Матанализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков
Конспектировал Леонид Данилевич

II семестр, весна 2023 г.

Оглавление

Лекция I

14 февраля 2023 г.

0.1 Вокруг формулы Тейлора

В данном разделе будет небольшое количество фактов, касающихся формулы Тейлора.

0.1.1 Достаточное условие существования локального экстремума

Пусть $I = \langle a, b\rangle, f : I \to \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$.

Как известно, если у f в x_0 локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$ (если производная в x_0 вообще существует).

Иногда непонятно, экстремум является локальным максимумом или минимумом.

Теорема 0.1.1. Если функция f дифференцируема в некоторой окрестности $x_0 \in (a, b)$, причём $\exists f'(x_0) = 0$ и $\exists f''(x_0)$, то

- если $f''(x_0) > 0$, то f имеет локальный минимум в x_0;
- если $f''(x_0) < 0$, то f имеет локальный максимум в x_0.

Доказательство. Запишем формулу Тейлора для f в точке x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{0}(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \alpha(x)$$

Запишем определение о-маленького:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) : |\alpha(x)| < \varepsilon \cdot (x - x_0)^2$$

Рассмотрим случай $f''(x_0) > 0$. Получаем $f(x) \geqslant f(x_0) + \left(\frac{1}{2}f''(x_0) - \varepsilon\right)(x - x_0)^2$ при $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$. Приняв $\varepsilon = \frac{1}{4}f''(x_0)$ получаем, что $f(x)$ в достаточно маленькой проколотой окрестности x_0 больше $f(x_0)$, откуда x_0 — действительно точка локального минимума. □

0.1.2 Ряд Ньютона

Рассмотрим формулу Тейлора для $h(x) \coloneqq (1 + x)^r$ в окрестности 0, где $r \in \mathbb{R}$. Можно считать, что h определена на всех $x > -1$.

$$h^{(n)}(x) = r \cdot (r - 1) \cdot \ldots \cdot (r - n + 1)(1 + x)^{r-n} \Rightarrow h^{(n)}(0) = r \cdot \ldots \cdot (r - n + 1)$$

Запишем формулу Тейлора до x^k с остаточным членом в форме Лагранжа.

$$h(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{r \cdot \ldots \cdot (r - n + 1)}{n!}x^n + \frac{r \cdot \ldots \cdot (r - k)}{(k + 1)!}(1 + \xi)^{r-k-1} \cdot x^{k+1}, \text{ где } \xi \in [0, x]$$

Для краткости обозначим $\binom{r}{n} \overset{def}{=} \frac{r \cdot \ldots \cdot (r-n+1)}{n!}x^n$, что согласуется с определением биномиальных коэффициентов для натуральных чисел.

В таком случае формула упрощается до

$$h(x) = \sum_{n=0}^{k} \binom{r}{n} x^n + \binom{r}{k+1}(1 + \xi)^{r-k-1} \cdot x^{k+1}$$

Откинув остаточный член, получим *ряд Ньютона* — ряд Тейлора для функции $(1 + x)^r$ в окрестности 0: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n}x^n$.

Факт 0.1.1. *Если $|x| < 1$, то ряд Ньютона сходится (к какому-то числу). Более того, для произвольного $b \in (0, 1)$, ряд сходится равномерно при $x \in [-b, b]$.*

Доказательство. Оценим числа $\left|\binom{r}{n}\right|$. Из определения видно, что

$$\binom{r}{n+1} = \binom{r}{n} \cdot \frac{r-n}{n+1} = \binom{r}{n}\left(\frac{r+1}{n+1} - 1\right)$$

1. $n \leqslant r$. Первые несколько слагаемых ряда, на сходимость не влияют.
2. $n > r \geqslant 0$. Здесь $\left|\frac{r+1}{n+1} - 1\right| < 1$, откуда $\left|\binom{r}{n}\right| \leqslant C_r^+$, где C_r^+ — максимальный биномиальный коэффициент $\binom{r}{n}$ для $n \leqslant r$.
3. $r < 0$. Для любого $\delta > 0$: $\left|\frac{r+1}{n+1} - 1\right| < 1 + \delta$ при достаточно большом n. Зафиксируем δ и назовём эту границу n_0. В этом случае, обозначив за C_r^- максимальный биномиальный коэффициент $\binom{r}{n}$ при $n \leqslant n_0$, получаем

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left|\binom{r}{n}\right| \cdot |x|^n \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} C_r^-(1+\delta)^{n-n_0} \cdot b^n$$

Выбрав настолько маленькое δ, что $(1+\delta)b < 1$, получаем равномерную сходимость — ряд оценивается сверху геометрической прогрессией. $\square$

0.1.3 Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

Теорема 0.1.2. Пусть I — отрезок, $f : I \to \mathbb{R}$ $n+1$ раз непрерывно дифференцируема на I. Для произвольных $l, h \in I$:

$$f(h) = \underbrace{f(l) + \frac{f^{(1)}(l)}{1!}(h-l) + \frac{f^{(2)}(l)}{2!}(h-l)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(l)}{n!}(h-l)^n}_{\text{стандартные слагаемые}} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int\limits_l^h f^{(n+1)}(t) \cdot (h-t)^n \,\mathrm{d}t}_{\text{остаток в интегральной форме}}$$

Доказательство. Индукция по n.

<u>База:</u> $n = 0$, f 1 раз непрерывно дифференцируема. Формула Тейлора обращается в $f(h) = f(l) + \int\limits_l^h f'(t)\,\mathrm{d}t$ — очевидно верно.

<u>Переход:</u> Доказываем для $n+1$, считая, что для n уже доказано. $f \in C^{(n+2)}(I)$. Запишем остаток в интегральной форме для формулы Тейлора порядка n.

$$s \coloneqq \frac{1}{n!}\int\limits_l^h f^{(n+1)}(t) \cdot (h-t)^n \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{n!}\int\limits_l^h f^{(n+1)}(t) \cdot \mathrm{d}\left((h-t)^{n+1} \cdot \frac{1}{n+1}\right) =$$

проинтегрируем по частям

$$= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \cdot (h-t)^{n+1}\Big|_{t=l}^{t=h} + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_l^h (h-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Видим, что если подставить пределы интегрирования, то как раз и получится необходимое:

$$s = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(l) \cdot (h-l)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_l^h (h-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$ $\square$

Оценим остаток в интегральной форме, заменив переменную под интегралом:

$$\frac{1}{n!}\int\limits_l^h f^{(n+1)}(t)\cdot(h-t)^n\,\mathrm{d}t =$$

$$\Big\| t = l + (h-l)w = hw + l(1-w); \qquad h - t = (h-l)(1-w) \Big\|$$

$$= \frac{(h-l)^n}{n!}\int\limits_0^1 f^{(n+1)}(hw + l(1-w))\cdot(1-w)^n\,\mathrm{d}w$$

В частности, при $l=0$, формула упрощается до $s = \frac{h^n}{n!}\int\limits_0^1 f^{(n+1)}(hw)(1-w)^n\,\mathrm{d}w$.

Теорема 0.1.3. Ряд Ньютона сходится к $(1+x)^r$ на $(-1,1)$. Если $r>0$, то в точке $x=1$ сходимость тоже наблюдается.

Доказательство. Применим формулу Тейлора с интегральным остатком к $(1+x)^r$:

$$(1+x)^r = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}x^k\right) + s \qquad \text{где } s = \frac{1}{n!}\cdot(r\cdot\ldots\cdot(r-n))\int\limits_0^1 (1+xw)^{r-n-1}(1-w)^n\,\mathrm{d}w$$

Для доказательства теоремы необходимо и достаточно показать $s \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

1. Пусть $x\in[0,1], n>r$. В таком случае $(1+xw)^{r-n-1}<1$ и интеграл можно оценить сверху:

$$\int\limits_0^1 (1+xw)^{r-n-1}(1-w)^n\,\mathrm{d}w \leqslant \int\limits_0^1 (1-w)^n\,\mathrm{d}w = -\frac{1}{n+1}(1-w)^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

   (a) Если здесь $r\geqslant 0$, то $\left|\frac{r\cdot\ldots\cdot(r-n)}{n!}\right| \leqslant C_r^+$, и действительно $s \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

   (b) Если здесь $r<0$, то считаем, что $x\in[0,1)$, тогда $\left|\frac{r\cdot\ldots\cdot(r-n)}{n!}\right| \leqslant C_r^-\cdot(1+\delta)^n$, где $\delta>0$ можно выбирать сколь угодно близким к нулю. Выбрав δ так, что $x(1+\delta)<1$, мы тоже увидим, что $s \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2. Теперь пусть $x\in(-1,0]$.

   Обозначим $I = \int\limits_0^1 (1+xw)^{r-n-1}(1-w)^n\,\mathrm{d}w = \int\limits_0^1 (1+xw)^{r-1}\cdot\left(\frac{1-w}{1+xw}\right)^n\mathrm{d}w$.

   Для данного r оценим $\left|(1+xw)^{r-1}\right| \leqslant C_r(x)$. Тогда $|I| \leqslant C_r(x)\cdot\int\limits_0^1\left(\frac{1-w}{1+xw}\right)^n\mathrm{d}w$. Воспользуемся тем, что $\left(\frac{1-w}{1+xw}\right) \leqslant 1 - w(1-|x|)$ (проверка раскрытием скобок):

   $1-w \leqslant (1-|x|w)(1-w(1-|x|)) = 1-|x|w-w+|x|w^2+w|x|-w^2|x|^2 = 1-w+|x|(1-|x|)w^2$

   Таким образом

$$|I| \leqslant C_r(x)\int\limits_0^1 (1-w(1-|x|))^n\,\mathrm{d}w = C_r(x)\cdot\frac{-1}{1-|x|}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot(1-w(1-|x|))^{n+1}\Big|_{w=0}^{w=1} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\cdot C_r(x)\frac{1-|x|^{n+1}}{1-|x|}$$

   Опять получаем $s \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

□

Глава 1

Введение в многомерный анализ

Лекция II

17 февраля 2023 г.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество, дана некоторая функция

$$f : G \to \mathbb{R}^m$$

Рассмотрим некую точку $x \in G$.

Определение 1.0.1 (f дифференцируема в точке x). $\exists L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение (оператор), такое, что

$$f(y) - f(x) = L(y - x) + o(|y - x|)$$

1.0.1 О геометрии пространства $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ раз}}$. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_j \in \mathbb{R}\}$ — состоит из *точек* или *векторов*. Сумма векторов, умножение вектора на число понятны; рассмотрим скалярное произведение двух элементов $x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$\langle x, y \rangle \stackrel{def}{=} x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Свойства:

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
- Линейность по каждому аргументу: $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle$.
- $\langle x, x \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Число не меньше 0, равенство достигается, когда все координаты нулевые.

  Определение 1.0.2 (Длина вектора).

  $$|x| \stackrel{def}{=} \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

- Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ)

  $$\langle x, y \rangle \leqslant |x| \cdot |y|$$

  Доказательство. Рассмотрим $t \in \mathbb{R}$. Запишем $\langle x + ty, x + ty \rangle \geqslant 0$.

  $$\langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle \geqslant 0$$

  Если $y = 0$, то исходное неравенство очевидное; иначе выше написан квадратный трёхчлен, который неотрицателен, то есть его дискриминант не превышает 0: $\langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$. □

Следствие 1.0.1 (Неравенство треугольника для длины)**.** $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : |x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Доказательство.

$$|x+y|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leqslant |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$$

□

- Введём метрику: $d(x, y) = |x - y|$. Несложно проверить всё три свойства, которым функция должна удовлетворять, чтобы быть метрикой. В том числе неравенство треугольника:

$$d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leqslant |x - z| + |z - y|$$

- Метрика инвариантна относительно сдвига; при домножении всех координат на одно и то же число, метрика тоже умножается на это число.

  Факт 1.0.1. *Пусть* $u, u^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ *(где* $k \in \mathbb{N}$*).*

  Условие

$$\left|u - u^{(k)}\right| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

  означает покомпонентную сходимость.

  Доказательство. Несложно оценить из неравенства $x - y \leqslant |x_i - y_i|$ — расстояние хотя бы разность координатных проекций. □

Стандартный базис векторов в $\mathbb{R}^n : e_j = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{j}, \ldots, 0)$.

Определение 1.0.3 ($x, y \in \mathbb{R}^n$ ортогональны)**.** $\langle x, y\rangle = 0$.

Лемма 1.0.1. *Если* $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ *все ненулевые и попарно ортогональны, то они линейно независимы.*

Доказательство. Рассмотрим вещественные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$.

$$x \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

Заметим, что $\langle u_i, x\rangle = \alpha_i |u_i|^2$.

Таким образом, если $x \in \langle u_1, \ldots, u_m\rangle$, то его коэффициенты в линейной комбинации равны $\dfrac{\langle x, u_j\rangle}{|u_j|^2}$.

□

Если векторы u_j имеет единичную длину, то эти коэффициенты равны $\langle x, u_j\rangle$.

Определение 1.0.4 (Система векторов называется ортонормированной)**.** $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{i,j}$.

Теорема 1.0.1. Пусть E — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, $d = \dim(E)$. Тогда в E существует ортонормированная система из d векторов.

Доказательство. Будем действовать по индукции. Пусть на k-м шаге построена ортонормированная система из k векторов $u_1, \ldots, u_k$.

Если $k < d$, то $\exists v \in E \setminus E_k$, где $E_k = \langle u_1, \ldots, u_k\rangle$.

Тогда вектор $\widetilde{v} = v - (\langle v, u_1\rangle u_1 + \cdots + \langle v, u_k\rangle u_k) \in E \setminus E_k$ тоже; несложно проверить, что $\widetilde{v}$ ортогонален всякому вектору из $u_1, \ldots, u_k$.

Теперь возьмём пропорциональный ему вектор, длины 1, и добавим в ортонормированную систему.

□

Построенная система — линейно независима, называется ортонормированным базисом пространства.

Если рассмотреть разложение векторов x, y по ортонормированному базису, то скалярное произведение будет вычисляться по прежней формуле. *Линейное подпространство евклидового пространство евклидово.*

Пусть L_1, L_2 — линейные пространства. Отображение $T : L_1 \to L_2$ называется линейным оператором, если оно линейно.

Ортогональный проектор на подпространство

Теорема 1.0.2. Пусть E — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$. Для всякого $x \in \mathbb{R}^n : \exists! a, b \in \mathbb{R}^n : a \in E, b \perp E \wedge x = a + b$.

Доказательство.

- Единственность: вычтем соответствующие разложения, если они вдруг не единственны. Получим с одной стороны вектор из E, а с другой стороны — ему перпендикулярный.
- Разложим по ортонормированному базису с помощью скалярных произведений. □

Определение 1.0.5 (Ортогональный проектор)**.** Отображение, сопоставляющее вектору x этот самый вектор $a \in E$.

Лекция III

21 февраля 2023 г.

Можно рассмотреть такое определение проектора: линейное отображение $T : L \to L$, такое что $T(L) = R$ и $T\Big|_R = \mathrm{id}_R$.

Отсюда сразу получается $T^2 = T$, что тоже можно взять за определение, а не за свойство.

Таким свойствам удовлетворяет, например, ортогональный проектор $P : \mathbb{R}^n \to E$, такой, что $(x - Px) \perp Px$.

Для подпространства $E \subset \mathbb{R}^n$ можно определить ортогональное дополнение $E^\perp \overset{def}{=} \{y \in \mathbb{R}^n | y \perp E\} = \operatorname{Ker} P$.

Очевидно, что $(I - P)$ — ортогональный проектор на $E^\perp$, где I — тождественный оператор.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, а $F : G \to \mathbb{R}^m$ — произвольное отображение.

Для точки $x \in G$ говорят, что F дифференцируема в точке x, если $\exists T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор, такой, что $F(y) - F(x) = T(x - y) + o(|x - y|)$.

Для пущей строгости можно записать

$$F(y) - F(x) = T(x - y) + \alpha(x - y)$$

где $\alpha : U_0 \to \mathbb{R}^m$ для некой окрестности нуля U_0, причём $|\alpha(v)| = o(|v|)$. Так как теперь $|\alpha(v)|$ и $|v|$ — скалярные величины, то записывать o-малое точно корректно.

Оператор T называют дифференциалом (дифференциальным отображением) F и записывают $\mathrm{d}F(x, \cdot) = \mathrm{d}F_x(\cdot)$. Заметим, что определение полностью согласуется с определением одномерного дифференциала.

Прежде всего рассмотрим несколько свойств линейных операторов.

Пусть $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линеен. Обозначим $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^n$, а $\{g_k\}_{k=1}^m$ — ортонормированный базис $\mathbb{R}^m$.

По определению базиса $x = \sum\limits_{j=1}^n x_j e_j$, откуда конечно же по линейности $Tx = \sum\limits_{j=1}^n x_j \cdot Te_j$.

С другой стороны $Te_j = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{k,j} g_k$, как разложения Te_j по стандартному базису g.

Итого получаем $Tx = \sum\limits_{k=1}^{m} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j \right) g_k$, где $a_{k,j}$ — матрица отображения T.

Следствие 1.0.2. *T — непрерывное (покомпонентная сходимость) отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.*

На самом деле выполняется условие, намного более сильное, чем просто непрерывность:

Предложение 1.0.1. *T удовлетворяет условию Липшица: $\exists A \in \mathbb{R} : \forall u, v \in \mathbb{R}^n : |Tu - Tv| \leqslant A|u - v|$.*

Эквивалентная запись: $\forall x \in \mathbb{R}^n : |Tx| \leqslant A|x|$.

Доказательство. $|Tx|^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j \right)^2 \underset{\text{КБШ}}{\leqslant} \sum\limits_{k=1}^{m} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{k,j}^2 \right) \left(\sum\limits_{j=1}^{m} x_j^2 \right) = |x|^2 \sum\limits_{k,j} a_{k,j}^2$.

Теперь видно, что условие Липшица действительно выполняется, для $A = \sqrt{\sum\limits_{k,j} a_{k,j}^2}$. □

Полученная константа A редко бывает самой плотной оценкой, а плотная оценка очень интересна, хотя и сложно вычислима.

Определим её. Пусть $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор.

Определение 1.0.6 (Норма оператора T)**.** $\|T\| \overset{def}{=} \inf \left\{ A \in \mathbb{R} \middle| \forall x \in \mathbb{R}^n : |Tx| \leqslant A|x| \right\}$.

Предложение 1.0.2. $\|T\| = \sup \left\{ |Tx| \middle| |x| \leqslant 1 \right\} = \sup \left\{ |Tx| \middle| |x| = 1 \right\}$.

Доказательство. Очевидно, супремумы достигаются из компактности и теоремы Вейерштрасса. Обозначим $\alpha = \sup \left\{ |Tx| \middle| |x| \leqslant 1 \right\}; \quad \beta = \sup \left\{ |Tx| \middle| |x| = 1 \right\}; \quad \gamma = \|T\|$.

Заметим, что в определении нормы можно $\inf$ заменить на $\min$, так как в нестрогом неравенстве можно перейти к пределу.

Несложно видеть из определения, что $\beta \leqslant \alpha \leqslant \gamma$. Докажем, что $\gamma \leqslant \beta$.

Докажем, что $\forall x \in \mathbb{R}^n : |Tx| \leqslant \beta|x|$.

- Если $x = 0$, то неравенство очевидно верно.
- Если $x \neq 0$, то $\left| \frac{x}{|x|} \right| = 1$, и можно применить к нему определение β :

$$T \left(\frac{x}{|x|} \right) \leqslant \beta \quad \Rightarrow \quad Tx \leqslant \beta|x|$$

□

Факт 1.0.2. *Из линейности T можно брать супремум (но он уже не будет достигаться) и по открытому шару тоже:* $\|T\| = \sup \left\{ |Tx| \middle| |x| < 1 \right\}$.

Доказательство. Рассмотрим точку x на сфере, где равенство выполняется с точностью до ε, немного отступим от неё. □

Теорема 1.0.3 (Свойства нормы)**.**

1. $\|T\| = 0 \iff \forall x : Tx = 0$.
2. $\|aT\| = |a| \cdot \|T\|$
3. $\|T_1\| + \|T_2\| \geqslant \|T_1 + T_2\|$.

Доказательство.

$$\|T_1 + T_2\| = \sup_{|x|\leqslant 1} |(T_1+T_2)(x)| = \sup_{|x|\leqslant 1} |T_1(x) + T_2(x)| \leqslant \sup_{|x|\leqslant 1} |T_1(x)| + |T_2(x)| \leqslant \|T_1\| + \|T_2\|$$

□

Введём метрику $\rho(T_1, T_2) = \|T_1 - T_2\|$.

Эта метрика задаёт отнюдь не новую топологию на пространстве линейных операторов. Чтобы это увидеть, перейдём к матрицам линейных отображений.

Воспользовавшись оценкой $\|T\| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{k,j} (a_{k,j})^2}$ мы сразу видим, что поэлементная сходимость матриц влечёт стремление $\sqrt{\sum\limits_{k,j} (a_{k,j} - b_{k,j})^2} \longrightarrow 0$, то есть нормы близких матриц близки. Обратное тоже верно — если норма разности операторов стремится к нулю, то их матрицы покомпонентно сходятся.

$Te_j = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{k,j} g_k$, откуда можно извлечь коэффициенты матрицы: $a_{k,j}(T) = \langle Te_j, g_k \rangle$.

Обозначим $|||T||| = \sqrt{\sum\limits_{k,j} a_{k,j}(T)^2}$.

Факт 1.0.3. $|a_{k,j}(T)| \leqslant \|T\| \leqslant |||T|||$.

Теорема 1.0.4. $T_s, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (где $s \in \mathbb{N}$) — линейные операторы. Следующие условия эквивалентны:

- $|||T_s - T||| \longrightarrow 0$.
- $\|T_s - T\| \longrightarrow 0$.
- $\forall k, j : a_{k,j}(T_s - T) \longrightarrow 0$.

Доказательство. Собрать факты выше. □

Так как $|||T|||$ — длина вектора в $\mathbb{R}^{nm}$, то можно считать, что пространство операторов тоже евклидово.

Предложение 1.0.3. *Пусть* $\mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^m \xrightarrow{S} \mathbb{R}^l$*, где* T, S *— линейные операторы. Тогда* $\|S \circ T\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\|$.

Доказательство. $\forall x \in \mathbb{R}^n : |(S \circ T)(x)| \leqslant \|S\| \cdot |Tx| \leqslant \|S\| \cdot \|T\| \cdot |x|$. □

Замечание. В будущем часто при композиции линейных операторов будет записываться, как произведение, в том числе слитно (ST).

Оценим снизу норму инъективных линейных операторов.

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор — инъективен, если $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Очевидно, необходимым условием является $m \geqslant n$.

Теорема 1.0.5. Следующие условия эквивалентны:

1. $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.
2. $\exists m > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n : |Tx| \geqslant m|x|$.

Доказательство.

$\Leftarrow$. Очевидно.

$\Rightarrow$. Рассмотрим единичную сферу $S = \{x \in \mathbb{R}^n | |x| = 1\}$. Она компактна, так как ограничена и замкнута.

Введём непрерывную функцию $\phi : S \to \mathbb{R}; \phi(x) = |Tx|$. Очевидно, $\forall x \neq 0 : \phi(x) > 0$.

По теореме Вейерштрасса ϕ где-то достигает своё наименьшее значение. Пусть $m = \min\limits_{x \in S} \phi(x)$, причём $m = \phi(x_0)$. Тогда $\left|T\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \geqslant m \Rightarrow |Tx| \geqslant m|x|$. □

Другой вариант доказательства. Пусть $E = T(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$ — евклидово подпространство.

E само евклидово, можно считать, что $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — биекция. Тогда обратное к T — тоже линейный оператор, значит, у него есть норма, то есть $\forall y \in E : \exists C \in \mathbb{R} : |T^{-1}y| \leqslant C|y|$.

Собственно, это и требовалось доказать. □

Лекция IV

28 февраля 2023 г.

