Геометрия и топология. Неофициальный конспект

Лектор: Лебедева Нина Дмитриевна
Конспектировал Леонид Данилевич

I семестр, осень 2022 г.

Оглавление

Глава 1

База топологии

Лекция I

8 ноября 2022 г.

1.1 Метрические пространства

Рассмотрим произвольное множество X. Введём на нём метрику $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, удовлетворяющую некоторым тождествам:

$$\forall x, y \in X : ad(x, y) = 0 \iff x = y \tag{1.1}$$

Симметричность:

$$\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x) \tag{1.2}$$

Неравенство треугольника:

$$\forall x, y, z \in X : d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z) \tag{1.3}$$

Определение 1.1.1 (Метрическое пространство)**.** Пара (X, d), где d удовлетворяет трём вышеперечисленным аксиомам.

При проверке, что некая функция действительно является метрикой, сложности чаще всего вызывает проверка третьей аксиомы, неравенства треугольника. Скорее всего, проверки остальных двух аксиом я буду опускать.

1.1.1 Примеры метрических пространств

- *Дискретная метрика* может быть введена на любом множестве $X : d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$.
- Для $X = \mathbb{R}^n$ *манхеттенская метрика* $d(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.
- Для $X = \mathbb{R}^n$ *шахматная метрика (метрика Чебышёва)* $d(x, y) = \max\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.
- Для $X = C[0; 1]$ — множества непрерывных функций $[0; 1] \to \mathbb{R}$ — можно задать метрику $d(x, y) = \max\limits_{t \in [0;1]} |x(t) - y(t)|$. Данная метрика вместе с $C[0; 1]$ образуют *пространство непрерывных функций* (X, d).

- Для $X = \mathbb{R}^n$ *евклидова метрика* $d(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$. Проверим, что для евклидовой метрики выполняется неравенство треугольника:

  Теорема 1.1.1 (Прямое произведение метрических пространств)**.** Пусть (X_1, d_1) и (X_2, d_2) — метрические пространства. Тогда функция $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, определённая $d((A_1, A_2), (B_1, B_2)) = \sqrt{d_1(A_1, B_1), d_2(A_2, B_2)}$, задаёт метрику на $X_1 \times X_2$.

  Доказательство.

  Проверим неравенство треугольника: рассмотрим $(A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2) \in X_1 \times X_2$.

  Обозначим $a_i = d_i(B_i, C_i), b_i = d_i(A_i, C_i), c_i = d_i(A_i, B_i)$.

  Используя свойства неравенств треугольника для d_1 и d_2, получаем

  $$\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \leqslant \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2}$$

  Рассмотрим на плоскости треугольник с координатами вершин $(0, 0), (b_1, b_2), (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. Неравенство треугольника для него выглядит

  $$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

  Дальше, по транзитивности, получаем $\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, откуда в самом деле d является метрикой. □

  Следствие 1.1.1. *На произведении* n *пространств* $X_1 \times \cdots \times X_n$ *аналогичная функция*

  $$d((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(a_i, b_i)}$$

  также является метрикой.

  Замечание. Также иногда рассматривают метрику на прямом произведении пространств $d((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \max\{d_1(a_1, b_1), d_2(a_2, b_2)\}$. Проверить, что данная функция тоже является метрикой, довольно просто.

- **Определение 1.1.2** (Сужение метрического пространства)**.** Метрическое пространство (X, d) можно сузить на $Y \subset X$, метрикой будет $d\big|_{Y \times Y}$.

Определение 1.1.3 (Открытый шар в метрическом пространстве (X, d) с центром в $a \in X$ и радиусом $r > 0$)**.** $B_r(a) = \{x \in X | d(a, x) < r\}$.

Определение 1.1.4 (Замкнутый шар в пространстве (X, d) с центром в $a \in X$ и радиусом $r > 0$)**.** $\overline{B_r}(a) = \{x \in X | d(a, x) \leqslant r\}$.

По умолчанию все шары открыты.

Определение 1.1.5 (Сфера в метрическом пространстве (X, d) с центром в $a \in X$ и радиусом $r > 0$)**.** $S_r(a) = \{x \in X | d(a, x) = r\}$.

Определение 1.1.6 (Расстояние от точки $a \in X$ до подмножества $A \subset X$)**.** $\inf \{d(x, a) | x \in A\}$

Определение 1.1.7 (Окрестность множества $A \subset X$ с радиусом r)**.** $U_r(A) = \{x \in X | d(x, A) < r\}$.

Определение 1.1.8 (Диаметр множества $A \subset X$)**.** $\operatorname{diam}(A) = \sup \{d(x, y) | x, y \in X\}$.

Если $\operatorname{diam}(A) < \infty$, то множество называют *ограниченным*.

Несложно проверить, что условие ограниченности эквивалентно тому, что множество лежит в некотором (открытом) шаре.

Определение 1.1.9 (Множество $A \subset X$ открыто)**.** Любая точка $a \in A$ содержится в A вместе с некоторым своим шаром:

$$\forall a \in A : \exists r > 0 : B_r(a) \subset A$$

Факт 1.1.1. *Множество A открыто, если оно представимо, как объединение множества открытых шаров.* $A = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} B_{r_\alpha}(x_\alpha)$.

Доказательство.

- $\Rightarrow$. Возьмём для каждой точки шар, с которым она содержится в множестве, и объединим их всех.
- $\Leftarrow$. Для каждой точки x из шара S подойдёт шар радиусом $r(S) - d(x, c(S))$, проверяется неравенством треугольника. □

Следствие 1.1.2. *Открытый шар открыт.*

Замечание. В метрике (X, d) X и $\varnothing$ открыты.

В дискретной метрике (все расстояния целые) (X, d) любое одноэлементное множество открыто. Достаточно рассмотреть шар радиусом $1/2$.

Теорема 1.1.2. Объединение открытых множеств открыто. Пересечение **конечного** числа открытых множеств открыто.

Доказательство.

- Очевидно из определения через объединение шаров
- Всякая точка $a \in A$ лежит вместе с шаром радиуса $\min(r_1, \ldots, r_n)$, где r_i — радиус открытого шара с центром в a, содержащегося в A_i. □

Замечание. $[0; 1] = \bigcap \left(-\frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n}\right)$ — пересечение бесконечного числа открытых множеств может не быть открыто.

Предложение 1.1.1. *Все открытые множества на прямой — дизъюнктные объединения интервалов.*

Доказательство.

Заметим, что $B_r(x) = (x - r; x + r)$.

Для каждой точки можно найти максимальный по включению интервал, содержащийся в множестве, и содержащий данную точку.

Любые два таких интервала либо уж не пересекаются, либо уж совпадают. □

1.2 Топологические пространства

Пусть X — произвольное множество. Рассмотрим $\Omega \subset 2^X$, такое, что

$$\varnothing \in \Omega; \quad X \in \Omega$$
$$\forall U \subset \Omega : \bigcup U \in \Omega$$
$$\forall U \subset \Omega : (|U| < \infty \Rightarrow \bigcap U \in \Omega)$$

Тогда будем говорить, что Ω — *топологическая структура (топология)* на множестве X.

Определение 1.2.1 (Топологическое пространство (X, Ω))**.** Множество X с заданной на нём топологией Ω.

В топологических пространствах элементы Ω называют открытыми множествами.

1.2.1 Примеры топологических пространств

- Для метрического пространства (X, d) определяют *индуцированное метрикой d топологическое пространство* (X, Ω_d) где Ω_d — множество подмножеств X, метрически открытых в X.

  Так, на прямой $\mathbb{R}$ при рассмотрении дискретной метрики $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$, или стандартной метрики $d(x,y) = |x-y|$, получаются различные топологические пространства.

  Дискретную метрику можно определить на любом множестве, породится дискретная топология $\Omega = 2^X$.

- Антидискретная топология $\Omega = \{\varnothing, X\}$.
- **Определение 1.2.2** (Топология стрелки)**.** : $(\mathbb{R}, \Omega)$, где $\Omega = \left\{(a;+\infty) \middle| a \in \mathbb{R}\right\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$.

  Замечание. Пространство при $\Omega = \left\{[a;+\infty) \middle| a \in \mathbb{R}\right\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$ не удовлетворяет второй аксиоме.

- Топология конечных дополнений: для произвольного $X : \Omega = \left\{A \subset X \middle| |X \setminus A| < \infty\right\}$.
- На двухточечном множестве $\{0,1\}$ есть 4 различные топологии, из них интересна (может быть?) топология $\Omega = \{\varnothing, \{0\}, \{0,1\}\}$ (или $\{\varnothing, \{1\}, \{0,1\}\}$, неважно).

Определение 1.2.3 (Замнкутое множество)**.** Множество с открытым дополнением

Теорема 1.2.1. Для топологического пространства (X, Ω)

$$\begin{gathered} \varnothing, X \text{ замкнуты} \\ \text{пересечение замкнутых множеств замкнуто} \\ \text{объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто} \end{gathered}$$

Доказательство. Следует из формулы двойственности де Моргана. ☐

1.2.2 Примеры замкнутых множеств

- В дискретной метрике все множества замкнуты, так как все (их дополнения) открыты.
- На прямой $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой отрезки $[a,b]$ и точки $\{a\}$ замкнуты.
- Хорошего вида у замкнутых множеств нет: так, Канторово множество замкнуто.

  Определение 1.2.4 (Канторов множество)**.** Строится итеративно:

  1. Берём отрезок $[0;1]$.
  2. Вырезаем из него средний интервал, равный трети длины $(1/3; 2/3)$.
  3. Осталось два отрезка, $[0;1/3]$ и $[2/3;1]$. Опять вырезаем из каждого средний интервал, равные трети длины.
  4. И так далее: можно доказать по индукции, что на очередном шагу будет некоторое конечное множество непересекающихся отрезков.

  Канторово множество замкнуто, так как можно взять последовательность надмножеств Канторова множества, появляющихся в определении (каждое замкнуто) и взять их пересечение.

- Точка и вообще замкнутый шар замкнуты в любом метрическом пространстве.

  Доказательство. Несложно проверить. ☐

Факт 1.2.1. *Для топологического пространства* (x, Ω) $U \backslash F = U \cap \overline{F}$ *открыто, где* U *— открыто,* F *— замкнуто.*

Факт 1.2.2. *Для топологического пространства* (x, Ω) $F \backslash U = F \cap \overline{U}$ *замкнуто, где* U *— открыто,* F *— замкнуто.*

1.3 Метрики и топологии

Определение 1.3.1 (Метризуемое топологическое пространство (X, Ω))**.** Существует метрика $d : X \times X \to \mathbb{R}$, такая, что $\Omega = \Omega_d$.

Дискретная топология метризуема, порождается дискретной метрикой.

Факт 1.3.1. *Для* $X : |X| > 1$ *антидискретная топология не является метризуемой.*

Доказательство. Так как $|X| > 1$, то $\exists x, y \in X : B_{\frac{d(x,y)}{2}}(x)$ содержит x, но не содержит y. $\square$

Факт 1.3.2. *Стрелка (определение 1.2.2) тоже не метризуема.*

Доказательство. Найдётся два непустых непересекающихся шара, но в стрелке любе два непустых открытых множества пересекаются. $\square$

Факт 1.3.3. *Топология конечных дополнений метризуема* $\iff$ *множество* X *конечно.*

Доказательство. $|X| < \infty$ — топология дискретна.

$|X| \geqslant \infty$ — неметризуема по той же причине, что и стрелка, любые два открытых пересекаются $\square$

1.4 Сравнение метрик и топологий

Пусть на множестве X заданы две различные топологии Ω_1 и Ω_2, причём $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$. Говорят, что Ω_1 *слабее (грубее)* Ω_2, или же Ω_2 *сильнее (точнее)* Ω_1.

Из определения видно, что дискретная топология — самая сильная, а антидискретная — самая слабая.

Теорема 1.4.1. Для множества X с двумя метриками d_1 и d_2 топология Ω_{d_1} слабее Ω_{d_2}, если и только если

$$\forall B_{r_1}^{d_1}(a) : \exists r_2 : B_{r_1}^{d_1}(a) \supseteq B_{r_2}^{d_2}(a)$$

Доказательство.

$\Rightarrow$. Рассмотрим шар $B_{r_1}^{d_1}(a)$. Он открыт в первой топологии, но первая — слабее, значит, открыт во второй. Значит, $\exists r_2 : B_{r_1}^{d_1}(a) \supseteq B_{r_2}^{d_2}(a)$

$\Leftarrow$. Для множества U, открытого в первой топологии, найдётся объединению шаров в первой топологии, равное ему.

Из условия теоремы каждый такой шар содержит шар во второй метрике. Объединив их все, получим, что U открыто во второй топологии. $\square$

Лекция II

15 ноября 2022 г.

Следствие 1.4.1. *Для двух метрик* d_1 *и* d_2*, определённых на одном и том же множестве* X*, условие* $\forall x, y \in X : d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y)$ *влечёт условие: топология* (X, d_1) *грубее топологии* (X, d_2).

Определение 1.4.1 ((Топологически) эквивалентные метрики)**.** Метрики, порождающие одно и то же топологическое пространство.

Замечание. Для $C \in \mathbb{R}_{>0}$ и метрики $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ функция Cd_1 — тоже метрика, причём эквивалентная d_1.

Доказательство. Рассмотреть шары. □

Замечание. Метрика d_1 грубее метрики d_2, если $\exists C > 0 : \forall x, y : d_1(x, y) \leqslant C \cdot d_2(x, y)$.

Доказательство. Cd_2 эквивалентна d_2 и точнее d_1. □

Определение 1.4.2 (Липшицево эквивалентные метрики d_1 и d_2)**.** Такие метрики, что $\exists c, C > 0 : \forall x, y \in X : c \cdot d_2(x, y) \leqslant d_1(x, y) \leqslant C \cdot d_2(x, y)$.

Замечание. Липшицева эквивалентность влечёт топологическую эквивалентность. Обратное в общем случае неверно: метрики $|x - y|$ и $\sqrt{|x - y|}$ на $\mathbb{R}$ эквивалентны лишь топологически.

Так, на прямом произведении множеств метрики

$d((A_1, A_2), (B_1, B_2)) = \sqrt{d_1(A_1, B_1)^2 + d_2(A_2, B_2)^2}.\widetilde{d}((A_1, A_2), (B_1, B_2)) = \max d_1(A_1, B_1)^2, d_2(A_2, B_2)^2.$

билипшицево эквивалентны (что такое билипшицево эквивалентны? Тем не менее, просто липшицева эквивалентность понятна). Более точно, $\forall x, y : \widetilde{d}(x, y) \leqslant d(x, y) \leqslant \sqrt{2}\widetilde{d}(x, y)$.

На обычной плоскости $\mathbb{R}^2$ метрики

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$
$$\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$
$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

липшицево эквивалентны. Коэффициенты не превосходят 2.

1.5 Специальные точки множеств в топологии

Рассмотрим произвольную топологию (X, Ω).

1.5.1 Внутренность множества. Внутренние точки

Определение 1.5.1 (Внутренность множества A)**.** Наибольшее по включению открытое множество, содержащееся в A, как подмножество.

Замечание. Существование следует из того, что объединение любого количества открытых множеств открыто.

Свойства внутренности

- $\operatorname{Int} A \subset A$
- Для открытого $B : B \subset A \Rightarrow B \subset \operatorname{Int} A$.
- $A = \operatorname{Int} A \iff A$ открыто.
- $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$.
- $A \subset B \Rightarrow \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$.
- $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$.

  Доказательство.

  $\subseteq$ $A \cap B \subseteq A \Rightarrow \operatorname{Int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{Int} A$.

  $\supseteq$ $\left.\begin{matrix} \operatorname{Int} A \subseteq A \\ \operatorname{Int} B \subseteq B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subseteq A \cap B \overset{\operatorname{Int} \cap \operatorname{Int} \text{ открыто}}{\Rightarrow} \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subseteq \operatorname{Int}(A \cap B)$. □

- $\operatorname{Int}(A \cup B) \supset \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$

  Доказательство.

  $\supseteq$ $\left.\begin{matrix}\operatorname{Int} A \subseteq A \\ \operatorname{Int} B \subseteq B\end{matrix}\right\} \Rightarrow \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B \subseteq A \cup B \overset{\operatorname{Int}\cup\operatorname{Int} \text{ открыто}}{\Rightarrow} \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B \subseteq \operatorname{Int}(A \cup B)$.

  $\neq$ в общем случае: Для $A = \mathbb{Q}$ и $B = \mathbb{I}$ $\operatorname{Int}(A \cup B) = \mathbb{R}$, но $\operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B = \varnothing$. □

Определение 1.5.2 (Окрестность точки $x \in (X, \Omega)$)**.** Любое открытое множество, содержащее x.

Определение 1.5.3 (Внутренняя точка)**.** Содержится с некой своей окрестностью.

Теорема: внутренность множества — множество его внутренних точек. Доказательство: Докажем два включения. $\forall b \in B$ рассмотрим окрестность $U(b)$, как внутренней точки A. Это открытое подмножество A, значит, $U(b) \subset \operatorname{Int} A$. Отсюда $B \subset \operatorname{Int} A$. С другой стороны, для любой точки из $\operatorname{Int} A$ верно, что она внутренняя — подходящей окрестностью является сама $\operatorname{Int} A$.

Следствие: A открыто – все его точки внутренние.

1.5.2 Замыкание множества. Точки прикосновения

Определение 1.5.4 (Замыкание множества A)**.** Пересечение всех замкнутых множеств, его содержащих.

Обозначается $\operatorname{Cl} A$ или $\operatorname{Clos} A$.

Замечание. Замыкание — наименьшее замкнутое множество, содержащее данное. $\operatorname{Cl} A = \bigcap\limits_{X \setminus \mathcal{F} \in \Omega \wedge \mathcal{F} \supset A} \mathcal{F}$

Свойства замыкания

- Замыкание замкнуто
- $A \subset \operatorname{Cl} A$.
- Для замкнутого $B : B \supset A \Rightarrow B \supset \operatorname{Cl} A$.
- $A = \operatorname{Cl} A \iff A$ — замкнуто.
- $A \subset B \Rightarrow \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B$.
- $\operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B$
- $\operatorname{Cl}(A \cap B) \subset \operatorname{Cl} A \cap \operatorname{Cl} B$
- $\operatorname{Cl} A = \operatorname{Int} \overline{A}$

Определение 1.5.5 (Точка x — точка прикосновения A)**.** $\forall U(x) : U(x) \cap A \neq \varnothing$.

Теорема 1.5.1. Для произвольного $A : \operatorname{Cl} A = \{x \in X | x$ — точка прикосновения $A\}$.

Доказательство. $\operatorname{Cl} A = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$, откуда, видно, что $\operatorname{Cl} A$ — действительно, множество точек, не содержащих окрестности, которая не пересекается с A. □

Следствие 1.5.1. *Множество замкнуто $\iff$ оно совпадает со множеством точек прикосновения.*

1.5.3 Граница множества, граничные точки

Определение 1.5.6 (Граница множества)**.** Точки, лежащие в замыкании, но не во внутренности: $\operatorname{Fr} A = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A$.

Замечание. Точка x — граничная для A, если любая окрестность точки x пересекается и с A, и с $\overline{A}$.

