Алгебра. Неофициальный конспект

Лектор: Алексей Владимирович Степанов
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

Глава 1

Гомологическая алгебра

Лекция I

12 февраля 2024 г.

1.1 Абелевы категории

Напомним некоторые определения из предыдущей лекции.

Определение 1.1.1 (Предаддитивная категория $\mathscr{A}$). $\forall A, B \in \mathscr{A} : \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(A, B)$ образует абелеву группу, и везде, где определена, выполнена дистрибутивность:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \qquad (\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

Определение 1.1.2 (Бипроизведение). Такая диаграмма, что

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift right, "\iota_1"'] & C \arrow[l, shift right, "\pi_1"'] \arrow[r, shift left, "\pi_2"] & B \arrow[l, shift left, "\iota_2"] \end{tikzcd}$$

1. $\pi_1\iota_1 = \mathrm{id}_A$.
2. $\pi_2\iota_2 = \mathrm{id}_B$.
3. $\iota_2\pi_2 + \iota_1\pi_1 = \mathrm{id}_C$.
4. $\pi_2\iota_1 = 0$.
5. $\pi_1\iota_2 = 0$.

Определение 1.1.3 (Аддитивная категория). Предаддитивная категория с финальным объектом и произведениями (любых двух объектов).

Эквивалентно, существуют инициальный объект и копроизведения, эквивалентно существуют нулевой объект и бипроизведения.

Определение 1.1.4 (Предабелева категория). Аддитивная категория, в которой у всех морфизмов есть ядро и коядро.

Определение 1.1.5 ((Ко)нормальный мономорфизм (эпиморфизм)). Он является (ко)эквалайзером (какой-то, неважно какой, пары стрелок).

Определение 1.1.6 (Абелева категория). Предабелева категория, в которой все мономорфизмы нормальны.

Пусть $\mathscr{C}$ — категория. Вспомним про категорию стрелок $\mathscr{Arr}\mathscr{C}$, в которой объекты — стрелки из $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$, множество морфизмов между ϕ, ψ — это

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{Arr}_{\mathscr{C}}}(\phi, \psi) = \{(\alpha, \beta) | \alpha : \mathrm{source}(\phi) \to \mathrm{source}(\psi), \beta : \mathrm{target}(\phi) \to \mathrm{target}(\psi), \beta\phi = \psi\alpha\}$$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\alpha"] & \bullet \arrow[d, "\beta"] \\ \bullet \arrow[r, "\psi"] & \bullet \end{tikzcd}$$

Далее будем обозначать за $\ker f$ ядро стрелки, как уравнитель стрелки и нуля, а за $\mathrm{Ker}\, f :=$ $\mathrm{source}(\ker f)$ — объект (в конкретных категориях типа $\mathscr{mod}$-R это докатегорное понятие ядра — подмодуль без стрелки-вложения).

Лемма 1.1.1. $\ker, \mathrm{coker}$ — *функторы* $\mathscr{Arr}\mathscr{A} \to \mathscr{Arr}\mathscr{A}$.

Доказательство. Достаточно доказать для ядер, для коядер двойственно.

Определим действие $\ker$ на морфизмах:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "\ker f"] \arrow[d, dashed, "\exists!\phi"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ \mathrm{Ker}\, f' \arrow[r, "\ker f'"] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \end{tikzcd}$$

$f \cdot \ker f = 0 \Rightarrow \beta \cdot f \cdot \ker f = 0 \Rightarrow f' \cdot \alpha \cdot \ker f = 0$, откуда по универсальному свойству ядра $\exists!\phi : \ker f' \cdot \phi = \alpha \cdot \ker f$.

Положим $\ker(\alpha, \beta) = (\phi, \alpha)$. Далее несложно проверить, что данное определение сохраняет композицию и id. $\square$

Определение 1.1.7 (Точный функтор)**.** Функтор, сохраняющий ядра и коядра.

Интересный факт (Теорема Фрейда — Митчелла (Freyd — Mitchell))*.* Для любой малой абелевой категории $\mathscr{A}$: $\exists R \in \mathscr{Ring}$ (необязательно коммутативное кольцо с единицей) и строгий, полный, точный функтор $\mathscr{A} \to \mathscr{mod}$-$R$.

Предложение 1.1.1. *Для всякого морфизма $f : A \to B$ найдётся пунктирная стрелка, делающая диаграмму коммутативной.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "\ker f"] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\mathrm{coker} \ker f"'] & & B \arrow[r, "\mathrm{coker}\, f"] & \mathrm{CoKer}\, f \\ & \mathrm{CoKer} \ker f \arrow[rr, dashed, "\exists!"] & & \mathrm{Ker}\, \mathrm{coker}\, f \arrow[u, "\ker \mathrm{coker}\, f"'] & \end{tikzcd}$$

Более того, в абелевой категории эта стрелка — изоморфизм.

Доказательство. Следует из эпи-моно разложения, доказанного на прошлой лекции, или из теоремы Митчелла.

Само построение пунктирной стрелки получается из универсальных свойств, а доказательство того, что это — изо — непростое. $\square$

Лемма 1.1.2. *Пусть $\mathscr{C}$ — полная подкатегория в абелевой категории $\mathscr{A}$. Следующие условия равносильны*

- *$\mathscr{C}$ является абелевой.*
- – *$0_{\mathscr{A}} \in \mathscr{C}$, здесь, как обычно, $0_{\mathscr{A}}$ — нулевой объект категории $\mathscr{A}$.*
  – *$\mathscr{C}$ содержит бипроизведение любых двух своих объектов.*

– *Ядра и коядра (взятые в $\mathscr{A}$) любых морфизмов из $\mathscr{C}$ лежат в $\mathscr{C}$.*

Доказательство.

$\Leftarrow$. Очевидно.

$\Rightarrow$. Чуть сложнее, доказывать не будем (и использовать тоже). $\square$

1.2 Компле́ксы

Если противное не оговорено, то всё происходит в абелевой категории $\mathscr{A}$, большими буквами обозначены объекты данной категории, маленькими — морфизмы.

Определение 1.2.1 (Компле́кс)**.** Такая диаграмма, что $\forall k \in \mathbb{Z} : d_k \cdot d_{k+1} = 0$.

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{d_n} C_n \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots$$

Альтернативно, комплекс можно рассматривать, как функтор из категории $(\mathbb{Z}, \geqslant)$ (полученной из частично упорядоченного множества) в $\mathscr{A}$ (при котором образ композиции любых двух нетождественных морфизмов нулевой). Таким образом, комплексы — полная подкатегория в категории этих функторов.

Ещё один, следующий, взгляд на комплексы работает только для конкретной категории, уже вложенной в R-модули.

Определение 1.2.2 (Градуированный объект)**.** $C_\bullet = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} C_n$ с морфизмом $d : C_\bullet \to C_\bullet$, таким, что $d(C_n) \subset C_{n+p}$ для некоторой фиксированной *степени объекта* p (чаще всего она равна ± 1).

Определение 1.2.3 (Дифференциальный модуль)**.** Градуированный объект $(C_\bullet, d)$ со свойством $d^2 = 0$.

Определение 1.2.4 (Комплекс)**.** Дифференциальный модуль степени -1.

При развороте стрелок получается дифференциальный модуль степени $+1$, также известный, как *кокомплекс*:

$$\cdots \xleftarrow{d^{n+2}} C^{n+1} \xleftarrow{d^{n+1}} C^n \xleftarrow{d^n} C^{n-1} \xleftarrow{d^{n-1}} \cdots$$

Предостережение. У кокомплекса несколько другая нумерация стрелок, но мы их практически не будем использовать.

Определение 1.2.5 (Сдвиг комплекса $(C_\bullet, d)$ на $p \in \mathbb{Z}$)**.** Комплекс $(C[p]_\bullet, d[p])$, где $C[p]_n = C_{n+p}$ и $d[p]_n = d_{n+p}$.

Иногда при сдвиге комплекса определяют $d[p]_n = (-1)^p d_{n+p}$, но мы так делать не будем.

Лекция II

19 февраля 2023 г.

Определение 1.2.6 (Морфизм дифференциальных модулей $\bigoplus A_n \to \bigoplus B_n$)**.** Такое $f : \bigoplus A_n \to \bigoplus B_n$, что $f(A_n) \subset B_n$, и диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} A_{n+1} & \xrightarrow{d_n^A} & A_n \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ B_{n+1} & \xrightarrow{d_n^B} & B_n \end{array}$$

На языке абелевых категорий, надо рассматривать не одно отображение f, так как отношение $f(A_n) \subset B_n$ не выражается, а серию морфизмов $f_n : A_n \to B_n$.

Для всякого морфизма f коммутативна диаграмма в категории комплексов:

$$\begin{tikzcd} A[1] \arrow[r, "d^A"] \arrow[d, "f[1]"] & A \arrow[d, "f"] \\ B[1] \arrow[r, "d^B"] & B \end{tikzcd}$$

Если рассматривать комплексы, как функторы из категории $(\mathbb{Z}, \geqslant)$, то морфизмы между комплексами — естественные преобразования между функторами.

Теорема 1.2.1. Категория комплексов абелева.

Доказательство.

> **Лемма 1.2.1.** *Если $\mathscr{C}$ — малая категория, $\mathscr{A}$ — абелева, то* $\mathrm{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{A})$ *— тоже абелева категория.*
>
> *Доказательство леммы.*
>
> Нулевой объект — функтор $\mathbb{0}$, сопоставляющий каждому объекту $0_{\mathscr{A}}$, и каждой стрелке — нуль-стрелку.
>
> Для двух функторов $\mathscr{F}, \mathscr{G}$: $(\mathscr{F} \oplus \mathscr{G})(C) = \mathscr{F}(C) \oplus \mathscr{G}(C)$.
>
> Если $\eta \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Func}(\mathscr{C},\mathscr{A})}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ (то есть η — естественное преобразование $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$), то $(\operatorname{Ker} \eta)(C) = \operatorname{Ker}(\eta_C)$.
>
> Аналогично (лемма 1.1.1), определяется ker. Аналогично с коядрами.
>
> Далее по-хорошему надо проверить, что выполняются все универсальные свойства, но мы этого делать не будем. □

Ссылаемся на (лемма 1.1.2).

