Алгебра. Неофициальный конспект

Лектор: Алексей Владимирович Степанов
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

Глава 1

Гомологическая алгебра

Лекция I

12 февраля 2024 г.

1.1 Абелевы категории

Напомним некоторые определения из предыдущей лекции.

Определение 1.1.1 (Предаддитивная категория $\mathscr{A}$)**.** $\forall A, B \in \mathscr{A} : \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(A, B)$ образует абелеву группу, и везде, где определена, выполнена дистрибутивность:

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \qquad (\beta+\gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

Определение 1.1.2 (Бипроизведение)**.** Такая диаграмма, что

$$A \underset{\iota_1}{\overset{\pi_1}{\leftrightarrows}} C \underset{\iota_2}{\overset{\pi_2}{\rightleftarrows}} B$$

1. $\pi_1\iota_1 = \mathrm{id}_A$.
2. $\pi_2\iota_2 = \mathrm{id}_B$.
3. $\iota_2\pi_2 + \iota_1\pi_1 = \mathrm{id}_C$.
4. $\pi_2\iota_1 = 0$.
5. $\pi_1\iota_2 = 0$.

Определение 1.1.3 (Аддитивная категория)**.** Предаддитивная категория с финальным объектом и произведениями (любых двух объектов).

Эквивалентно, существуют инициальный объект и копроизведения, эквивалентно существуют нулевой объект и бипроизведения.

Определение 1.1.4 (Предабелева категория)**.** Аддитивная категория, в которой у всех морфизмов есть ядро и коядро.

Определение 1.1.5 ((Ко)нормальный мономорфизм (эпиморфизм))**.** Он является (ко)эквалайзером (какой-то, неважно какой, пары стрелок).

Определение 1.1.6 (Абелева категория)**.** Предабелева категория, в которой все мономорфизмы нормальны.

Пусть $\mathscr{C}$ — категория. Вспомним про категорию стрелок $\mathscr{Arr}\mathscr{C}$, в которой объекты — стрелки из $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$, множество морфизмов между ϕ, ψ — это

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{Arr}_\mathscr{C}}(\phi,\psi) = \{(\alpha,\beta) | \alpha : \mathrm{source}(\phi) \to \mathrm{source}(\psi), \beta : \mathrm{target}(\phi) \to \mathrm{target}(\psi), \beta\phi = \psi\alpha\}$$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\alpha"] & \bullet \arrow[d, "\beta"] \\ \bullet \arrow[r, "\psi"] & \bullet \end{tikzcd}$$

Далее будем обозначать за $\ker f$ ядро стрелки, как уравнитель стрелки и нуля, а за $\mathrm{Ker}\, f := \mathrm{source}(\ker f)$ — объект (в конкретных категориях типа $\mathscr{mod}$-R это докатегорное понятие ядра — подмодуль без стрелки-вложения).

Лемма 1.1.1. $\ker, \mathrm{coker}$ — *функторы* $\mathscr{Arr}\mathscr{A} \to \mathscr{Arr}\mathscr{A}$.

Доказательство. Достаточно доказать для ядер, для коядер двойственно.

Определим действие $\ker$ на морфизмах:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "\ker f"] \arrow[d, dashed, "\exists!\phi"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ \mathrm{Ker}\, f' \arrow[r, "\ker f'"] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \end{tikzcd}$$

$f \cdot \ker f = 0 \Rightarrow \beta \cdot f \cdot \ker f = 0 \Rightarrow f' \cdot \alpha \cdot \ker f = 0$, откуда по универсальному свойству ядра $\exists! \phi : \ker f' \cdot \phi = \alpha \cdot \ker f$.

Положим $\ker(\alpha,\beta) = (\phi,\alpha)$. Далее несложно проверить, что данное определение сохраняет композицию и id. $\square$

Определение 1.1.7 (Точный функтор)**.** Функтор, сохраняющий ядра и коядра.

Интересный факт (Теорема Фрейда — Митчелла (Freyd — Mitchell)). Для любой малой абелевой категории $\mathscr{A}$: $\exists R \in \mathscr{Ring}$ (необязательно коммутативное кольцо с единицей) и строгий, полный, точный функтор $\mathscr{A} \to \mathscr{mod}$-$R$.

Предложение 1.1.1. *Для всякого морфизма $f : A \to B$ найдётся пунктирная стрелка, делающая диаграмму коммутативной.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "\ker f"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{coker}\ker f"'] & B \arrow[r, "\mathrm{coker}\, f"] & \mathrm{CoKer}\, f \\ & \mathrm{CoKer}\ker f \arrow[r, dashed, "\exists!"] & \mathrm{Ker}\,\mathrm{coker}\, f \arrow[u, "\ker\mathrm{coker}\, f"'] & \end{tikzcd}$$

Более того, в абелевой категории эта стрелка — изоморфизм.

Доказательство. Следует из эпи-моно разложения, доказанного на прошлой лекции, или из теоремы Митчелла.

Само построение пунктирной стрелки получается из универсальных свойств, а доказательство того, что это — изо — непростое. $\square$

Лемма 1.1.2. *Пусть $\mathscr{C}$ — полная подкатегория в абелевой категории $\mathscr{A}$. Следующие условия равносильны*

- *$\mathscr{C}$ является абелевой.*
-
  - *$0_\mathscr{A} \in \mathscr{C}$, здесь, как обычно, $0_\mathscr{A}$ — нулевой объект категории $\mathscr{A}$.*
  - *$\mathscr{C}$ содержит бипроизведение любых двух своих объектов.*

– *Ядра и коядра (взятые в $\mathscr{A}$) любых морфизмов из $\mathscr{C}$ лежат в $\mathscr{C}$.*

Доказательство.

$\Leftarrow$. Очевидно.

$\Rightarrow$. Чуть сложнее, доказывать не будем (и использовать тоже). $\square$

1.2 Компле́ксы

Если противное не оговорено, то всё происходит в абелевой категории $\mathscr{A}$, большими буквами обозначены объекты данной категории, маленькими — морфизмы.

