

Математический анализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

1	Комплексный анализ	2
1.1	Интеграл от дифференциальной формы вдоль кусочно-гладкого пути	3
1.1.1	Про дифференциальные формы	3
1.1.2	Про интегрирование	3
1.1.3	Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути	4
1.1.4	Сумма путей	4
1.1.5	Альтернативное определение	4
1.1.6	(Не)зависимость от параметризации	6
1.2	Условия существования первообразной у дифференциальной формы	6
1.3	Операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$	9
1.3.1	Связь с голоморфными функциями	10
1.4	Гармонические функции	18
1.5	Первообразная от замкнутой формы вдоль непрерывного пути	19
1.5.1	Наводящие предположения	19
1.5.2	Требуемые свойства	19
1.5.3	О гомотопности путей	21
1.6	Ряды Лорана	22
1.7	Изолированные особенности голоморфных функций	24
1.8	Вычеты	26
1.8.1	Как вычислять вычеты	26
1.8.2	Индекс замкнутого пути относительно точки	27
1.8.3	Обобщение интеграла $\frac{\sin x}{x}$	28
1.8.4	2-я формула замены переменной	29
1.8.5	О логарифме	30
1.9	Принцип аргумента и теорема Руше	32
1.10	Сходимость аналитических функций	33
1.10.1	Нормальные семейства	35
1.11	Целые функции	38
1.11.1	Построение целых функций с заданными нулями	38
1.11.2	Упрощённый вид множителей Вейерштрасса	39
1.11.3	Разложение синуса в произведение	40
1.11.4	Γ -функция Эйлера	42
1.11.5	Эйлеров интеграл	45
1.11.6	Формула Стирлинга	45

Глава 1

Комплексный анализ

Лекция I

16 февраля 2024 г.

Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, где открытое $G \subset \mathbb{C}$.

Определение 1.0.1 (f голоморфна в $z_0 \in G$). $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \stackrel{\text{def}}{=} f'(z_0)$.

Во втором семестре мы проверяли, что $f = u + iv$ (где $u, v : G \rightarrow \mathbb{R}$) голоморфна в $z_0 \iff f$ дифференцируема в вещественном смысле, и выполняются уравнения Коши — Римана:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Определение 1.0.2 (f аналитична в G). $\forall z_0 \in G : \exists c_j \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \quad (*)$$

где ряд сходится не только при $z = z_0$.

Теорема 1.0.1. f аналитична в $G \iff f$ голоморфна во всех точках G .

Доказательство.

\Rightarrow . Доказали во втором семестре, несложно.

\Leftarrow . Скоро займёмся, время пришло. □

Из представления (*) следует, что производная в точке z считается почленно: $f'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j (z - z_0)^{j-1}$. В частности, отсюда получается, что $f'(z_0) = c_1$, и вообще $f^{(n)}(z_0) = n! \cdot c_n$.

Вскоре мы увидим, что ситуация разительно отличается от вещественной: в вещественном случае были разные классы — дифференцируемые функции, C^1 , C^∞ , аналитичные, и множество промежуточных классов.

В комплексном же случае, если функция хотя бы один раз дифференцируема, то окажется, что этого достаточно, чтобы она была не просто дифференцируема, а непрерывно дифференцируема, бесконечно дифференцируема, и даже аналитична.

1.1 Интеграл от дифференциальной формы вдоль кусочно-гладкого пути

1.1.1 Про дифференциальные формы

Определение 1.1.1 (Линейная функция $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$). $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n : l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y)$.

Определение 1.1.2 (Линейная форма на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$). Функция двух переменных $\phi : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, линейная по второму аргументу.

В пространстве \mathbb{R}^n имеется базис (e_j) : $h = e_1 h_1 + \dots + e_n h_n$.

Тем самым, $\phi(x, h) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\phi(x, e_j)}_{=: g_j(x)} h_j = \sum_{j=1}^n g_j(x) h_j$.

Введём *базисные линейные формы* $dx_j(u, h) = h_j$, игнорирующую первую координату, и возвращающую j -ю компоненту второго аргумента. Теперь $\phi(x, h)$ разложилась в сумму $\sum_{j=1}^n g_j dx_j$.

Пример. Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ — дифференцируемая в G функция. Заметим, что её дифференциал $df(x, _)$ — в точности линейная форма на G .

При разложении по базису получится $df(x, _) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j$.

Вскоре мы увидим, что далеко не всякая линейная форма является чьим-то дифференциалом.

Если $\phi = \sum_{j=1}^n g_j dx_j$ — дифференциал функции f , то непременно $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Тот факт, что ϕ является дифференциалом f , можно сказать наоборот: f является первообразной ϕ .

1.1.2 Про интегрирование

Рассмотрим монотонную функцию $\Phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Как и при определении стилтьесовой длины, будем считать, что Φ определена на некотором открытом множестве, содержащем $\langle a, b \rangle$. Обозначим за l_Φ стилтьесову длину, отвечающую функции Φ .

Пускай λ_Φ — продолжение стилтьесовой длины l_Φ по Лебегу — Каратеодори.

Она, как водится, определена на некоторой Σ -алгебре, в которой есть борелевские множества, но измеримы могут быть и какие-то другие множества, зависящие от конкретной функции Φ .

Примеры.

- Так, функция $\phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ порождает дельта-меру δ_0 , относительно которой все множества измеримы.

Кроме того, эта мера сингулярна относительно стандартной меры Лебега.

- Может показаться, что так происходит из-за разрывности ϕ , но это не так.

Рекурсивно определим канторову лестницу $C : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$:



Построив по данной функции стильесову длину λ_C , мы получим меру, сосредоточенную на канторовом множестве меры нуль.

Её носитель — само канторово множество, так как на всех отрезках вне канторова множества λ_C равна нулю. Она сингулярна относительно стандартной меры Лебега на \mathbb{R} , и её измеримые множества разительно отличаются от измеримых множеств меры Лебега.

По мере Стильеса можно интегрировать: если v является λ_Φ измеримой (в частности, измерима по Борелю и непрерывна), то определён интеграл $\int_{\langle a, b \rangle} v d\lambda_\Phi$. Иногда пишут просто $\int_{\langle a, b \rangle} v d\Phi$.

Теперь пусть $I = [a, b]$, и $\Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. В таком случае $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$, где некие Φ_1, Φ_2 возрастают. Можно определить знакопеременную меру $\lambda_\Psi \stackrel{def}{=} \lambda_{\Phi_1} - \lambda_{\Phi_2}$, понятно, что определение корректно.

1.1.3 Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути

Пускай $\gamma : [a, b] \rightarrow G \subset \mathbb{R}^n$ — спрямляемый путь (путь конечной длины). Пускай $U = \sum_{j=1}^n u_j dx_j$ — дифференциальная форма в области G . Если не сказано противное, будем считать, что u_j — непрерывные функции.

Определение 1.1.3 (Интеграл от U вдоль пути γ). $\int_\gamma U \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^n \int_{[a, b]} u_j(\gamma(t)) d\gamma_j(t)$.

Здесь $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Так как путь спрямляем, то все γ_j — ограниченной вариации, каждая порождает свою меру Стильеса, и определение интегрирует композицию $U \circ \gamma$ по данной мере.

1.1.4 Сумма путей

Пускай имеются два отрезка $[a, c]$ и $[c, d]$, и на них заданы пути $\gamma_1 : [a, c] \rightarrow G$, $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow G$. Предположим, что $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$.

Тогда можно устроить путь $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a, d] \rightarrow G$, $\gamma(t) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, c] \\ \gamma_2(t), & t \in [c, d] \end{cases}$.

Замечание. Интеграл аддитивен по множеству: $\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} U = \int_{\gamma_1} U + \int_{\gamma_2} U$.

1.1.5 Альтернативное определение

Далее мы не интересуемся никакими чудесами вроде канторовых лестниц, и считаем, что Φ такова, что λ_Φ абсолютно непрерывна относительно стандартной меры Лебега.

А раз так, то по теореме Радона — Никодима \exists суммируемая $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что

$$\lambda_\Phi(e) = \int_e w(x) dx \quad (+)$$

Факт 1.1.1. Формула (+) заведомо верна, если Φ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, тогда $w = \Phi'$.

Доказательство. Введём меру $\nu(e) = \int_e \Phi'(x) dx$, заданную на измеримых по Лебегу множествах. Φ' непрерывна, и, следовательно, измерима.

Если $\langle c, d \rangle \subset [a, b]$, то $\nu(\langle c, d \rangle) = \int_{\langle c, d \rangle} \Phi'(x) dx = \Phi(d) - \Phi(c) = l_\Phi(\langle c, d \rangle)$.

Таким образом, из теоремы единственности, продолжение l_Φ по Лебегу — Каратеодори совпадает с $\int_e \Phi'(x) dx$. \square

Замечание. Утверждение (факт 1.1.1) сохраняет силу, если Φ непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема.

Далее где-то используется Φ , а где-то β , надо убедиться, что это везде одно и то же, и заменить. Пускай $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, кусочно-непрерывно дифференцируемая: $\exists a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$, такие, что β непрерывно дифференцируема на $[a_s, a_{s+1}]$ при $0 \leq s < k$. Введём $\rho(e) = \int_e \beta'(x) dx$ — это знакопеременная вещественная мера.

У данной меры возникают (см. разложение Хана) положительная и отрицательная части $\rho_+(e) \stackrel{def}{=} \int_e (\beta')_+(x) dx$ и $\rho_-(e) \stackrel{def}{=} \int_e (\beta')_-(x) dx$

Если обозначить за $\Phi_+(t) = \int_0^t (\beta')_+(x) dx$ и $\Phi_-(t) = \int_0^t (\beta')_-(x) dx$, то окажется, что соответствующие меры Стильеса совпадают с ρ_+ и ρ_- .

Более того, $\beta = \Phi_+ - \Phi_-$ — получили разложение функции ограниченной вариации в положительную и отрицательную части.

Замечание. Это разложение экономнее, чем то, которое было получено ранее — ранее в качестве Φ_+ выбиралась вариация Φ .

Если всё, что написано выше, собрать вместе, то получится

$$\boxed{\int_{[s,t]} v d\Phi = \int_{[s,t]} v(x) \beta'(x) dx}$$

Далее «гладкий» используется, как синоним к непрерывно-дифференцируемому.

Следствие 1.1.1 (Можно считать определением). Если $U = \sum_{j=1}^n u_j dx_j$ — дифференциальная форма в G с непрерывными коэффициентами, а $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow G$ — спрямляемый кусочно-гладкий путь, то

$$\int_\gamma U = \sum_{j=1}^n \int_a^b u_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt$$

1.1.6 (Не)зависимость от параметризации

Пускай $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — кусочно-гладкий путь, $\psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ — гладкий гомеоморфизм.

Теперь $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$ — перепараметризация γ

Лемма 1.1.1. Для всякой формы U :

$$\int_{\tilde{\gamma}} U = \pm \int_{\gamma} U$$

Знак $+$ выбирается, если ψ возрастает, и $-$ если убывает.

Доказательство. Предположим, что γ — гладкий путь, иначе применяем к кусочкам гладкости по отдельности.

$$\int_{\tilde{\gamma}} U = \sum_{j=1}^n \int_c^d u_j(\gamma(\psi(t))) \gamma'_j(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt = \left\| \begin{array}{l} \tau = \psi(t) \\ d\tau = \psi'(t) dt \end{array} \right\| = \sum_{j=1}^n \int_{\psi(c)}^{\psi(d)} u_j(\gamma(\tau)) \gamma'_j(\tau) d\tau = \pm \int_{\gamma} U \quad \square$$

Про ψ также можно считать, что это он не гладкий, а лишь кусочно-гладкий.

Тем самым, можно определить сумму путей для несовпадающих отрезков: для двух путей $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow G, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow G$ (при условии $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$) можно один их отрезков-прообразов линейным возрастающим преобразованием перевести в отрезок, соприкасающийся со вторым (например, $t \mapsto t + (b - c)$).

Также есть понятие обратного пути $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$. Для любой формы U :

$$\int_{\gamma \oplus \gamma^-} U = \int_{\gamma} U + \int_{\gamma^-} U = \int_{\gamma} U - \int_{\gamma} U = 0$$

1.2 Условия существования первообразной у дифференциальной формы

Теорема 1.2.1. Если у дифференциальной формы U в открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ имеется первообразная F , то для всякого кусочно-гладкого пути $\gamma : [a, b] \rightarrow G$

$$\int_{\gamma} U = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Доказательство. $U = \sum_{j=1}^n g_j dx_j$, где $g_j(w) = \frac{\partial}{\partial x_j} F(w)$. Считаем, что путь гладкий.

$$\int_{\gamma} U = \sum_{j=1}^n \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_j} F(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (F \circ \gamma)(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Если же путь всего лишь кусочно-гладкий, то надо разбить отрезок на подотрезки гладкости, и сложить. \square

Следствие 1.2.1. Если у дифференциальной формы U есть первообразная, то её интегралы по всем путям с данными началом и концом, равны.

Оказывается, верно и обратное.

Лекция II
26 февраля 2024 г.

Лемма 1.2.1. Пусть G — область в \mathbb{R}^n , тогда любые две её точки можно соединить ломаной (кусочно-линейным путём).

Доказательство. Выберем $x_0 \in G$, положим $U = \{y \in G \mid \text{существует ломаная в } G \text{ с началом в } x_0 \text{ и концом в } y\}$.

Покажем, что U открыто. Пусть $y \in U$, тогда найдётся шарик $B_\varepsilon(y) \subset G$, и $B_\varepsilon(y) \subset U$ — можно добавить одно звено к ломаной $x_0 \rightsquigarrow y$.

Покажем, что U замкнуто. Пусть $z \in G$ — предельная точка для U . Найдётся $B_\varepsilon(z) \subset G$, так как z — предельная, то $\exists y \in B_\varepsilon(z) \cap U$. Значит, $z \in U$ — можно добавить одно звено $y \rightarrow z$. \square

Замечание. Имея кусочно-линейный путь $\gamma : [a, b] \rightarrow G$, соединяющий $A, B \in G$, несложно получить бесконечно дифференцируемый путь, соединяющий их:

Пусть $\gamma_1 : [a-1, b+1] \rightarrow G, \gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a, b] \\ \gamma(a), & t \in [a-1, a] \\ \gamma(b), & t \in [b, b+1] \end{cases}$. Теперь, сворачивая γ_1 с аппрокс-

мативной единицей с достаточно большим номером и достаточно малым компактным носителем, получим бесконечно дифференцируемый путь, соединяющий A и B .

Теорема 1.2.2. Пусть $\Phi = \sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j$ — непрерывная дифференциальная форма в G (то есть коэффициенты непрерывны в G). Следующие условия эквивалентны.

1. $\int \Phi$ есть первообразная F , то есть функция $F \in C^1(G) : dF = \Phi$ (иными словами, $\forall j : \frac{\partial}{\partial x_j} F = f_j$).
2. Для всех кусочно-гладких путей γ с фиксированными началом и концом $\gamma(a) = \gamma_a, \gamma(b) = \gamma_b$: $\int_\gamma \Phi$ не зависит от γ (а только от начала и конца).
3. Для любой кусочно-гладкой петли (то есть замкнутого пути) γ в G : $\int_\gamma \Phi = 0$.

Доказательство. Мы уже доказали ранее цепочку импликаций $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2)$. Далее доказываем $(2) \Rightarrow (1)$.

Предъявим кандидат в первообразную. Зафиксируем $x_0 \in G$, выберем $x \in G$, пусть γ — произвольный кусочно-гладкий путь с началом в x_0 и концом в x . Определим $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\gamma \Phi$. Согласно посылке, F корректно определена — не зависит от выбора пути.

Покажем, что частные производные F существуют, и равны f_j . Тогда они получатся непрерывными, то есть F — дифференцируемой, и окажется, что F — первообразная Φ .

Пусть e_1, \dots, e_n — стандартные базисные орты в \mathbb{R}^n . Рассмотрим $\frac{F(x+te_j) - F(x)}{t}$.

При малых t : отрезок между x и $x+te_j$ лежит внутри G . Пусть γ_1 — путь, соединяющий x_0 и x , l — отрезок от x до $x+te_j$.

$$\frac{F(x+te_j) - F(x)}{t} = \frac{1}{t} \left(\int_{\gamma_1 \oplus l} \Phi - \int_{\gamma_1} \Phi \right) = \frac{1}{t} \int_l \Phi = \frac{1}{t} \int_0^t f_j(x + \tau e_j) d\tau \xrightarrow{t \rightarrow 0} f_j(x) \quad \square$$

Определение 1.2.1 (Прямоугольник на плоскости). Множество вида $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$.

Область G на плоскости будем называть *удобной*, если $\exists x_0 \in G : \forall y \in G : \exists$ прямоугольник $P \subset G$, содержащий точки x и y .

Примеры (Удобные области).

- $\text{Int } Q$, если Q — прямоугольник. В качестве центра x_0 подойдёт любая точка.

