Алгебра. Неофициальный конспект

Лектор: Николай Александрович Вавилов

Конспектировал Леонид Данилевич

II семестр, весна 2023 г.

Оглавление

Глава 1

Вычислительная линейная алгебра

Лекция I

14 февраля 2023 г.

1.1 Элементарные преобразования

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей. Займёмся изучением некоторых особенных видов (пока квадратных) матриц $M(n, R)$.

1.1.1 Элементарные трансвекции

Определение 1.1.1 (Элементарная трансвекция)**.** $t_{i,j}(\xi) = e + \xi \cdot e_{i,j}$ для $i \neq j, \xi \in R$. Иными словами, матрица вида

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & \xi & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Определение 1.1.2 (Элементарные преобразования первого типа, или трансвекции)**.** Группа по умножению, порождённая элементарными трансвекциями.

В частности, $t_{1,2}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_{2,1}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix}$.

Лемма 1.1.1 (Аддитивность трансвекций по ξ)**.** $t_{i,j}(\xi) \cdot t_{i,j}(\zeta) = t_{i,j}(\xi + \zeta)$. *Иными словами,* $t_{i,j} : R \to GL(n, R)$ *— гомоморфизм для любых* $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$.

Доказательство. Посчитаем $t_{i,j}(\xi) \cdot t_{i,j}(\zeta)$. Это можно сделать так:

$$(e + \xi e_{i,j})(e + \zeta e_{i,j}) = e + \xi e_{i,j} + \zeta e_{i,j} + \xi\zeta e_{i,j} e_{i,j}, \text{ последнее слагаемое 0, так как } i \neq j.$$

а можно так:

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \xi + \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Последняя выкладка работает и для матриц произвольного размера, так как в вычислении на самом деле используются лишь 2 различных индекса — i и j. При замене из на 1 и 2 ничего не поменяется, так как определение умножения не опирается на порядок строк или столбцов.

Такой трюк позволяет компактно записывать вычисления с большими матрицами, мало отличающимися от нейтральной e. $\square$

Следствие 1.1.1. *$t_{i,j}(\xi)^{-1} = t_{i,j}(-\xi)$, откуда $t_{i,j}(\xi) \in GL(n,R) \overset{def}{=} M(n,R)^*$.*

Лемма 1.1.2 (Коммутационная формула Шевалле)**.** *Мультипликативный коммутатор двух трансвекций — часто трансвекция:*

$$[t_{i,j}(\xi), t_{h,k}(\zeta)] = \begin{cases} t_{i,k}(\xi\zeta), & i \neq k \wedge j = h \\ t_{h,j}(-\zeta\xi), & i = k \wedge j \neq h \\ e, & i \neq k \wedge j \neq h \\ \text{\textit{что-то}}, & i = k \wedge j = h \end{cases}$$

(Мультипликативный коммутатор $[x,y] \overset{def}{=} xyx^{-1}y^{-1}$)

Доказательство. Можно тупо записать огромные формулы:

$$[t_{i,j}(\xi), t_{h,k}(\zeta)] = t_{i,j}(\xi) \cdot t_{h,k}(\zeta) \cdot t_{i,j}(-\xi) \cdot t_{k,h}(-\zeta) = (e + \xi e_{i,j})(e + \zeta e_{h,k})(e - \xi e_{i,j})(e - \zeta e_{h,k}) =$$
$$= \dots = e + \xi\zeta\delta_{j,h}e_{i,k} - \zeta\xi\delta_{k,i}e_{h,j} + \zeta\xi\zeta\delta_{k,i}\delta_{j,h}e_{h,k} - \xi\zeta\xi\delta_{j,h}\delta_{k,i}e_{i,j} + \xi\zeta\xi\zeta\delta_{j,h}\delta_{k,i}\delta_{j,h}e_{i,k}$$

~~Какая боль это писать... И ведь никто не прочитает и не проверит...~~ Прошу прощения, был неправ.

Члены с коэффициентами вида ξ^2 или $\xi^2\zeta$, то есть те, где есть квадрат чего-то, точно обнуляются, так как по определению трансвекции $i \neq j, k \neq h$. Имея записанное, проверить, что лемма говорит правду — легко.

(Ещё можно поумножать матрицы 3×3 или 4×4 — тут ещё разбор случаев, когда какие индексы совпадают. Кайф) $\square$

1.1.2 Элементарные псевдоотражения

Определение 1.1.3 (Элементарное псевдоотражение)**.** Матрица вида $d_i(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{i,i}$, где $i \neq j, \varepsilon \in R^*$. Иными словами, матрица вида

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & i & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \varepsilon & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Определение 1.1.4 (Элементарные преобразования второго типа, или псевдоотражения)**.** Группа по умножению, порождённая элементарными псевдоотражениями.

Лемма 1.1.3 (Мультипликативность псевдоотражений по ε)**.** *$d_i(\varepsilon)d_i(\theta) = d_i(\varepsilon\theta)$. Иными словами, $d_i : R^* \to GL(n,R)$ — гомоморфизм для любого $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Доказательство. Здесь есть всего один индекс, умножим матрицы 1×1: $\big(\varepsilon\big) \cdot \big(\theta\big) = \big(\varepsilon\theta\big)$. $\square$

Следствие 1.1.2. *$d_i(\varepsilon)^{-1} = d_i(\varepsilon^{-1})$, откуда $d_i(\varepsilon) \in GL(n,R)$.*

Замечание. Псевдоотражения — подгруппа обратимых элементов в диагональных матрицах

$$\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

Так как умножаются диагональные матрицы покомпонентно, то справедливость (лемма 1.1.3) очевидна ещё и с другой стороны.

Лемма 1.1.4. $[d_i(\varepsilon), d_j(\theta)] = \begin{cases} d_i([\varepsilon,\theta]), & i = j \\ e, & i \neq j \end{cases}$ *— в частности, псевдоотражения с разными индексами коммутируют, а с одинаковыми — коммутируют, если коммутируют параметры.*

Лемма 1.1.5. $d_i(\varepsilon) t_{j,k}(\xi) d_i(\varepsilon)^{-1} = \begin{cases} t_{j,k}(\varepsilon\xi), & i = j \\ t_{j,k}(\xi\varepsilon^{-1}), & i = k \\ t_{j,k}(\xi), & \text{\textit{иначе}} \end{cases}.$

Доказательство.

Если $i = j = 1 \wedge k = 2$, то

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon\xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Если $i = k = 1 \wedge j = 2$, то

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ \xi\varepsilon^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi\varepsilon^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Наконец, если $i \neq j, k$, то домножение на псевдоотражение справа домножит i-й столбец на ε^{-1}, слева — i-ю строчку на ε, так как единственный ненулевой элемент в них — 1 на пересечении, то $t_{j,k}(\xi)$ останется прежней. □

1.1.3 Действия элементарных преобразований на матрицах

Лемма 1.1.6. *Элементарная трансвекция действует на матрицу x слева следующим образом:*

$$t_{h,k}(\xi) \cdot \begin{pmatrix} x_{1,*} \\ \vdots \\ x_{h,*} \\ \vdots \\ x_{n,*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,*} \\ \vdots \\ x_{h,*} + \xi x_{k,*} \\ \vdots \\ x_{n,*} \end{pmatrix}$$

Лемма 1.1.7. *Элементарное псевдоотражение действует на матрицу x слева следующим образом:*

$$d_h(\varepsilon) \cdot \begin{pmatrix} x_{1,*} \\ \vdots \\ x_{h,*} \\ \vdots \\ x_{n,*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,*} \\ \vdots \\ \varepsilon x_{h,*} \\ \vdots \\ x_{n,*} \end{pmatrix}$$

Лемма 1.1.8. *Элементарная трансвекция действует на матрицу x справа следующим образом:*

$$\begin{pmatrix} x_{*,1} & \dots & x_{*,h} & \dots & x_{*,n} \end{pmatrix} \cdot t_{h,k}(\xi) = \begin{pmatrix} x_{*,1} & \dots & x_{*,h} + x_{*,k}\xi & \dots & x_{*,n} \end{pmatrix}$$

Лемма 1.1.9. *Элементарное псевдоотражение действует на матрицу x справа следующим образом:*

$$\begin{pmatrix} x_{*,1} & \dots & x_{*,h} & \dots & x_{*,n} \end{pmatrix} \cdot d_h(\varepsilon) = \begin{pmatrix} x_{*,1} & \dots & x_{*,h}\varepsilon & \dots & x_{*,n} \end{pmatrix}$$

Определение 1.1.5 (Элементарная подгруппа)**.** $E(n, R) \stackrel{def}{=} \langle t_{i,j}(\xi) | \xi \in R, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \rangle \leqslant GL(n, R)$ — подгруппа в группе обратимых матриц, состоящая из трансвекций.

Используя $D(n, R)$ как подгруппу в $GL(n, R)$, состоящую из обратимых диагональных матриц, можно ввести определение:

Определение 1.1.6 (Полная элементарная подгруппа)**.** $GE(n,R) \overset{def}{=} \langle E(n,R), D(n,R)\rangle \leqslant GL(n,R)$ — подгруппа в группе обратимых матриц, порождённая трансвекциями и псевдоотражениями.

Факт 1.1.1. $GE(n,R) = E(n,R)\cdot D(n,R)$.

Доказательство. Всякий элемент $g \in GE(n,R)$ по определению представим в виде $e_1d_1\dots e_md_m$, где $e_i \in E(n,R), d_i \in D(n,R)$. Согласно (лемма 1.1.5) $d_ie_{i+1}d_i^{-1} \in E(n,R)$, то есть можно постепенно перекидывать элементы из $E(n,R)$ в начало произведения. □

Лекция II

15 февраля 2023 г.

Положим за $d_{i,j}(\varepsilon) \overset{def}{=} d_i(\varepsilon)d_j(\varepsilon^{-1})$, где $i \neq j, \varepsilon \in R^*$.

Теорема 1.1.1. $d_{i,j}(\varepsilon)$ является произведением 4 элементарных трансвекций.

Доказательство. Будем двигаться назад: чтобы получить $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ из $\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon^{-1}\end{pmatrix}$, добавим

- первую строчку ко второй с коэффициентом ε^{-1},
- вторую строчку к первой с коэффициентом $1-\varepsilon$,
- первую строчку ко второй с коэффициентом -1,
- вторую строчку к первой с коэффициентом $1-\varepsilon^{-1}$:

$$\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon^{-1}\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 1 & \varepsilon^{-1}\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & \varepsilon^{-1}-1\\ 1 & \varepsilon^{-1}\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & \varepsilon^{-1}-1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Таким образом, $\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -\varepsilon^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1+\varepsilon\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ +1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1+\varepsilon^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. (Как было правильно замечено, в формуле порядок матриц пришлось развернуть, и прибавления строчек заменить на вычитания. Поэтому знаки в матрицах противоположны заявленным) В общем случае $d_{i,j}(\varepsilon) = t_{i,j}(-\varepsilon^{-1})t_{j,i}(-1+\varepsilon)t_{i,j}(1)t_{j,i}(-1+\varepsilon^{-1})$. Операции можно было совершать не над строками, а над столбцами: например, можно то же произведение транспозиций применить к e не слева, а справа. □

1.2 Матрицы перестановки

Определение 1.2.1 (Мономиальная матрица x)**.** В каждой строке x и каждом столбце x единственный элемент, не равный 0 (причём он обратим).

Множество мономиальных матриц обозначают $N(n,R)$, и это подгруппа в $GL(n,R)$.

Определение 1.2.2 (Матрица перестановки)**.** Такая мономиальная матрица, что все её ненулевые элементы равны 1.

Множество всех матриц перестановки обозначают W_n, это тоже подгруппа $GL(n,R)$.

Определение 1.2.3 (Означенная (signed) матрица перестановки)**.** Такая мономиальная матрица, что все её ненулевые элементы равны ± 1.

Матрица перестановки переставляет элементы базиса, изоморфны S_n, означенные матрицы перестановки переставляют означенный базис, изоморфны октаэдральной группе.

Определение 1.2.4 (Октаэдральная группа)**.** Положим $X \coloneqq \{-n,\dots,-1,1,\dots,n\}$ ($|X| = 2n$).

$$\mathrm{Oct}_n \overset{def}{=} \{\pi \in S_X | \pi(-i) = -\pi(i)\} \leqslant S_X$$

Имеет место изоморфизм $S_n \cong W_n$, $\pi \mapsto (\pi), (\pi)_{i,j} = \delta_{i,\pi(j)}$. Можно проверить, что $(\pi)(\rho) = (\pi \cdot \rho)$.

Так как перестановки порождаются транспозициями, то матрицы перестановки порождаются матрицами транспозиций $w_{i,j} = e - e_{i,i} - e_{j,j} + e_{i,j} + e_{j,i}$.

Так определённые $w_{i,j}$ — *элементарные преобразования третьего вида.*

Следствие 1.2.1. $W_n = \langle \{w_{i,j} | i+1 = j\} \rangle$. *Это абсолютный аналог утверждения, что симметрическая группа S_n порождена фундаментальными транспозициями.*

Лемма 1.2.1. *Умножение на w слева переставляет строки, справа — переставляет столбцы. В частности,* $w_{1,2} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,*} \\ x_{2,*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{2,*} \\ x_{1,*} \end{pmatrix}$ *и* $\begin{pmatrix} x_{*,1} & x_{*,2} \end{pmatrix} \cdot w_{1,2} = \begin{pmatrix} x_{2,*} & x_{1,*} \end{pmatrix}$

Преобразования третьего типа выражаются через преобразования первого и второго типа:

Определение 1.2.5.
$$w_{i,j}(\varepsilon) = t_{i,j}(\varepsilon) t_{j,i}(-\varepsilon^{-1}) t_{i,j}(\varepsilon) \in E(n, R)$$

Проще говоря, матрица где все строчки и столбцы как у единичной матрицы e кроме тех, что с номерами i, j:
$$w_{i,j}(\varepsilon) \stackrel{def}{=} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Лемма 1.2.2. $w_{i,j} = w_{i,j}(1) \cdot d_i(-1) = d_j(-1) w_{i,j}(1) \in GE(n, R)$

1.3 Классификация линейных отображений над полем. Канонический вид линейного отображения

Модуль над полем (то есть векторное пространство) с точностью до изоморфизма определяется своей размерностью. А чем определяется (с точностью до изоморфизма, естественно) линейное отображение?

Определение 1.3.1 (Изоморфность линейных отображений $\phi : U \to V$ и $\psi : W \to Z$)**.** Существуют два изоморфизма $U \cong W$ и $V \cong Z$, такие, что диаграмма коммутативна.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi} & V \\ {\scriptstyle\cong}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\cong} \\ W & \xrightarrow{\psi} & Z \end{array}$$

Определение 1.3.2 (Ранг линейного отображения ϕ)**.** Размерность образа: $\operatorname{rk}(\phi) \stackrel{def}{=} \dim(\operatorname{Im}(\phi))$.

Теорема 1.3.1. $(U, V, \phi) \cong (W, Z, \psi) \iff \begin{cases} \dim(U) = \dim(W) \\ \dim(V) = \dim(Z) \\ \operatorname{rk}(\phi) = \operatorname{rk}(\psi) \end{cases}$.

Доказательство.

- $\Rightarrow$. Очевидно.
- $\Leftarrow$. Так как $\phi, \psi : U \to V$ — линейные отображения, то можно считать, что они заданы, как домножения на матрицу. Получаем аналогичный вопрос: когда можно одну матрицу привести к другой при замене базиса в U и замене базиса в V, то есть при домножении на **обратимые** матрицы слева и справа?

Теорема 1.3.2. Для любого линейного отображения $\phi : U \to V$ можно так выбрать базисы в U и в V, чтобы матрица отображения имела вид $\left(\begin{array}{c|c} e & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ — *окаймлённая* единичная матрица (здесь e — квадратная единичная матрица, 0 — матрицы из нулей произвольного размера).

Доказательство. Обозначим $n = \dim(U), m = \dim(V)$.

- Выберем базис $\mathrm{Ker}(\phi)$; $\dim(\mathrm{Ker}(\phi)) = n - r$. Обозначим этот базис $u_{r+1}, \ldots, u_n$.
- Дополним до базиса $U : u_1, \ldots, u_r$ — относительный базис $U/\mathrm{Ker}(\phi)$.
- Рассмотрим $\phi(u_1), \ldots, \phi(u_r)$ — базис $\mathrm{Im}(\phi)$.
- Дополним этот базис до базиса V.

  В данных базисах матрица линейного отображения — действительно окаймлённая матрица.

□

Таким образом, всякое линейное отображение имеет лишь 3 инварианта — параметры окаймлённой матрицы, а это и есть $\mathrm{rk}(\phi), \dim(U), \dim(V)$. □

1.4 Комбинаторная эквивалентность матриц

Пусть $x \in M(m, n, K)$, где K — поле (рассуждения также можно обобщить до случая тела).

К какому виду можно привести x элементарными преобразованиями над строками?

Теорема 1.4.1. Для любого $x \in M(m, n, K) : \exists h \in GE(m, K) : hx$ имеет специальный (*строково-эшелонированный*) вид:

1. В каждой строке ведущий элемент (pivot) — первый ненулевой элемент — равен 1.
2. В каждой следующей строке ведущий элемент правее, чем в предыдущей.
3. Элементы над ведущими равны 0.
4. Последние строки состоят из нулей.

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & * & 0 & * & 0 & * \\ & & 1 & * & 0 & * \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 & * \\ \hline 0 & & & \ldots & & 0 \\ & & & \vdots & & \\ 0 & & & \ldots & & 0 \end{array}\right)$$

Доказательство. Рассмотрим наименьший номер ненулевого столбца $j : a_{*,j} \neq 0$. Перестановкой строк можно добиться того, что $a_{1,j} \neq 0$. Поделим строку $a_{1,*}$ на $a_{1,j}$, теперь первая строчка соответствует строково-эшелонированному виду.

Вычитая эту строку из следующих с правильными коэффициентами получаем, что $a_{*,j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Кроме того, надо занулить коэффициенты выше, буде такие найдутся (они будут в последующих шагах индукции). Таким образом, дальше (к следующим строкам матрицы) можно применить индукцию — она оборвётся либо когда закончатся строки, либо останутся только строки из нулей. □

Следствие 1.4.1 (Комбинаторная эквивалентность). *Всякую матрицу преобразованиями над строками и перестановкой столбцов можно привести к следующему виду* (ступенчатый вид)*:*

$$\forall x \in M(m,n,K), \exists h \in GE(m,K), w \in W_n : hxw = \left(\begin{array}{c|c} e & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

где e —квадратная матрица некоего размера $r \times r$, а остальные блоки — произвольного размера.

Таким образом, две матрицы *комбинаторно эквивалентны*, если одна может быть получена из другой элементарными преобразованиями над строками и перестановкой столбцов, или, что аналогично, они обе могут быть приведены к одному ступенчатому виду.

Лекция III

21 февраля 2023 г.

1.4.1 Элементарная эквивалентность матриц

В этом параграфе K опять-таки поле.

Теорема 1.4.2. $x \in M(m,n,K) \Rightarrow \exists g \in GE(m,K), h \in GE(n,K) : gxh = \left(\begin{array}{c|c} e & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ — окаймлённая единичная матрица размера $r \times r$.

Доказательство. В предыдущем вопросе мы доказали, что можно подобрать такие $g, w : gxw$ — окаймлённая единичная матрица, у которой справа сверху мусор. Этот мусор можно вынести, поочерёдно вычитая столбцы слева (в которых все элементы равны 0, кроме одного — 1), домноженные на правильный коэффициент. □

Две матрицы *элементарно эквивалентны*, если ни могут быть приведены к одному окаймлённому виду.

Две матрицы $x, y \in M(m,n,K)$ *строго элементарно эквивалентны*, если $\exists g \in E(m,K), h \in E(n,K) : y = gxh$, то есть разрешены только элементарные трансвекции первого рода.

Теорема 1.4.3. $x \in M(m,n,K) \Rightarrow \exists g \in E(m,K), h \in E(n,K) : gxh$ — либо окаймлённая единичная матрица $r \times r$, либо $d_m(\varepsilon)$ (в случае $m = n = r$):

$$gxh = \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} e & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \\ d_m(\varepsilon) \end{array}\right.$$

Замечание. Такой ε равен определителю (определителю Дьёдоне) матрицы x, $\det(x)$ (либо если матрица не строго эквивалентна псевдоотражению, то $\det(x) = 0$). К сожалению, такой способ определить определитель не обобщается даже на кольца (даже коммутативные).

Доказательство. Вспомним доказательство предыдущей теоремы о комбинаторной эквивалентности матриц, и применим к нему лемму о $d_i(\varepsilon)d_j(\varepsilon^{-1}) \in E(n,K)$. Таким образом можно всякий раз кроме последней строки применять эту лемму, и обойтись преобразованиями первого типа, чтобы выставить все, кроме быть может одной, единицы в главной диагонали. □

Замечание. Всё вышеописанное применимо к телу. Для тела определитель Дьёдоне лежит в $\{0\} \cup T^*/[T^*, T^*]$.

1.4.2 Ранг матрицы над полем. Различные определения ранга над кольцом

Тензорный и скелетный ранги

Рассмотрим матрицу над полем $x \in M(m, n, K)$.

Для коммутативного кольца R определим

Определение 1.4.1 (Внешнее произведение, outer tensor)**.** Матрица uv, где $u \in R^m, v \in {}^nR$.

Внешнее произведение — это матрица ранга 1.

Определение 1.4.2 (Ранг матрицы $x \in M(m, n, K)$)**.** Наименьшее r, такое что существуют r матриц ранга 1, таких, что x равен их сумме. Обозначают $rk(x)$, иногда для определённости называют *тензорным* рангом.

Теорема 1.4.4. Ранг матрицы $x \in M(n, m, R)$ равен наименьшему числу r, такому, что $\exists y \in M(n, r, R)$ и $z \in M(r, m, R)$, такие, что

$$x = yz$$

Иногда такое r называют *скелетным* рангом, но скелетный ранг всегда равен тензорному рангу.

Доказательство.

$\Rightarrow$. Если $x = u_1v_1 + \dots + u_rv_r$, то

$$x = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$. $x = yz = ye^2z = (y(e_{1,1} + \dots + e_{r,r})) \cdot ((e_{1,1} + \dots + e_{r,r})z) = y_{*,1}z_{1,*} + \dots + y_{*,r}z_{r,*}$. $\square$

Строчный и столбцовый ранги

Определение 1.4.3 (Строчный ранг матрицы, $\mathrm{rrk}(x)$)**.** Ранг модуля, порождённого строками x, если этот модуль **свободен.**

Определение 1.4.4 (Столбцовый ранг матрицы, $\mathrm{crk}(x)$)**.** Ранг модуля, порождённого столбцами x, если этот модуль **свободен.**

Замечание. Строчный ранг и столбцовый не обязаны существовать. Для коммутативного кольца если оба существуют, то они равны. В таком случае их общее значение называют *внешним* рангом, $\mathrm{ork}(x)$.

Интересный факт. Внешний ранг всегда не меньше тензорного ранга.

Теорема 1.4.5. Если K — поле, то тензорный ранг матрицы совпадает с её строчными и столбцовыми рангами, а ещё равен r из теоремы о комбинаторной эквивалентности матриц (следствие 1.4.1).

Доказательство. Переходя $x \rightsquigarrow gx$, где $g \in GE(m, K)$ — элементарная матрица, мы переходим к пространству строк, содержащемуся в пространстве строк x.

Так как g обратимо, то пространства строк совпадают. Аналогично для столбцов, $\mathrm{crk}(x) = \mathrm{crk}(xh)$, и пространства столбцов совпадают.

Заметим, что преобразований над строками достаточно, чтобы получить эшелонированную матрицу с единичным блоком $r \times r$, то есть r линейно независимых строк. Применив далее преобразования над столбцами, приведём матрицу к каноническому виду — окаймлённой единичной, причём ранг её будет тот же r.

Если же аналогичные действия проделать сначала над столбцами, то получится столбцово-эшелонированная матрица с единичным блоком $\widetilde{r} \times \widetilde{r}$. Так как канонический вид матрицы единственен (теорема 1.3.1), то $r = \widetilde{r}$.

Отсюда получается, что $r = \mathrm{crk}(x) = \mathrm{rrk}(x) = \mathrm{rk}(x)$, где последнее — ранг линейного отображения. Кроме того, отсюда вытекают факты, что строчный ранг не меняется при столбцовых преобразованиях, а столбцовый — при строчных. □

Замечание. Без использования понятия о ранге линейного отображения можно так доказать то, что элементарные преобразования над строчками не меняют и столбцовый ранг тоже: если какое-то подмножество столбцов было линейно зависимо: $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_s u_s = 0$, то и после применения элементарного преобразования эта комбинация осталась нулевой:

$$\lambda_1(u_1 g) + \dots + \lambda_s(u_s g) = 0$$

Определение 1.4.5 (Ранг по минору, $\mathrm{mrk}(x)$)**.** Наибольший размер минора, имеющего ненулевой определитель.

Интересный факт. $\mathrm{mrk}(x) \leqslant \mathrm{rk}(x)$.

Интересный факт (Теорема о базисном миноре). Над полем $\mathrm{mrk}(x) = \mathrm{rk}(x)$.

1.4.3 Системы линейных уравнений

Пусть мы всё ещё работаем над полем.

Рассмотрим линейное отображение $\phi : K^n \to K^m$. Пусть $u \in K^m$.

Определение 1.4.6 (Система линейных уравнений)**.** Уравнение $\phi(x) = u$, где неизвестный $x \in K^n$.

Уравнение называется системой уравнений, потому что традиционно, выбрав базисы, можно записать $\phi(x) = ax$, где $a \in M(m, n, K)$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$, и система уравнений приобретает вид $ax = u$.

Но людям раньше нравилось много писать, поэтому они записывали

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = u_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n = u_2 \\ \dots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = u_m \end{cases}$$

Лекция IV

22 февраля 2023 г.

Теорема 1.4.6. Если x_0 — какое-то (*частное*) решение уравнения $\phi(x) = u$, то множество всех решений — это $x_0 + \mathrm{Ker}(\phi)$.

Доказательство. Любое (*общее*) решение x удовлетворяет $\phi(x) = u$, откуда $\phi(x - x_0) = 0$, и $x \in x_0 + \mathrm{Ker}(\phi)$. □

Система $\phi(x) = 0$ называется *однородной*.

Ядро, разумеется, является подпространством; при работе над полем оно свободно, то есть

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \langle v_1, \dots, v_d \rangle$$

Факт 1.4.1. $d = n - r$.

Этот базис $v_1, \dots, v_d$ называется *фундаментальной системой решений*.

Следствие 1.4.2. *Любое решение x имеет вид $x_0 + v_1\lambda_1 + \dots + v_d\lambda_d$.*

1.4.4 Векторная запись системы линейных уравнений. Теорема Кронекера — Капелли

На самом деле теорема Кронекера — Капелли — очевидный факт, который Капелли, записывая, назвал *теорема Кронекера*, что потом при ссылках преобразовалось в текущее название.

$$a = \begin{pmatrix} a_{*,1} & \dots & a_{*,n} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Векторная запись системы линейных уравнений $a_{*,1}x_1 + \dots + a_{*,n}x_n = u$.

Является ли вектор u линейной комбинацией векторов $a_{*,1}, \dots, a_{*,n}$?

Теорема 1.4.7 (Кронекер — Капелли)**.** Ответ на этот вопрос известен: когда $u \in \langle a_{*,1}, \dots, a_{*,n} \rangle \iff \langle a_{*,1}, \dots, a_{*,n} \rangle = \langle a_{*,1}, \dots, a_{*,n}, u \rangle$.

Иначе говоря, система $ax = u$ совместна $\iff \operatorname{rk}(a) = \operatorname{rk}(a|u)$.

Факт 1.4.2 (Дополнение к теореме Кронекера — Капелли)**.** *Система $ax = u$ имеет единственное решение* $\iff \operatorname{rk}(a) = \operatorname{rk}(a|u) = n$.

Доказательство. В этом случае $\dim \operatorname{Ker}(a) = \dim K^n - \dim \operatorname{Im} a = 0$ и ядро нулевое. □

1.4.5 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Гаусс, может, этим методом и не решал системы, ну да ладно.

$$ax = u \qquad a \in M(m, n, K) \qquad x \in K^n \qquad u \in K^m$$

Для любого $g \in GL(m, K) = GE(m, K)$ умножение на матрицу слева приводит к эквивалентной системе $gax = gu$. Также можно перенумеровать неизвестные:

$$(gaw)(w^{-1}x) = gu, \qquad w \in W_n$$

Раньше было доказано (следствие 1.4.1), что можно подобрать такие $g \in GE(m, K), w \in W_n$, что gaw имеет ступенчатый вид: $\begin{pmatrix} gaw | gu \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} e & * & * \\ 0 & 0 & \delta \end{array}\right), \delta \in \{0, 1\}^{m-r}$. Система совместна $\iff \delta = 0$. Таким образом, неизвестные разбились на 2 группы: *главные* $x_1, \dots, x_r$ и *свободные* $x_{r+1}, \dots, x_n$.

Систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} x_1 + \qquad c_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{1,n}x_n = d_1 \\ \dots \\ x_r + \qquad c_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{r,n}x_n = d_r \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{1,r+1} \\ \vdots \\ c_{r,r+1} \end{pmatrix} x_{r+1} - \dots - \begin{pmatrix} c_{1,n} \\ \vdots \\ c_{r,n} \end{pmatrix} x_{r+1}$$

В качестве частного решения можно взять решение при занулённых свободных переменных, а в качестве базиса ядра — решения, принимая каждую свободную переменную по очереди единицей:

$$\left(\begin{array}{c} d_1 - c_{1,r+1}x_r - \dots - c_{1,n}x_n \\ \vdots \\ d_r - c_{r,r+1}x_r - \dots - c_{r,n}x_n \\ \hline x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} -c_{1,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ \hline 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right) x_{r+1} + \dots + \left(\begin{array}{c} -c_{1,n} \\ \vdots \\ -c_{r,n} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array}\right) x_n$$

1.4.6 Определитель по Вейерштрассу

Пусть $x \in M(n, R)$ — матрица над коммутативным кольцом.

В определении по Вейерштрассу матрица фигурирует, как строка столбцов $x = (x_{*,1}, \dots, x_{*,n})$.

Определение 1.4.7 (Определитель по Вейерштрассу)**.** $\mathrm{Det} : \underbrace{R^n \times \dots \times R^n}_{n} \to R$ со следующими свойствами.

1. Полилинейность: Det линейно по каждому аргументу при фиксированных остальных.
2. Антисимметричность: если два столбца совпали, то определитель — нуль.
3. Нормированность: $\mathrm{Det}(e_1, \dots, e_n) = \mathrm{Det}(e) = 1$.

Существует ли такой определитель? (Да, например, определитель Лейбница (определение 1.4.13))

Единственен ли он? (Да: (теорема 1.4.13))

Лемма 1.4.1. *Определитель не меняется при элементарных преобразованиях над столбцами.*

Доказательство.

$$\mathrm{Det}(x \cdot t_{r,s}(\xi)) = \mathrm{Det}(x_{*,1}, \dots, x_{*,r}, \dots, x_{*,s} + x_{*,r}\xi, \dots, x_{*,n}) =$$
$$\mathrm{Det}(x_{*,1}, \dots, x_{*,r}, \dots, x_{*,s}, \dots, x_{*,n}) + \underbrace{\mathrm{Det}(x_{*,1}, \dots, x_{*,r}, \dots, x_{*,r}, \dots, x_{*,n})}_{0} \xi$$

□

Лемма 1.4.2 (Кососимметричность определителя)**.** *При перестановке двух столбцов местами определитель меняет знак.*

Доказательство. Обозначим $F(u_r, u_s) \coloneqq \mathrm{Det}(u_1, \dots, \underset{r}{u_r}, \dots, \underset{s}{u_s}, \dots, u_n)$.

В силу линейности определителя, $0 = F(u_r + u_s, u_r + u_s) = \underbrace{F(u_r, u_r)}_{0} + F(u_r, u_s) + F(u_s, u_r) + \underbrace{F(u_s, u_s)}_{0}$. □

Замечание. Кососимметричность следует из антисимметричности, а обратное верно только если 2 — не делитель 0 (и $2 \neq 0$).

Лемма 1.4.3. *Если один из столбцов является линейной комбинацией остальных, то определитель равен 0.*

1.4.7 Знак перестановки. Определение через декремент

Определение 1.4.8 (Декремент)**.** Любая перестановка представима в виде произведения независимых циклов (включая тривиальные).

$$\forall \pi \in S_n : \qquad \pi = \rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_m$$

Определение 1.4.9 (Орбита перестановки)**.** Множество $\{k, \pi(k), \pi(\pi(k)), \dots\} = \left\{\pi^l(k) \middle| l \in \mathbb{Z}\right\}$ Так как перестановка обратима (является биекцией), то любые две различные орбиты не пересекаются.

Замечание. Количество независимых циклов π — количество орбит π.

Определение 1.4.10 (Декремент π)**.** $\mathrm{decr}(\pi) \overset{def}{=} n - m$, где $\pi \in S_n$, а m — количество независимых циклов (или орбит) π.

Если $\{1, \dots, n\} = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_m$, где $X_1, \dots, X_m$ — орбиты перестановки, то декремент — это сумма $\sum\limits_{i=1}^{m} (|X_i| - 1)$.

Определение 1.4.11 (Знак перестановки)**.** $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{\operatorname{decr}(\pi)}$

Теорема 1.4.8. $\operatorname{decr}(\pi)$ — наименьшее количество транспозиций, произведение которых в некотором порядке равно π.

