Математический анализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков
Конспектировал Леонид Данилевич
Редактировал Максим Лаунер

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

Глава 1

Комплексный анализ

Лекция I

16 февраля 2024 г.

Пусть $f : G \to \mathbb{C}$, где открытое $G \subset \mathbb{C}$.

Определение 1.0.1 (f голоморфна в $z_0 \in G$)**.** $\exists \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \overset{def}{=} f'(z_0)$.

Во втором семестре мы проверяли, что $f = u + iv$ (где $u, v : G \to \mathbb{R}$) голоморфна в $z_0 \iff f = f(x+iy)$ дифференцируема в вещественном смысле, и выполняются уравнения Коши — Римана:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Определение 1.0.2 (f аналитична в G)**.** $\forall z_0 \in G : \exists c_j \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \tag{$*$}$$

где ряд сходится не только при $z = z_0$.

Теорема 1.0.1. f аналитична в $G \iff f$ голоморфна во всех точках G.

Доказательство.

- $\Rightarrow$. Доказали во втором семестре, несложно.
- $\Leftarrow$. Скоро займёмся, время пришло. □

Степенные ряды типа $(*)$ можно дифференцировать почленно: $f'(z) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} j c_j (z - z_0)^{j-1}$. В частности, отсюда получается, что $f'(z_0) = c_1$, и вообще $f^{(n)}(z_0) = j! \cdot c_j$.

Вскоре мы увидим, что ситуация разительно отличается от вещественной: в вещественном случае были разные классы — дифференцируемые функции, C^1, C^∞, аналитичные, и множество промежуточных классов.

В комплексном же случае, если функция хотя бы один раз дифференцируема, то окажется, что этого достаточно, чтобы она была не просто дифференцируема, а непрерывно дифференцируема, бесконечно дифференцируема, и даже аналитична.

1.1 Интеграл от дифференциальной формы вдоль кусочно-гладкого пути

1.1.1 Про дифференциальные формы

Определение 1.1.1 (Линейная функция $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$)**.** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n : l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y)$.

Определение 1.1.2 (Линейная форма на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$)**.** Функция двух переменных $\phi : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, линейная по второму аргументу.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ имеется базис (e_j): $h = e_1 h_1 + \cdots + e_n h_n$.

Тем самым, $\phi(x, h) = \sum\limits_{j=1}^{n} \underbrace{\phi(x, e_j)}_{=: g_j(x)} h_j = \sum\limits_{j=1}^{n} g_j(x) h_j$.

Введём *базисные линейные формы* $\mathrm{d}x_j(u, h) = h_j$, игнорирующую первую координату, и возвращающая j-ю компоненту второго аргумента. Теперь $\phi(x, h)$ разложилась в сумму $\sum\limits_{j=1}^{n} g_j \, \mathrm{d}x_j$.

Пример. Пусть $f : G \to \mathbb{C}$ — дифференцируемая в G функция. Заметим, что её дифференциал $\mathrm{d}_f(x, \_)$ — в точности линейная форма на G.

При разложении по базису получится $\mathrm{d}_f(x, \_) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \, \mathrm{d}x_j$.

Вскоре мы увидим, что далеко не всякая линейная форма является чьим-то дифференциалом.

Если $\phi = \sum\limits_{j=1}^{n} g_j \, \mathrm{d}x_j$ — дифференциал функции f, то непременно $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Тот факт, что ϕ является дифференциалом f, можно сказать наоборот: f является первообразной ϕ.

1.1.2 Про интегрирование

Рассмотрим монотонную функцию $\Phi : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$. Как и при определении стилтьесовой длины, будем считать, что Φ определена на некотором открытом множестве, содержащем $\langle a, b \rangle$. Обозначим за l_Φ стилтьесову длину, отвечающую функции Φ.

Пускай λ_Φ — продолжение стилтьесовой длины l_Φ по Лебегу — Каратеодори.

Она, как водится, определена на некоторой Σ-алгебре, в которой есть борелевские множества, но измеримы могут быть и какие-то другие множества, зависящие от конкретной функции Φ.

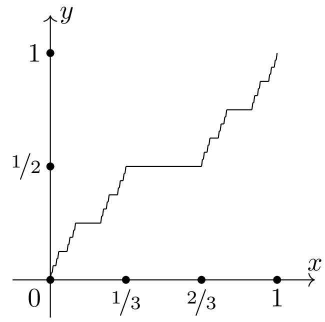
Примеры.

- Так, функция $\phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$ порождает дельта-меру δ_0, относительно которой все множества измеримы.

  Кроме того, эта мера сингулярна относительно стандартной меры Лебега.

- Может показаться, что так происходит из-за разрывности ϕ, но это не так.

Рекурсивно определим канторову лестницу $C : [0,1] \to [0,1]$:



Построив по данной функции стилтьесову длину λ_C, мы получим меру, сосредоточенную на канторовом множестве меры нуль.

Её носитель — само канторово множество, так как на всех отрезках вне канторова множества λ_C равна нулю. Она сингулярна относительно стандартной меры Лебега на $\mathbb{R}$, и её измеримые множества разительно отличаются от измеримых множеств меры Лебега.

По мере Стилтьеса можно интегрировать: если v является λ_Φ измеримой, и обладает интегралом (скажем, измерима по Борелю и неотрицательна), то определён интеграл $\int\limits_{\langle a,b\rangle} v \,\mathrm{d}\lambda_\Phi$ Иногда пишут просто $\int\limits_{\langle a,b\rangle} v \,\mathrm{d}\Phi$ — это *интеграл Лебега — Стилтьеса.*

Теперь пусть $I = [a,b]$, и $\Psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. В таком случае $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$, где некие Φ_1, Φ_2 возрастают. Можно определить знакопеременную меру $\lambda_\Psi \overset{def}{=} \lambda_{\Phi_1} - \lambda_{\Phi_2}$, понятно, что определение корректно.

1.1.3 Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути

Пускай $\gamma : [a,b] \to G \subset \mathbb{R}^n$ — спрямляемый путь (путь конечной длины). Пускай $U = \sum\limits_{j=1}^{n} u_j \,\mathrm{d}x_j$ — дифференциальная форма в области G. Если не сказано противное, будем считать, что u_j — непрерывные функции.

Определение 1.1.3 (Интеграл от U вдоль пути γ)**.** $\int\limits_\gamma U \overset{def}{=} \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{[a,b]} u_j(\gamma(t)) \,\mathrm{d}\gamma_j(t)$.

Здесь $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Так как путь спрямляем, то все γ_j — ограниченной вариации, каждая порождает свою меру Стилтьеса, и определение интегрирует композицию $U \circ \gamma$ по данной мере.

1.1.4 Сумма путей

Пускай имеются два отрезка $[a,c]$ и $[c,d]$, и на них заданы пути $\gamma_1 : [a,c] \to G$, $\gamma_2 : [c,d] \to G$. Предположим, что $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$.

Тогда можно устроить путь $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a,d] \to G$, $\gamma(t) \overset{def}{=} \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,c] \\ \gamma_2(t), & t \in [c,d] \end{cases}$.

Замечание. Интеграл аддитивен по множеству, поэтому: $\int\limits_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} U = \int\limits_{\gamma_1} U + \int\limits_{\gamma_2} U$.

1.1.5 Альтернативное определение

Далее мы не интересуемся никакими чудесами вроде канторовых лестниц, и считаем, что Φ такова, что λ_Φ абсолютно непрерывна относительно стандартной меры Лебега.

А раз так, то по теореме Радона — Никодима $\exists$ суммируемая $w : [a, b] \to \mathbb{R}$, такая, что

$$\lambda_\Phi(e) = \int\limits_e w(x)\,\mathrm{d}x \tag{+}$$

Факт 1.1.1. *Формула (+) заведомо верна, если Φ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, тогда $w = \Phi'$.*

Доказательство. Введём меру $\nu(e) = \int\limits_e \Phi'(x)\,\mathrm{d}x$, заданную на измеримых по Лебегу множествах. Φ' непрерывна, и, следовательно, измерима.

Если $\langle c, d\rangle \subset [a, b]$, то $\nu(\langle c, d\rangle) = \int\limits_{\langle c,d\rangle} \Phi'(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(d) - \Phi(c) = l_\Phi(\langle c, d\rangle)$.

Таким образом, из теоремы единственности, продолжение l_Φ по Лебегу — Каратеодори совпадает с $\int\limits_e \Phi'(x)\,\mathrm{d}x$. □

Замечание. Утверждение (факт 1.1.1) сохраняет силу, если Φ непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема.

Пускай теперь $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, кусочно-непрерывно дифференцируемая: $\exists a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$, такие, что Φ непрерывно дифференцируема на $[a_s, a_{s+1}]$ при $0 \leqslant s < k$. Введём $\rho(e) = \int\limits_e \Phi'(x)\,\mathrm{d}x$ — это знакопеременная вещественная мера.

У данной меры возникают (из разложения Хана) положительная и отрицательная части $\rho_+(e) \overset{def}{=} \int\limits_e (\Phi')_+(x)\,\mathrm{d}x$ и $\rho_-(e) \overset{def}{=} \int\limits_e (\Phi')_-(x)\,\mathrm{d}x$

Если обозначить за $\Phi_+(t) = \int\limits_0^t (\Phi')_+(x)\,\mathrm{d}x$ и $\Phi_-(t) = \int\limits_0^t (\Phi')_-(x)\,\mathrm{d}x$, то окажется, что соответствующие меры Стилтьеса совпадают с ρ_+ и ρ_-.

Более того, $\Phi = \Phi_+ - \Phi_-$ — получили разложение функции ограниченной вариации в положительную и отрицательную части.

Замечание. Это разложение экономнее, чем то, которое было получено ранее — ранее в качестве Φ_+ выбиралась вариация Φ.

Если всё, что написано выше, собрать вместе, то получится

$$\boxed{\int\limits_{[s,t]} v\,\mathrm{d}\Phi = \int\limits_{[s,t]} v(x)\Phi'(x)\,\mathrm{d}x}$$

Далее «гладкий» используется, как синоним к непрерывно-дифференцируемому.

Следствие 1.1.1 (Можно считать определением)**.** *Если $U = \sum\limits_{j=1}^n u_j\,\mathrm{d}x_j$ — дифференциальная форма в G с непрерывными коэффициентами, а $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) : [a, b] \to G$ — спрямляемый кусочно-гладкий путь, то*

$$\int\limits_\gamma U = \sum_{j=1}^n \int\limits_a^b u_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t$$

1.1.6 (Не)зависимость от параметризации

Пускай $\gamma : [a, b] \to G$ — кусочно-гладкий путь, $\psi : [c, d] \to [a, b]$ — гладкий гомеоморфизм.

Теперь $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$ — перепараметризация γ.

Лемма 1.1.1. *Для всякой формы U:*

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} U = \pm \int\limits_{\gamma} U$$

Знак „+“ выбирается, если ψ возрастает, и „− “ — если убывает.

Доказательство. Предположим, что γ — гладкий путь, иначе применяем к кусочкам гладкости по отдельности.

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} U = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{c}^{d} u_j(\gamma(\psi(t)))\gamma_j'(\psi(t)) \cdot \psi'(t)\,\mathrm{d}t = \left\| \begin{array}{c} \tau = \psi(t) \\ \mathrm{d}\tau = \psi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right\| = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\psi(c)}^{\psi(d)} u_j(\gamma(\tau))\gamma_j'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \pm \int\limits_{\gamma} U \quad \square$$

Про ψ также можно считать, что он не гладкий, а лишь кусочно-гладкий.

Тем самым, можно определить сумму путей для несоприкасающихся отрезков: для двух путей $\gamma_1 : [a,b] \to G, \gamma_2 : [c,d] \to G$ (при условии $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$) можно один их отрезков-прообразов линейным возрастающим преобразованием перевести в отрезок, соприкасающийся со вторым (например, $t \mapsto t + (b - c)$).

Также есть понятие *обратного пути* $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$. Для любой формы U:

$$\int\limits_{\gamma \oplus \gamma^-} U = \int\limits_{\gamma} U + \int\limits_{\gamma^-} U = \int\limits_{\gamma} U - \int\limits_{\gamma} U = 0$$

1.2 Условия существования первообразной у дифференциальной формы

Теорема 1.2.1. Если у дифференциальной формы U в открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ имеется первообразная F, то для всякого кусочно-гладкого пути $\gamma : [a,b] \to G$

$$\int\limits_{\gamma} U = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Доказательство. $U = \sum\limits_{j=1}^{n} g_j\,\mathrm{d}x_j$, где $g_j(w) = \frac{\partial}{\partial x_j} F(w)$. Считаем, что путь гладкий.

$$\int\limits_{\gamma} U = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{a}^{b} \frac{\partial}{\partial x_j} F(\gamma(t))\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F \circ \gamma)(t)\,\mathrm{d}t = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Если же путь всего лишь кусочно-гладкий, то надо разбить отрезок на подотрезки гладкости, и сложить. $\square$

Следствие 1.2.1. *Если у дифференциальной формы U есть первообразная, то её интегралы по всем путям с данными началом и концом, равны.*

Оказывается, верно и обратное.

Лекция II

26 февраля 2024 г.

Лемма 1.2.1. *Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, тогда любые две её точки можно соединить ломаной (кусочно-линейным путём).*

Доказательство. Выберем $x_0 \in G$, положим $U = \{y \in G |$существует ломаная в G с началом в x_0 и концом в $y\}$.

Покажем, что U открыто. Пусть $y \in U$, тогда найдётся шарик $B_\varepsilon(y) \subset G$, и $B_\varepsilon(y) \subset U$ — можно добавить одно звено к ломаной $x_0 \rightsquigarrow y$.

Покажем, что U замкнуто. Пусть $z \in G$ — предельная точка для U. Найдётся $B_\varepsilon(z) \subset G$, так как z — предельная, то $\exists y \in B_\varepsilon(z) \cap U$. Значит, $z \in U$ — можно добавить одно звено $y \to z$. □

Замечание. Имея кусочно-линейный путь $\gamma : [a, b] \to G$, соединяющий $A, B \in G$, несложно получить бесконечно дифференцируемый путь, соединяющий их:

Пусть $\gamma_1 : [a-1, b+1] \to G, \gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma(a), & t \in [a-1, a] \\ \gamma(t), & t \in [a, b] \\ \gamma(b), & t \in [b, b+1] \end{cases}$. Теперь, сворачивая γ_1 с аппроксимативной единицей с достаточно малым компактным носителем, получим бесконечно дифференцируемый путь, соединяющий A и B.

Теорема 1.2.2. Пусть $\Phi = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(x)\,\mathrm{d}x_j$ — *непрерывная* дифференциальная форма в G (то есть коэффициенты непрерывны в G). Следующие условия эквивалентны.

1. У Φ есть первообразная F, то есть функция $F \in C^1(G) : \mathrm{d}F = \Phi$ (иными словами, $\forall j$: $\frac{\partial}{\partial x_j} F = f_j$).
2. Для всех кусочно-гладких путей γ с фиксированными началом и концом $\gamma(a) = \gamma_a, \gamma(b) = \gamma_b$: $\int\limits_\gamma \Phi$ не зависит от γ (а только от начала и конца).
3. Для любой кусочно-гладкой петли (то есть замкнутого пути) γ в G: $\int\limits_\gamma \Phi = 0$.

Доказательство. Мы уже доказали ранее цепочку импликаций $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2)$. Далее доказываем $(2) \Rightarrow (1)$.

Предъявим кандидат в первообразную. Зафиксируем $x_0 \in G$, выберем $x \in G$, пусть γ — произвольный кусочно-гладкий путь с началом в x_0 и концом в x. Определим $F(x) \overset{def}{=} \int\limits_\gamma \Phi$. Согласно посылке, F корректно определена — не зависит от выбора пути.

Покажем, что частные производные F существуют, и равны f_j. Тогда они получатся непрерывными, то есть F — дифференцируемой, и окажется, что F — первообразная Φ.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — стандартные базисные орты в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим $\frac{F(x+te_j)-F(x)}{t}$.

При малых t: отрезок между x и $x + te_j$ лежит внутри G. Пусть γ_1 — путь, соединяющий x_0 и x, l — отрезок от x до $x + te_j$.

$$\frac{F(x+te_j) - F(x)}{t} = \frac{1}{t}\left(\int\limits_{\gamma_1 \oplus l} \Phi - \int\limits_{\gamma_1} \Phi\right) = \frac{1}{t}\int\limits_l \Phi = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f_j(x + \tau e_j)\,\mathrm{d}\tau \xrightarrow[t\to 0]{} f_j(x)$$ □

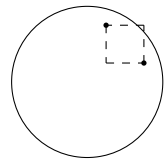
Определение 1.2.1 (Прямоугольник на плоскости)**.** Множество вида $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$.

Область G на плоскости будем называть *удобной*, если $\exists x_0 \in G : \forall y \in G : \exists$ прямоугольник $P \subset G$, содержащий точки x и y.

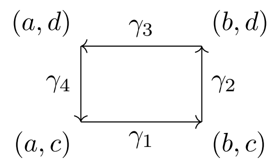
Примеры (Удобные области).

- $\operatorname{Int} Q$, если Q — прямоугольник. В качестве *центра* x_0 подойдёт любая точка.

- $B_r(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \middle| |x - x_0| < r\right\}$. В качестве *центра* x_0 стоит взять центр круга, иначе не получится:



Определение 1.2.2 (Ориентированная граница прямоугольника P)**.** Петля γ, обходящая границу $P = [a, b] \times [c, d]$ против часовой стрелки, то есть вот так:



$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$.

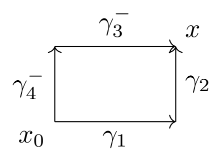
Для прямоугольника P будем обозначать за ∂P в зависимости от контекста либо границу P, как топологического подмножества $\mathbb{R}^2$, либо путь, обходящий границу P против часовой стрелки.

Следствие 1.2.2 (Дополнение к (теорема 1.2.2))**.** *Если G — удобная область на плоскости, то к трём эквивалентным условиям (теорема 1.2.2) можно добавить*

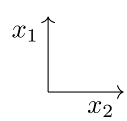
4. $\forall P \subset G : \int\limits_{\partial P} \Phi = 0.$

Доказательство. (3) $\Rightarrow$ (4) ясно, докажем (4) $\Rightarrow$ (1).

Пусть $x_0 \in G$ — центр удобной области, определим $F(x) = \int\limits_{\delta} \Phi$, где δ — это либо $\delta_1 \coloneqq \gamma_1 \oplus \gamma_2$ либо $\delta_2 \coloneqq \gamma_4^- \oplus \gamma_3^-$ (вне зависимости от выбора δ получится одно и то же).



Далее, чтобы проверить $\frac{\partial}{\partial x_1} F = f_1$ и $\frac{\partial}{\partial x_2} F = f_2$, воспользуемся подходящим представлением: пусть орты расположены так:



тогда для проверки $\frac{\partial}{\partial x_1} F = f_1$ удобно воспользоваться определением F через δ_1, для проверки $\frac{\partial}{\partial x_2} F = f_2$ — определением через δ_2. Далее повторяем рассуждение из (теорема 1.2.2). $\square$

Пусть $\Phi = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(x)\,\mathrm{d}x_j$ — непрерывная дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1.2.3 (Форма Φ точна)**.** Существует первообразная F в $G : \mathrm{d}F = \Phi$.

Определение 1.2.4 (Форма Φ замкнута)**.** Форма Φ локально точна ($\forall x_0 \in G : \exists U \ni x_0 \colon \Phi\big|_U$ точна).

Понятно, что точная форма замкнута, но точность из замкнутости не следует: чуть позднее мы определим $\mathrm{d}z$, и покажем, что $\frac{\mathrm{d}z}{z}$ — замкнутая, но не точная форма на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Теорема 1.2.3. Пусть Φ — дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$. Следующие условия эквивалентны:

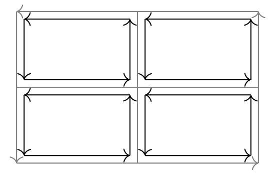
1. Φ замкнута.
2. $\forall x_0 \in G : \exists V \ni x_0 : \forall$ кусочно-гладкого замкнутого пути γ с носителем в V: $\int\limits_\gamma \Phi = 0$.

Если $n = 2$, то дополнительно появляются ещё два условия:

3. $\forall z \in G : \underset{\ni z}{\exists V_z} \subset G : \forall P \subset V_z : \int\limits_{\partial P} \Phi = 0$.
4. $\forall P \subset G : \int\limits_{\partial P} \Phi = 0$.

Доказательство. Докажем, что (3) $\Rightarrow$ (4), остальное уже доказано выше.

Заметим, что границу прямоугольника P можно представить, как сумму границ четырёх прямоугольников вдвое меньшего диаметра:



Таким образом, чтобы доказать, что интеграл по границе большого прямоугольника P нулевой, разобьём его на достаточно маленькие прямоугольники, по ним-то интеграл нуль. Чтобы это формализовать, вспомним лемму Лебега о покрытии:

Теорема 1.2.4 (Лемма Лебега)**.** Пусть K — компакт в метрическом пространстве, $\{U_j\}_{j\in J}$ — открытое покрытие компакта K. Тогда $\exists \delta > 0 : \forall A \subset K : \operatorname{diam} A < \delta \Rightarrow \exists j \in J : A \subset U_j$.

Применяя лемму Лебега для покрытия P окрестностями $\{V_z\}_{z\in P}$, получим такое число δ. Теперь надо разбить границу прямоугольника P в сумму границ прямоугольников диаметра меньше δ, а посылка теоремы говорит, что интеграл по ним уже нуль. $\square$

1.2.1 Операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$

Как известно, $\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$, то есть $\forall z \in \mathbb{C} : z = x + iy$, аналогично $\overline{z} = x - iy$.

Рассмотрим z и $\overline{z}$, как функции $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto x \pm iy$. Теперь $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y$ и $\mathrm{d}\overline{z} = \mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y$ образуют базис в пространстве дифференциальных форм (тех, которые не зависят от точки), обратное преобразование выглядит так:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z + \mathrm{d}\overline{z}}{2} \\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}z - \mathrm{d}\overline{z}}{2i} \end{cases}$$

Рассмотрим форму $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, \Phi(x, y) = \alpha(x, y)\,\mathrm{d}x + \beta(x, y)\,\mathrm{d}y$. Перепишем её в новом базисе:

$$\Phi(x, y) = \frac{\alpha(x, y)}{2}(\mathrm{d}z + \mathrm{d}\overline{z}) + \frac{\beta(x, y)}{2i}(\mathrm{d}z - \mathrm{d}\overline{z}) = \frac{\alpha(x, y) - i\beta(x, y)}{2}\,\mathrm{d}z + \frac{\alpha(x, y) + i\beta(x, y)}{2}\,\mathrm{d}\overline{z}$$

Теперь пусть Φ — точная форма, то есть $\Phi = \mathrm{d}F$, и тогда $\alpha(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}F(x, y)$ и $\beta(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}F(x, y)$. Теперь

$$\mathrm{d}F = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right)\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right)\mathrm{d}\overline{z}$$

Определение 1.2.5 ($\frac{\partial F}{\partial z}$)**.** Коэффициент, стоящий перед $\mathrm{d}z$, то есть $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right)$.

Определение 1.2.6 ($\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}$)**.** Коэффициент, стоящий перед $\mathrm{d}\overline{z}$, то есть $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right)$.

Иначе говоря, мы ввели операторы $\frac{\partial}{\partial z} \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ так, что

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial}{\partial z}F\,\mathrm{d}z + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}F\,\mathrm{d}\overline{z}$$

1.2.2 Связь с голоморфными функциями

Пусть $F = u + iv$, где $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Запишем

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)$$

В правой части равенства получились выражения из уравнений Коши — Римана.

Факт 1.2.1. *Вещественные функции u, v удовлетворяют уравнениям Коши — Римана* $\iff$ $\frac{\partial(u+iv)}{\partial \overline{z}} \equiv 0$.

Факт 1.2.2. *F голоморфна* $\iff$ $\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial z}\,\mathrm{d}z$. *При этом $\frac{\partial F}{\partial z}$ есть производная F по комплексному аргументу.*

Доказательство. Функция дифференцируема по комплексному аргументу $\iff$ её дифференциал — умножение на комплексное число. $\square$

В основном нас будут интересовать дифференциальные формы вида $\phi(z)\,\mathrm{d}z$, где ϕ — произвольная функция.

Выясним, когда у формы $\phi(z)\,\mathrm{d}z = \phi(z)\,\mathrm{d}x + i\phi(z)\,\mathrm{d}y$ имеется первообразная, то есть функция $g : \frac{\partial g}{\partial x} = \phi, \frac{\partial g}{\partial y} = i\phi$. Заметим, что $\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{2}(\phi - i(i\phi)) = \phi$ и $\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\phi + i(i\phi)) = 0$.

