

# Математический анализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков  
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Комплексный анализ</b>	<b>2</b>
1.1	Интеграл от дифференциальной формы вдоль кусочно-гладкого пути . . . . .	3
1.1.1	Про дифференциальные формы . . . . .	3
1.1.2	Про интегрирование . . . . .	3
1.1.3	Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути . . . . .	4
1.1.4	Сумма путей . . . . .	4
1.1.5	Альтернативное определение . . . . .	4
1.1.6	(Не)зависимость от параметризации . . . . .	6
1.2	Условия существования первообразной у дифференциальной формы . . . . .	6
1.3	Операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ . . . . .	9
1.3.1	Связь с голоморфными функциями . . . . .	10
1.4	Гармонические функции . . . . .	18
1.5	Первообразная от замкнутой формы вдоль непрерывного пути . . . . .	19
1.5.1	Наводящие предположения . . . . .	19
1.5.2	Требуемые свойства . . . . .	19
1.5.3	О гомотопности путей . . . . .	21
1.6	Ряды Лорана . . . . .	22
1.7	Изолированные особенности голоморфных функций . . . . .	24
1.8	Вычеты . . . . .	26
1.8.1	Как вычислять вычеты . . . . .	26
1.8.2	Индекс замкнутого пути относительно точки . . . . .	27
1.8.3	Обобщение интеграла $\frac{\sin x}{x}$ . . . . .	28
1.8.4	2-я формула замены переменной . . . . .	29
1.8.5	О логарифме . . . . .	30
1.9	Принцип аргумента и теорема Руше . . . . .	32
1.10	Сходимость аналитических функций . . . . .	33
1.10.1	Нормальные семейства . . . . .	35
1.11	Целые функции . . . . .	38
1.11.1	Построение целых функций с заданными нулями . . . . .	38
1.11.2	Упрощённый вид множителей Вейерштрасса . . . . .	39
1.11.3	Разложение синуса в произведение . . . . .	40
1.11.4	$\Gamma$ -функция Эйлера . . . . .	42

# Глава 1

## Комплексный анализ

### Лекция I

16 февраля 2024 г.

Пусть  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , где открытое  $G \subset \mathbb{C}$ .

**Определение 1.0.1** ( $f$  голоморфна в  $z_0 \in G$ ).  $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \stackrel{\text{def}}{=} f'(z_0)$ .

Во втором семестре мы проверяли, что  $f = u + iv$  (где  $u, v : G \rightarrow \mathbb{R}$ ) голоморфна в  $z_0 \iff f$  дифференцируема в вещественном смысле, и выполняются уравнения Коши — Римана:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

**Определение 1.0.2** ( $f$  аналитична в  $G$ ).  $\forall z_0 \in G : \exists c_j \in \mathbb{C}$ :

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \quad (*)$$

где ряд сходится не только при  $z = z_0$ .

**Теорема 1.0.1.**  $f$  аналитична в  $G \iff f$  голоморфна во всех точках  $G$ .

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . Доказали во втором семестре, несложно.

$\Leftarrow$ . Скоро займёмся, время пришло. □

Из представления (\*) следует, что производная в точке  $z$  считается почленно:  $f'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j (z - z_0)^{j-1}$ . В частности, отсюда получается, что  $f'(z_0) = c_1$ , и вообще  $f^{(n)}(z_0) = j! \cdot c_j$ .

Вскоре мы увидим, что ситуация разительно отличается от вещественной: в вещественном случае были разные классы — дифференцируемые функции,  $C^1$ ,  $C^\infty$ , аналитичные, и множество промежуточных классов.

В комплексном же случае, если функция хотя бы один раз дифференцируема, то окажется, что этого достаточно, чтобы она была не просто дифференцируема, а непрерывно дифференцируема, бесконечно дифференцируема, и даже аналитична.

## 1.1 Интеграл от дифференциальной формы вдоль кусочно-гладкого пути

### 1.1.1 Про дифференциальные формы

**Определение 1.1.1** (Линейная функция  $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ).  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n : l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y)$ .

**Определение 1.1.2** (Линейная форма на множестве  $G \subset \mathbb{R}^n$ ). Функция двух переменных  $\phi : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , линейная по второму аргументу.

В пространстве  $\mathbb{R}^n$  имеется базис  $(e_j)$ :  $h = e_1 h_1 + \dots + e_n h_n$ .

Тем самым,  $\phi(x, h) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\phi(x, e_j)}_{=: g_j(x)} h_j = \sum_{j=1}^n g_j(x) h_j$ .

Введём *базисные линейные формы*  $dx_j(u, h) = h_j$ , игнорирующую первую координату, и возвращающую  $j$ -ю компоненту второго аргумента. Теперь  $\phi(x, h)$  разложилась в сумму  $\sum_{j=1}^n g_j dx_j$ .

*Пример.* Пусть  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  — дифференцируемая в  $G$  функция. Заметим, что её дифференциал  $df(x, \_)$  — в точности линейная форма на  $G$ .

При разложении по базису получится  $df(x, \_) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j$ .

Вскоре мы увидим, что далеко не всякая линейная форма является чьим-то дифференциалом.

Если  $\phi = \sum_{j=1}^n g_j dx_j$  — дифференциал функции  $f$ , то непременно  $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ .

Тот факт, что  $\phi$  является дифференциалом  $f$ , можно сказать наоборот:  $f$  является первообразной  $\phi$ .

### 1.1.2 Про интегрирование

Рассмотрим монотонную функцию  $\Phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Как и при определении стилтьесовой длины, будем считать, что  $\Phi$  определена на некотором открытом множестве, содержащем  $\langle a, b \rangle$ . Обозначим за  $l_\Phi$  стилтьесову длину, отвечающую функции  $\Phi$ .

Пускай  $\lambda_\Phi$  — продолжение стилтьесовой длины  $l_\Phi$  по Лебегу — Каратеодори.

Она, как водится, определена на некоторой  $\Sigma$ -алгебре, в которой есть борелевские множества, но измеримы могут быть и какие-то другие множества, зависящие от конкретной функции  $\Phi$ .

*Примеры.*

- Так, функция  $\phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$  порождает дельта-меру  $\delta_0$ , относительно которой все множества измеримы.

Кроме того, эта мера сингулярна относительно стандартной меры Лебега.

- Может показаться, что так происходит из-за разрывности  $\phi$ , но это не так.

Рекурсивно определим канторову лестницу  $C : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ :



Построив по данной функции стильесову длину  $\lambda_C$ , мы получим меру, сосредоточенную на канторовом множестве меры нуль.

Её носитель — само канторово множество, так как на всех отрезках вне канторова множества  $\lambda_C$  равна нулю. Она сингулярна относительно стандартной меры Лебега на  $\mathbb{R}$ , и её измеримые множества разительно отличаются от измеримых множеств меры Лебега.

По мере Стильеса можно интегрировать: если  $v$  является  $\lambda_\Phi$  измеримой (в частности, измерима по Борелю и непрерывна), то определён интеграл  $\int_{\langle a, b \rangle} v d\lambda_\Phi$ . Иногда пишут просто  $\int_{\langle a, b \rangle} v d\Phi$ .

Теперь пусть  $I = [a, b]$ , и  $\Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — функция ограниченной вариации. В таком случае  $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$ , где некие  $\Phi_1, \Phi_2$  возрастают. Можно определить знакопеременную меру  $\lambda_\Psi \stackrel{def}{=} \lambda_{\Phi_1} - \lambda_{\Phi_2}$ , понятно, что определение корректно.

### 1.1.3 Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути

Пускай  $\gamma : [a, b] \rightarrow G \subset \mathbb{R}^n$  — спрямляемый путь (путь конечной длины). Пускай  $U = \sum_{j=1}^n u_j dx_j$  — дифференциальная форма в области  $G$ . Если не сказано противное, будем считать, что  $u_j$  — непрерывные функции.

**Определение 1.1.3** (Интеграл от  $U$  вдоль пути  $\gamma$ ).  $\int_\gamma U \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^n \int_{[a, b]} u_j(\gamma(t)) d\gamma_j(t)$ .

Здесь  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ . Так как путь спрямляем, то все  $\gamma_j$  — ограниченной вариации, каждая порождает свою меру Стильеса, и определение интегрирует композицию  $U \circ \gamma$  по данной мере.

### 1.1.4 Сумма путей

Пускай имеются два отрезка  $[a, c]$  и  $[c, d]$ , и на них заданы пути  $\gamma_1 : [a, c] \rightarrow G$ ,  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow G$ . Предположим, что  $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$ .

Тогда можно устроить путь  $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a, d] \rightarrow G$ ,  $\gamma(t) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, c] \\ \gamma_2(t), & t \in [c, d] \end{cases}$ .

*Замечание.* Интеграл аддитивен по множеству:  $\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} U = \int_{\gamma_1} U + \int_{\gamma_2} U$ .

### 1.1.5 Альтернативное определение

Далее мы не интересуемся никакими чудесами вроде канторовых лестниц, и считаем, что  $\Phi$  такова, что  $\lambda_\Phi$  абсолютно непрерывна относительно стандартной меры Лебега.

А раз так, то по теореме Радона — Никодима  $\exists$  суммируемая  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , такая, что

$$\lambda_\Phi(e) = \int_e w(x) dx \quad (+)$$

**Факт 1.1.1.** Формула (+) заведомо верна, если  $\Phi$  непрерывно дифференцируема на  $[a, b]$ , тогда  $w = \Phi'$ .

*Доказательство.* Введём меру  $\nu(e) = \int_e \Phi'(x) dx$ , заданную на измеримых по Лебегу множествах.  $\Phi'$  непрерывна, и, следовательно, измерима.

Если  $\langle c, d \rangle \subset [a, b]$ , то  $\nu(\langle c, d \rangle) = \int_{\langle c, d \rangle} \Phi'(x) dx = \Phi(d) - \Phi(c) = l_\Phi(\langle c, d \rangle)$ .

Таким образом, из теоремы единственности, продолжение  $l_\Phi$  по Лебегу — Каратеодори совпадает с  $\int_e \Phi'(x) dx$ .  $\square$

*Замечание.* Утверждение (факт 1.1.1) сохраняет силу, если  $\Phi$  непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема.

Далее где-то используется  $\Phi$ , а где-то  $\beta$ , надо убедиться, что это везде одно и то же, и заменить. Пускай  $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — функция ограниченной вариации, кусочно-непрерывно дифференцируемая:  $\exists a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ , такие, что  $\beta$  непрерывно дифференцируема на  $[a_s, a_{s+1}]$  при  $0 \leq s < k$ . Введём  $\rho(e) = \int_e \beta'(x) dx$  — это знакопеременная вещественная мера.

У данной меры возникают (см. разложение Хана) положительная и отрицательная части  $\rho_+(e) \stackrel{def}{=} \int_e (\beta')_+(x) dx$  и  $\rho_-(e) \stackrel{def}{=} \int_e (\beta')_-(x) dx$

Если обозначить за  $\Phi_+(t) = \int_0^t (\beta')_+(x) dx$  и  $\Phi_-(t) = \int_0^t (\beta')_-(x) dx$ , то окажется, что соответствующие меры Стильеса совпадают с  $\rho_+$  и  $\rho_-$ .

Более того,  $\beta = \Phi_+ - \Phi_-$  — получили разложение функции ограниченной вариации в положительную и отрицательную части.

*Замечание.* Это разложение экономнее, чем то, которое было получено ранее — ранее в качестве  $\Phi_+$  выбиралась вариация  $\Phi$ .

Если всё, что написано выше, собрать вместе, то получится

$$\boxed{\int_{[s,t]} v d\Phi = \int_{[s,t]} v(x) \beta'(x) dx}$$

Далее «гладкий» используется, как синоним к непрерывно-дифференцируемому.

**Следствие 1.1.1** (Можно считать определением). Если  $U = \sum_{j=1}^n u_j dx_j$  — дифференциальная форма в  $G$  с непрерывными коэффициентами, а  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow G$  — спрямляемый кусочно-гладкий путь, то

$$\int_\gamma U = \sum_{j=1}^n \int_a^b u_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt$$

### 1.1.6 (Не)зависимость от параметризации

Пускай  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — кусочно-гладкий путь,  $\psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  — гладкий гомеоморфизм.

Теперь  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$  — перепараметризация  $\gamma$

**Лемма 1.1.1.** Для всякой формы  $U$ :

$$\int_{\tilde{\gamma}} U = \pm \int_{\gamma} U$$

Знак  $+$  выбирается, если  $\psi$  возрастает, и  $-$  если убывает.

*Доказательство.* Предположим, что  $\gamma$  — гладкий путь, иначе применяем к кусочкам гладкости по отдельности.

$$\int_{\tilde{\gamma}} U = \sum_{j=1}^n \int_c^d u_j(\gamma(\psi(t))) \gamma'_j(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt = \left\| \begin{array}{l} \tau = \psi(t) \\ d\tau = \psi'(t) dt \end{array} \right\| = \sum_{j=1}^n \int_{\psi(c)}^{\psi(d)} u_j(\gamma(\tau)) \gamma'_j(\tau) d\tau = \pm \int_{\gamma} U \quad \square$$

Про  $\psi$  также можно считать, что это он не гладкий, а лишь кусочно-гладкий.

Тем самым, можно определить сумму путей для несовпадающих отрезков: для двух путей  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow G, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow G$  (при условии  $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ ) можно один из отрезков-прообразов линейным возрастающим преобразованием перевести в отрезок, соприкасающийся со вторым (например,  $t \mapsto t + (b - c)$ ).

Также есть понятие обратного пути  $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$ . Для любой формы  $U$ :

$$\int_{\gamma \oplus \gamma^-} U = \int_{\gamma} U + \int_{\gamma^-} U = \int_{\gamma} U - \int_{\gamma} U = 0$$

## 1.2 Условия существования первообразной у дифференциальной формы

**Теорема 1.2.1.** Если у дифференциальной формы  $U$  в открытом множестве  $G \subset \mathbb{R}^n$  имеется первообразная  $F$ , то для всякого кусочно-гладкого пути  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$

$$\int_{\gamma} U = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

*Доказательство.*  $U = \sum_{j=1}^n g_j dx_j$ , где  $g_j(w) = \frac{\partial}{\partial x_j} F(w)$ . Считаем, что путь гладкий.

$$\int_{\gamma} U = \sum_{j=1}^n \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_j} F(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (F \circ \gamma)(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Если же путь всего лишь кусочно-гладкий, то надо разбить отрезок на подотрезки гладкости, и сложить.  $\square$

**Следствие 1.2.1.** Если у дифференциальной формы  $U$  есть первообразная, то её интегралы по всем путям с данными началом и концом, равны.

Оказывается, верно и обратное.

Лекция II  
26 февраля 2024 г.

**Лемма 1.2.1.** Пусть  $G$  — область в  $\mathbb{R}^n$ , тогда любые две её точки можно соединить ломаной (кусочно-линейным путём).

*Доказательство.* Выберем  $x_0 \in G$ , положим  $U = \{y \in G \mid \text{существует ломаная в } G \text{ с началом в } x_0 \text{ и концом в } y\}$ .

Покажем, что  $U$  открыто. Пусть  $y \in U$ , тогда найдётся шарик  $B_\varepsilon(y) \subset G$ , и  $B_\varepsilon(y) \subset U$  — можно добавить одно звено к ломаной  $x_0 \rightsquigarrow y$ .

Покажем, что  $U$  замкнуто. Пусть  $z \in G$  — предельная точка для  $U$ . Найдётся  $B_\varepsilon(z) \subset G$ , так как  $z$  — предельная, то  $\exists y \in B_\varepsilon(z) \cap U$ . Значит,  $z \in U$  — можно добавить одно звено  $y \rightarrow z$ .  $\square$

*Замечание.* Имея кусочно-линейный путь  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ , соединяющий  $A, B \in G$ , несложно получить бесконечно дифференцируемый путь, соединяющий их:

Пусть  $\gamma_1 : [a-1, b+1] \rightarrow G, \gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a, b] \\ \gamma(a), & t \in [a-1, a] \\ \gamma(b), & t \in [b, b+1] \end{cases}$ . Теперь, сворачивая  $\gamma_1$  с аппрокс-

мативной единицей с достаточно большим номером и достаточно малым компактным носителем, получим бесконечно дифференцируемый путь, соединяющий  $A$  и  $B$ .

**Теорема 1.2.2.** Пусть  $\Phi = \sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j$  — непрерывная дифференциальная форма в  $G$  (то есть коэффициенты непрерывны в  $G$ ). Следующие условия эквивалентны.

1.  $\int \Phi$  есть первообразная  $F$ , то есть функция  $F \in C^1(G) : dF = \Phi$  (иными словами,  $\forall j : \frac{\partial}{\partial x_j} F = f_j$ ).
2. Для всех кусочно-гладких путей  $\gamma$  с фиксированными началом и концом  $\gamma(a) = \gamma_a, \gamma(b) = \gamma_b$ :  $\int_\gamma \Phi$  не зависит от  $\gamma$  (а только от начала и конца).
3. Для любой кусочно-гладкой петли (то есть замкнутого пути)  $\gamma$  в  $G$ :  $\int_\gamma \Phi = 0$ .

*Доказательство.* Мы уже доказали ранее цепочку импликаций  $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2)$ . Далее доказываем  $(2) \Rightarrow (1)$ .

