

# Комплексный анализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков  
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Комплексный анализ</b>	<b>2</b>
1.1	Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути . . . . .	3
1.1.1	Про дифференциальные формы . . . . .	3
1.1.2	Про интегрирование . . . . .	3
1.1.3	Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути . . . . .	4
1.1.4	Сумма путей . . . . .	4
1.1.5	Альтернативное определение . . . . .	4
1.1.6	(Не)зависимость от параметризации . . . . .	6
1.2	Условия существования первообразной у дифференциальной формы . . . . .	6
1.3	Операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ . . . . .	9
1.3.1	Связь с голоморфными функциями . . . . .	10

# Глава 1

## Комплексный анализ

### Лекция I

16 февраля 2024 г.

Пусть  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , где открытое  $G \subset \mathbb{C}$ .

**Определение 1.0.1** ( $f$  голоморфна в  $z_0 \in G$ ).  $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \stackrel{\text{def}}{=} f'(z_0)$ .

Во втором семестре мы проверяли, что  $f = u + iv$  (где  $u, v : G \rightarrow \mathbb{R}$ ) голоморфна в  $z_0 \iff f$  дифференцируема в вещественном смысле, и выполняются уравнения Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

**Определение 1.0.2** ( $f$  аналитична в  $G$ ).  $\forall z_0 \in G : \exists c_j \in \mathbb{C}$ :

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \quad (*)$$

где ряд сходится не только при  $z = z_0$ .

**Теорема 1.0.1.**  $f$  аналитична в  $G \iff f$  голоморфна во всех точках  $G$ .

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ . Доказали во втором семестре, несложно.

$\Leftarrow$ . Скоро займёмся, время пришло. □

Из представления (\*) следует, что производная в точке  $z$  считается почленно:  $f'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j (z - z_0)^{j-1}$ . В частности, отсюда получается, что  $f'(z_0) = c_1$ , и вообще  $f^{(n)}(z_0) = j! \cdot c_j$ .

Вскоре мы увидим, что ситуация разительно отличается от вещественной: в вещественном случае были разные классы — дифференцируемые функции,  $C^1$ ,  $C^\infty$ , аналитичные, и множество промежуточных классов.

В комплексном же случае, если функция хотя бы один раз дифференцируема, то окажется, что этого достаточно, чтобы она была не просто дифференцируема, а непрерывно дифференцируема, бесконечно дифференцируема, и даже аналитична.

## 1.1 Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути

### 1.1.1 Про дифференциальные формы

**Определение 1.1.1** (Линейная функция  $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ).  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n : l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y)$ .

**Определение 1.1.2** (Линейная форма на множестве  $G \subset \mathbb{R}^n$ ). Функция двух переменных  $\phi : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , линейная по второму аргументу.

В пространстве  $\mathbb{R}^n$  имеется базис  $(e_j)$ :  $h = e_1 h_1 + \dots + e_n h_n$ .

Тем самым,  $\phi(x, h) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\phi(x, e_j)}_{=: g_j(x)} h_j = \sum_{j=1}^n g_j(x) h_j$ .

Введём *базисные линейные формы*  $dx_j(u, h) = h_j$ , игнорирующую первую координату, и возвращающую  $j$ -ю компоненту второго аргумента. Теперь  $\phi(x, h)$  разложилась в сумму  $\sum_{j=1}^n g_j dx_j$ .

*Пример.* Пусть  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  — дифференцируемая в  $G$  функция. Заметим, что её дифференциал  $d_f(x, \_)$  — в точности линейная форма на  $G$ .

При разложении по базису получится  $d_f(x, \_) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j$ .

Вскоре мы увидим, что далеко не всякая линейная форма является чьим-то дифференциалом.

Если  $\phi = \sum_{j=1}^n g_j dx_j$  — дифференциал функции  $f$ , то непременно  $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ .

Тот факт, что  $\phi$  является дифференциалом  $f$ , можно сказать наоборот:  $f$  является первообразной  $\phi$ .

