Дифференицальная геометрия. Неофициальный конспект

Лектор: Нина Дмитриевна Лебедева
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

Глава 1

Риманова геометрия

Лекция I

14 февраля 2024 г.

1.1 Гладкие многообразия

Определение 1.1.1 (Топологическое многообразие)**.** Хаусдорфово топологическое пространство M со счётной базой, такое что $\forall x \in M : \exists U \ni x : U \sim \mathbb{R}^n$. Данное число n называется *размерностью* многообразия, пишут $\dim M = n$, или часто пишут это число верхним индексом: M^n.

Далее пусть M^n — топологическое многообразие.

Определение 1.1.2 (Карта)**.** Пара из открытого $U \subset M^n$, и гомеоморфизма $\phi : U \to \Omega$, где открытое $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. U называется *носителем карты*.

«В половине случаев в литературе картой называется обратное отображение».

Определение 1.1.3 (Атлас)**.** Набор карт (U_i, ϕ_i), таких, что $\bigcup\limits_i U_i = M$.

Пусть даны две карты (U, ϕ) и (V, ψ). Далее удобно считать, что их носители пересекаются: $U \cap V \neq \varnothing$, иначе определение не несёт смысла.

Определение 1.1.4 (Отображение перехода)**.** Отображение $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$. Обозначается $f_{\phi\psi}$

Определение 1.1.5 (Карты (U, ϕ) и (V, ψ) согласованы)**.** Отображение перехода и ему обратное гладкие.

Определение 1.1.6 (Гладкий атлас)**.** Атлас, такой, что любые две карты согласованы.

Далее все атласы предполагаются гладкими.

Определение 1.1.7 (Атласы эквивалентны)**.** Их объединение (то есть все карты из первого и из второго атласа вместе взятые) — тоже гладкий атлас.

Предложение 1.1.1. *Эквивалентность атласов — отношение эквивалентности.*

Определение 1.1.8 (Гладкая структура на многообразии)**.** Максимальный гладкий атлас (атлас, к которому нельзя добавить карт).

Замечание. К атласу можно добавить произвольное количество карт, согласованных с теми, что в атласе, и они будут согласованы между собой. В частности, для задания гладкой структуры достаточно произвольного атласа A: в A можно добавить всевозможные карты, согласованные с картами из A, и он станет максимальным.

Определение 1.1.9 (Гладкое многообразие)**.** Многообразие с гладкой структурой.

Примеры (Атласы).

- Стандартная гладкая структура на $\mathbb{R}^n$ задаётся атласом $\{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})\}$.
- В частности, стандартная структура на $\mathbb{R}^1$ задаётся атласом $\{(\mathbb{R}^1, [x \mapsto x])\}$.
- Можно задать нестандартную структуру на $\mathbb{R}^1$: $\{(\mathbb{R}^1, [x \mapsto x^3])\}$.

  Предостережение. Это действительно гладкая структура, хотя обратное отображение $[x \mapsto x^{1/3}]$ не гладкое. Тем не менее, определение и не требует гладкости от него.
- Пусть $f = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ \frac{1}{2}x, & x \leqslant 0 \end{cases}$. Тогда $\{(\mathbb{R}^1, f)\}$ — тоже гладкий атлас на $\mathbb{R}^1$.

  Тем не менее, любые два атласа из приведённых выше атласов на $\mathbb{R}^1$ не эквивалентны — отображения перехода получаются не гладкими.
- Гладкая структура на сфере задаётся двумя картами: пусть S^2 — сфера с северным полюсом N и южным S, пусть f, g — стереографические проекции с данными полюсами. Тогда $\{(S^2 \setminus \{N\}, f), (S^2 \setminus \{S\}, g)\}$ — атлас.

Замечание. Если M — гладкое многообразие, и открытое $W \subset M$, то на W естественным образом определена гладкая структура, наследующаяся с M.

1.1.1 Гладкие отображения

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия, A_M, A_N — соответствующие атласы. Рассмотрим отображение $f : M \to N$.

