Дифференциальная геометрия. Неофициальный конспект

Лектор: Нина Дмитриевна Лебедева
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

Глава 1

Основные понятия

Лекция I

14 февраля 2024 г.

1.1 Гладкие многообразия

Определение 1.1.1 (Топологическое многообразие)**.** Хаусдорфово топологическое пространство M со счётной базой, такое что $\forall x \in M : \exists U \ni x : U \sim \mathbb{R}^n$. Данное число n называется *размерностью* многообразия, пишут $\dim M = n$, или же часто пишут это число верхним индексом: M^n.

Далее пусть M^n — топологическое многообразие.

Определение 1.1.2 (Карта)**.** Пара из открытого $U \subset M^n$, и гомеоморфизма $\phi : U \to \Omega$, где открытое $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. U называется *носителем карты*.

«В половине случаев в литературе картой называется обратное отображение».

Определение 1.1.3 (Атлас)**.** Набор карт (U_i, ϕ_i), таких, что $\bigcup\limits_i U_i = M$.

Пусть даны две карты (U, ϕ) и (V, ψ). Далее удобно считать, что их носители пересекаются: $U \cap V \neq \varnothing$, иначе определение не несёт смысла.

Определение 1.1.4 (Отображение перехода)**.** Отображение $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$. Обозначается $f_{\phi\psi}$.

Определение 1.1.5 (Карты (U, ϕ) и (V, ψ) согласованы)**.** Отображение перехода и ему обратное гладкие.

Определение 1.1.6 (Гладкий атлас)**.** Атлас, такой, что любые две карты согласованы.

Далее все атласы предполагаются гладкими.

Определение 1.1.7 (Атласы эквивалентны)**.** Их объединение (то есть все карты из первого и из второго атласа вместе взятые) — тоже гладкий атлас.

Предложение 1.1.1. *Эквивалентность атласов — отношение эквивалентности.*

Определение 1.1.8 (Гладкая структура на многообразии)**.** Максимальный гладкий атлас (атлас, к которому нельзя добавить карт).

Замечание. К атласу можно добавить произвольное количество карт, согласованных с теми, что в атласе, и они будут согласованы между собой. В частности, для задания гладкой структуры достаточно произвольного атласа A: в A можно добавить всевозможные карты, согласованные с картами из A, и он станет максимальным.

Определение 1.1.9 (Гладкое многообразие)**.** Многообразие с гладкой структурой.

Примеры (Атласы).

- Стандартная гладкая структура на $\mathbb{R}^n$ задаётся атласом $\{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})\}$.
- В частности, стандартная структура на $\mathbb{R}^1$ задаётся атласом $\{(\mathbb{R}^1, [x \mapsto x])\}$.
- Можно задать нестандартную структуру на $\mathbb{R}^1$: $\{(\mathbb{R}^1, [x \mapsto x^3])\}$.

  Предостережение. Это действительно гладкая структура, хотя обратное отображение $[x \mapsto x^{1/3}]$ не гладкое. Тем не менее, определение и не требует гладкости от него.
- Пусть $f = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ \frac{1}{2}x, & x \leqslant 0 \end{cases}$. Тогда $\{(\mathbb{R}^1, f)\}$ — тоже гладкий атлас на $\mathbb{R}^1$.

  Тем не менее, любые два атласа из приведённых выше атласов на $\mathbb{R}^1$ не эквивалентны — отображения перехода получаются не гладкими.
- Гладкая структура на сфере задаётся двумя картами: пусть S^2 — сфера с северным полюсом N и южным S, пусть f, g — стереографические проекции с данными полюсами. Тогда $\{(S^2 \setminus \{N\}, f), (S^2 \setminus \{S\}, g)\}$ — атлас.

Замечание. Если M — гладкое многообразие, и открытое $W \subset M$, то на W естественным образом определена гладкая структура, наследующаяся с M.

1.1.1 Гладкие отображения

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия, A_M, A_N — соответствующие атласы. Рассмотрим отображение $f : M \to N$.

Определение 1.1.10 (Координатное представление f в картах (U, ϕ) на M и (V, ψ) на N)**.** Такое $\widetilde{f} : \phi(U) \to \psi(V)$, что диаграмма коммутативна везде, где определена (то есть $\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ на $\phi(U \cap f^{-1}(V))$).

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow{\scriptstyle\phi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \phi(U) & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \psi(V) \end{array}$$

Далее считаем, что $f : M \to N$ непрерывна (эквивалентно, все координатные представления непрерывны).

Определение 1.1.11 (f гладкое)**.** Любое координатное представление — гладкое.

Определение 1.1.12 (f — гладкое в точке $x \in M$)**.** Найдётся окрестность $U_x \ni x$ и карты (U, ϕ), (V, ψ) (где $V \ni y \coloneqq f(x)$), такие, что $U_x \subset U$ и сужение на U_x координатного представления f — гладко.

Свойства (Гладкие отображения).

- Гладкость в точке не зависит от выбора карт.
- Гладкость отображения не зависит от выбора атласа в одном классе эквивалентности.
- Отображение гладкое $\iff$ оно гладкое в любой точке. На лекции было доказательство $\Leftarrow$.
- Пусть $f : M \to N, g : N \to K$ гладкие. Тогда их композиция $g \circ f$ гладкая.
- Тождественное отображение гладкое, если в образе и прообразе выбраны эквивалентные атласы.
- Определение гладкости отображения совпадает с определением гладкости из матанализа (если считать, что $M \subset \mathbb{R}^m, N \subset \mathbb{R}^n$ открыты, и порождающие атласы наследуют структуры $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$)

Определение 1.1.13 (Диффеоморфизм $f : M \to N$)**.** Гладкое f, такое, что f^{-1} — тоже гладкое.

Определение 1.1.14 (Многообразия M и N диффеоморфны)**.** Между ними существует диффеоморфизм.

Понятно, что диффеоморфность — отношение эквивалентности.

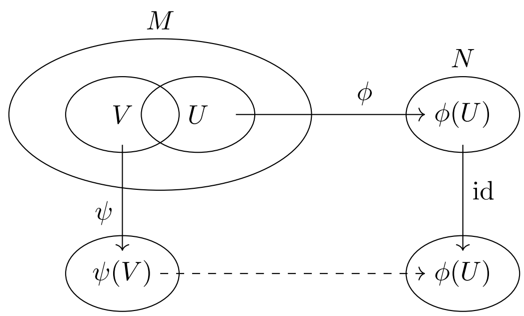
Утверждение 1.1.1. *Если $M^m \overset{\text{диф}}{\sim} N^n$, то $m = n$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную $x \in M$. Пусть $f : M \to N$ — диффеоморфизм, пусть $\widetilde{f}$ — его координатное представление. Тогда $\widetilde{f}^{-1}$ — координатное представление f^{-1}, откуда $\widetilde{f}^{-1}$ — тоже гладкое. Рассмотрим дифференциал $\mathrm{d}_x\widetilde{f}(\_)$, это изоморфизм векторных пространств, значит, $m = n$. $\square$

По умолчанию всегда считается, что на $\mathbb{R}^m$ введена стандартная гладкая структура.

Предложение 1.1.2. *Пусть M — гладкое многообразие, тогда карта — диффеоморфизм между U и $\phi(U)$. Обратно, любой диффеоморфизм между открытым подмножеством $W \subset M$ и областью $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — карта.*

Доказательство.



Гладкость карты, как диффеоморфизма, эквивалентна тому, что карта согласована с остальными в атласе: пунктирная стрелка $\psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ одновременно является и отображением перехода между картами (U, ϕ) и (V, ψ), и координатным представлением ϕ в картах $(V, \psi), (U, \mathrm{id})$. $\square$

Следствие 1.1.1. *Диффеоморфизм $f : M \to N$ задаёт естественную биекцию между картами M и картами N (а ещё между (максимальными) атласами M и (максимальными) атласами N).*

Лекция II

21 февраля 2024 г.

Пример (Диффеоморфизм). Ранее приводились неэквивалентные карты $(\mathbb{R}, \mathrm{id})$ и $(\mathbb{R}, [x \mapsto x^3])$. Вещественные прямые с данными картами диффеоморфны: $[x \mapsto x^3]$ — диффеоморфизм, ему обратный $[x \mapsto \sqrt[3]{x}]$ $\left(\text{где, как в школе, } \sqrt[3]{x} = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geqslant 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}\right)$.

Таким образом, создать две недиффеоморфные структуры на одном и том же многообразии не то чтобы просто.

Интересный факт. Пусть M — n-мерное многообразие.

$$\text{Если } \begin{cases} n < 4, & \text{на нём существует единственная гладкая структура} \\ n = 4, & \text{на нём существует бесконечно много гладких структур} \\ n > 4, & \text{на нём существует конечное число гладких структур} \end{cases}.$$

В частности, при $n > 4$: если $M^n = \mathbb{R}^n$, то гладкая структура единственна.

1.1.2 Касательное пространство

Пусть M — гладкое многообразие, $p \in M$. Пусть $\alpha, \beta : (-\varepsilon, +\varepsilon) \to M$ — гладкие (естественно, в смысле отображения многообразий) кривые, такие, что $\alpha(0) = p = \beta(0)$.

Определение 1.1.15 (α и β соприкасаются в p)**.** В любой карте (U, ϕ) (где $U \ni p$) их производные в нуле совпадают: $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$.

Предостережение. Определение требует совпадение векторов скорости, а не просто параллельности или сонаправленности.

Свойства (Соприкасающиеся кривые).

- Соприкасаемость кривых в какой-то конкретной точке — отношение эквивалентности.
- Соприкасаемость не зависит от выбора карты: достаточно проверить в любой одной, содержащей p.

  Доказательство. Пусть (U, ϕ), (V, ψ) — две карты, содержащие точку p, отображение $f_{\phi\psi} = \psi \circ \phi^{-1}$ гладкое, значит, его дифференциал переводит равные векторы в равные. $\square$

Определение 1.1.16 (Касательный вектор в точке $p \in M$)**.** Класс эквивалентности соприкасающихся в точке p кривых.

Множество всех касательных векторов — *касательное пространство*, обозначают T_pM.

Координаты касательного вектора

Пусть $p \in M$, и (U, ϕ) — карта, содержащая p.

Определение 1.1.17 (Координатное представление вектора $v = [\alpha] \in T_pM$)**.** Вектор скорости данной кривой в данной карте $v_\phi \overset{def}{=} (\phi \circ \alpha)'(0)$.

Понятно, что определение не зависит от выбора представителя — кривой α.

Также координаты v_ϕ в $\mathbb{R}^n$ называют *координатами v в карте ϕ*.

Свойства (Координатное представление).

- $\forall p \in M, \forall (U, \phi) : p \in U \Rightarrow$ координатное представление — биекция $T_pM \to \mathbb{R}^n, v \mapsto v_\phi$.

  Доказательство. Это инъекция, так как если образы u, v равны, то по определению u и v соприкасаются.

  Это сюръекция: $\forall w \in \mathbb{R}^n$ можно рассмотреть кривую $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \gamma(t) := wt + \phi(p)$. Координаты $[\phi^{-1} \circ \gamma]$ в карте ϕ как раз окажутся равными w. $\square$

Преобразование координатного представления в зависимости от карты

Утверждение 1.1.2. *Пусть $M^n \ni p$ — гладкое многообразие и точка, (U, ϕ) и (V, ψ) — карты, содержащие p. Тогда $v_\psi = \mathrm{d}_{\phi(p)} f_{\phi\psi}(v_\phi)$.*

Доказательство. Пусть $v = [\alpha]$. Тогда $v_\phi = (\phi \circ \alpha)'(0)$, $v_\psi = (\psi \circ \alpha)'(0)$, и действительно, так как $f_{\phi\psi} = \psi \circ \phi^{-1}$, то $v_\psi = (f_{\phi\psi} \circ \phi \circ \alpha)'(0)$. Дифференцируя композицию, получаем утверждение. $\square$

Следствием данного утверждения является альтернативное определение касательного вектора:

Определение 1.1.18 (Касательный вектор в точке $p \in M$)**.** Отображение из множества всех карт, содержащих точку p (обозначим их $\mathcal{M}_p$) в $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{M}_p \to \mathbb{R}^n$$

такое, что выполнены соотношения (утверждение 1.1.2).

Можно показать, что данное определение, и определение через соприкасающиеся кривые, эквивалентны.

Это определение сродни тому определению тензора, которое говорит: «Тензор — это многомерная матрица чисел, преобразующихся при замене базиса следующим образом. . . »

1.1.3 Структура векторного пространства на T_pM

Зафиксируем $p \in M$, и карту (U, ϕ), содержащую p. Пусть $v, w \in T_pM$.

Определение 1.1.19 (Сумма векторов v и w)**.** Такой вектор $v + w$, что $(v + w)_\phi = v_\phi + w_\phi$.

Определение 1.1.20 (Растяжение вектора v с коэффициентом α)**.** Такой вектор αv, что $(\alpha v)_\phi = \alpha \cdot v_\phi$.

Иными словами, у нас была биекция T_pM с векторным пространством, и мы просто перенесли структуру векторного пространства с $\mathbb{R}^n$ на T_pM. Определение не зависит от выбора карты, так как замена координат касательных векторов при переходе между картами — изоморфизм векторных пространств (дифференциал — линейный оператор).

Замечание. Из определения получается, что $v \to v_\phi$ — изоморфизм векторных пространств.

1.2 Касательное расслоение

Как множество, $T(M) = \bigsqcup\limits_{p \in M} T_pM$. Оказывается, на $T(M)$ можно естественно ввести топологию и гладкую структуру размерности $2n$. Преобразуем определение атласа так, чтобы это случилось одновременно.

Утверждение 1.2.1 (Атлас для множества)**.** *Пусть X — множество с картами (U, ϕ), то есть парами (U, ϕ) где $U \subset X$, и каждая ϕ — биекция $U \to \mathbb{R}^n$. При этом $X = \bigcup U$*

Потребуем для любых двух карт (U, ϕ) и (V, ψ): $\phi(U \cap V)$ открыто (в частности, $\phi(U)$ открыто), и потребуем, чтобы все функции перехода $f_{\phi\psi} = \psi \circ \phi^{-1}$ были гладкими.

Введём на X топологию: $W \subset X$ открыто, если $\forall (U, \phi) : \phi(U \cap W)$ открыто, и предположим, что топология получилась хаусдорфовой, и что на X есть счётная база.

Тогда утверждается, что данная процедура задаёт на X одновременно и топологию, и гладкую структуру.

Зададим такую гладкую структуру на $T(M)$. Обозначим $TU = \bigsqcup\limits_{p \in U} T_pM$. Можно рассматривать TU как множество пар, состоящих из точки и вектора: $TU = \{(p, v) | p \in U, v \in T_pM\}$.

Пусть имеется карта (U, ϕ) на M. Построим по ней карту

$$\begin{aligned} \Phi : TU &\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (p, v) &\mapsto (\phi(p), v_\phi) \end{aligned}$$

Проверим согласованность: пусть (U, ϕ) и (V, ψ) — две карты на M. По ним построены карты (TU, Φ) и (TV, Ψ) соответственно. Тогда $(\Psi \circ \Phi^{-1})(p, v) = ((\psi \circ \phi^{-1})(p), \mathrm{d}_{\phi(p)} f_{\phi\psi}(v))$, видно, что $\Psi \circ \Phi^{-1}$ гладко.

Упражнение 1.2.1. *Получилось хаусдорфовое пространство со счётной базой.*

1.2.1 Дифференциал гладкого отображения

Пусть M и N — гладкие многообразия, и есть гладкое отображение $f : M \to N$. Зафиксируем $p \in M$.

Определение 1.2.1 (Дифференциал f в точке p)**.** Отображение $\mathrm{d}_p f : T_pM \to T_{f(p)}N$, заданное следующим образом: $\mathrm{d}_p f : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$.

Утверждение 1.2.2. *Определение дифференциала не зависит от выбора представителей.*

Доказательство. Пусть $\alpha \sim \beta$ — две кривые, $\alpha(0) = \beta(0) = p$, $\alpha'(0) = \beta'(0) = v$.

Проверим, что $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$. Достаточно проверить, что совпадают координатные представления.

Выберем две карты (U, ϕ) и (V, ψ) (где $U \ni p$, $V \ni f(p)$). Координатное представление f — это $\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$.

Дифференциал $\widetilde{f}$ переносит координаты представления векторов из T_pM в координаты представления векторов из $T_{f(p)}N$:

$$\psi \circ f \circ \alpha = \widetilde{f} \circ \phi \circ \alpha \quad \text{и} \quad \psi \circ f \circ \beta = \widetilde{f} \circ \phi \circ \beta$$
$$(\psi \circ (f \circ \alpha))'(0) = \mathrm{d}_{\phi(p)}\widetilde{f}((\phi \circ \alpha)'(0)) = \mathrm{d}_{\phi(p)}\widetilde{f}((\phi \circ \beta)'(0)) = (\psi \circ (f \circ \beta))'(0)$$ □

Нетрудно заметить, что $(\mathrm{d}_p f(v))_\psi = \left(\mathrm{d}_{f(p)}\widetilde{f}\right)(v_\phi)$ *в обозначениях из доказательства выше (и* $v = [\alpha]$*).*

Следствие 1.2.1. $\mathrm{d}_p f$ *— линейное отображение.*

Лекция III

28 февраля 2024 г.

Замечание. Можно естественным определить дифференциал на всём пространстве TM вот так: $Tf : TM \to TN$. На вектор $v \in T_pM$ отображение Tf действует понятным образом: $v \mapsto \mathrm{d}_p f(v)$.

Если $U \subset \mathbb{R}^n$, то касательное пространство TU естественным образом отождествляется с $U \times \mathbb{R}^n$.

1.3 Гладкие векторные поля

Пусть M — гладкое многообразие, выберем произвольное подмножество $A \subset M$.

Определение 1.3.1 (Непрерывное векторное поле на A)**.** Непрерывное отображение $X : A \to TM$, такое, что $\forall p \in A : X(p) \in T_pM$. Часто пишут X_p вместо $X(p)$.

