

Алгебра. Неофициальный конспект

Лектор: Алексей Владимирович Степанов
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

Глава 1

Гомологическая алгебра

Лекция I 12 февраля 2024 г.

1.1 Абелевы категории

Напомним некоторые определения из предыдущей лекции.

Определение 1.1.1 (Предаддитивная категория \mathcal{A}). $\forall A, B \in \mathcal{A} : \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ образует абелеву группу, и везде, где определена, выполнена дистрибутивность:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad (\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

Определение 1.1.2 (Бипроизведение). Такая диаграмма, что

$$A \begin{array}{c} \xleftarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\iota_1} \end{array} C \begin{array}{c} \xleftarrow{\pi_2} \\ \xrightarrow{\iota_2} \end{array} B$$

1. $\pi_1 \iota_1 = \text{id}_A$.
2. $\pi_2 \iota_2 = \text{id}_B$.
3. $\iota_2 \pi_2 + \iota_1 \pi_1 = \text{id}_C$.
4. $\pi_2 \iota_1 = 0$.
5. $\pi_1 \iota_2 = 0$.

Определение 1.1.3 (Аддитивная категория). Предаддитивная категория с финальным объектом и произведениями (любых двух объектов).

Эквивалентно, существуют инициальный объект и копроизведения, эквивалентно существуют нулевой объект и бипроизведения.

Определение 1.1.4 (Предабелева категория). Аддитивная категория, в которой у всех морфизмов есть ядро и коядро.

Определение 1.1.5 ((Ко)нормальный мономорфизм (эпиморфизм)). Он является (ко)эквалайзером (какой-то, неважно какой, пары стрелок).

Определение 1.1.6 (Абелева категория). Предабелева категория, в которой все мономорфизмы нормальны.

Пусть \mathcal{C} — категория. Вспомним про категорию стрелок $Arr\mathcal{C}$, в которой объекты — стрелки из $Mod(\mathcal{C})$, множество морфизмов между ϕ, ψ — это

$$Mor_{Arr\mathcal{C}}(\phi, \psi) = \{(\alpha, \beta) | \alpha : source(\phi) \rightarrow source(\psi), \beta : target(\phi) \rightarrow target(\psi), \beta\phi = \psi\alpha\}$$

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\phi} & \bullet \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \bullet & \xrightarrow{\psi} & \bullet \end{array}$$

Далее будем обозначать за $\ker f$ ядро стрелки, как уравнитель стрелки и нуля, а за $Ker f := source(\ker f)$ — объект (в конкретных категориях типа $mod\text{-}R$ это докатегорное понятие ядра — подмодуль без стрелки-вложения).

Лемма 1.1.1. \ker, coker — функторы $Arr\mathcal{A} \rightarrow Arr\mathcal{A}$.

Доказательство. Достаточно доказать для ядер, для коядер двойственно.

Определим действие \ker на морфизмах:

$$\begin{array}{ccccc} Ker f & \xrightarrow{\ker f} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow \exists! \phi & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ Ker f' & \xrightarrow{\ker f'} & A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

$f \cdot \ker f = 0 \Rightarrow \beta \cdot f \cdot \ker f = 0 \Rightarrow f' \cdot \alpha \cdot \ker f = 0$, откуда по универсальному свойству ядра $\exists! \phi : \ker f' \cdot \phi = \alpha \cdot \ker f$.

Положим $\ker(\alpha, \beta) = (\phi, \alpha)$. Далее несложно проверить, что данное определение сохраняет композицию и id . \square

Определение 1.1.7 (Точный функтор). Функтор, сохраняющий ядра и коядра.

Интересный факт (Теорема Фрейда — Митчелла (Freyd — Mitchell)). Для любой малой абелевой категории \mathcal{A} : $\exists R \in Ring$ (необязательно коммутативное кольцо с единицей) и строгий, полный, точный функтор $\mathcal{A} \rightarrow mod\text{-}R$.

Предложение 1.1.1. Для всякого морфизма $f : A \rightarrow B$ найдётся пунктирная стрелка, делающая диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccccccc} Ker f & \xrightarrow{\ker f} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\text{coker } f} & CoKer f \\ & & \downarrow \text{coker } \ker f & & \uparrow \ker \text{coker } f & & \\ & & CoKer \ker f & \dashrightarrow^{\exists!} & Ker \text{coker } f & & \end{array}$$

Более того, в абелевой категории эта стрелка — изоморфизм.

Доказательство. Следует из эпи-моно разложения, доказанного на прошлой лекции, или из теоремы Митчелла.

Само построение пунктирной стрелки получается из универсальных свойств, а доказательство того, что это — изо — непростое. \square

Лемма 1.1.2. Пусть \mathcal{C} — полная подкатегория в абелевой категории \mathcal{A} . Следующие условия равносильны

- \mathcal{C} является абелевой.
- — $0_{\mathcal{A}} \in \mathcal{C}$, здесь, как обычно, $0_{\mathcal{A}}$ — нулевой объект категории \mathcal{A} .
- — \mathcal{C} содержит бипроизведение любых двух своих объектов.

– Ядра и коядра (взятые в \mathcal{A}) любых морфизмов из \mathcal{C} лежат в \mathcal{C} .

Доказательство.

\Leftarrow . Очевидно.

\Rightarrow . Чуть сложнее, доказывать не будем (и использовать тоже). \square

1.2 Комплексы

Если противное не оговорено, то всё происходит в абелевой категории \mathcal{A} , большими буквами обозначены объекты данной категории, маленькими — морфизмы.

Определение 1.2.1 (Комплекс). Такая диаграмма, что $\forall k \in \mathbb{Z} : d_k \cdot d_{k+1} = 0$.

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{d_n} C_n \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots$$

Альтернативно, комплекс можно рассматривать, как функтор из категории (\mathbb{Z}, \geq) (полученной из частично упорядоченного множества) в \mathcal{A} (при котором образ композиции любых двух нетождественных морфизмов нулевой). Таким образом, комплексы — полная подкатегория в категории этих функторов.

Ещё один, следующий, взгляд на комплексы работает только для конкретной категории, уже вложенной в R -модули.

Определение 1.2.2 (Градуированный объект). $C_\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C_n$ с морфизмом $d : C_\bullet \rightarrow C_\bullet$, таким, что $d(C_n) \subset C_{n+p}$ для некоторой фиксированной *степени объекта* p (чаще всего она равна ± 1).

Определение 1.2.3 (Дифференциальный модуль). Градуированный объект (C_\bullet, d) со свойством $d^2 = 0$.

Определение 1.2.4 (Комплекс). Дифференциальный модуль степени -1 .

При развороте стрелок получается дифференциальный модуль степени $+1$, также известный, как *кокомплекс*:

$$\cdots \xleftarrow{d^{n+2}} C^{n+1} \xleftarrow{d^{n+1}} C^n \xleftarrow{d^n} C^{n-1} \xleftarrow{d^{n-1}} \cdots$$

Предостережение. У кокомплекса несколько другая нумерация стрелок, но мы их практически не будем использовать.

Определение 1.2.5 (Сдвиг комплекса (C_\bullet, d) на $p \in \mathbb{Z}$). Комплекс $(C[p]_\bullet, d[p])$, где $C[p]_n = C_{n+p}$ и $d[p]_n = d_{n+p}$.

