

Алгебра. Неофициальный конспект

Лектор: Алексей Владимирович Степанов
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

1	Гомологическая алгебра	2
1.1	Абелевы категории	2
1.2	Комплексы	4
1.3	Гомологии	5
1.4	Функторы между абелевыми категориями	8
1.5	Резольвенты	11
1.6	Резольвенты. Левый производный функтор	12
1.6.1	Длинная точная последовательность левых производных функторов	14
1.7	Производные функторы для \otimes	17
1.8	Производные функторы для Hom	18
1.9	Гомологии и когомологии групп	19

Глава 1

Гомологическая алгебра

Лекция I 12 февраля 2024 г.

1.1 Абелевы категории

Напомним некоторые определения из предыдущей лекции.

Определение 1.1.1 (Предаддитивная категория \mathcal{A}). $\forall A, B \in \mathcal{A} : \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ образует абелеву группу, и везде, где определена, выполнена дистрибутивность:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad (\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

Определение 1.1.2 (Бипроизведение). Такая диаграмма, что

$$A \begin{array}{c} \xleftarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\iota_1} \end{array} C \begin{array}{c} \xleftarrow{\pi_2} \\ \xrightarrow{\iota_2} \end{array} B$$

1. $\pi_1 \iota_1 = \text{id}_A$.
2. $\pi_2 \iota_2 = \text{id}_B$.
3. $\iota_2 \pi_2 + \iota_1 \pi_1 = \text{id}_C$.
4. $\pi_2 \iota_1 = 0$.
5. $\pi_1 \iota_2 = 0$.

Определение 1.1.3 (Аддитивная категория). Предаддитивная категория с финальным объектом и произведениями (любых двух объектов).

Эквивалентно, существуют инициальный объект и копроизведения, эквивалентно существуют нулевой объект и бипроизведения.

Определение 1.1.4 (Предабелева категория). Аддитивная категория, в которой у всех морфизмов есть ядро и коядро.

Определение 1.1.5 ((Ко)нормальный мономорфизм (эпиморфизм)). Он является (ко)эквалайзером (какой-то, неважно какой, пары стрелок).

Определение 1.1.6 (Абелева категория). Предабелева категория, в которой все мономорфизмы нормальны.

Пусть \mathcal{C} — категория. Вспомним про категорию стрелок $Arr\mathcal{C}$, в которой объекты — стрелки из $Mod(\mathcal{C})$, множество морфизмов между ϕ, ψ — это

$$Mor_{Arr\mathcal{C}}(\phi, \psi) = \{(\alpha, \beta) | \alpha : source(\phi) \rightarrow source(\psi), \beta : target(\phi) \rightarrow target(\psi), \beta\phi = \psi\alpha\}$$

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\phi} & \bullet \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \bullet & \xrightarrow{\psi} & \bullet \end{array}$$

Далее будем обозначать за $\ker f$ ядро стрелки, как уравнитель стрелки и нуля, а за $Ker f := source(\ker f)$ — объект (в конкретных категориях типа $mod\text{-}R$ это докатегорное понятие ядра — подмодуль без стрелки-вложения).

Лемма 1.1.1. \ker, coker — функторы $Arr\mathcal{A} \rightarrow Arr\mathcal{A}$.

Доказательство. Достаточно доказать для ядер, для коядер двойственно.

Определим действие \ker на морфизмах:

$$\begin{array}{ccccc} Ker f & \xrightarrow{\ker f} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow \exists! \phi & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ Ker f' & \xrightarrow{\ker f'} & A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

$f \cdot \ker f = 0 \Rightarrow \beta \cdot f \cdot \ker f = 0 \Rightarrow f' \cdot \alpha \cdot \ker f = 0$, откуда по универсальному свойству ядра $\exists! \phi : \ker f' \cdot \phi = \alpha \cdot \ker f$.

Положим $\ker(\alpha, \beta) = (\phi, \alpha)$. Далее несложно проверить, что данное определение сохраняет композицию и id . \square

Определение 1.1.7 (Точный функтор). Функтор, сохраняющий ядра и коядра.

Интересный факт (Теорема Фрейда — Митчелла (Freyd — Mitchell)). Для любой малой абелевой категории \mathcal{A} : $\exists R \in Ring$ (необязательно коммутативное кольцо с единицей) и строгий, полный, точный функтор $\mathcal{A} \rightarrow mod\text{-}R$.

Предложение 1.1.1. Для всякого морфизма $f : A \rightarrow B$ найдётся пунктирная стрелка, делающая диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccccccc} Ker f & \xrightarrow{\ker f} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\text{coker } f} & CoKer f \\ & & \downarrow \text{coker } \ker f & & \uparrow \ker \text{coker } f & & \\ & & CoKer \ker f & \dashrightarrow^{\exists!} & Ker \text{coker } f & & \end{array}$$

Более того, в абелевой категории эта стрелка — изоморфизм.

Доказательство. Следует из эпи-моно разложения, доказанного на прошлой лекции, или из теоремы Митчелла.

Само построение пунктирной стрелки получается из универсальных свойств, а доказательство того, что это — изо — непростое. \square

Лемма 1.1.2. Пусть \mathcal{C} — полная подкатегория в абелевой категории \mathcal{A} . Следующие условия равносильны

- \mathcal{C} является абелевой.
- — $0_{\mathcal{A}} \in \mathcal{C}$, здесь, как обычно, $0_{\mathcal{A}}$ — нулевой объект категории \mathcal{A} .
- — \mathcal{C} содержит бипроизведение любых двух своих объектов.

– Ядра и коядра (взяты в \mathcal{A}) любых морфизмов из \mathcal{C} лежат в \mathcal{C} .

Доказательство.

\Leftarrow . Очевидно.

\Rightarrow . Чуть сложнее, доказывать не будем (и использовать тоже). \square

1.2 Комплексы

Если противное не оговорено, то всё происходит в абелевой категории \mathcal{A} , большими буквами обозначены объекты данной категории, маленькими — морфизмы.

Определение 1.2.1 (Комплекс). Такая диаграмма, что $\forall k \in \mathbb{Z} : d_k \cdot d_{k+1} = 0$.

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{d_n} C_n \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots$$

Альтернативно, комплекс можно рассматривать, как функтор из категории (\mathbb{Z}, \geq) (полученной из частично упорядоченного множества) в \mathcal{A} (при котором образ композиции любых двух нетождественных морфизмов нулевой). Таким образом, комплексы — полная подкатегория в категории этих функторов.

Ещё один, следующий, взгляд на комплексы работает только для конкретной категории, уже вложенной в R -модули.

Определение 1.2.2 (Градуированный объект). $C_\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C_n$ с морфизмом $d : C_\bullet \rightarrow C_\bullet$, таким, что $d(C_n) \subset C_{n+p}$ для некоторой фиксированной *степени объекта* p (чаще всего она равна ± 1).

Определение 1.2.3 (Дифференциальный модуль). Градуированный объект (C_\bullet, d) со свойством $d^2 = 0$.

Определение 1.2.4 (Комплекс). Дифференциальный модуль степени -1 .

При развороте стрелок получается дифференциальный модуль степени $+1$, также известный, как *кокомплекс*:

$$\cdots \xleftarrow{d^{n+2}} C^{n+1} \xleftarrow{d^{n+1}} C^n \xleftarrow{d^n} C^{n-1} \xleftarrow{d^{n-1}} \cdots$$

Предостережение. У кокомплекса несколько другая нумерация стрелок, но мы их практически не будем использовать.

Определение 1.2.5 (Сдвиг комплекса (C_\bullet, d) на $p \in \mathbb{Z}$). Комплекс $(C[p]_\bullet, d[p])$, где $C[p]_n = C_{n+p}$ и $d[p]_n = d_{n+p}$.

Иногда при сдвиге комплекса определяют $d[p]_n = (-1)^p d_{n+p}$, но мы так делать не будем.

