

# Матанализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков  
Конспектировал Леонид Данилевич

III семестр, осень 2023 г.

# Оглавление

0.1	Литература . . . . .	2
<b>1</b>	<b>Теория меры</b>	<b>3</b>
1.1	Меры . . . . .	4
1.2	Обобщения . . . . .	6
1.2.1	Область задания меры (системы множеств) . . . . .	6
1.3	Поговорим про интеграл . . . . .	7
1.3.1	Про счётную аддитивность . . . . .	9
1.3.2	Продолжение меры . . . . .	11
1.3.3	Предмера . . . . .	14
1.4	Структура измеримых множеств . . . . .	17
1.4.1	Множества меры нуль . . . . .	17
1.5	Двоичные (диадические) кубы . . . . .	20
1.5.1	Поведение меры Лебега при линейных отображениях . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Интеграл Лебега</b>	<b>24</b>
2.1	Измеримые отображения . . . . .	25
2.2	Грани и предельные переходы . . . . .	27
2.3	Интеграл . . . . .	28
2.4	Применения интеграла . . . . .	29
2.5	Интегралы от знакопеременных функций . . . . .	30
2.5.1	Про линейность интеграла . . . . .	31
2.6	Приближение функций из класса $L^p$ . . . . .	32
2.6.1	Связь интегралов Лебега и Римана . . . . .	35
2.7	Теоремы Тонелли и Фубини . . . . .	36
2.7.1	Как применять . . . . .	39
2.8	Свёртки. Приближение функций с помощью свёрток . . . . .	39
2.8.1	Меры с плотностью . . . . .	40
2.8.2	Образ меры . . . . .	41
2.8.3	Свойства свёртки . . . . .	41
2.8.4	Слегка другой способ построения аппроксимативной единицы . . . . .	44
2.9	Преобразования меры при дифференцируемом отображении . . . . .	45
2.9.1	Интеграл по комплексной мере . . . . .	51
2.9.2	Разложение Лебега . . . . .	51

## 0.1 Литература

1. Б. М. Макаров «Теория меры и интеграла»
2. ? «Интеграл Лебега»
3. Халмош «Теория меры»

# Глава 1

## Теория меры

### Лекция I

6 сентября 2023 г.

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — ограниченная функция.

Для того, чтобы интеграл Римана-Дарбу существовал, нам надо, чтобы она была какой-то хорошей — с ограниченными колебаниями, часто просто требуется кусочная непрерывность. А как быть иначе?

Запишем такое, не совсем верное рассуждение.

*Рассуждение.* Пусть  $|f(x)| \leq M$  при  $x \in [a, b]$ . Разобьём отрезок  $[-M, M]$  в объединение промежутков  $[-M, M] = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k$ , будем считать, что  $\forall k : |I_k| < \varepsilon$ .

Обозначим за  $e_j := f^{-1}(I_j)$ . Видно, что  $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_k = [a, b]$  — прообразы отрезков  $I_j$  образуют разбиение  $[a, b]$ .

Оценим суммы Дарбу следующим образом:

$$S_{\Delta} f \leq \sum_{j=1}^k \beta_j |e_j| \quad s_{\Delta} f \geq \sum_{j=1}^k \alpha_j |e_j|$$

где  $|e|$  — «длина» множества  $e$ .

Заметим, что верхние и нижние суммы близки:  $S_{\Delta} f - s_{\Delta} f = \sum_{j=1}^k (\beta_j - \alpha_j) |e_j| \leq \varepsilon \sum_{j=1}^k |e_j| = \varepsilon(b-a)$ .

Таким образом, проинтегрировали любую ограниченную функцию. В чём проблема?  $\square$

Как естественным образом определить длину множества  $|e|$ ?

Надо, чтобы длина была аддитивной:  $|e \sqcup f| = |e| + |f|$ .

*Замечание.* Можно определить длину на всех подмножествах  $[a, b]$ , но такое определение не конструктивно, и к тому же не единственно.

Пусть  $I$  — конечный промежуток,  $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$  — тоже конечные промежутки, такие, что  $I = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} I_j$ .

Также хочется, чтобы предельные переходы выполнялись:  $|I| = \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|$ . Это называется *счётной аддитивностью*.

## 1.1 Меры

Пусть  $X$  — множество,  $\mathcal{A}$  — система его подмножеств. Пока будем считать только, что  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .

**Определение 1.1.1** (Функция множества). *Вещественная функция множества  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ , или комплексная функция множества  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ .*

Вещественная функция множества  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  называется *неотрицательной*.

Иногда также разрешают функции приобретать значения на расширенной прямой  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$ .

**Определение 1.1.2** (Мера). Аддитивная функция  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ .

Аддитивность означает, что в случае  $e_1, \dots, e_k \in \mathcal{A}$ , если  $e := \bigsqcup_{j=1}^k e_j \in \mathcal{A}$ , то  $\phi(e) = \phi(e_1) + \dots + \phi(e_k)$ .

*Замечание.* Если  $\phi$  — аддитивная функция, то  $\phi(\emptyset) = \phi(\emptyset) + \phi(\emptyset)$ , откуда  $\phi(\emptyset) = 0$ .

*Примеры.*

- Пусть  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$  — совокупность конечных промежутков,  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  — совокупность всех промежутков.

Тогда для обоих семейств можно ввести меру  $\phi(|I|) = |I|$ .

Заметим, что аддитивность действительно выполняется: если отрезок  $[a, b]$  разбит на отрезки  $[a_0, a_1], \dots, [a_{n-1}, a_n]$ , где  $a_0 = a, a_n = b$ , то и правда

$$b - a = \sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1})$$

- То же самое можно сделать в  $\mathbb{R}^n$ : введём множества ограниченных и всех прямоугольных параллелепипедов.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) &= \{I_1 \times \dots \times I_n \mid \text{все } I_j \text{ — конечные промежутки}\} \\ \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) &= \{I_1 \times \dots \times I_n \mid \text{все } I_j \text{ — промежутки}\} \end{aligned}$$

Обозначим за  $V_n$  объём на  $\mathcal{P}$ :  $V_n(I_1 \times \dots \times I_n) = |I_1| \cdot \dots \cdot |I_n|$ , где бесконечность в произведении трактуется так: если есть хотя бы один ноль, то произведение равно нулю, иначе бесконечно.

Почему эта мера аддитивна?

Пусть  $Q, Q_1, \dots, Q_k \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ , причём  $Q = \bigsqcup_{j=1}^k Q_j$ .

**Лемма 1.1.1.**  $V_n(Q) = \sum_{j=1}^k V_n(Q_j)$ .

*Доказательство.* Пусть  $f$  — функция на  $Q$ , определим

$$J(f) = \int_{I_n} \left( \dots \int_{I_2} \left( \int_{I_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots \right) dx_n$$

$J$ , правда, определён не всегда — иногда какая-то промежуточная функция может быть не интегрируема по Риману-Дарбу.

$J$  корректно определена для некоторой совокупности функций, которые образуют линейное пространство.

Рассмотрим  $K = \delta_q \times \dots \times \delta_n \subset Q$ . Тогда для  $\chi_K$  — характеристической функции  $K$  —  $J$  определён, причём  $J(\chi_K) = |\delta_1| \cdot \dots \cdot |\delta_n| = V_n(K)$ .

Отсюда видно, что так как  $\chi_Q = \sum_{j=1}^k \chi_{Q_j}$ , то  $V_n(Q) = \sum_{j=1}^k V_n(Q_j)$ .  $\square$

Пусть  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  — аддитивная функция множеств.  $\phi$  называется *счётно аддитивной*, если для  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\{a_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}$  верно  $a = \bigsqcup_{j=1}^\infty a_j \Rightarrow \phi(a) = \sum_{j=1}^\infty \phi(a_j)$ .

**Теорема 1.1.1.** Объём в  $\mathbb{R}^n$  — счётно аддитивная функция на  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$  (и на  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  тоже, но пока не надо).

*Доказательство.*

**Лемма 1.1.2.** Пусть  $Q_1, \dots, Q_k, Q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ .

1. Если  $Q_1, \dots, Q_k$  попарно не пересекаются, и  $\forall j : Q_j \subset Q$ , то  $\sum_{j=1}^k V_n(Q_j) \leq V_n(Q)$ .

2. Если  $Q \subset \bigcup_{j=1}^k Q_j$  (условий на дизъюнктность нет), то  $V_n(Q) \leq \sum_{j=1}^k V_n(Q_j)$ .

*Доказательство леммы.*

1.  $\sum_{j=1}^k \chi_{Q_j} \leq \chi_Q$  (поточечно), применяем ранее определённый функционал  $J$ .
2.  $\sum_{j=1}^k \chi_{Q_j} \geq \chi_Q$  (поточечно), применяем ранее определённый функционал  $J$ .

$\square$

Пусть  $Q, Q_j \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ , где  $j \in \mathbb{N}$ ,  $Q = \bigsqcup_{j=1}^\infty Q_j$ .

- Рассмотрим  $k$  параллелепипедов  $Q_1, \dots, Q_k \subset Q$ . Применяя лемму, получаем  $\sum_{j=1}^k V_n(Q_j) \leq V_n(Q)$ . Это верно для каждого  $k$ , переходя к пределу сразу получаем  $\sum_{j=1}^\infty V_n(Q_j) \leq V_n(Q)$ .

*Замечание.* Эта часть верна для любой аддитивной меры.

- Докажем обратное:  $\sum_{j=1}^\infty V_n(Q_j) \geq V_n(Q)$ .

Пусть  $Q = I_1 \times \dots \times I_n$ . Если  $\exists s : I_s = \emptyset$ , то доказывать нечего.

Выберем  $\varepsilon > 0$ . Существуют замкнутые отрезки  $\bar{I}_1, \dots, \bar{I}_s$ , такие что  $\bar{I}_j \subset I_j$ , причём для  $\bar{Q} = \bar{I}_1 \times \dots \times \bar{I}_n$  его объём уменьшился несильно:  $V_n(Q) \leq V_n(\bar{Q}) + \varepsilon$ .

Аналогично раздуем составляющие параллелепипеды:  $\forall j \in \mathbb{N}$  построим  $\tilde{Q}_j = \tilde{I}_1 \times \dots \times \tilde{I}_n$ , так что открытый интервал  $\tilde{I}_j \supset I_j$ , причём  $V_n(\tilde{Q}_j) \leq V_n(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$ .

Теперь замкнутый параллелепипед покрывается открытыми, значит, можно выбрать конечное подпокрытие, сразу получив оценку (для некоего  $k \in \mathbb{N}$ )

$$V_n(Q) - \varepsilon \leq \sum_{j=1}^k \left( V_n(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \leq \sum_{j=1}^\infty \left( V_n(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right)$$

Устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем требуемое  $V_n(Q) \leq \sum_{j=1}^\infty V_n(Q_j)$ .  $\square$

## 1.2 Обобщения

### 1.2.1 Область задания меры (системы множеств)

Пусть  $X$  — множество,  $\mathcal{A}$  — система его подмножеств ( $\emptyset \in \mathcal{A}$ ).

**Определение 1.2.1** (Кольцо). Система множеств  $\mathcal{A}$ , такая что  $\forall a, b \in \mathcal{A} : (a \cap b), (a \cup b), (a \setminus b) \in \mathcal{A}$ .

*Пример* (Кольцо). Объединения конечного числа отрезков (или даже параллелепипедов 1.2.1)  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  или  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ .

**Определение 1.2.2** (Алгебра). Кольцо  $\mathcal{A}$ , такое что  $X \in \mathcal{A}$ .

*Замечание.* В алгебре  $\forall a \in \mathcal{A} : a^c \in \mathcal{A}$ . В частности, из-за законов де Моргана достаточно проверять только одно из  $(a \cup b), (a \cap b) \in \mathcal{A}$ .

**Определение 1.2.3** (Полукольцо). Система множеств  $\mathcal{A} \subset 2^X$ , такое что  $\forall a, b \in \mathcal{A} : (a \cap b) \in \mathcal{A}$ , а разность  $(a \setminus b)$  есть объединение конечного числа попарно непересекающихся подмножеств из  $\mathcal{A}$ .

*Пример* (Полукольцо). Отрезки и конечные отрезки (или даже параллелепипеды 1.2.1)  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  и  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ .

Пусть  $X, Y$  — множества,  $\mathcal{A} \subset 2^X, \mathcal{B} \subset 2^Y$  — полукольца.

**Определение 1.2.4** (Обобщённый прямоугольник). Произведение  $a \times b$ , где  $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ .

**Теорема 1.2.1.** Множество обобщённых прямоугольников  $\mathcal{C} = \{a \times b | a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$  есть полукольцо в  $X \times Y$ .

*Доказательство.*

- $\emptyset \in \mathcal{C} : \emptyset \times \emptyset = \emptyset$ .
- $(a_1 \times b_1) \cap (a_2 \times b_2) = (a_1 \cap a_2) \times (b_1 \cap b_2)$ , поэтому  $\mathcal{C}$  замкнуто относительно пересечения.
- Рассмотрим  $u, v \in \mathcal{C}$ .  $u \setminus v = u \setminus (u \cap v)$ , поэтому можно считать, что  $v \in \mathcal{C}$ .

Пусть  $u = a_1 \times b_1, v = a_2 \times b_2$ . Так как  $v \subset u$ , то  $b_2 \subset b_1, a_2 \subset a_1$ . Пусть  $a_1 \setminus a_2 = \bigcup_{s=1}^n e_s$ ,  
 $b_1 \setminus b_2 = \bigcup_{t=1}^m f_t$ .

Несложно видеть, что  $u \setminus v = \left( a_2 \sqcup \bigcup_{s=1}^n e_s \right) \times \left( b_2 \sqcup \bigcup_{t=1}^m f_t \right) \setminus (a_2 \times b_2)$ , что есть объединение  $(n+1)(m+1) - 1$  понятного обобщённого прямоугольника.  $\square$

*Замечание.* Даже если  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  — кольца или алгебры, множества обобщённых прямоугольников могут всё равно образовывать лишь полукольцо.

**Определение 1.2.5** (Мера на полукольце). Неотрицательная аддитивная функция множества (возможно, принимающая значения  $+\infty$ ).

Пусть  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$  — полукольцо конечных отрезков,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — нестрого возрастающая функция.

**Определение 1.2.6** (Квазидлина, порождённая  $f$ ).  $\mu_f(\langle a, b \rangle) = f(b) - f(a)$ .

Эта квазидлина, понятное дело, аддитивна, но не для всех функций она счётно аддитивна.

*Контрпример.* Пусть  $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$ . Тогда  $1 = f([0, 1)) \neq \sum_{i=1}^{\infty} f\left(\left[1 - \frac{1}{2^{i-1}}, 1 - \frac{1}{2^i}\right)\right) = 0$

**Теорема 1.2.2.** Пускай  $\mathcal{A} \subset 2^X, \mathcal{B} \subset 2^Y$  — полукольца,  $\mu$  и  $\nu$  на них — (конечные) меры, определим меру на произведении

$$\gamma(u \times v) := \mu(u) \cdot \nu(v)$$

Утверждается, что  $\gamma$  аддитивна (??).

## Лекция II

8 сентября 2023 г.

Пусть  $\mathcal{A}$  — полукольцо.

**Определение 1.2.7.**  $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \bigsqcup_{j=1}^k d_j \mid d_j \in \mathcal{A} \right\}$  — всевозможные конечные дизъюнктные объединения.

**Лемма 1.2.1.**  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  есть кольцо множеств.

*Доказательство.* Пусть  $u = c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s; v = d_1 \sqcup \dots \sqcup d_t$ .

- Проверим, что  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  замкнуто относительно пересечения. Тогда

$$u \cap v = \bigsqcup_{i,j} (c_i \cap d_j)$$

- Проверим, что  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  замкнуто относительно разности при помощи индукции по  $t$ .

База:  $t = 1$ .

$$(c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s) \setminus d_1 = (d_1 \setminus c_s) \sqcup \dots \sqcup (c_s \setminus d_1)$$

Переход:

$$(c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s) \setminus (d_1 \sqcup \dots \sqcup d_t) = \left( (c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s) \setminus (d_1 \sqcup \dots \sqcup d_{t-1}) \right) \cap \left( (c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s) \setminus d_t \right)$$

- Проверим, что  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  замкнуто относительно объединения.

$$u \cup v = (u \setminus v) \sqcup (v \setminus u) \sqcup (u \cap v)$$

□

Пусть  $\mathcal{B} \subset 2^X$  — полукольцо. Среди всех колец,  $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}$  есть наименьшее, как их пересечение.

**Факт 1.2.1.**  $\mathcal{C} = \mathcal{R}(\mathcal{B})$ .

### 1.3 Поговорим про интеграл

$\mathcal{A} \subset 2^X$  — полукольцо,  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  — мера.

**Определение 1.3.1** (Простая функция (относительно  $\mathcal{A}$ )). Функция вида  $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{e_i}$ , где  $e_i \in \mathcal{A}$ ,  $\forall 1 \leq i < j \leq k : e_i \cap e_j = \emptyset$ .

Определим «хиленький интеграл», который пока не будем обозначать  $\int$ :

**Определение 1.3.2** (Интеграл от простой функции).  $I_\mu(f) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(e_j)$ , если это имеет смысл (считается, что  $0 \cdot \infty = 0$ , но  $(-\infty) + (+\infty)$  не определено).

**Лемма 1.3.1.** Интеграл от простой функции не зависит от её представления в виде суммы.

*Доказательство.* Пусть  $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{e_i} = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{e'_j}$ , где  $\alpha_i, \beta_j \neq 0$ .



Обозначим  $A = \text{supp } f = \{x | f(x) \neq 0\}$ . Очевидно,  $(e_1, \dots, e_k)$ , как и  $(e'_1, \dots, e'_m)$  — разбиения  $A$ . У них есть общее измельчение  $e''$ , причём на каждом элементе  $e''_{i,j} := e_i \cap e'_j$   $\alpha_i = \beta_j$ , откуда оба интеграла от простой функции — через  $e$  и через  $e'$  — совпадают с определением через  $e''$ .

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(e_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^m e_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \alpha_i \mu(e_{i,j}) = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(e_{i,j}) = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(e'_j)$$

Если  $e_i$  бесконечен, то один из конечного числа кусочков, на которые мы его разобьём  $e_i \cap e'_j$  тоже будет бесконечным, поэтому в случае бесконечностей (если обе суммы определены) обе суммы будут бесконечностями одного знака.  $\square$

*Свойства (Интеграл от простой функции).*

- $I_\mu(c \cdot f) = c \cdot I_\mu(f)$
- Если  $f, g$  — простые функции, то  $f + g$  — тоже простая, причём  $I_\mu(f + g) = I_\mu(f) + I_\mu(g)$  (если в сумме двух интегралов нет бесконечностей разных знаков).

*Доказательство.* Пусть  $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{e_i}$ ;  $g = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{e'_j}$ , где  $\alpha_i, \beta_j \neq 0$ .

Положим  $A := \bigsqcup_i e_i$ ;  $B := \bigsqcup_j e'_j$ . Рассмотрим  $(A \setminus B), (B \setminus A), (A \cap B)$  — все они лежат в  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ .

Будем считать, что  $(e_1, \dots, e_k)$  как разбиение  $A$  измельчено так, что оно уважает разбиение  $(A \setminus B) \sqcup (A \cap B) = A$ .

Аналогично считаем, что  $e'$  уважает разбиение  $(B \setminus A) \sqcup (B \cap A) = B$ .

Теперь  $\mathcal{E} = \{e_i \in \{e_i\}_{i=1}^k | e_i \subset A \cap B\}$  — разбиение  $A \cap B$ , ровно как и  $\mathcal{E}' = \{e'_j \in \{e'_j\}_{j=1}^m | e'_j \subset A \cap B\}$ . Измельчим те элементы, которые попали в  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}'$ , теперь ещё считаем, что  $e$  и  $e'$  уважают друг друга. Можно считать, что и  $f$ , и  $g$  определены на разбиениях  $\{e_i\}_{i=1}^k \cup \{e'_j\}_{j=1}^m$ , и теперь по определению  $f + g$  является простой функцией, и  $I(f + g) = I(f) + I(g)$ .  $\square$

- Для двух простых интегрируемых функций  $f \leq g \Rightarrow I_\mu(f) \leq I_\mu(g)$ .

*Доказательство.* Если интегралы — бесконечности одного знака, то доказывать нечего.

Иначе  $I_\mu(g)$  и  $I_\mu(-f)$  не являются бесконечностями разного знака, то есть определено

$$I_\mu(g - f) = I_\mu(g) - I_\mu(f)$$

Но  $(g - f)$  — функция неотрицательная, по определению её интеграл неотрицателен.  $\square$

**Лемма 1.3.2.** Пусть  $\mathcal{A}$  — полукольцо с мерой  $\mu$ ;  $a, a_1, \dots, a_k \in \mathcal{A}$ .

- Если  $a_j$  попарно дизъюнкты, причём  $a_j \subset a$ , то  $\sum_{j=1}^k \mu(a_j) \leq \mu(a)$ .
- Если  $a \subset \bigcup_{j=1}^k a_j$ , то  $\mu(a) \leq \sum_{j=1}^k \mu(a_j)$ .

*Доказательство.*

- $I_\mu(\chi_{\bigcup a_j}) \leq I_\mu(\chi_a)$  так как  $\chi_{\bigcup a_j} \leq \chi_a$ .
- $I_\mu(\chi_{\bigcup a_j}) \geq I_\mu(\chi_a)$ , так как  $\chi_{\bigcup a_j} \geq \chi_a$ .  $\square$

**Теорема 1.3.1.** Пусть  $\mathcal{A} \subset 2^X, \mathcal{B} \subset 2^Y; \mathcal{C} \subset 2^{X \times Y}$  — полукольцо обобщённых прямоугольников.

Пусть  $\mu$  — мера на  $\mathcal{A}$ ,  $\nu$  — мера на  $\mathcal{B}$ . Определим произведение мер  $(\mu \otimes \nu)(a \times b) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(a)\nu(b)$ .

Утверждается, что  $\mu \otimes \nu$  — мера на  $\mathcal{C}$ .

