

Матанализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков
Конспектировал Леонид Данилевич

III семестр, осень 2023 г.

Оглавление

0.1	Литература	2
1	Теория меры	3
1.1	Меры	4
1.2	Обобщения	6
1.2.1	Область задания меры (системы множеств)	6
1.3	Поговорим про интеграл	7
1.3.1	Про счётную аддитивность	9
1.3.2	Продолжение меры	11
1.3.3	Предмера	14
1.4	Структура измеримых множеств	17
1.4.1	Множества меры нуль	17
1.5	Двоичные (диадические) кубы	20
1.5.1	Поведение меры Лебега при линейных отображениях	21
2	Интеграл Лебега	24
2.1	Измеримые отображения	25
2.2	Грани и предельные переходы	27
2.3	Интеграл	28
2.4	Применения интеграла	29
2.5	Интегралы от знакопеременных функций	30
2.5.1	Про линейность интеграла	31
2.6	Приближение функций из класса L^p	32
2.6.1	Связь интегралов Лебега и Римана	35
2.7	Теоремы Тонелли и Фубини	36
2.7.1	Как применять	39
2.8	Свёртки. Приближение функций с помощью свёрток	39
2.8.1	Меры с плотностью	40
2.8.2	Образ меры	41
2.8.3	Свойства свёртки	41

0.1 Литература

1. Б. М. Макаров «Теория меры и интеграла»
2. ? «Интеграл Лебега»
3. Халмош «Теория меры»

Глава 1

Теория меры

Лекция I

6 сентября 2023 г.

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция.

Для того, чтобы интеграл Римана-Дарбу существовал, нам надо, чтобы она была какой-то хорошей — с ограниченными колебаниями, часто просто требуется кусочная непрерывность. А как быть иначе?

Запишем такое, не совсем верное рассуждение.

Рассуждение. Пусть $|f(x)| \leq M$ при $x \in [a, b]$. Разобьём отрезок $[-M, M]$ в объединение промежутков $[-M, M] = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k$, будем считать, что $\forall k : |I_k| < \varepsilon$.

Обозначим за $e_j := f^{-1}(I_j)$. Видно, что $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_k = [a, b]$ — прообразы отрезков I_j образуют разбиение $[a, b]$.

Оценим суммы Дарбу следующим образом:

$$S_{\Delta} f \leq \sum_{j=1}^k \beta_j |e_j| \quad s_{\Delta} f \geq \sum_{j=1}^k \alpha_j |e_j|$$

где $|e|$ — «длина» множества e .

Заметим, что верхние и нижние суммы близки: $S_{\Delta} f - s_{\Delta} f = \sum_{j=1}^k (\beta_j - \alpha_j) |e_j| \leq \varepsilon \sum_{j=1}^k |e_j| = \varepsilon(b-a)$.

Таким образом, проинтегрировали любую ограниченную функцию. В чём проблема? \square

Как естественным образом определить длину множества $|e|$?

Надо, чтобы длина была аддитивной: $|e \sqcup f| = |e| + |f|$.

Замечание. Можно определить длину на всех подмножествах $[a, b]$, но такое определение не конструктивно, и к тому же не единственно.

Пусть I — конечный промежуток, $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ — тоже конечные промежутки, такие, что $I = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} I_j$.

Также хочется, чтобы предельные переходы выполнялись: $|I| = \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|$. Это называется *счётной аддитивностью*.

1.1 Меры

Пусть X — множество, \mathcal{A} — система его подмножеств. Пока будем считать только, что $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Определение 1.1.1 (Функция множества). *Вещественная функция множества $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, или комплексная функция множества $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$.*

Вещественная функция множества $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ называется *неотрицательной*.

Иногда также разрешают функции приобретать значения на расширенной прямой $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$.

Определение 1.1.2 (Мера). Аддитивная функция $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$.

Аддитивность означает, что в случае $e_1, \dots, e_k \in \mathcal{A}$, если $e := \bigsqcup_{j=1}^k e_j \in \mathcal{A}$, то $\phi(e) = \phi(e_1) + \dots + \phi(e_k)$.

Замечание. Если ϕ — аддитивная функция, то $\phi(\emptyset) = \phi(\emptyset) + \phi(\emptyset)$, откуда $\phi(\emptyset) = 0$.

Примеры.

- Пусть $\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$ — совокупность конечных промежутков, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ — совокупность всех промежутков.

Тогда для обоих семейств можно ввести меру $\phi(|I|) = |I|$.

Заметим, что аддитивность действительно выполняется: если отрезок $[a, b]$ разбит на отрезки $[a_0, a_1], \dots, [a_{n-1}, a_n]$, где $a_0 = a, a_n = b$, то и правда

$$b - a = \sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1})$$

- То же самое можно сделать в \mathbb{R}^n : введём множества ограниченных и всех прямоугольных параллелепипедов.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) &= \{I_1 \times \dots \times I_n \mid \text{все } I_j \text{ — конечные промежутки}\} \\ \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) &= \{I_1 \times \dots \times I_n \mid \text{все } I_j \text{ — промежутки}\} \end{aligned}$$

Обозначим за V_n объём на \mathcal{P} : $V_n(I_1 \times \dots \times I_n) = |I_1| \cdot \dots \cdot |I_n|$, где бесконечность в произведении трактуется так: если есть хотя бы один ноль, то произведение равно нулю, иначе бесконечно.

Почему эта мера аддитивна?

Пусть $Q, Q_1, \dots, Q_k \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, причём $Q = \bigsqcup_{j=1}^k Q_j$.

Лемма 1.1.1. $V_n(Q) = \sum_{j=1}^k V_n(Q_j)$.

Доказательство. Пусть f — функция на Q , определим

$$J(f) = \int_{I_n} \left(\dots \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots \right) dx_n$$

J , правда, определён не всегда — иногда какая-то промежуточная функция может быть не интегрируема по Риману-Дарбу.

J корректно определена для некоторой совокупности функций, которые образуют линейное пространство.

Рассмотрим $K = \delta_q \times \dots \times \delta_n \subset Q$. Тогда для χ_K — характеристической функции K — J определён, причём $J(\chi_K) = |\delta_1| \cdot \dots \cdot |\delta_n| = V_n(K)$.

Отсюда видно, что так как $\chi_Q = \sum_{j=1}^k \chi_{Q_j}$, то $V_n(Q) = \sum_{j=1}^k V_n(Q_j)$. \square

Пусть $\phi : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ — аддитивная функция множеств. ϕ называется *счётно аддитивной*, если для $a \in \mathcal{A}$, $\{a_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ верно $a = \bigsqcup_{j=1}^\infty a_j \Rightarrow \phi(a) = \sum_{j=1}^\infty \phi(a_j)$.

Теорема 1.1.1. Объём в \mathbb{R}^n — счётно аддитивная функция на $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ (и на $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ тоже, но пока не надо).

Доказательство.

Лемма 1.1.2. Пусть $Q_1, \dots, Q_k, Q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$.

1. Если Q_1, \dots, Q_k попарно не пересекаются, и $\forall j : Q_j \subset Q$, то $\sum_{j=1}^k V_n(Q_j) \leq V_n(Q)$.

2. Если $Q \subset \bigcup_{j=1}^k Q_j$ (условий на дизъюнктность нет), то $V_n(Q) \leq \sum_{j=1}^k V_n(Q_j)$.

Доказательство леммы.

1. $\sum_{j=1}^k \chi_{Q_j} \leq \chi_Q$ (поточечно), применяем ранее определённый функционал J .
2. $\sum_{j=1}^k \chi_{Q_j} \geq \chi_Q$ (поточечно), применяем ранее определённый функционал J .

\square

Пусть $Q, Q_j \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, где $j \in \mathbb{N}$, $Q = \bigsqcup_{j=1}^\infty Q_j$.

- Рассмотрим k параллелепипедов $Q_1, \dots, Q_k \subset Q$. Применяя лемму, получаем $\sum_{j=1}^k V_n(Q_j) \leq V_n(Q)$. Это верно для каждого k , переходя к пределу сразу получаем $\sum_{j=1}^\infty V_n(Q_j) \leq V_n(Q)$.

Замечание. Эта часть верна для любой аддитивной меры.

- Докажем обратное: $\sum_{j=1}^\infty V_n(Q_j) \geq V_n(Q)$.

Пусть $Q = I_1 \times \dots \times I_n$. Если $\exists s : I_s = \emptyset$, то доказывать нечего.

Выберем $\varepsilon > 0$. Существуют замкнутые отрезки $\bar{I}_1, \dots, \bar{I}_s$, такие что $\bar{I}_j \subset I_j$, причём для $\bar{Q} = \bar{I}_1 \times \dots \times \bar{I}_n$ его объём уменьшился несильно: $V_n(Q) \leq V_n(\bar{Q}) + \varepsilon$.

Аналогично раздуем составляющие параллелепипеды: $\forall j \in \mathbb{N}$ построим $\tilde{Q}_j = \tilde{I}_1 \times \dots \times \tilde{I}_n$, так что открытый интервал $\tilde{I}_j \supset I_j$, причём $V_n(\tilde{Q}_j) \leq V_n(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$.

Теперь замкнутый параллелепипед покрывается открытыми, значит, можно выбрать конечное подпокрытие, сразу получив оценку (для некоего $k \in \mathbb{N}$)

$$V_n(Q) - \varepsilon \leq \sum_{j=1}^k \left(V_n(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \leq \sum_{j=1}^\infty \left(V_n(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right)$$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем требуемое $V_n(Q) \leq \sum_{j=1}^\infty V_n(Q_j)$. \square

1.2 Обобщения

1.2.1 Область задания меры (системы множеств)

Пусть X — множество, \mathcal{A} — система его подмножеств ($\emptyset \in \mathcal{A}$).

Определение 1.2.1 (Кольцо). Система множеств \mathcal{A} , такая что $\forall a, b \in \mathcal{A} : (a \cap b), (a \cup b), (a \setminus b) \in \mathcal{A}$.

Пример (Кольцо). Объединения конечного числа отрезков (или даже параллелепипедов 1.2.1) $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ или $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$.

Определение 1.2.2 (Алгебра). Кольцо \mathcal{A} , такое что $X \in \mathcal{A}$.

Замечание. В алгебре $\forall a \in \mathcal{A} : a^c \in \mathcal{A}$. В частности, из-за законов де Моргана достаточно проверять только одно из $(a \cup b), (a \cap b) \in \mathcal{A}$

Определение 1.2.3 (Полукольцо). Система множеств $\mathcal{A} \subset 2^X$, такое что $\forall a, b \in \mathcal{A} : (a \cap b) \in \mathcal{A}$, а разность $(a \setminus b)$ есть объединение конечного числа попарно непересекающихся подмножеств из \mathcal{A} .

Пример (Полукольцо). Отрезки и конечные отрезки (или даже параллелепипеды 1.2.1) $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$.

Пусть X, Y — множества, $\mathcal{A} \subset 2^X, \mathcal{B} \subset 2^Y$ — полукольца.

Определение 1.2.4 (Обобщённый прямоугольник). Произведение $a \times b$, где $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$.

Теорема 1.2.1. Множество обобщённых прямоугольников $\mathcal{C} = \{a \times b | a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$ есть полукольцо в $X \times Y$.

Доказательство.

- $\emptyset \in \mathcal{C} : \emptyset \times \emptyset = \emptyset$.
- $(a_1 \times b_1) \cap (a_2 \times b_2) = (a_1 \cap a_2) \times (b_1 \cap b_2)$, поэтому \mathcal{C} замкнуто относительно пересечения.
- Рассмотрим $u, v \in \mathcal{C}$. $u \setminus v = u \setminus (u \cap v)$, поэтому можно считать, что $v \in \mathcal{C}$.

Пусть $u = a_1 \times b_1, v = a_2 \times b_2$. Так как $v \subset u$, то $b_2 \subset b_1, a_2 \subset a_1$. Пусть $a_1 \setminus a_2 = \bigcup_{s=1}^n e_s$,
 $b_1 \setminus b_2 = \bigcup_{t=1}^m f_t$.

Несложно видеть, что $u \setminus v = \left(a_2 \sqcup \bigcup_{s=1}^n e_s \right) \times \left(b_2 \sqcup \bigcup_{t=1}^m f_t \right) \setminus (a_2 \times b_2)$, что есть объединение $(n+1)(m+1) - 1$ понятного обобщённого прямоугольника. \square

Замечание. Даже если \mathcal{A} и \mathcal{B} — кольца или алгебры, множества обобщённых прямоугольников могут всё равно образовывать лишь полукольцо.

Определение 1.2.5 (Мера на полукольце). Неотрицательная аддитивная функция множества (возможно, принимающая значения $+\infty$).

Пусть $\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$ — полукольцо конечных отрезков, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — нестрого возрастающая функция.

Определение 1.2.6 (Квазидлина, порождённая f). $\mu_f(\langle a, b \rangle) = f(b) - f(a)$.

Эта квазидлина, понятное дело, аддитивна, но не для всех функций она счётно аддитивна.

Контрпример. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$. Тогда $1 = f([0, 1)) \neq \sum_{i=1}^{\infty} f\left(\left[1 - \frac{1}{2^{i-1}}, 1 - \frac{1}{2^i}\right)\right) = 0$

Теорема 1.2.2. Пускай $\mathcal{A} \subset 2^X, \mathcal{B} \subset 2^Y$ — полукольца, μ и ν на них — (конечные) меры, определим меру на произведении

$$\gamma(u \times v) := \mu(u) \cdot \nu(v)$$

Утверждается, что γ аддитивна (??).

Лекция II

8 сентября 2023 г.

Пусть \mathcal{A} — полукольцо.

Определение 1.2.7. $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \bigsqcup_{j=1}^k d_j \mid d_j \in \mathcal{A} \right\}$ — всевозможные конечные дизъюнктные объединения.

Лемма 1.2.1. $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ есть кольцо множеств.

Доказательство. Пусть $u = c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s; v = d_1 \sqcup \dots \sqcup d_t$.

- Проверим, что $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ замкнуто относительно пересечения. Тогда

$$u \cap v = \bigsqcup_{i,j} (c_i \cap d_j)$$

- Проверим, что $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ замкнуто относительно разности при помощи индукции по t .

База: $t = 1$.

$$(c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s) \setminus d_1 = (d_1 \setminus c_s) \sqcup \dots \sqcup (c_s \setminus d_1)$$

Переход:

$$(c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s) \setminus (d_1 \sqcup \dots \sqcup d_t) = \left((c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s) \setminus (d_1 \sqcup \dots \sqcup d_{t-1}) \right) \cap \left((c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s) \setminus d_t \right)$$

- Проверим, что $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ замкнуто относительно объединения.

$$u \cup v = (u \setminus v) \sqcup (v \setminus u) \sqcup (u \cap v)$$

□

Пусть $\mathcal{B} \subset 2^X$ — полукольцо. Среди всех колец, $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}$ есть наименьшее, как их пересечение.

Факт 1.2.1. $\mathcal{C} = \mathcal{R}(\mathcal{B})$.

1.3 Поговорим про интеграл

$\mathcal{A} \subset 2^X$ — полукольцо, $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ — мера.

Определение 1.3.1 (Простая функция (относительно \mathcal{A})). Функция вида $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{e_i}$, где $e_i \in \mathcal{A}$, $\forall 1 \leq i < j \leq k : e_i \cap e_j = \emptyset$.

Определим «хиленький интеграл», который пока не будем обозначать \int :

Определение 1.3.2 (Интеграл от простой функции). $I_\mu(f) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(e_j)$, если это имеет смысл (считается, что $0 \cdot \infty = 0$, но $(-\infty) + (+\infty)$ не определено).

Лемма 1.3.1. Интеграл от простой функции не зависит от её представления в виде суммы.

Доказательство. Пусть $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{e_i} = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{e'_j}$, где $\alpha_i, \beta_j \neq 0$.

Обозначим $A = \text{supp } f = \{x | f(x) \neq 0\}$. Очевидно, (e_1, \dots, e_k) , как и (e'_1, \dots, e'_m) — разбиения A . У них есть общее измельчение e'' , причём на каждом элементе $e''_{i,j} := e_i \cap e'_j$ $\alpha_i = \beta_j$, откуда оба интеграла от простой функции — через e и через e' — совпадают с определением через e'' .

