

# Алгебра. Неофициальный конспект

Лектор: Алексей Владимирович Степанов  
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Гомологическая алгебра</b>	<b>2</b>
1.1	Абелевы категории . . . . .	2
1.2	Комплексы . . . . .	4

# Глава 1

## Гомологическая алгебра

### Лекция I 12 февраля 2024 г.

#### 1.1 Абелевы категории

Напомним некоторые определения из предыдущей лекции.

**Определение 1.1.1** (Предаддитивная категория  $\mathcal{A}$ ).  $\forall A, B \in \mathcal{A} : \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$  образует абелеву группу, и везде, где определена, выполнена дистрибутивность:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad (\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

**Определение 1.1.2** (Бипроизведение). Такая диаграмма, что

$$A \begin{array}{c} \xleftarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\iota_1} \end{array} C \begin{array}{c} \xleftarrow{\pi_2} \\ \xrightarrow{\iota_2} \end{array} B$$

1.  $\pi_1 \iota_1 = \text{id}_A$ .
2.  $\pi_2 \iota_2 = \text{id}_B$ .
3.  $\iota_2 \pi_2 + \iota_1 \pi_1 = \text{id}_C$ .
4.  $\pi_2 \iota_1 = 0$ .
5.  $\pi_1 \iota_2 = 0$ .

**Определение 1.1.3** (Аддитивная категория). Предаддитивная категория с финальным объектом и произведениями (любых двух объектов).

Эквивалентно, существуют инициальный объект и копроизведения, эквивалентно существуют нулевой объект и бипроизведения.

**Определение 1.1.4** (Предабелева категория). Аддитивная категория, в которой у всех морфизмов есть ядро и коядро.

**Определение 1.1.5** ((Ко)нормальный мономорфизм (эпиморфизм)). Он является (ко)эквалайзером (какой-то, неважно какой, пары стрелок).

**Определение 1.1.6** (Абелева категория). Предабелева категория, в которой все мономорфизмы нормальны.

Пусть  $\mathcal{C}$  — категория. Вспомним про категорию стрелок  $Arr\mathcal{C}$ , в которой объекты — стрелки из  $Mor(\mathcal{C})$ , множество морфизмов между  $\phi, \psi$  — это

$$Mor_{Arr\mathcal{C}}(\phi, \psi) = \{(\alpha, \beta) | \alpha : source(\phi) \rightarrow source(\psi), \beta : target(\phi) \rightarrow target(\psi), \beta\phi = \psi\alpha\}$$

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\phi} & \bullet \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \bullet & \xrightarrow{\psi} & \bullet \end{array}$$

Далее будем обозначать за  $\ker f$  ядро стрелки, как уравнитель стрелки и нуля, а за  $Ker f := source(\ker f)$  — объект (в конкретных категориях типа  $mod-R$  это докатегорное понятие ядра — подмодуль без стрелки-вложения).

**Лемма 1.1.1.**  $\ker, \text{coker}$  — функторы  $Arr\mathcal{A} \rightarrow Arr\mathcal{A}$ .

*Доказательство.* Достаточно доказать для ядер, для коядер двойственно.

Определим действие  $\ker$  на морфизмах:

$$\begin{array}{ccccc} Ker f & \xrightarrow{\ker f} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow \exists! \phi & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ Ker f' & \xrightarrow{\ker f'} & A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

$f \cdot \ker f = 0 \Rightarrow \beta \cdot f \cdot \ker f = 0 \Rightarrow f' \cdot \alpha \cdot \ker f = 0$ , откуда по универсальному свойству ядра  $\exists! \phi : \ker f' \cdot \phi = \alpha \cdot \ker f$ .

Положим  $\ker(\alpha, \beta) = (\phi, \alpha)$ . Далее несложно проверить, что данное определение сохраняет композицию и  $id$ .  $\square$

**Определение 1.1.7** (Точный функтор). Функтор, сохраняющий ядра и коядра.

*Интересный факт* (Теорема Фрейда — Митчелла (Freyd — Mitchell)). Для любой малой абелевой категории  $\mathcal{A}$ :  $\exists R \in Ring$  (необязательно коммутативное кольцо с единицей) и строгий, полный, точный функтор  $\mathcal{A} \rightarrow mod-R$ .

**Предложение 1.1.1.** Для всякого морфизма  $f : A \rightarrow B$  найдётся пунктирная стрелка, делающая диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccccccc} Ker f & \xrightarrow{\ker f} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\text{coker } f} & CoKer f \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & CoKer \ker f & \xrightarrow{\exists!} & Ker \text{coker } f & & \end{array}$$

Более того, в абелевой категории эта стрелка — изоморфизм.

*Доказательство.* Следует из эпи-моно разложения, доказанного на прошлой лекции, или из теоремы Митчелла.

Само построение пунктирной стрелки получается из универсальных свойств, а доказательство того, что это — изо — непростое.  $\square$

**Лемма 1.1.2.** Пусть  $\mathcal{C}$  — полная подкатегория в абелевой категории  $\mathcal{A}$ . Следующие условия равносильны

- $\mathcal{C}$  является абелевой.
- $0 \in \mathcal{C}$ .
- $\mathcal{C}$  содержит бипроизведение любых двух своих объектов.

– Ядра и коядра (взятые в  $\mathcal{A}$ ) любых морфизмов из  $\mathcal{C}$  лежат в  $\mathcal{C}$ .

*Доказательство.*

$\Leftarrow$ . Очевидно.

$\Rightarrow$ . Чуть сложнее, доказывать не будем (и использовать тоже). □

## 1.2 Комплексы

Если противное не оговорено, то всё происходит в абелевой категории  $\mathcal{A}$ , большими буквами обозначены объекты данной категории, маленькими — морфизмы.

**Определение 1.2.1** (Комплекс). Такая диаграмма, что  $\forall k \in \mathbb{Z} : d_k \cdot d_{k+1} = 0$ .

$$\dots \xrightarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{d_n} C_n \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}} \dots$$

Альтернативно, комплекс можно рассматривать, как функтор из категории  $(\mathbb{Z}, \geq)$  (полученной из частично упорядоченного множества) в  $\mathcal{A}$  (при котором образ композиции любых двух нетождественных морфизмов нулевой).

Ещё один, следующий, взгляд на комплексы работает только для конкретной категории, уже вложенной в  $R$ -модули.

**Определение 1.2.2** (Градуированный объект).  $C_\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C_n$  с морфизмом  $d : C_\bullet \rightarrow C_\bullet$ , таким, что  $d(C_n) \subset C_{n+p}$  для некоторой фиксированной *степени объекта*  $p$  (чаще всего она равна  $\pm 1$ ).

**Определение 1.2.3** (Дифференциальный модуль). Градуированный объект  $(C_\bullet, d)$  со свойством  $d^2 = 0$ .

**Определение 1.2.4** (Комплекс). Дифференциальный модуль степени  $-1$ .

При развороте стрелок получается дифференциальный модуль степени  $+1$ , также известный, как *кокомплекс*:

$$\dots \xleftarrow{d^{n+2}} C^{n+1} \xleftarrow{d^{n+1}} C^n \xleftarrow{d^n} C^{n-1} \xleftarrow{d^{n-1}} \dots$$

*Предостережение.* У кокомплекса несколько другая нумерация стрелок, но кокомплексы мы практически не будем использовать.

**Определение 1.2.5** (Сдвиг комплекса  $(C_\bullet, d)$  на  $p \in \mathbb{Z}$ ). Комплекс  $(C[p]_\bullet, d[p])$ , где  $C[p]_n = C_{n+p}$  и  $d[p]_n = (-1)^p d_{n+p}$ .