Определение 1.3.2 (Гладкое векторное поле на A)**.** Векторное поле $X : A \to TM$, такое, что $\exists$ открытое $U \subset M : U \supset A$, и X продолжается на U, как гладкое векторное поле (то есть гладкое отображение $U \to TM$, являющееся непрерывным векторным полем).

Для гладкого многообразия M будем обозначать пространство всех гладких векторных полей за $\mathscr{X}(M)$.

Пусть в M имеется карта (U, ϕ). Векторные поля задавались на подмножестве $A \subset M$, а не на всём многообразии, так как один из самых частых примеров гладкого векторного поля — *координатное векторное поле* — задаётся лишь в карте U:

Определение 1.3.3 (Координатное векторное поле, соответствующее i-й координате)**.** Векторное поле $V_i : U \to TM$, такое, что $\mathrm{d}\phi(V_i) = e_i$ (с координатами $V_i(p)_\phi = e_i$).

Лемма 1.3.1. *Пусть имеется открытое* $U \subset \mathbb{R}^n$*, и компактное* $K \subset U$*. Утверждается, что* $\forall V \supset K : \mathrm{Cl}\, V \subset U \Rightarrow$ *можно построить гладкую функцию* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, такую, что* $f\big|_K = 1$, $f\big|_{\mathbb{R}^n \setminus V} = 0$.

Доказательство. $\mathbb{R}^n \setminus V$ замкнуто, значит, $d \coloneqq \mathrm{dist}(\mathbb{R}^n \setminus V, K) > 0$. Функция χ_K почти подходит, только она не гладкая. Немножко увеличим носитель: рассмотрим $W \coloneqq U_{d/2}(K) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \mathrm{dist}(x, K) < \frac{d}{2}\right\}$. Для χ_W условие выполняется и в окрестности K, а, значит, подойдёт свёртка $\chi_W \circ g_{\frac{d}{2}}$, где $g_{\frac{d}{2}}$ — подходящая аппроксимативная единица, гладкая функция с компактным носителем, равная нулю вне $B_{\frac{d}{2}}(0)$. □

Следствие 1.3.1. *Пусть V_i — координатное поле карты (U, ϕ). Тогда $\forall K \subset U : \exists$ векторное поле $\widetilde{V}_i : \widetilde{V}_i\big|_K = V_i, \widetilde{V}_i\big|_{M \setminus U} \equiv 0$.*

Иными словами, всегда немного уменьшив карту, можно продолжить координатное векторное поле на всё многообразие.

1.4 Гладкие подмногообразия

Пусть M^m — гладкое многообразие размерности m.

Определение 1.4.1 (Гладкое подмногообразие размерности $n \leqslant m$)**.** Подмножество $N \subset M$, такое, что $\forall p \in N : \exists$ выпрямляющая карта (U, ϕ) (карта на M), такая, что $U \ni p$ и $\phi(U) \cap \mathbb{R}^n = \phi(N \cap U)$.

Здесь имеется в виду, что ϕ действует в $\mathbb{R}^m$, и имеется определённое вложение $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ (скажем, в $\mathbb{R}^m$ выбран базис, и на первые n векторов натянуто $\mathbb{R}^n$).

Утверждение 1.4.1. *На N каноническим образом индуцируется гладкая структура из M. Карты на N — сужения выпрямляющих карт (карте (U, ϕ) отвечает карта $(N \cap U, \psi)$, где $\psi : N \cap U \to \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$, $\psi(x) = \phi(x)$).*

Доказательство. Согласованность карт на N следует из согласованности карт на M. □

Пусть N^n, M^m — гладкие многообразия.

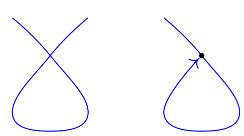
Определение 1.4.2 (Погружение $f : N \to M$)**.** Гладкое отображение $f : N \to M$, такое, что $\forall p \in N : \mathrm{d}_p f$ — инъекция. Само f не обязано быть инъекцией.

Понятно, что такое возможно только при $n \leqslant m$.

Определение 1.4.3 (Вложение $f : N \to M$)**.** Погружение $f : N \to M$, которое является топологическим вложением, то есть гомеоморфизмом на образ.

Примеры.

- В случае поверхностей размерности 2 погружение подмногообразия размерности 1 — кривой — называлось регулярной параметризацией.
- Петля слева является погружением, но даже инъективная петля справа вложением не является: в выделенной точке топология не совпадает с топологией интервала.



Предложение 1.4.1.

1. *Погружение локально является вложением: $\forall x \in N : \exists U_x \ni x : f\big|_{U_x}$ — вложение.*
2. *Образ вложения — гладкое подмногообразие.*

Доказательство. Достаточно доказать для случая открытых $N \subset \mathbb{R}^n$, $M \cong \mathbb{R}^m$, потому что карты — диффеоморфизмы, и определения сохраняются при диффеоморфизмах.

Зафиксируем $x \in N$. Введём координаты в $\mathbb{R}^m$, выделив первые n координат, так, чтобы подпространство, натянутое на них, совпадало с $\mathrm{d}_x f(\mathbb{R}^n)$.

Также прибавим (в смысле $\oplus$) к пространству $\mathbb{R}^n$, содержащему N, слагаемое $\mathbb{R}^{m-n}$.

Лемма 1.4.1. *Существуют $W \ni x, W' \ni f(x)$, и диффеоморфизм $\phi : W \to W' : \phi\big|_{N \cap W} = f$ (обе окрестности m-мерные: $W \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{m-n}, W' \in \mathbb{R}^m$).*

Доказательство леммы.

Обозначим координаты в $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{m-n}$ за (ξ, ζ), и определим $\phi(\xi, \zeta) = f(\xi) + (0, \zeta)$. Дифференциал $\mathrm{d}_x\phi = (\mathrm{d}_x f, \mathrm{id})$ невырожден (матрица блочно-диагональна), и $\phi\big|_N = f$.

По теореме об обратной функции $\exists W : \phi\big|_W$ — диффеоморфизм. □

1. Образ $\phi\big|_{N \cap W}$ — подмногообразие $W' \cap \mathbb{R}^n \subset N$. $\phi^{-1}\big|_{W'}$ — выпрямляющая карта,
2. ϕ — гомеоморфизм на образ $\Rightarrow f\big|_{N \cap W}$ — топологическое вложение и гомеоморфизм. Значит, локально погружение — вложение.
3. Так как f — топологическое вложение, то $f(N)$ — подмногообразие. □

Лекция IV

6 марта 2024 г.

Контрпример. Тождественное отображение между прямыми с разными атласами $(\mathbb{R}, x^3) \to (\mathbb{R}, \mathrm{id})$ — не вложение (и даже не погружение). Ему соответствует координатное представление $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, которое не является гладким в нуле.

Пусть $N \subset M$ — гладкое подмногообразие. Отображение $\mathrm{in} : N \hookrightarrow M$ можно рассматривать, как вложение многообразий.

Утверждение 1.4.2. *Следующие определения подмногообразия равносильны:*

- *Подмножество $N \subset M$ с выпрямляющими картами.*
- *Образ вложения некоторого многообразия.*

Интересный факт (Теорема Уитни)*.* Для любого гладкого многообразия M^m существует вложения $M^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m}$.

1.5 Риманова структура

Пусть дано гладкое многообразие M^m.

Определение 1.5.1 (Риманова структура на M^m)**.** Совокупность (положительно определённых) скалярных произведений $\{g_x\}_{x \in M}$ $(g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}, g_x = \langle \_, \_ \rangle_x)$. Иначе это называют *метрическим тензором*.

Напомним, что $\mathscr{X}(M)$ — пространство гладких векторных полей на M.

Определение 1.5.2 (Гладкая риманова структура на M^m)**.** Такая риманова структура, что $\forall X, Y \in \mathscr{X}(M)$: отображение $M \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle X_x, Y_x \rangle_x$ гладко

Далее везде будем говорить *риманово многообразие* для гладкого многообразия с гладкой римановой структурой.

Пример. Пример (гладкого) метрического тензора для поверхностей — первая квадратичная форма.

Пусть заданы два римановых многообразия $(M, \langle \_, \_ \rangle)$ и $(N, \langle \_, \_ \rangle)$.

Определение 1.5.3 (Изометрия между M и N)**.** Диффеоморфизм $f : M \to N$, сохраняющий скалярные произведения: $\forall x \in M : \forall v, w \in T_xM : \langle v, w \rangle_x = \langle \mathrm{d}_x f(v), \mathrm{d}_x f(w) \rangle_{f(x)}$.

Примеры.

- Пусть имеется вложение гладкого многообразия $f : M^m \to \mathbb{R}^n$. В соответствии с ним на M^m можно естественным образом задать риманову метрику:

  $$\forall x \in M : \forall v, w \in T_xM : \langle v, w \rangle_x \coloneqq \langle \mathrm{d}_x f(v), \mathrm{d}_x f(w) \rangle_{f(x)}$$

  Так как $\mathrm{d}_p f$ инъективен, то скалярное произведение получится невырожденным.

  В предыдущем семестре в точности это происходило с вложением поверхности в $\mathbb{R}^3$.

- Пусть на многообразии N^n задана риманова структура, и имеется вложение $f : M^m \to N^n$. Тогда абсолютно аналогично можно задать риманову метрику на M^m:

$$\forall x \in M : \forall v, w \in T_x M : \langle v, w\rangle_x := \langle \mathrm{d}_x f(v), \mathrm{d}_x f(w)\rangle_{f(x)}$$

- В обеих пунктах можно ослабить требования на f: достаточно, чтобы f было погружением.

Пусть (M^m, g) — риманово многообразие, (U, ϕ) — карта: $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^m$. Выберем в $\mathbb{R}^m$ ортонормированный базис $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$. Базисный вектор e_i — координатное представление вектора $\mathrm{d}_x\phi^{-1}(e_i)$, и $(\mathrm{d}_x\phi^{-1}(e_i))_{1\leqslant i\leqslant m}$ — базис $T_x M$.

Для краткости записи в дальнейшем будет использоваться запись $E_i := \mathrm{d}_\phi^{-1}(e_i)$, если карта ясна из контекста. В этой карте E_i — *координатные векторные поля*.

Можно записать координаты метрического тензора g_x в данных базисных векторах E_i, получатся *метрические коэффициенты для карты* (U, ϕ): $(g_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$.

Для векторов $X = X_1E_1 + \cdots + X_mE_m$ и $Y = Y_1E_1 + \cdots + Y_mE_m$:

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i,j} X_i g_{i,j} Y_j$$

Теорема 1.5.1. $g_{i,j}$ — гладкие во всех картах $\iff$ метрический тензор g гладок.

Доказательство.

$\Leftarrow$. В определении гладкого метрического тензора были $X, Y \in \mathscr{X}(M)$, но на прошлой лекции мы обсудили, что координатное поле можно продлить с любого компакта: (следствие 1.3.1).

Проверим гладкость метрического тензора в карте (U, ϕ). Пусть $p \in U$, захватим точку p открытым множеством $V \ni p : \operatorname{Cl} V \subset U$. Согласно (следствие 1.3.1), можно продлить координатные векторные поля E_i и E_j, получив некоторые поля $\overline{E}_i$ и $\overline{E}_j$, совпадающие с E_i и E_j на V.

$g\left(\overline{E}_i, \overline{E}_j\right)$ — гладкая функция, совпадающая с $g_{i,j}$ на V.

$\Rightarrow$. Рассмотрим гладкие векторные поля $X, Y \in \mathscr{X}(M)$.

Проверим гладкость в точке $x \in M$. Рассмотрим произвольную карту (U, ϕ), содержащую x, Распишем $X = \sum\limits_i \xi_i E_i, Y = \sum\limits_j \eta_j E_j$. Так как поля гладкие, то $\xi_i, \eta_j : M \to \mathbb{R}$ — гладкие функции.

Получается, $\langle X, Y\rangle_x = \sum\limits_{i,j} \xi_i\eta_j \langle X_i, X_j\rangle = \sum\limits_{i,j} \xi_i\eta_j g_{i,j}$. $\square$

Пример. Пусть многообразие M^m покрыто одной картой (M, ϕ). Для задание римановой структуры на M необходимо и достаточно ввести $m \times m$ гладких метрических коэффициентов $g_{i,j} : M \to \mathbb{R}$ так, что матрица $(g_{i,j})$ всюду положительно определена.

В случае покрытия M несколькими картами так может не получиться, надо ещё проверять согласованность, что может быть неудобно.

1.5.1 Длина путей

Пусть $v \in T_x M$.

Определение 1.5.4 (Длина вектора v)**.** $|v| \overset{def}{=} \sqrt{\langle v, v\rangle_x}$.

Теперь $\gamma : [a, b] \to M$ — кусочно-гладкая кривая (имеется разбиение $a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = b$, такое, что $\gamma\big|_{[t_i, t_{i+1}]}$ — гладкая).

Определение 1.5.5 (Длина кривой)**.** $L(\gamma) = \sum\limits_i \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t$. Длина γ' определена: из гладкости $\forall t \in (t_i, t_{i+1}) : \gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

Пусть (M, g) — связное риманово многообразие, $x, y \in M$ — две точки.

Определение 1.5.6 (Расстояние между точками x, y)**.** $d_l(x, y) \overset{def}{=} \inf_\gamma l(\gamma)$, где инфимум берётся по всем кусочно гладким $\gamma : [a, b] \to M$, таким, что $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$.

Теорема 1.5.2.

1. d_l — метрика
2. Топология, порождённая d_l совпадает с исходной топологией ΩM.

Доказательство.

1. Проверим три аксиомы метрики.
   - Меняя направление пути, получаем $d_l(x, y) = d_l(y, x)$.
   - Выберем $\varepsilon > 0$, найдутся две кусочно гладкие кривые $\gamma_{x,y}$ и $\gamma_{y,z}$, почти оптимально соединяющие x, y и y, z соответственно ($l(\gamma_{x,y}) \leqslant d(x, y) + \varepsilon$; $l(\gamma_{y,z}) \leqslant d(y, z) + \varepsilon$). Конкатенируя $\gamma_{x,y} \cdot \gamma_{y,z}$, получаем $d_l(x, z) \leqslant d_l(x, y) + d_l(y, z) + 2\varepsilon$. Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем неравенство треугольника.
   - Проверим положительную определённость.

   Лемма 1.5.1. $\forall x \in M : \exists$ *карта* (U, ϕ)*, содержащая* x*, такая, что* $\forall \varepsilon > 0 : \exists V \subset U$ $(V \ni x)$*, причём* $\phi\big|_V : V \to \phi(V)$ $(1 \pm \varepsilon)$*-билипшицево:*

   $$\forall a, b \in V : (1 - \varepsilon)|\phi(a) - \phi(b)| \leqslant d_l(a, b) \leqslant (1 + \varepsilon)|\phi(a) - \phi(b)|$$

   Отсюда сразу получается, что $\forall \gamma : [c, d] \to V$*:*

   $$(1 - \varepsilon) \cdot l(\phi \circ \gamma) \leqslant l(\gamma) \leqslant (1 + \varepsilon) \cdot l(\phi \circ \gamma)$$

   Доказательство леммы.

   Выберем ортонормированный базис $X_1, \ldots, X_m$ в T_xM (такой найдётся, так как скалярное произведение положительно определено).

   Выберем произвольную карту (U, ϕ), содержащую x. $\mathrm{d}_x\phi(X_1), \ldots, \mathrm{d}_x\phi(X_m)$ — базис в $\mathbb{R}^m$, его можно линейным преобразованием L перевести в ортонормированный. Далее считаем, что он уже ортонормирован (можно заменить карту ϕ на $L \circ \phi$).

   Коэффициенты метрического тензора в этой карте $g_{i,j}$ таковы, что $g_{i,j}(x) = \delta_{i,j}$.

   Из непрерывности $g_{i,j} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \underset{\ni x}{V} \subset U : \forall y \in V, v \in T_yM$:

   $$(1 - \varepsilon)|v| \leqslant |\,\mathrm{d}_y\phi(v)| \leqslant (1 + \varepsilon)|v|$$ ☐

2. Применяем (лемма 1.5.1) для $\varepsilon = 1/2$. Из билипшицевости сразу получается совпадение топологий. ☐

1.5.2 О внутренней метрике

Более частым случаем является определение расстояния, как инфимум длин всех кривых, а не только кусочно-гладких. Однако риманова структура на многообразии определяет лишь метрику в каждой точке, а непосредственных средств для вычисления длин непрерывных путей риманова структура не предоставляет.

Пусть (X, d) — метрическое пространство, $\gamma : [c, d] \to X$ — (непрерывный) путь. Его длину можно определить по формуле $L_d(\gamma) = \sup \sum\limits_i d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$, где супремум берётся по всем разбиениям $c = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = d$. Пусть $x, y \in X$.

Определение 1.5.7 (Внутренняя метрика, порождённая метрикой d)**.** $d_I(x, y) \overset{def}{=} \inf_\gamma L_d(\gamma)$, где инфимум берётся по всем непрерывным $\gamma : [a, b] \to M$, таким, что $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$. Не уверен в правильности этого определения.

Из неравенства треугольника сразу получается $d_I \geqslant d$ (для всякой кривой γ, соединяющей точки x и y: $L_d(\gamma) \geqslant d(x, y)$ по определению супремума).

В силу теоремы, которую мы скоро докажем (теорема 1.5.3), имеет место равенство $(d_I)_I = d_I$. Это позволяет ввести следующее определение.

Определение 1.5.8 (Внутренняя метрика)**.** Метрика d, совпадающая с внутренней метрикой, порождённой d.

Конечно, не все метрики — внутренние.

Пример (Не внутерння метрика). Рассмотрим окружность $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Метрика, индуцированная с $\mathbb{R}^2$ на S^1 — не внутренняя: расстояние между диаметрально-противоположными точками равно 2, но не существует пути, их соединяющего, длиной меньше π.

Лекция V

13 марта 2024 г.

В этой лекции везде $\widehat{\gamma}$ обозначают кусочно-гладкие кривые, а γ — произвольные (непрерывные) кривые.

Определение 1.5.9 (Длина кусочно-гладкой кривой $\widehat{\gamma}$)**.** Число $L(\widehat{\gamma}) \overset{def}{=} \sum \int |\widehat{\gamma}'|$.