Определение 1.2.1 (Компле́кс)**.** Такая диаграмма, что $\forall k \in \mathbb{Z} : d_k \cdot d_{k+1} = 0$.

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{d_n} C_n \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots$$

Альтернативно, комплекс можно рассматривать, как функтор из категории $(\mathbb{Z}, \geqslant)$ (полученной из частично упорядоченного множества) в $\mathscr{A}$ (при котором образ композиции любых двух нетождественных морфизмов нулевой). Таким образом, комплексы — полная подкатегория в категории этих функторов.

Ещё один, следующий, взгляд на комплексы работает только для конкретной категории, уже вложенной в R-модули.

Определение 1.2.2 (Градуированный объект)**.** $C_\bullet = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} C_n$ с морфизмом $d : C_\bullet \to C_\bullet$, таким, что $d(C_n) \subset C_{n+p}$ для некоторой фиксированной *степени объекта* p (чаще всего она равна ± 1).

Определение 1.2.3 (Дифференциальный модуль)**.** Градуированный объект $(C_\bullet, d)$ со свойством $d^2 = 0$.

Определение 1.2.4 (Комплекс)**.** Дифференциальный модуль степени -1.

При развороте стрелок получается дифференциальный модуль степени $+1$, также известный, как *кокомплекс*:

$$\cdots \xleftarrow{d^{n+2}} C^{n+1} \xleftarrow{d^{n+1}} C^n \xleftarrow{d^n} C^{n-1} \xleftarrow{d^{n-1}} \cdots$$

Предостережение. У кокомплекса несколько другая нумерация стрелок, но мы их практически не будем использовать.

Определение 1.2.5 (Сдвиг комплекса $(C_\bullet, d)$ на $p \in \mathbb{Z}$)**.** Комплекс $(C[p]_\bullet, d[p])$, где $C[p]_n = C_{n+p}$ и $d[p]_n = d_{n+p}$.

Иногда при сдвиге комплекса определяют $d[p]_n = (-1)^p d_{n+p}$, но мы так делать не будем.

Лекция II

19 февраля 2023 г.

Определение 1.2.6 (Морфизм дифференциальных модулей $\bigoplus A_n \to \bigoplus B_n$)**.** Такое $f : \bigoplus A_n \to \bigoplus B_n$, что $f(A_n) \subset B_n$, и диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
A_{n+1} \arrow[r, "d_n^A"] \arrow[d, "f"] & A_n \arrow[d, "f"] \\
B_{n+1} \arrow[r, "d_n^B"] & B_n
\end{tikzcd}$$

На языке абелевых категорий, надо рассматривать не одно отображение f, так как отношение $f(A_n) \subset B_n$ не выражается, а серию морфизмов $f_n : A_n \to B_n$.

Для всякого морфизма f коммутативна диаграмма в категории комплексов:

$$\begin{tikzcd} A[1] \arrow[r, "d^A"] \arrow[d, "f[1]"] & A \arrow[d, "f"] \\ B[1] \arrow[r, "d^B"] & B \end{tikzcd}$$

Если рассматривать комплексы, как функторы из категории $(\mathbb{Z}, \geqslant)$, то морфизмы между комплексами — естественные преобразования между функторами.

Теорема 1.2.1. Категория комплексов абелева.

Доказательство.

> **Лемма 1.2.1.** *Если $\mathscr{C}$ — малая категория, $\mathscr{A}$ — абелева, то* $\mathrm{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{A})$ *— тоже абелева категория.*
>
> *Доказательство леммы.*
>
> Нулевой объект — функтор $\mathbb{0}$, сопоставляющий каждому объекту $0_{\mathscr{A}}$, и каждой стрелке — нуль-стрелку.
>
> Для двух функторов $\mathscr{F}, \mathscr{G}$: $(\mathscr{F} \oplus \mathscr{G})(C) = \mathscr{F}(C) \oplus \mathscr{G}(C)$.
>
> Если $\eta \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Func}(\mathscr{C},\mathscr{A})}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ (то есть η — естественное преобразование $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$), то $(\mathrm{Ker}\,\eta)(C) = \mathrm{Ker}(\eta_C)$.
>
> Аналогично (лемма 1.1.1), определяется ker. Аналогично с коядрами.
>
> Далее по-хорошему надо проверить, что выполняются все универсальные свойства, но мы этого делать не будем. □

Ссылаемся на (лемма 1.1.2).

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_n^A} A_n \xrightarrow{d_{n-1}^A} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow B_{n+1} \xrightarrow{d_n^B} B_n \xrightarrow{d_{n-1}^B} B_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \oplus B_{n+1} \xrightarrow{d_n^{A\oplus B}} A_n \oplus B_n \xrightarrow{d_{n-1}^{A\oplus B}} A_{n-1} \oplus B_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Если $d^A \cdot d^A = 0$, и $d^B \cdot d^B = 0$, то (из теоремы Митчелла уж точно очевидно) $d^{A\oplus B} \cdot d^{A\oplus B} = 0$.

Ядра тоже являются комплексами, так как на языке конкретных категорий это просто подмодули. Двойственно с коядрами. □

1.3 Гомологии

Дифференциал d является морфизмом комплексов $d : C[1] \to C$ (по-хорошему, $C[1]_\bullet \to C_\bullet$, но точку будем опускать):

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "d_n"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "d_{n-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & C_n \arrow[r, "d_{n-1}"] & C_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Ниже мы по произвольному комплексу C строим новые комплексы.

Определение 1.3.1 (Циклы)**.** Комплекс $Z = Z(C) \overset{def}{=} \mathrm{Ker}\, d[-1]$.

Определение 1.3.2 (Границы)**.** Комплекс $B = B(C) \overset{def}{=} \operatorname{Im} d[-1]$.