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(e_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^m e_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \alpha_i \mu(e_{i,j}) = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(e_{i,j}) = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(e'_j)$$

Если e_i бесконечен, то один из конечного числа кусочков, на которые мы его разобьём $e_i \cap e'_j$ тоже будет бесконечным, поэтому в случае бесконечностей (если обе суммы определены) обе суммы будут бесконечностями одного знака. \square

Свойства (Интеграл от простой функции).

- $I_\mu(c \cdot f) = c \cdot I_\mu(f)$
- Если f, g — простые функции, то $f + g$ — тоже простая, причём $I_\mu(f + g) = I_\mu(f) + I_\mu(g)$ (если в сумме двух интегралов нет бесконечностей разных знаков).

Доказательство. Пусть $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{e_i}$; $g = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{e'_j}$, где $\alpha_i, \beta_j \neq 0$.

Положим $A := \bigsqcup_i e_i$; $B := \bigsqcup_j e'_j$. Рассмотрим $(A \setminus B), (B \setminus A), (A \cap B)$ — все они лежат в $\mathcal{R}(\mathcal{A})$.

Будем считать, что (e_1, \dots, e_k) как разбиение A измельчено так, что оно уважает разбиение $(A \setminus B) \sqcup (A \cap B) = A$.

Аналогично считаем, что e' уважает разбиение $(B \setminus A) \sqcup (B \cap A) = B$.

Теперь $\mathcal{E} = \{e_i \in \{e_i\}_{i=1}^k | e_i \subset A \cap B\}$ — разбиение $A \cap B$, ровно как и $\mathcal{E}' = \{e'_j \in \{e'_j\}_{j=1}^m | e'_j \subset A \cap B\}$. Измельчим те элементы, которые попали в \mathcal{E} и \mathcal{E}' , теперь ещё считаем, что e и e' уважают друг друга. Можно считать, что и f , и g определены на разбиениях $\{e_i\}_{i=1}^k \cup \{e'_j\}_{j=1}^m$, и теперь по определению $f + g$ является простой функцией, и $I(f + g) = I(f) + I(g)$. \square

- Для двух простых интегрируемых функций $f \leq g \Rightarrow I_\mu(f) \leq I_\mu(g)$.

Доказательство. Если интегралы — бесконечности одного знака, то доказывать нечего.

Иначе $I_\mu(g)$ и $I_\mu(-f)$ не являются бесконечностями разного знака, то есть определено

$$I_\mu(g - f) = I_\mu(g) - I_\mu(f)$$

Но $(g - f)$ — функция неотрицательная, по определению её интеграл неотрицателен. \square

Лемма 1.3.2. Пусть \mathcal{A} — полукольцо с мерой μ ; $a, a_1, \dots, a_k \in \mathcal{A}$.

- Если a_j попарно дизъюнкты, причём $a_j \subset a$, то $\sum_{j=1}^k \mu(a_j) \leq \mu(a)$.
- Если $a \subset \bigcup_{j=1}^k a_j$, то $\mu(a) \leq \sum_{j=1}^k \mu(a_j)$.

Доказательство.

- $I_\mu(\chi_{\bigcup a_j}) \leq I_\mu(\chi_a)$ так как $\chi_{\bigcup a_j} \leq \chi_a$.
- $I_\mu(\chi_{\bigcup a_j}) \geq I_\mu(\chi_a)$, так как $\chi_{\bigcup a_j} \geq \chi_a$. \square

Теорема 1.3.1. Пусть $\mathcal{A} \subset 2^X, \mathcal{B} \subset 2^Y; \mathcal{C} \subset 2^{X \times Y}$ — полукольцо обобщённых прямоугольников.

Пусть μ — мера на \mathcal{A} , ν — мера на \mathcal{B} . Определим произведение мер $(\mu \otimes \nu)(a \times b) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(a)\nu(b)$.

Утверждается, что $\mu \otimes \nu$ — мера на \mathcal{C} .

Доказательство. Докажем аддитивность. Пусть $P = a \times b$, причём $P = \bigsqcup_{j=1}^k P_j$, где $P_j = a_j \times b_j$.

$$(\mu \otimes \nu)(P) \stackrel{?}{=} \sum_{j=1}^k (\mu \otimes \nu)(P_j).$$

Разделим переменные: $\chi_{c \times d}(s, t) = \chi_c(s) \cdot \chi_d(t)$.

Дано, что $\chi_P = \sum_{j=1}^k \chi_{P_j}$, то есть $\chi_a(s)\chi_b(t) = \sum_{j=1}^k \chi_{a_j}(s)\chi_{b_j}(t)$.

Интегрируем:

$$\begin{aligned} I_{\nu, t}(\chi_a(s)\chi_b(t)) &= \sum_{j=1}^k I_{\nu, t}(\chi_{a_j}(s) \cdot \chi_{b_j}(t)) \Rightarrow \chi_a(s)\nu(b) = \sum_{j=1}^k \chi_{a_j}(s) \cdot \nu(b_j) \\ I_{\mu}(\chi_a(s)\nu(b)) &= \sum_{j=1}^k I_{\mu}(\chi_{a_j}(s) \cdot \nu(b_j)) \Rightarrow \mu(a)\nu(b) = \sum_{j=1}^k \mu(a_j)\nu(b_j) \end{aligned}$$

Данное доказательство также допускает бесконечные меры. □

Замечание. Пусть μ — мера на полукольце \mathcal{A} . Для $e \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ положим $\bar{\mu}(e) = I_{\mu}(\chi_e)$.

Введённая $\bar{\mu}$ — мера на $\mathcal{R}(\mathcal{A})$, понятно, что это единственно возможное продолжение — единственная (аддитивная) мера на $\mathcal{R}(\mathcal{A})$, такая, что её сужение на \mathcal{A} совпадает с μ .

Замечание. Если меру определять на кольце, а не на полукольце, то аддитивность достаточно проверять для двух множеств: $e_1, e_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \Rightarrow e_1 \cup e_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$.

1.3.1 Про счётную аддитивность

Определение 1.3.3 (Регулярная мера μ). Мера, удовлетворяющая условиям.

1. $\forall a \in \mathcal{A} : \mu(a) = \inf \{ \mu(U) | U \supset a; U \text{ открыто}; U \in \mathcal{A} \}.$
2. $\forall a \in \mathcal{A} : \mu(a) = \sup \{ \mu(U) | K \subset a; K \text{ компактно}; K \in \mathcal{A} \}.$

Пример (Регулярная мера). $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1.3.2 (А. Д. Александров). Пусть X — топологическое пространство, $\mathcal{A} \subset 2^X$ — полукольцо, μ — регулярная мера на \mathcal{A} .

Утверждается, что μ счётно аддитивна.

Доказательство. Рассмотрим $a \in \mathcal{A}, \{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$. Пусть $a = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} a_j$. Для доказательства $\mu(a) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(a_j)$ покажем неравенства в обе стороны.

- $\forall k \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^k \mu(a_j) \leq \mu(a)$ (1.3.2), производим предельный переход.
- Если $\mu(a_j) = \infty$, или $\mu(a) = 0$, то доказывать нечего.

Выберем $\varepsilon > 0$. Найдём такие $U_j, K \in \mathcal{A}$, что U_j открыты, K компактно, $U_j \supset a_j, K \subset a$, причём $\mu(U_j) \leq \mu(a_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$ и $\mu(a) \geq \mu(K) - \varepsilon$.

Так как из открытого покрытия компакта можно выделить конечное подпокрытие (и пусть N — максимальный номер элемента подпокрытия), то

$$\mu(a) - \varepsilon \leq \mu(K) \leq \sum_{j=1}^N \mu(U_j) \leq \sum_{j=1}^N \left(\mu(a_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(a_j) + \varepsilon$$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем необходимое. \square

Примеры (Счётно-аддитивные меры).

- Пусть X — возможно бесконечное множество, \mathcal{A} — семейство всех его конечных подмножеств. Можно определить $\mu(a) = \#(a)$ — мощность множества $a \in \mathcal{A}$.

Она счётно-аддитивная, так как если $a = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} a_j$, причём $a \in \mathcal{A}$, то почти все (кроме конечного числа) $a_j = \emptyset$.

- Можно продолжить эту меру на 2^X :

$$\mu(b) = \begin{cases} \#(b), & b \text{ конечно} \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Пусть $\{\xi_x\}_{x \in X} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ — числовое семейство. Можно определить $\nu(e) = \sum_{x \in e} \xi_x$.

Если семейство суммируемо, то мера конечна.

Лекция III

20 сентября 2023 г.

Вспомним, что мы определяли квазидлину $l_f(\langle a, b \rangle) = f(b) - f(a)$ для возрастающей функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Это функция может быть не счётно аддитивной, что случается, если f разрывна.

Поправим это определение, чтобы мера была аддитивной. Пусть f — возрастающая функция.

Рассмотрим $\mathcal{P}(\langle a, b \rangle)$ — полукольцо промежутков, содержащихся в $\langle a, b \rangle$.

Если $a \in \langle a, b \rangle$ (то есть $\langle a, b \rangle$ замкнут слева), то доопределим f на $(a - \delta, b)$ так, чтобы она осталась возрастающей. Аналогично, если $b \in \langle a, b \rangle$, то доопределим f на $\langle a, b + \delta \rangle$ так, что f по-прежнему возрастает.

Теперь мы можем считать, что f определена на открытом интервале, содержащем $\langle a, b \rangle$.

Определение 1.3.4 (Стилтьесова длина). Длина, определённая по формуле

$$\mu_f(\langle c, d \rangle) = \begin{cases} f(d-) - f(c-), & \langle c, d \rangle = [c, d) \\ f(d-) - f(c+), & \langle c, d \rangle = (c, d) \\ f(d+) - f(c+), & \langle c, d \rangle = (c, d] \\ f(d+) - f(c-), & \langle c, d \rangle = [c, d] \end{cases}$$

где $f(x_0+) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ и $f(x_0-) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$.

Предложение 1.3.1. Стилтьесова длина счётно аддитивна.

Доказательство. Выполняется теорема Александрова. Проверим, например, что для полуинтервала $[c, d)$ мера регулярна.

Рассмотрим $\varepsilon > 0$, для открытого подмножества, содержащего $[c, d)$ выберем $(c - \delta, d)$. Для достаточно маленьких δ : $f((c - \delta)+) > f(c-) - \varepsilon$. Для компактного подмножества, содержащегося в $[c, d)$, выберем $[c, d - \delta]$. Для достаточно маленьких δ : $f((d - \delta)+) > f(d-) - \varepsilon$.

Также можно проверить регулярность для бесконечных промежутков. \square

Предостережение. Для полукольца возможно бесконечных параллелепипедов теорема Александра не применима: $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ не регулярна сверху, всякий параллелепипед, содержащий $\mathbb{R} \times \{0\}$ уже имеет бесконечную меру.

1.3.2 Продолжение меры

Продолжать можно только счётно-аддитивные меры, иначе будет неоднозначно.

Определение 1.3.5 (σ -алгебра). Такая алгебра множеств $\mathcal{A} \subset 2^X$, что она замкнута относительно счётных операций: если семейство $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ лежит в \mathcal{A} , то $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ и $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Теорема 1.3.3. Пусть $\mathcal{C} \subset 2^X$ — система подмножеств X . Тогда в X есть наименьшая σ -алгебра, содержащая \mathcal{C} .

Доказательство. Пересечение любого множества σ -алгебр — σ -алгебра. Хотя бы одна есть — это 2^X . Тогда в качестве наименьшей подойдёт пересечение всех σ -алгебр, содержащих \mathcal{C} . \square

Теорема 1.3.4. Пусть $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ — полукольцо всех конечных прямоугольных параллелепипедов, а \mathcal{A} — наименьшая σ -алгебра, содержащая $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$.

Тогда объём на $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ единственным образом продолжается до счётно аддитивной меры λ_n — n -мерной меры Лебега на \mathcal{A} .

Схема доказательства.

- Обозначим объём n -мерный объём на параллелепипедах из $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ за v_n . Построим $v_n \rightsquigarrow v_n^*$, заданную на $2^{\mathbb{R}^n}$, которая не будет даже аддитивной.

Тем не менее, для всякого $P \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$: $v_n^*(a) = v_n(P)$

- Теперь сузим v_n^* на некоторую σ -алгебру, содержащую $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, причём там эта функция будет уже и аддитивной, и счётно аддитивной. \square

Факт 1.3.1. Все открытые, а значит, и все замкнутые множества, лежат в наименьшей σ -алгебре \mathcal{A} , содержащей $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Открытое множество представимо, как объединение кубов с рациональными координатами вершин, содержащихся в нём. \square

Пусть Y — топологическое пространство.

Определение 1.3.6 (Борелевская σ -алгебра). Наименьшая σ -алгебра подмножеств множества Y , содержащая все открытые множества. Обозначают $\mathcal{B}(Y)$.

Замечание. $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Факт 1.3.2. Пусть \mathcal{A} — алгебра подмножеств множества X . Следующие утверждения эквивалентны.

1. \mathcal{A} — σ -алгебра.
2. Для всех $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ верно, что $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.
3. Для всех $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ верно, что $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.
4. Для всех $A_i \in \mathcal{A}$, таких что $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ верно, что $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.
5. Для всех $A_i \in \mathcal{A}$, таких, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ верно, что $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.
6. Для всех $A_i \in \mathcal{A}$, таких, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ для $i \neq j$ верно, что $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Доказательство.

2 \iff 3 Закон де Моргана.

1 \iff (2 \wedge 3) По определению.

2 \Rightarrow 4 Очевидно.

4 \Rightarrow 2 Положим $\bar{A}_i := A_1 \cup \dots \cup A_i$. Тогда \bar{A}_i возрастают по включению, и $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bar{A}_i \in \mathcal{A}$.

4 \iff 5 Тоже закон де Моргана.

4 \Rightarrow 6 Пусть $A_i \in \mathcal{A}$, причём $A_i \cap A_j = \emptyset$ для $i \neq j$. Выберем $\tilde{A}_i := A_1 \cup \dots \cup A_i$. Согласно (4) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{A}_i \in \mathcal{A}$.

6 \Rightarrow 4 Пусть $A_i \in \mathcal{A}$, причём $A_i \subset A_{i+1}$. Положим $e_1 = A_1$, $e_j = A_j \setminus A_{j-1}$ для $j \geq 2$. Тогда $e_i \cap e_j = \emptyset$ для $i \neq j$, и $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} e_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$. \square

Факт 1.3.3. Пусть $\mathcal{A} \subset 2^X$ — σ -алгебра, μ — мера на \mathcal{A} . Следующие условия эквивалентны.

1. μ счётно аддитивна.

2. Если $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ для $i \neq j$, то $\mu\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$.

3. Если $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, то $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$.

Доказательство.

1 \iff 2 Так как \mathcal{A} — σ -алгебра, то $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ автоматически лежит в \mathcal{A} , и 1 тавтологично 2.

2 \Rightarrow 3 Пускай $A_1 \subset A_2 \subset \dots$. Введём $e_1 = A_1$, $e_j = A_j \setminus A_{j-1}$ для $j \geq 2$. $e_i \cap e_j = \emptyset$ для $i \neq j$. Тогда $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} e_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(e_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n e_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

3 \Rightarrow 2 То же самое в обратном порядке. \square

Предостережение. Монотонность по убывающим последовательностям не выполняется:

рассмотрев на $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ $A_n = (n, +\infty)$ видим, что хотя $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, и $\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu(\emptyset) = 0 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \infty$.

Теорема 1.3.5. Если $B_i \in \mathcal{A}$, $B_1 \supset B_2 \supset \dots$, причём $\mu(B_1) < +\infty$, то $\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(B_j)$.

Доказательство. Положим $A_i = B_1 \setminus B_i$.

Тогда $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i = B_1 \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, и $\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \mu(B_1) - \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu(B_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(B_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(B_1) - \mu(B_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$

Так как $\mu(B_1)$ конечна, то все производимые вычитания справедливы — не происходит вычитания бесконечности из бесконечности. \square

Замечание. Если мера конечна, то справедливо и обратное.

Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо его подмножеств, μ — мера на \mathcal{P} (аддитивная, но не факт, что счётно-аддитивная).

Определение 1.3.7 (Внешняя мера, построенная по μ). Функция μ^* , заданная на 2^X , определяемая по формуле

$$\mu^*(e) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(a_j) \mid a_j \in \mathcal{P}, e \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} a_j \right\}$$

Свойства.

- $\mu^*(\emptyset) = 0$. Так, покрытие счётным количеством пустых множеств имеет суммарную меру 0.
- $e_1 \subset e_2 \Rightarrow \mu^*(e_1) \leq \mu^*(e_2)$ — монотонность.
- $e \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \Rightarrow \mu^*(e) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(e_i)$ — счётная полуаддитивность.

