

# Дифференциальная геометрия. Неофициальный конспект

Лектор: Лебедева Нина Дмитриевна  
Конспектировал Леонид Данилевич

III семестр, осень 2023 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Алгебраическая топология</b>	<b>2</b>
1.1	Применения фундаментальной группы . . . . .	2
1.2	Теорема Жордана . . . . .	3
1.3	Ретракция. Гомотопическая эквивалентность . . . . .	4
1.4	Гомотопическая эквивалентность . . . . .	6
1.5	Пары Борсука . . . . .	7
1.6	Клеточная пара — пара Борсука . . . . .	8
1.7	Гомотопическая эквивалентность и фундаментальная группа . . . . .	9
1.8	Накрытия . . . . .	9
1.8.1	Морфизмы накрытий . . . . .	11
1.8.2	Иерархия накрытий с общей базой . . . . .	14
1.9	Фундаментальные группы клеточных пространств (CW-комплексов). Теорема Зей- ферта — ван Кампена . . . . .	14
1.9.1	План . . . . .	14
1.9.2	Фундаментальная группа конечного графа . . . . .	15
1.9.3	Теорема Зейферта — ван Кампена . . . . .	15
1.9.4	Фундаментальные группы основных поверхностей . . . . .	17
1.10	Построение универсального накрытия . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Дифференциальная геометрия</b>	<b>20</b>
2.1	Дифференциальная геометрия кривых . . . . .	20
2.1.1	Параметризация кривой длиной дуги . . . . .	22
2.2	Кривизна плоской кривой, базис Френе . . . . .	23
2.2.1	Формулы Френе . . . . .	23
2.2.2	Поворот кривой . . . . .	24
2.2.3	Замкнутые кривые . . . . .	25
2.2.4	Выпуклые кривые на плоскости . . . . .	26
2.3	Кривые в старших размерностях . . . . .	27
2.4	Кривые в $\mathbb{R}^3$ , кручение кривых . . . . .	29
2.4.1	Скорость ухода от соприкасающейся плоскости . . . . .	29
2.5	Базис Френе и кривизны в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	30
2.6	2-мерные поверхности в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	31
2.6.1	Локальная параметризация . . . . .	31
2.6.2	Гладкие функции на поверхности . . . . .	32
2.6.3	Производная по направлению . . . . .	33
2.7	Первая квадратичная форма поверхности . . . . .	34
2.7.1	I форма при замене координат . . . . .	35
2.7.2	Изометрии . . . . .	35
2.8	Вторая квадратичная форма . . . . .	36
2.8.1	Специальные координаты. Соприкасающийся параболоид . . . . .	36
2.8.2	Гауссово отображение . . . . .	37
2.8.3	Оператор Вайнгартена . . . . .	37
2.8.4	Выражение нормальной кривизны через квадратичные формы . . . . .	39
2.9	Формулы типа Френе . . . . .	40

2.10	Вычисление главных кривизн и направлений в координатах . . . . .	41
2.11	Ковариантная производная . . . . .	42
2.11.1	Вычисления в координатах. Символы Кристоффеля . . . . .	43
2.11.2	Зачем нужны символы Кристоффеля . . . . .	43
2.12	Выпуклые поверхности . . . . .	45

# Глава 1

## Алгебраическая топология

### Лекция I

4 сентября 2023 г.

#### 1.1 Применения фундаментальной группы

**Теорема 1.1.1** (Об инвариантности размерности).  $\mathbb{R}^n$  (при  $n > 2$ ) не гомеоморфно никакому открытому подмножеству  $U \subset \mathbb{R}^2$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную точку  $x \in U$ .

Если её удалить, то фундаментальная группа  $U \setminus \{x\}$  будет нетривиальной, а  $\mathbb{R}^n \setminus \{pt\}$  — односвязно.  $\square$

**Теорема 1.1.2** (Об инвариантности края).  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$  не гомеоморфно никакому открытому  $U \subset \mathbb{R}^2$ .

*Доказательство.* У  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$  можно выкинуть граничную точку, пространство останется односвязным.  $\square$

**Определение 1.1.1** (Ретракция топологического пространства  $X \supset A$ ).  $f : X \rightarrow A$ , такое, что  $f|_A = \text{id}$ .

**Теорема 1.1.3** (Борсук). Не существует ретракции двумерного диска  $D^2$  на свою границу  $S^1 = \partial D^2$ .

*Доказательство.* От противного: пусть нашлась ретракция  $f : D^2 \rightarrow S^1$ . Рассмотрим композицию  $S^1 \xrightarrow{\text{in}} D^2 \xrightarrow{f} S^1$ . Композиция  $\text{in} \circ f = \text{id}_{S^1}$ .

Эта композиция индуцирует гомоморфизм фундаментальных групп  $\pi_1(S^1) \xrightarrow{\text{in}_*} \pi_1(D^2) \xrightarrow{f_*} \pi_1(S^1)$ , причём  $\text{in}_* \circ f_* = \text{id}_* = \text{id}$ , однако фундаментальная группа диска тривиальна.  $\square$

*Замечание.* Все предыдущие теоремы можно обобщить на случай больших размерностей, но в доказательстве будет уже не фундаментальная группа.

**Теорема 1.1.4** (Брауэр). Любое непрерывное отображение  $f : D^2 \rightarrow D^2$  имеет неподвижную точку.

*Доказательство.* От противного:  $\exists f : D^2 \rightarrow D^2$  без неподвижных точек.

Тогда можно построить ретракцию из диска на окружность:  $x \in D^2$  отобразим в пересечение луча  $f(x) \rightarrow x$  с границей  $\partial D^2$ . Назовём построенную функцию  $g$ .

$g|_{S^1} = \text{id}$  по определению. Для проверки непрерывности запишем  $g$  формулой:

$$g(x) = f(x) + t_x(x - f(x))$$

где  $t_x$  выбирается так, что  $|f(x) + t_x(x - f(x))| = 1$ . Таким образом,  $t_x$  — положительный (большой) корень некоего квадратного уравнения с непрерывно меняющимися коэффициентами.  $\square$

**Теорема 1.1.5** (Основная теорема алгебры).  $\forall f \in \mathbb{C}[x], \deg f \geq 1 : \exists z_0 \in \mathbb{C} : f(z_0) = 0$ .

*Доказательство (дама с собачкой).* Запишем  $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ .

Обозначим  $g(z) = a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ . Выберем достаточно большое  $R \in \mathbb{R}$ , такое, что  $|z| \geq R \Rightarrow |z^n| > |g(z)|$ .

Если  $z$  пробегает все значения одного модуля  $z = R \cdot e^{it}$  по  $t \in [0, 2\pi]$ , то «дама»  $z^n$  обходит большой круг  $n$  раз, а «собачка на поводке»  $g(z)$  находится внутри достаточно малого круга, что  $z^n + g(z)$  не задевает нуля. Таким образом,  $f(z) = z^n + g(z)$  пробегает некую нетривиальную петлю в  $l \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ( $n$  раз оборачивающуюся вокруг нуля — можно линейно прогомोटопировать в петлю  $z^n$ ).

Рассмотрим гомотопию петли  $\{t \mapsto R \cdot e^{it} | t \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{C}$  в точку. Композиция  $f$  с этой гомотопией создаст гомотопию петли  $l$  в точку. Но в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  петля  $l$  не стягиваема, значит, применение  $f$  заденет где-то 0.  $\square$

**Теорема 1.1.6** (Улам — Борсук). У любого  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  найдётся  $x \in S^2 : f(x) = f(-x)$ .

*Доказательство.* Предположим противное. Рассмотрим функцию  $g(x) := f(x) - f(-x)$ . Это нечётная функция ( $g(x) = -g(-x)$ ), мы предполагаем, что она не обнуляется.

Сузим  $g$  на экватор сферы.  $g|_{S^1}$  — нечётная петля.

**Лемма 1.1.1.** *Нечётная петля имеет нечётный индекс (индекс — количество раз, которое петля обмоталась вокруг 0 с учётом ориентации).*

*Доказательство леммы.*

Рассмотрим  $\alpha(x) = \frac{g(x)}{|g(x)|}$  — отображение  $S^1 \rightarrow S^1$ , по-прежнему нечётное.

Для определения индекса петли надо рассмотреть универсальное накрытие  $\mathbb{R} \xrightarrow{p} S^1$ . Обозначим за  $\tilde{\alpha} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  поднятие петли  $\alpha$  ( $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\alpha}(2\pi)$ ).

Без потери общности можно считать, что  $\tilde{\alpha}(0) = 0$ . Так как  $\alpha$  нечётная, то  $\tilde{\alpha}(\pi) = \pi(2k + 1)$  для некоего  $k \in \mathbb{Z}$ . Далее из нечётности  $\alpha$  получаем  $\tilde{\alpha}(2\pi) = 2\pi(2k + 1)$ , что и значит нечётность индекса.  $\square$

Аналогично предыдущей теореме, стянем экватор  $S^1$  в точку, петля стянется в точку, значит, где-то заденет 0.  $\square$

## 1.2 Теорема Жордана

**Теорема 1.2.1** (Детская версия теоремы Жордана). Рассмотрим диск  $D^2$ , пусть  $N$  и  $S$  — северный и южный полюса диска соответственно.

Пусть  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D^2$  — путь от  $S$  до  $N$ , причём пусть  $\gamma(0, 1) \cap S^1 = \emptyset$ .

Тогда существуют  $p, q \in D^2$ , «достаточно близкие к границе», такие, что  $p$  и  $q$  лежат в разных компонентах связности  $D^2 \setminus \text{Im}(\alpha)$ .



*Доказательство.* Выберем  $p_0$  на дуге  $NS$  и  $q_0$  на дуге  $SN$ . Выберем внутри диска достаточно близко к  $p_0$  и  $q_0$ , точки  $p$  и  $q$  соответственно (выберем так, чтобы отрезки  $pp_0$  и  $qq_0$  не пересекали  $\text{Im}(\gamma)$ ). Так можно сделать, так как  $p_0, q_0 \notin \text{Im}(\gamma)$ , и  $\text{Im}(\gamma)$  компактно, откуда дополнение открыто.

Теперь рассмотрим замкнутую кривую  $\gamma \cdot \widehat{NS}$  (обход против часовой стрелки). Индекс точки  $p$  относительно неё равен индексу относительно кривой  $SN \cdot \widehat{NS}$  (так как можно прогомотопировать, не задевая  $p$ ), то есть 1. Аналогично, индекс точки  $q$  относительно этой кривой равен 0, значит, эти точки лежат в разных компонентах линейной связности  $D^2 \setminus \text{Im}(\gamma)$ .  $\square$

*Интересный факт* (Теорема Жордана). Рассмотрим инъективное  $S^1 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^2$ . Тогда число компонент связности  $\#(\mathbb{R}^2 \setminus \text{Im}(\alpha)) = 2$ .

*Интересный факт* (Уточнение, теорема Шёнфлиса). Эти компоненты связности гомеоморфны компонентам связности  $\mathbb{R}^2 \setminus S^1$ .

### 1.3 Ретракция. Гомотопическая эквивалентность

Напомним определение ретракции.

**Определение 1.3.1** (Ретракция топологического пространства  $X \supset A$ ).  $f : X \rightarrow A$ , такое, что  $f|_A = \text{id}$ .

**Теорема 1.3.1.** Пусть существует  $r : X \rightarrow A$  — ретракция. Тогда для отображения  $\text{in} : A \rightarrow X$  индуцированный гомоморфизм фундаментальных групп  $\text{in}_*$  инъективен.

*Доказательство.* Композиция  $A \xrightarrow{\text{in}} X \xrightarrow{r} A$  тождественна, значит, индуцированный гомоморфизм фундаментальных групп тождественен, значит, никакие точки при  $\text{in}_*$  не склеились.  $\square$

**Определение 1.3.2** (Деформационная ретракция  $X \supset A$ ). *Гомотопия*  $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ , такая, что  $\forall x \in X : H(x, 0) = x$ , и  $\forall a \in A : H(a, \_) = a$ , причём  $H(\_, 1) = A$ .

*Замечание.* Условие  $\forall a \in A : H(a, \_) = a$  можно ослаблять: некоторые определения не такие сильные — требуют  $H(a, t) \in A$  или даже только  $H(a, 1) = a$ .

## Лекция II

11 сентября 2023 г.

*Предостережение* (Проблемы с доказательством теоремы Жордана). Длина кривой может быть бесконечной. Кривая может бесконечно закручиваться, как спираль, внутрь себя (нет?) Легко заменить кривую на ломаную может не получиться, так как будут возникать самопересечения.

**Лемма 1.3.1.** Пусть  $p, q$  — концы пути  $\gamma$ , причём петля  $\alpha$  не пересекается с носителем пути  $\gamma$ . Тогда  $\text{ind}_p(\alpha) = \text{ind}_q(\alpha)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим гомотопию  $H(x, t) = \alpha(x) - \gamma(t)$ . Это непрерывная деформация  $\alpha$ , которая не задевает 0, значит, индексы  $p$  и  $q$  равны.  $\square$

**Теорема 1.3.2** (Шёнфлис, для ломаных). Пусть  $\alpha$  — замкнутая несамопересекающаяся ломаная с вершинами  $A_1, \dots, A_n$ .

Тогда плоскость бьётся на две компоненты связности, одна гомеоморфна  $B_1(0)$ , другая —  $\mathbb{R}^2 \setminus D_1(0)$ .

*Доказательство.*

- Докажем, что компонент связности  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Im}(\alpha)$  не больше 2. Зафиксируем точку  $p$  на границе, у неё есть окрестность, гомеоморфная  $B_2$  без диаметра.

Любую другую точку  $q$  можно соединить с этой окрестностью путём, не пересекающим  $\text{Im}(\alpha)$  — подойдём достаточно близко к кривой, дальше будем идти вдоль неё.

Так как компонент связности  $B_2$  без диаметра две, то и компонент связности  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Im}(\alpha)$  не больше 2.

- Пусть  $l$  — прямая, не параллельная  $A_i A_{i+1}$  для всех пар соседних точек (индекс берётся по модулю  $n$ ,  $A_{n+1} = A_1$ ).

Пусть  $N$  — нормаль к  $l$ . Определим функцию высоты  $h(p) = \langle N, p \rangle$ . Все отрезки вида  $A_i A_{i+1}$  не параллельны прямой  $l$ , их концы имеют разную высоту.

Зафиксируем высоту  $h$ , рассмотрим точки пересечения  $B_1, \dots, B_k$  ломаной  $\alpha$  с линией уровня  $h$ . Каждой вершине  $B_1, \dots, B_k$  сопоставим чётность — 0, если в окрестности этой вершины уровни ломаной всегда не больше (или не меньше), чем уровень данной точки. Иначе — если уровень ломаной меняет знак в данной вершине — присвоим чётность 1.

Каждой точке на линии уровня  $h$  присвоим чётность, равную сумме (в  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ) чётностей вершин левее. Точки с чётностями 0 лежат снаружи ломаной, с чётностями 1 — внутри.



По построению очевидно, что точки разных чётностей лежат в разных компонентах связности  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Im}(\alpha)$  (отображение  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Im}(\alpha) \rightarrow \{0, 1\}$ , сопоставляющее точке уровень непрерывно, что проверяется ручками), а так как компонент связности не больше 2, то их ровно 2.

- Докажем, что множество «нечётных точек» гомеоморфно  $B_2$ . Для этого триангулируем их замыкание — «нечётные точки», объединённые с  $\text{Im}(\alpha)$ .

Проведя все линии уровня для  $h \in \{h(A_1), \dots, h(A_n)\}$ , мы получим разбиение на множество треугольников и трапеций — трапеции несложно триангулировать.

Склейка множества треугольников по рёбрам, как известно, даёт сферу с ручками, дырками и плёнками.

Плѐнки получиться не могут — они неориентируемы, а  $\mathbb{R}^2$  ориентируема. Но и ручки получиться не могут — в предположении, что из плоскости получилось вырезать ручку, мы можем устроить (не деформационную) ретракцию из плоскости на окружность, что противоречит тому, что у окружности фундаментальная группа больше. Для этого представим ручку, как тор с дыркой —  $S^1 \times S^1$  с дыркой. Ретракция на окружность устроена отбрасыванием второй координаты.

У каждой дырки есть компонента края. То, что дырок ровно одна, понятно из того, что край — как-раз-таки только та (связная) ломаная  $\alpha$ .  $\square$

## 1.4 Гомотопическая эквивалентность

Пусть  $X, Y$  — топологические пространства.

**Определение 1.4.1** (Гомотопически обратные отображения). Отображения  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$ , такие, что  $f \circ g \sim \text{id}_Y$  и  $g \circ f \sim \text{id}_X$ .

**Определение 1.4.2** (Гомотопически эквивалентные пространства). Такие  $X, Y$ , что  $\exists f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$  — гомотопически обратные отображения.

Обозначается  $X \sim Y$ .

**Теорема 1.4.1.** Пусть  $X$  — деформационный ретракт  $Y$  (достаточно самого слабого определения). Тогда  $X \sim Y$ .

*Доказательство.* Пусть  $H(\_, 1) = \tau : Y \rightarrow X$  — ретракция,  $\text{in} : X \rightarrow Y$  — включение.

Докажем, что  $\tau$  и  $\text{in}$  — гомотопически обратные.

- $\tau \circ \text{in} = \text{id}_X$ , поэтому и гомотопически эквивалентно  $X$ .
- $\text{in} \circ \tau \sim \text{id}_Y$  по определению деформационной ретракции.  $\square$

*Примеры* (Гомотопически эквивалентные пространства).

- $[0, 1] \sim [0, 1] \times [0, 1]$  — отрезок является деформационным ретрактом квадрата.
- $S^1 \sim$  лист Мёбиуса.
- Точка гомотопически эквивалентна дереву.
- Две разные (одномерные) восьмёрки гомотопически эквивалентны, потому что они — ретракты третьей (двумерной) восьмёрки (рисунок 1.1).



Рис. 1.1: Восьмёрки

**Теорема 1.4.2.** Гомотопическая эквивалентность — отношение эквивалентности.

*Доказательство.*

- Рефлексивность:  $X \sim X$ , так как  $\text{id}_X$  и  $\text{id}_X$  — гомотопически обратные.
- Симметричность заложена в определение.



- Транзитивность: пусть  $X \xrightleftharpoons[h]{f} Y \xrightleftharpoons[i]{g} Z$ , где  $g \circ i, i \circ g, f \circ h$  и  $h \circ f$  гомотопны постоянным отображениям соответствующего пространства. Таким образом, так как  $i \circ g \sim \text{id}_Y$ , то

$$h \circ (i \circ g) \circ f \sim h \circ f \sim \text{id}_X$$

Аналогично  $g \circ f \circ h \circ i \sim \text{id}_Z$ . □

## 1.5 Пары Борсука

**Определение 1.5.1** ( $(X, A)$  — пара Борсука).  $A \subset X$ , причём  $\forall Y : \forall f : X \rightarrow Y : \forall H : A \times I \rightarrow Y$ : если  $H(\_, 0) = f|_A(\_)$ , то гомотопию можно продолжить:  $\exists \tilde{H} : X \times I \rightarrow Y$ , такая что  $\tilde{H}|_{A \times I} = H$ , причём  $\tilde{H}(\_, 0) = f(\_)$ .



## Лекция III

18 сентября 2023 г.

В некотором смысле, практически все пары пространства-подпространства, которые естественно придумать, являются парой Борсука. Например, парами Борсука являются пары клеточного пространства и его клеточного подпространства (следствие 1.6.1)

**Определение 1.5.2** (Локально компактное пространство  $X$ ).  $\forall x \in X : \exists U \ni x : \text{Cl} U$  компактно.

**Факт 1.5.1.** Пусть  $X \supset A$ , причём  $B$  локально компактно. Тогда  $(X/A) \times B \cong (X \times B)/\sim$ , где  $\forall a_1, a_2 \in A, b \in B : (a_1, b) \sim (a_2, b)$ .

*Доказательство.* Равенство множеств проверить несложно, но чтобы проверить гомеоморфизм топологических пространств, надо воспользоваться локальной компактностью.

Этот факт из общей топологии мы доказывать не будем. □

*Замечание.*  $A$  — стягиваемо  $\iff \exists a \in A : \{a\}$  — деформационный ретракт  $A$  в самом слабом смысле.

**Теорема 1.5.1.** Пусть  $(X, A)$  — пара Борсука. Если  $A$  стягиваемо, то  $X \sim X/A$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{F}^* : A \times I \rightarrow A$  — гомотопия, стягивающая  $A$  в точку  $a \in A$  (таким образом  $\mathcal{F}^*|_{A \times \{0\}} = \text{id}_A$  и  $\mathcal{F}^*|_{A \times \{1\}} = a$ )

Положим в качестве  $\mathcal{F} : X \times I \rightarrow X$  гомотопию, продолжающую  $\mathcal{F}^*$  так, что  $\mathcal{F}|_{X \times \{0\}} = \text{id}_X$  (такая найдётся по определению пары Борсука).

Так как  $\forall t \in I : \mathcal{F}(A, t) \subset A$ , то  $(p \circ \mathcal{F})(A, t) = p(A)$  ( $p(A)$  — одноточечное множество), и  $p \circ \mathcal{F}$  пропускается через фактор:  $\exists!$  непрерывное  $\tilde{\mathcal{F}} : (X \times I)/\sim \rightarrow X/A$ , делающее диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{\mathcal{F}} & X \\ \downarrow / \sim & & \downarrow p \\ (X \times I)/\sim & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} & X/A \end{array}$$

Отождествляя  $(X \times I)/\sim \cong (X/A) \times I$ , получаем  $\tilde{\mathcal{F}} : (X/A) \times I \rightarrow X/A$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}(\_, 0) = \text{id}_{X/A}$ .

Так как  $\mathcal{F}(A, 1) = a$ , то можно пропустить через фактор:  $\exists q : X/A \rightarrow X : q \circ p = \mathcal{F}(\_, 1)$ .

Таким образом,  $q \circ p \sim \text{id}_{X/A}$  (гомотопией является  $\tilde{\mathcal{F}}$ ) и  $p \circ q \sim \text{id}_X$  (гомотопией является  $\mathcal{F}$ ).  $\square$

## 1.6 Клеточная пара — пара Борсука

**Факт 1.6.1.** Пусть  $A$  замкнуто в  $X$  (необязательное условие, без которого сложнее, и без которого нужна хаусдорфовость  $X$ ).

