

Математический анализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

1	Комплексный анализ	2
1.1	Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути	3
1.1.1	Про дифференциальные формы	3
1.1.2	Про интегрирование	3
1.1.3	Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути	4
1.1.4	Сумма путей	4
1.1.5	Альтернативное определение	4
1.1.6	(Не)зависимость от параметризации	6
1.2	Условия существования первообразной у дифференциальной формы	6
1.3	Операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$	9
1.3.1	Связь с голоморфными функциями	10
1.4	Гармонические функции	18
1.5	Первообразная от замкнутой формы вдоль пути	19
1.5.1	Наводящие предположения	19
1.5.2	Требуемые свойства	19

Глава 1

Комплексный анализ

Лекция I

16 февраля 2024 г.

Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, где открытое $G \subset \mathbb{C}$.

Определение 1.0.1 (f голоморфна в $z_0 \in G$). $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \stackrel{\text{def}}{=} f'(z_0)$.

Во втором семестре мы проверяли, что $f = u + iv$ (где $u, v : G \rightarrow \mathbb{R}$) голоморфна в $z_0 \iff f$ дифференцируема в вещественном смысле, и выполняются уравнения Коши — Римана:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Определение 1.0.2 (f аналитична в G). $\forall z_0 \in G : \exists c_j \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \quad (*)$$

где ряд сходится не только при $z = z_0$.

Теорема 1.0.1. f аналитична в $G \iff f$ голоморфна во всех точках G .

Доказательство.

\Rightarrow . Доказали во втором семестре, несложно.

\Leftarrow . Скоро займёмся, время пришло. □

Из представления (*) следует, что производная в точке z считается почленно: $f'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j (z - z_0)^{j-1}$. В частности, отсюда получается, что $f'(z_0) = c_1$, и вообще $f^{(n)}(z_0) = n! \cdot c_n$.

Вскоре мы увидим, что ситуация разительно отличается от вещественной: в вещественном случае были разные классы — дифференцируемые функции, C^1 , C^∞ , аналитичные, и множество промежуточных классов.

В комплексном же случае, если функция хотя бы один раз дифференцируема, то окажется, что этого достаточно, чтобы она была не просто дифференцируема, а непрерывно дифференцируема, бесконечно дифференцируема, и даже аналитична.

1.1 Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути

1.1.1 Про дифференциальные формы

Определение 1.1.1 (Линейная функция $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$). $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n : l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y)$.

Определение 1.1.2 (Линейная форма на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$). Функция двух переменных $\phi : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, линейная по второму аргументу.

В пространстве \mathbb{R}^n имеется базис (e_j) : $h = e_1 h_1 + \dots + e_n h_n$.

Тем самым, $\phi(x, h) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\phi(x, e_j)}_{=: g_j(x)} h_j = \sum_{j=1}^n g_j(x) h_j$.

Введём *базисные линейные формы* $dx_j(u, h) = h_j$, игнорирующую первую координату, и возвращающую j -ю компоненту второго аргумента. Теперь $\phi(x, h)$ разложилась в сумму $\sum_{j=1}^n g_j dx_j$.

Пример. Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ — дифференцируемая в G функция. Заметим, что её дифференциал $d_f(x, _)$ — в точности линейная форма на G .

При разложении по базису получится $d_f(x, _) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j$.

Вскоре мы увидим, что далеко не всякая линейная форма является чьим-то дифференциалом.

Если $\phi = \sum_{j=1}^n g_j dx_j$ — дифференциал функции f , то непременно $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Тот факт, что ϕ является дифференциалом f , можно сказать наоборот: f является первообразной ϕ .

1.1.2 Про интегрирование

Рассмотрим монотонную функцию $\Phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Как и при определении стилтьесовой длины, будем считать, что Φ определена на некотором открытом множестве, содержащем $\langle a, b \rangle$. Обозначим за l_Φ стилтьесову длину, отвечающую функции Φ .

Пускай λ_Φ — продолжение стилтьесовой длины l_Φ по Лебегу — Каратеодори.

Она, как водится, определена на некоторой Σ -алгебре, в которой есть борелевские множества, но измеримы могут быть и какие-то другие множества, зависящие от конкретной функции Φ .

Примеры.

- Так, функция $\phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ порождает дельта-меру δ_0 , относительно которой все множества измеримы.

Кроме того, эта мера сингулярна относительно стандартной меры Лебега.

- Может показаться, что так происходит из-за разрывности ϕ , но это не так.

Рекурсивно определим канторову лестницу $C : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$:



Построив по данной функции стильесову длину λ_C , мы получим меру, сосредоточенную на канторовом множестве меры нуль.

Её носитель — само канторово множество, так как на всех отрезках вне канторова множества λ_C равна нулю. Она сингулярна относительно стандартной меры Лебега на \mathbb{R} , и её измеримые множества разительно отличаются от измеримых множеств меры Лебега.

По мере Стильеса можно интегрировать: если v является λ_Φ измеримой (в частности, измерима по Борелю и непрерывна), то определён интеграл $\int_{\langle a, b \rangle} v d\lambda_\Phi$. Иногда пишут просто $\int_{\langle a, b \rangle} v d\Phi$.

Теперь пусть $I = [a, b]$, и $\Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. В таком случае $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$, где некие Φ_1, Φ_2 возрастают. Можно определить знакопеременную меру $\lambda_\Psi \stackrel{def}{=} \lambda_{\Phi_1} - \lambda_{\Phi_2}$, понятно, что определение корректно.

1.1.3 Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути

Пускай $\gamma : [a, b] \rightarrow G \subset \mathbb{R}^n$ — спрямляемый путь (путь конечной длины). Пускай $U = \sum_{j=1}^n u_j dx_j$ — дифференциальная форма в области G . Если не сказано противное, будем считать, что u_j — непрерывные функции.

Определение 1.1.3 (Интеграл от U вдоль пути γ). $\int_\gamma U \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^n \int_{[a, b]} u_j(\gamma(t)) d\gamma_j(t)$.

Здесь $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Так как путь спрямляем, то все γ_j — ограниченной вариации, каждая порождает свою меру Стильеса, и определение интегрирует композицию $U \circ \gamma$ по данной мере.

1.1.4 Сумма путей

Пускай имеются два отрезка $[a, c]$ и $[c, d]$, и на них заданы пути $\gamma_1 : [a, c] \rightarrow G$, $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow G$. Предположим, что $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$.