По определению, образ — это ядро коядра: $\operatorname{Im}\phi \overset{def}{=} \operatorname{Ker}(\operatorname{coker}\phi)$. В абелевой категории канонически $\operatorname{Im}\phi \cong \operatorname{CoIm}\phi \overset{def}{=} \operatorname{CoKer}(\ker\phi)$.

На языке конкретных категорий, так как $d^2 = 0$, то $B \subset Z$, и можно определить фактормодуль $H \coloneqq Z/B$ — *гомологии.*

То же самое можно сказать на языке универсальных свойств, хотя в будущем мы, ссылаясь на теорему Митчелла, будем всё писать исключительно в терминах элементов.

$$\begin{tikzcd}
Z[1] \arrow[r, "z[1]"] & C[1] \arrow[r, "d"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, dashed, "\alpha"] & C \arrow[r, "d[-1]"] & C[-1] \\
 & B \arrow[r, dotted, "\beta"'] & Z \arrow[u, "z"'] \arrow[r, dotted, "\operatorname{coker}\beta"'] & H \arrow[r, dotted] & 0
\end{tikzcd}$$

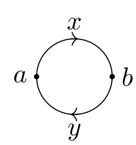
Построение H в терминах универсальных свойств. Так как $d[-1]\cdot d = 0$, то можно пропуститься через ядро: $\exists!\alpha : z\cdot\alpha = d$.

Далее, $z\cdot\alpha\cdot z[1] = d\cdot z[1] = 0$, а так как z — моно, то $\alpha\cdot z[1] = 0$. Значит, можно пропуститься через коядро, то есть $\exists!\beta : \beta b = \alpha$. Далее H определяется, как коядро β. □

Следствие 1.3.1. *В комплексах Z, B, H нулевые дифференциалы.*

Доказательство. Из диаграммы следует, что в комплексе Z нулевые дифференциалы. B состоит из подмодулей в Z, H — из фактормодулей, понятно, что там дифференциалы тоже нулевые. □

Примеры (Гомологии окружности).

- Рассмотрим окружность, как симплициальное множество: 

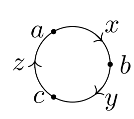
  Построим $C_0 = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ — свободная абелева группа на $\{a, b\}$, $C_1 = \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ — тоже свободная абелева группа, но на образующих $\{x, y\}$. Вместо $\mathbb{Z}$ можно было взять любое другое кольцо.

  Все остальные элементы комплекса объявляются нулями.

  $$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

  Определим d_1, как «конец минус начало»: $\begin{cases} d_1(x) = b - a, \\ d_1(y) = a - b \end{cases}$.

  Теперь $\begin{cases} Z_0 = C_0 \\ Z_1 = \mathbb{Z}(x+y) \end{cases}$ $\begin{cases} B_0 = \mathbb{Z}(b-a) \\ B_1 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} H_0 = Z_0/B_0 = (\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b)/\mathbb{Z}(b-a) & \cong \mathbb{Z} \\ H_1 = Z_1/B_1 = \mathbb{Z}(x+y) & \cong \mathbb{Z} \end{cases}$.

- Теперь триангулируем окружность по-другому:  $\begin{cases} d_1(x) = b - a, \\ d_1(y) = c - b, \\ d_1(z) = a - c \end{cases}$.

  Теперь $\begin{cases} Z_0 = C_0 \\ Z_1 = \mathbb{Z}(x+y+z) \end{cases}$, $\begin{cases} B_0 = \mathbb{Z}(b-a) + \mathbb{Z}(c-b) \\ B_1 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} H_0 & \cong \mathbb{Z} \\ H_1 = \mathbb{Z}(x+y+z)/0 & \cong \mathbb{Z} \end{cases}$.

Ответ получился тот же самый, и это не случайно — есть теорема, что сингулярные/симплициальные гомологии (они равны для клеточных пространств) не зависят от триангуляции.

Упражнение 1.3.1. *Триангулировать сферу, и вычислить гомологии. Дифференциал от треугольника ABC (ориентация — порядок вершин — важна) определяют, как его обход вдоль периметра: $AB + BC + CA$.*

Теорема 1.3.1 (Длинная точная последовательность гомологий)**.** Пусть имеется точная последовательность комплексов $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$.

Существует длинная точная последовательность гомологических групп

$$\cdots \longrightarrow H' \longrightarrow H \longrightarrow H'' \longrightarrow H'[-1] \longrightarrow H[-1] \longrightarrow \cdots$$

где связующий морфизм δ будет построен в доказательстве.

Более того, это всё функториально: если есть другая короткая точная последовательность, и морфизм между ними, то по отношению к ним найдётся естественный морфизм полученных длинных точных последовательностей гомологий.

Доказательство. Сначала строим δ.

Для $z \in Z''_n$, обозначим за $[z]$ класс z в H''_n.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A'_n \arrow[r] \arrow[d, "d'"] & A_n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "d"] & A''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_{n-1} \arrow[r, "i"] & A_{n-1} \arrow[r] & A''_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Положим $\delta([z]) := [i^{-1}(d(\pi^{-1}(z)))]$, где $\pi^{-1}(z)$ — произвольный прообраз (он есть, так как π сюръективно).

Дальше надо проверить, что определение корректно, и последовательность точна. Это типичный диаграммный поиск, который невозможно записывать, и его несложно воспроизвести самостоятельно. □

Лекция III

4 марта 2023 г.

Теперь приведём другое доказательство существования длинной точной последовательности гомологий, опирающееся на лемму о змее.

Лемма 1.3.1 (О змее)**.** *Пусть даны два комплекса $A' \to A \to A'' \to 0$ и $0 \to B' \to B \to B''$, и морфизм между ними. Тогда имеется длинная точная последовательность из пунктирных стрелок.*

Короткие стрелки получены из действия соответственных функторов (ядра и коядра), а связующий гомоморфизм определён δ определён в доказательстве, и естественен (функториален).