В терминах ε и δ дифференцируемость можно записать так:

Для функции $F : U \to \mathbb{R}^m$, заданной на открытом множестве U и точки $x_0 \in U$:

$$\exists A \text{ — линейный оператор, такой, что } \forall x \in U : F(x) = F(x_0) + A(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

Определим $\phi(x) = F(x) - F(x_0) - A(x - x_0)$, определённую на U.

Необходимым и достаточным условием является $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall x \in U : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\phi(x)| \leqslant \varepsilon \cdot |x - x_0|$.

Факт 1.0.4. *Если F дифференцируема в точке x_0, то F непрерывна в точке x_0. Более того, выполняется* локальное условие Липшица*:*

$$\exists C \in \mathbb{R} : |F(x) - F(x_0)| \leqslant C|x - x_0| \text{ при достаточно малом } x - x_0$$

Доказательство.

$$F(x) - F(x_0) = A(x - x_0) + \phi(x) \Rightarrow$$
$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \|A\| \cdot |x - x_0| + \varepsilon \cdot |x - x_0| = (\|A\| + \varepsilon) \cdot |x - x_0|$$ □

Предложение 1.0.4. *У данной функции $F : U \to \mathbb{R}^m$ в данной точке $x_0 \in U$ существует не более одного дифференциала.*

Доказательство. От противного: нашлись $A, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — дифференциалы F в x_0.

$$F(x) - F(x_0) = A(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$
$$F(x) - F(x_0) = B(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$
$$\Downarrow$$
$$(B - A)(x - x_0) = o(|x - x_0|)$$

Положим $C = B - A$. Если $C \neq 0$, то $\exists h \in \mathbb{R}^n : C(h) \neq 0$.

Рассмотрев $t \in \mathbb{R}$, получаем $C(h) = \frac{C(t \cdot h)}{t \cdot |h|} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$, противоречие. □

Примеры (Простейшие дифференцируемые отображения).

- Постоянное отображение (дифференциал — 0).
- Линейное отображение (дифференциал совпадает с самим отображением).

Теорема 1.0.6 (О композиции дифференцируемых отображений)**.** Пусть $U \in \mathbb{R}^n, V \in \mathbb{R}^m$ — открытые множества.

При данных отображениях $F : U \to \mathbb{R}^m$ и $G : V \to \mathbb{R}^k$, таких, что $F(U) \subset V$, выберем точки $x_0 \in U$ и $y_0 = F(x_0)$.

При сделанных предположениях, если F дифференцируема в x_0 с дифференциалом A, G дифференцируема в y_0 с дифференциалом B, то $G \circ F$ дифференцируема в x_0 с дифференциалом BA.

Доказательство.

$$F(x) = F(x_0) + A(x - x_0) + \phi(x), \qquad |\phi(x)| = o(|x - x_0|)$$
$$G(y) = G(y_0) + B(y - y_0) + \psi(y), \qquad |\psi(y)| = o(|y - y_0|)$$
$$\text{подставим} \qquad y \coloneqq F(x),\ y_0 \coloneqq F(x_0) \qquad \text{(область определения позволяет)}$$
$$(G \circ F)(x) = (G \circ F)(x_0) + B(F(x) - F(x_0)) + \psi(F(x))$$
$$(G \circ F)(x) = (G \circ F)(x_0) + BA(x - x_0) + B(\phi(x)) + \psi(F(x))$$

Покажем, что $\gamma(x) \coloneqq B(\phi(x)) + \psi(F(x)) = o(|x - x_0|)$.

$$\gamma(x) \leqslant \underbrace{|B(\phi(x))|}_{\leqslant \|B\| \cdot \phi(x) = o(|x - x_0|)} + \underbrace{|\psi(F(x))|}_{o(|x-x_0|) \text{ из-за локальной липшицевости } F}$$

□

Теорема 1.0.7. Если $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, а $F_1, F_2 : U \to \mathbb{R}^m$ — дифференцируемы в точке x_0, то для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{d}(\alpha F_1 + \beta F_2)(x_0, \cdot) = \alpha \cdot \mathrm{d}F_1(x_0, \cdot) + \beta \cdot \mathrm{d}F_2(x_0, \cdot)$$

Пусть $F : U \to \mathbb{R}^m$ — отображение.

Определение 1.0.7 (Координатные проекции F)**.** Разложим $F(x)$ по стандартному базису: $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i e_i$. Тогда координатными проекциями называются функции $F_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$; $\quad F_j(x) = a_j$.

Теорема 1.0.8. Пусть $U \in \mathbb{R}^n$ открыто. Утверждается, что $F : U \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в $x_0 \in U$ если и только если $\forall j = 1..m : F_j$ дифференцируема в x_0.

Более того, $\mathrm{d}F(x_0, h) = \big(\mathrm{d}F_1(x_0, h), \quad \cdots, \quad \mathrm{d}F_m(x_0, h)\big)$

Доказательство.

- $\Rightarrow$. Рассмотрим линейный оператор $T_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, сопоставляющий $y \in \mathbb{R}^m$ его j-ю координату в разложении по стандартному базису. $F_j = T_j \circ F$ — дифференцируема, как композиция. Утверждение про матрицу дифференциала F следует из того, что матрица дифференциала T_j — это $(0, \cdots, \underset{j}{1}, \cdots, 0)$
- $\Leftarrow$. Если все F_j дифференцируемы, то $F_j(x) - F_j(x_0) = A_j(x - x_0) + o(|x - x_0|)$, откуда
$$F(x) - F(x_0) = \big(A_1(x - x_0), \quad \ldots, \quad A_m(x - x_0)\big) + \big(\phi_1(x), \quad \ldots, \quad \phi_m(x)\big)$$
Несложно видеть, что это дифференцируемость F по определению. □

1.0.2 О скалярных функциях $F : (U \subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$

Замечание. Пусть $G : U \to \mathbb{R}$ — скалярная функция, дифференцируемая в $x_0 \in U$, то есть

$$G(x) - G(x_0) = A(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

где $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — линейный функционал.

Разложим $A(y) = A(y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n) = y_1 A(e_1) + \cdots + y_n A(e_n)$. Положим $\xi_j = A(e_j) \in \mathbb{R}$, тогда $A(y) = \langle y, \xi \rangle$.

Пусть F дифференцируема в $x_0 \in U$, тогда $\exists \xi : F(x) - F(x_0) = \langle x - x_0, \xi \rangle + o(|x - x_0|)$. Таким образом, дифференциальный оператор для F — скалярное произведение $\langle x - x_0, \xi \rangle$, где ξ называется *градиентом* F в точке x_0. Обозначается $\operatorname{grad}_{x_0} f$, или (иногда) $\operatorname{grad} f(x_0)$ (имея в виду $(\operatorname{grad} f)(x_0)$).

Лекция V

3 марта 2023 г.

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — открытый отрезок $I = (a, b)$.

Рассмотрим $g : I \to U$, дифференцируемую в точке $t_0 \in (a, b)$. Как и раньше, $U \subset \mathbb{R}^n$. Функцию g такого вида называют *векторнозначная функция*.

Рассмотрим координатные функции $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x), & \dots, & g_n(x) \end{pmatrix}$. g дифференцируема в $t_0 \in (a, b) \iff$ все g_j дифференцируемы в t_0.

Но $g_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема, если $\exists g_j'(t) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{g_j(t) - g_j(t_0)}{t - t_0}$.

Найдём дифференциал функции g:

$$g(t) - g(t_0) = \begin{pmatrix} g_1(t) - g_1(t_0), & \dots, & g_n(t) - g_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1'(t_0), & \dots, & g_n'(t_0) \end{pmatrix} (t - t_0) + o(|t - t_0|)$$

Таким образом

$$\begin{pmatrix} g_1'(t_0), & \dots, & g_n'(t_0) \end{pmatrix} = \lim_{t \to t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}$$

Определение 1.0.8 (Производная векторнозначной функции g)**.** Соответствующий вектор $\begin{pmatrix} g_1'(t_0), & \dots, & g_n'(t_0) \end{pmatrix}$.

В частности, если $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ — координата частицы в зависимости от времени, то её производная — трёхмерный вектор, вектор скорости частицы.

В случае функции g такого вида её дифференциал $\mathrm{d}g(t_0, h) = g'(t_0) \cdot h$.

Теперь рассмотрим композицию $F = f \circ g$, где $f : U \to \mathbb{R}$ и $g : I \to U$ рассмотрены выше.

Пусть g дифференцируема в t_0, $x_0 = g(t_0), f$ дифференцируема в x_0. Тогда согласно (1.0.6) F дифференцируема в t_0, её дифференциал равен композиции дифференциалов f и g.

$$\begin{gathered} \mathrm{d}f(x_0, u) = \langle u, \operatorname{grad}_{x_0} f \rangle \\ \mathrm{d}g(t_0, h) = g'(t_0) \cdot h \\ \Downarrow \\ \mathrm{d}F(t_0, h) = \langle g'(t_0) \cdot h, \operatorname{grad}_{x_0} f \rangle = \langle g'(t_0), \operatorname{grad}_{x_0} f \rangle \cdot h \end{gathered}$$

Но $F : I \to \mathbb{R}$ — одномерная функция, дифференцируемость означает существование одномерного предела. Отсюда $F'(t_0) = \langle g'(t_0), \operatorname{grad}_{x_0} f \rangle$.

Пусть $e \in \mathbb{R}^n$, $g : I \to U$. Определим $g(t) = x_0 + t \cdot e$, где I — настолько маленький интервал (содержащий 0), что $g(I) \subset U$.

В таком случае $F'(0)$ записывается более явно: $F'(0) = \langle e, \operatorname{grad}_{x_0} f \rangle$. С другой стороны, $F'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$.

Мы проверили, что если f дифференцируема, то предел выше существует (и равен $\langle e, \operatorname{grad}_{x_0} f \rangle$). Этот предел называется *производной f по направлению e*.

Выберем в качестве e стандартный орт: $e \in \{e_j\}_{j=1}^n = (0, \cdots, 0, \underset{j}{1}, 0, \cdots, 0)$

Определение 1.0.9 (Частная производная f по j-й координате)**.** Производная f по направлению e_j. Обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$

Тем самым,

$$\operatorname{grad}_{x_0} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Теперь рассмотрим более общий случай: $h : U \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в $x_0 \in U$. Как известно, $h = \begin{pmatrix} h_1, & \dots, & h_m \end{pmatrix}$, где h_j — соответствующие координатные функции.

Запишем дифференциал h в виде столбца:

$$\mathrm{d}h(x_0, u) = \begin{pmatrix} \mathrm{d}h_1(x_0, u) \\ \vdots \\ \mathrm{d}h_m(x_0, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \operatorname{grad}_{x_0} h_1, u \rangle \\ \vdots \\ \langle \operatorname{grad}_{x_0} h_m, u \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x_0), & \dots, & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(x_0), & \dots, & \frac{\partial h_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Получили следующий результат: матрицы дифференциала отображения h в точке x_0 выглядит так:

$$\left(\frac{\partial h_k}{\partial x_j}(x_0) \right)_{j=1..n}^{k=1..m} \text{ где } k \text{ — номер строки, а } j \text{ — номер столбца}$$

При этом, если h дифференцируема в x_0, то существуют все частные производные.

Контрпример (Если частные производные в x_0 в направлении всех ортов существуют, то совсем не обязательно отображение дифференцируемо). Например,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Очевидно, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, но сужение функции на прямую $y = x$ претерпевает в нуле разрыв: $f(t, t) = \frac{1}{2}$ при $t \neq 0$.

Также можно найти недифференцируемую функцию, у которой есть частные производные по всем направлениям.

«Но жить-то как-то надо»

Теорема 1.0.9. Пусть $f : U \to \mathbb{R}$, где $U \subset \mathbb{R}^n$.

При условии, что в некоторой окрестности точки $x_0 \in U$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ существуют, причём непрерывны в точке x_0, f дифференцируема в x_0.

Доказательство. Для удобства доказательства выберем $n = 2$. Утверждается, что при больших n всё то же самое, но писанины больше.

При $n = 2$ обозначим $x_0 = (u_0, v_0), x = (u, v)$.

Из непрерывности производных

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(y) \right| < \varepsilon, \qquad j = 1, 2$$

Запишем

$$f(x) - f(x_0) = f(u, v) - f(u_0, v_0) = \Big(f(u, v) - f(u_0, v) \Big) + \Big(f(u_0, v) - f(u_0, v_0) \Big)$$

Применим к данным двум разностям формулу Лагранжа.

$$f(x) - f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(\theta_v, v) \cdot (u - u_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, \eta) \cdot (v - v_0) \text{ где } \theta_v \text{ между } u \text{ и } u_0,\ \eta \text{ между } v \text{ и } v_0$$

Преобразуем выражение, прибавив и вычтя ожидаемое изменение функции — произведение производной и изменение аргумента.

$$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot (u - u_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot (v - v_0)\right) +$$
$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial u}(\theta_v, v) - \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\right)(u - u_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial v}(u_0, \eta) - \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\right)(v - v_0)}_{R}$$

Первая пара скобок содержит $\langle \operatorname{grad}_{x_0} f, x - x_0 \rangle$, докажем, что остальное мало.

Зафиксируем некий $\varepsilon > 0$, выберем $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$, где δ — функция от ε из непрерывности производных.

Тогда все точки $(u_0, v_0), (u_0, \eta), (\theta_v, v)$ находятся на расстоянии меньше δ друг от друга.

Применяя КБШ, получаем, что $|R| \leqslant \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} \cdot |x - x_0| \leqslant \sqrt{2} \cdot \varepsilon |x - x_0|$. □

Определение 1.0.10 (Путь)**.** Непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Образ пути $\gamma([a, b])$ называется *носителем* пути.

Интересный факт. Кривая Пеано — путь, у которого носитель — квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$.

Пусть γ дифференцируема на (a, b), и U — открытое множество, такое, что $\gamma([a, b]) \subset U$.

Рассмотрим скалярную функцию $f : U \to \mathbb{R}$, дифференцируемую везде на U.

Зададим $\phi = f \circ \gamma$. Несложно видеть, что ϕ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b).

Запишем производную ϕ:

$$\phi'(t) = \langle \operatorname{grad}_{\gamma(t)} f, \gamma'(t) \rangle$$

Применим формулу Лагранжа: $c, d \in [a, b] \Rightarrow \exists \xi \in [\min(c, d), \max(c, d)]$:

$$\phi(d) - \phi(c) = \phi'(\xi)(d - c)$$

Обозначим $y = \gamma(c), x = \gamma(d)$, тогда $f(y) - f(x) = \langle \operatorname{grad}_{\gamma(\xi)}(f), \gamma'(\xi) \rangle (d - c)$

Получился многомерный вариант формулы Лагранжа.

Лекция VI

7 марта 2023 г.

Рассмотрим частный вариант формулы выше: $[\alpha, \beta] = [0, 1], U$ — шар с центром в a, содержащий b. Зададим путь прямолинейно: $\gamma(t) = a + t(b - a)$, $t \in [0, 1]$.

Запишем:

$$f(b) - f(a) = \langle \operatorname{grad}_u f, b - a \rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(u)(b_j - a_j)$$

Факт 1.0.5. *Если функция f дифференцируема на всём открытом множестве G, а точки a, b — концы некоего отрезка, содержащегося в G целиком, то на этом отрезке найдётся точка u, удовлетворяющая условиям.*

Следствие 1.0.3. $|f(b) - f(a)| \leqslant \sup\limits_{u \in [a,b]} |grad_u f| \cdot |b - a|$, *где* $[a, b] = \{a + t(b - a) | t \in [0, 1]\}$.

Теорема 1.0.10 (Векторный вариант предыдущей)**.** Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $F : U \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо во всех точках U.

Если $[a, b] \subset U$, то $\exists u \in [a, b] : |F(b) - F(a)| \leqslant |\,\mathrm{d}F(u, b - a)|$.

Доказательство.

Лемма 1.0.2 (~~О двойственности~~). *Пусть* $x \in \mathbb{R}^k$*, тогда* $|x| = \max\left\{\langle x, y\rangle \middle| y \in \mathbb{R}^k, |y| \leqslant 1\right\}$.

Доказательство леммы.

Согласно КБШ $\langle x, y\rangle \leqslant |x|$.

Если $x = 0$, то доказывать нечего, иначе при $y = \frac{x}{|x|}$ достигается равенство. □

Согласно лемме, $\exists e \in \mathbb{R}^m : |e| = 1$, причём $|F(b) - F(a)| = \langle F(b) - F(a), e\rangle$.

Рассмотрим скалярную функцию $f : U \to \mathbb{R}; \qquad x \mapsto \langle F(x), e\rangle$. f дифференцируема, как линейная комбинация координатных функций F.

Применив для f формулу Лагранжа, получаем: $\exists u \in [a, b] : f(b) - f(a) = \langle \operatorname{grad}_u f, b - a\rangle$.

Совместив всё полученное:

$$|F(b) - F(a)| = \langle F(b) - F(a), e\rangle = |f(b) - f(a)| = |\langle \operatorname{grad}_u f, b - a\rangle|$$

Посчитаем градиент. Для этого разложим F, e по базису: $F(x) = \big(f_1(x), \quad \dots, \quad f_m(x)\big), e = \big(e_1, \quad , \dots, \quad e_m\big)$. Тогда получаем явное представление $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} f_j(x) e_j$. Отсюда $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) \cdot e_j$.

Продолжим оценку:

$$|\langle \operatorname{grad}_u f, b - a\rangle| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(u) \cdot (b_k - a_k)\right| = \left|\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(u)(b_k - a_k) e_j\right| = |\langle \, \mathrm{d}F(u, b - a), e\rangle| \leqslant |\,\mathrm{d}F(u, b - a)|$$

□

Контрпример (Равенства, вообще говоря, может не быть). $n = 1, m = 2$ — отображение из прямой в плоскость.

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2; \qquad f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

Рассмотрим $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = \big(0, 1\big) - \big(1, 0\big) = \big(-1, 1\big)$.

$$|f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)| = \sqrt{2}$$

Предположим, что нашлась точка $\theta \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big) : \sqrt{2} = \big|f'(\theta)\frac{\pi}{2}\big|$. Но $|f'(\theta)| = |\big(-\sin\theta, \cos\theta\big)| = 1$, и равенство не выполняется: всегда $\underbrace{\sqrt{2}}_{\approx 1.41} < \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\approx 1.57}$

Следствие 1.0.4. $|F(b) - F(a)| \leqslant \|\,\mathrm{d}F(u, \cdot)\| \cdot |b - a|$.

1.0.3 Замечания про градиент

1. Необходимое условие существования локального экстремума.

   Пусть X — топологическое пространство, $g : X \to \mathbb{R}$ — функция, $x_0 \in X$;

   Определение 1.0.11 (g имеет локальный максимум в точке x_0)**.** Существует окрестность $\overset{o}{U}_\varepsilon(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}_\varepsilon(x_0) : g(x) \leqslant g(x_0)$.

   Также бывают *строгие локальный минимум и максимум.*

   Пусть $U \subset \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}$, причём f имеет локальный экстремум в точке $x_0 \in U$.

   Теорема 1.0.11. Если f дифференцируема в точке x_0, то $\operatorname{grad}_{x_0} f = \big(0, \quad \dots, \quad 0\big)$.

Доказательство. Пусть $v = \mathrm{grad}_f(x_0) \neq \big(0, \quad \dots, \quad 0\big)$, то есть $\langle v, v\rangle > 0$. Рассмотрим малое t, при котором в частности $x_0 + tv \in U$, при нём $f(x_0 + tv) - f(x_0) = \langle v, tv\rangle + \phi(tv)$, где $|\phi(h)| = o(h)$. Таким образом, если $v \neq \big(0, \quad \dots, \quad 0\big)$, то найдётся малое t, такое, что $f(x_0 + tv) > f(x_0)$. $\square$

Условие, разумеется, не является достаточным (даже в одномерной теории).

2. Про скорость роста в разных направлениях. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$.

   Если f дифференцируема в $x_0 \in U$, то для единичного вектора e определена в окрестности 0 одномерная функция $\phi_e(t) = f(x_0 + te)$.

   По определению $\frac{\partial f}{\partial e} = \phi_e'(0) = \langle \mathrm{grad}_f(x_0), e\rangle$.

   Замечание. Из КБШ видно, что f растёт быстрее всего в направлении $e_0 = \frac{\mathrm{grad}_f(x_0)}{|\,\mathrm{grad}_f(x_0)|}$ (если $\mathrm{grad}_f(x_0) \neq 0$).

   Кроме того, f убывает быстрее всего в направлении против градиента.

Лекция VII

10 марта 2023 г.

Докажем теорему, аналогичную одномерной теореме про производную обратного отображения.

Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а $F : G \to \mathbb{R}^n$ — отображение, дифференцируемое во всех точках G.

Выберем $x_0 \in G$, такую, что F непрерывно дифференцируема в x_0, то есть $\|\mathrm{d}F(x_0, \cdot) - \mathrm{d}F(x, \cdot)\| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.

Иными словами, $\forall j, k : \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_0)$.

Положим A — матрица $\mathrm{d}F(x_0, \cdot)$ — матрица линейного отображения. Пусть $\operatorname{Ker} \mathrm{d}F(x_0, \cdot) = \{0\}$, то есть $\det A \neq 0$. Здесь существенно, что F действует из пространства размерности n в пространство той же размерности.

Теорема 1.0.12. При сделанных предположениях $\exists U$ — окрестность точки x_0, такая, что $F\Big|_U$ — биекция между U и $F(U)$.

Утверждается, что $F(U)$ содержит V — некоторую окрестность точки $y_0 \coloneqq F(x_0)$, причём на V существует обратное к F отображение.

Утверждается, что F^{-1} дифференцируема в точке y_0 и $\mathrm{d}F^{-1}(y_0, \cdot) = A^{-1}$.

Доказательство.

> **Лемма 1.0.3** (Лемма о билипшицевости)**.** *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — открыто, $H : G \to \mathbb{R}^m$ — отображение.*
>
> *Предположим, что H дифференцируема в G, причём в $x_0 \in G$ дифференцируемость непрерывная.*
>
> *Тогда $\exists U \ni x_0$, $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x_1, x_2 \in U : |H(x_1) - H(x_2)| \leqslant C|x_1 - x_2|$.*
>
> *Более того, если $\operatorname{Ker} \mathrm{d}F(x_0, \cdot) = \{0\}$, то можно выбрать эту окрестность U вместе так, что ещё и $\exists c \in \mathbb{R} : \forall x_1, x_2 \in U : |H(x_1) - H(x_2)| \geqslant c|x_1 - x_2|$.*
>
> *Доказательство леммы.*
>
> Обозначим $A = \mathrm{d}F(x_0, \cdot)$ — матрица дифференциала. Положим $H_1(x) = H(x) - Ax$. Тогда $\mathrm{d}H_1(x, \cdot) = \mathrm{d}H(x, \cdot) - A$.
>
> Из непрерывности дифференциала в x_0 следует $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow \|\,\mathrm{d}H(x, \cdot) - A\| \leqslant \varepsilon$.

Таким образом, $\forall u, v \in \overline{B}_\delta(x_0) : \underbrace{|H_1(u) - H_1(v)|}_{|(H(u)-H(v))-A(u-v)|} \leqslant \varepsilon \cdot |u - v|$ — здесь мы пользуемся неравенством Коши-Лагранжа для дифференциала на пути.

Раскрыв модуль, получаем $|A(u - v)| - \varepsilon|u - v| \leqslant |H(u) - H(v)| \leqslant |A(u - v)| + \varepsilon|u - v|$.

Выбрав $\varepsilon = 1$ получаем оценку сверху — липшицевость функции H. Теперь надо доказать билипшицевость — липшицевость H^{-1}.

Это правда, так как (1.0.5) $\exists m > 0 : \forall w \in \mathbb{R}^n : |Aw| \geqslant m|w|$, выберем $\varepsilon = {}^m\!/_2$. □

Лемма 1.0.4. *Рассмотрим матрицы линейных отображений A и $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Предположим, что A обратима, и $\|A_k - A\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Тогда для достаточно больших $k : A_k$ обратима, причём $\|A_k^{-1} - A^{-1}\| \underset{k\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Доказательство леммы.

Согласно (1.0.5) $\exists m > 0 : \forall w \in \mathbb{R}^n : |Aw| \geqslant m|w|$.

