Trabajo final: Matemática Discreta

Sección: SI-31 Ciclo: 2017-1

Integrantes:

Agreda, Luis Enrique

Denegri, José

Schialer, Dominic

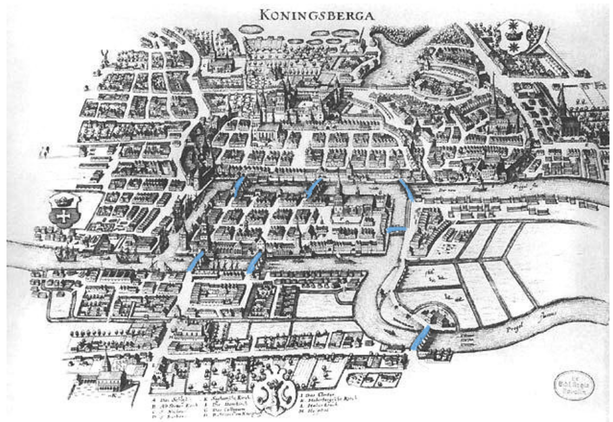
Uribe, Antonio

Profesor: Medina Martines, Antonio Marcos

21 de mayo de 2017

Índice

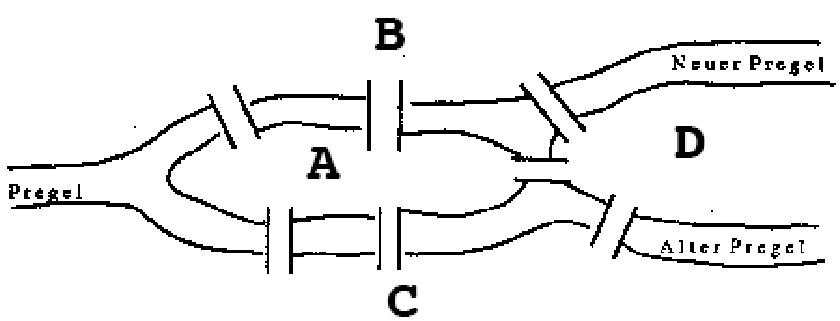
1. Introducción: Los puentes de Königsberg



El problema de los puentes de Königsberg ha generado muchas interrogantes en los matemáticos del siglo 18. La meta es de encontrar un camino que vaya por la ciudad, cruzando exactamente una vez cada uno de los siete puentes y terminar el recorrido en el mismo lugar donde comenzó. En 1736 este problema es resuelto por el matemático suizo Leonard Euler, que en ese momento era profesor de matemática en la universidad de San Petersburgo. Euler logró demostrar, que dicho camino no puede existir.
Ese descubrimiento estableció los fundamentos para la teoría de los grafos, que actualmente tiene un sinfín de aplicaciones en el mundo real.

1.1. Euler y el problema de los puentes de Königsberg

Al buscar un camino cíclico, el cual cruce los siete puentes de Königsberg exactamente una vez, escribe Euler, que una forma de resolver el problema, era trazar todos los caminos posibles y revisar si alguno de ellos tiene las características deseadas. Esta solución es demasiado trabajosa para problemas más complejos, por lo cual Euler quería desarrollar un método matemático que le indique si un camino así sería posible. Primero simplificó el mapa de Königsberg, tal que la secuencia de letras A,B,C y D pueda describir cada camino posible por la ciudad.



Por ejemplo, la secuencia $ADCABAC$ describe el camino que comienza en A, cruza el puente para llegar a D, va de D a C, etc. Este camino cruza seis de los siete puentes, los cuales pueden ser descritos como los pares AD, DC, CA, AB, BA y AC. Esto simplifica el problema, ya que solamente se tiene que encontrar una secuencia de 8 letras (ya que se trata de 7 puentes), en la que cada letra aparezca en relación a la cantidad de puentes que la conecta. Antes de buscar esa secuencia, Euler quería demostrar que existe. Euler argumenta que D tiene que aparecer exactamente dos veces en esa secuencia, ya que D está conectado con tres puentes. Si D aparece una vez en la secuencia, solamente se cruzarían dos de los tres puentes. Si D aparece tres veces en la secuencia, debería estar conectado con, como mínimo, cuatro puentes. Asimismo deberían aparecer C y B dos, y A tres veces. Por lo tanto, la secuencia necesitaría 9 letras, lo que es imposible, ya que solamente hay 7 puentes. Esto demuestra que un camino que cruce cada puente un a sola vez y que termine en la letra que comenzó, no existe.

