Матанализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков
Конспектировал Леонид Данилевич

III семестр, осень 2023 г.

Оглавление

0.1 Литература

1. Б. М. Макаров «Теория меры и интеграла»
2. ? «Интеграл Лебега»
3. Халмош «Теория меры»

Глава 1

Теория меры

Лекция I

6 сентября 2023 г.

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция.

Для того, чтобы интеграл Римана-Дарбу существовал, нам надо, чтобы она была какой-то хорошей — с ограниченными колебаниями, часто просто требуется кусочная непрерывность. А как быть иначе?

Запишем такое, не совсем верное рассуждение.

Рассуждение. Пусть $|f(x)| \leqslant M$ при $x \in [a, b]$. Разобьём отрезок $[-M, M]$ в объединение промежутков $[-M, M] = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k$, будем считать, что $\forall k : |I_k| < \varepsilon$.

Обозначим за $e_j \coloneqq f^{-1}(I_j)$. Видно, что $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_k = [a, b]$ — прообразы отрезков I_j образуют разбиение $[a, b]$.

Оценим суммы Дарбу следующим образом:

$$S_\Delta f \leqslant \sum_{j=1}^{k} \beta_j |e_j| \qquad s_\Delta f \geqslant \sum_{j=1}^{k} \alpha_j |e_j|$$

где $|e|$ — «длина» множества e.

Заметим, что верхние и нижние суммы близки: $S_\Delta f - s_\Delta f = \sum\limits_{j=1}^{b} (\beta_j - \alpha_j)|e_j| \leqslant \varepsilon \sum\limits_{j=1}^{k} |e_j| = \varepsilon(b - a)$.

Таким образом, проинтегрировали любую ограниченную функцию. В чём проблема? $\square$

Как естественным образом определить длину множества $|e|$?

Надо, чтобы длина была аддитивной: $|e \sqcup f| = |e| + |f|$.

Замечание. Можно определить длину на всех подмножествах $[a, b]$, но такое определение не конструктивно, и к тому же не единственно.

Пусть I — конечный промежуток, $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ — тоже конечные промежутки, такие, что $I = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} I_j$.

Также хочется, чтобы предельные переходы выполнялись: $|I| = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |I_j|$. Это называется *счётной аддитивностью.*

1.1 Меры

Пусть X — множество, $\mathcal{A}$ — система его подмножеств. Пока будем считать только, что $\varnothing \in \mathcal{A}$.

Определение 1.1.1 (Функция множества)**.** *Вещественная функция множества* $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, или *комплексная функция множества* $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$.

Вещественная функция множества $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ называется *неотрицательной*.

Иногда также разрешают функции приобретать значения на расширенной прямой $\phi : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geqslant 0} = [0, +\infty]$.

Определение 1.1.2 (Мера)**.** Аддитивная функция $\phi : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geqslant 0}$.

Аддитивность означает, что в случае $e_1, \ldots, e_k \in \mathcal{A}$, если $e \coloneqq \bigsqcup\limits_{j=1}^{k} e_j \in \mathcal{A}$, то $\phi(e) = \phi(e_1) + \cdots + \phi(e_k)$.

Замечание. Если ϕ — аддитивная функция, то $\phi(\varnothing) = \phi(\varnothing) + \phi(\varnothing)$, откуда $\phi(\varnothing) = 0$ (формально, $\phi(\varnothing) = \infty$ тоже подходит, но тогда из аддитивности $\phi \equiv +\infty$, это скучный случай).

Примеры.

- Пусть $\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$ — совокупность конечных промежутков, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ — совокупность всех промежутков.

  Тогда для обоих семейств можно ввести меру $\phi(I) = |I|$.

  Заметим, что аддитивность действительно выполняется: если отрезок $\langle a, b \rangle$ разбит на отрезки $\langle a_0, a_1 \rangle, \ldots, \langle a_{n-1}, a_n \rangle$, где $a_0 = a, a_n = b$, то и правда

$$b - a = \sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1})$$

- То же самое можно сделать в $\mathbb{R}^n$: введём множества ограниченных и всех прямоугольных параллелепипедов.

$$\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) = \{I_1 \times \cdots \times I_n | \text{все } I_j \text{ — конечные промежутки}\}$$
$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \{I_1 \times \cdots \times I_n | \text{все } I_j \text{ — промежутки}\}$$

  Обозначим за V_n объём на $\mathcal{P}$: $V_n(I_1 \times \cdots \times I_n) = |I_1| \cdot \ldots \cdot |I_n|$, где бесконечность в произведении трактуется так: если есть хотя бы один нуль, то произведение равно нулю, иначе бесконечно.

  Почему эта мера аддитивна?

  Пусть $Q, Q_1, \ldots, Q_k \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, причём $Q = \bigsqcup\limits_{j=1}^{k} Q_j$.

  Лемма 1.1.1. $V_n(Q) = \sum\limits_{j=1}^{k} V_n(Q_j)$.

  Доказательство. Пусть f — функция на Q, определим

$$J(f) = \int\limits_{I_n} \left(\cdots \int\limits_{I_2} \left(\int\limits_{I_1} f(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \cdots \right) \mathrm{d}x_n$$

  J, правда, определён не всегда — иногда какая-то промежуточная функция может быть не интегрируема по Риману-Дарбу.

  J корректно определена для некоторой совокупности функций, которые образуют линейное пространство.

Рассмотрим $K = \delta_1 \times \dots \times \delta_n \subset Q$. Тогда для χ_K — характеристической функции K — J определён, причём $J(\chi_K) = |\delta_1| \cdot \ldots \cdot |\delta_n| = V_n(K)$.

Отсюда видно, что так как $\chi_Q = \sum\limits_{j=1}^{k} \chi_{Q_j}$, то $V_n(Q) = \sum\limits_{j=1}^{k} V_n(Q_j)$. □

Пускай $\phi : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ — аддитивная функция множеств. ϕ называется *счётно аддитивной*, если для $a \in \mathcal{A}, \{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ верно $a = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} a_j \Rightarrow \phi(a) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \phi(a_j)$.

Теорема 1.1.1. Объём в $\mathbb{R}^n$ — счётно аддитивная функция на $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ (и на $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ тоже, но пока не надо).

Доказательство.

Лемма 1.1.2. *Пусть $Q_1, \dots, Q_k, Q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$.*

1. *Если $Q_1, \dots, Q_k$ попарно не пересекаются, и $\forall j : Q_j \subset Q$, то $\sum\limits_{j=1}^{k} V_n(Q_j) \leqslant V_n(Q)$.*

2. *Если $Q \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} Q_j$ (условий на дизъюнктность нет), то $V_n(Q) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{k} V_n(Q_j)$.*

Доказательство леммы.

1. $\sum\limits_{j=1}^{k} \chi_{Q_j} \leqslant \chi_Q$ (поточечно), применяем ранее определённый функционал J.

2. $\sum\limits_{j=1}^{k} \chi_{Q_j} \geqslant \chi_Q$ (поточечно), применяем ранее определённый функционал J.

□

Пусть $Q, Q_j \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, где $j \in \mathbb{N}$, $Q = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j$.

- Рассмотрим k параллелепипедов $Q_1, \dots, Q_k \subset Q$. Применяя лемму, получаем $\sum\limits_{j=1}^{k} V_n(Q_j) \leqslant V_n(Q)$. Это верно для каждого k, переходя к пределу сразу получаем $\sum\limits_{j=1}^{\infty} V_n(Q_j) \leqslant V_n(Q)$.

  Замечание. Эта часть верна для любой аддитивной меры.

- Докажем обратное: $\sum\limits_{j=1}^{\infty} V_n(Q_j) \geqslant V_n(Q)$.

  Пусть $Q = I_1 \times \dots \times I_n$. Если $\exists s : I_s = 0$, то доказывать нечего.

  Выберем $\varepsilon > 0$. Существуют замкнутые отрезки $\overline{I_1}, \dots, \overline{I_s}$, такие что $\overline{I_j} \subset I_j$, причём для $\overline{Q} = \overline{I_1} \times \dots \times \overline{I_n}$ его объём уменьшился несильно: $V_n(Q) \leqslant V_n\left(\overline{Q}\right) + \varepsilon$.

  Аналогично раздуем составляющие параллелепипеды: $\forall j \in \mathbb{N}$ построим $\widetilde{Q_j} = \widetilde{I_1} \times \dots \times \widetilde{I_n}$, так что открытый интервал $\widetilde{I_j} \supset I_j$, причём $V_n(\widetilde{Q_j}) \leqslant V_n(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$.

  Теперь замкнутый параллелепипед покрывается открытыми, значит, можно выбрать конечное подпокрытие, сразу получив оценку (для некоего $k \in \mathbb{N}$)

  $$V_n(Q) - \varepsilon \leqslant \sum_{j=1}^{k} \left(V_n(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left(V_n(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right)$$

  Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем требуемое $V_n(Q) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} V_n(Q_j)$. □

1.2 Обобщения

1.2.1 Область задания меры (системы множеств)

Пусть X — множество, $\mathcal{A}$ — система его подмножеств ($\varnothing \in \mathcal{A}$).

Определение 1.2.1 (Кольцо)**.** Система множеств $\mathcal{A}$, такая что $\forall a, b \in \mathcal{A} : (a \cap b), (a \cup b), (a \setminus b) \in \mathcal{A}$.

Пример (Кольцо). Объединения конечного числа отрезков (или даже параллелепипедов (теорема 1.2.1)) ($\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ или $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$).

Определение 1.2.2 (Алгебра)**.** Кольцо $\mathcal{A}$, такое что $X \in \mathcal{A}$.

Замечание. В алгебре $\forall a \in \mathcal{A} : a^{\complement} \in \mathcal{A}$. В частности, из-за законов де Моргана достаточно проверять только одно из $(a \cup b), (a \cap b) \in \mathcal{A}$

Определение 1.2.3 (Полукольцо)**.** Система множеств $\mathcal{A} \subset 2^X$, такое что $\forall a, b \in \mathcal{A} : (a \cap b) \in \mathcal{A}$, а разность $(a \setminus b)$ есть объединение конечного числа попарно непересекающихся подмножеств из $\mathcal{A}$.

Пример (Полукольцо). Отрезки и конечные отрезки (или даже параллелепипеды (теорема 1.2.1)) ($\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ или $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$).

Пусть X, Y — множества, $\mathcal{A} \subset 2^X, \mathcal{B} \subset 2^Y$ — полукольца.

Определение 1.2.4 (Обобщённый прямоугольник)**.** Произведение $a \times b$, где $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$.

Теорема 1.2.1. Множество обобщённых прямоугольников $\mathcal{C} = \{a \times b | a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$ есть полукольцо в $X \times Y$.

Доказательство.

- $\varnothing \in \mathcal{C} : \varnothing \times \varnothing = \varnothing$.
- $(a_1 \times b_1) \cap (a_2 \times b_2) = (a_1 \cap a_2) \times (b_1 \cap b_2)$, поэтому $\mathcal{C}$ замкнуто относительно пересечения.
- Рассмотрим $u, v \in \mathcal{C}$. $u \setminus v = u \setminus (u \cap v)$, поэтому можно считать, что $v \subset u$.

  Пусть $u = a_1 \times b_1, v = a_2 \times b_2$. Так как $v \subset u$, то $b_2 \subset b_1, a_2 \subset a_1$. Пусть $a_1 \setminus a_2 = \bigsqcup\limits_{s=1}^{n} e_s$, $b_1 \setminus b_2 = \bigsqcup\limits_{t=1}^{m} f_t$.

  Несложно видеть, что $u \setminus v = \left(a_2 \sqcup \bigsqcup\limits_{s=1}^{n} e_s\right) \times \left(b_2 \sqcup \bigsqcup\limits_{t=1}^{m} f_t\right) \setminus (a_2 \times b_2)$, что есть объединение $(n+1)(m+1) - 1$ понятного обобщённого прямоугольника. □

Замечание. Даже если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — кольца или алгебры, множества обобщённых прямоугольников могут всё равно образовывать лишь полукольцо.

Определение 1.2.5 (Мера на полукольце)**.** Неотрицательная аддитивная функция множества (возможно, принимающая значения $+\infty$).

Пусть $\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$ — полукольцо конечных отрезков, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — нестрого возрастающая функция.

Определение 1.2.6 (Квазидлина, порождённая f)**.** $\mu_f(\langle a, b \rangle) \overset{def}{=} f(b) - f(a)$.

Эта квазидлина, понятное дело, аддитивна, но не для всех функций она счётно аддитивна.

Контрпример. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0, x < 1 \\ 1, x \geqslant 1 \end{cases}$. Тогда $1 = f([0, 1)) \neq \sum\limits_{i=1}^{\infty} f\left(\left[1 - \frac{1}{2^{i-1}}, 1 - \frac{1}{2^i}\right)\right) = 0$

Теорема 1.2.2. Пускай $\mathcal{A} \subset 2^X, \mathcal{B} \subset 2^Y$ — полукольца, μ и ν на них — (конечные) меры, определим меру на произведении

$$\gamma(u \times v) := \mu(u) \cdot \nu(v)$$

Утверждается, что γ аддитивна (теорема 1.3.1)

Лекция II

8 сентября 2023 г.

Пусть $\mathcal{A}$ — полукольцо подмножеств 2^X.

Определение 1.2.7 (Кольцо, порождённое $\mathcal{A}$)**.** $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \overset{def}{=} \left\{ \bigsqcup\limits_{j=1}^{k} d_j \middle| d_j \in \mathcal{A} \right\}$ — всевозможные конечные дизъюнктные объединения.

Лемма 1.2.1. *$\mathcal{R}(\mathcal{A})$ есть кольцо подмножеств 2^X.*

Доказательство. Пусть $u = c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s; v = d_1 \sqcup \dots \sqcup d_t$.

- Проверим, что $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ замкнуто относительно пересечения. В самом деле,
$$u \cap v = \bigsqcup_{i,j} (c_i \cap d_j)$$
- Проверим, что $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ замкнуто относительно разности: индукция по t.

  База: $t = 1$.
$$(c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s) \setminus d_1 = (c_1 \setminus d_1) \sqcup \dots \sqcup (c_s \setminus d_1)$$
  Переход:
$$(c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s) \setminus (d_1 \sqcup \dots \sqcup d_t) = \Big((c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s) \setminus (d_1 \sqcup \dots \sqcup d_{t-1}) \Big) \setminus d_t$$
- Проверим, что $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ замкнуто относительно объединения.
$$u \cup v = (u \setminus v) \sqcup (v \setminus u) \sqcup (u \cap v)$$
□

Пусть $\mathcal{B} \subset 2^X$ — полукольцо. Среди всех колец, $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}$ есть наименьшее — это их пересечение.

Факт 1.2.1. *Это кольцо $\mathcal{C}$ получается, как $\mathcal{R}(\mathcal{B})$.*

1.3 Поговорим про интеграл

$\mathcal{A} \subset 2^X$ — полукольцо, $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ — мера.

Определение 1.3.1 (Простая функция (относительно $\mathcal{A}$))**.** Функция вида $f = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{e_i}$, где $e_i \in \mathcal{A}$, $\forall 1 \leqslant i < j \leqslant k : e_i \cap e_j = \varnothing$.

Определим «хиленький интеграл», который пока не будем обозначать $\int$:

Определение 1.3.2 (Интеграл от простой функции по мере μ)**.** $I_\mu(f) = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_i \mu(e_i)$, если это имеет смысл (считается, что $0 \cdot \infty = 0$, но $(-\infty) + (+\infty)$ не определено).

Лемма 1.3.1. *Интеграл от простой функции не зависит от её представления в виде суммы.*

Доказательство. Пусть $f = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{e_i} = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{e'_j}$, где $\alpha_i, \beta_j \neq 0$.

Обозначим $A = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$ (кстати, носитель $\operatorname{supp} f \overset{def}{=} \operatorname{Cl} \{x \in X | f(x) \neq 0\}$). Очевидно, $(e_1, \dots, e_k)$, как и $(e'_1, \dots, e'_m)$ — разбиения A. У них есть общее измельчение e'', причём на каждом элементе $e''_{i,j} \coloneqq e_i \cap e'_j$ выполняется $\alpha_i = \beta_j$, откуда оба интеграла от простой функции — через e и через e' — совпадают с определением через e'':

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(e_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu \left(\bigsqcup_{j=1}^{m} e_{i,j} \right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu(e_{i,j}) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} e_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(e'_j)$$

Если какой-то e_i бесконечен, то один из конечного числа кусочков, на которые мы его разобьём ($e_i \cap e'_j$) тоже будет бесконечным, поэтому в случае бесконечностей (если обе суммы определены) обе суммы будут бесконечностями одного знака. □

Свойства (Интеграл от простой функции).

- $I_\mu(c \cdot f) = c \cdot I_\mu(f)$
- Если f, g — простые функции, то $f + g$ — тоже простая, причём $I_\mu(f + g) = I_\mu(f) + I_\mu(g)$ (если в сумме двух интегралов нет бесконечностей разных знаков).

  Доказательство. Пусть $f = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{e_i}$; $\quad g = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{e'_j}$, где $\alpha_i, \beta_j \neq 0$.

  Положим $A \coloneqq \bigsqcup\limits_i e_i$; $\quad B \coloneqq \bigsqcup\limits_j e'_j$. Рассмотрим $(A \setminus B), (B \setminus A), (A \cap B)$ — все они лежат в $\mathcal{R}(\mathcal{A})$.

  Будем считать, что $(e_1, \ldots, e_k)$, как разбиение A, измельчено так, что оно уважает разбиение $(A \setminus B) \sqcup (A \cap B) = A$.

  Аналогично считаем, что e' уважает разбиение $(B \setminus A) \sqcup (B \cap A) = B$.

  Теперь $\mathcal{E} \coloneqq \left\{ e_i \in \{e_i\}_{i=1}^{k} \middle| e_i \subset A \cap B \right\}$ и $\mathcal{E}' \coloneqq \left\{ e'_j \in \{e'_j\}_{j=1}^{m} \middle| e_j \subset A \cap B \right\}$ — разбиения $A \cap B$. Измельчим те элементы, которые попали в $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$, теперь ещё считаем, что e и e' уважают друг друга. Можно считать, что и f, и g определены на разбиениях $\{e_i\}_{i=1}^{k} \cup \{e'_j\}_{j=1}^{m}$, и теперь по определению $f + g$ является простой функцией, и $I(f + g) = I(f) + I(g)$. □

- Для двух простых интегрируемых функций $f \leqslant g \Rightarrow I_\mu(f) \leqslant I_\mu(g)$.

  Доказательство. Если интегралы — бесконечности одного знака, то доказывать нечего.

  Иначе $I_\mu(g)$ и $I_\mu(-f)$ не являются бесконечностями разного знака, то есть определено

  $$I_\mu(g - f) = I_\mu(g) - I_\mu(f)$$

  Но $(g - f)$ — функция неотрицательная, по определению её интеграл неотрицателен. □

Лемма 1.3.2. *Пусть $\mathcal{A}$ — полукольцо с мерой μ; $a, a_1 \ldots, a_k \in \mathcal{A}$.*

- *Если a_j попарно дизъюнктны, причём $a_j \subset a$, то* $\sum\limits_{j=1}^{k} \mu(a_j) \leqslant \mu(a)$.
- *Если $a \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} a_j$ (условий на дизъюнктность нет), то* $\mu(a) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{k} \mu(a_j)$.

Доказательство.

- $I_\mu\left(\chi_{\bigcup a_j}\right) \leqslant I_\mu\left(\chi_a\right)$ так как $\chi_{\bigcup a_j} \leqslant \chi_a$.
- $I_\mu\left(\chi_{\bigcup a_j}\right) \geqslant I_\mu\left(\chi_a\right)$, так как $\chi_{\bigcup a_j} \geqslant \chi_a$. □

Теорема 1.3.1. Пусть $\mathcal{A} \subset 2^X, \mathcal{B} \subset 2^Y$ — полукольца обобщённых прямоугольников. Положим $\mathcal{C} \coloneqq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, это полукольцо подмножеств $X \times Y$.

Пусть μ — мера на $\mathcal{A}$, ν — мера на $\mathcal{B}$. Определим произведение мер $(\mu \otimes \nu)(a \times b) \overset{def}{=} \mu(a)\nu(b)$.

Утверждается, что $\mu \otimes \nu$ — мера на $\mathcal{C}$.

Доказательство. Докажем аддитивность. Пусть $P = a \times b$, причём $P = \bigsqcup\limits_{j=1}^{k} P_j$, где $P_j = a_j \times b_j$.

Проверим, что $(\mu \otimes \nu)(P) \overset{?}{=} \sum\limits_{j=1}^{k} (\mu \otimes \nu)(P_j)$.

Разделим переменные: $\chi_{c \times d}(s,t) = \chi_c(s) \cdot \chi_d(t)$.

Дано, что $\chi_P = \sum\limits_{j=1}^{k} \chi_{P_j}$, то есть $\chi_a(s)\chi_b(t) = \sum\limits_{j=1}^{k} \chi_{a_j}(s)\chi_{b_j}(t)$.

Интегрируем ($I_{\nu,t}$ означает интеграл по мере ν функции от переменной t при фиксированном s):

$$I_{\nu,t}\left(\chi_a(s)\chi_b(t)\right) = \sum_{j=1}^{k} I_{\nu,t}\left(\chi_{a_j}(s) \cdot \chi_{b_j}(t)\right) \quad \Rightarrow \quad \chi_a(s)\nu(b) = \sum_{j=1}^{k} \chi_{a_j}(s) \cdot \nu(b_j)$$

$$I_{\mu}\left(\chi_a(s)\nu(b)\right) = \sum_{j=1}^{k} I_{\mu}\left(\chi_{a_j}(s) \cdot \nu(b_j)\right) \quad \Rightarrow \quad \mu(a)\nu(b) = \sum_{j=1}^{k} \mu(a_j)\nu(b_j)$$

Данное доказательство также допускает бесконечные меры. □

Замечание. Пусть μ — мера на полукольце $\mathcal{A}$. Для $e \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ положим $\overline{\mu}(e) = I_\mu(\chi_e)$.

Введённая $\overline{\mu}$ — мера на $\mathcal{R}(\mathcal{A})$, понятно, что это единственно возможное продолжение — единственная (аддитивная) мера на $\mathcal{R}(\mathcal{A})$, такая, что её сужение на $\mathcal{A}$ совпадает с μ.

Замечание. Если меру определять на кольце, а не на полукольце, то аддитивность достаточно проверять для двух множеств: $e_1, e_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \Rightarrow e_1 \cup e_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$.

1.3.1 Про счётную аддитивность

Определение 1.3.3 (Регулярная мера μ)**.** Мера, удовлетворяющая условиям:

1. $\forall a \in \mathcal{A} : \mu(a) = \inf\{\mu(U) | U \supset a;\ U \text{ открыто};\ U \in \mathcal{A}\}$.
2. $\forall a \in \mathcal{A} : \mu(a) = \sup\{\mu(U) | K \subset a;\ K \text{ компактно};\ K \in \mathcal{A}\}$.

Пример (Регулярная мера). Мера Лебега на $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$.

Предостережение. Для полукольца возможно бесконечных параллелепипедов теорема Александрова не применима: $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ не регулярно сверху, всякий параллелепипед, содержащий $\mathbb{R} \times \{0\}$ уже имеет бесконечную меру (но ведь можно приблизить сколь угодно близко открытым множеством, в чём проблема?).

Теорема 1.3.2 (А. Д. Александров)**.** Пусть X — топологическое пространство, $\mathcal{A} \subset 2^X$ — полукольцо, μ — регулярная мера на $\mathcal{A}$.

Утверждается, что μ счётно аддитивна.

Доказательство. Рассмотрим $a \in \mathcal{A}, \{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$. Пусть $a = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} a_j$. Для доказательства $\mu(a) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(a_j)$ покажем неравенства в обе стороны.

- $\forall k \in \mathbb{N} : \sum\limits_{j=1}^{k} \mu(a_j) \leqslant \mu(a)$ (лемма 1.3.2), производим предельный переход.

- Если $\mu(a_j) = \infty$, или $\mu(a) = 0$, то доказывать нечего.

  Выберем $\varepsilon > 0$. Найдём такие $U_j, K \in \mathcal{A}$, что U_j открыты, K компактно, $U_j \supset a_j, K \subset a$, причём $\mu(U_j) \leqslant \mu(a_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$ и $\mu(K) \geqslant \mu(a) - \varepsilon$.

  Так как из открытого покрытия компакта можно выделить конечное подпокрытие (и пусть N — максимальный номер элемента подпокрытия), то

$$\mu(a) - \varepsilon \leqslant \mu(K) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \mu(U_j) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \left(\mu(a_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(a_j) + \varepsilon$$

  Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем необходимое. □

Примеры (Счётно-аддитивные меры).

- Пусть X — (возможно бесконечное) множество, $\mathcal{A}$ — семейство всех его конечных подмножеств. Можно определить $\mu(a) = \#(a)$ — мощность множества $a \in \mathcal{A}$.

  Она счётно-аддитивная, так как если $a = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} a_j$, причём $a \in \mathcal{A}$, то почти все (кроме конечного числа) $a_j = \varnothing$.

- Можно продолжить эту меру на 2^X:

$$\mu(b) = \begin{cases} \#(b), & b \text{ конечно} \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Пусть $\{\xi_x\}_{x \in X} \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ — числовое семейство. Можно определить $\nu : 2^X \to \overline{\mathbb{R}}_{\geqslant 0}, \nu(e) = \sum\limits_{x \in e} \xi_x$.

  Если семейство суммируемо, то мера конечна.

Лекция III

20 сентября 2023 г.

Вспомним, что мы определяли квазидлину $\mu_f(\langle a, b\rangle) = f(b) - f(a)$ для возрастающей функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (определение 1.2.6). Это функция может быть не счётно аддитивной, что случается, если f разрывна.

Поправим это определение, чтобы мера стала счётно-аддитивной. Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — возрастающая функция.

Рассмотрим $\mathcal{P}(\langle a, b\rangle)$ — полукольцо промежутков, содержащихся в $\langle a, b\rangle$, и произвольно доопределим f на некотором открытом интервале, содержащем $\langle a, b\rangle$ (скажем, если $a \in \langle a, b\rangle$, то есть $\langle a, b\rangle$ замкнут слева, то положим $f(a - \varepsilon) = f(a) - \varepsilon$ для $\varepsilon \in (0, 1)$).

