Дифференицальная геометрия. Неофициальный конспект

Лектор: Нина Дмитриевна Лебедева
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

Глава 1

Риманова геометрия

Лекция I

14 февраля 2024 г.

1.1 Гладкие многообразия

Определение 1.1.1 (Топологическое многообразие)**.** Хаусдорфово топологическое пространство M со счётной базой, такое что $\forall x \in M : \exists U \ni x : U \sim \mathbb{R}^n$. Данное число n называется *размерностью* многообразия, пишут $\dim M = n$, или часто пишут это число верхним индексом: M^n.

Далее пусть M^n — топологическое многообразие.

Определение 1.1.2 (Карта)**.** Пара из открытого $U \subset M^n$, и гомеоморфизма $\phi : U \to \Omega$, где открытое $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. U называется *носителем карты*.

«В половине случаев в литературе картой называется обратное отображение».

Определение 1.1.3 (Атлас)**.** Набор карт (U_i, ϕ_i), таких, что $\bigcup\limits_i U_i = M$.

Пусть даны две карты (U, ϕ) и (V, ψ). Далее удобно считать, что их носители пересекаются: $U \cap V \neq \varnothing$, иначе определение не несёт смысла.

Определение 1.1.4 (Отображение перехода)**.** Отображение $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$. Обозначается $f_{\phi\psi}$

Определение 1.1.5 (Карты (U, ϕ) и (V, ψ) согласованы)**.** Отображение перехода и ему обратное гладкие.

Определение 1.1.6 (Гладкий атлас)**.** Атлас, такой, что любые две карты согласованы.

Далее все атласы предполагаются гладкими.

Определение 1.1.7 (Атласы эквивалентны)**.** Их объединение (то есть все карты из первого и из второго атласа вместе взятые) — тоже гладкий атлас.

Предложение 1.1.1. *Эквивалентность атласов — отношение эквивалентности.*

Определение 1.1.8 (Гладкая структура на многообразии)**.** Максимальный гладкий атлас (атлас, к которому нельзя добавить карт).

Замечание. К атласу можно добавить произвольное количество карт, согласованных с теми, что в атласе, и они будут согласованы между собой. В частности, для задания гладкой структуры достаточно произвольного атласа A: в A можно добавить всевозможные карты, согласованные с картами из A, и он станет максимальным.

Определение 1.1.9 (Гладкое многообразие)**.** Многообразие с гладкой структурой.

Примеры (Атласы).

- Стандартная гладкая структура на $\mathbb{R}^n$ задаётся атласом $\{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})\}$.
- В частности, стандартная структура на $\mathbb{R}^1$ задаётся атласом $\{(\mathbb{R}^1, [x \mapsto x])\}$.
- Можно задать нестандартную структуру на $\mathbb{R}^1$: $\{(\mathbb{R}^1, [x \mapsto x^3])\}$.

  Предостережение. Это действительно гладкая структура, хотя обратное отображение $[x \mapsto x^{1/3}]$ не гладкое. Тем не менее, определение и не требует гладкости от него.
- Пусть $f = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ \frac{1}{2}x, & x \leqslant 0 \end{cases}$. Тогда $\{(\mathbb{R}^1, f)\}$ — тоже гладкий атлас на $\mathbb{R}^1$.

  Тем не менее, любые два атласа из приведённых выше атласов на $\mathbb{R}^1$ не эквивалентны — отображения перехода получаются не гладкими.
- Гладкая структура на сфере задаётся двумя картами: пусть S^2 — сфера с северным полюсом N и южным S, пусть f, g — стереографические проекции с данными полюсами. Тогда $\{(S^2 \setminus \{N\}, f), (S^2 \setminus \{S\}, g)\}$ — атлас.

Замечание. Если M — гладкое многообразие, и открытое $W \subset M$, то на W естественным образом определена гладкая структура, наследующаяся с M.

1.1.1 Гладкие отображения

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия, A_M, A_N — соответствующие атласы. Рассмотрим отображение $f : M \to N$.