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Ker}\phi' \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\ker\phi'"] & \operatorname{Ker}\phi \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\ker\phi"] & \operatorname{Ker}\phi'' \arrow[d, "\ker\phi''"] \arrow[ddddll, dashed, rounded corners, "\delta"] & \\
& A' \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] \arrow[d, "\operatorname{coker}\phi'"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\operatorname{coker}\phi"] & B'' \arrow[d, "\operatorname{coker}\phi''"] & \\
& \operatorname{CoKer}\phi' \arrow[r, dashed] & \operatorname{CoKer}\phi \arrow[r, dashed] & \operatorname{CoKer}\phi'' &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Диаграммный поиск. □

Теорема 1.3.2 (Длинная точная последовательность гомологий на бис)**.** Пусть имеется точная последовательность комплексов $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$.

Существует длинная точная последовательность гомологических групп

$$\cdots \longrightarrow H' \longrightarrow H \longrightarrow H'' \longrightarrow H'[-1] \longrightarrow H[-1] \longrightarrow \cdots$$

где связующий морфизм δ будет построен в доказательстве.

Более того, это всё функториально.

Доказательство. Длинная точная последовательность комплексов означает наличие следующей коммутативной диаграммы (где строки точны, и столбцы — комплексы)

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A'_n \arrow[r] \arrow[d, "d'_n"] & A_n \arrow[r] \arrow[d, "d_n"] & A''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & A''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Пусть циклы, границы и гомологии в комплексе A обозначаются $Z_\bullet, B_\bullet, H_\bullet$ соответственно, в A' — $Z'_\bullet, B'_\bullet, H'_\bullet$, , в A' — $Z''_\bullet, B''_\bullet, H''_\bullet$. Из коммутативности диаграммы B'_n вправо уходит в B_n, а B_n, в свою очередь — в B''_n.

Чтобы воспользоваться леммой о змее, построим следующую диаграмму, взяв коядро верхней строки, ядро — нижней, и дорисовав сверху — ядра вертикальных стрелок, снизу — коядра.

$$\begin{tikzcd}
 & H'_n \arrow[d] & H_n \arrow[d] & H''_n \arrow[d] & \\
 & A'_n/B'_n \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d}'_n"] & A_n/B_n \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d}_n"] & A''_n/B''_n \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d}''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & Z_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & Z''_{n-1} \arrow[d] & \\
 & H'_{n-1} & H_{n-1} & H''_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

Обоснуем, каким образом получилась такая диаграмма. По определению $d_n(B_n) = \{0\}$, поэтому $A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1}$ пропускается через фактор, и получается отображение $\widetilde{d}_n : A_n/B_n \to A_{n-1}$. Так как A — комплекс, то $\widetilde{d}_n(A_n/B_n) \subset Z_{n-1}$, можно сузить codomain, получая $\overline{d}_n$. По определению $H_n = Z_n/B_n$, поэтому действительно $H_n = \mathrm{Ker}(d_n)$. В свою очередь, $H_{n-1} = Z_{n-1}/B_{n-1}$, и это действительно $\mathrm{CoKer}(d_n)$.

Отображение $A_n \to A''_n$ было эпиморфизмом, после взятия коядра эпиморфизмом оно и осталось. Двойственно, $A'_{n-1} \to A_{n-1}$ было мономорфизмом, мономорфизмом оно и осталось.

Применяя лемму о змее, получаем утверждение теоремы. $\square$

1.4 Функторы между абелевыми категориями

Пусть $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ — абелевы категории.

Определение 1.4.1 (Аддитивный функтор $\mathscr{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$)**.** Такой функтор, что $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$: $\mathscr{F}(\alpha + \beta) = \mathscr{F}(\alpha) + \mathscr{F}(\beta)$ всегда, когда определено.

Рассмотрим произвольную короткую точную последовательность $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ в $\mathscr{A}$. Подействовав на неё функтором $\mathscr{F}$, мы получим последовательность $0 \to \mathscr{F}(A') \to \mathscr{F}(A) \to \mathscr{F}(A'') \to 0$. Точность, вообще говоря, пропадёт, но если $\mathscr{F}$ сохраняет точность в каком-то члене для всех таких коротких точных последовательностей, то функтор $\mathscr{F}$ имеет соответствующее название:

1. Если всегда имеется точность в члене $\mathscr{F}(A)$, то $\mathscr{F}$ — *полуточный функтор*.
2. Если всегда имеется точность в членах $\mathscr{F}(A')$ и $\mathscr{F}(A)$, то $\mathscr{F}$ — *точный слева функтор*.
3. Если всегда имеется точность в членах $\mathscr{F}(A)$ и $\mathscr{F}(A'')$, то $\mathscr{F}$ — *точный справа функтор*.
4. Если всякая короткая точная последовательность переходит в короткую точную последовательность, то $\mathscr{F}$ — *точный функтор*.

Лемма 1.4.1. *Пусть $\mathscr{F}$ — аддитивный функтор. Следующие условия эквивалентны:*

1. *$\mathscr{F}$ точен справа.*
2. *$\mathscr{F}$ сохраняет нуль и коядра: $\mathscr{F}(0) = 0, \mathscr{F}(\mathrm{coker}(\phi)) = \mathrm{coker}(\mathscr{F}(\phi))$.*
3. *$\mathscr{F}$ сохраняет конечные копределы.*

Доказательство.

(3) ⇒ (2) Коядро — конечный копредел, поэтому очевидно.

(2) ⇒ (3) В свою очередь, копроизведение в абелевой категории — бипроизведение, а это «внутренний объект», поэтому всякий аддитивный функтор сохраняет его.

(2) ⇒ (1) Короткая точная последовательность $A' \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{\psi} A'' \to 0$ характеризуется свойствами $\psi = \mathrm{coker}\,\phi, 0 = \mathrm{coker}\,\psi$.

