

Комплексный анализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

1	Комплексный анализ	2
1.1	Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути	3
1.1.1	Про дифференциальные формы	3
1.1.2	Про интегрирование	3
1.1.3	Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути	4
1.1.4	Сумма путей	4
1.1.5	Альтернативное определение	4
1.1.6	(Не)зависимость от параметризации	6
1.2	Условия существования первообразной у дифференциальной формы	6

Глава 1

Комплексный анализ

Лекция I

16 февраля 2024 г.

Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, где открытое $G \subset \mathbb{C}$.

Определение 1.0.1 (f голоморфна в $z_0 \in G$). $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \stackrel{\text{def}}{=} f'(z_0)$.

Во втором семестре мы проверяли, что $f = u + iv$ (где $u, v : G \rightarrow \mathbb{R}$) голоморфна в $z_0 \iff f$ дифференцируема в вещественном смысле, и выполняются уравнения Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Определение 1.0.2 (f аналитична в G). $\forall z_0 \in G : \exists c_j \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \quad (*)$$

где ряд сходится не только при $z = z_0$.

Теорема 1.0.1. f аналитична в $G \iff f$ голоморфна во всех точках G .

Доказательство.

\Rightarrow . Доказали во втором семестре, несложно.

\Leftarrow . Скоро займёмся, время пришло. □

Из представления (*) следует, что производная в точке z считается почленно: $f'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j (z - z_0)^{j-1}$. В частности, отсюда получается, что $f'(z_0) = c_1$, и вообще $f^{(n)}(z_0) = j! \cdot c_j$.

Вскоре мы увидим, что ситуация разительно отличается от вещественной: в вещественном случае были разные классы — дифференцируемые функции, C^1 , C^∞ , аналитичные, и множество промежуточных классов.

В комплексном же случае, если функция хотя бы один раз дифференцируема, то окажется, что этого достаточно, чтобы она была не просто дифференцируема, а непрерывно дифференцируема, бесконечно дифференцируема, и даже аналитична.

1.1 Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути

1.1.1 Про дифференциальные формы

Определение 1.1.1 (Линейная функция $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$). $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n : l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y)$.

Определение 1.1.2 (Линейная форма на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$). Функция двух переменных $\phi : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, линейная по второму аргументу.

В пространстве \mathbb{R}^n имеется базис (e_j) : $h = e_1 h_1 + \dots + e_n h_n$.

Тем самым, $\phi(x, h) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\phi(x, e_j)}_{=: g_j(x)} h_j = \sum_{j=1}^n g_j(x) h_j$.

Введём *базисные линейные формы* $dx_j(u, h) = h_j$, игнорирующую первую координату, и возвращающую j -ю компоненту второго аргумента. Теперь $\phi(x, h)$ разложилась в сумму $\sum_{j=1}^n g_j dx_j$.

Пример. Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ — дифференцируемая в G функция. Заметим, что её дифференциал $d_f(x, _)$ — в точности линейная форма на G .

При разложении по базису получится $d_f(x, _) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j$.

Вскоре мы увидим, что далеко не всякая линейная форма является чьим-то дифференциалом.

Если $\phi = \sum_{j=1}^n g_j dx_j$ — дифференциал функции f , то непременно $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Тот факт, что ϕ является дифференциалом f , можно сказать наоборот: f является первообразной ϕ .

1.1.2 Про интегрирование

Рассмотрим монотонную функцию $\Phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Как и при определении стилтьесовой длины, будем считать, что Φ определена на некотором открытом множестве, содержащем $\langle a, b \rangle$. Обозначим за l_Φ стилтьесову длину, отвечающую функции Φ .

Пускай λ_Φ — продолжение стилтьесовой длины l_Φ по Лебегу — Каратеодори.

Она, как водится, определена на некоторой Σ -алгебре, в которой есть борелевские множества, но измеримы могут быть и какие-то другие множества, зависящие от конкретной функции Φ .

Примеры.

- Так, функция $\phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ порождает дельта-меру δ_0 , относительно которой все множества измеримы.

Кроме того, эта мера сингулярна относительно стандартной меры Лебега.

- Может показаться, что так происходит из-за разрывности ϕ , но это не так.

