

# Математический анализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков  
Конспектировал Леонид Данилевич  
Редактировал Максим Лаунер

IV семестр, весна 2024 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Комплексный анализ</b>	<b>3</b>
1.1	Интеграл от дифференциальной формы вдоль кусочно-гладкого пути . . . . .	4
1.1.1	Про дифференциальные формы . . . . .	4
1.1.2	Про интегрирование . . . . .	4
1.1.3	Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути . . . . .	5
1.1.4	Сумма путей . . . . .	5
1.1.5	Альтернативное определение . . . . .	5
1.1.6	(Не)зависимость от параметризации . . . . .	6
1.2	Условия существования первообразной у дифференциальной формы . . . . .	7
1.2.1	Операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ . . . . .	10
1.2.2	Связь с голоморфными функциями . . . . .	11
1.2.3	Эквивалентность голоморфности и аналитичности . . . . .	15
1.2.4	Гармонические функции . . . . .	19
1.3	Первообразная от замкнутой формы вдоль непрерывного пути . . . . .	20
1.3.1	Наводящие предположения . . . . .	20
1.3.2	Требуемые свойства . . . . .	20
1.3.3	О гомотопности путей . . . . .	22
1.4	Ряды Лорана . . . . .	24
1.5	Изолированные особенности голоморфных функций . . . . .	25
1.5.1	Интеграл $\frac{\sin x}{x}$ . . . . .	27
1.6	Вычеты . . . . .	28
1.6.1	Как вычислять вычеты . . . . .	28
1.6.2	Индекс замкнутого пути относительно точки . . . . .	28
1.6.3	Обобщение интеграла $\frac{\sin x}{x}$ . . . . .	30
1.6.4	2-я формула замены переменной . . . . .	31
1.6.5	О логарифме . . . . .	32
1.6.6	Ветвь аргумента и целочисленность индекса . . . . .	33
1.7	Принцип аргумента и теорема Руше . . . . .	34
1.8	Сходимость аналитических функций . . . . .	35
1.8.1	Равномерная сходимость на компактах . . . . .	35
1.8.2	Нормальные семейства. Теорема Монтеля . . . . .	36
1.8.3	Про монтелевы пространства . . . . .	38
1.9	Однолистные функции. Теорема Римана . . . . .	39
1.9.1	О дробно-линейных отображениях . . . . .	39
1.9.2	Теорема Римана . . . . .	41
1.9.3	Автоморфизмы односвязных областей . . . . .	42
1.10	Целые функции с заданными нулями . . . . .	44
1.10.1	Произведение Вейерштрасса . . . . .	44
1.10.2	Упрощённый вид множителей Вейерштрасса . . . . .	45
1.10.3	Разложение синуса в произведение . . . . .	46
1.10.4	$\Gamma$ -функция Эйлера . . . . .	48
1.10.5	Эйлеров интеграл . . . . .	51
1.10.6	Формула Стирлинга . . . . .	51
1.11	Аналитическое продолжение . . . . .	53

1.11.1	Принцип симметрии Римана — Шварца . . . . .	54
1.11.2	Методы аналитического продолжения . . . . .	55
1.12	Рациональные и полиномиальные приближения . . . . .	58

# Глава 1

## Комплексный анализ

### Лекция I

16 февраля 2024 г.

Пусть  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , где открытое  $G \subset \mathbb{C}$ .

**Определение 1.0.1** ( $f$  голоморфна в  $z_0 \in G$ ).  $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \stackrel{\text{def}}{=} f'(z_0)$ .

Во втором семестре мы проверяли, что  $f = u + iv$  (где  $u, v : G \rightarrow \mathbb{R}$ ) голоморфна в  $z_0 \iff f = f(x + iy)$  дифференцируема в вещественном смысле, и выполняются уравнения Коши — Римана:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

**Определение 1.0.2** ( $f$  аналитична в  $G$ ).  $\forall z_0 \in G : \exists c_j \in \mathbb{C}$ :

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \quad (*)$$

где ряд сходится не только при  $z = z_0$ .

**Теорема 1.0.1.**  $f$  аналитична в  $G \iff f$  голоморфна во всех точках  $G$ .

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . Доказали во втором семестре, несложно.

$\Leftarrow$ . Скоро займёмся, время пришло. □

Степенные ряды типа (\*) можно дифференцировать почленно:  $f'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j (z - z_0)^{j-1}$ . В частности, отсюда получается, что  $f'(z_0) = c_1$ , и вообще  $f^{(n)}(z_0) = j! \cdot c_j$ .

Вскоре мы увидим, что ситуация разительно отличается от вещественной: в вещественном случае были разные классы — дифференцируемые функции,  $C^1$ ,  $C^\infty$ , аналитичные, и множество промежуточных классов.

В комплексном же случае, если функция хотя бы один раз дифференцируема, то окажется, что этого достаточно, чтобы она была не просто дифференцируема, а непрерывно дифференцируема, бесконечно дифференцируема, и даже аналитична.

## 1.1 Интеграл от дифференциальной формы вдоль кусочно-гладкого пути

### 1.1.1 Про дифференциальные формы

**Определение 1.1.1** (Линейная функция  $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ).  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n : l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y)$ .

**Определение 1.1.2** (Линейная форма на множестве  $G \subset \mathbb{R}^n$ ). Функция двух переменных  $\phi : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , линейная по второму аргументу.

В пространстве  $\mathbb{R}^n$  имеется базис  $(e_j)$ :  $h = e_1 h_1 + \dots + e_n h_n$ .

Тем самым,  $\phi(x, h) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\phi(x, e_j)}_{=: g_j(x)} h_j = \sum_{j=1}^n g_j(x) h_j$ .

Введём *базисные линейные формы*  $dx_j(u, h) = h_j$ , игнорирующую первую координату, и возвращающую  $j$ -ю компоненту второго аргумента. Теперь  $\phi(x, h)$  разложилась в сумму  $\sum_{j=1}^n g_j dx_j$ .

*Пример.* Пусть  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  — дифференцируемая в  $G$  функция. Заметим, что её дифференциал  $df(x, \_)$  — в точности линейная форма на  $G$ .

При разложении по базису получится  $df(x, \_) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j$ .

Вскоре мы увидим, что далеко не всякая линейная форма является чьим-то дифференциалом.

Если  $\phi = \sum_{j=1}^n g_j dx_j$  — дифференциал функции  $f$ , то непременно  $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ .

Тот факт, что  $\phi$  является дифференциалом  $f$ , можно сказать наоборот:  $f$  является первообразной  $\phi$ .

### 1.1.2 Про интегрирование

Рассмотрим монотонную функцию  $\Phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Как и при определении стилтьесовой длины, будем считать, что  $\Phi$  определена на некотором открытом множестве, содержащем  $\langle a, b \rangle$ . Обозначим за  $l_\Phi$  стилтьесову длину, отвечающую функции  $\Phi$ .

Пускай  $\lambda_\Phi$  — продолжение стилтьесовой длины  $l_\Phi$  по Лебегу — Каратеодори.

Она, как водится, определена на некоторой  $\Sigma$ -алгебре, в которой есть борелевские множества, но измеримы могут быть и какие-то другие множества, зависящие от конкретной функции  $\Phi$ .

*Примеры.*

- Так, функция  $\phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$  порождает дельта-меру  $\delta_0$ , относительно которой все множества измеримы.

Кроме того, эта мера сингулярна относительно стандартной меры Лебега.

- Может показаться, что так происходит из-за разрывности  $\phi$ , но это не так.

Рекурсивно определим канторову лестницу  $C : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ :



Построив по данной функции стилтьесову длину  $\lambda_C$ , мы получим меру, сосредоточенную на канторовом множестве меры нуль.

Её носитель — само канторово множество, так как на всех отрезках вне канторова множества  $\lambda_C$  равна нулю. Она сингулярна относительно стандартной меры Лебега на  $\mathbb{R}$ , и её измеримые множества разительно отличаются от измеримых множеств меры Лебега.

По мере Стильеса можно интегрировать: если  $v$  является  $\lambda_\Phi$  измеримой, и обладает интегралом (скажем, измерима по Борелю и неотрицательна), то определён интеграл  $\int_{\langle a, b \rangle} v d\lambda_\Phi$ . Иногда пишут просто  $\int_{\langle a, b \rangle} v d\Phi$  — это *интеграл Лебега — Стильеса*.

Теперь пусть  $I = [a, b]$ , и  $\Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — функция ограниченной вариации. В таком случае  $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$ , где некие  $\Phi_1, \Phi_2$  возрастают. Можно определить знакопеременную меру  $\lambda_\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{\Phi_1} - \lambda_{\Phi_2}$ , понятно, что определение корректно.

### 1.1.3 Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути

Пускай  $\gamma : [a, b] \rightarrow G \subset \mathbb{R}^n$  — спрямляемый путь (путь конечной длины). Пускай  $U = \sum_{j=1}^n u_j dx_j$  — дифференциальная форма в области  $G$ . Если не сказано противное, будем считать, что  $u_j$  — непрерывные функции.

**Определение 1.1.3** (Интеграл от  $U$  вдоль пути  $\gamma$ ).  $\int_\gamma U \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \int_{[a, b]} u_j(\gamma(t)) d\gamma_j(t)$ .

Здесь  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ . Так как путь спрямляем, то все  $\gamma_j$  — ограниченной вариации, каждая порождает свою меру Стильеса, и определение интегрирует композицию  $U \circ \gamma$  по данной мере.

### 1.1.4 Сумма путей

Пускай имеются два отрезка  $[a, c]$  и  $[c, d]$ , и на них заданы пути  $\gamma_1 : [a, c] \rightarrow G$ ,  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow G$ . Предположим, что  $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$ .

Тогда можно устроить путь  $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a, d] \rightarrow G$ ,  $\gamma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, c] \\ \gamma_2(t), & t \in [c, d] \end{cases}$ .

*Замечание.* Интеграл аддитивен по множеству, поэтому:  $\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} U = \int_{\gamma_1} U + \int_{\gamma_2} U$ .

### 1.1.5 Альтернативное определение

Далее мы не интересуемся никакими чудесами вроде канторовых лестниц, и считаем, что  $\Phi$  такова, что  $\lambda_\Phi$  абсолютно непрерывна относительно стандартной меры Лебега.

А раз так, то по теореме Радона — Никодима  $\exists$  суммируемая  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , такая, что

$$\lambda_\Phi(e) = \int_e w(x) dx \quad (+)$$

**Факт 1.1.1.** Формула (+) заведомо верна, если  $\Phi$  непрерывно дифференцируема на  $[a, b]$ , тогда  $w = \Phi'$ .

*Доказательство.* Введём меру  $\nu(e) = \int_e \Phi'(x) dx$ , заданную на измеримых по Лебегу множествах.  $\Phi'$  непрерывна, и, следовательно, измерима.

Если  $\langle c, d \rangle \subset [a, b]$ , то  $\nu(\langle c, d \rangle) = \int_{\langle c, d \rangle} \Phi'(x) dx = \Phi(d) - \Phi(c) = l_\Phi(\langle c, d \rangle)$ .

Таким образом, из теоремы единственности, продолжение  $l_\Phi$  по Лебегу — Каратеодори совпадает с  $\int_e \Phi'(x) dx$ .  $\square$

*Замечание.* Утверждение (факт 1.1.1) сохраняет силу, если  $\Phi$  непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема.

Пускай теперь  $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — функция ограниченной вариации, кусочно-непрерывно дифференцируемая:  $\exists a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ , такие, что  $\Phi$  непрерывно дифференцируема на  $[a_s, a_{s+1}]$  при  $0 \leq s < k$ . Введём  $\rho(e) = \int_e \Phi'(x) dx$  — это знакопеременная вещественная мера.

У данной меры возникают (из разложения Хана) положительная и отрицательная части  $\rho_+(e) \stackrel{def}{=} \int_e (\Phi')_+(x) dx$  и  $\rho_-(e) \stackrel{def}{=} \int_e (\Phi')_-(x) dx$

Если обозначить за  $\Phi_+(t) = \int_0^t (\Phi')_+(x) dx$  и  $\Phi_-(t) = \int_0^t (\Phi')_-(x) dx$ , то окажется, что соответствующие меры Стильеса совпадают с  $\rho_+$  и  $\rho_-$ .

Более того,  $\Phi = \Phi_+ - \Phi_-$  — получили разложение функции ограниченной вариации в положительную и отрицательную части.

*Замечание.* Это разложение экономнее, чем то, которое было получено ранее — ранее в качестве  $\Phi_+$  выбиралась вариация  $\Phi$ .

Если всё, что написано выше, собрать вместе, то получится

$$\boxed{\int_{[s,t]} v d\Phi = \int_{[s,t]} v(x) \Phi'(x) dx}$$

Далее «гладкий» используется, как синоним к непрерывно-дифференцируемому.

**Следствие 1.1.1** (Можно считать определением). Если  $U = \sum_{j=1}^n u_j dx_j$  — дифференциальная форма в  $G$  с непрерывными коэффициентами, а  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow G$  — спрямляемый кусочно-гладкий путь, то

$$\int_\gamma U = \sum_{j=1}^n \int_a^b u_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt$$

### 1.1.6 (Не)зависимость от параметризации

Пускай  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — кусочно-гладкий путь,  $\psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  — гладкий гомеоморфизм.

Теперь  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$  — перепараметризация  $\gamma$ .

**Лемма 1.1.1.** Для всякой формы  $U$ :

$$\int_{\tilde{\gamma}} U = \pm \int_{\gamma} U$$

Знак „+“ выбирается, если  $\psi$  возрастает, и „−“ — если убывает.

*Доказательство.* Предположим, что  $\gamma$  — гладкий путь, иначе применяем к кусочкам гладкости по отдельности.

$$\int_{\tilde{\gamma}} U = \sum_{j=1}^n \int_c^d u_j(\gamma(\psi(t))) \gamma'_j(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt = \left\| \begin{array}{l} \tau = \psi(t) \\ d\tau = \psi'(t) dt \end{array} \right\| = \sum_{j=1}^n \int_{\psi(c)}^{\psi(d)} u_j(\gamma(\tau)) \gamma'_j(\tau) d\tau = \pm \int_{\gamma} U \quad \square$$

Про  $\psi$  также можно считать, что он не гладкий, а лишь кусочно-гладкий.

Тем самым, можно определить сумму путей для несовпадающих отрезков: для двух путей  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow G, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow G$  (при условии  $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ ) можно один их отрезков-преобразов линейным возрастающим преобразованием перевести в отрезок, соприкасающийся со вторым (например,  $t \mapsto t + (b - c)$ ).

Также есть понятие *обратного пути*  $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$ . Для любой формы  $U$ :

$$\int_{\gamma \oplus \gamma^-} U = \int_{\gamma} U + \int_{\gamma^-} U = \int_{\gamma} U - \int_{\gamma} U = 0$$

## 1.2 Условия существования первообразной у дифференциальной формы

**Теорема 1.2.1.** Если у дифференциальной формы  $U$  в открытом множестве  $G \subset \mathbb{R}^n$  имеется первообразная  $F$ , то для всякого кусочно-гладкого пути  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$

$$\int_{\gamma} U = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

*Доказательство.*  $U = \sum_{j=1}^n g_j dx_j$ , где  $g_j(w) = \frac{\partial}{\partial x_j} F(w)$ . Считаем, что путь гладкий.

$$\int_{\gamma} U = \sum_{j=1}^n \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_j} F(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (F \circ \gamma)(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Если же путь всего лишь кусочно-гладкий, то надо разбить отрезок на подотрезки гладкости, и сложить.  $\square$

**Следствие 1.2.1.** Если у дифференциальной формы  $U$  есть первообразная, то её интегралы по всем путям с данными началом и концом, равны.

Оказывается, верно и обратное.

## Лекция II

26 февраля 2024 г.

**Лемма 1.2.1.** Пусть  $G$  — область в  $\mathbb{R}^n$ , тогда любые две её точки можно соединить ломаной (кусочно-линейным путём).



*Доказательство.* Выберем  $x_0 \in G$ , положим  $U = \{y \in G \mid \text{существует ломаная в } G \text{ с началом в } x_0 \text{ и концом в } y\}$ .

Покажем, что  $U$  открыто. Пусть  $y \in U$ , тогда найдётся шарик  $B_\varepsilon(y) \subset G$ , и  $B_\varepsilon(y) \subset U$  — можно добавить одно звено к ломаной  $x_0 \rightsquigarrow y$ .

Покажем, что  $U$  замкнуто. Пусть  $z \in G$  — предельная точка для  $U$ . Найдётся  $B_\varepsilon(z) \subset G$ , так как  $z$  — предельная, то  $\exists y \in B_\varepsilon(z) \cap U$ . Значит,  $z \in U$  — можно добавить одно звено  $y \rightarrow z$ .  $\square$

*Замечание.* Имея кусочно-линейный путь  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ , соединяющий  $A, B \in G$ , несложно получить бесконечно дифференцируемый путь, соединяющий их:

Пусть  $\gamma_1 : [a-1, b+1] \rightarrow G$ ,  $\gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma(a), & t \in [a-1, a] \\ \gamma(t), & t \in [a, b] \\ \gamma(b), & t \in [b, b+1] \end{cases}$ . Теперь, сворачивая  $\gamma_1$  с аппроксиматив-

ной единицей с достаточно малым компактным носителем, получим бесконечно дифференцируемый путь, соединяющий  $A$  и  $B$ .

**Теорема 1.2.2.** Пусть  $\Phi = \sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j$  — непрерывная дифференциальная форма в  $G$  (то есть коэффициенты непрерывны в  $G$ ). Следующие условия эквивалентны.

1.  $\int_\gamma \Phi$  есть первообразная  $F$ , то есть функция  $F \in C^1(G) : dF = \Phi$  (иными словами,  $\forall j : \frac{\partial}{\partial x_j} F = f_j$ ).
2. Для всех кусочно-гладких путей  $\gamma$  с фиксированными началом и концом  $\gamma(a) = \gamma_a, \gamma(b) = \gamma_b$ :  $\int_\gamma \Phi$  не зависит от  $\gamma$  (а только от начала и конца).
3. Для любой кусочно-гладкой петли (то есть замкнутого пути)  $\gamma$  в  $G$ :  $\int_\gamma \Phi = 0$ .

*Доказательство.* Мы уже доказали ранее цепочку импликаций  $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2)$ . Далее доказываем  $(2) \Rightarrow (1)$ .

Предъявим кандидат в первообразную. Зафиксируем  $x_0 \in G$ , выберем  $x \in G$ , пусть  $\gamma$  — произвольный кусочно-гладкий путь с началом в  $x_0$  и концом в  $x$ . Определим  $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\gamma \Phi$ . Согласно посылке,  $F$  корректно определена — не зависит от выбора пути.

Покажем, что частные производные  $F$  существуют, и равны  $f_j$ . Тогда они получатся непрерывными, то есть  $F$  — дифференцируемой, и окажется, что  $F$  — первообразная  $\Phi$ .

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — стандартные базисные орты в  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим  $\frac{F(x+te_j) - F(x)}{t}$ .

При малых  $t$ : отрезок между  $x$  и  $x + te_j$  лежит внутри  $G$ . Пусть  $\gamma_1$  — путь, соединяющий  $x_0$  и  $x$ ,  $l$  — отрезок от  $x$  до  $x + te_j$ .

$$\frac{F(x + te_j) - F(x)}{t} = \frac{1}{t} \left( \int_{\gamma_1 \oplus l} \Phi - \int_{\gamma_1} \Phi \right) = \frac{1}{t} \int_l \Phi = \frac{1}{t} \int_0^t f_j(x + \tau e_j) d\tau \xrightarrow{t \rightarrow 0} f_j(x) \quad \square$$

**Определение 1.2.1** (Прямоугольник на плоскости). Множество вида  $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ .

Область  $G$  на плоскости будем называть *удобной*, если  $\exists x_0 \in G : \forall y \in G : \exists$  прямоугольник  $P \subset G$ , содержащий точки  $x$  и  $y$ .

*Примеры (Удобные области).*

- $\text{Int } Q$ , если  $Q$  — прямоугольник. В качестве *центра*  $x_0$  подойдёт любая точка.

- $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < r\}$ . В качестве *центра*  $x_0$  стоит взять центр круга, иначе не получится:



**Определение 1.2.2** (Ориентированная граница прямоугольника  $P$ ). Петля  $\gamma$ , обходящая границу  $P = [a, b] \times [c, d]$  против часовой стрелки, то есть вот так:



$$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4.$$

Для прямоугольника  $P$  будем обозначать за  $\partial P$  в зависимости от контекста либо границу  $P$ , как топологического подмножества  $\mathbb{R}^2$ , либо путь, обходящий границу  $P$  против часовой стрелки.

**Следствие 1.2.2** (Дополнение к (теорема 1.2.2)). Если  $G$  — удобная область на плоскости, то к трём эквивалентным условиям (теорема 1.2.2) можно добавить

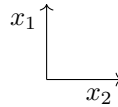
$$4. \forall P \subset G : \int_{\partial P} \Phi = 0.$$

*Доказательство.* (3)  $\Rightarrow$  (4) ясно, докажем (4)  $\Rightarrow$  (1).

Пусть  $x_0 \in G$  — центр удобной области, определим  $F(x) = \int_{\delta} \Phi$ , где  $\delta$  — это либо  $\delta_1 := \gamma_1 \oplus \gamma_2$  либо  $\delta_2 := \gamma_4^- \oplus \gamma_3^-$  (вне зависимости от выбора  $\delta$  получится одно и то же).



Далее, чтобы проверить  $\frac{\partial}{\partial x_1} F = f_1$  и  $\frac{\partial}{\partial x_2} F = f_2$ , воспользуемся подходящим представлением: пусть орты расположены так:



тогда для проверки  $\frac{\partial}{\partial x_1} F = f_1$  удобно воспользоваться определением  $F$  через  $\delta_1$ , для проверки  $\frac{\partial}{\partial x_2} F = f_2$  — определением через  $\delta_2$ . Далее повторяем рассуждение из (теорема 1.2.2).  $\square$

Пусть  $\Phi = \sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j$  — непрерывная дифференциальная форма в области  $G \subset \mathbb{R}^n$ .

**Определение 1.2.3** (Форма  $\Phi$  точна). Существует первообразная  $F$  в  $G$ :  $dF = \Phi$ .

**Определение 1.2.4** (Форма  $\Phi$  замкнута). Форма  $\Phi$  локально точна ( $\forall x_0 \in G : \exists U \ni x_0 : \Phi|_U$  точна).

Понятно, что точная форма замкнута, но точность из замкнутости не следует: чуть позднее мы определим  $dz$ , и покажем, что  $\frac{dz}{z}$  — замкнутая, но не точная форма на  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Теорема 1.2.3.** Пусть  $\Phi$  — дифференциальная форма в области  $G \subset \mathbb{R}^n$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $\Phi$  замкнута.

2.  $\forall x_0 \in G : \exists V \ni x_0 : \forall$  кусочно-гладкого замкнутого пути  $\gamma$  с носителем в  $V$ :  $\int_{\gamma} \Phi = 0$ .

Если  $n = 2$ , то дополнительно появляются ещё два условия:

3.  $\forall z \in G : \exists V_z \subset G : \forall P \subset V_z : \int_{\partial P} \Phi = 0$ .

4.  $\forall P \subset G : \int_{\partial P} \Phi = 0$ .

*Доказательство.* Докажем, что (3)  $\Rightarrow$  (4), остальное уже доказано выше.

Заметим, что границу прямоугольника  $P$  можно представить, как сумму границ четырёх прямоугольников вдвое меньшего диаметра:



Таким образом, чтобы доказать, что интеграл по границе большого прямоугольника  $P$  нулевой, разобьём его на достаточно маленькие прямоугольники, по ним-то интеграл нуль. Чтобы это формализовать, вспомним лемму Лебега о покрытии:

**Теорема 1.2.4** (Лемма Лебега). Пусть  $K$  — компакт в метрическом пространстве,  $\{U_j\}_{j \in J}$  — открытое покрытие компакта  $K$ . Тогда  $\exists \delta > 0 : \forall A \subset K : \text{diam } A < \delta \Rightarrow \exists j \in J : A \subset U_j$ .

Применяя лемму Лебега для покрытия  $P$  окрестностями  $\{V_z\}_{z \in P}$ , получим такое число  $\delta$ . Теперь надо разбить границу прямоугольника  $P$  в сумму границ прямоугольников диаметра меньше  $\delta$ , а посылка теоремы говорит, что интеграл по ним уже нуль.  $\square$

### 1.2.1 Операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

Как известно,  $\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$ , то есть  $\forall z \in \mathbb{C} : z = x + iy$ , аналогично  $\bar{z} = x - iy$ .