Лекция II

19 февраля 2023 г.

Определение 1.2.6 (Морфизм дифференциальных модулей $\bigoplus A_n \rightarrow \bigoplus B_n$). Такое $f : \bigoplus A_n \rightarrow \bigoplus B_n$, что $f(A_n) \subset B_n$, и диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} A_{n+1} & \xrightarrow{d_n^A} & A_n \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ B_{n+1} & \xrightarrow{d_n^B} & B_n \end{array}$$

На языке абелевых категорий, надо рассматривать не одно отображение f , так как отношение $f(A_n) \subset B_n$ не выражается, а серию морфизмов $f_n : A_n \rightarrow B_n$.

Для всякого морфизма f коммутативна диаграмма в категории комплексов:

$$\begin{array}{ccc} A[1] & \xrightarrow{d^A} & A \\ \downarrow f[1] & & \downarrow f \\ B[1] & \xrightarrow{d^B} & B \end{array}$$

Если рассматривать комплексы, как функторы из категории (\mathbb{Z}, \geq) , то морфизмы между комплексами — естественные преобразования между функторами.

Теорема 1.2.1. Категория комплексов абелева.

Доказательство.

Лемма 1.2.1. Если \mathcal{C} — малая категория, \mathcal{A} — абелева, то $\text{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ — тоже абелева категория.

Доказательство леммы.

Нулевой объект — функтор 0 , сопоставляющий каждому объекту $0_{\mathcal{A}}$, и каждой стрелке — нуль-стрелку.

Для двух функторов \mathcal{F}, \mathcal{G} : $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(C) = \mathcal{F}(C) \oplus \mathcal{G}(C)$.

Если $\eta \in \text{Mor}_{\text{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{A})}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ (то есть η — естественное преобразование $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$), то $(\text{Ker } \eta)(C) = \text{Ker}(\eta_C)$.

Аналогично (лемма 1.1.1), определяется ker . Аналогично с коядрами.

Далее по-хорошему надо проверить, что выполняются все универсальные свойства, но мы этого делать не будем. \square

Ссылаемся на (лемма 1.1.2).

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d_n^A} & A_n & \xrightarrow{d_{n-1}^A} & A_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{d_n^B} & B_n & \xrightarrow{d_{n-1}^B} & B_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} \oplus B_{n+1} & \xrightarrow{d_n^{A \oplus B}} & A_n \oplus B_n & \xrightarrow{d_{n-1}^{A \oplus B}} & A_{n-1} \oplus B_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Если $d^A \cdot d^A = 0$, и $d^B \cdot d^B = 0$, то (из теоремы Митчелла уж точно очевидно) $d^{A \oplus B} \cdot d^{A \oplus B} = 0$.

Ядра тоже являются комплексами, так как на языке конкретных категорий это просто подмодули. Двойственно с коядрами. \square

1.3 Гомологии

Дифференциал d является морфизмом комплексов $d : C[1] \rightarrow C$ (по-хорошему, $C[1]_{\bullet} \rightarrow C_{\bullet}$, но точку будем опускать):

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_n} & C_n & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow d_n & & \downarrow d_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{d_{n-1}} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Ниже мы по произвольному комплексу C строим новые комплексы.

Определение 1.3.1 (Циклы). Комплекс $Z = Z(C) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker } d[-1]$.

Определение 1.3.2 (Границы). Комплекс $B = B(C) \stackrel{def}{=} \text{Im } d[-1]$.

По определению, образ — это ядро коядра: $\text{Im } \phi \stackrel{def}{=} \text{Ker}(\text{coker } \phi)$. В абелевой категории канонически $\text{Im } \phi \cong \text{CoIm } \phi \stackrel{def}{=} \text{CoKer}(\text{ker } \phi)$.

На языке конкретных категорий, так как $d^2 = 0$, то $B \subset Z$, и можно определить фактормодуль $H := Z/B$ — *гомологии*.

То же самое можно сказать на языке универсальных свойств, хотя в будущем мы, ссылаясь на теорему Митчелла, будем всё писать исключительно в терминах элементов.

$$\begin{array}{ccccccc} Z[1] & \xrightarrow{z[1]} & C[1] & \xrightarrow{d} & C & \xrightarrow{d[-1]} & C[-1] \\ & & \downarrow b & \searrow \alpha & \uparrow z & & \\ & & B & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\text{coker } \beta} & H \cdots \cdots \cdots 0 \end{array}$$

Построение H в терминах универсальных свойств. Так как $d[-1] \cdot d = 0$, то можно пропуститьсь через ядро: $\exists! \alpha : z \cdot \alpha = d$.

Далее, $z \cdot \alpha \cdot z[1] = d \cdot z[1] = 0$, а так как z — моно, то $\alpha \cdot z[1] = 0$. Значит, можно пропуститьсь через коядро, то есть $\exists! \beta : \beta b = \alpha$. Далее H определяется, как коядро β . \square

Следствие 1.3.1. В комплексах Z, B, H нулевые дифференциалы.

Доказательство. Из диаграммы следует, что в комплексе Z нулевые дифференциалы. B состоит из подмодулей в Z , H — из фактормодулей, понятно, что там дифференциалы тоже нулевые. \square

Примеры (Гомологии окружности).

- Рассмотрим окружность, как симплициальное множество: 

Построим $C_0 = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ — свободная абелева группа на $\{a, b\}$, $C_1 = \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ — тоже свободная абелева группа, но на образующих $\{x, y\}$. Вместо \mathbb{Z} можно было взять любое другое кольцо.

Все остальные элементы комплекса объявляются нулями.

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

Определим d_1 , как «конец минус начало»: $\begin{cases} d_1(x) = b - a, \\ d_1(y) = a - b \end{cases}$.

$$\text{Теперь } \begin{cases} Z_0 = C_0 \\ Z_1 = \mathbb{Z}(x + y) \end{cases} \quad \begin{cases} B_0 = \mathbb{Z}(b - a) \\ B_1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} H_0 = Z_0/B_0 = (\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b)/\mathbb{Z}(b - a) \cong \mathbb{Z} \\ H_1 = Z_1/B_1 = \mathbb{Z}(x + y) \cong \mathbb{Z} \end{cases}.$$

- Теперь триангулируем окружность по-другому:  $\begin{cases} d_1(x) = b - a, \\ d_1(y) = c - b, \\ d_1(z) = a - c \end{cases}$.

$$\text{Теперь } \begin{cases} Z_0 = C_0 \\ Z_1 = \mathbb{Z}(x + y + z) \end{cases}, \quad \begin{cases} B_0 = \mathbb{Z}(b - a) + \mathbb{Z}(c - b) \\ B_1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} H_0 \cong \mathbb{Z} \\ H_1 = \mathbb{Z}(x + y + z)/0 \cong \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ответ получился тот же самый, и это не случайно — есть теорема, что сингулярные/симплициальные гомологии (они равны для клеточных пространств) не зависят от триангуляции.

Упражнение 1.3.1. Триангулировать сферу, и вычислить гомологии. Дифференциал от треугольника ABC (ориентация — порядок вершин — важна) определяют, как его обход вдоль периметра: $AB + BC + CA$.

Теорема 1.3.1 (Длинная точная последовательность гомологий). Пусть имеется точная последовательность комплексов $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$.

Существует длинная точная последовательность гомологических групп

$$\dots \longrightarrow H' \longrightarrow H \longrightarrow H'' \longrightarrow H'[-1] \longrightarrow H[-1] \longrightarrow \dots$$

где связующий морфизм δ будет построен в доказательстве.

Более того, это всё функториально: если есть другая короткая точная последовательность, и морфизм между ними, то по отношению к ним найдётся естественный морфизм полученных длинных точных последовательностей гомологий.

Доказательство. Сначала строим δ .