(1) ⇒ (2) Рассмотрим произвольный $\phi : A' \to A$. У него есть эпи-моно разложение $\phi = \mu\varepsilon$ (μ — моно, ε — эпи), и $\mathrm{coker}(\mu\varepsilon) = \mathrm{coker}(\mu)$, так как ε — эпиморфизм. Значит, без потери общности ϕ — мономорфизм.

Тогда последовательность $0 \to A' \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{\mathrm{coker}\,\phi} \mathrm{CoKer}\,\phi \to 0$ точна, и так как $\mathscr{F}$ — точен справа, то $\mathscr{F}(\mathrm{coker}\,\phi) = \mathrm{coker}(\mathscr{F}(\phi))$.

Также точный справа функтор сохраняет нуль: $0 \to A \xrightarrow{\mathrm{id}} A \to 0 \to 0$ переходит в $\mathscr{F}(A) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathscr{F}(A) \to \mathscr{F}(0) \to 0$. □

Следствие 1.4.1. *Левый сопряжённый функтор точен справа.*

Доказательство. Он сохраняет копределы. □

Копредел (который является левым сопряжённым к диагональному Δ) сохраняет копределы, значит, точен справа. Другими словами, копределы коммутируют.

К сожалению, в лемме о змее это не помогает в доказательстве того, что последовательность точна в члене $\mathrm{Ker}\,\phi$, так как нет точной последовательности $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$.

При доказательстве существования длинной точной последовательности гомологий на бис, мы использовали, что коядро точно справа, ядро — точно слева.

Лекция IV

11 марта 2023 г.

Факт 1.4.1. *Если точный справа функтор сохраняет мономорфизмы, то функтор точен. Двойственно, точный слева функтор, сохраняющий эпиморфизмы, точен.*

Доказательство. Условия как раз означают, что короткая точная последовательность отображается в короткую точную последовательность. □

Пусть имеются комплексы $X_\bullet$ и $X'_\bullet$, и между ними морфизмы f, g.

Определение 1.4.2 (Морфизмы f и g гомотопны)**.** Существует семейство морфизмов $s_k : X_{k-1} \to X'_k$, таких, что $f_n - g_n = d'_n s_{n+1} + s_n d_{n-1}$. При этом диаграмма ниже **не обязана** быть коммутативной.

$$\begin{tikzcd}
X_{n+1} \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, shift right, "f_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n+1}"] & X_n \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] \arrow[dl, dotted, "s_{n+1}"'] & X_{n-1} \arrow[r, "d_{n-2}"] \arrow[d, shift right, "f_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n-1}"] \arrow[dl, dotted, "s_n"'] & \cdots \arrow[r, "d_0"] \arrow[dl, dotted, "s_{n-1}"'] & X_0 \arrow[d, shift right, "f_0"'] \arrow[d, shift left, "g_0"] \arrow[dl, dotted, "s_1"'] \\
X'_{n+1} \arrow[r, "d'_n"'] & X'_n \arrow[r, "d'_{n-1}"'] & X'_{n-1} \arrow[r, "d'_{n-2}"'] & \cdots \arrow[r, "d'_0"'] & X'_0
\end{tikzcd}$$

Пишут $f \simeq g$.

А почему это то же самое, что и гомотопность в топологии?

Теорема 1.4.1. Если два морфизма комплексов $f, g : X \to X'$ гомотопны, то $H(f) = H(g)$ (гомологии являются функтором, и действуют не только на комплексах, но и на морфизмах между ними).

Доказательство. Докажем, что $H(f - g) = 0$.

Рассмотрим $\overline{x} \in H_n(X)$. У него имеется прообраз $x \in Z_n$.

Заметим, что $H(f_n - g_n)(\overline{x}) = \overline{(f_n - g_n)(x)} = \overline{d'_n(s_{n+1}(x))} + \overline{s_n(d_{n-1}(x))}$. Первое слагаемое равно нулю, так как $d'_n(\cdots) \in B_n(X')$, а второе — так как $x \in \operatorname{Ker} d_{n-1}$. □

Замечание. Если $\mathscr{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ — аддитивный функтор, и $f \simeq g$ — морфизмы комплексов с объектами из $\mathscr{A}$, то (допуская вольность речи можно писать $\mathscr{F}(f)$) $\mathscr{F}(f) \simeq \mathscr{F}(g)$.

Факт 1.4.2. *Быть гомотопными — отношение эквивалентности.*

Доказательство. Рефлексивность: $\forall n : s_n = 0$. Симметричность: $s_n \coloneqq -s_n$. Транзитивность:

$$\begin{cases} f_n - g_n = d'_n s_{n+1} + s_n d_{n-1} \\ g_n - h_n = d'_n r_{n+1} + r_n d_{n-1} \end{cases} \Rightarrow f_n - h_n = d'_n(s_{n+1} + r_{n+1}) + (s_n + r_n) d_{n-1}$$ □

Определение 1.4.3 (Два комплекса X и X' гомотопически эквивалентны)**.** Существуют морфизмы комплексов $f : X \to X'$ и $g : X' \to X$, такие, что $fg \simeq \mathrm{id}_{X'}$ и $gf \simeq \mathrm{id}_X$. Данные морфизмы f и g называют *гомотопическими эквивалентностями*.

Факт 1.4.3. *Если X и X' гомотопически эквивалентны, то $H(X) \cong H(X')$.*

Определение 1.4.4 (Квазиизоморфизм $f : X \to X'$)**.** Морфизм f, такой, что $H(f)$ — изоморфизм.

Факт 1.4.4. *Гомотопическая эквивалентность — квазиизоморфизм.*

Определение 1.4.5 (Комплекс X ацикличен)**.** X точен, то есть $H(X) = 0$.

Определение 1.4.6 (Комплекс X стягиваем)**.** $\mathrm{id}_X \simeq 0_X$.

Замечание. Из (теорема 1.4.1) следует, что стягиваемый комплекс ацикличен.