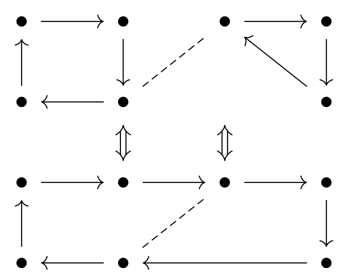
Доказательство. Давайте следить за длиной конкретного разложения перестановки по системе образующих транспозиций.

<u>База:</u> $\operatorname{decr}(\mathrm{id}) = n - n = 0$.

<u>Переход:</u> Всякое применение транспозиции меняет декремент на 1 (если она меняет местами элементы одного цикла π, то декремент увеличивается, а если из разных — то уменьшается).

В самом деле, если элементы из одного цикла меняются местами, то цикл разлагается на 2: для $p < q : (i_p i_q)(i_1 i_2 \dots i_r) = (i_1 \dots i_{p-1} i_q \dots i_r) \cdot (i_p i_{p+1} \dots i_{q-1})$.

Если же местами меняются элементы разных циклов, то это вычисление получается домножением равенства выше на $(i_p i_q)$ слева: $(i_1 i_2 \dots i_r) = (i_p i_q)(i_1 \dots i_{p-1} i_q \dots i_r) \cdot (i_p i_{p+1} \dots i_{q-1})$.



□

1.4.8 Знак перестановки. Определение через инверсии

Воспользуемся тем, что $S_n = \langle (ij), i+1=j \rangle$.

Определение 1.4.12 ($i < j$ образуют инверсию в перестановке $\pi \in S_n$)**.** $\pi_i > \pi_j$.

Обозначим за $\operatorname{inv}(\pi)$ количество инверсий в перестановке π.

Теорема 1.4.9. $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{\operatorname{inv}(\pi)} = \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}$.

Ещё можно сказать, что количество инверсий равняется минимальному количеству фундаментальных транспозиций, произведение которых в некотором порядке даёт π.

Доказательство. Несложно проверить, что всякая фундаментальная транспозиция, после домножения на перестановку (неважно, слева или справа), меняет количество инверсий в ней на ± 1.

А именно, при домножении π на транспозицию (ij) слева происходит смена $\pi(i)$ и $\pi(j)$, пара индексов i и j либо перестаёт, либо начинает образовывать инверсию. Кроме того, все инверсии i, k меняются на инверсии j, k и наоборот, так как относительное положение индекса k относительно i или j не поменялось (транспозиция фундаментальная, поэтому $|i - j| = 1$).

При домножении π на транспозицию (xy) справа происходит смена $\pi(i)$ и $\pi(j)$ где $\pi(i) = x, \pi(j) = y$, пара индексов i и j либо перестаёт, либо начинает образовывать инверсию. Остальные инверсии остаются прежними, так как $|x - y| = 1$. □

Без доказательства существования знак ещё можно определить следующим образом:

Теорема 1.4.10. Для $n \geqslant 2$ существуют ровно два гомоморфизма $\phi : S_n \to \{\pm 1\}$. Это тождественный 1 и sgn.

Доказательство. $\{\pm 1\}$ — абелева группа. Пусть $\pi \sim \sigma \in S_n \iff \phi(\pi) = \phi(\sigma)$.

При сопряжении аргумента $\phi(\pi)$ не меняется: $\phi\left(\sigma\pi\sigma^{-1}\right) = \phi(\sigma)\phi(\pi)\phi(\sigma)^{-1} = \phi(\pi)$.

Так как все транспозиции сопряжены, то $\phi(\tau) = \text{const}$ для всех транспозиций τ.

Если $\phi(\tau) = 1$, то гомоморфизм — тождественная единица, иначе $\phi(\tau) = -1$, и $\phi \equiv \operatorname{sgn}$. $\square$

1.4.9 Знакопеременное определение определителя

Пусть $x \in M(n, R)$, где R — коммутативное кольцо.

Определение 1.4.13 (Определитель по Лейбницу)**.** $\det(x) = \sum\limits_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod\limits_{j=1}^{n} x_{j,\pi(j)}$.

Лемма 1.4.4 (Общее правило знаков)**.** *Слагаемое* $x_{\pi(1),\rho(1)} \cdot \ldots \cdot x_{\pi(n),\rho(n)}$ *входит в сумму со знаком* $\operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\rho)$.

Доказательство. В коммутативном кольце $x_{\pi(1),\rho(1)} \cdot \ldots \cdot x_{\pi(n),\rho(n)} = x_{1,\rho(\pi^{-1}(1))} \cdot \ldots \cdot x_{n,\rho(\pi^{-1}(n))}$. $\square$

Свойства транспонирования:

1. $x^{tt} = x$
2. $(x+y)^t = x^t + y^t$
3. $(xy)^t = y^t \cdot x^t$.

Данному набору свойств удовлетворяет $(x^t)_{j,i} \overset{def}{=} x_{i,j}$. Транспонирование $^t : M(n, R) \to M(n, R^o)$.

Теорема 1.4.11. $\det(x^t) = \det(x)$.

Доказательство. Согласно правилу знаков $\det(x^t) = \sum\limits_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod\limits_{j=1}^{n} x_{\pi(j),j} = \det(x)$. $\square$

Для некоммутативного кольца R это неверно:

Пример. Определим алгебру Вейля $W_1(K) = K\langle x, d\rangle/([d,x] = 1)$ — алгебра над полем K, где d, x не коммутируют, и взят фактор по отношению $[d, x] = 1$. Алгебра дифференциальных операторов некоммутативна.

Говорят, в квантовой механике активно используется $W_n(K)$.

Если посчитать row det $\begin{pmatrix} d & d \\ x & x \end{pmatrix} = dx - xd = 1$.

В другую сторону: col det $\begin{pmatrix} d & d \\ x & x \end{pmatrix} = dx - dx = 0$.

В самом деле, столбцы линейно зависимы, а строки — нет.

Лекция V

1 марта 2023 г.

1.4.10 Существование определителя (удовлетворяющего условиям Вейерштрасса)

Теорема 1.4.12. Определитель по Лейбницу удовлетворяет условиям Вейерштрасса

Доказательство.

- Линейность по столбцам. Пусть $x_{*,r} = u + v$. Тогда

$$\det(x) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) x_{\pi(1),1} \cdot \ldots \cdot \underset{\substack{\| \\ (u+v)_{\pi(r)}}}{x_{\pi(r),r}} \cdot \ldots \cdot x_{\pi(n),n}$$

  В силу дистрибутивности кольца можно раскрыть скобки ($a(b+c)d = (ab+ac)d = abd+acd$):

$$\det(x) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) x_{\pi(1),1} \cdot \ldots \cdot u_{\pi(r)} \cdot \ldots \cdot x_{\pi(n),n} + \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) x_{\pi(1),1} \cdot \ldots \cdot v_{\pi(r)} \cdot \ldots \cdot x_{\pi(n),n}$$

  Аналогично можно выносить константу, домноженную на произвольный столбец.

- Если два столбца, пусть $x_{*,r}$ и $x_{*,s}$, совпадают, то определитель равен 0:

$$\det(x) = \sum_{\pi \in A_n} x_{\pi(1),1} \cdot \ldots \cdot x_{\pi(r),r} \cdot \ldots \cdot x_{\pi(s),s} \cdot \ldots \cdot x_{\pi(n),n} - \sum_{\substack{\pi \in (rs) \cdot A_n \\ \| \\ S_n \setminus A_n}} x_{\pi(1),1} \cdot \ldots \cdot x_{\pi(r),r} \cdot \ldots \cdot x_{\pi(s),s} \cdot \ldots \cdot x_{\pi(n),n}$$

  В силу равенства столбцов $x_{*,r}$ и $x_{*,s}$ в левой сумме все слагаемые совпадают со слагаемыми в правой сумме.

- Нормированность определителя: $\det(e) = 1$. Несложно видеть даже большее: определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

□

1.4.11 Единственность определителя (удовлетворяющего условиям Вейерштрасса)

Теорема 1.4.13. Никакое другое отображение, кроме определителя Лейбница, не удовлетворяет условиям определителя Вейерштрасса.

Доказательство. Всякий столбец раскладывается по столбцовому базису $\{e_i\}_{i=1..n}$:

$$u_j = e_1 x_{1,j} + \cdots + e_n x_{n,j}$$

Рассмотрим произвольный определитель Вейерштрасса Det, и разложим его аргументы по столбцовому базису:

$$\begin{aligned}\operatorname{Det}(u_1, \ldots, u_n) &= \operatorname{Det}((e_1 x_{1,1} + \cdots + e_n x_{1,n}), \ldots, (e_1 x_{1,n} + \cdots + e_n x_{n,n})) = \\ &= \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{n} \operatorname{Det}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) \cdot x_{i_1,1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n,n} = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{Det}(e_{\pi(1)}, \ldots, e_{\pi(n)}) \cdot x_{\pi(1),1} \cdot \ldots \cdot x_{\pi(n),n}\end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что получили определение определителя по Лейбницу. В самом деле, $\operatorname{Det}(e_{\pi(1)}, \ldots, e_{\pi(n)})$ равен знаку перестановки, так как из антисимметричности следует кососимметричность, и $\operatorname{Det}(e_{\pi(1)}, \ldots, e_{\pi(n)})$ равен с точностью до знака $\det(e)$, а знак определителя — чётность декремента π. □

1.5 Мультипликативность определителя

$$\det(xy) = \det(x)\det(y)$$

1.5.1 Блочные матрицы

Рассмотрим матрицу из $M(m, n, R)$.

Пусть $\mu = (m_1, \dots, m_r)$ — разбиение числа m, то есть $m_1 + \dots + m_r = m$, и $\nu = (n_1, \dots, n_s)$ — разбиение n.

Разобьём элементы матрицы в соответствии с разбиением:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} n_1 & \dots & n_s \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{array} & \left(\begin{array}{c|c|c} \quad & \quad & \quad \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array}\right) \end{array}$$

Подматрицу $x^{i,j} \in M(m_i, n_j, R)$ называют *блок матрицы* x в позиции (i, j) для $i \in [1, r], j \in [1, s]$.

Операции над блочными матрицами

1. Сложение.

   Рассмотрим две матрицы x, y с одинаковым разбиением на блоки.

   Тогда сумма определяется поблочно $(x + y)^{i,j} = x^{i,j} + y^{i,j}$.

2. Умножение. Пусть $x \in M(l, m, R), y \in M(m, n, r), \lambda = (l_1, \dots, l_q)$ — разбиение l.

   Рассмотрим (λ, μ) разбиение x и (μ, ν) разбиение y.

   Тогда произведение определяется поблочно:

$$(x \cdot y)^{i,k} = \sum_{j=1}^{r} x^{i,j} \cdot y^{j,k}$$

Важнейший частный случай — разбиения на равные слагаемые. Так, квадратную матрицу из $M(m \cdot n, R)$ можно разбить на $m \times m$ блоков размера $n \times n$: $M(m \cdot n, R) = M(m, M(n, R))$.

1.5.2 Определитель блочно треугольной матрицы

Теорема 1.5.1. Рассмотрим матрицу $x = \left(\begin{array}{c|c} y & * \\ \hline 0 & z \end{array}\right) \in M(n, R)$. Для определённости можно положить $y \in M(m, R), z \in M(n - m, R)$.

Утверждается, что $\det(x) = \det(y)\det(z)$.

Доказательство. Определим подгруппы Юнга в S_n. Пусть $\mu = (m_1, \dots, m_r)$ — разбиение m. Тогда π лежит в подгруппе Юнга, соответствующей разбиению μ, если $\forall k = 1..r : \pi(i) \in m_k \iff i \in m_k$. Здесь запись $i \in m_k$ означает, что $\sum\limits_{j=1}^{k-1} m_j < i \leqslant \sum\limits_{j=1}^{k} m_j$.

Иными словами, подгруппы Юнга не перемешивают элементы вне разбиения.

Такая подгруппа Юнга изоморфна $S_{m_1} \times \dots \times S_{m_k}$.

Для удобства будем рассматривать подгруппы Юнга размера 2: для разбиения $n = (m, n - m)$. Здесь определение упрощается до $i \leqslant m \iff \pi(i) \leqslant m$.

Итак, посчитаем определитель x. Заметим, что в формуле

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) x_{1,\pi(1)} \cdot \ldots \cdot x_{n,\pi(n)}$$

суммирование можно проводить только по перестановкам из подгруппы Юнга для $(m, n-m)$.

В самом деле, по принципу Дирихле, если какая-то из первых m строчек попала не в первый из m столбцов, то тогда какой-то из них остался свободен, и в него попадёт что-то из следующих строчек, то есть конкретное произведение даст 0. В соответствии с этим, будем суммировать по не $\pi \in S_n$, а по $(\rho, \sigma) \in S_m \times S_{n-m}$.

$$\sum_{(\rho,\sigma)\in S_m\times S_{n-m}} \operatorname{sgn}(\rho) x_{1,\rho(1)} \cdot \ldots \cdot x_{m,\rho(m)} \cdot \operatorname{sgn}(\sigma) x_{m+1,m+\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{m+(n-m),m+\sigma(n-m)} = \det(y)\det(z)$$

□

Следствие 1.5.1. *Для любого квадратного разбиения матрицы на блоки ($r = s$), такого, что элементы ниже главной диагонали — нуль-матрицы, определитель равен произведению блочных подматриц на главной диагонали.*

1.5.3 Мультипликативность определителя

Пусть $x, y \in M(n, R)$.

Теорема 1.5.2. $\det(xy) = \det(x)\det(y)$

Доказательство. Рассмотрим блочную матрицу $\begin{pmatrix} y & e \\ 0 & x \end{pmatrix}$, и домножим её слева на $\begin{pmatrix} e & 0 \\ -x & e \end{pmatrix}$ (это трансвекция, прибавляющая ко второй строчке первую, домноженную на $-x$):

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ -x & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & e \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & e \\ -xy & 0 \end{pmatrix}$$

Так как это элементарное преобразование, то определитель не поменялся. Сделаем ещё пару пассов руками:

$$\begin{pmatrix} y & e \\ -xy & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -e \\ e & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & -y \\ 0 & xy \end{pmatrix}$$

Это тоже произведение парочки элементарных преобразований первого типа, значит, $\det(y)\det(x) = \det(xy)$, и из коммутативности кольца R, в котором мы считаем определитель, доказательство завершено. □

Лекция VI

7 марта 2023 г.

1.5.4 Миноры, разложение по строке, определитель по Лапласу

R — коммутативное кольцо, $x \in M(m, n, R)$. Выберем $I \subset \underline{m} = \{1, \ldots, m\}$; $J \subset \underline{n} = \{1, \ldots, n\}$ так, что $|I| = |J| = d$. Рассмотрим сужение матрицы x на $I \times J$, как матрицу из $M(d, R)$.

Определение 1.5.1 (Минор $M_{I,J}(x)$)**.** Определитель матрицы $(x_{i,j})_{i\in I, j\in J}$.

Если же $m - |I| = n - |J|$, то $\det(x_{i,j})_{i\notin I, j\notin J}$ — *дополнительный минор*, обозначается $\overline{M}_{I,J}$.

Особенно важен случай $m = n$. Здесь определён дополнительный минор

$$\overline{M}_{i,j} = \det\big(\text{вычеркнули из } x \text{ строку } i \text{ и столбец } j\big)$$

Определение 1.5.2 (Алгебраическое дополнение к элементу $x_{i,j}$)**.** $A_{i,j}(x) \overset{def}{=} (-1)^{i+j}\overline{M}_{i,j}(x)$. Можно также сказать, что это определитель матрицы, где $x_{*,j}$ и $x_{i,*}$ заменили на нули, но $x_{i,j}$ — на единицу.

Теорема 1.5.3 (Разложение по строке)**.** Для матрицы $x \in M(n, R)$:

$$\forall i_1, i_2 \in [1, n]: \quad \sum_{j=1}^{n} x_{i_1,j} A_{i_2,j} = \begin{cases} \det(x), & i_1 = i_2 \\ 0, & i_1 \neq i_2 \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим i_1-ю строку матрицы x. Разложим её по строчному базису $x_{i_1,*} = x_{i_1,1}f_1 + \cdots + x_{i_1,n}f_n$.

Разложим определитель в сумму n слагаемых, где i_1-я строка разложена по строчному базису.

Дальше мы можем переставлять строчки по одной, получив форму разложения по строке для $i_1 = i_2$.

Если же $i_1 \neq i_2$, то мы посчитали определитель матрицы, у которой на место строки i_2 поставили строку i_1, то есть определитель матрицы с равными строками — 0. □

Определение 1.5.3 (Определитель по Лапласу (индуктивно))**.** $\det(x) = x_{1,1}A_{1,1}(x) + \cdots + x_{1,n}A_{1,n}(x)$.

Замечание. Вместо строк можно раскладывать по столбцам.

Интересный факт (Лаплас). Можно раскладывать не по одной строке, а по нескольким (по k строкам). Минор определяется выбором k столбцов.

$$\det(x) = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots j_k \leqslant n} (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} M_{\{i_1,\ldots,i_k\}\times\{j_1,\ldots,j_k\}} \cdot \overline{M}_{\{i_1,\ldots,i_k\}\times\{j_1,\ldots,j_k\}}$$

1.5.5 Формула Крамера, теорема Крамера

Формула Крамера получает по матрице ей обратную.

Пусть $x \in M(n,R)$. Когда x обратима?

Определение 1.5.4 (Присоединённая матрица)**.** $\operatorname{adj}(x) \overset{def}{=} (A_{i,j}(x))^t_{1\leqslant i,j\leqslant n} = (A_{j,i}(x))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

Лемма 1.5.1. $x \cdot \operatorname{adj}(x) = \operatorname{adj}(x) \cdot x = \det(x) \cdot e$.

Доказательство. Раскрыть произведение матриц в сумму и применить теорему Лапласа. □

Теорема 1.5.4 (формула Крамера)**.** Матрица g обратима, если и только если $\det(g) \in R^*$. Если $\det(g) \in R^*$, то $g^{-1} = \frac{1}{\det(g)} \operatorname{adj}(g)$.

Доказательство. Если g обратима, то $\exists g^{-1} \in M(n,R)$, откуда $1 = \det(e) = \det(gg^{-1}) = \det(g) \cdot \det\left(g^{-1}\right)$, получается, $\det(g)$ обратим.

Если $\det(g) \in R^*$, то $\exists g^{-1} = \frac{1}{\det(g)} \operatorname{adj}(g)$. □

Теорема 1.5.5 (Крамер)**.** В поле K система $ax = u$ ($a \in M(n,K), u \in K^n$) имеет единственное решение $\iff \det(a) \neq 0$. Если $\det(a) \neq 0$, то это решение задаётся формулой $x = a^{-1}u$.

Доказательство. Если $\det(a) \neq 0$, то условия эквивалентны: $ax = u \iff x = a^{-1}u$.

Если в поле $\det(a) = 0$, то $\operatorname{rk}(a) < n$. Тогда либо $\operatorname{rk}(a|u) = \operatorname{rk}(a)$, откуда по теореме Кронекера — Капелли $ax = u$ совместна, но не определена, либо $\operatorname{rk}(a|u) > \operatorname{rk}(a)$, откуда система несовместна. □

1.6 Определители некоторых матриц

Даны n функций $f_1, \ldots, f_n : R \to R$ и n аргументов $x_1, \ldots, x_n$.

Чаще всего полезны определители вида $\det\begin{pmatrix} f_1(x_1) & \ldots & f_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & \ldots & f_n(x_n) \end{pmatrix}$ — *альтернанты*.

Иногда также случаются определители вида $\det\begin{pmatrix} f(x_1,x_1) & \ldots & f(x_1,x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_n,x_1) & \ldots & f(x_n,x_n) \end{pmatrix}$

1.6.1 Определитель Вандермонда

Определение 1.6.1 (Матрица Вандермонда)**.** Альтернант для $f_i : x \mapsto x^{i-1}$

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Теорема 1.6.1. $\det(V(x_1, \ldots, x_n)) = \prod\limits_{i>j} (x_i - x_j)$.

Доказательство.

- $\det(V(x_1, \ldots, x_n))$ — многочлен от переменных $x_1, \ldots, x_n$.
- Его степень $0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Профакторизуем по отношению $(x_i - x_j)$, отображая кольцо многочленов от n переменных в кольцо многочленов от $n-1$ переменных. Строчки $x_{i,*}$ и $x_{j,*}$ стали равны, значит, $(x_i - x_j) \mid \det(V(x_1, \ldots, x_n))$.
- Все многочлены вида $x_i - x_j$ для $i > j$ взаимно просты, значит, $\prod\limits_{i>j} (x_i - x_j) \mid \det(V(x_1, \ldots, x_n))$. Степень произведения тоже равна $\frac{n(n-1)}{2}$.
- Проверим, что константа ассоциированности между ними равна 1. Рассмотрим диагональное произведение $1 \cdot x_2 \cdot x_3^2 \cdots x_n^{n-1}$. Входит в оба выражения со знаком $+1$. □

1.6.2 Пфаффианы

Пусть $x \in M(n, K)$.

Определение 1.6.2 (Кососимметричная матрица)**.** Матрица x, такая, что $x^t = -x$.

Определение 1.6.3 (Антисимметричная матрица)**.** Кососимметричная матрица x, такая, что $\forall i \in [1, n] : x_{i,i} = 0$.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$$

Интересный факт. Пусть $x \in M(n, R)$ — антисимметричная матрица. Если $n \equiv 1 \pmod 2$, то $\det(x) = 0$. Иначе $n \equiv 0 \pmod 2$, тогда $\det(x) \in R^2$.

Замечание. Пфаффиан можно определить с точностью до знака, как корень из определителя.

Определение 1.6.4 (Пфаффиан)**.** $\mathrm{pf}(x)$ определён для антисимметричных матриц и удовлетворяет следующим свойствам:

1. $\mathrm{pf}(y \cdot x \cdot y^t) = \mathrm{pf}(x) \cdot \det(y)$
2. $\mathrm{pf}(x \oplus y) = \mathrm{pf}(x) \cdot \mathrm{pf}(y)$, где $x \oplus y = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$.
3. $\mathrm{pf} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = +1$.

Интересный факт. $\det(x) = \mathrm{pf} \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x^t & 0 \end{pmatrix}$.

Интересный факт. Если x — порядка $2n$, то

$$\mathrm{pf}(x) = \sum_{\pi \in S_{2n}} \mathrm{sgn}(\pi) x_{\pi(1),\pi(2)} \cdot \ldots \cdot x_{\pi(2n-1),\pi(2n)}$$

где сумма берётся по всем таким π, что $\pi(2i-1) < \pi(2i)$.

Глава 2

Многочлены

Лекция VII

14 марта 2023 г.

В доказательстве вычисления определителя Вандермонда были два пробела, надо бы их восполнить (теорема 2.2.1).

2.1 Гомоморфизм эвалюации

Говоря простыми словами, подстановка элемента алгебры в многочлен.

Пусть R — **коммутативное** кольцо.

Определение 2.1.1 (A — алгебра над R)**.** Кольцо A (часто ассоциативное, с 1_A), необязательно коммутативное, являющееся R-модулем, а ещё $\forall x, y \in A, \lambda \in R$: выполняется аксиома алгебры

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$

Несложно заметить вложение $R \hookrightarrow A$; $\quad \lambda \mapsto \lambda \cdot 1_A$. Оно вкладывает R в центр A: $R \cdot 1_A \leqslant \mathrm{Cent}(A)$.

Замечание. Некоммутативность алгебры позднее будет крайне существенной, так как мы будем рассматривать $A = M(m, R) = \mathrm{End}_R(V)$.

Пример. Рассмотрим цепочку вложений $\mathbb{R} \leqslant \mathbb{C} \leqslant \mathbb{H}$. $\mathbb{C}$ и $\mathbb{H}$ — алгебры над $\mathbb{R}$, но $\mathbb{H}$ — **не** $\mathbb{C}$-алгебра, $i \cdot j \neq j \cdot i$.

Пусть $f \in R[x]$, обозначим $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$.

Определение 2.1.2 (Значение f в точке $c \in A$)**.** Обозначим $f(c) = a_n c^n + \dots + a_1 c + a_0 \cdot 1_A$.

Замечание. Интересно заметить, что мы пользовались более слабым условием, чем ассоциативность A: мы пользовались тем, что A — алгебра с ассоциативными степенями:

$$c^{i+j} = c^i \cdot c^j, \quad \text{что не зависит от разложения } i + j \text{ в сумму}$$

Зафиксируем $f \in R[x]$.

Определение 2.1.3 (Полиномиальное отображение)**.**

$$\widetilde{f} : A \to A \quad c \mapsto f(c)$$

Зафиксируем $c \in A$.

Определение 2.1.4 (Гомоморфизм эвалюоации)**.**

$$\mathrm{ev}_c : R[x] \to A \quad f \mapsto f(c)$$

Предложение 2.1.1. *Гомоморфизм эвалюоации — гомоморфизм, то есть* $(f+g)(c) = f(c)+g(c)$ *и* $(f \cdot g)(c) = f(c) \cdot g(c)$.

Замечание. Коммутативность R действительно важна:

$$\begin{gathered} c^2 - ac - bc + ab = \mathrm{ev}_c(x^2 - (a+b)x + ab) = \\ = \mathrm{ev}_c((x-a)(x-b)) = \\ = \mathrm{ev}_c(x-a) \cdot \mathrm{ev}_c(x-b) = (c-a)(c-b) = c^2 - ac - cb + ab \end{gathered}$$

Видим, что равенство выполняется, если и только если c коммутирует с b, где $c \in A, b \in R$ — любые элементы.

Определение 2.1.5 (Гомоморфизм R-алгебр)**.** Отображение $\phi : A \to B$, такое, что $\forall x, y \in A, \lambda \in R$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y). \\ 2.\ \phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y). \\ 3.\ \phi(1_A) = 1_B. \end{array}\right\} \text{Унитальный гомоморфизм колец}$$

4. $\phi(\lambda x) = \lambda \phi(x)$.

Пусть $\{*\}$ — произвольное одноэлементное множество, *синглетон*.

$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[rr, "* \mapsto x"] \arrow[dr, "* \mapsto c"'] & & R[x] \arrow[dl, "\mathrm{ev}_c"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Теорема 2.1.1. Кольцо многочленов $R[x]$ обладает **универсальным свойством**: существует и единственен гомоморфизм R-алгебр $R[x] \to A$, делающий диаграмму выше коммутативной.

Это гомоморфизм эвалюоации ev_c.

Доказательство. Существование уже доказано, единственность следует из определения гомоморфизма алгебр. $\square$

Эту теорему можно принять за определение кольца многочленов от одной переменной: кольцо многочленов — такая R-алгебра, что, вложив R в произвольную R-алгебру A, останется ровно один способ ввести гомоморфизм из кольца многочленов в алгебру.

Тем не менее, это не совсем правда — само кольцо R, разумеется, является R-алгеброй с данным свойством. Точной формулировки я не нашёл.

2.2 Число корней многочлена над областью целостности

Пусть $f \in R[x]$, где R — область целостности.

Определение 2.2.1 (Корень / нуль f)**.** Такой элемент $c \in R$, что $f(c) = 0$.

Определение 2.2.2 (Кратность корня c многочлена f)**.** Число $m \in \mathbb{N}_0$, такое, что $(x-c)^m \| f$.

Теорема 2.2.1 (Безу)**.** $f(c)$ — остаток от деления f на $x - c$.

$$f = (x-c)g + f(c) \qquad \Rightarrow \qquad f(c) = 0 \iff x - c \mid f$$

Следствие 2.2.1. *c — корень f кратности m $\iff$ $f = (x-c)^m g$, где $g(c) \neq 0$.*

Следствие 2.2.2 (Обобщённая теорема Безу)**.** *Для R, являющейся областью целостности:*

Пусть $c_1, \ldots, c_s$ — различные корни f кратностей $m_1, \ldots, m_s$ соответственно. Тогда $f = (x - c_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - c_s)^{m_s} \cdot g$, где $g(c_1), \ldots, g(c_s) \neq 0$.

Доказательство. Индукция по количеству различных корней, использующая при переходе теорему Безу. $\square$

Следствие 2.2.3. *У любого многочлена $f \in R[x]$, где R — область целостности — количество корней с учётом кратности не превосходит n.*

Контрпримеры (Существенность области целостности).

- $x^2 - 5x \in (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[x]$ имеет корни $\overline{0}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{5}$.
- В булевом кольце $R = (2^X, \triangle, \cap)$ все элементы — идемпотенты, все — корни $x^2 - x$.
- $R = M(2, R)$. У многочлена x^2 есть корень 0 кратности 2, есть корень $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $R = \mathbb{H}$ — над телом кватернионов у многочлена $x^2 + 1$ даже не 6 корней $(\pm i, \pm j, \pm k)$, а целая сфера, континуум корней. Здесь проблема не в делителях нуля, а в отсутствии коммутативности.

2.3 Формальное и функциональное равенство многочленов

Пусть $f, g \in R[x]$. *Формальное равенство* многочленов $f = g$ — равенство всех коэффициентов — равенство элементов кольца многочленов.

Всякий многочлен определяет полиномиальную функцию вычисления значения.

Определение 2.3.1 (Функциональное равенство многочленов)**.** $\widetilde{f} = \widetilde{f} \overset{def}{\iff} \forall c \in R : f(c) = g(c)$.

Теорема 2.3.1. Для бесконечной области целостности R:

$$f = g \iff \widetilde{f} = \widetilde{g}$$

Доказательство.

$\Rightarrow$. Очевидно.

$\Leftarrow$. Если $\max(\deg f, \deg g) \leqslant n$, и $c_0, \ldots, c_n \in R$ — попарно различные точки, то равенство $\forall i : f(c_i) = g(c_i)$ влечёт равенство $f = g$.

В самом деле, разность $f - g$ имеет степень не больше $\max(\deg f, \deg g)$, и обнуляется в $n+1$ точке. $\square$

2.4 Задача интерполяции с простыми узлами

Пусть K — поле, $c_0, \ldots, c_n \in K$ — попарно различные элементы, $b_0, \ldots, b_n \in K$ — произвольные элементы.

Теорема 2.4.1 (Задача Лагранжа)**.** Существует и единственен многочлен степени не выше $n + 1$, решающий интерполяционную задачу с простыми узлами.

x	c_0	c_1	$\ldots$	c_n
$f(x)$	b_0	b_1	$\ldots$	b_n

Доказательство Ньютона — Грегори. Индукция по n. $\square$

Доказательство Вандермонда. Запишем систему уравнений относительно $a_0, \ldots, a_n$.

$$f(c_0) = a_n c_0^n + \cdots + a_1 c_0 + a_0 = b_0$$
$$\ldots$$
$$f(c_n) = a_n c^n + \cdots + a_1 c_n + a_0 = b_n$$

Заметим, что так как все c_i различны, то определитель матрицы данной системы — определитель Вандермонда $V(c_0, \ldots, c_n)$.

$\prod\limits_{i>j}(c_i - c_j) \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение. □

Доказательство. Решим задачу попроще:

x	c_0	$\ldots$	c_i	$\ldots$	c_n
$f(x)$	0	$\ldots$	1	$\ldots$	0

Её решением будет многочлен

$$f_i = \frac{(x - c_0) \cdot \ldots \cdot \widehat{(x - c_i)} \cdot \ldots \cdot (x - c_n)}{(c_i - c_0) \cdot \ldots \cdot \widehat{(c_i - c_i)} \cdot \ldots \cdot (c_i - c_n)}$$

Теперь можно просто взять линейную комбинацию: $f = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i \cdot f_i$. □

Лекция VIII

15 марта 2023 г.

2.5 Локализация или кольца частных

Пусть K — поле.

Хотим вложить кольцо многочленов $K[x]$ в какое-то поле $K(x)$.

Возьмём любое кольцо R, построим по нему поле частных $Q(R)$. Если R — область целостности, то всё тривиально, а если есть делители нуля, то чуть сложнее.

2.5.1 Мультипликативные системы

Пусть R — произвольное коммутативное кольцо с единицей. Строить кольцо частных некоммутативного кольца можно, но намного сложнее.

Рассмотрим произвольное подмножество $S \subset R$.

Определение 2.5.1 (S — мультипликативная система)**.**

- Аксиома полугруппы: S замкнуто относительно умножения, $\forall u, v \in S : uv \in S$.
- Аксиома моноида: $1 \in S$.
- Аксиома нетривиальности: $0 \notin S$.

Мы собираемся сопоставить паре (R, S) кольцо, в котором элементы S обратимы — кольцо $S^{-1}R$.

Примеры (Мультипликтивные системы).

- $S \leqslant R^*$ — тривиальная мультипликативная система.
- $S = \operatorname{Reg}(R)$ — множество элементов, на которые можно сокращать. В частности, если R — область целостности, то $\operatorname{Reg}(R) = R \setminus \{0\}$.

- Пусть $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ — простой идеал: $\forall xy \in \mathfrak{p} : (x \in \mathfrak{p} \vee y \in \mathfrak{p})$. Тогда $R \setminus \mathfrak{p}$ является мультипликативной системой.

  В кольце $(R \setminus \mathfrak{p})^{-1}R$ остался всего один максимальный идеал — $\mathfrak{p}$.