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_n^A} A_n \xrightarrow{d_{n-1}^A} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow B_{n+1} \xrightarrow{d_n^B} B_n \xrightarrow{d_{n-1}^B} B_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \oplus B_{n+1} \xrightarrow{d_n^{A\oplus B}} A_n \oplus B_n \xrightarrow{d_{n-1}^{A\oplus B}} A_{n-1} \oplus B_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Если $d^A \cdot d^A = 0$, и $d^B \cdot d^B = 0$, то (из теоремы Митчелла уж точно очевидно) $d^{A\oplus B} \cdot d^{A\oplus B} = 0$.

Ядра тоже являются комплексами, так как на языке конкретных категорий это просто подмодули. Двойственно с коядрами. □

1.3 Гомологии

Дифференциал d является морфизмом комплексов $d : C[1] \to C$ (по-хорошему, $C[1]_\bullet \to C_\bullet$, но точку будем опускать):

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "d_n"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "d_{n-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & C_n \arrow[r, "d_{n-1}"] & C_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Ниже мы по произвольному комплексу C строим новые комплексы.

Определение 1.3.1 (Циклы)**.** Комплекс $Z = Z(C) \overset{def}{=} \operatorname{Ker} d[-1]$.

Определение 1.3.2 (Границы)**.** Комплекс $B = B(C) \overset{def}{=} \operatorname{Im} d[-1]$.

По определению, образ — это ядро коядра: $\operatorname{Im}\phi \overset{def}{=} \operatorname{Ker}(\operatorname{coker}\phi)$. В абелевой категории канонически $\operatorname{Im}\phi \cong \operatorname{CoIm}\phi \overset{def}{=} \operatorname{CoKer}(\ker\phi)$.

На языке конкретных категорий, так как $d^2 = 0$, то $B \subset Z$, и можно определить фактормодуль $H \coloneqq Z/B$ — *гомологии.*

То же самое можно сказать на языке универсальных свойств, хотя в будущем мы, ссылаясь на теорему Митчелла, будем всё писать исключительно в терминах элементов.

$$\begin{tikzcd}
Z[1] \arrow[r, "{z[1]}"] & C[1] \arrow[r, "d"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, dashed, "\alpha"] & C \arrow[r, "{d[-1]}"] & C[-1] & \\
 & B \arrow[r, dotted, "\beta"'] & Z \arrow[u, "z"'] \arrow[r, dotted, "\operatorname{coker}\beta"'] & H \arrow[r, dotted] & 0
\end{tikzcd}$$

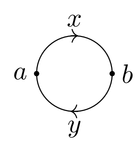
Построение H в терминах универсальных свойств. Так как $d[-1] \cdot d = 0$, то можно пропуститься через ядро: $\exists!\alpha : z \cdot \alpha = d$.

Далее, $z \cdot \alpha \cdot z[1] = d \cdot z[1] = 0$, а так как z — моно, то $\alpha \cdot z[1] = 0$. Значит, можно пропуститься через коядро, то есть $\exists!\beta : \beta b = \alpha$. Далее H определяется, как коядро β. ☐

Следствие 1.3.1. *В комплексах Z, B, H нулевые дифференциалы.*

Доказательство. Из диаграммы следует, что в комплексе Z нулевые дифференциалы. B состоит из подмодулей в Z, H — из фактормодулей, понятно, что там дифференциалы тоже нулевые. ☐

Примеры (Гомологии окружности).

- Рассмотрим окружность, как симплициальное множество: 

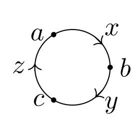
  Построим $C_0 = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ — свободная абелева группа на $\{a, b\}$, $C_1 = \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ — тоже свободная абелева группа, но на образующих $\{x, y\}$. Вместо $\mathbb{Z}$ можно было взять любое другое кольцо.

  Все остальные элементы комплекса объявляются нулями.

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

  Определим d_1, как «конец минус начало»: $\begin{cases} d_1(x) = b - a, \\ d_1(y) = a - b \end{cases}$.

  Теперь $\begin{cases} Z_0 = C_0 \\ Z_1 = \mathbb{Z}(x + y) \end{cases}$ $\begin{cases} B_0 = \mathbb{Z}(b - a) \\ B_1 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} H_0 = Z_0/B_0 = (\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b)/\mathbb{Z}(b - a) & \cong \mathbb{Z} \\ H_1 = Z_1/B_1 = \mathbb{Z}(x + y) & \cong \mathbb{Z} \end{cases}$.

- Теперь триангулируем окружность по-другому: 

 $\begin{cases} d_1(x) = b - a, \\ d_1(y) = c - b, \\ d_1(z) = a - c \end{cases}$.

  Теперь $\begin{cases} Z_0 = C_0 \\ Z_1 = \mathbb{Z}(x + y + z) \end{cases}$, $\begin{cases} B_0 = \mathbb{Z}(b - a) + \mathbb{Z}(c - b) \\ B_1 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} H_0 & \cong \mathbb{Z} \\ H_1 = \mathbb{Z}(x + y + z)/0 & \cong \mathbb{Z} \end{cases}$.

Ответ получился тот же самый, и это не случайно — есть теорема, что сингулярные/симплициальные гомологии (они равны для клеточных пространств) не зависят от триангуляции.

Упражнение 1.3.1. *Триангулировать сферу, и вычислить гомологии. Дифференциал от треугольника ABC (ориентация — порядок вершин — важна) определяют, как его обход вдоль периметра: $AB + BC + CA$.*

Теорема 1.3.1 (Длинная точная последовательность гомологий)**.** Пусть имеется точная последовательность комплексов $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$.

Существует длинная точная последовательность гомологических групп

$$\cdots \longrightarrow H' \longrightarrow H \longrightarrow H'' \longrightarrow H'[-1] \longrightarrow H[-1] \longrightarrow \cdots$$

где связующий морфизм δ будет построен в доказательстве.

Более того, это всё функториально: если есть другая короткая точная последовательность, и морфизм между ними, то по отношению к ним найдётся естественный морфизм полученных длинных точных последовательностей гомологий.

Доказательство. Сначала строим δ.

Для $z \in Z''_n$, обозначим за $[z]$ класс z в H''_n.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A'_n \arrow[r] \arrow[d, "d'"] & A_n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "d"] & A''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_{n-1} \arrow[r, "i"] & A_{n-1} \arrow[r] & A''_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Положим $\delta([z]) \coloneqq [i^{-1}(d(\pi^{-1}(z)))]$, где $\pi^{-1}(z)$ — произвольный прообраз (он есть, так как π сюръективно).

Дальше надо проверить, что определение корректно, и последовательность точна. Это типичный диаграммный поиск, который невозможно записывать, и его несложно воспроизвести самостоятельно. □

Лекция III

4 марта 2023 г.

Теперь приведём другое доказательство существования длинной точной последовательности гомологий, опирающееся на лемму о змее.

Лемма 1.3.1 (О змее)**.** *Пусть даны два комплекса $A' \to A \to A'' \to 0$ и $0 \to B' \to B \to B''$, и морфизм между ними. Тогда имеется длинная точная последовательность из пунктирных стрелок.*

Короткие стрелки получены из действия соответственных функторов (ядра и коядра), а связующий гомоморфизм определён δ определён в доказательстве, и естественен (функториален).

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Ker}\phi' \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\ker\phi'"] & \operatorname{Ker}\phi \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\ker\phi"] & \operatorname{Ker}\phi'' \arrow[d, "\ker\phi''"] \arrow[ddd, dashed, to=4-2, "\delta"] & \\
 & A' \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] \arrow[d, "\operatorname{coker}\phi'"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\operatorname{coker}\phi"] & B'' \arrow[d, "\operatorname{coker}\phi''"] & \\
 & \operatorname{CoKer}\phi' \arrow[r, dashed] & \operatorname{CoKer}\phi \arrow[r, dashed] & \operatorname{CoKer}\phi'' &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Диаграммный поиск. □

Теорема 1.3.2 (Длинная точная последовательность гомологий на бис)**.** Пусть имеется точная последовательность комплексов $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$.

Существует длинная точная последовательность гомологических групп

$$\cdots \longrightarrow H' \longrightarrow H \longrightarrow H'' \longrightarrow H'[-1] \longrightarrow H[-1] \longrightarrow \cdots$$

где связующий морфизм δ будет построен в доказательстве.

Более того, это всё функториально.

Доказательство. Длинная точная последовательность комплексов означает наличие следующей коммутативной диаграммы (где строки точны, и столбцы — комплексы)

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A'_n \arrow[r] \arrow[d, "d'_n"] & A_n \arrow[r] \arrow[d, "d_n"] & A''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & A''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Пусть циклы, границы и гомологии в комплексе A обозначаются $Z_\bullet, B_\bullet, H_\bullet$ соответственно, в A' — $Z'_\bullet, B'_\bullet, H'_\bullet$, , в A' — $Z''_\bullet, B''_\bullet, H''_\bullet$. Из коммутативности диаграммы B'_n вправо уходит в B_n, а B_n, в свою очередь — в B''_n.

Чтобы воспользоваться леммой о змее, построим следующую диаграмму, взяв коядро верхней строки, ядро — нижней, и дорисовав сверху — ядра вертикальных стрелок, снизу — коядра.

$$\begin{tikzcd}
 & H'_n \arrow[d] & H_n \arrow[d] & H''_n \arrow[d] & \\
 & A'_n/B'_n \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d}'_n"] & A_n/B_n \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d}_n"] & A''_n/B''_n \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d}''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & Z_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & Z''_{n-1} \arrow[d] & \\
 & H'_{n-1} & H_{n-1} & H''_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

Обоснуем, каким образом получилась такая диаграмма. По определению $d_n(B_n) = \{0\}$, поэтому $A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1}$ пропускается через фактор, и получается отображение $\widetilde{d}_n : A_n/B_n \to A_{n-1}$. Так как A — комплекс, то $\widetilde{d}_n(A_n/B_n) \subset Z_{n-1}$, можно сузить codomain, получая $\overline{d}_n$. По определению $H_n = Z_n/B_n$, поэтому действительно $H_n = \mathrm{Ker}(d_n)$. В свою очередь, $H_{n-1} = Z_{n-1}/B_{n-1}$, и это действительно $\mathrm{CoKer}(d_n)$.