Тогда можно устроить путь $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a, d] \rightarrow G$, $\gamma(t) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, c] \\ \gamma_2(t), & t \in [c, d] \end{cases}$.

Замечание. Интеграл аддитивен по множеству: $\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} U = \int_{\gamma_1} U + \int_{\gamma_2} U$.

1.1.5 Альтернативное определение

Далее мы не интересуемся никакими чудесами вроде канторовых лестниц, и считаем, что Φ такова, что λ_Φ абсолютно непрерывна относительно стандартной меры Лебега.

А раз так, то по теореме Радона — Никодима \exists суммируемая $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что

$$\lambda_\Phi(e) = \int_e w(x) dx \quad (+)$$

Факт 1.1.1. Формула (+) заведомо верна, если Φ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, тогда $w = \Phi'$.

Доказательство. Введём меру $\nu(e) = \int_e \Phi'(x) dx$, заданную на измеримых по Лебегу множествах. Φ' непрерывна, и, следовательно, измерима.

Если $\langle c, d \rangle \subset [a, b]$, то $\nu(\langle c, d \rangle) = \int_{\langle c, d \rangle} \Phi'(x) dx = \Phi(d) - \Phi(c) = l_\Phi(\langle c, d \rangle)$.

Таким образом, из теоремы единственности, продолжение l_Φ по Лебегу — Каратеодори совпадает с $\int_e \Phi'(x) dx$. \square

Замечание. Утверждение (факт 1.1.1) сохраняет силу, если Φ непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема.

Далее где-то используется Φ , а где-то β , надо убедиться, что это везде одно и то же, и заменить. Пускай $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, кусочно-непрерывно дифференцируемая: $\exists a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$, такие, что β непрерывно дифференцируема на $[a_s, a_{s+1}]$ при $0 \leq s < k$. Введём $\rho(e) = \int_e \beta'(x) dx$ — это знакопеременная вещественная мера.

У данной меры возникают (см. разложение Хана) положительная и отрицательная части $\rho_+(e) \stackrel{def}{=} \int_e (\beta')_+(x) dx$ и $\rho_-(e) \stackrel{def}{=} \int_e (\beta')_-(x) dx$

Если обозначить за $\Phi_+(t) = \int_0^t (\beta')_+(x) dx$ и $\Phi_-(t) = \int_0^t (\beta')_-(x) dx$, то окажется, что соответствующие меры Стильеса совпадают с ρ_+ и ρ_- .

Более того, $\beta = \Phi_+ - \Phi_-$ — получили разложение функции ограниченной вариации в положительную и отрицательную части.

Замечание. Это разложение экономнее, чем то, которое было получено ранее — ранее в качестве Φ_+ выбиралась вариация Φ .

Если всё, что написано выше, собрать вместе, то получится

$$\boxed{\int_{[s,t]} v d\Phi = \int_{[s,t]} v(x) \beta'(x) dx}$$

Далее «гладкий» используется, как синоним к непрерывно-дифференцируемому.

Следствие 1.1.1 (Можно считать определением). Если $U = \sum_{j=1}^n u_j dx_j$ — дифференциальная форма в G с непрерывными коэффициентами, а $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow G$ — спрямляемый кусочно-гладкий путь, то

$$\int_\gamma U = \sum_{j=1}^n \int_a^b u_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt$$

1.1.6 (Не)зависимость от параметризации

Пускай $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — кусочно-гладкий путь, $\psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ — гладкий гомеоморфизм.

Теперь $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$ — перепараметризация γ

Лемма 1.1.1. Для всякой формы U :

$$\int_{\tilde{\gamma}} U = \pm \int_{\gamma} U$$

Знак $+$ выбирается, если ψ возрастает, и $-$ если убывает.

Доказательство. Предположим, что γ — гладкий путь, иначе применяем к кусочкам гладкости по отдельности.

$$\int_{\tilde{\gamma}} U = \sum_{j=1}^n \int_c^d u_j(\gamma(\psi(t))) \gamma'_j(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt = \left\| \begin{array}{l} \tau = \psi(t) \\ d\tau = \psi'(t) dt \end{array} \right\| = \sum_{j=1}^n \int_{\psi(c)}^{\psi(d)} u_j(\gamma(\tau)) \gamma'_j(\tau) d\tau = \pm \int_{\gamma} U \quad \square$$

Про ψ также можно считать, что это он не гладкий, а лишь кусочно-гладкий.

Тем самым, можно определить сумму путей для несовпадающих отрезков: для двух путей $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow G, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow G$ (при условии $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$) можно один их отрезков-прообразов линейным возрастающим преобразованием перевести в отрезок, соприкасающийся со вторым (например, $t \mapsto t + (b - c)$).

Также есть понятие обратного пути $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$. Для любой формы U :

$$\int_{\gamma \oplus \gamma^-} U = \int_{\gamma} U + \int_{\gamma^-} U = \int_{\gamma} U - \int_{\gamma} U = 0$$

1.2 Условия существования первообразной у дифференциальной формы

Теорема 1.2.1. Если у дифференциальной формы U в открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ имеется первообразная F , то для всякого кусочно-гладкого пути $\gamma : [a, b] \rightarrow G$

$$\int_{\gamma} U = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Доказательство. $U = \sum_{j=1}^n g_j dx_j$, где $g_j(w) = \frac{\partial}{\partial x_j} F(w)$. Считаем, что путь гладкий.

$$\int_{\gamma} U = \sum_{j=1}^n \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_j} F(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (F \circ \gamma)(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Если же путь всего лишь кусочно-гладкий, то надо разбить отрезок на подотрезки гладкости, и сложить. \square

Следствие 1.2.1. Если у дифференциальной формы U есть первообразная, то её интегралы по всем путям с данными началом и концом, равны.

Оказывается, верно и обратное.

Лекция II
26 февраля 2024 г.

Лемма 1.2.1. Пусть G — область в \mathbb{R}^n , тогда любые две её точки можно соединить ломаной (кусочно-линейным путём).

Доказательство. Выберем $x_0 \in G$, положим $U = \{y \in G \mid \text{существует ломаная в } G \text{ с началом в } x_0 \text{ и концом в } y\}$.

Покажем, что U открыто. Пусть $y \in U$, тогда найдётся шарик $B_\varepsilon(y) \subset G$, и $B_\varepsilon(y) \subset U$ — можно добавить одно звено к ломаной $x_0 \rightsquigarrow y$.