- $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < r\}$. В качестве центра x_0 стоит взять центр, иначе не получится:



Определение 1.2.2 (Ориентированная граница прямоугольника P). Петля γ , обходящая границу $P = [a, b] \times [c, d]$ против часовой стрелки, то есть вот так:



$$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4.$$

Для прямоугольника P будем обозначать за ∂P в зависимости от контекста либо границу P , как топологического подмножества \mathbb{R}^2 , либо путь, обходящий границу P против часовой стрелки.

Следствие 1.2.2 (Дополнение к (теорема 1.2.2)). Если G — удобная область на плоскости, то к трём эквивалентным условиям (теорема 1.2.2) можно добавить

$$4. \forall P \subset G : \int_{\partial P} \Phi = 0.$$

Доказательство. (3) \Rightarrow (4) ясно, докажем (4) \Rightarrow (1).

Пусть $x_0 \in G$ — центр удобной области, определим $F(x) = \int_{\delta} \Phi$, где δ — это либо $\delta_1 := \gamma_1 \oplus \gamma_2$ либо $\delta_2 := \gamma_4^- \oplus \gamma_3^-$ (вне зависимости от выбора δ получится одно и то же).



Далее, чтобы проверить $\frac{\partial}{\partial x_1} F = f_1$ и $\frac{\partial}{\partial x_2} F = f_2$, воспользуемся подходящим представлением: пусть орт выглядит так:



тогда для проверки $\frac{\partial}{\partial x_1} F = f_1$ удобно воспользоваться определением F через δ_1 , для проверки $\frac{\partial}{\partial x_2} F = f_2$ — определением через δ_2 . Далее повторяем рассуждение из (теорема 1.2.2). \square

Пусть $\Phi = \sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j$ — непрерывная дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1.2.3 (Форма Φ точна). Существует первообразная F в G : $dF = \Phi$.

Определение 1.2.4 (Форма Φ замкнута). Форма Φ локально точна ($\forall x_0 \in G : \exists U \ni x_0 : \Phi|_U$ точна).

Понятно, что точная форма замкнута, но точность из замкнутости не следует: чуть позднее мы определим dz , и покажем, что $\frac{dz}{z}$ — замкнутая, но не точная форма на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Теорема 1.2.3. Пусть Φ — дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$. Следующие условия эквивалентны:

1. Φ замкнута.

2. $\forall x_0 \in G : \exists V \ni x_0 : \forall$ кусочно-гладкого замкнутого пути γ с носителем в V : $\int_{\gamma} \Phi = 0$.

Если $n = 2$, то дополнительно появляются ещё два условия:

3. $\forall z \in G : \exists V_z \subset G : \forall P \subset V_z : \int_{\partial P} \Phi = 0$.

4. $\forall P \subset G : \int_{\partial P} \Phi = 0$.

Доказательство. Докажем, что (3) \Rightarrow (4), остальное уже доказано выше.

Заметим, что границу прямоугольника P можно представить, как сумму границ четырёх прямоугольников вдвое меньшего диаметра:



Таким образом, чтобы доказать, что интеграл по границе большого прямоугольника P нулевой, разобьём его на достаточно маленькие прямоугольники, по ним-то интеграл нуль. Чтобы это формализовать, вспомним лемму Лебега о покрытии:

Теорема 1.2.4 (Лемма Лебега). Пусть K — компакт в метрическом пространстве, $\{U_j\}_{j \in J}$ — открытое покрытие компакта K . Тогда $\exists \delta > 0 : \forall A \subset K : \text{diam } A < \delta \Rightarrow \exists j \in J : A \subset U_j$.

Применяя лемму Лебега для покрытия P окрестностями $\{V_z\}_{z \in P}$, получим такое число δ . Теперь надо разбить границу прямоугольника P в сумму границ прямоугольников диаметра меньше δ , а посылка теоремы говорит, что интеграл по ним уже нуль. \square

1.3 Операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

Как известно, $\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$, то есть $\forall z \in \mathbb{C} : z = x + iy$, аналогично $\bar{z} = x - iy$.

Рассмотрим z и \bar{z} , как функции $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x \pm iy$. Теперь $dz = dx + i dy$ и $d\bar{z} = dx - i dy$ образуют базис в пространстве дифференциальных форм (тех, которые не зависят от точки), обратное преобразование выглядит так:

$$\begin{cases} dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \\ dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \end{cases}$$

Рассмотрим форму $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = \alpha(x, y) dx + \beta(x, y) dy$. Перепишем её в новом базисе:

$$\Phi(x, y) = \frac{\alpha(x, y)}{2} (dz + d\bar{z}) + \frac{\beta(x, y)}{2i} (dz - d\bar{z}) = \frac{\alpha(x, y) - i\beta(x, y)}{2} dz + \frac{\alpha(x, y) + i\beta(x, y)}{2} d\bar{z}$$

Теперь пусть Φ — точная форма, то есть $\Phi = dF$, и тогда $\alpha(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ и $\beta(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$. Теперь

$$dF = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right) d\bar{z}$$

Определение 1.3.1 ($\frac{\partial F}{\partial z}$). Коэффициент, стоящий перед dz , то есть $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right)$.

Определение 1.3.2 ($\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$). Коэффициент, стоящий перед $d\bar{z}$, то есть $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right)$.

Иначе говоря, мы ввели операторы $\frac{\partial}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ так, что

$$dF = \frac{\partial}{\partial z} F dz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} F d\bar{z}$$

1.3.1 Связь с голоморфными функциями

Пусть $F = u + iv$, где $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Запишем

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)$$

В правой части равенства получились выражения из уравнений Коши — Римана.

Факт 1.3.1. Вещественные функции u, v удовлетворяют уравнениям Коши — Римана $\iff \frac{\partial(u+iv)}{\partial \bar{z}} \equiv 0$.

Факт 1.3.2. F голоморфна $\iff dF = \frac{\partial F}{\partial z} dz$. При этом $\frac{\partial F}{\partial z}$ есть производная F по комплексному аргументу.

Доказательство. Функция дифференцируема по комплексному аргументу \iff её дифференциал — умножение на комплексное число. \square

В основном нас будут интересовать дифференциальные формы вида $\phi(z) dz$, где ϕ — произвольная функция.

Выясним, когда у формы $\phi(z) dz = \phi(z) dx + i\phi(z) dy$ имеется первообразная, то есть функция $g : \frac{\partial g}{\partial x} = \phi, \frac{\partial g}{\partial y} = i\phi$. Заметим, что $\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{2}(\phi - i(i\phi)) = \phi$ и $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\phi + i(i\phi)) = 0$.

Утверждение 1.3.1. Форма ϕdz имеет первообразную $g \iff g$ голоморфна, и $g' = \phi$.

Теорема 1.3.1 (Коши). Если $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция (область $G \subset \mathbb{C}$), то форма $g(z) dz$ замкнута.

Доказательство. Потом. \square

Контрпример (Глобально первообразной может не быть). Пусть $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}, g : G \rightarrow \mathbb{C}, g : z \mapsto \frac{1}{z}$.

По теореме Коши у g имеется локальная первообразная — комплексный логарифм — но глобально определить не получится. Пусть $\Gamma = \partial\mathbb{T}$ — комплексная окружность, ориентируем её против часовой стрелки, а именно, рассмотрим стандартный обход окружности $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \alpha : \phi \mapsto e^{i\phi}$. Теперь убедимся, что форма не точна:

$$\int_{\alpha} \phi = \int_{\alpha} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{(e^{it})'}{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \neq 0$$

Для будущих применений также определим ориентированную против часовой стрелки границу $B_r(z_0)$, это путь $\beta(t) = z_0 + re^{it}$ для $t \in [0, 2\pi]$.

Пример. Пусть $z_0, w \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_{>0}, |w - z_0| \neq r$, пусть путь γ обходит границу $B_r(z_0)$ против часовой стрелки:



Тогда, оказывается, (посчитаем чуть позже):

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-w} = \begin{cases} 0, & |z-w| > r \\ 2\pi i, & |z-w| < r \end{cases} \quad (\circ)$$

Грубой силой этот интеграл посчитать непросто, так как w находится где угодно — внутри или снаружи круга — а интеграл, оказывается, зависит только от этих двух альтернатив.

Теорема 1.3.2 (Основная оценка интеграла вдоль пути). Пускай $\Phi = \sum_{j=1}^n f_j dx_j$ — непрерывная дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$, а $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — кусочно-гладкий путь, $K := \text{Im}(\gamma) \subset G$.

$$\text{Тогда } \left| \int_{\gamma} \Phi \right| \leq \underbrace{\sup_{x \in K} \left(\sum_{j=1}^n |f_j(x)|^2 \right)^{1/2}}_{=: A} \cdot l(\gamma).$$

Доказательство. Считаем, что γ — гладкий путь, иначе нужно разбить на кусочки гладкости.

$$\left| \int_{\gamma} \Phi \right| = \left| \int_a^b \sum_{j=1}^n f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt \right| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n |f_j(\gamma(t))|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |\gamma'_j(t)|^2 \right)^{1/2} dt \leq A \cdot \underbrace{\int_a^b \left(\sum_{j=1}^n |\gamma'_j(t)|^2 \right)^{1/2} dt}_{l(\gamma)}$$

□

Лекция III

1 марта 2024 г.

Рассмотрим дифференциальную форму $\Phi = F(z) dz$, где F — непрерывная функция в $G \subset \mathbb{C}$. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — плоский путь.

Расписав $\Phi(z) = F(z) dx + iF(z) dy$ и применив основную оценку интеграла вдоль пути, получаем

$$\left| \int_{\gamma} \Phi \right| \leq \max_{z \in K} \sqrt{|F(z)|^2 + |F(z)|^2} \cdot l(\gamma) = \sqrt{2} \max_{z \in K} |F(z)| \cdot l(\gamma)$$

Эта оценка вызывает некоторую неудовлетворённость: кажется, что $\sqrt{2}$ здесь лишний. И это действительно правда: можно расписать интеграл аккуратнее.

Пусть $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, тогда по определению

$$\int_{\gamma} \Phi = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'_1(t) + iF(\gamma(t)) \cdot \gamma'_2(t) dt = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Таким образом, интеграл от комплексной формы вдоль пути имеет более простое представление, и оно легко поддаётся более плотной оценке:

$$\left| \int_{\gamma} \Phi \right| \leq \int_a^b |F(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq \max_{z \in K} |F(z)| \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)| dt}_{l(\gamma)}$$

Посчитаем анонсированный на предыдущей лекции интеграл (о). Пусть $z_0, w \in \mathbb{C}$, $r > 0$.

- Сначала рассмотрим случай $|w - z_0| < r$. Заметим, что, согласно основной оценке интеграла, если коэффициенты равномерно стремятся к какому-то значению и интегралы ограничены, то предельный интеграл тоже сходится.

Запись ниже $\int_{|z-z_0|=r}$, и вообще все аналогичные записи, которые встретятся в дальнейшем, по умолчанию означают, что граница соответствующего множества (в данном случае — круга) обходится стандартным образом, то есть против часовой стрелки.

$$\begin{aligned} \int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z - z_0 - (w - z_0)} &= \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} dz = \\ &= \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} \left(1 + \frac{w - z_0}{z - z_0} + \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^2 + \dots \right) dz \quad (\equiv) \end{aligned}$$

На слагаемые из ряда имеется равномерная по z оценка: $\left| \frac{w-z_0}{z-z_0} \right| \leq \frac{|w-z_0|}{r} < 1$, и по теореме Вейерштрасса функциональный ряд сходится. Значит, сумму можно вынести из-под интеграла

$$(\equiv) \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} dz + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|z-z_0|=r} \frac{(w - z_0)^j}{(z - z_0)^{j+1}} dz \quad (\equiv)$$

Первое слагаемое мы умеем брать, а у каждого слагаемого из остальной суммы имеется первообразная: $\frac{1}{(z-z_0)^{j+1}} = -\frac{1}{j} \left(\frac{1}{(z-z_0)^j} \right)'$

$$(\equiv) \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi i$$

- Теперь разберёмся со случаем $|w - z_0| > r$.

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z - z_0 - (w - z_0)} = -\frac{1}{w - z_0} \int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = -\frac{1}{w - z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{|z-z_0|=r} \frac{(z - z_0)^j}{(w - z_0)^j} dz$$

Аналогично предыдущему случаю, ряд сходится абсолютно, поэтому сумму опять можно вынести из под интеграла, и в данном случае всё ещё проще: каждое слагаемое имеет первообразную, там нет отрицательных степеней z , поэтому вся сумма обращается в нуль.

Пусть $\Phi = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ — непрерывная дифференциальная форма в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 1.3.3. Если все функции $f_j \in C^1$, то следующие условия эквивалентны:

- Φ замкнута.
- $\forall 1 \leq i, j \leq n : \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ — «накрест взятые частные производные равны».

Доказательство.

\Rightarrow Выберем $x \in G$, так как форма замкнута, то $\exists U \ni x : \Phi$ имеет первообразную $F : U \rightarrow \mathbb{R}$. Тем самым, $f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$, и так как $f_i \in C^1$, то действительно $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

\Leftarrow Сначала приведём доказательство случая $n = 2$. В таком случае $\Phi = f dx + g dy$.

Согласно посылке, $h := \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$. Кстати, равенство слева равносильно одному из эквивалентных уравнений Коши — Римана.

Рассмотрим произвольный $P = [a, b] \times [c, d] \subset G$, и докажем, что $\int_{\partial P} \Phi = 0$.



То, что мы увидим сейчас, является первым заходом на *формулу Остроградского — Гаусса*. Функция h непрерывна, и можно записать на неё интеграл Лебега: $\int_P h(x, y) dx dy$. Теперь, применяя теорему Фубини, раскладываем интеграл в сумму повторных:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3^-} f(_, d) dx + \int_{\gamma_1^-} f(_, c) dx &= \int_a^b [f(x, d) - f(x, c)] dx = \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx = \\ &= \int_P h(x, y) dx dy = \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial g}{\partial x} dx \right) dy = \int_c^d [g(b, y) - g(a, y)] dy = \int_{\gamma_2} g(b, _) dy + \int_{\gamma_4} g(a, _) dy \end{aligned}$$

Итого, $\int_{\gamma_3^-} f(_, d) dx + \int_{\gamma_1^-} f(_, c) dx = \int_{\gamma_2} g(b, _) dy + \int_{\gamma_4} g(a, _) dy$, откуда действительно $\int_{\gamma} \Phi = 0$.

⇐ Теперь приведём альтернативное доказательство индукцией по n .

База: Случай $n = 1$ тривиален: теорема Ньютона — Лейбница говорит, что у непрерывной функции есть первообразная.

Переход: Пусть $n > 1$, и для $n - 1$ теорема доказана. Рассмотрим $a \in G$, и возьмём прямоугольный параллелепипед со сторонами, параллельными осям координат P такой, что $a \in \text{Int } P$. Докажем, что на P у Φ есть первообразная.

Построим $g(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{x_1} f_1(t, x_2, \dots, x_n) dt$. Обозначим $\phi_j := \frac{\partial g}{\partial x_j}$. Заметим, что $\phi_1 = \frac{\partial g}{\partial x_1} = f_1$.

Теперь рассмотрим форму $\Psi(x_1, \dots, x_n) = \phi_1 dx_1 + \dots + \phi_n dx_n$. Эта форма имеет первообразную g на параллелепипеде P .

Теперь посмотрим на $\Phi - \Psi =: h_1 dx_1 + \dots + h_n dx_n$. По построению $h_1 = 0$. По условию накрест взятые частные производные равны у Φ , и они равны у Ψ , так как у неё есть первообразная. Значит, это же верно и для разности, в частности, $\frac{\partial h_i}{\partial x_1} = \frac{\partial h_1}{\partial x_i} = 0$. Иными словами, $\forall i : h_i$ не зависит от x_1 .

А раз так, то на $\Phi - \Psi$ можно смотреть, как на форму $(n - 1)$ -й переменной, и применить индукционное предположение.

Замечание. Тут есть некоторый обман: производные $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$ могут просто не существовать.

Попробуем обойти его так: пусть $\beta \in C^\infty$, с компактным носителем. Выберем аппроксимативную единицу $\beta_t(x) = \frac{1}{t^n} \beta(\frac{x}{t})$.

Назначим $f_k^{(t)} = f_k * \beta_t$, $f_k^{(t)} \rightrightarrows_{t \rightarrow 0} f_k$.

Далее у формы $\Phi^{(t)}$ коэффициенты $h_k^{(t)}$ не зависят от x_1 . А раз они равномерно стремятся к h_k , то и они не зависят от x_1 . Это было произнесено устно, я наверняка что-то не так записал.

□

Теорема 1.3.4 (Коши). Пусть F — голоморфная функция в открытом множестве $G \subset \mathbb{C}$. Тогда дифференциальная форма $F(z) dz$ замкнута, то есть локально $\exists S : S'(z) = F(z)$.

Замечание. Теорема совсем проста, если заранее предположить, что $F'(z)$ непрерывна (а так в итоге и должно получиться, так как F — аналитична (теорема 1.0.1)). В таком случае имеется следующее более простое доказательство.