Рассмотрим  $z$  и  $\bar{z}$ , как функции  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \mapsto x \pm iy$ . Теперь  $dz = dx + i dy$  и  $d\bar{z} = dx - i dy$  образуют базис в пространстве дифференциальных форм (тех, которые не зависят от точки), обратное преобразование выглядит так:

$$\begin{cases} dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \\ dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \end{cases}$$

Рассмотрим форму  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Phi(x, y) = \alpha(x, y) dx + \beta(x, y) dy$ . Перепишем её в новом базисе:

$$\Phi(x, y) = \frac{\alpha(x, y)}{2} (dz + d\bar{z}) + \frac{\beta(x, y)}{2i} (dz - d\bar{z}) = \frac{\alpha(x, y) - i\beta(x, y)}{2} dz + \frac{\alpha(x, y) + i\beta(x, y)}{2} d\bar{z}$$

Теперь пусть  $\Phi$  — точная форма, то есть  $\Phi = dF$ , и тогда  $\alpha(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$  и  $\beta(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ . Теперь

$$dF = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right) d\bar{z}$$

**Определение 1.2.5** ( $\frac{\partial F}{\partial z}$ ). Коэффициент, стоящий перед  $dz$ , то есть  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right)$ .

**Определение 1.2.6** ( $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ ). Коэффициент, стоящий перед  $d\bar{z}$ , то есть  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right)$ .

Иначе говоря, мы ввели операторы  $\frac{\partial}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$  и  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$  так, что

$$dF = \frac{\partial}{\partial z} F dz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} F d\bar{z}$$

### 1.2.2 Связь с голоморфными функциями

Пусть  $F = u + iv$ , где  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Запишем

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)$$

В правой части равенства получились выражения из уравнений Коши — Римана.

**Факт 1.2.1.** *Вещественные функции  $u, v$  удовлетворяют уравнениям Коши — Римана  $\iff \frac{\partial(u+iv)}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ .*

**Факт 1.2.2.**  *$F$  голоморфна  $\iff dF = \frac{\partial F}{\partial z} dz$ . При этом  $\frac{\partial F}{\partial z}$  есть производная  $F$  по комплексному аргументу.*

*Доказательство.* Функция дифференцируема по комплексному аргументу  $\iff$  её дифференциал — умножение на комплексное число.  $\square$

В основном нас будут интересовать дифференциальные формы вида  $\phi(z) dz$ , где  $\phi$  — произвольная функция.

Выясним, когда у формы  $\phi(z) dz = \phi(z) dx + i\phi(z) dy$  имеется первообразная, то есть функция  $g : \frac{\partial g}{\partial x} = \phi, \frac{\partial g}{\partial y} = i\phi$ . Заметим, что  $\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{2}(\phi - i(i\phi)) = \phi$  и  $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\phi + i(i\phi)) = 0$ .

**Утверждение 1.2.1.** *Форма  $\phi dz$  имеет первообразную  $g \iff g$  голоморфна, и  $g' = \phi$ .*

**Теорема 1.2.5** (Коши). Если  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная функция (область  $G \subset \mathbb{C}$ ), то форма  $g(z) dz$  замкнута (но не факт, что точна).

*Доказательство.* Потом (теорема 1.2.8).  $\square$

*Контрпример* (Глобально первообразной может не быть). Пусть  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}, g : G \rightarrow \mathbb{C}, g : z \mapsto \frac{1}{z}$ .

По теореме Коши у  $g$  имеется локальная первообразная — комплексный логарифм — но глобально определить не получится. Пусть  $\Gamma = \partial\mathbb{T}$  — комплексная окружность, ориентируем её против часовой стрелки, а именно, рассмотрим стандартный обход окружности  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \alpha : \phi \mapsto e^{i\phi}$ . Теперь убедимся, что форма не точна:

$$\int_{\alpha} \phi = \int_{\alpha} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{(e^{it})'}{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i \neq 0$$

Для будущих применений также определим ориентированную против часовой стрелки границу  $B_r(z_0)$ , это путь  $\beta(t) = z_0 + re^{it}$  для  $t \in [0, 2\pi]$ .

*Пример.* Пусть  $z_0, w \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_{>0}, |w - z_0| \neq r$ , пусть путь  $\gamma$  обходит границу  $B_r(z_0)$  против часовой стрелки:



Тогда, оказывается, (посчитаем чуть позже):

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-w} = \begin{cases} 0, & |z-w| > r \\ 2\pi i, & |z-w| < r \end{cases} \quad (\circ)$$

Грубой силой этот интеграл посчитать непросто, так как  $w$  находится где угодно — внутри или снаружи круга — а интеграл, оказывается, зависит только от этих двух альтернатив.

**Теорема 1.2.6** (Основная оценка интеграла вдоль пути). Пускай  $\Phi = \sum_{j=1}^n f_j dx_j$  — непрерывная дифференциальная форма в области  $G \subset \mathbb{R}^n$ , а  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — кусочно-гладкий путь,  $K := \text{Im}(\gamma) \subset G$ .

$$\text{Тогда } \left| \int_{\gamma} \Phi \right| \leq \underbrace{\sup_{x \in K} \left( \sum_{j=1}^n |f_j(x)|^2 \right)^{1/2}}_{=: A} \cdot l(\gamma).$$

*Доказательство.* Считаем, что  $\gamma$  — гладкий путь, иначе нужно разбить на кусочки гладкости.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} \Phi \right| &= \left| \int_a^b \sum_{j=1}^n f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt \right| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \int_a^b \left( \sum_{j=1}^n |f_j(\gamma(t))|^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{j=1}^n |\gamma'_j(t)|^2 \right)^{1/2} dt \leq \\ &\leq A \cdot \underbrace{\int_a^b \left( \sum_{j=1}^n |\gamma'_j(t)|^2 \right)^{1/2} dt}_{l(\gamma)} \end{aligned}$$

□

## Лекция III

1 марта 2024 г.

Рассмотрим дифференциальную форму  $\Phi = F(z) dz$ , где  $F$  — непрерывная функция в  $G \subset \mathbb{C}$ . Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — плоский путь.

Расписав  $\Phi(z) = F(z) dx + iF(z) dy$  и применив основную оценку интеграла вдоль пути, получаем

$$\left| \int_{\gamma} \Phi \right| \leq \max_{z \in K} \sqrt{|F(z)|^2 + |F(z)|^2} \cdot l(\gamma) = \sqrt{2} \max_{z \in K} |F(z)| \cdot l(\gamma)$$

Эта оценка вызывает некоторую неудовлетворённость: кажется, что  $\sqrt{2}$  здесь лишний. И это действительно правда: можно расписать интеграл аккуратнее.

Пусть  $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ , тогда по определению

$$\int_{\gamma} \Phi = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'_1(t) + iF(\gamma(t)) \cdot \gamma'_2(t) dt = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Таким образом, интеграл от комплексной формы вдоль пути имеет более простое представление, и оно легко поддаётся более плотной оценке:

$$\left| \int_{\gamma} \Phi \right| \leq \int_a^b |F(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq \max_{z \in K} |F(z)| \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)| dt}_{l(\gamma)}$$

Посчитаем анонсированный на предыдущей лекции интеграл ( $\circ$ ). Пусть  $z_0, w \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ .

- Сначала рассмотрим случай  $|w - z_0| < r$ . Заметим, что, согласно основной оценке интеграла, если коэффициенты равномерно стремятся к какому-то значению и интегралы ограничены, то предельный интеграл тоже сходится.

Запись ниже  $\int_{|z-z_0|=r}$ , и вообще все аналогичные записи, которые встретятся в дальнейшем, по умолчанию означают, что граница соответствующего множества (в данном случае — круга) обходится стандартным образом, то есть против часовой стрелки.

$$\begin{aligned} \int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z - z_0 - (w - z_0)} &= \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} dz = \\ &= \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} \left( 1 + \frac{w - z_0}{z - z_0} + \left( \frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^2 + \dots \right) dz \quad (\circ) \end{aligned}$$

На слагаемые из ряда имеется равномерная по  $z$  оценка:  $\left| \frac{w-z_0}{z-z_0} \right| \leq \frac{|w-z_0|}{r} < 1$ , и по теореме Вейерштрасса функциональный ряд сходится. Значит, сумму можно вынести из-под интеграла

$$(\circ) \quad \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} dz + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|z-z_0|=r} \frac{(w - z_0)^j}{(z - z_0)^{j+1}} dz \quad (\circ)$$

Первое слагаемое мы умеем брать, а у каждого слагаемого из остальной суммы имеется первообразная:  $\frac{1}{(z-z_0)^{j+1}} = -\frac{1}{j} \left( \frac{1}{(z-z_0)^j} \right)'$

$$(\circ) \quad \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi i$$

- Теперь разберёмся со случаем  $|w - z_0| > r$ .

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z - z_0 - (w - z_0)} = -\frac{1}{w - z_0} \int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = -\frac{1}{w - z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{|z-z_0|=r} \frac{(z - z_0)^j}{(w - z_0)^j} dz$$

Аналогично предыдущему случаю, ряд сходится абсолютно, поэтому сумму опять можно вынести из под интеграла, и в данном случае всё ещё проще: каждое слагаемое имеет первообразную, там нет отрицательных степеней  $z$ , поэтому вся сумма обращается в нуль.

Пусть  $\Phi = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$  — непрерывная дифференциальная форма в некоторой области  $G \subset \mathbb{R}^n$ .

**Теорема 1.2.7.** Если все функции  $f_j \in C^1$ , то следующие условия эквивалентны:

- $\Phi$  замкнута.
- $\forall 1 \leq i, j \leq n : \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  — «накрест взятые частные производные равны».

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  Выберем  $x \in G$ , так как форма замкнута, то  $\exists U \ni x : \Phi$  имеет первообразную  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Тем самым,  $f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$ , и так как  $f_i \in C^1$ , то действительно  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ .

$\Leftarrow$  Сначала приведём доказательство случая  $n = 2$ . В таком случае  $\Phi = f dx + g dy$ .

Согласно посылке,  $h := \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ . Кстати, равенство слева равносильно одному из уравнений Коши — Римана.

Рассмотрим произвольный  $P = [a, b] \times [c, d] \subset G$ , и докажем, что  $\int_{\partial P} \Phi = 0$ .



То, что мы увидим сейчас, является первым заходом на *формулу Остроградского — Гаусса*. Функция  $h$  непрерывна, и можно записать от неё интеграл Лебега:  $\int_P h(x, y) dx dy$ . Теперь, применяя теорему Фубини, раскладываем двумя способами интеграл в сумму повторных:

$$\int_P h(x, y) dx dy = \begin{cases} = \int_a^b \left( \int_c^d \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b [f(x, d) - f(x, c)] dx = \int_{\gamma_3^-} f(-, d) dx + \int_{\gamma_1^-} f(-, c) dx \\ = \int_c^d \left( \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x} dx \right) dy = \int_c^d [g(b, y) - g(a, y)] dy = \int_{\gamma_2} g(b, -) dy + \int_{\gamma_4} g(a, -) dy \end{cases}$$

Итого,  $\int_{\gamma_3^-} f(-, d) dx + \int_{\gamma_1^-} f(-, c) dx = \int_{\gamma_2} g(b, -) dy + \int_{\gamma_4} g(a, -) dy$ , откуда действительно  $\int_{\gamma} \Phi = 0$ .

⇐ Теперь приведём альтернативное доказательство индукцией по  $n$ .

База: Случай  $n = 1$  тривиален: теорема Ньютона — Лейбница говорит, что у непрерывной функции есть первообразная.

Переход: Пусть  $n > 1$ , и для  $n - 1$  теорема доказана. Рассмотрим  $a = (a_1, \dots, a_n) \in G$ , и возьмём прямоугольный параллелепипед  $P$  со сторонами, параллельными осям координат такой, что  $a \in \text{Int } P$ . Докажем, что на  $P$  у  $\Phi$  есть первообразная.

Построим  $g(x_1, \dots, x_n) := \int_{a_1}^{x_1} f_1(t, x_2, \dots, x_n) dt$ . Обозначим  $\phi_j := \frac{\partial g}{\partial x_j}$ . Заметим, что  $\phi_1 = \frac{\partial g}{\partial x_1} = f_1$ .

Теперь рассмотрим форму  $\Psi(x_1, \dots, x_n) = \phi_1 dx_1 + \dots + \phi_n dx_n$ . Эта форма имеет первообразную  $g$  на параллелепипеде  $P$ .

Теперь посмотрим на  $\Phi - \Psi =: h_1 dx_1 + \dots + h_n dx_n$ . По построению  $h_1 = 0$ . По условию накрест взятые частные производные равны у  $\Phi$ , и они равны у  $\Psi$ , так как у неё есть первообразная. Значит, это же верно и для разности, в частности,  $\frac{\partial h_i}{\partial x_1} = \frac{\partial h_1}{\partial x_i} = 0$ . Иными словами,  $\forall i : h_i$  не зависит от  $x_1$ .

А раз так, то на  $\Phi - \Psi$  можно смотреть, как на форму  $(n - 1)$ -й переменной, и применить индукционное предположение.

*Замечание*. Тут есть некоторый обман: производные  $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$  могут просто не существовать.

Попробуем обойти его так: пусть  $\beta \in C^\infty$ , с компактным носителем. Выберем аппроксимативную единицу  $\beta_t(x) = \frac{1}{t^n} \beta\left(\frac{x}{t}\right)$ .

Назначим  $f_k^{(t)} = f_k * \beta_t$ ,  $f_k^{(t)} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f_k$ .

Далее, согласно рассуждению выше, у формы  $\Phi^{(t)}$  коэффициенты  $h_k^{(t)}$  не зависят от  $x_1$ . А раз коэффициенты  $\Phi$  равномерно стремятся к  $h_k$ , то и они не зависят от  $x_1$ .

Чтобы это увидеть, заключим окрестность точки  $a$  в большой параллелепипед  $Q$ , а внутри него выберем параллелепипед поменьше  $P$ . На  $Q$  коэффициенты  $\Phi$  ограничены. При достаточно малых  $t$ , таких, что при вычислении коэффициентов  $\Phi^{(t)}$  не происходит выхода за  $Q$ , коэффициенты формы  $\Phi^{(t)}$  равномерно по  $P$  стремятся к  $\Phi$ .  $\square$

### 1.2.3 Эквивалентность голоморфности и аналитичности

**Теорема 1.2.8** (Коши). Пусть  $F$  — голоморфная функция в открытом множестве  $G \subset \mathbb{C}$ . Тогда дифференциальная форма  $F(z) dz$  замкнута, то есть локально  $\exists S : S'(z) = F(z)$ .

*Замечание.* Теорема совсем проста, если заранее предположить, что  $F'(z)$  непрерывна (а так в итоге и должно получиться, так как  $F$  — аналитична). В таком случае имеется следующее более простое доказательство.

*Доказательство.* Поскольку  $F(z) dz = F(z) dx + iF(z) dy$ , утверждение эквивалентно (согласно (теорема 1.2.7)) тому, что  $\forall z \in \mathbb{C} : \frac{\partial F}{\partial \bar{y}}(z) = i \frac{\partial F}{\partial x}(z)$ . Пусть  $F(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  для вещественных  $x, y$  и вещественнозначных  $u, v$ . И правда,

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \stackrel{?}{=} i \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

то есть  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  и  $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$  — это в точности уравнения Коши — Римана.  $\square$

Теперь докажем теорему Коши вне предположения непрерывности производной.

*Доказательство.* Докажем от противного: пусть форма  $F(z) dz$  не замкнута,  $\exists P_0 \subset G : \alpha := \int_{\partial P_0} F(z) dz \neq 0$ .

Будем потихонечку делить этот прямоугольник на четыре равные части: пусть  $P_0 = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$ .



Модуль интеграла по границе по крайней мере одного из  $Q_i$  хотя бы  $\frac{|\alpha|}{4}$ . Назовём этот прямоугольник  $P_1$ , и продолжим процесс. Получим систему вложенных замкнутых прямоугольников  $P_0 \supset P_1 \supset \dots$ , таких, что  $\left| \int_{\partial P_k} F(z) dz \right| \geq \frac{|\alpha|}{4^k}$ . При этом  $l(\partial P_k) = 2^{-k} l(\partial P_0)$ , и  $\text{diam}(P_k) = 2^{-k} \text{diam}(P_0)$ .

Имеется ровно одна точка  $z_0$  в пересечении  $\bigcap_{k \geq 0} P_k$ . Воспользуемся условием того, что  $F$  голоморфна в точке  $z_0$ :  $F(z) = F(z_0) + F'(z_0)(z - z_0) + \underbrace{\psi(z)}_{o(|z - z_0|)}$

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ .  $\exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |\psi(z)| \leq \varepsilon |z - z_0|$ . Пусть  $k$  настолько велико, что  $\text{diam } P_k < \delta$ .

$$\int_{\partial P_k} F(z) dz = \int_{\partial P_k} [F(z_0) + F'(z_0)(z - z_0)] dz + \int_{\partial P_k} \psi(z) dz$$

Первый интеграл обнуляется, так как это линейная функция по  $z$ , у неё есть первообразная. Оценивая второй интеграл, получаем

$$\frac{|\alpha|}{4^k} \leq \left| \int_{\partial P_k} \psi(z) dz \right| \leq \varepsilon \text{diam } P_k \cdot l(\partial P_0) = \varepsilon \cdot 2^{-k} \text{diam } P_0 \cdot 2^{-k} l(\partial P_0) = 4^{-k} \varepsilon \cdot \text{diam } P_0 \cdot l(\partial P_0)$$

Выбирая довольно маленький  $\varepsilon$ , получаем, что  $|\alpha|$  меньше любого положительного числа.  $\square$

**Теорема 1.2.9** (Об устранимой особенности замкнутой дифференциальной формы). Пускай  $\Phi = f dx + g dy$  — непрерывная дифференциальная форма в области  $G \subset \mathbb{C}$ .

Если  $z_0 \in G$ , и  $\Phi$  замкнута в  $G \setminus \{z_0\}$ , то  $\Phi$  замкнута в  $G$ .



*Доказательство.* Докажем, что  $\forall P \subset G : \int_{\partial P} \Phi = 0$ . Рассмотрим случаи.

- Если  $z_0 \notin P$ , то интеграл нуль по условию.
- Если  $z_0 \in \text{Int } P$ , то данный случай сводится к следующему: разобьём прямоугольник на два так, чтобы  $z_0$  оказалось на границе:



- Если  $z_0 \in \partial P$ , то отступим на  $\varepsilon$ , интеграл по границе  $P_\varepsilon$  будет нулём:  $\int_{\partial P_\varepsilon} \Phi = 0$ .



Заметим, что  $\int_{\partial P_\varepsilon} \Phi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial P} \Phi$ , так как коэффициенты дифференциальной формы равномерно непрерывны в некоторой окрестности  $P$  (интегралы по сторонам  $P_\varepsilon$  стремятся к интегралам по соответствующим сторонам  $P$ ). Значит,  $\int_{\partial P} \Phi = 0$ .

□

**Теорема 1.2.10** (Малая интегральная формула Коши). Пусть  $f$  — голоморфна в области  $G$ ,  $B = B(z_0, r)$  — круг,  $\overline{B} \subset G$ . Тогда  $\forall z \in B$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

*Доказательство.* Докажем для некоего фиксированного  $z \in B$ .

Рассмотрим функцию  $g(\zeta) = \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$ .  $g$  голоморфна в области  $G \setminus \{z\}$ . Тем самым,  $g(\zeta) d\zeta$  — замкнутая форма в  $G \setminus \{z\}$ , а по теореме об устранимой особенности  $g(\zeta) d\zeta$  замкнута в  $G$  (доопределим по непрерывности  $g(z) := f'(z)$ ).

Но так как круг — удобная область, то у  $g$  имеется первообразная в некотором круге  $B(z_0, r(1+\varepsilon))$  (где  $\varepsilon > 0$  настолько мал, что  $B(z_0, r(1+\varepsilon)) \subset G$ ). Тем самым,  $\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta = 0$ , откуда

$$\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \cdot \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i \cdot f(z) \quad \square$$

**Следствие 1.2.3** (Теорема Коши). Если  $f$  голоморфна в области  $G \subset \mathbb{C}$ , то  $\forall z_0 \in G$  функция  $f$  (в некоторой окрестности) раскладывается в некоторый степенной ряд  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ , причём радиус сходимости хотя бы  $\text{dist}(z_0, \partial G)$ .

*Доказательство.* Пусть  $r \in (0, \text{dist}(z_0, \partial G))$ . Рассмотрим  $B = B_r(z_0)$ . Так как  $\overline{B} \subset G$ , то для точки  $z \in B$  получаем

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} (z - z_0)^j \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \end{aligned}$$

Абсолютная равномерная сходимость в круге радиус  $r$  при  $r < \text{dist}(z_0, \partial G)$  имеется по тем же причинам, что и при доказательстве (о).

Таким образом, мы получили степенной ряд, и так как коэффициенты степенного ряда, раз определены, не зависят от радиуса круга ( $c_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}$ ), то радиус сходимости данного ряда хотя бы  $\text{dist}(z_0, \partial G)$ .  $\square$

## Лекция IV

12 марта 2024 г.

*Замечание.* Интегральную форму Коши можно спокойно дифференцировать: так,

$$\frac{d}{dz} f(z) = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

В общем случае

$$\frac{d^k}{dz^k} f(z) = \frac{d^k}{dz^k} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

**Определение 1.2.7** (Целая (entire) функция). Голоморфная функция, заданная в  $\mathbb{C}$ .

Выберем  $z_0 = 0$ . Согласно (следствие 1.2.3), получаем  $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$  (ряд Маклорена), где  $c_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}} d\zeta$ , причём имеется абсолютная сходимость везде в  $\mathbb{C}$ .

**Теорема 1.2.11.** Если  $f$  целая, и  $|f(z)| = \mathcal{O}(z^N)$  при  $|z| \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty$ , то  $f$  — многочлен степени не более  $N$ .

*Доказательство.* Из определения  $\mathcal{O} : \exists C, a \in \mathbb{R} : |f(z)| \leq C|z|^N$  при  $|z| > a$ .

Выберем  $r > a$ , и оценим:  $|c_j| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{j+1}} ire^{i\theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Cr^N}{r^j} d\theta = \frac{Cr^N}{r^j}$ . Получается, при  $j > N : |c_j|$  меньше любого наперёд заданного положительного числа.  $\square$

**Следствие 1.2.4** (Теорема Лиувилля). Ограниченная целая функция постоянна.

**Следствие 1.2.5** (Основная теорема алгебры).  $\forall p \in \mathbb{C}[z] : \deg p > 0 \Rightarrow \exists z_0 \in \mathbb{C} : p(z_0) = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $p(z) = \sum_{j=0}^N c_j z^j$ , где  $N > 0$  и  $c_N \neq 0$ .

Пойдём от противного: пусть  $\forall z \in \mathbb{C} : p(z) \neq 0$ .

Рассмотрим  $f(z) := \frac{1}{p(z)}$ .

- С одной стороны, это целая функция:  $\frac{d}{dz} f(z) = -\frac{p'(z)}{p(z)^2}$ .
- С другой стороны,  $f$  ограничена: оценим  $|p(z)| \geq |z|^N \left( |c_N| - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{|c_j|}{|z|^{N-j}} \right)$ , откуда для достаточно больших  $|z| : |p(z)| \geq \frac{|c_N|}{2} |z|^N$ .

Тем самым,  $p(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \infty$ , то есть  $f(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$ . А при малых  $|z| : f$  ограничена, как непрерывная функция на компакте.

- Тем самым, по теореме Лиувилля,  $f \equiv \text{const}$ , то есть  $p \equiv \text{const}$ . Противоречие, мы предполагали  $\deg p > 0$ .  $\square$

**Теорема 1.2.12** (Теорема о среднем). Пусть  $z_0 \in G, f : G \rightarrow \mathbb{C}$  голоморфна в  $G$ . Выберем  $r < \text{dist}(z_0, \partial G)$ . Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

*Доказательство.* Посчитаем  $f(z_0)$  по интегральной формуле:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it}) ire^{it}}{re^{it}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \quad \square$$

Это действительно среднее в обычном смысле:  $f$  проинтегрирована по окружности по мере Лебега, и интеграл поделили на меру окружности.

**Теорема 1.2.13** (Принцип максимума модуля). Пусть  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  — непостоянная голоморфная функция. Тогда  $|f| : z \mapsto |f(z)|$  не может достигать наибольшего значения при  $z \in G$ .

*Доказательство.* Пойдём от противного: пусть  $\exists z_0 \in G : \forall z \in G : |f(z)| \leq |f(z_0)|$ . Выберем  $r > 0 : B(z_0, r) \subset G$ , и докажем, что  $|f|$  постоянна в  $B(z_0, r)$ . Пусть  $\rho < r$ , по теореме о среднем

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(z_0 + \rho e^{it})|}_{\leq |f(z_0)|} dt, \text{ причём равенство достигается только если}$$

$\forall t \in [0, 2\pi] : |f(z_0 + \rho e^{it})| = |f(z_0)|$  (если  $\exists t_0 \in (0, 2\pi) : |f(z_0 + \rho e^{it_0})| < |f(z_0)|$ ), то по непрерывности  $\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) : |f(z_0 + \rho e^{it})| < |f(z_0)| - \varepsilon$ , то есть на промежутке  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$  интеграл строго меньше требуемого значения).