### 1.1.2 Про интегрирование

Рассмотрим монотонную функцию  $\Phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Как и при определении стилтьесовой длины, будем считать, что  $\Phi$  определена на некотором открытом множестве, содержащем  $\langle a, b \rangle$ . Обозначим за  $l_\Phi$  стилтьесову длину, отвечающую функции  $\Phi$ .

Пускай  $\lambda_\Phi$  — продолжение стилтьесовой длины  $l_\Phi$  по Лебегу — Каратеодори.

Она, как водится, определена на некоторой  $\Sigma$ -алгебре, в которой есть борелевские множества, но измеримы могут быть и какие-то другие множества, зависящие от конкретной функции  $\Phi$ .

*Примеры.*

- Так, функция  $\phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$  порождает дельта-меру  $\delta_0$ , относительно которой все множества измеримы.

Кроме того, эта мера сингулярна относительно стандартной меры Лебега.

- Может показаться, что так происходит из-за разрывности  $\phi$ , но это не так.

Рекурсивно определим канторову лестницу  $C : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ :



Построив по данной функции стильесову длину  $\lambda_C$ , мы получим меру, сосредоточенную на канторовом множестве меры нуль.

Её носитель — само канторово множество, так как на всех отрезках вне канторова множества  $\lambda_C$  равна нулю. Она сингулярна относительно стандартной меры Лебега на  $\mathbb{R}$ , и её измеримые множества разительно отличаются от измеримых множеств меры Лебега.

По мере Стильеса можно интегрировать: если  $v$  является  $\lambda_\Phi$  измеримой (в частности, измерима по Борелю и непрерывна), то определён интеграл  $\int_{\langle a, b \rangle} v d\lambda_\Phi$ . Иногда пишут просто  $\int_{\langle a, b \rangle} v d\Phi$ .

Теперь пусть  $I = [a, b]$ , и  $\Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — функция ограниченной вариации. В таком случае  $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$ , где некие  $\Phi_1, \Phi_2$  возрастают. Можно определить знакопеременную меру  $\lambda_\Psi \stackrel{def}{=} \lambda_{\Phi_1} - \lambda_{\Phi_2}$ , понятно, что определение корректно.

### 1.1.3 Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути

Пускай  $\gamma : [a, b] \rightarrow G \subset \mathbb{R}^n$  — спрямляемый путь (путь конечной длины). Пускай  $U = \sum_{j=1}^n u_j dx_j$  — дифференциальная форма в области  $G$ . Если не сказано противное, будем считать, что  $u_j$  — непрерывные функции.

**Определение 1.1.3** (Интеграл от  $U$  вдоль пути  $\gamma$ ).  $\int_\gamma U \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^n \int_{[a, b]} u_j(\gamma(t)) d\gamma_j(t)$ .

Здесь  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ . Так как путь спрямляем, то все  $\gamma_j$  — ограниченной вариации, каждая порождает свою меру Стильеса, и определение интегрирует композицию  $U \circ \gamma$  по данной мере.

### 1.1.4 Сумма путей

Пускай имеются два отрезка  $[a, c]$  и  $[c, d]$ , и на них заданы пути  $\gamma_1 : [a, c] \rightarrow G$ ,  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow G$ . Предположим, что  $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$ .

Тогда можно устроить путь  $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a, d] \rightarrow G$ ,  $\gamma(t) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, c] \\ \gamma_2(t), & t \in [c, d] \end{cases}$ .

*Замечание.* Интеграл аддитивен по множеству:  $\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} U = \int_{\gamma_1} U + \int_{\gamma_2} U$ .

### 1.1.5 Альтернативное определение

Далее мы не интересуемся никакими чудесами вроде канторовых лестниц, и считаем, что  $\Phi$  такова, что  $\lambda_\Phi$  абсолютно непрерывна относительно стандартной меры Лебега.

А раз так, то по теореме Радона — Никодима  $\exists$  суммируемая  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , такая, что

$$\lambda_\Phi(e) = \int_e w(x) dx \quad (+)$$

**Факт 1.1.1.** Формула (+) заведомо верна, если  $\Phi$  непрерывно дифференцируема на  $[a, b]$ , тогда  $w = \Phi'$ .

*Доказательство.* Введём меру  $\nu(e) = \int_e \Phi'(x) dx$ , заданную на измеримых по Лебегу множествах.  $\Phi'$  непрерывна, и, следовательно, измерима.