Рекурсивно определим канторову лестницу $C : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$:



Построив по данной функции стилтьесову длину λ_C , мы получим меру, сосредоточенную на канторовом множестве меры нуль.

Её носитель — само канторово множество, так как на всех отрезках вне канторова множества λ_C равна нулю. Она сингулярна относительно стандартной меры Лебега на \mathbb{R} , и её измеримые множества разительно отличаются от измеримых множеств меры Лебега.

По мере Стильеса можно интегрировать: если v является λ_Φ измеримой (в частности, измерима по Борелю, или даже непрерывна), то определён интеграл $\int_{\langle a, b \rangle} v d\lambda_\Phi$. Иногда пишут просто $\int_{\langle a, b \rangle} v d\Phi$.

Теперь пусть $I = [a, b]$, и $\Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. В таком случае $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$, где некие Φ_1, Φ_2 возрастают. Можно определить знакопеременную меру $\lambda_\Psi \stackrel{def}{=} \lambda_{\Phi_1} - \lambda_{\Phi_2}$, понятно, что определение корректно.

1.1.3 Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути

Пускай $\gamma : [a, b] \rightarrow G \subset \mathbb{R}^n$ — спрямляемый путь (путь конечной длины). Пускай $U = \sum_{j=1}^n u_j dx_j$ — дифференциальная форма в области G . Если не сказано противное, будем считать, что u_j — непрерывные функции.

Определение 1.1.3 (Интеграл от U вдоль пути γ). $\int_\gamma U \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^n \int_{[a, b]} u_j(\gamma(t)) d\gamma_j(t)$.

Здесь $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Так как путь спрямляем, то все γ_j — ограниченной вариации, каждая порождает свою меру Стильеса, и определение интегрирует композицию $U \circ \gamma$ по данной мере.

1.1.4 Сумма путей

Пускай имеются два отрезка $[a, c]$ и $[c, d]$, и на них заданы пути $\gamma_1 : [a, c] \rightarrow G$, $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow G$. Предположим, что $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$.

Тогда можно устроить путь $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a, d] \rightarrow G$, $\gamma(t) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, c] \\ \gamma_2(t), & t \in [c, d] \end{cases}$.

Замечание. Интеграл аддитивен по множеству: $\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} U = \int_{\gamma_1} U + \int_{\gamma_2} U$.

1.1.5 Альтернативное определение

Далее мы не интересуемся никакими чудесами вроде канторовых лестниц, и считаем, что Φ такова, что λ_Φ абсолютно непрерывна относительно стандартной меры Лебега.

А раз так, то по теореме Радона — Никодима \exists суммируемая $w : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что

$$\lambda_\Phi(e) = \int_e w(x) dx \quad (+)$$

Факт 1.1.1. Формула (+) заведомо верна, если Φ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, тогда $w = \Phi'$.

Доказательство. Введём меру $\nu(e) = \int_e \Phi'(x) dx$, заданную на измеримых по Лебегу множествах. Φ' непрерывна, и, следовательно, измерима.

Если $\langle c, d \rangle \subset [a, b]$, то $\nu(\langle c, d \rangle) = \int_{\langle c, d \rangle} \Phi'(x) dx = \Phi(d) - \Phi(c) = l_\Phi(\langle c, d \rangle)$.

Таким образом, из теоремы единственности, продолжение l_Φ по Лебегу — Каратеодори совпадает с $\int_e \Phi'(x) dx$. \square

Замечание. Утверждение (факт 1.1.1) сохраняет силу, если Φ непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема.

Далее где-то используется Φ , а где-то β , надо убедиться, что это везде одно и то же, и заменить. Пускай $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, кусочно непрерывно дифференцируемая: $\exists a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$, такие, что β непрерывно дифференцируема на $[a_s, a_{s+1}]$ при $0 \leq s < k$. Введём $\rho(e) = \int_e \beta'(x) dx$ — это знакопеременная вещественная мера.

У данной меры возникают (см. разложение Хана) положительная и отрицательная части $\rho_+(e) \stackrel{def}{=} \int_e (\beta')_+(x) dx$ и $\rho_-(e) \stackrel{def}{=} \int_e (\beta')_-(x) dx$

Если обозначить за $\Phi_+(t) = \int_0^t (\beta')_+(x) dx$ и $\Phi_-(t) = \int_0^t (\beta')_-(x) dx$, то окажется, что соответствующие меры Стильеса совпадают с ρ_+ и ρ_- .