Доказательство. Надо проверить второе уравнение Коши — Римана: $\forall z \in \mathbb{C} : \frac{\partial F}{\partial y}(z) = i \frac{\partial F}{\partial x}(z)$ (первое выполнено, так как накрест-взятые частные производные равны).

Поскольку $F(z) dz = F(z) dx + iF(z) dy$, утверждение эквивалентно (согласно (теорема 1.3.3)) тому, что $\forall z \in \mathbb{C} : \frac{\partial F}{\partial y}(z) = i \frac{\partial F}{\partial x}(z)$. Пусть $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

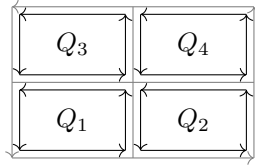
$$\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \stackrel{?}{=} i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

то есть $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$. Я вообще не понял, что произошло. □

Теперь докажем теорему Коши вне предположения непрерывности производной.

Доказательство. Докажем от противного: пусть форма $F(z) dz$ не замкнута, $\exists P_0 \subset G : \alpha = \int_{\partial P_0} F(z) dz \neq 0$.

Будем потихонечку делить этот прямоугольник на четыре равные части: пусть $P_0 = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$.



Модуль интеграла по границе по крайней мере одного из Q_i хотя бы $\frac{|\alpha|}{4}$. Назовём этот прямоугольник P_1 , и продолжим процесс. Получим систему вложенных замкнутых прямоугольников $P_0 \supset P_1 \supset \dots$, таких, что $\left| \int_{\partial P_k} F(z) dz \right| \geq \frac{|\alpha|}{4^k}$. При этом $l(\partial P_k) = 2^{-k} l(\partial P_0)$, и $\text{diam}(P_k) = 2^{-k} \text{diam}(P_0)$.

Имеется ровно одна точка z_0 в пересечении $\bigcap_{k \geq 0} P_k$. Воспользуемся условием того, что F голоморфна в точке z_0 : $F(z) = F(z_0) + F'(z_0)(z - z_0) + \underbrace{\psi(z)}_{o(|z - z_0|)}$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |\psi(z)| \leq \varepsilon |z - z_0|$. Пусть k настолько велико, что $\text{diam } P_k < \delta$.

$$\int_{\partial P_k} F(z) dz = \int_{\partial P_k} [F(z_0) + F'(z_0)(z - z_0)] dz + \int_{\partial P_k} \psi(z) dz$$

Первый интеграл обнуляется, так как это линейная функция по z , у неё есть первообразная. Оценивая второй интеграл, получаем

$$\frac{|\alpha|}{4^k} \leq \left| \int_{\partial P_k} \psi(z) dz \right| \leq \varepsilon \text{diam } P_k \cdot l(\partial P_0) = \varepsilon \cdot 2^{-k} \text{diam } P_0 \cdot 2^{-k} l(\partial P_0) = 4^{-k} \varepsilon \cdot \text{diam } P_0 \cdot l(\partial P_0)$$

Выбирая довольно маленький ε , получаем, что $|\alpha|$ меньше любого положительного числа. □

Теорема 1.3.5 (Об устранимой особенности замкнутой дифференциальной формы). Пусть $\Phi = f dx + g dy$ — непрерывная дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{C}$.

Если $z_0 \in G$, и Φ замкнута в $G \setminus \{z_0\}$, то Φ замкнута в G .

Доказательство. Докажем, что $\forall P \subset G : \int_{\partial P} \Phi = 0$. Рассмотрим случаи.

- Если $z_0 \notin P$, то интеграл нуль по условию.
- Если $z_0 \in \text{Int } P$, то данный случай сводится к следующему: разобьём прямоугольник на два так, чтобы z_0 оказалось на границе:



- Если $z_0 \in \partial P$, то отступим на ε , интеграл по границе P_ε будет нулём: $\int_{\partial P_\varepsilon} \Phi = 0$.

Заметим, что $\int_{\partial P_\varepsilon} \Phi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial P} \Phi$, так как коэффициенты дифференциальной формы равномерно непрерывны в некоторой окрестности P . Значит, $\int_{\partial P} \Phi = 0$.

□

Теорема 1.3.6 (Малая интегральная формула Коши). Пусть f — голоморфна в области G , $B = B(z_0, r)$ — круг, $\overline{B} \subset G$. Тогда $\forall z \in B$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Доказательство. Докажем для некоего фиксированного $z \in B$.

Рассмотрим функцию $g(\zeta) = \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$. g голоморфна в области $G \setminus \{z\}$. Тем самым, $g(\zeta) d\zeta$ — замкнутая форма в $G \setminus \{z\}$, а по теореме об устранимой особенности $g(\zeta) d\zeta$ замкнута в G (определим по непрерывности $g(z) := f'(z)$).

Но так как круг — удобная область, то у g имеется первообразная в некотором круге $B(z_0, r(1 + \varepsilon))$ (где $\varepsilon > 0$ настолько мал, что $B(z_0, r(1 + \varepsilon)) \subset G$),

Тем самым, $\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta = 0$, откуда

$$\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \cdot \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i \cdot f(z)$$

□

Следствие 1.3.1 (Теорема Коши). Если функция голоморфна в области $G \subset \mathbb{C}$, то $\forall z_0 \in G$ функция f (в некоторой окрестности) раскладывается в некоторый степенной ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, причём радиус сходимости хотя бы $\text{dist}(z_0, \partial G)$.

Доказательство. Пусть $r \in (0, \text{dist}(z_0, \partial G))$. Рассмотрим $B = B_r(z_0)$. Так как $B \subset G$, то для точки $z \in B$ получаем

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} (z - z_0)^j \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \end{aligned}$$

Абсолютная равномерная сходимость в круге радиус r при $r < \text{dist}(z_0, \partial G)$ имеется по тем же причинам, что и при доказательстве (о).

Таким образом, мы получили степенной ряд, и так как коэффициенты степенного ряда, раз определены, не зависят от радиуса круга ($c_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}$), то радиус сходимости данного ряда хотя бы $\text{dist}(z_0, \partial G)$. \square

Лекция IV

12 марта 2024 г.

Замечание. Интегральную форму Коши можно спокойно дифференцировать: так,

$$\frac{d}{dz} f(z) = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

В общем случае

$$\frac{d^k}{dz^k} f(z) = \frac{d^k}{dz^k} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

Определение 1.3.3 (Целая (entire) функция). Голоморфная функция, заданная в \mathbb{C} .

Выберем $z_0 = 0$. Согласно (следствие 1.3.1), получаем $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$, где $c_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}} d\zeta$, причём имеется абсолютная сходимость везде в \mathbb{C} .

Теорема 1.3.7. Если f целая, и $|f(z)| = \mathcal{O}(z^N)$ при $|z| \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty$, то f — многочлен степени не более N .

Доказательство. Из определения \mathcal{O} : $\exists C, a \in \mathbb{R} : |f(z)| \leq C|z|^N$ при $|z| > a$.

Выберем $r > a$, и оценим: $|c_j| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{j+1}} ire^{i\theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Cr^N}{r^j} d\theta = \frac{Cr^N}{r^j}$. Получается, при $j > N : |c_j|$ меньше любого наперёд заданного положительного числа. \square

Следствие 1.3.2 (Теорема Лиувилля). Ограниченная целая функция постоянна.

Следствие 1.3.3 (Основная теорема алгебры). $\forall p \in \mathbb{C}[z] : \deg p > 0 \Rightarrow \exists z_0 \in \mathbb{C} : p(z_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $p(z) = \sum_{j=0}^N c_j z^j$, где $N > 0$ и $c_N \neq 0$.

Пойдём от противного: пусть $\forall z \in \mathbb{C} : p(z) \neq 0$.

Рассмотрим $f(z) := \frac{1}{p(z)}$.

- С одной стороны, это целая функция: $\frac{d}{dz} f(z) = -\frac{p'(z)}{p(z)^2}$.

- С другой стороны, f ограничена: оценим $|p(z)| \geq |z|^N \left(|c_N| - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{|c_j|}{|z|^{N-j}} \right)$, откуда для достаточно больших $|z|$: $|p(z)| \geq \frac{|c_N|}{2} |z|^N$.
Тем самым, $p(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \infty$, то есть $f(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$. А при малых $|z|$: f ограничена, как непрерывная функция на компакте.
- Тем самым, по теореме Лиувилля, $f \equiv \text{const}$, то есть $p \equiv \text{const}$. Противоречие, мы предполагали $\deg p > 0$. \square

Теорема 1.3.8 (Теорема о среднем). Пусть $z_0 \in G$, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна в G . Выберем $r < \text{dist}(z_0, \partial G)$. Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

Доказательство. Посчитаем $f(z_0)$ по интегральной формуле:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it}) ire^{it}}{re^{it}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

\square

Это действительно среднее в обычном смысле: f проинтегрирована по окружности по мере Лебега, и интеграл поделили на меру окружности.

Теорема 1.3.9 (Принцип максимума модуля). Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ — непостоянная голоморфная функция. Тогда $|f| : z \mapsto |f(z)|$ не может достигать наибольшего значения при $z \in G$.

Доказательство. Пойдём от противного: пусть $\exists z_0 \in G : \forall z \in G : |f(z)| \leq |f(z_0)|$. Выберем $r > 0 : B(z_0, r) \subset G$, и докажем, что $|f|$ постоянна в $B(z_0, r)$. Пусть $\rho < r$, по теореме о среднем

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(z_0 + \rho e^{it})|}_{\leq |f(z_0)|} dt, \text{ причём равенство достигается только если}$$

$\forall t \in [0, 2\pi] : |f(z_0 + \rho e^{it})| = |f(z_0)|$ (если $\exists t_0 \in (0, 2\pi) : |f(z_0 + \rho e^{it_0})| < |f(z_0)|$), то по непрерывности $\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) : |f(z_0 + \rho e^{it})| < |f(z_0)| - \varepsilon$, то есть на промежутке $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ интеграл строго меньше требуемого значения).

Лемма 1.3.1. Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна, и $\exists z_0 \in G : f'(z_0) \neq 0$. Тогда $\exists U \ni z_0 : f(z_0) \in \text{Int } f(U)$.

Доказательство леммы.

Теорема об обратной функции. \square

Тем самым, $\forall z \in B(z_0, r) : f'(z) = 0$ (так как $|f(z)|$ — максимум).

Далее применяем теорему единственности, доказанную во II семестре: f и константа, равная $|f(z_0)|$ совпадают на множестве с предельной точкой, значит, они совпадают везде в G . \square

Следствие 1.3.4. Пусть G — ограниченная область, $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна в G . Тогда $\forall z \in G : |f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|$.

Доказательство. f достигает своё наибольшее значение на компакте \overline{G} , но согласно принципу максимума, это значение достигается не внутри G . \square

1.4 Гармонические функции

Запишем теорему о среднем для $f : G \rightarrow \mathbb{C}$:

$$f(z_0) = \int_1 2\pi(f(z_0) + re^{it}) dt$$

Пусть $f = u + iv$, где u, v — вещественные функции в G . Теорема о среднем говорит, что

$$u(z_0) = \int_1 2\pi(u(z_0) + re^{it}) dt \quad v(z_0) = \int_1 2\pi(v(z_0) + re^{it}) dt$$

Так как f аналитична, то в вещественном смысле $u, v \in C^\infty(G)$.

Запишем уравнения Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Дифференцируя второй раз, получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

Это так называемое *уравнение Лапласа*: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Обобщим. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — область, пусть $f \in C^2(G)$.

Определение 1.4.1 (f — гармоническая функция в G). $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$.

Оператор $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ называется *оператором Лапласа*, и понятно, что гармонические функции — в точности такие u , что $\Delta u = 0$.

Утверждение 1.4.1. Если $u \in C^2(G)$, где область $G \subset \mathbb{R}^2$, то локально существует голоморфная $f : u = \Re f$. Иными словами, $\forall z_0 \in G : \exists U \ni z_0, \exists$ аналитическая $f : U \rightarrow \mathbb{C} : u = \Re f$.

Доказательство. Пусть $\phi := \frac{\partial u}{\partial x}, \psi := -\frac{\partial u}{\partial y}$. Тогда $\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$, то есть $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ везде в G .

Раз накрест-взятые частные производные совпадают, то дифференциальная форма $\phi dx + \psi dy$ замкнута, значит, локально имеется первообразная.

Зафиксируем точку $z_0 \in G$, имеется некоторый шарик $B \ni z_0$, в котором есть первообразная v :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \phi = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Это уравнения Коши — Римана, значит, $f := u + iv$ голоморфна в B . □

Теорема 1.4.1 (Морера). Пусть $f : (G \subset \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна. Следующие условия эквивалентны.

1. f голоморфна в G .
2. f аналитична в G .
3. Дифференциальная форма $f(z) dz$ замкнута.

Доказательство. (1) \iff (2) уже доказано: (теорема 1.0.1) и (следствие 1.3.1).

(1) \Rightarrow (3) доказано тоже: (теорема 1.3.1).

Докажем (3) \Rightarrow (2). Пусть F — первообразная формы $f(z) dz$ в круге $B(z_0, r) \subset G$. F голоморфна в $B(z_0, r)$, и $\forall z \in D : F'(z) = f(z)$.

Значит, F раскладывается в степенной ряд $F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$. Отсюда $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j(z-z_0)^{j-1}$. □

1.5 Первообразная от замкнутой формы вдоль непрерывного пути

1.5.1 Наводящие предположения

Пусть $f dx + g dy$ — непрерывная дифференциальная форма в G , предположим, что она точная: имеется первообразная F .

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — кусочно-гладкий путь. Ранее было получено, что $\int_{\gamma} f dx + g dy = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

Давайте обобщим интеграл вдоль пути: пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — произвольный непрерывный путь. Положим по определению $\int_{\gamma} f dx + g dy \stackrel{\text{def}}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

Теперь пусть $f dx + g dy$ всего лишь замкнута. Выберем $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ так, что $\forall j : \gamma([t_j, t_{j+1}])$ лежит в области G_j , в которой у формы $f dx + g dy$ есть первообразная F_j . Попробуем определить

$$\int_{\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}} f dx + g dy \stackrel{\text{def}}{=} F_j(\gamma(t_{j+1})) - F_j(\gamma(t_j))$$

и

$$\int_{\gamma} f dx + g dy \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{k-1} F_j(\gamma(t_{j+1})) - F_j(\gamma(t_j))$$

Проблема в том, чтобы доказать, что определение корректно — не зависит от выбора разбиения $a = t_0 < \dots < t_k = b$.

1.5.2 Требуемые свойства

Пусть $\Phi = f dx + g dy$ — замкнутая форма в области $G \subset \mathbb{C}$, и $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — путь.

Определение 1.5.1 (Первообразная формы Φ вдоль пути γ). Такая функция $v : [a, b] \rightarrow G$:

- $\forall t \in [a, b] : \exists U \ni \gamma(t), \varepsilon > 0$ и найдётся первообразная F для Φ на U , такая, что

$$\forall \tau \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) : v(\tau) = F(\gamma(\tau))$$

Факт 1.5.1. Функция v , если существует, непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Непрерывность в какой-то конкретной точке следует из непрерывности композиции $F \circ \gamma$. \square

Теорема 1.5.1. Первообразная замкнутой дифференциальной формы вдоль пути γ всегда существует, и любые две отличаются на константу.

Доказательство. Сначала докажем существование. Для всех $t \in [a, b]$ выберем окрестность $U_t := B(\gamma(t), r_t)$, где r_t настолько мал, что в U_t есть первообразная.

Семейство $\{U_t\}_{t \in [a, b]}$ образуют открытое покрытие $\gamma([a, b])$. По лемме Лебега $\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in [a, b] : B(\gamma(t), \varepsilon)$ содержится в каком-то $U_{t'}$. Применяя теорему Кантора о равномерной непрерывности, получаем существование разбиения $a = t_0 < \dots < t_k = b$, такое, что $\gamma([t_j, t_{j+1}])$ лежит в одном из U_t .

Произвольно выберем $v(a)$. Построим $v|_{[t_j, t_{j+1}]}$ индукцией по j .

База: Пусть $\gamma([t_0, t_1]) \subset U_0$, и имеется первообразная F_0 на U_0 . Определим $v(\tau) = F_0(\gamma(\tau))$ при $\tau \in [t_0, t_1]$.

Переход: Пусть $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subset U_j, F_j$ — первообразная Φ на U_j . Найдётся такое $\delta > 0$: $\gamma([t_j - \delta, t_{j+1}]) \subset U_j$, значит, $U_j \cap U_{j-1} \neq \emptyset$. Это пересечение связно, на нём имеются две первообразные, F_{j-1} и F_j .

Добавим константу к F_j так, чтобы $F_j \equiv F_{j-1}$ при $t \in [t_j - \delta, t_j]$, и определим $v(\tau) = F_j(\gamma(\tau))$ при $\tau \in [t_j, t_{j+1}]$. Окрестность U_j захватывает отрезок $[t_j - \delta, t_{j+1}]$, значит, для точек во внутренности выполнено условие из определения первообразной.