Если  $\langle c, d \rangle \subset [a, b]$ , то  $\nu(\langle c, d \rangle) = \int_{\langle c, d \rangle} \Phi'(x) dx = \Phi(d) - \Phi(c) = l_\Phi(\langle c, d \rangle)$ .

Таким образом, из теоремы единственности, продолжение  $l_\Phi$  по Лебегу — Каратеодори совпадает с  $\int_e \Phi'(x) dx$ .  $\square$

*Замечание.* Утверждение (факт 1.1.1) сохраняет силу, если  $\Phi$  непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема.

Далее где-то используется  $\Phi$ , а где-то  $\beta$ , надо убедиться, что это везде одно и то же, и заменить. Пускай  $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — функция ограниченной вариации, кусочно-непрерывно дифференцируемая:  $\exists a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ , такие, что  $\beta$  непрерывно дифференцируема на  $[a_s, a_{s+1}]$  при  $0 \leq s < k$ . Введём  $\rho(e) = \int_e \beta'(x) dx$  — это знакопеременная вещественная мера.

У данной меры возникают (см. разложение Хана) положительная и отрицательная части  $\rho_+(e) \stackrel{def}{=} \int_e (\beta')_+(x) dx$  и  $\rho_-(e) \stackrel{def}{=} \int_e (\beta')_-(x) dx$

Если обозначить за  $\Phi_+(t) = \int_0^t (\beta')_+(x) dx$  и  $\Phi_-(t) = \int_0^t (\beta')_-(x) dx$ , то окажется, что соответствующие меры Стильеса совпадают с  $\rho_+$  и  $\rho_-$ .

Более того,  $\beta = \Phi_+ - \Phi_-$  — получили разложение функции ограниченной вариации в положительную и отрицательную части.

*Замечание.* Это разложение экономнее, чем то, которое было получено ранее — ранее в качестве  $\Phi_+$  выбиралась вариация  $\Phi$ .

Если всё, что написано выше, собрать вместе, то получится

$$\boxed{\int_{[s,t]} v d\Phi = \int_{[s,t]} v(x) \beta'(x) dx}$$

Далее «гладкий» используется, как синоним к непрерывно-дифференцируемому.

**Следствие 1.1.1** (Можно считать определением). Если  $U = \sum_{j=1}^n u_j dx_j$  — дифференциальная форма в  $G$  с непрерывными коэффициентами, а  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow G$  — спрямляемый кусочно-гладкий путь, то

$$\int_\gamma U = \sum_{j=1}^n \int_a^b u_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt$$

### 1.1.6 (Не)зависимость от параметризации

Пускай  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — кусочно-гладкий путь,  $\psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  — гладкий гомеоморфизм.

Теперь  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$  — перепараметризация  $\gamma$

**Лемма 1.1.1.** Для всякой формы  $U$ :

$$\int_{\tilde{\gamma}} U = \pm \int_{\gamma} U$$

Знак  $+$  выбирается, если  $\psi$  возрастает, и  $-$  если убывает.

*Доказательство.* Предположим, что  $\gamma$  — гладкий путь, иначе применяем к кусочкам гладкости по отдельности.

$$\int_{\tilde{\gamma}} U = \sum_{j=1}^n \int_c^d u_j(\gamma(\psi(t))) \gamma'_j(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt = \left\| \begin{array}{l} \tau = \psi(t) \\ d\tau = \psi'(t) dt \end{array} \right\| = \sum_{j=1}^n \int_{\psi(c)}^{\psi(d)} u_j(\gamma(\tau)) \gamma'_j(\tau) d\tau = \pm \int_{\gamma} U \quad \square$$

Про  $\psi$  также можно считать, что это он не гладкий, а лишь кусочно-гладкий.

Тем самым, можно определить сумму путей для несовпадающих отрезков: для двух путей  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow G, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow G$  (при условии  $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ ) можно один их отрезков-прообразов линейным возрастающим преобразованием перевести в отрезок, соприкасающийся со вторым (например,  $t \mapsto t + (b - c)$ ).