Определение 1.3.4 (Стилтьесова длина)**.** Длина, определённая по формуле

$$\mu_f(\langle c, d\rangle) = \begin{cases} f(d-) - f(c-), & \langle c, d\rangle = [c, d) \\ f(d-) - f(c+), & \langle c, d\rangle = (c, d) \\ f(d+) - f(c+), & \langle c, d\rangle = (c, d] \\ f(d+) - f(c-), & \langle c, d\rangle = [c, d] \end{cases}$$

где $f(x_0+) \overset{def}{=} \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ и $f(x_0-) \overset{def}{=} \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$.

Предложение 1.3.1. *Стилтьесова длина счётно аддитивна.*

Доказательство. Выполняется теорема Александрова. Проверим, например, что для полуинтервала $[c, d)$ мера регулярна.

Рассмотрим $\varepsilon > 0$, для открытого подмножества, содержащего $[c, d)$ выберем $(c-\delta, d)$. Для достаточно маленьких δ: $f((c-\delta)+) > f(c-) - \varepsilon$. В качестве компактного подмножества, содержащегося в $[c, d)$, выберем $[c, d-\delta]$. При достаточно маленьких δ: $f((d-\delta)+) > f(d-) - \varepsilon$.

Также можно проверить регулярность для бесконечных промежутков. $\square$

1.3.2 Продолжение меры

Продолжать можно только счётно-аддитивные меры, иначе будет неоднозначно.

Определение 1.3.5 (σ-алгебра)**.** Такая алгебра множеств $\mathcal{A} \subset 2^X$, что она замкнута относительно счётных операций: если семейство $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ лежит в $\mathcal{A}$, то $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ и $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Теорема 1.3.3. Пусть $\mathcal{C} \subset 2^X$ — система подмножеств X. Тогда в X есть наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{C}$.

Доказательство. Пересечение любого множества σ-алгебр — σ-алгебра. Хотя бы одна есть — это 2^X. Тогда в качестве наименьшей подойдёт пересечение всех σ-алгебр, содержащих $\mathcal{C}$. $\square$

Теорема 1.3.4. Пусть $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ — полукольцо всех конечных прямоугольных параллелепипедов, а $\mathcal{A}$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$.

Тогда объём на $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ единственным образом продолжается до счётно аддитивной меры λ_n — *n-мерной меры Лебега* на $\mathcal{A}$.

Доказательство. Мы это докажем здесь (теорема 1.3.6). Сейчас приведём схему доказательства.

- Обозначим n-мерный объём на параллелепипедах из $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ за v_n. Построим $v_n \rightsquigarrow v_n^*$, заданную на $2^{\mathbb{R}^n}$, которая не будет даже аддитивной.

  Тем не менее, для всякого $P \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$: $v_n^*(a) = v_n(P)$

- Теперь сузим v_n^* на некоторую σ-алгебру, содержащую $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, причём там эта функция будет уже и аддитивной, и счётно аддитивной. $\square$

Факт 1.3.1. *Все открытые, а значит, и все замкнутые множества, лежат в наименьшей σ-алгебре $\mathcal{A}$, содержащей $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Открытое множество представимо, как объединение кубов с рациональными координатами вершин, содержащихся в нём. $\square$

Пусть Y — топологическое пространство.

Определение 1.3.6 (Борелевская σ-алгебра)**.** Наименьшая σ-алгебра подмножеств множества Y, содержащая все открытые множества. Обозначают $\mathcal{B}(Y)$.

Замечание. Выше определённая $\mathcal{A}$ совпадает с $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Факт 1.3.2. *Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра подмножеств множества X. Следующие утверждения эквивалентны.*

1. *$\mathcal{A}$ — σ-алгебра.*
2. *Для всех $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ верно, что $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.*
3. *Для всех $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ верно, что $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.*
4. *Для всех $A_i \in \mathcal{A}$, таких что $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ верно, что $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.*
5. *Для всех $A_i \in \mathcal{A}$, таких, что $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ верно, что $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.*

6. *Для всех $A_i \in \mathcal{A}$, таких, что $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$ верно, что $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.*

Доказательство.

$2 \iff 3$ Закон де Моргана.

$1 \iff (2 \land 3)$ По определению.

$2 \Rightarrow 4$ Очевидно.

$4 \Rightarrow 2$ Положим $\overline{A}_i \coloneqq A_1 \cup \dots \cup A_i$. Тогда $\overline{A}_i$ возрастают по включению, и $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{A}_i \in \mathcal{A}$.

$4 \iff 5$ Тоже закон де Моргана.

$4 \Rightarrow 6$ Пусть $A_i \in \mathcal{A}$, причём $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Выберем $\widetilde{A}_i \coloneqq A_1 \cup \dots \cup A_i$. Согласно (4) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \widetilde{A}_i \in \mathcal{A}$.

$6 \Rightarrow 4$ Пусть $A_i \in \mathcal{A}$, причём $A_i \subset A_{i+1}$. Положим $e_1 = A_1$, $e_j = A_j \setminus A_{j-1}$ для $j \geqslant 2$. Тогда $e_i \cap e_j = \varnothing$ для $i \neq j$, и $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$. □

Факт 1.3.3. *Пусть $\mathcal{A} \subset 2^X$ — σ-алгебра, μ — мера на $\mathcal{A}$. Следующие условия эквивалентны.*

1. *μ счётно аддитивна.*
2. *Если $A_i \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$, то $\mu\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$.*
3. *Если $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, то $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$.*

Доказательство.

$1 \iff 2$ Так как $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, то $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ автоматически лежит в $\mathcal{A}$, и 1 тавтологично 2.

$2 \Rightarrow 3$ Пускай $A_1 \subset A_2 \subset \dots$. Введём $e_1 = A_1$, $e_j = A_j \setminus A_{j-1}$ для $j \geqslant 2$. $e_i \cap e_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Тогда $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(e_i) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} e_i\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$.

$3 \Rightarrow 2$ То же самое в обратном порядке. □

Предостережение. Монотонность по убывающим последовательностям не выполняется:

Рассмотрим на кольце $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ убывающие по включению множества $A_n \coloneqq (n, +\infty)$. Несмотря на то, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, всё-таки $\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu(\varnothing) = 0 \neq \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \infty$.

Теорема 1.3.5. Если $B_i \in \mathcal{A}$, $B_1 \supset B_2 \supset \dots$, причём $\mu(B_1) < +\infty$, то $\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \lim_{j \to \infty} \mu(B_j)$.

Доказательство. Положим $A_i = B_1 \setminus B_i$.

Тогда $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i = B_1 \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, и $\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \mu(B_1) - \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu(B_1) - \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(B_1) - \lim_{n \to \infty} (\mu(B_1) - \mu(B_n)) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n)$

Так как $\mu(B_1)$ конечна, то все производимые вычитания справедливы — не происходит вычитания бесконечности из бесконечности. □

Замечание. Если мера конечна, то справедливо и обратное.

Пусть X — множество, $\mathcal{P}$ — полукольцо его подмножеств, μ — мера на $\mathcal{P}$ (аддитивная, но не факт, что счётно-аддитивная).

Определение 1.3.7 (Внешняя мера, построенная по μ)**.** Функция μ^*, заданная на 2^X, определяемая по формуле

$$\mu^*(e) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(a_j) \middle| a_j \in \mathcal{P}, e \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} a_j \right\}$$

Свойства.

- $\mu^*(\varnothing) = 0$. Так, покрытие счётным количеством пустых множеств имеет суммарную меру 0.
- $e_1 \subset e_2 \Rightarrow \mu^*(e_1) \leqslant \mu^*(e_2)$ — монотонность.
- Внешняя мера совсем не факт, что является мерой (то есть аддитивна). Тем не менее, верна *счётная полуаддитивность*: $e \subset \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} e_i \Rightarrow \mu^*(e) \leqslant \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(e_i)$.

  Доказательство. Если хотя бы одно из $\mu^*(e_i)$ бесконечно, то доказывать нечего. Далее считаем, что $\forall i : \mu^*(e_i)$ конечно.

  Выберем $\varepsilon > 0$. По определению внешней меры $\forall i, k \in \mathbb{N} : \exists a_{i,k} \in \mathcal{P}$, такие, что $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} a_{i,k} \supset e_i$, причём $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \mu(a_{i,k}) \leqslant \mu^*(e_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$.

  Тогда $e \subset \bigcup\limits_{i,k \in \mathbb{N}} a_{i,k}$ и $\mu^*(e) \leqslant \sum\limits_{i,k} \mu(a_{i,k}) = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \mu(a_{i,k}) \leqslant \sum\limits_{i} \mu^*(e_i) + \varepsilon$. □

- Если μ счётно аддитивна, то $\mu^*\big|_{\mathcal{P}} = \mu$.

  Доказательство. Для $b \in \mathcal{P} : \mu^*(b) \leqslant \mu(b)$, так как можно выбрать покрытие из одного элемента.

  Докажем, что $\mu(b) \leqslant \mu^*(b)$. Рассмотрим кольцо $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ — совокупность дизъюнктных объединений $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_s$, где $e_i \in \mathcal{P}$. Мера μ единственным образом продолжается до меры $\overline{\mu}$ на $\mathcal{R}(\mathcal{P})$.

  Лемма 1.3.3. *$\forall e \subset X : \mu^*(e) = \mu^{\triangle}(e) \coloneqq \inf \left\{ \sum\limits_{j \in \mathbb{N}} \mu(c_j) \middle| \{c_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}$ и $e \subset \bigsqcup\limits_{i \in \mathbb{N}} c_i \right\}$*

  Доказательство леммы.

  $\mu^*(e) \leqslant \mu^{\triangle}(e)$, так как всякое дизъюнктное покрытие является покрытием.

  Если $e \subset \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} a_i$, то можно рассмотреть дизъюнктное покрытие множествами $\overline{a}_i \coloneqq a_i \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_{i-1})$.

  Так как $\overline{a}_j \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$ и $\overline{a}_j \subset a_j$, то $\overline{\mu}(\overline{a}_j) \leqslant \mu(a_j)$.

  Согласно свойству $\mathcal{R}(\mathcal{P})$: $\overline{a}_j = \bigsqcup\limits_{s=1}^{k_j} e_{j,s}$, где при данном j все $e_{j,s}$ попарно не пересекаются. Но при разных j они тем более не пересекаются, они лежат в разных $\overline{a}_j$.

  Таким образом, $\bigsqcup\limits_{j,s} e_{j,s} \supset e$, откуда $\mu^{\triangle}(e) \leqslant \sum\limits_{j,s} \mu(e_{j,s}) = \sum\limits_{j} \overline{\mu}(\overline{a}_j) \leqslant \sum\limits_{j} \mu(a_j)$. Переходя к инфимуму, получаем $\mu^{\triangle}(e) \leqslant \mu^*(e)$. □

Используя лемму, рассмотрим произвольное дизъюнктное покрытие $e_j \in \mathcal{P}$ такое, что $\bigsqcup\limits_{j\in\mathbb{N}} e_j \supset e$. Введём $\widetilde{e}_j \coloneqq e_j \cap e$. Для них $\bigsqcup\limits_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{e}_j = e$.

Согласно счётной аддитивности $\mu(e) = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \mu(\widetilde{e}_j) \leqslant \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \mu(e_j)$. Переходя к инфимуму, получаем искомое. □

Контрпример (Счётная аддитивность важна). Пусть l_f — квазидлина, порождённая функцией $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$.

Покажем, что внешняя мера l_f^* везде равна нулю. Рассмотрим счётное покрытие прямой $\mathbb{R} = \bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} [n, n+1) \sqcup \bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [-2^n, -2^{n-1})$. Квазидлины всех составляющих полуинтервала равны 0, значит, внешняя мера прямой равна 0, но тогда по монотонности и внешние веры всех подмножеств тоже равны 0.

Лекция IV

27 сентября 2023 г.

1.3.3 Предмера

Пускай X — множество.

Вещи, обладающие свойствами внешней меры будут возникать у нас разными способами, поэтому удобно уже сейчас обобщить это понятие, аксиоматизировав его.

Определение 1.3.8 (Предмера)**.** Функция $\gamma : 2^X \to \mathbb{R}_+$, обладающая свойствами

1. $\gamma(\varnothing) = 0$.
2. Монотонность $a \subset b \Rightarrow \gamma(a) \leqslant \gamma(b)$.
3. Счётная полуаддитивность $a \subset \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} a_j \Rightarrow \gamma(a) \leqslant \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \gamma(a_j)$.

Замечание. Из 3. следует 2., проверяется выбором $a_i = \begin{cases} b, & i = 1 \\ \varnothing, & i > 1 \end{cases}$. Более того, можно не требовать положительности, она следует из монотонности по отношению к пустому множеству.

Определение 1.3.9 (γ-измеримое множество $e \subset X$)**.**

$$\forall a \subset X : \gamma(a) = \gamma(a \cap e) + \gamma(a \setminus e) = \gamma(a \cap e) + \gamma\left(a \cap e^{\complement}\right)$$

Теорема 1.3.6 (Лебег — Каратеодори)**.** Совокупность Σ всех γ-измеримых множеств образует σ-алгебру, на которой функция $\gamma\big|_{\Sigma}$ счётно-аддитивна.

Дополнение. Если $\gamma = \mu^*$, где μ — мера на полукольце $\mathcal{P}$, то все множества из $\mathcal{P}$ автоматически γ-измеримы.

Дополнение. Если μ счётно аддитивна на исходном полукольце $\mathcal{P}$, то $\mu^*\big|_{\mathcal{P}} = \mu$.

Доказательство.

- Покажем, что Σ — алгебра множеств.
  - Определение симметрично относительно e и $e^{\complement}$, поэтому $e \in \Sigma \iff e^{\complement} \in \Sigma$.
  - $\varnothing \in \Sigma$ прямо из определения. Используя предыдущий пункт, $X \in \Sigma$.

– Пусть $e_1, e_2 \in \Sigma$. Проверим, что $e_1 \cap e_2 \in \Sigma$. Рассмотрим произвольное $a \subset X$. Запишем измеримость для e_1 при пересечении с a и измеримость для e_2 при пересечении с $a \cap e_1$.

$$\gamma(a) = \gamma(a \cap e_1) + \gamma(a \cap e_1^{\complement})$$
$$\gamma(a \cap e_1) = \gamma(a \cap e_1 \cap e_2) + \gamma(a \cap e_1 \cap e_2^{\complement})$$

Отсюда подстановкой получаем

$$\gamma(a) = \gamma(a \cap e_1 \cap e_2) + \underbrace{\gamma\left(a \cap e_1 \cap e_2^{\complement}\right) + \gamma\left(a \cap e_1^{\complement}\right)}_{\text{хотим показать, что это } \gamma(a \cap (e_1 \cap e_2)^{\complement})}$$

Записав измеримость e_1 при пересечении с $a \cap \left(e_1^{\complement} \cup e_2^{\complement}\right)$, получаем

$$\gamma\left(a \cap (e_1^{\complement} \cup e_2^{\complement})\right) = \gamma\left(a \cap (e_1^{\complement} \cup e_2^{\complement}) \cap e_1\right) + \gamma\left(a \cap (e_1^{\complement} \cup e_2^{\complement}) \cap e_1^{\complement}\right) =$$
$$= \gamma\left(a \cap e_1 \cap e_2^{\complement}\right) + \gamma\left(a \cap e_1^{\complement}\right)$$

– Так как $(e_1 \cup e_2) = (e_1^{\complement} \cap e_2^{\complement})^{\complement}$ и $(e_1 \setminus e_2) = e_1 \cap e_2^{\complement}$, то Σ — действительно алгебра.

- Проверим «усиленную аддитивность»: для произвольного $a \subset X$, $b_1, b_2 \in \Sigma, b_1 \cap b_2 = \varnothing \Rightarrow$

$$\gamma(a \cap (b_1 \sqcup b_2)) = \gamma(a \cap b_1) + \gamma(a \cap b_2)$$

Данный факт потребуется для доказательства того, что Σ — σ-алгебра.

Доказательство напрямую следует из измеримости b_1 при пересечении с $a \cap (b_1 \cup b_2)$.

Отсюда по индукции видно, что для попарно непересекающихся $b_1, \ldots, b_n \in \Sigma$:

$$\gamma\left(a \cap \bigsqcup_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \gamma(a \cap b_j)$$

- Проверим, что Σ является σ-алгеброй. Для этого достаточно проверить, что для счётного семейства $b_i \in \Sigma : b \coloneqq \bigsqcup\limits_{j \in \mathbb{N}} b_j \in \Sigma$.

> Чтобы доказать измеримость множества e, достаточно проверить неравенство $\gamma(a) \geqslant \gamma(a \cap e) + \gamma(a \setminus e)$, потому что неравенство в другую сторону следует из счётной полуаддитивности. Дополнительно можно считать, что $\gamma(a)$ конечно.

Выберем произвольное $a \in X$, для него

$$\gamma(a) = \gamma(a \cap (b_1 \sqcup \cdots \sqcup b_n)) + \gamma(a \setminus (b_1 \sqcup \cdots \sqcup b_n)) \geqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma\left(a \cap b_j\right)\right) + \gamma(a \setminus b)$$

Переходя к пределу $n \to \infty$, получаем

$$\gamma(a) \geqslant \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a \cap b_j)\right) + \gamma(a \setminus b)$$

Так как $a \cap b = \bigsqcup\limits_{j \in \mathbb{N}} (a \cap b_j)$, то из счётной полуаддитивности $\gamma(a \cap b) \leqslant \sum\limits_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a \cap b_j)$. Отсюда

$$\gamma(a) \geqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma(a \cap b_j)\right) + \gamma(a \setminus b) \geqslant \gamma(a \cap b) + \gamma(a \setminus b)$$

- Проверим, что $\gamma\big|_\Sigma$ — «усиленно счётно-аддитивная мера», то есть для счётного семейства дизъюнктных $b_j \in \Sigma$ $\left(b \coloneqq \bigsqcup\limits_{j\in\mathbb{N}} b_j\right)$ и произвольного $\forall a \in X$:

  $$\gamma\left(a \cap \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} b_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \gamma(a \cap b_j)$$

  При $a = X$ свойство обращается в обычную счётную аддитивность, но усиленная даётся даром, так что докажем и её тоже.

  С одной стороны, из счётной аддитивности γ: $\gamma(a \cap b) \leqslant \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \gamma(a \cap b_j)$. С другой стороны,

  $$\gamma(a \cap b) \geqslant \gamma(a \cap (b_1 \cup \dots \cup b_n)) = \sum_{j=1}^{n} \gamma(a \cap b_j)$$

  и можно перейти к пределу по n.

- Докажем первое дополнение.

  Достаточно показать, что для любого $e \in \mathcal{P}, a \in X$: $\mu^*(a) \geqslant \mu^*(a \cap e) + \mu^*(a \setminus e)$, обратное следует из полуаддитивности внешней меры.

  Рассмотрим произвольное счётное покрытие $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ множества a элементами множества $\mathcal{P}$.

  – Во-первых, по определению внешней меры $\mu^*(a \cap e) \leqslant \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mu(c_i \cap e)$

  – Во-вторых, оценим $\mu^*(a \setminus e)$.

    Каждое $b_i \coloneqq c_i \setminus e$ представимо в виде конечного объединения $b_i = \bigcup\limits_{j=1}^{s_i} d_i^{(j)}$, где $d_i^{(j)} \in \mathcal{P}$ попарно дизъюнктны.

    $\{d_i^{(j)}\}_{i,j}$ — счётная совокупность множеств из $\mathcal{A}$, покрывающая $a \setminus e$.

  – Таким образом

    $$\mu^*(a \cap e) + \mu^*(a \setminus e) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{\left(\mu(c_i \cap e) + \sum_{j=1}^{s_i} \mu\left(d_i^{(j)}\right)\right)}_{\mu(c_i)}$$

    Переходя к инфимуму по всем покрытиям, получаем

    $$\mu^*(a \cap e) + \mu^*(a \setminus e) \leqslant \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(c_i) = \mu^*(a)$$

- Наконец, для доказательства второго дополнения сошлёмся на четвёртый пункт свойств внешней меры (определение 1.3.7). $\square$

Определение 1.3.10 (Стандартное продолжение меры μ на полукольце $\mathcal{P} \subset 2^X$)**.** Построенные данным образом Σ, и сужение $\mu^*\big|_\Sigma$ — счётно-аддитивная мера на σ-алгебре.

Примеры.

- Пусть v_n — объём на системе конечных n-мерных прямоугольных параллелепипедов (со сторонами, параллельными координатным осям).

  Стандартное продолжение данной меры — *мера Лебега* λ_n, полученное множество $\Sigma \subset 2^X$ — множество *измеримых по Лебегу* множеств. Все Борелевские множества, разумеется, измеримы по Лебегу (определение 1.3.6), но обратное неверно — измеримых множеств сильно больше (предложение 1.4.1).

- Пусть λ_f — Стилтьесова длина, порождённая нестрого возрастающей функцией f. Она счётно аддитивна на полукольце промежутков. Её стандартное продолжение — *мера Лебега-Стилтьеса*. Здесь полученные измеримые множества — элементы Σ — вообще говоря, могут зависеть от f (при одной функции, порождающей меру, множество $x \subset X$ измеримо, но не при другой)

1.4 Структура измеримых множеств

1.4.1 Множества меры нуль

Факт 1.4.1. *Пусть γ — предмера на X, рассмотрим такое подмножество $e \subset X$, что $\gamma(e) = 0$. Тогда e является γ-измеримым. В частности, все подмножества e имеют меру 0 (в частности измеримы).*

Доказательство. Проверим, что $\forall a \subset X : \gamma(a) \geqslant \gamma(a \cap e) + \gamma(a \setminus e)$.

Это так: по монотонности $\gamma(a \cap e) \leqslant \gamma(e) = 0$ и $\gamma(a \setminus e) \leqslant \gamma(a)$. $\square$

Пусть $\gamma = \mu^*$, где μ — счётно-аддитивная мера на полукольце $\mathcal{P}$.

Факт 1.4.2. *Множество $e \subset X$ — множество меры нуль $\iff$ $\forall \varepsilon > 0 : \exists$ счётное семейство $b_i \in \mathcal{P}$, таких, что $\bigcup\limits_i b_i \supset e$, и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(b_i) < \varepsilon$.*

Примеры (Множества меры нуль).

- Точка.
- Конечное или счётное число точек (например, $\mathbb{Q}$).
- Канторово множество — на n-м шаге его мера равна $\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Предложение 1.4.1. *Так как канторово множество континуально, то все его подмножества (коих $2^{|\mathbb{R}|}$) имеют меру нуль и измеримы по Лебегу. Отсюда получаем, что всего измеримых множеств на прямой $2^{|\mathbb{R}|}$, так как это уже мощность всех подмножеств прямой.*

С другой стороны, Борелевских множеств всего континуум.

Схема доказательства. Пусть $\mathcal{A}_0$ — все интервалы с рациональными границами. Их счётное число. Но это пока даже не алгебра.

Обозначим за $\mathcal{A}_1$ все их счётные объединения, их континуально. Но это пока не σ-алгебра.

За $\mathcal{A}_2$ обозначим все счётные пересечения множеств из $\mathcal{A}_1$. За $\mathcal{A}_3$ обозначим все счётные объединения множеств из $\mathcal{A}_2$.

И так далее. Заведём трансфинитную индукцию, на первом несчётном ординале всё перестанет меняться. Объединение не более чем континуального числа континуальных множеств континуально. $\square$

Определение 1.4.1 (Свойство точек множества X выполняется почти всюду)**.** Множество точек, где оно не выполняется, имеет меру нуль.

Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо подмножеств X, μ — счётно аддитивная мера на $\mathcal{P}$. Стандартное продолжение часто тоже будем обозначать через μ, иногда через $\overline{\mu}$.

1.4.2 σ-множества и $\delta\sigma$-множества

Определение 1.4.2 (σ-множество относительно $\mathcal{P}$)**.** Объединение счётного семейства элементов $\mathcal{P}$.

Все σ-множества измеримы.

Предложение 1.4.2. *Если $e \subset X$ μ-измеримо, то $\mu(e) = \inf\{\mu(b) | e \subset b, b$ — σ-множество$\}$.*

Доказательство. Так как по определению $\mu(e) = \mu^*(e) = \inf \left\{ \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(c_i) \middle| c_i \in \mathcal{P}, \bigcup\limits_i c_i \supset e \right\}$ то можно выбрать в качестве $b \coloneqq \bigcup\limits_i c_i$, b — σ-множество. □

Замечание. Любое σ-множество b представимо в виде дизъюнктного объединения счётного числа элементов $d_j \in \mathcal{P}$.

Так как d_j дизъюнктны, то $\mu(b) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(d_j)$, вот такая простая формула меры σ-множества.

Теорема 1.4.1. Если c — μ-измеримое множество, и $\mu(c) < \infty$, то $\exists$ убывающая по включению последовательность σ-множеств b_k, таких, что $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} b_k \supset c$ и $\mu\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} b_k\right) = \mu(c)$. Иначе говоря, если $\widetilde{c} \coloneqq \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, то $\mu(\widetilde{c} \setminus c) = 0$.

Доказательство. Положим $\widetilde{b}_k$ — σ-множество, такое, что $\widetilde{b}_k \supset c$, причём $\mu\left(\widetilde{b}_k\right) < \mu(c) + \frac{1}{k}$. Назначим $b_k = \widetilde{b}_1 \cap \dots \cap \widetilde{b}_k$.

> **Лемма 1.4.1.** *Пересечение двух (а значит, и конечного числа) σ-множеств — σ-множество.*
>
> *Доказательство леммы.*
>
> Если $u = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} e_i, v = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} g_j$, где $e_i, g_j \in \mathcal{P}$, то $u \cap v = \bigcup\limits_{i,j=1}^{\infty} (e_i \cap g_j)$ □

Согласно лемме b_k — σ-множество. Так как $\mu(b_k) \leqslant \mu(c) + \frac{1}{k}$, то $\mu\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} b_k\right) = \lim\limits_{k \to \infty} \mu(b_k) = \mu(c)$. □

Определение 1.4.3 ($\delta\sigma$-множество относительно $\mathcal{P}$)**.** Пересечение счётного семейства σ-множеств.