Утверждение 1.2.1. *Форма $\phi\,\mathrm{d}z$ имеет первообразную g* $\iff$ *g голоморфна, и $g' = \phi$.*

Теорема 1.2.5 (Коши)**.** Если $g : G \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция (область $G \subset \mathbb{C}$), то форма $g(z)\,\mathrm{d}z$ замкнута (но не факт, что точна).

Доказательство. Потом (теорема 1.2.8). $\square$

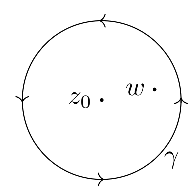
Контрпример (Глобально первообразной может не быть). Пусть $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}, g : G \to \mathbb{C}, g : z \mapsto \frac{1}{z}$.

По теореме Коши у g имеется локальная первообразная — комплексный логарифм — но глобально определить не получится. Пусть $\Gamma = \partial\mathbb{T}$ — комплексная окружность, ориентируем её против часовой стрелки, а именно, рассмотрим стандартный обход окружности $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \alpha : \phi \mapsto e^{i\phi}$. Теперь убедимся, что форма не точна:

$$\int\limits_{\alpha} \phi = \int\limits_{\alpha} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\left(e^{it}\right)'}{e^{it}}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} i\,\mathrm{d}t = 2\pi i \neq 0$$

Для будущих применений также определим ориентированную против часовой стрелки границу $B_r(z_0)$, это путь $\beta(t) = z_0 + re^{it}$ для $t \in [0, 2\pi]$.

Пример. Пусть $z_0, w \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_{>0}$, $|w - z_0| \neq r$, пусть путь γ обходит границу $B_r(z_0)$ против часовой стрелки:



Тогда, оказывается, (посчитаем чуть позже):

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z-w} = \begin{cases} 0, & |z-w| > r \\ 2\pi i, & |z-w| < r \end{cases} \tag{$\circ$}$$

Грубой силой этот интеграл посчитать непросто, так как w находится где угодно — внутри или снаружи круга — а интеграл, оказывается, зависит только от этих двух альтернатив.

Теорема 1.2.6 (Основная оценка интеграла вдоль пути)**.** Пускай $\Phi = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j \,\mathrm{d}x_j$ — непрерывная дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$, а $\gamma : [a,b] \to G$ — кусочно-гладкий путь, $K \coloneqq \operatorname{Im}(\gamma) \subset G$.

Тогда $\left|\int\limits_{\gamma} \Phi\right| \leqslant \underbrace{\sup\limits_{x\in K} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |f_j(x)|^2\right)^{1/2}}_{=:A} \cdot l(\gamma)$.

Доказательство. Считаем, что γ — гладкий путь, иначе нужно разбить на кусочки гладкости.

$$\left|\int\limits_{\gamma} \Phi\right| = \left|\int\limits_{a}^{b} \sum_{j=1}^{n} f_j\left(\gamma(t)\right) \gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t\right| \underset{\text{КБШ}}{\leqslant} \int\limits_{a}^{b} \left(\sum_{j=1}^{n} |f_j(\gamma(t))|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j'(t)|^2\right)^{1/2} \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant A \cdot \underbrace{\int\limits_{a}^{b} \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j'(t)|^2\right)^{1/2} \mathrm{d}t}_{l(\gamma)}$$

∎

Лекция III

1 марта 2024 г.

Рассмотрим дифференциальную форму $\Phi = F(z)\,\mathrm{d}z$, где F — непрерывная функция в $G \subset \mathbb{C}$. Пусть $\gamma : [a,b] \to G$ — плоский путь.

Расписав $\Phi(z) = F(z)\,\mathrm{d}x + iF(z)\,\mathrm{d}y$ и применив основную оценку интеграла вдоль пути, получаем

$$\left|\int\limits_{\gamma} \Phi\right| \leqslant \max_{z\in K} \sqrt{|F(z)|^2 + |F(z)|^2} \cdot l(\gamma) = \sqrt{2} \max_{z\in K} |F(z)| \cdot l(\gamma)$$

Эта оценка вызывает некоторую неудовлетворённость: кажется, что $\sqrt{2}$ здесь лишний. И это действительно правда: можно расписать интеграл аккуратнее.

Пусть $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, тогда по определению

$$\int\limits_{\gamma} \Phi = \int\limits_{a}^{b} F(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) + iF(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{a}^{b} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Таким образом, интеграл от комплексной формы вдоль пути имеет более простое представление, и оно легко поддаётся более плотной оценке:

$$\left|\int\limits_{\gamma} \Phi\right| \leqslant \int\limits_{a}^{b} |F(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \max_{z\in K} |F(z)| \underbrace{\int\limits_{a}^{b} |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t}_{l(\gamma)}$$

Посчитаем анонсированный на предыдущей лекции интеграл ($\circ$). Пусть $z_0, w \in \mathbb{C}$, $r > 0$.

- Сначала рассмотрим случай $|w - z_0| < r$. Заметим, что, согласно основной оценке интеграла, если коэффициенты равномерно стремятся к какому-то значению и интегралы ограничены, то предельный интеграл тоже сходится.

  Запись ниже $\int\limits_{|z-z_0|=r}$, и вообще все аналогичные записи, которые встретятся в дальнейшем, по умолчанию означают, что граница соответствующего множества (в данном случае — круга) обходится стандартным образом, то есть против часовой стрелки.

$$\int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0 - (w - z_0)} = \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} \,\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} \left(1 + \frac{w - z_0}{z - z_0} + \left(\frac{w - z_0}{z - z_0}\right)^2 + \dots\right) \mathrm{d}z \;(=)$$

  На слагаемые из ряда имеется равномерная по z оценка: $\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right| \leqslant \frac{|w-z_0|}{r} < 1$, и по теореме Вейерштрасса функциональный ряд сходится. Значит, сумму можно вынести из-под интеграла

$$(=) \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} \,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{(w - z_0)^j}{(z - z_0)^{j+1}} \,\mathrm{d}z \;(=)$$

  Первое слагаемое мы умеем брать, а у каждого слагаемого из остальной суммы имеется первообразная: $\frac{1}{(z-z_0)^{j+1}} = -\frac{1}{j}\left(\frac{1}{(z-z_0)^j}\right)'$

$$(=) \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} \,\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}} \,\mathrm{d}t = 2\pi i$$

- Теперь разберёмся со случаем $|w - z_0| > r$.

$$\int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0 - (w - z_0)} = -\frac{1}{w - z_0} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = -\frac{1}{w - z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{(z - z_0)^j}{(w - z_0)^j} \,\mathrm{d}z$$

  Аналогично предыдущему случаю, ряд сходится абсолютно, поэтому сумму опять можно вынести из под интеграла, и в данном случае всё ещё проще: каждое слагаемое имеет первообразную, там нет отрицательных степеней z, поэтому вся сумма обращается в нуль.

Пусть $\Phi = f_1 \,\mathrm{d}x_1 + \dots + f_n \,\mathrm{d}x_n$ — непрерывная дифференциальная форма в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2.7. Если все функции $f_j \in C^1$, то следующие условия эквивалентны:

- Φ замкнута.
- $\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n : \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ — «накрест взятые частные производные равны».

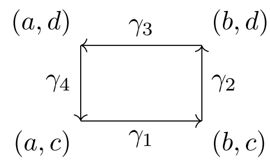
Доказательство.

$\Rightarrow$ Выберем $x \in G$, так как форма замкнута, то $\exists U \ni x : \Phi$ имеет первообразную $F : U \to \mathbb{R}$. Тем самым, $f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$, и так как $f_i \in C^1$, то действительно $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

$\Leftarrow$ Сначала приведём доказательство случая $n = 2$. В таком случае $\Phi = f \,\mathrm{d}x + g \,\mathrm{d}y$.

  Согласно посылке, $h \coloneqq \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$. Кстати, равенство слева равносильно одному из уравнений Коши — Римана.

Рассмотрим произвольный $P = [a,b] \times [c,d] \subset G$, и докажем, что $\int\limits_{\partial P} \Phi = 0$.



То, что мы увидим сейчас, является первым заходом на *формулу Остроградского — Гаусса*. Функция h непрерывна, и можно записать от неё интеграл Лебега: $\int\limits_P h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Теперь, применяя теорему Фубини, раскладываем двумя способами интеграл в сумму повторных:

$$\int\limits_P h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \begin{cases} = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_a^b [f(x,d) - f(x,c)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\gamma_3^-} f(\_,d)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\gamma_1^-} f(\_,c)\,\mathrm{d}x \\ = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_c^d [g(b,y) - g(a,y)]\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\gamma_2} g(b,\_)\,\mathrm{d}y + \int\limits_{\gamma_4} g(a,\_)\,\mathrm{d}y \end{cases}$$

Итого, $\int\limits_{\gamma_3^-} f(\_,d)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\gamma_1^-} f(\_,c)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\gamma_2} g(b,\_)\,\mathrm{d}y + \int\limits_{\gamma_4} g(a,\_)\,\mathrm{d}y$, откуда действительно $\int\limits_\gamma \Phi = 0$.

$\Leftarrow$ Теперь приведём альтернативное доказательство индукцией по n.

<u>База:</u> Случай $n = 1$ тривиален: теорема Ньютона — Лейбница говорит, что у непрерывной функции есть первообразная.

<u>Переход:</u> Пусть $n > 1$, и для $n-1$ теорема доказана. Рассмотрим $a = (a_1, \dots, a_n) \in G$, и возьмём прямоугольный параллелепипед P со сторонами, параллельными осям координат такой, что $a \in \operatorname{Int} P$. Докажем, что на P у Φ есть первообразная.

Построим $g(x_1, \dots, x_n) \coloneqq \int\limits_{a_1}^{x_1} f_1(t, x_2, \dots, x_n)\,\mathrm{d}t$. Обозначим $\phi_j \coloneqq \frac{\partial g}{\partial x_j}$. Заметим, что $\phi_1 = \frac{\partial g}{\partial x_1} = f_1$.

Теперь рассмотрим форму $\Psi(x_1, \dots, x_n) = \phi_1\,\mathrm{d}x_1 + \dots + \phi_n\,\mathrm{d}x_n$. Эта форма имеет первообразную g на параллелепипеде P.

Теперь посмотрим на $\Phi - \Psi \eqqcolon h_1\,\mathrm{d}x_1 + \dots + h_n\,\mathrm{d}x_n$. По построению $h_1 = 0$. По условию накрест взятые частные производные равны у Φ, и они равны у Ψ, так как у неё есть первообразная. Значит, это же верно и для разности, в частности, $\frac{\partial h_i}{\partial x_1} = \frac{\partial h_1}{\partial x_i} = 0$. Иными словами, $\forall i : h_i$ не зависит от x_1.

А раз так, то на $\Phi - \Psi$ можно смотреть, как на форму $(n-1)$-й переменной, и применить индукционное предположение.

Замечание. Тут есть некоторый обман: производные $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$ могут просто не существовать.

Попробуем обойти его так: пусть $\beta \in C^\infty$, с компактным носителем. Выберем аппроксимативную единицу $\beta_t(x) = \frac{1}{t^n} \beta\left(\frac{x}{t}\right)$.

Назначим $f_k^{(t)} = f_k * \beta_t$, $f_k^{(t)} \underset{t \to 0}{\rightrightarrows} f_k$.

Далее, согласно рассуждению выше, у формы $\Phi^{(t)}$ коэффициенты $h_k^{(t)}$ не зависят от x_1. А раз коэффициенты Φ равномерно стремятся к h_k, то и они не зависят от x_1.

Чтобы это увидеть, заключим окрестность точки a в большой параллелепипед Q, а внутри него выберем параллелепипед поменьше P. На Q коэффициенты Φ ограничены. При достаточно малых t, таких, что при вычислении коэффициентов $\Phi^{(t)}$ не происходит выхода за Q, коэффициенты формы $\Phi^{(t)}$ равномерно по P стремятся к Φ. $\square$

1.2.3 Эквивалентность голоморфности и аналитичности

Теорема 1.2.8 (Коши)**.** Пусть F — голоморфная функция в открытом множестве $G \subset \mathbb{C}$. Тогда дифференциальная форма $F(z)\,\mathrm{d}z$ замкнута, то есть локально $\exists S : S'(z) = F(z)$.

Замечание. Теорема совсем проста, если заранее предположить, что $F'(z)$ непрерывна (а так в итоге и должно получиться, так как F — аналитична). В таком случае имеется следующее более простое доказательство.

Доказательство. Поскольку $F(z)\,\mathrm{d}z = F(z)\,\mathrm{d}x + iF(z)\,\mathrm{d}y$, утверждение эквивалентно (согласно (теорема 1.2.7)) тому, что $\forall z \in \mathbb{C} : \frac{\partial F}{\partial y}(z) = i\frac{\partial F}{\partial x}(z)$. Пусть $F(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ для вещественных x, y и вещественнозначных u, v. И правда,

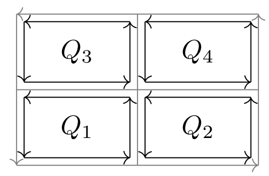
$$\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} \stackrel{?}{=} i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

то есть $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ — это в точности уравнения Коши — Римана. □

Теперь докажем теорему Коши вне предположения непрерывности производной.

Доказательство. Докажем от противного: пусть форма $F(z)\,\mathrm{d}z$ не замкнута, $\exists P_0 \subset G : \alpha \coloneqq \int\limits_{\partial P_0} F(z)\,\mathrm{d}z \neq 0$.

Будем потихонечку делить этот прямоугольник на четыре равные части: пусть $P_0 = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$.



Модуль интеграла по границе по крайней мере одного из Q_i хотя бы $\frac{|\alpha|}{4}$. Назовём этот прямоугольник P_1, и продолжим процесс. Получим систему вложенных замкнутых прямоугольников $P_0 \supset P_1 \supset \ldots$, таких, что $\left|\int\limits_{\partial P_k} F(z)\,\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{|\alpha|}{4^k}$. При этом $l(\partial P_k) = 2^{-k} l(\partial P_0)$, и $\operatorname{diam}(P_k) = 2^{-k}\operatorname{diam}(P_0)$.

Имеется ровно одна точка z_0 в пересечении $\bigcap\limits_{k \geqslant 0} P_k$. Воспользуемся условием того, что F голоморфна в точке z_0: $F(z) = F(z_0) + F'(z_0)(z - z_0) + \underbrace{\psi(z)}_{o(|z-z_0|)}$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |\psi(z)| \leqslant \varepsilon |z - z_0|$. Пусть k настолько велико, что $\operatorname{diam} P_k < \delta$.

$$\int\limits_{\partial P_k} F(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\partial P_k} [F(z_0) + F'(z_0)(z - z_0)]\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\partial P_k} \psi(z)\,\mathrm{d}z$$

Первый интеграл обнуляется, так как это линейная функция по z, у неё есть первообразная. Оценивая второй интеграл, получаем

$$\frac{|\alpha|}{4^k} \leqslant \left|\int\limits_{\partial P_k} \psi(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \varepsilon \operatorname{diam} P_k \cdot l(\partial P_0) = \varepsilon \cdot 2^{-k} \operatorname{diam} P_0 \cdot 2^{-k} l(\partial P_0) = 4^{-k}\varepsilon \cdot \operatorname{diam} P_0 \cdot l(\partial P_0)$$

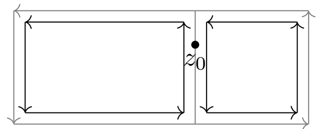
Выбирая довольно маленький ε, получаем, что $|\alpha|$ меньше любого положительного числа. □

Теорема 1.2.9 (Об устранимой особенности замкнутой дифференциальной формы)**.** Пускай $\Phi = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ — непрерывная дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{C}$.

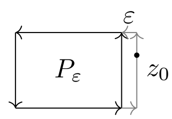
Если $z_0 \in G$, и Φ замкнута в $G \setminus \{z_0\}$, то Φ замкнута в G.

Доказательство. Докажем, что $\forall P \subset G: \int\limits_{\partial P} \Phi = 0$. Рассмотрим случаи.

- Если $z_0 \notin P$, то интеграл нуль по условию.
- Если $z_0 \in \operatorname{Int} P$, то данный случай сводится к следующему: разобьём прямоугольник на два так, чтобы z_0 оказалось на границе:



- Если $z_0 \in \partial P$, то отступим на ε, интеграл по границе P_ε будет нулём: $\int\limits_{\partial P_\varepsilon} \Phi = 0$.



  Заметим, что $\int\limits_{\partial P_\varepsilon} \Phi \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \int\limits_{\partial P} \Phi$, так как коэффициенты дифференциальной формы равномерно непрерывны в некоторой окрестности P (интегралы по сторонам P_ε стремятся к интегралам по соответствующим сторонам P). Значит, $\int\limits_{\partial P} \Phi = 0$.

$\square$

Теорема 1.2.10 (Малая интегральная формула Коши)**.** Пусть f — голоморфна в области G, $B = B(z_0, r)$ — круг, $\overline{B} \subset G$. Тогда $\forall z \in B$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta$$

Доказательство. Докажем для некоего фиксированного $z \in B$.

Рассмотрим функцию $g(\zeta) = \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$. g голоморфна в области $G \setminus \{z\}$. Тем самым, $g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ — замкнутая форма в $G \setminus \{z\}$, а по теореме об устранимой особенности $g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ замкнута в G (доопределим по непрерывности $g(z) \coloneqq f'(z)$).

Но так как круг — удобная область, то у g имеется первообразная в некотором круге $B(z_0, r(1+\varepsilon))$ (где $\varepsilon > 0$ настолько мал, что $B(z_0, r(1+\varepsilon)) \subset G$). Тем самым, $\int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \,\mathrm{d}\zeta = 0$, откуда

$$\int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta = \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(z)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta = f(z) \cdot \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{1}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta = 2\pi i \cdot f(z)$$

$\square$

Следствие 1.2.3 (Теорема Коши)**.** *Если f голоморфна в области $G \subset \mathbb{C}$, то $\forall z_0 \in G$ функция f (в некоторой окрестности) раскладывается в некоторый степенной ряд $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, причём радиус сходимости хотя бы $\operatorname{dist}(z_0, \partial G)$.*

Доказательство. Пусть $r \in (0, \operatorname{dist}(z_0, \partial G))$. Рассмотрим $B = B_r(z_0)$. Так как $\overline{B} \subset G$, то для точки $z \in B$ получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \,\mathrm{d}\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} f(\zeta) \,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} (z - z_0)^j \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} \,\mathrm{d}\zeta$$

Абсолютная равномерная сходимость в круге радиус r при $r < \operatorname{dist}(z_0, \partial G)$ имеется по тем же причинам, что и при доказательстве ($\circ$).

Таким образом, мы получили степенной ряд, и так как коэффициенты степенного ряда, раз определены, не зависят от радиуса круга ($c_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}$), то радиус сходимости данного ряда хотя бы $\operatorname{dist}(z_0, \partial G)$. $\square$

Лекция IV

12 марта 2024 г.

Замечание. Интегральную форму Коши можно спокойно дифференцировать: так,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta \right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \,\mathrm{d}\zeta$$

В общем случае

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k} f(z) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta \right) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \,\mathrm{d}\zeta$$

Определение 1.2.7 (Целая (entire) функция)**.** Голоморфная функция, заданная в $\mathbb{C}$.

Выберем $z_0 = 0$. Согласно (следствие 1.2.3), получаем $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ (ряд Маклорена), где $c_j = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}} \,\mathrm{d}\zeta$, причём имеется абсолютная сходимость везде в $\mathbb{C}$.

Теорема 1.2.11. Если f целая, и $|f(z)| = \mathcal{O}(z^N)$ при $|z| \underset{z \to \infty}{\longrightarrow} \infty$, то f — многочлен степени не более N.

Доказательство. Из определения $\mathcal{O} : \exists C, a \in \mathbb{R} : |f(z)| \leqslant C|z|^N$ при $|z| > a$.

Выберем $r > a$, и оценим: $|c_j| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f\left(re^{i\theta}\right)}{(re^{i\theta})^{j+1}} i r e^{i\theta} \,\mathrm{d}\theta \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{Cr^N}{r^j} \,\mathrm{d}\theta = \frac{Cr^N}{r^j}$. Получается, при $j > N : |c_j|$ меньше любого наперёд заданного положительного числа. $\square$

Следствие 1.2.4 (Теорема Лиувилля)**.** *Ограниченная целая функция постоянна.*

Следствие 1.2.5 (Основная теорема алгебры)**.** $\forall p \in \mathbb{C}[z] : \deg p > 0 \Rightarrow \exists z_0 \in \mathbb{C} : p(z_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $p(z) = \sum\limits_{j=0}^{N} c_j z^j$, где $N > 0$ и $c_N \neq 0$.

Пойдём от противного: пусть $\forall z \in \mathbb{C} : p(z) \neq 0$.

Рассмотрим $f(z) \coloneqq \frac{1}{p(z)}$.

- С одной стороны, это целая функция: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z) = -\frac{p'(z)}{p(z)^2}$.
- С другой стороны, f ограничена: оценим $|p(z)| \geqslant |z^N| \left(|c_N| - \sum\limits_{j=0}^{N-1} \frac{|c_j|}{|z|^{N-j}} \right)$, откуда для достаточно больших $|z| : |p(z)| \geqslant \frac{|c_N|}{2} |z|^N$.

  Тем самым, $p(z) \underset{|z| \to \infty}{\longrightarrow} \infty$, то есть $f(z) \underset{|z| \to \infty}{\longrightarrow} 0$. А при малых $|z| : f$ ограничена, как непрерывная функция на компакте.

- Тем самым, по теореме Лиувилля, $f \equiv \mathrm{const}$, то есть $p \equiv \mathrm{const}$. Противоречие, мы предполагали $\deg p > 0$. $\square$

Теорема 1.2.12 (Теорема о среднем)**.** Пусть $z_0 \in G, f : G \to \mathbb{C}$ голоморфна в G. Выберем $r < \operatorname{dist}(z_0, \partial G)$. Тогда

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,\mathrm{d}t}$$

Доказательство. Посчитаем $f(z_0)$ по интегральной формуле:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it}) ire^{it}}{re^{it}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,\mathrm{d}t \qquad \square$$

Это действительно среднее в обычном смысле: f проинтегрирована по окружности по мере Лебега, и интеграл поделили на меру окружности.

Теорема 1.2.13 (Принцип максимума модуля)**.** Пусть $f : G \to \mathbb{C}$ — непостоянная голоморфная функция. Тогда $|f| : z \mapsto |f(z)|$ не может достигать наибольшего значения при $z \in G$.

Доказательство. Пойдём от противного: пусть $\exists z_0 \in G : \forall z \in G : |f(z)| \leqslant |f(z_0)|$. Выберем $r > 0 : B(z_0, r) \subset G$, и докажем, что $|f|$ постоянна в $B(z_0, r)$. Пусть $\rho < r$, по теореме о среднем $|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it})\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \underbrace{|f(z_0 + \rho e^{it})|}_{\leqslant |f(z_0)|}\mathrm{d}t$, причём равенство достигается только если $\forall t \in [0, 2\pi] : |f(z_0 + \rho e^{it})| = |f(z_0)|$ (если $\exists t_0 \in (0, 2\pi) : |f(z_0 + \rho e^{it_0}| < |f(z_0)|$), то по непрерывности $\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) : |f(z_0 + \rho e^{it}| < |f(z_0)| - \varepsilon$, то есть на промежутке $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ интеграл строго меньше требуемого значения).

> **Лемма 1.2.2.** *Пусть $f : G \to \mathbb{C}$ голоморфна, и $\exists z_0 \in G : f'(z_0) \neq 0$. Тогда $\exists U \ni z_0 : f(z_0) \in \operatorname{Int} f(U)$.*
>
> *Доказательство леммы.*
>
> Теорема об обратной функции. $\square$

Тем самым, $\forall z \in B(z_0, r) : f'(z) = 0$ (так как $|f(z)|$ — максимум).

Далее применяем теорему единственности, доказанную во II семестре: f и константа, равная $|f(z_0)|$ совпадают на множестве с предельной точкой, значит, они совпадают везде в G. $\square$

Следствие 1.2.6. *Пусть G — ограниченная область, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ голоморфна в G. Тогда $\forall z \in G$: $|f(z)| \leqslant \max\limits_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|$.*

Доказательство. f достигает своё наибольшее значение на компакте $\overline{G}$, но согласно принципу максимума, это значение достигается не внутри G. $\square$

1.2.4 Гармонические функции

Запишем теорему о среднем для $f : G \to \mathbb{C}$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \, \mathrm{d}t$$

Пусть $f = u + iv$, где u, v — вещественные функции в G. Теорема о среднем говорит, что

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) \, \mathrm{d}t \qquad v(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{it}) \, \mathrm{d}t$$

Так как f аналитична, то в вещественном смысле $u, v \in C^\infty(G)$.