Также есть понятие обратного пути  $\gamma_{-1}(t) = \gamma(a + b - t)$ . Для любой формы  $U$ :

$$\int_{\gamma \oplus \gamma_{-1}} U = \int_{\gamma} U + \int_{\gamma_{-1}} U = \int_{\gamma} U - \int_{\gamma} U = 0$$

## 1.2 Условия существования первообразной у дифференциальной формы

**Теорема 1.2.1.** Если у дифференциальной формы  $U$  в открытом множестве  $G \subset \mathbb{R}^n$  имеется первообразная  $F$ , то для всякого кусочно-гладкого пути  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$

$$\int_{\gamma} U = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

*Доказательство.*  $U = \sum_{j=1}^n g_j dx_j$ , где  $g_j(w) = \frac{\partial}{\partial x_j} F(w)$ . Считаем, что путь гладкий.

$$\int_{\gamma} U = \sum_{j=1}^n \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_j} F(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (F \circ \gamma)(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Если же путь всего лишь кусочно-гладкий, то надо разбить отрезок на подотрезки гладкости, и сложить.  $\square$

**Следствие 1.2.1.** Если у дифференциальной формы  $U$  есть первообразная, то её интегралы по всем путям с данными началом и концом, равны.

Оказывается, верно и обратное.

Лекция II  
26 февраля 2024 г.

**Лемма 1.2.1.** Пусть  $G$  — область в  $\mathbb{R}^n$ , тогда любые две её точки можно соединить ломаной (кусочно-линейным путём).

*Доказательство.* Выберем  $x_0 \in G$ , положим  $U = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{существует ломаная в } G \text{ с началом в } x_0 \text{ и концом в } y\}$ .

Покажем, что  $U$  открыто. Пусть  $y \in U$ , тогда найдётся шарик  $B_\varepsilon(y) \subset G$ , и  $B_\varepsilon(y) \subset U$  — можно добавить одно звено к ломаной  $x_0 \rightsquigarrow y$ .

Покажем, что  $U$  замкнуто. Пусть  $z \in G$  — предельная точка для  $U$ . Найдётся  $B_\varepsilon(z) \subset G$ , так как  $z$  — предельная, то  $\exists y \in B_\varepsilon(z) \cap U$ . Значит,  $z \in U$  — можно добавить одно звено  $y \rightarrow z$ .  $\square$

*Замечание.* Имея кусочно-линейный путь  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ , соединяющий  $A, B \in G$ , несложно получить бесконечно дифференцируемый путь, соединяющий их:

Пусть  $\gamma_1 : [a-1, b+1] \rightarrow G, \gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a, b] \\ \gamma(a), & t \in [a-1, a] \\ \gamma(b), & t \in [b, b+1] \end{cases}$ . Теперь, сворачивая  $\gamma_1$  с аппрокс-

мативной единицей с достаточно большим номером и достаточно малым компактным носителем, получим бесконечно дифференцируемый путь, соединяющий  $A$  и  $B$ .

**Теорема 1.2.2.** Пусть  $\Phi = \sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j$  — непрерывная дифференциальная форма в  $G$  (то есть коэффициенты непрерывны в  $G$ ). Следующие условия эквивалентны.

1.  $\int_\gamma \Phi$  есть первообразная  $F$ , то есть функция  $F \in C^1(G) : dF = \Phi$  (иными словами,  $\forall j : \frac{\partial}{\partial x_j} F = f_j$ ).
2. Для всех кусочно-гладких путей  $\gamma$  с фиксированными началом и концом  $\gamma(a) = \gamma_a, \gamma(b) = \gamma_b$ :  $\int_\gamma \Phi$  не зависит от  $\gamma$  (а только от начала и конца).
3. Для любой кусочно-гладкой петли (то есть замкнутого пути)  $\gamma$  в  $G$ :  $\int_\gamma \Phi = 0$ .

*Доказательство.* Мы уже доказали ранее цепочку импликаций  $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2)$ . Далее доказываем  $(2) \Rightarrow (1)$ .

