Дифференицальная геометрия. Неофициальный конспект

Лектор: Нина Дмитриевна Лебедева
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

Глава 1

Риманова геометрия

Лекция I

14 февраля 2024 г.

1.1 Гладкие многообразия

Определение 1.1.1 (Топологическое многообразие)**.** Хаусдорфово топологическое пространство M со счётной базой, такое что $\forall x \in M : \exists U \ni x : U \sim \mathbb{R}^n$. Данное число n называется *размерностью* многообразия, пишут $\dim M = n$, или часто пишут это число верхним индексом: M^n.

Далее пусть M^n — топологическое многообразие.

Определение 1.1.2 (Карта)**.** Пара из открытого $U \subset M^n$, и гомеоморфизма $\phi : U \to \Omega$, где открытое $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. U называется *носителем карты*.

«В половине случаев в литературе картой называется обратное отображение».

Определение 1.1.3 (Атлас)**.** Набор карт (U_i, ϕ_i), таких, что $\bigcup\limits_i U_i = M$.

Пусть даны две карты (U, ϕ) и (V, ψ). Далее удобно считать, что их носители пересекаются: $U \cap V \neq \varnothing$, иначе определение не несёт смысла.

Определение 1.1.4 (Отображение перехода)**.** Отображение $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$.

Определение 1.1.5 (Карты (U, ϕ) и (V, ψ) согласованы)**.** Отображение перехода и ему обратное гладкие.

Определение 1.1.6 (Гладкий атлас)**.** Атлас, такой, что любые две карты согласованы.

Далее все атласы предполагаются гладкими.

Определение 1.1.7 (Атласы эквивалентны)**.** Их объединение (то есть все карты из первого и из второго атласа вместе взятые) — тоже гладкий атлас.

Предложение 1.1.1. *Эквивалентность атласов — отношение эквивалентности.*

Определение 1.1.8 (Гладкая структура на многообразии)**.** Максимальный гладкий атлас (атлас, к которому нельзя добавить карт).

Замечание. К атласу можно добавить произвольное количество карт, согласованных с теми, что в атласе, и они будут согласованы между собой. В частности, для задания гладкой структуры достаточно произвольного атласа A: в A можно добавить всевозможные карты, согласованные с картами из A, и он станет максимальным.

Определение 1.1.9 (Гладкое многообразие)**.** Многообразие с гладкой структурой.

Примеры (Атласы).

- Стандартная гладкая структура на $\mathbb{R}^n$ задаётся атласом $\{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})\}$.
- В частности, стандартная структура на $\mathbb{R}^1$ задаётся атласом $\{(\mathbb{R}^1, [x \mapsto x])\}$.
- Можно задать нестандартную структуру на $\mathbb{R}^1$: $\{(\mathbb{R}^1, [x \mapsto x^3])\}$.

  Предостережение. Это действительно гладкая структура, хотя обратное отображение $[x \mapsto x^{1/3}]$ не гладкое. Тем не менее, определение и не требует гладкости от него.

- Пусть $f = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ \frac{1}{2}x, & x \leqslant 0 \end{cases}$. Тогда $\{(\mathbb{R}^1, f)\}$ — тоже гладкий атлас на $\mathbb{R}^1$.

  Тем не менее, любые два атласа из приведённых выше атласов на $\mathbb{R}^1$ не эквивалентны — отображения перехода получаются не гладкими.

- Гладкая структура на сфере задаётся двумя картами: пусть S^2 — сфера с северным полюсом N и южным S, пусть f, g — стереографические проекции с данными полюсами. Тогда $\{(S^2 \setminus \{N\}, f), (S^2 \setminus \{S\}, g)\}$ — атлас.

Замечание. Если M — гладкое многообразие, и открытое $W \subset M$, то на W естественным образом определена гладкая структура, наследующаяся с M.

1.1.1 Гладкие отображения

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия, A_M, A_N — соответствующие атласы. Рассмотрим отображение $f : M \to N$.

