Комплексный анализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

Глава 1

Комплексный анализ

Лекция I

16 февраля 2024 г.

Пусть $f : G \to \mathbb{C}$, где открытое $G \subset \mathbb{C}$.

Определение 1.0.1 (f голоморфна в $z_0 \in G$)**.** $\exists \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \overset{def}{=} f'(z_0)$.

Во втором семестре мы проверяли, что $f = u + iv$ (где $u, v : G \to \mathbb{R}$) голоморфна в $z_0 \iff f$ дифференцируема в вещественном смысле, и выполняются уравнения Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Определение 1.0.2 (f аналитична в G)**.** $\forall z_0 \in G : \exists c_j \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \tag{$*$}$$

где ряд сходится не только при $z = z_0$.

Теорема 1.0.1. f аналитична в $G \iff f$ голоморфна во всех точках G.

Доказательство.

- $\Rightarrow$. Доказали во втором семестре, несложно.
- $\Leftarrow$. Скоро займёмся, время пришло. □

Из представления ($*$) следует, что производная в точке z считается почленно: $f'(z) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} j c_j (z - z_0)^{j-1}$. В частности, отсюда получается, что $f'(z_0) = c_1$, и вообще $f^{(n)}(z_0) = j! \cdot c_j$.

Вскоре мы увидим, что ситуация разительно отличается от вещественной: в вещественном случае были разные классы — дифференцируемые функции, C^1, C^∞, аналитичные, и множество промежуточных классов.

В комплексном же случае, если функция хотя бы один раз дифференцируема, то окажется, что этого достаточно, чтобы она была не просто дифференцируема, а непрерывно дифференцируема, бесконечно дифференцируема, и даже аналитична.

1.1 Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути

1.1.1 Про дифференциальные формы

Определение 1.1.1 (Линейная функция $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$)**.** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n : l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y)$.

Определение 1.1.2 (Линейная форма на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$)**.** Функция двух переменных $\phi : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, линейная по второму аргументу.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ имеется базис (e_j): $h = e_1 h_1 + \dots + e_n h_n$.

Тем самым, $\phi(x, h) = \sum\limits_{j=1}^{n} \underbrace{\phi(x, e_j)}_{=: g_j(x)} h_j = \sum\limits_{j=1}^{n} g_j(x) h_j$.

Введём *базисные линейные формы* $\mathrm{d}x_j(u, h) = h_j$, игнорирующую первую координату, и возвращающая j-ю компоненту второго аргумента. Теперь $\phi(x, h)$ разложилась в сумму $\sum\limits_{j=1}^{n} g_j \, \mathrm{d}x_j$.

Пример. Пусть $f : G \to \mathbb{C}$ — дифференцируемая в G функция. Заметим, что её дифференциал $\mathrm{d}_f(x, \_)$ — в точности линейная форма на G.

При разложении по базису получится $\mathrm{d}_f(x, \_) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \, \mathrm{d}x_j$.

Вскоре мы увидим, что далеко не всякая линейная форма является чьим-то дифференциалом.

Если $\phi = \sum\limits_{j=1}^{n} g_j \, \mathrm{d}x_j$ — дифференциал функции f, то непременно $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Тот факт, что ϕ является дифференциалом f, можно сказать наоборот: f является первообразной ϕ.

1.1.2 Про интегрирование

Рассмотрим монотонную функцию $\Phi : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$. Как и при определении стилтьесовой длины, будем считать, что Φ определена на некотором открытом множестве, содержащем $\langle a, b \rangle$. Обозначим за l_Φ стилтьесову длину, отвечающую функции Φ.

Пускай λ_Φ — продолжение стилтьесовой длины l_Φ по Лебегу — Каратеодори.

Она, как водится, определена на некоторой Σ-алгебре, в которой есть борелевские множества, но измеримы могут быть и какие-то другие множества, зависящие от конкретной функции Φ.