Покажем, что U замкнуто. Пусть $z \in G$ — предельная точка для U . Найдётся $B_\varepsilon(z) \subset G$, так как z — предельная, то $\exists y \in B_\varepsilon(z) \cap U$. Значит, $z \in U$ — можно добавить одно звено $y \rightarrow z$. \square

Замечание. Имея кусочно-линейный путь $\gamma : [a, b] \rightarrow G$, соединяющий $A, B \in G$, несложно получить бесконечно дифференцируемый путь, соединяющий их:

Пусть $\gamma_1 : [a-1, b+1] \rightarrow G, \gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a, b] \\ \gamma(a), & t \in [a-1, a] \\ \gamma(b), & t \in [b, b+1] \end{cases}$. Теперь, сворачивая γ_1 с аппрокс-

мативной единицей с достаточно большим номером и достаточно малым компактным носителем, получим бесконечно дифференцируемый путь, соединяющий A и B .

Теорема 1.2.2. Пусть $\Phi = \sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j$ — непрерывная дифференциальная форма в G (то есть коэффициенты непрерывны в G). Следующие условия эквивалентны.

1. $\int \Phi$ есть первообразная F , то есть функция $F \in C^1(G) : dF = \Phi$ (иными словами, $\forall j : \frac{\partial}{\partial x_j} F = f_j$).
2. Для всех кусочно-гладких путей γ с фиксированными началом и концом $\gamma(a) = \gamma_a, \gamma(b) = \gamma_b$: $\int_\gamma \Phi$ не зависит от γ (а только от начала и конца).
3. Для любой кусочно-гладкой петли (то есть замкнутого пути) γ в G : $\int_\gamma \Phi = 0$.

Доказательство. Мы уже доказали ранее цепочку импликаций $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2)$. Далее доказываем $(2) \Rightarrow (1)$.

Предъявим кандидат в первообразную. Зафиксируем $x_0 \in G$, выберем $x \in G$, пусть γ — произвольный кусочно-гладкий путь с началом в x_0 и концом в x . Определим $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\gamma \Phi$. Согласно посылке, F корректно определена — не зависит от выбора пути.

Покажем, что частные производные F существуют, и равны f_j . Тогда они получатся непрерывными, то есть F — дифференцируемой, и окажется, что F — первообразная Φ .

Пусть e_1, \dots, e_n — стандартные базисные орты в \mathbb{R}^n . Рассмотрим $\frac{F(x+te_j) - F(x)}{t}$.

При малых t : отрезок между x и $x+te_j$ лежит внутри G . Пусть γ_1 — путь, соединяющий x_0 и x , l — отрезок от x до $x+te_j$.

$$\frac{F(x+te_j) - F(x)}{t} = \frac{1}{t} \left(\int_{\gamma_1 \oplus l} \Phi - \int_{\gamma_1} \Phi \right) = \frac{1}{t} \int_l \Phi = \frac{1}{t} \int_0^t f_j(x + \tau e_j) d\tau \xrightarrow{t \rightarrow 0} f_j(x) \quad \square$$

Определение 1.2.1 (Прямоугольник на плоскости). Множество вида $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$.

Область G на плоскости будем называть *удобной*, если $\exists x_0 \in G : \forall y \in G : \exists$ прямоугольник $P \subset G$, содержащий точки x и y .

Примеры (Удобные области).

- $\text{Int } Q$, если Q — прямоугольник. В качестве центра x_0 подойдёт любая точка.

- $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < r\}$. В качестве центра x_0 стоит взять центр, иначе не получится:



Определение 1.2.2 (Ориентированная граница прямоугольника P). Петля γ , обходящая границу $P = [a, b] \times [c, d]$ против часовой стрелки, то есть вот так:



$$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4.$$

Для прямоугольника P будем обозначать за ∂P в зависимости от контекста либо границу P , как топологического подмножества \mathbb{R}^2 , либо путь, обходящий границу P против часовой стрелки.

Следствие 1.2.2 (Дополнение к (теорема 1.2.2)). Если G — удобная область на плоскости, то к трём эквивалентным условиям (теорема 1.2.2) можно добавить

$$4. \forall P \subset G : \int_{\partial P} \Phi = 0.$$

Доказательство. (3) \Rightarrow (4) ясно, докажем (4) \Rightarrow (1).

Пусть $x_0 \in G$ — центр удобной области, определим $F(x) = \int_{\delta} \Phi$, где δ — это либо $\delta_1 := \gamma_1 \oplus \gamma_2$ либо $\delta_2 := \gamma_4^- \oplus \gamma_3^-$ (вне зависимости от выбора δ получится одно и то же).



Далее, чтобы проверить $\frac{\partial}{\partial x_1} F = f_1$ и $\frac{\partial}{\partial x_2} F = f_2$, воспользуемся подходящим представлением: пусть орт выглядит так:



тогда для проверки $\frac{\partial}{\partial x_1} F = f_1$ удобно воспользоваться определением F через δ_1 , для проверки $\frac{\partial}{\partial x_2} F = f_2$ — определением через δ_2 . Далее повторяем рассуждение из (теорема 1.2.2). \square

Пусть $\Phi = \sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j$ — непрерывная дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1.2.3 (Форма Φ точна). Существует первообразная F в G : $dF = \Phi$.

Определение 1.2.4 (Форма Φ замкнута). Форма Φ локально точна ($\forall x_0 \in G : \exists U \ni x_0 : \Phi|_U$ точна).

Понятно, что точная форма замкнута, но точность из замкнутости не следует: чуть позднее мы определим dz , и покажем, что $\frac{dz}{z}$ — замкнутая, но не точная форма на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Теорема 1.2.3. Пусть Φ — дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$. Следующие условия эквивалентны:

1. Φ замкнута.

2. $\forall x_0 \in G : \exists V \ni x_0 : \forall$ кусочно-гладкого замкнутого пути γ с носителем в V : $\int_{\gamma} \Phi = 0$.

Если $n = 2$, то дополнительно появляются ещё два условия:

3. $\forall z \in G : \exists V_z \subset G : \forall P \subset V_z : \int_{\partial P} \Phi = 0$.

4. $\forall P \subset G : \int_{\partial P} \Phi = 0$.

Доказательство. Докажем, что $(3) \Rightarrow (4)$, остальное уже доказано выше.