2. Objetivo

El objetivo del siguiente trabajo, es crear un programa que genere un grafo aleatorio de 6 a 12 nodos, cuyos grados sean pares. Luego se simulará a un cartero que parte de un nodo cualquiera (la oficina del correo) y que tenga que repartir cartas en todas las calles señaladas, representadas por las aristas del grafo. Para ayudar al cartero, el camino tiene que ser el más corto posible, lo que quiere decir que ninguna de las calles se debe recorrer más de una vez y que al final de su recorrido, llegue de regreso a la oficina del correo.

3. Fundamentos teóricos

3.1. Caminos y grafos eulerianos

Definición 1. *Un camino C en un grafo conexo G se le denomina* camino euleriano*, cuando cada arista de G se encuentra en C.*

Definición 2. *Un grafo conexo G se le denomnia* grafo euleriano*, cuando contiene un camino euleriano cerrado. Un camino euleriano cerrado se le llama ciclo euleriano.*

Proposición 1. *Sea un grafo conexo G con los siguientes atributos:*

1. *G es un grafo euleriano.*
2. *Cada nodo de G tiene un grado par.*
3. *Las aristas de G se pueden separar en ciclos disjuntos.*

Demostración. La proposición es demostrada mediante el razonamiento circular.
1. $\rightarrow$ 2.
Asumimos que G contenga un ciclo euleriano C. Sea v un nodo cualquiera de G. Cada vez que C pase por v, tiene que pasar por dos aristas incidentes a v. Si cada arista incidente a v es recorrida por C, entonces el grado de v es par.

$2. \to 3.$
Asumimos que el grado cada nodo $v \in G$ es par. Ya que G es un grafo conexo y ningún nodo tiene un grado de 1, entonces G no es un árbol y, por lo tanto, tiene por lo menos un ciclo. Tiene G exactamente un ciclo, entonces es G un grafo ciclo C_n para un n y la disyunción seria solo ese ciclo. Suponiendo que sea verdadero para grafos que no contengan mas de k ciclos y G contiene $k+1$ ciclos. Sea C un ciclo en G y sea G' el grafo resultante de G, cuando se eliminan las aristas pertenecientes a C. Al eliminar las aristas de C, el grado de cada nodo se reduce por 2. Por lo tanto, el grado de cada nodo de G' es par. De esto resulta, que a cada componente conexo de G', no le pertenecen mas de k ciclos. Cada componente conexo de G' cumple con la suposición.
$3. \to 1.$
Asumimos que la disyunción de G sean ciclos. Estos ciclos se llamarán $S_1, S_2, ..., S_k$. Sea C el ciclo mas largo, tal que el conjunto de aristas de C es

$$E(C) = E(S_{j1}) \cup E(S_{j2}) \cup ... \cup E(S_{jm})$$

para varias $S_{j1}, S_{j2}, ..., S_{jm}$. Sea entonces e una arista que no pertenezca a C, pero que sea incidente en un nodo v de C, entonces e y v deberían pertenecer a un ciclo que no comparte ninguna arista con C. Sea entonces C' el ciclo que se obtiene uniendo C y S_i en v. Como a C' le pertenecen todas las aristas de C y S_i, contradice que C sea el ciclo mas largo. Por lo tanto ya le pertenecen todas las aristas de G a C, lo que quiere decir que C es un ciclo euleriano. Por ello, G es un grafo euleriano. □

3.2. Algoritmos para encontrar ciclos eulerianos

Si se conoce que G es un grafo euleriano, se tiene que poder encontrar el ciclo euleriano en G. Esto es posible con el algoritmo de Hierholzer.