- Главная мультипликативная система. Рассмотрим $s \in R \setminus \operatorname{Nil}(R)$. Где $\operatorname{Nil}(R) = \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)} \mathfrak{p}$

  $(\operatorname{Nil}(R) = \{x \in R | \exists m \in \mathbb{N} : x^m = 0\})$

  В качестве множества S рассмотрим $\langle 1, s, s^2, \dots \rangle$. Это аналогично построению кольца десятичных дробей $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{10}\right] = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right]$. Вообще, обращение двух (конечного числа) элементов $s, t \in R$ равносильно обращению их произведения st.

2.5.2 Построение кольца частных

Обратимся к истокам: как строить дроби из множества $\mathbb{Q}$? Это такие $\frac{m}{n}$, что $n \neq 0$. $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \iff m_1 n_2 = m_2 n_1$.

Рассмотрим произведение $R \times S = \{(u, v) | u \in R, v \in S\}$, где S — мультипликативная система.

Введём отношение эквивалентности $(x, u) \sim (y, v)$, если $\exists w \in S : (xv - yu)w = 0$. Напрашивающееся решение $xv - yu = 0$ не соблюдает корректность: если $(xv - yu)$ в новом кольце — не 0, то w нельзя обратить.

Лемма 2.5.1. $\sim$ — *отношение эквивалентности.*

Доказательство. «Всё очевидно, кроме транзитивности. Но транзитивность тоже очевидна»

Пусть $(x, u) \sim (y, v) \sim (z, w)$. Тогда $\exists s, t \in S$:

$$\left.\begin{aligned} (xv - yu)s = 0 \qquad & | \cdot wt \\ (yw - zv)t = 0 \qquad & | \cdot us \end{aligned}\right\} +$$
$$(xw - zu)vst = 0$$

□

Определение 2.5.2 (Кольцо частных R относительно мультипликативной системы S)**.** Так построенное $S^{-1}R \overset{def}{=} R \times S / \sim$ с операциями, определёнными ниже. Запись $S^{-1}R$ здесь следует понимать, как неделимый символ.

Пара (x, u) содержится в классе эквивалентности, обозначаемом $\frac{x}{u}$.

Операции определены следующим образом:

- $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{xv + yu}{uv}$.
- $\frac{x}{u} \cdot \frac{y}{v} = \frac{xy}{uv}$.
- $1_{S^{-1}R} = \frac{1}{1}$.

Лемма 2.5.2. *Операции определены корректно.*

Доказательство. Пусть $\frac{x}{u} = \frac{x'}{u'}$. Тогда $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{x'}{u'} + \frac{y}{v}$, так как

$$\frac{xv + yu}{uv} = \frac{x'v + yu'}{u'v}$$
$$(xv + yu) \cdot (u'v) = (x'v + yu') \cdot (uv)$$
$$\exists w = (xu' - x'u)w = 0, \text{ так как } \frac{x}{u} = \frac{x'}{u'}$$
$$((xv + yu)u'v - (x'v + yu')uv)w = 0$$
$$(xu' - x'u)v^2 w = 0 \text{ — сошлось}$$

□

Теорема 2.5.1. Эти операции превращают $S^{-1}R$ в коммутативное кольцо с единицей, и отображение $\phi_S : R \to S^{-1}R; \qquad x \mapsto \frac{x}{1}$ является гомоморфизмом колец. При этом $\phi_S(S) \subset (S^{-1}R)^*$.

Гомоморфизм ϕ_S называется *гомоморфизм локализации*.

Доказательство. Проверка всех свойств — утомительное занятие, которое приведено не будет.

Если $x \in S$, то элемент $\frac{x}{1}$ действительно обратим, так как $\frac{x}{1} \cdot \frac{1}{x} = 1_{R^{-1}S}$. □

2.5.3 Универсальное свойство кольца частных

Пусть $S \subset R$ — мультипликативная система. Определим $S^{-1}R$.

Например, найдём гомоморфизм $\psi : R \to A$, где A — другое коммутативное кольцо с единицей. Если $\psi(S) \leqslant A^*$, то подходящее кольцо частных нашлось.

Определение 2.5.3 (Кольцо $S^{-1}R$)**.** Коммутативное кольцо с единицей и гомоморфизмом $\phi_S : R \to S^{-1}R$, таким, что $\phi_S(S) \subset (S^{-1}R)^*$, обладающее универсальным свойством: $\forall A$ — коммутативное кольцо с единицей, $\forall \psi : R \to A$ — гомоморфизм, такой, что $\psi(S) \subset A^*, \exists!$ гомоморфизм $\eta : S^{-1}R \to A$, делающий диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "\phi_S"'] \arrow[dr, "\psi"'] & & S^{-1}R \arrow[dl, "\eta"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Таким образом, всякий гомоморфизм $\psi : R \to A$ пропускается через кольцо частных.

Теорема 2.5.2. Построенное в предыдущем параграфе кольцо дробей действительно обладает универсальным свойством.

Доказательство. $S^{-1}R = \left\{ \frac{x}{u} \middle| x \in R, u \in S \right\}$. Определим гомоморфизм $\eta : S^{-1}R \to A$ как $\eta\left(\frac{x}{u}\right) = \psi(x)\psi(u)^{-1}$.

Проверим, что он определён корректно:

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} \iff \exists w \in S : (xv - yu)w = 0 \Rightarrow (\psi(x)\psi(v) - \psi(y)\psi(u))\psi(w) = 0$$

На $\psi(w)$ можно сократить, получаем что надо:

$$\psi(x)\psi(y)^{-1} = \psi(u)\psi(v)^{-1}$$

Проверим, что η — гомоморфизм.

$$\eta\left(\frac{x}{u} + \frac{y}{v}\right) = \eta\left(\frac{xv + yu}{uv}\right) =$$
$$= (\psi(x)\psi(v) + \psi(y)\psi(u))\psi(u)^{-1}\psi(v)^{-1} = \psi(x)\psi(u)^{-1} + \psi(y)\psi(v)^{-1} = \eta\left(\frac{x}{u}\right) + \eta\left(\frac{y}{v}\right)$$

Осталось проверить единственность: возьмём любой гомоморфизм η', делающий диаграмму коммутативной. Почему он равен η?

Так как диаграмма коммутативна, то $\eta'(\psi_S(x)) = \psi(x)$, то есть $\eta'\left(\frac{x}{1}\right) = \psi(x)$.

Проверим совпадение $\eta = \eta'$ для дроби $\frac{x}{u}$. Так как $\psi(u) \in A^*$, то $\psi(x) = \eta'\left(\frac{x}{1}\right) = \eta'\left(\frac{x}{u}\right) \cdot \eta'\left(\frac{u}{1}\right) = \eta'\left(\frac{x}{u}\right)\psi(u)$. Сократив на $\psi(u)$ (оно обратимо в A), действительно получаем $\eta'\left(\frac{x}{u}\right) = \psi(x)\psi(u)^{-1}$. Значит, η' действительно совпадает с η. □

Замечание. Воспользовавшись универсальным свойством, нетривиально (но можно, переходя к пределам в теории категорий) доказать, что кольцо частных существует. Но мы уже его построили в предыдущем параграфе, поэтому оно несомненно существует.

2.5.4 Кольцо частных в терминах элементов

Определение 2.5.4 (Кольцо $S^{-1}R$)**.** $S^{-1}R$ — кольцо вместе с гомоморфизмом $\phi_S : R \to S^{-1}R$, таким, что

1. $\phi_S(S) \subset (S^{-1}R)^*$.
2. $\forall y \in S^{-1}R$ представим в виде $y = \phi_S(x)\phi_S(u)^{-1}$, где $x \in R, u \in S$.
3. Если $\phi_S(x) = 0$, то $\exists u \in S : xu = 0$.

Теорема 2.5.3. Построенное кольцо $S^{-1}R$ (определение 2.5.2) обладает этими свойствами. Любое кольцо A с гомоморфизмом $\psi : R \to A$, обладающее этими свойствами, изоморфно $S^{-1}R$:

1. $\psi(S) \leqslant A^*$
2. $\forall y \in A, y = \psi(x)\psi(u)^{-1}$
3. $\psi(x) = 0 \iff \exists u \in S : xu = 0$.

2.5.5 Примеры колец частных

Примеры.

- $S \leqslant R^*$ — тривиальная мультипликативная система. $S^{-1}R = R$.
- $S = \mathrm{Reg}(R)$. В таком случае $S^{-1}R = Q(R)$ — полное кольцо частных. Здесь выполнено вложение $R \hookrightarrow Q(R)$. Если R — область целостности, то $\mathrm{Reg}(R) = R \setminus \{0\}$, тогда $Q(R)$ — поле, *поле частных*.

  Примеры полей частных: $Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}, \quad Q(\mathbb{Z}[i]) = \mathbb{Q}[i], \quad Q(K[x]) = K(x), \quad Q(K[[x]]) = K((x))$.

Лекция IX

18 марта 2023 г.

Любое конечное число главных локализаций представимо в виде одной локализации — по их произведению: Если Любая локализация — предел главных локализаций. Здесь должно быть побольше информации на эту тему.

2.6 Поле частных факториального кольца

R — UFD, $K = Q(R) = \left\{ \frac{x}{y} \middle| x, y \in R, y \neq 0 \right\}$.

Теорема 2.6.1. Всякий элемент $Q(R)$ допускает представление в виде

$$up_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{m_s}, \quad m_i \in \mathbb{Z}$$

в единственном виде, где p_i — попарно неассоциированные неприводимые элементы.

Доказательство. $v_p\left(\frac{x}{y}\right) = v_p(x) - v_p(y)$. □

p-адические показатели обладают обычными свойствами:

1. $v_p\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w}\right) = v_p\left(\frac{x}{y}\right) + v_p\left(\frac{z}{w}\right)$.
2. $v_p\left(\frac{x}{y} + \frac{z}{w}\right) \geqslant \min\left(v_p\left(\frac{x}{y}\right) + v_p\left(\frac{z}{w}\right)\right)$.

Любопытно заметить, что $R = \{x \in Q(R) | \forall p \in \mathrm{Irr}(R) : v_p(x) \geqslant 0\}$.

Пусть $R \hookrightarrow A$.

Определение 2.6.1 ($x \in A$ — целое над R)**.** x — корень многочлена $f \in \mathbb{R}[t]$, такого, что старший коэффициент $\operatorname{lc}(f) = 1$. Наименьшая степень f, имеющего своим корнем x, называется *степенью* x.

Интересный факт. Множество целых над R образует кольцо.

Есть доказательство через тензорное произведение (сумму), есть — через симметрические многочлены и кронекеровское произведение (сумму).

В частности, $\mathbb{A}$ — целые алгебраические числа над $\mathbb{Z}$ (а просто алгебраические числа можно обозначить $\overline{\mathbb{Q}}$).

Определение 2.6.2 (Целозамкнутое кольцо R)**.** Любой элемент $x \in Q(R)$, являющийся целым над R, принадлежит R.

Лемма 2.6.1 (Лемма Гаусса)**.** *R — UFD $\Rightarrow$ R — целозамкнуто. В частности, кольцо $\mathbb{Z}$ целозамкнуто, то есть $\mathbb{Q} \cap \mathbb{A} = \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Пусть $\frac{x}{y}$ — корень $f \in R[t]$. Можно считать, что x и y взаимно просты — иначе на общий множитель можно сократить.

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{x}{y}\right) + a_0 = 0$$

Умножив на y^n, получим равенство в R:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1}y + \cdots + a_1xy^{n-1} + a_0y^n = 0$$

Рассмотрим любой неприводимый $p \mid y$. Он делит все слагаемые, кроме первого, значит, делит первое слагаемое тоже (типичное рассуждение).

Значит, $y \in R^*$, значит, $\frac{x}{y} \in R$. $\square$

2.7 Рациональные дроби

Рассмотрим кольцо многочленов над полем K.

Оно является областью целостности ($\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$), значит, определено $Q(K[t]) = K(t)$ — *поле рациональных дробей* над K. Часто его также называют полем рациональных функций. Тем не менее, элементы, $K(t)$ вообще говоря, функциями не являются, например, потому что многие нетривиальные функции не определены на K.

А именно, $f \in K[t] \rightsquigarrow (\widetilde{f} : K \to K)$. Это единственный гомоморфизм из $K[t]$ в K, и согласованно определить аналогичный гомоморфизм на $K(t)$ не представляется возможным. При сложении двух функций $\frac{f}{g} \in K(t) \rightsquigarrow \left(\widetilde{\frac{f}{g}} : c \mapsto \frac{f(c)}{g(c)}\right)$ их области определения пересекаются. Решением матанализа является рассматривать рациональные функции, как частичные — определённые не везде.

Ещё проблемой является вопрос — равны ли рациональные «функции» $\frac{1}{t}$ и $\frac{t-1}{t(t-1)}$? Можно говорить о равенстве в любой окрестности, которая может быть открыта как в стандартном смысле, так и в топологии Зарисского. В таком случае разные рациональные функции (например, $\frac{1}{t}$ и $\frac{t-1}{t(t-1)}$) объединяются в классы эквивалентности — *ростки функций*.

Ещё можно определить функции на одноточечной компактификации K, в народе называющейся сферой Римана — проективной прямой $\mathbb{P}'(K) = K \cup \{\infty\}$. В таком случае $\frac{f}{g}(\infty) = \begin{cases} 0, & \deg(f) < \deg(g) \\ \infty, & \deg(f) > \deg(g) \\ \frac{\operatorname{lc}(f)}{\operatorname{lc}(g)}, & \deg(f) = \deg(g) \end{cases}$.

В точках же $c \in K$, таких, что $(x-c)^{m_1} \| f, (x-c)^{m_2} \| g$ и $m_2 > m_1$, $\frac{f}{g}(c) = \infty$ по определению.

Определение 2.7.1 (Степень рациональной функции)**.** $\deg\left(\frac{f}{g}\right) = \deg f - \deg g$.

Определение 2.7.2 (Полуправильная дробь $\frac{f}{g} \in K(t)$)**.** $\deg\left(\frac{f}{g}\right) \leqslant 0$.

Определение 2.7.3 (Правильная дробь $\frac{f}{g} \in K(t)$)**.** $\deg\left(\frac{f}{g}\right) < 0$.

Лемма 2.7.1. *Степень удовлетворяет обычным условиям:* $\forall \alpha, \beta \in K(t)$*:*

- $\deg(\alpha \cdot \beta) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$.
- $\deg(\alpha + \beta) \leqslant \max(\deg(\alpha), \deg(\beta))$.

Следствие 2.7.1. *Правильные и полуправильные дроби образуют подкольцо (правильные — кольцо без единицы).*

Теорема 2.7.1. Пусть $\alpha \in K(t)$. Для любого представления $\alpha = \frac{f}{g}$ допускается единственное представление в виде $\frac{f}{g} = q + \frac{r}{g}$, где $q \in K[t]$, $\frac{r}{g}$ — правильная рациональная дробь.

Более того, для любого такого представления многочлен r один и тот же.

Доказательство. Запись эквивалентна $f = qg+r$ $(q, r \in K[t], \deg r < \deg g)$, а такое представление единственно, так как деление с остатком в $K[t]$ даёт единственный результат.

Единственность r следует от противного: $\frac{f_1}{g_1} + r_1 = \frac{f_2}{g_2} \Rightarrow \underbrace{\frac{f_1}{g_1} - \frac{f_2}{g_2}}_{\text{правильная дробь}} = \underbrace{r_2 - r_1}_{\text{многочлен}}$. Равенство наступает только если $r_1 - r_2 = 0$ □

Определение 2.7.4 (Запись $\frac{f}{g}$ несократима)**.** $f \perp g$.

2.8 Разложение на простейшие дроби

Предположим, что мы в XVIII веке ищем интеграл $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$.

Определение 2.8.1 (Примарная дробь $\frac{f}{g} \in K(t)$)**.** $g = p^m$ для $p \in \mathrm{Irr}(K[t])$ и $\deg f < \deg g$.

Определение 2.8.2 (Простейшая дробь $\frac{f}{g} \in K(t)$)**.** Примарная дробь, такая, что $\deg f < \deg p$.

В частности, простейшими дробями являются $\frac{x^i}{p^m}$ для $0 \leqslant i < \deg p$.

Теорема 2.8.1. Любая рациональная дробь допускает единственное представление в виде суммы многочлена и простейших дробей с различными знаменателями.

Доказательство.

- Выделим целую (полиномиальную) часть. Отныне считаем, что $\frac{f}{g}$ — правильная.
- Если $g \perp h$ и $\deg gh > \deg f$ то $\frac{f}{gh}$ представима, как сумма правильных дробей $\frac{f_1}{g} + \frac{f_2}{h}$:

  Так как $K[t]$ — PID, то g и h — комаксимальны: $gK[t] + hK[t] = K[t]$, то есть $\exists u, v \in K[t]$: $gu + hv = 1$. Получаем
  $$\frac{f}{gh} = \frac{fgu}{gh} + \frac{fhv}{gh} = \frac{fu}{h} + \frac{fv}{g}$$

  Поделим fv на g с остатком: $fv = qg+r$. Равенство переписывается в виде $\frac{f}{gh} = \left(\frac{fu}{h} + q\right) + \frac{r}{g}$. В скобках стоит правильная дробь, как разность двух правильных дробей.

  Получили разложение на правильные дроби.

  Применив для $g = p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{m_s}$, получаем разложение на примарные дроби.

- Покажем, что примарная дробь есть сумма простейших:

  Рассмотрим примарную дробь $\frac{f}{p^m}$. Поделим f на p с остатком: $f = qp + r$.

$$\frac{f}{p^m} = \frac{qp+r}{p^m} = \frac{q}{p^{m-1}} + \frac{r}{p^m}$$

  Первая дробь по индукции разложима на простейшие, вторая — уже простейшая.

- Единственность разложения: если представление не единственно, то существует нетривиальная линейная зависимость:

$$\sum_{i,j} \frac{f_{i,j}}{p_i^j} = 0$$

  где $\deg(f_{i,j}) < \deg(p_i)$, p_i — неприводимые многочлены.

  Сконцентрируемся на p_n. Пусть суммирование для $i = n$ идёт по $j = 1..m$. Разобьём сумму:

$$-\sum_{i \neq n, j} \frac{f_{i,j}}{p_i^j} - \sum_{j<m} \frac{f_{n,j}}{p_n^j} = \frac{f_{n,m}}{p_n^m}$$

  Посчитаем p_n-адический показатель обеих частей, получим противоречие: $\geqslant m_1 + 1 \not= m_1$.

□

Следствие 2.8.1. *Базис кольца многочленов счётен — $1, t, t^2, \ldots$.*

Базис кольца рациональных дробей $K(t)$ счётен только если K не более, чем счётно. А именно, это $\left\{t^i \middle| i \in \mathbb{N}_0\right\} \cup \left\{\frac{t^i}{p^m} \middle| 0 \leqslant i < \deg p, p \text{ — нормированный}\right\}$.

С аксиомой выбора это эквивалентно тому, что базис $K(t)$ равномощен K для бесконечного K.

Пример. Над $\mathbb{C}$ любой неприводимый нормированный многочлен — это $x - c$ для $c \in \mathbb{C}$. Базис правильных дробей получается $\left\{\frac{1}{(x-c)^m} \middle| m \in \mathbb{N}\right\}$.

2.9 Факториальность кольца многочленов

Теорема 2.9.2 (Теорема Гаусса)**.** R — UFD $\Rightarrow R[t]$ — UFD.

2.9.1 Примитивные многочлены

Пусть $f \in R[t]$, $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$.

Определение 2.9.1 (Содержание многочлена f)**.** $\mathrm{Cont}(f) \overset{def}{=} \gcd(a_n, \ldots, a_0)$.

Определение 2.9.2 (Примитивный многочлен f)**.** $\mathrm{Cont}(f) = 1$.

Определение 2.9.3 (Сильно примитивный многочлен f)**.** $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — комаксимальны (возможно, $a_1, \ldots, a_n$ комаксимальны, я не справился узнать, где правда).

Лемма 2.9.1. *Всякий многочлен представим в виде произведения его содержания и примитивного многочлена.*

Лемма 2.9.2. *Если $af \sim bg$, где $a, b \in R \setminus \{0\}$, $f, g \in R[t]$ — примитивные многочлены, то $a \sim b, f \sim g$.*

Доказательство. $af \cdot u = bg$, где $u \in (R[t])^* = R^*$. Отсюда степени многочленов равны. Пусть $f = a_n x^n + \cdots + a_0$; $\quad g = b_n x^n + \cdots + b_0$.

$$a \gcd(a_n, \ldots, a_0) = \gcd(aa_n, \ldots, aa_0) = \gcd(bb_n, \ldots, bb_0) = b \gcd(b_n, \ldots, b_0)$$

откуда $a \sim b$. Отсюда $f \sim g$. □

Лемма 2.9.3 (Лемма Гаусса). *Если $f, g \in R[t]$ — примитивные многочлены, то $f \sim g$ в $R[t]$ $\iff$ $f \sim g$ в $K[t]$.*

Доказательство. $f \sim g$ в $K[t] \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right) f = g \Rightarrow af = bg$. По предыдущей лемме $f \sim g$. $\square$

Лемма 2.9.4 (Лемма Гаусса). $\forall f, g \in R[t] : \forall p \in \mathrm{Irr}(R) : v_p(fg) = v_p(f) + v_p(g)$ *где* $v_p(f) = \min(v_p(a_0), \ldots, v_p(a_n))$.

В частности, $\mathrm{Cont}(f \cdot g) = \mathrm{Cont}(f) \cdot \mathrm{Cont}(g)$.

В частности, примитивные многочлены образуют мультипликативную систему.

Доказательство. Введём r — наименьший номер, такой, что $p^{v_p(f)+1} \nmid a_r$ и s — наименьший номер, такой, что $p^{v_p(g)+1} \nmid b_s$.

Рассмотрим $f \cdot g$, а именно, его коэффициент при t^{r+s}. Это

$$\underbrace{a_{r+s}b_0 + \ldots}_{\vdots p^{v_p(f)+v_p(g)+1}} + a_r b_s + \underbrace{\cdots + a_0 b_{r+s}}_{\vdots p^{v_p(f)+v_p(g)+1}}$$

Но средний коэффициент делится **точно** на $p^{v_p(f)+v_p(g)}$, значит, $v_p(f \cdot g) \leqslant v_p(f) + v_p(g)$. (Оценка снизу очевидна) $\square$

Пусть R — UFD, $K = Q(R)$.

Теорема 2.9.1 (Теорема Гаусса). Для всякого $f \in R[t]$: $f \in \mathrm{Irr}(R[t]) \Rightarrow f \in \mathrm{Irr}(K[t])$.

Доказательство. Пусть $f = gh$ в $K[t]$. Запишем

$$g = \frac{a_m}{b_m} t^m + \cdots + \frac{a_0}{b_0}; \quad h = \frac{c_n}{d_n} t^n + \cdots + \frac{c_0}{d_0}$$

где $a_i, c_i \in R; b_i, d_i \in R \setminus \{0\}$. Обозначим $B = \prod b_i, D = \prod d_i$. Получаем

$$BD \cdot f = Bg \cdot Dh = \mathrm{Cont}(Bg) \cdot \mathrm{Cont}(Dh) \cdot \widetilde{g} \cdot \widetilde{h}, \quad \text{где } \begin{cases} \widetilde{g} = {}^{Bg}\!/_{\mathrm{Cont}(Bg)} \\ \widetilde{h} = {}^{Dh}\!/_{\mathrm{Cont}(Dh)} \end{cases}$$

Согласно предыдущей лемме $\widetilde{g} \cdot \widetilde{h}$ тоже неприводимый, а ещё тогда $f \sim \widetilde{g} \cdot \widetilde{h}$ в $R[t]$ (f неприводим по условию теоремы). Так как f неприводим, то $\deg g = 0$ или $\deg h = 0$, то есть f неприводим и в $K[t]$. $\square$

Следствие 2.9.1. *Для всякого примитивного* $f \in R[t]$: $f \in \mathrm{Irr}(R[t]) \iff f \in \mathrm{Irr}(K[t])$.

Замечание. Обратное следствие неверно для не примитивных многочленов: $2x - 2 \in \mathbb{Z}[x]$ не является неприводимым, но $2x - 2 \in \mathbb{Q}[t]$ — неприводимый элемент.

2.9.2 Теорема Гаусса

Теорема 2.9.2 (Теорема Гаусса). R — UFD $\Rightarrow R[t]$ — UFD.

Доказательство. Воспользуемся тем, что и R факториально, и $K[t]$ факториально, где $K = Q(R)$.

$f = \mathrm{Cont}(f) \cdot \widetilde{f}$. Разложим $\mathrm{Cont}(f)$ внутри UFD R.

Если $\widetilde{f}$ разложим над $K[t]$, то он разложим и над $R[t]$ (теорема 2.9.1).

Так как кольцо $K[t]$ нётерово, то процесс оборвётся, значит получили разложение $f = up_1 \cdot \ldots \cdot p_r q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$, где $u \in R^*, p_i \in \mathrm{Irr}(R), q_j \in \mathrm{Irr}(R[t])$.

Единственность доказывается следующим образом:

$$\begin{gathered} up_1 \cdot \ldots \cdot p_r q_1 \cdot \ldots \cdot q_s \sim u' p_1' \cdot \ldots \cdot p_r' q_1' \cdot \ldots \cdot q_s' \\ \Downarrow \\ up_1 \cdot \ldots \cdot p_r \sim u' p_1' \cdot \ldots \cdot p_r' \\ q_1 \cdot \ldots \cdot q_s \sim q_1' \cdot \ldots \cdot q_s' \end{gathered}$$

R факториально, поэтому первые разложения совпадают. Вторые разложения — разложения и в $K[t]$, поэтому они ассоциированы в K ($K[t]$ UFD, так как это евклидово кольцо. то есть PID). Но согласно лемме Гаусса они ассоциированы и в R. □

Следствие 2.9.2.

- $K[t_1, \ldots, t_n]$ — *UFD*
- $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$ — *UFD*

Лекция X

28 марта 2023 г.

2.10 Дифференцирование алгебр

Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, A — алгебра над R.

Определение 2.10.1 (Дифференцирование)**.** Отображение $D : A \to A$, являющееся аддитивным, и удовлетворяющее *тождеству Лейбница*

$$D(xy) = Dx \cdot y + x \cdot Dy$$

D называется *R-дифференцированием*, если, кроме того, оно согласовано с умножением на элемент R: $D(\lambda x) = \lambda Dx$.

Множество всех дифференцирований алгебры A обозначается $\mathrm{Der}(A)$, множество R-дифференцирований — $\mathrm{Der}_R(A)$.

Определение 2.10.2 (Константа дифференцирования D)**.** Элемент $x \in A : Dx = 0$.

Замечание. Аксиома R-дифференцирования — о согласованности с домножением на элемент R — утверждает, что все элементы R — константы при вложении в A.

Лемма 2.10.1. *Константы дифференцирования образуют подкольцо с единицей в R.*

Доказательство. Замкнутость относительно сложения и умножения; $D(1\cdot 1) = D(1)\cdot 1 + 1\cdot D(1) \Rightarrow D(1) = 0$ □

Факт 2.10.1. *Любое дифференцирование полностью определяется своими значениями на какой-то системе образующих $x_1, \ldots, x_n$ алгебры A над R.*

Доказательство. Пусть $\forall x_i : D_1(x_i) = D_2(x_i)$. Введём $D \coloneqq D_1 - D_2$. $D(x_i) = 0$, так как x_i — система образующих, то $\operatorname{Ker} D = A$. □

Примеры.

∞. $C^{(\infty)}(\mathbb{R})$ — множество бесконечно дифференцируемых функций. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ — дифференцирование.

- Внутреннее дифференцирование: для какого-то $a \in A$:

$$d_a : A \to A; \quad x \mapsto [a, x] = ax - xa$$

2.10.1 Операции над дифференцированиями

1. Сумма: $D_1 + D_2$ является дифференцированием.

2. Домножение на скаляр: $\forall \lambda \in R : \lambda D$ является дифференцированием.

-1. Произведение дифференцирований дифференцированием, вообще говоря не является: квадрат дифференцирования, например, не удовлетворяет тождеству Лейбница: $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg'' \neq f'g + fg'$. Вторая производная является дифференцированием только в кольце характеристики 2.

3. Коммутирование: $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}_R(A) \mapsto D_1D_2 - D_2D_1 = [D_1, D_2] \in \mathrm{Der}_R(A)$.

   Доказательство.

$$
\begin{aligned}
&[D_1, D_2](xy) = D_1(D_2(xy)) - D_2(D_1(xy)) = \\
&\qquad = D_1(D_2x \cdot y + x \cdot D_2y) - D_2(D_1x \cdot y + x \cdot D_1y) = \\
&\qquad\qquad = [D_1, D_2]x \cdot y + x \cdot [D_1, D_2]y
\end{aligned}
$$

$\square$

Теорема 2.10.1. Для любой (не предполагается ассоциативность) алгебры A: $\mathrm{Der}_R(A)$ является алгеброй Ли над R относительно суммы и коммутирования.

Тождества алгебры Ли $(+, [\cdot, \cdot])$:

1. $[x_1 + x_2, y] = [x_1, y] + [x_2, y]$.
2. $[x, y_1 + y_2] = [x, y_1] + [x, y_2]$.
3. $[\lambda x, y] = \lambda[x, y] = [x, \lambda y]$.
4. $[x, x] = 0$ — тождество антикоммутативности.
5. $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ — тождество Якоби.

2.10.2 Дифференцирование кольца многочленов, теорема Лейбница — Бернулли

Рассматриваем R-алгебру $R[x]$.

Определение 2.10.3 (Формальная производная многочлена)**.** Для многочлена $f = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ $(a_i \in R)$ это многочлен $f' = na_nx^{n-1} + \cdots + a_1$.

Операция взятия производной часто обозначается $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : R[x] \to R[x], f \mapsto f'$.

Теорема 2.10.2 (Лейбниц — Бернулли)**.** $\mathrm{Der}_R(R[x]) = R[x] \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Иными словами, для любого дифференцирования D существует многочлен $h \in R[x]$, такой, что $D \equiv h \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

Доказательство.

- Эта формула задаёт дифференцирование:

  В силу R-линейности достаточно проверять на стандартных мономах.

$$D(x^m \cdot x^n) = D(x^{m+n}) = h(x) \cdot (m+n)x^{m+n-1}$$
$$D(x^m \cdot x^n) = D(x^m)x^n + x^mD(x^n) = h(x)mx^{m-1} + x^mh(x)nx^{n-1} = h(x) \cdot (m+n)x^{m+n-1}$$

- Пусть $D \in \mathrm{Der}_R(R[x])$. Тогда D полностью определяется значением на какой-то системе образующих алгебры, например, на элементе x. Пусть $Dx = h, h \in R[x]$. В силу линейности достаточно доказать, что $D = h \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ только на стандартных мономах.

  Это верно, так как для $f_1, \ldots, f_n : D(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n) = D(f_1)f_2 \cdot \ldots \cdot f_n + \cdots + f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n-1}D(f_n)$. В частности, для коммутирующих f и Df: $D(f^n) = nf^{n-1} \cdot Df$. $\square$

Свойства (Свойства производной).

- $D(f \circ g) = (Df \circ g) \cdot D(g)$.
- Тождество для дифференцирований высших порядков: $f'' = (f')', f''' = (f'')'$, $(f \cdot g)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.
- Формула Фаа ди Бруно:

$$D^n(f \circ g) = \sum \frac{n!}{m_1!1!^{m_1} \cdot \ldots \cdot m_n!n!^{m_n}} D^{(m_1+\cdots+m_n)}(f \circ g) \cdot \prod_{j=1}^{n} (D^j g)^{m_j}$$

  где сумма берётся по всем таким $m_1, \ldots, m_n$, что $m_1 \cdot 1 + \cdots + m_n \cdot n = n$.
- $D(g^{-1}) = -g^{-1} \cdot Dg \cdot g^{-1}$. Для коммутативного кольца, например, $K(x) : \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Теорема 2.10.3. Константы дифференцирования $K[x]$ у $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ — это $K[x^p]$, где $p = \mathrm{char}(K)$.

2.11 Алгебраические и трансцендентные элементы; минимальный многочлен

Пусть K — поле, A — необязательно коммутативная K-алгебра.

Гомоморфизм эвалюации определён $\forall c \in A : \mathrm{ev}_c : K[x] \to A, f \mapsto f(c)$.

У гомоморфизма есть ядро $\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_c) \trianglelefteq K[x]$.

- Либо $\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_c) = \{0\}$. В таком случае $c \in A$ — *трансцендентный* над K элемент.
- Либо $\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_c) \neq \{0\}$. В таком случае $c \in A$ — *алгебраический* над K элемент.

Определение 2.11.1 (Минимальный многочлен для $c \in A$)**.** Многочлен θ_c, порождающий $\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_c)$

Все многочлены из ядра $\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_c)$ называются *аннулирующими*. Так как $K[x]$ — PID, то минимальный многочлен существует (и все аннулирующие многочлены делятся на минимальный).

Определение 2.11.2 (Степень элемента c над K)**.** Степень $\deg \theta_c$.

Теорема 2.11.1.

- Если c — трансцендентный над K, то $K[c] \cong K[x]$.
- Если c — алгебраический над K, то $K[c] \cong K[x]/(K[x]\theta_c)$ — векторное пространство над K размерности $n \coloneqq \deg \theta_c$.

$$K[c] = \left\{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}c^{n-1} + K[x]\theta_c \middle| a_i \in K\right\}$$

Доказательство. Теорема о ядре и образе для ev_c. □

Замечание. $K[c]$ — наименьшая K-подалгебра, содержащая c.

2.11.1 Что можно сказать, если A — область целостности?

$\mathrm{ev}_c : K[x] \to A$ — область целостности. Если c — алгебраическое, то $K[x]/K[x]\theta_c \cong K[c] \leqslant A$.

