

Комплексный анализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Оглавление

1	Комплексный анализ	2
1.1	Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути	3
1.1.1	Про дифференциальные формы	3
1.1.2	Про интегрирование	3
1.1.3	Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути	4
1.1.4	Сумма путей	4
1.1.5	Альтернативное определение	4
1.1.6	(Не)зависимость от параметризации	6
1.2	Условия существования первообразной у дифференциальной формы	6
1.3	Операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$	9
1.3.1	Связь с голоморфными функциями	10

Глава 1

Комплексный анализ

Лекция I

16 февраля 2024 г.

Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, где открытое $G \subset \mathbb{C}$.

Определение 1.0.1 (f голоморфна в $z_0 \in G$). $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \stackrel{\text{def}}{=} f'(z_0)$.

Во втором семестре мы проверяли, что $f = u + iv$ (где $u, v : G \rightarrow \mathbb{R}$) голоморфна в $z_0 \iff f$ дифференцируема в вещественном смысле, и выполняются уравнения Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Определение 1.0.2 (f аналитична в G). $\forall z_0 \in G : \exists c_j \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \quad (*)$$

где ряд сходится не только при $z = z_0$.

Теорема 1.0.1. f аналитична в $G \iff f$ голоморфна во всех точках G .

Доказательство.

\Rightarrow . Доказали во втором семестре, несложно.

\Leftarrow . Скоро займёмся, время пришло. □

Из представления (*) следует, что производная в точке z считается почленно: $f'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j (z - z_0)^{j-1}$. В частности, отсюда получается, что $f'(z_0) = c_1$, и вообще $f^{(n)}(z_0) = j! \cdot c_j$.

Вскоре мы увидим, что ситуация разительно отличается от вещественной: в вещественном случае были разные классы — дифференцируемые функции, C^1 , C^∞ , аналитичные, и множество промежуточных классов.

В комплексном же случае, если функция хотя бы один раз дифференцируема, то окажется, что этого достаточно, чтобы она была не просто дифференцируема, а непрерывно дифференцируема, бесконечно дифференцируема, и даже аналитична.

1.1 Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути

1.1.1 Про дифференциальные формы

Определение 1.1.1 (Линейная функция $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$). $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n : l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y)$.

Определение 1.1.2 (Линейная форма на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$). Функция двух переменных $\phi : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, линейная по второму аргументу.

В пространстве \mathbb{R}^n имеется базис (e_j) : $h = e_1 h_1 + \dots + e_n h_n$.

Тем самым, $\phi(x, h) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\phi(x, e_j)}_{=: g_j(x)} h_j = \sum_{j=1}^n g_j(x) h_j$.

Введём *базисные линейные формы* $dx_j(u, h) = h_j$, игнорирующую первую координату, и возвращающую j -ю компоненту второго аргумента. Теперь $\phi(x, h)$ разложилась в сумму $\sum_{j=1}^n g_j dx_j$.

Пример. Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ — дифференцируемая в G функция. Заметим, что её дифференциал $d_f(x, _)$ — в точности линейная форма на G .

При разложении по базису получится $d_f(x, _) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j$.

Вскоре мы увидим, что далеко не всякая линейная форма является чьим-то дифференциалом.

Если $\phi = \sum_{j=1}^n g_j dx_j$ — дифференциал функции f , то непременно $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Тот факт, что ϕ является дифференциалом f , можно сказать наоборот: f является первообразной ϕ .

1.1.2 Про интегрирование

Рассмотрим монотонную функцию $\Phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Как и при определении стилтьесовой длины, будем считать, что Φ определена на некотором открытом множестве, содержащем $\langle a, b \rangle$. Обозначим за l_Φ стилтьесову длину, отвечающую функции Φ .

Пускай λ_Φ — продолжение стилтьесовой длины l_Φ по Лебегу — Каратеодори.

Она, как водится, определена на некоторой Σ -алгебре, в которой есть борелевские множества, но измеримы могут быть и какие-то другие множества, зависящие от конкретной функции Φ .

Примеры.

- Так, функция $\phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ порождает дельта-меру δ_0 , относительно которой все множества измеримы.

Кроме того, эта мера сингулярна относительно стандартной меры Лебега.

- Может показаться, что так происходит из-за разрывности ϕ , но это не так.