Построим внутреннюю метрику, порождённую длинами кривых d_L: $d_L(x, y) = \inf\limits_{\widehat{\gamma}} L(\widehat{\gamma})$. По произвольной метрике d можно определить длину кривых по формуле $L_d(\gamma) = \sup \sum\limits_i d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$.

Что будет, если по формуле для длин кривых построить метрику, а потом согласно этой метрике научиться измерять длины кривых?

Утверждение 1.5.1. *Для всякой кусочно-гладкой кривой* $\widehat{\gamma} : [a, b] \to M$*:* $L_{d_L}(\widehat{\gamma}) \leqslant L(\widehat{\gamma})$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$, по определению длины, построенной по метрике, найдётся разбиение $a = t_0 < \cdots < t_k = b$, такое, что $L_{d_L}(\widehat{\gamma}) \leqslant \sum\limits_{i=0}^{k-1} d_L\left(\widehat{\gamma}(t_i), \widehat{\gamma}(t_{i+1})\right) + \varepsilon$.

Теперь оценим $d_L\left(\widehat{\gamma}(t_i), \widehat{\gamma}(t_{i+1})\right) \leqslant L(\widehat{\gamma}\big|_{[t_i, t_{i+1}]})$. Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем искомое неравенство в силу аддитивности длины. $\square$

Теорема 1.5.3. d_L — внутренняя метрика: $\forall x, y \in M : d_L(x, y) = \inf\limits_\gamma L_{d_L}(\gamma)$, где инфимум берётся по всем непрерывным путям $\gamma : [a, b] \to M; \gamma(a) = x, \gamma(b) = y$.

Доказательство. Для любой кривой $\gamma : [a, b] \to M$, такой, что $\begin{cases} \gamma(a) = x \\ \gamma(b) = y \end{cases}$ верно, что $d_L(x, y) \leqslant L_{d_L}(\gamma)$: можно в качестве разбиения выбрать $a = t_0 < t_1 = b$.

Тем самым, достаточно для всякого $\varepsilon > 0$ предъявить кривую $\gamma : [a, b] \to M$, соединяющую x и y, так, что $L_{d_L}(\gamma) \leqslant d_L(x, y) + \varepsilon$.

Лемма 1.5.2. *Функция длины L от кусочно-гладких кривых полунепрерывна снизу: если $\widehat{\gamma}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \widehat{\gamma}$ поточечно, то $\varliminf\limits_{n\to\infty} L(\widehat{\gamma}_n) \geqslant L(\widehat{\gamma})$.*

Доказательство леммы.

Выберем $\varepsilon > 0$; согласно (лемма 1.5.1) каждая точка $\widehat{\gamma}$ вместе с некоторой окрестностью покрывается картой, так что

$$(1-\varepsilon)L_{map}\left(\phi \circ \widehat{\gamma}\big|_{[t_j,t_{j+1}]}\right) \leqslant L\left(\widehat{\gamma}\big|_{[t_j,t_{j+1}]}\right) \leqslant (1+\varepsilon)L_{map}\left(\phi \circ \widehat{\gamma}\big|_{[t_j,t_{j+1}]}\right)$$

где L_{map} — длина кривой в $\mathbb{R}^n$.

Так как $\widehat{\gamma}([a, b])$ — компакт, то можно выделить конечное количество таких карт. Начиная с некоторого номера, все точки $\widehat{\gamma}_n$ тоже лежат в соответствующих картах.

В евклидовом пространстве полунепрерывность снизу есть: $\varliminf\limits_{n\to\infty} L_{map}(\phi \circ \widehat{\gamma}_n) \geqslant L_{map}(\phi \circ \widehat{\gamma})$, значит, $\frac{1}{1-\varepsilon} \varliminf\limits_{n\to\infty} L(\widehat{\gamma}_n) \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon} L(\widehat{\gamma})$. Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем искомое утверждение. □

Возьмём кусочно-гладкую кривую $\widehat{\gamma}$, соединяющую x и y так, что $d_L(x, y) \geqslant L(\widehat{\gamma}) + \varepsilon$ (она берётся из определения d_L). Осталось доказать следующую лемму.

Лемма 1.5.3. *Для кусочно-гладких кривых: $L(\widehat{\gamma}) = L_{d_L}(\widehat{\gamma})$.*

Доказательство леммы.

В силу (утверждение 1.5.1) достаточно доказать, что $L(\widehat{\gamma}) \leqslant L_{d_L}(\widehat{\gamma})$.

Выберем $\varepsilon > 0$. По определению супремума: $L_{d_L}(\widehat{\gamma}) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{N} d_L(\widehat{\gamma}(t_i), \widehat{\gamma}(t_{i+1}))$. Теперь для каждой пары точек $\widehat{\gamma}(t_i)$, $\widehat{\gamma}(t_{i+1})$ найдётся кривая $\widehat{h}_i$, соединяющая их так, что $d_L(\widehat{\gamma}(t_i), \widehat{\gamma}(t_{i+1})) \geqslant L(\widehat{h}_i) - \frac{\varepsilon}{N}$. Обозначим за $\widehat{h} = \widehat{h}_1 \cdot \ldots \cdot \widehat{h}_{N-1}$, цепочка неравенств показывает $L_{d_L}(\widehat{\gamma}) \geqslant L\left(\widehat{h}\right) - \varepsilon$. При стремлении $\varepsilon \to 0$ происходит поточечное стремление $\widehat{h} \to \widehat{\gamma}$, откуда согласно (лемма 1.5.2) мы получаем искомое неравенство. Про поточечное стремление не очень ясно. □

□

1.6 Плоскость Лобачевского

Плоскость Лобачевского — двумерное многообразие постоянной кривизны -1. При этом евклидова плоскость $\mathbb{R}^2$ имеет постоянную кривизну, равную 0, а сфера S^2 — постоянную положительную кривизну 1. Плоскость Лобачевского по важности сравнима с этими двумя объектами, но вложить в трёхмерное пространство ей не получится. Поэтому мы её изучаем вместе с римановой геометрией, явно определяя метрический тензор.

1.6.1 Модель в верхней полуплоскости

Как гладкое многообразие, *плоскость Лобачевского* $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ — открытое подмножество евклидовой плоскости, покрываемое одной тождественной картой.

Зададим метрический тензор на $\mathbb{H}^2$ формулой $g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$. Карта отождествляет касательные пространства $\mathbb{H}^2$ и верхней полуплоскости $\mathbb{R}^2$, как векторные пространства, но скалярное произведение в этих касательных пространствах различается: $\forall v \in T_{(x,y)}\mathbb{H}^2 : |v|_{\mathbb{H}} = \frac{1}{y}|v|_E$. Здесь $|\_|_{\mathbb{H}}$ и $|\_|_E$ — длины векторов в касательной плоскости к точке на плоскости Лобачевского, либо, соответственно, на евклидовой полуплоскости.

У гладкой кривой $\widehat{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{H}^2$ (в координатной записи $\gamma(t) = (x(t), y(t))$) вектор скорости равен $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$, а длина кривой в плоскости Лобачевского равна $L(\widehat{\gamma}) = \int |\widehat{\gamma}'|_{\mathbb{H}} = \int \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{y}\, \mathrm{d}t$.

Пусть $f : (M, g_M) \to (N, g_N)$ — диффеоморфизм римановых многообразий.

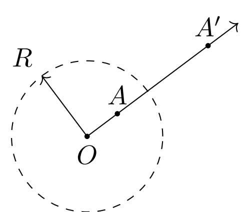
Определение 1.6.1 (f конформно)**.** f сохраняет углы, то есть $\forall p \in M : \mathrm{d}_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$ — гомотетия: $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \forall v \in T_p M : |\,\mathrm{d}_p f(v)|_N = \lambda |v|_M$, число λ называют *коэффициентом конформности*.

Две метрики g_1 и g_2 на одном многообразии M называют *конформными*, если id_M конформно. В частности, если одна из метрик евклидова (с метрическим тензором $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$), то метрический тензор второй имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$, где λ – конформный фактор.

Тем самым, плоскость Лобачевского имеет конформную метрику, конформный фактор в точке (x, y) равен $\frac{1}{y}$.

Известное нетривиальное конформное отображение — *инверсия*.

Определение 1.6.2 (Инверсия $\mathbb{R}^n$ относительно точки $O \in \mathbb{R}^n$ и сферы радиуса R)**.** Отображение $I : \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, при котором точка A переходит в такую точку A' на луче OA, что $|OA| \cdot |OA'| = R^2$. Иначе говоря, $\overrightarrow{OA'} = \frac{R^2}{|OA|^2}\overrightarrow{OA}$.



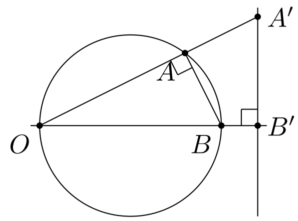
Замечание. Инверсия — инволюция, то есть $I^2 = \mathrm{id}$

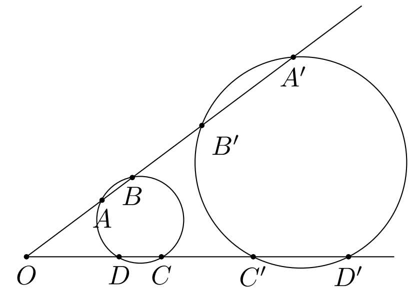
Теорема 1.6.1. Инверсия — конформное отображение, его конформный фактор в точке A равен $\lambda(A) = \frac{R^2}{|OA|^2}$. При инверсии плоскости окружности и прямые переходят в окружности и прямые.

Доказательство.

2. Сначала покажем, что окружности и прямые переходят в окружности и прямые. На рисунках O — центр инверсии, а образы точек при инверсии называются теми же буквами с добавлением штриха.

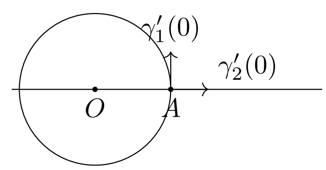
   - На левом рисунке показано, как окружность, проходящая через центр инверсии, переходит в прямую: если OB — диаметр окружности, то прямая, перпендикулярная OB, и проходящая через B' — образ окружности. В самом деле, для любой пары точек A и A' треугольники OAB и $OB'A'$ подобны; угол OAB прямой, если и только если A на окружности, а угол $OB'A'$ прямой, если и только если A' на прямой.





- На правом рисунке изображены точки A, B, C, D, лежащие на окружности, не содержащей ни внутри себя, ни на границе, центра инверсии. Тогда (ссылка на факт из школьной геометрии) $|OA| \cdot |OB| = |OC| \cdot |OD|$, применяя определение инверсии получаем $|OA'| \cdot |OB'| = |OC'| \cdot |OD'|$, откуда (применяя обратный факт) точки A', B', C', D' тоже лежат на одной окружности.
- Случай, когда центр инверсии лежит внутри одной из окружностей аналогичен предыдущему, тогда центр инверсии лежит внутри и образа этой окружности.
- Наконец, прямая, проходящая через центр инверсии, при инверсии переходит в себя.

1. Для проверки, что $\lambda(A) = \frac{R^2}{|OA|^2}$, достаточно рассмотреть все плоскости, содержащие прямую OA. Пусть γ_1 — параметризация одномерной окружности радиуса OA, $\gamma_1(0) = A$, и γ_2 — параметризация луча OA, $\gamma_2(0) = A$:



Векторы $\gamma_1'(0)$ и $\gamma_2'(0)$ образуют базис $T_A\mathbb{R}^2$. Применим инверсию к картинке.

- $(I \circ \gamma_1)(t) = \frac{R^2}{|OA|^2}\gamma_1(t)$, откуда $|(I \circ \gamma_1)'(0)| = \frac{R^2}{|OA|^2}\,|\gamma_1'(0)|$.
- $(I \circ \gamma_2)(t) = \frac{R^2}{|\gamma_2(t)|^2}\gamma_2(t)$, откуда $|(I \circ \gamma_2)'(0)| = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\frac{R^2}{|\gamma_2(t)|}\right| = \frac{R^2}{|OA|^2}\cdot|\gamma_2'(0)|$. □

Замечание. Стереографическая проекция — сужение инверсии — сохраняет углы.

В модели плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости имеется *абсолют* — прямая $\left\{(x,y) \subset \mathbb{R}^2 \middle| y = 0\right\}$.

Определение 1.6.3 (Изометрия)**.** Диффеоморфизм, сохраняющий метрику ($|\_|$ илм $\langle \_, \_ \rangle$ — достаточно что-то одно из двух).

Теорема 1.6.2. Следующие отображения — изометрии плоскости Лобачевского:

1. Сдвиг $S_c : (x,y) \mapsto (x+c, y)$.
2. Отражение $R_c : (x,y) \mapsto (2c - x, y)$.
3. Гомотетия с центром на абсолюте и положительным коэффициентом.
4. Инверсия с центром на абсолюте.

Доказательство. Надо просто проверить, что данные отображения сохраняют $|\_|$.

1., 2. Очевидно.

3. Такая гомотетия сопряжена при помощи сдвига гомотетии с центром в $(0,0)$. Пусть $f : (x,y) \mapsto (kx, ky)$, тогда $\forall v \in T_{(x_0,y_0)}\mathbb{H}^2 : \left|\mathrm{d}_{(x_0,y_0)}f(v)\right|_E = k|v|_E$, и так как конформный фактор в (kx_0, ky_0) в k раз меньше фактора в (x_0, y_0), то действительно $\left|\mathrm{d}_{(x_0,y_0)}f(v)\right|_{\mathbb{H}} = |v|_{\mathbb{H}}$.

4. В силу доказанного выше, достаточно проверить для инверсии с центром в $O = (0,0)$ и радиусом $R = 1$. Такая инверсия действует по правилу $I : (x_0, y_0) \mapsto \left(\frac{x_0}{r^2}, \frac{y_0}{r^2}\right)$, где $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Согласно (теорема 1.6.1), в евклидовой метрике $\forall v \in T_{(x_0,y_0)}\mathbb{H}^2 : \left|\mathrm{d}_{(x_0,y_0)} I(v)\right|_E = \frac{1}{r^2}|v|_E$. Получаем
$$|\mathrm{d}_{(x_0,y_0)} I(v)|_{\mathbb{H}} = \frac{|\mathrm{d}_{(x_0,y_0)} I(v)|_E}{y_0/r^2} = \frac{|v|_E}{y_0} = |v|_{\mathbb{H}} \qquad \square$$

Определение 1.6.4 (Движение плоскости Лобачевского)**.** Изометрия плоскости Лобачевского, получаемая композицией пунктов (1 – 4) из (теорема 1.6.2).

Когда-нибудь докажем, или нет, что других изометрий у плоскости Лобачевского нет.

Плоскость Лобачевского удобно представлять, как $\mathbb{C}_+ \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C} | \Im z > 0\}$. В этом случае все движения записываются в виде

$$\begin{cases} z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, & \text{где } a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0 \\ z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, & \text{где } a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad - bc < 0 \end{cases}$$

Так как $I(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, то несложно проверить, что это группа, и (1 – 4) из (теорема 1.6.2) — её образующие.

Определение 1.6.5 (Прямые в плоскости Лобачевского)**.** Прямые, перпендикулярные абсолюту, и окружности, перпендикулярные абсолюту (то есть с центром на нём).

Теорема 1.6.3. Через любые две точки плоскости Лобачевского проходит единственная *прямая*, и её отрезок реализует кратчайшее расстояние между данными точками.

Доказательство. При движении прямые переходят в прямые, поэтому достаточно доказать эту теорему для случая двух точек, находящихся на одной вертикальной прямой. В самом деле, несложно построить окружность с центром на абсолюте, проходящую через две данные точки, и инверсией перевести её в вертикальную прямую.

Итак, через две точки (x_0, y_1) и (x_0, y_2) очевидным образом проходит всего одна прямая — вертикальная евклидова прямая. Если кусочно-гладкий путь $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ соединяет данные точки, то его длина равна $\sum\limits_{i=0}^{N-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}|y|}{\mathrm{d}} t \geqslant \sum\limits_{i=0}^{N-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\dot{y}|y|}{\mathrm{d}} t$, и равенство наблюдается только при $x' \equiv 0$. Иными словами, любой путь при проекции на прямую $x = x_0$ не увеличивает свою длину, причём понятно, что путь будет кратчайшим, если он монотонный. $\square$

Лекция VI

20 марта 2024 г.

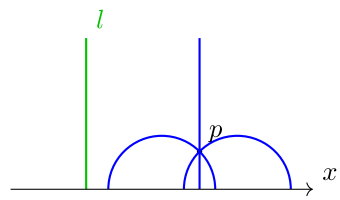
1.6.2 Аксиомы плоскости Лобачевского

«На самом деле, аксиом много, и их можно по-разному выбирать»

Аксиомы аналогичны евклидовым, выпишем некоторые из них:

1. Через любые две точки проходит единственная прямая (евклидова окружность с центром на абсолюте или вертикальная прямая).
2. Прямая разбивает плоскость на две части: любой отрезок, соединяющий две точки, пересекает данную прямую не более, чем в одной точке, и точки бьются на два класса эквивалентности относительно данного отношения.
3. Аксиома параллельных не верна: через одну точку можно провести много прямых, параллельных данной (не пересекающих данную).

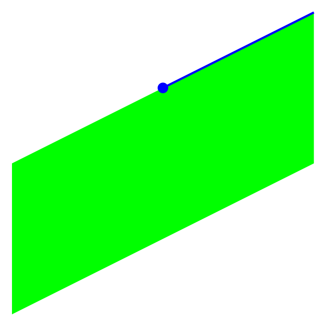
На данной картинке синим нарисованы некоторые прямые, проходящие через точку p, не пересекая данную зелёную прямую l:



Интересный факт. Это равносильно тому, что не существует точки O, в которой можно произвести гомотетию, то есть такое отображение $H : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ с коэффициентом $\lambda \in \mathbb{R}$, что $H(O) = O, d(H(A), H(B)) = \lambda d(A, B)$.

4. Однородность движения.