Определение 1.1.10 (Координатное представление f в картах (U, ϕ) на M и (V, ψ) на N)**.** Такое $\widetilde{f} : \phi(U) \to \psi(V)$, что диаграмма коммутативна везде, где определена (то есть $\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ на $\phi(U \cap f^{-1}(V))$).

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & V \arrow[d, "\psi"] \\ \phi(U) \arrow[r, "\widetilde{f}"] & \psi(V) \end{tikzcd}$$

Далее считаем, что $f : M \to N$ непрерывна (эквивалентно, все координатные представления непрерывны).

Определение 1.1.11 (f гладкое)**.** Любое координатное представление — гладкое.

Определение 1.1.12 (f — гладкое в точке $x \in M$)**.** Найдётся окрестность $U_x \ni x$ и карты (U, ϕ), (V, ψ) (где $V \ni y \coloneqq f(x)$), такие, что $U_x \subset U$ и сужение на U_x координатного представления f — гладко.

Свойства (Гладкие отображения).

- Гладкость в точке не зависит от выбора карт.
- Гладкость отображения не зависит от выбора атласа в одном классе эквивалентности.
- Отображение гладкое $\iff$ оно гладкое в любой точке. На лекции было доказательство $\Leftarrow$.
- Пусть $f : M \to N, g : N \to K$ гладкие. Тогда их композиция $g \circ f$ гладкая.
- Тождественное отображение гладкое, если в образе и прообразе выбраны эквивалентные атласы.
- Определение гладкости отображения совпадает с определением гладкости из матанализа (если считать, что $M \subset \mathbb{R}^n$ открыто, и порождающий атлас состоит из тождественной карты)

Определение 1.1.13 (Диффеоморфизм $f : M \to N$)**.** Гладкое f, такое, что f^{-1} — тоже гладкое.

Определение 1.1.14 (Многообразия M и N диффеоморфны)**.** Между ними существует диффеоморфизм.

Понятно, что диффеоморфность — отношение эквивалентности.

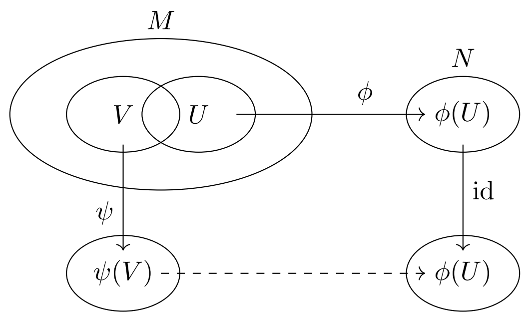
Утверждение 1.1.1. *Если* $M^m \overset{\text{диф}}{\sim} N^n$, *то* $m = n$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную $x \in M$. Пусть $f : M \to N$ — диффеоморфизм, пусть $\widetilde{f}$ — его координатное представление. Тогда $\widetilde{f}^{-1}$ — координатное представление f^{-1}, откуда $\widetilde{f}^{-1}$ — тоже гладкое. Рассмотрим дифференциал $\mathrm{d}_x\widetilde{f}(\_)$, это изоморфизм векторных пространств, значит, $m = n$. $\square$

По умолчанию всегда считается, что на $\mathbb{R}^m$ введена стандартная гладкая структура.

Предложение 1.1.2. *Пусть M — гладкое многообразие, тогда карта — диффеоморфизм между U и $\phi(U)$. Обратно, любой диффеоморфизм между открытым подмножеством $W \subset M$ и областью $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — карта.*

Доказательство.



Гладкость карты, как диффеоморфизма, эквивалентна тому, что карта согласована с остальными в атласе: пунктирная стрелка $\psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ одновременно является и отображением перехода между картами (U, ϕ) и (V, ψ), и координатным представлением ϕ в картах $(V, \psi), (U, \mathrm{id})$. $\square$

Следствие 1.1.1. *Диффеоморфизм $f : M \to N$ задаёт естественную биекцию между картами M и картами N (а ещё между (максимальными) атласами M и (максимальными) атласами N).*

Лекция II

21 февраля 2024 г.

