порядка $pq$

Пусть  $p < q$  — различные простые числа,  $G$  — группа ( $|G| = pq$ ). Как она выглядит?

В ней совершенно точно есть силовские подгруппы  $P, Q \leq G, |P| = p, |Q| = q$ . Число силовских  $q$ -подгрупп сравнимо с 1 (mod  $q$ ), но так как это число — делитель  $pq$  (число классов сопряжённости

к  $Q$ ), то оно равно 1. Значит, в  $G$  ровно одна силовская  $q$ -подгруппа, она инвариантна относительно сопряжения, то есть  $Q \triangleleft G \Rightarrow G = P \ltimes Q$ .

Как известно, группа простого порядка  $p$  единственна с точностью до изоморфизма — все порядки элементов делят размер группы, таким образом, есть элемент порядка  $p$ , то есть группа циклическая.

$G$  определяется действием  $P \curvearrowright Q$  автоморфизмами  $\theta : P \rightarrow \text{Aut}(Q)$ . Автоморфизмы  $C_q$  отправляют произвольную образующую в произвольную, они изоморфны  $C_{q-1}$ .

Очевидно, есть тривиальный  $\theta : P \rightarrow \text{id}$ . Он соответствует абелевой группе  $C_p \times C_q$ .

Заметим, что нетривиальный гомоморфизм  $\theta$  существует, если  $p \mid q-1$ .

Зафиксируем результат:

**Теорема 6.7.1.** Неабелевы группы порядка  $pq$ , где  $p < q, p, q \in \mathbb{P}$  существуют только если  $p \mid q-1$ .

*Примеры.*

- Все группы порядка 15 абелевы.
- Есть неабелева группа (группа Фробениуса) порядка 21.

Вообще, верен более общий факт:

*Интересный факт* (Теорема Диксона).  $\gcd(n, \phi(n)) = 1 \iff \exists! |G| = n$  (и эта группа абелева).

## Лекция XXIV

17 мая 2023 г.

### 6.8 Крохотный кусок комбинаторной теории групп

#### 6.8.1 Свободные группы

Пусть  $X$  — множество.

**Определение 6.8.1** (Свободная группа  $F_X$  со свободным множеством образующих  $X$ ). Группа вместе с вложением  $X \hookrightarrow F_X$ , такая, что  $\forall$  группы  $G, \forall \phi : X \rightarrow G: \exists! \psi : F_X \rightarrow G$  — гомоморфизм групп, делающий следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta} & F_X \\ & \searrow \phi & \swarrow \psi \\ & & G \end{array}$$

Обычно  $X$  конечно, мы будем рассматривать конечнопорождённые свободные группы. В таком случае если  $|X| = n$ , то пишут  $F_n$  вместо  $F_X$ .

*Замечание.* Если бы в определении были абелевы группы, то это были бы в точности свободные модули над  $\mathbb{Z}$ .

*Замечание.* Если свободная группа существует, то она единственна, причём с точностью до единственного изоморфизма.

В самом деле, если есть две свободные группы  $F_X$  и  $\widetilde{F}_X$  со вложениями  $\eta : X \hookrightarrow F_X, \widetilde{\eta} : X \hookrightarrow \widetilde{F}_X$ , то существуют и единственны гомоморфизмы групп  $\psi : F_X \rightarrow \widetilde{F}_X, \widetilde{\psi} : \widetilde{F}_X \rightarrow F_X$ , такие, что

$$\forall x \in X : \psi(\eta(x)) = \widetilde{\eta}(x) \quad \widetilde{\psi}(\widetilde{\eta}(x)) = \eta(x)$$

Таким образом, видно (например, из конструкции свободной группы, которая приведена ниже), что  $\psi$  и  $\widetilde{\psi}$  взаимно обратные отображения, то есть  $\psi : F_X \rightarrow \widetilde{F}_X$  — изоморфизм. Он единственный, так как единственный гомоморфизм групп  $\psi : F_X \rightarrow \widetilde{F}_X$ .

**Определение 6.8.2** (Свободный моноид  $W_X$  со свободным множеством образующих  $X$ ). Моноид вместе с вложением  $X \hookrightarrow W_X$ , такой, что  $\forall$  моноида  $S, \forall \phi : X \rightarrow S: \exists! \psi : W_X \rightarrow S$  — гомоморфизм моноидов, делающий следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta} & W_X \\ & \searrow \phi & \swarrow \psi \\ & S & \end{array}$$

**Лемма 6.8.1.** Свободный моноид уж точно существует.

*Доказательство.* Моноид с множеством образующих  $X$  — это просто набор слов. Так, для  $X = \{a, b\}$ :  $W_X \stackrel{\text{def}}{=} \{\wedge, a, b, aa, ab, ba, bb, aba, \dots\}$ .

Операцией в моноиде является конкатенация:  $(x_1 \dots x_n) * (y_1 \dots y_m) = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m$ . Эта операция ассоциативна, но некоммутативна.

