

# 《泛函分析讲义》习题注解 (前两章)

CatKittenMeow<sup>1</sup>, an-interesting-wg<sup>2</sup>

2025 年 12 月 29 日

## 摘要

本文主要内容是张恭庆, 林源渠编著《泛函分析讲义 (第二版)(上)》[6] 习题的注解. 本文最初作为课程作业写作于泛函分析 I 课程期间, 编写时间仓促, 其中不免有纰漏, 请多包涵. 如有意见和勘误, 可以通过邮箱[mathslhs@foxmail.com](mailto:mathslhs@foxmail.com)联系作者. 本文公开发布于<https://github.com/CatKittenMeow/Keys-to-Functional-Analysis-by-G-Q.Zhang-and-Y-Q.Lin>, 没有也不会收取任何资料费, 欢迎分享.

## 目录

	1.6 内积空间 . . . . .	29
<b>1 度量空间</b>	<b>3</b>	<b>2 线性算子与线性泛函</b> <b>40</b>
1.1 压缩映射原理 . . . . .	3	2.1 线性算子的概念 . . . . . 40
1.2 完备化 . . . . .	6	2.2 Riesz 表示定理及其应用 . . . . 46
1.3 列紧集 . . . . .	9	2.3 纲与开映射定理 . . . . . 50
1.4 赋范线性空间 . . . . .	13	2.4 Hahn-Banach 定理 . . . . . 61
1.5 凸集与不动点 . . . . .	24	2.5 共轭空间, 弱收敛, 自反空间 . . 71
		2.6 线性算子的谱 . . . . . 86

---

<sup>1</sup>本答案编辑, 中山大学数学学院 23 级本科生. E-mail: [mathslhs@foxmail.com](mailto:mathslhs@foxmail.com)

<sup>2</sup>本答案校对. E-mail: [2983389729@qq.com](mailto:2983389729@qq.com)

# 符号表

符号	含义
$\forall$	任意
$\exists(\exists!)$	存在 (且唯一)
$A \subset (\subsetneq) B$	$A$ (真) 包含于 $B$
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	(分别) 自然数集, 整数环, 有理数域, 实数域, 复数域
$\overline{D}$	集合 $D$ 的闭包
$\overset{\circ}{D}$	集合 $D$ 的内部
$\text{conv } D$	线性空间中集合 $D$ 的凸包
$\text{span } D$	集合 $D$ 张成的线性子空间
$ D , m(D)$	集合 $D$ 的 (Lebesgue) 测度
$C[a, b], C^0[a, b]$	闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数类
$C^k[a, b]$	闭区间 $[a, b]$ 上的 $k$ 阶连续可微函数类
$C^\infty[a, b]$	闭区间 $[a, b]$ 上的光滑函数类
$\ell^p$	$p$ -方可和序列空间
$\ x\ _p, \ x\ _{\ell^p}$	有限维的 $p$ -范数或 $\ell^p(\mathbb{R}^n)$ 空间的 $\ell^p$ 范数
$L^p, L^p(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue $p$ -方可积空间 ( $1 \leq p \leq \infty$ )
$\ f\ _p, \ f\ _{L^p}, \ f\ _{L^p(\mathbb{R}^n)}$	函数 $f$ 的 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 范数
$\mathcal{X}/\mathcal{X}_0$	$\mathcal{X}$ 模去 $\mathcal{X}_0$ 得到的商空间
$[x]$	$x$ 的等价类
$\ \cdot\ _0$	商空间意义下的诱导范数
a.e., a.e.	几乎处处意义下
$\Rightarrow$	一致收敛
$\rightarrow, \xrightarrow{s}$	强收敛, 按范数收敛
$\xrightarrow{w}$	弱收敛
$\xrightarrow{w^*}$	弱*收敛
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	内积空间上的内积, 或原空间和对偶空间的对偶积
$\delta_{mn}$	Kronecker 符号 ( $m = n$ 时为 1, 否则为 0)
$\mathbb{1}_E, \chi_E$	集合 $E$ 的特征函数
$\text{Dom } f$	映射 $f$ 的定义域
$\text{Ran } f$	映射 $f$ 的值域
$\text{Re } f$	取 $f$ 的实部
$\text{Im } f$	取 $f$ 的虚部, 或算子的像空间
$\text{supp } f$	函数 $f$ 的支撑集
$\ker f$	映射的核空间
$\text{sgn } f$	取函数 $f$ 的符号 (在 $\mathbb{R}$ 上) 或方向 (在 $\mathbb{C}$ 上), 即 $f/ f $
$f _D$	函数 $f$ 在集合 $D$ 上的限制
$B(x_0, r), U(x_0, r)$	空间中以 $x_0$ 为中心, $r$ 为半径的球
$\text{id}(\text{id}_{\mathcal{X}})$	( $\mathcal{X}$ 上的) 恒等映射 (算子)
$\mathcal{X}^*$	$\mathcal{X}$ 的对偶空间
$\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})(\mathcal{L}(\mathcal{X}))$	$\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Y}$ ( $\mathcal{X}$ 到自身) 的有界线性算子
$T \circ S$	算子 $T$ 和 $S$ 的复合 (从右往左计算)
$\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$	$\mathcal{X}_1$ 与 $\mathcal{X}_2$ 的乘积空间
$\square$	证明完成

# 1 度量空间

## 1.1 压缩映射原理

1.1.1 证明: 完备空间的闭子集是完备的子空间, 而任意度量空间中的完备子空间是闭子集.

假设有完备空间  $\mathcal{X}$  中的一个闭子集  $\mathcal{D}$ , 则任取  $\mathcal{D}$  中的一串 Cauchy 列, 则必收敛到  $X$  中某一点, 也即该 Cauchy 列有极限. 那么, 根据闭集的定义, 这个极限一定在  $\mathcal{D}$  里, 于是  $\mathcal{D}$  是完备的子空间. 另一方面, 度量空间  $\mathcal{X}$  中的完备子空间  $\mathcal{D}$  上的任何 Cauchy 列一定都收敛到  $\mathcal{D}$  内部, 从而任何  $\mathcal{D}$  上任何序列都收敛到  $\mathcal{D}$  上, 也就是说  $\mathcal{D}$  是闭集.  $\square$

1.1.2\* 设  $f$  是定义在  $[a, b]$  上的二次连续可微实值函数, 若  $\hat{x} \in (a, b), f(\hat{x}) = 0, f'(\hat{x}) \neq 0$ . 证明: 存在  $\hat{x}$  的邻域  $U(\hat{x})$ , 对任意  $x_0 \in U(\hat{x})$ , 迭代序列  $\{x_n : \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\}$  都是收敛的, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x}$ .