Рекурсивно определим канторову лестницу $C : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$:



Построив по данной функции стилтьесову длину λ_C , мы получим меру, сосредоточенную на канторовом множестве меры нуль.

Её носитель — само канторово множество, так как на всех отрезках вне канторова множества λ_C равна нулю. Она сингулярна относительно стандартной меры Лебега на \mathbb{R} , и её измеримые множества разительно отличаются от измеримых множеств меры Лебега.

По мере Стильеса можно интегрировать: если v является λ_Φ измеримой (в частности, измерима по Борелю и непрерывна), то определён интеграл $\int_{\langle a, b \rangle} v d\lambda_\Phi$. Иногда пишут просто $\int_{\langle a, b \rangle} v d\Phi$.

Теперь пусть $I = [a, b]$, и $\Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. В таком случае $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$, где некие Φ_1, Φ_2 возрастают. Можно определить знакопеременную меру $\lambda_\Psi \stackrel{def}{=} \lambda_{\Phi_1} - \lambda_{\Phi_2}$, понятно, что определение корректно.

1.1.3 Интеграл от дифференциальной формы вдоль пути

Пускай $\gamma : [a, b] \rightarrow G \subset \mathbb{R}^n$ — спрямляемый путь (путь конечной длины). Пускай $U = \sum_{j=1}^n u_j dx_j$ — дифференциальная форма в области G . Если не сказано противное, будем считать, что u_j — непрерывные функции.

Определение 1.1.3 (Интеграл от U вдоль пути γ). $\int_\gamma U \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^n \int_{[a, b]} u_j(\gamma(t)) d\gamma_j(t)$.

Здесь $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Так как путь спрямляем, то все γ_j — ограниченной вариации, каждая порождает свою меру Стильеса, и определение интегрирует композицию $U \circ \gamma$ по данной мере.

1.1.4 Сумма путей

Пускай имеются два отрезка $[a, c]$ и $[c, d]$, и на них заданы пути $\gamma_1 : [a, c] \rightarrow G$, $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow G$. Предположим, что $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$.

Тогда можно устроить путь $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a, d] \rightarrow G$, $\gamma(t) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, c] \\ \gamma_2(t), & t \in [c, d] \end{cases}$.

Замечание. Интеграл аддитивен по множеству: $\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} U = \int_{\gamma_1} U + \int_{\gamma_2} U$.

1.1.5 Альтернативное определение

Далее мы не интересуемся никакими чудесами вроде канторовых лестниц, и считаем, что Φ такова, что λ_Φ абсолютно непрерывна относительно стандартной меры Лебега.

А раз так, то по теореме Радона — Никодима \exists суммируемая $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что

$$\lambda_\Phi(e) = \int_e w(x) dx \quad (+)$$

Факт 1.1.1. Формула (+) заведомо верна, если Φ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, тогда $w = \Phi'$.

Доказательство. Введём меру $\nu(e) = \int_e \Phi'(x) dx$, заданную на измеримых по Лебегу множествах. Φ' непрерывна, и, следовательно, измерима.

Если $\langle c, d \rangle \subset [a, b]$, то $\nu(\langle c, d \rangle) = \int_{\langle c, d \rangle} \Phi'(x) dx = \Phi(d) - \Phi(c) = l_\Phi(\langle c, d \rangle)$.

Таким образом, из теоремы единственности, продолжение l_Φ по Лебегу — Каратеодори совпадает с $\int_e \Phi'(x) dx$. \square

Замечание. Утверждение (факт 1.1.1) сохраняет силу, если Φ непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема.

Далее где-то используется Φ , а где-то β , надо убедиться, что это везде одно и то же, и заменить. Пускай $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, кусочно-непрерывно дифференцируемая: $\exists a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$, такие, что β непрерывно дифференцируема на $[a_s, a_{s+1}]$ при $0 \leq s < k$. Введём $\rho(e) = \int_e \beta'(x) dx$ — это знакопеременная вещественная мера.

У данной меры возникают (см. разложение Хана) положительная и отрицательная части $\rho_+(e) \stackrel{def}{=} \int_e (\beta')_+(x) dx$ и $\rho_-(e) \stackrel{def}{=} \int_e (\beta')_-(x) dx$

Если обозначить за $\Phi_+(t) = \int_0^t (\beta')_+(x) dx$ и $\Phi_-(t) = \int_0^t (\beta')_-(x) dx$, то окажется, что соответствующие меры Стильеса совпадают с ρ_+ и ρ_- .