Таким образом,  $(W_X, *, \wedge)$  — свободный моноид (слова равны, если они физически равны; для отображения  $\phi : X \rightarrow S$  гомоморфизмом  $\psi : W_X \rightarrow S$  является тот, который отправляет слово  $x_1 \dots x_n \in W_X$  в  $\phi(x_1) \cdot \dots \cdot \phi(x_n) \in S$ ).  $\square$

**Теорема 6.8.1.** Для любого множества образующих  $X$  существует свободная группа.

*Доказательство.* Удвоим алфавит: выберем множество  $X' : |X'| = |X|$  вместе с биекцией  $X \leftrightarrow X'; x \leftrightarrow x'$  и построим свободный моноид  $W_{X \sqcup X'}$ . Введём на  $W_{X \sqcup X'}$  отношение эквивалентности  $\sim$ , являющееся транзитивным замыканием отношения предэквивалентности

$$\forall u, v \in W_{X \sqcup X'}, x \in X : uxx'v \sim uv \sim ux'xv$$

Определим  $F_X \stackrel{\text{def}}{=} (W_{X \sqcup X'}) / \sim$  с наследованной от моноида операций. Очевидно, она определена корректно:  $w_1 \sim w'_1; w_2 \sim w'_2 \Rightarrow w_1 w_2 \sim w'_1 w'_2$ . Более того, она осталась ассоциативной, а класс эквивалентности пустого слова  $[\wedge]$  — нейтральный элемент. Операция взятия обратного в группе работает так:  $(x_1 \dots x_n)^{-1} = x'_n \dots x'_1$ .

Определим  $\psi : W_{X \sqcup X'} \rightarrow G$  аналогично:  $\psi(x_1 \dots x_n) = \phi(x_1) \cdot \dots \cdot \phi(x_n)$  (правда для этого придётся доопределить  $\phi$  на  $X'$ :  $\phi(x'_i) := \phi(x_i)^{-1}$ ).

Так как отношение эквивалентности лежит в ядре (множество элементов, эквивалентных тривиальному слову лежит в  $\text{Ker}(\psi)$ ), то  $\psi$  пропускается через фактор:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta} & W_{X \sqcup X'} \\ & \searrow \phi & \swarrow \psi \\ & F_X & \\ & \searrow & \swarrow \\ & G & \end{array}$$

Пропущенный через фактор  $\psi$  и есть искомый гомоморфизм групп — он сохраняет произведение, единицу и обратные. Более того, из построения видно, что это — единственный способ его построить, поэтому гомоморфизм групп действительно единственный.  $\square$

**Определение 6.8.3** (Редуцированное (приведённое) слово  $w \in W_{X \sqcup X'}$ ). Слово, в котором нет фрагментов вида  $xx'$  или  $x'x$ .

**Теорема 6.8.2.** В каждом классе эквивалентности слов есть единственное редуцированное.



*Доказательство.* Пусть есть два редуцированных слова  $w_1 \sim w_2$ . Они эквивалентны, так как есть цепочка отношений предэквивалентностей  $w_1 = u_1 \sim \dots \sim u_n = w_2$ .



Выберем среди всех таких цепочек цепочку с минимальной длиной максимального слова, а среди этих — с минимальным количеством слов максимальной длины.

Так как слова редуцированные, то в цепочке отношений предэквивалентности первый шаг был вверх — в удлинение слова, а последний — вниз. Значит, где-то был пик. Надо рассмотреть три варианта:

1. Врисовали и вычеркнули одну и ту же пару — эти два шага можно взаимоуничтожить.
2. Врисовали и вычеркнули соседнюю пару букв — лишь один символ задействован в обеих операциях. Эти два шага тоже можно взаимоуничтожить.
3. Врисовали и вычеркнули различную пару букв. Эти два шага можно поменять местами.

Во всех случаях получили новую цепочку, у которой либо длина максимального слова меньше, либо та же, но слов такой длины меньше. Противоречие — мы выбрали уже минимальную. Значит, пика нет, слова просто равны:  $w_1 = w_2$ .

Существование редуцированного слова очевидно, так как можно взять самое короткое в классе — его не укоротить.  $\square$

Обозначим  $\bar{w}$  — приведённое слово в классе  $[w]$ .

**Следствие 6.8.1.** В качестве  $F_X$  можно выбрать не фактормоноид, а множество редуцированных слов. Тогда вместо конкатенации  $*$  надо ввести операцию на группе  $w_1, w_2 \mapsto [w_1 * w_2]$ .

Из единственности редуцированного слова можно проверить, что новая операция тоже ассоциативна:  $\overline{u * v} = \overline{u} * \overline{v}$

Основная свободная группа, которая нам встретится в топологии — фундаментальная группа букета окружностей (или плоскости с выколотыми точками), котёнок с катушкой.