Таким образом, θ_c неприводим в $K[x]$: если $\theta_c = \phi \cdot \psi$, то $\overline{\phi}$, равно как и $\overline{\psi}$ — делители нуля в $K[x]/K[x]\theta_c$.

Обозначим поле частных $K[c]$ как $K(c) \overset{def}{=} Q(K[c]) \leqslant Q(A)$.

Теорема 2.11.2. Если c трансцендентно, то $K(c) \cong K(x)$. Если c алгебраическое, то $K(c) = K[c]$.

Доказательство.

- Часть про трансцендентность очевидна, так как $K[c] \cong K[x]$.
- Необходимо проверить, что $K[c]$ — поле. Это верно, так как $K[x]$ — PID, значит, идеал, порождённый неприводимым многочленом, максимален. $\square$

Глава 3

Канонические формы линейных операторов

1. Конечные задачи: Рассмотрим линейное отображение $\phi : U \to V$ из первой главы. Его канонической формой является матрица $\left(\begin{array}{c|c} e & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ при правильном выборе базиса в U и в V. Все инварианты, возникавшие здесь, имели дискретную природу — размерность и ранг.
2. Ручные задачи: Сейчас мы рассмотрим более сложную задачу: каноническая форма линейного оператора $\phi : U \to U$. Трудность состоит в том, что матрицу хочется выбрать так, чтобы базисы в U слева и справа совпадали. Здесь будут возникать непрерывные инварианты.
3. Дикие задачи: классификация пар линейных операторов $\phi, \psi : U \to U$. Ответ на ту задачу не найден, и, по-видимому, не будет получен, так как он позволяет классифицировать слишком много всего.

3.1 Инвариантные подпространства

Рассмотрим линейный оператор над полем K: $\phi : V \to V$ ($\phi \in \mathrm{End}_K(V)$).

Определение 3.1.1 (ϕ-инвариантное подпространство $U \leqslant V$)**.** Такое подпространство, что $\phi(U) \subset U$.

ϕ можно ограничить на любом ϕ-инвариантном подпространстве U.

Примеры.

- Тривиальное ($\{0\}$) и несобственное (V) подпространства инвариантны для любого оператора.
- Движение пространства $\mathbb{R}^3$ с неподвижной точкой 0 — поворот (и, возможно, отражение). Ось вращения и ортогональная ей плоскость поворота инвариантны.
- $K[x]_{\leqslant n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ инвариантно для оператора дифференцирования $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.
- Оператор сдвига бесконечномерного пространства: пусть базис пронумерован целыми числами $\ldots, u_{-1}, u_0, u_1, \ldots$ Тогда оператор сдвига определён на базисе $\phi(u_i) = u_{i+1}$. У него нет инвариантных подпространств, а если бы было $\phi(u_i) = u_{i+2}$, то были бы только бесконечномерные.

Пусть $\dim V < \infty$, $\phi \in \mathrm{End}_K(V), \phi(U) \subset U$.

Теорема 3.1.1. В подходящем базисе ϕ имеет матрицу $\left(\begin{array}{c|c} \left[\phi\big|_U\right] & * \\ \hline 0 & \left[\phi\big|_{V/U}\right] \end{array}\right)$

Доказательство. $\phi\big|_{V/U} : V/U \to V/U$ определено корректно: $\phi(v + U) = \phi(v) + U$.

Выберем в качестве базиса произвольный базис U — $(v_1, \ldots, v_m)$, а потом дополним его до базиса всего пространства $(v_{m+1}, \ldots, v_n)$.

В этом базисе матрица действительно имеет такой вид. $v_{m+1} + U, \ldots, v_n + U$ — базис V/U. $\square$

Определение 3.1.2 (Инвариантное дополнение ϕ-инвариантного пространства $U \leqslant V$)**.** Такое подпространство $W \leqslant V$, что оно тоже ϕ-инвариантно, причём $V = U \oplus W$.

Теорема 3.1.2 (Случай полной приводимости)**.** Если U имеет инвариантное дополнение W, то в подходящем базисе $[\phi] = \left(\begin{array}{c|c} [\phi|_U] & 0 \\ \hline 0 & [\phi|_W] \end{array}\right)$.

Доказательство. Выберем в качестве базисов объединение базисов U и W. $\square$

3.2 Собственные подпространства. Собственные числа

Собственные подпространства инвариантны, но, к сожалению, инвариантно не дополняемы.

Считаем, что K — поле, $\dim_K(V) < \infty$.

Определение 3.2.1 (Собственный вектор оператора ϕ)**.** Такой вектор $\underset{\neq 0}{v} \in V$, что $\langle v \rangle = vK$ инвариантно относительно ϕ. Иными словами, $\phi(v) = v\lambda$ для некоего $\lambda \in K$.

Определение 3.2.2 (Собственное число оператора ϕ)**.** Такое число $\lambda \in K$, что существует $\underset{\neq 0}{v} \in V$, такой, что $\phi(v) = v\lambda$.

Примеры.

- Если $[\phi] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ в некотором базисе $(v_1, \ldots, v_n)$, то $v_1, \ldots, v_n$ — собственные векторы с соответственно собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. *Оператор простой структуры* или *диагонализуемый оператор*.
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ имеет собственные числа 1 и -1 — для векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ соответственно.
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ не имеет собственных чисел, как оператор над полем $\mathbb{R}$. Как оператор над полем $\mathbb{C}$, оператор имеет собственные числа i и $-i$ — для векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ соответственно.

  Оператор диагонализуем над $\mathbb{C}$, но не над $\mathbb{R}$.

Лемма 3.2.1 (Частный случай леммы Дедекинда — Артина о линейной независимости характеров)**.** *Пусть $v_1, \ldots, v_m \in V$ — ненулевые собственные векторы, отвечающие* ***попарно различным*** *собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$.*

Тогда $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы.

Доказательство. Пусть $v_1\mu_1 + \cdots + v_m\mu_m = 0$ — самая короткая линейная зависимость (наименьшее m, такое, что все $\mu_i \neq 0$).

При $m = 1$ теорема верна, так как $v_1 \neq 0$.

При $m \geqslant 2$: запишем два равенства

$$0 = 0 \cdot \lambda_m = (v_1\mu_1 + \cdots + v_m\mu_m)\lambda_m$$
$$0 = \phi(0) = v_1\mu_1\lambda_1 + \cdots + v_m\mu_m\lambda_m$$

Вычитая равенства, получаем линейную зависимость длины ровно $m - 1$:

$$0 = v_1 \cdot \mu_1(\lambda_1 - \lambda_m) + \cdots + v_{m-1} \cdot \mu_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)$$ $\square$

Теорема 3.2.1. Если оператор $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ имеет $n \coloneqq \dim V$ различных собственных чисел, то он диагонализуем.

Доказательство. По определению существуют ненулевые $v_1, \ldots, v_n$ — собственные векторы для данных собственных чисел.

По лемме они линейно независимы, значит, образуют базис. В этом базисе $[\phi] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ □

3.3 Характеристический многочлен оператора

Пусть $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$.

Определение 3.3.1 (Характеристический многочлен $\chi_\phi(t)$)**.** Многочлен, равный $\det([\phi]-te)$, где $[\phi]$ — матрица ϕ в каком-то базисе, e — единичная матрица, t — свободная переменная в многочлене.

Лемма 3.3.1. *χ_ϕ не зависит от выбора базиса.*

Доказательство. Любые две матрицы ϕ в разных базисах, $[\phi]_u$ и $[\phi]_v$ сопряжены: для $g = (u \rightsquigarrow v)$ выполняется $g[\phi]_u g^{-1} = [\phi]_v$.

Тогда $\det([\phi]_v - te) = \det(g)\det([\phi]_v - te)\det(g^{-1}) = \det(g[\phi]_v g^{-1} - tgeg^{-1}) = \det([\phi]_u - te)$. □

Определение 3.3.2 (Сингулярные собственные числа)**.** Корни χ_ϕ. Не путать с сингулярными числами (пусть они и не определялись).

Множество λ, для которых $\phi - \lambda e$ не является обратимым, называется *спектром* оператора ϕ.

Теорема 3.3.1. Для конечномерного пространства V над полем K сингулярные собственные числа ϕ совпадают с собственными числами ϕ.

Доказательство. Зафиксируем базис и отождествим $V = K^n$. Также отождествим ϕ и $[\phi]$.

Для собственного числа $\lambda \in K$ найдётся собственный вектор $v \in V$, такой, что $\phi v = v\lambda \iff (\phi - \lambda\,\mathrm{id})v = 0$.

По теореме Крамера $\exists v \neq 0 : (\phi - \lambda\,\mathrm{id})v = 0 \iff \chi_\phi(\lambda) = \det(\phi - \lambda\,\mathrm{id}) = 0$. □

Замечание. Выше определённые собственные числа — *правые*. Можно определить левые собственные числа: ${}^nK \to {}^nK; \quad u \mapsto (u)\phi$. Всякий элемент $\lambda \in K$, такой, что $(u)\phi = \lambda u$ является *левым собственным числом*. Для поля левые собственные числа и правые собственные числа совпадают с сингулярными собственными числами, то есть это всё одно и то же.

3.4 Геометрическая и алгебраическая кратности собственного числа

Определение 3.4.1 (Собственное подпространство оператора ϕ, отвечающее собственному числу λ)**.** $V(\lambda) = \{v \in V | \phi(v) = v\lambda\}$.

Очевидно, что $V(\lambda)$ — это подпространство, причём его размерность равна числу различных линейно независимых векторов с собственным числом λ.

Определение 3.4.2 (Геометрическая кратность собственного числа λ)**.** Размерность $V(\lambda)$.

Определение 3.4.3 (Алгебраическая кратность собственного числа λ)**.** Кратность λ как корня χ_ϕ.

Лемма 3.4.1. *Геометрическая кратность λ не превосходит алгебраической кратности.*

Доказательство. Пусть m — геометрическая кратность λ. Значит, $\exists v_1, \ldots, v_m$ — линейно независимые собственные векторы для собственного числа λ.

Выберем базис V, дополнив $(v_1, \ldots, v_m)$. Теперь матрица ϕ имеет вид $[\phi] = \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$.

Очевидно, характеристический многочлен делится на $(t-\lambda)^m$. □

Замечание. Если алгебраическая кратность собственного числа равна 1, то она равна геометрической кратности.

Примеры.

- Рассмотрим элементарную трансвекцию в каком-то базисе $[\phi] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  С одной стороны, $\chi_\phi(t) = (t-1)^2$.

  С другой стороны, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix} \lambda$ выполняется для произвольного λ только если $b = 0$, то есть геометрическая размерность единицы как собственного числа — 1, что меньше алгебраической кратности 2.

  В частности, видим, что пространство не порождается собственными векторами, матрица не диагонализуема.

- Рассмотрим пространство $K[t]_{\leqslant n}$ с оператором $\phi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. В стандартном базисе: $[\phi] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \ldots & 0 \\ & 0 & 2 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & n \\ 0 & & \ldots & & 0 \end{pmatrix}$.

  Здесь $\chi_\phi(t) = (-t)^{n+1}$. Алгебраическая кратность $n+1$, геометрическая — 1.

- Жорданова клетка $J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}_n$. Геометрическая кратность собственного числа λ этой клетки равна 1, алгебраическая — n.

3.5 Корневые векторы. Корневое подпространство

По-прежнему $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$.

Определение 3.5.1 (Корневой вектор $v \in V$ оператора ϕ, отвечающий собственному числу λ)**.** Существует $m \in \mathbb{N} : (\phi - \lambda\,\mathrm{id})^m(v) = 0$. Такое наименьшее m называется высотой корневого вектора.

В частности, собственный вектор — корневой вектор высоты 1.

Определение 3.5.2 (Подпространство корневых векторов высоты, не превосходящей m)**.** $V_m(\lambda) = \{v \in V | (\phi - \lambda\,\mathrm{id})^m(v) = 0\}$.

Очевидна цепочка вложений $(V(\lambda) =) V_1(\lambda) \leqslant V_2(\lambda) \leqslant V_3(\lambda) \leqslant \ldots$

Пространство конечномерно, цепочка стабилизируется. Можно заметить, что как только $V_m(\lambda) = V_{m+1}(\lambda)$, так сразу $\forall k > m : V_k(\lambda) = V_m(\lambda)$.

Теорема 3.5.1. Над алгебраически замкнутым полем всё пространство раскладывается в прямую сумму корневых подпространств, отвечающих собственному числу λ.

Доказательство. См. (теорема 3.7.3). □

Пример (Основной пример корневых векторов).

Определение 3.5.3 (Экспоненциальные многочлены). Конечная линейная комбинация мономов $t^m e^{\lambda t}$, где $m \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \mathbb{R}, e$ — основание натурального логарифма.

Все мономы формально независимы и образуют кольцо экспоненциальных многочленов $\mathrm{Exp}_{\mathbb{R}}$ с умножением, определённым как обычно:

$$t^m e^{\lambda t} \cdot t^n e^{\mu t} = t^{m+n} e^{(\lambda+\mu)t}$$

Также в данном кольце определено дифференцирование $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^m e^{\lambda t}\right) = m t^{m-1} e^{\lambda t} + \lambda t^m e^{\lambda t}$.

Заметим, что

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \lambda \operatorname{id}\right)\left(t^m e^{\lambda t}\right) = m t^{m-1} e^{\lambda t}$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \lambda \operatorname{id}\right)^2\left(t^m e^{\lambda t}\right) = m(m-1) t^{m-1} e^{\lambda t}$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \lambda \operatorname{id}\right)^m\left(t^m e^{\lambda t}\right) = m! \cdot e^{\lambda t}$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \lambda \operatorname{id}\right)^{m+1}\left(t^m e^{\lambda t}\right) = 0$$

Таким образом, $t^m e^{\lambda t}$ — корневой вектор, отвечающий собственному числу λ, высоты $m+1$.

3.6 Теорема Кэли — Гамильтона

Отождествим эндоморфизм ϕ с его матрицей $[\phi]$.

Заметим, что $\chi_\phi(\phi) = 0$, то есть

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Для матриц 2×2 это заметил Гамильтон, для матриц 3×3 — Кэли, Фробениус обобщил.

3.6.1 Алгебраическое доказательство

Формально, пусть R — произвольное коммутативное кольцо, $x \in M(n, R)$.

Теорема 3.6.1 (Кэли — Гамильтон)**.** $\chi_x(x) = \mathrm{ev}_x(\det(x - te)) = 0$.

Алгебраическое доказательство. По теореме Крамера $x^\# \cdot x = x \cdot x^\# = \det(x)e$, где $x^\# = \mathrm{adj}(x)$. Запишем

$$(x - te)^\#(x - te) = \chi_x(t)e$$

Это равенство в кольце $M(n, R[t]) \cong M(n, R)[t]$

$$\left[\text{изоморфизм состоит в вынесении } t \text{ за матрицы: } \begin{pmatrix} 1-t & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} t\right]$$

В равенство хочется подставить $t \leftarrow x$. Если получится нуль, то значит действительно $\chi_x(x) = 0$.

При рассмотрении данного равенства, как равенства в $M(n, R[t])$ подстановка ничего интересного, по-видимому, не даст: мы хотим, чтобы $x - te$ стало нулём, а подстановка даст матрицу из $M(n, R[x])$, где $R[x]$ — многочлены от данной матрицы, факторкольцо кольца многочленов.

$$\left.\begin{pmatrix} x_{1,1} - t & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n} - t \end{pmatrix}\right|_{t \leftarrow x} = \begin{pmatrix} x_{1,1}e - x & \dots & x_{1,n}e \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1}e & \dots & x_{n,n}e - x \end{pmatrix}$$

Если же рассматривать данное равенство, как равенство в $M(n,R)[t]$, то априори подставлять $t \leftarrow x$ нельзя, так как можно утверждать о сохранении равенства при эвалюации только если коэффициенты коммутируют с элементом алгебры, который планируется подставить.

Пусть $(x-te)^{\#} = b_{n-1}t^{n-1} + b_{n-2}t^{n-2} + \dots + b_0$, где $b_i \in M(n,R)$.
Пусть $\chi_x(t) = c_n t^n + \dots + c_0$, где $c_i \in R$.
В этих терминах равенство переписывается в $M(n,R)[t]$ следующим образом

$$(b_{n-1}t^{n-1} + b_{n-2}t^{n-2} + \dots + b_0) \cdot (x - te) = (c_n t^n + \dots + c_0)e$$

Лемма 3.6.1. *Утверждается, что x коммутирует со всеми b_i (поэтому его можно подставить в данное равенство).*

Доказательство леммы.

Докажем, что матрица b_{n-i} является многочленом от x степени $i-1$. Это доказывать мы будем по индукции, причём пользоваться будем написанным выше равенством в $M(n,R)[t]$.

Записав равенство коэффициентов при t^{n-i}, получаем

$$b_{n-i}x - b_{n-1-i}e = c_{n-i}e \text{ для } 0 \leqslant i < n \text{ (здесь формально } b_n = 0)$$

Сразу получаем $b_{n-1} = -c_n e$; $b_{n-1-i} = -c_{n-i}e + b_{n-i}x$. □

Таким образом, эвалюация данного равенства $t \leftarrow x$ сохранит его справедливость, а левая часть очевидным образом обратится в нуль. □

3.6.2 Геометрическое доказательство

Определение 3.6.1 (Алгебраическое замыкание). Такое поле $\overline{K}$, что оно алгебраически замкнуто и все элементы $\overline{K}$ алгебраичны над K.

Интересный факт (Теорема Штейница). Для любого K существует (и единственно с точностью до изоморфизма) алгебраическое замыкание $\overline{K}$.

Геометрическое доказательство теоремы Кэли — Гамильтона. Здесь будем рассматривать x как матрицу некоего $\phi \in \operatorname{End}_K(V)$.

Рассмотрим многочлен $\chi_\phi(t)$ с коэффициентами в некотором расширении K — конкретно, в алгебраическом замыкании. Будем считать $K = \overline{K}$ — если в $\overline{K} : \chi_\phi(\phi) = 0$, то это же верно и в K.

У χ_ϕ есть корень, назовём его λ.

$\chi_\phi(t) = (t-\lambda)f(t), \lambda \in K, f \in K[t], \deg f \leqslant n-1$.

Собственному числу λ соответствует вектор $\underset{\neq 0}{v} \in V$, такой, что $\phi(v) = v\lambda$. Разложим V в прямую сумму $V = vK \oplus U$.

$$[\phi] = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & \left[\phi\big|_{V/vK}\right] \end{array}\right)$$

$\phi\big|_{V/vK} =: \psi \in \operatorname{End}_K(U)$.

Дальше будем действовать по индукции по n. Индукционное предположение звучит так: $\forall u \in U : f(\phi)(u) \in vK$, то есть матрица $f(\phi)$ выглядит следующим образом:

$$[f(\phi)] = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Теперь $\chi_\phi(\phi) = (\phi - \lambda\,\mathrm{id})f(\phi)$ и $\forall w \in V : (\phi - \lambda\,\mathrm{id}) \cdot \underbrace{f(\phi)(v)}_{v\mu} = (\phi - \lambda\,\mathrm{id})v\mu = 0$. □

Лекция XI

7 апреля 2023 г.

3.7 Примарное разложение

Самым сложным случаем оказывается тот, когда минимальный многочлен (или характеристический) имеют примарный вид — степень неприводимого.

3.7.1 Минимальный многочлен вектора относительно оператора

$\phi \in \mathrm{End}(V)$, причём $\dim_K V < \infty$. Рассмотрим $v \in V, f \in K[t]$.

Определение 3.7.1 (Многочлен f аннулирует v относительно ϕ)**.** $f(\phi)(v) = 0$, то есть $v \in \mathrm{Ker}(f(\phi))$.

Теперь рассмотрим аннулятор $\mathrm{Ann}(\phi, v) \overset{def}{=} \{f \in K[t] | f(\phi)(v) = 0\}$. Напомним, что просто аннулятор $\mathrm{Ann}(\phi) \overset{def}{=} \{f \in K[t] | f(\phi) = 0\}$.

Лемма 3.7.1. $\mathrm{Ann}(\phi, v) \trianglelefteq K[t]$.

Определение 3.7.2 (Минимальный многочлен вектора v относительно ϕ)**.** Нормированный многочлен $\theta_{\phi,v}$, порождающий $\mathrm{Ann}(\phi, v)$, как идеал.

Лемма 3.7.2. $\mathrm{Ann}(\phi) = \bigcap\limits_{v \in V} \mathrm{Ann}(\phi, v)$

Следствие 3.7.1. *Для любого $v \in V$ минимальный многочлен $\theta_{\phi,v}$ делит минимальный многочлен θ_ϕ.*

Ещё можно заметить, что так как $\theta_\phi \mid \chi_\phi$, то $\theta_{\phi,v} \mid \chi_\phi$.

Следствие 3.7.2. *Делителей многочлена конечное число, значит, $\{\theta_{\phi,v}\}_{v \in V}$ конечно.*

3.7.2 Ядро операторного многочлена

Рассмотрим оператор $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$; зафиксируем многочлен $f \in K[t]$. Какие векторы он аннулирует?

Лемма 3.7.3. *Если $f, g \in K[t]$, то $\mathrm{Ker}(f(\phi))$ инвариантно относительно $g(\phi)$.*

Доказательство. Рассмотрим $v \in \mathrm{Ker}(f(\phi))$. Покажем $g(\phi)(v) \in \mathrm{Ker}(f(\phi))$:

$$f(\phi)(g(\phi)(v)) = (f(\phi) \cdot g(\phi))(v) = (g(\phi) \cdot f(\phi))(v) = g(\phi)(\underbrace{f(\phi)(0)}_{0}) = 0 \qquad \square$$

Лемма 3.7.4. *Если $f, g \in K[t], f \mid g$, то $\mathrm{Ker}(f(\phi)) \leqslant \mathrm{Ker}(g(\phi))$.*

Доказательство. Пусть $g = hf$. Тогда если $f(\phi)(v) = 0$, то $g(\phi)(v) = (hf)(\phi)(v) = h(0) = 0$. $\square$

Теорема 3.7.1. Пусть $f, g, h \in K[t]; f = gh$, где $g \perp h$ — взаимно просты.

Тогда $\forall \phi \in \mathrm{End}_K(V) : \mathrm{Ker}(f(\phi)) = \mathrm{Ker}(g(\phi)) \oplus \mathrm{Ker}(h(\phi))$.

Доказательство.

- Так как $K[t]$ — PID, то есть кольцо Безу, то $\exists p, q \in K[t] : pg + qh = 1$.

  Эвалюация в ϕ:

  $$p(\phi)g(\phi) + q(\phi)h(\phi) = \mathrm{id}$$

  Применим к произвольному вектору $v \in V$:

  $$v = p(\phi)(g(\phi)(v)) + q(\phi)(h(\phi)(v))$$

- Покажем $\mathrm{Ker}(g(\phi)) \cap \mathrm{Ker}(h(\phi)) = \{0\}$.

  В самом деле, если $v \in \mathrm{Ker}(g(\phi)) \cap \mathrm{Ker}(h(\phi))$, то $v = 0 + 0$.

- Покажем $\mathrm{Ker}(g(\phi)) + \mathrm{Ker}(h(\phi)) = \mathrm{Ker}(f(\phi))$.

  Пусть $v \in \mathrm{Ker}(f(\phi))$. Опять же, запишем

  $$v = p(\phi)(g(\phi)(v)) + q(\phi)(h(\phi)(v))$$

  Первое слагаемое лежит в $\mathrm{Ker}(h(\phi))$, второе — в $\mathrm{Ker}(g(\phi))$.

  Согласно лемме, применение $p(\phi)$ ничего не меняет — $p(\phi)(g(\phi)(v))$ тоже лежит в ядре $\mathrm{Ker}(h(\phi))$. □

3.7.3 Примарное разложение

$\phi \in \mathrm{End}_K(V)$, рассмотрим $\chi_\phi = (-1)^n p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{m_s}$, где $p_i \in K[t]$ — неприводимые, нормированные многочлены.

Определение 3.7.3 (Примарное подпространство)**.** $V^{p_i} = \mathrm{Ker}(p_i^{m_i}(\phi))$ — аналог корневого подпространства.

Теорема 3.7.2 (О примарном разложении)**.** $V = V^{p_1} \oplus \cdots \oplus V^{p_s}$.

Доказательство. Теорема Гамильтона — Кэли (теорема 3.6.1) + (теорема 3.7.1) + индукция по s. □

Случай алгебраически замкнутого поля

Все неприводимые многочлены имеют степень 1. В таком случае $\chi_\phi(t) = (\lambda_1 - t)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_s - t)^{m_s}$.

$V^{t-\lambda}$ — в точности корневое подпространство, отвечающее собственному числу λ.

Теорема 3.7.3 (О корневом разложении)**.** Если χ_ϕ разложим на линейные множители, как выше (в частности, если K — алгебраически замкнутое поле), то $V = V^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_s}$.

Для приведения оператора к каноническому виду достаточно привести его, ограниченного на корневые подпространства.

3.8 Теорема о жордановой форме

Ограничим $\psi := \phi\big|_{V^{\lambda_i}}$.

Ограниченный оператор имеет единственное собственное число; $\chi_\psi = (\lambda - t)^n$.

Чтобы было ещё удобнее, будем считать, что $\lambda = 0$ — вместо ψ рассмотрим $\psi - \lambda\,\mathrm{id}_{V^\lambda}$.

Теперь $\chi_\psi(t) = (-t)^n$, то есть $\psi^n = 0$ или ψ — нильпотентен.

Как выглядит нильпотентный оператор? Например, так:

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим ещё более специфичный случай

$$J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}; \text{ прибавим } \lambda\,\mathrm{id} \text{ обратно: } J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Оказывается, над полем ничего другого не бывает.

Определение 3.8.1 (Жорданова клетка (жорданов блок) степени n с собственным числом λ)**.** Выше изображённая матрица $J_n(\lambda)$.

Теорема 3.8.1. Если ϕ — оператор, такой, что его характеристический многочлен разложим над K на линейные множители: $\chi_\phi = \prod\limits_{i=1}^{s}(t-\lambda_i)^{n_i}$, то в пространстве V существует базис, в котором матрица ϕ имеет вид

$$J_{m_1}(\mu_1) \oplus \dots \oplus J_{m_t}(\mu_t) = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\mu_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_t}(\mu_t) \end{pmatrix}$$

где $m_1 + \dots + m_t = n = \dim_K(V)$, а $\mu_i \in \{\lambda_i\}$. Быть может, $\mu_i = \mu_j$, но типы жордановых клеток — пары (m_i, μ_i) — определены однозначно.

Определение 3.8.2 (Жорданов базис)**.** Базис, в котором ϕ имеет вышеописанный вид.

Если многочлен не разложим на линейные множители, то возникнут Фробениусовы клетки в разложении в прямую сумму. Впрочем, возникает трудный вопрос о единственности.

Лекция XII

11 апреля 2023 г.

3.8.1 Жорданов базис нильпотентного оператора

Пусть $\phi \in \mathrm{End}(V)$ над произвольным полем, нильпотентен: $\exists m : \phi^m = 0$.

Обозначим за m *ступень нильпотентности* ϕ — наименьшее m, такое, что $\phi^m = 0$. По определению, $\mathrm{Ker}(\phi^{m-1}) \subsetneqq \mathrm{Ker}(\phi^m) = V$.

Лемма 3.8.1. *Если* $v_1, \dots, v_s \in \mathrm{Ker}\left(\phi^{k+1}\right)$ *и линейно независимы относительно* $\mathrm{Ker}\left(\phi^k\right)$*, то* $\phi(v_1), \dots, \phi(v_s) \in \mathrm{Ker}(\phi^k)$ *(очевидно) и линейно независимы относительно* $\mathrm{Ker}(\phi^{k-1})$.

Доказательство. Пусть $\phi(v_1)\lambda_1 + \dots + \phi(v_s)\lambda_s \in \mathrm{Ker}(\phi^{k-1})$.

Тогда $\phi(v_1\lambda_1 + \dots + v_s\lambda_s) \in \mathrm{Ker}(\phi^{k-1})$, и $v_1\lambda_1 + \dots + v_s\lambda_s \in \mathrm{Ker}(\phi^k)$, откуда $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$. $\square$

Рассмотрим цепочку $\{0\} \subsetneqq \mathrm{Ker}(\phi) \subsetneqq \mathrm{Ker}(\phi^2) \dots \subsetneqq \mathrm{Ker}(\phi^m) = V$.

m. Пусть $v_1^m, \dots, v_{n_1}^m$ — базис V относительно $\mathrm{Ker}(\phi^{m-1})$.

$m-1$. Рассмотрим $\phi(v_1^m), \dots, \phi(v_{n_1}^m)$ — линейно независимые векторы $\mathrm{Ker}(\phi^{m-1})$ относительно $\mathrm{Ker}(\phi^{m-2})$. Дополним их до базиса $\mathrm{Ker}(\phi^{m-1})$ относительно $\mathrm{Ker}(\phi^{m-2})$, добавив векторы $v_1^{m-1}, \dots, v_{n_2}^{m-1}$.

$m-2$. Ко всем векторам на предыдущем уровне ещё раз применим ϕ:

$$\phi^2(v_1^m), \dots, \phi^2(v_{n_1}^m), \phi(v_1^{m-1}), \dots, \phi(v_{n_2}^{m-1})$$

Дополним их до базиса $\mathrm{Ker}(\phi^{m-2})$ относительно $\mathrm{Ker}(\phi^{m-3})$, добавив векторы $v_1^{m-2}, \dots, v_{n_3}^{m-2}$.

$\leqslant m-3$. И так далее.

1. На данном шаге получается набор векторов $\phi^{m-1}(v_1^m), \dots, \phi^{m-1}(v_{n_1}^m), \phi^{m-2}(v_1^{m-1}), \dots, \phi^{m-2}(v_{n_2}^{m-1}), \dots,$ независимых в V относительно $\{0\}$.

   Дополним их до абсолютного базиса $\mathrm{Ker}(\phi)$, он же — относительный базис $\mathrm{Ker}(\phi)$ относительно $\{0\}$.

Теорема 3.8.2. Полученные векторы $\phi^i(v_j^k)$ — базис V.

Доказательство. Очевидно из того, что (для $U \leqslant V$) объединение базиса U и базиса V относительно U — базис V. $\square$

Получили жордановы башенки следующего вида:

$$
\begin{tikzcd}
v_1^1 \arrow[d, "\phi"] & & & & \\
\bullet \arrow[d, "\phi"] & v_2^1 \arrow[d, "\phi"] & v_2^2 \arrow[d, "\phi"] & & \\
\bullet \arrow[d, "\phi"] & \bullet \arrow[d, "\phi"] & \bullet \arrow[d, "\phi"] & & \\
\bullet \arrow[d, "\phi"] & \bullet \arrow[d, "\phi"] & \bullet \arrow[d, "\phi"] & v_4^1 \arrow[d, "\phi"] & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & v_5^1
\end{tikzcd}
$$

где цепочек высоты k будет n_{m-k}. Башне высоты k соответствует жорданова клетка $J_k(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$. Клеток $J_k(0)$ будет n_{m-k}, а $\phi = \underbrace{J_m(0) \oplus \dots \oplus J_m(0)}_{n_1} \oplus \dots \oplus \dots$

Осталось доказать единственность в некотором смысле.

Это видно из следующей выкладки:

$$
\begin{aligned}
n_1 &= \operatorname{codim}(\operatorname{Ker}(\phi^{m-1}), V) \\
n_2 &= \operatorname{codim}(\operatorname{Ker}(\phi^{m-2}), \operatorname{Ker}(\phi^{m-1})) - n_1 \\
n_3 &= \operatorname{codim}(\operatorname{Ker}(\phi^{m-3}), \operatorname{Ker}(\phi^{m-2})) - n_1 - n_2
\end{aligned}
$$

Таким образом, количество жордановых клеток данного размера зависит только от коразмерностей ядер, не зависят от выбора базиса.

Замечание. Для разложения оператора ϕ с характеристическим многочленом $(t-\lambda)^n$ надо рассмотреть оператор $\phi - \lambda\,\mathrm{id}$, после чего прибавить $\lambda\,\mathrm{id}$ обратно.

3.9 Сепарабельные многочлены, совершенные поля

Пусть $f \in K[t]$.

Определение 3.9.1 (f — сепарабельный)**.** $f \perp f'$. Так как $K[t]$ — PID, то $K[t]f + K[t]f' = K[t]$.

Пример. Допустим, $f(x) = (x-c)^2 g(x)$. Тогда $f'(x) = 2(x-c)g(x) + (x-c)^2 \cdot g'(x)$. Это же можно записать для $f = p^2 g$ — все многочлены такого вида не сепарабельны.

Таким образом, сепарабельный многочлен не имеет кратных корней (ни в одном расширении поля K).

Обратно, если $f = p_1 \cdot \ldots \cdot p_m$, где $p_i \in K[t]$, различны (с точностью до ассоциированности) и неприводимы **и все** p_i **сепарабельны**, то f сепарабелен.

Определение 3.9.2 (Совершенное поле K)**.** Все неприводимые многочлены над $K[t]$ сепарабельны.

Примеры (Совершенные поля).

- Любое поле характеристики 0.
- Алгебраически замкнутое поле. (Все неприводимые многочлены — $(x-c)$, они сепарабельны по определению).
- Все конечные поля.

Контрпример (Не все поля совершенны).