*Доказательство.* Докажем аддитивность. Пусть  $P = a \times b$ , причём  $P = \bigsqcup_{j=1}^k P_j$ , где  $P_j = a_j \times b_j$ .

$$(\mu \otimes \nu)(P) \stackrel{?}{=} \sum_{j=1}^k (\mu \otimes \nu)(P_j).$$

Разделим переменные:  $\chi_{c \times d}(s, t) = \chi_c(s) \cdot \chi_d(t)$ .

Дано, что  $\chi_P = \sum_{j=1}^k \chi_{P_j}$ , то есть  $\chi_a(s)\chi_b(t) = \sum_{j=1}^k \chi_{a_j}(s)\chi_{b_j}(t)$ .

Интегрируем:

$$\begin{aligned} I_{\nu, t}(\chi_a(s)\chi_b(t)) &= \sum_{j=1}^k I_{\nu, t}(\chi_{a_j}(s) \cdot \chi_{b_j}(t)) \Rightarrow \chi_a(s)\nu(b) = \sum_{j=1}^k \chi_{a_j}(s) \cdot \nu(b_j) \\ I_{\mu}(\chi_a(s)\nu(b)) &= \sum_{j=1}^k I_{\mu}(\chi_{a_j}(s) \cdot \nu(b_j)) \Rightarrow \mu(a)\nu(b) = \sum_{j=1}^k \mu(a_j)\nu(b_j) \end{aligned}$$

Данное доказательство также допускает бесконечные меры. □

*Замечание.* Пусть  $\mu$  — мера на полукольце  $\mathcal{A}$ . Для  $e \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  положим  $\bar{\mu}(e) = I_{\mu}(\chi_e)$ .

Введённая  $\bar{\mu}$  — мера на  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ , понятно, что это единственно возможное продолжение — единственная (аддитивная) мера на  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ , такая, что её сужение на  $\mathcal{A}$  совпадает с  $\mu$ .

*Замечание.* Если меру определять на кольце, а не на полукольце, то аддитивность достаточно проверять для двух множеств:  $e_1, e_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \Rightarrow e_1 \cup e_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ .

### 1.3.1 Про счётную аддитивность

**Определение 1.3.3** (Регулярная мера  $\mu$ ). Мера, удовлетворяющая условиям.

1.  $\forall a \in \mathcal{A} : \mu(a) = \inf \{ \mu(U) \mid U \supset a; U \text{ открыто}; U \in \mathcal{A} \}.$
2.  $\forall a \in \mathcal{A} : \mu(a) = \sup \{ \mu(U) \mid K \subset a; K \text{ компактно}; K \in \mathcal{A} \}.$

*Пример* (Регулярная мера).  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ .

**Теорема 1.3.2** (А. Д. Александров). Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $\mathcal{A} \subset 2^X$  — полукольцо,  $\mu$  — регулярная мера на  $\mathcal{A}$ .

Утверждается, что  $\mu$  счётно аддитивна.

*Доказательство.* Рассмотрим  $a \in \mathcal{A}, \{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ . Пусть  $a = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} a_j$ . Для доказательства  $\mu(a) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(a_j)$  покажем неравенства в обе стороны.

- $\forall k \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^k \mu(a_j) \leq \mu(a)$  (1.3.2), производим предельный переход.
- Если  $\mu(a_j) = \infty$ , или  $\mu(a) = 0$ , то доказывать нечего.

Выберем  $\varepsilon > 0$ . Найдём такие  $U_j, K \in \mathcal{A}$ , что  $U_j$  открыты,  $K$  компактно,  $U_j \supset a_j, K \subset a$ , причём  $\mu(U_j) \leq \mu(a_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$  и  $\mu(a) \geq \mu(K) - \varepsilon$ .

Так как из открытого покрытия компакта можно выделить конечное подпокрытие (и пусть  $N$  — максимальный номер элемента подпокрытия), то

$$\mu(a) - \varepsilon \leq \mu(K) \leq \sum_{j=1}^N \mu(U_j) \leq \sum_{j=1}^N \left( \mu(a_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(a_j) + \varepsilon$$

Устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем необходимое.  $\square$

*Примеры (Счётно-аддитивные меры).*

- Пусть  $X$  — возможно бесконечное множество,  $\mathcal{A}$  — семейство всех его конечных подмножеств. Можно определить  $\mu(a) = \#(a)$  — мощность множества  $a \in \mathcal{A}$ .

Она счётно-аддитивная, так как если  $a = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} a_j$ , причём  $a \in \mathcal{A}$ , то почти все (кроме конечного числа)  $a_j = \emptyset$ .

- Можно продолжить эту меру на  $2^X$ :

$$\mu(b) = \begin{cases} \#(b), & b \text{ конечно} \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Пусть  $\{\xi_x\}_{x \in X} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  — числовое семейство. Можно определить  $\nu(e) = \sum_{x \in e} \xi_x$ .

Если семейство суммируемо, то мера конечна.

## Лекция III

20 сентября 2023 г.

Вспомним, что мы определяли квазидлину  $l_f(\langle a, b \rangle) = f(b) - f(a)$  для возрастающей функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Это функция может быть не счётно аддитивной, что случается, если  $f$  разрывна.

Поправим это определение, чтобы мера была аддитивной. Пусть  $f$  — возрастающая функция.

Рассмотрим  $\mathcal{P}(\langle a, b \rangle)$  — полукольцо промежутков, содержащихся в  $\langle a, b \rangle$ .

Если  $a \in \langle a, b \rangle$  (то есть  $\langle a, b \rangle$  замкнут слева), то доопределим  $f$  на  $(a - \delta, b)$  так, чтобы она осталась возрастающей. Аналогично, если  $b \in \langle a, b \rangle$ , то доопределим  $f$  на  $\langle a, b + \delta \rangle$  так, что  $f$  по-прежнему возрастает.

Теперь мы можем считать, что  $f$  определена на открытом интервале, содержащем  $\langle a, b \rangle$ .

**Определение 1.3.4** (Стилтьесова длина). Длина, определённая по формуле

$$\mu_f(\langle c, d \rangle) = \begin{cases} f(d-) - f(c-), & \langle c, d \rangle = [c, d) \\ f(d-) - f(c+), & \langle c, d \rangle = (c, d) \\ f(d+) - f(c+), & \langle c, d \rangle = (c, d] \\ f(d+) - f(c-), & \langle c, d \rangle = [c, d] \end{cases}$$

где  $f(x_0+) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$  и  $f(x_0-) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ .

**Предложение 1.3.1.** Стилтьесова длина счётно аддитивна.

*Доказательство.* Выполняется теорема Александрова. Проверим, например, что для полуинтервала  $[c, d)$  мера регулярна.

Рассмотрим  $\varepsilon > 0$ , для открытого подмножества, содержащего  $[c, d)$  выберем  $(c - \delta, d)$ . Для достаточно маленьких  $\delta$ :  $f((c - \delta)+) > f(c-) - \varepsilon$ . Для компактного подмножества, содержащегося в  $[c, d)$ , выберем  $[c, d - \delta]$ . Для достаточно маленьких  $\delta$ :  $f((d - \delta)+) > f(d-) - \varepsilon$ .

Также можно проверить регулярность для бесконечных промежутков.  $\square$

*Предостережение.* Для полукольца возможно бесконечных параллелепипедов теорема Александра не применима:  $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$  не регулярна сверху, всякий параллелепипед, содержащий  $\mathbb{R} \times \{0\}$  уже имеет бесконечную меру.

### 1.3.2 Продолжение меры

Продолжать можно только счётно-аддитивные меры, иначе будет неоднозначно.

**Определение 1.3.5** ( $\sigma$ -алгебра). Такая алгебра множеств  $\mathcal{A} \subset 2^X$ , что она замкнута относительно счётных операций: если семейство  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  лежит в  $\mathcal{A}$ , то  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$  и  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ .

**Теорема 1.3.3.** Пусть  $\mathcal{C} \subset 2^X$  — система подмножеств  $X$ . Тогда в  $X$  есть наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $\mathcal{C}$ .

*Доказательство.* Пересечение любого множества  $\sigma$ -алгебр —  $\sigma$ -алгебра. Хотя бы одна есть — это  $2^X$ . Тогда в качестве наименьшей подойдёт пересечение всех  $\sigma$ -алгебр, содержащих  $\mathcal{C}$ .  $\square$

**Теорема 1.3.4.** Пусть  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$  — полукольцо всех конечных прямоугольных параллелепипедов, а  $\mathcal{A}$  — наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ .

Тогда объём на  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$  единственным образом продолжается до счётно аддитивной меры  $\lambda_n$  —  $n$ -мерной меры Лебега на  $\mathcal{A}$ .

*Схема доказательства.*

- Обозначим объём  $n$ -мерный объём на параллелепипедах из  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$  за  $v_n$ . Построим  $v_n \rightsquigarrow v_n^*$ , заданную на  $2^{\mathbb{R}^n}$ , которая не будет даже аддитивной.

Тем не менее, для всякого  $P \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ :  $v_n^*(a) = v_n(P)$

- Теперь сузим  $v_n^*$  на некоторую  $\sigma$ -алгебру, содержащую  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ , причём там эта функция будет уже и аддитивной, и счётно аддитивной.  $\square$

**Факт 1.3.1.** Все открытые, а значит, и все замкнутые множества, лежат в наименьшей  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$ , содержащей  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ .

*Доказательство.* Открытое множество представимо, как объединение кубов с рациональными координатами вершин, содержащихся в нём.  $\square$

Пусть  $Y$  — топологическое пространство.

**Определение 1.3.6** (Борелевская  $\sigma$ -алгебра). Наименьшая  $\sigma$ -алгебра подмножеств множества  $Y$ , содержащая все открытые множества. Обозначают  $\mathcal{B}(Y)$ .

*Замечание.*  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ .

**Факт 1.3.2.** Пусть  $\mathcal{A}$  — алгебра подмножеств множества  $X$ . Следующие утверждения эквивалентны.

1.  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра.
2. Для всех  $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$  верно, что  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ .
3. Для всех  $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$  верно, что  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ .
4. Для всех  $A_i \in \mathcal{A}$ , таких что  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  верно, что  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ .
5. Для всех  $A_i \in \mathcal{A}$ , таких, что  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  верно, что  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ .
6. Для всех  $A_i \in \mathcal{A}$ , таких, что  $A_i \cap A_j = \emptyset$  для  $i \neq j$  верно, что  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ .

*Доказательство.*

2  $\iff$  3 Закон де Моргана.

1  $\iff$  (2  $\wedge$  3) По определению.

2  $\Rightarrow$  4 Очевидно.

4  $\Rightarrow$  2 Положим  $\bar{A}_i := A_1 \cup \dots \cup A_i$ . Тогда  $\bar{A}_i$  возрастают по включению, и  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bar{A}_i \in \mathcal{A}$ .

4  $\iff$  5 Тоже закон де Моргана.

4  $\Rightarrow$  6 Пусть  $A_i \in \mathcal{A}$ , причём  $A_i \cap A_j = \emptyset$  для  $i \neq j$ . Выберем  $\tilde{A}_i := A_1 \cup \dots \cup A_i$ . Согласно (4)  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{A}_i \in \mathcal{A}$ .

6  $\Rightarrow$  4 Пусть  $A_i \in \mathcal{A}$ , причём  $A_i \subset A_{i+1}$ . Положим  $e_1 = A_1$ ,  $e_j = A_j \setminus A_{j-1}$  для  $j \geq 2$ . Тогда  $e_i \cap e_j = \emptyset$  для  $i \neq j$ , и  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} e_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ .  $\square$

**Факт 1.3.3.** Пусть  $\mathcal{A} \subset 2^X$  —  $\sigma$ -алгебра,  $\mu$  — мера на  $\mathcal{A}$ . Следующие условия эквивалентны.

1.  $\mu$  счётно аддитивна.

2. Если  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  для  $i \neq j$ , то  $\mu\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$ .

3. Если  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ , то  $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$ .

*Доказательство.*

1  $\iff$  2 Так как  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра, то  $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$  автоматически лежит в  $\mathcal{A}$ , и 1 тавтологично 2.

2  $\Rightarrow$  3 Пускай  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ . Введём  $e_1 = A_1$ ,  $e_j = A_j \setminus A_{j-1}$  для  $j \geq 2$ .  $e_i \cap e_j = \emptyset$  для  $i \neq j$ . Тогда  $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} e_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(e_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n e_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ .

3  $\Rightarrow$  2 То же самое в обратном порядке.  $\square$

*Предостережение.* Монотонность по убывающим последовательностям не выполняется:

рассмотрев на  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$   $A_n = (n, +\infty)$  видим, что хотя  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ , и  $\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu(\emptyset) = 0 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \infty$ .

**Теорема 1.3.5.** Если  $B_i \in \mathcal{A}$ ,  $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ , причём  $\mu(B_1) < +\infty$ , то  $\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(B_j)$ .

*Доказательство.* Положим  $A_i = B_1 \setminus B_i$ .

Тогда  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i = B_1 \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ , и  $\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \mu(B_1) - \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu(B_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(B_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(B_1) - \mu(B_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$

Так как  $\mu(B_1)$  конечна, то все производимые вычитания справедливы — не происходит вычитания бесконечности из бесконечности.  $\square$

*Замечание.* Если мера конечна, то справедливо и обратное.

Пусть  $X$  — множество,  $\mathcal{P}$  — полукольцо его подмножеств,  $\mu$  — мера на  $\mathcal{P}$  (аддитивная, но не факт, что счётно-аддитивная).

**Определение 1.3.7** (Внешняя мера, построенная по  $\mu$ ). Функция  $\mu^*$ , заданная на  $2^X$ , определяемая по формуле

$$\mu^*(e) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(a_j) \mid a_j \in \mathcal{P}, e \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} a_j \right\}$$

*Свойства.*

- $\mu^*(\emptyset) = 0$ . Так, покрытие счётным количеством пустых множеств имеет суммарную меру 0.
- $e_1 \subset e_2 \Rightarrow \mu^*(e_1) \leq \mu^*(e_2)$  — монотонность.
- $e \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \Rightarrow \mu^*(e) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(e_i)$  — счётная полуаддитивность.

*Доказательство.* Если хотя бы одно из  $\mu^*(e_i)$  бесконечно, то доказывать нечего. Далее считаем, что  $\forall i : \mu^*(e_i)$  конечно.

Выберем  $\varepsilon > 0$ . По определению внешней меры  $\forall i, k \in \mathbb{N} : \exists a_{i,k} \in \mathcal{P}$ , такие, что  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} a_{i,k} \supset e_i$ , причём  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(a_{i,k}) \leq \mu^*(e_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$ .

Тогда  $e \subset \bigcup_{i,k \in \mathbb{N}} a_{i,k}$  и  $\mu^*(e) \leq \sum_{i,k} \mu(a_{i,k}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(a_{i,k}) \leq \sum_i \mu^*(e_i) + \varepsilon$ .  $\square$

- Если  $\mu$  счётно аддитивна, то  $\mu^*|_{\mathcal{P}} = \mu$ .

*Доказательство.* Для  $b \in \mathcal{P} : \mu^*(b) \leq \mu(b)$ , так как можно выбрать покрытие из одного элемента.

Докажем, что  $\mu(b) \leq \mu^*(b)$ . Рассмотрим кольцо  $\mathcal{R}(\mathcal{P})$  — совокупность дизъюнктивных объединений  $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_s$ , где  $e_i \in \mathcal{P}$ . Мера  $\mu$  единственным образом продолжается до меры  $\bar{\mu}$  на  $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ .

**Лемма 1.3.3.**  $\forall e \subset X : \mu^*(e) = \mu^\Delta(e) := \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(c_j) \mid c_j \in \mathcal{P} \text{ и } e \subset \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} c_i \right\}$

*Доказательство леммы.*

$\mu^*(e) \leq \mu^\Delta(e)$ , так как всякое дизъюнктивное покрытие является покрытием.

Если  $e \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} a_i$ , то можно рассмотреть дизъюнктивное покрытие множествами  $\bar{a}_i := a_i \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_{i-1})$ .

Так как  $\bar{a}_j \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$  и  $\bar{a}_j \subset a_j$ , то  $\bar{\mu}(\bar{a}_j) \leq \mu(a_j)$ .

Согласно свойству  $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ :  $\bar{a}_j = \bigsqcup_{s=1}^{k_j} e_{j,s}$ , где при данном  $j$  все  $e_{j,s}$  попарно не пересекаются. Но при разных  $j$  они тем более не пересекаются, они лежат в разных  $\bar{a}_j$ .

Таким образом,  $\bigcup_{j,s} e_{j,s} \supset e$ , откуда  $\mu^\Delta(e) \leq \sum_{j,s} \mu(e_{j,s}) = \sum_j \bar{\mu}(\bar{a}_j) \leq \sum_j \mu(a_j)$ . Переходя к инфимуму, получаем  $\mu^\Delta(e) \leq \mu^*(e)$ .  $\square$

Используя лемму, рассмотрим произвольное дизъюнктивное покрытие  $e_j \in \mathcal{P}$  такое, что  $\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} e_j \supset e$ . Введём  $\tilde{e}_j := e_j \cup e$ . Для них  $\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} \tilde{e}_j = e$ .

Согласно счётной аддитивности  $\mu(e) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(\tilde{e}_j) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(e_j)$ . Переходя к инфимуму, получаем искомое.  $\square$

*Контрпример* (Счётная аддитивность важна). Пусть  $l_f$  — квазидлина, порождённая функцией  $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ .

Покажем, что внешняя мера  $l_f^*$  везде равна нулю. Рассмотрим счётное покрытие прямой  $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} [n, n+1) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [-2^n, -2^{n-1})$ . Квазидлины всех составляющих полуинтервала равны 0, значит, внешняя мера прямой равна 0, но тогда по монотонности и внешние меры всех подмножеств тоже равны 0.

## Лекция IV

27 сентября 2023 г.

### 1.3.3 Предмеры

Пусть  $X$  — множество.

Вещи, обладающие свойствами внешней меры будут возникать у нас разными способами, поэтому удобно уже сейчас обобщить это понятие, аксиоматизировав его.

**Определение 1.3.8** (Предмера). Функция  $\gamma : 2^X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , обладающая свойствами

1.  $\gamma(\emptyset) = 0$ .
2. Монотонность  $a \subset b \Rightarrow \gamma(a) \leq \gamma(b)$ .
3. Счётная полуаддитивность  $a \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} a_j \Rightarrow \gamma(a) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a_j)$ .

*Замечание.* Из 3. следует 2., проверяется выбором  $a_i = \begin{cases} b, & i = 1 \\ \emptyset, & i > 1 \end{cases}$ . Более того, можно не требовать положительности, она следует из монотонности по отношению к пустому множеству.

**Определение 1.3.9** ( $\gamma$ -измеримое множество  $e \subset X$ ).

$$\forall a \subset X : \gamma(a) = \gamma(a \cap e) + \gamma(a \setminus e) = \gamma(a \cap e) + \gamma(a \cap e^c)$$

**Теорема 1.3.6** (Лебег-Каратеодори). Совокупность  $\Sigma$  всех  $\gamma$ -измеримых множеств образует  $\sigma$ -алгебру на которой функция  $\gamma|_{\Sigma}$  счётно-аддитивна.

*Дополнение.* Если  $\gamma = \mu^*$ , где  $\mu$  — мера на полукольце  $\mathcal{P}$ , то все множества из  $\mathcal{P}$  автоматически  $\gamma$ -измеримы.

*Дополнение.* Если  $\mu$  счётно аддитивна на исходном полукольце  $\mathcal{P}$ , то  $\mu^*|_{\mathcal{P}} = \mu$ .

*Доказательство.*

- Покажем, что  $\Sigma$  — алгебра множеств.
  - Определение симметрично относительно  $e$  и  $e^c$ , поэтому  $e \in \Sigma \iff e^c \in \Sigma$ .
  - $\emptyset \in \Sigma$  прямо из определения. Используя предыдущий пункт,  $X \in \Sigma$ .

- Пусть  $e_1, e_2 \in \Sigma$ . Проверим, что  $e_1 \cap e_2 \in \Sigma$ . Рассмотрим произвольное  $a \subset X$ . Запишем измеримость для  $e_1$  при пересечении с  $a$  и измеримость для  $e_2$  при пересечении с  $a \cap e_1$ .

$$\begin{aligned}\gamma(a) &= \gamma(a \cap e_1) + \gamma(a \cap e_1^c) \\ \gamma(a \cap e_1) &= \gamma(a \cap e_1 \cap e_2) + \gamma(a \cap e_1 \cap e_2^c)\end{aligned}$$

Отсюда подстановкой получаем

$$\gamma(a) = \gamma(a \cap e_1 \cap e_2) + \underbrace{\gamma(a \cap e_1 \cap e_2^c) + \gamma(a \cap e_1^c)}_{\text{хотим показать, что это } \gamma(a \cap (e_1 \cap e_2)^c)}$$

Записав измеримость  $e_1$  при пересечении с  $a \cap (e_1^c \cup e_2^c)$ , получаем

$$\begin{aligned}\gamma(a \cap (e_1^c \cup e_2^c)) &= \gamma(a \cap (e_1^c \cup e_2^c) \cap e_1) + \gamma(a \cap (e_1^c \cup e_2^c) \cap e_1^c) = \\ &= \gamma(a \cap e_1 \cap e_2^c) + \gamma(a \cap e_1^c)\end{aligned}$$

- Так как  $(e_1 \cup e_2) = (e_1^c \cap e_2^c)^c$  и  $(e_1 \setminus e_2) = e_1 \cap e_2^c$ , то  $\Sigma$  — действительно алгебра.

- Проверим «усиленную аддитивность»: для произвольного  $a \subset X$ ,  $b_1, b_2 \in \Sigma$ ,  $b_1 \cap b_2 = \emptyset \Rightarrow$

$$\gamma(a \cap (b_1 \cup b_2)) = \gamma(a \cap b_1) + \gamma(a \cap b_2)$$

Данный факт потребуется для доказательства того, что  $\Sigma$  —  $\sigma$ -алгебра.

Доказательство напрямую следует из измеримости  $b_1$  при пересечении с  $a \cap (b_1 \cup b_2)$ .