Предъявим кандидат в первообразную. Зафиксируем  $x_0 \in G$ , выберем  $x \in G$ , пусть  $\gamma$  — произвольный кусочно-гладкий путь с началом в  $x_0$  и концом в  $x$ . Определим  $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\gamma \Phi$ . Согласно посылке,  $F$  корректно определена — не зависит от выбора пути.

Покажем, что частные производные  $F$  существуют, и равны  $f_j$ . Тогда они получатся непрерывными, то есть  $F$  — дифференцируемой, и окажется, что  $F$  — первообразная  $\Phi$ .

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — стандартные базисные орты в  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим  $\frac{F(x+te_j) - F(x)}{t}$ .

При малых  $t$ : отрезок между  $x$  и  $x+te_j$  лежит внутри  $G$ . Пусть  $\gamma_1$  — путь, соединяющий  $x_0$  и  $x$ ,  $l$  — отрезок от  $x$  до  $x+te_j$ .

$$\frac{F(x+te_j) - F(x)}{t} = \frac{1}{t} \left( \int_{\gamma_1 \oplus l} \Phi - \int_{\gamma_1} \Phi \right) = \frac{1}{t} \int_l \Phi = \frac{1}{t} \int_0^t f_j(x + \tau e_j) d\tau \xrightarrow{t \rightarrow 0} f_j(x) \quad \square$$

**Определение 1.2.1** (Прямоугольник на плоскости). Множество вида  $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ .

Область  $G$  на плоскости будем называть *удобной*, если  $\exists x_0 \in G : \forall y \in G : \exists$  прямоугольник  $P \subset G$ , содержащий точки  $x$  и  $y$ .

*Примеры* (Удобные области).

- $\text{Int } Q$ , если  $Q$  — прямоугольник. В качестве центра  $x_0$  подойдёт любая точка.



- $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < r\}$ . В качестве центра  $x_0$  стоит взять центр, иначе не получится:



**Определение 1.2.2** (Ориентированная граница прямоугольника  $P$ ). Петля  $\gamma$ , обходящая границу  $P = [a, b] \times [c, d]$  против часовой стрелки, то есть вот так:



$$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4.$$

Для прямоугольника  $P$  будем обозначать за  $\partial P$  в зависимости от контекста либо границу  $P$ , как топологического подмножества  $\mathbb{R}^2$ , либо путь, обходящий границу  $P$  против часовой стрелки.

**Следствие 1.2.2** (Дополнение к (теорема 1.2.2)). Если  $G$  — удобная область на плоскости, то к трём эквивалентным условиям (теорема 1.2.2) можно добавить

$$4. \forall P \subset G : \int_{\partial P} \Phi = 0.$$

*Доказательство.* (3)  $\Rightarrow$  (4) ясно, докажем (4)  $\Rightarrow$  (1).

Пусть  $x_0 \in G$  — центр удобной области, определим  $F(x) = \int_{\delta} \Phi$ , где  $\delta$  — это либо  $\delta_1 := \gamma_1 \oplus \gamma_2$  либо  $\delta_2 := \gamma_4^- \oplus \gamma_3^-$  (вне зависимости от выбора  $\delta$  получится одно и то же).



Далее, чтобы проверить  $\frac{\partial}{\partial x_1} F = f_1$  и  $\frac{\partial}{\partial x_2} F = f_2$ , воспользуемся подходящим представлением: пусть орт выглядит так:



тогда для проверки  $\frac{\partial}{\partial x_1} F = f_1$  удобно воспользоваться определением  $F$  через  $\delta_1$ , для проверки  $\frac{\partial}{\partial x_2} F = f_2$  — определением через  $\delta_2$ . Далее повторяем рассуждение из (теорема 1.2.2).  $\square$

Пусть  $\Phi = \sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j$  — непрерывная дифференциальная форма в области  $G \subset \mathbb{R}^n$ .

**Определение 1.2.3** (Форма  $\Phi$  точна). Существует первообразная  $F$  в  $G$ :  $dF = \Phi$ .

**Определение 1.2.4** (Форма  $\Phi$  замкнута). Форма  $\Phi$  локально точна ( $\forall x_0 \in G : \exists U \ni x_0 : \Phi|_U$  точна).

Понятно, что точная форма замкнута, но точность из замкнутости не следует: чуть позднее мы определим  $dz$ , и покажем, что  $\frac{dz}{z}$  — замкнутая, но не точная форма на  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

**Теорема 1.2.3.** Пусть  $\Phi$  — дифференциальная форма в области  $G \subset \mathbb{R}^n$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $\Phi$  замкнута.

2.  $\forall x_0 \in G : \exists V \ni x_0 : \forall$  кусочно-гладкого замкнутого пути  $\gamma$  с носителем в  $V$ :  $\int_{\gamma} \Phi = 0$ .

Если  $n = 2$ , то дополнительно появляются ещё два условия:

3.  $\forall z \in G : \exists V_z \subset G : \forall P \subset V_z : \int_{\partial P} \Phi = 0$ .

4.  $\forall P \subset G : \int_{\partial P} \Phi = 0$ .

*Доказательство.* Докажем, что  $(3) \Rightarrow (4)$ , остальное уже доказано выше.

Заметим, что границу прямоугольника  $P$  можно представить, как сумму границ четырёх прямоугольников вдвое меньшего диаметра:



Таким образом, чтобы доказать, что интеграл по границе большого прямоугольника  $P$  нулевой, разобьём его на достаточно маленькие прямоугольники, по ним-то интеграл нуль. Чтобы это формализовать, вспомним лемму Лебега о покрытии:

**Теорема 1.2.4** (Лемма Лебега). Пусть  $K$  — компакт в метрическом пространстве,  $\{U_j\}_{j \in J}$  — открытое покрытие компакта  $K$ . Тогда  $\exists \delta > 0 : \forall A \subset K : \text{diam } A < \delta \Rightarrow \exists j \in J : A \subset U_j$ .

Применяя лемму Лебега для покрытия  $P$  окрестностями  $\{V_z\}_{z \in P}$ , получим такое число  $\delta$ . Теперь надо разбить границу прямоугольника  $P$  в сумму границ прямоугольников диаметра меньше  $\delta$ , а посылка теоремы говорит, что интеграл по ним уже нуль.  $\square$

### 1.3 Операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

Как известно,  $\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$ , то есть  $\forall z \in \mathbb{C} : z = x + iy$ , аналогично  $\bar{z} = x - iy$ .

Рассмотрим  $z$  и  $\bar{z}$ , как функции  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \mapsto x \pm iy$ . Теперь  $dz = dx + i dy$  и  $d\bar{z} = dx - i dy$  образуют базис в пространстве дифференциальных форм (тех, которые не зависят от точки), обратное преобразование выглядит так:

$$\begin{cases} dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \\ dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \end{cases}$$

Рассмотрим форму  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Phi(x, y) = \alpha(x, y) dx + \beta(x, y) dy$ . Перепишем её в новом базисе:

$$\Phi(x, y) = \frac{\alpha(x, y)}{2} (dz + d\bar{z}) + \frac{\beta(x, y)}{2i} (dz - d\bar{z}) = \frac{\alpha(x, y) - i\beta(x, y)}{2} dz + \frac{\alpha(x, y) + i\beta(x, y)}{2} d\bar{z}$$

Теперь пусть  $\Phi$  — точная форма, то есть  $\Phi = dF$ , и тогда  $\alpha(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$  и  $\beta(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ . Теперь

$$dF = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right) d\bar{z}$$

**Определение 1.3.1** ( $\frac{\partial F}{\partial z}$ ). Коэффициент, стоящий перед  $dz$ , то есть  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right)$ .

**Определение 1.3.2** ( $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ ). Коэффициент, стоящий перед  $d\bar{z}$ , то есть  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right)$ .

Иначе говоря, мы ввели операторы  $\frac{\partial}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$  и  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$  так, что

$$dF = \frac{\partial}{\partial z} F dz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} F d\bar{z}$$

### 1.3.1 Связь с голоморфными функциями

Пусть  $F = u + iv$ , где  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Запишем

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)$$

В правой части равенства получились выражения из уравнений Коши — Римана.

**Факт 1.3.1.** Вещественные функции  $u, v$  удовлетворяют уравнениям Коши — Римана  $\iff \frac{\partial(u+iv)}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ .

**Факт 1.3.2.**  $F$  голоморфна  $\iff dF = \frac{\partial F}{\partial z} dz$ . При этом  $\frac{\partial F}{\partial z}$  есть производная  $F$  по комплексному аргументу.

*Доказательство.* Функция дифференцируема по комплексному аргументу  $\iff$  её дифференциал — умножение на комплексное число.  $\square$

В основном нас будут интересовать дифференциальные формы вида  $\phi(z) dz$ , где  $\phi$  — произвольная функция.

Выясним, когда у формы  $\phi(z) dz = \phi(z) dx + i\phi(z) dy$  имеется первообразная, то есть функция  $g : \frac{\partial g}{\partial x} = \phi, \frac{\partial g}{\partial y} = i\phi$ . Заметим, что  $\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{2}(\phi - i(i\phi)) = \phi$  и  $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\phi + i(i\phi)) = 0$ .

**Утверждение 1.3.1.** Форма  $\phi dz$  имеет первообразную  $g \iff g$  голоморфна, и  $g' = \phi$ .

**Теорема 1.3.1** (Коши). Если  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная функция (область  $G \subset \mathbb{C}$ ), то форма  $g(z) dz$  замкнута.

*Доказательство.* Потом.  $\square$

*Контрпример* (Глобально первообразной может не быть). Пусть  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}, g : G \rightarrow \mathbb{C}, g : z \mapsto \frac{1}{z}$ .

По теореме Коши у  $g$  имеется локальная первообразная — комплексный логарифм — но глобально определить не получится. Пусть  $\Gamma = \partial\mathbb{T}$  — комплексная окружность, ориентируем её против часовой стрелки, а именно, рассмотрим стандартный обход окружности  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \alpha : \phi \mapsto e^{i\phi}$ . Теперь убедимся, что форма не точна:

$$\int_{\alpha} \phi = \int_{\alpha} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{(e^{it})'}{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \neq 0$$

Для будущих применений также определим ориентированную против часовой стрелки границу  $B_r(z_0)$ , это путь  $\beta(t) = z_0 + re^{it}$  для  $t \in [0, 2\pi]$ .

*Пример.* Пусть  $z_0, w \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_{>0}, |w - z_0| \neq r$ , пусть путь  $\gamma$  обходит границу  $B_r(z_0)$  против часовой стрелки:



Тогда, оказывается, (посчитаем чуть позже):

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-w} = \begin{cases} 0, & |z-w| > r \\ 2\pi i, & |z-w| < r \end{cases} \quad (\circ)$$

Грубой силой этот интеграл посчитать непросто, так как  $w$  находится где угодно — внутри или снаружи круга — а интеграл, оказывается, зависит только от этих двух альтернатив.

**Теорема 1.3.2** (Основная оценка интеграла вдоль пути). Пускай  $\Phi = \sum_{j=1}^n f_j dx_j$  — непрерывная дифференциальная форма в области  $G \subset \mathbb{R}^n$ , а  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — кусочно-гладкий путь,  $K := \text{Im}(\gamma) \subset G$ .

$$\text{Тогда } \left| \int_{\gamma} \Phi \right| \leq \underbrace{\sup_{x \in K} \left( \sum_{j=1}^n |f_j(x)|^2 \right)^{1/2}}_{=: A} \cdot l(\gamma).$$

*Доказательство.* Считаем, что  $\gamma$  — гладкий путь, иначе нужно разбить на кусочки гладкости.

$$\left| \int_{\gamma} \Phi \right| = \left| \int_a^b \sum_{j=1}^n f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt \right| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \int_a^b \left( \sum_{j=1}^n |f_j(\gamma(t))|^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{j=1}^n |\gamma'_j(t)|^2 \right)^{1/2} dt \leq A \cdot \underbrace{\int_a^b \left( \sum_{j=1}^n |\gamma'_j(t)|^2 \right)^{1/2} dt}_{l(\gamma)}$$

□

## Лекция III

1 марта 2024 г.

Рассмотрим дифференциальную форму  $\Phi = F(z) dz$ , где  $F$  — непрерывная функция в  $G \subset \mathbb{C}$ . Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — плоский путь.

Расписав  $\Phi(z) = F(z) dx + iF(z) dy$  и применив основную оценку интеграла вдоль пути, получаем

$$\left| \int_{\gamma} \Phi \right| \leq \max_{z \in K} \sqrt{|F(z)|^2 + |F(z)|^2} \cdot l(\gamma) = \sqrt{2} \max_{z \in K} |F(z)| \cdot l(\gamma)$$

Эта оценка вызывает некоторую неудовлетворённость: кажется, что  $\sqrt{2}$  здесь лишний. И это действительно правда: можно расписать интеграл аккуратнее.

Пусть  $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ , тогда по определению

$$\int_{\gamma} \Phi = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'_1(t) + iF(\gamma(t)) \cdot \gamma'_2(t) dt = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Таким образом, интеграл от комплексной формы вдоль пути имеет более простое представление, и оно легко поддаётся более плотной оценке:

$$\left| \int_{\gamma} \Phi \right| \leq \int_a^b |F(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq \max_{z \in K} |F(z)| \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)| dt}_{l(\gamma)}$$

Посчитаем анонсированный на предыдущей лекции интеграл (о). Пусть  $z_0, w \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ .

- Сначала рассмотрим случай  $|w - z_0| < r$ . Заметим, что, согласно основной оценке интеграла, если коэффициенты равномерно стремятся к какому-то значению и интегралы ограничены, то предельный интеграл тоже сходится.

Запись ниже  $\int_{|z-z_0|=r}$ , и вообще все аналогичные записи, которые встретятся в дальнейшем, по умолчанию означают, что граница соответствующего множества (в данном случае — круга) обходится стандартным образом, то есть против часовой стрелки.

$$\begin{aligned} \int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z - z_0 - (w - z_0)} &= \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} dz = \\ &= \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} \left( 1 + \frac{w - z_0}{z - z_0} + \left( \frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^2 + \dots \right) dz \quad (\equiv) \end{aligned}$$

На слагаемые из ряда имеется равномерная по  $z$  оценка:  $\left| \frac{w-z_0}{z-z_0} \right| \leq \frac{|w-z_0|}{r} < 1$ , и по теореме Вейерштрасса функциональный ряд сходится. Значит, сумму можно вынести из-под интеграла

$$(\equiv) \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} dz + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|z-z_0|=r} \frac{(w - z_0)^j}{(z - z_0)^{j+1}} dz \quad (\equiv)$$

Первое слагаемое мы умеем брать, а у каждого слагаемого из остальной суммы имеется первообразная:  $\frac{1}{(z-z_0)^{j+1}} = -\frac{1}{j} \left( \frac{1}{(z-z_0)^j} \right)'$

$$(\equiv) \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi i$$

- Теперь разберёмся со случаем  $|w - z_0| > r$ .

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z - z_0 - (w - z_0)} = -\frac{1}{w - z_0} \int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = -\frac{1}{w - z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{|z-z_0|=r} \frac{(z - z_0)^j}{(w - z_0)^j} dz$$

Аналогично предыдущему случаю, ряд сходится абсолютно, поэтому сумму опять можно вынести из под интеграла, и в данном случае всё ещё проще: каждое слагаемое имеет первообразную, там нет отрицательных степеней  $z$ , поэтому вся сумма обращается в нуль.

Пусть  $\Phi = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$  — непрерывная дифференциальная форма в некоторой области  $G \subset \mathbb{R}^n$ .

**Теорема 1.3.3.** Если все функции  $f_j \in C^1$ , то следующие условия эквивалентны:

- $\Phi$  замкнута.
- $\forall 1 \leq i, j \leq n : \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  — «накрест взятые частные производные равны».

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  Выберем  $x \in G$ , так как форма замкнута, то  $\exists U \ni x : \Phi$  имеет первообразную  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Тем самым,  $f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$ , и так как  $f_i \in C^1$ , то действительно  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ .

$\Leftarrow$  Сначала приведём доказательство случая  $n = 2$ . В таком случае  $\Phi = f dx + g dy$ .

Согласно посылке,  $h := \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ . Кстати, равенство слева равносильно одному из эквивалентных уравнений Коши — Римана.

Рассмотрим произвольный  $P = [a, b] \times [c, d] \subset G$ , и докажем, что  $\int_{\partial P} \Phi = 0$ .



То, что мы увидим сейчас, является первым заходом на *формулу Остроградского — Гаусса*. Функция  $h$  непрерывна, и можно записать на неё интеграл Лебега:  $\int_P h(x, y) dx dy$ . Теперь, применяя теорему Фубини, раскладываем интеграл в сумму повторных:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3^-} f(., d) dx + \int_{\gamma_1^-} f(., c) dx &= \int_a^b [f(x, d) - f(x, c)] dx = \int_a^b \left( \int_c^d \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx = \\ &= \int_P h(x, y) dx dy = \\ &= \int_c^d \left( \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x} dx \right) dy = \int_c^d [g(b, y) - g(a, y)] dy = \int_{\gamma_2} g(b, .) dy + \int_{\gamma_4} g(a, .) dy \end{aligned}$$

Итого,  $\int_{\gamma_3^-} f(., d) dx + \int_{\gamma_1^-} f(., c) dx = \int_{\gamma_2} g(b, .) dy + \int_{\gamma_4} g(a, .) dy$ , откуда действительно  $\int_{\gamma} \Phi = 0$ .