Заметим, что
$$|A_k w| \geqslant |Aw| - |(A - A_k)w| \geqslant (m - \|A - A_k\|) \cdot |w|$$
Так как A_k стремится к A по норме, то при достаточно больших k: $m - \|A - A_k\| > \frac{m}{2}$.

Это показывает, что A_k обратимы, начиная с некоторого места. Сходимость A_k^{-1} к A^{-1} можно показать покомпонентно, можно следующей выкладкой:

$$\|A^{-1} - A_k^{-1}\| = \|A^{-1} \cdot (A_k - A) \cdot A_k^{-1}\| \leqslant \underbrace{\|A^{-1}\|}_{\text{const}} \cdot \underbrace{\|A_k - A\|}_{\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0} \cdot \underbrace{\|A_k^{-1}\|}_{\leqslant {}^{3m}\!/_2}$$

□

Из леммы о билипшицевости получаем $\exists \rho, c, C > 0 : \forall u, v \in \overline{B}_\rho(x_0)$:

$$c|u - v| \leqslant |F(u) - F(v)| \leqslant C|u - v|$$

В частности, F инъективна.

Найдём такое η, что $\overline{B}_\eta(y_0) \subset F(\overline{B}_\rho(x_0))$.

Рассмотрим $y \in \overline{B}_\eta(y_0)$, решим уравнение $F(x) = y$, где x надо найти в $\overline{B}_\rho(x_0)$. Для решения заведём $\Phi : \overline{B}_\rho(x_0) \to \mathbb{R} : \Phi(x) \coloneqq |F(x) - y|^2$. По теореме Вейерштрасса она где-нибудь достигает своего наименьшего значения, пусть в точке $z \in \overline{B}_\rho(x_0)$.

Покажем, что для достаточно малого η решение лежит не на границе: $|x_0 - z| < \rho$. Докажем это от противного.

Пусть $|z - x_0| = \rho$, оценим

$$\Phi(z) \underset{\text{по определению } z}{\leqslant} \Phi(x_0) = |y_0 - y|^2 \leqslant \eta^2$$

Ещё оценим
$$|F(z) - y| \geqslant |F(z) - F(x_0)| - |y_0 - y| \geqslant c|z - x_0| - \eta = c\rho - \eta$$
Выберем η настолько маленьким, что $c\rho - \eta > \eta$. Тогда $|F(z) - y|^2 \geqslant \eta^2$, противоречие.

А раз решение лежит не на границе шара, то $F(z) = y$ — иначе можно пойти против градиента и уменьшиться ещё сильней. Получается, градиент нулевой.

Для любого $\varepsilon > 0$ при выборе достаточно маленького $\rho : \forall z \in \overline{B}_\rho(x_0) : \| \mathrm{d}F(z, \cdot) - A\| \leqslant \varepsilon$, то есть $\mathrm{d}F(z, \cdot)$ обратимо. Запишем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(z) = 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(z) \cdot (f_j(z) - y_j)$$

Из обратимости $\mathrm{d}F(z, \cdot)$ следует невырожденность матрицы $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ (это та же, но транспонированная), откуда при домножении матрицы на вектор $f(z) - y$ не получится нуля — единственным решением зануления градиента является $f(z) = y$.

Таким образом, при $\eta < \frac{c\rho}{2}$ все решения уравнений $F(x) = y$ лежат внутри $\overline{B}_\rho(x_0)$. Часть про выбор окрестности $V \subset F(U)$ доказана.

$$\begin{gathered} F(x) - F(x_0) = A \cdot (x - x_0) + \phi(x), \text{ где } |\phi(x)| = o(|x - x_0|) \\ \forall y \in \overline{B}_\eta(y_0) : \exists x \in \overline{B}_{\rho(x_0)} : F(x) = y \\ y - y_0 = A(F^{-1}(y) - F^{-1}(y_0)) + \phi(F^{-1}(y)) \\ B \coloneqq A^{-1} \\ F^{-1}(y) - F^{-1}(y_0) = B(y - y_0) - B\phi(F^{-1}(y)) \end{gathered}$$

Осталось показать, что $B\phi(F^{-1}(y)) = o(|y - y_0|)$. Применение линейного оператора B на маленькость не влияет, он билипшицев. Также билипшицевы F и F^{-1}, так как $\phi(x) = o(|x - x_0|)$, то $B\phi(F^{-1}(y)) = o(|y - y_0|)$. □

Лекция VIII

14 марта 2023 г.

В предыдущей лекции мы показали следующее. Рассмотрим открытое $G \subset \mathbb{R}^n, F : G \to \mathbb{R}^n$, такие, что F непрерывно дифференцируема всюду.

Если в некой точке $x_0 \in G$ наблюдается невырожденный оператор $\mathrm{d}F(x_0, \cdot)$, то при x, близких к x_0, $\mathrm{d}F(x, \cdot)$ тоже невырождены, функция F^{-1} существует и дифференцируема вблизи $F(x_0)$.

В частности, использовалась лемма, близкая к следующей.

Лемма 1.0.5. *Пусть $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор, такой, что* $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.

Тогда $\exists \varepsilon > 0$, такой, что для любого линейного оператора $\forall S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : \|S - T\| < \varepsilon \Rightarrow$ $\operatorname{Ker} S = \{0\}$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\exists m > 0 : |Tx| \geqslant m|x|$. Тогда $|Sx| \geqslant |Tx| - |(S - T)x| \geqslant (m - |\varepsilon|)x$. □

Следствие 1.0.5. *Если $F : G \to \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемое отображение, такое, что $\mathrm{d}F(x, \cdot)$ невырождено для $x \in U$, то $F(U)$ открыто в $\mathbb{R}^n$.*

1.1 Гладкие многообразия

1.1.1 Касательные векторы

Пусть $x_0 \in A \subset \mathbb{R}^n$, где A — произвольное множество.

Определение 1.1.1 (Касательный к A вектор $e \in \mathbb{R}^n$)**.** Для $t \in \mathbb{R} : \operatorname{dist}(x_0 + te, A) = o(|t|)$ при $t \to 0$.

Замечание. Для x_0 — внутренней точки A — все векторы — касательные.

Теорема 1.1.1. Пусть $F : (U \subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ дифференцируема, $x_0 \in U$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

Пускай $F\Big|_{A\cap U}$ имеет локальный экстремум в x_0. Тогда для касательного к A вектора $e \in \mathbb{R}^n$: $\mathrm{d}F(x_0, e) = 0$.

Доказательство. Пусть $e \in \mathbb{R}^n$ — касательный вектор к A в x_0. Пойдём от противного: $d \coloneqq \mathrm{d}F(x_0, e) \neq 0$.

Посмотрим на $F(x_0 + te) - F(x_0)$. Для любого $t \in \mathbb{R} : \exists x_t \in A : |x_0 + te - x_t| \leqslant 2\operatorname{dist}(x_0 + te, A)$ по определению расстояния.

Запишем определение дифференцируемости F в x_0.

$$F(x_t) - F(x_0) = \mathrm{d}F(x_0, x_t - x_0) + \underbrace{\phi(t)}_{o(|t|)} = \mathrm{d}F(x_0, te) + \mathrm{d}F(x_0, x_t - x_0 - te) + \underbrace{\phi(t)}_{o(|t|)}$$

Так как $|\,\mathrm{d}F(x_0, x_t - x_0 - te)| \leqslant \|\,\mathrm{d}F(x_0, \cdot)\| \cdot |x_t - x_0 - te| \leqslant 2\|\,\mathrm{d}F(x_0, \cdot)\| \cdot |\operatorname{dist}(x_0 + te, A)| = o(t)$, то

$$F(x_t) - F(x_0) = \mathrm{d}F(x_0, te) + o(|t|) = t \cdot d + o(|t|)$$

Получили, что $F\Big|_{A\cap U}$ не имеет локального экстремума в x_0, противоречие. $\square$

Пускай $\Phi : (U \subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, где $m \geqslant n$.

Предположим, что Φ дифференцируема в U и непрерывно дифференцируема в $x_0 \in U$. Также предположим, что Φ билипшицева на своей области определения.

Положим $A = \Phi(U)$, предположим, что $\operatorname{Ker} \mathrm{d}\Phi(x_0, \cdot) = \{0\}$ (что следует из билипшицевости).

Теорема 1.1.2. При сделанных предположениях множество касательных векторов к A в точке $y_0 \coloneqq \Phi(x_0)$ есть $\mathrm{d}\Phi(x_0, \mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Обозначим $L \coloneqq \mathrm{d}\Phi(x_0, \cdot)$.

$\Rightarrow$. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, назначим $e = Lx$, докажем, что e — касательный вектор. Ну, в самом деле, $\operatorname{dist}(A, y_0 + te) \leqslant |\Phi(x_0 + tx) - (y_0 + te)| = |\Phi(x_0 + tx) - \Phi(x_0) - tLx|$. Точка $\Phi(x_0 + tx)$ была подобрана таким хитрым образом, что

$$\Phi(x_0 + tx) - \Phi(x_0) - tLx = L(tx) + \psi(t) - tLx = \psi(t), \qquad \text{где } |\psi(t)| = o(|t|)$$

$\Leftarrow$. Пусть e — касательный вектор A в точке x_0. Найдём $x \in \mathbb{R}^n : e = Lx$.

По определению касательного вектора.

$$\alpha(t) \coloneqq \operatorname{dist}(y_0 + te, A) = o(|t|)$$

Выберем $y_t \in A : |y_0 + te - y_t| \leqslant 2\operatorname{dist}(y_0 + te, A) = 2\alpha(t)$. Отсюда $|y_t - y_0| \leqslant C_1|t|$ для некой константы $C_1 \in \mathbb{R}$.

$y_t = \Phi(x_t)$ для некоего x_t вблизи x_0. Ввиду билипшицевости

$$|y_t - y_0| = |\Phi(x_t) - \Phi(x_0)| \geqslant C_2|x_t - x_0| \qquad \Rightarrow \qquad |x_t - x_0| \leqslant C_3|t|$$

Запишем

$$te + y_t - (y_0 + te) = y_t - y_0 = \Phi(x_t) - \Phi(x_0) = L(x_t - x_0) + \beta(x_t)$$

где $|\beta(x_t)| = o(|x_t - x_0|)$, или же (см. C_3) $\beta(x_t) = o(|t|)$. Поделим равенство на t:

$$e + \underbrace{\frac{y_t - (y_0 + te)}{t}}_{o(1)} = L\left(\frac{x_t - x_0}{t}\right) + \underbrace{\frac{\beta(x_t)}{t}}_{o(1)}$$

Заметим, что $\left|\frac{x_t-x_0}{t}\right| \leqslant C_3$ — точки $\frac{x_t-x_0}{t}$ лежат в замкнутом шаре. Выбрав последовательность $t_n \to 0$, так, что будет сходимость (всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность), получим $\frac{x_{t_n}-x_0}{t_n} \xrightarrow[t\to 0]{} x$, где вектор $x \in \mathbb{R}^n$ — искомый: переходя к пределу сразу получаем $e = L(x)$.

$\square$

1.1.2 Многообразия, вложенные в n-мерное евклидово пространство

Определение 1.1.2 (n-мерное многообразие)**.** Хаусдорфовое, со счётной базой, топологическое пространство X, у каждой точки которого есть окрестность, гомеоморфная B^n.

Пускай $F : (U \subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ — отображение.

Определение 1.1.3 (F непрерывно дифференцируема k раз)**.** Все частные производные всех координатных функций до порядка k включительно существуют и непрерывны.

Пишут $F \in C^{(k)}$.

Определение 1.1.4 (Карта (локальная))**.** Отображение $h : B^n \to X$, являющееся гомеоморфизмом на свой образ.

Определение 1.1.5 (Атлас)**.** Семейство локальных карт $\{h_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, таких, что $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} h_\alpha(B_n) = X$

Такое семейство карт позволяет в каждой маленькой области X ввести свои *координаты*, *параметризовать* X.

Пусть $U_\alpha = h_\alpha(B^n)$, $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$. Если $U_{\alpha\beta} \neq \varnothing$, то возникает дилемма — координаты какого шара использовать?

Функцию $\phi_{\alpha\beta} = h_\beta^{-1} \circ h_\alpha$, переводящую координаты h_α в координаты h_β, называют *отображением перехода*.

Определение 1.1.6 (X — гладкое многообразие класса $C^{(k)}$)**.** Многообразие с фиксированным атласом, в котором все отображения перехода принадлежат классу $C^{(k)}$.

Пример. Рассмотрим в качестве X график модуля $X \coloneqq \{(x, |x|) | x \in \mathbb{R}\}$.

X гомеоморфно $\mathbb{R}$. Если рассмотреть атлас, состоящий из $(a, b) \mapsto ((a, |a|), (b, |b|))$, то все функции перехода будут тождественными, то есть $X \in C^{(\infty)}$.

Это противоречит интуиции (ведь модуль далеко не гладок в нуле), скоро мы определим гладкость многообразия в соответствии с объемлющим пространством.

Лекция IX

17 марта 2023 г.

Пусть $F : (G \subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, где $m > n$ (можно также рассматривать случай $m = n$, но в таком случае ничего интересного не будет). По-прежнему дифференцируема в некоторой окрестности x_0, непрерывно дифференцируема в x_0.

Рассмотрим $x_0 \in G$, считаем, что F — билипшицева на всё множестве G.

Обозначим $D = \mathrm{d}F(x_0, \cdot)$, предположим, что он невырожден. Параметризуем множество $F(G)$.

$L \coloneqq D(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$ — касательное подпространство к $F(G)$ в точке $y_0 \coloneqq F(x_0)$. Заметим, что $\dim L = n$.

Положим $N \coloneqq L^\perp$. Таким образом, $\mathbb{R}^m = L \oplus N$. Введём ортогональный проектор $P : \mathbb{R}^m \to L$.

Выделим из F составляющую $F_1 : \mathbb{R}^n \to L; \quad F_1(x) = PF(x)$. Её дифференциал $\mathrm{d}F_1(x_0, \cdot) = PD$, что равно D, так как $D(\mathbb{R}^n) = L$ — проектор ничего не меняет.

В V — некоторой окрестности точки Py_0 — существует обратное отображение $\phi = F_1^{-1}; \quad \phi : V \to G$.

Введём $H : V \to \mathbb{R}^m$; $\quad H(u) = (F \circ \phi)(u)$. $H(V)$ — кусок множества $F(G)$, H — его локальная карта.

Произвольный вектор $u \in V$ после применения H раскладывается в пару $H(u) = (a, b)$, где $\mathbb{R}^m$ рассматривается, как $L \oplus N$ и $a \in L, b \in N$. $a = PH(u) = PF\phi(u) = u$, так как ϕ — обратная к PF. Таким образом, первая компонента вектора $H(u)$ — просто u. Вторая компонента вектора $\psi(u) \coloneqq (\mathrm{id} - P)H(u)$, какая-то гладкая функция.

Получили «новую параметризацию» $F(G)$. Локальной картой $y_0 \in F(G)$ является $H(u) = (u, \psi(u))$, где $u \in V$.

Таким образом, локально многообразие F — график какого-то непрерывного отображения ψ. Найдём его дифференциал: $\mathrm{d}\psi(y_0, \cdot) = (\mathrm{id} - P)\,\mathrm{d}H(y_0, \cdot) = (\mathrm{id} - P)\,\mathrm{d}(F \circ \phi)(y_0, \cdot) = (I - P)D\,\mathrm{d}\phi(y_0, \cdot)$. Получается 0, так как $(I - P)D = 0$ — D проектирует на L, после чего $I - P$ отображает в нуль.

Таким образом, L — *касательное подпространство* (иногда говорят *касательная плоскость*) к $F(G)$ в точке y_0. Любопытно заметить, что чтобы найти обратную к H функцию, надо спроектировать $H(u)$ на касательную плоскость.

Рассмотрим уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Оно задаёт сферу в $\mathbb{R}^3$, которая является многообразием: $\forall (x_0, y_0, z_0) \in S$. Если x близок к $x_0 > 0$, то $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$ и получаем локальную карту. Аналогично для $x_0 < 0$. Если же x_0 неотделим от нуля, то надо выражать другую координату.

Обобщим.

Пусть задано отображение $f : (U \subset \mathbb{R}^{n+m}) \to \mathbb{R}^n$, непрерывно дифференцируемое всюду в U. В продолжении теоремы векторы $z \in \mathbb{R}^{n+m}$ будем раскладывать на две компоненты $(x, y) \in X \oplus Y$, где $\dim X = n, \dim Y = m$ (необязательно $X \perp Y$).

Пусть $c \in \mathbb{R}^n$. Для примера со сферой выше $m + n = 3, n = 1$.

Рассмотрим множество точек $\{(a, b) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m | f(a, b) = c\}$ — найдём подпространства уровня f. Пусть оно непусто: $\exists a_0, b_0 : f(a_0, b_0) = c$.

Найдём функцию $h : \left(\overset{o}{U}_\delta(b_0) \subset \mathbb{R}^m\right) \to \mathbb{R}^n$, такую, что $\forall y \in \overset{o}{U}_\delta(b_0) : f(h(y), y) = c$.

Обозначим $D = \mathrm{d}f((a_0, b_0), \cdot)$. Обозначим $D\Big|_X = A, D\Big|_X = B$. Предположим, что $D\Big|_X$ невырожден.

Теорема 1.1.3 (О неявной функции)**.** При сделанных предположениях $\exists \overset{o}{U}_\delta(b_0) \subset \mathbb{R}^m : \exists! h : \overset{o}{U}_\delta(b_0) \to \mathbb{R}^n : f(h(y), y) = c$.

Более того, полученная функция h непрерывно дифференцируема.

Доказательство. Введём $F : U \to \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$; $\quad F(x, y) = (f(x, y), y)$. Найдём дифференциал:

$$\begin{gathered} F(x, y) - F(a_0, b_0) = (f(x, y) - f(a_0, b_0), y - b_0) = \\ = (D(x, y) + \underbrace{\phi(x, y)}_{o(|b_0 - y|)}, y - b_0) = (a_0(x - a_0) + b_0(y - b_0), y - b_0) + o(|b_0 - y|) \end{gathered}$$

Таким образом $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^{n+m} : \mathrm{d}F((a_0, b_0), (u, v)) = L(u, v) = (Au + Bv, v)$.

Если $L(u, v) = 0$, то $v = 0$, откуда $Bv = 0$, откуда $Au = 0 \Rightarrow u = 0$, так как A невырожден. Таким образом, L невырожден, к F применима теорема об обратном отображении.

$$F(a_0, b_0) = (f(a_0, b_0), b_0) = (c_0, b_0)$$

Рассмотрим W — окрестность (a_0, b_0), такую, что $\exists G = F^{-1}$, заданная на W, причём G непрерывно дифференцируема в этой окрестности.

Так как $G(u, v) = (*, v)$, то $\exists \psi : W \to \mathbb{R}^n$, ψ непрерывно дифференцируема на W. Таким образом $\forall (u, v) \in W : F(\psi(u, v), v) = (u, v)$.

Определим $h(v) \coloneqq \psi(c, v)$. В самом деле, видим, что h определена на некоторой окрестности b_0, причём $h(y) = c$. $\square$

Лекция X

21 марта 2023 г.

Продолжим теорему, доказанную на предыдущей лекции: найдём дифференциалы.

Мы показали, что существует формула для отображения ϕ в точке b. $D = \mathrm{d}\phi(b, \cdot)$. Так как $f(\phi(y), y) \equiv c$ при y, близких к b, то

$$0 = \mathrm{d}(f(\phi(y), y)) = AD + B$$

Так как A обратима, то $D = -A^{-1}B$.

Пример. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. На плоскости задана кривая соотношением $f(x, y) = c$, где $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Если $f(a, b) = c$, то (при условии $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$) $\exists \phi(y) : f(\phi(y), y) \equiv 0$ при $|y - b| < \delta$.

Производная этой функции $\phi'(b) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}$.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^k; f : U \to \mathbb{R}^n; (a, b) \in U$, где $k > n$. Предположим, что $\forall u \in U$ ранг матрицы Якоби равен n, то есть максимально возможный.

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(u) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(u) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k}(u) \end{pmatrix} = n$$

Рассмотрим множество решений относительно u уравнения $f(u) = c$. Решения называются *множествами уровня* отображения f. $L_c = \{u | f(u) = c\}$.

Пусть $f(u_0) = c$.

Выберем минор матрицы порядка n с ненулевым определителем. Переупорядочим столбцы так, чтобы первые n были линейно независимы.

Обозначим за X пространство, натянутое на первые n координат, за Y — последние $k - n$ координат.

$\mathbb{R}^k = X \oplus Y$, окрестность точки u_0 описывается локальной картой вида $H(y) \coloneqq (\phi(y), y), y \in Y$, причём y близко к проекции u_0 на Y.

V — окрестность точки u_0 на L_c, которая накрывается локальной картой H. $H^{-1}(z) = Qz$, где Q — ортогональный проектор на Y.

Покажем гладкость отображения переходами между картами. $H_1(y) = (\phi_1(y), y), H_2(y) = (\phi_2(y), y)$.

Посмотрим на $H_2^{-1}H_1$, где задано. Это QH_1, что несомненно является гладким отображением, как композиция.

Таким образом, L_c — $(k - n)$ мерное гладкое многообразие.

Займёмся описанием касательной плоскости — $\operatorname{Im} \mathrm{d}\phi(u_0, \cdot)$ не очень удобно, так как ϕ вполне может не быть задана явно.

Теорема 1.1.4. При сделанных предположениях об f (матрица Якоби — максимального ранга), если $L_c \neq \varnothing$, то

$$\forall u_0 : f(u_0) = c \Rightarrow \operatorname{Ker}(\mathrm{d}f(u_0, \cdot)) \text{ — касательное подпространство к } L_c \text{ в точке } u_0$$

Доказательство. Пусть N — касательное подпространство к L_c в точке u_0. $\dim N = k - n = m$.

Обозначим оператор $D \coloneqq \mathrm{d}f(u_0, \cdot)$. $D : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ — сюръекция. Тогда $\dim \operatorname{Ker} D = m$.

Покажем, что $N \subset \operatorname{Ker} D$. Так как их размерности совпадают, то мы докажем совпадение.

Пусть $x \in N$, то есть $\alpha(t) \coloneqq \operatorname{dist}(u_0 + tx, L_c) = o(|t|)$. Для всякого достаточно маленького $t > 0$: $\exists x_t \in L_c : \operatorname{dist}(u_0 + tx, x_t) \leqslant 2\alpha(t)$.

Запишем
$$0 = f(x_t) - f(u_0) = D(x_t - u_0) + \phi(x_t), \text{ где } \phi(y) = o(|y - u_0|)$$
Так как $|x_t - u_0| \leqslant |tx + x_t - u_0| + |tx| \leqslant C|t|$ при t, близких к 0. Тем самым, $\phi(y_t) = o(|t|)$.

$$0 = D(x_t + tx - u_0) - D(tx) + \phi(x_t)$$
Так как $D(x_t + xt - u_0) \leqslant \|D\| \cdot |x_t + tx - u_0| \leqslant 2\|D\|\alpha(t) = o(|t|)$, то поделив на t последнее равенство, получаем
$$0 = \frac{D(x_t + tx - u_0)}{t} - Dx + \frac{\phi(x_t)}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} -Dx$$
Отсюда действительно получается $Dx = 0$. $\square$

Теорема 1.1.5 (О множителях Лагранжа)**.** Пусть $f_1, \ldots, f_n : (U \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$, где по-прежнему $k \geqslant n$. Пусть все f_j непрерывно дифференцируемы.

Рассмотрим L — множество тех $x \in U : f_1(x) = c_1, f_2(x) = c_2, \ldots, f_n(x) = c_n$.

Пусть $x_0 \in L$, а ещё произвольная функция $f : U \to \mathbb{R}$ — тоже непрерывно дифференцируема. Пусть векторы $\operatorname{grad}_{f_i}(x_0)$ линейно независимы, а $f\Big|_L$ имеет локальный экстремум в точке x_0..