Более того, $\beta = \Phi_+ - \Phi_-$ — получили разложение функции ограниченной вариации в положительную и отрицательную части.

Замечание. Это разложение экономнее, чем то, которое было получено ранее — ранее в качестве Φ_+ выбиралась вариация Φ .

Если всё, что написано выше, собрать вместе, то получится

$$\boxed{\int_{[s,t]} v d\Phi = \int_{[s,t]} v(x) \beta'(x) dx}$$

Далее «гладкий» используется, как синоним к непрерывно-дифференцируемому.

Следствие 1.1.1 (Можно считать определением). Если $U = \sum_{j=1}^n u_j dx_j$ — дифференциальная форма в G с непрерывными коэффициентами, а $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow G$ — спрямляемый кусочно-гладкий путь, то

$$\int_\gamma U = \sum_{j=1}^n \int_a^b u_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt$$

1.1.6 (Не)зависимость от параметризации

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — кусочно-гладкий путь, $\psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ — гладкий гомеоморфизм.

Теперь $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$ — перепараметризация γ

Лемма 1.1.1. Для всякой формы U :

$$\int_{\tilde{\gamma}} U = \pm \int_{\gamma} U$$

Знак $+$ выбирается, если ψ возрастает, и $-$ если убывает.

Доказательство. Предположим, что γ — гладкий путь, иначе применяем к кусочкам гладкости по отдельности.

$$\int_{\tilde{\gamma}} U = \sum_{j=1}^n \int_c^d u_j(\gamma(\psi(t))) \gamma'_j(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt = \left\| \begin{array}{l} \tau = \psi(t) \\ d\tau = \psi'(t) dt \end{array} \right\| = \sum_{j=1}^n \int_{\psi(c)}^{\psi(d)} u_j(\gamma(\tau)) \gamma'_j(\tau) d\tau = \pm \int_{\gamma} U \quad \square$$

Про ψ также можно считать, что это он не гладкий, а лишь кусочно-гладкий.

Тем самым, можно определить сумму путей для непересекающихся отрезков: для двух путей $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow G, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow G$ (при условии $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$) можно один из отрезков-прообразов линейным возрастающим преобразованием перевести в отрезок, соприкасающийся со вторым (например, $t \mapsto t + (b - c)$).

Также есть понятие обратного пути $\gamma_{-1}(t) = \gamma(a + b - t)$. Для любой формы U :

$$\int_{\gamma \oplus \gamma_{-1}} U = \int_{\gamma} U + \int_{\gamma_{-1}} U = \int_{\gamma} U - \int_{\gamma} U = 0$$

1.2 Условия существования первообразной у дифференциальной формы

Теорема 1.2.1. Если у дифференциальной формы U в открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ имеется первообразная F , то для всякого кусочно-гладкого пути $\gamma : [a, b] \rightarrow G$

$$\int_{\gamma} U = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Доказательство. $U = \sum_{j=1}^n g_j dx_j$, где $g_j(w) = \frac{\partial}{\partial x_j} F(w)$. Считаем, что путь гладкий.

$$\int_{\gamma} U = \sum_{j=1}^n \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_j} F(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (F \circ \gamma)(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Если же путь всего лишь кусочно-гладкий, то надо разбить отрезок на подотрезки гладкости, и сложить. \square

Следствие 1.2.1. Если у дифференциальной формы U есть первообразная, то её интегралы по всем путям с данными началом и концом, равны.

Оказывается, верно и обратное.

Лекция II
26 февраля 2024 г.

Лемма 1.2.1. Пусть G — область в \mathbb{R}^n , тогда любые две её точки можно соединить ломаной (кусочно-линейным путём).

Доказательство. Выберем $x_0 \in G$, положим $U = \{y \in G \mid \text{существует ломаная с началом в } x_0 \text{ и концом в } y\}$.

Покажем, что U открыто. Пусть $y \in U$, тогда найдётся шарик $B_\varepsilon(y) \subset G$, и $B_\varepsilon(y) \subset U$ — можно добавить одно звено к ломаной $x_0 \rightsquigarrow y$.