Определение 1.1.10 (Координатное представление f в картах (U, ϕ) на M и (V, ψ) на N)**.** Такое $\widetilde{f} : \phi(U) \to \psi(V)$, что диаграмма коммутативна везде, где определена (то есть $\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ на $\phi(U \cap f^{-1}(V))$).

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ \phi(U) & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \psi(V) \end{array}$$

Далее считаем, что $f : M \to N$ непрерывна (эквивалентно, все координатные представления непрерывны).

Определение 1.1.11 (f гладкое)**.** Любое координатное представление — гладкое.

Определение 1.1.12 (f — гладкое в точке $x \in M$)**.** Найдётся окрестность $U_x \ni x$ и карты (U, ϕ), (V, ψ) (где $V \ni y \coloneqq f(x)$), такие, что $U_x \subset U$ и сужение на U_x координатного представления f — гладко.

Свойства (Гладкие отображения).

- Гладкость в точке не зависит от выбора карт.
- Гладкость отображения не зависит от выбора атласа в одном классе эквивалентности.
- Отображение гладкое $\iff$ оно гладкое в любой точке. На лекции было доказательство $\Leftarrow$.
- Пусть $f : M \to N, g : N \to K$ гладкие. Тогда их композиция $g \circ f$ гладкая.
- Тождественное отображение гладкое, если в образе и прообразе выбраны эквивалентные атласы.
- Определение гладкости отображения совпадает с определением гладкости из матанализа (если считать, что $M \subset \mathbb{R}^n$ открыто, и порождающий атлас состоит из тождественной карты)

Определение 1.1.13 (Диффеоморфизм $f : M \to N$)**.** Гладкое f, такое, что f^{-1} — тоже гладкое.

Определение 1.1.14 (Многообразия M и N диффеоморфны)**.** Между ними существует диффеоморфизм.

Понятно, что диффеоморфность — отношение эквивалентности.

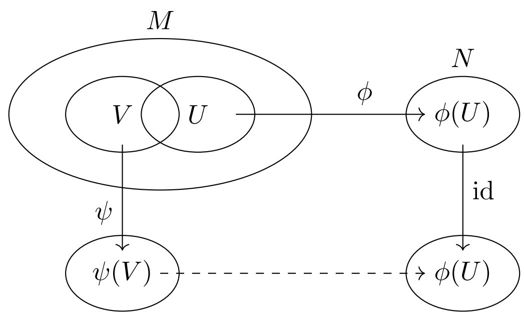
Утверждение 1.1.1. *Если $M^m \overset{\text{диф}}{\sim} N^n$, то $m = n$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную $x \in M$. Пусть $f : M \to N$ — диффеоморфизм, пусть $\widetilde{f}$ — его координатное представление. Тогда $\widetilde{f}^{-1}$ — координатное представление f^{-1}, откуда $\widetilde{f}^{-1}$ — тоже гладкое. Рассмотрим дифференциал $\mathrm{d}_x\widetilde{f}(\_)$, это изоморфизм векторных пространств, значит, $m = n$. $\square$

По умолчанию всегда считается, что на $\mathbb{R}^m$ введена стандартная гладкая структура.

Предложение 1.1.2. *Пусть M — гладкое многообразие, тогда карта — диффеоморфизм между U и $\phi(U)$. Обратно, любой диффеоморфизм между открытым подмножеством $W \subset M$ и областью $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — карта.*

Доказательство.



Гладкость карты, как диффеоморфизма, эквивалентна тому, что карта согласована с остальными в атласе: пунктирная стрелка $\psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ одновременно является и отображением перехода между картами (U, ϕ) и (V, ψ), и координатным представлением ϕ в картах $(V, \psi), (U, \mathrm{id})$. $\square$

Следствие 1.1.1. *Диффеоморфизм $f : M \to N$ задаёт естественную биекцию между картами M и картами N (а ещё между (максимальными) атласами M и (максимальными) атласами N).*

Лекция II

21 февраля 2023 г.