Доказательство. Если хотя бы одно из $\mu^*(e_i)$ бесконечно, то доказывать нечего. Далее считаем, что $\forall i : \mu^*(e_i)$ конечно.

Выберем $\varepsilon > 0$. По определению внешней меры $\forall i, k \in \mathbb{N} : \exists a_{i,k} \in \mathcal{P}$, такие, что $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} a_{i,k} \supset e_i$, причём $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(a_{i,k}) \leq \mu^*(e_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$.

Тогда $e \subset \bigcup_{i,k \in \mathbb{N}} a_{i,k}$ и $\mu^*(e) \leq \sum_{i,k} \mu(a_{i,k}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(a_{i,k}) \leq \sum_i \mu^*(e_i) + \varepsilon$. □

- Если μ счётно аддитивна, то $\mu^*|_{\mathcal{P}} = \mu$.

Доказательство. Для $b \in \mathcal{P} : \mu^*(b) \leq \mu(b)$, так как можно выбрать покрытие из одного элемента.

Докажем, что $\mu(b) \leq \mu^*(b)$. Рассмотрим кольцо $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ — совокупность дизъюнктивных объединений $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_s$, где $e_i \in \mathcal{P}$. Мера μ единственным образом продолжается до меры $\bar{\mu}$ на $\mathcal{R}(\mathcal{P})$.

$$\text{Лемма 1.3.3. } \forall e \subset X : \mu^*(e) = \mu^\Delta(e) := \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(c_j) \mid c_j \in \mathcal{P} \text{ и } e \subset \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} c_i \right\}$$

Доказательство леммы.

$\mu^*(e) \leq \mu^\Delta(e)$, так как всякое дизъюнктивное покрытие является покрытием.

Если $e \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} a_i$, то можно рассмотреть дизъюнктивное покрытие множествами $\bar{a}_i := a_i \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_{i-1})$.

Так как $\bar{a}_j \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$ и $\bar{a}_j \subset a_j$, то $\bar{\mu}(\bar{a}_j) \leq \mu(a_j)$.

Согласно свойству $\mathcal{R}(\mathcal{P})$: $\bar{a}_j = \bigsqcup_{s=1}^{k_j} e_{j,s}$, где при данном j все $e_{j,s}$ попарно не пересекаются. Но при разных j они тем более не пересекаются, они лежат в разных \bar{a}_j .

Таким образом, $\bigcup_{j,s} e_{j,s} \supset e$, откуда $\mu^\Delta(e) \leq \sum_{j,s} \mu(e_{j,s}) = \sum_j \bar{\mu}(\bar{a}_j) \leq \sum_j \mu(a_j)$. Переходя к инфимуму, получаем $\mu^\Delta(e) \leq \mu^*(e)$. □

Используя лемму, рассмотрим произвольное дизъюнктивное покрытие $e_j \in \mathcal{P}$ такое, что $\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} e_j \supset e$. Введём $\tilde{e}_j := e_j \cup e$. Для них $\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} \tilde{e}_j = e$.

Согласно счётной аддитивности $\mu(e) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(\tilde{e}_j) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(e_j)$. Переходя к инфимуму, получаем искомое. \square

Контрпример (Счётная аддитивность важна). Пусть l_f — квазидлина, порождённая функцией $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

Покажем, что внешняя мера l_f^* везде равна нулю. Рассмотрим счётное покрытие прямой $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} [n, n+1) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [-2^n, -2^{n-1})$. Квазидлины всех составляющих полуинтервала равны 0, значит, внешняя мера прямой равна 0, но тогда по монотонности и внешние меры всех подмножеств тоже равны 0.

Лекция IV

27 сентября 2023 г.

1.3.3 Предмера

Пусть X — множество.

Вещи, обладающие свойствами внешней меры будут возникать у нас разными способами, поэтому удобно уже сейчас обобщить это понятие, аксиоматизировав его.

Определение 1.3.8 (Предмера). Функция $\gamma : 2^X \rightarrow \mathbb{R}_+$, обладающая свойствами

1. $\gamma(\emptyset) = 0$.
2. Монотонность $a \subset b \Rightarrow \gamma(a) \leq \gamma(b)$.
3. Счётная полуаддитивность $a \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} a_j \Rightarrow \gamma(a) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a_j)$.

Замечание. Из 3. следует 2., проверяется выбором $a_i = \begin{cases} b, & i = 1 \\ \emptyset, & i > 1 \end{cases}$. Более того, можно не требовать положительности, она следует из монотонности по отношению к пустому множеству.

Определение 1.3.9 (γ -измеримое множество $e \subset X$).

$$\forall a \subset X : \gamma(a) = \gamma(a \cap e) + \gamma(a \setminus e) = \gamma(a \cap e) + \gamma(a \cap e^c)$$

Теорема 1.3.6 (Лебег-Каратеодори). Совокупность Σ всех γ -измеримых множеств образует σ -алгебру на которой функция $\gamma|_{\Sigma}$ счётно-аддитивна.

Дополнение. Если $\gamma = \mu^*$, где μ — мера на полукольце \mathcal{P} , то все множества из \mathcal{P} автоматически γ -измеримы.

Дополнение. Если μ счётно аддитивна на исходном полукольце \mathcal{P} , то $\mu^*|_{\mathcal{P}} = \mu$.

Доказательство.

- Покажем, что Σ — алгебра множеств.
 - Определение симметрично относительно e и e^c , поэтому $e \in \Sigma \iff e^c \in \Sigma$.
 - $\emptyset \in \Sigma$ прямо из определения. Используя предыдущий пункт, $X \in \Sigma$.

- Пусть $e_1, e_2 \in \Sigma$. Проверим, что $e_1 \cap e_2 \in \Sigma$. Рассмотрим произвольное $a \subset X$. Запишем измеримость для e_1 при пересечении с a и измеримость для e_2 при пересечении с $a \cap e_1$.

$$\begin{aligned}\gamma(a) &= \gamma(a \cap e_1) + \gamma(a \cap e_1^c) \\ \gamma(a \cap e_1) &= \gamma(a \cap e_1 \cap e_2) + \gamma(a \cap e_1 \cap e_2^c)\end{aligned}$$

Отсюда подстановкой получаем

$$\gamma(a) = \gamma(a \cap e_1 \cap e_2) + \underbrace{\gamma(a \cap e_1 \cap e_2^c) + \gamma(a \cap e_1^c)}_{\text{хотим показать, что это } \gamma(a \cap (e_1 \cap e_2)^c)}$$

Записав измеримость e_1 при пересечении с $a \cap (e_1^c \cup e_2^c)$, получаем

$$\begin{aligned}\gamma(a \cap (e_1^c \cup e_2^c)) &= \gamma(a \cap (e_1^c \cup e_2^c) \cap e_1) + \gamma(a \cap (e_1^c \cup e_2^c) \cap e_1^c) = \\ &= \gamma(a \cap e_1 \cap e_2^c) + \gamma(a \cap e_1^c)\end{aligned}$$

- Так как $(e_1 \cup e_2)^c = (e_1^c \cap e_2^c)^c$ и $(e_1 \setminus e_2) = e_1 \cap e_2^c$, то Σ — действительно алгебра.

- Проверим «усиленную аддитивность»: для произвольного $a \subset X$, $b_1, b_2 \in \Sigma$, $b_1 \cap b_2 = \emptyset \Rightarrow$

$$\gamma(a \cap (b_1 \cup b_2)) = \gamma(a \cap b_1) + \gamma(a \cap b_2)$$

Данный факт потребуется для доказательства того, что Σ — σ -алгебра.

Доказательство напрямую следует из измеримости b_1 при пересечении с $a \cap (b_1 \cup b_2)$.

Отсюда по индукции видно, что для попарно непересекающихся $b_1, \dots, b_n \in \Sigma$:

$$\gamma\left(a \cap \bigcup_{j \in \mathbb{N}} b_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a \cap b_j)$$

- Проверим, что Σ является σ -алгеброй. Для этого достаточно проверить, что для счётного семейства $b_i \in \Sigma$: $b := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} b_j \in \Sigma$.

Чтобы доказать измеримость множества e , достаточно проверить неравенство $\gamma(a) \geq \gamma(a \cap e) + \gamma(a \setminus e)$, потому что неравенство в другую сторону следует из счётной полуаддитивности. Дополнительно можно считать, что $\gamma(a)$ конечно.

Выберем произвольное $a \in X$, для него

$$\gamma(a) = \gamma(a \cap (b_1 \cup \dots \cup b_n)) + \gamma(a \setminus (b_1 \cup \dots \cup b_n)) \geq \sum_{j=1}^n \gamma(a \cap b_j) + \gamma(a \setminus b)$$

Переходя к пределу $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\gamma(a) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(a \cap b_j) + \gamma(a \setminus b)$$

Так как $a \cap b = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (a \cap b_j)$, то из счётной полуаддитивности $\gamma(a \cap b) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a \cap b_j)$. Отсюда

$$\gamma(a) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(a \cap b_j) + \gamma(a \setminus b) \geq \gamma(a \cap b) + \gamma(a \setminus b)$$

- Проверим, что $\gamma|_{\Sigma}$ — «усиленно счётно-аддитивная мера», то есть для счётного семейства дизъюнктивных $b_j \in \Sigma$ ($b := \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} b_j$) и произвольного $\forall a \in X$:

$$\gamma \left(a \cap \bigcup_{j \in \mathbb{N}} b_j \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a \cap b_j)$$

При $a = X$ свойство обращается в обычную счётную аддитивность, но усиленная даётся даром.

С одной стороны, из счётной аддитивности γ : $\gamma(a \cap b) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a \cap b_j)$. С другой стороны,

$$\gamma(a \cap b) \geq \gamma(a \cap (b_1 \cup \dots \cup b_n)) = \sum_{j=1}^n \gamma(a \cap b_j)$$

- Докажем первое дополнение.

Достаточно показать, что для любого $e \in \mathcal{P}, a \in X$: $\mu^*(a) \geq \mu^*(a \cap e) + \mu^*(a \setminus e)$, обратное следует из полуаддитивности внешней меры.

Рассмотрим произвольное счётное покрытие $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ множества e элементами множества \mathcal{P} . Можно считать, что $\forall i : c_i \in e$ (пересекая каждое из c_i с e).

– Во-первых, по определению меры $\mu^*(a \cap e) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(c_i \cap e)$

– Во-вторых, оценим $\mu^*(a \setminus e)$.

Каждое $b_i := c_i \setminus e$ представимо в виде конечного объединения $b_i = \bigcup_{j=1}^{s_i} d_i^{(j)}$, где $d_i^{(j)} \in \mathcal{P}$ попарно дизъюнкты.

$\{d_i^{(j)}\}_{i,j}$ — счётная совокупность множеств из \mathcal{A} , покрывающая $a \setminus e$.

– Таким образом

$$\mu^*(a \cap e) + \mu^*(a \setminus e) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(\mu(c_i \cap e) + \sum_{j=1}^{s_i} \mu(d_i^{(j)}) \right)}_{\mu(c_i)}$$

Переходя к инфимуму по всем покрытиям получаем, что

$$\mu^*(a \cap e) + \mu^*(a \setminus e) \leq \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(c_i) = \mu^*(a)$$

- Наконец, для доказательства второго дополнения сошлёмся на пятый пункт свойств меры (1.3.7). \square

Определение 1.3.10 (Стандартное продолжение меры μ на полукольце $\mathcal{P} \subset 2^X$). Построенные данным образом Σ , и сужение $\mu^*|_{\Sigma}$ — счётно-аддитивная мера на σ -алгебре.

Примеры.

- Пусть v_n — объём на системе конечных n -мерных прямоугольных параллелепипедов (со сторонами, параллельными координатным осям).

Стандартное продолжение данной меры — *мера Лебега* λ_n , полученное множество $\Sigma \subset 2^X$ — множество *измеримых по Лебегу* множеств. Все Борелевские множества, разумеется, измеримы по Лебегу (1.3.6), но обратное неверно.

- Пусть λ_f — Стильесова длина, порождённая нестрого возрастающей функцией f . Она счётно аддитивна на полукольце промежутков. Её стандартное продолжение — *мера Лебега-Стилтьеса*. Здесь полученные измеримые множества — элементы Σ — вообще говоря, могут зависеть от f (при одной функции, порождающей меру, множество $x \subset X$ измеримо, но не при другой)

1.4 Структура измеримых множеств

1.4.1 Множества меры нуль

Факт 1.4.1. Пусть γ — предмера на X , рассмотрим такое подмножество $e \subset X$, что $\gamma(e) = 0$. Тогда e является γ -измеримым. В частности, все подмножества e имеют меру 0.

Доказательство. Проверим, что $\forall a \subset X : \gamma(a) \geq \gamma(a \cap e) + \gamma(a \setminus e)$.

Это так: по монотонности $\gamma(a \cap e) \leq \gamma(e) = 0$ и $\gamma(a \setminus e) \leq \gamma(a)$. □

Пусть $\gamma = \mu^*$, где μ — счётно-аддитивная мера на полукольце \mathcal{P} .

Факт 1.4.2. Множество $e \subset X$ — множество меры нуль $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists$ счётное семейство $b_i \in \mathcal{P}$, таких, что $\bigcup_i b_i \supset e$, и $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(b_i) < \varepsilon$.

Примеры (Множества меры нуль).

- Точка.
- Конечное или счётное число точек (например, \mathbb{Q}).
- Канторово множество — на n -м шаге его мера равна $(\frac{2}{3})^n$.

Замечание. Так как канторово множество континуально, то все его подмножества (коих $2^{|\mathbb{R}|}$) имеют меру нуль и измеримы по Лебегу. Отсюда получаем, что всего измеримых множеств на прямой $2^{|\mathbb{R}|}$, так как это уже мощность всех подмножеств прямой.

С другой стороны, Борелевских множеств всего континуум.

Схема доказательства. Пусть \mathcal{A}_0 — все интервалы с рациональными границами. Их счётное число. Но это пока даже не алгебра.

Обозначим за \mathcal{A}_1 все их счётные объединения, их континуально. Но это пока не σ -алгебра.

За \mathcal{A}_2 обозначим все счётные пересечения множеств из \mathcal{A}_1 . За \mathcal{A}_3 обозначим все счётные объединения множеств из \mathcal{A}_2 .

И так далее. Заведём трансфинитную индукцию, на первом несчётном ординале всё перестанет меняться. Объединение не более чем континуального числа континуальных множеств континуально. □

Определение 1.4.1 (Свойство точек множества X выполняется почти всюду). Множество точек, где она не выполняется, имеет меру нуль.

Пусть \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X , μ — счётно аддитивная мера на \mathcal{P} . Стандартное продолжение часто тоже будем обозначать через μ , иногда через $\bar{\mu}$.

Определение 1.4.2 (σ -множество относительно \mathcal{P}). Объединение счётного семейства элементов \mathcal{P} .

Все σ -множества измеримы.

Предложение 1.4.1. Если $e \subset X$ μ -измеримо, то $\mu(e) = \inf \{ \mu(b) | e \subset b, b — \sigma\text{-множество} \}$.

Доказательство. Так как по определению $\mu(e) = \mu^*(e) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(c_i) \mid c_i \in \mathcal{P}, \bigcup_i c_i \supset e \right\}$ то можно выбрать в качестве $b := \bigcup_i c_i$, b — σ -множество. \square

Замечание. Любое σ -множество b представимо в виде дизъюнктного объединения счётного числа элементов $d_j \in \mathcal{P}$.

Так как d_j дизъюнктны, то $\mu(b) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(d_j)$, вот такая простая формула меры σ -множества.

Теорема 1.4.1. Если c — μ -измеримое множество, и $\mu(c) < \infty$, то \exists убывающая по включению последовательность σ -множеств b_k , таких, что $\bigcap_{k=1}^{\infty} b_k \supset c$ и $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} b_k\right) = \mu(c)$. Иначе говоря, если $\tilde{c} := \bigcap_{k=1}^{\infty} b_k$, то $\mu(\tilde{c} \setminus c) = 0$.

Доказательство. Положим \tilde{b}_k — σ -множество, такое, что $\tilde{b}_k \supset c$, причём $\mu(\tilde{b}_k) < \mu(c) + \frac{1}{k}$. Назначим $b_k = \tilde{b}_1 \cap \dots \cap \tilde{b}_k$.