1.4.3 σ-конечность

Определение 1.4.4 (σ-конечная мера μ)**.** Такая мера, что $\exists E_1 \subset E_2 \subset \dots$, все $E_i \in \Sigma$, все $\mu(E_i) < +\infty$, причём $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$.

Примеры.

- Считающая мера на несчётном множестве не является σ-конечной.
- Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ σ-конечна.

Лекция V

30 сентября 2023 г.

По-прежнему, $\mathcal{A}$ — полукольцо, μ — мера на $\mathcal{A}$, обозначим её стандартное продолжение тоже за μ.

Теорема 1.4.2. Пусть стандартное продолжение меры μ на полукольце $\mathcal{P}$ σ-конечно. Пусть $d \subset X$ — μ-измеримо. Тогда $\exists \delta\sigma$-множество $D \supset d$, такое, что $\mu(D \setminus d) = 0$.

Доказательство.

Лемма 1.4.2. *Пространство X σ-конечно, если и только если $\exists e_1, e_2, \dots \subset X$: $\mu(e_i) < \infty$ и $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} e_i = X$.*

Доказательство леммы.

Как обычно, если σ-конечно, то $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ в объединении дают X, рассмотрим $e_i \coloneqq E_{i+1} \setminus E_i$. Наоборот, если даны e_i, то $E_i \coloneqq \bigsqcup\limits_{j=1}^{i} e_j$. □

Выберем $\varepsilon > 0$.

Пусть $e_i \in \Sigma$ — измеримы, причём $\mu(e_i) < \infty$ и $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} e_i = X$. Обозначим за $d_i \coloneqq d \cap e_i$. Тогда $\forall i : \mu(d_i) < \infty$. Согласно (теорема 1.4.1): $\exists \sigma$-множество $D_i : \mu(D_i \setminus d_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Тогда подойдёт $D \coloneqq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i$: $\mu(D \setminus d) < \varepsilon$.

Но отсюда пересечение D по всем $\varepsilon = \frac{1}{N}$ даёт подходящее $\delta\sigma$-множество. □

1.4.4 Полнота

Пусть $\mathcal{C} \subset 2^X$ — σ-алгебра, на которой задана счётно-аддитивная мера ν.

Пусть $\mathcal{A}$ — полукольцо, лежащее в $\mathcal{C}$, μ — счётно-аддитивная мера на $\mathcal{A}, \overline{\mu}$ — стандартное продолжение меры (на μ-измеримые множества, пусть они составляют Σ).

Пусть ν — мера на $\mathcal{C}$, такая, что $\nu\big|_{\mathcal{A}} = \mu$, причём μ — σ-конечна.

Определение 1.4.5 (Полная мера)**.** Такая счётно-аддитивная мера ν на σ-алгебре $\mathcal{C}$, что $\forall b \in \mathcal{C} : \nu(b) = 0 \Rightarrow \forall a \subset b : a \in \mathcal{C}$.

Теорема 1.4.3. Меры ν и $\overline{\mu}$ совпадают на $\Sigma \cap \mathcal{C}$, а если ν полна, то $\Sigma \subset \mathcal{C}$.

Доказательство.

- Пусть $A \in \Sigma$ есть σ-множество относительно полукольца $\mathcal{A}$. Тогда $A = a_1 \sqcup a_2 \sqcup \dots$, где $a_j \in \mathcal{A}$

  Отсюда $A \in \mathcal{C}$, причём $\nu(A) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu(a_j) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(a_j) = \overline{\mu}(A)$.

- Пусть $B \in \Sigma$ — $\delta\sigma$-множество относительно полукольца $\mathcal{A}$, то есть $B = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где A_k — σ-множества (дополнительно считаем, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots$).

  Тогда $B \in \mathcal{C}$. Если $\overline{\mu}(B) < \infty$, то множества A_j тоже можно выбрать конечной меры.

  Тогда $\nu(B) = \lim\limits_{k\to\infty} \nu(A_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \overline{\mu}(A_k) = \overline{\mu}(B)$.

- Пускай $E \in \mathcal{C} \cap \Sigma$. Найдётся такое $\delta\sigma$-множество $E_1 \supset E$: $\overline{\mu}(E_1 \setminus E) = 0$ (если E бесконечно, то это следует из σ-конечности μ), причём так как E_1 — $\delta\sigma$-множество относительно $\mathcal{A}$, то про него уже известно, что $\nu(E_1) = \overline{\mu}(E_1)$. Тогда $E_1 \setminus E$ тоже содержится в $\mathcal{C} \cap \Sigma$.

  Лемма 1.4.3. *Если $b \in \mathcal{C} \cap \Sigma$, причём $\overline{\mu}(b) = 0$, то $\nu(b) = 0$.*

  Доказательство леммы.

  Найдётся b_1 — $\delta\sigma$-множество, такое, что $b_1 \supset b$ и $\overline{\mu}(b_1) = 0$. Тогда $\nu(b_1) = \overline{\mu}(b_1) = 0$, откуда $\nu(b) \leqslant \nu(b_1) = 0$. □

  Лемма влечёт $\nu(E_1 \setminus E) = 0$. Отсюда на всех множествах из $\mathcal{C} \cap \Sigma$ меры $\overline{\mu}$ и ν совпадают.

- Проверим, что если ν полна, то $\Sigma \subset \mathcal{C}$.

  Если $\overline{\mu}(e) = 0$, то $e \in \mathcal{C}$, так как найдётся $\delta\sigma$-множество $e_1 \supset e$: $\overline{\mu}(e_1) = 0$. Из полноты меры ν автоматически $e \in \mathcal{C}$.

  Теперь рассмотрим $D \in \Sigma$. Найдётся $\delta\sigma$-множество $\overline{D} \supset D$, такое, что $\overline{\mu}(\overline{D} \setminus D) = 0$, то есть $\overline{D} \setminus D \in \mathcal{C}$. Таким образом, $D \in \mathcal{C}$, причём $\nu(\overline{D} \setminus D) = 0$. □

1.4.5 Двоичные (диадические) кубы

Определение 1.4.6 (Двоичный отрезок ранга n)**.** Отрезок вида $I_n^{(k)} := \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ (здесь $n, k \in \mathbb{Z}$).

Заметим, что $\forall n \in \mathbb{Z} : \bigsqcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} I_n^{(k)} = \mathbb{R}$, причём любые двоичные отрезки либо не пересекаются, либо вложены.

Определение 1.4.7 (Двоичные кубы ранга n)**.** Произведения $I_1 \times \dots \times I_d$, где I_j — двоичные отрезки ранга n.

Любые двоичные кубы тоже либо не пересекаются, либо вложены.

Теорема 1.4.4. Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$.

Тогда $G = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j$, где Q_j — попарно не пересекающиеся двоичные кубы, (быть может, какие-нибудь $Q_j = \varnothing$) (иными словами, G — дизъюнктное объединение не более чем счётного числа каких-то двоичных кубов).

Доказательство. Рассмотрим точки $x \in G$. Для каждой точки выберем двоичный куб $Q \ni x$, полностью содержащийся в G.

Объединение всех таких кубов даст G. Чтобы кубы не пересекались, мы оставим только кубы положительного ранга, а среди них — максимальные по включению. (Если множество неограниченное, то максимального включения среди **всех** кубов может не найтись, надо ограничить их размер, поэтому мы взяли только кубы положительного ранга) □

Вспомним про $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ — полукольцо ограниченных прямоугольных параллелепипедов, на котором есть мера — n-мерный объём v_n. Σ — σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств (относительно v_n), λ_n — стандартное продолжение v_n.

Теперь обозначим $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ — полукольцо всех двоичных кубов в $\mathbb{R}^n$. Положим $\rho_n = v_n\big|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$. По теореме Лебега — Каратеодори получаем стандартное продолжение μ на множество $\Sigma_1 \subset 2^{\mathbb{R}^n}$.

Тогда $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C} = \Sigma$, откуда $\Sigma_1 \subset \Sigma$, $\mu = \lambda_n\big|_{\Sigma_1}$.

Также понятно, что все открытые множества являются счётными объединениями кубов из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, откуда $\Sigma \subset \Sigma_1$, то есть на самом деле $\Sigma = \Sigma_1$.

Наконец, так как обе меры совпадают на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то они равны (теорема 1.4.3).

Лекция VI

4 октября 2023 г.

Теорема 1.4.5. Пусть λ_n — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, Σ — σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств.

1. Мера Лебега инвариантна относительно сдвига: если $e \in \Sigma, t \in \mathbb{R}^n : e + t \in \Sigma, \lambda_n(e+t) = \lambda_n(e)$.
2. Если ν — мера, заданная на этой σ-алгебре Σ, и ν инвариантна относительно сдвига ($\forall e \in \Sigma$, $t \in \mathbb{R}^n : \nu(e+t) = \nu(e)$), то тогда $\exists c \geqslant 0 : \forall e \in \Sigma : \nu(e) = c\lambda_n(e)$.

   Доказательство.

1. Достаточно доказать, что внешняя мера $\rho = v_n^*$ инвариантна относительно сдвига.

   $\rho(a) = \inf \sum\limits_j v_n(e_j)$ по всем e_j, таким, что их объединения покрывают a. Но

$$\bigcup_j e_j \supset a \iff \bigcup_j (e_j - t) \supset (a - t)$$

   Измеримость по Лебегу тоже легко проверить:

$$\rho(a) = \rho(a \cap e) + \rho(a \setminus e) \quad \iff \quad \rho(a-t) = \rho((a-t) \cap (e-t)) + \rho((a-t) \setminus (e-t))$$

2. Обозначим за $c \coloneqq \frac{\nu(Q_0)}{\lambda_n(Q_0)}$, где Q_0 — какой-то фиксированный двоичный куб ранга 0. Тем самым, $\nu(Q) = cv_n(Q)$ для любого двоичного куба ранга 1 (инвариантность при сдвиге).

   Может так случиться, что $c = 0$. Тогда в силу счётной аддитивности и σ-конечности мера всего пространства равна 0.

   Заметим, что 2^n кубов ранга k дают в объединении куб ранга $k-1$:

$$\left[0, \frac{1}{2^{k-1}}\right)^n = \left(\left[0, \frac{1}{2^k}\right) \sqcup \left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right)\right)^n$$

   Тем самым, мы по индукции получаем, что на всех двоичных кубах меры ν и λ_n отличаются в c раз.

   Дальше применяя теорему о единственности для меры $\rho = \frac{\nu}{c}$, получаем, что $\rho \equiv \lambda_n$ — объём можно задать на двоичных кубах.

   Полнота ν получается автоматически из того, что ν задана на всей Σ. В самом деле, всякое множество меры нуль является подмножеством $\delta\sigma$-множества меры нуль. ☐

1.5 Поведение меры Лебега при линейных отображениях

Пусть $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, $e \in \Sigma$. Чему равна $\lambda_n(Te)$?

Пусть $(X, \mathcal{A}_X)$ и $(Y, \mathcal{A}_Y)$ — пары из множеств и σ-алгебр их подмножеств.

Определение 1.5.1 (Измеримое отображение $F : X \to Y$ (относительно данных σ-алгебр))**.** Такое отображение F, что $\forall a \in \mathcal{A}_Y : F^{-1}(a) \in \mathcal{A}_X$.

В частном случае $\mathcal{A}_X = \mathcal{B}(X)$ и $\mathcal{A}_Y = \mathcal{B}(Y)$ измеримое отображение называется *измеримым по Борелю*.

Лемма 1.5.1. *Всякое непрерывное отображение $F : X \to Y$ измеримо по Борелю.*

Доказательство. Положим $\mathcal{C} \coloneqq \left\{e \in Y \middle| F^{-1}(e) \in \mathcal{B}(X)\right\}$. $\mathcal{C}$ — σ-алгебра, так как взятие прообраза коммутирует со всеми теоретико-множественными операциями (даже несчётными).

Так как прообраз открытого открыт, то $\mathcal{C}$ содержит все открытые множества. Это сразу влечёт, что $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}(Y)$, а тогда и подавно $\forall e \in \mathcal{B}(Y) : F^{-1}(e) \in \mathcal{B}(X)$. ☐

Для счётно-аддитивной меры ν, заданной на $\mathcal{A}_X$ можно ввести её образ.

Определение 1.5.2 (Образ меры μ при (измеримом) отображении F)**.** Мера ρ, заданная на $\mathcal{A}_Y$ следующим образом: $\rho(e) = \mu(F^{-1}(e))$.

Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывно. Рассмотрим образ меры $\mu(e) \coloneqq \lambda_n(F^{-1}(e))$. Если $e \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, то $F^{-1}(e) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, и формула имеет смысл: $\mu(e)$ определена.

Иначе же, (если e — измеримое по Лебегу, но не борелевское (например, e — какое-то неприятное множество меры нуль)) может произойти что угодно. Его прообраз может быть вообще неизмеримым по Лебегу.

Образ же даже Борелевского множества необязательно измерим по Лебегу. Так, $\eta(e) \coloneqq \lambda_n(\Phi(e))$ для непрерывного (даже инъективного) Φ может быть не определена на каком-то борелевском множестве. Чтобы таких проблем не было, надо требовать непрерывность обратного отображения.

Факт 1.5.1. *Пусть $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченные открытые множества, $\Phi : G_1 \to G_2$ — гомеоморфизм. Введём меру ν на G_1: $\nu(e) = \lambda_n(\Phi(e))$. Тогда ν корректно определена на $\mathcal{B}(G_1)$.*

Пусть $a \subset G_1$ — измеримое по Лебегу множество, $\lambda_n(a) = 0$. Тогда хочется, чтобы выполнялось $\nu(a) = 0$. В таком случае $\nu(e) = \lambda_n(\Phi(e))$ будет определена на всех измеримых по Лебегу множествах (всякое измеримое по Лебегу множество — разность $\delta\sigma$-множества, и множества меры нуль).

Пусть G_1, G_2 — открытые множества в $\mathbb{R}^n$, $\Phi : G_1 \to G_2$ — гомеоморфизм. В терминах измеримости сказанное выше можно переформулировать в виде: тогда Φ^{-1} измеримо по Борелю, и если Φ липшицево, то Φ^{-1} измеримо по Лебегу.

Теорема 1.5.1. Пусть $\Phi : G_1 \to G_2$ — C-липшицево отображение, пусть $A \subset G_1$ — меры нуль. Тогда $\Phi(A)$ тоже имеет меру нуль.

Доказательство.

> **Лемма 1.5.2.** *Пусть $e \subset \mathbb{R}^n$. Тогда e есть множество меры нуль $\iff \forall \varepsilon > 0 :$ $\exists \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} : e \subset \bigcup\limits_i a_i$, причём*
>
> $$\sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} a_i)^n < \varepsilon$$
>
> *Доказательство леммы.*
>
> - $\Rightarrow$ $\lambda_n(e) = 0 \iff \lambda_n^*(e) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \{Q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — такое семейство двоичных кубов, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v_n(Q_i) < \varepsilon$. Учитывая, что $v_n(Q_i) = \left(\frac{\operatorname{diam} Q_i}{\sqrt{n}}\right)^n$ сразу получаем $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} Q_i)^n < n^{n/2}\varepsilon$.
> - $\Leftarrow$ Всякое множество a_i содержится в кубе (необязательно двоичном) Q_i со стороной $\operatorname{diam}(a_i)$ (проекция на любую координатную ось не больше $\operatorname{diam}(a_i)$).
>
> □

Пусть открытое $e \subset G_1$ имеет меру нуль, предположим, что $\operatorname{dist}(e, G_1^{\complement}) > 0$. Тем самым, $\forall \varepsilon > 0 : \exists a_i \subset \mathbb{R}^n : \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} a_i \supset e, \sum\limits_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(a_i))^n < \varepsilon$. Можно считать, что все a_i пересекают e, тогда при маленьких $\varepsilon : a_i \subset G_1$.

Тем самым, $\operatorname{diam}(\Phi(a_i)) \leqslant C \cdot \operatorname{diam}(a_i)$, и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(\Phi(a_i))^n \leqslant C^n \cdot \varepsilon$

Если же $\operatorname{dist}(e, G_1^{\complement}) = 0$, то воспользуемся теоремой об исчерпывающей последовательности компактов (теорема 1.5.2). Найдутся компактные $K_i \subset G_1$, в объединении дающие G_1. Для множества меры нуль $a \subset G_1$ заметим, что оно является объединением счётного числа множеств $a_i = a \cap K_i$, отделённых от границы. □

Теорема 1.5.2 (Об исчерпывающей последовательности компактов)**.** Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — открыто, тогда существует $\exists \{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$: $K_i \subset \operatorname{Int}(K_{i+1})$, причём $\bigcup\limits_i K_i = G$.

Доказательство. Если $G = \mathbb{R}^n$, то выберем $K_i = \overline{B_i}(0)$.

Иначе положим $\widetilde{K}_i = \left\{ x \in G \middle| \operatorname{dist}(x, G^{\complement}) \geqslant \frac{1}{i} \right\}$. Несложно видеть, что $\bigcup\limits_i \widetilde{K}_i = G$ — это следует из замкнутости $G^{\complement}$. Из непрерывности функции расстояния (она даже липшицева) $\widetilde{K}_i$ тоже замкнуто.

Наконец, $\widetilde{K}_i \subset \operatorname{Int} \widetilde{K}_{i+1}$. Если G неограничено, то $\widetilde{K}_i$ может быть некомпактно хотя и замкнуто. Чтобы избежать этой проблемы, положим $K_i = \widetilde{K}_i \cap \overline{B_i}(0)$. □

Замечание. В $\mathbb{R}^n$ любая координатная гиперплоскость имеет лебегову меру нуль: например, она представима в виде объединения счётного числа гиперквадратиков меры нуль.

Итак, с чего мы начали. Пусть $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение.

Теорема 1.5.3. $\forall e \in \Sigma : \lambda_n(Te) = |\det T| \cdot \lambda_n(e)$, где определитель взят в каком-то ортонормированном базисе.

Доказательство.

- Пусть T — невырожденное отображение, $\det T \neq 0$. Тогда это гомеоморфизм $\mathbb{R}^n$ на себя. В любом случае, T липшицево, например, с константой $\|T\|$.

  Таким образом, если положить $\nu = \lambda_n \circ T$, то окажется, что ν — корректно определённая счётно-аддитивная мера на σ-алгебре измеримых по Лебегу множеств. Заметим, что ν инвариантна относительно сдвига: $\forall t \in \mathbb{R}^n$. $\lambda_n(Te + Tt) = \lambda_n(Te)$. Таким образом (теорема 1.4.5): $\exists c : \nu = c\lambda_n$. Осталось проверить, что $c = |\det T|$.

  - Если T — ортогональное преобразование, то оно сохраняет расстояния, и $\det T = \pm 1$. Выберем B — замкнутый шар положительного радиуса с центром в 0. Тогда $TB = B$, но мера шара не равна 0 (в него можно засунуть кубик положительного диаметра), откуда $c = 1$.
  - **Следствия**. Если E — собственное линейное подпространство $\mathbb{R}^n$, то его мера λ_n равна 0. Ортогональным преобразованием его можно перевести в координатную гиперплоскость.

    Другим следствие предыдущего пункта является то, что меру Лебега можно начинать строить с любого ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$. Мера сохраняется при всяких поворотах и симметриях.
  - Воспользуемся полярным разложением оператора. Это значит, что для невырожденного линейного $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: $\exists U, A : T = UA$, где U — ортогональный оператор, а A — эрмитов (диагональный в каком-то базисе). Тогда посчитаем для измеримого $a \in \mathbb{R}^n$ $\lambda_n(Ta) = \lambda_n(UAa) = \lambda_n(Aa)$ Будем считать, что мера Лебега построена в том базисе, в котором A диагонален.

    $$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

    Всякий куб $Q \subset \mathbb{R}^n$ после применения A переходит в параллелепипед со сторонами $|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|$. Действительно, $\lambda_n(AQ) = |\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n| \cdot \lambda_n(Q) = |\det A| \cdot \lambda_n(Q)$.

- Если T вырождено, то $\operatorname{Im}(T)$ — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, так как $Te \subset T(\mathbb{R}^n)$, то мера Te тоже нуль. □

Глава 2

Интеграл Лебега

Пускай имеется тройка (X, Σ, μ), где X — множество, $\Sigma \subset 2^X$ — σ-алгебра, μ — счётно-аддитивная мера на Σ.

Определим для некоторых функций $f : X \to \mathbb{R}$ интеграл $\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu$.

Раньше мы уже определяли интеграл от простой функции $f = \sum\limits_i c_i \chi_{e_i}$, равный $I(f) = \sum\limits_i c_i \mu(e_i)$. В качестве e_i теперь можно брать произвольные измеримые множества, что уже сильно увеличивает разнообразие простых функций.

Определение 2.0.1 (Простая функция $g : X \to \mathbb{R}$ относительно σ-алгебры Σ)**.** Функция вида $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \chi_{e_i}$, $c_i \in \mathbb{R}, e_i \in \Sigma$. Можно считать, что $e_i \cap e_j = \varnothing$ для $i \neq j$.

Лекция VII

18 октября 2023 г.

Теорема 2.0.1 (Малая теорема Леви)**.** Пусть $g_1, g_2, \ldots,$ — счётное семейство неотрицательных простых функций; пусть g — ещё одна простая функция. Предположим, что $\forall x \in X : g_1(x) \leqslant g_2(x) \leqslant \ldots$, причём $g_j(x) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} g(x)$ (можно записать $g_n(x) \nearrow g(x)$). Тогда $\lim\limits_{j\to\infty} I(g_j) = I(g)$.

Доказательство. Сложность заключается в том, что число ступенек у g_j может неограниченно расти.

Заметим, что так как g_j неотрицательны, то $I(g_j)$ всегда определён (число из $\mathbb{R}$ или $+\infty$).

Если $\exists j : I(g_j) = +\infty$, то $I(g) = +\infty$, и доказывать нечего. Далее считаем, что $\forall j : I(g_j) \in \mathbb{R}$.

Так как g простая, то $g = \sum\limits_{s=1}^{n} c_s \chi_{e_s}$, где e_s — попарно дизъюнктные множества из Σ. Положим $g_j^s \coloneqq g_j \cdot \chi_{e_s}$. Эти функции тоже простые.

Зафиксируем s $(1 \leqslant s \leqslant n)$, зафиксируем $x \in e_s$, посмотрим на $\lim\limits_{j\to\infty} g_j^s(x) = c_s \chi_{e_s}$. Проверим предельное соотношение для интегралов: так как s пробегает конечное множество значений, то достаточно доказать только для одного значения. Далее считаем, что $g = c\chi_e$.

Тем самым, утверждение свелось к следующему: для $e \in \Sigma$, для последовательности простых функций g_j, таких, что поточечно $0 \leqslant g_j \leqslant g_{j+1} \leqslant c\chi_e = g$, причём $\forall x \in X : \lim\limits_{j\to\infty} g_j(x) = c\chi_e(x)$, необходимо и достаточно показать, что $I(g_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} I(c\chi_e) = c\mu(e)$.

Рассмотрим $d \in (0, c)$. Положим $E_n \coloneqq \{x | g_n(x) > d\}$. Понятно, что $E_n \subset e$, причём $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = e$.

Обозначим $h_n = d \cdot \chi_{E_n}$. По определению E_n: $h_n \leqslant g_n$. Таким образом,

$$\underbrace{I(h_n)}_{d\cdot\mu(E_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} d\cdot\mu(e)} \leqslant I(g_n) \leqslant \underbrace{I(g)}_{c\cdot\mu(e)}$$

Так как $I(g_i) \leqslant I(g_{i+1})$, то существует предел $V = \lim\limits_{j\to\infty} I(g_n)$. Отсюда $d \cdot \mu(e) \leqslant V \leqslant c \cdot \mu(e)$, причём это верно для любого $d < c$. □

2.1 Измеримые отображения

Пускай $(X, \mathcal{A}_X)$, $(Y, \mathcal{A}_Y)$ — множества и σ-алгебры соответствующих подмножеств. $F : X \to Y$.

Вспомним определение измеримости (определение 1.5.1):

Определение 2.1.1 (Измеримое отображение $F : X \to Y$ (относительно данных σ-алгебр))**.** Такое отображение F, что $\forall c \in \mathcal{A}_Y : F^{-1}(c) \in \mathcal{A}_X$.

Если в качестве Y рассмотреть топологическое пространство без определённой σ-алгебры, то в качестве σ-алгебры в Y можно выбрать σ-алгебру борелевских множеств $\mathcal{B}(Y)$. В таком случае F называется *измеримой по Борелю*.

Теорема 2.1.1. Пусть в Y содержится счётная база топологии $\mathcal{A}_Y$; пускай $\mathcal{D}$ — какая-нибудь (даже необязательно счётная) база для топологии в Y.

Если $\forall e \in \mathcal{D} : F^{-1}(e) \in \mathcal{A}_X$, то F измеримо по Борелю.

Доказательство. Рассмотрим открытое $G \subset Y$, докажем, что $F^{-1}(G) \subset \mathcal{A}_X$.

Представим $G = \bigcup\limits_{x\in G} a_x$, где $a_x \in \mathcal{D}$ содержит x.

Пускай $\mathcal{A}_Y$ — счётная база топологии в Y. Для любого $x \in G$: $\exists c_x \in \mathcal{A}_Y : x \in c_x \subset a$, где $a \in \mathcal{D}$. $\bigcup\limits_{x\in G} c_x = G$. Так как среди c_x всего счётное число различных, то можно выбрать представителей — счётное множество $X \subset G : \bigcup\limits_{x\in X} c_x = G$. Тогда и подавно $\bigcup\limits_{x\in X} a_x = G$.

Отсюда $F^{-1}(G) \in \mathcal{A}_X$, так как σ-алгебра выдерживает счётные операции.

Этого достаточно, так как $\left\{E \subset Y \middle| F^{-1}(E) \in \mathcal{A}_X\right\}$ — σ-алгебра, и если в неё содержатся все открытые множества, то и все борелевские содержатся в ней тоже. □

Пусть $(X, \Sigma_1), (Y, \Sigma_2), (Z, \Sigma_3)$ — множества со своими σ-алгебрами.