Для $z \in Z_n''$, обозначим за $[z]$ класс z в H_n'' .

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A'_n & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{\pi} & A''_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d' & & \downarrow d & & \downarrow d'' \\ 0 & \longrightarrow & A'_{n-1} & \xrightarrow{i} & A_{n-1} & \longrightarrow & A''_{n-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Положим $\delta([z]) := [i^{-1}(d(\pi^{-1}(z)))]$, где $\pi^{-1}(z)$ — произвольный прообраз (он есть, так как π сюръективно).

Дальше надо проверить, что определение корректно, и последовательность точна. Это типичный диаграммный поиск, который невозможно записывать, и его несложно воспроизвести самостоятельно. \square

Лекция III

4 марта 2023 г.

Теперь приведём другое доказательство существования длинной точной последовательности гомологий, опирающееся на лемму о змее.

Лемма 1.3.1 (О змее). Пусть даны два комплекса $A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ и $0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B''$, и морфизм между ними. Тогда имеется длинная точная последовательность из пунктирных стрелок.

Короткие стрелки получены из действия соответственных функторов (ядра и коядра), а связующий гомоморфизм определён δ определён в доказательстве, и естественен (функториален).

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } \phi' & \dashrightarrow & \text{Ker } \phi & \dashrightarrow & \text{Ker } \phi'' & & \\ \downarrow \ker \phi' & & \downarrow \ker \phi & & \downarrow \ker \phi'' & & \\ A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi'' & & \delta \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' \\ \downarrow \text{coker } \phi' & & \downarrow \text{coker } \phi & & \downarrow \text{coker } \phi'' & & \\ & \dashrightarrow & \text{CoKer } \phi' & \dashrightarrow & \text{CoKer } \phi & \dashrightarrow & \text{CoKer } \phi'' \end{array}$$

Доказательство. Диаграммный поиск. \square

Теорема 1.3.2 (Длинная точная последовательность гомологий на бис). Пусть имеется точная последовательность комплексов $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$.

Существует длинная точная последовательность гомологических групп

$$\dots \longrightarrow H' \longrightarrow H \longrightarrow H'' \longrightarrow H'[-1] \longrightarrow H[-1] \longrightarrow \dots$$

где связующий морфизм δ будет построен в доказательстве.

Более того, это всё функториально.

Доказательство. Длинная точная последовательность комплексов означает наличие следующей коммутативной диаграммы (где строки точны, и столбцы — комплексы)

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & A'_n & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & A''_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d'_n & & \downarrow d_n & & \downarrow d''_n \\ 0 & \longrightarrow & A'_{n-1} & \longrightarrow & A_{n-1} & \longrightarrow & A''_{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Пусть циклы, границы и гомологии в комплексе A обозначаются $Z_\bullet, B_\bullet, H_\bullet$ соответственно, в $A' - Z'_\bullet, B'_\bullet, H'_\bullet$, в $A'' - Z''_\bullet, B''_\bullet, H''_\bullet$. Из коммутативности диаграммы B'_n вправо уходит в B_n , а B_n , в свою очередь — в B''_n .

Чтобы воспользоваться леммой о змее, построим следующую диаграмму, взяв коядро верхней строки, ядро — нижней, и дорисовав сверху — ядра вертикальных стрелок, снизу — коядра.

$$\begin{array}{ccccccc} & H'_n & & H_n & & H''_n & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & A'_n/B'_n & \longrightarrow & A_n/B_n & \longrightarrow & A''_n/B''_n & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \tilde{d}'_n & & \downarrow \tilde{d}_n & & \downarrow \tilde{d}''_n & \\ 0 & \longrightarrow & Z'_{n-1} & \longrightarrow & Z_{n-1} & \longrightarrow & Z''_{n-1} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H'_{n-1} & & H_{n-1} & & H''_{n-1} \end{array}$$

Обоснуем, каким образом получилась такая диаграмма. По определению $d_n(B_n) = \{0\}$, поэтому $A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1}$ пропускается через фактор, и получается отображение $\tilde{d}_n : A_n/B_n \rightarrow A_{n-1}$. Так как A — комплекс, то $\tilde{d}_n(A_n/B_n) \subset Z_{n-1}$, можно сузить codomain, получая \tilde{d}_n . По определению $H_n = Z_n/B_n$, поэтому действительно $H_n = \text{Ker}(d_n)$. В свою очередь, $H_{n-1} = Z_{n-1}/B_{n-1}$, и это действительно $\text{CoKer}(d_n)$.

Отображение $A_n \rightarrow A''_n$ было эпиморфизмом, после взятия коядра эпиморфизмом оно и осталось. Двойственно, $A'_{n-1} \rightarrow A_{n-1}$ было мономорфизмом, мономорфизмом оно и осталось.

Применяя лемму о змее, получаем утверждение теоремы. □

1.4 Функторы между абелевыми категориями

Пусть \mathcal{A}, \mathcal{B} — абелевы категории.

Определение 1.4.1 (Аддитивный функтор $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$). Такой функтор, что $\forall \alpha, \beta \in \text{Mor}(\mathcal{A}) : \mathcal{F}(\alpha + \beta) = \mathcal{F}(\alpha) + \mathcal{F}(\beta)$ всегда, когда определено.

Рассмотрим произвольную короткую точную последовательность $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ в \mathcal{A} . Подействовав на неё функтором \mathcal{F} , мы получим последовательность $0 \rightarrow \mathcal{F}(A') \rightarrow \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A'') \rightarrow 0$. Точность, вообще говоря, пропадёт, но если \mathcal{F} сохраняет точность в каком-то члене для всех таких коротких точных последовательностей, то функтор \mathcal{F} имеет соответствующее название:

1. Если всегда имеется точность в члене $\mathcal{F}(A)$, то \mathcal{F} — *полуточный функтор*.
2. Если всегда имеется точность в членах $\mathcal{F}(A')$ и $\mathcal{F}(A)$, то \mathcal{F} — *точный слева функтор*.
3. Если всегда имеется точность в членах $\mathcal{F}(A)$ и $\mathcal{F}(A'')$, то \mathcal{F} — *точный справа функтор*.
4. Если всякая короткая точная последовательность переходит в короткую точную последовательность, то \mathcal{F} — *точный функтор*.

Лемма 1.4.1. Пусть \mathcal{F} — аддитивный функтор. Следующие условия эквивалентны:

1. \mathcal{F} точен справа.
2. \mathcal{F} сохраняет нуль и коядра: $\mathcal{F}(0) = 0, \mathcal{F}(\text{coker}(\phi)) = \text{coker}(\mathcal{F}(\phi))$.
3. \mathcal{F} сохраняет конечные копределы.

Доказательство.

- (3) \Rightarrow (2) Коядро — конечный копредел, поэтому очевидно.
- (2) \Rightarrow (3) В свою очередь, копроизведение в абелевой категории — бипроизведение, а это «внутренний объект», поэтому всякий аддитивный функтор сохраняет его.
- (2) \Rightarrow (1) Короткая точная последовательность $A' \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{\psi} A'' \rightarrow 0$ характеризуется свойствами $\psi = \text{coker } \phi, 0 = \text{coker } \psi$.
- (1) \Rightarrow (2) Рассмотрим произвольный $\phi : A' \rightarrow A$. У него есть эпи-моно разложение $\phi = \mu \varepsilon$ (μ — моно, ε — эпи), и $\text{coker}(\mu \varepsilon) = \text{coker}(\mu)$, так как ε — эпиморфизм. Значит, без потери общности ϕ — мономорфизм.

Тогда последовательность $0 \rightarrow A' \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{\text{coker } \phi} \text{CoKer } \phi \rightarrow 0$ точна, и так как \mathcal{F} — точен справа, то $\mathcal{F}(\text{coker } \phi) = \text{coker}(\mathcal{F}(\phi))$.