Заметим, что границу прямоугольника P можно представить, как сумму границ четырёх прямоугольников вдвое меньшего диаметра:



Таким образом, чтобы доказать, что интеграл по границе большого прямоугольника P нулевой, разобьём его на достаточно маленькие прямоугольники, по ним-то интеграл нуль. Чтобы это формализовать, вспомним лемму Лебега о покрытии:

Теорема 1.2.4 (Лемма Лебега). Пусть K — компакт в метрическом пространстве, $\{U_j\}_{j \in J}$ — открытое покрытие компакта K . Тогда $\exists \delta > 0 : \forall A \subset K : \text{diam } A < \delta \Rightarrow \exists j \in J : A \subset U_j$.

Применяя лемму Лебега для покрытия P окрестностями $\{V_z\}_{z \in P}$, получим такое число δ . Теперь надо разбить границу прямоугольника P в сумму границ прямоугольников диаметра меньше δ , а посылка теоремы говорит, что интеграл по ним уже нуль. \square

1.3 Операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

Как известно, $\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$, то есть $\forall z \in \mathbb{C} : z = x + iy$, аналогично $\bar{z} = x - iy$.

Рассмотрим z и \bar{z} , как функции $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto x \pm iy$. Теперь $dz = dx + i dy$ и $d\bar{z} = dx - i dy$ образуют базис в пространстве дифференциальных форм (тех, которые не зависят от точки), обратное преобразование выглядит так:

$$\begin{cases} dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \\ dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \end{cases}$$

Рассмотрим форму $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \Phi(x, y) = \alpha(x, y) dx + \beta(x, y) dy$. Перепишем её в новом базисе:

$$\Phi(x, y) = \frac{\alpha(x, y)}{2} (dz + d\bar{z}) + \frac{\beta(x, y)}{2i} (dz - d\bar{z}) = \frac{\alpha(x, y) - i\beta(x, y)}{2} dz + \frac{\alpha(x, y) + i\beta(x, y)}{2} d\bar{z}$$

Теперь пусть Φ — точная форма, то есть $\Phi = dF$, и тогда $\alpha(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ и $\beta(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$. Теперь

$$dF = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right) d\bar{z}$$

Определение 1.3.1 ($\frac{\partial F}{\partial z}$). Коэффициент, стоящий перед dz , то есть $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right)$.

Определение 1.3.2 ($\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$). Коэффициент, стоящий перед $d\bar{z}$, то есть $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right)$.

Иначе говоря, мы ввели операторы $\frac{\partial}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ так, что

$$dF = \frac{\partial}{\partial z} F dz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} F d\bar{z}$$

1.3.1 Связь с голоморфными функциями

Пусть $F = u + iv$, где $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Запишем

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)$$

В правой части равенства получились выражения из уравнений Коши — Римана.

Факт 1.3.1. Вещественные функции u, v удовлетворяют уравнениям Коши — Римана $\iff \frac{\partial(u+iv)}{\partial \bar{z}} \equiv 0$.

Факт 1.3.2. F голоморфна $\iff dF = \frac{\partial F}{\partial z} dz$. При этом $\frac{\partial F}{\partial z}$ есть производная F по комплексному аргументу.

Доказательство. Функция дифференцируема по комплексному аргументу \iff её дифференциал — умножение на комплексное число. \square

В основном нас будут интересовать дифференциальные формы вида $\phi(z) dz$, где ϕ — произвольная функция.

Выясним, когда у формы $\phi(z) dz = \phi(z) dx + i\phi(z) dy$ имеется первообразная, то есть функция $g : \frac{\partial g}{\partial x} = \phi, \frac{\partial g}{\partial y} = i\phi$. Заметим, что $\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{2}(\phi - i(i\phi)) = \phi$ и $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\phi + i(i\phi)) = 0$.

Утверждение 1.3.1. Форма ϕdz имеет первообразную $g \iff g$ голоморфна, и $g' = \phi$.

Теорема 1.3.1 (Коши). Если $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция (область $G \subset \mathbb{C}$), то форма $g(z) dz$ замкнута.

Доказательство. Потом. \square

Контрпример (Глобально первообразной может не быть). Пусть $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}, g : G \rightarrow \mathbb{C}, g : z \mapsto \frac{1}{z}$.

По теореме Коши у g имеется локальная первообразная — комплексный логарифм — но глобально определить не получится. Пусть $\Gamma = \partial\mathbb{T}$ — комплексная окружность, ориентируем её против часовой стрелки, а именно, рассмотрим стандартный обход окружности $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \alpha : \phi \mapsto e^{i\phi}$. Теперь убедимся, что форма не точна:

$$\int_{\alpha} \phi = \int_{\alpha} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{(e^{it})'}{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \neq 0$$

Для будущих применений также определим ориентированную против часовой стрелки границу $B_r(z_0)$, это путь $\beta(t) = z_0 + re^{it}$ для $t \in [0, 2\pi]$.

Пример. Пусть $z_0, w \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_{>0}, |w - z_0| \neq r$, пусть путь γ обходит границу $B_r(z_0)$ против часовой стрелки:



Тогда, оказывается, (посчитаем чуть позже):

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-w} = \begin{cases} 0, & |z-w| > r \\ 2\pi i, & |z-w| < r \end{cases} \quad (\circ)$$

Грубой силой этот интеграл посчитать непросто, так как w находится где угодно — внутри или снаружи круга — а интеграл, оказывается, зависит только от этих двух альтернатив.

Теорема 1.3.2 (Основная оценка интеграла вдоль пути). Пускай $\Phi = \sum_{j=1}^n f_j dx_j$ — непрерывная дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$, а $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — кусочно-гладкий путь, $K := \text{Im}(\gamma) \subset G$.

$$\text{Тогда } \left| \int_{\gamma} \Phi \right| \leq \underbrace{\sup_{x \in K} \left(\sum_{j=1}^n |f_j(x)|^2 \right)^{1/2}}_{=: A} \cdot l(\gamma).$$

Доказательство. Считаем, что γ — гладкий путь, иначе нужно разбить на кусочки гладкости.

$$\left| \int_{\gamma} \Phi \right| = \left| \int_a^b \sum_{j=1}^n f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt \right| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n |f_j(\gamma(t))|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |\gamma'_j(t)|^2 \right)^{1/2} dt \leq A \cdot \underbrace{\int_a^b \left(\sum_{j=1}^n |\gamma'_j(t)|^2 \right)^{1/2} dt}_{l(\gamma)}$$

□

Лекция III

1 марта 2024 г.