考虑构造  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  的算子  $T$  使得

$$Tx = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

所以  $x_{n+1} = Tx_n$ . 注意

$$|T'| = \left| \left( x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right)' \right| = \left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right|,$$

那么,  $T'(\hat{x}) = 0$ , 于是  $\forall k \in \mathbb{R}$ , 就存在一个  $\hat{x}$  的邻域  $B(\hat{x}, \varepsilon)$ , 使  $\forall x \in \overline{B(\hat{x}, \varepsilon)}, |T'x| < k$  成立. 这样一来,  $\forall x, y \in \overline{B(\hat{x}, \varepsilon)}$ ,

$$|Tx - Ty| = |(x - y)T'\xi| < k|x - y|.$$

取  $k < 1$  即可. 要说明  $T$  是压缩的, 剩下只需要说明  $T(\overline{B(\hat{x}, \varepsilon)}) \subset \overline{B(\hat{x}, \varepsilon)}$ . 这当然成立, 因为

$$|Tx - T\hat{x}| = |(x - \hat{x})T'\xi| \leq k|x - \hat{x}| \leq k\varepsilon/2. \quad (0 < k < 1)$$

于是  $T$  就是  $\overline{B(\hat{x}, \varepsilon)}$  上的压缩映射. 因为  $\overline{B(\hat{x}, \varepsilon)}$  是完备空间的闭子集, 自然也是完备的子空间. 所以依据 Banach 不动点定理, 在  $\overline{B(\hat{x}, \varepsilon)}$  上算子  $T$  就存在唯一的不动点. 验证易知  $\hat{x}$  就是这个不动点.  $\square$

1.1.3 设  $(\mathcal{X}, \rho)$  为度量空间, 映射  $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  满足对任意  $x, y \in \mathcal{X}, x \neq y$ , 有  $\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)$ . 证明: 若  $T$  有不动点, 则此不动点唯一.

假定  $T$  具有两个不同的不动点  $x_1, x_2$ , 注意

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(Tx_1, Tx_2) < \rho(x_1, x_2)$$

且  $\rho(x_1, x_2) \neq 0$ , 立得矛盾!  $\square$

**注** 题干与 Banach 不动点定理的差别就在于我们失去了给定的度量空间  $\mathcal{X}$  的完备性, 只知道给定的算子具有不动点.

**1.1.4** 设  $T$  为度量空间  $(\mathcal{X}, \rho)$  上的压缩映射. 证明:  $T$  是连续的.

假定  $T$  是度量空间  $(\mathcal{X}, \rho)$  上的压缩映射, 取一点  $x_0$  以及一个依距离收敛到  $x_0$  的点列  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ , 那么由

$$\rho(Tx_i, Tx_0) < \rho(x_i, x_0) \rightarrow 0$$

就知道算子  $T$  的连续性. □

**1.1.5** 设  $T$  是度量空间  $(\mathcal{X}, \rho)$  上的压缩映射. 证明: 对任意  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $T^n$  都是压缩映射, 但逆命题不一定成立.

前半部分只需注意

$$\rho(T^n x_1, T^n x_2) \leq \delta \rho(T^{n-1} x_1, T^{n-1} x_2) \leq \cdots \leq \delta^n \rho(x_1, x_2)$$

以及  $\delta^n < \delta < 1$  即知; 但是反过来有反例:

考虑在  $[0, 2]$  上的算子  $T$ :

$$Tx = \begin{cases} 2, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

$T^2 x = 1, (\forall x \in [0, 2])$  是常值映射, 自然是压缩的; 但  $T$  不是压缩的. 事实上,  $\forall k \in (0, 1)$

$$\left| T\left(1 - \frac{1}{2n}\right) - T\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \right| = 1 > k \cdot \frac{1}{n}$$

不可能对所有  $n \in \mathbb{N}$  恒成立! 所以  $T$  不是压缩映射. □

**1.1.6\*** 设  $M$  为  $(\mathbb{R}^n, \rho)$  上的有界闭集, 映射  $T: M \rightarrow M$  满足对任意  $x, y \in M, x \neq y$ ,  $\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)$ . 证明:  $T$  在  $M$  中存在唯一不动点.

先证明存在性.  $T$  是连续算子, 因为若  $x_n \rightarrow x$ , 则

$$\rho(Tx_n, Tx) < \rho(x_n, x) \rightarrow 0.$$

构造函数  $\varphi(x) = \rho(x, Tx)$ , 由于距离函数和  $T$  都是连续的, 所以  $\varphi$  也是连续的. 连续算子  $T$  把紧集  $M$  映成  $\mathbb{R}$  上的紧集, 所以  $\varphi$  的最小值在  $M$  上存在且能达到. 而且这个最小值必然是 0, 假若不然, 设  $\varphi(x_0) = a$ , 则

$$a = \varphi(x_0) = d(x_0, Tx_0) > d(Tx_0, T^2 x_0) > a,$$

矛盾! 所以  $\varphi$  的最小值是 0. 因为最小值可以达到, 所以存在  $\hat{x} \in M$ ,  $\varphi(\hat{x}) = d(\hat{x}, T\hat{x}) = 0$ , 即  $\hat{x} = T\hat{x}$ , 是  $T$  的不动点.

再说明唯一性. 事实上, 假若有两不动点  $x, y$ , 则

$$\rho(x, y) = \rho(Tx, Ty) < \rho(x, y),$$

矛盾! 于是存在唯一的不动点. □

**注** 尽管在欧氏距离意义下  $\mathbb{R}^n$  是完备的, 但是在其他距离下却并不尽然如此. 例如在  $\mathbb{R}$  上定义距离  $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ , 那任何趋于  $+\infty$  的点列也是 Cauchy 列, 然而  $+\infty$  却不在  $\mathbb{R}$  上.

**1.1.7** 对给定  $y(t) \in C[0, 1], \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| < 1$ , 考虑积分方程

$$x(t) - \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds = y(t).$$

证明: 存在唯一解  $x(t) \in C[0, 1]$ .

在连续函数空间  $C[0, 1]$  上考虑距离  $\rho(a, b) = \sup_{x \in [0, 1]} |a(x) - b(x)|$ , 使之成为距离空间. 对原方程进行变形得

$$e^{-t} x(t) = e^{-t} y(t) + \lambda \int_0^1 e^{-s} x(s) ds.$$

那么, 考虑算子  $T$  使

$$Ta = e^{-t} y(t) + \lambda \int_0^1 a(s) ds.$$

$T$  是压缩的, 因为

$$\rho(Ta, Tb) = \lambda \int_0^1 [a(s) - b(s)] ds \leq \lambda \rho(a, b),$$

并且  $\lambda \in (0, 1)$ . 又因为  $(C[0, 1], \rho)$  是完备的, 由 Banach 不动点定理知道存在唯一的不动点  $x(t) \in C[0, 1]$ ,  $e^{-t} x(t)$  就是原方程的唯一解. □

## 1.2 完备化

**1.2.1\*** 设  $S = \{x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) : \xi_i \in K\}$ , 其中  $K = \mathbb{R}$  或  $\mathbb{C}$ . 在  $S$  上定义距离: 对任意  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots), y = (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots) \in S$ , 有

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}.$$

证明:  $S$  是完备的度量空间.

首先说明  $S$  是度量空间. 为此只需证明  $\rho$  是距离. 事实上, 正定性与非负性是显然的, 而三角不等式通过

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} - \frac{a+b}{1+a+b} = \frac{ab(2+a+b)}{(1+a)(1+b)(1+a+b)} > 0,$$

其中  $a, b > 0$ , 逐项比较可知成立. 于是  $S$  是度量空间.