Также точный справа функтор сохраняет нуль: $0 \rightarrow A \xrightarrow{\text{id}} A \rightarrow 0 \rightarrow 0$ переходит в $\mathcal{F}(A) \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(0) \rightarrow 0$. \square

Следствие 1.4.1. Левый сопряжённый функтор точен справа.

Доказательство. Он сохраняет копределы. \square

Копредел (который является левым сопряжённым к диагональному Δ) сохраняет копределы, значит, точен справа. Другими словами, копределы коммутируют.

К сожалению, в лемме о змее это не помогает в доказательстве того, что последовательность точна в члене $\text{Ker } \phi$, так как нет точной последовательности $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$.

При доказательстве существования длинной точной последовательности гомологий на бис, мы использовали, что коядро точно справа, ядро — точно слева.

Лекция IV

11 марта 2023 г.

Факт 1.4.1. Если точный справа функтор сохраняет мономорфизмы, то функтор точен. Двойственно, точный слева функтор, сохраняющий эпиморфизмы, точен.

Доказательство. Условия как раз означают, что короткая точная последовательность отображается в короткую точную последовательность. \square

Пусть имеются комплексы X_\bullet и X'_\bullet , и между ними морфизмы f, g .

Определение 1.4.2 (Морфизмы f и g гомотопны). Существует семейство морфизмов $s_k : X_{k-1} \rightarrow X'_k$, таких, что $f_n - g_n = d'_n s_{n+1} + s_n d_{n-1}$. При этом диаграмма ниже **не обязана** быть коммутативной.

$$\begin{array}{ccccccc} X_{n+1} & \xrightarrow{d_n} & X_n & \xrightarrow{d_{n-1}} & X_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-2}} & \cdots \xrightarrow{d_0} X_0 \\ \downarrow f_{n+1} & \downarrow g_{n+1} & \downarrow f_n & \downarrow g_n & \downarrow f_{n-1} & \downarrow g_{n-1} & \downarrow f_0 \\ X'_{n+1} & \xrightarrow{d'_n} & X'_n & \xrightarrow{d'_{n-1}} & X'_{n-1} & \xrightarrow{d'_{n-2}} & \cdots \xrightarrow{d'_0} X'_0 \end{array}$$

(Дополнительные стрелки в оригинале: s_{n+1} от X_{n+1} к X'_n , s_n от X_n к X'_{n-1} , s_{n-1} от X_{n-1} к X'_{n-2} , s_0 от X_0 к X'_0)

Пишут $f \simeq g$.

А почему это то же самое, что и гомотопность в топологии?

Теорема 1.4.1. Если два морфизма комплексов $f, g : X \rightarrow X'$ гомотопны, то $H(f) = H(g)$ (гомологии являются функтором, и действуют не только на комплексах, но и на морфизмах между ними).

Доказательство. Докажем, что $H(f - g) = 0$.

Рассмотрим $\bar{x} \in H_n(X)$. У него имеется прообраз $x \in Z_n$.

Заметим, что $H(f_n - g_n)(\bar{x}) = \overline{(f_n - g_n)(x)} = \overline{d'_n(s_{n+1}(x)) + s_n(d_{n-1}(x))}$. Первое слагаемое равно нулю, так как $d'_n(\cdots) \in B_n(X')$, а второе — так как $x \in \text{Ker } d_{n-1}$. \square

Замечание. Если $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ — аддитивный функтор, и $f \simeq g$ — морфизмы комплексов с объектами из \mathcal{A} , то (допуская вольность речи можно писать $\mathcal{F}(f)$) $\mathcal{F}(f) \simeq \mathcal{F}(g)$.

Факт 1.4.2. Быть гомотопными — отношение эквивалентности.

Доказательство. Рефлексивность: $\forall n : s_n = 0$. Симметричность: $s_n := -s_n$. Транзитивность:

$$\begin{cases} f_n - g_n = d'_n s_{n+1} + s_n d_{n-1} \\ g_n - h_n = d'_n r_{n+1} + r_n d_{n-1} \end{cases} \Rightarrow f_n - h_n = d'_n (s_{n+1} + r_{n+1}) + (s_n + r_n) d_{n-1} \quad \square$$

Определение 1.4.3 (Два комплекса X и X' гомотопически эквивалентны). Существуют морфизмы комплексов $f : X \rightarrow X'$ и $g : X' \rightarrow X$, такие, что $fg \simeq \text{id}_{X'}$ и $gf \simeq \text{id}_X$. Данные морфизмы f и g называют *гомотопическими эквивалентностями*.

Факт 1.4.3. Если X и X' гомотопически эквивалентны, то $H(X) \cong H(X')$.

Определение 1.4.4 (Квазиизоморфизм $f : X \rightarrow X'$). Морфизм f , такой, что $H(f)$ — изоморфизм.

Факт 1.4.4. Гомотопическая эквивалентность — квазиизоморфизм.

Определение 1.4.5 (Комплекс X ацикличен). X точен, то есть $H(X) = 0$.

Определение 1.4.6 (Комплекс X стягиваем). $\text{id}_X \simeq 0_X$.

Замечание. Из (теорема 1.4.1) следует, что стягиваемый комплекс ацикличен.

Обратное, вообще говоря, неверно. Стягиваемый комплекс сохраняется под действием функторов, а ациклический — может и не сохраниться.

1.5 Резольвенты

Пусть \mathcal{A} — абелева категория, $P \in \mathcal{A}$.

Определение 1.5.1 (Объект P проективен). $\forall \phi : A \rightarrow B: \phi \text{ — эпи} \Rightarrow \forall \psi : P \rightarrow B: \exists \theta : P \rightarrow A$, причём диаграмма коммутует. При этом θ должно найтись какое-то, не факт, что оно единственно.

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \swarrow \exists \theta & \downarrow \forall \psi & \\ A & \xrightarrow{\forall \phi} B & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Факт 1.5.1. В \mathcal{Set} все множества — проективные объекты.

Теорема 1.5.1. Пусть $\mathcal{A} = R\text{-mod}$. Модуль P проективен $\iff P$ является прямым слагаемым свободного модуля.

Доказательство.

1. Свободный модуль проективен: пусть $\{p_\alpha\}$ — базис P . Определим $\theta(p_\alpha) = \psi(\phi^{-1}(p_\alpha))$, где прообраз выбран произвольно, и продолжим по линейности.
2. Прямое слагаемое проективного модуля проективно. Рассмотрим каноническое вложение $M \hookrightarrow M \oplus N$, где $M \oplus N$ — проективен.

$$\begin{array}{ccc} & M & \longrightarrow M \oplus N \\ & \downarrow \psi & \swarrow \text{---} \\ A & \longrightarrow B & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Определим $M \oplus N \rightarrow B, (m, n) \mapsto \psi(m)$. Так как $M \oplus N$ проективен, то найдётся $M \oplus N \rightarrow A$, и композиция $M \rightarrow M \oplus N \rightarrow A$ подходит в качестве морфизма, который должен найтись из определения проективного модуля.

3. Пусть P проективен. Возьмём свободный модуль F , сюръективно накрывающий P (например, подойдёт свободный модуль на всех элементах P , но на практике, конечно, удобно брать модуль поменьше).

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \swarrow \exists & \downarrow \text{id} & \\ F & \xrightarrow{\pi} P & \end{array}$$

Так как модуль проективен, то найдётся пунктирная стрелка. Значит, $F \cong P \oplus \text{Ker } \pi$ ($\forall f \in F : \pi^{-1}(f) = P(f) + \text{Ker } \pi$). \square

Примеры.

- Пусть $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Тогда $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ является R -модулем, но $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, значит, модули $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ все проективны.
- Можно предъявить проективный модуль, исходя из топологического факта о том, что шар нельзя причисать.

Определение 1.5.2 (Проективная резольвента модуля M). Ациклический комплекс вида $\cdots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, где P_i — проективные модули.