Отображение $A_n \to A''_n$ было эпиморфизмом, после взятия коядра эпиморфизмом оно и осталось. Двойственно, $A'_{n-1} \to A_{n-1}$ было мономорфизмом, мономорфизмом оно и осталось.

Применяя лемму о змее, получаем утверждение теоремы. □

1.4 Функторы между абелевыми категориями

Пусть $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ — абелевы категории.

Определение 1.4.1 (Аддитивный функтор $\mathscr{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$)**.** Такой функтор, что $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$: $\mathscr{F}(\alpha+\beta) = \mathscr{F}(\alpha) + \mathscr{F}(\beta)$ всегда, когда определено.

Рассмотрим произвольную короткую точную последовательность $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ в $\mathscr{A}$. Подействовав на неё функтором $\mathscr{F}$, мы получим последовательность $0 \to \mathscr{F}(A') \to \mathscr{F}(A) \to \mathscr{F}(A'') \to 0$. Точность, вообще говоря, пропадёт, но если $\mathscr{F}$ сохраняет точность в каком-то члене для всех таких коротких точных последовательностей, то функтор $\mathscr{F}$ имеет соответствующее название:

1. Если всегда имеется точность в члене $\mathscr{F}(A)$, то $\mathscr{F}$ — *полуточный функтор*.
2. Если всегда имеется точность в членах $\mathscr{F}(A')$ и $\mathscr{F}(A)$, то $\mathscr{F}$ — *точный слева функтор*.
3. Если всегда имеется точность в членах $\mathscr{F}(A)$ и $\mathscr{F}(A'')$, то $\mathscr{F}$ — *точный справа функтор*.
4. Если всякая короткая точная последовательность переходит в короткую точную последовательность, то $\mathscr{F}$ — *точный функтор*.

Лемма 1.4.1. *Пусть $\mathscr{F}$ — аддитивный функтор. Следующие условия эквивалентны:*

1. *$\mathscr{F}$ точен справа.*
2. *$\mathscr{F}$ сохраняет нуль и коядра: $\mathscr{F}(0) = 0, \mathscr{F}(\operatorname{coker}(\phi)) = \operatorname{coker}(\mathscr{F}(\phi))$.*
3. *$\mathscr{F}$ сохраняет конечные копределы.*

Доказательство.

(3) ⇒ (2) Коядро — конечный копредел, поэтому очевидно.

(2) ⇒ (3) В свою очередь, копроизведение в абелевой категории — бипроизведение, а это «внутренний объект», поэтому всякий аддитивный функтор сохраняет его.

(2) ⇒ (1) Короткая точная последовательность $A' \overset{\phi}{\to} A \overset{\psi}{\to} A'' \to 0$ характеризуется свойствами $\psi = \operatorname{coker}\phi, 0 = \operatorname{coker}\psi$.

(1) ⇒ (2) Рассмотрим произвольный $\phi : A' \to A$. У него есть эпи-моно разложение $\phi = \mu\varepsilon$ (μ — моно, ε — эпи), и $\operatorname{coker}(\mu\varepsilon) = \operatorname{coker}(\mu)$, так как ε — эпиморфизм. Значит, без потери общности ϕ — мономорфизм.

Тогда последовательность $0 \to A' \overset{\phi}{\to} A \overset{\operatorname{coker}\phi}{\to} \operatorname{CoKer}\phi \to 0$ точна, и так как $\mathscr{F}$ — точен справа, то $\mathscr{F}(\operatorname{coker}\phi) = \operatorname{coker}(\mathscr{F}(\phi))$.

Также точный справа функтор сохраняет нуль: $0 \to A \overset{\mathrm{id}}{\to} A \to 0 \to 0$ переходит в $\mathscr{F}(A) \overset{\mathrm{id}}{\to} \mathscr{F}(A) \to \mathscr{F}(0) \to 0$. □

Следствие 1.4.1. *Левый сопряжённый функтор точен справа.*

Доказательство. Он сохраняет копределы. □

Копредел (который является левым сопряжённым к диагональному Δ) сохраняет копределы, значит, точен справа. Другими словами, копределы коммутируют.

К сожалению, в лемме о змее это не помогает в доказательстве того, что последовательность точна в члене $\operatorname{Ker}\phi$, так как нет точной последовательности $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$.

При доказательстве существования длинной точной последовательности гомологий на бис, мы использовали, что коядро точно справа, ядро — точно слева.

Лекция IV

11 марта 2023 г.

Факт 1.4.1. *Если точный справа функтор сохраняет мономорфизмы, то функтор точен. Двойственно, точный слева функтор, сохраняющий эпиморфизмы, точен.*

Доказательство. Условия как раз означают, что короткая точная последовательность отображается в короткую точную последовательность. □

Пусть имеются комплексы $X_\bullet$ и $X'_\bullet$, и между ними морфизмы f, g.

Определение 1.4.2 (Морфизмы f и g гомотопны)**.** Существует семейство морфизмов $s_k : X_{k-1} \to X'_k$, таких, что $f_n - g_n = d'_n s_{n+1} + s_n d_{n-1}$. При этом диаграмма ниже **не обязана** быть коммутативной.

$$\begin{tikzcd}
X_{n+1} \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, shift right, "f_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n+1}"] & X_n \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[dl, dotted, "s_{n+1}"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & X_{n-1} \arrow[r, "d_{n-2}"] \arrow[dl, dotted, "s_n"'] \arrow[d, shift right, "f_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "d_0"] \arrow[dl, dotted, "s_{n-1}"'] & X_0 \arrow[dl, dotted, "s_1"'] \arrow[d, shift right, "f_0"'] \arrow[d, shift left, "g_0"] \\
X'_{n+1} \arrow[r, "d'_n"'] & X'_n \arrow[r, "d'_{n-1}"'] & X'_{n-1} \arrow[r, "d'_{n-2}"'] & \cdots \arrow[r, "d'_0"'] & X'_0
\end{tikzcd}$$

Пишут $f \simeq g$.

А почему это то же самое, что и гомотопность в топологии?

Теорема 1.4.1. Если два морфизма комплексов $f, g : X \to X'$ гомотопны, то $H(f) = H(g)$ (гомологии являются функтором, и действуют не только на комплексах, но и на морфизмах между ними).

Доказательство. Докажем, что $H(f - g) = 0$.

Рассмотрим $\overline{x} \in H_n(X)$. У него имеется прообраз $x \in Z_n$.

Заметим, что $H(f_n - g_n)(\overline{x}) = \overline{(f_n - g_n)(x)} = \overline{d'_n(s_{n+1}(x))} + \overline{s_n(d_{n-1}(x))}$. Первое слагаемое равно нулю, так как $d'_n(\cdots) \in B_n(X')$, а второе — так как $x \in \operatorname{Ker} d_{n-1}$. □

Замечание. Если $\mathscr{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ — аддитивный функтор, и $f \simeq g$ — морфизмы комплексов с объектами из $\mathscr{A}$, то (допуская вольность речи можно писать $\mathscr{F}(f)$) $\mathscr{F}(f) \simeq \mathscr{F}(g)$.

Факт 1.4.2. *Быть гомотопными — отношение эквивалентности.*

Доказательство. Рефлексивность: $\forall n : s_n = 0$. Симметричность: $s_n \coloneqq -s_n$. Транзитивность:

$$\begin{cases} f_n - g_n = d'_n s_{n+1} + s_n d_{n-1} \\ g_n - h_n = d'_n r_{n+1} + r_n d_{n-1} \end{cases} \Rightarrow f_n - h_n = d'_n(s_{n+1} + r_{n+1}) + (s_n + r_n) d_{n-1}$$ □

Определение 1.4.3 (Два комплекса X и X' гомотопически эквивалентны)**.** Существуют морфизмы комплексов $f : X \to X'$ и $g : X' \to X$, такие, что $fg \simeq \mathrm{id}_{X'}$ и $gf \simeq \mathrm{id}_X$. Данные морфизмы f и g называют *гомотопическими эквивалентностями*.

Факт 1.4.3. *Если X и X' гомотопически эквивалентны, то $H(X) \cong H(X')$.*

Определение 1.4.4 (Квазиизоморфизм $f : X \to X'$)**.** Морфизм f, такой, что $H(f)$ — изоморфизм.

Факт 1.4.4. *Гомотопическая эквивалентность — квазиизоморфизм.*

Определение 1.4.5 (Комплекс X ацикличен)**.** X точен, то есть $H(X) = 0$.

Определение 1.4.6 (Комплекс X стягиваем)**.** $\mathrm{id}_X \simeq 0_X$.

Замечание. Из (теорема 1.4.1) следует, что стягиваемый комплекс ацикличен.

Обратное, вообще говоря, неверно. Стягиваемый комплекс сохраняется под действием функторов, а ацикличный — может и не сохраниться.

1.5 Резольвенты

Пусть $\mathscr{A}$ — абелева категория, $P \in \mathscr{A}$.

Определение 1.5.1 (Объект P проективен)**.** $\forall \phi : A \to B$: ϕ — эпи $\Rightarrow \forall \psi : P \to B$: $\exists \theta : P \to A$, причём диаграмма коммутирует. При этом θ должно найтись какое-то, не факт, что оно единственно.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\exists\theta"'] \arrow[d, "\forall\psi"] & \\ A \arrow[r, "\forall\phi"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Факт 1.5.1. *В $\mathscr{Set}$ все множества — проективные объекты.*

Теорема 1.5.1. Пусть $\mathscr{A} = R\text{-}\mathscr{mod}$. Модуль P проективен $\iff$ P является прямым слагаемым свободного модуля.

Доказательство.

1. Свободный модуль проективен: пусть $\{p_\alpha\}$ — базис P. Определим $\theta(p_\alpha) = \psi(\phi^{-1}(p_\alpha))$, где прообраз выбран произвольно, и продолжим по линейности.