Запишем уравнения Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Дифференцируя второй раз, получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

Это так называемое *уравнение Лапласа*: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Обобщим. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — область, пусть $f : G \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(G)$.

Определение 1.2.8 (f — гармоническая функция в G)**.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$.

Оператор $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ называется *оператором Лапласа*, и понятно, что гармонические функции — в точности такие u, что $\Delta u = 0$.

Утверждение 1.2.2. *Если гармоническая функция $u : G \to \mathbb{R}, u \in C^2(G)$, где область $G \subset \mathbb{R}^2$, то локально существует голоморфная $f : u = \Re f$. Иными словами, $\forall z_0 \in G : \exists U \ni z_0, \exists$ аналитическая $f : U \to \mathbb{C} : u = \Re f$.*

Доказательство. Положим $\phi \coloneqq \frac{\partial u}{\partial x}, \psi \coloneqq -\frac{\partial u}{\partial y}$. Тогда $\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$, то есть $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ везде в G.

Раз накрест взятые частные производные совпадают, то дифференциальная форма $\phi \, \mathrm{d}y + \psi \, \mathrm{d}x$ замкнута, значит, локально имеется первообразная.

Зафиксируем точку $z_0 \in G$, имеется некоторый шарик $B \ni z_0$, в котором есть первообразная v:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \phi = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Это уравнения Коши — Римана, значит, $f \coloneqq u + iv$ голоморфна в B. □

Теорема 1.2.14 (Морера)**.** Пусть $f : (G \subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ непрерывна. Следующие условия эквивалентны.

1. f голоморфна в G.
2. f аналитична в G.
3. Дифференциальная форма $f(z) \, \mathrm{d}z$ замкнута.

Доказательство. (1) $\iff$ (2) уже доказано: (теорема 1.0.1) и (следствие 1.2.3).

(1) $\Rightarrow$ (3) доказано тоже: (теорема 1.2.5).

Докажем (3) $\Rightarrow$ (2). Пусть F — первообразная формы $f(z)\,\mathrm{d}z$ в круге $D \coloneqq B(z_0, r) \subset G$. F голоморфна в $B(z_0, r)$, и $\forall z \in D : F'(z) = f(z)$.

Значит, F раскладывается в степенной ряд $F(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j$. Отсюда $f(z) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} j a_j (z - z_0)^{j-1}$.
□

1.3 Первообразная от замкнутой формы вдоль непрерывного пути

1.3.1 Наводящие предположения

Пусть $f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ — непрерывная дифференциальная форма в G, предположим, что она точная: имеется первообразная F.

Пусть $\gamma : [a, b] \to G$ — кусочно-гладкий путь. Ранее было получено, что $\int\limits_\gamma f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

Давайте обобщим интеграл вдоль пути: пусть $\gamma : [a, b] \to G$ — произвольный непрерывный путь. Положим по определению $\int\limits_\gamma f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y \overset{def}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

Теперь пусть $f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ всего лишь замкнута. Выберем $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ так, что $\forall j : \gamma([t_j, t_{j+1}])$ лежит в области G_j, в которой у формы $f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ есть первообразная F_j. Попробуем определить

$$\int\limits_{\gamma\big|_{[t_j, t_{j+1}]}} f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y \overset{def}{=} F_j(\gamma(t_{j+1})) - F_j(\gamma(t_j))$$

и

$$\int\limits_\gamma f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y \overset{def}{=} \sum_{j=0}^{k-1} F_j(\gamma(t_{j+1})) - F_j(\gamma(t_j))$$

Проблема в том, чтобы доказать, что определение корректно — не зависит от выбора разбиения $a = t_0 < \dots < t_k = b$.

1.3.2 Требуемые свойства

Пусть $\Phi = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ — замкнутая форма в области $G \subset \mathbb{C}$, и $\gamma : [a, b] \to G$ — путь.

Определение 1.3.1 (Первообразная формы Φ вдоль пути γ)**.** Такая функция $v : [a, b] \to G$:

- $\forall t \in [a, b] : \exists U \ni \gamma(t), \varepsilon > 0$ и найдётся первообразная F для Φ на U, такая, что

$$\forall \tau \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) : v(\tau) = F(\gamma(\tau))$$

Факт 1.3.1. *Функция v, если существует, непрерывна на* $[a, b]$.

Доказательство. Непрерывность в какой-то конкретной точке следует из непрерывности композиции $F \circ \gamma$. □

Теорема 1.3.1. Первообразная замкнутой дифференциальной формы вдоль пути γ всегда существует, и любые две отличаются на константу.

Доказательство. Сначала докажем существование. Для всех $t \in [a, b]$ выберем окрестность $U_t \coloneqq B(\gamma(t), r_t)$, где r_t настолько мал, что в U_t есть первообразная.

Семейство $\{U_t\}_{t\in[a,b]}$ образуют открытое покрытие $\gamma([a,b])$. По лемме Лебега $\exists\varepsilon > 0 : \forall t \in [a,b]$: $B(\gamma(t),\varepsilon)$ содержится в каком-то $U_{t'}$. Применяя теорему Кантора о равномерной непрерывности, получаем существование разбиения $a = t_0 < \cdots < t_k = b$, такое, что $\gamma([t_j,t_{j+1}])$ лежит в одном из U_t.

Произвольно выберем $v(a)$. Построим $v\big|_{[t_j,t_{j+1}]}$ индукцией по j.

<u>База:</u> Пусть $\gamma([t_0,t_1]) \subset U_0$, и имеется первообразная F_0 на U_0. Определим $v(\tau) = F_0(\gamma(\tau))$ при $\tau \in [t_0,t_1]$.

<u>Переход:</u> Пусть $\gamma([t_j,t_{j+1}]) \subset U_j, F_j$ — первообразная Φ на U_j. Найдётся такое $\delta > 0 : \gamma([t_j - \delta,t_{j+1}]) \subset U_j$, значит, $U_j \cap U_{j-1} \neq \varnothing$. Это пересечение связно, на нём имеются две первообразные, F_{j-1} и F_j.

Добавим константу к F_j так, чтобы $F_j \equiv F_{j-1}$ при $t \in [t_j-\delta,t_j]$, и определим $v(\tau) = F_j(\gamma(\tau))$ при $\tau \in [t_j,t_{j+1}]$. Окрестность U_j захватывает отрезок $[t_j-\delta,t_{j+1}]$, значит, для точек во внутренности выполнено условие из определения первообразной.

Докажем единственность: рассмотрим точку $t \in [a,b]$. Найдутся два круга $U,V \ni \gamma(t)$, и первообразные F,H формы Φ в этих окрестностях, такие, что $u(\tau) = F(\gamma(\tau))$ и $v(\tau) = H(\gamma(\tau))$ при τ, достаточно близких к t.

Тем самым, $u - v$ локально постоянна, но локально постоянная функция на связном множестве — константа (прообраз любого элемента из образа открыто-замкнут). $\square$

Лекция V

15 марта 2024 г.

Теперь определим интеграл $\int\limits_\gamma \Phi = v(b) - v(a)$, где v — первообразная для Φ вдоль пути γ, получившаяся из (теорема 1.3.1). Теперь интеграл определён для любой замкнутой формы вдоль пути (однако для кусочно-гладкого пути интеграл (определение 1.1.3) был определён для необязательно замкнутой формы).

Свойства (Свойства первообразной вдоль пути).

- Аддитивность по дифференциальной форме: $\int\limits_\gamma(\Phi+\Psi) = \int\limits_\gamma \Phi + \int\limits_\gamma \Psi$.
- Аддитивность вдоль пути: $\int\limits_{\gamma_1\oplus\gamma_2} \Phi = \int\limits_{\gamma_1} \Phi + \int\limits_{\gamma_2} \Phi$.
- Если γ — кусочно-гладкий путь, то определение совпадает со старым.

  Доказательство. γ' существует везде, кроме, может быть, конечного множества.

  При помощи леммы Лебега разобьём отрезок точками $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ так, что $\forall j < k : \exists U_j \supset \gamma([t_j,t_{j+1}])$ такая, что на U_j найдётся первообразная H_j:

  $$\forall\tau \in [t_j,t_{j+1}] : F(\tau) = H_j(\gamma(\tau))$$

  И старый, и новый интегралы аддитивны вдоль пути. Несложно видеть, что в обеих определениях $\int\limits_{\gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}} \Phi$ совпадают. $\square$

- Так как путь γ необязательно дифференцируем (а если даже и так, то необязательно спрямляем), то основную оценку интеграла вдоль пути распространить на новое определение проблематично: длины может не существовать.
- Пусть $\phi : [a,b] \to [c,d]$ — гомеоморфизм, $\gamma : [a,b] \to G$ — путь, тогда

  $$\int\limits_\gamma \Phi = \pm \int\limits_{\gamma\circ\phi} \Phi$$

где знак зависит от того, возрастает ϕ, или убывает.

Причина. Если F — первообразная Φ вдоль пути γ, то $F \circ \phi$ — первообразная для Φ вдоль пути $\gamma \circ \phi$. $\square$

1.3.3 О гомотопности путей

Пусть $K = [0,1] \times [a,b]$ — квадрат гомотопии.

Определение 1.3.2 (Гомотопия)**.** Непрерывное отображение $\Gamma : K \to \mathbb{C}$.

Положим $\gamma_s \coloneqq \Gamma(s, \_)$. Как водится, γ_0, γ_1 — два пути $[a,b] \to \mathbb{C}$, и существование Γ по определению влечёт гомотопность этих путей.

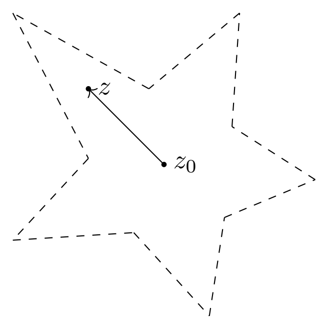
Пути $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to G$ *гомотопны в* G, если найдётся гомотопия $\Gamma : K \to G$.

Будем говорить о гомотопности двух замкнутых путей γ_1 и γ_2 при условии существования гомотопии $\Gamma : K \to G$, соединяющей γ_1 и γ_2 в классе замкнутых путей: $\forall s \in [0,1] : \Gamma(s,a) = \Gamma(s,b)$.

Гомотопность путей — отношение эквивалентности, так же как и гомотопность замкнутых путей.

Определение 1.3.3 (Односвязная область)**.** Область, в которой всякий замкнутый путь гомотопен постоянному. Иными словами, фундаментальная группа тривиальна.

Определение 1.3.4 (Звёздная область $A \subset \mathbb{R}^n$)**.** Такая область, что для некоторого *центра* $z_0 \in A$: $\forall z \in A : \{z_0 + s(z - z_0) | s \in [0,1]\} \subset A$.



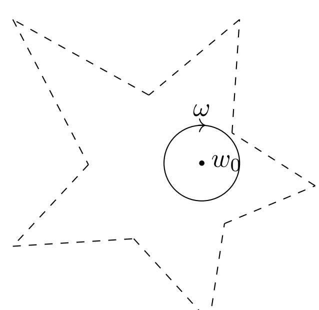
Факт 1.3.2. *Всякая звёздная область A односвязна.*

Доказательство. Прогомотопируем путь $\gamma : [a,b] \to A$ в постоянный при помощи

$$\begin{aligned} \Gamma : [0,1] \times [a,b] &\to K \\ \tau, t &\mapsto z_0\tau + (1-\tau)\gamma(t) \end{aligned}$$

$\square$

Пример (Неодносвязная область). Пусть A — звёздная область, выкинем точку $w_0 \in A$.



Интеграл $\frac{\mathrm{d}z}{z - w_0}$ по маленькой окружности ω, обходящей w_0, равен $2\pi i$, значит, путь не стягиваем (поскольку интеграл не ноль, см. теорема 1.3.3).

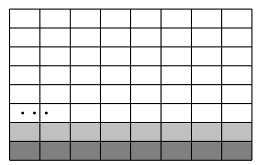
Теорема 1.3.2 (Первообразная вдоль гомотопии)**.** Пусть $K = [0,1] \times [a,b]$ — «квадрат», $\Gamma : K \to G$ — гомотопия, и $\Phi = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ — замкнутая дифференциальная форма в G. Тогда $\exists F : K \to \mathbb{C}$ — *первообразная формы* Φ *вдоль гомотопии* Γ, то есть такая функция, что $\forall (s,t) \in K : \exists U \ni \Gamma(s,t) : U \subset G, \exists \delta > 0 : \exists H : U \to \mathbb{C}$ — первообразная формы Φ, такая, что

$$\begin{cases} |\sigma - s| < \delta \\ |\tau - t| < \delta \end{cases} \Rightarrow F(\sigma, \tau) = H(\Gamma(\sigma, \tau))$$

Доказательство. Покроем множество $\Gamma(K)$ кругами $U \subset G$, такими что в каждом круге U у Φ есть первообразная H_U.

По лемме Лебега и теореме Кантора $\exists \rho > 0 : \forall e \subset K : \operatorname{diam}(e) < \rho \Rightarrow e$ лежит в одном из кругов данного покрытия.

Разобьём квадрат гомотопии K на прямоугольники диаметра меньше ρ:



Аналогично доказательству (теорема 1.2.2), в каждом горизонтальном прямоугольнике найдётся первообразная F_j, а дальше их надо сшить. Сшить несложно: вдоль горизонтального отрезка — пересечения прямоугольничков — $F_j\big|_{\ldots} = F_{j+1}\big|_{\ldots}$. Так как это — первообразные вдоль одного и того же пути, то они отличаются на константу. Значит, можно изменить все F_j на константы так, чтобы их склейка была непрерывной функцией.

Дальше надо проверить, что действительно получилась первообразная на квадрате. Выберем точку $(s,t) \in K$. Если точка попала внутрь какого-то прямоугольничка, то можно выбрать окрестность, лежащую внутри прямоугольничка, иначе чуть сложнее, но несильно. $\square$

Теорема 1.3.3. Интегралы от замкнутой формы Φ по гомотопным замкнутым путям равны.

Доказательство. Определим $w(t) \coloneqq \int\limits_{\gamma_t} \Phi$ для всех $t \in [0,1]$.

Пусть F — первообразная для формы Φ вдоль гомотопии Γ. Понятно, что $w(t) = F(t,b) - F(t,a)$.

Докажем, что w локально постоянна на $[0,1]$, следствием будет, что w постоянна, что и требуется доказать.

$\forall (\alpha, \beta) \in [0,1] \times [a,b]$: $\exists \delta > 0$, круг U и первообразная H_U, такие, что

$$\begin{cases} |\alpha - \alpha'| < \delta \\ |\beta - \beta'| < \delta \end{cases} \Rightarrow F(\alpha', \beta') = H_U(\Gamma(\alpha', \beta'))$$

Пусть U_1, U_2 — такие шары для (t,b) и (t,a) соответственно. Тогда для τ, достаточно близких к t, выполнено $w(t) = H_{U_1}(\Gamma(t,b)) - H_{U_2}(\Gamma(t,a))$. H_1, H_2 — две первообразные в одной окрестности, они отличаются на константу, а $\Gamma(t,a) \equiv \Gamma(t,b)$, поэтому w локально постоянна. $\square$

Замечание. Если очень хочется, то можно соединить пути $\gamma_0 : [a_0, b_0] \to \mathbb{C}$ и $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ гомотопией $\Gamma : K \to \mathbb{C}$, где $K \coloneqq \{(t,s) | t \in [0,1], s \in [a_t, b_t]\}$ (a_t, b_t — какие-то непрерывные функции от t, такие, что $a_t < b_t$).

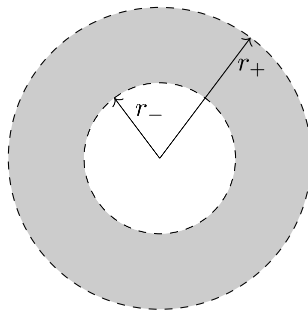
1.4 Ряды Лорана

Ряд Лорана $f(z)$ — ряд вида $f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n$.

Говорят, что ряд Лорана сходится в точке z, если оба ряда $f_+(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(z-z_0)^n$ и $f_-(z) = \sum\limits_{n<0} c_n(z-z_0)^n$ сходятся.

Первый ряд степенной, имеется некий радиус сходимости r_+, такой, что $|z-z_0| < r_+ \Rightarrow f_+$ сходится. При замене переменной $w := \frac{1}{z-z_0}$, $f_-(z_0 + {}^1\!/_w)$ становится степенным рядом от w, сходящимся при $w < \frac{1}{r_-}$.

Таким образом, ряд сходится абсолютно внутри «кольца» $\{z \in \mathbb{C} | r_- < |z-z_0| < r_+\}$:



Теорема 1.4.1. Пусть $0 \leqslant r_- < r_+ \leqslant \infty$, функция f голоморфна в «кольце» $K := \{z \in \mathbb{C} | r_- < |z| < r_+\}$.

Тогда f представима в K сходящимся рядом Лорана.

Доказательство. Пусть $z \in K$. Определим $\phi_z : K \to \mathbb{C}, \phi_z(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \neq z \\ f'(z), & \zeta = z \end{cases}$.

Согласно (теорема 1.2.9), форма $\phi_z(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ замкнута в K.

Выберем $r, R \in \mathbb{R}$ так, что $r_- < r < |z| < R < r_+$. Для $\rho \in \mathbb{R}$ определим $\gamma_\rho : [0, 2\pi] \to K, \gamma_\rho(t) := \rho e^{it}$. Пути γ_R и γ_r гомотопны, значит, $\int\limits_{\gamma_r} \phi_z(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int\limits_{\gamma_R} \phi_z(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$. А именно,

$$\int\limits_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

Преобразовывая, получаем

$$\int\limits_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = f(z)\underbrace{\int\limits_{\gamma_R} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta}_{2\pi i} - f(z)\underbrace{\int\limits_{\gamma_r} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta}_{0}$$

Тем самым, получили *малую интегральную форму Коши для кольца*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\right)$$

Осталось преобразовать дроби в ряды:

$$\int\limits_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int\limits_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)}\,\mathrm{d}\zeta = \int\limits_{\gamma_R} \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}}\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}}\,\mathrm{d}\zeta \cdot (z-z_0)^j$$

$$\int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)}\,\mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{z - z_0}\int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z-z_0}}\,\mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{z-z_0}\sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\gamma_r} f(\zeta)(\zeta - z_0)^k\,\mathrm{d}\zeta \cdot \frac{1}{(z-z_0)^k}$$

Сходимость степенная, имеется признак Вейерштрасса, можно поменять местами сумму и интеграл, поэтому все преобразования законны.

При замене $j = -k - 1$, второе выражение преобразуется в форму

$$-\sum_{j=-1}^{-\infty} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} \,\mathrm{d}\zeta \cdot (z - z_0)^j$$

Теперь можно заметить, что интегралы вдоль γ_r и γ_R равны, так как особенностей у интегралов — слагаемых в ряде — в кольце нет. Окончательно получаем

$$\boxed{f(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j (z - z_0)^j,\ \text{где } c_j = \int\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} \,\mathrm{d}\zeta \text{ для любого } \rho \in (r_-, r_+)}$$

□

Лекция VI

22 марта 2024 г.

Ряд Лорана $g(z) = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} c_j (z - z_0)^j$ принято раскладывать на две части — *регулярную* $\sum\limits_{j\geqslant 0} c_j (z - z_0)^j$ и *главную* $\sum\limits_{j<0} c_j (z - z_0)^j$.

Если ряд Лорана изучать в маленькой окрестности z_0, то главная часть асимптотически больше.

1.5 Изолированные особенности голоморфных функций

Пусть область $G \subset \mathbb{C}, z_0 \in G$, f задана и аналитична в $G \setminus \{z_0\}$. Тогда говорят, что f *имеет изолированную особенность в* z_0.

Возможны случаи:

1. f ограничена вблизи z_0.

   Точка z_0 называется *устранимой особенностью*, так как в силу (теорема 1.5.1) $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

2. $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.

   Точка z_0 называется *полюсом*.

3. f не имеет предела в z_0.

   Точка z_0 называется *существенно особой точкой*.

Теорема 1.5.1. В первом случае — f ограничена вблизи z_0 — f единственным образом продолжается до аналитической функции в области G.

Доказательство. Выберем $R > 0$ такой, что $\overline{B(z_0, R)} \subset G$. f разложится в некоторый ряд Лорана при $0 < |z - z_0| < R$.

Запишем $c_j = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it})(\rho e^{it})^{-j-1} \cdot \rho i e^{it} \,\mathrm{d}t$ и грубо оценим коэффициенты главной части ($j < 0$). Пусть $|f| \leqslant C$ внутри круга $B(z_0, R)$ для некоторой константы C.

$$|c_j| \leqslant \frac{C}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \rho^{-j} \,\mathrm{d}t = C\rho^{-j}$$

Устремляя $\rho \to 0$, получаем $c_j = 0$. Тем самым, f раскладывается в ряд Тейлора в окрестности z_0. □

Запишем несколько другую классификацию особенностей точки, опирающуюся на ряд Лорана $f(z) = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} c_j(z-z_0)^j$.

I При всяком $j < 0$: $c_j = 0$.

II Множество $\mathcal{A} \coloneqq \{j < 0 | c_j \neq 0\}$ конечно.

III Множество $\mathcal{A} \coloneqq \{j < 0 | c_j \neq 0\}$ бесконечно.

Понятно, что I эквивалентно 1.

Теорема 1.5.2. На самом деле, II $\iff$ 2, III $\iff$ 3.

Доказательство.

II $\Rightarrow$ 2 Пусть $k = -\min \mathcal{A}$.

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} \cdots + c_0 + \sum_{j>0} c_j(z-z_0)^j =$$

$$= \frac{1}{(z-z_0)^k}\left(c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0) + \cdots\right) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$$

При этом $g(z_0) \neq 0$ и $g(z)$ аналитична. Тем самым, $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.

2 $\Rightarrow$ II Положим $h(z) \coloneqq \frac{1}{f(z)}$ в некоторой окрестности z_0.

h аналитична при $z \neq z_0$, и $\lim\limits_{z\to z_0} h(z) = 0$, значит, h имеет устранимую особенность в z_0. Пусть k — наименьший номер, такой, что $b_k \neq 0$, где b_k — коэффициент из разложения h в ряд Тейлора:

$$h(z) = b_k(z-z_0)^k + b_{k+1}(z-z_0)^{k+1} \cdots + \cdots = (z-z_0)^k(b_k + b_{k+1}(z-z_0) + \cdots) = (z-z_0)^k \cdot u(z)$$

u аналитична вблизи z_0, и $u(z_0) = b_k \neq 0$.

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k}\frac{1}{u(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^k}\left(c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots\right)$$

Почленно деля, действительно получаем, что $f(z)$ имеет конечное число ненулевых членов в разложении в ряд Лорана. $\square$

Пусть z_0 — полюс f, $k \coloneqq -\min\{j < 0 | c_j \neq 0\}$. Число k называется *порядком* полюса z_0.

Если же g аналитична в $z_0, g(z_0) = 0, g \not\equiv 0$, то $g(z) = \sum\limits_{j\geqslant 0} a_j(z-z_0)^j$, положим $l \coloneqq \min\{j | a_j \neq 0\}$.

Число l — *порядок* нуля z_0.

Факт 1.5.1. *f имеет полюс порядка k в z_0 $\iff$ $\frac{1}{f}$ имеет ноль порядка k в z_0.*

Интересный факт (Теорема Пикара). Пусть z_0 — существенно особая точка аналитической функции f. Тогда $\forall \varepsilon > 0 : f(\{z | 0 < |z-z_0| < \varepsilon\})$ есть $\mathbb{C}$, кроме, может быть, двух точек.

Мы докажем более простой вариант теоремы Пикара.

Теорема 1.5.3 (Сохоцкий)**.** Пусть z_0 — существенно особая точка аналитической функции f. Тогда $\forall\varepsilon > 0 : \mathcal{B} \coloneqq f(\{z | 0 < |z-z_0| < \varepsilon\})$ плотно в $\mathbb{C}$.

Доказательство. От противного: пусть $\exists w_0 \notin \overline{\mathcal{B}}$, то есть $\exists\delta > 0 : B(w_0, \delta) \cap \mathcal{B} = \varnothing$.