再说明  $S$  完备. 考虑任取  $S$  中的 Cauchy 列  $\{x_n\}$ , 设  $x_s = (x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \dots, x_n^{(s)}, \dots)$ . 那么  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ , 使得  $\forall m, n > N$ ,

$$\rho(x_n, x_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|}{1 + |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|} < \varepsilon.$$

由于这是一个正项级数, 那么任意固定  $k = k_0$ ,

$$\frac{1}{2^{k_0}} \frac{|x_{k_0}^{(n)} - x_{k_0}^{(m)}|}{1 + |x_{k_0}^{(n)} - x_{k_0}^{(m)}|} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|}{1 + |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|} < \varepsilon.$$

即

$$|x_{k_0}^{(n)} - x_{k_0}^{(m)}| < \frac{2^{k_0} \varepsilon}{1 - 2^{k_0} \varepsilon}$$

令  $\varepsilon_0 = \frac{2^{k_0} \varepsilon}{1 - 2^{k_0} \varepsilon}$ , 那么由  $\varepsilon$  的任意性以及函数  $x/(1-x)$  的单调性, 对固定的  $k_0, \varepsilon_0$  也是任意的 (被  $\varepsilon$  唯一确定). 于是

$$\left\{ x_{k_0}^{(n)} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

是  $\mathbb{R}$ (或  $\mathbb{C}$ ) 中的 Cauchy 列, 由其完备性设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_0}^{(n)} := x_{k_0},$$

下面证明,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  就是  $x_k$  在  $S$  上的极限. 事实上, 考虑

$$\rho(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k|}{1 + |x_k^{(n)} - x_k|}$$

任取  $\varepsilon > 0$ , 取  $\varepsilon_0$  使得  $\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0}$ , 那么对这个  $\varepsilon_0$ , 就存在一个  $N \in \mathbb{N}$ , 使得  $\forall n > N, k_0 \in \mathbb{N}, |x_{k_0}^{(n)} - x_{k_0}| < \varepsilon_0$ , 那么 (注意  $x/(1+x)$  是增函数)

$$\rho(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k|}{1 + |x_k^{(n)} - x_k|} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0} = \varepsilon.$$

这也就是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

于是  $S$  是完备的. □

**1.2.2** 证明: 度量空间  $(\mathcal{X}, \rho)$  中的 Cauchy 列是收敛列当且仅当它存在收敛子列.

( $\Rightarrow$ ) 显然如此.

( $\Leftarrow$ ) 设  $\{x_n\}$  是一个 Cauchy 列,  $x_{n_k}$  是它的一个收敛子列且记  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$ . 于是  $\forall \varepsilon > 0$ :

- $\exists N_1, s.t. \forall n_k > N_1, |x_{n_k} - x| < \varepsilon/2$ ;
- $\exists N_2, s.t. \forall n > N_2, n_k > N_2, |x_n - x_{n_k}| < \varepsilon/2$ ;

综合起来,

$$|x_k - x| < |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这样我们就知道了  $\{x_n\}$  也是收敛的, 而且极限就是  $x$ . □

**1.2.3** 设  $F$  为有限项不为 0 的实数列全体, 在  $F$  上定义距离, 对任意  $x = \{\xi_k\}, y = \{\eta_k\} \in F$ , 有  $\rho(x, y) = \sup_{k \geq 1} |\xi_k - \eta_k|$ . 证明:  $F$  不是完备的度量空间, 并指出  $F$  的完备化空间.

考虑一个  $F$  中的列  $\{A_n\}$ , 通项是

$$A_k = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{k}, 0, \dots\right).$$

它很容易看出来是 Cauchy 列, 然而如果存在一个  $F$  中的列  $B = (a_1, a_2, \dots, a_k, 0, \dots)$  是  $\{A_n\}$  的极限, 注意  $\forall n > k$ ,

$$\rho(A_n, B) \geq \rho(A_{k+1}, B) = \max \left\{ \frac{1}{k+1}, |a_1 - 1|, \left|a_2 - \frac{1}{2}\right|, \dots, \left|a_k - \frac{1}{k}\right| \right\} \geq \frac{1}{k+1},$$

立刻知道  $B$  不是极限.

$(F, \rho)$  的完备化空间是全体实数列的集合, 赋以距离  $\rho$ . □

**1.2.4** 设  $\mathbb{P}[0, 1]$  为  $[0, 1]$  上多项式全体, 在  $\mathbb{P}[0, 1]$  上定义距离

$$\rho(p, q) = \int_0^1 |p(x) - q(x)| dx. \quad (\forall p(x), q(x) \in \mathbb{P}[0, 1])$$

证明  $\mathbb{P}[0, 1]$  不为完备的度量空间, 并指出其的完备化空间.

考虑函数列

$$\left\{ \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

它是一个 Cauchy 列, 因为

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=m}^n \frac{x^k}{k!} \right| dx = \sum_{k=m}^n \int_0^1 \frac{x^k}{k!} dx = \sum_{k=m}^n \frac{1}{(k+1)!}.$$

可见当  $m, n$  充分大时, 上式右端可以任意小. 但是熟知该函数列收敛于  $e^x$ , 并非一个多项式. 这也就说明了  $(P[0, 1], \rho)$  不完备.

$(\mathbb{P}[0, 1], \rho)$  的完备化空间是  $(L^1[0, 1], \rho)$ . □

**注** 要证明  $(\mathbb{P}[0, 1], \rho)$  的完备化空间是  $(L^1[0, 1], \rho)$ , 只需证明  $\mathbb{P}[0, 1]$  在  $L^1[0, 1]$  中稠密, 以及  $(L^1[0, 1], \rho)$  完备即可. 前者是 Weierstrass 逼近定理的推论, 后者是实变函数的重要结论.

**1.2.5** 给定完备度量空间  $(\mathcal{X}, \rho)$  中的点列  $\{x_n\}$ . 证明: 若对任意  $\varepsilon > 0$ , 都存在 Cauchy 列  $\{y_n\}$ , 使得  $\rho(x_n, y_n) < \varepsilon$ , 则  $\{x_n\}$  收敛.

用反证法, 假若  $\{x_n\}$  不收敛, 那么它的各项之间的距离有一致的正下界  $\delta$ , 即  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\rho(x_m, x_n) \geq \delta$ . 那么取正的  $\varepsilon < \delta/3$ , 以及其对应的 Cauchy 列  $\{y_n\}$  满足  $\rho(x_n, y_n) < \varepsilon$ , 取  $m, n$  充分大使得  $\rho(y_m, y_n) < \varepsilon$ , 就有

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n) + \rho(y_n, x_n) < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon < \delta,$$

立刻可见矛盾! □

**注** 另外, 正向的证明可以通过用对角线法选取收敛子列来完成.

### 1.3 列紧集

**1.3.1 证明:** 在完备度量空间中, 子集  $A$  为列紧的当且仅当  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $A$  的列紧的  $\varepsilon$  网.

( $\Rightarrow$ ) 显然列紧集内任何  $\varepsilon$ -网都列紧.

( $\Leftarrow$ ) 考虑序列  $\{x_n\} \subset A$  以及  $A$  内列紧的  $\varepsilon$ -网  $\{y_n\}_{n \in I}$  ( $I$  是指标集), 那么  $\forall x_n, \exists y_m$ , 使得  $d(x_n - y_m) < \varepsilon$ . 依次取  $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}, \dots$ , 取  $\varepsilon$ -网中的点  $y_\varepsilon$  使得

$$d(x_{1/\varepsilon}, y_{1/\varepsilon}) < \varepsilon.$$

那么由于序列  $\{y_n\}_{n=1}^\infty$  是  $\varepsilon$ -网的子集, 从而依给定条件存在收敛子列  $\{y_{n_i}\}_{i=1}^\infty \rightarrow y_0$ . 考虑  $\forall \delta > 0, \exists N$ , 只要  $n_i > N$ , 就有  $d(y_{n_i}, y_0) < \delta/2$ . 那么只要  $n_i$  充分大 (例如:  $n_i > \max(N, 2/\delta)$ ), 就有

$$d(x_{n_i}, y_0) \leq d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_0) < \frac{1}{n_i} + \frac{\delta}{2} < \delta.$$

由  $\delta$  的任意性知道  $\{x_{n_i}\}$  是收敛到  $y_0$  的子列. 于是  $A$  是列紧的. □

**1.3.2 证明:** 在度量空间中, 紧集上的连续函数为有界的, 且可以取到它的上下确界.

倘若紧集  $C$  上连续函数  $f(x)$  无界, 即  $\forall E > 0, \exists N(E) > 0$ , 使得  $\exists n > N(E), f(x_n) > E$ . 依次取  $E = 1, 2, \dots$ , 可以取出一列下标递增的  $x_{n_k}$  满足  $f(x_{n_k}) > k$ . 依据  $C$  是度量空间上的紧集, 于是也是列紧集, 所以序列  $\{x_{n_k}\}$  存在收敛子列  $x_{n_{k_i}} \rightarrow x_0$ . 注意到  $f$  连续, 所以

$$f(x_{n_{k_i}}) \rightarrow f(x_0),$$

与  $f(\{x_{n_k}\})$  无界矛盾! 所以紧集上的连续函数必定有界.