Лемма 1.4.1. Пересечение двух (а значит, и конечного числа) σ -множеств — σ -множество.

Доказательство леммы.

Если $u = \bigcup_{i=1}^{\infty} e_i, v = \bigcup_{j=1}^{\infty} g_j$, где $e_i, g_j \in \mathcal{P}$, то $u \cap v = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} (e_i \cap g_j)$ \square

Согласно лемме b_k — σ -множество. Так как $\mu(b_k) \leq \mu(c) + \frac{1}{k}$, то $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} b_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(b_k) = \mu(c)$. \square

Определение 1.4.3 ($\delta\sigma$ -множество относительно \mathcal{P}). Пересечение счётного семейства σ -множеств.

Определение 1.4.4 (σ -конечная мера μ). Такая мера, что $\exists E_1 \subset E_2 \subset \dots$, все $E_i \in \Sigma$, все $\mu(E_i) < +\infty$, причём $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = X$.

Примеры.

- Считаящая мера на несчётном множестве не является σ -конечной.
- Мера Лебега в \mathbb{R}^n σ -конечна.

Лекция V

30 сентября 2023 г.

По-прежнему, \mathcal{A} — полукольцо, μ — мера на \mathcal{A} , обозначим её стандартное продолжение тоже за μ .

Теорема 1.4.2. Пусть стандартное продолжение меры μ на полукольце \mathcal{P} σ -конечно. Пусть $d \subset X$ — μ -измеримо. Тогда $\exists \delta\sigma$ -множество $D \supset d$, такое, что $\mu(D \setminus d) = 0$.

Доказательство.

Лемма 1.4.2. Пространство X σ -конечно, если и только если $\exists e_1, e_2, \dots \subset X: \mu(e_i) < \infty$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty} e_i = X$.

Доказательство леммы.

Как обычно, если σ -конечно, то $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ в объединении дают X , рассмотрим $e_i := E_{i+1} \setminus E_i$. Наоборот, если даны e_i , то $E_i := \bigcup_{j=1}^i e_j$. \square

Выберем $\varepsilon > 0$.

Пусть $e_i \in \Sigma$ — измеримы, причём $\mu(e_i) < \infty$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty} e_i = X$. Обозначим за $d_i := d \cap e_i$. Тогда $\forall i : \mu(d_i) < \infty$. Согласно (1.4.1): $\exists \sigma$ -множество $D_i : \mu(D_i \setminus d_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Тогда подойдёт $D := \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$: $\mu(D \setminus d) < \varepsilon$.

Но отсюда пересечение D по всем $\varepsilon = \frac{1}{N}$ даёт подходящее $\delta\sigma$ -множество. \square

Пусть $\mathcal{C} \subset 2^X$ — σ -алгебра, на которой задана счётно-аддитивная мера ν .

Пусть \mathcal{A} — полукольцо, лежащее в \mathcal{C} , μ — счётно-аддитивная мера на \mathcal{A} , $\bar{\mu}$ — стандартное продолжение меры (на μ -измеримые множества из Σ).

Пусть ν — мера на \mathcal{C} , такая, что $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$, причём μ — σ -конечна.

Определение 1.4.5 (Полная мера). Такая счётно-аддитивная мера ν на σ -алгебре \mathcal{C} , что $\forall b \in \mathcal{C} : \nu(b) = 0 \Rightarrow \forall a \subset b : a \in \mathcal{C}$.

Теорема 1.4.3. Если мера ν полна, то $\Sigma \subset \mathcal{C}$, причём меры ν и μ совпадают на Σ .

Доказательство.

- Пусть $A \in \Sigma$ есть σ -множество относительно полукольца \mathcal{A} . Тогда $A = a_1 \sqcup a_2 \dots$, где $a_j \in \mathcal{A}$

Отсюда $A \in \mathcal{C}$, причём $\nu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(a_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(a_j) = \bar{\mu}(A)$.

- Пусть $B \in \Sigma$ — $\delta\sigma$ -множество относительно полукольца \mathcal{A} , то есть $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где A_k — σ -множества.

Тогда $B \in \mathcal{C}$. Если $\bar{\mu}(B) < \infty$, то множества A_j тоже можно выбрать конечной меры.

Тогда $\nu(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\mu}(A_k) = \bar{\mu}(B)$.

- Пускай $E \in \mathcal{C} \cap \Sigma$. Найдётся такое $\delta\sigma$ -множество $E_1 \supset E$: $\bar{\mu}(E_1 \setminus E) = 0$ (если E бесконечно, то используем σ -конечность μ), причём так как E_1 — $\delta\sigma$ -множество относительно \mathcal{A} , то про него уже известно, что $\nu(E_1) = \bar{\mu}(E_1)$. Тогда $E_1 \setminus E$ тоже содержится в $\mathcal{C} \cap \Sigma$.

Лемма 1.4.3. Если $b \in \mathcal{C} \cap \Sigma$, причём $\bar{\mu}(b) = 0$, то $\nu(b) = 0$.

Доказательство леммы.

Найдётся b_1 — $\delta\sigma$ -множество, такое, что $b_1 \supset b$ и $\bar{\mu}(b_1) = 0$. Тогда $\nu(b_1) = \bar{\mu}(b_1) = 0$, откуда $\nu(b) \leq \nu(b_1) = 0$. \square

Лемма влечёт $\nu(E_1 \setminus E) = 0$. Отсюда на всех множествах из $\mathcal{C} \cap \Sigma$ меры $\bar{\mu}$ и ν совпадают.

- Проверим, что если ν полна, то $\Sigma \subset \mathcal{C}$.

Если $\bar{\mu}(e) = 0$, то $e \in \mathcal{C}$, так как найдётся $\delta\sigma$ -множество $e_1 \supset e$: $\bar{\mu}(e_1) = 0$. Из полноты меры автоматически $e \in \mathcal{C}$.

Теперь рассмотрим $D \in \Sigma$. Найдётся $\delta\sigma$ -множество $\bar{D} \supset D$, такое, что $\bar{\mu}(\bar{D} \setminus D) = 0$, то есть $\bar{D} \setminus D \in \mathcal{C}$. Таким образом, $D \in \mathcal{C}$, причём $\nu(\bar{D} \setminus D) = 0$. \square

1.5 Двоичные (диадические) кубы

Рассмотрим отрезки вида $I_n^{(k)} := [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$, где $n, k \in \mathbb{Z}$. n называется *рангом* двоичного отрезка.

Заметим, что $\forall n \in \mathbb{Z} : \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} I_n^{(k)} = \mathbb{R}$. Любые двоичные отрезки либо не пересекаются, либо вложены.

Определение 1.5.1 (Двоичные кубы ранга n). Произведения $I_1 \times \cdots \times I_d$, где I_j — двоичные отрезки ранга n .

Любые двоичные кубы тоже либо не пересекаются, либо вложены.

Теорема 1.5.1. Пусть G — ограниченное множество в \mathbb{R}^n .

Тогда $G = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, где Q_j — попарно не пересекающиеся двоичные кубы, либо $Q_j = \emptyset$ (иными словами, G — дизъюнктное объединение не более чем счётного числа каких-то двоичных кубов).

Доказательство. Рассмотрим точки $x \in G$. Для каждой точки выберем двоичный куб $Q \ni x$, полностью содержащийся в G .

Объединение всех таких кубов даст G . Чтобы кубы не пересекались, мы оставим только те кубы, которые максимальны по включению. \square

Вспомним про $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ — полукольцо ограниченных прямоугольных параллелепипедов, на котором есть мера — n -мерный объём v_n . Σ — σ -алгебра измеримых по Лебегу множеств (относительно v_n), λ_n — стандартное продолжение v_n .

Теперь обозначим $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ — полукольцо всех двоичных кубов в \mathbb{R}^n . Положим $\rho_n = v_n|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$. По теореме Лебега — Каратеодори получаем стандартное продолжение μ на множество $\Sigma_1 \subset 2^{\mathbb{R}^n}$.

Тогда $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C} = \Sigma$, откуда $\Sigma_1 \subset \Sigma$, $\mu = \lambda_n$, суженная на Σ_1 .

Также понятно, что все открытые множества являются счётными объединениями кубов из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, откуда $\Sigma \subset \Sigma_1$, то есть на самом деле $\Sigma = \Sigma_1$.

Наконец, так как обе меры совпадают на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то они равны (1.4.3).

Лекция VI

4 октября 2023 г.

Теорема 1.5.2. Пусть λ_n — мера Лебега в \mathbb{R}^n , Σ — σ -алгебра измеримых по Лебегу множеств.

1. Если $e \in \Sigma, t \in \mathbb{R}^n : e + t \in \Sigma, \lambda_n(e + t) = \lambda_n(e)$.
2. Если ν — полная мера, заданная на Σ , и инвариантная относительно сдвига, то есть $\forall e \in \Sigma, t \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \nu(e + t) = \nu(e)$, то тогда $\exists c \geq 0 : \forall e \in \Sigma : \nu(e) = c\lambda_n(e)$.

Доказательство.

1. Достаточно доказать, что внешняя мера $\rho = v_n^*$ инвариантна относительно сдвига.

$\rho(a) = \inf \sum_j v_n(e_j)$ по всем e_j , таким, что их объединения покрывают a . Но

$$\bigcup_j e_j \supset a \iff \bigcup_j (e_j - t) \supset (a - t)$$

Измеримость по Лебегу тоже легко проверить:

$$\rho(a) = \rho(a \cap e) + \rho(a \setminus e) \iff \rho(a - t) = \rho((a - t) \cap (e - t)) + \rho((a - t) \setminus (e - t))$$

2. Обозначим за $c := \frac{\nu(Q_0)}{\lambda_n(Q_0)}$, где Q_0 — какой-то фиксированный двоичный куб ранга 0. Тем самым, $\nu(Q) = c\nu_n(Q)$ для любого двоичного куба ранга 1 (инвариантность при сдвиге).

Может так случиться, что $c = 0$. Тогда в силу счётной аддитивности и σ -конечности мера всего пространства равна 0.

Заметим, что 2^n кубов ранга k дают в объединении куб ранга $k - 1$:

$$\left[0, \frac{1}{2^{k-1}}\right)^n = \left(\left[0, \frac{1}{2^k}\right) \sqcup \left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right)\right)^n$$

Тем самым, мы по индукции получаем, что на всех двоичных кубах меры ν и λ_n отличаются в c раз.

Дальше применяя теорему о единственности для меры $\rho = \frac{\nu}{c}$, получаем, что $\rho \equiv \lambda_n$ — объём можно задать на двоичных кубах.

Замечание. Полноту здесь можно и не требовать, она получается автоматически из того, что ν задана на всей Σ . В самом деле, всякое множество меры нуль является подмножеством $\delta\sigma$ -множества меры нуль.

□

1.5.1 Поведение меры Лебега при линейных отображениях

Пусть $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, $e \in \Sigma$. Чему равна $\lambda_n(Te)$?

Пусть (X, \mathcal{A}_X) и (Y, \mathcal{A}_Y) — пары из множеств и σ -алгебр их подмножеств.

Определение 1.5.2 (Измеримое отображение $F : X \rightarrow Y$ (относительно данных σ -алгебр)). Такое отображение F , что $\forall a \in \mathcal{A}_Y : F^{-1}(a) \in \mathcal{A}_X$.

В частном случае $\mathcal{A}_X = \mathcal{B}(X)$ и $\mathcal{A}_Y = \mathcal{B}_Y$ измеримое отображение называется *измеримым по Борелю*.

Лемма 1.5.1. *Всякое непрерывное отображение $F : X \rightarrow Y$ измеримо по Борелю.*

Доказательство. Положим $\mathcal{C} := \{e \in Y \mid F^{-1}(e) \in \mathcal{B}(X)\}$. \mathcal{C} — σ -алгебра, так как взятие прообраза коммутирует со всеми теоретико-множественными операциями (даже несчётными).

Так как прообраз открытого открыт, то \mathcal{C} содержит все открытые множества. Это сразу влечёт, что $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}(Y)$, а тогда и подавно $\forall e \in \mathcal{B}(Y) : F^{-1}(e) \in \mathcal{B}(X)$.

□

Для счётно-аддитивной меры ν , заданной на \mathcal{A}_X можно ввести её образ.

Определение 1.5.3 (Образ меры μ при (измеримом) отображении F). Мера ρ , заданная на \mathcal{A}_Y следующим образом: $\rho(e) = \nu(F^{-1}(e))$.

Пусть $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно. Рассмотрим меру $\mu(e) := \lambda_n(F^{-1}(e))$. Если $e \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, то $F^{-1}(e) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, и формула имеет смысл: $\mu(e)$ определена.

Иначе же, (например, если e — меры нуль) может произойти что угодно. Его прообраз может быть вообще неизмеримым по Лебегу.

Образ же даже Борелевского множества необязательно измерим по Лебегу. Так, $\eta(e) := \lambda_n(\Phi(e))$ для непрерывного (даже инъективного) Φ может быть не определена на каком-то борелевском множестве. Чтобы таких проблем не было, надо требовать непрерывность обратного отображения.

Факт 1.5.1. Пусть $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченные открытые множества, $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$ — гомеоморфизм. Введём меру ν на G_1 : $\nu(e) = \lambda_n(\Phi(e))$. Тогда ν корректно определена на $\mathcal{B}(G_1)$.

Пусть $a \subset G$ — измеримое по Лебегу множество, $\lambda_n(a) = 0$. Тогда хочется, чтобы выполнялось $\nu(a) = 0$. В таком случае $\nu(e) = \lambda_n(\Phi(e))$ будет определена на всех измеримых по Лебегу множествах (всякое измеримое по Лебегу множество — разность $\delta\sigma$ -множества, и множества меры нуль).

Пусть G_1, G_2 — открытые множества в \mathbb{R}^n , $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$ — гомеоморфизм. В терминах измеримости сказанное выше можно переформулировать в виде: тогда Φ^{-1} измеримо по Борелю, и если Φ липшицево, то Φ^{-1} измеримо по Лебегу.

Теорема 1.5.3. Пусть $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$ — C -липшицево отображение, пусть $A \subset G_1$ — меры нуль. Тогда $\Phi(A)$ тоже имеет меры нуль.

Доказательство.

Лемма 1.5.2. Пусть $e \subset \mathbb{R}^n$. Тогда e есть множество меры нуль $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} : e \subset \bigcup_i a_i$, причём

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } a_i)^n < \varepsilon$$

Доказательство леммы.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_n(e) = 0 &\iff \lambda_n^*(e) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \{Q_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ — такое семейство двоичных кубов, что } \sum_{i=1}^{\infty} v_n(Q_i) < \varepsilon. \text{ Учитывая, что } v_n(Q_i) = \left(\frac{\text{diam } Q_i}{\sqrt{n}}\right)^n \text{ сразу получаем} \\ &\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } Q_i)^n < n^n \varepsilon. \end{aligned}$$

\Leftarrow Всякое множество a_i содержится в кубе Q_i со стороной $\text{diam}(a_i)$ (проекция на любую координатную ось не больше $\text{diam}(a_i)$).

□

Пусть открытое $e \subset G_1$ имеет меру нуль, предположим, что $\text{dist}(e, G_1^c) > 0$. Тем самым, $\forall \varepsilon > 0 : \exists a_i \subset \mathbb{R}^n : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} a_i \supset e, \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(a_i))^n < \varepsilon$. Можно считать, что все a_i пересекают e , тогда при маленьких $\varepsilon : a_i \subset G_1$.

Тем самым, $\text{diam}(\Phi(a_i)) \leq C \cdot \text{diam}(a_i)$, и $\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(\Phi(a_i))^n \leq C^n \cdot \varepsilon$

Если же $\text{dist}(e, G_1^c) = 0$, то воспользуемся теоремой об исчерпывающей последовательности компактов 1.5.4. Найдутся компактные $K_i \subset G$, в объединении дающие G . Для множества меры нуль $a \subset G$ заметим, что оно является объединением счётного числа множеств $a_i = a \cap K_i$, отделённых от границы. □

Теорема 1.5.4 (Об исчерпывающей последовательности компактов). Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — открыто, тогда существует $\exists \{K_i\}_{i \in \mathbb{N}} : K_i \subset \text{Int}(K_{i+1})$, причём $\bigcup_i K_i = G$.

Доказательство. Если $G = \mathbb{R}^n$, то выберем $K_i = \overline{B_i}(0)$.