В будущем докажем, что любые две проективные резольвенты гомотопически эквивалентны.

Определение 1.5.3 (В категории \mathcal{A} достаточно много проективных объектов). $\forall A \in \mathcal{A}$ найдётся проективный объект $P \in \mathcal{A}$ вместе с эпиморфизмом $P \twoheadrightarrow A$.

Если в нашей категории \mathcal{A} достаточно много проективных объектов, то у всякого модуля M найдётся резольвента — надо просто подряд накрывать возникающие ядра.

Лекция V

18 марта 2024 г.

1.6 Резольвенты. Левый производный функтор

Зафиксируем некоторый аддитивный функтор $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, который обычно будет точен справа. Пусть у объекта $A \in \mathcal{A}$ имеется проективная резольвента, которую я выделил стрелками \rightsquigarrow .

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightsquigarrow & P_1 & \rightsquigarrow & P_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \rightsquigarrow & 0 \end{array}$$

Иными словами, проективная резольвента — это некоторый морфизм комплексов P и A_\bullet . Под комплексом A_\bullet подразумевается такой комплекс, в котором в нулевой градуировке сидит A , а в остальных — нули (следовательно, все дифференциалы — тоже нули).

Раз \mathcal{F} точен справа, то он сохраняет нуль. Применим \mathcal{F} к верхней строчке. Тогда получится комплекс вида

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}(P_1) \longrightarrow \mathcal{F}(P_0) \longrightarrow 0$$

Чуть ниже мы определим $L_n \mathcal{F}(A) := H_n \mathcal{F}(P)$ — левый производный функтор, измеряющий неточность \mathcal{F} — но пока, например, неясна корректность (независимость от резольвенты) такого определения.

Теорема 1.6.1. Пусть P_i проективные, сверху комплекс (и ноль в верхней строчке вообще-то неважен), снизу — точный комплекс.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \\ \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

Тогда найдутся пунктирные стрелки, и они определены с точностью до гомотопии.

Доказательство.

- Сначала построим $f_i : P_i \rightarrow Q_i$.
 $Q_0 \rightarrow B$ сюръективно, значит, найдётся f_0 , такое, что квадрат коммутативен.
- Далее по индукции: пусть построены f_0, \dots, f_n .

$$\begin{array}{ccccc} P_{n+1} & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & P_{n-1} \\ \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ Q_{n+1} & \longrightarrow & Q_n & \xrightarrow{d_{n-1}^Q} & Q_{n-1} \end{array}$$

Хочется заполнить стрелку $P_{n+1} \rightarrow Q_{n+1}$, воспользовавшись проективностью P_{n+1} . Для этого надо найти сюръективное $Q_{n+1} \rightarrow ?$. Так как внизу — точная последовательность, то $Q_{n+1} \rightarrow \text{Ker}(d_{n-1}^Q)$ подойдёт: оно сюръективно, так как $P_{n+1} \rightarrow P_{n-1}$ нулевой,

а квадрат $\begin{array}{ccc} P_n & \longrightarrow & P_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_n & \longrightarrow & Q_{n-1} \end{array}$ коммутативен. Тем самым, по определению проективного модуля $\exists f_{n+1}$.

- Теперь пусть имеются два морфизма комплексов, продолжающих f , f_i и g_i .

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A \\ & & f_1 \downarrow & \downarrow g_1 & f_0 \downarrow & \downarrow g_0 & \downarrow f \\ \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

Распишем разность: пусть $h_i := f_i - g_i$. Понятно, что $A \rightarrow Q_0$ надо взять нулевым.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow h_1 & \swarrow s_0 & \downarrow h_0 & \swarrow 0 & \downarrow 0 \\ \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

s_0 строится по основному свойству проективного модуля P_0 : ведь $h_0(P_0) \subset \text{Ker}(d_{-1}^Q) = \text{Im } d_0^Q$

- Далее индукция. Пусть построены s_0, \dots, s_{n-1} , строим s_n .

$$\begin{array}{ccccccc} & & P_n & \xrightarrow{d_{n-1}^P} & P_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-2}^P} & P_{n-2} \\ & \swarrow s_n & \downarrow h_n & \swarrow s_{n-1} & \downarrow h_{n-1} & \swarrow s_{n-2} & \\ Q_{n+1} & \xrightarrow{d_n^Q} & Q_n & \xrightarrow{d_{n-1}^Q} & Q_{n-1} & & \end{array}$$

Хочется, чтобы выполнялось $h_n = d_n^Q s_n + s_{n-1} d_{n-1}^P$, эквивалентно $d_n^Q s_n = h_n - s_{n-1} d_{n-1}^P$.

Надо проверить, что образ правой части лежит в $\text{Im}(d_n^Q)$, то есть $\text{Ker}(d_{n-1}^Q)$. Применим d_{n-1}^Q . Получим

$$d_{n-1}^Q h_n - d_{n-1}^Q s_{n-1} d_{n-1}^P = h_{n-1} d_{n-1}^P - (h_{n-1} - s_{n-2} d_{n-2}^P) d_{n-1}^P = 0$$

Тем самым, s_n действительно найдётся согласно свойству проективного модуля.

□

Следствие 1.6.1. Любые две проективные резольвенты одного и того же объекта гомотопически эквивалентны.

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & A_\bullet \\ g \uparrow & \downarrow f & \downarrow \text{id} \\ Q & \longrightarrow & A_\bullet \end{array} \quad \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & A_\bullet \\ \text{id} \downarrow & \downarrow fg & \downarrow \text{id} \\ P & \longrightarrow & A_\bullet \end{array}$$

Строим по только что доказанной теореме f, g , по теореме $fg \simeq \text{id}_Q$ и $gf \simeq \text{id}_Q$.

Таким образом, определение левого производного функтора L_n корректно.

С некоторой точки зрения «правильно» рассматривать категорию комплексов с точностью до гомотопической эквивалентности, назовём её $\mathcal{H}\mathcal{C}ompr(\mathcal{A})$: там объекты — $\text{Obj } \mathcal{A}$, а группа морфизмов $\text{Mor}_{\mathcal{H}\mathcal{C}ompr(\mathcal{A})}(P, Q) = \text{Mor}(\mathcal{C}ompr(\mathcal{A}))/\text{Ho}(P, Q)$, где $\text{Ho}(P, Q)$ — группа морфизмов, гомотопных 0.

Примеры (Что такое L_0 от точного справа функтора).

- Предположим, что \mathcal{F} точен справа. Тогда

$$\mathcal{F}(P_1) \longrightarrow \mathcal{F}(P_0) \longrightarrow \mathcal{F}(A) \longrightarrow 0$$

точна. $L_0 \mathcal{F}(A) = H_0(\mathcal{F}(P)) = \text{CoKer}(\mathcal{F}(P_1) \rightarrow \mathcal{F}(P_0))$. Если функтор точен справа, то $\text{CoKer}(\mathcal{F}(P_1) \rightarrow \mathcal{F}(P_0)) = \mathcal{F}(A)$.

Тем самым, $L_0 \mathcal{F} = \mathcal{F}$.

- Обратно, если $L_0\mathcal{F} = \mathcal{F}$, то \mathcal{F} сохраняет коядра, значит, точен справа. (По-хорошему, надо ещё проверить, что $L_0\mathcal{F}$ действует на морфизмах так же, но это банально).

Следствие 1.6.2. Если P_A, P_B — проективные резольвенты A, B соответственно, и $f : A \rightarrow B$, то $\exists \tilde{f} : P_A \rightarrow P_B$, делающий диаграмму коммутативной. Он определён однозначно с точностью до гомотопии.

$$\begin{array}{ccc} P_A & \longrightarrow & A_\bullet \\ \tilde{f} \downarrow & & f \downarrow \\ P_B & \longrightarrow & B_\bullet \end{array}$$

Здесь A_\bullet — комплекс, где A сосредоточен в нулевом члене.