2. Прямое слагаемое проективного модуля проективно. Рассмотрим каноническое вложение $M \hookrightarrow M \oplus N$, где $M \oplus N$ — проективен.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & M \oplus N \arrow[dl, dashed] \arrow[dll, bend right] \\ A \arrow[r, two heads] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

   Определим $M \oplus N \to B, (m, n) \mapsto \psi(m)$. Так как $M \oplus N$ проективен, то найдётся $M \oplus N \to A$, и композиция $M \to M \oplus N \to A$ подходит в качестве морфизма, который должен найтись из определения проективного модуля.

3. Пусть P проективен. Возьмём свободный модуль F, сюръективно накрывающий P (например, подойдёт свободный модуль на всех элементах P, но на практике, конечно, удобно брать модуль поменьше).

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ F \arrow[r, two heads, "\pi"] & P \end{tikzcd}$$

   Так как модуль проективен, то найдётся пунктирная стрелка. Значит, $F \cong P \oplus \operatorname{Ker} \pi$ ($\forall f \in F : \pi^{-1}(f) = P(f) + \operatorname{Ker} \pi$). □

Примеры.

- Пусть $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Тогда $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ является R-модулем, но $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, значит, модули $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ все проективны.
- Можно предъявить проективный модуль, исходя из топологического факта о том, что шар нельзя причесать.

Определение 1.5.2 (Проективная резольвента модуля M)**.** Ацикличный комплекс вида $\dots \to P_n \to P_{n-1} \to \dots \to P_0 \to M \to 0$, где P_i — проективные модули.

В будущем докажем, что любые две проективные резольвенты гомотопически эквивалентны.

Определение 1.5.3 (В категории $\mathscr{A}$ достаточно много проективных объектов)**.** $\forall A \in \mathscr{A}$ найдётся проективный объект $P \in \mathscr{A}$ вместе с эпиморфизмом $P \twoheadrightarrow A$.

Если в нашей категории $\mathscr{A}$ достаточно много проективных объектов, то у всякого модуля M найдётся резольвента — надо просто подряд накрывать возникающие ядра.

Лекция V

18 марта 2024 г.

1.6 Резольвенты. Левый производный функтор

Зафиксируем некоторый аддитивный функтор $\mathscr{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, который обычно будет точен справа. Пусть у объекта $A \in \mathscr{A}$ имеется проективная резольвента, которую я выделил стрелками $\rightsquigarrow$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, squiggly] & P_1 \arrow[r, squiggly] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, squiggly] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, squiggly] & 0
\end{tikzcd}$$

Иными словами, проективная резольвента — это некоторый морфизм комплексов P и $A_\bullet$. Под комплексом $A_\bullet$ подразумевается такой комплекс, в котором в нулевой градуировке сидит A, а в остальных — нули (следовательно, все дифференциалы — тоже нули).

Раз $\mathscr{F}$ точен справа, то он сохраняет нуль. Применим $\mathscr{F}$ к верхней строчке. Тогда получится комплекс вида

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{F}(P_1) \longrightarrow \mathscr{F}(P_0) \longrightarrow 0$$

Чуть ниже мы определим $L_n\mathscr{F}(A) \coloneqq H_n\mathscr{F}(P)$ — левый производный функтор, измеряющий неточность $\mathscr{F}$ — но пока, например, неясна корректность (независимость от резольвенты) такого определения.

Теорема 1.6.1. Пусть P_i проективные, сверху комплекс (и ноль в верхней строчке вообще-то неважен), снизу — точный комплекс.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & A \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Тогда найдутся пунктирные стрелки, и они определены с точностью до гомотопии.

Доказательство.

- – Сначала построим $f_i : P_i \to Q_i$.

    $Q_0 \to B$ сюръективно, значит, найдётся f_0, такое, что квадрат коммутативен.

  – Далее по индукции: пусть построены $f_0, \ldots, f_n$.

$$\begin{tikzcd}
P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_{n+1}"] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
Q_{n+1} \arrow[r] & Q_n \arrow[r, "d^Q_{n-1}"] & Q_{n-1}
\end{tikzcd}$$

    Хочется заполучить стрелку $P_{n+1} \to Q_{n+1}$, воспользовавшись проективностью P_{n+1}. Для этого надо найти сюръективное $Q_{n+1} \to ?$. Так как внизу — точная последовательность, то $Q_{n+1} \to \operatorname{Ker}(d^Q_{n-1})$ подойдёт: оно сюръективно, так как $P_{n+1} \to P_{n-1}$ нулевой, а квадрат $\begin{tikzcd} P_n \arrow[r] \arrow[d] & P_{n-1} \arrow[d] \\ Q_n \arrow[r] & Q_{n-1} \end{tikzcd}$ коммутативен. Тем самым, по определению проективного модуля $\exists f_{n+1}$.

- – Теперь пусть имеются два морфизма комплексов, продолжающих f, f_i и g_i.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f_1"'] \arrow[d, shift left, "g_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f_0"'] \arrow[d, shift left, "g_0"] & A \arrow[d, dashed, "f"] & \\
\cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Распишем разность: пусть $h_i := f_i - g_i$. Понятно, что $A \to Q_0$ надо взять нулевым.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h_0"] \arrow[dl, dashed, "s_0"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "0"] \arrow[dl, dashed, "0"'] & 0 \arrow[dl, dashed, "0"'] \\
\cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r, "d_{-1}^Q"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

s_0 строится по основному свойству проективного модуля P_0: ведь $h_0(P_0) \subset \operatorname{Ker}(d_{-1}^Q) = \operatorname{Im} d_0^Q$

- – Далее индукция. Пусть построены $s_0, \ldots, s_{n-1}$, строим s_n.

$$\begin{tikzcd}
 & P_n \arrow[r, "d_{n-1}^P"] \arrow[d, dashed, "h_n"] \arrow[dl, dashed, "s_n"'] & P_{n-1} \arrow[r, "d_{n-2}^P"] \arrow[d, dashed, "h_{n-1}"] \arrow[dl, "s_{n-1}"'] & P_{n-2} \arrow[dl, "s_{n-2}"'] \\
Q_{n+1} \arrow[r, "d_n^Q"] & Q_n \arrow[r, "d_{n-1}^Q"] & Q_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

Хочется, чтобы выполнялось $h_n = d_n^Q s_n + s_{n-1} d_{n-1}^P$, эквивалентно $d_n^Q s_n = h_n - s_{n-1} d_{n-1}^P$.

Надо проверить, что образ правой части лежит в $\operatorname{Im}(d_n^Q)$, то есть $\operatorname{Ker}(d_{n-1}^Q)$. Применим d_{n-1}^Q. Получим

$$d_{n-1}^Q h_n - d_{n-1}^Q s_{n-1} d_{n-1}^P = h_{n-1} d_{n-1}^P - (h_{n-1} - s_{n-2} d_{n-2}^P) d_{n-1}^P = 0$$

Тем самым, s_n действительно найдётся согласно свойству проективного модуля.

□

Следствие 1.6.1. *Любые две проективные резольвенты одного и того же объекта гомотопически эквивалентны.*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d, shift left, "f"] & A_\bullet \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}"] \\
Q \arrow[r] \arrow[u, shift left, "g"] & A_\bullet
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, shift left, "fg"] & A_\bullet \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}"] \\
P \arrow[r] & A_\bullet
\end{tikzcd}$$

Строим по только что доказанной теореме f, g, по теореме $fg \simeq \mathrm{id}_Q$ и $gf \simeq \mathrm{id}_Q$.

Таким образом, определение левого производного функтора L_n корректно.

С некоторой точки зрения «правильно» рассматривать категорию комплексов с точностью до гомотопической эквивалентности, назовём её $\mathscr{HoComp}(\mathscr{A})$: там объекты — $\operatorname{Obj}\mathscr{A}$, а группа морфизмов $\operatorname{Mor}_{\mathscr{HoComp}(\mathscr{A})}(P, Q) = \operatorname{Mor}(\mathscr{Comp}(\mathscr{A}))/\operatorname{Ho}(P, Q)$, где $Ho(P, Q)$ — группа морфизмов, гомотопных 0.

Примеры (Что такое L_0 от точного справа функтора).

- Предположим, что $\mathscr{F}$ точен справа. Тогда

  $$\mathscr{F}(P_1) \longrightarrow \mathscr{F}(P_0) \longrightarrow \mathscr{F}(A) \longrightarrow 0$$

  точна. $L_0\mathscr{F}(A) = H_0(\mathscr{F}(P)) = \operatorname{CoKer}(\mathscr{F}(P_1) \to \mathscr{F}(P_0))$. Если функтор точен справа, то $\operatorname{CoKer}(\mathscr{F}(P_1) \to \mathscr{F}(P_0)) = \mathscr{F}(A)$.

  Тем самым, $L_0\mathscr{F} = \mathscr{F}$.

- Обратно, если $L_0\mathscr{F} = \mathscr{F}$, то $\mathscr{F}$ сохраняет коядра, значит, точен справа. (По-хорошему, надо ещё проверить, что $L_0\mathscr{F}$ действует на морфизмах так же, но это банально).

Следствие 1.6.2. *Если P_A, P_B — проективные резольвенты A, B соответственно, и $f : A \to B$, то $\exists \widetilde{f} : P_A \to P_B$, делающий диаграмму коммутативной. Он определён однозначно с точностью до гомотопии.*

$$\begin{tikzcd} P_A \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & A_\bullet \arrow[d, "f"'] \\ P_B \arrow[r] & B_\bullet \end{tikzcd}$$

Здесь $A_\bullet$ — комплекс, где A сосредоточен в нулевом члене.

Таким образом, морфизму f объектов из $\mathscr{A}$ сопоставляется морфизм резольвент $\widetilde{f}$, а он, в свою очередь, индуцирует морфизм гомологий $H_n(P_A) \to H_n(P_B)$. Значит, конструкция L функториальна.

1.6.1 Длинная точная последовательность левых производных функторов

Зафиксируем некоторый функтор $\mathscr{F}$. Далее мы исследуем $L_n\mathscr{F}$, для упрощения записи будем писать $L_n \coloneqq L_n\mathscr{F}$.