Иначе положим $\tilde{K}_i = \left\{x \in G \mid \text{dist}(x, G^c) \geq \frac{1}{i}\right\}$. Несложно видеть, что $\bigcup_i \tilde{K}_i = G$ — это следует из замкнутости G^c . Из непрерывности функции расстояния (она даже липшицева) \tilde{K}_i тоже замкнуто.

Наконец, $\tilde{K}_i \subset \tilde{K}_{i+1}$. Если G неограничено, то \tilde{K}_i может быть некомпактно хотя и замкнуто. Чтобы избежать этой проблемы, положим $K_i = \tilde{K}_i \cap \overline{B_i}(0)$. □

Замечание. В \mathbb{R}^n любая координатная гиперплоскость имеет лебегову меру нуль: например, она представима в виде объединения счётного числа гиперквадратиков меры нуль.

Итак, с чего мы начали. Пусть $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение.

Теорема 1.5.5. $\forall e \in \Sigma : \lambda_n(Te) = |\det T| \cdot \lambda_n(e)$, где определитель взят в каком-то ортонормированном базисе.

Доказательство.

- Пусть T — невырожденное отображение, $\det T \neq 0$. Тогда это гомеоморфизм \mathbb{R}^n на себя. В любом случае, T липшицево, например, с константой $\|T\|$.

Таким образом, если положить $\nu = \lambda_n \circ T$, то окажется, что ν — корректно определённая счётно-аддитивная мера на σ -алгебра измеримых по Лебегу множеств. Заметим, что ν инвариантна относительно сдвига: $\forall t \in \mathbb{R}^n. \lambda_n(Te + Tt) = \lambda_n(Te)$. Таким образом (1.5.2): $\exists c : \nu = c\lambda_n$. Осталось проверить, что $c = |\det T|$.

- Если T — ортогональное преобразование, то оно сохраняет расстояния, и $\det T = \pm 1$. Выберем B — замкнутый шар положительного радиуса с центром в 0. Тогда $TB = B$, но мера шара не равна 0 (в него можно засунуть кубик положительного диаметра), откуда $c = 1$.

- **Следствия.** Если E — собственное линейное подпространство \mathbb{R}^n , то его мера λ_n равна 0. Ортогональным преобразованием его можно перевести в координатную гиперплоскость.

Другим следствием предыдущего пункта является то, что меру Лебега можно начинать строить с любого ортонормированного базиса в \mathbb{R}^n . Мера сохраняется при всяких поворотах и симметриях.

- Воспользуемся полярным разложением оператора. Это значит, что для невырожденного линейного $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: $T = UA$, где U — ортогональный оператор, а A — эрмитов (диагональный в каком-то базисе). Тогда посчитаем для измеримого $a \in \mathbb{R}^n$ $\lambda_n(Ta) = \lambda_n(UAa) = \lambda_n(Aa)$. Будем считать, что мера Лебега построена в том базисе, в котором A диагонален.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Всякий куб $Q \subset \mathbb{R}^n$ после применения A переходит в параллелепипед со сторонами $|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|$. Действительно, $\lambda_n(AQ) = |\alpha_1| \cdot \dots \cdot |\alpha_n| \cdot \lambda_n(Q) = |\det A| \cdot \lambda_n(Q)$.

- Если T вырождено, то $\text{Im}(T)$ — линейное подпространство в \mathbb{R}^n , так как $Te \subset T(\mathbb{R}^n)$, то мера Te тоже нуль. \square

Глава 2

Интеграл Лебега

Пусть имеется тройка (X, Σ, μ) , где X — множество, $\Sigma \subset 2^X$ — σ -алгебра, μ — счётно-аддитивная мера на Σ .

Определим для некоторых функций $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ интеграл $\int_X f d\mu$.

Раньше мы уже определяли интеграл от простой функции $f = \sum_i c_i \chi_{e_i}$, равный $I(f) = \sum_i c_i \mu(e_i)$. В качестве e_i теперь можно брать произвольные измеримые множества, что уже сильно увеличивает разнообразие простых функций.

Определение 2.0.1 (Простая функция $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ относительно σ -алгебры Σ). Функция вида $g(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{e_i}$, $c_i \in \mathbb{R}$, $e_i \in \Sigma$. Можно считать, что $e_i \cap e_j = \emptyset$ для $i \neq j$.

Лекция VII

18 октября 2023 г.

Теорема 2.0.1 (Малая теорема Леви). Пусть g_1, g_2, \dots — счётное семейство неотрицательных простых функций; пусть g — ещё одна простая функция. Предположим, что $\forall x \in X : g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots$, причём $g_j(x) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} g(x)$ (можно записать $g_n(x) \nearrow g(x)$). Тогда $\lim_{j \rightarrow \infty} I(g_j) = I(g)$.

Доказательство. Сложность заключается в том, что число ступенек у g_j может неограниченно расти.

Заметим, что так как g_j неотрицательны, то $I(g_j)$ всегда определён (число $\in \mathbb{R}$, или бесконечность).

Если $\exists j : I(g_j) = +\infty$, то $I(g) = +\infty$, и доказывать нечего. Далее считаем, что $\forall j : I(g_j) \in \mathbb{R}$.

$g = \sum_{s=1}^n c_s \chi_{e_s}$, где e_s — попарно дизъюнктные множества из Σ . Положим $g_j^s := g_j \cdot \chi_{e_s}$. Эти функции тоже простые.

Зафиксируем s ($1 \leq s \leq n$), зафиксируем $x \in e_s$, посмотрим на $\lim_{j \rightarrow \infty} g_j^s(x) = c_s \chi_{e_s}$. Проверим предельное соотношение для интегралов: так как s пробегает конечное множество значений, то достаточно доказать только для одного значения. Далее считаем, что $g = c \chi_e$.

Более того, можно считать, что $c = 1$. Если $c = 0$, то все $g_j \equiv 0$, иначе можно все g_j и g тоже поделить на c . Но мы это считать не будем.

Тем самым, утверждение свелось к следующему: для $e \in \Sigma$, для последовательности простых функций g_j , таких, что поточечно $0 \leq g_j \leq g_{j+1} \leq c \chi_e = g$, причём $\forall x \in X : \lim_{j \rightarrow \infty} g_j(x) = g(x)$, необходимо и достаточно показать, что $I(g_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} I(\chi_e) = \mu(e)$.

Рассмотрим $d \in (0, c)$. Положим $E_n := \{x | g_n(x) > d\}$. Понятно, что $E_n \subset e$, причём $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = e$.

Обозначим $h_n = d \cdot \chi_{E_n}$. По определению E_n : $h_n \leq g_n$. Таким образом,

$$\underbrace{I(h_n)}_{d \cdot \mu(E_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d \cdot \mu(e)} \leq I(g_n) \leq \underbrace{I(g)}_{c \cdot \mu(e)}$$

Так как $I(g_i) \leq I(g_{i+1})$, то существует предел $V = \lim_{j \rightarrow \infty} I(g_j)$. Отсюда $d \cdot \mu(e) \leq V \leq c \cdot \mu(e)$, причём это верно для любого $d < c$. \square

2.1 Измеримые отображения

Пусть (X, \mathcal{A}) , (Y, \mathcal{C}) — множества и σ -алгебры соответствующих подмножеств. $F : X \rightarrow Y$.

Вспомним определение измеримости: (1.5.2).

Определение 2.1.1 (Измеримое отображение $F : X \rightarrow Y$ (относительно данных σ -алгебр)). Такое отображение F , что $\forall c \in \mathcal{C} : F^{-1}(c) \in \mathcal{A}$.

Если в качестве Y рассмотреть топологическое пространство без определённой σ -алгебры, то в качестве σ -алгебры в Y можно выбрать σ -алгебру борелевских множеств $\mathcal{B}(Y)$. В таком случае F называется *измеримой по Борелю*.

Теорема 2.1.1. Пусть в Y имеется счётная база топологии \mathcal{C} ; пусть \mathcal{D} — какая-нибудь (даже необязательно счётная) база для топологии в Y .

Если $\forall e \in \mathcal{D} : F^{-1}(e) \in \mathcal{A}$, то F измеримо по Борелю.

Доказательство. Рассмотрим открытое $G \subset Y$, докажем, что $F^{-1}(G) \in \mathcal{A}$.

Представим $G = \bigcup_{x \in G} a_x$, где $a_x \in \mathcal{D}$ содержит x .

Пусть \mathcal{C} — счётная база топологии в Y . Для любого $x \in G$: $\exists c_x \in \mathcal{C} : x \in c_x \subset a$, где $a \in \mathcal{D}$. $\bigcup_{x \in G} c_x = G$. Так как среди c_x всего счётное число различных, то можно представителей — счётное множество $X \subset G$: $\bigcup_{x \in X} c_x = G$. Тогда и подавно $\bigcup_{x \in X} a_x = G$.

Отсюда $F^{-1}(G) \in \mathcal{A}$, так как σ -алгебра выдерживает счётные операции.

Этого достаточно, так как $\{E \subset Y | F^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$ — σ -алгебра, и если в неё содержатся все открытые множества, то и все борелевские содержатся в ней тоже. \square

Пусть (X, Σ_1) , (Y, Σ_2) , (Z, Σ_3) — множества со своими σ -алгебрами.

Рассмотрим композицию $X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{\Phi} Z$.

Теорема 2.1.2. Композиция измеримых отображений измерима.

Доказательство. $\forall e_3 \in \Sigma_3 : (\Phi \circ F)^{-1}(e) = F^{-1}(\Phi^{-1}(e))$. \square

Факт 2.1.1. Пусть X_1, X_2 — топологические пространства, $F : X_1 \rightarrow X_2$ — непрерывно. Пусть X_1, X_2 наделены своими борелевскими σ -алгебрами. Тогда F измеримо.

Доказательство. Определим $\mathcal{A} := \{e \in X_2 | F^{-1}(e) \in \mathcal{B}(X_1)\}$. \mathcal{A} — σ -алгебра, причём она содержит все открытые множества. \square

Следствие 2.1.1. Рассмотрим композицию $X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{\Phi} Z$. X — пространство с σ -алгеброй \mathcal{A} , Y, Z — топологические пространства, F измеримо, Φ непрерывно. Тогда $\Phi \circ F$ непрерывно.

(X, \mathcal{A}) — пространство с σ -алгеброй. Рассмотрим $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Предложение 2.1.1. f измеримо, если выполнено любое из следующих условий.

- $\forall a, b \in \mathbb{R} : f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A}$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R} : f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{A}$.
- $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{A}$.
- $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Согласно предыдущей теореме (1) сразу влечёт измеримость.

Проверим (3) \Rightarrow (1). Так как $(-\infty, d] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, d + 1/n)$, то

$$f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((-\infty, b) \setminus (-\infty, a]) = f^{-1}\left((-\infty, b) \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, a + 1/n)\right)$$

Всё остальное делается аналогично. \square

Определение 2.1.2 (Лебеговы множества функции f). Для $a \in \mathbb{R}$ это множества вида $\{x | f(x) < a\}$, $\{x | f(x) \leq a\}$, $\{x | f(x) > a\}$, $\{x | f(x) \geq a\}$.

Теперь рассмотрим отображение $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ — столбец координатных функций.

Предложение 2.1.2. F измеримо \iff все f_j измеримы.

Доказательство.

\Leftarrow . Пускай I_1, \dots, I_n — интервалы. Параллелепипеды $P = I_1 \times \dots \times I_n$ образуют базу топологии в \mathbb{R}^n . Достаточно доказать на базе, что $F^{-1}(P) \in \mathcal{A}$. $x \in F^{-1}(P) \iff F(x) \in P \iff \forall j = 1..n : f_j(x) \in I_j$. $F^{-1}(P) = \bigcap_{j=1}^n f_j^{-1}(I_j)$.

\Rightarrow . Рассмотрим координатную проекцию $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. $\pi_j \circ F$ измеримо. \square

Предложение 2.1.3. Пусть $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримы. Тогда измеримыми являются функции

- $\alpha f_1 + \beta f_2$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $f_1 \cdot f_2$.
- $\frac{f_1}{f_2}$, если $\forall x \in X : f_2(x) \neq 0$.

Доказательство. Пускай $F : X \rightarrow \mathbb{R}^2$; $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$. Согласно предыдущей теореме, оно измеримо. Скомпонуем $\psi \circ F$, где $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Для частного: $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \alpha x + \beta y$ или xy или $\frac{x}{y}$ \square

Ниже нам будет удобно определять функцию f , принимающую бесконечные значения.

$$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \stackrel{def}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Про такую функцию говорят, что она *измерима*, если $f^{-1}(+\infty), f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{A}$ и $f|_{f^{-1}(\mathbb{R})}$ измерима в обычном понимании.

К таким функциям можно применять примерно всё то, что уже доказано, только не надо складывать бесконечности разных знаков.

Факт 2.1.2. Если f (возможно) принимает значение $+\infty$, и все множества $\{x|f(x) < a\}$ лежат в \mathcal{A} , то f измерима.

Доказательство. $f^{-1}(\mathbb{R}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(-\infty, n); \{x|f(x) = +\infty\} = f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) \setminus f^{-1}(\mathbb{R}).$ □

2.2 Грани и предельные переходы

Теорема 2.2.1. Пусть $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримые функции. Пусть $f(x) = \inf_n f_n(x)$. Для простоты считаем, что $\forall x : f_n(x)$ ограничены снизу.

Тогда f измерима.

Доказательство. Рассмотрим $\{x|f(x) < a\} = \bigcup_n \{x|f_n(x) < a\}.$ □

Следствие 2.2.1. Если функция $g(x) = \sup_n f_n(x)$ всюду конечна, то функция g измерима.

Следствие 2.2.2. Пусть f_n измеримы, и $\forall x$: числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ ограничена. Тогда $\overline{\lim}_n f_n(x) = \underline{\lim}_n f(x)$ тоже измеримы.

Доказательство. Например, $\overline{\lim}_n f_n(x) = \inf_k \sup_{n \geq k} f_n(x).$ □

Теорема 2.2.2. Пусть f_n всюду конечны и измеримы, пусть $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$, где $f(x)$ — тоже конечна.

Тогда f измерима.

Замечание. Пусть $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$, но допустимо, чтобы $f(x)$ принимало значения $\pm\infty$. (При этом $\forall n : f_n$ конечна)

Тогда всё равно f измерима.

Доказательство. Пусть $f(x_0) = +\infty$. Тогда $\forall N \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k : f_n(x_0) \geq N$. Тем самым, $\{x_0|f(x_0) = +\infty\} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_k \bigcap_{n \geq k} \{x_0|f_n(x_0) \geq N\}.$ □

Определение 2.2.1 (Ступенчатая функция). $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $\exists E_1, E_2, \dots \in \mathcal{A} : E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $f|_{E_i}$ постоянна (скажем, равна c_i).

Иными словами, ступенчатая функция — функция вида $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{E_i}.$

Замечание. Всякая ступенчатая функция измерима.

Теорема 2.2.3. Если $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая функция, то \exists последовательность ступенчатых функций f_n , такая, что $f_n \rightrightarrows g$.

Если же $g \geq 0$, то \exists простые функции $f_n : f_n(x) \nearrow g(x)$ поточечно.

Доказательство.

1 Выберем $n \in \mathbb{N}$, рассмотрим двоичные интервалы $I_{j,n} = [\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})$. При фиксированном n :
 $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} I_{j,n} = \mathbb{R}$.

Пусть $E_j = g^{-1}(I_{j,n}) \in \mathcal{A}$. Определим $f_n(x) = \frac{j}{2^n}$ при $x \in E_j$. Иными словами, бьётся ось ординат, и если функция g принимает значение в некоем двоичном отрезке, то $f_n(x)$ равно нижней границе этого отрезка.

Тогда это нижние границы, причём $\forall x : |g(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$.

Заметим, что $\forall x : f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

2 Аналогично предыдущему пункту, берём полуинтервалы $[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})$, и строим f_n точно так же. Они сходятся к $f(x)$, но, увы, не простые. Тогда положим $\tilde{f}_n(x) = \min(f_n(x), n)$. Здесь $\tilde{f}_n(x)$ уже простые, по-прежнему возрастают монотонно, и всё ещё сходятся к g .

□

Замечание. Пусть g принимает ещё и значения $\pm\infty$. Тогда можно построить последовательность ступенчатых f_n , как в теореме, определённых на $g|_{g(x) \text{ конечно}}$.

$$\text{Доопределим } \hat{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & g(x) \in \mathbb{R} \\ +\infty, & g(x) = +\infty. \\ -\infty, & g(x) = -\infty \end{cases}$$

Тогда это всё ещё простые функции, и естественно считать, что они сходятся к g равномерно. На том множестве, где $g(x)$ конечно, $|f_n(x) - g(x)|$ равномерно сходится к нулю, а если $g(x)$ бесконечно, то разность, конечно, не определена, но $f_n(x) = g(x)$.