Пусть $\mathrm{char}(K) = p > 0$. Поле $K(x)$ несовершенно:

Рассмотрим $y \coloneqq x^{1/p}$ — элемент какого-то расширения $K(x)$. Он является корнем своего минимального многочлена $\theta_y(t) \coloneqq t^p - x \in K(x)[t]$.

$\theta_y' = 0$, значит, $\gcd(\theta_y, \theta_y') = \theta_y$, откуда θ_y не является сепарабельным.

Многочлен θ_y неприводим ($x^{1/p}$ не является рациональной функцией), но в расширении поля, где есть y, многочлен θ_y разложим на линейные множители: $\theta_y(t) = (t - y)^p$.

К счастью, этот пример является единственным в некотором роде.

Интересный факт. Все совершенные поля — поля, для которых эндоморфизм Фробениуса ($\mathrm{Frob}_p : K \to K, \mathrm{Frob}_p(x) = x^p$) сюръективен.

3.10 Разложение Жордана — Шевалле

Пусть K — совершенное поле.

Рассмотрим $x \in M(n, K)$.

Определение 3.10.1 (Полупростая матрица)**.** Диагонализуемая над каким-то расширением матрица. Над совершенным полем достаточно взять алгебраическое замыкание.

Определение 3.10.2 (Унипотентная матрица)**.** Такая матрица x, что $x - e$ — нильпотентна, то есть все собственные числа $x - e$ равны 0.

Интересный факт (Аддитивное разложение Жордана — Шевалле). $\forall x \in M(n, K) : \exists! x_s, x_n \in M(n, K)$, такие, что

1. x_s — полупростая.
2. x_n — нильпотентна.
3. $x = x_s + x_n$.
4. $x_s x_n = x_n x_s$.

Утверждается, что, более того, такие матрицы x_s и x_n являются многочленами от x.

Доказательство. Перейдём к алгебраическому замыканию K, разложим $J_n(\lambda) = \lambda \,\mathrm{id} + J_n(0)$. Доказательство единственности сложнее. □

Интересный факт (Мультипликативное разложение Жордана — Шевалле). $\forall x \in GL(n, K) : \exists! x_s, x_u \in M(n, K)$, такие, что

1. x_s — полупростая.
2. x_u — унипотентна.
3. $x = x_s x_u$.
4. $x_s x_u = x_u x_s$.

Утверждается, что, более того, такие матрицы x_s и x_u являются многочленами от x.

Лекция XIII

12 апреля 2023 г.

3.11 Вещественные жордановы формы

Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$.

Рассмотрим $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Что такое это в общем случае — непонятно, но здесь это значит, что для базиса V $(e_1, \dots, e_n)$ над $\mathbb{R}$ у пространства $V_{\mathbb{C}}$ базис — $(e_1, \dots, e_n)$ над $\mathbb{C}$.

Это называется *комплексификация* V. Вещественный базис комплексификации — $(e_1, e_1 i, \dots, e_n, e_n i)$, где i — мнимая единица. Можно сказать, что комплексификация имеет двойную размерность.

Всякому оператору $\phi : V \to V$ сопоставляется *комплексификация оператора* $\phi : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$. Воспользовавшись тем, что мы зафиксировали базис, мы определим комплексификацию, как оператор с той же матрицей: $M(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow M(n, \mathbb{C})$.

Можно привести матрицу ϕ к жорданову виду над $\mathbb{C}$. Вспомнив, что ϕ — вещественный оператор, получаем $\chi_\phi(t) \in \mathbb{R}[t]$. Таким образом, его корни — либо вещественные числа, либо пары сопряжённых комплексных.

Лемма 3.11.1. *Если u — корневой вектор ϕ, отвечающий собственному числу $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ высоты m, то $\overline{u}$ — корневой вектор той же высоты и собственного числа $\overline{\lambda}$.*

Доказательство. $(\phi - \lambda \operatorname{id})^m(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\overline{\phi - \lambda \operatorname{id}}\right)^m(\overline{u}) = 0$ — пользуемся тем, что комплексное сопряжение — автоморфизм. □

Следствие 3.11.1. *Жордановы клетки комплексно сопряжённых пар тоже бьются на пары одной размерности.*

Значит, для приведения комплексной жордановой формы к какой-то хорошей вещественной, надо преобразовать $J_m(\lambda) \oplus J_m(\overline{\lambda})$.

Вспомним, что $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ для $\lambda = a + bi$.

$$\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \overline{\lambda} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\lambda} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline & \ddots & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \\ \hline & & \begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix} \end{array}\right)$$

Эти матрицы тоже сопряжены:

Доказательство. Если $J_m(\lambda)$ отвечает базису $u_1, \dots, u_m$, то $J_m(\overline{\lambda})$ отвечает базису $\overline{u_1}, \dots, \overline{u_m}$.

Тогда матрица из $M(2m, \mathbb{R})$ отвечает базису $(\frac{u_1 + \overline{u_1}}{2}, \frac{u_1 - \overline{u_1}}{2i}, \dots) = (\Re(u_1), \Im(u_1), \dots)$. □

Зафиксируем результат.

Теорема 3.11.1. Матрица любого оператора $\phi \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$ приводится к виду прямой суммы клеток двух типов — $J_m(\lambda)$ для $\lambda \in \mathbb{R}$ и клеток $J_m(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

При этом числа и размеры клеток определены однозначно.

3.12 Циклические подпространства, фробениусовы клетки

Пусть $\phi \in \operatorname{End}_K(V)$, $v \in V$.

Определение 3.12.1 (Циклическое подпространство оператора ϕ, порождённое вектором v)**.** Наименьшее ϕ-инвариантное подпространство в V, содержащее v.

Лемма 3.12.1. *Циклическое подпространство, порождённое v — это $\langle v, \phi(v), \phi^2(v), \dots \rangle$.*

Если $n = \dim V$, то $v, \phi(v), \dots, \phi^n(v)$ линейно зависимы. Возьмём наибольшее $m \in \mathbb{N} : \phi^0(v), \dots, \phi^{m-1}(v)$ линейно независимы:

Значит, $\phi^m(v) \in \left\langle \phi^0(v), \dots, \phi^{m-1}(v) \right\rangle$:

$$\phi^m(v) = \phi^0(v)\alpha_0 + \dots + \phi^{m-1}(v)\alpha_{m-1}$$

откуда циклическое подпространство — $\left\langle \phi^0(v), \dots, \phi^{m-1}(v) \right\rangle$.

Лемма 3.12.2. $\phi\big|_{\langle \phi^0(v), \dots, \phi^{m-1}(v) \rangle}$ *в этом базисе имеет матрицу*

$$B(f) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & & 0 & \alpha_0 \\ 1 & & & \alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \alpha_{m-1} \end{pmatrix}$$

(сопровождающая матрица многочлена f, фробениусова клетка)

где $f = t^m - \alpha_{m-1}t^{m-1} - \dots - \alpha_1 t - \alpha_0$.

Замечание. $\chi_{B(f)} = (-1)^m f$.

Разложим характеристический многочлен ϕ на произведение примарных множителей $p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{m_s}$. Пространство разложится в сумму примарных подпространств $V = V^{p_1} \oplus \dots \oplus V^{p_s}$, на которых $\chi_{\phi|_{V^{p_i}}} = \pm p_i^{m_i}$.

Интересный факт. Любое примарное пространство раскладывается в прямую сумму циклических.

Любой оператор приводится к прямой сумме фробениусовых клеток, отвечающих примарным многочленам.

Глава 4

Классификация модулей над PID

4.1 Нормальная форма Смита

Доказана Смитом над $\mathbb{Z}$, над произвольным PID — Фробениусом.

4.1.1 Над евклидовым кольцом

$x \in M(m, n, R)$, где R — евклидово кольцо с нормой $\delta : R \to \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$.

Если бы вместо кольца было поле, то матрицу можно было бы привести к окаймлённому виду $\left(\begin{array}{c|c} e & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

Теорема 4.1.1. Если R евклидово, то $\forall x \in M(m, n, R) : \exists h \in E(m, R), g \in E(n, R)$, такие, что $hxg = \left(\begin{array}{ccc|c} \varepsilon_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \varepsilon_k & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$, где $\varepsilon_1 \mid \varepsilon_2 \mid \dots \mid \varepsilon_k$, причём ε_i определены однозначно с точностью до ассоциированности.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$\mathcal{M} \coloneqq \{hxg | h \in E(m, R), g \in E(n, R)\}$$

и множество элементов матриц из $\mathcal{M}$

$$\mathcal{D} \coloneqq \{m_{i,j} | m \in \mathcal{M}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m\}$$

- Либо $x = 0$, тогда она уже приведена к необходимому виду.
- Либо в множестве $\mathcal{D}$ есть элементы кроме 0. Выберем среди них элемент с минимальной нормой δ. Так как перестановки содержатся в $E(n, R)$ и в $E(m, R)$, то можно считать, что для неких h, g этот элемент — $(hxg)_{1,1}$.

Заменим для удобства x на эту матрицу, теперь $x_{1,1}$ имеет минимальную норму в $\mathcal{D}$.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n} \\ \hline x_{2,1} & & & \\ \vdots & & * & \\ x_{m,1} & & & \end{array}\right)$$

Заметим, что $x_{1,1}$ делит все остальные $x_{1,j}$ и $x_{i,1}$, так как иначе можно было бы получить элемент меньшей нормы, чем $\delta(x_{1,1})$ с помощью одного шага алгоритма Евклида ($y = x_{1,1}q + r$, где $\delta(r) < \delta(x_{1,1})$, значит, с помощью трансвекции получаем $r = y - x_{1,1}q$).

Применим элементарные преобразования, получим

$$\left(\begin{array}{c|ccc} x_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Дальше по индукции ненулевые числа останутся только на неком префиксе главной диагонали.

Тот факт, что $x_{1,1} \mid x_{2,2}$ можно видеть, если прибавить вторую строчку к первой — в противном случае опять можно было бы получить элемент в $\mathcal{D}$ меньшей нормы, чем $x_{1,1}$.

Единственность разложения следует из того, что результирующие $x_{i,i}$ можно найти из формул:

$$x_{1,1} = \gcd(\mathcal{D}) = \gcd(x_{i,j}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m) = \gcd(\text{миноры первого порядка})$$
$$x_{2,2} = \frac{\gcd(\text{миноры второго порядка})}{x_{1,1}}$$
$$x_{3,3} = \frac{\gcd(\text{миноры третьего порядка})}{x_{1,1} \cdot x_{2,2}}$$

Эти инварианты не меняются (с точностью до ассоциированности) при домножении на элементы $E(n, R)$ или $E(m, R)$, а ещё однозначно задают нормальную форму. □

Следствие 4.1.1. *Над евклидовым кольцом*

$SL(n, R) = E(n, R)$ *— матрицы с единичным определителем и группа, порождённая элементарными трансвекциями.*

$GL(n, R) = GE(n, R)$ *— обратимые матрицы и матрицы, порождённые элементарными трансвекциями и псевдоотражениями.*

Контрпример (Хитрая PID). Возьмём локализацию $\mathbb{Z}[t]$ относительно мультипликативной системы $S \coloneqq \langle \Phi_n | n \in \mathbb{N} \rangle$, где Φ_n — круговой многочлен номера n, то есть минимальный многочлен над $\mathbb{Q}$, делящий $x - \omega_n$, ($\omega_n^n = 1$).

В данном кольце главных идеалов $E(n, R) \neq SL(n, R)$.

4.1.2 Над PID

Пусть R — PID.

Теорема 4.1.2. Для матрицы $x \in M(m, n, R)$ существует $h \in SL(m, R), g \in SL(n, R)$, такие, что $hxg = \left(\begin{array}{ccc|c} \varepsilon_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \varepsilon_k & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$ где $\varepsilon_1 \mid \varepsilon_2 \mid \dots \mid \varepsilon_k$, причём ε_i определены однозначно с точностью до ассоциированности.

Лемма 4.1.1. *Любая унимодулярная строчка (строка с комаксимальными элементами) длины 2 дополняется до матрицы с определителем 1.*

Доказательство леммы.

$aR + bR = R \Rightarrow \exists u, v \in R : au + bv = 1$. Матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ -v & u \end{pmatrix}$ искомая: $\begin{vmatrix} a & b \\ -v & u \end{vmatrix} = 1$ □

Лемма 4.1.2. *Если R — PID, то $a \perp b \Rightarrow aR + bR = R$. $\exists g \in SL(2, R) : \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} d & 0 \end{pmatrix}$ где $d = \gcd(a, b)$.*

Доказательство леммы.

Строчку $\begin{pmatrix} a/d & b/d \end{pmatrix}$ надо достроить до $SL(2, R)$: пусть $\begin{vmatrix} a/d & b/d \\ -u & v \end{vmatrix} = 1$. Тогда

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v & -b/d \\ u & a/d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \end{pmatrix}, \text{ причём } \begin{pmatrix} v & -b/d \\ u & a/d \end{pmatrix} \in SL(2, R)$$ □

Лекция XIV

18 апреля 2023 г.

Доказательство формы Смита для PID. По индукции.

Пусть $\left(\begin{array}{c|cc} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \hline \vdots & * & \\ x_{n,1} & & \end{array}\right) = x \in M(m, n, R)$.

Умножая справа, её можно привести к виду $\left(\begin{array}{c|cc} d & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & * & \\ y_{n,1} & & \end{array}\right)$, где $d = \gcd(x_{1,1}, \dots, x_{1,n})$.

Дальше, умножив слева, мы приводим все к виду $\left(\begin{array}{c|cc} d' & \cdots & z_{1,n} \\ \hline \vdots & * & \\ 0 & & \end{array}\right)$, где $d' = \gcd(d, y_{2,1}, \dots, y_{n,1})$.

Так, умножая то справа, то слева, мы (так как PID $\Rightarrow$ нётерово кольцо, и всякий раз идеал растёт), мы в какой-то момент придём к матрице $\left(\begin{array}{c|cc} \varepsilon_1 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & * & \\ 0 & & \end{array}\right)$.

Дальше по индукции, приводим оставшуюся матрицу к диагональной.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \gcd(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \underset{\text{все преобразования были с определителем 1}}{\sim} \begin{pmatrix} \gcd(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & 0 \\ 0 & \operatorname{lcm}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{pmatrix},$$

поэтому после приведения нижнего правого прямоугольника к хорошему виду можно добиться преобразования, такие, что $\varepsilon_1 \mid \varepsilon_2$. □

4.2 Подмодули кручения, модули без кручения

Пусть M — модуль над коммутативным кольцом R.

Обычно будем предполагать, что R — область целостности.

Определение 4.2.1 (Элемент кручения $x \in M$)**.** $\exists \lambda \in \operatorname{Reg} R$ — не делитель 0 — такой, что $\lambda x = 0$. Также такой элемент называют *периодическим*.

Обозначим $T(M) \overset{def}{=} \{x \in M | \exists \lambda \in \operatorname{Reg} R : \lambda x = 0\}$ — множество элементов кручения.

Лемма 4.2.1. *$T(M) \leqslant M$ — подмодуль. $T(M/T(M)) = \{0\}$, то есть $M/T(M)$ — модуль без кручения.*

Доказательство.

- Пусть $x, y \in T(M)$. $\exists \lambda, \mu \in \operatorname{Reg} R : \lambda x = \mu y = 0$. Тогда $\lambda\mu(x + y) = 0$, но $\lambda\mu \in \operatorname{Reg} R$.

  Теперь покажем, что $x \in T(M) \Rightarrow \mu x \in T(M)$: $\lambda(\mu x) = \mu(\lambda x) = 0$.

- От противного: пусть $\exists x \notin T(M), \exists \lambda \in \operatorname{Reg} R : \lambda x \in T(M)$. Значит, $\exists \mu \in \operatorname{Reg} R : \mu\lambda x = 0$. Тогда $x \in T(M)$ с множителем $\mu\lambda$. □

Определение 4.2.2 (Модуль M без кручения)**.** $T(M) = \{0\}$

Определение 4.2.3 (Модуль кручения, периодический модуль)**.** $T(M) = M$.

4.3 Формулировка основных теорем о строении конечнопорождённых модулей над PID

Пусть R — PID, M — свободный модуль.

Теорема 4.3.1.

1. Подмодуль N свободного модуля свободен и $\operatorname{rk} N \leqslant \operatorname{rk} M$.
2. Конечнопорождённый модуль без кручения свободен.
3. Если M — конечнопорождён, то $M \cong R^n \oplus T(M)$.

Доказательство. (теорема 4.3.4) и ниже. □

Определение 4.3.1 (Циклический модуль M)**.** M порождён одним элементом: $M = Rx$.

Посмотрим на отображение $\phi : R \to M : \lambda \mapsto \lambda x$. У гомоморфизма есть ядро $\operatorname{Ann}_R(x) \stackrel{def}{=} \operatorname{Ker}(\phi)$ — *аннулятор* x.

По теореме о гомоморфизме $M \cong R/\operatorname{Ann}_R(x)$.

- Если $\operatorname{Ann}_R(x) = \{0\}$, то модуль свободен и изоморфен R.
- Если $\operatorname{Ann}_R(x) \neq \{0\}$, то M — модуль кручения. Так как R — PID, то $\operatorname{Ann}_R(x) = R\lambda$ для некоего $\lambda \in R$ — для порождающего $\operatorname{Ann}_R(x)$.

Теорема 4.3.2. Любой конечнопорождённый периодический модуль является прямой суммой циклических подмодулей.

Следствие 4.3.1. *Любой конечнопорождённый периодический модуль является прямой суммой примарных циклических подмодулей. Примарный циклический модуль — модуль вида $R/p_1^{m_1}R$.*

Доказательство. Китайская теорема об остатках:

$$R/(p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{m_s})R \cong (R/p_1^{m_1}R) \oplus \cdots \oplus (R/p_s^{m_s}R)$$ □

Теорема 4.3.3 (О существовании согласованных базисов для подмодулей свободного модуля)**.** Пусть $N \leqslant M \cong R^n$. Тогда $\exists (e_1, \ldots, e_n)$ — базис в M, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in R : \lambda_1 \mid \cdots \mid \lambda_m$, причём $N = \langle \lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_m e_m \rangle \cong R^m$.

Доказательство. См. (теорема 4.4.1). □

4.3.1 Вложение конечнопорождённых модулей без кручения в свободные модули

Теорема 4.3.4. Пусть R — область целостности, M — конечнопорождённый модуль без кручения. Тогда для некоего n: M можно вложить в R^n так, чтобы он имел ненулевое пересечение со всеми координатными осями.

Доказательство. M порождено элементами $\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$. Пусть $y_1, \ldots, y_n \in M$ — максимальная линейно независимая система. Построим R^n на системе образующих $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$.

Рассмотрим подмодуль в $M \geqslant \langle y_1, \ldots, y_n \rangle =: N$. Построим вложение $M \stackrel{\phi}{\to} N$. $N \cong R^n$ — просто переводим базис $\{y_i\}$ в базис $\{e_i\}$ — поэтому данное вложение изоморфно искомому $M \to R^n$.

$\forall x_i : (x_i, y_1, \ldots, y_n)$ — линейно зависимая система. Тогда $\exists \lambda_i \neq 0 : \lambda_i x_i \in N$.

Устроим вложение следующим образом: для $\lambda = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_m \neq 0$ положим

$$\phi : M \to N; \qquad x \mapsto \lambda x$$

Оно инъективно, так как модуль M — без кручения. $\phi(M) \cap Ry_i \neq \{0\}$, так как там есть λy_i. $\square$

Следствие 4.3.2. *1. в (теорема 4.3.1). Если R — PID, M — свободный модуль конечного ранга, то $\forall N \leqslant M$: N свободен, причём $\operatorname{rk} N \leqslant \operatorname{rk} M$.*

Доказательство. Индукция по рангу M.

База: $\operatorname{rk} M = 1$, $M \cong R$. Все подмодули имеют ранг 0 или 1 — это идеалы в кольце.

Переход: $M \cong R^n$. Построим проекцию $\pi : R^n \to R^{n-1}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$.

$N \leqslant M \Rightarrow \pi(N) \leqslant R^{n-1}, \operatorname{Ker}\left(\pi\big|_N\right) \leqslant \operatorname{Ker} \pi \cong R$. Подмодули в R мы знаем, $\operatorname{Ker}\left(\pi\big|_N\right) = \{0\}$, либо $\operatorname{Ker}\left(\pi\big|_N\right) \cong R$.

Воспользовавшись индукционным предположением, получаем, что $\pi(N) \cong R^l$, где $l \leqslant n-1$. Если $\operatorname{Ker}\left(\pi\big|_N\right) = \{0\}$, то $N \cong R^l$. Иначе $\operatorname{Ker}(\pi) \cong R$, тогда $N \cong R^{l+1}$. $\square$

Следствие 4.3.3. *Конечнопорождённый модуль без кручения над PID свободен.*

Теорема 4.3.5. Если M — конечнопорождённый, то $M = R^n \oplus T(M)$.

Доказательство. $M/T(M)$ — модуль без кручения, причём тоже конечнопорождён. Значит, $M/T(M) \cong R^n$ для некоего $n \in \mathbb{N}$, то есть $M \cong T(M) \oplus R^n$. $\square$

Таким образом, (теорема 4.3.1) полностью доказана.

4.4 Согласованный выбор базисов в свободном модуле и его подмодуле

Теорема 4.4.1. Пусть $N \leqslant M \cong R^n$. Тогда $\exists(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в M, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in R$: $\lambda_1 \mid \cdots \mid \lambda_m$, причём $N = \langle \lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_m e_m \rangle \cong R^m$.

Доказательство. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — базис в M, $v_1, \ldots, v_m$ — базис в N. Разложим v по базису u:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

где $x \in M(m, n, R)$. При замене базиса векторы v, u домножаются слева на матрицы из $h \in SL(m, R)$ и $g \in SL(n, R)$ соответственно.

При этом над x будут совершаться преобразования $x \rightsquigarrow h^{-1} x g$, то есть x можно привести к нормальной форме Смита:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 e_1 \\ \vdots \\ \lambda_m e_m \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \lambda_n & \end{array}\right) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \mid \cdots \mid \lambda_m$$

$\square$

Лекция XV

19 апреля 2023 г.

Теорема 4.4.2. Любой конечнопорождённый модуль $M = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ над PID является прямой суммой циклических.

Доказательство. Рассмотрим сюръекцию $\phi : R^n \to M, e_i \mapsto u_i$. Положим $N \coloneqq \operatorname{Ker}(\phi)$.

N — подмодуль свободного модуля, он свободен. Пусть $(v_1, \dots, v_m)$ — базис N.

Выразим базисы через матрицу перехода: $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$, $x \in M(m, n, R)$. Воспользовавшись для x канонической формой Смита, можно выбрать согласованные базисы, так, что $\forall i = 1..m : v_i = e_i \lambda_i$, причём $\lambda_1 \mid \dots \mid \lambda_n$.

Таким образом, $M \cong R^{n-m} \oplus (R/\lambda_1 R) \oplus (R/\lambda_m R)$.

По китайской теореме об остатках получаем, что любой модуль является прямой суммой свободных и примарных модулей. □

4.4.1 Частные случаи

1. $R = \mathbb{Z}$ — конечнопорождённые абелевы группы.

   Согласно ранее доказанной теореме, любая абелева группа

   $$G \cong \mathbb{Z}^m \oplus \underbrace{\mathbb{Z}/p_1^{m_1}\mathbb{Z}}_{c_{p_1 m_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/p_s^{m_s}\mathbb{Z}$$

   где $p_i \in \mathbb{P}, m_i \in \mathbb{N}, p_i$ могут повторяться, но пары (p_i, m_i) определены однозначно.

   Такие группы, соответствующие примарным числам, называются *элементарными абелевыми группами*.

   К сожалению, классифицировать что-то более сложное, даже метабелевые группы (группы, содержащие абелеву подгруппу, фактор по которой абелев) — задача несоизмеримо большей сложности. Классификация метабелевых групп влечёт классификацию пары матриц над полем, а это — дикая задача.

2. $R = K[t]$ — форма Фробениуса. Пусть V — конечномерное векторное пространство над K, $\phi \in \operatorname{End}_K(V)$.

   (V, ϕ) имеет структуру $K[t]$ модуля: $t \cdot v = \phi(v)$. Модуль, очевидно — модуль кручения (например, по теореме Кэли — Гамильтона).

   Значит, $V \cong \bigoplus K[t]/(p^m K[t])$, на каждом подпространстве ϕ имеет примарный характеристический многочлен.

   Значит, любой оператор имеет базис, в котором его матрица — прямая сумма фробениусовых клеток.

Глава 5

Геометрия пространств со скалярным произведением

5.1 Скалярные произведения

K — поле, V — векторное пространство над K ($\dim V < \infty$).

Определение 5.1.1 (Скалярное произведение)**.** Отображение $B : V \times V \to K$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1. Билинейность.
2. Рефлексивность $B(u,v) = 0 \iff B(v,u) = 0$.

Определение 5.1.2 (Ортогональные векторы)**.** $u \perp v \iff B(u,v) = 0$.

Определение 5.1.3 (Симметрическое скалярное произведение)**.** $\forall u,v \in V : B(u,v) = B(v,u)$.

Определение 5.1.4 (Кососимметрическое скалярное произведение)**.** $\forall u,v \in V : B(u,v) = -B(v,u)$.

Замечание. Если характеристика 2, то кососимметрическое скалярное произведение — симметрическое.

Определение 5.1.5 (Симплектическое скалярное произведение)**.** Любой вектор *изотропен*: $\forall u \in V : B(u,u) = 0$.

Замечание. В эрмитовом скалярном произведении $B(u,v) = \overline{B(v,u)}$, например, в гильбертовом пространстве над $\mathbb{C}$.

Факт 5.1.1. *Симплектическое и кососимметрические произведения связаны:*

симплектическое всегда кососимметрическое, обратное верно не в характеристике 2.

$$0 = B(u+v, u+v) = B(u,u) + B(u,v) + B(v,u) + B(u,u) = B(u,v) + B(v,u)$$
$$B(u,u) = -B(u,u) \Rightarrow 2B(u,u) = 0$$

Определение 5.1.6 (Невырожденное скалярное произведение)**.** $\forall u \in V : u \neq 0 \Rightarrow \exists v : B(u,v) \neq 0$.

Примеры.

- (K^n, B), где $B\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right) = u_1v_1 + \dots + u_nv_n = u^t v$.

  Если $K = \mathbb{R}$, то это евклидово скалярное произведение, обладающее свойствами

  – Анизотропность: $B(u,u) \neq 0$ для $u \neq 0$.

  – Положительная определённость: $B(u,u) \geqslant 0$, причём $B(u,u) = 0 \iff u = 0$.

- Можно выбрать базис и r, в котором скалярное произведение имеет вид:

  $$B(u,v) = u_1v_1 + \dots + u_rv_r - u_{r+1}v_{r+1} - \dots - u_nv_n$$

  Такое скалярное произведение пишут в пространстве $\mathbb{R}^{r,s}$ $(r+s=n)$, самое известное — пространство Минковского $\mathbb{R}^{3,1}$.

- $B(u,v) = u_1v_n + u_2v_{n-1} + \dots + u_nv_1$ — расщепимое скалярное произведение.

- Пусть $n = 2m$.

  $$B(u,v) = (u_1v_2 - u_2v_1) + \dots + (u_{2m-1}v_{2m} - u_{2m}v_{2m-1})$$

  Это пример симплектического скалярного произведения.

- $V = M(n, K)$. Здесь можно выбрать $B(x,y) = \mathrm{tr}(x^ty)$

5.1.1 «Классификация» билинейных скалярных произведений

Теорема 5.1.1. Любое билинейное рефлексивное $B : V \times V \to K$ — симметрическое или симплектическое (в характеристике 2 может выполняться одновременно и то, и то).

Доказательство. Рассмотрим $u, v, w \in V$, вычислим

$$B(u, vB(u,w) - wB(u,v)) = B(u,v)B(u,w) - B(u,w)B(u,v) = 0$$

Из рефлексивности в другом порядке тоже 0:

$$0 = B(vB(u,w) - wB(u,v), u) = B(v,u)B(u,w) - B(w,u)B(u,v) \tag{5.1}$$

Подставим $w = u$:

$$B(u,u)(B(u,v) - B(v,u)) = 0 \tag{5.2}$$

Таким образом, если $B(u,u) \neq 0$, то $\forall v : B(u,v) = B(v,u)$, а если $B(u,v) \neq B(v,u)$, то $B(u,u) = B(v,v) = 0$.

Докажем, что если найдутся такие $u, v \in V : B(u,v) - B(v,u) \neq 0$, то все векторы изотропны. Пусть нашлись. Тогда выберем $w \in V$, предположим, что $B(w,w) \neq 0$.

Посчитаем

$$\begin{aligned} B(v, u+w) &= B(v,u) + B(v,w) \\ B(u+w, v) &= B(u,v) + B(w,v) \end{aligned}$$

Первые слагаемые неравны по предположению, вторые — равны, так как $B(w,w) \neq 0$ (5.2). Значит, $B(v, u+w) \neq B(u+w, v)$, откуда (5.2) $B(u+w, u+w) = 0$.

Кроме того, из (5.1) видим, что так как $B(u,v) \neq B(v,u)$, но $B(u,w) = B(w,u)$, то $B(u,w) = B(w,u) = 0$. Отсюда, раскрыв скобки в $B(u+w, u+w) = 0$ действительно получаем, что $B(w,w) = 0$. □

5.2 Матрица Грама скалярного произведения

$V, (e_1, \dots, e_n)$ — пространство и базис.

Определение 5.2.1 (Симплектическое пространство)**.** Пара (V, B) «пространство — скалярное произведение», если B — симплектическое.

Определение 5.2.2 (Квадратическое пространство)**.** Пара (V, B) «пространство — скалярное произведение», если B — симметрическое.

Замечание. Термин *симметрическое пространство* уже зарезервирован под что-то другое, а в связи с симметрическим скалярным произведением будут возникать квадратичные формы, поэтому термин таков.

Определение 5.2.3 (Матрица Грама). $G_e(B) = (B(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Лемма 5.2.1. *Записав векторы столбцами координат в данном базисе, получаем* $B(u, v) = u^t G_e(B) v$.

Доказательство.

$$B(u, v) = B(u_1 e_1 + \dots + u_n e_n, v_1 e_1 + \dots + v_n e_n) = \sum_{i,j} u_i B(e_i, e_j) v_j = u^t G_e(B) v \qquad \square$$

Лемма 5.2.2. *B — симметрическое $\iff$ $G_e(B)$ симметрическая ($G_e(B) = G_e(B)^t$).*

B — симплектическая $\iff$ $G_e(B)$ антисимметрическая ($G_e(B)^t = -G_e(B) \wedge G_e(B)_{i,i} = 0$).

Лемма 5.2.3. *Скалярное произведение B невырождено $\iff$ $G_e(B)$ невырождена.*

Доказательство. B вырождено $\iff$ $\exists v \neq 0 : \forall u : B(u, v) = 0$ $\iff$ $\forall u : u^t G_e(B) v = 0$ $\iff$ $G_e(B) v = 0$ $\iff$ $G_e(B)$ вырождена. $\square$

Лекция XVI

24 апреля 2023 г.

Лемма 5.2.4. *При замене базиса матрица Грама преобразуется по формуле $G_{e'}(B) = g^t G_e(B) g$, где g — матрица перехода.*

Доказательство. Пусть g — матрица перехода от базиса $(e_i)_{i=1}^n$ к базису $(e'_i)_{i=1}^n$:

$$\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{pmatrix}$$

Тогда координаты преобразуются контравариантно: $g^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_n \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_n \end{pmatrix}$.

Получаем, что $(gu')^t \cdot G_e(B) \cdot (gv') = (u')^t \cdot g^t G_e(B) g \cdot v'$. $\square$

Замечание. Если матрица x симметрическая ($x^t = x$), то $g^t x g$ — тоже симметрическая:

$$(g^t x g)^t = g^t x^t g^{tt} = g^t x g$$

Замечание. Задача поиска канонической формы матриц x относительно преобразований $g^t x g$ не решена, хотя, казалось бы, должна быть того же уровня сложности, что и каноническая форма относительно поиска базиса — сопряжения $g^{-1} x g$.

Это связано с тем, что идейно матрица Грама — не матрица; она имеет два индекса, оба описывающие столбцы (или оба строки). Отсюда и появляется транспонирование первого вектора.

5.3 Скалярное произведение и двойственные пространства

$V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ — множество ковекторов (линейных функционалов).

Базису $(e_1, \dots, e_n)$ сопоставляется двойственный базис $(e_1^*, \dots, e_n^*)$, такой, что $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$.

Рассмотрим пространство всех билинейных отображений $L(V, V; K) = \{B : V \times V \to K | B \text{ — билинейно}\}$. Оказывается, есть канонический изоморфизм между $L(V, V; K)$ и $\mathrm{Hom}(V, V^*)$.

Пусть $B : V \times V \to K$ — билинейно. Сопоставим ему парциальные отображения

$${}_uB \overset{def}{=} B(u, \cdot) : V \to K; \qquad B_v \overset{def}{=} B(\cdot, v) : V \to K$$

Полученные парциальные отображения линейны.

Значит, отображение $\widetilde{B} : u \mapsto {}_uB$ бьёт из V в V^*. Более того, оно само линейно, и задаёт биекцию, не зависящую от выбора базисов.

Теорема 5.3.1. $L(V, V; K) \to \mathrm{Hom}(V, V^*)$; $\quad B \mapsto \widetilde{B}$ задаёт канонический изоморфизм $L(V, V; K) \cong \mathrm{Hom}(V, V^*)$.