Предъявим кандидат в первообразную. Зафиксируем  $x_0 \in G$ , выберем  $x \in G$ , пусть  $\gamma$  — произвольный кусочно-гладкий путь с началом в  $x_0$  и концом в  $x$ . Определим  $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\gamma \Phi$ . Согласно посылке,  $F$  корректно определена — не зависит от выбора пути.

Покажем, что частные производные  $F$  существуют, и равны  $f_j$ . Тогда они получатся непрерывными, то есть  $F$  — дифференцируемой, и окажется, что  $F$  — первообразная  $\Phi$ .

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — стандартные базисные орты в  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим  $\frac{F(x+te_j) - F(x)}{t}$ .

При малых  $t$ : отрезок между  $x$  и  $x+te_j$  лежит внутри  $G$ . Пусть  $\gamma_1$  — путь, соединяющий  $x_0$  и  $x$ ,  $l$  — отрезок от  $x$  до  $x+te_j$ .

$$\frac{F(x+te_j) - F(x)}{t} = \frac{1}{t} \left( \int_{\gamma_1 \oplus l} \Phi - \int_{\gamma_1} \Phi \right) = \frac{1}{t} \int_l \Phi = \frac{1}{t} \int_0^t f_j(x + \tau e_j) d\tau \xrightarrow{t \rightarrow 0} f_j(x) \quad \square$$

**Определение 1.2.1** (Прямоугольник на плоскости). Множество вида  $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ .

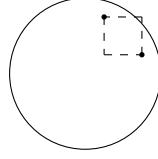
Область  $G$  на плоскости будем называть *удобной*, если  $\exists x_0 \in G : \forall y \in G : \exists$  прямоугольник  $P \subset G$ , содержащий точки  $x$  и  $y$ .

*Примеры (Удобные области).*

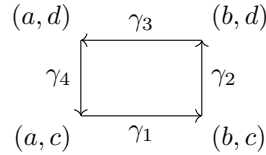
- $\text{Int } Q$ , если  $Q$  — прямоугольник. В качестве центра  $x_0$  подойдёт любая точка.



- $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < r\}$ . В качестве центра  $x_0$  стоит взять центр, иначе не получится:



**Определение 1.2.2** (Ориентированная граница прямоугольника  $P$ ). Петля  $\gamma$ , обходящая границу  $P = [a, b] \times [c, d]$  против часовой стрелки, то есть вот так:



$$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4.$$

Для прямоугольника  $P$  будем обозначать за  $\partial P$  в зависимости от контекста либо границу  $P$ , как топологического подмножества  $\mathbb{R}^2$ , либо путь, обходящий границу  $P$  против часовой стрелки.

**Следствие 1.2.2** (Дополнение к (теорема 1.2.2)). Если  $G$  — удобная область на плоскости, то к трём эквивалентным условиям (теорема 1.2.2) можно добавить

$$4. \forall P \subset G : \int_{\partial P} \Phi = 0.$$

*Доказательство.* (3)  $\Rightarrow$  (4) ясно, докажем (4)  $\Rightarrow$  (1).

Пусть  $x_0 \in G$  — центр удобной области, определим  $F(x) = \int_{\delta} \Phi$ , где  $\delta$  — это либо  $\delta_1 := \gamma_1 \oplus \gamma_2$  либо  $\delta_2 := \gamma_4^- \oplus \gamma_3^-$  (вне зависимости от выбора  $\delta$  получится одно и то же).



Далее, чтобы проверить  $\frac{\partial}{\partial x_1} F = f_1$  и  $\frac{\partial}{\partial x_2} F = f_2$ , воспользуемся подходящим представлением: пусть орт выглядит так:



тогда для проверки  $\frac{\partial}{\partial x_1} F = f_1$  удобно воспользоваться определением  $F$  через  $\delta_1$ , для проверки  $\frac{\partial}{\partial x_2} F = f_2$  — определением через  $\delta_2$ . Далее повторяем рассуждение из (теорема 1.2.2).  $\square$

Пусть  $\Phi = \sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j$  — непрерывная дифференциальная форма в области  $G \subset \mathbb{R}^n$ .