**Лемма 1.2.2.** Пусть  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  голоморфна, и  $\exists z_0 \in G : f'(z_0) \neq 0$ . Тогда  $\exists U \ni z_0 : f(z_0) \in \text{Int } f(U)$ .

*Доказательство леммы.*

Теорема об обратной функции.  $\square$

Тем самым,  $\forall z \in B(z_0, r) : f'(z) = 0$  (так как  $|f(z)|$  — максимум).

Далее применяем теорему единственности, доказанную во II семестре:  $f$  и константа, равная  $|f(z_0)|$  совпадают на множестве с предельной точкой, значит, они совпадают везде в  $G$ .  $\square$

**Следствие 1.2.6.** Пусть  $G$  — ограниченная область,  $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$  голоморфна в  $G$ . Тогда  $\forall z \in G : |f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|$ .

*Доказательство.*  $f$  достигает своё наибольшее значение на компакте  $\overline{G}$ , но согласно принципу максимума, это значение достигается не внутри  $G$ .  $\square$

## 1.2.4 Гармонические функции

Запишем теорему о среднем для  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

Пусть  $f = u + iv$ , где  $u, v$  — вещественные функции в  $G$ . Теорема о среднем говорит, что

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) dt \quad v(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{it}) dt$$

Так как  $f$  аналитична, то в вещественном смысле  $u, v \in C^\infty(G)$ .

Запишем уравнения Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Дифференцируя второй раз, получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

Это так называемое *уравнение Лапласа*:  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

Обобщим. Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  — область, пусть  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2(G)$ .

**Определение 1.2.8** ( $f$  — гармоническая функция в  $G$ ).  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$ .

Оператор  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$  называется *оператором Лапласа*, и понятно, что гармонические функции — в точности такие  $u$ , что  $\Delta u = 0$ .

**Утверждение 1.2.2.** Если гармоническая функция  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \in C^2(G)$ , где область  $G \subset \mathbb{R}^2$ , то локально существует голоморфная  $f : u = \Re f$ . Иными словами,  $\forall z_0 \in G : \exists U \ni z_0, \exists$  аналитическая  $f : U \rightarrow \mathbb{C} : u = \Re f$ .

*Доказательство.* Положим  $\phi := \frac{\partial u}{\partial x}, \psi := -\frac{\partial u}{\partial y}$ . Тогда  $\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ , то есть  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  везде в  $G$ .

Раз накрест взятые частные производные совпадают, то дифференциальная форма  $\phi dy + \psi dx$  замкнута, значит, локально имеется первообразная.

Зафиксируем точку  $z_0 \in G$ , имеется некоторый шарик  $B \ni z_0$ , в котором есть первообразная  $v$ :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \phi = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Это уравнения Коши — Римана, значит,  $f := u + iv$  голоморфна в  $B$ . □

**Теорема 1.2.14** (Морера). Пусть  $f : (G \subset \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  непрерывна. Следующие условия эквивалентны.

1.  $f$  голоморфна в  $G$ .
2.  $f$  аналитична в  $G$ .
3. Дифференциальная форма  $f(z) dz$  замкнута.

*Доказательство.* (1)  $\iff$  (2) уже доказано: (теорема 1.0.1) и (следствие 1.2.3).

(1)  $\Rightarrow$  (3) доказано тоже: (теорема 1.2.5).

Докажем (3)  $\Rightarrow$  (2). Пусть  $F$  — первообразная формы  $f(z) dz$  в круге  $D := B(z_0, r) \subset G$ .  $F$  голоморфна в  $B(z_0, r)$ , и  $\forall z \in D : F'(z) = f(z)$ .

Значит,  $F$  раскладывается в степенной ряд  $F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$ . Отсюда  $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j(z-z_0)^{j-1}$ .  $\square$

## 1.3 Первообразная от замкнутой формы вдоль непрерывного пути

### 1.3.1 Наводящие предположения

Пусть  $f dx + g dy$  — непрерывная дифференциальная форма в  $G$ , предположим, что она точная: имеется первообразная  $F$ .

Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — кусочно-гладкий путь. Ранее было получено, что  $\int_{\gamma} f dx + g dy = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ .

Давайте обобщим интеграл вдоль пути: пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — произвольный непрерывный путь. Положим по определению  $\int_{\gamma} f dx + g dy \stackrel{\text{def}}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ .

Теперь пусть  $f dx + g dy$  всего лишь замкнута. Выберем  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  так, что  $\forall j : \gamma([t_j, t_{j+1}])$  лежит в области  $G_j$ , в которой у формы  $f dx + g dy$  есть первообразная  $F_j$ . Попробуем определить

$$\int_{\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}} f dx + g dy \stackrel{\text{def}}{=} F_j(\gamma(t_{j+1})) - F_j(\gamma(t_j))$$

и

$$\int_{\gamma} f dx + g dy \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{k-1} F_j(\gamma(t_{j+1})) - F_j(\gamma(t_j))$$

Проблема в том, чтобы доказать, что определение корректно — не зависит от выбора разбиения  $a = t_0 < \dots < t_k = b$ .

### 1.3.2 Требуемые свойства

Пусть  $\Phi = f dx + g dy$  — замкнутая форма в области  $G \subset \mathbb{C}$ , и  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — путь.

**Определение 1.3.1** (Первообразная формы  $\Phi$  вдоль пути  $\gamma$ ). Такая функция  $v : [a, b] \rightarrow G$ :

- $\forall t \in [a, b] : \exists U \ni \gamma(t), \varepsilon > 0$  и найдётся первообразная  $F$  для  $\Phi$  на  $U$ , такая, что

$$\forall \tau \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) : v(\tau) = F(\gamma(\tau))$$

**Факт 1.3.1.** Функция  $v$ , если существует, непрерывна на  $[a, b]$ .

*Доказательство.* Непрерывность в какой-то конкретной точке следует из непрерывности композиции  $F \circ \gamma$ .  $\square$

**Теорема 1.3.1.** Первообразная замкнутой дифференциальной формы вдоль пути  $\gamma$  всегда существует, и любые две отличаются на константу.

*Доказательство.* Сначала докажем существование. Для всех  $t \in [a, b]$  выберем окрестность  $U_t := B(\gamma(t), r_t)$ , где  $r_t$  настолько мал, что в  $U_t$  есть первообразная.

Семейство  $\{U_t\}_{t \in [a,b]}$  образуют открытое покрытие  $\gamma([a,b])$ . По лемме Лебега  $\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in [a,b] : B(\gamma(t), \varepsilon)$  содержится в каком-то  $U_{t'}$ . Применяя теорему Кантора о равномерной непрерывности, получаем существование разбиения  $a = t_0 < \dots < t_k = b$ , такое, что  $\gamma([t_j, t_{j+1}])$  лежит в одном из  $U_t$ .

Произвольно выберем  $v(a)$ . Построим  $v|_{[t_j, t_{j+1}]}$  индукцией по  $j$ .

База: Пусть  $\gamma([t_0, t_1]) \subset U_0$ , и имеется первообразная  $F_0$  на  $U_0$ . Определим  $v(\tau) = F_0(\gamma(\tau))$  при  $\tau \in [t_0, t_1]$ .

Переход: Пусть  $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subset U_j, F_j$  — первообразная  $\Phi$  на  $U_j$ . Найдётся такое  $\delta > 0 : \gamma([t_j - \delta, t_{j+1}]) \subset U_j$ , значит,  $U_j \cap U_{j-1} \neq \emptyset$ . Это пересечение связно, на нём имеются две первообразные,  $F_{j-1}$  и  $F_j$ .

Добавим константу к  $F_j$  так, чтобы  $F_j \equiv F_{j-1}$  при  $t \in [t_j - \delta, t_j]$ , и определим  $v(\tau) = F_j(\gamma(\tau))$  при  $\tau \in [t_j, t_{j+1}]$ . Окрестность  $U_j$  захватывает отрезок  $[t_j - \delta, t_{j+1}]$ , значит, для точек во внутренности выполнено условие из определения первообразной.

Докажем единственность: рассмотрим точку  $t \in [a, b]$ . Найдутся два круга  $U, V \ni \gamma(t)$ , и первообразные  $F, H$  формы  $\Phi$  в этих окрестностях, такие, что  $u(\tau) = F(\gamma(\tau))$  и  $v(\tau) = H(\gamma(\tau))$  при  $\tau$ , достаточно близких к  $t$ .

Тем самым,  $u - v$  локально постоянна, но локально постоянная функция на связном множестве — константа (образ любого элемента из образа открыто-замкнуто).  $\square$

## Лекция V

15 марта 2024 г.

Теперь определим интеграл  $\int_{\gamma} \Phi = v(b) - v(a)$ , где  $v$  — первообразная для  $\Phi$  вдоль пути  $\gamma$ , получившаяся из (теорема 1.3.1). Теперь интеграл определён для любой замкнутой формы вдоль пути (однако для кусочно-гладкого пути интеграл (определение 1.1.3) был определён для необязательно замкнутой формы).

*Свойства* (Свойства первообразной вдоль пути).

- Аддитивность по дифференциальной форме:  $\int_{\gamma} (\Phi + \Psi) = \int_{\gamma} \Phi + \int_{\gamma} \Psi$ .
- Аддитивность вдоль пути:  $\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} \Phi = \int_{\gamma_1} \Phi + \int_{\gamma_2} \Phi$ .
- Если  $\gamma$  — кусочно-гладкий путь, то определение совпадает со старым.

*Доказательство.*  $\gamma'$  существует везде, кроме, может быть, конечного множества.

При помощи леммы Лебега разобьём отрезок точками  $a = t_0 < \dots < t_k = b$  так, что  $\forall j < k : \exists U_j \supset \gamma([t_j, t_{j+1}])$  такая, что на  $U_j$  найдётся первообразная  $H_j$ :

$$\forall \tau \in [t_j, t_{j+1}] : F(\tau) = H_j(\gamma(\tau))$$

И старый, и новый интегралы аддитивны вдоль пути. Несложно видеть, что в обеих определениях  $\int_{\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}} \Phi$  совпадают.  $\square$

- Так как путь  $\gamma$  необязательно дифференцируем (а если даже и так, то необязательно спрямляем), то основную оценку интеграла вдоль пути распространить на новое определение проблематично: длины может не существовать.
- Пусть  $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$  — гомеоморфизм,  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — путь, тогда

$$\int_{\gamma} \Phi = \pm \int_{\gamma \circ \phi} \Phi$$

где знак зависит от того, возрастает  $\phi$ , или убывает.

*Причина.* Если  $F$  — первообразная  $\Phi$  вдоль пути  $\gamma$ , то  $F \circ \phi$  — первообразная для  $\Phi$  вдоль пути  $\gamma \circ \phi$ .  $\square$

### 1.3.3 О гомотопности путей

Пусть  $K = [0, 1] \times [a, b]$  — квадрат гомотопии.

**Определение 1.3.2** (Гомотопия). Непрерывное отображение  $\Gamma : K \rightarrow \mathbb{C}$ .

Положим  $\gamma_s := \Gamma(s, \_)$ . Как водится,  $\gamma_0, \gamma_1$  — два пути  $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , и существование  $\Gamma$  по определению влечёт гомотопность этих путей.

Пути  $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow G$  *гомотопны в  $G$* , если найдётся гомотопия  $\Gamma : K \rightarrow G$ .

Будем говорить о гомотопности двух замкнутых путей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  при условии существования гомотопии  $\Gamma : K \rightarrow G$ , соединяющей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в классе замкнутых путей:  $\forall s \in [0, 1] : \Gamma(s, a) = \Gamma(s, b)$ .

Гомотопность путей — отношение эквивалентности, так же как и гомотопность замкнутых путей.

**Определение 1.3.3** (Односвязная область). Область, в которой всякий замкнутый путь гомотопен постоянному. Иными словами, фундаментальная группа тривиальна.

**Определение 1.3.4** (Звёздная область  $A \subset \mathbb{R}^n$ ). Такая область, что для некоторого центра  $z_0 \in A$ :  $\forall z \in A : \{z_0 + s(z - z_0) | s \in [0, 1]\} \subset A$ .



**Факт 1.3.2.** Всякая звёздная область  $A$  односвязна.

*Доказательство.* Прогомотопируем путь  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  в постоянный при помощи

$$\begin{aligned} \Gamma : [0, 1] \times [a, b] &\rightarrow K \\ \tau, t &\mapsto z_0\tau + (1 - \tau)\gamma(t) \end{aligned}$$

$\square$

*Пример* (Неодносвязная область). Пусть  $A$  — звёздная область, выкинем точку  $w_0 \in A$ .



Интеграл  $\frac{dz}{z - w_0}$  по маленькой окружности  $\omega$ , обходящей  $w_0$ , равен  $2\pi i$ , значит, путь не стягиваем (поскольку интеграл не ноль, см. теорема 1.3.3).

**Теорема 1.3.2** (Первообразная вдоль гомотопии). Пусть  $K = [0, 1] \times [a, b]$  — «квадрат»,  $\Gamma : K \rightarrow G$  — гомотопия, и  $\Phi = f dx + g dy$  — замкнутая дифференциальная форма в  $G$ . Тогда  $\exists F : K \rightarrow \mathbb{C}$  — первообразная формы  $\Phi$  вдоль гомотопии  $\Gamma$ , то есть такая функция, что  $\forall (s, t) \in K : \exists U \ni \Gamma(s, t) : U \subset G, \exists \delta > 0 : \exists H : U \rightarrow \mathbb{C}$  — первообразная формы  $\Phi$ , такая, что

$$\begin{cases} |\sigma - s| < \delta \\ |\tau - t| < \delta \end{cases} \Rightarrow F(\sigma, \tau) = H(\Gamma(\sigma, \tau))$$

*Доказательство.* Покроем множество  $\Gamma(K)$  кругами  $U \subset G$ , такими что в каждом круге  $U$  у  $\Phi$  есть первообразная  $H_U$ .

По лемме Лебега и теореме Кантора  $\exists \rho > 0 : \forall e \subset K : \text{diam}(e) < \rho \Rightarrow e$  лежит в одном из кругов данного покрытия.

Разобьём квадрат гомотопии  $K$  на прямоугольники диаметра меньше  $\rho$ :



Аналогично доказательству (теорема 1.2.2), в каждом горизонтальном прямоугольнике найдётся первообразная  $F_j$ , а дальше их надо сшить. Сшить несложно: вдоль горизонтального отрезка — пересечения прямоугольников —  $F_j|_{\dots} = F_{j+1}|_{\dots}$ . Так как это — первообразные вдоль одного и того же пути, то они отличаются на константу. Значит, можно изменить все  $F_j$  на константы так, чтобы их склейка была непрерывной функцией.

Дальше надо проверить, что действительно получилась первообразная на квадрате. Выберем точку  $(s, t) \in K$ . Если точка попала внутрь какого-то прямоугольника, то можно выбрать окрестность, лежащую внутри прямоугольника, иначе чуть сложнее, но несильно.  $\square$

**Теорема 1.3.3.** Интегралы от замкнутой формы  $\Phi$  по гомотопным замкнутым путям равны.

*Доказательство.* Определим  $w(t) := \int_{\gamma_t} \Phi$  для всех  $t \in [0, 1]$ .

Пусть  $F$  — первообразная для формы  $\Phi$  вдоль гомотопии  $\Gamma$ . Понятно, что  $w(t) = F(t, b) - F(t, a)$ .

Докажем, что  $w$  локально постоянна на  $[0, 1]$ , следствием будет, что  $w$  постоянна, что и требуется доказать.

$\forall (\alpha, \beta) \in [0, 1] \times [a, b] : \exists \delta > 0$ , круг  $U$  и первообразная  $H_U$ , такие, что

$$\begin{cases} |\alpha - \alpha'| < \delta \\ |\beta - \beta'| < \delta \end{cases} \Rightarrow F(\alpha', \beta') = H_U(\Gamma(\alpha', \beta'))$$

Пусть  $U_1, U_2$  — такие шары для  $(t, b)$  и  $(t, a)$  соответственно. Тогда для  $\tau$ , достаточно близких к  $t$ , выполнено  $w(t) = H_{U_1}(\Gamma(t, b)) - H_{U_2}(\Gamma(t, a))$ .  $H_1, H_2$  — две первообразные в одной окрестности, они отличаются на константу, а  $\Gamma(t, a) \equiv \Gamma(t, b)$ , поэтому  $w$  локально постоянна.  $\square$

*Замечание.* Если очень хочется, то можно соединить пути  $\gamma_0 : [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{C}$  и  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$  гомотопией  $\Gamma : K \rightarrow \mathbb{C}$ , где  $K := \{(t, s) | t \in [0, 1], s \in [a_t, b_t]\}$  ( $a_t, b_t$  — какие-то непрерывные функции от  $t$ , такие, что  $a_t < b_t$ ).



## 1.4 Ряды Лорана

Ряд Лорана  $f(z)$  — ряд вида  $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$ .

Говорят, что ряд Лорана сходится в точке  $z$ , если оба ряда  $f_+(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$  и  $f_-(z) = \sum_{n < 0} c_n (z - z_0)^n$  сходятся.

Первый ряд степенной, имеется некий радиус сходимости  $r_+$ , такой, что  $|z - z_0| < r_+ \Rightarrow f_+$  сходится. При замене переменной  $w := \frac{1}{z - z_0}$ ,  $f_-(z_0 + 1/w)$  становится степенным рядом от  $w$ , сходящимся при  $w < \frac{1}{r_-}$ .

Таким образом, ряд сходится абсолютно внутри «кольца»  $\{z \in \mathbb{C} | r_- < |z - z_0| < r_+\}$ :



**Теорема 1.4.1.** Пусть  $0 \leq r_- < r_+ \leq \infty$ , функция  $f$  голоморфна в «кольце»  $K := \{z \in \mathbb{C} | r_- < |z| < r_+\}$ .

Тогда  $f$  представима в  $K$  сходящимся рядом Лорана.

*Доказательство.* Пусть  $z \in K$ . Определим  $\phi_z : K \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\phi_z(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \neq z \\ f'(z), & \zeta = z \end{cases}$ .

Согласно (теорема 1.2.9), форма  $\phi_z(\zeta) d\zeta$  замкнута в  $K$ .

Выберем  $r, R \in \mathbb{R}$  так, что  $r_- < r < |z| < R < r_+$ . Для  $\rho \in \mathbb{R}$  определим  $\gamma_\rho : [0, 2\pi] \rightarrow K$ ,  $\gamma_\rho(t) := \rho e^{it}$ . Пути  $\gamma_R$  и  $\gamma_r$  гомотопны, значит,  $\int_{\gamma_R} \phi_z(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_r} \phi_z(\zeta) d\zeta$ . А именно,

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

Преобразовывая, получаем

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \underbrace{\int_{\gamma_R} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta}_{2\pi i} - f(z) \underbrace{\int_{\gamma_r} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta}_0$$

Тем самым, получили *малую интегральную форму Коши для кольца*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right)$$

Осталось преобразовать дроби в ряды:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = \int_{\gamma_R} \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \cdot (z - z_0)^j \\ \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = -\frac{1}{z - z_0} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} d\zeta = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_r} f(\zeta) (\zeta - z_0)^k d\zeta \cdot \frac{1}{(z - z_0)^k} \end{aligned}$$

Сходимость степенная, имеется признак Вейерштрасса, можно поменять местами сумму и интеграл, поэтому все преобразования законны.

При замене  $j = -k - 1$ , второе выражение преобразуется в форму

$$- \sum_{j=-1}^{-\infty} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \cdot (z - z_0)^j$$

Теперь можно заметить, что интегралы вдоль  $\gamma_r$  и  $\gamma_R$  равны, так как особенностей у интегралов — слагаемых в ряде — в кольце нет. Окончательно получаем

$$f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j (z - z_0)^j, \text{ где } c_j = \int_{|z - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \text{ для любого } \rho \in (r_-, r_+)$$

□

## Лекция VI

22 марта 2024 г.

Ряд Лорана  $g(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j (z - z_0)^j$  принято раскладывать на две части — *регулярную*  $\sum_{j \geq 0} c_j (z - z_0)^j$  и *главную*  $\sum_{j < 0} c_j (z - z_0)^j$ .

Если ряд Лорана изучать в маленькой окрестности  $z_0$ , то главная часть асимптотически больше.

### 1.5 Изолированные особенности голоморфных функций

Пусть область  $G \subset \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in G$ ,  $f$  задана и аналитична в  $G \setminus \{z_0\}$ . Тогда говорят, что  $f$  имеет *изолированную особенность* в  $z_0$ .

Возможны случаи:

1.  $f$  ограничена вблизи  $z_0$ .

Точка  $z_0$  называется *устранимой особенностью*, так как в силу (теорема 1.5.1)  $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .

2.  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ .

Точка  $z_0$  называется *полюсом*.

3.  $f$  не имеет предела в  $z_0$ .

Точка  $z_0$  называется *существенно особой точкой*.

**Теорема 1.5.1.** В первом случае —  $f$  ограничена вблизи  $z_0$  —  $f$  единственным образом продолжается до аналитической функции в области  $G$ .

*Доказательство.* Выберем  $R > 0$  такой, что  $\overline{B(z_0, R)} \subset G$ .  $f$  разложится в некоторый ряд Лорана при  $0 < |z - z_0| < R$ .

Запишем  $c_j = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) (\rho e^{it})^{-j-1} \cdot \rho i e^{it} dt$  и грубо оценим коэффициенты главной части ( $j < 0$ ). Пусть  $|f| \leq C$  внутри круга  $B(z_0, R)$  для некоторой константы  $C$ .

$$|c_j| \leq \frac{C}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^{-j} dt = C \rho^{-j}$$

Устремляя  $\rho \rightarrow 0$ , получаем  $c_j = 0$ . Тем самым,  $f$  раскладывается в ряд Тейлора в окрестности  $z_0$ . □

Запишем несколько другую классификацию особенностей точки, опирающуюся на ряд Лорана  $f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j (z - z_0)^j$ .

I При всяком  $j < 0$ :  $c_j = 0$ .

II Множество  $\mathcal{A} := \{j < 0 | c_j \neq 0\}$  конечно.

III Множество  $\mathcal{A} := \{j < 0 | c_j \neq 0\}$  бесконечно.

Понятно, что I эквивалентно 1.

**Теорема 1.5.2.** На самом деле, II  $\iff$  2, III  $\iff$  3.

*Доказательство.*

II  $\Rightarrow$  2 Пусть  $k = -\min \mathcal{A}$ .

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} \cdots + c_0 + \sum_{j>0} c_j (z - z_0)^j = \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^k} (c_{-k} + c_{-k+1}(z - z_0) + \cdots) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \end{aligned}$$

При этом  $g(z_0) \neq 0$  и  $g(z)$  аналитична. Тем самым,  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ .

2  $\Rightarrow$  II Положим  $h(z) := \frac{1}{f(z)}$  в некоторой окрестности  $z_0$ .

$h$  аналитична при  $z \neq z_0$ , и  $\lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = 0$ , значит,  $h$  имеет устранимую особенность в  $z_0$ .

Пусть  $k$  — наименьший номер, такой, что  $b_k \neq 0$ , где  $b_k$  — коэффициент из разложения  $h$  в ряд Тейлора:

$$h(z) = b_k (z - z_0)^k + b_{k+1} (z - z_0)^{k+1} + \cdots = (z - z_0)^k (b_k + b_{k+1}(z - z_0) + \cdots) = (z - z_0)^k \cdot u(z)$$

$u$  аналитична вблизи  $z_0$ , и  $u(z_0) = b_k \neq 0$ .

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \frac{1}{u(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^k} (c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots)$$

Почленно деля, действительно получаем, что  $f(z)$  имеет конечное число ненулевых членов в разложении в ряд Лорана.  $\square$

Пусть  $z_0$  — полюс  $f$ ,  $k := -\min \{j < 0 | c_j \neq 0\}$ . Число  $k$  называется *порядком* полюса  $z_0$ .

Если же  $g$  аналитична в  $z_0$ ,  $g(z_0) = 0$ ,  $g \not\equiv 0$ , то  $g(z) = \sum_{j \geq 0} a_j (z - z_0)^j$ , положим  $l := \min \{j | a_j \neq 0\}$ .

Число  $l$  — *порядок* нуля  $z_0$ .