Докажем единственность: рассмотрим точку $t \in [a, b]$. Найдутся два круга $U, V \ni \gamma(t)$, и первообразные F, H формы Φ в этих окрестностях, такие, что $u(\tau) = F(\gamma(\tau))$ и $v(\tau) = H(\gamma(\tau))$ при τ , достаточно близких к t .

Тем самым, $u - v$ локально постоянна, но локально постоянная функция на связном множестве — константа (образ любого элемента из образа открыто-замкнуто). \square

Лекция V

15 марта 2024 г.

Теперь определим интеграл $\int_{\gamma} \Phi = v(b) - v(a)$, где v — первообразная для Φ вдоль пути γ , получившаяся из (теорема 1.5.1). Теперь интеграл определён для любой замкнутой формы вдоль пути (однако для кусочно-гладкого пути интеграл (определение 1.1.3) был определён для необязательно замкнутой формы).

Свойства (Свойства первообразной вдоль пути).

- Аддитивность по дифференциальной форме: $\int_{\gamma} (\Phi + \Psi) = \int_{\gamma} \Phi + \int_{\gamma} \Psi$.
- Аддитивность вдоль пути: $\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} \Phi = \int_{\gamma_1} \Phi + \int_{\gamma_2} \Phi$.
- Если γ — кусочно-гладкий путь, то определение совпадает со старым.

Доказательство. γ' существует везде, кроме, может быть, конечного множества.

При помощи леммы Лебега разобьём отрезок точками $a = t_0 < \dots < t_k = b$ так, что $\forall j < k : \exists U_j \supset \gamma([t_j, t_{j+1}])$ такая, что на U_j найдётся первообразная H_j :

$$\forall \tau \in [t_j, t_{j+1}] : F(\tau) = H_j(\gamma(\tau))$$

И старый, и новый интегралы аддитивны вдоль пути. Несложно видеть, что в обоих определениях $\int_{\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}} \Phi$ совпадают. \square

- Так как путь γ необязательно дифференцируем, то основную оценку интеграла вдоль пути распространить на новое определение проблематично: длины может не существовать.
- Пусть $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ — гомеоморфизм, $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — путь, тогда

$$\int_{\gamma} \Phi = \pm \int_{\gamma \circ \phi} \Phi$$

где знак зависит от того, возрастает ϕ , или убывает.

Причина. Если F — первообразная Φ вдоль пути γ , то $F \circ \phi$ — первообразная для Φ вдоль пути $\gamma \circ \phi$. \square

1.5.3 О гомотопности путей

Пусть $K = [0, 1] \times [a, b]$ — квадрат гомотопии.

Определение 1.5.2 (Гомотопия). Непрерывное отображение $\Gamma : K \rightarrow \mathbb{C}$.

Положим $\gamma_s := \Gamma(s, _)$. Как водится, γ_0, γ_1 — два пути $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, и существование Γ по определению влечёт гомотопность этих путей.

Пути $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow G$ *гомотопны в G* , если найдётся гомотопия $\Gamma : K \rightarrow G$.

Будем говорить о гомотопности двух замкнутых путей γ_1 и γ_2 при условии существования гомотопии $\Gamma : K \rightarrow G$, соединяющей γ_1 и γ_2 в классе замкнутых путей: $\forall s \in [0, 1] : \Gamma(s, a) = \Gamma(s, b)$.

Гомотопность путей — отношение эквивалентности, также как и гомотопность замкнутых путей.

Определение 1.5.3 (Односвязная область). Область, в которой всякий замкнутый путь гомотопен постоянному. Иными словами, фундаментальная группа тривиальна.

Определение 1.5.4 (Звёздная область $A \subset \mathbb{R}^n$). Такая область, что для некоторого *центра* $z_0 \in A$: $\forall z \in A : \{z_0 + s(z - z_0) | s \in [0, 1]\} \subset A$.



Факт 1.5.2. Всякая звёздная область A односвязна.

Доказательство. Прогомотопируем путь $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ при помощи

$$\begin{aligned} \Gamma : [0, 1] \times [a, b] &\rightarrow K \\ \tau, t &\mapsto z_0\tau + (1 - \tau)\gamma(t) \end{aligned}$$

□

Пример (Неодносвязная область). Пусть A — звёздная область, выкинем точку $w_0 \in A$.



Интеграл $\frac{dz}{z - w_0}$ по маленькой окружности ω , обходящей w_0 , равен $2\pi i$, значит, путь не стягиваем.

Теорема 1.5.2 (Первообразная вдоль гомотопии). Пусть $K = [0, 1] \times [a, b]$ — квадрат, $\Gamma : K \rightarrow G$ — гомотопия, и $\Phi = f dx + g dy$ — замкнутая дифференциальная форма в G . Тогда $\exists F : K \rightarrow \mathbb{C}$ — *первообразная формы Φ вдоль гомотопии Γ* , то есть такая функция, что $\forall (s, t) \in K : \exists U \ni (s, t) : U \subset G, \exists \delta > 0 : \exists \Phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ — первообразная формы F , такая, что

$$\begin{cases} |\sigma - s| < \delta \\ |\tau - t| < \delta \end{cases} \Rightarrow F(\sigma, \tau) = H(\Gamma(\sigma, \tau))$$

Доказательство. Покроем множество $\Gamma(K)$ кругами $U \subset G$, такими что в каждом круге U у Φ есть первообразная H_U .

По лемме Лебега $\exists \rho > 0 : \forall e \subset K : \text{diam}(e) < \rho \Rightarrow e$ лежит в одном из кругов данного покрытия.

Разобьём квадрат гомотопии K на прямоугольники диаметра меньше ρ :



Аналогично доказательству (теорема 1.2.2), в каждом горизонтальном прямоугольнике найдётся первообразная F_j , а дальше их надо сшить. Сшить несложно: вдоль горизонтального отрезка — пересечения прямоугольников — $F_j|_{\dots} = F_{j+1}|_{\dots}$. Так как это — первообразные вдоль пути, то они отличаются на константу. Значит, можно изменить все F_j на константы так, чтобы их склейка была непрерывной функцией.

Дальше надо проверить, что действительно получилась первообразная на квадрате. Выберем точку $(s, t) \in K$. Если точка попала внутрь какого-то прямоугольника, то можно выбрать окрестность, лежащую внутри прямоугольника, иначе чуть сложнее, но несильно. \square

Теорема 1.5.3. Интегралы от замкнутой формы Φ по гомотопным замкнутым путям равны.

Доказательство. Определим $w(t) := \int_{\gamma_t} \Phi$ для всех $t \in [0, 1]$.

Пусть F — первообразная для формы Φ вдоль гомотопии Γ . Понятно, что $w(t) = F(t, b) - F(t, a)$.

Докажем, что w локально постоянна на $[0, 1]$, следствием будет, что w постоянна, что и требуется доказать.

$\forall (\alpha, \beta) \in [0, 1] \times [a, b]: \exists \delta > 0$, круг U и первообразная H_U , такие, что

$$\begin{cases} |\alpha - \alpha'| < \delta \\ |\beta - \beta'| < \delta \end{cases} \Rightarrow F(\alpha', \beta') = H_U(\Gamma(\alpha', \beta'))$$

Пусть U_1, U_2 — такие шары для (t, b) и (t, a) соответственно. Тогда для τ , достаточно близких к t , выполнено $w(t) = H_{U_1}(\Gamma(t, b)) - H_{U_2}(\Gamma(t, a))$. H_1, H_2 — две первообразные в одной окрестности, они отличаются на константу, а $\Gamma(t, a) \equiv \Gamma(t, b)$, поэтому w локально постоянна. \square

Замечание. Если очень хочется, то можно соединить пути $\gamma_0 : [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{C}$ и $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$ гомотопией $\Gamma : K \rightarrow \mathbb{C}$, где $K := \{(t, s) | t \in [0, 1], s \in [a_t, b_t]\}$ (a_t, b_t — какие-то непрерывные функции от t , такие, что $a_t < b_t$).

1.6 Ряды Лорана

Ряд Лорана $f(z)$ — ряд вида $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$.

Говорят, что ряд Лорана сходится в точке z , если оба ряда $f_+(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$ и $f_-(z) = \sum_{n < 0} c_n (z - z_0)^n$ сходятся.

Первый ряд степенной, имеется некий радиус сходимости r_+ , такой, что $|z - z_0| < r_+ \Rightarrow f_+$ сходится. При замене переменной $w := \frac{1}{z - z_0}$, $f_-(1/w)$ становится степенным рядом от w , сходящимся при $w < \frac{1}{r_-}$.

Таким образом, ряд сходится абсолютно внутри «кольца» $\{z \in \mathbb{C} | r_- < |z - z_0| < r_+\}$:



Теорема 1.6.1. Пусть $0 \leq r_- < r_+ \leq \infty$, функция f голоморфна в «кольце» $K := \{z \in \mathbb{C} | r_- < |z| < r_+\}$.

Тогда f представима в K сходящимся рядом Лорана.

Доказательство. Пусть $z \in K$. Определим $\phi_z : K \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi_z(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \neq z \\ f'(z), & \zeta = z \end{cases}$.

Согласно (теорема 1.3.5), форма $\phi_z(\zeta) d\zeta$ замкнута в K .

Выберем $r, R \in \mathbb{R}$ так, что $r_- < r < |z| < R < r_+$. Для $\rho \in \mathbb{R}$ определим $\gamma_\rho : [0, 2\pi] \rightarrow K$, $\gamma_\rho(t) := \rho e^{it}$. Пути γ_R и γ_r гомотопны, значит, $\int_{\gamma_R} \phi_z(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_r} \phi_z(\zeta) d\zeta$. А именно,

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

Преобразовывая, получаем

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \underbrace{\int_{\gamma_R} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta}_{2\pi i} - f(z) \underbrace{\int_{\gamma_r} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta}_0$$

Тем самым, получили *малую интегральную форму Коши для кольца*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right)$$

Осталось преобразовать дроби в ряды:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = \int_{\gamma_R} \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \cdot (z - z_0)^j \\ \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = -\frac{1}{z - z_0} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} d\zeta = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_r} f(\zeta) (\zeta - z_0)^k d\zeta \cdot \frac{1}{(z - z_0)^k} \end{aligned}$$

Сходимость степенная, имеется признак Вейерштрасса, можно поменять местами сумму и интеграл, поэтому все преобразования законны.

При замене $j = -k - 1$, второе выражение преобразуется в форму

$$- \sum_{j=-1}^{-\infty} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \cdot (z - z_0)^j$$

Теперь можно заметить, что интегралы вдоль γ_r и γ_R равны, так как особенностей у интегралов — слагаемых в ряде — в кольце нет. Окончательно получаем

$$f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j (z - z_0)^j, \text{ где } c_j = \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \text{ для любого } \rho \in (r_-, r_+)$$

□

Лекция VI

22 марта 2024 г.

Ряд Лорана $g(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j z^j$ принято раскладывать на две части — *регулярную* $\sum_{j \geq 0} c_j (z - z_0)^j$ и *главную* $\sum_{j < 0} c_j (z - z_0)^j$.

Если ряд Лорана изучать в маленькой окрестности z_0 , то главная часть асимптотически больше. Регулярная же сходится на всей комплексной плоскости.

1.7 Изолированные особенности голоморфных функций

Пусть область $G \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in G$, f задана и аналитична в $G \setminus \{z_0\}$. Тогда говорят, что f *имеет особенность в z_0* .

Возможны случаи:

1. f ограничена вблизи z_0 .

Точка z_0 называется *устранимой особенностью*, так как в силу (теорема 1.7.1) $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

2. $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

Точка z_0 называется *полюсом*.

3. f не имеет предела в z_0 .

Точка z_0 называется *существенно особой точкой*.

Теорема 1.7.1. В первом случае — f ограничена вблизи z_0 — f единственным образом продолжается до аналитической функции в области G .

Доказательство. Выберем $R > 0$ такой, что $B(z_0, R) \subset G$. f разложится в некоторый ряд Лорана при $0 < |z - z_0| < R$.

Запишем $c_j = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{it})(\rho e^{it})^{-j-1} \cdot \rho e^{it} dt$ и грубо оценим коэффициенты главной части ($j < 0$). Пусть $|f| \leq C$ внутри круга $B(z_0, R)$ для некоторой константы C .

$$|c_j| \leq \frac{C}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^{-j} dt = C \rho^{-j}$$

Устремляя $\rho \rightarrow 0$, получаем $c_j = 0$. Тем самым, f раскладывается в ряд Тейлора в окрестности z_0 . □

Запишем несколько другую классификацию особенностей точки, опирающуюся на ряд Лорана $f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j (z - z_0)^j$.

I При всяком $j < 0$: $c_j = 0$.

II Множество $\mathcal{A} := \{j < 0 | c_j \neq 0\}$ конечно.

III Множество $\mathcal{A} := \{j < 0 | c_j \neq 0\}$ бесконечно.

Понятно, что I эквивалентно 1.

Теорема 1.7.2. На самом деле, $\text{II} \iff 2, \text{III} \iff 3$.

Доказательство.

$\text{II} \Rightarrow 2$ Пусть $k = -\min \mathcal{A}$.

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} \cdots + c_0 + \sum_{j>0} c_j (z-z_0)^j = \frac{1}{z-z_0}^k (c_{-k} + c_{-k+1} + \cdots) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$$

При этом $g(z_0) \neq 0$ и $g(z)$ аналитична. Тем самым, $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

$2 \Rightarrow \text{II}$ Положим $h(z) := \frac{1}{f(z)}$ в некоторой окрестности z_0 .

h аналитична при $z \neq z_0$, и $\lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = 0$, значит, h имеет устранимую особенность в z_0 . **Может что-то пропустить.** Пусть k — наименьший номер, такой, что $b_k \neq 0$, где b_k — коэффициент из разложения h в ряд Тейлора:

$$h(z) = b_k (z-z_0)^k + b_{k+1} (z-z_0)^{k+1} + \cdots = (z-z_0)^k (b_k + b_{k+1} (z-z_0) + \cdots) = (z-z_0)^k \cdot u(z)$$

u аналитична вблизи z_0 , и $u(z_0) = b_k \neq 0$.

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \frac{1}{u(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^k} (c_0 + c_1 (z-z_0) + \cdots)$$

Почленно деля, действительно получаем, что $f(z)$ имеет конечное число ненулевых членов в разложении в ряд Лорана. \square

Пусть z_0 — полюс f , $k := -\min \{j < 0 | c_j \neq 0\}$. Число k называется *порядком* полюса z_0 .

Если же g аналитична в z_0 , $g(z_0) = 0$, $g \not\equiv 0$, то $g(z) = \sum_{j \geq 0} a_j (z-z_0)^j$, положим $l := \min \{j | a_j \neq 0\}$.

Число l — *порядок* f .

Факт 1.7.1. f имеет полюс порядка k в $z_0 \iff \frac{1}{f}$ имеет ноль порядка k в z_0 .

Интересный факт (Теорема Пикара). Пусть z_0 — существенно особая точка аналитической функции f . Тогда $\forall \varepsilon > 0 : f(\{z | 0 < |z - z_0| < \varepsilon\})$ есть \mathbb{C} , кроме, может быть, двух точек.

Мы докажем более простой вариант теоремы Пикара.

Теорема 1.7.3 (Сохоцкий). Пусть z_0 — существенно особая точка аналитической функции f . Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \mathcal{B} := f(\{z | 0 < |z - z_0| < \varepsilon\})$ плотно в \mathbb{C} .

Доказательство. От противного: пусть $\exists w_0 \notin \overline{\mathcal{B}}$, то есть $\exists \delta > 0 : B(w_0, \delta) \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

Определим

$$h : B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{1}{f(z) - w_0}$$

Хотя h и имеет особенность при $z = z_0$, но h ограничена, то есть особенность устранима. $f(z) = \frac{1}{h(z)} + w_0$, и так как h аналитична в z_0 , то особенность в z_0 — то ли тоже устранимая особенность, то ли полюс, но уж никак z_0 — не существенно особая точка. \square

Пример. Возьмём $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. У подынтегральной функции в нуле особенность устранимая, а с бесконечностью есть некоторые проблемы. Впрочем, избавимся и от нуля в области интегрирования:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x} dx \quad (\equiv)$$

Запишем формулу Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Интегрируя по всей оси $\frac{\cos x}{x}$, мы получим ноль из-за нечётности, поэтому можно продолжить равенство так:

$$(\equiv) \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon < |x| < R} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

Теперь перейдём к функции, аналитической в комплексной плоскости: $\phi(z) := \frac{e^{iz}}{z}$.

Введём путь $\Gamma = [\varepsilon \rightarrow R] \cdot \gamma_R \cdot [-R \rightarrow -\varepsilon] \rightarrow \gamma_\varepsilon$, где $[a \rightarrow b]$ — путь, проходящий отрезок $[a, b]$ в направлении от a к b , а $\begin{cases} \gamma_R(t) = Re^{it}, & t \in [0, \pi] \\ \gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{i(\pi-t)}, & t \in [0, \pi] \end{cases}$.