При сделанных предположениях $\exists \{\lambda_i\}_{i=1}^n$ — множители Лагранжа, такие, что $\operatorname{grad}_f(x_0) = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i \operatorname{grad}_{f_i}(x_0)$

Доказательство. Положим $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$. Матрица Якоби F получается $J \coloneqq \begin{pmatrix} \operatorname{grad}_{f_1}(x) \\ \vdots \\ \operatorname{grad}_{f_n}(x) \end{pmatrix}$. Линейная независимость строчек при $x = x_0$ означает, что матрица имеет ранг n.

Для $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ получается $L = \{x | F(x) = c\}$.

Для N — касательного подпространства к L в точке x_0 выполнено условие $\operatorname{grad}_{x_0} f \perp N$, $\operatorname{grad}_{x_0} f \in N^\perp$.

Заметим, что $Ju = 0 \iff \forall j : \langle u, \operatorname{grad}_{f_j}(x_0) \rangle = 0 \iff u \in \operatorname{Lin}\{\operatorname{grad}_{f_j}(x_0)\}^\perp$.

Так как $\operatorname{grad}_f(x_0) \perp N = \operatorname{Ker} J$, то $\operatorname{grad}_f(x_0) \in \operatorname{Lin}\{\operatorname{grad}_{f_j}(x_0)\}$. $\square$

Пусть $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ — промежуток общего вида, $g : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}^n$ — векторнозначная функция.

Если g дифференцируема в точке x_0, $g = \begin{pmatrix} g_1 & \ldots & g_n \end{pmatrix}^t$, то $\mathrm{d}g(x_0, h) = \begin{pmatrix} g_1'(x_0) & \ldots & g_n'(x_0) \end{pmatrix}^t \cdot h$.

Функцию g можно рассматривать, как описание движения материальной точки, например.

Вектор $g'(x_0) = \big(g_1'(x_0), \ldots, g_n'(x_0)\big)$ называют *производной* функции g. Заметим, что определение $g'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$ по-прежнему выполняется.

Также выполняется неравенство Лагранжа: $\forall t_1, t_2 : \exists c$ между $t_1, t_2 : |g(t_1) - g(t_2)| \leqslant |g'(c)| \cdot |t_1 - t_2|$.

Определение 1.1.7 (Определённый интеграл векторнозначной функции)**.** Для $\alpha, \beta \in (a, b)$:

$$\int\limits_\alpha^\beta g(x)\,\mathrm{d}t \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \int\limits_\alpha^\beta g_1(x)\,\mathrm{d}t & \dots & \int\limits_\alpha^\beta g_n(x)\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}$$

Факт 1.1.1 (Основная оценка интеграла)**.**

$$\left|\int\limits_\alpha^\beta g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int\limits_\alpha^\beta |g(t)|\,\mathrm{d}t \quad \textit{или} \quad \left(\sum_{j=1}^n \left(\int\limits_\alpha^\beta g_j(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\right)^{1/2} \leqslant \int\limits_\alpha^\beta \left(\sum_{j=1}^n (g_j(t))^2\right)^{1/2} \mathrm{d}t$$

Доказательство. Докажем в предположении, что все g_j кусочно-непрерывны на $[\alpha, \beta]$. В общем случае надо обосновывать, почему $|g|$ интегрируема по Риману, это останется в качестве упражнения.

Пусть $y = \int\limits_\alpha^\beta g(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим $e \in \mathbb{R}^n$, такой, что $|e| = 1, |y| = \langle y, e\rangle = |y|$.

Введём $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \phi(t) = \langle g(t), e\rangle = \sum\limits_{j=1}^n g_j(t)\xi_j$, где $e = \begin{pmatrix}\xi_1 & \dots & \xi_n\end{pmatrix}$. Запишем

$$\left|\left\langle \int\limits_\alpha^\beta g(t)\,\mathrm{d}t, e \right\rangle\right| = \left|\int\limits_\alpha^\beta \phi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int\limits_\alpha^\beta |\phi(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int\limits_\alpha^\beta |g(t)|\,\mathrm{d}t$$

□

1.2 Длина пути

Пусть задана кривая. Как найти её длину? Приблизим её ломаной, длина ломаной — сумма длин отрезков. Если приближения разными ломаными имеют тенденцию куда-то стремиться, то это число называют длиной ломаной.

Кривую, вообще говоря, можно определить как множество точек, а можно — как отображение.

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение. Рассмотрим $T \coloneqq \{t_i\}_{i=0}^k \subset \mathbb{R} : a \leqslant t_1 < \dots < t_k \leqslant b$.

Определим приближение длины ломаной $S(\gamma, T) = |\gamma(t_1) - \gamma(t_0)| + \dots + |\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)|$.

Определение 1.2.1 (Спрямляемая кривая γ)**.** Числа $S(\gamma, T)$ ограничены сверху. В таком случае супремум этих чисел называют длиной пути γ.

Для $[c, d] \subset [a, b]$ у спрямляемого пути определена *длина сужения* $l(\gamma, [c, d])$ — длина пути $\gamma\Big|_{[c,d]}$.

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — произвольное отображение. Здесь определим такую же, как для пути, функцию $S(f, T) = |f(t_1) - f(t_0)| + \dots + |f(t_{k-1}) - f(t_k)|$.

Определение 1.2.2 (f имеет ограниченную вариацию)**.** Все суммы $S(f, T)$ ограничены сверху. В таком случае их супремум называют *вариацией* $V(f, [a, b])$.

1. Пусть T_1, T_2 — два набора точек на $[a, b]$. Если $T_1 \subset T_2$, то $S(f, T_1) \leqslant S(f, T_2)$. Достаточно понять, что эту выполняется, если $T_2 = T_1 \cup \{pt\}$. В самом деле, $|f(t_j) - f(t_{j+1})|$ заменяется на $|f(t_j) - f(pt)| + |f(pt) - f(t_{j+1})|$, что не меньше.

2. Можно ослабить условия на точки, считая, что $t_j \leqslant t_{j+1}$.

3. Если f, g — функции ограниченной вариации, $c, d \in \mathbb{R}$, то $cf + dg$ — тоже функция ограниченной вариации.

   Конкретнее, $V(cf+dg, [a,b]) \leqslant |c|V(f,[a,b]) + |d|V(g,[a,b])$.

$$\sum_{j=1}^{k} |(cf+dg)(t_j) - (cf+dg)(t_{j-1})| \leqslant |c| \sum_{j=1}^{k} |(f(t_j) - f(t_{j-1})| + |d| \sum_{j=1}^{k} |(f(t_j) - f(t_{j-1})|$$

4. Если f — функция ограниченной вариации на $[\alpha, \beta]$ и на $[\beta, \gamma]$, то f — функция ограниченной вариации на $[\alpha, \gamma]$.

$$V(f,[\alpha,\gamma]) = V(f,[\alpha,\beta]) + V(f,[\beta,\gamma])$$

   Пусть T — набор точек в $[\alpha, \gamma]$, причём $T_1 = T \cap [\alpha, \beta]$, а $T_2 = T \cap [\beta, \gamma]$. Считаем, что $\beta \in T$. Тогда $S(f,T) = S(f,T_1) + S(f,T_2)$. Переходя к супремуму по T, получаем $V(f,[\alpha,\gamma]) \leqslant V(f,[\alpha,\beta]) + V(f,[\beta,\gamma])$.

   Обратное неравенство получается примерно так же.

Замечание. f ограниченной вариации $\Rightarrow$ f ограничена.

Замечание. f постоянна $\iff V(f,[a,b]) = 0$.

Теорема 1.2.1.

1. Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Рассмотрим координатные функции $f = \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \end{pmatrix}$. Следующие условия эквивалентны:
   - f — ограниченной вариации.
   - Все f_j — ограниченной вариации.
2. Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Следующие условия эквивалентны:
   - f — ограниченной вариации.
   - $f = \phi_1 - \phi_2$, где ϕ_1, ϕ_2 — возрастают на отрезке $[a,b]$.

Доказательство.

1. $\Rightarrow$. Пусть $t, s \in [a,b]$. $|f_j(t) - f_j(s)| \leqslant |f(t) - f(s)|$. Таким образом, для всякого конечного набора $T \subset [a,b] : S(f_j,T) \leqslant S(f,T) \leqslant V(f,[a,b])$.

   $\Leftarrow$. $f(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(t) e_j$. Таким образом, f — сумма функций ограниченной вариации.

2. $\Leftarrow$. Возрастающая функция есть функция ограниченной вариации:

$$S(\phi,T) = \sum_{j=1}^{k} |\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^{k} (\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})) = \phi(t_k) - \phi(t_0) \Rightarrow V(\phi,[a,b]) = \phi(b) - \phi(a)$$

   Значит, f — конечной вариации, как сумма двух функций конечной вариации.

   $\Rightarrow$. Обозначим $u : [a,b] \to \mathbb{R}; u(t) = V(f,[a,t])$. Докажем, что $v(t) \coloneqq u(t) - f(t)$ возрастает.

   Рассмотрим $s < t \in [a,b]$. Заметим. что $f(t) - f(s) \leqslant |f(t) - f(s)| \leqslant V(f,[s,t]) = u(t) - u(s)$. Отсюда $u(t) - f(t) \geqslant u(s) - f(s)$, действительно, $v(t)$ возрастает.

   Осталось заметить, что v тоже возрастает, $f = u - v$.

$\square$

Замечание. Если f — непрерывная скалярная функция, то получившиеся в доказательство ϕ_1, ϕ_2 тоже непрерывны.

Лекция XI

24 марта 2023 г.

Теорема 1.2.2. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — векторнозначная функция, имеющая ограниченную вариацию.

Введём функцию $V : [a, b] \to \mathbb{R}, V(t) = V(f, [a, t])$. Утверждается, что $\forall x_0 \in [a, b]$: f непрерывна в $x_0 \Rightarrow V$ непрерывна в x_0.

Доказательство. Докажем, что V непрерывна слева в точке t_0, где $t_0 > a$. V возрастающая функция. Выберем $\varepsilon > 0$, найдём точку $s < t$, такую, что $V(s) > V(t) - \varepsilon$.

Так как $V(t)$ — супремум сумм, участвующих в определении вариации $V(f, [a, t])$, то найдётся последовательность точек $s_0 < \dots < s_k, s_j \in [a, t_0]$, такая, что $\sum\limits_{j=1}^{k} |f(s_{j-1}) - f(s_j)| > V(t) - \varepsilon/2$.

Из непрерывности: $\exists \delta : \forall u \in (t_0 - \delta; t_0) : |f(u) - f(t_0)| < \varepsilon/2$. Добавим точек так, чтобы выполнялись условия $s_k = t_0, s_{k-1} \in (t_0 - \delta, t_0)$. $\sum\limits_{j=1}^{k} |f(s_{j-1}) - f(s_j)| > V(t) - \varepsilon/2$. по-прежнему выполнено.

Теперь заметим, что $V(f, [a, s_{k-1}]) \geqslant \sum\limits_{j=1}^{k-1} |f(s_{j-1}) - f(s_j)|$. Комбинируя неравенства, получаем $V(f, [a, s_{k-1}]) \geqslant V(f, [a, t_0]) - \varepsilon$. Точка s_{k-1} подходит в качестве s. $\square$

Замечание. Если f — непрерывная скалярная функция, то во всех точках непрерывности f функции ϕ_1 и ϕ_2 тоже непрерывны.

Вспомним, что *носитель пути* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — его образ ($\operatorname{Im} \gamma$). *Начало пути* — точка $\gamma(a)$, *конец пути* — точка $\gamma(b)$.

Предположим, что $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — путь, $\phi : [c, d] \to [a, b]$ — гомеоморфизм подотрезков $\mathbb{R}$. Иными словами, непрерывная, строго монотонная функция.

Утверждается, что $f \circ \phi$ имеет ограниченную вариацию $\iff$ f имеет ограниченную вариацию. Более того, в этом случае вариации совпадают.

Доказательство. Всякой сумме $\sum\limits_{j=1}^{k} |(f \circ \phi)(s_{j-1}) - (f \circ \phi)(s_j)|$ соответствует сумма $\sum\limits_{j=1}^{k} |(f)(\phi(s_{j-1})) - (f(\phi(s_j))|$. Их супремумы равны, а если точки $s_0, \dots, s_k$ образуют монотонную последовательность отрезка $[a, b]$ (либо $a \leqslant s_0 < \dots < s_k \leqslant b$, либо $a \leqslant s_k < \dots < s_0 \leqslant b$). Их образ — точки $\phi(s_0), \dots, \phi(s_k)$ — тоже образуют монотонную последовательность отрезка, причём ϕ обратимо, все разбиения отрезка достигаются. $\square$

Определение 1.2.3 (Простая дуга)**.** Такой путь $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, что γ — инъекция.

Тогда γ — гомеоморфизм между отрезком $[a, b]$ и своим носителем $\gamma([a, b])$. Это следует из того, что компактность прообраза влечёт компактность образа, а замкнутость образа влечёт замкнутость прообраза (плюс и $[a, b]$, и $\gamma([a, b])$ ограничены).

Пусть $\gamma_1 : [a, b] \to L, \gamma_2 : [c, d] \to L$ — простые дуги, причём $\gamma_1([a, b]) = \gamma_2([c, d]) = L$.

Тогда оказывается, что длины путей γ_1 и γ_2 равны: для $\phi : \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$ — гомеоморфизма — $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \phi$.

Таким образом, о длине носителя простой дуги можно говорить вне зависимости от пути, параметризующего его.

Рассмотрим простую дугу — верхнюю полуокружность $x^2 + y^2 = 1$, где $y \geqslant 0$. Это простая дуга, так как можно параметризовать в виде $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2; \quad \gamma : x \mapsto \left(x, \sqrt{1 - x^2}\right)$.

Определение 1.2.4 (Число π)**.** Длина данной дуги полуокружности.

Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — изометрическое отображение. Тогда $V(A \circ f, [a, b]) = V(f, [a, b])$ — это видно из взаимнооднозначного соответствия между суммами при подсчёте вариации.

Отсюда следует, что длина нижней полуокружности $x^2 + y^2 = 1, y \leqslant 0$ — тоже π.

1.2.1 Длина гладкого пути

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — путь, причём $\gamma \in C^{(1)}$. А именно: запишем его через координатные функции, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$, все производные $\gamma_j'(t)$ существуют и непрерывны при $t \in [a, b]$. Такой путь называется *гладким*.

Теорема 1.2.3. Всякий гладкий путь спрямляем, причём его длина равна

$$l(\gamma, [a, b]) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t = \int\limits_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n (\gamma_j'(t))^2} \, \mathrm{d}t$$

Доказательство. Пусть $a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k = b$. Запишем сумму, получающуюся при вычислении вариации: $\sum\limits_{i=1}^k |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$.

Пусть $I_1, \ldots, I_k$ — попарно непересекающиеся (за исключением, быть может, концов) замкнутые отрезки, $I_i = [t_{i-1}, t_i]$. Видим, что всякому разбиению из точек $\{t_i\}_{i=0}^k$ соответствует разбиение из отрезков $\{I_i\}_{i=1}^k$.

Согласно неравенству Лагранжа: $|\gamma(t_{i-1}) - \gamma(t_i)| \leqslant |\gamma'(\xi)| \cdot |t_i - t_{i+1}|$, где $\xi \in [t_i, t_{i+1}]$.

Продолжим неравенство:

$$|\gamma(t_{i-1}) - \gamma(t_i)| \leqslant |\gamma'(\xi)| \cdot |t_{i-1} - t_i| \leqslant \sup_{u \in [t_i, t_{i+1}]} |\gamma'(u)| \cdot |t_{i-1} - t_i|$$

В правой части неравенства получилось слагаемое из верхней суммы Дарбу для γ'.

Положим $\varepsilon > 0$, выберем такое разбиение $\{t_i\}_{i=0}^k$, что $\sum\limits_{i=1}^k |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \geqslant l(\gamma, [a, b]) - \varepsilon$.

Измельчим соответствующее разбиение $\{I_i\}_{i=1}^k$, превратив его в разбиение $\{J_j\}_{j=1}^s$, такое, что $\sum\limits_{J_j} \sup\limits_{t \in J_j} |\gamma'(t)| \cdot |J_j| \leqslant \int\limits_a^b \gamma'(t) \, \mathrm{d}t + \varepsilon$.

Теперь в качестве точек $\{t_i\}_{i=1}^k$ рассмотрим концы отрезков $\{J_j\}_{j=1}^s$. $\sum\limits_{j=1}^s |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \geqslant l(\gamma, [a, b]) - \varepsilon$ по-прежнему верно.

Таким образом, мы доказали, что $l(\gamma, [a, b]) \leqslant \int\limits_a^b |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t$ — с точностью до ε, где ε можно выбрать сколь угодно малым.

Рассмотрим произвольные $x < y \in [a, b]$. Для них верны неравенства

$$|\gamma(y) - \gamma(x)| \leqslant l(\gamma, [x, y]) \leqslant \int\limits_x^y |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t$$

Поделив это на $y - x$, получим

$$\left| \frac{\gamma(y) - \gamma(x)}{y - x} \right| \leqslant \frac{l(\gamma, [a, y]) - l(\gamma, [a, x])}{y - x} \leqslant \frac{1}{y - x} \int\limits_x^y \gamma'(t) \, \mathrm{d}t$$

Обозначим $L(u) \coloneqq l(\gamma, [a, u])$. Устремим $y \to x_+$, получим $|\gamma'(x)| \leqslant \underset{\text{справа}}{L'(x)} \leqslant |\gamma'(x)|$, то есть по принципу о двух полицейских наступает равенство. Аналогичным образом получается $\underset{\text{слева}}{L'(u)}$.

Тогда очевидно $L(u) = \int\limits_a^u |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t + C$ для некой константы C. Так как $L(a) = 0$, то $C = 0$. $\square$

«Если всё хорошо», то для скалярной функции $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ должно выполняться $V(g, [a, b]) = \int\limits_a^b |g'(t)|\,\mathrm{d}t$.

Пример (Когда не совсем всё хорошо). Вариация возрастающей функции $g(t) = \sqrt{t}$ равна $g(1) - g(0) = 1$. При подсчёте по формуле, получаем $V(g, [0, 1]) = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$. Интеграл этот не существует, производная в нуле не определена.

Если посчитать $V(g, [\varepsilon, 1]) = \int\limits_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$, то получится $2 - 2\sqrt{\varepsilon}$. Здесь возникает понятие о несобственном интеграле — при стремлении $\varepsilon \to 0$.

Лекция XII

31 марта 2023 г.

1.3 Естественная параметризация

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — спрямляемый путь.

Выберем $t_0 \in [a, b]$, обозначим $\phi(t) = \begin{cases} l(\gamma, [t_0, t]), & t \geqslant t_0 \\ -l(\gamma, [t, t_0]), & t < t_0 \end{cases}$. Функция ϕ возрастает и непрерывна. Обозначим $\phi([a, b]) = [\alpha, \beta]$.

Определение 1.3.1 (Движение без задержек)**.** Такой путь $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$, что $\forall [c, d] \subset [a, b] : c < d \Rightarrow l(\gamma, [c, d]) > 0$.

При движении без задержек ϕ строго возрастает, значит, есть биекция $\psi = \phi^{-1} : [\alpha, \beta] \to [a, b]$.

Введём $\widetilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n; \widetilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$.

Рассмотрим $[\delta, \rho] \subset [\alpha, \beta]$. Положим $c = \psi(\delta), d = \psi(\rho)$.

Заметим, что $\rho - \gamma = \phi(d) - \phi(c) = l(\gamma, [c, d]) = l(\widetilde{\gamma}, [\delta, \rho])$.

При такой параметризации для любого отрезка $I : l(\widetilde{\gamma}, I) = |I|$. Отображение ψ называется *естественной параметризацией пути* γ; $\widetilde{\gamma}$ — тот же путь, *параметризованный естественным образом*.

Пусть теперь γ — гладкий путь, то есть $\gamma \in C^{(1)}$. Тогда для ϕ имеется формула:

$$\phi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Было бы удобно, чтобы путь γ был движением без задержек. Предположим ещё больше: $\gamma'(s) \neq 0$ для любого $s \in [a, b]$. Это называется *безостановочным движением*.

Отсюда видим $\phi'(t) = |\gamma'(t)|$ по теореме Ньютона-Лейбница, откуда $\psi'(\tau) = \frac{1}{\phi'(\psi(\tau))}$ и наконец

$$\widetilde{\gamma}'(\tau) = \gamma'(\psi(\tau)) \cdot \psi'(\tau) = \frac{\gamma'(\psi(\tau))}{\phi'(\psi(\tau))} = \frac{\gamma'(\psi(\tau))}{|\gamma'(\psi(\tau))|}$$

Таким образом, $|\widetilde{\gamma}'(\tau)| = 1$, что и стоило ожидать при условии $\forall I : l(\widetilde{\gamma}, I) = |I|$.

Замечание. Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — спрямляемый путь, предположим, что γ' существует и непрерывна на интервале (a,b). Тогда тоже есть функция $\phi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t$, определённая при $t, t_0 \in (a,b)$.

Более того, у функции ϕ есть пределы при $t \to a$ или $t \to b$.

$$l(\gamma, [a,b]) = \lim_{\varepsilon\to0,\delta\to0} l(\gamma, [a+\varepsilon, b-\delta]) = \lim_{\varepsilon\to0,\delta\to0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\delta}$$

Пример. Рассмотрим путь $\kappa(t) = \left[t, \sqrt{t}\right]$. Для него $\kappa'(t) = \left(1, \frac{1}{2\sqrt{t}}\right); |\kappa'(t)| = \sqrt{1 + \frac{1}{4t}}$.

Тогда

$$l(\kappa, [0,1]) = \lim_{\varepsilon\to0} l(\kappa, [\varepsilon, 1]) = \lim_{\varepsilon\to0} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \sqrt{1 + \frac{1}{4t}} \,\mathrm{d}t$$

Об интеграле $\int\limits_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4t}} \,\mathrm{d}t$ говорят, что он существует в *несобственном смысле*; в данном случае он очевидно существует, так как обе координаты пути монотонны, то есть путь — ограниченной вариации.

1.4 Про комплексные числа

Рассмотрим комплексную плоскость $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2; x + iy \leftrightarrow (x, y)$. Я буду обозначать вещественную часть $\Re(x+iy) = x$ и мнимую часть $\Im(x+iy) = y$.

Всякую функцию $g : (\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ можно рассматривать, как векторнозначную функцию со значением в $\mathbb{R}^2$; в частности, их можно дифференцировать.

Пусть $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) & g_2(x) \end{pmatrix} = g_1(x) + ig_2(x)$. Тогда $g'(x) = \begin{pmatrix} g_1'(x) & g_2'(x) \end{pmatrix} = g_1'(x) + ig_2'(x)$.

Комплекснозначные функции наследуют все свойства векторнозначных функций, но вдобавок тут появляются некоторые дополнительные операции. Так, комплексные числа можно перемножать.

Пусть $g_1, g_2 : \langle a,b\rangle \to \mathbb{C}$ — обе дифференцируемы. Сохраняется формула

$$(g_1 \cdot g_2)'(t) = g_1(t)g_2'(t) + g_1'(t)g_2(t)$$

Это можно видеть, либо проверив вручную, что при перемножении комплексные производные перемножаются соответствующим образом, либо просто повторив доказательство производной произведения:

$$\frac{g_1(t)g(2(t) - g_1(s)g_2(s)}{t-s} = \frac{(g_1(t) - g_1(s))g_2(t) + g_1(s)(g_2(t) - g_2(s))}{t-s} \underset{s\to t}{\longrightarrow} \lim_{s\to t}\left[\frac{g_1(t) - g_1(s)}{t-s} + g_2(s)\frac{g_1(t) - g_1(s)}{t-s}\right]$$

То, что комплексное произведение непрерывно, следует из покоординатной непрерывности, получаем искомое равенство.

Определим для $z = a + bi$ его длину как вектор в $\mathbb{R}^2$ — *модуль* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Определим для $z = a + bi$ его *комплексно-сопряжённое* $\overline{z} = a - bi$. Можно заметить, что $z\overline{z} = |z|^2$. Также можно заметить, что для $z \neq 0 : z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Теперь изучим производные комплекснозначных функций. $g : \langle a,b\rangle \to \mathbb{C}$. $(\overline{g})'(t) = \overline{g'(t)}$.