⇐ Теперь приведём альтернативное доказательство индукцией по  $n$ .

База: Случай  $n = 1$  тривиален: теорема Ньютона — Лейбница говорит, что у непрерывной функции есть первообразная.

Переход: Пусть  $n > 1$ , и для  $n - 1$  теорема доказана. Рассмотрим  $a \in G$ , и возьмём прямоугольный параллелепипед со сторонами, параллельными осям координат  $P$  такой, что  $a \in \text{Int } P$ . Докажем, что на  $P$  у  $\Phi$  есть первообразная.

Построим  $g(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{x_1} f_1(t, x_2, \dots, x_n) dt$ . Обозначим  $\phi_j := \frac{\partial g}{\partial x_j}$ . Заметим, что  $\phi_1 = \frac{\partial g}{\partial x_1} = f_1$ .

Теперь рассмотрим форму  $\Psi(x_1, \dots, x_n) = \phi_1 dx_1 + \dots + \phi_n dx_n$ . Эта форма имеет первообразную  $g$  на параллелепипеде  $P$ .

Теперь посмотрим на  $\Phi - \Psi =: h_1 dx_1 + \dots + h_n dx_n$ . По построению  $h_1 = 0$ . По условию накрест взятые частные производные равны у  $\Phi$ , и они равны у  $\Psi$ , так как у неё есть первообразная. Значит, это же верно и для разности, в частности,  $\frac{\partial h_i}{\partial x_1} = \frac{\partial h_1}{\partial x_i} = 0$ . Иными словами,  $\forall i : h_i$  не зависит от  $x_1$ .

А раз так, то на  $\Phi - \Psi$  можно смотреть, как на форму  $(n - 1)$ -й переменной, и применить индукционное предположение.

*Замечание.* Тут есть некоторый обман: производные  $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$  могут просто не существовать.

Попробуем обойти его так: пусть  $\beta \in C^\infty$ , с компактным носителем. Выберем аппроксимативную единицу  $\beta_t(x) = \frac{1}{t^n} \beta(\frac{x}{t})$ .

Назначим  $f_k^{(t)} = f_k * \beta_t$ ,  $f_k^{(t)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} f_k$ .

Далее у формы  $\Phi^{(t)}$  коэффициенты  $h_k^{(t)}$  не зависят от  $x_1$ . А раз они равномерно стремятся к  $h_k$ , то и они не зависят от  $x_1$ . Это было произнесено устно, я наверняка что-то не так записал.

□

**Теорема 1.3.4** (Коши). Пусть  $F$  — голоморфная функция в открытом множестве  $G \subset \mathbb{C}$ . Тогда дифференциальная форма  $F(z) dz$  замкнута, то есть локально  $\exists S : S'(z) = F(z)$ .

*Замечание.* Теорема совсем проста, если заранее предположить, что  $F'(z)$  непрерывна (а так в итоге и должно получиться, так как  $F$  — аналитична (теорема 1.0.1)). В таком случае имеется следующее более простое доказательство.

*Доказательство.* Надо проверить второе уравнение Коши — Римана:  $\forall z \in \mathbb{C} : \frac{\partial F}{\partial y}(z) = i \frac{\partial F}{\partial x}(z)$  (первое выполнено, так как накрест-взятые частные производные равны).

Поскольку  $F(z) dz = F(z) dx + iF(z) dy$ , утверждение эквивалентно (согласно (теорема 1.3.3)) тому, что  $\forall z \in \mathbb{C} : \frac{\partial F}{\partial y}(z) = i \frac{\partial F}{\partial x}(z)$ . Пусть  $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ .

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \stackrel{?}{=} i \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

то есть  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  и  $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ . Я вообще не понял, что произошло.

□

Теперь докажем теорему Коши вне предположения непрерывности производной.

*Доказательство.* Докажем от противного: пусть форма  $F(z) dz$  не замкнута,  $\exists P_0 \subset G : \alpha = \int_{\partial P_0} F(z) dz \neq 0$ .

Будем потихонечку делить этот прямоугольник на четыре равные части: пусть  $P_0 = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$ .



Модуль интеграла по границе по крайней мере одного из  $Q_i$  хотя бы  $\frac{|\alpha|}{4}$ . Назовём этот прямоугольник  $P_1$ , и продолжим процесс. Получим систему вложенных замкнутых прямоугольников  $P_0 \supset P_1 \supset \dots$ , таких, что  $\left| \int_{\partial P_k} F(z) dz \right| \geq \frac{|\alpha|}{4^k}$ . При этом  $l(\partial P_k) = 2^{-k} l(\partial P_0)$ , и  $\text{diam}(P_k) = 2^{-k} \text{diam}(P_0)$ .

Имеется ровно одна точка  $z_0$  в пересечении  $\bigcap_{k \geq 0} P_k$ . Воспользуемся условием того, что  $F$  голоморфна в точке  $z_0$ :  $F(z) = F(z_0) + F'(z_0)(z - z_0) + \underbrace{\psi(z)}_{o(|z - z_0|)}$

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ .  $\exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |\psi(z)| \leq \varepsilon |z - z_0|$ . Пусть  $k$  настолько велико, что  $\text{diam } P_k < \delta$ .

$$\int_{\partial P_k} F(z) dz = \int_{\partial P_k} [F(z_0) + F'(z_0)(z - z_0)] dz + \int_{\partial P_k} \psi(z) dz$$

Первый интеграл обнуляется, так как это линейная функция по  $z$ , у неё есть первообразная. Оценивая второй интеграл, получаем

$$\frac{|\alpha|}{4^k} \leq \left| \int_{\partial P_k} \psi(z) dz \right| \leq \varepsilon \text{diam } P_k \cdot l(\partial P_0) = \varepsilon \cdot 2^{-k} \text{diam } P_0 \cdot 2^{-k} l(\partial P_0) = 4^{-k} \varepsilon \cdot \text{diam } P_0 \cdot l(\partial P_0)$$

Выбирая довольно маленький  $\varepsilon$ , получаем, что  $|\alpha|$  меньше любого положительного числа.

□

**Теорема 1.3.5** (Об устранимой особенности замкнутой дифференциальной формы). Пусть  $\Phi = f dx + g dy$  — непрерывная дифференциальная форма в области  $G \subset \mathbb{C}$ .

Если  $z_0 \in G$ , и  $\Phi$  замкнута в  $G \setminus \{z_0\}$ , то  $\Phi$  замкнута в  $G$ .

*Доказательство.* Докажем, что  $\forall P \subset G : \int_{\partial P} \Phi = 0$ . Рассмотрим случаи.

- Если  $z_0 \notin P$ , то интеграл нуль по условию.
- Если  $z_0 \in \text{Int } P$ , то данный случай сводится к следующему: разобьём прямоугольник на два так, чтобы  $z_0$  оказалось на границе:



- Если  $z_0 \in \partial P$ , то отступим на  $\varepsilon$ , интеграл по границе  $P_\varepsilon$  будет нулём:  $\int_{\partial P_\varepsilon} \Phi = 0$ .

Заметим, что  $\int_{\partial P_\varepsilon} \Phi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial P} \Phi$ , так как коэффициенты дифференциальной формы равномерно непрерывны в некоторой окрестности  $P$ . Значит,  $\int_{\partial P} \Phi = 0$ .

□

**Теорема 1.3.6** (Малая интегральная формула Коши). Пусть  $f$  — голоморфна в области  $G$ ,  $B = B(z_0, r)$  — круг,  $\overline{B} \subset G$ . Тогда  $\forall z \in B$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

*Доказательство.* Докажем для некоего фиксированного  $z \in B$ .

Рассмотрим функцию  $g(\zeta) = \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$ .  $g$  голоморфна в области  $G \setminus \{z\}$ . Тем самым,  $g(\zeta) d\zeta$  — замкнутая форма в  $G \setminus \{z\}$ , а по теореме об устранимой особенности  $g(\zeta) d\zeta$  замкнута в  $G$  (определим по непрерывности  $g(z) := f'(z)$ ).

Но так как круг — удобная область, то у  $g$  имеется первообразная в некотором круге  $B(z_0, r(1+\varepsilon))$  (где  $\varepsilon > 0$  настолько мал, что  $B(z_0, r(1+\varepsilon)) \subset G$ ),

Тем самым,  $\int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta = 0$ , откуда

$$\int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \cdot \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i \cdot f(z)$$

□

**Следствие 1.3.1** (Теорема Коши). Если функция голоморфна в области  $G \subset \mathbb{C}$ , то  $\forall z_0 \in G$  функция  $f$  (в некоторой окрестности) раскладывается в некоторый степенной ряд  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ , причём радиус сходимости хотя бы  $\text{dist}(z_0, \partial G)$ .



*Доказательство.* Пусть  $r \in (0, \text{dist}(z_0, \partial G))$ . Рассмотрим  $B = B_r(z_0)$ . Так как  $B \subset G$ , то для точки  $z \in B$  получаем

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} (z - z_0)^j \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \end{aligned}$$

Абсолютная равномерная сходимость в круге радиус  $r$  при  $r < \text{dist}(z_0, \partial G)$  имеется по тем же причинам, что и при доказательстве (о).

Таким образом, мы получили степенной ряд, и так как коэффициенты степенного ряда, раз определены, не зависят от радиуса круга ( $c_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}$ ), то радиус сходимости данного ряда хотя бы  $\text{dist}(z_0, \partial G)$ .  $\square$

## Лекция IV

12 марта 2024 г.

*Замечание.* Интегральную форму Коши можно спокойно дифференцировать: так,

$$\frac{d}{dz} f(z) = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

В общем случае

$$\frac{d^k}{dz^k} f(z) = \frac{d^k}{dz^k} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

**Определение 1.3.3** (Целая (entire) функция). Голоморфная функция, заданная в  $\mathbb{C}$ .

Выберем  $z_0 = 0$ . Согласно (следствие 1.3.1), получаем  $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ , где  $c_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}} d\zeta$ , причём имеется абсолютная сходимость везде в  $\mathbb{C}$ .

**Теорема 1.3.7.** Если  $f$  целая, и  $|f(z)| = \mathcal{O}(z^N)$  при  $|z| \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty$ , то  $f$  — многочлен степени не более  $N$ .

*Доказательство.* Из определения  $\mathcal{O}$ :  $\exists C, a \in \mathbb{R} : |f(z)| \leq C|z|^N$  при  $|z| > a$ .

Выберем  $r > a$ , и оценим:  $|c_j| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{j+1}} ire^{i\theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Cr^N}{r^j} d\theta = \frac{Cr^N}{r^j}$ . Получается, при  $j > N : |c_j|$  меньше любого наперёд заданного положительного числа.  $\square$

**Следствие 1.3.2** (Теорема Лиувилля). Ограниченная целая функция постоянна.

**Следствие 1.3.3** (Основная теорема алгебры).  $\forall p \in \mathbb{C}[z] : \deg p > 0 \Rightarrow \exists z_0 \in \mathbb{C} : p(z_0) = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $p(z) = \sum_{j=0}^N c_j z^j$ , где  $N > 0$  и  $c_N \neq 0$ .

Пойдём от противного: пусть  $\forall z \in \mathbb{C} : p(z) \neq 0$ .

Рассмотрим  $f(z) := \frac{1}{p(z)}$ .

- С одной стороны, это целая функция:  $\frac{d}{dz} f(z) = -\frac{p'(z)}{p(z)^2}$ .

- С другой стороны,  $f$  ограничена: оценим  $|p(z)| \geq |z|^N \left( |c_N| - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{|c_j|}{|z|^{N-j}} \right)$ , откуда для достаточно больших  $|z|$ :  $|p(z)| \geq \frac{|c_N|}{2} |z|^N$ .  
Тем самым,  $p(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \infty$ , то есть  $f(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$ . А при малых  $|z|$ :  $f$  ограничена, как непрерывная функция на компакте.
- Тем самым, по теореме Лиувилля,  $f \equiv \text{const}$ , то есть  $p \equiv \text{const}$ . Противоречие, мы предполагали  $\deg p > 0$ .  $\square$

**Теорема 1.3.8** (Теорема о среднем). Пусть  $z_0 \in G$ ,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  голоморфна в  $G$ . Выберем  $r < \text{dist}(z_0, \partial G)$ . Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

*Доказательство.* Посчитаем  $f(z_0)$  по интегральной формуле:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it}) ire^{it}}{re^{it}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

$\square$

Это действительно среднее в обычном смысле:  $f$  проинтегрирована по окружности по мере Лебега, и интеграл поделили на меру окружности.

**Теорема 1.3.9** (Принцип максимума модуля). Пусть  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  — непостоянная голоморфная функция. Тогда  $|f| : z \mapsto |f(z)|$  не может достигать наибольшего значения при  $z \in G$ .

*Доказательство.* Пойдём от противного: пусть  $\exists z_0 \in G : \forall z \in G : |f(z)| \leq |f(z_0)|$ . Выберем  $r > 0 : B(z_0, r) \subset G$ , и докажем, что  $|f|$  постоянна в  $B(z_0, r)$ . Пусть  $\rho < r$ , по теореме о среднем

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(z_0 + \rho e^{it})|}_{\leq |f(z_0)|} dt, \text{ причём равенство достигается только если}$$

$\forall t \in [0, 2\pi] : |f(z_0 + \rho e^{it})| = |f(z_0)|$  (если  $\exists t_0 \in (0, 2\pi) : |f(z_0 + \rho e^{it_0})| < |f(z_0)|$ ), то по непрерывности  $\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) : |f(z_0 + \rho e^{it})| < |f(z_0)| - \varepsilon$ , то есть на промежутке  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$  интеграл строго меньше требуемого значения).

**Лемма 1.3.1.** Пусть  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  голоморфна, и  $\exists z_0 \in G : f'(z_0) \neq 0$ . Тогда  $\exists U \ni z_0 : f(z_0) \in \text{Int } f(U)$ .

*Доказательство леммы.*

Теорема об обратной функции.  $\square$

Тем самым,  $\forall z \in B(z_0, r) : f'(z) = 0$  (так как  $|f(z)|$  — максимум).

Далее применяем теорему единственности, доказанную во II семестре:  $f$  и константа, равная  $|f(z_0)|$  совпадают на множестве с предельной точкой, значит, они совпадают везде в  $G$ .  $\square$

**Следствие 1.3.4.** Пусть  $G$  — ограниченная область,  $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$  голоморфна в  $G$ . Тогда  $\forall z \in G : |f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|$ .

*Доказательство.*  $f$  достигает своё наибольшее значение на компакте  $\overline{G}$ , но согласно принципу максимума, это значение достигается не внутри  $G$ .  $\square$

## 1.4 Гармонические функции

Запишем теорему о среднем для  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$f(z_0) = \int_1 2\pi(f(z_0) + re^{it}) dt$$

Пусть  $f = u + iv$ , где  $u, v$  — вещественные функции в  $G$ . Теорема о среднем говорит, что

$$u(z_0) = \int_1 2\pi(u(z_0) + re^{it}) dt \quad v(z_0) = \int_1 2\pi(v(z_0) + re^{it}) dt$$

Так как  $f$  аналитична, то в вещественном смысле  $u, v \in C^\infty(G)$ .

Запишем уравнения Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Дифференцируя второй раз, получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

Это так называемое *уравнение Лапласа*:  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

Обобщим. Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  — область, пусть  $f \in C^2(G)$ .

**Определение 1.4.1** ( $f$  — гармоническая функция в  $G$ ).  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$ .

Оператор  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$  называется *оператором Лапласа*, и понятно, что гармонические функции — в точности такие  $u$ , что  $\Delta u = 0$ .

**Утверждение 1.4.1.** Если  $u \in C^2(G)$ , где область  $G \subset \mathbb{R}^2$ , то локально существует голоморфная  $f : u = \Re f$ . Иными словами,  $\forall z_0 \in G : \exists U \ni z_0, \exists$  аналитическая  $f : U \rightarrow \mathbb{C} : u = \Re f$ .

*Доказательство.* Пусть  $\phi := \frac{\partial u}{\partial x}, \psi := -\frac{\partial u}{\partial y}$ . Тогда  $\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ , то есть  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  везде в  $G$ .

Раз накрест-взятые частные производные совпадают, то дифференциальная форма  $\phi dx + \psi dy$  замкнута, значит, локально имеется первообразная.

Зафиксируем точку  $z_0 \in G$ , имеется некоторый шарик  $B \ni z_0$ , в котором есть первообразная  $v$ :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \phi = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Это уравнения Коши — Римана, значит,  $f := u + iv$  голоморфна в  $B$ . □

**Теорема 1.4.1** (Морера). Пусть  $f : (G \subset \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  непрерывна. Следующие условия эквивалентны.

1.  $f$  голоморфна в  $G$ .
2.  $f$  аналитична в  $G$ .
3. Дифференциальная форма  $f(z) dz$  замкнута.

*Доказательство.* (1)  $\iff$  (2) уже доказано: (теорема 1.0.1) и (следствие 1.3.1).

(1)  $\Rightarrow$  (3) доказано тоже: (теорема 1.3.1).

Докажем (3)  $\Rightarrow$  (2). Пусть  $F$  — первообразная формы  $f(z) dz$  в круге  $B(z_0, r) \subset G$ .  $F$  голоморфна в  $B(z_0, r)$ , и  $\forall z \in D : F'(z) = f(z)$ .

