Алгебра. Неофициальный конспект

Лектор: Алексей Владимирович Степанов
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

Глава 1

Гомологическая алгебра

Лекция I

12 февраля 2024 г.

1.1 Абелевы категории

Напомним некоторые определения из предыдущей лекции.

Определение 1.1.1 (Предаддитивная категория $\mathscr{A}$). $\forall A, B \in \mathscr{A} : \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(A, B)$ образует абелеву группу, и везде, где определена, выполнена дистрибутивность:

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \qquad (\beta+\gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

Определение 1.1.2 (Бипроизведение). Такая диаграмма, что

$$A \underset{\iota_1}{\overset{\pi_1}{\leftrightarrows}} C \underset{\iota_2}{\overset{\pi_2}{\rightleftarrows}} B$$

1. $\pi_1\iota_1 = \mathrm{id}_A$.
2. $\pi_2\iota_2 = \mathrm{id}_B$.
3. $\iota_2\pi_2 + \iota_1\pi_1 = \mathrm{id}_C$.
4. $\pi_2\iota_1 = 0$.
5. $\pi_1\iota_2 = 0$.

Определение 1.1.3 (Аддитивная категория). Предаддитивная категория с финальным объектом и произведениями (любых двух объектов).

Эквивалентно, существуют инициальный объект и копроизведения, эквивалентно существуют нулевой объект и бипроизведения.

Определение 1.1.4 (Предабелева категория). Аддитивная категория, в которой у всех морфизмов есть ядро и коядро.

Определение 1.1.5 ((Ко)нормальный мономорфизм (эпиморфизм)). Он является (ко)эквалайзером (какой-то, неважно какой, пары стрелок).

Определение 1.1.6 (Абелева категория). Предабелева категория, в которой все мономорфизмы нормальны.

Пусть $\mathscr{C}$ — категория. Вспомним про категорию стрелок $\mathscr{Arr}\mathscr{C}$, в которой объекты — стрелки из $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$, множество морфизмов между ϕ, ψ — это

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{Arr}\mathscr{C}}(\phi,\psi) = \{(\alpha,\beta) | \alpha : \mathrm{source}(\phi) \to \mathrm{source}(\psi), \beta : \mathrm{target}(\phi) \to \mathrm{target}(\psi), \beta\phi = \psi\alpha\}$$

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\alpha"] & \bullet \arrow[d, "\beta"] \\
\bullet \arrow[r, "\psi"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Далее будем обозначать за $\ker f$ ядро стрелки, как уравнитель стрелки и нуля, а за $\mathrm{Ker}\, f :=$ $\mathrm{source}(\ker f)$ — объект (в конкретных категориях типа $\mathscr{mod}$-R это докатегорное понятие ядра — подмодуль без стрелки-вложения).

Лемма 1.1.1. $\ker, \mathrm{coker}$ — *функторы* $\mathscr{Arr}\mathscr{A} \to \mathscr{Arr}\mathscr{A}$.

Доказательство. Достаточно доказать для ядер, для коядер двойственно.

Определим действие $\ker$ на морфизмах:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "\ker f"] \arrow[d, dashed, "\exists! \phi"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[d, "\beta"] \\
\mathrm{Ker}\, f' \arrow[r, "\ker f'"] & A' \arrow[r, "f'"] & B'
\end{tikzcd}$$

$f \cdot \ker f = 0 \Rightarrow \beta \cdot f \cdot \ker f = 0 \Rightarrow f' \cdot \alpha \cdot \ker f = 0$, откуда по универсальному свойству ядра $\exists! \phi : \ker f' \cdot \phi = \alpha \cdot \ker f$.

Положим $\ker(\alpha, \beta) = (\phi, \alpha)$. Далее несложно проверить, что данное определение сохраняет композицию и id. □

Определение 1.1.7 (Точный функтор)**.** Функтор, сохраняющий ядра и коядра.

Интересный факт (Теорема Фрейда — Митчелла (Freyd — Mitchell)). Для любой малой абелевой категории $\mathscr{A}$: $\exists R \in \mathscr{Ring}$ (необязательно коммутативное кольцо с единицей) и строгий, полный, точный функтор $\mathscr{A} \to \mathscr{mod}$-$R$.