Теорема 1.5.2. Граница множества совпадает со множеством граничных точек.

Доказательство.

$$(x \in \operatorname{Fr} A) \iff (x \in \operatorname{Cl} A \wedge x \notin \operatorname{Int} A) \iff (\forall U(b) : U(b) \cap A \neq \varnothing \wedge U(b) \cap \overline{A} \neq \varnothing) \iff x \in \operatorname{Fr} A$$

□

Свойства

- Граница — замкнутое множество (как пересечение $\operatorname{Cl} A$ и $\overline{\operatorname{Int} A}$).
- $\operatorname{Fr} A = \operatorname{Fr}(X \setminus A)$
- A — замкнуто $\iff A \supset \operatorname{Fr} A$.
- A — открыто $\iff A \cap \operatorname{Fr} A \neq \varnothing$.

1.5.4 Предельные, изолированные точки

Определение 1.5.7 (x — предельная точка A)**.** Любая проколотая окрестность пересекается с A.

$$\forall U(x) \ni x : (U(x) \setminus x) \cap A \neq \varnothing$$

Определение 1.5.8 (x — изолированная точка A)**.** Существует проколотая окрестность, не пересекающаяся с A.

$$\exists U(x) \ni x : (U(x) \setminus x) \cap A = \varnothing$$

Свойства

- Предельные точки включают точки прикосновения.
- $\operatorname{Cl} A = \operatorname{Int} A \sqcup \operatorname{Fr} A = \{$предельные точки $A\} \sqcup \{$изолированные точки $A\}$.

1.6 База топологии

Определение 1.6.1 (Для (X, Ω) $\Sigma \subset \Omega$ — база топологии)**.** $\forall U \in \Omega : \exists \Gamma_U \subset U : U = \bigcup\limits_{w \in \Gamma_U} w = \bigcup \Gamma_U$.

Предостережение. База не единственна; в качестве Σ всегда можно рассмотреть Ω, но хочется поменьше.

Так, для метризуемой топологии в качестве базы можно рассмотреть множество всех открытых шаров; Для топологии на прямой можно рассмотреть множество всех шаров с рациональным радиусом, или даже радиусом $1/n$.

Определение 1.6.2 ($\Gamma \subset 2^X$ — покрытие X)**.** $\bigcup \Gamma = X$.

В частности, любая база топологии — покрытие X, так как X — открыто в любой топологии.

Теорема 1.6.1. Для (X, Ω) Σ — база топологии $\Omega \iff \forall U \in \Omega, \forall a \in U : \exists w \in \Sigma : a \in w \subset U$.

Доказательство.

- $\Rightarrow$. Пусть $U = \bigcup\limits_{w\in\Gamma} w$.

  Тогда для любого $a \in U : a$ содержится в каком-то $w \in \Gamma$, и, действительно, $a \in w \subset U$.
- $\Leftarrow$. Построим для открытого $U \in \Omega$ множество Γ_U из определения базы. Согласно посылке теоремы $\forall a \in U : \exists w_a \in \Sigma : a \in w_a \subset U$.

  Рассмотрим в качестве $\Gamma = \{w_a\}_{a\in U}$. $\square$

Определение 1.6.3 (Σ_a — база топологии в точке $a \in X$ (база окрестностей))**.** $\forall w \in \Sigma_a : w \ni a$ и $\forall U(a) : \exists w \in \Sigma_a : w \in U(a)$.

Замечание. Для Σ — базы Ω: $\Sigma_a = \{w \in \Sigma | a \in w\}$ — база топологии в точке a.

Замечание. Обратно: $\bigcup\{\Sigma_a\}$ — база топологии.

В метризуемой топологии базой точки является, например, совокупность шаров с центром в данной точке.

Теорема 1.6.2 (Критерий базы)**.** Рассмотрим $\Sigma = \{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ — некоторое покрытие.

Σ — база некоторой топологии $\iff \forall \alpha_1, \alpha_2 : B_{\alpha_1} \cap B_{\alpha_2}$ представимо, как объединение некоторого подмножества B.

Доказательство.

- $\Rightarrow$. По определению базы топологии (пересечение открытых множеств открыто)
- $\Leftarrow$. Построим топологию Ω над базой Σ и проверим, что это — топология.

  $\Omega \coloneqq \left\{ \bigcup\limits_{\alpha\in S} B_\alpha \middle| S \subset \Lambda \right\}$.

  1. $\varnothing, X$ принадлежат Ω (последнее — так как Σ — покрытие X).
  2. Объединение двух множеств из Ω очевидно принадлежит Ω.
  3. Проверим, что пересечение двух множеств из Ω принадлежит Ω.

     Пусть $U_1 = \bigcup\limits_{\alpha\in S_1} B_\alpha, U_2 = \bigcup\limits_{\alpha\in S_2} B_\alpha$. Несложно видеть, что $U_1 \cap U_2 = \bigcup\limits_{\alpha_1\in S_1, \alpha_2\in S_2} (B_{\alpha_1} \cap B_{\alpha_2})$.

     Но согласно свойству, что пересечение элементов Σ является объединением некоторого его подмножества, автоматически получаем, что $U_1 \cap U_2$ — объединение некоторого подмножества Σ.

$\square$

Для покрытия Σ, удовлетворяющему условию теоремы, обозначим топологию, задаваемую Σ следующим образом: $\Omega(\Sigma)$.

Замечание. $\Omega(\Sigma)$ — наименьшая по включению топология, содержащая Σ. (Наименьшая по включению топология существует, так как пересечение топологий — топология).

Построим топологию из произвольного набора подмножеств $\Delta \subset 2^X$. Тогда построим $\Sigma(\Delta)$, как все конечные пересечения элементов Δ (и само множество X).

$$\Sigma(\Delta) = \{X\} \cup \left\{ \bigcap_{i=1}^{k} \middle| k_i \in \mathbb{N}, w_i \in \Delta \right\}$$

Такая база топологии $\Sigma(\Delta)$ удовлетворяет критерию базы, на ней можно построить топологию $\Omega(\Sigma(\Delta))$.

Такая Δ называется *предбаза* — множество подмножеств такое, что база — объединение конечных пересечений его элементов.

Замечание. Δ — предбаза топологии Ω, если Ω — наименьшая по включению топология, содержащая Δ.

1.7 Подпространства

Рассмотрим $A \subset X$ для топологического пространства (X, Ω). Обозначим $\Omega_A = \{U \cap A | U \in \Omega\}$. Такая Ω_A — *топология, индуцированная на подпространстве* A.

Несложно убедиться, проверив три аксиомы, что Ω_A — топология на множестве A.

Лекция III

22 ноября 2022 г.

1.7.1 Свойства подпространства

- Множество, открытое в подпространстве, необязательно открыто. Так, подпространство всегда открыто в себе.
- Тем не менее, в открытом подпространстве открытые подмножества исходно открыты.
- Для Σ — базы исходной топологии — можно определить базу для подпространства A, как $\Sigma_A = \{A \cap U | U \in \Sigma\}$.
- Пусть $B \subset A \subset X$. Тогда топологии Ω_B и $(\Omega_A)_B$ совпадают.

Пусть $A \subset X$, где на X определена метрика d.

На A можно ввести топологию двумя способами:

1. Топология, индуцированная на метрике-сужении $d\big|_A$, называется Ω_{d_A}
2. Подпространство топологии (X, Ω_d). Для данной теоремы назовём её Ω_A^X.

Теорема 1.7.1. Эти топологии совпадают.

Доказательство. Проверим, что для всякой пары {точка; открытое множество, её содержащее} из первой топологии, точка содержится в меньшем по включении открытом множестве из второй топологии. И наоборот.

Так как про обе конструкции понятно, что они являются топологиями, то этой проверки будет достаточно.

- $\Omega_{d_A} \subseteq \Omega_A^X$.

  Зафиксируем точку $a \in A$ и открытое множество $U \in \Omega_{d_A}$ $(a \in U)$. Так как Ω_{d_A} — индуцирована на метрике, то a содержится с неким открытым шаром радиуса r внутри U.

  Этот же шар содержится в исходной топологии Ω

- $\Omega_{d_A} \subseteq \Omega_A^X$.

  Зафиксируем точку $a \in A$ и открытое множество $U \in \Omega_A^X$ $(a \in U)$.

  $U = V \cap A$ для некоего $V \in \Omega$. В множестве $V : a$ содержится вместе с неким шаром радиуса r.

  В топологии Ω_A^X есть как раз пересечение этого шара и множества A (так как этот шар был в Ω).

  Вроде бы доказательство правильное, на лекции было что-то странное, я, к сожалению, как раз отвлёкся, поэтому вышенаписанное — частично моя импровизация. Тем не менее, не понимаю, почему на доске была разность каких-то радиусов.

$\square$

1.8 Произведение метрических пространств

Пусть даны метрически пространства (X, Ω_X) и (Y, Ω_Y).

Положим $\Sigma \coloneqq \{U \times V | U \in \Omega_X, V \in \Omega_Y\}$.

Теорема 1.8.1. Σ — база некой топологии.

Доказательство. Проверим критерий базы.

$\forall (u_1 \times v_1), (u_2 \times v_2) \in \Sigma : (u_1 \times v_1) \cap (u_2 \times v_2) = (u_1 \cap u_2) \times (v_1 \cap v_2)$.

Данная формула красиво обосновывается через пересечение прямоугольников.

Из свойства топологии $u1 \cap u_2 \in \Omega_X$ и $v_1 \cap v_2 \in \Omega_Y$. □

Определение 1.8.1 (Стандартная топология на произведении пространств)**.** Топология, построенная на базе Σ, определённой выше.

Пример. Пусть Ω — множество метрически открытых множеств в $\mathbb{R}$.

Тогда стандартная топология на $(R, \Omega) \times (\mathbb{R}, \Omega)$ — стандартная топология плоскости.

Доказательство. В базе Σ содержится «открытый квадрат» с данным центром и сколь угодно малым радиусом □

Замечание. Перемножать можно не сами топологии, а их базы Σ_X и Σ_Y, всё равно будет база стандартной топологии произведения $\Sigma = \{u \times v | u \in \Sigma_X, v \in \Sigma_Y\}$.

Рассмотрим два метрических пространства (X, d_x) и (Y, d_y). На их произведении $X \times Y$ топологию можно ввести двумя способами:

1. Индуцировать топологию на стандартной метрике произведения пространств $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_x(x_1, x_2)^2 + d_y(y_1, y_2)^2}$.
2. Перемножить, как топологические пространства (X, Ω_{d_x}) и (Y, Ω_{d_y}).

Теорема 1.8.2. Эти топологии совпадают.

Доказательство.

Вместо $d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2}$ будем рассматривать ей липшицево эквивалентную (определение 1.4.2) метрику $\widetilde{d} = \max\{d_1, d_2\}$. Она индуцирует ту же топологию.

Заметим, что эта топология порождаются базой $\Sigma = \left\{ B_r^{\widetilde{d}}((x, y)) \middle| x \in X, y \in Y, r \in \mathbb{R}_{>0} \right\}$.

Но $\Sigma = \left\{ B_r^{\widetilde{d}}((x, y)) \middle| x \in X, y \in Y, r \in \mathbb{R}_{>0} \right\} = \left\{ B_r^{d_x}(x) \times B_r^{d_y}(y) \middle| x \in X, y \in Y, r \in \mathbb{R}_{>0} \right\}$.

Теперь видно, что Σ является базой $(X, \Omega_{d_x}) \times (Y, \Omega_{d_y})$ тоже. В самом деле, если перемножить базы — открытые шары в d_x и d_y, то получится база $\Sigma' = \left\{ B_{r_1}^{d_x}(x) \times B_{r_2}^{d_y}(y) \middle| x \in X, y \in Y, r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0} \right\}$. Но — так как можно взять из радиусов наименьший — мы поймём, что $\Omega_{\Sigma'} = \Omega_\Sigma$. □

1.8.1 Тихоновская топология прямого произведения бесконечного числа пространств

Рассмотрим множество пространств, проиндексированное Λ: $\{(X_\alpha, \Omega_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$.

Определение 1.8.2 (Прямое произведение множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$)**.**

Множество функций $X = \left\{ x \in \left(\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \right)^\Lambda \middle| \forall \alpha \in \Lambda : x(\alpha) \in X_\alpha \right\}$.

Определение 1.8.3 (Координатная проекция)**.** Функция $p_\alpha : X \to X_\alpha$: $p_\alpha(x) = x(\alpha)$.

Определение 1.8.4 (Цилиндр)**.** Подмножество произведения, открытое в одном сомножителе, и совпадающее с другими. Формально, $p_\alpha^{-1}(U)$ для некоего $\alpha \in \Lambda$ и $U \in \Omega_\alpha$.

Определение 1.8.5 (Тихоновская топология произведения пространств $\{(X_\alpha, \Omega_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$)**.** Топология строится с помощью предбазы $\Delta \coloneqq \left\{p_\alpha^{-1}(U) \middle| \alpha \in \Lambda, U \in \Omega_\alpha\right\}$.

Замечание. Для $|\Lambda| < \infty$ топология совпадает с ранее определённой.

Глава 2

Непрерывные отображения

2.1 Свойства образа и прообраза

Задана функция $f : X \to Y$.

Определение 2.1.1 (Образ $A \subset X$). $f(A) \overset{def}{=} \{f(a) | a \in A\}$.

Определение 2.1.2 (Прообраз $B \subset Y$). $f^{-1}(B) \overset{def}{=} \{a \in A | f(a) \in B\}$.

1. Прообраз объединения — объединение прообразов $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
2. Прообраз пересечения — пересечение прообразов $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
3. Прообраз дополнения — дополнение прообраза $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$.
4. Образ объединения — объединение образов $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
5. Образ пересечения **содержится в** пересечении образов $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

   Контрпример. $f : x \mapsto x \pmod 2$.

   $$\{1\} = f(\{0,1\} \cap \{1,2\}) \subseteq f(\{0,1\}) \cap f(\{1,2\}) = \{0,1\}$$

Определение 2.1.3 (Тождественное отображение). $\mathrm{id}_X : X \to X; \quad x \mapsto x$.

Определение 2.1.4 (Вложение $A \subset X$ в X). $\mathrm{in}_{A \to X} : A \to X; \quad x \mapsto x$.

2.2 Непрерывность отображения

Пусть X, Y — топологические пространства.

Определение 2.2.1 (Непрерывное отображение $f : X \to Y$). Отображение, в открытые множества переводящее только открытые множества. $\forall U \in \Omega_Y : f^{-1}(U) \in \Omega_X$.

Замечание. Применив дополнение, очевидно, что альтернативным определением является то же про замкнутые множества: $\forall V \notin \Omega_Y : f^{-1}(V) \notin \Omega_X$

Пример. id_X непрерывно: прообраз всякое открытого множества открыт.

Пример. $f(x) = c$ — постоянное отображение — непрерывно: прообраз всякое множества открыт (либо X, либо $\varnothing$).

Пример. Если в X много открытых множеств, или в Y мало, то $f : X \to Y$ непрерывна. Так, непрерывны функции, определённые на дискретном X и/или действующие в антидискретное Y.

Замечание. Если X_2 тоньше X_1, а Y_2 грубее Y_1, то $f : X_1 \to Y_1$ непрерывна $\Rightarrow f : X_2 \to Y_2$ непрерывна.

Теорема 2.2.1. Композиция непрерывных функций непрерывна.

Так, пусть $f : X \to Y$ и $g : W \to X$.

Доказательство. $\forall U \in \Omega_W : g^{-1}(U) \in \Omega_X \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \Omega_Y$. □

Следствие 2.2.1. *Если f непрерывна, то её сужение $f\big|_W$ непрерывно.*

Доказательство. Рассмотреть $g = \mathrm{in}_{W \to X}$. □

Пусть $f : X \to Y$, а множество Z таково, что $f(x) \subset Z \subset Y$.

Положим $\widetilde{f} : X \to Z$, $\widetilde{f}(x) = f(x)$.

Теорема 2.2.2. f непрерывна $\iff$ $\widetilde{f}$ непрерывна.

Доказательство.

- $\Rightarrow$. $f = \mathrm{in}_Z \circ \widetilde{f}$
- $\Leftarrow$. Всякое открытое множество в Z имеет вид $w = u \cap Z$ для некоего $U \in \Omega_Y$.

$$f^{-1}(w) = f^{-1}(u) \cap f^{-1}(Z) = f^{-1}(u)$$

□

2.3 Локальная непрерывность

Определение 2.3.1 ($f : X \to Y$ непрерывна в $a \in X$)**.** $\forall U \ni f(a) : \exists V \ni a : f(V) \subseteq U$.

Теорема 2.3.1. Функция f непрерывна $\iff$ во всякой точки области определения функция непрерывна.

Доказательство.

- $\Rightarrow$. Очевидно из определений.
- $\Leftarrow$. Рассмотрим $U \in \Omega_Y$. Проверим, что $f^{-1}(U)$ открыто. $f^{-1}(U) = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(U)} V(x)$, где $V(x)$ — окрестность точки x, содержащая образ в U. Объединение открытых — открыто. значит, $f^{-1}(U)$ в самом деле открыто. □

Замечание. Условие локальной непрерывности можно проверять не на всех открытых множествах, а только на базах окрестностей Σ_a и $\Sigma_{f(a)}$.

Следствие 2.3.1. *Для метрических пространств X, Y удобно рассмотреть в качестве базы множество открытых шаров. Определение непрерывности в таком случае переписывается так:*

f непрерывна в точке a: $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : f(B_\delta^{d_X}(a)) \subset B_\varepsilon^{d_Y}(f(a))$.

f непрерывна в точке a: $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : d_X(x - a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x) - f(a)) < \varepsilon$.

Узнали? Согласны?

Определение 2.3.2 (Липшицево отображение между метрическими пространствами)**.** Такое отображение $f : X \to Y$, что $\exists C \in \mathbb{R}_{>0} : \forall a, b \in X : d_Y(f(a), f(b)) \leqslant C \cdot d_X(a, b)$.

Константа C из определения — константа Липшица. Отображение, липшицевое с константой c называется c-липшицевым.

Теорема 2.3.2. Липшицево отображение непрерывно.

Доказательство. Легко проверить, что оно непрерывно в любой точке. □

Примеры.

- Пусть $x_0 \in X$. Положим $d_{x_0}(y) \overset{def}{=} d(x_0, y)$. Утверждается, что d_{x_0} — 1-липшицево.
- Более общий случай: пусть $A \subset X$. Положим $d_A(y) \overset{def}{=} d(A, y) \overset{def}{=} \inf\limits_{a \in A} d(a, y)$. Утверждается, что d_A — 1-липшицево.

  Доказательство. По определению инфимума $\forall \tau > 0 : \exists a_y \in A : d(y, a_y) < d(y, A) + \tau$.

  Тогда $d(x, A) \leqslant d(x, a_y) \leqslant d(x, y) + d(y, a_y) \leqslant d(x, y) + d(y, A) + \tau$ — дважды применили неравенство треугольника.

  Используя $\forall \tau > 0 : d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, A) + \tau$, получаем $d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, A)$.