Пример (Диффеоморфизм). Ранее приводились неэквивалентные карты $(\mathbb{R}, \mathrm{id})$ и $(\mathbb{R}, [x \mapsto x^3])$. Вещественные прямые с данными картами диффеоморфны: $[x \mapsto x^3]$ — диффеоморфизм, ему обратный $[x \mapsto \sqrt[3]{x}]$ $\left(\text{где, как в школе, } \sqrt[3]{x} = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geqslant 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}\right)$.

Таким образом, создать две недиффеоморфные структуры на одном и том же многообразии не то чтобы просто.

Интересный факт. Пусть M — n-мерное многообразие.

$$\text{Если } \begin{cases} n < 4, & \text{на нём существует единственная гладкая структура} \\ n = 4, & \text{на нём существует бесконечно много гладких структур} \\ n > 4, & \text{на нём существует конечное число гладких структур} \end{cases}.$$

В частности, при $n > 4$: если $M^n = \mathbb{R}^n$, то гладкая структура единственна.

1.1.2 Касательное пространство

Пусть M — гладкое многообразие, $p \in M$. Пусть $\alpha, \beta : (\varepsilon, +\varepsilon) \to M$ — гладкие (естественно, в смысле отображения многообразий) кривые, такие, что $\alpha(0) = p = \beta(0)$.

Определение 1.1.15 (α и β соприкасаются в p)**.** В любой карте (U, ϕ) (где $U \ni p$) их производные в нуле совпадают: $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$.

Предостережение. Определение требует совпадение векторов скорости, а не просто параллельности или сонаправленности.

Свойства (Соприкасающиеся кривые).

- Соприкасаемость кривых в какой-то конкретной точке — отношение эквивалентности.
- Соприкасаемость не зависит от выбора карты: достаточно проверить в любой одной, содержащей p.

  Доказательство. Пусть (U, ϕ), (V, ψ) — две карты, содержащие точку p, отображение $f_{\phi\psi} = \psi \circ \phi^{-1}$ гладкое, значит, оно переводит равные векторы в равные. □

Определение 1.1.16 (Касательный вектор в точке $p \in M$)**.** Класс эквивалентности соприкасающихся в точке p кривых.

Множество всех касательных векторов — *касательное пространство*, обозначают T_pM.

Координаты касательного вектора

Пусть $p \in M$, и (U, ϕ) — карта, содержащая p.

Определение 1.1.17 (Координатное представление вектора $v = [\alpha] \in T_pM$)**.** Вектор скорости данной кривой в данной карте $v_\phi \overset{def}{=} (\phi \circ \alpha)'(0)$.

Понятно, что определение не зависит от выбора представителя — кривой α.

Также координаты v_ϕ в $\mathbb{R}^n$ называют *координатами v в карте ϕ*.

Свойства (Координатное представление).

- $\forall p \in M, \forall (U, \phi) : p \in U \Rightarrow$ координатное представление — биекция $\begin{matrix} T_pM \to \mathbb{R}^n \\ v \mapsto v_\phi \end{matrix}$.

  Доказательство. Это инъекция, так как если образы u, v равны, то по определению u и v соприкасаются.

  Это сюръекция: $\forall w \in \mathbb{R}^n$ можно рассмотреть кривую $\gamma(t) := wt + \phi(p)$. Координаты $[\phi^{-1} \circ \gamma]$ в карте ϕ как раз окажутся равными w. □

Преобразование координатного представления в зависимости от карты

Утверждение 1.1.2. *Пусть $M^n \ni p$ — гладкое многообразие и точка, (U, ϕ) и (V, ψ) — карты, содержащие p. Тогда $v_\psi = \mathrm{d}_{\phi(p)} f_{\phi\psi}(v_\phi)$.*

Доказательство. Пусть $v = [\alpha]$. Тогда $v_\phi = (\phi \circ \alpha)'(0)$, $v_\psi = (\psi \circ \alpha)'(0)$, и действительно, так как $f_{\phi\psi} = \psi \circ \phi^{-1}$, то $v_\psi = (f_{\phi\psi} \circ \phi \circ \alpha)'(0)$. Дифференцируя композицию, получаем утверждение. □

Следствием данного утверждения является альтернативное определение касательного вектора:

Определение 1.1.18 (Касательные векторы в точке $p \in M$)**.** Отображение из множества всех карт, содержащих точку p (обозначим их $\mathcal{M}_p$) в $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{M}_p \to \mathbb{R}^n$$

такое, что выполнены соотношения (утверждение 1.1.2).