Похожую вещь можно применить и ко второму пункту теоремы.

2.3 Интеграл

Сначала научимся интегрировать неотрицательные измеримые функции.

Пусть (X, Σ, μ) — пространство с мерой, то есть μ — счётно—аддитивная мера, заданная на Σ .

Предположим, что μ — полная мера (1.4.5). Если это не так, то можно продолжить μ по Лебегу — Каратеодори. Тогда в целом ничего особо не поменяется, в предположении σ -конечности для продолжения меры $\tilde{\mu}$ на $\tilde{\Sigma}$: $\forall a \in \tilde{\Sigma} : \mu(a) < +\infty \Rightarrow \exists b \in \Sigma : b \supset a, \tilde{\mu}(b \setminus a) = 0$.

Пусть f — неотрицательная измеримая функция на X (возможно, принимающая значения $+\infty$).

Определим *интеграл* $J(f) = \sup \{I(g) | g \text{ — простая, } 0 \leq g \leq f\}$.

Замечание. Хотя f разрешается принимать бесконечные значения, по определению простые функции — суммы $\sum_{j=1}^N c_j \chi_{e_j}$, где $c_j \in \mathbb{R}$ (множества e_j можно считать дизъюнктными).

Определение 2.3.1 (Суммируемая (интегрируемая) функция f). $J(f) < +\infty$.

Свойства (Совсем немного простых свойств).

- Если f неотрицательная простая функция, то $J(f) = I(f)$.
- Если $f_1 \leq f_2$ — неотрицательные измеримые, то $J(f_1) \leq J(f_2)$.

Лекция VIII

25 октября 2023 г.

Пусть a, b — два числа. Для их минимума и максимума иногда используются обозначения

$$\max(a, b) = a \vee b \quad \min(a, b) = a \wedge b$$

В частности, это используется для поточечного максимума или минимума функций:

$$(f \vee g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \vee g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max(f(x), g(x))$$

Теорема 2.3.1 (Леви для неотрицательных измеримых функций (теорема о монотонной сходимости)). Пусть f_n — измеримые функции, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$. Пускай $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Тогда $J(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n)$.

Доказательство. Если $\exists n \in \mathbb{N} : J(f_n) = +\infty$, то доказывать нечего: тогда начиная с этого места $J(f_{\geq n}) = J(f) = +\infty$. Отметим, что f измерима, как предел измеримых.

Теперь будем считать, что $\forall n : J(f_n) < +\infty$.

Заметим, что можно считать, что f принимает только конечные значения. Сведение выглядит так: обозначим $E = \{y | f(y) = +\infty\}$, найдём искомую последовательность функций g_n для $f|_{E^c}$, а

$$\text{дальше положим } \hat{g}_n := \begin{cases} g(x), & x \in E \\ n, & x \notin E \end{cases}.$$

$\forall n : \exists$ простая функция $\psi_n : 0 \leq \psi_n \leq f_n, I(\psi_n) \geq J(f_n) - \frac{1}{2^{2n}}$. Сделаем так, чтобы $\{\psi_n\}$ возрастали: $\phi_n = \psi_1 \vee \dots \vee \psi_n$.

Лемма 2.3.1. Почти всюду (для всех x , кроме множества меры нуль) $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = f(x)$.

Доказательство леммы.

Обозначим $e_n = \{x | \phi_n(x) < f(x) - \frac{1}{2^n}\}$. Заметим, что тогда всё ещё $\phi_n + \frac{1}{2^n} \chi_{e_n} \leq f$. Слева стоит простая функция, откуда $I\left(\phi_n + \frac{1}{2^n} \chi_{e_n}\right) \leq J(f)$. Так как $I(\phi_n) + \frac{1}{2^n} \mu(e_n) \geq$

$$J(f) - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^n} \mu(e_n), \text{ то } \mu(e_n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Обозначим $E_n = \bigcup_{k \geq n} e_k$. Его мера тоже не очень большая: $\mu(E_n) \leq \sum_{k \geq n} \mu(e_k) \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Так как имеется вложенность $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, то $E := \bigcap_{n \geq 0} E_n$ имеет меру нуль.

Осталось заметить, что $\phi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ везде кроме E . □

Так как по определению $J(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{I(g) | 0 \leq g \leq f, g \text{ — простая}\}$, то достаточно доказать, что для данной простой функции g : $\lim_{n \rightarrow \infty} I(\phi_n) \leq I(g)$.

Тут я немного выключился из лекции, над додумать. □

2.4 Применения интеграла

1. Линейность интеграла.

Пусть $f, g \geq 0$ — измеримые функции, $\alpha, \beta \geq 0$. Тогда $J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g)$.

Доказательство. Выбираем последовательность простых функций $0 \leq u_n \nearrow f$ и $0 \leq v_n \nearrow g$, тогда воспользуемся линейностью предела и теоремой Леви:

$$J(\alpha f + \beta g) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(\alpha u_n + \beta v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha I(u_n) + \beta I(v_n)) = \alpha J(f) + \beta J(g)$$

□

2. Счётная аддитивность по множеству. Пусть $f \geq 0$ — измеримая функция, положим $\nu(e) = J(f \cdot \chi_e)$ для $e \in \Sigma$. Тогда ν — счётно аддитивная мера на σ -алгебре Σ .

Доказательство. Аддитивность следует из линейности интеграла.

Для проверки счётной аддитивности удостоверимся в монотонной непрерывности: пусть $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, где $E_j \in \Sigma$.

Определим $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. $f \cdot \chi_E = \lim_{n \rightarrow \infty} f \cdot \chi_{E_n}$, теперь воспользуемся теоремой Леви. □

Пусть $f \geq 0$ — измеримая функция, обозначим $A = \{x | f(x) \neq 0\}$. Тогда $J(f) = 0 \iff \mu(A) = 0$.

Доказательство.

\Leftarrow . $J(f) = \sup I(g)$, где $0 \leq g \leq f$. Из монотонности меры всякая такая g сосредоточена на множестве меры нуль. Считая интеграл g по определению, получаем нуль.

\Rightarrow .

Лемма 2.4.1 (Неравенство Чебышёва). Пусть $h \geq 0$ — неотрицательная измеримая функция, $\lambda > 0$. Тогда $\mu\{x | h(x) > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} J(h)$.

Доказательство леммы.

Пусть $e = \{x | h(x) > \lambda\}$. Заметим, что $h \geq \lambda \chi_e$, из монотонности интеграла $J(h) \leq \lambda \mu(e)$. □

Пусть $A_n = \{x | f(x) > \frac{1}{n}\}$. $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$. Согласно неравенству Чебышёва $\mu(A_n) \leq n J(f) = 0$.

Таким образом, $\mu(A) = 0$. □

Замечание. Теорема Леви сохраняет силу, если неравенство $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ выполнено почти всюду (нарушаются на множестве меры нуль), и стремление $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ тоже имеет почти всюду.

2.5 Интегралы от знакопеременных функций

Пусть f — измеримая функция на X , возможно, принимающая значения $\pm\infty$. Представим $f = f_+ - f_-$, где $f_+ = f \vee 0$, $f_- = -(f \wedge 0)$. Тогда $|f| = f_+ + f_-$, причём f_+ и f_- измеримы, и обе неотрицательны.

Определение 2.5.1 (f обладает интегралом). $J(f_+) < +\infty$, или $J(f_-) < +\infty$. В таком случае $J(f) \stackrel{\text{def}}{=} J(f_+) - J(f_-)$.

Определение 2.5.2 (f суммируема (интегрируема)). Она обладает конечным интегралом, то есть $J(f_+), J(f_-) < +\infty$.

Предложение 2.5.1. f суммируема $\iff |f|$ суммируема.

Доказательство.

\Rightarrow . $J(|f|) = J(f_+) + J(f_-) < +\infty$.

\Leftarrow . $f_+, f_- \leq |f|$. □

2.5.1 Про линейность интеграла

Пусть $f = g - h$, где $g, h \geq 0$. Тогда во всяком случае $g \geq f_+, h \geq f_-$:

$$f = g - h \Rightarrow f \leq g, \text{ а так как } f \geq 0, \text{ то } f_+ \leq g \text{ тоже} \quad f_- = (-f)_+$$

Предложение 2.5.2. Если $f = g - h$. g, h измеримы и неотрицательны, причём хотя бы одно из $J(g), J(h)$ конечно, то f обладает интегралом $J(f) = J(g) - J(h)$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $J(g) < +\infty$, в случае $J(h) < +\infty$, аналогично.

Тогда $J(f_+) < +\infty$, и f по определению обладает интегралом.

$$f = f_+ - f_- = g - h \Rightarrow f_+ + h = g + f_-$$

Для неотрицательных функций известна аддитивность, откуда $J(f_+) + J(h) = J(g) + J(f_-)$. Переносим в противоположные части конечные слагаемые $J(f_+)$ и $J(g)$, получаем

$$-J(g) + J(h) = J(f_-) - J(f_+)$$

Умножая обе части на -1, получаем искомое. □

Следствие 2.5.1. Если f, g суммируемы (и, вообще говоря, знакопеременны), то $f + g$ тоже суммируема, и $J(f + g) = J(f) + J(g)$.

Доказательство.

$$(f_+ - f_-) + (g_+ - g_-) = (f_+ + g_+) - (f_- + g_-)$$

□

Замечание. Если f суммируема, $\alpha \in \mathbb{R}$, то $J(\alpha f) = \alpha J(f)$.

- Основная оценка интеграла: если f обладает интегралом, то $|J(f)| \leq J(|f|)$.
- Если f, g — измеримы, и обладают интегралами, причём $f \leq g$, то $J(f) \leq J(g)$.

Для $e \in \Sigma$ и измеримой функции $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, имеющей интеграл, имеется обозначение

$$\boxed{\int_e f d\mu = J(f \cdot \chi_e)}$$

Теорема 2.5.1 (Абсолютная непрерывность интеграла). Пускай f — суммируемая функция. Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0$: если $e \in \Sigma$, $\mu e < \delta$, то $\int_e |f| d\mu < \varepsilon$.

Доказательство. От противного: пусть $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists e \in \Sigma : \mu e < \delta$, но $\int_e |f| d\mu \geq \varepsilon$.

Рассмотрим последовательность $\delta_n = \frac{1}{2^n}$. Для каждого δ_n найдётся $e_n \in \Sigma$: $\mu(e_n) \leq \frac{1}{2^n}$, но $\int_{e_n} |f| d\mu \geq \varepsilon$.

Пусть $E_n = \bigcup_{k \geq n} e_k$, тогда из монотонности $\int_E |f| d\mu \geq \varepsilon$. С другой стороны. $\mu E_n \leq \sum_{k \geq n} \mu(e_k) \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Таким образом, $\mu(E_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, но с другой стороны $E_1 \supset E_2 \supset \dots$. Из счётной аддитивности $\int_E |f| d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} |f| d\mu$, но левый интеграл равен нулю, как интеграл по множеству меры нуль. □

Замечание. Если f — суммируемая функция, то $\{x | f(x) \neq 0\}$ σ -конечно.

Доказательство. Применить неравенство Чебышёва. $\{x|f(x)\} = \bigcup_{n \geq 0} \left\{x \mid |f|(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$. \square

Теорема 2.5.2 (Общая теорема Леви). Пускай f_1, f_2, \dots — измеримые функции, монотонно возрастающие: $f_n \leq f_{n+1}$.

Предположим, что f_1 суммируема. Тогда $J(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J(f)$, где $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Доказательство. Положим $h_j(x) = f_j(x) - f_1(x)$, и применим теорему Леви для неотрицательных функций. \square

Следствие 2.5.2. f суммируема $\iff J(f_j) < +\infty$, при этом $J(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n)$.

Теорема 2.5.3 (Вариант теоремы Леви для рядов). Пусть u_n — суммируемые функции, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) =: u(x)$. Тогда u суммируема $\iff \sum_{n=1}^{\infty} \int_X u_n d\mu < +\infty$.

В случае монотонной сходимости почти всегда почти всё можно делать, а если сходимость не монотонна, то есть следующая теорема.

Теорема 2.5.4 (Лебег, о мажорируемой сходимости). Пусть f, g — измеримые функции, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{почти всюду}} f$.

Предположим, что у f_n есть общая суммируемая мажоранта: $|f_n(x)| \leq g(x)$ и $\int_X g d\mu < +\infty$. Тогда

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu.$$

Контрпример. Совсем без мажоранты ничего не получится. Если $X = \mathbb{R}$, и $f_n = n\chi_{[0, \frac{1}{n}]}$, то f сходится к нулю почти всюду, но интегралы у всех единичные.

Лекция IX

1 ноября 2023 г.

//todo

Лекция X

8 ноября 2023 г.

2.6 Приближение функций из класса L^p

Класс L^p назван в честь Лебега. В дальнейшем часто будем обозначать меру множества X за $|X|$.

Теорема 2.6.1. Пусть (X, Σ, μ) — пространство с полной мерой. Тогда простые функции образуют плотное множество в $L^p(\mu)$ при $1 \leq p < +\infty$.

Доказательство. Всякая простая функция имеет вид $\phi = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{e_j}$, дизъюнктные $e_j \in \Sigma$. Если $\phi \in L^p(\mu)$, то меры всех e_j , таких, что $\alpha_j \neq 0$, конечны.

Пусть $f \in L^p(\mu)$, разложим $f = f_+ - f_-$. Приближим f_+ и f_- по отдельности. Тем самым, без потери общности $f \geq 0$.

Раз f измерима, то существует последовательность простых функций $\phi_n \in L^p(\mu) : 0 \leq \phi_n \leq f, \phi_n \nearrow f$.

Так как $f - \phi_n \searrow 0$ почти всюду, то $|f - \phi_n|^p \searrow 0$. Применяем теорему Леви, и действительно получаем, что $\int_X |f - \phi_n|^p d\mu \rightarrow 0$. \square

Пусть мера μ получена продолжением по Лебегу — Каратеодори из меры ν на полукольце $\mathcal{A} \subset \Sigma$. Простые функции, полученные из полукольца \mathcal{A} (то есть вида $u = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{a_j}, a_j \in \mathcal{A}$) будем называть *элементарными*.

Теорема 2.6.2. При сделанных предположениях элементарные функции образуют плотное множество в $L^p(\mu)$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$. Пускай $f \in L^p(\mu)$. $\exists \phi = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{e_j}, e_j \in \Sigma$ — простая функция, хорошо приближающая f : $\|f - \phi\|_{L^p} < \varepsilon$. Теперь достаточно приблизить ϕ , или даже каждое слагаемое ϕ элементарными функциями.

Для всякого $\delta > 0, e_j \in \Sigma$ найдём множество $a_j \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$: $\|\chi_{e_j} - \chi_{a_j}\|_{L^p} < \delta$.

$\phi \in L^p(\mu) \Rightarrow \forall j: \mu(e_j) < \infty \Rightarrow \forall j: \exists A_j$ — σ -множество, такое, что $\mu(A_j \setminus e_j) < \frac{\delta}{2}$.

Как σ -множество, $A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} b_k, b_k \in \mathcal{A}$. Положим $a_j^{(s)} = \bigcup_{k=1}^s b_k \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$.

Но тогда $\int_X |\chi_{a_j^{(s)}} - \chi_{e_j}|^p d\mu = \int_X |\chi_{a_j^{(s)}} - \chi_{e_j}| d\mu \leq \int_X |\chi_{a_j^{(s)}} - \chi_{A_j}| d\mu + \int_X |\chi_{A_j} - \chi_{e_j}| d\mu \underset{\text{при больших } s}{\leq} \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}$ \square

Следствие 2.6.1. Линейные комбинации характеристических функций конечных прямоугольных параллелепипедов (или диадических кубов) образуют плотное множество в $L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < +\infty$).

Следствие 2.6.2. Непрерывные функции с компактным носителем плотны в $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого двоичного куба K : \exists непрерывная функция v с компактным носителем $\|\chi_K - v\| < \varepsilon$. Приближим $\chi_{[\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}]}$ ломаной, которая равна 1 на $[\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}]$, и равна нулю в $\varepsilon/2$ -окрестности $[\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}]$.