Рассмотрим композицию $X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{\Phi} Z$.

Теорема 2.1.2. Композиция измеримых отображений измерима.

Доказательство. $\forall e_3 \in \Sigma_3 : (\Phi \circ F)^{-1}(e) = F^{-1}(\Phi^{-1}(e))$. □

Факт 2.1.1. *Пусть X_1, X_2 — топологические пространства, $F : X_1 \to X_2$ — непрерывно. Пусть X_1, X_2 наделены своими борелевскими σ-алгебрами. Тогда F измеримо.*

Доказательство. Определим $\mathcal{A} := \left\{e \in X_2 \middle| F^{-1}(e) \in \mathcal{B}(X_1)\right\}$. $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, причём она содержит все открытые множества. □

Следствие 2.1.1. *Рассмотрим композицию $X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{\Phi} Z$. X — пространство с σ-алгеброй $\mathcal{A}$, Y, Z — топологические пространства, F измеримо, Φ непрерывно. Тогда $\Phi \circ F$ непрерывно.*

$(X, \mathcal{A})$ — пространство с σ-алгеброй. Рассмотрим $f : X \to \mathbb{R}$.

Предложение 2.1.1. *f измеримо, если выполнено любое из следующих условий.*

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} : f^{-1}((a,b)) \in \mathcal{A}$.
2. $\forall a, b \in \mathbb{R} : f^{-1}([a,b]) \in \mathcal{A}$.
3. $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{A}$.
4. $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Согласно предыдущей теореме (1) сразу влечёт измеримость.

Проверим (3) $\Rightarrow$ (1). Так как $(-\infty, d] = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (-\infty, d + 1/n)$, то

$$f^{-1}((a,b)) = f^{-1}\left((-\infty, b) \setminus (-\infty, a]\right) = f^{-1}\left((-\infty, b) \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty, a + 1/n)\right)$$

Всё остальное делается аналогично. ☐

Определение 2.1.2 (Лебеговы множества функции f**).** Для $a \in \mathbb{R}$ это множества вида $\{x | f(x) < a\}$, $\{x | f(x) \leqslant a\}$, $\{x | f(x) > a\}$, $\{x | f(x) \geqslant a\}$.

Таким образом, проверку того, что f измерима, можно выполнять только на Лебеговых множествах.

Теперь рассмотрим отображение $F : X \to \mathbb{R}^n$, где $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ — столбец координатных функций.

Предложение 2.1.2. *F измеримо $\iff$ все f_j измеримы.*

Доказательство.

$\Leftarrow$. Пускай $I_1, \ldots, I_n$ — интервалы. Параллелепипеды $P = I_1 \times \cdots \times I_n$ образуют базу топологии в $\mathbb{R}^n$. Достаточно доказать на базе, что $F^{-1}(P) \in \mathcal{A}$. $x \in F^{-1}(P) \iff F(x) \in P \iff \forall j : 1 \leqslant j \leqslant n \Rightarrow f_j(x) \in I_j$. $F^{-1}(P) = \bigcap\limits_{j=1}^{n} f_j^{-1}(I_j)$.

$\Rightarrow$. Рассмотрим координатную проекцию $\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. $\pi_j \circ F$ измеримо. ☐

Предложение 2.1.3. *Пусть $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ — измеримы. Тогда измеримыми являются функции*

- *$\alpha f_1 + \beta f_2$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*
- *$f_1 \cdot f_2$.*
- *$\frac{f_1}{f_2}$, если $\forall x \in X : f_2(x) \neq 0$.*

Доказательство. Пускай $F : X \to \mathbb{R}^2$; $\quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$. Согласно предыдущей теореме, оно измеримо. Скомпонуем $\psi \circ F$, где $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \alpha x + \beta y \text{ или } xy \end{array}$ Для частного: $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x}{y} \end{array}$ ☐

Ниже нам будет удобно определять функцию f, принимающую бесконечные значения.

$$f : X \to \overline{\mathbb{R}} \stackrel{def}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Про такую функцию говорят, что она *измерима*, если $f^{-1}(+\infty), f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{A}$ и $f\big|_{f^{-1}(\mathbb{R})}$ измерима в обычном понимании.

К таким функциям можно применять примерно всё то, что уже доказано, только не надо складывать бесконечности разных знаков.

Факт 2.1.2. *Если f (возможно) принимает значение $+\infty$, и все множества $\{x|f(x) < a\}$ лежат в $\mathcal{A}$, то f измерима.*

Доказательство. $f^{-1}(\mathbb{R}) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}(-\infty, n)$; $\{x|f(x) = +\infty\} = f^{-1}\left(\overline{\mathbb{R}}\right) \setminus f^{-1}(\mathbb{R})$. □

2.2 Грани и предельные переходы

Теорема 2.2.1. Пусть $f_n : X \to \mathbb{R}$ — измеримые функции. Пусть $f(x) = \inf\limits_n f_n(x)$. Для простоты считаем, что $\forall x : f_n(x)$ ограничены снизу.

Тогда f измерима.

Доказательство. Рассмотрим $\{x|f(x) < a\} = \bigcup\limits_n \{x|f_n(x) < a\}$. □

Следствие 2.2.1. *Если функция $g(x) = \sup\limits_n f_n(x)$ всюду конечна, то функция g измерима.*

Следствие 2.2.2. *Пусть f_n измеримы, и $\forall x$: числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ ограничена. Тогда $\overline{\lim\limits_n} f_n(x) = \underline{\lim\limits_n} f(x)$ тоже измеримы.*

Доказательство. Например, $\overline{\lim\limits_n} f_n(x) = \inf\limits_k \sup\limits_{n \geqslant k} f_n(x)$. □

Теорема 2.2.2. Пусть f_n всюду конечны и измеримы, пусть $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$, где $f(x)$ — тоже конечна. Тогда f измерима.

Доказательство. Это следствие из предыдущего. □

Замечание. Пусть $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$, но допустимо, чтобы $f(x)$ принимало значения $\pm\infty$. (При этом $\forall n : f_n$ конечна)

Тогда всё равно f измерима.

Доказательство. Пусть $f(x_0) = +\infty$. Тогда $\forall N \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant k : f_n(x_0) \geqslant N$. Тем самым, $\{x_0|f(x_0) = +\infty\} = \bigcap\limits_{N\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{n\geqslant k} \{x_0|f_n(x_0) \geqslant N\}$. □

Определение 2.2.1 (Ступенчатая функция)**.** $f : X \to \mathbb{R}$, такая, что $\exists E_1, E_2, \dots \in \mathcal{A} : E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $f\big|_{E_i}$ постоянна (скажем, равна c_i).

Иными словами, ступенчатая функция — функция вида $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{E_i}$.

Замечание. Всякая ступенчатая функция измерима.

Теорема 2.2.3. Если $g : X \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, то $\exists$ последовательность ступенчатых функций f_n, такая, что $f_n \rightrightarrows g$.

Если же $g \geqslant 0$, то $\exists$ простые функции $f_n : f_n(x) \nearrow g(x)$ поточечно.

Доказательство.

1 Выберем $n \in \mathbb{N}$, рассмотрим двоичные интервалы $I_{j,n} = \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)$. При фиксированном n : $\bigcup\limits_{j \in \mathbb{Z}} I_{j,n} = \mathbb{R}$.

Пусть $E_{j,n} \coloneqq g^{-1}(I_{j,n}) \in \mathcal{A}$. Определим $f_n(x) = \frac{j}{2^n}$ при $x \in E_{j,n}$. Иными словами, бьётся ось ординат, и если функция g принимает значение в неком двоичном отрезке, то $f_n(x)$ равно нижней границе этого отрезка.

Тогда $\forall x : 0 \leqslant g(x) - f_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n}$.

Заметим, что $\forall x : f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.

2 Аналогично предыдущему пункту, берём полуинтервалы $\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)$, и строим f_n точно так же. Они сходятся к $f(x)$, но, увы, не простые. Тогда положим $\widetilde{f}_n(x) = \min(f_n(x), n)$. Здесь $\widetilde{f}_n(x)$ уже простые, по-прежнему возрастают монотонно, и всё ещё сходятся к g.

□

Замечание. Пусть g принимает ещё и значения $\pm\infty$. Тогда можно построить последовательность ступенчатых f_n, как в теореме, определённых на $g\big|_{g(x) \text{ конечно}}$.

Доопределим $\widehat{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & g(x) \in \mathbb{R} \\ +\infty, & g(x) = +\infty \\ -\infty, & g(x) = -\infty \end{cases}$.

Тогда это всё ещё простые функции, и естественно считать, что они сходятся к g равномерно. На том множестве, где $g(x)$ конечно, $|f_n(x) - g(x)|$ равномерно сходится к нулю, а если $g(x)$ бесконечно, то разность, конечно, не определена, но $f_n(x) = g(x)$.

Похожую вещь можно применить и ко второму пункту теоремы.

2.3 Интеграл

Сначала научимся интегрировать неотрицательные измеримые функции.

Пусть (X, Σ, μ) — пространство с мерой, то есть μ — счётно-аддитивная мера, заданная на Σ.

Предположим, что μ — полная мера (определение 1.4.5). Если это не так, то можно продолжить μ по Лебегу — Каратеодори. Тогда в целом ничего особо не поменяется, в предположении σ-конечности для продолжения меры $\widetilde{\mu}$ на $\widetilde{\Sigma}$: $\forall a \in \widetilde{\Sigma} : \mu(a) < +\infty \Rightarrow \exists b \in \Sigma : b \supset a, \widetilde{\mu}(b \setminus a) = 0$.

Пусть f — неотрицательная измеримая функция на X (возможно, принимающая значения $+\infty$).

Определим *интеграл* $J(f) = \sup\{I(g) | g \text{ — простая, } 0 \leqslant g \leqslant f\}$.

Замечание. Хотя f разрешается принимать бесконечные значения, по определению простые функции — суммы $\sum\limits_{j=1}^{N} c_j \chi_{e_j}$, где $c_j \in \mathbb{R}$ (множества e_j можно считать дизъюнктными).

Определение 2.3.1 (Суммируемая (интегрируемая) функция f)**.** $J(f) < +\infty$.

Свойства (Совсем немного простых свойств).

- Если f неотрицательная простая функция, то $J(f) = I(f)$.
- Если $f_1 \leqslant f_2$ — неотрицательные измеримые, то $J(f_1) \leqslant J(f_2)$.

Лекция VIII

25 октября 2023 г.

Пусть a, b — два числа. Для их минимума и максимума иногда используются обозначения

$$\max(a, b) = a \vee b \qquad \min(a, b) = a \wedge b$$

В частности, это используется для поточечного максимума или минимума функций:

$$(f \vee g)(x) \overset{def}{=} f(x) \vee g(x) \overset{def}{=} \max(f(x), g(x))$$

Теорема 2.3.1 (Леви для неотрицательных измеримых функций (теорема о монотонной сходимости)). Пусть f_n — измеримые функции, $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$ Пускай $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда $J(f) = \lim\limits_{n\to\infty} J(f_n)$.

Доказательство. Если $\exists n \in \mathbb{N} : J(f_n) = +\infty$, то доказывать нечего: тогда начиная с этого места $J(f_{\geqslant n}) = J(f) = +\infty$. Отметим, что f измерима, как предел измеримых.

Теперь будем считать, что $\forall n : J(f_n) < +\infty$.

Заметим, что можно считать, что f принимает только конечные значения. Сведение выглядит так: обозначим $E = \{y | f(y) = +\infty\}$, найдём искомую последовательность функций g_n для $f\big|_{E^\complement}$, а дальше положим $\widehat{g}_n \coloneqq \begin{cases} g(x), & x \in E \\ n, & x \notin E \end{cases}$.

$\forall n : \exists$ простая функция $\psi_n : 0 \leqslant \psi_n \leqslant f_n, I(\psi_n) \geqslant J(f_n) - \frac{1}{2^{2n}}$. Сделаем так, чтобы $\{\psi_n\}$ возрастали: $\phi_n = \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n$.

Лемма 2.3.1. *Почти всюду (для всех x, кроме множества меры нуль)* $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x) = f(x)$.

Доказательство леммы.

Обозначим $e_n = \left\{x \middle| \phi_n(x) < f(x) - \frac{1}{2^n}\right\}$. Заметим, что тогда всё ещё $\phi_n + \frac{1}{2^n}\chi_{e_n} \leqslant f$. Слева стоит простая функция, откуда $\underbrace{I\left(\phi_n + \frac{1}{2^n}\chi_{e_n}\right)}_{I(\phi_n) + \frac{1}{2^n}\mu(e_n)} \leqslant J(f)$. Так как $I(\phi_n) + \frac{1}{2^n}\mu(e_n) \geqslant J(f) - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^n}\mu(e_n)$, то $\mu(e_n) \leqslant \frac{1}{2^n}$.

Обозначим $E_n = \bigcup\limits_{k \geqslant n} e_k$. Его мера тоже не очень большая: $\mu(E_n) \leqslant \sum\limits_{k\geqslant n} \mu(e_k) \leqslant \sum\limits_{k \geqslant n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Так как имеется вложенность $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, то $E \coloneqq \bigcap\limits_{n \geqslant 0} E_n$ имеет меру нуль.

Осталось заметить, что $\phi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ везде кроме E. □

Так как по определению $J(f) \overset{def}{=} \{I(g) | 0 \leqslant g \leqslant f, g$ — простая$\}$, то достаточно доказать, что для данной простой функции g: $\lim\limits_{n\to\infty} I(\phi_n) \leqslant I(g)$.

Тут я немного выключился из лекции, над додумать. □

2.4 Применения интеграла

1. Линейность интеграла.

   Пусть $f, g \geqslant 0$ — измеримые функции, $\alpha, \beta \geqslant 0$. Тогда $J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g)$.

   Доказательство. Выбираем последовательность простых функций $0 \leqslant u_n \nearrow f$ и $0 \leqslant v_n \nearrow g$, тогда воспользуемся линейностью предела и теоремой Леви:

   $$J(\alpha f + \beta g) = \lim_{n\to\infty} I(\alpha u_n + \beta v_n) = \lim_{n\to\infty} (\alpha I(u_n) + \beta I(v_n)) = \alpha J(f) + \beta J(g)$$

   □

2. Счётная аддитивность по множеству. Пусть $f \geqslant 0$ — измеримая функция, положим $\nu(e) = J(f \cdot \chi_e)$ для $e \in \Sigma$. Тогда ν — счётно аддитивная мера на σ-алгебре Σ.

   Доказательство. Аддитивность следует из линейности интеграла.

   Для проверки счётной аддитивности удостоверимся в монотонной непрерывности: пусть $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$, где $E_j \in \Sigma$.

   Определим $E = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$. $f \cdot \chi_E = \lim\limits_{n\to\infty} f \cdot \chi_{E_n}$, теперь воспользуемся теоремой Леви. □

Факт 2.4.1. *Пусть $f \geqslant 0$ — измеримая функция, обозначим $A = \{x | f(x) \neq 0\}$. Тогда $J(f) = 0 \iff \mu(A) = 0$.*

Доказательство.

- $\Leftarrow$. $J(f) = \sup I(g)$, где $0 \leqslant g \leqslant f$. Из монотонности меры всякая такая g сосредоточена на множестве меры нуль. Считая интеграл g по определению, получаем нуль.

- $\Rightarrow$.

  Лемма 2.4.1 (Неравенство Чебышёва)**.** *Пускай $h \geqslant 0$ — неотрицательная измеримая функция, $\lambda > 0$. Тогда $\mu\{x | h(x) > \lambda\} \leqslant \frac{1}{\lambda} J(h)$.*

  Доказательство леммы.

  Пусть $e = \{x | h(x) > \lambda\}$. Заметим, что $h \geqslant \lambda\chi_e$, из монотонности интеграла $J(h) \leqslant \lambda\mu(e)$. □

  Пусть $A_n = \left\{x \middle| f(x) > \frac{1}{n}\right\}$. $A = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n$. Согласно неравенству Чебышёва $\mu(A_n) \leqslant nJ(f) = 0$. Таким образом, $\mu(A) = 0$. □

Замечание. Теорема Леви сохраняет силу, если неравенство $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ выполнено почти всюду (нарушаются на множестве меры нуль), и стремление $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ тоже имеется почти всюду.

2.5 Интегралы от знакопеременных функций

Пускай f — измеримая функция на X, возможно, принимающая значения $\pm\infty$. Представим $f = f_+ - f_-$, где $f_+ = f \vee 0, f_- = -(f \wedge 0)$. Тогда $|f| = f_+ + f_-$, причём f_+ и f_- измеримы, и обе неотрицательны.

Определение 2.5.1 (f обладает интегралом)**.** $J(f_+) < +\infty$, или $J(f_-) < +\infty$. В таком случае $J(f) \overset{def}{=} J(f_+) - J(f_-)$.

Определение 2.5.2 (f суммируема (интегируема))**.** Она обладает конечным интегралом, то есть $J(f_+), J(f_-) < +\infty$.

Предложение 2.5.1. *f суммируема $\iff$ $|f|$ суммируема.*

Доказательство.

- $\Rightarrow$. $J(|f|) = J(f_+) + J(f_-) < +\infty$.
- $\Leftarrow$. $f_+, f_- \leqslant |f|$. □

2.5.1 Про линейность интеграла

Пусть $f = g - h$, где $g, h \geqslant 0$. Тогда во всяком случае $g \geqslant f_+, h \geqslant f_-$:

$$f = g - h \Rightarrow f \leqslant g, \text{ а так как } f \geqslant 0, \text{ то } f_+ \leqslant g \text{ тоже} \qquad f_- = (-f)_+$$

Предложение 2.5.2. *Если $f = g - h$. g, h измеримы и неотрицательны, причём хотя бы одно из $J(g), J(h)$ конечно, то f обладает интегралом $J(f) = J(g) - J(h)$.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $J(g) < +\infty$, в случае $J(h) < +\infty$, аналогично.

Тогда $J(f_+) < +\infty$, и f по определению обладает интегралом.

$$f = f_+ - f_- = g - h \quad \Rightarrow \quad f_+ + h = g + f_-$$

Для неотрицательных функций известна аддитивность, откуда $J(f_+) + J(h) = J(g) + J(f_-)$. Перенося в противоположные части конечные слагаемые $J(f_+)$ и $J(g)$, получаем

$$-J(g) + J(h) = J(f_-) - J(f_+)$$

Умножая обе части на -1, получаем искомое. □

Следствие 2.5.1. *Если f, g суммируемы (и, вообще говоря, знакопеременны), то $f + g$ тоже суммируема, и $J(f + g) = J(f) + J(g)$.*

Доказательство.

$$(f_+ - f_-) + (g_+ - g_-) = (f_+ + g_+) - (f_- + g_-)$$

□

Замечание. Если f суммируема, $\alpha \in \mathbb{R}$, то $J(\alpha f) = \alpha J(f)$.

- Основная оценка интеграла: если f обладает интегралом, то $|J(f)| \leqslant J(|f|)$.
- Если f, g — измеримы, и обладают интегралами, причём $f \leqslant g$, то $J(f) \leqslant J(g)$.

Для $e \in \Sigma$ и измеримой функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, имеющей интеграл, имеется обозначение

$$\boxed{\int\limits_e f \, \mathrm{d}\mu = J(f \cdot \chi_e)}$$

Теорема 2.5.1 (Абсолютная непрерывность интеграла)**.** Пускай f — суммируемая функция. Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0$: если $e \in \Sigma$, $\mu e < \delta$, то $\int\limits_e |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon$.

Доказательство. От противного: пусть $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists e \in \Sigma : \mu e < \delta$, но $\int\limits_e |f| \, \mathrm{d}\mu \geqslant \varepsilon$.

Рассмотрим последовательность $\delta_n = \frac{1}{2^n}$. Для каждого δ_n найдётся $e_n \in \Sigma$: $\mu(e_n) \leqslant \frac{1}{2^n}$, но $\int\limits_{e_n} |f| \, \mathrm{d}\mu \geqslant \varepsilon$.

Пусть $E_n = \bigcup\limits_{k \geqslant n} e_k$, тогда из монотонности $\int\limits_{E_n} |f| \, \mathrm{d}\mu \geqslant \varepsilon$. С другой стороны. $\mu E_n \leqslant \sum\limits_{k \geqslant n} \mu(e_k) \leqslant \sum\limits_{k \geqslant n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$.

Таким образом, $\mu(E_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, но с другой стороны $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ Положим $E \coloneqq \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Из счётной аддитивности $\int\limits_E |f| \, \mathrm{d}\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{E_n} |f| \, \mathrm{d}\mu$, но левый интеграл равен нулю, как интеграл по множеству меры нуль. □

Замечание. Если f — суммируемая функция, то $\{x | f(x) \neq 0\}$ σ-конечно.

Доказательство. Применить неравенство Чебышёва. $\{x|f(x)\} = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} \left\{x\middle||f|(x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$. $\square$

Теорема 2.5.2 (Общая теорема Леви)**.** Пускай $f_1, f_2, \dots$ — измеримые функции, монотонно возрастающие: $f_n \leqslant f_{n+1}$.

Предположим, что f_1 суммируема. Тогда $J(f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} J(f)$, где $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Доказательство. Положим $h_j(x) = f_j(x) - f_1(x)$, и применим теорему Леви для неотрицательных функций. $\square$

Следствие 2.5.2. *f суммируема $\iff J(f_j) < +\infty$, при этом $J(f) = \lim\limits_{n\to\infty} J(f_n)$.*

Теорема 2.5.3 (Вариант теоремы Леви для рядов)**.** Пусть u_n — суммируемые функции, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) =: u(x)$. Тогда u суммируема $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_X u_n \,\mathrm{d}\mu < +\infty$.

В случае монотонной сходимости почти всегда почти всё можно делать, а если сходимость не монотонна, то есть следующая теорема.

Лекция IX

1 ноября 2023 г.

Теорема 2.5.4 (Лебег, о мажорируемой сходимости)**.** Пусть f, g — измеримые функции, $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{почти всюду}}{\longrightarrow}} f$. Предположим, что у f_n есть общая суммируемая мажоранта: $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ и $\int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. Тогда $\int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu$.

Доказательство. Так как g — мажоранта, то везде на $X : |f_n(x) - f(x)| \leqslant 2g(x)$.

Положим $h_k := \sup\limits_{n\geqslant k} |f_n(x) - f(x)|$, заметим, что $h_k \searrow 0$. Так как $0 \leqslant h_0(x) \leqslant 2g(x)$, то h_0 суммируема, откуда по теореме Леви: $\int\limits_X h_k(x) \,\mathrm{d}\mu \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Осталось применить принцип двух полицейских для неравенства

$$0 \leqslant |f_k(x) - f(x)| \leqslant h_k(x) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_X 0 \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X |f_k(x) - f(x)| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X h_k(x) \,\mathrm{d}\mu$$ $\square$

Контрпример. Совсем без мажоранты ничего не получится. Если $X = \mathbb{R}$, и $f_n = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$, то f сходятся к нулю почти всюду, но интегралы у всех f_n единичные.

Лемма 2.5.1 (Фату)**.** *Пусть $f_n \geqslant 0$ — измеримые функции, тогда $\int\limits_X \left(\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu$.*

Следствие 2.5.3. *Если измеримые $g_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{почти всюду}}{\longrightarrow}} g$, и $\int\limits_X |g_n| \,\mathrm{d}\mu \leqslant C$, то g суммируема, причём $\int\limits_X |g| d\mu \leqslant C$.*

Доказательство. Положим $h_k(x) = \inf\limits_{n\geqslant k} f_n(x)$. $h_k(x) \nearrow h(x) = \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

$$\int\limits_X h \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_X h_k \,\mathrm{d}\mu = \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_X h_k \,\mathrm{d}\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$ $\square$

2.6 Виды сходимости

- Сходимость почти всюду: мера множества, где сходимости нет, равна нулю.
- Сходимость по мере: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f \overset{def}{\iff} \forall\varepsilon > 0 : \mu\left\{x \in X \middle| |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Факт 2.6.1.

1. *Из сходимости* $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{почти всюду}} f$ *следует сходимость по мере* $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$.
2. *Если* $\mu(X) < \infty$*, то из сходимости по мере* $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ *следует, что найдётся сходящаяся подпоследовательность:* $\exists n_1 < n_2 < \ldots$*:* $f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{почти всюду}} f$.

Доказательство.

1. Пусть $\varepsilon > 0$, обозначим $A_n \coloneqq \{x \in X | \exists k \geqslant n : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}$. Они вложены: $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$

   Отметим, что A_n измеримы, и пусть $A \coloneqq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. На множестве A нет сходимости: $f_n \not\to f$. Но раз есть сходимость почти всюду, то $\mu(A) = 0$, то есть $\mu(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. **Определение 2.6.1** (Последовательность Коши по мере)**.** Последовательность измеримых функций f_n, такая, что $\forall\varepsilon > 0 : \lim\limits_{(n,m)\to\infty} \mu\left\{x \in X \middle| |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\right\} = 0$.

   Найдутся такие $N_1 \leqslant N_2 \leqslant \ldots$, что $\mu\left\{x \in X \middle| \forall n, m \geqslant N_k : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \frac{1}{2^k}\right\} \leqslant \frac{1}{2^k}$.

   Положим $E_k \coloneqq \left\{x \in X \middle| \left|f_{N_k}(x) - f_{N_{k+1}}(x)\right| \leqslant \frac{1}{2^k}\right\}$. $\mu(X \setminus E_k) \leqslant \frac{1}{2^k}$. Пусть $\widetilde{E}_k = \bigcap\limits_{n \geqslant k} E_n$, тогда $\mu\left(X \setminus \widetilde{E}_k\right) = \mu\left(\bigcup\limits_{n\geqslant k} X \setminus E_n\right) \leqslant \sum\limits_{n\geqslant k} \mu(X \setminus E_n) \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$.

   Если $x \in \widetilde{E}_k \Rightarrow \forall n \geqslant k : \left|f_{N_n}(x) - f_{N_{n+1}}(x)\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$, то есть $\forall x \in \widetilde{E}_k : \sum\limits_{j=1}^{\infty} \left|f_{N_j}(x) - f_{N_{j+1}}(x)\right|$ сходится.