再证明可以达到上下确界. 这里只讨论上确界的情形. 对每一个  $\varepsilon = 1/n$ , 由确界的性质必然存在  $x_n \in C$  使得

$$\sup_C f - f(x_n) < \frac{1}{n}.$$

这样选取出序列  $\{x_n\}$ , 由于  $C$  是度量空间上的紧集, 于是也是列紧集, 进而可以选取收敛子列  $\{x_{n_i}\} \rightarrow x_0$ . 由于  $f$  的连续性,

$$\sup_C f - f(x_0) = \sup_C f - f\left(\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i}\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left[ \sup_C f - f(x_{n_i}) \right] \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i} = 0.$$

所以

$$f(x_0) = \sup_C f.$$

由于度量空间中紧集是闭集,  $x_0 \in C$ . 所以  $f$  在  $C$  中能达到上确界. □

**1.3.3 证明:** 在度量空间中, 完全有界的集合为有界的, 但逆命题不一定成立. (考虑  $\ell^2$  的子集  $E = \{e_k = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) : \forall i \in \mathbb{N}^*, \xi_i = \delta_{ik}\}$  ).

考虑该完全有界集  $S$  中的有限  $\varepsilon$ -网  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 那么记

$$M = \max_{1 \leq i, j \leq n} d(x_i, x_j)$$

则  $\forall x \in S$ , 由  $\varepsilon$ -网性质设  $d(x, x_k) < \varepsilon$ , 则

$$d(x, x_1) \leq d(x, x_k) + d(x_k, x_1) \leq M + \varepsilon < +\infty.$$

所以完全有界集有界.

关于这个子集, 容易发现任何两点  $e_i, e_j (i \neq j)$  的距离都是  $\sqrt{2}$ , 所以显然不存在有限  $\varepsilon$ -网, 即不是完全有界的. 尽管如此, 容易知道这个集合是有界的.  $\square$

**1.3.4** 设度量空间  $(\mathcal{X}, \rho)$  中有紧子集  $F_1, F_2$ , 记  $\rho(F_1, F_2) = \inf\{\rho(x, y) : x \in F_1, y \in F_2\}$ . 证明: 存在  $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2$ , 使得  $\rho(F_1, F_2) = \rho(x_1, x_2)$ .

考虑在  $F_1$  中任取一个点  $x_1$ , 由下确界的定义, 对  $\varepsilon = 1/n$ , 都存在  $x_n \in F_1, y_n \in F_2$  使得

$$d(x_n, y_n) < d(F_1, F_2) + \frac{1}{n}.$$

由于  $F_1, F_2$  是度量空间中的紧集, 从而是列紧集, 那么考虑收敛子列  $\{x_{n_r}\} \rightarrow x_0$ , 在此基础上再取  $\{y_{n_{r_l}}\} \rightarrow y_0$ , 就知道

$$d(x_0, y_0) = \lim_{l \rightarrow \infty} d(x_{n_{r_l}}, y_{n_{r_l}}) \leq d(F_1, F_2).$$

所以,

$$d(x_0, y_0) = d(F_1, F_2).$$

这就取出来了合乎要求的点.  $\square$

**1.3.5** 设  $M$  为  $C[a, b]$  中的有界集. 证明:

$$\left\{ F(x) = \int_a^x f(t) dt : f \in M \right\}$$

是列紧集.

首先

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ F(x) = \int_a^x f(t) dt : f \in M \right\} \subset C[a, b].$$

下面验证这个函数族  $D$  一致有界且等度连续.

首先验证一致有界性. 由于  $M$  是有界集, 于是可以设

$$\sup_{f \in M} |f(x)| = S < +\infty$$

注意  $\int_a^x f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a)S$ , 则

$$\sup_{F \in D} |F(x)| = (b-a)S.$$

此即函数族  $D$  一致有界.

再验证等度连续性.  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) = \varepsilon/S$ , 使得  $\forall F \in D$ , 只要  $|x - y| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon/S$ , 就有

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_x^y f(x) dx \right| \leq S|x - y| < \varepsilon.$$

于是  $D$  是等度连续的. 由 Arzelà-Ascoli 定理知道  $D$  是列紧的.  $\square$

**1.3.6** 设  $E = \{\sin nt : n \in \mathbb{N}^*\}$ . 证明:  $E$  在  $C[0, \pi]$  上不是列紧集.

由 Arzelà-Ascoli 定理, 只需验证  $E$  并不等度连续. 事实上,  $\exists \varepsilon = \frac{1}{2}, \forall \delta > 0$ , 纵使有  $|x - y| < \delta, (\exists x, y \in [0, \pi])$ , 选取  $m > \pi/2\delta, y = 0, x = \pi/2m$  使得

$$|\sin mx - \sin 0| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

**1.3.7\*** 设  $S = \{x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) : \xi_i \in K\}$ , 其中  $K = \mathbb{R}$  或  $\mathbb{C}$ .  $\forall x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots), y = (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots) \in S$ , 在  $S$  上定义距离

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}.$$

证明: 子集  $A$  是  $S$  上的列紧集当且仅当  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 存在  $C_n > 0$ , 使得对任意  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \in A$ , 都有  $|\xi_n| \leq C_n$ .

( $\implies$ ) 假设  $A$  列紧, 于是  $\forall \varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}^*$ ,  $A$  必然有有限  $\varepsilon/2^k$ -网, 不妨设为  $x^1, x^2, \dots, x^n$ . 那么  $\forall x \in A, \exists s \in \mathbb{N}^*$ , 使得

$$\frac{|x_k^s - x_k|}{1 + |x_k^s - x_k|} \leq 2^k \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j^s - x_j|}{1 + |x_j^s - x_j|} = 2^k \rho(x, x_k) < \varepsilon.$$

于是  $|x_k^s - x_k| < \varepsilon/(1 - \varepsilon)$ . 因为  $\varepsilon/2^k$ -网有限, 命

$$M_k = \max_{1 \leq i, j \leq n} |x_k^i - x_k^j| < +\infty,$$

则  $\forall y \in A$ , 假设  $\rho(y, x^t) < \varepsilon/2^k$ , 那么

$$|y_k - x_k^s| \leq |y_k - x_k^t| + |x_k^t - x_k^s| \leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} + M_k.$$

所以  $A$  中元素的各个指标分别都是一致有界的, 即  $|\xi_n| \leq C_n$ .