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \phi(z) dz = \int_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{i(\pi-t)}}}{\varepsilon e^{i(\pi-t)}} \varepsilon i e^{i(\pi-t)} dt = \int_0^\pi i e^{i\varepsilon e^{i(\pi-t)}} dt \quad \begin{matrix} \text{подынтегральное выражение равномерно сходится к } i. \\ \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \end{matrix} \quad -i\pi$$

$$\int_{\gamma_R} \phi(z) dz = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} R i e^{it} dt = i \int_0^\pi e^{iRe^{it}} dt$$

Оценим $e^{iRe^{it}} = e^{iR \cos t - R \sin t} = e^{iR \cos t} \cdot e^{-R \sin t}$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости интеграл по γ_R будет нулём.

...

Этот интеграл получилось так взять, так как у ϕ была особенность в нуле, и мы её обошли. А иногда особенности находятся внутри пути интегрирования, в таком случае приговаривается *формула в вычетax*.

1.8 Вычеты

Пусть f задана и голоморфна в $G \setminus \{z_0\}$, где G — область, $z_0 \in G$ — изолированная особенность.

Вблизи z_0 f раскладывается в ряд Лорана $f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j (z - z_0)^j$.

Определение 1.8.1 (Вычет функции f в точке z_0). Коэффициент c_{-1} , обозначается $\text{Res}_{z_0} f$.

Этот коэффициент так важен, так как у $c_j (z - z_0)^j$ при $j \neq -1$ имеется первообразная в G , и при интегрировании по окружности, обходящей z_0 , пропадут все коэффициенты ряда Лорана, кроме вычета.

1.8.1 Как вычислять вычеты

У нас есть формула для вычисления коэффициентов ряда Лорана, но она получается интегрированием, а мы как раз и хотим использовать вычеты, чтобы уметь удобно интегрировать. Поэтому иногда пригождаются следующие частные случаи:

- Пусть z_0 — полюс функции f степени k :

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + f_+(z)$$

где f_+ — аналитическая вблизи z_0 .

Домножая f на $(z - z_0)^k$, получаем аналитическую

$$(z - z_0)^k f = c_{-k} + c_{-k+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{k-1} + (z - z_0)^k \cdot f_+(z)$$

Теперь можно найти $\text{Res}_{z_0} f$ по формуле: $\text{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} [(z - z_0)^k f(z)] \Big|_{z=z_0}$.

- Пусть $k = 1$ — у f имеется полюс первого порядка. Тогда дифференцировать не надо, и формула вырождается в

$$\text{Res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

- Возьмём ещё более частный случай: $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, где g, h аналитичны в окрестности z_0 , $g(z_0) \neq 0$, а h имеет простой нуль в z_0 (нуль кратности 1).

$$\text{Res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)(z - z_0)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)} = \frac{g(z)}{h'(z)}$$

1.8.2 Индекс замкнутого пути относительно точки

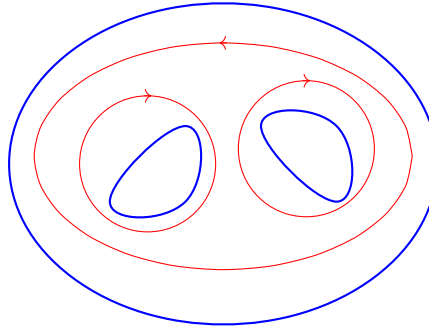
Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область, Φ — замкнутая дифференциальная форма в G . Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — какие-то замкнутые пути с носителем в G . Обозначим $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$.

Определим интеграл от формы Φ по данной совокупности путей $\int_{\Gamma} \Phi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \Phi$.

Назовём систему путей Γ *правильной*, если для всякой аналитической функции f в G : $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.

Примеры (Правильные системы путей).

- $|\Gamma| = 1$. Если γ_1 гомотопен тождественному, то Γ , конечно, правильная.
- В частности, любой замкнутый путь в односвязной области формирует правильную систему из одного пути.
- Пусть в кольце имеются два пути γ_1, γ_2 , обходящие концентрические окружности в противоположных направлениях. Тогда $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ — правильная система, так как $\gamma_1 \sim \gamma_2^-$.
- Рассмотрим область, ограниченную синими линиями с двумя дырками. В ней система из красных путей правильная, так как можно разложить их в сумму двух зелёных стягиваемых путей:



Пусть γ — петля в \mathbb{C} , $z_0 \notin \text{Im}(\gamma)$.

Определение 1.8.2 (Индекс пути γ относительно z_0). Значение интеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$. Обозначается $\text{Ind}_{z_0} \gamma$.

Индекс означает число раз, которые мы обошли вокруг данной точки с учётом ориентации, но пока непонятно даже, почему индекс — целое число.

Это определение очевидным образом распространяется на систему путей: $\forall \gamma_j \in \Gamma : z_0 \notin \text{Im}(\gamma) \Rightarrow$ определён $\text{Ind}_{z_0} \Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z-z_0}$

Свойства (Свойства индекса, докажем потом).

- $\text{Ind}_{z_0} \gamma \in \mathbb{Z}$.
- Функция $[z_0 \mapsto \text{Ind}_{z_0} \gamma]$ постоянна на каждой компоненте связности $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$.
- На неограниченной компоненте связности $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$ индекс равен нулю.

Теорема 1.8.1 (Формула вычетов). Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область, Γ — правильная система путей в G , $f : G \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитическая функция, и z_1, \dots, z_k — особенности. Если все точки z_j не лежат на носителе системы путей Γ , то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^k \text{Res}_{z_j} f \cdot \text{Ind}_{z_j} \Gamma \right)$$

Доказательство. Для каждой точки z_j имеется r_+ , такой, что $B(z_j, r_+) \setminus \{z_j\} \subset G$. Тем самым, в окрестности точки z_j функция f разложима в ряд Лорана, и его главная часть сходится везде кроме z_j .

Пусть g_1, \dots, g_k — главные части рядов Лорана для f в точках z_1, \dots, z_k соответственно. Функция $h(z) := f(z) - g_1(z) - \dots - g_k(z)$ — аналитическая функция в области G , так как она имеет конечное число особых точек, в которых ограничена.

Так как Γ — правильная, то $\int_{\Gamma} h(z) dz = 0$. Тем самым, мы получили

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k \int_{\Gamma} g_j(z) dz$$

Посчитаем $\int_{\Gamma} g_j(z) dz$. Распишем

$$g_j(z) = \frac{\text{Res}_{z_j} g}{z - z_j} + \underbrace{\frac{a_1}{(z - z_j)^2} + \dots + \frac{a_{s-1}}{(z - z_j)^s} + \dots}_{h_j(z)}$$

У h_j имеется первообразная, так как ряд Лорана можно интегрировать и дифференцировать почленно — доказательство аналогично одному для степенных рядов. Значит, $\int_{\Gamma} g_j(z) dz = (\text{Res}_{z_j} f) 2\pi i$.

$\text{Ind}_{z_0} \Gamma$ (очевидно, $\text{Res}_{z_j} g_j = \text{Res}_{z_j} f$). □

Лекция VII

29 марта 2024 г.

1.8.3 Обобщение интеграла $\frac{\sin x}{x}$

Обозначим $\mathbb{C}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{x + iy | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_{>0}\}$.

Пусть f аналитична в $\{x + iy | y > -\varepsilon\}$, кроме конечного числа особых точек в \mathbb{C}_+ , назовём их z_1, \dots, z_n . В $\{x + iy | -\varepsilon < y < 0\}$, получается, у f особенностей нет.

Предложение 1.8.1. Пусть при $\theta \in [0, \pi], R > 0$: $|f(Re^{i\theta})R|$ ограничена в \mathbb{C}_+ , причём $\forall \theta \in [0, \pi] : \lim_{R \rightarrow \infty} f(Re^{i\theta})R = 0$.

Например, $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, где g, h — многочлены, $\deg g < \deg h$.

Тогда $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{z_j} f$. Здесь $\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R$, то есть особенности несобственного интеграла на плюс-минус бесконечностях могут сокращать друг друга.

Доказательство. Проинтегрируем f по синему пути, где полуокружность — радиуса R :



Пусть R — настолько большое, что все особые точки в \mathbb{C}_+ содержатся во внутренней области, отсекаемой данным путём. Оценим интеграл по верхней полуокружности:

$$\int_0^{\pi} f(Re^{it}) iRe^{it} dt \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{\text{теорема Лебега о мажорируемой сходимости}} 0$$

Далее применяем формулу в вычетах.

Из гомотопности зелёной окружности и синего пути в $\mathbb{C}_+ \setminus \{z_j\}$ получаем, что их индексы равны 1 — ведь интеграл $\frac{dz}{z-z_0}$ по окружности мы знаем. \square

1.8.4 2-я формула замены переменной

Пусть $\Phi = f dx + g dy$ — замкнутая дифференциальная форма в G , $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — путь, рассмотрим интеграл $\int_{\gamma} \Phi$. Изменение параметризации для γ — 1-я формула замены переменной.

Теперь пусть $g : G_1 \rightarrow G_2$ — голоморфная функция, f — голоморфная функция в G_2 , $\gamma : [a, b] \rightarrow G_1$ — непрерывный путь, $\Phi = f(z) dz$. Тогда

$$\int_{g \circ \gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (f \circ g)(z) g'(z) dz$$

Наводящее соображение: пусть путь γ — кусочно-гладкий, $\rho(t) := g(\gamma(t))$. Тогда

$$\int_{\rho} f(z) dz = \int_a^b f(\rho(t)) \rho'(t) dt = \int_a^b f(g(\gamma(t))) g'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} (f \circ g)(z) \cdot g'(z) dz$$

Но нам эта формула пригодится в случае негладкого пути.

Пусть $\rho = g \circ \gamma$ — путь в области G_2 , ϕ — первообразная для формы $f(z) dz$ вдоль ρ .

Рассмотрим $t_0 \in [a, b]$. $\exists U \ni \rho(t_0)$ — окрестность, такая, что на ней есть первообразная Φ для $f(z) dz$. Значит, $\exists \delta > 0 : \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \Phi(\rho(t))$.

Положим $z_0 := \gamma(t_0)$. $\exists V \ni z_0 : g(V) \subset U$ из непрерывности g . $\forall w \in U : \Phi'(w) = f(w)$. Запишем

$$\forall z \in V : (\Phi \circ g)'(z) = \Phi'(g(z)) \cdot g'(z)$$

Тем самым, $\Phi \circ g$ есть первообразная для $(\Phi \circ g) \cdot g'$ в V . Значит, $\phi \circ g$ — первообразная для формы $f(g(z)) \cdot g'(z) dz$ вдоль пути γ .

Пусть γ — замкнутый путь, не проходящий через z_0 . По определению

$$\text{Ind}_{z_0} \gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

Применим функцию $[z \mapsto z - z_0]$. Согласно 2-й формуле замены переменной,

$$\text{Ind}_{z_0} \gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - z_0} \frac{dz}{z} = \text{Ind}_0(\gamma - z_0)$$

Следствие 1.8.1. *Индекс пути γ относительно z_0 — локально постоянная функция от z_0 .*

Доказательство. Пусть z_0 — точка вне носителя γ . Выберем настолько маленькое $\delta > 0$, что $B(z_0, \delta) \cap \gamma([a, b]) = \emptyset$.

Рассмотрим $z_1 \in B(z_0, \delta)$, и докажем, что $\text{Ind}_{z_0} \gamma = \text{Ind}_{z_1} \gamma$. Определим гомотопию путей $\gamma - z_0$ и $\gamma - z_1$:

$$\Gamma(t, \tau) := (1 - \tau)(\gamma(t) - z_0) + \tau(\gamma(t) - z_1) = \gamma(t) - ((1 - \tau)z_0 + \tau z_1)$$

Эта гомотопия не проходит через 0, значит, интегралы по $\gamma - z_0$ и $\gamma - z_1$ равны. □

Следствие 1.8.2. *Индекс постоянен на каждой компоненте связности $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$.*

Следствие 1.8.3. $\text{Ind}_{z_0} \gamma = 0$ на неограниченной компоненте связности $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$.

Доказательство. Оценим $\int_{\gamma - z_0} \frac{dw}{w}$ при достаточно большом $|z_0|$. Для такого z_0 носитель пути $\gamma - z_0$ лежит в некоторой полуплоскости, не содержащей нуля. Полуплоско́сть односвязна, это даже звёздная область, в ней путь стягиваем, значит, интеграл равен нулю. □

1.8.5 О логарифме

Логарифм — это функция, обратная к экспоненте, а экспонента имеет период $2\pi i$.

Пусть $w \in \mathbb{C}$.

1. Логарифм w — любое $z \in \mathbb{C} : e^z = w$.
2. У $w = 0$ логарифма нет; если z — одно из значений логарифма w , то все остальные значения имеют вид $\{z + 2\pi i k | k \in \mathbb{Z}\}$.
3. Для $w \neq 0 : e = |w|e^{i\theta}$, где $\theta \in \mathbb{R}$. Комплексное число $\log |w| + i\theta$ — одно из значений логарифма.

Пусть G — область.

Определение 1.8.3 (Функция ϕ в G — ветвь логарифма в G). ϕ непрерывна в G , и $e^{\phi(z)} = z$ для $z \in G$.

Факт 1.8.1. *Всякая ветвь логарифма обязательно голоморфна в G , и $\phi'(z) = \frac{1}{z}$.*

Доказательство. Рассмотрим $z_0 \in G, U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\} \subset G$. Так как производная экспоненты (как вещественной функции $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$) невырождена, то при достаточно малом δ у экспоненты имеется обратная $\psi : e^{\psi(z)} = z$ при $z \in U$.

С другой стороны, $e^{\phi(z)} = z$ при $z \in U$. Значит, $\phi - \psi$ — непрерывная функция, принимающая значения в дискретном множестве $\{2\pi ik \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Значит, это константа.

Тем самым, ϕ дифференцируема, и $\phi'(z) = \frac{1}{z}$. \square

Теорема 1.8.2. Во всякой односвязной области G : $0 \notin G \Rightarrow \exists$ непрерывная ветвь логарифма.

Доказательство. Напрямую следует из (теорема 1.8.3) для тождественного отображения. \square

Пусть $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитическая.

Определение 1.8.4 ($\Phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ — ветвь логарифма функции F). $\forall z \in G : e^{\Phi(z)} = F(z)$.

Замечание. В определении можно требовать лишь непрерывности Φ , аналитичность получится автоматически.

Теорема 1.8.3. Если G — односвязная область, $\forall z \in G : F(z) \neq 0$, то в G существует ветвь логарифма для F .

Доказательство. Функция $\frac{F'(z)}{F(z)}$ — голоморфна в G . Форма $\frac{F'(z)}{F(z)} dz$ замкнута в G , значит, имеется первообразная ϕ — голоморфная в G функция, такая, что $\psi'(z) = \frac{F'(z)}{F(z)}$.

$$\left(\frac{e^{\psi(z)}}{F(z)} \right)' = \frac{e^{\psi(z)} \cdot \psi'(z) F(z) - F'(z) e^{\psi(z)}}{F(z)^2}$$

По построению ψ числитель равен нулю. Тем самым, $e^{\psi(z)} = c \cdot F(z)$. $\exists a \in \mathbb{C} : c = e^a$. Положим $\phi := \psi - a$, это искомая ветвь логарифма. \square

Замечание. Не всякая первообразная для $\frac{F'}{F}$ есть ветвь логарифма — логарифмы отличаются на целые кратные $2\pi i$, а первообразные — на произвольную константу. Однако если ψ — первообразная $\frac{F'}{F}$, и $\exists z_0 \in \mathbb{C} : e^{\psi(z_0)} = F(z_0)$, то ψ — ветвь логарифма для F .

Замечание. Если ψ — ветвь логарифма, то все ветви логарифма имеют вид $\{\psi + 2\pi ik \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Данная функция $\frac{F'}{F}$ называется *логарифмической производной*.

Пусть G — область, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфна, $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — путь, $\forall z \in \gamma([a, b]) : f(z) \neq 0$.

Определение 1.8.5 (Ветвь логарифма вдоль пути γ). Функция $\phi : [a, b] \rightarrow G$, такая что $\forall t_0 \in [a, b] : \exists \delta > 0, \exists U \ni \gamma(t)$, и существует ветвь логарифма ψ функции f в U , такая, что

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \psi(\gamma(t))$$

Теорема 1.8.4. При сделанных предположениях существует ветвь логарифма f вдоль пути γ . При этом любые две ветви отличаются на $2\pi ik$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\frac{f'}{f}$, аналитическую в некоторой окрестности $\gamma([a, b])$. Пусть ϕ — первообразная для $\frac{f'}{f}$ вдоль γ .