Значит,  $F$  раскладывается в степенной ряд  $F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$ . Отсюда  $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j(z-z_0)^{j-1}$ . □

## 1.5 Первообразная от замкнутой формы вдоль непрерывного пути

### 1.5.1 Наводящие предположения

Пусть  $f dx + g dy$  — непрерывная дифференциальная форма в  $G$ , предположим, что она точная: имеется первообразная  $F$ .

Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — кусочно-гладкий путь. Ранее было получено, что  $\int_{\gamma} f dx + g dy = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ .

Давайте обобщим интеграл вдоль пути: пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — произвольный непрерывный путь. Положим по определению  $\int_{\gamma} f dx + g dy \stackrel{def}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ .

Теперь пусть  $f dx + g dy$  всего лишь замкнута. Выберем  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  так, что  $\forall j : \gamma([t_j, t_{j+1}])$  лежит в области  $G_j$ , в которой у формы  $f dx + g dy$  есть первообразная  $F_j$ . Попробуем определить

$$\int_{\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}} f dx + g dy \stackrel{def}{=} F_j(\gamma(t_{j+1})) - F_j(\gamma(t_j))$$

и

$$\int_{\gamma} f dx + g dy \stackrel{def}{=} \sum_{j=0}^{k-1} F_j(\gamma(t_{j+1})) - F_j(\gamma(t_j))$$

Проблема в том, чтобы доказать, что определение корректно — не зависит от выбора разбиения  $a = t_0 < \dots < t_k = b$ .

### 1.5.2 Требуемые свойства

Пусть  $\Phi = f dx + g dy$  — замкнутая форма в области  $G \subset \mathbb{C}$ , и  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — путь.

**Определение 1.5.1** (Первообразная формы  $\Phi$  вдоль пути  $\gamma$ ). Такая функция  $v : [a, b] \rightarrow G$ :

- $\forall t \in [a, b] : \exists U \ni \gamma(t), \varepsilon > 0$  и найдётся первообразная  $F$  для  $\Phi$  на  $U$ , такая, что

$$\forall \tau \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) : v(\tau) = F(\gamma(\tau))$$

**Факт 1.5.1.** Функция  $v$ , если существует, непрерывна на  $[a, b]$ .

*Доказательство.* Непрерывность в какой-то конкретной точке следует из непрерывности композиции  $F \circ \gamma$ .  $\square$

**Теорема 1.5.1.** Первообразная замкнутой дифференциальной формы вдоль пути  $\gamma$  всегда существует, и любые две отличаются на константу.

*Доказательство.* Сначала докажем существование. Для всех  $t \in [a, b]$  выберем окрестность  $U_t := B(\gamma(t), r_t)$ , где  $r_t$  настолько мал, что в  $U_t$  есть первообразная.

Семейство  $\{U_t\}_{t \in [a, b]}$  образуют открытое покрытие  $\gamma([a, b])$ . По лемме Лебега  $\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in [a, b] : B(\gamma(t), \varepsilon)$  содержится в каком-то  $U_{t'}$ . Применяя теорему Кантора о равномерной непрерывности, получаем существование разбиения  $a = t_0 < \dots < t_k = b$ , такое, что  $\gamma([t_j, t_{j+1}])$  лежит в одном из  $U_t$ .

Произвольно выберем  $v(a)$ . Построим  $v|_{[t_j, t_{j+1}]}$  индукцией по  $j$ .

База: Пусть  $\gamma([t_0, t_1]) \subset U_0$ , и имеется первообразная  $F_0$  на  $U_0$ . Определим  $v(\tau) = F_0(\gamma(\tau))$  при  $\tau \in [t_0, t_1]$ .

Переход: Пусть  $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subset U_j, F_j$  — первообразная  $\Phi$  на  $U_j$ . Найдётся такое  $\delta > 0$  :  $\gamma([t_j - \delta, t_{j+1}]) \subset U_j$ , значит,  $U_j \cap U_{j-1} \neq \emptyset$ . Это пересечение связно, на нём имеются две первообразные,  $F_{j-1}$  и  $F_j$ .

Добавим константу к  $F_j$  так, чтобы  $F_j \equiv F_{j-1}$  при  $t \in [t_j - \delta, t_j]$ , и определим  $v(\tau) = F_j(\gamma(\tau))$  при  $\tau \in [t_j, t_{j+1}]$ . Окрестность  $U_j$  захватывает отрезок  $[t_j - \delta, t_{j+1}]$ , значит, для точек во внутренности выполнено условие из определения первообразной.

Докажем единственность: рассмотрим точку  $t \in [a, b]$ . Найдутся два круга  $U, V \ni \gamma(t)$ , и первообразные  $F, H$  формы  $\Phi$  в этих окрестностях, такие, что  $u(\tau) = F(\gamma(\tau))$  и  $v(\tau) = H(\gamma(\tau))$  при  $\tau$ , достаточно близких к  $t$ .

Тем самым,  $u - v$  локально постоянна, но локально постоянная функция на связном множестве — константа (образ любого элемента из образа открыто-замкнуто).  $\square$

## Лекция V

15 марта 2024 г.

Теперь определим интеграл  $\int_{\gamma} \Phi = v(b) - v(a)$ , где  $v$  — первообразная для  $\Phi$  вдоль пути  $\gamma$ , получившаяся из (теорема 1.5.1). Теперь интеграл определён для любой замкнутой формы вдоль пути (однако для кусочно-гладкого пути интеграл (определение 1.1.3) был определён для необязательно замкнутой формы).

*Свойства* (Свойства первообразной вдоль пути).

- Аддитивность по дифференциальной форме:  $\int_{\gamma} (\Phi + \Psi) = \int_{\gamma} \Phi + \int_{\gamma} \Psi$ .
- Аддитивность вдоль пути:  $\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} \Phi = \int_{\gamma_1} \Phi + \int_{\gamma_2} \Phi$ .
- Если  $\gamma$  — кусочно-гладкий путь, то определение совпадает со старым.

*Доказательство.*  $\gamma'$  существует везде, кроме, может быть, конечного множества.

При помощи леммы Лебега разобьём отрезок точками  $a = t_0 < \dots < t_k = b$  так, что  $\forall j < k : \exists U_j \supset \gamma([t_j, t_{j+1}])$  такая, что на  $U_j$  найдётся первообразная  $H_j$ :

$$\forall \tau \in [t_j, t_{j+1}] : F(\tau) = H_j(\gamma(\tau))$$

И старый, и новый интегралы аддитивны вдоль пути. Несложно видеть, что в обоих определениях  $\int_{\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}} \Phi$  совпадают.  $\square$

- Так как путь  $\gamma$  необязательно дифференцируем, то основную оценку интеграла вдоль пути распространить на новое определение проблематично: длины может не существовать.
- Пусть  $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$  — гомеоморфизм,  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — путь, тогда

$$\int_{\gamma} \Phi = \pm \int_{\gamma \circ \phi} \Phi$$

где знак зависит от того, возрастает  $\phi$ , или убывает.

*Причина.* Если  $F$  — первообразная  $\Phi$  вдоль пути  $\gamma$ , то  $F \circ \phi$  — первообразная для  $\Phi$  вдоль пути  $\gamma \circ \phi$ .  $\square$

### 1.5.3 О гомотопности путей

Пусть  $K = [0, 1] \times [a, b]$  — квадрат гомотопии.

**Определение 1.5.2** (Гомотопия). Непрерывное отображение  $\Gamma : K \rightarrow \mathbb{C}$ .

Положим  $\gamma_s := \Gamma(s, \_)$ . Как водится,  $\gamma_0, \gamma_1$  — два пути  $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , и существование  $\Gamma$  по определению влечёт гомотопность этих путей.

Пути  $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow G$  *гомотопны в  $G$* , если найдётся гомотопия  $\Gamma : K \rightarrow G$ .

Будем говорить о гомотопности двух замкнутых путей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  при условии существования гомотопии  $\Gamma : K \rightarrow G$ , соединяющей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в классе замкнутых путей:  $\forall s \in [0, 1] : \Gamma(s, a) = \Gamma(s, b)$ .

Гомотопность путей — отношение эквивалентности, также как и гомотопность замкнутых путей.

**Определение 1.5.3** (Односвязная область). Область, в которой всякий замкнутый путь гомотопен постоянному. Иными словами, фундаментальная группа тривиальна.

**Определение 1.5.4** (Звёздная область  $A \subset \mathbb{R}^n$ ). Такая область, что для некоторого *центра*  $z_0 \in A$ :  $\forall z \in A : \{z_0 + s(z - z_0) | s \in [0, 1]\} \subset A$ .



**Факт 1.5.2.** Всякая звёздная область  $A$  односвязна.

*Доказательство.* Прогомотопируем путь  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  при помощи

$$\begin{aligned} \Gamma : [0, 1] \times [a, b] &\rightarrow K \\ \tau, t &\mapsto z_0\tau + (1 - \tau)\gamma(t) \end{aligned}$$

□

*Пример* (Неодносвязная область). Пусть  $A$  — звёздная область, выкинем точку  $w_0 \in A$ .



Интеграл  $\frac{dz}{z - w_0}$  по маленькой окружности  $\omega$ , обходящей  $w_0$ , равен  $2\pi i$ , значит, путь не стягиваем.

**Теорема 1.5.2** (Первообразная вдоль гомотопии). Пусть  $K = [0, 1] \times [a, b]$  — квадрат,  $\Gamma : K \rightarrow G$  — гомотопия, и  $\Phi = f dx + g dy$  — замкнутая дифференциальная форма в  $G$ . Тогда  $\exists F : K \rightarrow \mathbb{C}$  — *первообразная формы  $\Phi$  вдоль гомотопии  $\Gamma$* , то есть такая функция, что  $\forall (s, t) \in K : \exists U \ni (s, t) : U \subset G, \exists \delta > 0 : \exists \Phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  — первообразная формы  $F$ , такая, что

$$\begin{cases} |\sigma - s| < \delta \\ |\tau - t| < \delta \end{cases} \Rightarrow F(\sigma, \tau) = H(\Gamma(\sigma, \tau))$$

*Доказательство.* Покроем множество  $\Gamma(K)$  кругами  $U \subset G$ , такими что в каждом круге  $U$  у  $\Phi$  есть первообразная  $H_U$ .

По лемме Лебега  $\exists \rho > 0 : \forall e \subset K : \text{diam}(e) < \rho \Rightarrow e$  лежит в одном из кругов данного покрытия.

Разобьём квадрат гомотопии  $K$  на прямоугольники диаметра меньше  $\rho$ :



Аналогично доказательству (теорема 1.2.2), в каждом горизонтальном прямоугольнике найдётся первообразная  $F_j$ , а дальше их надо сшить. Сшить несложно: вдоль горизонтального отрезка — пересечения прямоугольников —  $F_j|_{\dots} = F_{j+1}|_{\dots}$ . Так как это — первообразные вдоль пути, то они отличаются на константу. Значит, можно изменить все  $F_j$  на константы так, чтобы их склейка была непрерывной функцией.

Дальше надо проверить, что действительно получилась первообразная на квадрате. Выберем точку  $(s, t) \in K$ . Если точка попала внутрь какого-то прямоугольника, то можно выбрать окрестность, лежащую внутри прямоугольника, иначе чуть сложнее, но несильно.  $\square$

**Теорема 1.5.3.** Интегралы от замкнутой формы  $\Phi$  по гомотопным замкнутым путям равны.

*Доказательство.* Определим  $w(t) := \int_{\gamma_t} \Phi$  для всех  $t \in [0, 1]$ .

Пусть  $F$  — первообразная для формы  $\Phi$  вдоль гомотопии  $\Gamma$ . Понятно, что  $w(t) = F(t, b) - F(t, a)$ .

Докажем, что  $w$  локально постоянна на  $[0, 1]$ , следствием будет, что  $w$  постоянна, что и требуется доказать.

$\forall (\alpha, \beta) \in [0, 1] \times [a, b]: \exists \delta > 0$ , круг  $U$  и первообразная  $H_U$ , такие, что

$$\begin{cases} |\alpha - \alpha'| < \delta \\ |\beta - \beta'| < \delta \end{cases} \Rightarrow F(\alpha', \beta') = H_U(\Gamma(\alpha', \beta'))$$

Пусть  $U_1, U_2$  — такие шары для  $(t, b)$  и  $(t, a)$  соответственно. Тогда для  $\tau$ , достаточно близких к  $t$ , выполнено  $w(t) = H_{U_1}(\Gamma(t, b)) - H_{U_2}(\Gamma(t, a))$ .  $H_1, H_2$  — две первообразные в одной окрестности, они отличаются на константу, а  $\Gamma(t, a) \equiv \Gamma(t, b)$ , поэтому  $w$  локально постоянна.  $\square$

*Замечание.* Если очень хочется, то можно соединить пути  $\gamma_0 : [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{C}$  и  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$  гомотопией  $\Gamma : K \rightarrow \mathbb{C}$ , где  $K := \{(t, s) | t \in [0, 1], s \in [a_t, b_t]\}$  ( $a_t, b_t$  — какие-то непрерывные функции от  $t$ , такие, что  $a_t < b_t$ ).

## 1.6 Ряды Лорана

*Ряд Лорана*  $f(z)$  — ряд вида  $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$ .

Говорят, что ряд Лорана сходится в точке  $z$ , если оба ряда  $f_+(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$  и  $f_-(z) = \sum_{n < 0} c_n (z - z_0)^n$  сходятся.

Первый ряд степенной, имеется некий радиус сходимости  $r_+$ , такой, что  $|z - z_0| < r_+ \Rightarrow f_+$  сходится. При замене переменной  $w := \frac{1}{z - z_0}$ ,  $f_-(1/w)$  становится степенным рядом от  $w$ , сходящимся при  $w < \frac{1}{r_-}$ .

Таким образом, ряд сходится абсолютно внутри «кольца»  $\{z \in \mathbb{C} | r_- < |z - z_0| < r_+\}$ :



**Теорема 1.6.1.** Пусть  $0 \leq r_- < r_+ \leq \infty$ , функция  $f$  голоморфна в «кольце»  $K := \{z \in \mathbb{C} | r_- < |z| < r_+\}$ .

Тогда  $f$  представима в  $K$  сходящимся рядом Лорана.

*Доказательство.* Пусть  $z \in K$ . Определим  $\phi_z : K \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\phi_z(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \neq z \\ f'(z), & \zeta = z \end{cases}$ .

Согласно (теорема 1.3.5), форма  $\phi_z(\zeta) d\zeta$  замкнута в  $K$ .

Выберем  $r, R \in \mathbb{R}$  так, что  $r_- < r < |z| < R < r_+$ . Для  $\rho \in \mathbb{R}$  определим  $\gamma_\rho : [0, 2\pi] \rightarrow K$ ,  $\gamma_\rho(t) := \rho e^{it}$ . Пути  $\gamma_R$  и  $\gamma_r$  гомотопны, значит,  $\int_{\gamma_R} \phi_z(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_r} \phi_z(\zeta) d\zeta$ . А именно,

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

Преобразовывая, получаем

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \underbrace{\int_{\gamma_R} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta}_{2\pi i} - f(z) \underbrace{\int_{\gamma_r} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta}_0$$

Тем самым, получили *малую интегральную форму Коши для кольца*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right)$$

Осталось преобразовать дроби в ряды:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = \int_{\gamma_R} \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \cdot (z - z_0)^j \\ \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = -\frac{1}{z - z_0} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} d\zeta = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_r} f(\zeta) (\zeta - z_0)^k d\zeta \cdot \frac{1}{(z - z_0)^k} \end{aligned}$$

Сходимость степенная, имеется признак Вейерштрасса, можно поменять местами сумму и интеграл, поэтому все преобразования законны.

При замене  $j = -k - 1$ , второе выражение преобразуется в форму

$$- \sum_{j=-1}^{-\infty} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \cdot (z - z_0)^j$$



Теперь можно заметить, что интегралы вдоль  $\gamma_r$  и  $\gamma_R$  равны, так как особенностей у интегралов — слагаемых в ряде — в кольце нет. Окончательно получаем

$$f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j (z - z_0)^j, \text{ где } c_j = \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \text{ для любого } \rho \in (r_-, r_+)$$

□

## Лекция VI

22 марта 2024 г.

Ряд Лорана  $g(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j z^j$  принято раскладывать на две части — *регулярную*  $\sum_{j \geq 0} c_j (z - z_0)^j$  и *главную*  $\sum_{j < 0} c_j (z - z_0)^j$ .

Если ряд Лорана изучать в маленькой окрестности  $z_0$ , то главная часть асимптотически больше. Регулярная же сходится на всей комплексной плоскости.

### 1.7 Изолированные особенности голоморфных функций

Пусть область  $G \subset \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in G$ ,  $f$  задана и аналитична в  $G \setminus \{z_0\}$ . Тогда говорят, что  $f$  *имеет особенность в  $z_0$* .

Возможны случаи:

1.  $f$  ограничена вблизи  $z_0$ .

Точка  $z_0$  называется *устранимой особенностью*, так как в силу (теорема 1.7.1)  $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .

2.  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ .

Точка  $z_0$  называется *полюсом*.

3.  $f$  не имеет предела в  $z_0$ .