   Определение 1.6.6 (Флаг)**.** Тройка из точки, луча и полуплоскости, расположенных так:

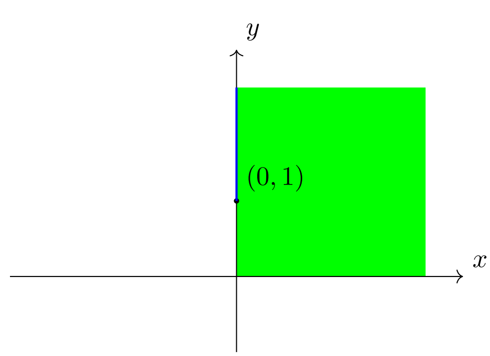
   Говоря словами, берётся точка, из прямой (в смысле гиперболической плоскости — евклидова прямая либо окружность), проходящей через данную точку, оставляется только одна половина — луч, и так как прямая делит плоскость на две части, то также выбирается одна из частей — полуплоскость.

   Аксиома однородности движения говорит, что любой такой флаг (набор из точки, луча и полуплоскости), переводится в любой другой флаг движением.

   Предложение 1.6.1. *Докажем, что данная аксиома верна в нашей модели.*

   Доказательство. Достаточно доказать, что в данный флаг можно перевести любой другой.

   В качестве фиксированного флага выберем флаг $[(0, 1), \text{вверх}, \text{вправо}]$:

   Рассмотрим другой флаг, характеризующийся точкой p, и выберем на луче другую точку q. Пусть $d \coloneqq d(p, q)$. Переведём точки p и q в точки $(0, 1)$ и $(0, e^d)$ соответственно:

- Если p и q не лежат на одной вертикальной прямой, то прямая, проходящая через них — евклидова окружность с центром на абсолюте. Пусть она пересекает абсолют в точке X (и ещё какой-то), сделав инверсию в X, мы сведёмся к следующему случаю.
- Теперь p и q лежат на одной вертикальной прямой, пересекающей абсолют в точке Y. Если p выше q, то сделаем инверсию в Y, теперь p ниже q.
- Далее гомотетией с центром в Y переведём p в $(0, 1)$. Так как все проделанные преобразования — изометрии, а последняя сохраняет вертикальную прямую pq, то q перейдёт в точку $(0, e^d)$.
- Чтобы совместить флаги, осталось, если нужно, сделать отражение относительно прямой $x = 0$ (точки и лучи уже совмещены, но надо ещё совместить полуплоскости). $\square$

5. Неравенство треугольника: $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$, и равенство имеет место только когда $z \in [x, y]$ (разумеется, отрезок — множество точек гиперболической прямой xy, лежащих между x и y).

1.6.3 Модель Пуанкаре в круге

Обозначим модель Лобачевского в верхней полуплоскости $\mathbb{H}_L$. Сделаем инверсию I модели Лобачевского относительно $A = (0, -1)$ с коэффициентом $K = \sqrt{2}$.

Абсолют $y = 0$ перешёл в окружность, проходящую через точки $(0, 2)$ (образ $(0, 1)$) и $(0, 0)$ (образ бесконечно удалённой). Из симметрии относительно прямой $x = 0$ получаем, что абсолют перешёл в окружность $\omega \coloneqq \left\{(x, y)\middle|x^2 + y^2 = 1\right\}$.

Данная модель, получающаяся при инверсии модели Лобачевского в верхней полуплоскости, называется *моделью Пуанкаре в круге*, обозначим её $\mathbb{H}_P$. Так как инверсия конформна, а $\langle v, w\rangle_{\mathbb{H}_P} = \langle \mathrm{d}I(v), \mathrm{d}I(w)\rangle_{\mathbb{H}_L}$, то метрика осталась конформной.

Роль прямых теперь играют диаметры ω и дуги окружностей, ортогональных ω (инверсия сохраняет углы, а все прямые ортогональны абсолюту).

Теорема 1.6.4. Конформный фактор метрики равен $\frac{2}{1-x^2-y^2}$. Иными словами, для $v \in T_{(x,y)}\mathbb{H}_P$: $|v|_{\mathbb{H}_P} = \frac{2}{1-x^2-y^2}|v|_E$.

Доказательство. Рассмотрим $(x_0, y_0) \in \mathbb{H}_P$. Пусть $(x_1, y_1) = I(x_0, y_0)$. Конформный фактор гиперболической плоскости в модели Лобачевского в точке (x_1, y_1) равен $\frac{1}{y_1}$.

Пусть при инверсии с центром в точке $A = (0, -1)$ точка B переходит в B'. Тогда имеется равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'}\frac{R^2}{|AB'|^2}$. Выразим y_1 через x_0, y_0 (здесь $r = \sqrt{x_0^2 + (y_0 + 1)^2}$):

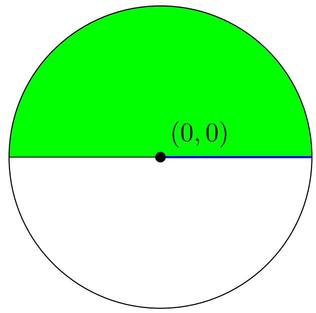
$$y_1 = -1 + (y_0 + 1) \cdot \frac{2}{x_0^2 + (y_0 + 1)^2} = \frac{-x_0^2 - y_0^2 + 1}{r^2}$$

С другой стороны, конформный фактор инверсии равен $\lambda_I = \frac{2}{r^2}|v|_E$.

Получаем для $v \in T_{(x_0,y_0)}\mathbb{H}_P$: так как инверсия I сохраняет метрику (мы просто так определили метрику на $\mathbb{H}_P$), то $|v|_{\mathbb{H}_P} = |\,\mathrm{d}_{(x_0,y_0)}I(v)|_{H_L} = \frac{|\,\mathrm{d}I(v)|_E}{y_1} = \frac{2}{1-x_0^2-y_0^2}$.

Можно записать теперь, что матрица Грама имеет вид $\begin{pmatrix} \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2} \end{pmatrix} |v|_E$. $\square$

Теперь несложно проверить, что никаких изометрий плоскости Лобачевского, кроме объявленных в (теорема 1.6.2) нет. Так как движения действуют транзитивно на флагах, то достаточно увидеть, что движения содержат стабилизатор любого флага (здесь применяется лемма о действии групп, доказанная в курсе комплексного анализа при изучении автоморфизмов $\widehat{\mathbb{C}}$). При этом всякая изометрия, оставляющая в модели Лобачевского центр круга $(0,0)$, оставляет на месте и все окружности $x^2+y^2=r^2$ для $r \in (0,1)$. Рассмотрим изометрии, стабилизирующие следующий флаг:



Рассмотрим окружность $x^2+y^2=\frac{1}{2}$. Она изометрична евклидовой окружности (конформный фактор во всех точках одинаков), очевидно, что любая изометрия, стабилизирующая данный флаг, действует на ней тождественно.

Так как изометрия сохраняет прямые, в частности, диаметры окружности $x^2+y^2=1$, то изометрия, тождественно действующая на окружности $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ тождественно действует на всём круге. Тем самым, стабилизатор каждой точки тривиален, то есть движения совпадают с изометриями.

1.7 Касательный вектор как дифференцирование

Пусть M — гладкое многообразие. $\mathscr{F}(M)$ — множество гладких функций, $\mathscr{X}(M)$ — множество гладких векторных полей.

Естественным образом, $\mathscr{F}(M)$ и $\mathscr{X}(M)$ образуют векторные пространства над $\mathbb{R}$. При этом, на $\mathscr{F}(M)$ также есть поточечное умножение, и $\mathscr{F}(M)$ таким образом формируют ассоциативную, коммутативную $\mathbb{R}$-алгебру. А ещё $\mathscr{X}(M)$ также является модулем над $\mathscr{F}(M)$ — относительно поточечного умножения.

Как известно из курса алгебры, дифференциальный оператор D на $\mathbb{R}$-алгебре A — это такой $\mathbb{R}$-линейный оператор $D : A \to A$, что выполнено правило Лейбница: $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$. Все дифференцирования образуют $\mathbb{R}$-линейное пространство $\mathrm{Der}(A)$.

Для алгебры $\mathscr{F}(M)$ всякий $X \in \mathscr{X}(M)$ индуцирует дифференцирование D_X:

$$f \in \mathscr{F}(M) \mapsto D_X(f) \in \mathscr{F}(M), \text{ определённый так: } (D_X(f))(x) = \mathrm{d}_x f(X_x)$$

Правило Лейбница выполнено, так как оно имеет место при дифференцировании произведения.

Факт 1.7.1. *Отображение $\mathscr{X}(M) \to \mathrm{Der}(\mathscr{F}(M)), X \mapsto D_X$ — гомоморфизм $\mathbb{R}$-векторных пространств.*

Доказательство. Несложно проверить. □

Далее применение дифференцирования, индуцированного векторным полем X, к функции f обозначается просто $X(f)$.

Теорема 1.7.1. Выше определённое отображение $\mathscr{X}(M) \to \mathrm{Der}(\mathscr{F}(M))$ является изоморфизмом.

Доказательство.

Лемма 1.7.1. *Зафиксируем $p \in M$.*

Пусть $\overline{D} : \mathscr{F}(M) \to \mathbb{R}$ — $\mathbb{R}$-линейное отображение, такое, что $\overline{D}(f \cdot g) = \overline{D}(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \overline{D}(g)$. Например, подходит отображение «продифференцировать взять значение в точке p».

1. *Тогда* $\exists! v \in T_pM : \overline{D} = D_v \overset{def}{=} [f \mapsto \mathrm{d}_p f(v)]$.
2. *Несложно получить координаты этого вектора* v. *Рассмотрим карту* (U, ϕ), *содержащую точку* p. *В* $\mathbb{R}^n$ *есть координаты* $x_1, \ldots, x_n$, *пусть* $(\widetilde{x}_i)_{i=1}^n \subset \mathscr{F}(M)$ *— функции, отвечающие координатам* ($\widetilde{x}_i = \phi^{-1} \circ x_i$).

   Утверждается, что $v_i = \overline{D}(\widetilde{x}_i)$.

Доказательство леммы.

Заметим, что $\overline{D}(\mathrm{const}) = 0$ (проверим для $f \equiv 1 : \overline{D}(1) = \overline{D}(1) \cdot 1 + 1 \cdot \overline{D}(1) = 2\overline{D}(1)$).

Далее проверим, что $\overline{D}$ локально: если $f\big|_{U_p} = g\big|_{U_p}$, то $\overline{D}(f) = \overline{D}(g)$. Сконструируем такую «шапочку» $h \in \mathscr{F}(M)$, что $h(p) = 1$, и $h\big|_{M \setminus U_p} \equiv 0$. Для проверки локальности заметим, что $f\big|_{U_p} = g\big|_{U_p} \iff f \cdot h = g \cdot h$. Выкладка

$$\overline{D}(f \cdot h = g \cdot h) = \begin{cases} \overline{D}(f) \cdot h(p) + f(p) + \overline{D}(h) \\ \overline{D}(g) \cdot h(p) + g(p) + \overline{D}(h) \end{cases}$$

показывает локальность.

Теперь убедимся, что такой вектор $v \in T_pM$, если существует, то единственен. Для этого проверим равенства во втором пункте, явно задающие координаты v. Пусть ϕ — карта, $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Так как $D_v(\widetilde{x}_i) = v_i$, то отсюда следует второй пункт.

Теперь докажем существование такого вектора $v \in T_pM$. Зафиксируем карту (U, ϕ), содержащую p. Положим $v_i \coloneqq D(E_i)$, и убедимся, что вектор $(v_1, \ldots, v_n)$ задаёт $\overline{D}$.

Лемма 1.7.2 (Адамар)**.** *Пусть* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Тогда* $\exists g_1, \ldots, g_n$ *— гладкие, такие, что* $f(x) - f(0) = \sum\limits_i g_i(x) \cdot x_i$.

Доказательство леммы.

Положим $g_i(x) \coloneqq \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,\mathrm{d}t$. Они подходят:

$$f(x) - f(0) = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tx)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \cdot x_i\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n g_i(t) \cdot x_i \qquad \square$$

Можно считать, что $\phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Выберем $\widetilde{f} \in \mathscr{F}(M)$, применим к $f \coloneqq \phi \circ \widetilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ лемму Адамара, получим функции $g_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Обозначим $\widetilde{g}_i \coloneqq \phi^{-1} \circ g_i$, получили разложение $\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(p) + \sum\limits_{i=1}^n \widetilde{g}_i(x)\widetilde{x}_i$. Теперь распишем

$$\overline{D}\left(\widetilde{f}\right) = \overline{D}\left(\widetilde{f}(0) + \sum_{i=1}^n \widetilde{x}_i \cdot \widetilde{g}_i(x)\right) = \sum_{i=1}^n \overline{D}\left(\widetilde{x}_i \cdot \widetilde{g}_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \overline{D}\left(\widetilde{x}_i\right) \cdot \widetilde{g}_i + \underbrace{\widetilde{x}_i}_{=0} \cdot \overline{D}\left(\widetilde{g}\right) = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \widetilde{g}_i$$

Так как $g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, то действительно $\overline{D}(\widetilde{f}) = D_v(\widetilde{f})$. $\square$

Рассмотрим дифференцирование $D \in \mathrm{Der}(\mathscr{F}(M))$. Согласно лемме, $\forall p \in M : \exists! v_p \in T_pM$, такой, что отображение $f \mapsto D(f)(p)$ совпадает с $f \mapsto D_{v_p}(f)$. Это показывает инъективность $\mathscr{X}(M) \to \mathrm{Der}(\mathscr{F}(M))$, а для сюръективности надо убедиться, что полученное поле $p \mapsto v_p$ гладкое.

Проверим гладкость $p \mapsto v_p$ в карте. Лемма даёт координатное представление $(v_p)_i = D(\widetilde{x}_i)(p)$, это действительно гладкая функция. Осталось сказать, что для проверки гладкости достаточно проверить гладкость координат. $\square$

Лекция VII

27 марта 2024 г.

1.8 Скобка Ли векторных полей

Пусть M — гладкое многообразие, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Определение 1.8.1 (Скобка Ли векторных полей)**.** Отображение $[\_, \_] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$, сопоставляющее двум полям X, Y векторное поле, отвечающее дифференцированию

$$X(Y(f)) - Y(X(f)) \tag{[−]}$$

Иными словами, $[X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f))$.

Проверим, что ([−]) является дифференцированием. Линейность очевидна; правило Лейбница говорит, что должно быть равенство такого

$$[X, Y](f \cdot g) = ([X, Y]f) \cdot g + f \cdot ([X, Y]g) = (X(Y(f)) - Y(X(f))) \cdot g + f \cdot (X(Y(g)) - Y(X(g)))$$

и такого выражений:

$$[X, Y](f \cdot g) = X(Y(f \cdot g)) - Y(X(f \cdot g)) = X(Y(f) \cdot g + f \cdot Y(g)) - Y(X(f) \cdot g + f \cdot X(g)) =$$
$$X(Y(f)) \cdot g + \cancel{Y(f) \cdot X(g)} + \cancel{X(f) \cdot Y(g)} + f \cdot X(Y(g)) - Y(X(f)) \cdot g - \cancel{X(f) \cdot Y(g)} - \cancel{Y(f) \cdot X(g)} - f \cdot Y(X(g))$$

1.8.1 Выражение для скобки Ли в координатах

Пусть X, Y — два гладких векторных поля, $\phi : U \to \Omega$ — карта.

Введём $\widetilde{x}_i \coloneqq x_i \circ \phi$, запишем (где $X_\phi \overset{def}{=} \mathrm{d}\phi \circ X \circ \phi^{-1}$ — векторное поле на $\mathbb{R}^n$)

$$[X, Y]_i = D_{[X,Y]}(\widetilde{x}_i) = D_{[X_\phi, Y_\phi]}(x_i) = [X_\phi, Y_\phi]_i = X_\phi(Y_\phi(x_i)) - Y_\phi(X_\phi(x_i)) = X_\phi(Y_i) - Y_\phi(X_i)$$

1.8.2 Пространство $\mathcal{X}(M)$ вместе со скобкой Ли, как алгебра Ли

Чтобы проверить, что $\mathcal{X}(M)$ образует алгебру Ли, убедимся, что выполнены три аксиомы алгебр Ли:

1. Линейность по обеим аргументам: $\forall \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}, X, Y \in \mathcal{X}(M)$:
$$[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y] = \alpha_1 [X_1, Y] + \alpha_2 [X_2, Y]$$
$$[X, \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2] = \beta_1 [X, Y_1] + \beta_2 [X, Y_2]$$

2. Кососимметричность: $[X, Y] = -[Y, X]$, или же (эквивалентно) антисимметричность $[X, X] = 0$.

3. Тождество Якоби $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Все три свойства следуют из того, что изоморфизм $\mathbb{R}$-векторных пространств $\mathcal{X}(M) \to \mathrm{Der}(\mathcal{F}(M))$ сохраняет скобку Ли (просто по определению скобки Ли на $\mathcal{X}(M)$). То, что для любой алгебры A: $\mathrm{Der}(A)$ — алгебра Ли — известный факт. Проверим тождество Якоби: $\forall X, Y, Z \in \mathrm{Der}(A), \forall a \in A$:

$$[X, [Y, Z]](a) = X([Y, Z](a)) - [Y, Z](X(a)) =$$
$$= X(Y(Z(a))) - X(Z(Y(a))) - Y(Z(X(a))) + Z(Y(X(a)))$$

Записывая аналогичные равенства для $[Y, [Z, X]]$ и $[Z, [X, Y]]$, и складывая, получим 0 — всё сократится.

1.8.3 Специфичные свойства скобки Ли векторных полей

Пусть $f, g \in \mathscr{F}(M)$.

Свойства (Скобка Ли векторных полей).

- $[f \cdot X, Y] = f \cdot [X, Y] - Y(f) \cdot X$.

  Доказательство. Применим к $h \in \mathscr{F}(M)$:

  $$[f \cdot X, Y](h) = (f \cdot X)(Y(h)) - Y((f \cdot X)(h)) = (f \cdot X)(Y(h)) - Y(f \cdot X(h)) \;=$$

  Так как $(f \cdot X)(\cdots)$ — это производные по направлению, то это равно $f \cdot X(\cdots)$.

  $$= f \cdot (X(Y(h))) - Y(f) \cdot X(h) - f \cdot Y(X(h))$$ □

- $[X, g \cdot Y] = g \cdot [X, Y] + X(g) \cdot Y$.