Обратное, вообще говоря, неверно. Стягиваемый комплекс сохраняется под действием функторов, а ацикличный — может и не сохраниться.

1.5 Резольвенты

Пусть $\mathscr{A}$ — абелева категория, $P \in \mathscr{A}$.

Определение 1.5.1 (Объект P проективен)**.** $\forall \phi : A \to B$: ϕ — эпи $\Rightarrow \forall \psi : P \to B$: $\exists \theta : P \to A$, причём диаграмма коммутирует. При этом θ должно найтись какое-то, не факт, что оно единственно.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "\exists\theta"'] \arrow[d, "\forall\psi"] & \\
A \arrow[r, "\forall\phi"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Факт 1.5.1. *В $\mathscr{S}et$ все множества — проективные объекты.*

Теорема 1.5.1. Пусть $\mathscr{A} = R\text{-}\mathscr{mod}$. Модуль P проективен $\iff$ P является прямым слагаемым свободного модуля.

Доказательство.

1. Свободный модуль проективен: пусть $\{p_\alpha\}$ — базис P. Определим $\theta(p_\alpha) = \psi(\phi^{-1}(p_\alpha))$, где прообраз выбран произвольно, и продолжим по линейности.

2. Прямое слагаемое проективного модуля проективно. Рассмотрим каноническое вложение $M \hookrightarrow M \oplus N$, где $M \oplus N$ — проективен.

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & M \oplus N \arrow[dl, dashed] \arrow[dll, bend right] \\
A \arrow[r, two heads] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

   Определим $M \oplus N \to B, (m, n) \mapsto \psi(m)$. Так как $M \oplus N$ проективен, то найдётся $M \oplus N \to A$, и композиция $M \to M \oplus N \to A$ подходит в качестве морфизма, который должен найтись из определения проективного модуля.

3. Пусть P проективен. Возьмём свободный модуль F, сюръективно накрывающий P (например, подойдёт свободный модуль на всех элементах P, но на практике, конечно, удобно брать модуль поменьше).

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "\exists"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
F \arrow[r, two heads, "\pi"] & P
\end{tikzcd}$$

   Так как модуль проективен, то найдётся пунктирная стрелка. Значит, $F \cong P \oplus \operatorname{Ker} \pi$. Доказательство данного факта мной опущено. $\square$

Примеры.

- Пусть $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Тогда $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ является R-модулем, но $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, значит, модули $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ все проективны.
- Можно предъявить проективный модуль, исходя из топологического факта о том, что шар нельзя причесать.

Определение 1.5.2 (Проективная резольвента модуля M)**.** Ацикличный комплекс вида $\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$, где P_i — проективные модули.

В будущем докажем, что любые две проективные резольвенты гомотопически эквивалентны.

Лекция V

18 марта 2024 г.

1.6 Резольвенты. Левый производный функтор

Зафиксируем некоторый аддитивный функтор $\mathscr{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$. Пусть у объекта $A \in \mathscr{A}$ имеется проективная резольвента, которую я выделил стрелками $\rightsquigarrow$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, squiggly] & P_1 \arrow[r, squiggly] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, squiggly] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, squiggly] & 0
\end{tikzcd}$$

Иными словами, проективная резольвента — это некоторый морфизм комплексов P и $A_\bullet$. Под комплексом $A_\bullet$ подразумевается такой комплекс, в котором в нулевой градуировке сидит A, а в остальных — нули (следовательно, все дифференциалы — тоже нули).

Применим $\mathscr{F}$ к верхней строчке. Предположим, что $\mathscr{F}(0) = 0$? Тогда получится комплекс вида

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{F}(P_1) \longrightarrow \mathscr{F}(P_0) \longrightarrow 0$$

Чуть ниже мы определим $L_n\mathscr{F}(A) \coloneqq H_n\mathscr{F}(P)$ — левый производный функтор, измеряющий неточность $\mathscr{F}$ — но пока, например, неясна корректность (независимость от резольвенты) такого определения.

Теорема 1.6.1. Пусть P_i проективные, сверху комплекс (и ноль в верхней строчке вообще-то неважен), снизу — точный комплекс.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & A \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Тогда найдутся пунктирные стрелки, и они определены с точностью до гомотопии.

Доказательство.

- – Сначала построим $f_i : P_i \to Q_i$.

    $Q_0 \to B$ сюръективно, значит, найдётся f_0, такое, что квадрат коммутативен.

  – Далее по индукции: пусть построены $f_0, \ldots, f_n$.

    $$\begin{tikzcd}
    P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_{n+1}"] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
    Q_{n+1} \arrow[r] & Q_n \arrow[r, "d^Q_{n-1}"] & Q_{n-1}
    \end{tikzcd}$$

    Хочется заполучить стрелку $P_{n+1} \to Q_{n+1}$, воспользовавшись проективностью P_{n+1}. Для этого надо найти сюръективное $Q_{n+1} \to ?$. Так как внизу — точная последовательность, то $Q_{n+1} \to \operatorname{Ker}(d^Q_{n-1})$ подойдёт: оно сюръективно, так как $P_{n+1} \to P_{n-1}$ нулевой, а квадрат $\begin{tikzcd} P_n \arrow[r] \arrow[d] & P_{n-1} \arrow[d] \\ Q_n \arrow[r] & Q_{n-1} \end{tikzcd}$ коммутативен. Тем самым, по определению проективного модуля $\exists f_{n+1}$.