Рассмотрим дифференциальную форму $\Phi = F(z) dz$, где F — непрерывная функция в $G \subset \mathbb{C}$. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — плоский путь.

Расписав $\Phi(z) = F(z) dx + iF(z) dy$ и применив основную оценку интеграла вдоль пути, получаем

$$\left| \int_{\gamma} \Phi \right| \leq \max_{z \in K} \sqrt{|F(z)|^2 + |F(z)|^2} \cdot l(\gamma) = \sqrt{2} \max_{z \in K} |F(z)| \cdot l(\gamma)$$

Эта оценка вызывает некоторую неудовлетворённость: кажется, что $\sqrt{2}$ здесь лишний. И это действительно правда: можно расписать интеграл аккуратнее.

Пусть $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, тогда по определению

$$\int_{\gamma} \Phi = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'_1(t) + iF(\gamma(t)) \cdot \gamma'_2(t) dt = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Таким образом, интеграл от комплексной формы вдоль пути имеет более простое представление, и оно легко поддаётся более плотной оценке:

$$\left| \int_{\gamma} \Phi \right| \leq \int_a^b |F(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq \max_{z \in K} |F(z)| \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)| dt}_{l(\gamma)}$$

Посчитаем анонсированный на предыдущей лекции интеграл (о). Пусть $z_0, w \in \mathbb{C}$, $r > 0$.

- Сначала рассмотрим случай $|w - z_0| < r$. Заметим, что, согласно основной оценке интеграла, если коэффициенты равномерно стремятся к какому-то значению и интегралы ограничены, то предельный интеграл тоже сходится.

Запись ниже $\int_{|z-z_0|=r}$, и вообще все аналогичные записи, которые встретятся в дальнейшем, по умолчанию означают, что граница соответствующего множества (в данном случае — круга) обходится стандартным образом, то есть против часовой стрелки.

$$\begin{aligned} \int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z - z_0 - (w - z_0)} &= \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} dz = \\ &= \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} \left(1 + \frac{w - z_0}{z - z_0} + \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^2 + \dots \right) dz \quad (\equiv) \end{aligned}$$

На слагаемые из ряда имеется равномерная по z оценка: $\left| \frac{w-z_0}{z-z_0} \right| \leq \frac{|w-z_0|}{r} < 1$, и по теореме Вейерштрасса функциональный ряд сходится. Значит, сумму можно вынести из-под интеграла

$$(\equiv) \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} dz + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|z-z_0|=r} \frac{(w - z_0)^j}{(z - z_0)^{j+1}} dz \quad (\equiv)$$

Первое слагаемое мы умеем брать, а у каждого слагаемого из остальной суммы имеется первообразная: $\frac{1}{(z-z_0)^{j+1}} = -\frac{1}{j} \left(\frac{1}{(z-z_0)^j} \right)'$

$$(\equiv) \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi i$$

- Теперь разберёмся со случаем $|w - z_0| > r$.

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z - z_0 - (w - z_0)} = -\frac{1}{w - z_0} \int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = -\frac{1}{w - z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{|z-z_0|=r} \frac{(z - z_0)^j}{(w - z_0)^j} dz$$

Аналогично предыдущему случаю, ряд сходится абсолютно, поэтому сумму опять можно вынести из под интеграла, и в данном случае всё ещё проще: каждое слагаемое имеет первообразную, там нет отрицательных степеней z , поэтому вся сумма обращается в нуль.

Пусть $\Phi = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ — непрерывная дифференциальная форма в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 1.3.3. Если все функции $f_j \in C^1$, то следующие условия эквивалентны:

- Φ замкнута.
- $\forall 1 \leq i, j \leq n : \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ — «накрест взятые частные производные равны».

Доказательство.

\Rightarrow Выберем $x \in G$, так как форма замкнута, то $\exists U \ni x : \Phi$ имеет первообразную $F : U \rightarrow \mathbb{R}$. Тем самым, $f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$, и так как $f_i \in C^1$, то действительно $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

\Leftarrow Сначала приведём доказательство случая $n = 2$. В таком случае $\Phi = f dx + g dy$.

Согласно посылке, $h := \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$. Кстати, равенство слева равносильно одному из эквивалентных уравнений Коши — Римана.

Рассмотрим произвольный $P = [a, b] \times [c, d] \subset G$, и докажем, что $\int_{\partial P} \Phi = 0$.



То, что мы увидим сейчас, является первым заходом на *формулу Остроградского — Гаусса*. Функция h непрерывна, и можно записать на неё интеграл Лебега: $\int_P h(x, y) dx dy$. Теперь, применяя теорему Фубини, раскладываем интеграл в сумму повторных:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3^-} f(_, d) dx + \int_{\gamma_1^-} f(_, c) dx &= \int_a^b [f(x, d) - f(x, c)] dx = \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx = \\ &= \int_P h(x, y) dx dy = \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial g}{\partial x} dx \right) dy = \int_c^d [g(b, y) - g(a, y)] dy = \int_{\gamma_2} g(b, _) dy + \int_{\gamma_4} g(a, _) dy \end{aligned}$$

Итого, $\int_{\gamma_3^-} f(_, d) dx + \int_{\gamma_1^-} f(_, c) dx = \int_{\gamma_2} g(b, _) dy + \int_{\gamma_4} g(a, _) dy$, откуда действительно $\int_{\gamma} \Phi = 0$.

⇐ Теперь приведём альтернативное доказательство индукцией по n .

База: Случай $n = 1$ тривиален: теорема Ньютона — Лейбница говорит, что у непрерывной функции есть первообразная.

Переход: Пусть $n > 1$, и для $n - 1$ теорема доказана. Рассмотрим $a \in G$, и возьмём прямоугольный параллелепипед со сторонами, параллельными осям координат P такой, что $a \in \text{Int } P$. Докажем, что на P у Φ есть первообразная.

Построим $g(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{x_1} f_1(t, x_2, \dots, x_n) dt$. Обозначим $\phi_j := \frac{\partial g}{\partial x_j}$. Заметим, что $\phi_1 = \frac{\partial g}{\partial x_1} = f_1$.

Теперь рассмотрим форму $\Psi(x_1, \dots, x_n) = \phi_1 dx_1 + \dots + \phi_n dx_n$. Эта форма имеет первообразную g на параллелепипеде P .