$\forall t_0 \in [a, b] : \exists \delta > 0, \exists U \ni \gamma(t_0)$ вместе с первообразной ψ функции $\frac{f'}{f}$:

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \psi(\gamma(t))$$

Существует c , вообще говоря, зависящая от t , такая, что $e^{\psi(z)} = cf(z)$. При $|t - t_0| < \delta : e^{\phi(t)} = e^{\psi(\gamma(t))} = cf(\gamma(t))$. Значит, $\frac{e^{\phi(s)}}{f(\gamma(s))}$ локально постоянна на $[a, b]$, то есть оказалось, что c всё-таки не зависит от t .

Найдётся $a \in \mathbb{C} : c = e^a$. Теперь $\tilde{\phi} := \phi - a$ — тоже первообразная для $\frac{f'}{f}$ вдоль γ , причём $e^{\psi(\gamma(t)) - a} = f(\gamma(t))$. Так как $\psi - a$ — тоже первообразная в U для $\frac{f'}{f}$, то $\tilde{\psi}$ — ветвь логарифма. \square

В частности, для $f(z) = z - z_0$, и пути γ , не проходящего через z_0 , получается ветвь логарифма $z - z_0$ вдоль γ . **Что?**

Пусть $w \in \mathbb{C}$. Все значения логарифма спрятаны в формуле $\log w = \log |w| + i \operatorname{Arg} w$, где $\operatorname{Arg} w \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \theta \mid e^{i\theta} = \frac{w}{|w|} \right\}$.

Пусть $G \neq 0$.

Определение 1.8.6 (Непрерывная ветвь аргумента в области G). Непрерывная функция $v : G \rightarrow \mathbb{R} : \forall z \in G : v(z) \in \operatorname{Arg}(z)$

Факт 1.8.2. В области G существует непрерывная ветвь логарифма \iff в G существует непрерывная ветвь аргумента.

Определение 1.8.7 (Ветвь аргумента вдоль пути γ). Функция $\phi : [a, b] \rightarrow G$, такая что $\forall t_0 \in [a, b] : \exists \delta > 0, \exists U \ni \gamma(t_0)$, и существует ветвь аргумента ψ функции f в U , такая, что

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \psi(\gamma(t))$$

В качестве ветви аргумента всегда можно выбрать мнимую часть ветви логарифма.

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — путь, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитическая, предположим, что $f(z) \neq 0$ на $\gamma([a, b])$.

Пусть u — ветвь логарифма для f вдоль γ .

Определение 1.8.8 (Приращение логарифма вдоль γ). $u(b) - u(a)$.

Определение 1.8.9 (Приращение аргумента вдоль γ). $\Im(u(b) - u(a))$.

Пусть теперь γ — петля. Тогда $\Re(u(b) - u(a)) = 0$, и вообще, $u(b) - u(a) = 2\pi i k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$.

Лекция VIII

5 апреля 2024 г.

1.9 Принцип аргумента и теорема Руше

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ — простой замкнутый путь, $\gamma(a) = \gamma(b)$. Положим $D := \gamma([a, b])$.

Интересный факт (Теорема Жордана). $\mathbb{C} \setminus D$ состоит из двух компонент связности. Одна из них — G — ограничена, и $\forall z \in G : \operatorname{Ind}_z \gamma = \pm 1$.

Если $\operatorname{Ind}_z \gamma = 1$, то γ называют положительно ориентированной, иначе — отрицательно ориентированной.

Определение 1.9.1 (Жорданова область). Область, граница которой — простой замкнутый путь.

Теорема 1.9.1 (Принцип аргумента). Пусть G — жорданова область, ∂G — носитель простого замкнутого пути γ , ориентированного положительно.

f — аналитическая в окрестности \overline{G} , кроме, может быть, конечного числа полюсов внутри G . Более того, $\forall w \in \partial G : f(w) \neq 0$.

Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \cdot (\text{приращение аргумента } f \text{ вдоль } \gamma) = (\text{число нулей } f \text{ в } G) - (\text{число полюсов } f \text{ в } G)$$

Нули и полюса надо учитывать с кратностью.

Доказательство. Левая часть есть $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$. Это интеграл по простому замкнутому пути; посчитаем его с помощью вычетов f внутри G .

Рассмотрим $z_0 \in G$. Пусть вблизи z_0 : $f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$, где g аналитична вблизи z_0 , причём $g(z_0) \neq 0$.

$$f'(z) = k \cdot (z - z_0)^{k-1} g(z) + (z - z_0)^k g'(z) \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

$\frac{g'(z)}{g(z)}$ аналитична в окрестности z_0 , тем самым, вычет логарифмической производной $\frac{f'(z)}{f(z)}$ в z_0 равен k .

Пусть u_1, \dots, u_s — нули f внутри G кратностей b_1, \dots, b_s соответственно; пусть v_1, \dots, v_t — полюса f кратностей l_1, \dots, l_t соответственно. Суммируя вычеты, получаем $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^s k_j - \sum_{j=1}^t l_j$. \square

Теорема 1.9.2 (Теорема Руше). Пусть G — жорданова область с положительно ориентированной границей — носителем замкнутого пути γ .

Функции f, g аналитичны в окрестности \overline{G} . Пусть $\forall z \in \partial G : |f(z)| > |g(z)|$. В частности, $\forall z \in \partial G : |f(z)| \neq 0, |(f+g)(z)| \neq 0$.

Тогда f и $f+g$ имеют одинаковое число нулей в G .

Доказательство. Согласно принципу аргумента, число нулей $(f+g)$ в G равно $\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)} dz$.

В то же время, f имеет внутри G ровно $\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ нулей.

Надо доказать, что интегралы равны, вычтем их:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} \right) dz$$

Теперь преобразуем выражение в скобках:

$$\begin{aligned} \left(\cdot \right) &= \frac{\cancel{f'(z)} \cdot \cancel{f(z)} + g'(z) \cdot f(z) - \cancel{f'(z)} \cdot \cancel{f(z)} - f'(z) \cdot g(z)}{(f(z) + g(z)) \cdot f(z)} = \\ &= \frac{g'(z)f(z) - f'(z)g(z)}{f(z)^2} \cdot \frac{f(z)}{f(z) + g(z)} = \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right)' \cdot \frac{1}{1 + \frac{g(z)}{f(z)}} \end{aligned}$$

Обозначим $\Phi(z) := 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$. Тем самым, надо доказать, что $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} dz = 0$. При этом, $\forall z \in \partial G :$

$\frac{|f(z)|}{|g(z)|} < 1$. Из непрерывности $\exists \delta > 0 : \frac{|f(z)|}{|g(z)|} < 1 - \delta$.

Применим к интегралу формулу замены переменной: $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Phi \circ \gamma} \frac{dw}{w}$. При этом носитель пути $\Phi \circ \gamma$ лежит внутри $B(1, 1 - \delta)$, значит, путь гомотопен тождественному, и гомотопия не задевает нуля. Действительно, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Phi \circ \gamma} \frac{dw}{w} = 0$. \square

1.10 Сходимость аналитических функций

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Пускай $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность функций $h_n : G \rightarrow \mathbb{C}$.

Равномерная сходимость на компактах

Пусть $h : G \rightarrow \mathbb{C}$ — ещё функция. Говорят, что h_n сходятся к h ($h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$), если \forall компакта $K \subset G$: $h_n|_K \rightrightarrows h|_K$.

В дальнейшем, говоря о сходимости аналитических функций, будем подразумевать именно равномерную сходимость на компактах.

Теорема 1.10.1 (Вейерштрасс, 1-я). Пусть все $h_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитичны, и $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$. Тогда h аналитична в G .

Доказательство. Достаточно доказать, что \forall прямоугольника $\bar{P} \subset G$: $\int_{\partial P} h(z) dz = 0$. Это ясно из равномерной сходимости на компактах:

$$\left| \int_{\partial P} (h(z) - h_n(z)) dz \right| \leq \sup_{z \in \partial P} |h_n(z) - h(z)| \cdot l(\partial P)$$

Далее достаточно применить теорему Мореры (теорема 1.4.1). □

Теорема 1.10.2 (Вейерштрасс, 2-я). Пусть все $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитичны, и $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$, где аналитичная $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Тогда $f'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'$.

Доказательство. Пусть $K = DB(w_0, r)$ — круг, $\bar{K} \subset G$. Понятно, $\exists R > r : \overline{B(w_0, R)} \subset G$. Рассмотрим $z \in K$.

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - w_0| = R} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - w_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = f'(z)$$

К пределу под интегралом можно перейти, так как сходимость равномерна в \bar{K} , знаменатель отделён от нуля числом $R - r$. Более того, видно, что сходимость равномерна в \bar{K} .

Пусть $S \subset G$ — компакт. $\forall s \in S : \exists K_s$ — круг с центром в s , такой, что $\bar{K}_s \subset G$. Внутренности этих кругов покрывают S , выберем конечное подпокрытие.

На каждом из кругов конечного подпокрытия имеется равномерная сходимость. Стало быть, имеется равномерная сходимость на S . □

Лемма 1.10.1. Пусть f_n, f — аналитические функции в области G , $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$, f не равна тождественному нулю.

Пусть D — круг, $D \subset G$, предположим, что f имеет нуль в D . Тогда для всех достаточно больших n : f_n имеет нуль в круге D .

Доказательство. Пусть $f(z_0) = 0$. Уменьшая D , можем считать, что $D = B(z_0, r)$ — круг, такой, что $\bar{D} \subset G$.

По теореме единственности f не постоянна в D .

Разложим f в ряд Тейлора в D :

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Ряд сходится в некоторой окрестности \bar{D} . $a_0 = 0$, но не все коэффициенты равны нулю. Распишем

$$f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z), \quad g(z_0) \neq 0, \text{ где } g \text{ аналитична в окрестности } \bar{D}$$

Пусть $\rho \leq r$ выбрано так, что $\forall z : |z - z_0| \leq \rho \Rightarrow |g(z)| > \delta > 0$. Оценим f при $|z - z_0| = \rho : |f(z)| = |z - z_0|^k \cdot |g(z)| \geq \rho^k \delta$.

Разложим $f_n(z) = f(z) + (f_n(z) - f(z))$. При достаточно больших $n : |f_n(z) - f(z)| < \rho^k \delta$, по теореме Руше f_n имеет нуль внутри D . \square

Определение 1.10.1 (Однолистная функция $f : G \rightarrow \mathbb{C}$). Инъективная аналитическая функция f .

Теорема 1.10.3. Пусть f_n — последовательность однолистных функций в области G , $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$. Тогда либо $f \equiv \text{const}$, либо f — тоже однолистка.

Доказательство. Предположим, что $\exists z_0, z_1 \in G : z_0 \neq z_1$ и $w := f(z_0) = f(z_1)$. Построим $g(z) := f(z) - w$, $g_n(z) := f_n(z) - w$. Сходимость сохранилась.

Пусть U_0, U_1 — круги с центрами в z_0 и z_1 соответственно, $U_0 \cap U_1 = \emptyset, U_0, U_1 \subset G$. Функция g имеет нуль в каждом из U_1, U_2 . Предположим, что $g \not\equiv 0$, значит, при достаточно большом $n : g_n$ имеет нуль как в U_1 , так и в U_2 . Но g_n однолистка, значит, всё же $g \equiv 0$. \square

Теорема 1.10.4 (Риман). Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область. Следующие условия эквивалентны:

1. G односвязна, $G \neq \mathbb{C}$.
2. \exists однолистка $\phi : G \rightarrow \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Доказательство. Потом. \square

1.10.1 Нормальные семейства

Пусть дано множество A аналитических функций в области G .

Определение 1.10.2 (Нормальное множество A). Такое A , что \forall компакта $K \subset G : \exists C \in \mathbb{R} : \forall z \in K, \forall f \in A : |f(z)| \leq C$.

Теорема 1.10.5. Следующие условия эквивалентны:

1. Множество A нормально.
2. $\forall \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, f_n \in A$: найдётся сходящаяся подпоследовательность $n_1 < n_2 < \dots : \exists f : f_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f$.

Доказательство.

(2) \Rightarrow (1) Предположим противное: $\exists K \subset G : \forall m \in \mathbb{N} : \exists f_m \in A : \sup_{z \in K} |f_m(z)| > m$.

Согласно посылке, существует сходящаяся подпоследовательность $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, такая, что $\exists f : f_{m_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ равномерно на K . f ограничена на K , значит, начиная с некоторого места, f_{m_k} тоже ограничены. Противоречие.

(1) \Rightarrow (2)

Лемма 1.10.2. Рассмотрим счётный набор последовательностей

$$\begin{cases} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots \\ x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \dots \\ \ddots \end{cases}$$

Пусть каждая последовательность ограничена: $\forall n \in \mathbb{N} : \exists M^{(n)} : \forall j : |x_j^{(n)}| < M^{(n)}$. Тогда $\exists k_1 < k_2 < \dots$ — подпоследовательность индексов, такая, что $\forall n \in \mathbb{N} : \exists x^{(n)} : x_{k_j}^{(n)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x^{(n)}$.

Доказательство леммы.

Пусть $\{k_j^{(1)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ — такая подпоследовательность индексов, что $\exists x^{(1)} : x_{k_j^{(1)}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x^{(1)}$. Выберем из этой последовательности индексов подпоследовательность индексов $\{k_j^{(2)}\}_{j \in \mathbb{N}}$, что $\exists x^{(2)} : x_{k_j^{(2)}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x^{(2)}$. И так далее.

Тем самым, мы получим счётное количество последовательностей индексов, таких, что $k^{(n+1)}$ — подпоследовательность $k^{(n)}$, и $\forall n \in \mathbb{N} : \exists x^{(n)} : x_{k_j^{(n)}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x^{(n)}$.

А теперь возьмём диагональ: $k_j := k_j^{(j)}$. □

□

Лекция IX

12 апреля 2024 г.

todo

Лекция X

19 апреля 2024 г.

Теорема 1.10.6 (Риман). Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область. Следующие условия эквивалентны:

1. G односвязна, $G \neq \mathbb{C}$.
2. \exists однолистная сюръекция $\phi : G \rightarrow \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Доказательство. На прошлой лекции свели к случаю $G \subset \mathbb{D}, G \ni 0$.

Введём $\mathcal{A} := \{f : G \rightarrow \mathbb{D} \mid f(0) = 0 \text{ и } f \text{ однолистна}\}$. Доказали, что существует $f \in \mathcal{A}$, такая, что $|f'(0)|$ максимально.

Далее пойдём от противного: пусть $\exists a \in \mathbb{D} : a \notin \text{Im}(f)$. Введём $\phi := v \circ f$, где $v(w) := \frac{w-a}{1-\bar{a}w}$ — некоторое преобразование Мёбиуса. $\phi(z) := \frac{f(z)-a}{1-\bar{a}f(z)}$.

К сожалению, пока $\phi \notin \mathcal{A} : \phi(0) \neq 0$, и вообще $\phi(z) \neq 0$ везде. Но раз так, то у ϕ имеется ветвь логарифма Φ . Так как $\Re \log(u) = \log|u|$, то $\forall z \in G : \Re \Phi(z) < 0$. При помощи другого дробно-линейного преобразования переведём левую полуплоскость обратно в $\mathbb{D} : g(z) := \frac{\Phi(z)-\Phi(0)}{\Phi(z)+\Phi(0)}$. Утверждается, что $g \in \mathcal{A} : g(0) = 0$, и преобразование $w \mapsto \frac{w-a}{w+\bar{a}}$ однолистно стреляет в круг \mathbb{D} .

Осталось получить противоречие, получив в результате вычислений, что $|g'(0)| > |f'(0)|$.

$$\begin{aligned} g'(z) &= \left(1 - \frac{2\Re \Phi(0)}{\Phi(z) + \bar{\Phi}(0)}\right)' = \frac{2\Re(\Phi(0))}{(\Phi(z) + \bar{\Phi}(0))^2} \Phi'(z) = \frac{2\Re(\Phi(0))}{(\Phi(z) + \bar{\Phi}(0))^2} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \\ &= \frac{2\Re(\Phi(0))}{(\Phi(z) + \bar{\Phi}(0))^2} \frac{1}{\phi(z)} \cdot \frac{(1 - \bar{a}f(z)) \cdot f'(z) + \bar{a} \cdot f'(z)(f(z) - a)}{(1 - \bar{a}f(z))^2} \end{aligned}$$

Подставляя 0, получаем

$$g'(0) = \frac{2\Re \Phi(0)}{(2\Re \Phi(0))^2 - a} \cdot \frac{f'(0)(1 - |a|^2)}{1}$$

Тем самым, $|g'(0)| = \frac{1}{2 \log(\frac{1}{|a|})} \frac{1-|a|^2}{|a|} \cdot |f'(0)|$. Осталось убедиться, что для $t := |a| \in (0, 1)$ выполнено неравенство $\frac{1-t^2}{2t \log(\frac{1}{t})} > 1$. Это эквивалентно неравенству $\frac{1-t^2}{t} - 2 \log\left(\frac{1}{t}\right) > 0$. При $t = 1$ левая часть равняется нулю, и производная левой части $\left(\frac{1}{t} - t + 2 \log(t)\right) = -\frac{1}{t^2} - 1 - \frac{2}{t} = -\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 < 0$. □

Пусть $f_1, f_2 : G \rightarrow \mathbb{D}$ — возможно различные однолистные отображения. Тогда $f_2^{-1} \circ f_1$ — однолистное отображение круга \mathbb{D} на себя. Например, это может быть каким-то преобразованием Мёбиуса, но оказывается, что ими всё и исчерпывается.