Отсюда по индукции видно, что для попарно непересекающихся  $b_1, \dots, b_n \in \Sigma$ :

$$\gamma\left(a \cap \bigcup_{j \in \mathbb{N}} b_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a \cap b_j)$$

- Проверим, что  $\Sigma$  является  $\sigma$ -алгеброй. Для этого достаточно проверить, что для счётного семейства  $b_i \in \Sigma$ :  $b := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} b_j \in \Sigma$ .

Чтобы доказать измеримость множества  $e$ , достаточно проверить неравенство  $\gamma(a) \geq \gamma(a \cap e) + \gamma(a \setminus e)$ , потому что неравенство в другую сторону следует из счётной полуаддитивности. Дополнительно можно считать, что  $\gamma(a)$  конечно.

Выберем произвольное  $a \in X$ , для него

$$\gamma(a) = \gamma(a \cap (b_1 \cup \dots \cup b_n)) + \gamma(a \setminus (b_1 \cup \dots \cup b_n)) \geq \sum_{j=1}^n \gamma(a \cap b_j) + \gamma(a \setminus b)$$

Переходя к пределу  $n \rightarrow \infty$ , получаем

$$\gamma(a) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(a \cap b_j) + \gamma(a \setminus b)$$

Так как  $a \cap b = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (a \cap b_j)$ , то из счётной полуаддитивности  $\gamma(a \cap b) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a \cap b_j)$ . Отсюда

$$\gamma(a) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(a \cap b_j) + \gamma(a \setminus b) \geq \gamma(a \cap b) + \gamma(a \setminus b)$$



- Проверим, что  $\gamma|_{\Sigma}$  — «усиленно счётно-аддитивная мера», то есть для счётного семейства дизъюнктивных  $b_j \in \Sigma$  ( $b := \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} b_j$ ) и произвольного  $\forall a \in X$ :

$$\gamma \left( a \cap \bigcup_{j \in \mathbb{N}} b_j \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a \cap b_j)$$

При  $a = X$  свойство обращается в обычную счётную аддитивность, но усиленная даётся даром.

С одной стороны, из счётной аддитивности  $\gamma$ :  $\gamma(a \cap b) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a \cap b_j)$ . С другой стороны,

$$\gamma(a \cap b) \geq \gamma(a \cap (b_1 \cup \dots \cup b_n)) = \sum_{j=1}^n \gamma(a \cap b_j)$$

- Докажем первое дополнение.

Достаточно показать, что для любого  $e \in \mathcal{P}$ ,  $a \in X$ :  $\mu^*(a) \geq \mu^*(a \cap e) + \mu^*(a \setminus e)$ , обратное следует из полуаддитивности внешней меры.

Рассмотрим произвольное счётное покрытие  $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  множества  $e$  элементами множества  $\mathcal{P}$ . Можно считать, что  $\forall i : c_i \in e$  (пересекая каждое из  $c_i$  с  $e$ ).

– Во-первых, по определению меры  $\mu^*(a \cap e) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(c_i \cap e)$

– Во-вторых, оценим  $\mu^*(a \setminus e)$ .

Каждое  $b_i := c_i \setminus e$  представимо в виде конечного объединения  $b_i = \bigcup_{j=1}^{s_i} d_i^{(j)}$ , где  $d_i^{(j)} \in \mathcal{P}$  попарно дизъюнкты.

$\{d_i^{(j)}\}_{i,j}$  — счётная совокупность множеств из  $\mathcal{A}$ , покрывающая  $a \setminus e$ .

– Таким образом

$$\mu^*(a \cap e) + \mu^*(a \setminus e) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{\left( \mu(c_i \cap e) + \sum_{j=1}^{s_i} \mu(d_i^{(j)}) \right)}_{\mu(c_i)}$$

Переходя к инфимуму по всем покрытиям получаем, что

$$\mu^*(a \cap e) + \mu^*(a \setminus e) \leq \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(c_i) = \mu^*(a)$$

- Наконец, для доказательства второго дополнения сошлёмся на пятый пункт свойств меры (1.3.7).  $\square$

**Определение 1.3.10** (Стандартное продолжение меры  $\mu$  на полукольце  $\mathcal{P} \subset 2^X$ ). Построенные данным образом  $\Sigma$ , и сужение  $\mu^*|_{\Sigma}$  — счётно-аддитивная мера на  $\sigma$ -алгебре.

*Примеры.*

- Пусть  $v_n$  — объём на системе конечных  $n$ -мерных прямоугольных параллелепипедов (со сторонами, параллельными координатным осям).

Стандартное продолжение данной меры — *мера Лебега*  $\lambda_n$ , полученное множество  $\Sigma \subset 2^X$  — множество *измеримых по Лебегу* множеств. Все Борелевские множества, разумеется, измеримы по Лебегу (1.3.6), но обратное неверно.

- Пусть  $\lambda_f$  — Стильесова длина, порождённая нестрого возрастающей функцией  $f$ . Она счётно аддитивна на полукольце промежутков. Её стандартное продолжение — *мера Лебега-Стилтьеса*. Здесь полученные измеримые множества — элементы  $\Sigma$  — вообще говоря, могут зависеть от  $f$  (при одной функции, порождающей меру, множество  $x \subset X$  измеримо, но не при другой)

## 1.4 Структура измеримых множеств

### 1.4.1 Множества меры нуль

**Факт 1.4.1.** Пусть  $\gamma$  — предмера на  $X$ , рассмотрим такое подмножество  $e \subset X$ , что  $\gamma(e) = 0$ . Тогда  $e$  является  $\gamma$ -измеримым. В частности, все подмножества  $e$  имеют меру 0.

*Доказательство.* Проверим, что  $\forall a \subset X : \gamma(a) \geq \gamma(a \cap e) + \gamma(a \setminus e)$ .

Это так: по монотонности  $\gamma(a \cap e) \leq \gamma(e) = 0$  и  $\gamma(a \setminus e) \leq \gamma(a)$ . □

Пусть  $\gamma = \mu^*$ , где  $\mu$  — счётно-аддитивная мера на полукольце  $\mathcal{P}$ .

**Факт 1.4.2.** Множество  $e \subset X$  — множество меры нуль  $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists$  счётное семейство  $b_i \in \mathcal{P}$ , таких, что  $\bigcup_i b_i \supset e$ , и  $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(b_i) < \varepsilon$ .

*Примеры* (Множества меры нуль).

- Точка.
- Конечное или счётное число точек (например,  $\mathbb{Q}$ ).
- Канторово множество — на  $n$ -м шаге его мера равна  $(\frac{2}{3})^n$ .

*Замечание.* Так как канторово множество континуально, то все его подмножества (коих  $2^{|\mathbb{R}|}$ ) имеют меру нуль и измеримы по Лебегу. Отсюда получаем, что всего измеримых множеств на прямой  $2^{|\mathbb{R}|}$ , так как это уже мощность всех подмножеств прямой.

С другой стороны, Борелевских множеств всего континуум.

*Схема доказательства.* Пусть  $\mathcal{A}_0$  — все интервалы с рациональными границами. Их счётное число. Но это пока даже не алгебра.

Обозначим за  $\mathcal{A}_1$  все их счётные объединения, их континуально. Но это пока не  $\sigma$ -алгебра.

За  $\mathcal{A}_2$  обозначим все счётные пересечения множеств из  $\mathcal{A}_1$ . За  $\mathcal{A}_3$  обозначим все счётные объединения множеств из  $\mathcal{A}_2$ .

И так далее. Заведём трансфинитную индукцию, на первом несчётном ординале всё перестанет меняться. Объединение не более чем континуального числа континуальных множеств континуально. □

**Определение 1.4.1** (Свойство точек множества  $X$  выполняется почти всюду). Множество точек, где она не выполняется, имеет меру нуль.

Пусть  $\mathcal{P}$  — полукольцо подмножеств  $X$ ,  $\mu$  — счётно аддитивная мера на  $\mathcal{P}$ . Стандартное продолжение часто тоже будем обозначать через  $\mu$ , иногда через  $\bar{\mu}$ .

**Определение 1.4.2** ( $\sigma$ -множество относительно  $\mathcal{P}$ ). Объединение счётного семейства элементов  $\mathcal{P}$ .

Все  $\sigma$ -множества измеримы.

**Предложение 1.4.1.** Если  $e \subset X$   $\mu$ -измеримо, то  $\mu(e) = \inf \{ \mu(b) | e \subset b, b — \sigma\text{-множество} \}$ .

*Доказательство.* Так как по определению  $\mu(e) = \mu^*(e) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(c_i) \mid c_i \in \mathcal{P}, \bigcup_i c_i \supset e \right\}$  то можно выбрать в качестве  $b := \bigcup_i c_i$ ,  $b$  —  $\sigma$ -множество.  $\square$

*Замечание.* Любое  $\sigma$ -множество  $b$  представимо в виде дизъюнктного объединения счётного числа элементов  $d_j \in \mathcal{P}$ .

Так как  $d_j$  дизъюнкты, то  $\mu(b) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(d_j)$ , вот такая простая формула меры  $\sigma$ -множества.

**Теорема 1.4.1.** Если  $c$  —  $\mu$ -измеримое множество, и  $\mu(c) < \infty$ , то  $\exists$  убывающая по включению последовательность  $\sigma$ -множеств  $b_k$ , таких, что  $\bigcap_{k=1}^{\infty} b_k \supset c$  и  $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} b_k\right) = \mu(c)$ . Иначе говоря, если  $\tilde{c} := \bigcap_{k=1}^{\infty} b_k$ , то  $\mu(\tilde{c} \setminus c) = 0$ .

*Доказательство.* Положим  $\tilde{b}_k$  —  $\sigma$ -множество, такое, что  $\tilde{b}_k \supset c$ , причём  $\mu(\tilde{b}_k) < \mu(c) + \frac{1}{k}$ . Назначим  $b_k = \tilde{b}_1 \cap \dots \cap \tilde{b}_k$ .

**Лемма 1.4.1.** Пересечение двух (а значит, и конечного числа)  $\sigma$ -множеств —  $\sigma$ -множество.

*Доказательство леммы.*

Если  $u = \bigcup_{i=1}^{\infty} e_i, v = \bigcup_{j=1}^{\infty} g_j$ , где  $e_i, g_j \in \mathcal{P}$ , то  $u \cap v = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} (e_i \cap g_j)$   $\square$

Согласно лемме  $b_k$  —  $\sigma$ -множество. Так как  $\mu(b_k) \leq \mu(c) + \frac{1}{k}$ , то  $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} b_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(b_k) = \mu(c)$ .  $\square$

**Определение 1.4.3** ( $\delta\sigma$ -множество относительно  $\mathcal{P}$ ). Пересечение счётного семейства  $\sigma$ -множеств.

**Определение 1.4.4** ( $\sigma$ -конечная мера  $\mu$ ). Такая мера, что  $\exists E_1 \subset E_2 \subset \dots$ , все  $E_i \in \Sigma$ , все  $\mu(E_i) < +\infty$ , причём  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = X$ .

*Примеры.*

- Считаящая мера на несчётном множестве не является  $\sigma$ -конечной.
- Мера Лебега в  $\mathbb{R}^n$   $\sigma$ -конечна.

## Лекция V

30 сентября 2023 г.

По-прежнему,  $\mathcal{A}$  — полукольцо,  $\mu$  — мера на  $\mathcal{A}$ , обозначим её стандартное продолжение тоже за  $\mu$ .

**Теорема 1.4.2.** Пусть стандартное продолжение меры  $\mu$  на полукольце  $\mathcal{P}$   $\sigma$ -конечно. Пусть  $d \subset X$  —  $\mu$ -измеримо. Тогда  $\exists \delta\sigma$ -множество  $D \supset d$ , такое, что  $\mu(D \setminus d) = 0$ .

*Доказательство.*

**Лемма 1.4.2.** Пространство  $X$   $\sigma$ -конечно, если и только если  $\exists e_1, e_2, \dots \subset X: \mu(e_i) < \infty$  и  $\bigcup_{i=1}^{\infty} e_i = X$ .

*Доказательство леммы.*

Как обычно, если  $\sigma$ -конечно, то  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$  в объединении дают  $X$ , рассмотрим  $e_i := E_{i+1} \setminus E_i$ . Наоборот, если даны  $e_i$ , то  $E_i := \bigcup_{j=1}^i e_j$ .  $\square$

Выберем  $\varepsilon > 0$ .

Пусть  $e_i \in \Sigma$  — измеримы, причём  $\mu(e_i) < \infty$  и  $\bigcup_{i=1}^{\infty} e_i = X$ . Обозначим за  $d_i := d \cap e_i$ . Тогда  $\forall i : \mu(d_i) < \infty$ . Согласно (1.4.1):  $\exists \sigma$ -множество  $D_i : \mu(D_i \setminus d_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$ . Тогда подойдёт  $D := \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ :  $\mu(D \setminus d) < \varepsilon$ .

Но отсюда пересечение  $D$  по всем  $\varepsilon = \frac{1}{N}$  даёт подходящее  $\delta\sigma$ -множество.  $\square$

Пусть  $\mathcal{C} \subset 2^X$  —  $\sigma$ -алгебра, на которой задана счётно-аддитивная мера  $\nu$ .

Пусть  $\mathcal{A}$  — полукольцо, лежащее в  $\mathcal{C}$ ,  $\mu$  — счётно-аддитивная мера на  $\mathcal{A}$ ,  $\bar{\mu}$  — стандартное продолжение меры (на  $\mu$ -измеримые множества из  $\Sigma$ ).

Пусть  $\nu$  — мера на  $\mathcal{C}$ , такая, что  $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$ , причём  $\mu$  —  $\sigma$ -конечна.

**Определение 1.4.5** (Полная мера). Такая счётно-аддитивная мера  $\nu$  на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{C}$ , что  $\forall b \in \mathcal{C} : \nu(b) = 0 \Rightarrow \forall a \subset b : a \in \mathcal{C}$ .

**Теорема 1.4.3.** Если мера  $\nu$  полна, то  $\Sigma \subset \mathcal{C}$ , причём меры  $\nu$  и  $\mu$  совпадают на  $\Sigma$ .

*Доказательство.*

- Пусть  $A \in \Sigma$  есть  $\sigma$ -множество относительно полукольца  $\mathcal{A}$ . Тогда  $A = a_1 \sqcup a_2 \dots$ , где  $a_j \in \mathcal{A}$ . Отсюда  $A \in \mathcal{C}$ , причём  $\nu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(a_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(a_j) = \bar{\mu}(A)$ .
- Пусть  $B \in \Sigma$  —  $\delta\sigma$ -множество относительно полукольца  $\mathcal{A}$ , то есть  $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ , где  $A_k$  —  $\sigma$ -множества. Тогда  $B \in \mathcal{C}$ . Если  $\bar{\mu}(B) < \infty$ , то множества  $A_j$  тоже можно выбрать конечной меры. Тогда  $\nu(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\mu}(A_k) = \bar{\mu}(B)$ .
- Пускай  $E \in \mathcal{C} \cap \Sigma$ . Найдётся такое  $\delta\sigma$ -множество  $E_1 \supset E$ :  $\bar{\mu}(E_1 \setminus E) = 0$  (если  $E$  бесконечно, то используем  $\sigma$ -конечность  $\mu$ ), причём так как  $E_1$  —  $\delta\sigma$ -множество относительно  $\mathcal{A}$ , то про него уже известно, что  $\nu(E_1) = \bar{\mu}(E_1)$ . Тогда  $E_1 \setminus E$  тоже содержится в  $\mathcal{C} \cap \Sigma$ .

**Лемма 1.4.3.** Если  $b \in \mathcal{C} \cap \Sigma$ , причём  $\bar{\mu}(b) = 0$ , то  $\nu(b) = 0$ .

*Доказательство леммы.*

Найдётся  $b_1$  —  $\delta\sigma$ -множество, такое, что  $b_1 \supset b$  и  $\bar{\mu}(b_1) = 0$ . Тогда  $\nu(b_1) = \bar{\mu}(b_1) = 0$ , откуда  $\nu(b) \leq \nu(b_1) = 0$ .  $\square$

Лемма влечёт  $\nu(E_1 \setminus E) = 0$ . Отсюда на всех множествах из  $\mathcal{C} \cap \Sigma$  меры  $\bar{\mu}$  и  $\nu$  совпадают.

- Проверим, что если  $\nu$  полна, то  $\Sigma \subset \mathcal{C}$ .

Если  $\bar{\mu}(e) = 0$ , то  $e \in \mathcal{C}$ , так как найдётся  $\delta\sigma$ -множество  $e_1 \supset e$ :  $\bar{\mu}(e_1) = 0$ . Из полноты меры автоматически  $e \in \mathcal{C}$ .

Теперь рассмотрим  $D \in \Sigma$ . Найдётся  $\delta\sigma$ -множество  $\bar{D} \supset D$ , такое, что  $\bar{\mu}(\bar{D} \setminus D) = 0$ , то есть  $\bar{D} \setminus D \in \mathcal{C}$ . Таким образом,  $D \in \mathcal{C}$ , причём  $\nu(\bar{D} \setminus D) = 0$ .  $\square$

## 1.5 Двоичные (диадические) кубы

Рассмотрим отрезки вида  $I_n^{(k)} := [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .  $n$  называется *рангом* двоичного отрезка.

Заметим, что  $\forall n \in \mathbb{Z} : \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} I_n^{(k)} = \mathbb{R}$ . Любые двоичные отрезки либо не пересекаются, либо вложены.

**Определение 1.5.1** (Двоичные кубы ранга  $n$ ). Произведения  $I_1 \times \dots \times I_d$ , где  $I_j$  — двоичные отрезки ранга  $n$ .

Любые двоичные кубы тоже либо не пересекаются, либо вложены.

**Теорема 1.5.1.** Пусть  $G$  — ограниченное множество в  $\mathbb{R}^n$ .

Тогда  $G = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ , где  $Q_j$  — попарно не пересекающиеся двоичные кубы, либо  $Q_j = \emptyset$  (иными словами,  $G$  — дизъюнктное объединение не более чем счётного числа каких-то двоичных кубов).

*Доказательство.* Рассмотрим точки  $x \in G$ . Для каждой точки выберем двоичный куб  $Q \ni x$ , полностью содержащийся в  $G$ .

Объединение всех таких кубов даст  $G$ . Чтобы кубы не пересекались, мы оставим только те кубы, которые максимальны по включению.  $\square$

Вспомним про  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$  — полукольцо ограниченных прямоугольных параллелепипедов, на котором есть мера —  $n$ -мерный объём  $v_n$ .  $\Sigma$  —  $\sigma$ -алгебра измеримых по Лебегу множеств (относительно  $v_n$ ),  $\lambda_n$  — стандартное продолжение  $v_n$ .

Теперь обозначим  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  — полукольцо всех двоичных кубов в  $\mathbb{R}^n$ . Положим  $\rho_n = v_n|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$ . По теореме Лебега — Каратеодори получаем стандартное продолжение  $\mu$  на множество  $\Sigma_1 \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ .

Тогда  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C} = \Sigma$ , откуда  $\Sigma_1 \subset \Sigma$ ,  $\mu = \lambda_n$ , суженная на  $\Sigma_1$ .

Также понятно, что все открытые множества являются счётными объединениями кубов из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , откуда  $\Sigma \subset \Sigma_1$ , то есть на самом деле  $\Sigma = \Sigma_1$ .

Наконец, так как обе меры совпадают на  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , то они равны (1.4.3).

## Лекция VI

4 октября 2023 г.

**Теорема 1.5.2.** Пусть  $\lambda_n$  — мера Лебега в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Sigma$  —  $\sigma$ -алгебра измеримых по Лебегу множеств.

1. Если  $e \in \Sigma, t \in \mathbb{R}^n : e + t \in \Sigma, \lambda_n(e + t) = \lambda_n(e)$ .
2. Если  $\nu$  — полная мера, заданная на  $\Sigma$ , и инвариантная относительно сдвига, то есть  $\forall e \in \Sigma, t \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \nu(e + t) = \nu(e)$ , то тогда  $\exists c \geq 0 : \forall e \in \Sigma : \nu(e) = c\lambda_n(e)$ .

*Доказательство.*

1. Достаточно доказать, что внешняя мера  $\rho = v_n^*$  инвариантна относительно сдвига.

$\rho(a) = \inf \sum_j v_n(e_j)$  по всем  $e_j$ , таким, что их объединения покрывают  $a$ . Но

$$\bigcup_j e_j \supset a \iff \bigcup_j (e_j - t) \supset (a - t)$$

Измеримость по Лебегу тоже легко проверить:

$$\rho(a) = \rho(a \cap e) + \rho(a \setminus e) \iff \rho(a - t) = \rho((a - t) \cap (e - t)) + \rho((a - t) \setminus (e - t))$$

2. Обозначим за  $c := \frac{\nu(Q_0)}{\lambda_n(Q_0)}$ , где  $Q_0$  — какой-то фиксированный двоичный куб ранга 0. Тем самым,  $\nu(Q) = c\nu_n(Q)$  для любого двоичного куба ранга 1 (инвариантность при сдвиге).

Может так случиться, что  $c = 0$ . Тогда в силу счётной аддитивности и  $\sigma$ -конечности мера всего пространства равна 0.

Заметим, что  $2^n$  кубов ранга  $k$  дают в объединении куб ранга  $k - 1$ :

$$\left[0, \frac{1}{2^{k-1}}\right)^n = \left(\left[0, \frac{1}{2^k}\right) \sqcup \left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right)\right)^n$$

Тем самым, мы по индукции получаем, что на всех двоичных кубах меры  $\nu$  и  $\lambda_n$  отличаются в  $c$  раз.

Дальше применяя теорему о единственности для меры  $\rho = \frac{\nu}{c}$ , получаем, что  $\rho \equiv \lambda_n$  — объём можно задать на двоичных кубах.

*Замечание.* Полноту здесь можно и не требовать, она получается автоматически из того, что  $\nu$  задана на всей  $\Sigma$ . В самом деле, всякое множество меры нуль является подмножеством  $\delta\sigma$ -множества меры нуль.

□

### 1.5.1 Поведение меры Лебега при линейных отображениях

Пусть  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — линейное отображение,  $e \in \Sigma$ . Чему равна  $\lambda_n(Te)$ ?