Теперь посмотрим на $\Phi - \Psi =: h_1 dx_1 + \dots + h_n dx_n$. По построению $h_1 = 0$. По условию накрест взятые частные производные равны у Φ , и они равны у Ψ , так как у неё есть первообразная. Значит, это же верно и для разности, в частности, $\frac{\partial h_i}{\partial x_1} = \frac{\partial h_1}{\partial x_i} = 0$. Иными словами, $\forall i : h_i$ не зависит от x_1 .

А раз так, то на $\Phi - \Psi$ можно смотреть, как на форму $(n - 1)$ -й переменной, и применить индукционное предположение.

Замечание. Тут есть некоторый обман: производные $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$ могут просто не существовать.

Попробуем обойти его так: пусть $\beta \in C^\infty$, с компактным носителем. Выберем аппроксимативную единицу $\beta_t(x) = \frac{1}{t^n} \beta(\frac{x}{t})$.

Назначим $f_k^{(t)} = f_k * \beta_t$, $f_k^{(t)} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f_k$.

Далее у формы $\Phi^{(t)}$ коэффициенты $h_k^{(t)}$ не зависят от x_1 . А раз они равномерно стремятся к h_k , то и они не зависят от x_1 . Это было произнесено устно, я наверняка что-то не так записал.

□

Теорема 1.3.4 (Коши). Пусть F — голоморфная функция в открытом множестве $G \subset \mathbb{C}$. Тогда дифференциальная форма $F(z) dz$ замкнута, то есть локально $\exists S : S'(z) = F(z)$.

Замечание. Теорема совсем проста, если заранее предположить, что $F'(z)$ непрерывна (а так в итоге и должно получиться, так как F — аналитична (теорема 1.0.1)). В таком случае имеется следующее более простое доказательство.

Доказательство. Надо проверить второе уравнение Коши — Римана: $\forall z \in \mathbb{C} : \frac{\partial F}{\partial y}(z) = i \frac{\partial F}{\partial x}(z)$ (первое выполнено, так как накрест-взятые частные производные равны).

Поскольку $F(z) dz = F(z) dx + iF(z) dy$, утверждение эквивалентно (согласно (теорема 1.3.3)) тому, что $\forall z \in \mathbb{C} : \frac{\partial F}{\partial y}(z) = i \frac{\partial F}{\partial x}(z)$. Пусть $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \stackrel{?}{=} i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

то есть $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$. **Я вообще не понял, что произошло.**

□

Теперь докажем теорему Коши вне предположения непрерывности производной.

Доказательство. Докажем от противного: пусть форма $F(z) dz$ не замкнута, $\exists P_0 \subset G : \alpha = \int_{\partial P_0} F(z) dz \neq 0$.

Будем потихонечку делить этот прямоугольник на четыре равные части: пусть $P_0 = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$.



Модуль интеграла по границе по крайней мере одного из Q_i хотя бы $\frac{|\alpha|}{4}$. Назовём этот прямоугольник P_1 , и продолжим процесс. Получим систему вложенных замкнутых прямоугольников $P_0 \supset P_1 \supset \dots$, таких, что $\left| \int_{\partial P_k} F(z) dz \right| \geq \frac{|\alpha|}{4^k}$. При этом $l(\partial P_k) = 2^{-k} l(\partial P_0)$, и $\text{diam}(P_k) = 2^{-k} \text{diam}(P_0)$.

Имеется ровно одна точка z_0 в пересечении $\bigcap_{k \geq 0} P_k$. Воспользуемся условием того, что F голоморфна в точке z_0 : $F(z) = F(z_0) + F'(z_0)(z - z_0) + \underbrace{\psi(z)}_{o(|z - z_0|)}$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |\psi(z)| \leq \varepsilon |z - z_0|$. Пусть k настолько велико, что $\text{diam } P_k < \delta$.

$$\int_{\partial P_k} F(z) dz = \int_{\partial P_k} [F(z_0) + F'(z_0)(z - z_0)] dz + \int_{\partial P_k} \psi(z) dz$$

Первый интеграл обнуляется, так как это линейная функция по z , у неё есть первообразная. Оценивая второй интеграл, получаем

$$\frac{|\alpha|}{4^k} \leq \left| \int_{\partial P_k} \psi(z) dz \right| \leq \varepsilon \text{diam } P_k \cdot l(\partial P_0) = \varepsilon \cdot 2^{-k} \text{diam } P_0 \cdot 2^{-k} l(\partial P_0) = 4^{-k} \varepsilon \cdot \text{diam } P_0 \cdot l(\partial P_0)$$

Выбирая довольно маленький ε , получаем, что $|\alpha|$ меньше любого положительного числа.

□

Теорема 1.3.5 (Об устранимой особенности замкнутой дифференциальной формы). Пусть $\Phi = f dx + g dy$ — непрерывная дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{C}$.

Если $z_0 \in G$, и Φ замкнута в $G \setminus \{z_0\}$, то Φ замкнута в G .

Доказательство. Докажем, что $\forall P \subset G : \int_{\partial P} \Phi = 0$. Рассмотрим случаи.

- Если $z_0 \notin P$, то интеграл нуль по условию.
- Если $z_0 \in \text{Int } P$, то данный случай сводится к следующему: разобьём прямоугольник на два так, чтобы z_0 оказалось на границе:



- Если $z_0 \in \partial P$, то отступим на ε , интеграл по границе P_ε будет нулём: $\int_{\partial P_\varepsilon} \Phi = 0$.

Заметим, что $\int_{\partial P_\varepsilon} \Phi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial P} \Phi$, так как коэффициенты дифференциальной формы равномерно непрерывны в некоторой окрестности P . Значит, $\int_{\partial P} \Phi = 0$.

□

Теорема 1.3.6 (Малая интегральная формула Коши). Пусть f — голоморфна в области G , $B = B(z_0, r)$ — круг, $\overline{B} \subset G$. Тогда $\forall z \in B$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Доказательство. Докажем для некоего фиксированного $z \in B$.

Рассмотрим функцию $g(\zeta) = \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$. g голоморфна в области $G \setminus \{z\}$. Тем самым, $g(\zeta) d\zeta$ — замкнутая форма в $G \setminus \{z\}$, а по теореме об устранимой особенности $g(\zeta) d\zeta$ замкнута в G (определим по непрерывности $g(z) := f'(z)$).