   А тогда эта сумма сходится и на $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{E}_k$. Это влечёт $\forall x \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{E}_k : \exists \lim\limits_{k\to\infty} f_{N_k}(x)$. К этому пределу f_{N_k} сходятся почти всюду: мера $X \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{E}_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (X \setminus \widetilde{E}_k)$ равна нулю.

□

Видно, что на самом деле мы доказали более сильное утверждение: для последовательности Коши по мере $\exists$ измеримая f: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{почти всюду}} f$.

2.7 Классы L^p

Определим $L^p(\mu) \overset{def}{=} \left\{f : X \to \mathbb{R} \middle| f \text{ — измерима, и } \int\limits_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty\right\}$. Как следует из первой буквы, класс назван в честь Лебега.

В дальнейшем мы будем считать, что $p \geqslant 1$.

Функции $f \in L^p(\mu)$ отвечает норма $\|f\|_{L^p} = \left(\int\limits_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$. По этой норме, как и по всякой другой, можно построить метрику $d(\_,\_)$.

Теорема 2.7.1. В случае $p \geqslant 1 : d$ — реально метрика на $L^p(\mu)$. Чтобы выполнялась положительная определённость ($\|f\| = 0 \iff f = 0$), будем рассматривать функции определённые с точностью до меры нуль на X. Иными словами $\|f\| = 0 \iff f = 0$ почти всюду (факт 2.4.1).

Доказательство.

> **Лемма 2.7.1** (Неравенство Гёльдера)**.** *Пусть* $p, q > 1$ *— сопряжённые показатели* ($1/p + 1/q = 1$)*, тогда для* $f \in L^p, g \in L^q : fg \in L^1$*, и* $\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$.
>
> *Доказательство леммы.*
>
> Деля $f \rightsquigarrow \dfrac{f}{\left(\int\limits_X |f|^p\right)^{1/p}}$ и $g \rightsquigarrow \dfrac{g}{\left(\int\limits_X |g|^q\right)^{1/q}}$, получаем $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$.
>
> Для $a, b > 0$ имеется неравенство Юнга (доказывали через выпуклость exp): $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab$. Применяя его, получаем $|f(x)| \cdot |g(x)| \leqslant \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}$. Интегрируя, получаем искомое $\int\limits_X |f(x)| \cdot |g(x)| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. □

Теперь проверим неравенство треугольника $\|f + g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$. Для интегралов оно носит название *неравенства Минковского*.

$$\|f+g\|_{L^p}^p = \int\limits_X |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} \, \mathrm{d}\mu \leqslant$$

Применив к каждому слагаемому неравенство Гёльдера ($|f+g|^{p-1} \in L^q$, так как $\int\limits_X |f+g|^{(p-1)q} \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu \leqslant 2^p \int\limits_X \max(f,g)^p \, \mathrm{d}\mu \leqslant 2^p \int\limits_X (|f|^p + |g|^p) \, \mathrm{d}\mu$), получаем

$$\leqslant (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \left(\int\limits_X |f+g|^{(p-1)q} \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \left(\int\limits_X |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Далее делим обе части неравенства на $\left(\int\limits_X |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}$, и остаётся

$$\underbrace{\left(\int\limits_X |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1-\frac{1}{q}}}_{\|f+g\|_{L^p}} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$ □

Теорема 2.7.2. $L^p(\mu)$ — полно.

Доказательство. Рассмотрим последовательность Коши f_n, и пусть $E_{k,l} \coloneqq \{x \in X \,|\, |f_k(x) - f_l(x)| > \delta\}$.

По определению последовательности Коши $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : k, l \geqslant N \Rightarrow \int\limits_X |f_k - f_l|^p < \varepsilon^p$.

Тогда $\mu E_{k,l} = \mu\{x \in X \,|\, |f_k(x) - f_l(x)|^p > \delta^p\} \leqslant \frac{\varepsilon^p}{\delta^p}$. Значит, f_n — последовательность Коши по мере.

Пусть $f_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{\text{почти всюду}} f$, тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall j, s > N : \int\limits_X |f_{k_j} - f_{k_s}|^p < \varepsilon$. Устремляя $s \to \infty$, по лемме Фату получаем $\int\limits_X |f_{k_j} - f|^p \leqslant \varepsilon$. Значит, f — предел подпоследовательности f_{k_j}, и из неравенства треугольника и фундаментальности можно показать, что f — предел. □

Лекция X

8 ноября 2023 г.

2.7.1 Приближение функций из класса L^p

В дальнейшем часто будем обозначать меру множества X за $|X|$.

Теорема 2.7.3. Пусть (X, Σ, μ) — пространство с полной мерой. Тогда простые функции образуют плотное множество в $L^p(\mu)$ при $1 \leqslant p < +\infty$.

Доказательство. Всякая простая функция имеет вид $\phi = \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{e_j}$, дизъюнктные $e_j \in \Sigma$. Если $\phi \in L^p(\mu)$, то меры всех e_j, таких, что $\alpha_j \neq 0$, конечны.

Пусть $f \in L^p(\mu)$, разложим $f = f_+ - f_-$. Приблизим f_+ и f_- по отдельности. Тем самым, без потери общности $f \geqslant 0$.

Раз f измерима, то существует последовательность простых функций $\phi_n \in L^p(\mu) : 0 \leqslant \phi_n \leqslant f, \phi_n \nearrow f$.

Так как $f - \phi_n \searrow 0$ почти всюду, то $|f - \phi_n|^p \searrow 0$. Применяем теорему Леви, и действительно получаем, что $\int\limits_X |f - \phi_n|^p \,\mathrm{d}\mu \to 0$. □

Пусть мера μ получена продолжением по Лебегу — Каратеодори из меры ν на полукольце $\mathcal{A} \subset \Sigma$. Простые функции, полученные из полукольца $\mathcal{A}$ (то есть вида $u = \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{a_j}, a_j \in \mathcal{A}$) будем называть *элементарными*.

Теорема 2.7.4. При сделанных предположениях элементарные функции образуют плотное множество в $L^p(\mu)$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$. Пускай $f \in L^p(\mu)$. $\exists \phi = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{e_j}, e_j \in \Sigma$ — простая функция, хорошо приближающая $f : \|f - \phi\|_{L^p} < \varepsilon$. Теперь достаточно приблизить ϕ, или даже каждое слагаемое ϕ элементарными функциями.

Для всякого $\delta > 0, e_j \in \Sigma$ найдём множество $a_j \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) : \|\chi_{e_j} - \chi_{e_j}\|_{L^p} < \delta$.

$\phi \in L^p(\mu) \Rightarrow \forall j : \mu(e_j) < \infty \Rightarrow \forall j : \exists A_j$ — σ-множество, такое, что $\mu(A_j \setminus e_j) < \frac{\delta}{2}$.

Как σ-множество, $A_j = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} b_k, b_k \in \mathcal{A}$. Положим $a_j^{(s)} = \bigcup\limits_{k=1}^{s} b_k \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$.

Но тогда $\int\limits_X |\chi_{a_j^{(s)}} - \chi_{e_j}|^p \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X |\chi_{a_j^{(s)}} - \chi_{e_j}| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X |\chi_{a_j^{(s)}} - \chi_{A_j}| \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_X |\chi_{A_j} - \chi_{e_j}| \,\mathrm{d}\mu \underset{\text{при больших } s}{\leqslant} \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}$ □

Следствие 2.7.1. *Линейные комбинации характеристических функций конечных прямоугольных параллелепипедов (или диадических кубов) образуют плотное множество в $L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leqslant p < +\infty$).*

Следствие 2.7.2. *Непрерывные функции с компактным носителем плотны в $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого двоичного куба K: $\exists$ непрерывная функция v с компактным носителем $\|\chi_K - v\| < \varepsilon$. Приблизим $\chi_{\left[\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}\right]}$ ломаной, которая равна 1 на $\left[\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}\right]$, и равна нулю в $\varepsilon/2$-окрестности $\left[\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}\right]$.

Теперь если n — любое, то $K = I_1 \times \dots \times I_n$, перемножим функции, приближающие I_j. □

Пусть $t \in \mathbb{R}^n, f$ — функция на $\mathbb{R}^n$. Тогда сдвиг f на t — это $f_t(x) = f(x+t)$ (иногда пишут минус).

Теорема 2.7.5 (Непрерывность сдвига в среднем)**.** Если $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leqslant p < +\infty$, то $\|f - f_t\|_{L^p} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдём v — непрерывную функцию с компактным носителем, такую, что $\|f - v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$.

$$\|f - f_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \|f - v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v - v_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v_t - f_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant 2\varepsilon + \|v - v_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Осталось доказать ту же теорему для непрерывной функции с компактным носителем, а она очевидна из теоремы Кантора — функции v и v_t равномерно непрерывны.

Чуть подробнее: выберем $\delta > 0$, найдётся шар $\overline{B}$, такой, что он содержит δ-окрестность $\operatorname{supp}(v)$. На нём $\forall \varepsilon' > 0 : \exists \delta' \in (0, \delta) : |x - y| < \delta' \Rightarrow |v(x) - v(y)| < \varepsilon'$. Интегрируя по шару $\overline{B}$ с конечной мерой, получаем $\|v - v_t\| \leqslant |\overline{B}|\varepsilon'^{1/p}$ и ε' можно сделать сколь угодно малым. □

Замечание (Следствие неравенства Гёльдера). $\mu(X) < +\infty \Rightarrow L^p(\mu) \subset L^s(\mu)$ для $p \geqslant s$.

Доказательство. При $p = s$ доказывать нечего, считаем $p > s$. Положим $r = \frac{p}{s} > 1$, к нему есть сопряжённый показатель r'.

Пускай $f \in L^p(\mu)$.

$$\int\limits_X |f|^s \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X |f|^s \cdot 1 \,\mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int\limits_X (|f|^s)^r \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/r} \cdot \left(\int\limits_X (1)^{r'} \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/r'} = \left(\int\limits_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/r} \cdot \mu(X)^{1/r'}$$

□

Отсюда видно, что $\mu(X) = 1$, то $\|f\|_{L^s(\mu)} \leqslant \|f\|_{L^p(\mu)} \cdot \mu(X)^{\frac{1}{sr'}}$, что особенно красиво при *вероятностной мере* — $\mu(X) = 1$.

В случае конечной меры следствие можно применять к функциям, сосредоточенных на множествах конечной меры.

Введём ещё пространство $L^\infty(\mu)$ — множество функций, таких, что $\exists A \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} : |f| \leqslant A$ почти всюду.

$L^\infty(\mu)$ — класс всех *существенно ограниченных* функций.

Если f — существенно ограниченная функция, то среди всех существенных верхних границ $\{K \| f(x)| \leqslant K \text{ почти всюду}\}$ найдётся наименьшая. Назовём её

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf \{K | K \text{ есть существенная верхняя грань для } f\}$$

Теорема 2.7.6. Пусть $A = \operatorname{ess\,sup} f$, тогда A — существенная граница f.

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$, тогда $A + \frac{1}{n}$ — существенная верхняя граница f. Тем самым, $\exists E_n : |E_n| = 0, f(x) \leqslant A + \frac{1}{n}$ при $x \notin E_n$. Выберем $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Тогда $f(x) \leqslant A$ при $x \notin E$, но $\mu(E) = 0$. □

Замечание. Пусть f существенно ограниченна, $A = \operatorname{ess\,sup} f$. Тогда $\exists E : \mu(E) = 0 \Rightarrow \sup\limits_{x \in X \setminus E} f(x) = A$.

Определение 2.7.1 (Норма $f \in L^\infty(\mu)$). $\|f\|_{L^\infty(\mu)} = \operatorname{ess\,sup}_X |f|$.

Если в пространстве L^∞ отождествить функции, отличающиеся на множестве меры нуль, то норма станет нормой.

Расстояние между функциями в данном пространстве $d(f, g) = \|f - g\|$, неравенство треугольника здесь очевидно:

$$\|u + v\|_{L^\infty} \leqslant \|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}$$

Теорема 2.7.7. $L^\infty(\mu)$ полно.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность Коши в $L^\infty(\mu)$, то есть $\operatorname{ess\,sup}_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| \underset{\min(n,m)\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Тогда найдутся множества $E_{n,m} : \operatorname{ess\,sup}|f_n - f_m| = \sup\limits_{x\notin E_{n,m}} |f_n(x) - f_m(x)|$.

Положим $E = \bigcup\limits_{n,m} E_{n,m}$, $\mu E = 0$. Тогда $\{f_n\big|_{X\setminus E}\}$ — последовательность Коши на пространстве ограниченных функций на E. Тем самым, $f_n \rightrightarrows f$ равномерно на $X \setminus E$. Доопределим f на E как угодно, её класс эквивалентности в L^∞ не поменяется. □

В неравенстве Гёльдера до сих пор рассматривались $p, p' : \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ при $1 < p, p' < \infty$. Если же подставить одно из p, p' равным 1, то второе станет равным ∞. Естественно считать 1 и ∞ сопряжёнными показателями.

Неравенство Гёльдера говорило, что $\int\limits_X |fg| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \|f\|_{L^p(\mu)} \cdot \|g\|_{L^{p'}(\mu)}$.

Факт 2.7.1. *Неравенство Гёльдера сохраняется при $p = 1$ или $p = \infty$.*

Доказательство. Пусть $p = 1$. $|f(x)| \cdot |g(x)| \leqslant |f(x)| \cdot \|g\|_{L^\infty(\mu)}$ почти всюду. Интегрируя это неравенство, получаем

$$\int\limits_X |f| \cdot |g| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X |f(x)| \,\mathrm{d}\mu \cdot \|g\|_{L^\infty(\mu)} = \|f\|_{L^1(\mu)} \cdot \|g\|_{L^\infty(\mu)}$$

□

Замечание. Пусть $\mu(X) = 1$ (или просто конечна). Тогда $\|f\|_{L^p(\mu)} \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mu)}$ при любом $p < \infty$.

Доказательство.

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int\limits_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_X \|f\|^p_{L^p(\mu)} \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = \|f\|_{L^p(\mu)\cdot\mu(X)}$$

□

Пусть $\mu(X) = 1$. Зафиксируем измеримую f, рассмотрим строго возрастающую функцию

$$p \mapsto \|f\|_{L^p(\mu)}$$

Если $f \notin L^p(\mu)$, то будем считать $\|f\|_{L^p} = \infty$.

Упражнение 2.7.1. $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$.

2.7.2 Связь интегралов Лебега и Римана

Теорема 2.7.8. Пусть f — функция на отрезке $\langle a, b\rangle$, интегрируема по Риману — Дарбу. Тогда f суммируема, и интеграл Лебега такой же.

Доказательство. В данной постановке простые функции — линейные комбинации характеристических функций отрезков, $\phi = \sum\limits_{j=1}^N c_j \chi_{I_j}$. В этой лекции они назывались элементарными, так и продолжим их называть.

Простые функции интегрируемы и по Риману, и по Лебегу, и интеграл у них один и тот же.

Пусть $\langle a, b\rangle = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k$ — разбиение $\Delta = \{I_1, \dots, I_k\}$.

Зададим $\phi_\Delta = \sum\limits_{j=1}^{k} (\sup\limits_{I_j} f)\chi_{I_j}, \psi_\Delta = \sum\limits_{j=1}^{k} (\inf\limits_{I_j} f)\chi_{I_j}$. Тогда $\int\limits_{\langle a,b\rangle} \phi_\Delta$ — верхняя сумма Дарбу для f по отрезку $\langle a,b\rangle$, $\int\limits_{\langle a,b\rangle} \psi_\Delta$ — нижняя сумма Дарбу.

Понятно, что $\psi_\Delta \leqslant f \leqslant \phi_\Delta$ всюду на $\langle a,b\rangle$, причём для измельчения Δ' верно, что

$$\psi_\Delta \leqslant \psi_{\Delta'} \leqslant f \leqslant \phi_{\Delta'} \leqslant \phi_\Delta$$

Критерием интегрируемости по Риману является то, что $\operatorname{osc}_{I_j} f$ могут быть сколь угодно малыми, то есть $\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta : \int\limits_{\langle a,b\rangle} (\phi_\Delta - \psi_\Delta) \leqslant \varepsilon$.

Выберем $\varepsilon = \frac{1}{n}$, построим разбиения Δ_n так, что каждое следующее является измельчением предыдущего.

Тогда $\int\limits_{\mathbb{R}} (\phi_n - \psi_n)\,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_{\mathbb{R}} |\phi_n - \psi_n|\,\mathrm{d}\lambda < \frac{1}{n}$.

Отсюда следует, что существует последовательность индексов (?) n_j, таких, что $\phi_{n_j} - \psi_{n_j} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ почти всюду. Таким образом, ψ_n и ϕ_n стремятся к f почти всюду, тем самым f измерима!

Теперь $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_n \leqslant$ интеграл Лебега или Римана $f \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi_n$. □

Интересный факт (Теорема Лебега). Функция f на конечном отрезке интегрируема по Риману $\iff$ множество точек разрыва f имеет меру нуль.

Замечание. Пусть $f \geqslant 0$, f интегрируема в смысле Римана несобственным образом на конечном или бесконечном интервале $\langle \alpha, \beta\rangle$. Тогда f суммируема на $\langle \alpha, \beta\rangle$.

Доказательство. Например, пусть особенность на конце β: f интегрируема по Риману на любом интервале $\langle \alpha, \beta - \delta\rangle$, причём $\exists \lim\limits_{\delta\to 0} \int\limits_{\alpha}^{\beta-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x$. Пускай $f_n = f \cdot \chi_{\left\langle \alpha, \beta - \frac{1}{n}\right\rangle}$. Тогда $f_n \nearrow f$, по теореме Леви предельная функция тоже суммируема, причём её интеграл — предел интегралов f_n. □

Замечание. Если функция знакопеременна, то интегрировать всё ещё бывает полезно в несобственном смысле: $\frac{\sin x}{x}$ не суммируема на $[0, \infty)$, но можно писать

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

Лекция XI

15 ноября 2023 г.

2.8 Теоремы Тонелли и Фубини

Рассмотрим два пространства с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ ($\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — σ-алгебры, μ, ν — счётно-аддитивные меры на $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно).

Рассмотрим полукольцо $\mathcal{P} = X \times Y$ обобщённых прямоугольников: $c \in \mathcal{P} \iff c = a \times b$ для $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$.

Предложение 2.8.1. *Тогда мера $\lambda \coloneqq \mu \otimes \nu$ на $\mathcal{P}$ (определённая так: $\lambda(a \times b) = \mu(a)\nu(b)$) счётно-аддитивна.*

Доказательство. Выберем $\{a_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}, \{b_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{B}, \{c_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{P}$ так, что $c_j = a_j \times b_j$. Пусть c_j дизъюнктны; положим $c \coloneqq \coprod\limits_{j=1}^\infty c_j$, пусть $c \in \mathcal{P}$.

Надо проверить, что $\lambda(c) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda(c_j)$.

Рассмотрим равенство $\chi_a(x)\chi_b(y) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \chi_{a_j}(x)\chi_{b_j}(y)$. При каждом фиксированном x обе части — измеримые функции от y.

Интегрируя, получаем по теореме Леви

$$\chi_a(x) \underbrace{\int\limits_Y \chi_b(y)\,\mathrm{d}\nu(y)}_{\nu(b)} = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{a_j}(x) \underbrace{\int\limits_Y \chi_{b_j}\,\mathrm{d}\nu(y)}_{\nu(b_j)}$$

Это равенство опять интегриуется, уже по x. В результате действительно получаем $\mu(a)\nu(b) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(a_j)\nu(b_j)$. □

Применяя теорему Лебега — Каратеодори, можно продолжить меру λ, результат тоже обозначают $\mu \otimes \nu$, и называют *произведением мер* μ и ν.

Пусть имеется несколько пространств с мерой $(X_1, \mu_1), \dots, (X_n, \mu_n)$. Можно определить меру произведения $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$. В произведении, вообще говоря, надо указать порядок, но оказывается, что произведение мер ассоциативно.

Пример. Рассмотрим $\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Пусть λ_n, λ_k — стандартные меры Лебега на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$. Тогда оказывается, что $\lambda_n \otimes \lambda_k = \lambda_{n+k}$.

Можно заметить, что на обобщённых прямоугольниках мера произведения одна и та же, и применяя теорему об единственности, получаем $\lambda_n \otimes \lambda_k = \lambda_{n+k}$. (причём на само деле неважно, что обобщённые прямоугольники берутся из евклидова пространства, это проверяет ассоциативность в общем виде)

Пускай $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ — пространства со счётно-аддитивными мерами, обе меры полны и обе σ-конечны. В теоремах Тонелли и Фубини теоретически можно обойтись и без этих двух условий, но требуются дополнительные слова. Пусть $\lambda = \mu \otimes \nu$.

Теорема 2.8.1 (Тонелли)**.** Пусть f — λ-измеримая функция на $X \times Y$, $f \geqslant 0$. Тогда

1. Для μ-почти всех $x \in X$: $f(x, \_)$ измерима на Y.
2. Функция $\phi(x) = \int\limits_Y f(x, \_)\,\mathrm{d}\nu$ измерима на X.
3. $\int\limits_X \phi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int\limits_{X \times Y} f\,\mathrm{d}\lambda$.

Доказательство. Назовём функцию f допустимой, если она определена на $X \times Y$, и удовлетворяет всем трём условиям.

1. Если $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$, то $\chi_{a \times b}$ допустима: $\chi_{a \times b}(x, y) = \chi_a(x)\chi_b(y)$.
2. Неотрицательные простые (элементарные) функции, построенные по полукольцу $\mathcal{P}$, допустимы.
    - Если f, g — допустимы, $\alpha, \beta \geqslant 0$, то $\alpha f + \beta g$ тоже допустима.
    - Если f, g — допустимы и f суммируема, причём $0 \leqslant g \leqslant f$, то $g - f$ тоже допустима.

    Доказательство. Пусть $\phi(x) = \int\limits_X f(x, \_)\,\mathrm{d}\nu$. В силу 3. она суммируема, откуда ϕ конечна почти всюду. Пусть $\psi(x) = \int\limits_X g(x, \_)\,\mathrm{d}\nu$. Так как $\psi \leqslant \phi$, то ψ тоже конечна почти всюду, тогда дальше всё хорошо. □

3. Пусть f_n — допустимые функции на $X \times Y$, пусть $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \dots$, пусть $f(x,y) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y)$. Автоматически f измерима. Тогда f тоже допустима.

Доказательство. Пускай $E_n = \{x \in X | f_n(x, \_) \text{ не измерима}\}$. $\mu E_n = 0$, так как f_n допустимы. Положим $E \coloneqq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_n$, $\mu E = 0$.

$x \notin E \Rightarrow$ все функции $f_n(x, \_)$ измеримы на Y. Имеется монотонная сходимость $f_n \nearrow f$, значит $f(x, \_)$ тоже измерима на Y при $x \notin E$.

Построим $\phi(x) = \int\limits_Y f(x, \_) \,\mathrm{d}\nu, \phi_n(x) = \int\limits_Y f_n(x, \_) \,\mathrm{d}\nu$. По теореме Леви (относительно меры ν) для $x \notin E : \phi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x)$. Тем самым ϕ измерима, как предел измеримых функций.

Более того, $\phi_n \nearrow \phi$, опять по теореме Леви (относительно меры μ):

$$\int\limits_X \phi \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \phi_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{X\times Y} f_n \,\mathrm{d}\lambda \underset{\text{теорема Леви относительно } \lambda}{=} \int\limits_{X\times Y} f \,\mathrm{d}\lambda$$

□

4. Пусть f_n — допустимые функции на $X\times Y$, пусть $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \dots$, пусть $f(x,y) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y)$. Автоматически f измерима. Если f_1 суммируема, то f тоже допустима.

Доказательство. Аналогично предыдущему пункту. □

5. Если $A \subset X \times Y$ — σ-множество. то χ_A допустима.

Доказательство. Представим A в виде $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$. $\sum\limits_{j=1}^{N} \chi_{A_j} \underset{n\to\infty}{\nearrow} \chi_A$. □

6. Если $A \subset X \times Y$ — $\delta\sigma$-множество конечной меры λ, то χ_A допустима.

Доказательство. Представим A в виде $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, где $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, A_j — σ-множества конечной меры. $\chi_{A_j} \underset{n\to\infty}{\searrow} \chi_A$. □

7. Если $e \subset X \times Y$ измеримо, и $\lambda(e) = 0$, то χ_e допустимо.

Доказательство. Пусть $\overline{e}$ — $\delta\sigma$-множество, такое, что $\overline{e} \supset e$, и $\lambda\left(\overline{e}\right) = 0$.

Тогда $\chi_e \leqslant \chi_{\overline{e}}$. $\chi_{\overline{e}}$ допустима, в частности, $\chi_{\overline{e}}(x, \_)$ измерима на Y для почти всех $x \in X$. Обозначив $\overline{\phi}(x) = \int\limits_Y \chi_{\overline{e}}(x, \_) \,\mathrm{d}\nu$ видим, что $\overline{\phi}$ измерима на X, а так как

$$\int\limits_X \overline{\phi} \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{X\times Y} \chi_{\overline{e}} \,\mathrm{d}\lambda = 0$$

то $\overline{\phi}(x) = 0$ для почти всех $x \in X$.

Пусть $E = \left\{x \in X \middle| \overline{\phi}(x) \neq 0\right\}$. Для $x \notin E : \int\limits_Y \chi_{\overline{e}}(x, \_) \,\mathrm{d}\nu = 0$. Иными словами, $\nu\left\{y \in Y | (x,y) \in \overline{e}\right\} = 0$.

Но тогда из полноты меры (здесь мы ей пользуемся в первый раз) $\nu\left\{y \in Y | (x,y) \in e\right\} = 0$. Тогда любая функция на e измерима, в частности, $\chi_e(x, \_)$ измерима на Y.

Зная измеримость χ_e уже несложно доказать, что в пунктах 2 и 3 все интегралы равны нулю: в частности, $\phi(x) = \int\limits_Y \chi_e(x, \_) \,\mathrm{d}\nu$ равна нулю всюду кроме E. □

8. Если $A \subset X \times Y$ — измеримое множество относительно меры λ, причём $\lambda(A) < +\infty$, то χ_A допустима.