Иногда при сдвиге комплекса определяют $d[p]_n = (-1)^p d_{n+p}$, но мы так делать не будем.

Лекция II

19 февраля 2023 г.

Определение 1.2.6 (Морфизм дифференциальных модулей $\bigoplus A_n \rightarrow \bigoplus B_n$). Такое $f : \bigoplus A_n \rightarrow \bigoplus B_n$, что $f(A_n) \subset B_n$, и диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} A_{n+1} & \xrightarrow{d_n^A} & A_n \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ B_{n+1} & \xrightarrow{d_n^B} & B_n \end{array}$$

На языке абелевых категорий, надо рассматривать не одно отображение f , так как отношение $f(A_n) \subset B_n$ не выражается, а серию морфизмов $f_n : A_n \rightarrow B_n$.

Для всякого морфизма f коммутативна диаграмма в категории комплексов:

$$\begin{array}{ccc} A[1] & \xrightarrow{d^A} & A \\ \downarrow f[1] & & \downarrow f \\ B[1] & \xrightarrow{d^B} & B \end{array}$$

Если рассматривать комплексы, как функторы из категории (\mathbb{Z}, \geq) , то морфизмы между комплексами — естественные преобразования между функторами.

Теорема 1.2.1. Категория комплексов абелева.

Доказательство.

Лемма 1.2.1. Если \mathcal{C} — малая категория, \mathcal{A} — абелева, то $\text{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ — тоже абелева категория.

Доказательство леммы.

Нулевой объект — функтор 0 , сопоставляющий каждому объекту $0_{\mathcal{A}}$, и каждой стрелке — нуль-стрелку.

Для двух функторов \mathcal{F}, \mathcal{G} : $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(C) = \mathcal{F}(C) \oplus \mathcal{G}(C)$.

Если $\eta \in \text{Mor}_{\text{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{A})}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ (то есть η — естественное преобразование $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$), то $(\text{Ker } \eta)(C) = \text{Ker}(\eta_C)$.

Аналогично $(\text{Im } \eta)$, определяется ker . Аналогично с коядрами.

Далее по-хорошему надо проверить, что выполняются все универсальные свойства, но мы этого делать не будем. \square

Ссылаемся на $(??)$.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d_n^A} & A_n & \xrightarrow{d_{n-1}^A} & A_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{d_n^B} & B_n & \xrightarrow{d_{n-1}^B} & B_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} \oplus B_{n+1} & \xrightarrow{d_n^{A \oplus B}} & A_n \oplus B_n & \xrightarrow{d_{n-1}^{A \oplus B}} & A_{n-1} \oplus B_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Если $d^A \cdot d^A = 0$, и $d^B \cdot d^B = 0$, то (из теоремы Митчелла уж точно очевидно) $d^{A \oplus B} \cdot d^{A \oplus B} = 0$.

Ядра тоже являются комплексами, так как на языке конкретных категорий это просто подмодули. Двойственно с коядрами. \square

1.3 Гомологии

Дифференциал d является морфизмом комплексов $d : C[1] \rightarrow C$ (по-хорошему, $C[1]_{\bullet} \rightarrow C_{\bullet}$, но точку будем опускать):

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_n} & C_n & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow d_n & & \downarrow d_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{d_{n-1}} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Ниже мы по произвольному комплексу C строим новые комплексы.

Определение 1.3.1 (Циклы). Комплекс $Z = Z(C) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker } d[-1]$.

Определение 1.3.2 (Границы). Комплекс $B = B(C) \stackrel{def}{=} \text{Im } d[-1]$.

По определению, образ — это ядро коядра: $\text{Im } \phi \stackrel{def}{=} \text{Ker}(\text{coker } \phi)$. В абелевой категории канонически $\text{Im } \phi \cong \text{CoIm } \phi \stackrel{def}{=} \text{CoKer}(\text{ker } \phi)$.

На языке конкретных категорий, так как $d^2 = 0$, то $B \subset Z$, и можно определить фактормодуль $H := Z/B$ — *гомологии*.

То же самое можно сказать на языке универсальных свойств, хотя в будущем мы, ссылаясь на теорему Митчелла, будем всё писать исключительно в терминах элементов.

$$\begin{array}{ccccccc} Z[1] & \xrightarrow{z[1]} & C[1] & \xrightarrow{d} & C & \xrightarrow{d[-1]} & C[-1] \\ & & \downarrow b & \searrow \alpha & \uparrow z & & \\ & & B & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\text{coker } \beta} & H \cdots \cdots \cdots 0 \end{array}$$

Построение H в терминах универсальных свойств. Так как $d[-1] \cdot d = 0$, то можно пропуститьсь через ядро: $\exists! \alpha : z \cdot \alpha = d$.

Далее, $z \cdot \alpha \cdot z[1] = d \cdot z[1] = 0$, а так как z — моно, то $\alpha \cdot z[1] = 0$. Значит, можно пропуститьсь через коядро, то есть $\exists! \beta : \beta b = \alpha$. Далее H определяется, как коядро β . \square

Следствие 1.3.1. В комплексах Z, B, H нулевые дифференциалы.

Доказательство. Из диаграммы следует, что в комплексе Z нулевые дифференциалы. B состоит из подмодулей в Z , H — из фактормодулей, понятно, что там дифференциалы тоже нулевые. \square

Примеры (Гомологии окружности).

- Рассмотрим окружность, как симплициальное множество: 

Построим $C_0 = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ — свободная абелева группа на $\{a, b\}$, $C_1 = \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ — тоже свободная абелева группа, но на образующих $\{x, y\}$. Вместо \mathbb{Z} можно было взять любое другое кольцо.

Все остальные элементы комплекса объявляются нулями.

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

Определим d_1 , как «конец минус начало»: $\begin{cases} d_1(x) = b - a, \\ d_1(y) = a - b \end{cases}$.

$$\text{Теперь } \begin{cases} Z_0 = C_0 \\ Z_1 = \mathbb{Z}(x + y) \end{cases} \quad \begin{cases} B_0 = \mathbb{Z}(b - a) \\ B_1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} H_0 = Z_0/B_0 = (\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b)/\mathbb{Z}(b - a) \cong \mathbb{Z} \\ H_1 = Z_1/B_1 = \mathbb{Z}(x + y) \cong \mathbb{Z} \end{cases}.$$

- Теперь триангулируем окружность по-другому:  $\begin{cases} d_1(x) = b - a, \\ d_1(y) = c - b, \\ d_1(z) = a - c \end{cases}$.

$$\text{Теперь } \begin{cases} Z_0 = C_0 \\ Z_1 = \mathbb{Z}(x + y + z) \end{cases}, \quad \begin{cases} B_0 = \mathbb{Z}(b - a) + \mathbb{Z}(c - b) \\ B_1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} H_0 \cong \mathbb{Z} \\ H_1 = \mathbb{Z}(x + y + z)/0 \cong \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ответ получился тот же самый, и это не случайно — есть теорема, что сингулярные/симплициальные гомологии (они равны для клеточных пространств) не зависят от триангуляции.

Упражнение 1.3.1. Триангулировать сферу, и вычислить гомологии. Дифференциал от треугольника ABC (ориентация — порядок вершин — важна) определяют, как его обход вдоль периметра: $AB + BC + CA$.