Рассмотрим пространство  $X \times I$ .  $A \subset X$  — пара Борсука, если  $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$  — ретракт  $X \times I$ .

*Доказательство.* Обозначим данную ретракцию за  $\rho : X \times I \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ . Чтобы показать, что  $(X, A)$  — пара Борсука, рассмотрим произвольное  $f : X \rightarrow Y$ , рассмотрим гомотопию  $H : A \times I \rightarrow Y$ , такую, что  $H|_{A \times \{0\}} = f|_A$ .

Необходимо показать существование продолжения гомотопии  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Y$ . Подойдёт

$$\tilde{H} : (x, t) \mapsto \begin{cases} f(\tilde{x}), & \rho(x) = (\tilde{x}, 0) \in X \times \{0\} \\ H(a, t), & \rho(x) = (a, t) \in A \times I \end{cases}$$

Непрерывность  $\tilde{H}$  следует из замкнутости  $A$  в  $X$ .  $\square$

*Замечание.* В обратную сторону тоже верно.

*Замечание.*  $(D^n, \partial D^n) = (D^n, S^{n-1})$  — пара Борсука.

*Доказательство.* Цилиндр  $D^n \times I$  легко можно стянуть на «стакан»  $(D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I)$ .

Пусть  $y$  — центр шара  $D^n$ . Ретракция может быть устроена следующим образом:

$$H : D^n \times I \rightarrow (D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I)$$

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} \left( y + (x - y) \cdot \frac{1}{d(x, y)}, \frac{1}{d(x, y)} \right), & \frac{2-t}{d(x, y)} \leq 2 \\ \left( y + (x - y) \cdot \frac{2}{2-t}, 0 \right), & \frac{2-t}{d(x, y)} \geq 2 \end{cases}$$

Иначе говоря, берётся произведение диска  $D^n \subset \mathbb{R}^n$  с отрезком  $[0, 2]$ , в качестве стакана выбирается  $(D^n \times \{0\}) \cup (\partial D^n \times [0, 1])$ , после чего все точки  $x \in D^n \times [0, 1]$  переходят в пересечение луча  $(y, 2) \rightarrow x$  и стакана.  $\square$

*Замечание.* Если  $(X, A)$  и  $(A, B)$  — пары Борсука, то  $(X, B)$  — пара Борсука.

*Доказательство.* Прямо из определения. Пусть  $f : X \rightarrow Y$ ,  $H : B \times I \rightarrow Y$  — отображение и гомотопия, которые надо продолжить  $f|_B = H|_{B \times \{0\}}$ .

Так как  $(A, B)$  — пара Борсука, то  $\exists H_1 : A \times I \rightarrow Y$ , такая, что  $H_1|_{B \times I} = H$ ,  $H_1|_{A \times \{0\}} = f|_A$ .

Так как  $(X, A)$  — пара Борсука, то  $\exists H_2 : X \times I \rightarrow Y$ , такая, что  $H_2|_{A \times I} = H_1$ ,  $H_2|_{X \times \{0\}} = f$ .  $\square$

**Факт 1.6.2.** Приклеим  $n$ -мерную клетку  $D^n$  по её границе с помощью  $f : \partial D^n \rightarrow X$ . Назовём результат склейки  $Y := X \sqcup_f D^n$ . Утверждается, что тогда  $(Y, X)$  — пара Борсука.

*Доказательство.* Докажем (факт 1.6.1).

$Y \times I = (X \sqcup_f D^n) \times I \underset{\text{факт 1.5.1}}{=} ((X \sqcup D^n) \times I) / \sim$ , где  $\sim$  порождено  $(x, t) \sim (f(x), t)$  ( $x \in \partial D^n, t \in I$ ).

Совместив ретракцию  $D^n \times I$  на стакан  $D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times I$  и  $\text{id}_{X \times I}$ , получим ретракцию

$$\phi : (X \sqcup D^n) \times I \rightarrow X \times I \sqcup \underbrace{(D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times I)}_{\text{стакан}}$$

$\phi$  пропускается через фактор:  $\exists$  ретракция  $\tilde{\phi} : (X \sqcup_f D^n) \times I \rightarrow (X \times I \sqcup \underbrace{D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times I}_{\text{стакан}}) / \sim$ .  $\square$

Пусть  $X$  — клеточное пространство,  $A \subset X$  — замкнутое подпространство, состоящее из целого числа клеток.

**Следствие 1.6.1.** *Клеточное пространство  $X$  с клеточным подпространством  $A \subset X$  — пара Борсука.*

*Доказательство.* Индукция по построению клеточного пространства — приклеивая клетку к  $X$ , мы можем либо приклеить, либо не приклеить, эту клетку к  $A$ , в обоих случаях пара останется парой Борсука.

Согласно транзитивности пар Борсука на выходе получится пара Борсука.  $\square$

## 1.7 Гомотопическая эквивалентность и фундаментальная группа

Пусть  $\gamma : I \rightarrow X$  путь, такой, что  $p := \gamma(0), q := \gamma(1)$ .

Тогда  $T_\gamma : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(X, q); [\alpha] \mapsto [\gamma\alpha\gamma^{-1}]$  — изоморфизм фундаментальных групп.

**Теорема 1.7.1.** Фундаментальные группы гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.

*Доказательство.* Пусть  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$  — отображения из определения гомотопических эквивалентностей.

Пусть  $f(x_0) = y_0$ . Тогда  $f$  индуцирует гомоморфизм прямого образа  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ .

Чтобы проверить, что  $f_*$  — изоморфизм групп, проверим, что это биекция.  $g \circ f \sim \text{id}_X$ . Тогда соответствующие петли тоже получаются свободно гомотопными.

Проверим, что петли свободно гомотопны: рассмотрим петлю  $\gamma(t) := h_t(x_0)$ , где  $h_t$  — гомотопия, соединяющая  $g \circ f$  и  $\text{id}_X$ .  $[\alpha] = (T_\gamma \circ g_* \circ f_*)([\alpha])$ , откуда  $T_\gamma \circ g_* \circ f_* = \text{id}$ .

Воспользуемся тем, что  $T_\gamma$  — биекция ( $T_\gamma \circ T_{\gamma^{-1}} = \text{id}$ ). Таким образом, у  $f_*$  имеется обратный слева, у  $g_*$  — обратный справа. Но аналогично у  $f_*$  имеется обратный справа, у  $g_*$  — обратный слева, значит, это биекции.  $\square$

## 1.8 Накрытия

**Определение 1.8.1** (Накрытие). Непрерывное отображение  $p : Y \rightarrow X$ , такое что  $\forall x \in X : \exists U \ni x$  — правильная окрестность, такая, что  $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$ , причём  $\forall \alpha \in \Lambda : p|_{V_\alpha}$  — гомеоморфизм на  $U$ .

**Определение 1.8.2** (Поднятие отображения  $f : Z \rightarrow X$  в накрытии). Такое  $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$ , что  $f = p \circ \tilde{f}$ .

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \tilde{f} \nearrow & & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Не у всякого отображения есть поднятие (например, при двулистном накрытии окружности собой нет поднятия у тождественного отображения окружности в себя). В прошлом семестре мы доказали, что если в  $X$  есть стягиваемая петля, то её поднятие — тоже стягиваемая петля.

**Определение 1.8.3** (Петли, которые размыкаются при поднятии). Пути  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow Y$  (являющиеся петлями, то есть  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$ ), такие, что для поднятия  $\gamma : \gamma(0) \neq \gamma(1)$ .

**Факт 1.8.1.** Для любого накрытия  $p : Y \rightarrow X$ :  $p_*$  — инъекция.

*Доказательство.* Если  $\exists \alpha : p_*([\alpha]) = 0$ , то  $p([\alpha])$  — стягиваемая петля, откуда  $\alpha$  — тоже, то есть  $[\alpha] = e$ .  $\square$

**Определение 1.8.4** (Группа накрытия). Образ  $\text{Im}(p_*) \leq \pi_1(X, x_0)$ . Группа накрытия может зависеть от отмеченной точки  $x_0$ .

**Определение 1.8.5** (Локально линейно связное пространство  $X$ ).  $\forall$  точки и окрестности  $x \in U \subset X$ :  $\exists$  линейно связная подокрестность  $V : x \in V \subset U$ .

*Контрпримеры* (Локально линейно связные и линейно связные пространства).

- Конус над  $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^\infty \cup \{0\}$  линейно связан, но не локально линейно связан.
- Любое несвязное многообразие связно локально, но несвязно.

## Лекция IV

25 сентября 2023 г.

Пусть  $X, Y$  — линейно связны,  $Z$  — линейно связное и локально линейно связное пространство.

Рассмотрим накрытие с базой  $X$  и накрываемым  $Y$ .

**Теорема 1.8.1.** Зафиксируем  $z_0 \in Z$  и  $y_0 \in p^{-1}(f(z_0))$ . Следующие условия равносильны:

- $\exists f$  найдётся единственное поднятие  $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$ , такое что  $\tilde{f}(z_0) = y_0$ .
- $\text{Im}(f_*) \subset \text{Im}(p_*)$ .

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

*Доказательство.*

$$\Rightarrow. f_* = p_* \circ \tilde{f}_*.$$

$$\Leftarrow. \text{Пусть } \text{Im } f_* \subset \text{Im } p_*.$$

- Рассмотрим  $z \in Z$ , соединим с  $z_0$  каким-то путём  $\gamma$  ( $\gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z$ ). Путь  $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow X$  поднимается до какого-то пути  $\alpha : [0, 1] \rightarrow Y, \alpha(0) = y_0$  единственным образом, положим  $\tilde{f}(z) = \alpha(1)$ .

Понятно, что из коммутативности диаграммы нельзя выбрать  $\tilde{f}(z)$  чем-нибудь другим, то есть поднятие можно определить так, и если определение корректно, то поднятие единственно.

- Проверим корректность определения: поднятие  $z$  не зависит от пути. Пусть  $z_0$  и  $z$  соединяются двумя путями  $\alpha$  и  $\beta$ . Тогда  $f \circ (\alpha\beta^{-1})$  — петля с началом в  $x_0$ . Так как  $[f \circ (\alpha\beta^{-1})] \in \text{Im}(p_*)$ , то эта петля не размыкается при поднятии.
- Пусть  $z \mapsto \tilde{f}(z)$ . Рассмотрим любую  $U \ni \tilde{f}(z)$ . Для проверки непрерывности  $\tilde{f}$  надо проверить, что  $\exists W \ni z : \tilde{f}(W) \subset U$ .

Пусть  $U'$  — правильно накрывающая окрестность, содержащая  $\tilde{f}(z)$ ,  $p : U' \cong V$  — гомеоморфизм. Заменим  $U'$  на  $U' \cap U$  и  $V$  на  $V \cap p(U)$ . Теперь  $p : U' \cong V$  — гомеоморфизм подокрестности  $U$  и куска  $X$ . Берём прообраз  $W_0 := f^{-1}(V)$ , это открытое множество, из коммутативности диаграммы  $p \circ \tilde{f}(W_0) \subset V$ . Выберем линейно связную подокрестность  $W \subset W_0$ , содержащую  $z$ . Из предыдущего равенства  $p \circ \tilde{f}(W) \subset V$ , но так как  $V$  — правильно накрываемая окрестность, то  $\tilde{f}(W)$  бьёт в дизъюнктное объединение прообразов  $V$  при гомеоморфизмах, полученных из накрытия  $p$ .

При этом можно убедиться, что на самом деле  $\tilde{f}(W) \subset U'$ : рассмотрим  $w \in W$ . Соединим  $z$  и  $w$  путём  $\gamma$  ( $\gamma(0) = z$ ), так, что  $\text{Im}(\gamma) \subset W$ . Этот путь поднимается до пути  $\tilde{f} \circ \gamma$  в  $Y$ , причём  $\text{Im}(\tilde{f} \circ \gamma) \subset p^{-1}(V)$ . Так как  $\tilde{f} \circ \gamma$  — путь, то его концы лежат в одной компоненте связности  $p^{-1}(V)$ , то есть на деле в  $U'$ .

□

---

**Определение 1.8.6** (Микроодносвязное или полулокально односвязное пространство  $X$ ).  $\forall x \in X : \exists U \ni x$ : все петли, лежащие в  $U$ , стягиваемы в  $X$ .

Ниже считаем, что все пространства «хорошие»: линейно связные, локально линейно связные, микроодносвязные.

### 1.8.1 Морфизмы накрытий

Рассмотрим два накрытия с общей базой, пусть у каждого из трёх пространств отмечена некоторая точка (и морфизмы отображают отмеченную точку в отмеченную точку).

$$\begin{array}{ccc} (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (Z, z_0) \\ & \searrow p \quad \swarrow q & \\ & (X, x_0) & \end{array}$$

**Определение 1.8.7** (Морфизм накрытий). Отображение  $f$ , делающее диаграмму выше коммутативной.

*Замечание.* Требование непрерывности  $f$  можно опустить, так как оно следует из доказательства (теорема 1.8.1).

**Теорема 1.8.2.**  $\exists!$  морфизм накрытий  $f \iff \text{Im}(p_*) \subset \text{Im}(q_*)$ .

*Доказательство.* См. (теорема 1.8.1).

□

**Следствие 1.8.1.** Если  $p$  — универсальное накрытие, то  $\forall$  накрытия  $q$ :  $\exists$  морфизм  $f : p \rightarrow q$ .

**Теорема 1.8.3.** Для хороших пространств универсальное накрытие существует и единственно с точностью до автоморфизма накрытий.

*Доказательство.* См. (теорема 1.10.1).

□

**Определение 1.8.8** (Автоморфизм накрытия  $p : Y \rightarrow X$ ). Такой гомеоморфизм  $f$ , что диаграмма коммутативна.

$$\begin{array}{ccc} (Y, y_1) & \xrightarrow{f} & (Y, y_2) \\ & \searrow p \quad \swarrow p & \\ & (X, x_0) & \end{array}$$

В данной категории объекты — накрытия  $p : Y \rightarrow X$  без отмеченной точки.

*Примеры* (Автоморфизмы).

- Два накрытия  $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow S^1$  и  $(\mathbb{R}, 2\pi) \rightarrow S^1$  изоморфны сдвигом

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}, 2\pi) \\ x &\mapsto x + 2\pi \end{aligned}$$

- В накрытии букета окружностей диаграммой свободной группы на двух образующих можно отметить любую вершину графа валентности 4.

**Определение 1.8.9** (Группа скольжения  $p$ ). Группа автоморфизмов накрытия  $p$ . Обозначается  $\text{Aut}(p)$ .

**Теорема 1.8.4.** Если накрытие  $p : Y \rightarrow X$  универсально, то  $\forall y_1, y_2 \in p^{-1}(x_0) : \exists!$  автоморфизм накрытия, такой, что  $f : f(y_1) = y_2$ .

*Доказательство.* См. (следствие 1.8.1). □

**Теорема 1.8.5.** Пусть дано накрытие  $p : Y \rightarrow X$ . Следующие условия равносильны

- $\forall y_1, y_2 \in p^{-1}(x_0)$  существует автоморфизм  $f : f(y_1) = y_2$
- $\text{Im}(p_*) \trianglelefteq \pi_1(X)$ .

*Доказательство.* Образы фундаментальных групп  $\pi_1(Y, y_1)$  и  $\pi_1(Y, y_2)$  при действии  $p_*$  сопряжены. В самом деле, пусть  $\gamma$  — путь от  $y_2$  до  $y_1$ . Пусть  $\alpha$  — петля с началом в  $y_1$ . Петле  $p(\alpha)$  поставим в соответствие петлю  $p(\gamma\alpha\gamma^{-1})$ .

Из теоремы о поднятии автоморфизм накрытий существует, если  $\forall y_1, y_2 \in p^{-1}(x_0) : \text{Im}_{y_1}(p_*) = \text{Im}_{y_2}(p_*)$  (выполнено включение в обе стороны), а это верно, если подгруппа нормальна.

Если же подгруппа не нормальна, то найдётся петля, которой можно сопрячь образы так, чтобы они различались, тогда автоморфизма не будет существовать. □

**Определение 1.8.10** (Регулярное накрытие). Накрытие,  $p : Y \rightarrow X$  о котором идёт речь в (теорема 1.8.5), то есть  $\text{Im}(p_*) \trianglelefteq \pi_1(X)$ .

*Примеры.*

- Двухлистное накрытие букета двух окружностей склейкой трёх окружностей регулярно (рисунок 1.2).
- Трёхлистное накрытие букета двух окружностей склейкой четырёх окружностей нерегулярно (разные отмеченные точки неравноправны, нет автоморфизма, переводящего точку одного цвета в точку другого цвета) (рисунок 1.3)



Рис. 1.2: Двухлистное накрытие



Рис. 1.3: Трёхлистное накрытие

**Теорема 1.8.6.**

- Если накрытие  $p : Y \rightarrow X$  универсально, то группа автоморфизмов накрытия  $\text{Aut}(p)$  совпадает с фундаментальной группой пространства  $X$ .
- Для произвольного регулярного накрытия  $\text{Aut}(p) = \pi_1(X) / \text{Im}(p_*)$  (факторгруппа существует, так как  $\text{Im}(p_*)$  — нормальная подгруппа; это же влечёт, что  $\text{Im}(p_*)$  не зависит от выбранной точки).

*Доказательство.* Докажем второй пункт, первый из него следует. Зафиксируем  $y_0 \in Y : p(y_0) = x_0$ . Ниже определим гомоморфизм групп  $\mathcal{F} : \pi_1(X) \rightarrow \text{Aut}(p)$ .

Рассмотрим произвольную петлю  $\gamma$  с концом в  $x_0$ . Её поднятие — путь, соединяющий  $y_0$  с некой точкой  $y$ . Так как  $p(y) = x_0$ , а накрытие регулярно, то найдётся автоморфизм накрытия  $\tau$ , такой что  $\tau(y_0) = y$ . Положим  $\mathcal{F}([\gamma]) = \tau$ .

Проверим, что

1.  $\mathcal{F}$  — гомоморфизм. Рассмотрим петли  $\gamma, \gamma'$  — образы путей  $\tilde{\gamma}$  и  $\tilde{\gamma}'$ , соединяющих  $y_0$  с  $y$  и  $y'$  соответственно. Точкам  $y$  и  $y'$  соответствуют автоморфизмы  $\tau$  и  $\tau'$  соответственно.

Рассмотрим путь  $\tau \circ \tilde{\gamma}'$ , он соединяет точку  $y'$  с некой точкой, пусть это  $y''$ . Заметим, что  $\mathcal{F}([\gamma] \cdot [\gamma'])$  — это автоморфизм, переводящий  $y$  в  $y''$ , но он же равен  $\mathcal{F}([\gamma]) \cdot \mathcal{F}([\gamma']) = \tau \circ \tau'$ .

2.  $\mathcal{F}$  корректно определено и сюръективно, так как каждой точке  $y \in p^{-1}(x_0)$  соответствует единственный морфизм  $\tau : \tau(y_0) = y$ .
3.  $\text{Ker}(\mathcal{F}) = \text{Im}(p_*)$ , так как  $[\alpha] \in \text{Ker}(\mathcal{F}) \iff$  при поднятии  $\alpha$  не размыкается, а такие петли и составляют  $\text{Im}(p_*)$ .  $\square$

**Определение 1.8.11** (Группа  $G$  действует на топологическом пространстве  $X$ ).  $\exists$  гомоморфизм групп  $G \rightarrow \text{Homeo}(X)$ , где  $\text{Homeo}(X)$  — группа гомеоморфизмов пространства  $X$ .

Назовём эквивалентными элементы  $x_1, x_2 \in X$ , если  $\exists g \in G : g(x_1) = x_2$ . Так как  $G$  — группа, то эквивалентными названы элементы одной орбиты, это действительно отношение эквивалентности.

*Примеры.*

- $\mathbb{R} \curvearrowright S^1$  — действие поворотами. Все точки  $S^1$  эквивалентны.
- Действие целочисленными сдвигами  $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$  порождает тор, как факторпространство:  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T^2$ .

## Лекция V

2 октября 2023 г.

Пусть имеется действие группы на топологическом пространстве  $G \curvearrowright X$ .

**Определение 1.8.12** (Действие  $G \curvearrowright X$  — накрывающее).  $\forall x \in X : \exists U \ni x : \{gU\}_{g \in G}$  дизъюнктны.

*Примеры.*

- Универсальное накрытие  $\tilde{X} \rightarrow X$ . Группа автоморфизмов накрытия действует накрывающе.

**Теорема 1.8.7.** Если  $G \curvearrowright X$  — накрывающее, то  $p : X \rightarrow X/G$  — накрытие.

*Доказательство.* Рассмотрим  $x \in X$ . Так как действие накрывающее, то  $\exists U \ni x$ , такая, что  $\{gU\}_{g \in G}$  дизъюнктны. Тогда  $p(U)$  — правильно накрываемая окрестность  $p(x) \in X/G$ .

В самом деле,  $p^{-1}(p(U)) = \bigsqcup_{g \in G} gU$ .

Осталось проверить, что  $p(U)$  открыто. Это общий факт про действие групп — образ открытого множества открыт. В самом деле,  $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$ , что открыто, откуда  $p(U)$  открыто (по определению  $V$  открыто в  $X/\sim \iff p^{-1}(V)$  открыто в  $X$ ).  $\square$

**Следствие 1.8.2.** Если  $G$  действует накрывающе, и  $X$  односвязно, то  $G \sim \pi_1(X/G)$ .

*Доказательство.* Накрытие  $X \rightarrow X/G$  универсально, откуда группа автоморфизмов накрытия ( $G$ ) совпадает с фундаментальной группой  $X/G$  (теорема 1.8.6).  $\square$

**Теорема 1.8.8.** Пусть  $X$  — хорошее пространство (существует универсальное накрытие).

Тогда  $\forall N \leq \pi_1(X) : \exists!$  накрытие  $p : Y \rightarrow X$ , такое, что  $p_*(\pi_1(Y)) = N$ . Единственность накрытия предполагается, как и следует, с точностью до изоморфизмов.

*Доказательство.* Пусть  $p_0 : \tilde{X} \rightarrow X$  — универсальное накрытие.  $G := \pi_1(X) = \text{Aut}(p_0)$ , имеется действие  $G \curvearrowright \tilde{X}$ ,  $X = \tilde{X}/G$ .

Положим  $Y := \tilde{X}/N$ , тогда  $Y \rightarrow X$  — накрытие с требуемой группой.  $p_0$  пропускается через фактор.