Это определение сродни тому определению тензора, которое говорит: «Тензор — это многомерная матрица чисел, преобразующихся при замене базиса следующим образом. . . »

1.1.3 Структура векторного пространства на T_pM

Зафиксируем $p \in M$, и карту (U, ϕ), содержащую p. Пусть $v, w \in T_pM$.

Определение 1.1.19 (Сумма векторов v и w)**.** Такой вектор $v + w$, что $(v + w)_\phi = v_\phi + w_\phi$.

Определение 1.1.20 (Растяжение вектора v с коэффициентом α)**.** Такой вектор αv, что $(\alpha v)_\phi = \alpha \cdot v_\phi$.

Иными словами, у нас была биекция T_pM с векторным пространством, и мы просто перенесли структуру векторного пространства с $\mathbb{R}^n$ на T_pM. Определение не зависит от выбора карты, так как замена координат касательных векторов при переходе между картами — изоморфизм векторных пространств (дифференциал — линейный оператор).

Замечание. Из определения получается, что $v \to v_\phi$ — изоморфизм векторных пространств.

1.2 Касательное расслоение

Как множество, $T(M) = \bigsqcup\limits_{p\in M} T_pM$. Оказывается, на $T(M)$ можно естественно ввести топологию и гладкую структуру размерности $2n$. Преобразуем определение атласа так, чтобы это случилось одновременно.

Утверждение 1.2.1 (Атлас для множества)**.** *Пусть X — множество с картами (U, ϕ), то есть парами (U, ϕ) где $U \subset X$, и каждая ϕ — биекция $U \to \mathbb{R}^n$. При этом $X = \bigcup U$*

Потребуем для любых двух карт (U, ϕ) и (V, ψ): $\phi(U \cap V)$ открыто (в частности, $\phi(U)$ открыто), и потребуем, чтобы все функции перехода $f_{\phi\psi} = \psi \circ \phi^{-1}$ были гладкими.

Введём на X топологию: $W \subset X$ открыто, если $\forall (U, \phi) : \phi(U \cap W)$ открыто, и предположим, что топология получилась хаусдорфовой, и на X есть счётная база.

Тогда утверждается, что данная процедура задаёт на X одновременно и топологию, и гладкую структуру.

Зададим такую гладкую структуру на $T(M)$. Обозначим $TU = \bigsqcup\limits_{p\in U} T_pM$. Можно рассматривать $TU = \{(p, v) | p \in U, v \in T_pM\}$.

Пусть имеется карта (U, ϕ) на M. Построим по ней карту

$$\begin{aligned} \Phi : TU &\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (p, v) &\mapsto (\phi(p), v_\phi) \end{aligned}$$

Проверим согласованность: пусть (U, ϕ) и (V, ψ) — две карты на M. По ним построены карты (TU, Φ) и (TV, Ψ) соответственно. Тогда $(\Psi \circ \Phi^{-1})(p, v) = ((\psi \circ \phi^{-1})(p), \mathrm{d}_{\phi(p)} f_{\phi\psi}(v))$, видно, что $\Psi \circ \Phi^{-1}$ гладко.

Упражнение 1.2.1. *Получилось хаусдорфовое пространство со счётной базой.*

1.2.1 Дифференциал гладкого отображения

Пусть M и N — гладкие многообразия, и есть гладкое отображение $f : M \to N$. Зафиксируем $p \in M$.