Точка  $z_0$  называется *существенно особой точкой*.

**Теорема 1.7.1.** В первом случае —  $f$  ограничена вблизи  $z_0$  —  $f$  единственным образом продолжается до аналитической функции в области  $G$ .

*Доказательство.* Выберем  $R > 0$  такой, что  $B(z_0, R) \subset G$ .  $f$  разложится в некоторый ряд Лорана при  $0 < |z - z_0| < R$ .

Запишем  $c_j = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{it})(\rho e^{it})^{-j-1} \cdot \rho e^{it} dt$  и грубо оценим коэффициенты главной части ( $j < 0$ ). Пусть  $|f| \leq C$  внутри круга  $B(z_0, R)$  для некоторой константы  $C$ .

$$|c_j| \leq \frac{C}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^{-j} dt = C \rho^{-j}$$

Устремляя  $\rho \rightarrow 0$ , получаем  $c_j = 0$ . Тем самым,  $f$  раскладывается в ряд Тейлора в окрестности  $z_0$ . □

Запишем несколько другую классификацию особенностей точки, опирающуюся на ряд Лорана  $f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j (z - z_0)^j$ .

I При всяком  $j < 0$ :  $c_j = 0$ .

II Множество  $\mathcal{A} := \{j < 0 | c_j \neq 0\}$  конечно.

III Множество  $\mathcal{A} := \{j < 0 | c_j \neq 0\}$  бесконечно.

Понятно, что I эквивалентно 1.

**Теорема 1.7.2.** На самом деле,  $\text{II} \iff 2, \text{III} \iff 3$ .

*Доказательство.*

$\text{II} \Rightarrow 2$  Пусть  $k = -\min \mathcal{A}$ .

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} \cdots + c_0 + \sum_{j>0} c_j (z-z_0)^j = \frac{1}{z-z_0}^k (c_{-k} + c_{-k+1} + \cdots) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$$

При этом  $g(z_0) \neq 0$  и  $g(z)$  аналитична. Тем самым,  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ .

$2 \Rightarrow \text{II}$  Положим  $h(z) := \frac{1}{f(z)}$  в некоторой окрестности  $z_0$ .

$h$  аналитична при  $z \neq z_0$ , и  $\lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = 0$ , значит,  $h$  имеет устранимую особенность в  $z_0$ . **Может что-то пропустить.** Пусть  $k$  — наименьший номер, такой, что  $b_k \neq 0$ , где  $b_k$  — коэффициент из разложения  $h$  в ряд Тейлора:

$$h(z) = b_k (z-z_0)^k + b_{k+1} (z-z_0)^{k+1} + \cdots = (z-z_0)^k (b_k + b_{k+1} (z-z_0) + \cdots) = (z-z_0)^k \cdot u(z)$$

$u$  аналитична вблизи  $z_0$ , и  $u(z_0) = b_k \neq 0$ .

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \frac{1}{u(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^k} (c_0 + c_1 (z-z_0) + \cdots)$$

Почленно деля, действительно получаем, что  $f(z)$  имеет конечное число ненулевых членов в разложении в ряд Лорана.  $\square$

Пусть  $z_0$  — полюс  $f$ ,  $k := -\min \{j < 0 | c_j \neq 0\}$ . Число  $k$  называется *порядком* полюса  $z_0$ .

Если же  $g$  аналитична в  $z_0$ ,  $g(z_0) = 0$ ,  $g \not\equiv 0$ , то  $g(z) = \sum_{j \geq 0} a_j (z-z_0)^j$ , положим  $l := \min \{j | a_j \neq 0\}$ .

Число  $l$  — *порядок*  $f$ .

**Факт 1.7.1.**  $f$  имеет полюс порядка  $k$  в  $z_0 \iff \frac{1}{f}$  имеет ноль порядка  $k$  в  $z_0$ .

*Интересный факт* (Теорема Пикара). Пусть  $z_0$  — существенно особая точка аналитической функции  $f$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 : f(\{z | 0 < |z - z_0| < \varepsilon\})$  есть  $\mathbb{C}$ , кроме, может быть, двух точек.

Мы докажем более простой вариант теоремы Пикара.

**Теорема 1.7.3** (Сохоцкий). Пусть  $z_0$  — существенно особая точка аналитической функции  $f$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 : \mathcal{B} := f(\{z | 0 < |z - z_0| < \varepsilon\})$  плотно в  $\mathbb{C}$ .

*Доказательство.* От противного: пусть  $\exists w_0 \notin \overline{\mathcal{B}}$ , то есть  $\exists \delta > 0 : B(w_0, \delta) \cap \mathcal{B} = \emptyset$ .

Определим

$$h : B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{1}{f(z) - w_0}$$

Хотя  $h$  и имеет особенность при  $z = z_0$ , но  $h$  ограничена, то есть особенность устранима.  $f(z) = \frac{1}{h(z)} + w_0$ , и так как  $h$  аналитична в  $z_0$ , то особенность в  $z_0$  — то ли тоже устранимая особенность, то ли полюс, но уж никак  $z_0$  — не существенно особая точка.  $\square$

*Пример.* Возьмём  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ . У подынтегральной функции в нуле особенность устранимая, а с бесконечностью есть некоторые проблемы. Впрочем, избавимся и от нуля в области интегрирования:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x} dx \quad (\equiv)$$

Запишем формулу Эйлера  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . Интегрируя по всей оси  $\frac{\cos x}{x}$ , мы получим ноль из-за нечётности, поэтому можно продолжить равенство так:

$$(\equiv) \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon < |x| < R} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

Теперь перейдём к функции, аналитической в комплексной плоскости:  $\phi(z) := \frac{e^{iz}}{z}$ .

Введём путь  $\Gamma = [\varepsilon \rightarrow R] \cdot \gamma_R \cdot [-R \rightarrow -\varepsilon] \rightarrow \gamma_\varepsilon$ , где  $[a \rightarrow b]$  — путь, проходящий отрезок  $[a, b]$  в направлении от  $a$  к  $b$ , а  $\begin{cases} \gamma_R(t) = Re^{it}, & t \in [0, \pi] \\ \gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{i(\pi-t)}, & t \in [0, \pi] \end{cases}$ .

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \phi(z) dz = \int_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{i(\pi-t)}}}{\varepsilon e^{i(\pi-t)}} \varepsilon i e^{i(\pi-t)} dt = \int_0^\pi i e^{i\varepsilon e^{i(\pi-t)}} dt \quad \begin{matrix} \text{подынтегральное выражение равномерно сходится к } i. \\ \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \end{matrix} \quad -i\pi$$

$$\int_{\gamma_R} \phi(z) dz = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} R i e^{it} dt = i \int_0^\pi e^{iRe^{it}} dt$$

Оценим  $e^{iRe^{it}} = e^{iR \cos t - R \sin t} = e^{iR \cos t} \cdot e^{-R \sin t}$ . По теореме Лебега о мажорируемой сходимости интеграл по  $\gamma_R$  будет нулём.

...

Этот интеграл получилось так взять, так как у  $\phi$  была особенность в нуле, и мы её обошли. А иногда особенности находятся внутри пути интегрирования, в таком случае приговаривается *формула в вычетax*.

## 1.8 Вычеты

Пусть  $f$  задана и голоморфна в  $G \setminus \{z_0\}$ , где  $G$  — область,  $z_0 \in G$  — изолированная особенность.

Вблизи  $z_0$   $f$  раскладывается в ряд Лорана  $f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j (z - z_0)^j$ .

**Определение 1.8.1** (Вычет функции  $f$  в точке  $z_0$ ). Коэффициент  $c_{-1}$ , обозначается  $\text{Res}_{z_0} f$ .

Этот коэффициент так важен, так как у  $c_j (z - z_0)^j$  при  $j \neq -1$  имеется первообразная в  $G$ , и при интегрировании по окружности, обходящей  $z_0$ , пропадут все коэффициенты ряда Лорана, кроме вычета.

### 1.8.1 Как вычислять вычеты

У нас есть формула для вычисления коэффициентов ряда Лорана, но она получается интегрированием, а мы как раз и хотим использовать вычеты, чтобы уметь удобно интегрировать. Поэтому иногда пригождаются следующие частные случаи:

- Пусть  $z_0$  — полюс функции  $f$  степени  $k$ :

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + f_+(z)$$

где  $f_+$  — аналитическая вблизи  $z_0$ .

Домножая  $f$  на  $(z - z_0)^k$ , получаем аналитическую

$$(z - z_0)^k f = c_{-k} + c_{-k+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{k-1} + (z - z_0)^k \cdot f_+(z)$$

Теперь можно найти  $\text{Res}_{z_0} f$  по формуле:  $\text{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} [(z - z_0)^k f(z)] \Big|_{z=z_0}$ .

- Пусть  $k = 1$  — у  $f$  имеется полюс первого порядка. Тогда дифференцировать не надо, и формула вырождается в

$$\text{Res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

- Возьмём ещё более частный случай:  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ , где  $g, h$  аналитичны в окрестности  $z_0$ ,  $g(z_0) \neq 0$ , а  $h$  имеет простой нуль в  $z_0$  (нуль кратности 1).

$$\text{Res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)(z - z_0)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)} = \frac{g(z)}{h'(z)}$$

### 1.8.2 Индекс замкнутого пути относительно точки

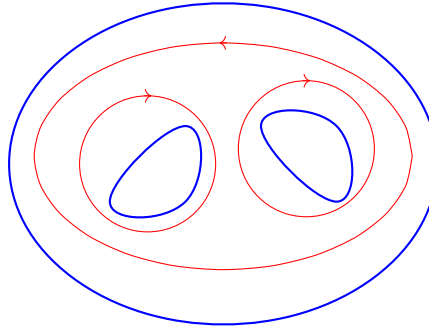
Пусть  $G \subset \mathbb{C}$  — область,  $\Phi$  — замкнутая дифференциальная форма в  $G$ . Пусть  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  — какие-то замкнутые пути с носителем в  $G$ . Обозначим  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ .

Определим интеграл от формы  $\Phi$  по данной совокупности путей  $\int_{\Gamma} \Phi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \Phi$ .

Назовём систему путей  $\Gamma$  *правильной*, если для всякой аналитической функции  $f$  в  $G$ :  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ .

*Примеры* (Правильные системы путей).

- $|\Gamma| = 1$ . Если  $\gamma_1$  гомотопен тождественному, то  $\Gamma$ , конечно, правильная.
- В частности, любой замкнутый путь в односвязной области формирует правильную систему из одного пути.
- Пусть в кольце имеются два пути  $\gamma_1, \gamma_2$ , обходящие концентрические окружности в противоположных направлениях. Тогда  $\{\gamma_1, \gamma_2\}$  — правильная система, так как  $\gamma_1 \sim \gamma_2^-$ .
- Рассмотрим область, ограниченную синими линиями с двумя дырками. В ней система из красных путей правильная, так как можно разложить их в сумму двух зелёных стягиваемых путей:



Пусть  $\gamma$  — петля в  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \notin \text{Im}(\gamma)$ .

**Определение 1.8.2** (Индекс пути  $\gamma$  относительно  $z_0$ ). Значение интеграла  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$ . Обозначается  $\text{Ind}_{z_0} \gamma$ .

Индекс означает число раз, которые мы обошли вокруг данной точки с учётом ориентации, но пока непонятно даже, почему индекс — целое число.

Это определение очевидным образом распространяется на систему путей:  $\forall \gamma_j \in \Gamma : z_0 \notin \text{Im}(\gamma) \Rightarrow$  определён  $\text{Ind}_{z_0} \Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z-z_0}$

*Свойства* (Свойства индекса, докажем потом).

- $\text{Ind}_{z_0} \gamma \in \mathbb{Z}$ .
- Функция  $[z_0 \mapsto \text{Ind}_{z_0} \gamma]$  постоянна на каждой компоненте связности  $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$ .
- На неограниченной компоненте связности  $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$  индекс равен нулю.

**Теорема 1.8.1** (Формула вычетов). Пусть  $G \subset \mathbb{C}$  — область,  $\Gamma$  — правильная система путей в  $G$ ,  $f : G \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \rightarrow \mathbb{C}$  — аналитическая функция, и  $z_1, \dots, z_k$  — особенности. Если все точки  $z_j$  не лежат на носителе системы путей  $\Gamma$ , то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \left( \sum_{j=1}^k \text{Res}_{z_j} f \cdot \text{Ind}_{z_j} \Gamma \right)$$

*Доказательство.* Для каждой точки  $z_j$  имеется  $r_+$ , такой, что  $B(z_j, r_+) \setminus \{z_j\} \subset G$ . Тем самым, в окрестности точки  $z_j$  функция  $f$  разложима в ряд Лорана, и его главная часть сходится везде кроме  $z_j$ .

Пусть  $g_1, \dots, g_k$  — главные части рядов Лорана для  $f$  в точках  $z_1, \dots, z_k$  соответственно. Функция  $h(z) := f(z) - g_1(z) - \dots - g_k(z)$  — аналитическая функция в области  $G$ , так как она имеет конечное число особых точек, в которых ограничена.

Так как  $\Gamma$  — правильная, то  $\int_{\Gamma} h(z) dz = 0$ . Тем самым, мы получили

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k \int_{\Gamma} g_j(z) dz$$

Посчитаем  $\int_{\Gamma} g_j(z) dz$ . Распишем

$$g_j(z) = \frac{\text{Res}_{z_j} g}{z - z_j} + \underbrace{\frac{a_1}{(z - z_j)^2} + \dots + \frac{a_{s-1}}{(z - z_j)^s} + \dots}_{h_j(z)}$$

У  $h_j$  имеется первообразная, так как ряд Лорана можно интегрировать и дифференцировать почленно — доказательство аналогично одному для степенных рядов. Значит,  $\int_{\Gamma} g_j(z) dz = (\text{Res}_{z_j} f) 2\pi i$ .

$\text{Ind}_{z_0} \Gamma$  (очевидно,  $\text{Res}_{z_j} g_j = \text{Res}_{z_j} f$ ). □

## Лекция VII

29 марта 2024 г.

### 1.8.3 Обобщение интеграла $\frac{\sin x}{x}$

Обозначим  $\mathbb{C}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{x + iy | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_{>0}\}$ .

Пусть  $f$  аналитична в  $\{x + iy | y > -\varepsilon\}$ , кроме конечного числа особых точек в  $\mathbb{C}_+$ , назовём их  $z_1, \dots, z_n$ . В  $\{x + iy | -\varepsilon < y < 0\}$ , получается, у  $f$  особенностей нет.

**Предложение 1.8.1.** Пусть при  $\theta \in [0, \pi], R > 0$ :  $|f(Re^{i\theta})R|$  ограничена в  $\mathbb{C}_+$ , причём  $\forall \theta \in [0, \pi] : \lim_{R \rightarrow \infty} f(Re^{i\theta})R = 0$ .

Например,  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ , где  $g, h$  — многочлены,  $\deg g < \deg h$ .

Тогда  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{z_j} f$ . Здесь  $\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R$ , то есть особенности несобственного интеграла на плюс-минус бесконечностях могут сокращать друг друга.

*Доказательство.* Проинтегрируем  $f$  по синему пути, где полуокружность — радиуса  $R$ :



Пусть  $R$  — настолько большое, что все особые точки в  $\mathbb{C}_+$  содержатся во внутренней области, отсекаемой данным путём. Оценим интеграл по верхней полуокружности:

$$\int_0^{\pi} f(Re^{it}) iRe^{it} dt \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{\text{теорема Лебега о мажорируемой сходимости}} 0$$

Далее применяем формулу в вычетах.

Из гомотопности зелёной окружности и синего пути в  $\mathbb{C}_+ \setminus \{z_j\}$  получаем, что их индексы равны 1 — ведь интеграл  $\frac{dz}{z-z_0}$  по окружности мы знаем.  $\square$

#### 1.8.4 2-я формула замены переменной

Пусть  $\Phi = f dx + g dy$  — замкнутая дифференциальная форма в  $G$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — путь, рассмотрим интеграл  $\int_{\gamma} \Phi$ . Изменение параметризации для  $\gamma$  — 1-я формула замены переменной.

Теперь пусть  $g : G_1 \rightarrow G_2$  — голоморфная функция,  $f$  — голоморфная функция в  $G_2$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow G_1$  — непрерывный путь,  $\Phi = f(z) dz$ . Тогда

$$\int_{g \circ \gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (f \circ g)(z) g'(z) dz$$

Наводящее соображение: пусть путь  $\gamma$  — кусочно-гладкий,  $\rho(t) := g(\gamma(t))$ . Тогда

$$\int_{\rho} f(z) dz = \int_a^b f(\rho(t)) \rho'(t) dt = \int_a^b f(g(\gamma(t))) g'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} (f \circ g)(z) \cdot g'(z) dz$$

Но нам эта формула пригодится в случае негладкого пути.

Пусть  $\rho = g \circ \gamma$  — путь в области  $G_2$ ,  $\phi$  — первообразная для формы  $f(z) dz$  вдоль  $\rho$ .

Рассмотрим  $t_0 \in [a, b]$ .  $\exists U \ni \rho(t_0)$  — окрестность, такая, что на ней есть первообразная  $\Phi$  для  $f(z) dz$ . Значит,  $\exists \delta > 0 : \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \Phi(\rho(t))$ .