Теперь если n — любое, то $K = I_1 \times \dots \times I_n$, перемножим функции, приближающие I_j . \square

Пусть $t \in \mathbb{R}^n, f$ — функция на \mathbb{R}^n . Тогда сдвиг f на t — это $f_t(x) = f(x+t)$ (иногда пишут минус).

Теорема 2.6.3 (Непрерывность сдвига в среднем). Если $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < +\infty$, то $\|f - f_t\|_{L^p} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдём v — непрерывную функцию с компактным носителем, такую, что $\|f - v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$.

$$\|f - f_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \|f - v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v - v_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v_t - f_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq 2\varepsilon + \|v - v_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Осталось доказать ту же теорему для непрерывной функции с компактным носителем, а она очевидна из теоремы Кантора — функции v и v_t равномерно непрерывны.

Чуть подробнее: выберем $\delta > 0$, найдётся шар \overline{B} , такой, что он содержит δ -окрестность $\text{supp}(v)$. На нём $\forall \varepsilon' > 0: \exists \delta' \in (0, \delta): |x - y| < \delta' \Rightarrow |v(x) - v(y)| < \varepsilon'$. Интегрируя по шару \overline{B} с конечной мерой, получаем $\|v - v_t\| \leq |\overline{B}| \varepsilon'^{1/p}$ и ε' можно сделать сколь угодно малым. \square

Замечание (Следствие неравенства Гёльдера). $\mu(X) < +\infty \Rightarrow L^p(\mu) \subset L^s(\mu)$ для $p \geq s$.

Доказательство. При $p = s$ доказывать нечего, считаем $p > s$. Положим $r = \frac{p}{s} > 1$, к нему есть сопряжённый показатель r' .

Пускай $f \in L^p(\mu)$.

$$\int_X |f|^s d\mu = \int_X |f|^s \cdot 1 d\mu \leq \left(\int_X (|f|^s)^r d\mu \right)^{1/r} \cdot \left(\int_X (1)^{r'} d\mu \right)^{1/r'} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/r} \cdot \mu(X)^{1/r'}$$

□

Отсюда видно, что $\mu(X) = 1$, то $\|f\|_{L^s(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \cdot \mu(X)^{\frac{1}{s-r}}$, что особенно красиво при *вероятностной мере* — $\mu(X) = 1$.

В случае конечной меры следствие можно применять к функциям, сосредоточенных на множествах конечной меры.

Введём ещё пространство $L^\infty(\mu)$ — множество функций, таких, что $\exists A \in \mathbb{R}_{\geq 0} : |f| \leq A$ почти всюду.

$L^\infty(\mu)$ — класс всех *существенно ограниченных* функций.

Если f — существенно ограниченная функция, то среди всех существенных верхних границ $\{K \mid |f(x)| \leq K \text{ почти всюду}\}$ найдётся наименьшая. Назовём её

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf \{K \mid K \text{ есть существенная верхняя грань для } f\}$$

Теорема 2.6.4. Пусть $A = \operatorname{ess\,sup} f$, тогда A — существенная граница f .

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$, тогда $A + \frac{1}{n}$ — существенная верхняя граница f . Тем самым, $\exists E_n : |E_n| = 0, f(x) \leq A + \frac{1}{n}$ при $x \notin E_n$. Выберем $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Тогда $f(x) \leq A$ при $x \notin E$, но $\mu(E) = 0$. □

Замечание. Пусть f существенно ограничена, $A = \operatorname{ess\,sup} f$. Тогда $\exists E : \mu(E) = 0 \Rightarrow \sup_{x \in X \setminus E} f(x) = A$.

Определение 2.6.1 (Норма $f \in L^\infty(\mu)$). $\|f\|_{L^\infty(\mu)} = \operatorname{ess\,sup}_X |f|$.

Если в пространстве L^∞ отождествить функции, отличающиеся на множестве меры нуль, то норма станет нормой.

Расстояние между функциями в данном пространстве $d(f, g) = \|f - g\|$, неравенство треугольника здесь очевидно:

$$\|u + v\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}$$

Теорема 2.6.5. $L^\infty(\mu)$ полно.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность Коши в $L^\infty(\mu)$, то есть $\operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| \xrightarrow{\min(n,m) \rightarrow \infty} 0$.

Тогда найдутся множества $E_{n,m} : \operatorname{ess\,sup} |f_n - f_m| = \sup_{x \notin E_{n,m}} |f_n(x) - f_m(x)|$.

Положим $E = \bigcup_{n,m} E_{n,m}$, $\mu E = 0$. Тогда $\{f_n|_{X \setminus E}\}$ — последовательность Коши на пространстве ограниченных функций на E . Тем самым, $f_n \rightrightarrows f$ равномерно на $X \setminus E$. Доопределим f на E как угодно, её класс эквивалентности в L^∞ не поменяется. □

В неравенстве Гёльдера до сих пор рассматривались $p, p' : \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ при $1 < p, p' < \infty$. Если же подставить одно из p, p' равным 1, то второе станет равным ∞ . Естественно считать 1 и ∞ сопряжёнными показателями.

Неравенство Гёльдера говорило, что $\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \cdot \|g\|_{L^{p'}(\mu)}$.

Факт 2.6.1. Неравенство Гёльдера сохраняется при $p = 1$ или $p = \infty$.

Доказательство. Пусть $p = 1$. $|f(x)| \cdot |g(x)| \leq |f(x)| \cdot \|g\|_{L^\infty(\mu)}$ почти всюду. Интегрируя это неравенство, получаем

$$\int_X |f| \cdot |g| d\mu \leq \int_X \|f\| d\mu \cdot \int_X \|g\| d\mu$$

□

Замечание. Пусть $\mu(X) = 1$ (или просто конечна). Тогда $\|f\|_{L^p(\mu)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)}$ при любом $p < \infty$.

Доказательство.

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_X \|f\|_{L^p(\mu)}^p d\mu \right)^{1/p} = \|f\|_{L^p(\mu) \cdot \mu(X)}$$

□

Пусть $\mu(X) = 1$. Зафиксируем измеримую f , рассмотрим строго возрастающую функцию

$$p \mapsto \|f\|_{L^p(\mu)}$$

Если $f \notin L^p(\mu)$, то будем считать $\|f\|_{L^p} = \infty$.

Упражнение 2.6.1. $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$.

2.6.1 Связь интегралов Лебега и Римана

Теорема 2.6.6. Пусть f — функция на отрезке $\langle a, b \rangle$, интегрируема по Риману — Дарбу. Тогда f суммируема, и интеграл Лебега такой же.

Доказательство. В данной постановке простые функции — линейные комбинации характеристических функций отрезков, $\phi = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{I_j}$. В этой лекции они назывались элементарными, так и продолжим их называть.

Простые функции интегрируемы и по Риману, и по Лебегу, и интеграл у них один и тот же.

Пусть $\langle a, b \rangle = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k$ — разбиение $\Delta = \{I_1, \dots, I_k\}$.

Зададим $\phi_\Delta = \sum_{j=1}^k (\sup_{I_j} f) \chi_{I_j}$, $\psi_\Delta = \sum_{j=1}^k (\inf_{I_j} f) \chi_{I_j}$. Тогда $\int_{\langle a, b \rangle} \phi_\Delta$ — верхняя сумма Дарбу для f по отрезку $\langle a, b \rangle$, $\int_{\langle a, b \rangle} \psi_\Delta$ — нижняя сумма Дарбу.

Понятно, что $\psi_\Delta \leq f \leq \phi_\Delta$ всюду на $\langle a, b \rangle$, причём для измельчения Δ' верно, что

$$\psi_\Delta \leq \psi_{\Delta'} \leq f \leq \phi_{\Delta'} \leq \phi_\Delta$$

Критерием интегрируемости по Риману является то, что $\text{osc}_{I_j} f$ могут быть сколь угодно малыми, то есть $\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta : \int_{\langle a, b \rangle} (\phi_\Delta - \psi_\Delta) \leq \varepsilon$.

Выберем $\varepsilon = \frac{1}{n}$, построим разбиения Δ_n так, что каждое следующее является измельчением предыдущего.

Тогда $\int_{\mathbb{R}} (\phi_n - \psi_n) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} |\phi_n - \psi_n| d\lambda < \frac{1}{n}$.

Отсюда следует, что существует последовательность индексов (?) n_j , таких, что $\phi_{n_j} - \psi_{n_j} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ почти всюду. Таким образом, ψ_n и ϕ_n стремятся к f почти всюду, тем самым f измерима!

Теперь $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_n \leq$ интеграл Лебега или Римана $f \leq \int_{\mathbb{R}^n} \phi_n$.

□

Теорема 2.6.7 (Теорема Лебега). Функция f на конечном отрезке интегрируема по Риману \iff множество точек разрыва f имеет меру нуль.

Замечание. Пусть $f \geq 0$, f интегрируема в смысле Римана несобственным образом на конечном или бесконечном интервале $\langle \alpha, \beta \rangle$. Тогда f суммируема на $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Доказательство. Например, пусть особенность на конце β : f интегрируема по Риману на любом интервале $\langle \alpha, \beta - \delta \rangle$, причём $\exists \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta - \delta} f(x) dx$. Пускай $f_n = f \cdot \chi_{\langle \alpha, \beta - \frac{1}{n} \rangle}$. Тогда $f_n \nearrow f$, по теореме Леви предельная функция тоже суммируема, причём её интеграл — предел интегралов f_n . \square

Замечание. Если функция знакопеременна, то интегрировать всё ещё бывает полезно в несобственном смысле: $\frac{\sin x}{x}$ не суммируема на $[0, \infty)$, но можно писать

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Лекция XI

15 ноября 2023 г.

2.7 Теоремы Тонелли и Фубини

Рассмотрим два пространства с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ (\mathcal{A}, \mathcal{B} — σ -алгебры, μ, ν — счётно-аддитивные меры на \mathcal{A} и \mathcal{B} соответственно).

Рассмотрим полукольцо $\mathcal{P} = X \times Y$ обобщённых прямоугольников: $c \in \mathcal{P} \iff c = a \times b$ для $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$.

Предложение 2.7.1. Тогда мера $\lambda := \mu \otimes \nu$ на \mathcal{P} (определённая так: $\lambda(a \times b) = \mu(a)\nu(b)$) счётно-аддитивна.

Доказательство. Выберем $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}, \{b_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}, \{c_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$ так, что $c_j = a_j \times b_j$. Пусть c_j дизъюнкты; положим $c := \bigsqcup_{j=1}^{\infty} c_j$, пусть $c \in \mathcal{P}$.

Надо проверить, что $\lambda(c) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(c_j)$.

Рассмотрим равенство $\chi_a(x)\chi_b(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{a_j}(x)\chi_{b_j}(y)$. При каждом фиксированном x обе части — измеримые функции от y .

Интегрируя, получаем по теореме Леви

$$\underbrace{\chi_a(x) \int_Y \chi_b(y) d\nu(y)}_{\nu(b)} = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{a_j}(x) \underbrace{\int_Y \chi_{b_j}(y) d\nu(y)}_{\nu(b_j)}$$

Это равенство опять интегрируется, уже по x . В результате действительно получаем $\mu(a)\nu(b) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(a_j)\nu(b_j)$. \square

Применяя теорему Лебега — Каратеодори, можно продолжить меру λ , результат тоже обозначают $\mu \otimes \nu$, и называют *произведением мер* μ и ν .

Пусть имеется несколько пространств с мерой $(X_1, \mu_1), \dots, (X_n, \mu_n)$. Можно определить меру произведения $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$. В произведении, вообще говоря, надо указать порядок, но оказывается, что произведение мер ассоциативно.

Пример. Рассмотрим $\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Пусть λ_n, λ_k — стандартные меры Лебега на \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^k . Тогда оказывается, что $\lambda_n \otimes \lambda_k = \lambda_{n+k}$.

Можно заметить, что на обобщённых прямоугольниках мера произведения одна и та же, и применяя теорему об единственности, получаем $\lambda_n \otimes \lambda_k = \lambda_{n+k}$. (причём на само деле неважно, что обобщённые прямоугольники берутся из евклидова пространства, это проверяет ассоциативность в общем виде)

Пускай $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ — пространства со счётно-аддитивными мерами, обе меры полны и обе σ -конечны. В теоремах Тонелли и Фубини теоретически можно обойтись и без этих двух условий, но требуются дополнительные слова. Пусть $\lambda = \mu \otimes \nu$.

Теорема 2.7.1 (Тонелли). Пусть f — λ -измеримая функция на $X \times Y$, $f \geq 0$. Тогда

1. Для μ -почти всех $x \in X$: $f(x, _)$ измерима на Y .
2. Функция $\phi(x) = \int_Y f(x, _) d\nu$ измерима на X .
3. $\int_X \phi(x) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f d\lambda$.

Доказательство. Назовём функцию f допустимой, если она определена на $X \times Y$, и удовлетворяет всем трём условиям.

1. Если $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$, то $\chi_{a \times b}$ допустима: $\chi_{a \times b}(x, y) = \chi_a(x) \chi_b(y)$.
2. Неотрицательные простые (элементарные) функции, построенные по полукольцу \mathcal{P} , допустимы.
 - Если f, g — допустимы, $\alpha, \beta \geq 0$, то $\alpha f + \beta g$ тоже допустима.
 - Если f, g — допустимы и f суммируема, причём $0 \leq g \leq f$, то $g - f$ тоже допустима.

Доказательство. Пусть $\phi(x) = \int_X f(x, _) d\nu$. В силу 3. она суммируема, откуда ϕ конечна почти всюду. Пусть $\psi(x) = \int_X g(x, _) d\nu$. Так как $\psi \leq \phi$, то ψ тоже конечна почти всюду, тогда дальше всё хорошо. \square

3. Пусть f_n — допустимые функции на $X \times Y$, пусть $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, пусть $f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y)$. Автоматически f измерима. Тогда f тоже допустима.

Доказательство. Пускай $E_n = \{x \in X | f_n(x, _) \text{ не измерима}\}$. $\mu E_n = 0$, так как f_n допустимы. Положим $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, $\mu E = 0$.

$x \notin E \Rightarrow$ все функции $f_n(x, _)$ измеримы на Y . Имеется монотонная сходимость $f_n \nearrow f$, значит $f(x, _)$ тоже измерима на Y при $x \notin E$.

Построим $\phi(x) = \int_Y f(x, _) d\nu$, $\phi_n(x) = \int_Y f_n(x, _) d\nu$. По теореме Леви (относительно меры ν) для $x \notin E$: $\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x)$. Тем самым ϕ измерима, как предел измеримых функций.

Более того, $\phi_n \nearrow \phi$, опять по теореме Леви (относительно меры μ):

$$\int_X \phi d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \phi_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} f_n d\lambda \stackrel{\text{теорема Леви относительно } \lambda}{=} \int_{X \times Y} f d\lambda$$

\square

4. Пусть f_n — допустимые функции на $X \times Y$, пусть $f_1 \geq f_2 \geq \dots$, пусть $f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y)$. Автоматически f измерима. Если f_1 суммируема, то f тоже допустима.

Доказательство. Аналогично предыдущему пункту. \square

5. Если $A \subset X \times Y$ — σ -множество, то χ_A допустима.

Доказательство. Представим A в виде $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. $\sum_{j=1}^N \chi_{A_j} \nearrow \chi_A$. □

6. Если $A \subset X \times Y$ — $\delta\sigma$ -множество конечной меры λ , то χ_A допустима.

Доказательство. Представим A в виде $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$, где $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, A_j — σ -множества конечной меры. $\chi_{A_j} \searrow \chi_A$. □

7. Если $e \subset X \times Y$ измеримо, и $\lambda(e) = 0$, то χ_e допустимо.

Доказательство. Пусть \bar{e} — $\delta\sigma$ -множество, такое, что $\bar{e} \supset e$, и $\lambda(\bar{e}) = 0$.

Тогда $\chi_e \leq \chi_{\bar{e}}$. $\chi_{\bar{e}}$ допустима, в частности, $\chi_{\bar{e}}(x, _)$ измерима на Y для почти всех $x \in X$. Обозначив $\bar{\phi}(x) = \int_Y \chi_{\bar{e}}(x, _) d\nu$ видим, что $\bar{\phi}$ измерима на X , а так как

$$\int_X \bar{\phi} d\mu = \int_{X \times Y} \chi_{\bar{e}} d\lambda = 0$$

то $\bar{\phi}(x) = 0$ для почти всех $x \in X$.