Пусть  $(X, \mathcal{A}_X)$  и  $(Y, \mathcal{A}_Y)$  — пары из множеств и  $\sigma$ -алгебр их подмножеств.

**Определение 1.5.2** (Измеримое отображение  $F : X \rightarrow Y$  (относительно данных  $\sigma$ -алгебр)). Такое отображение  $F$ , что  $\forall a \in \mathcal{A}_Y : F^{-1}(a) \in \mathcal{A}_X$ .

В частном случае  $\mathcal{A}_X = \mathcal{B}(X)$  и  $\mathcal{A}_Y = \mathcal{B}_Y$  измеримое отображение называется *измеримым по Борелю*.

**Лемма 1.5.1.** *Всякое непрерывное отображение  $F : X \rightarrow Y$  измеримо по Борелю.*

*Доказательство.* Положим  $\mathcal{C} := \{e \in Y \mid F^{-1}(e) \in \mathcal{B}(X)\}$ .  $\mathcal{C}$  —  $\sigma$ -алгебра, так как взятие прообраза коммутирует со всеми теоретико-множественными операциями (даже несчётными).

Так как прообраз открытого открыт, то  $\mathcal{C}$  содержит все открытые множества. Это сразу влечёт, что  $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}(Y)$ , а тогда и подавно  $\forall e \in \mathcal{B}(Y) : F^{-1}(e) \in \mathcal{B}(X)$ .

□

Для счётно-аддитивной меры  $\nu$ , заданной на  $\mathcal{A}_X$  можно ввести её образ.

**Определение 1.5.3** (Образ меры  $\mu$  при (измеримом) отображении  $F$ ). Мера  $\rho$ , заданная на  $\mathcal{A}_Y$  следующим образом:  $\rho(e) = \nu(F^{-1}(e))$ .

Пусть  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  непрерывно. Рассмотрим меру  $\mu(e) := \lambda_n(F^{-1}(e))$ . Если  $e \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , то  $F^{-1}(e) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , и формула имеет смысл:  $\mu(e)$  определена.

Иначе же, (например, если  $e$  — меры нуль) может произойти что угодно. Его прообраз может быть вообще неизмеримым по Лебегу.

Образ же даже Борелевского множества необязательно измерим по Лебегу. Так,  $\eta(e) := \lambda_n(\Phi(e))$  для непрерывного (даже инъективного)  $\Phi$  может быть не определена на каком-то борелевском множестве. Чтобы таких проблем не было, надо требовать непрерывность обратного отображения.

**Факт 1.5.1.** Пусть  $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченные открытые множества,  $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$  — гомеоморфизм. Введём меру  $\nu$  на  $G_1$ :  $\nu(e) = \lambda_n(\Phi(e))$ . Тогда  $\nu$  корректно определена на  $\mathcal{B}(G_1)$ .

Пусть  $a \subset G$  — измеримое по Лебегу множество,  $\lambda_n(a) = 0$ . Тогда хочется, чтобы выполнялось  $\nu(a) = 0$ . В таком случае  $\nu(e) = \lambda_n(\Phi(e))$  будет определена на всех измеримых по Лебегу множествах (всякое измеримое по Лебегу множество — разность  $\delta\sigma$ -множества, и множества меры нуль).

Пусть  $G_1, G_2$  — открытые множества в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$  — гомеоморфизм. В терминах измеримости сказанное выше можно переформулировать в виде: тогда  $\Phi^{-1}$  измеримо по Борелю, и если  $\Phi$  липшицево, то  $\Phi^{-1}$  измеримо по Лебегу.

**Теорема 1.5.3.** Пусть  $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$  —  $C$ -липшицево отображение, пусть  $A \subset G_1$  — меры нуль. Тогда  $\Phi(A)$  тоже имеет меры нуль.

*Доказательство.*

**Лемма 1.5.2.** Пусть  $e \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда  $e$  есть множество меры нуль  $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} : e \subset \bigcup_i a_i$ , причём

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } a_i)^n < \varepsilon$$

*Доказательство леммы.*

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_n(e) = 0 &\iff \lambda_n^*(e) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \{Q_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ — такое семейство двоич-} \\ &\text{ных кубов, что } \sum_{i=1}^{\infty} v_n(Q_i) < \varepsilon. \text{ Учитывая, что } v_n(Q_i) = \left(\frac{\text{diam } Q_i}{\sqrt{n}}\right)^n \text{ сразу получаем} \\ &\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } Q_i)^n < n^n \varepsilon. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$  Всякое множество  $a_i$  содержится в кубе  $Q_i$  со стороной  $\text{diam}(a_i)$  (проекция на любую координатную ось не больше  $\text{diam}(a_i)$ ).

□

Пусть открытое  $e \subset G_1$  имеет меру нуль, предположим, что  $\text{dist}(e, G_1^c) > 0$ . Тем самым,  $\forall \varepsilon > 0 : \exists a_i \subset \mathbb{R}^n : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} a_i \supset e, \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(a_i))^n < \varepsilon$ . Можно считать, что все  $a_i$  пересекают  $e$ , тогда при маленьких  $\varepsilon : a_i \subset G_1$ .

Тем самым,  $\text{diam}(\Phi(a_i)) \leq C \cdot \text{diam}(a_i)$ , и  $\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(\Phi(a_i))^n \leq C^n \cdot \varepsilon$

Если же  $\text{dist}(e, G_1^c) = 0$ , то воспользуемся теоремой об исчерпывающей последовательности компактов 1.5.4. Найдутся компактные  $K_i \subset G$ , в объединении дающие  $G$ . Для множества меры нуль  $a \subset G$  заметим, что оно является объединением счётного числа множеств  $a_i = a \cap K_i$ , отделённых от границы. □

**Теорема 1.5.4** (Об исчерпывающей последовательности компактов). Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  — открыто, тогда существует  $\exists \{K_i\}_{i \in \mathbb{N}} : K_i \subset \text{Int}(K_{i+1})$ , причём  $\bigcup_i K_i = G$ .

*Доказательство.* Если  $G = \mathbb{R}^n$ , то выберем  $K_i = \overline{B_i}(0)$ .

Иначе положим  $\tilde{K}_i = \left\{ x \in G \mid \text{dist}(x, G^c) \geq \frac{1}{i} \right\}$ . Несложно видеть, что  $\bigcup_i \tilde{K}_i = G$  — это следует из замкнутости  $G^c$ . Из непрерывности функции расстояния (она даже липшицева)  $\tilde{K}_i$  тоже замкнуто.

Наконец,  $\tilde{K}_i \subset \tilde{K}_{i+1}$ . Если  $G$  неограничено, то  $\tilde{K}_i$  может быть некомпактно хотя и замкнуто. Чтобы избежать этой проблемы, положим  $K_i = \tilde{K}_i \cap \overline{B_i}(0)$ . □

*Замечание.* В  $\mathbb{R}^n$  любая координатная гиперплоскость имеет лебегову меру нуль: например, она представима в виде объединения счётного числа гиперквадратиков меры нуль.

Итак, с чего мы начали. Пусть  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — линейное отображение.

**Теорема 1.5.5.**  $\forall e \in \Sigma : \lambda_n(Te) = |\det T| \cdot \lambda_n(e)$ , где определитель взят в каком-то ортонормированном базисе.

*Доказательство.*

- Пусть  $T$  — невырожденное отображение,  $\det T \neq 0$ . Тогда это гомеоморфизм  $\mathbb{R}^n$  на себя. В любом случае,  $T$  липшицево, например, с константой  $\|T\|$ .

Таким образом, если положить  $\nu = \lambda_n \circ T$ , то окажется, что  $\nu$  — корректно определённая счётно-аддитивная мера на  $\sigma$ -алгебра измеримых по Лебегу множеств. Заметим, что  $\nu$  инвариантна относительно сдвига:  $\forall t \in \mathbb{R}^n. \lambda_n(Te + Tt) = \lambda_n(Te)$ . Таким образом (1.5.2):  $\exists c : \nu = c\lambda_n$ . Осталось проверить, что  $c = |\det T|$ .

- Если  $T$  — ортогональное преобразование, то оно сохраняет расстояния, и  $\det T = \pm 1$ . Выберем  $B$  — замкнутый шар положительного радиуса с центром в 0. Тогда  $TB = B$ , но мера шара не равна 0 (в него можно засунуть кубик положительного диаметра), откуда  $c = 1$ .
- **Следствия.** Если  $E$  — собственное линейное подпространство  $\mathbb{R}^n$ , то его мера  $\lambda_n$  равна 0. Ортогональным преобразованием его можно перевести в координатную гиперплоскость.

Другим следствием предыдущего пункта является то, что меру Лебега можно начинать строить с любого ортонормированного базиса в  $\mathbb{R}^n$ . Мера сохраняется при всяких поворотах и симметриях.

- Воспользуемся полярным разложением оператора. Это значит, что для невырожденного линейного  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ :  $T = UA$ , где  $U$  — ортогональный оператор, а  $A$  — эрмитов (диагональный в каком-то базисе). Тогда посчитаем для измеримого  $a \in \mathbb{R}^n$   $\lambda_n(Ta) = \lambda_n(UAa) = \lambda_n(Aa)$ . Будем считать, что мера Лебега построена в том базисе, в котором  $A$  диагонален.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Всякий куб  $Q \subset \mathbb{R}^n$  после применения  $A$  переходит в параллелепипед со сторонами  $|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|$ . Действительно,  $\lambda_n(AQ) = |\alpha_1| \cdot \dots \cdot |\alpha_n| \cdot \lambda_n(Q) = |\det A| \cdot \lambda_n(Q)$ .

- Если  $T$  вырождено, то  $\text{Im}(T)$  — линейное подпространство в  $\mathbb{R}^n$ , так как  $Te \subset T(\mathbb{R}^n)$ , то мера  $Te$  тоже нуль.  $\square$



## Глава 2

# Интеграл Лебега

Пусть имеется тройка  $(X, \Sigma, \mu)$ , где  $X$  — множество,  $\Sigma \subset 2^X$  —  $\sigma$ -алгебра,  $\mu$  — счётно-аддитивная мера на  $\Sigma$ .

Определим для некоторых функций  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  интеграл  $\int_X f d\mu$ .

Раньше мы уже определяли интеграл от простой функции  $f = \sum_i c_i \chi_{e_i}$ , равный  $I(f) = \sum_i c_i \mu(e_i)$ . В качестве  $e_i$  теперь можно брать произвольные измеримые множества, что уже сильно увеличивает разнообразие простых функций.

**Определение 2.0.1** (Простая функция  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\Sigma$ ). Функция вида  $g(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{e_i}$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $e_i \in \Sigma$ . Можно считать, что  $e_i \cap e_j = \emptyset$  для  $i \neq j$ .

## Лекция VII

18 октября 2023 г.

**Теорема 2.0.1** (Малая теорема Леви). Пусть  $g_1, g_2, \dots$  — счётное семейство неотрицательных простых функций; пусть  $g$  — ещё одна простая функция. Предположим, что  $\forall x \in X : g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots$ , причём  $g_j(x) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} g(x)$  (можно записать  $g_n(x) \nearrow g(x)$ ). Тогда  $\lim_{j \rightarrow \infty} I(g_j) = I(g)$ .

*Доказательство.* Сложность заключается в том, что число ступенек у  $g_j$  может неограниченно расти.

Заметим, что так как  $g_j$  неотрицательны, то  $I(g_j)$  всегда определён (число  $\in \mathbb{R}$ , или бесконечность).

Если  $\exists j : I(g_j) = +\infty$ , то  $I(g) = +\infty$ , и доказывать нечего. Далее считаем, что  $\forall j : I(g_j) \in \mathbb{R}$ .

$g = \sum_{s=1}^n c_s \chi_{e_s}$ , где  $e_s$  — попарно дизъюнктные множества из  $\Sigma$ . Положим  $g_j^s := g_j \cdot \chi_{e_s}$ . Эти функции тоже простые.

Зафиксируем  $s$  ( $1 \leq s \leq n$ ), зафиксируем  $x \in e_s$ , посмотрим на  $\lim_{j \rightarrow \infty} g_j^s(x) = c_s \chi_{e_s}$ . Проверим предельное соотношение для интегралов: так как  $s$  пробегает конечное множество значений, то достаточно доказать только для одного значения. Далее считаем, что  $g = c \chi_e$ .

Более того, можно считать, что  $c = 1$ . Если  $c = 0$ , то все  $g_j \equiv 0$ , иначе можно все  $g_j$  и  $g$  тоже поделить на  $c$ . Но мы это считать не будем.

Тем самым, утверждение свелось к следующему: для  $e \in \Sigma$ , для последовательности простых функций  $g_j$ , таких, что поточечно  $0 \leq g_j \leq g_{j+1} \leq c \chi_e = g$ , причём  $\forall x \in X : \lim_{j \rightarrow \infty} g_j(x) = g(x)$ , необходимо и достаточно показать, что  $I(g_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} I(\chi_e) = \mu(e)$ .

Рассмотрим  $d \in (0, c)$ . Положим  $E_n := \{x | g_n(x) > d\}$ . Понятно, что  $E_n \subset e$ , причём  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = e$ .

Обозначим  $h_n = d \cdot \chi_{E_n}$ . По определению  $E_n$ :  $h_n \leq g_n$ . Таким образом,

$$\underbrace{I(h_n)}_{d \cdot \mu(E_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d \cdot \mu(e)} \leq I(g_n) \leq \underbrace{I(g)}_{c \cdot \mu(e)}$$

Так как  $I(g_i) \leq I(g_{i+1})$ , то существует предел  $V = \lim_{j \rightarrow \infty} I(g_j)$ . Отсюда  $d \cdot \mu(e) \leq V \leq c \cdot \mu(e)$ , причём это верно для любого  $d < c$ .  $\square$

## 2.1 Измеримые отображения

Пусть  $(X, \mathcal{A})$ ,  $(Y, \mathcal{C})$  — множества и  $\sigma$ -алгебры соответствующих подмножеств.  $F : X \rightarrow Y$ .

Вспомним определение измеримости: (1.5.2).

**Определение 2.1.1** (Измеримое отображение  $F : X \rightarrow Y$  (относительно данных  $\sigma$ -алгебр)). Такое отображение  $F$ , что  $\forall c \in \mathcal{C} : F^{-1}(c) \in \mathcal{A}$ .

Если в качестве  $Y$  рассмотреть топологическое пространство без определённой  $\sigma$ -алгебры, то в качестве  $\sigma$ -алгебры в  $Y$  можно выбрать  $\sigma$ -алгебру борелевских множеств  $\mathcal{B}(Y)$ . В таком случае  $F$  называется *измеримой по Борелю*.

**Теорема 2.1.1.** Пусть в  $Y$  имеется счётная база топологии  $\mathcal{C}$ ; пусть  $\mathcal{D}$  — какая-нибудь (даже необязательно счётная) база для топологии в  $Y$ .

Если  $\forall e \in \mathcal{D} : F^{-1}(e) \in \mathcal{A}$ , то  $F$  измеримо по Борелю.

*Доказательство.* Рассмотрим открытое  $G \subset Y$ , докажем, что  $F^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ .

Представим  $G = \bigcup_{x \in G} a_x$ , где  $a_x \in \mathcal{D}$  содержит  $x$ .

Пусть  $\mathcal{C}$  — счётная база топологии в  $Y$ . Для любого  $x \in G$ :  $\exists c_x \in \mathcal{C} : x \in c_x \subset a$ , где  $a \in \mathcal{D}$ .  $\bigcup_{x \in G} c_x = G$ . Так как среди  $c_x$  всего счётное число различных, то можно представителей — счётное множество  $X \subset G$ :  $\bigcup_{x \in X} c_x = G$ . Тогда и подавно  $\bigcup_{x \in X} a_x = G$ .

Отсюда  $F^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ , так как  $\sigma$ -алгебра выдерживает счётные операции.

Этого достаточно, так как  $\{E \subset Y | F^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$  —  $\sigma$ -алгебра, и если в неё содержатся все открытые множества, то и все борелевские содержатся в ней тоже.  $\square$

Пусть  $(X, \Sigma_1)$ ,  $(Y, \Sigma_2)$ ,  $(Z, \Sigma_3)$  — множества со своими  $\sigma$ -алгебрами.

Рассмотрим композицию  $X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{\Phi} Z$ .

**Теорема 2.1.2.** Композиция измеримых отображений измерима.

*Доказательство.*  $\forall e_3 \in \Sigma_3 : (\Phi \circ F)^{-1}(e) = F^{-1}(\Phi^{-1}(e))$ .  $\square$

**Факт 2.1.1.** Пусть  $X_1, X_2$  — топологические пространства,  $F : X_1 \rightarrow X_2$  — непрерывно. Пусть  $X_1, X_2$  наделены своими борелевскими  $\sigma$ -алгебрами. Тогда  $F$  измеримо.

*Доказательство.* Определим  $\mathcal{A} := \{e \in X_2 | F^{-1}(e) \in \mathcal{B}(X_1)\}$ .  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра, причём она содержит все открытые множества.  $\square$

**Следствие 2.1.1.** Рассмотрим композицию  $X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{\Phi} Z$ .  $X$  — пространство с  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{A}$ ,  $Y, Z$  — топологические пространства,  $F$  измеримо,  $\Phi$  непрерывно. Тогда  $\Phi \circ F$  непрерывно.

$(X, \mathcal{A})$  — пространство с  $\sigma$ -алгеброй. Рассмотрим  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Предложение 2.1.1.**  $f$  измеримо, если выполнено любое из следующих условий.

- $\forall a, b \in \mathbb{R} : f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A}$ .
- $\forall a, b \in \mathbb{R} : f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{A}$ .
- $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{A}$ .
- $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{A}$ .

*Доказательство.* Согласно предыдущей теореме (1) сразу влечёт измеримость.

Проверим (3)  $\Rightarrow$  (1). Так как  $(-\infty, d] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, d + 1/n)$ , то

$$f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((-\infty, b) \setminus (-\infty, a]) = f^{-1}\left((-\infty, b) \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, a + 1/n)\right)$$

Всё остальное делается аналогично.  $\square$

**Определение 2.1.2** (Лебеговы множества функции  $f$ ). Для  $a \in \mathbb{R}$  это множества вида  $\{x | f(x) < a\}$ ,  $\{x | f(x) \leq a\}$ ,  $\{x | f(x) > a\}$ ,  $\{x | f(x) \geq a\}$ .

Теперь рассмотрим отображение  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где  $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$  — столбец координатных функций.

**Предложение 2.1.2.**  $F$  измеримо  $\iff$  все  $f_j$  измеримы.

*Доказательство.*

$\Leftarrow$ . Пускай  $I_1, \dots, I_n$  — интервалы. Параллелепипеды  $P = I_1 \times \dots \times I_n$  образуют базу топологии в  $\mathbb{R}^n$ . Достаточно доказать на базе, что  $F^{-1}(P) \in \mathcal{A}$ .  $x \in F^{-1}(P) \iff F(x) \in P \iff \forall j = 1..n : f_j(x) \in I_j$ .  $F^{-1}(P) = \bigcap_{j=1}^n f_j^{-1}(I_j)$ .

$\Rightarrow$ . Рассмотрим координатную проекцию  $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\pi_j \circ F$  измеримо.  $\square$

**Предложение 2.1.3.** Пусть  $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримы. Тогда измеримыми являются функции

- $\alpha f_1 + \beta f_2$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- $f_1 \cdot f_2$ .
- $\frac{f_1}{f_2}$ , если  $\forall x \in X : f_2(x) \neq 0$ .

*Доказательство.* Пускай  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ . Согласно предыдущей теореме, оно измеримо. Скомпонуем  $\psi \circ F$ , где  $\psi : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \alpha x + \beta y \text{ или } xy \end{matrix}$  Для частного:  $\psi : \begin{matrix} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{x}{y} \end{matrix}$   $\square$

Ниже нам будет удобно определять функцию  $f$ , принимающую бесконечные значения.

$$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \stackrel{def}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Про такую функцию говорят, что она *измерима*, если  $f^{-1}(+\infty), f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{A}$  и  $f|_{f^{-1}(\mathbb{R})}$  измерима в обычном понимании.

К таким функциям можно применять примерно всё то, что уже доказано, только не надо складывать бесконечности разных знаков.

**Факт 2.1.2.** Если  $f$  (возможно) принимает значение  $+\infty$ , и все множества  $\{x|f(x) < a\}$  лежат в  $\mathcal{A}$ , то  $f$  измерима.

*Доказательство.*  $f^{-1}(\mathbb{R}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(-\infty, n); \{x|f(x) = +\infty\} = f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) \setminus f^{-1}(\mathbb{R}).$  □

## 2.2 Грани и предельные переходы

**Теорема 2.2.1.** Пусть  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримые функции. Пусть  $f(x) = \inf_n f_n(x)$ . Для простоты считаем, что  $\forall x : f_n(x)$  ограничены снизу.

Тогда  $f$  измерима.

*Доказательство.* Рассмотрим  $\{x|f(x) < a\} = \bigcup_n \{x|f_n(x) < a\}.$  □

**Следствие 2.2.1.** Если функция  $g(x) = \sup_n f_n(x)$  всюду конечна, то функция  $g$  измерима.

**Следствие 2.2.2.** Пусть  $f_n$  измеримы, и  $\forall x$ : числовая последовательность  $\{f_n(x)\}$  ограничена. Тогда  $\overline{\lim}_n f_n(x) = \underline{\lim}_n f(x)$  тоже измеримы.

*Доказательство.* Например,  $\overline{\lim}_n f_n(x) = \inf_k \sup_{n \geq k} f_n(x).$  □

**Теорема 2.2.2.** Пусть  $f_n$  всюду конечны и измеримы, пусть  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ , где  $f(x)$  — тоже конечна.

Тогда  $f$  измерима.

*Замечание.* Пусть  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ , но допустимо, чтобы  $f(x)$  принимало значения  $\pm\infty$ . (При этом  $\forall n : f_n$  конечна)

Тогда всё равно  $f$  измерима.