Таким образом, морфизму f объектов из \mathcal{A} сопоставляется морфизм резольвент \tilde{f} , а он, в свою очередь, индуцирует морфизм гомологий $H_n(P_A) \rightarrow H_n(P_B)$. Значит, конструкция L функториальна.

1.6.1 Длинная точная последовательность левых производных функторов

Зафиксируем некоторый функтор \mathcal{F} . Далее мы исследуем $L_n\mathcal{F}$, для упрощения записи будем писать $L_n := L_n\mathcal{F}$.

Пусть имеется короткая точная последовательность $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ в \mathcal{A} . Построим длинную точную последовательность производных функторов. Это так говорится? Скорее всё-таки их значений на A, B, C

$$\cdots \rightarrow L_1(A) \rightarrow L_1(B) \rightarrow L_1(C) \rightarrow L_0(A) \rightarrow L_0(B) \rightarrow L_0(C) \rightarrow \cdots$$

Для получения такой штуки было бы неплохо заполучить точную последовательность резольвент $P_A \rightarrow P_B \rightarrow P_C$, причём не абы какую, а сохраняющую свою точность под действием любого аддитивного функтора. Оказывается, это сделать несложно, и в этом нам поможет лемма о подковке.

Лемма 1.6.1 (О подковке). Пусть P — проективный модуль, все строки и столбцы (состоящие из чёрных сплошных стрелок) точны.

$$\begin{array}{ccccccc} Q & \xrightarrow{\quad i \quad} & Q \oplus P & \xrightarrow{\quad \pi \quad} & P & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Утверждается, что диаграмму можно достроить до коммутативной, добавив зелёные пунктирные стрелки. Новые строки и столбцы также станут точны.

Доказательство. Так как P — проективен, а g — эпи, то найдётся сечение s такое, что $gs = h_C$.

$$\begin{array}{ccccccc} Q & \xrightarrow{\quad i \quad} & Q \oplus P & \xrightarrow{\quad \pi \quad} & P & & \\ \downarrow h_A & & \downarrow h_B & & \downarrow h_C & & \\ 0 \longrightarrow & A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B & \xrightarrow{\quad g \quad} & C & \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Определим стрелку h_B исходя из того, что квадраты должны в итоге получиться коммутативными. Из коммутативности левого квадрата $h_B(u, 0) = f(h_A(u))$. Из коммутативности правого треугольника $h_B(0, v) = h_C(v) = gs(v)$. Тем самым, подойдёт $h_B(u, v) := f(h_A(u)) + s(v)$.

При таком определении правый квадрат будет коммутативен: $g(s(v)) = h_C(\pi(u, v)) \stackrel{?}{=} g(h_B(u, v)) = g(s(v))$, так как $gf = 0$.

Также несложно убедиться, что построенный морфизм h_B — эпи (видимо, диаграммный поиск). \square

Теорема 1.6.2. Для короткой точной последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ существует точная последовательность резольвент $0 \rightarrow P_A \rightarrow P_B \rightarrow P_C \rightarrow 0$, точность которой сохраняется под действием любого аддитивного функтора.

Доказательство. Возьмём произвольные резольвенты P_A, P_C . Резольвенту P_B будем строить пошагово, по индукции. $(P_B)_0 := (P_A)_0 \oplus (P_C)_0$ строится прямым применением леммы о подкове.

Далее необходимо провести индукционный переход.

$$\begin{array}{ccccccc}
 (P_A)_{n+1} & \xrightarrow{\text{---}i\text{---}} & (P_A)_{n+1} \oplus (P_C)_{n+1} & \xrightarrow{\text{---}\pi\text{---}} & (P_C)_{n+1} & & \\
 \downarrow & & \downarrow d_n^B & & \downarrow & & \\
 0 \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-1}^A) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-1}^B) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-1}^C) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & (P_A)_n & \longrightarrow & (P_B)_n & \longrightarrow & (P_C)_n & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow d_{n-1}^A & & \downarrow d_{n-1}^B & & \downarrow d_{n-1}^C & \\
 0 \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-2}^A) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-2}^B) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-2}^C) & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Вычленим некоторый кусочек диаграммы, и попробуем применить лемму о подкове для получения d_n^B . Для этого необходимо потребовать от стрелки $\text{Ker}(d_{n-1}^B) \rightarrow \text{Ker}(d_{n-1}^C)$, чтобы она была эпиморфизмом.

Докажем последнее по индукции: короткая последовательность ядер $0 \rightarrow \text{Ker}(d_n^A) \rightarrow \text{Ker}(d_n^B) \rightarrow \text{Ker}(d_n^C) \rightarrow 0$ точна (так как ядро точно слева, то точность в остальных членах не вызывает сомнений, надо лишь проверить эпиморфность). В качестве базы здесь удобно применить лемму о змее:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & \text{Ker}(d_{-1}^A) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{-1}^B) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{-1}^C) & \xrightarrow{\text{---}} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & P_A & \longrightarrow & P_B & \longrightarrow & P_C & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow d_{-1}^A & & \downarrow d_{-1}^B & & \downarrow d_{-1}^C & \\
 0 \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

А индукционный переход я не знаю, ну, можно просто убедиться, используя определение d_n^B из леммы о подкове.

Тем самым, так как прямая сумма проективных проективна, то $(P_A)_{n+1} \oplus (P_C)_{n+1} \twoheadrightarrow \text{Ker}(d_{n-1}^B)$, и определение резольвенты B по индукции корректно.

Точность $0 \rightarrow P_A \rightarrow P_B \rightarrow P_C$ под действием всякого аддитивного функтора, конечно, сохраняется, так как $(P_B)_n = (P_A)_n \oplus (P_C)_n$, а аддитивные функторы сохраняют бипроизведение. \square

Следствие 1.6.3 (Длинная точная последовательность производных функторов). Для короткой точной последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ имеет место длинная точная последовательность

$$\cdots \rightarrow L_1(A) \rightarrow L_1(B) \rightarrow L_1(C) \rightarrow L_0(A) \rightarrow L_0(B) \rightarrow L_0(C) \rightarrow \cdots$$

Доказательство. Из (теорема 1.6.2) найдётся точная последовательность проективных резольвент $0 \rightarrow P_A \rightarrow P_B \rightarrow P_C \rightarrow 0$. Применяя \mathcal{F} , получаем точную последовательность $0 \rightarrow \mathcal{F}(P_A) \rightarrow \mathcal{F}(P_B) \rightarrow \mathcal{F}(P_C) \rightarrow 0$.

Возьмём у $\mathcal{F}(P_A), \mathcal{F}(P_B), \mathcal{F}(P_C)$ гомологии. Составленная из них длинная точная гомологическая последовательность как раз и сконструирует искомую длинную точную последовательность левых производных функторов. \square

Замечание. Если \mathcal{F} точен справа, то длинная точная последовательность производных функторов обрывается эпиморфизмом: $L_0(B) \rightarrow L_0(C) \rightarrow 0$.

Лекция VI

25 марта 2024 г.

Рассмотрим формальное обобщение производных функторов.

Пусть имеется семейство $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ функторов $\mathcal{F}_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$.

Определение 1.6.1 ((Левая) связанная последовательность функторов). Такая последовательность функторов $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, что для любой точной последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ существует функториальная длинная точная последовательность

$$\cdots \rightarrow \mathcal{F}_1(A) \rightarrow \mathcal{F}_1(B) \rightarrow \mathcal{F}_1(C) \rightarrow \mathcal{F}_0(A) \rightarrow \mathcal{F}_0(B) \rightarrow \mathcal{F}_0(C)$$

Пример. Последовательность $\{L_i \mathcal{F}\}_{i \in \mathbb{N}}$ — связанная последовательность функторов.