Доказательство. Проверим, что отображение — гомоморфизм: $\widetilde{B_1 + B_2} = \widetilde{B_1} + \widetilde{B_2}$ и $\widetilde{\lambda B} = \lambda \widetilde{B}$.

Проверим, что $B \mapsto \widetilde{B}$ обратимо: $B(u, v) = \widetilde{B}(u)(v)$. Отсюда получаем инъективность, а сюръективность следует из теоремы о размерности ядра и образа — мы работаем с конечномерными пространствами.

$\dim(L(V, V; K)) = \dim(V) \cdot \dim(V) = \dim(V) \cdot \dim(V^*) = \dim(\mathrm{Hom}(V, V^*))$. $\square$

Теорема 5.3.2. $B : V \times V \to K$ невырождено $\iff$ $\widetilde{B} : V \to V^*$ — изоморфизм.

Доказательство.

$$\begin{gathered} \forall u \neq 0 : \exists v \in V : B(u, v) \neq 0 \\ \Updownarrow \\ \forall u \neq 0 : B(u, \cdot) \neq 0 \end{gathered}$$

$\square$

Замечание. Получается, всякий раз, когда пишут транспонирование, задают изоморфизм $V \cong V^*$, который никак не является каноническим. Это уже не линейная алгебра, а евклидова геометрия. Транспонированию не место в канонической линейной алгебре!

Замечание. Если билинейная форма симметрическая, то $\forall u \in V : B(u, \cdot) = B(\cdot, u)$, то есть изоморфизмы фиксирования первого и второго аргумента одинаковы.

Если билинейная форма симплектическая, то $\forall u \in V : B(u, \cdot) = -B(\cdot, u)$.

5.4 Классификация пространств со скалярным произведением

Первый шаг классификации: скалярное произведение бывает симметрическим или симплектическим.

Пусть (U, B_U) и (V, B_V) — два пространства со скалярными произведениями.

Определение 5.4.1 (Изометрия пространств)**.** Изоморфизм векторных пространств $\phi : U \to V$, сохраняющий скалярное произведение: $B_U(u, v) = B_V(\phi(u), \phi(v))$.

Задача 5.4.1. *Когда $(U, B_U) \cong (V, B_V)$?*

Очевидные инварианты:

1. Размерность $n = \dim U = \dim V$ — если равенства нет, то нет изоморфизма.
2. Ранг $r \coloneqq \mathrm{rk}\, U \overset{def}{=} \mathrm{rk}(G(B_U))$ — не зависит от выбора базиса, замена базиса — обратимая матрица.

   Можно также заметить, что $\mathrm{rk}(G(B_U)) = \mathrm{rk}\left(\widetilde{B_U}\right)$.
3. **Определение 5.4.2** (Дискриминант)**.** $\mathrm{disc}(V) = \left(\det(G(B_V)) \cdot (K^*)^2\right)$ — элемент $K/(K^*)^2$.

   В частности, $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^{*2} \cong \{\pm 1\}$; $\quad \mathbb{F}_q^*/\mathbb{F}_q^{*2} \cong \{\pm 1\}$ для $q \in \mathbb{P}_{\geqslant 3}$.

Определение 5.4.3 (Радикал V)**.** $\mathrm{Rad}(V) = \{u \in V | \forall v \in V : B(u, v) = 0\}$. Иначе говоря, $V^\perp$.

Пусть $V = \mathrm{Rad}(V) \oplus U$, где U – произвольное прямое слагаемое. Заметим, что $\mathrm{Rad}(U) = \{0\}$, иначе $\mathrm{Rad}(V)$ больше, чем предполагался.

Значит, классификацию подпространств можно свести к классификации невырожденных подпространств.

Теорема 5.4.1 (О классификации симплектических пространств)**.** $U \cong V \iff \begin{cases} \dim U = \dim V \\ \operatorname{rk} U = \operatorname{rk} V \end{cases}$.

Доказательство. См. (теорема 5.6.2) $\square$

Следствие 5.4.1. *Для любой чётной размерности существует единственное невырожденное симплектическое пространство. Примерами матриц Грама для этих изоморфных пространств являются следующие матрицы*

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \\ \hline -1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & -1 & & & \end{array}\right)}_{\text{так пишут физики}} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & 0 & \\ \hline & & \ddots & & \\ \hline & & & 0 & 1 \\ & 0 & & -1 & 0 \end{array}\right)}_{\text{так пишут топологи}} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & & 1 \\ & 0 & & & \iddots & \\ & & & 1 & & 0 \\ \hline 0 & & -1 & & & \\ & \iddots & & & 0 & \\ -1 & & 0 & & & \end{array}\right)}_{\text{так пишут алгебраисты}}$$

Определение 5.4.4 (Квадратически замкнутое поле K)**.** Такое поле, что $(K^*)^2 = K^*$, то есть $\forall x \in K : \exists y \in K : y^2 = x$.

Теорема 5.4.2. Если K квадратически замкнуто и $\operatorname{char}(K) \neq 2$, то квадратические пространства $U \cong V \iff \begin{cases} \dim(U) = \dim(V) \\ \operatorname{rk}(U) = \operatorname{rk}(V) \end{cases}$.

Доказательство. См. (теорема 5.8.1). $\square$

Следствие 5.4.2. *В частности, над квадратически замкнутым полем в любой размерности существует единственное невырожденное квадратическое пространство.*

Интересный факт. Над конечными полями — ровно два пространства, с дискриминантом, являющимся и не являющимся полным квадратом.

Теорема 5.4.3 (Закон инерции Сильвестра)**.** Над $\mathbb{R}$ поля со скалярным произведением определяются тремя инвариантами

1. $\dim(V) = n$.
2. $\operatorname{rk}(V) = r = r^+ + r^-$.
3. Сигнатура $s = r^+ - r^-$.

Здесь r^+ и r^- — количества положительных и отрицательных квадратов.

В матрице Грама на главной диагонали стоит r^+ единиц, r^- минус единиц, остальные — нули.

Доказательство. См. (теорема 5.8.4) $\square$

Лекция XVII

25 апреля 2023 г.

5.5 Ортогональное дополнение

$U \leqslant V$ — подпространство, $B : V \times V \to K$ — скалярное произведение.

Определение 5.5.1 (Ортогональное дополнение)**.** $U^\perp \overset{def}{=} \{v \in V | \forall u \in U : B(u, v) = 0\}$.

Замечание. Рефлексивность скалярного произведения влечёт, что можно не различать $U^\perp$ и ${}^\perp U$.

Предостережение. Ортогональное дополнение не является дополнением: совсем не факт, что $U \oplus U^\perp = V$.

Свойства.

- $\forall U \leqslant V : U \cap U^\perp = \mathrm{Rad}(U) \overset{def}{=} \{u \in U | \forall u' \in U : B(u, u') = 0\}$.
- $\mathrm{Rad}(V) = V^\perp$; $\{0\}^\perp = V$.
- $U^\perp \leqslant V$.
- $U \leqslant U^{\perp\perp}$ (равенство в случае невырожденного V: следствие (лемма 5.5.3)).
- $U \rightsquigarrow U^\perp$ обращает включения: $U \leqslant W \Rightarrow W^\perp \leqslant U^\perp$.
- $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.
- $(U \cap W)^\perp \geqslant U^\perp + W^\perp$ (равенство в случае невырожденного V: следствие (лемма 5.5.3)).

5.5.1 Ортогональная прямая сумма

$(U, B_U), (V, B_V)$ — два произвольных пространства (но либо оба симметрические, либо оба симплектические).

Определим скалярное произведение на $U \oplus V$ следующим образом:

$$B_{U\oplus V} : (U \oplus V) \times (U \oplus V) \to K; \qquad (u_1, v_2), (u_2, v_2) \mapsto B_U(u_1, u_2) + B_V(v_1, v_2)$$

Так как $B((u, 0), (0, v)) = 0$ в данном определении, то $(U \oplus V, B_{U\oplus V})$ — *ортогональная прямая сумма*.

Лемма 5.5.1. *Определённая выше $B_{U\oplus V}$ — скалярное произведение на $U \oplus V$.*

Будем обозначать ортогональную прямую сумму $U \boxplus V \overset{def}{=} (U \oplus V, B_{U\oplus V})$.

Если $U, W \leqslant V$ — лежат в одном объемлющем пространстве, то прямая сумма $U \boxplus W$ — внутренняя ортогональная прямая сумма — существует если

1. $U \cap W = \{0\}$
2. $U \perp W \overset{\text{здесь эквивалентно}}{\iff} U \leqslant W^\perp \overset{\text{здесь эквивалентно}}{\iff} W \leqslant U^\perp$.

Лемма 5.5.2. *Пусть U — любое дополнение к $\mathrm{Rad}(V) : U \oplus \mathrm{Rad}(V) = V$.*

Тогда $V = U \boxplus \mathrm{Rad}(V)$, причём B_U невырождено.

Доказательство. Докажем лишь часть про невырожденность, первое очевидно.

Если $\exists u \in U, u \neq 0 : \forall v \in U : B(u, v) = 0$, то $\forall v \in V : v \in U + \mathrm{Rad}(V) \Rightarrow B(u, v) = 0$ по линейности B, противоречие — B_U невырождено. □

5.5.2 Теорема об ортогональном дополнении

Лемма 5.5.3. *Если U невырождено, либо V невырождено, то имеет место* $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$.

Доказательство. Вложению $U \overset{i}{\hookrightarrow} V$ отвечает $V^* \overset{i^*}{\to} U^*$ — двойственное линейное отображение. Воспользуемся отображением $\widetilde{B} : V \to V^*$. Найдём $\mathrm{Ker}(V \xrightarrow{\widetilde{B}} V^* \xrightarrow{i^*} U^*) = \left\{ v \in V \middle| \left(\underset{\in U}{u} \mapsto B(v, u) \right) = 0 \right\}$.

Это $U^\perp$ по определению.

Кроме того, $V \xrightarrow{\widetilde{B}} V^* \xrightarrow{i^*} U^*$ сюръективно:

- Если U невырождено, то даже $U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\widetilde{B}} V^* \xrightarrow{i^*} U^*$ сюръективно — B_U невырождено.

- Иначе это верно, так как V невырождено и $V \xrightarrow{\widetilde{B}} V^*$ — сюръекция (i^* — просто сужение).

Используя теорему о размерности ядра и образа получаем, что $\dim(U) + \dim(U^{\perp}) = \dim(V)$. ☐

Предостережение. Если $U \leqslant V$, V невырождено, то совсем необязательно U невырождено. Например, $\dim(V) = 2, G(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Оба пространства размерности 1, натянутые на базисные векторы, вырождены.

Теорема 5.5.1. Если $U \leqslant V, B_U$ невырождено, то $V = U \boxplus U^{\perp}$.

Доказательство.

- $U \cap U^{\perp} = \mathrm{Rad}(U) = \{0\}$.
- По определению $U \perp U^{\perp}$.
- $\dim(U) + \dim\left(U^{\perp}\right) = \dim(V)$ согласно (лемма 5.5.3). ☐

Замечание. Может быть, что скалярное произведение на U невырождено, но на $U^{\perp}$ — вырождено. Тем не менее,

Теорема 5.5.2. Если V невырождено, то $\forall U \leqslant V : U = U^{\perp\perp}$.

Доказательство. Согласно (лемма 5.5.3) получаем $\dim(U) = \dim(U^{\perp\perp})$. ☐

Теорема 5.5.3. Если из пространств $V, U, U^{\perp}$ два невырождены, то и третье тоже, в этом случае разложения $V = U \boxplus U^{\perp} = U^{\perp} \boxplus U^{\perp\perp}$ симметричны по U и $U^{\perp}$.

Доказательство.

- Если V невырождено, то (тривиально) $U^{\perp\perp} \geqslant U$, но согласно (лемма 5.5.3) наблюдается равенство.

  Если $U^{\perp}$ невырождено, то заменим $\begin{cases} U^{\perp} \rightsquigarrow U^{\perp\perp} \\ U \rightsquigarrow U^{\perp} \end{cases}$, в дальнейшем доказательстве невырождено U.

  Таким образом, $\forall \underset{\neq 0}{u} \in U^{\perp} : \exists v \in U^{\perp} : B(u, v) \neq 0$ (иначе данный u лежит в $U^{\perp\perp}$). Но это по определению невырожденность $U^{\perp}$.

- Если $U^{\perp}, U$ невырождены, то $\dim(U) + \dim(U^{\perp}) = \dim(V)$. Из невырожденности их пересечение пусто, откуда $V = U \oplus U^{\perp}$.

$$\forall v \in V : \exists u \in U, u' \in U^{\perp} : v = u + u' \quad \Rightarrow \quad B(v, \cdot) = B(u, \cdot) + B(u', \cdot)$$

  Так как U невырождено, то найдётся $w \in U : B(u, w) \neq 0$. $B(u', w) = 0 \Rightarrow B(v, w) \neq 0$. ☐

Следствие 5.5.1. *Если в V нашлось невырожденное подпространство, то можно взять к нему ортогональное дополнение, матрица Грама разложится на блоки в базисах U и $U^{\perp}$:*

$$G(B) = \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

Дальше можно пытаться раскладывать пространство по индукции в прямую сумму одномерных.

5.5.3 Теорема Лагранжа о существовании ортогонального базиса в квадратичном пространстве

Определение 5.5.2 (Ортогональный базис)**.** Базис $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства V, такой что $i \neq j \Rightarrow B(e_i, e_j) = 0$.

В ортогональном базисе матрица Грама диагональна: $G(B) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}, a_i \in K$.

Теорема 5.5.4 (Лагранж)**.** $B : V \times V \to K$ — симметрическая форма. Если $\mathrm{char}(K) \neq 2$, то в любом пространстве над K существует ортогональный базис.

Доказательство.

> **Лемма 5.5.4.** *Если* $\mathrm{char}(K) \neq 2$*, то в пространстве с ненулевым симметрическим скалярным произведением найдётся неизотропный вектор* $v : B(v, v) \neq 0$.
>
> *Доказательство леммы.*
>
> Пусть $B(u, v) \neq 0$. Тогда среди векторов $u, v, u+v$ хотя бы один неизотропен: $B(u, v) = \frac{1}{2}(B(u+v, u+v) - B(u, u) - B(v, v))$ и здесь существенно, что характеристика — не 2. $\square$

Если $B = 0$, то всякий базис ортогонален, доказывать нечего.

Если $B \neq 0$, то проведём индукцию по размерности.

<u>База:</u> В одномерном пространстве любой базис ортогонален.

<u>Переход:</u> Найдётся неизотропный $e_1 \in V$, тогда согласно (теорема 5.5.3) $V = e_1 K \boxplus (e_1 K)^{\perp}$, по индукционному предположению $V = \langle e_1 \rangle \boxplus \cdots \boxplus \langle e_{n-1} \rangle$. $\square$

5.6 Введение в теорию (Диксона —) Витта. Классификация симплектических пространств

Теория опубликована Виттом примерно в 1936 году, но Диксон показал примерно то же в 1905, в год рождения Витта. К сожалению, работа Диксона осталась незамеченной.

5.6.1 Выделение гиперболических плоскостей

$B : V \times V \to K$ — произвольное скалярное произведение.

Пусть $u \in V$ — изотропный вектор.

Определение 5.6.1 (Анизотропное скалярное произведение)**.** $\forall u \in V, u \neq 0 \Rightarrow B(u, u) \neq 0$.

Замечание. Анизотропные скалярные произведения изучаются в матанализе, и там хорошо, что они положительно определены. А в алгебре — это, наоборот, мешает.

Определение 5.6.2 (Гиперболическая плоскость H)**.** Двумерное пространство над K с матрицей Грама $G(B_H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ или $G(B_H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Лемма 5.6.1. *Пусть B невырождено, нашёлся* $u \in V, u \neq 0, B(u, u) = 0$*. Если B симметрическое, то дополнительно предположим, что* $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

Тогда u можно вложить в гиперболическую плоскость, то есть $\exists v \in V : B(u, v) = 1, B(v, v) = 0$.

Доказательство. В силу невырожденности $\exists w \in V : B(u, w) \neq 0$. Домножением w на скаляр можно добиться того, что $B(u, w) = 1$.

Так как $B(u,u) = 0 \neq B(u,w)$, то $\langle u, w\rangle$ — пространство размерности 2. Матрица Грама данного пространства в базисе (u,w) — это $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 1 & * \end{pmatrix}$.

Если пространство симплектическое, то матрица уже имеет искомый вид.

Иначе (B симметрическое) элементарным преобразованием получаем, что искомая гиперболическая плоскость натянута на векторы $u, w + \alpha u$, где α подобрано таким образом, что

$$B(w+\alpha u, w+\alpha u) = 0 \Rightarrow B(w,w) + 2\alpha B(u,w) = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}\frac{B(w,w)}{B(u,w)}$$

□

Замечание. Условие невырожденности B можно ослабить до $u \notin \mathrm{Rad}(V)$.

Лекция XVIII

26 апреля 2023 г.

Теорема 5.6.1. Пусть $u \in V \setminus \mathrm{Rad}(V)$ — изотропный вектор, причём если V квадратично, то дополнительно предполагаем, что $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

Тогда u можно включить в гиперплоскость $H \leqslant V$, такую, что $H \boxplus H^{\perp} = V$.

Доказательство. По лемме H существует; H невырождена, значит достаточно сослаться на (лемма 5.6.1). □

5.6.2 Классификация симплектических пространств

Пусть K — произвольное поле, V — симплектическое пространство над K. Тогда $V = \underbrace{H \boxplus \cdots \boxplus H}_{l} \boxplus \mathrm{Rad}(V)$.

Теорема 5.6.2. Два симплектических пространства $U \cong V \iff \dim(U) = \dim(V)$ и $\mathrm{rk}(U) = \mathrm{rk}(V)$.

Доказательство. Количество гиперплоскостей — это $\frac{1}{2}\mathrm{rk}$. Размерность радикала — это $\dim - \mathrm{rk}$, причём все радикалы одной размерности изометричны. □

Следствие 5.6.1. *Ранг симплектического пространства чётен.*

Следствие 5.6.2. *Невырожденные симплектические пространства существуют только в чётных размерностях.*

5.7 Квадратические пространства. Квадратичные формы

V — векторное пространство над K. Будем предполагать, что $\mathrm{char}(K) \neq 2$, иначе всё намного сложнее.

Определение 5.7.1 (Квадратичная форма)**.** Отображение $Q : V \to K$, такое, что

1. Q — однородно степени 2: $Q(v\lambda) = Q(v)\lambda^2$.
2. Поляризация формы Q — билинейное (симметрическое автоматически) скалярное произведение.

   Определение 5.7.2 (Поляризация квадратичной формы Q)**.** Скалярное произведение

$$B(u,v) \overset{def}{=} \frac{1}{2}(Q(u+v) - Q(u) - Q(v))$$

Факт 5.7.1. *Квадратичная форма — скалярный квадрат: $Q(v) = B(v,v)$.*

Теорема 5.7.1. Существует биективное соответствие между квадратичными формами и симметрическими скалярными произведениями.

Доказательство. В одну сторону — поляризация, в другую — скалярный квадрат. □

5.7.1 Квадратичная форма в координатах

Пусть $V \ni x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$. Тогда квадратичная форма — однородный многочлен степени 2:

$$Q(x) = B(x,x) = x^tG(B)x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}x_ix_j = \sum_{i<j} 2a_{i,j}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2$$

Теорема 5.7.2 (Лагранж)**.** Пусть $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Любая квадратичная форма $Q : V \to K$ линейно невырожденной заменой переменных приводится к сумме квадратов:

$$Q(x) = a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2, \quad a_i \in K$$

Доказательство. Есть ортогональный базис: (теорема 5.5.4) □

5.8 Классификация квадратичных пространств

5.8.1 Над квадратично замкнутым полем

$K^* = (K^*)^2$, $\operatorname{char}(K) \neq 2$.

Определение 5.8.1 (Ортонормированный базис V)**.** Ортогональный базис V, такой, что $B(e_i, e_i) \in \{0, 1\}$.

Теорема 5.8.1. В любом квадратичном пространстве над квадратично замкнутым полем характеристики не 2 выполнимы следующие условия:

1. Существует ортонормированный базис.
2. У квадратичных пространств ровно 2 инварианта: размерность и ранг.
3. Любая квадратичная форма приводима к виду
$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_r^2, \quad r \leqslant n$$
4. Всякое пространство приводимо к виду
$$V = H \boxplus \dots \boxplus H \boxplus \operatorname{Rad}(V) \boxplus \underbrace{\langle 1 \rangle}_{\text{если } \operatorname{rk} V \text{ нечётен}}$$

Доказательство. Согласно теореме Лагранжа (теорема 5.5.4) найдётся ортогональный базис $(e_1, \dots, e_n)$. Переупорядочим базисные векторы так, что первые r имеют ненулевой скалярный квадрат, остальные — нулевой.

После этого заменим $e_i \rightsquigarrow \frac{e_i}{\sqrt{B(e_i,e_i)}}, \quad i \leqslant r$.

Пункт 4 следует из того, что над таким полем (например, $K = \mathbb{C}$): $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

А именно рассмотрим сначала матрицу $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$:

$$\begin{cases} B(e,e) = 1 \\ B(f,f) = -1 \\ B(e,f) = 0 \end{cases}$$

Выберем новый базис $\left(\frac{e+f}{\sqrt{2}}, \frac{e-f}{\sqrt{2}}\right)$. Для него

$$\begin{cases} B\left(\frac{e+f}{\sqrt{2}}, \frac{e+f}{\sqrt{2}}\right) = 0 \\ B\left(\frac{e+f}{\sqrt{2}}, \frac{e-f}{\sqrt{2}}\right) = 1 \\ B\left(\frac{e-f}{\sqrt{2}}, \frac{e-f}{\sqrt{2}}\right) = 0 \end{cases}$$

Таким образом, например, над полем $\mathbb{R} : \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Над квадратичным полем можно заменить вектор $v \rightsquigarrow \sqrt{-1} \cdot v$, получается, над $K : \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. □

5.8.2 Над полем вещественных чисел (закон инерции Сильвестра)

Пусть V — пространство над $\mathbb{R}$ с симметрическим скалярным произведением.

Замечание. Доказать также можно доказать для формально вещественных полей — числа бывают отрицательные и положительные, а множество квадратов — множество положительных чисел.

Определение 5.8.2 (Ортонормированный базис $(e_1, \ldots, e_n)$)**.** Ортогональный базис, такой, что $B(e_i, e_i) \in \{+1, -1, 0\}$.

Теорема 5.8.2. В V существует ортонормированный базис.

Доказательство. Согласно теореме Лагранжа (теорема 5.5.4) найдётся ортогональный базис $(e_1, \ldots, e_n)$. Переупорядочим базисные векторы так, что первые r имеют ненулевой скалярный квадрат, остальные — нулевой.

После этого заменим $e_i \rightsquigarrow \frac{e_i}{\sqrt{|B(e_i,e_i)|}}, \quad i \leqslant r$. □

Таким образом, ортонормированный базис есть, характеризуется тремя числами — r^+, r^-, n. Являются ли они инвариантами?

Ограничимся невырожденными пространствами:

$$V_1 = U_1 \boxplus \operatorname{Rad}(V_1) \cong U_2 \boxplus \operatorname{Rad}(V_2) = V_2 \quad \Rightarrow \quad U_1 \cong U_2$$

(из-за единственности ранга $\dim \operatorname{Rad}(V_1) = \dim \operatorname{Rad}(V_2)$; разные прямые слагаемые к одному радикалу изометричны, так как в них можно выбрать базисы, где соответствующие векторы различаются на вектор из радикала).

Теорема 5.8.3 (Сильвестр)**.** Обозначим $\mathbb{R}^{p,q}$ как пространство с матрицей Грама

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & 1 & & & \\ \hline & & & -1 & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & -1 \end{array}\right)$$

где размеры блоков p и q соответственно.

Пространства $\mathbb{R}^{p,q} \cong \mathbb{R}^{s,t}$ изометричны $\iff (p,q) = (s,t)$.

Доказательство. Обозначим за U^+, U^-, V^+, V^- пространства, натянутые на соответствующие базисные векторы.

Предположим, что $p > s$. Рассмотрим отображение $U^+ \hookrightarrow U \cong V \xrightarrow{\text{pr}} V^+$, где pr — проекция на V^+ вдоль (параллельно) V^-.

Пусть $\phi : U \cong V$, тогда $\phi(U^+) \leqslant V$, но так как $s < p$, то проекция $\text{pr}(\phi(U^+))$ имеет ненулевое ядро.

$\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}) = V^-$, значит, $\mathrm{Ker}\left(\mathrm{pr}\big|_{\phi(U^+)}\right) \leqslant V^-$. Значит, нашёлся вектор из U^+, который при изометрии попал в V^-. Но так не бывает при изометрии — значит, ядро на самом деле нулевое, противоречие. ☐

Теорема 5.8.4 (Закон инерции Сильвестра)**.** Любое квадратичное пространство над $\mathbb{R}$ изометрично ровно одному пространству вида

$$\langle \underbrace{1,\ldots,1}_{r^+}, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{r^-}, \underbrace{0,\ldots,0}_{n-r^+-r^-} \rangle \overset{def}{=} \underbrace{\langle 1\rangle \boxplus \langle 1\rangle}_{r^+} \boxplus \underbrace{\langle -1\rangle \boxplus \langle -1\rangle}_{r^-} \boxplus \underbrace{\langle 0\rangle \boxplus \langle 0\rangle}_{n-r^+-r^-}$$

Заметим, что пространства $\langle 1,\ldots,1\rangle$ и $\langle -1,\ldots,-1\rangle$ — евклидово и антиевклидово соответственно, значит, они анизотропны.

Лекция XIX

2 мая 2023 г.

Положим $m = \min(r^+, r^-)$. Получается, всякое квадратичное пространство над $\mathbb{R}$ изометрично ровно одному пространству вида

$$\underbrace{H \boxplus \cdots \boxplus H}_{m} \boxplus \begin{matrix} \langle 1,\ldots,1\rangle \\ \text{или} \\ \langle -1,\ldots,-1\rangle \end{matrix} \boxplus \mathrm{Rad}(V)$$

5.9 Теория (Диксона —) Витта

Теорема 5.9.1 (Витт о разложении)**.** Пусть V — пространство над K, $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Тогда

$$V = \underbrace{H \boxplus \cdots \boxplus H}_{s} \boxplus V_0 \boxplus \mathrm{Rad}(V)$$

причём s определено однозначно, V_0 — анизотропно и определено однозначно с точностью до изометрии.

Доказательство. См.(теорема 5.9.7) ☐

Теорема 5.9.2 (Витт о продолжении)**.** Пусть V — пространство над K, $\mathrm{char}(K) \neq 2$, пусть $U, W \leqslant V$. Если $\psi : U \cong W$ — изометрия, то $\exists \phi \in \mathrm{Isom}(V) : \phi\big|_U = \psi$. Дополнительно потребуем невырожденности либо U (тогда и W), либо V.

Доказательство. См. (теорема 5.9.4 and **??**). ☐

Если всё невырождено, то эта теорема эквивалентна следующей:

Теорема 5.9.3 (Витт о сокращении)**.** Пусть U, W, V — невырожденные пространства над K, $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Если $U \boxplus V \cong W \boxplus V$, то $U \cong W$.

Доказательство. Пусть $\phi : U \boxplus V \cong W \boxplus V$; согласно теореме Витта о продолжении можно считать, что ϕ оставляет V на месте ($V \cong \phi(V)$). Тогда $U \cong W$, как ортогональные дополнения V в одном и том же пространстве. ☐

5.9.1 Ортогональные отражения

Пусть V — квадратичное пространство, $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Дополнительно предположим, что $B \neq 0$, выберем $v \in V : B(v,v) \neq 0$ (такой есть, так как $\mathrm{char}(K) \neq 2$).

Определение 5.9.1 (Ортогональное отражение относительно v)**.** $w_v : V \to V, \quad w_v(x) = x - 2\frac{B(x,v)}{B(v,v)}v$.

Обозначим $L_v = \langle v \rangle^{\perp}$ — *зеркало отражения*. Так как $V = \langle v \rangle \boxplus L_v$ — v анизотропен — то ортогональное отражение переводит $v \mapsto -v$, а каждая точка ортогональной гиперплоскости остаётся на месте.

Лемма 5.9.1. *Пусть* $\mathrm{char}(K) \neq 2$, $B(u,u) = B(v,v) \neq 0$. *Тогда* $\exists \phi \in \mathrm{Isom}(V) : \phi(u) = v$.

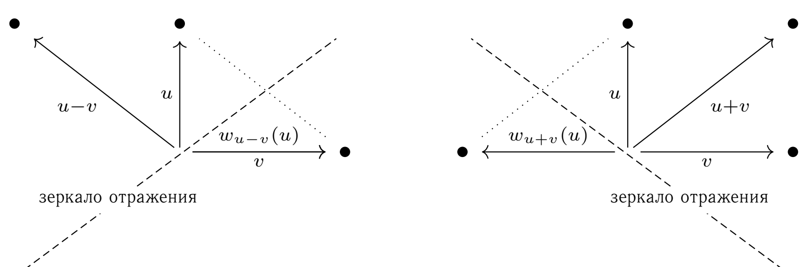
Доказательство. $u+v, u-v \in \langle u, v \rangle$. Один из этих двух векторов анизотропен:

$$B(u+v, u-v) = B(u,u) - B(v,v) = 0$$

откуда

$$0 \neq 4B(u,u) = B((u+v)+(u-v),(u+v)+(u-v)) = B(u+v,u+v) + B(u-v,u-v)$$

Если $u-v$ анизотропен, то $w_{u-v}(u) = v$. Иначе $u+v$ анизотропен, тогда $w_{u+v}(u) = -v$, домножив преобразование на -1 получим необходимое. Можно написать выкладку, а можно посмотреть на картинку:



□

Предостережение. Если $B(u,u) = B(v,v) = 0$, то необязательно $\exists \phi \in \mathrm{Isom}(V) : \phi(u) = v$. Это верно только если пространство невырождено.

Контрпример. Пусть $u \in V \setminus \mathrm{Rad}(V), v \in \mathrm{Rad}(V)$. v ортогонален всему, u — не всему, нет изометрии, переводящей один в другой.

Лемма 5.9.2. *Если V невырождено, то для любых ненулевых изотропных векторов $u, v \in V$:* $\exists \phi \in \mathrm{Isom}(V) : \phi(u) = v$.

5.9.2 Доказательство теоремы Витта о продолжении для невырожденных подпространств

Теорема 5.9.4. Если $U, W \leqslant V, \psi : U \cong W$, причём U, W невырождены (B симметрическое, $\mathrm{char}(K) \neq 2$). Тогда $\exists \phi : V \cong V : \phi\big|_U = \psi$.

Доказательство. Индукция по $\dim(U) = \dim(W)$.

База: (лемма 5.9.1).

Переход: Согласно (лемма 5.5.4), в U найдётся неизотропный вектор $u \in U$. Положим $v = \psi(u) \in W$.

Выберем $\theta \in \operatorname{Isom}(V), \theta(u) = v$ — такая есть согласно (лемма 5.9.1).

Заменим W на $\theta^{-1}(W)$, а ψ — на $\theta^{-1}\psi$. Достаточно доказать теорему после замены, изначально искомое ϕ получится домножением полученного на θ слева. После замены $u = \psi(u)$.

Применим трижды теорему об ортогональном разложении (теорема 5.5.1):

$$U = \langle u \rangle \boxplus \langle u \rangle_U^\perp$$
$$W = \langle u \rangle \boxplus \langle u \rangle_W^\perp$$
$$V = \langle u \rangle \boxplus \langle u \rangle_V^\perp$$

Понятно, что $\langle u \rangle_U^\perp, \langle u \rangle_W^\perp \leqslant \langle u \rangle_V^\perp$.

Ограничение $\psi\big|_{\langle u \rangle_U^\perp} : \langle u \rangle_U^\perp \to \langle u \rangle_W^\perp$ — изометрия. По индукционному предположению $\exists \eta \in \operatorname{Isom}\left(\langle u \rangle_V^\perp\right)$, такая, что $\eta\big|_{\langle u \rangle_U^\perp} = \psi\big|_{\langle u \rangle_U^\perp}$.

Тогда $\phi = \mathrm{id}_{\langle u \rangle} \oplus \eta$ подойдёт. □

5.9.3 Доказательство теоремы Витта о продолжении для невырожденного пространства

Теорема 5.9.5. Пусть $U, W \leqslant V, \psi : U \cong W$, причём V невырождено (B симметрическое, $\operatorname{char}(K) \neq 2$). Тогда $\exists \phi : V \cong V : \phi\big|_U = \psi$.

Доказательство. Сначала докажем следующее:

Теорема 5.9.6. Пусть V невырождено, $U \leqslant V$, $U = U_0 \boxplus \operatorname{Rad}(U)$ (U_0 невырождено). Тогда $\exists$ невырожденное $\overline{U} : U \leqslant \overline{U} \leqslant V$, такое, что

$$\overline{U} = U_0 \boxplus \underbrace{H \boxplus \cdots \boxplus H}_{d(U) := \dim(\operatorname{Rad}(U))}$$

Доказательство. Индукция по $d(U)$ — *дефекту* U.

Пусть $e_1, \ldots, e_s$ — базис $\operatorname{Rad}(U)$. Из невырожденности V следует $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$.

Назовём $W = U_0 \boxplus \langle e_1, \ldots, e_{s-1} \rangle \leqslant U$. $\dim(W) = \dim(U) - 1, \qquad \dim(W^\perp) = \dim(U^\perp) + 1$.