Ещё свободную группу можно мыслить так:



Эту картинку надо рисовать не на евклидовой плоскости, а на гиперболической, тогда все стрелки будут одинакового размера и всё поместится.

Если же отождествить  $xu$  и  $yx$ , так как на ровной картинке они попадают в одну точку, то это будет уже абелева группа.

## 6.8.2 Задание группы образующими соотношениями

Пусть  $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ ,  $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ .

По определению свободной группы существует и единственный гомоморфизм  $\psi : F_X \rightarrow G, x_i \mapsto g_i$ . Значит,  $G$  является факторгруппой свободной группы.

$$1 \rightarrow R \rightarrow F_X \rightarrow G \rightarrow 1$$

$R$  — первая буква слова relations, соотношения,  $g_i$  — generators, образующие.

Значит,  $G \cong F_X/R$ , как же описать  $R$ ? Проблема в том, что кроме тривиальных случаев  $R$  бесконечно велико.

Хочется взять образующие для  $R$ , но оказывается, что в общем случае даже их бесконечно много. Однако  $R$  — ядро гомоморфизма, то есть нормальная подгруппа в  $F_X$ . Значит, можно взять её образующие, как образующие нормальной подгруппы.

Если  $\psi(w) = 1_G$ , то  $\psi(uwu^{-1}) = \psi(u)\psi(w)\psi(u)^{-1} = 1_G$ , то есть соотношения выписываются с точностью до сопряжения. Любая такая система образующих — система определяющих соотношений (defining relations).

**Определение 6.8.4** (Группа с образующими  $g_1, \dots, g_n$  и определяющими соотношениями  $w_1, \dots, w_m$ ).  $G \cong \langle g_1, \dots, g_n | w_1, \dots, w_m \rangle$

Сама такая запись группы — presentation, копредставление или задание образующими соотношениями.

*Примеры.*

- Свободная абелева группа  $\mathbb{Z}^n \cong \langle x_1, \dots, x_n | x_i x_j = x_j x_i \rangle \cong \langle x_1, \dots, x_n | [x_i, x_j] \rangle$ . Часто удобно писать соотношения в виде  $w_1 = w_2$ , это по определению то же самое, что и соотношение  $w_1 w_2^{-1}$ .
- $C_n = \langle g | g^n \rangle = \langle g | g^n = 1 \rangle$  — возможно, вторая запись нагляднее.
- $D_n = \langle x, y | x^2 = y^2 = (xy)^n = 1 \rangle$ .
- $Q_8 = \langle x, y | x^4 = y^4 = 1, x^2 = y^2, xy = yx^3 \rangle$ . Здесь есть ровно восемь слов:  $1, x, y, x^2 = y^2, xy = yx^3, \dots$
- $S_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} | (s_i^2 = 1) \wedge (\forall i, j : |i - j| > 2 \Rightarrow [s_i, s_j] = 1) \wedge \underbrace{s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}}_{(s_i s_{i+1})^3 = 1} \rangle$ ,

где  $s_i = ([i][i+1])$  — фундаментальная транспозиция, они же кокстеровские образующие. Соотношение  $xyx = yxy$  носит название braid relation, отношение в группе кос (косы имеются в виду те, которые девушки заплетают).



Эти косы гомотопически изоморфны.

Если в копредставлении  $S_n$  забыть про отношение  $s_i^2 = 1$ , то получим группу кос

$$B_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} | (\forall i, j : |i - j| > 2 \Rightarrow [s_i, s_j] = 1) \wedge s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \rangle$$

**Факт 6.8.1.** *Группа с большим множеством соотношений — факторгруппа группы с меньшим числом соотношений:*

$$\langle X | R \rangle \rightarrow \langle X | R \cup S \rangle \rightarrow 1$$

*Доказательство.* Теорема фон Дика. □

**Следствие 6.8.2.**  $B_n \rightarrow S_n \rightarrow 1$ : симметрическая группа — факторгруппа группы кос.

*Примеры.*

- $PSL(2, \mathbb{Z}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  — фактор  $SL(2, \mathbb{Z})$  по центру.  $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ .  $PSL(2, \mathbb{Z}) = \langle x, y | x^2 = y^3 = 1 \rangle$ . Что здесь произошло? Определяющие соотношения бьются на соотношения по разным образующим, это называют свободным произведением:

$$\langle X \sqcup Y | R \sqcup S \rangle = \langle X | R \rangle \star \langle Y | S \rangle$$

где  $R$  — соотношения только на  $X$ ,  $S$  — соотношения только на  $Y$ .

Получается,  $PSL(2, \mathbb{Z}) \cong C_2 \star C_3$  — свободное произведение двух очень маленьких групп — бесконечно.

- Для  $SL(2, \mathbb{Z})$  фактора по центру нет.  $SL(2, \mathbb{Z}) = C_4 \star_{C_2} C_6$  — уже не свободное произведение, а какое-то хитрое.