Пусть имеется короткая точная последовательность $0 \to A \to B \to C \to 0$ в $\mathscr{A}$. Построим длинную точную последовательность производных функторов. Это так говорится? Скорее всё-таки их значений на A, B, C

$$\cdots \to L_1(A) \to L_1(B) \to L_1(C) \to L_0(A) \to L_0(B) \to L_0(C) \to \cdots$$

Для получения такой штуки было бы неплохо заполучить точную последовательность резольвент $P_A \to P_B \to P_C$, причём не абы какую, а сохраняющую свою точность под действием любого аддитивного функтора. Оказывается, это сделать несложно, и в этом нам поможет лемма о подкове.

Лемма 1.6.1 (О подкове)**.** *Пусть P — проективный модуль, все строки и столбцы (состоящие из чёрных сплошных стрелок) точны.*

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[r, dashed, "i"] \arrow[d] & Q \oplus P \arrow[r, dashed, "\pi"] \arrow[d, dashed] & P \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d, dashed] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Утверждается, что диаграмму можно достроить до коммутативной, добавив зелёные пунктирные стрелки. Новые строки и столбцы также станут точны.

Доказательство. Так как P — проективен, а g — эпи, то найдётся сечение s такое, что $gs = h_C$.

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[r, dashed, "i"] \arrow[d, "h_A"'] & Q \oplus P \arrow[r, dashed, "\pi"] \arrow[d, dashed, "h_B"'] & P \arrow[d, "h_C"] \arrow[dl, dotted, "s"'] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Определим стрелку h_B исходя из того, что квадраты должны в итоге получиться коммутативными. Из коммутативности левого квадрата $h_B(u, 0) = f(h_A(u))$. Из коммутативности правого треугольника $h_B(0, v) = h_C(v) = gs(v)$. Тем самым, подойдёт $h_B(u, v) \coloneqq f(h_A(u)) + s(v)$.

При таком определении правый квадрат будет коммутативен: $g(s(v)) = h_C(\pi(u, v)) \stackrel{?}{=} g(h_B(u, v)) = g(s(v))$, так как $gf = 0$.

Также несложно убедиться, что построенный морфизм h_B — эпи (видимо, диаграммный поиск). $\square$

Теорема 1.6.2. Для короткой точной последовательности $0 \to A \to B \to C \to 0$ существует точная последовательность резольвент $0 \to P_A \to P_B \to P_C \to 0$, точность которой сохраняется под действием любого аддитивного функтора.

Доказательство. Возьмём произвольные резольвенты P_A, P_C. Резольвенту P_B будем строить пошагово, по индукции. $(P_B)_0 \coloneqq (P_A)_0 \oplus (P_C)_0$ строится прямым применением леммы о подкове.

Далее необходимо провести индукционный переход.

$$\begin{tikzcd}
 & (P_A)_{n+1} \arrow[r, dashed, "i"] \arrow[d, two heads] & (P_A)_{n+1} \oplus (P_C)_{n+1} \arrow[r, dashed, "\pi"] \arrow[d, dashed, "d_n^B"] & (P_C)_{n+1} \arrow[d, two heads] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(d_{n-1}^A) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \operatorname{Ker}(d_{n-1}^B) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \operatorname{Ker}(d_{n-1}^C) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & (P_A)_n \arrow[r] \arrow[d, "d_{n-1}^A"] & (P_B)_n \arrow[r] \arrow[d, "d_{n-1}^B"] & (P_C)_n \arrow[r] \arrow[d, "d_{n-1}^C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(d_{n-2}^A) \arrow[r] & \operatorname{Ker}(d_{n-2}^B) \arrow[r] & \operatorname{Ker}(d_{n-2}^C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Вычленим некоторый кусочек диаграммы, и попробуем применить лемму о подкове для получения d_n^B. Для этого необходимо потребовать от стрелки $\operatorname{Ker}(d_{n-1}^B) \to \operatorname{Ker}(d_{n-1}^C)$, чтобы она была эпиморфизмом.

Докажем последнее по индукции: короткая последовательность ядер $0 \to \operatorname{Ker}(d_n^A) \to \operatorname{Ker}(d_n^B) \to \operatorname{Ker}(d_n^C) \to 0$ точна (так как ядро точно слева, то точность в остальных членах не вызывает сомнений, надо лишь проверить эпиморфность). В качестве базы здесь удобно применить лемму о змее:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(d_{-1}^A) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \operatorname{Ker}(d_{-1}^B) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \operatorname{Ker}(d_{-1}^C) \arrow[d, hook] \arrow[dddll, dashed] & \\
0 \arrow[r] & P_A \arrow[r] \arrow[d, "d_{-1}^A"] & P_B \arrow[r] \arrow[d, "d_{-1}^B"] & P_C \arrow[r] \arrow[d, "d_{-1}^C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

А индукционный переход я не знаю, ну, можно просто убедиться, использовав определение d_n^B из леммы о подковы.

Тем самым, так как прямая сумма проективных проективна, то $(P_A)_{n+1} \oplus (P_C)_{n+1} \twoheadrightarrow \operatorname{Ker} d_{n-1}^B$, и определение резольвенты B по индукции корректно.

Точность $0 \to P_A \to P_B \to P_C$ под действием всякого аддитивного функтора, конечно, сохраняется, так как $(P_B)_n = (P_A)_n \oplus (P_C)_n$, а аддитивные функторы сохраняют бипроизведение. $\square$

Следствие 1.6.3 (Длинная точная последовательность производных функторов)**.** *Для короткой точной последовательности* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *имеет место длинная точная последовательность*

$$\cdots \to L_1(A) \to L_1(B) \to L_1(C) \to L_0(A) \to L_0(B) \to L_0(C) \to \cdots$$

Доказательство. Из (теорема 1.6.2) найдётся точная последовательность проективных резольвент $0 \to P_A \to P_B \to P_C \to 0$. Применяя $\mathscr{F}$, получаем точную последовательность $0 \to \mathscr{F}(P_A) \to \mathscr{F}(P_B) \to \mathscr{F}(P_C) \to 0$.

Возьмём у $\mathscr{F}(P_A), \mathscr{F}(P_B), \mathscr{F}(P_C)$ гомологии. Составленная из них длинная точная гомологическая последовательность как раз и сконструирует искомую длинную точную последовательность левых производных функторов. $\square$

Замечание. Если $\mathscr{F}$ точен справа, то длинная точная последовательность производных функторов обрывается эпиморфизмом: $L_0(B) \to L_0(C) \to 0$.

Лекция VI

25 марта 2024 г.

Рассмотрим формальное обобщение производных функторов.

Пусть имеется семейство $\{\mathscr{F}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ функторов $\mathscr{F}_i : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$.

Определение 1.6.1 ((Левая) связанная последовательность функторов)**.** Такая последовательность функторов $\{\mathscr{F}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, что для любой точной последовательности $0 \to A \to B \to C \to 0$ существует функториальная длинная точная последовательность

$$\cdots \to \mathscr{F}_1(A) \to \mathscr{F}_1(B) \to \mathscr{F}_1(C) \to \mathscr{F}_0(A) \to \mathscr{F}_0(B) \to \mathscr{F}_0(C)$$

Пример. Последовательность $\{L_i\mathscr{F}\}_{i\in\mathbb{N}}$ — связанная последовательность функторов.

Заметим, что $\forall i > 0 : L_i\mathscr{F}(P) = 0$, если P проективен. Это очевидным образом следует из существования резольвенты $0 \to P \to P \to 0$. Если $\mathscr{F}$ точен справа (а мы это предполагаем), то он сохраняет ноль. Тогда $L_n\mathscr{F}$ — гомологии $\cdots \to 0 \to 0 \to \mathscr{F}(P) \to 0$, которые в нулевом члене — $\mathscr{F}(P)$, а в остальных — нулевые.

Оказывается, этого условия достаточно, чтобы определить связанную последовательность по нулевому элементу:

Теорема 1.6.3. Пусть $\{\mathscr{F}_i\}, \{\mathscr{G}_i\}$ — две связанные последовательности функторов, такие, что имеется естественный изоморфизм $\mathscr{F}_0 \cong \mathscr{G}_0$, и для любого проективного P: $\forall i > 0 : \mathscr{F}_i(P) = \mathscr{G}_i(P) = 0$.

Также предположим, что в $\mathscr{A}$ достаточно много проективных объектов.

Тогда $\forall i : \mathscr{F}_i \cong \mathscr{G}_i$ — естественный изоморфизм.

Доказательство. Пусть $A \in \mathscr{A}$. Накроем A проективным, возьмём ядро, получим точную последовательность

$$0 \to M \to P \to A \to 0$$

Так как последовательности функторов — связаны — то имеется длинная точная последовательность:

$$\begin{tikzcd}
0 = \mathscr{F}_1(P) \arrow[r] & \mathscr{F}_1(A) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, dashed] & \mathscr{F}_0(M) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathscr{F}_0(P) \arrow[d, leftrightarrow] \\
0 = \mathscr{G}_1(P) \arrow[r] & \mathscr{G}_1(A) \arrow[r] & \mathscr{G}_0(M) \arrow[r] & \mathscr{G}_0(P)
\end{tikzcd}$$

Значит, имеется естественный изоморфизм ядер, $\mathscr{F}_1(A) \cong \mathscr{G}_1(A)$, тем самым, $\mathscr{F}_1 \cong \mathscr{G}_1$ (естественность — упражнение).

Теперь займёмся индукционным переходом:

$$\begin{tikzcd}
0 = \mathscr{F}_i(P) \arrow[r] & \mathscr{F}_i(A) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, dashed] & \mathscr{F}_{i-1}(M) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathscr{F}_{i-1}(P) = 0 \\
0 = \mathscr{G}_i(P) \arrow[r] & \mathscr{G}_i(A) \arrow[r] & \mathscr{G}_{i-1}(M) \arrow[r] & \mathscr{G}_{i-1}(P) = 0
\end{tikzcd}$$

Зажав $\mathscr{F}_i(A)$ и $\mathscr{F}_{i-1}(M)$ между двумя нулями, мы доказали, что все четыре ненулевых объекта изоморфны (естестенность, опять же, доказывается несложно). $\square$

Следствие 1.6.4. *Пусть $\mathscr{F}$ точен справа (например $\mathscr{F} = \_ \otimes M$, где M — фиксированный модуль). Пусть $\mathscr{F}_0 \cong \mathscr{F}$, где $\{\mathscr{F}_i\}$ — связанная последовательность функторов, такая, что для любого проективного $P : \mathscr{F}(P) = 0$.*

По-прежнему предполагаем, что в $\mathscr{A}$ достаточно много проективных объектов.