( $\impliedby$ ) 考虑  $A$  中的任何一个序列  $\{y^n\}$ . 对第 1 个坐标, 由于它有上界  $C_1$ , 所以数列  $\{y_1^n\}$  有收敛子列  $\{y_1^{n_{1,k}}\}$ . 对第 2 个坐标, 同样可选出  $\{y_2^{n_{1,k}}\}$  的收敛子列  $\{y_2^{n_{2,k}}\}$ . 依次类推, 对第  $s$  个坐标, 可以选出  $\{y_s^{n_{s-1,k}}\}$  的收敛子列  $\{y_s^{n_{s,k}}\}$ . 那么, 序列

$$\{y^{n_{k,k}}\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ (y_1^{n_{1,k}}, y_2^{n_{2,k}}, \dots, y_s^{n_{s,k}}, \dots) \right\}_{k=1}^{\infty}$$

则按选取知该子列的每一个坐标都收敛, 从而, 依据在习题 1.2.1\* 中我们已经讨论过  $S$  中的序列按  $\rho$  收敛等价于各个坐标在  $\mathbb{R}$  (或  $\mathbb{C}$ ) 中收敛, 知道以上构造的子列就是所给列的收敛子列.  $\square$

**1.3.8\*** 对度量空间  $(\mathcal{X}, \rho)$ ,  $M$  为  $\mathcal{X}$  上的列紧集, 映射  $f: \mathcal{X} \rightarrow M$  满足  $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}, x_1 \neq x_2$ , 都成立  $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \rho(x_1, x_2)$ . 证明:  $f$  在  $\mathcal{X}$  上存在唯一不动点.

先证明存在性.  $f$  是连续函数, 因为若  $x_n \rightarrow x$ , 则

$$\rho(f(x_n), f(x)) < \rho(x_n, x) \rightarrow 0.$$

构造函数  $\varphi(x) = \rho(x, f(x))$ , 由于距离函数和  $f$  都是连续的, 所以  $\varphi$  也是连续的. 连续函数  $f$  把紧集  $M$  映成  $\mathbb{R}$  上的紧集, 所以  $f$  在  $M$  上存在且能达到最小值. 这个最小值必然是 0, 假若不然, 设  $\varphi(x_0) = a$ , 则

$$a = \varphi(x_0) = d(x_0, f(x_0)) > d(f(x_0), f(f(x_0))) > a,$$

矛盾! 所以  $\varphi$  的最小值是 0. 因为最小值可以达到, 所以存在  $\hat{x} \in M$ ,  $\varphi(\hat{x}) = d(\hat{x}, f(\hat{x})) = 0$ , 即  $\hat{x} = f(\hat{x})$ , 是  $f$  的不动点.

再证明唯一性. 假若  $x, y$  都是  $f$  的不动点, 那么

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(f(x_1), f(x_2)) < \rho(x_1, x_2)$$

矛盾! □

**1.3.9** 对紧的度量空间  $(\mathcal{X}, \rho)$ , 设  $E \subset C(M)$  满足对任意  $x \in M$ ,  $x$  一致有界且满足 Hölder 条件:  $\forall t_1, t_2 \in M$ , 有  $|x(t_1) - x(t_2)| \leq C\rho(t_1, t_2)^\alpha$ , 其中  $C > 0, \alpha \in (0, 1)$ . 证明:  $E$  是  $C(M)$  上的列紧集.

由 Arzelà-Ascoli 定理, 只需验证  $E$  等度连续.  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = (\varepsilon/C)^{1/\alpha}$ , 则  $\forall f \in E$  以及  $\forall x_1, x_2 \in M$  满足  $\rho(x_1, x_2) < \delta$ , 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C\rho(x_1, x_2)^\alpha < C\delta^\alpha < \varepsilon.$$

□

## 1.4 赋范线性空间

1.4.1 在  $\mathbb{R}^2$  中, 对任意  $z(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , 令  $\|z\|_1 = |x| + |y|$ ,  $\|z\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\|z\|_3 = \max(|x|, |y|)$ ,  $\|z\|_4 = (x^4 + y^4)^{\frac{1}{4}}$ .

i) 证明:  $\|\cdot\|_i$  均为  $\mathbb{R}^2$  上的范数 ( $i = 1, 2, 3, 4$ );

ii) 画出  $\|\cdot\|_i$  在  $\mathbb{R}^2$  上的单位圆 ( $i = 1, 2, 3, 4$ );

iii) 对  $O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1)$  在  $\|\cdot\|_i$  意义下求  $OA, OB, AB$  的长度 ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

i) 这四种范数的齐次性, 正定性都是显然的. 设  $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$ , 三角不等式则由

$$\|z_1 + z_2\|_1 = |x_1 + x_2| + |y_1 + y_2| \leq |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2| = \|z_1\|_1 + \|z_2\|_1,$$

$$\|z_1 + z_2\|_2 = [(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2]^{1/2} = [x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2]^{1/2}$$

$$\leq [\|z_1\|_2^2 + \|z_2\|_2^2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2]^{1/2} \leq \|z_1\|_2 + \|z_2\|_2,$$

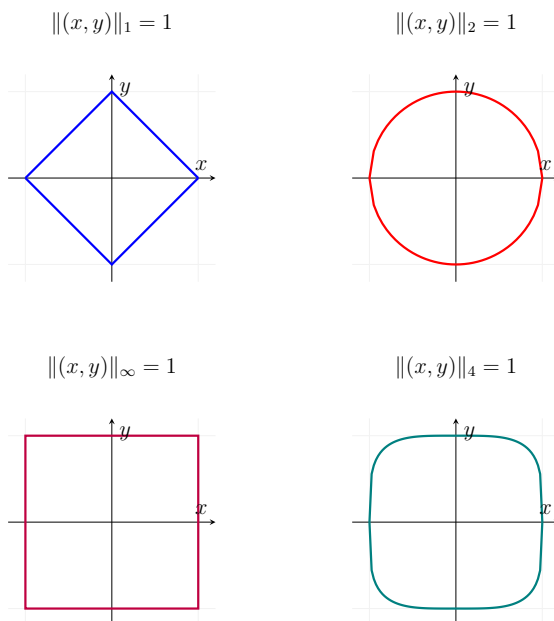
$$\|z_1 + z_2\|_3 = \max(|x_1 + x_2|, |y_1 + y_2|) \leq \max(|x_1| + |x_2|, |y_1| + |y_2|)$$

$$\leq \max(|x_1|, |y_1|) + \max(|x_2|, |y_2|) = \|z_1\|_3 + \|z_2\|_3,$$

$$\|z_1 + z_2\|_4 = [(x_1 + x_2)^4 + (y_1 + y_2)^4]^{1/4} \leq [x_1^4 + y_1^4]^{1/4} + [x_2^4 + y_2^4]^{1/4} = \|z_1\|_4 + \|z_2\|_4.$$

给出. 上面第二条的最后一个不等号用到了 Cauchy-Schwarz 不等式和, 第四条的不等号用到了 Minkowski 不等式.

ii) 如下所示.



iii)

$$\begin{array}{lll} \|\overline{OA}\|_1 = 1, & \|\overline{OB}\|_1 = 1, & \|\overline{AB}\|_1 = 2, \\ \|\overline{OA}\|_2 = 1, & \|\overline{OB}\|_2 = 1, & \|\overline{AB}\|_2 = \sqrt{2}, \\ \|\overline{OA}\|_3 = 1, & \|\overline{OB}\|_3 = 1, & \|\overline{AB}\|_3 = 1, \\ \|\overline{OA}\|_4 = 1, & \|\overline{OB}\|_4 = 1, & \|\overline{AB}\|_4 = 2^{1/4}. \end{array}$$

□

**1.4.2** 设  $C(0, 1]$  为  $(0, 1]$  上连续有界的函数, 对任意  $x(t) \in C(0, 1]$ , 令  $\|x\| = \sup_{0 < t \leq 1} |x(t)|$ . 证明:  $\|\cdot\|$  是  $C(0, 1]$  上的范数, 且  $\ell^\infty$  与  $C(0, 1]$  的一个子空间等距同构.

i) 正定性和齐次性是显然的, 三角不等式也由

$$\|x + y\| = \sup_{0 < t \leq 1} |x(t) + y(t)| \leq \sup_{0 < t \leq 1} |x(t)| + \sup_{0 < t \leq 1} |y(t)| = \|x\| + \|y\|$$

可见.

ii) 考虑取  $\varphi_n \in C(0, 1]$  使得  $\|\varphi_n\|_\infty = 1$  且  $\text{supp } \varphi_n \subset (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ . 考虑映射

$$\begin{aligned} \ell^\infty &\longrightarrow C(0, 1], \\ \iota: (a_1, a_2, \dots) &\longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k. \end{aligned}$$

容易看出这是一个  $\ell^\infty$  到  $\text{im } \iota \subset C(0, 1]$  的等距同构.