Заметим, что $\forall i > 0 : L_i \mathcal{F}(P) = 0$, если P проективен. Это очевидным образом следует из существования резольвенты $0 \rightarrow P \rightarrow P \rightarrow 0$. Если \mathcal{F} точен справа (а мы это предполагаем), то он сохраняет ноль. Тогда $L_n \mathcal{F}$ — гомологии $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{F}(P) \rightarrow 0$, которые в нулевом члене — $\mathcal{F}(P)$, а в остальных — нулевые.

Оказывается, этого условия достаточно, чтобы определить связанную последовательность по нулевому элементу:

Теорема 1.6.3. Пусть $\{\mathcal{F}_i\}, \{\mathcal{G}_i\}$ — две связанные последовательности функторов, такие, что имеется естественный изоморфизм $\mathcal{F}_0 \cong \mathcal{G}_0$, и для любого проективного P : $\forall i > 0 : \mathcal{F}_i(P) = \mathcal{G}_i(P) = 0$.

Также предположим, что в \mathcal{A} достаточно много проективных объектов.

Тогда $\forall i : \mathcal{F}_i \cong \mathcal{G}_i$ — естественный изоморфизм.

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{A}$. Накроем A проективным, возьмём ядро, получим точную последовательность

$$0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow 0$$

Так как последовательности функторов — связаны — то имеется длинная точная последовательность:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = \mathcal{F}_1(P) & \longrightarrow & \mathcal{F}_1(A) & \longrightarrow & \mathcal{F}_0(M) & \longrightarrow & \mathcal{F}_0(P) \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ 0 = \mathcal{G}_1(P) & \longrightarrow & \mathcal{G}_1(A) & \longrightarrow & \mathcal{G}_0(M) & \longrightarrow & \mathcal{G}_0(P) \end{array}$$

Значит, имеется естественный изоморфизм ядер, $\mathcal{F}_1(A) \cong \mathcal{G}_1(A)$, тем самым, $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{G}_1$ (естественность — упражнение).

Теперь займёмся индукционным переходом:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = \mathcal{F}_i(P) & \longrightarrow & \mathcal{F}_i(A) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{i-1}(M) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{i-1}(P) = 0 \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ 0 = \mathcal{G}_i(P) & \longrightarrow & \mathcal{G}_i(A) & \longrightarrow & \mathcal{G}_{i-1}(M) & \longrightarrow & \mathcal{G}_{i-1}(P) = 0 \end{array}$$

Зажав $\mathcal{F}_i(A)$ и $\mathcal{F}_{i-1}(M)$ между двумя нулями, мы доказали, что все четыре ненулевых объекта изоморфны (естественность, опять же, доказывается несложно). \square

Следствие 1.6.4. Пусть \mathcal{F} точен справа (например $\mathcal{F} = _ \otimes M$, где M — фиксированный модуль). Пусть $\mathcal{F}_0 \cong \mathcal{F}$, где $\{\mathcal{F}_i\}$ — связанная последовательность функторов, такая, что для любого проективного $P : \mathcal{F}(P) = 0$.

По-прежнему предполагаем, что в \mathcal{A} достаточно много проективных объектов.

Тогда $\forall i \in \mathbb{N} : \mathcal{F}_i \cong L_i \mathcal{F}$.

1.7 Производные функторы для \otimes

Пусть R — необязательно коммутативное кольцо с единицей, $M \in \text{mod-}R, N \in R\text{-mod}$, напомним, что тогда $M \otimes_R N \in \mathcal{A}$.

Изучим производные функторы тензорного произведения (функтор тензорного произведения точен справа, так как он — левый сопряжённый к Hom). Обозначим $\text{LTor}_i(M, _) \stackrel{\text{def}}{=} L_i(M \otimes _)$, $\text{RTor}_i(_, N) \stackrel{\text{def}}{=} L_i(_ \otimes N)$.

Примеры.

- Изучим $\text{Tor}_1(M, R/aR)$, где R — коммутативная область целостности. Для R/aR несложно написать проективную резольвенту: $0 \rightarrow R \xrightarrow{a} R \rightarrow R/aR \rightarrow 0$ ($a(m) = am$).

Тензорно домножая на M , мы получаем $0 \rightarrow M \xrightarrow{m \otimes r \mapsto m \otimes ar} M \rightarrow M \otimes R/aR \rightarrow 0$. Так как кольцо коммутативное, то тензорное произведение — $\text{mod-}R$, поэтому $m \otimes r \mapsto m \otimes ar$ — тоже просто отображение умножения на a .

Так как естественно $M \otimes R/aR \cong M/aM \otimes R \cong M/aM$, то гомологии в среднем члене — нуль, а в левом члене — a -*кручение* в M , то есть $\{x \in M \mid ax = 0\}$.

Теорема 1.7.1. Имеет место естественный изоморфизм: $\forall i : \text{LTor}_i \cong \text{RTor}_i$.

Идея доказательства.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & P_1 \otimes Q_1 & \longrightarrow & P_0 \otimes Q_1 & \longrightarrow & M \otimes Q_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & P_1 \otimes Q_0 & \longrightarrow & P_0 \otimes Q_0 & \longrightarrow & M \otimes Q_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & P_1 \otimes N & \longrightarrow & P_0 \otimes N & \longrightarrow & M \otimes N \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Домножение на свободный объект — точный справа функтор — из дистрибутивности тензорного произведения. Домножение на проективный объект — точный справа функтор — опять же из дистрибутивности.

Все строки точны, кроме нижней, и все столбцы точны, кроме правого, в которых мы и хотим посчитать гомологии, и доказать, что они равны.

Заведём тотальный комплекс $\text{Tot}(M, N)_n := \bigoplus_{i=0}^n P_i \otimes Q_{n-i}$, и теперь надо определить дифференциал D . Необходимо, чтобы выполнялось требование $D^2 = 0$, поэтому абы какой не подойдёт.

Пусть $d_p : P \rightarrow P_{p-1}$, $d_q : Q_q \rightarrow Q_{q-1}$ — дифференциалы резольвент, определим

$$\begin{aligned}
 D_{p,q} : P_p \otimes Q_q &\rightarrow \text{Tot}(M, N)_{p+q-1} \\
 (x \otimes y) &\mapsto d_p(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes d_q(y)
 \end{aligned}$$

Теперь полный дифференциал $D_n = \bigoplus_{p+q=n} D_{p,q} : \text{Tot}(M, N)_{p+q} \rightarrow \text{Tot}_{p+q-1}$.

Упражнение 1.7.1. $D_{n-1} \cdot D_n = 0$.

Осталось показать, что гомологии нижней строки, как и гомологии правого столбца, совпадают с гомологиями тотального комплекса. \square

1.8 Производные функторы для Hom

Теперь разберёмся с функторами Hom — эти функторы являются правыми сопряжёнными к \otimes , поэтому точны слева.

Конкретнее, имеются ковариантный $\text{Hom}(M, _)$, и контравариантный $\text{Hom}(_, N)$.

Для изучения точных слева функторов будем строить последовательность правых сопряжённых функторов.

Определение 1.8.1 (Инъективный модуль Q). Такой модуль Q , что для любой инъекции $A \hookrightarrow B$, и для любого морфизма $A \rightarrow Q$, существует морфизм $B \rightarrow Q$ такой, что диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & B \\ \downarrow & \swarrow \exists & \\ Q & & \end{array}$$

Интересный факт. Инъективный модуль — делимый модуль, то есть $\forall r \in R \setminus \{0\}, q \in M : \exists x \in M : rx = q$.

В одну сторону доказательство очевидно — в качестве A надо взять кольцо R , а в качестве B — поле частных R .