Теорема 1.3.1 (Длинная точная последовательность гомологий). Пусть имеется точная последовательность комплексов $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$.

Существует длинная точная последовательность гомологических групп

$$\dots \longrightarrow H' \longrightarrow H \longrightarrow H'' \longrightarrow H'[-1] \longrightarrow H[-1] \longrightarrow \dots$$

где связующий морфизм δ будет построен в доказательстве.

Более того, это всё функториально: если есть другая короткая точная последовательность, и морфизм между ними, то по отношению к ним найдётся естественный морфизм полученных длинных точных последовательностей гомологий.

Доказательство. Сначала строим δ .

Для $z \in Z_n''$, обозначим за $[z]$ класс z в H_n'' .

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A'_n & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{\pi} & A''_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d' & & \downarrow d & & \downarrow d'' \\ 0 & \longrightarrow & A'_{n-1} & \xrightarrow{i} & A_{n-1} & \longrightarrow & A''_{n-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Положим $\delta([z]) := [i^{-1}(d(\pi^{-1}(z)))]$, где $\pi^{-1}(z)$ — произвольный прообраз (он есть, так как π сюръективно).

Дальше надо проверить, что определение корректно, и последовательность точна. Это типичный диаграммный поиск, который невозможно записывать, и его несложно воспроизвести самостоятельно. \square

Лекция III

4 марта 2023 г.

Теперь приведём другое доказательство существования длинной точной последовательности гомологий, опирающееся на лемму о змее.

Лемма 1.3.1 (О змее). Пусть даны два комплекса $A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ и $0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B''$, и морфизм между ними. Тогда имеется длинная точная последовательность из пунктирных стрелок.

Короткие стрелки получены из действия соответственных функторов (ядра и коядра), а связующий гомоморфизм определён δ определён в доказательстве, и естественен (функториален).

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } \phi' & \dashrightarrow & \text{Ker } \phi & \dashrightarrow & \text{Ker } \phi'' & & \\ \downarrow \ker \phi' & & \downarrow \ker \phi & & \downarrow \ker \phi'' & & \\ A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi'' & & \delta \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' \\ \downarrow \text{coker } \phi' & & \downarrow \text{coker } \phi & & \downarrow \text{coker } \phi'' & & \\ & \dashrightarrow & \text{CoKer } \phi' & \dashrightarrow & \text{CoKer } \phi & \dashrightarrow & \text{CoKer } \phi'' \end{array}$$

Доказательство. Диаграммный поиск. \square

Теорема 1.3.2 (Длинная точная последовательность гомологий на бис). Пусть имеется точная последовательность комплексов $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$.

Существует длинная точная последовательность гомологических групп

$$\dots \longrightarrow H' \longrightarrow H \longrightarrow H'' \longrightarrow H'[-1] \longrightarrow H[-1] \longrightarrow \dots$$

где связующий морфизм δ будет построен в доказательстве.

Более того, это всё функториально.

Доказательство. Длинная точная последовательность комплексов означает наличие следующей коммутативной диаграммы (где строки точны, и столбцы — комплексы)

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & A'_n & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & A''_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d'_n & & \downarrow d_n & & \downarrow d''_n \\ 0 & \longrightarrow & A'_{n-1} & \longrightarrow & A_{n-1} & \longrightarrow & A''_{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Пусть циклы, границы и гомологии в комплексе A обозначаются $Z_\bullet, B_\bullet, H_\bullet$ соответственно, в $A' - Z'_\bullet, B'_\bullet, H'_\bullet$, в $A'' - Z''_\bullet, B''_\bullet, H''_\bullet$. Из коммутативности диаграммы B'_n вправо уходит в B_n , а B_n , в свою очередь — в B''_n .

Чтобы воспользоваться леммой о змее, построим следующую диаграмму, взяв коядро верхней строки, ядро — нижней, и дорисовав сверху — ядра вертикальных стрелок, снизу — коядра.

$$\begin{array}{ccccccc} & H'_n & & H_n & & H''_n & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & A'_n/B'_n & \longrightarrow & A_n/B_n & \longrightarrow & A''_n/B''_n & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \tilde{d}'_n & & \downarrow \tilde{d}_n & & \downarrow \tilde{d}''_n & \\ 0 & \longrightarrow & Z'_{n-1} & \longrightarrow & Z_{n-1} & \longrightarrow & Z''_{n-1} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H'_{n-1} & & H_{n-1} & & H''_{n-1} \end{array}$$

Обоснуем, каким образом получилась такая диаграмма. По определению $d_n(B_n) = \{0\}$, поэтому $A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1}$ пропускается через фактор, и получается отображение $\tilde{d}_n : A_n/B_n \rightarrow A_{n-1}$. Так как A — комплекс, то $\tilde{d}_n(A_n/B_n) \subset Z_{n-1}$, можно сузить codomain, получая \tilde{d}_n . По определению $H_n = Z_n/B_n$, поэтому действительно $H_n = \text{Ker}(d_n)$. В свою очередь, $H_{n-1} = Z_{n-1}/B_{n-1}$, и это действительно $\text{CoKer}(d_n)$.

Отображение $A_n \rightarrow A''_n$ было эпиморфизмом, после взятия коядра эпиморфизмом оно и осталось. Двойственно, $A'_{n-1} \rightarrow A_{n-1}$ было мономорфизмом, мономорфизмом оно и осталось.

Применяя лемму о змее, получаем утверждение теоремы. □

1.4 Функторы между абелевыми категориями

Пусть \mathcal{A}, \mathcal{B} — абелевы категории.

Определение 1.4.1 (Аддитивный функтор $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$). Такой функтор, что $\forall \alpha, \beta \in \text{Mor}(\mathcal{A}) : \mathcal{F}(\alpha + \beta) = \mathcal{F}(\alpha) + \mathcal{F}(\beta)$ всегда, когда определено.

Рассмотрим произвольную короткую точную последовательность $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ в \mathcal{A} . Подействовав на неё функтором \mathcal{F} , мы получим последовательность $0 \rightarrow \mathcal{F}(A') \rightarrow \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A'') \rightarrow 0$. Точность, вообще говоря, пропадёт, но если \mathcal{F} сохраняет точность в каком-то члене для всех таких коротких точных последовательностей, то функтор \mathcal{F} имеет соответствующее название:

1. Если всегда имеется точность в члене $\mathcal{F}(A)$, то \mathcal{F} — *полуточный функтор*.
2. Если всегда имеется точность в членах $\mathcal{F}(A')$ и $\mathcal{F}(A)$, то \mathcal{F} — *точный слева функтор*.
3. Если всегда имеется точность в членах $\mathcal{F}(A)$ и $\mathcal{F}(A'')$, то \mathcal{F} — *точный справа функтор*.
4. Если всякая короткая точная последовательность переходит в короткую точную последовательность, то \mathcal{F} — *точный функтор*.

Лемма 1.4.1. Пусть \mathcal{F} — аддитивный функтор. Следующие условия эквивалентны:

1. \mathcal{F} *точен справа*.
2. \mathcal{F} *сохраняет нуль и коядра*: $\mathcal{F}(0) = 0, \mathcal{F}(\text{coker}(\phi)) = \text{coker}(\mathcal{F}(\phi))$.
3. \mathcal{F} *сохраняет конечные копределы*.