*Доказательство.* Пусть  $f(x_0) = +\infty$ . Тогда  $\forall N \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k : f_n(x_0) \geq N$ . Тем самым,  $\{x_0|f(x_0) = +\infty\} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_k \bigcap_{n \geq k} \{x_0|f_n(x_0) \geq N\}.$  □

**Определение 2.2.1** (Ступенчатая функция).  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , такая, что  $\exists E_1, E_2, \dots \in \mathcal{A} : E_i \cap E_j = \emptyset$  при  $i \neq j$  и  $f|_{E_i}$  постоянна (скажем, равна  $c_i$ ).

Иными словами, ступенчатая функция — функция вида  $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{E_i}.$

*Замечание.* Всякая ступенчатая функция измерима.

**Теорема 2.2.3.** Если  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримая функция, то  $\exists$  последовательность ступенчатых функций  $f_n$ , такая, что  $f_n \rightrightarrows g$ .

Если же  $g \geq 0$ , то  $\exists$  простые функции  $f_n : f_n(x) \nearrow g(x)$  поточечно.

*Доказательство.*

1 Выберем  $n \in \mathbb{N}$ , рассмотрим двоичные интервалы  $I_{j,n} = [\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})$ . При фиксированном  $n$  :  
 $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} I_{j,n} = \mathbb{R}$ .

Пусть  $E_j = g^{-1}(I_{j,n}) \in \mathcal{A}$ . Определим  $f_n(x) = \frac{j}{2^n}$  при  $x \in E_j$ . Иными словами, бьётся ось ординат, и если функция  $g$  принимает значение в некоем двоичном отрезке, то  $f_n(x)$  равно нижней границе этого отрезка.

Тогда это нижние границы, причём  $\forall x : |g(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ .

Заметим, что  $\forall x : f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ .

2 Аналогично предыдущему пункту, берём полуинтервалы  $[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})$ , и строим  $f_n$  точно так же. Они сходятся к  $f(x)$ , но, увы, не простые. Тогда положим  $\tilde{f}_n(x) = \min(f_n(x), n)$ . Здесь  $\tilde{f}_n(x)$  уже простые, по-прежнему возрастают монотонно, и всё ещё сходятся к  $g$ .

□

*Замечание.* Пусть  $g$  принимает ещё и значения  $\pm\infty$ . Тогда можно построить последовательность ступенчатых  $f_n$ , как в теореме, определённых на  $g|_{g(x) \text{ конечно}}$ .

$$\text{Доопределим } \hat{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & g(x) \in \mathbb{R} \\ +\infty, & g(x) = +\infty. \\ -\infty, & g(x) = -\infty \end{cases}$$

Тогда это всё ещё простые функции, и естественно считать, что они сходятся к  $g$  равномерно. На том множестве, где  $g(x)$  конечно,  $|f_n(x) - g(x)|$  равномерно сходится к нулю, а если  $g(x)$  бесконечно, то разность, конечно, не определена, но  $f_n(x) = g(x)$ .

Похожую вещь можно применить и ко второму пункту теоремы.

## 2.3 Интеграл

Сначала научимся интегрировать неотрицательные измеримые функции.

Пусть  $(X, \Sigma, \mu)$  — пространство с мерой, то есть  $\mu$  — счётно—аддитивная мера, заданная на  $\Sigma$ .

Предположим, что  $\mu$  — полная мера (1.4.5). Если это не так, то можно продолжить  $\mu$  по Лебегу — Каратеодори. Тогда в целом ничего особо не поменяется, в предположении  $\sigma$ -конечности для продолжения меры  $\tilde{\mu}$  на  $\tilde{\Sigma}$ :  $\forall a \in \tilde{\Sigma} : \mu(a) < +\infty \Rightarrow \exists b \in \Sigma : b \supset a, \tilde{\mu}(b \setminus a) = 0$ .

Пусть  $f$  — неотрицательная измеримая функция на  $X$  (возможно, принимающая значения  $+\infty$ ).

Определим *интеграл*  $J(f) = \sup \{I(g) | g \text{ — простая, } 0 \leq g \leq f\}$ .

*Замечание.* Хотя  $f$  разрешается принимать бесконечные значения, по определению простые функции — суммы  $\sum_{j=1}^N c_j \chi_{e_j}$ , где  $c_j \in \mathbb{R}$  (множества  $e_j$  можно считать дизъюнктными).

**Определение 2.3.1** (Суммируемая (интегрируемая) функция  $f$ ).  $J(f) < +\infty$ .

*Свойства* (Совсем немного простых свойств).

- Если  $f$  неотрицательная простая функция, то  $J(f) = I(f)$ .
- Если  $f_1 \leq f_2$  — неотрицательные измеримые, то  $J(f_1) \leq J(f_2)$ .

## Лекция VIII

25 октября 2023 г.

Пусть  $a, b$  — два числа. Для их минимума и максимума иногда используются обозначения

$$\max(a, b) = a \vee b \quad \min(a, b) = a \wedge b$$

В частности, это используется для поточечного максимума или минимума функций:

$$(f \vee g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \vee g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max(f(x), g(x))$$

**Теорема 2.3.1** (Леви для неотрицательных измеримых функций (теорема о монотонной сходимости)). Пусть  $f_n$  — измеримые функции,  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ . Пускай  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Тогда  $J(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n)$ .

*Доказательство.* Если  $\exists n \in \mathbb{N} : J(f_n) = +\infty$ , то доказывать нечего: тогда начиная с этого места  $J(f_{\geq n}) = J(f) = +\infty$ . Отметим, что  $f$  измерима, как предел измеримых.

Теперь будем считать, что  $\forall n : J(f_n) < +\infty$ .

Заметим, что можно считать, что  $f$  принимает только конечные значения. Сведение выглядит так: обозначим  $E = \{y | f(y) = +\infty\}$ , найдём искомую последовательность функций  $g_n$  для  $f|_{E^c}$ , а

$$\text{дальше положим } \hat{g}_n := \begin{cases} g(x), & x \in E \\ n, & x \notin E \end{cases}.$$

$\forall n : \exists$  простая функция  $\psi_n : 0 \leq \psi_n \leq f_n, I(\psi_n) \geq J(f_n) - \frac{1}{2^{2n}}$ . Сделаем так, чтобы  $\{\psi_n\}$  возрастали:  $\phi_n = \psi_1 \vee \dots \vee \psi_n$ .

**Лемма 2.3.1.** Почти всюду (для всех  $x$ , кроме множества меры нуль)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = f(x)$ .

*Доказательство леммы.*

Обозначим  $e_n = \{x | \phi_n(x) < f(x) - \frac{1}{2^n}\}$ . Заметим, что тогда всё ещё  $\phi_n + \frac{1}{2^n} \chi_{e_n} \leq f$ . Слева стоит простая функция, откуда  $I\left(\phi_n + \frac{1}{2^n} \chi_{e_n}\right) \leq J(f)$ . Так как  $I(\phi_n) + \frac{1}{2^n} \mu(e_n) \geq$

$$J(f) - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^n} \mu(e_n), \text{ то } \mu(e_n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Обозначим  $E_n = \bigcup_{k \geq n} e_k$ . Его мера тоже не очень большая:  $\mu(E_n) \leq \sum_{k \geq n} \mu(e_k) \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$ . Так как имеется вложенность  $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ , то  $E := \bigcap_{n \geq 0} E_n$  имеет меру нуль.

Осталось заметить, что  $\phi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$  везде кроме  $E$ . □

Так как по определению  $J(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{I(g) | 0 \leq g \leq f, g \text{ — простая}\}$ , то достаточно доказать, что для данной простой функции  $g$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} I(\phi_n) \leq I(g)$ .

Тут я немного выключился из лекции, над додумать. □

## 2.4 Применения интеграла

### 1. Линейность интеграла.

Пусть  $f, g \geq 0$  — измеримые функции,  $\alpha, \beta \geq 0$ . Тогда  $J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g)$ .

*Доказательство.* Выбираем последовательность простых функций  $0 \leq u_n \nearrow f$  и  $0 \leq v_n \nearrow g$ , тогда воспользуемся линейностью предела и теоремой Леви:

$$J(\alpha f + \beta g) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(\alpha u_n + \beta v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha I(u_n) + \beta I(v_n)) = \alpha J(f) + \beta J(g)$$

□

2. Счётная аддитивность по множеству. Пусть  $f \geq 0$  — измеримая функция, положим  $\nu(e) = J(f \cdot \chi_e)$  для  $e \in \Sigma$ . Тогда  $\nu$  — счётно аддитивная мера на  $\sigma$ -алгебре  $\Sigma$ .

*Доказательство.* Аддитивность следует из линейности интеграла.

Для проверки счётной аддитивности удостоверимся в монотонной непрерывности: пусть  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ , где  $E_j \in \Sigma$ .

Определим  $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ .  $f \cdot \chi_E = \lim_{n \rightarrow \infty} f \cdot \chi_{E_n}$ , теперь воспользуемся теоремой Леви. □

Пусть  $f \geq 0$  — измеримая функция, обозначим  $A = \{x | f(x) \neq 0\}$ . Тогда  $J(f) = 0 \iff \mu(A) = 0$ .

*Доказательство.*

$\Leftarrow$ .  $J(f) = \sup I(g)$ , где  $0 \leq g \leq f$ . Из монотонности меры всякая такая  $g$  сосредоточена на множестве меры нуль. Считая интеграл  $g$  по определению, получаем нуль.

$\Rightarrow$ .

**Лемма 2.4.1** (Неравенство Чебышёва). Пусть  $h \geq 0$  — неотрицательная измеримая функция,  $\lambda > 0$ . Тогда  $\mu\{x | h(x) > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} J(h)$ .

*Доказательство леммы.*

Пусть  $e = \{x | h(x) > \lambda\}$ . Заметим, что  $h \geq \lambda \chi_e$ , из монотонности интеграла  $J(h) \leq \lambda \mu(e)$ . □

Пусть  $A_n = \{x | f(x) > \frac{1}{n}\}$ .  $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ . Согласно неравенству Чебышёва  $\mu(A_n) \leq n J(f) = 0$ .

Таким образом,  $\mu(A) = 0$ . □

*Замечание.* Теорема Леви сохраняет силу, если неравенство  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$  выполнено почти всюду (нарушаются на множестве меры нуль), и стремление  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$  тоже имеет почти всюду.

## 2.5 Интегралы от знакопеременных функций

Пусть  $f$  — измеримая функция на  $X$ , возможно, принимающая значения  $\pm\infty$ . Представим  $f = f_+ - f_-$ , где  $f_+ = f \vee 0$ ,  $f_- = -(f \wedge 0)$ . Тогда  $|f| = f_+ + f_-$ , причём  $f_+$  и  $f_-$  измеримы, и обе неотрицательны.

**Определение 2.5.1** ( $f$  обладает интегралом).  $J(f_+) < +\infty$ , или  $J(f_-) < +\infty$ . В таком случае  $J(f) \stackrel{\text{def}}{=} J(f_+) - J(f_-)$ .

**Определение 2.5.2** ( $f$  суммируема (интегрируема)). Она обладает конечным интегралом, то есть  $J(f_+), J(f_-) < +\infty$ .

**Предложение 2.5.1.**  $f$  суммируема  $\iff |f|$  суммируема.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ .  $J(|f|) = J(f_+) + J(f_-) < +\infty$ .

$\Leftarrow$ .  $f_+, f_- \leq |f|$ . □

### 2.5.1 Про линейность интеграла

Пусть  $f = g - h$ , где  $g, h \geq 0$ . Тогда во всяком случае  $g \geq f_+, h \geq f_-$ :

$$f = g - h \Rightarrow f \leq g, \text{ а так как } f \geq 0, \text{ то } f_+ \leq g \text{ тоже} \quad f_- = (-f)_+$$

**Предложение 2.5.2.** Если  $f = g - h$ .  $g, h$  измеримы и неотрицательны, причём хотя бы одно из  $J(g), J(h)$  конечно, то  $f$  обладает интегралом  $J(f) = J(g) - J(h)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим случай, когда  $J(g) < +\infty$ , в случае  $J(h) < +\infty$ , аналогично.

Тогда  $J(f_+) < +\infty$ , и  $f$  по определению обладает интегралом.

$$f = f_+ - f_- = g - h \Rightarrow f_+ + h = g + f_-$$

Для неотрицательных функций известна аддитивность, откуда  $J(f_+) + J(h) = J(g) + J(f_-)$ . Переносим в противоположные части конечные слагаемые  $J(f_+)$  и  $J(g)$ , получаем

$$-J(g) + J(h) = J(f_-) - J(f_+)$$

Умножая обе части на -1, получаем искомое. □

**Следствие 2.5.1.** Если  $f, g$  суммируемы (и, вообще говоря, знакопеременны), то  $f + g$  тоже суммируема, и  $J(f + g) = J(f) + J(g)$ .

*Доказательство.*

$$(f_+ - f_-) + (g_+ - g_-) = (f_+ + g_+) - (f_- + g_-)$$

□

*Замечание.* Если  $f$  суммируема,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то  $J(\alpha f) = \alpha J(f)$ .

- Основная оценка интеграла: если  $f$  обладает интегралом, то  $|J(f)| \leq J(|f|)$ .
- Если  $f, g$  — измеримы, и обладают интегралами, причём  $f \leq g$ , то  $J(f) \leq J(g)$ .

Для  $e \in \Sigma$  и измеримой функции  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , имеющей интеграл, имеется обозначение

$$\boxed{\int_e f d\mu = J(f \cdot \chi_e)}$$

**Теорема 2.5.1** (Абсолютная непрерывность интеграла). Пускай  $f$  — суммируемая функция. Тогда  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0$ : если  $e \in \Sigma$ ,  $\mu e < \delta$ , то  $\int_e |f| d\mu < \varepsilon$ .

*Доказательство.* От противного: пусть  $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists e \in \Sigma : \mu e < \delta$ , но  $\int_e |f| d\mu \geq \varepsilon$ .

Рассмотрим последовательность  $\delta_n = \frac{1}{2^n}$ . Для каждого  $\delta_n$  найдётся  $e_n \in \Sigma$ :  $\mu(e_n) \leq \frac{1}{2^n}$ , но  $\int_{e_n} |f| d\mu \geq \varepsilon$ .

Пусть  $E_n = \bigcup_{k \geq n} e_k$ , тогда из монотонности  $\int_E |f| d\mu \geq \varepsilon$ . С другой стороны.  $\mu E_n \leq \sum_{k \geq n} \mu(e_k) \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Таким образом,  $\mu(E_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , но с другой стороны  $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ . Из счётной аддитивности  $\int_E |f| d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} |f| d\mu$ , но левый интеграл равен нулю, как интеграл по множеству меры нуль. □

*Замечание.* Если  $f$  — суммируемая функция, то  $\{x | f(x) \neq 0\}$   $\sigma$ -конечно.



*Доказательство.* Применить неравенство Чебышёва.  $\{x|f(x)\} = \bigcup_{n \geq 0} \left\{x \mid |f|(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$ .  $\square$

**Теорема 2.5.2** (Общая теорема Леви). Пускай  $f_1, f_2, \dots$  — измеримые функции, монотонно возрастающие:  $f_n \leq f_{n+1}$ .

Предположим, что  $f_1$  суммируема. Тогда  $J(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J(f)$ , где  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

*Доказательство.* Положим  $h_j(x) = f_j(x) - f_1(x)$ , и применим теорему Леви для неотрицательных функций.  $\square$

**Следствие 2.5.2.**  $f$  суммируема  $\iff J(f_j) < +\infty$ , при этом  $J(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n)$ .

**Теорема 2.5.3** (Вариант теоремы Леви для рядов). Пусть  $u_n$  — суммируемые функции,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) =: u(x)$ . Тогда  $u$  суммируема  $\iff \sum_{n=1}^{\infty} \int_X u_n d\mu < +\infty$ .

В случае монотонной сходимости почти всегда почти всё можно делать, а если сходимость не монотонна, то есть следующая теорема.

**Теорема 2.5.4** (Лебег, о мажорируемой сходимости). Пусть  $f, g$  — измеримые функции,  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{почти всюду}} f$ .

Предположим, что у  $f_n$  есть общая суммируемая мажоранта:  $|f_n(x)| \leq g(x)$  и  $\int_X g d\mu < +\infty$ . Тогда

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu.$$

*Контрпример.* Совсем без мажоранты ничего не получится. Если  $X = \mathbb{R}$ , и  $f_n = n\chi_{[0, \frac{1}{n}]}$ , то  $f$  сходится к нулю почти всюду, но интегралы у всех единичные.

## Лекция IX

1 ноября 2023 г.

//todo

## Лекция X

8 ноября 2023 г.

### 2.6 Приближение функций из класса $L^p$

Класс  $L^p$  назван в честь Лебега. В дальнейшем часто будем обозначать меру множества  $X$  за  $|X|$ .

**Теорема 2.6.1.** Пусть  $(X, \Sigma, \mu)$  — пространство с полной мерой. Тогда простые функции образуют плотное множество в  $L^p(\mu)$  при  $1 \leq p < +\infty$ .

*Доказательство.* Всякая простая функция имеет вид  $\phi = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{e_j}$ , дизъюнктные  $e_j \in \Sigma$ . Если  $\phi \in L^p(\mu)$ , то меры всех  $e_j$ , таких, что  $\alpha_j \neq 0$ , конечны.

Пусть  $f \in L^p(\mu)$ , разложим  $f = f_+ - f_-$ . Приближим  $f_+$  и  $f_-$  по отдельности. Тем самым, без потери общности  $f \geq 0$ .

Раз  $f$  измерима, то существует последовательность простых функций  $\phi_n \in L^p(\mu) : 0 \leq \phi_n \leq f, \phi_n \nearrow f$ .

Так как  $f - \phi_n \searrow 0$  почти всюду, то  $|f - \phi_n|^p \searrow 0$ . Применяем теорему Леви, и действительно получаем, что  $\int_X |f - \phi_n|^p d\mu \rightarrow 0$ .  $\square$

Пусть мера  $\mu$  получена продолжением по Лебегу — Каратеодори из меры  $\nu$  на полукольце  $\mathcal{A} \subset \Sigma$ . Простые функции, полученные из полукольца  $\mathcal{A}$  (то есть вида  $u = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{a_j}, a_j \in \mathcal{A}$ ) будем называть *элементарными*.

**Теорема 2.6.2.** При сделанных предположениях элементарные функции образуют плотное множество в  $L^p(\mu)$ .

*Доказательство.* Выберем  $\varepsilon > 0$ . Пускай  $f \in L^p(\mu)$ .  $\exists \phi = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{e_j}, e_j \in \Sigma$  — простая функция, хорошо приближающая  $f$ :  $\|f - \phi\|_{L^p} < \varepsilon$ . Теперь достаточно приблизить  $\phi$ , или даже каждое слагаемое  $\phi$  элементарными функциями.

Для всякого  $\delta > 0, e_j \in \Sigma$  найдём множество  $a_j \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ :  $\|\chi_{e_j} - \chi_{a_j}\|_{L^p} < \delta$ .

$\phi \in L^p(\mu) \Rightarrow \forall j: \mu(e_j) < \infty \Rightarrow \forall j: \exists A_j$  —  $\sigma$ -множество, такое, что  $\mu(A_j \setminus e_j) < \frac{\delta}{2}$ .

Как  $\sigma$ -множество,  $A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} b_k, b_k \in \mathcal{A}$ . Положим  $a_j^{(s)} = \bigcup_{k=1}^s b_k \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ .

Но тогда  $\int_X |\chi_{a_j^{(s)}} - \chi_{e_j}|^p d\mu = \int_X |\chi_{a_j^{(s)}} - \chi_{e_j}| d\mu \leq \int_X |\chi_{a_j^{(s)}} - \chi_{A_j}| d\mu + \int_X |\chi_{A_j} - \chi_{e_j}| d\mu \underset{\text{при больших } s}{\leq} \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}$   $\square$

**Следствие 2.6.1.** Линейные комбинации характеристических функций конечных прямоугольных параллелепипедов (или диадических кубов) образуют плотное множество в  $L^p(\mathbb{R}^n)$  ( $1 \leq p < +\infty$ ).

**Следствие 2.6.2.** Непрерывные функции с компактным носителем плотны в  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

*Доказательство.* Достаточно доказать, что для любого двоичного куба  $K$ :  $\exists$  непрерывная функция  $v$  с компактным носителем  $\|\chi_K - v\| < \varepsilon$ . Приближим  $\chi_{[\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}]}$  ломаной, которая равна 1 на  $[\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}]$ , и равна нулю в  $\varepsilon/2$ -окрестности  $[\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}]$ .

Теперь если  $n$  — любое, то  $K = I_1 \times \dots \times I_n$ , перемножим функции, приближающие  $I_j$ .  $\square$

Пусть  $t \in \mathbb{R}^n, f$  — функция на  $\mathbb{R}^n$ . Тогда сдвиг  $f$  на  $t$  — это  $f_t(x) = f(x+t)$  (иногда пишут минус).

**Теорема 2.6.3** (Непрерывность сдвига в среднем). Если  $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < +\infty$ , то  $\|f - f_t\|_{L^p} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon > 0$ . Найдём  $v$  — непрерывную функцию с компактным носителем, такую, что  $\|f - v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$ .

$$\|f - f_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \|f - v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v - v_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v_t - f_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq 2\varepsilon + \|v - v_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Осталось доказать ту же теорему для непрерывной функции с компактным носителем, а она очевидна из теоремы Кантора — функции  $v$  и  $v_t$  равномерно непрерывны.

Чуть подробнее: выберем  $\delta > 0$ , найдётся шар  $\overline{B}$ , такой, что он содержит  $\delta$ -окрестность  $\text{supp}(v)$ . На нём  $\forall \varepsilon' > 0: \exists \delta' \in (0, \delta): |x - y| < \delta' \Rightarrow |v(x) - v(y)| < \varepsilon'$ . Интегрируя по шару  $\overline{B}$  с конечной мерой, получаем  $\|v - v_t\| \leq |\overline{B}| \varepsilon'^{1/p}$  и  $\varepsilon'$  можно сделать сколь угодно малым.  $\square$

*Замечание* (Следствие неравенства Гёльдера).  $\mu(X) < +\infty \Rightarrow L^p(\mu) \subset L^s(\mu)$  для  $p \geq s$ .