Положим  $z_0 := \gamma(t_0)$ .  $\exists V \ni z_0 : g(V) \subset U$  из непрерывности  $g$ .  $\forall w \in U : \Phi'(w) = f(w)$ . Запишем

$$\forall z \in V : (\Phi \circ g)'(z) = \Phi'(g(z)) \cdot g'(z)$$

Тем самым,  $\Phi \circ g$  есть первообразная для  $(\Phi \circ g) \cdot g'$  в  $V$ . Значит,  $\phi \circ g$  — первообразная для формы  $f(g(z)) \cdot g'(z) dz$  вдоль пути  $\gamma$ .

Пусть  $\gamma$  — замкнутый путь, не проходящий через  $z_0$ . По определению

$$\text{Ind}_{z_0} \gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

Применим функцию  $[z \mapsto z - z_0]$ . Согласно 2-й формуле замены переменной,

$$\text{Ind}_{z_0} \gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - z_0} \frac{dz}{z} = \text{Ind}_0(\gamma - z_0)$$

**Следствие 1.8.1.** *Индекс пути  $\gamma$  относительно  $z_0$  — локально постоянная функция от  $z_0$ .*

*Доказательство.* Пусть  $z_0$  — точка вне носителя  $\gamma$ . Выберем настолько маленькое  $\delta > 0$ , что  $B(z_0, \delta) \cap \gamma([a, b]) = \emptyset$ .

Рассмотрим  $z_1 \in B(z_0, \delta)$ , и докажем, что  $\text{Ind}_{z_0} \gamma = \text{Ind}_{z_1} \gamma$ . Определим гомотопию путей  $\gamma - z_0$  и  $\gamma - z_1$ :

$$\Gamma(t, \tau) := (1 - \tau)(\gamma(t) - z_0) + \tau(\gamma(t) - z_1) = \gamma(t) - ((1 - \tau)z_0 + \tau z_1)$$

Эта гомотопия не проходит через 0, значит, интегралы по  $\gamma - z_0$  и  $\gamma - z_1$  равны. □

**Следствие 1.8.2.** *Индекс постоянен на каждой компоненте связности  $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ .*

**Следствие 1.8.3.**  $\text{Ind}_{z_0} \gamma = 0$  на неограниченной компоненте связности  $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ .

*Доказательство.* Оценим  $\int_{\gamma - z_0} \frac{dw}{w}$  при достаточно большом  $|z_0|$ . Для такого  $z_0$  носитель пути  $\gamma - z_0$  лежит в некоторой полуплоскости, не содержащей нуля. Полуплоскость односвязна, это даже звёздная область, в ней путь стягиваем, значит, интеграл равен нулю. □

## 1.8.5 О логарифме

Логарифм — это функция, обратная к экспоненте, а экспонента имеет период  $2\pi i$ .

Пусть  $w \in \mathbb{C}$ .

1. Логарифм  $w$  — любое  $z \in \mathbb{C} : e^z = w$ .
2. У  $w = 0$  логарифма нет; если  $z$  — одно из значений логарифма  $w$ , то все остальные значения имеют вид  $\{z + 2\pi i k | k \in \mathbb{Z}\}$ .
3. Для  $w \neq 0 : e = |w|e^{i\theta}$ , где  $\theta \in \mathbb{R}$ . Комплексное число  $\log |w| + i\theta$  — одно из значений логарифма.

Пусть  $G$  — область.

**Определение 1.8.3** (Функция  $\phi$  в  $G$  — ветвь логарифма в  $G$ ).  $\phi$  непрерывна в  $G$ , и  $e^{\phi(z)} = z$  для  $z \in G$ .

**Факт 1.8.1.** *Всякая ветвь логарифма обязательно голоморфна в  $G$ , и  $\phi'(z) = \frac{1}{z}$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим  $z_0 \in G, U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\} \subset G$ . Так как производная экспоненты (как вещественной функции  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) невырождена, то при достаточно малом  $\delta$  у экспоненты имеется обратная  $\psi : e^{\psi(z)} = z$  при  $z \in U$ .

С другой стороны,  $e^{\phi(z)} = z$  при  $z \in U$ . Значит,  $\phi - \psi$  — непрерывная функция, принимающая значения в дискретном множестве  $\{2\pi ik \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Значит, это константа.

Тем самым,  $\phi$  дифференцируема, и  $\phi'(z) = \frac{1}{z}$ .  $\square$

**Теорема 1.8.2.** Во всякой односвязной области  $G$ :  $0 \notin G \Rightarrow \exists$  непрерывная ветвь логарифма.

*Доказательство.* Напрямую следует из (теорема 1.8.3) для тождественного отображения.  $\square$

Пусть  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$  — аналитическая.

**Определение 1.8.4** ( $\Phi : G \rightarrow \mathbb{C}$  — ветвь логарифма функции  $F$ ).  $\forall z \in G : e^{\Phi(z)} = F(z)$ .

*Замечание.* В определении можно требовать лишь непрерывности  $\Phi$ , аналитичность получится автоматически.

**Теорема 1.8.3.** Если  $G$  — односвязная область,  $\forall z \in G : F(z) \neq 0$ , то в  $G$  существует ветвь логарифма для  $F$ .

*Доказательство.* Функция  $\frac{F'(z)}{F(z)}$  — голоморфна в  $G$ . Форма  $\frac{F'(z)}{F(z)} dz$  замкнута в  $G$ , значит, имеется первообразная  $\phi$  — голоморфная в  $G$  функция, такая, что  $\psi'(z) = \frac{F'(z)}{F(z)}$ .

$$\left( \frac{e^{\psi(z)}}{F(z)} \right)' = \frac{e^{\psi(z)} \cdot \psi'(z) F(z) - F'(z) e^{\psi(z)}}{F(z)^2}$$

По построению  $\psi$  числитель равен нулю. Тем самым,  $e^{\psi(z)} = c \cdot F(z)$ .  $\exists a \in \mathbb{C} : c = e^a$ . Положим  $\phi := \psi - a$ , это искомая ветвь логарифма.  $\square$

*Замечание.* Не всякая первообразная для  $\frac{F'}{F}$  есть ветвь логарифма — логарифмы отличаются на целые кратные  $2\pi i$ , а первообразные — на произвольную константу. Однако если  $\psi$  — первообразная  $\frac{F'}{F}$ , и  $\exists z_0 \in \mathbb{C} : e^{\psi(z_0)} = F(z_0)$ , то  $\psi$  — ветвь логарифма для  $F$ .

*Замечание.* Если  $\psi$  — ветвь логарифма, то все ветви логарифма имеют вид  $\{\psi + 2\pi ik \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

Данная функция  $\frac{F'}{F}$  называется *логарифмической производной*.

Пусть  $G$  — область,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфна,  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — путь,  $\forall z \in \gamma([a, b]) : f(z) \neq 0$ .

**Определение 1.8.5** (Ветвь логарифма вдоль пути  $\gamma$ ). Функция  $\phi : [a, b] \rightarrow G$ , такая что  $\forall t_0 \in [a, b] : \exists \delta > 0, \exists U \ni \gamma(t)$ , и существует ветвь логарифма  $\psi$  функции  $f$  в  $U$ , такая, что

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \psi(\gamma(t))$$

**Теорема 1.8.4.** При сделанных предположениях существует ветвь логарифма  $f$  вдоль пути  $\gamma$ . При этом любые две ветви отличаются на  $2\pi ik$ .

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $\frac{f'}{f}$ , аналитическую в некоторой окрестности  $\gamma([a, b])$ . Пусть  $\phi$  — первообразная для  $\frac{f'}{f}$  вдоль  $\gamma$ .

$\forall t_0 \in [a, b] : \exists \delta > 0, \exists U \ni \gamma(t_0)$  вместе с первообразной  $\psi$  функции  $\frac{f'}{f}$ :

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \psi(\gamma(t))$$

Существует  $c$ , вообще говоря, зависящая от  $t$ , такая, что  $e^{\psi(z)} = cf(z)$ . При  $|t - t_0| < \delta : e^{\phi(t)} = e^{\psi(\gamma(t))} = cf(\gamma(t))$ . Значит,  $\frac{e^{\phi(s)}}{f(\gamma(s))}$  локально постоянна на  $[a, b]$ , то есть оказалось, что  $c$  всё-таки не зависит от  $t$ .



Найдётся  $a \in \mathbb{C} : c = e^a$ . Теперь  $\tilde{\phi} := \phi - a$  — тоже первообразная для  $\frac{f'}{f}$  вдоль  $\gamma$ , причём  $e^{\psi(\gamma(t)) - a} = f(\gamma(t))$ . Так как  $\psi - a$  — тоже первообразная в  $U$  для  $\frac{f'}{f}$ , то  $\tilde{\psi}$  — ветвь логарифма.  $\square$

В частности, для  $f(z) = z - z_0$ , и пути  $\gamma$ , не проходящего через  $z_0$ , получается ветвь логарифма  $z - z_0$  вдоль  $\gamma$ . **Что?**

Пусть  $w \in \mathbb{C}$ . Все значения логарифма спрятаны в формуле  $\log w = \log |w| + i \operatorname{Arg} w$ , где  $\operatorname{Arg} w \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \theta \mid e^{i\theta} = \frac{w}{|w|} \right\}$ .

Пусть  $G \neq 0$ .

**Определение 1.8.6** (Непрерывная ветвь аргумента в области  $G$ ). Непрерывная функция  $v : G \rightarrow \mathbb{R} : \forall z \in G : v(z) \in \operatorname{Arg}(z)$

**Факт 1.8.2.** В области  $G$  существует непрерывная ветвь логарифма  $\iff$  в  $G$  существует непрерывная ветвь аргумента.

**Определение 1.8.7** (Ветвь аргумента вдоль пути  $\gamma$ ). Функция  $\phi : [a, b] \rightarrow G$ , такая что  $\forall t_0 \in [a, b] : \exists \delta > 0, \exists U \ni \gamma(t_0)$ , и существует ветвь аргумента  $\psi$  функции  $f$  в  $U$ , такая, что

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \psi(\gamma(t))$$

В качестве ветви аргумента всегда можно выбрать мнимую часть ветви логарифма.

Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — путь,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  — аналитическая, предположим, что  $f(z) \neq 0$  на  $\gamma([a, b])$ .

Пусть  $u$  — ветвь логарифма для  $f$  вдоль  $\gamma$ .

**Определение 1.8.8** (Приращение логарифма вдоль  $\gamma$ ).  $u(b) - u(a)$ .

**Определение 1.8.9** (Приращение аргумента вдоль  $\gamma$ ).  $\Im(u(b) - u(a))$ .

Пусть теперь  $\gamma$  — петля. Тогда  $\Re(u(b) - u(a)) = 0$ , и вообще,  $u(b) - u(a) = 2\pi i k$  для некоторого  $k \in \mathbb{Z}$ .

## Лекция VIII

5 апреля 2024 г.

### 1.9 Принцип аргумента и теорема Руше

Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  — простой замкнутый путь,  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Положим  $D := \gamma([a, b])$ .

*Интересный факт* (Теорема Жордана).  $\mathbb{C} \setminus D$  состоит из двух компонент связности. Одна из них —  $G$  — ограничена, и  $\forall z \in G : \operatorname{Ind}_z \gamma = \pm 1$ .

Если  $\operatorname{Ind}_z \gamma = 1$ , то  $\gamma$  называют положительно ориентированной, иначе — отрицательно ориентированной.

**Определение 1.9.1** (Жорданова область). Область, граница которой — простой замкнутый путь.

**Теорема 1.9.1** (Принцип аргумента). Пусть  $G$  — жорданова область,  $\partial G$  — носитель простого замкнутого пути  $\gamma$ , ориентированного положительно.

$f$  — аналитическая в окрестности  $\overline{G}$ , кроме, может быть, конечного числа полюсов внутри  $G$ . Более того,  $\forall w \in \partial G : f(w) \neq 0$ .

Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \cdot (\text{приращение аргумента } f \text{ вдоль } \gamma) = (\text{число нулей } f \text{ в } G) - (\text{число полюсов } f \text{ в } G)$$

Нули и полюса надо учитывать с кратностью.

*Доказательство.* Левая часть есть  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ . Это интеграл по простому замкнутому пути; посчитаем его с помощью вычетов  $f$  внутри  $G$ .

Рассмотрим  $z_0 \in G$ . Пусть вблизи  $z_0 : f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$ , где  $g$  аналитична вблизи  $z_0$ , причём  $g(z_0) \neq 0$ .

$$f'(z) = k \cdot (z - z_0)^{k-1} g(z) + (z - z_0)^k g'(z) \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

$\frac{g'(z)}{g(z)}$  аналитична в окрестности  $z_0$ , тем самым, вычет логарифмической производной  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  в  $z_0$  равен  $k$ .

Пусть  $u_1, \dots, u_s$  — нули  $f$  внутри  $G$  кратностей  $b_1, \dots, b_s$  соответственно; пусть  $v_1, \dots, v_t$  — полюса  $f$  кратностей  $l_1, \dots, l_t$  соответственно. Суммируя вычеты, получаем  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^s k_j - \sum_{j=1}^t l_j$ .  $\square$

**Теорема 1.9.2** (Теорема Руше). Пусть  $G$  — жорданова область с положительно ориентированной границей — носителем замкнутого пути  $\gamma$ .

Функции  $f, g$  аналитичны в окрестности  $\overline{G}$ . Пусть  $\forall z \in \partial G : |f(z)| > |g(z)|$ . В частности,  $\forall z \in \partial G : |f(z)| \neq 0, |(f+g)(z)| \neq 0$ .

Тогда  $f$  и  $f+g$  имеют одинаковое число нулей в  $G$ .

*Доказательство.* Согласно принципу аргумента, число нулей  $(f+g)$  в  $G$  равно  $\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)} dz$ .

В то же время,  $f$  имеет внутри  $G$  ровно  $\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  нулей.

Надо доказать, что интегралы равны, вычтем их:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left( \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} \right) dz$$

Теперь преобразуем выражение в скобках:

$$\begin{aligned} \left( \cdot \right) &= \frac{\cancel{f'(z)} \cdot \cancel{f(z)} + g'(z) \cdot f(z) - \cancel{f'(z)} \cdot \cancel{f(z)} - f'(z) \cdot g(z)}{(f(z) + g(z)) \cdot f(z)} = \\ &= \frac{g'(z)f(z) - f'(z)g(z)}{f(z)^2} \cdot \frac{f(z)}{f(z) + g(z)} = \left( 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right)' \cdot \frac{1}{1 + \frac{g(z)}{f(z)}} \end{aligned}$$

Обозначим  $\Phi(z) := 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ . Тем самым, надо доказать, что  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} dz = 0$ . При этом,  $\forall z \in \partial G :$

$\frac{|f(z)|}{|g(z)|} < 1$ . Из непрерывности  $\exists \delta > 0 : \frac{|f(z)|}{|g(z)|} < 1 - \delta$ .

Применим к интегралу формулу замены переменной:  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Phi \circ \gamma} \frac{dw}{w}$ . При этом носитель пути  $\Phi \circ \gamma$  лежит внутри  $B(1, 1 - \delta)$ , значит, путь гомотопен тождественному, и гомотопия не задевает нуля. Действительно,  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Phi \circ \gamma} \frac{dw}{w} = 0$ .  $\square$

## 1.10 Сходимость аналитических функций

Пусть  $G \subset \mathbb{C}$  — открытое множество. Пускай  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — последовательность функций  $h_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ .

### Равномерная сходимость на компактах

Пусть  $h : G \rightarrow \mathbb{C}$  — ещё функция. Говорят, что  $h_n$  сходятся к  $h$  ( $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$ ), если  $\forall$  компакта  $K \subset G$ :  $h_n|_K \rightrightarrows h|_K$ .

В дальнейшем, говоря о сходимости аналитических функций, будем подразумевать именно равномерную сходимость на компактах.

**Теорема 1.10.1** (Вейерштрасс, 1-я). Пусть все  $h_n : G \rightarrow \mathbb{C}$  — аналитичны, и  $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$ . Тогда  $h$  аналитична в  $G$ .

*Доказательство.* Достаточно доказать, что  $\forall$  прямоугольника  $\bar{P} \subset G$ :  $\int_{\partial P} h(z) dz = 0$ . Это ясно из равномерной сходимости на компактах:

$$\left| \int_{\partial P} (h(z) - h_n(z)) dz \right| \leq \sup_{z \in \partial P} |h_n(z) - h(z)| \cdot l(\partial P)$$

Далее достаточно применить теорему Мореры (теорема 1.4.1). □

**Теорема 1.10.2** (Вейерштрасс, 2-я). Пусть все  $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$  — аналитичны, и  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ , где аналитичная  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Тогда  $f'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'$ .

*Доказательство.* Пусть  $K = DB(w_0, r)$  — круг,  $\bar{K} \subset G$ . Понятно,  $\exists R > r : \overline{B(w_0, R)} \subset G$ . Рассмотрим  $z \in K$ .

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - w_0| = R} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - w_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = f'(z)$$

К пределу под интегралом можно перейти, так как сходимость равномерна в  $\bar{K}$ , знаменатель отделён от нуля числом  $R - r$ . Более того, видно, что сходимость равномерна в  $\bar{K}$ .

Пусть  $S \subset G$  — компакт.  $\forall s \in S : \exists K_s$  — круг с центром в  $s$ , такой, что  $\bar{K}_s \subset G$ . Внутренности этих кругов покрывают  $S$ , выберем конечное подпокрытие.