3.2.1. Algoritmo de Hierholzer

Sea dado un grafo euleriano G

1. Encuentre un ciclo en G, llámelo R_1 y marque sus aristas. Sea i=1.
2. Si R_i contiene todas las aristas de G, entonces es R_i el ciclo euleriano.
3. Si R_i no contiene todas las aristas de G, sea v_i un nodo en R_i, en el cual incide una arista e_i que no esta marcada.
4. Encuentre un ciclo Q_i, de aristas no marcadas, que contenga tanto v_i como e_i. Marque las aristas de Q_i.
5. Cree un nuevo ciclo R_{i+1}, uniendo R_i y Q_i en v_i.
6. Eleve i por 1 y continúe con el paso 2.

Que el resultado del algoritmo de Hierholzer es un ciclo euleriano, se deja deducir a partir de la condición 3 de la proposición 1.

Definición 3. *Sea G un grafo y $e \in E(G)$. Si al eliminar e crece el numero de componentes de G, entonces a e se le denomina como puente de G.*

3.2.2. Algoritmo de Fleury

Sea G un grafo euleriano, en cual ninguna de las aristas estén marcadas.

1. Elija un nodo y marque ese nodo como "nodo principal".
2. Si todas las aristas de G están marcadas, termino el algoritmo. De lo contrario, siga con el paso 3.
3. Elija una arista no marcada incidente al "nodo principal". Si es posible, una que no sea un puente en el subgrafo de G, que esta compuesto de las aristas no marcadas. Si no es posible, elija cualquier arista incidente en el "nodo principal". Marque la arista elegida y marque al otro nodo incidente de la arista como el nuevo "nodo principal".
4. Siga al paso 2.

Para demostrar que el resultado del algoritmo de Fleury es un ciclo euleriano, se tiene que observar el caso en el que el algoritmo se puede quedar atascado.

Demostración. Ya que el grado de cada nodo de G es par, podemos salir de cada nodo, con la excepción del nodo de inicio v. Supongamos que el algoritmo se atasque en el nodo v. Las aristas no marcadas forman componentes conexas, las cuales son eulerianas, ya que el grado de cada nodo es par. Si el ultimo nodo visitado por el algoritmo es w y luego salio por la arista wv_1, entonces el resto del camino se define por $v_1v_2...v_k = v$. Esto demuestra que la arista wv_1 es un puente en el algoritmo de Fleury. Sin embargo existen por lo menos dos aristas incidentes en w, que no son puentes. Por eso la arista wv_1 desde un principio no es seleccionada por el algoritmo. □

A diferencia del algoritmo de Hierholzer, es posible, mediante el algoritmo de Fleury, de encontrar un camino euleriano, en grafos con dos nodos de grado impar. Para ello se elije uno de los dos nodos como "nodo principal".

4. Estructura del programa

4.1. Algoritmo para generar la matriz de relación

1. Sea el ingreso del usuario m, tal que $6 \leq m \leq 12$.
2. Se genera un arreglo M_R de $m \times m$ que representará la matriz de relación.
3. Se crea un ciclo de $i = 1$ hasta $i = m - 1$ y otro de $j = 1$ hasta $j = m - 1$ dentro del ciclo anterior.
4. A todos los elementos de m_{ij} de M_R, tal que $i = j$, se les asigna el valor 0.
5. A cada m_{ij}, tal que $i < j$ y $j < m - 1$, se les asigna un valor de 1 o 0 de manera aleatoria.
6. Si la suma de todos los elementos m_{ij} de la fila i para hasta $j = m - 1$ es par, entonces al ultimo elemento se le asigna el valor 0; caso contrario, el valor 1.
7. $m_{ij} = m_{ji}$, para todos los elementos de la fila i, para los que vale $j > i$
8. Se termina el ciclo de j, pero se vuelve a generar otro y repetir el proceso desde el paso 4 hasta terminar el ciclo de i.