Предложение 1.1.1. *Для всякого морфизма $f : A \to B$ найдётся пунктирная стрелка, делающая диаграмму коммутативной.*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "\ker f"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{coker}\ker f"'] & B \arrow[r, "\mathrm{coker}\, f"] & \mathrm{CoKer}\, f \\
& \mathrm{CoKer}\ker f \arrow[r, dashed, "\exists!"] & \mathrm{Ker}\,\mathrm{coker}\, f \arrow[u, "\ker\mathrm{coker}\, f"'] &
\end{tikzcd}$$

Более того, в абелевой категории эта стрелка — изоморфизм.

Доказательство. Следует из эпи-моно разложения, доказанного на прошлой лекции, или из теоремы Митчелла.

Само построение пунктирной стрелки получается из универсальных свойств, а доказательство того, что это — изо — непростое. □

Лемма 1.1.2. *Пусть $\mathscr{C}$ — полная подкатегория в абелевой категории $\mathscr{A}$. Следующие условия равносильны*

- *$\mathscr{C}$ является абелевой.*
- – *$0_{\mathscr{A}} \in \mathscr{C}$, здесь, как обычно, $0_{\mathscr{A}}$ — нулевой объект категории $\mathscr{A}$.*
  – *$\mathscr{C}$ содержит бипроизведение любых двух своих объектов.*

– *Ядра и коядра (взятые в $\mathscr{A}$) любых морфизмов из $\mathscr{C}$ лежат в $\mathscr{C}$.*

Доказательство.

$\Leftarrow$. Очевидно.

$\Rightarrow$. Чуть сложнее, доказывать не будем (и использовать тоже). □

1.2 Компле́ксы

Если противное не оговорено, то всё происходит в абелевой категории $\mathscr{A}$, большими буквами обозначены объекты данной категории, маленькими — морфизмы.

Определение 1.2.1 (Компле́кс)**.** Такая диаграмма, что $\forall k \in \mathbb{Z} : d_k \cdot d_{k+1} = 0$.

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{d_n} C_n \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots$$

Альтернативно, комплекс можно рассматривать, как функтор из категории $(\mathbb{Z}, \geqslant)$ (полученной из частично упорядоченного множества) в $\mathscr{A}$ (при котором образ композиции любых двух нетождественных морфизмов нулевой). Таким образом, комплексы — полная подкатегория в категории этих функторов.

Ещё один, следующий, взгляд на комплексы работает только для конкретной категории, уже вложенной в R-модули.

Определение 1.2.2 (Градуированный объект)**.** $C_\bullet = \bigoplus\limits_{n \in \mathbb{Z}} C_n$ с морфизмом $d : C_\bullet \to C_\bullet$, таким, что $d(C_n) \subset C_{n+p}$ для некоторой фиксированной *степени объекта* p (чаще всего она равна ± 1).

Определение 1.2.3 (Дифференциальный модуль)**.** Градуированный объект $(C_\bullet, d)$ со свойством $d^2 = 0$.

Определение 1.2.4 (Комплекс)**.** Дифференциальный модуль степени -1.

При развороте стрелок получается дифференциальный модуль степени $+1$, также известный, как *кокомплекс*:

$$\cdots \xleftarrow{d^{n+2}} C^{n+1} \xleftarrow{d^{n+1}} C^n \xleftarrow{d^n} C^{n-1} \xleftarrow{d^{n-1}} \cdots$$

Предостережение. У кокомплекса несколько другая нумерация стрелок, но мы их практически не будем использовать.

Определение 1.2.5 (Сдвиг комплекса $(C_\bullet, d)$ на $p \in \mathbb{Z}$)**.** Комплекс $(C[p]_\bullet, d[p])$, где $C[p]_n = C_{n+p}$ и $d[p]_n = d_{n+p}$.

Иногда при сдвиге комплекса определяют $d[p]_n = (-1)^p d_{n+p}$, но мы так делать не будем.

Лекция II

19 февраля 2023 г.

Определение 1.2.6 (Морфизм дифференциальных модулей $\bigoplus A_n \to \bigoplus B_n$)**.** Такое $f : \bigoplus A_n \to \bigoplus B_n$, что $f(A_n) \subset B_n$, и диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
A_{n+1} \arrow[r, "d_n^A"] \arrow[d, "f"] & A_n \arrow[d, "f"] \\
B_{n+1} \arrow[r, "d_n^B"] & B_n
\end{tikzcd}$$

На языке абелевых категорий, надо рассматривать не одно отображение f, так как отношение $f(A_n) \subset B_n$ не выражается, а серию морфизмов $f_n : A_n \to B_n$.