*Доказательство.* При  $p = s$  доказывать нечего, считаем  $p > s$ . Положим  $r = \frac{p}{s} > 1$ , к нему есть сопряжённый показатель  $r'$ .

Пускай  $f \in L^p(\mu)$ .

$$\int_X |f|^s d\mu = \int_X |f|^s \cdot 1 d\mu \leq \left( \int_X (|f|^s)^r d\mu \right)^{1/r} \cdot \left( \int_X (1)^{r'} d\mu \right)^{1/r'} = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/r} \cdot \mu(X)^{1/r'}$$

□

Отсюда видно, что  $\mu(X) = 1$ , то  $\|f\|_{L^s(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \cdot \mu(X)^{\frac{1}{s-r}}$ , что особенно красиво при *вероятностной мере* —  $\mu(X) = 1$ .

В случае конечной меры следствие можно применять к функциям, сосредоточенных на множествах конечной меры.

Введём ещё пространство  $L^\infty(\mu)$  — множество функций, таких, что  $\exists A \in \mathbb{R}_{\geq 0} : |f| \leq A$  почти всюду.

$L^\infty(\mu)$  — класс всех *существенно ограниченных* функций.

Если  $f$  — существенно ограниченная функция, то среди всех существенных верхних границ  $\{K \mid |f(x)| \leq K \text{ почти всюду}\}$  найдётся наименьшая. Назовём её

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf \{K \mid K \text{ есть существенная верхняя грань для } f\}$$

**Теорема 2.6.4.** Пусть  $A = \operatorname{ess\,sup} f$ , тогда  $A$  — существенная граница  $f$ .

*Доказательство.* Пусть  $n \in \mathbb{N}$ , тогда  $A + \frac{1}{n}$  — существенная верхняя граница  $f$ . Тем самым,  $\exists E_n : |E_n| = 0, f(x) \leq A + \frac{1}{n}$  при  $x \notin E_n$ . Выберем  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ . Тогда  $f(x) \leq A$  при  $x \notin E$ , но  $\mu(E) = 0$ . □

*Замечание.* Пусть  $f$  существенно ограничена,  $A = \operatorname{ess\,sup} f$ . Тогда  $\exists E : \mu(E) = 0 \Rightarrow \sup_{x \in X \setminus E} f(x) = A$ .

**Определение 2.6.1** (Норма  $f \in L^\infty(\mu)$ ).  $\|f\|_{L^\infty(\mu)} = \operatorname{ess\,sup}_X |f|$ .

Если в пространстве  $L^\infty$  отождествить функции, отличающиеся на множестве меры нуль, то норма станет нормой.

Расстояние между функциями в данном пространстве  $d(f, g) = \|f - g\|$ , неравенство треугольника здесь очевидно:

$$\|u + v\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}$$

**Теорема 2.6.5.**  $L^\infty(\mu)$  полно.

*Доказательство.* Пусть  $\{f_n\}$  — последовательность Коши в  $L^\infty(\mu)$ , то есть  $\operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| \xrightarrow{\min(n,m) \rightarrow \infty} 0$ .

Тогда найдутся множества  $E_{n,m} : \operatorname{ess\,sup} |f_n - f_m| = \sup_{x \notin E_{n,m}} |f_n(x) - f_m(x)|$ .

Положим  $E = \bigcup_{n,m} E_{n,m}$ ,  $\mu E = 0$ . Тогда  $\{f_n|_{X \setminus E}\}$  — последовательность Коши на пространстве ограниченных функций на  $E$ . Тем самым,  $f_n \rightrightarrows f$  равномерно на  $X \setminus E$ . Доопределим  $f$  на  $E$  как угодно, её класс эквивалентности в  $L^\infty$  не поменяется. □

В неравенстве Гёльдера до сих пор рассматривались  $p, p' : \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  при  $1 < p, p' < \infty$ . Если же подставить одно из  $p, p'$  равным 1, то второе станет равным  $\infty$ . Естественно считать 1 и  $\infty$  сопряжёнными показателями.

Неравенство Гёльдера говорило, что  $\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \cdot \|g\|_{L^{p'}(\mu)}$ .

**Факт 2.6.1.** Неравенство Гёльдера сохраняется при  $p = 1$  или  $p = \infty$ .

*Доказательство.* Пусть  $p = 1$ .  $|f(x)| \cdot |g(x)| \leq |f(x)| \cdot \|g\|_{L^\infty(\mu)}$  почти всюду. Интегрируя это неравенство, получаем

$$\int_X |f| \cdot |g| d\mu \leq \int_X \|f\| d\mu \cdot \int_X \|g\| d\mu$$

□

*Замечание.* Пусть  $\mu(X) = 1$  (или просто конечна). Тогда  $\|f\|_{L^p(\mu)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)}$  при любом  $p < \infty$ .

*Доказательство.*

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left( \int_X \|f\|_{L^p(\mu)}^p d\mu \right)^{1/p} = \|f\|_{L^p(\mu) \cdot \mu(X)}$$

□

Пусть  $\mu(X) = 1$ . Зафиксируем измеримую  $f$ , рассмотрим строго возрастающую функцию

$$p \mapsto \|f\|_{L^p(\mu)}$$

Если  $f \notin L^p(\mu)$ , то будем считать  $\|f\|_{L^p} = \infty$ .

**Упражнение 2.6.1.**  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$ .

## 2.6.1 Связь интегралов Лебега и Римана

**Теорема 2.6.6.** Пусть  $f$  — функция на отрезке  $\langle a, b \rangle$ , интегрируема по Риману — Дарбу. Тогда  $f$  суммируема, и интеграл Лебега такой же.

*Доказательство.* В данной постановке простые функции — линейные комбинации характеристических функций отрезков,  $\phi = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{I_j}$ . В этой лекции они назывались элементарными, так и продолжим их называть.

Простые функции интегрируемы и по Риману, и по Лебегу, и интеграл у них один и тот же.

Пусть  $\langle a, b \rangle = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k$  — разбиение  $\Delta = \{I_1, \dots, I_k\}$ .

Зададим  $\phi_\Delta = \sum_{j=1}^k (\sup_{I_j} f) \chi_{I_j}$ ,  $\psi_\Delta = \sum_{j=1}^k (\inf_{I_j} f) \chi_{I_j}$ . Тогда  $\int_{\langle a, b \rangle} \phi_\Delta$  — верхняя сумма Дарбу для  $f$  по отрезку  $\langle a, b \rangle$ ,  $\int_{\langle a, b \rangle} \psi_\Delta$  — нижняя сумма Дарбу.

Понятно, что  $\psi_\Delta \leq f \leq \phi_\Delta$  всюду на  $\langle a, b \rangle$ , причём для измельчения  $\Delta'$  верно, что

$$\psi_\Delta \leq \psi_{\Delta'} \leq f \leq \phi_{\Delta'} \leq \phi_\Delta$$

Критерием интегрируемости по Риману является то, что  $\text{osc}_{I_j} f$  могут быть сколь угодно малыми, то есть  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta : \int_{\langle a, b \rangle} (\phi_\Delta - \psi_\Delta) \leq \varepsilon$ .

Выберем  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ , построим разбиения  $\Delta_n$  так, что каждое следующее является измельчением предыдущего.

Тогда  $\int_{\mathbb{R}} (\phi_n - \psi_n) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} |\phi_n - \psi_n| d\lambda < \frac{1}{n}$ .

Отсюда следует, что существует последовательность индексов (?)  $n_j$ , таких, что  $\phi_{n_j} - \psi_{n_j} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  почти всюду. Таким образом,  $\psi_n$  и  $\phi_n$  стремятся к  $f$  почти всюду, тем самым  $f$  измерима!

Теперь  $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_n \leq$  интеграл Лебега или Римана  $f \leq \int_{\mathbb{R}^n} \phi_n$ .

□

**Теорема 2.6.7** (Теорема Лебега). Функция  $f$  на конечном отрезке интегрируема по Риману  $\iff$  множество точек разрыва  $f$  имеет меру нуль.

*Замечание.* Пусть  $f \geq 0$ ,  $f$  интегрируема в смысле Римана несобственным образом на конечном или бесконечном интервале  $\langle \alpha, \beta \rangle$ . Тогда  $f$  суммируема на  $\langle \alpha, \beta \rangle$ .

*Доказательство.* Например, пусть особенность на конце  $\beta$ :  $f$  интегрируема по Риману на любом интервале  $\langle \alpha, \beta - \delta \rangle$ , причём  $\exists \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta - \delta} f(x) dx$ . Пускай  $f_n = f \cdot \chi_{\langle \alpha, \beta - \frac{1}{n} \rangle}$ . Тогда  $f_n \nearrow f$ , по теореме Леви предельная функция тоже суммируема, причём её интеграл — предел интегралов  $f_n$ .  $\square$

*Замечание.* Если функция знакопеременна, то интегрировать всё ещё бывает полезно в несобственном смысле:  $\frac{\sin x}{x}$  не суммируема на  $[0, \infty)$ , но можно писать

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

## Лекция XI

15 ноября 2023 г.

### 2.7 Теоремы Тонелли и Фубини

Рассмотрим два пространства с мерой  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  ( $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  —  $\sigma$ -алгебры,  $\mu, \nu$  — счётно-аддитивные меры на  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  соответственно).

Рассмотрим полукольцо  $\mathcal{P} = X \times Y$  обобщённых прямоугольников:  $c \in \mathcal{P} \iff c = a \times b$  для  $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ .

**Предложение 2.7.1.** Тогда мера  $\lambda := \mu \otimes \nu$  на  $\mathcal{P}$  (определённая так:  $\lambda(a \times b) = \mu(a)\nu(b)$ ) счётно-аддитивна.

*Доказательство.* Выберем  $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}, \{b_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}, \{c_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$  так, что  $c_j = a_j \times b_j$ . Пусть  $c_j$  дизъюнкты; положим  $c := \bigsqcup_{j=1}^{\infty} c_j$ , пусть  $c \in \mathcal{P}$ .

Надо проверить, что  $\lambda(c) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(c_j)$ .

Рассмотрим равенство  $\chi_a(x)\chi_b(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{a_j}(x)\chi_{b_j}(y)$ . При каждом фиксированном  $x$  обе части — измеримые функции от  $y$ .

Интегрируя, получаем по теореме Леви

$$\underbrace{\chi_a(x) \int_Y \chi_b(y) d\nu(y)}_{\nu(b)} = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{a_j}(x) \underbrace{\int_Y \chi_{b_j}(y) d\nu(y)}_{\nu(b_j)}$$

Это равенство опять интегрируется, уже по  $x$ . В результате действительно получаем  $\mu(a)\nu(b) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(a_j)\nu(b_j)$ .  $\square$

Применяя теорему Лебега — Каратеодори, можно продолжить меру  $\lambda$ , результат тоже обозначают  $\mu \otimes \nu$ , и называют *произведением мер*  $\mu$  и  $\nu$ .

Пусть имеется несколько пространств с мерой  $(X_1, \mu_1), \dots, (X_n, \mu_n)$ . Можно определить меру произведения  $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ . В произведении, вообще говоря, надо указать порядок, но оказывается, что произведение мер ассоциативно.

*Пример.* Рассмотрим  $\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ . Пусть  $\lambda_n, \lambda_k$  — стандартные меры Лебега на  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^k$ . Тогда оказывается, что  $\lambda_n \otimes \lambda_k = \lambda_{n+k}$ .

Можно заметить, что на обобщённых прямоугольниках мера произведения одна и та же, и применяя теорему об единственности, получаем  $\lambda_n \otimes \lambda_k = \lambda_{n+k}$ . (причём на само деле неважно, что обобщённые прямоугольники берутся из евклидова пространства, это проверяет ассоциативность в общем виде)

Пускай  $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  — пространства со счётно-аддитивными мерами, обе меры полны и обе  $\sigma$ -конечны. В теоремах Тонелли и Фубини теоретически можно обойтись и без этих двух условий, но требуются дополнительные слова. Пусть  $\lambda = \mu \otimes \nu$ .

**Теорема 2.7.1** (Тонелли). Пусть  $f$  —  $\lambda$ -измеримая функция на  $X \times Y$ ,  $f \geq 0$ . Тогда

1. Для  $\mu$ -почти всех  $x \in X$ :  $f(x, \_)$  измерима на  $Y$ .
2. Функция  $\phi(x) = \int_Y f(x, \_) d\nu$  измерима на  $X$ .
3.  $\int_X \phi(x) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f d\lambda$ .

*Доказательство.* Назовём функцию  $f$  допустимой, если она определена на  $X \times Y$ , и удовлетворяет всем трём условиям.

1. Если  $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ , то  $\chi_{a \times b}$  допустима:  $\chi_{a \times b}(x, y) = \chi_a(x) \chi_b(y)$ .
2. Неотрицательные простые (элементарные) функции, построенные по полукольцу  $\mathcal{P}$ , допустимы.
  - Если  $f, g$  — допустимы,  $\alpha, \beta \geq 0$ , то  $\alpha f + \beta g$  тоже допустима.
  - Если  $f, g$  — допустимы и  $f$  суммируема, причём  $0 \leq g \leq f$ , то  $g - f$  тоже допустима.

*Доказательство.* Пусть  $\phi(x) = \int_X f(x, \_) d\nu$ . В силу 3. она суммируема, откуда  $\phi$  конечна почти всюду. Пусть  $\psi(x) = \int_X g(x, \_) d\nu$ . Так как  $\psi \leq \phi$ , то  $\psi$  тоже конечна почти всюду, тогда дальше всё хорошо.  $\square$

3. Пусть  $f_n$  — допустимые функции на  $X \times Y$ , пусть  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ , пусть  $f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y)$ . Автоматически  $f$  измерима. Тогда  $f$  тоже допустима.

*Доказательство.* Пускай  $E_n = \{x \in X | f_n(x, \_) \text{ не измерима}\}$ .  $\mu E_n = 0$ , так как  $f_n$  допустимы. Положим  $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ ,  $\mu E = 0$ .

$x \notin E \Rightarrow$  все функции  $f_n(x, \_)$  измеримы на  $Y$ . Имеется монотонная сходимость  $f_n \nearrow f$ , значит  $f(x, \_)$  тоже измерима на  $Y$  при  $x \notin E$ .

Построим  $\phi(x) = \int_Y f(x, \_) d\nu$ ,  $\phi_n(x) = \int_Y f_n(x, \_) d\nu$ . По теореме Леви (относительно меры  $\nu$ ) для  $x \notin E$ :  $\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x)$ . Тем самым  $\phi$  измерима, как предел измеримых функций.

Более того,  $\phi_n \nearrow \phi$ , опять по теореме Леви (относительно меры  $\mu$ ):

$$\int_X \phi d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \phi_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} f_n d\lambda \stackrel{\text{теорема Леви относительно } \lambda}{=} \int_{X \times Y} f d\lambda$$

$\square$

4. Пусть  $f_n$  — допустимые функции на  $X \times Y$ , пусть  $f_1 \geq f_2 \geq \dots$ , пусть  $f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y)$ . Автоматически  $f$  измерима. Если  $f_1$  суммируема, то  $f$  тоже допустима.

*Доказательство.* Аналогично предыдущему пункту.  $\square$

5. Если  $A \subset X \times Y$  —  $\sigma$ -множество, то  $\chi_A$  допустима.

*Доказательство.* Представим  $A$  в виде  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ .  $\sum_{j=1}^N \chi_{A_j} \nearrow \chi_A$ . □

6. Если  $A \subset X \times Y$  —  $\delta\sigma$ -множество конечной меры  $\lambda$ , то  $\chi_A$  допустима.

*Доказательство.* Представим  $A$  в виде  $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ , где  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ ,  $A_j$  —  $\sigma$ -множества конечной меры.  $\chi_{A_j} \searrow \chi_A$ . □

7. Если  $e \subset X \times Y$  измеримо, и  $\lambda(e) = 0$ , то  $\chi_e$  допустимо.

*Доказательство.* Пусть  $\bar{e}$  —  $\delta\sigma$ -множество, такое, что  $\bar{e} \supset e$ , и  $\lambda(\bar{e}) = 0$ .

Тогда  $\chi_e \leq \chi_{\bar{e}}$ .  $\chi_{\bar{e}}$  допустима, в частности,  $\chi_{\bar{e}}(x, \_)$  измерима на  $Y$  для почти всех  $x \in X$ . Обозначив  $\bar{\phi}(x) = \int_Y \chi_{\bar{e}}(x, \_) d\nu$  видим, что  $\bar{\phi}$  измерима на  $X$ , а так как

$$\int_X \bar{\phi} d\mu = \int_{X \times Y} \chi_{\bar{e}} d\lambda = 0$$

то  $\bar{\phi}(x) = 0$  для почти всех  $x \in X$ .

Пусть  $E = \{x \in X | \bar{\phi}(x) \neq 0\}$ . Для  $x \notin E : \int_Y \chi_{\bar{e}}(x, \_) d\nu = 0$ . Иными словами,  $\nu\{y \in Y | (x, y) \in \bar{e}\} = 0$ .

Но тогда из полноты меры (здесь мы ей пользуемся в первый раз)  $\nu\{y \in Y | (x, y) \in e\} = 0$ . Тогда любая функция на  $e$  измерима, в частности,  $\chi_e(x, \_)$  измерима на  $Y$ .

Зная измеримость  $\chi_e$  уже несложно доказать, что в пунктах 2 и 3 все интегралы равны нулю: в частности,  $\phi(x) = \int_Y \chi_e(x, \_) d\nu$  равна нулю всюду кроме  $E$ . □

8. Если  $A \subset X \times Y$  — измеримое множество относительно меры  $\lambda$ , причём  $\lambda(A) < +\infty$ , то  $\chi_A$  допустима.

*Доказательство.*  $\exists \delta\sigma$ -множество  $\bar{A} \supset A$ , такое, что  $\lambda(\bar{A} \setminus A) = 0$ . Применим  $\chi_A = \chi_{\bar{A}} - \chi_{\bar{A} \setminus A}$ . □

9. Пусть  $f$  — простая функция относительно  $\sigma$ -алгебры  $\lambda$ -измеримых множеств,  $f \geq 0$ . Иными словами,

$$f = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{e_j}, \alpha_j \geq 0, e_i \cap e_j = \emptyset \text{ (при } i \neq j)$$

Если  $\forall j : \lambda e_j < +\infty$ , то  $f$  допустима.

10. Пусть  $f$  — неотрицательная измеримая функция на  $X \times Y$ ,  $\lambda\{(x, y) | f(x, y) \neq 0\} < +\infty$ . Тогда  $f$  допустима.

*Доказательство.*  $\exists f_n$  — простые функции,  $0 \leq f_n \leq f$ ,  $f_n \nearrow f$ . Все  $f_n$  допустимы, значит и  $f$  допустима. □

11. Все неотрицательные измеримые функции допустимы.

*Доказательство.*  $\exists X_1 \subset X_2 \subset \dots$ , такие, что  $X = \bigcup_i X_i$ , и все  $\mu(X_i) < +\infty$ . Аналогично  $\exists Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$ , такие, что  $Y = \bigcup_i Y_i$ , и все  $\mu(Y_i) < +\infty$ . (Здесь мы пользуемся  $\sigma$ -конечностью в первый раз).

Положим  $f_n(x, y) = f(x, y)\chi_{X_n}(x)\chi_{Y_n}(y)$ .  $f_n$  из пункта 10, значит,  $f$  допустима, так как  $f_n \nearrow f$ .  $\square$

$\square$

**Теорема 2.7.2** (Фубини). Пусть  $(X, \mu), (Y, \nu)$  — два пространства с мерой,  $\lambda = \mu \otimes \nu$ .

Если  $f \in L^1(\lambda)$ , то

- Для почти всех  $x \in X$  :  $\phi(x) := \int_Y f(x, y) d\nu$  суммируема на  $X$ .
- $\int_X \phi d\mu = \int_{X \times Y} f d\lambda$ .

*Доказательство.*  $f$  суммируема  $\Rightarrow f_+, f_-$  суммируемы по  $\lambda$ . К каждой из них применима теорема Тонелли. Вычитаем заключения теоремы Тонелли для  $f_+$  и  $f_-$ .  $\square$

**Задача 2.7.1.** Придумать функцию  $f$ , такую, что  $\phi(x) := \int_Y f(x, y) d\nu$  суммируема, но  $f \notin L^1(\lambda)$ .

## 2.7.1 Как применять

Пусть  $f$  —  $\lambda$ -измеримая функция (про знак ничего не известно).

Чтобы доказать, что  $f$  суммируема, надо доказать, что  $|f|$  суммируема.

По теореме Тонелли  $|f|$  суммируема  $\iff \int_X \int_Y |f|(x, y) d\nu(y) d\mu(x)$ . Если интеграл сошёлся, то  $f$  тоже суммируема, и для исходной функции тоже можно сводить интеграл к повторному.

## 2.8 Свёртки. Приближение функций с помощью свёрток

Пусть  $f, g$  — измеримые функции на  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 2.8.1** (Свёртка  $f * g$ ).  $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) dy$ . Свёртка определена в тех точках, где интеграл определён.

Рассмотрим  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto (y, x - y)$ .  $L$  линейно, значит,  $L, L^{-1}$  измеримы по Лебегу. Определив  $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto f(u)g(v)$  видим, что  $T$  измерима, откуда  $(T \circ L)(x, y) = f(y)g(x - y)$  тоже измерима.

**Теорема 2.8.1.** Если  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , то  $(f * g)$  определена почти всюду, и  $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $\phi(x, y) = |f(x)| \cdot |g(x - y)|$ . Она неотрицательна, применяем теорему Тонелли:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \phi d\lambda_{2n} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot |g(x - y)| dx \right) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(x - y)| dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| dx \right) dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \end{aligned}$$



По теореме Тонелли  $\phi$  суммируема, тем самым,  $(x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$  тоже суммируема. По теореме Фубини  $(f * g)(x)$  определена для почти всех  $x$ , причём она суммируема.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)| dy dx \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$$

□

*Замечание.* Неформально говоря, если сворачивать  $f$  с какими-то хорошими свойствами, и  $g$  с какими-то другими хорошими свойствами, то свёртка обладает всеми хорошими свойствами каждой из них.