Пример (Диффеоморфизм). Ранее приводились неэквивалентные карты $(\mathbb{R}, \mathrm{id})$ и $(\mathbb{R}, [x \mapsto x^3])$. Вещественные прямые с данными картами диффеоморфны: $[x \mapsto x^3]$ — диффеоморфизм, ему обратный $[x \mapsto \sqrt[3]{x}]$ $\left(\text{где, как в школе, } \sqrt[3]{x} = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geqslant 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}\right)$.

Таким образом, создать две недиффеоморфные структуры на одном и том же многообразии не то чтобы просто.

Интересный факт. Пусть M — n-мерное многообразие.

$$\text{Если } \begin{cases} n < 4, & \text{на нём существует единственная гладкая структура} \\ n = 4, & \text{на нём существует бесконечно много гладких структур} \\ n > 4, & \text{на нём существует конечное число гладких структур} \end{cases}.$$

В частности, при $n > 4$: если $M^n = \mathbb{R}^n$, то гладкая структура единственна.

1.1.2 Касательное пространство

Пусть M — гладкое многообразие, $p \in M$. Пусть $\alpha, \beta : (\varepsilon, +\varepsilon) \to M$ — гладкие (естественно, в смысле отображения многообразий) кривые, такие, что $\alpha(0) = p = \beta(0)$.

Определение 1.1.15 (α и β соприкасаются в p)**.** В любой карте (U, ϕ) (где $U \ni p$) их производные в нуле совпадают: $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$.

Предостережение. Определение требует совпадение векторов скорости, а не просто параллельности или сонаправленности.

Свойства (Соприкасающиеся кривые).

- Соприкасаемость кривых в какой-то конкретной точке — отношение эквивалентности.
- Соприкасаемость не зависит от выбора карты: достаточно проверить в любой одной, содержащей p.

  Доказательство. Пусть (U, ϕ), (V, ψ) — две карты, содержащие точку p, отображение $f_{\phi\psi} = \psi \circ \phi^{-1}$ гладкое, значит, оно переводит равные векторы в равные. □

Определение 1.1.16 (Касательный вектор в точке $p \in M$)**.** Класс эквивалентности соприкасающихся в точке p кривых.

Множество всех касательных векторов — *касательное пространство*, обозначают T_pM.

Координаты касательного вектора

Пусть $p \in M$, и (U, ϕ) — карта, содержащая p.

Определение 1.1.17 (Координатное представление вектора $v = [\alpha] \in T_pM$)**.** Вектор скорости данной кривой в данной карте $v_\phi \overset{def}{=} (\phi \circ \alpha)'(0)$.

Понятно, что определение не зависит от выбора представителя — кривой α.

Также координаты v_ϕ в $\mathbb{R}^n$ называют *координатами v в карте ϕ*.

Свойства (Координатное представление).

- $\forall p \in M, \forall (U, \phi) : p \in U \Rightarrow$ координатное представление — биекция $\begin{matrix} T_pM \to \mathbb{R}^n \\ v \mapsto v_\phi \end{matrix}$.

  Доказательство. Это инъекция, так как если образы u, v равны, то по определению u и v соприкасаются.

  Это сюръекция: $\forall w \in \mathbb{R}^n$ можно рассмотреть кривую $\gamma(t) := wt + \phi(p)$. Координаты $[\phi^{-1} \circ \gamma]$ в карте ϕ как раз окажутся равными w. □

Преобразование координатного представления в зависимости от карты

Утверждение 1.1.2. *Пусть $M^n \ni p$ — гладкое многообразие и точка, (U, ϕ) и (V, ψ) — карты, содержащие p. Тогда $v_\psi = \mathrm{d}_{\phi(p)} f_{\phi\psi}(v_\phi)$.*

Доказательство. Пусть $v = [\alpha]$. Тогда $v_\phi = (\phi \circ \alpha)'(0)$, $v_\psi = (\psi \circ \alpha)'(0)$, и действительно, так как $f_{\phi\psi} = \psi \circ \phi^{-1}$, то $v_\psi = (f_{\phi\psi} \circ \phi \circ \alpha)'(0)$. Дифференцируя композицию, получаем утверждение. □

Следствием данного утверждения является альтернативное определение касательного вектора:

Определение 1.1.18 (Касательные векторы в точке $p \in M$)**.** Отображение из множества всех карт, содержащих точку p (обозначим их $\mathcal{M}_p$) в $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{M}_p \to \mathbb{R}^n$$

такое, что выполнены соотношения (утверждение 1.1.2).