  Аналогично-симметрично $d(y, A) \leqslant d(x, y) + d(x, A)$, то есть $|d_A(x) - d_A(y)| \leqslant d(x, y)$. □

- Пусть d — произвольная метрика на X. $d : X \times X \to R$. Утверждается, что d — липшицево отображение.

  Коэффициент зависит от того, как определена метрика на произведении. Для $d = \sqrt{d_X^2 + d_Y^2}$ этот коэффициент равен $\sqrt{2}$.

  Доказательство.

  Рассмотрим две произвольные точки из области определения: $(a, b), (x, y) \in X \times X$.

  Без потери общности предположим, что $d(x, y) \geqslant d(a, b)$. В таком случае $|d(x, y) - d(a, b)| = d(x, y) - d(a, b)$.

  $d(x, y) - d(a, b) \leqslant d(x, a) + d(a, y) - d(a, b) \leqslant d(x, a) + d(y, b) \leqslant \sqrt{2}\sqrt{d(x, a)^2 + d(y, b)^2}$, что по определению равно $\sqrt{2} \cdot d((x, y), (a, b))$.

  Здесь мы воспользовались двумя неравенствами треугольника, а также тем, что $s + t \leqslant \sqrt{2}\sqrt{s^2 + t^2}$, что очевидно после возведения в квадрат. □

Лекция IV

26 ноября 2022 г.

2.4 Гомеоморфизмы

Определение 2.4.1 (Гомеоморфизм)**.** Непрерывное отображение $f : (X, \Omega_X) \to (Y, \Omega_Y)$, такое, что f — биекция, причём f^{-1} — тоже непрерывно.

Если между (X, Ω_X) и (Y, Ω_Y) существует гомеоморфизм, то говорят, что (X, Ω_X) гомеоморфно (Y, Ω_Y), пишут $(X, \Omega_X) \sim (Y, \Omega_Y)$.

Теорема 2.4.1. Гомеоморфность — отношение эквивалентности на множестве топологических пространств.

Доказательство.

- id — гомеоморфизм.
- Если f — гомеоморфизм, то f^{-1} — гомеоморфизм.
- Композиция гомеоморфизмов — гомеоморфизм. □

Примеры.

- $X = \{a, b\}$. Для топологий $\Omega_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ и $\Omega_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ $(X, \Omega_1) \sim (X, \Omega_2)$. Гомеоморфизм — функция $f(x) = \begin{cases} a, & x = b \\ b, & x = a \end{cases}$.

- Всякие два отрезка с одинаковым типом концом гомеоморфны: $[a, b] \sim [c, d]$. Можно построить непрерывное линейное отображение.
- $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$. В качестве непрерывного отображения может выступать функция $y = \tan(x)$.
- На плоскости $\mathbb{R}^2$ всякие два шара (два открытых, или два замкнутых) гомеоморфны.
- Квадрат гомеоморфен кругу: можно рассмотреть отображение, линейно переводящее «радиусы» в радиусы.
- *Интересный факт.* Более того, всякие два выпуклых непустых замкнутых множества гомеоморфны друг другу.
- $S^n \setminus \{\text{точка}\} \sim \mathbb{R}^n$. S^n — стандартная сфера в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, так, S^1 — окружность.

  Доказательство. Рассмотрим сферу, а на ней — два полюса A и B. Проведём касательную плоскость α через точку B; всякой точке $C \in S^n$ сопоставим пересечение луча AC и плоскости α.

  Проверить, что это гомеоморфизм, можно с помощью инверсии с центром в точке O (центр сферы) и радиусом R (радиус сферы).

  Применив инверсию к плоскости α, получим сферу, построенную на BO, как на диаметре.

  Таким образом, после сужения инверсии, получается отображение из плоскости в сферу без точки.

  Доказательство того, что инверсия непрерывна, будет чуть позже. □

- Круг без точки гомеморфен кольцу — кругу без круга. Опять же, отображение линейно переводит радиусы в радиусы.
- Если из пространства выкинуть окружность, то это будет то же самое, что и выкниуть прямую и точку.
  $$\mathbb{R}^3 \setminus S^1 \sim \mathbb{R}^3 \setminus (R^1 \cup \{\text{точка вне прямой}\})$$
- Пример непрерывной биекции, не являющейся гомеоморфизма: $f : [0; 2\pi) \to S_1$, такая, что $f(x) = (\cos(x), \sin(x))$.

  Обратное отображение не является непрерывным, так как $[0; 1)$ открыто в $[0; 2\pi)$, но $f([0; 1))$ — отнюдь не открытое подмножество окружности.

2.5 Фундаментальные покрытия

Определение 2.5.1 (Фундаментальное покрытие пространства X)**.** Такое покрытие $\Gamma = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ топологического пространства (X, Ω), что

$$\forall u \subset X : (u \in \Omega \iff \forall \alpha \in \Lambda : u \cap A_\alpha \in \Omega_{A_\alpha})$$

Замечание. Аналогично можно рассмотреть не открытые, а замкнутые множества: F замкнуто в $X \iff \forall \alpha : F \cap A_\alpha$ замкнуто в A_α.

Теорема 2.5.1. Пусть $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ — фундаментальное покрытие X.

Если $f : X \to Y$ таково, что $\forall \alpha : f\big|_{A_\alpha}$ — непрерывно, то само f — непрерывно.

Доказательство. Рассмотрим произвольное открытое множество $u \in \Omega_Y$. Докажем, что $f^{-1}(u) \in \Omega_X$.

Для произвольного $\alpha \in \Lambda$:

$$\left(f\big|_{A_\alpha}\right)^{-1}(u) \in \Omega_{A_\alpha} \Rightarrow f^{-1}(u) \cap A_\alpha \in \Omega_{A_\alpha}$$

откуда по определению фундаментального покрытия $f^{-1}(u) \in \Omega_X$. □

Контрпример. Для $X = [0;1)$ можно рассмотреть покрытие $[0;1) = \left[0; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right)$. Оно не является фундаментальным, так как $f(x) = \{x\}$ — взятие дробной части — не непрерывно, хотя непрерывно на каждом полуинтервале из покрытия.

В то же время покрытие $[0;1) = \left[0; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right)$ — фундаментально (например, см. (теорема 2.5.2)).

Определение 2.5.2 (Открытое покрытие)**.** Такое покрытие, что все его элементы открыты в X.

Определение 2.5.3 (Замкнутое покрытие)**.** Такое покрытие, что все его элементы замкнуты в X.

Определение 2.5.4 (Локально конечное покрытие)**.** $\forall x \in X : \exists V_x \in \Omega_X : x \in V_x$ такая, что она пересекает конечное число элементов покрытия: $\{\alpha \in \Lambda | V_x \cap A_\alpha \neq \varnothing\}$ конечно.

Теорема 2.5.2.

1. Открытое покрытие фундаментально.
2. Конечное замкнутое покрытие фундаментально.
3. Локально конечное замкнутое покрытие фундаментально.

Доказательство.

1. Рассмотрим произвольное множество $U \subset X$. Если $\forall \alpha \in \Lambda : A_\alpha \cap U \in \Omega_{A_\alpha}$, то — по тривиальному свойству топологии, индуцированной на открытом множестве — $\forall \alpha \in \Lambda : A_\alpha \cap U \in \Omega_X$. В таком случае U можно представить, как объединение всех таких частей.
2. Рассмотрим произвольное множество $U \subset X$. Если $\forall \alpha \in \Lambda : A_\alpha \cap U \in \Omega_{A_\alpha}$, то дополнение $A_\alpha \cap (X \setminus U)$ замкнуто в A_α. По тривиальному свойству замкнутой индуцированной топологии получаем, что $X \setminus U$ замкнуто во всех A_α.

   В таком случае $X \setminus U$ можно представить, как объединение всех таких частей (объединение конечного числа замкнутых — замкнуто). Значит, U открыто.
3. Зафиксируем для каждой точки окрестность V_x, пересекающую конечное число элементов покрытия — из определения локальной конечности.

   Рассмотрим произвольное множество $U \subset X$. Несложно видеть, что $U = \bigcup\limits_{x \in U} (U \cap V_x)$.

   Если все эти части открыты в V_x, где — после сужения — конечные замкнутые покрытия, то, объединив их все, получаем, что и само U открыто. □

2.6 Непрерывность и произведение пространств

Рассмотрим $X = \prod\limits_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ — произведение топологических пространств.

Теорема 2.6.1. Координатные проекции $p_\alpha : X \to X_\alpha$ (определение 1.8.3) непрерывны.

Доказательство. Всякое множество $U \in \Omega_{X_\alpha}$ такого, что $p^{-1}(U)$ открыто — по определению, как элемент предбазы $\prod X_\alpha$. □

Определение 2.6.1 (Координатная компонента f)**.** Пусть $f : Z \to \prod\limits_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$. Тогда компонентой f по координате α называется $f_\alpha = p_\alpha \circ f$.

Теорема 2.6.2. $f : Z \to \prod\limits_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ непрерывно $\iff \forall \alpha : f_\alpha$ непрерывно.

Доказательство.

$\Rightarrow$. Композиция $p_\alpha \circ f$ непрерывна.

$\Leftarrow$. Проверим, что f непрерывна на элементах предбазы: прообразы $\forall U$ — открытом в произведении — : $p^{-1}(U) \in \Omega_{X_\alpha}$.

Воспользуемся тем, что $p_\alpha^{-1}(U)$ открыт (по определению топологии произведения). Кроме этого, $f^{-1}\left(p_\alpha^{-1}(U)\right)$ тоже открыто, как прообраз открытого в f.

Значит, $f^{-1}\left(p_\alpha^{-1}(U)\right) = (p_\alpha \circ f)^{-1}(U)$ — открыто, откуда $p_\alpha \circ f$ непрерывно. $\square$

Контрпример. «Обратное» неверно: не факт, что если $f : \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to Y$ непрерывно на всех проекциях, то оно непрерывно.

Так, можно рассмотреть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$.

Такая функция непрерывна в сужении на любую прямую (в том числе и координатную), но не непрерывна:

Доказательство.

- - Для всякой прямой, не проходящей через 0 ($y = kx + b$ или $x = b$, где $b \neq 0$) сужение функции на эту прямую имеет определённую формулу — частное многочленов, где знаменатель строго положителен. Она непрерывна.
  - Сужение на прямую $x = 0$ даёт $f(0, x) = 0$.
  - Наконец, для прямых $y = kx$ сужение даёт функцию $f(x, kx) = \dfrac{k^2x^3}{x^2 + k^4x^4} = \dfrac{k^2x}{1 + k^4x^2}$ при $x \neq 0$. Не в нуле функция понятно, что непрерывна; в нуле $\dfrac{kx}{1 + k^4x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$
- Несмотря на всё это, если сузить функцию на параболу $x = y^2$, то окажется, что $f(y^2, y) = 1/2$ при $y \neq 0$, однако $y = 0$ при $y = 0$. Эта функция непрерывной уже не является. $\square$

2.7 Арифметические операции над непрерывными функциями

Теорема 2.7.1. Функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ непрерывны, где $f(x, y) = x + y$ или $f(x, y) = x - y$, или может быть $f(x, y) = x \cdot y$. (Доказываем для трёх функций)

Доказательство.

- $f(x, y) = x + y$. Проверим непрерывность в точке: рассмотрим открытый шар $B_\varepsilon(x_0 + y_0)$. Докажем, что в его прообразе есть окрестность (x_0, y_0).

  Для этого возьмём $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Несложно видеть, что $f\left(B_\delta(x_0), B_\delta(y_0)\right) \subset B_\varepsilon(x_0 + y_0)$:

  $$\forall x \in B_\delta(x_0), y \in B_\delta(y_0) : |x_0 + y_0 - x - y| \leqslant |x_0 - x| + |y_0 - y| \leqslant \delta + \delta = \varepsilon$$

- Аналогично.

- $f(x, y) = x \cdot y$. Проверим непрерывность в точке: рассмотрим открытый шар $B_\varepsilon(x_0 \cdot y_0)$. Докажем, что в его прообразе есть окрестность (x_0, y_0).

  Пусть $c = \max\{|x_0|, |y_0|\}$.

  Для этого возьмём $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{3c}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\}$.

  $$\forall x \in B_\delta(x_0), y \in B_\delta(y_0) : |x \cdot y - x_0 \cdot y_0| \leqslant |(x \pm \delta)(y \pm \delta) - x_0 \cdot y_0| \leqslant |x_0\delta| + |y_0\delta| + |\delta^2| \leqslant \varepsilon$$

$\square$

Следствие 2.7.1. *В топологическом пространстве (X, Ω) для непрерывных функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ верно, что $f + g, f - g$ и $f \cdot g$ — тоже непрерывны.*

Доказательство.

Пусть функция $(f,g) : X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ определена так: $(f,g)(x) = (f(x), g(x))$. Она непрерывна, так как проекции непрерывны;

тогда

$$\begin{aligned} f+g &= (x+y) \circ (f,g) \\ f-g &= (x-y) \circ (f,g) \\ f \cdot g &= (x \cdot y) \circ (f,g) \end{aligned}$$

непрерывны, как композиции. □

Следствие 2.7.2. *В топологическом пространстве (X, Ω) для непрерывных функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ верно, что $\frac{f}{g}$ — тоже непрерывна на своей области определения (где g не обращается в 0).*

Доказательство.

Рассмотрим $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad h(x) = \frac{1}{x}$. Как известно из матанализа, она непрерывна.

Тогда $\frac{1}{g} = h \circ g$ и $\frac{f}{g} = f \cdot (h \circ g)$. □

2.8 Топологические свойства

Как доказать, что два топологических пространства не являются гомеоморфными?

При гомеоморфизме сохраняются некоторые свойства. Если эти свойства различны, то пространства заведомо не гомеоморфны.

Определение 2.8.1 (Топологическое свойство)**.** Свойство, которое пространства сохраняют при гомеоморфизме.

Пространство может обладать или не обладать некоторым свойством.

Определение 2.8.2 (Топологический инвариант)**.** Характеристика, которую пространства сохраняют при гомеоморфизме.

Какое-то число, например.

2.8.1 Аксиомы счётности

Ниже для краткости будем называть счётными *не более, чем счётные* множества.

Определение 2.8.3 (Первая аксиома счётности, AC1)**.** Топологическое пространство X удовлетворяет первой аксиоме счётности, если у любой точки существует счётная база.

Любое метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счётности: можно взять у всякой точки открытые шары с центром в ней и радиусом $\frac{1}{n}$.

Определение 2.8.4 (Вторая аксиома счётности, AC2)**.** Топологическое пространство X удовлетворяет второй аксиоме счётности, если у него существует счётная база.

Теорема 2.8.1. Из второй аксиомы счётности следует первая: в качестве базы точки можно взять все открытые множества, содержащие её: $\Sigma_a = \{U \in \Sigma | a \in U\}$.

Определение 2.8.5 (Наследственное топологическое свойство)**.** Если всё пространство X обладает свойством, то всегда любое его подпространство обладает этим же свойством.

Определение 2.8.6 (Наследование свойства для произведения)**.** Если два пространства X и Y обладают свойством, то всегда $X \times Y$ тоже этим свойством обладает.

Факт 2.8.1. *Вторая аксиома счётности — наследственное свойство. Вторая аксиома счётности наследуется подпространством: если Σ — счётная база, то*

$$\Sigma_A \overset{def}{=} \{U \cap A | U \in \Sigma\}$$

тоже счётна.

Вторая аксиома счётности наследуется и для произведения: для базы в точке (x, y) достаточно взять базу $\Sigma_{(x,y)} = \Sigma_x \times \Sigma_Y$

Лекция V

29 ноября 2022 г.

Замечание. $\mathbb{R}$ удовлетворяет второй аксиоме счётности: можно рассмотреть в качестве базы шары радиусом $\frac{1}{n}$ с рациональными центрами.

Отсюда следует, что второй аксиоме счётности удовлетворяют и все подпространства $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.8.2 (Линделёф)**.** Если X удовлетворяет второй аксиоме счётности, то из любого покрытия можно выделить счётное подпокрытие.

Доказательство.

Рассмотрим покрытие $U : \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = X$.

Обозначим в качестве $S \coloneqq \{v \in \Sigma | \exists \alpha \in \Lambda : v \subset U_\alpha\}$.

S — покрытие, так как всякая точка лежит в U_α вместе с неким множеством из базы.

Теперь для каждого $s \in S$ сопоставим один любой элемент из U, содержащий s. Таким образом мы выделим счётное подпокрытие. $\square$

2.8.2 Сепарабельные пространства

Определение 2.8.7 ($A \subset X$ всюду плотно)**.** $\operatorname{Cl} A = X$

Замечание. Это значит, что всякая точка пространства — точка прикосновения A, то есть $\forall U \in \Omega_X \setminus \{\varnothing\} : U \cap A \neq \varnothing$.

Определение 2.8.8 (Сепарабельное пространство)**.** Пространство, в котором есть всюду плотное счётное множество.

Пример. $\mathbb{R}$ сепарабельно: $\mathbb{Q}$ — всюду плотное счётное подмножество.

Теорема 2.8.3.

1. Из второй аксиомы счётности следует сепарабельность.
2. В метрических пространствах из сепарабельности следует вторая аксиома счётности.

Доказательство.

1. Сопоставим всякой $v \in \Sigma$ одну из её точек. Это всюду плотное множество.
2. Рассмотрим $\Sigma = \left\{B_{\frac{1}{n}}(x) \middle| x \in A; n \in \mathbb{N}\right\}$, где A — всюду плотное счётное множество.

   Проверим, что Σ — база. Для этого рассмотрим любую точку и любое открытое множество, её содержащее $b \in U \in \Omega$.

   Проверим, что существует шар B из базы, такой, что $b \in B \subset U$. Пространство метрическое, есть достаточно большое $k \in \mathbb{N}$: шар $B_{\frac{1}{k}}(b)$, содержащийся в U.

   Тогда $\exists a \in B_{\frac{1}{k}} \cap A : d(a, b) < \frac{1}{2k}$, так как A — всюду плотно.

   Теперь понятно, что шар $b \in B_{\frac{1}{2k}}(a)$, и что этот шар — из базы. $\square$

2.8.3 Аксиомы отделимости

Первая аксиома отделимости

Определение 2.8.9 (Пространство удовлетворяет первой аксиоме отделимости, T1)**.** $\forall x, y \in X : \exists U_x \in \Omega : x \in U_x \not\ni y$.

Теорема 2.8.4. Пространство удовлетворяет первой аксиоме отделимости $\iff$ все одноточечные множества замкнуты.

Доказательство.

- $\Rightarrow$. Рассмотрим $x \in X$. Проверим, что $X \setminus \{x\}$ открыто. Рассмотрим $\forall y \in X \setminus \{x\}$. Для всякого y он лежит в $X \setminus \{x\}$ вместе с некоторой окрестностью по отделимости от x. Значит, $\{x\}$ замкнуто.
- $\Leftarrow$. В качестве отделяющего множества для x и y можно взять $X \setminus \{y\}$. □

Вторая аксиома отделимости

Определение 2.8.10 (Пространство удовлетворяет второй аксиоме отделимости, T2)**.** $\forall x, y \in X : \exists U_x \ni x, U_u \ni y : U_x \cap U_y = \varnothing$. Разумеется, $U_x, U_y \in \Omega$.

По-другому такие пространства называются хаусдорфовыми.