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X} & \xrightarrow{p_1} & Y := \tilde{X}/N \\
 \downarrow p_0 & \swarrow \exists p & \\
 X = \tilde{X}/G & & 
 \end{array}$$

Чтобы проверить, что  $N = \text{Im}(p_*)$ , посмотрим, что при поднятии не размыкаются как раз петли с нужными концами.  $\square$

*Пример.* Букет двух окружностей имеет группу  $\mathcal{F}_2$ . Накрытие с группой  $\mathbb{Z}$  факторизует по одной образующей, оставляя другую. Выглядит это примерно так:



### 1.8.2 Иерархия накрытий с общей базой

Пусть  $\pi_1(X) \geq N_1 \geq N_2$  — цепочка вложений групп, пусть  $Y \rightarrow X$  — универсальное накрытие. Тогда имеется цепочка морфизмов накрытий в обратном направлении.

$$\begin{array}{c}
 Y/\{1\} = (Y, y_0) \\
 \downarrow p_0 \\
 Y/N_2 = (Y_2, y_2) \\
 \downarrow p_2 \\
 Y/N_1 = (Y_1, y_1) \\
 \downarrow p_1 \\
 Y/\pi_1(X) = (X, x_0)
 \end{array}$$

Здесь, например,  $p_2$  — морфизм накрытий  $p_1 \circ p_2$  и  $p_1$ . Он же является накрытием  $p_2 : (Y_2, y_2) \rightarrow (Y_1, y_1)$ .

## 1.9 Фундаментальные группы клеточных пространств (CW-комплексов). Теорема Зейферта — ван Кампена

### 1.9.1 План

- Начинаем с одномерного остова (букета окружностей)



- Приклеиваем двумерные клетки, ищем соотношения
- Приклеиваем клетки размерности  $\geq 3$ , докажем, что ничего не будет меняться.

### 1.9.2 Фундаментальная группа конечного графа

Пусть  $X = (V, E)$  — связный граф с  $|V| = n, |E| = m$ .

Тогда  $\pi_1(X)$  — свободная группа  $\mathcal{F}_{m-n+1}$ .

*Доказательство.* Выберем в графе остовное дерево  $T = (V, \tilde{E})$ .  $\tilde{E} = n - 1$ . Заметим, что  $(X, T)$  — пара Борсука (клеточное пространство и подпространство).

Стягивая  $T$  в точку, получаем букет из  $m - (n - 1) = m - n + 1$  окружностей.  $\square$

### 1.9.3 Теорема Зейферта — ван Кампена

#### Некоторые определения из теории групп

Мы будем рассматривать только конечнопорождённые конечнопредставленные группы.

Напомним, что *свободное произведение* групп  $G = \langle g_1, \dots, g_n | \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle$  и  $H = \langle h_1, \dots, h_m | \beta_1, \dots, \beta_l \rangle$  — это группа

$$G \star H = \langle g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m | \alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l \rangle$$

*Примеры.*

- Свободное произведение  $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z} = \mathcal{F}_2$ .
- «Несвободное произведение»  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle a, b | [a, b] = aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$ .

$$G = \langle g_1, \dots, g_n | \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle$$

Пусть  $H = \langle h_1, \dots, h_m | \beta_1, \dots, \beta_l \rangle$  — группы, и зафиксированы гомоморфизмы  $I : F \rightarrow G, J : F \rightarrow H$ .

$$F = \langle f_1, \dots, f_s | \gamma_1, \dots, \gamma_r \rangle$$

**Определение 1.9.1** (Амальгамированное произведение). Группа

$$G \star_F H = \left\langle \begin{array}{ccc} g_1 & \cdots & g_n \\ h_1 & \cdots & h_m \end{array} \left| \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \cdots & \alpha_k \\ \beta_1 & \cdots & \beta_l \\ I(f_1) = J(f_1) & \cdots & I(f_s) = J(f_s) \end{array} \right. \right\rangle$$

#### Формулировка теоремы Зейферта — ван Кампена и доказательство для клеточных пространств

Пусть  $X = U \cup V$ , где  $U, V$  — открыты и линейно связны,  $U \cap V$  линейно связно тоже.

Выберем  $x_0 \in U \cap V$ , все фундаментальные группы будем рассматривать с этой отмеченной точкой.

Имеются вложения  $i : U \cap V \rightarrow U, j : U \cap V \rightarrow V$ . Положим  $I = i_* : \pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(U)$  и  $J = j_* : \pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(V)$ .

**Теорема 1.9.1** (Зейферт — ван Кампен). Тогда фундаментальная группа  $X$  — это

$$\pi_1(X) = \pi_1(U) \star_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V)$$

амальгамированное произведение  $\pi_1(U)$  и  $\pi_1(V)$  по отношению к гомоморфизмам  $I$  и  $J$ .

*Примеры* (Примеры применения).

- При склейке по точке никаких новых соотношений не добавляется. Пусть  $X, Y$  — локально односвязны.

$$\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(X) \star \pi_1(Y)$$

где  $\vee$  — склейка по точке, букет.

Для доказательства надо рассмотреть некоторую окрестность точки склейки.

- Например,  $\pi_1(S^1 \vee S^1) = \mathcal{F}_2$ .
- При склейке сферы из двух дисков по границе получится тривиальная группа.
- **23 с практики.** Для односвязных  $A$  и  $B$  и линейно связного  $A \cap B$  верно, что  $A \cup B$  односвязно.
- **24 с практики.** Для односвязных  $A \cup B, A \cap B$  сами пространства  $A, B$  тоже односвязны.

*Контрпример* (Важность линейной связности  $U \cap V$ ).

При склейке двух (односвязных) отрезков по концам получится окружность с нетривиальной фундаментальной группой.

**Теорема 1.9.2** (О приклеивании двумерной клетки). Пусть  $Y$  — «хорошее», приклеим двумерную клетку  $D^2$  по отображению  $\alpha : \partial D^2 \rightarrow Y$ .  $X := Y \sqcup_{\alpha} D^2$ . Тогда  $\pi_1(X) = \pi_1(Y) / \langle [\alpha] \rangle^{\pi_1(Y)}$  (где  $\langle [\alpha] \rangle^{\pi_1(Y)}$  — нормальное замыкание подгруппы  $\langle [\alpha] \rangle \leq \pi_1(Y)$ ).

*Доказательство из теоремы Зейферта — ван Кампена.* Пусть  $y \in D^2$  — центр диска. Рассмотрим  $U = X \setminus \{y\}, V = B_{\frac{1}{2}}(y)$ . Тогда пересечение  $U \cap V$  гомотопически эквивалентно (внутри  $U \cup V$ ) петле  $\alpha$ ,  $\pi_1(V) = \{e\}$ .

$$\pi_1(X) = \pi_1(Y) \star_{\langle [\alpha] \rangle} \{e\} = \pi_1(Y) / \langle [\alpha] \rangle^{\pi_1(Y)}$$

□

*Другое доказательство.* Пусть  $\alpha : S^1 \rightarrow Y, X = Y \sqcup_{\alpha} D^2, i : Y \rightarrow X, i_* : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$ .

Заметим, что  $i_*$  — эпиморфизм: используя лемму о свободной точке (появлялась при доказательстве того, что на  $D^n$  для  $n \geq 2$  всякая петля гомотопически эквивалентна несюръективной) можно гомотопией любую петлю  $\beta : S^1 \rightarrow X$  привести к петле  $\beta : S^1 \rightarrow Y$ . Для этого надо рассмотреть линейное «отталкивание» от данной свободной точки.

Теперь осталось проверить, что  $\text{Ker}(i_*) = \langle [\alpha] \rangle^{\pi_1(Y)}$ . Очевидно включение  $[\alpha] \in \text{Ker}(i_*)$ , так как ядро нормально, то  $\langle [\alpha] \rangle^{\pi_1(Y)} \leq \text{Ker}(i_*)$ .

Рассмотрим накрытие  $p_1 : \tilde{Y} \rightarrow Y$  с группой  $\text{Im}((p_1)_*) = \langle [\alpha] \rangle^{\pi_1(Y)}$ .

Зафиксируем  $w_0 := \alpha(0) \in W$ , и положим  $W := \text{Im}(\alpha) \subset Y, \tilde{W} := p_1^{-1}(W)$ . Из регулярности накрытия:  $\forall \tilde{w}_\gamma \in p_1^{-1}(w_0)$ : группа накрытия с отмеченной точкой  $\tilde{w}_\gamma$  — это  $\langle [\alpha] \rangle^{\pi_1(Y)}$ . Так как эта группа содержит  $\pi_1(W) = \langle \alpha \rangle$ , то включение  $W \hookrightarrow Y$  можно поднять, для точки  $\tilde{w}_\gamma \in p_1^{-1}(w_0)$  получится  $\tilde{w}_\gamma \in \tilde{W}_\gamma \cong W$ . Иными словами,  $\tilde{W}$  состоит из нескольких компонент связности  $\tilde{W}_\gamma$ , гомеоморфных  $W$  (гомеоморфизм  $p_1|_{\tilde{W}_\gamma}$ ).

Приклеим к каждой такой компоненте связности  $\tilde{W}_\gamma$  свой диск по отображению  $\tilde{\alpha}_\gamma : \partial D^2 \rightarrow \tilde{W}_\gamma$ , и назовём склейку  $\tilde{X} := \tilde{Y} \sqcup_{\{\tilde{\alpha}_\gamma\}} \{D^2_\gamma\}$ . Пусть  $\tilde{i} : \tilde{Y} \hookrightarrow \tilde{X}$  — включение.

Построим  $p_2 : \tilde{X} \rightarrow X$ , такое, что  $p_2|_{\tilde{Y}} = p_1$ , и  $p_2$  отображает тождественно  $D^2_\gamma \rightarrow D^2$ . Оно непрерывно, и, более того, это накрытие — в этом несложно убедиться руками, оно очень похоже на накрытие  $p_1$ .

Теперь мы готовы доказать, что  $\text{Ker}(i_*) \leq \langle [\alpha] \rangle^{\pi_1(Y)}$ . Рассмотрим  $[\beta] \notin \langle [\alpha] \rangle^{\pi_1(Y)}$ . Эту петлю можно поднять, получив разомкнутый путь  $\tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow \tilde{Y}$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{\beta} & \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 \\ [0, 1] & \xrightarrow{\beta} & Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

Из коммутативности диаграммы петля  $i \circ \beta$  в  $X$  при поднятии в  $\tilde{X}$  размыкается точно так же. Значит, эта петля не стягиваема в  $X$ ,  $[\beta] \notin \text{Ker}(i_*)$ .  $\square$

## Лекция VI

9 октября 2023 г.

Проверим, что при приклеивании клетки размерности хотя бы 3 фундаментальная группа не меняется.

*Доказательство.*

- Рассмотрим склейку  $X = D^n \sqcup_{\phi} Y$ , и в ней петлю  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ . Рассмотрим гомоморфизм вложения  $\text{in} : Y \hookrightarrow X$ , он индуцирует  $\text{in}_* : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$ .
- Применяя лемму о свободной точке, находим петле в  $X$  гомотопную петлю в  $Y$ , значит,  $\text{in}_*$  сюръективен.
- Проверим инъективность:  $\alpha$  стягиваема в  $X \Rightarrow \alpha$  стягиваема в  $Y$ .  $\exists$  гомотопия  $H$ , стягивающая  $\alpha$  внутри  $X$ . Найдём точку в образе  $D^n$ , не покрываемую  $H$ .

Представим  $X = U \cup V$ , где  $U$  — образ  $B_{\frac{1}{2}}(0)$ ,  $V$  — весь  $X$  без образа  $0$ .  $U \cap V \cong S^{n-1} \times (0, 1)$ .

Разобьём квадрат гомотопии  $[0, 1] \times [0, 1]$  по лемме Лебега на маленькие квадратики  $K_{i,j}$ , так что  $H(K_{i,j}) \subset U$  или  $H(K_{i,j}) \subset V$ .

Обозначим  $L := \bigcup_{K_{i,j} \subset U} K_{i,j}$ . Рассмотрим связные компоненты квадратики из  $L$ , два квадрата будем считать связанными, если у них есть общая сторона. Тогда  $L = \bigcup_i L_i$ , где  $L_i$  — объединение квадратики, между любыми двумя из которых есть путь, в котором соседние квадратики имеют общую сторону.  $\text{Im}(\partial L_i) \subset U \cap V$ .

Можно представить  $\partial L_i$ , как образ  $\alpha_i : S^1 \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $\alpha_i(S^1) = \partial L_i$  (это правда только в том случае, если  $L_i$  «без дырок внутри»; если есть дырки, то их можно заклеить квадратами, присоединив их к  $L_i$ ). Так как  $S^{n-1} \times (0, 1)$  односвязно, то петля  $H \circ \alpha$  стягиваема в  $U \cap V$ . Тогда внутри петли можно вклеить диск  $D^2$ .

Таким образом, гомотопия не задевает образ центра шара, дальше «линейным отталкиванием» выдуваем гомотопию в  $Y$ .  $\square$

### 1.9.4 Фундаментальные группы основных поверхностей

$S_p$  — сфера с  $p$  ручками,  $S_q$  — сфера с  $q$  плёнками.

Склеим сферу с  $p$  ручками, как клеточное пространство.

$$\pi_1(S_p) = \langle a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} \rangle$$

Если посчитать абелианизацию  $\pi_1(S_p)$ , то есть фактор по коммутанту, то будет  $\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{2p}$ .

$$\pi_1(S_q) = \langle a_1, \dots, a_q \mid a_1^2 \dots a_q^2 \rangle$$

Если посчитать абелианизацию  $\pi_1(S_q)$ , то есть фактор по коммутанту, то будет  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{q-1}$ .

*Доказательство.* В качестве системы образующих  $\pi_1(S_q)^{\text{ab}}$  можно взять  $a_1 \cdot \dots \cdot a_q$  и  $a_2, \dots, a_q$ .  $\square$

**Следствие 1.9.1.** *Сферы с ручками и плёнками неэквивалентны друг другу.*

**Теорема 1.9.3.** Для всякой конечнопредставленной группы  $G \exists$  CW-комплекс  $X : \pi_1(X) = G$ .

*Доказательство.* Пусть  $G = \langle a_1, \dots, a_n | \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle$ .

Приклеиваем клетки к букету окружностей.  $\square$

## 1.10 Построение универсального накрытия

**Теорема 1.10.1.** Для «хороших» пространств существует универсальное накрытие  $p : \tilde{X} \rightarrow X$ .

*Доказательство.* Пусть  $X$  — «хорошее», то есть линейно связное, локально линейно связное, полулокально односвязное (определение 1.8.6).

- Построим  $\tilde{X}$ , как множество. Зафиксируем  $x_0 \in X$ . Пусть  $PX = \{\alpha : [0, 1] \rightarrow X | \alpha(0) = x_0\}$ .  $\tilde{X} = PX / \sim$  — пути, профакторизованные по гомотопности, связанной на концах.
- Определим  $p : \tilde{X} \rightarrow X, p([\alpha]) = \alpha(1)$ .
- Введём на  $\tilde{X}$  топологию. Назовём  $U \subset X$  хорошим, если оно открыто, линейно связно, любая петля в  $U$  стягиваема в  $X$ .

Введём базу топологии для  $\tilde{X}$ . Зафиксируем хорошее  $U \subset X$ .

Пусть  $\alpha \in PX, \alpha(1) \in U$ ; обозначим через  $U_\alpha := \{[\alpha s] | s \text{ — путь в } U \text{ с началом в } \alpha(1)\} \subset \tilde{X}$ .

**Лемма 1.10.1.** Если  $[\beta] \in U_\alpha$ , то  $U_\beta = U_\alpha$ .

*Доказательство леммы.*

Пусть  $\beta \sim \alpha s$ . Проверим включение в обе стороны.  $\forall [\gamma] \in U_\alpha, \gamma \sim \alpha s_1$ , откуда  $\gamma \sim \alpha s \cdot s^{-1} s_1$ . Аналогично  $U_\beta \subset U_\alpha$ .  $\square$

Проверим, что  $\{U_\alpha | \alpha \in PX, U \text{ — хорошее}\}$  образуют базу топологии, то есть  $U_\alpha \cap V_\beta = \bigcup W_\gamma$  для неких  $W_\gamma$ .  $\alpha(1) \in U, \beta(1) \in V$ . Пусть некий  $[\gamma] \in U_\alpha \cap V_\beta$ , в частности,  $\gamma(1) \in U \cap V$ . Надо проверить, что  $[\gamma]$  содержится в  $U \cap V$  вместе с некой окрестностью.

В качестве  $W$  выберем хорошую окрестность  $\gamma(1)$ , содержащуюся в  $U \cap V$  (достаточно выбрать линейно связную компоненту  $U \cap V$ ). Достаточно проверить, что  $W_\gamma \subset U_\alpha, V_\beta$ , это правда.

- Докажем, что  $p$  — накрытие. Пусть  $U \subset X$  — хорошее.  $p^{-1}(U) = \bigsqcup U_\alpha$ . В самом деле, если  $U_\alpha \cap U_\beta$  непусто, то  $U_\alpha = U_\beta$ .

$p^{-1}(U)$  — классы путей с концами в  $U$ .  $p$  непрерывно и открыто (проверяем на базе).

Проверим, что  $p|_{U_\alpha}$  — биекция. То, что это сюръекция — очевидно, почему  $p$  — инъекция?

Рассмотрим  $[\gamma_1], [\gamma_2] \in U_\alpha$ , предположим, что  $p([\gamma_1]) = p([\gamma_2])$ . Тогда  $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ , и каждый из них представим в виде  $\alpha \cdot s$ . Тогда пути  $s_1$  и  $s_2$  гомотопны, потому что окрестность хорошая, и  $s_1 s_2^{-1}$  — петля.

- Докажем, что  $\tilde{X}$  линейно связно. Для этого посмотрим на поднятие путей из  $X$  в  $\tilde{X}$ . Зафиксируем в соответствии с  $x_0 \in X$  постоянный путь  $\tilde{x}_0 = [\text{const}_{x_0}] =: \alpha_0 \in \tilde{X}$ .

Рассмотрим  $\alpha \in PX$ . У него имеется поднятие  $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ , такое, что  $\tilde{\alpha}(0) = \alpha_0$ .

Заметим, что  $\tilde{\alpha}(t) \sim \alpha|_{[0,t]}$ . Таким образом,  $\tilde{X}$  линейно связно:  $\tilde{\alpha}$  соединяет  $\alpha_0$  и  $[\alpha]$ .

- Проверим односвязность  $\tilde{X}$ .

Пусть  $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  — петля. Спроецируем её:  $\alpha := p \circ \tilde{\alpha}$ .

Так как  $\tilde{\alpha}$  — петля, то  $[\alpha_0] = \tilde{\alpha}(0) = \tilde{\alpha}(1) = [\alpha]$ , то есть  $\alpha$  — стягиваема. Но  $\tilde{\alpha}$  — поднятие  $\alpha$ , а поднятие стягиваемой петли стягиваемо.  $\square$

Кстати, мы уже доказали, что если накрытие существует, то оно единственно.

## Глава 2

# Дифференциальная геометрия

## Лекция VII

16 октября 2023 г.

### 2.1 Дифференциальная геометрия кривых

**Определение 2.1.1** (Гладкая функция  $f$ ). Бесконечно дифференцируемая функция  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)$ .

Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство.

**Определение 2.1.2** (Путь (кривая)). Непрерывное  $\gamma : I \rightarrow X$ , где  $I$  — выпуклое подмножество прямой. Чаще всего рассматривают  $I = [a, b]$ .

**Определение 2.1.3** (Гладкая кривая). Гладкое отображение  $I \rightarrow \mathbb{R}^n$  (все координатные отображения гладкие).

*Предостережение.* Необязательно гладкое отображение выглядит гладким. График  $|y| = x^{3/2}$  представим, как гладкая кривая  $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ .



**Определение 2.1.4** (Регулярная кривая). Гладкая кривая  $\gamma$ , такая, что  $\forall t : |\gamma'(t)| \neq 0$ .

Пусть  $\gamma_1, \gamma$  — две кривые.

**Определение 2.1.5** ( $\gamma_1$  — перепараметризация  $\gamma$ ).  $\exists$  строго возрастающее  $\phi : \gamma_1 = \gamma \circ \phi$ .

Для гладких кривых вводят *гладкую перепараметризацию*  $\phi \in C^\infty, \phi' > 0$ .

**Определение 2.1.6** (Кривые  $\gamma_1, \gamma_2$  эквивалентны). Существует перепараметризация  $\phi$ . Пишут  $\gamma_1 \sim \gamma_2$

**Факт 2.1.1.** Эквивалентность кривых — отношение эквивалентности. Аналогичный факт верен для эквивалентности гладких перепараметризаций гладких кривых.

**Определение 2.1.7** (Разбиение отрезка  $[a, b]$ ). Разбиение  $a = t_0 \leq \dots \leq t_k = b$ .

**Определение 2.1.8** (Длина кривой  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ ).  $L(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{a=t_0 \leq \dots \leq t_k=b} \sum_{i=0}^{k-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$

*Замечание.* Согласно неравенству треугольника, при измельчении разбиения  $\sum_{i=0}^{k-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$  возрастает.

**Определение 2.1.9** (Кривая спрямляемая).  $L(\gamma) < \infty$

*Пример.* Неспрямляемую кривую придумать несложно. Например, соединим ломаной соседние точки в последовательности  $(\alpha_n, (-1)^n \beta_n)$ , где  $\alpha_n, \beta_n$  — убывающие, стремящиеся к нулю, последовательности, причём  $\sum_{n \geq 0} \beta_n = \infty$ .

**Предложение 2.1.1.**  $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$ .

**Утверждение 2.1.1.** Если кривая  $\gamma$  гладкая, то  $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ .

*Доказательство.* Докажем неравенство в обе стороны.

- $\int_a^b |\gamma'(t)| dt \leq L(\gamma)$ .

$\gamma'$  равномерно непрерывна. Таким образом,  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow |\gamma'(t_1) - \gamma'(t_2)| < \varepsilon$ . Разобьём отрезок на  $\lceil \frac{b-a}{\delta} \rceil$  частей равной длины (каждая часть имеет длины не больше  $\delta$ ) точками  $a = t_0 \leq \dots \leq t_k = b$ .

Обозначим  $\phi_i(t) := \gamma'(t_i) - \gamma'(t)$ . Из равномерной непрерывности  $|\phi_i(t)| < \varepsilon$  на  $[t_i, t_{i+1}]$ .