**Утверждение 2.8.1.**  $f * g = g * f$  всегда, когда существует:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy = \left\| \begin{array}{l} z = x - y \\ y = x - z \end{array} \right\| = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z) dz$$

**Упражнение 2.8.1.** Свёртка ассоциативна:  $f * (g * h) = (f * g) * h$  всегда, когда существует.

## Лекция XII

22 ноября 2023 г.

### 2.8.1 Меры с плотностью

Пусть  $(X, \Sigma, \mu)$  — пространство с мерой. Пусть  $\phi \geq 0$  — измеримая функция на  $X$ .

Можно определить меру, индуцированную функцией  $\phi$ :  $\nu(e) = \int_e \phi d\mu$  для  $e \in \Sigma$ . Тогда  $\phi$  называется плотностью меры  $\nu$  относительно  $\mu$ .

**Куда должна быть  $\phi \geq 0$ ?**

1. Можно считать, что  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ , но, возможно, меняет знак. Надо предположить, что либо  $\phi_+$ , либо  $\phi_-$  суммируемы.

Тогда сохраняется счётная аддитивность:  $e = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} e_i \Rightarrow \nu(e) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(e_i)$ . Тем не менее, всякие монотонности могут перестать выполняться, так как функция перестала быть неотрицательной.

2. Можно считать, что  $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$ . Комплексный интеграл берётся отдельно по вещественной и мнимой частям:

$$\int_e (\alpha + \beta i) d\mu = \int_e \alpha d\mu + i \int_e \beta d\mu$$

В обоих случаях  $\nu$  перестаёт быть мерой в заявленном определении, это просто какая-то счётно-аддитивная функция множества, и  $\phi$  во всех случаях называется её плотностью.

### Интегрирование по мере $\nu$

Пусть  $\nu$  определена, как выше.

**Факт 2.8.1.** Если  $g \geq 0$  — измеримая функция на  $X$ , то  $\int_X g d\nu = \int_X g\phi d\mu$ .

*Доказательство.* Формула верна для  $g = \chi_e$ :

$$\int_X \chi_e d\nu = \nu(e) = \int_X \chi_e \phi d\mu$$

Значит, формула верна для неотрицательных простых функций.

Существуют неотрицательные простые  $g_n \nearrow g$ , применяем теорему Леви.  $\square$

**Следствие 2.8.1.** Неотрицательная функция  $g$   $\nu$ -суммируема  $\iff g\phi$   $\mu$ -суммируема.

**Следствие 2.8.2.** Тогда  $h$  (возможно, меняющая знак)  $\nu$ -суммируема  $\iff h\phi$   $\mu$ -суммируема, причём  $\int_X h d\nu = \int_X h\phi d\mu$ .

## 2.8.2 Образ меры

Пусть  $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$  — два пространства,  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  —  $\sigma$ -алгебры подмножеств в  $X$  и  $Y$  соответственно.

Пусть  $F: X \rightarrow Y$  измеримо относительно  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ .

Пускай  $\mu \geq 0$  — счётно-аддитивная мера на  $(X, \mathcal{A})$ . Её образ  $F^0(\mu) = \nu$  — счётно-аддитивная мера на  $(Y, \mathcal{B})$ , такая, что  $\nu(b) = \mu(F^{-1}(b))$ . Счётная аддитивность следует из того, что прообраз уважает все теоретико-множественные операции.

### Интегрирование по мере $\nu$

Пусть  $\nu$  определена, как выше.

$$\int_Y \chi_e d\nu = \nu(b) = \int_X \chi_{F^{-1}(b)} d\mu$$

Заметим, что  $\chi_{F^{-1}(b)} = \chi_b \circ F$ .

**Факт 2.8.2.** Если  $g \geq 0$  — измеримая функция на  $X$ , то  $\int_X g d\nu = \int_X g \circ F d\mu$ .

*Доказательство.* Формула верна для  $g = \chi_e$ . Значит, формула верна для неотрицательных простых функций.

Существуют неотрицательные простые  $g_n \nearrow g$ , применяем теорему Леви (два раза, в левой и правой частях равенства).  $\square$

Все замечания из предыдущего раздела повторяются.

**Следствие 2.8.3.** Неотрицательная функция  $g$   $\nu$ -суммируема  $\iff g\phi$   $\mu$ -суммируема.

**Следствие 2.8.4.** Тогда  $h$  (возможно, меняющая знак)  $\nu$ -суммируема  $\iff h\phi$   $\mu$ -суммируема, причём  $\int_X h d\nu = \int_X h\phi d\mu$ .

Данная формула очень полезна при замене переменной в интеграле.

Например, ранее записанное равенство  $\int_X f(x-y) dy = \int_X f(\xi) d\xi$  видно из данной формулы при  $g(y) = x-y$  — здесь образ меры будет её самой.

## 2.8.3 Свойства свёртки

**Теорема 2.8.2.** Если  $g$  лежит в  $L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , где  $1 \leq p \leq \infty$ , то  $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ .

*Доказательство.* Пусть  $p = \infty$ .

$$|(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)| dy \leq \underbrace{\|f\|_{L^\infty}}_{\text{ess sup}(f)} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy$$

При  $p = 1$  доказано выше: (2.8.1).

Теперь пусть  $1 < p < \infty$ ,  $q$  — сопряжённый к  $p$  показатель.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy \right)^p dx = \dots$$

Определим из меры Лебега новую меру с плотностью  $|g(y)|$ :  $\nu(e) := \int_e |g(y)| dy$ . Это конечная мера на  $\mathbb{R}^n$ , так как  $g \in L^1$ .

$$\dots = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot 1 d\nu(y) \right)^p dx \leq \dots$$

Теперь применим неравенство Гёльдера относительно данной меры  $\nu$ .

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} 1^q d\nu \right)^{\frac{1}{q}} \right]^p dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)| dy \right) dx \cdot \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} = \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \|f\|_{L^1}^p \|g\|_{L^1} \end{aligned}$$

Тем самым,  $\|f * g\|_{L^p} \leq \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}+1} \|f\|_{L^p}^p$  и  $\|f * g\|_{L^p}^p \leq \|f\|_{L^p}^p \|g\|_{L^1}$ .

□

**Упражнение 2.8.2** (Неравенство Юнга). Пусть  $f \in L^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L^t(\mathbb{R}^n)$ , где  $s, t > 1$ . Предположим, что  $\frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{t} - 1$ , и пусть  $r \geq 1$ . Тогда  $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^s} \|g\|_{L^t}$ .

**Упражнение 2.8.3.** Если  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , и  $1 < p, q < \infty$ , то  $\|f * g\| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$ , и при этом  $\|f * g\|$  непрерывна и стремится к нулю на  $\infty$ .

**Факт 2.8.3.** Пусть  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = 1$ . Тогда для  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  при  $1 \leq p \leq \infty$ :

$$\|f * g - f\|_{L^p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dy \cdot |g(x)| dx$$

*Доказательство.*  $(f * g)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))g(y) dy$

Возьмём модуль, возведём в степень  $p$ , и проинтегрируем:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x) - f(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| |g(y)| dy \right)^p dx$$

Далее вводим меру  $\nu(e) = \int_e |g(y)| dy$ , и опять применяем неравенство Гёльдера к  $|f(x-y) - f(x)| \cdot 1$ .

*Замечание.* При  $p = \infty$  тоже верно, доказательство другое (проще).

□

Будем обозначать пространство *бесконечно дифференцируемых функций на  $\mathbb{R}^n$  с компактным носителем* значком  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

**Теорема 2.8.3.** Пусть  $u$  — непрерывна, с компактным носителем,  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . Тогда  $f * u$  непрерывна. Если  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , то  $f * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

*Доказательство.*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)u(x-y) dy = \dots$$

Проверим непрерывность в  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , рассмотрим  $\overline{B_r(x_0)}$ . Пусть  $S = \text{supp } u$ . Теперь можно считать, что интегрирование берётся по компакту  $K = \overline{B_r(x_0)} - S$ .

$$\dots \underset{\text{при } x \in B_r(x_0)}{=} \int_K f(y)u(x-y) dy$$

Заметим, что для всякой последовательности  $x_j \rightarrow x_0 : u(x_j - y) \rightarrow u(x_0 - y)$ , откуда  $|f(y)u(x_j - x_0)| \leq C|f(y)|$ , и можно применить теорему Лебега о мажоранте.

**Лемма 2.8.1.** Пусть  $K \subset \mathbb{R}^n$  — компактное множество,  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  — интервал,  $v : K \times I \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть  $\exists \frac{\partial}{\partial t} v(x, t)$ , и она непрерывна на  $(a, b)$  при всяком фиксированном  $x \in K$ . Также предположим наличие суммируемой мажоранты  $w$  на  $K$ : для всех  $t \in (a, b) : \left| \frac{\partial}{\partial t} v(x, t_0) \right| \leq w(x)$ .

Определим  $\phi(t) = \int_K v(x, t) dx$  (предполагаем, что  $v(x, t)$  суммируема при всяком  $t$ ).

Тогда  $\phi$  дифференцируема на  $(a, b)$ , и

$$\phi'(t_0) = \int_K \frac{\partial}{\partial t} v(x, t_0) dx$$

*Доказательство леммы.*

Выберем последовательность  $t_n \rightarrow t_0$ , запишем разностное отношение  $\frac{\phi(t_n) - \phi(t_0)}{t_n - t_0} = \int_K \frac{v(x, t_n) - v(x, t_0)}{t_n - t_0} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi'(t_0)$  По формуле Лагранжа  $\frac{v(x, t_n) - v(x, t_0)}{t_n - t_0} = \frac{\partial}{\partial t} v(x, \xi)$  для некоего  $\xi \in (t_n, t_0)$ .  $\left| \frac{\partial}{\partial t} v(x, \xi) \right| \leq w(x)$ , значит, у подынтегральной функции есть мажоранта, и можно перейти к пределу.  $\square$

Заметим, что  $(f * u)(x) = \int_K f(y)u(x-y) dy$ , и её действительно можно дифференцировать бесконечно много раз (?).  $\square$

*Замечание.* Пусть  $\text{supp } f = A, \text{supp } g = B$ . Тогда  $\text{supp}(f * g) \subset A + B$ .

**Определение 2.8.2** (Аппроксимативная единица для  $\mathbb{R}^n$ ). Последовательность функций  $g_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $g_j \geq 0$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} g_j = 1, \forall j > 0 : \int_{|y| > \delta} g_j(y) dy \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$

**Теорема 2.8.4.** Пусть  $g_j$  — аппроксимативная единица,  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $f * g_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f$ , то  $\|f * g_j - f\|_{L^p} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ .

Если  $f$  непрерывна с компактным носителем (достаточно потребовать равномерной непрерывности), то  $f * g_j \Rightarrow f$

*Доказательство.* При  $1 \leq p < \infty$ :

$$\begin{aligned} \|f * g_j - f\|_{L^p} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p g_j(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx g_j(y) dy = \\ &= \int_{|y| < \delta} g_j(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx + \int_{|y| \geq \delta} g_j(y) \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|f(x-y) - f(x)|^p}_{\leq 2^p(|f(x-y)|^p + |f(y)|^p)} dx \end{aligned}$$

$2^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p + |f(y)|^p dx \leq 2^{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx$ , и это конечно. Значит, по определению аппроксимативной единицы второе слагаемое мало при больших  $j$ .

Для первого слагаемого применим непрерывность сдвигов в  $L^p$ :  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$  при  $|y| \leq \delta \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx < \varepsilon$ . Значит, оно тоже маленькое.

Теперь проверим равномерную сходимость. Так как  $f$  имеет компактный носитель, то она равномерно непрерывна:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ . Пусть  $K = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$ .

$$(f * g_j)(x) - g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g_j(y) dy - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))g_j(y) dy$$

$$|(f * g_j)(x) - g(x)| \leq \int_{|y| \leq \delta} |f(x-y) - f(x)|g_j(y) dy + \int_{|y| > \delta} (|f(x-y)| + |f(x)|)g_j(y) dy \leq \varepsilon + 2K \int_{|y| > \delta} g_j(y) dy \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

□

**Факт 2.8.4.** Пространство  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  плотно в  $L^p(\mathbb{R}^n)$  для  $1 \leq p < +\infty$ .

*Доказательство.* Построим специальную аппроксимативную единицу.

1. Пускай  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция с компактным носителем,  $\phi = 0$  вне  $(-1, 1)$ .

$$\text{Например, } \phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}.$$

2. Положим  $a := \int_{\mathbb{R}} \phi dx$ . Положим  $\psi = \frac{\phi}{a}$ . Это функция с единичным интегралом.
3.  $\Psi(x_1, \dots, x_n) := \psi(x_1) \cdot \dots \cdot \psi(x_n)$ . Это функция с единичным интегралом, сосредоточенная на единичном кубе со стороной 2 и центром в нуле.
4. В качестве аппроксимативной единицы выберем  $\Psi_j(x) = j^n \Psi(jx)$ . Интеграл по-прежнему равен единице, так как якобиан скалярного умножения на  $j$  в  $\mathbb{R}^n$  равен  $j^n$ .

Теперь выберем  $\varepsilon > 0$ , и функции  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  сопоставим  $g$  с компактным носителем, такую, что  $\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon$ . При больших  $j$ :

$$\|g * \Psi_j - g\|_{L^p} < \varepsilon$$

□

## Лекция XIII

6 декабря 2023 г.

### 2.8.4 Слегка другой способ построения аппроксимативной единицы

Этот способ практически повторяет способ с предыдущей лекции, но тут не требуется уметь строить бесконечно дифференцируемую функцию с компактным носителем.

Пусть  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — суммируемая функция, отнормируем её так, что  $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) dx = 1$ . Теперь положим в качестве аппроксимативной единицы  $\Phi_j(t) = j^n \Phi(jt)$ . Интеграл по всему пространству  $\Phi_j$  равен 1, так как якобиан домножения на  $j$  в  $\mathbb{R}^n$  — это  $j^n$ . Наконец,

$$\int_{|x| > \delta} \Phi_j(x) dx = \int_{|x| > \delta} j^n \Phi(jx) dx = \int_{|x| > j\delta} \Phi(jx) dx \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

Также можно вместо дискретного параметра  $j$  выбрать непрерывный параметр  $t$ . Пусть  $t$  мало, и пусть  $\phi_t = \frac{1}{t^n} \Phi\left(\frac{x}{t}\right)$  — аппроксимативные единицы. Тогда для  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ :  $g * \phi_t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{L^p} g$ .

Это разумеется правда, так как вместо обычной сходимости можно рассматривать сходимости по последовательностям, стремящимся к нулю.

Пусть  $K \subset \mathbb{R}^n$  — компактное множество положительной меры ( $|K| > 0$ ). Можно также положить  $\phi = \frac{\chi_K}{|K|}$ , и  $\phi_t(x) = \frac{1}{t}\phi\left(\frac{x}{t}\right)$ . Это ещё один пример аппроксимативной единицы.

## 2.9 Преобразования меры при дифференцируемом отображении

Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  — открыто, пусть  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывно дифференцируемая инъекция, и пусть дифференциал невырожден везде в  $G$ .

Пусть  $e \subset G$  — измеримое множество. Научимся вычислять  $|F(e)|$ .

**Теорема 2.9.1.**  $|F(e)| = \int_e |J_F(x)| dx$ , где  $J_F(x)$  — якобиан отображения  $F$  в точке  $x$ .

Прежде чем приступить к доказательству данной теоремы, вспомним несколько вещей.

Так, в условиях теоремы (можно рассмотреть исчерпывающую последовательность компактов для  $G$ , на них производная ограничена и  $F$  липшицева) для всякого измеримого  $e \subset G$ :  $F(e)$  измеримо по Лебегу, и  $|e| = 0 \Rightarrow |F(e)| = 0$ .

Рассмотрим некоторое расширение понятия меры. Пусть  $(S, \Sigma)$  — пространство с  $\sigma$ -алгеброй.

**Определение 2.9.1** (Знакопеременная мера). Счётно-аддитивная (необязательно положительная) функция  $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ . Счётная аддитивность понимается в обычном смысле: для непересекающихся

$$e_j \in \Sigma : \nu \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} e_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(e_j).$$

Из определения сразу следует, что сходимость должна быть абсолютной: формула верна с любой перестановкой.

Иногда такую меру называют *зарядом* — если обычная мера является аналогом массы, распределённой по всему пространству, то знакопеременная — аналог заряда, который сокращается при разных знаках.

*Примеры* (Знакопеременная мера).

- Пусть  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Можно определить  $\nu(e) = \int_e g(x) dx$ . Интеграл счётно-аддитивен, значит,  $\nu$  — знакопеременная мера.
- Есть и другие меры (например,  $\delta_0$  — мера всякого множества равна 1, если оно содержит 0, и 0 иначе.)

Пусть  $(S, \Sigma, \lambda)$  — пространство с мерой  $\lambda \geq 0$ ; предположим, что  $\lambda$  —  $\sigma$ -конечна. пусть  $\nu$  — вещественная мера на  $\Sigma$ .

**Определение 2.9.2** ( $\nu$  абсолютно непрерывна относительно  $\lambda$ ).  $\forall e \in \Sigma : \lambda(e) = 0 \Rightarrow \nu(e) = 0$ .

*Интересный факт* (Теорема Радона — Никодима). Следующие два условия эквивалентны.

- $\nu$  абсолютно непрерывна относительно  $\lambda$ .
- $\exists g \in L^1(\lambda) : \forall e \in \Sigma : \nu(e) = \int_e g d\lambda$ .

Это весьма фундаментальная теорема, и у неё довольно длинное непростое доказательство. Нам эту теорему докажут в курсе функционального анализа, так как там есть некий трюк с гильбертовыми пространствами, позволяющий существенно упростить доказательство.

Если такая  $g$  существует, то она называется *плотностью* меры  $\nu$  относительно меры  $\lambda$ . Также  $g$  зовут *производная Радона — Никодима*, причины к чему мы увидим ниже.

*Замечание.* Плотность абсолютно непрерывной меры  $\nu$  единственна.

*Доказательство.* Если  $g_1, g_2$  — две различные плотности, то  $\forall e : \nu(e) = \int_e g_1 d\lambda = \int_e g_2 d\lambda$ , и значит  $\int_e (g_1 - g_2) d\lambda = 0$ . Рассматривая положительные и отрицательные части этой разности, получим, что она равна нулю почти всюду, что и требовалось.  $\square$

*Замечание.*  $\nu \geq 0 \iff$  плотность  $g \geq 0$ .

*Доказательство.*  $g$  не может быть отрицательной на множестве положительной меры, иначе мера этого множества была бы меньше нуля.  $\square$

Вернёмся к ситуации дифференцируемого отображения  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Определим  $\nu(e) = |F(e)|$  — образ меры Лебега  $\lambda_n$  на  $F(G)$  при отображении  $F^{-1}$ .

Факт  $|e| = 0 \Rightarrow \nu(e) = 0$  как раз и говорит, что  $\nu$  абсолютно непрерывна относительно меры Лебега  $\lambda_n$  на  $G$ .

Рассмотрим  $U = F(G)$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $K_j$  — исчерпывающая последовательность компактов для  $U$ , и положим  $L_j := F^{-1}(K_j)$ . Тогда  $L_j$  — исчерпывающая последовательность компактов для  $G$ , но нам важно даже не то, что они компактны, а то, что  $\forall j : \nu(L_j) < \infty$ .

Теперь рассмотрим *сужение меры*  $\nu$  на  $L_j$  — это не совсем сужение в теоретико-множественном смысле, а просто мера, определённая на подмножествах  $L_j$ . Это сужение конечно, и тогда по теореме Радона — Никодима  $\exists g \in L^1(L_j)$ , такая, что  $\forall e \in L_j : \nu(e) = \int_e g_j d\lambda$ .

Теперь рассмотрим  $g_k$  для  $k > j$ .  $\nu(e) = \int_e g_k d\lambda$ . Понятно, что  $g_k|_{L_j}$  — плотность меры  $\nu$  на  $L_j$ , и получается, что эти плотности согласованы: из единственности плотности  $g_k|_{L_j} = g_j$  почти всюду. Тогда они «склеиваются» в одну измеримую функцию  $g : G \rightarrow F(G)$ , для которой всё верно:  $\forall e \in G : |F(e \cap L_j)| = \int_{e \cap L_j} g d\lambda$ , и можно перейти к пределу. Не исключено, что полученная  $G$  не суммируема, что естественно — образ маленького множества даже при дифференцируемом отображении может очень сильно растянуться.

**Следствие 2.9.1** (Вывод из теоремы Радона — Никодима).  $\exists$  измеримая на  $G$  функция  $g$ , измеримая по Лебегу, такая, что  $|F(e)| = \int_e g(x) dx$ .

Таким образом, такая функция  $g$  найдётся, осталось её как-то найти, а точнее, доказать, что это  $|J_F(x)|$ .

*Вопрос.* Как искать плотность  $h$  у (вообще говоря знакопеременной) меры  $\nu$  на  $G$ , если известно, что такая плотность есть?

Известно, что  $\nu(e) = \int_e h(x) dx$ . Предположим, что данная функция  $h$  локально суммируема:  $\forall x \in G : \exists U \ni x : \int_U |h(x)| dx < \infty$ . Функция, полученная из теоремы Радона — Никодима, именно такая.

Значит, плотность можно искать по кусочкам:  $\forall e \in U \cap G : \nu(e) = \int_e h(x) \chi_U(x) dx$ .

*Интересный факт* (Теорема о дифференцировании). Пусть  $B_r$  — шар (можно куб) радиуса  $r$  с центром в  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Тогда в этих условиях ( $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$  — локально суммируема,  $\nu(e) = \int_e h(x) dx$ ) почти всюду  $h(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \nu(x + B_r)$ .

В случае одномерного пространства  $n = 1$  это оказывается теоремой Ньютона — Лейбница. Если  $h$  непрерывна в  $x$ , то доказательство работает то же самое, но оказывается, что это правда не только в случае непрерывной  $h$ .