Определение 1.10.3 (Автоморфизм области G). Однолистное отображение $G \rightarrow G$.

Вообще практически все односвязные области эквивалентны (при помощи однолистной сюръекции) кругу, как говорит только что доказанная теорема Римана, но есть ещё две области — \mathbb{C} и $\widehat{\mathbb{C}}$, имеющие другую природу.

Сначала займёмся автоморфизмами \mathbb{C} .

Теорема 1.10.7. Автоморфизмы \mathbb{C} — линейные функции $z \mapsto az + b$ при $a \neq 0$.

Доказательство. Пускай $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — ещё какой-то автоморфизм \mathbb{C} . Тем самым, f — целая, то есть $f = a_0 + a_1 z + \dots$

Если $a_j \neq 0$ для бесконечного множества индексов j , то ∞ — существенно особая точка (в ряду Лорана $f(\frac{1}{z})$ бесконечно много ненулевых членов). Так как $\forall z \in \mathbb{C} : f'(z) \neq 0$, то f — открытое отображение. Отсюда $f(\mathbb{D})$ открыто. С другой стороны, по теореме Сохоцкого $f(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\})$ всюду плотно в \mathbb{C} . Значит, $\exists w \in f(\mathbb{D}) \cap f(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\})$, и это противоречие с однолистностью f .

Тем самым, f — многочлен, и если $\deg f \geq 2$, то f' имеет корень, опять-таки противоречие с однолистностью. Получается, f — линейная функция, или константа, но константа не подходит. \square

Замечание. $\widehat{\mathbb{C}}$ односвязна, так как топологически это — сфера, что видно из стереографической проекции.

Теорема 1.10.8. Автоморфизмы $\widehat{\mathbb{C}}$ — дробно-линейные отображения $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ при $ad - bc \neq 0$.

Доказательство.

Лемма 1.10.3 (О действии групп). Пусть группа Γ действует на множестве X ;

$H \leq X$ — подгруппа. Если $\exists x \in X : H \supset \Gamma_x$ ($\Gamma_x \stackrel{\text{def}}{=} \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma x = x\}$ — стабилизатор x), и H действует на X транзитивно ($\forall x, y \in X : \exists \gamma \in H : \gamma x = y$), то $H = \Gamma$.

Доказательство леммы.

Рассмотрим какой-то $\gamma \in \Gamma$. Пусть $\gamma(x) = y$. Из транзитивности $\exists \delta \in H : \delta y = x$. Тем самым, $\delta \gamma x = x$, то есть $\delta \gamma \in H \Rightarrow \gamma \in H$. \square

\square

Введём в качестве Γ группу всех однолистных отображений $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, и в качестве $H \leq \Gamma$ — подгруппу дробно-линейных отображений.

Легко видеть, что H действует на \mathbb{C} транзитивно: скажем, любая точка лежит в одной орбите с ∞ : $\forall z_0 \in \mathbb{C} : \frac{1}{z-z_0} \Big|_{z=z_0} = \infty$. С другой стороны, стабилизатор ∞ — автоморфизмы \mathbb{C} , и так как они лежат в H , то $H = \Gamma$.

Лемма 1.10.4 (Шварц). Пусть $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ — аналитическая функция, такая, что $f(0) = 0$. Тогда $\forall z \in \mathbb{D} : |f(z)| \leq |z|$. При этом если $\exists z \in \mathbb{D} \setminus \{0\} : |f(z)| = |z|$, то $\exists c \in \mathbb{C} (|c| = 1) : f(z) = cz$.

Доказательство.

- Пусть дополнительно f задана в круге радиуса $R > 1$ с центром в 0. Рассмотрим $g(z) := \frac{f(z)}{z}$ — она аналитична в круге $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$, так как в нуле — устранимая особенность.

При $|z| = 1 : |g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{1} = 1$. Согласно принципу максимума модуля (теорема 1.3.9), $|g| \leq 1$ везде.

- Теперь такого предположения о f не имеется. Выберем $R > 1$. Определим $f_R(z) := f\left(\frac{z}{R}\right)$. Согласно предыдущему пункту $\forall z \in \mathbb{D} : |f_R(z)| \leq |z|$. Устремляя $R \rightarrow 1$, получаем искомое неравенство.
- Осталось разобраться со случаем равенства внутри круга. Пусть $\exists z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\} : |f(z_0)| = |z_0|$. Тем самым, $g(z) := \frac{f(z)}{z}$ достигает своё наибольшее значение внутри круга, то есть $g \equiv c = \text{const}$. Подставляя z_0 , получаем $|c| = 1$. \square

Пусть Γ — группа всех автоморфизмов круга \mathbb{D} . Вычислим стабилизатор $0 \in \mathbb{D}$. Пусть $\phi \in \Gamma_0$ — аналитическая биекция, такая, что $\phi(0) = 0$. То же верно и для ϕ^{-1} .

По лемме Шварца $|\phi(z)| \leq |z|$, но применяя её же к ϕ^{-1} , получаем $z = \phi^{-1}(\phi(z)) \Rightarrow |z| = |\phi^{-1}(\phi(z))| \leq |\phi(z)|$. Тем самым, $|\phi(z)| = |z|$ во всех точках, и по лемме Шварца ϕ — гомотетия с коэффициентом c ($|c| = 1$).

Группа преобразований Мёбиуса $\left\{ w \mapsto c \cdot \frac{w-a}{1-\bar{a}w} \mid a \in \mathbb{D}, |c| = 1 \right\}$ содержит при $a = 0$ гомотетии с данными коэффициентами, и действует транзитивно на \mathbb{D} : любая $a \in \mathbb{D}$ переводится соответствующим преобразованием в нуль.

Упражнение 1.10.1. Проверить, что группа Мёбиуса — действительно группа, то есть замкнута относительно умножения и взятия обратного.

Факт 1.10.1 (Конформность однолистного отображения). Пусть G — область, $z_0 \in G$, $\Phi : G \rightarrow G$ — однолистные отображения. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ — два регулярно параметризованных пути ($\gamma'_1 \neq 0, \gamma'_2 \neq 0$), причём $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$. Проводя касательные к носителям γ_1, γ_2 в z_0 , получаем угол, его косинус можно посчитать по формуле $\frac{\langle \gamma'_1(t_1), \gamma'_2(t_2) \rangle}{|\gamma'_1(t_1)| \cdot |\gamma'_2(t_2)|}$.

Поддействуем при помощи Φ на данную картинку. $\tilde{\gamma}_j := \Phi \circ \gamma_j$ при $j := 1, 2$. Несложно посчитать, что $\tilde{\gamma}'_j(t_j) = \Phi'(z_0) \cdot \gamma'_j(t_j)$, что действительно сохраняет косинус угла.

Такие отображения, сохраняющие углы, называют *конформными*. В силу исторических причин, говоря про однолистные отображения, часто добавляют слово «конформные», а сама наука зовётся теорией конформных отображений, хотя, как мы только что видели, однолистность сильнее.

1.11 Целые функции

Определение 1.11.1 (Целая функция). Аналитическая $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

1.11.1 Построение целых функций с заданными нулями

Пусть $f \not\equiv 0$ — целая, $N := \{a \in \mathbb{C} \mid f(a) = 0\}$. По теореме единственности N не имеет предельных точек. В частности, все нули изолированы, откуда множество нулей не более, чем счётно.

Нули удобно считать с учётом кратности, получая при этом мультимножество N .

Пронумеруем $N = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, удобно считать, что $|a_0| \leq |a_1| \leq \dots$.

Теорема 1.11.1 (Вейерштрасс). Существует целая функция f , мультимножество нулей которой совпадает с данным мультимножеством $N = \{a_0, a_1, \dots\}$. Считаем $|a_0| \leq |a_1| \leq \dots$. Дополнительно предполагается, что $|a_j| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$. Кажется, это необходимое и достаточное условие того, что у N нет предельных точек

Доказательство. Если бы нулей было конечное количество, то многочлен $(z - a_0) \cdot \dots \cdot (z - a_N)$ подошёл бы, но нулей, увы, бесконечно. Предположим, что $0 \notin N$ (это не ограничивает общность: выкинем 0 из N , построим f , потом домножим на нужную степень z^k), и заметим, что произведение $\left(1 - \frac{z}{a_0}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{z}{a_N}\right)$ тоже решает задачу в случае конечного N .

В бесконечном же случае стоит озаботиться вопросом сходимости. Во втором семестре мы проверяли, что сходимость $\prod_{j=0}^{\infty} a_j$ **не к нулю** эквивалентна сходимости ряда $\sum_{j=0}^{\infty} \log(a_j)$, где $\log : (\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]) \rightarrow \mathbb{C}$ — главная ветвь логарифма.

Рассмотрим бесконечное произведение $\prod_{j=0}^{\infty} u_j(z)$, где u_j — аналитические функции. Будем говорить, что данное *произведение сходится*, если \forall компакта $K \subset G : \exists M \in \mathbb{N} : \forall j \geq M, z \in K : u_j(z) \neq 0$, и произведение $\prod_{j \geq N} u_j(z)$ сходится на K равномерно.

Определим *множители Вейерштрасса*:

$$u_j(z) := \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) \cdot \exp\left(-\left(\frac{z}{a_j} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_j}\right)^2 + \dots + \frac{1}{j-1}\left(\frac{z}{a_{j-1}}\right)^{j-1}\right)\right)$$

Показатель экспоненты подогнан так, чтобы при взятии логарифма много чего сократилось (а $\log(1-w) = w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} + \dots$ при $|w| < 1$, например, потому что этот ряд совпадает с рядом для вещественного логарифма на $\mathbb{R}_{>0}$, и имеется теорема единственности)

Осталось показать, что произведение $\prod_{j=0}^{\infty} u_j(z)$ сходится равномерно на компактах, и её нули — в точности a_j с учётом кратности.

Определим компакт $K := \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{|a_N|}{2}\right\}$, и покажем, что $\prod_{j \geq N} u_j(z)$ сходится равномерно на K .

$$u_j(z) = \exp\left(\log\left(1 - \frac{z}{a_j}\right) - \frac{z}{a_j} - \dots - \frac{1}{j-1}\left(\frac{z}{a_j}\right)^{j-1}\right) = \exp\left(\sum_{s \geq j} \frac{1}{s} \left(\frac{z}{a_j}\right)^s\right)$$

При этом $\log\left(1 - \frac{z}{a_j}\right)$ определён, так как $|z| < |a_j|$. Оценим

$$\left|\sum_{s \geq j} \frac{1}{s} \left(\frac{z}{a_j}\right)^s\right| \leq \left|\sum_{s \geq j} \left(\frac{z}{a_j}\right)^s\right| \leq \left|\sum_{s \geq j} \left|\frac{a_N}{2a_j}\right|^s\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

Убедимся, что ряд из логарифмов равномерно сходится:

$$\left|\sum_{j \geq N} \sum_{s \geq j} \frac{1}{s} \left(\frac{z}{a_j}\right)^s\right| \leq \sum_{j \geq N} \left(\frac{1}{2}\right)^j \leq 1$$

Получается, данное произведение $\prod_{j \geq 0} u_j(z)$ подходит. □

Лекция XI

26 апреля 2024 г.

1.11.2 Упрощённый вид множителей Вейерштрасса

Если известно, насколько быстро происходит стремление $|a_j| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$, то можно утверждать наличие сходимости и при множителях Вейерштрасса более простого вида.

1. Если $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{|a_n|} < \infty$, то никаких премудростей не надо: $\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right)$ сходится.

Доказательство. Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$, и рассмотрим компакт $K := \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{1}{2}a_N\right\}$. Надо доказать, что $\sum_{j \geq N} \log\left(1 - \frac{z}{a_j}\right)$ сходится.

Под логарифмом стоят выражения вида $1-t$, где $|t| \leq \frac{1}{2}$. Разложим в ряд и оценим: $\log(1-t) = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots = t \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \dots\right) \leq t \cdot C$, где $C := \sum_{n \geq 1} \frac{(1/2)^{n-1}}{n}$. Этой оценки достаточно: $\sum_{j \geq N} \left| \log \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) \right| \leq \sum_{j \geq N} C \left| \frac{z}{a_j} \right|$, что сходится равномерно по $z \in K$. \square

2. Если $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{|a_n|^2} < \infty$, то хватит первого члена при разложении логарифма в ряд: $\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) e^{\frac{z}{a_j}}$ сходится.

Доказательство. Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$, и рассмотрим компакт $K := \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{1}{2} a_N\right\}$. Надо доказать, что $\sum_{j \geq N} \log \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) \cdot \frac{z}{a_j}$ сходится.

Разложим в ряд и оценим: $\log(1-t)t = t^2 + \frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{3} + \dots = t^2 \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \dots\right) \leq t^2 \cdot C$, где $C := \sum_{n \geq 1} \frac{(1/2)^{n-1}}{n}$. Этой оценки достаточно: $\sum_{j \geq N} \left| \log \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) \frac{z}{a_j} \right| \leq \sum_{j \geq N} C \left| \frac{z}{a_j} \right|^2$, что сходится равномерно по $z \in K$. \square

Замечание. Понятно, что целая функция с данным мультимножеством нулей не единственна — можно взять любую другую целую функцию без нулей (скажем, экспоненту), и домножить на неё.

Следствие 1.11.1. Пусть $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — целая функция с бесконечным числом нулей, и g — произведение Вейерштрасса по нулям функции f (неважно, общего вида, или с упрощёнными множителями).

Тогда \exists целая $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$: $f = ge^h$.

Доказательство. $\frac{f}{g}$ — целая функция (там, где у g нули, у f — нули той же кратности, поэтому все особенности устранимы). По той же причине $\forall z \in \mathbb{C} : \frac{f}{g}(z) \neq 0$. Тем самым, у неё есть ветвь логарифма, выберем какую-то ветвь h , она как раз подходит. \square

Пусть G — область, f аналитична в G кроме некоторого множества полюсов. Такая функция называется *мероморфной в G* . Так как полюса по определению изолированы, то их не более, чем счётное количество.

Мероморфную в \mathbb{C} функцию называют мероморфной.

Следствие 1.11.2. f мероморфна $\iff \exists$ целые $g_1, g_2 : f = \frac{g_1}{g_2}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\frac{1}{f}$. Она не равна тождественно нулю.

Пусть g — произведение Вейерштрасса по нулям функции $\frac{1}{f}$, $g \cdot f$ — целая функция. \square

1.11.3 Разложение синуса в произведение

Разложим синус в произведение, построив произведение Вейерштрасса по его нулям. А где нули синуса? $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$.

$$\sin z = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1 \iff z \in \{j \cdot \pi \mid j \in \mathbb{Z}\}$$

Как видим, сумма обратных квадратов сходится, поэтому можно записать произведение Вейерштрасса в виде

$$z \cdot \prod_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{j\pi}\right) e^{\frac{z}{j\pi}}$$

где произведение берётся в порядке возрастания модулей j . Иными словами,

$$z \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\substack{j \leq N \\ j \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{j\pi}\right) e^{\frac{z}{j\pi}} = z \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right) = z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$$

Как мы выяснили, \exists целая $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : \sin(z) = e^{h(z)} z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$

Факт 1.11.1. $h \equiv 0$ подойдёт (понятно, что если это правда, то $2\pi ik$ для $k \in \mathbb{Z}$ тоже подойдёт).

Доказательство.

Замечание (О логарифмической производной). Пусть ϕ — аналитическая функция, как известно, её логарифмическая производная $\frac{\phi'}{\phi}$. Как видно из записи, она не зависит от того, какая ветвь логарифма где взята.

Если $\phi = \phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_k$, то несложно посчитать, что $\frac{\phi'}{\phi} = \frac{\phi'_1}{\phi_1} + \dots + \frac{\phi'_k}{\phi_k}$. Утверждается, что формула сохраняется и для бесконечного произведения.

Пусть произведение $\prod_{j=1}^{\infty} \phi_j(z)$ сходится равномерно на любом компакте, не содержащем нулей функций ϕ_j . Пусть K — такой компакт, то есть $(\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_n)(z) \rightrightarrows \phi(z)$ равномерно. Тогда $(\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_N)'(z) \rightrightarrows \phi'(z)$ на этом же компакте, и как следствие, $\frac{\phi'_1(z)}{\phi_1(z)} + \dots + \frac{\phi'_N(z)}{\phi_N(z)} = \frac{(\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_N)'(z)}{(\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_N)(z)} \rightrightarrows \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$

- Возьмём логарифмическую производную обеих частей равенства $\sin(z) = e^{h(z)} \cdot z \cdot \prod_{|j| \leq N, j \neq 0} \left(1 - \frac{z}{j\pi}\right)$:

$$\frac{\cos z}{\sin z} = h'(z) + \frac{1}{z} - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|j| \leq N, j \neq 0} \frac{1}{j\pi} \frac{1}{1 - \frac{z}{j\pi}} = h'(z) + \frac{1}{z} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|j| \leq N, j \neq 0} \frac{1}{z - j\pi}$$

Отлично, у нас имеется равномерная сходимост на компактах, продифференцируем ещё раз:

$$1 - \operatorname{ctg}(z)^2 = h''(z) - \frac{1}{z^2} - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|j| \leq N, j \neq 0} \frac{1}{(z - j\pi)^2}$$

- Проведём окружность Γ_k с центром в нуле, и радиусом $\pi(k + \frac{1}{2})$, и докажем, что h'' ограничена на Γ_k некоторой константой C , не зависящей от k .