В категории, где *достаточно много инъективных объектов*, двойственно проективной, строится инъективная резольвента, в которой коядро предыдущего морфизма вкладывается в следующий инъективный модуль:

$$0 \rightarrow N \rightarrow Q_0 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow \dots$$

Далее аналогично определяются правые производные функторы, в частности, имеется комплекс

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, Q_0) \rightarrow \text{Hom}(M, Q_1) \rightarrow \dots$$

Гомологии такого комплекса обозначают $\text{Ext}^i(M, N)$.

Построив проективную резольвенту для $M: \dots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$. Применяя к этой последовательности контравариантный Hom, получаем $0 \rightarrow \text{Hom}(P_0, N) \rightarrow \text{Hom}(P_1, N) \rightarrow \dots$. Гомологии этого комплекса обозначают $\text{Ext}^i(M, N)$ (это уже другой Ext, но они, как и Tor, естественно изоморфны, доказательство абсолютно аналогично)

Название Ext происходит от extensions, элементы Ext^1 находятся в биекции с классами коротких точных последовательностей $0 \rightarrow M \rightarrow ? \rightarrow N \rightarrow 0$. В качестве среднего члена всегда подойдёт $M \oplus N$, но, может быть, и ещё что-то, и за это отвечает Ext.

Для функторов Ext более высокой степени надо брать более длинные последовательности.

Лекция VII

1 апреля 2024 г.

Пусть $M, N \in \text{mod-}R$.

Определение 1.8.2 (Расширение N при помощи M). Точная последовательность $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0$.

Морфизм расширений $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0$ и $0 \rightarrow M \rightarrow X' \rightarrow N \rightarrow 0$ — такая стрелка $X \rightarrow X'$, что два получившихся треугольника коммутативны.

Теорема 1.8.1. $\text{Ext}^1(M, N)$ естественно изоморфен множеству классов изоморфизмов расширений N при помощи M .

Доказательство. Рассмотрим расширение $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0$. Запишем длинную точную последовательность для $\text{Ext}^1(_, N)$ и данной короткой точной последовательности.

$$\text{Ext}^1(N, M) \longleftarrow \text{Hom}(M, M) \longleftarrow \text{Hom}(X, M) \longleftarrow \text{Hom}(N, M) \longleftarrow 0$$

Теперь построим $x \in \text{Ext}^1(N, M) \cong \text{Ext}^1(M, N)$, как образ $\text{id} \in \text{Hom}(M, M)$.

Теперь построим стрелку обратно: накроем N проективным объектом: $0 \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow 0$.

$$0 = \text{Ext}^1(P, M) \longleftarrow \text{Ext}^1(N, M) \longleftarrow \text{Hom}(A, M) \longleftarrow \text{Hom}(P, M) \longleftarrow \text{Hom}(N, M)$$

Так как домножение на проективный модуль — точный функтор, то $\text{Ext}^1(P, M) = 0$. Теперь пусть X — пушアウト диаграммы $M \xleftarrow{\beta} A \rightarrow P$. Следующая диаграмма будет коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & P & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & X & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Далее можно проверить, что в одну сторону эти отображения взаимно обратны:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 = \text{Ext}^1(P, M) & \longleftarrow & \text{Ext}^1(N, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(A, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(P, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(N, M) \\ & & \uparrow ? & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{Ext}^1(N, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(M, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(X, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(N, M) & & \end{array}$$

$\text{id} \in \text{Hom}(M, M)$ уходит вверх при $_ \cdot \beta$ в β , далее влево — в x по определению x . Если же отправить id вправо, то он тоже уйдёт в x . **Почему?** И надо ещё проверить, что $? = \text{id}$. \square

Далее идёт отступление про то, что быть определённым с точностью изоморфизма, и быть определённым — разные вещи, и я не справился это записать.

Если же хочется изучить всё кручение M , то оказывается, $\text{Tor}_1(M, F/R) = \{x \in M \mid \exists a \in R \setminus \{0\} : ax = 0\}$ (здесь F/R — фактор R -модулей). Здесь используется, что $F/R = \varinjlim R/aR$, значит, $\text{Tor}_1(F/R, M) = \varinjlim \text{Tor}_1(R/aR, M)$.

1.9 Гомологии и когомологии групп

Пусть G — группа, A — абелева группа, на которой действует G . Иными словами, A — $\mathbb{Z}[G]$ -модуль.

Рассматриваем \mathbb{Z} , либо как кольцо, либо как $\mathbb{Z}[G]$ -модуль с тривиальным действием G .

Определим гомологии $H_n(G, A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ (верхний индекс $\mathbb{Z}[G]$ указывает, что мы работаем в категории $\mathbb{Z}[G]$ -модулей). Также определим когомологии $H^n(G, A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^n(\mathbb{Z}, A)$.

Запишем проективную резольвенту по первому аргументу.

- Пусть P_n — свободный \mathbb{Z} -модуль с базисом $\{(g_0, \dots, g_n) \mid g_i \in G\}$. По совместительству P_n — свободный $\mathbb{Z}[G]$ -модуль с базисом $\{(1, g_1, \dots, g_n) \mid g_i \in G\}$ и действием $g \cdot (g_0, \dots, g_n) = (gg_0, \dots, gg_n)$.

- Теперь определим гомоморфизмы.

$$\cdots \longrightarrow P_0 = \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Граничные гомоморфизмы определены так: $d_n(g_0, \dots, g_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (g_0, \dots, \widehat{g_i}, \dots, g_n)$. Несложно проверить, что $d_{n-1} \cdot d_n = 0$.

- Посчитаем нулевые гомологии и когомологии группы G . $H_0(G, A) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$.

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[G]/I_G$, где $I_G = \text{Ker}(\phi)$, здесь $\phi : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$ — \mathbb{Z} -линейный гомоморфизм аугментации, определённый на базисе $g \mapsto 1$. Иными словами, $I_G = \langle g - 1 | g \in G \rangle = \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g \cdot g \mid \sum_{g \in G} \alpha_g = 0 \right\}$, все суммы финитные.

Тем самым, $H_0(G, A) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \cong A/(I_G A)$ — *коинварианты*. $I_G A = \langle ga - a | g \in G, a \in A \rangle$.

- Теперь посчитаем когомологии. $H^0(G, A) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$. Всякому гомоморфизму $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ можно $\phi(1)$. Из G -линейности $\forall g \in G : \phi(1) = \phi(g \cdot 1) = g \cdot \phi(1)$, значит, $\phi(1) \in A^G \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A | \forall g \in G : ga = a\}$ — *инварианты*. Значит, нулевые когомологии — инварианты.

- $H_1(G, \mathbb{Z}) = G^{\text{ab}} \stackrel{\text{def}}{=} G/[G, G]$.

- $H^1(G, A) = \text{Der}(G, A)$ — множество скрещённых гомоморфизмов.

Скрещенный гомоморфизм — это такое отображение $\phi : G \rightarrow A$, которое обладает свойством $\phi(gh) = g \cdot \phi(h) + \phi(g)$.

- $H_2(G, \mathbb{Z}) = ?$ Предположим, что имеется точная последовательность групп $0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1$, то есть $G \cong F/R$.

$$\text{Тогда } H_2(G, \mathbb{Z}) = \frac{R \cap [F, F]}{[R, F]}.$$

Если $[G, G] = G$ (G совершенна), то существует универсальное центральное расширение $\pi : S \twoheadrightarrow G$, то есть $\text{Ker}(\pi) \in C(S)$, и

$$\begin{array}{ccc} S & \twoheadrightarrow & G \\ & \searrow \exists! & \uparrow \forall \text{ центрального расширения} \\ & & H \end{array}$$

В этом случае $H_2(G, \mathbb{Z}) = \text{Ker } \pi$. Например, в случае $G = SL_n(F) : S = \text{St}_n(F)$ — *группа Штейнберга*. Ядро $\text{St}_n(F) \twoheadrightarrow SL_n(F)$ — это $K_{2,n}(F) = H_2(G, \mathbb{Z})$. Для $n \geq 5$ от поля ничего не зависит.