Доказательство.

- (3) \Rightarrow (2) Коядро — конечный копредел, поэтому очевидно.
- (2) \Rightarrow (3) В свою очередь, копроизведение в абелевой категории — бипроизведение, а это «внутренний объект», поэтому всякий аддитивный функтор сохраняет его.
- (2) \Rightarrow (1) Короткая точная последовательность $A' \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{\psi} A'' \rightarrow 0$ характеризуется свойствами $\psi = \text{coker } \phi, 0 = \text{coker } \psi$.
- (1) \Rightarrow (2) Рассмотрим произвольный $\phi : A' \rightarrow A$. У него есть эпи-моно разложение $\phi = \mu \varepsilon$ (μ — моно, ε — эпи), и $\text{coker}(\mu \varepsilon) = \text{coker}(\mu)$, так как ε — эпиморфизм. Значит, без потери общности ϕ — мономорфизм.

Тогда последовательность $0 \rightarrow A' \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{\text{coker } \phi} \text{CoKer } \phi \rightarrow 0$ точна, и так как \mathcal{F} — *точен справа*, то $\mathcal{F}(\text{coker } \phi) = \text{coker}(\mathcal{F}(\phi))$.

Также *точный справа* функтор сохраняет нуль: $0 \rightarrow A \xrightarrow{\text{id}} A \rightarrow 0 \rightarrow 0$ переходит в $\mathcal{F}(A) \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(0) \rightarrow 0$. □

Следствие 1.4.1. Левый сопряжённый функтор *точен справа*.

Доказательство. Он сохраняет копределы. □

Копредел (который является левым сопряжённым к диагональному Δ) сохраняет копределы, значит, *точен справа*. Другими словами, копределы коммутируют.

К сожалению, в лемме о змее это не помогает в доказательстве того, что последовательность точна в члене $\text{Ker } \phi$, так как нет точной последовательности $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$.

При доказательстве существования длинной точной последовательности гомологий на бис, мы использовали, что коядро точно справа, ядро — точно слева.

Лекция IV

11 марта 2023 г.

Факт 1.4.1. Если *точный справа* функтор сохраняет мономорфизмы, то функтор *точен*. Двойственно, *точный слева* функтор, сохраняющий эпиморфизмы, *точен*.

1.5 Резольвенты

Пусть \mathcal{A} — абелева категория, $P \in \mathcal{A}$.

Определение 1.5.1 (Объект P проективен). $\forall \phi : A \rightarrow B: \phi \text{ — эпи} \Rightarrow \forall \psi : P \rightarrow B: \exists \theta : P \rightarrow A$, причём диаграмма коммутует. При этом θ должно найтись какое-то, не факт, что оно единственно.

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \swarrow \exists \theta & \downarrow \forall \psi & \\ A & \xrightarrow{\forall \phi} B & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Факт 1.5.1. В \mathcal{Set} все множества — проективные объекты.

Теорема 1.5.1. Пусть $\mathcal{A} = R\text{-mod}$. Модуль P проективен $\iff P$ является прямым слагаемым свободного модуля.

Доказательство.

1. Свободный модуль проективен: пусть $\{p_\alpha\}$ — базис P . Определим $\theta(p_\alpha) = \psi(\phi^{-1}(p_\alpha))$, где прообраз выбран произвольно, и продолжим по линейности.
2. Прямое слагаемое проективного модуля проективно. Рассмотрим каноническое вложение $M \hookrightarrow M \oplus N$, где $M \oplus N$ — проективен.

$$\begin{array}{ccc} & M & \longrightarrow M \oplus N \\ & \downarrow \psi & \swarrow \text{---} \\ A & \longrightarrow B & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Определим $M \oplus N \rightarrow B, (m, n) \mapsto \psi(m)$. Так как $M \oplus N$ проективен, то найдётся $M \oplus N \rightarrow A$, и композиция $M \rightarrow M \oplus N \rightarrow A$ подходит в качестве морфизма, который должен найтись из определения проективного модуля.

3. Пусть P проективен. Возьмём свободный модуль F , сюръективно накрывающий P (например, подойдёт свободный модуль на всех элементах P , но на практике, конечно, удобно брать модуль поменьше).

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \swarrow \exists & \downarrow \text{id} & \\ F & \xrightarrow{\pi} P & \end{array}$$

Так как модуль проективен, то найдётся пунктирная стрелка. Значит, $F \cong P \oplus \text{Ker } \pi$ ($\forall f \in F : \pi^{-1}(f) = P(f) + \text{Ker } \pi$). \square

Примеры.

- Пусть $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Тогда $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ является R -модулем, но $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, значит, модули $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ все проективны.
- Можно предъявить проективный модуль, исходя из топологического факта о том, что шар нельзя причисать.

Определение 1.5.2 (Проективная резольвента модуля M). Ациклический комплекс вида $\cdots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, где P_i — проективные модули.

В будущем докажем, что любые две проективные резольвенты гомотопически эквивалентны.

Определение 1.5.3 (В категории \mathcal{A} достаточно много проективных объектов). $\forall A \in \mathcal{A}$ найдётся проективный объект $P \in \mathcal{A}$ вместе с эпиморфизмом $P \twoheadrightarrow A$.

Если в нашей категории \mathcal{A} достаточно много проективных объектов, то у всякого модуля M найдётся резольвента — надо просто подряд накрывать возникающие ядра.

Лекция V

18 марта 2024 г.

1.6 Резольвенты. Левый производный функтор

Зафиксируем некоторый аддитивный функтор $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, который обычно будет точен справа. Пусть у объекта $A \in \mathcal{A}$ имеется проективная резольвента, которую я выделил стрелками \rightsquigarrow .

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightsquigarrow & P_1 & \rightsquigarrow & P_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \rightsquigarrow & 0 \end{array}$$

Иными словами, проективная резольвента — это некоторый морфизм комплексов P и A_\bullet . Под комплексом A_\bullet подразумевается такой комплекс, в котором в нулевой градуировке сидит A , а в остальных — нули (следовательно, все дифференциалы — тоже нули).

Раз \mathcal{F} точен справа, то он сохраняет нуль. Применим \mathcal{F} к верхней строчке. Тогда получится комплекс вида

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}(P_1) \longrightarrow \mathcal{F}(P_0) \longrightarrow 0$$

Чуть ниже мы определим $L_n \mathcal{F}(A) := H_n \mathcal{F}(P)$ — левый производный функтор, измеряющий неточность \mathcal{F} — но пока, например, неясна корректность (независимость от резольвенты) такого определения.

Теорема 1.6.1. Пусть P_i проективные, сверху комплекс (и ноль в верхней строчке вообще-то неважен), снизу — точный комплекс.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \\ \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

Тогда найдутся пунктирные стрелки, и они определены с точностью до гомотопии.

Доказательство.