Факт 2.8.2. *Любое метрическое пространство Хаусдорфово — для точек x и y можно рассмотреть шары радиусом $d(x, y)/2$.*

Теорема 2.8.5. Пространство Хаусдорфово $\iff$ *диагональ* $\{(a, a) | a \in X\}$ замкнута в $X \times X$.

Доказательство.

- $\Rightarrow$. Пусть Δ — диагональ. Докажем, что дополнение к Δ открыто. Рассмотрим $(a, b) \in (X \times X) \setminus \Delta$. Из определения Хаусдорфовости $\exists U_a, U_b \in \Omega$, отделяющие a и b. Но тогда $U_a \times U_b$ с одной стороны открыто, а с другой — не пересекается с диагональю.
- $\Leftarrow$. Диагональ замкнута, значит, $(X \times X) \setminus \Delta$ открыто. Рассмотрим $a, b \in X$. $(X \times X) \setminus \delta$ открыто, значит, $\exists U_a \times U_b$, открытое в произведении — элемент базы произведения, содержащий (a, b). Получается, U_a и U_b отделяют a и b. □

Третья аксиома отделимости

Определение 2.8.11 (X удовлетворяет третьей аксиоме отделимости, T3)**.** $\forall \mathcal{F}$ — замкнутого множества, и $\forall x \notin \mathcal{F}$: существуют окрестности $U_x \ni x$ и $U_{\mathcal{F}} \supset \mathcal{F}$, их отделяющие.

Теорема 2.8.6. Пространство удовлетворяет T3 $\iff$ $\forall x \in X, \forall U_x \in \Omega : \exists V_x \in \Omega$ — подокрестность, такая, что $\operatorname{Cl} V_x \subset U_x$.

Доказательство.

- $\Rightarrow$. Найдём для точки x и окрестности $U_x \ni x$ подходящую V_x. Для этого применим третью аксиому отделимости для $\{x\}$ и $X \setminus U_x$.

  Пусть нашлись окрестности V_x и $W \supset X \setminus U_x$. Таким образом, $\operatorname{Cl} V_x \subset X \setminus W \Rightarrow \operatorname{Cl} V_x \subset U_x$.
- $\Leftarrow$. Пусть $x \in X$ и $\mathcal{F} \subset X$ — точка из замкнутого множества. Рассмотрим $U = X \setminus \mathcal{F}$. Согласно посылке теоремы, существует $V_x \subset U : \operatorname{Cl} V_x \subset U$.

  Легко проверить, что T3 выполняется, можно рассмотреть $V_x \ni x$ и $X \setminus \operatorname{Cl} V_x \supset \mathcal{F}$. □

Определение 2.8.12 (Пространство регулярно)**.** Удовлетворяет T1 и T3.

Четвёртая аксиома отделимости

Определение 2.8.13 (X удовлетворяет четвёртой аксиоме отделимости T4)**.** $\forall \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ — замкнутые — $\exists U_1 \supset \mathcal{F}_1$ и $U_2 \supset \mathcal{F}_2$ — непересекающиеся открытые множества.

Определение 2.8.14 (Пространство нормально)**.** Удовлетворяет T1 и T4.

Теорема 2.8.7. Верна цепочка следствий:

$$\{\text{нормальность} = T1 + T4\} \Rightarrow \{\text{регулярность} = T1 + T3\} \Rightarrow \{\text{Хаусдорфовость} = T2\} \Rightarrow T1$$

Доказательство. Оставляется, как упражнение читателю. □

Теорема 2.8.8. Метрическое пространство нормально.

Доказательство.

Проверим T4 (T2 проверено выше (факт 2.8.2)).

Заметим, что расстояние от точки до замкнутого множества (не содержащего её) больше нуля: $d(x, \mathcal{F}) > 0$. В случае расстояния — нуля — точка бы принадлежала множестве из-за замкнутости.

Пусть $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ — два замкнутых непересекающихся множества. В качестве U_1 и U_2 рассмотрим точки, находящиеся ближе к одному множеству, нежели к другому.

$$U_1 = \left\{x \in X \middle| d(x, \mathcal{F}_1) < d(x, \mathcal{F}_2)\right\} \quad U_2 = \left\{x \in X \middle| d(x, \mathcal{F}_2) < d(x, \mathcal{F}_1)\right\}$$

Эти множества открыты, так как функция расстояния 1-липшицева: всякая точка $x \in U_1$ содержится в U_1 вместе с шаром радиуса $\frac{1}{2}(d(x, \mathcal{F}_2) - d(x, \mathcal{F}_1))$. □

Лемма и теорема Урысона

Определение 2.8.15 (Функция Урысона)**.** Пусть A, B — два замкнутых непересекающихся множества. Всякая функция $\phi : X \to [0; 1]$, такая. что $\phi\big|_A \equiv 0$ и $\phi\big|_B \equiv 1$.

Замечание. Такую функцию легко построить в метрическом пространстве:

$$f(x) = \min\left(1, \frac{d(x, A)}{d(x, B)}\right)$$

Интересный факт (Лемма Урысона). Топологическое пространство нормально $\iff$ для любых двух замкнутых непересекающихся множеств существует функция Урысона.

Замечание. Обратно это очевидно: в качестве открытых множеств, содержащих A и B можно взять $\phi^{-1}([0; {}^1\!/\!_3))$ и $\phi^{-1}(({}^2\!/\!_3; 1])$.

Интересный факт (Теорема Урысона о метризации). Всякое нормальное пространство со счётной базой метризуемо.

2.8.4 Связность

Определение 2.8.16 (Топологическое пространство связно)**.** Его нельзя разбить на два непустых открытых множества.

Примеры.

- Антидискретное пространства связно
- Дискретное пространство мощности хотя бы 2 не связно.
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ не связна.
- $[a, b] \cup [c, d]$ не связно ($a < b < c < d$).

Теорема 2.8.9. Следующие условия эквивалентны:

1. X связно.
2. X нельзя разбить на 2 непересекающихся замкнутых множеств.
3. $A \subset X$ одновременно и открытое, и замкнутое $\Rightarrow A = \varnothing$ или $A = X$.
4. $\nexists f : X \to \{0, 1\}$, где f — сюръективное непрерывное отображение, а на $\{0; 1\}$ введена дискретная топология.

Доказательство.

- $(1) \iff (2)$. Дополнение открытого замкнуто и наоборот.
- $(1) \iff (3)$. $\exists A \neq \varnothing, X$, одновременно открытое и замкнутое $\iff A \sqcup (X \setminus A) = X$, где оба открыты.
- $(1) \iff (4)$. $\exists f \iff f^{-1}(\{0\})$ и $f^{-1}(\{1\})$ открыты. □

Теорема 2.8.10. Отрезок $[0; 1]$ связен в стандартной топологии.

Доказательство.

Предположим противное: $[0; 1] = U \sqcup V$, где $U, V \in \Omega_{[0;1]}$.

Без потери общности считаем, что $0 \in U$. Из открытости $\exists \varepsilon > 0 : [0; \varepsilon) \subset U$.

Пусть $a = \sup \left\{ \varepsilon \in [0; 1] \middle| [0; \varepsilon) \subset U \right\}$.

Если $a \in V$, то из открытости V получаем, что a — не точная верхняя грань (в районе некоторой $\delta : (a - \delta; a + \delta) \subset V$ все точки в V, грань можно уменьшить).

Если $a \in U$, то из открытости U получаем, что a — не точная верхняя грань (есть больше). Здесь может так случиться, что $a = 1$, но в таком случае $U = [0; 1]$ и $V = \varnothing$, опять же противоречие. □

Теорема 2.8.11. Для подмножества прямой $X \subset \mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны:

1. X связно.
2. X выпукло ($\forall a, b \in X : (a, b) \subset X$).
3. X — интервал в обобщённом смысле ($\langle a, b \rangle$, где $a \leqslant b$, $a \in [-\infty; +\infty), b \in (-\infty; +\infty]$).

Доказательство.

- $(1) \Rightarrow (2)$. Предположим, что это не так: возьмём отрезок (a, b) такой, что точка x внутри не принадлежит отрезку. Тогда нашлось разбиение $X = (X \cap (-\infty; x)) \sqcup (X \cap (x; +\infty))$.
- $(2) \Rightarrow (1)$. Предположим, что это не так: $X = U \sqcup V$. Но тогда возьмём две точки $a \in U$, $b \in V$, без потери общности $a < b$, тогда из выпуклости X: $[a, b] = (U \cap [a, b]) \sqcup (V \cap [a, b])$ — противоречие со связностью отрезка.
- $(2) \Rightarrow (3)$. $X = \langle \inf X, \sup X \rangle$.
- $(3) \Rightarrow (2)$. Очевидно. □

Связность и непрерывность

Теорема 2.8.12. Непрерывный образ связного пространства связен: $\forall f : X \to Y$: f — непрерывно и X — связно, значит, Y связно.

Доказательство. Пусть $U \sqcup V = f(X)$, где $U, V \in \Omega_{f(X)}$.

Тогда $f^{-1}(U) \sqcup f^{-1}(V) = X$, противоречие со связностью X. □

Следствие 2.8.1. *Связность — топологическое свойство.*

Теорема 2.8.13 (О промежуточном значении)**.** Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение.

Если X связно, то $\forall a, b \in f(X) : f(X) \supset [a, b]$.

Доказательство. X связно $\Rightarrow f(X)$ связно $\Rightarrow f(X)$ выпукло. □

Определение 2.8.17 (Компонента связности пространства X)**.** Связное подмножество, не содержащееся ни в каком, строго большем по включению, связном подмножестве.

Лекция VI

3 декабря 2022 г.

Лемма 2.8.1. *Объединение любого семейства попарно пересекающихся связных множеств связно.*

Доказательство.

Пусть данное семейство $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. $\forall \alpha \in \Lambda : A_\alpha$ связно и $\forall \alpha, \beta \in \Lambda : A_\alpha \cap A_\beta \neq \varnothing$.

Положим $Y = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$.

От противного: пусть $Y = U \sqcup V$, где U, V — открыты. Рассмотрим произвольное A_{α_0}. Так как оно связно, то он содержится либо полностью в U, либо полностью в V. Не умаляя общности, в U.

Так как $\forall \beta \in \Lambda : A_\beta \cap A_{\alpha_0} \neq \varnothing$, то $\forall \beta \in \Lambda : A_\beta \subset U$.

Но тогда из-за связности все $A_\beta \subset U$, откуда $V = \varnothing$. □

Теорема 2.8.14.

- Всякая точка лежит в некоторой компоненте связности.
- Причём различные компоненты связности не пересекаются.

  Доказательство. Всякая точка $x \in X$ содержится в объединении всех связных множеств, её содержащих (эти множества есть, например, $\{x\}$ связно). Нетрудно видеть, что эти объединения связны, максимальны по включению и дизъюнктны. □

Следствие 2.8.2. *Компоненты связности дают разбиения топологического пространства.*

Свойства связности

1. Любое связное подмножество подпространства содержится в некоторой компоненте связности.
2. Пространство несвязно $\iff$ в нём есть хотя бы две компоненты связности.
3. Замыкание связного множества связно.

   Доказательство. Пусть замыкание несвязно. Тогда оно представимо в виде объединения двух замкнутых множеств $\operatorname{Cl} A = \mathcal{F}_1 \sqcup \mathcal{F}_2$. Так как исходное множество A связно, то оно содержится полностью в одном из них, пусть в $\mathcal{F}_1$.

   Согласно свойству замыкания, $\operatorname{Cl} A \subset \mathcal{F}_1$, значит, $\mathcal{F}_2 = \varnothing$. □

Следствие 2.8.3. *Компоненты связности замкнуты.*

Замечание. Число компонент связности — топологический инвариант.

2.8.5 Линейная связность

Пусть X — топологическое пространство.

Определение 2.8.18 (Путь в X)**.** Непрерывное отображение $\alpha : \underset{\text{станд.}}{[0;1]} \to X$.

$\alpha(0)$ называют *началом пути*, а $\alpha(1)$ — *концом пути*.

Определение 2.8.19 (Линейно связное топологическое пространство X)**.** Любые две точки X можно соединить путём.

Говорят, что $A \subset X$ линейно связно, если A связно в индуцированной топологии; это значит, что между всякой парой точек $a, b \in A$ существует путь, полностью лежащий в A.

Пример. Отрезок евклидового пространства — путь. Таким образом, $\mathbb{R}^n$ линейно связно, как и его выпуклые подмножества.

Линейная связность и непрерывность

Пусть X, Y — топологические пространства, причём X — линейно связно.

Теорема 2.8.15. Если есть непрерывная функция $f : X \to Y$, то $f(X)$ линейно связно.

Доказательство. Пусть $x, y \in f(X)$. Тогда есть путь, соединяющий a, b — какие-то два прообраза x и y соответственно, между ними есть путь α.

Композиция непрерывных функций непрерывна, значит, $f \circ \alpha$ — путь между x и y. □

Лемма 2.8.2. *Способность быть соединёнными путём — отношение эквивалетности.*

Доказательство.

- Рефлексивность. Постоянное отображение непрерывно.
- Симметричность. Если $\alpha : [0;1] \to X$ — путь, то $\alpha \circ (1 - x)$ — тоже путь.
- Транзитивность. Если α — путь между x, y, а β — путь между y, z, то $\gamma : [0;1] \to X$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ \beta(2t - 1), & t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases}$$

  γ непрерывна, так как $\alpha([0;1])$ и $\beta([0;1])$ — фундаментальное покрытие $\gamma([0;1])$ (определение 2.5.1). □

Определение 2.8.20 (Компоненты линейной связности)**.** Классы эквивалентности по отношению способности быть соединёнными путём.

Замечание. Число компонент линейной связности — топологический инвариант.

2.8.6 Связность и линейная связность

Теорема 2.8.16. Из линейной связности следует связность.

Доказательство. $\forall x, y \in X : \exists \alpha$ — путь между x и y. Так как отрезок связен, то образ пути $\alpha([0;1])$ тоже связен.

Таким образом, $\alpha([0;1]) \subset \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ — компонента связности точки x.

Получаем, что $\forall y \in X : y \in \mathcal{C}$, откуда $\mathcal{C} = X$ □

Следствие 2.8.4. *Компоненты линейной связности содержатся в компонентах связности.*

Контрпример (Связное, но не линейно связное множество).

- Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2$.

  В нём график $y = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

  $$A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y = \cos\left(\frac{1}{x}\right), x > 0\right\}$$

  линейно связен, значит, связен.

  Рассмотрим $X := A \cup \{(0,0)\}$. Так как $\operatorname{Cl}_{\mathbb{R}^2} A = A \cup \{(0,y) | y \in [-1;1]\}$, то $\operatorname{Cl}_X A = X$, то есть X связно.

- В то же время точка $(0,0)$ образуют одноточечную компоненту линейной связности. От противного: пусть есть путь $\alpha : [0,1] \to X$ с началом в $(0,0)$. Обозначим $T = \alpha^{-1}((0,0))$.

  – Докажем, что T открыто. Пусть $t_0 \in T$ — произвольный элемент. Рассмотрим единичный шар $B_1((0,0))$. Из непрерывности пути $\exists \delta > 0 : \alpha(B_\delta(t_0)) \subset B_1((0,0))$.

    Пусть $\exists t_1 \in B_\delta(t_0) : \alpha(t_1) \neq (0,0)$. Запишем путь покомпонентно: $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Оба отображения x, y непрерывны, по теореме о промежуточном значении все значения из $(x(t_0), x(t_1))$ достигаются.

    В частности, достигается $\frac{1}{2\pi n_*} = x(t_*)$ для достаточно большого n_* и t_* между t_0 и t_1. Тогда заключаем, что $y(t_*) = 1$ и приходим к противоречию — $\alpha(t_*) \notin B_1((0,0))$.

    Таким образом $\forall t_1 \in B_\delta((0,0))$: $\alpha(t_1) = (0,0)$ и T открыто.

  – T замкнуто, как прообраз замкнутого. Значит, T и замкнуто, и открыто, но так как это — непустое подмножество $[0,1]$, то $T = [0,1]$, откуда все пути с началом в $(0,0)$ постоянны.

Пространства, в которых всякая точка имеет некоторую линейно связную окрестность

Примеры.

- Какое-то открытое евклидово подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$.

- **Определение** 2.8.21 (Топологическое многообразие размерности n). Хаусдорфовое пространство X со счётной базой, такое, что $\forall x \in X : \exists U_x \in \Omega_X : U_x \sim \mathbb{R}^n$.

  Так, примером многообразия размерности n является S^n — стандартная сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 2.8.17. Для пространств, в которых всякая точка имеет некоторую линейно связную окрестность, линейная связность совпадает со связностью, причём компоненты связности открыты.

Доказательство. Пусть W — компонента линейной связности. Рассмотрим произвольную $a \in W$ и её линейно связную окрестность U_a. Из-за линейной связности $U_a \subset W$, значит, W открыто.

Если какая-то компонента связности состоит из некоторых компонент линейной связности, то она бьётся на некоторые открытые множества, противоречие. □

2.8.7 Негомеоморфность

Теорема 2.8.18. Следующие множества попарно негомеоморфны:

$$[0;1] \qquad [0;1) \qquad \mathbb{R} \qquad S^1 \qquad \mathbb{R}^2$$

Доказательство.

- В $[0;1]$ есть две точки (0 и 1), такие, что $[0;1] \setminus \{0,1\}$ по-прежнему связно.

- В $[0;1)$ есть одна точка (0), но нету двух, таких, что при выкидывании их вместе пространство останется связным.

- В $\mathbb{R}$ нет ни одной точки, при выкидывании которой пространство останется связным.
- В S^1 есть одна точка, при выкидывании которой пространство останется связным, причём это любая точка, а в полуинтервале — не любая.
- В $\mathbb{R}^2$ есть как минимум 3 точки, при выкидывании которых пространство не потеряет связность — например, $(0,0),(0,1),(0,2)$.

  Замечание. $\mathbb{R}^2$ не потеряет связность при выкидывании конечного числа точек, так как оно останется линейно связным.

$\square$

2.8.8 Компактные пространства и множества

Определение 2.8.22 (Компактное топологическое пространство)**.** Из любого открытого покрытия пространства можно выделить конечное подпокрытие.

Примеры.

- Конечное пространство компактно.
- Бесконечное дискретное пространство некомпактно — из покрытия одноточечными множествами не выделить конечное подпокрытие.
- Полуинтервал $(0,1]$ некомпактен — можно рассмотреть бесконечное покрытие $(0;1] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n};1]$.
- Пусть $A \subset X$.

  Замечание. Следующие условия равносильны:

  – A компактно в индуцированной топологии.

  – Для любого $\Gamma \subset \Omega_X$, такого, что $\bigcup\Gamma \supset A$ можно выделить конечное подмножество Γ с тем же свойством.

- **Лемма** 2.8.3 (Лемма Гейне — Бореля). *Отрезок* $[0,1]$ *компактен.*

  Доказательство. От противного. Зафиксируем покрытие отрезка $[0,1]$, из которого не выделить конечное подпокрытие.

  Положим $[a_0,b_0] \coloneqq [0,1]$.