- – Теперь пусть имеются два морфизма комплексов, продолжающих f, f_i и g_i.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f_1"'] \arrow[d, shift left, "g_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f_0"'] \arrow[d, shift left, "g_0"] & A \arrow[d, dashed, "f"] & \\
\cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Распишем разность: пусть $h_i := f_i - g_i$. Понятно, что $A \to Q_0$ надо взять нулевым.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h_0"] \arrow[dl, dashed, "s_0"'] & A \arrow[r] \arrow[d, dashed, "0"] \arrow[dl, dashed, "0"'] & 0 \arrow[dl, dashed, "0"'] \\
\cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r, "d_{-1}^Q"'] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

s_0 строится по основному свойству проективного модуля P_0: ведь $h_0(P_0) \subset \operatorname{Ker}(d_{-1}^Q) = \operatorname{Im} d_0^Q$

– Далее индукция. Пусть построены $s_0, \ldots, s_{n-1}$, строим s_n.

$$\begin{tikzcd}
& P_n \arrow[r, "d_{n-1}^P"] \arrow[d, dashed, "h_n"] \arrow[dl, dashed, "s_n"'] & P_{n-1} \arrow[r, "d_{n-2}^P"] \arrow[d, dashed, "h_{n-1}"] \arrow[dl, "s_{n-1}"'] & P_{n-2} \arrow[dl, "s_{n-2}"'] \\
Q_{n+1} \arrow[r, "d_n^Q"] & Q_n \arrow[r, "d_{n-1}^Q"] & Q_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

Хочется, чтобы выполнялось $h_n = d_n^Q s_n + s_{n-1} d_{n-1}^P$, эквивалентно $d_n^Q s_n = h_n - s_{n-1} d_{n-1}^P$.

Надо проверить, что образ правой части лежит в $\operatorname{Im}(d_n^Q)$, то есть $\operatorname{Ker}(d_{n-1}^Q)$. Применим d_{n-1}^Q. Получим

$$d_{n-1}^Q h_n - d_{n-1}^Q s_{n-1} d_{n-1}^P = h_{n-1} d_{n-1}^P - (h_{n-1} - s_{n-2} d_{n-2}^P) d_{n-1}^P = 0$$

Тем самым, s_n действительно найдётся согласно свойству проективного модуля.

□

Следствие 1.6.1. *Любые две проективные резольвенты одного и того же объекта гомотопически эквивалентны.*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d, shift left, "f"] & A_\bullet \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}"] \\
Q \arrow[r] \arrow[u, shift left, "g"] & A_\bullet
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, shift left, "fg"] & A_\bullet \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}"] \\
P \arrow[r] & A_\bullet
\end{tikzcd}$$

Строим по только что доказанной теореме f, g, по теореме $fg \simeq \mathrm{id}_Q$ и $gf \simeq \mathrm{id}_Q$.

Таким образом, определение левого производного функтора L_n корректно. Возможно, надо требовать, чтобы $\mathscr{F}$ сохранял нуль, я не знаю.

С некоторой точки зрения «правильно» рассматривать категорию комплексов с точностью до гомотопической эквивалентности, назовём её $\mathscr{HoComp}(\mathscr{A})$: там объекты — $\operatorname{Obj}\mathscr{A}$, а группа морфизмов $\operatorname{Mor}_{\mathscr{HoComp}(\mathscr{A})}(P, Q) = \operatorname{Mor}(\mathscr{Comp}(\mathscr{A}))/\operatorname{Ho}(P, Q)$, где $Ho(P, Q)$ — группа морфизмов, гомотопных 0.

Примеры (Что такое L_0 от точного справа функтора).

- Предположим, что $\mathscr{F}$ точен справа. Тогда

$$\mathscr{F}(P_1) \longrightarrow \mathscr{F}(P_0) \longrightarrow \mathscr{F}(A) \longrightarrow 0$$

  точна. $L_0\mathscr{F}(A) = H_0(\mathscr{F}(P)) = \operatorname{CoKer}(\mathscr{F}(P_1) \to \mathscr{F}(P_0))$. Если функтор точен справа, то $\operatorname{CoKer}(\mathscr{F}(P_1) \to \mathscr{F}(P_0)) = \mathscr{F}(A)$.

  Тем самым, $L_0\mathscr{F} = \mathscr{F}$.

- Обратно, если $L_0\mathscr{F} = \mathscr{F}$, то $\mathscr{F}$ сохраняет коядра, значит, точен справа. (По-хорошему, надо ещё проверить, что $L_0\mathscr{F}$ действует на морфизмах так же, но это банально).

Следствие 1.6.2. *Если P_A, P_B — проективные резольвенты A, B соответственно, и $f : A \to B$, то $\exists \widetilde{f} : P_A \to P_B$, делающий диаграмму коммутативной. Он определён однозначно с точностью до гомотопии.*

$$\begin{tikzcd} P_A \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & A_\bullet \arrow[d, "f"'] \\ P_B \arrow[r] & B_\bullet \end{tikzcd}$$

Здесь $A_\bullet$ — комплекс, где A сосредоточен в нулевом члене.

Таким образом, морфизму f объектов из $\mathscr{A}$ сопоставляется морфизм резольвент $\widetilde{f}$, а он, в свою очередь, индуцирует морфизм гомологий $H_n(P_A) \to H_n(P_B)$. Значит, конструкция L функториальна.

1.6.1 Длинная точная последовательность левых производных функторов

Зафиксируем некоторый функтор $\mathscr{F}$. Далее мы исследуем $L_n\mathscr{F}$, для упрощения записи будем писать $L_n \coloneqq L_n\mathscr{F}$.

Пусть имеется короткая точная последовательность $0 \to A \to B \to C \to 0$ в $\mathscr{A}$. Построим длинную точную последовательность производных функторов. Это так говорится? Скорее всё-таки их значений на A, B, C

$$\cdots \to L_1(A) \to L_1(B) \to L_1(C) \to L_0(A) \to L_0(B) \to L_0(C) \to \cdots$$

Для получения такой штуки было бы неплохо заполучить точную последовательность резольвент $P_A \to P_B \to P_C$, причём не абы какую, а сохраняющую свою точность под действием любого аддитивного функтора. Оказывается, это сделать несложно, и в этом нам поможет лемма о подкове.