- Сначала построим $f_i : P_i \rightarrow Q_i$.
 $Q_0 \rightarrow B$ сюръективно, значит, найдётся f_0 , такое, что квадрат коммутативен.
- Далее по индукции: пусть построены f_0, \dots, f_n .

$$\begin{array}{ccccc} P_{n+1} & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & P_{n-1} \\ \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ Q_{n+1} & \longrightarrow & Q_n & \xrightarrow{d_{n-1}^Q} & Q_{n-1} \end{array}$$

Хочется заполнить стрелку $P_{n+1} \rightarrow Q_{n+1}$, воспользовавшись проективностью P_{n+1} . Для этого надо найти сюръективное $Q_{n+1} \rightarrow ?$. Так как внизу — точная последовательность, то $Q_{n+1} \rightarrow \text{Ker}(d_{n-1}^Q)$ подойдёт: оно сюръективно, так как $P_{n+1} \rightarrow P_{n-1}$ нулевой,

а квадрат $\begin{array}{ccc} P_n & \longrightarrow & P_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_n & \longrightarrow & Q_{n-1} \end{array}$ коммутативен. Тем самым, по определению проективного модуля $\exists f_{n+1}$.

- Теперь пусть имеются два морфизма комплексов, продолжающих f , f_i и g_i .

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A \\ & & f_1 \downarrow & g_1 \downarrow & f_0 \downarrow & g_0 \downarrow & f \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

Распишем разность: пусть $h_i := f_i - g_i$. Понятно, что $A \rightarrow Q_0$ надо взять нулевым.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & h_1 \downarrow & s_0 \swarrow & h_0 \downarrow & 0 \swarrow & 0 \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

s_0 строится по основному свойству проективного модуля P_0 : ведь $h_0(P_0) \subset \text{Ker}(d_{-1}^Q) = \text{Im } d_0^Q$

- Далее индукция. Пусть построены s_0, \dots, s_{n-1} , строим s_n .

$$\begin{array}{ccccccc} & & P_n & \xrightarrow{d_{n-1}^P} & P_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-2}^P} & P_{n-2} \\ & \swarrow s_n & \downarrow h_n & \swarrow s_{n-1} & \downarrow h_{n-1} & \swarrow s_{n-2} & \\ Q_{n+1} & \xrightarrow{d_n^Q} & Q_n & \xrightarrow{d_{n-1}^Q} & Q_{n-1} & & \end{array}$$

Хочется, чтобы выполнялось $h_n = d_n^Q s_n + s_{n-1} d_{n-1}^P$, эквивалентно $d_n^Q s_n = h_n - s_{n-1} d_{n-1}^P$.

Надо проверить, что образ правой части лежит в $\text{Im}(d_n^Q)$, то есть $\text{Ker}(d_{n-1}^Q)$. Применим d_{n-1}^Q . Получим

$$d_{n-1}^Q h_n - d_{n-1}^Q s_{n-1} d_{n-1}^P = h_{n-1} d_{n-1}^P - (h_{n-1} - s_{n-2} d_{n-2}^P) d_{n-1}^P = 0$$

Тем самым, s_n действительно найдётся согласно свойству проективного модуля.

□

Следствие 1.6.1. Любые две проективные резольвенты одного и того же объекта гомотопически эквивалентны.

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & A_\bullet \\ g \uparrow & \downarrow f & \downarrow \text{id} \\ Q & \longrightarrow & A_\bullet \end{array} \quad \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & A_\bullet \\ \text{id} \downarrow & \downarrow fg & \downarrow \text{id} \\ P & \longrightarrow & A_\bullet \end{array}$$

Строим по только что доказанной теореме f, g , по теореме $fg \simeq \text{id}_Q$ и $gf \simeq \text{id}_Q$.

Таким образом, определение левого производного функтора L_n корректно.

С некоторой точки зрения «правильно» рассматривать категорию комплексов с точностью до гомотопической эквивалентности, назовём её $\mathcal{H}\mathcal{C}ompr(\mathcal{A})$: там объекты — $\text{Obj } \mathcal{A}$, а группа морфизмов $\text{Mor}_{\mathcal{H}\mathcal{C}ompr(\mathcal{A})}(P, Q) = \text{Mor}(\mathcal{C}ompr(\mathcal{A}))/\text{Ho}(P, Q)$, где $\text{Ho}(P, Q)$ — группа морфизмов, гомотопных 0.

Примеры (Что такое L_0 от точного справа функтора).

- Предположим, что \mathcal{F} точен справа. Тогда

$$\mathcal{F}(P_1) \longrightarrow \mathcal{F}(P_0) \longrightarrow \mathcal{F}(A) \longrightarrow 0$$

точна. $L_0 \mathcal{F}(A) = H_0(\mathcal{F}(P)) = \text{CoKer}(\mathcal{F}(P_1) \rightarrow \mathcal{F}(P_0))$. Если функтор точен справа, то $\text{CoKer}(\mathcal{F}(P_1) \rightarrow \mathcal{F}(P_0)) = \mathcal{F}(A)$.

Тем самым, $L_0 \mathcal{F} = \mathcal{F}$.

- Обратно, если $L_0\mathcal{F} = \mathcal{F}$, то \mathcal{F} сохраняет коядра, значит, точен справа. (По-хорошему, надо ещё проверить, что $L_0\mathcal{F}$ действует на морфизмах так же, но это банально).

Следствие 1.6.2. Если P_A, P_B — проективные резольвенты A, B соответственно, и $f : A \rightarrow B$, то $\exists \tilde{f} : P_A \rightarrow P_B$, делающий диаграмму коммутативной. Он определён однозначно с точностью до гомотопии.

$$\begin{array}{ccc} P_A & \longrightarrow & A_\bullet \\ \tilde{f} \downarrow & & f \downarrow \\ P_B & \longrightarrow & B_\bullet \end{array}$$

Здесь A_\bullet — комплекс, где A сосредоточен в нулевом члене.

Таким образом, морфизму f объектов из \mathcal{A} сопоставляется морфизм резольвент \tilde{f} , а он, в свою очередь, индуцирует морфизм гомологий $H_n(P_A) \rightarrow H_n(P_B)$. Значит, конструкция L функториальна.

1.6.1 Длинная точная последовательность левых производных функторов

Зафиксируем некоторый функтор \mathcal{F} . Далее мы исследуем $L_n\mathcal{F}$, для упрощения записи будем писать $L_n := L_n\mathcal{F}$.

Пусть имеется короткая точная последовательность $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ в \mathcal{A} . Построим длинную точную последовательность производных функторов. Это так говорится? Скорее всё-таки их значений на A, B, C

$$\cdots \rightarrow L_1(A) \rightarrow L_1(B) \rightarrow L_1(C) \rightarrow L_0(A) \rightarrow L_0(B) \rightarrow L_0(C) \rightarrow \cdots$$

Для получения такой штуки было бы неплохо заполучить точную последовательность резольвент $P_A \rightarrow P_B \rightarrow P_C$, причём не абы какую, а сохраняющую свою точность под действием любого аддитивного функтора. Оказывается, это сделать несложно, и в этом нам поможет лемма о подкове.

Лемма 1.6.1 (О подкове). Пусть P — проективный модуль, все строки и столбцы (состоящие из чёрных сплошных стрелок) точны.

$$\begin{array}{ccccccc} Q & \xrightarrow{\quad i \quad} & Q \oplus P & \xrightarrow{\quad \pi \quad} & P & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Утверждается, что диаграмму можно достроить до коммутативной, добавив зелёные пунктирные стрелки. Новые строки и столбцы также станут точны.