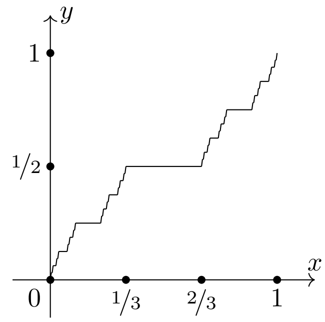
Примеры.

- Так, функция $\phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$ порождает дельта-меру δ_0, относительно которой все множества измеримы.

  Кроме того, эта мера сингулярна относительно стандартной меры Лебега.

- Может показаться, что так происходит из-за разрывности ϕ, но это не так.

Рекурсивно определим канторову лестницу $C : [0,1] \to [0,1]$:



Построив по данной функции стилтьесову длину λ_C, мы получим меру, сосредоточенную на канторовом множестве меры нуль.

Её носитель — само канторово множество, так как на всех отрезках вне канторова множества λ_C равна нулю. Она сингулярна относительно стандартной меры Лебега на $\mathbb{R}$, и её измеримые множества разительно отличаются от измеримых множеств меры Лебега.

По мере Стилтьеса можно интегрировать: если v является λ_Φ измеримой (в частности, измерима по Борелю и непрерывна), то определён интеграл $\int\limits_{\langle a,b\rangle} v \, \mathrm{d}\lambda_\Phi$ Иногда пишут просто $\int\limits_{\langle a,b\rangle} v \, \mathrm{d}\Phi$.

Теперь пусть $I = [a,b]$, и $\Psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. В таком случае $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$, где некие Φ_1, Φ_2 возрастают. Можно определить знакопеременную меру $\lambda_\Psi \overset{def}{=} \lambda_{\Phi_1} - \lambda_{\Phi_2}$, понятно, что определение корректно.

1.1.3 Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути

Пускай $\gamma : [a,b] \to G \subset \mathbb{R}^n$ — спрямляемый путь (путь конечной длины). Пускай $U = \sum\limits_{j=1}^{n} u_j \, \mathrm{d}x_j$ — дифференциальная форма в области G. Если не сказано противное, будем считать, что u_j — непрерывные функции.

Определение 1.1.3 (Интеграл от U вдоль пути γ)**.** $\int\limits_\gamma U \overset{def}{=} \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{[a,b]} u_j(\gamma(t)) \, \mathrm{d}\gamma_j(t)$.

Здесь $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Так как путь спрямляем, то все γ_j — ограниченной вариации, каждая порождает свою меру Стилтьеса, и определение интегрирует композицию $U \circ \gamma$ по данной мере.

1.1.4 Сумма путей

Пускай имеются два отрезка $[a,c]$ и $[c,d]$, и на них заданы пути $\gamma_1 : [a,c] \to G$, $\gamma_2 : [c,d] \to G$. Предположим, что $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$.

Тогда можно устроить путь $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a,d] \to G$, $\gamma(t) \overset{def}{=} \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,c] \\ \gamma_2(t), & t \in [c,d] \end{cases}$.

Замечание. Интеграл аддитивен по множеству: $\int\limits_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} U = \int\limits_{\gamma_1} U + \int\limits_{\gamma_2} U$.

1.1.5 Альтернативное определение

Далее мы не интересуемся никакими чудесами вроде канторовых лестниц, и считаем, что Φ такова, что λ_Φ абсолютно непрерывна относительно стандартной меры Лебега.

А раз так, то по теореме Радона — Никодима $\exists$ суммируемая $w : [a, b] \to \mathbb{R}$, такая, что

$$\lambda_\Phi(e) = \int\limits_e w(x)\,\mathrm{d}x \tag{+}$$

Факт 1.1.1. *Формула (+) заведомо верна, если Φ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, тогда $w = \Phi'$.*

Доказательство. Введём меру $\nu(e) = \int\limits_e \Phi'(x)\,\mathrm{d}x$, заданную на измеримых по Лебегу множествах. Φ' непрерывна, и, следовательно, измерима.

Если $\langle c, d\rangle \subset [a, b]$, то $\nu(\langle c, d\rangle) = \int\limits_{\langle c,d\rangle} \Phi'(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(d) - \Phi(c) = l_\Phi(\langle c, d\rangle)$.