Определим

$$\begin{aligned} h : B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{f(z) - w_0} \end{aligned}$$

Хотя h и имеет особенность при $z = z_0$, но h ограничена (модуль знаменателя больше δ), то есть особенность устранима. $f(z) = \frac{1}{h(z)} + w_0$, и так как h аналитична в z_0, то особенность в z_0 — то ли тоже устранимая особенность, то ли полюс, но уж никак z_0 — не существенно особая точка. $\square$

1.5.1 Интеграл $\frac{\sin x}{x}$

Пример. Возьмём $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. У подынтегральной функции в нуле особенность устранимая, а с бесконечностью есть некоторые проблемы. Впрочем, избавимся и от нуля в области интегрирования:

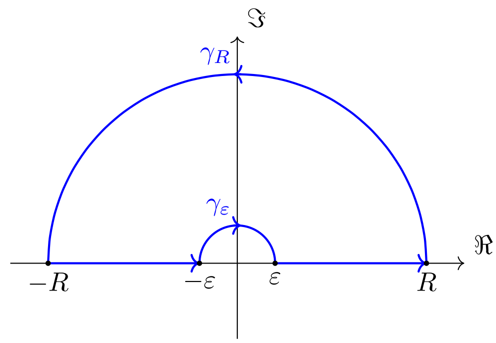
$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0, R\to\infty} \int\limits_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \circledequal$$

Запишем формулу Эйлера $e^{ix} = \cos x + i\sin x$. Интегрируя по всей оси $\frac{\cos x}{x}$, мы получим нуль из-за нечётности, поэтому можно продолжить равенство так:

$$\circledequal \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon\to 0, R\to\infty} \int\limits_{\varepsilon<|x|<R} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x$$

Теперь перейдём к функции, аналитической в комплексной плоскости без нуля: $\phi(z) := \frac{e^{iz}}{z}$.

Введём замкнутый путь Γ, полученный склейкой двух отрезков и двух полуокружностей:



$$\int\limits_{\gamma_\varepsilon} \phi(z)\,\mathrm{d}z = -\int\limits_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{i(\pi-t)}}}{\varepsilon e^{i(\pi-t)}} \varepsilon i e^{i(\pi-t)}\,\mathrm{d}t = -\int\limits_0^\pi i e^{i\varepsilon e^{i(\pi-t)}}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{подынтегральное выражение равномерно сходится к } i.} -i\pi$$

$$\int\limits_{\gamma_R} \phi(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} Rie^{it}\,\mathrm{d}t = i\int\limits_0^\pi e^{iRe^{it}}\,\mathrm{d}t$$

Оценим $e^{iRe^{it}} = e^{iR\cos t - R\sin t} = e^{iR\cos t} \cdot e^{-R\sin t}$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости интеграл по γ_R будет стремиться к нулю при больших R.

Так как путь Γ стягиваем, то из равенства $\int\limits_\Gamma \phi(z)\,\mathrm{d}z = 0$ сразу следует

$$\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \phi(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_\varepsilon^R \phi(x)\,\mathrm{d}x \underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}{\longrightarrow} i\pi$$

Искомый интеграл в $2i$ раз меньше:

$$\boxed{\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}}$$

Этот интеграл получилось так взять, так как у ϕ была особенность в нуле, и мы её обошли. А иногда особенности находятся внутри пути интегрирования, в таком случае пригождается *формула в вычетах*.

1.6 Вычеты

Пусть f задана и голоморфна в $G \setminus \{z_0\}$, где G — область, $z_0 \in G$ — изолированная особенность.

Вблизи z_0 функция f раскладывается в ряд Лорана $f(z) = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} c_j(z-z_0)^j$.

Определение 1.6.1 (Вычет функции f в точке z_0)**.** Коэффициент c_{-1}, обозначается $\operatorname{Res}_{z_0} f$.

Этот коэффициент так важен, так как у $c_j(z-z_0)^j$ при $j \neq -1$ имеется первообразная в G, и при интегрировании по окружности, обходящей z_0, пропадут все коэффициенты ряда Лорана, кроме вычета.

1.6.1 Как вычислять вычеты

У нас есть формула для вычисления коэффициентов ряда Лорана, но она получается интегрированием, а мы как раз и хотим использовать вычеты, чтобы уметь удобно интегрировать. Поэтому иногда пригождаются следующие частные случаи:

- Пусть z_0 — полюс функции f степени k:

  $$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + f_+(z)$$

  где f_+ — аналитическая вблизи z_0.

  Домножая f на $(z-z_0)^k$, получаем аналитическую

  $$(z-z_0)^k f = c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0) + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} + (z-z_0)^k \cdot f_+(z)$$

  Теперь можно найти $\operatorname{Res}_{z_0} f$ по формуле: $\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{k-1} \left[(z-z_0)^k f(z)\right] \Big|_{z=z_0}$.

- Пусть $k = 1$ — у f имеется полюс первого порядка. Тогда дифференцировать не надо, и формула вырождается в

  $$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$$

- Возьмём ещё более частный случай: $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, где g, h аналитичны в окрестности z_0, $g(z_0) \neq 0$, а h имеет простой нуль в z_0 (нуль кратности 1).

  $$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)(z-z_0)}{h(z)} = \lim_{z\to z_0} g(z) \frac{z-z_0}{h(z)-h(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

1.6.2 Индекс замкнутого пути относительно точки

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область, Φ — замкнутая дифференциальная форма в G. Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — какие-то замкнутые пути с носителем в G. Обозначим $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$.

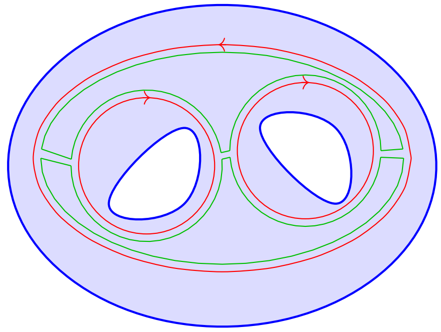
Определим интеграл от формы Φ по данной совокупности путей $\int\limits_\Gamma \Phi \overset{def}{=} \sum\limits_{j=1}^n \int\limits_{\gamma_j} \Phi$.

Назовём систему путей Γ *правильной*, если для всякой аналитической функции f в G: $\int\limits_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Примеры (Правильные системы путей).

- $|\Gamma| = 1$. Если γ_1 гомотопен тождественному, то Γ, конечно, правильная.
- В частности, любой замкнутый путь в односвязной области формирует правильную систему из одного пути.
- Пусть в кольце имеются два пути γ_1, γ_2, обходящие концентрические окружности в противоположных направлениях. Тогда $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ — правильная система, так как $\gamma_1 \sim \gamma_2^-$.

- Рассмотрим область с двумя дырками, ограниченную синими линиями. В ней система из красных путей правильная, так как можно разложить их в сумму двух зелёных стягиваемых путей:



Пусть γ — петля в $\mathbb{C}$, $z_0 \notin \operatorname{Im}(\gamma)$.

Определение 1.6.2 (Индекс пути γ относительно z_0)**.** Значение интеграла $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}$. Обозначается $\operatorname{Ind}_{z_0}\gamma$.

Индекс означает число раз, которые мы обошли вокруг данной точки с учётом ориентации, но пока непонятно даже, почему индекс — целое число.

Это определение очевидным образом распространяется на систему путей: $\forall \gamma_j \in \Gamma : z_0 \notin \operatorname{Im}(\gamma_j) \Rightarrow$ определён $\operatorname{Ind}_{z_0}\Gamma \overset{def}{=} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j} \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}$

Свойства (Свойства индекса, докажем потом (подраздел 1.6.6)).

- $\operatorname{Ind}_{z_0}\gamma \in \mathbb{Z}$.
- Функция $[z_0 \mapsto \operatorname{Ind}_{z_0}\gamma]$ постоянна на каждой компоненте связности $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Im}(\gamma)$.
- На неограниченной компоненте связности $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Im}(\gamma)$ индекс равен нулю.

Теорема 1.6.1 (Формула вычетов)**.** Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область, Γ — правильная система путей в G, $f : G \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, и $z_1, \ldots, z_k$ — особенности. Если все точки z_j не лежат на носителе системы путей Γ, то

$$\boxed{\int\limits_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{z_j} f \cdot \operatorname{Ind}_{z_j}\Gamma\right)}$$

Доказательство. Положим $H \coloneqq G \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$. Для каждой точки z_j имеется r_+, такой, что $B(z_j, r_+) \setminus \{z_j\} \subset H$. Тем самым, в окрестности точки z_j функция f разложима в ряд Лорана, и его главная часть сходится везде кроме z_j.

Пусть $g_1, \ldots, g_k$ — главные части рядов Лорана для f в точках $z_1, \ldots, z_k$ соответственно. Функция $h(z) \coloneqq f(z) - g_1(z) - \cdots - g_k(z)$ — аналитическая функция в области G, так как она имеет конечное число особых точек, в которых ограничена.

Так как Γ — правильная, то $\int\limits_\Gamma h(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Тем самым, мы получили

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k}\int\limits_\Gamma g_j(z)\,\mathrm{d}z$$

Посчитаем $\int\limits_{\Gamma} g_j(z)\,\mathrm{d}z$. Распишем

$$g_j(z) = \frac{\mathrm{Res}_{z_j}\, g}{z - z_j} + \underbrace{\frac{a_1}{(z-z_j)^2} + \dots + \frac{a_{s-1}}{(z-z_j)^s} + \cdots}_{h_j(z)}$$

У h_j имеется первообразная, так как ряд Лорана можно интегрировать и дифференцировать почленно — доказательство аналогично оному для степенных рядов.

Значит, $\int\limits_{\Gamma} g(z)\,\mathrm{d}z = (\mathrm{Res}_{z_j}\, f)2\pi i \cdot \mathrm{Ind}_{z_0}\,\Gamma$ (очевидно, $\mathrm{Res}_{z_j}\, g_j = \mathrm{Res}_{z_j}\, f$). □

Лекция VII

29 марта 2024 г.

1.6.3 Обобщение интеграла $\frac{\sin x}{x}$

Обозначим $\mathbb{C}_+ \overset{def}{=} \{x+iy | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_{>0}\}$.

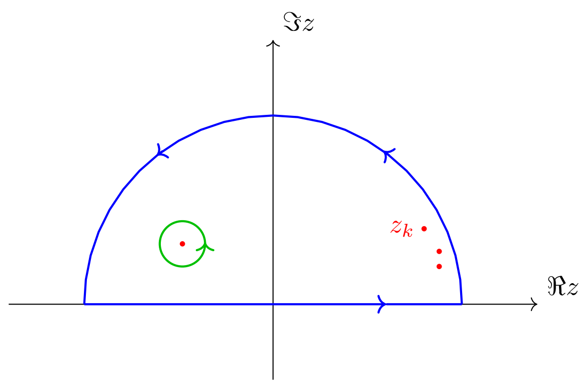
Пусть f аналитична в $\{x+iy | y > -\varepsilon\}$, кроме конечного числа особых точек в $\mathbb{C}_+$, назовём их $z_1, \dots, z_n$. В $\{x+iy | -\varepsilon < y \leqslant 0\}$, получается, у f особенностей нет.

Предложение 1.6.1. *Пусть при $\theta \in [0,\pi], R > 0$: $|f(Re^{i\theta})R|$ ограничена в $\mathbb{C}_+$, причём $\forall \theta \in [0,\pi]$: $\lim\limits_{R\to\infty} f(Re^{i\theta})R = 0$.*

Например, $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, где g, h — многочлены, $\deg g < \deg h$.

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_j}\, f$. Здесь $\int\limits_{-\infty}^{\infty} = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R}$, то есть особенности несобственного интеграла на плюс-минус бесконечностях могут сокращать друг друга.

Доказательство. Проинтегрируем f по синему пути, где полуокружность — радиуса R:



Пусть R — настолько большое, что все особые точки в $\mathbb{C}_+$ содержатся во внутренней области, отсекаемой данным путём. Оценим интеграл по верхней полуокружности:

$$\int\limits_0^{\pi} f(Re^{it}) iRe^{it}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[R\to\infty]{\text{теорема Лебега о мажорируемой сходимости}} 0$$

Далее применяем формулу в вычетах.

Из гомотопности зелёной окружности и синего пути в $\mathbb{C}_+ \setminus \{z_j\}$ получаем, что их индексы равны 1 — ведь интеграл $\frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}$ по окружности мы знаем. □

1.6.4 2-я формула замены переменной

Пусть $\Phi = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ — замкнутая дифференциальная форма в G, $\gamma : [a,b] \to G$ — путь, рассмотрим интеграл $\int\limits_\gamma \Phi$. Изменение параметризации для γ — 1-я формула замены переменной.

Теперь пусть $g : G_1 \to G_2$ — голоморфная функция, f — голоморфная функция в G_2, $\gamma : [a,b] \to G_1$ — непрерывный путь. Тогда
$$\int\limits_{g\circ\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_\gamma (f\circ g)(z) g'(z)\,\mathrm{d}z$$

Наводящее соображение: пусть путь γ — кусочно-гладкий, $\rho(t) \coloneqq g(\gamma(t))$. Тогда

$$\int\limits_\rho f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_a^b f(\rho(t))\rho'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b f(g(\gamma(t)))g'(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_\gamma (f\circ g)(z)\cdot g'(z)\,\mathrm{d}z$$

Но нам эта формула пригодится в случае негладкого пути.

Пусть $\rho = g\circ\gamma$ – путь в области G_2, ϕ — первообразная для формы $f(z)\,\mathrm{d}z$ вдоль ρ.

Рассмотрим $t_0 \in [a,b]$. $\exists U \ni \rho(t_0)$ — окрестность, такая, что на ней есть первообразная Φ для $f(z)\,\mathrm{d}z$. Значит, $\exists\delta > 0 : \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \Phi(\rho(t))$.

Положим $z_0 \coloneqq \gamma(t_0)$. $\exists V \ni z_0 : g(V) \subset U$ из непрерывности g. $\forall w \in U : \Phi'(w) = f(w)$. Запишем
$$\forall z \in V : (\Phi\circ g)'(z) = \Phi'(g(z))\cdot g'(z)$$

Тем самым, $\Phi\circ g$ есть первообразная для $(\Phi'\circ g)\cdot g'$ в V. Значит, $\phi\circ g$ — первообразная для формы $f(g(z))\cdot g'(z)\,\mathrm{d}z$ вдоль пути γ.

Пусть γ — замкнутый путь, не проходящий через z_0. По определению
$$\operatorname{Ind}_{z_0}\gamma = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}$$

Применим функцию $[z \mapsto z - z_0]$. Согласно 2-й формуле замены переменной,
$$\operatorname{Ind}_{z_0}\gamma = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma - z_0}\frac{\mathrm{d}z}{z} = \operatorname{Ind}_0(\gamma - z_0)$$

Следствие 1.6.1. *Индекс пути γ относительно z_0 — локально постоянная функция от z_0.*

Доказательство. Пусть z_0 — точка вне носителя γ. Выберем настолько маленькое $\delta > 0$, что $B(z_0,\delta)\cap\gamma([a,b]) = \varnothing$.

Рассмотрим $z_1 \in B(z_0,\delta)$, и докажем, что $\operatorname{Ind}_{z_0}\gamma = \operatorname{Ind}_{z_1}\gamma$. Определим гомотопию путей $\gamma - z_0$ и $\gamma - z_1$:
$$\Gamma(t,\tau) \coloneqq (1-\tau)(\gamma(t) - z_0) + \tau(\gamma(t) - z_1) = \gamma(t) - ((1-\tau)z_0 + \tau z_1)$$

Эта гомотопия не проходит через 0, значит, интегралы по $\gamma - z_0$ и $\gamma - z_1$ равны. □

Следствие 1.6.2. *Индекс постоянен на каждой компоненте связности $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$.*

Следствие 1.6.3. $\operatorname{Ind}_{z_0}\gamma = 0$ *на неограниченной компоненте связности $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$.*

Доказательство. Оценим $\int\limits_{\gamma - z_0}\frac{\mathrm{d}w}{w}$ при достаточно большом $|z_0|$. Для такого z_0 носитель пути $\gamma - z_0$ лежит в некоторой полуплоскости, не содержащей нуля. Полуплоскость односвязна, это даже звёздная область, в ней путь стягиваем, значит, интеграл равен нулю. □

1.6.5 О логарифме

Логарифм — это функция, обратная к экспоненте, а экспонента имеет период $2\pi i$.

Пусть $w \in \mathbb{C}$.

1. Логарифм w — любое $z \in \mathbb{C} : e^z = w$.
2. У $w = 0$ логарифма нет; если z — одно из значений логарифма w, то все остальные значения имеют вид $\{z + 2\pi ik | k \in \mathbb{Z}\}$.
3. Для $w \neq 0 : w = |w|e^{i\theta}$, где $\theta \in \mathbb{R}$. Комплексное число $\log|w| + i\theta$ — одно из значений логарифма, и все значения получаются при различных θ, подходящих по условию выше.

Пусть G — область.

Определение 1.6.3 (Функция ϕ в G — ветвь логарифма в G)**.** ϕ непрерывна в G, и $e^{\phi(z)} = z$ для $z \in G$.

Факт 1.6.1. *Всякая ветвь логарифма обязательно голоморфна в G, и $\phi'(z) = \frac{1}{z}$.*

Доказательство. Рассмотрим $z_0 \in G, U \coloneqq \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < \delta\} \subset G$. Так как производная экспоненты (как вещественной функции $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) невырождена, то при достаточно малом δ у экспоненты имеется обратная $\psi : e^{\psi(z)} = z$ при $z \in U$.

С другой стороны, $e^{\phi(z)} = z$ при $z \in U$. Значит, $\phi - \psi$ — непрерывная функция, принимающая значения в дискретном множестве $\{2\pi ik | k \in \mathbb{Z}\}$. Значит, это константа.

Тем самым, ϕ дифференцируема, и $\phi'(z) = \frac{1}{z}$. □

Теорема 1.6.2. Во всякой односвязной области G: $0 \notin G \Rightarrow \exists$ непрерывная ветвь логарифма.

Доказательство. Напрямую следует из (теорема 1.6.3) для тождественного отображения. □

Пусть $F : G \to \mathbb{C}$ — аналитическая.

Определение 1.6.4 (Аналитическая $\Phi : G \to \mathbb{C}$ — ветвь логарифма функции F)**.** $\forall z \in G : e^{\Phi(z)} = F(z)$.

Замечание. В определении можно требовать лишь непрерывности Φ, аналитичность получится автоматически.

Теорема 1.6.3. Если G — односвязная область, $\forall z \in G : F(z) \neq 0$ и F аналитична в G, то в G существует ветвь логарифма для F.

Доказательство. Функция $\frac{F'(z)}{F(z)}$ — голоморфна в G. Форма $\frac{F'(z)}{F(z)}\,\mathrm{d}z$ замкнута в G, значит, имеется первообразная ψ — голоморфная в G функция, такая, что $\psi'(z) = \frac{F'(z)}{F(z)}$.

$$\left(\frac{e^{\psi(z)}}{F(z)}\right)' = \frac{e^{\psi(z)} \cdot \psi'(z)F(z) - F'(z)e^{\psi(z)}}{F(z)^2}$$

По построению ψ числитель равен нулю. Тем самым, $e^{\psi(z)} = c \cdot F(z)$ $(c \neq 0)$. $\exists a \in \mathbb{C} : c = e^a$. Положим $\phi \coloneqq \psi - a$, это искомая ветвь логарифма. □

Замечание. Не всякая первообразная для $\frac{F'}{F}$ есть ветвь логарифма — логарифмы отличаются на целые кратные $2\pi i$, а первообразные — на произвольную константу. Однако если ψ — первообразная $\frac{F'}{F}$, и $\exists z_0 \in \mathbb{C} : e^{\psi(z_0)} = F(z_0)$, то ψ — ветвь логарифма для F.

Замечание. Если ψ — ветвь логарифма, то все ветви логарифма имеют вид $\{\psi + 2\pi ik | k \in \mathbb{Z}\}$.

Данная функция $\frac{F'}{F}$ называется *логарифмической производной функции F*.

Пусть G — область, $f : G \to \mathbb{C}$ — голоморфна, $\gamma : [a, b] \to G$ — путь, $\forall z \in \gamma([a, b]) : f(z) \neq 0$.

Определение 1.6.5 (Ветвь логарифма вдоль пути γ)**.** Функция $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$, такая что $\forall t_0 \in [a,b] : \exists \delta > 0, \exists U \ni \gamma(t_0)$, и существует ветвь логарифма ψ функции f в U, такая, что

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \psi(\gamma(t))$$

Теорема 1.6.4. При сделанных предположениях существует ветвь логарифма f вдоль пути γ. При этом любые две ветви отличаются на $2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\frac{f'}{f}$, аналитическую в некоторой окрестности $\gamma([a,b])$. Пусть ϕ — первообразная для $\frac{f'}{f}$ вдоль γ.

$\forall t_0 \in [a,b] : \exists \delta > 0, \exists U \ni \gamma(t_0)$ вместе с первообразной ψ функции $\frac{f'}{f}$:

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \psi(\gamma(t))$$

Существует c, вообще говоря, зависящая от t, такая, что $e^{\psi(z)} = cf(z)$. При $|t - t_0| < \delta : e^{\phi(t)} = e^{\psi(\gamma(t))} = cf(\gamma(t))$. Значит, $\frac{e^{\phi(s)}}{f(\gamma(s))}$ локально постоянна на $[a,b]$, то есть оказалось, что c всё-таки не зависит от t.

Найдётся $a \in \mathbb{C} : c = e^a$. Теперь $\widetilde{\phi} \coloneqq \phi - a$ — тоже первообразная для $\frac{f'}{f}$ вдоль γ, причём $e^{\psi(\gamma(t)) - a} = f(\gamma(t))$. Так как $\psi - a$ — тоже первообразная в U для $\frac{f'}{f}$, то $\widetilde{\psi}$ — ветвь логарифма. $\square$

В частности, для $f(z) = z - z_0$, и пути γ, не проходящего через z_0, получается ветвь логарифма $z - z_0$ вдоль γ.

1.6.6 Ветвь аргумента и целочисленность индекса

Пусть $w \in \mathbb{C}$. Все значения логарифма спрятаны в формуле $\log w = \log|w| + i \operatorname{Arg} w$, где $\operatorname{Arg} w \overset{def}{=} \left\{\theta \middle| e^{i\theta} = \frac{w}{|w|}\right\}$.

Пусть $0 \notin G$.

Определение 1.6.6 (Непрерывная ветвь аргумента в области G)**.** Непрерывная функция $v : G \to \mathbb{R} : \forall z \in G : v(z) \in \operatorname{Arg}(z)$

Факт 1.6.2. *В области G существует непрерывная ветвь логарифма $\iff$ в G существует непрерывная ветвь аргумента.*

Определение 1.6.7 (Ветвь аргумента вдоль пути γ)**.** Функция $\phi : [a,b] \to G$, такая что $\forall t_0 \in [a,b] : \exists \delta > 0, \exists U \ni \gamma(t_0)$, и существует ветвь аргумента ψ функции f в U, такая, что

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \psi(\gamma(t))$$

В качестве ветви аргумента всегда можно выбрать мнимую часть ветви логарифма.

Пусть $\gamma : [a,b] \to G$ — путь, $f : G \to \mathbb{C}$ — аналитическая, предположим, что $f(z) \neq 0$ на $\gamma([a,b])$.

Пусть u — ветвь логарифма для f вдоль γ.

Определение 1.6.8 (Приращение логарифма вдоль γ)**.** $u(b) - u(a)$.

Определение 1.6.9 (Приращение аргумента вдоль γ)**.** $\Im(u(b) - u(a))$.

Пусть теперь γ — петля. Тогда $\Re(u(b) - u(a)) = 0$, и вообще, $u(b) - u(a) = 2\pi ik$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$.

Тем самым, $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$ есть целое число. В частности, для $f(z) = z - z_0$, $\operatorname{Ind}_{z_0}\gamma \in \mathbb{Z}$. Это показывает, что индекс петли есть целое число.

Лекция VIII

5 апреля 2024 г.

1.7 Принцип аргумента и теорема Руше

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ — простой (без самопересечений) замкнутый путь, $\gamma(a) = \gamma(b)$. Положим $D \coloneqq \gamma([a, b])$.

Интересный факт (Теорема Жордана). $\mathbb{C} \setminus D$ состоит из двух компонент связности. Одна из них — G — ограничена, и $\forall z \in G : \operatorname{Ind}_z \gamma = \pm 1$.

Если $\operatorname{Ind}_z \gamma = 1$, то γ называют положительно ориентированным, иначе — отрицательно ориентированной.

Определение 1.7.1 (Жорданова область)**.** Ограниченная область, граница которой — простой замкнутый путь.

Чтобы избежать трудностей, связанных с доказательством теоремы Жордана, подменим посылку и следствие: будем доказывать теоремы для жордановых областей.

Теорема 1.7.1 (Принцип аргумента)**.** Пусть G — жорданова область, ∂G — носитель простого замкнутого пути γ, ориентированного положительно.

f — аналитическая в окрестности $\overline{G}$, кроме, может быть, конечного числа полюсов внутри G. Более того, $\forall w \in \partial G : f(w) \neq 0$.

Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \cdot (\text{приращение аргумента } f \text{ вдоль } \gamma) = (\text{число нулей } f \text{ в } G) - (\text{число полюсов } f \text{ в } G)$$

Нули и полюса надо учитывать с кратностью.

Доказательство. Левая часть есть $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z$. Это интеграл по простому замкнутому пути; посчитаем его с помощью вычетов f внутри G.

Рассмотрим $z_0 \in G$. Пусть вблизи $z_0 : f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$, где $k \in \mathbb{Z}$ (отвечает нулю или полюсу), а g аналитична вблизи z_0, причём $g(z_0) \neq 0$.

$$f'(z) = k \cdot (z - z_0)^{k-1} g(z) + (z - z_0)^k g'(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

$\frac{g'(z)}{g(z)}$ аналитична в окрестности z_0, тем самым, вычет логарифмической производной $\frac{f'(z)}{f(z)}$ в z_0 равен k.

Пусть $u_1, \ldots, u_s$ — нули f внутри G кратностей $b_1, \ldots, b_s$ соответственно; пусть $v_1, \ldots, v_t$ — полюса f кратностей $l_1, \ldots, l_t$ соответственно. Суммируя вычеты, получаем $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z = \sum\limits_{j=1}^{s} k_j - \sum\limits_{j=1}^{t} l_j$. $\square$

Теорема 1.7.2 (Теорема Руше)**.** Пусть G — жорданова область с положительно ориентированной границей — носителем замкнутого пути γ.

Функции f, g аналитичны в окрестности $\overline{G}$. Пусть $\forall z \in \partial G : |f(z)| > |g(z)|$. В частности, $\forall z \in \partial G : |f(z)| \neq 0, |(f+g)(z)| \neq 0$.

Тогда f и $f + g$ имеют одинаковое число нулей в G.

Доказательство. Согласно принципу аргумента, число нулей $(f+g)$ в G равно $\frac{1}{2\pi} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)} \,\mathrm{d}z$.

В то же время, f имеет внутри G ровно $\frac{1}{2\pi} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z$ нулей.

Надо доказать, что интегралы равны, вычтем их:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \left(\frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \mathrm{d}z$$

Теперь преобразуем выражение в скобках:

$$\left(\ddots\right) = \frac{\cancel{f'(z)\cdot f(z)} + g'(z)\cdot f(z) - \cancel{f'(z)\cdot f(z)} - f'(z)\cdot g(z)}{(f(z)+g(z))\cdot f(z)} =$$

$$= \frac{g'(z)f(z) - f'(z)g(z)}{f(z)^2}\cdot\frac{f(z)}{f(z)+g(z)} = \left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right)'\cdot\frac{1}{1+\frac{g(z)}{f(z)}}$$

Обозначим $\Phi(z) \coloneqq 1+\frac{g(z)}{f(z)}$. Тем самым, надо доказать, что $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\,\mathrm{d}z = 0$. При этом, $\forall z\in\partial G$: $\frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1$. Из непрерывности $\exists\delta>0 : \frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1-\delta$.

Применим к интегралу формулу замены переменной: $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Phi\circ\gamma}\frac{\mathrm{d}w}{w}$. При этом носитель пути $\Phi\circ\gamma$ лежит внутри $B(1,1-\delta)$, значит, путь гомотопен тождественному, и гомотопия не задевает нуля. В результате $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Phi\circ\gamma}\frac{\mathrm{d}w}{w} = 0$. □

1.8 Сходимость аналитических функций

Пусть $G\subset\mathbb{C}$ — открытое множество. Пускай $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность функций $h_n : G\to\mathbb{C}$.

1.8.1 Равномерная сходимость на компактах

Пусть $h : G\to\mathbb{C}$ — ещё функция. Говорят, что h_n *сходятся к* h *равномерно на компактах* ($h_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} h$), если $\forall$ компакта $K\subset G$: $h_n\big|_K \rightrightarrows h\big|_K$.

В дальнейшем, говоря о сходимости аналитических функций, будем подразумевать именно равномерную сходимость на компактах.

Теорема 1.8.1 (Вейерштрасс, 1-я)**.** Пусть все $h_n : G\to\mathbb{C}$ — аналитичны, и $h_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} h$. Тогда h аналитична в G.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\forall$ прямоугольника $\overline{P}\subset G$: $\int\limits_{\partial P} h(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Это ясно из равномерной сходимости на компактах:

$$\left|\int\limits_{\partial P}(h(z)-h_n(z))\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \sup_{z\in\partial P}|h_n(z)-h(z)|\cdot l(\partial P)$$

Далее достаточно применить теорему Мореры (теорема 1.2.14). □

Теорема 1.8.2 (Вейерштрасс, 2-я)**.** Пусть все $f_n : G\to\mathbb{C}$ — аналитичны, и $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$, где аналитичная $f : G\to\mathbb{C}$. Тогда $f_n' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f'$.

Доказательство. Пусть $K = B(w_0,r)$ — круг, $\overline{K}\subset G$. Понятно, $\exists R>r : \overline{B(w_0,R)}\subset G$. Рассмотрим $z\in K$.

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-w_0|=R}\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-w_0|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta = f'(z)$$

К пределу под интегралом можно перейти, так как сходимость равномерна в $\overline{K}$, знаменатель отделён от нуля числом $R-r$. Более того, видно, что сходимость равномерна в $\overline{K}$.

Пусть $S\subset G$ — компакт. $\forall s\in S : \exists K_s$ — круг с центром в s, такой, что $\overline{K}_s\subset G$. Внутренности этих кругов покрывают S, выберем конечное подпокрытие.

На каждом из кругов конечного подпокрытия имеется равномерная сходимость. Стало быть, имеется равномерная сходимость на S. □

Лемма 1.8.1. *Пусть f_n, f — аналитические функции в области G, $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$, f не равна тождественному нулю.*

Пусть D — круг, $D \subset G$, предположим, что f имеет нуль в D. Тогда для всех достаточно больших n: f_n имеет нуль в круге D.

Доказательство. Пусть $f(z_0) = 0$. Уменьшая D, можем считать, что $D = B(z_0, r)$ — круг, такой, что $\overline{D} \subset G$.

По теореме единственности f не постоянна в D.

Разложим f в ряд Тейлора в D:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

Ряд сходится в некоторой окрестности $\overline{D}$. $a_0 = 0$, но не все коэффициенты равны нулю. Распишем

$$f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z), \quad g(z_0) \neq 0, \text{ где } g \text{ аналитична в окрестности } \overline{D}$$

Пусть $\rho \leqslant r$ выбрано так, что $\forall z : |z - z_0| \leqslant \rho \Rightarrow |g(z)| > \delta > 0$. Оценим f при $|z - z_0| = \rho : |f(z)| = |z - z_0|^k \cdot |g(z)| \geqslant \rho^k \delta$.

Разложим $f_n(z) = f(z) + (f_n(z) - f(z))$. При достаточно больших $n : |f_n(z) - f(z)| < \rho^k\delta$, по теореме Руше f_n имеет нуль внутри D. □

Определение 1.8.1 (Однолистная функция $f : G \to \mathbb{C}$)**.** Инъективная аналитическая функция f.

Теорема 1.8.3. Пусть f_n — последовательность однолистных функций в области G, $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$. Тогда либо $f \equiv \mathrm{const}$, либо f — тоже однолистна.

Доказательство. Предположим, что $\exists z_0, z_1 \in G : z_0 \neq z_1$ и $w := f(z_0) = f(z_1)$. Построим $g(z) := f(z) - w, g_n(z) := f_n(z) - w$. Сходимость сохранилась.

Пусть U_0, U_1 — круги с центрами в z_0 и z_1 соответственно, $U_0 \cap U_1 = \varnothing, U_0, U_1 \subset G$. Функция g имеет нуль в каждом из U_1, U_2. Предположим, что $g \not\equiv 0$, значит, при достаточно большом $n : g_n$ имеет нуль как в U_1, так и в U_2. Но g_n однолистна, значит, всё же $g \equiv 0$. □

Теорема 1.8.4 (Риман)**.** Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область. Следующие условия эквивалентны:

1. G односвязна, $G \neq \mathbb{C}$.
2. $\exists$ однолистная $\phi : G \twoheadrightarrow \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$.

Доказательство. Потом (теорема 1.9.1). □

1.8.2 Нормальные семейства. Теорема Монтеля

Пусть дано множество A аналитичных функций в области G.

Определение 1.8.2 (Нормальное множество A)**.** Такое A, что $\forall$ компакта $K \subset G : \exists C \in \mathbb{R} : \forall z \in K, \forall f \in A : |f(z)| \leqslant C$.

Лекция IX

12 апреля 2024 г.

Теорема 1.8.5 (Монтель)**.** Следующие условия эквивалентны:

1. Множество A нормально.
2. $\forall \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, f_n \in A$: найдётся сходящаяся подпоследовательность $n_1 < n_2 < \ldots$: для некоторой аналитической f: $f_{n_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} f$.

Доказательство.

(2) $\Rightarrow$ (1) Предположим противное: $\exists K \subset G : \forall m \in \mathbb{N} : \exists f_m \in A : \sup\limits_{z \in K} |f_m(z)| > m$.

Согласно посылке, существует сходящаяся подпоследовательность $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, такая, что $\exists f : f_{m_k} \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} f$ равномерно на K. f ограничена на K, значит, начиная с некоторого места, f_{m_k} тоже ограничены. Противоречие.

(1) $\Rightarrow$ (2) **Лемма 1.8.2.** *Рассмотрим счётный набор последовательностей*

$$\begin{cases} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots \\ x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \dots \\ \dots\dots\dots \qquad \ddots \end{cases}$$

Пусть каждая последовательность ограничена: $\forall n \in \mathbb{N} : \exists M^{(n)} : \forall j : |x_j^{(n)}| < M^{(n)}$. Тогда $\exists k_1 < k_2 < \dots$ — подпоследовательность индексов, такая, что $\forall n \in \mathbb{N} : \exists x^{(n)} : x_{k_j}^{(n)} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} x^{(n)}$.

Иными словами, каждая последовательность ограничена, значит, из каждой можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, но оказывается, что можно так выбрать индексы этой подпоследовательности, чтобы она сходилась во всех строчках.

Доказательство леммы.

Пусть $\{k_j^{(1)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ — такая подпоследовательность индексов, что $\exists x^{(1)} : x_{k_j^{(1)}} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} x^{(1)}$. Выберем из этой последовательности индексов подпоследовательность индексов $\{k_j^{(2)}\}_{j\in\mathbb{N}}$, что $\exists x^{(2)} : x_{k_j^{(2)}} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} x^{(2)}$. И так далее.

Тем самым, мы получим счётное количество последовательностей индексов, таких, что $k^{(n+1)}$ — подпоследовательность $k^{(n)}$, и $\forall n \in \mathbb{N} : \exists x^{(n)} : x_{k_j^{(n)}} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} x^{(n)}$.

А теперь возьмём диагональ: $k_j \coloneqq k_j^{(j)}$. $\square$

Пусть $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — какая-то последовательность функций из A, выберем из неё сходящуюся подпоследовательность.

1. Рассмотрим компактный замкнутый круг $\overline{B_r(z_0)} \subset G$. Выберем $R \in (r, \operatorname{dist}(z_0, \partial G))$. Разложим все функции f_n в степенные ряды с центром в z_0, эти ряды будут сходиться уж точно в круге радиуса R:

$$\begin{cases} f_1(z) = c_0^{(1)} + c_1^{(1)}(z - z_0) + c_2^{(1)}(z - z_0)^2 + \dots \\ \quad \vdots \\ f_n(z) = c_0^{(n)} + c_1^{(n)}(z - z_0) + c_2^{(n)}(z - z_0)^2 + \dots \\ \quad \vdots \end{cases} \tag{$\circ$}$$

Так как семейство нормально, то $\exists d > 0 : |z - z_0| \leqslant R \Rightarrow \forall n : |f_n(z)| \leqslant d$.

Распишем формулы для коэффициентов Тейлора: $c_j^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=R} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} \, \mathrm{d}\zeta$, откуда

$$\left| c_j^{(n)} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\left| f_n\left(z_0 + e^{i\theta}\right) \right|}{R^{j+1}} R \, \mathrm{d}\theta \leqslant \frac{d}{R^j}$$

Получили равномерную по n оценку на $c_j^{(n)}$, значит согласно (лемма 1.8.2) имеется подпоследовательность строк $c^{(n)}$ в ($\circ$), такая, что в каждом столбце коэффициенты сходятся. Без потери общности эта последовательность совпадает с исходной: $\forall j : c_j^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c_j$.

Дальше хочется написать ряд $\sum\limits_{j\geqslant 0} c_j(z-z_0)^n$, доказать, что он сходится, где положено, и что он является пределом какой-то подпоследовательности f_n.

- Первое просто: $|z-z_0| \leqslant r \Rightarrow \sum\limits_{j=0}^{\infty} |c_j(z-z_0)^j| \leqslant \sum\limits_{j=0}^{\infty} r^j \cdot \frac{d}{R^j} = d\sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^j$. Тем самым, $\overline{f}(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j(z-z_0)^j$ — функция в $\overline{B}$, аналитичная в B.

- Рассмотрим начальные куски рядов $f_{n,k}(z) \coloneqq \sum\limits_{j=0}^{k} c_j^{(n)}(z-z_0)^j$, и запишем аналогичный многочлен для $\overline{f} : \overline{f}_k(z) \coloneqq \sum\limits_{j=0}^{k} c_j(z-z_0)^j$. Это конечные суммы, и так как коэффициенты сходятся, то $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n,k} = f_k$ равномерно во всём круге $\overline{B}$.

  Теперь покажем, что сходимость $f_{n,k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f_n$ равномерна по n:

$$|f_{n,k}(z) - f_k(z)| \leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty} \left|c_j^{(n)}\right| |z-z_0|^j \leqslant d \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^j$$

- По теореме о перестановке предельных переходов имеется искомая сходимость:

$$\overline{f}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-z_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} c_j^{(n)}(z-z_0)^j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{(n)}(z-z_0)^j = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$$

2. Теперь покажем, что для любого компакта $K \subset G$ тоже найдётся подпоследовательность f_{n_j}, сходящаяся на K. Пусть $w \in K$, положим $r_w \coloneqq \frac{1}{2}\operatorname{dist}(w, \partial G)$. Семейство $\{B_{r_w}(w)\}_{w\in K}$ — открытое покрытие K, значит, имеется конечное подпокрытие: K покрывается кругами $B_1, \ldots, B_s$, такими, что $\overline{B}_s \subset G$.

   s раз выбирая сходящуюся подпоследовательность (каждый раз — в соответствии с предыдущим пунктом), получаем такую подпоследовательность f_n, что она сходится во всех кругах $B_1, \ldots, B_s$.

3. Пусть $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ — исчерпывающая последовательность компактов для G.

   В соответствии с предыдущим пунктом найдётся подпоследовательность $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \ldots$, равномерно сходящаяся на K_1. Далее из неё выбирается новая подпоследовательность $f^{(2)}$, равномерно сходящаяся на K_2.

   И так далее, на s-м шаге выберется подпоследовательность $f_1^{(s)}, f_2^{(s)}, \ldots, f_s^{(s)}, \ldots$, сходящаяся на K_s. Диагональ $\{f_s^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ подходит: функции в этой последовательности сходятся на любом компакте K_s. □

1.8.3 Про монтелевые пространства

Через $\mathcal{H}(G)$ обозначим пространство всех функций, голоморфных в G. Сходимость, которую мы только что изучали на этом пространстве, отвечает некоторой топологии.

$\mathcal{H}(G)$ можно превратить в локально выпуклое пространство, в котором топология задаётся полунормами $p_K : f \mapsto \max\limits_{z\in K} |f(z)|$, где $K \subset G$ — компакты в G. Несложно видеть, что это как раз топология равномерной сходимости на компактах.

Несложно видеть, что если $\{K_j\}_{j=1}^{\infty}$ — исчерпывающая последовательность компактов для G, то $p_j := p_{K_j}$ — определяющий набор полунорм. А раз имеется счётный определяющий набор полунорм, то пространство метризуемо. Одна из возможных метрик имеет вид

$$\rho(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{p_j(f-g)}{1 + p_j(f-g)}$$

Из самой формулы видно, что всё пространство лежит в шаре радиуса 1, тем не менее, в локально выпуклом пространстве есть понятие ограниченного множества — это множество, ограниченное по всем полунормам. В $\mathcal{H}(G)$ ограниченные множества — нормальные семейства.

Тем самым, теорема Монтеля на языке функционального анализа звучит так: всякое ограниченное множество в $\mathcal{H}(G)$ относительно компактно.

Как известно, в бесконечномерных банаховых пространствах это неверно, откуда видно, что одной нормой топологию на $\mathcal{H}(G)$ не описать.

В честь Монтеля, доказавшего теорему об аналитических функциях, все пространства, в которых ограниченные множества относительно компактны, называются *монтелевыми*.

1.9 Однолистные функции. Теорема Римана

Рассмотрим функцию $f : z \mapsto (z - z_0)^k$, где $k \in \mathbb{N}$. Если $k = 1$, то функция линейна и, следовательно, однолистна. Если же $k \geqslant 2$, то $\forall w \neq 0$ найдётся k значений корня $\sqrt[k]{w}$, и, следовательно, f не однолистна ни в какой окрестности z_0.

Лемма 1.9.1. *Если $f : G \to \mathbb{C}$ однолистна, то $\forall z \in G : f'(z) \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $f'(z_0) = 0$. Разложим $f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$. Так как $f'(z_0) = 0$, то $c_1 = 0$.

Так как f однолистна, то $f \not\equiv \mathrm{const}$, то есть имеется некоторое наименьшее $k > 0 : c_k \neq 0$. Можно записать $f(z) = c_0 + (z - z_0)^k \cdot g(z)$, где $g(z) \neq 0$ в некоторой окрестности z_0. Скажем, эта окрестность имеет вид круга $B_r(z_0)$.

Пусть $\phi : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ — ветвь логарифма g, то есть $\forall z \in B_r(z_0) : e^{\phi(z)} = g(z)$. Тогда $f(z) = c_0 + \left((z - z_0)\, e^{\frac{\phi(z)}{k}}\right)^k$.

Обозначим $\psi(z) = (z - z_0)e^{\frac{\phi(z)}{k}}$, прямое вычисление показывает $\psi'(z_0) \neq 0$. По теореме об обратной функции $\psi(B_r(z_0)) \supset B_\delta(0)$ для некоторого $\delta > 0$.

Если $u \in \mathbb{C}$, причём $|u - c_0| \in (0, \delta)$, то уравнение $f(z) = u$ имеет хотя бы k решений, возникающих из уравнений $\psi(z) = \sqrt[k]{u - c_0}$ (k значений у корня k-й степени). Противоречие с инъективностью f. □

Обратное неверно, контрпримером может служить, например, экспонента. Это верно только локально: если $f'(z) \neq 0$ вблизи z_0, то по теореме об обратной функции f однолистна в некоторой окрестности z_0.

Факт 1.9.1. *Если $f : U \to \mathbb{C}$ такова, что $\forall z \in U : f'(z) \neq 0$, то $f(U)$ открыто.*

Доказательство. Это тоже следует из вещественной теоремы об обратной функции. □

1.9.1 О дробно-линейных отображениях

Введём расширенную комплексную плоскость $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Базой $\widehat{\mathbb{C}}$, как топологического пространства, являются круги $\{B_r(z_0) | z_0 \in \mathbb{C}, r > 0\}$, и «бесконечно удалённые круги» $\left\{\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{B_r(0)} \middle| r > 0\right\}$.

Это одноточечная компактификация $\mathbb{C}$.

Для аналитической функции $f : (\Omega \subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, заданной и аналитичной в проколотой окрестности ∞, будем говорить, что она аналитична в точке ∞, если $f\left(\frac{1}{z}\right)$ аналитична в окрестности нуля. Например, для ряда Лорана $f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$: f аналитична в ∞, если для всех $n > 0 : a_n = 0$.

Определение 1.9.1 (Дробно-линейное отображение)**.** Отображение вида $\phi : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ и $|c| + |d| > 0$ (чтобы получалось поделить).

Если $c \neq 0$, то функция определена и аналитична в бесконечности, равна там пределу $\frac{a}{c}$, и в точке $-\frac{d}{c}$ имеется полюс. Если же $c = 0$, то функция тоже аналитична в $\widehat{\mathbb{C}}$ за исключением одного полюса, на этот раз этот полюс находится в точке ∞.

Если $ad = bc$, то ситуация не особо интересная: $\phi \equiv \frac{a}{c} \equiv \text{const}$. Иначе же, при $ad - bc \neq 0$, дробно линейные преобразования обратимы: можно разрешить уравнение $\frac{az+b}{cz+d} = w$ относительно z, полученная функция $z(w)$ тоже будет дробно-линейной. В матрицах это записывается так:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Квадратные скобки значат фактор по скалярным преобразованиям (гомотетиям).

Аналогичная выкладка показывает, что обратимые дробно-линейные преобразования образуют группу относительно композиции, и эта группа изоморфна $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}) \overset{def}{=} \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*E$ (где $\mathbb{C}^*E$ — скалярные матрицы вида $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C}^*$).

Преобразования Мёбиуса

Преобразованиями Мёбиуса называются дробно-линейные преобразования вида $\phi : z \mapsto c\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$, где $|c| = 1, a \in \mathbb{D}$. Функция такого вида имеет полюс в $\frac{1}{\overline{a}}$, и уж точно определена в круге $\mathbb{D}$.

Факт 1.9.2. *Оказывается,* $\phi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

Доказательство. Заметим, что $\forall z : |z| = 1 \Rightarrow |\phi(z)| = \left|c\frac{z-a}{z(\overline{z}-\overline{a})}\right| = 1$, откуда ϕ переводит окружность в окружность. По принципу максимума модуля $\forall z \in \mathbb{D} : |\phi(z)| < 1$.

С другой стороны, не просто $\phi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, но на самом деле $\phi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, так как ϕ^{-1} — тоже преобразование Мёбиуса:

$$\begin{bmatrix} c & -ca \\ -\overline{a} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & ca \\ \overline{a} & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{-1} & a \\ c^{-1}\overline{a} & 1 \end{bmatrix}$$

то есть $\psi : z \mapsto c^{-1}\frac{z+ac}{1-\overline{a}\overline{c}z}$ — обратное к ϕ преобразование Мёбиуса. □

Факт 1.9.3. *Преобразования Мёбиуса образуют подгруппу в группе дробно-линейных преобразований.*

Как отобразить полуплоскость на круг

Пусть $\Pi \coloneqq \{z \in \mathbb{C} | \Re z < 0\}$. Выберем $\alpha \in \mathbb{C} : \Re\alpha < 0$, и устроим преобразование $\theta(z) \coloneqq \frac{z-\alpha}{z+\overline{\alpha}}$. У него полюс в точке $-\overline{\alpha}$.

Факт 1.9.4. *Оказывается,* $\theta(\Pi) \subset \mathbb{D}$.

Доказательство. Пусть $z = a + ib, \alpha = \gamma + i\delta$, где $a, b, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ $(a, \gamma < 0)$.

Сосчитаем $|\theta(z)|^2 = \left|\frac{(a-\gamma)+i(b-\delta)}{(a+\gamma)+i(b-\delta)}\right|^2 = \frac{(a-\gamma)^2+(b-\delta)^2}{(a+\gamma)^2+(b-\delta)^2} < 1$. □

Упражнение 1.9.1. *Убедиться, что* $\theta(\Pi) = \mathbb{D}$.

1.9.2 Теорема Римана

Теорема 1.9.1 (Риман, о конформном отображении)**.** Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область. Следующие условия эквивалентны:

1. G односвязна, $G \neq \mathbb{C}$.
2. $\exists$ однолистная сюръекция $\phi : G \twoheadrightarrow \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$.

Доказательство.

$(2) \Rightarrow (1)$ Это просто, если $\phi(G) = \mathbb{D}$, где ϕ — как в посылке, то ϕ — гомеоморфизм, откуда G тоже односвязна. Факт о том, что $G \neq \mathbb{C}$, называется теоремой Лиувилля.

$(1) \Rightarrow (2)$

- Можно считать, что область не содержит некоторого круга:

  Выберем $z_0 \in \mathbb{C} \backslash G$, в области G найдётся ϕ — ветвь логарифма функции $z - z_0$. Функция ϕ однолистна, и без потери общности можно работать с $\phi(G) =: G_1$ вместо G.