**Теорема 2.9.2** (Слабая теорема о дифференцировании).  $\forall h \in L^1(\mathbb{R}^n) : \exists$  последовательность  $r_n : r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , и почти всюду

$$\frac{1}{|B_{r_n}|} \int_{x+B_{r_n}} h(y) dy \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h(x)$$

*Доказательство.* Это, конечно, частный случай теоремы о дифференцировании, но зато доказывается проще.

Построим аппроксимативную единицу по функции  $\phi := \frac{1}{|B_1|} \chi_{B_1}$ .

Она будет иметь вид  $\phi_r(x) = \frac{1}{r^n} \phi\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r^n |B_1|} \phi\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{|B_r|} \chi_{B_r}(x)$ . Известно, что  $h * \phi_r \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{L^1(\mathbb{R}^n)} h$ .

Запишем

$$h * \phi_r = \int_{\mathbb{R}^n} h(y) \phi_r(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} h(y) \frac{1}{|B_r|} \chi_{B_r}(x-y) dy = \frac{1}{|B_r|} \int_{|x-y| < r} h(y) dy$$

Справа как раз стоит выражение, которое мы хотим показать, что стремится к  $h(x)$ . Сходимость в  $L^1$  означает сходимость по мере, а раз имеется сходимость по мере, то имеется последовательность  $r_n$ , стремящаяся к нулю, такая что  $h * \phi_{r_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$  почти всюду.  $\square$

Осталось доказать, что всюду

$$\frac{|F(x+B_r)|}{|B_r|} \xrightarrow{r \rightarrow 0} |J_F(x)| \quad (*)$$

Раз доказав это, мы получим, что раз левая часть почти всюду сходится к плотности  $h$ , и тогда получится, что плотность как раз равна модулю якобиана.

**Лемма 2.9.1** (Об искажении). Пусть  $H : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , выберем  $x_0 \in U$ , пусть  $H$  непрерывно дифференцируемо и  $dH(x_0, \_) = E$ , тождественный оператор. Положим  $y_0 := H(x_0)$ . Утверждается, что  $\forall \varepsilon \in (0, 1) : \exists \delta > 0 : r \in (0, \delta) \Rightarrow B_{r(1-\varepsilon)}(y_0) \subset H(B_r(x_0)) \subset B_{r(1+\varepsilon)}(y_0)$ .

*Доказательство.* Выберем маленький  $u \in \mathbb{R}^n$ . По определению дифференцируемости  $H(x_0 + u) = y_0 + \underbrace{dH(x_0, u)}_u + v(u)$ , где  $v(u) = o(|u|)$ .

Выберем  $\varepsilon \in (0, 1)$ , по определению  $o$ -маленького:  $\exists \delta > 0 : |u| < \delta \Rightarrow |v(u)| < \varepsilon |u|$ . Тогда, действительно,  $r < \delta \Rightarrow |H(x_0 + u) - y_0| \leq |u| + |v(u)| \leq (1 + \varepsilon)|u| \leq (1 + \varepsilon)r$ . Это доказывает правое включение.

Для доказательства левого включения возьмём  $H^{-1}$ , определённое в некоторой окрестности  $y_0$ , причём  $dH^{-1}(y_0, \_) = E$ . Здесь уже доказано  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \rho < \delta \Rightarrow H^{-1}(B_\rho(y_0)) \subset B_{\rho(1+\varepsilon)}(x_0)$ .

Применяя  $H$  ко включению, получаем  $B_\rho(y_0) \subset H(B_{\rho(1+\varepsilon)}(x_0))$ . Обозначив  $r = \rho(1 + \varepsilon)$ , получаем искомое включение, так как  $B_{r(1-\varepsilon)} \subset B_{\frac{r}{1+\varepsilon}}$ .  $\square$

Приступим к доказательству (\*). Пусть  $A = dF(x_0, \_)$ .

$$\frac{\nu(B_r(x_0))}{|B_r(x_0)|} = \frac{|F(B_r(x_0))|}{|B_r(x_0)|} = \frac{|AA^{-1}F(B_r(x_0))|}{|B_r(x_0)|} = |\det A| \frac{|A^{-1}F(B_r(x_0))|}{|B_r(x_0)|} = \left\| \phi = A^{-1}F \right\| = |J_F(x_0)| \frac{|\phi(B_r(x_0))|}{|B_r(x_0)|}$$

Но раз  $\det \phi(x_0, \_) = E$ , то по теореме об искажении и принципу двух полицейских  $\frac{|\phi(B_r(x_0))|}{|B_r(x_0)|} \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 1$ :

$$\frac{r^n(1 + \varepsilon)^{nv}}{r^n v} = \frac{|B_{r(1-\varepsilon)}(y_0)|}{|B_r(x_0)|} \leq \frac{|\phi(B_r(x_0))|}{|B_r(x_0)|} \leq \frac{|B_{r(1+\varepsilon)}(y_0)|}{|B_r(x_0)|} = \frac{r^n(1 + \varepsilon)^{nv}}{r^n v}$$

## Лекция XIV

9 декабря 2023 г.



//todo

## Лекция XV

13 декабря 2023 г.

//todo

## Лекция XVI

20 декабря 2023 г.

Сужение меры можно определить так  $\mu|_E(a) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(a \cap E)$ .

Иногда сужение определяют немного по-другому:  $\mu|_E(a)$  — мера, заданная как  $\mu$ , но теоретико-множественно суженная на  $\{b \in \Sigma | b \subset E\}$ .

**Теорема 2.9.3** (Хан). Пусть  $\mu$  — **конечная** вещественная мера на  $(X, \Sigma)$ . Тогда  $\exists E, F \in \Sigma : E \sqcup F = X$ , такие, что  $\mu|_E \geq 0, \mu|_F \leq 0$ .

*Доказательство.* Ранее доказано, что  $\{\mu(b) | b \in \Sigma\}$  ограничено. Пусть  $M = \sup_{b \in \Sigma} \mu(b)$ . Так как  $\mu(\emptyset) = 0$ , то  $M \geq 0$ .

- $M = 0$ . Тогда  $\mu \leq 0$ , и  $F = X, E = \emptyset$ .
- $M > 0$ . По определению супремума  $\exists b_k \in \Sigma : M - \frac{1}{2^k} \leq \mu(b_k) \leq M$ .

**Лемма 2.9.2.** Пусть  $b \subset X$ ,  $\mu(b) = M - \varepsilon$ . Если измеримое  $e \subset b$ , то  $\mu(e) \geq -\varepsilon$ .

*Доказательство леммы.*

От противного: пусть  $\exists e \subset b_k : \mu(e) < -\varepsilon$ . Тогда мера  $b_k \setminus e$  больше супремума  $M$ .  $\square$

Положим  $\overline{b_k} = \bigcup_{n \geq k} b_n$ . Оценим  $\mu(\overline{b_k})$  снизу:

$$\begin{aligned} \mu(b_k \cup b_{k+1} \cup \dots \cup b_n) &= \mu(b_k) + \mu(b_{k+1} \setminus b_k) + \mu(b_{k+2} \setminus (b_k \cup b_{k+1})) + \dots + \mu(b_n \setminus (\dots)) \geq \\ &\geq \left(M - \frac{1}{2^k}\right) - \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+2}} - \dots - \frac{1}{2^n} \geq M - \frac{1}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

Переходя к пределу в силу счётной аддитивности, получаем  $\mu(b_k \cup b_{k+1} \cup \dots) \geq M - \frac{1}{2^{k-1}}$ .

Теперь заметим, что  $\overline{b_1} \supset \overline{b_2} \subset \dots$ . Положим  $E := \bigcup_{k=1}^{\infty} b_k$ . В силу монотонной непрерывности  $\mu(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(b_k) = M$ .

Теперь в силу леммы все подмножества  $E$  имеют положительную меру. Положим  $F := X \setminus E$ , все подмножества  $F$  имеют отрицательную меру (от противного: если  $f \subset F$  имеет положительную меру, то  $\mu(E \cup f) > M$ ).  $\square$

Такие  $E, F \subset X$  из теоремы — *разложение Хана*. Оно единственно с точностью до множества меры нуль — если  $A \subset E$  имеет меру нуль, то все его подмножества тоже имеют меру нуль, и  $(E \setminus A, F \cup A)$  — тоже разложение Хана.

Теперь можно определить *положительную и отрицательную части меры*  $\mu^+(a) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(A \cap E)$  и  $\mu^-(a) \stackrel{\text{def}}{=} -\mu(a \cap F)$ . Тогда  $\mu(a) = \mu^+(a) - \mu^-(a)$ , тем самым любая конечная вещественная мера есть разность двух неотрицательных.

**Определение 2.9.3** (Модуль меры).  $|\mu|(a) \stackrel{\text{def}}{=} \mu^+(a) + \mu^-(a)$ .

Введём естественный частичный порядок на мерах: поточечно  $\mu \leq \nu \iff \forall e \in \Sigma : \mu(e) \leq \nu(e)$ .

**Предложение 2.9.1.**  $\mu^+$  есть наименьшая из неотрицательных мер  $\nu : \nu \geq \mu$ .

*Доказательство.* Пусть  $E, F$  — разложение Хана для  $\mu$ . Пусть  $\nu \geq \mu$ . Тогда  $\nu(a) = \nu(a \cap E) + \nu(a \cap F) \geq \mu(a \cap E) + \mu(a \cap F) = \mu^+(a)$ .  $\square$

*Замечание.*  $\mu^- = (-\mu)^+$ .

*Замечание.* Пусть  $g : X \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ -1, & x \in F \end{cases}$ . Тогда  $\mu(e) = \int_e g d|\mu|$ .

*Доказательство.*

$$\int_e g d|\mu| = \int_{e \cap E} d|\mu| - \int_{e \cap F} d|\mu| = \int_{e \cap E} d\mu^+ - \int_{e \cap F} d\mu^- = \mu^+(e \cap E) - \mu^-(e \cap F) = \mu(e) \quad \square$$

Пусть  $(X, \Sigma)$  — пространство с  $\sigma$ -алгеброй, и  $\rho$  — неотрицательная счётно-аддитивная мера.

Пусть  $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$   $\Sigma$ -измерим (прообраз любого борелевского множества измерим). Пусть  $\phi = \alpha + i\beta$ , где  $\alpha, \beta$  — вещественные измеримые функции.

Определим  $\int_a \phi d\rho \stackrel{\text{def}}{=} \int_a \alpha d\rho + i \int_a \beta d\rho$ . Данный интеграл обладает всеми свойствами, которые от него ожидаются — аддитивность,  $\mathbb{C}$ -линейность, счётная аддитивность по множеству, счётная аддитивность по функции.

Основную оценку интеграла удобно доказывать так:

$$\begin{aligned} \exists \theta \in \mathbb{R} : e^{i\theta} \int_a \phi d\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \left| \int_a \phi d\rho \right| = \Re \int_a e^{i\theta} \phi d\rho = \left| \int_a \Re(e^{i\theta} \phi) d\rho \right| \leq \int_a |e^{i\theta} \phi| d\rho = \int_a |\phi| d\rho \end{aligned}$$

Многие комплексные меры как раз приходят из таких интегралов.

Пусть  $\mu$  — комплексная мера на  $\Sigma$ .

**Определение 2.9.4** (Полная вариация  $\mu$  на  $a \in \Sigma$ ).  $|\mu|(a) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |\mu(e_j)| \mid e_1 \sqcup \dots \sqcup e_N = a \right\}$

**Теорема 2.9.4.**  $|\mu|$  есть неотрицательная конечная счётно-аддитивная мера на  $\Sigma$ .

*Доказательство.* 2.9.5  $\square$

*Замечание.* Если  $\mu$  вещественна, то  $|\mu|(a) = \mu^+(a) + \mu^-(a)$ , где  $|\mu|$  понимается, как полная вариация.

Иными словами, не зря модуль меры и её полную вариацию обозначают одинаково.

*Доказательство.* Если  $a \in \Sigma$ , и  $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_n = a$ , то  $\sum_{j=1}^n |\mu(e_j)| \leq \sum_{j=1}^n \mu^+(e_j) + \mu^-(e_j) \leq \mu^+(a) + \mu^-(a)$ .

Обратно, разобьём  $a = (a \cap E) \cup (a \cap F)$  (где  $E, F$  — разложение Хана). Тогда  $|\mu|(a) \geq |\mu(a \cap E)| + |\mu(a \cap F)| = \mu^+(a) + \mu^-(a)$ .  $\square$

**Лемма 2.9.3.** Пусть  $\rho_1, \rho_2$  — комплексные меры на  $\Sigma$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Тогда  $\forall a \in \Sigma : |(\alpha\rho_1 + \beta\rho_2)(a)| \leq |\alpha||\rho_1|(a) + |\beta||\rho_2|(a)$ .

*Доказательство.* Пусть  $a = e_1 \sqcup \dots \sqcup e_n$ . Оценим

$$\sum_{j=1}^n |(\alpha\rho_1 + \beta\rho_2)(e_j)| \leq |\alpha| \sum_{j=1}^n |\rho_1(e_j)| + |\beta| \sum_{j=1}^n |\rho_2(e_j)| \leq |\alpha||\rho_1|(a) + |\beta||\rho_2|(a)$$

и перейдём к супремуму по всем разбиениям  $a = e_1 \sqcup \dots \sqcup e_n$ . □

**Следствие 2.9.2.** Если  $\rho$  — комплексная мера, то  $\forall a : |\rho|(a) < +\infty$ .

*Доказательство.* Разложим  $\rho = \rho_1 + i\rho_2$ . □

**Предложение 2.9.2.** Пусть  $\nu$  — неотрицательная (необязательно конечная) мера на  $\Sigma$ , пусть  $g$  — комплексная суммируемая (относительно  $\nu$ ) функция. Определим  $\mu(e) := \int_e g d\nu$ .

Тогда  $|\mu|(a) = \int_a |g| d\nu$ .

*Доказательство.*

0. Пусть  $g \in L^1(\nu)$ . Тогда  $|\mu|(a) \leq \int_a |g| d\nu$ . Действительно, пусть  $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_n = a$ . Тогда

$$\sum_{j=1}^n |\mu(e_j)| = \sum_{j=1}^n \left| \int_{e_j} g d\nu \right| \leq \sum_{j=1}^n \int_{e_j} |g| d\nu = \int_a |g| d\nu.$$

1. Пусть  $g = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{e_j}$  — простая функция, где мы считаем, что  $b_j \in \Sigma$  попарно не пересекаются.

Рассмотрим разбиение  $a = (a \cap e_1) \sqcup \dots \sqcup (a \cap e_k) \sqcup \left( a \setminus \bigcup_{j=1}^k e_j \right)$ .

$$|\mu|(a) \geq \sum_{j=1}^k |\mu(a \cap e_j)| + \underbrace{\left| \mu \left( a \setminus \bigcup_{j=1}^k e_j \right) \right|}_{=0} = \sum_{j=1}^k \left| \int_{a \cap e_j} g d\nu \right| = \sum_{j=1}^k |c_j| \nu(a \cap e_j) = \int_a |g| d\nu$$

2. Пусть  $g \in L^1(\nu)$  ( $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ ). Выберем  $\varepsilon > 0$ . Тогда так как простые функции плотны в  $L^1$ , то  $\exists h : X \rightarrow \mathbb{C}$  — простая функция, такая, что  $\int_X |g - h| d\nu < \varepsilon$  (отдельно приблизим вещественную и мнимую части).

Пусть  $\mu_1(a) = \int_a h d\nu$ , и положим  $\mu_2 := \mu - \mu_1$ .

$$\mu(a) = \int_a h d\nu + \int_a (g - h) d\nu = \mu_1(a) + \mu_2(a)$$

$$\begin{cases} |\mu|(a) \leq |\mu_1|(a) + |\mu_2|(a) \\ |\mu_1|(a) \leq |\mu|(a) + |\mu_2|(a) \end{cases} \Rightarrow |\mu_1|(a) - |\mu_2|(a) \leq |\mu|(a) \leq |\mu_1|(a) + |\mu_2|(a)$$

Оценим  $\mu_2(a)$ :

$$|\mu_2(a)| \leq \int_a |g - h| d\nu \leq \int_X |g - h| d\nu \leq \varepsilon$$

Отсюда получается

$$\int_a |h| d\nu - \varepsilon \leq |\mu|(a) \leq \int_a |h| d\nu + \varepsilon$$

И наконец можно заменить  $h$  на  $g$ , при этом мы ошибёмся не больше, чем на  $\varepsilon$ .

$$\int_a |g| d\nu - 2\varepsilon \leq |\mu|(a) \leq \int_a |g| d\nu + 2\varepsilon$$

Устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$ . □

Теперь докажем теорему, сформулированную ранее.

**Теорема 2.9.5.**  $|\mu|$  есть неотрицательная конечная счётно-аддитивная мера на  $\Sigma$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mu$  — комплексная мера на  $\Sigma$ , разложим  $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ , где  $\mu_1, \mu_2$  — вещественные меры. Пусть  $\nu = \mu_1^+ + \mu_2^+ + \mu_1^- + \mu_2^-$ . Все четыре слагаемых — абсолютно непрерывные меры относительно  $\nu$ , то есть по теореме Радона — Никодима они представляются через плотность:  $\exists g_{1,2}^\pm \in L^1(\nu) : \mu_{1,2}^\pm(e) = \int_e g_{1,2}^\pm d\nu$ .

Тогда  $|\mu|(e) = \int_e |g| d\nu$ , и действительно получаем, что  $|\mu|$  — неотрицательная конечная счётно-аддитивная мера на  $\Sigma$ . □

### 2.9.1 Интеграл по комплексной мере

Пусть  $g : X \rightarrow \mathbb{C}$  измерима относительно комплексной меры  $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ .

Определим  $\int_a g d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_a g d\mu_1^+ - \int_a g d\mu_1^- + i \left( \int_a g d\mu_2^+ - \int_a g d\mu_2^- \right)$

В данном определении предполагается, что  $g$  суммируема относительно всех четырёх мер. Оказывается,  $g \in L^1(\mu_{1,2}^\pm) \iff g \in L^1(|\mu|)$ , так как  $\mu_{1,2}^\pm \leq |\mu|$ .

**Лемма 2.9.4** (Линейность по мере). Пусть  $\rho, \sigma$  — две комплексные меры на  $\Sigma$ , пусть  $g$  суммируема относительно  $|\rho|$  и  $|\sigma|$ . Утверждается, что

$$\int_a g d(\rho + \sigma) = \int_a g d\rho + \int_a g d\sigma$$

*Доказательство.* Утверждается, что  $\exists \lambda$  — положительная мера на  $\Sigma$ , относительно которой  $\rho, \sigma$  абсолютно непрерывны:  $\exists u, v : X \rightarrow \mathbb{C}$ , такие, что  $\rho(e) = \int_e u d\lambda$  и  $\sigma(e) = \int_e v d\lambda$ . Например, в качестве  $\lambda$  можно взять  $\rho_1^+ + \rho_1^- + \rho_2^+ + \rho_2^- + \sigma_1^+ + \sigma_1^- + \sigma_2^+ + \sigma_2^-$ .

Разложим на вещественную и мнимую части  $u = u_1 + iu_2, v = v_1 + iv_2$ .

$$\int_a g d\rho = \int_a g u_1^+ d\lambda - \int_a g u_1^- d\lambda + i \left( \int_a g u_2^+ d\lambda - \int_a g u_2^- d\lambda \right) = \int_a g u d\lambda$$

Аналогично  $\int_a g d\sigma = \int_a g v d\lambda$ .

$$\int_a g d\rho + \int_a g d\sigma = \int_a g(u + v) d\lambda = \int_a g d(\rho + \sigma)$$

□

### 2.9.2 Разложение Лебега

Пусть  $(X, \Sigma, \lambda)$  — пространство с неотрицательной  $\sigma$ -конечной мерой  $\lambda \geq 0$ .

Пусть  $\rho$  — комплексная мера на  $\Sigma$ .

**Определение 2.9.5** ( $\rho$  абсолютно непрерывна относительно  $\lambda$ ).  $\lambda(e) = 0 \Rightarrow \rho(e) = 0$ .

**Определение 2.9.6** ( $\rho$  сингулярна относительно  $\lambda$ ).  $\exists a \in \Sigma : \lambda(a) = 0$  и  $\forall e \subset X \setminus a : |\rho|(e) = 0$ .

*Пример.* Стандартная мера Лебега  $\lambda_1$  на  $\mathbb{R}$  взаимно сингулярна точечной  $\delta$ -мере  $\delta_0$ .

**Теорема 2.9.6** (Лебег). Для произвольной комплексной меры  $\rho$  на  $\Sigma$  существует и единственно представление  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ , где  $\rho_1$  абсолютно непрерывна относительно  $\lambda$ , а  $\rho_2$  сингулярна относительно  $\lambda$ .

*Доказательство.* Пусть  $A = \sup \{|\rho|(e) | e \in \Sigma, \lambda(e) = 0\}$ . Тогда  $\exists e_n \in \Sigma : |\rho|(e_n) > A - \frac{1}{n}$ .

Положим  $\bar{e}_n = e_n \cup e_{n+1} \cup \dots$ . Тогда  $\bar{e}_1 \subset \bar{e}_2 \subset \dots$ , и положим  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{e}_n$ .

В силу монотонной непрерывности  $|\rho|(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} |\rho|(e_n) = A$ . Так как  $\forall n : \lambda(\bar{e}_n) = 0$ , то  $\lambda(E) = 0$ .

Разложим  $\rho_1(e) := \rho(e \setminus E)$ ,  $\rho_2(e) := \rho(a \cap E)$ . В таком представлении  $\rho_2$  очевидно сингулярна относительно  $\lambda$ . Абсолютную непрерывность  $\rho_1$  относительно  $\lambda$  докажем от противного.

Пусть  $\exists b \in \Sigma, b \subset X \setminus E : |\rho_1(b)| > 0, \lambda(b) = 0$ . Тогда определим  $E_1 = E \cup b$ , и окажется, что  $|\rho|(E_1) = |\rho|(E) + |\rho|(b) \geq A + |\rho_1|(b) > A$ , противоречие.  $\square$

*Пример.* Определим рекурсивно канторову лестницу  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Построив по данной функции меру, мы получим меру, сосредоточенную на канторовом множестве меры нуль. Она сингулярна относительно стандартной меры Лебега на  $\mathbb{R}$ .