Тогда $\forall i \in \mathbb{N} : \mathscr{F}_i \cong L_i\mathscr{F}$.

1.7 Производные функторы для $\otimes$

Пусть R — необязательно коммутативное кольцо с единицей, $M \in \mathscr{mod}\text{-}R, N \in R\text{-}\mathscr{mod}$, напомним, что тогда $M \otimes_R N \in \mathscr{Ab}$.

Изучим производные функторов тензорного произведения (функтор тензорного произведения точен справа, так как он — левый сопряжённый к Hom). Обозначим $\mathrm{LTor}_i(M, \_) \overset{def}{=} L_i(M \otimes \_)$, $\mathrm{RTor}_i(\_, N) \overset{def}{=} L_i(\_ \otimes N)$.

Примеры.

- Изучим $\mathrm{Tor}_1(M, R/aR)$, где R — коммутативная область целостности. Для R/aR несложно написать проективную резольвенту: $0 \to R \xrightarrow{a} R \to R/aR \to 0$ $(a(m) = am)$.

  Тензорно домножая на M, мы получаем $0 \to M \overset{m\otimes r \mapsto m \otimes ar}{\longrightarrow} M \to M \otimes R/aR \to 0$. Так как кольцо коммутативное, то тензорное произведение — $\mathscr{mod}\text{-}R$, поэтому $m \otimes r \mapsto m \otimes ar$ — тоже просто отображение умножения на a.

  Так как естественно $M \otimes R/aR \cong M/aM \otimes R \cong M/aM$, то гомологии в среднем члене — нуль, а в левом члене — *a-кручение* в M, то есть $\{x \in M | ax = 0\}$.

Теорема 1.7.1. Имеет место естественный изоморфизм: $\forall i : \mathrm{LTor}_i \cong \mathrm{RTor}_i$.

Идея доказательства.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_1 \otimes Q_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \otimes Q_1 \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes Q_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_1 \otimes Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \otimes Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_1 \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes N & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Домножение на свободный объект — точный справа функтор — из дистрибутивности тензорного произведения. Домножение на проективный объект — точный справа функтор — опять же из дистрибутивности.

Все строки точны, кроме нижней, и все столбцы точны, кроме правого, в которых мы и хотим посчитать гомологии, и доказать, что они равны.

Заведём тотальный комплекс $\mathtt{Tot}(M, N)_n \coloneqq \bigoplus_{i=0}^{n} P_i \otimes Q_{n-i}$, и теперь надо определить дифференциал D. Необходимо, чтобы выполнялось требование $D^2 = 0$, поэтому абы какой не подойдёт.

Пусть $d_p : P \to P_{p-1}$, $d_q : Q_q \to Q_{q-1}$ — дифференциалы резольвент, определим

$$\begin{aligned}
D_{p,q} : P_p \otimes Q_q &\to \mathtt{Tot}(M, N)_{p+q-1} \\
(x \otimes y) &\mapsto d_p(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes d_q(y)
\end{aligned}$$

Теперь полный дифференциал $D_n = \bigoplus\limits_{p+q=n} D_{p,q} : \mathrm{Tot}(M,N)_{p+q} \to \mathrm{Tot}_{p+q-1}$.

Упражнение 1.7.1. $D_{n-1} \cdot D_n = 0$.

Осталось показать, что гомологии нижней строки, как и гомологии правого столбца, совпадают с гомологиями тотального комплекса. □

1.8 Производные функторы для Hom

Теперь разберёмся с функторами Hom — эти функторы являются правыми сопряжёнными к $\otimes$, поэтому точны слева.

Конкретнее, имеются ковариантный $\mathrm{Hom}(M, \_)$, и контравариантный $\mathrm{Hom}(\_, N)$.

Для изучения точных слева функторов будем строить последовательность правых сопряжённых функторов.

Определение 1.8.1 (Инъективный модуль Q)**.** Такой модуль Q, что для любой инъекции $A \rightarrowtail B$, и для любого морфизма $A \to Q$, существует морфизм $B \to Q$ такой, что диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d] & B \arrow[dl, dashed, "\exists"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

Интересный факт. Инъективный модуль — делимый модуль, то есть $\forall r \in R \setminus \{0\}, q \in M : \exists x \in M : rx = q$.

В одну сторону доказательство очевидно — в качестве A надо взять кольцо R, а в качестве B — поле частных R.

В категории, где *достаточно много инъективных объектов*, двойственно проективной, строится инъективная резольвента, в которой коядро предыдущего морфизма вкладывается ? в следующий инъективный модуль:

$$0 \to N \to Q_0 \to Q_1 \to Q_2 \to \cdots$$

Далее аналогично определяются правые производные функторы, в частности, имеется комплекс

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, Q_0) \to \mathrm{Hom}(M, Q_1) \to \cdots$$

Гомологии такого комплекса обозначают $\mathrm{Ext}^i(M, N)$.

Построив проективную резольвенту для M: $\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$. Применяя к этой последовательности контравариантный Hom, получаем $0 \to \mathrm{Hom}(P_0, N) \to \mathrm{Hom}(P_1, N) \to \cdots$ Гомологии этого комплекса обозначают $\mathrm{Ext}^i(M, N)$ (это уже другой Ext, но они, как и Tor, естественно изоморфны, доказательство абсолютно аналогично)

Название Ext происходит от extensions, элементы Ext^1 находятся в биекции с классами коротких точных последовательностей $0 \to M \to ? \to N \to 0$. В качестве среднего члена всегда подойдёт $M \oplus N$, но, может быть, и ещё что-то, и за это отвечает Ext.

Для функторов Ext более высокой степени надо брать более длинные последовательности.

Лекция VII

1 апреля 2024 г.

Пусть $M, N \in \mathscr{mod}\text{-}R$.

Определение 1.8.2 (Расширение N при помощи M)**.** Точная последовательность $0 \to M \to X \to N \to 0$.

Морфизм расширений $0 \to M \to X \to N \to 0$ и $0 \to M \to X' \to N \to 0$ — такая стрелка $X \to X'$, что два получившихся треугольника коммутативны.

Теорема 1.8.1. $\mathrm{Ext}^1(M, N)$ естественно изоморфен множеству классов изоморфизмов расширений N при помощи M.

Доказательство. Рассмотрим расширение $0 \to M \to X \to N \to 0$. Запишем длинную точную последовательность для $\mathrm{Ext}^1(\_, N)$ и данной короткой точной последовательности.

$$\mathrm{Ext}^1(N, M) \longleftarrow \mathrm{Hom}(M, M) \longleftarrow \mathrm{Hom}(X, M) \longleftarrow \mathrm{Hom}(N, M) \longleftarrow 0$$

Теперь построим $x \in \mathrm{Ext}^1(N, M) \cong \mathrm{Ext}^1(M, N)$, как образ $\mathrm{id} \in \mathrm{Hom}(M, M)$.

Теперь построим стрелку обратно: накроем N проективным объектом: $0 \to A \to P \to N \to 0$.

$$0 = \mathrm{Ext}^1(P, M) \longleftarrow \mathrm{Ext}^1(N, M) \longleftarrow \mathrm{Hom}(A, M) \longleftarrow \mathrm{Hom}(P, M) \longleftarrow \mathrm{Hom}(N, M)$$

Так как домножение на проективный модуль — точный функтор, то $\mathrm{Ext}^1(P, M) = 0$. Теперь пусть X — пушаут диаграммы $M \overset{\beta}{\leftarrow} A \to P$. Следующая диаграмма будет коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & P \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & X \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Далее можно проверить, что в одну сторону эти отображения взаимно обратны:

$$\begin{tikzcd}
0 = \mathrm{Ext}^1(P, M) & \mathrm{Ext}^1(N, M) \arrow[l] \arrow[d, equal, "?"'] & \mathrm{Hom}(A, M) \arrow[l] & \mathrm{Hom}(P, M) \arrow[l] & \mathrm{Hom}(N, M) \arrow[l] \arrow[d, equal] \\
& \mathrm{Ext}^1(N, M) & \mathrm{Hom}(M, M) \arrow[l] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(X, M) \arrow[l] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(N, M) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{id} \in \mathrm{Hom}(M, M)$ уходит вверх при $\_ \cdot \beta$ в β, далее влево — в x по определению x. Если же отправить id вправо, то он тоже уйдёт в x. Почему? И надо ещё проверить, что $? = \mathrm{id}$. $\square$

Далее идёт отступление про то, что быть определённым с точностью изоморфизма, и быть определённым — разные вещи, и я не справился это записать.

Если же хочется изучить всё кручение M, то оказывается, $\mathrm{Tor}_1(M, F/R) = \{x \in M | \exists a \in R \setminus \{0\} : ax = 0\}$ (здесь F/R — фактор R-модулей). Здесь используется, что $F/R = \varinjlim R/aR$, значит, $\mathrm{Tor}_1(F/R, M) = \varinjlim \mathrm{Tor}_1(R/aR, M)$.

1.9 Гомологии и когомологии групп

Пусть G — группа, A — абелева группа, на которой действует G. Иными словами, A — $\mathbb{Z}[G]$-модуль.

Рассматриваем $\mathbb{Z}$, либо как кольцо, либо как $\mathbb{Z}[G]$-модуль с тривиальным действием G.

Определим гомологии $H_n(G, A) \overset{def}{=} \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ (верхний индекс $\mathbb{Z}[G]$ указывает, что мы работаем в категории $\mathbb{Z}[G]$-модулей). Также определим когомологии $H^n(G, A) \overset{def}{=} \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$.

Запишем проективную резольвенту по первому аргументу.