Определение 1.2.1 (Дифференциал f в точке p)**.** Отображение $\mathrm{d}_p f : T_pM \to T_{f(p)}N$, заданное следующим образом: $\mathrm{d}_p f : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$.

Утверждение 1.2.2. *Определение дифференциала не зависит от выбора представителей.*

Доказательство. Пусть $\alpha \sim \beta$ — две кривые, $\alpha(0) = \beta(0) = p$, $\alpha'(0) = \beta'(0) = v$.

Проверим, что $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$. Достаточно проверить, что совпадают координатные представления.

Выберем две карты (U, ϕ) и (V, ψ) (где $U \ni p$, $V \ni f(p)$). Координатное представление f — это $\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$.

Дифференциал $\widetilde{f}$ переносит координаты представления векторов из T_pM в координаты представления векторов из $T_{f(p)}N$:

$$\psi \circ f \circ \alpha = \widetilde{f} \circ \phi \circ \alpha \quad \text{и} \quad \psi \circ f \circ \beta = \widetilde{f} \circ \phi \circ \beta$$
$$(\psi \circ (f \circ \alpha))'(0) = \mathrm{d}_{\phi(p)}\widetilde{f}((\phi \circ \alpha)'(0)) = \mathrm{d}_{\phi(p)}\widetilde{f}((\phi \circ \beta)'(0)) = (\psi \circ (f \circ \beta))'(0) \qquad \square$$

Нетрудно заметить, что $(\mathrm{d}_p f(v))_\psi = \left(\mathrm{d}_{f(p)}\widetilde{f}\right)(v_\phi)$ *в обозначениях из доказательства выше (и* $v = [\alpha]$*).*

Следствие 1.2.1. $\mathrm{d}_p f$ — *линейное отображение.*

Лекция III

28 февраля 2024 г.

Замечание. Можно естественным определить дифференциал на всём пространстве $Tf : TM \to TN$. На вектор $v \in T_pM$ Tf действует понятным образом: $v \mapsto \mathrm{d}_p f(v)$.

Если $U \subset \mathbb{R}^n$, то касательное пространство TU естественным образом отождествляется с $U \times \mathbb{R}^n$.

1.3 Гладкие векторные поля

Пусть M — гладкое многообразие, выберем произвольное подмножество $A \subset M$.

Определение 1.3.1 (Непрерывное векторное поле на A)**.** Непрерывное отображение $X : A \to TM$, такое, что $\forall p \in A : X(p) \in T_pM$.

Определение 1.3.2 (Гладкое векторное поле на A)**.** Векторное поле $X : A \to TM$, такое, что $\exists$ открытое $U \subset M : U \supset A$, и X продолжается на U, как гладкое векторное поле (то есть гладкое отображение, являющееся непрерывным векторным полем).

Для гладкого многообразия M будем обозначать пространство всех гладких векторных полей за $\mathscr{X}(M)$.

Пусть в M имеется карта (U, ϕ).

Определение 1.3.3 (Координатное векторное поле, соответствующее i-й координате)**.** Векторное поле $V_i : U \to TM$, такое, что $\mathrm{d}\phi(V_i) = e_i$ $(V_i(p) = e_i)$ Или что-то похожее, я не очень понял

Лемма 1.3.1. *Пусть имеется открытое* $U \subset \mathbb{R}^n$*, и компактное* $K \subset U$*. Утверждается, что* $\forall V \supset K : \mathrm{Cl}\, V \subset U \Rightarrow$ *можно построить гладкую функцию* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, такую, что* $f\big|_K = 1$, $f\big|_{\mathbb{R}^n \setminus V} = 0$.

Доказательство. На лекции шло без доказательства. $\mathbb{R}^n \setminus V$ замкнуто, $d \coloneqq \operatorname{dist}(\mathbb{R}^n \setminus V, K) > 0$, свернём χ*todo* $\square$

Следствие 1.3.1. *Пусть* V_i — *координатное поле карты* (U, ϕ)*. Тогда* $\forall K \subset U : \exists$ *векторное поле* $\widetilde{V}_i : \widetilde{V}_i\big|_K = V_i, \widetilde{V}_i\big|_{M \setminus U} \equiv 0$.