**Факт 1.5.1.**  $f$  имеет полюс порядка  $k$  в  $z_0 \iff \frac{1}{f}$  имеет ноль порядка  $k$  в  $z_0$ .

*Интересный факт* (Теорема Пикара). Пусть  $z_0$  — существенно особая точка аналитической функции  $f$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 : f(\{z | 0 < |z - z_0| < \varepsilon\})$  есть  $\mathbb{C}$ , кроме, может быть, двух точек.

Мы докажем более простой вариант теоремы Пикара.

**Теорема 1.5.3** (Сохоцкий). Пусть  $z_0$  — существенно особая точка аналитической функции  $f$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 : \mathcal{B} := f(\{z | 0 < |z - z_0| < \varepsilon\})$  плотно в  $\mathbb{C}$ .

*Доказательство.* От противного: пусть  $\exists w_0 \notin \overline{\mathcal{B}}$ , то есть  $\exists \delta > 0 : B(w_0, \delta) \cap \mathcal{B} = \emptyset$ .

Определим

$$\begin{aligned} h &: B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{f(z) - w_0} \end{aligned}$$

Хотя  $h$  и имеет особенность при  $z = z_0$ , но  $h$  ограничена (модуль знаменателя больше  $\delta$ ), то есть особенность устранима.  $f(z) = \frac{1}{h(z)} + w_0$ , и так как  $h$  аналитична в  $z_0$ , то особенность в  $z_0$  — то ли тоже устранимая особенность, то ли полюс, но уж никак  $z_0$  — не существенно особая точка.  $\square$

### 1.5.1 Интеграл $\frac{\sin x}{x}$

*Пример.* Возьмём  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ . У подынтегральной функции в нуле особенность устранимая, а с бесконечностью есть некоторые проблемы. Впрочем, избавимся и от нуля в области интегрирования:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x} dx \quad (\equiv)$$

Запишем формулу Эйлера  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . Интегрируя по всей оси  $\frac{\cos x}{x}$ , мы получим нуль из-за нечётности, поэтому можно продолжить равенство так:

$$(\equiv) \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon < |x| < R} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

Теперь перейдём к функции, аналитической в комплексной плоскости без нуля:  $\phi(z) := \frac{e^{iz}}{z}$ .

Введём замкнутый путь  $\Gamma$ , полученный склейкой двух отрезков и двух полуокружностей:



$$\int_{\gamma_\varepsilon} \phi(z) dz = - \int_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{i(\pi-t)}}}{\varepsilon e^{i(\pi-t)}} \varepsilon i e^{i(\pi-t)} dt = - \int_0^\pi i e^{i\varepsilon e^{i(\pi-t)}} dt \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{подынтегральное выражение равномерно сходится к } i} -i\pi$$

$$\int_{\gamma_R} \phi(z) dz = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} R i e^{it} dt = i \int_0^\pi e^{iRe^{it}} dt$$

Оценим  $e^{iRe^{it}} = e^{iR \cos t - R \sin t} = e^{iR \cos t} \cdot e^{-R \sin t}$ . По теореме Лебега о мажорируемой сходимости интеграл по  $\gamma_R$  будет стремиться к нулю при больших  $R$ .

Так как путь  $\Gamma$  стягиваем, то из равенства  $\int_\Gamma \phi(z) dz = 0$  сразу следует

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \phi(x) dx + \int_\varepsilon^R \phi(x) dx \xrightarrow[\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}]{i\pi}$$

Искомый интеграл в  $2i$  раз меньше:

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}}$$

Этот интеграл получилось так взять, так как у  $\phi$  была особенность в нуле, и мы её обошли. А иногда особенности находятся внутри пути интегрирования, в таком случае приговаривается *формула в вычетах*.

## 1.6 Вычеты

Пусть  $f$  задана и голоморфна в  $G \setminus \{z_0\}$ , где  $G$  — область,  $z_0 \in G$  — изолированная особенность. Вблизи  $z_0$  функция  $f$  раскладывается в ряд Лорана  $f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j (z - z_0)^j$ .

**Определение 1.6.1** (Вычет функции  $f$  в точке  $z_0$ ). Коэффициент  $c_{-1}$ , обозначается  $\text{Res}_{z_0} f$ .

Этот коэффициент так важен, так как у  $c_j (z - z_0)^j$  при  $j \neq -1$  имеется первообразная в  $G$ , и при интегрировании по окружности, обходящей  $z_0$ , пропадут все коэффициенты ряда Лорана, кроме вычета.

### 1.6.1 Как вычислять вычеты

У нас есть формула для вычисления коэффициентов ряда Лорана, но она получается интегрированием, а мы как раз и хотим использовать вычеты, чтобы уметь удобно интегрировать. Поэтому иногда пригождаются следующие частные случаи:

- Пусть  $z_0$  — полюс функции  $f$  степени  $k$ :

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + f_+(z)$$

где  $f_+$  — аналитическая вблизи  $z_0$ .

Домножая  $f$  на  $(z - z_0)^k$ , получаем аналитическую

$$(z - z_0)^k f = c_{-k} + c_{-k+1}(z - z_0) + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{k-1} + (z - z_0)^k \cdot f_+(z)$$

Теперь можно найти  $\text{Res}_{z_0} f$  по формуле:  $\text{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} [(z - z_0)^k f(z)] \Big|_{z=z_0}$ .

- Пусть  $k = 1$  — у  $f$  имеется полюс первого порядка. Тогда дифференцировать не надо, и формула вырождается в

$$\text{Res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

- Возьмём ещё более частный случай:  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ , где  $g, h$  аналитичны в окрестности  $z_0$ ,  $g(z_0) \neq 0$ , а  $h$  имеет простой нуль в  $z_0$  (нуль кратности 1).

$$\text{Res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)(z - z_0)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

### 1.6.2 Индекс замкнутого пути относительно точки

Пусть  $G \subset \mathbb{C}$  — область,  $\Phi$  — замкнутая дифференциальная форма в  $G$ . Пусть  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  — какие-то замкнутые пути с носителем в  $G$ . Обозначим  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ .

Определим интеграл от формы  $\Phi$  по данной совокупности путей  $\int_{\Gamma} \Phi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \Phi$ .

Назовём систему путей  $\Gamma$  *правильной*, если для всякой аналитической функции  $f$  в  $G$ :  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ .

*Примеры* (Правильные системы путей).

- $|\Gamma| = 1$ . Если  $\gamma_1$  гомотопен тождественному, то  $\Gamma$ , конечно, правильная.
- В частности, любой замкнутый путь в односвязной области формирует правильную систему из одного пути.
- Пусть в кольце имеются два пути  $\gamma_1, \gamma_2$ , обходящие концентрические окружности в противоположных направлениях. Тогда  $\{\gamma_1, \gamma_2\}$  — правильная система, так как  $\gamma_1 \sim \gamma_2^-$ .

- Рассмотрим область с двумя дырками, ограниченную синими линиями. В ней система из красных путей правильная, так как можно разложить их в сумму двух зелёных стягиваемых путей:



Пусть  $\gamma$  — петля в  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \notin \text{Im}(\gamma)$ .

**Определение 1.6.2** (Индекс пути  $\gamma$  относительно  $z_0$ ). Значение интеграла  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0}$ . Обозначается  $\text{Ind}_{z_0} \gamma$ .

Индекс означает число раз, которые мы обошли вокруг данной точки с учётом ориентации, но пока непонятно даже, почему индекс — целое число.

Это определение очевидным образом распространяется на систему путей:  $\forall \gamma_j \in \Gamma : z_0 \notin \text{Im}(\gamma_j) \Rightarrow$  определён  $\text{Ind}_{z_0} \Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z-z_0}$

*Свойства* (Свойства индекса, докажем потом (подраздел 1.6.6)).

- $\text{Ind}_{z_0} \gamma \in \mathbb{Z}$ .
- Функция  $[z_0 \mapsto \text{Ind}_{z_0} \gamma]$  постоянна на каждой компоненте связности  $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$ .
- На неограниченной компоненте связности  $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$  индекс равен нулю.

**Теорема 1.6.1** (Формула вычетов). Пусть  $G \subset \mathbb{C}$  — область,  $\Gamma$  — правильная система путей в  $G$ ,  $f : G \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \rightarrow \mathbb{C}$  — аналитическая функция, и  $z_1, \dots, z_k$  — особенности. Если все точки  $z_j$  не лежат на носителе системы путей  $\Gamma$ , то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \left( \sum_{j=1}^k \text{Res}_{z_j} f \cdot \text{Ind}_{z_j} \Gamma \right)$$

*Доказательство.* Положим  $H := G \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ . Для каждой точки  $z_j$  имеется  $r_+$ , такой, что  $B(z_j, r_+) \setminus \{z_j\} \subset H$ . Тем самым, в окрестности точки  $z_j$  функция  $f$  разложима в ряд Лорана, и его главная часть сходится везде кроме  $z_j$ .

Пусть  $g_1, \dots, g_k$  — главные части рядов Лорана для  $f$  в точках  $z_1, \dots, z_k$  соответственно. Функция  $h(z) := f(z) - g_1(z) - \dots - g_k(z)$  — аналитическая функция в области  $G$ , так как она имеет конечное число особых точек, в которых ограничена.

Так как  $\Gamma$  — правильная, то  $\int_{\Gamma} h(z) dz = 0$ . Тем самым, мы получили

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k \int_{\Gamma} g_j(z) dz$$

Посчитаем  $\int_{\Gamma} g_j(z) dz$ . Распишем

$$g_j(z) = \frac{\operatorname{Res}_{z_j} g}{z - z_j} + \underbrace{\frac{a_1}{(z - z_j)^2} + \dots + \frac{a_{s-1}}{(z - z_j)^s} + \dots}_{h_j(z)}$$

У  $h_j$  имеется первообразная, так как ряд Лорана можно интегрировать и дифференцировать почленно — доказательство аналогично одному для степенных рядов.

Значит,  $\int_{\Gamma} g(z) dz = (\operatorname{Res}_{z_j} f) 2\pi i \cdot \operatorname{Ind}_{z_0} \Gamma$  (очевидно,  $\operatorname{Res}_{z_j} g_j = \operatorname{Res}_{z_j} f$ ).  $\square$

## Лекция VII

29 марта 2024 г.

### 1.6.3 Обобщение интеграла $\frac{\sin x}{x}$

Обозначим  $\mathbb{C}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{x + iy | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_{>0}\}$ .

Пусть  $f$  аналитична в  $\{x + iy | y > -\varepsilon\}$ , кроме конечного числа особых точек в  $\mathbb{C}_+$ , назовём их  $z_1, \dots, z_n$ . В  $\{x + iy | -\varepsilon < y \leq 0\}$ , получается, у  $f$  особенностей нет.

**Предложение 1.6.1.** Пусть при  $\theta \in [0, \pi], R > 0$ :  $|f(Re^{i\theta})R|$  ограничена в  $\mathbb{C}_+$ , причём  $\forall \theta \in [0, \pi] : \lim_{R \rightarrow \infty} f(Re^{i\theta})R = 0$ .

Например,  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ , где  $g, h$  — многочлены,  $\deg g < \deg h$ .

Тогда  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}_{z_j} f$ . Здесь  $\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R$ , то есть особенности несобственного интеграла на плюс-минус бесконечностях могут сокращать друг друга.

*Доказательство.* Проинтегрируем  $f$  по синему пути, где полуокружность — радиуса  $R$ :



Пусть  $R$  — настолько большое, что все особые точки в  $\mathbb{C}_+$  содержатся во внутренней области, отсекаемой данным путём. Оценим интеграл по верхней полуокружности:

$$\int_0^{\pi} f(Re^{it}) i Re^{it} dt \xrightarrow[\text{теорема Лебега о мажорируемой сходимости}]{R \rightarrow \infty} 0$$

Далее применяем формулу в вычетах.

Из гомотопности зелёной окружности и синего пути в  $\mathbb{C}_+ \setminus \{z_j\}$  получаем, что их индексы равны 1 — ведь интеграл  $\frac{dz}{z - z_0}$  по окружности мы знаем.  $\square$

### 1.6.4 2-я формула замены переменной

Пусть  $\Phi = f dx + g dy$  — замкнутая дифференциальная форма в  $G$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — путь, рассмотрим интеграл  $\int_{\gamma} \Phi$ . Изменение параметризации для  $\gamma$  — 1-я формула замены переменной.

Теперь пусть  $g : G_1 \rightarrow G_2$  — голоморфная функция,  $f$  — голоморфная функция в  $G_2$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow G_1$  — непрерывный путь. Тогда

$$\int_{g \circ \gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (f \circ g)(z) g'(z) dz$$

Наводящее соображение: пусть путь  $\gamma$  — кусочно-гладкий,  $\rho(t) := g(\gamma(t))$ . Тогда

$$\int_{\rho} f(z) dz = \int_a^b f(\rho(t)) \rho'(t) dt = \int_a^b f(g(\gamma(t))) g'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} (f \circ g)(z) \cdot g'(z) dz$$

Но нам эта формула пригодится в случае негладкого пути.

Пусть  $\rho = g \circ \gamma$  — путь в области  $G_2$ ,  $\phi$  — первообразная для формы  $f(z) dz$  вдоль  $\rho$ .

Рассмотрим  $t_0 \in [a, b]$ .  $\exists U \ni \rho(t_0)$  — окрестность, такая, что на ней есть первообразная  $\Phi$  для  $f(z) dz$ . Значит,  $\exists \delta > 0 : \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \Phi(\rho(t))$ .

Положим  $z_0 := \gamma(t_0)$ .  $\exists V \ni z_0 : g(V) \subset U$  из непрерывности  $g$ .  $\forall w \in U : \Phi'(w) = f(w)$ . Запишем

$$\forall z \in V : (\Phi \circ g)'(z) = \Phi'(g(z)) \cdot g'(z)$$

Тем самым,  $\Phi \circ g$  есть первообразная для  $(\Phi' \circ g) \cdot g'$  в  $V$ . Значит,  $\phi \circ g$  — первообразная для формы  $f(g(z)) \cdot g'(z) dz$  вдоль пути  $\gamma$ .

Пусть  $\gamma$  — замкнутый путь, не проходящий через  $z_0$ . По определению

$$\text{Ind}_{z_0} \gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

Применим функцию  $[z \mapsto z - z_0]$ . Согласно 2-й формуле замены переменной,

$$\text{Ind}_{z_0} \gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - z_0} \frac{dz}{z} = \text{Ind}_0(\gamma - z_0)$$

**Следствие 1.6.1.** Индекс пути  $\gamma$  относительно  $z_0$  — локально постоянная функция от  $z_0$ .

*Доказательство.* Пусть  $z_0$  — точка вне носителя  $\gamma$ . Выберем настолько маленькое  $\delta > 0$ , что  $B(z_0, \delta) \cap \gamma([a, b]) = \emptyset$ .

Рассмотрим  $z_1 \in B(z_0, \delta)$ , и докажем, что  $\text{Ind}_{z_0} \gamma = \text{Ind}_{z_1} \gamma$ . Определим гомотопию путей  $\gamma - z_0$  и  $\gamma - z_1$ :

$$\Gamma(t, \tau) := (1 - \tau)(\gamma(t) - z_0) + \tau(\gamma(t) - z_1) = \gamma(t) - ((1 - \tau)z_0 + \tau z_1)$$

Эта гомотопия не проходит через 0, значит, интегралы по  $\gamma - z_0$  и  $\gamma - z_1$  равны. □

**Следствие 1.6.2.** Индекс постоянен на каждой компоненте связности  $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ .

**Следствие 1.6.3.**  $\text{Ind}_{z_0} \gamma = 0$  на неограниченной компоненте связности  $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ .

*Доказательство.* Оценим  $\int_{\gamma - z_0} \frac{dw}{w}$  при достаточно большом  $|z_0|$ . Для такого  $z_0$  носитель пути  $\gamma - z_0$  лежит в некоторой полуплоскости, не содержащей нуля. Полуплоскость односвязна, это даже звёздная область, в ней путь стягиваем, значит, интеграл равен нулю. □



## 1.6.5 О логарифме

Логарифм — это функция, обратная к экспоненте, а экспонента имеет период  $2\pi i$ .

Пусть  $w \in \mathbb{C}$ .

1. Логарифм  $w$  — любое  $z \in \mathbb{C} : e^z = w$ .
2. У  $w = 0$  логарифма нет; если  $z$  — одно из значений логарифма  $w$ , то все остальные значения имеют вид  $\{z + 2\pi i k | k \in \mathbb{Z}\}$ .
3. Для  $w \neq 0 : w = |w|e^{i\theta}$ , где  $\theta \in \mathbb{R}$ . Комплексное число  $\log|w| + i\theta$  — одно из значений логарифма, и все значения получаются при различных  $\theta$ , подходящих по условию выше.

Пусть  $G$  — область.

**Определение 1.6.3** (Функция  $\phi$  в  $G$  — ветвь логарифма в  $G$ ).  $\phi$  непрерывна в  $G$ , и  $e^{\phi(z)} = z$  для  $z \in G$ .

**Факт 1.6.1.** Всякая ветвь логарифма обязательно голоморфна в  $G$ , и  $\phi'(z) = \frac{1}{z}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $z_0 \in G, U := \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < \delta\} \subset G$ . Так как производная экспоненты (как вещественной функции  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) невырождена, то при достаточно малом  $\delta$  у экспоненты имеется обратная  $\psi : e^{\psi(z)} = z$  при  $z \in U$ .

С другой стороны,  $e^{\phi(z)} = z$  при  $z \in U$ . Значит,  $\phi - \psi$  — непрерывная функция, принимающая значения в дискретном множестве  $\{2\pi i k | k \in \mathbb{Z}\}$ . Значит, это константа.

Тем самым,  $\phi$  дифференцируема, и  $\phi'(z) = \frac{1}{z}$ . □

**Теорема 1.6.2.** Во всякой односвязной области  $G$ :  $0 \notin G \Rightarrow \exists$  непрерывная ветвь логарифма.

*Доказательство.* Напрямую следует из (теорема 1.6.3) для тождественного отображения. □

Пусть  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$  — аналитическая.

**Определение 1.6.4** (Аналитическая  $\Phi : G \rightarrow \mathbb{C}$  — ветвь логарифма функции  $F$ ).  $\forall z \in G : e^{\Phi(z)} = F(z)$ .

*Замечание.* В определении можно требовать лишь непрерывности  $\Phi$ , аналитичность получится автоматически.

**Теорема 1.6.3.** Если  $G$  — односвязная область,  $\forall z \in G : F(z) \neq 0$  и  $F$  аналитична в  $G$ , то в  $G$  существует ветвь логарифма для  $F$ .

*Доказательство.* Функция  $\frac{F'(z)}{F(z)}$  — голоморфна в  $G$ . Форма  $\frac{F'(z)}{F(z)} dz$  замкнута в  $G$ , значит, имеется первообразная  $\psi$  — голоморфная в  $G$  функция, такая, что  $\psi'(z) = \frac{F'(z)}{F(z)}$ .

$$\left( \frac{e^{\psi(z)}}{F(z)} \right)' = \frac{e^{\psi(z)} \cdot \psi'(z) F(z) - F'(z) e^{\psi(z)}}{F(z)^2}$$

По построению  $\psi$  числитель равен нулю. Тем самым,  $e^{\psi(z)} = c \cdot F(z)$  ( $c \neq 0$ ).  $\exists a \in \mathbb{C} : c = e^a$ . Положим  $\phi := \psi - a$ , это искомая ветвь логарифма. □

*Замечание.* Не всякая первообразная для  $\frac{F'}{F}$  есть ветвь логарифма — логарифмы отличаются на целые кратные  $2\pi i$ , а первообразные — на произвольную константу. Однако если  $\psi$  — первообразная  $\frac{F'}{F}$ , и  $\exists z_0 \in \mathbb{C} : e^{\psi(z_0)} = F(z_0)$ , то  $\psi$  — ветвь логарифма для  $F$ .

*Замечание.* Если  $\psi$  — ветвь логарифма, то все ветви логарифма имеют вид  $\{\psi + 2\pi i k | k \in \mathbb{Z}\}$ .

Данная функция  $\frac{F'}{F}$  называется *логарифмической производной функции  $F$* .

Пусть  $G$  — область,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфна,  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — путь,  $\forall z \in \gamma([a, b]) : f(z) \neq 0$ .

**Определение 1.6.5** (Ветвь логарифма вдоль пути  $\gamma$ ). Функция  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , такая что  $\forall t_0 \in [a, b] : \exists \delta > 0, \exists U \ni \gamma(t_0)$ , и существует ветвь логарифма  $\psi$  функции  $f$  в  $U$ , такая, что

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \psi(\gamma(t))$$

**Теорема 1.6.4.** При сделанных предположениях существует ветвь логарифма  $f$  вдоль пути  $\gamma$ . При этом любые две ветви отличаются на  $2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $\frac{f'}{f}$ , аналитическую в некоторой окрестности  $\gamma([a, b])$ . Пусть  $\phi$  — первообразная для  $\frac{f'}{f}$  вдоль  $\gamma$ .

$\forall t_0 \in [a, b] : \exists \delta > 0, \exists U \ni \gamma(t_0)$  вместе с первообразной  $\psi$  функции  $\frac{f'}{f}$ :

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \psi(\gamma(t))$$

Существует  $c$ , вообще говоря, зависящая от  $t$ , такая, что  $e^{\psi(z)} = cf(z)$ . При  $|t - t_0| < \delta : e^{\phi(t)} = e^{\psi(\gamma(t))} = cf(\gamma(t))$ . Значит,  $\frac{e^{\phi(s)}}{f(\gamma(s))}$  локально постоянна на  $[a, b]$ , то есть оказалось, что  $c$  всё-таки не зависит от  $t$ .

Найдётся  $a \in \mathbb{C} : c = e^a$ . Теперь  $\tilde{\phi} := \phi - a$  — тоже первообразная для  $\frac{f'}{f}$  вдоль  $\gamma$ , причём  $e^{\psi(\gamma(t)) - a} = f(\gamma(t))$ . Так как  $\psi - a$  — тоже первообразная в  $U$  для  $\frac{f'}{f}$ , то  $\tilde{\psi}$  — ветвь логарифма.  $\square$

В частности, для  $f(z) = z - z_0$ , и пути  $\gamma$ , не проходящего через  $z_0$ , получается ветвь логарифма  $z - z_0$  вдоль  $\gamma$ .

## 1.6.6 Ветвь аргумента и целочисленность индекса

Пусть  $w \in \mathbb{C}$ . Все значения логарифма спрятаны в формуле  $\log w = \log |w| + i \operatorname{Arg} w$ , где  $\operatorname{Arg} w \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \theta \mid e^{i\theta} = \frac{w}{|w|} \right\}$ .

Пусть  $0 \notin G$ .

**Определение 1.6.6** (Непрерывная ветвь аргумента в области  $G$ ). Непрерывная функция  $v : G \rightarrow \mathbb{R} : \forall z \in G : v(z) \in \operatorname{Arg}(z)$

**Факт 1.6.2.** В области  $G$  существует непрерывная ветвь логарифма  $\iff$  в  $G$  существует непрерывная ветвь аргумента.

**Определение 1.6.7** (Ветвь аргумента вдоль пути  $\gamma$ ). Функция  $\phi : [a, b] \rightarrow G$ , такая что  $\forall t_0 \in [a, b] : \exists \delta > 0, \exists U \ni \gamma(t_0)$ , и существует ветвь аргумента  $\psi$  функции  $f$  в  $U$ , такая, что

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) : \phi(t) = \psi(\gamma(t))$$

В качестве ветви аргумента всегда можно выбрать мнимую часть ветви логарифма.

Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — путь,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  — аналитическая, предположим, что  $f(z) \neq 0$  на  $\gamma([a, b])$ .

Пусть  $u$  — ветвь логарифма для  $f$  вдоль  $\gamma$ .

**Определение 1.6.8** (Приращение логарифма вдоль  $\gamma$ ).  $u(b) - u(a)$ .

**Определение 1.6.9** (Приращение аргумента вдоль  $\gamma$ ).  $\Im(u(b) - u(a))$ .

Пусть теперь  $\gamma$  — петля. Тогда  $\Re(u(b) - u(a)) = 0$ , и вообще,  $u(b) - u(a) = 2\pi ik$  для некоторого  $k \in \mathbb{Z}$ .

Тем самым,  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  есть целое число. В частности, для  $f(z) = z - z_0$ ,  $\operatorname{Ind}_{z_0} \gamma \in \mathbb{Z}$ . Это показывает, что индекс петли есть целое число.

# Лекция VIII

5 апреля 2024 г.

## 1.7 Принцип аргумента и теорема Руше

Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  — простой (без самопересечений) замкнутый путь,  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Положим  $D := \gamma([a, b])$ .

*Интересный факт* (Теорема Жордана).  $\mathbb{C} \setminus D$  состоит из двух компонент связности. Одна из них —  $G$  — ограничена, и  $\forall z \in G : \text{Ind}_z \gamma = \pm 1$ .