Покажем, что U замкнуто. Пусть $z \in G$ — предельная точка для U . Найдётся $B_\varepsilon(z) \subset G$, так как z — предельная, то $\exists y \in B_\varepsilon(z) \cap U$. Значит, $z \in U$ — можно добавить одно звено $y \rightarrow z$. \square

Замечание. Имея кусочно-линейный путь $\gamma : [a, b] \rightarrow G$, соединяющий $A, B \in G$, несложно получить бесконечно дифференцируемый путь, соединяющий их:

Пусть $\gamma_1 : [a-1, b+1] \rightarrow G, \gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a, b] \\ \gamma(a), & t \in [a-1, a] \\ \gamma(b), & t \in [b, b+1] \end{cases}$. Теперь, сворачивая γ_1 с аппрокс-

мативной единицей с достаточно большим номером и достаточно малым компактным носителем, получим бесконечно дифференцируемый путь, соединяющий A и B .

Теорема 1.2.2. Пусть $\Phi = \sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j$ — непрерывная дифференциальная форма в G (то есть коэффициенты непрерывны в G). Следующие условия эквивалентны.

1. $\int_\gamma \Phi$ есть первообразная F , то есть функция $F \in C^1(G) : dF = \Phi$ (иными словами, $\forall j : \frac{\partial}{\partial x_j} F = f_j$).
2. Для всех кусочно-гладких γ с фиксированными началом и концом $\gamma(a) = \gamma_a, \gamma(b) = \gamma_b : \int_\gamma \Phi$ не зависит от γ (а только от начала и конца).
3. Для любой кусочно-гладкой петли (то есть замкнутого пути) γ в $G : \int_\gamma \Phi = 0$.

Доказательство. Мы уже доказали ранее цепочку импликаций $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2)$. Далее доказываем $(2) \Rightarrow (1)$.

Предъявим кандидат в первообразную. Зафиксируем $x_0 \in G$, выберем $x \in G$, пусть γ — произвольный кусочно-гладкий путь с началом в x_0 и концом в x . Определим $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\gamma \Phi$. Согласно посылке, F корректно определена — не зависит от выбора пути.

Покажем, что частные производные F существуют, и равны f_j . Тогда они получатся непрерывными, то есть F — дифференцируемой, и окажется, что F — первообразная Φ .

Пусть e_1, \dots, e_n — стандартные базисные орты в \mathbb{R}^n . Рассмотрим $\frac{F(x+te_j) - F(x)}{t}$.

При малых t : отрезок между x и $x+te_j$ лежит внутри G . Пусть γ_1 — путь, соединяющий x_0 и x , l — отрезок от x до $x+te_j$.

$$\frac{F(x+te_j) - F(x)}{t} = \frac{1}{t} \left(\int_{\gamma_1 \oplus l} \Phi - \int_{\gamma_1} \Phi \right) = \frac{1}{t} \int_l \Phi = \int_0^t f_j(x + \tau e_j) d\tau \xrightarrow{t \rightarrow 0} f_j(x) \quad \square$$

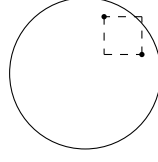
Определение 1.2.1 (Прямоугольник на плоскости). Множество вида $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$.

Область G на плоскости будем называть *удобной*, если $\exists x_0 \in G : \forall y \in G : \exists$ прямоугольник $P \ni x, y$.

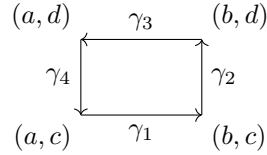
Примеры (Удобные области).

- $\text{Int } Q$, если Q — прямоугольник. В качестве центра x_0 подойдёт любая точка.

- $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < r\}$. В качестве центра x_0 стоит взять центр, иначе не получится:



Определение 1.2.2 (Ориентированная граница прямоугольника P). Петля γ , обходящий границу $P = [a, b] \times [c, d]$ против часовой стрелки, то есть вот так:



$$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4.$$

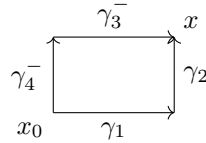
Для прямоугольника P будем обозначать за ∂P в зависимости от контекста либо границу P , как топологического подмножества \mathbb{R}^2 , либо путь, обходящий границу P против часовой стрелки.