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (|\gamma'(t)| - \varepsilon) dt &\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t_i)| dt = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t_i) dt \right| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\gamma'(t) + \phi_i(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \right| + \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi_i(t) dt \right| \leq |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| + \varepsilon |t_{i+1} - t_i| \end{aligned}$$

Получаем  $\int_a^b |\gamma'(t)| dt - 2\varepsilon |b - a| \leq L(\gamma)$ . Устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

- $L(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ .

Зафиксируем  $a = t_0 \leq \dots \leq t_k = b$ . Оценим  $|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)| dt$ .  $\square$

**Следствие 2.1.1.**  $\int_a^b |\gamma'(t)| dt$  не зависит от перепараметризации.

**Теорема 2.1.1.** Отрезки в  $\mathbb{R}^n$  кратчайшие. Иными словами,  $\forall r, s \in \mathbb{R}^n$  отрезок

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto r + t(s - r) \end{aligned}$$

имеет наименьшую длину среди всех кривых (необязательно гладких), соединяющих  $r$  и  $s$ .

*Доказательство.* Рассмотрим путь  $\gamma$ , соединяющий  $r$  и  $s$ . Рассмотрим разбиение  $a = t_0 \leq t_1 = b$ . По определению  $L(\gamma) \geq |\gamma(b) - \gamma(a)|$ .  $\square$

**Теорема 2.1.2.** Кратчайшие пути на сфере  $S^2$  — дуги больших кругов.

*Доказательство.* Покажем, что  $\forall \gamma : [a, b] \rightarrow S^2 : L(\gamma) \geq \angle(\gamma(a), \gamma(b))$ . Выберем  $\varepsilon > 0$ , из равномерной непрерывности  $\gamma$  найдётся  $\delta > 0 : |t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| < \varepsilon$ .

Рассмотрим разбиение  $a = t_0 \leq \dots \leq t_k = b$ , такое, что  $|t_{i+1} - t_i| \leq \varepsilon$ .

$$L(\gamma) \geq \sum_{i=0}^{k-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})| \geq \sum_{i=0}^{k-1} \angle(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \cdot \frac{\varepsilon}{2 \arcsin(\varepsilon/2)} \geq \angle(\gamma(a), \gamma(b)) \cdot \frac{\varepsilon}{2 \arcsin(\varepsilon/2)}$$

Устремляем  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

### 2.1.1 Параметризация кривой длиной дуги

Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ , где  $(X, d)$  — метрическое пространство.

**Определение 2.1.10** (Натуральная параметризация). Такая параметризация  $\gamma$ , что  $\forall t_1, t_2 \in [a, b] : L(\gamma|_{[t_1, t_2]}) = t_1 - t_2$ .

**Утверждение 2.1.2.** Гладкая кривая параметризована натурально  $\iff |\gamma'| \equiv 1$ .

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . Если  $\exists t_0 : \gamma'(t_0) = 1 + \delta$ , то  $\exists \varepsilon > 0 : |t - t_0| < \varepsilon \Rightarrow |\gamma'(t)| - |\gamma'(t_0)| \leq \frac{\delta}{2}$ . Тогда так как длина — интеграл модуля производной, то в  $\varepsilon$ -окрестности  $t_0$  не выполняется определение натуральной параметризации.

$\Leftarrow$ . Длина — интеграл модуля производной.  $\square$

**Теорема 2.1.3.** Для любой регулярной кривой существует натуральная параметризация. Эта параметризация единственна с точностью до сдвига на константу: если  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  — натуральная параметризация, то натуральной параметризацией является ещё и

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : [a + c, b + c] &\rightarrow X \\ t + c &\mapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

*Доказательство.* Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Предъявим натуральную параметризацию:  $s : [a, b] \rightarrow [0, L(\gamma)]$   $s(t) = L(\gamma|_{[a, t]}) = \int_a^t |\gamma'(t)| dt$ .

$s'(t) = |\gamma'(t)| > 0$ , поэтому  $s$  — валидная перепараметризация.

Положим  $\gamma_1 = \gamma \circ s^{-1}$ .

$$\gamma'_1 = (\gamma \circ s^{-1})' = \gamma' \cdot \frac{1}{s'} \Rightarrow |\gamma'_1| = \frac{|\gamma'|}{|\gamma'|} = 1$$

Если же есть две перепараметризации  $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$ , то  $|\gamma'_1| = |\gamma'_2| \cdot |\phi'|$ , откуда  $|\phi'| = 1$ . Используя  $\phi' > 0$ , получаем, что  $\phi$  — сдвиг на константу.  $\square$

**Утверждение 2.1.3** (Правило Лейбница). Пусть  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^n, B : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ ; пусть  $*$  :  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  — билинейно. Тогда у отображения  $A * B : I \rightarrow \mathbb{R}^k$  производная считается по правилу

$$(A * B)' = A' * B + A * B'$$



Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow t_0} (A(t) * B(t) - A(t_0) * B(t_0)) &= \lim_{t \rightarrow t_0} A(t) * (B(t) - B(t_0)) + \\ &+ \lim_{t \rightarrow t_0} (A(t) - A(t_0)) * B(t_0) = A(t_0)B'(t_0) + A'(t)B(t_0)\end{aligned}$$

□

Примеры.

- В качестве  $*$  может выступать скалярное произведение, векторное произведение, умножение вектора на число (и вообще умножение матриц)...

## 2.2 Кривизна плоской кривой, базис Френе

Далее везде считаем, что кривая  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  параметризована натурально, то есть  $|\gamma'| = 1$ . Будем обозначать  $v = \vec{v} = \gamma'$  — вектор скорости.

**Определение 2.2.1** (Базис Френе). Пара  $(v, n)$ , такая, что  $v \perp n$ , причём  $(v, n)$  — правый ортонормированный базис. Данный вектор  $n$  — *нормаль к плоской кривой*.

Так как  $\langle v, v \rangle = 1$ , то  $\langle v', v \rangle = 0$ , откуда  $v' \perp v$  и  $\exists! \kappa \in \mathbb{R} : v' = \kappa n$ .

**Определение 2.2.2** (Кривизна плоской кривой). Данное число  $\kappa$  (на самом деле это функция  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , причём гладкая:  $\kappa = \langle v', n \rangle$ ).

*Предостережение.*  $\kappa$  — кривизна двумерной кривой (кривизна со знаком).

Если же работать в более, чем двумерном пространстве, то у кривизны не будет знака. Там

$$v := \gamma' \quad N = \frac{\gamma''}{|\gamma''|}$$

Кривизна без знака обозначается  $k := |\gamma''|$ .

### 2.2.1 Формулы Френе

- По определению кривизны  $v' = \kappa n$
- $\langle n, v \rangle = 0$ , откуда  $\langle n', v \rangle + \langle n, v' \rangle = 0$ , откуда  $n' = -\kappa v$ .

## Лекция VIII

23 октября 2023 г.

**Утверждение 2.2.1.** Длина полунепрерывна снизу. Пусть  $\gamma_n$  — последовательность кривых:  $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , таких, что  $\gamma_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma_\infty(t)$ .

Тогда  $l(\gamma_\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} l(\gamma_n)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $\varepsilon > 0$ . Для него найдётся последовательность точек  $0 = t_0 \leq \dots \leq t_k = 1 : \sum_{i=0}^{k-1} |\gamma_\infty(t_{i+1}) - \gamma_\infty(t_i)| \geq l(\gamma_\infty) - \varepsilon$ .

Выберем настолько большой номер  $M \in \mathbb{N} : \forall m \geq M : \forall i \in [1, k] : |\gamma_m(t_i) - \gamma_\infty(t_i)| < \frac{\varepsilon}{k}$ . Тогда  $l(\gamma_m) \geq l(\gamma_\infty) - 3\varepsilon$ .

Устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем искомое утверждение. □

Пусть  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — регулярная кривая,  $M \subset \mathbb{R}^n$  — множество.

**Определение 2.2.3** ( $\gamma$  имеет порядок касания не меньше  $k$  со множеством  $M$  в точке  $t_0$ ).  $d(\gamma(t), M) = o((t - t_0)^k)$ .

**Утверждение 2.2.2.** Если две регулярные кривые можно параметризовать так, что  $\gamma_1^{(i)} = \gamma_2^{(i)}$  для  $i \leq k$ , то порядок касания одной кривой другой не меньше  $k$ .

**Определение 2.2.4** (Касательная прямая к  $\gamma$  в точке  $t_0$ ). Кривая, проходящая через  $\gamma(t_0)$  с направляющим вектором  $\gamma'(t_0)$ .

**Предложение 2.2.1.** Порядок касания касательной и кривой не меньше 1.

**Факт 2.2.1.** Кривизна окружности радиуса  $R$  — это  $\pm \frac{1}{R}$ .

Пусть  $\gamma$  — регулярная кривая  $\gamma(t_0) = \gamma_0$ .

**Определение 2.2.5** (Соприкасающаяся окружность к  $\gamma$  в точке  $t_0$ ). Окружность радиуса  $|\frac{1}{\kappa}|$  с центром  $\gamma_0 + \frac{n}{\kappa}$ .

Разложив в ряд Тейлора, можно показать, что порядок касания соприкасающейся окружности  $\geq 2$ .

**Теорема 2.2.1.** Пусть  $\gamma$  — регулярная кривая. Тогда кривизна считается по формуле  $\kappa(t_0) = \frac{[\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)]}{|\gamma'(t_0)|^3}$ . Здесь  $[x, y]$  — смешанное или внешнее произведение  $x$  и  $y$ .

*Доказательство.* Перепараметризуем  $\gamma$  натуральной параметризацией  $\gamma = \bar{\gamma}(\phi(t))$ . Тогда  $|\gamma'| = \phi'$ ,  $\gamma' = \phi'v = \phi'\bar{\gamma}'$  и

$$\gamma'' = \phi'' \cdot \bar{\gamma}' + (\phi')^2 \cdot \bar{\gamma}'' = \phi'' \cdot \bar{\gamma}' + |\gamma'|^2 \cdot \kappa n$$

Отсюда получаем  $[\gamma', \gamma''] = [|\gamma'|v, |\gamma'|^2\kappa n] = |\gamma'|^3 \cdot \kappa$ .  $\square$

## 2.2.2 Поворот кривой

Всякое отображение  $f : [a, b] \rightarrow S^1$  поднимается до отображения  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , такого, что  $p \circ \alpha = f$ .

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \alpha & \downarrow p \\ [a, b] & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Если  $f$  гладкое, то  $\alpha$  гладкое — выражается где-то как арксинус, где-то — как арккосинус.

В дальнейшем мы часто будем поднимать вектор скорости  $\gamma'$ , если  $\gamma$  — кривая в натуральной параметризации ( $|\gamma'| = 1$ ).

**Определение 2.2.6** (Поворот плоской кривой).  $\int_a^b \kappa(t) dt$ , где  $\kappa(t)$  — кривизна в натуральной параметризации.

**Теорема 2.2.2.** Пусть  $\gamma$  — натуральная параметризация,  $v$  — вектор скорости. Пусть  $\alpha(t)$  — непрерывный аргумент (полученный из поднятия), такой, что  $v(t) = (\cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t)))$ . Тогда  $\alpha' = \kappa$  и, значит,  $\int_a^b \kappa(t) dt = \alpha(b) - \alpha(a)$ .

*Доказательство.*  $\kappa n = v' = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha)) \cdot \alpha'$ . Можно убедиться, что  $(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \perp (-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$ , причём векторы образуют правый базис.  $\square$

**Теорема 2.2.3.** Для любой гладкой функции  $\tilde{\kappa} : I \rightarrow \mathbb{R}$ :  $\exists! \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  — натурально параметризованная кривая, такая, что  $\kappa_\gamma = \tilde{\kappa}$ . Единственность предполагается с точностью до движения, сохраняющего ориентацию.

*Доказательство.* Переформулируем: при заданном  $\tilde{\kappa} : I \rightarrow \mathbb{R}$ :  $\forall p_0, v_0 \in \mathbb{R}^2$ :  $|v_0| = 1 \Rightarrow \exists!$  натурально параметризованная кривая  $\gamma : \gamma(a) = p_0, \gamma'(a) = v_0$ .

Для любой пары ортогональных векторов одной длины, отложенных из одной точки, существует единственное движение, сохраняющее ориентацию, переводящее точку в точку, вектор в вектор.

Пусть  $\gamma$  — натурально параметризована,  $v = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ .  $\dot{\alpha} = \tilde{\kappa}$ , причём  $\alpha$  определяется единственным образом с точностью до константы  $2\pi$ .

$$\alpha = \alpha_0 + \int_a^b \tilde{\kappa}(\tau) d\tau$$

В качестве  $\alpha_0$  можно выбрать угол, который составляет  $v_0$  с осью абсцисс.

$$\gamma(t) = \int_a^t v(\tau) d\tau + c_0, \text{ где } c_0 = p_0, v(\tau) = (\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Это построение одновременно показывает существование и единственность искомой кривой  $\gamma$ .  $\square$

### 2.2.3 Замкнутые кривые

Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Определение 2.2.7** (Кривая  $\gamma$  замкнута). Функцию  $\gamma$  можно продолжить до периодической с периодом  $b - a$ . Иными словами,  $\gamma^{(i)}(a) = \gamma^{(i)}(b)$  для  $i \in \mathbb{N}_0$ .

**Определение 2.2.8** (Простая кривая  $\gamma$ ). Кривая без самопересечений.

Поворот замкнутой кривой —  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Теорема 2.2.4.** Поворот простой замкнутой кривой —  $\pm 2\pi$ .

*Доказательство.* Пусть  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  параметризована натурально. Выберем базис так, что  $\gamma(0) = (0, 0)$ . Сдвинем аргумент так, что  $\gamma(t) = (x, y)$ , причём  $y \geq 0$  для всех  $t$ .

Из гладкости сразу получается  $\gamma'(0) = (1, 0)$ .

Пусть  $T = \{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq \tau \leq L\}$ . Устроим  $\mathcal{F} : \begin{matrix} T & \rightarrow & S^1 \\ (t, \tau) & \mapsto & \frac{\gamma(\tau) - \gamma(t)}{|\gamma(\tau) - \gamma(t)|} \end{matrix}$ . Если же  $t = \tau$  (или  $0 = t, \tau = L$ ), то доопределим  $\mathcal{F}$  по непрерывности:  $\mathcal{F}(t, t) = \gamma'(t)$ .

$T$  односвязно, поэтому существует поднятие — непрерывный аргумент  $A$ :  $\mathcal{F}(t, \tau) = (\sin A(t, \tau), \cos A(t, \tau))$ .

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R} & \\ & \downarrow p & \\ T & \xrightarrow{\mathcal{F}} & S^1 \end{array}$$

Так как  $A(t, t)$  — непрерывный аргумент для  $\gamma'(t) = \mathcal{F}(t, t)$ , то поворот кривой  $\gamma$  — разность  $A(L, L) - A(0, 0)$ .

$$A(L, L) - A(0, 0) = (A(L, L) - A(0, L)) + (A(0, L) - A(0, 0))$$

Если посмотреть на  $A|_{\{0\} \times [0, L]}$ , то окажется, что это векторы с фиксированным началом, которые всегда смотрят в верхнюю полуплоскость. Из существования непрерывного аргумента  $A(0, t) \in [0, \pi]$  и  $A(0, L) - A(0, 0) = \pi - 0 = \pi$

При подсчёте  $A(L, L) - A(0, L)$  будет то же, только аргумент меняется в пределах  $[-\pi, 0]$ . Разность опять выйдет  $\pi$ , итого  $A(L, L) - A(0, 0) = 2\pi$ .  $\square$

## 2.2.4 Выпуклые кривые на плоскости

Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  — замкнутая гладкая регулярная кривая.

Дадим два определения, и покажем их равносильность.

**Определение 2.2.9** (Выпуклая кривая, 1). Простая кривая, обходящая границу выпуклого компакта  $K$ :  $\text{Im}(\gamma) = \partial(K)$ .

**Определение 2.2.10** (Выпуклая кривая, 2). Кривая, лежащая по одну сторону от любой своей касательной.

**Факт 2.2.2.** Эти определения равносильны.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . Касательная к  $\gamma$  в точке  $t$  — опорная прямая для компакта. Значит, она лежит только по ту сторону от своей касательной, в которой лежит компакт.

$\Leftarrow$ . Рассмотрим  $K := \text{conv}(\text{Im}(\gamma))$ .  $\nexists t_0 : \gamma(t_0)$  — внутренняя точка  $K$ .

Так как  $K$  гомеоморфно диску  $D^2$ , то  $\partial K \sim S^1$ ,  $\text{Im}(\gamma) \sim S^1$ . При этом  $\gamma$  — простая кривая без самопересечений.

Несложно показать, что инъективное непрерывное отображение  $S^1 \rightarrow S^1$  — гомеоморфизм.  $\square$

## Лекция IX

30 октября 2023 г.

**Теорема 2.2.5.** Следующие условия (для замкнутой гладкой регулярной кривой  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) равносильны:

1.  $\gamma$  выпукла
2.  $\kappa_\gamma$  не меняет знак (всегда  $\geq 0$  или всегда  $\leq 0$ ).
3. Для любой прямой  $L : \exists$  ровно две касательные к  $\gamma$ , параллельные  $L$ .

*Доказательство.* Считаем, что  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  в натуральной параметризации.

1  $\Rightarrow$  2 Выберем какую-то ориентацию, зафиксируем  $t_0$ . Покажем, что если  $\gamma$  лежит слева от касательной в  $t_0$ , то кривизна  $\geq 0$ , если  $\gamma$  лежит справа от касательной в  $t_0$ , то кривизна  $\leq 0$ .

Пусть  $\delta : [a, b] \rightarrow \{\pm 1\}$  — определяет, лежит кривая слева или справа от прямой. Покажем, что  $\delta$  непрерывно, или — здесь эквивалентно — локально постоянно.

Выберем точку  $q : \langle \overrightarrow{\gamma(t_0)q}, n \rangle > 0$ . Тогда в некоторой окрестности  $t_0 : \langle \overrightarrow{\gamma(t)q}, n \rangle > 0$  тоже.

Таким образом,  $\gamma$  всегда лежит по одну сторону (пусть по левую) от своей касательной. Расписав ряд Тейлора, получаем, что  $\kappa_\gamma$  всегда одного знака (неотрицательна).

2  $\Rightarrow$  3 Пусть  $\alpha$  — непрерывный аргумент:  $v = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ . Поворотом кривой добьёмся  $\alpha(0) = 0$ . Так как  $\alpha(L) = \int_a^b \kappa dt = 2\pi$ , и  $\forall t_1, t_2 \in [0, L] : t_1 < t_2 \Rightarrow \alpha(t_2) - \alpha(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \kappa dt \geq 0$ , то  $\alpha$  нестрого монотонна, причём  $\forall x \in (0, 2\pi) : \gamma^{-1}(x)$  — точка или отрезок. Таким образом, для каждого направления получается ровно две касательные (рисунок 2.1).

3  $\Rightarrow$  1 От противного: пусть есть точка  $t_0$ , такая, что кривая лежит по разные стороны от касательной в точке  $t_0$ .  $\text{Im}(\gamma)$  компактно, найдём с бесконечности, получим ещё два касательных направления, параллельных данному. Значит, нашлось хотя бы 3 касательных в одном направлении, противоречие (рисунок 2.2).



Рис. 2.1: Касательные в данном направлении

Рис. 2.2: Три касательные

□

## 2.3 Кривые в старших размерностях

Пусть  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — натурально параметризованная регулярная кривая,  $\gamma' = v$ .

Так как  $\langle v, v \rangle = 1$ , то  $\langle v, v' \rangle = 0$ ,  $v'$  — *вектор кривизны*.

**Определение 2.3.1** (Кривизна (без знака)). Модуль вектора кривизны  $k \stackrel{\text{def}}{=} |v'| = |\gamma''|$ .

**Определение 2.3.2** ((Главная) нормаль).  $N \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\gamma''}{|\gamma''|}$ .

Если размерность объемлющего пространства на самом деле равна двум, то  $N = \pm n$ .

**Определение 2.3.3** (Соприкасающаяся плоскость).  $\text{Lin}(\gamma', \gamma'') = \text{Lin}(v, N)$ .

Потом обоснуем, что от данной плоскости кривая отходит медленнее всего; при  $k = 0$  таких плоскостей много.

*Свойства.*

- $v \perp N$ ,  $|v| = |N| = 1$ .
- Кривизна  $k$  сохраняется при движении.

Пусть  $\tilde{\gamma}$  не натурально параметризована,  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ , где  $\gamma$  уже параметризована натурально, здесь  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая перепараметризация ( $s := \phi' > 0$ ).

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\ \phi'(t) = |\tilde{\gamma}'(t)| = s(t) \end{cases} \Rightarrow \tilde{\gamma}'(t) = s(t)\gamma'(\phi(t)) \quad \tilde{\gamma}''(t) = s^2(t)\gamma''(\phi(t)) + s'(t)\gamma'(\phi(t)) = s^2kN + s'v$$

Таким образом, здесь тоже для соприкасающейся плоскости  $\text{Lin}(v, N) = \text{Lin}(\gamma', \gamma'')$ .

В физике  $\tilde{\gamma}''$  — ускорение, и оно раскладывается в составляющие:  $\vec{a} = \underbrace{\frac{|v|^2}{R}\vec{N}}_{\text{нормальная}} + \underbrace{|v'| \cdot \vec{v}}_{\text{тангенциальная}}$

Из  $\tilde{\gamma}'$  и  $\tilde{\gamma}''$  можно найти  $N, k, v : v = \tilde{\gamma}'$ , и так как  $\tilde{\gamma}'' = s^2kN + s'v$ ,  $k \geq 0, |N| = 1$ , то  $N$  тоже находится однозначно.

Имеет место прежняя двумерная формула (но с модулем)  $k = \frac{|\tilde{\gamma}' \wedge \tilde{\gamma}''|}{|\tilde{\gamma}'|^3}$ , здесь  $\wedge$  — внешнее произведение.

Пусть  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — кривая в натуральной параметризации.

**Определение 2.3.4** (Поворот кривой  $\gamma$  в старших размерностях на отрезке  $[a, b] \subset [0, L]$ ).  $\int_a^b k(\tau) d\tau$ .

Следовательно, в ненатуральной параметризации надо интегрировать  $k|\tilde{\gamma}'|$ .