Значит, $\exists v \in W^\perp \setminus U^\perp$. Тогда $B(e_s, v) \neq 0$. Согласно (лемма 5.6.1) (подпространство $\langle e_s, v \rangle$ невырождено, так как $B(e_s, v) \neq 0$, но e_s изотропен) найдётся $e_{-s} \in \langle e_s, v \rangle : B(e_{-s}, e_{-s}) = 0, B(e_s, e_{-s}) = 1$.

Получили равенство $U \oplus \langle e_{-s} \rangle = W \boxplus H$, дальше действуем по индукции. □

Согласно доказанной теореме найдутся $\overline{U}, \overline{W}$:

$$U \leqslant \overline{U} \leqslant V \qquad \dim\left(\overline{U}\right) = \dim(U) + d(U)$$
$$W \leqslant \overline{W} \leqslant V \qquad \dim\left(\overline{W}\right) = \dim(W) + d(W)$$

Пространства изоморфны, значит, их дефекты равны, то есть $\dim\left(\overline{U}\right) = \dim\left(\overline{W}\right)$. С другой стороны,

$$U = U_0 + \operatorname{Rad}(U) \qquad W = W_0 + \operatorname{Rad}(W)$$

Заметим, что ограничение ψ — тоже изометрия: $\psi\big|_{U_0} : U_0 \cong W_0$. Достроим эту изометрию до $\overline{\psi} : \overline{U} \cong \overline{W}$ — все гиперболические плоскости изометричны, понятно, что можно достроить так, чтобы $\overline{\psi}(U_0) = W_0$. Согласно предыдущей теореме (теорема 5.9.4) эту изометрию можно продолжить на всё V. □

Теорема 5.9.7 (Витт о разложении). (V, B) — пространство над K, (B симметрическое, $\mathrm{char}(K) \neq 2$). Тогда V представимо в виде

$$V_0 \boxplus \underbrace{H \boxplus \dots \boxplus H}_{s \text{ — индекс Витта}} \boxplus \mathrm{Rad}(V)$$

где V_0 анизотропно, причём класс изометрий V_0 и s определены однозначно.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Для начала избавимся от радикала, включив его прямым слагаемым.

Пока существуют ненулевые изотропные векторы, будем включать их в гиперболические гиперплоскости. В результате останутся только анизотропные векторы, образующие V_0.

Единственность разложения следует из теоремы Витта о сокращении: все гиперболические плоскости изометричны, на них можно сокращать. $\square$

Такое разложение пространства на анизотропную, гиперболическую, и вырожденную части называется *разложением Витта*. Естественно выбирать ортогональный базис в анизотропной части, гиперплоскостной базис в гиперболической части (и любой — в радикале, всё равно там $B \equiv 0$) — это *базис Витта*.

Пусть $V = H_1 \boxplus \dots \boxplus H_s$. Выберем полученный гиперплоскостной базис $H_i = \langle e_i, e_{-i} \rangle$.

Определим $U = \langle e_1, \dots, e_s \rangle, U' = \langle e_{-1}, \dots, e_{-s} \rangle$. Получим разложение $V = U \oplus U'$, причём $B_U \equiv 0$ и $B_{U'} \equiv 0$.

Определение 5.9.2 (Вполне изотропное пространство U). Все векторы U изотропны.

Если характеристика не 2, то во вполне изотропных пространствах $B_U \equiv 0$ (иначе (лемма 5.5.4)).

Следствие 5.9.1. *Если V невырождено, то $V \cong V_0 \boxplus (U \oplus U')$, где V_0 анизотропно, U, U' — вполне изотропны.*

Факт 5.9.1. *U, U' — максимальные (и по размерности, и по включению) вполне изотропные подпространства в V.*

Доказательство. Максимальность по включению очевидна — никакой вектор не добавить.

Согласно теореме Витта о сокращении, в невырожденном V все максимальные по включению вполне изотропные подпространства изометричны.

А именно, пусть $U, \widetilde{U} \leqslant V$ — вполне изотропные подпространства, причём $\dim(U) < \dim(\widetilde{U})$. Тогда U изометрично некому подпространству в $\widetilde{U}$. Изометрию можно продолжить на всё V, получается, U содержится в бóльшем вполне изотропном подпространстве. Противоречие. $\square$

Лекция XX

3 мая 2023 г.

5.10 Полуторалинейные скалярные произведения

Иноязычно полуторалинейные называют sesquilinear, полулинейные — semilinear.

5.10.1 Полулинейные отображения, инволюции

Раньше было так: R — кольцо, U, V — два модуля над ним, $\phi : U \to V$ — линейное отображение:

$$\phi(u + v) = \phi(u) + \phi(v)$$
$$\phi(v\lambda) = \phi(v)\lambda$$

Пусть теперь U — R-модуль, V — S-модуль. Что естественно понимать под морфизмом $U \to V$? Первое свойство удобно сохранить: $\phi(u+v) = \phi(u) + \phi(v)$. Так как V — не R-модуль, то при вынесении скаляра из R надо его преобразовать в скаляр из S.

Зададим **унитальный** гомоморфизм колец $\psi : R \to S$.

Определение 5.10.1 (ψ-полулинейное отображение)**.** Такое аддитивное $\phi : U \to V$, что

$$\forall u \in U, \lambda \in R : \phi(u\lambda) = \phi(u)\psi(\lambda)$$

Линейное отображение можно понимать, как полулинейное, где $R = S$. До сих пор ψ было тождественным.

Определение 5.10.2 (Инволюция)**.** Антиавтоморфизм порядка 2. Часто обозначается чертой:

$$\bar{\cdot} : R \to R, \lambda \mapsto \overline{\lambda}$$

Свойства.

- $\overline{\lambda + \mu} = \overline{\lambda} + \overline{\mu}$ — определение антиавтоморфизма.
- $\overline{\lambda \cdot \mu} = \overline{\mu} \cdot \overline{\lambda}$ — определение антиавтоморфизма.
- $\overline{1} = 1$.
- $\overline{\overline{\lambda}} = \lambda$ — порядок 2.

Примеры.

- Комплексное сопряжение — ещё и автоморфизм, так как кольцо коммутативно.
- Кватернионное сопряжение: $a + bi + cj + dk \mapsto a - bi - cj - dk$.

$$w + \overline{w} = 2a \in \mathbb{R}$$
$$w\overline{w} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{R}$$

- Инволюция на $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) : a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$.
- Инволюция на $\mathbb{F}_{q^2}$:
$$\mathrm{Frob} : \mathbb{F}_{q^2} \to \mathbb{F}_{q^2}; \quad x \mapsto x^q$$
- Пусть R — коммутативное кольцо. Тогда $R = R^o$ и транспонирование — инволюция: $M(n, R) \to M(n, R^o); \quad x \mapsto x^t$.
- Главная инволюция группового кольца $K[G] \to K[G]; \quad g \mapsto g^{-1}$.

Пусть U, V — модули над **коммутативным** кольцом R с инволюцией.

Определение 5.10.3 (Полулинейное отображение $\phi : U \to V$ по отношению к инволюции)**.** Аддитивное ϕ, такое, что $\phi(u\lambda) = \phi(u)\overline{\lambda}$.

В 1840-е годы Эрмит ввёл это для комплексных чисел, Гамильтон — для кватернионов.

5.10.2 Полуторалинейные скалярные произведения

Никаких билинейных анизотропных скалярных произведений (кроме одномерных) над $\mathbb{C}$ нет: всегда уравнение $z^2 + w^2 = 0$ имеет решение.

А анизотропность иногда бывает удобна. Поэтому над $\mathbb{C}$ билинейные скалярные произведения не позволяют построить такую же геометрию, как над $\mathbb{R}$. Эрмит предложил заменить сумму квадратов на сумму $z\overline{z} + w\overline{w}$, которая никогда не 0 (разве что $z = w = 0$). Для этого пришлось отказаться от линейности по одному из аргументов.

Пусть K — поле с инволюцией, V — векторное пространство над K.

Определение 5.10.4 (Полуторалинейная форма $B : V \times V \to K$)**.** B, линейное по одному аргументу, и полулинейное — по второму:

$$B(u+v,w) = B(u,w) + B(v,w)$$
$$B(u,v+w) = B(u,v) + B(u,w)$$
$$B(u\lambda, v\mu) = \overline{\lambda} \cdot B(u,v) \cdot \mu \text{ — для правых модулей}$$
$$B(\lambda u, \mu v) = \lambda \cdot B(u,v) \cdot \overline{\mu} \text{ — для левых модулей}$$

Определение 5.10.5 (Полуторалинейное скалярное произведение)**.** Полуторалинейная форма, в которой ортогональность симметрична: $B(u,v) = 0 \iff B(v,u) = 0$.

Определение 5.10.6 (Эрмитова полуторалинейная форма)**.** Такая форма B, что $B(u,v) = \overline{B(v,u)}$. Также называется *эрмитовски симметричной формой*.

Замечание. Казалось бы, можно ввести эрмитовски антисимметричную форму: $B(u,v) = -\overline{B(v,u)}$. Но смысла в этом нет: если B эрмитовски симметрична, то $i \cdot B$ — эрмитовски антисимметрична.

Интересный факт. Все полуторалинейные скалярные произведения с точностью до нормировки — эрмитовски симметричны.

Определение 5.10.7 (Унитарное пространство)**.** (V,B), где B — полуторалинейное эрмитово скалярное произведение.

Определение 5.10.8 (Унитарная группа)**.** Группа изометрий унитарного пространства: $\{\phi | B(\phi u, \phi v) = B(u,v)\}$.

Пример (Классический пример). $V = \mathbb{C}^n$, $\quad \bar{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z} \quad B(u,v) = \overline{u_1}v_1 + \dots + \overline{u_n}v_n$.

B здесь положительно определено:

- $B(u,u) \geqslant 0$ — положительная полуопределённость.
- Равенство наступает при $u = 0$.

Пространство называют *конечномерным гильбертовым* или *классическим унитарным пространством*.

Для таких пространств можно заново переизложить теорию, описанную в данной главе.

Так, матрица Грама $G(B)$ — такая матрица, что $B(u,v) = \overline{u}^t G(B) v$.

Теорема 5.10.1. Любое эрмитово скалярное произведение над $\mathbb{C}$ имеет вид

$$B(u,v) = \overline{u_1}v_1 + \dots + \overline{u_p}v_p - \overline{u_{p+1}}v_{p+1} - \dots - \overline{u_{p+q}}v_{p+q}$$

Это аналог теоремы Сильвестра: всякое скалярное произведение определяется тремя числами, n, p, q.

Набросок доказательства. $B(u,u) = \overline{B(u,u)} \Rightarrow B(u,u) \in \mathbb{R}$. Домножая вектор u на λ получаем $B(u\lambda, u\lambda) = \lambda\overline{\lambda}B(u,u)$, то есть можно заменить число на любое того же знака — привести в $\{-1, 0, +1\}$. □

Предостережение (Гильбертово пространство намного сложнее евклидова). Гильбертово пространство включает в себя и симметрическое, и симплектическое произведения, причём они связаны. Об этом ниже.

5.10.3 Вещественная и мнимая часть эрмитова скалярного произведения

Пусть $K = \mathbb{C}$, рассмотрим единственную непрерывную нетривиальную инволюцию $z \mapsto \overline{z}$.

Пусть $V = \mathbb{C}^n$, $B : V \times V \to \mathbb{C}$ — скоро будет полуторалинейным скалярным произведением

Можно «забыть про комплексную структуру»: $V_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^{2n}$.

Введём два новых отображения: $A(u,v) = \Re(B(u,v)); C(u,v) = \Im(B(u,v))$. Они скоро будут билинейными вещественными скалярными произведениями: $A, C : V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$.

Теорема 5.10.2. Следующие условия эквивалентны:

1. B — эрмитово скалярное произведение (полулинейное по первому аргументу, линейное — по второму).
2. (a) A симметрическое, C симплектическое.
   (b) $A(ui, vi) = A(u, v); \quad C(ui, vi) = C(u, v)$.
   (c) $A(ui, v) = C(u, v); \quad C(ui, v) = -A(u, v)$.

Доказательство.

$\Rightarrow$. (a) $B(u, v) = \overline{B(v, u)}$.
   (b) $B(ui, vi) = \bar{i}iB(u, v) = B(u, v)$.
   (c) $A(ui, v) + iC(ui, v) = B(ui, v) = \bar{i}B(u, v) = \bar{i}(A(u, v) + iC(u, v)) = C(u, v) - iA(u, v)$.

$\Leftarrow$. Из определения $B(u, v) = A(u, v) + iC(u, v)$ видно, что форма линейна по отношению к вещественным числам. Запишем

$$\begin{cases} A(u, vi) = A(vi, u) = C(v, u) = -C(u, v) \\ C(u, vi) = -C(vi, u) = A(v, u) = A(u, v) \end{cases}$$

Теперь проверим линейность по второму аргументу, полулинейность по первому, эрмитовость:

$$B(u, vi) = A(u, vi) + iC(u, vi) = -C(u, v) + iA(u, v) = i(A(u, v) + iC(u, v)) = iB(u, v)$$
$$B(ui, v) = A(ui, v) + iC(ui, v) = C(u, v) - iA(u, v) = \bar{i}(A(u, v) + iC(u, v))$$
$$B(u, v) = \overline{B(v, u)}$$

□

Глава 6

Теория групп

Лекция XXI

10 мая 2023 г.

6.1 Действия групп

6.1.1 Действия групп на множествах

Пусть G — группа, X — множество.

Определение 6.1.1 (G действует на X слева)**.** Задано отображение (*левое действие*)

$$\mathrm{act}: G \times X \to X \qquad g, x \mapsto gx \text{ или } {}^{g}x \text{ (или ещё как-то обозначается)}$$

При действии группы должны быть выполнены аксиомы:

- Внешней ассоциативности: $h(gx) = (hg)x$.
- Унитальности: $1_G \cdot x = x$.

Также говорят «X — G-множество».

При правом действии $x(hg) = (xh)g$.

Замечание. Для групп любое левое G-множество можно превратить в правое и наоборот:

$$xg \leftrightsquigarrow g \cdot x = xg^{-1}$$

Чаще будем рассматривать левые действия — действия группы аналогичны применениям функций, а функции мы применять привыкли слева. Например, левым действиям будут соответствовать гомоморфизмы, а не антигомоморфизмы.

Замечание. Возникавшие у нас группы на самом деле возникали уже вместе с действиями.

Примеры.

- Естественное действие $S_n \overset{def}{=} \mathrm{Bij}\,(\underline{n})$, где $\underline{n} \overset{def}{=} \{1, \ldots, n\}$. Значит, S_n естественно действует на $\underline{n}$:

  $$S_n \times \underline{n} \to \underline{n} \qquad \pi, i \mapsto \pi(i)$$

  Вообще, для любого множества X (необязательно конечного): S_X действует на X.

  Лемма 6.1.1. *Других действий нет. При фиксированных G, X действиям $G \curvearrowright X$ биективно сопоставляются гомоморфизмы $\phi : G \to S_X \quad g \mapsto (x \mapsto gx)$. Отображения $L_g : X \to X, x \mapsto gx$ называются* левыми трансляциями *на g.*

Доказательство. Определение очевидно корректно, проверим, что ϕ — гомоморфизм. Аксиомами действия являются $L_{gh} = L_g L_h$ и $L_1 = \mathrm{id}_X$, откуда следует, что $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$.

Обратно: гомоморфизму $\phi : G \to S_X$ сопоставим ему левое действие G на X: $gx = \phi(g)(x)$. □

Как раз-таки правые действия соответствовали бы не гомоморфизмам, а антигомоморфизмам.

Определение 6.1.2 (Перестановочное представление). Выше рассмотренный гомоморфизм $\phi : G \to S_X$.

- Естественное действие $GL(n, R) \curvearrowright R^n$:

  $$GL(n, R) \times R^n \to R^n \qquad g, u \mapsto gu$$

  Левое действие — векторное представление $GL(n, R)$ на R^n.

  Также есть правое действие ${}^nR \curvearrowleft GL(n, R)$, которому можно сопоставить $GL(n, R) \times R^n \to R^n, g, u \mapsto g^{-t}u$ — *ковекторное представление*.

  Определение 6.1.3 (Линейные действия). Действия $G \times V \to V$, удовлетворяющие аксиомам $g(u + v) = gu + gv$ и $g(u\lambda) = (gu)\lambda$.

  Лемма 6.1.2. *При фиксированных G, R^n линейным действиям $G \curvearrowright R^n$ биективно соответствует гомоморфизмы $\phi : G \to GL(n, R)$.*

  Определение 6.1.4 (Линейное представление). Вышеописанный гомоморфизм $G \to GL(n, R)$.

- Действие группы $SL(2, \mathbb{C}) \times \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, где $\overline{\mathbb{C}}$ — одноточечная компактификация $\mathbb{C}$, сфера Римана, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

  $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Если знаменатель обнуляется, то (так как $ad - bc = 1$) числитель не обнуляется, по определению $z \mapsto \infty$. Если $z = \infty$, то $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)z = \begin{cases} \frac{a}{b}, & b \neq 0 \\ \infty, & b = 0 \end{cases}$. Проверка того, что это действие, оставляется читателю в качестве упражнения.

6.1.2 Действие группы на себе. Теорема Кэли

Давайте для группы G считать, что множество $X = G$, посмотрим, что получится.

Определение 6.1.5 (Левое регулярное представление)**.** Действие G на себе левыми сдвигами: $G \times G \to G \qquad g, x \mapsto gx$.

$L_g : G \to G, x \mapsto gx$ — левая трансляция. Так как в группе есть сокращение, то $L_g \in S_G$

Теорема 6.1.1 (Кэли)**.** Отображение $G \to S_G, g \mapsto L_g$ задаёт вложение G в S_G.

Доказательство.

- $L_g \in S_G$.
- Это гомоморфизм.
- $L_h = L_g \Rightarrow h = g$ — проверим в любой точке, например, в 1: $h = L_h(1) = L_g(1) = g$. □

Следствие 6.1.1. $|G| = n \Rightarrow G \leqslant S_n$.

Это ни в коем случае не биекция, например, так как порядок $S_{|G|} = |G|!$, что бы это не значило для бесконечных групп.

Определение 6.1.6 (Правое регулярное представление)**.** Действие G на себе правыми сдвигами: $G \times G \to G \qquad g, x \mapsto xg^{-1}$.

$R_g : G \to G, x \mapsto xg^{-1}$ — правая трансляция. Так как в группе есть сокращение, то $R_g \in S_G$

Замечание. И правое представление, и левое представление — левые действия. Мы рассматриваем левые действия, потому что они соответствуют гомоморфизмам, а не антигомоморфизмам.

Теорема 6.1.2 (Кэли)**.** Отображение $G \to S_G, g \mapsto R_g$ задаёт вложение G в S_G.

Замечание. Любая левая трансляция коммутирует с любой правой трансляцией: $L_h R_g(x) = h(xg^{-1}) = (hx)g^{-1} = R_g L_h(x)$. Таким образом, на G действует даже не сама группа G, а

$$G \times G \curvearrowright G \quad (G \times G) \times G \to G \quad (h, g), x \mapsto hxg^{-1}$$

Это, правда, уже необязательно вложение, например, в абелевой группе вообще $L_g = R_{g^{-1}}$.

В частности, совместив с диагонализацией $\mathrm{diag} : G \to G \times G, g \mapsto (g, g)$ получим *действие сопряжения*: $G \times G \to G, g, x \mapsto {}^g x = gxg^{-1}$.

Это отображение называется $I_g : G \to G, x \mapsto gxg^{-1} = {}^g x$ — внутренний автоморфизм G. Отображение $G \to S_g, g \mapsto I_g$ уже не является вложением, его ядро — центр группы, $\mathrm{Cent}(G)$.

6.1.3 Действие группы на однородных пространствах. Обобщённая теорема Кэли

Зафиксируем подгруппу $H \leqslant G$ — в предыдущем разделе $H = \{1\}$. Ей соответствует $G/H = \{xH | x \in G\}$.

Определение 6.1.7 (Стандартное действие G на G/H)**.** $L_g : G \times G/H \to G/H$, $g, xH \mapsto gxH$.

Аналогично $H \backslash G \times G \to H \backslash G, \qquad Hx, g \mapsto Hxg^{-1}$.

Получили гомоморфизм $G \to S_{G/H}, g \mapsto L_g$, не обязательно являющийся вложением. Найдём ядро этого гомоморфизма.

Ядро любого гомоморфизма, вообще-то — нормальная подгруппа, а ещё ядро должно быть как-то связано с H. С H связаны две нормальные подгруппы G: $H_G \leqslant H \leqslant H^G$ — *сердцевина* H (наибольшая нормальная подгруппа G, содержащаяся в H) и нормальная подгруппа G, порождённая H (наименьшая нормальная подгруппа G, содержащая H) соответственно. А именно,

$$H_G = \bigcap_{g \in G} H^g \qquad H^G = \langle h^g | h \in H, g \in G \rangle$$

Теорема 6.1.3 (Обобщённая теорема Кэли)**.** Ядро гомоморфизма $L : G \to S_{G/H}, g \mapsto L_g$ равно сердцевине — H_G.

Доказательство. Мы знаем, что L — гомоморфизм, вычислим его ядро.

$$g \in \mathrm{Ker}(L) \iff L_g = \mathrm{id}_{G/H} \iff \forall x \in G : L_g(xH) = xH \iff \forall x \in G : gxH = xH \iff$$
$$\iff \forall x \in G : x^{-1}gx \in H \iff \forall x \in G : g^x \in H \iff \forall x \in G : g \in H^{x^{-1}}$$

Отсюда действительно получается, что $g \in \mathrm{Ker}(L) \iff \forall x \in G : g \in H^x \iff x \in H_G$. □

Это очень сильная теорема.

Следствие 6.1.2. $|G : H| = n \Rightarrow |G : H_G| \,\Big|\, n!$.

Доказательство. $G/H_G \hookrightarrow S_{G/H}$. Так как $|G/H| = n$, то $|S_{G/H}| = n!$. □

Следствие 6.1.3 (Теорема Пуанкаре)**.** *Подгруппа конечного индекса содержит нормальную подгруппу конечного индекса, то есть* $|G : H| < \infty \Rightarrow |G : H_G| < \infty$.

Следствие 6.1.4. *Если* p *— наименьшее простое, делящее порядок* G *и* $|G : H| = p$*, то* $H \trianglelefteq G$.

Доказательство. Согласно (следствие 6.1.2): $|G : H_G| \;\Big|\; p!$; помимо этого, $|G : H_G| \;\Big|\; |G|$, откуда

$$|G : H_G| \;\Big|\; \gcd(p!, |G|) = p \Rightarrow H_G = H$$ □

Пусть X, Y — два G-множества. Гомоморфизмом G-множеств $\phi : X \to Y$ называют отображение $\phi(gx) = g\phi(x)$. Должна быть коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\mathrm{act}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G \times \phi"] & X \arrow[d, "\phi"] \\ G \times Y \arrow[r, "\mathrm{act}_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

Если же на множествах действуют разные группы, $G \curvearrowright X, H \curvearrowright Y$, то надо ввести ещё *эквивариантное отображение* $\psi : G \to H$, тогда коммутативной должна быть диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\mathrm{act}_X"] \arrow[d, "\psi \times \phi"] & X \arrow[d, "\phi"] \\ H \times Y \arrow[r, "\mathrm{act}_Y"] & Y \end{tikzcd} \qquad \phi(gx) = \psi(g)\phi(x)$$

Лекция XXII

13 мая 2023 г.

Пусть $G \curvearrowright X$. Рассмотрим $x \in X$, с ним можно связать две вещи.

Определение 6.1.8 (Орбита x)**.** $Gx \overset{def}{=} \{gx | g \in G\} \subset X$.

Определение 6.1.9 (Стабилизатор x)**.** $G_x \overset{def}{=} \{g \in G | gx = x\} \leqslant G$. В зависимости от конкретной природы действия его также называют *централизатор*, *нормализатор*, *подгруппа изотропии*.

Определение 6.1.10 (G действует на X транзитивно)**.** X состоит из одной орбиты:

$$\exists x \in X : Gx = X \overset{\text{здесь эквивалентно}}{\iff} \forall x \in X : Gx = X \overset{\text{здесь эквивалентно}}{\iff} \forall x, y \in X : \exists g \in G : gx = y$$

Ещё говорят X *является однородным* G*-множеством.*

Теорема 6.1.4. $Gx \cong G/G_x$ — изоморфизм G-множеств.

Доказательство. Рассмотрим $y \in Gx \iff \exists g \in G : y = gx$. Так как $\forall h \in G_x : x = hx$, то $\forall h \in G_x : y = (gh)x$.

Обратно: $y = g_1x = g_2x \Rightarrow g_2^{-1}g_1x = x \Rightarrow g_2^{-1}g_1 \in G_x$, то есть $g_1G_x = g_2G_x$.

Таким образом, $g_1x = g_2x \iff g_1G_x = g_2G_x$. Значит, можно сопоставить

$$Gx \longleftrightarrow G/G_x \qquad gx \longleftrightarrow gG_x$$

Теперь проверим, что это не просто изоморфизм множеств, а изоморфизм G-множеств:

$$\forall f \in G : fy = f(gx) = (fg)x$$ □

Другими словами, теорема утверждает, что никаких других однородных G-множеств, кроме факторов по стабилизаторам, нет.

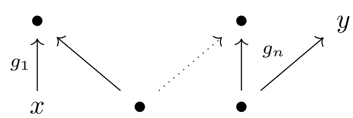
Следствие 6.1.5. $|Gx| = |G : G_x|$.

Лемма 6.1.3. *Две орбиты либо не пересекаются, либо совпадают.*

Доказательство. $\exists h, g \in G : hx = gy \Rightarrow y = g^{-1}hx \Rightarrow y \in Gx \Rightarrow Gy \subset Gx$. Аналогично $Gx \subset Gy$. □

Предостережение. Пусть S — моноид, действующий на X. Тогда нужно различать орбиты и *траектории*. $Sx = \{sx | s \in S\}$ — траектория.

Из того, что нашлись $h, g \in G : hx = gy$ совсем не следует, что траектории x и y совпадают — преобразование необратимо. Чтобы получить орбиты, надо взять транзитивное замыкание траекторий:



x и y здесь в одной орбите.

Согласно аксиоме выбора существует система представителей — *трансверсаль* к действию G на X.

Теорема 6.1.5. $X = \bigsqcup\limits_{x \in Y} Gx$, где Y — трансверсаль.

Для конечного трансверсаля $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_m$, где X_i — однородные G-множества.

Примеры.

- Подгруппа $H \leqslant G$ может действовать на группе трансляциями: $H \curvearrowright G; h, g \mapsto hg$. В этом случае орбиты — смежные классы $H \backslash G$, стабилизатор любого элемента — $\{1\}$. Можно выбрать трансверсаль $T, G = \bigsqcup\limits_{x \in T} xH$.

  Каждая орбита изоморфна $H \curvearrowright H$.

  Определение 6.1.11 (X — главное однородное пространство для G). $X \cong G$ как G-множество, то есть
  $$\forall x, y \in X : \exists! g : gx = y$$

  Как только изоморфизм фиксируется: $1 \mapsto x$ для конкретного x, X перестанет отличаться от G.

  Прослеживается аналогия с евклидовым пространством, в котором не выбрали начало координат.

- $G \curvearrowright G, g, x \mapsto {}^g x = gxg^{-1}$. В данном частном случае орбиты — *классы сопряжённых*, стабилизатор — *централизатор*: $C_G(x) = \{g \in G | {}^g x = x\}$.

  Согласно предыдущей теореме $x^G \cong G / C_G(x)$.

- Группа G может действовать на 2^G. В данном частном случае стабилизаторы — *нормализаторы*: для $Y \subset X$: $N_G(Y) \overset{def}{=} \{g \in G | {}^g Y = Y\}$.

Замечание. Вычисление жордановой формы — задача вычисления трансверсаля орбит группы $GL(n, R)$, на которой она сама ($GL(n, R)$) действует сопряжением.

6.2 Классификация G-множеств

Как мы уже знаем, $\forall G$-множества X: $X = \bigsqcup\limits_i X_i$, где X_i — однородное G-множество.

Всякое же однородное G-множество изоморфно G/H для $H \leqslant G$.

Когда для двух подгрупп $F, H \leqslant G : G/F \cong G/H$ — изоморфизм G-множеств?

Выберем произвольный $x \in G$. Пусть $X = Gx, y \in X$. Значит $X \cong G/G_x$, но так как $X = Gy$, то ещё и $X \cong G/G_y$. Рассмотрев $h \in G_y$ (используя, что $y = gx$ для некоего $g \in G$) получаем, что $g^{-1}hg \in G_x$.

Лемма 6.2.1. $\forall g \in G : \big(y = gx \Rightarrow g^{-1}G_y g = G_x\big)$, *то есть стабилизаторы точек в одной орбите сопряжены.*

Следствие 6.2.1. *F сопряжено с $H \Rightarrow G/F \cong G/H$ — изоморфизм G-множеств.*

Теорема 6.2.1 (Классификация однородных пространств)**.** Пусть $F, H \leqslant G$. Тогда $\underset{\text{изоморфизм } G\text{-множеств}}{G/F \cong G/H} \iff F \sim H$ (F и H сопряжены).

Доказательство.

- $\Leftarrow$. Доказано выше.
- $\Rightarrow$. Пусть $G/F \cong G/H$. Выберем $g \in G : F \mapsto gH$. Стабилизатор точки F (при действии $G \curvearrowright G/F$) — это F, стабилизатор точки gH (при действии $G \curvearrowright G/H$)— gHg^{-1}. Значит, $F \sim H$. $\square$

Таким образом, чтобы описать все G-множества, надо описать все подгруппы с точностью до сопряжения. Это, правда, дикая задача.

6.3 Конечные группы

Будем рассматривать конечные группы, действующие на конечных множествах.

6.3.1 Центр p-группы, теоремы Коши

Обозначим $\operatorname{Fix}_G(X) = X^G \overset{def}{=} \{x \in X | \forall g \in G : gx = x\}$. К сожалению, X^G уже ранее было задействовано в другом смысле. Очень жаль...

Пусть $p \in \mathbb{P}$ — простое.

Лемма 6.3.1. *Пусть $\forall H \leqslant G : H \neq G \Rightarrow |G : H| \,\vdots\, p$. При действии $G \curvearrowright X$: $\left|X^G\right| \equiv |X| \pmod p$.*

Доказательство. Посмотрим на орбиты. $X^G = \bigsqcup \widetilde{X}_i$, где $\widetilde{X}_i$ — одноэлементные орбиты. Значит, $X = X^G \sqcup X_1 \dots \sqcup X_m$, где X_i — различные орбиты, такие, что $|X_i| > 1$. Так как $|Gx_i| = |G : G_{x_i}|$, то $|Gx_i| \,\vdots\, p$. $\square$

Определение 6.3.1 (G — p-группа)**.** $|G| = p^m$ для некоего $m \in \mathbb{N}_0$.

Теорема 6.3.1 (Доказал Силов, но пока ещё не теорема Силова)**.** Если G — p-группа, то её центр нетривиален.

Доказательство. Рассмотрим $G \curvearrowright G$ — действие сопряжением. Центр — множество инвариантов (неподвижных точек) этого действия. Значит, $|\operatorname{Cent}(G)| \equiv |G| \pmod p$. $\square$

Следствие 6.3.1 (Нетте)**.** *Группы порядка p и p^2 абелевы.*

Доказательство. Для $|G| = p$ её центр — она сама. Предположим, что $|G| = p^2$, $|\operatorname{Cent}(G)| = p$. Тогда $|G/\operatorname{Cent}(G)| = p$, то есть $G/\operatorname{Cent}(G) \cong C_p$, откуда G — абелева (всякий элемент G представим в виде $g^i h$, где $0 \leqslant i < p, h \in \operatorname{Cent}(G)$. Легко видеть, что они коммутируют) $\square$

Теорема 6.3.2 (Коши)**.** Пусть $|G| \,\vdots\, p$. Тогда количество решений уравнения $x^p = 1$ делится на p.

Доказательство Маккея. Положим $X = \{(x_1, \dots, x_p) | x_i \in G; x_1 \cdot \ldots \cdot x_p = 1\} \underset{\text{как множество}}{\cong} G^{p-1}$. $|X| \vdots p$.

Рассмотрим действие $C_p \curvearrowright X$ оператором $\mathrm{RotateRight} : X \to X;\quad \mathrm{RotateRight}(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p) = (x_p, x_1, \dots, x_{p-1})$ — это действие произвольной образующей C_p, остальные определяются однозначно.

Неподвижные точки X^{C_p} — это в точности $\{(x, \dots, x) | x^p = 1\}$. Поэтому количество решений уравнения сравнимо с $|X|$ по модулю p. □

Интересный факт (Теорема Фробениуса). Если $|G| \vdots n$, то количество решений уравнения $x^n = 1$ в G делится на n.

Следствие 6.3.2. *В частности, в группе порядка, делящегося на p, существует* $x \neq 1 : x^p = 1 \overset{\text{здесь эквивалентно}}{\iff} o(x) = p$.

Следствие 6.3.3. *В p-группе нормализатор любой собственной подгруппы строго больше чем она.*

6.3.2 Теоремы Силова

Если G — абелева, то $G = \bigoplus\limits_{p \in \mathbb{P}, p \,|\, |G|} G_p$, где G_p — примарные компоненты. В неабелевых группах будет что-то отдалённо похожее.

Определение 6.3.2 ($G_p \leqslant G$ — силовская p-подгруппа)**.**

1. G_p — p-группа.
2. $|G : G_p| \perp p$.

Теорема 6.3.3 (Силов, E_p (existence))**.** Пусть G — конечная группа. Для любого $p \in \mathbb{P} : \exists H \leqslant G$ — силовская p-подгруппа.