  Доказательство. Ради разнообразия, выведем из первого и кососимметричности

  $$[X, g \cdot Y] = -[g \cdot Y, X] = -(g \cdot [Y, X] - X(g) \cdot Y) = g \cdot [X, Y] + X(g) \cdot Y$$ □

- $[f \cdot X, g \cdot Y] = f \cdot g \cdot [X, Y] + f \cdot X(g) \cdot Y - g(Y(f)) \cdot X$.

  Доказательство.

  $$[f \cdot X, g \cdot Y] = g \cdot [f \cdot X, Y] + (f \cdot X)(g) \cdot Y = g \cdot (f \cdot [X, Y] - Y(f) \cdot X) + (f \cdot X)(g) \cdot Y$$ □

Определение 1.8.2 (Группа Ли)**.** Гладкое многообразие, являющееся топологической группой: умножение $G \times G \to G$ и взятие обратного $G \to G$ — гладкие отображения.

Пример (Группы Ли). Различные линейные группы: $GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{R}), O(n, \mathbb{R}), \ldots$

Всякий элемент $g \in G$ действует на группе левыми и правыми трансляциями: $L_g : x \mapsto gx, R_g : x \mapsto xg$.

Определение 1.8.3 (Левоинвариантное векторное поле X)**.** Такое поле, что $\forall g \in G : \mathrm{d}L_g(X) = X$.

Выберем ортонормированный базис $(x_1, \ldots, x_n) \in T_1(G)$ ($1 \in G$ — единица в группе), и распространим $x_1, \ldots, x_n$ до левоинвариантых векторных полей $X_1, \ldots, X_n$ соответствующим дифференциалом L_g (действие транзитивно, поэтому, $X_1, \ldots, X_n$ определены всюду). Это будут векторные поля, отвечающие за ортонормированные базисы во всех точках группы.

Можно определить левоинвариантную метрику: для $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in T_g(G) : \langle \widetilde{X}, \widetilde{Y} \rangle = \langle \mathrm{d}_1 L_g(X), \mathrm{d}_1 L_g(Y) \rangle$.

1.9 Тензоры на многообразии

Пусть V — векторное пространство.

Определение 1.9.1 (Тензор типа (k, m))**.** Тензор $\underbrace{(V^* \otimes \cdots \otimes V^*)}_{k} \otimes \underbrace{(V \otimes \cdots \otimes V)}_{m}$

Мы будем рассматривать только тензоры типа $(k, 0)$ и $(k, 1)$, что, как известно, можно рассматривать, как полилинейные отображения

$$\underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to V \quad \text{соответственно}$$

Определение 1.9.2 (Тензор (тензорное поле) на M типа $(k, 0)$)**.** Семейство $\{F_x\}_{x \in M}$ тензоров валентности $(k, 0)$ вместе со следующим условием гладкости:

$$\forall X_1, \ldots, X_k \in \mathscr{X}(M) : F(X_1, \ldots, X_k) \in \mathscr{F}(M)$$

Пример (Тензор типа $(n, 0)$).

Риманова метрика на n-мерном многообразии.

Контрпример (Не тензор).

Символ Кристоффеля $\Gamma^k_{i,j}$ не является записью какого-то тензора в координатах: отображение $F(X, Y) = \nabla_X Y$ не $\mathscr{F}(M)$-линейно: $\nabla_X(f \cdot Y) = X \cdot f + f \cdot \nabla_X(Y)$.

Определение 1.9.3 (Тензор (тензорное поле) на M типа $(k, 1)$)**.** Семейство $\{F_x\}_{x \in M}$ тензоров валентности $(k, 1)$ вместе со следующим условием гладкости:

$$\forall X_1, \ldots, X_k \in \mathscr{X}(M) : F(X_1, \ldots, X_k) \in \mathscr{X}(M)$$

Таким образом, тензорному полю на M сопоставляется $\mathbb{R}$-полилинейное (и даже $\mathscr{F}(M)$-полилинейное)

$$F : \mathscr{X}(M) \times \cdots \times \mathscr{X}(M) \to \begin{bmatrix} \mathscr{F}(M) \\ \mathscr{X}(M) \end{bmatrix}$$

Теорема 1.9.1. Если $F : \mathscr{X}(M) \times \cdots \times \mathscr{X}(M) \to \begin{bmatrix} \mathscr{F}(M) \\ \mathscr{X}(M) \end{bmatrix}$ является $\mathscr{F}(M)$-полилинейным, то F является гладким тензорным полем.

Доказательство.

1. Докажем локально случай $k = 1$.

   Проверим локальность. Рассмотрим $p \in U$. Пусть $X\big|_U = Y\big|_U$. $(F(X))(p) = (F(Y))(p)$. Пусть h — гладкий спуск с единицы, $h\big|_{U'} \equiv 1, h\big|_{M \setminus U} \equiv 0$, где $p \in U' \subset U$.

   Теперь $h \cdot F(Y) = h \cdot F(X) = F(hX) = F(hY)$.

2. Достаточно доказать для $X \in \mathscr{X}(M)$, что значение $(F(X))(p)$ зависит только от X_p. Доказав, мы построим семейство, отвечающее F.

   Зафиксируем карту (U, ϕ). Выберем базис $e_1, \ldots, e_n$, ему отвечают координатные векторные поля E_i. Согласно $\mathscr{F}(M)$-линейности все раскладывается в сумму $X_i \cdot F_i$.

   (Распространим координатное векторное поле, используя гладкий спуск с единицы: $\widetilde{E}_i\big|_U \equiv 0$ в дополнении карты). Из локальности

   $$F(X) = F(X_1 \widetilde{E}_1 + \cdots + X_n \cdot \widetilde{E}_n)$$

3. Случай $k \neq 1$ сводится к предыдущему последовательным применением. □

Лекция VIII

3 апреля 2024 г.

Пусть E_i, E_j — координатные поля. Имеется такой факт, что $[E_i, E_j] = 0$.

Доказательство. $[X, Y]^\phi = (Y^\phi)'_{X^\phi} - (X^\phi)'_{Y_\phi} = 0$. □

Вообще, скобка Ли — мера некоммутативности векторных полей, что мы докажем позже.

1.9.1 Поведение скобки Ли при отображениях

Пусть M, N — гладкие многообразия, $X \in \mathscr{X}(M), Y \in \mathscr{X}(N)$, $F : M \to N$ – гладкое.

Определение 1.9.4 (F переводит X в Y)**.** $\forall p \in M : \mathrm{d}_p F(X_p) = Y_p$.

Вообще говоря, если дано отображение $F : M \to N$, и векторное поле $X \in \mathscr{X}(M)$, то не всегда найдётся $Y \in \mathscr{X}(N)$ такой, что X переходит в Y (например, $F(p) = F(q)$, и $\mathrm{d}_p F(X_p) \neq \mathrm{d}_p F(X_q)$), а если и найдётся, то может быть не единственно, если F не сюръективно.

Пусть $F : M \to N$ переводит $X \in \mathscr{X}(M)$ в $Y \in \mathscr{X}(N)$.

Лемма 1.9.1. *F переводит X в Y $\iff$ $\forall$ гладкого $f : N \to \mathbb{R} : (Y(f) \circ F)(p) = X(f \circ F)(p)$.*

Доказательство.

- $\Rightarrow$. $X(f \circ F)(p) = \mathrm{d}_p(f \circ F)(X) = (\mathrm{d}_p f \circ \mathrm{d}F)(X) = \mathrm{d}_p f(Y) = (Yf)(F(p))$.
- $\Leftarrow$. Выберем локально $f \coloneqq x_i$ — координатная функция. $Y_i(F(p)) = ((Yx_i) \circ F)(p) = X(x_i \circ F)(p) = \mathrm{d}(x_i \circ F)(X) = \mathrm{d}x_i \circ \mathrm{d}F(X) = (\mathrm{d}F(X))_i$. Тем самым, совпали i-е координаты полей, значит, сами поля совпали. □

Теорема 1.9.2. Пусть $F : N \to M$ гладкое, $X_1, X_2 \in \mathscr{X}(M), Y_1, Y_2 \in \mathscr{X}(N)$. Если $F(X_1) = Y_1$ и $F(X_2) = Y_2$, то $F([X_1, X_2]) = [Y_1, Y_2]$.

Доказательство. Пусть $f : N \to \mathbb{R}$ — произвольная гладкая. Проверим, что $F([X_1, X_2])$ и $[Y_1, Y_2]$ одинаково действуют на f:

$$[Y_1, Y_2](f) = Y_1(Y_2(f)) - Y_2(Y_1(f)) = Y_1(X_2(f \circ F)) - Y_2(X_1(f \circ F)) = [X_1, X_2](f \circ F)$$

Согласно (лемма 1.9.1), имеет место равенство. □

Следствие 1.9.1. *Пусть M — гладкое многообразие, $N \subset M$ — гладкое подмногообразие.*

Если $X, Y \in \mathscr{X}(N)$ касательны к N, то и $[X, Y]$ — касательно к N.

Доказательство. Рассмотреть $F = \mathrm{in}$. □

1.10 Аффинные связности

Пусть M — гладкое многообразие

Определение 1.10.1 (Аффинная связность)**.** Отображение

$$\begin{aligned} \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) &\to \mathscr{X}(M) \\ V, W &\mapsto \nabla_V W \end{aligned}$$

со следующими свойствами:

1. $\mathbb{R}$-билинейность.
2. $\mathscr{F}(M)$-линейность по первому аргументу: $\nabla_{f \cdot V} W = f \cdot \nabla_V W$.
3. Правило Лейбница по второму аргументу: $\nabla_V (f \cdot W) = V(f) \cdot W + f \cdot \nabla_V W$.

Примеры.

- Обычное дифференцирование: на $\mathbb{R}^n$ заданы векторные поля.
- Ковариантная производная на поверхности $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$
- Покоординатное дифференцирование в карте.

Теорема 1.10.1 (О пространстве связностей)**.** Пусть M — гладкое многообразие, $\nabla, \widetilde{\nabla}$ — две аффинные связности.

1. $\nabla - \widetilde{\nabla}$ — тензор типа $(2,1)$.
2. Если T — тензор типа $(2,1), \nabla$ — связность, то $T + \nabla$ — связность.

Доказательство.

- Достаточно проверить $\mathscr{F}(M)$-линейность по второму аргументу:

$$\nabla_V(f \cdot W) - \widetilde{\nabla}_V(f \cdot W) = \cancel{V(f) \cdot W} + f \cdot \nabla_V W - \cancel{V(f) \cdot W} - f \cdot \widetilde{\nabla}_V W$$

- Достаточно проверить правило Лейбница:

$$(\nabla + T)_V(f \cdot W) = f(V) \cdot W + f \cdot \nabla_V W + T(V, f \cdot W) = f(V) \cdot W + f \cdot (\nabla + T)_V(W)$$

□

Предложение 1.10.1 (Локальность аффинной связности)**.** *Пусть ∇ — аффинная связность. $\forall V, W \in \mathscr{X}(M) : \nabla_V(W)$ зависит только от V_p и W в окрестности p.*

Доказательство. При фиксированном втором аргументе $\nabla_\_(W)$ — тензор типа $(1,1)$, значит, зависит только от V_p.

Пусть имеются два поля W_1, W_2, совпадающие в окрестности $U_p \ni p$. Пусть h — гладкий спуск с единицы в окрестности p, $h\big|_{U_p^\complement} \equiv 0$.

$$h \cdot (\nabla_V W_2) + \underbrace{(W_2(h) \cdot V)_p}_{0} = \nabla_V(h \cdot W_2) = \nabla_V(h \cdot W_1) = h \cdot (\nabla_V W_1) + \underbrace{(W_1(h) \cdot V)_p}_{0}$$

□

Следствие 1.10.1. *Для аффинной связности ∇ и открытого $U \subset M$ имеет смысл говорить о сужении $\nabla\big|_U$.*

Рассмотрим карту $\phi : (U \subset M) \to \mathbb{R}^n$. Пусть ∇ – аффинная связность на M, а ∇^ϕ — покоординатное дифференцирование в карте. Тогда $\nabla - \nabla^\phi$ — некоторый тензор Γ типа $(2,1)$.

Пусть $E_1, \ldots, E_n$ — координатные векторные поля. Тогда $\Gamma(E_i, E_j) = \Gamma_{i,j}$

Определение 1.10.2 (Символы Кристоффеля)**.** $\Gamma_{i,j} = \Gamma(E_i, E_j)$.

В отличие от сивмолов Кристоффеля прошлого семестра, эти отвечают координатам тензора, и имеют смысл не на всём многообразии, а только в данной карте.

1.10.1 Симметричная связность

Определение 1.10.3 (∇ — симметричная связность)**.** Такая аффинная связность ∇, что $\forall X, Y \in \mathscr{X}(M) : \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Утверждение 1.10.1. $T \coloneqq \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ *— тензор типа* $(2,1)$.

Доказательство. Выражение антисимметрично ($\nabla_X X - \nabla_X X - [X, X] = 0$) и $\mathbb{R}$-билинейно. Проверим $\mathscr{F}(M)$-билинейность по второму аргументу:

$$\begin{aligned}\nabla_X(f \cdot Y) - \nabla_{f \cdot Y} X - [X, f \cdot Y] = \cancel{X(f) \cdot Y} + f \cdot \nabla_X Y - f \cdot \nabla_Y X - (f \cdot [X, Y] + \cancel{X(f) \cdot Y}) = \\ = f \cdot (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y])\end{aligned}$$

□

Этот тензор T называется тензор кручения.

Следствие 1.10.2. *Проверку того, что связность симметрична, достаточно осуществлять на координатных полях. Для координатных полей $\nabla_{E_i}E_j - [E_i, E_j] = \nabla_{E_i}E_j = \Gamma_{i,j}$. Тем самым, связность симметрична $\iff \Gamma_{i,j} = \Gamma_{j,i}$.*

Пусть $(M, \langle \_, \_ \rangle)$ — многообразие с римановой метрикой.

Определение 1.10.4 (Риманова связность ∇)**.** Аффинная связность ∇, согласованная с римановой метрикой: $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.

Утверждение 1.10.2. $S \coloneqq X\langle Y, Z\rangle - \langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle Y, \nabla_X Z\rangle$ — *тензор типа* $(3, 0)$.

Доказательство. $\mathbb{R}$-полилинейность по всем аргументам и $\mathscr{F}(M)$-линейность по первому очевидны.

По второму и третьему аргументам симметрично, проверим билинейность по второму:

$$\begin{aligned} &X\langle f\cdot Y, Z\rangle - \langle \nabla_X(f\cdot Y), Z\rangle - \langle f\cdot Y, \nabla_X Z\rangle = \\ &\qquad = \cancel{X(f)\cdot\langle Y, Z\rangle} + f\cdot X\langle Y, Z\rangle - \cancel{\langle X(f)\cdot Y, Z\rangle} - f\langle \nabla_X(Y), Z\rangle - f\langle Y, \nabla_X Z\rangle \end{aligned}$$

□

Следствие 1.10.3. *Можно проверять римановость связности только на координатных полях.*

Определение 1.10.5 (Связность Леви-Чивиты)**.** Симметричная риманова связность.

Лекция IX

10 апреля 2024 г.

1.10.2 Символы Кристоффеля

Дадим второе определение, и поймём, что оно совпадает с первым.

Определение 1.10.6 (Символы Кристоффеля в карте)**.** $\Gamma^{\phi}_{i,j} = \nabla_{E_i}E_j$.

Опять же, символы первого рода $\Gamma_{i,j;k} = \langle \Gamma_{i,j}, E_k\rangle$, и символы второго рода $\Gamma_{i,j} = \sum\limits_k \Gamma^k_{i,j}E_k$.

Это совпадает с (определение 1.10.2), так как $\Gamma^{\phi}(E_i, E_j) = \nabla_{E_i}E_j - \underbrace{\nabla^{\phi}_{E_i}E_j}_{0}$.

Факт 1.10.1. *Доказательство.* $\left\langle \Gamma^k_{i,j}, E_l\right\rangle = \Gamma^k_{i,j}\cdot g_{k,l}$ Пусть $(g_{n,m})_{n,m}$ — матрица Грама, $(g'_{n,m}) = (g_{n,m})^{-1}$ — обратная матрица, тогда так как $(g_{n,m})\begin{pmatrix}\Gamma^1_{i,j}\\ \vdots \\ \Gamma^n_{i,j}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Gamma_{i,j;1}\\ \vdots \\ \Gamma_{i,j;n}\end{pmatrix}$, то $\begin{pmatrix}\Gamma^1_{i,j}\\ \vdots \\ \Gamma^n_{i,j}\end{pmatrix} = (g'_{n,m})\begin{pmatrix}\Gamma_{i,j;1}\\ \vdots \\ \Gamma_{i,j;n}\end{pmatrix}$.

Тем самым, одни символы гладкие тогда и только тогда, когда гладкие — другие. □

1.10.3 Единственность связности Леви-Чивиты

Теорема 1.10.2 (Основная теорема римановой геометрии)**.** Пусть $(M, \langle \_, \_ \rangle)$ — риманово многообразие. Тогда существует и единственна связность Леви-Чивиты ∇.

Доказательство. Перепишем: $(g_{i,j})'_{x_k} = \langle \Gamma_{k,i}, E_j\rangle + \langle E_i, \Gamma_{k,j}\rangle = \Gamma_{k,i;j} + \Gamma_{k,j;i}$. Переставляя индексы циклически, получаем уравнения $\begin{cases}(g_{i,j})'_{x_k} = \langle \Gamma_{k,i}, E_j\rangle + \langle E_i, \Gamma_{k,j}\rangle = \Gamma_{k,i;j} + \Gamma_{k,j;i}\\ (g_{jk})'_{x_i} = \langle \Gamma_{i,j}, E_k\rangle + \langle E_j, \Gamma_{i,k}\rangle = \Gamma_{i,j;k} + \Gamma_{i,k;j}\\ (g_{k,i})'_{x_j} = \langle \Gamma_{j,k}, E_i\rangle + \langle E_k, \Gamma_{j,i}\rangle = \Gamma_{j,k;i} + \Gamma_{j,i;k}\end{cases}$ Так как символы симметричны, то есть $\Gamma^k_{i,j} = \Gamma^k_{j,i}$, то

$$\Gamma_{i,j;k} = \frac{(g_{i,k})'_{x_j} + (g_{i,k})'_{x_i} - (g_{i,j})'_{x_k}}{2} \tag{$*$}$$

Используя разложение $\nabla = \nabla^\phi + \Gamma^\phi$, получаем единственность в каждой карте, значит, и глобальная единственность.