Если  $\text{Ind}_z \gamma = 1$ , то  $\gamma$  называют положительно ориентированным, иначе — отрицательно ориентированной.

**Определение 1.7.1** (Жорданова область). Ограниченная область, граница которой — простой замкнутый путь.

Чтобы избежать трудностей, связанных с доказательством теоремы Жордана, подменим посылку и следствие: будем доказывать теоремы для жордановых областей.

**Теорема 1.7.1** (Принцип аргумента). Пусть  $G$  — жорданова область,  $\partial G$  — носитель простого замкнутого пути  $\gamma$ , ориентированного положительно.

$f$  — аналитическая в окрестности  $\overline{G}$ , кроме, может быть, конечного числа полюсов внутри  $G$ . Более того,  $\forall w \in \partial G : f(w) \neq 0$ .

Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \cdot (\text{приращение аргумента } f \text{ вдоль } \gamma) = (\text{число нулей } f \text{ в } G) - (\text{число полюсов } f \text{ в } G)$$

Нули и полюса надо учитывать с кратностью.

*Доказательство.* Левая часть есть  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ . Это интеграл по простому замкнутому пути; посчитаем его с помощью вычетов  $f$  внутри  $G$ .

Рассмотрим  $z_0 \in G$ . Пусть вблизи  $z_0 : f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$ , где  $k \in \mathbb{Z}$  (отвечает нулю или полюсу), а  $g$  аналитична вблизи  $z_0$ , причём  $g(z_0) \neq 0$ .

$$f'(z) = k \cdot (z - z_0)^{k-1} g(z) + (z - z_0)^k g'(z) \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

$\frac{g'(z)}{g(z)}$  аналитична в окрестности  $z_0$ , тем самым, вычет логарифмической производной  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  в  $z_0$  равен  $k$ .

Пусть  $u_1, \dots, u_s$  — нули  $f$  внутри  $G$  кратностей  $b_1, \dots, b_s$  соответственно; пусть  $v_1, \dots, v_t$  — полюса  $f$  кратностей  $l_1, \dots, l_t$  соответственно. Суммируя вычеты, получаем  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^s k_j - \sum_{j=1}^t l_j$ .  $\square$

**Теорема 1.7.2** (Теорема Руше). Пусть  $G$  — жорданова область с положительно ориентированной границей — носителем замкнутого пути  $\gamma$ .

Функции  $f, g$  аналитичны в окрестности  $\overline{G}$ . Пусть  $\forall z \in \partial G : |f(z)| > |g(z)|$ . В частности,  $\forall z \in \partial G : |f(z)| \neq 0, |(f + g)(z)| \neq 0$ .

Тогда  $f$  и  $f + g$  имеют одинаковое число нулей в  $G$ .

*Доказательство.* Согласно принципу аргумента, число нулей  $(f + g)$  в  $G$  равно  $\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} dz$ .

В то же время,  $f$  имеет внутри  $G$  ровно  $\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  нулей.

Нужно доказать, что интегралы равны, вычтем их:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left( \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} \right) dz$$

Теперь преобразуем выражение в скобках:

$$\begin{aligned} \left( \cdot \cdot \right) &= \frac{\cancel{f'(z)} \cdot \cancel{f(z)} + g'(z) \cdot f(z) - \cancel{f'(z)} \cdot \cancel{f(z)} - f'(z) \cdot g(z)}{(f(z) + g(z)) \cdot f(z)} = \\ &= \frac{g'(z)f(z) - f'(z)g(z)}{f(z)^2} \cdot \frac{f(z)}{f(z) + g(z)} = \left( 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right)' \cdot \frac{1}{1 + \frac{g(z)}{f(z)}} \end{aligned}$$

Обозначим  $\Phi(z) := 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ . Тем самым, надо доказать, что  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} dz = 0$ . При этом,  $\forall z \in \partial G$ :  $\frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1$ . Из непрерывности  $\exists \delta > 0$ :  $\frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1 - \delta$ .

Применим к интегралу формулу замены переменной:  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Phi \circ \gamma} \frac{dw}{w}$ . При этом носитель пути  $\Phi \circ \gamma$  лежит внутри  $B(1, 1 - \delta)$ , значит, путь гомотопен тождественному, и гомотопия не задевает нуля. В результате  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Phi \circ \gamma} \frac{dw}{w} = 0$ .  $\square$

## 1.8 Сходимость аналитических функций

Пусть  $G \subset \mathbb{C}$  — открытое множество. Пускай  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — последовательность функций  $h_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ .

### 1.8.1 Равномерная сходимость на компактах

Пусть  $h : G \rightarrow \mathbb{C}$  — ещё функция. Говорят, что  $h_n$  *сходятся к  $h$  равномерно на компактах* ( $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$ ), если  $\forall$  компакта  $K \subset G$ :  $h_n|_K \rightrightarrows h|_K$ .

В дальнейшем, говоря о сходимости аналитических функций, будем подразумевать именно равномерную сходимость на компактах.

**Теорема 1.8.1** (Вейерштрасс, 1-я). Пусть все  $h_n : G \rightarrow \mathbb{C}$  — аналитичны, и  $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$ . Тогда  $h$  аналитична в  $G$ .

*Доказательство.* Достаточно доказать, что  $\forall$  прямоугольника  $\bar{P} \subset G$ :  $\int_{\partial P} h(z) dz = 0$ . Это ясно из равномерной сходимости на компактах:

$$\left| \int_{\partial P} (h(z) - h_n(z)) dz \right| \leq \sup_{z \in \partial P} |h_n(z) - h(z)| \cdot l(\partial P)$$

Далее достаточно применить теорему Мореры (теорема 1.2.14).  $\square$

**Теорема 1.8.2** (Вейерштрасс, 2-я). Пусть все  $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$  — аналитичны, и  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ , где аналитичная  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Тогда  $f'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'$ .

*Доказательство.* Пусть  $K = B(w_0, r)$  — круг,  $\bar{K} \subset G$ . Понятно,  $\exists R > r$ :  $\overline{B(w_0, R)} \subset G$ . Рассмотрим  $z \in K$ .

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - w_0| = R} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - w_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = f'(z)$$

К пределу под интегралом можно перейти, так как сходимость равномерна в  $\bar{K}$ , знаменатель отделён от нуля числом  $R - r$ . Более того, видно, что сходимость равномерна в  $\bar{K}$ .

Пусть  $S \subset G$  — компакт.  $\forall s \in S$ :  $\exists K_s$  — круг с центром в  $s$ , такой, что  $\bar{K}_s \subset G$ . Внутренности этих кругов покрывают  $S$ , выберем конечное подпокрытие.

На каждом из кругов конечного подпокрытия имеется равномерная сходимость. Стало быть, имеется равномерная сходимость на  $S$ .  $\square$

**Лемма 1.8.1.** Пусть  $f_n, f$  — аналитические функции в области  $G$ ,  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ ,  $f$  не равна тождественному нулю.

Пусть  $D$  — круг,  $D \subset G$ , предположим, что  $f$  имеет нуль в  $D$ . Тогда для всех достаточно больших  $n$ :  $f_n$  имеет нуль в круге  $D$ .

*Доказательство.* Пусть  $f(z_0) = 0$ . Уменьшая  $D$ , можем считать, что  $D = B(z_0, r)$  — круг, такой, что  $\overline{D} \subset G$ .

По теореме единственности  $f$  не постоянна в  $D$ .

Разложим  $f$  в ряд Тейлора в  $D$ :

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Ряд сходится в некоторой окрестности  $\overline{D}$ .  $a_0 = 0$ , но не все коэффициенты равны нулю. Распишем

$$f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z), \quad g(z_0) \neq 0, \text{ где } g \text{ аналитична в окрестности } \overline{D}$$

Пусть  $\rho \leq r$  выбрано так, что  $\forall z: |z - z_0| \leq \rho \Rightarrow |g(z)| > \delta > 0$ . Оценим  $f$  при  $|z - z_0| = \rho$ :  $|f(z)| = |z - z_0|^k \cdot |g(z)| \geq \rho^k \delta$ .

Разложим  $f_n(z) = f(z) + (f_n(z) - f(z))$ . При достаточно больших  $n$ :  $|f_n(z) - f(z)| < \rho^k \delta$ , по теореме Руше  $f_n$  имеет нуль внутри  $D$ .  $\square$

**Определение 1.8.1** (Однолистная функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ ). Инъективная аналитическая функция  $f$ .

**Теорема 1.8.3.** Пусть  $f_n$  — последовательность однолистных функций в области  $G$ ,  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ . Тогда либо  $f \equiv \text{const}$ , либо  $f$  — тоже однолистка.

*Доказательство.* Предположим, что  $\exists z_0, z_1 \in G: z_0 \neq z_1$  и  $w := f(z_0) = f(z_1)$ . Построим  $g(z) := f(z) - w$ ,  $g_n(z) := f_n(z) - w$ . Сходимость сохранилась.

Пусть  $U_0, U_1$  — круги с центрами в  $z_0$  и  $z_1$  соответственно,  $U_0 \cap U_1 = \emptyset, U_0, U_1 \subset G$ . Функция  $g$  имеет нуль в каждом из  $U_1, U_2$ . Предположим, что  $g \not\equiv 0$ , значит, при достаточно большом  $n$ :  $g_n$  имеет нуль как в  $U_1$ , так и в  $U_2$ . Но  $g_n$  однолистка, значит, всё же  $g \equiv 0$ .  $\square$

**Теорема 1.8.4** (Риман). Пусть  $G \subset \mathbb{C}$  — область. Следующие условия эквивалентны:

1.  $G$  односвязна,  $G \neq \mathbb{C}$ .
2.  $\exists$  однолистка  $\phi: G \rightarrow \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ .

*Доказательство.* Потом (теорема 1.9.1).  $\square$

## 1.8.2 Нормальные семейства. Теорема Монтеля

Пусть дано множество  $A$  аналитических функций в области  $G$ .

**Определение 1.8.2** (Нормальное множество  $A$ ). Такое  $A$ , что  $\forall$  компакта  $K \subset G: \exists C \in \mathbb{R}: \forall z \in K, \forall f \in A: |f(z)| \leq C$ .

# Лекция IX

12 апреля 2024 г.

**Теорема 1.8.5** (Монтель). Следующие условия эквивалентны:

1. Множество  $A$  нормально.
2.  $\forall \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, f_n \in A$ : найдётся сходящаяся подпоследовательность  $n_1 < n_2 < \dots$ : для некоторой аналитической  $f: f_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f$ .

*Доказательство.*

(2)  $\Rightarrow$  (1) Предположим противное:  $\exists K \subset G : \forall m \in \mathbb{N} : \exists f_m \in A : \sup_{z \in K} |f_m(z)| > m$ .

Согласно посылке, существует сходящаяся подпоследовательность  $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , такая, что  $\exists f : f_{m_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f$  равномерно на  $K$ .  $f$  ограничена на  $K$ , значит, начиная с некоторого места,  $f_{m_k}$  тоже ограничены. Противоречие.

(1)  $\Rightarrow$  (2) **Лемма 1.8.2.** *Рассмотрим счётный набор последовательностей*

$$\begin{cases} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots \\ x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \dots \\ \dots \dots \dots \ddots \end{cases}$$

Пусть каждая последовательность ограничена:  $\forall n \in \mathbb{N} : \exists M^{(n)} : \forall j : |x_j^{(n)}| < M^{(n)}$ . Тогда  $\exists k_1 < k_2 < \dots$  — подпоследовательность индексов, такая, что  $\forall n \in \mathbb{N} : \exists x^{(n)} : x_{k_j}^{(n)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x^{(n)}$ .

Иными словами, каждая последовательность ограничена, значит, из каждой можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, но оказывается, что можно так выбрать индексы этой подпоследовательности, чтобы она сходилась во всех строчках.

*Доказательство леммы.*

Пусть  $\{k_j^{(1)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  — такая подпоследовательность индексов, что  $\exists x^{(1)} : x_{k_j^{(1)}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x^{(1)}$ . Выберем из этой последовательности индексов подпоследовательность индексов  $\{k_j^{(2)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ , что  $\exists x^{(2)} : x_{k_j^{(2)}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x^{(2)}$ . И так далее.

Тем самым, мы получим счётное количество последовательностей индексов, таких, что  $k^{(n+1)}$  — подпоследовательность  $k^{(n)}$ , и  $\forall n \in \mathbb{N} : \exists x^{(n)} : x_{k_j^{(n)}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x^{(n)}$ .

А теперь возьмём диагональ:  $k_j := k_j^{(j)}$ . □

Пусть  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — какая-то последовательность функций из  $A$ , выберем из неё сходящуюся подпоследовательность.

1. Рассмотрим компактный замкнутый круг  $\overline{B_r(z_0)} \subset G$ . Выберем  $R \in (r, \text{dist}(z_0, \partial G))$ . Разложим все функции  $f_n$  в степенные ряды с центром в  $z_0$ , эти ряды будут сходиться уж точно в круге радиуса  $R$ :

$$\begin{cases} f_1(z) = c_0^{(1)} + c_1^{(1)}(z - z_0) + c_2^{(1)}(z - z_0)^2 + \dots \\ \vdots \\ f_n(z) = c_0^{(n)} + c_1^{(n)}(z - z_0) + c_2^{(n)}(z - z_0)^2 + \dots \\ \vdots \end{cases} \quad (\circ)$$

Так как семейство нормально, то  $\exists d > 0 : |z - z_0| \leq R \Rightarrow \forall n : |f_n(z)| \leq d$ .

Распишем формулы для коэффициентов Тейлора:  $c_j^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = R} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta$ , откуда

$$|c_j^{(n)}| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f_n(z_0 + e^{i\theta})|}{R^{j+1}} R d\theta \leq \frac{d}{R^j}$$

Получили равномерную по  $n$  оценку на  $c_j^{(n)}$ , значит согласно (лемма 1.8.2) имеется подпоследовательность строк  $c^{(n)}$  в (о), такая, что в каждом столбце коэффициенты сходятся. Без потери общности эта последовательность совпадает с исходной:  $\forall j : c_j^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c_j$ .

Дальше хочется написать ряд  $\sum_{j \geq 0} c_j(z - z_0)^j$ , доказать, что он сходится, где положено, и что он является пределом какой-то подпоследовательности  $f_n$ .

– Первое просто:  $|z - z_0| \leq r \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} |c_j(z - z_0)^j| \leq \sum_{j=0}^{\infty} r^j \cdot \frac{d}{R^j} = d \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^j$ . Тем самым,  $\bar{f}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$  — функция в  $\bar{B}$ , аналитичная в  $B$ .

– Рассмотрим начальные куски рядов  $f_{n,k}(z) := \sum_{j=0}^k c_j^{(n)}(z - z_0)^j$ , и запишем аналогичный многочлен для  $\bar{f} : \bar{f}_k(z) := \sum_{j=0}^k c_j(z - z_0)^j$ . Это конечные суммы, и так как коэффициенты сходятся, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,k} = \bar{f}_k$  равномерно во всём круге  $\bar{B}$ .

Теперь покажем, что сходимость  $f_{n,k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f_n$  равномерна по  $n$ :

$$|f_{n,k}(z) - f_k(z)| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} |c_j^{(n)}| |z - z_0|^j \leq d \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^j$$

– По теореме о перестановке предельных переходов имеется искомая сходимость:

$$\bar{f}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} c_j^{(n)}(z - z_0)^j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{(n)}(z - z_0)^j = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$$

2. Теперь покажем, что для любого компакта  $K \subset G$  тоже найдётся подпоследовательность  $f_{n_j}$ , сходящаяся на  $K$ . Пусть  $w \in K$ , положим  $r_w := \frac{1}{2} \text{dist}(w, \partial G)$ . Семейство  $\{B_{r_w}(w)\}_{w \in K}$  — открытое покрытие  $K$ , значит, имеется конечное подпокрытие:  $K$  покрывается кругами  $B_1, \dots, B_s$ , такими, что  $\bar{B}_s \subset G$ .

$s$  раз выбирая сходящуюся подпоследовательность (каждый раз — в соответствии с предыдущим пунктом), получаем такую подпоследовательность  $f_n$ , что она сходится во всех кругах  $B_1, \dots, B_s$ .

3. Пусть  $K_1 \subset K_2 \subset \dots$  — исчерпывающая последовательность компактов для  $G$ .

В соответствии с предыдущим пунктом найдётся подпоследовательность  $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \dots$ , равномерно сходящаяся на  $K_1$ . Далее из неё выбирается новая подпоследовательность  $f^{(2)}$ , равномерно сходящаяся на  $K_2$ .

И так далее, на  $s$ -м шаге выберется подпоследовательность  $f_1^{(s)}, f_2^{(s)}, \dots, f_s^{(s)}, \dots$ , сходящаяся на  $K_s$ . Диагональ  $\{f_s^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$  подходит: функции в этой последовательности сходятся на любом компакте  $K_s$ .  $\square$

### 1.8.3 Про монтелевые пространства

Через  $\mathcal{H}(G)$  обозначим пространство всех функций, голоморфных в  $G$ . Сходимость, которую мы только что изучали на этом пространстве, отвечает некоторой топологии.

$\mathcal{H}(G)$  можно превратить в локально выпуклое пространство, в котором топология задаётся полунормами  $p_K : f \mapsto \max_{z \in K} |f(z)|$ , где  $K \subset G$  — компакты в  $G$ . Несложно видеть, что это как раз топология равномерной сходимости на компактах.

Несложно видеть, что если  $\{K_j\}_{j=1}^{\infty}$  — исчерпывающая последовательность компактов для  $G$ , то  $p_j := p_{K_j}$  — определяющий набор полунорм. А раз имеется счётный определяющий набор полунорм, то пространство метризуемо. Одна из возможных метрик имеет вид

$$\rho(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{p_j(f - g)}{1 + p_j(f - g)}$$

Из самой формулы видно, что всё пространство лежит в шаре радиуса 1, тем не менее, в локально выпуклом пространстве есть понятие ограниченного множества — это множество, ограниченное по всем полунормам. В  $\mathcal{H}(G)$  ограниченные множества — нормальные семейства.

Тем самым, теорема Монтеля на языке функционального анализа звучит так: всякое ограниченное множество в  $\mathcal{H}(G)$  относительно компактно.

Как известно, в бесконечномерных банаховых пространствах это неверно, откуда видно, что одной нормой топологию на  $\mathcal{H}(G)$  не описать.

В честь Монтеля, доказавшего теорему об аналитических функциях, все пространства, в которых ограниченные множества относительно компактны, называются *монтелевыми*.

## 1.9 Однолистные функции. Теорема Римана

Рассмотрим функцию  $f : z \mapsto (z - z_0)^k$ , где  $k \in \mathbb{N}$ . Если  $k = 1$ , то функция линейна и, следовательно, однолистка. Если же  $k \geq 2$ , то  $\forall w \neq 0$  найдётся  $k$  значений корня  $\sqrt[k]{w}$ , и, следовательно,  $f$  не однолистка ни в какой окрестности  $z_0$ .

**Лемма 1.9.1.** Если  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  однолистка, то  $\forall z \in G : f'(z) \neq 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $f'(z_0) = 0$ . Разложим  $f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$ . Так как  $f'(z_0) = 0$ , то  $c_1 = 0$ .

Так как  $f$  однолистка, то  $f \not\equiv \text{const}$ , то есть имеется некоторое наименьшее  $k > 0 : c_k \neq 0$ . Можно записать  $f(z) = c_0 + (z - z_0)^k \cdot g(z)$ , где  $g(z) \neq 0$  в некоторой окрестности  $z_0$ . Скажем, эта окрестность имеет вид круга  $B_r(z_0)$ .

Пусть  $\phi : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  — ветвь логарифма  $g$ , то есть  $\forall z \in B_r(z_0) : e^{\phi(z)} = g(z)$ . Тогда  $f(z) = c_0 + \left((z - z_0) e^{\frac{\phi(z)}{k}}\right)^k$ .

Обозначим  $\psi(z) = (z - z_0) e^{\frac{\phi(z)}{k}}$ , прямое вычисление показывает  $\psi'(z_0) \neq 0$ . По теореме об обратной функции  $\psi(B_r(z_0)) \supset B_\delta(0)$  для некоторого  $\delta > 0$ .

Если  $u \in \mathbb{C}$ , причём  $|u - c_0| \in (0, \delta)$ , то уравнение  $f(z) = u$  имеет хотя бы  $k$  решений, возникающих из уравнений  $\psi(z) = \sqrt[k]{u - c_0}$  ( $k$  значений у корня  $k$ -й степени). Противоречие с инъективностью  $f$ .  $\square$

Обратное неверно, контрпримером может служить, например, экспонента. Это верно только локально: если  $f'(z) \neq 0$  вблизи  $z_0$ , то по теореме об обратной функции  $f$  однолистка в некоторой окрестности  $z_0$ .

**Факт 1.9.1.** Если  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  такова, что  $\forall z \in U : f'(z) \neq 0$ , то  $f(U)$  открыто.

*Доказательство.* Это тоже следует из вещественной теоремы об обратной функции.  $\square$

### 1.9.1 О дробно-линейных отображениях

Введём расширенную комплексную плоскость  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Базой  $\widehat{\mathbb{C}}$ , как топологического пространства, являются круги  $\{B_r(z_0) | z_0 \in \mathbb{C}, r > 0\}$ , и «бесконечно удалённые круги»  $\{\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{B_r(0)} | r > 0\}$ .

Это одноточечная компактификация  $\mathbb{C}$ .



Для аналитической функции  $f : (\Omega \subset \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ , заданной и аналитичной в проколотой окрестности  $\infty$ , будем говорить, что она аналитична в точке  $\infty$ , если  $f\left(\frac{1}{z}\right)$  аналитична в окрестности нуля. Например, для ряда Лорана  $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ :  $f$  аналитична в  $\infty$ , если для всех  $n > 0$ :  $a_n = 0$ .

**Определение 1.9.1** (Дробно-линейное отображение). Отображение вида  $\phi : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ , где  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  и  $|c| + |d| > 0$  (чтобы получалось поделить).

Если  $c \neq 0$ , то функция определена и аналитична в бесконечности, равна там пределу  $\frac{a}{c}$ , и в точке  $-\frac{d}{c}$  имеется полюс. Если же  $c = 0$ , то функция тоже аналитична в  $\widehat{\mathbb{C}}$  за исключением одного полюса, на этот раз этот полюс находится в точке  $\infty$ .

Если  $ad = bc$ , то ситуация не особо интересная:  $\phi \equiv \frac{a}{c} \equiv \text{const}$ . Иначе же, при  $ad - bc \neq 0$ , дробно-линейные преобразования обратимы: можно разрешить уравнение  $\frac{az+b}{cz+d} = w$  относительно  $z$ , полученная функция  $z(w)$  тоже будет дробно-линейной. В матрицах это записывается так:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Квадратные скобки значат фактор по скалярным преобразованиям (гомотетиям).

Аналогичная выкладка показывает, что обратимые дробно-линейные преобразования образуют группу относительно композиции, и эта группа изоморфна  $\text{PGL}(n, \mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{GL}(n, \mathbb{C}) / \mathbb{C}^* E$  (где  $\mathbb{C}^* E$  — скалярные матрицы вида  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ).

### Преобразования Мёбиуса

Преобразованиями Мёбиуса называются дробно-линейные преобразования вида  $\phi : z \mapsto c \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ , где  $|c| = 1, a \in \mathbb{D}$ . Функция такого вида имеет полюс в  $\frac{1}{\bar{a}}$ , и уж точно определена в круге  $\mathbb{D}$ .

**Факт 1.9.2.** Оказывается,  $\phi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ .

*Доказательство.* Заметим, что  $\forall z : |z| = 1 \Rightarrow |\phi(z)| = \left| c \frac{z-a}{z(\bar{z}-\bar{a})} \right| = 1$ , откуда  $\phi$  переводит окружность в окружность. По принципу максимума модуля  $\forall z \in \mathbb{D} : |\phi(z)| < 1$ .

С другой стороны, не просто  $\phi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ , но на самом деле  $\phi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ , так как  $\phi^{-1}$  — тоже преобразование Мёбиуса:

$$\begin{bmatrix} c & -ca \\ -\bar{a} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & ca \\ \bar{a} & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{-1} & a \\ c^{-1}\bar{a} & 1 \end{bmatrix}$$

то есть  $\psi : z \mapsto c^{-1} \frac{z+ac}{1-\bar{a}cz}$  — обратное к  $\phi$  преобразование Мёбиуса.  $\square$

**Факт 1.9.3.** Преобразования Мёбиуса образуют подгруппу в группе дробно-линейных преобразований.

### Как отобразить полуплоскость на круг

Пусть  $\Pi := \{z \in \mathbb{C} | \Re z < 0\}$ . Выберем  $\alpha \in \mathbb{C} : \Re \alpha < 0$ , и устроим преобразование  $\theta(z) := \frac{z-\alpha}{z+\bar{\alpha}}$ . У него полюс в точке  $-\bar{\alpha}$ .