  Построим по индукцию систему вложенных отрезков со сколь угодно малыми длинами $[a_i,b_i]$, такую, что из покрытия $[a_i,b_i]$ не выделить конечное. В самом деле, если из покрытия $[a_i,b_i]$ не выделить конечное, то это же верно и либо для $\left[a_i,\frac{a_i+b_i}{2}\right]$, либо для $\left[\frac{a_i+b_i}{2},b_i\right]$.

  Рассмотрим $\{c\} = \bigcap\limits_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$. По определению покрытия найдётся открытое множество $U_c \ni c$, значит, есть открытый шар $B_r(c) \subset U_c$.

  Значит, найдётся отрезок, лежащий внутри данного шара. Для него получилось неверно, что из его покрытия не выделить конечное, противоречие. $\square$

Теорема 2.8.19. X компактно, $A \subset X$ замкнуто $\Rightarrow$ A компактно.

Доказательство. Рассмотрим произвольное открытое покрытие A, назовём его Γ. Заметим, что $\Gamma \cup (X \setminus A)$ — открытое покрытие X, получается, из него можно выделить конечное подпокрытие $\widetilde{\Gamma}$.

Значит, $\widetilde{\Gamma} \setminus (X \setminus A)$ — конечное подпокрытие A, так как $A \cap (X \setminus A) = \varnothing$. $\square$

Теорема 2.8.20. Произведение двух компактов — компакт.

Доказательство.

Лемма 2.8.4. *Заметим, что для проверки на компактность достаточно проверять только покрытия элементами из базы* $\Sigma = \{V_{\beta_1}, \ldots, V_{\beta_n}\}$.

Доказательство леммы.

Рассмотрим произвольное покрытие Γ, $\forall U \in \Gamma : U = \bigcup\limits_{\text{какие-то } \beta} V_\beta$, где $V_\beta \in \Sigma$.

Из покрытия всеми такими V_β можно выделить конечное подпокрытие $\widetilde{\Sigma}$. Тогда сопоставим всякому $V_\beta \in \widetilde{\Sigma}$ одно любое $U \in \Gamma : V_\beta \subset U$. Это искомое конечное подпокрытие. $\square$

Рассмотрим произвольное Γ — покрытие $X \times Y$ множествами из базы — они имеют вид $U_\alpha \times V_\beta$, где $U_\alpha \in \Omega_X, U_\beta \in \Omega_Y$.

Посмотрим на произвольный $x \in X$. Множество $\{x\} \times Y$ компактно, так как оно гомеоморфно Y. Значит, можно выделить конечное подпокрытие, покрывающее $\{x\} \times Y$, назовём это покрытие $\{U_i^x \times V_i^x\}_{i=1..N_x} \subset \Gamma$.

Сопоставим всякому $x : W_x = \bigcap\limits_{i=1}^{N_x} U_i^x$. Это пересечение конечного числа открытых множеств, оно открыто.

Так как X компактно, то можно выбрать некоторое конечное множество $\widetilde{X} \subset X$, такое, что $\bigcup\limits_{\widetilde{x} \in \widetilde{X}} W_{\widetilde{x}} = X$.

Получаем конечное подпокрытие $X \times Y$, оно равно

$$\bigcup_{\widetilde{x} \in \widetilde{X}} \left\{ U_i^{\widetilde{x}} \times V_i^{\widetilde{x}} \right\}_{i=1..N_{\widetilde{x}}}$$

$\square$

Интересный факт (Теорема Тихонова). Тихоновское произведение любого числа компактных пространств компактно.

Теорема 2.8.21. Пусть X — хаусдорфово пространство, а $A \subset X$ — компактно. Тогда A замкнуто.

Доказательство. Докажем, что $X \setminus A$ открыто. Рассмотрим $y \in X \setminus A$.

Согласно хаусдорфовости, $\forall a \in A : \exists U_a \ni a, U_y \ni y : U_a \cap U_y = \varnothing$.

Получили покрытие множества A открытыми множествами; выделим из них конечное подпокрытие $\{U_{a_i}\}_{i=1..N}$.

Каждой такой окрестности U_{a_i} соответствует своя окрестность точки y. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто, получили, что y содержится в $X \setminus A$ вместе с некоторой своей окрестностью. $\square$

Лекция VII

6 декабря 2022 г.

Теорема 2.8.22. X — хаусдорфово и компактно $\Rightarrow X$ — нормально.

Доказательство.

- T1. Очевидно из хаусдорфовости.

- T4. Рассмотрим $A, B \subset X$ — замкнутые множества. Они компактны, как замкнутые подмножества компакта.

  Зафиксируем $a \in A$.

  Из хаусдорфовости $\forall b \in B$ найдутся непересекающиеся окрестности $\exists V_{a,b} \ni a, U_{a,b} \ni b$, обозначим $\mathcal{U}_a := \bigcup\limits_{b \in B} U_{a,b}$.

  $\mathcal{U}_a \supset B$, значит, можно выделить конечное подпокрытие $\widetilde{\mathcal{U}_a} := \bigcup\limits_{i=1}^{N} U_{a,b_i} \supset B$.

  Обозначим $\mathcal{V}_a := \bigcap\limits_{i=1}^{N} V_{a,b_i}$. Заметим, что $a \in \mathcal{V}$, причём $\mathcal{V}_a \cap \mathcal{U}_a = \varnothing$, а $\mathcal{V}_a \cap \widetilde{\mathcal{U}_a} = \varnothing$ и подавно.

  Теперь аналогично переберём все $a \in A$. Здесь уже из покрытия $A \subset \bigcup\limits_{a \in A} \mathcal{V}_a$ выберем конечное подпокрытие $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{M} \mathcal{V}_{a_j}$. Соответствующее пересечение $B \subset \bigcap\limits_{j=1}^{M} \widetilde{\mathcal{U}}_{a_j}$ открыто. □

Теорема 2.8.23. Компактное метрическое пространство (X, d) ограничено.

Доказательство. Пусть $a \in X$ — произвольная точка. Так как $\forall x \in X : d(a, x) \in \mathbb{R}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n(a) = X$.

Выделив из покрытия конечное подпокрытие, найдём такое $n \in \mathbb{N} : B_n(a) = X$. Тогда, согласно неравенству треугольника, расстояние между любыми двумя точками не превышает $2n$. □

Следствие 2.8.5. *Компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Из (теорема 2.8.23) ограничено, из (теорема 2.8.21) — замкнуто. □

Теорема 2.8.24. $A \subset \mathbb{R}$ — компактно $\iff$ A замкнуто и ограничено.

Доказательство.

$\Rightarrow$. См. следствие.

$\Leftarrow$. Так как A ограничено, то $\exists R \in \mathbb{R} : A \subset [-R; R]^n$. Заметим, что $[-R; R]^n$ — компактно, как произведение компактов. Тогда A — замкнутое подмножество компакта, откуда A — компактно. □

Компактность на языке замкнутых множеств:

Определение 2.8.23 (Центрированный набор подмножеств $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$)**.** Такой набор, что любое его конечное подмножество имеет непустое пересечение.

Пример. $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \ldots$ центрирован.

Теорема 2.8.25. X компактно $\iff$ любой центрированный набор замкнутых подмножеств X имеет непустое пересечение.

Доказательство.

Факт 2.8.3. $\{X \setminus B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ — *покрытие* $\iff \bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha = \varnothing$.

$\Rightarrow$. От противного: пусть есть центрированный набор замкнутых множеств с пустым пересечением. Тогда $\{X \setminus A_\alpha\}$ — открытое покрытие, из него можно выделить конечное подпокрытие. Тогда мы нашли конечное подмножество с пустым пересечением $\Rightarrow$ набор не центрирован.

$\Leftarrow$. От противного: пусть U_α — открытое покрытие, из которого не выделить конечное подпокрытие. Это значит, что $\bigcap(X \setminus U_{\alpha_i}) \neq \varnothing$ для любого конечного подмножества индексов $\{\alpha_i\}$.

Но тогда получается, что $\{X \setminus U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ центрирован по определению, значит, U_α — не покрытие. Противоречие. $\square$

Следствие 2.8.6. *Пусть $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ — центрированный набор замкнутых множеств.*

Если $\exists \alpha_0 \in \Lambda$: A_{α_0} компактно, то $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \neq \varnothing$.

Доказательство. Сузим набор на A_{α_0} : рассмотрим $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} = \{A_\alpha \cap A_{\alpha_0} | \alpha \in \Lambda\}$. Получили центрированный набор замкнутых подмножеств компакта A_{α_0}. Значит, пересечение непусто. $\square$

Теорема 2.8.26. Непрерывный образ компакта — компакт.

Доказательство. Рассмотрим непрерывное отображение $f : X \to Y$, где X — компакт. Докажем, что $f(X)$ — компакт. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $f(X) = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$. Но $\forall \alpha \in \Lambda : U_\alpha$ открыто в $f(X)$, значит, $f^{-1}(U_\alpha)$ открыто в X. Объединение прообразов — прообраз объединения, значит, $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ — покрытие X. Из него можно выделить открытое подпокрытие. $\square$

Следствие 2.8.7. *Компактность — топологическое свойство.*

Теорема 2.8.27 (Вейерштрасс)**.** Непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ на компакте достигает свои наибольшее и наименьшее значения.

Доказательство. $f(X)$ — образ компакта — компакт, значит, содержит свои предельные точки. $f(X) \ni \inf f, \sup f$. $\square$

Теорема 2.8.28. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывная биекция, где X — компактно, а Y — хаусдорфово. Тогда f — гомеоморфизм.

Доказательство. Фактически, достаточно доказать, что f^{-1} непрерывно.

Пусть $\mathcal{F} \subset X$ — произвольное замкнутое подмножество X (откуда $\mathcal{F}$ — компакт).

$f(\mathcal{F})$ — образ компакта, компакт, в хаусдорфовом пространстве компакт замкнут $\Rightarrow$ $f(\mathcal{F})$ — замкнут. $\square$

Определение 2.8.24 (Топологическое вложение)**.** Такое отображение $f : X \to Y$, что f — гомеоморфизм между X и $f(X)$.

Контрпример (Пример инъективного непрерывного отображения — не вложения)*.* Улитка — открытый интервал сворачивается в букву ρ. Обратное не непрерывно, так как интервал не компактен.

Следствие 2.8.8. *Непрерывная инъекция $f : \underbrace{X}_{\text{компакт}} \to \underbrace{Y}_{\text{хаусдорфово}}$ — непременно вложение.*

Теорема 2.8.29 (Лемма Лебега)**.** Пусть X — компактное метрическое пространство, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ — открытое покрытие.

Тогда $\exists r > 0 : \forall a \in X : \exists U_\alpha : B_r(a) \subset U_\alpha$.

Определение 2.8.25 (Число Лебега)**.** Такой радиус r.

Доказательство. Сопоставим каждой точке $a \in X$ радиус $r(a)$, такой, что $\exists U_\alpha : B_{r(a)}(a) \subset U_\alpha$.

Тогда $\{B_{\frac{1}{2}r(a)}(a)\}$ — тоже открытое покрытие, выделим из него конечное подпокрытие $\{B_{\frac{1}{2}r(a_i)}(a_i)\}_{i=1}^n$.

Тогда числом Лебега является, например, $r \coloneqq \min\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r(a_i)$.

В самом деле, $\forall a \in X : \exists B_{\frac{1}{2}r(a_i)}(a_i) \ni a \Rightarrow |a - a_i| < \frac{1}{2} r(a_i) \Rightarrow B_r(a) \subset U_{\alpha_a}$. $\square$

Следствие 2.8.9 (Лемма Лебега для отображений)**.** *Пусть* (X, d) *— компактно, дано открытое покрытие* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$*. Для непрерывного отображения* $f : X \to Y$ *найдётся радиус* $r > 0 : \forall x \in X : \exists U_\alpha : f(B_r(x)) \subset U_\alpha$*.*

Доказательство. Рассмотреть $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$. □

Пусть (X, d_x) и (Y, d_y) — два метрических пространства.

Определение 2.8.26 (Равномерно неперрывное отображение)**.** Такое отображение $f : X \to Y$, такое, что $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X : d_x(x, y) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Теорема 2.8.30. Любое непрерывное отображение $f : \underbrace{X}_{\text{компакт}} \to Y$ — равномерно непрерывно.

Доказательство. Рассмотрим покрытие $\{B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(y)\}_{y \in Y}$. В качестве δ подойдёт число Лебега для покрытия $\{f^{-1}\left(B_{\frac{1}{2}\varepsilon}\right)\}$. □

Определение 2.8.27 (Предел последовательности $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset X$)**.** Такая точка $b \in X$, что

$$\forall U_b \in \Omega_X : \exists M \in \mathbb{N} : \forall n > M : a_n \in U_b$$

Примеры.

- Постоянная последовательность всегда сходится к своему образу.
- Если последовательность сходится к пределу b, то любая подпоследовательность тоже сходится к b.
- В антидискретном пространстве любая последовательность сходится к любому пределу.
- В дискретном пространстве последовательность сходится $\iff$ стабилизируется.

Теорема 2.8.31. В хаусдорфовом пространстве всякая последовательность имеет не более одного предела.

Доказательство. От противного. □

Определение 2.8.28 (Секвенциальное замыкание $A \subset X$)**.** Совокупность пределов последовательностей, имеющих все точки в A. Обозначается $\mathrm{SCl} A$.

Контрпример. Не всегда секвенциальное замыкание — множество предельных точек. Можно рассмотреть прямую с топологией не более, чем счётных дополнений:

$$\mathrm{SCl}(0, 1) = (0, 1), \text{ в то время как } \mathrm{Cl}(0, 1) = \mathbb{R}$$

Теорема 2.8.32. $\mathrm{SCl} A \subset \mathrm{Cl}\, A$.

Доказательство. Предел всякой последовательности — точка прикосновения для A, поэтому очевидно. □

Теорема 2.8.33. В пространстве X, удовлетворяющем первой аксиоме счётности, $\forall A \subset X$: $\mathrm{SCl} A = \mathrm{Cl}\, A$.

Доказательство. Пусть $b \in \mathrm{Cl}\, A$. Рассмотрим счётную базу $\Sigma_b = \{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Построим убывающую счётную базу $\left\{U_i = \bigcap\limits_{j=1}^{i} V_j\right\}_{i \in \mathbb{N}}$

Построим последовательность $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ так, чтобы выполнялось $a_i \in U_i \cap A$. Она сходится к b. □

2.9 Полные метрические пространства

Пусть (X, d) — метрическое пространство.

Определение 2.9.1 (Фундаментальная последовательность)**.** $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Для любого $\varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall n, m > M : d_x(a_n, a_m) < \varepsilon$. Их также называют *последовательность Коши* или *сходящаяся в себе последовательность*.

Свойства:

- Сходится $\Rightarrow$ фундаментальна.
- Фундаментальна $\Rightarrow$ ограничена (лежит в неком шаре).
- Фундаментальна, и содержит сходящуюся подпоследовательность $\Rightarrow$ сходится туда же.

Определение 2.9.2 (Полное метрическое пространство)**.** В нём всякая фундаментальная последовательность имеет предел.

Примеры.

- $\mathbb{R}$ полно.
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ не полно.
- **Теорема** 2.9.1. $\mathbb{R}^n$ полно.

  Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{(a_k^1, a_k^2, \ldots, a_k^n)\}_{k \in \mathbb{N}}$. По каждой координате последовательность фундаментальна, из полноты $\mathbb{R}$ всякая имеет предел b^i, значит, вся последовательность сходится к $(b^1, \ldots, b^n)$. □

Теорема 2.9.2. Замкнутое подмножество Y полного пространства X полно.

Доказательство. $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b \in X$, b — точка прикосновения для Y, значит, $b \in Y$. □

Примеры.

- Отрезок — замкнутое подмножество прямой.
- Интервал не является полным, так как не замкнут, хотя и подмножество прямой.

Предостережение. Полнота — не топологическое свойство, например, $(0, 1) \sim \mathbb{R}$.

Теорема 2.9.3 (О вложенных шарах)**.** Метрическое пространство полно $\iff$ любая последовательность вложенных замкнутых шаров с радиусом, стремящимся к 0, обладает непустым пересечением.

Замечание. Более общая формулировка говорит о последовательности вложенных замкнутых множеств, с диаметрами, стремящимися к 0. Доказательство не меняется.

Доказательство.

$\Rightarrow$. $D_{r_1}(a_1) \supset D_{r_2}(a_2) \supset \ldots$ выберем в каждом шаре по точке. Последовательность фундаментальна, $\exists a$ — предел. Покажем, что $\forall i \in \mathbb{N} : a \in D_{r_i}(a_i)$:

Например, от противного: $\exists i : d(a_i, a) > r_i$, значит, для $\varepsilon := d(a_i, a) - r_i$, согласно неравенству треугольника, $\forall j > i : B_\varepsilon(a) \cap D_{r_j}(a_j) = \varnothing$.

$\Leftarrow$. Используя данное свойство, построим точку, являющуюся пределом последовательности $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Для этого рассмотрим последовательность шаров радиусами $1/2^n$.

Согласно фундаментальности, для $\varepsilon = 1/2^n$ найдётся $M_n : \forall n, m \geqslant M_n : d(a_n, a_m) < \varepsilon$.

Определим последовательность вложенных шаров $D_{\frac{1}{2^{n-1}}}(a_{M_n})$. Несложно проверить, что шары вложены, а точка в их пересечении является пределом некоторой подпоследовательности $\{a_i\}$. □

2.9.1 Нигде не плотные множества

Определение 2.9.3 (Нигде не плотное множество A)**.** Множество, внутренность замыкания которого пуста.

Определение 2.9.4 (Внешность A)**.** Внутренность дополнения. Обозначается $\mathring{A}$ или $\mathrm{Ext}(A)$.

$X = \operatorname{Int} A \sqcup \operatorname{Fr} A \sqcup \mathring{A}$.

Лекция VIII

13 декабря 2022 г.

Теорема 2.9.4. Следующие условия равносильны:

1. Множество A нигде не плотно.
2. $\mathrm{Ext}(A)$ всюду плотно.
3. $\forall U \in \Omega : \exists V \ni \Omega : V \subset U \wedge V \cap A = \varnothing$.

Доказательство.

- (1) $\iff$ (2). $\operatorname{Int} \operatorname{Cl} A = \varnothing \iff \forall x \in X : \forall U_x \in \Omega : U_x \cap (X \setminus \operatorname{Cl} A) \neq \varnothing \iff U_x \cap \mathrm{Ext} A \neq \varnothing \iff \mathrm{Ext} A$ всюду плотно.
- (2) $\iff$ (3). $V \cap A = \varnothing \iff V \subset \mathrm{Ext}(A)$. □

Теорема 2.9.5 (Бэр)**.** Полное метрическое пространство нельзя покрыть счётным набором нигде не плотных множеств.

Доказательство. От противного: пусть $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ покрывают полное пространство X.

Рассмотрим произвольный открытый шар B_0. Будем поддерживать инвариант: $B_n \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \varnothing$, причём радиус шара B_n меньше $\frac{1}{n}$.

При переходе от B_n к B_{n+1} заметим, что так как $B_n \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \varnothing$, то $B_n \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n+1} A_i = B_n \cap A_{n+1}$. Так как A_{n+1} нигде не плотно, то найдётся внутри B_n открытое множество U, такое, что $U \cap A_{n+1} = \varnothing$. Внутри U найдётся шар достаточно маленького радиуса, положим его за B_{n+1}.