Доказали существование связности Леви-Чивиты в карте, согласованность следует из единственности (пересечение карт — карта). $\square$

Ковариантное дифференцирование из прошлого семестра — эта самая связность.

1.11 Ковариантная производная вдоль пути

Пусть $\gamma : [a, b] \to M$ — гладкая (необязательно регулярная) кривая на гладком многообразии M.

Определение 1.11.1 (Гладкое векторное поле вдоль пути γ)**.** Гладкое отображение $V : [a, b] \to TM$, такое, что $\forall t \in [a, b] : V(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

Пусть M — гладкое многообразие, ∇ — связность, γ — гладкая кривая, V — векторное поле вдоль γ.

Определение 1.11.2 (Ковариантная производная V вдоль γ)**.** Отображение $V \mapsto \frac{\nabla}{\mathrm{d}t}V$ со следующими свойствами:

1. $\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}(V + W) = \frac{\nabla}{\mathrm{d}t}V + \frac{\nabla}{\mathrm{d}t}W$
2. $\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}(f \cdot V) = f' \cdot V + f \cdot \frac{\nabla}{\mathrm{d}t}V$.
3. Если $\exists\widetilde{V}$ — векторное поле на M, такое, что $\widetilde{V}(\gamma(t)) = V(t)$, то $\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}V = \nabla_{\gamma'}\widetilde{V}$.

Выглядит, как ковариантная производная (по теореме о выпрямлении всё можно сделать), но если $\gamma' = 0$, то там по-другому.

Теорема 1.11.1. Ковариантная производная вдоль пути существует и единственна.

Доказательство. Сначала докажем единственность. Разложим покоординатно: $V(t) = \sum\limits_i V_i(t) \cdot E_i(\gamma(t))$.

$$\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}V = \frac{\nabla}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i V_i(t) \cdot E_i(\gamma(t))\right) = \sum_i \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} \cdot E_i + \sum_i V_i \cdot \frac{\nabla}{\mathrm{d}t}E_i$$

Обозначим $\gamma'(t) = \sum\limits_i \alpha_i(t) \cdot E_i(\gamma(t))$. Так как координатное векторное поле вдоль пути отвечает обычному координатному векторному полю, то

$$V_i \cdot \frac{\nabla}{\mathrm{d}t}E_i = V_i \cdot \alpha_j \Gamma_{i,j}$$

Этого достаточно для единственности, распишем подробнее, чтобы показать существование

$$\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}V = \sum_i V_i' \cdot E_i + \sum_{i,j,k} V_j \alpha_k \Gamma^i_{j,k} E_i \tag{$**$}$$

Существование, опять же, получается из единственности и соответствующей формулы: покроем носитель открытыми множествами W_i, таких, что $\forall W_i : \exists (U, \phi) : U \supset W_i$. Далее несложно проверить, что определение при помощи формулы $(**)$ даёт корректно определённую ковариантную производную вдоль пути. На пересечениях всё согласовано из единственности. $\square$

1.12 Геодезические в римановых многообразиях

Далее везде на гладком многообразии M определён гладкий метрический тензор, и ∇ — связность Леви-Чивиты.

Пусть $\gamma : [a, b] \to M$ — гладкая кривая.

Определение 1.12.1 (γ — геодезическая)**.** Такая кривая γ, что ковариантная производная её вектора скорости вдоль неё самой нулевая: $\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}\gamma' = 0$.

Пусть кривая натурально параметризована: $|\gamma'| \equiv 1$. Тогда кривизна $K_\gamma = \left|\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}\gamma'\right|$.

Утверждение 1.12.1. *Кривая геодезическая* $\iff K_\gamma \equiv 0$.

Свойства.

- Если γ — геодезическая, то $|\gamma'| = \mathrm{const}$: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\gamma',\gamma'\rangle = \left\langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma',\gamma'\right\rangle + \left\langle\gamma',\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma'\right\rangle = 0$ (докажем позже, что так можно).
- Если γ — геодезическая, то $\widetilde{\gamma}(t) \coloneqq \gamma(at+b)$ — тоже.

  Доказательство. $\widetilde{\gamma}' = a\cdot\gamma'$, откуда $\frac{\nabla_{\widetilde{\gamma}}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\gamma}' = a^2\frac{\nabla_\gamma \mathrm{d}t'}{\gamma} = 0$. ☐

1.12.1 Уравнение геодезической

Пусть в карте $\widetilde{\gamma} = \phi\circ\gamma = (a_1(t),\dots,a_n(t))$, тогда $\widetilde{\gamma}'(t) = (a_1'(t),\cdots,a_n'(t))$. Запишем $(**)$:

$$\widetilde{\gamma}'' = \sum_i a_i''\cdot E_i + \sum_{i,j} a_i a_j\cdot\Gamma_{i,j}^k\cdot E_k$$

Фиксируя E_k, получаем n уравнений, проиндексированных при помощи k: $a_k'' + \sum\limits_{i,j} a_i a_j \Gamma_{i,j}^k$.

Теорема 1.12.1. Пусть $(M,\langle\_,\_\rangle)$ — гладкое риманово многообразие, ∇ — связность Леви-Чивиты, $p\in M, v\in T_pM$.

Тогда $\exists\varepsilon>0, \gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ — такая геодезическая. что $\gamma(0)=p, \gamma'(0)=v$.

Доказательство. Решаем систему дифференциальных уравнений второго порядка. ☐

1.12.2 Параллельный перенос вдоль пути

Пусть $\gamma:[a,b]\to M$ — гладкая кривая, V — гладкое векторное поле вдоль γ.

Определение 1.12.2 (V паралелльно вдоль γ)**.** $\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}V\equiv 0$.

В частности, вектор скорости геодезической параллелен вдоль неё.

Теорема 1.12.2. Пусть $p\in M, v_0\in T_pM$. $\gamma(0)=p, \gamma'(0)=p$. Утверждается, что $\exists! V(t)$ — векторное поле вдоль γ, параллельное вдоль γ, такое, что $V(0)=v_0$.

Доказательство. Опять запишем $(**)$ $\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}V = 0 = \sum\limits_i V_i'\cdot E_i + \sum\limits_{i,j,k} V_j a_k \Gamma_{j,k}^i\cdot E_i$. Получили n уравнений первого порядка с необходимым количеством начальных данных. Значит, $\exists!$ решение на всей области определения. ☐

Определение 1.12.3 (Параллельный перенос вектора v_0 вдоль γ в точку $\gamma(t_*)$)**.** Значение векторного поля вдоль γ, параллельного γ, в точке t_*.

Обозначим за $P_{t_1}^{t_2}: T_{\gamma(t_1)}M\to T_{\gamma(t_2)}M$ отображение переноса вектора.

Замечание. Параллельный перенос — линейное отображение, так как свойство быть параллельным вдоль пути сохраняется при взятии линейных комбинаций.

Свойства.

- Пусть X,Y — векторные поля, параллельные вдоль γ. Тогда $\langle X(t),Y(t)\rangle = \mathrm{const}$.

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle X(t),Y(t)\rangle = \left\langle\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}X,Y\right\rangle + \left\langle X,\frac{\nabla Y}{\mathrm{d}t}\right\rangle$$

Следствие 1.12.1. *Вдоль пути наблюдается изоморфизм векторных пространств T_pM и T_qM.*

Предложение 1.12.1. *Пусть $t_0 \in [a, b]$ Тогда $\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P_t^{t_0}X(t))$*

Доказательство. Выберем базис $(B_i)_i$ и разнесём его параллельными переносами. Получили на всей кривой базис из параллельных векторных полей.

Запишем $X = \sum\limits_i X_i B_i$. Тогда

$$\frac{\nabla X}{\mathrm{d}t} = \sum_i x_i' \cdot B_i + \sum_i x_i \cdot \underbrace{\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}B_i}_{0}$$

□

Зафиксируем $p \in M, v \in T_pM$.

Определение 1.12.4 (Экспоненциальное отображение)**.** Частично определённое отображение $\exp_p : (\subset T_pM) \to M$, такое, что $\exp_p(v)$ — это $\gamma(1)$, где γ — геодезическая с начальными данными $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. $\exp_p(v)$ определено если и только если геодезическая с такими параметрами определена в 1.

Также определяют $\exp : (\subset TM) \to M$, определённое поточечно. В курсе дифференциальных уравнений доказывались соответствующие теоремы, из которых видно, что $\exp$ — гладкое отображение, однозначно определённое на некотором открытом подмножестве TM.

Лекция X

17 апреля 2024 г.

Докажем утверждение

Утверждение 1.12.2. *Пусть $\gamma : [0, 1] \to M$ — кривая на римановом многообразии, ∇ — связность Леви-Чивиты, X, Y — гладкие векторные поля вдоль γ. Тогда*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle X, Y\rangle = \left\langle \frac{\nabla}{\mathrm{d}t}X, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{\nabla}{\mathrm{d}t}Y \right\rangle$$

Доказательство. Пусть (U, ϕ) — карта, и E_i — координатные векторные поля. Разложим $X = \sum\limits_i x_i E_i$ и $Y = \sum\limits_i y_j E_j$. Преобразуем левую часть:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i,j}\langle x_i E_i, y_j E_j\rangle = (x_i, y_j)' \cdot g_{i,j} + x_i y_j \cdot \frac{\mathrm{d}g_{i,j}}{\mathrm{d}t}, \text{ где } \frac{\mathrm{d}g_{i,j}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\widetilde{\gamma}_k'}_{a_k} \cdot (g_{i,j})'_{x_k} = a_k \cdot (\Gamma_{i,k;j} + \Gamma_{j,k;i})$$

Теперь преобразуем правую часть, воспользовавшись (**):

$$\sum_k \left\langle x_i' E_i + \sum_{i,j} a_i x_j \Gamma_{i,j}, y_k E_k \right\rangle + \sum_i \left\langle x_i E_i, y_k' E_k + \sum_{j,k} a_j y_k \Gamma_{j,k} \right\rangle$$

Несложно видеть, что выражения равны. □

Пусть M^2 — риманово многообразие, γ — геодезическая. Вектор γ' параллелен вдоль γ. Выберем какой-нибудь вектор $v \in T_{\gamma(0)}M, v \perp \gamma'(0)$, и разнесём его вдоль γ. Из сохранения скалярного произведения мы получим ортонормированный базис вдоль γ.

Свойства (Экспонента).

- Прямо по определению получаем $\exp(tv) = \gamma_v(t)$. Тем самым, для фиксированного $v \in TM$: отображение $t \mapsto \exp(tv)$ — геодезическая с вектором скорости v в нуле.
- $\forall p \in M : \mathrm{d}_p \exp_p = \mathrm{id}$ — напрямую следует из предыдущего.

Следствие 1.12.2. *По теореме об обратной функции* $\exp_p$ — *локальный диффеоморфизм окрестностей* $0 \in T_pM$ *и* $p \in M$.

Рассматриваем риманово многообразие со связностью Леви-Чивиты $(M, \langle \_, \_ \rangle, \nabla)$.

Определение 1.12.5 (Радиус инъективности M в точке p)**.** Число

$$r_{\text{inj}}(p) \overset{def}{=} \sup\left\{r \in \mathbb{R}_{>0} \middle| \exp_p : (B_r(0) \subset T_pM) \to M \text{ — диффеоморфизм на образ}\right\}$$

Бывают различные причины того, что радиус инъективности конечен:

- В цилиндре геодезические встречаются
- В некомпактном они могут уткнуться в «край»
- Геодезические могут сойтись

Определение 1.12.6 (Радиус инъективности многообразия M)**.** Число $r_{\text{inj}}(M) = \inf\limits_{p \in M} r_{\text{inj}}(p)$.

Теорема 1.12.3. Радиус инъективности локально отделён от нуля: $\forall p \in M : \exists \varepsilon > 0, U \ni p : \inf\limits_{x \in U} r_{\text{inj}}(x) > \varepsilon$.

Доказательство. Определим $F : TM \to M \times M$, $\underbrace{v_p}_{\in T_pM} \mapsto (\exp_p v_p, p)$. Изучим его дифференциал в $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$. $F(0, x) = (x, x)$ и $F(\xi_p, p) = (\xi_p, p)$, откуда

$$\frac{\partial F}{\partial(x, \xi)} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ E & E \end{pmatrix} \text{ — невырожден}$$

Получаем, что F — локальный диффеоморфизм.

Тем самым, имеется открытое подмножество в TM, и в нём есть параллелепипед $V \times W$, где $p \in V \subset M$ и $0 \in W \subset T_pM$. Отсюда получаем, что и требовалось доказать (но почему-то надо ещё воспользоваться непрерывностью метрического тензора?..) Видимо, предполагалось немного другое определение F, в карте, чтобы можно было пользоваться теоремой об обратной функции. ☐

Пусть D — декартовы координаты в T_pM, P — полярные (отображения $T_pM \to \mathbb{R}^n$). $U \ni p$ — окрестность, на которую $\exp_p$ отображается диффеоморфизм.

Определение 1.12.7 (Нормальные геодезические координаты в окрестности $p \in M$)**.** $D \circ \left(\exp_p^{-1}\right)$

Определение 1.12.8 (Полярные геодезические координаты в окрестности $p \in M$)**.** $P \circ \left(\exp_p^{-1}\right)$

1.13 Лемма Гаусса. Геодезические

Пусть $(M, \langle \_, \_ \rangle, \nabla)$ — риманово многообразие со связностью Леви-Чивиты, $\gamma : [a, b] \to M$ — гладкая кривая.

Определение 1.13.1 (Гладкая вариация γ)**.** Гладкое отображение $Q : [a, b] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$, такое, что $Q(\_, 0) \equiv \gamma$. Отображения $\gamma_\tau := Q(\_, \tau)$ называют *продольными линиями вариациями*, а $\delta_t := Q(t, \_)$ — *поперечными линиями*. Вариация называется *геодезической*, если все продольные линии γ_τ — геодезические.

Определение 1.13.2 (Поле вариации Q)**.** Векторы скорости поперечных линий δ' (можно рассматривать его, как гладкое поле вдоль γ, заданное по формуле $\delta_t'(0)$, можно — везде как что?)

Заметим, что $\frac{\partial Q}{\partial t}$ — векторные поля вдоль соответствующих поперечных линий, и $\frac{\partial Q}{\partial \tau}$ — векторные поля вдоль продольных линий.

Лемма 1.13.1. $\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}\frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{\nabla}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial Q}{\partial t}$. *Если бы векторные поля индуцировались из соответствующего поля на многообразии, то это была бы обычная перестановка производных, но Q необязательно инъективно.*

Доказательство. Разложим в карте $\phi \circ Q = (x_1(t,\tau), \ldots, x_n(t,\tau))$

Посмотрим на векторы скорости продольных линий $\frac{\partial Q}{\partial\,\mathrm{d}t} = \gamma'_\tau(t) = \sum\limits_i \frac{\partial x_i}{\partial t}(t,\tau)E_i$. и поперечных $\frac{\partial Q}{\partial \tau} = \delta'_t(\tau) = \frac{\partial x_j}{\partial \tau}E_j$. Подставляя в (**) ($a_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$), получаем

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial x_i} E_i + \sum_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \tau} \Gamma_{i,j}$$

Выражение симметрично относительно t и τ. □

Теорема 1.13.1 (Лемма Гаусса)**.** $(M, \langle \_, \_ \rangle, \nabla)$ — многообразие со связностью Леви-Чивиты, $v \in T_pM$ таков, что определена $\exp_p(v)$.

Отождествим $T_pM = T_vT_pM$. $\forall w \in T_pM, w \perp v \Rightarrow \mathrm{d}_v \exp_p(v) \perp \mathrm{d}_v \exp(w)$.

Доказательство. Построим вариацию $V(\tau) = \cos\tau \cdot v + \sin\tau \cdot w$, далее $Q(t,\tau) \coloneqq \exp(t \cdot V(\tau))$. Так как экспонента $\exp_p$ определена в некоторой окрестности v, то вариация Q определена в некоторой окрестности v.

Заметим, что Q — геодезическая вариация. Обозначим соответствующие векторные поля $X \coloneqq \frac{\partial Q}{\partial t}$ и $Y \coloneqq \frac{\partial Q}{\partial \tau}$, γ_0 — геодезическая $t \mapsto \exp_p(tv)$.

Продифференцируем $\langle X, Y\rangle$ вдоль γ_0:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle X, Y\rangle = \left\langle \frac{\nabla}{\mathrm{d}t} X, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{\nabla}{\mathrm{d}t} Y \right\rangle = 0 + \left\langle X, \frac{\nabla}{\mathrm{d}\tau} X \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\underbrace{\langle X, X\rangle}_{|V|^2}$$

Тем самым, $\langle X, Y\rangle = \mathrm{const}$. Так как $|Y| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, то $\langle X, Y\rangle \equiv 0$.

В точке $t = 1, \tau = 0$ это как раз означает ортогональность соответствующих производных. □

Следствие 1.13.1. *Применяя экспоненту к сфере с радиусом, получим сферу на многообразии, которая будет перпендикулярна радиусу, входящему в неё.*

Лекция XI

24 апреля 2024 г.

Пусть $a, b \in M$, где M — риманово многообразие со связностью Леви-Чивиты ∇.

Определение 1.13.3 (Кратчайшая между a и b)**.** Кусочно-гладкая кривая $\gamma : [c,d] \to M$, реализующая расстояние между точками: $L(\gamma) = \mathrm{dist}(a,b) = \inf\limits_{\widetilde{\gamma}} L(\widetilde{\gamma})$, где $\gamma, \widetilde{\gamma}$ соединяют a и b. Также кратчайшие называют *отрезками*.