Следствие 1.2.2 (Из доказательства (теорема 1.2.2)). Если G — удобная область на плоскости то к трём эквивалентным условиям (теорема 1.2.2) можно добавить

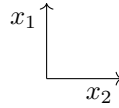
$$4. \forall P \subset G : \int_{\partial P} \Phi = 0.$$

Доказательство. (3) \Rightarrow (4) ясно, докажем (4) \Rightarrow (1).

Пусть $x_0 \in G$ — центр удобной области, определим $F(x) = \int_{\delta} \Phi$, где δ — это либо $\delta_1 := \gamma_1 \oplus \gamma_2$ либо $\delta_2 := \gamma_4^- \oplus \gamma_3^-$ (вне зависимости от выбора δ получится одно и то же).



Далее, чтобы проверить $\frac{\partial}{\partial x_1} F = f_1$ и $\frac{\partial}{\partial x_2} F = f_2$, воспользуемся подходящим представлением: пусть орт выглядит так:



тогда для проверки $\frac{\partial}{\partial x_1} F = f_1$ удобно воспользоваться определением F через δ_1 , иначе — через δ_2 . \square

Пусть $\Phi = \sum_{j=1}^m f_j(x) dx$ — непрерывная дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1.2.3 (Форма Φ точна). Существует первообразная F в G : $dF = \Phi$.

Определение 1.2.4 (Форма Φ замкнута). Форма Φ локально точна ($\forall x_0 \in G : \exists U \ni x_0 : \Phi|_U$ точна).

Понятно, что замкнутая форма точна, но точность из замкнутости не следует: чуть позднее мы определим dz , и покажем, что $\frac{dz}{z}$ — замкнутая, но не точная форма на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Теорема 1.2.3. Пусть Φ — дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$. Следующие условия эквивалентны:

1. Φ замкнута.

2. $\forall x_0 \in G : \exists V \ni x_0 : \forall$ кусочно-гладкого замкнутого пути γ с носителем в V : $\int_{\gamma} \Phi = 0$.

Если $n = 2$, то дополнительно появляются ещё два условия:

1. $\forall z \in G : \exists V_z \subset G : \forall P \subset V : \int_{\partial P} \Phi = 0$.

2. $\forall P \subset G : \int_{\partial P} \Phi = 0$.

Доказательство. Докажем, что (3) \Rightarrow (4), остальное уже доказано выше.

Заметим, что границу прямоугольника P можно представить, как сумму границ четырёх прямоугольников вдвое меньшего диаметра:



Таким образом, чтобы доказать, что интеграл по границе большого прямоугольника P нулевой, разобьём его на достаточно маленькие прямоугольники, по ним-то интеграл нуль. Чтобы это формализовать, вспомним лемму Лебега о покрытии:

Теорема 1.2.4 (Лемма Лебега). Пусть K — компакт в метрическом пространстве, $\{U_j\}_{j \in J}$ — открытое покрытие компакта K . Тогда $\exists \delta > 0 : \forall A \subset K : \text{diam } A < \delta \Rightarrow \exists j \in J : A \subset U_j$.

Применяя лемму Лебега для покрытия P окрестностями $\{V_z\}_{z \in P}$, получим такое число δ . Теперь надо разбить границу прямоугольника P в сумму границ прямоугольников диаметра меньше δ , а посылка теоремы говорит, что интеграл по ним уже нуль. \square

1.3 Операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

Как известно, $\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$, то есть $\forall z \in \mathbb{C} : z = x + iy$, аналогично $\bar{z} = x - iy$.

Рассмотрим z и \bar{z} , как функции $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x \pm iy$. Теперь $dz = dx + i dy$ и $d\bar{z} = dx - i dy$ образуют базис в пространстве дифференциальных форм (тех, которые не зависят от точки), обратное преобразование выглядит так:

$$\begin{cases} dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \\ dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \end{cases}$$

Рассмотрим форму $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = \alpha(x, y) dx + \beta(x, y) dy$. Перепишем её в новом базисе:

$$\Phi(x, y) = \frac{\alpha(x, y)}{2} (dz + d\bar{z}) + \frac{\beta(x, y)}{2i} (dz - d\bar{z}) = \frac{\alpha(x, y) - i\beta(x, y)}{2} dz + \frac{\alpha(x, y) + i\beta(x, y)}{2} d\bar{z}$$

Теперь пусть Φ — точная форма, то есть $\Phi = dF$, и тогда $\alpha(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ и $\beta(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$. Теперь

$$dF = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right) d\bar{z}$$

Определение 1.3.1 ($\frac{\partial F}{\partial z}$). Коэффициент, стоящий перед dz , то есть $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right)$.