**Факт 1.9.4.** Оказывается,  $\theta(\Pi) \subset \mathbb{D}$ .

*Доказательство.* Пусть  $z = a + ib, \alpha = \gamma + i\delta$ , где  $a, b, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  ( $a, \gamma < 0$ ).

Сосчитаем  $|\theta(z)|^2 = \left| \frac{(a-\gamma)+i(b-\delta)}{(a+\gamma)+i(b-\delta)} \right|^2 = \frac{(a-\gamma)^2+(b-\delta)^2}{(a+\gamma)^2+(b-\delta)^2} < 1$ .  $\square$

**Упражнение 1.9.1.** Убедиться, что  $\theta(\Pi) = \mathbb{D}$ .

## 1.9.2 Теорема Римана

**Теорема 1.9.1** (Риман, о конформном отображении). Пусть  $G \subset \mathbb{C}$  — область. Следующие условия эквивалентны:

1.  $G$  односвязна,  $G \neq \mathbb{C}$ .
2.  $\exists$  однолистная сюръекция  $\phi : G \twoheadrightarrow \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ .

*Доказательство.*

(2)  $\Rightarrow$  (1) Это просто, если  $\phi(G) = \mathbb{D}$ , где  $\phi$  — как в посылке, то  $\phi$  — гомеоморфизм, откуда  $G$  тоже односвязна. Факт о том, что  $G \neq \mathbb{C}$ , называется теоремой Лиувилля.

(1)  $\Rightarrow$  (2) — Можно считать, что область не содержит некоторого круга:

Выберем  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$ , в области  $G$  найдётся  $\phi$  — ветвь логарифма функции  $z - z_0$ . Функция  $\phi$  однолистка, и без потери общности можно работать с  $\phi(G) =: G_1$  вместо  $G$ .

Пусть  $K \subset G_1$  — какой-то круг. Заметим, что  $(K + 2\pi i) \cap G_1 = \emptyset$ :

*Доказательство.* Пусть  $w \in (K + 2\pi i) \cap G_1$ . Тогда  $w = u + 2\pi i$ , где  $u \in K$ , и одновременно  $w = \phi(v)$ ,  $u = \phi(\tilde{v})$ , где  $v, \tilde{v} \in G$ . Так как  $v = e^{\phi(v)} = e^w = e^{u+2\pi i} = e^u = \tilde{v}$ . Тем самым,  $v = \tilde{v}$ , значит,  $w = \phi(v) = \phi(\tilde{v}) = u$ , противоречие ( $w = u + 2\pi i$ ).  $\square$

— Можно считать, что область ограничена:

Устроим  $\psi : G_1 \rightarrow G_2, z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$ , теперь так как  $\forall z \in G_1 : |z - z_0|$  отделён от нуля, то область  $G_2$  ограничена. При помощи сдвига и гомотетии ( $z \mapsto az + b$ ) можно заменить  $G_2$  на  $G_3$  так, что  $0 \in G_3$  и  $G_3 \subset \mathbb{D}$ .

— Отныне  $0 \in G \subset \mathbb{D}$ . Введём  $\mathcal{A} := \{f : G \rightarrow \mathbb{D} \mid f \text{ однолистка, но необязательно сюръекция, } f(0) = 0\}$ . По определению  $\mathcal{A}$  — нормальное семейство.

Пусть  $C := \sup_{f \in \mathcal{A}} |f'(0)|$  (пока не факт, что  $C < \infty$ ).

Пусть  $\mathcal{A}_1 := \{f \in \mathcal{A} \mid |f'(0)| \geq 1\}$ . Очевидно, что супремум можно вычислять по функциям из  $\mathcal{A}_1$  (оно непусто,  $\text{id} \in \mathcal{A}_1$ ).

\* Этот супремум конечен:  $C < +\infty$ .

Пусть это не так, тогда  $\forall n \in \mathbb{N} : \exists f_n \in \mathcal{A}_1 : |f'_n(0)| > n$ .

Так как семейство нормально, то можно выбрать подпоследовательность  $f_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f$ .

Так как  $f_{n_j}$  аналитичны, и сходятся к  $f$ , то  $f$  тоже аналитична, и  $f'_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f'$ . Но  $|f'_{n_j}(0)|$  не может иметь предела.

\* Аналогичное рассуждение показывает, что он достигается ( $\exists f \in \mathcal{A} : |f'(0)| = C$ ):

Выберем  $f_n \in \mathcal{A} : |f'_n(0)| \geq C - \frac{1}{n}$ . Выберем подпоследовательность  $f_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f$ .

Так как  $f_{n_j}$  аналитичны, и сходятся к  $f$ , то  $f$  тоже аналитична, и  $f'_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f'$ .

Тем самым,  $|f'(0)| = C$ , и согласно (теорема 1.8.3),  $f$  однолистка либо константа (второго быть не может,  $C \geq 1$ ).

## Лекция X

19 апреля 2024 г.

Тем самым, существует  $f \in \mathcal{A}$ , такая, что  $|f'(0)|$  максимально. Далее покажем, что  $f : G \rightarrow \mathbb{D}$  — сюръекция.

- Пойдём от противного: пусть  $\exists a \in \mathbb{D} : a \notin \text{Im}(f)$ . Введём  $\phi := v \circ f$ , где  $v(w) := \frac{w-a}{1-\bar{a}w}$  — некоторое преобразование Мёбиуса.  $\phi(z) := \frac{f(z)-a}{1-\bar{a}f(z)}$ .

К сожалению, пока  $\phi \notin \mathcal{A} : \phi(0) \neq 0$ , и вообще  $\phi(z) \neq 0$  везде. Но раз так, то у  $\phi$  имеется ветвь логарифма  $\Phi$ . Так как  $\Re \log(u) = \log|u|$ , то  $\forall z \in G : \Re \Phi(z) < 0$ . При помощи другого дробно-линейного преобразования переведём левую полуплоскость обратно в  $\mathbb{D} : g(z) := \frac{\Phi(z)-\Phi(0)}{\Phi(z)+\Phi(0)}$ . Утверждается, что  $g \in \mathcal{A} : g(0) = 0$ , и преобразование  $w \mapsto \frac{w-a}{w+a}$  однолистно стреляет в круг  $\mathbb{D}$ .

- Осталось получить противоречие, получив в результате вычислений, что  $|g'(0)| > |f'(0)|$ .

$$\begin{aligned} g'(z) &= \left(1 - \frac{2\Re(\Phi(0))}{\Phi(z) + \overline{\Phi(0)}}\right)' = \frac{2\Re(\Phi(0))}{(\Phi(z) + \overline{\Phi(0)})^2} \Phi'(z) = \frac{2\Re(\Phi(0))}{(\Phi(z) + \overline{\Phi(0)})^2} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \\ &= \frac{2\Re(\Phi(0))}{(\Phi(z) + \overline{\Phi(0)})^2} \frac{1}{\phi(z)} \cdot \frac{(1 - \bar{a}f(z)) \cdot f'(z) + \bar{a} \cdot f'(z)(f(z) - a)}{(1 - \bar{a}f(z))^2} \end{aligned}$$

Подставляя 0, получаем

$$g'(0) = \frac{2\Re(\Phi(0))}{(2\Re(\Phi(0)))^2 - a} \cdot \frac{f'(0)(1 - |a|^2)}{1}$$

Тем самым,  $|g'(0)| = \frac{1}{2\log(\frac{1}{|a|})} \frac{1-|a|^2}{|a|} \cdot |f'(0)|$ . Осталось убедиться, что для  $t := |a| \in (0, 1)$  выполнено неравенство  $\frac{1-t^2}{2t\log(\frac{1}{t})} > 1$ . Это эквивалентно неравенству  $\frac{1-t^2}{t} - 2\log(\frac{1}{t}) > 0$ . При  $t = 1$  левая часть равняется нулю, и производная левой части  $(\frac{1}{t} - t + 2\log(t))' = -\frac{1}{t^2} - 1 + \frac{2}{t} = -(\frac{1}{t} - 1)^2 < 0$ .  $\square$

### 1.9.3 Автоморфизмы односвязных областей

Пусть  $f_1, f_2 : G \rightarrow \mathbb{D}$  — возможно различные однолистные отображения. Тогда  $f_2^{-1} \circ f_1$  — однолистное отображение круга  $\mathbb{D}$  на себя. Например, это может быть каким-то преобразованием Мёбиуса, но оказывается, что ими всё и исчерпывается.

**Определение 1.9.2** (Автоморфизм области  $G$ ). Однолистное отображение  $G \rightarrow G$ .

Вообще практически все односвязные области эквивалентны (при помощи однолистной сюръекции) кругу, как говорит только что доказанная теорема Римана, но есть ещё две области —  $\mathbb{C}$  и  $\hat{\mathbb{C}}$ , имеющие другую природу.

Сначала займёмся автоморфизмами  $\mathbb{C}$ .

**Теорема 1.9.2.** Автоморфизмы  $\mathbb{C}$  — линейные функции  $z \mapsto az + b$  при  $a \neq 0$ .

*Доказательство.* Пускай  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  — ещё какой-то автоморфизм  $\mathbb{C}$ . Тем самым,  $f$  — целая, то есть  $f = a_0 + a_1z + \dots$

Если  $a_j \neq 0$  для бесконечного множества индексов  $j$ , то  $\infty$  — существенно особая точка (в ряду Лорана  $f(\frac{1}{z})$  бесконечно много ненулевых членов). Так как  $\forall z \in \mathbb{C} : f'(z) \neq 0$ , то  $f$  — открытое отображение. Отсюда  $f(\mathbb{D})$  открыто. С другой стороны, по теореме Сохоцкого (теорема 1.5.3)  $f(\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\})$  всюду плотно в  $\mathbb{C}$ . Значит,  $\exists w \in f(\mathbb{D}) \cap f(\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\})$ , и это противоречие с однолистностью  $f$ .

Тем самым,  $f$  — многочлен, и если  $\deg f \geq 2$ , то  $f'$  имеет корень, опять-таки противоречие с однолистностью. Получается,  $f$  — линейная функция, или константа, но константа не подходит.  $\square$

*Замечание.*  $\hat{\mathbb{C}}$  односвязна, так как топологически это — сфера, что видно из стереографической проекции.

**Теорема 1.9.3.** Автоморфизмы  $\hat{\mathbb{C}}$  — дробно-линейные отображения  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  при  $ad - bc \neq 0$ .

*Доказательство.*

**Лемма 1.9.2** (О действии групп). Пусть группа  $\Gamma$  действует на множестве  $X$ ;  $H \leq \Gamma$  — подгруппа. Если  $\exists x \in X : H \supset \Gamma_x$  ( $\Gamma_x \stackrel{\text{def}}{=} \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma x = x\}$  — стабилизатор  $x$ ), и  $H$  действует на  $X$  транзитивно ( $\forall x, y \in X : \exists \gamma \in H : \gamma x = y$ ), то  $H = \Gamma$ .

*Доказательство леммы.*

Рассмотрим какой-то  $\gamma \in \Gamma$ . Пусть  $\gamma(x) = y$ . Из транзитивности  $\exists \delta \in H : \delta y = x$ . Тем самым,  $\delta \gamma x = x$ , то есть  $\delta \gamma \in H \Rightarrow \gamma \in H$ .  $\square$

Введём в качестве  $\Gamma$  группу всех однолистных отображений  $\widehat{C} \rightarrow \widehat{C}$ , и в качестве  $H \leq \Gamma$  — подгруппу дробно-линейных отображений.

Легко видеть, что  $H$  действует на  $\mathbb{C}$  транзитивно: скажем, любая точка лежит в одной орбите с  $\infty$ :  $\forall z_0 \in \mathbb{C} : \frac{1}{z-z_0} \Big|_{z=z_0} = \infty$ . С другой стороны, стабилизатор  $\infty$  — автоморфизмы  $\mathbb{C}$ , и так как они лежат в  $H$ , то  $H = \Gamma$ .  $\square$

**Лемма 1.9.3** (Шварц). Пусть  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  — аналитическая функция, такая, что  $f(0) = 0$ . Тогда  $\forall z \in \mathbb{D} : |f(z)| \leq |z|$ . При этом если  $\exists z \in \mathbb{D} \setminus \{0\} : |f(z)| = |z|$ , то  $\exists c \in \mathbb{C} (|c| = 1) : f(z) = cz$ .

*Доказательство.*

- Пусть дополнительно  $f$  задана и аналитична в круге радиуса  $R > 1$  с центром в 0. Рассмотрим  $g(z) := \frac{f(z)}{z}$  — она аналитична в круге  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ , так как в нуле — устранимая особенность.  
При  $|z| = 1 : |g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{1} = 1$ . Согласно принципу максимума модуля (теорема 1.2.13),  $|g| \leq 1$  везде.
- Теперь такого предположения о  $f$  не имеется. Выберем  $R > 1$ . Определим  $f_R(z) := f\left(\frac{z}{R}\right)$ . Согласно предыдущему пункту  $\forall z \in \mathbb{D} : |f_R(z)| \leq |z|$ . Устремляя  $R \rightarrow 1$ , получаем искомое неравенство.
- Осталось разобраться со случаем равенства внутри круга. Пусть  $\exists z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\} : |f(z_0)| = |z_0|$ . Тем самым,  $g(z) := \frac{f(z)}{z}$  достигает своё наибольшее значение внутри круга, то есть  $g \equiv c = \text{const}$ . Подставляя  $z_0$ , получаем  $|c| = 1$ .  $\square$

Пусть  $\Gamma$  — группа всех автоморфизмов круга  $\mathbb{D}$ . Вычислим стабилизатор  $0 \in \mathbb{D}$ . Пусть  $\phi \in \Gamma_0$  — аналитическая биекция, такая, что  $\phi(0) = 0$ . То же верно и для  $\phi^{-1}$ .

По лемме Шварца  $|\phi(z)| \leq |z|$ , но применяя её же к  $\phi^{-1}$ , получаем  $z = \phi^{-1}(\phi(z)) \Rightarrow |z| = |\phi^{-1}(\phi(z))| \leq |\phi(z)|$ . Тем самым,  $|\phi(z)| = |z|$  во всех точках, и по лемме Шварца  $\phi$  — гомотетия с коэффициентом  $c (|c| = 1)$ .

Группа преобразований Мёбиуса  $\left\{ w \mapsto c \cdot \frac{w-a}{1-\bar{a}w} \mid a \in \mathbb{D}, |c| = 1 \right\}$  содержит при  $a = 0$  гомотетии с данными коэффициентами, и действует транзитивно на  $\mathbb{D}$ : любая  $a \in \mathbb{D}$  переводится соответствующим преобразованием в нуль.

**Упражнение 1.9.2.** Проверить, что группа Мёбиуса — действительно группа, то есть замкнута относительно умножения и взятия обратного.

**Факт 1.9.5** (Конформность однолистного отображения). Пусть  $G$  — область,  $z_0 \in G$ ,  $\Phi : G \rightarrow \mathbb{C}$  — однолистное отображение. Пусть  $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$  — два регулярно параметризованных гладких пути ( $\gamma'_1 \neq 0, \gamma'_2 \neq 0$ ), причём  $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$ . Проводя касательные к носителям  $\gamma_1, \gamma_2$  в  $z_0$ , получаем угол, его косинус можно посчитать по формуле  $\frac{\langle \gamma'_1(t_1), \gamma'_2(t_2) \rangle}{|\gamma'_1(t_1)| \cdot |\gamma'_2(t_2)|}$ .

Поддействуем при помощи  $\Phi$  на данную картинку.  $\tilde{\gamma}_j := \Phi \circ \gamma_j$  при  $j := 1, 2$ . Несложно посчитать, что  $\tilde{\gamma}'_j(t_j) = \Phi'(z_0) \cdot \gamma'_j(t_j)$ , что действительно сохраняет косинус угла.

Такие отображения, сохраняющие углы, называют *конформными*. В силу исторических причин, говоря про однолистные отображения, часто добавляют слово «конформные», а сама наука зовётся теорией конформных отображений, хотя, как мы только что видели, однолистность сильнее.

## 1.10 Целые функции с заданными нулями

**Определение 1.10.1** (Целая функция). Аналитическая  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

### 1.10.1 Произведение Вейерштрасса

Пусть  $f \neq 0$  — целая,  $N := \{a \in \mathbb{C} | f(a) = 0\}$ . По теореме единственности  $N$  не имеет предельных точек. В частности, все нули изолированы, откуда множество нулей не более, чем счётно.

Нули удобно считать с учётом кратности, получая при этом мультимножество  $N$ .

Пронумеруем  $N = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ , удобно считать, что  $|a_0| \leq |a_1| \leq \dots$ .

**Теорема 1.10.1** (Вейерштрасс). Существует целая функция  $f$ , мультимножество нулей которой совпадает с данным мультимножеством  $N = \{a_0, a_1, \dots\}$ . Считаем  $|a_0| \leq |a_1| \leq \dots$ . Дополнительно предполагается, что  $|a_j| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ . *Это, кстати, необходимое и достаточное условие того, что у  $N$  нет предельных точек.*

*Доказательство.* Если бы нулей было конечное количество, то многочлен  $(z - a_0) \cdot \dots \cdot (z - a_N)$  подошёл бы, но нулей, увы, бесконечно. Предположим, что  $0 \notin N$  (это не ограничивает общность: выкинем 0 из  $N$ , построим  $f$ , потом домножим на нужную степень  $z^k$ ), и заметим, что произведение  $\left(1 - \frac{z}{a_0}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{z}{a_N}\right)$  тоже решает задачу в случае конечного  $N$ .

В бесконечном же случае стоит озаботиться вопросом сходимости. Во втором семестре мы проверяли, что сходимость  $\prod_{j=0}^{\infty} a_j$  **не к нулю** эквивалентна сходимости ряда  $\sum_{j=0}^{\infty} \log(a_j)$ , где  $\log : (\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]) \rightarrow \mathbb{C}$  — главная ветвь логарифма.

Рассмотрим бесконечное произведение  $\prod_{j=0}^{\infty} u_j(z)$ , где  $u_j$  — аналитические функции. Будем говорить, что данное *произведение сходится*, если  $\forall$  компакта  $K \subset G : \exists M \in \mathbb{N} : \forall j \geq M, z \in K : u_j(z) \neq 0$ , и произведение  $\prod_{j>N} u_j(z)$  сходится на  $K$  равномерно.

Определим *множители Вейерштрасса*:

$$u_j(z) := \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{a_j} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_j}\right)^2 + \dots + \frac{1}{j-1}\left(\frac{z}{a_{j-1}}\right)^{j-1}\right)$$

Показатель экспоненты подогнан так, чтобы при взятии логарифма много чего сократилось (а  $\log(1 - w) = -w - \frac{w^2}{2} - \frac{w^3}{3} - \dots$  при  $|w| < 1$ , например, потому что этот ряд совпадает с рядом для вещественного логарифма на  $\mathbb{R}_{>0}$ , и имеется теорема единственности)

Осталось показать, что произведение  $\prod_{j=0}^{\infty} u_j(z)$  сходится равномерно на компактах, и её нули — в точности  $a_j$  с учётом кратности.

Определим компакт  $K := \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{|a_N|}{2}\right\}$ , и покажем, что  $\prod_{j>N} u_j(z)$  сходится равномерно на  $K$ .

$$u_j(z) = \exp\left(\log\left(1 - \frac{z}{a_j}\right) + \frac{z}{a_j} + \dots + \frac{1}{j-1}\left(\frac{z}{a_j}\right)^{j-1}\right) = \exp\left(-\sum_{s \geq j} \frac{1}{s} \left(\frac{z}{a_j}\right)^s\right)$$

При этом  $\log\left(1 - \frac{z}{a_j}\right)$  определён, так как  $|z| < |a_j|$ . Оценим

$$\left| \sum_{s \geq j} \frac{1}{s} \left( \frac{z}{a_j} \right)^s \right| \leq \left| \sum_{s \geq j} \left( \frac{z}{a_j} \right)^s \right| \leq \left| \sum_{s \geq j} \left| \frac{a_N}{2a_j} \right|^s \right| \leq \left( \frac{1}{2} \right)^j$$

Убедимся, что ряд из логарифмов равномерно сходится:

$$\left| \sum_{j > N} \sum_{s \geq j} \frac{1}{s} \left( \frac{z}{a_j} \right)^s \right| \leq \sum_{j > N} \left( \frac{1}{2} \right)^j \leq 1$$

Получается, данное произведение  $\prod_{j \geq 0} u_j(z)$  подходит.  $\square$

## Лекция XI

26 апреля 2024 г.

### 1.10.2 Упрощённый вид множителей Вейерштрасса

Если известно, насколько быстро происходит стремление  $|a_j| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ , то можно утверждать наличие сходимости и при множителях Вейерштрасса более простого вида.

1. Если  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{|a_n|} < \infty$ , то никаких премудростей не надо:  $\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right)$  сходится.

*Доказательство.* Зафиксируем  $N \in \mathbb{N}$ , и рассмотрим компакт  $K := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{1}{2} a_N \right\}$ . Надо доказать, что  $\sum_{j \geq N} \log\left(1 - \frac{z}{a_j}\right)$  сходится.

Под логарифмом стоят выражения вида  $1 - t$ , где  $|t| \leq \frac{1}{2}$ . Разложим в ряд и оценим:  $|\log(1 - t)| = \left| t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots \right| = \left| t \left( 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \dots \right) \right| \leq |t| \cdot C$ , где  $C := \sum_{n \geq 1} \frac{(1/2)^{n-1}}{n}$ . Этой оценки достаточно:  $\sum_{j \geq N} \left| \log\left(1 - \frac{z}{a_j}\right) \right| \leq \sum_{j \geq N} C \left| \frac{z}{a_j} \right|$ , что сходится равномерно по  $z \in K$ .  $\square$

2. Если  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{|a_n|^2} < \infty$ , то хватит первого члена при разложении логарифма в ряд:  $\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) e^{\frac{z}{a_j}}$  сходится.

*Доказательство.* Зафиксируем  $N \in \mathbb{N}$ , и рассмотрим компакт  $K := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{1}{2} a_N \right\}$ . Надо доказать, что  $\sum_{j \geq N} \log\left(1 - \frac{z}{a_j}\right) + \frac{z}{a_j}$  сходится.

Разложим в ряд и оценим:  $|\log(1 - t) + t| = \left| \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \dots \right| = t^2 \left| \frac{1}{2} + \frac{t}{3} + \frac{t^2}{4} + \dots \right| \leq t^2 \cdot C$ , где  $C := \sum_{n \geq 0} \frac{(1/2)^n}{n+2}$ . Этой оценки достаточно:  $\sum_{j \geq N} \left| \log\left(1 - \frac{z}{a_j}\right) + \frac{z}{a_j} \right| \leq \sum_{j \geq N} C \left| \frac{z}{a_j} \right|^2$ , что сходится равномерно по  $z \in K$ .  $\square$

*Замечание.* Понятно, что целая функция с данным мультимножеством нулей не единственна — можно взять любую другую целую функцию без нулей (скажем, экспоненту), и домножить на неё.

**Следствие 1.10.1.** Пусть  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  — целая функция с бесконечным числом нулей, и  $g$  — произведение Вейерштрасса по нулям функции  $f$  (неважно, общего вида, или с упрощёнными множителями).

Тогда  $\exists$  целая  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ :  $f = ge^h$ .

*Доказательство.*  $\frac{f}{g}$  — целая функция (там, где у  $g$  нули, у  $f$  — нули той же кратности, поэтому все особенности устранимы). По той же причине  $\forall z \in \mathbb{C} : \frac{f}{g}(z) \neq 0$ . Тем самым, у неё есть ветвь логарифма, выберем какую-то ветвь  $h$ , она как раз подходит.  $\square$

Пусть  $G$  — область,  $f$  аналитична в  $G$  кроме некоторого множества полюсов. Такая функция называется *мероморфной в  $G$* . Так как полюса по определению изолированы, то их не более, чем счётное количество.

Мероморфную в  $\mathbb{C}$  функцию называют *мероморфной* (без указания области).

**Следствие 1.10.2.**  $f$  мероморфна  $\iff \exists$  целые  $g_1, g_2 : f = \frac{g_1}{g_2}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $\frac{1}{f}$ . Она не равна тождественно нулю.