  Пусть $K \subset G_1$ — какой-то круг. Заметим, что $(K + 2\pi i) \cap G_1 = \varnothing$:

  Доказательство. Пусть $w \in (K + 2\pi i) \cap G_1$. Тогда $w = u + 2\pi i$, где $u \in K$, и одновременно $w = \phi(v)$, $u = \phi(\widetilde{v})$, где $v, \widetilde{v} \in G$. Так как $v = e^{\phi(v)} = e^w = e^{u+2\pi i} = e^u = \widetilde{v}$. Тем самым, $v = \widetilde{v}$, значит, $w = \phi(v) = \phi(\widetilde{v}) = u$, противоречие $(w = u + 2\pi i)$. □

- Можно считать, что область ограничена:

  Устроим $\psi : G_1 \twoheadrightarrow G_2, z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$, теперь так как $\forall z \in G_1 : |z - z_0|$ отделён от нуля, то область G_2 ограничена. При помощи сдвига и гомотетии $(z \mapsto az + b)$ можно заменить G_2 на G_3 так, что $0 \in G_3$ и $G_3 \subset \mathbb{D}$.

- Отныне $0 \in G \subset \mathbb{D}$. Введём $\mathcal{A} := \{f : G \to \mathbb{D} | f$ однолистна, но необязательно сюръекция, $f(0) = 0\}$. По определению $\mathcal{A}$ — нормальное семейство.

  Пусть $C := \sup\limits_{f \in \mathcal{A}} |f'(0)|$ (пока не факт, что $C < \infty$).

  Пусть $\mathcal{A}_1 := \{f \in \mathcal{A} | |f'(0)| \geqslant 1\}$. Очевидно, что супремум можно вычислять по функциям из A_1 (оно непусто, $\mathrm{id} \in \mathcal{A}_1$).

  * Этот супремум конечен: $C < +\infty$.

    Пусть это не так, тогда $\forall n \in \mathbb{N} : \exists f_n \in \mathcal{A}_1 : |f_n'(0)| > n$.

    Так как семейство нормально, то можно выбрать подпоследовательность $f_{n_j} \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} f$. Так как f_{n_j} аналитичны, и сходятся к f, то f тоже аналитична, и $f_{n_j}' \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} f$. Но $|f_{n_j}'(0)|$ не может иметь предела.

  * Аналогичное рассуждение показывает, что он достигается $(\exists f \in \mathcal{A} : |f'(0)| = C)$:

    Выберем $f_n \in \mathcal{A} : |f_n'(0)| \geqslant C - \frac{1}{n}$. Выберем подпоследовательность $f_{n_j} \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} f$. Так как f_{n_j} аналитичны, и сходятся к f, то f тоже аналитична, и $f_{n_j}' \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} f'$. Тем самым, $|f'(0)| = C$, и согласно (теорема 1.8.3), f однолистна либо константа (второго быть не может, $C \geqslant 1$).

Лекция X

19 апреля 2024 г.

Тем самым, существует $f \in \mathcal{A}$, такая, что $|f'(0)|$ максимально. Далее покажем, что $f : G \to \mathbb{D}$ — сюръекция.

- Пойдём от противного: пусть $\exists a \in \mathbb{D} : a \notin \operatorname{Im}(f)$. Введём $\phi := v \circ f$, где $v(w) := \frac{w-a}{1-\overline{a}w}$ — некоторое преобразование Мёбиуса. $\phi(z) := \frac{f(z)-a}{1-\overline{a}f(z)}$.

  К сожалению, пока $\phi \notin \mathcal{A} : \phi(0) \neq 0$, и вообще $\phi(z) \neq 0$ везде. Но раз так, то у ϕ имеется ветвь логарифма Φ. Так как $\Re \log(u) = \log|u|$, то $\forall z \in G : \Re\Phi(z) < 0$. При помощи другого дробно-линейного преобразования переведём левую полуплоскость обратно в $\mathbb{D} : g(z) := \frac{\Phi(z)-\Phi(0)}{\Phi(z)+\overline{\Phi(0)}}$. Утверждается, что $g \in \mathcal{A}$: $g(0) = 0$, и преобразование $w \mapsto \frac{w-a}{w+\overline{a}}$ однолистно стреляет в круг $\mathbb{D}$.

- Осталось получить противоречие, получив в результате вычислений, что $|g'(0)| > |f'(0)|$.

$$g'(z) = \left(1 - \frac{2\Re\Phi(0)}{\Phi(z)+\overline{\Phi(0)}}\right)' = \frac{2\Re(\Phi(0))}{(\Phi(z)+\overline{\Phi(0)})^2}\Phi'(z) = \frac{2\Re(\Phi(0))}{(\Phi(z)+\overline{\Phi(0)})^2}\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} =$$

$$= \frac{2\Re(\Phi(0))}{(\Phi(z)+\overline{\Phi(0)})^2}\frac{1}{\phi(z)} \cdot \frac{(1-\overline{a}f(z))\cdot f'(z) + \overline{a}\cdot f'(z)(f(z)-a)}{(1-\overline{a}f(z))^2}$$

Подставляя 0, получаем

$$g'(0) = \frac{2\Re\Phi(0)}{(2\Re\Phi(0))^2}\frac{1}{-a} \cdot \frac{f'(0)(1-|a|^2)}{1}$$

Тем самым, $|g'(0)| = \frac{1}{2\log\left(\frac{1}{|a|}\right)}\frac{1-|a|^2}{|a|} \cdot |f'(0)|$. Осталось убедиться, что для $t := |a| \in (0,1)$ выполнено неравенство $\frac{1-t^2}{2t\log\left(\frac{1}{t}\right)} > 1$. Это эквивалентно неравенству $\frac{1-t^2}{t} - 2\log\left(\frac{1}{t}\right) > 0$. При $t = 1$ левая часть равняется нулю, и производная левой части $\left(\frac{1}{t} - t + 2\log(t)\right)' = -\frac{1}{t^2} - 1 + \frac{2}{t} = -\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 < 0$. □

1.9.3 Автоморфизмы односвязных областей

Пусть $f_1, f_2 : G \twoheadrightarrow \mathbb{D}$ — возможно различные однолистные отображения. Тогда $f_2^{-1} \circ f_1$ — однолистное отображение круга $\mathbb{D}$ на себя. Например, это может быть каким-то преобразованием Мёбиуса, но оказывается, что ими всё и исчерпывается.

Определение 1.9.2 (Автоморфизм области G)**.** Однолистное отображение $G \twoheadrightarrow G$.

Вообще практически все односвязные области эквивалентны (при помощи однолистной сюръекции) кругу, как говорит только что доказанная теорема Римана, но есть ещё две области — $\mathbb{C}$ и $\widehat{\mathbb{C}}$, имеющие другую природу.

Сначала займёмся автоморфизмами $\mathbb{C}$.

Теорема 1.9.2. Автоморфизмы $\mathbb{C}$ — линейные функции $z \mapsto az + b$ при $a \neq 0$.

Доказательство. Пускай $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ — ещё какой-то автоморфизм $\mathbb{C}$. Тем самым, f — целая, то есть $f = a_0 + a_1 z + \ldots$

Если $a_j \neq 0$ для бесконечного множества индексов j, то ∞ — существенно особая точка (в ряду Лорана $f\left(\frac{1}{z}\right)$ бесконечно много ненулевых членов). Так как $\forall z \in \mathbb{C} : f'(z) \neq 0$, то f — открытое отображение. Отсюда $f(\mathbb{D})$ открыто. С другой стороны, по теореме Сохоцкого (теорема 1.5.3) $f(\{z \in \mathbb{C} | |z| > 1\})$ всюду плотно в $\mathbb{C}$. Значит, $\exists w \in f(\mathbb{D}) \cap f(\{z \in \mathbb{C} | |z| > 1\})$, и это противоречие с однолистностью f.

Тем самым, f — многочлен, и если $\deg f \geqslant 2$, то f' имеет корень, опять-таки противоречие с однолистностью. Получается, f — линейная функция, или константа, но константа не подходит. □

Замечание. $\widehat{\mathbb{C}}$ односвязна, так как топологически это — сфера, что видно из стереографической проекции.

Теорема 1.9.3. Автоморфизмы $\widehat{\mathbb{C}}$ — дробно-линейные отображения $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ при $ad - bc \neq 0$.

Доказательство.

> **Лемма 1.9.2** (О действии групп)**.** *Пусть группа* Γ *действует на множестве* X*;* $H \leqslant \Gamma$ *— подгруппа. Если* $\exists x \in X : H \supset \Gamma_x$ $(\Gamma_x \stackrel{def}{=} \{\gamma \in \Gamma | \gamma x = x\}$ *— стабилизатор* x*), и* H *действует на* X *транзитивно* $(\forall x, y \in X : \exists \gamma \in H : \gamma x = y)$*, то* $H = \Gamma$.
>
> *Доказательство леммы.*
>
> Рассмотрим какой-то $\gamma \in \Gamma$. Пусть $\gamma(x) = y$. Из транзитивности $\exists \delta \in H : \delta y = x$. Тем самым, $\delta\gamma x = x$, то есть $\delta\gamma \in H \Rightarrow \gamma \in H$. □

Введём в качестве Γ группу всех однолистных отображений $\widehat{C} \twoheadrightarrow \widehat{C}$, и в качестве $H \leqslant \Gamma$ — подгруппу дробно-линейных отображений.

Легко видеть, что H действует на $\mathbb{C}$ транзитивно: скажем, любая точка лежит в одной орбите с ∞: $\forall z_0 \in \mathbb{C} : \frac{1}{z - z_0}\Big|_{z=z_0} = \infty$. С другой стороны, стабилизатор ∞ — автоморфизмы $\mathbb{C}$, и так как они лежат в H, то $H = \Gamma$. □

Лемма 1.9.3 (Шварц)**.** *Пусть* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *— аналитическая функция, такая, что* $f(0) = 0$*. Тогда* $\forall z \in \mathbb{D} : |f(z)| \leqslant |z|$*. При этом если* $\exists z \in \mathbb{D} \setminus \{0\} : |f(z)| = |z|$*, то* $\exists c \in \mathbb{C}\ (|c| = 1) : f(z) = cz$.

Доказательство.

- Пусть дополнительно f задана и аналитична в круге радиуса $R > 1$ с центром в 0. Рассмотрим $g(z) \coloneqq \frac{f(z)}{z}$ — она аналитична в круге $\{z \in \mathbb{C} | |z| < R\}$, так как в нуле — устранимая особенность.

  При $|z| = 1 : |g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leqslant \frac{1}{1} = 1$. Согласно принципу максимума модуля (теорема 1.2.13), $|g| \leqslant 1$ везде.

- Теперь такого предположения о f не имеется. Выберем $R > 1$. Определим $f_R(z) \coloneqq f\left(\frac{z}{R}\right)$. Согласно предыдущему пункту $\forall z \in \mathbb{D} : |f_R(z)| \leqslant |z|$. Устремляя $R \to 1$, получаем искомое неравенство.

- Осталось разобраться со случаем равенства внутри круга. Пусть $\exists z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\} : |f(z_0)| = |z_0|$. Тем самым, $g(z) \coloneqq \frac{f(z)}{z}$ достигает своё наибольшее значение внутри круга, то есть $g \equiv c = \mathrm{const}$. Подставляя z_0, получаем $|c| = 1$. □

Пусть Γ — группа всех автоморфизмов круга $\mathbb{D}$. Вычислим стабилизатор $0 \in \mathbb{D}$. Пусть $\phi \in \Gamma_0$ — аналитическая биекция, такая, что $\phi(0) = 0$. То же верно и для ϕ^{-1}.

По лемме Шварца $|\phi(z)| \leqslant |z|$, но применяя её же к ϕ^{-1}, получаем $z = \phi^{-1}(\phi(z)) \Rightarrow |z| = |\phi^{-1}(\phi(z))| \leqslant |\phi(z)|$. Тем самым, $|\phi(z)| = |z|$ во всех точках, и по лемме Шварца ϕ — гомотетия с коэффициентом c $(|c| = 1)$.

Группа преобразований Мёбиуса $\left\{w \mapsto c \cdot \frac{w-a}{1-\bar{a}w} \middle| a \in \mathbb{D}, |c| = 1\right\}$ содержит при $a = 0$ гомотетии с данными коэффициентами, и действует транзитивно на $\mathbb{D}$: любая $a \in \mathbb{D}$ переводится соответствующим преобразованием в нуль.

Упражнение 1.9.2. *Проверить, что группа Мёбиуса — действительно группа, то есть замкнута относительно умножения и взятия обратного.*

Факт 1.9.5 (Конформность однолистного отображения)**.** *Пусть* G *— область,* $z_0 \in G$*,* $\Phi : G \to \mathbb{C}$ *— однолистное отображение. Пусть* $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ *— два регулярно параметризованных гладких пути* $(\gamma_1' \neq 0, \gamma_2' \neq 0)$*, причём* $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$*. Проводя касательные к носителям* γ_1, γ_2 *в* z_0*, получаем угол, его косинус можно посчитать по формуле* $\frac{\langle \gamma_1'(t_1), \gamma_2'(t_2) \rangle}{|\gamma_1'(t_1)| \cdot |\gamma_2'(t_2)|}$.

Подействуем при помощи Φ *на данную картинку.* $\widetilde{\gamma}_j \coloneqq \Phi \circ \gamma_j$ *при* $j \coloneqq 1, 2$*. Несложно посчитать, что* $\widetilde{\gamma}_j'(t_j) = \Phi'(z_0) \cdot \gamma_j'(t_j)$*, что действительно сохраняет косинус угла.*

Такие отображения, сохраняющие углы, называют *конформными*. В силу исторических причин, говоря про однолистные отображения, часто добавляют слово «конформные», а сама наука зовётся теорией конформных отображений, хотя, как мы только что видели, однолистность сильнее.

1.10 Целые функции с заданными нулями

Определение 1.10.1 (Целая функция)**.** Аналитическая $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

1.10.1 Произведение Вейерштрасса

Пусть $f \not\equiv 0$ — целая, $N \coloneqq \{a \in \mathbb{C} | f(a) = 0\}$. По теореме единственности N не имеет предельных точек. В частности, все нули изолированы, откуда множество нулей не более, чем счётно.

Нули удобно считать с учётом кратности, получая при этом мультимножество N.

Пронумеруем $N = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, удобно считать, что $|a_0| \leqslant |a_1| \leqslant \dots$.

Теорема 1.10.1 (Вейерштрасс)**.** Существует целая функция f, мультимножество нулей которой совпадает с данным мультимножеством $N = \{a_0, a_1, \dots\}$. Считаем $|a_0| \leqslant |a_1| \leqslant \dots$. Дополнительно предполагается, что $|a_j| \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} \infty$. Это, кстати, необходимое и достаточное условие того, что у N нет предельных точек.

Доказательство. Если бы нулей было конечное количество, то многочлен $(z - a_0) \cdot \dots \cdot (z - a_N)$ подошёл бы, но нулей, увы, бесконечно. Предположим, что $0 \notin N$ (это не ограничивает общность: выкинем 0 из N, построим f, потом домножим на нужную степень z^k), и заметим, что произведение $\left(1 - \frac{z}{a_0}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{z}{a_N}\right)$ тоже решает задачу в случае конечного N.

В бесконечном же случае стоит озаботиться вопросом сходимости. Во втором семестре мы проверяли, что сходимость $\prod\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ **не к нулю** эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \log(a_j)$, где $\log : (\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]) \to \mathbb{C}$ — главная ветвь логарифма.

Рассмотрим бесконечное произведение $\prod\limits_{j=0}^{\infty} u_j(z)$, где u_j — аналитические функции. Будем говорить, что данное *произведение сходится*, если $\forall$ компакта $K \subset G : \exists M \in \mathbb{N} : \forall j \geqslant M, z \in K : u_j(z) \neq 0$, и произведение $\prod\limits_{j > N} u_j(z)$ сходится на K равномерно.

Определим *множители Вейерштрасса*:

$$u_j(z) \coloneqq \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{a_j} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_j}\right)^2 + \dots + \frac{1}{j-1}\left(\frac{z}{a_{j-1}}\right)^{j-1}\right)$$

Показатель экспоненты подогнан так, чтобы при взятии логарифма много чего сократилось (а $\log(1 - w) = -w - \frac{w^2}{2} - \frac{w^3}{3} - \dots$ при $|w| < 1$, например, потому что этот ряд совпадает с рядом для вещественного логарифма на $\mathbb{R}_{>0}$, и имеется теорема единственности)

Осталось показать, что произведение $\prod\limits_{j=0}^{\infty} u_j(z)$ сходится равномерно на компактах, и её нули — в точности a_j с учётом кратности.

Определим компакт $K \coloneqq \left\{z \in \mathbb{C} \middle| |z| \leqslant \frac{|a_N|}{2}\right\}$, и покажем, что $\prod\limits_{j > N} u_j(z)$ сходится равномерно на K.

$$u_j(z) = \exp\left(\log\left(1 - \frac{z}{a_j}\right) + \frac{z}{a_j} + \dots + \frac{1}{j-1}\left(\frac{z}{a_j}\right)^{j-1}\right) = \exp\left(-\sum_{s \geqslant j} \frac{1}{s}\left(\frac{z}{a_j}\right)^s\right)$$

При этом $\log\left(1-\frac{z}{a_j}\right)$ определён, так как $|z|<|a_j|$. Оценим

$$\left|\sum_{s\geqslant j}\frac{1}{s}\left(\frac{z}{a_j}\right)^s\right|\leqslant\left|\sum_{s\geqslant j}\left(\frac{z}{a_j}\right)^s\right|\leqslant\left|\sum_{s\geqslant j}\left|\frac{a_N}{2a_j}\right|^s\right|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^j$$

Убедимся, что ряд из логарифмов равномерно сходится:

$$\left|\sum_{j>N}\sum_{s\geqslant j}\frac{1}{s}\left(\frac{z}{a_j}\right)^s\right|\leqslant\sum_{j>N}\left(\frac{1}{2}\right)^j\leqslant 1$$

Получатся, данное произведение $\prod\limits_{j\geqslant 0}u_j(z)$ подходит. $\square$

Лекция XI

26 апреля 2024 г.

1.10.2 Упрощённый вид множителей Вейерштрасса

Если известно, насколько быстро происходит стремление $|a_j|\xrightarrow[j\to\infty]{}\infty$, то можно утверждать наличие сходимости и при множителях Вейерштрасса более простого вида.

1. Если $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{|a_n|}<\infty$, то никаких премудростей не надо: $\prod\limits_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_j}\right)$ сходится.

   Доказательство. Зафиксируем $N\in\mathbb{N}$, и рассмотрим компакт $K\coloneqq\left\{z\in\mathbb{C}\middle||z|\leqslant\frac{1}{2}a_N\right\}$. Надо доказать, что $\sum\limits_{j\geqslant N}\log\left(1-\frac{z}{a_j}\right)$ сходится.

   Под логарифмом стоят выражения вида $1-t$, где $|t|\leqslant\frac{1}{2}$. Разложим в ряд и оценим: $|\log(1-t)|=\left|t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\ldots\right|=\left|t\left(1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+\ldots\right)\right|\leqslant|t|\cdot C$, где $C\coloneqq\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(1/2)^{n-1}}{n}$. Этой оценки достаточно: $\sum\limits_{j\geqslant N}\left|\log\left(1-\frac{z}{a_j}\right)\right|\leqslant\sum\limits_{j\geqslant N}C\left|\frac{z}{a_j}\right|$, что сходится равномерно по $z\in K$. $\square$

2. Если $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{|a_n|^2}<\infty$, то хватит первого члена при разложении логарифма в ряд: $\prod\limits_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_j}\right)e^{\frac{z}{a_j}}$ сходится.

   Доказательство. Зафиксируем $N\in\mathbb{N}$, и рассмотрим компакт $K\coloneqq\left\{z\in\mathbb{C}\middle||z|\leqslant\frac{1}{2}a_N\right\}$. Надо доказать, что $\sum\limits_{j\geqslant N}\log\left(1-\frac{z}{a_j}\right)+\frac{z}{a_j}$ сходится.

   Разложим в ряд и оценим: $|\log(1-t)+t|=\left|\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{4}+\ldots\right|=t^2\left|\frac{1}{2}+\frac{t}{3}+\frac{t^2}{4}+\ldots\right|\leqslant t^2\cdot C$, где $C\coloneqq\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{(1/2)^n}{n+2}$. Этой оценки достаточно: $\sum\limits_{j\geqslant N}\left|\log\left(1-\frac{z}{a_j}\right)\frac{z}{a_j}\right|\leqslant\sum\limits_{j\geqslant N}C\left|\frac{z}{a_j}\right|^2$, что сходится равномерно по $z\in K$. $\square$

Замечание. Понятно, что целая функция с данным мультимножеством нулей не единственна — можно взять любую другую целую функцию без нулей (скажем, экспоненту), и домножить на неё.

Следствие 1.10.1. *Пусть $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — целая функция с бесконечным числом нулей, и g — произведение Вейерштрасса по нулям функции f (неважно, общего вида, или с упрощёнными множителями).*

Тогда $\exists$ целая $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$: $f=ge^h$.

Доказательство. $\frac{f}{g}$ — целая функция (там, где у g нули, у f — нули той же кратности, поэтому все особенности устранимы). По той же причине $\forall z \in \mathbb{C} : \frac{f}{g}(z) \neq 0$. Тем самым, у неё есть ветвь логарифма, выберем какую-то ветвь h, она как раз подходит. □

Пусть G — область, f аналитична в G кроме некоторого множества полюсов. Такая функция называется *мероморфной в* G. Так как полюса по определению изолированы, то их не более, чем счётное количество.

Мероморфную в $\mathbb{C}$ функцию называют *мероморфной* (без указания области).

Следствие 1.10.2. *f мероморфна $\iff \exists$ целые $g_1, g_2 : f = \frac{g_1}{g_2}$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\frac{1}{f}$. Она не равна тождественно нулю.

Пусть $g_2 \coloneqq g$ — произведение Вейерштрасса по нулям функции $\frac{1}{f}$, $g_1 \coloneqq g \cdot f$ — целая функция. □

1.10.3 Разложение синуса в произведение

Разложим синус в произведение, построив произведение Вейерштрасса по его нулям. А где нули синуса? $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$.

$$\sin z = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1 \iff z \in \{j \cdot \pi | j \in \mathbb{Z}\}$$

Как видим, сумма обратных квадратов нулей сходится, поэтому можно записать произведение Вейерштрасса в виде

$$z \cdot \prod_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{j\pi}\right) e^{\frac{z}{j\pi}}$$

где произведение берётся в порядке возрастания модулей j. Иными словами,

$$z \cdot \lim_{N \to \infty} \prod_{\substack{|j| \leqslant N \\ j \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{j\pi}\right) e^{\frac{z}{j\pi}} = z \cdot \lim_{N \to \infty} \prod_{j=1}^{N} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right) = z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$$

Как мы выяснили, $\exists$ целая $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \sin(z) = e^{h(z)} z \prod\limits_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$

Факт 1.10.1. *$h \equiv 0$ подойдёт (понятно, что если это правда, то $h \equiv 2\pi i k$ для $k \in \mathbb{Z}$ тоже подойдёт).*

Доказательство.

> *Замечание* (О логарифмической производной). Пусть ϕ — аналитическая функция, как известно, её логарифмическая производная $\frac{\phi'}{\phi}$. Как видно из записи, она не зависит от того, какая ветвь логарифма где взята.
>
> Если $\phi = \phi_1 \cdot \ldots \cdot \phi_k$, то несложно посчитать, что $\frac{\phi'}{\phi} = \frac{\phi_1'}{\phi_1} + \dots + \frac{\phi_n'}{\phi_n}$. Утверждается, что формула сохраняется и для бесконечного произведения.
>
> Пусть произведение $\prod\limits_{j=1}^{\infty} \phi_j(z)$ сходится равномерно на любом компакте, не содержащем нулей функций ϕ_j. Пусть K — такой компакт, то есть $(\phi_1 \cdot \ldots \cdot \phi_n)(z) \rightrightarrows \phi(z)$ равномерно. Тогда $(\phi_1 \cdot \ldots \cdot \phi_N)'(z) \rightrightarrows \phi'(z)$ на этом же компакте, и как следствие, $\frac{\phi_1'(z)}{\phi_1(z)} + \dots + \frac{\phi_N'(z)}{\phi_N(z)} = \frac{(\phi_1 \cdot \ldots \cdot \phi_N)'(z)}{(\phi_1 \cdot \ldots \cdot \phi_N)(z)} \rightrightarrows \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$

- Возьмём логарифмическую производную обеих частей равенства $\sin(z) = e^{h(z)} \cdot z \cdot \lim\limits_{N\to\infty} \prod\limits_{\substack{|j|\leqslant N \\ j\neq 0}} \left(1 - \frac{z}{j\pi}\right)$:

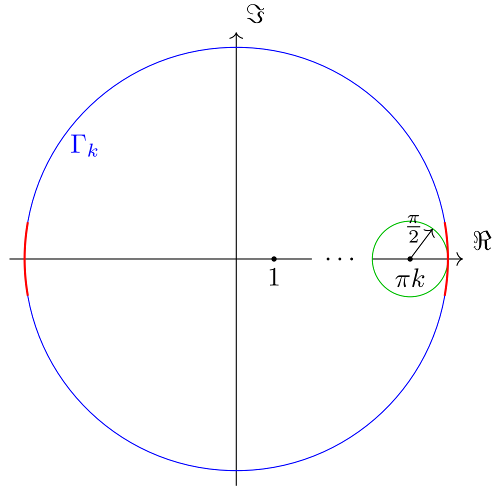
$$\frac{\cos z}{\sin z} = h'(z) + \frac{1}{z} - \lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{|j|\leqslant N \\ j\neq 0}} \frac{1}{j\pi} \frac{1}{1 - \frac{z}{j\pi}} = h'(z) + \frac{1}{z} + \lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{|j|\leqslant N \\ j\neq 0}} \frac{1}{z - j\pi}$$

  Отлично, у нас имеется равномерная сходимость на компактах, продифференцируем ещё раз:

$$1 - \operatorname{ctg}(z)^2 = h''(z) - \frac{1}{z^2} - \lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{|j|\leqslant N \\ j\neq 0}} \frac{1}{(z - j\pi)^2}$$

- Проведём окружность Γ_k с центром в нуле, и радиусом $\pi\left(k + \frac{1}{2}\right)$, и докажем, что h'' ограничена на Γ_k некоторой константой C, не зависящей от k.