- Пусть P_n — свободный $\mathbb{Z}$-модуль с базисом $\{(g_0, \ldots, g_n) | g_i \in G\}$. По совместительству P_n — свободный $\mathbb{Z}[G]$-модуль с базисом $\{(1, g_1, \ldots, g_n) | g_i \in G\}$ и действием $g \cdot (g_0, \ldots, g_n) = (gg_0, \ldots, gg_n)$.

- Теперь определим гомоморфизмы.

$$\cdots \longrightarrow P_0 = \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}$$

  Граничные гомоморфизмы определены так: $d_n(g_0, \dots, g_n) = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i (g_0, \dots, \widehat{g}_i, \dots, g_n)$. Несложно проверить, что $d_{n-1} \cdot d_n = 0$.

- Посчитаем нулевые гомологии и когомологии группы G. $H_0(G, A) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$.

  $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[G]/I_G$, где $I_G = \operatorname{Ker}(\phi)$, здесь $\phi : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ — $\mathbb{Z}$-линейный гомоморфизм аугментации, определённый на базисе $g \mapsto 1$. Иными словами, $I_G = \langle g - 1 | g \in G \rangle = \left\{ \sum\limits_{g \in G} \alpha_h \cdot g \middle| \sum\limits_{g \in G} \alpha_g = 0 \right\}$, все суммы финитные.

  Тем самым, $H_0(G, A) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \cong A/(I_G A)$ — *коинварианты*. $I_G A = \langle ga - a | g \in G, a \in A \rangle$.

- Теперь посчитаем когомологии. $H^0(G, A) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$. Всякому гомоморфизму $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ можно $\phi(1)$. Из G-линейности $\forall g \in G : \phi(1) = \phi(g \cdot 1) = g \cdot \phi(1)$, значит, $\phi(1) \in A^G \overset{def}{=} \{a \in A | \forall g \in G : ga = a\}$ — *инварианты*. Значит, нулевые когомологии — инварианты.

- $H_1(G, \mathbb{Z}) = G^{\mathrm{ab}} \overset{def}{=} G/[G, G]$.

- $H^1(G, A) = \operatorname{Der}(G, A)$ — множество скрещённых гомоморфизмов.

  Скрещенный гомоморфизм — это такое отображение $\phi : G \to A$, которое обладает свойством $\phi(gh) = g \cdot \phi(h) + \phi(g)$.

- $H_2(G, \mathbb{Z}) =?$ Предположим, что имеется точная последовательность групп $0 \to R \to F \to G \to 1$, то есть $G \cong F/R$.

  Тогда $H_2(G, \mathbb{Z}) = \frac{R \cap [F, F]}{[R, F]}$.

  Если $[G, G] = G$ (G совершенна), то существует универсальное центральное расширение $\pi : S \twoheadrightarrow G$, то есть $\operatorname{Ker}(\pi) \in C(S)$, и

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "\exists!"'] & G \\ & H \arrow[u, dashed, "\forall \text{ центрального расширения}"'] \end{tikzcd}$$

  В этом случае $H_2(G, \mathbb{Z}) = \operatorname{Ker} \pi$. Например, в случае $G = SL_n(F) : S = \mathrm{St}_n(F)$ — *группа Стейнберга*. Ядро $\mathrm{St}_n(F) \twoheadrightarrow SL_n(F)$ — это $K_{2,n}(F) = H_2(G, \mathbb{Z})$. Для $n \geqslant 5$ от поля ничего не зависит.

Глава 2

Теория Галуа

Лекция VIII

15 апреля 2024 г.

2.1 Базовые понятия про расширения полей

Мы будем изучать расширения полей, и базовое поле будем обозначать F (от английского Field), а расширенное — K (от немецкого Körper). Имеется теоретико-множественное включение $F \subset K$, и включение полей обозначается K/F (это не надо путать с факторкольцом, никаких факторов здесь не берётся, просто общепринятое обозначение).

K является векторным пространством над F, и $\dim_F K \overset{def}{=} [K : F]$ — *степень расширения*.

Для элемента $\alpha \in K$ поле $F(\alpha)$ — наименьшее подполе в K, содержащее F и α.

Лемма 2.1.1 (О простых расширениях)**.** *Либо $F(\alpha) \cong F(t)$ — поле дробно-рациональных функций, оно же поле частных $K[t]$, его общий элемент имеет вид $\frac{p}{q}$ ($p \in F[t], q \in F[t]^*$).*

Либо $F(\alpha) \cong F[t]/(p)$, где $p \in F[t]$ — неприводимый. В этом случае $\deg p$ — степень расширения.

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм F-алгебр $\phi : F[t] \to F(\alpha), t \mapsto \alpha$.

- Если $\operatorname{Ker}\phi = \{0\}$, то $\operatorname{Im}\phi \cong F[t]$. Тем самым, $F(\alpha) \supset \operatorname{Im}\phi$, а раз $F(\alpha)$ — поле, то оно содержит и поле частных $Q(\operatorname{Im}\phi) \cong Q(F[t])$.

  Так как $F[t]$ — наименьшее подполе, то $F(\alpha) \cong F(t)$.

- Иначе, так как многочлены — PID — то $\operatorname{Ker}\phi = p \cdot F[t]$, и $\operatorname{Im}\phi \cong F[t]/(p)$. То, что p неприводим, легко видеть от противного: если $p = rs$, то один из r, s ассоциирован с p, иначе в кольце появляются делители нуля.

  Тем самым, раз p неприводим, то (p) — максимальный идеал, откуда $\operatorname{Im}\phi \cong F[t]/(p)$ — уже поле. Базисом $F[t]/(p)$ над K является, например, $(1, \bar{t}, \ldots, \bar{t}^{\deg(p)-1})$.

□

В первом случае $F(\alpha) \cong F(t)$ элемент $\alpha \in K$ называется *трансцендентным*.

Во втором случае $F(\alpha) \cong F[t]/(p)$ элемент $\alpha \in K$ называется *алгебраическим*. В таком случае $p \in F[t]$ — *минимальный многочлен* α. Таким образом, $F(\alpha) = F[\alpha]$, где $F[\alpha]$ — наименьшее кольцо в K, содержащее F и α.

В случае расширений колец вместо слова алгебраический используют *целый* при дополнительном условии унитальности минимального многочлена.

Определение 2.1.1 (Алгебраическое расширение K/F)**.** Такое расширение, что $\forall\alpha \in K$: α — алгебраический. Иначе ($\exists\alpha \in K$: α — трансцендентный) расширение называют трансцендентным.

Определение 2.1.2 (Конечное расширение F/K)**.** Расширение конечной степени: $[K : F] < \infty$.

Конечные и алгебраические расширения тесно связаны между собой, но, конечно, существует бесконечное алгебраическое расширение. Например, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{p} \middle| p \in \mathbb{P}\right)$ — имеет бесконечную степень над $\mathbb{Q}$, так как корни из простых чисел линейно независимы над $\mathbb{Q}$ (что ещё надо обосновать).

Лемма 2.1.2. *Пусть имеется композиция расширений $L/K/F$. Тогда $[L : F] = [L : K] \cdot [K : F]$.*

Доказательство. Пусть $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ — базис K над F, и $(b_\beta)_{\beta\in B}$ — базис L над K.

Тогда несложно видеть, что $(a_\alpha \cdot b_\beta)_{\alpha\in A,\beta\in B}$ — базис L над F. □

Теорема 2.1.1. Следующие условия равносильны

1. Расширение K/F конечно.
2. K/F — алгебраическое и конечнопрождённое.
3. $K = F[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, где все α_i алгебраичны над F.

Доказательство.

(3) $\Rightarrow$ (1) Индукция по n.

База: $n = 0 \Rightarrow K = F$.

Переход: $F[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = F[\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}][\alpha_n]$. Так как α_n алгебраично над F, то оно алгебраично и над $F[\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}]$ (впрочем, степень трансцендентности при увеличении поля может стать меньше).

(1) $\Rightarrow$ (2) **Лемма 2.1.3.** *Любой элемент конечного расширения K/F алгебраический.*

Доказательство леммы.

Рассмотрим $\alpha \in K$. Так как расширение конечно, то $1, \alpha, \alpha^2, \dots$ линейно зависимы. Выбрав линейную зависимость $\beta_0 + \beta_1\alpha + \dots + \beta_d\alpha^d = 0$. Тогда $\beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_d t^d$ аннулирует α, то есть ядро ϕ из доказательства (лемма 2.1.1) ненулевое. □

Пусть $[K : F] = d$, значит, K имеет базис $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ над F. Тогда K порождено элементами $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ даже просто как векторное пространство, а не как F-алгебра □

(2) $\Rightarrow$ (3) Тавтологично.

2.1.1 Алгебраическое замыкание одного поля в другом

Пусть имеется расширение полей K/F, тогда $\operatorname{Int}_K F \overset{def}{=} \{\alpha \in K | \alpha \text{ алгебраичен над } F\}$ — целое (алгебраическое) замыкание F в K.

$\operatorname{Int}_K F$ является полем: $\forall\alpha, \beta \in \operatorname{Int}_K F : \alpha - \beta, \alpha + \beta, \alpha \cdot \beta, \frac{\alpha}{\beta}$ (последнее при $\beta \neq 0$) лежат в $F[\alpha, \beta]$, а это — конечное расширение согласно (теорема 2.1.1).

Пусть $X \subset K$, где по-прежнему K/F.

Определение 2.1.3 (X алгебраически независим над F)**.** $\forall f \in F[t_1, \dots, t_m], \forall x_1, \dots, x_m \in X$ (где x_i попарно различны): $f(x_1, \dots, x_m) \neq 0$.

Иными словами, отображение из универсальной F-алгебры, порождённой элементами X в $F[X]$ (определённое на образующих $x \mapsto x$) имеет нулевое ядро.

Определение 2.1.4 (Линейная оболочка X над F)**.** $\langle X\rangle \overset{def}{=} \operatorname{Int}_K F(X)$.

Определение 2.1.5 (X — (алгебраический) базис расширения K/F)**.** Алгебраически независимое X такое, что $\langle X\rangle = K$. При этом $|X|$ называется *степенью трансцендентности* K/F

Пример. В кольце $F(t)$: $\{t\}$ — базис трансцендентности.