*Предостережение.* Определение совсем не совпадает с определением поворота плоской кривой! У такой кривой  $\curvearrowright$  плоский поворот нулевой, а поворот в старших размерностях больше нуля (так как у кривизны нет знака).

**Утверждение 2.3.1.**  $\angle(v(b), v(a)) \leq \int_a^b k d\tau$ .

*Доказательство.*  $|v'| = k$ , и  $\left| \int_a^b v' d\tau \right| \leq \int_a^b |v'| d\tau$ . Вообще, поворот — это длина кривой  $v : [a, b] \rightarrow S^{n-1}$ , а угол — расстояние на сфере от  $v(a)$  до  $v(b)$ .  $\square$

**Теорема 2.3.1** (Фенхель). Пусть  $\gamma$  — регулярная замкнутая кривая. Тогда поворот  $\gamma$  составляет хотя бы  $2\pi$ .

*Доказательство.*

**Лемма 2.3.1.** Пусть даны три точки  $A, B, C \in S^m$ , такие, что  $\underbrace{\angle(A, C)}_{\beta} + \underbrace{\angle(C, B)}_{\alpha} < \pi$ .

Тогда, понятное дело,  $\angle(A, B) < \pi$ , и есть кратчайшая дуга  $\widehat{AC}$ , отметим её середину  $M$ . Утверждается, что  $\angle(C, M) < \frac{\pi}{2}$ , то есть  $C$  лежит в открытой полусфере с центром в  $M$ .

*Замечание.* Если знаки нестрогие, то не выполнено: можно взять  $A, M, B, C$  на одной большой окружности:  $M \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ A \\ B \\ \circlearrowright \end{array} C$ .

*Доказательство леммы.*

Пусть  $O$  — центр сферы, достаточно показать, что  $\langle OC, \underbrace{OB + OA}_{\uparrow\uparrow OM} \rangle > 0$ . Действительно,  $\langle OC, OB \rangle + \langle OC, OA \rangle = \cos \alpha + \cos \beta > \cos(\pi - \beta) + \cos \beta = 0$ .  $\square$

**Лемма 2.3.2.** Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow S^m$  — кривая, и  $L(\gamma) < 2\pi$ . Тогда  $\text{Im}(\gamma)$  лежит в некоторой открытой полусфере.

*Доказательство леммы.*

Поделим кривую пополам: выберем  $t_0 \in (a, b) : L(\gamma|_{[a, t_0]}) < \pi$ . Положим  $A := \gamma(a) = \gamma(b)$ ,  $B := \gamma(t_0)$ . Тогда  $\forall C \in \text{Im}(\gamma) : \angle(A, C) + \angle(C, B) < \pi$ , и все такие точки лежат в полусфере с центром в  $M$  — середине дуги  $\widehat{AB}$ .  $\square$

**Лемма 2.3.3.** Вектор скорости регулярной замкнутой кривой не лежит ни в какой открытой полусфере.

*Доказательство леммы.* От противного: пусть  $\exists z \in S^{n-1}$ , такой, что  $\langle z, v \rangle > 0$ . Тогда  $\langle \gamma(b) - \gamma(a), z \rangle = \int_a^b \langle v, z \rangle > 0$ , то есть кривая не замкнута.  $\square$

От противного: пусть поворот меньше  $2\pi$ , или же длина кривой, которую заметает вектор скорости  $v : [a, b] \rightarrow S^{n-1}$  меньше  $2\pi$ . Но тогда согласно (лемма 2.3.2) вектор скорости лежит в одной открытой полусфере, получаем противоречие с (лемма 2.3.3).  $\square$

## 2.4 Кривые в $\mathbb{R}^3$ , кручение кривых

Пусть  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  — кривая в натуральной параметризации,  $k \neq 0$ . Определения вектора скорости  $v$ , нормали  $N$  и кривизны  $k$  остались прежними.

**Определение 2.4.1** (Бинормаль).  $b := v \times N$ . Так как  $v \perp N$ , то  $(v, N, b)$  — правый ортонормированный базис,  $b$  — перпендикуляр к соприкасающейся плоскости.

*Замечание.*  $0 = \langle v, b \rangle \Rightarrow 0 = \langle kN, b \rangle + \langle v, b' \rangle$  и  $1 = \langle b, b \rangle$ , откуда  $\begin{cases} \langle b', v \rangle = 0 \\ \langle b', b \rangle = 0 \end{cases}$ , то есть  $b' \parallel N$ .

**Определение 2.4.2** (Кручение). Такое число  $\tau$ , что  $b' = -\tau N$  ( $\tau = -\langle b', N \rangle$ ).

Для регулярной кривой  $\gamma$  с ненулевой кривизной  $k$  получаем *трёхмерный базис Френе*: гладкие  $v, N, b$ , кривизна  $k$  и *кручение*  $\tau$ , такие, что выполняются формулы Френе:

$$\dot{v} = kN \quad \dot{b} = -\tau N \quad \dot{N} = -kv + \tau b$$

Последняя формула берётся из  $\begin{cases} \langle \dot{N}, N \rangle = 0 \\ \langle \dot{N}, v \rangle = -\langle \dot{v}, N \rangle \\ \langle \dot{N}, b \rangle = -\langle \dot{b}, N \rangle \end{cases}$ .

**Теорема 2.4.1.** Кручение нулевое  $\tau = 0 \iff \gamma$  — плоская кривая,  $\text{Im}(\gamma)$  лежит в некоторой плоскости.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . Из формул Френе:  $\dot{b} = 0$ , то есть  $b = b_0 = \text{const}$ . Заметим, что  $\langle \gamma, b_0 \rangle' = \langle v, b_0 \rangle = 0$ , то есть  $\langle \gamma, b_0 \rangle = \text{const}$ .

$\Leftarrow$ . Пусть  $\text{Im}(\gamma) \subset P \cong \mathbb{R}^2$ . Тогда  $v, N \parallel P$ , и  $b = v \times N = \text{const}$  — нормаль к  $P$  (из непрерывности она не меняет направление). Значит,  $\dot{b} = 0 \Rightarrow \tau = 0$ .  $\square$

### 2.4.1 Скорость ухода от соприкасающейся плоскости

Помимо *соприкасающейся плоскости*  $\text{Lin}(v, N)$ , определяют также *нормальную плоскость*  $\text{Lin}(N, b)$  (вектор скорости перпендикулярен ей) и *спрямляющую плоскость*  $\text{Lin}(v, b)$  (кривизна в проекции на неё равна нулю).

Запишем  $\gamma'' = kN$ , и  $\gamma''' = k(-kv + \tau b) + \dot{k}N$ .

Теперь можно написать ряд Тейлора  $\gamma(t) = \gamma(t_0) + v(t-t_0) + \frac{kN}{2}(t-t_0)^2 + \frac{\gamma'''}{6}(t-t_0)^3 + o((t-t_0)^3)$ . Пусть  $P$  — соприкасающаяся плоскость, то есть плоскость, проходящая через  $\gamma(t_0)$ , и натянутая на  $(v, N)$ .

Из ряда Тейлора получаем  $\pm d(\gamma(t), P) = \frac{\langle \gamma''', b \rangle}{6} \cdot (t-t_0)^3 + o((t-t_0)^3) = \frac{k\tau}{6}(t-t_0)^3 + o((t-t_0)^3) = O((t-t_0)^3)$ , то есть порядок касания соприкасающейся плоскости  $\geq 2$ .

**Теорема 2.4.2.** Пусть  $\gamma$  — кривая (необязательно в натуральной параметризации). Тогда  $\tau = \frac{[\gamma', \gamma'', \gamma''']}{|\gamma' \times \gamma''|^2}$ , где  $[\_, \_, \_]$  — смешанное произведение, то есть определитель матрицы, составленной из данных векторов (записанных в некотором ортонормированном базисе).

*Доказательство.* Натурально параметризуем: пусть  $\gamma = \bar{\gamma}(\phi(t))$ , где  $|\bar{\gamma}'| = 1$ , положим  $s := \phi'$ .

Ниже все аргументы у  $s, \gamma$  и их производных —  $t$ , а у остальных функций ( $\bar{\gamma}, k, N, \tau$ , и их производных) —  $\phi(t)$ .

$$\begin{aligned}
\gamma' &= \bar{\gamma}' \cdot s = v \cdot s \\
\gamma'' &= v' \cdot s^2 + v \cdot s' = s^2 \cdot kN + vs' \\
\gamma''' &= 2ss' \cdot kN + s^2 \cdot k' \cdot s \cdot N + s^2 k(-kv + \tau b) \cdot s + s''v + s' \cdot (kN) \cdot s
\end{aligned}$$

Используя антисимметричность смешанного произведения, получаем

$$[\gamma', \gamma'', \gamma'''] = [v \cdot s, s^2 \cdot kN, s^2 k \tau b s] = s^6 k^2 \tau$$

С другой стороны,  $|\gamma' \times \gamma''| = |v \cdot s \times s^2 kN| = s^3 k$ , откуда получается искомая формула для  $\tau$ .  $\square$

## Лекция X

6 ноября 2023 г.

### 2.5 Базис Френе и кривизны в $\mathbb{R}^n$

**Определение 2.5.1** ( $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — невырожденная кривая).  $\gamma', \dots, \gamma^{(n-1)}$  линейно независимы.

**Теорема 2.5.1.** Пусть  $\gamma$  — натурально параметризованная невырожденная кривая в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $\exists! v_1, \dots, v_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — базис Френе, зависящий от времени, и  $\exists!$  гладкие функции  $k_1, \dots, k_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ , такие, что  $k_1, \dots, k_{n-2} > 0$ ,  $k_{n-1}$  имеет любой знак. При этом выполнены формулы Френе

1.  $\gamma'(t) = v_1(t)$
2. 
$$\begin{cases} v'_1 = k_1 v_2 \\ v'_i = -k_{i-1} v_{i-1} + k_i v_{i+1} \text{ (при } 2 \leq i \leq n-1) \\ v'_n = -k_{n-1} v_{n-1} \end{cases}$$
 . Это также можно записать в виде  $v' = Kv$ , где  $K$  — двухдиагональная антисимметричная матрица из кривизн.

3. Базис  $v_1, \dots, v_n$  — правый ортонормированный.

*Доказательство.* Рассмотрим набор производных  $\gamma', \dots, \gamma^{(n-1)}$ , по ним строится  $v_1, \dots, v_{n-1}$  при помощи ортогонализации Грама — Шмидта. Алгоритм возвращает ортонормированный базис какого-то гиперпространства коразмерности 1, оно единственным образом дополняется до ортонормированного правого базиса  $\mathbb{R}^n$ . По построению  $v_i$  — гладкие функции, причём  $v_1 = \gamma_1$ .

Дальше по данному базису раскладываются вектора производных. Проверим, что соответствующие коэффициенты получаются нужного знака, и много кто — нули: проверим соответствие (2).

$$v'_i = c_{i,1}v_1 + \dots + c_{i,n}v_n$$

Так как  $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ , то  $\langle v'_i, v_i \rangle = 0$ . Так как  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ , то  $\langle v'_i, v_j \rangle = -\langle v_i, v'_j \rangle$ . Таким образом, матрица  $(c_{i,j})$  кососимметричная.  $v_i \in \text{Lin}(\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(i)})$ , откуда  $v'_i \in \text{Lin}(\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(i+1)}) = \text{Lin}(v_1, \dots, v_{i+1})$ . Отсюда получаем  $c_{i,j} = 0$  для  $j > i+1$ , и из кососимметричности это значит, что  $c_{i,j} = 0$  для  $|i-j| > 1$ .

Из ортогонализации Грама — Шмидта  $v_i = k\gamma^{(i)} + r_i$ , где  $k > 0$ ,  $r_i \in \text{Lin}(\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(i-1)})$ . Продифференцируем и скалярно домножим на  $v_{i+1}$ . Слева получится  $k_i = \langle \dot{v}_i, v_{i+1} \rangle$ , а справа  $k \langle \gamma^{(i+1)}, v_{i+1} \rangle > 0$ , так как  $v_{i+1} \perp \dot{r}_i + \dot{k}\gamma^{(i)}$ . Отсюда кривизны действительно положительны.

Проверим однозначность определения базиса Френе. Пойдём индукцией: пусть  $v_1, \dots, v_i$  однозначно определены. Почему  $v_{i+1}$  однозначно определён? Из формул  $v_{i+1} \perp \text{Lin}(v_1, \dots, v_i)$ ,  $v'_i \in \text{Lin}(v_1, \dots, v_{i+1})$ . Производная  $v'_i$  определена однозначно, значит,  $\text{Lin}(v_1, \dots, v_{i+1})$  определена, как  $\text{Lin}(v_1, \dots, v_i, v'_i)$ . Так как  $k_i = \langle v'_i, v_{i+1} \rangle > 0$ , то направление  $v_{i+1}$  определено однозначно.  $v_n$  же определяется однозначно из того, что базис — правый.  $\square$

**Теорема 2.5.2.** Пусть даны гладкие функции  $k_1, \dots, k_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ , такие, что  $k_1, \dots, k_{n-2} > 0$ . Тогда существует (и единственна с точностью до движения) кривая с такими кривизнами.



*Доказательство.* Отметим произвольную точку, произвольно выберем правый ортонормированный базис  $v_0 = v(0), v_1, \dots, v_{n-1}$ . В матричной записи  $v' = Kv$ . Это линейное дифференциальное уравнение, имеет единственное решение при начальных данных  $v_0, \dots, v_{n-1}$ .

Таким образом ищется функция  $v(t)$ , тогда  $\gamma = p_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau$ .

Заметим, что  $(v^t v)' = (v')^t v + v^t v' = v^t K^t v + v^t K v = v^t \underbrace{(K^t + K)}_0 v = 0$ , откуда базис  $v$  — правый ортонормированный в любой момент времени, а не только в нулевой.  $\square$

## 2.6 2-мерные поверхности в $\mathbb{R}^3$

Далее всё происходит в  $\mathbb{R}^3$ .

**Определение 2.6.1** (Топологическая поверхность  $\Sigma$ ). Подмножество  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ , которое может быть получено, как образ топологического вложения связного двумерного многообразия  $f : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ .

Топологичность вложения означает, что топология, индуцируемая с помощью  $f$  топологией  $\mathbb{R}^3$  совпадает с собственной топологией  $M$ .

**Определение 2.6.2** (Гладкая поверхность  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ ). Поверхность  $\Sigma$ , которая локально может быть представлена, как график гладкой функции:  $\forall p \in M$ : можно ввести координатные оси  $x, y, z$  с нулём в  $p$ , так, что  $\exists U \subset \mathbb{R}^3 : \exists f : (\Omega \subset \mathbb{R}_{x,y}^2) \xrightarrow[\text{гладко}]{} \mathbb{R} : \Sigma \cap U = \Gamma_f$  (здесь  $\Gamma_f$  — график  $f$  в  $\mathbb{R}_{x,y,z}^3$ ).

**Определение 2.6.3** (Регулярное отображение  $r$ ). Дифференциал  $dr$  невырожден (то есть размерность образа линейного оператора максимально возможная).

Невырожденность гладкого  $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  при введении базиса  $(u, v)$  в  $\mathbb{R}^2$  можно переформулировать так:  $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \neq 0$ .

### 2.6.1 Локальная параметризация

В дальнейшем часто будут использоваться частные производные. Они будут обозначаться  $r'_x$ , или же  $\frac{\partial r}{\partial x}$ . Также часто используется обозначение  $r_x$ , но мне оно не нравится, и я стараюсь его избегать.

**Теорема 2.6.1.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , пусть  $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  — регулярное (всегда подразумевается, что ещё и гладкое). Если  $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  — вложение, то  $r(\Omega) =: \Sigma$  — гладкая поверхность.

*Доказательство.* Рассмотрим  $r$  по координатам:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} r_1(u, v) = x(u, v) \\ r_2(u, v) = y(u, v) \\ r_3(u, v) = z(u, v) \end{pmatrix}$$

Так как дифференциал невырожден, то найдётся минор с ненулевым определителем. Без потери общности  $\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$ .

Пусть  $p = r(x_0)$ . Из невырожденности дифференциала  $\exists W \subset \text{Lin}(x, y), V \subset \text{Lin}(u, v)$  и обратное отображение  $s : W \rightarrow V$ , такое, что  $(r_1, r_2) \circ s = \text{id}$ . Тогда  $(r \circ s)(x, y) = (x, y, (r_3 \circ s)(x, y))$ . Обозначим  $f := r_3 \circ s$ ; заметим, что  $r(V)$  открыто в  $\Sigma$ , получаем, что  $r(V)$  переписывается в виде  $\Sigma \cap U$  для некоторого открытого  $U \subset \mathbb{R}^3$ .  $\square$

**Определение 2.6.4** (Регулярная параметризация поверхности  $\Sigma$ ). Отображение  $r$ , как в (теореме 2.6.1)

*Замечание.* Далеко не всякая поверхность в  $\mathbb{R}^3$  гомеоморфна плоскости, например, у сферы  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  нет регулярной параметризации.

Тем не менее, существует локальная регулярная параметризация, которая получается из тех же соображений, что в теореме.

Пусть  $r$  — регулярная параметризация, как в теореме. Тогда  $\exists r^{-1} =: \phi : \Sigma \rightarrow \Omega$ , оно называется *картой*.

**Определение 2.6.5** (Две эквивалентные регулярные параметризации  $r_1 : \Omega_1 \rightarrow \Sigma$  и  $r_2 : \Omega_2 \rightarrow \Sigma$ ).  $\exists$  гладкое регулярное  $s : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ , такое, что  $s^{-1}$  — тоже гладкое регулярное, такое, что  $r_1 = r_2 \circ s$ .

$$\begin{array}{ccc} & & \Sigma \\ & \nearrow r_1 & \uparrow r_2 \\ \Omega_1 & \xrightarrow{s} & \Omega_2 \end{array}$$

**Упражнение 2.6.1.** Для гладкой поверхности локально любые две параметризации эквивалентны.

Пусть  $r : \Omega \rightarrow \Sigma$  — регулярная параметризация.

Пусть  $l : [0, 1] \rightarrow \Omega, l(t) = (t, v_0)$  — путь с постоянной координатой  $v_0$ . Можно ввести координатные линии  $r \circ l$ , отвечающее линиям  $r(t, v_0)$  и аналогично  $r(u_0, t)$ .

Векторы скорости координатных линий  $r'_u(t, v_0)$  и  $r'_v(u_0, t)$ .

Пусть  $\tilde{\gamma} = r \circ \gamma$ .  $\gamma$  регулярна  $\iff \tilde{\gamma}$  регулярна. Обратно можно получить  $\gamma = \phi \circ \tilde{\gamma}$ .

**Утверждение 2.6.1.** Пусть  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкое отображение.

Чтобы посчитать производную по направлению  $v \in \mathbb{R}^m$  в  $p_0 \in \text{Im}(f)$ , можно взять произвольную гладкую кривую  $\gamma : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ , такую, что  $\gamma(0) = p_0, \gamma'(0) = v$ , тогда  $(f \circ \gamma)'(0)$  — искомая.

*Доказательство.*  $(f \circ \gamma)'(0) = df(\gamma(0)) \cdot d\gamma(0) = df(p_0) \cdot v$ . Это выражение не зависит от пути  $\gamma$ , и является фактически определением производной по направлению.  $\square$

**Определение 2.6.6** (Касательное пространство к  $\Sigma$  в точке  $p = r(x)$ ).  $T_p(\Sigma) = d_x r(\mathbb{R}^2)$ .

Касательное пространство можно рассматривать, как линейное пространство, или аффинное пространство в  $\mathbb{R}^3$ .

**Утверждение 2.6.2.** Касательное пространство не зависит от параметризации.

*Доказательство.* Можно определить эквивалентным образом: касательное пространство  $T_p(\Sigma) = \{\text{векторы скорости гладких кривых, проходящих через точку } p\}$   $\square$

Касательная плоскость — линейное пространство, натянутое на векторы  $\frac{\partial r}{\partial u}$  и  $\frac{\partial r}{\partial v}$  — стандартный базис в касательном пространстве.  $\frac{\partial r}{\partial u} = r'_u = dr(1, 0), \frac{\partial r}{\partial v} = r'_v = dr(0, 1)$ .

## Лекция XI

13 ноября 2023 г.

### 2.6.2 Гладкие функции на поверхности

Определим гладкую функцию  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  из поверхности в прямую.

**Определение 2.6.7** (Функция  $f$  гладкая).  $\forall p \in \Sigma : \exists U \ni p$ , и карта, такая, что  $f$  — гладкая в карте  $U$ , то есть  $\exists r : \Omega \rightarrow U : f \circ r$  — гладкая.

**Утверждение 2.6.3.** Условие гладкости  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  равносильно следующим:

1.  $f$  гладкая в любой карте.
2.  $\exists F : (\subset \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$  — продолжение  $f$ , гладкое в окрестности любой точки.

*Доказательство.*

1. Отображение перехода между картами  $s$  — регулярно, и  $s^{-1}$  — тоже регулярно.

*Замечание.* Из теоремы об обратном отображении  $s$  — регулярная биекция.

2. Если поверхность локально задаётся графиком  $\Sigma = (x, y, h(x, y))$ , то можно определить  $F(x, y, z) = f(x, y, h(x, y))$ . Обратно, если  $F : (\subset \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$  гладкое, то гладко и  $F|_{\Sigma}$ .

□

### 2.6.3 Производная по направлению

Пусть взяты точка в поверхности  $p \in \Sigma$  и касательный вектор  $X \in T_p(\Sigma)$ .

Пусть  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция, пусть  $\tilde{\gamma} : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow \Sigma$  — кривая на поверхности. Пусть  $p := \tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}'(0) = X$ . Тогда

1.  $f \circ \tilde{\gamma}$  — гладкая (скалярная) функция.
2.  $(f \circ \tilde{\gamma})'(0)$  — не зависит от  $\tilde{\gamma}$ .
3. Для всякой параметризации  $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ :  $(f \circ \tilde{\gamma})'(0) = X_1 \frac{\partial f \circ r}{\partial u} + X_2 \frac{\partial f \circ r}{\partial v}$ , где  $X_1, X_2$  — координаты  $X$  в базисе  $r'_u, r'_v$ .

*Доказательство.*

1. Композиция гладких функций — гладкая (можно продолжить  $f$  до  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ).
2. Следует из следующего.
3. Пусть  $r : \Omega \rightarrow \Sigma$  — параметризация, и  $\tilde{\gamma} = r \circ \gamma$ , где  $\gamma : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow \Omega$ .