4.1.1. Ejemplo

Si el ingreso del usuario es $m = 7$, se genera una matriz de relación M_R (para los nodos $A, B, C, ..., G$) de 7×7. La matriz resultante del paso 4 sería esta:

$$M_R = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & m_{AB} & m_{AC} & m_{AD} & m_{AE} & m_{AF} & m_{AG} \\ m_{BA} & 0 & m_{BC} & m_{BD} & m_{BE} & m_{BF} & m_{BG} \\ m_{CA} & m_{CB} & 0 & m_{CD} & m_{CE} & m_{CF} & m_{CG} \\ m_{DA} & m_{DB} & m_{DC} & 0 & m_{DE} & m_{DF} & m_{DG} \\ m_{EA} & m_{EB} & m_{EC} & m_{ED} & 0 & m_{EF} & m_{EG} \\ m_{FA} & m_{FB} & m_{FC} & m_{FD} & m_{FE} & 0 & m_{FG} \\ m_{GA} & m_{GB} & m_{GC} & m_{GD} & m_{GE} & m_{GF} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Al culminar el bucle del algoritmo por primera vez, es esta la matriz:

$$M_R = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m_{BC} & m_{BD} & m_{BE} & m_{BF} & m_{BG} \\ 1 & m_{CB} & 0 & m_{CD} & m_{CE} & m_{CF} & m_{CG} \\ 0 & m_{DB} & m_{DC} & 0 & m_{DE} & m_{DF} & m_{DG} \\ 1 & m_{EB} & m_{EC} & m_{ED} & 0 & m_{EF} & m_{EG} \\ 0 & m_{FB} & m_{FC} & m_{FD} & m_{FE} & 0 & m_{FG} \\ 1 & m_{GB} & m_{GC} & m_{GD} & m_{GE} & m_{GF} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Una vez culminado el algoritmo, se obtiene la matriz de relación

$$M_R = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

4.2. Algoritmo para dibujar el grafo correspondiente a M_R

1. Se crea una lista de nodos enlazada, donde cada nodo tendrá como atributos a su carácter y los otros nodos con los que está enlazado. La lista tiene como atributos al nodo principal, la cantidad de nodos y un vector de enlaces (que en este caso servirá para marcar las aristas). Por último, los enlaces tendrán como atributo a ambos nodos que lo generan.

2. A partir de la matriz, se registra el carácter de cada nodo y los otros a los que está enlazado. También se registra la cantidad de nodos y al nodo principal.

3. Se marca un punto en el centro de la ventana, el cual servirá como punto de referencia del grafo.

4. Se coloca el nodo N_1 en la posición inicial a una distancia arbitraria del punto de referencia central y en 0°.

5. Se selecciona el grado de separación α, de tal manera que para cualquier N_n,

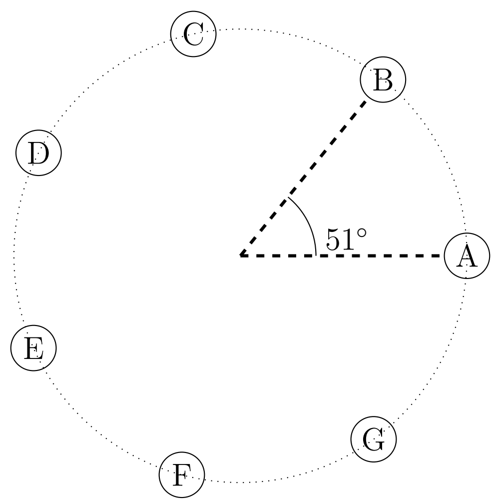
$$\alpha(N_n) = (n-1)\frac{360°}{m}$$

6. Se dibujan los nodos $N_2, ..., N_m$ al rededor del punto de referencia con una separación de α con respecto a N_1 formando una circunferencia de radio arbitrario.

7. Para cada $m_{ij} \in< M_R | i < j$ que sea 1, se traza una arista del nodo N_i al nodo N_j.

4.2.1. Ejemplo

Dibujaremos el grafo a partir de la matriz dada en el ejemplo anterior.
Tomamos al nodo A como nuestro N_1. Como $m = 7$, el grado de la separación de cada nodo al nodo previo es de $\alpha \approx 51°$. La imagen resultante sería la siguiente:



Al conectar los nodos con aristas según M_R, se obtiene el grafo completado.