□

**1.4.3\*** 在  $C^1[a, b]$  中, 令

$$\|f\|_1 = \left( \int_a^b (|f|^2 + |f'|^2) dx \right)^{1/2}. \quad (\forall f \in C^1[a, b])$$

证明:  $\|\cdot\|_1$  是  $C^1[a, b]$  上的范数, 判断并证明此范数空间的完备性.

i) 注意对正数  $x, y$  我们有不等式  $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x+y}$ , 那么

$$\begin{aligned} \|f + g\|_1 &= \left( \int_a^b (|f|^2 + |f'|^2 + |g|^2 + |g'|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \int_a^b (|f|^2 + |f'|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_a^b (|g|^2 + |g'|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_1 + \|g\|_1. \end{aligned}$$

此即三角不等式. 正定性与齐次性易证.

ii) 不妨假设我们在区间  $[0, 1]$  上考虑. 取函数列

$$u_n(x) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

显见  $u_n \in C^\infty[0, 1]$ , 且

$$u'_n(x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}}}.$$

在该范数下,  $u_n$  是 Cauchy 列. 事实上,

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_{W^{1,2}}^2 &\leq \int_0^1 \left( \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|^2 + |u'_m - u'_n| \right)^2 dx \\ &= \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|^2 + \|u'_m - u'_n\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

在  $L^2[0, 1]$  上, 首先很显然有逐点的

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u'_n(x) = \operatorname{sgn} \left( x - \frac{1}{2} \right) \stackrel{\text{def}}{=} v(x),$$

所以由于  $|u'_n - v| \leq |u'_n| + |v| \leq 2$ , 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\|u'_n - v\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

从而

$$\|u_n - u_m\|_{W^{1,2}}^2 \leq \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|^2 + \|u'_m - u'_n\|_{L^2}^2 \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0.$$

与此同时, 容易知道  $u_n$  的极限  $v = |x - \frac{1}{2}|$  不在  $C^1[0, 1]$  中. 这说明度量空间  $(C^1[0, 1], \|\cdot\|_{W^{1,2}})$  不完备.  $\square$

**注**  $C^1[a, b]$  在该范数下的完备化空间是 Sobolev 空间  $W^{1,2}[a, b]$ .

**1.4.4** 对  $C[0, 1]$ , 令

$$\|f\|_1 = \left( \int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|f\|_2 = \left( \int_0^1 (1+x)|f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (\forall f \in C[0, 1])$$

**证明:**  $\|\cdot\|_1$  和  $\|\cdot\|_2$  在  $C[0, 1]$  上是等价范数.

一方面, 注意在  $[0, 1]$  上

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx + \int_0^1 x|f(x)|^2 dx \leq 2 \int_0^1 |f(x)|^2 dx = 2\|f\|_1^2,$$

即  $\|f\|_2 \leq \sqrt{2}\|f\|_1$ . 另一方面, 显然有

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2.$$

所以就有

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \sqrt{2}\|f\|_1,$$

这意味着两个范数等价. □

**1.4.5\*** 设  $BC[0, \infty)$  为  $[0, \infty)$  上连续有界的函数, 对任意  $f \in BC[0, \infty)$ ,  $a > 0$ , 令

$$\|f\|_a = \left( \int_0^\infty e^{-ax} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

i) 证明:  $\|\cdot\|_a$  是  $BC[0, \infty)$  上的范数.

ii) 证明: 若  $a, b > 0, a \neq b$ , 则  $\|\cdot\|_a$  与  $\|\cdot\|_b$  是  $BC[0, \infty)$  上不等价的范数.

i) 齐次性显然. 正定性由

$$\left( \int_0^\infty e^{-ax} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = 0 \iff e^{-ax} |f(x)|^2 \equiv 0 \iff f \equiv 0$$

可见; 至于三角不等式, 注意

$$\begin{aligned} \|f+g\|_a &= \left( \int_0^\infty e^{-ax} |f(x) + g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \int_0^\infty [e^{-ax/2} |f(x)| + e^{-ax/2} |g(x)|]^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \int_0^\infty e^{-ax} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_0^\infty e^{-ax} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \|f\|_a + \|g\|_a. \end{aligned}$$

上面第二个不等号利用了 Minkowski 不等式.

ii) 用反证法. 不妨设  $b > a > 0$ , 如果存在  $C > 0$  使得  $\forall f \in BC[0, \infty)$ , 都有

$$\frac{1}{C} \|f\|_b \leq \|f\|_a \leq C \|f\|_b,$$

那么, 就有

$$\int_0^\infty (Ce^{-bx} - e^{-ax}) |f(x)|^2 dx > 0.$$

注意当

$$x > \frac{1}{b-a} \ln C$$

时,  $Ce^{-bx} < e^{-ax}$ . 据此, 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{b-a} \ln C, \\ x - \frac{1}{b-a} \ln C, & \frac{1}{b-a} \ln C \leq x < \frac{1}{b-a} \ln C + 1, \\ 1, & x \geq \frac{1}{b-a} \ln C + 1. \end{cases}$$

显然就有  $f(x) \in BC[0, \infty)$  且

$$\int_0^\infty (Ce^{-bx} - e^{-ax})|f(x)|^2 dx < 0.$$

矛盾! 于是不存在这样的  $C$ , 从而两个范数不等价.  $\square$

**1.4.6** 设  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$  为赋范线性空间, 对  $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ , 令  $\|x\| = \max(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2)$ . 证明: 若  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$  为赋范线性空间, 则  $\mathcal{X}$  在范数  $\|\cdot\|$  下是赋范线性空间. 这里  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  分别是  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$  的范数.

考虑  $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$  中的任意 Cauchy 列  $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^\infty$ , 由于  $\mathcal{X}_1$  和  $\mathcal{X}_2$  是 Banach 空间, 其完备性保证了对任意选定  $\varepsilon > 0$ , 都  $\exists N$  以及  $x_0 \in \mathcal{X}_1, y_0 \in \mathcal{X}_2$ , 使得  $\forall k > N$ ,

$$\|x_k - x_0\|_1 < \varepsilon \quad \text{且} \quad \|y_k - y_0\|_2 < \varepsilon.$$

那么,

$$\|(x_k, y_k) - (x_0, y_0)\| = \max(\|x_k - x_0\|_1, \|y_k - y_0\|_2) < \varepsilon.$$

注意  $\varepsilon$  选取的任意性, 就知道  $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$  也是 Banach 空间.  $\square$

**1.4.7\*** 设  $\mathcal{X}$  为赋范线性空间. 证明:  $\mathcal{X}$  为 Banach 空间当且仅当对任意  $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ , 只要  $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$ , 就能推出  $\sum_{n=1}^\infty x_n$  收敛.