Доказательство. Так как P — проективен, а g — эпи, то найдётся сечение s такое, что $gs = h_C$.

$$\begin{array}{ccccccc} Q & \xrightarrow{\quad i \quad} & Q \oplus P & \xrightarrow{\quad \pi \quad} & P & & \\ \downarrow h_A & & \downarrow h_B & & \downarrow h_C & & \\ 0 \longrightarrow & A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B & \xrightarrow{\quad g \quad} & C & \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Определим стрелку h_B исходя из того, что квадраты должны в итоге получиться коммутативными. Из коммутативности левого квадрата $h_B(u, 0) = f(h_A(u))$. Из коммутативности правого треугольника $h_B(0, v) = h_C(v) = gs(v)$. Тем самым, подойдёт $h_B(u, v) := f(h_A(u)) + s(v)$.

При таком определении правый квадрат будет коммутативен: $g(s(v)) = h_C(\pi(u, v)) \stackrel{?}{=} g(h_B(u, v)) = g(s(v))$, так как $gf = 0$.

Также несложно убедиться, что построенный морфизм h_B — эпи (видимо, диаграммный поиск). \square

Теорема 1.6.2. Для короткой точной последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ существует точная последовательность резольвент $0 \rightarrow P_A \rightarrow P_B \rightarrow P_C \rightarrow 0$, точность которой сохраняется под действием любого аддитивного функтора.

Доказательство. Возьмём произвольные резольвенты P_A, P_C . Резольвенту P_B будем строить пошагово, по индукции. $(P_B)_0 := (P_A)_0 \oplus (P_C)_0$ строится прямым применением леммы о подкове.

Далее необходимо провести индукционный переход.

$$\begin{array}{ccccccc}
 (P_A)_{n+1} & \xrightarrow{\text{---}i\text{---}} & (P_A)_{n+1} \oplus (P_C)_{n+1} & \xrightarrow{\text{---}\pi\text{---}} & (P_C)_{n+1} & & \\
 \downarrow & & \downarrow d_n^B & & \downarrow & & \\
 0 \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-1}^A) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-1}^B) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-1}^C) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & (P_A)_n & \longrightarrow & (P_B)_n & \longrightarrow & (P_C)_n & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow d_{n-1}^A & & \downarrow d_{n-1}^B & & \downarrow d_{n-1}^C & \\
 0 \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-2}^A) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-2}^B) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-2}^C) & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Вычленим некоторый кусочек диаграммы, и попробуем применить лемму о подкове для получения d_n^B . Для этого необходимо потребовать от стрелки $\text{Ker}(d_{n-1}^B) \rightarrow \text{Ker}(d_{n-1}^C)$, чтобы она была эпиморфизмом.

Докажем последнее по индукции: короткая последовательность ядер $0 \rightarrow \text{Ker}(d_n^A) \rightarrow \text{Ker}(d_n^B) \rightarrow \text{Ker}(d_n^C) \rightarrow 0$ точна (так как ядро точно слева, то точность в остальных членах не вызывает сомнений, надо лишь проверить эпиморфность). В качестве базы здесь удобно применить лемму о змее:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & \text{Ker}(d_{-1}^A) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{-1}^B) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{-1}^C) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & P_A & \longrightarrow & P_B & \longrightarrow & P_C & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow d_{-1}^A & & \downarrow d_{-1}^B & & \downarrow d_{-1}^C & \\
 0 \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

А индукционный переход я не знаю, ну, можно просто убедиться, используя определение d_n^B из леммы о подкове.

Тем самым, так как прямая сумма проективных проективна, то $(P_A)_{n+1} \oplus (P_C)_{n+1} \twoheadrightarrow \text{Ker}(d_{n-1}^B)$, и определение резольвенты B по индукции корректно.

Точность $0 \rightarrow P_A \rightarrow P_B \rightarrow P_C$ под действием всякого аддитивного функтора, конечно, сохраняется, так как $(P_B)_n = (P_A)_n \oplus (P_C)_n$, а аддитивные функторы сохраняют бипроизведение. \square

Следствие 1.6.3 (Длинная точная последовательность производных функторов). Для короткой точной последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ имеет место длинная точная последовательность

$$\cdots \rightarrow L_1(A) \rightarrow L_1(B) \rightarrow L_1(C) \rightarrow L_0(A) \rightarrow L_0(B) \rightarrow L_0(C) \rightarrow \cdots$$

Доказательство. Из (??) найдётся точная последовательность проективных резольвент $0 \rightarrow P_A \rightarrow P_B \rightarrow P_C \rightarrow 0$. Применяя \mathcal{F} , получаем точную последовательность $0 \rightarrow \mathcal{F}(P_A) \rightarrow \mathcal{F}(P_B) \rightarrow \mathcal{F}(P_C) \rightarrow 0$.

Возьмём у $\mathcal{F}(P_A), \mathcal{F}(P_B), \mathcal{F}(P_C)$ гомологии. Составленная из них длинная точная гомологическая последовательность как раз и сконструирует искомую длинную точную последовательность левых производных функторов. \square

Замечание. Если \mathcal{F} точен справа, то длинная точная последовательность производных функторов обрывается эпиморфизмом: $L_0(B) \rightarrow L_0(C) \rightarrow 0$.

Лекция VI

25 марта 2024 г.

Рассмотрим формальное обобщение производных функторов.

Пусть имеется семейство $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ функторов $\mathcal{F}_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$.

Определение 1.6.1 ((Левая) связанная последовательность функторов). Такая последовательность функторов $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, что для любой точной последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ существует функториальная длинная точная последовательность

$$\cdots \rightarrow \mathcal{F}_1(A) \rightarrow \mathcal{F}_1(B) \rightarrow \mathcal{F}_1(C) \rightarrow \mathcal{F}_0(A) \rightarrow \mathcal{F}_0(B) \rightarrow \mathcal{F}_0(C)$$

Пример. Последовательность $\{L_i \mathcal{F}\}_{i \in \mathbb{N}}$ — связанная последовательность функторов.

Заметим, что $\forall i > 0 : L_i \mathcal{F}(P) = 0$, если P проективен. Это очевидным образом следует из существования резольвенты $0 \rightarrow P \rightarrow P \rightarrow 0$. Если \mathcal{F} точен справа (а мы это предполагаем), то он сохраняет ноль. Тогда $L_n \mathcal{F}$ — гомологии $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{F}(P) \rightarrow 0$, которые в нулевом члене — $\mathcal{F}(P)$, а в остальных — нулевые.

Оказывается, этого условия достаточно, чтобы определить связанную последовательность по нулевому элементу:

Теорема 1.6.3. Пусть $\{\mathcal{F}_i\}, \{\mathcal{G}_i\}$ — две связанные последовательности функторов, такие, что имеется естественный изоморфизм $\mathcal{F}_0 \cong \mathcal{G}_0$, и для любого проективного P : $\forall i > 0 : \mathcal{F}_i(P) = \mathcal{G}_i(P) = 0$.

Также предположим, что в \mathcal{A} достаточно много проективных объектов.

Тогда $\forall i : \mathcal{F}_i \cong \mathcal{G}_i$ — естественный изоморфизм.