Определение 1.1.10 (Координатное представление f в картах (U, ϕ) на M и (V, ψ) на N)**.** Такое $\widetilde{f} : \phi(U) \to \psi(V)$, что диаграмма коммутативна везде, где определена (то есть $\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ на $\phi(U \cap f^{-1}(V))$).

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & V \arrow[d, "\psi"] \\ \phi(U) \arrow[r, "\widetilde{f}"] & \psi(V) \end{tikzcd}$$

Далее считаем, что $f : M \to N$ непрерывна (эквивалентно, все координатные представления непрерывны).

Определение 1.1.11 (f гладкое)**.** Любое координатное представление — гладкое.

Определение 1.1.12 (f — гладкое в точке $x \in M$)**.** Найдётся окрестность $U_x \ni x$ и карты (U, ϕ), (V, ψ) (где $V \ni y \coloneqq f(x)$), такие, что $U_x \subset U$ и сужение на U_x координатного представления f — гладко.

Свойства (Гладкие отображения).

- Гладкость в точке не зависит от выбора карт.
- Гладкость отображения не зависит от выбора атласа в одном классе эквивалентности.
- Отображение гладкое $\iff$ оно гладкое в любой точке. На лекции было доказательство $\Leftarrow$.
- Пусть $f : M \to N, g : N \to K$ гладкие. Тогда их композиция $g \circ f$ гладкая.
- Тождественное отображение гладкое, если в образе и прообразе выбраны эквивалентные атласы.
- Определение гладкости отображения совпадает с определением гладкости из матанализа (если считать, что $M \subset \mathbb{R}^n$ открыто, и порождающий атлас состоит из тождественной карты)

Определение 1.1.13 (Диффеоморфизм $f : M \to N$)**.** Гладкое f, такое, что f^{-1} — тоже гладкое.

Определение 1.1.14 (Многообразия M и N диффеоморфны)**.** Между ними существует диффеоморфизм.

Понятно, что диффеоморфность — отношение эквивалентности.

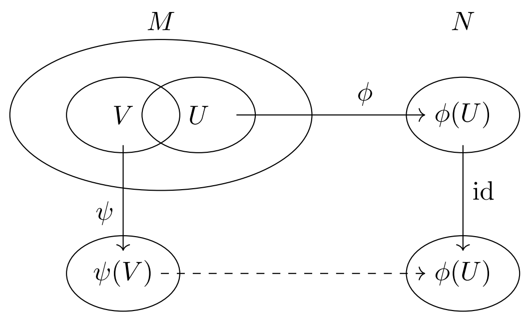
Утверждение 1.1.1. *Если* $M^m \overset{\text{диф}}{\sim} N^n$, *то* $m = n$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную $x \in M$. Пусть $f : M \to N$ — диффеоморфизм, пусть $\widetilde{f}$ — его координатное представление. Тогда $\widetilde{f}^{-1}$ — координатное представление f^{-1}, откуда $\widetilde{f}^{-1}$ — тоже гладкое. Рассмотрим дифференциал $\mathrm{d}_{\widetilde{f}}(x, \_)$, это изоморфизм векторных пространств, значит, $m = n$. $\square$

По умолчанию всегда считается, что на $\mathbb{R}^m$ введена стандартная гладкая структура.

Предложение 1.1.2. *Пусть M — гладкое многообразие, тогда карта — диффеоморфизм между U и $\phi(U)$. Обратно, любой диффеоморфизм между открытым подмножеством $W \subset M$ и областью $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — карта.*

Доказательство.



Гладкость карты, как диффеоморфизма, эквивалентна тому, что карта согласована с остальными в атласе: пунктирная стрелка $\psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ одновременно является отображением перехода между картами (U, ϕ) и (V, ψ), и координатным представлением ϕ в картах $(V, \psi), (U, \mathrm{id})$. $\square$

Следствие 1.1.1. *Диффеоморфизм $f : M \to N$ задаёт естественную биекцию между картами M и картами N (а ещё между (максимальными) атласами M и (максимальными) атласами N).*