   Доказательство. $\exists\delta\sigma$-множество $\overline{A} \supset A$, такое, что $\lambda(\overline{A} \setminus A) = 0$. Применим $\chi_A = \chi_{\overline{A}} - \chi_{A \setminus \overline{A}}$. □

9. Пусть f — простая функция относительно σ-алгебры λ-измеримых множеств, $f \geqslant 0$. Иными словами,

$$f = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{e_j}, \alpha_j \geqslant 0, e_i \cap e_j = \varnothing \text{ (при } i \neq j)$$

   Если $\forall j : \lambda e_j < +\infty$, то f допустима.

10. Пусть f — неотрицательная измеримая функция на $X \times Y$, $\lambda\{(x,y) | f(x,y) \neq 0\} < +\infty$. Тогда f допустима.

    Доказательство. $\exists f_n$ — простые функции, $0 \leqslant f_n \leqslant f$, $f_n \nearrow f$. Все f_n допустимы, значит и f допустима. □

11. Все неотрицательные измеримые функции допустимы.

    Доказательство. $\exists X_1 \subset X_2 \subset \ldots$, такие, что $X = \bigcup\limits_i X_i$, и все $\mu(X_i) < +\infty$. Аналогично $\exists Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots$, такие, что $Y = \bigcup\limits_i Y_i$, и все $\mu(Y_i) < +\infty$. (Здесь мы пользуемся σ-конечностью в первый раз).

    Положим $f_n(x,y) = f(x,y)\chi_{X_n}(x)\chi_{Y_n}(y)$. f_n из пункта 10, значит, f допустима, так как $f_n \nearrow f$. □

□

Теорема 2.8.2 (Фубини)**.** Пусть $(X, \mu), (Y, \nu)$ — два пространства с мерой, $\lambda = \mu \otimes \nu$.

Если $f \in L^1(\lambda)$, то

- Для почти всех $x \in X : \phi(x) := \int\limits_Y f(x, \_) \, \mathrm{d}\nu$ суммируема на X.
- $\int\limits_X \phi \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{X \times Y} f \, \mathrm{d}\lambda$.

Доказательство. f суммируема $\Rightarrow f_+, f_-$ суммируемы по λ. К каждой из них применима теорема Тонелли. Вычитаем заключения теоремы Тонелли для f_+ и f_-. □

Задача 2.8.1. *Придумать функцию f, такую, что $\phi(x) := \int\limits_Y f(x, \_) \, \mathrm{d}\nu$ суммируема, но $f \notin L^1(\lambda)$.*

2.8.1 Как применять

Пусть f — λ-измеримая функция (про знак ничего не известно).

Чтобы доказать, что f суммируема, надо доказать, что $|f|$ суммируема.

По теореме Тонелли $|f|$ суммируема $\iff \int\limits_X \int\limits_Y |f|(x,y) \, \mathrm{d}\nu(y) \, \mathrm{d}\mu(x)$. Если интеграл сошёлся, то f тоже суммируема, и для исходной функции тоже можно сводить интеграл к повторному.

2.9 Свёртки. Приближение функций с помощью свёрток

Пускай f, g — измеримые функции на $\mathbb{R}^n$.

Определение 2.9.1 (Свёртка $f * g$)**.** $(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y$. Свёртка определена в тех точках, где интеграл определён.

Рассмотрим $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto (y, x-y)$. L линейно, значит, L, L^{-1} измеримы по Лебегу. Определив $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (u, v) \mapsto f(u)g(v)$ видим, что T измерима, откуда $(T \circ L)(x, y) = f(y)g(x-y)$ тоже измерима.

Теорема 2.9.1. Если $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то $(f * g)$ определена почти всюду, и $\|f * g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$.

Доказательство. Рассмотрим $\phi(x, y) = |f(x)| \cdot |g(x-y)|$. Она неотрицательна, применяем теорему Тонелли:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \phi \,\mathrm{d}\lambda_{2n} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot |g(x-y)| \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)| (\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| \,\mathrm{d}x) \,\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$$

По теореме Тонелли ϕ суммируема, тем самым, $(x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$ тоже суммируема. По теореме Фубини $(f * g)(x)$ определена для почти всех x, причём она суммируема.

$$\int\limits_{R^n} |(f * g)(x)| \,\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)| \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$$

□

Замечание. Неформально говоря, если сворачивать f с какими-то хорошими свойствами, и g с какими-то другими хорошими свойствами, то свёртка обладает всеми хорошими свойствами каждой из них.

Утверждение 2.9.1. *$f * g = g * f$ всегда, когда существует:*

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) \,\mathrm{d}y = \left\| \begin{array}{c} z = x - y \\ y = x - z \end{array} \right\| = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z) \,\mathrm{d}z$$

Упражнение 2.9.1. *Свёртка ассоциативна: $f * (g * h) = (f * g) * h$ всегда, когда существует.*

Лекция XII

22 ноября 2023 г.

2.9.1 Меры с плотностью

Пусть (X, Σ, μ) — пространство с мерой. Пусть $\phi \geqslant 0$ — измеримая функция на X.

Можно определить меру, индуцированную функцией ϕ: $\nu(e) = \int\limits_e \phi \,\mathrm{d}\mu$ для $e \in \Sigma$. Тогда ϕ называется плотностью меры ν относительно μ.

Куда должна бить $\phi \geqslant 0$?

1. Можно считать, что $\phi : X \to \mathbb{R}$, но, возможно, меняет знак. Надо предположить, что либо ϕ_+, либо ϕ_- суммируемы.

   Тогда сохраняется счётная аддитивность: $e = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} e_i \Rightarrow \nu(e) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \nu(e_i)$. Тем не менее, всякие монотонности могут перестать выполняться, так как функция перестала быть неотрицательной.

2. Можно считать, что $\phi : X \to \mathbb{C}$. Комплексный интеграл берётся отдельно по вещественной и мнимой частям:
$$\int\limits_e (\alpha + \beta i)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_e \alpha\,\mathrm{d}\mu + i\int\limits_e \beta\,\mathrm{d}\mu$$

В обоих случаях ν перестаёт быть мерой в заявленном определении, это просто какая-то счётно-аддитивная функция множества, и ϕ во всех случаях называется её плотностью.

Интегрирование по мере ν

Пусть ν определена, как выше.

Факт 2.9.1. *Если $g \geqslant 0$ — измеримая функция на X, то* $\int\limits_X g\,\mathrm{d}\nu = \int\limits_X g\phi\,\mathrm{d}\mu$.

Доказательство. Формула верна для $g = \chi_e$:
$$\int\limits_X \chi_e\,\mathrm{d}\nu = \nu(e) = \int\limits_X \chi_e\phi\,\mathrm{d}\mu$$

Значит, формула верна для неотрицательных простых функций.

Существуют неотрицательные простые $g_n \nearrow g$, применяем теорему Леви. □

Следствие 2.9.1. *Неотрицательная функция g ν-суммируема $\iff$ $g\phi$ μ-суммируема.*

Следствие 2.9.2. *Тогда h (возможно, меняющая знак) ν-суммируема $\iff$ $h\phi$ μ-суммируема, причём* $\int\limits_X h\,\mathrm{d}\nu = \int\limits_X h\phi\,\mathrm{d}\mu$.

2.9.2 Образ меры

Пусть $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ — два пространства, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — σ-алгебры подмножеств в X и Y соответственно.

Пусть $F : X \to Y$ измеримо относительно $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Пускай $\mu \geqslant 0$ — счётно-аддитивная мера на $(X, \mathcal{A})$. Её *образ* $F^0(\mu) = \nu$ — счётно-аддитивная мера на $(Y, \mathcal{B})$, такая, что $\nu(b) = \mu(F^{-1}(b))$. Счётная аддитивность следует из того, что прообраз уважает все теоретико-множественные операции.

Интегрирование по мере ν

Пусть ν определена, как выше.
$$\int\limits_Y \chi_e\,\mathrm{d}\nu = \nu(b) = \int\limits_X \chi_{F^{-1}(b)}\,\mathrm{d}\mu$$

Заметим, что $\chi_{F^{-1}(b)} = \chi_b \circ F$.

Факт 2.9.2. *Если $g \geqslant 0$ — измеримая функция на X, то* $\int\limits_X g\,\mathrm{d}\nu = \int\limits_X g \circ F\,\mathrm{d}\mu$.

Доказательство. Формула верна для $g = \chi_e$. Значит, формула верна для неотрицательных простых функций.

Существуют неотрицательные простые $g_n \nearrow g$, применяем теорему Леви (два раза, в левой и правой частях равенства). $\square$

Все замечания из предыдущего раздела повторяются.

Следствие 2.9.3. *Неотрицательная функция g ν-суммируема $\iff$ $g\phi$ μ-суммируема.*

Следствие 2.9.4. *Тогда h (возможно, меняющая знак) ν-суммируема $\iff$ $h\phi$ μ-суммируема, причём $\int\limits_X h\,\mathrm{d}\nu = \int\limits_X h\phi\,\mathrm{d}\mu$.*

Данная формула очень полезна при замене переменной в интеграле.

Например, ранее записанное равенство $\int\limits_X f(x-y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_X f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ видно из данной формулы при $g(y) = x - y$ — здесь образ меры будет её самой.

2.9.3 Свойства свёртки

Теорема 2.9.2. Если g лежит в $L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

Доказательство. Пусть $p = \infty$.

$$|(f*g)(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\cdot|g(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \underbrace{\|f\|_{L^\infty}}_{\operatorname{ess\,sup}(f)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,\mathrm{d}y$$

При $p = 1$ доказано выше: (теорема 2.9.1).

Теперь пусть $1 < p < \infty$, q — сопряжённый к p показатель.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|^p\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x = \cdots$$

Определим из меры Лебега новую меру с плотностью $|g(y)|$: $\nu(e) \coloneqq \int\limits_e |g(y)|\,\mathrm{d}y$. Это конечная мера на $\mathbb{R}^n$, так как $g \in L^1$.

$$\cdots = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\cdot 1\,\mathrm{d}\nu(y)\right)^p\mathrm{d}x \leqslant \cdots$$

Теперь применим неравенство Гёльдера относительно данной меры ν.

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p\,\mathrm{d}\nu(y)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}1^q\,\mathrm{d}\nu\right)^{\frac{1}{q}}\right]^p\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\cdot\|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} = \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}}\|f\|_{L^1}^p\|g\|_{L^1}$$

Тем самым, $\|f*g\|_{L^p} \leqslant \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}+1}\|f\|_{L^p}^p$ и $\|f*g\|_{L^p}^p \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^1}$.

$\square$

Упражнение 2.9.2 (Неравенство Юнга). *Пусть $f \in L^s(\mathbb{R}^n), g \in L^t(\mathbb{R}^n)$, где $s, t > 1$. Предположим, что $\frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{t} - 1$, и пусть $r \geqslant 1$. Тогда $\|f*g\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^s}\|g\|_{L^t}$.*

Упражнение 2.9.3. *Если* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *и* $1<p,q<\infty$, *то* $\|f*g\| \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$, *и при этом* $\|f*g\|$ *непрерывна и стремится к нулю на* ∞.

Факт 2.9.3. *Пусть* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}x = 1$. *Тогда для* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *при* $1 \leqslant p \leqslant \infty$: *Надо проверить, что всё сходится, тут было немного не это написано.*

$$\|f*g-f\|_{L^p}^p \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(x)|^p\,\mathrm{d}y\cdot|g(x)|\,\mathrm{d}x$$

Доказательство. $(f*g)(x)-f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y - \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbb{R}^n}(f(x-y)-f(x))g(y)\,\mathrm{d}y$
Возьмём модуль, возведём в степень p, и проинтегрируем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)-f(x)|^p\,\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)||g(y)|\,\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x$$

Далее вводим меру $\nu(e)=\int\limits_e |g(y)|\,\mathrm{d}y$, и опять применяем неравенство Гёльдера к $|f(x-y)-f(x)|\cdot 1$.

Замечание. При $p=\infty$ тоже верно, доказательство другое (проще). $\square$

Будем обозначать пространство *бесконечно дифференцируемых функций на* $\mathbb{R}^n$ *с компактным носителем* значком $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2.9.3. Пусть u — непрерывна, с компактным носителем, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Тогда $f*u$ непрерывна. Если $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то $f*u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство.

$$(f*g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)u(x-y)\,\mathrm{d}y = \cdots$$

Проверим непрерывность в $x_0 \in \mathbb{R}^n$, рассмотрим $B_r(x_0)$. Пусть $S = \operatorname{supp} u$. Теперь можно считать, что интегрирование берётся по компакту $K = \overline{B_r(x_0)} - S$.

$$\cdots \underset{\text{при } x\,\in\, B_r(x_0)}{=} \int\limits_K f(y)u(x-y)\,\mathrm{d}y$$

Заметим, что для всякой последовательности $x_j \to x_0 : u(x_j-y)\to u(x_0-y)$, откуда $|f(y)u(x_j - x_0)| \leqslant C|f(y)|$, и можно применить теорему Лебега о мажоранте.

Лемма 2.9.1. *Пусть* $K \subset \mathbb{R}^n$ *— компактное множество,* $I=(a,b)\subset\mathbb{R}$ *— интервал,* $v : K\times I \to \mathbb{R}$. *Пусть* $\exists \frac{\partial}{\partial t}v(x,t)$, *и она непрерывна на* (a,b) *при всяком фиксированном* $x \in K$. *Также предположим наличие суммируемой мажоранты* w *на* K: *для всех* $t\in(a,b) : \left|\frac{\partial}{\partial t}v(x,t_0)\right| \leqslant w(x)$.

Определим $\phi(t) = \int\limits_K v(x,t)\,\mathrm{d}x$ *(предполагаем, что* $v(x,t)$ *суммируема при всяком* t*).* *Тогда* ϕ *дифференцируема на* (a,b), *и*

$$\phi'(t_0) = \int\limits_K \frac{\partial}{\partial t}v(x,t_0)\,\mathrm{d}x$$

Доказательство леммы.

Выберем последовательность $t_n \to t_0$, запишем разностное отношение $\frac{\phi(t_n)-\phi(t_0)}{t_n-t_0} = \int\limits_K \frac{v(x,t_n)-v(x,t_0)}{t_n-t_0}\,\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi'(t_0)$ По формуле Лагранжа $\frac{v(x,t_n)-v(x,t_0)}{t_n-t_0} = \frac{\partial}{\partial t}v(x,\xi)$ для некой $\xi\in(t_n,t_0)$. $\left|\frac{\partial}{\partial t}v(x,\xi)\right| \leqslant w(x)$, значит, у подынтегральной функции есть мажоранта, и можно перейти к пределу. $\square$

Заметим, что $(f * u)(x) = \int\limits_K f(y)u(x-y)\,\mathrm{d}y$, и её действительно можно дифференцировать бесконечно много раз (?). $\square$

Замечание. Пусть $\operatorname{supp} f = A, \operatorname{supp} g = B$. Тогда $\operatorname{supp}(f * g) \subset A + B$.

Определение 2.9.2 (Аппроксимативная единица для $\mathbb{R}^n$)**.** Последовательность функций $g_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g_j \geqslant 0, \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_j = 1, \forall r > 0 : \int\limits_{|y|>\delta} g_j(y)\,\mathrm{d}y \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Теорема 2.9.4. Пусть g_j — аппроксимативная единица, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $f * g_j \xrightarrow[j\to\infty]{L^p} f$, то $\|f * g_j - f\|_{L^p} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Если f непрерывна с компактным носителем (достаточно потребовать равномерной непрерывности), то $f * g_j \rightrightarrows f$

Доказательство. При $1 \leqslant p < \infty$:

$$\|(f * g_j) - f\|_{L^p} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p g_j(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p\,\mathrm{d}x g_j(y)\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int\limits_{|y|<\delta} g_j(y) \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p\,\mathrm{d}x + \int\limits_{|y|\geqslant\delta} g_j(y) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|f(x-y) - f(x)|^p}_{\leqslant 2^p(|f(x-y)|^p + |f(y)|^p)}\,\mathrm{d}x$$

$2^p \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p + |f(y)|^p\,\mathrm{d}x \leqslant 2^{p+1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x$, и это конечно. Значит, по определению аппроксимативной единицы второе слагаемое мало при больших j.

Для первого слагаемого применим непрерывность сдвигов в L^p: $\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta : f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leqslant p < \infty$ при $|y| \leqslant \delta \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p\,\mathrm{d}x < \varepsilon$. Значит, оно тоже маленькое.

Теперь проверим равномерную сходимость. Так как f имеет компактный носитель, то она равномерно непрерывна: $\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Пусть $K = \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$.

$$(f * g_j)(x) - g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g_j(y)\,\mathrm{d}y - f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(f(x-y) - f(x)\right) g_j(y)\,\mathrm{d}y$$
$$|(f * g_j)(x) - g(x)| \leqslant \int\limits_{|y|\leqslant\delta} |f(x-y) - f(x)| g_j(y)\,\mathrm{d}y + \int\limits_{|y|>\delta} \left(|f(x-y)| + |f(x)|\right) g_j(y)\,\mathrm{d}y \leqslant \varepsilon + 2K \int\limits_{|y|>\delta} g_y(y)\,\mathrm{d}y \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\square$

Факт 2.9.4. *Пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L^p(\mathbb{R}^n)$ для $1 \leqslant p < +\infty$.*

Доказательство. Построим специальную аппроксимативную единицу.

1. Пускай $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция с компактным носителем, $\phi = 0$ вне $(-1, 1)$.

   Например, $\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geqslant 1 \end{cases}$.

2. Положим $a \coloneqq \int\limits_{\mathbb{R}} \phi\,\mathrm{d}x$. Положим $\psi = \frac{\phi}{a}$. Это функция с единичным интегралом.

3. $\Psi(x_1, \ldots, x_n) \coloneqq \psi(x_1) \cdot \ldots \cdot \psi(x_n)$. Это функция с единичным интегралом, сосредоточенная на единичном кубе со стороной 2 и центром в нуле.

4. В качестве аппроксимативной единицы выберем $\Psi_j(x) = j^n \Psi(jx)$. Интеграл по-прежнему равен единице, так как якобиан скалярного умножения на j в $\mathbb{R}^n$ равен j^n.

Теперь выберем $\varepsilon > 0$, и функции $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ сопоставим g с компактным носителем, такую, что $\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon$. При больших j:

$$|g * \Psi_j - g\|_{L^p} < \varepsilon$$

$\square$

Лекция XIII

6 декабря 2023 г.

2.9.4 Слегка другой способ построения аппроксимативной единицы

Этот способ практически повторяет способ с предыдущей лекции, но тут не требуется уметь строить бесконечно дифференцируемую функцию с компактным носителем.

Пусть $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — суммируемая функция, отнормируем её так, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Теперь положим в качестве аппроксимативной единицы $\Phi_j(t) = j^n \Phi(jt)$. Интеграл по всему пространству Φ_j равен 1, так как якобиан домножения на j в $\mathbb{R}^n$ — это j^n. Наконец,

$$\int\limits_{|x|>\delta} \Phi_j(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{|x|>\delta} j^n \Phi(jx)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{|x|>j\delta} \Phi(jx)\,\mathrm{d}x \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Также можно вместо дискретного параметра j выбрать непрерывный параметр t. Пусть t мало, и пусть $\phi_t = \frac{1}{t^n}\Phi\left(\frac{x}{t}\right)$ — аппроксимативные единицы. Тогда для $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$: $g * \phi_t \xrightarrow[t\to 0]{L^p} g$.

Это разумеется правда, так как вместо обычной сходимости можно рассматривать сходимости по последовательностям, стремящимся к нулю.

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество положительной меры ($|K| > 0$). Можно также положить $\phi = \frac{\chi_K}{|K|}$, и $\phi_t(x) = \frac{1}{t}\phi\left(\frac{x}{t}\right)$. Это ещё один пример аппроксимативной единицы.

2.10 Преобразования меры при дифференцируемом отображении

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — открыто, пусть $F : G \to \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемая инъекция, и пусть дифференциал невырожден везде в G.

Пусть $e \subset G$ — измеримое множество. Научимся вычислять $|F(e)|$.

Теорема 2.10.1. $|F(e)| = \int\limits_e |J_F(x)|\,\mathrm{d}x$, где $J_F(x)$ — якобиан отображения F в точке x.

Прежде чем приступить к доказательству данной теоремы, вспомним несколько вещей.

Так, в условиях теоремы (можно рассмотреть исчерпывающую последовательность компактов для G, на них производная ограничена и F липшицева) для всякого измеримого $e \subset G$: $F(e)$ измеримо по Лебегу, и $|e| = 0 \Rightarrow |F(e)| = 0$.

Рассмотрим некоторое расширение понятия меры. Пусть (S, Σ) — пространство с σ-алгеброй.

Определение 2.10.1 (Знакопеременная мера)**.** Счётно-аддитивная (необязательно положительная) функция $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}$. Счётная аддитивность понимается в обычном смысле: для непересекающихся $e_j \in \Sigma : \nu\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} e_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu(e_j)$.

Из определения сразу следует, что сходимость должна быть абсолютной: формула верна с любой перестановкой.

Иногда такую меру называет *зарядом* — если обычная мера является аналогом массы, распределённой по всему пространству, то знакопеременная — аналог заряда, который сокращается при разных знаках.

Примеры (Знакопеременная мера).

- Пусть $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Можно определить $\nu(e) = \int\limits_e g(x)\,\mathrm{d}x$. Интеграл счётно-аддитивен, значит, ν — знакопеременная мера.
- Есть и другие меры (например, δ_0 — мера всякого множества равна 1, если оно содержит 0, и 0 иначе.)

Пусть (S, Σ, λ) — пространство с мерой $\lambda \geqslant 0$; предположим, что λ — σ-конечна. Пусть ν — знакопеременная мера на Σ.

Определение 2.10.2 (ν абсолютно непрерывна относительно λ)**.** $\forall e \in \Sigma : \lambda(e) = 0 \Rightarrow \nu(e) = 0$.

Интересный факт (Теорема Радона — Никодима). Следующие два условия эквивалентны.

- ν абсолютно непрерывна относительно λ.
- $\exists g \in L^1(\lambda) : \forall e \in \Sigma : \nu(e) = \int\limits_e g\,\mathrm{d}\lambda$.

Это весьма фундаментальная теорема, и у неё довольно длинное непростое доказательство. Нам эту теорему докажут в курсе функционального анализа, так как там есть некий трюк с гильбертовыми пространствами, позволяющий существенно упростить доказательство.

Если такая g существует, то она называется *плотностью* меры μ относительно меры λ. Также g зовут *производная Радона — Никодима*, причины к чему мы увидим ниже.

Замечание. Плотность абсолютно непрерывной меры ν единственна.

Доказательство. Если g_1, g_2 — две различные плотности, то $\forall e : \nu(e) = \int\limits_e g_1\,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_e g_2\,\mathrm{d}\lambda$, и значит $\int\limits_e (g_1 - g_2)\,\mathrm{d}\lambda = 0$. Рассматривая положительные и отрицательные части этой разности, получим, что она равна нулю почти всюду, что и требовалось. □

Замечание. $\nu \geqslant 0 \iff$ плотность $g \geqslant 0$.

Доказательство. g не может быть отрицательной на множестве положительной меры, иначе мера этого множества была бы меньше нуля. □

Вернёмся к ситуации дифференцируемого отображения $F : G \to \mathbb{R}^n$. Определим $\nu(e) = |F(e)|$ — образ меры Лебега λ_n на $F(G)$ при отображении F^{-1}.

Факт $|e| = 0 \Rightarrow \nu(e) = 0$ как раз и говорит, что ν абсолютно непрерывна относительно меры Лебега λ_n на G.

Рассмотрим $U = F(G)$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Пусть K_j — исчерпывающая последовательность компактов для U, и положим $L_j \coloneqq F^{-1}(K_j)$. Тогда L_j — исчерпывающая последовательность компактов для G, но нам важно даже не то, что они компактны, а то, что $\forall j : \nu(L_j) < \infty$.

Теперь рассмотрим *сужение меры* ν на L_j — это не совсем сужение в теоретико-множественном смысле, а просто мера, определённая на подмножествах L_j. Это сужение конечно, и тогда по теорема Радона — Никодима $\exists g \in L^1(L_j)$, такая, что $\forall e \in L_j : \nu(e) = \int\limits_e g_j\,\mathrm{d}\lambda$.

Теперь рассмотрим g_k для $k > j$. $\nu(e) = \int\limits_e g_k\,\mathrm{d}\lambda$. Понятно, что $g_k\big|_{L_j}$ —- плотность меры ν на L_j, и получается, что эти плотности согласованы: из единственности плотности $g_k\big|_{L_j} = g_j$ почти всюду. Тогда они «склеиваются» в одну измеримую функцию $g : G \to F(G)$, для которой всё верно: $\forall e \in G : |F(e \cap L_j)| = \int\limits_{e \cap L_j} g\,\mathrm{d}\lambda$, и можно перейти к пределу. Не исключено, что полученная

G не суммируема, что естественно — образ маленького множества даже при дифференцируемом отображении может очень сильно растянуться.

Следствие 2.10.1 (Вывод из теоремы Радона — Никодима)**.** *$\exists$ измеримая на G функция g, измеримая по Лебегу, такая, что $|F(e)| = \int\limits_e g(x)\,\mathrm{d}x$.*

Таким образом, такая функция g найдётся, осталось её как-то найти, а точнее, доказать, что это $|J_F(x)|$.

Вопрос. Как искать плотность h у (вообще говоря знакопеременной) меры ν на G, если известно, что такая плотность есть?

Известно, что $\nu(e) = \int\limits_e h(x)\,\mathrm{d}x$. Предположим, что данная функция h локально суммируема: $\forall x \in G : \exists U \ni x : \int\limits_U |h(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$. Функция, полученная из теоремы Радона — Никодима, именно такая.

Значит, плотность можно искать по кусочкам: $\forall e \in U \cap G : \nu(e) = \int\limits_e h(x)\chi_U(x)\,\mathrm{d}x$.