Обозначим  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ , получим  $(f \circ \tilde{\gamma})'(0) = \left( f \circ r \circ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)'(0) = (f \circ r)'_u \cdot u'(0) + (f \circ r)'_v \cdot v'(0)$ .

При этом действительно  $\tilde{\gamma}'(0) = r' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) \cdot (u'(0) \ v'(0))$ , то есть  $u'(0), v'(0)$  — координаты  $X = \tilde{\gamma}'(0)$  в базисе  $r'_u, r'_v$ . □

$X_1(f \circ r)'_u + X_2(f \circ r)'_v$  называется *производной функции  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $p \in \Sigma$  по направлению  $X \in T_p(\Sigma)$* , обозначается  $X_p(f)$ .

**Определение 2.6.8** ( $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  — гладкая функция).  $f$  — гладкая по координатам.

Пусть теперь есть две поверхности  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ .

Если  $\text{Im}(\tilde{f}) \subset \Sigma_2$ , то  $\tilde{f}$  — гладкая функция  $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  из одной поверхности в другую.

Можно рассмотреть соответствующую  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & \Sigma_2 \\ \uparrow r_1 & & \uparrow r_2 \\ \Omega_1 & \xrightarrow{f} & \Omega_2 \end{array}$$

**Утверждение 2.6.4.**  $\tilde{f}$  — гладкая  $\iff f$  — гладкая в некоторой карте.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Рассмотрим хорошую карту, в которой параметризации — графики  $(x, y, h(x, y))$ . В ней  $f$  действительно гладкая.

$\Leftarrow$  Из коммутативности диаграммы  $\tilde{f} = r_2 \circ f \circ r_1^{-1}$ .

□

Пусть  $\tilde{f} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  — гладкая. Посчитаем производную по направлению, рассматривая  $\tilde{f}$ , как функцию в  $\mathbb{R}^3$ . Пусть  $X \in T_p(\Sigma_1)$ . Утверждается, что  $X(\tilde{f}) \in T_{\tilde{f}(p)}(\Sigma_2)$ .

**Определение 2.6.9** (Дифференциал  $\tilde{f}$  в точке  $p$  по направлению  $X$ ).  $d_p \tilde{f}(X) \stackrel{\text{def}}{=} X(\tilde{f})$ .

Дифференциал в точке  $p$  — линейное отображение  $T_p(\Sigma_1) \rightarrow T_{\tilde{f}(p)}(\Sigma_2)$ .

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & \Sigma_2 & \xrightarrow{\tilde{g}} & \Sigma_3 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \tilde{h} & & \end{array}$$

Дифференциал композиции равен произведению дифференциалов  $d\tilde{g} \circ d\tilde{f} = d\tilde{h}$ .

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & \Sigma_2 \\ \uparrow r_1 & & \uparrow r_2 \\ \Omega_1 & \xrightarrow{f} & \Omega_2 \end{array}$$

Частным случаем этого утверждения является  $d\tilde{f} \circ dr_1 = dr_2 \circ df$ .

**Определение 2.6.10** ( $\tilde{f}$  регулярно).  $d\tilde{f}$  невырожден (здесь эквивалентно:  $f$  регулярно в любой карте).

## 2.7 Первая квадратичная форма поверхности

Имеется соответствие между квадратичными и билинейными симметричными формами: сужение билинейной формы на диагональ — квадратичная форма ( $B(x, x) = Q(x)$ ), и билинейную форму можно восстановить по квадратичной. Поэтому в будущем мы будем использовать слова квадратичной и билинейной формы взаимозаменяемо.

После выбора базиса  $(e_1, \dots, e_n) \in V$  для билинейной формы можно записать матрицу  $[B] = (b_{i,j})_{i,j} = (B(e_i, e_j))_{i,j}$ .

$I$  квадратичная форма определяется для параметризации  $r : \Omega \rightarrow \Sigma$ . Положим  $I_x : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I_x(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \langle d_x r(X), d_x r(Y) \rangle_{\mathbb{R}^3}$ . Это билинейная симметричная форма.

**Определение 2.7.1** ( $I$  квадратичная форма в  $x \in \Omega$ ). Квадратичная форма, отвечающая сужению на диагональ:  $I_x(X) \stackrel{\text{def}}{=} I_x(X, X)$ .

Матрица квадратичной формы  $[I_x] = (g_{i,j})_{i,j} = (\langle dr(e_i), dr(e_j) \rangle)_{i,j}$  — *метрический тензор*.

Имеются установленные буквенные обозначения  $[I_x] = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ . А именно,

$$E(u, v) := \langle r'_u(u, v), r'_u(u, v) \rangle, F(u, v) := \langle r'_u(u, v), r'_v(u, v) \rangle, G(u, v) := \langle r'_v(u, v), r'_v(u, v) \rangle$$

Разложим в этом базисе  $X = (X_1, X_2)$  и  $Y = (Y_1, Y_2)$ , получаем  $I(X, Y) = X_1 E Y_1 + (X_1 F Y_2 + X_2 F Y_1) + X_2 G Y_2$ .

*Примеры* (Вычисления, связанные первой с квадратичной формой).

- Длина вектора  $X$  — это  $\sqrt{I(X, X)}$ ,  $\cos(\angle(X, Y)) = \frac{I(X, Y)}{\sqrt{I(X)}\sqrt{I(Y)}}$ .
- Пути на поверхности  $\tilde{\gamma} = r \circ \gamma$  сопоставляется его длина  $L(\tilde{\gamma}) = \int \sqrt{I(\gamma', \gamma')} dt$

- Ортонормированному базису  $(u, v)$  соответствует базис  $r'_u, r'_v$ . Площадь поверхности  $r(\Omega)$  равна  $\int_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} ds$  (это было обосновано на матанализе,  $EG - F^2 = \det I$ ).

### 2.7.1 I форма при замене координат

Пусть  $r : \Omega_1 \rightarrow \Sigma, r^* : \Omega_2 \rightarrow \Sigma$  — две параметризации  $\Sigma$ , отображение перехода между картами  $s$ .



Обозначим за  $I$  квадратичную форму, отвечающую  $r$ , за  $I^*$  — отвечающую  $r^*$ .

При замене параметризации одна форма выражается через другую:  $I^*(v, w) = I(ds(v), ds(w))$ . В координатной форме (считая, что базисы согласованы:  $s$  переводит базис  $I^*$  в базис  $I$ )

$$[v]^t [I^*] [w] = ([ds][v])^t [I] \cdot [ds][w] = [v^t] ([ds]^t [I] [ds]) [w] \quad [I^*] = [ds]^t [I] [ds]$$

*Пример.* Рассмотрим две разные параметризации плоскости — в декартовых и полярных координатах.

1. В декартовых  $r(u, v) = (u, v, 0)$ .  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. В полярных  $r(\rho, \phi) = (\rho \cos(\phi), \rho \sin(\phi), 0)$ .  $\frac{\partial r}{\partial \rho} = (\cos \phi, \sin \phi)$ ,  $\frac{\partial r}{\partial \phi} = (-\rho \sin \phi, \rho \cos \phi)$ .

Получаем  $ds = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \end{pmatrix}$ , и  $[ds]^t \cdot [ds] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$ . Отсюда  $[I^*] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$ .

### 2.7.2 Изометрии

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & \Sigma_2 \\
 \uparrow r_1 & \tilde{f} & \uparrow r_2 \\
 \Omega_1 & \xrightarrow{f} & \Omega_2
 \end{array}$$

Бывают такие поверхности, что их можно отобразить друг в друга, при этом длины соответствующих векторов не будут меняться. Например, квадрат скатать в цилиндр, или конус развернуть в кусок плоскости.

**Определение 2.7.2** (Гладкое  $\tilde{f} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  — изометрия).  $d\tilde{f}$  сохраняет скалярное произведение  $\langle \_, \_ \rangle : \forall V, W \in T_p(\Sigma_1) : \langle V, W \rangle = \langle d_p \tilde{f}(V), d_p \tilde{f}(W) \rangle$ .

Если параметризации используют одну карту — например, вторая параметризация равна  $r_2 = \tilde{f} \circ r_1$  — то матрицы первых форм равны:  $[I]^{r_1} = [I]^{r_2}$ . В общем случае  $[I]^{r_1} = [df]^t [I]^{r_2} [df]$ .

*Пример.* Конус над любой кривой локально изометричен плоскости.

*Доказательство.* Пусть  $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$  — некоторая (гладкая регулярная) кривая,  $O \in \mathbb{R}^3$  — точка вне плоскости, содержащей  $\text{Im}(\gamma_0)$ .

Конусом над  $\gamma_0$ , по-видимому, называется подмножество  $\mathbb{R}^3$ , состоящее из лучей  $\{OX | X \in \text{Im}(\gamma_0)\}$ . В вершине конуса, очевидно, есть излом поэтому следует рассматривать открытые лучи, не включающие точку  $O$ .

Подвинем точки вдоль лучей, так, чтобы они все лежали на единичной сфере с центром в  $O$ ; иначе говоря, пусть  $\gamma(t) = O + \frac{\gamma_0(t) - O}{|\gamma_0(t) - O|}$ . Конусы над  $\gamma$  и над  $\gamma_0$  совпадают; можно считать, что  $\gamma$  натурально параметризована.

Теперь конус задаётся параметризацией  $r(\rho, t) = O + \rho \cdot (\gamma(t) - O)$ .  $\frac{\partial r}{\partial \rho} = \gamma(t) - O$ ,  $\frac{\partial r}{\partial t} = \rho \cdot \gamma'(t)$ . В такой параметризации первая квадратичная форма оказывается такой же, как и у параметризации плоскости в полярных координатах —  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$ .  $\langle \frac{\partial r}{\partial \rho}, \frac{\partial r}{\partial t} \rangle = 0$ , так как  $\langle \gamma(t) - O, \gamma(t) - O \rangle = \text{const}$ .  $\square$

Пусть  $p, q \in \Sigma$ , тогда расстояние между точками  $d(p, q) = \inf \{L(\tilde{\gamma}) | \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \Sigma, \tilde{\gamma}(0) = p, \tilde{\gamma}(1) = q\}$ . Это *внутренняя метрика поверхности*.

Внутренняя метрика, вообще говоря, не совпадает с внешней — между диаметрально противоположными точками  $S^1$  расстояние внешнее — 2, внутреннее —  $\pi$ .

## 2.8 Вторая квадратичная форма

Первая форма не менялась при изометриях, а вторая, наоборот, будет говорить, как поверхность изогнута в  $\mathbb{R}^3$  — на какой параболоид она больше всего похожа.

Зафиксируем параметризацию  $r : \Omega \rightarrow \Sigma$ , определим единичную нормаль  $n := \frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|}$  в точке  $r(x)$ ,  $x \in \Omega$ .

**Определение 2.8.1** (Вторая квадратичная форма).  $\mathbb{I}_x(v, w) = \langle d_x^2 r(v, w), n \rangle$ .

Коэффициенты матрицы второй формы обозначают так:  $[\mathbb{I}] = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ , где  $L = \langle r''_{u,u}, n \rangle$ ,  $M = \langle r''_{u,v}, n \rangle$ ,  $N = \langle r''_{v,v}, n \rangle$ .

**Теорема 2.8.1.** Можно рассмотреть нормаль, как гладкую функцию  $\Omega \rightarrow (S^2 \subset \mathbb{R}^3)$ . Утверждает-ся, что  $\mathbb{I}(v, w) = -\langle dr(v), dn(w) \rangle$ .

*Доказательство.*  $dr(v)$  лежит в касательной плоскости, поэтому  $\langle dr(v), n \rangle = 0$ . Дифференцируя по  $w$ , получаем  $\langle d^2 r(v, w), n \rangle + \langle dr(v), dn(w) \rangle = 0$ .  $\square$

# Лекция XII

20 ноября 2023 г.

### 2.8.1 Специальные координаты. Соприкасающийся параболоид

Пусть  $\Sigma$  — поверхность,  $p \in \Sigma$  — точка. Выберем ортонормированный базис  $x = f_1, y = f_2$  в  $T_p \Sigma$ . Можно выбрать такую окрестность  $U \ni p$ , что  $\Sigma \cap U$  — график  $(x, y, f(x, y))$ , причём третья ось направлена перпендикулярно  $T_p \Sigma$ .

Тогда  $r'_x(0) = (1, 0, f'_x) \in T_p \Sigma$  и  $r'_y(0) = (0, 1, f'_y) \in T_p \Sigma$ , и так как  $T_p \Sigma$  натянуто на первые две оси, то  $f'_x = f'_y = 0$ .

Иными словами,  $df = 0$ , и  $n(0) = (0, 0, 1)$ . Дифференцируя далее, получаем

$$r''_{x,x}(0) = (0, 0, f''_{x,x}) \quad r''_{x,y}(0) = (0, 0, f''_{x,y}) \quad r''_{y,y}(0) = (0, 0, f''_{y,y})$$

Записав коэффициенты  $\mathbb{I}$  формы  $L = \langle r''_{x,x}, n \rangle = f''_{x,x}$ ;  $M = f''_{x,y}$ ;  $N = f''_{y,y}$ , получаем матрицу

$$\text{Гессе } H = \begin{pmatrix} f''_{x,x} & f''_{x,y} \\ f''_{x,y} & f''_{y,y} \end{pmatrix}$$

Из формул Тейлора  $f(x, y) = \frac{1}{2}(Lx^2 + 2Mxy + Ny^2) + o(x^2 + y^2)$ . Определим соприкасающийся параболоид  $z = \frac{1}{2}(Lx^2 + 2Mxy + Ny^2)$ , он касается поверхности (касание второго порядка).

Оси координат  $x, y$  можно так повернуть, чтобы смешанная производная  $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f = f''_{x,y}$  была равна нулю, тогда параболоид имеет вид  $z = Ax^2 + By^2$ . Гессиан в этих координатах имеет вид  $\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ ,

и данные значения  $L, N$  называются  $k_1, k_2$  — *главные кривизны*, а сами координаты, в которых гессиан имеет такой вид — *специальные*.

Если  $k_1 \neq k_2$ , то главные направления определены с точностью до перестановки осей, иначе матрица Гессе диагональна, и все направления главные.

**Определение 2.8.2** (Гауссова кривизна). Произведение главных кривизн:  $K \stackrel{\text{def}}{=} k_1 \cdot k_2$ .

**Определение 2.8.3** (Средняя кривизна). Полусумма главных кривизн,  $\frac{k_1+k_2}{2}$ .

В специальных координатах векторы  $r'_x, r'_y$  — *главные направления* — образуют ортонормированный базис в  $T_p\Sigma$  (предложение 2.8.1).

**Определение 2.8.4** (Эллиптическая точка). Кривизны в ней одного знака, и не равны нулю.

**Определение 2.8.5** (Гиперболическая точка). Кривизны в ней разного знака. Ещё такую точку называют *седловая*.

**Определение 2.8.6** (Омбилическая точка). Кривизны равны.

**Определение 2.8.7** (Параболическая точка). Ровно одна из кривизн равна нулю.

**Определение 2.8.8** (Точка уплощения). Обе кривизны равны нулю.

На пространстве  $(V, \langle \_, \_ \rangle)$  билинейной форме  $B(x, y)$  по лемме Рисса соответствует линейный оператор  $A : V \rightarrow V$ , такой, что  $B(x, y) = \langle x, Ay \rangle$ .

Если базис  $e_1, \dots, e_n$  ортонормирован, то матрицы  $[A] = [B]$  равны. Иначе  $[B] = [G][A]$ , где  $[G]$  — матрица Грама ( $[G]$  симметрична).

$$[X]^t[B][Y] = [X]^t[G][AY].$$

**Факт 2.8.1.**  $[B]$  — симметрическая матрица ( $B$  — симметричная форма)  $\iff A$  — самосопряжена.

*Доказательство.*  $\langle x, Ay \rangle = [x]^t[G][A][y] = [x]^t[G][A][G]^{-1}[G][y] = \langle ([G][A][G]^{-1})^t[x], [y] \rangle$ , откуда  $[A]$  самосопряжена  $\iff ([G][A][G]^{-1})^t = [A] \iff [G][A] = ([G][A])^t$ .  $\square$

**Следствие 2.8.1.** В ортонормированном базисе матрица самосопряжённого оператора симметрична.

*Доказательство.* В ортонормированном базисе  $[G] = E$ .  $\square$

## 2.8.2 Гауссово отображение

Пусть  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  — поверхность.

**Определение 2.8.9** (Гауссово отображение). Непрерывное  $\hat{n} : \Sigma \rightarrow S^2$ , такое, что  $\forall p \in \Sigma : \hat{n}(p) \perp T_p\Sigma$ ,  $|\hat{n}(p)| = 1$ .

Если поверхность ориентируема, то  $\hat{n}$  можно задать на всей поверхности, но нас будет интересовать задание в карте.

Пусть  $r : \Omega \rightarrow \Sigma$  — параметризация, тогда можно определить  $n(u, v) := \frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|}$ .

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\hat{n}} & S^2 \\ r \uparrow & \nearrow n & \\ \Omega & & \end{array}$$

### 2.8.3 Оператор Вайнгартена

Пусть  $p \in \Sigma$ . Посмотрим на  $d_p \hat{n} : T_p \Sigma \rightarrow T_{\hat{n}(p)} S^2$ . Получается, в точке  $p$  касательные пространства к  $\Sigma$  и  $S^2$  совпадают (как векторные пространства), так как у них общая нормаль  $\hat{n}(p)$ .

Если их отождествить, то можно считать, что  $d_p \hat{n} : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$ .

**Определение 2.8.10** (Оператор Вайнгартена).  $S \stackrel{\text{def}}{=} -d_p \hat{n} : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$ .

Определим билинейную форму  $\hat{I} : T_p \Sigma \times T_p \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\hat{I}(v, w) = \langle v, S(w) \rangle = -\langle v, d_p \hat{n}(w) \rangle$ . Определение не использует никакую конкретную параметризацию ( $\hat{n}$  в каждой точке определяется с точностью до знака, и если ориентация фиксирована, то однозначно).

**Теорема 2.8.2.** Пусть  $r : \Omega \rightarrow \Sigma$  — произвольная параметризация, пусть  $p = r(x)$ . Тогда  $\forall v, w \in \mathbb{R}^2 : I(v, w) = \hat{I}(d_x r(v), d_x r(w))$ .

*Доказательство.* Используем  $I(v, w) = -\langle dr(v), dn(w) \rangle$ , и  $n = \hat{n} \circ r$ . Получаем

$$I_x(v, w) = \langle d_x r(v), -d_p \hat{n} \cdot d_x r(w) \rangle \quad \square$$

**Следствие 2.8.2.**

1.  $\hat{I}$  симметрична, поэтому оператор Вайнгартена самосопряжён.
2.  $[I]_{u,v} = [\hat{I}]_{r'_u, r'_v}$ .
3. По-прежнему в любой параметризации  $[\hat{I}]_{r'_u, r'_v} = [I]_{u,v} \cdot [S]_{r'_u, r'_v}$  — здесь используется, что  $[I]_{u,v}$  — матрица Грама для базиса  $r'_u$  и  $r'_v$ .
4. Пусть есть две параметризации



Тогда  $r_2 = r_1 \circ s$  и  $[I^{r_2}] = [ds]^t [I^{r_1}] [ds]$ .

**Теорема 2.8.3.** Пусть  $\Omega$  — линейно связно, и есть параметризация  $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

$$I \equiv 0 \iff r(\Omega) \text{ — часть плоскости}$$

*Доказательство.*

$\Leftarrow$ . Для плоскости  $n \equiv \text{const} \Rightarrow dn \equiv 0 \Rightarrow I \equiv 0$ .

$\Rightarrow$ . Оператор Вайнгартена  $S \equiv 0 \Rightarrow d\hat{n} \equiv 0 \Rightarrow n = n_0 = \text{const}$ . Любая кривая  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$  на поверхности перпендикулярна этой нормали во всякой своей точке. Функция высоты  $H = \langle \_, n_0 \rangle$  постоянна во всех точках кривой.  $\square$

**Предложение 2.8.1.** Собственные числа оператора Вайнгартена — главные кривизны (и они отвечают собственным векторам — векторам, лежащим на главных направлениях).

*Доказательство.* Рассмотрим специальные координаты. В них  $\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = [I]_{u,v} = [\hat{I}]_{r'_u, r'_v}$ , и так как  $r'_u, r'_v$  — ортонормированный базис, то  $[S]_{r'_u, r'_v} = [I]_{u,v} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ .  $\square$

Из предложения следует, что так как оператор Вайнгартена самосопряжён, то у него существует ортонормированный базис из собственных векторов с вещественными собственными числами, а именно — если  $k_1 \neq k_2$ , то главные направления перпендикулярны (если  $k_1 = k_2$ , то все направления — главные).

Пусть  $r : \Omega \rightarrow \Sigma, x \in \Omega, p = r(x)$ .



**Теорема 2.8.4** (Родриг).

1. Бескоординатная формулировка:  $v \in T_p(\Sigma)$  на главном направлении  $\iff d\hat{n}(v) \parallel v$ , причём если это так, то  $d\hat{n}(v) = -k_1 v$  или же  $d\hat{n}(v) = -k_2 v$ .
2. Для  $\xi \in \mathbb{R}^2$ :  $dr(\xi)$  на главном направлении  $\iff dr(\xi) \parallel dn(\xi)$ , причём если это так, то  $dn(\xi) = -k_1 \cdot dr(\xi)$  или  $dn(\xi) = -k_2 \cdot dr(\xi)$ .

*Доказательство.*

1. Это определение собственного вектора, а  $S = -d\hat{n}$ .
2. Из предыдущего  $dr(\xi)$  на главном направлении  $\iff d\hat{n}(dr(\xi)) \parallel dr(\xi)$ . Теперь заметим, что  $dn(\xi) = d(\hat{n} \circ r)(\xi) = d\hat{n} dr(\xi)$ .  $\square$

**Определение 2.8.11** (Нормальное сечение с началом в точке  $p$  и направлением  $v \in T_p\Sigma$ ). Пересечение  $\Sigma \cap P(p, n(p), v)$ , здесь  $P(p, n(p), v)$  — плоскость, проходящая через  $p$ , и натянутая на векторы нормали  $n(p)$  и  $v$ .

В окрестности  $p$  нормальное сечение — кривая.