Пусть  $g_2 := g$  — произведение Вейерштрасса по нулям функции  $\frac{1}{f}$ ,  $g_1 := g \cdot f$  — целая функция.  $\square$

### 1.10.3 Разложение синуса в произведение

Разложим синус в произведение, построив произведение Вейерштрасса по его нулям. А где нули синуса?  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$ .

$$\sin z = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1 \iff z \in \{j \cdot \pi | j \in \mathbb{Z}\}$$

Как видим, сумма обратных квадратов нулей сходится, поэтому можно записать произведение Вейерштрасса в виде

$$z \cdot \prod_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{j\pi}\right) e^{\frac{z}{j\pi}}$$

где произведение берётся в порядке возрастания модулей  $j$ . Иными словами,

$$z \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\substack{|j| \leq N \\ j \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{j\pi}\right) e^{\frac{z}{j\pi}} = z \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right) = z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$$

Как мы выяснили,  $\exists$  целая  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : \sin(z) = e^{h(z)} z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$

**Факт 1.10.1.**  $h \equiv 0$  подойдёт (понятно, что если это правда, то  $h \equiv 2\pi i k$  для  $k \in \mathbb{Z}$  тоже подойдёт).

*Доказательство.*

*Замечание* (О логарифмической производной). Пусть  $\phi$  — аналитическая функция, как известно, её логарифмическая производная  $\frac{\phi'}{\phi}$ . Как видно из записи, она не зависит от того, какая ветвь логарифма где взята.

Если  $\phi = \phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_k$ , то несложно посчитать, что  $\frac{\phi'}{\phi} = \frac{\phi'_1}{\phi_1} + \dots + \frac{\phi'_k}{\phi_k}$ . Утверждается, что формула сохраняется и для бесконечного произведения.

Пусть произведение  $\prod_{j=1}^{\infty} \phi_j(z)$  сходится равномерно на любом компакте, не содержащем нулей функций  $\phi_j$ . Пусть  $K$  — такой компакт, то есть  $(\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_n)(z) \rightrightarrows \phi(z)$  равномерно. Тогда  $(\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_n)'(z) \rightrightarrows \phi'(z)$  на этом же компакте, и как следствие,  $\frac{\phi'_1(z)}{\phi_1(z)} + \dots + \frac{\phi'_N(z)}{\phi_N(z)} = \frac{(\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_N)'(z)}{(\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_N)(z)} \rightrightarrows \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$

- Возьмём логарифмическую производную обеих частей равенства  $\sin(z) = e^{h(z)} \cdot z \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\substack{|j| \leq N \\ j \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{j\pi}\right)$ :

$$\frac{\cos z}{\sin z} = h'(z) + \frac{1}{z} - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{|j| \leq N \\ j \neq 0}} \frac{1}{j\pi} \frac{1}{1 - \frac{z}{j\pi}} = h'(z) + \frac{1}{z} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{|j| \leq N \\ j \neq 0}} \frac{1}{z - j\pi}$$

Отлично, у нас имеется равномерная сходимость на компактах, продифференцируем ещё раз:

$$1 - \operatorname{ctg}(z)^2 = h''(z) - \frac{1}{z^2} - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{|j| \leq N \\ j \neq 0}} \frac{1}{(z - j\pi)^2}$$

- Проведём окружность  $\Gamma_k$  с центром в нуле, и радиусом  $\pi(k + \frac{1}{2})$ , и докажем, что  $h''$  ограничена на  $\Gamma_k$  некоторой константой  $C$ , не зависящей от  $k$ .

Понятно  $\frac{1}{|z|^2} \leq \frac{4}{\pi^2}$ , оценим при  $z \in \Gamma_k$ :  $\frac{1}{|z - j\pi|^2} \leq \frac{1}{(k + \frac{1}{2} - |j|)^2 \pi^2}$ :



Осталось оценить котангенс:

$$\operatorname{ctg}(z) = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

Раскладывая  $z = x + iy$ , получаем

$$|\operatorname{ctg}(z)| = \left| \frac{e^{-y}e^{ix} + e^ye^{-ix}}{e^{-y}e^{ix} - e^ye^{-ix}} \right|$$

Выберем  $\varepsilon < \frac{\pi}{4}$ , и оценим котангенс вблизи вещественной оси (на красных дужках  $\Gamma_k$ ) при помощи периодичности и непрерывности котангенса в круге радиуса  $2\varepsilon$ , там он ограничен, и при  $|y| \geq \varepsilon$  на синих дужках:

$$\left| \frac{e^{-y}e^{ix} + e^ye^{-ix}}{e^{-y}e^{ix} - e^ye^{-ix}} \right| \leq \frac{e^y + e^{-y}}{|e^{-y} - e^y|} = \frac{e^y + e^{-y}}{e^{|y|} - e^{-|y|}} = \frac{e^{2|y|} + 1}{e^{2|y|} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{2|y|} - 1} \leq 1 + \frac{2}{e^{2\varepsilon} - 1}$$

- Тем самым, на  $\Gamma_k$ :  $h''$  ограничена  $C$ , по принципу максимума  $h''$  ограничена внутри круга этой же константой, значит,  $h''$  вообще ограничена.

Согласно теореме Лиувилля,  $h'' = \text{const}$ , тем самым,  $h(z) = A + Bz + Cz^2$  для некоторых  $A, B, C \in \mathbb{C}$ .



- Подставим  $h(z) = A + Bz + Cz^2$ :

$$\frac{\cos z}{\sin z} = B + 2Cz + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|j| \leq N} \frac{1}{z - j\pi}$$

Здесь все слагаемые  $2\pi$ -периодичны, кроме  $2Cz$ . Вывод один:  $C = 0$

- Теперь подставим  $\frac{\sin z}{z} = e^{A+Bz} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$ . В силу чётности  $B = 0$ .
- Обозначим  $D := e^A$ .  $\frac{\sin z}{z} = D \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$ . Сопоставляя значения в 0, получаем  $D = 1$ .  $\square$

Ура,

$$\sin z = z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)$$

Попутно мы выяснили, что

$$\operatorname{ctg}(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|j| \leq N} \frac{1}{z - j\pi} = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - j^2\pi^2}$$

Ещё немного преобразуем:

$$\frac{\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}}{2z} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - j^2\pi^2}$$

Устремим в этой формуле  $z \rightarrow 0$ . Слева оказывается  $\frac{z \cos z - \sin z}{2z^2 \sin z} = \frac{z - \frac{z^3}{2} - z + \frac{z^3}{6} + \mathcal{O}(z^5)}{2z^3 + \mathcal{O}(z^5)} = -\frac{1}{6} + o(1)$ , а справа  $-\frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} + o(1)$ , образуя знаменитую формулу, выведенную Эйлером

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

#### 1.10.4 Г-функция Эйлера

Хотим обобщить факториал в комплексной плоскости.

Построим аналитическую функцию  $f$  в некоторой области  $G$  (где  $G$  хочется побольше), такую, что

1.  $z \in G \Rightarrow z + 1 \in G$ .
2.  $f(z + 1) = zf(z)$  — эта формула отличается от той, что у факториала, сдвигом на 1. В таком виде ответ будет более каноничным.
3.  $1 \in G$  и  $f(1) = 1$ .

Для удовлетворяющей таким условиям функции  $f$  можно заметить, что  $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = (n - 1)!$ .

Дополнительно потребуем  $\forall z \in G : f(z) \neq 0$ , например, чтобы можно было спокойно писать  $z = \frac{f(z+1)}{f(z)}$ .

К сожалению, не всё возможно в этой жизни. Заведомо  $0 \notin G$ : если  $0 \in G$ , то  $f(1) = f(0 + 1) = 0 \cdot f(0) = 0$ . Далее первое условие влечёт, что  $-1, -2, -3, \dots \notin G$ .

Положим  $G := \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ , и построим в этой области функцию с указанными свойствами, имеющую простые полюса в выколотых точках. Она не единственна, но сейчас мы увидим наиболее естественный кандидат.

Пусть  $f$  — такая. Положим  $g := \frac{1}{f}$  — целая функция с простыми нулями в  $\{0, -1, -2, \dots\}$ . Построим  $g$ , используя множители Вейерштрасса ( $h$  — какая-то целая):

$$g(z) = ze^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

Теперь удовлетворим функциональное уравнение:  $g(z+1) = \frac{g(z)}{z}$ .

$$\begin{aligned} g(z) &= ze^{h(z)} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \frac{n+z}{n} e^{-\frac{z}{n}} \\ g(z+1) &= (z+1)e^{h(z+1)} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \frac{1+n+z}{n} e^{-\frac{z}{n} - \frac{1}{n}} \\ \frac{g(z+1)}{g(z)} &= \frac{z+1}{z} e^{h(z+1)-h(z)} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1+z}{1+z} e^{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\dots-\frac{1}{N}+\log N} e^{-\log N} \end{aligned}$$

Как доказывалось во II семестре,  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} - \log N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \gamma$  — *постоянная Эйлера — Маскерони*. Итак, от функции  $h$  хочется свойства

$$\frac{1}{z} = \frac{z+1}{z} e^{h(z+1)-h(z)} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1+z}{N(1+z)} e^{-\gamma} = \frac{1}{z} e^{h(z+1)-h(z)} e^{-\gamma}$$

Самым простым решением будет взять линейную функцию  $h(z) = \gamma z$ . Получили

$$g(z) = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

Проверим, что  $g(1) = 1$ :

$$\begin{aligned} g(1) &= e^{\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} = e^{\gamma} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (N+1)}{N!} e^{-1-\frac{1}{2}-\dots-\frac{1}{N}} = \\ &= e^{\gamma} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(N+1)!}{N! \cdot N} e^{-1-\frac{1}{2}-\dots-\frac{1}{N}+\log N} = e^{\gamma} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{N} e^{-1-\frac{1}{2}-\dots-\frac{1}{N}+\log N} = 1 \end{aligned}$$

Чудесным образом ничего подкручивать не пришлось.

## Лекция XII

3 мая 2024 г.

Итак, определили

$$\Gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{z} e^{-\gamma z} \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}} \quad (*)$$

*Замечание.* Пусть  $\phi$  — целая функция с периодом 1 и  $\phi(1) = 1$ . Тогда  $\Gamma \cdot \phi$  тоже подходит, как функция, удовлетворяющая трём условиям из (подраздел 1.10.4), однако, при некотором дополнительном условии мы можем получить «единственность» (см. теорема 1.10.2).

Немного преобразовав выражение для гамма-функции, можно получить следующее:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= e^{-\gamma z} \frac{1}{z} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{(1+z) \cdot \dots \cdot (N+z)} e^{z(1+\dots+\frac{1}{N})} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N! \cdot e^{z \log N}}{z \cdot (1+z) \cdot \dots \cdot (N+z)} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N! \cdot N^z}{z(1+z) \dots (N+z)} \end{aligned}$$

Также имеется так называемая *формула дополнения*:

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{1}{z^2} \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})} = -\frac{1}{z} \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Часто её записывают немного в другом виде, домножив на  $z$ , и воспользовавшись функциональным уравнением:  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ . Кстати, отсюда видно, чему равен «факториал» от  $-\frac{1}{2}$ :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$$

Определим  $g(z) := \frac{1}{\Gamma(z)}$ , это целая функция с нулями в целых неположительных точках. Значит, у  $g$  имеется непрерывная ветвь логарифма в  $\mathbb{C} \setminus (-\infty; 0]$ . Одна из них равна

$$\log g(z) = \log z + \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \log\left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n} \right)$$

Про эту ветвь даже можно утверждать, что она главная, так как у неё, как и у гамма-функции, значения на вещественной оси вещественные. Дифференцируя  $\log g(z)$ , получаем

$$(\log g(z))' = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{z}{n}} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right)$$

Таким образом,  $(\log \Gamma(z))' = -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right)$ , и

$$(\log \Gamma(z))'' = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2} \quad (\star)$$

**Следствие 1.10.3.** На  $\mathbb{R}_{>0}$ :  $\log \Gamma(z)$  есть выпуклая функция.

**Теорема 1.10.2.** Пусть  $\phi$  — непрерывная положительная функция на  $\mathbb{R}_{>0}$ ,  $\phi(1) = 1$ , и  $\phi$  удовлетворяет функциональному уравнению:  $\forall x \in \mathbb{R}_{>0} : x\phi(x) = \phi(x+1)$ . Если  $\log \phi$  выпукла, то  $\forall x > 0 : \phi(x) = \Gamma(x)$ .

*Доказательство.* В положительных целых точках  $\phi(n) = (n-1)!$ , и достаточно доказать, что  $\phi(x) = \Gamma(x)$  при всех  $x \in (0, 1)$ , функциональное уравнение влечёт равенство в остальных точках.

Определим  $g(x) := \log \phi(x)$ , тогда функциональное уравнение переписывается в виде  $g(x+1) - g(x) = \log x$ . Из выпуклости  $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1, \forall x \in (0, 1)$ :

$$\underbrace{\frac{g(n-1) - g(n)}{(n-1) - n}}_{\log(n-1)} \leq \frac{g(n+x) - g(n)}{(n+x) - n} \leq \underbrace{\frac{g(n+1) - g(n)}{(n+1) - n}}_{\log(n)}$$

Преобразуем средний член неравенства:

$$g(x+n) - g(n) = \sum_{k=0}^{n-1} (g(x+k+1) - g(x+k)) + g(x) - g(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \log(x+k) + g(x) - \log((n-1)!)$$

Выражая  $g(x)$ , получаем

$$x \log(n-1) - \sum_{k=0}^{n-1} \log(x+k) + \log((n-1)!) \leq g(x) \leq x \log(n) - \sum_{k=0}^{n-1} \log(x+k) + \log((n-1)!)$$

Разность между левой и правой частями  $x \log(n-1) - x \log(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Понятно, что  $g(x) = \log \Gamma(x)$  подходит, так как удовлетворяет посылке теоремы, и так как разность между пределами стремится к нулю, то в пересечении всего одна точка. Тем самым,  $g(x)$  определена однозначно.  $\square$

### 1.10.5 Эйлеров интеграл

Определим

$$\Psi(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{C}$$

Когда  $\Psi$  определена, а интеграл сходится? Разложим  $z = x + iy$ , где  $x, y \in \mathbb{R}$ . Теперь  $\Psi(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} t^{iy} dt$ . На  $+\infty$  экспонента мажорирует остальные члены, в нуле имеется особенность, и интеграл суммируем, если  $x > 0$ .

Тем самым,  $\Psi(z)$  определена при  $\Re z > 0$ .

**Теорема 1.10.3.**  $\Psi(z) = \Gamma(z)$  при  $z > 0$ .

*Доказательство.*

- Ясно, что  $\Psi(z) > 0$  при  $z \in \mathbb{R}_{>0}$ .
- $\Psi$  аналитична при  $\Re z > 0$ , так как можно продифференцировать под знаком интеграла: производная суммируема.
- $\Psi(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = (-e^{-t})|_0^{\infty} = 1$ .
- Убедимся, интегрируя по частям, что  $x\Psi(x) = \Psi(x+1)$

$$\Psi(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = - \int_0^{\infty} t^x d(e^{-t}) = - (t^x e^{-t})|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt = x\Psi(x)$$

- Убедимся, что  $\log \Psi$  выпукла на вещественной оси:  $\forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}, \forall \alpha, \beta \in [0, 1], \alpha + \beta = 1$ :

$$\log \Psi(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \log \Psi(x) + \beta \log \Psi(y)$$

$$\Psi(\alpha x + \beta y) \leq \Psi(x)^{\alpha} \Psi(y)^{\beta}$$

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha x + \beta y - 1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} (t^{x-1})^{\alpha} \cdot (t^{y-1})^{\beta} e^{-t} dt$$

что верно по неравенству Гёльдера.

- Согласно теореме единственности (теорема 1.10.2),  $\Psi(z) = \Gamma(z)$  при  $\Re z > 0$ . □

В частности, получаем интеграл Гаусса:

$$\sqrt{\pi} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \left\| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right\| = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

### 1.10.6 Формула Стирлинга

На первом курсе мы доказали, что  $\exists c \in \mathbb{R} : n! \sim c\sqrt{n}n^n e^{-n}$ . Так как гамма-функция определена со сдвигом, то будем преобразовывать выражение для  $(n-1)!$ :

$$\begin{aligned} (n-1)! &\sim c\sqrt{n-1}(n-1)^{n-1}e^{-n+1} = ce^{\frac{1}{\sqrt{n-1}}}(n-1)^n e^{-n} = \\ &= ce^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n n^n e^{-n} \sim c\frac{1}{\sqrt{n}}n^n e^{-n} \end{aligned}$$

**Теорема 1.10.4.** Пусть  $\phi > 0$ . Для  $\{z \in \mathbb{C} | \arg z \in (-\pi + \phi, \pi - \phi)\}$ , то есть из области без угла:



$$\log(\Gamma(z)) = \log \sqrt{2\pi} + \log \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} - z + z \log z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

Здесь логарифм и корень определены в  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , вещественные на вещественной оси. Потенцируя, получаем  $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} e^{-z} e^{z \log z}$

*Доказательство.* Будем использовать  $(\star)$ . Положим  $\phi(t) := \frac{1}{(t+z)^2}$ , и приблизим  $\sum_{n=1}^{\infty} \phi(n)$  интегралом. Оценим, что при замене погрешность не очень большая:

$$\phi(n) - \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \phi(t) dt = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\phi(n) - \phi(t)) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (2\phi(n) - \phi(n+t) - \phi(n-t)) dt$$

Тем самым,  $\phi(n) = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \phi(t) dt + \int_0^{\frac{1}{2}} (2\phi(n) - \phi(n+t) - \phi(n-t)) dt$ , и согласно  $(\star)$ :

$$(\log \Gamma(z))'' = \frac{1}{z^2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{(t+z)^2} dt}_{\int_{1/2}^{\infty} \frac{1}{(t+z)^2} dt = \frac{1}{1/2+z}} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{(n+z)^2} - \frac{1}{(n+z+t)^2} - \frac{1}{(n+z-t)^2} \right) dt$$

Дважды почленно возьмём первообразную обеих частей, пока не заботясь вопросами сходимости:

$$\begin{aligned} (\log \Gamma(z))' &\stackrel{?}{=} A - \frac{1}{z} + \log \left( z + \frac{1}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{n+z+t} + \frac{1}{n+z-t} - \frac{2}{n+z} \right) dt \\ \log(\Gamma(z)) &\stackrel{?}{=} B + Az - \log z + \log \left( z + \frac{1}{2} \right) \left( z + \frac{1}{2} \right) - z + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \log \frac{(n+z)^2 - t^2}{(n+z)^2} dt \end{aligned}$$

Так как  $z$  бегает в области без угла, то  $|n+z| \geq n \sin(\phi)$ . Таким образом,  $\log \left( 1 - \frac{t^2}{(n+z)^2} \right)$  оценивается сверху, и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \log \left( 1 - \frac{t^2}{(n+z)^2} \right)$  сходится абсолютно и равномерно. В частности, сходится равномерно на компактах, значит, его можно дважды продифференцировать почленно, получится  $(\log \Gamma(z))''$ . Вопросы сходимости решены,  $\stackrel{?}{=}$  можно заменить на  $=$ . Оценим остаток:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \log \left( 1 - \frac{t^2}{(n+z)^2} \right) dt \leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+|z|)^2} \leq C_2 \int_1^{\infty} \frac{ds}{(s+|z|)^2} \leq C_3 \frac{1}{|z|}$$

Заметим, что  $\log \left( z + \frac{1}{2} \right) - \log(z) = \log \left( 1 + \frac{1}{2z} \right) = \frac{1}{2z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$ , и преобразуем

$$\left( z + \frac{1}{2} \right) \log \left( z + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + z \log z + \frac{1}{2} \log z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

Тем самым,

$$\log(\Gamma(z)) = B + Az - \frac{1}{2} \log z + z \log z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

Осталось выяснить, чему равны константы  $A$  и  $B$ . Так как мы знаем для натуральных  $n$ , что  $\Gamma(n) = (n-1)! \sim ce^{-n} \frac{1}{\sqrt{n}} n^n$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $A = -1$ .

Теперь запишем формулу дополнения  $\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin(\pi z)}$ . Так как  $\Gamma$  вещественна на вещественной оси, или из интегральной формулы, видно, что  $\Gamma(z) = \overline{\Gamma(\bar{z})}$ . Тем самым, при  $y \in \mathbb{R}$ :

$$|\Gamma(iy)|^2 = -\frac{\pi}{iy \sin(\pi iy)} = -\frac{2\pi}{y(e^{-y\pi} - e^{y\pi})} \sim \frac{2\pi}{ye^{y\pi}}$$

С другой стороны,  $\Gamma(iy) \sim e^B e^{-iy} e^{-\frac{1}{2}(\log y + \frac{\pi}{2}i)} e^{iy(\log y + \frac{\pi}{2}i)}$ , откуда  $|\Gamma(iy)| = e^B \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{\pi}{2}y}$ . Тем самым,  $e^{2B} = 2\pi$ , и так как  $B \in \mathbb{R}$ , то  $B = \log \sqrt{2\pi}$   $\square$

## Лекция XIII

10 мая 2024 г.

### 1.11 Аналитическое продолжение

Ещё с первого курса мы знаем, что аналитическая функция однозначно задаётся своими значениями на множестве, содержащем предельную точку. Допустим, мы знаем функцию в маленькой кучочке  $\mathbb{C}$ , пусть даже в маленькой открытой области. А как (и можно ли) узнать её «целиком»?

*Примеры.*

- Ряд  $1 + z + z^2 + \dots$  сходится в единичном круге  $\mathbb{D}$ , но на самом деле сумма равна  $\frac{1}{1-z}$ , и эта функция аналитична в множестве  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{1\}$ .
- На предыдущей лекции мы поняли, что  $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ , где интеграл сходится при  $\Re z > 0$ . А про саму  $\Gamma$  мы знаем, что она определена в  $\mathbb{C} \setminus \{-n | n \in \mathbb{N}_0\}$ .
- Про  $\zeta$ -функцию Римана  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$  легко показать, что ряд сходится при  $\Re s > 1$ . Тем не менее, её тоже можно продолжить почти на всю комплексную плоскость ( $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ ).

Пусть  $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$  — области. Пусть  $f_1 : G_1 \rightarrow \mathbb{C}$  аналитична, и предположим, что  $G_1 \cap G_2$  непусто.

**Определение 1.11.1** (Аналитическое продолжение  $f_1$  в область  $G_2$ ). Такая аналитическая  $f_2 : G_2 \rightarrow \mathbb{C}$ , что  $f_1|_{G_1 \cap G_2} = f_2|_{G_1 \cap G_2}$ .

Здесь существенно, что не факт, что  $G_1 \subset G_2$ . Так, при продолжении функции с  $G_1$  на  $G_2$ , с  $G_2$  на  $G_3$ , с  $G_3$  на  $G_4$ , а с  $G_4$  на  $G_1$  может получиться так, что на пересечении  $G_1 \cap G_4$ :  $f_1 \neq f_4$ .



Также может не наблюдаться связности пересечения  $G_1 \cap G_2$ .

Несложно придумать функцию, которая не продолжается за пределы данной области (скажем, круга  $\mathbb{D}$ ).

**Теорема 1.11.1** (Адамар, «естественная граница аналитичности»). Нельзя продолжить  $f(z) = \sum_{n=1}^\infty z^{n!}$  ни в какую область  $G$ , такую, что  $G \setminus \overline{\mathbb{D}}$  непусто.

*Доказательство.* Пусть  $f$  продолжается в некоторую область  $G$ , как в условии.



Значит, на выделенной дуге (какой-то дуге из пересечения)  $f$  должна быть непрерывна, и для любой  $\zeta$  на дуге должен существовать предел  $\lim_{r \rightarrow 1-0} f(r\zeta)$ . Запишем  $\zeta = e^{2\pi i \theta}$ , и выберем такое  $\zeta$ , чуть подвинув в случае надобности, что  $\theta \in \mathbb{Q}$ . Пусть  $\theta = \frac{k}{l}$ , где  $k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N}$ . Теперь

$$f(r\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{n!} e^{2\pi i \theta n!} = \sum_{n=0}^l r^{n!} e^{2\pi i \theta n!} + \sum_{n=l+1}^{\infty} r^{n!} e^{2\pi i \frac{k}{l} n!} = \sum_{n=0}^l r^{n!} e^{2\pi i \theta n!} + \sum_{n=l+1}^{\infty} r^{n!}$$

Так как  $r^{n!} \xrightarrow{r \rightarrow 1-0} 1$ , то сумма расходится. Тут, кстати, можно применить теорему Леви:  $\sum_{n=l+1}^{\infty} r^{n!}$  — интеграл от  $r^{n!}$  по  $n \in \mathbb{N}$  и считающей мере — сходится к сумме единиц  $\sum_{n=l+1}^{\infty} 1$  при  $r \rightarrow \infty$ . Впрочем, и без неё всё видно.  $\square$

Пусть  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  — целая функция. Рассмотрим другую функцию  $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ . Она целая: так, если  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , то новая функция задаётся рядом  $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n z^n$ .

**Следствие 1.11.1.** Если  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  — целая, и  $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ , то  $\overline{f(\bar{z})} = f(z)$  по теореме единственности.