Для $g(t) \neq 0 : (g'^{-1})(t) = -\frac{g'(t)}{g(t)^2}$. Для доказательства опять же повторим вещественное доказательство:

$$\frac{1}{t-s}\left(\frac{1}{g(t)} - \frac{1}{g(s)}\right) = \frac{1}{t-s} \cdot \frac{g(s) - g(t)}{g(s)g(t)}$$

Введём на комплексной плоскости единичную окружность $\mathbb{T} \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ и единичный круг $\mathbb{D} \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$. Замкнутый комплексный круг обозначают $\overline{\mathbb{D}} \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C} | |z| \leqslant 1\}$, что не следует путать с комплексным сопряжением.

Факт 1.4.1. $\mathbb{T}$ — *подгруппа в* $\mathbb{C}^*$ *по умножению.*

Доказательство. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, что следует из прямой проверки. $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \overline{z}$ для $z \in \mathbb{T}$. $\square$

Замечание. Заметим, что для $z = a + bi, w = c + di$ верно:

$$z\overline{w} = (a + bi)(c - di) = ac + bd + i(bc - ad)$$

Таким образом, для точек-векторов комплексной плоскости z, w их скалярное произведение равно $\Re(z\overline{w})$. В частности, $z \perp w \iff z\overline{w}$ чисто мнимое число.

1.4.1 Простое вращение

Определение 1.4.1 (Простое вращение)**.** Отображение $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ со следующими свойствами:

1. γ всюду дифференцируема (и всюду непрерывна).
2. $\forall t \in \mathbb{R} : |\gamma'(t)| = 1$.
3. $\gamma(0) = 1, \gamma'(0) = i$.

Теорема 1.4.1. Простое вращение существует и единственно.

Замечание. Пусть $\phi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{T}$ — гладкое отображение (класса $C^{(1)}$). Продифференцируем равенство $\phi(t) \cdot \overline{\phi(t)} = 1$:

$$\phi(t)\overline{\phi'(t)} + \phi'(t)\overline{\phi(t)} = 0$$

Получили сумму двух комплексносопряжённых чисел, равную 0. Значит, $2\Re(\phi'(t)\overline{\phi(t)}) = 0$, то есть $\phi(t) \perp \phi'(t)$.

Таким образом, $\exists w : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, такая, что $\phi'(t)\overline{\phi(t)} = w(t)i$.

Пусть $\forall t : \phi'(t) \neq 0$. Тогда w — непрерывная не обнуляющаяся функция, значит, она сохраняет знак.

Определение 1.4.2 (Движение против часовой стрелки)**.** Движение ϕ по окружности, такое, что $w(t) > 0$. Также говорят о *движении в положительном направлении* (при движении *круг остаётся слева*).

Если $|\phi'(t)| = 1$, то $|w(t)| = 1$. Так как $w(t)$ не меняет знак, то на самом деле $w(t)$ — константа, не зависит от t: всегда либо $+1$, либо -1.

Из определения простого вращения извлекаем, что $w(0) = 1$. Таким образом, простое вращение происходит против часовой стрелки.

Так как $w = 1$, то $\phi'(t) = i\phi(t)$.

Если $\phi_1, \phi_2 : \langle a, b\rangle \to \mathbb{T}$ и удовлетворяют выше написанному, то «более-менее они одинаковые».

Лекция XIII

4 апреля 2023 г.

…Пропущена первая пара, доказали $\exists!$ простое вращение, посмотрели на него внимательно.

$$i = \Gamma\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + 2i\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Так как $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$, то уравнение имеет единственное решение $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.4.2 Формулы Тейлора и ряд Тейлора для функций $\Gamma, \sin, \cos$

Используя основное тождество, получаем $\Gamma^{(n)}(t) = i^n\Gamma(t)$. Значит, записывая формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, получаем в нуле

$$\Gamma(t) = 1 + it + \frac{1}{2!}i^2t^2 + \frac{1}{3!}i^3t^3 + \dots + \frac{1}{n!}i^nt^n + o(t^n)$$

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ — векторнозначная функция, непрерывно дифференцируемая $n+1$ раз. Как можно записать для неё формулу Тейлора?

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_j(t) \end{pmatrix}$$

Выбрав $t_0 \in (a, b)$, можем записать $f_j(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + \frac{1}{(n+1)!}f_j^{(n+1)}(\xi_j)(t-t_0)^{n+1}$ Эти точки ξ_j зависят от j, поэтому записать формулу Лагранжа прямо не получится.

Для оценки того, сходится ли ряд Тейлора к соответствующей функции, можно оценить $f^{(n+1)}$ по модулю независимо от точки, на всём промежутке (t_0, t).

Можно пойти по-другому: $\exists \xi \in (t_0, t) : \left|f(t) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\xi)(t-t_0)^{n+1}\right|$.

Доказательство. Такое же, как и в формуле Лагранжа: рассмотрим $u \in \mathbb{R}^n$, такой, что $|u| = 1$ и

$$\left\langle u, f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k \right\rangle = \left|f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k\right|$$

Введём функцию $g(\tau) \coloneqq \langle u, f(\tau)\rangle$ и запишем формулу Лагранжа для неё:

$$g(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k = \frac{1}{(n+1)!}g^{(n+1)}(\xi)(t-t_0)^{n+1}, \quad \text{для } \xi \in (t_0, t)$$

$$\Downarrow$$

$$\left|f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}|u| \cdot |t-t_0|^{n+1}\left|f^{(n+1)(\xi)}\right|$$

□

Итак,

$$\left|\Gamma(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k}{k!}t^k\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}|t|^{n+1} \cdot |\Gamma^{(n+1)}(\xi)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}|t|^{n+1}, \quad \text{для некой } \xi \in (0, t)$$

Если $|t| \leqslant R$ для некой константы $R \in \mathbb{R}$, то остаточный член равномерно стремится к нулю: $\frac{t^n}{(n+1)!} \leqslant \frac{R^n}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Значит, ряд Тейлора сходится для $\Gamma(t)$ на всей вещественной оси: $\Gamma(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!}t^k$. Вспомним, что $e^t = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}t^k$.

Взяв вещественную и мнимую часть разложения в ряд Тейлора $\Gamma(t)$, получим разложение в ряд Тейлора косинуса и синуса соответственно:

$$\cos(t) = \Re\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!}t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \Re\left(\frac{i^k}{k!}t^k\right) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots$$
$$\sin(t) = \Im\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!}t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \Im\left(\frac{i^k}{k!}t^k\right) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$$

Определение 1.4.3 (Тангенс)**.** Функция $\operatorname{tg}(x) \overset{def}{=} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, заданная везде, где знаменатель не обращается в ноль.

Замечание. Период тангенса — π: $\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \operatorname{tg}(x)$.

Тангенс строго возрастает на промежутках определённости:

$$\operatorname{tg}'(t) = \left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)' = \frac{(\cos t)^2 + (\sin t)^2}{(\cos t)^2} = \frac{1}{(\cos t)^2}$$

1.4.3 Обратные тригонометрические функции

Арксинус

$\sin' x = \cos x$, что больше нуля на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $\sin x$ возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, обозначим $\arcsin \overset{def}{=} \sin^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \underset{\text{так как на } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ косинус положительный}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Арктангенс

tg возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, определим $\operatorname{arctg} \overset{def}{=} \operatorname{tg}^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \cdots = \frac{1}{1+x^2}$$

Очевидным следствием является $\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, t \in \mathbb{R}$.

Запишем $\frac{1-t^{n+1}}{1+t} = 1-t+t^2-\dots+(-1)^n t^n$. Таким образом, $\frac{1}{1+t^2} = 1-t^2+t^4-\dots+(-1)^n t^{2n} + \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}$.

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \int\limits_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Считаем, что $|x| \leqslant 1$, оценим

$$\left| \int\limits_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int\limits_0^{|x|} t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3}|x|^{2n+3}$$

Таким образом, получаем ряд Тейлора для арктангенса:

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \dots$$

Запишем $\arcsin x = \int\limits_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ для $|x| \leqslant 1$.

Ряд Ньютона для $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ сходится равномерно при $|t| \leqslant x < 1$. Равномерно сходящийся ряд можно проинтегрировать и получить ряд Тейлора для арксинуса.

Ещё раз посмотрим на сходство: $\Gamma(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} t^k$; $e^t = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k$. Если в ряд для экспоненты формально подставить $t \leftarrow it$, то получится простое вращение.

Простое вращение ещё называют *мнимой экспонентной*. $e^{ix} \overset{def}{=} \Gamma(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$. В частности, $e^{i\pi} = -1 \iff \Gamma(\pi) = 1$.

Покамест e^{ix} — это только обозначение, не имеющее обозначение к e^x для $x \in \mathbb{R}$, потом мы увидим ещё причины, по которым эта запись естественна.

1.4.4 Формула Эйлера

$$\Gamma(x) = \cos x + i \sin x; \quad \Gamma(-x) = \overline{\Gamma(x)} = \cos x - i \sin x$$
$$\Downarrow$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Определим $e^z \overset{def}{=} e^a \cdot e^{ib} = e^a \Gamma(b)$. Основное свойство экспоненты $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ сохраняется.

Для комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ определим $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ и $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

Заметим также, что $(e^{ax})' = a \cdot e^{ax}$, а $(e^{ibx})' = \Gamma(bx)' = ib\Gamma(bx) = ib \cdot e^{ibx}$, согласованность полная.

1.5 Дифференцирование высших порядков

Рассмотрим скалярную функцию $f : (G \subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$. Для векторнозначных функций это тоже можно делать, но получится много индексов, и в любом случае можно разобрать векторнозначную функцию на координатные скалярные функции.

Пусть $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ существуют и непрерывны для $j = 1..n$. При дифференцировании один раз получаем $\mathrm{d}f(x, h) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \cdot h_j =: \phi_h(x)$, где $h = \begin{pmatrix} h_1 & \dots & h_n \end{pmatrix}$.

Предположим, что возможно продифференцировать $\phi_h(x)$ по x ещё раз: $\frac{\partial}{\partial x_j}\phi_h(x) = \sum\limits_{s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_s} f(x) \cdot h_s$.

Предположим, что все производные $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_s} f$ существуют и непрерывны. Тогда

$$\mathrm{d}\phi_h(x, k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_s} f(x) h_s k_j = D^2 f(x, h, k)$$

При каждом x полученный дифференциал $D^2 f(x, \cdot, \cdot)$ — билинейная функция.

По определению $D^r f\left(x, h^{(1)}, \dots, h^{(r)}\right)$ — при фиксированном x это r-линейная форма по $h^{(1)}, \dots, h^{(r)}$.

Раскрыв, получим r-ый дифференциал f — r-линейную форму:

$$D^r f(x, h^{(1)}, \dots, h^{(r)}) \overset{def}{=} \sum_{1 \leqslant j_1, \dots, j_r \leqslant n} \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{j_r}} f(x) h^{(1)}_{j_1} \cdots h^{(r)}_{j_r} = \sum_{1 \leqslant j_1, \dots, j_r \leqslant n} \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_r}}(x) h^{(1)}_{j_1} \cdots h^{(r)}_{j_r}$$

Разумеется, для существования дифференциала мы предполагаем, что существуют и непрерывны все производные вплоть до r-й.

Лекция XIV

11 апреля 2023 г.

Определение 1.5.1 (Полилинейная функция порядка s)**.** Линейное по каждому из s аргументов отображение $L : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{s} \to \mathbb{R}$. Она же — *$s$-линейная функция*.

Пусть в функцию L подставили $h^{(1)},\dots,h^{(s)}$. Разложим их по базису $h^{(j)}=\sum\limits_{k=1}^{n}h_k^{(j)}e_k$ и воспользуемся линейностью:

$$L(h^{(1)},\dots,h^{(s)})=\sum_{1\leqslant j_1,\dots,j_s\leqslant n}h_{j_1}^{(1)}\dots h_{j_s}^{(s)}\cdot a_{j_1,\dots,j_s}$$

Все полилинейные функции имеют такой вид, причём всякая функция, имеющая такой вид — полилинейна.

s-линейной функции L соответствует s-форма $T(h)=L(h,\dots,h)$ — сужение L на диагональ. В частности, для $s=2:T$ — *квадратичная форма*.

Определение 1.5.2 (Симметричная s-линейная форма L)**.** Такая, что она не зависит от перестановки векторов-аргументов.

Теорема 1.5.1. Если все частные производные порядка r от f непрерывны, то они не зависят от порядка дифференцирования.

Доказательство. Позднее. □

Теорема 1.5.2. Пусть L — s-линейная функция, T — соответствующая s-форма. Если L симметрична, то L однозначно восстанавливается по T.

Пример (Объяснение). Рассмотрим $s=2$.

$$T(x+y)=L(x+y,x+y)=L(x,x)+L(x,y)+L(y,x)+L(y,y)=L(x,x)+2L(x,y)+L(y,y)$$
$$T(x-y)=L(x-y,x-y)=L(x,x)-L(x,y)-L(y,x)+L(y,y)=L(x,x)-2L(x,y)+L(y,y)$$
$$L(x,y)=\frac{1}{4}(T(x+y)-T(x-y))$$

Доказательство.

$$L(h^{(1)},\dots,h^{(s)})=\frac{1}{2^s s!}\left(\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_s=\pm1}(\varepsilon_1\cdot\ldots\cdot\varepsilon_s)\cdot T\left(\varepsilon_1h^{(1)}+\dots+\varepsilon_sh^{(s)}\right)\right)$$

Проверим истинность формулы: раскроем $T\left(\varepsilon_1h^{(1)}+\dots+\varepsilon_sh^{(s)}\right)$ в сумму s^s слагаемых вида $\left(\prod\varepsilon_i\right)\cdot L\left(\sum\varepsilon_jh^{(j)}\right)$. При фиксированных $i_1,\dots,i_s$, рассмотрим все слагаемые $\pm L\left(h^{(i_1)},\dots,h^{(i_s)}\right)$. Если $i_1,\dots,i_s$ — перестановка, то слагаемое входит со знаком $1=(\varepsilon_1\cdot\ldots\cdot\varepsilon_s)^2$, иначе найдётся $j\neq i_1,\dots,i_s$, тогда $\varepsilon_j=\pm1$ нейтрализуют друг друга, в сумме останется 0. □

Дифференциалом порядка r от f обычно считают r-форму

$$\mathrm{d}^{(r)}f(x,h)=D^{(r)}f(x,\underbrace{h,\dots,h}_{r})$$

В дальнейшем все упоминания дифференциала будут относится к $\mathrm{d}^{(r)}$.

1.6 Формула Тейлора функции нескольких переменных

$f:G\to\mathbb{R}$ — $r+1$ раз непрерывно дифференцируема (нам придётся использовать $r+1$-ю производную для записи остатка).

Рассмотрим $x_0\in G,\overline{B_r(x_0)}\subset G,x\in B_r(x_0)$.

Выберем настолько маленький $\varepsilon>0:B_\varepsilon(x)\subset B_r(x_0)$. Тогда $x_0+t(x-x_0)\in B_r(x_0)$ для $t\in(-1,1+\varepsilon)$.

Продифференцируем $\phi:(-1,1+\varepsilon)\to\mathbb{R},\phi(t)=f(x_0+t(x-x_0))$.

Обозначим $p = x - x_0$, при новом обозначении $\phi(t) = f(x_0 + tp)$.

$$\phi'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + tp)p_j \underset{\langle \mathrm{grad}_f(x_0), p\rangle}{=} \mathrm{d}f(x_0 + tp, p)$$
$$\phi^{(2)}(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x_0 + tp)p_k p_j = \mathrm{d}^2 f(x_0 + tp, p)$$

В общем случае $\phi^{(s)}(t) = \mathrm{d}^{(s)} f(x_0 + tp; p)$.

$f(x) - f(x_0) = \phi(1) - \phi(0) = \frac{\phi'(0)}{1!} + \frac{\phi^{(2)}(0)}{2!} + \dots + \frac{\phi^{(r)}(0)}{r!} + \frac{\phi^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!}$, где $\xi \in [0, 1]$.

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{\mathrm{d}^{(1)} f(x_0, x - x_0)}{1!} + \frac{\mathrm{d}^{(2)} f(x_0, x - x_0)}{2!} + \dots + \frac{\mathrm{d}^{(r)} f(x_0, x - x_0)}{r!}}_{r\text{-й многочлен Тейлора для } f \text{ в точке } x_0} + \frac{\mathrm{d}^{(r+1)} f(u, x - x_0)}{(r + 1)!}$$

где u лежит на отрезке с концами в точках x_0 и x. Заведомо $u \in B_r(x_0)$.

Предложение 1.6.1. *Пусть L — s-линейная функция на $\mathbb{R}^n$. Тогда* $\exists C \in \mathbb{R}:$

$$\left|L\left(h^{(1)}, \dots, h^{(s)}\right)\right| \leqslant C \cdot \left|h^{(1)}\right| \cdot \ldots \cdot \left|h^{(s)}\right|$$

Для соответствующей s-формы: $|T(h)| \leqslant C \cdot |h|$.

Доказательство. Вспомним формулу $L\left(h^{(1)}, \dots, h^{(s)}\right) = \sum\limits_{1 \leqslant j_1, \dots, j_s \leqslant n} a_{j_1, \dots, j_s} h_j^{(1)} \cdot \ldots \cdot h_{j_s}^{(s)}$. Существует такое $A : \forall j_1, \dots, j_s : |a_{j_1, \dots, j_s}| \leqslant A$, так как a — конечно.

$$\left|\sum a_{j_1,\dots,j_s} h_j^{(1)} \cdot \ldots \cdot h_{j_s}^{(s)}\right| \leqslant A \sum_{a_{j_1,\dots,j_s}} \left|h_1^{(1)}\right| \cdot \ldots \cdot \left|h_s^{(s)}\right| = A\left(\left|h_1^{(1)}\right| + \dots + \left|h_1^{(s)}\right|\right) \cdot \ldots \cdot \left(\left|h_n^{(1)}\right| + \dots + \left|h_n^{(s)}\right|\right)$$

i-й множитель оценивается $\sqrt{n} \cdot \left|h^i\right|$ согласно КБШ. □

Замечание. Пусть $\exists h : T(h) \neq 0$. Тогда $T(th) = t^s T(h)$, то есть оценка в некотором смысле плотная.

Таким образом, в многочлене Тейлора k-е слагаемое оценивается по модулю $\frac{1}{k!}|x - x_0|^k$

Оценим остаточный член в формуле Тейлора: $\mathrm{d}^{(r+1)} f(u, x - x_0)$ есть $\frac{\partial^{r+1}}{\partial x_{j_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_{j_r}} f(u)$. В этом шаре все производные существуют и непрерывны, значит, ограничены некой константой.

Так как $u \in \overline{B_r(x_0)}$, то $\left|\mathrm{d}^{(r+1)} f(u, x - x_0)\right| \leqslant C|x - x_0|^{r+1}$.

Теорема 1.6.1. Пусть f — $r + 1$ раз непрерывно дифференцируема в $G \subset \mathbb{R}^n$, причём $\overline{B_r(x_0)} \subset G, x \in B_r(x_0)$. Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\mathrm{d}^{(j)} f(x_0, x - x_0)}{j!} + \underset{\text{или } o(|x - x_0|^r)}{\mathcal{O}\left(|x - x_0|^{r+1}\right)}$$

Доказательство. Написано выше. □

Теорема 1.6.2 (Единственность многочлена Тейлора)**.** Пусть f — $r+1$ раз непрерывно дифференцируема в $G \subset \mathbb{R}^n$, причём $\overline{B_r(x_0)} \subset G, x \in B_r(x_0)$.

Пусть $f(x) - f(x_0) = \sum\limits_{j=1}^{r} T_j(x - x_0) + o(|x - x_0|^r)$, где T_j — некоторая j-форма.

Тогда непременно $\forall j : T_j(h) = \frac{\mathrm{d}^{(j)} f(x_0, h)}{j!}$.

Доказательство. Аналогично одномерному случаю:

Пусть есть два представления — формула Тейлора, и ещё одно, такое: $f(x) - f(x_0) = \sum\limits_{j=1}^{r} S_j(x - x_0) + o(|x - x_0|^r)$, где S_j — j-форма.

Вычтем одно из другого. Получим функцию $r : G \to \mathbb{R}$, $r(x) = \sum\limits_{j=1}^{r} R_j(x - x_0) = o(|x - x_0|^r)$, где R_j — j-форма.

Пусть k — наименьший индекс, такой, что $R_k \not\equiv 0$, то есть найдётся вектор v, такой, что $R_k(v) \neq 0$.

Рассмотрим $t \in \mathbb{R}$ в такой окрестности 0, что $x + tv \in G$. Для них $r(tv) = t^k R_k(v) + o(t^{k+1})$. Получили противоречие. □

Лекция XV

14 апреля 2023 г.

Лекция XVI

18 апреля 2023 г.

Упс, была лекция в пятницу, а ещё я опоздал минут на 5. To be deployed...

3. Форма $V\Big|_L$ неопределённая. $\exists u_1, u_2 \in L : V(u_1) > 0, v(u_2) < 0$. Так как $u_1, u_2 \in L$, то $\exists a)1, a_2 \in \mathbb{R}^m : u_1 = \mathrm{d}\Phi(t_0, a_1), u_2 = \mathrm{d}\Phi(t_0, a_2)$, где $\Phi(x_0) = t_0 \in B$.

Запишем
$$F(\Phi(t_0 + \tau u_1)) - F(\Phi(t_0))$$
где $\tau \in (-\delta, \delta)$.

Вычисления с прошлой лекции показывают, что $\tau \mapsto F(\Phi(t_0 + \tau a_1))$ имеет локальный минимум при $t = 0$. При замене a_1 на a_2 получаем локальный максимум.

Значит, нет ни максимума, ни минимума.

1.6.1 Независимость частных производных от порядка дифференцирования

Понятно, что достаточно научиться переставлять два оператора дифференцирования.

Теорема 1.6.3. Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — открытое множество плоскости, $f : U \to \mathbb{R}$ — функция, такая, что $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ существуют и непрерывны.

Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ существует и совпадает с $\psi \coloneqq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Доказательство. Докажем в одной точке $(x_0, y_0) \in U$.

Выберем $\rho > 0 : K \coloneqq \left\{(x, y)\Big||x - x_0| \leqslant \rho, |y - y_0| \leqslant \rho\right\} \subset U$.

Выберем последовательность $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}, (0 < h_n \leqslant \rho)$, стремящуюся к нулю. $\phi(x) = \frac{f(x, y_0 + h_n) - f(x, y_0)}{h_n}$. $\phi_n(x) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial y} f(x, y_0)$ (1).

$\phi_n'(x) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(\cdot, y_0) = \psi(x, y_0)$ (2) поточечно.

Была теорема, что при некоторых условиях тогда что?

Достаточно доказать, что сходимость в (1) и (2) равномерная.

Касательно (2): $\exists \xi_n(x)$ между $y_0 + h_n$ и y_0 : $\dfrac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, y_0 + h_n) - \frac{\partial}{\partial x} f(x, y_0)}{h_n} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(x, \xi_n(x))$. По теореме Кантора $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : |t - t_1| \leqslant \delta, |s - s_1| \leqslant \delta, (t, s), (t_1, s_1) \in K \Rightarrow |\phi(t, s) - \phi(t_1, s_1)| < \varepsilon$.

Заметим, что $|y_0 - \xi_n(x)| \leqslant h_n < \delta$ при достаточно больших n. Значит, $\left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,\xi_n(x)) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y_0)\right| < \varepsilon$ при таких n. $\square$

Глава 2

Несобственные интегралы и компания

2.1 Одна из ситуаций

$(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ — возможно бесконечный отрезок. $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$. $\forall [a, b] \subset (\alpha, \beta)$ пускай f интегрируема на $[a, b]$ по Риману-Дарбу.

Если f не интегрируема по Риману-Дарбу на (α, β), но $\exists \lim\limits_{a \to \alpha, b \to \beta} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, то говорят, что f интегрируема по отрезку (α, β) *в несобственном смысле*.