Пусть $E = \{x \in X | \bar{\phi}(x) \neq 0\}$. Для $x \notin E$: $\int_Y \chi_{\bar{e}}(x, _) d\nu = 0$. Иными словами, $\nu\{y \in Y | (x, y) \in \bar{e}\} = 0$.

Но тогда из полноты меры (здесь мы ей пользуемся в первый раз) $\nu\{y \in Y | (x, y) \in e\} = 0$. Тогда любая функция на e измерима, в частности, $\chi_e(x, _)$ измерима на Y .

Зная измеримость χ_e уже несложно доказать, что в пунктах 2 и 3 все интегралы равны нулю: в частности, $\phi(x) = \int_Y \chi_e(x, _) d\nu$ равна нулю всюду кроме E . □

8. Если $A \subset X \times Y$ — измеримое множество относительно меры λ , причём $\lambda(A) < +\infty$, то χ_A допустима.

Доказательство. $\exists \delta\sigma$ -множество $\bar{A} \supset A$, такое, что $\lambda(\bar{A} \setminus A) = 0$. Применим $\chi_A = \chi_{\bar{A}} - \chi_{\bar{A} \setminus A}$. □

9. Пусть f — простая функция относительно σ -алгебры λ -измеримых множеств, $f \geq 0$. Иными словами,

$$f = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{e_j}, \alpha_j \geq 0, e_i \cap e_j = \emptyset \text{ (при } i \neq j)$$

Если $\forall j : \lambda e_j < +\infty$, то f допустима.

10. Пусть f — неотрицательная измеримая функция на $X \times Y$, $\lambda\{(x, y) | f(x, y) \neq 0\} < +\infty$. Тогда f допустима.

Доказательство. $\exists f_n$ — простые функции, $0 \leq f_n \leq f$, $f_n \nearrow f$. Все f_n допустимы, значит и f допустима. □

11. Все неотрицательные измеримые функции допустимы.

Доказательство. $\exists X_1 \subset X_2 \subset \dots$, такие, что $X = \bigcup_i X_i$, и все $\mu(X_i) < +\infty$. Аналогично $\exists Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$, такие, что $Y = \bigcup_i Y_i$, и все $\mu(Y_i) < +\infty$. (Здесь мы пользуемся σ -конечностью в первый раз).

Положим $f_n(x, y) = f(x, y)\chi_{X_n}(x)\chi_{Y_n}(y)$. f_n из пункта 10, значит, f допустима, так как $f_n \nearrow f$. \square

\square

Теорема 2.7.2 (Фубини). Пусть $(X, \mu), (Y, \nu)$ — два пространства с мерой, $\lambda = \mu \otimes \nu$.

Если $f \in L^1(\lambda)$, то

- Для почти всех $x \in X$: $\phi(x) := \int_Y f(x, y) d\nu$ суммируема на X .
- $\int_X \phi d\mu = \int_{X \times Y} f d\lambda$.

Доказательство. f суммируема $\Rightarrow f_+, f_-$ суммируемы по λ . К каждой из них применима теорема Тонелли. Вычитаем заключения теоремы Тонелли для f_+ и f_- . \square

Задача 2.7.1. Придумать функцию f , такую, что $\phi(x) := \int_Y f(x, y) d\nu$ суммируема, но $f \notin L^1(\lambda)$.

2.7.1 Как применять

Пусть f — λ -измеримая функция (про знак ничего не известно).

Чтобы доказать, что f суммируема, надо доказать, что $|f|$ суммируема.

По теореме Тонелли $|f|$ суммируема $\iff \int_X \int_Y |f|(x, y) d\nu(y) d\mu(x)$. Если интеграл сошёлся, то f тоже суммируема, и для исходной функции тоже можно сводить интеграл к повторному.

2.8 Свёртки. Приближение функций с помощью свёрток

Пусть f, g — измеримые функции на \mathbb{R}^n .

Определение 2.8.1 (Свёртка $f * g$). $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) dy$. Свёртка определена в тех точках, где интеграл определён.

Рассмотрим $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto (y, x - y)$. L линейно, значит, L, L^{-1} измеримы по Лебегу. Определив $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto f(u)g(v)$ видим, что T измерима, откуда $(T \circ L)(x, y) = f(y)g(x - y)$ тоже измерима.

Теорема 2.8.1. Если $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то $(f * g)$ определена почти всюду, и $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$.

Доказательство. Рассмотрим $\phi(x, y) = |f(x)| \cdot |g(x - y)|$. Она неотрицательна, применяем теорему Тонелли:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \phi d\lambda_{2n} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot |g(x - y)| dx \right) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x - y)| dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| dx \right) dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \end{aligned}$$

По теореме Тонелли ϕ суммируема, тем самым, $(x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$ тоже суммируема. По теореме Фубини $(f * g)(x)$ определена для почти всех x , причём она суммируема.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)| dy dx \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$$

□

Замечание. Неформально говоря, если сворачивать f с какими-то хорошими свойствами, и g с какими-то другими хорошими свойствами, то свёртка обладает всеми хорошими свойствами каждой из них.

Утверждение 2.8.1. $f * g = g * f$ всегда, когда существует:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy = \left\| \begin{array}{l} z = x - y \\ y = x - z \end{array} \right\| = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z) dz$$

Упражнение 2.8.1. Свёртка ассоциативна: $f * (g * h) = (f * g) * h$ всегда, когда существует.

Лекция XII

22 ноября 2023 г.

2.8.1 Меры с плотностью

Пусть (X, Σ, μ) — пространство с мерой. Пусть $\phi \geq 0$ — измеримая функция на X .

Можно определить меру, индуцированную функцией ϕ : $\nu(e) = \int_e \phi d\mu$ для $e \in \Sigma$. Тогда ϕ называется плотностью меры ν относительно μ .

Куда должна быть $\phi \geq 0$?

1. Можно считать, что $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$, но, возможно, меняет знак. Надо предположить, что либо ϕ_+ , либо ϕ_- суммируемы.

Тогда сохраняется счётная аддитивность: $e = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} e_i \Rightarrow \nu(e) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(e_i)$. Тем не менее, всякие монотонности могут перестать выполняться, так как функция перестала быть неотрицательной.

2. Можно считать, что $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$. Комплексный интеграл берётся отдельно по вещественной и мнимой частям:

$$\int_e (\alpha + \beta i) d\mu = \int_e \alpha d\mu + i \int_e \beta d\mu$$

В обоих случаях ν перестаёт быть мерой в заявленном определении, это просто какая-то счётно-аддитивная функция множества, и ϕ во всех случаях называется её плотностью.

Интегрирование по мере ν

Пусть ν определена, как выше.

Факт 2.8.1. Если $g \geq 0$ — измеримая функция на X , то $\int_X g d\nu = \int_X g\phi d\mu$.

Доказательство. Формула верна для $g = \chi_e$:

$$\int_X \chi_e d\nu = \nu(e) = \int_X \chi_e \phi d\mu$$

Значит, формула верна для неотрицательных простых функций.

Существуют неотрицательные простые $g_n \nearrow g$, применяем теорему Леви. \square

Следствие 2.8.1. Неотрицательная функция g ν -суммируема $\iff g\phi$ μ -суммируема.

Следствие 2.8.2. Тогда h (возможно, меняющая знак) ν -суммируема $\iff h\phi$ μ -суммируема, причём $\int_X h d\nu = \int_X h\phi d\mu$.

2.8.2 Образ меры

Пусть $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ — два пространства, \mathcal{A}, \mathcal{B} — σ -алгебры подмножеств в X и Y соответственно.

Пусть $F: X \rightarrow Y$ измеримо относительно $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Пускай $\mu \geq 0$ — счётно-аддитивная мера на (X, \mathcal{A}) . Её образ $F^0(\mu) = \nu$ — счётно-аддитивная мера на (Y, \mathcal{B}) , такая, что $\nu(b) = \mu(F^{-1}(b))$. Счётная аддитивность следует из того, что прообраз уважает все теоретико-множественные операции.

Интегрирование по мере ν

Пусть ν определена, как выше.

$$\int_Y \chi_e d\nu = \nu(b) = \int_X \chi_{F^{-1}(b)} d\mu$$

Заметим, что $\chi_{F^{-1}(b)} = \chi_b \circ F$.

Факт 2.8.2. Если $g \geq 0$ — измеримая функция на X , то $\int_X g d\nu = \int_X g \circ F d\mu$.

Доказательство. Формула верна для $g = \chi_e$. Значит, формула верна для неотрицательных простых функций.

Существуют неотрицательные простые $g_n \nearrow g$, применяем теорему Леви (два раза, в левой и правой частях равенства). \square

Все замечания из предыдущего раздела повторяются.

Следствие 2.8.3. Неотрицательная функция g ν -суммируема $\iff g\phi$ μ -суммируема.

Следствие 2.8.4. Тогда h (возможно, меняющая знак) ν -суммируема $\iff h\phi$ μ -суммируема, причём $\int_X h d\nu = \int_X h\phi d\mu$.

Данная формула очень полезна при замене переменной в интеграле.

Например, ранее записанное равенство $\int_X f(x-y) dy = \int_X f(\xi) d\xi$ видно из данной формулы при $g(y) = x-y$ — здесь образ меры будет её самой.

2.8.3 Свойства свёртки

Теорема 2.8.2. Если g лежит в $L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, где $1 \leq p \leq \infty$, то $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

Доказательство. Пусть $p = \infty$.

$$|(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)| dy \leq \underbrace{\|f\|_{L^\infty}}_{\text{ess sup}(f)} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy$$

При $p = 1$ доказано выше: (2.8.1).

Теперь пусть $1 < p < \infty$, q — сопряжённый к p показатель.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy \right)^p dx = \dots$$

Определим из меры Лебега новую меру с плотностью $|g(y)|$: $\nu(e) := \int_e |g(y)| dy$. Это конечная мера на \mathbb{R}^n , так как $g \in L^1$.

$$\dots = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot 1 d\nu(y) \right)^p dx \leq \dots$$

Теперь применим неравенство Гёльдера относительно данной меры ν .

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} 1^q d\nu \right)^{\frac{1}{q}} \right]^p dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)| dy \right) dx \cdot \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} = \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \|f\|_{L^1}^p \|g\|_{L^1} \end{aligned}$$

Тем самым, $\|f * g\|_{L^p} \leq \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}+1} \|f\|_{L^p}^p$ и $\|f * g\|_{L^p}^p \leq \|f\|_{L^p}^p \|g\|_{L^1}$.

□

Упражнение 2.8.2 (Неравенство Юнга). Пусть $f \in L^s(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^t(\mathbb{R}^n)$, где $s, t > 1$. Предположим, что $\frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{t} - 1$, и пусть $r \geq 1$. Тогда $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^s} \|g\|_{L^t}$.

Упражнение 2.8.3. Если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, и $1 < p, q < \infty$, то $\|f * g\| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$, и при этом $\|f * g\|$ непрерывна и стремится к нулю на ∞ .

Факт 2.8.3. Пусть $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = 1$. Тогда для $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ при $1 \leq p \leq \infty$:

$$\|f * g - f\|_{L^p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dy \cdot |g(x)| dx$$

Доказательство. $(f * g)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))g(y) dy$
Возьмём модуль, возведём в степень p , и проинтегрируем:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x) - f(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| |g(y)| dy \right)^p dx$$

Далее вводим меру $\nu(e) = \int_e |g(y)| dy$, и опять применяем неравенство Гёльдера к $|f(x-y) - f(x)| \cdot 1$.

Замечание. При $p = \infty$ тоже верно, доказательство другое (проще). □

Определение 2.8.2 (Пространство бесконечно дифференцируемых функций на \mathbb{R}^n с компактным носителем). $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2.8.3. Пусть u — непрерывна, с компактным носителем, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Тогда $f * u$ непрерывна. Если $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то $f * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство.

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)u(x-y) dy = \dots$$

Проверим непрерывность в $x_0 \in \mathbb{R}^n$, рассмотрим $\overline{B_r(x_0)}$. Пусть $S = \text{supp } u$. Теперь можно считать, что интегрирование берётся по компакту $K = \overline{B_r(x_0)} - S$.

$$\dots \underset{\text{при } x \in B_r(x_0)}{=} \int_K f(y)u(x-y) dy$$

Заметим, что для всякой последовательности $x_j \rightarrow x_0 : u(x_j - y) \rightarrow u(x_0 - y)$, откуда $|f(y)u(x_j - x_0)| \leq C|f(y)|$, и можно применить теорему Лебега о мажоранте.

Лемма 2.8.1. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество, $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ — интервал, $v : K \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть $\exists \frac{\partial}{\partial t} v(x, t)$, и она непрерывна на (a, b) при всяком фиксированном $x \in K$. Также предположим наличие суммируемой мажоранты w на K : для всех $t \in (a, b) : \left| \frac{\partial}{\partial t} v(x, t_0) \right| \leq w(x)$.

Определим $\phi(t) = \int_K v(x, t) dx$ (предполагаем, что $v(x, t)$ суммируема при всяком t).

Тогда ϕ дифференцируема на (a, b) , и

$$\phi'(t_0) = \int_K \frac{\partial}{\partial t} v(x, t_0) dx$$

Доказательство леммы.

Выберем последовательность $t_n \rightarrow t_0$, запишем разностное отношение $\frac{\phi(t_n) - \phi(t_0)}{t_n - t_0} = \int_K \frac{v(x, t_n) - v(x, t_0)}{t_n - t_0} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi'(t_0)$ По формуле Лагранжа $\frac{v(x, t_n) - v(x, t_0)}{t_n - t_0} = \frac{\partial}{\partial t} v(x, \xi)$ для некой $\xi \in (t_n, t_0)$. $\left| \frac{\partial}{\partial t} v(x, \xi) \right| \leq w(x)$, значит, у подынтегральной функции есть мажоранта, и можно перейти к пределу. \square

Заметим, что $(f * u)(x) = \int_K f(y)u(x-y) dy$, и её действительно можно дифференцировать бесконечно много раз (?). \square

Замечание. Пусть $\text{supp } f = A, \text{supp } g = B$. Тогда $\text{supp}(f * g) \subset A + B$.

Определение 2.8.3 (Аппроксимативная единица для \mathbb{R}^n). Последовательность функций $g_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g_j \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} g_j = 1, \forall j > 0 : \int_{|y| > \delta} g_j(y) dy \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$

Теорема 2.8.4. Пусть g_j — аппроксимативная единица, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $f * g_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f$, то $\|f * g_j - f\|_{L^p} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$.

Если f непрерывна с компактным носителем (достаточно потребовать равномерной непрерывности), то $f * g_j \Rightarrow f$

Доказательство. При $1 \leq p < \infty$:

$$\begin{aligned} \|f * g_j - f\|_{L^p} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p g_j(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx g_j(y) dy = \\ &= \int_{|y| < \delta} g_j(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx + \int_{|y| \geq \delta} g_j(y) \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|f(x-y) - f(x)|^p}_{\leq 2^p(|f(x-y)|^p + |f(y)|^p)} dx \end{aligned}$$

$2^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p + |f(y)|^p dx \leq 2^{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx$, и это конечно. Значит, по определению аппроксимативной единицы второе слагаемое мало при больших j .

Для первого слагаемого применим непрерывность сдвигов в L^p : $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$ при $|y| \leq \delta \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx < \varepsilon$. Значит, оно тоже маленькое.

Равномерную сходимость проверим в следующий раз. □

Факт 2.8.4. *Пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L^p(\mathbb{R}^n)$ для $1 \leq p < +\infty$.*

Доказательство. Построим специальную аппроксимативную единицу.

1. Пускай $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция с компактным носителем, $\phi = 0$ вне $(-1, 1)$.

Например, $\phi(x) = ?$

2. $a := \int_{\mathbb{R}} \phi dx$. Положим $\psi = \frac{\phi}{a}$. Это функция с единичным интегралом.

3. $\Psi(x_1, \dots, x_n) := \psi(x_1) \cdot \dots \cdot \psi(x_n)$. Это функция с единичным интегралом, сосредоточенная на единичном кубе со стороной 2 и центром в нуле.

4. В качестве аппроксимативной единицы выберем $\Psi_j(x) = j^n \Psi(jx)$. Интеграл по-прежнему равен единице, так как якобиан скалярного умножения на j в \mathbb{R}^n равен j^n .

Теперь выберем $\varepsilon > 0$, и функции $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ сопоставим g с компактным носителем, такую, что $\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon$. При больших j :

$$\|g * \Psi_j - g\|_{L^p} < \varepsilon$$

□