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{A}$. Накроем A проективным, возьмём ядро, получим точную последовательность

$$0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow 0$$

Так как последовательности функторов — связаны — то имеется длинная точная последовательность:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = \mathcal{F}_1(P) & \longrightarrow & \mathcal{F}_1(A) & \longrightarrow & \mathcal{F}_0(M) & \longrightarrow & \mathcal{F}_0(P) \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ 0 = \mathcal{G}_1(P) & \longrightarrow & \mathcal{G}_1(A) & \longrightarrow & \mathcal{G}_0(M) & \longrightarrow & \mathcal{G}_0(P) \end{array}$$

Значит, имеется естественный изоморфизм ядер, $\mathcal{F}_1(A) \cong \mathcal{G}_1(A)$, тем самым, $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{G}_1$ (естественность — упражнение).

Теперь займёмся индукционным переходом:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = \mathcal{F}_i(P) & \longrightarrow & \mathcal{F}_i(A) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{i-1}(M) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{i-1}(P) = 0 \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ 0 = \mathcal{G}_i(P) & \longrightarrow & \mathcal{G}_i(A) & \longrightarrow & \mathcal{G}_{i-1}(M) & \longrightarrow & \mathcal{G}_{i-1}(P) = 0 \end{array}$$

Зажав $\mathcal{F}_i(A)$ и $\mathcal{F}_{i-1}(M)$ между двумя нулями, мы доказали, что все четыре ненулевых объекта изоморфны (естественность, опять же, доказывается несложно). \square

Следствие 1.6.4. Пусть \mathcal{F} точен справа (например $\mathcal{F} = _ \otimes M$, где M — фиксированный модуль). Пусть $\mathcal{F}_0 \cong \mathcal{F}$, где $\{\mathcal{F}_i\}$ — связанная последовательность функторов, такая, что для любого проективного $P : \mathcal{F}(P) = 0$.

По-прежнему предполагаем, что в \mathcal{A} достаточно много проективных объектов.

Тогда $\forall i \in \mathbb{N} : \mathcal{F}_i \cong L_i \mathcal{F}$.

1.7 Производные функторы для \otimes

Пусть R — необязательно коммутативное кольцо с единицей, $M \in \text{mod-}R, N \in R\text{-mod}$, напомним, что тогда $M \otimes_R N \in \mathcal{A}$.

Изучим производные функторы тензорного произведения (функтор тензорного произведения точен справа, так как он — левый сопряжённый к Hom). Обозначим $\text{LTor}_i(M, _) \stackrel{\text{def}}{=} L_i(M \otimes _)$, $\text{RTor}_i(_, N) \stackrel{\text{def}}{=} L_i(_ \otimes N)$.

Примеры.

- Изучим $\text{Tor}_1(M, R/aR)$, где R — коммутативная область целостности. Для R/aR несложно написать проективную резольвенту: $0 \rightarrow R \xrightarrow{a} R \rightarrow R/aR \rightarrow 0$ ($a(m) = am$).

Тензорно домножая на M , мы получаем $0 \rightarrow M \xrightarrow{m \otimes r \mapsto m \otimes ar} M \rightarrow M \otimes R/aR \rightarrow 0$. Так как кольцо коммутативное, то тензорное произведение — $\text{mod-}R$, поэтому $m \otimes r \mapsto m \otimes ar$ — тоже просто отображение умножения на a .

Так как естественно $M \otimes R/aR \cong M/aM \otimes R \cong M/aM$, то гомологии в среднем члене — нуль, а в левом члене — a -*кручение* в M , то есть $\{x \in M \mid ax = 0\}$.

Теорема 1.7.1. Имеет место естественный изоморфизм: $\forall i : \text{LTor}_i \cong \text{RTor}_i$.

Идея доказательства.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & P_1 \otimes Q_1 & \longrightarrow & P_0 \otimes Q_1 & \longrightarrow & M \otimes Q_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & P_1 \otimes Q_0 & \longrightarrow & P_0 \otimes Q_0 & \longrightarrow & M \otimes Q_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & P_1 \otimes N & \longrightarrow & P_0 \otimes N & \longrightarrow & M \otimes N \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Домножение на свободный объект — точный справа функтор — из дистрибутивности тензорного произведения. Домножение на проективный объект — точный справа функтор — опять же из дистрибутивности.

Все строки точны, кроме нижней, и все столбцы точны, кроме правого, в которых мы и хотим посчитать гомологии, и доказать, что они равны.

Заведём тотальный комплекс $\text{Tot}(M, N)_n := \bigoplus_{i=0}^n P_i \otimes Q_{n-i}$, и теперь надо определить дифференциал D . Необходимо, чтобы выполнялось требование $D^2 = 0$, поэтому абы какой не подойдёт.

Пусть $d_p : P \rightarrow P_{p-1}$, $d_q : Q_q \rightarrow Q_{q-1}$ — дифференциалы резольвент, определим

$$\begin{aligned}
 D_{p,q} : P_p \otimes Q_q &\rightarrow \text{Tot}(M, N)_{p+q-1} \\
 (x \otimes y) &\mapsto d_p(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes d_q(y)
 \end{aligned}$$

Теперь полный дифференциал $D_n = \bigoplus_{p+q=n} D_{p,q} : \text{Tot}(M, N)_{p+q} \rightarrow \text{Tot}_{p+q-1}$.

Упражнение 1.7.1. $D_{n-1} \cdot D_n = 0$.

Осталось показать, что гомологии нижней строки, как и гомологии правого столбца, совпадают с гомологиями тотального комплекса. \square

1.8 Производные функторы для Hom

Теперь разберёмся с функторами Hom — эти функторы являются правыми сопряжёнными к \otimes , поэтому точны слева.

Конкретнее, имеются ковариантный $\text{Hom}(M, _)$, и контравариантный $\text{Hom}(_, N)$.

Для изучения точных слева функторов будем строить последовательность правых сопряжённых функторов.

Определение 1.8.1 (Инъективный модуль Q). Такой модуль Q , что для любой инъекции $A \hookrightarrow B$, и для любого морфизма $A \rightarrow Q$, существует морфизм $B \rightarrow Q$ такой, что диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & B \\ \downarrow & \swarrow \exists & \\ Q & & \end{array}$$

Интересный факт. Инъективный модуль — делимый модуль, то есть $\forall r \in R \setminus \{0\}, q \in M : \exists x \in M : rx = q$.

В одну сторону доказательство очевидно — в качестве A надо взять кольцо R , а в качестве B — поле частных R .

В категории, где *достаточно много инъективных объектов*, двойственно проективной, строится инъективная резольвента, в которой коядро предыдущего морфизма вкладывается в следующий инъективный модуль:

$$0 \rightarrow N \rightarrow Q_0 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow \dots$$

Далее аналогично определяются правые производные функторы, в частности, имеется комплекс

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, Q_0) \rightarrow \text{Hom}(M, Q_1) \rightarrow \dots$$

Гомологии такого комплекса обозначают $\text{Ext}^i(M, N)$.