Определение 2.1.1 (Несобственный интеграл)**.** Выше предложенный предел $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \overset{def}{=} \lim\limits_{a \to \alpha, b \to \beta} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Обозначение такое же, как и у обычного интеграла, но следует говорить, что интеграл несобственный.

1. Предел существует — «(несобственный) интеграл сходится».
2. Предела нет — «(несобственный) интеграл расходится».
3. Есть предел $\lim\limits_{b \to \beta - 0} \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ — «интеграл сходится абсолютно».

Применение критерия Коши: $\forall \varepsilon > 0 : \exists c < \beta : u, v \in [c, \beta) \Rightarrow \left| \int\limits_u^v f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$.

Теорема 2.1.1. $f, g : [\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ непрерывны, $\forall b < \beta$ обе интегрируемы по Риману на $[\alpha, b]$ и $|f| \leqslant g$. Если $\int\limits_\alpha^\beta g(x)\,\mathrm{d}x$ сходится, то $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ сходится абсолютно.

Доказательство. $\forall u < v \in [\alpha, \beta) : \left| \int\limits_u^v f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int\limits_u^v |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_u^v g(x)\,\mathrm{d}x$. □

Следствие 2.1.1. *Интеграл сходится абсолютно $\Rightarrow$ интеграл сходится.*

Примеры.

- $\int\limits_1^\infty x^\gamma\,\mathrm{d}x$ сходится $\iff \gamma < -1$.
- $\int\limits_1^\infty x^\rho\,\mathrm{d}x$ сходится $\iff \rho > -1$.

Пусть нас интересует интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$, при f, g непрерывных на $[\alpha, \beta)$, f' непрерывна на (α, β).

Нас интересует предел $b \to \beta$ выражения:

$$\int\limits_{\alpha}^{b} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \left\| \ G(x) = \int\limits_{\alpha}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t \ \right\| = \int\limits_{\alpha}^{b} f(x)\,\mathrm{d}G(x) = G(x)f(x)\Big|_{\alpha}^{b} - \int\limits_{\alpha}^{b} G(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Сформулируем условия на функции f, g. Предположим, что

1. G ограничена константой A.
2. $\lim_{\beta-0} f = 0$.
3. f монотонно убывает на $[\alpha, \beta)$. Тогда производная неположительна, интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} G(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$ сходится абсолютно: $|G(x)f'(x)| \leqslant A|f'(x)| = -Af'(x)$.

Теорема 2.1.2. При данных условиях интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ сходится.

Пример. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ сходится.

Заметим, что особенность есть только в ∞, будем рассматривать $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. Положим $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \sin x$. Тогда все условия выполнены.

2.2 Сравнение рядов и интегралов

Пусть $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ — монотонная функция. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} f(j) \quad \text{и} \quad \int\limits_{1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

вещи близкие.

Лекция XVII

21 апреля 2023 г.

Итак, пусть $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ — убывающая положительная функция. Предположим (хотя на самом деле для убывающей функции это всегда правда), что для любого $R < \infty$: f интегрируема по Риману-Дарбу на $[0, R]$.

Пусть $A_1 < A_2 < \cdots < A_j$ — возрастающая последовательность. Тогда оцениваем

$$\sum_{j=1}^{k} f(A_{j+1})(A_{j+1} - A_j) \leqslant \int\limits_{A_1}^{A_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{j=1}^{k} f(A_j)(A_{j+1} - A_j)$$

В частном случае $A_j = j$ получаем

$$\sum_{j=1}^{k} f(j+1) \leqslant \int\limits_{1}^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{j=1}^{k} f(j)$$

$$\int\limits_{1}^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{j=1}^{k} f(j) \leqslant \int\limits_{1}^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x + f(1) - f(k+1)$$

Пусть $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$, тогда при сделанных предположениях ряд $\sum\limits_{j=1}^{k} f(j)$ сходится $\iff$ $\int\limits_1^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ сходится при $k\to\infty$.

Замечание. Пусть $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ расходится. Тогда, поделив неравенство, получаем

$$1 \leqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} f(j)}{\int\limits_1^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x} \leqslant 1 + \frac{f(1)-f(k+1)}{\int\limits_1^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Таким образом, по принципу двух полицейских, получаем, что $\int\limits_1^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ и $\sum\limits_{j=1}^{k} f(j)$ — эквивалентные бесконечно большие при $k\to\infty$.

Следствие 2.2.1. $1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k} \sim \log(k+1)$. *Кстати, так как* $\log(k+1)-\log(k) = \log\left(1+\frac{1}{k}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow}$ 0*, то можно написать и* $\log(k)$ *вместо* $\log(k+1)$.

Давайте теперь возьмём $A_j = 2^j$, где $\{A_j\}_{j=0}^{k}$. Так как $A_{j+1}-A_j = 2^j$, то получаем, что сходимость ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f(2^j)2^j$ эквивалентна сходимости интеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Забавным следствием получается формулирующееся без интегралов утверждение из первого семестра о том, что ряды $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f(2^j)2^j$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f(j)$ сходятся (или расходятся) одновременно.

Замечание. Аналогичные соображения для возрастающих функций, например, можно получить, что для $s>0: \sum\limits_{n=1}^{N} n^s \sim \frac{1}{s+1}N^{s+1}$.

2.2.1 Частичные суммы гармонического ряда и постоянная Эйлера-Маскерони

Оказывается, есть более сильное условие, чем $1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k} \sim \log(k)$.

$$\log(k+1) = \int\limits_1^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \sum_{j=1}^{k} \int\limits_j^{j+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{k} \int\limits_j^{j+1} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{j}\right)\mathrm{d}x$$

Оценив $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{j}\right| = \left|\frac{x-j}{xj}\right| \leqslant \frac{1}{j^2}$, получаем, что ряд этих штук сходится и разность

$$\log(k+1) - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} C$$

стремится к некой постоянной C — *постоянной Эйлера-Маскерони* (на самом деле, постоянная Эйлера-Маскерони $\gamma \overset{def}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \log(n)$. Так как $\log(k+1)-\log(k) = \log\left(1+\frac{1}{k}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то $\gamma = -C$).

2.2.2 Формула Стирлинга

Получим асимптотическую оценку для факториала.

$\log(n!) = \sum\limits_{i=1}^{n} \log i$, сравним эту штуку с $\int\limits_1^{n+1} \log x\,\mathrm{d}x$. Как известно, $\int \log x\,\mathrm{d}x = x\log x - x + \mathrm{const}$.

$$\int\limits_1^{n+1} \log x \,\mathrm{d}x = (n+1)\log(n+1) - (n+1) + 1 = (n+1)\log(n+1) - n$$

Оценим по формуле Тейлора $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\xi)^2}$, $\xi \in [0, x]$, откуда $\log(1+x) = x + \phi(x)$, $|\phi(x)| \leqslant \frac{1}{2}x^2$.

$$\int\limits_1^{n+1} \log x \,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_1^{j+1} \log x \,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_j^{j+1} (\log x - \log j) \,\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{n} \log j$$

Для $x \in [j, j+1]$ получаем $\log x - \log j = \log\left(1 + \left(\frac{x}{j} - 1\right)\right) = \frac{x-j}{j} + \phi\left(\frac{x-j}{j}\right)$, где $\left|\phi\left(\frac{x-j}{j}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\frac{|x-j|^2}{j^2}$.

Итак,

$$(n+1)\log(n+1) - n = \sum_{j=1}^{n} \log j + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_j^{j+1} \phi\left(\frac{x-j}{j}\right) \mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \underbrace{\int\limits_j^{j+1} (x-j)\,\mathrm{d}x}_{1/2} \sum_{j=1}^{n} \log j + \frac{1}{2}\log(n+1) + \underbrace{v_n}_{\text{сходится}}$$

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\log(n+1) - n = \log(1) + \dots + \log(n) + v_n$$

$$(n+1)^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} = n! \cdot e^{v_n}$$

$$n^{n+\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}_{\text{стремится к } e} e^{-n} = n! \cdot e^{v_n}$$

$$n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Интересный факт. Появившаяся в последней строчке константа $C = \sqrt{2\pi}$.

2.3 Суммируемые семейства

Пусть есть множество проиндексированных (быть может комплексных) чисел $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in A}$, где A — множество любой природы.

Число a называется суммой этого семейства, если $\forall \varepsilon > 0 : \exists$ конечное подмножество $B \subset A$, такое, что $\forall B \subset C \subset A : \left|a - \sum\limits_{\alpha \in C} \xi_\alpha\right| < \varepsilon$, где рассматриваются конечные надмножества C.

Определение 2.3.1 (Суммируемое семейство)**.** Семейства, у которого есть сумма. Пишут $a = \sum\limits_{\alpha \in A} \xi_\alpha$.

Замечание. Семейство $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ суммируемо $\iff$ $\{\Re(\xi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ и $\{\Im(\xi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ оба суммируемы.

Теорема 2.3.1. Следующие условия эквивалентны:

1. Семейство $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ суммируемо.
2. Суммы $\sum\limits_{\alpha \in C} |\xi_\alpha|$ ограничены по всем конечным $C \subset A$.

Лекция XVIII

25 апреля 2023 г.

Ниже все множества $E, e, \overline{e}$ — конечны.

Теорема 2.3.2. Пусть $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — числовое семейство. Следующие условия эквивалентны:

1. Семейство суммируемое.
2. Множество $\left\{\left|\sum\limits_{\alpha \in e} a_\alpha\right| \middle| e \subset A, e \text{ — конечно}\right\}$ ограничено.
3. Множество $\left\{\sum\limits_{\alpha \in e} |a_\alpha| \middle| e \subset A, e \text{ — конечно}\right\}$ ограничено.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$. Положим a — сумма семейства. Выберем $\varepsilon = 1$, по определению суммируемого семейства $\exists E \subset A : \forall : e \supset E : \left|\sum\limits_{\alpha \in e} a_\alpha - a\right| \leqslant 1$.

Рассмотрим произвольное $\overline{e} \subset A$, положим $e = \overline{e} \cup E$.

$$\left|\sum_{\alpha \in \overline{e}} a_\alpha\right| = \left|\sum_{\alpha \in e} a_\alpha - \sum_{\alpha \in E \setminus \overline{e}} a_\alpha\right| \leqslant \underbrace{\left|\sum_{\alpha \in e} a_\alpha\right| + \sum_{\alpha \in E} |a_\alpha|}_{\text{ограничено}}$$

$3 \Rightarrow 2$ Очевидно.

$2 \Rightarrow 1, 3$.

Лемма 2.3.1. *Пусть $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — множество положительных чисел. Следующие условия эквивалентны:*

- *Семейство суммируемое.*
- *Множество $\left\{\sum\limits_{\alpha \in e} a_\alpha \middle| e \subset A, e \text{ — конечно}\right\}$ ограничено.*

Если любое из условий выполнено, то $\sum\limits_{\alpha \in e} a_\alpha = \sup\left\{\sum\limits_{\alpha \in e} a_\alpha \middle| e \subset A\right\}$.

Доказательство леммы.

$1 \Rightarrow 2$ уже доказали.

Положим $a = \sup\left\{\sum\limits_{\alpha \in e} a_\alpha \middle| e \subset A\right\}$.

По определению супремума $\exists E \subset A : \sum\limits_{\alpha \in E} a_\alpha > a - \varepsilon$. Тогда $\forall \overline{e} \supset E : a - \varepsilon \leqslant \sum\limits_{\alpha \in E} a_\alpha \leqslant \sum\limits_{\alpha \in \overline{e}} a_\alpha \leqslant a$.

Значит, множество суммируемо по определению. □

Разложим $a_\alpha = b_\alpha + ic_\alpha$. Понятно, что $\{b_\alpha\}, \{c_\alpha\}$ удовлетворяют условию (2).

Для $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ рассмотрим $u_\alpha = u_\alpha^+ - u_\alpha^-$, теперь $\{u_\alpha\}$ разложимо в разность двух неотрицательных семейств $\{u_\alpha^+\}$ и $\{u_\alpha^-\}$.

Если $\{u_\alpha\}$ удовлетворяет условию (2), то так же удовлетворяют условию и $\{u_\alpha^+\}$ вместе с $\{u_\alpha^-\}$ — можно выбирать в конечное множество только положительные или только отрицательные числа.

Тогда $a_\alpha = b_\alpha^+ - b_\alpha^- + i(c_\alpha^+ - c_\alpha^-) \Rightarrow \{a_\alpha\}$ суммируемо согласно лемме. Доказали $2 \Rightarrow 1$.

Чтобы доказать, $2 \Rightarrow 3$ покажем, что $|a_\alpha| \leqslant b_\alpha^+ + b_\alpha^- + c_\alpha^+ + c_\alpha^-$. □

Замечание. Если $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — числовое семейство, $u_\alpha \geqslant 0$, то

$$\sum_{\alpha\in A} u_\alpha = \begin{cases}\text{сумма семейства,} & \text{если оно суммируемо}\\ +\infty, & \text{иначе}\end{cases}$$

Теорема 2.3.3. Если семейство $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$ суммируемо, то $\{\alpha\in A | a_\alpha\neq 0\}$ не более, чем счётно.

Доказательство. Так как семейство суммируемо, то множество $\left\{\sum\limits_{\alpha\in e}|a_\alpha| \middle| e\subset A, e - \text{конечно}\right\}$ ограничено неким числом C.

Выберем $n\in\mathbb{N}$, предположим. что нашлось k элементов $a_{\alpha_1},\dots,a_{\alpha_k} : |a_{\alpha_i}|\geqslant \frac{1}{n}$.

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{k}|a_{\alpha_i}|\geqslant\frac{k}{n}$. Но так как эти суммы ограничены константой C, то $k\leqslant nC$, то есть $A_n \coloneqq \left\{a_\alpha\middle||a_\alpha|\geqslant\frac{1}{n}\right\}$ конечно.

Тогда $\{\alpha||a_\alpha|>0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ счётно. □

Теорема 2.3.4 (О перестановках)**.** Пусть $\phi : A\to A$ — биекция. Тогда семейство $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$ суммируемо $\iff$ семейство $\{a_{\phi(\alpha)}\}_{\alpha\in A}$ суммируемо, причём их суммы совпадают, если есть.

Предложение 2.3.1. *Пусть $\{a_n\}$ — числовая последовательность. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *абсолютно сходится.*
2. *Семейство $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ суммируемо.*

При этом если условия верны, то суммы равны.

Доказательство. Для всякого конечного $e\subset\mathbb{N}$ найдётся $N\coloneqq\max e$, тогда $\sum\limits_{i\in e}|a_i|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{N}|a_i|$.

Обратно — для всякого $N\in\mathbb{N}$ найдётся $e\coloneqq\{1,\dots,N\}$, тогда $\sum\limits_{i=1}^{N}|a_i|\leqslant\sum\limits_{i\in e}|a_i|$.

То, что суммы равны, тоже можно доказать, рассмотрев хвосты с суммой меньше ε. □

Следствие 2.3.1. *Абсолютно сходящийся ряд сходится к той же сумме после любой его перестановки.*

Теорема 2.3.5 (Лейбниц)**.** Пусть $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$, причём $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j$ сходится лишь условно: $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_j| = +\infty$.

Пусть $-\infty\leqslant r\leqslant s\leqslant+\infty$. Тогда $\exists\phi : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ — биекция, такая, что

$$\varliminf_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}a_{\phi(j)} = r \qquad \varlimsup_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}a_{\phi(j)} = s$$

Схема доказательства. Пусть — для удобства доказательства — $-\infty<r\leqslant s<+\infty$. Упорядочим $|a_1|\geqslant|a_2|\geqslant\dots$ Так как $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j^+$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j^-$ оба расходятся, то можно брать поочерёдно положительные, то отрицательные числа, бегая от границы к границе. □

Пусть $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — числовое семейство, $\{B_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — разбиение A на непустые множества.

Теорема 2.3.6. Если семейство $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ суммируемо (с суммой a), то все частичные семейства $\{a_\alpha\}_{\alpha \in B_\gamma}$ суммируемы (с суммой b_γ), причём семейство их сумм $\{b_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ тоже суммируемо — с суммой a.

Если все $a_\alpha \geqslant 0$ (но необязательно семейство суммируемо), то $\sum\limits_{\alpha \in A} a_\alpha = \sum\limits_{\gamma \in \Gamma} \left(\sum\limits_{\alpha \in B_\gamma} a_\alpha \right)$

Доказательство. Докажем только последнюю строчку, остальное из неё следует, так как семейство можно разбивать на линейную комбинацию неотрицательных составляющих.

Если одно из $b_\gamma = +\infty$, то обе суммы равны $+\infty$. Дальше считаем, что все b_γ конечны. Покажем, что

$$\underbrace{\sup \left\{ \sum_{\alpha \in e} a_\alpha \middle| e \subset A \right\}}_{V} = \underbrace{\sup \left\{ \sum_{\gamma \in \overline{e}} b_\gamma \middle| \overline{e} \subset \Gamma \right\}}_{W}$$

Можно показать, что $V \leqslant W$, а ещё для любого $\varepsilon > 0$: $W - \varepsilon \leqslant V$ — для доказательства второго неравенства суммируем лишь конечное число групп. □

Лекция XIX

28 апреля 2023 г.

2.3.1 Применения

Пусть $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$ и $\sum\limits_{n \geqslant 1} b_n$ — два (быть может условно) сходящихся ряда с суммами a и b соответственно.

Рассмотрим последовательность, проиндексированную парами $\mathbb{N} \times \mathbb{N} : (a_n \cdot b_k)_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}}$.

Теорема 2.3.7. Если оба ряда сходятся абсолютно, то полученное семейство $(a_n \cdot b_k)_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}}$ суммируемо, причём его сумма — ab.

Доказательство. Докажем суммируемость $(a_n \cdot b_k)_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}}$. Для этого рассмотрим семейство модулей $(|a_n \cdot b_k|)_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}}$. Разобьём его на группы $B_i = \{(i, j) | j \in \mathbb{N}\}$.

Сумма модулей в каждой группе B_i — это $|a_i| \cdot B$, где $B = \sum\limits_{n \geqslant 1} |b_i|$.

Тогда семейство суммируемо, так как сумма сумм групп — это AB, где $A = \sum\limits_{n \geqslant 1} |a_i|$.

Чтобы показать, что сумма семейства — AB, повторим вычисление уже без модулей. □

Теорема 2.3.8. Пары (n, k) всегда можно расположить в последовательность так, чтобы соответствующий ряд сходился к ab.

Доказательство. Подойдёт такой порядок суммирования:

$$\begin{tikzcd}
a_1b_1 \arrow[d] & a_1b_2 \arrow[r] & a_1b_3 \arrow[d] & a_1b_4 \arrow[r] & \bullet \arrow[d] \\
a_2b_1 \arrow[r] & a_2b_2 \arrow[u] & a_2b_3 \arrow[d] & a_2b_4 \arrow[u] & \bullet \arrow[d, dotted, no head] \\
a_3b_1 \arrow[d] & a_3b_2 \arrow[l] & a_3b_3 \arrow[l] & a_3b_4 \arrow[u] & \bullet \\
a_4b_1 \arrow[r] & a_4b_2 \arrow[r] & a_4b_3 \arrow[r] & a_4b_4 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

□

Другим популярным порядком является суммирование по диагонали: $\sum\limits_{N=2}^{\infty}\sum\limits_{k+j=N} a_k b_j$. Как ни странно, если ряды сходились абсолютно, то сумма в таком порядке даёт ab, а если сходились условно — то необязательно сойдётся (но если сойдётся, то к ab: 2.6.2).

Вспомним, что для комплексного числа $z = x + iy$ по определению $e^z = e^x \cdot e^{iy}$, где $e^{iy} = \Gamma(y)$ — простое вращение.

Экспоненту можно представить рядом: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; $\quad e^{iy} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$. Ряды сходятся абсолютно, запишем

$$e^z = \sum_{k,n} \frac{x^k \cdot (iy)^n}{k!n!} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \underbrace{\sum_{k+n=N} \binom{N}{k} x^k \cdot (iy)^n}_{(x+iy)^N} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N!}$$

Доказали, что формула для экспоненты комплексного числа верна для любого $z \in \mathbb{C}$, необязательно вещественного или чисто мнимого.

2.4 Степенные ряды

Определение 2.4.1 (Степенной ряд)**.** Ряд вида $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$, где $z_0 \in \mathbb{C}$ — фиксированная точка, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}, z$ — переменная из $\mathbb{C}$.

При каких z ряд сходится? Абсолютно сходится?

Теорема 2.4.1. Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ сходится при значении w переменной z. Обозначим $r = |w - z_0|$.

Тогда ряд сходится абсолютно при $|z - z_0| < r$. Более того, для всякого $r' < r$: в круге $|z - z_0| \leqslant r'$ сходимость равномерная.

Доказательство. Из сходимости ряда $\exists A \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n(w - z_0)^n| \leqslant A$. Если $|z - z_0| < r$, то

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n(w-z_0)^n| \cdot \left|\frac{(z-z_0)^n}{r^n}\right| \leqslant A \left|\frac{(z-z_0)^n}{r^n}\right|$$

Для $|z - z_0| < r$ получаем, что ряд мажорируется убывающей геометрической прогрессией, значит, сходится абсолютно. Если дополнительно $|z - z_0| \leqslant r'$, то можно оценить независимо от z:

$$|a_n(w-z_0)^n| \cdot \left|\frac{(z-z_0)^n}{r^n}\right| \leqslant |a_n(w-z_0)^n| \cdot \left|\frac{r'^n}{r^n}\right|$$

□

Выберем $R \coloneqq \sup\{w \in \mathbb{C} | \text{ряд сходится при значении } w \text{ переменной } z\}$. Из условия теоремы следует, что ряд сходится в открытом круге с центром в z_0 и радиусом R и расходится — за границей круга.

Если $R = 0$, то ряд сходится в одной точке $z = z_0$, если $R = \infty$, то ряд сходится на всей $\mathbb{C}$.

2.4.1 Признак Коши сходимости ряда

Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ — числовой ряд ($a_n \in \mathbb{C}$).

Обозначим за $\sigma = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Теорема 2.4.2 (Признак Коши)**.**

1. Если $\sigma > 1$, то ряд расходится.

2. Если $\sigma < 1$, то ряд сходится абсолютно.

Доказательство.

1. $\forall \varepsilon > 0$: найдётся сколь угодно большое n: $\sqrt[n]{|a_n|} > \sigma - \varepsilon$. Тогда $|a_n| > (\sigma - \varepsilon)^n > 1$, общий член ряда не стремится к нулю.

2. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что $\sigma+\varepsilon < 1$. Начиная с некоторого места $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \sigma+\varepsilon$ и ряд мажорируется геометрической прогрессией. □

Замечание. Признак довольно грубый: $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^\alpha}$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ признак оценить не сможет — тут $\sigma = 1$.

Тем не менее, для степенных рядов получается неплохо: для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n : \sigma = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0|$.

Таким образом, для радиус сходимости R верно равенство $\frac{1}{R} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Примеры.

- Ряд $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^n z^n$ сходится в единственной точке: $R = 0$.
- Ряд $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} z^n$ сходится на всей $\mathbb{C} : R = \infty$.
- Все ряды вида $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^\alpha z^n$ сходятся в круге радиуса 1.

2.4.2 Аналитические функции

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — открытое множество.

Рассмотрим функцию $f : G \to \mathbb{C}$.

Определение 2.4.2 (f — аналитическая функция)**.** $\forall z_0 \in G : \exists B_r(z_0) \subset G : \forall z \in B_r(z_0) : f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z - z_0)^n$, то есть функция представима некоторым степенным рядом в окрестности любой точки.

Пример (Аналитическая функция). Экспонента: $e^z = e^{z_0} \cdot e^{z-z_0} = e^{z_0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!}$.