Таким образом, из теоремы единственности, продолжение l_Φ по Лебегу — Каратеодори совпадает с $\int\limits_e \Phi'(x)\,\mathrm{d}x$. $\square$

Замечание. Утверждение (факт 1.1.1) сохраняет силу, если Φ непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема.

Далее где-то используется Φ, а где-то β, надо убедиться, что это везде одно и то же, и заменить.
Пускай $\beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, кусочно-непрерывно дифференцируемая: $\exists a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$, такие, что β непрерывно дифференцируема на $[a_s, a_{s+1}]$ при $0 \leqslant s < k$. Введём $\rho(e) = \int\limits_e \beta'(x)\,\mathrm{d}x$ — это знакопеременная вещественная мера.

У данной меры возникают (см. разложение Хана) положительная и отрицательная части $\rho_+(e) \overset{def}{=} \int\limits_e (\beta')_+(x)\,\mathrm{d}x$ и $\rho_-(e) \overset{def}{=} \int\limits_e (\beta')_-(x)\,\mathrm{d}x$

Если обозначить за $\Phi_+(t) = \int\limits_0^t (\beta')_+(x)\,\mathrm{d}x$ и $\Phi_-(t) = \int\limits_0^t (\beta')_-(x)\,\mathrm{d}x$, то окажется, что соответствующие меры Стилтьеса совпадают с ρ_+ и ρ_-.

Более того, $\beta = \Phi_+ - \Phi_-$ — получили разложение функции ограниченной вариации в положительную и отрицательную части.

Замечание. Это разложение экономнее, чем то, которое было получено ранее — ранее в качестве Φ_+ выбиралась вариация Φ.

Если всё, что написано выше, собрать вместе, то получится

$$\boxed{\int\limits_{[s,t]} v\,\mathrm{d}\Phi = \int\limits_{[s,t]} v(x)\beta'(x)\,\mathrm{d}x}$$

Далее «гладкий» используется, как синоним к непрерывно-дифференцируемому.

Следствие 1.1.1 (Можно считать определением)**.** *Если $U = \sum\limits_{j=1}^n u_j\,\mathrm{d}x_j$ — дифференциальная форма в G с непрерывными коэффициентами, а $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \to G$ — спрямляемый кусочно-гладкий путь, то*

$$\int\limits_\gamma U = \sum_{j=1}^n \int\limits_a^b u_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t$$

1.1.6 (Не)зависимость от параметризации

Пускай $\gamma : [a,b] \to G$ — кусочно-гладкий путь, $\psi : [c,d] \to [a,b]$ — гладкий гомеоморфизм.

Теперь $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$ — перепараметризация γ

Лемма 1.1.1. *Для всякой формы U:*

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} U = \pm \int\limits_{\gamma} U$$

Знак $+$ выбирается, если ψ возрастает, и $-$ — если убывает.

Доказательство. Предположим, что γ — гладкий путь, иначе применяем к кусочкам гладкости по отдельности.

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} U = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{c}^{d} u_j(\gamma(\psi(t)))\gamma_j'(\psi(t)) \cdot \psi'(t)\,\mathrm{d}t = \left\| \begin{matrix} \tau = \psi(t) \\ \mathrm{d}\tau = \psi'(t)\,\mathrm{d}t \end{matrix} \right\| = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\psi(c)}^{\psi(d)} u_j(\gamma(\tau))\gamma_j'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \pm \int\limits_{\gamma} U \quad \square$$

Про ψ также можно считать, что это он не гладкий, а лишь кусочно-гладкий.

Тем самым, можно определить сумму путей для несоприкасающихся отрезков: для двух путей $\gamma_1 : [a,b] \to G, \gamma_2 : [c,d] \to G$ (при условии $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$) можно один их отрезков-прообразов линейным возрастающим преобразованием перевести в отрезок, соприкасающийся со вторым (например, $t \mapsto t + (b-c)$).