Построив проективную резольвенту для $M: \dots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$. Применяя к этой последовательности контравариантный Hom, получаем $0 \rightarrow \text{Hom}(P_0, N) \rightarrow \text{Hom}(P_1, N) \rightarrow \dots$. Гомологии этого комплекса обозначают $\text{Ext}^i(M, N)$ (это уже другой Ext, но они, как и Tor, естественно изоморфны, доказательство абсолютно аналогично)

Название Ext происходит от extensions, элементы Ext^1 находятся в биекции с классами коротких точных последовательностей $0 \rightarrow M \rightarrow ? \rightarrow N \rightarrow 0$. В качестве среднего члена всегда подойдёт $M \oplus N$, но, может быть, и ещё что-то, и за это отвечает Ext.

Для функторов Ext более высокой степени надо брать более длинные последовательности.

Лекция VII

1 апреля 2024 г.

Пусть $M, N \in \text{mod-}R$.

Определение 1.8.2 (Расширение N при помощи M). Точная последовательность $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0$.

Морфизм расширений $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0$ и $0 \rightarrow M \rightarrow X' \rightarrow N \rightarrow 0$ — такая стрелка $X \rightarrow X'$, что два получившихся треугольника коммутативны.

Теорема 1.8.1. $\text{Ext}^1(M, N)$ естественно изоморфен множеству классов изоморфизмов расширений N при помощи M .

Доказательство. Рассмотрим расширение $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0$. Запишем длинную точную последовательность для $\text{Ext}^1(_, N)$ и данной короткой точной последовательности.

$$\text{Ext}^1(N, M) \longleftarrow \text{Hom}(M, M) \longleftarrow \text{Hom}(X, M) \longleftarrow \text{Hom}(N, M) \longleftarrow 0$$

Теперь построим $x \in \text{Ext}^1(N, M) \cong \text{Ext}^1(M, N)$, как образ $\text{id} \in \text{Hom}(M, M)$.

Теперь построим стрелку обратно: накроем N проективным объектом: $0 \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow 0$.

$$0 = \text{Ext}^1(P, M) \longleftarrow \text{Ext}^1(N, M) \longleftarrow \text{Hom}(A, M) \longleftarrow \text{Hom}(P, M) \longleftarrow \text{Hom}(N, M)$$

Так как домножение на проективный модуль — точный функтор, то $\text{Ext}^1(P, M) = 0$. Теперь пусть X — пушпаут диаграммы $M \xleftarrow{\beta} A \rightarrow P$. Следующая диаграмма будет коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & P & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & X & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Далее можно проверить, что в одну сторону эти отображения взаимно обратны:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 = \text{Ext}^1(P, M) & \longleftarrow & \text{Ext}^1(N, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(A, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(P, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(N, M) \\ & & \uparrow ? & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \text{Ext}^1(N, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(M, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(X, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(N, M) \end{array}$$

$\text{id} \in \text{Hom}(M, M)$ уходит вверх при $_ \cdot \beta$ в β , далее влево — в x по определению x . Если же отправить id вправо, то он тоже уйдёт в x . **Почему?** И надо ещё проверить, что $? = \text{id}$. \square

Далее идёт отступление про то, что быть определённым с точностью изоморфизма, и быть определённым — разные вещи, и я не справился это записать.

Если же хочется изучить всё кручение M , то оказывается, $\text{Tor}_1(M, F/R) = \{x \in M \mid \exists a \in R \setminus \{0\} : ax = 0\}$ (здесь F/R — фактор R -модулей). Здесь используется, что $F/R = \varinjlim R/aR$, значит, $\text{Tor}_1(F/R, M) = \varinjlim \text{Tor}_1(R/aR, M)$.

1.9 Гомологии и когомологии групп

Пусть G — группа, A — абелева группа, на которой действует G . Иными словами, A — $\mathbb{Z}[G]$ -модуль.

Рассматриваем \mathbb{Z} , либо как кольцо, либо как $\mathbb{Z}[G]$ -модуль с тривиальным действием G .

Определим гомологии $H_n(G, A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ (верхний индекс $\mathbb{Z}[G]$ указывает, что мы работаем в категории $\mathbb{Z}[G]$ -модулей). Также определим когомологии $H^n(G, A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^n(\mathbb{Z}, A)$.

Запишем проективную резольвенту по первому аргументу.

- Пусть P_n — свободный \mathbb{Z} -модуль с базисом $\{(g_0, \dots, g_n) \mid g_i \in G\}$. По совместительству P_n — свободный $\mathbb{Z}[G]$ -модуль с базисом $\{(1, g_1, \dots, g_n) \mid g_i \in G\}$ и действием $g \cdot (g_0, \dots, g_n) = (gg_0, \dots, gg_n)$.

- Теперь определим гомоморфизмы.

$$\cdots \longrightarrow P_0 = \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Граничные гомоморфизмы определены так: $d_n(g_0, \dots, g_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (g_0, \dots, \widehat{g_i}, \dots, g_n)$. Несложно проверить, что $d_{n-1} \cdot d_n = 0$.

- Посчитаем нулевые гомологии и когомологии группы G . $H_0(G, A) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$.

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[G]/I_G$, где $I_G = \text{Ker}(\phi)$, здесь $\phi : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$ — \mathbb{Z} -линейный гомоморфизм аугментации, определённый на базисе $g \mapsto 1$. Иными словами, $I_G = \langle g - 1 | g \in G \rangle = \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g \cdot g \mid \sum_{g \in G} \alpha_g = 0 \right\}$, все суммы финитные.

Тем самым, $H_0(G, A) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \cong A/(I_G A)$ — *коинварианты*. $I_G A = \langle ga - a | g \in G, a \in A \rangle$.

- Теперь посчитаем когомологии. $H^0(G, A) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$. Всякому гомоморфизму $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ можно $\phi(1)$. Из G -линейности $\forall g \in G : \phi(1) = \phi(g \cdot 1) = g \cdot \phi(1)$, значит, $\phi(1) \in A^G \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A | \forall g \in G : ga = a\}$ — *инварианты*. Значит, нулевые когомологии — инварианты.

- $H_1(G, \mathbb{Z}) = G^{\text{ab}} \stackrel{\text{def}}{=} G/[G, G]$.

- $H^1(G, A) = \text{Der}(G, A)$ — множество скрещённых гомоморфизмов.

Скрещенный гомоморфизм — это такое отображение $\phi : G \rightarrow A$, которое обладает свойством $\phi(gh) = g \cdot \phi(h) + \phi(g)$.

- $H_2(G, \mathbb{Z}) = ?$ Предположим, что имеется точная последовательность групп $0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1$, то есть $G \cong F/R$.

$$\text{Тогда } H_2(G, \mathbb{Z}) = \frac{R \cap [F, F]}{[R, F]}.$$

Если $[G, G] = G$ (G совершенна), то существует универсальное центральное расширение $\pi : S \twoheadrightarrow G$, то есть $\text{Ker}(\pi) \in C(S)$, и

$$\begin{array}{ccc} S & \twoheadrightarrow & G \\ & \searrow \exists! & \uparrow \forall \text{ центрального расширения} \\ & & H \end{array}$$

В этом случае $H_2(G, \mathbb{Z}) = \text{Ker } \pi$. Например, в случае $G = SL_n(F) : S = \text{St}_n(F)$ — *группа Штейнберга*. Ядро $\text{St}_n(F) \twoheadrightarrow SL_n(F)$ — это $K_{2,n}(F) = H_2(G, \mathbb{Z})$. Для $n \geq 5$ от поля ничего не зависит.