Теорема 2.4.3. Сумма степенного ряда в открытом круге сходимости есть аналитическая функция в том же круге.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости. Определим

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z - z_0)^n, \qquad D = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |z - z_0| < R \right\}$$

Рассмотрим $w_0 \in D$, докажем, что найдутся коэффициенты, такие, что $f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} b_n(z - w_0)^n$ при условии $|z - w_0| < R - |w_0 - z_0|$. (Считаем, что R конечно) Запишем

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z - w_0 - (w_0 - z_0))^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n \sum_{k+j=n} \binom{n}{k} (z - w_0)^k (w_0 - z_0)^j$$

Проверим, что можно переставить знаки суммирования, что семейство суммируемое. Ну, в самом деле,

$$\sum_{n\geqslant 0} |a_n| \sum_{k+j=n} \binom{n}{k} |z - w_0|^k |w_0 - z_0|^j = \sum_{n\geqslant 0} |a_n|(|z - w_0| + |w_0 - z_0|)^n$$

что сходится при данных $z : |z-w_0| < R-|w_0-z_0|$. Значит, можно раскрыть скобки, для некоторых коэффициентов получится требуемое. □

Лекция XX

2 мая 2023 г.

Определение 2.4.3 (Область)**.** Связное открытое множество

Теорема 2.4.4. Если $f : G \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция $f \not\equiv 0$ и G — область, то множество нулей функции не имеет предельных точек внутри G.

Доказательство. Обозначим $Z(f) = \{z \in G | f(z) = 0\}$.

Пусть степенной ряд $g(z) = \sum\limits_{n \geqslant 0} c_n(z - z_0)$ сходится в круге $D \coloneqq D_r(z_0), 0 < r \leqslant \infty$.

Из равномерной сходимости степенного ряда получаем, что g непрерывна на D. Заметим, что $c_0 = \lim_{z \to z_0} g(z)$. Если $c_0 \neq 0$, то у g нет других нулей вблизи z_0.

Иначе $c_0 = 0$, но ряд тривиальный $g(z) \not\equiv 0$. Выберем наименьшее $k \in \mathbb{N}$: $c_k \neq 0$. Получаем

$$g(z) = (z - z_0)^k \underbrace{(c_k + c_{k+1}(z - z_0) + c_{k+2}(z - z_0)^2 + \ldots)}_{h(z)}$$

$h(z)$ сходится в то же круге D, так как $h(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$, поделили на константу.

Получается, $h(z) \neq 0$ вблизи z_0, значит и домноженная на $(z - z_0)^k$ — тоже.

Итак, если у функции f есть нуль в точке w, то либо эта точка изолирована, либо $f(z) \equiv 0$ в окрестности w.

Обозначим $A = \{w \in G | f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности $w\}$. A, понятно, открыто.

Мы доказали, что любая предельная точка для $Z(f)$ лежит в A, в частности, любая предельная точка A лежит в A. Тем самым, A замкнуто в G. $f(z) \not\equiv 0$, значит, $A \neq G \Rightarrow A = \varnothing$. ☐

2.5 Дифференцировании по комплексному аргументу. Голоморфные функции

Пусть $\phi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, t_0 \in \langle a, b\rangle$. Тогда по определению $\phi'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0}$.

Пусть G — открытое множество в $\mathbb{C}$, $f : G \to \mathbb{C}, z_0 \in G$.

Определение 2.5.1 (f дифференцируема в z_0 в комплексном смысле)**.** $\exists \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

Данный предел называется *производной*, обозначается $f'(z_0)$. Если предел существует, то ещё говорят, что f голоморфна в z_0.

2.5.1 Связь комплексного дифференцирования и двумерного дифференцирования

- Пусть $h : (G \subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$. И область аргументов, и область значений можно отождествить с $\mathbb{C}$ (с его подмножеством). По определению, h дифференцируема в z_0, если $\exists A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — линейный оператор:
$$h(z) - h(z_0) = A(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$
Запишем $h = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix}$, h_1, h_2 — координатные функции Если A существует, то $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{pmatrix}$.
- Теперь пусть $f : (G \subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Для неё координатные функции — $u, v : (G \subset \mathbb{C}) \to \mathbb{R}$, $f(z) = u(z) + if(z)$.
$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$
Умножение на комплексное число — частный случай линейного оператора.

- Таким образом, если f дифференцируема в комплексном смысле, то и в вещественном смысле (как отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) тоже: $\mathrm{d}f(z_0, h) = f'(z_0)h$.
- Обратное неверно: пусть $f'(z_0) = \alpha + i\beta$, $h = t + is$, где $\alpha, \beta, t, s \in \mathbb{R}$. Тогда

$$f'(z_0)h = (\alpha + i\beta)(t + is) = (\alpha t - \beta s) + i(\beta t + \alpha s)$$
$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$$

  и мы видим, что при комплексном дифференцировании матрица линейного оператора имеет специальный вид, для матриц не такого вида это неверно.
- Если f дифференцируема в z_0 в комплексном смысле, то (считая $z = x_0 + iy_0$) необходимо и достаточно условий

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

  Эти условия называются *уравнения Коши-Римана*.

Примеры (Безобидные функции, которые не голоморфны).

- $h(z) = \Re(z)$; $\quad h(x + iy) = x$. Здесь матрица Якоби $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, не удовлетворяет условиям Коши-Римана. Также несложно видеть, что предела $\lim\limits_{z \to 0} \frac{z}{\Re(z)}$ не существует.
- $h(z) = \overline{z}$; $\quad h(x + iy) = x - iy$. Здесь матрица Якоби $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, не удовлетворяет условиям Коши-Римана.

Факт 2.5.1. *Пусть G, U открыты в $\mathbb{C}$, $f : G \to U, h : U \to \mathbb{C}$ — функции, f голоморфна в z_0, h голоморфна в $w_0 \coloneqq f(z_0)$.*

Тогда $h \circ f$ голоморфна в z_0 и $(h \circ f)'(z_0) = h'(w_0)f'(z_0)$.

Доказательство. Оператор дифференцирования — домножение на комплексное число. □

Факт 2.5.2. *Пусть $f, g : G \to \mathbb{C}$ голоморфны в z_0, тогда $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.*

Доказательство. Всякая голоморфная функция ϕ непрерывна по определению:

$$\phi(z) = \phi(z_0) + \phi'(z)(z - z_0) + o(|z - z_0|) \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} \phi(z_0)$$

Тем самым, ϕ ограничена вблизи z_0.

$$\frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}g(z) + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}f(z_0) \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} f'(z_0)g(z_0) + g'(z_0)f(z_0)$$

□

Факт 2.5.3. $(z^n)' = nz^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. $1' = 0$; $\qquad z' = 1 : \frac{z - z_0}{z - z_0} \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} 1$. $\qquad$ Дальше индукция. □

Тем самым, дифференцируемы все комплексные многочлены $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z_n$, где $a_n \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$. А именно,

$$p'(z_0) = a_1 + 2a_2 z_0 + \dots + n a_n z_0^{n-1}$$

Интересный факт (Теорема Коши). Следующие условия эквивалентны:

1. f голоморфна в G (в каждой точке).

2. f аналитична в G.

Доказательство. Докажем сильно более простую импликацию $2 \Rightarrow 1$. Обратную докажем в IV семестре.

Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$, пусть его радиус сходимости $R > 0$. Положим $D \coloneqq D_R(z_0)$.

Докажем, что $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Вспомним определение радиуса сходимости $\frac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Для продифференцированного ряда $\frac{1}{\rho} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|na_{n-1}|}$, это то же самое, значит, $R = \rho$.

Степенной ряд в круге радиуса $R' < R$ сходится равномерно: $S_N(z) \coloneqq \sum\limits_{n=0}^{N} a_n(z-z_0)^n$ сходятся равномерно к $f(z)$. Более того, $S_n'(z) \coloneqq \sum\limits_{n=1}^{N} na_n(z-z_0)^{n-1}$ сходится равномерно к продифференцированному ряду.

Разобьём функцию на координатные функции, изучим вещественные и мнимые части. Частные производные сходятся согласно вещественной теореме, значит, условия Коши-Римана в пределе выполняются, получается, степенной ряд голоморфен. $\square$

Рассмотрим ряд $\log(1+z) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$. Он сходится при $x \in (-1, 1)$, значит, сходится в круге радиуса 1.

Обозначим $\phi(z) = z - \frac{z}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$ — голоморфная функция при $|z| < 1$.

Интересно, верно ли, что $e^{\phi(z)} = 1 + z$? Да.

Доказательство. $e^{\phi(z)}$ голоморфна. По теореме Коши она аналитична. Тогда разность данных функций аналитична, так как это 0 на $(-1, 1)$, то это 0 везде. $\square$

Факт 2.5.4. *Если f, g голоморфны в точке z_0, $g(z_0) \neq 0$, то для $h(z) = \frac{f(z_0)}{g(z_0)}$ верно:*

$$h'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

Факт 2.5.5. *Частное комплексных многочленов $\frac{p(z)}{q(z)}$ голоморфно там, где $q(z) \neq 0$.*

Лекция XXI

5 мая 2023 г.

2.6 Суммирование последовательностей и рядов

Пусть последовательность $\{a_n\}_{n \geqslant 0}$ — не сходится.

Сопоставим ей последовательность $\{b_n\}_{n \geqslant 0}$ согласно некоему правилу. Если оказалось, что $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$, то говорят, что $\{a_n\}$ суммируется к b данным методом.

2.6.1 Метод Чезаро

$b_n = \frac{a_0 + \dots + a_n}{n+1}$ — метод средних арифметических.

Определение 2.6.1 (Регулярный метод суммирования)**.** Сумма сходящейся последовательности данным методом — её предел.

Факт 2.6.1. *Метод Чезаро регулярен.*

Доказательство. 2.6.1. □

Замечание. Метод Чезаро, хотя и регулярен, суммирует и расходящиеся последовательности, например, $0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ суммируется методом Чезаро к $1/2$.

2.6.2 Матричные методы суммирования. Метод Тёплица

Пусть $T = \{t_{i,j}\}_{i,j\geqslant 0}$ — матрица с неотрицательными коэффициентами — *матрица Тёплица*.

Предположим, что $\forall i : \sum\limits_{j=0}^{\infty} t_{i,j} < \infty$.

Положим $b_i \coloneqq \sum\limits_{j=0}^{\infty} t_{i,j} a_j$.

На данном месте предположим, что $\{a_j\}$ ограничена. Если последовательность сходится, то она уж точна ограничена, а мы хотим немного расширить понятие сходящихся последовательностей. В случае $|a_j| < A$ все b_i корректно определены.

Определение 2.6.2 (Последовательность $\{a_j\}$ суммируется T-методом к b)**.** $b_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$.

Для метода Чезаро

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ddots & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \ddots & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \ddots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Теорема 2.6.1 (Тёплиц)**.** Следующие условия эквивалентны:

1. T-метод регулярен.
2. $\forall j : \lim\limits_{i\to\infty} t_{i,j} = 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} t_{i,j} = 1$.

Доказательство.

$\Rightarrow$. Зафиксируем j, рассмотрим последовательность $\{\delta_{i,j}\}_{i\geqslant 0}$. Она сходится к нулю, но $b_i = t_{i,j}$. Значит, $t_{i,j} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$ — необходимое условие.

Теперь рассмотрим $\{1\}_{i\geqslant 0}$. Она сходится к нулю, но $b_i = \sum\limits_{j=0}^{\infty} t_{i,j}$. Значит, $\sum\limits_{j=0}^{\infty} t_{i,j} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 1$ — тоже необходимое условие.

$\Leftarrow$. Пусть $a_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} a$. Докажем, что b_i сходится туда же.

$$b_i - a = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t_{i,j} - a = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j - a) t_{i,j} + \underbrace{a\left(\sum_{j=0}^{\infty} t_{i,j} - 1\right)}_{\underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Докажем, что и первое слагаемое стремится к нулю.

Так как суммы сходятся $\sum\limits_{j=0}^{\infty} t_{i,j} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 1$, то они ограничены некой константой A. Выберем $\varepsilon > 0, \exists N : \forall j > N : |a_j - a| < \varepsilon$.

$$\sum_{j=0}^{\infty}(a_j - a)t_{i,j} = \sum_{j=0}^{N}(a_j - a)t_{i,j} + \sum_{j=N+1}^{\infty}(a_j - a)t_{i,j}$$

Теперь устремим $i \to \infty$, первое слагаемое для достаточно больших i меньше ε — конечная сумма произведений ограниченных и бесконечно малых.

Второе оценивается как εA, получаем оценку $\varepsilon(1+A)$, её можно сделать сколь угодно малой. □

Следствие 2.6.1. *Метод Чезаро регулярен.*

Замечание. Суммирование рядов устроено так же, как и последовательностей — суммируем частичные суммы.

Если в матрице Тёплица бывают отрицательные коэффициенты или даже произвольные комплексные, то что?

Хочется оставить формулу $b_i = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j t_{i,j}$. Для этого надо наложить условие $S_i \coloneqq \sum\limits_{j=0}^{\infty} |t_{i,j}| < \infty$. Необходимость понятна: рассмотреть в $a_j \coloneqq \frac{\overline{t_{i,j}}}{|t_{i,j}|}$.

Теорема Тёплица в таком случае звучит так:

Интересный факт (Общая теорема Тёплица)*.* Следующие условия эквивалентны:

1. T-метод регулярен.
2.
   - $\forall j : \lim\limits_{i\to\infty} t_{i,j} = 0$.
   - $\lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} t_{i,j} = 1$.
   - $\sup\limits_{i} S_i < +\infty$.

$(2) \Rightarrow (1)$ доказывается примерно так же, как доказать, что $\sup\limits_{i} S_i < +\infty$ – необходимое условие?

Это можно доказать методом скользящего горба или теоремой Штейнгауза — последнее из функционального анализа.

2.6.3 Метод Абеля — Пуассона

Рассмотрим необязательно сходящийся ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ с ограниченными частичными суммами $S_n \coloneqq a_0 + \dots + a_n$.

Выберем $r \in [0, 1)$, составим ряды $\phi(r) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} r^k a_k$. Они сходятся.

Если r устремить к единице, то $\phi(r)$ «как бы стремится к исходному ряду, что бы это не значило».

Определение 2.6.3 (Суммируемый методом Абеля — Пуассона ряд)**.** Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, для которого $\exists \lim\limits_{r\to 1_-} \phi(r)$.

Пример. Ряд $1-1+1-1+\dots$ имеет сумму $1/2$ и методом Абеля-Пуассона тоже: $\frac{1}{1+r} = 1-r+r^2-\dots$

Теорема 2.6.2. Если исходный ряд сходится, то он суммируем методом Абеля-Пуассона с той же суммой.

Доказательство. Перепишем метод для последовательностей: рассмотрим $\{d_j\}_{j\geqslant 0}$. Ей соответствует ряд

$$d_0 + (d_1 - d_0) + (d_2 - d_1) + \dots$$

Запишем для $r \in [0, 1)$ ряд

$$\phi(r) = d_0 + r(d_1 - d_0) + r^2(d_2 - d_1) + \dots \underset{\text{абсолютная сходимость}}{=} d_0(1-r) + d_1(r - r^2) + d_2(r^2 - rr^3) + \dots$$

Получили некоторый аналог методу Тёплица, но не дискретный, а непрерывный: в качестве $t_{i,j}$ выступает $r^j - r^{j+1}$.

Докажем, что если $d_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} d$, то $\phi(r) \underset{r\to 1_-}{d}$.

Достаточно доказать, что $\phi(r_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} d$ для любой последовательности $r_i \in [0, 1)$, стремящейся к 1. Это верно из теоремы Тёплица. □

Интересный факт. Всё суммируемое методом Чезаро суммируется методом Абеля — Пуассона, но не наоборот.

О произведении рядов

Пусть $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \alpha_j = \alpha; \qquad \sum\limits_{j=0}^{\infty} \beta_j = \beta$, быть может, сходящихся условно. Рассмотрим семейство $\{\alpha_i\beta_j\}i,j$ и «просуммируем по диагонали». Положим $\gamma_n \coloneqq \sum\limits_{i+j=n} \alpha_i\beta_j$.

Факт 2.6.2. *Если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n$ сходится к γ, то обязательно $\gamma = \alpha\beta$.*

Доказательство. Рассмотрим для $r \in [0, 1)$ два абсолютно сходящихся ряда $\phi(r) \coloneqq \sum\limits_{i=0}^{\infty} r^i\alpha_i$ и $\psi(r) \coloneqq \sum\limits_{j=0}^{\infty} r^j\beta_j$.

Запишем

$$\phi(r)\psi(r) = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{i+j=n} r^i\alpha_i r^j\beta_j\right) = \sum_{n\geqslant 0} r^n\left(\sum_{i+j=n}\alpha_i\beta_j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n\gamma_n \underset{r\to 1_-}{\longrightarrow} \gamma$$

□

Лекция XXII

12 мая 2023 г.

2.7 Перестановка предельных переходов

Вспомним теорему Стокса-Зайделя: $\{f_n\}$ — последовательность непрерывных функций, $\forall x : f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

Хочется, чтобы f была непрерывной, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Так как $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, то мы хотим, чтобы

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x_0)$$

С другой стороны, при переставленных пределах

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = f(x_0)$$

очевидно верно. Теорема Стокса-Зайделя говорит о том, что пределы можно переставлять, если сходимость $f_n(x) \to f(x)$ равномерна.

Запишем этот результат общо.

Теорема 2.7.1. Пусть X, Y — хаусдорфовы топологические пространства, $A \subset X, B \subset Y$. Введём также Z — полное метрическое пространство (с метрикой ρ).

Пусть $a \in \operatorname{Cl} A, b \in \operatorname{Cl} B$, причём $a \notin A, b \notin B$. Пускай $F : A \times B \to Z$ — отображение.

Предположим, что $\forall x \in A : \exists \lim\limits_{y \to b} F(x, y) =: \phi(x)$, сходимость не предполагается равномерной.

Предположим, что $\forall y \in B : \exists \lim\limits_{x \to a} F(x, y) =: \psi(y)$, причём сходимость равномерна по y:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists U \text{ — окрестность точки } a : \forall y \in B, \forall x \in U \cap A : \rho(F(x, y), \psi(y)) < \varepsilon$$

Тогда $\exists \lim\limits_{x \to a} \phi(x), \exists \lim\limits_{y \to b} \psi(y)$, причём они равны.

Более того, $(a, b) \in \operatorname{Cl}(A \times B)$, и функция F имеет предел (в топологии произведения) в (a, b).

Доказательство.

> **Лемма 2.7.1** (Критерий Коши для функций)**.** *Пусть W — хаусдорфово, Z — полное метрическое. $C \subset W; h : C \to Z$, пусть $c \in \operatorname{Cl} C \setminus C$.*
>
> *Если* $\forall \varepsilon > 0 : \exists U \ni c : \forall u_1, u_2 \in U \cap C : \rho(h(u_1), h(u_2)) < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{u \to c} h(u)$.
>
> *Доказательство леммы.*
>
> Выберем $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ для $n \in \mathbb{N}$, подберём $U_n \ni c$, как в условии леммы. Можно считать, что $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$. Выберем $u_n \in C \cap U_n$.
>
> Так как пространство Z полное, то $\exists z = \lim\limits_{n \to \infty} h(u_n)$. Эта точка и будет пределом h — согласно определению предела z, посылке леммы и неравенству треугольника. □

Выберем $\varepsilon > 0$, для него найдётся $U \ni a$ согласно равномерной сходимости:

$$\forall x_0 \in U \cap A : \forall y \in B : \rho(F(x_0, y), \psi(y)) < \varepsilon$$

Зафиксируем произвольный $x_0 \in U \cap A$.

Найдётся окрестность $V \ni b : \forall y \in V \cap B : \rho(F(x_0, y), \phi(x_0)) < \varepsilon$. Рассмотрим $y, y' \in V \cap B$:

$$\rho(\psi(y), \psi(y')) \leqslant \rho(\psi(y), F(x_0, y)) + \rho(F(x_0, y), F(x_0, y')) + \rho(F(x_0, y'), y') \leqslant$$
$$2\varepsilon + \rho(F(x_0, y), F(x_0, y')) \leqslant 2\varepsilon + \rho(F(x_0, y), \phi(x_0)) + \rho(\phi(x_0), F(x_0, y')) \leqslant 4\varepsilon$$

то есть отображение ψ удовлетворяет условию Коши.

По лемме $\exists \lim\limits_{y \to b} \psi(y) =: u$.

Перейдём к пределу $y \to b$ в неравенстве $\rho(F(x_0, y), \psi(y)) < \varepsilon$:

$$\rho(\phi(x_0), u) \leqslant \varepsilon$$

Так как x_0 — произвольная точка из $U \cap A$, то $\lim\limits_{x \to a} \phi(x) = u$.

Теперь докажем существование двойного предела:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists U \ni a : \forall x \in U \cap A, \forall y \in B : \rho(F(x, y), \psi(y)) < \varepsilon$$
$$\exists V \ni b : \forall y \in V \cap B : \rho(\psi(y), u) < \varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$(x, y) \in (U \times V) \cap (A \times B) \Rightarrow \rho(F(x, y), u) \leqslant \rho(F(x, y), \psi(y)) + \rho(\psi(y), v) < 2\varepsilon$$

□

Замечание. Хаусдорофовость тут наверно и не нужна, но в анализе нехаусдорфовы пространства крайне редко встречаются. Предположим на всякий случай.

2.7.1 Применение

Возьмём интеграл
$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Как мы уже знаем (2.1), у него есть особенность на бесконечности, и он сходится лишь условно.

Рассмотрим $F:\mathbb{R}_{\geqslant 0}\to\mathbb{R};\quad F(a)=\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$

Запишем несколько фактов, которые вскоре и докажем.

1. $F(a)\underset{a\to\infty}{\longrightarrow} 0.$
2. $F(a)\underset{a\to 0}{\longrightarrow} F(0)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$
3. F дифференцируема при $a>0, F'(a)=-\frac{1}{1+a^2}.$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right)\underset{\text{неформально}}{=}\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^{\infty}e^{-ax}\sin x\ \mathrm{d}x\underset{\text{дважды по частям}}{=\dots=}-\frac{1}{1+a^2}$$

Тем самым, $F(a)=-\operatorname{arctg}(a)+C$. Из первого пункта получаем $C=\frac{\pi}{2}$, из второго получаем

$$\boxed{F(0)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}}$$

Доказательство. Обоснуем пункты. Для начала возьмём интеграл $\int\limits_c^d e^{-at}\sin t\ \mathrm{d}t$ для $0\leqslant c<d, a>0$.

$$\int\limits_c^d e^{-at}\sin t\,\mathrm{d}t=-\int\limits_c^d e^{-at}\,\mathrm{d}\cos t=\left(-e^{-at}\cos t\right)\Big|_c^d-a\int\limits_c^d e^{-at}\cos t\ \mathrm{d}t=$$
$$=\left(-e^{-at}\cos t\right)\Big|_c^d-a\int\limits_c^d e^{-at}\,\mathrm{d}\sin t=\left(-e^{-at}\cos t\right)\Big|_c^d-\left(ae^{-at}\sin t\right)\Big|_c^d-a^2\int\limits_c^d e^{-at}\sin t\ \mathrm{d}t$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_c^d e^{-at}\sin t\ \mathrm{d}t=\frac{e^{-ac}\cos c-e^{-ad}\cos d-ae^{-ad}\sin d+ae^{-ac}\sin c}{1+a^2}$$

Эта штука замечательна тем, что ограничена по всем a,c,d.

Заметим, что при $c\to 0, d\to\infty$ получается $\frac{1}{1+a^2}$, то есть несобственный интеграл

$$\boxed{\int\limits_0^{\infty}e^{-at}\sin t\ \mathrm{d}t=\frac{1}{1+a^2}}$$

.

Лемма 2.7.2. *Пусть $G : A \times [\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ — функция, такая, что $\forall u \in A; G(u, \cdot)$ интегрируема по Риману на всех отрезках $[\alpha, \beta']$ для $\beta' \in [\alpha, \beta)$. A здесь играет роль индексного множества.*

Пусть $g : [\alpha, \beta) \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $\int\limits_{\alpha}^{\beta} g(x)\,\mathrm{d}x$ существует в несобственном смысле. Ещё пусть $\forall x \in [\alpha, \beta), u \in A : |G(u, x)| \leqslant g(x)$. Тогда

$$\lim_{\beta' \to \beta_-} \int\limits_{\alpha}^{\beta'} G(u, x)\,\mathrm{d}x \text{ существует равномерно по } u \in A$$

Доказательство. Пусть $t_1, t_2, \in [\alpha, \beta)$, для определённости считаем, что $t_1 < t_2$.

$$\left| \int\limits_{\alpha}^{t_1} G(u, x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{\alpha}^{t_2} G(u, x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} G(u, x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int\limits_{\alpha}^{t_1} g(x)\,\mathrm{d}x$$

При $t_1 \to t_2$ эта штука стремится к 0. ☐

Лекция XXIII

13 мая 2023 г.