Далее в определениях считаем, что во всех точках непрерывно выбрана нормаль  $\hat{n} : \Sigma \rightarrow S^2$  (крышка иногда будет опускаться, если понятно из контекста).

**Определение 2.8.12** (Кривизна поверхности в направлении вектора  $v \in T_p\Sigma$ ). Кривизна нормального сечения — гладкой регулярной кривой  $\gamma_v$  — со знаком  $+$ , если нормаль к кривой  $\gamma_v$  сонаправлена с  $\hat{n}$ , и — иначе. Обозначается  $k_n(v)$

Иными словами, пусть  $\gamma_v$  — натурально параметризованная кривая, проходящая нормальное сечение:  $\gamma'_v \uparrow\uparrow v$ ,  $\gamma_v(0) = p$ . Тогда  $k_n(v) \stackrel{def}{=} k_{\gamma_v}(0) \cdot \langle N_{\gamma_v}(0), \hat{n}(p) \rangle = \langle \gamma''(0), \hat{n}(p) \rangle$ .

Теперь пусть  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \Sigma$  — натурально параметризованная кривая. Запишем  $\tilde{\gamma}'' = k_{\tilde{\gamma}} \cdot N_{\tilde{\gamma}}$ .

**Определение 2.8.13** (Нормальная кривизна  $\tilde{\gamma}$ ).  $k_n(\tilde{\gamma}) := \langle \tilde{\gamma}'', \hat{n} \rangle = k_{\tilde{\gamma}} \cos(N, \hat{n})$ .

**Определение 2.8.14** (Геодезическая кривизна  $\tilde{\gamma}$ ).  $k_g$  — модуль проекции  $\tilde{\gamma}''$  на  $T_p\Sigma$ .

Фактически, вектор кривизны был разложен на нормальную и касательную составляющие, только нормальная со знаком, и касательная — без.  $k_g = |\tilde{\gamma}'' - k_n \hat{n}|$ . По теореме Пифагора  $k_{\tilde{\gamma}} = \sqrt{k_n^2(\tilde{\gamma}) + k_g^2(\tilde{\gamma})}$ .

**Определение 2.8.15** (Геодезическая кривая  $\gamma$ ). Такая кривая, что  $k_g(\gamma) \equiv 0$ .

## 2.8.4 Выражение нормальной кривизны через квадратичные формы

Пусть  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \Sigma$  — кривая на поверхности. Введём  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  так, что  $\tilde{\gamma} = r \circ \gamma$ . Разложим по координатам  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ .

Теперь посчитаем производные по  $t$ .  $\tilde{\gamma} = r(u, v) \Rightarrow \tilde{\gamma}' = r'_u \cdot u' + r'_v \cdot v'$  и

$$\tilde{\gamma}'' = r''_{u,u}(u')^2 + r''_{u,v} \cdot u'v' + r''_{v,u} \cdot v'u' + r''_{v,v}(v')^2 + r'_u u'' + r'_v v''$$

Домножим это скалярно на нормаль.  $r'_u \perp \hat{n}, r'_v \perp \hat{n}$ , поэтому

$$\langle \tilde{\gamma}'', \hat{n} \rangle = \langle r''_{u,u}, \hat{n} \rangle (u')^2 + 2 \langle r''_{u,v}, \hat{n} \rangle \cdot u'v' + \langle r''_{v,v}, \hat{n} \rangle (v')^2$$

Видно, что правая часть получилась  $\langle d^2 r(\gamma', \gamma'), \hat{n} \rangle = \mathbb{I}(\gamma')$ :

$$\langle \tilde{\gamma}'', \hat{n} \rangle = \mathbb{I}(\gamma')$$

**Теорема 2.8.5.** Значение  $\mathbb{I}$  на единичных векторах  $\xi \in \mathbb{R}^2$  (те, для которых  $I(\xi) = 1$  — единичные в касательной плоскости) — это кривизны поверхности по направлению вектора  $d_x r(\xi)$ .

*Доказательство.* Применить предыдущую формулу к нормальному сечению с направляющим вектором  $v = d_x r(\xi)$ . А именно, пусть  $\tilde{\gamma}$  — кривая, проходящая нормальное сечение,  $\tilde{\gamma}'(0) = v$ . Тогда

$$k_n(\tilde{\gamma}) = \widehat{II}(v, v) = II(\xi, \xi) = II(\gamma'(0), \gamma'(0)) = \langle \tilde{\gamma}''(0), \widehat{n}(p) \rangle$$

Если же  $|v| \neq 1$ , то  $k_n(v) = \frac{II(\xi, \xi)}{I(\xi, \xi)}$ , где  $v = dr(\xi)$ .  $\square$

**Теорема 2.8.6 (Менье).** Пусть  $p \in \Sigma, v \in T_p \Sigma, |v| = 1$ .

1. Пусть  $\tilde{\gamma}$  — натурально параметризованная кривая, такая, что  $\tilde{\gamma}(0) = p, \tilde{\gamma}'(0) = v$ . У всех таких  $\tilde{\gamma}$  нормальная кривизна одна и та же.
2. Кривизна кривой на поверхности с начальным вектором скорости  $v$  зависит только от угла  $\angle(N_{\tilde{\gamma}}, \widehat{n})$ , где  $N_{\tilde{\gamma}}$  — главная нормаль к кривой. А именно,  $k_{\tilde{\gamma}} \cdot \langle N_{\tilde{\gamma}}, \widehat{n} \rangle = k(v)$ .

*Доказательство.* Нормальная кривизна переписывается так:  $k_n(\tilde{\gamma}) = \langle \tilde{\gamma}'', \widehat{n} \rangle = II(\gamma', \gamma')$ .  $\square$

*Пример.* В сфере единичного радиуса кривизны в любом направлении — 1, тогда можно посчитать кривизну кривой, которая получается сечением сферы какой-то плоскости. Например, если плоскость под углом  $\frac{\pi}{4}$  к касательному пространству, то кривизна равна  $\sqrt{2}$ .

## Лекция XIII

27 ноября 2023 г.

### 2.9 Формулы типа Френе

Пусть  $\Sigma$  — поверхность,  $\gamma$  — кривая на поверхности.

Обозначим вектор скорости  $\gamma' = v$  ( $|v| = 1$ ).

Пусть  $n$  — нормаль к  $T_p \Sigma$  в точке  $\gamma(t)$  ( $n(t) = \widehat{n}(\gamma(t))$ ), зафиксируем  $t_0 : \gamma(t_0) = p$ , дополним  $(v, n)$  до ортонормированного базиса:  $l := v \times n$ .

Запишем формулы, как в случае формул Френе:

$$\begin{cases} v' = \alpha_1(t)v(t) + \beta_1(t)n(t) + \delta_1(t)l(t) \\ n' = \alpha_2(t)v(t) + \beta_2(t)n(t) + \delta_2(t)l(t) \\ l' = \alpha_3(t)v(t) + \beta_3(t)n(t) + \delta_3(t)l(t) \end{cases} \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ n \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \delta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ n \\ l \end{pmatrix}$$

Из того, что вектора единичные, получаем  $\langle v, v \rangle = 1 \Rightarrow \langle v', v \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$ . Аналогично  $\beta_2 = \gamma_3 = 0$ . Далее, из того, что вектора ортогональны:  $\langle v', n \rangle = -\langle v, n' \rangle$  получается, что матрица, как и ранее, кососимметрична. Итак, матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ \alpha_2 & 0 & -\beta_3 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Оказывается, что с первой парой коэффициентов мы уже знакомы. Это  $k_n(\gamma) = \langle v', n \rangle = -\alpha_2$  — нормальная кривизна,  $\pm k_g(\gamma) = \langle \gamma'', l \rangle = -\alpha_3$  — геодезическая кривизна со знаком. Иными словами,  $\gamma'' = k_n(\gamma) \cdot n + k_g(\gamma) \cdot l$ .

$-\beta_3$  назовём *геодезическим кручением*  $\tau_g$ , можно проверить, что  $\tau_g = -\widehat{II}(l, v)$ .

**Теорема 2.9.1.** Для натурально параметризованной кривой  $\gamma$  на поверхности  $\Sigma$  выполняются

формулы типа Френе: 
$$\begin{cases} v' = k_n n + k_g l \\ n' = -k_n v + \tau_g l \\ l' = -\tau_g n - k_g v \end{cases}.$$

*Доказательство.* Надо проверить только то, что коэффициент  $\tau_g$  — как раз  $-\widehat{I}(l, v)$ .

$$\tau_g = \langle n', l \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \widehat{n}(\gamma(t)), l \right\rangle = \langle d_{\gamma(t)} \widehat{n} \cdot v, l \rangle \langle -S(v), l \rangle = -\widehat{I}(v, l) \quad \square$$

**Определение 2.9.1** (Геодезическая кривая). Геодезическая кривизна  $k_g = 0$ , иначе говоря  $\gamma'' \parallel n$ .

**Определение 2.9.2** (Асимптотическая кривая). Нормальная кривизна  $k_n = 0$ , иначе говоря  $k_n(v) = 0$ .

*Пример* (Асимптотическая линия). Через каждую точку гиперболического параболоида проходит прямая.

Как мы скоро увидим, у любой поверхности с кривизной меньше нуля есть такое семейство прямых.

**Определение 2.9.3** (Линия кривизны). Геодезическое кручение равно нулю.

**Предложение 2.9.1.** У линии кривизны  $\gamma$ :  $\gamma'$  — главное направление.

*Доказательство.* Формула вида Френе принимает вид  $n' = -k_n v$ ; так как  $n' = -S(v)$ , то  $v$  — собственный вектор оператора Вайнгартена.  $\square$

*Пример* (Линия кривизны). Параллели и меридианы на торе.

**Теорема 2.9.2** (Эйлер). Рассмотрим  $v \in T_p \Sigma$  ( $|v| = 1$ ), пусть  $v_1, v_2$  — лежат на главных направлениях, отнормируем их:  $|v_1| = |v_2| = 1$ . Пусть им отвечают главные кривизны  $k_1, k_2$  соответственно.

Так как  $v_1 \perp v_2$  образуют базис  $T_p(\Sigma)$ , то можно записать  $v = \cos(\phi)v_1 + \sin(\phi)v_2$  для некоего  $\phi$ . Утверждается  $k_n(v) = k_1 \cos^2(\phi) + k_2 \sin^2(\phi)$ .

*Доказательство.* Выберем специальные координаты. Пусть  $\mathbb{R}_{x,y}^2 = T_p \Sigma$ , причём оси координат  $x, y$  — главные направления. Пусть  $r(x_0) = p$ . Тогда  $[I] = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$  и  $r'_x(x_0) = v_1, r'_y(x_0) = v_2$ .

$k_n(v) = \frac{\widehat{I}(v)}{\widehat{I}(v)}$ , здесь  $\widehat{I}(v) = \langle v, v \rangle$  (если  $v = dr(\xi)$ , то  $I(\xi) = \widehat{I}(v)$ ). Так как  $|v| = 1$ , то

$$k_n(v) = \widehat{I}(v) = (\cos \phi \quad \sin \phi) \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} = k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi \quad \square$$

**Следствие 2.9.1.**  $k_1, k_2$  — экстремальные значения (минимум и максимум) кривизн по направлению.

## 2.10 Вычисление главных кривизн и направлений в координатах

Вычислим при заданной параметризации  $r : \Omega \rightarrow \Sigma$  главные кривизны.

**Теорема 2.10.1.** Пусть поверхность параметризована  $r : \Omega \rightarrow \Sigma$ , тогда главные кривизны — это корни уравнения

$$\det([I] - \lambda[I]) = 0$$

(Иными словами, такие  $\lambda \in \mathbb{R}$ , что билинейная форма  $I - \lambda I$  вырождена, они не зависят от базиса)

У данного квадратного уравнения могут быть два равных корня, тогда точка — омбилическая, то есть все кривизны равны, и все векторы — главного направления.

Иначе векторы главного направления  $\xi_{1,2}$  — такие, что  $([I] - k_{1,2}[I])\xi_{1,2} = 0$ .

*Доказательство.*  $[I]_{u,v} = [I]_{u,v} \cdot [S]_{r'_u, r'_v}$ . Отсюда  $[S] = [I]^{-1}[I]$ . Вообще говоря,  $S$  — самосопряжён, но матрица не симметрична, так как базис  $r'_u, r'_v$  не ортонормирован. Найдём собственные числа  $[S]$ , то есть решим уравнение  $\det([S] - \lambda E) = 0$ . Но  $\det([I]) \neq 0$  ( $I$  — матрица Грама регулярной параметризации  $r$ ), поэтому уравнение эквивалентно уравнению  $\det([I] \cdot [S] - \lambda[I]) = 0$ .

Про собственные векторы аналогично: если  $\xi$  — вектор главного направления, то  $[S]\xi = k_{1,2}\xi$ , домножая на первую форму, получаем,  $[I] \cdot [S]\xi = k_{1,2} \cdot [I]\xi$ .  $\square$

Для конкретных коэффициентов  $[I] = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ ,  $[I] = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ , получено уравнение

$$\det([I] - \lambda[I]) = \begin{vmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{vmatrix} = (L - \lambda E)(N - \lambda G) - (M - \lambda F)^2 = 0$$

$$\lambda^2(EG - F^2) - \lambda(EN + LG - 2FM) + (LN - M^2) = 0$$

Гауссова кривизна  $K = k_1 \cdot k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\det[I]}{\det[I]}$ . Средняя кривизна — это  $\frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{EN + LG - 2FM}{2 \det[I]}$ .

## 2.11 Ковариантная производная

**Определение 2.11.1** (Гладкое векторное поле вдоль поверхности  $\Sigma$ ). Гладкое отображение  $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ , такое, что  $X_p = X(p) \in T_p\Sigma$  ( $T_p\Sigma$  рассматривается, как векторное, а не аффинное, подпространство).

Рассмотрим параметризацию  $r : \Omega \rightarrow \Sigma$ . Разложим  $X$  по базису:  $X = X_1 r'_u + X_2 r'_v$ .

**Утверждение 2.11.1.**  $X$  — гладкое  $\iff X_1, X_2$  — оба гладкие отображения  $\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Обозначим  $X^1 = \langle X, r'_u \rangle$ ,  $X^2 = \langle X, r'_v \rangle$  — они гладкие. Тогда  $\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ , и домножая слева на  $I^{-1}$  ( $I$  невырождена), получаем гладкое выражение  $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ .  $\square$

Пусть  $X$  — гладкое векторное поле, зафиксируем  $p \in \Sigma$ , выберем  $v \in T_p\Sigma$ .

**Определение 2.11.2** (Ковариантная производная векторного поля вдоль вектора  $v$ ). Производная ортогональной проекции  $X$  на  $T_p\Sigma$  по направлению вектора  $v$ :  $\nabla_v X = \text{Pr}_{T_p\Sigma}(X)'_v \in T_p\Sigma$ . Ещё  $\nabla$  называется *связностью* (с чего бы это?).

Вообще говоря, производную можно брать только вдоль кривой, но можно выбрать любую кривую, проходящую через данную точку с данным вектором производной.

*Замечание.* Для двух функций  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  и регулярной кривой  $\gamma$  с производной  $v = \gamma'(t_0)$ : Если  $f|_{\text{Im}(\gamma)} = g|_{\text{Im}(\gamma)}$ , то  $f'_v(t_0) = g'_v(t_0)$ .

*Замечание.* Ковариантная производная  $\nabla_v X$  в точке  $p$  зависит только от  $v$ , и от  $X$  в окрестности  $p$ .

Для двух векторных полей  $X, Y$ :  $\nabla_Y X$  — тоже векторное поле,  $(\nabla_Y X)(p) = \nabla_{Y_p} X$ .

**Предложение 2.11.1.** Кривая  $\gamma$  в натуральной параметризации геодезическая  $\iff \nabla_{\gamma'}(\gamma') = 0$ .

*Доказательство.* Не до конца понятно, что имеется в виду, кривая не является отображением  $\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Тем не менее, если  $p = \gamma(t_0)$ , то по-видимому  $\nabla_{\gamma'}\gamma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Pr}_{T_p\Sigma} \gamma'(t_0 + t)}{t} = \text{Pr}_{T_p\Sigma} \gamma''(t_0)$ , и  $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0 \iff \gamma'' \perp T_p\Sigma$ .  $\square$

*Свойства.*

- **Билинейность:** для  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} : \nabla_v(\alpha X + \beta Y) = \alpha \nabla_v X + \beta \nabla_v Y$  и  $\nabla_{\alpha v_1 + \beta v_2} X = \alpha \nabla_{v_1} X + \beta \nabla_{v_2} X$ . Следует из того, что производная (и дифференциал) линейны.
- Пусть  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $\nabla_v(f \cdot X) = f'_v \cdot X + f \cdot \nabla_v X$  и  $\nabla_{f v}(X) = f \nabla_v X$ .
- **Дифференцирование**  $\langle \_, \_ \rangle$ . Пусть  $X, Y$  — векторные поля,  $v_p \in T_p \Sigma$ . Тогда  $\langle X, Y \rangle'_v = \langle \nabla_v X, Y \rangle + \langle X, \nabla_v Y \rangle$ .

*Доказательство.* Мы знаем, что  $\langle X, Y \rangle'_v = \langle X'_v, Y \rangle + \langle X, Y'_v \rangle$ .

Достаточно проверить, что  $\langle X'_v, Y \rangle = \langle \nabla_v X, Y \rangle$ . Это правда, так как  $\text{Pr}_{T_p \Sigma}(X'_v) = \nabla_v X$ , и  $Y \in T_p \Sigma$ . Таким образом,  $X'_v = \nabla_v X + c\hat{n}$ .  $\square$

### 2.11.1 Вычисления в координатах. Символы Кристоффеля

Пусть  $r : \Omega \rightarrow \Sigma$  — параметризация.

В данном разделе будет удобно нумеровать координаты в виде  $x_1, \dots, x_n$ , хотя по сути мы будем рассматривать только случай  $n = 2$ .

Рассмотрим производные  $r'_{x_i}$ . Пусть  $\Gamma_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{r'_{x_i}} r'_{x_j} \in T_p \Sigma$ . Так как  $r''_{x_i x_j} = r''_{x_j x_i}$ , то  $\Gamma_{i,j} = \Gamma_{j,i}$ .

Разложим  $\Gamma_{i,j}$  в базисе  $r'_{x_1}, \dots, r'_{x_n}$ :

**Определение 2.11.3** (Символ Кристоффеля первого рода).  $\Gamma_{i,j;k} = \langle \Gamma_{i,j}, r'_{x_k} \rangle$ .

**Определение 2.11.4** (Символ Кристоффеля второго рода). Такие числа  $\Gamma^k_{i,j}$ , что  $\Gamma_{i,j} = \sum_{k=1}^n \Gamma^k_{i,j} r'_{x_k}$ .

Удобнее использовать символы Кристоффеля второго рода, а символы первого рода нужны только, чтобы посчитать символы второго рода.

**Утверждение 2.11.2.** Пусть первая форма  $I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{pmatrix}$ .  $\Gamma_{i,j;k} = \sum_{l=1}^n g_{k,l} \Gamma^l_{i,j}$ .

*Доказательство.* Умножим разложение  $\Gamma_{i,j} = \sum_{l=1}^n \Gamma^l_{i,j} r'_{x_l}$  скалярно на  $r'_{x_k}$ .  $\Gamma_{i,j;k} = \langle \Gamma_{i,j}, r'_{x_k} \rangle = \left\langle \sum_{l=1}^n \Gamma^l_{i,j} r'_{x_l}, r'_{x_k} \right\rangle$ . Далее воспользуемся тем, что  $\langle r'_{x_l}, r'_{x_k} \rangle = g_{l,k}$ , и по линейности получим нужную формулу.  $\square$

## Лекция XIV

4 декабря 2023 г.

Если при фиксированных  $i, j$  обозначить  $\Gamma_{i,j;k} = (Y) = \begin{pmatrix} \Gamma_{i,j;1} \\ \vdots \\ \Gamma_{i,j;n} \end{pmatrix}$  и  $\Gamma^l_{i,j} = (X) = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{i,j} \\ \vdots \\ \Gamma^n_{i,j} \end{pmatrix}$ , то окажется, что  $Y = GX$  и  $G^{-1}Y = X$  (матрица Грама обратима).

### 2.11.2 Зачем нужны символы Кристоффеля

Символы Кристоффеля нужны для того, чтобы вычислять ковариантную производную в координатах.

**Теорема 2.11.1.** Пусть  $\Sigma$  — поверхность,  $V$  и  $W$  — два векторных поля, разложенных в координатах  $V = \sum_i \xi_i r'_{x_i}$  и  $W = \sum_i \eta_i r'_{x_i}$ .

Тогда  $\nabla_V W = \sum_i (\eta_i)'_v r_{x_i} + \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \Gamma_{i,j}$ .

*Доказательство.* Дифференцируя по правилу Лейбница, получаем

$$\nabla_V \left( \sum_i \eta_i r'_{x_i} \right) = \sum_i \eta_i r'_{x_i} + \sum_i \eta_i \nabla_V r'_{x_i}$$

Раскроем второе выражение по линейности:  $\nabla_{\sum_j \xi_j r'_{x_j}} r'_{x_i} = \sum_j \xi_j \nabla_{r'_{x_j}} r'_{x_i} = \sum_{i,j} \xi_j \Gamma_{i,j}$ .  $\square$

**Теорема 2.11.2.** Символы Кристоффеля выражаются через коэффициенты первой формы  $I = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{pmatrix}$  и их производные:  $\Gamma_{i,j;k} = \frac{(g_{i,k})'_{x_j} + (g_{j,k})'_{x_i} - (g_{i,j})'_{x_k}}{2}$ .

*Доказательство.* Возьмём определение метрического тензора  $\langle r'_{x_i}, r'_{x_j} \rangle = g_{i,j}$  и продифференцируем:

$$(g_{i,j})'_{x_k} = \langle r''_{x_i, x_k}, r'_{x_j} \rangle + \langle r'_{x_i}, r''_{x_j, x_k} \rangle \stackrel{(\ominus)}{=} \left\| \Pr_{T_p \Sigma} r'_{x_i, x'_j} = \nabla_{r'_{x_i}} r'_{x_j} = \Gamma_{i,j} \right\|$$

Так как если  $w$  — вектор плоскости  $S$ , то  $\langle v, w \rangle = \langle \Pr_S v, w \rangle$ , то

$$\stackrel{(\ominus)}{=} \langle \Gamma_{i,k}, r'_{x_j} \rangle + \langle r'_{x_i}, \Gamma_{j,k} \rangle = \Gamma_{i,k;j} + \Gamma_{j,k;i}$$

Из симметрии ( $\Gamma_{i,j;*} = \Gamma_{j,i;*}$ ) получаем  $(g_{i,k})'_{x_j} = \Gamma_{i,j;k} + \Gamma_{j,k;i}$  и  $(g_{k,j})'_{x_i} = \Gamma_{i,k;j} + \Gamma_{i,j;k}$ .