**Определение 1.2.3** (Форма  $\Phi$  точна). Существует первообразная  $F$  в  $G$ :  $dF = \Phi$ .

**Определение 1.2.4** (Форма  $\Phi$  замкнута). Форма  $\Phi$  локально точна ( $\forall x_0 \in G : \exists U \ni x_0 : \Phi|_U$  точна).

Понятно, что точная форма замкнута, но точность из замкнутости не следует: чуть позднее мы определим  $dz$ , и покажем, что  $\frac{dz}{z}$  — замкнутая, но не точная форма на  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

**Теорема 1.2.3.** Пусть  $\Phi$  — дифференциальная форма в области  $G \subset \mathbb{R}^n$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $\Phi$  замкнута.

2.  $\forall x_0 \in G : \exists V \ni x_0 : \forall$  кусочно-гладкого замкнутого пути  $\gamma$  с носителем в  $V$ :  $\int_{\gamma} \Phi = 0$ .

Если  $n = 2$ , то дополнительно появляются ещё два условия:

3.  $\forall z \in G : \exists V_z \subset G : \forall P \subset V_z : \int_{\partial P} \Phi = 0$ .

4.  $\forall P \subset G : \int_{\partial P} \Phi = 0$ .

*Доказательство.* Докажем, что  $(3) \Rightarrow (4)$ , остальное уже доказано выше.

Заметим, что границу прямоугольника  $P$  можно представить, как сумму границ четырёх прямоугольников вдвое меньшего диаметра:



Таким образом, чтобы доказать, что интеграл по границе большого прямоугольника  $P$  нулевой, разобьём его на достаточно маленькие прямоугольники, по ним-то интеграл нуль. Чтобы это формализовать, вспомним лемму Лебега о покрытии:

**Теорема 1.2.4** (Лемма Лебега). Пусть  $K$  — компакт в метрическом пространстве,  $\{U_j\}_{j \in J}$  — открытое покрытие компакта  $K$ . Тогда  $\exists \delta > 0 : \forall A \subset K : \text{diam } A < \delta \Rightarrow \exists j \in J : A \subset U_j$ .

Применяя лемму Лебега для покрытия  $P$  окрестностями  $\{V_z\}_{z \in P}$ , получим такое число  $\delta$ . Теперь надо разбить границу прямоугольника  $P$  в сумму границ прямоугольников диаметра меньше  $\delta$ , а посылка теоремы говорит, что интеграл по ним уже нуль.  $\square$

### 1.3 Операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

Как известно,  $\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$ , то есть  $\forall z \in \mathbb{C} : z = x + iy$ , аналогично  $\bar{z} = x - iy$ .

Рассмотрим  $z$  и  $\bar{z}$ , как функции  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \mapsto x \pm iy$ . Теперь  $dz = dx + i dy$  и  $d\bar{z} = dx - i dy$  образуют базис в пространстве дифференциальных форм (тех, которые не зависят от точки), обратное преобразование выглядит так:

$$\begin{cases} dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \\ dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \end{cases}$$

Рассмотрим форму  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Phi(x, y) = \alpha(x, y) dx + \beta(x, y) dy$ . Перепишем её в новом базисе:

$$\Phi(x, y) = \frac{\alpha(x, y)}{2} (dz + d\bar{z}) + \frac{\beta(x, y)}{2i} (dz - d\bar{z}) = \frac{\alpha(x, y) - i\beta(x, y)}{2} dz + \frac{\alpha(x, y) + i\beta(x, y)}{2} d\bar{z}$$

Теперь пусть  $\Phi$  — точная форма, то есть  $\Phi = dF$ , и тогда  $\alpha(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$  и  $\beta(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ . Теперь

$$dF = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right) d\bar{z}$$

**Определение 1.3.1** ( $\frac{\partial F}{\partial z}$ ). Коэффициент, стоящий перед  $dz$ , то есть  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right)$ .

**Определение 1.3.2** ( $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ ). Коэффициент, стоящий перед  $d\bar{z}$ , то есть  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right)$ .

Иначе говоря, мы ввели операторы  $\frac{\partial}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$  и  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$  так, что

$$dF = \frac{\partial}{\partial z} F dz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} F d\bar{z}$$

### 1.3.1 Связь с голоморфными функциями

Пусть  $F = u + iv$ , где  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Запишем

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)$$

В правой части равенства получились выражения из уравнений Коши — Римана.