Но так как круг — удобная область, то у g имеется первообразная в некотором круге $B(z_0, r(1+\varepsilon))$ (где $\varepsilon > 0$ настолько мал, что $B(z_0, r(1+\varepsilon)) \subset G$),

Тем самым, $\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta = 0$, откуда

$$\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \cdot \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i \cdot f(z)$$

□

Следствие 1.3.1 (Теорема Коши). Если функция голоморфна в области $G \subset \mathbb{C}$, то $\forall z_0 \in G$ функция f (в некоторой окрестности) раскладывается в некоторый степенной ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, причём радиус сходимости хотя бы $\text{dist}(z_0, \partial G)$.

Доказательство. Пусть $r \in (0, \text{dist}(z_0, \partial G))$. Рассмотрим $B = B_r(z_0)$. Так как $B \subset G$, то для точки $z \in B$ получаем

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} (z - z_0)^j \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \end{aligned}$$

Абсолютная равномерная сходимость в круге радиус r при $r < \text{dist}(z_0, \partial G)$ имеется по тем же причинам, что и при доказательстве (о).

Таким образом, мы получили степенной ряд, и так как коэффициенты степенного ряда, раз определены, не зависят от радиуса круга ($c_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}$), то радиус сходимости данного ряда хотя бы $\text{dist}(z_0, \partial G)$. \square

Лекция IV

12 марта 2024 г.

Замечание. Интегральную форму Коши можно спокойно дифференцировать: так,

$$\frac{d}{dz} f(z) = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

В общем случае

$$\frac{d^k}{dz^k} f(z) = \frac{d^k}{dz^k} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

Определение 1.3.3 (Целая (entire) функция). Голоморфная функция, заданная в \mathbb{C} .

Выберем $z_0 = 0$. Согласно (следствие 1.3.1), получаем $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$, где $c_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}} d\zeta$, причём имеется абсолютная сходимость везде в \mathbb{C} .

Теорема 1.3.7. Если f целая, и $|f(z)| = \mathcal{O}(z^N)$ при $|z| \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty$, то f — многочлен степени не более N .

Доказательство. Из определения \mathcal{O} : $\exists C, a \in \mathbb{R} : |f(z)| \leq C|z|^n$ при $|z| > a$.

Выберем $r > a$, и оценим: $|c_j| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i(j+1)\theta}} i e^{i\theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Cr^N}{r^{j+1}} d\theta = \frac{Cr^N}{r^j}$. Получается, при $j > N : |c_j|$ меньше любого наперёд заданного положительного числа. \square

Следствие 1.3.2 (Теорема Лиувилля). Ограниченная целая функция постоянна.

Следствие 1.3.3 (Основная теорема алгебры). $\forall p \in \mathbb{C}[z] : \deg p > 0 \Rightarrow \exists z_0 \in \mathbb{C} : p(z_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $p(z) = \sum_{j=0}^N c_j z^j$, где $N > 0$ и $c_N \neq 0$.

Пойдём от противного: пусть $\forall z \in \mathbb{C} : p(z) \neq 0$.

Рассмотрим $f(z) := \frac{1}{p(z)}$.

- С одной стороны, это целая функция: $\frac{d}{dz} f(z) = -\frac{p'(z)}{p(z)^2}$.

- С другой стороны, f ограничена: оценим $|p(z)| \geq |z|^N \left(|c_N| - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{|c_j|}{|z|^{N-j}} \right)$, откуда для достаточно больших $|z|$: $|p(z)| \geq \frac{|c_N|}{2} |z|^N$.
Тем самым, $p(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \infty$, то есть $f(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$. А при малых $|z|$: f ограничена, как непрерывная функция на компакте.
- Тем самым, по теореме Лиувилля, $f \equiv \text{const}$, то есть $p \equiv \text{const}$. Противоречие, мы предполагали $\deg p > 0$. \square

Теорема 1.3.8 (Теорема о среднем). Пусть $z_0 \in G$, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна в G . Выберем $r < \text{dist}(z_0, \partial G)$. Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

Доказательство. Посчитаем $f(z_0)$ по интегральной формуле:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it}) ire^{it}}{re^{it}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

\square

Это действительно среднее в обычном смысле: f проинтегрирована по окружности по мере Лебега, и интеграл поделили на меру окружности.

Теорема 1.3.9 (Принцип максимума модуля). Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ — непостоянная голоморфная функция. Тогда $|f| : z \mapsto |f(z)|$ не может достигать наибольшего значения при $z \in G$.

Доказательство. Пойдём от противного: пусть $\exists z_0 \in G : \forall z \in G : |f(z)| \leq |f(z_0)|$. Выберем $r > 0 : B(z_0, r) \subset G$, и докажем, что $|f|$ постоянна в $B(z_0, r)$. Пусть $\rho < r$, по теореме о среднем

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(z_0 + \rho e^{it})|}_{\leq |f(z_0)|} dt, \text{ причём равенство достигается только если}$$

$\forall t \in [0, 2\pi] : |f(z_0 + \rho e^{it})| = |f(z_0)|$ (если $\exists t_0 \in (0, 2\pi) : |f(z_0 + \rho e^{it_0})| < |f(z_0)|$), то по непрерывности $\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) : |f(z_0 + \rho e^{it})| < |f(z_0)| - \varepsilon$, то есть на промежутке $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ интеграл строго меньше требуемого значения).

Лемма 1.3.1. Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна, и $\exists z_0 \in G : f'(z_0) \neq 0$. Тогда $\exists U \ni z_0 : f(z_0) \in \text{Int } f(U)$.

Доказательство леммы.

Теорема об обратной функции. \square

Тем самым, $\forall z \in B(z_0, r) : f'(z) = 0$ (так как $|f(z)|$ — максимум).

Далее применяем теорему единственности, доказанную во II семестре: f и константа, равная $|f(z_0)|$ совпадают на множестве с предельной точкой, значит, они совпадают везде в G . \square

Следствие 1.3.4. Пусть G — ограниченная область, $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна в G . Тогда $\forall z \in G : |f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|$.

Доказательство. f достигает своё наибольшее значение на компакте \overline{G} , но согласно принципу максимума, это значение достигается не внутри G . \square

1.4 Гармонические функции

Запишем теорему о среднем для $f : G \rightarrow \mathbb{C}$:

$$f(z_0) = \int_1^2 2\pi(f(z_0) + re^{it}) dt$$

Пусть $f = u + iv$, где u, v — вещественные функции в G . Теорема о среднем говорит, что

$$u(z_0) = \int_1^2 2\pi(u(z_0) + re^{it}) dt \quad v(z_0) = \int_1^2 2\pi(v(z_0) + re^{it}) dt$$

Так как f аналитична, то в вещественном смысле $u, v \in C^\infty(G)$.