Это определение сродни тому определению тензора, которое говорит: «Тензор — это многомерная матрица чисел, преобразующихся при замене базиса следующим образом. . . »

1.1.3 Структура векторного пространства на T_pM

Зафиксируем $p \in M$, и карту (U, ϕ), содержащую p. Пусть $v, w \in T_pM$.

Определение 1.1.19 (Сумма векторов v и w)**.** Такой вектор $v + w$, что $(v + w)_\phi = v_\phi + w_\phi$.

Определение 1.1.20 (Растяжение вектора v с коэффициентом α)**.** Такой вектор αv, что $(\alpha v)_\phi = \alpha \cdot v_\phi$.

Иными словами, у нас была биекция T_pM с векторным пространством, и мы просто перенесли структуру векторного пространства с $\mathbb{R}^n$ на T_pM. Определение не зависит от выбора карты, так как замена координат касательных векторов при переходе между картами — изоморфизм векторных пространств (дифференциал — линейный оператор).

Замечание. Из определения получается, что $v \to v_\phi$ — изоморфизм векторных пространств.

1.2 Касательное расслоение

Как множество, $T(M) = \bigsqcup\limits_{p \in M} T_pM$. Оказывается, на $T(M)$ можно естественно ввести топологию и гладкую структуру размерности $2n$. Преобразуем определение атласа так, чтобы это случилось одновременно.

Утверждение 1.2.1 (Атлас для множества)**.** *Пусть X — множество с картами (U, ϕ), то есть парами (U, ϕ) где $U \subset X$, и каждая ϕ — биекция $U \to \mathbb{R}^n$. При этом $X = \bigcup U$*

Потребуем для любых двух карт (U, ϕ) и (V, ψ): $\phi(U \cap V)$ открыто (в частности, $\phi(U)$ открыто), и потребуем, чтобы все функции перехода $f_{\phi\psi} = \psi \circ \phi^{-1}$ были гладкими.

Введём на X топологию: $W \subset X$ открыто, если $\forall (U, \phi) : \phi(U \cap W)$ открыто, и предположим, что топология получилась хаусдорфовой, и на X есть счётная база.

Тогда утверждается, что данная процедура задаёт на X одновременно и топологию, и гладкую структуру.

Зададим такую гладкую структуру на $T(M)$. Обозначим $TU = \bigsqcup\limits_{p \in U} T_pM$. Можно рассматривать $TU = \{(p, v) | p \in U, v \in T_pM\}$.

Пусть имеется карта (U, ϕ) на M. Построим по ней карту

$$\begin{aligned} \Phi : TU &\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (p, v) &\mapsto (\phi(p), v_\phi) \end{aligned}$$

Проверим согласованность: пусть (U, ϕ) и (V, ψ) — две карты на M. По ним построены карты (TU, Φ) и (TV, Ψ) соответственно. Тогда $(\Psi \circ \Phi^{-1})(p, v) = ((\psi \circ \phi^{-1})(p), \mathrm{d}_{\phi(p)} f_{\phi\psi}(v))$, видно, что $\Psi \circ \Phi^{-1}$ гладко.

На лекции леммы ниже не было, но давайте для порядка докажем. Проверка свойств всё равно остаётся читателю в качестве упражнения.

Лемма 1.2.1. *Получилось хаусдорфово пространство со счётной базой.*

Доказательство.

- Проверим хаусдорфовость. Рассмотрим две точки $(p_1, v_1), (p_2, v_2) \in TM$.