Внутри каждого шара B_i возьмём замкнутый шар меньшего радиуса D_i, так, чтобы последовательность получилась вложенной. Из полноты пространства у них есть общая точка; эта точка не покрыта последовательностью $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. □

Контрпример (Неполное метрическое пространство, которое можно покрыть счётным набором нигде не плотных множеств). $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} \{r\}$.

Следствие 2.9.1. *Полное (метрическое) пространство без изолированных точек несчётно.*

($b \in X$ — изолированная точка пространства $X \iff \{b\}$ открыто в X.)

Доказательство. От противного: множество счётно. Так как внутренность замыкания $\{b\}$ пуста, то $\{b\}$ нигде не плотно. Отсюда множество покрывается одноточечными множествами, противоречие. □

Определение 2.9.5 (Пополнение метрического пространства X)**.** Метрическое пространство $\overline{X}$, такое, что

- $\overline{X}$ полное.
- $X \subset \overline{X}$.

- X всюду плотно в $\overline{X}$.

Интересный факт. У любого метрического пространства есть пополнение.

План доказательства: Сказать, что последовательности Коши u и v эквивалентны $u \sim v$, если $\lim\limits_{n\to\infty} d(u_n, v_n) = 0$. Ввести $\overline{X} = \{\text{последовательности Коши}\}/\sim$. Доказать, что $\overline{X}$ всюду плотно, и распространить на него метрику из X.

2.10 Секвенциальная компактность

Определение 2.10.1 (X секвенциально компактно)**.** Любая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

Определение 2.10.2 (b — точка накопления для A)**.** $\forall U_b \in \Omega : |U_b \cap A| = \infty$.

Теорема 2.10.1. В компактном пространстве любое бесконечное множество содержит точку накопления.

Доказательство. От противного: всякая точка x имеет окрестность $U(x)$, пересекающуюся с A лишь по конечному множеству точек. Тогда $X = \bigcup\limits_{x\in X} U(x)$. Выберем конечное подпокрытие, получим противоречие с бесконечностью A. $\square$

Теорема 2.10.2. Метрическое пространство X компактно $\Rightarrow$ X секвенциально компактно.

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, выберем в ней сходящуюся подпоследовательность.

Если множество $\{u_i | i \in \mathbb{N}\}$ конечно, то $\exists v : u_i = v$ бесконечно часто. Тогда выделим постоянную подпоследовательность, сходящуюся к v.

Иначе $\{u_i | i \in \mathbb{N}\}$ бесконечно. Рассмотрим в X b — точку накопления для $\{u_i | i \in \mathbb{N}\}$.

Введём последовательность шаров $B_{1/n}(b)$, в шаре $B_{1/n}$ выберем n-ю точку для подпоследовательности. Так как внутри всякого шара бесконечно много точек, то процесс обречён на успех. $\square$

2.11 Вполне ограниченные метрические пространства

Пусть X — метрическое пространство.

Определение 2.11.1 (ε-сеть)**.** Такое $A \subset X$, что $\forall x \in X : \exists a \in A : d(x, a) < \varepsilon$.

Определение 2.11.2 (X вполне ограничено)**.** $\forall \varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть.

Пример (Не компактное, но вполне ограниченное пространство). Интервал, например, $(0, 1)$.

Теорема 2.11.1. Если X — метрическое пространство, то следующие условия эквивалентны:

- X компактно.
- X секвенциально компактно.
- X полно и вполне ограничено.

Доказательство.

- $(1) \Rightarrow (2)$. (теорема 2.10.2)
- $(2) \Rightarrow (3)$.

– Вполне ограниченность. От противного: $\exists \varepsilon > 0$, такое, что нет конечной ε-сети. Построим последовательность без сходящейся подпоследовательности. Пусть на очередном шаге последовательность $\{a_i\}_{i=1..n}$. Это не ε-сеть (так как конечна), возьмём a_{n+1} так, чтобы выполнялось $\min\limits_{i=1..n} d(a_{n+1}, a_i) \geqslant \varepsilon$.

  Попарное расстояние между любой парой точек не меньше ε.

– Полнота. Во всякой фундаментальной последовательности есть подпоследовательность, сходящаяся к v. Тогда вся последовательность тоже сходится к v.

- (3) $\Rightarrow$ (1). От противного: пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ — покрытие, из которого не выделить конечное подпокрытие. Построим последовательность вложенных замкнутых множеств $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

  – Рассмотрим конечную 1-сеть A_1. Шары $\{D_1(a) | a \in A_1\}$ покрывают всё пространство; из отсутствия конечного подпокрытия найдётся шар $C_1 \coloneqq D_i$, который не покрыть конечным числом элементов из U_α.

  – На n-м шаге возьмём $\frac{1}{n}$-сеть для шара D_{n-1}. Найдётся шар D_j радиуса $\frac{1}{n}$, такой, что его не покрыть конечным числом элементов $\{U_\alpha\}$. Положим $C_n \coloneqq C_{n-1} \cap D_j$.

  Согласно теореме о вложенных шарах (точнее замечания к ней), пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{n} C_i$ состоит из одной точки, назовём её c.

  $c \in U_\alpha$ для некоего $\alpha \in \Lambda$, причём лежит вместе с некоторым шаром. Тогда начиная с некоторого места $C_n \subset U_\alpha$, откуда противоречие с тем, что шары C_n нельзя покрыть конечным числом элементов покрытия. □

Теорема 2.11.2. Метрическое пространство X компактно $\Rightarrow$ выполняется вторая аксиома счётности.

Доказательство.

> **Лемма 2.11.1.** *Метрическое пространство X вполне ограничено $\Rightarrow$ выполняется вторая аксиома счётности.*
>
> *Доказательство леммы.*
>
> Возьмём A — объединение по $n \in \mathbb{N}$ всех $\frac{1}{n}$-сетей.
>
> A всюду плотно, так как пересекается с любым шаром — с шаром радиуса r A имеет общую точку в $\left\lceil \frac{1}{r} \right\rceil$ сети.
>
> Отсюда X сепарабельно (A счётно). □

□

Теорема 2.11.3. В пространстве со второй аксиомой счётности компактность равносильна секвенциальной компактности.

Доказательство.

$\Rightarrow$. Из компактности и первой аксиомы счётности (следует из второй) следует секвенциальная компактность. Доказательство аналогично частному случаю (теорема 2.10.2).

$\Leftarrow$. Выделим из покрытия $\bigcup U_\alpha = X$ конечное подпокрытие.

По теореме Линделёфа (теорема 2.8.2) в пространстве с 2АС найдётся счётное подпокрытие $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i = X$. Положим $\mathcal{F}_i \coloneqq X \setminus U_i$, обозначим $W_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$.

От противного: для всякого конечного $n \in \mathbb{N} : W_n \neq \varnothing$. Тогда выберем в последовательности множеств $W_1 \supset W_2 \dots$ последовательность точек $a_i \in W_i$. В ней есть подпоследовательность, которая сходится к некой точке $b \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} W_i$. ($b \in \mathrm{SCl} W_i \Rightarrow b \in \mathrm{Cl}\, W_i$)

Получаем, что $\forall i \in \mathbb{N} : b \notin U_i$, то есть, противоречие, U_i — не покрытие. $\square$

2.12 Факторпространства

Пусть (X, Ω) — топологическое пространство, $\sim$ — отношение эквивалентности на X.

Определение 2.12.1 (Факторпространство X по отношению $\sim$)**.** Множество $X/_\sim$, такое, что $U \subset X/_\sim$ открыто $\iff$ $p^{-1}(U)$ открыто в X. Здесь $p : X \to X/_\sim$ — (каноническая) проекция, $x \mapsto \overline{x}$.

Факт 2.12.1. *Проекция p непрерывна.*

2.12.1 Свойства

- Факторпространство связного пространства связно.
- Факторпространство линейно связного пространство линейно связно.
- Факторпространство сепарабельного пространства сепарабельно.
- Факторпространство компактного пространства компактно.

Примеры (Без доказательства).

- Отрезок со склеенными концами — окружность. $[0,1]/_{0\sim 1} \sim S^1$.
- Квадрат со склеенными противоположными сторонами — тор $T^2 = S^1 \times S^1$.
- Восьмиугольник, склеенный по формуле $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ — сфера с двумя ручками; два склеенных через дырку тора.
- Если склеим квадрат вот так, получим цилиндр.
- Если склеим квадрат по-другому, получим лист Мёбиуса.

2.12.2 Частные случаи факторизации

- Стягивание подпространства $A \subset X$ в точку. $x \sim y \iff \left[\begin{array}{l} x = y \\ x, y \in A \end{array}\right.$. Так, в отрезке $[0,1]$ при стягивании подпространства $\{0,1\}$ в точку опять же получим окружность.
- В замкнутом круге $D_1(0)$ при стягивании окружности $S_1(0)$ получим S^2.
- Проективная плоскость — отождествление диаметрально противоположных точек на окружности круга.
- **Определение 2.12.2** (Дизъюнктное объединение топологических пространств)**.** U открыто в $X \sqcup Y \iff U \cap X$ открыто в X и $U \cap Y$ открыто в Y.

  Теперь можно, например, склеить из двух отрезков AB и CD окружность, отождествив $A \sim C$ и $B \sim D$.

X, Y — топологические пространства. Пусть $A \subset X, f : A \to Y$.

Определение 2.12.3 (Склейка X и Y по отображению f)**.** Факторпространство $X \sqcup Y/_\sim$, где $\sim$ — наименьшее по включению отображение эквивалентности, такое, что $x \sim f(x)$.

Обозначается $X \sqcup_f Y$.

Свойства.

- Факторттопология является топологией (проверить).
- Факторпространство связного пространства связно.
- Факторпространство линейно связного пространства связно.
- Факторпространство компактного пространства компактно.

Лекция IX

20 декабря 2022 г.

Теорема 2.12.1. $Y \to X \sqcup_f Y$ — топологическое вложение.

Доказательство. Проекция $X \sqcup Y \to X \sqcup_f Y$ непрерывна по определению фактортопологии. Значит, сужение проекции $Y \to X \sqcup_f Y$ непрерывно.

Обратно: рассмотрим любое открытое $U \subset Y$. Докажем, что его образ в $p(U)$ открыт в $X \sqcup_f Y$. По определению склейки по отображению $p(U) = p(U \sqcup f^{-1}(U))$. Это множество открыто по определению фактортопологии, и из-за непрерывности f. $\square$

Теорема 2.12.2. Пусть X, Y — топологические пространства, X склеивают по $\sim$, $f : X/\sim \to Y$. Утверждается, что условие непрерывности f равносильно условию непрерывности $f \circ p$.

Доказательство.

$\Rightarrow$. Композиция непрерывных непрерывна.

$\Leftarrow$. Проверим по определению непрерывность f. Рассмотрим открытое $U \subset Y$. Так как $f \circ p$ непрерывна, то $p^{-1}(f^{-1}(U))$ открыто. Но p можно «отменить»: $p(p^{-1}(f^{-1}(U)))$ открыто по определению фактортопологии. $\square$

Теорема 2.12.3 (О пропускании через фактор)**.** Пусть X, Y — топологические пространства, $\sim$ — отношение эквивалентности на X. Рассмотрим $g : X \to Y$, такое, что оно уважает $\sim$, то есть $x_1 \sim x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Утверждается, что найдётся **непрерывная** $f : X/\sim \to Y$, такое, ч то $g = f \circ p$, где p — каноническая проекция.

Доказательство. $f(\overline{x}) = g(x)$. Определение корректно, так как g уважает $\sim$.

Заметим, что f непрерывна, так как $f \circ p$ непрерывна. $\square$

Теорема 2.12.4. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное сюръективное отображение.

Рассмотрим отношение эквивалентности на X: $x \sim y \iff f(x) = f(y)$.

Утверждается, что $X/\sim$ гомеоморфно Y.

Доказательство. Гомеоморфизм $f : X/\sim \to Y$ существует и непрерывен согласно предыдущей теореме.

Он очевидно инъективен и сюръективен из-за сюръективности f.

f^{-1} непрерывно, так как $f(U)$ открыто для открытого U $\square$

Лекция X

16 февраля 2022 г.

2.13 Многообразия

Определение 2.13.1 (m-мерное многообразие)**.** Хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой, любая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^m$.

Контрпример. Две прямые, склеенные везде, кроме пары точек. Не хаусдорфово.

Интересный факт (Теорема об инварианте размерности). Никакие два непустые открытые подмножества $U \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset \mathbb{R}^n$ не совпадают.

Примеры.

- $\mathbb{R}^n$ и всякое его открытое подмножество.
- Для $n = 0 : \mathbb{R}^0 = \{\mathrm{pt}\}$. Многообразием является всякое счётное дискретное топологическое пространство.
- S^n — сфера размерности n. В качестве окрестности точки x рассмотрим $S^n \setminus \{y\}$, где y — произвольная точка сферы, $y \neq x$.
- $\mathbb{R}p^n$. Рассмотрим $S^n \subset \mathbb{R}^n$. Введём на сфере отношение эквивалентности: $x = -x$, где x — точки сферы. $\mathbb{R}p^n \cong S^n/_\sim$. Образы координат при проекции на «координатную полусферу».

  В частности $\mathbb{R}p^1 \cong \mathbb{R}p$.

Определение 2.13.2 (m-мерное многообразие с краем)**.** Хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой, любая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^m$ **или** $\mathbb{R}^m_+ \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_m) | x_1 \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}^m$.

Определение 2.13.3 (Край многообразия)**.** Множество точек, для которых не существует окрестности, гомеоморфной $\mathbb{R}^m$.

Интересный факт. $\mathbb{R}^m_+$ негомеоморфно никакому открытому подмножеству $\mathbb{R}^n$ для любого n.

Интересный факт. Край многообразия размерности n — многообразие размерности $n - 1$.

Определение 2.13.4 (Замкнутое многообразие)**.** Компактное многообразие без края.

Пример. Например, сфера S^n.

Контрпример. Полупространство.

Интересный факт. Всякое замкнутое связное многообразие размерности 1 гомеоморфно окружности S^1.

Примеры (Примеры двумерных многообразий).

-

Примеры (Двумерные многообразия).

- Лента Мёбиуса: двумерное многообразие с краем. Склейка прямоугольника по формуле $axay$ или треугольника — по формуле aax. Край ленты Мёбиуса — окружность
- Тор: склейка прямоугольника по формуле $aba^{-1}b^{-1}$.
- Бутылка Клейна: склейка прямоугольника по формуле $aba^{-1}b$.
- $\mathbb{R}p^2 \cong S^2/_\sim$ эквивалентно склейке aa. (теорема 2.12.4)

2.13.1 Модельные поверхности

- Сфера с n (открытыми) дырками.
- Сфера с p ручками: к сфере с p дырками приклеить по ручке (тор с дыркой) каждой дырке.
- Сфера с q плёнками к сфере с q дырками приклеить по плёнке (ленте Мёбиуса) каждой дырке.

Утверждается, что если у дырки отождествить противоположные точки, то получится заклеивание дырки плёнкой.

- Сфера с n дырками, p ручками и q плёнками.

  Утверждается, что если есть хотя бы одна плёнка, то p ручек и q плёнок гомеоморфны $2p+q$ плёнкам.

Определение 2.13.5 (Развёртка)**.** Конечное множество непересекающихся многоугольников плоскости, у которых стороны разбиты на паре, и выбран линейный гомеоморфизм между сторонами одной пары. Соответствующее факторпространство называется замкнутой 2-мерная поверхность.

Факт 2.13.1. *Замкнутая 2-мерная поверхность является замкнутым двумерным многообразием.*

Доказательство. Компактность очевидна; проверим, что у каждой точки (внутренности многоугольника, середины ребра, вершины) есть окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^2$. □

Замечание. Если поверхность связна, то у неё есть развёртка, состоящая из одного многоугольника.

Определение 2.13.6 (Ориентируемая развёртка)**.** Всегда ребро a склеивается с ребром a^{-1}.

Определение 2.13.7 (Каноническая развёртка первого типа)**.** $4p$-угольник, в котором стороны склеены по правилу $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\dots$ Для данного p каноническая развёртка фиксирована. Для $p=1$ это тор; для $p=2$ поверхность развёртки называется *крендель*. В общем случае это сфера с p ручками.

Определение 2.13.8 (Каноническая развёртка второго типа)**.** $2q$-угольник, в котором стороны склеены по правилу $a_1a_1a_2a_2\dots$ Для $q=1$ поверхность развёртки — $\mathbb{R}p^1$. В общем виде — сфера с q плёнками.

После хитрого склеивания видно, что бутылка Клейна имеет формулу $a^{-1}a^{-1}cc$, то есть изоморфна развёртке второго типа для $q=2$.

Факт 2.13.2. *Развёртка первого типа для фиксированного p изоморфна сфере с p ручками.*

Доказательство. Будем приклеивать ручки по индукции. Заметим, что склейка пятиугольника по формуле $aba^{-1}b^{-1}x$ даёт тор с дыркой. Ну, дальше как-нибудь приклеим. □

Факт 2.13.3. *Аналогично доказываем, что развёртка второго типа изоморфна сфере с q плёнками.*

Теорема 2.13.1.
- Любая связная замкнутая двумерная поверхность с ориентируемой развёрткой изоморфна сфере с p ручками для некоего p.
- Любая связная замкнутая двумерная поверхность с неориентируемой развёрткой изоморфна сфере с q плёнками для некоего q.

Лекция XI

2 марта 2022 г.

Пусть $\mathcal{F}$ — замкнутое двумерное многообразие

Определение 2.13.9 (Топологический треугольник)**.** Пара (T,ϕ), где $T\subset\mathcal{F}$ — подпространство, а $\phi:\underset{\subset\mathbb{R}^2}{\triangle}\to T$ — гомеоморфизм из произвольного треугольника плоскости (треугольник берётся вместе со внутренностью) на T. Образы рёбер треугольника называются *рёбрами* топологического треугольника, образы вершин — *вершинами*.

Определение 2.13.10 (Триангуляция замкнутого двумерного многообразия)**.** Конечный набор топологических треугольников $K=\{T_i,\phi_i\}_{i=1..n}$, такой, что выполняются условия:

- Треугольники покрывают всё пространство: $\bigcup\limits_{i=1}^{n} T_i = \mathcal{F}$.
- Пересечение любых двух треугольников — их общее ребро, общая вершина, либо пустое.

Определение 2.13.11 (Триангулируемая поверхность)**.** Поверхность, у которой существует триангуляция.

Интересный факт. У любого замкнутого компактного двумерного многообразия есть триангуляция.

Hint: доказательство использует сильный вариант теоремы Жордана: замкнутая несамопересекающаяся кривая бьёт плоскость на две компоненты, такие, что одна из них — диск.

Предложение 2.13.1. *Всякое компактное двумерное многообразие можно представить, как факторпространство некоторой развёртки.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную триангуляцию, это частный случай развёртки: треугольников — прообразов ϕ_i в триангуляции — конечное число; их можно расположить на одной плоскости гомеоморфизмом из многих плоскостей в одну.