На каждом из кругов конечного подпокрытия имеется равномерная сходимость. Стало быть, имеется равномерная сходимость на  $S$ . □

**Лемма 1.10.1.** Пусть  $f_n, f$  — аналитические функции в области  $G$ ,  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ ,  $f$  не равна тождественному нулю.

Пусть  $D$  — круг,  $D \subset G$ , предположим, что  $f$  имеет нуль в  $D$ . Тогда для всех достаточно больших  $n$ :  $f_n$  имеет нуль в круге  $D$ .

*Доказательство.* Пусть  $f(z_0) = 0$ . Уменьшая  $D$ , можем считать, что  $D = B(z_0, r)$  — круг, такой, что  $\bar{D} \subset G$ .

По теореме единственности  $f$  не постоянна в  $D$ .

Разложим  $f$  в ряд Тейлора в  $D$ :

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Ряд сходится в некоторой окрестности  $\bar{D}$ .  $a_0 = 0$ , но не все коэффициенты равны нулю. Распишем

$$f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z), \quad g(z_0) \neq 0, \text{ где } g \text{ аналитична в окрестности } \bar{D}$$

Пусть  $\rho \leq r$  выбрано так, что  $\forall z : |z - z_0| \leq \rho \Rightarrow |g(z)| > \delta > 0$ . Оценим  $f$  при  $|z - z_0| = \rho : |f(z)| = |z - z_0|^k \cdot |g(z)| \geq \rho^k \delta$ .

Разложим  $f_n(z) = f(z) + (f_n(z) - f(z))$ . При достаточно больших  $n : |f_n(z) - f(z)| < \rho^k \delta$ , по теореме Руше  $f_n$  имеет нуль внутри  $D$ .  $\square$

**Определение 1.10.1** (Однолистная функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ). Инъективная аналитическая функция  $f$ .

**Теорема 1.10.3.** Пусть  $f_n$  — последовательность однолистных функций в области  $G$ ,  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ . Тогда либо  $f \equiv \text{const}$ , либо  $f$  — тоже однолистка.

*Доказательство.* Предположим, что  $\exists z_0, z_1 \in G : z_0 \neq z_1$  и  $w := f(z_0) = f(z_1)$ . Построим  $g(z) := f(z) - w$ ,  $g_n(z) := f_n(z) - w$ . Сходимость сохранилась.

Пусть  $U_0, U_1$  — круги с центрами в  $z_0$  и  $z_1$  соответственно,  $U_0 \cap U_1 = \emptyset, U_0, U_1 \subset G$ . Функция  $g$  имеет нуль в каждом из  $U_1, U_2$ . Предположим, что  $g \not\equiv 0$ , значит, при достаточно большом  $n : g_n$  имеет нуль как в  $U_1$ , так и в  $U_2$ . Но  $g_n$  однолистка, значит, всё же  $g \equiv 0$ .  $\square$

**Теорема 1.10.4** (Риман). Пусть  $G \subset \mathbb{C}$  — область. Следующие условия эквивалентны:

1.  $G$  односвязна,  $G \neq \mathbb{C}$ .
2.  $\exists$  однолистка  $\phi : G \rightarrow \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

*Доказательство.* Потом.  $\square$

### 1.10.1 Нормальные семейства

Пусть дано множество  $A$  аналитических функций в области  $G$ .

**Определение 1.10.2** (Нормальное множество  $A$ ). Такое  $A$ , что  $\forall$  компакта  $K \subset G : \exists C \in \mathbb{R} : \forall z \in K, \forall f \in A : |f(z)| \leq C$ .

**Теорема 1.10.5.** Следующие условия эквивалентны:

1. Множество  $A$  нормально.
2.  $\forall \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, f_n \in A$ : найдётся сходящаяся подпоследовательность  $n_1 < n_2 < \dots : \exists f : f_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f$ .

*Доказательство.*

(2)  $\Rightarrow$  (1) Предположим противное:  $\exists K \subset G : \forall m \in \mathbb{N} : \exists f_m \in A : \sup_{z \in K} |f_m(z)| > m$ .

Согласно посылке, существует сходящаяся подпоследовательность  $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , такая, что  $\exists f : f_{m_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$  равномерно на  $K$ .  $f$  ограничена на  $K$ , значит, начиная с некоторого места,  $f_{m_k}$  тоже ограничены. Противоречие.

(1)  $\Rightarrow$  (2)

**Лемма 1.10.2.** Рассмотрим счётный набор последовательностей

$$\begin{cases} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots \\ x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \dots \\ \vdots \end{cases}$$

Пусть каждая последовательность ограничена:  $\forall n \in \mathbb{N} : \exists M^{(n)} : \forall j : |x_j^{(n)}| < M^{(n)}$ . Тогда  $\exists k_1 < k_2 < \dots$  — подпоследовательность индексов, такая, что  $\forall n \in \mathbb{N} : \exists x^{(n)} : x_{k_j}^{(n)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x^{(n)}$ .

*Доказательство леммы.*

Пусть  $\{k_j^{(1)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  — такая подпоследовательность индексов, что  $\exists x^{(1)} : x_{k_j^{(1)}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x^{(1)}$ . Выберем из этой последовательности индексов подпоследовательность индексов  $\{k_j^{(2)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ , что  $\exists x^{(2)} : x_{k_j^{(2)}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x^{(2)}$ . И так далее.

Тем самым, мы получим счётное количество последовательностей индексов, таких, что  $k^{(n+1)}$  — подпоследовательность  $k^{(n)}$ , и  $\forall n \in \mathbb{N} : \exists x^{(n)} : x_{k_j^{(n)}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x^{(n)}$ .

А теперь возьмём диагональ:  $k_j := k_j^{(j)}$ . □

□

## Лекция IX

12 апреля 2024 г.

todo

## Лекция X

19 апреля 2024 г.

**Теорема 1.10.6** (Риман). Пусть  $G \subset \mathbb{C}$  — область. Следующие условия эквивалентны:

1.  $G$  односвязна,  $G \neq \mathbb{C}$ .
2.  $\exists$  однолистная сюръекция  $\phi : G \rightarrow \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ .

*Доказательство.* На прошлой лекции свели к случаю  $G \subset \mathbb{D}, G \ni 0$ .

Введём  $\mathcal{A} := \{f : G \rightarrow \mathbb{D} \mid f(0) = 0 \text{ и } f \text{ однолистна}\}$ . Доказали, что существует  $f \in \mathcal{A}$ , такая, что  $|f'(0)|$  максимально.

Далее пойдём от противного: пусть  $\exists a \in \mathbb{D} : a \notin \text{Im}(f)$ . Введём  $\phi := v \circ f$ , где  $v(w) := \frac{w-a}{1-\bar{a}w}$  — некоторое преобразование Мёбиуса.  $\phi(z) := \frac{f(z)-a}{1-\bar{a}f(z)}$ .

К сожалению, пока  $\phi \notin \mathcal{A} : \phi(0) \neq 0$ , и вообще  $\phi(z) \neq 0$  везде. Но раз так, то у  $\phi$  имеется ветвь логарифма  $\Phi$ . Так как  $\Re \log(u) = \log|u|$ , то  $\forall z \in G : \Re \Phi(z) < 0$ . При помощи другого дробно-линейного преобразования переведём левую полуплоскость обратно в  $\mathbb{D} : g(z) := \frac{\Phi(z)-\Phi(0)}{\Phi(z)+\Phi(0)}$ . Утверждается, что  $g \in \mathcal{A} : g(0) = 0$ , и преобразование  $w \mapsto \frac{w-a}{w+\bar{a}}$  однолистно стреляет в круг  $\mathbb{D}$ .

Осталось получить противоречие, получив в результате вычислений, что  $|g'(0)| > |f'(0)|$ .

$$\begin{aligned} g'(z) &= \left(1 - \frac{2\Re \Phi(0)}{\Phi(z) + \bar{\Phi}(0)}\right)' = \frac{2\Re(\Phi(0))}{(\Phi(z) + \bar{\Phi}(0))^2} \Phi'(z) = \frac{2\Re(\Phi(0))}{(\Phi(z) + \bar{\Phi}(0))^2} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \\ &= \frac{2\Re(\Phi(0))}{(\Phi(z) + \bar{\Phi}(0))^2} \frac{1}{\phi(z)} \cdot \frac{(1 - \bar{a}f(z)) \cdot f'(z) + \bar{a} \cdot f'(z)(f(z) - a)}{(1 - \bar{a}f(z))^2} \end{aligned}$$

Подставляя 0, получаем

$$g'(0) = \frac{2\Re \Phi(0)}{(2\Re \Phi(0))^2 - a} \cdot \frac{f'(0)(1 - |a|^2)}{1}$$

Тем самым,  $|g'(0)| = \frac{1}{2 \log(\frac{1}{|a|})} \frac{1-|a|^2}{|a|} \cdot |f'(0)|$ . Осталось убедиться, что для  $t := |a| \in (0, 1)$  выполнено неравенство  $\frac{1-t^2}{2t \log(\frac{1}{t})} > 1$ . Это эквивалентно неравенству  $\frac{1-t^2}{t} - 2 \log\left(\frac{1}{t}\right) > 0$ . При  $t = 1$  левая часть равняется нулю, и производная левой части  $\left(\frac{1}{t} - t + 2 \log(t)\right) = -\frac{1}{t^2} - 1 - \frac{2}{t} = -\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 < 0$ . □

Пусть  $f_1, f_2 : G \rightarrow \mathbb{D}$  — возможно различные однолистные отображения. Тогда  $f_2^{-1} \circ f_1$  — однолистное отображение круга  $\mathbb{D}$  на себя. Например, это может быть каким-то преобразованием Мёбиуса, но оказывается, что ими всё и исчерпывается.

**Определение 1.10.3** (Автоморфизм области  $G$ ). Однолистное отображение  $G \rightarrow G$ .

Вообще практически все односвязные области эквивалентны (при помощи однолистной сюръекции) кругу, как говорит только что доказанная теорема Римана, но есть ещё две области —  $\mathbb{C}$  и  $\widehat{\mathbb{C}}$ , имеющие другую природу.

Сначала займёмся автоморфизмами  $\mathbb{C}$ .

**Теорема 1.10.7.** Автоморфизмы  $\mathbb{C}$  — линейные функции  $z \mapsto az + b$  при  $a \neq 0$ .

*Доказательство.* Пускай  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  — ещё какой-то автоморфизм  $\mathbb{C}$ . Тем самым,  $f$  — целая, то есть  $f = a_0 + a_1 z + \dots$

Если  $a_j \neq 0$  для бесконечного множества индексов  $j$ , то  $\infty$  — существенно особая точка (в ряду Лорана  $f(\frac{1}{z})$  бесконечно много ненулевых членов). Так как  $\forall z \in \mathbb{C} : f'(z) \neq 0$ , то  $f$  — открытое отображение. Отсюда  $f(\mathbb{D})$  открыто. С другой стороны, по теореме Сохоцкого  $f(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\})$  всюду плотно в  $\mathbb{C}$ . Значит,  $\exists w \in f(\mathbb{D}) \cap f(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\})$ , и это противоречие с однолистностью  $f$ .

Тем самым,  $f$  — многочлен, и если  $\deg f \geq 2$ , то  $f'$  имеет корень, опять-таки противоречие с однолистностью. Получается,  $f$  — линейная функция, или константа, но константа не подходит.  $\square$

*Замечание.*  $\widehat{\mathbb{C}}$  односвязна, так как топологически это — сфера, что видно из стереографической проекции.

**Теорема 1.10.8.** Автоморфизмы  $\widehat{\mathbb{C}}$  — дробно-линейные отображения  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  при  $ad - bc \neq 0$ .

*Доказательство.*

**Лемма 1.10.3** (О действии групп). Пусть группа  $\Gamma$  действует на множестве  $X$ ;

$H \leq X$  — подгруппа. Если  $\exists x \in X : H \supset \Gamma_x$  ( $\Gamma_x \stackrel{\text{def}}{=} \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma x = x\}$  — стабилизатор  $x$ ), и  $H$  действует на  $X$  транзитивно ( $\forall x, y \in X : \exists \gamma \in H : \gamma x = y$ ), то  $H = \Gamma$ .

*Доказательство леммы.*

Рассмотрим какой-то  $\gamma \in \Gamma$ . Пусть  $\gamma(x) = y$ . Из транзитивности  $\exists \delta \in H : \delta y = x$ . Тем самым,  $\delta \gamma x = x$ , то есть  $\delta \gamma \in H \Rightarrow \gamma \in H$ .  $\square$

$\square$

Введём в качестве  $\Gamma$  группу всех однолистных отображений  $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , и в качестве  $H \leq \Gamma$  — подгруппу дробно-линейных отображений.

Легко видеть, что  $H$  действует на  $\mathbb{C}$  транзитивно: скажем, любая точка лежит в одной орбите с  $\infty$ :  $\forall z_0 \in \mathbb{C} : \frac{1}{z-z_0} \Big|_{z=z_0} = \infty$ . С другой стороны, стабилизатор  $\infty$  — автоморфизмы  $\mathbb{C}$ , и так как они лежат в  $H$ , то  $H = \Gamma$ .

**Лемма 1.10.4** (Шварц). Пусть  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  — аналитическая функция, такая, что  $f(0) = 0$ . Тогда  $\forall z \in \mathbb{D} : |f(z)| \leq |z|$ . При этом если  $\exists z \in \mathbb{D} \setminus \{0\} : |f(z)| = |z|$ , то  $\exists c \in \mathbb{C} (|c| = 1) : f(z) = cz$ .

*Доказательство.*

- Пусть дополнительно  $f$  задана в круге радиуса  $R > 1$  с центром в 0. Рассмотрим  $g(z) := \frac{f(z)}{z}$  — она аналитична в круге  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ , так как в нуле — устранимая особенность.

При  $|z| = 1 : |g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{1} = 1$ . Согласно принципу максимума модуля (теорема 1.3.9),  $|g| \leq 1$  везде.

- Теперь такого предположения о  $f$  не имеется. Выберем  $R > 1$ . Определим  $f_R(z) := f\left(\frac{z}{R}\right)$ . Согласно предыдущему пункту  $\forall z \in \mathbb{D} : |f_R(z)| \leq |z|$ . Устремляя  $R \rightarrow 1$ , получаем искомое неравенство.
- Осталось разобраться со случаем равенства внутри круга. Пусть  $\exists z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\} : |f(z_0)| = |z_0|$ . Тем самым,  $g(z) := \frac{f(z)}{z}$  достигает своё наибольшее значение внутри круга, то есть  $g \equiv c = \text{const}$ . Подставляя  $z_0$ , получаем  $|c| = 1$ .  $\square$

Пусть  $\Gamma$  — группа всех автоморфизмов круга  $\mathbb{D}$ . Вычислим стабилизатор  $0 \in \mathbb{D}$ . Пусть  $\phi \in \Gamma_0$  — аналитическая биекция, такая, что  $\phi(0) = 0$ . То же верно и для  $\phi^{-1}$ .

По лемме Шварца  $|\phi(z)| \leq |z|$ , но применяя её же к  $\phi^{-1}$ , получаем  $z = \phi^{-1}(\phi(z)) \Rightarrow |z| = |\phi^{-1}(\phi(z))| \leq |\phi(z)|$ . Тем самым,  $|\phi(z)| = |z|$  во всех точках, и по лемме Шварца  $\phi$  — гомотетия с коэффициентом  $c$  ( $|c| = 1$ ).

Группа преобразований Мёбиуса  $\left\{ w \mapsto c \cdot \frac{w-a}{1-\bar{a}w} \mid a \in \mathbb{D}, |c| = 1 \right\}$  содержит при  $a = 0$  гомотетии с данными коэффициентами, и действует транзитивно на  $\mathbb{D}$ : любая  $a \in \mathbb{D}$  переводится соответствующим преобразованием в нуль.

**Упражнение 1.10.1.** Проверить, что группа Мёбиуса — действительно группа, то есть замкнута относительно умножения и взятия обратного.

**Факт 1.10.1** (Конформность однолистного отображения). Пусть  $G$  — область,  $z_0 \in G$ ,  $\Phi : G \rightarrow G$  — однолистные отображения. Пусть  $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$  — два регулярно параметризованных пути ( $\gamma'_1 \neq 0, \gamma'_2 \neq 0$ ), причём  $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$ . Проводя касательные к носителям  $\gamma_1, \gamma_2$  в  $z_0$ , получаем угол, его косинус можно посчитать по формуле  $\frac{\langle \gamma'_1(t_1), \gamma'_2(t_2) \rangle}{|\gamma'_1(t_1)| \cdot |\gamma'_2(t_2)|}$ .

Поддействуем при помощи  $\Phi$  на данную картинку.  $\tilde{\gamma}_j := \Phi \circ \gamma_j$  при  $j := 1, 2$ . Несложно посчитать, что  $\tilde{\gamma}'_j(t_j) = \Phi'(z_0) \cdot \gamma'_j(t_j)$ , что действительно сохраняет косинус угла.

Такие отображения, сохраняющие углы, называют *конформными*. В силу исторических причин, говоря про однолистные отображения, часто добавляют слово «конформные», а сама наука зовётся теорией конформных отображений, хотя, как мы только что видели, однолистность сильнее.