  Пусть $p_1 \neq p_2$. Выберем карты (U_1, ϕ_1) и (U_2, ϕ_2), где $p_i \in U_i$. Так как M хаусдорфово, а атлас максимальный, то можно считать, что $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ (при необходимости уменьшить U_1

и U_2). Множества TU_1 и TU_2 открыты в TM и являются непересекающимися окрестностями p_1 и p_2.

Теперь пусть $p_1 = p_2$, $v_1 \neq v_2$. Выберем карту (U, ϕ), где $p \in U$, по ней построена карта (TU, Φ). Из хаусдорфовости $\mathbb{R}^n$ найдётся непересекающиеся окрестности v_1 и v_2, пусть это V_1 и V_2 соответственно.

Тогда $\Phi^{-1}(V_1)$ и $\Phi^{-2}(V_2)$ — непересекающиеся окрестности (p_1, v_1) и (p_2, v_2).

- Пусть на M имеется счётная база $\{U_i\}_{i \in I}$, возьмём в $\mathbb{R}^n$ какую-то счётную базу $\{V_j\}_{j \in J}$.

  Пусть $\mathcal{U} \coloneqq \{U_i | i \in I, \exists \phi_i : (U_i, \phi_i) \text{ — карта}\}$. В следующем абзаце покажем, что $\mathcal{U}$ — тоже (понятно, счётная) база.

  Рассмотрим произвольное открытое $U \subset M$, и $p \in U$. Пусть имеется карта $\left(\widetilde{U}, \widetilde{\phi}\right)$, содержащая p, тогда $U \cap \widetilde{U}$ открыто, и по критерию базы имеется U_i ($i \in I$), такое, что $p \in U_i \subset U \cap \widetilde{U}$. Так как атлас максимален, то $\left(U_i, \widetilde{\phi}\big|_{U_i}\right)$ — карта.

  Раз $\mathcal{U}$ — счётная база, то считаем, что эта база совпадает с $\{U_i\}_{i \in I}$. Пусть по карте (U_i, ϕ_i) построена карта (TU_i, Φ_i), тогда $\{\Phi_i^{-1}(\phi_i(V_j))\}_{i \in I, j \in J}$ — счётная база в TM. □

1.2.1 Дифференциал гладкого отображения

Пусть M и N — гладкие многообразия, и есть гладкое отображение $f : M \to N$. Зафиксируем $p \in M$.

Определение 1.2.1 (Дифференциал f в точке p)**.** Отображение $\mathrm{d}_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$, заданное следующим образом: $\mathrm{d}_p f : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$.

Утверждение 1.2.2. *Определение дифференциала не зависит от выбора представителей.*

Доказательство. Пусть $\alpha \sim \beta$ — две кривые, $\alpha(0) = \beta(0) = p$, $\alpha'(0) = \beta'(0) = v$.

Проверим, что $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$. Достаточно проверить, что совпадают координатные представления.

Выберем две карты (U, ϕ) и (V, ψ) (где $U \ni p$, $V \ni f(p)$). Координатное представление f — это $\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$.

Дифференциал $\widetilde{f}$ переносит координаты представления векторов из $T_p M$ в координаты представления векторов из $T_{f(p)} N$:

$$\psi \circ f \circ \alpha = \widetilde{f} \circ \phi \circ \alpha \quad \text{и} \quad \psi \circ f \circ \beta = \widetilde{f} \circ \phi \circ \beta$$
$$(\psi \circ (f \circ \alpha))'(0) = \mathrm{d}_{\phi(p)} \widetilde{f}((\phi \circ \alpha)'(0)) = \mathrm{d}_{\phi(p)} \widetilde{f}((\phi \circ \beta)'(0)) = (\psi \circ (f \circ \beta))'(0)$$ □

Нетрудно заметить, что $(\mathrm{d}_p f(v))_\psi = \left(\mathrm{d}_{f(p)} \widetilde{f}\right)(v_\phi)$ *в обозначениях из доказательства выше (и* $v = [\alpha]$*).*

Следствие 1.2.1. $\mathrm{d}_p f$ — *линейное отображение.*