Более того, $\beta = \Phi_+ - \Phi_-$ — получили разложение функции ограниченной вариации в положительную и отрицательную части.

Замечание. Это разложение экономнее, чем то, которое было получено ранее — ранее в качестве Φ_+ выбиралась вариация Φ .

Если всё, что написано выше, собрать вместе, то получится

$$\boxed{\int_{[s,t]} v d\Phi = \int_{[s,t]} v(x) \beta'(x) dx}$$

Далее «гладкий» используется, как синоним к непрерывно-дифференцируемому.

Следствие 1.1.1 (Можно считать определением). Если $U = \sum_{j=1}^n u_j dx_j$ — дифференциальная форма в G с непрерывными коэффициентами, а $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow G$ — спрямляемый кусочно-гладкий путь, то

$$\int_\gamma U = \sum -j = 1^n \int_a^b u_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt$$

1.1.6 (Не)зависимость от параметризации

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — кусочно-гладкий путь, $\psi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ — гладкий гомеоморфизм.

Теперь $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$ — перепараметризация γ

Лемма 1.1.1. Для всякой формы U :

$$\int_{\tilde{\gamma}} U = \pm \int_{\gamma} U$$

Знак $+$ выбирается, если ψ возрастает, и $-$ — если убывает.

Доказательство. Предположим, что γ — гладкий путь, иначе применяем к кусочкам гладкости по отдельности.

$$\int_{\tilde{\gamma}} U = \sum_{j=1}^n \int_c^d u_j(\gamma(\psi(t))) \gamma'_j(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt = \left\| \begin{array}{l} \tau = \phi(t) \\ d\tau = \phi'(t) dt \end{array} \right\| = \sum_{j=1}^n \int_{\psi(c)}^{\psi(d)} \gamma(\tau) \gamma'_j(\tau) d\tau \quad \square$$

Про ψ также можно считать, что это он не гладкий, а лишь кусочно-гладкий.

Тем самым, можно определить сумму путей для непересекающихся отрезков: для двух путей $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow G, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow G$ (при условии $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$) можно один их отрезков-прообразов линейным возрастающим преобразованием перевести в отрезок, соприкасающийся со вторым (например, $t \mapsto t + (b - c)$).

Также есть понятие обратного пути $\gamma_{-1}(t) = \gamma(a + b - t)$. Для любой формы U :

$$\int_{\gamma \oplus \gamma_{-1}} U = \int_{\gamma} U + \int_{\gamma_{-1}} U = \int_{\gamma} U - \int_{\gamma} U = 0$$

1.2 Условия существования первообразной у дифференциальной формы

Теорема 1.2.1. Если у дифференциальной формы U в открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ имеется первообразная F , то для всякого кусочно-гладкого пути $\gamma : [a, b] \rightarrow G$

$$\int_{\gamma} U = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Доказательство. $U = \sum_{j=1}^n g_j dx_j$, где $g_j(w) = \frac{\partial}{\partial x_j} F(w)$. Считаем, что путь гладкий.

$$\int_{\gamma} U = \sum_{j=1}^n \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_j} F(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Если же путь всего лишь кусочно-гладкий, то надо разбить отрезок на подотрезки гладкости, и сложить. \square

Следствие 1.2.1. Если у дифференциальной формы U есть первообразная, то её интегралы по всем путям с данными началом и концом, равны.

Оказывается, верно и обратное.

Теорема 1.2.2. Пусть дифференциальная форма U с непрерывными коэффициентами в области G такова, что $\forall x, y \in G : \exists c \in \mathbb{C} : \forall$ кусочно-гладкого пути γ с началом в x и концом в y : $\int_{\gamma} U = c$.

Эквивалентно, для всех замкнутых кусочно-гладких путей $\gamma : \int_{\gamma} U = 0$.

Тогда U обладает первообразной.

Доказательство.

Лемма 1.2.1. Пусть G — область в \mathbb{R}^n , тогда любые две её точки можно соединить ломаной (кусочно-линейным путём).

Доказательство леммы.

□

□