Совместим два треугольника в один, если их два ребра — общий прообраз какого-то ребра топологического треугольника многообразия.

Надо аккуратно проследить за тем, чтобы гомеоморфизм был линейным, и, видимо, всё получится.

Утверждение: факторпространство объединения треугольников по условию развёртки — исходное многообразие.

В общем, я не понимаю, какого уровня строгости ожидать, и не очень въезжаю вообще в то, что рассказывается. $\square$

Интересный факт. Пространства, задаваемые различными каноническими развёртками негомеоморфны. Доказательство в конце семестра будет использовать фундаментальную группу.

Теорема 2.13.2. Если развёртка ориентируемая, то она гомеоморфна поверхности, задаваемой развёрткой I типа. Если развёртка неориентируемая, то она гомеоморфна поверхности, задаваемой развёрткой II типа.

Доказательство. Приведём произвольную развёртку к каноническому виду, используя следующие операции над развёртками:

1. Подразделение многоугольника на два. Плюс один многоугольник, плюс одно правило склейки.
2. Обратная предыдущей: склеивание.
3. Свёртывание aa^{-1} = ничего (свёртка разрешается, если в многоугольнике хотя бы 3 ребра).

Займёмся комбинаторикой.

1. Так как факторпространство развёртки — поверхность — связна, то можно считать, что развёртка — один многоугольник (склеим, если их несколько). Теперь все правила склейки — одно циклическое слово типа $abca^{-1}deb^{-1}d^{-1}c^{-1}\dots$
2. Убираем вхождения подстрок типа aa^{-1}. Если в какой-то момент осталась строка aa^{-1}, то наша поверхность — сфера.
3. Приводим к развёртке, в которой все вершины эквивалентны. Как? Пусть есть две неэквивалентные вершины $A \not\sim B$. Если такие нашлись, то можно считать, что они — соседние.

   Пусть $A - a - B - b - C$, где a, b — правила склейки. Заметим, что $b \neq a^{-1}$, иначе бы мы свернули B, а ещё $b \neq a$, так как $B \not\sim A$. Проведём ребро $d = AC$, разрежем по нему, склеим по b.

Заметим, что вершин, эквивалентных A стало на одну меньше, эквивалентных B — на одну меньше, остальных количество не поменялось.

Иначе говоря, отрезали треугольник ABC, и приклеили его в другое место. Видимо, так всегда можно сделать, хотя у меня это вызывает не очень много доверия.

Такими действиями можно переклеиваниями все вершины сделать эквивалентными.

4. Выделение лент Мёбиуса. Если где-то есть два вхождения символа c одного направления, то есть слово имеет вид $c\omega_1 c\omega_2$, то разрежем по диагонали d, склеим, получим $dd\omega_1(\omega_2)^{-1}$.

   Повторим этот шаг столько, сколько можно, теперь все правила склейки одного направления идут подряд.

5. Выделение ручек. Если предыдущий шаг не привёл к канонической развёртки, то найдётся две буквы c и c^{-1}.

   Утверждается, что найдутся ещё два символа d, d^{-1}, такие, что в циклическом порядке d идёт между c и c^{-1}, а d^{-1} — нет. Это следует из того, что все вершины эквивалентны: если бы таких d, d^{-1} не нашлось бы, то между вершинами от c до c^{-1} и между вершинами от c^{-1} до c не было бы связки эквивалентности.

   Итак, слово развёртки имеет вид $c\omega_1 d\omega_2 c^{-1}\omega_3 d^{-1}\omega_4$.

   Разрежем по диагонали a, соединяющей соответствующие концы c и c^{-1} и склеим по d. Получим слово $c\omega_1\omega_4 a\omega_3\omega_2 c^{-1}a^{-1}$. Не, ну это нереально понять без картинок (я ещё наверняка везде набагал при записи слов)...

   Теперь проведём диагональ b между соответствующими концами a и a^{-1}, разрежем по нему и склеим по c.

   Получим слово $\omega_1\omega_4 a^{-1}bab^{-1}a^{-1}\omega_3\omega_2$. Выделили ручку. Повторяем это тоже, пока можно.

6. Замена ручек лентами Мёбиуса. Пусть есть хотя бы одна ручка и хотя бы одна плёнка. Слово имеет вид $cc\omega_1 aba^{-1}\omega_2$. Разрежем по центральной диагонали d (соединяющей середины ручки и плёнки), склеим по c, получим слово $abd(\omega_2)^{-1}bad\omega_1$. Из a, b, d склеим три плёнки, повторяем, пока можно.

□

2.13.2 Клеточные пространства

«Сейчас мы определим способ построения более страшных пространств, но всё ещё не очень плохих» По-другому клеточные пространства называют CW-комплексы. C значит closure finiteness, W значит Weak?? Возможно, раньше определение сильной и слабой топологии было противоположным.

Определение 2.13.12 (Клеточное пространство размерности 0)**.** Дискретное пространство — любой (возможно, несчётный) набор точек, каждая из которых — открытое множество.

Эти точки называют (нульмерными) *клетками*.

Определение 2.13.13 (Диск размерности k)**.** Замкнутый шар в $\mathbb{R}^k$. Его граница δD^k — сфера S^{k-1}.

Определение 2.13.14 (Клеточное пространство размерности $n \in \mathbb{N}$)**.** Топологическое пространство, полученное из клеточного пространства размерности $n-1$, в него вклеили множество дисков $\{D^n_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, приклеивая по их границам: по отображению $\phi_\alpha = \delta D^n_\alpha \to X^{n-1}$, где X^{n-1} — предыдущее клеточное пространство размерности $n-1$.

Внутренности вклеенных дисков называют *клетками*.

Промежуточные клеточные пространства называются *k-мерными остовами (скелетами)*

Дополнительным условием является то, что $\phi_\alpha(\delta D_\alpha)$ содержится в конечном числе клеток соответствующего многообразия размерности $n-1$.

«Не запрещается что-то плохое», например, всю границу диска D^2 вклеить в среднюю точку одного из отрезков D^1.

Определение 2.13.15 (Клеточное разбиение топологического пространства)**.** Конкретное представление топологического пространства в виде клеточного пространства.

Так, сфера S^2 является клеточным пространством «точка + ничего + приклеиваем диск по точке» = «точка + экватор + приклеиваем два диска по экватору».

Определение 2.13.16 (Клеточное пространство размерности ω)**.** Рассмотрим цепочку клеточных пространств
$$X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset X^{n+1} \subset \dots$$

Можно проверить, что включение — включение подпространств в топологическом смысле, открыте множества сохраняются.

Тогда определим предельное клеточное пространство размерности ω на множестве $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} X^i$.

Топологию на данном объединении определим следующим образом: U открыто в $X \iff \forall n$: $U \cap X^n$ открыто в X^n.

Имеют место следующие два утверждения:

- Можно показать, что определённая выше топология — самая сильная, такая, что $\mathrm{in} : X^n \hookrightarrow X$ — непрерывное отображение.
- Можно показать, что определённая выше топология — самая сильная, такая, что $\mathrm{in} : X^n \hookrightarrow X$ — вложение.

Пусть X — конечное (состоит из конечного числа клеток) клеточное пространство.

Определение 2.13.17 (Эйлерова характеристика клеточного пространства X)**.** $\chi(X) \stackrel{def}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k |I_k|$, где $|I_k|$ — число k-мерных клеток.

Используя гомологии, можно доказать, что эйлерова характеристика не зависит от разбиения пространства на клетки.

Определение 2.13.18 (Род двумерной поверхности)**.** Наибольшее число дизъюнктных окружностей, которые можно вырезать так, чтобы она оставалась связной.

Факт 2.13.4. *Род сферы с p ручками и без плёнок: род$(S_{p,0}) = p$. Род сферы с q плёнками и без ручек: род$(S_{0,q}) = q$.*

В частности, род сферы 0, род тора — 1.

Вырезание дырки не меняет род.

Посчитаем эйлерову характеристику сферы с p ручками.

Рассмотрим каноническую развёртку, ей соответствует естественное клеточное разбиение из одной нульмерной клетки (общая вершина), одной двумерной (поверхность) и $2p$ одномерных (так как в развёртке $4p$ вершин и столько же рёбер, но каждая пара рёбер отождествлена). $\chi(S_{p,0}) = 2 - 2p$.

Аналогично эйлерова характеристика сферы с q плёнками равна $\chi(S_{0,q}) = 2 - q$.

«Если считать, что всё, что мы сформулировали, мы знаем, то можно получить следующую теорему»

Теорема 2.13.3. Двумерная компактная поверхность (возможно, с краем) однозначно задаётся тройкой параметров: число компонент края, ориентируемость (наличие хотя бы одной плёнки), эйлеровой характеристикой.

Доказательство. Сведение к случаю поверхности без края очевидно — заклеить все дырки дисками.

В зависимости от ориентируемости определяем, поверхность с ручками или плёнками, а потом эйлерова характеристика показывает, сколько их. □

Отсюда видно, что всякая такая поверхность имеет развёртку в виде многоугольника, у которого каждая сторона либо сама по себе, либо склеена ровно с одной другой.

Глава 3

Геометрия

Лекция XII

9 марта 2022 г.

3.1 Евклидово пространство

Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$.

Определение 3.1.1 (Скалярное произведение)**.** Отображение $\langle\cdot,\cdot\rangle \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами

1. Симметричное: $\forall x, y \in X : \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.
2. Билинейное:

$$\forall x, y, z \in X : \langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R} : \langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$$

3. Положительная определённость: $\langle x, x\rangle \geqslant 0$. $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$.

Определение 3.1.2 (Евклидово пространство)**.** Векторное пространство с заданным на нём скалярным произведением.

Пример. $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.

Определение 3.1.3 (Норма или длина вектора $x \in X$)**.** $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Определение 3.1.4 (Расстояние между $x, y \in X$)**.** $d(x, y) = |x - y|$

Свойства нормы и расстояния:

- $|x+y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2$.
- $|x| > 0$ для $x \neq 0$.
- $|\lambda x| = |\lambda||x|$, в частности, $|-x| = |x|$.
- $d(x, y) = d(x+z, y+z)$.
- Неравенство Коши — Буняковского — Шварца (далее КБШ):

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant |x| \cdot |y|$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда x и y линейно зависимы.

Доказательство. Если $x = 0$ или $y = 0$, то доказывать нечего. Пусть оба не равны нулю.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : 0 \leqslant |x - \lambda y| = \lambda^2|y|^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + |x|^2$$

Выбрав $\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{|y|^2}$ — при нём правая часть принимает наименьшее значение — получаем $\langle x,y\rangle^2 \leqslant |x|^2 \cdot |y|^2$ (и равенство достигается при $|x-\lambda y| = 0$), что и требовалось доказать. □

Следствие 3.1.1 (Неравенство треугольника для нормы). $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Доказательство. Возвести в квадрат обе части и применить КБШ. □

Следствие 3.1.2 (Неравенство треугольника для расстояний). $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Доказательство.

$$d(x,z) = |x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leqslant |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z)$$ □

Определение 3.1.5 (Угол между векторами $x, y \neq 0$). $\angle(x,y) = \arccos\left(\frac{\langle x,y\rangle}{|x|\cdot|y|}\right)$

Свойства:

- $\angle \in [0, \pi]$.
- Для $\lambda \neq 0 : \angle(x, \lambda y) = \angle(x,y) \cdot \operatorname{sgn}(\lambda)$.
- **Теорема 3.1.1** (Теорема косинусов). $|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x| \cdot |y| \cos\angle(x,y)$.

  Доказательство. Мы так определили угол. □

- **Теорема 3.1.2** (Неравенство треугольника для углов). $\angle(x,z) \leqslant \angle(x,y) + \angle(y,z)$.

  Доказательство. Положим $\alpha = \angle(x,y), \beta = \angle(y,z)$. Если $\alpha + \beta \geqslant \pi$, то доказывать нечего.

  Построим на плоскости треугольник со сторонами-векторами x', z', такими, что $|x'| = |x|, |z'| = |z|$ и угол между ними равен $\alpha + \beta$. Пусть чевиана u' в треугольнике составляет угол α со стороной x' и имеет длину $|u|$.

  Отложим вектор u длины $|u|$ сонаправлено вектору y.

  По теореме косинусов $|x-u| = |x'-u'|$, $|u-z| = |u'-z'|$, согласно неравенству треугольника для x и z $|x-z| \leqslant |x-u| + |u-z| = |x'-u'| + |u'-z'| = |x'-z'|$.

  Отсюда получаем $\cos\angle(x,z) = \frac{|x|^2+|z|^2-|x-z|^2}{|x|\cdot|z|} \geqslant \frac{|x'|^2+|z'|^2-|x'-z'|^2}{|x'|\cdot|z'|} = \cos\angle(x',z')$.

  Таким образом, $\angle(x,z) \leqslant \angle(x',z') = \angle(x,y) + \angle(y,z)$. □

Следствие 3.1.3 (Угловой метод на сфере). *Пусть* $S = \left\{x \in X \middle| |x| = 1\right\}$. *На сфере есть метрика* $d_S(x,y) = \angle(x,y)$.

Следствие 3.1.4. $\angle(x,y) + \angle(y,z) + \angle(x,z) \leqslant 2\pi$.

Доказательство.

$$\angle(x,z) \leqslant \underbrace{\angle(x,-y)}_{\pi-\angle(x,y)} + \underbrace{\angle(-y,z)}_{\pi-\angle(y,z)}$$

□

3.2 Ортогональные векторы

Пусть $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — евклидово пространство.

Определение 3.2.1 (Вектора $x, y \in X$ ортогональны)**.** $\langle x, y\rangle = 0$. Записывают $x \perp y$.

Свойства ортогональности:

- $0 \perp x$.
- $y \perp x_1, \ldots, y \perp x_n \Rightarrow y \perp (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n)$.
- **Теорема 3.2.1** (Пифагор)**.**

$$x \perp y \quad \Rightarrow \quad |x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

Определение 3.2.2 (Ортонормированный набор векторов)**.** Множество единичных векторов $\{v_1, \ldots, v_n\}$, попарно ортогональных.

Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — ортонормированный набор векторов.

Свойства:

- $$\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$$
- Ортонормированный набор векторов линейно независим.

Доказательство. $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \underset{\text{из предыдущего}}{\iff} \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 = 0.$ □

Теорема 3.2.2 (Ортогонализация по Граму — Шмидту)**.** Для любого линейно независимого набора векторов $v_1, \ldots, v_n \in X$ $\exists!\{e_1, \ldots, e_n\} \subset X$ — ортонормированный набор векторов, такой, что

$$\forall k = 1..n: \qquad \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_k) \qquad \text{и} \qquad \langle e_k, v_k\rangle > 0$$

Доказательство. Докажем и существование, и единственность по индукции.

<u>База:</u> $n = 1$, можно принять $e_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$. Очевидно, других вариантов нет.

<u>Переход:</u> пусть для $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ выбран набор векторов $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ с необходимыми свойствами.

Выберем $w_n = v_n - \sum\limits_{j=1}^{n-1} \langle v_n, e_j\rangle \cdot e_j$. Это *ортогональная проекция* v_n на линейное пространство $\mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_{n-1})$.

Заметим, что $\forall 1 \leqslant i < n : \langle w_n, e_i\rangle = \langle v_n, e_i\rangle - \sum\limits_{j=1}^{n} \langle v_n, e_j\rangle \cdot \langle e_j, e_i\rangle = \langle v_n, e_i\rangle - \langle v_n, e_i\rangle = 0.$

Таким образом, $e_n = \frac{w_n}{|w_n|}$ подойдёт.

Единственность: пусть в качестве e_k был выбран другой вектор, $\widetilde{e_k}$. По условию теоремы $\widetilde{e_k} \in \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_k)$. Но тогда есть всего два варината. Либо $\exists i \neq k : \langle \widetilde{e_k}, e_i\rangle \neq 0$, это запрещено отроусловием.. Либо $\widetilde{e_k} = \lambda e_k$ для некоего λ (откуда из нормированности следует $|\lambda| = 1$ и знак равен 1: определяется исходя из $\langle \widetilde{e_k}, v_k\rangle$). □

X — конечномерное пространство. Тогда в X

- Есть ортонормированный базис.
- Любой ортонормированный набор можно дополнить до базиса.

Определение 3.2.3 (Изоморфизм евклидовых пространств X и Y)**.** Существует изоморфизм f: линейное отображение $f : X \to Y$, такое, что $f : X \to Y$ — биекция, сохраняющая скалярное произведение.

Теорема 3.2.3. Любые два евклидовых пространства одной размерности изоморфны.

Доказательство. Определим изоморфизм на ортонормированных базисах и продолжим по линейности. □

Ниже X всегда конечномерно.

Определение 3.2.4 (Ортонормированное дополнение $A \subset X$). $A^{\perp} \overset{def}{=} \{x \in X | \langle x, a \rangle = 0, a \in A\}$.

Свойства ортонормированного дополнения:

- $A^{\perp}$ — линейное пространство.
- $A \subset B \Rightarrow A^{\perp} \supset B^{\perp}$.
- $A^{\perp} = \mathrm{Lin}(A)^{\perp}$.

Теорема 3.2.4. Пусть $V \subset X$ — линейное подпространство. Тогда $X = V \oplus V^{\perp}$.

Теорема 3.2.5. Пусть $V \subset X$ — линейное подпространство. Тогда верны следующие условия:

1. $X = V \oplus V^{\perp}$.
2. $(V^{\perp})^{\perp} = V$.

Доказательство. Выберем $\{e_1, \dots, e_k\}$ — ортонормированный базис V.

Дополним его до $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ — ортонормированного базиса X.

Проверим, что $\mathrm{Lin}(e_{k+1}, \dots, e_n) = V^{\perp}$. Здесь верно включение в обе стороны. □

Лекция XIII

16 марта 2023 г.

Свойства (Ортогональное подпространство).

- Можно определить ортогональную проекцию $\mathrm{Pr}_V : X \to V$ — ведь раз $V \oplus V^{\perp} = X$, то всякий вектор раскладывается в сумму элементов V и $V^{\perp}$. Pr_V — по определению тот вектор из прямой суммы, который лежит в V.
- Pr_V непрерывна.
- $\forall x \in X : \mathrm{Pr}_V(x)$ — ближайшая к x точка в V. Доказательство — применение теоремы Пифагора.
- Пусть $H \leqslant X$ — подпространство размерности $\div X - 1$, то есть гиперплоскость.

  Определение 3.2.5 (Нормаль к гиперплоскости H). Вектор, перпендикулярный всем векторам гиперплоскости H.

  Нормаль существует и единственна с точностью до домножения на скаляр: это вектор, порождающий $H^{\perp}$. $\langle n \rangle = H^{\perp}$.

Лемма 3.2.1 (Конечномерная лемма Рисса). *Пусть $L : X \to \mathbb{R}$ — линейное отображение, где X — евклидово пространство.* $\exists! v \in V : L(u) \equiv \langle u, v \rangle$.