Теорема 6.3.4 (Силов, C_p (conjugancy))**.** Для данного p любые две силовские p-подгруппы сопряжены в G.

Теорема 6.3.5 (Силов, D_p)**.** Если $H \leqslant G$, $H = p^l$, то найдётся силовская p-подгруппа, содержащая H.

Теорема 6.3.6 (Силов — Фробениус, F_p (Anzahlsatz))**.** Для любого $l \in \mathbb{N}_0 : p^l \mid |G| \Rightarrow \big|\{H \leqslant G \big| |H| = p^l\}\big| \equiv 1 \pmod p$.

В частности, количество силовских p-подгрупп делится на p с остатком 1.

Пример. Рассмотрим $GL(n, q) \overset{def}{=} GL(n, \mathbb{F}_q)$, где $q = p^m$.

$$|GL(n, q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \cdot \ldots \cdot (q^n - q^{n-1}) = q^{n(n-1)/2}(q^n - 1) \cdot \ldots \cdot (q - 1)$$

так как каждый столбец необходимо выбирать так, что он не лежит в линейной оболочке предыдущих.

Рассмотрим подгруппу $U(n, q)$, состоящую из верхних унитреугольных матриц $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & 1 & * \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. $|U(n, q)| = q^{n(n-1)/2}$. Значит, $U(n, q)$ — силовская p-подгруппа в $GL(n, q)$.

Первое доказательство Фробениуса теоремы Силова

Доказательство E_p. $G \underset{\text{теорема Кэли}}{\hookrightarrow} S_{|G|} \underset{\text{матрицы перестановки}}{\hookrightarrow} GL(|G|, p)$. Пусть $H = U(|G|, p)$ — силовская p-подгруппа в $GL(|G|, p)$.

Рассмотрим двойные смежные классы $G\backslash GL(|G|,p)/H$. Пусть $\{x_1,\dots,x_m\}$ — трансверсаль. Согласно формуле индекса Фробениуса

$$|GL(|G|,p):H| = |G:(G\cap x_1Hx_1^{-1})| + \dots + |G:(G\cap x_mHx_m^{-1})$$

Так как левая часть взаимно проста с p, то $\exists x_i : |G:(G\cap x_iHx_i^{-1})| \perp p$. Таким образом, $G\cap x_iHx_i^{-1}$ — силовская p-подгруппа в G. □

Замечание. У Фробениуса вместо $GL(|G|,p)$ была симметрическая группа, в которой p-подгруппу построить весьма нетривиально.

Доказательство C_p и D_p. Пусть $H,P\leqslant G$ причём $|P|=|G|_p$, где $|G|_p$ — p-часть числа, наибольшая степень p, делящая $|G|$.

Докажем, что если $|H|=p^m$, то $\exists g\in G: H^g\leqslant P$.

$H\backslash G/P = Hx_1P\sqcup\dots\sqcup Hx_sP$.

$$p\perp|G:P| = |H:(H\cap x_1Px_1^{-1})| + \dots + |H:(H\cap x_sPx_1^{-1})|$$

Так как H — p-группа, то в правой части — степени p. Значит, $\exists x_i : H = H\cap x_iPx_i^{-1} \Rightarrow H^{x_i}\leqslant P$. □

Доказательство частного случая F_p — для $p^l=|G|_p$. Рассмотрим множество силовских p-подгрупп $\mathrm{Syl}_p(G)$. Пусть $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$, рассмотрим действие сопряжениями $P\curvearrowright\mathrm{Syl}_p(G)$. Если Q — неподвижная точка действия, то P нормализует Q, то есть $PQ=QP$, откуда $PQ\leqslant G$.

Согласно формуле произведения $|PQ|\,\Big|\,|P|\cdot|Q|$. Значит, PQ — p-группа. Если $P\neq Q$, то $P\lneqq PQ$, силовская p-подгруппа не максимальна, противоречие.

Значит, у действия ровно одна неподвижная точка, откуда $|\mathrm{Syl}_p(G)|\equiv 1 \pmod p$. □

Формула классов, второе доказательство Фробениуса

Доказательство E_p. Пусть $|G|<\infty, p\,\Big|\,|G|$. Значит, $\exists x\in G: o(x)=p$.

Рассмотрим действие сопряжением $G\curvearrowright G$, выберем трансверсаль X к орбитам.

$$X = \mathrm{Cent}(G)\cup\underbrace{\{x_1,\dots,x_m\}}_{\text{представители нецентральных классов}}$$

Формула классов:

$$|G| = |\mathrm{Cent}(G)| + |G:C_G(x_1)| + \dots + |G:C_G(x_m)|$$

Индукция по $|G|$.

- Либо $|\mathrm{Cent}(G)|\,\vdots\,p$, тогда $\exists x\in\mathrm{Cent}(G): x^p=1$, тогда $|G/\langle x\rangle|\leqslant|G|$. В факторгруппе силовская p-подгруппа уже есть, $|Q|=p^{h-1}$, где $p^h=|G|_p$. Прообраз Q в G — группа $\pi^{-1}(Q)\langle x\rangle$, её порядок — как нужно.
- Либо $|\mathrm{Cent}(G)|\,\not\vdots\,p$. Значит, из формулы классов выше $\exists x_i : C_G(x_i)\lneqq G$, но $|G:C_G(x_i)|\perp p$. Тогда получается, что $|C_G(x_i)|_p=|G|_p$, найдём силовскую p-подгруппу по индукции.

□

Пример (Силовские p-подгруппы в S_n). Силовская подгруппа в S_p — это C_p. Силовская подгруппа в S_{p^2} порядка $|p^{p+1}|$ — это сплетение $C_p\wr C_p$ —можно переставлять элементы в каждом столбце таблицы $p\times p$, а ещё — переставлять сами столбцы.

Определение 6.3.3 ($H\leqslant G$ — холловская подгруппа)**.** $|H|\perp|G:H|$.

Пусть $\pi \subset \mathbb{P}$.

Определение 6.3.4 (G — π-группа)**.** $p \mid |G| \Rightarrow p \in \pi$.

Определение 6.3.5 (H — холловская π-подгруппа в G)**.** H — π-группа и $|G : H|$ взаимно прост со всеми $p \in \pi$.

Оказывается, $E_\pi, C_\pi, D_\pi, F_\pi$ — ничего из этого неверно.

Но можно добавить условие разрешимости G (определение было в I семестре, есть цепочка подгрупп, фактор следующей по предыдущей абелев, последняя подгруппа тривиальна). В разрешимых группах $E_\pi, C_\pi, D_\pi, F_\pi$ выполнены.

Более того, если для каждых двух простых существует холловская π-подгруппа, то сама группа разрешима??

6.4 Тождества с коммутаторами

Пусть G — произвольная группа.

Определение 6.4.1 (Левонормированный коммутатор)**.** $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$

Определение 6.4.2 (Коммутант)**.** $[G, G] = \langle [x, y] | x, y \in G \rangle$.

Из I семестра мы помним, что $[G, G] \trianglelefteq G$, $G/[G, G] = G^{\text{ab}}$ — абелева группа (абелианизация G), причём если $H \leqslant G, G/H$ — абелева, то $H \geqslant [G, G]$.

Определение 6.4.3 (Взаимный коммутант)**.** $[F, H] = \langle [f, h] | f \in F, h \in H \rangle$.

Предложение 6.4.1. $H \trianglelefteq G \iff [H, G] \leqslant H$.

1. $$[x, y]^{-1} = xyx^{-1}y^{-1} = yxy^{-1}x^{-1} = [y, x]$$
2. $$[xy, z] = xyzy^{-1} \underbrace{}_{z^{-1}x^{-1}xz} x^{-1}z^{-1} = {}^{x}[y, z] \cdot [x, z]$$
   соответствует дистрибутивности аддитивного коммутатора $[x, y] \overset{def}{=} xy - yx$ по первому аргументу.
3. $$[x, yz] = xy \underbrace{}_{x^{-1}y^{-1}yx} zx^{-1}z^{-1}y^{-1} = [x, y] \cdot {}^{y}[x, z]$$
   соответствует дистрибутивности аддитивного коммутатора по второму аргументу.
4. **Определение 6.4.4** (Тройной коммутатор)**.** $[x, y, z] = [[x, y], z] = xyx^{-1}y^{-1}zyxy^{-1}x^{-1}z^{-1}$.

   Определение 6.4.5 (Кратный коммутатор)**.** $[x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$.

   Лемма 6.4.1 (Холл — Витт)**.**
   $$[x, y^{-1}, z^{-1}]^x \cdot [z, x^{-1}, y^{-1}]^z \cdot [y, z^{-1}, x^{-1}]^y = 1$$

   Доказательство. «Мы оставляем читателю в качестве упражнения расписать тройные коммутаторы» □

Определение 6.4.6. $[A, B, C] = [[A, B], C]$.

Лемма 6.4.2 (О трёх подгруппах)**.** *Пусть $A, B, C \leqslant G; H \trianglelefteq G$. Если две из трёх*

$$[A, B, C] \quad [B, C, A] \quad [C, A, B]$$

содержатся в H, то и третья — тоже.

Доказательство. Тождество Холла — Витта. □

Лекция XXIII

16 мая 2023 г.

6.5 Прямое произведение двух подгрупп

Если F, H — произвольные группы, то определено внешнее прямое произведение — группа, в которую они обе вкладываются.

Определение 6.5.1 (Внешнее прямое произведение)**.** $F, H \rightsquigarrow F \times H \overset{def}{=} \{(f,h) | f \in F, h \in H\}$, где операции покомпонентны.

$$F \hookrightarrow F \times H \hookleftarrow H; \quad f \mapsto (f,1) \quad (1,h) \leftarrow h$$

Пусть теперь $F, H \leqslant G$. Когда $G \cong F \times H$? Нас даже интересует естественный изоморфизм, когда вложения $F, H \hookrightarrow F \times H$ тождественные.

Теорема 6.5.1. G является прямым произведением F и H, если выполнены условия

1. $\langle F, H \rangle = G$.
2. $F \cap H = \{1\}$.
3. $F, H \trianglelefteqslant G$.

Доказательство. Если G — прямое произведение F, H, то условия выполнены. Докажем в другую сторону.

Из 1+3 вытекает $G = FH = HF$, то есть $\forall g \in G : \exists f, h, f', h' : g = fh = h'f'$.

Из 2+3 вытекает $[F, H] = \{1\}$. В самом деле,

$$[f,h] = \underbrace{(fhf^{-1})}_{\in H} h^{-1} = f \underbrace{(hf^{-1}h)}_{\in F}$$

Далее получаем, что все элементы F, H коммутируют, поэтому $\forall g \in G : \exists! f \in F, h \in H : g = fh = hf$. Единственность легко показать от противного.

Сопоставим всякому $g \in G : (f,h) \in F, H : fh = g$ (такая пара единственна).

$$g_1 = f_1 h_1, g_2 = f_2 h_2 \Rightarrow g_1 g_2 = (f_1 h_1)(f_2 h_2) = (f_1 f_2)(h_1 h_2)$$ □

Теперь займёмся ослаблением условий теоремы.

Определение 6.5.2 (G — центральное произведение $F, H \leqslant G$)**.**

1. $\langle F, H \rangle = G$.
2. $[F, H] = \{1\}$.
3. $F, H \trianglelefteqslant G$.

Доказательство остаётся прежним, по-прежнему каждому элементу $g \in G$ можно (но уже необязательно единственным образом) сопоставить $(f,h) \in F \times H : fh = g$. Центральные элементы $z \in F \cap H$ можно перебрасывать: $g = (fz)(z^{-1}h)$ (они центральные, так как они коммутируют и с F, и с H).

Определение 6.5.3 (G — почти прямое произведение $F, H \leqslant G$)**.**

1. $\langle F, H \rangle = G$.
2. $|F \cap H| < \infty$.
3. $F, H \trianglelefteqslant G$.

Определение 6.5.4 (G — подпрямое произведение $F, H \leqslant G$).

1. $G \leqslant F \times H$.
2. Проекции G на F и H сюръективны.

6.5.1 Прямое произведение нескольких подгрупп

Пусть $H_1, \ldots, H_m \leqslant G$. Когда $G \cong H_1 \times \cdots \times H_m$ естественным образом, то есть естественные включения — вложения?

Теорема 6.5.2. G является прямым произведением $H_1, \ldots, H_m$, если выполнены условия

1. $\langle H_1, \ldots, H_m \rangle = G$.
2. $H_i \cap \left\langle H_1, \ldots, \widehat{H_i}, \ldots, H_m \right\rangle = \{1\} \iff H_i \cap \left(H_1 \cdot \ldots \cdot \widehat{H_i} \cdot \ldots \cdot H_m\right) = \{1\}$.
3. $H_1, \ldots, H_m \trianglelefteq G$.

Доказательство. Оставлено читателю в качестве упражнения. Легче всего по индукции. □

6.5.2 Прямое произведение многих подгрупп

Что такое $\prod\limits_{i \in I} G_i$, где $G_i \leqslant G, I$ — произвольное множество индексов?

Элементы произведения — $\{(g_i)_{i \in I} | g_i \in G_i\}$, либо $\{(g_i)_{i \in I} | g_i \in G_i$, почти все $g_i = 1\}$. В алгебре «почти все» — все кроме конечного числа.

Обе конструкции — частный случай *ограниченного прямого произведения*:

$$\prod_{i \in I} {}_{H_i} G_i = \{(g_i)_{i \in I} | g_i \in G_i, \text{ почти все } g_i \in H_i\}$$

6.6 Полупрямое произведение

Пусть $F, H \leqslant G$.

Определение 6.6.1 (G — полупрямое произведение нормальной подгруппы H и дополнительной подгруппы F).

1. $\langle F, H \rangle = G$.
2. $|F \cap H| = \{1\}$.
3. $H \trianglelefteq G$.

Обозначают $G = F \leftthreetimes H = H \rightthreetimes F$.

По-прежнему $G = FH = HF$, но они уже необязательно коммутируют: известно лишь, что $[F, H] \leqslant H$.

$$\forall g \in G : \exists! f, f' \in F, h, h' \in H : g = fh = h'f'$$

Так как коммутант лежит в H, то на самом деле $f = f'$: $h'f' = (fhf^{-1})f$.

Как эти элементы перемножать?

$$g_1 = h_1 f_1, g_2 = h_2 f_2 \Rightarrow g_1 g_2 = (h_1 f_1)(h_2 \underbrace{\quad}_{f_1^{-1} f_1} f_2) = (h_1 f_1 h_2 f_1^{-1})(f_1 f_2) = (h_1 \cdot {}^{f_1} h_2)(f_1 f_2)$$

Замечание. При перемножении $f_1 h_1 \cdot f_2 h_2$ появляется сопряжение не элементом f_1, а элементом f_1^{-1}, что потом породит не гомоморфизмы, а антигомоморфизмы.

Пусть нам даны

1. Группы F и H.
2. Гомоморфизм $\theta : F \to \mathrm{Aut}(H)$.

Определение 6.6.2 (Полупрямое произведение, отвечающее «действию автоморфизмами» θ)**.** $H \rtimes_\theta F \overset{def}{=} \{(h, f) | h \in H, f \in F\}$ с действием, определённым так:

$$(h_1, f_1) \cdot (h_2, f_2) = (h_1\theta(f_1)(h_2), f_1 f_2)$$

Теорема 6.6.1. $H \rtimes_\theta F$ — группа, изоморфная полупрямому произведению своих подгрупп $H^1 = \{(h, 1) | h \in H\}$ и $F^1 = \{(1, f) | f \in F\}$.

Группа является полупрямым произведением подгрупп, если факторгруппа вкладывается.

Более общим примером, примером *расширения* является конструкция $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ из групп единиц и десятков:

$$1 \to \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \to 1$$

Замечание. Для нетривиального действия полупрямое произведение двух абелевых групп вполне может стать неабелевым.

Примеры (Полупрямое произведение).

- Рассмотрим следующие подгруппы в $GL(n, K)$:

$$\underset{\text{Борелевские — (верхне) треугольные матрицы}}{B(n,K) = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{диагональные матрицы}}{D(n,K) = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{(верхние) унитреугольные матрицы}}{U(n,K) = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{B = D \rightthreetimes U}$$

- $N(n, K)$ — группа мономиальных матриц, то есть $N = \left\{ x \in GL(n, K) \middle| \begin{cases} \forall i : \exists! j : x_{i,j} \neq 0 \\ \forall j : \exists! i : x_{i,j} \neq 0 \end{cases} \right\}$.
  W_n — матрицы перестановки, то есть $W_n = \{x \in N(n, K) | \forall i, j : x_{i,j} = 0 \vee x_{i,j} = 1\}$. $W_n \cong S_n$.

$$\boxed{N = W_n \rightthreetimes D}$$

- Группа аффинных матриц $Aff(n, K) = \left\{ \begin{pmatrix} g & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| g \in GL(n, K), u \in K^n \right\}$. Группа отвечает аффинным движениям, то есть композиции вращения относительно начала координат (за это отвечает $GL(n, K)$) и параллельного переноса (за это отвечает K^n).

$$\begin{pmatrix} g_1 & u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_2 & u_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 g_2 & g_1 u_2 + u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{GL(n, K) \rightthreetimes K^n = Aff(n, K)}$$

6.7 Группы порядка pq

Пусть $p < q$ — различные простые числа, G — группа ($|G| = pq$). Как она выглядит?

В ней совершенно точно есть силовские подгруппы $P, Q \leqslant G, |P| = p, |Q| = q$. Число силовских q-подгрупп сравнимо с $1 \pmod q$, но так как это число — делитель pq (число классов сопряжённости к Q), то оно равно 1. Значит, в G ровно одна силовская q-подгруппа, она инвариантна относительно сопряжения, то есть $Q \trianglelefteq G \Rightarrow G = P \leftthreetimes Q$.

Как известно, группа простого порядка p единственна с точностью до изоморфизма — все порядки элементов делят размер группы, таким образом, есть элемент порядка p, то есть группа циклическая.

G определяется действием $P \curvearrowright Q$ автоморфизмами $\theta : P \to \operatorname{Aut}(Q)$. Автоморфизмы C_q отправляют произвольную образующую в произвольную, они изоморфны C_{q-1}.

Очевидно, есть тривиальный $\theta : P \to \mathrm{id}$. Он соответствует абелевой группе $C_p \times C_q$.

Заметим, что нетривиальный гомоморфизм θ существует, если $p \mid q - 1$.

Зафиксируем результат:

Теорема 6.7.1. Неабелевые группы порядка pq, где $p < q, p, q \in \mathbb{P}$ существуют только если $p \mid q-1$.

Примеры.

- Все группы порядка 15 абелевые.
- Есть неабелевая группа (группа Фробениуса) порядка 21.

Вообще, верен более общий факт:

Интересный факт (Теорема Диксона). $\gcd(n, \phi(n)) = 1 \iff \exists! |G| = n$ (и эта группа абелева).

Лекция XXIV

17 мая 2023 г.

6.8 Крохотный кусок комбинаторной теории групп

6.8.1 Свободные группы

Пусть X — множество.

Определение 6.8.1 (Свободная группа F_X со свободным множеством образующих X)**.** Группа вместе с вложением $X \hookrightarrow F_X$, такая, что $\forall$ группы $G, \forall \phi : X \to G$: $\exists! \psi : F_X \to G$ — гомоморфизм групп, делающий следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, hook, "\eta"] \arrow[dr, "\phi"'] & & F_X \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Обычно X конечно, мы будем рассматривать конечнопорождённые свободные группы. В таком случае если $|X| = n$, то пишут F_n вместо F_X.

Замечание. Если бы в определении были абелевы группы, то это были бы в точности свободные модули над $\mathbb{Z}$.

Замечание. Если свободная группа существует, то она единственна, причём с точностью до единственного изоморфизма.

В самом деле, если есть две свободные группы F_X и $\widetilde{F_X}$ со вложениями $\eta : X \hookrightarrow F_X, \widetilde{\eta} : X \hookrightarrow \widetilde{F_X}$, то существуют и единственны гомоморфизмы групп $\psi : F_X \to \widetilde{F_X}$, $\widetilde{\psi} : \widetilde{F_X} \to F_X$, такие, что

$$\forall x \in X : \psi(\eta(x)) = \widetilde{\eta}(x) \qquad \widetilde{\psi}(\widetilde{\eta}(x)) = \eta(x)$$

Таким образом, видно (например, из конструкции свободной группы, которая приведена ниже), что ψ и $\widetilde{\psi}$ взаимно обратные отображения, то есть $\psi : F_X \to \widetilde{F_X}$ — изоморфизм. Он единственный, так как единственный гомоморфизм групп $\psi : F_X \to \widetilde{F_X}$.

Определение 6.8.2 (Свободный моноид W_X со свободным множеством образующих X)**.** Моноид вместе с вложением $X \hookrightarrow W_X$, такой, что $\forall$ моноида $S, \forall \phi : X \to S$: $\exists! \psi : W_X \to G$ — гомоморфизм моноидов, делающий следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, hook, "\eta"] \arrow[dr, "\phi"'] & & W_X \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

Лемма 6.8.1. *Свободный моноид уж точно существует.*

Доказательство. Моноид с множеством образующих X — это просто набор слов. Так, для $X = \{a, b\}$: $W_X \overset{def}{=} \{\wedge, a, b, aa, ab, ba, bb, aba, \ldots\}$.

Операцией в моноиде является конкатенация: $(x_1 \ldots x_n) * (y_1 \ldots y_m) = x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_m$. Эта операция ассоциативна, но некоммутативна.

Таким образом, $(W_X, *, \wedge)$ — свободный моноид (слова равны, если они физически равны; для отображения $\phi : X \to S$ гомоморфизмом $\psi : W_n \to X$ является тот, который отправляет слово $x_1 \ldots x_n \in W_X$ в $\phi(x_1) \cdot \ldots \cdot \phi(x_n) \in S$). $\square$

Теорема 6.8.1. Для любого множества образующих X существует свободная группа.

Доказательство. Удвоим алфавит: выберем множество $X' : |X'| = |X|$ вместе с биекцией $X \leftrightarrow X'; x \leftrightarrow x'$ и построим свободный моноид $W_{X \sqcup X'}$. Введём на $W_{X \sqcup X'}$ отношение эквивалентности $\sim$, являющееся транзитивным замыканием отношения предэквивалентности

$$\forall u, v \in W_{X \sqcup X'}, x \in X : uxx'v \sim uv \sim ux'xv$$

Определим $F_X \overset{def}{=} (W_{X \sqcup X'})/\sim$ с наследованной от моноида операцией. Очевидно, она определена корректно: $w_1 \sim w_1'; w_2 \sim w_2' \Rightarrow w_1 w_2 \sim w_1' w_2'$. Более того, она осталась ассоциативной, а класс эквивалентности пустого слова $[\wedge]$ — нейтральный элемент. Операция взятия обратного в группе работает так: $(x_1 \ldots x_n)^{-1} = x_n' \ldots x_1'$.

Определим $\psi : W_{X \sqcup X'} \to G$ аналогично: $\psi(x_1 \ldots x_n) = \phi(x_1) \cdot \ldots \cdot \phi(x_n)$ (правда для этого придётся доопределить ϕ на X': $\phi(x_i') \coloneqq \phi(x_i)^{-1}$).

Так как отношение эквивалентности лежит в ядре (множество элементов, эквивалентных тривиальному слову лежит в $\mathrm{Ker}(\psi)$), то ψ пропускается через фактор:

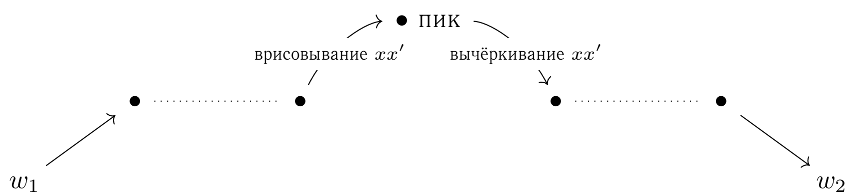
$$\begin{tikzcd}
& & W_{X \sqcup X'} \arrow[dl, dotted, "\sim"'] \arrow[ddl, dashed, "\psi"] \\
X \arrow[urr, hook] \arrow[r] \arrow[dr, "\phi"'] & F_X \arrow[d, dotted] & \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Пропущенный через фактор ψ и есть искомый гомоморфизм групп — он сохраняет произведение, единицу и обратные. Более того, из построения видно, что это — единственный способ его построить, поэтому гомоморфизм групп действительно единственный. $\square$

Определение 6.8.3 (Редуцированное (приведённое) слово $w \in W_{X \sqcup X'}$)**.** Слово, в котором нет фрагментов вида xx' или $x'x$.

Теорема 6.8.2. В каждом классе эквивалентности слов есть единственное редуцированное.

Доказательство. Пусть есть два редуцированных слова $w_1 \sim w_2$. Они эквивалентны, так как есть цепочка отношений предэквивалентностей $w_1 = u_1 \sim \cdots \sim u_n = w_2$.



Выберем среди всех таких цепочек цепочку с минимальной длиной максимального слова, а среди этих — с минимальным количеством слов максимальной длины.

Так как слова редуцированные, то в цепочке отношений предэквивалентности первый шаг был вверх — в удлинение слова, а последний — вниз. Значит, где-то был пик. Надо рассмотреть три варианта:

1. Врисовали и вычеркнули одну и ту же пару — эти два шага можно взаимоуничтожить.
2. Врисовали и вычеркнули соседнюю пару букв — лишь один символ задействован в обоих операциях. Эти два шага тоже можно взаимоуничтожить.
3. Врисовали и вычеркнули различную пару букв. Эти два шага можно поменять местами.

Во всех случаях получили новую цепочку, у которой либо длина максимального слова меньше, либо та же, но слов такой длины меньше. Противоречие — мы выбрали уже минимальную. Значит, пика нет, слова просто равны: $w_1 = w_2$.

Существование редуцированного слова очевидно, так как можно взять самое короткое в классе — его не укоротить. □

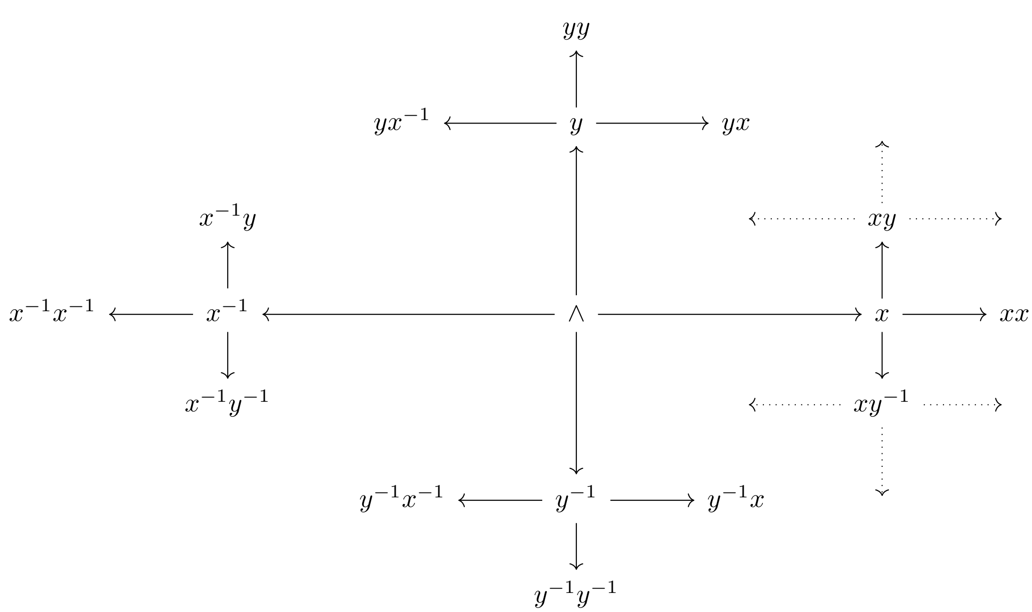
Обозначим $\overline{w}$ — приведённое слово в классе $[w]$.

Следствие 6.8.1. *В качестве F_X можно выбрать не фактормоноид, а множество редуцированных слов. Тогда вместо конкатенации $*$ надо ввести операцию на группе $w_1, w_2 \mapsto [w_1 * w_2]$.*

Из единственности редуцированного слова можно проверить, что новая операция тоже ассоциативна: $\overline{\overline{u} * \overline{v}} = \overline{u * v}$

Основная свободная группа, которая нам встретится в топологии — фундаментальная группа букета окружностей (или плоскости с выколотыми точками), котёнок с катушкой.

Ещё свободную группу можно мыслить так:



Эту картинку надо рисовать не на евклидовой плоскости, а на гиперболической, тогда все стрелки будут одинакового размера и всё поместится.

Если же отождествить xy и yx, так как на ровной картинке они попадают в одну точку, то это будет уже абелева группа.

6.8.2 Задание группы образующими соотношениями

Пусть $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$, $X = \{x_1, \dots, x_m\}$.

По определению свободной группы существует и единственный гомоморфизм $\psi : F_X \to G, x_i \mapsto g_i$. Значит, G является факторгруппой свободной группы.

$$1 \to R \to F_X \to G \to 1$$

R — первая буква слова relations, соотношения, g_i — generators, образующие.

Значит, $G \cong F_X/R$, как же описать R? Проблема в том, что кроме тривиальных случаев R бесконечно велико.

Хочется взять образующие для R, но оказывается, что в общем случае даже их бесконечно много. Однако R — ядро гомоморфизма, то есть нормальная подгруппа в F_X. Значит, можно взять её образующие, как образующие нормальной подгруппы.

Если $\psi(w) = 1_G$, то $\psi(uwu^{-1}) = \psi(u)\psi(w)\psi(u)^{-1} = 1_G$, то есть соотношения выписываются с точностью до сопряжения. Любая такая система образующих — система определяющих соотношений (defining relations).

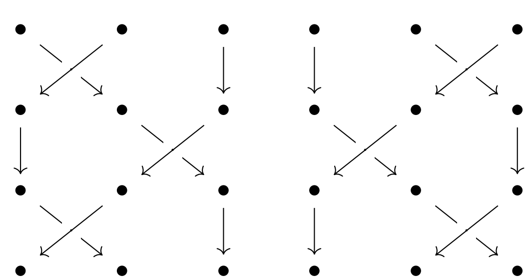
Определение 6.8.4 (Группа с образующими $g_1, \dots, g_n$ и определяющими соотношениями $w_1, \dots, w_m$**)**. $G \cong \langle g_1, \dots, g_n | w_1, \dots, w_m \rangle$

Сама такая запись группы — presentation, копредставление или задание образующими соотношениями.

Примеры.

- Свободная абелева группа $\mathbb{Z}^n \cong \langle x_1, \dots, x_n | x_i x_j = x_j x_i \rangle \cong \langle x_1, \dots, x_n | [x_i, x_j] \rangle$. Часто удобно писать соотношения в виде $w_1 = w_2$, это по определению то же самое, что и соотношение $w_1 w_2^{-1}$.
- $C_n = \langle g | g^n \rangle = \langle g | g^n = 1 \rangle$ — возможно, вторая запись нагляднее.
- $D_n = \langle x, y \rangle \, x^2 = y^2 = (xy)^n = 1$.
- $Q_8 = \left\langle x, y | x^4 = y^4 = 1, x^2 = y^2, xy = yx^3 \right\rangle$. Здесь есть ровно восемь слов: $1, x, y, x^2 = y^2, xy = yx^3, \dots$
- $S_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} | (s_i^2 = 1) \wedge (\forall i, j : |i - j| > 2 \Rightarrow [s_i, s_j] = 1) \wedge \underbrace{s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}}_{(s_i s_{i+1})^3 = 1} \rangle$,

  где $s_i = ([i][i+1])$ — фундаментальная транспозиция, они же кокстеровские образующие. Соотношение $xyx = yxy$ носит название braid relation, отношение в группе кос (косы имеются в виду те, которые девушки заплетают).

  Эти косы гомотопически изоморфны.

Если в копредставлении S_n забыть про отношение $s_i^2 = 1$, то получим группу кос

$$B_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} | (\forall i, j : |i-j| > 2 \Rightarrow [s_i, s_j] = 1) \wedge s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \rangle$$

Факт 6.8.1. *Группа с большим множеством соотношений — факторгруппа группы с меньшим числом соотношений:*

$$\langle X|R \rangle \to \langle X|R \cup S \rangle \to 1$$

Доказательство. Теорема фон Дика. □

Следствие 6.8.2. $B_n \to S_n \to 1$*: симметрическая группа — факторгруппа группы кос.*

Примеры.

- $PSL(2,\mathbb{Z}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — фактор $SL(2,\mathbb{Z})$ по центру. $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. $PSL(2,\mathbb{Z}) = \left\langle x, y | x^2 = y^3 = 1 \right\rangle$. Что здесь произошло? Определяющие соотношения бьются на соотношения по разным образующим, это называют свободным произведением:

  $$\langle X \sqcup Y | R \sqcup S \rangle = \langle X|R \rangle \star \langle Y|S \rangle$$

  где R — соотношения только на X, S — соотношения только на Y.

  Получается, $PSL(2,\mathbb{Z}) \cong C_2 \star C_3$ — свободное произведение двух очень маленьких групп — бесконечно.

- Для $SL(2,\mathbb{Z})$ фактора по центру нет. $SL(2,\mathbb{Z}) = C_4 \star_{C_2} C_6$ — уже не свободное произведение, а какое-то хитрое.