  Понятно $\frac{1}{|z|^2} \leqslant \frac{4}{\pi^2}$, оценим при $z \in \Gamma_k$: $\frac{1}{|z - j\pi|^2} \leqslant \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2} - |j|\right)^2 \pi^2}$:



  Осталось оценить котангенс:

$$\operatorname{ctg}(z) = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

  Раскладывая $z = x + iy$, получаем

$$|\operatorname{ctg}(z)| = \left|\frac{e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}}{e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}}\right|$$

  Выберем $\varepsilon < \frac{\pi}{4}$, и оценим котангенс вблизи вещественной оси (на красных дужках Γ_k) при помощи периодичность и непрерывность котангенса в круге радиуса 2ε, там он ограничен, и при $|y| \geqslant \varepsilon$ на синих дужках:

$$\left|\frac{e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}}{e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}}\right| \leqslant \frac{e^{y} + e^{-y}}{|e^{-y} - e^{y}|} = \frac{e^{y} + e^{-y}}{e^{|y|} - e^{-|y|}} = \frac{e^{2|y|} + 1}{e^{2|y|} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{2|y|} - 1} \leqslant 1 + \frac{2}{e^{2\varepsilon} - 1}$$

- Тем самым, на Γ_k: h'' ограничена C, по принципу максимума h'' ограничена внутри круга этой же константой, значит, h'' вообще ограничена.

  Согласно теореме Лиувилля, $h'' = \text{const}$, тем самым, $h(z) = A + Bz + Cz^2$ для некоторых $A, B, C \in \mathbb{C}$.

- Подставим $h(z) = A + Bz + Cz^2$:

$$\frac{\cos z}{\sin z} = B + 2Cz + \lim_{N\to\infty} \sum_{|j|\leqslant N} \frac{1}{z - j\pi}$$

  Здесь все слагаемые 2π-периодичны, кроме $2Cz$. Вывод один: $C = 0$

- Теперь подставим $\frac{\sin z}{z} = e^{A+Bz} \prod\limits_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$. В силу чётности $B = 0$.

- Обозначим $D \coloneqq e^A$. $\frac{\sin z}{z} = D \prod\limits_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$. Сопоставляя значения в 0, получаем $D = 1$. $\square$

Ура,

$$\boxed{\sin z = z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)}$$

Попутно мы выяснили, что

$$\boxed{\operatorname{ctg}(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{|j|\leqslant N} \frac{1}{z - j\pi} = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - j^2\pi^2}}$$

Ещё немного преобразуем:

$$\frac{\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}}{2z} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - j^2\pi^2}$$

Устремим в этой формуле $z \to 0$. Слева оказывается $\frac{z\cos z - \sin z}{2z^2 \sin z} = \frac{z - \frac{z^3}{2} - z + \frac{z^3}{6} + \mathcal{O}(z^5)}{2z^3 + \mathcal{O}(z^5)} = -\frac{1}{6} + o(1)$, а справа $-\frac{1}{\pi^2} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} + o(1)$, образуя знаменитую формулу, выведенную Эйлером

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

1.10.4 Γ-функция Эйлера

Хотим обобщить факториал в комплексной плоскости.

Построим аналитическую функцию f в некоторой области G (где G хочется побольше), такую, что

1. $z \in G \Rightarrow z + 1 \in G$.
2. $f(z+1) = zf(z)$ — эта формула отличается от той, что у факториала, сдвигом на 1. В таком виде ответ будет более каноничным.
3. $1 \in G$ и $f(1) = 1$.

Для удовлетворяющей таким условиям функции f можно заметить, что $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = (n-1)!$.

Дополнительно потребуем $\forall z \in G : f(z) \neq 0$, например, чтобы можно было спокойно писать $z = \frac{f(z+1)}{f(z)}$.

К сожалению, не всё возможно в этой жизни. Заведомо $0 \notin G$: если $0 \in G$, то $f(1) = f(0+1) = 0 \cdot f(0) = 0$. Далее первое условие влечёт, что $-1, -2, -3, \ldots \notin G$.

Положим $G \coloneqq \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, и построим в этой области функцию с указанными свойствами, имеющую простые полюса в выколотых точках. Она не единственна, но сейчас мы увидим наиболее естественный кандидат.

Пусть f — такая. Положим $g \coloneqq \frac{1}{f}$ — целая функция с простыми нулями в $\{0, -1, -2, \dots\}$. Построим g, используя множители Вейерштрасса (h — какая-то целая):

$$g(z) = ze^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

Теперь удовлетворим функциональное уравнение: $g(z+1) = \frac{g(z)}{z}$.

$$g(z) = ze^{h(z)} \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{n+z}{n} e^{-\frac{z}{n}}$$

$$g(z+1) = (z+1)e^{h(z+1)} \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1+n+z}{n} e^{-\frac{z}{n}-\frac{1}{n}}$$

$$\frac{g(z+1)}{g(z)} = \frac{z+1}{z} e^{h(z+1)-h(z)} \lim_{N\to\infty} \frac{N+1+z}{1+z} e^{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\dots-\frac{1}{N}+\log N} e^{-\log N}$$

Как доказывалось во II семестре, $1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{N} - \log N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \gamma$ — *постоянная Эйлера — Маскерони*. Итак, от функции h хочется свойства

$$\frac{1}{z} = \frac{z+1}{z} e^{h(z+1)-h(z)} \lim_{N\to\infty} \frac{N+1+z}{N(1+z)} e^{-\gamma} = \frac{1}{z} e^{h(z+1)-h(z)} e^{-\gamma}$$

Самым простым решением будет взять линейную функцию $h(z) = \gamma z$. Получили

$$g(z) = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

Проверим, что $g(1) = 1$:

$$g(1) = e^{\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} = e^{\gamma} \lim_{N\to\infty} \frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (N+1)}{N!} e^{-1-\frac{1}{2}-\dots-\frac{1}{N}} =$$

$$= e^{\gamma} \lim_{N\to\infty} \frac{(N+1)!}{N! \cdot N} e^{-1-\frac{1}{2}-\dots-\frac{1}{N}+\log N} = e^{\gamma} \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{N} e^{-1-\frac{1}{2}-\dots-\frac{1}{N}+\log N} = 1$$

Чудесным образом ничего подкручивать не пришлось.

Лекция XII

3 мая 2024 г.

Итак, определили

$$\Gamma(z) \overset{def}{=} \frac{1}{z} e^{-\gamma z} \frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}} \tag{$*$}$$

Замечание. Пусть ϕ — целая функция с периодом 1 и $\phi(1) = 1$. Тогда $\Gamma \cdot \phi$ тоже подходит, как функция, удовлетворяющая трём условиям из (подраздел 1.10.4), однако, при некотором дополнительном условии мы можем получить «единственность» (см. теорема 1.10.2).

Немного преобразовав выражение для гамма-функции, можно получить следующее:

$$\Gamma(z) = e^{-\gamma z} \frac{1}{z} \lim_{N\to\infty} \frac{N!}{(1+z) \cdot \ldots \cdot (N+z)} e^{z\left(1+\dots+\frac{1}{N}\right)} = \lim_{N\to\infty} \frac{N! \cdot e^{z \log N}}{z \cdot (1+z) \cdot \ldots \cdot (N+z)} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{N! \cdot N^z}{z(1+z)\dots(N+z)}$$

Также имеется так называемая *формула дополнения*:

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{1}{z^2}\frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)} = -\frac{1}{z}\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Часто её записывают немного в другом виде, домножив на z, и воспользовавшись функциональным уравнением: $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$. Кстати, отсюда видно, чему равен «факториал» от $-\frac{1}{2}$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$$

Определим $g(z) \coloneqq \frac{1}{\Gamma(z)}$, это целая функция с нулями в целых неположительных точках. Значит, у g имеется непрерывная ветвь логарифма в $\mathbb{C} \setminus (-\infty; 0]$. Одна из них равна

$$\log g(z) = \log z + \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right)$$

Про эту ветвь даже можно утверждать, что она главная, так как у неё, как и у гамма-функции, значения на вещественной оси вещественные. Дифференцируя $\log g(z)$, получаем

$$(\log g(z))' = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{z}{n}} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n}\right)$$

Таким образом, $(\log\Gamma(z))' = -\frac{1}{z} - \gamma - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n}\right)$, и

$$(\log\Gamma(z))'' = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^2} \tag{$\star$}$$

Следствие 1.10.3. *На* $\mathbb{R}_{>0}$*:* $\log\Gamma(z)$ *есть выпуклая функция.*

Теорема 1.10.2. Пусть ϕ — непрерывная положительная функция на $\mathbb{R}_{>0}$, $\phi(1) = 1$, и ϕ удовлетворяет функциональному уравнению: $\forall x \in \mathbb{R}_{>0} : x\phi(x) = \phi(x+1)$. Если $\log\phi$ выпукла, то $\forall x > 0 : \phi(x) = \Gamma(x)$.

Доказательство. В положительных целых точках $\phi(n) = (n-1)!$, и достаточно доказать, что $\phi(x) = \Gamma(x)$ при всех $x \in (0,1)$, функциональное уравнение влечёт равенство в остальных точках.

Определим $g(x) \coloneqq \log\phi(x)$, тогда функциональное уравнение переписывается в виде $g(x+1) - g(x) = \log x$. Из выпуклости $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1, \forall x \in (0,1)$:

$$\underbrace{\frac{g(n-1)-g(n)}{(n-1)-n}}_{\log(n-1)} \leqslant \frac{g(n+x)-g(n)}{(n+x)-n} \leqslant \underbrace{\frac{g(n+1)-g(n)}{(n+1)-n}}_{\log(n)}$$

Преобразуем средний член неравенства:

$$g(x+n) - g(n) = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(g(x+k+1) - g(x+k)\Big) + g(x) - g(n) = \sum_{k=0}^{n-1}\log(x+k) + g(x) - \log\left((n-1)!\right)$$

Выражая $g(x)$, получаем

$$x\log(n-1) - \sum_{k=0}^{n-1}\log(x+k) + \log((n-1)!) \leqslant g(x) \leqslant x\log(n) - \sum_{k=0}^{n-1}\log(x+k) + \log((n-1)!)$$

Разность между левой и правой частями $x\log(n-1) - x\log(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Понятно, что $g(x) = \log\Gamma(x)$ подходит, так как удовлетворяет посылке теоремы, и так как разность между пределами стремится к нулю, то в пересечении всего одна точка. Тем самым, $g(x)$ определена однозначно. □

1.10.5 Эйлеров интеграл

Определим
$$\Psi(z)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t,\quad z\in\mathbb{C}$$

Когда Ψ определена, а интеграл сходится? Разложим $z=x+iy$, где $x,y\in\mathbb{R}$. Теперь $\Psi(z)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}t^{iy}\,\mathrm{d}t$. На $+\infty$ экспонента мажорирует остальные члены, в нуле имеется особенность, и интеграл суммируем, если $x>0$.

Тем самым, $\Psi(z)$ определена при $\Re z>0$.

Теорема 1.10.3. $\Psi(z)=\Gamma(z)$ при $z>0$.

Доказательство.

- Ясно, что $\Psi(z)>0$ при $z\in\mathbb{R}_{>0}$.
- Ψ аналитична при $\Re z>0$, так как можно продифференцировать под знаком интеграла: производная суммируема.
- $\Psi(1)=\int\limits_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t=(-e^{-t})\big|_0^\infty=1$.
- Убедимся, интегрируя по частям, что $x\Psi(x)=\Psi(x+1)$
$$\Psi(x+1)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^x\,\mathrm{d}t=-\int\limits_0^\infty t^x\,\mathrm{d}(e^{-t})=-\left(t^xe^{-t}\right)\big|_0^\infty+\int\limits_0^\infty xt^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t=x\Psi(x)$$
- Убедимся, что $\log\Psi$ выпукла на вещественной оси: $\forall x,y\in\mathbb{R}_{>0},\forall\alpha,\beta\in[0,1],\alpha+\beta=1$:
$$\log\Psi(\alpha x+\beta y)\leqslant\alpha\log\Psi(x)+\beta\Psi(y)$$
$$\Psi(\alpha x+\beta y)\leqslant\Psi(x)^\alpha\Psi(y)^\beta$$
$$\int\limits_0^\infty t^{\alpha x+\beta y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^\infty(t^{x-1})^\alpha\cdot(t^{y-1})^\beta e^{-t}\,\mathrm{d}t$$
что верно по неравенству Гёльдера.
- Согласно теореме единственности (теорема 1.10.2), $\Psi(z)=\Gamma(z)$ при $\Re z>0$. □

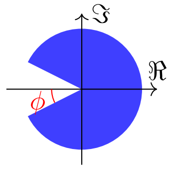
В частности, получаем интеграл Гаусса:
$$\sqrt{\pi}=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{-\frac12}\,\mathrm{d}t=\left\|\begin{matrix}t=x^2\\ \mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x\end{matrix}\right\|=2\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

1.10.6 Формула Стирлинга

На первом курсе мы доказали, что $\exists c\in\mathbb{R}: n!\sim c\sqrt{n}n^ne^{-n}$. Так как гамма-функция определена со сдвигом, то будем преобразовывать выражение для $(n-1)!$:

$$(n-1)!\sim c\sqrt{n-1}(n-1)^{n-1}e^{-n+1}=ce\frac{1}{\sqrt{n-1}}(n-1)^ne^{-n}=$$
$$=ce\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\left(1-\frac1n\right)^nn^ne^{-n}\sim c\frac{1}{\sqrt{n}}n^ne^{-n}$$

Теорема 1.10.4. Пусть $\phi > 0$. Для $\{z \in \mathbb{C} | \arg z \in (-\pi + \phi, \pi - \phi)\}$, то есть из области без угла:



$$\log(\Gamma(z)) = \log\sqrt{2\pi} + \log\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} - z + z\log z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

Здесь логарифм и корень определены в $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, вещественные на вещественной оси. Потенцируя, получаем $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}e^{-z}e^{z\log z}$

Доказательство. Будем использовать ($\star$). Положим $\phi(t) \coloneqq \frac{1}{(t+z)^2}$, и приблизим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\phi(n)$ интегралом. Оценим, что при замене погрешность не очень большая:

$$\phi(n) - \int\limits_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\phi(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\phi(n) - \phi(t))\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}(2\phi(n) - \phi(n+t) - \phi(n-t))\,\mathrm{d}t$$

Тем самым, $\phi(n) = \int\limits_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\phi(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}(2\phi(n) - \phi(n+t) - \phi(n-t))\,\mathrm{d}t$, и согласно ($\star$):

$$(\log\Gamma(z))'' = \frac{1}{z^2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\frac{1}{(t+z)^2}\,\mathrm{d}t}_{\int\limits_{1/2}^{\infty}\frac{1}{(t+z)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1/2+z}} + \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{(n+z)^2} - \frac{1}{(n+z+t)^2} - \frac{1}{(n+z-t)^2}\right)\mathrm{d}t$$

Дважды почленно возьмём первообразную обеих частей, пока не заботясь вопросами сходимости:

$$(\log\Gamma(z))' \stackrel{?}{=} A - \frac{1}{z} + \log\left(z + \frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{n+z+t} + \frac{1}{n+z-t} - \frac{2}{n+z}\right)\mathrm{d}t$$

$$\log(\Gamma(z)) \stackrel{?}{=} B + Az - \log z + \log\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right) - z + \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\log\frac{(n+z)^2 - t^2}{(n+z)^2}\,\mathrm{d}t$$

Так как z бегает в области без угла, то $|n+z| \geqslant n\sin(\phi)$. Таким образом, $\log\left(1 - \frac{t^2}{(n+z)^2}\right)$ оценивается сверху, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\log\left(1 - \frac{t^2}{(n+z)^2}\right)$ сходится абсолютно и равномерно. В частности, сходится равномерно на компактах, значит, его можно дважды продифференцировать почленно, получится $(\log\Gamma(z))''$. Вопросы сходимости решены, $\stackrel{?}{=}$ можно заменить на $=$. Оценим остаток:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\log\left(1 - \frac{t^2}{(n+z)^2}\right)\mathrm{d}t \leqslant C_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+|z|)^2} \leqslant C_2\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}s}{(s+|z|)^2} \leqslant C_3\frac{1}{|z|}$$

Заметим, что $\log\left(z + \frac{1}{2}\right) - \log(z) = \log\left(1 + \frac{1}{2z}\right) = \frac{1}{2z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$, и преобразуем

$$\left(z + \frac{1}{2}\right)\log\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + z\log z + \frac{1}{2}\log z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

Тем самым,

$$\log(\Gamma(z)) = B + Az - \frac{1}{2}\log z + z\log z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

Осталось выяснить, чему равны константы A и B. Так как мы знаем для натуральных n, что $\Gamma(n) = (n-1)! \sim ce^{-n}\frac{1}{\sqrt{n}}n^n$ при $n \to \infty$, то $A = -1$.

Теперь запишем формулу дополнения $\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin(\pi z)}$. Так как Γ вещественна на вещественной оси, или из интегральной формулы, видно, что $\Gamma(z) = \overline{\Gamma(\overline{z})}$. Тем самым, при $y \in \mathbb{R}$:

$$|\Gamma(iy)|^2 = -\frac{\pi}{iy\sin(\pi iy)} = -\frac{2\pi}{y\left(e^{-y\pi} - e^{y\pi}\right)} \sim \frac{2\pi}{ye^{y\pi}}$$

С другой стороны, $\Gamma(iy) \sim e^B e^{-iy} e^{-\frac{1}{2}\left(\log y + \frac{\pi}{2}i\right)} e^{iy\left(\log y + \frac{\pi}{2}i\right)}$, откуда $|\Gamma(iy)| = e^B\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{\pi}{2}y}$. Тем самым, $e^{2B} = 2\pi$, и так как $B \in \mathbb{R}$, то $B = \log\sqrt{2\pi}$ □

Лекция XIII

10 мая 2024 г.

1.11 Аналитическое продолжение

Ещё с первого курса мы знаем, что аналитическая функция однозначно задаётся своими значениями на множестве, содержащем предельную точку. Допустим, мы знаем функцию в маленьком кусочке $\mathbb{C}$, пусть даже в маленькой открытой области. А как (и можно ли) узнать её «целиком»?

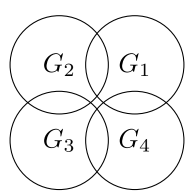
Примеры.

- Ряд $1 + z + z^2 + \ldots$ сходится в единичном круге $\mathbb{D}$, но на самом деле сумма равна $\frac{1}{1-z}$, и эта функция аналитична в множестве $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{1\}$.
- На предыдущей лекции мы поняли, что $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t$, где интеграл сходится при $\Re z > 0$. А про саму Γ мы знаем, что она определена в $\mathbb{C} \setminus \{-n | n \in \mathbb{N}_0\}$.
- Про ζ-функцию Римана $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ легко показать, что ряд сходится при $\Re s > 1$. Тем не менее, её тоже можно продолжить почти на всю комплексную плоскость ($\mathbb{C} \setminus \{1\}$).

Пусть $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ — области. Пусть $f_1 : G_1 \to \mathbb{C}$ аналитична, и предположим, что $G_1 \cap G_2$ непусто.

Определение 1.11.1 (Аналитическое продолжение f_1 в область G_2)**.** Такая аналитическая $f_2 : G_2 \to \mathbb{C}$, что $f_1\big|_{G_1\cap G_2} = f_2\big|_{G_1\cap G_2}$.

Здесь существенно, что не факт, что $G_1 \subset G_2$. Так, при продолжении функции с G_1 на G_2, с G_2 на G_3, с G_3 на G_4, а с G_4 на G_1 может получиться так, что на пересечении $G_1 \cap G_4$: $f_1 \neq f_4$.

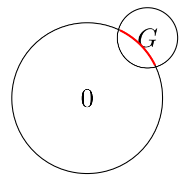


Также может не наблюдаться связности пересечения $G_1 \cap G_2$.

Несложно придумать функцию, которая не продолжается за пределы данной области (скажем, круга $\mathbb{D}$).

Теорема 1.11.1 (Адамар, «естественная граница аналитичности»)**.** Нельзя продолжить $f(z) = \sum\limits_{n=1}^\infty z^{n!}$ ни в какую область G, такую, что $G \setminus \overline{\mathbb{D}}$ непусто.

Доказательство. Пусть f продолжается в некоторую область G, как в условии.



Значит, на выделенной дуге (какой-то дуге из пересечения) f должна быть непрерывна, и для любой ζ на дуге должен существовать предел $\lim\limits_{r\to 1-0} f(r\zeta)$. Запишем $\zeta = e^{2\pi i\theta}$, и выберем такое ζ, чуть подвинув в случае надобности, что $\theta \in \mathbb{Q}$. Пусть $\theta = \frac{k}{l}$, где $k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N}$. Теперь

$$f(r\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{n!} e^{2\pi i\theta n!} = \sum_{n=0}^{l} r^{n!} e^{2\pi i\theta n!} + \sum_{n=l+1}^{\infty} r^{n!} e^{2\pi i \frac{k}{l} n!} = \sum_{n=0}^{l} r^{n!} e^{2\pi i\theta n!} + \sum_{n=l+1}^{\infty} r^{n!}$$

Так как $r^{n!} \underset{r\to 1-0}{\longrightarrow} 1$, то сумма расходится. Тут, кстати, можно применить теорему Леви: $\sum\limits_{n=l+1}^{\infty} r^{n!}$ — интеграл от $r^{n!}$ по $n \in \mathbb{N}$ и считающей мере — сходится к сумме единиц $\sum\limits_{n=l+1}^{\infty} 1$ при $r \to \infty$. Впрочем, и без неё всё видно. $\square$

Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — целая функция. Рассмотрим другую функцию $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$. Она целая: так, если $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, то новая функция задаётся рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \overline{a}_n z^n$.

Следствие 1.11.1. *Если $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — целая, и $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, то $\overline{f(\overline{z})} = f(z)$ по теореме единственности.*

Если же $f : (G \subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, то $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ задана и аналитична в $\{\overline{z} | z \in G\}$. Это видно из того, что если $w_0 \in \{\overline{z} | z \in G\}$, то $\overline{w}_0 \in G$, и можно разложить $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - \overline{w}_0)^n$ вблизи $\overline{w}_0$, откуда $\overline{f(\overline{z})} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \overline{a}_n (z - w_0)^n$.

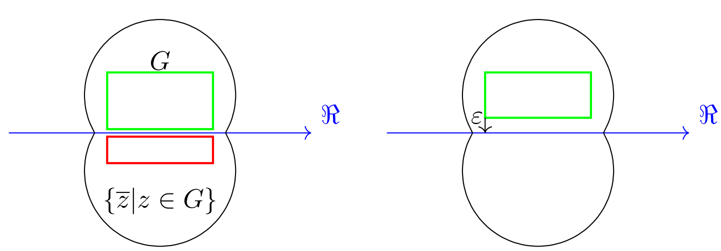
1.11.1 Принцип симметрии Римана — Шварца

Теорема 1.11.2. Пусть область $G \subset \mathbb{C}_+ \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C} | \Im z > 0\}$, такова, что $\overline{G} \cap \mathbb{R} =: I$ — отрезок ненулевой длины. Пусть $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ аналитична в G, непрерывна в $\overline{G}$, и $f\left(\overline{G} \cap \mathbb{R}\right) \subset \mathbb{R}$.