Определение 1.3.2 ($\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$). Коэффициент, стоящий перед $d\bar{z}$, то есть $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right)$.

Иначе говоря, мы ввели операторы $\frac{\partial}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right)$ так, что

$$dF = \frac{\partial}{\partial z} F dz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} F d\bar{z}$$

1.3.1 Связь с голоморфными функциями

Пусть $F = u + iv$, где $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Запишем

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

В правой части равенства получились выражения из уравнений Коши — Римана.

Факт 1.3.1. *Вещественные функции u, v удовлетворяют уравнениям Коши — Римана $\iff \frac{\partial(u+iv)}{\partial \bar{z}} \equiv 0$.*

Факт 1.3.2. *F голоморфна $\iff dF = \frac{\partial F}{\partial z} dz$. При этом $\frac{\partial F}{\partial z}$ есть производная F по комплексному аргументу.*

Доказательство. Функция дифференцируема по комплексному аргументу \iff её дифференциал — умножение на комплексное число. \square

В основном нас будут интересовать дифференциальные формы вида $\phi(z) dz$, где ϕ — произвольная функция.

Выясним, когда у формы $\phi(z) dz = \phi(z) dx + \phi(z) dy$ имеется первообразная, то есть функция $g : \frac{\partial g}{\partial x} = \phi, \frac{\partial g}{\partial y} = i\phi$. Заметим, что $\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{2}(\phi - i(i\phi)) = \phi$ и $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\phi + i(i\phi)) = 0$.

Утверждение 1.3.1. *Форма ϕdz имеет первообразную $g \iff g$ голоморфна, и $g' = \phi$.*

Теорема 1.3.1 (Коши). Если $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция (область $G \subset \mathbb{C}$), то форма $g(z) dz$ замкнута.

Доказательство. Потом. \square

Контрпример (Глобально первообразной может не быть). Пусть $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}, g : G \rightarrow \mathbb{C}, g : z \mapsto \frac{1}{z}$.

По теореме Коши у g имеется локальная первообразная — комплексный логарифм — но глобально определить не получится. Пусть $\Gamma = \partial\mathbb{T}$ — комплексная окружность, ориентируем её против часовой стрелки, а именно, рассмотрим стандартный обход окружности $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \alpha : \phi \mapsto e^{i\phi}$. Теперь убедимся, что форма не точна:

$$\int_{\alpha} \phi = \int_{\alpha} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{(e^{it})'}{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \neq 0$$

Для будущих применений также определим ориентированную против часовой стрелки границу $B_r(z_0)$, это путь $\beta(t) = z_0 + re^{it}$ для $t \in [0, 2\pi]$.

Пример. Пусть $z_0, w \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_{>0}, |z_0 - w| \neq r$, пусть путь γ обходит границу $B_r(z_0)$ против часовой стрелки. Тогда (посчитаем чуть позже):

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - w} = \begin{cases} 0, & |z - w_0| > r \\ 2\pi i, & |z - w_0| < r \end{cases}$$

Теорема 1.3.2 (Основная оценка интеграла вдоль пути). Пускай Φ — непрерывная дифференциальная форма в области $G \subset \mathbb{R}^n$, а $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ — кусочно-гладкий путь, $K := \text{Im}(\gamma) \subset G$.

$$\text{Тогда } \left| \int_{\gamma} \Phi \right| \leq \underbrace{\sup_{x \in K} \left(\sum_{j=1}^n |\phi_j(x)|^2 \right)^{1/2}}_{=:A} \cdot l(\gamma).$$

Доказательство. Считаем, что γ — гладкий путь, иначе нужно разбить на кусочки гладкости.

$$\left| \int_{\gamma} \Phi \right| = \left| \int_a^b \sum_{j=1}^n f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt \right| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n |f_j(\gamma(t))|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |\gamma'_j(t)|^2 \right)^{1/2} dt \leq A \cdot \underbrace{\int_a^b \left(\sum_{j=1}^n |\gamma'_j(t)|^2 \right)^{1/2} dt}_{l(\gamma)}$$

□