Запишем уравнения Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Дифференцируя второй раз, получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

Это так называемое *уравнение Лапласа*: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Обобщим. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — область, пусть $f \in C^2(G)$.

Определение 1.4.1 (f — гармоническая функция в G). $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$.

Оператор $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ называется *оператором Лапласа*, и понятно, что гармонические функции — в точности такие u , что $\Delta u = 0$.

Утверждение 1.4.1. Если $u \in C^2(G)$, где область $G \subset \mathbb{R}^2$, то локально существует голоморфная $f : u = \Re f$. Иными словами, $\forall z_0 \in G : \exists U \ni z_0, \exists$ аналитическая $f : U \rightarrow \mathbb{C} : u = \Re f$.

Доказательство. Пусть $\phi := \frac{\partial u}{\partial x}, \psi := -\frac{\partial u}{\partial y}$. Тогда $\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$, то есть $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ везде в G .

Раз накрест-взятые частные производные совпадают, то дифференциальная форма $\phi dx + \psi dy$ замкнута, значит, локально имеется первообразная. **Что-то я немного выпал, а что дальше?** \square

Теорема 1.4.1 (Морера). Пусть $f : (G \subset \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна. Следующие условия эквивалентны.

1. f голоморфна в G .
2. f аналитична в G .
3. Дифференциальная форма $f(z) dz$ замкнута.

Доказательство. (1) \iff (2) уже доказано: (теорема 1.0.1) и (следствие 1.3.1).

(1) \Rightarrow (3) доказано тоже: (теорема 1.3.1).

Докажем (3) \Rightarrow (2). Пусть F — первообразная формы $f(z) dz$ в круге $B(z_0, r) \subset G$. F голоморфна в $B(z_0, r)$, и $\forall z \in D : F'(z) = f(z)$.

Значит, F раскладывается в степенной ряд $F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$. Отсюда $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j (z - z_0)^{j-1}$. \square

1.5 Первообразная от замкнутой формы вдоль пути

1.5.1 Наводящие предположения

Пусть $f dx + g dy$ — непрерывная дифференциальная форма в G , предположим, что она точная: имеется первообразная F .

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — кусочно-гладкий путь. Ранее было получено, что $\int_{\gamma} f dx + g dy = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

Давайте обобщим интеграл вдоль пути: пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — произвольный непрерывный путь. Положим по определению $\int_{\gamma} f dx + g dy \stackrel{\text{def}}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

Теперь пусть $f dx + g dy$ всего лишь замкнута. Выберем $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ так, что $\forall j : \gamma([t_j, t_{j+1}])$ лежит в области G_j , в которой у формы $f dx + g dy$ есть первообразная F_j . Попробуем определить

$$\int_{\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}} f dx + g dy \stackrel{\text{def}}{=} F_j(\gamma(t_{j+1})) - F_j(\gamma(t_j))$$

и

$$\int_{\gamma} f dx + g dy \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{k-1} F_j(\gamma(t_{j+1})) - F_j(\gamma(t_j))$$

Проблема в том, чтобы доказать, что определение корректно — не зависит от выбора разбиения $a = t_0 < \dots < t_k = b$.

1.5.2 Требуемые свойства

Пусть $\Phi = f dx + g dy$ — замкнутая форма в области $G \subset \mathbb{C}$, и $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — путь.

Определение 1.5.1 (Первообразная формы Φ вдоль пути γ). Функция $v : [a, b] \rightarrow G$ со следующими свойствами:

1. $\forall t \in [a, b] : \exists U \ni \gamma(t), \varepsilon > 0$ и найдётся первообразная F для Φ на U , такая, что

$$\forall \tau \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) : v(\tau) = F(\gamma(\tau))$$

Факт 1.5.1. Функция v , если существует, непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Непрерывность в какой-то конкретной точке следует из непрерывности композиции $F \circ \gamma$. \square

Теорема 1.5.1. Первообразная замкнутой дифференциальной формы вдоль пути γ всегда существует, и любые две отличаются на константу.

Доказательство. Сначала докажем существование. Для всех $t \in [a, b]$ выберем окрестность $U_t := B(\gamma(t), r_t)$, где r_t настолько мал, что в U_t есть первообразная.

Семейство $\{U_t\}_{t \in [a, b]}$ образуют открытое покрытие $\gamma([a, b])$. По лемме Лебега $\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in [a, b] : B(\gamma(t), \varepsilon)$ содержится в каком-то $U_{t'}$. Применяя теорему Кантора о равностепенной непрерывности, получаем существование разбиения $a = t_0 < \dots < t_k = b$, такое, что $\gamma([t_j, t_{j+1}])$ лежит в одном из U_t .

Произвольно выберем $v(a)$. Построим $v|_{[t_j, t_{j+1}]}$ индукцией по j .

База: Пусть $\gamma([t_0, t_1]) \subset U_0$, и имеется первообразная F_0 на U_0 . Определим $v(\tau) = F_0(\gamma(\tau))$ при $\tau \in [t_0, t_1]$.

Переход: Пусть $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subset U_j$, F_j — первообразная Φ на U_j . Найдётся такое $\delta > 0$: $\gamma([t_j - \delta, t_{j+1}]) \subset U_j$, значит, $U_j \cap U_{j-1} \neq \emptyset$. Это пересечение связно, на нём имеются две первообразные, F_{j-1} и F_j .

Добавим константу к F_j так, чтобы $F_j \equiv F_{j-1}$ при $t \in [t_j - \delta, t_j]$, и определим $v(\tau) = F_j(\gamma(\tau))$ при $\tau \in [t_j, t_{j+1}]$. Окрестность U_j захватывает отрезок $[t_j - \delta, t_{j+1}]$, значит, для точек во внутренности выполнено условие из определения первообразной.

Докажем единственность: рассмотрим точку $t \in [a, b]$. Найдутся два круга $U, V \ni \gamma(t)$, и первообразные F, H формы Φ в этих окрестностях, такие, что $u(\tau) = F(\gamma(\tau))$ и $v(\tau) = H(\gamma(\tau))$ при τ , достаточно близких к t .

Тем самым, $u - v$ локально постоянна, но локально постоянная функция на связном множестве — константа (прообраз любого элемента из образа открыто-замкнут). \square