Пусть $\widetilde{G} \coloneqq G \cup I \cup \{\overline{z} | z \in G\}$. Тогда $\exists! \widetilde{f} : \widetilde{G} \to \mathbb{C} : \widetilde{f}$ — аналитическое продолжение f на $\widetilde{G}$, и $\widetilde{f}$ задаётся формулой $\forall z \in G \cup I : \begin{cases} \widetilde{f}(z) = f(z) \\ \widetilde{f}(\overline{z}) = \overline{f(z)} \end{cases}$.

Доказательство. Очевидно, что так определённая $\widetilde{f}$ аналитична в $\{\overline{z} | z \in G\}$, и надо убедиться, что аналитичность имеет место на I. Несложно проверить, что $\widetilde{f}$ непрерывна на I: $\widetilde{f}\big|_{\overline{G}} = f\big|_{\overline{G}}$ непрерывна и $\widetilde{f}\big|_{\{\overline{z} | z \in \overline{G}\}}$ тоже, а $\overline{G} \cup \left\{\overline{z} | z \in \overline{G}\right\}$ — фундаментальное покрытие $\widetilde{G}$.

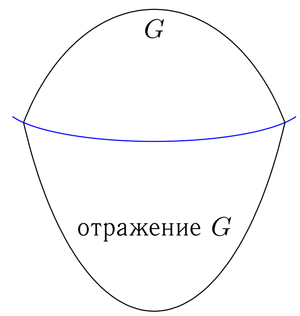
Теперь проверим, что дифференциальная форма $\widetilde{f}(z)\,\mathrm{d}z$ замкнута в $\widetilde{G}$, показав тем самым аналитичность $\widetilde{f}$.



Всякий прямоугольник либо лежит в $G \cup I$, либо в $\{\overline{z} | z \in G\} \cup I$, либо разбивается в сумму двух таких. Интеграл формы по такому прямоугольнику равен нулю, так как можно чуть-чуть отойти от вещественной оси, и использовать непрерывность $\widetilde{f}$. $\square$

В данной формулировке принцип симметрии имеет не наибольшую общность. Во-первых, достаточно требовать, чтобы $\overline{G} \cap \mathbb{R}$ было не отрезком, а лишь содержало некоторый отрезок.

Во-вторых, в качестве кривой, относительно которой происходит отражение, может выступать не вещественная прямая, а ещё что-то. В этом случае условия вещественности f на вещественной оси заменяются на некоторые «условия сопряжения», которые получаются из условий вещественности применением однолистного отображения, переводящего кривую отражения в $\mathbb{R}$.



1.11.2 Методы аналитического продолжения

«В этом месте обычно делают такой заголовок, но собственно методов там и нет, кроме одного».

1. Переразложение в степенной ряд.

   Пусть $z_0, z_1 \in G$, $f : G \to \mathbb{C}$ аналитична. Тогда можно переразложить f в ряд точке z_1, и может так получиться, что радиус сходимости будет больше, чем $\mathrm{dist}(z_0, \partial G)$, то есть получится существенное продолжение f. Скажем, если $1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}$ $(z_0 = 0)$ переразложить в ряд в $z_1 = -\frac{1}{2}$, то радиус сходимости будет уже $\frac{3}{2}$.

2. Продолжение вдоль цепочки областей.

   Пусть $G_1, \ldots, G_n$ — области, $G_j \cap G_{j+1}$ непусты и связны, и заданы $f_1, \ldots, f_n$, где $f_j : G_j \to \mathbb{C}$ аналитична. Конечно, предполагается согласованность $f_j\big|_{G_j \cap G_{j+1}} = f_{j+1}\big|_{G_j \cap G_{j+1}}$. Говорят, что f_n является продолжением f_1 вдоль цепочки областей $G_1, \ldots, G_n$.

3. Продолжение вдоль пути.

   На самом деле, этот метод эквивалентен предыдущему.

   Определение 1.11.2 (Элемент аналитической функции в точке z_0)**.** Пара (f, B_{z_0}), где B_{z_0} — открытый круг с центром в z_0 и $f : B_{z_0} \to \mathbb{C}$ аналитична.

   Пусть f определена и аналитична в точке z_0. Её можно разложить в ряд с центром в точке z_0, и рассмотреть радиус сходимости.

   Определение 1.11.3 (Естественный элемент в точке z_0)**.** Такой элемент (f, B_{z_0}), что B_{z_0} — круг максимально возможного радиуса.

   Центр и радиус круга B_{z_0} элемента (f, B_{z_0}) называются *центром и радиусом элемента.* Далее везде считаем, что у f есть особенности где-то в $\mathbb{C}$, значит, все круги из естественных элементов имеют конечный радиус. Иначе f целая, и в любой точке естественный элемент определён на всей плоскости.

   Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ — путь без задержек (нет невырожденных отрезков, на которых путь постоянен). Условие необязательное, но его всегда можно добиться, стягивая отрезки, на которых путь постоянен, до одной точки.

Пусть $A = \gamma(a), B = \gamma(b)$. Не исключено, что $A = B$ — путь может иметь самопересечения и прочее.

Пусть $\forall t \in [a, b]$ задан естественный элемент $(f_t, B_{\gamma(t)})$ аналитической функции. Эти элементы должны быть некоторым образом связаны: пусть $\phi : [a, b] \to \mathbb{C}$ — *связывающая функция*, такая, что $\forall t \in [a, b] : \exists \delta > 0 : |s - t| < \delta \Rightarrow \phi(s) = f_t(\gamma(s))$.

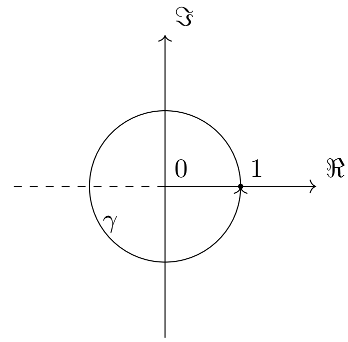
Замечание. Такая ϕ автоматически непрерывна: из условия следует непрерывность в каждой точке: γ непрерывна, а f_t даже аналитична.

Говорят, что $(f_b, B_{\gamma(b)})$ — *аналитическое продолжение элемента* $(f_a, B_{\gamma(a)})$ *вдоль пути* γ.

При продолжении некоторого элемента вдоль разных путей получится большой набор элементов, заметающих некоторую область. Совокупность таких элементов называется *полной аналитической функцией*, а объединение всех кругов, составляющих элементы — *естественной областью определения аналитической функции*.

Пример. Пусть $f(z) = \sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log(z)}$, где в качестве log выбрана главная ветвь логарифма (вещественная на вещественной оси, определённая на $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$).

Естественный элемент f в точке 1 имеет радиус 1 — расстояние до ближайшей особенности, которая имеет место в нуле.



Продолжим f вдоль пути $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$, где $t \in [0, 1]$. Понятно, что связывающая точка в точке t должна принимать одна из значений корня $\gamma(t)$, подойдёт $\phi(t) = e^{2\pi i \frac{t}{2}}$. Продлевая f вдоль пути γ, получим ветвь корня, равную -1 в 1. Обходя вдоль пути γ ещё раз (продлевая вдоль пути $\gamma \oplus \gamma$), мы получим старую ветвь корня.

Если бы f была корнем кубическим, то надо было бы три раза обойти вокруг нуля, чтобы получить прежнюю ветвь корня. А у логарифма всякий раз при обходе вдоль нуля аргумент будет увеличиваться на $2\pi i$, и при продолжении по пути ненулевого индекса относительно нуля мы не получим прежнюю ветвь.

Утверждение 1.11.1. *Отношение «элемент аналитической функции β есть продолжение элемента α вдоль некоторого пути» является отношением эквивалентности.*

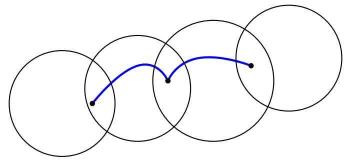
Доказательство. Очевидно. □

Имея в виду это утверждение, получаем, что полная аналитическая функция — класс эквивалентных элементов. Полная аналитическая функция, построенная по корню из примера — набор функций вида $e^{\frac{1}{2}\log z}$, и значения зависят от того, какая ветвь логарифма выбрана, в каждой точке — два варианта. Естественная область определения корня — $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Утверждение 1.11.2. *Методы продолжения вдоль цепочки областей и вдоль пути эквивалентны.*

В одну сторону понятно, как сводиться: пусть есть цепочка областей $G_1, G_2, \ldots, G_n$, выберем по точке $t_j \in G_j \cap G_{j+1}$, и соединим последовательные точки t_j и t_{j+1} путём, проходящим по области

G_{j+1}, получив путь от G_1 до G_n:



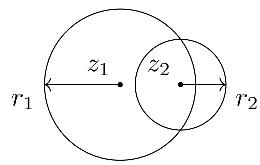
В другую сторону хочется нарисовать подобную картинку, но будем чуть сложнее, так как путь может иметь самопересечения, и надо области получить такими, чтобы соседние пересекались, и содержали нужный отрезок пути в себе.

Лемма 1.11.1. *Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ — путь без задержек, и $(f_t, B_{\gamma(t)})$ — естественные элементы в точках $\gamma(t)$ соответственно, реализующие аналитическое продолжение элемента (f_a, B_A) в элемент (f_b, B_B) со связывающей функцией ϕ.*

Пусть $r(t)$ — радиус естественного элемента $(f_t, B_{\gamma(t)})$ ($r(t) < \infty$).

Тогда r непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть имеются два круга $B(z_1, r_1)$ и $B(z_2, r_2)$, и пусть $z_2 \in B(z_1, r_1)$:



Предположим, что g аналитична в $B(z_1, r_1) \cup B(z_2, r_2)$. Если $B(z_1, r_1)$ и $B(z_2, r_2)$ — естественные элементы g, то g заведомо аналитична в $B(z_2, r_1 - |z_1 - z_2|)$, откуда $r_2 \geqslant r_1 - |z_1 - z_2|$. Иными словами, $r_1 - r_2 \leqslant |z_1 - z_2|$.

При этом, если $|z_1 - z_2| < \frac{r_1}{2}$, то $r_2 \geqslant r_1 - |z_1 - z_2| \geqslant r_1 - \frac{r_1}{2} = \frac{r_1}{2}$, в частности $|z_1 - z_2| < r_2$. Тем самым, верна и аналогичная оценка $r_2 - r_1 \leqslant |z_1 - z_2|$, тем самым, $|r_1 - r_2| \leqslant |z_1 - z_2|$ (при $|z_1 - z_2| < \frac{r_1}{2}$).

Теперь пусть $t_0 \in [a, b]$, и r_0 — радиус элемента $\left(f_{t_0}, B_{\gamma(t_0)}\right)$. Выберем $\delta > 0$ так, что $|t - t_0| < \delta \Rightarrow |\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \frac{r_0}{2}$. Тогда из проделанной выше выкладки: $|r(t) - r(t_0)| \leqslant |\gamma(t) - \gamma(t_0)|$. $\square$

Лекция XIV

17 мая 2024 г.

Почему продолжение вдоль пути можно заменить продолжением вдоль цепочки областей?

Функция $t \mapsto r(B_t)$ непрерывна, и всегда положительна, значит, $s := \min\limits_{t \in [a,b]} r(B_t) > 0$. Выберем $\delta > 0$, и поделим отрезок точками $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ таким образом, что $\operatorname{osc}_{[t_j, t_{j+1}]} \overset{def}{=} \sup\{|\gamma(x) - \gamma(y)| | x, y \in [t_j, t_{j+1}]\} < \delta$. Пусть δ настолько мало, что $|\gamma(u) - \gamma(v)| < \delta \Rightarrow |r(u) - r(v)| < \frac{s}{10}$.

Тогда цепочка кругов $B_0, \ldots, B_n$ с центрами в $\gamma(t_j)$ такова, что $B_j \cap B_{j+1} \neq \varnothing$. Понятно, что продолжения вдоль пути γ, и вдоль цепочки кругов $B_0, \ldots, B_n$ совпадают.

Теорема 1.11.3 (Продолжение вдоль пути единственно)**.** Пусть D_t — элементы аналитических функций, образующие аналитическое продолжение вдоль γ с направляющей функцией ϕ. Аналогично $\widetilde{D}_t$ — элементы вдоль γ с функцией $\widetilde{\phi}$.

Если $D_a = \widetilde{D}_a$, то $\forall t \in [a, b] : D_t = \widetilde{D}_t$ и $\phi(t) \equiv \widetilde{\phi}(t)$.

Доказательство. Покажем, что $\forall t \in [a, b] : \phi(t) = \widetilde{\phi}(t)$. Так как $(B_a, f_a) = D_a = \widetilde{D}_a = (\widetilde{B}(a), \widetilde{f}_a)$, то при τ, достаточно близких к a: $\phi(\tau) = f_a(\gamma(\tau)) = \widetilde{f}_a(\gamma(\tau)) = \widetilde{f}_a(\gamma(\tau))$, то есть в некоторой окрестности a: $\phi = \widetilde{\phi}$.

Пусть $\eta = \sup\left\{\tau_0 \in [a,b] \middle| \forall \tau \in [a,\tau_0) : \phi(\tau) = \widetilde{\phi}(\tau)\right\}$. Покажем, что $\eta = b$ от противного. Рассмотрим элементы $D_\eta = (B_\eta, f_\eta)$ и $\widetilde{D}_\eta = (\widetilde{B}_\eta, \widetilde{f}_\eta)$. При достаточно близких $\tau < \eta$: $\phi(\tau) = \widetilde{\phi}(\tau)$. Это множество — кусочек отрезка, имеющий предельную точку — значит, $f_\eta = \widetilde{f}_\eta$, и $\phi = \widetilde{\phi}$ в некоторой окрестности η. Тем самым, η не супремум. □

Пусть $D = (B, f)$ — элемент аналитической функции в точке ζ.

Определение 1.11.4 ($z_0 \in \mathbb{C}$ — точка ветвления для полной аналитической функции, порождённой элементом D)**.** Такая точка $z_0 \in \mathbb{C}$, что $\exists \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ — путь с началом и концом в ζ, такой, что $\operatorname{Ind}_{z_0} \gamma \neq 0$, и имеется аналитическое продолжение элемента D вдоль γ в элемент $\widetilde{D} \neq D$.

1.12 Рациональные и полиномиальные приближения

Будем приближать функцию рациональными функциями, то есть элементами $\mathbb{C}(t)$. Нам будет достаточно правильных дробей, то есть частных многочленов $\frac{p}{q}$, где $\deg p < \deg q$. Используя разложение на простейшие дроби, можно показать, что любая функция раскладывается в сумму дробей вида $\frac{C_j}{(z-z_j)^k}$. Однако для приближений достаточно таких дробей, в которых степень знаменателя равна 1, так как можно немножко пошевелить множители в знаменателе, сделав их различными.

Определение 1.12.1 (Рациональная дробь)**.** Рациональная функция $\sum\limits_{j=1}^{N} \frac{C_j}{z-z_j}$.

Теорема 1.12.1 (Рунге)**.** Пусть K — компакт на плоскости, f аналитична в окрестности K. Тогда она приближается рациональными дробями: $\forall \varepsilon > 0 : \exists R(z) = \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{C_j}{z-z_j}$ — рациональная дробь, такая, что все $z_j \notin K$, и $\sup\limits_{z\in K} |f(z) - R(z)| \leqslant \varepsilon$.

Если $\mathbb{C} \setminus K$ связно, то $\forall \varepsilon > 0 : \exists p \in \mathbb{C}[z]$ — многочлен, точно так же приближающий $f : \sup\limits_{z\in K} |f(z) - p(z)| \leqslant \varepsilon$, но это мы доказать не успели.

Доказательство. Напомним, что для дифференцируемой функции $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ определены операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$: $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} g = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial g}{\partial y}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial z} g = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}\right)$.

Лемма 1.12.1 (Формула Помпейю)**.** *Пусть $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$ — бесконечно дифференцируемая (в вещественном смысле) функция с компактным носителем. Тогда $\forall z \in \mathbb{C}$:*

$$\phi(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \phi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)}{z - \zeta} \, \mathrm{d}\lambda_2(\zeta)$$

Доказательство леммы.

Например, если ϕ — целая, то так как она из $\mathcal{D}(\mathbb{C})$, то по теореме Лиувилля она нуль, и интеграл тоже берётся от нуля.

Зафиксируем $z \in \mathbb{C}$. Пусть $R > 0$ настолько велико, что $\operatorname{supp} \phi \subset B(z, R)$. Введём полярные координаты с центром в z: $\zeta - z = \rho e^{i\theta}$, где $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [0, R]$. (Имеется некоторая неоднозначность, но она на множестве меры нуль, что не вносит никакого вклада). Пусть $F(\rho, \theta) = \phi(\zeta) = \phi(z + \rho e^{i\theta})$. Продифференцируем:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \overline{\zeta}} = F'_\rho \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \overline{\zeta}} + F'_\theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \overline{\zeta}}$$

Выразим $\overline{\zeta} - \overline{z} = \rho e^{-i\theta}$, откуда $\rho^2 = (\zeta - z)(\overline{\zeta} - \overline{z})$, и $e^{2i\theta} = \frac{\zeta - z}{\overline{\zeta} - \overline{z}}$. Теперь посчитаем производные $\frac{\partial\theta}{\partial\overline{\zeta}}$ и $\frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}}$, дифференцируя по $\overline{\zeta}$ эти равенства:

$$2ie^{2i\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\overline{\zeta}} = \frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\left(\frac{\zeta - z}{\overline{\zeta} - \overline{z}}\right) = -\frac{(\zeta - z)}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\theta}{\partial\overline{\zeta}} = \frac{1}{2}ie^{-2i\theta}\frac{\zeta - z}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2} = \frac{1}{2}ie^{-2i\theta}\frac{\zeta - z}{\rho^2 e^{-2i\theta}} = \frac{i}{2}\frac{\zeta - z}{\rho^2}$$

$$2\rho\frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}} = \zeta - z \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}} = \frac{e^{i\theta}}{2}$$

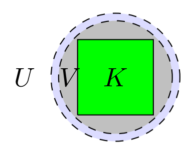
Теперь осталось записать интеграл:

$$\phi(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\phi(\zeta)}{z - \zeta}\,\mathrm{d}\lambda_2(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{F'_\rho}{z - \zeta}\frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}} + \frac{F'_\theta}{z - \zeta}\frac{\partial\theta}{\partial\overline{\zeta}}\,\mathrm{d}\lambda_2(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R} F'_\rho\frac{e^{i\theta}}{2(z - \zeta)}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{R}\int\limits_0^{2\pi} F'_\theta\cdot\frac{i}{2\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho$$

Второй интеграл обращается в нуль, как интеграл производной по периоду: $\int\limits_0^{2\pi} F'_\theta\,\mathrm{d}\theta = 0$. Первый же обращается в $-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R}\frac{F'_\rho}{2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\phi(z + Re^{i\theta}) - \phi(z)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\phi(z)\,\mathrm{d}\theta = \phi(z)$. □

f аналитична в окрестности K, то есть на открытом $U \supset K$. $\exists$ компактное $V \subset U : K \subset \operatorname{Int} V$:



Введём функцию $h : V \cup (\mathbb{C} \setminus U) \to \mathbb{C}$, такую, что $h\big|_V = f, h\big|_{\mathbb{C}\setminus U} \equiv 0$, и продолжим её по теореме Титце — Урысона (лемма 1.12.2) до некоторой непрерывной функции $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Подправим g до дифференцируемой: $\widetilde{g} \coloneqq g * \alpha_t$, где α_t — стандартная аппроксимативная единица, построенная по $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$.

При достаточно малом t функция $\widetilde{g}$ аналитична в окрестности K: можно продифференцировать $\int g(w - z)\alpha_t(z)\,\mathrm{d}z$ по w под знаком интеграла. Выберем $\varepsilon > 0$, и будем считать, что $\sup\limits_K |f - \widetilde{g}| < \varepsilon$.

Запишем формулу (лемма 1.12.1):

$$\widetilde{g}(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial\widetilde{g}}{\partial\overline{z}}(\zeta)}{z - \zeta}\,\mathrm{d}\lambda_2(\zeta)$$

Возьмём носитель подынтегрального выражения — некоторое компактное множество S, отделённое от K некоторым расстоянием d.

Покроем $S = \bigsqcup\limits_{j=1}^{N} S_j$, где $\operatorname{diam} S_j < \varepsilon$, и выберем произвольно $\zeta_j \in S_j$, дальше положим $\lambda_j =$

$\frac{1}{\pi}\int\limits_{S_j}\frac{\partial\widetilde{g}}{\partial\overline{z}}(\zeta)\,\mathrm{d}\lambda_2(\zeta)$. Утверждается, что $\sum\limits_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j}{z-\zeta_j}$ хорошо приближает $\widetilde{g}$ на K:

$$\left|\widetilde{g}(z)-\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j}{z-\zeta_j}\right|=\left|\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{S_j}\left[\frac{\frac{\partial\widetilde{g}}{\partial\overline{z}}(\zeta)}{z-\zeta}-\frac{\frac{\partial\widetilde{g}}{\partial\overline{z}}(\zeta)}{z-\zeta_j}\right]\mathrm{d}\lambda_2(\zeta)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{S_j}\left|\frac{\partial\widetilde{g}}{\partial\overline{z}}(\zeta)\right|\cdot\frac{|\zeta-\zeta_j|}{|z-\zeta|\cdot|z-\zeta_j|}\lambda_2(\zeta)\leqslant\underbrace{\frac{1}{\pi}\max_{\zeta\in S}\left|\frac{\partial\widetilde{g}}{\partial\overline{z}}(\zeta)\right|\sum_{j=1}^{N}|S_j|}_{\text{const}}\frac{\varepsilon}{d^2}$$

при этом d тоже фиксировано. Выбирая достаточно малый ε, получаем достаточно хорошее приближение. □

Лемма 1.12.2 (Теорема Титце — Урысона)**.** *Пусть X — нормальное топологическое пространство, замкнутое $Y\subset X$. Всякая ограниченная непрерывная функция $f:Y\to\mathbb{R}$ продолжается до непрерывной ограниченной (можно той же константой) $\widetilde{f}:X\to\mathbb{R}$. (При этом можно заменить $\mathbb{R}$ на $\mathbb{C}$, разбив функцию на вещественную и мнимую части, и, применив теорему для них отдельно, склеить их обратно.)*

Доказательство. Можно считать, что $-1\leqslant f\leqslant 1$ всюду ($|f|\leqslant 1$).

Пусть $F_1\coloneqq\left\{x\in Y\middle|f(x)\geqslant\frac{1}{3}\right\}$ и $F_{-1}\coloneqq\left\{x\in Y\middle|f(x)\leqslant-\frac{1}{3}\right\}$. По лемме Урысона, $\exists g:X\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция, такая, что $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & x\in F_1\\ -\frac{1}{3}, & x\in F_{-1}\end{cases}$, и всюду $-\frac{1}{3}\leqslant g\leqslant\frac{1}{3}$.

Рассмотрим $f-g$ на Y. На F_1 значения лежат в $\left[0,\frac{2}{3}\right]$, на F_2 значения лежат в $\left[-\frac{2}{3},0\right]$, а на $Y\setminus(F_1\cup F_2)$ — по неравенству треугольника значения лежат в $\left[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$. Тем самым, $\sup\limits_{t\in Y}|f(t)-g(t)|\leqslant\frac{2}{3}$. С другой стороны, $\sup\limits_{t\in X}|g(t)|\leqslant\frac{1}{3}$.

Обозначим $g_1\coloneqq g$, и начнём итерироваться. Сначала найдётся g_2, такая, что $|f(t)-g_1(t)-g_2(t)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^2$ на Y, и $|g_2(t)|\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$ на X.

По индукции получим последовательность $g_j:|g_j(t)|\leqslant\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}$ и $|f(t)-g_1(t)-\dots-g_j(t)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^j$.

Видно, что $g(t)\coloneqq\sum\limits_{j\geqslant 1}g_j(t)$ подойдёт — ряд сходится равномерно, и $|g(t)|\leqslant\frac{1}{3}\sum\limits_{k\geqslant 0}\left(\frac{2}{3}\right)^k=1$. □

Интересный факт (Формула Коши — Грина). Имеется область G с гладкой границей — набором путей $\Gamma=\{\gamma_j\}$, таких, что при обходе область остаётся слева.

Пусть ϕ — гладкая функция в окрестности G. Тогда $\forall z\in G: f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{\pi}\int\limits_{G}\frac{\overline{\partial}f(\zeta)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}\lambda_2(\zeta)$