Иными словами, всегда немного уменьшив карту, можно продолжить координатное векторное поле на всё многообразие.

1.4 Гладкие подмногообразия

Пусть M^m — гладкое многообразие размерности m.

Определение 1.4.1 (Гладкое подмногообразие размерности $n \leqslant m$)**.** Подмножество $N \subset M$, такое, что $\forall x \in N : \exists$ выпрямляющая карта (U, ϕ) (карта на M), такая, что $U \ni p$ и $\phi(U) \cap \mathbb{R}^n = \phi(N \cap U)$.

Здесь имеется в виду, что ϕ действует в $\mathbb{R}^m$, где как-то введены координаты, и имеется определённое вложение $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$.

Утверждение 1.4.1. *На N каноническим образом индуцируется гладкая структура из M. Карты на N — сужения выпрямляющих карт (карте (U, ϕ) отвечает карта $N \cap U, \psi$, где $\psi : N \cap U \to \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$, $\psi(x) = \phi(x)$).*

Доказательство. Согласованность карт на N следует из согласованности карт на M. □

Пусть N^n, M^m — гладкие многообразия.

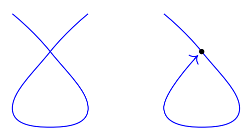
Определение 1.4.2 (Погружение $f : N \to M$)**.** Гладкое отображение $f : N \to M$, такое, что $\forall p \in N : \mathrm{d}_p f$ — инъекция. Само f не обязано быть инъекцией.

Понятно, что такое возможно только при $n \leqslant m$.

Определение 1.4.3 (Вложение $f : N \to M$)**.** Инъективное погружение $f : N \to M$.

Примеры.

- В случае поверхностей размерности 2 погружение подмногообразия размерности 1 — кривой — называлось регулярной параметризацией.
- Петля слева является погружением, но даже инъективная петля справа вложением не является: в выделенной точке топология не совпадает с топологией интервала.



Предложение 1.4.1.

1. *Погружение локально является вложением: $\forall x \in N : \exists U_x \ni x : f\big|_{U_x}$ — вложение.*
2. *Образ вложения — гладкое подмногообразие.*

С доказательством этого очевидного предположения возникли неожиданные проблемы, я что-то написал ниже, за правильность не ручаюсь.

Доказательство. Достаточно доказать для случая открытых $N \subset \mathbb{R}^n$, $M = \mathbb{R}^m$, потому что карты — диффеоморфизмы, и определения сохраняются при диффеоморфизмах.

Зафиксируем $x \in N$. Введём координаты в $\mathbb{R}^m$, выделив первые n координат, так, чтобы подпространство, натянутое на них, совпадало с $\mathrm{d}_x f(\mathbb{R}^n)$.

Также домножим пространство, содержащее N, на $\mathbb{R}^{m-n}$.

Лемма 1.4.1. *Существует $W \ni x, W' \ni f(x), \phi : W \to W' : \phi\big|_{N \cap W} = f$ ($W \in \mathbb{R}^m, W' \in \mathbb{R}^m$).*

Доказательство леммы.

Обозначим координаты в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ за (ξ, ζ), и определим $\phi(x+\xi, \eta) = f(x) + f(\xi) + (0, \eta)$. Действительно, дифференциал $\mathrm{d}_x \phi = (\mathrm{d}f, \mathrm{id})$ невырожден.

По теореме об обратной функции $\exists W : \phi\big|_W$ — диффеоморфизм. □

1. Образ $f\big|_{N\cap W}$ — подмногообразие $W \cap \mathbb{R}^n \subset N$. $\phi^{-1}\big|_{W'}$ — выпрямляющая карта,
2. ϕ — гомеоморфизм на образ $\Rightarrow f\big|_{N\cap W}$ — топологическое вложение и гомеоморфизм. Значит, локально погружение — вложение.
3. Так как f — топологическое вложение, то $f(N)$ — подмногообразие.

$\square$