## 1.11 Целые функции

**Определение 1.11.1** (Целая функция). Аналитическая  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

### 1.11.1 Построение целых функций с заданными нулями

Пусть  $f \not\equiv 0$  — целая,  $N := \{a \in \mathbb{C} \mid f(a) = 0\}$ . По теореме единственности  $N$  не имеет предельных точек. В частности, все нули изолированы, откуда множество нулей не более, чем счётно.

Нули удобно считать с учётом кратности, получая при этом мультимножество  $N$ .

Пронумеруем  $N = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ , удобно считать, что  $|a_0| \leq |a_1| \leq \dots$ .

**Теорема 1.11.1** (Вейерштрасс). Существует целая функция  $f$ , мультимножество нулей которой совпадает с данным мультимножеством  $N = \{a_0, a_1, \dots\}$ . Считаем  $|a_0| \leq |a_1| \leq \dots$ . Дополнительно предполагается, что  $|a_j| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ . Кажется, это необходимое и достаточное условие того, что у  $N$  нет предельных точек

*Доказательство.* Если бы нулей было конечное количество, то многочлен  $(z - a_0) \cdot \dots \cdot (z - a_N)$  подошёл бы, но нулей, увы, бесконечно. Предположим, что  $0 \notin N$  (это не ограничивает общность: выкинем  $0$  из  $N$ , построим  $f$ , потом домножим на нужную степень  $z^k$ ), и заметим, что произведение  $\left(1 - \frac{z}{a_0}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{z}{a_N}\right)$  тоже решает задачу в случае конечного  $N$ .

В бесконечном же случае стоит озаботиться вопросом сходимости. Во втором семестре мы проверяли, что сходимость  $\prod_{j=0}^{\infty} a_j$  **не к нулю** эквивалентна сходимости ряда  $\sum_{j=0}^{\infty} \log(a_j)$ , где  $\log : (\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]) \rightarrow \mathbb{C}$  — главная ветвь логарифма.

Рассмотрим бесконечное произведение  $\prod_{j=0}^{\infty} u_j(z)$ , где  $u_j$  — аналитические функции. Будем говорить, что данное *произведение сходится*, если  $\forall$  компакта  $K \subset G : \exists M \in \mathbb{N} : \forall j \geq M, z \in K : u_j(z) \neq 0$ , и произведение  $\prod_{j \geq N} u_j(z)$  сходится на  $K$  равномерно.

Определим *множители Вейерштрасса*:

$$u_j(z) := \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) \cdot \exp\left(-\left(\frac{z}{a_j} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_j}\right)^2 + \dots + \frac{1}{j-1}\left(\frac{z}{a_{j-1}}\right)^{j-1}\right)\right)$$

Показатель экспоненты подогнан так, чтобы при взятии логарифма много чего сократилось (а  $\log(1-w) = w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} + \dots$  при  $|w| < 1$ , например, потому что этот ряд совпадает с рядом для вещественного логарифма на  $\mathbb{R}_{>0}$ , и имеется теорема единственности)

Осталось показать, что произведение  $\prod_{j=0}^{\infty} u_j(z)$  сходится равномерно на компактах, и её нули — в точности  $a_j$  с учётом кратности.

Определим компакт  $K := \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{|a_N|}{2}\right\}$ , и покажем, что  $\prod_{j \geq N} u_j(z)$  сходится равномерно на  $K$ .

$$u_j(z) = \exp\left(\log\left(1 - \frac{z}{a_j}\right) - \frac{z}{a_j} - \dots - \frac{1}{j-1}\left(\frac{z}{a_j}\right)^{j-1}\right) = \exp\left(\sum_{s \geq j} \frac{1}{s} \left(\frac{z}{a_j}\right)^s\right)$$

При этом  $\log\left(1 - \frac{z}{a_j}\right)$  определён, так как  $|z| < |a_j|$ . Оценим

$$\left|\sum_{s \geq j} \frac{1}{s} \left(\frac{z}{a_j}\right)^s\right| \leq \left|\sum_{s \geq j} \left(\frac{z}{a_j}\right)^s\right| \leq \left|\sum_{s \geq j} \left|\frac{a_N}{2a_j}\right|^s\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

Убедимся, что ряд из логарифмов равномерно сходится:

$$\left|\sum_{j \geq N} \sum_{s \geq j} \frac{1}{s} \left(\frac{z}{a_j}\right)^s\right| \leq \sum_{j \geq N} \left(\frac{1}{2}\right)^j \leq 1$$

Получается, данное произведение  $\prod_{j \geq 0} u_j(z)$  подходит. □

## Лекция XI

26 апреля 2024 г.

### 1.11.2 Упрощённый вид множителей Вейерштрасса

Если известно, насколько быстро происходит стремление  $|a_j| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ , то можно утверждать наличие сходимости и при множителях Вейерштрасса более простого вида.

1. Если  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{|a_n|} < \infty$ , то никаких премудростей не надо:  $\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right)$  сходится.

*Доказательство.* Зафиксируем  $N \in \mathbb{N}$ , и рассмотрим компакт  $K := \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{1}{2}a_N\right\}$ . Надо доказать, что  $\sum_{j \geq N} \log\left(1 - \frac{z}{a_j}\right)$  сходится.



Под логарифмом стоят выражения вида  $1-t$ , где  $|t| \leq \frac{1}{2}$ . Разложим в ряд и оценим:  $\log(1-t) = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots = t \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \dots\right) \leq t \cdot C$ , где  $C := \sum_{n \geq 1} \frac{(1/2)^{n-1}}{n}$ . Этой оценки достаточно:  $\sum_{j \geq N} \left| \log \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) \right| \leq \sum_{j \geq N} C \left| \frac{z}{a_j} \right|$ , что сходится равномерно по  $z \in K$ .  $\square$

2. Если  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{|a_n|^2} < \infty$ , то хватит первого члена при разложении логарифма в ряд:  $\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) e^{\frac{z}{a_j}}$  сходится.

*Доказательство.* Зафиксируем  $N \in \mathbb{N}$ , и рассмотрим компакт  $K := \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{1}{2} a_N\right\}$ . Надо доказать, что  $\sum_{j \geq N} \log \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) \cdot \frac{z}{a_j}$  сходится.

Разложим в ряд и оценим:  $\log(1-t)t = t^2 + \frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{3} + \dots = t^2 \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \dots\right) \leq t^2 \cdot C$ , где  $C := \sum_{n \geq 1} \frac{(1/2)^{n-1}}{n}$ . Этой оценки достаточно:  $\sum_{j \geq N} \left| \log \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) \frac{z}{a_j} \right| \leq \sum_{j \geq N} C \left| \frac{z}{a_j} \right|^2$ , что сходится равномерно по  $z \in K$ .  $\square$

*Замечание.* Понятно, что целая функция с данным мультимножеством нулей не единственна — можно взять любую другую целую функцию без нулей (скажем, экспоненту), и домножить на неё.

**Следствие 1.11.1.** Пусть  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  — целая функция с бесконечным числом нулей, и  $g$  — произведение Вейерштрасса по нулям функции  $f$  (неважно, общего вида, или с упрощёнными множителями).

Тогда  $\exists$  целая  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ :  $f = ge^h$ .

*Доказательство.*  $\frac{f}{g}$  — целая функция (там, где у  $g$  нули, у  $f$  — нули той же кратности, поэтому все особенности устранимы). По той же причине  $\forall z \in \mathbb{C} : \frac{f}{g}(z) \neq 0$ . Тем самым, у неё есть ветвь логарифма, выберем какую-то ветвь  $h$ , она как раз подходит.  $\square$

Пусть  $G$  — область,  $f$  аналитична в  $G$  кроме некоторого множества полюсов. Такая функция называется *мероморфной в  $G$* . Так как полюса по определению изолированы, то их не более, чем счётное количество.

Мероморфную в  $\mathbb{C}$  функцию называют мероморфной.

**Следствие 1.11.2.**  $f$  мероморфна  $\iff \exists$  целые  $g_1, g_2 : f = \frac{g_1}{g_2}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $\frac{1}{f}$ . Она не равна тождественно нулю.

Пусть  $g$  — произведение Вейерштрасса по нулям функции  $\frac{1}{f}$ ,  $g \cdot f$  — целая функция.  $\square$

### 1.11.3 Разложение синуса в произведение

Разложим синус в произведение, построив произведение Вейерштрасса по его нулям. А где нули синуса?  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$ .

$$\sin z = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1 \iff z \in \{j \cdot \pi \mid j \in \mathbb{Z}\}$$

Как видим, сумма обратных квадратов сходится, поэтому можно записать произведение Вейерштрасса в виде

$$z \cdot \prod_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{j\pi}\right) e^{\frac{z}{j\pi}}$$

где произведение берётся в порядке возрастания модулей  $j$ . Иными словами,

$$z \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\substack{j \leq N \\ j \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{j\pi}\right) e^{\frac{z}{j\pi}} = z \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right) = z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$$

Как мы выяснили,  $\exists$  целая  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : \sin(z) = e^{h(z)} z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$

**Факт 1.11.1.**  $h \equiv 0$  подойдёт (понятно, что если это правда, то  $2\pi ik$  для  $k \in \mathbb{Z}$  тоже подойдёт).

*Доказательство.*

*Замечание* (О логарифмической производной). Пусть  $\phi$  — аналитическая функция, как известно, её логарифмическая производная  $\frac{\phi'}{\phi}$ . Как видно из записи, она не зависит от того, какая ветвь логарифма где взята.

Если  $\phi = \phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_k$ , то несложно посчитать, что  $\frac{\phi'}{\phi} = \frac{\phi'_1}{\phi_1} + \dots + \frac{\phi'_k}{\phi_k}$ . Утверждается, что формула сохраняется и для бесконечного произведения.

Пусть произведение  $\prod_{j=1}^{\infty} \phi_j(z)$  сходится равномерно на любом компакте, не содержащем нулей функций  $\phi_j$ . Пусть  $K$  — такой компакт, то есть  $(\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_n)(z) \rightrightarrows \phi(z)$  равномерно. Тогда  $(\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_n)'(z) \rightrightarrows \phi'(z)$  на этом же компакте, и как следствие,  $\frac{\phi'_1(z)}{\phi_1(z)} + \dots + \frac{\phi'_n(z)}{\phi_n(z)} = \frac{(\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_n)'(z)}{(\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_n)(z)} \rightrightarrows \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$

- Возьмём логарифмическую производную обеих частей равенства  $\sin(z) = e^{h(z)} \cdot z \cdot \prod_{|j| \leq N, j \neq 0} \left(1 - \frac{z}{j\pi}\right)$ :

$$\frac{\cos z}{\sin z} = h'(z) + \frac{1}{z} - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|j| \leq N, j \neq 0} \frac{1}{j\pi} \frac{1}{1 - \frac{z}{j\pi}} = h'(z) + \frac{1}{z} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|j| \leq N, j \neq 0} \frac{1}{z - j\pi}$$

Отлично, у нас имеется равномерная сходимост на компактах, продифференцируем ещё раз:

$$1 - \operatorname{ctg}(z)^2 = h''(z) - \frac{1}{z^2} - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|j| \leq N, j \neq 0} \frac{1}{(z - j\pi)^2}$$

- Проведём окружность  $\Gamma_k$  с центром в нуле, и радиусом  $\pi(k + \frac{1}{2})$ , и докажем, что  $h''$  ограничена на  $\Gamma_k$  некоторой константой  $C$ , не зависящей от  $k$ .

Понятно  $\frac{1}{z^2} \leq \frac{4}{\pi^2}$ , оценим при  $z \in \Gamma_k : \frac{1}{|z - j\pi|^2} \leq \frac{1}{(k + \frac{1}{2} - |j|)^2 \pi^2}$ . Кажется, это не совсем правда, но может и вообще правда. Осталось оценить котангенс:

$$\operatorname{ctg}(z) = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

Раскладывая  $z = x + iy$ , получаем

$$|\operatorname{ctg}(z)| = \left| \frac{e^{-y}e^{ix} + e^ye^{-ix}}{e^{-y}e^{ix} - e^ye^{-ix}} \right|$$

Выберем  $\varepsilon < \frac{\pi}{4}$ , и оценим котангенс вблизи вещественной оси (периодичность и непрерывность котангенса в круге радиуса  $2\varepsilon$ ), и при  $|y| \geq \varepsilon$ :

$$\left| \frac{e^{-y}e^{ix} + e^ye^{-ix}}{e^{-y}e^{ix} - e^ye^{-ix}} \right| \leq \frac{e^y + e^{-y}}{|e^{-y} - e^y|} = \frac{e^y + e^{-y}}{e^{|y|} - e^{-|y|}} = \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{2y} - 1} \leq 1 + \frac{2}{e^{2\varepsilon} - 1}$$

- Тем самым, на  $\Gamma_k$ :  $h''$  ограничена  $C$ , по принципу максимума  $h''$  ограничена внутри круга этой же константой, значит,  $h''$  вообще ограничена.

Согласно теореме Лиувилля,  $h'' = \text{const}$ , тем самым,  $h(z) = A + Bz + Cz^2$  для некоторых  $A, B, C \in \mathbb{C}$ .

- Подставим  $h(z) = A + Bz + Cz^2$ :

$$\frac{\cos z}{\sin z} = B + 2Cz + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|j| \leq N} \frac{1}{z - j\pi}$$

Здесь все слагаемые  $2\pi$ -периодичны, кроме  $2Cz$ . Вывод один:  $C = 0$

- Теперь подставим  $\frac{\sin z}{z} = e^{A+Bz} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$ . В силу чётности  $B = 0$ .
- Обозначим  $D := e^A \cdot \frac{\sin z}{z} = D \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$ . Сопоставляя значения в 0, получаем  $D = 1$ .

□

Ура,

$$\sin z = z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$$

Попутно мы выяснили, что

$$\text{ctg}(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|j| \leq N} \frac{1}{z - j\pi} = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - j^2\pi^2}$$

Ещё немного преобразуем:

$$\frac{\text{ctg } z - \frac{1}{z}}{2z} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - j^2\pi^2}$$

Подставим  $z \rightarrow 0$ . Слева оказывается  $\frac{z \cos z - \sin z}{2z^2 \sin z} = \frac{z - \frac{z^3}{2} - z + \frac{z^3}{6} + \mathcal{O}(z^5)}{2z^3 + \mathcal{O}(z^5)} = -\frac{1}{6} + o(1)$ , а справа  $-\frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ , образуя знаменитую формулу, выведенную Эйлером

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

### 1.11.4 Г-функция Эйлера

Хотим обобщить факториал в комплексной плоскости.

Построим аналитическую функцию  $f$  в некоторой области  $G$  (где  $G$  хочется побольше), такую, что

1.  $z \in G \Rightarrow z + 1 \in G$ .
2.  $f(z + 1) = zf(z)$  — эта формула почему-то слегка отличается от той, что у факториала.
3.  $1 \in G$  и  $f(1) = 1$ .

Для удовлетворяющей таким условиям функции  $f$  можно заметить, что  $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = (n + 1)!$ .

Дополнительно потребуем  $\forall z \in G : f(z) \neq 0$ , например, чтобы можно было спокойно писать  $z = \frac{f(z+1)}{f(z)}$ .

К сожалению, не всё возможно в этой жизни. Заведомо  $0 \notin G$ : если  $0 \in G$ , то  $f(1) = f(0 + 1) = 0 \cdot f(0) = 0$ . Далее первое условие влечёт, что  $-1, -2, -3 \notin G$ .

Положим  $G := \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ , и построим в этой области функцию с указанными свойствами, имеющую простые полюса в выколотых точках. Она не единственна, но сейчас мы увидим наиболее естественный кандидат.

Пусть  $f$  — такая. Положим  $g := \frac{1}{f}$  — целая функция с простыми нулями в  $\{0, -1, -2, \dots\}$ . Построим  $g$ , используя множители Вейерштрасса ( $h$  — какая-то целая):

$$g(z) = ze^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

Теперь удовлетворим функциональное уравнение:  $g(z+1) = \frac{g(z)}{z}$ .

$$\begin{aligned} g(z) &= ze^{h(z)} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \frac{n+z}{n} e^{-\frac{z}{n}} \\ g(z+1) &= (z+1)e^{h(z+1)} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \frac{1+n+z}{n} e^{-\frac{z}{n} - \frac{1}{n}} \\ \frac{g(z+1)}{g(z)} &= \frac{z+1}{z} e^{h(z+1)-h(z)} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1+z}{1+z} e^{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\dots-\frac{1}{N} + \log N} e^{-\log N} \end{aligned}$$

Как доказывалось во II семестре,  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} - \log N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \gamma$  — *постоянная Эйлера — Маскерони*. Итак, от функции  $h$  хочется свойства

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} e^{h(z+1)-h(z)} e^{-\gamma}$$

Самым простым решением будет взять линейную функцию  $h(z) = \gamma z$ . Получили

$$g(z) = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

Проверим, что  $g(1) = 1$ :

$$\begin{aligned} g(1) &= e^{\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} = e^{\gamma} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (N+1)}{N!} e^{-1-\frac{1}{2}-\dots-\frac{1}{N}} = \\ &= e^{\gamma} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (N+1)}{N! \cdot N} e^{-1-\frac{1}{2}-\dots-\frac{1}{N} + \log N} = 1 \end{aligned}$$

Чудесным образом ничего подкручивать не пришлось.