( $\Rightarrow$ ) 只需说明

$$\left\{ \sum_{k=1}^n x_k \right\}_{n=1}^\infty$$

是 Cauchy 列. 事实上由于  $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\| < \infty$ , 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ , 使得  $\forall n_2 > n_1 > N$ , 有  $\sum_{k=n_1}^{n_2} \|x_k\| < \varepsilon$ , 那么由于

$$\left\| \sum_{k=n_1}^{n_2} x_k \right\| \leq \sum_{k=n_1}^{n_2} \|x_k\| < \varepsilon$$

立刻知道这是 Cauchy 列.

( $\Leftarrow$ ) 考虑  $\mathcal{X}$  上的 Cauchy 列  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , 我们这样选取它的一个子列: 对  $\varepsilon_k = 1/2^k$ , 取  $N_k$  使得  $\forall n_1, n_2 \geq N_k$ , 都有  $\|x_{n_1} - x_{n_2}\| < 1/2^k$ , 且不妨设  $N_1 < N_2 < \cdots < N_k < \cdots$ . 取出子列  $\{x_{N_k}\}_{k=1}^\infty$ , 这个子列满足

$$\sum_{k=1}^n \|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\| < \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 < \infty.$$

那么根据条件就知道  $\lim x_{N_k} = x_{N_1} + \sum_{k=1}^\infty (x_{N_{k+1}} - x_{N_k})$  在  $\mathcal{X}$  上存在, 从而不难证明原点列极限也在  $\mathcal{X}$  上. 于是就知道  $\mathcal{X}$  就是 Banach 空间.  $\square$

1.4.8 设  $\mathbb{P}_n$  为  $[a, b]$  上次数不大于  $n$  的多项式. 证明:  $\forall f \in C[a, b]$ , 存在  $P_0 \in \mathbb{P}_n$ , 使得

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_0(x)| = \min_{P \in \mathbb{P}_n} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)|.$$

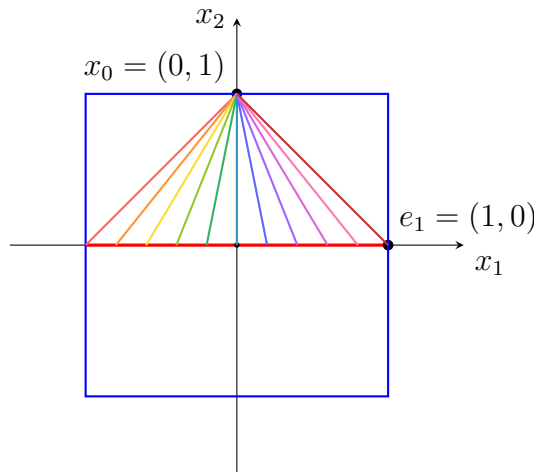
取向量组  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ , 自然存在对  $f(x) \in C[a, b]$  的最佳逼近. 因为  $\text{span}(1, x, x^2, \dots, x^n) = \mathbb{P}_n$ , 故所求得的就是  $\mathbb{P}_n$  对  $C[a, b]$  中函数  $f(x)$  的最佳逼近.  $\square$

1.4.9 在  $\mathbb{R}^2$  中, 对任意  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , 令  $\|x\| = \max(|x_1|, |x_2|)$ , 记  $e_1 = (1, 0), x_0 = (0, 1)$ . 求  $a \in \mathbb{R}$  满足  $\|x_0 - ae_1\| = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|x_0 - \lambda e_1\|$  并判断并证明唯一性且对结果进行几何解释.

容易知道,

$$a = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \max(|\lambda|, 1) = 1.$$

事实上, 任取  $|\lambda| \leq 1$  都是最佳的逼近, 这意味着存在一个赋范线性空间, 以及一个向量组, 关于这个向量组的最佳逼近存在但不唯一.



如上图所示, 图上蓝色线段围成的正方形就是这个范数下的单位圆,  $x_0$  到  $[-1, 1] \times \{0\}$  的彩色线段就是  $x_0 - ae_1$  在  $a \in [-1, 1]$  时的例子, 对应的  $ae_1$  都是  $\text{span}\{e_1\}$  上对  $x_0$  的最佳逼近元.  $\square$

1.4.10 证明: 范数的严格凸性成立, 即对任意  $x, y, x \neq y$ , 若  $\|x\| = \|y\| = 1$ , 对任意  $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$ , 则  $\|\alpha x + \beta y\| < 1$ , 当且仅当对任意  $x \neq 0, y \neq 0$ , 若  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ , 则存在  $c > 0$ , 使得  $x = cy$ .

( $\implies$ ) 假若  $x, y$  满足  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ , 令

$$u = \frac{x}{\|x\|}, v = \frac{y}{\|y\|},$$

以及

$$a = \frac{\|x\|}{\|x\| + \|y\|}, b = \frac{\|y\|}{\|x\| + \|y\|},$$

那么,  $\|u\| = \|v\| = 1, a + b = 1, a, b \neq 0$ . 假若  $u \neq v$ , 由范数的凸性

$$\|au + bv\| < 1.$$

但另一方面,

$$\|au + bv\| = \left\| \frac{x + y}{\|x\| + \|y\|} \right\| = 1,$$

这就产生了矛盾, 意味着  $u = v$ , 从而  $x = cy$ , 这里  $c$  是某个常数.

( $\Leftarrow$ ) 取  $x, y$  满足  $\|x\| = \|y\| = 1$ , 那么对  $x, y \neq 0, x \neq y, \alpha + \beta = 1, \alpha, \beta > 0$ , 假若  $\|\alpha x + \beta y\| = 1 = \|\alpha x\| + \|\beta y\|$ , 则必有  $\alpha x = c\beta y$ , 即  $x = y$ , 矛盾!  $\square$

**1.4.11** 设  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  为赋范线性空间, 有凸函数  $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , 即

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y)$$

成立. 证明:  $\varphi$  的局部极小值为全空间的最小值.

假设  $\varphi$  在  $x_1$  处取局部极小值, 在  $x_2$  处取全局最小值, 且  $x_1 \neq x_2$ , 注意对  $0 < \lambda < 1$ , 假若  $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ , 则

$$\varphi(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda\varphi(x_1) + (1 - \lambda)\varphi(x_2) < \varphi(x_1).$$

最后一个不等号是因为  $\varphi(x_2) \leq \varphi(x_1)$ . 让  $\lambda \rightarrow 0$ , 容易发现这与假定的局部极小性矛盾. 那么, 要么  $x_1 = x_2$ , 要么  $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ , 这都意味着局部最小值必然是全局最小的.  $\square$

**1.4.12** 设  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  为赋范线性空间, 具有有限维子空间  $M$  和  $M$  的一组基  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , 给定  $g \in \mathcal{X}$ , 取函数  $F: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , 对任意  $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n$ , 定义

$$F(c) = \left\| \sum_{i=1}^n c_i e_i - g \right\|.$$

i) 证明:  $F$  是凸函数;

ii) 证明: 若  $F$  有最小值点  $c = (c_1, \dots, c_n)$ , 则  $f = \sum_{i=1}^n c_i e_i$  为  $g$  在  $M$  中的最佳逼近.

i) 取实数  $\alpha + \beta = 1, c^1, c^2 \in \mathbb{K}^n$ ,

$$\begin{aligned} F(\alpha c^1 + \beta c^2) &= \left\| \alpha \sum_{i=1}^n (c_i^1 e_i - g) + \beta \sum_{i=1}^n (c_i^2 e_i - g) \right\| \\ &\leq \alpha \left\| \sum_{i=1}^n (c_i^1 e_i - g) \right\| + \beta \left\| \sum_{i=1}^n (c_i^2 e_i - g) \right\| = \alpha F(c^1) + \beta F(c^2). \end{aligned}$$

ii) 由  $F(c)$  的形式直接得到.  $\square$

**1.4.13** 设  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  为赋范线性空间,  $\mathcal{X}_0$  是它的一个线性子空间. 若存在  $c \in (0, 1)$ , 对任意  $y \in \mathcal{X}$ , 都有  $\inf_{x \in \mathcal{X}_0} \|y - x\| \leq c\|y\|$ . 证明:  $\mathcal{X}_0$  在  $\mathcal{X}$  中稠密.