Теорема 1.13.2. Пусть $p \in M, r_0 < r_{\mathrm{inj}}(p), v \in T_pM, |v| = r_0$. Тогда кривая $\gamma_0 : t \mapsto \exp_p(t \cdot v)$, определённая на $[0,1]$ — единственная (с точность до перепараметризации) кратчайшая между своими концами.

Доказательство. Убедимся, что $\forall \gamma : [0, L] \to M : \gamma(0) = p, \gamma(L) = \gamma_0(1) \Rightarrow L(\gamma) \geqslant L(\gamma_0)$, и равенство имеет место лишь тогда, когда γ — перепараметризация γ_0.

В полярных координатах, индуцированных экспонентой, γ_0 идёт по радиусу, и мы сейчас будем проецировать γ на этот же радиус.

Можно считать, что $\forall t \in (0, L) : 0 < |\exp^{-1}(\gamma(0))| < r_0$: удовлетворяя этим границам, мы только уменьшаем длину γ (быть может, после этого кривая γ будет заканчиваться в другой точке сферы радиуса r_0).

Поднимем γ до $\widetilde{\gamma} \coloneqq \exp_p^{-1} \circ \gamma$, и представим $\widetilde{\gamma} = \rho(t) \cdot u(t)$, где $\rho(t) = |\widetilde{\gamma}|, u(t) = \frac{\widetilde{\gamma}}{|\widetilde{\gamma}|}$. Вычислим производную. $\widetilde{\gamma}' = \rho' \cdot u + \rho \cdot u'$, и так как $\langle u, u\rangle = 1$, то $u' \perp u$.

Так как $\gamma = \exp_p \circ \widetilde{\gamma}$, то $\gamma' = \underbrace{\mathrm{d}_{\widetilde{\gamma}(t)} \exp(u)}_{v_1} \cdot \rho' + \underbrace{\mathrm{d}_{\widetilde{\gamma}(t)} \exp(u')}_{v_2} \cdot \rho$. По лемме Гаусса $v_1 \perp v_2$, откуда $|\gamma'|^2 = (\rho')^2 + \rho^2 \cdot (\mathrm{d}_{\widetilde{\gamma}(t)} \exp(u'))^2$. Тем самым, $|\gamma'| \geqslant |\rho'|$, и равенство на всей области определения достигается только при $u \equiv \mathrm{const}$. Также понятно, что ρ должен монотонно возрастать, иначе $\int |\rho'|$ будет больше минимума. □

Определение 1.13.4 (Кривая $\gamma : (0, L) \to M$ — локально кратчайшая)**.** $\forall t_0 \in (0, L) : \exists \varepsilon : \gamma\big|_{[-\varepsilon - t_0; \varepsilon + t_0]}$ — кратчайшая.

Контрпример (Локально кратчаяшая, но не кратчайшая). Экватор на сфере.

Следствие 1.13.2.

- *Геодезические — локально кратчайшие.*
- $\forall p \in M : \exists U_p : p \in U_p \subset M$: $\forall x, y \in U_p$: *между x и y имеется единственная кратчайшая.*

  Доказательство. Подойдёт $U_p \coloneqq B_{\frac{r_{\mathrm{inj}(p)}}{4}}(p) : \forall x, y \in U_p : x \in B_{r_{\mathrm{inj}} y}(y) \supset B_{\frac{r_{\mathrm{inj}} p}{2}}(y)$ □

- *γ — геодезическая $\iff$ γ — локально кратчайшая.*

  Доказательство. Согласно предыдущему пункту, кратчайшие локально единственны. Геодезические тоже, и согласно (теорема 1.13.2), они локально совпадают. □

1.14 Тензор кривизны

M — риманово многообразие со связностью Леви-Чивиты ∇.

Пусть $X, Y, Z, W \in \mathscr{X}(M)$.

Определение 1.14.1 (Преобразование кривизны)**.** $R(X, Y)Z \overset{def}{=} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$.

Лемма 1.14.1. *Преобразование кривизны — тензор типа* $(3, 1)$.

Доказательство. $\mathbb{R}$-полилинейность очевидна из формулы, надо проверить $\mathscr{F}(M)$-полилинейность.

Пусть $f \in \mathscr{F}(M)$, проверим тензориальность по Z:

$$\begin{aligned} R(X,Y)(f \cdot Z) = \nabla_X(Y(f) \cdot Z + f \cdot \nabla_X Z) - \nabla_Y(X(f)Z + f \cdot \nabla_X Z) - (f \cdot \nabla_{[X,Y]} Z + ([X,Y](f)) \cdot Z) = \\ = X(Y(f)) \cdot Z + Y(f) \cdot \nabla_X Z + X(f) \cdot \nabla_Y Z + f \cdot \nabla_X \nabla_Y Z - \\ - (Y(X(f)) \cdot Z + X(f) \cdot \nabla_Y Z + Y(f) \cdot \nabla_X Z + f \cdot \nabla_Y \nabla_X Z) - (f \cdot \nabla_{[X,Y]} + [X,Y])Z \end{aligned}$$

Теперь убедимся в тензориальности по Y:

$$R(X, f \cdot Y)Z = \nabla_X(f \cdot \nabla_Y Z) - f \cdot \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, f \cdot Y]} Z = (X \cdot f) \cdot \nabla_Y Z + f \cdot \nabla_X \nabla_Y Z - f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_{[X,Y]} Z - (Xf) \nabla_Y Z$$

Ура, сошлось. Тензориальность по X следует из кососимметричности по X и Y. □

Определение 1.14.2 (Тензор кривизны)**.** $\langle R(X, Y)Z, W\rangle$.

Теперь пусть $p \in M$, и зафиксирована двумерная плоскость $\sigma \leqslant T_p M$ с базисом (u, v). Преобразование и тензор кривизны — вещи, с которыми просто работать, а геометрический смысл кривизны заключается в секционной кривизне.

Интересный факт. Тензор криивзны восстанавливается из секционной кривизны.

Определение 1.14.3 (Секционная кривизна)**.** $K_\sigma(u, v) \overset{def}{=} \frac{\langle R(u,v)v, u\rangle}{|u \wedge v|^2}$, где $u \wedge v$ — смешанное произведение, то есть $|u \wedge v| = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$, если $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ и $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ в некотором **ортонормированном базисе**.

Лемма 1.14.2. *Докажем, что секционная кривизна K_σ не зависит от выбора базиса (u, v).*

Доказательство. Рассмотрим $R(u, v)$, как линейный оператор $T_pM \to T_pM$. Воспользуемся линейностью и кососимметричностью... □

Можно вспомнить выражение для гауссовой кривизны из предыдущего семестра

$$K = \frac{\langle \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y, X\rangle}{\det I}$$

в котором не было скобки Ли, но для координатных полей скобка Ли равна нулю, так что аналогия получается полная. Тем самым, можно сразу сказать, что $K_\sigma(S^n) = 1$, и вскоре мы покажем, что $K_\sigma(\mathbb{H}^n) = -1$.

//геометрический смысл — сходящиеся и расходящиеся геодезические

Теорема 1.14.1.

$$-\langle R(Y, X)Z, W\rangle = \langle R(X, Y)Z, W\rangle = -\langle R(X, Y)W, Z\rangle$$

Доказательство. Первое очевидно из определения.

Для проверки кососимметричности билинейной формы $Z, W \mapsto \langle R(X, Y)Z, W\rangle$ достаточно проверить, что $\langle R(X, Y)Z, Z\rangle = 0$. Запишем

$$X\langle Z, Z\rangle = 2\langle \nabla_X Z, Z\rangle \quad \Rightarrow \quad YX\langle Z, Z\rangle = 2(\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle)$$

$$[X, Y]\langle Z, Z\rangle = 2\langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle = 2\left\langle \nabla_{[X,Y]} Z, Z\right\rangle$$

Должно сойтись □

1.15 Полугеодезические координаты

Пусть M^2 — двумерное многообразие, $X, Y \in \mathscr{F}(M)$ — координаты, причём $|X| = 1$ и $X \perp Y$. Метрический тензор в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$, где $G = \langle Y, Y\rangle$.

Пример (Полугеодезические координаты). Полярные координаты (то есть координаты (ρ, ϕ) на $\mathbb{R}^2$).

Задача 1.15.1. *Общий вид полугеодезических координат — эквидистанты от некоторой гладкой регулярной кривой.*

Лекция XII

8 мая 2024 г.

Теорема 1.15.1. В полугеодезических координатах первая координатная линия — геодезическая: $\nabla_X X = 0$, причём $\nabla_X Y = \nabla_Y X = \frac{G'_X}{2G} Y$.

Доказательство.

1. $\nabla_X Y = \nabla_Y X$, так как для координатных векторных полей $[X, Y] = 0 = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.
2. $0 = X\langle X, X\rangle = 2\langle \nabla_X X, X\rangle$
3. $0 = Y\langle X, X\rangle = 2\langle \nabla_Y X, X\rangle$
4. $0 = X\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_X X, Y\rangle + \langle X, \nabla_X Y\rangle$.
5. Так как X и Y — базис, то $\nabla_X X \perp X, Y \Rightarrow \nabla_X X = 0$.
6. $\langle Y, Y\rangle = G \Rightarrow G'_X = 2\langle \nabla_X Y, Y\rangle$. Из (3) получаем $\langle \nabla_X Y, X\rangle = 0 \Rightarrow \nabla_X Y \parallel Y$. Тем самым, $\nabla_X Y = \frac{\langle \nabla_X Y, Y\rangle \cdot Y}{\langle Y, Y\rangle} = \frac{G'_X}{2G} Y$. □

Теорема 1.15.2 (О выражении секционной кривизны в полугеодезических координатах)**.** В полугеодезических координатах $K = -\frac{\sqrt{G}''_{X,X}}{\sqrt{G}} = -\frac{|Y|''_{X,X}}{|Y|}$.

Доказательство. Посчитаем по определению гауссову кривизну $K = K_{X\wedge Y} = -\frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{|X\wedge Y|^2}$. Во-первых, $|X \wedge Y|^2 = G$. Далее скобка Ли отсутствует, так как поля координатные:

$$R(X,Y)X = \nabla_X\nabla_Y X - \nabla_Y \underbrace{\nabla_X X}_{0} = \nabla_X\left(\frac{G'_X}{2G}Y\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{G''_{X,X}G - G'^2_X}{G}\cdot Y + \frac{G'_X}{2G}\nabla_X Y\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2G''_{X,X}G - G'^2_X}{2G^2}\right)Y$$

Сравним с выражением $\frac{\sqrt{f}''}{\sqrt{f}} = \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f} - \frac{(f')^2}{2f^2}\right)$ □

Утверждение 1.15.1. $K(\mathbb{H}^2) = -1$.

Доказательство. Возьмём модель в верхней полуплоскости. Введём полугеодезические координаты, запараметризовав $r(u,v) = (v, e^u)$. Это действительно полугеодезические координаты: $X = r'_u = (0, e^u), Y = r'_v = (1,0)$, и $X \perp Y, |X|^2_{\mathbb{H}^2} = \frac{e^{2u}}{e^{2u}} = 1$.

Посчитаем $G = |Y|^2_{\mathbb{H}^2} = \frac{1}{e^{2u}}$. Воспользуемся формулой: $K = -\frac{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}(e^{-u})}{e^{-u}} = -1$. □

Итак, $K(S^2) = 1, K(\mathbb{H}^2) = -1$. Немного порисовав, видим, что кривизна показывает, сходятся или расходятся геодезические.

1.16 Формула Гаусса — Бонне

1.16.1 Ориентация

Пусть V — n-мерное пространство над $\mathbb{R}$, и $\mathcal{B}(V)$ — множество всевозможных базисов. Напомним следующие определения:

Определение 1.16.1 ($B_1, B_2 \in \mathcal{B}(V)$ одинаково ориентированы)**.** $\det(B_1 \rightsquigarrow B_2) > 0$.

Определение 1.16.2 ($B_1, B_2 \in \mathcal{B}(V)$ против. ориентированы)**.** $\det(B_1 \rightsquigarrow B_2) < 0$.

Определение 1.16.3 (Ориентация V)**.** Отображение $\tau : \mathcal{B}(V) \to \{-1, 1\}$, такое, что $\tau(B_1)\cdot\tau(B_2) = \operatorname{sign}(\det(B_1 \rightsquigarrow B_2))$.

Пусть M^n — гладкое многообразие. Обозначим за $\mathcal{B}(TM) = \bigcup\limits_{x\in M}\mathcal{B}(T_xM)$ все базисы во всех касательных пространствах. Введём на нём топологию подмножества, индуцированную с $\underbrace{TM \times \dots \times T_M}_{n}$.

Определение 1.16.4 (Ориентация M)**.** Непрерывное отображение $\tau : \mathcal{B}(TM) \to \{-1, 1\}$, такое, что $\forall x \in M : \tau\big|_{T_xM}$ — ориентация на T_xM. Если ориентация существует, то многообразие *ориентируемо*.

1.16.2 Вращение векторного поля вдоль кривой. Поворот кривой

Пусть $(M^2, \langle\_,\_\rangle)$ — двумерное риманово многообразие, и $\gamma : [a,b] \to M$ — кусочно-гладкая кривая, W — векторное поле вдоль γ.

Определение 1.16.5 (W — кусочно-гладкое и кусочно-непрерывное)**.** $\exists a = t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = b : W\big|_{[t_i,t_{i+1}]}$ — гладкое. Данное разбиение может никак не соотноситься с разбиением кусочной гладкости для самой кривой γ.

При этом для точки t_i из разбиения гладкости для W обозначим $W_- \coloneqq \lim\limits_{\varepsilon\to 0_-} W(t_i+\varepsilon), W_+ \coloneqq \lim\limits_{\varepsilon\to 0_+} W(t_i+\varepsilon)$. По техническим причинам потребуем $W_- \neq -W_+$. Пусть M^2 ориентировано, то есть имеются понятия лево, право, по часовой стрелке, против часовой стрелки. Пусть в t_i имеется излом векторного поля W, обозначим за θ_i ориентированный угол между W_- и W_+: $\theta_i = \begin{cases} \angle(W_-, W_+), & W_- \to W_+ \text{ поворачивается против часовой стрелки} \\ -\angle(W_-, W_+), & \text{иначе} \end{cases}$. Теперь W — кусочно гладкое векторное поле вдоль γ, $|W| = 1$. Пусть $\widetilde{W}$ — такое, что $(W, \widetilde{W})$ — ортонормированный положительно ориентированный базис.

Определение 1.16.6 (Вращение векторного поля W вдоль γ)**.** $\operatorname{rot}_\gamma W = \int\limits_a^b \left\langle \frac{\nabla}{\mathrm{d}t} W, \widetilde{W} \right\rangle \mathrm{d}t + \theta_1 + \dots + \theta_n$.

Пусть γ — кусочно-гладкая, $|\gamma'| = 1, W = \gamma'$. Тогда $m \coloneqq \widetilde{W}$ — ориентированная нормаль к γ.

Определение 1.16.7 (Геодезическая кривизна)**.** $K_\gamma = \left\langle \frac{\nabla\gamma'}{\mathrm{d}t}, m \right\rangle$. Ещё её называют *кривизной кривой со знаком*.

Определение 1.16.8 (Полная кривизна γ со знаком)**.** $\psi(\gamma) = \operatorname{rot}_\gamma \gamma'$. Ещё говорят *поворот кривой*.

Теорема 1.16.1. Пусть $\gamma : [0, L] \to M$ — кусочно-гладкая петля, $\gamma'(0) = \gamma'(L)$, W — кусочно-непрерывное кусочно-гладкое векторное поле вдоль γ (и тоже $W(0) = W(L)$).

Тогда параллельный перенос $P_0^L : T_{\gamma(0)}M \to T_{\gamma(L)}M$ — поворот на угол $\operatorname{rot}_\gamma W$.

Доказательство. Пусть E — векторное поле вдоль γ, параллельное вдоль γ, такое, что $E(0) = W(0)$.

Сопоставим $E \rightsquigarrow \widetilde{E}$ и $W \rightsquigarrow \widetilde{W}$. $\begin{cases} W = \cos\alpha E + \sin\alpha \widetilde{E} \\ \widetilde{W} = -\sin\alpha E + \cos\alpha \widetilde{E} \end{cases}$ Можно выбрать α (единственным образом с точностью до глобального сдвига на $2\pi k$) так, что это — кусочно-непрерывный аргумент с разрывами в точках излома $< \pi$.

$\frac{\nabla W}{\mathrm{d}t} = -\sin\alpha \cdot \alpha' E + \cos\alpha \cdot \alpha' \widetilde{E}$, откуда $\left\langle \frac{\nabla W}{\mathrm{d}t}, \widetilde{W} \right\rangle = \alpha'$.

Сначала пусть W — гладкое. $\operatorname{rot}_\gamma W = \int\limits_0^L \left\langle \frac{\nabla W}{\mathrm{d}t}, \widetilde{W} \right\rangle \mathrm{d}t = \int\limits_0^L \alpha' = \alpha(L) - \alpha(0) = \alpha(L)$. В общем более-менее всё.

Теперь если есть изломы W в точках t_i, то

$$\operatorname{rot}_\gamma W = \sum_{i=1}^s \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\nabla W}{\mathrm{d}t}, \widetilde{W} \right\rangle \mathrm{d}t + \theta_i = \sum_{i=1}^s (\alpha(t_{i+1})_- - \alpha(t_i)_+) + (\alpha(t_{i+1})_+ - \alpha(t_{i+1})_-)$$

и всё сокращается ∎

Следствие 1.16.1. *Если W_1, W_2 — как в условии теоремы, то* $\operatorname{rot}_\gamma W_1 \equiv \operatorname{rot}_\gamma W_2 \pmod{2\pi}$.

Лекция XIII

15 мая 2024 г.

Теорема 1.16.2 (Формула Гаусса — Бонне)**.**

1. Пусть двумерная риманова поверхность M^2 ориентирована, $\Delta \subset M$ — диск, и $\partial\Delta$ — граница Δ, причём Δ — слева при обходе вдоль границы. Тогда $\psi(\partial\Delta) + \iint\limits_\Delta K \,\mathrm{d}A = 2\pi$.