1. Выберем $g(x) = e^{-x}$. При $a \geqslant 1$ действительно $\left| e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \right| \leqslant g(x)$. Значит, предел $\lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ существует равномерно по $a \geqslant 1$, и $\forall R : \exists \lim\limits_{a \to \infty} \int\limits_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. Значит, пределы можно переставить, получаем

   $$\lim_{a \to \infty} \lim_{R \to \infty} \int\limits_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R \to \infty} \lim_{a \to \infty} \int\limits_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

   Подпредельное выражение $\int\limits_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = 0$, так как подынтегральная функция на отрезке равномерно стремится к нулю.

2. Из равномерной сходимости на отрезке получаем $\int\limits_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \underset{a \to 0}{\longrightarrow} \int\limits_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

   $$\int\limits_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} \int\limits_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

   Чтобы применить теорему о перестановке пределов надо показать, что один из пределов равномерен: например, при $R \to \infty$ — равномерно по a.

   Факт 2.7.1. $\lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ *существует равномерно по $a \in (0, 1)$.*

   Доказательство. $\int\limits_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, считаем, что $R > 1$. Первое слагаемое от R не зависит, на равномерность сходимости не влияет. Вторую проинтегрируем по частям:

Положим $h_a(x) = \int\limits_1^x e^{-at} \sin t \ \mathrm{d}t$, заметим, что $\exists C : \forall a, x : |h_a(x)| \leqslant C$.

$$\int\limits_1^R \frac{1}{x} \,\mathrm{d}h_a(x) = \underbrace{\frac{1}{x} h_a(x)\Big|_1^R}_{\to -h_a(1) \text{ равномерно по } a} + \underbrace{\int\limits_1^R \frac{h_a(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x}_{\text{существует равномерно по } a \text{ согласно лемме}}$$

□

Значит, опять же, можно переставить пределы.

3. Теперь докажем, что можно дифференцировать под знаком интеграла, что

$$F'(a) = \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} \left(e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \right) \mathrm{d}x$$

Обозначим для краткости производную по второму аргументу ∂_2.

Лемма 2.7.3. *Пускай $I = [\alpha, \beta]$, а ещё есть интервал (c, d). Пусть $H : I \times (c, d) \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, причём $\forall x \in I, t \in (c, d) : \exists \partial_2 H(x, t) =: \phi(x, t)$, и данная производная тоже непрерывна на $I \times (c, d)$.*

Определим $h(t) := \int\limits_\alpha^\beta H(x, t) \,\mathrm{d}x$ — существует, так как $H(x, t)$ непрерывна (и непрерывна при фиксированном втором аргументе).

Тогда $h'(t) = \int\limits_\alpha^\beta \partial_2 H(x, t) \,\mathrm{d}x$.

Доказательство. Пусть $t_0 \in (c, d)$, $t_0 \in \operatorname{Int} \Delta, \Delta \subset (c, d)$. На $\Delta \partial_2 H(x, t) = \phi(x, t)$ равномерно непрерывна.

$$\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \int\limits_\alpha^\beta \frac{H(x, t) - H(x, t_0)}{t - t_0} \,\mathrm{d}x$$

Давайте применим формулу Лагранжа, но ни в коем случае не под интегралом: еси подставить $\frac{H(x,t) - H(x,t_0)}{t - t_0} = \phi(x, \xi_x)$, то под интегралом может оказаться вообще неинтегрируемая (даже неизмеримая, что бы это не значило) функция.

Воспользуемся равномерной непрерывностью: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |\phi(x, t_1) - \phi(x, t_2)| < \varepsilon$. Выберем $\varepsilon > 0$, считаем, что $t - t_0 < \delta$ — всё равно придётся переходить к пределу. Теперь $|\phi(x, \xi_x) - \phi(x, t_0)| < \varepsilon$, откуда

$$\left| \frac{H(x, t) - H(x, t_0)}{t - t_0} - \phi(x, t_0) \right| \leqslant \varepsilon \Rightarrow \left| \int\limits_\alpha^\beta \left(\frac{H(x, t) - H(x, t_0)}{t - t_0} - \phi(x, t_0) \right) \mathrm{d}x \right| < (\beta - \alpha)\varepsilon$$

Значит, при $t \to t_0$ интегралы становятся равны, что и требовалось. □

К сожалению, у нас промежуток бесконечный, теорема неприменима.

Нас интересует интеграл

$$\lim_{a \to a_0} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-a_0 x}}{a - a_0} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x$$

Согласно только что доказанной лемме

$$\forall R > 0 : \lim_{a \to a_0} \int\limits_0^R \frac{e^{-ax} - e^{-a_0 x}}{a - a_0} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = -\int\limits_0^R e^{-a_0 x} \sin x \ \mathrm{d}x$$

$$\forall a \neq a_0 : \exists \lim_{R \to \infty} \int\limits_0^R \frac{e^{-ax} - e^{-a_0 x}}{a - a_0} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-a_0 x}}{a - a_0} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$$

Докажем, что во втором равенстве предел достигается равномерно по $a \in (U \ni a_0)$. Рассмотрим $a < a_0$.

$$\int\limits_0^R e^{-a_0 x} \cdot \frac{e^{-}(a - a_0)x - 1}{a - a_0} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$$

Подынтегральная функция оценивается по модулю как $Ce^{-a_0 x}$, интеграл сходится равномерно, где $|e^{-\xi} - 1| < C|\xi|$ или что-то вроде того. При $a > a_0$ тоже что-то пишется, надо понять, как это покороче расписать.

$\square$

Глава 3

Выпуклые и вогнутые функции

Пусть $a < b \in \mathbb{R}$, все точки отрезка $[a, b]$ имеют вид $a + \lambda(b - a) = (1 - \lambda)a + \lambda b, \lambda \in [0, 1]$.

Определение 3.0.1 (Выпуклая функция $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$). $\forall \alpha < a < b < \beta, \forall \lambda \in [0, 1]$:

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leqslant (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

Например, $f(x) = x^2$.

Определение 3.0.2 (Строго выпуклая функция $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$). $\forall \alpha < a < b < \beta, \forall \lambda \in (0, 1)$:

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) < (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

Например, $f(x) = -x^2$.

Определение 3.0.3 (f вогнутая). $-f$ выпуклая.

Рассмотрим хорду, соединяющую точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Её угловой коэффициент равен $k(a, b) \coloneqq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Теорема 3.0.1. Следующие условия эквивалентны

1. Функция $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ выпукла.
2. $\forall a < c < b \in (\alpha, \beta) : k(a, c) \leqslant k(c, b)$.
3. $\forall a < c < b \in (\alpha, \beta) : k(a, b) \leqslant k(c, b)$.
4. $\forall a < c < b \in (\alpha, \beta) : k(a, c) \leqslant k(a, b)$.
5. Пусть $u < v$. Если $a \leqslant u, b \leqslant v, a < b$, то $k(a, b) \leqslant k(u, v)$.

Доказательство.

$5 \Rightarrow 2, 3, 4$ Частные случаи.

$1 \Rightarrow 2$ Пусть $c = (1 - \lambda)a + \lambda b$. Тогда

$$f(c) \leqslant (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b) \quad \Rightarrow \quad (1 - \lambda)(f(c) - f(a)) \leqslant \lambda(f(b) - f(c))$$

Выразив $\lambda = \frac{c-a}{b-a}$ получаем необходимое неравенство. Заметим, что вычисления обратимы, значит, доказали ещё и $2 \Rightarrow 1$.

$1 \iff 3, 1 \iff 4$ Аналогично.

$2, 3, 4 \Rightarrow 5$ $k(a, b) \leqslant k(a, v) \leqslant k(u, v)$. $\square$

Следствие 3.0.1. *Выпуклая функция на (α, β) непрерывна.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in (\alpha, \beta)$, x близко к x_0. Пусть $a < b < x, x_0 < c < d$.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(d)-f(c)}{d-c}$$

Значит, $\exists C : |f(x) - f(x_0)| \leqslant C|x - x_0|$, то есть функция липшицева, если она задана где-то на большем замкнутом отрезке. $\square$

Следствие 3.0.2. *У выпуклой функции $\forall x_0 \in (\alpha, \beta)$ существует односторонняя производная: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ монотонна по x и ограничена. Более того, $\forall x_0 \in (\alpha, \beta) : f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$ и $\forall x_0, x_1 \in (\alpha, \beta) : f'_+(x_0) \leqslant f'_-(x_1)$.*

Лекция XXIV

16 мая 2023 г.

Следствие 3.0.3. *Если $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ дифференцируема, то f выпукла $\iff$ f' возрастает.*

Доказательство. В одну сторону уже доказано, в другую следует из теоремы Лагранжа:

$$\forall u < v < w \in (\alpha, \beta) : \frac{f(v)-f(u)}{v-u} = f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2) = \frac{f(w)-f(v)}{w-v} \quad \text{для неких } \xi_1 \in (u, v), \xi_2 \in (v, w)$$

$\square$

Следствие 3.0.4. *Если f выпукла на (α, β), то $\forall x, y \in (\alpha, \beta)$ функция лежит выше касательных:*

$$f(x) \geqslant f'_{\pm}(y)(x-y) + f(y)$$

Доказательство. Неравенство равносильно следующему

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \left| \begin{aligned} &\geqslant f_{\pm}(y), \quad x > y \\ &\leqslant f_{\pm}(y), \quad x < y \end{aligned} \right.$$

$\square$

Верно и обратное, мы для простоты докажем лишь частичное обращение:

Лемма 3.0.1. *Если f дифференцируема на (α, β) и $\forall x, y \in (\alpha, \beta) : f(x) \geqslant f'(y)(x-y) + f(y)$, то f выпукла.*

Доказательство. Достаточно проверить, что $\phi(x) := \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ возрастает при $x < y$.

$$\phi'(x) = \frac{-f'(x)(y-x) + f(y) - f(x)}{(y-x)^2}$$

$\square$

Примеры.

- $f(x) = \sin(x)$, определённая на $[0, \pi/2]$. Производная убывает, функция вогнута (граничные точки отрезка добавляем по непрерывности).

  Так как график лежит под любой касательной и над любой секущей, то получаем оценку

  $$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x, \quad x \in [0, \pi/2]$$

- e^x — выпуклая функция, производная возрастает. Получается, по определению

  $$\forall u, v \in \mathbb{R}, \alpha \in (0,1) : e^{(1-\alpha)u + \alpha v} \leqslant (1-\alpha)e^u + \alpha e^v$$

  Заменим переменные: $e^{(1-\alpha)u} = A, e^{\alpha v} = B, p = \frac{1}{1-\alpha}, q = \frac{1}{\alpha}$. Замена обратима при условии $A, B > 0, p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ — такие $p, q \in (1, \infty)$ называются *сопряжёнными*. Неравенство превращается в *неравенство Юнга*:

  $$AB \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

У неравенства Юнга есть красивый геометрический смысл. Светло серая площадь — площадь под $y = x^{p-1}$, равна $\frac{A^p}{p}$. Тёмно серая площадь — площадь под (ну, точнее слева) кривой $x = y^{q-1}$, равна $\frac{B^q}{q}$ — здесь мы пользуемся тем, что $\frac{1}{p-1} = q - 1$.

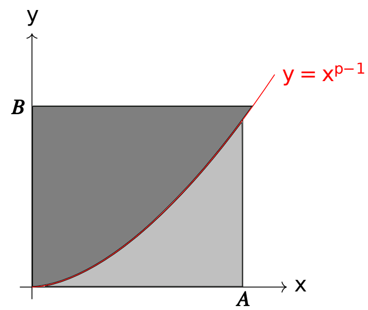

Рис. 3.1: Геометрический смысл неравенство Юнга

Из рисунка видно, что действительно $AB \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$.

Факт 3.0.1 (Неравенство Гёльдера)**.** *Пусть* $1 < p, q$ *— сопряжённые показатели* ($1/p + 1/q = 1$)*. Тогда* $\forall a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$*:*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. Усилим неравенство (докажем частный случай $a_j, b_j \geqslant 0$):

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j|\,|b_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Можно считать, что $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_j|^p = \sum\limits_{j=1}^{n} |b_j|^q = 1$: неравенство однородно, можно все a_j домножить на одно и то же λ. Применим неравенство Юнга к каждому слагаемому, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j|\,|b_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p} |a_j|^p + \frac{1}{q} |b_j|^q = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n} |a_j|^p + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{n} |b_j|^q = 1$$

□

Следствие 3.0.5. *При* $p = q = 2$ *неравенство Гёльдера обращается в КБШ.*

Факт 3.0.2 (Неравенство Минковского)**.**

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство. Если $p = 1$, то очевидно.

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^p = \sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j| \cdot |a_j + b_j|^{p-1} \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_j| \cdot |a_j + b_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^{n} |b_j| \cdot |a_j + b_j|^{p-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Воспользуемся тем, что $(p-1)q = p$, поделив обе части неравенства на $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}$ получим требуемое неравенство. □

Замечание. Неравенства Гёльдера и Минковского также применимы для интегралов, упражнение читателю — подумать, как они выглядит.

Следствие 3.0.6. $d_p(x,y) = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ *— метрика в* $\mathbb{R}^n$ *(неравенство треугольника — неравенство Минковского).*

Факт 3.0.3 (Неравенство Йенсена)**.** *Пусть* $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ *— выпуклая функция,* $x_1, \ldots, x_k \in (\alpha, \beta), \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in [0,1]$*, причём* $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_i = 1$*. Тогда*

$$f\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f(x_j)$$

Доказательство. Индукция по k.

База: $k = 2$, определение выпуклости.

Переход: Если $\lambda_k = 0$, то работает индукционное предположение. Если $\lambda_k = 1$, то остальные коэффициенты — нули, неравенство обращается в $f(x_k) \leqslant f(x_k)$.

Положим $y \coloneqq \frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{k-1} x_{k-1}}{1 - \lambda_k}$, запишем выпуклость:

$$f((1-\lambda_k)y + \lambda_k x_k) \leqslant (1-\lambda_k) f(y) + \lambda_k f(x_k)$$

Применив индукционное предположение $f(y) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_k} f(x_j)$, получаем искомое неравенство. $\square$

Следствие 3.0.7. *Логарифм — вогнутая функция, так как производная убывает. Применим неравенство Йенсена для* $\lambda_j = \frac{1}{k}$*,* $x_j > 0$*:*

$$\log\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}\right) \geqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k} \log(x_k)$$

Взяв экспоненту от обеих частей, получаем неравенство о средних арифметическом и геометрическом:

$$\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k} \geqslant \sqrt[k]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_k}$$

Лекция XXV

19 мая 2023 г.

Факт 3.0.4 (Неравенство Йенсена для интегралов)**.** *Пусть* $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *— ограниченная функция (*$|h| \leqslant M$*) интегрируемая по Риману-Дарбу. Пусть* $f : (-M-\varepsilon, M+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ *— выпуклая функция (*$\varepsilon > 0$ *— произвольный).*

Обозначив $[a,b] = \Delta$*, утверждаем, что*

$$f\left(\frac{1}{|\Delta|} \int\limits_{\Delta} h(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \frac{1}{|\Delta|} \int\limits_{\Delta} (f \circ h)(x)\,\mathrm{d}x$$

Доказательство.

> **Лемма 3.0.2.** *Пусть* $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *— ограниченная функция (*$|h| \leqslant M$*) интегрируемая по Риману-Дарбу (всё так же),* $\phi : [-M, M]$ *—* C*-липшицева функция. Тогда* $\phi \circ h$ *тоже интегрируема по Риману.*

Доказательство леммы.

Пусть $I \subset \Delta$ — отрезок.

$$\operatorname{osc}_I(\phi \circ h) = \sup_{x,y \in I} |\phi(h(x)) - \phi(h(y))| \leqslant C \sup_{x,y \in I} |h(x) - h(y)| \leqslant C \operatorname{osc}_I h$$

Дальше применяем критерий интегрируемости по Риману-Дарбу. □

Так как f задана на большем интервале, то на $[-M, M]$ она липшицева. Тогда согласно лемме существуют оба интеграла.

Выберем $\varepsilon > 0$, так как f равномерно непрерывна, то $\exists \delta > 0 : t_1, t_2 \in [-M, M]$ и $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$.

Напишем суммы Дарбу, не особо важно, верхние или нижние, начиная с некоторого места они все близки. Пусть верхние. $\exists \Delta_1, \ldots, \Delta_k$ — разбиение Δ, такое, что $\frac{1}{|\Delta|} \left| \int\limits_\Delta h(x)\,\mathrm{d}x - \sum\limits_{j=1}^{k} \sup\limits_{x \in \Delta_j} h(x) |\Delta_j| \right| < \delta$ (давайте считать, что колебания $f(h(x))$ по данному разбиению тоже ε). Таким образом, можно применить f к обеим частям (и неравенство Йенсена), совершив ошибку не более, чем на ε:

$$f\left(\frac{1}{|\Delta|} \int\limits_\Delta h(x)\,\mathrm{d}x\right) - \varepsilon \leqslant f\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{|\Delta_j|}{|\Delta|} \sup_{x \in \Delta_j} h(x)\right) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{|\Delta_j|}{|\Delta|} f\left(\sup_{x \in \Delta_j} h(x)\right)$$

Так как супремума может не существовать, то давайте сделаем оценку: $\exists t_j \in \Delta_j : \sup\limits_{x \in \Delta_j} h(x) \geqslant h(t) \geqslant \sup\limits_{x \in \Delta_j} h(x) - \delta$. Теперь запишем $\left| f(\sup\limits_{x \in \Delta_j} h(x)) - f(h(t)) \right| < \varepsilon$, то есть $f(\sup\limits_{x \in \Delta_j} h(x)) \leqslant f(h(t)) + \varepsilon \leqslant \sup\limits_{x \in \Delta_j} f(h(x)) + \varepsilon$.

Теперь можно продолжить неравенство

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{|\Delta_j|}{|\Delta|} f\left(\sup_{x \in \Delta_j} h(x)\right) \leqslant \frac{1}{|\Delta|} \sum_{j=1}^{k} |\Delta_j| \sup_{x \in \Delta_j} f(h(x)) + \frac{1}{|\Delta|} \sum_{j=1}^{k} |\Delta_j| \varepsilon$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$ получаем искомое неравенство. □

3.1 Бесконечные произведения

Пусть $a_1, \ldots, \in \mathbb{C}$. Что логично считать под $\prod\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ — «бесконечным произведением»?

Если бы числа были положительными, то можно было бы их прологарифмировать и просуммировать ряд.

Положим $\sigma_n = \prod\limits_{j=1}^{n} a_j$.

Если $\sigma_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, то говорят, что *произведение расходится к нулю* — ведь гипотетический ряд логарифмов действительно расходится к $-\infty$.

Если $\sigma_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \sigma \neq 0$, то говорят, что *произведение сходится к* σ.

Вспомним, что $e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$. Отсюда видно, что $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Логарифм хочется определить, как обратную функцию к $z \mapsto e^z$. Есть одна проблема: $z \mapsto e^z$ не инъективно. А именно, оно периодично с периодом $2\pi i$.

Заметим, что
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}e^z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = e^z$$

Таким образом, $\mathrm{dexp}(z_0, h) = e^{z_0}\cdot h$.

Таким образом, $\forall z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\exists\varepsilon, \exists\phi : \forall |z - z_0| < \varepsilon : e^{\phi(z)} = z$. Это отображение дифференцируемо, как обратное к невырожденно дифференцируемому: $\phi'(z_0) = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z}$, где $w_0 = \phi(z_0)$.

Пусть $w = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$. Каким должно быть w, чтобы $e^w = z_0$?

$$e^a \cdot e^{ib} = z_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e^a = |z_0| \\ e^{ib} = \frac{z_0}{|z_0|} =: \zeta \end{cases}$$

Первое уравнение мы умеем решать с помощью вещественного логарифма, решениями второго уравнения являются $\{b + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, где b — какое-нибудь решение. Все такие решения называются аргументами.

Множество всех аргументов $\mathrm{Arg}(\zeta)$ пишется с большой буквы. Множество всех обратных к экспоненте обозначают $\mathrm{Log}(z_0) = \log|z_0| + i\,\mathrm{Arg}\,\frac{z_0}{|z_0|}$

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область.

Определение 3.1.1 (Ветвь логарифма)**.** Непрерывная функция $\phi : G \to \mathbb{C}$, такая, что $e^{\phi(z)} = z$.

Давайте найдём какие-нибудь большие области, в которых есть ветви логарифма. Например, подойдёт $\{x \in \mathbb{C} | x \leqslant 0\}$ — (запись $x \leqslant 0$ может быть истинна только если $x \in \mathbb{R}$).

Тогда в качестве $\arg(z)$ (z нормируем делением на $|z|$) выбираем значения аргумента из $(-\pi, \pi)$. Понятно, что определённая таким образом функция будет непрерывна. Определённая функция $\arg(z)$ — *главная ветвь аргумента*, ей соответствует *главная ветвь логарифма* $\log z = \log|z| + i\arg z$.

Вообще говоря, $\log(ab) \neq \log a + \log b$ — сумма значений аргументов a и b может лежать вне $(-\pi, \pi)$.

Замечание. Достаточным условием равенства $\log(ab) = \log a + \log b$ является $\Re a, \Re b > 0$.

3.1.1 О сходящихся произведениях

По определению, произведение сходится, если $\exists\sigma : \forall\varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : |\sigma_n - \sigma| < \varepsilon$. Согласно тривиальной части критерия Коши

$$\forall k > n : |a_1 \cdot \ldots \cdot a_k - \sigma| < \varepsilon \Rightarrow |a_1 \cdot \ldots \cdot a_n - a_1 \cdot \ldots \cdot a_k| < 2\varepsilon \Rightarrow |1 - a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_k| < \frac{2\varepsilon}{|a_1 \cdot \ldots \cdot a_k|}$$

Пусть $\varepsilon < \frac{|\sigma|}{2}$, тогда $|1 - a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_k| < \frac{2\varepsilon}{\sigma - \frac{|\sigma|}{2}} \leqslant 4\frac{\varepsilon}{|\sigma|}$.

Таким образом, $\forall\rho > 0 : \exists N : \forall k > n > N : |1 - a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_k| < \rho$.

Выбрав $\rho < \frac{1}{2}$ видим, что если произведение сходится, то начиная с некоторого места все конечные произведения лежат в круге $B_{1/2}(1)$, в частности, лежат в полуплоскости $\Re z > 0$.

Пускай $n > N, k > n$. Сходимость исходного произведения $\prod\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ эквивалентна сходимости $\prod\limits_{j=n}^{\infty} a_j$ (разумеется, если среди $a_1, \ldots, a_{n-1}$ нет нулей). А это эквивалентно тому, что $\exists\widetilde{\sigma} : a_n \cdot \ldots \cdot a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \widetilde{\sigma}$.

Произведение $a_n \cdot \ldots \cdot a_k$, как и все его 2^k сомножителей лежат в полуплоскости $\Re z > 0$, значит, можно расписать $\log(a_n \cdot \ldots \cdot a_k) = \log(a_n) + \cdots + \log(a_k)$. Таким образом, сходимость произведения эквивалентна сходимости ряд $\sum\limits_{j=n}^{\infty} \log a_j$.

Но можно добавить и первые слагаемые, которых конечное число.

Теорема 3.1.1. Пусть $a_j \notin (\infty, 0]$. Тогда $\prod\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ сходится $\iff$ $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \log a_j$ сходится.

Замечание. Пусть ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ сходится к s, а $\prod\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ сходится к σ.

Тогда $e^s = \sigma$, но равенство $\log \sigma = s$ вполне может не выполняться.