Для алгебраического базиса X верны те же аксиомы, что и для базиса векторных полей:

1. todo
2. todo
3. todo

Теорема 2.1.2. Степень трансцендентности не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Аналогично подобному факту из линейной алгебры. □

2.1.2 Поле разложения

Пусть F — поле, $f \in F[t]$.

Определение 2.1.6 (Поле разложения f над F)**.** Поле F_f/F, в котором f раскладывается на линейные множители, и вкладывающееся (**не факт**, что единственным образом) в любое другое поле, обладающее тем же свойством.

Примеры.

- $F = \mathbb{R}, f = t^2 + 1$. В этом случае $F_f \cong \mathbb{C}$.
- $F = \mathbb{Q}, f = t^3 - 2$. В этом случае $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ — не поле разложения, оно вкладывается в $\mathbb{R}$, а f в $\mathbb{R}$ на линейные множители не раскладывается.

  Надо присоединить ещё какой-то корень f, достаточно присоединить какой-то $\sqrt[3]{1}$, отличный от 1; это то же самое, что присоединить $\sqrt{-3}$. Тем самым, поле разложения $\mathbb{Q}_f \cong \mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3}\right]$.

Теорема 2.1.3. Для любого $f \in F[t]$ существует его поле разложения.

Доказательство. Индукция по $\deg f$.

<u>База:</u> $\deg f = 1 \Rightarrow F_f = F$.

<u>Переход:</u> Пусть $f = pg$, где p — неприводим.

Пусть $E \coloneqq F[t]/(p)$. В E: $\alpha \coloneqq \bar{t} = t + (p)$ — корень p.

Над E: $f(t) = (t - \alpha) \cdot h(t)$ для некоторого $h : \deg h = \deg f - 1$. Положим $F_f \coloneqq E_h$, E_h существует по индукционному предположению.

Теперь пусть K/F — другое поле, в котором f раскладывается на линейные множители. Сначала устроим вложение $E \hookrightarrow K$, отправив α в любой корень p. Такой корень найдётся в K, так как $F[t]$ — UFD.

При этом h раскладывается в K на линейные множители, по индукции E_h вкладывается в K. □

Теорема 2.1.4. Пусть K — поле, в котором $f \in F[t]$ раскладывается на линейные множители. Тогда K — поле разложения $f \iff K \cong F[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, где α_i — корни f.

Доказательство. В одну сторону видно, что построенное в (теорема 2.1.3) поле разложения действительно порождено корнями f.

В другую сторону, можно устроить гомоморфизм $K \to F[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, он сюръективен почему-то и инъективен. □

Лекция IX
16 апреля 2024 г.

todo

Лекция X
22 апреля 2024 г.

Предложение 2.1.1. *Пусть E/F — алгебраическое расширение, и L/F — такое расширение, что $\forall f \in F[t]$: f раскладывается на линейные множители в $L[t]$. Обозначим $K \coloneqq \mathrm{Int}_L F$. Тогда*

1. *Существует вложение $\phi : E \hookrightarrow L$ над F.*
2. *Для всякого вложения ϕ: $\phi(E) \subset K$.*
3. *Если E алгебраически замкнуто, то $\phi(E) = K$.*

Доказательство.

1. Образуем множество $\mathscr{X} \coloneqq \left\{(\widetilde{F}, \phi) \middle| F \subset \widetilde{F} \subset E, \phi : \widetilde{F} \hookrightarrow L\right\}$. На $\mathscr{X}$ введём частичный порядок: $(F', \phi') \preceq (F'', \phi'') \iff F' \subset F''$ и $\phi''\big|_{F'} = \phi'$.

   $\mathscr{X}$ непусто, так как $(F, F \hookrightarrow L) \in \mathscr{X}$.

   Убедимся, что здесь применима лемма Цорна: если $(F_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ — цепь, то $\widetilde{F} \coloneqq \bigcup\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$ вместе с $\widetilde{\phi}$ — верхняя грань (где $\widetilde{\phi}$ определено так: и $\forall x \in \widetilde{F} : \widetilde{\phi}(x) \coloneqq \phi_\alpha(x)$ для произвольного α, такого, что $x \in F_\alpha$).

   Тем самым, имеется максимальный элемент $(\widetilde{F}, \widetilde{\phi}) \in \mathscr{X}$. Предположим, что $\widetilde{F} \neq E$, то есть $\exists \theta \in E \setminus \widetilde{F}$. Пусть $f \in F[t]$ — минимальный многочлен θ в F, и $g \in \widetilde{F}[t]$ — минимальный многочлен θ над $\widetilde{F}$.

   Отождествим $\widetilde{F}$ с его образом $\widetilde{\phi}(\widetilde{F}) \subset L$ (ϕ инъективно, как гомоморфизм полей).

   В L многочлен f раскладывается на линейные множители. Так как $g \mid f$, то $g \in L[t]$ тоже раскладывается на линейные множители, то есть $\exists \alpha \in L : g(\alpha) = 0$. Согласно универсальному свойству простого расширения: $\widetilde{F}[\theta] \cong \widetilde{F}[t]/(g)$, то есть $\exists! \psi : \widetilde{F}[\theta] \to \widetilde{F}[\alpha]$ — гомоморфизм полей над $\widetilde{F}$, такой, что $\psi(\theta) = \alpha$.

2. Предположим, что ϕ существует. Корень $f \in F[t]$ переходит в корень, поэтому ϕ сохраняет множество алгебраических элементов, откуда $\phi(E \subset K$.

3. Рассмотрим $\beta \in K$, это корень некоторого унитального многочлена $f \in F[t]$. В E многочлен f раскладывается на линейные множители $f(t) = (t - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (t - \alpha_n)$, где $\alpha_i \in E$. Применяя индуцированный $\phi : E[t] \to L[t]$ к данному разложению, получаем $f(t) = (t - \phi(\alpha_1)) \cdot \ldots \cdot (t - \phi(\alpha_n))$. Подставляя β, получаем, нуль. Значит, $\beta = \phi(\alpha_i)$ для некоторого i. □

Следствие 2.1.1. *Любое алгебраическое расширение F вкладывается в алгебраическое замыкание F.*

Следствие 2.1.2. *Алгебраическое замыкание F вкладывается в любое алгебраически замкнутое поле, содержащее F.*

Следствие 2.1.3. *Алгебраическое замыкание единственно с точностью до* ***не единственного*** *изоморфизма.*

2.1.3 Сепарабельность

Пусть F — поле, $f \in F[t]$.

Определение 2.1.7 (Сепарабельный многочлен f)**.** f не имеет кратных корней в F^{alg}.

Так как кратные корни — это корни $\gcd(f, f')$, то условие сепарабельности эквивалентно условию $\gcd(f, f') = 1$.

Если $f = \prod\limits_{i=1}^{n} f_i$, где f_i неприводимы, то f сепарабелен $\iff$ все f_i различны и сепарабельны. Неприводимый же многочлен на сепарабельность проверять легко: $\deg f' < \deg f$, поэтому при $\deg f > 0$: $\gcd(f, f') \neq 1 \iff f' = 0$ (что бывает только в конечной характеристике).

Теперь пусть E/F — алгебраическое расширение полей.

Определение 2.1.8 ($\alpha \in E$ сепарабелен над F)**.** Минимальный многочлен α сепарабелен.

Определение 2.1.9 (Расширение E/F сепарабельно)**.** $\forall \alpha \in E$: $\alpha \in E$ сепарабелен над F.

Интересный факт. $F = E^{\mathrm{Aut}(E/F)} \iff E/F$ — сепарабельное расширение. Здесь $\mathrm{Aut}(E/F)$ — автоморфизмы E, тождественные над F, и для $G \subset \mathrm{Aut}(E/F)$: $E^G \overset{def}{=} \{x \in E | \forall g \in G : gx = x\}$ — множество точек, оставляемых под действием G на месте.

Примеры (Сепарабельные и несепарабельные расширения).

- Любое расширение поля характеристики нуль сепарабельно.
- Пусть $F \coloneqq \mathbb{F}_p(t^p)$, $E \coloneqq \mathbb{F}_p(t)$. Рассмотрим многочлен $x^p - t^p \in F[x]$. Он неприводим над F, так как даже свободный член неприводим, и видно, что все ассоциированные с t^p — не корни.

  Но над $E : x^p - t^p = (x - t)^p$, то есть $x^p - t^p \in F[x]$ неприводим и несепарабелен. И действительно, $(x^p - t^p)' = px^{p-1} = 0$.

Определение 2.1.10 (Совершенное поле F)**.** Любое алгебраическое расширение F сепарабельно.

Упражнение 2.1.1. *Верно ли, что F совершенно $\iff$ эндоморфизм Фробениуса $\mathrm{Frob} : F \to F, x \mapsto x^p$ сюръективен?*

Примеры.

- Если $\mathrm{char}\, F = 0$, то F совершенно.
- Если $|F| < \infty$, то F совершенно.

  Доказательство. Рассмотрим $\theta \in F^{\mathrm{alg}}$. $|F[\theta]| = q^n$, где $q \coloneqq |F|$. Тогда $\theta^{q^n-1} = 1$ (теорема Лагранжа для мультипликативной группы $F[\theta]^*$), то есть θ — корень $t^{q^n-1} - 1$.

  Этот многочлен взаимно прост со своей производной: $\left(t^{q^n-1} - 1\right)' = (q^n - 1)t^{q^n-2} = -t^{q^n-2}$, и $\gcd(-t^{q^n-2}, t^{q^n-1} - 1) = 1$.

  Минимальный многочлен θ делит $t^{q^n-1} - 1$, значит, он тоже не имеет кратных корней. $\square$

Предложение 2.1.2. *Пусть E/F — алгебраическое расширение полей. Следующие условия эквивалентны:*

1. *E/F несепарабельно.*
2. *Минимальный многочлен некоторого $\theta \in E$ несепарабелен.*
3. *$\exists f \in F[t]$ — неприводимый в $F[t]$, такой, что $f' = 0$, причём f имеет корень в E.*
4. *$\exists f \in F[t]$ — неприводимый в $F[t]$, такой, что $\exists g \in F[t] : f(t) = g(t^p)$, причём f имеет корень E.*

Доказательство. (1) $\iff$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) очевидно. $\square$