2. Теперь если диски $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ замостили какую-то открытую область $\Delta \subset M^2$, и γ_i — куски ориентированной границы Δ (Δ остаётся слева при обходе по γ_i), то $\psi(\gamma_1) + \cdots + \psi(\gamma_k) + \iint\limits_{\Delta} K = 2\pi\chi(\Delta)$.

Доказательство.

- Докажем аддитивность формулы Гаусса — Бонне для дисков. Введём отображение Гаусса — Бонне $GB(\Delta) = \psi(2\Delta) + \iint\limits_{\Delta} \mathrm{d}A - 2\pi$, достаточно доказать, что $GB(\Delta) = 0$.

  Пусть Δ_1, Δ_2 — два диска с ориентированными границами $\gamma_1 \cdot \gamma_3^-$ и $\gamma_2 \cdot \gamma_3$ соответственно, пересекающихся по связной части границы, и $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ — тоже диск. Пусть $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ — углы между концами разных путей.

  Тогда $\begin{cases} \psi(\partial\Delta_1) = \psi(\gamma_1) - \psi(\gamma_3) + (\pi - \alpha_1) + (\pi - \beta_1) \\ \psi(\Delta_1) = \psi(\gamma_2) + \psi(\gamma_3) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \beta_2) \\ \psi(\Delta) = \psi(\gamma_1) + \psi(\gamma_2) + (\pi - (\alpha_1 + \alpha_2)) + (\pi - (\beta_1 + \beta_2)) \end{cases}$

  Получаем $GB(\Delta) = GB(\Delta_1) + GB(\Delta_2)$, что показывает аддитивность формулы.

- Сначала докажем для диска $\Delta \subset U$, где в U есть карта $\phi : U \to \mathbb{R}^2 = \langle X, Y \rangle$ с полугеодезическими координатами. Пусть $s = \phi^{-1}, X = \mathrm{d}s(e_1), Y = \mathrm{d}s(e_2)$.

Лемма 1.16.1 (Формула Грина)**.** *Пусть в $\mathbb{R}^2$ есть область D с кусочно-гладкой границей $\gamma = (x, y)$, при обходе вдоль которой диск остаётся слева. Пусть $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — гладкие функции, тогда*

$$\iint\limits_{D} Q'_X - P'_Y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int (x'P + y'Q)\,\mathrm{d}t$$

Доказательство леммы.

Сначала докажем для простых областей, проинтегрировав формулу Ньютона — Лейбница, а затем всё сложим. □

Лемма 1.16.2. *Пусть γ обходит область Δ, в которой введены полугеодезические координаты $\nabla_X X = 0$. Тогда $\mathrm{rot}_\gamma X + \iint K\,\mathrm{d}A = 0$*

Доказательство леммы.

Вспомним формулу $K = -\frac{(\sqrt{G})''_{X,X}}{\sqrt{G}}$. Будем считать, что γ натурально параметризована. Теперь

$$\mathrm{rot}_\gamma X = \int\limits_{X} \left\langle \frac{\nabla X}{\mathrm{d}t}, \frac{Y}{|Y|} \right\rangle = \int \left\langle \nabla_{\gamma'} X, \frac{Y}{|Y|} \right\rangle =$$

Пусть в карте $\phi \circ \gamma = \widetilde{\gamma} = (x(t), y(t))$. Тогда $\gamma' = x' \cdot X + y' \cdot Y$, и

$$= \int X' \underbrace{\left\langle \nabla_X X, \frac{Y}{|Y|} \right\rangle}_{0} + Y' \left\langle \nabla_Y X, \frac{Y}{|Y|} \right\rangle =$$

$$= \int Y' \left\langle \frac{G'_X}{2G} Y, \frac{Y}{\sqrt{G}} \right\rangle = \int y' \cdot \frac{G'_X \cdot G}{2G \cdot \sqrt{G}} = \int y' (\sqrt{G})'_X \,\mathrm{d}t$$

Применяя формулу Грина, получаем $\iint \left(\sqrt{G}\right)''_{X,X} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint \frac{(\sqrt{G})''_{X,X}}{\sqrt{G}} \cdot \sqrt{G}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint K\,\mathrm{d}A$. □

Введём два векторных поля $V = \gamma'$ и $W = X$, и согласно (следствие 1.16.1): $\psi(\gamma') + \iint K \, \mathrm{d}A = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Теперь осталось доказать $n = 1$.

Введём непрерывное семейство метрик $g^{\tau}_{i,j} = (1-\tau)g_{i,j} + \tau\delta_{i,j}$, и заметим, что так как поворот плоской кривой равен 2π (мы это доказывали в предыдущем семестре для гладких кривых, но это верно и для кусочно-гладких — можно сгладить либо адаптировать доказательство), то из непрерывности $n = 1$.

Теперь осталось сказать, что любой диск можно триангулировать так мелко, что каждый треугольник лежит в какой-то карте. Из аддитивности получаем (1).

- Теперь выведем (2). Примем без доказательства такой факт, что у любой области с кусочно-гладкими границами существует триангуляция (границы треугольников тоже кусочно-гладкие).

  Триангулируем поверхность на треугольники $\Delta_1, \ldots, \Delta_\Gamma$, и будем использовать, что все $GB(\Delta_i) = 0$.

  Складывая $\psi(\Delta_1) + \cdots + \psi(\Delta_\Gamma) = \left(\iint\limits_{\Delta_1} + \cdots + \iint\limits_{\Delta_\Gamma}\right) K \, \mathrm{d}A = 2\pi\Gamma$ Докажем, что $\psi(\gamma_1) + \cdots + \psi(\gamma_n) - \psi(\partial\Delta_1) - \cdots - \psi(\partial\Delta_\Gamma) \stackrel{?}{=} 2\pi(\chi(\Delta) - \Gamma) = 2\pi(\text{В} - \text{Р})$.

  Все интегралы по отрезкам кривых сокращаются, и остаются лишь углы. Посмотрим по очереди на все вершины треугольников.

  - Внутренняя вершина p степени d (соприкасающаяся с d треугольниками) вносит вклад в сумму $-\sum\limits_{i=1}^{d}(\pi - \alpha_i) = -\pi d + \sum\limits_{i} \alpha_i = \pi(2 - d)$.
  - Граничная вершина p степени d (соприкасающаяся с $d - 1$ треугольником) вносит вклад $-\sum\limits_{i=1}^{d}(\pi - \alpha_i) + \alpha = \pi(1 - d) + \sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_i + \alpha = \pi(2 - d)$.

  Осталось увидеть, что сумма по всем вершинам p величины $(2 - d_p)$ даёт вклад $2\pi\text{В} - \sum\limits_{j=1}^{\text{В}} d_j\pi = 2\pi(\text{В} - \text{Р})$ □

1.17 Пространства постоянной кривизны. Сравнение треугольников

Теорема 1.17.1. У любой замкнутой (компактной) поверхности существует метрика постоянной кривизны, причём знак кривизны равен знаку эйлеровой характеристики.

Доказательство. $\iint K = 2\pi\chi$, утверждение про знак тривиально.

Воспользуемся теоремой о классификации двумерных поверхностей.

- Если поверхность ориентируема, то это сфера с g ручками. При $g = 0$ это сфера, на ней есть структура постоянной кривизны. При $g = 1$ это тор, на нём есть плоская метрика. При $g \geqslant 2$ кривизна отрицательна, об этом позже.
- Если поверхность неориентируема, то ($m = 1$) проективная плоскость получается, как фактормногообразие сферы, а при $m = 2$ бутылка Клейна склеивается из квадрата.
- Иначе кривизна отрицательная. Нарисуем развёртку в виде правильного многоугольника, и поместим на гиперболической плоскости так, чтобы все углы были $\frac{2\pi}{n}$.

□

Пусть M — двумерное многообразие, $K = -\frac{(\sqrt{G})''_{X,X}}{\sqrt{G}} \equiv \text{const}$. Тогда $\left(\sqrt{G}\right)''_{X,X} = -K\sqrt{G}$. Рассмотрим это уравнение — *уравнение Якоби* — как дифференциальное уравнение на $\sqrt{G}$ второго порядка. Поле Y зовётся *полем Якоби*, и уравнение Якоби можно записать и решать для произвольных размерностей.

Введём полярные координаты, полугеодезические вне центра координат. Покажем, что $\sqrt{G} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, и $\left(\sqrt{G}\right)'_x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. Из симметрии достаточно доказать для произвольного луча $\overrightarrow{v}$. Пусть $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{v}$, $|w| = 1$. $Y = \mathrm{d}_{xv}\exp_p(xw)$.

Пусть $f(x) = \mathrm{d}_{xv}\exp_p(wx)$. Так как $\mathrm{d}_0\exp_p = \mathrm{id}$, то $|f(x)|$ — гладкая функция в окрестности 0. $|Y|'_x = x\cdot|f|' + |f| \xrightarrow[x\to 0]{} \mathrm{d}_0\exp_p(w) = 1$.

Лекция XIV

22 мая 2024 г.

Получили начальные данные на дифференциальное уравнение $\sqrt{G}(0) = 0, (\sqrt{G})'_X(0) = 1$.

При постоянной кривизне решениями являются $\begin{cases}\sqrt{G} = x, & K\equiv 0\\ \sqrt{G} = \sin x, & K\equiv 1\\ \sqrt{G} = \sinh x, & K\equiv -1\end{cases}$ Подправляя на постоянный положительный множитель, получаем $\begin{cases}\sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}x, & K > 0\\ \sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{-K}}\sinh\sqrt{-K}x, & K < 0\end{cases}$

Теорема 1.17.2. Пусть (M^2, g_M) и (N^2, g_N) — два двумерных многообразия, их кривизны равны и постоянны $K_N \equiv K_M \equiv \mathrm{const}$, $p\in M, q\in N$, и $r < \min\left(r_{\mathrm{inj}}p, r_{\mathrm{inj}}q\right)$. Вводя на шарах $B_r(0)\subset T_pM$ и $B_r(0)\subset T_qN$ полярные координаты, и зафиксируем некоторую изометрию $I : T_pM \to T_qN$. Тогда $\exp_q\circ I\circ\exp_p^{-1}$ — изометрия окрестностей p и q. В частности, она сохраняет кривизну.

1.17.1 Теоремы сравнения

Теорема 1.17.3. Пусть $p\in M, r < r_{\mathrm{inj}}p$, кривизна одного знака, но не факт, что постоянна. Следующее условие связывает длины кривых в $B_r(0)$ и $B_r(p)$, между которыми действует экспонента.

1. Если $K\geqslant 0$, то $\exp_p$ не увеличивает длины кривых.
2. Если $K\leqslant 0$, то $\exp_p$ не уменьшает длины кривых.

Доказательство. Запишем уравнение $\left(\sqrt{G}\right)''_{x,x} = -K\sqrt{G}$. Пусть G_1 — решение на плоскости: $\sqrt{G_1}''_{x,x} = 0$, и $\sqrt{G_2}''_{x,x} \leqslant 0$. В первом случае $\sqrt{G_1} = x$, значит, во втором случае $\sqrt{G_2}\leqslant x$.

Аналогично для полярных координат в касательной плоскости и на поверхности: $\sqrt{G_1}\geqslant\sqrt{G_2}$. Используя формулу длины кривой $l(\gamma) = \sqrt{(X')^2 + G(y')^2}\,\mathrm{d}t$, получаем, что $G_1 \leqslant G_2 \Rightarrow$ длина кривых увеличивается.

Если же $K\leqslant 0$, то аналогично. ☐

1. Пусть $\Delta\subset M$ — треугольник OAB из кратчайших, $\angle AOB = \alpha$. Возьмём на плоскости треугольник с такими же AO, OB и $\angle AOB$, это *треугольник сравнения с углом*.
2. Если же взять на плоскости треугольник с такими же длинами сторон (в случае, если он существует), то это *треугольник сравнения*.

Треугольник OAB *маленький*, если $P(OAB)\leqslant\min(r_{\mathrm{inj}}A, r_{\mathrm{inj}}B, r_{\mathrm{inj}}O)$.

Следствие 1.17.1. *Пусть $r < r_{inj}O$, $A, B\in B_r(O)$.*

1. Если $K\geqslant 0$, то в треугольнике сравнения с углом $|\overline{AB}|_{\mathbb{R}^2}\geqslant|AB|_M$.

2. Если $K\leqslant 0$, то в треугольнике сравнения с углом $|\overline{AB}|_{\mathbb{R}^2}\leqslant|AB|_M$.

Если же треугольник OAB маленький, то

1. Если $K\geqslant 0$, то в треугольнике сравнения $\angle AOB\geqslant\widetilde{\angle AOB}$.

2. *Если $K \leqslant 0$, то в треугольнике сравнения $\angle AOB \leqslant \widetilde{\angle}\overline{AOB}$.*

Доказательство.

1. Сразу следует из предыдущей теоремы.

2. Выведем из первого пункта и теоремы косинусов. □

Интересный факт (Теорема Топоногова). Если M^n — полное многообразие, и $K \geqslant 0$, то для него верно заключение теоремы для больших треугольников. Если M^n — полное многообразие, $K \leqslant 0$, и M односвязно, то для него верно заключение теоремы для больших треугольников.

Односвязность важна — например, можно поиграться с цилиндром.

1.18 Полнота. Теорема Хопфа — Ринова

Пусть $(X, d_X), (Y, d_Y)$ — два многообразия, которые для удобства будем считать компактными. Это автоматически влечёт полноту почему?.

$C(X, Y)$ — пространство непрерывных функций, $d(f, g) = \sup\limits_{x \in X} |f(x) - g(x)|$.

Теорема 1.18.1 (Арцела – Асколи)**.** Если f_n — последовательность равностепенно непрерывных функций, то $\exists f_{n_k} \underset{k \to \infty}{\rightrightarrows} f_\infty$.

Далее все пространства с внутренней метрикой: $d(x, y) = \inf l(\gamma)$.

Определение 1.18.1 (Кратчайшая γ)**.** $\operatorname{dist}(\gamma(t_2), \gamma(t_1)) = |t_2 - t_1|$ в натуральной параметризации.

Определение 1.18.2 (X — собственное)**.** Все замкнутые шары $D_r(p) = \{x \in M | \operatorname{dist}(x, p) \leqslant r\}$ компактны.

Пусть $\gamma : [0, 1] \to X$.

Теорема 1.18.2. Пусть X — компактное, с внутренней метрикой, тогда любые две точки можно соединить кратчайшей.

Доказательство. Пусть $\gamma_n : [0, 1] \to X$ — последовательность кривых, минимизирующая расстояние. Применяем теорему Арцела — Асколи. □

Определение 1.18.3 (Риманово многообразие полное)**.** Оно полное, как метрическое пространство.

Определение 1.18.4 (Риманово многообразие геодезически полное)**.** Любая геодезическая продолжима на интервал $(-\infty, +\infty)$.

Следующая теорема, разумеется, формулируется для многообразий без края.

Теорема 1.18.3 (Хопф — Ринов)**.** Многообразие M метрически полное $\iff$ многообразие геодезически полное.

Если M полное, то M собственное, $\exp_p(\overline{D}_R^{T_pM}(0)) = \overline{D}_R^M(p)$ и любые две точки соединены кратчайшей.

Доказательство.

> **Лемма 1.18.1.** *Пусть (X, d) — локально компактное, с внутренней метрикой, $p \in X, R > 0$, и выполнено следующее условие: $\forall$ кратчайшей $\gamma : [0, 1) \to B_R(p)$: можно продолжить до $\gamma : [0, 1] \to X$. Тогда $D_R(p)$ компактен.*
>
> *Доказательство леммы.*
>
> Из локальной компактности найдётся достаточно малый $\overline{r} > 0 : D_{\overline{r}(}p)$ компактен. Пусть $r := \sup\{\overline{r}\}$. Предположим, что $r < R$, и докажем, что $D_r(p)$ компактен. Достаточно доказать, что $D_r(p)$ полный и вполне ограниченный ($\forall \varepsilon : \exists$ конечная ε-сеть).

Замечание. Так как метрика внутренняя, то $\forall \varepsilon > 0 : D_r \subset U_\varepsilon(B_r(p))$.

Полнота: пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность точек $x_n \in D_r(p)$. Согласно замечанию, можно считать, что $x_n \in B_r(p)$.

Пусть $\gamma_n : [0, r - \varepsilon_n] \to X$ — натурально параметризованная кратчайшая, соединяющая p и x_n. Можно считать, что $\varepsilon_n \searrow 0$.

Пусть $\gamma_n\big|_{[0,1-\varepsilon_1]}$. Выберем последовательность $(n_1)(j)$ так, что $\gamma_{n_1(j)} \underset{j\to\infty}{\rightrightarrows} \gamma_\infty[0, 1-\varepsilon_1]$. Проредим $n_1(j) \supset n_2(j) \supset \dots$, и возьмём диагональ: $\gamma_{n_j(j)} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \gamma_\infty$, где $\gamma_\infty : [0,1) \to X$ — кратчайшая (предел кратчайших). Согласно условию теоремы γ_∞ можно продолжить в точку 1, и несложно проверить, что этот конец — $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Тем самым, D_r полон. Компактность следует из вполне ограниченности: $D_{r-\frac{\varepsilon}{2}}$ компактен, в нём есть $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть.

Теперь докажем, что $\exists \varepsilon > 0 : D_{r+\varepsilon}$ тоже компактен. $\forall x \in X$: выберем $r(x) : D_{2r(x)}$ компактен. Далее выберем конечное подпокрытие из $B_{r(x)}(x)$, и плюс-минус всё. $\square$

Пусть $\gamma : [0, L) \to X$ — геодезическая в натуральной параметризации. Из полноты $\exists x_0 \coloneqq \lim\limits_{t\to L} \gamma(t)$.

Так как радиус инъективности отделён от нуля числом $\frac{r_0}{2}$, то достаточно близко к x_0 геодезическую можно продолжить за x_0. Из геодезической полноты выполнено условие леммы.

Тогда любой шар компактен. Вроде всё. $\square$