Лемма 1.6.1 (О подкове). *Пусть P — проективный модуль, все строки и столбцы (состоящие из чёрных сплошных стрелок) точны.*

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[r, dashed, "i"] \arrow[d] & Q \oplus P \arrow[r, dashed, "\pi"] \arrow[d, dashed] & P \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d, dashed] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Утверждается, что диаграмму можно достроить до коммутативной, добавив зелёные пунктирные стрелки. Новые строки и столбцы также станут точны.

Доказательство. Так как P — проективен, а g — эпи, то найдётся сечение s такое, что $gs = h_C$.

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[r, dashed, "i"] \arrow[d, "h_A"'] & Q \oplus P \arrow[r, dashed, "\pi"] \arrow[d, dashed, "h_B"'] & P \arrow[d, "h_C"'] \arrow[dl, dotted, "s"'] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Определим стрелку h_B исходя из того, что квадраты должны в итоге получиться коммутативными. Из коммутативности левого квадрата $h_B(u, 0) = f(h_A(u))$. Из коммутативности правого треугольника $h_B(0, v) = h_C(v) = gs(v)$. Тем самым, подойдёт $h_B(u, v) \coloneqq f(h_A(u)) + s(v)$.

При таком определении правый квадрат будет коммутативен: $g(s(v)) = h_C(\pi(u, v)) \stackrel{?}{=} g(h_B(u, v)) = g(s(v))$, так как $gf = 0$.

Также несложно убедиться, что построенный морфизм h_B — эпи (видимо, диаграммный поиск). $\square$

Теорема 1.6.2. Для короткой точной последовательности $0 \to A \to B \to C \to 0$ существует точная последовательность резольвент $0 \to P_A \to P_B \to P_C \to 0$, точность которой сохраняется под действием любого аддитивного функтора.

Доказательство. Возьмём произвольные резольвенты P_A, P_C. Резольвенту P_B будем строить пошагово, по индукции. $(P_B)_0 \coloneqq (P_A)_0 \oplus (P_C)_0$ строится прямым применением леммы о подкове.

Далее необходимо провести индукционный переход.

$$\begin{tikzcd}
 & (P_A)_{n+1} \arrow[r, dashed, "i"] \arrow[d, two heads] & (P_A)_{n+1} \oplus (P_C)_{n+1} \arrow[r, dashed, "\pi"] \arrow[d, dashed, "d_n^B"] & (P_C)_{n+1} \arrow[d, two heads] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(d_{n-1}^A) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \operatorname{Ker}(d_{n-1}^B) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \operatorname{Ker}(d_{n-1}^C) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & (P_A)_n \arrow[r] \arrow[d, "d_{n-1}^A"] & (P_B)_n \arrow[r] \arrow[d, "d_{n-1}^B"] & (P_C)_n \arrow[r] \arrow[d, "d_{n-1}^C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(d_{n-2}^A) \arrow[r] & \operatorname{Ker}(d_{n-2}^B) \arrow[r] & \operatorname{Ker}(d_{n-2}^C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Вычленим некоторый кусочек диаграммы, и попробуем применить лемму о подкове для получения d_n^B. Для этого необходимо потребовать от стрелки $\operatorname{Ker}(d_{n-1}^B) \to \operatorname{Ker}(d_{n-1}^C)$, чтобы она была эпиморфизмом.

Докажем последнее по индукции: короткая последовательность ядер $0 \to \operatorname{Ker}(d_n^A) \to \operatorname{Ker}(d_n^B) \to \operatorname{Ker}(d_n^C) \to 0$ точна (так как ядро точно слева, то точность в остальных членах не вызывает сомнений, надо лишь проверить эпиморфность). В качестве базы здесь удобно применить лемму о змее:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(d_{-1}^A) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \operatorname{Ker}(d_{-1}^B) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \operatorname{Ker}(d_{-1}^C) \arrow[d, hook] \arrow[ddll, dashed, rounded corners, to path={-- ([xshift=4ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-2ex]\tikztostart.south |- Z) -| ([xshift=-14ex]\tikztotarget.west |- Z) |- (\tikztotarget)}] & \\
0 \arrow[r] & P_A \arrow[r] \arrow[d, "d_{-1}^A"] & P_B \arrow[r] \arrow[d, "d_{-1}^B"] & P_C \arrow[r] \arrow[d, "d_{-1}^C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

А индукционный переход я не знаю, ну, можно просто убедиться, использовав определение d_n^B из леммы о подковы.

Тем самым, так как прямая сумма проективных проективна, то $(P_A)_{n+1} \oplus (P_C)_{n+1} \twoheadrightarrow \operatorname{Ker} d_{n-1}^B$, и определение резольвенты B по индукции корректно.

Точность $0 \to P_A \to P_B \to P_C$ под действием всякого аддитивного функтора, конечно, сохраняется, так как $(P_B)_n = (P_A)_n \oplus (P_C)_n$, а аддитивные функторы сохраняют бипроизведение. $\square$

Следствие 1.6.3 (Длинная точная последовательность производных функторов)**.** *Для короткой точной последовательности* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *имеет место длинная точная последовательность*

$$\cdots \to L_1(A) \to L_1(B) \to L_1(C) \to L_0(A) \to L_0(B) \to L_0(C) \to \cdots$$

Доказательство. Из (теорема 1.6.2) найдётся точная последовательность проективных резольвент $0 \to P_A \to P_B \to P_C \to 0$. Применяя $\mathscr{F}$, получаем точную последовательность $0 \to \mathscr{F}(P_A) \to \mathscr{F}(P_B) \to \mathscr{F}(P_C) \to 0$.

Возьмём у $\mathscr{F}(P_A), \mathscr{F}(P_B), \mathscr{F}(P_C)$ гомологии. Составленная из них длинная точная гомологическая последовательность как раз и сконструирует искомую длинную точную последовательность левых производных функторов. $\square$

Замечание. Если $\mathscr{F}$ точен справа, то длинная точная последовательность производных функторов обрывается эпиморфизмом: $L_0(B) \to L_0(C) \to 0$