Понятно $\frac{1}{z^2} \leq \frac{4}{\pi^2}$, оценим при $z \in \Gamma_k : \frac{1}{|z - j\pi|^2} \leq \frac{1}{(k + \frac{1}{2} - |j|)^2 \pi^2}$. Кажется, это не совсем правда, но может и вообще правда. Осталось оценить котангенс:

$$\operatorname{ctg}(z) = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

Раскладывая $z = x + iy$, получаем

$$|\operatorname{ctg}(z)| = \left| \frac{e^{-y}e^{ix} + e^ye^{-ix}}{e^{-y}e^{ix} - e^ye^{-ix}} \right|$$

Выберем $\varepsilon < \frac{\pi}{4}$, и оценим котангенс вблизи вещественной оси (периодичность и непрерывность котангенса в круге радиуса 2ε), и при $|y| \geq \varepsilon$:

$$\left| \frac{e^{-y}e^{ix} + e^ye^{-ix}}{e^{-y}e^{ix} - e^ye^{-ix}} \right| \leq \frac{e^y + e^{-y}}{|e^{-y} - e^y|} = \frac{e^y + e^{-y}}{e^{|y|} - e^{-|y|}} = \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{2y} - 1} \leq 1 + \frac{2}{e^{2\varepsilon} - 1}$$

- Тем самым, на Γ_k : h'' ограничена C , по принципу максимума h'' ограничена внутри круга этой же константой, значит, h'' вообще ограничена.

Согласно теореме Лиувилля, $h'' = \text{const}$, тем самым, $h(z) = A + Bz + Cz^2$ для некоторых $A, B, C \in \mathbb{C}$.

- Подставим $h(z) = A + Bz + Cz^2$:

$$\frac{\cos z}{\sin z} = B + 2Cz + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|j| \leq N} \frac{1}{z - j\pi}$$

Здесь все слагаемые 2π -периодичны, кроме $2Cz$. Вывод один: $C = 0$

- Теперь подставим $\frac{\sin z}{z} = e^{A+Bz} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$. В силу чётности $B = 0$.
- Обозначим $D := e^A \cdot \frac{\sin z}{z} = D \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$. Сопоставляя значения в 0, получаем $D = 1$.

□

Ура,

$$\sin z = z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$$

Попутно мы выяснили, что

$$\text{ctg}(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|j| \leq N} \frac{1}{z - j\pi} = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - j^2\pi^2}$$

Ещё немного преобразуем:

$$\frac{\text{ctg } z - \frac{1}{z}}{2z} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - j^2\pi^2}$$

Подставим $z \rightarrow 0$. Слева оказывается $\frac{z \cos z - \sin z}{2z^2 \sin z} = \frac{z - \frac{z^3}{2} - z + \frac{z^3}{6} + \mathcal{O}(z^5)}{2z^3 + \mathcal{O}(z^5)} = -\frac{1}{6} + o(1)$, а справа $-\frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$, образуя знаменитую формулу, выведенную Эйлером

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

1.11.4 Г-функция Эйлера

Хотим обобщить факториал в комплексной плоскости.

Построим аналитическую функцию f в некоторой области G (где G хочется побольше), такую, что

1. $z \in G \Rightarrow z + 1 \in G$.
2. $f(z + 1) = zf(z)$ — эта формула почему-то слегка отличается от той, что у факториала.
3. $1 \in G$ и $f(1) = 1$.

Для удовлетворяющей таким условиям функции f можно заметить, что $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = (n + 1)!$.

Дополнительно потребуем $\forall z \in G : f(z) \neq 0$, например, чтобы можно было спокойно писать $z = \frac{f(z+1)}{f(z)}$.

К сожалению, не всё возможно в этой жизни. Заведомо $0 \notin G$: если $0 \in G$, то $f(1) = f(0 + 1) = 0 \cdot f(0) = 0$. Далее первое условие влечёт, что $-1, -2, -3 \notin G$.

Положим $G := \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, и построим в этой области функцию с указанными свойствами, имеющую простые полюса в выколотых точках. Она не единственна, но сейчас мы увидим наиболее естественный кандидат.

Пусть f — такая. Положим $g := \frac{1}{f}$ — целая функция с простыми нулями в $\{0, -1, -2, \dots\}$. Построим g , используя множители Вейерштрасса (h — какая-то целая):

$$g(z) = ze^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

Теперь удовлетворим функциональное уравнение: $g(z+1) = \frac{g(z)}{z}$.

$$\begin{aligned} g(z) &= ze^{h(z)} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \frac{n+z}{n} e^{-\frac{z}{n}} \\ g(z+1) &= (z+1)e^{h(z+1)} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \frac{1+n+z}{n} e^{-\frac{z}{n} - \frac{1}{n}} \\ \frac{g(z+1)}{g(z)} &= \frac{z+1}{z} e^{h(z+1)-h(z)} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1+z}{1+z} e^{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\dots-\frac{1}{N}+\log N} e^{-\log N} \end{aligned}$$

Как доказывалось во II семестре, $1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{N}-\log N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \gamma$ — *постоянная Эйлера — Маскерони*. Итак, от функции h хочется свойства

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} e^{h(z+1)-h(z)} e^{-\gamma}$$

Самым простым решением будет взять линейную функцию $h(z) = \gamma z$. Получили

$$g(z) = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

Проверим, что $g(1) = 1$:

$$\begin{aligned} g(1) &= e^{\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} = e^{\gamma} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (N+1)}{N!} e^{-1-\frac{1}{2}-\dots-\frac{1}{N}} = \\ &= e^{\gamma} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (N+1)}{N! \cdot N} e^{-1-\frac{1}{2}-\dots-\frac{1}{N}+\log N} = 1 \end{aligned}$$

Чудесным образом ничего подкручивать не пришлось.

Лекция XII

3 мая 2024 г.

Итак, определили

$$\Gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{z} e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \quad (*)$$

Замечание. Пусть ϕ — целая функция с периодом 1. Тогда $\Gamma \cdot \phi$ тоже подходит, как функция, удовлетворяющая трём условиям из (подраздел 1.11.4)

Немного преобразовав выражение для гамма-функции, можно получить следующее:

$$\Gamma(z) = e^{-\gamma z} \frac{1}{z} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{(1+z) \cdot \dots \cdot (N+z)} e^{z(1+\dots+\frac{1}{N})} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N! \cdot e^{z \log N}}{z \cdot (1+z) \cdot \dots \cdot (N+z)}$$

Также имеется так называемая *формула дополнения*:

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{1}{z^2} \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)} = -\frac{1}{z} \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Часто её записывают немного в другом виде, домножив на z , и воспользовавшись функциональным уравнением: $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$. Кстати, отсюда видно, чему равен «факториал» от половинки: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$.

Определим $g(z) := \frac{1}{\Gamma(z)}$, это целая функция с нулями в целых неположительных точках. Значит, у g имеется непрерывная ветвь логарифма в $\mathbb{C} \setminus (-\infty; 0]$. Одна из них равна

$$\log g(z) = \log z + \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \left(1 + \frac{z}{n} \right) - \frac{z}{n} \right)$$

Про эту ветвь даже можно утверждать, что она главная, так как у неё, как и у гамма-функции, значения на вещественной оси вещественные. Дифференцируя $\log g(z)$, получаем

$$(\log(g(z)))' = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{z}{n}} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right)$$

Таким образом, $(\log \Gamma(z))' = -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right)$, и

$$(\log \Gamma(z))'' = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2} \quad (\star)$$

Следствие 1.11.3. На $\mathbb{R}_{>0}$: $\log \Gamma(z)$ есть выпуклая функция.

Теорема 1.11.2. Пусть ϕ — непрерывная положительная функция на $\mathbb{R}_{>0}$, $\phi(1) = 1$, и ϕ удовлетворяет функциональному уравнению: $\forall x \in \mathbb{R}_{>0} : x\phi(x) = \phi(x+1)$. Если $\log \phi$ выпукла, то $\forall x > 0 : \phi(x) = \Gamma(x)$.

Доказательство. В целых точках $\phi(n) = (n+1)!$, и достаточно доказать, что $\phi(x) = \Gamma(x)$ при всех $x \in (0, 1)$, функциональное уравнение влечёт равенство в остальных точках.

Определим $g(x) := \log \phi(x)$, тогда функциональное уравнение переписывается в виде $g(x+1) - g(x) = \log x$. Из выпуклости $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1, \forall x \in (0, 1)$:

$$\underbrace{\frac{g(n-1) - g(n)}{(n-1) - n}}_{\log(n-1)} \leq \frac{g(n+x) - g(n)}{(n+x) - n} \leq \underbrace{\frac{g(n+1) - g(n)}{(n+1) - n}}_{\log(n)}$$

Преобразуем средний член неравенства:

$$g(x+n) - g(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(g(x+k+1) - g(x+k) \right) + g(x) - g(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \log(x+k) + g(x) - \log((n-1)!)$$

Выражая $g(x)$, получаем

$$x \log(n-1) - \sum_{k=0}^{n-1} \log(x+k) + \log((n-1)!) < g(x) < x \log(n) - \sum_{k=0}^{n-1} \log(x+k) + \log((n-1)!)$$

Разность между левой и правой частями $x \log(n-1) - x \log(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Понятно, что $g(x) = \log \Gamma(x)$ подходит, так как удовлетворяет посылке теоремы, и так как разность между пределами стремится к нулю, то в пересечении всего одна точка. Тем самым, $g(x)$ определена однозначно. \square

1.11.5 Эйлеров интеграл

Определим

$$\Psi(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{C}$$

Когда Ψ определена, а интеграл сходится? Разложим $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$. Теперь $\Psi(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{x-1} t^{iy} dt$. На $+\infty$ экспонента мажорирует остальные члены, в нуле имеется особенность, и интеграл суммируем, если $x > 0$.

Тем самым, $\Psi(z)$ определена при $\Re z > 0$.

Теорема 1.11.3. $\Psi(z) = \Gamma(z)$ при $z > 0$.

Доказательство.

- Ясно, что $\Psi(z) > 0$ при $z \in \mathbb{R}_{>0}$.
- Ψ аналитична при $\Re z > 0$, так как можно продифференцировать под знаком интеграла: производная суммируема.
- $\Psi(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = (-e^{-t})|_0^{\infty} = 1$.
- Убедимся, интегрируя по частям, что $x\Psi(x) = \Psi(x+1)$

$$\Psi(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = - \int_0^{\infty} t^x d(e^{-t}) dt = - (t^x e^{-t})|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt = x\Psi(x)$$

- Убедимся, что $\log \Psi$ выпукла на вещественной оси: $\forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}, \forall \alpha, \beta \in [0, 1], \alpha + \beta = 1$:

$$\log \Psi(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \log \Psi(x) + \beta \log \Psi(y)$$

$$\Psi(\alpha x + \beta y) \leq \Psi(x)^\alpha \Psi(y)^\beta$$

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha x + \beta y - 1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} (t^{x-1})^\alpha \cdot (t^{y-1})^\beta e^{-t} dt$$

что верно по неравенству Гёльдера.

- Согласно теореме единственности (теорема 1.11.2), $\Psi(z) = \Gamma(z)$ при $\Re z > 0$. □

В частности,

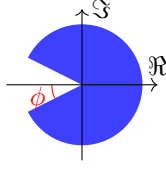
$$\sqrt{\pi} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \left\| \frac{t = x^2}{dt = 2x dx} \right\| = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

1.11.6 Формула Стирлинга

На первом курсе мы доказали, что $\exists c \in \mathbb{R} : n! \sim c\sqrt{n}n^n e^{-n}$. Так как гамма-функция определена со сдвигом, то будем преобразовывать выражение для $(n-1)!$:

$$\begin{aligned} (n-1)! &\sim c\sqrt{n-1}(n-1)^{n-1}e^{-n+1} = ce^{\frac{1}{\sqrt{n-1}}}(n-1)^ne^{-n} = \\ &= ce^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n n^ne^{-n} \sim c\frac{1}{\sqrt{n}}n^ne^{-n} \end{aligned}$$

Теорема 1.11.4. Пусть $\phi > 0$. Для $\{z \in \mathbb{C} | \arg z \in (-\pi + \phi, \pi - \phi)\}$, то есть из области без угла:



$$\log(\Gamma(z)) = \log \sqrt{2\pi} + \log \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} - z + z \log z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

Здесь логарифм и корень определены в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$, вещественные на вещественной оси. Потенцируя, получаем $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} e^{-z} e^{z \log z}$

Доказательство. Будем использовать (\star) . Положим $\phi(t) := \frac{1}{(t+z)^2}$, и приблизим $\sum_{n=1}^{\infty} \phi(n)$ интегралом. Оценим, что при замене погрешность не очень большая:

$$\phi(n) - \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \phi(t) dt = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\phi(n) - \phi(t)) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (2\phi(n) - \phi(n+t) - \phi(n-t)) dt$$

Тем самым, $\phi(n) = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \phi(t) dt + \int_0^{\frac{1}{2}} (2\phi(n) - \phi(n+t) - \phi(n-t)) dt$, и согласно (\star) :

$$(\log \Gamma(z))'' = \frac{1}{z^2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{(t+z)^2} dt}_{\int_{1/2}^{\infty} \frac{1}{(t+z)^2} dt = \frac{1}{1/2+z}} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{(n+z)^2} - \frac{1}{(n+z+t)^2} - \frac{1}{(n+z-t)^2} \right) dt$$

Дважды почленно возьмём первообразную обеих частей, пока не заботясь вопросами сходимости:

$$\begin{aligned} (\log \Gamma(z))' &\stackrel{?}{=} A - \frac{1}{z} + \log \left(z + \frac{1}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z+t} + \frac{1}{n+z-t} - \frac{2}{n+1} \right) \\ \log(\Gamma(z)) &\stackrel{?}{=} B + Az - \log z + \log \left(z + \frac{1}{2} \right) \left(z + \frac{1}{2} \right) - z + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \log \frac{(n+z)^2 - t^2}{(n+z)^2} dt \end{aligned}$$

Так как z бегает в области без угла, то $|n+z| \geq n \sin(\phi)$. Таким образом, $\log \left(1 - \frac{t^2}{(n+z)^2} \right)$ оценивается сверху конкретным числом, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \log \left(1 - \frac{t^2}{(n+z)^2} \right)$ сходится абсолютно и равномерно. В частности, сходится равномерно на компактах, значит, его можно дважды продифференцировать почленно, получится $(\log \Gamma(z))''$. Вопросы сходимости решены, $\stackrel{?}{=}$ можно заменить на $=$. Оценим остаток:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \log \left(1 - \frac{t^2}{(n+z)^2} \right) dt \leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+|z|)^2} \leq C_2 \frac{1}{|z|}$$

Заметим, что $\log \left(z + \frac{1}{2} \right) - \log(z) = \log \left(1 + \frac{1}{2z} \right) = \frac{1}{2z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$, и преобразуем

$$\left(z + \frac{1}{2} \right) \log \left(z + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + z \log z + \frac{1}{2} \log z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

Тем самым,

$$\log(\Gamma(z)) = B + Az - \frac{1}{2} \log z + z \log z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

Осталось выяснить, чему равны константы A и B . Так как мы знаем для натуральных n , что $\Gamma(n) = (n-1)! \sim ce^{-n} \frac{1}{\sqrt{n}} n^n$ при $n \rightarrow \infty$, то $A = -1$.

Теперь запишем формулу дополнения $\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin(\pi z)}$. Так как Γ вещественна на вещественной оси, или из интегральной формулы, видно, что $\Gamma(z) = \overline{\Gamma(\bar{z})}$. Тем самым, при $y \in \mathbb{R}$:

$$|\Gamma(iy)|^2 = -\frac{\pi}{iy \sin(\pi iy)} = -\frac{2\pi}{y(e^{-y\pi} - e^{y\pi})} \sim \frac{2\pi}{ye^{y\pi}}$$

С другой стороны, $\Gamma(iy) \sim e^B e^{-iy} e^{-\frac{1}{2}(\log y + \frac{\pi}{2}i)} e^{iy(\log y + \frac{\pi}{2}i)}$, откуда $|\Gamma(iy)| = e^B \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{\pi}{2}y}$. Тем самым, $e^{2B} = 2\pi$, и так как $B \in \mathbb{R}$, то $B = \log(\sqrt{2\pi})$ □