Также есть понятие обратного пути $\gamma_{-1}(t) = \gamma(a+b-t)$. Для любой формы U:

$$\int\limits_{\gamma \oplus \gamma_{-1}} U = \int\limits_{\gamma} U + \int\limits_{\gamma_{-1}} U = \int\limits_{\gamma} U - \int\limits_{\gamma} U = 0$$

1.2 Условия существования первообразной у дифференциальной формы

Теорема 1.2.1. Если у дифференциальной формы U в открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ имеется первообразная F, то для всякого кусочно-гладкого пути $\gamma : [a,b] \to G$

$$\int\limits_{\gamma} U = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Доказательство. $U = \sum\limits_{j=1}^{n} g_j\,\mathrm{d}x_j$, где $g_j(w) = \frac{\partial}{\partial x_j} F(w)$. Считаем, что путь гладкий.

$$\int\limits_{\gamma} U = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{a}^{b} \frac{\partial}{\partial x_j} F(\gamma(t))\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F \circ \gamma)(t)\,\mathrm{d}t = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Если же путь всего лишь кусочно-гладкий, то надо разбить отрезок на подотрезки гладкости, и сложить. $\square$

Следствие 1.2.1. *Если у дифференциальной формы U есть первообразная, то её интегралы по всем путям с данными началом и концом, равны.*

Оказывается, верно и обратное.

Лекция II

26 февраля 2024 г.

Лемма 1.2.1. *Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, тогда любые две её точки можно соединить ломаной (кусочно-линейным путём).*

Доказательство. Выберем $x_0 \in G$, положим $U = \{y \in G |$существует ломаная с началом в x_0 и концом в $y\}$.

Покажем, что U открыто. Пусть $y \in U$, тогда найдётся шарик $B_\varepsilon(y) \subset G$, и $B_\varepsilon(y) \subset U$ — можно добавить одно звено к ломаной $x_0 \rightsquigarrow y$.

Покажем, что U замкнуто. Пусть $z \in G$ — предельная точка для U. Найдётся $B_\varepsilon(z) \subset G$, так как z — предельная, то $\exists y \in B_\varepsilon(z) \cap U$. Значит, $z \in U$ — можно добавить одно звено $y \to z$. □

Замечание. Имея кусочно-линейный путь $\gamma : [a, b] \to G$, соединяющий $A, B \in G$, несложно получить бесконечно дифференцируемый путь, соединяющий их:

Пусть $\gamma_1 : [a-1, b+1] \to G, \gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a,b] \\ \gamma(a), & t \in [a-1, a] \\ \gamma(b), & t \in [b, b+1] \end{cases}$. Теперь, сворачивая γ_1 с аппроксимативной единицей с достаточно большим номером и достаточно малым компактным носителем, получим бесконечно дифференцируемый путь, соединяющий A и B.

Теорема 1.2.2. Пусть $\Phi = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(x)\,\mathrm{d}x_j$ — *непрерывная* дифференциальная форма в G (то есть коэффициенты непрерывны в G). Следующие условия эквивалентны.

1. У Φ есть первообразная F, то есть функция $F \in C^1(G) : \mathrm{d}F = \Phi$ (иными словами, $\forall j : \frac{\partial}{\partial x_j} F = f_j$).
2. Для всех кусочно-гладких γ с фиксированными началом и концом $\gamma(a) = \gamma_a, \gamma(b) = \gamma_b$: $\int\limits_\gamma \Phi$ не зависит от γ (а только от начала и конца).
3. Для любой кусочно-гладкой петли (то есть замкнутого пути) γ в G: $\int\limits_\gamma \Phi = 0$.

Доказательство. Мы уже доказали ранее цепочку импликаций $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2)$. Далее доказываем $(2) \Rightarrow (1)$.

Предъявим кандидат в первообразную. Зафиксируем $x_0 \in G$, выберем $x \in G$, пусть γ — произвольный кусочно-гладкий путь с началом в x_0 и концом в x. Определим $F(x) \overset{def}{=} \int\limits_\gamma \Phi$. Согласно посылке, F корректно определена — не зависит от выбора пути.