Интересный факт (Теорема о дифференцировании). Пусть B_r — шар (можно куб) радиуса r с центром в $0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда в этих условиях ($h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ — локально суммируема, $\nu(e) = \int\limits_e h(x)\,\mathrm{d}x$) почти всюду $h(x) = \lim\limits_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|}\nu(x + B_r)$.

В случае одномерного пространства $n = 1$ это оказывается теоремой Ньютона — Лейбница. Если h непрерывна в x, то доказательство работает то же самое, но оказывается, что это правда не только в случае непрерывной h.

Теорема 2.10.2 (Слабая теорема о дифференцировании)**.** $\forall h \in L^1(\mathbb{R}^n) : \exists$ последовательность r_n: $r_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, и почти всюду

$$\frac{1}{|B_{r_n}|} \int\limits_{x+B_{r_n}} h(y)\,\mathrm{d}y \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} h(x)$$

Доказательство. Это, конечно, частный случай теоремы о дифференцировании, но зато доказывается проще.

Построим аппроксимативную единицу по функции $\phi \coloneqq \frac{1}{|B_1|}\chi_{B_1}$.

Она будет иметь вид $\phi_r(x) = \frac{1}{r^n}\phi\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r^n|B_1|}\phi\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{|B_r|}\chi_{B_r}(x)$. Известно, что $h * \phi_r \overset{L^1(\mathbb{R}^n)}{\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}} h$.

Запишем

$$h * \phi_r = \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(y)\phi_r(x-y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(y)\frac{1}{|B_r|}\chi_{B_r}(x-y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{|B_r|}\int\limits_{|x-y|<r} h(y)\,\mathrm{d}y$$

Справа как раз стоит выражение, которое мы хотим показать, что стремится к $h(x)$. Сходимость в L^1 означает сходимость по мере, а раз имеется сходимость по мере, то имеется последовательность r_n, стремящаяся к нулю, такая что $h * \phi_{r_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} h$ почти всюду. $\square$

Осталось доказать, что всюду

$$\frac{|F(x+B_r)|}{|B_r|} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} |J_F(x)| \tag{$*$}$$

Раз доказав это, мы получим, что раз левая часть почти всюду сходится к плотности h, и тогда получится, что плотность как раз равна модулю якобиана.

Лемма 2.10.1 (Об искажении)**.** *Пусть $H : U \to \mathbb{R}^n$, выберем $x_0 \in U$, пусть H непрерывно дифференцируемо и $\mathrm{d}H(x_0, \_) = E$, тождественный оператор. Положим $y_0 \coloneqq H(x_0)$. Утверждается, что $\forall \varepsilon \in (0,1) : \exists \delta > 0 : r \in (0, \delta) \Rightarrow B_{r(1-\varepsilon)}(y_0) \subset H(B_r(x_0)) \subset B_{r(1+\varepsilon)}(y_0)$.*

Доказательство. Выберем маленький $u \in \mathbb{R}^n$. По определению дифференцируемости $H(x_0+u) = y_0 + \underbrace{\mathrm{d}H(x_0,u)}_{u} + v(u)$, где $v(u) = o(|u|)$.

Выберем $\varepsilon \in (0,1)$, по определению o-маленького: $\exists \delta > 0 : |u| < \delta \Rightarrow |v(u)| < \varepsilon |u|$. Тогда, действительно, $r < \delta \Rightarrow |H(x_0+u) - y_0| \leqslant |u| + |v(u)| \leqslant (1+\varepsilon)|u| \leqslant (1+\varepsilon)r$. Это доказывает правое включение.

Для доказательства левого включения возьмём H^{-1}, определённое в некоторой окрестности y_0, причём $\mathrm{d}H^{-1}(y_0, \_) = E$. Здесь уже доказано $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \rho < \delta \Rightarrow H^{-1}(B_\rho(y_0)) \subset B_{\rho(1+\varepsilon)}(x_0)$.

Применяя H ко включению, получаем $B_\rho(y_0) \subset H\left(B_{\rho(1+\varepsilon)}\right)(x_0)$. Обозначив $r = \rho(1+\varepsilon)$, получаем искомое включение, так как $B_{r(1-\varepsilon)} \subset B_{\frac{r}{1+\varepsilon}}$. □

Приступим к доказательству $(*)$. Пусть $A = \mathrm{d}F(x_0, \_)$.

$$\frac{\nu(B_r(x_0))}{|B_r(x_0)|} = \frac{|F(B_r(x_0))|}{|B_r(x_0|)} = \frac{\left|AA^{-1}F(B_r(x_0))\right|}{|B_r(x_0)|} = |\det A| \frac{\left|A^{-1}F(B_r(x_0))\right|}{B_r(x_0)} = \left\|\phi := A^{-1}F\right\| = |J_F(x_0)| \frac{|\phi(B_r(x_0))|}{B_r(x_0)}$$

Но раз $\det \phi(x_0, \_) = E$, то по теореме об искажении и принципу двух полицейских $\frac{|\phi(B_r(x_0))|}{B_r(x_0)} \xrightarrow[r \to 0]{} 1$:

$$\frac{r^n(1-\varepsilon)^n v}{r^n v} = \frac{|B_{r(1-\varepsilon)}(y_0)|}{|B_r(x_0)|} \leqslant \frac{|\phi(B_r(x_0))}{|B_r(x_0)|} \leqslant \frac{|B_{r(1+\varepsilon)}(y_0)|}{|B_r(x_0)|} = \frac{r^n(1+\varepsilon)^n v}{r^n v}$$

Лекция XIV

9 декабря 2023 г.

2.11 Мера Лебега на поверхностях

Пусть теперь $m \leqslant n$, и для $U \subset \mathbb{R}^m$ имеется гладкое инъективное $f : U \to \mathbb{R}^n$ со всюду невырожденным дифференциалом.

Тогда $\forall e \subset U : f(e)$ — какая-то m-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, и её m-мерная мера равна нулю, но есть же у поверхности какая-то площадь, и хочется уметь её вычислять.

2.11.1 Частный случай линейного f

Пусть $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор. Тогда $A(\mathbb{R}^m)$ — линейное подпространство размерности m в $\mathbb{R}^n$, и в нём есть какая-то своя m-мерная мера Лебега.

Пусть $e \subset \mathbb{R}^m$ — измеримо. Как вычислить $A(e)$?

Выберем ортонормированные базисы $e_1, \ldots, e_m$ — в $\mathbb{R}^m$ и $g_1, \ldots, g_m$ — в $A(\mathbb{R}^m)$. Пусть T — матрица оператора в этих базисах: $T_{i,j} = \langle Ag_i, e_j \rangle$. Тогда $\lambda(Ae) = |\det T| \cdot |e|$.

В этой формуле есть тот недостаток, что при определении T используется произвольно выбранный базис $g_1, \ldots, g_m$ в $A(\mathbb{R}^m)$. От этой проблемы можно избавиться так: $(\det T)^2 = \det(T^t T)$. Оказывается, матрица $T^t T$ выглядит приятно:

$$(T^t T)_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} \langle Ae_i g_j \rangle \langle Ae_k g_j \rangle$$

Так как g_i — ортонормированный базис, то выше написано скалярное произведение $\langle Ae_i, Ae_k \rangle$.

Обозначим эту матрицу за $\Gamma(A)$: $\Gamma(A)_{i,k} = \langle Ae_i, Ae_k \rangle$. Эта $\Gamma(A)$ называется *матрицей Грама* для оператора A. В частности, $\det \Gamma(A)$ — *определитель Грама* для оператора A.

Тем самым, для линейного $f = A : \lambda(Ae) = (\det\Gamma(A))^{1/2}|e|$. Несложно догадаться, что для нелинейного f формула будет такая (хотя мы ещё не определили меру $f(e)$, но догадаться-то можно):

$$\lambda(f(e)) = \int\limits_e (\det\Gamma(\mathrm{d}_f(x, \_)))^{1/2}\,\mathrm{d}x$$

Самым главным вопросом является — как определить меру Лебега на такой поверхности.

2.11.2 p-мера Хаусдорфа

Здесь произвольное $p > 0$. Нам понадобятся только случаи $p \in \mathbb{N}$, но теорию удобнее развивать для всех положительных p. Также всё это можно провернуть в произвольном метрическом пространстве.

Пусть $e \subset \mathbb{R}^n$ — любое (необязательно измеримое) подмножество. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим всевозможные не более, чем счётные, покрытия этого множества системой множеств $\{a_j\}$ ($e \subset \bigcup\limits_j a_j$), таких, что $\forall j : \operatorname{diam}(a_j) \leqslant \varepsilon$. Назовём любое такое покрытие ε-покрытием.

Положим $\mu_p(e, \varepsilon) = \inf \sum\limits_j \left(\frac{\operatorname{diam} a_j}{2}\right)^p$, где инфимум берётся по всем таким покрытиям $\{a_j\}$. Двойка в знаменателе стоит «по традиции», чтобы μ_p было больше похоже на меру Лебега.

Факт 2.11.1. $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow \mu_p(e, \varepsilon_1) \geqslant \mu_p(e, \varepsilon_2)$.

Доказательство. Все покрытия диаметра не более ε_2 являются и покрытиями диаметра не более ε_1. □

Раз так, то $\exists \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mu_p(e, \varepsilon) = \sup\limits_{\varepsilon > 0} \mu_p(e, \varepsilon) \overset{def}{=} \mu_p^*(e)$ (где-то супремум конечен, где-то бесконечен).

Факт 2.11.2. *μ_p^* — предмера на $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство.

- $\mu_p^*(\varnothing) = 0$.
- $e_1 \subset e_2 \Rightarrow \mu_p^*(e_1) \leqslant \mu_p^*(e_2)$, так как при уменьшении множества ε-покрытий становится больше, то есть $\forall \varepsilon > 0 : \mu_p(e_1, \varepsilon) \leqslant \mu_p(e_2, \varepsilon)$.
- Осталась счётная полуаддитивность: пусть $e \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} e_k$, тогда надо проверить, что $\mu_p^*(e) \leqslant \sum\limits_k \mu_p^*(e_k)$.

  Доказательство. Можно считать, что $\forall k : \mu_p^*(e_k) < \infty$, иначе доказывать нечего.

  Возьмём $\varepsilon > 0, \delta > 0$, для каждого k выберем ε-покрытие $\{a_{k,j}\}_k$ множества e_k, такое, что $\sum\limits_j \left(\frac{\operatorname{diam} a_{k,j}}{2}\right)^p < \mu_p(e_k, \varepsilon) + \frac{\delta}{2^k}$. Так как мера Хаусдорфа больше каждого из этих чисел, то они все конечны.

  Таким образом, $\{a_{k,j}\}_{k,j}$ — ε-покрытие e, откуда $\mu_p(e, \varepsilon) \leqslant \sum\limits_{j,k} \left(\frac{\operatorname{diam} a_{k,j}}{2}\right)^p \leqslant \sum\limits_k \mu_p(e_k, \varepsilon) + \delta$.

  Устремляя $\delta \to 0$, получаем $\mu_p(e, \varepsilon) \leqslant \sum\limits_k \mu_p(a_k, \varepsilon)$. □

□

Теперь можно применить теорему Лебега — Каратеодори, и получить настоящую меру. Хочется узнать, какие множества будут измеримыми после данной процедуры.

Факт 2.11.3. *Если* $\operatorname{dist}(e_1, e_2) > 0$*, то* $\mu_p^*(e_1 \cup e_2) = \mu_p^*(e_1) + \mu_p^*(e_2)$.

Доказательство. В определении $\mu_p(e, \varepsilon)$ можно ограничиться ε-покрытиями $\{a_j\}$, такими, что $\forall j : a_j \cap e \neq \varnothing$.

В силу счётной полуаддитивности $\mu_p^*(e_1 \cup e_2) \leqslant \mu_p^*(e_1) + \mu_p^*(e_2)$.

Пусть $\delta = \operatorname{dist}(e_1, e_2)$, рассмотрим $\varepsilon < \delta$. Пусть $\{a_j\}$ — ε-покрытие объединения, такое, что $\forall j : a_j \cap (e_1 \cup e_2) \neq \varnothing$. Тогда для каждого $j : a_j \cap e_1 = \varnothing$ либо $a_j \cap e_2 = \varnothing$. Стало быть

$$\sum_j \left(\frac{\operatorname{diam}(a_j)}{2}\right)^p = \sum_{j : a_j \cap e_1 \neq \varnothing} \left(\frac{\operatorname{diam}(a_j)}{2}\right)^p + \sum_{j : a_j \cap e_2 \neq \varnothing} \left(\frac{\operatorname{diam}(a_j)}{2}\right)^p \geqslant \mu_p(e_1, \varepsilon) + \mu_p(e_2, \varepsilon) \quad \square$$

Теорема 2.11.1. Пусть (X, d) — метрическое пространство, пусть η — предмера на X, причём $\forall e_1, e_2 \subset X : \operatorname{dist}(e_1, e_2) > 0 \Rightarrow \eta(e_1 \cup e_2) = \eta(e_1) + \eta(e_2)$. Тогда все замкнутые множества в X: η-измеримы.

Доказательство. Пусть $F \subset X$ замкнуто, проверим, что $\forall a \in X : \eta(a) = \eta(a \cap F) + \eta(a \setminus F)$. Из полуаддитивности достаточно проверять $\eta(a) \geqslant \eta(a \cap F) + \eta(a \setminus F)$.

Пусть $F_n = \left\{x \in X \middle| \operatorname{dist}(x, F) < \frac{1}{n}\right\}$. Из замкнутости F: $\bigcap\limits_{n \geqslant 1} F_n = F$. Пусть $B_n = a \setminus F_n$.

Если $x \in a \cap F$, а $y \in B_n$, то разумеется $\operatorname{dist}(x, y) \geqslant {}^1\!/_n$. Таким образом, заведомо $\eta(a) \geqslant \eta(a \cap F) + \eta(B_n)$. Так как B_n, возрастая, в объединении дают $a \setminus F$, то хочется поверить, что $\lim\limits_{n \to \infty} \eta(B_n) = \eta(a \setminus F)$. Запишем

$$a \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B_n \sqcup \bigsqcup_{j \geqslant n} (B_{j+1} \setminus B_j)$$

Из счётной полуаддитивности $\eta(a \setminus F) \leqslant \eta(B_n) + \sum\limits_{j \geqslant n} \eta(B_{j+1} \setminus B_j)$, но с другой стороны $\eta(a \setminus F) \geqslant \eta(B_n)$.

Значит, надо доказать, что $\sum\limits_{j \geqslant n} \eta(B_{j+1} \setminus B_j) \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$. Но это просто значит, что ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \eta(B_{j+1} \setminus B_j)$ сходится.

Разобьём ряд на два: $\sum\limits_{j=2k} \eta(B_{j+1} \setminus B_j) + \sum\limits_{j=2k+1} \eta(B_{j+1} \setminus B_j)$. Теперь все подряд идущие слагаемые отстоят друг от друга на положительное расстояние: $\operatorname{dist}(B_{2k+1} \setminus B_{2k}, B_{2k-1} \setminus B_{2k-2}) > 0$.

Стало быть, $\forall n : \sum\limits_{j=2k}^{j \leqslant n} \eta(B_{j+1} \setminus B_j) \leqslant \eta\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} B_j\right) \leqslant \eta(a)$. Аналогично сходится ряд $\sum\limits_{j=2k+1} \eta(B_{j+1} \setminus B_j)$. $\square$

Следствие 2.11.1. *Все борелевские множества μ_p^*-измеримы.*

Предложение 2.11.1. *Пусть E_1, E_2 — два евклидовых пространства (возможно, разных размерностей). Пусть $a \subset E_1, \Phi : a \to E_2$ — C-липшицево отображение.*

Тогда $\mu_p^*(\Phi(a)) \leqslant C^p(\mu_p^*(a))$.

Доказательство. Пусть $\{b_j\}$ — ε-покрытие a. Тогда $\operatorname{diam}(\Phi(b_j)) \leqslant C\varepsilon$. Иными словами, $\{\Phi(b_j)\}_j$ — $C\varepsilon$-покрытие множества $\Phi(a)$. Таким образом, $\mu_p(\Phi(a), C\varepsilon) \leqslant \mu_p(a, \varepsilon)$. $\square$

Следствие 2.11.2. *Мера Хаусдорфа не меняется при изометриях.*

Теорема 2.11.2. Пусть $a \subset \mathbb{R}^n$ — какое-то. Пусть $\exists p > 0 : \mu_p^*(a) < \infty$. Тогда $\forall s > p : \mu_s^*(a) = 0$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$, так как $\mu_p^*(a) < \infty$, то $\exists\varepsilon$-покрытие $\{b_j\}$ множества a, такое, что $\sum\limits_j \left(\frac{\operatorname{diam} b_j}{2}\right)^p \leqslant \mu_p^*(a) + 1$. Тогда $\sum\limits_j \left(\frac{\operatorname{diam} b_j}{2}\right)^s = \sum\limits_j \left(\frac{\operatorname{diam} b_j}{2}\right)^p \underbrace{\left(\frac{\operatorname{diam} b_j}{2}\right)}_{\leqslant \varepsilon/2}^{s-p}$. Тем самым,

$$\sum_j \left(\frac{\operatorname{diam} b_j}{2}\right)^s \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s-p} (\mu_p^*(a) + 1) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

$\square$

Следствие 2.11.3. *Пусть* $\alpha = \inf\{p > 0 | \mu_*^p(a) < \infty\}$. *Тогда* $\mu_s^*(a) = \infty$ *при* $s > \alpha$, *и при* $s < \alpha$, *то* $\mu_s^*(a) = +\infty$.

Определение 2.11.1 (Хаусдорфова размерность $a \subset \mathbb{R}^n$)**.** Вот это число α, отвечающее a. Обозначается $\dim_H(a)$.

Интересный факт. Хаусдорфова размерность стандартного Канторова множества равна $\frac{\log 2}{\log 3}$.

Теорема 2.11.3. $\dim_H(\mathbb{R}^n) = n$.

Доказательство. Пусть $K = [0,1]^n$ — куб в $\mathbb{R}^n$. Докажем, что $\mu_n^*(K) \in (0, \infty)$ (или можно сказать, что $\mu_n(K) \in (0, \infty)$, так как куб — борелевское множество). Так как счётное число кубов покрывает всё $\mathbb{R}^n$ (и при сдвиге мера не меняется), то легко показать, что размерность $\mathbb{R}^n$ такая же, как и размерность куба.

Пусть $\{e_j\}$ — ε-покрытие куба K, и пусть b_j — шар радиуса ε, содержащий e_j.

$$1 = |K| \leqslant \underset{\text{мера Лебега шара пропорциональна его радиусу}}{\leqslant} c \sum_j (\operatorname{diam}(e_j))^n \leqslant 4^n c \cdot \sum_j \left(\frac{\operatorname{diam}(b_j)}{2}\right)^n$$

В другую сторону пойдём так: разобьём куб K на диадические кубы ранга s, пусть K_s — диадические кубы ранга s, содержащиеся в K. Тогда $\left\{\overline{K}_s\right\}_s$ образуют ε-покрытие K при $\varepsilon = 2^{-s}\sqrt{n}$. Отсюда получаем оценку

$$\mu_n^*\left(K, 2^{-s}\sqrt{n}\right) \leqslant \sum_s \left(\frac{\operatorname{diam} K_s}{2}\right)^n = 2^{sn} \cdot \left(\frac{2^{-s}\sqrt{n}}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n$$

$\square$

Размерность m-мерного подпространства в $\mathbb{R}^n$ равна m, например, потому что оно изометрично $\mathbb{R}^m$.

Обозначим за μ_p результат продолжения предмеры μ_p^* по теореме Лебега — Каратеодори.

Факт 2.11.4. $\exists C_{(m)} : C_\mu^\lambda \mu_n = \lambda_n$.

Доказательство. μ_n не меняется при изометриях, в частности, при сдвиге. Значит, по теореме единственности, они пропорциональны. $\square$

Пусть $m \leqslant n$ (нас интересует на самом деле случай $m < n$, если равно, то всё и так известно), посмотрим на μ_m.

Понятно, что $C_{(m)}\mu_m$ совпадает с m-мерной мерой Лебега на всех m-мерных подпространствах в $\mathbb{R}^n$. Обозначим её за λ_m, что имеет смысл, так как оно везде совпадает с λ_m, где λ_m определено.

Теперь научимся вычислять $\lambda_m(f(e))$, где $e \subset \mathbb{R}^m, f : \underbrace{U}_{\supset e} \to \mathbb{R}^n$ — гладкая инъекция.

Лекция XV

13 декабря 2023 г.

Теорема 2.11.4. При сделанных предположениях $\lambda_m(f(e)) = \int\limits_e |\det \Gamma(\mathrm{d}_f(x, \_))|^{1/2}\,\mathrm{d}x$.

Доказательство.

- Сначала обоснуем вообще, что $\dim_H(f(e)) = m$.

Теорема 2.11.5 (Регулярность меры Лебега)**.** $\forall$ измеримого по Лебегу $e \subset \mathbb{R}^k$, $\forall \varepsilon > 0 : \exists U \supset e : |U \setminus e| < \varepsilon$. Кроме того, $|e| = \sup\limits_{K \subset e} |K|$, где K — компактны (запись другая, так как мера любого компактного множества конечна).

Доказательство.

- Пусть $|e| < \infty$. Так как оно измеримо, то $\exists$ параллелепипеды $\{P_j\}_j$, такие, что $\bigcup\limits_j P_j \supset e, \left|\bigcup\limits_j P_j\right| < |e| + \varepsilon$. Можно считать, что они открыты: параллелепипед с номером j можно раздуть так, что $\widetilde{P}_j \supset P_j$ открыт, и $\left|\widetilde{P}\right|_j < \frac{\varepsilon}{2^j}$. Положим $U \coloneqq \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \widetilde{P}_j$, тогда U открыто, и $|U| < |e| + 2\varepsilon$.

  Теперь если $|e| = \infty$, то воспользуемся σ-конечностью: пусть $\mathbb{R}^k = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} B_s$, тогда подберём открытые $U_s \supset (e \cap B_s) : |U_s \setminus (e \cap B_s)| < \frac{\varepsilon}{2^s}$. Объединение $U \coloneqq \bigcup\limits_s U_s$ подходит: $U \supset e$, и $|U \setminus a| < \varepsilon$.

- Из предыдущего пункта можно найти подходящее замкнутое множество: пусть $a \coloneqq \mathbb{R}^k \setminus b$, найдётся открытое $U \supset a, |U \setminus a| < \varepsilon$, тогда для замкнутого $F \coloneqq \mathbb{R}^k \setminus U : |b \setminus F| = |U \setminus a| < \varepsilon$.

  Чтобы сделать F компактным, возьмём пересечения $F_s \coloneqq F \cap B_s$, где $\mathbb{R}^k = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} B_s$. Тогда легко видеть, что $|e| = \sup\limits_s |F_s|$. □

Возьмём исчерпывающую последовательность компактов $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \mathbb{R}^m$ ($K_i \subset \operatorname{Int} K_{i+1}$).

Рассмотрим измеримое $E \subset K_j$. $|E|_m = C_{(m)} \mu_m^*(E) < +\infty$. Тем самым, согласно регулярности найдутся вложенные компакты $\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \dots \subset E$, такие, что $|\Phi_j| \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} |E|$. Положим $\Phi \coloneqq \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Phi_j$.

А раз так, то $f(E) = F(E \setminus \Phi) \cup \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} F(\Phi_j)$. Значит, $f(E)$ измеримо — это объединение множества меры нуль $f(E \setminus \Phi)$, и счётного числа компактов $f(\Phi_j)$.

Получается, на измеримых подмножествах K_j корректно определена мера $\rho \coloneqq \lambda_m(f)$ ($\rho(e) \coloneqq \lambda_m(f(e))$).

- Пусть $\rho(e) = \lambda_m(f(e))$ — мера на U.

Лемма 2.11.1. *ρ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега λ_m на U.*

Доказательство леммы.

Пусть $\lambda_m(e) = 0$. Тогда $\mu_m(e) = 0$, и так как f — локально липшицево, то $\lambda_m(f(e)) = 0$. □

По теореме Радона — Никодима: $\exists g_j : K_j \to \mathbb{R}$ — неотрицательные измеримые функции, такие, что

$$\forall e \subset K_j : \rho(e) = \lambda_m(f(e)) = \int\limits_e w(x)\,\mathrm{d}x \qquad (*)$$

Далее, как и раньше, g_{j+1} почти всюду совпадает с g_j, поэтому $\exists g : U \to \mathbb{R}$ — искомая плотность меры.

- Осталось показать, что $g(x) = |\det \Gamma(\mathrm{d}_f(x, \_))|^{1/2}$, а это делается с помощью слабой теоремы о дифференцируемости.

  А именно, из теоремы о дифференцируемости $\exists r_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$: $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{|B_{r_n}(x)|} \int\limits_{B_{r_n}(x)} g(x)\,\mathrm{d}x$.

  Теперь достаточно показать $\forall x \in U : \lim\limits_{r\to 0} \frac{\lambda_m(f(B_r(x)))}{|B_r(x)|} = |\det \Gamma(\mathrm{d}_f(x, \_))|^{1/2}$.

  Пусть $x_0 \in U, y_0 \coloneqq f(x_0)$, тогда $\Pi \coloneqq \mathrm{d}_f(x_0, \mathbb{R}^m)$ — m-мерная касательная плоскость к f в точке x_0. Для удобства будем считать $y_0 = 0$ (заменим $f \rightsquigarrow f - y_0$).

  В предыдущем семестре была доказана теорема о том, что $\exists V \ni 0$, такая, что $A \coloneqq f(U) \cap V$ задаётся в виде $A = \{h(u) \coloneqq (u, \phi(u)) | u \in W\}$, где $W \subset \Pi$ — окрестность нуля, $\phi : \Pi \to \Pi^\perp$ — некоторое непрерывно дифференцируемое отображение, причём $\mathrm{d}_\phi(x_0, \_) = \mathbb{0}$.

  Пусть $P : \mathbb{R}^n \to \Pi$ — ортогональный проектор. Тогда P и h взаимно обратны ($P \circ h = \mathrm{id}$).