Для всякого морфизма f коммутативна диаграмма в категории комплексов:

$$\begin{tikzcd} A[1] \arrow[r, "d^A"] \arrow[d, "f[1]"] & A \arrow[d, "f"] \\ B[1] \arrow[r, "d^B"] & B \end{tikzcd}$$

Если рассматривать комплексы, как функторы из категории $(\mathbb{Z}, \geqslant)$, то морфизмы между комплексами — естественные преобразования между функторами.

Теорема 1.2.1. Категория комплексов абелева.

Доказательство.

> **Лемма 1.2.1.** *Если $\mathscr{C}$ — малая категория, $\mathscr{A}$ — абелева, то* $\mathrm{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{A})$ *— тоже абелева категория.*
>
> *Доказательство леммы.*
>
> Нулевой объект — функтор $\mathbb{0}$, сопоставляющий каждому объекту $0_{\mathscr{A}}$, и каждой стрелке — нуль-стрелку.
>
> Для двух функторов $\mathscr{F}, \mathscr{G}$: $(\mathscr{F} \oplus \mathscr{G})(C) = \mathscr{F}(C) \oplus \mathscr{G}(C)$.
>
> Если $\eta \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{A})}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ (то есть η — естественное преобразование $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$), то $(\mathrm{Ker}\, \eta)(C) = \mathrm{Ker}(\eta_C)$.
>
> Аналогично (лемма 1.1.1), определяется ker. Аналогично с коядрами.
>
> Далее по-хорошему надо проверить, что выполняются все универсальные свойства, но мы этого делать не будем. □

Ссылаемся на (лемма 1.1.2).

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_n^A} A_n \xrightarrow{d_{n-1}^A} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow B_{n+1} \xrightarrow{d_n^B} B_n \xrightarrow{d_{n-1}^B} B_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \oplus B_{n+1} \xrightarrow{d_n^{A \oplus B}} A_n \oplus B_n \xrightarrow{d_{n-1}^{A \oplus B}} A_{n-1} \oplus B_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Если $d^A \cdot d^A = 0$, и $d^B \cdot d^B = 0$, то (из теоремы Митчелла уж точно очевидно) $d^{A \oplus B} \cdot d^{A \oplus B} = 0$.

Ядра тоже являются комплексами, так как на языке конкретных категорий это просто подмодули. Двойственно с коядрами. □

1.3 Гомологии

Дифференциал d является морфизмом комплексов $d : C[1] \to C$ (по-хорошему, $C[1]_\bullet \to C_\bullet$, но точку будем опускать):

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "d_n"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "d_{n-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & C_n \arrow[r, "d_{n-1}"] & C_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Ниже мы по произвольному комплексу C строим новые комплексы.

Определение 1.3.1 (Циклы)**.** Комплекс $Z = Z(C) \overset{def}{=} \mathrm{Ker}\, d[-1]$.

Определение 1.3.2 (Границы)**.** Комплекс $B = B(C) \overset{def}{=} \operatorname{Im} d[-1]$.

По определению, образ — это ядро коядра: $\operatorname{Im}\phi \overset{def}{=} \operatorname{Ker}(\operatorname{coker}\phi)$. В абелевой категории канонически $\operatorname{Im}\phi \cong \operatorname{CoIm}\phi \overset{def}{=} \operatorname{CoKer}(\ker\phi)$.

На языке конкретных категорий, так как $d^2 = 0$, то $B \subset Z$, и можно определить фактормодуль $H \coloneqq Z/B$ — *гомологии*.

То же самое можно сказать на языке универсальных свойств, хотя в будущем мы, ссылаясь на теорему Митчелла, будем всё писать исключительно в терминах элементов.

$$\begin{tikzcd}
Z[1] \arrow[r, "z[1]"] & C[1] \arrow[r, "d"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, dashed, "\alpha"] & C \arrow[r, "d[-1]"] & C[-1] \\
& B \arrow[r, dotted, "\beta"'] & Z \arrow[u, "z"'] \arrow[r, dotted, "\operatorname{coker}\beta"'] & H \arrow[r, dotted] & 0
\end{tikzcd}$$

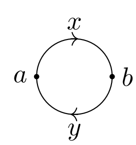
Построение H в терминах универсальных свойств. Так как $d[-1] \cdot d = 0$, то можно пропуститься через ядро: $\exists! \alpha : z \cdot \alpha = d$.