Покажем, что частные производные F существуют, и равны f_j. Тогда они получатся непрерывными, то есть F — дифференцируемой, и окажется, что F — первообразная Φ.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — стандартные базисные орты в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим $\frac{F(x+te_j) - F(x)}{t}$.

При малых t: отрезок между x и $x + te_j$ лежит внутри G. Пусть γ_1 — путь, соединяющий x_0 и x, l — отрезок от x до $x + te_j$.

$$\frac{F(x+te_j) - F(x)}{t} = \frac{1}{t}\left(\int\limits_{\gamma_1 \oplus l} \Phi - \int\limits_{\gamma_1} \Phi\right) = \frac{1}{t}\int\limits_l \Phi = \int\limits_0^t f_j(x + \tau e_j)\,\mathrm{d}\tau \underset{t \to 0}{\longrightarrow} f_j(x)$$ □

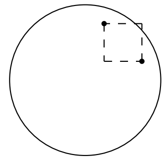
Определение 1.2.1 (Прямоугольник на плоскости)**.** Множество вида $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$.

Область G на плоскости будем называть *удобной*, если $\exists x_0 \in G : \forall y \in G : \exists$ прямоугольник $P \ni x, y$.

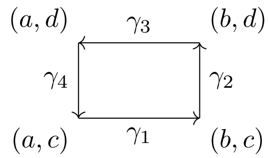
Примеры (Удобные области).

- $\operatorname{Int} Q$, если Q — прямоугольник. В качестве центра x_0 подойдёт любая точка.

- $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \big| |x - x_0| < r\}$. В качестве центра x_0 стоит взять центр, иначе не получится:



Определение 1.2.2 (Ориентированная граница прямоугольника P)**.** Петля γ, обходящий границу $P = [a, b] \times [c, d]$ против часовой стрелки, то есть вот так:



$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$.

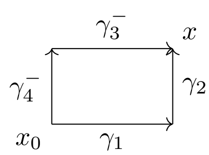
Для прямоугольника P будем обозначать за ∂P в зависимости от контекста либо границу P, как топологического подмножества $\mathbb{R}^2$, либо путь, обходящий границу P против часовой стрелки.

Следствие 1.2.2 (Из доказательства (теорема 1.2.2))**.** *Если G — удобная область на плоскости то к трём эквивалентным условиям (теорема 1.2.2) можно добавить*

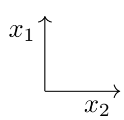
4. $\forall P \subset G : \int\limits_{\partial P} \Phi = 0$.

Доказательство. (3) $\Rightarrow$ (4) ясно, докажем (4) $\Rightarrow$ (1).

Пусть $x_0 \in G$ — центр удобной области, определим $F(x) = \int\limits_{\delta} \Phi$, где δ — это либо $\delta_1 \coloneqq \gamma_1 \oplus \gamma_2$ либо $\delta_2 \coloneqq \gamma_4^- \oplus \gamma_3^-$ (вне зависимости от выбора δ получится одно и то же).



Далее, чтобы проверить $\frac{\partial}{\partial x_1} F = f_1$ и $\frac{\partial}{\partial x_2} = f_2$, воспользуемся подходящим представлением: пусть орт выглядит так:



тогда для проверки $\frac{\partial}{\partial x_1} F = f_1$ удобно воспользоваться определением F через δ_1, иначе — через δ_2. ☐

Пусть $\Phi = \sum\limits_{j=1}^{m} f_j(x)\, \mathrm{d}x$ — непрерывная дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1.2.3 (Форма Φ точна)**.** Существует первообразная F в $G : \mathrm{d}F = \Phi$.

Определение 1.2.4 (Форма Φ замкнута)**.** Форма Φ локально точна ($\forall x_0 \in G : \exists U \ni x_0$: $\Phi\big|_U$ точна).