**Факт 1.3.1.** Вещественные функции  $u, v$  удовлетворяют уравнениям Коши — Римана  $\iff \frac{\partial(u+iv)}{\partial \bar{z}} = 0$ .

**Факт 1.3.2.**  $F$  голоморфна  $\iff dF = \frac{\partial F}{\partial z} dz$ . При этом  $\frac{\partial F}{\partial z}$  есть производная  $F$  по комплексному аргументу.

*Доказательство.* Функция дифференцируема по комплексному аргументу  $\iff$  её дифференциал — умножение на комплексное число.  $\square$

В основном нас будут интересовать дифференциальные формы вида  $\phi(z) dz$ , где  $\phi$  — произвольная функция.

Выясним, когда у формы  $\phi(z) dz = \phi(z) dx + i\phi(z) dy$  имеется первообразная, то есть функция  $g : \frac{\partial g}{\partial x} = \phi, \frac{\partial g}{\partial y} = i\phi$ . Заметим, что  $\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{2}(\phi - i(i\phi)) = \phi$  и  $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\phi + i(i\phi)) = 0$ .

**Утверждение 1.3.1.** Форма  $\phi dz$  имеет первообразную  $g \iff g$  голоморфна, и  $g' = \phi$ .

**Теорема 1.3.1** (Коши). Если  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  — голоморфная функция (область  $G \subset \mathbb{C}$ ), то форма  $g(z) dz$  замкнута.

*Доказательство.* Потом.  $\square$

*Контрпример* (Глобально первообразной может не быть). Пусть  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}, g : G \rightarrow \mathbb{C}, g : z \mapsto \frac{1}{z}$ .

По теореме Коши у  $g$  имеется локальная первообразная — комплексный логарифм — но глобально определить не получится. Пусть  $\Gamma = \partial\mathbb{T}$  — комплексная окружность, ориентируем её против часовой стрелки, а именно, рассмотрим стандартный обход окружности  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \alpha : \phi \mapsto e^{i\phi}$ . Теперь убедимся, что форма не точна:

$$\int_{\alpha} \phi = \int_{\alpha} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{(e^{it})'}{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \neq 0$$

Для будущих применений также определим ориентированную против часовой стрелки границу  $B_r(z_0)$ , это путь  $\beta(t) = z_0 + re^{it}$  для  $t \in [0, 2\pi]$ .

*Пример.* Пусть  $z_0, w \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_{>0}, |z_0 - w| \neq r$ , пусть путь  $\gamma$  обходит границу  $B_r(z_0)$  против часовой стрелки. Тогда (посчитаем чуть позже):

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - w} = \begin{cases} 0, & |z_0 - w| > r \\ 2\pi i, & |z_0 - w| < r \end{cases}$$

**Теорема 1.3.2** (Основная оценка интеграла вдоль пути). Пускай  $\Phi = \sum_{j=1}^n f_j dx_j$  — непрерывная дифференциальная форма в области  $G \subset \mathbb{R}^n$ , а  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  — кусочно-гладкий путь,  $K := \text{Im}(\gamma) \subset G$ .

$$\text{Тогда } \left| \int_{\gamma} \Phi \right| \leq \underbrace{\sup_{x \in K} \left( \sum_{j=1}^n |f_j(x)|^2 \right)^{1/2}}_{=:A} \cdot l(\gamma).$$

*Доказательство.* Считаем, что  $\gamma$  — гладкий путь, иначе нужно разбить на кусочки гладкости.

$$\left| \int_{\gamma} \Phi \right| = \left| \int_a^b \sum_{j=1}^n f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt \right| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \int_a^b \left( \sum_{j=1}^n |f_j(\gamma(t))|^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{j=1}^n |\gamma'_j(t)|^2 \right)^{1/2} dt \leq A \cdot \underbrace{\int_a^b \left( \sum_{j=1}^n |\gamma'_j(t)|^2 \right)^{1/2} dt}_{l(\gamma)}$$

□