Далее, $z \cdot \alpha \cdot z[1] = d \cdot z[1] = 0$, а так как z — моно, то $\alpha \cdot z[1] = 0$. Значит, можно пропуститься через коядро, то есть $\exists! \beta : \beta b = \alpha$. Далее H определяется, как коядро β. $\square$

Следствие 1.3.1. *В комплексах Z, B, H нулевые дифференциалы.*

Доказательство. Из диаграммы следует, что в комплексе Z нулевые дифференциалы. B состоит из подмодулей в Z, H — из фактормодулей, понятно, что там дифференциалы тоже нулевые. $\square$

Примеры (Гомологии окружности).

- Рассмотрим окружность, как симплициальное множество: 

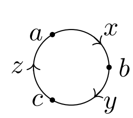
  Построим $C_0 = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ — свободная абелева группа на $\{a, b\}$, $C_1 = \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ — тоже свободная абелева группа, но на образующих $\{x, y\}$. Вместо $\mathbb{Z}$ можно было взять любое другое кольцо.

  Все остальные элементы комплекса объявляются нулями.

  $$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

  Определим d_1, как «конец минус начало»: $\begin{cases} d_1(x) = b - a, \\ d_1(y) = a - b \end{cases}$.

  Теперь $\begin{cases} Z_0 = C_0 \\ Z_1 = \mathbb{Z}(x + y) \end{cases}$ $\begin{cases} B_0 = \mathbb{Z}(b - a) \\ B_1 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} H_0 = Z_0/B_0 = (\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b)/\mathbb{Z}(b - a) & \cong \mathbb{Z} \\ H_1 = Z_1/B_1 = \mathbb{Z}(x + y) & \cong \mathbb{Z} \end{cases}$.

- Теперь триангулируем окружность по-другому:  $\begin{cases} d_1(x) = b - a, \\ d_1(y) = c - b, \\ d_1(z) = a - c \end{cases}$.

  Теперь $\begin{cases} Z_0 = C_0 \\ Z_1 = \mathbb{Z}(x + y + z) \end{cases}$, $\begin{cases} B_0 = \mathbb{Z}(b - a) + \mathbb{Z}(c - b) \\ B_1 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} H_0 & \cong \mathbb{Z} \\ H_1 = \mathbb{Z}(x + y + z)/0 & \cong \mathbb{Z} \end{cases}$.

Ответ получился тот же самый, и это не случайно — есть теорема, что сингулярные/симплициальные гомологии (они равны для клеточных пространств) не зависят от триангуляции.

Упражнение 1.3.1. *Триангулировать сферу, и вычислить гомологии. Дифференциал от треугольника ABC (ориентация — порядок вершин — важна) определяют, как его обход вдоль периметра: $AB + BC + CA$.*

Рассмотрим точную последовательность комплексов

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

Теорема 1.3.1. Существует длинная точная последовательность гомологических групп

$$\cdots \longrightarrow H' \longrightarrow H \longrightarrow H'' \longrightarrow H'[-1] \longrightarrow H[-1] \longrightarrow \cdots$$

где связующий морфизм δ будет построен в доказательстве.

Более того, это всё функториально: если есть другая короткая точная последовательность, и морфизм между ними, то по отношению к ним найдётся естественный морфизм полученных длинных точных последовательностей гомологий.

Доказательство. Сначала строим δ.

Для $z \in Z''_n$, обозначим за $[z]$ класс z в H''_n.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A'_n \arrow[r] \arrow[d, "d'"] & A_n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "d"] & A''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_{n-1} \arrow[r, "i"] & A_{n-1} \arrow[r] & A''_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Положим $\delta([z]) \coloneqq [i^{-1}(d(\pi^{-1}(z)))]$, где $\pi^{-1}(z)$ — произвольный прообраз (он есть, так как π сюръективно).

Дальше надо проверить, что определение корректно, и последовательность точна. Это типичный диаграммный поиск, который невозможно записывать, и его несложно воспроизвести самостоятельно. $\square$