Действительно  $\Gamma_{i,j;k} = \frac{(g_{i,k})'_{x_j} + (g_{j,k})'_{x_i} - (g_{i,j})'_{x_k}}{2}$ .  $\square$

**Следствие 2.11.1.** Символы Кристоффеля лежат во внутренней геометрии (сохраняется при изометриях, зависит только от внутренней метрики).

**Следствие 2.11.2.** Ковариантная производная принадлежит внутренней геометрии.

**Теорема 2.11.3** (Theorema Egregium, Гаусс). Гауссова кривизна принадлежит внутренней геометрии поверхности. А именно, гауссова кривизна  $K = \frac{\langle \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y, X \rangle}{\det I}$ , где  $X = r'_u, Y = r'_v$ .

*Доказательство.*

**Лемма 2.11.1.** Пусть  $W, V$  — гладкие векторные поля. Тогда  $W'_V = \nabla_V W + \widehat{I}(V, W) \cdot \widehat{n}$ .

*Доказательство леммы.*

По определению, проекция ковариантной производной на касательную плоскость — это  $\nabla_V W$ . Надо доказать, что  $\langle W'_V, \widehat{n} \rangle \stackrel{?}{=} \widehat{I}(V, W)$

$\langle W, \widehat{n} \rangle = 0 \Rightarrow \langle W'_V, \widehat{n} \rangle + \langle W, \widehat{n}'_V \rangle = 0$  и  $\langle W_V, \widehat{n} \rangle = \langle W, -\widehat{n}'_V \rangle = \langle W, S(V) \rangle = \widehat{I}(V, W)$ .  $\square$

Посчитаем ковариантную производную:  $\nabla_Y Y = r''_{v,v} - \widehat{I}(Y, Y) \cdot \widehat{n}$ . Затем

$$\nabla_X (r''_{v,v} - \widehat{I}(Y, Y) \cdot \widehat{n}) = \Pr_{T_p \Sigma} (r'''_{v,v,u} - \widehat{I}(Y, Y)'_u \cdot \widehat{n} - \widehat{I}(Y, Y) \widehat{n}'_u) = \Pr_{T_p \Sigma} (r'''_{v,v,u} + \widehat{I}(Y, Y) \cdot S(X))$$

Аналогично  $\nabla_X Y = r''_{v,u} - \widehat{I}(X, Y) \cdot \widehat{n}$  и

$$\nabla_Y (r''_{v,u} - \widehat{I}(X, Y) \widehat{n}) = \Pr_{T_p \Sigma} (r'''_{v,u,v} - \widehat{I}(X, Y)'_v \cdot \widehat{n} - \widehat{I}(X, Y) \cdot \widehat{n}'_v) = \Pr_{T_p \Sigma} (r'''_{v,u,v} + \widehat{I}(X, Y) \cdot S(Y))$$

Вычтем выражения друг из друга, и домножим скалярно на  $X$ . Получится

$$\langle \widehat{I}(Y, Y) S(X) - \widehat{I}(X, Y) S(Y), X \rangle = \widehat{I}(Y, Y) \cdot \widehat{I}(X, X) - (\widehat{I}(X, Y))^2 = \det(\widehat{I})$$

Далее используем  $K = \frac{\det \widehat{I}}{\det I}$ .  $\square$

Получается, в случае, когда пространство искривлено, имеет место неравенство  $f''_{u,v} \neq f''_{v,u}$  (что такое  $f$ ?), и мера некоммутативности ковариантной производной определяет гауссову кривизну.

*Пример.* Гауссова кривизна плоскости — ноль, плоскость можно как-то изгибать, в конус или цилиндр, но по-прежнему гауссова кривизна будет нулём (и цилиндр, и конус лежат по одну сторону от касательной плоскости, поэтому их гауссовы кривизны неотрицательны, но есть направления, в которых их кривизны равны нулю, поэтому гауссовы кривизны равны нулю).

Локально поверхность имеет уравнение  $z = \frac{k_1 x^2 + k_2 y^2}{2}$ . Кривизны  $k_1$  и  $k_2$  могут быть одного знака, или разных.

Если кривизны разного знака, то из формулы  $k(\phi) = k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi$  понятно, что найдётся направление, в котором кривизна равна нулю. В частности, в гиперболическом параболоиде эти направления выстраиваются в прямую.

## 2.12 Выпуклые поверхности

**Определение 2.12.1** (Выпуклая поверхность). Она лежит по одну сторону от любой своей соприкасающейся плоскости.

**Определение 2.12.2** (Локальный гомеоморфизм  $f : X \rightarrow Y$ ). Отображение  $f$ , такое, что  $\forall x \in X : \exists U \ni x : f|_U$  — гомеоморфизм на образ, причём  $f(U)$  открыто.

**Теорема 2.12.1.** Пусть  $\Sigma$  — гладкая компактная поверхность без края.

1. Если поверхность выпукла, то гауссова кривизна  $K \geq 0$ .
2. Если гауссова кривизна  $K > 0$ , то поверхность выпукла.

*Доказательство.*

1. Выберем специальные координаты, проверим, что в них  $K \geq 0$ . Пусть  $p \in \Sigma$ , некоторая окрестность  $p$  представима в виде графика  $(x, y, f(x, y))$  при  $f''_{x,y} = 0$ .

Главные кривизны равны  $f''_{x,x}$  и  $f''_{y,y}$ , так как  $f \geq 0$ , и  $f(0,0) = 0$ , то из разложения в ряд Тейлора получаем  $f''_{x,x} \geq 0$  и  $f''_{y,y} \geq 0$ .

2. Выберем нормаль  $\hat{n}$  во всех точках так, что главные кривизны во всех точках  $> 0$ . Оно непрерывно, так как для каждой локальной параметризации имеет вид  $\hat{n}(r(x)) = \pm \frac{r'_u(x) \times r'_v(x)}{|r'_u(x) \times r'_v(x)|}$ , где знак фиксирован.

Это показывает, что существует гауссово отображение  $\hat{n} : \Sigma \rightarrow S^2$ , то есть гауссово отображение можно определить глобально.  $d\hat{n} \neq 0$ , так как главные кривизны невырождены, и если  $u, v$  — главные направления, то по теореме Родрига  $n'_u = -k_1 r_u \neq 0$  и  $n'_v = -k_2 r_v \neq 0$ . По-другому можно сказать, что  $S = -d\hat{n}$ , собственные числа  $S$  не равны 0, поэтому  $d\hat{n}$  невырожден.

Значит (по теореме об обратной функции), отображение  $\hat{n} : \Sigma \rightarrow S^2$  — локальный гомеоморфизм.

**Лемма 2.12.1.** Пусть  $X$  — компактное метризуемое пространство,  $f : X \rightarrow Y$  — локальный гомеоморфизм. Тогда  $f$  — накрытие.

*Доказательство леммы.*

Из метризуемости следует хаусдорфовость, из компактности — секвенциальная компактность.

Проверим, что  $f$  — конечнолистное накрытие. От противного:  $\exists y \in Y : f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \dots\}$  бесконечно. Выберем сходящуюся подпоследовательность  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ ,

где  $x \in X$  — предельная точка  $f^{-1}(y)$ . Получим противоречие: в точке  $x$  нарушается условие того, что  $f$  — локальный гомеоморфизм.

Теперь у каждой точки  $y \in Y$  конечное число прообразов  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , и из хаусдорфовости можно выбрать им непересекающиеся окрестности  $V_{x_1}, \dots, V_{x_n}$ , а дальше заменить  $V_{x_j} \rightsquigarrow V_{x_j} \cap U_{x_j}$  ( $U_{x_j}$  — такая окрестность  $x_j$ , что  $f|_{U_{x_j}}$  — гомеоморфизм на образ).  $\square$

Далее сфера односвязна, поэтому всякое накрытие однолистно, значит,  $\Sigma \rightarrow S^2$  — гомеоморфизм. Получается, нашлось ровно два направления, в которых данная плоскость — касательная, и, значит,  $\Sigma$  действительно выпукла:

От противного, пусть  $\Sigma$  не выпукла, тогда существует касательная плоскость, такая, что  $\Sigma$  лежит по обе стороны от данной плоскости, но на  $+\infty$  и  $-\infty$  найдутся ещё две касательные плоскости, параллельные данной.  $\square$

*Интересный факт.* На самом деле даже  $K \geq 0$  влечёт выпуклость поверхности, но это доказывать сложнее.

## Лекция XV

11 декабря 2023 г.

**Лемма 2.12.2.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  — область (в размерности 3 неверно), и пусть в  $\Omega$  заданы два гладких поля —  $V, W$ , причём в  $x_0 \in \Omega$ :  $V_{x_0}, W_{x_0}$  линейно независимы.

Тогда  $\exists U_{x_0} \ni x_0$ , и  $\exists$  карта  $\phi: U_{x_0} \rightarrow \Omega_0$ , такая, что  $V, W$  — касательные к координатным линиям.

Обратно, если  $r = \phi^{-1}$ , то  $dr(1, 0) \parallel V$  и  $dr(0, 1) \parallel W$ .

*Доказательство.* Позднее: (лемма 2.12.4).  $\square$

**Определение 2.12.3** (Развёртывающаяся поверхность). Поверхность, локально изометричная плоскости.

**Утверждение 2.12.1.** Из теоремы Гаусса следует, что гауссова кривизна развёртывающейся поверхности — нуль.

*Интересный факт.* Если гауссова кривизна поверхности  $K \equiv 0$ , то поверхность — развёртывающаяся.

**Теорема 2.12.2.** Пусть  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  — развёртывающаяся поверхность.

1. Тогда  $\forall p \in \Sigma$ :  $\exists a, b \in \Sigma$ :  $p \in (a, b)$  и  $[a, b] \subset \Sigma$ . Здесь  $[a, b]$  и  $(a, b)$  — отрезок и интервал в  $\mathbb{R}^3$  с концами в этих точках.
- 1+. Если одна из главных кривизн не нуль, то отрезок можно продолжать на любой компакт  $K \subset \Sigma$ .
2. Все касательные плоскости, построенные в точках  $[a, b] \subset \Sigma$ , параллельны.
3. *Интересный факт.* Если  $\Sigma$  — полная (в смысле топологического пространства: все фундаментальные последовательности имеют предел), то это — цилиндр (то есть восставлены перпендикуляры к некоторой кривой на плоскости).

*Доказательство.* Разобьём точки на омбилические  $\Sigma_0$  (обе кривизны равны нулю) и остальные  $\Sigma_1$ :  $\Sigma = \Sigma_0 \sqcup \Sigma_1$ .

Сначала рассмотрим точки из  $\Sigma_1$ . Пусть в направлении  $v_1$  кривизна  $k_1 = 0$ , а в направлении  $v_2$ :  $k_2 \neq 0$ .



Такие направления находятся единственным образом, значит, прямые  $\langle v_i \rangle$  гладко зависят от точки — чтобы их найти, надо решить соответствующее уравнение.

Тогда в окрестности каждой точки  $x_0 \in \Sigma_1$  можно ввести параметризацию  $r : \Omega \rightarrow \Sigma_1$ , такую, что координатные линии параллельны главным направлениям: 
$$\begin{cases} \hat{n}'_x = -k_1 r'_x = 0 \\ \hat{n}'_y = -k_2 r'_y \end{cases}, \quad r'_x \perp r'_y.$$

Так как  $\hat{n}'_x = 0$ , то при перемещении нормали вдоль координатной линии — образа вектора  $(1, 0)$  — она локально остаётся постоянной:  $\hat{n}(\_, \text{const}) = \text{const}$ .

Запишем  $0 = \hat{n}''_{x,y} = \hat{n}''_{y,x}$ , значит,  $\hat{n}'_y \neq 0$  тоже постоянен вдоль оси  $x$ :  $\hat{n}'_y(\_, y_0) = \text{const}$ .

Так как  $\hat{n}'_y \parallel r'_y$ , то  $\hat{n}, \hat{n}'_y$  — линейно независимы. Так как  $\hat{n}, \hat{n}'_y \perp r'_x$ , то  $r'_x$  — координатная линия — является куском прямой, можно выбрать внутри маленький отрезок  $[a, b]$ . Доказали 1 для  $\Sigma_1$ .

Понятно, что интервал  $(a, b)$  можно продолжить в точке  $b$ , это не получится только если  $b \notin \Sigma_1$  (либо  $b \in \Sigma_0$ , либо пришли к краю поверхности). Покажем, что ситуация  $b \in \Sigma_0$  — невозможная.

**Лемма 2.12.3.** Заметим, что  $\langle r'_x, r'_x \rangle'_y = 0$ .

*Доказательство леммы.*

$\langle r'_x, r'_y \rangle = 0 \Rightarrow \langle r''_{x,x}, r'_y \rangle + \langle r'_x, r'_{x,y} \rangle = 0$ . Мы доказали, что  $r'_{x,x} \parallel r'_x$  (так как координатная линия — отрезок прямой), откуда первое слагаемое — нуль. Но тогда  $\langle r'_x, r'_x \rangle'_y = 2 \langle r'_x, r''_{x,y} \rangle = 0$ .  $\square$

Можно перепараметризовать так, что  $\langle r'_x, r'_x \rangle = 1$  — взять натуральную параметризацию в направлении отрезка  $[a, b]$ .

Теперь  $r''_{x,x} = 0$ , то есть  $r'''_{x,x,y} = 0$ , откуда  $(r'_y)''_{x,x} = 0$ . Значит,  $r'_y = (ax + b)w_0$ , где  $w_0$  — некий постоянный вектор, фиксированный при данном  $y$ .

Теперь вспомним, что  $n'_y = -k_1 r'_y$ . Получается, что  $k_1 = \frac{c}{ax+b}$ , при движении вдоль  $x$  ( $a, b, c$  — какие-то константы,  $c \neq 0$ ). Значит, на данном отрезке кривизна никогда не станет нулём. Доказали 1+.

Посмотрим на  $\Sigma_0$ . Если  $p \in \text{Int } \Sigma_0$ ,  $\exists \underbrace{U}_{\ni p} \in \Sigma_0$ . Дифференциал  $d\hat{n} = 0$  в данной окрестности, и  $U$  — часть плоскости. Иначе  $\nexists \underbrace{U}_{\ni p} \in \Sigma_0$ , то есть найдётся последовательность точек

$p_1, \dots, p_n, \dots \in \Sigma_1 : p_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} p$ . Возьмём у каждой точки  $p_k$  интервал, проходящий через неё.

Их длины не стремятся к нулю, так как интервалы могут заканчиваться только на краю поверхности, выберем сходящуюся подпоследовательность отрезков. Доказали 1 для  $\Sigma_0$ .  $\square$

**Теорема 2.12.3** (О выпрямлении векторного поля). Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  (хотя вообще это верно для любой размерности). Зафиксируем  $x \in \Omega$ , пусть  $V$  — гладкое векторное поле,  $V_x \neq 0$ .

Тогда  $\exists$  окрестность  $U_x \ni x$ , и карта (карта — отображение обратное параметризации)  $\phi : U_x \rightarrow \Omega_0$ , такая, что  $V$  — векторное поле координатных линий:  $\forall y \in U_x : d_y \phi(V_y) = (1, 0)$ , или если  $r = \phi^{-1}$  — параметризация, то  $r'_x = V$ .

*Доказательство.* Рассмотрим гладкую регулярную кривую  $\alpha(0) = x, \alpha'(t)$  и  $V'_{\alpha(t)}$  линейно независимы (например, можно выбрать так, чтобы было  $\alpha'(0) \perp V'_x$ , и продлить на  $\varepsilon$ , по непрерывности такой (достаточно короткий) путь  $\alpha$  найдётся)

Построим параметризацию

$$r(t, \tau) = \gamma_\tau(t), \text{ где } \gamma_\tau \text{ определено так: } \begin{cases} \gamma_\tau(0) = \alpha(\tau) \\ \gamma'_\tau(t) = V(\gamma_\tau(t)) \end{cases}$$

Решая это дифференциальное уравнение (сначала решим при  $\tau = 0$ , а потом воспользуемся теоремой об интегральной непрерывности) получаем карту  $\gamma_\tau(t)$ , гладко зависящую от начальных данных.

Осталось проверить, что  $dr(0, 0) \neq 0$ .  $r'_\tau(0, 0) = \alpha'(0)$ ,  $r'_t(t, \tau) = V_{r(t, \tau)}$  (в частности  $r'_t(0, 0) = V_x$ ), а  $V_x$  линейно независимо с  $\alpha'(0)$ .  $\square$

Пусть  $\phi = (\phi_1, \phi_2) = r^{-1}$  — расписали карту, обратную к параметризации, по координатам.

Теперь докажем лемму, анонсированную в начале лекции.

**Лемма 2.12.4.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  — область (в размерности 3 неверно), и пусть в  $\Omega$  заданы два гладких поля —  $V, W$ , причём в  $x_0 \in \Omega$ :  $V_{x_0}, W_{x_0}$  линейно независимы.

Тогда  $\exists U_{x_0} \ni x_0$ , и  $\exists$  карта  $\phi : U_{x_0} \rightarrow \Omega_0$ , такая, что  $V, W$  — касательные к координатным линиям.

Обратно, если  $r = \phi^{-1}$ , то  $dr(1, 0) \parallel V$  и  $dr(0, 1) \parallel W$ .

*Доказательство.* Применим к  $V, W$  теорему о выпрямлении векторного поля, назовём для  $V$  карту  $(\phi_1, \phi_2)$ , для  $W$  —  $(\psi_1, \psi_2)$ .

Возьмём в качестве карты  $h := (\phi_2, \psi_2)$ . Оно подходит:

- $V \in \text{Ker } d\phi_2, W \in \text{Ker } d\psi_2$ . Действительно,  $\phi_2$  постоянно вдоль главных координатных линий, значит,  $d\phi_2(V) = 0$
- $d\phi$  невырожден, значит,  $d\phi_2$  невырожден, аналогично  $d\psi_2$  невырожден. При этом  $V_{x_0}$  и  $W_{x_0}$  линейно независимы, значит,  $d_{x_0}h$  невырожден. Можно применить теорему об обратной функции.

$\square$

## Лекция XVI

Может быть, никогда

Пусть имеется параметризация  $r : \Omega \rightarrow \Sigma$ .

Ранее мы определили первую и вторую квадратичные формы  $I$  и  $II$  — это билинейные формы, определённые во всех точках  $\Omega$ . Понятно, что не всегда существует поверхность с данными формами. Например, если  $I = E$  — единичная матрица везде — то  $\Sigma$  изометрична плоскости, но это значит, что гауссова кривизна нуль, то есть  $II$  вырождена.

А именно, (теорема 2.11.3) определяет соотношения между коэффициентами первой и второй форм, выражая определитель второй формы через первую:

$$\langle \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y, X \rangle = \det(II)$$

Оказывается, лемма (лемма 2.11.1) позволяет получить все необходимые соотношения — *уравнения Гаусса — Петерсона — Кодацци — Майнарди* (eq. (1)), (eq. (2)).

*Интересный факт.* Поверхность с заданными  $I$  и  $II$  квадратичными формами существует тогда и только тогда когда выполняются естественные условия для скалярного произведения (положительная определённость и неравенство Коши — Буняковского — Шварца), и дифференциальные уравнения Гаусса — Петерсона — Кодацци — Майнарди.

Теорема ниже по-видимому должна работать для всех  $m \in \mathbb{N}$ , но хотя в доказательстве и используется произвольное  $m$ , для доказательства аналогичного факта про вложение  $m$ -мерной поверхности в  $m+1$ -мерие, скорее всего надо произнести какие-то дополнительные слова. А именно, мы считаем ниже  $m = 2$ , что соответствует вложению куска плоскости в пространство.

**Теорема 2.12.4.** Если поверхность с заданными  $I$  и  $II$  квадратичными формами существует, то она единственна с точностью до движения.

А именно, пусть  $r_1, r_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  — регулярные параметризации поверхностей, где  $\Omega$  связно, и  $\forall x \in \Omega : I^{r_1} = I^{r_2}$  и  $II^{r_1} = II^{r_2}$ . Тогда существует движение  $F : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ , такое, что  $r_2 = F \circ r_1$ .

*Доказательство.*

- Пусть  $r$  — одна из параметризаций  $r_1$  и  $r_2$ . Обозначим  $X_i := r'_{x_i}$ , и пусть  $(h_{i,j})$  — коэффициенты  $\widehat{II}$  в базисе  $(X_i)$  — эквивалентно, коэффициенты  $II$  в базисе  $(x_i)$ . Также пусть  $(a_{i,j})$  — коэффициенты матрицы оператора Вайнгартена  $S$  в базисе  $X_i$  (это коэффициенты  $[I]^{-1}[II]$ ).

Согласно (лемма 2.11.1) можно записать уравнения

$$(X_i)'_{x_j} = r''_{x_i, x_j} = \Gamma_{i,j} + \widehat{II}(X_i, X_j) \cdot \widehat{n} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k X_k + h_{i,j} n \quad (1)$$

Из определения оператора Вайнгартена же получаем следующее

$$n'_{x_j} = -S(X_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} X_i \quad (2)$$

Это линейная система дифференциальных уравнений на  $n$  и  $X_i$ , и, значит, решение однозначно определяется начальными данными  $(X_i(y), n(y))$  для произвольной точки  $y \in \Omega$ .

- Выберем  $y \in \Omega$ . Построим движение  $F : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ , переводящее  $r_1(y)$  в  $r_2(y)$ , и переводящее базис  $(r_1)'_{x_1}(y), (r_1)'_{x_m}(y), n_1(y)$  в базис  $(r_2)'_{x_1}(y), (r_2)'_{x_m}(y), n_2(y)$ .

Теперь у поверхностей, задаваемых параметризациями  $F \circ r_1$  и  $r_2$  одинаковые начальные данные дифференциальных уравнений выше, и одинаковые коэффициенты. Значит, решения совпадают. А  $r'_{x_i}$  однозначно определяют поверхность, так как частные производные однозначно определяют функцию.  $\square$