Понятно, что точная форма замкнута, но точность из замкнутости не следует: чуть позднее мы определим $\mathrm{d}z$, и покажем, что $\frac{\mathrm{d}z}{z}$ — замкнутая, но не точная форма на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Теорема 1.2.3. Пусть Φ — дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$. Следующие условия эквивалентны:

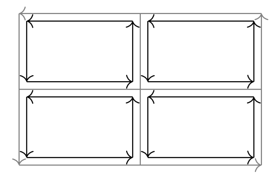
1. Φ замкнута.
2. $\forall x_0 \in G : \exists V \ni x_0 : \forall$ кусочно-гладкого замкнутого пути γ с носителем в V: $\int\limits_\gamma \Phi = 0$.

Если $n = 2$, то дополнительно появляются ещё два условия:

1. $\forall z \in G : \exists \underset{\ni z}{V_z} \subset G : \forall P \subset V : \int\limits_{\partial P} \Phi = 0$.
2. $\forall P \subset G : \int\limits_{\partial P} \Phi = 0$.

Доказательство. Докажем, что (3) $\Rightarrow$ (4), остальное уже доказано выше.

Заметим, что границу прямоугольника P можно представить, как сумму границ четырёх прямоугольников вдвое меньшего диаметра:



Таким образом, чтобы доказать, что интеграл по границе большого прямоугольника P нулевой, разобьём его на достаточно маленькие прямоугольники, по ним-то интеграл нуль. Чтобы это формализовать, вспомним лемму Лебега о покрытии:

Теорема 1.2.4 (Лемма Лебега)**.** Пусть K — компакт в метрическом пространстве, $\{U_j\}_{j\in J}$ — открытое покрытие компакта K. Тогда $\exists \delta > 0 : \forall A \subset K : \operatorname{diam} A < \delta \Rightarrow \exists j \in J : A \subset U_j$.

Применяя лемму Лебега для покрытия P окрестностями $\{V_z\}_{z\in P}$, получим такое число δ. Теперь надо разбить границу прямоугольника P в сумму границ прямоугольников диаметра меньше δ, а посылка теоремы говорит, что интеграл по ним уже нуль. $\square$

1.3 Операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$

Как известно, $\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$, то есть $\forall z \in \mathbb{C} : z = x + iy$, аналогично $\overline{z} = x - iy$.

Рассмотрим z и $\overline{z}$, как функции $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto x \pm iy$. Теперь $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y$ и $\mathrm{d}\overline{z} = \mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y$ образуют базис в пространстве дифференциальных форм (тех, которые не зависят от точки), обратное преобразование выглядит так:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z + \mathrm{d}\overline{z}}{2} \\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}z - \mathrm{d}\overline{z}}{2i} \end{cases}$$

Рассмотрим форму $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, \Phi(x, y) = \alpha(x, y)\,\mathrm{d}x + \beta(x, y)\,\mathrm{d}y$. Перепишем её в новом базисе:

$$\Phi(x, y) = \frac{\alpha(x, y)}{2}(\mathrm{d}z + \mathrm{d}\overline{z}) + \frac{\beta(x, y)}{2i}(\mathrm{d}z - \mathrm{d}\overline{z}) = \frac{\alpha(x, y) - i\beta(x, y)}{2}\,\mathrm{d}z + \frac{\alpha(x, y) + i\beta(x, y)}{2}\,\mathrm{d}\overline{z}$$

Теперь пусть Φ — точная форма, то есть $\Phi = \mathrm{d}F$, и тогда $\alpha(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}F(x, y)$ и $\beta(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}F(x, y)$. Теперь

$$\mathrm{d}F = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right)\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right)\mathrm{d}\overline{z}$$

Определение 1.3.1 ($\frac{\partial F}{\partial z}$)**.** Коэффициент, стоящий перед $\mathrm{d}z$, то есть $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right)$.

Определение 1.3.2 ($\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}$)**.** Коэффициент, стоящий перед $\mathrm{d}\overline{z}$, то есть $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right)$.

Иначе говоря, мы ввели операторы $\frac{\partial}{\partial z} \overset{def}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \overset{def}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right)$ так, что

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial}{\partial z}F\,\mathrm{d}z + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}F\,\mathrm{d}\overline{z}$$

1.3.1 Связь с голоморфными функциями

Пусть $F = u + iv$, где $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Запишем

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

В правой части равенства получились выражения из уравнений Коши — Римана.