  Из непрерывной дифференцируемости ϕ: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \rho > 0 : |u| \leqslant \rho \Rightarrow h$ — липшицево с константой не выше $1 + \varepsilon$:

  $$h(u_1) - h(u_2) \leqslant |u_1 - u_2| + \underbrace{|\phi(u_1) - \phi(u_2)|}_{\leqslant |\,\mathrm{d}_\phi(v, u_1 - u_2)|}, \text{ где некая точка } v \in [u_1, u_2].$$

  Устроим $\widetilde{f} : U \to \Pi, \widetilde{f}(x) = Pf(x)$. Заметим, что меры $f(B_r(x_0))$ и $\widetilde{f}(B_r(x_0))$ близки. В самом деле, из липшицевости P: всегда $\mu_m(Pf(B_r(x_0))) \leqslant \mu_m(f(B_r(x_0))$, и при $r \leqslant \rho$: $\mu_m(f(B_r(x_0))) = \mu_m(h(\widetilde{f}(B_r(x_0))))) \leqslant (1+\varepsilon)^m \mu_m(\widetilde{f}(B_r(x_0)))$. Отсюда видно, что

  $$\lim_{r\to 0} \mu_m(\widetilde{f}(B_r(x_0))) = \lim_{r\to 0} \mu_m(f(B_r(x_0)))$$

  Но так как $\widetilde{f}$ — отображение между двумя m-мерными евклидовыми пространствами, то можно записать $\lim\limits_{r\to 0} \frac{\mu_m(f(B_r(x_0)))}{B_r(x_0)} = \lim\limits_{r\to 0} \frac{\mu_m(\widetilde{f}(B_r(x_0)))}{B_r(x_0)} = |J_{\widetilde{f}}(x)|$.

  Осталось заметить, что образом $\mathrm{d}_f(x_0, \_)$ является Π. Значит, P ничего не делает, $\mathrm{d}_{\widetilde{f}}(x_0, \_) = \mathrm{d}_f(x_0, \_)$. □

Рассмотрим оператор $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, где $m < n$. Пусть e_j — стандартный базис в $\mathbb{R}^m$, тогда Ae_j — столбцы матрицы A.

Можно посчитать определитель Грама матрицы A: $\det(\langle Ae_i, Ae_j\rangle)_{i,j}$ по формуле Бине — Коши: $\det(A^tA) = \sum\limits_{I\subset[n], |I|=m} \det((A^t)_I)\det(A^I) = \sum\limits_{I\subset[n], |I|=m} \det(A^I)^2$.

Примеры.

- Пусть $m = 1$. Рассмотрим путь $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$. $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$. Тогда $J_\gamma(x_0, \_) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(x_0) \\ \vdots \\ \gamma_n'(x_0) \end{pmatrix}$, и $|\Gamma(\mathrm{d}_\gamma(x_0, \_))| = \sqrt{|\gamma_1^2(x_0) + \dots + \gamma_n^2(x_0)|}$. Если γ инъективна, то получается формула длины пути $\int\limits_a^b \sqrt{|\gamma_1^2(x) + \dots + \gamma_n^2(x)|}\,\mathrm{d}x$.

- Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$, и отображение представляет собой график: $F(x,y) = (x, y, \phi(x,y))$, где $\phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Здесь матрица Якоби $J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_1\phi(x,y) & \partial_2\phi(x,y) \end{pmatrix}$, здесь ∂_i — производная по i-му аргументу. Тем самым, $\mu_2(F(e)) = \int\limits_e \sqrt{1 + (\partial_1\phi)^2 + (\partial_2\phi)^2}\,\mathrm{d}\lambda_2$.

- Заинтересуемся сходимостью $\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_1} |x|^\alpha\,\mathrm{d}x$. Сделаем полярную замену $r, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$. Интеграл обращается в $\int\limits_1^\infty r^{n-1}r^\alpha\,\mathrm{d}r \cdot \Psi(\phi_1, \ldots, \phi_n)$. Отсюда видно, что так как $\Psi(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ интегрируемо, то интеграл сходится $\iff n - 1 + \alpha < -1 \iff \alpha < -n$.

- Вычислим $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Разумеется, интеграл суммируем. Пусть $I \coloneqq \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

  $$I^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \; = $$

  Так как функция $e^{-x^2}e^{-y^2}$ суммируема на плоскости, то по теореме Фубини он равен двойному интегралу:

  $$= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \left\| t = r^2 \right\| = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = \pi$$

  Тем самым, $I = \sqrt{\pi}$, и из чётности функции e^{-x^2}:

  $$\boxed{\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

2.12 Элементы общей теории меры

Пусть (X, Σ) — пространство с σ-алгеброй, на которой мы будем рассматривать разные меры.

Так как у этих мер могут быть разные множества меры нуль, то может не получиться пополнить одну, продолжив на новые подмножества — элементы Σ-алгебры — и другую, поэтому здесь никаких предположений о полноте мер скорее не будет.

Здесь *мера* — счётно-аддитивная и, вообще говоря, комплексная функция $\nu : \Sigma \to \mathbb{C}$. Вспомним, что счётная аддитивность означает $\nu\left(\bigsqcup\limits_j e_j\right) = \sum\limits_j \nu(e_j)$.

В силу технических соображений мы запретим мере принимать бесконечные значения, хотя на самом деле их можно и разрешить.

Пусть $\nu = \alpha + i\beta$, где α, β — вещественные меры ($\alpha = \Re(\nu), \beta = \Im(\nu)$). Понятно, что ν счётно-аддитивна $\iff \alpha, \beta$ каждая счётно-аддитивна.

Предложение 2.12.1. *Для всяких непересекающихся e_j: ряд $\sum\limits_j \nu(e_j)$ сходится абсолютно.*

Доказательство. По определению сумма не зависит от перестановок слагаемых. □

Теорема 2.12.1. Множество значений любой комплексной меры ограничено.

Доказательство. В пределах данного доказательства назовём множество $a \in \Sigma$ «плохим», если $\sup\{|\nu(b)| \mid b \subset a, b \in \Sigma\} = +\infty$. Пусть наше пространство — (X, Σ).

Лемма 2.12.1. *Если e — плохое множество, и $e = e_1 \sqcup e_2$, то хотя бы одно из e_1 и e_2 — плохое.*

Доказательство леммы.

От противного: если оба хорошие, то и e хорошее, так как $\forall b \subset e : b = (b \cap e_1) \cup (b \cap e_2)$, и меры $(b \cap e_1)$ и $(b \cap e_2)$ ограничены. ☐

Лемма 2.12.2. *Если e — плохое множество, то $\exists F, G : F \sqcup G = e$, такие, что $|\nu(F)|, |\nu(G)| \geqslant 1$.*

Доказательство леммы.

Так как e — плохое, то $\exists F : |\nu(F)| \geqslant |\nu(e)| + 1$. Но тогда для $G \coloneqq e \setminus F : |\nu(G)| = |\nu(e) - \nu(F)| \geqslant |\nu(F)| - |\nu(e)| \geqslant 1$. ☐

От противного: пусть X — плохое. Тогда $\exists a, b : a \sqcup b = X$, где $|\nu(a)|, |\nu(b)| \geqslant 1$. Одно из них плохое, обозначим его через F_1, а второе обозначим G_1. Применяя ту же самую конструкцию к F_1, получим $F_1 = F_2 \sqcup G_2$, где $|\nu(F_2)|, |\nu(G_2)| \geqslant 1$, причём F_2 — плохое.

И так далее, в итоге $X = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} G_j \sqcup \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} F_j$.

Тогда $\nu\left(\bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} G_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu(G_j) = \infty$, ряд не сходится, противоречие. ☐

Лекция XVI

20 декабря 2023 г.

Сужение меры можно определить так $\mu\big|_E(a) \overset{def}{=} \mu(a \cap E)$.

Иногда сужение определяют немного по-другому: $\mu\big|_E(a)$ — мера, заданная как μ, но теоретико-множественно суженная на $\{b \in \Sigma | b \subset E\}$. В теореме Хана ниже, по-видимому, используется именно это, последнее, определение.

Теорема 2.12.2 (Хан)**.** Пусть μ — **конечная** вещественная мера на (X, Σ). Тогда $\exists E, F \in \Sigma : E \sqcup F = X$, такие, что $\mu\big|_E \geqslant 0, \mu\big|_F \leqslant 0$. Такое E, что $\mu\big|_E \geqslant 0$ называется *множеством положительности* (аналогично, F — *множество отрицательности*).

Доказательство. $\{\mu(b) | b \in \Sigma\}$ ограничено (теорема 2.12.1), пусть $M = \sup\limits_{b \in \Sigma} \mu(b)$. Так как $\mu(\varnothing) = 0$, то $M \geqslant 0$.

- $M = 0$. Тогда $\mu \leqslant 0$, и $F = X, E = \varnothing$.
- $M > 0$. По определению супремума $\exists b_k \in \Sigma : M - \frac{1}{2^k} \leqslant \mu(b_k) \leqslant M$.

Лемма 2.12.3. *Пусть $b \subset X$, $\mu(b) = M - \varepsilon$. Если измеримое $e \subset b$, то $\mu(e) \geqslant -\varepsilon$.*

Доказательство леммы.

От противного: пусть $\exists e \subset b_k : \mu(e) < -\varepsilon$. Тогда мера $b_k \setminus e$ больше супремума M. ☐

Положим $\overline{b_k} = \bigcup\limits_{n \geqslant k} b_k$. Оценим $\mu\left(\overline{b_k}\right)$ снизу:

$$\mu\left(b_k \cup b_{k+1} \cup \dots \cup b_n\right) = \mu(b_k) + \mu(b_{k+1} \setminus b_k) + \mu\left(b_{k+2} \setminus (b_k \cup b_{k+1})\right) + \dots + \mu(b_n \setminus (\cdots)) \geqslant$$
$$\geqslant \left(M - \frac{1}{2^k}\right) - \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+2}} - \dots - \frac{1}{2^n} \geqslant M - \frac{1}{2^{k-1}}$$

Переходя к пределу в силу счётной аддитивности, получаем $\mu\left(b_k \cup b_{k+1} \cup \cdots\right) \geqslant M - \frac{1}{2^{k-1}}$.

Теперь заметим, что $\overline{b_1} \supset \overline{b_2} \subset \cdots$ Положим $E \coloneqq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ В силу монотонной непрерывности $\mu(E) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(b_k) = M$.

Теперь в силу леммы все подмножества E имеют положительную меру. Положим $F \coloneqq X \setminus E$, все подмножества F имеют отрицательную меру (от противного: если $f \subset F$ имеет положительную меру, то $\mu(E \cup f) > M$). □

Такие $E, F \subset X$ из теоремы — *разложение Хана*. Оно единственно с точностью до множества меру нуль — если $A \subset E$ имеет меру нуль, то все его подмножества тоже имеют меру нуль, и $(E \setminus A, F \cup A)$ — тоже разложение Хана.

Теперь можно определить *положительную* и *отрицательную части меры* $\mu^+(a) \overset{def}{=} \mu(A \cap E)$ и $\mu^-(a) \overset{def}{=} -\mu(a \cap E)$. Тогда $\mu(a) = \mu^+(a) - \mu^-(a)$, тем самым любая конечная вещественная мера есть разность двух неотрицательных.

Определение 2.12.1 (Модуль меры)**.** $|\mu|(a) \overset{def}{=} \mu^+(a) + \mu^-(a)$.

Введём естественный частичный порядок на мерах: поточечно $\mu \leqslant \nu \iff \forall e \in \Sigma : \mu(e) \leqslant \nu(e)$.

Предложение 2.12.2. *μ^+ есть наименьшая из неотрицательных мер $\nu : \nu \geqslant \mu$.*

Доказательство. Пусть E, F — разложение Хана для μ. Пусть $\nu \geqslant \mu$. Тогда $\nu(a) = \nu(a \cap E) + \nu(a \cap F) \geqslant \mu(a \cap E) = \mu^+(a)$. □

Замечание. $\mu^- = (-\mu)^+$.

Замечание. Пусть $g : X \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ -1, & x \in F \end{cases}$. Тогда $\mu(e) = \int\limits_e g \,\mathrm{d}|\mu|$.

Доказательство.
$$\int\limits_e g \,\mathrm{d}|\mu| = \int\limits_{e\cap E} \mathrm{d}|\mu| - \int\limits_{e\cap F} \mathrm{d}|\mu| = \int\limits_{e\cap E} \mathrm{d}\mu^+ - \int\limits_{e\cap F} \mathrm{d}\mu^- = \mu^+(e \cap E) - \mu^-(e \cap F) = \mu(e)$$ □

Пусть (X, Σ) — пространство с σ-алгеброй, и ρ — неотрицательная счётно-аддитивная мера.

Пусть $\phi : X \to \mathbb{C}$ Σ-измерим (прообраз любого борелевского множества измерим). Пусть $\phi = \alpha + i\beta$, где α, β — вещественные измеримые функции.

Определим $\int\limits_a \phi \,\mathrm{d}\rho \overset{def}{=} \int\limits_a \alpha \,\mathrm{d}\rho + i \int\limits_a \beta \,\mathrm{d}\rho$. Данный интеграл обладает всеми свойствами, которые от него ожидаются — аддитивность, $\mathbb{C}$-линейность, счётная аддитивность по множеству, счётная аддитивность по функции.

Основную оценку интеграла удобно доказывать так:

$$\exists \theta \in \mathbb{R} : e^{i\theta} \int\limits_a \phi \,\mathrm{d}\rho \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

$$\left| \int\limits_a \phi \,\mathrm{d}\rho \right| = \Re \int\limits_a e^{i\theta} \phi \,\mathrm{d}\rho = \left| \int\limits_a \Re(e^{i\theta}\phi) \,\mathrm{d}\rho \right| \leqslant \int\limits_a |e^{i\theta}\phi| \,\mathrm{d}\rho = \int\limits_a |\phi| \,\mathrm{d}\rho$$

Многие комплексные меры как раз приходят из таких интегралов.

Пускай μ — комплексная мера на Σ.

Определение 2.12.2 (Полная вариация μ на $a \in \Sigma$)**.** $|\mu|(a) = \sup\left\{\sum\limits_{j=1}^{N} |\mu(e_j)| \middle| e_1 \sqcup \dots \sqcup e_N = a\right\}$

Теорема 2.12.3. $|\mu|$ есть неотрицательная конечная счётно-аддитивная мера на Σ.

Доказательство. См. (теорема 2.12.4) □

Замечание. Если μ вещественна, то $|\mu|(a) = \mu^+(a) + \mu^-(a)$, где $|\mu|$ понимается, как полная вариация.

Иными словами, не зря модуль меры и её полную вариацию обозначают одинаково.

Доказательство. Если $a \in \Sigma$, и $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_n = a$, то $\sum\limits_{j=1}^{n} |\mu(e_j)| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} \mu^+(e_j) + \mu^-(e_j) \leqslant \mu^+(a) + \mu^-(a)$.

Обратно, разобьём $a = (a \cap E) \cup (a \cap F)$ (где E, F — разложение Хана). Тогда $|\mu|(a) \geqslant |\mu(a \cap E)| + |\mu(a \cap F)| = \mu^+(a) + \mu^-(a)$. □

Лемма 2.12.4. *Пусть ρ_1, ρ_2 — комплексные меры на Σ, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Тогда $\forall a \in \Sigma : |(\alpha\rho_1 + \beta\rho_2)(a)| \leqslant |\alpha||\rho_1|(a) + |\beta||\rho_2|(a)$.*

Доказательство. Пусть $a = e_1 \sqcup \dots \sqcup e_n$. Оценим

$$\sum_{j=1}^{n} |(\alpha\rho_1 + \beta\rho_2)(e_j)| \leqslant |\alpha| \sum_{j=1}^{n} |\rho_1(e_j)| + |\beta| \sum_{j=1}^{n} |\rho_2(e_j)| \leqslant |\alpha||\rho_1|(a) + |\beta||\rho_2|(a)$$

и перейдём к супремуму по всем разбиениям $a = e_1 \sqcup \dots \sqcup e_n$. □

Следствие 2.12.1. *Если ρ — комплексная мера, то $\forall a : |\rho|(a) < +\infty$.*

Доказательство. Разложим $\rho = \rho_1 + i\rho_2$. □

Предложение 2.12.3. *Пусть ν — неотрицательная (необязательно конечная) мера на Σ, пусть g — комплексная суммируемая (относительно ν) функция. Определим $\mu(e) \coloneqq \int\limits_e g \, \mathrm{d}\nu$.*

Тогда $|\mu|(a) = \int\limits_a |g| \, \mathrm{d}\nu$.

Доказательство.

0. Пусть $g \in L^1(\nu)$. Тогда $|\mu|(a) \leqslant \int\limits_a |g| \, \mathrm{d}\nu$. Действительно, пусть $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_n = a$. Тогда $\sum\limits_{j=1}^{n} |\mu(e_j)| = \sum\limits_{j=1}^{n} \left|\int\limits_{e_j} g \, \mathrm{d}\nu\right| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{e_j} |g| \, \mathrm{d}\nu = \int\limits_a |g| \, \mathrm{d}\nu$.

1. Пусть $g = \sum\limits_{j=1}^{k} c_j \chi_{e_j}$ — простая функция, где мы считаем, что $b_j \in \Sigma$ попарно не пересекаются.

   Рассмотрим разбиение $a = (a \cap e_1) \sqcup \dots \sqcup (a \cap e_k) \sqcup \left(a \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k} e_j\right)$.

$$|\mu|(a) \geqslant \sum_{j=1}^{k} |\mu(a \cap e_j)| + \underbrace{\left|\mu\left(a \setminus \bigcup_{j=1}^{k} e_j\right)\right|}_{=0} = \sum_{j=1}^{k} \left|\int\limits_{a \cap e_j} g \, \mathrm{d}\nu\right| = \sum_{j=1}^{k} |c_j| \nu(a \cap e_j) = \int\limits_a |g| \, \mathrm{d}\nu$$

2. Пусть $g \in L^1(\nu)$ $(g : X \to \mathbb{C})$. Выберем $\varepsilon > 0$. Тогда так как простые функции плотны в L^1, то $\exists h : X \to \mathbb{C}$ — простая функция, такая, что $\int\limits_X |g-h| \,\mathrm{d}\nu < \varepsilon$ (отдельно приблизим вещественную и мнимую части).

   Пусть $\mu_1(a) = \int\limits_a h \,\mathrm{d}\nu$, и положим $\mu_2 \coloneqq \mu - \mu_1$.

$$\mu(a) = \int\limits_a h \,\mathrm{d}\nu + \int\limits_a (g-h) \,\mathrm{d}\nu = \mu_1(a) + \mu_2(a)$$

$$\begin{cases} |\mu|(a) \leqslant |\mu_1(a)|(a) + |\mu_2|(a) \\ |\mu_1|(a) \leqslant |\mu|(a) + |\mu_2|(a) \end{cases} \Rightarrow \quad |\mu_1|(a) - |\mu_2|(a) \leqslant |\mu|(a) \leqslant |\mu_1|(a) + |\mu_2|(a)$$

   Оценим $\mu_2(a)$:

$$|\mu_2(a) \leqslant \int\limits_a |g-h| \,\mathrm{d}\nu \leqslant \int\limits_X |g-h| \,\mathrm{d}\nu \leqslant \varepsilon|$$

   Отсюда получается

$$\int\limits_a |h| \,\mathrm{d}\nu - \varepsilon \leqslant |\mu|(a) \leqslant \int\limits_a |h| \,\mathrm{d}\nu + \varepsilon$$

   И наконец можно заменить h на g, при этом мы ошибёмся не больше, чем на ε.

$$\int\limits_a |g| \,\mathrm{d}\nu - 2\varepsilon \leqslant |\mu|(a) \leqslant \int\limits_a |g| \,\mathrm{d}\nu + 2\varepsilon$$

   Устремим $\varepsilon \to 0$. □

Теперь докажем теорему, сформулированную ранее.

Теорема 2.12.4. $|\mu|$ есть неотрицательная конечная счётно-аддитивная мера на Σ.

Доказательство. Пусть μ — комплексная мера на Σ, разложим $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, где μ_1, μ_2 — вещественные меры. Пусть $\nu = \mu_1^+ + \mu_2^+ + \mu_1^- + \mu_2^-$. Все четыре слагаемых — абсолютно непрерывные меры относительно ν, то есть по теореме Радона — Никодима они представляются через плотность: $\exists g_{1,2}^\pm \in L^1(\nu) : \mu_{1,2}^\pm(e) = \int\limits_e g_{1,2}^\pm \,\mathrm{d}\nu$.

Тогда $|\mu|(e) = \int\limits_e |g| \,\mathrm{d}\nu$, и действительно получаем, что $|\mu|$ — неотрицательная конечная счётно-аддитивная мера на Σ. □

2.12.1 Интеграл по комплексной мере

Пусть $g : X \to \mathbb{C}$ измерима относительно комплексной меры $\mu = \mu_1 + i\mu_2$.

Определим $\int\limits_a g \,\mathrm{d}\mu \overset{def}{=} \int\limits_a g \,\mathrm{d}\mu_1^+ - \int\limits_a g \,\mathrm{d}\mu_1^- + i\left(\int\limits_a g \,\mathrm{d}\mu_2^+ - \int\limits_a g \,\mathrm{d}\mu_2^-\right)$

В данном определении предполагается, что g суммируема относительно всех четырёх мер. Оказывается, $g \in L^1(\mu_{1,2}^\pm) \iff g \in L^1(|\mu|)$, так как $\mu_{1,2}^\pm \leqslant |\mu|$.

Лемма 2.12.5 (Линейность по мере)**.** *Пусть ρ, σ — две комплексные меры на Σ, пусть g суммируема относительно $|\rho|$ и $|\sigma|$. Утверждается, что*

$$\int\limits_a g \,\mathrm{d}(\rho+\sigma) = \int\limits_a g \,\mathrm{d}\rho + \int\limits_a g \,\mathrm{d}\sigma$$

Доказательство. Утверждается, что $\exists\lambda$ — положительная мера на Σ, относительно которой ρ, σ абсолютно непрерывны: $\exists u, v : X \to \mathbb{C}$, такие, что $\rho(e) = \int\limits_e u \,\mathrm{d}\lambda$ и $\sigma(e) = \int\limits_e v \,\mathrm{d}\lambda$. Например, в качестве λ можно взять $\rho_1^+ + \rho_1^- + \rho_2^+ + \rho_2^- + \sigma_1^+ + \sigma_1^- + \sigma_2^+ + \sigma_2^-$.

Разложим на вещественную и мнимую части $u = u_1 + iu_2, v = v_1 + iv_2$.

$$\int\limits_a g \,\mathrm{d}\rho = \int\limits_a g u_1^+ \,\mathrm{d}\lambda - \int\limits_a g u_1^- \,\mathrm{d}\lambda + i\left(\int\limits_a g u_2^+ \,\mathrm{d}\lambda - \int\limits_a g u_2^- \,\mathrm{d}\lambda\right) = \int\limits_a g u \,\mathrm{d}\lambda$$

Аналогично $\int\limits_a g \,\mathrm{d}\sigma = \int\limits_a g v \,\mathrm{d}\lambda$.

$$\int\limits_a g \,\mathrm{d}\rho + \int\limits_a g \,\mathrm{d}\sigma = \int\limits_a g(u+v) \,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_a g \,\mathrm{d}(\rho + \sigma)$$

□

2.12.2 Разложение Лебега

Пусть (X, Σ, λ) — пространство с неотрицательной σ-конечной мерой $\lambda \geqslant 0$.

Пусть ρ — комплексная мера на Σ.

Определение 2.12.3 (ρ абсолютно непрерывна относительно λ)**.** $\lambda(e) = 0 \Rightarrow \rho(e) = 0$.

Определение 2.12.4 (ρ сингулярна относительно λ)**.** $\exists a \in \Sigma : \lambda(a) = 0$ и $\forall e \subset X \setminus a$: $|\rho|(e) = 0$.

Пример. Стандартная мера Лебега λ_1 на $\mathbb{R}$ взаимно сингулярна точечной δ-мере δ_0.

Теорема 2.12.5 (Лебег)**.** Для произвольной комплексной меры ρ на Σ существует и единственно представление $\rho = \rho_1 + \rho_2$, где ρ_1 абсолютно непрерывна относительно λ, а ρ_2 сингулярна относительно λ.

Доказательство. Пусть $A = \sup\{|\rho|(e) | e \in \Sigma, \lambda(e) = 0\}$. Тогда $\exists e_n \in \Sigma : |\rho|(e_n) > A - \frac{1}{n}$.

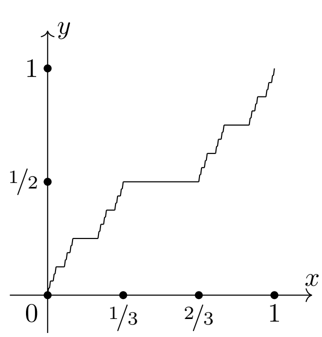
Положим $\overline{e_n} = e_n \cup e_{n+1} \cup \cdots$. Тогда $\overline{e_1} \subset \overline{e_2} \subset \cdots$, и положим $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{e_n}$.

В силу монотонной непрерывности $|\rho|(E) = \lim\limits_{n\to\infty} |\rho|(e_n) = A$. Так как $\forall n : \lambda(\overline{e_n}) = 0$, то $\lambda(E) = 0$.

Разложим $\rho_1(e) \coloneqq \rho(e \setminus E), \rho_2(e) \coloneqq \rho(a \cap E)$. В таком представлении ρ_2 очевидно сингулярна относительно λ. Абсолютную непрерывность ρ_1 относительно λ докажем от противного.

Пусть $\exists b \in \Sigma, b \subset X \setminus E : |\rho_1(b)| > 0, \lambda(b) = 0$. Тогда определим $E_1 = E \cup b$, и окажется, что $|\rho|(E_1) = |\rho|(E) + |\rho|(b) \geqslant A + |\rho_1|(b) > A$, противоречие. □

Пример. Определим рекурсивно канторову лестницу $[0, 1] \to [0, 1]$.



Построив по данной функции меру, мы получим меру, сосредоточенную на канторовом множестве меры нуль. Она сингулярна относительно стандартной меры Лебега на $\mathbb{R}$.