Если же  $f : (G \subset \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ , то  $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$  задана и аналитична в  $\{\bar{z} | z \in G\}$ . Это видно из того, что если  $w_0 \in \{\bar{z} | z \in G\}$ , то  $\bar{w}_0 \in G$ , и можно разложить  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \bar{w}_0)^n$  вблизи  $\bar{w}_0$ , откуда  $\overline{f(\bar{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n (z - w_0)^n$ .

### 1.11.1 Принцип симметрии Римана — Шварца

**Теорема 1.11.2.** Пусть область  $G \subset \mathbb{C}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} | \Im z > 0\}$ , такова, что  $\bar{G} \cap \mathbb{R} =: I$  — отрезок ненулевой длины. Пусть  $f : \bar{G} \rightarrow \mathbb{C}$  аналитична в  $G$ , непрерывна в  $\bar{G}$ , и  $f(\bar{G} \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ .

Пусть  $\tilde{G} := G \cup I \cup \{\bar{z} | z \in G\}$ . Тогда  $\exists! \tilde{f} : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{C} : \tilde{f}$  — аналитическое продолжение  $f$  на  $\tilde{G}$ , и  $\tilde{f}$  задаётся формулой  $\forall z \in G \cup I : \begin{cases} \tilde{f}(z) = f(z) \\ \tilde{f}(\bar{z}) = \overline{f(z)} \end{cases}$ .

*Доказательство.* Очевидно, что так определённая  $\tilde{f}$  аналитична в  $\{\bar{z} | z \in G\}$ , и надо убедиться, что аналитичность имеет место на  $I$ . Несложно проверить, что  $\tilde{f}$  непрерывна на  $I$ :  $\tilde{f}|_{\bar{G}} = f|_{\bar{G}}$  непрерывна и  $\tilde{f}|_{\{\bar{z} | z \in \bar{G}\}}$  тоже, а  $\bar{G} \cup \{\bar{z} | z \in \bar{G}\}$  — фундаментальное покрытие  $\tilde{G}$ .

Теперь проверим, что дифференциальная форма  $\tilde{f}(z) dz$  замкнута в  $\tilde{G}$ , показав тем самым аналитичность  $\tilde{f}$ .



Всякий прямоугольник либо лежит в  $G \cup I$ , либо в  $\{\bar{z} | z \in G\} \cup I$ , либо разбивается в сумму двух таких. Интеграл формы по такому прямоугольнику равен нулю, так как можно чуть-чуть отойти от вещественной оси, и использовать непрерывность  $\tilde{f}$ .  $\square$

В данной формулировке принцип симметрии имеет не наибольшую общность. Во-первых, достаточно требовать, чтобы  $\bar{G} \cap \mathbb{R}$  было не отрезком, а лишь содержало некоторый отрезок.

Во-вторых, в качестве кривой, относительно которой происходит отражение, может выступать не вещественная прямая, а ещё что-то. В этом случае условия вещественности  $f$  на вещественной оси заменяются на некоторые «условия сопряжения», которые получаются из условий вещественности применением однолистного отображения, переводящего кривую отражения в  $\mathbb{R}$ .



### 1.11.2 Методы аналитического продолжения

«В этом месте обычно делают такой заголовок, но собственно методов там и нет, кроме одного».

#### 1. Переразложение в степенной ряд.

Пусть  $z_0, z_1 \in G$ ,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  аналитична. Тогда можно переразложить  $f$  в ряд в точке  $z_1$ , и может так получиться, что радиус сходимости будет больше, чем  $\text{dist}(z_0, \partial G)$ , то есть получится существенное продолжение  $f$ . Скажем, если  $1 + z + z^2 + \dots = \frac{1}{1-z}$  ( $z_0 = 0$ ) переразложить в ряд в  $z_1 = -\frac{1}{2}$ , то радиус сходимости будет уже  $\frac{3}{2}$ .

#### 2. Продолжение вдоль цепочки областей.

Пусть  $G_1, \dots, G_n$  — области,  $G_j \cap G_{j+1}$  непусты и связны, и заданы  $f_1, \dots, f_n$ , где  $f_j : G_j \rightarrow \mathbb{C}$  аналитична. Конечно, предполагается согласованность  $f_j|_{G_j \cap G_{j+1}} = f_{j+1}|_{G_j \cap G_{j+1}}$ . Говорят, что  $f_n$  является продолжением  $f_1$  вдоль цепочки областей  $G_1, \dots, G_n$ .

#### 3. Продолжение вдоль пути.

На самом деле, этот метод эквивалентен предыдущему.

**Определение 1.11.2** (Элемент аналитической функции в точке  $z_0$ ). Пара  $(f, B_{z_0})$ , где  $B_{z_0}$  — открытый круг с центром в  $z_0$  и  $f : B_{z_0} \rightarrow \mathbb{C}$  аналитична.

Пусть  $f$  определена и аналитична в точке  $z_0$ . Её можно разложить в ряд с центром в точке  $z_0$ , и рассмотреть радиус сходимости.

**Определение 1.11.3** (Естественный элемент в точке  $z_0$ ). Такой элемент  $(f, B_{z_0})$ , что  $B_{z_0}$  — круг максимально возможного радиуса.

Центр и радиус круга  $B_{z_0}$  элемента  $(f, B_{z_0})$  называются *центром и радиусом элемента*. Далее везде считаем, что у  $f$  есть особенности где-то в  $\mathbb{C}$ , значит, все круги из естественных элементов имеют конечный радиус. Иначе  $f$  целая, и в любой точке естественный элемент определён на всей плоскости.

Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  — путь без задержек (нет невырожденных отрезков, на которых путь постоянен). Условие необязательное, но его всегда можно добиться, стягивая отрезки, на которых путь постоянен, до одной точки.



Пусть  $A = \gamma(a), B = \gamma(b)$ . Не исключено, что  $A = B$  — путь может иметь самопересечения и прочее.

Пусть  $\forall t \in [a, b]$  задан естественный элемент  $(f_t, B_{\gamma(t)})$  аналитической функции. Эти элементы должны быть некоторым образом связаны: пусть  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  — *связывающая функция*, такая, что  $\forall t \in [a, b] : \exists \delta > 0 : |s - t| < \delta \Rightarrow \phi(s) = f_t(\gamma(s))$ .

*Замечание.* Такая  $\phi$  автоматически непрерывна: из условия следует непрерывность в каждой точке:  $\gamma$  непрерывна, а  $f_t$  даже аналитична.

Говорят, что  $(f_b, B_{\gamma(b)})$  — *аналитическое продолжение элемента  $(f_a, B_{\gamma(a)})$  вдоль пути  $\gamma$* .

При продолжении некоторого элемента вдоль разных путей получится большой набор элементов, замещающих некоторую область. Совокупность таких элементов называется *полной аналитической функцией*, а объединение всех кругов, составляющих элементы — *естественной областью определения аналитической функции*.

*Пример.* Пусть  $f(z) = \sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \log(z)}$ , где в качестве  $\log$  выбрана главная ветвь логарифма (вещественная на вещественной оси, определённая на  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ).

Естественный элемент  $f$  в точке 1 имеет радиус 1 — расстояние до ближайшей особенности, которая имеет место в нуле.



Продолжим  $f$  вдоль пути  $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ , где  $t \in [0, 1]$ . Понятно, что связывающая точка в точке  $t$  должна принимать одна из значений корня  $\gamma(t)$ , подойдёт  $\phi(t) = e^{2\pi i \frac{t}{2}}$ . Продлевая  $f$  вдоль пути  $\gamma$ , получим ветвь корня, равную  $-1$  в 1. Обходя вдоль пути  $\gamma$  ещё раз (продлевая вдоль пути  $\gamma \oplus \gamma$ ), мы получим старую ветвь корня.

Если бы  $f$  была корнем кубическим, то надо было бы три раза обойти вокруг нуля, чтобы получить прежнюю ветвь корня. А у логарифма всякий раз при обходе вдоль нуля аргумент будет увеличиваться на  $2\pi i$ , и при продолжении по пути ненулевого индекса относительно нуля мы не получим прежнюю ветвь.

**Утверждение 1.11.1.** *Отношение «элемент аналитической функции  $\beta$  есть продолжение элемента  $\alpha$  вдоль некоторого пути» является отношением эквивалентности.*

*Доказательство.* Очевидно. □

Имея в виду это утверждение, получаем, что полная аналитическая функция — класс эквивалентных элементов. Полная аналитическая функция, построенная по корню из примера — набор функций вида  $e^{\frac{1}{2} \log z}$ , и значения зависят от того, какая ветвь логарифма выбрана, в каждой точке — два варианта. Естественная область определения корня —  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Утверждение 1.11.2.** *Методы продолжения вдоль цепочки областей и вдоль пути эквивалентны.*

В одну сторону понятно, как сводиться: пусть есть цепочка областей  $G_1, G_2, \dots, G_n$ , выберем по точке  $t_j \in G_j \cap G_{j+1}$ , и соединим последовательные точки  $t_j$  и  $t_{j+1}$  путём, проходящим по области

$G_{j+1}$ , получив путь от  $G_1$  до  $G_n$ :



В другую сторону хочется нарисовать подобную картинку, но будем чуть сложнее, так как путь может иметь самопересечения, и надо области получить такими, чтобы соседние пересекались, и содержали нужный отрезок пути в себе.

**Лемма 1.11.1.** Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  — путь без задержек, и  $(f_t, B_{\gamma(t)})$  — естественные элементы в точках  $\gamma(t)$  соответственно, реализующие аналитическое продолжение элемента  $(f_a, B_A)$  в элемент  $(f_b, B_B)$  со связывающей функцией  $\phi$ .

Пусть  $r(t)$  — радиус естественного элемента  $(f_t, B_{\gamma(t)})$  ( $r(t) < \infty$ ).

Тогда  $r$  непрерывна на  $[a, b]$ .

*Доказательство.* Пусть имеются два круга  $B(z_1, r_1)$  и  $B(z_2, r_2)$ , и пусть  $z_2 \in B(z_1, r_1)$ :



Предположим, что  $g$  аналитична в  $B(z_1, r_1) \cup B(z_2, r_2)$ . Если  $B(z_1, r_1)$  и  $B(z_2, r_2)$  — естественные элементы  $g$ , то  $g$  заведомо аналитична в  $B(z_2, r_1 - |z_1 - z_2|)$ , откуда  $r_2 \geq r_1 - |z_1 - z_2|$ . Иными словами,  $r_1 - r_2 \leq |z_1 - z_2|$ .

При этом, если  $|z_1 - z_2| < \frac{r_1}{2}$ , то  $r_2 \geq r_1 - |z_1 - z_2| \geq r_1 - \frac{r_1}{2} = \frac{r_1}{2}$ , в частности  $|z_1 - z_2| < r_2$ . Тем самым, верна и аналогичная оценка  $r_2 - r_1 \leq |z_1 - z_2|$ , тем самым,  $|r_1 - r_2| \leq |z_1 - z_2|$  (при  $|z_1 - z_2| < \frac{r_1}{2}$ ).

Теперь пусть  $t_0 \in [a, b]$ , и  $r_0$  — радиус элемента  $(f_{t_0}, B_{\gamma(t_0)})$ . Выберем  $\delta > 0$  так, что  $|t - t_0| < \delta \Rightarrow |\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \frac{r_0}{2}$ . Тогда из проделанной выше выкладки:  $|r(t) - r(t_0)| \leq |\gamma(t) - \gamma(t_0)|$ .  $\square$

## Лекция XIV

17 мая 2024 г.

Почему продолжение вдоль пути можно заменить продолжением вдоль цепочки областей?

Функция  $t \mapsto r(B_t)$  непрерывна, и всегда положительна, значит,  $s := \min_{t \in [a, b]} r(B_t) > 0$ . Выберем

$\delta > 0$ , и поделим отрезок точками  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  таким образом, что  $\text{osc}_{[t_j, t_{j+1}]} \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{|\gamma(x) - \gamma(y)| : x, y \in [t_j, t_{j+1}]\} < \delta$ . Пусть  $\delta$  настолько мало, что  $|\gamma(u) - \gamma(v)| < \delta \Rightarrow |r(u) - r(v)| < \frac{s}{10}$ .

Тогда цепочка кругов  $B_0, \dots, B_n$  с центрами в  $\gamma(t_j)$  такова, что  $B_j \cap B_{j+1} \neq \emptyset$ . Понятно, что продолжения вдоль пути  $\gamma$ , и вдоль цепочки кругов  $B_0, \dots, B_n$  совпадают.

**Теорема 1.11.3** (Продолжение вдоль пути единственно). Пусть  $D_t$  — элементы аналитических функций, образующие аналитическое продолжение вдоль  $\gamma$  с направляющей функцией  $\phi$ . Аналогично  $\tilde{D}_t$  — элементы вдоль  $\gamma$  с функцией  $\tilde{\phi}$ .

Если  $D_a = \tilde{D}_a$ , то  $\forall t \in [a, b] : D_t = \tilde{D}_t$  и  $\phi(t) \equiv \tilde{\phi}(t)$ .

*Доказательство.* Покажем, что  $\forall t \in [a, b] : \phi(t) = \tilde{\phi}(t)$ . Так как  $(B_a, f_a) = D_a = \tilde{D}_a = (\tilde{B}(a), \tilde{f}_a)$ , то при  $\tau$ , достаточно близких к  $a$ :  $\phi(\tau) = f_a(\gamma(\tau)) = \tilde{f}_a(\gamma(\tau)) = \tilde{f}_a(\gamma(\tau))$ , то есть в некоторой окрестности  $a$ :  $\phi = \tilde{\phi}$ .

Пусть  $\eta = \sup \left\{ \tau_0 \in [a, b] \mid \forall \tau \in [a, \tau_0] : \phi(\tau) = \tilde{\phi}(\tau) \right\}$ . Покажем, что  $\eta = b$  от противного. Рассмотрим элементы  $D_\eta = (B_\eta, f_\eta)$  и  $\tilde{D}_\eta = (\tilde{B}_\eta, \tilde{f}_\eta)$ . При достаточно близких  $\tau < \eta$ :  $\phi(\tau) = \tilde{\phi}(\tau)$ . Это множество — кусочек отрезка, имеющий предельную точку — значит,  $f_\eta = \tilde{f}_\eta$ , и  $\phi = \tilde{\phi}$  в некоторой окрестности  $\eta$ . Тем самым,  $\eta$  не супремум.  $\square$

Пусть  $D = (B, f)$  — элемент аналитической функции в точке  $\zeta$ .

**Определение 1.11.4** ( $z_0 \in \mathbb{C}$  — точка ветвления для полной аналитической функции, порождённой элементом  $D$ ). Такая точка  $z_0 \in \mathbb{C}$ , что  $\exists \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  — путь с началом и концом в  $\zeta$ , такой, что  $\text{Ind}_{z_0} \gamma \neq 0$ , и имеется аналитическое продолжение элемента  $D$  вдоль  $\gamma$  в элемент  $\tilde{D} \neq D$ .

## 1.12 Рациональные и полиномиальные приближения

Будем приближать функцию рациональными функциями, то есть элементами  $\mathbb{C}(t)$ . Нам будет достаточно правильных дробей, то есть частных многочленов  $\frac{p}{q}$ , где  $\deg p < \deg q$ . Используя разложение на простейшие дроби, можно показать, что любая функция раскладывается в сумму дробей вида  $\frac{C_j}{(z-z_j)^k}$ . Однако для приближений достаточно таких дробей, в которых степень знаменателя равна 1, так как можно немножко пошевелить множители в знаменателе, сделав их различными.

**Определение 1.12.1** (Рациональная дробь). Рациональная функция  $\sum_{j=1}^N \frac{C_j}{z-z_j}$ .

**Теорема 1.12.1** (Рунге). Пусть  $K$  — компакт на плоскости,  $f$  аналитична в окрестности  $K$ . Тогда она приближается рациональными дробями:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists R(z) = \sum_{j=1}^N \frac{C_j}{z-z_j}$  — рациональная дробь, такая, что все  $z_j \notin K$ , и  $\sup_{z \in K} |f(z) - R(z)| \leq \varepsilon$ .

Если  $\mathbb{C} \setminus K$  связно, то  $\forall \varepsilon > 0 : \exists p \in \mathbb{C}[z]$  — многочлен, точно так же приближающий  $f : \sup_{z \in K} |f(z) - p(z)| \leq \varepsilon$ , **но это мы доказать не успели**.

*Доказательство.* Напомним, что для дифференцируемой функции  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  определены операторы  $\frac{\partial}{\partial z}$  и  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ :  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{\partial g}{\partial y} \right)$  и  $\frac{\partial}{\partial z} g = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - i \frac{\partial g}{\partial y} \right)$ .

**Лемма 1.12.1** (Формула Помпейю). Пусть  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$  — бесконечно дифференцируемая (в вещественном смысле) функция с компактным носителем. Тогда  $\forall z \in \mathbb{C}$ :

$$\phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)}{z - \zeta} d\lambda_2(\zeta)$$

*Доказательство леммы.*

Например, если  $\phi$  — целая, то так как она из  $\mathcal{D}(\mathbb{C})$ , то по теореме Лиувилля она нуль, и интеграл тоже берётся от нуля.

Зафиксируем  $z \in \mathbb{C}$ . Пусть  $R > 0$  настолько велико, что  $\text{supp } \phi \subset B(z, R)$ . Введём полярные координаты с центром в  $z$ :  $\zeta - z = \rho e^{i\theta}$ , где  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\rho \in [0, R]$ . (Имеется некоторая неоднозначность, но она на множестве меры нуль, что не вносит никакого вклада). Пусть  $F(\rho, \theta) = \phi(\zeta) = \phi(z + \rho e^{i\theta})$ . Продифференцируем:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}} = F'_\rho \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}} + F'_\theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\zeta}}$$

Выразим  $\bar{\zeta} - \bar{z} = \rho e^{-i\theta}$ , откуда  $\rho^2 = (\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z})$ , и  $e^{2i\theta} = \frac{\zeta - z}{\bar{\zeta} - \bar{z}}$ . Теперь посчитаем производные  $\frac{\partial \theta}{\partial \bar{\zeta}}$  и  $\frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}}$ , дифференцируя по  $\bar{\zeta}$  эти равенства:

$$\begin{aligned} 2ie^{2i\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\zeta}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left( \frac{\zeta - z}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \right) = -\frac{(\zeta - z)}{(\bar{\zeta} - \bar{z})^2} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} i e^{-2i\theta} \frac{\zeta - z}{(\bar{\zeta} - \bar{z})^2} = \frac{1}{2} i e^{-2i\theta} \frac{\zeta - z}{\rho^2 e^{-2i\theta}} = \frac{i}{2} \frac{\zeta - z}{\rho^2} \\ 2\rho \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}} &= \zeta - z \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{e^{i\theta}}{2} \end{aligned}$$

Теперь осталось записать интеграл:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \phi(\zeta)}{z - \zeta} d\lambda_2(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{F'_\rho}{z - \zeta} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{F'_\theta}{z - \zeta} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\zeta}} d\lambda_2(\zeta) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R F'_\rho \frac{e^{i\theta}}{2(z - \zeta)} \rho d\rho d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} F'_\theta \cdot \frac{i}{2\rho^2} \rho d\theta d\rho \end{aligned}$$

Второй интеграл обращается в нуль, как интеграл производной по периоду:  $\int_0^{2\pi} F'_\theta d\theta = 0$ .

Первый же обращается в  $-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{F'_\rho}{2} d\rho d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\phi(z + Re^{i\theta}) - \phi(z)}{2} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(z) d\theta = \phi(z)$ .  $\square$

$f$  аналитична в окрестности  $K$ , то есть на открытом  $U \supset K$ .  $\exists$  компактное  $V \subset U : K \subset \text{Int } V$ :



Введём функцию  $h : V \cup (\mathbb{C} \setminus U) \rightarrow \mathbb{C}$ , такую, что  $h|_V = f, h|_{\mathbb{C} \setminus U} \equiv 0$ , и продолжим её по теореме Титце — Урысона (лемма 1.12.2) до некоторой непрерывной функции  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Подправим  $g$  до дифференцируемой:  $\tilde{g} := g * \alpha_t$ , где  $\alpha_t$  — стандартная аппроксимативная единица, построенная по  $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$ .

При достаточно малом  $t$  функция  $\tilde{g}$  аналитична в окрестности  $K$ : можно продифференцировать  $\int g(w - z) \alpha_t(z) dz$  по  $w$  под знаком интеграла. Выберем  $\varepsilon > 0$ , и будем считать, что  $\sup_K |f - \tilde{g}| < \varepsilon$ .

Запишем формулу (лемма 1.12.1):

$$\tilde{g}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \bar{z}}(\zeta)}{z - \zeta} d\lambda_2(\zeta)$$

Возьмём носитель подынтегрального выражения — некоторое компактное множество  $S$ , отделённое от  $K$  некоторым расстоянием  $d$ .

Покроем  $S = \bigsqcup_{j=1}^N S_j$ , где  $\text{diam } S_j < \varepsilon$ , и выберем произвольно  $\zeta_j \in S_j$ , дальше положим  $\lambda_j =$

$\frac{1}{\pi} \int_{S_j} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \bar{z}}(\zeta) d\lambda_2(\zeta)$ . Утверждается, что  $\sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j}{z - \zeta_j}$  хорошо приближает  $\tilde{g}$  на  $K$ :

$$\begin{aligned} \left| \tilde{g}(z) - \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j}{z - \zeta_j} \right| &= \left| \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{S_j} \left[ \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \bar{z}}(\zeta) - \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \bar{z}}(\zeta_j) \right] d\lambda_2(\zeta) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{S_j} \left| \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \bar{z}}(\zeta) \right| \cdot \frac{|\zeta - \zeta_j|}{|z - \zeta| \cdot |z - \zeta_j|} d\lambda_2(\zeta) \leq \underbrace{\frac{1}{\pi} \max_{\zeta \in S} \left| \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \bar{z}}(\zeta) \right|}_{\text{const}} \sum_{j=1}^N |S_j| \frac{\varepsilon}{d^2} \end{aligned}$$

при этом  $d$  тоже фиксировано. Выбирая достаточно малый  $\varepsilon$ , получаем достаточно хорошее приближение.  $\square$

**Лемма 1.12.2** (Теорема Титце — Урысона). Пусть  $X$  — нормальное топологическое пространство, замкнутое  $Y \subset X$ . Всякая ограниченная непрерывная функция  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  продолжается до непрерывной ограниченной (можно той же константой)  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ . (При этом можно заменить  $\mathbb{R}$  на  $\mathbb{C}$ , разбив функцию на вещественную и мнимую части, и, применив теорему для них отдельно, склеить их обратно.)

*Доказательство.* Можно считать, что  $-1 \leq f \leq 1$  всюду ( $|f| \leq 1$ ).

Пусть  $F_1 := \{x \in Y \mid f(x) \geq \frac{1}{3}\}$  и  $F_{-1} := \{x \in Y \mid f(x) \leq -\frac{1}{3}\}$ . По лемме Урысона,  $\exists g : X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция, такая, что  $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in F_1 \\ -\frac{1}{3}, & x \in F_{-1} \end{cases}$ , и всюду  $-\frac{1}{3} \leq g \leq \frac{1}{3}$ .

Рассмотрим  $f - g$  на  $Y$ . На  $F_1$  значения лежат в  $[0, \frac{2}{3}]$ , на  $F_2$  значения лежат в  $[-\frac{2}{3}, 0]$ , а на  $Y \setminus (F_1 \cup F_2)$  — по неравенству треугольника значения лежат в  $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ . Тем самым,  $\sup_{t \in Y} |f(t) - g(t)| \leq \frac{2}{3}$ . С другой стороны,  $\sup_{t \in X} |g(t)| \leq \frac{1}{3}$ .

Обозначим  $g_1 := g$ , и начнём итерироваться. Сначала найдётся  $g_2$ , такая, что  $|f(t) - g_1(t) - g_2(t)| \leq (\frac{2}{3})^2$  на  $Y$ , и  $|g_2(t)| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$  на  $X$ .

По индукции получим последовательность  $g_j : |g_j(t)| \leq \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^{j-1}$  и  $|f(t) - g_1(t) - \dots - g_j(t)| \leq (\frac{2}{3})^j$ .

Видно, что  $g(t) := \sum_{j \geq 1} g_j(t)$  подойдёт — ряд сходится равномерно, и  $|g(t)| \leq \frac{1}{3} \sum_{k \geq 0} (\frac{2}{3})^k = 1$ .  $\square$

**Интересный факт** (Формула Коши — Грина). Имеется область  $G$  с гладкой границей — набором путей  $\Gamma = \{\gamma_j\}$ , таких, что при обходе область остаётся слева.

Пусть  $\phi$  — гладкая функция в окрестности  $G$ . Тогда  $\forall z \in G : f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_G \frac{\bar{\partial} f(\zeta)}{z - \zeta} d\lambda_2(\zeta)$