Факт 1.3.1. *Вещественные функции u, v удовлетворяют уравнениям Коши — Римана $\iff$ $\frac{\partial(u+iv)}{\partial \overline{z}} \equiv 0$.*

Факт 1.3.2. *F голоморфна $\iff$ $\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial z}\,\mathrm{d}z$. При этом $\frac{\partial F}{\partial z}$ есть производная F по комплексному аргументу.*

Доказательство. Функция дифференцируема по комплексному аргументу $\iff$ её дифференциал — умножение на комплексное число. □

В основном нас будут интересовать дифференциальные формы вида $\phi(z)\,\mathrm{d}z$, где ϕ — произвольная функция.

Выясним, когда у формы $\phi(z)\,\mathrm{d}z = \phi(z)\,\mathrm{d}x + \phi(z)\,\mathrm{d}y$ имеется первообразная, то есть функция $g : \frac{\partial g}{\partial x} = \phi, \frac{\partial g}{\partial y} = i\phi$. Заметим, что $\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{2}(\phi - i(i\phi)) = \phi$ и $\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\phi + i(i\phi)) = 0$.

Утверждение 1.3.1. *Форма $\phi\,\mathrm{d}z$ имеет первообразную g $\iff$ g голоморфна, и $g' = \phi$.*

Теорема 1.3.1 (Коши)**.** Если $g : G \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция (область $G \subset \mathbb{C}$), то форма $g(z)\,\mathrm{d}z$ замкнута.

Доказательство. Потом. □

Контрпример (Глобально первообразной может не быть). Пусть $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}, g : G \to \mathbb{C}, g : z \mapsto \frac{1}{z}$.

По теореме Коши у g имеется локальная первообразная — комплексный логарифм — но глобально определить не получится. Пусть $\Gamma = \partial\mathbb{T}$ — комплексная окружность, ориентируем её против часовой стрелки, а именно, рассмотрим стандартный обход окружности $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\alpha : \phi \mapsto e^{i\phi}$. Теперь убедимся, что форма не точна:

$$\int\limits_{\alpha} \phi = \int\limits_{\alpha} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\left(e^{it}\right)'}{e^{it}}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi i \neq 0$$

Для будущих применений также определим ориентированную против часовой стрелки границу $B_r(z_0)$, это путь $\beta(t) = z_0 + re^{it}$ для $t \in [0, 2\pi]$.

Пример. Пусть $z_0, w \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_{>0}$, $|z_0 - w| \neq r$, пусть путь γ обходит границу $B_r(z_0)$ против часовой стрелки. Тогда (посчитаем чуть позже):

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z - w} = \begin{cases} 0, & |z - w_0| > r \\ 2\pi i, & |z - w_0| < r \end{cases}$$

Теорема 1.3.2 (Основная оценка интеграла вдоль пути)**.** Пускай Φ — непрерывная дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$, а $\gamma : [a, b] \to G$ — кусочно-гладкий путь, $K := \mathrm{Im}(\gamma) \subset G$.

Тогда $\left|\int\limits_\gamma \Phi\right| \leqslant \underbrace{\sup\limits_{x\in K}\left(\sum\limits_{j=1}^n |\phi_j(x)|^2\right)^{1/2}}_{=:A} \cdot l(\gamma).$

Доказательство. Считаем, что γ — гладкий путь, иначе нужно разбить на кусочки гладкости.

$$\left|\int\limits_\gamma \Phi\right| = \left|\int\limits_a^b \sum_{j=1}^n f_j\left(\gamma(t)\right)\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t\right| \underset{\text{КБШ}}{\leqslant} \int\limits_a^b \left(\sum_{j=1}^n |f_j(\gamma(t))|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |\gamma_j'(t)|^2\right)^{1/2} \mathrm{d}t \leqslant A\cdot \underbrace{\int\limits_a^b \left(\sum_{j=1}^n |\gamma_j'(t)|^2\right)^{1/2} \mathrm{d}t}_{l(\gamma)}$$

$\square$