Доказательство. Выберем базис $(e_1, \dots, e_n) \subset X$. Тогда линейное отображение однозначно задаётся вот так:

$$L(u \coloneqq e_1 u_1 + \dots + e_n u_n) = L(e_1) u_1 + \dots + L(e_n) u_n$$
$$L(u) = \left\langle \begin{pmatrix} L(e_1) & \dots & L(e_n) \end{pmatrix}, u \right\rangle$$

□

Факт 3.2.1. *Для любого линейное отображение $L : X \to \mathbb{R}$, не равное нулю $\not\equiv 0$: $\mathrm{Ker}(L)$ — гиперплоскость. Любая гиперплоскость — ядро некой скалярной функции.*

Доказательство.

- Теорема о размерности ядра и образа.
- Для v — нормали к гиперплоскости — $L(x) \equiv \langle v, x\rangle$ подойдёт. □

Факт 3.2.2. *Расстояние от точки $x \in X$ до гиперплоскости $H \leqslant X$ равно $\frac{\langle x,v\rangle}{|v|} \equiv \left\langle x, \frac{v}{|v|}\right\rangle$, где $\langle v\rangle = H^{\perp}$.*

В самом деле, x раскладывается в сумму $x = x^{\perp} + x^{\parallel}$, а $\mathrm{d}(x, H) = \left\langle x^{\perp} + x^{\parallel}, \frac{v}{|v|}\right\rangle = |x^{\perp}|$.

3.3 Ортогональные преобразования

Пусть X, Y — евклидовые пространства (не обязательно одной размерности).

Определение 3.3.1 (Изометричное отображение)**.** Такое линейное отображение $f : X \to Y$, что $\langle x_1, x_2\rangle = \langle f(x_1), f(x_2)\rangle$. В случае равенства пространств $X = Y$ f называется *ортогональным преобразованием* X.

Свойства (Изометричные преобразования).

- Для всякого линейного отображения f: изометричность равносильна тому, что f сохраняет длины векторов.
- Изометричные преобразования инъективны (если $f(x) = f(y)$, то $\|f(x) - f(y)\| = 0$, то есть $\|x - y\| = 0$).

Группа ортогональных преобразований для пространства $\mathbb{R}^n$ называется $\mathcal{O}(n)$.

Доказательство.

> **Задача 3.3.1.** *Как выглядят ортогональные преобразования в $\mathbb{R}^2$?*
>
> Посмотрим, куда перешёл один из ортогональных векторов: матрица перехода имеет вид $\begin{pmatrix}\cos\alpha & * \\ \sin\alpha & *\end{pmatrix}$. Второй столбец должен быть нормирован и ортогонален первому, поэтому матрица перехода имеет вид $\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ (поворот на угол α), либо $\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$ (какие-то поворот и отражение; главное, что раскладывается в прямую сумму id и $-\mathrm{id}$).

Положим $X_+ \coloneqq \{x \in X | f(x) = x\}$, $X_- \coloneqq \{x \in X | f(x) = -x\}$. Очевидно, $X_+ \cap X_- = \{0\}$.

Найдём в $(X_+ \oplus X_-)^{\perp}$ плоскость поворота; тогда по индукции всё получится.

Формальнее, положим изначально $V = X_+ \oplus X_-$ Рассмотрим единичную сферу S в подпространстве $V^{\perp}$, проверим, что происходит при отображении f с точками сферы.

f ортогонально, поэтому $f(S) = S$, откуда для всякой точки $x_0 \in S$ можно рассмотреть $\angle(x_0, f(x_0))$. Это функция от x_0, она достигает минимума на компактной сфере. Пусть $z_0 \in S$ — точка минимума $\angle(x_0, f(x_0))$.

Так как $S \cap X_+ = \{0\}$, то $\angle(z_0, f(z_0)) > 0$. Проверим, что вектора z_0 и $f(z_0)$ действительно образуют плоскость, которая f-инвариантна. Это достаточно проверить на базовых векторах z_0 и $f(z_0)$.

От противного: $f(f(z_0)) \notin \langle z_0, f(z_0)\rangle$. Рассмотрим середины сторон $z_0 - f(z_0)$ и $f(z_0) - f(f(z_0))$, если $f(f(z_0))$ не лежит в плоскости $\langle z_0, f(z_0)\rangle$, то угол между серединами строго меньше угла $\angle(z_0, f(z_0)) = \angle(f(z_0), f(f(z_0)))$.

Таким образом, плоскость f инвариантна, она не бьётся на рямую сумму id и $-\mathrm{id}$, значит, в ней поворот, её можно прямо приплюсовать к V и продолжить по индукции. □

3.3.1 Ориентация векторного пространства

Определение 3.3.2 (Два базиса одинаково ориентированы)**.** Матрица перехода между ними имеет положительный определитель.

Теорема 3.3.1. Одинаковая ориентируемость базисов — отношение эквивалентности на множестве базисов данного пространства.

Доказательство. Детерминант мультипликативен. □

Определение 3.3.3 (Ориентированное векторное пространство)**.** Векторное пространство, в котором один выделен один из классов эквивалентности ориентации базисов.

В таком случае базисы из данного класса эквивалентности называются положительно ориентированными, остальные — отрицательно ориентированными.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ стандартная ориентация базиса совпадает с ориентацией стандартного базиса $\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$

Определение 3.3.4 (Смешанное произведение)**.** Пусть $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — ориентируемое векторное пространство размерности n. Рассмотрим вектора $v_1, \dots, v_n \in X$.

Смешанное произведение $[v_1, v_2, \dots, v_n] \overset{def}{=} \det A$, где A — матрица разложения векторов $v_1, \dots, v_n$ по произвольному ортонормированному базису.

Так как определитель матрицы перехода между двумя ортонормированными базисами равен 1, то определение корректно. Из свойств определителя сразу получаем следующее:

Свойства (Смешанное произведение).

- Линейность по каждому аргументу.
- Кососимметричность (транспозиция меняет знак).
- Равенство нулю эквивалентно линейной зависимости.
- $[v_1, \dots, v_n] > 0 \iff (v_1, \dots, v_n)$ — положительный базис.

Определение 3.3.5 (Векторное произведение)**.** Пусть $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — **трёхмерное** ориентируемое векторное пространство. Рассмотрим вектора $u, v \in X$.

Их векторное произведение $u \times v$ — такой вектор $h \in X$, что $\forall x \in X : \langle h, x\rangle = [u, v, x]$.

Существование и единственность такого h следует из леммы Рисса.

Свойства (Векторное произведение).

- По определению $\langle u \times v, w\rangle = [u, v, w]$.
- Из кососимметричности смешанного произведения $u \times v = -v \times u$.
- Билинейность.
- $u \times v = 0 \iff u$ и v линейно зависимы.

  Доказательство. u и v линейно зависимы $\iff [u, v, x] = 0$ всегда. □

- Для положительного ортонормированного базиса (e_1, e_2, e_3):

$$\begin{aligned} e_1 \times e_2 &= e_3 \\ e_2 \times e_3 &= e_1 \\ e_3 \times e_1 &= e_2 \end{aligned}$$

Теорема 3.3.2 (Геометрический смысл векторного произведения)**.**

- Векторное произведение $w := u \times v$ ортогонально каждому из векторов u, v.
- (u, v, w) образуют положительный базис.
- $|w|$ — площадь параллелограмма, натянутого на u и v.

Доказательство.

- По определению $\langle u \times v, v\rangle = [u, v, v] = 0$.
- Применим ортогонализацию Грама — Шмидта для u, v, получим вектора $e_1 = a \cdot u, e_2 = b \cdot u + c \cdot v$, где $a, c > 0$. Введём e_3 так, что (e_1, e_2, e_3) — положительный ортонормированный базис. По определению $u \times v = ace_3$, откуда $\square$

Лекция XIV

23 марта 2023 г.

3.3.2 Формула в координатах

Пусть (e_1, e_2, e_3) — положительный ортонормированный базис, разложим по базису $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ и $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$. Тогда

$$x \times y = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} e_3$$

Иногда формально пишут

$$x \times y = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

3.4 Матрицы Грама

Пусть $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — евклидово пространство.

Матрица Грама $G(v_1, \ldots, v_k)$ — это матрица $(\langle v_i, v_j\rangle)_{i,j=1}^n$.

Свойства.

- $x_ix_jg_{i,j}$ — это что?
- $\det G = [v_1, \ldots, v_k]$ или что-то типа
- $\det G = 0 \iff v_1, \ldots, v_k$ линейно зависимы.

Глава 4

Аффинные пространства

Определение 4.0.1 (Аффинное пространство)**.** Тройка $(X, \rightarrow, +)$, где X — непустое множество, $\overrightarrow{X}$ — векторное пространство (его называют *ассоциированное или присоединённое*), а операция *откладывания вектора* $+ : X \times \overrightarrow{X} \rightarrow X$, удовлетворяет свойствам:

- $\forall x, y \in X : \exists! u \in \overrightarrow{X} : y = x + u$. Такой u обозначают $\overrightarrow{xy}$.
- Выполнена следующая ассоциативность: $\forall x \in X, u, v \in \overrightarrow{X} : (x + u) + v = x + (u + v)$

Пример (Основной, и в некотором смысле единственный). Пусть X — векторное пространство. Выберем $\overrightarrow{X} = X$, операция сложения наследуется из X.

На самом деле всё сводится к этому примеру, в дальнейшем будем аффинные пространства $(X, \overrightarrow{X}, +)$ обозначать X.

Свойства.

- $x + \overrightarrow{xy} = y$ по определению.
- Правило треугольника: $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$.
- $\overrightarrow{xx} = \overrightarrow{0}$: в самом деле, $\overrightarrow{xx} + \overrightarrow{xx} = \overrightarrow{xx}$.
- $x + \overrightarrow{0} = x$: в самом деле, $x + \overrightarrow{xx} = x$.
- $\overrightarrow{yx} = -\overrightarrow{xy}$.
- Если так получилось, что $x + \overrightarrow{u} = y + \overrightarrow{u}$, то $(x + \overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u} = (y + \overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u} \Rightarrow x = y$.
- Если так получилось, что $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{0}$, то $y = x + \overrightarrow{xy} = x + \overrightarrow{0} = x$.

Рассмотрим аффинное пространство $(X, \overrightarrow{X}, +)$, выберем произвольный элемент $O \in X$ — *начало отсчёта*. Утверждается, что начало отсчёта создаёт биекцию между X и $\overrightarrow{X}$.

$$\phi_O : X \leftrightarrow \overrightarrow{X} \qquad x \leftrightarrow \overrightarrow{Ox}$$

Проверка инъективности и сюръективности остаются, как упражнение читателю.

Отображение $\phi_O : X \rightarrow \overrightarrow{X}$ называется *векторизацией* аффинного пространства X.

Определение 4.0.2 (Линейная комбинация относительно начала отсчёта O)**.** Для коэффициентов $t_i \in \mathbb{R}, \overrightarrow{p_i} \in X$ — вектор $\overrightarrow{v} = \sum\limits_i t_i \overrightarrow{p_i}$ или точка $O + \overrightarrow{v}$.

- Барицентрические (аффинные) линейные комбинации — такие комбинации, что $\sum\limits_i t_i = 1$.
- Сбалансированные — такие комбинации, что $\sum\limits_i t_i = 1$.

Теорема 4.0.1. Барицентрическая линейная комбинация точек — точка, не зависящая от начала отсчёта.

Сбалансированная линейная комбинация векторов — вектор, не зависящий от начала отсчёта.

Доказательство. Запишем две барицентрические координаты с началами отсчёта в O и в O':

$$\overrightarrow{v} = \sum_i t_i \cdot \overrightarrow{Op_i}; \qquad \overrightarrow{v'} = \sum_i t_i \cdot \overrightarrow{O'p_i} = \sum_i t_i \cdot \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{Op_i}\right) = \underbrace{\left(\sum_i t_i\right)\overrightarrow{O'O}}_{0 \text{ для сбалансированной}} + \sum_i t_i \overrightarrow{Op_i}$$

$$O + \overrightarrow{v} = O' + \overrightarrow{v'} \underset{\text{для барицентрической}}{=} O' + \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{v} = O + \overrightarrow{v}$$

□

Пусть X — аффинное пространство.

Определение 4.0.3 ($Y \subset X$ — аффинное подпространство)**.** $\exists V \leqslant \overrightarrow{X}, p \in Y : Y = p + V$. Подпространство V называется *направление* Y.

Свойства.

- Если $Y = p + V$ — аффинное подпространство X, то $\forall q \in Y : Y = q + V$.
- Y — аффинное пространство с ассоциированным V.
- $\forall q \in Y$: для отображения векторизации $\phi_q : \phi_q(Y) = V$.

Определение 4.0.4 (Размерность ассоциированного пространства)**.** Размерность соответствующего ассоциированного векторного пространства. $\dim X \stackrel{def}{=} \dim \overrightarrow{X}$.

Определение 4.0.5 (Параллельный перенос на вектор $v \in \overrightarrow{X}$)**.** Отображение $T_{\overrightarrow{v}} : X \to X; \quad x \mapsto z + \overrightarrow{v}$.

Свойства.

- $T_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}} = T_{\overrightarrow{v}} + T_{\overrightarrow{u}}$.
- $T_{\overrightarrow{0}} = \mathrm{id}$.
- $T_{\left(-\overrightarrow{v}\right)} = (T_{\overrightarrow{v}})^{-1}$

Следствие 4.0.1. *Параллельные переносы — подгруппа группы биекций множества X.*

Определение 4.0.6 (Аффинные подпространства параллельны)**.** Их направления совпадают.

Определение 4.0.7 (Прямая)**.** Аффинное подпространство размерности 1.

Определение 4.0.8 (Гиперплоскость в конечномерном пространстве X)**.** Аффинное подпространство размерности $\dim X - 1$.

Теорема 4.0.2. Пересечение любого множества аффинных подпространств — либо пустое множество, либо аффинное подпространство.

Доказательство. Обозначим пересекаемые подпространства за $(Y_i, \overrightarrow{V_i}, +)$.

Пусть пересечение непусто, рассмотрим $p \in \bigcap\limits_i Y_i$. Всякое подпространство Y_i имеет вид $Y_i = p + \overrightarrow{V_i}$.

Пересечение имеет вид $p + \bigcap\limits_i \overrightarrow{V_i}$. □

Определение 4.0.9 (Аффинная оболочка точек $A \subset X$)**.** Пересечение всех аффинных подпространств, содержащих A. Иначе говоря, наименьшее аффинное подпространство, содержащее A. Обозначается $\mathrm{Aff}(A)$.

Обозначим за $B_p(A)$ образ A при векторизации с началом отсчёта в произвольной точке $p \in A$:

$$B_p(A) \coloneqq \phi_p(A) = \{\overrightarrow{pa} | a \in A\}$$

Предложение 4.0.1. *$A \subset Y$ для некоего аффинного подпространства $Y = p + V \iff B_p(A) \subset V$.*

Предложение 4.0.2. $\phi_p(\operatorname{Aff} A) = \operatorname{Lin}(B_p(A))$.

Замечание. Мне откровенно лень писать доказательства здесь.

Теорема 4.0.3. Аффинная оболочка множества A совпадает с множеством барицентрических комбинаций точек множества A.

Доказательство. //todo □

Определение 4.0.10 (Множество точек $\{p_1, \ldots, p_n\} \subset X$ аффинно независимо)**.** Существует нетривиальная сбалансированная комбинация: $\underbrace{\sum_i t_i}_{\text{не все } 0} = 0$, причём $\sum_i t_i \overrightarrow{p_i} = \overrightarrow{0}$. Ранее было показано, что начало отсчёта можно выбрать произвольно.

Теорема 4.0.4. Для множества точек $A \subset X$ следующие условия равносильны:

- Аффинно независимы
- Векторы $p_1 p_k$ независимы
- $\dim Aff = n - 1$.
- Всякая точка из Aff представима в барицентрическом виде единственным образом.

Лекция XV

30 марта 2023 г.

Доказательство.

$1 \iff 2$ $\sum_i t_i p_i = 0 \iff \sum_i t_i \overrightarrow{p_1 p_i}$

$2 \iff 3$ ...

$1 \Rightarrow 4$ От противного: две барицентрические комбинации быть не могут, ноль — тоже по предыдущей теореме.

$4 \Rightarrow 1$ Пусть аффинно зависимы, найдём два барицентрических представления какой-то точки. □

Рассмотрим аффинное пространство $(X, \overrightarrow{X}, +)$ размерности n.

Определение 4.0.11 (Аффинный точечный базис)**.** Линейно независимое множество $\{p_1, \ldots, p_{n+1}\} \in X$

Определение 4.0.12 (Аффинный базис)**.** Фиксированный нуль $O \in X$, линейно независимое множество векторов $e_1, \ldots, e_n \in \overrightarrow{X}$.

В аффинном точечном базисе любая точка представима единственным образом, как барицентрическая комбинация базиса. Коэффициенты в разложении точки по этому базису называют *барицентрическими координатами.*

Если же рассматривается разложение по аффинному базису, то коэффициенты — *аффинные координаты.*

4.1 Аффинные отображения

$(X, \overrightarrow{X}, +), (Y, \overrightarrow{Y}, +)$ — аффинные пространства.

$\forall \mathcal{F} : X \to Y$ определим соответствующее отображение $\widetilde{\mathcal{F}}_p : \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{Y}; \quad \widetilde{\mathcal{F}}_p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\mathcal{F}(p)\mathcal{F}(p + \overrightarrow{v})}$.

Определение 4.1.1 (Аффинное отображение $\mathcal{F} : X \to Y$)**.** Для некоторой точки $p \in X$: отображение $\widetilde{\mathcal{F}}_p$ линейно.

Лемма 4.1.1. *Если для некоторой точки $p : \widetilde{\mathcal{F}}_p$ аддитивно, то $\forall q \in X : \widetilde{\mathcal{F}}_q \equiv \widetilde{\mathcal{F}}_p$.*

Замечание. Получили переформулировку: $\mathcal{F}$ аффинное, если $\exists L : \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{Y}$, такое, что $\overrightarrow{\mathcal{F}(p)\mathcal{F}(q)} = L(\overrightarrow{pq})$.

Факт 4.1.1. *Для фиксированных точек $x \in X, y \in Y$ и линейного отображения $L : \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{Y}$ существует и линейное аффинное отображение $\mathcal{F} : X \to Y$, такое, что $\mathcal{F}(x) = y, \widetilde{\mathcal{F}} = L$.*

Определение 4.1.2 (Коллинеарные точки)**.** Точки, лежащие на одной прямой; аффинное зависимые точки.

Теорема 4.1.1. Пусть X, Y — аффинные пространства, $\mathcal{F}$ — инъективное отображение, переводящее прямые $l \subset X$ в прямые $\mathcal{F}(l) \subset Y$.

Доказательство. Назовём отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ хорошим, если это биекция, переводящая прямые в прямые.

Лемма 4.1.2. *Хорошее f переводит неколлинеарные точки в неколлинеарные.*

Доказательство. От противного: три неколлинеарные точки A, B, C перешли в прямую l. Тогда AB, BC, AC как прямые, тоже перешли в l.

Дальше любая прямая плоскости пересекает хотя бы 2 из трёх прямых среди AB, BC, AC, значит, вся плоскость перешла в l. Противоречие с биективностью. □

Лемма 4.1.3. *Хорошее отображение переводит параллельные прямые в параллельные прямые.*

Доказательство. Параллельные $\equiv$ непересекающиеся. □

□