用反证法, 假若我们有  $\overline{\mathcal{X}_0} \neq \mathcal{X}$ , 那么根据 Riesz 引理,  $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in \mathcal{X}$ , 且  $\|y\| = 1$ , 使得  $\forall x \in \overline{\mathcal{X}_0}$ ,

$$\|y - x\| \geq 1 - \varepsilon = (1 - \varepsilon)\|y\|.$$

可以看见, 一旦  $\varepsilon < 1 - c$ , 立刻由

$$\inf_{x \in \mathcal{X}_0} \|y - x\| \geq \inf_{x \in \overline{\mathcal{X}_0}} \|y - x\| \geq (1 - \varepsilon)\|y\| > c\|y\|.$$

产生矛盾! 所以一定有  $\overline{\mathcal{X}_0} = \mathcal{X}$ , 即  $\mathcal{X}_0$  在  $\mathcal{X}$  中稠密. □

**1.4.14\*** 设

$$C_0 = \left\{ x = \{\xi_n\} \subset \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0 \right\},$$

赋以范数  $\|x\| = \max_{n \geq 1} |\xi_n|$ . 记

$$M = \left\{ x = \{\xi_n\} \in C_0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^n} = 0 \right\}.$$

i) 证明:  $M$  为  $C_0$  的闭线性子空间;

ii) 记  $x_0 = (2, 0, \dots, 0)$ , 证明:  $\inf_{x \in M} \|x - x_0\| = 1$ , 但对任意  $y \in M$ ,  $\|y - x_0\| > 1$ .

i) 只需验证它是闭集以及它对加法数乘的封闭性. 取  $M$  中一系列范数收敛到  $x \in C_0$  的序列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , 设  $x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \dots, \xi_k^n, \dots)$ ,  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots)$ , 那么由

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k^n}{2^k} = 0$$

以及

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k^n - \xi_k}{2^k} \right| \leq \|x_n - x\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

可见  $M$  是闭集. 对加法和数乘的封闭性是显然的.

ii)  $\forall y \in M$ ,

$$\|x_0 - y\| = \max(|\xi_1 - 2|, \max_{n \geq 2} |\xi_n|).$$

假若  $\|x_0 - y\| \leq 1$ , 那么  $1 \leq \xi_1 \leq 3$  且  $\max_{n \geq 2} |\xi_n| \leq 1$ , 注意

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^n} \geq \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4} \neq 0,$$

矛盾! 所以  $\|x_0 - y\| > 1$ .

同时,  $\forall 0 < \varepsilon \ll 1$ , 取  $k$  使得  $\varepsilon > 1/2^k$ , 考虑  $M$  中元素

$$x_k = \left( 1 - \frac{1}{2^k}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{k \text{ 个}}, 0, 0, \dots \right) \in M,$$

则

$$\|x_k - x_0\| = 1 + \frac{1}{2^k} < 1 + \varepsilon.$$

于是可见

$$\inf_{z \in M} \|x_0 - z\| = 1.$$

□

**注** 值得一提的是, 本题构造的例子指出, 无穷维闭线性子空间上未必存在子空间外元素的最佳逼近; 而有穷维时是存在最佳逼近的.

**1.4.15** 设  $M$  是赋范线性空间  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  的有限维真子空间. 证明: 存在  $y \in \mathcal{X}, \|y\| = 1$ , 使得  $\forall x \in M, \|y - x\| \geq 1$ .

因为  $M$  是  $\mathcal{X}$  的真子空间, 任取  $y_0 \notin M$ , 因为  $M$  是有限维的, 故  $M$  中关于  $y_0$  的最佳逼近一定能取到, 于是就存在  $x_0 \in M$  使得

$$\|y_0 - x_0\| = \min_{x' \in M} \|y_0 - x'\| := d.$$

那么, 考虑取  $y = (y_0 - x_0)/\|y_0 - x_0\|$ , 注意  $\|y\| = 1$ , 且  $\forall x \in M$ ,

$$\|y - x\| = \frac{\|y_0 - x'\|}{\|y_0 - x_0\|} \geq \frac{d}{d} = 1.$$

即得.

□

**注** 这是对 F.Riesz 引理作微小的修改得到的证明.

**1.4.16\*** 设  $f$  为  $[0, 1]$  上的复值函数, 令

$$\omega_\delta(f) = \sup\{|f(x) - f(y)| : \forall x, y \in [0, 1], |x - y| \leq \delta\}.$$

对  $0 < \alpha \leq 1$ , 定义对应的 Lipschitz 空间

$$\text{Lip } \alpha = \left\{ f : \|f\| = |f(0)| + \sup_{\delta > 0} \{\delta^{-\alpha} \omega_\delta(f)\} < \infty \right\},$$

且记

$$\text{lip } \alpha = \left\{ f \in \text{Lip } \alpha : \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{-\alpha} \omega_\delta(f) = 0 \right\}.$$

证明:  $\text{Lip } \alpha$  是 Banach 空间且  $\text{lip } \alpha$  是  $\text{Lip } \alpha$  的闭子空间.

首先, 不难证明  $\|\cdot\|$  确实是范数, 且  $\text{Lip } \alpha$  确实构成复线性空间, 所以  $\text{Lip } \alpha$  就是一个赋范线性空间. 下面证明它的完备性.

我们打算利用 Arzelà-Ascoli 定理证明,  $\text{Lip } \alpha \subset C[0, 1]$  中的一串依范数的 Cauchy 列  $\{f_n\}$  是列紧的, 从而必然有在  $\text{Lip } \alpha$  上收敛的子列, 进而这个 Cauchy 列的极限也在  $\text{Lip } \alpha$  中. 为此, 我们需要  $\{f_n\}$  一致有界以及等度连续.

一致有界性直接来自于  $\{f_n\}$  是 Cauchy 列. 事实上, 取  $\varepsilon = 1$  以及对应的  $N$  使得  $\|f_n - f_N\| < 1$  对  $n > N$  成立, 从而  $\forall n > N$ ,

$$\|f_n\| \leq \|f_N\| + \|f_n - f_N\| < \|f_N\| + 1,$$

将前  $N$  项纳入考虑不影响  $\{f_n\}$  的一致有界性. 一致有界证完.

再考察等度连续性. 任取  $\varepsilon, \exists \delta = (\varepsilon/M)^{1/\alpha}$ , 使得对所有正整数  $n$  以及  $|x_1 - x_2| < \delta$ , 都有

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| \leq \omega_\delta(f_n) \leq \delta^\alpha (\|f_n\| - |f_n(0)|) \leq \delta^\alpha \|f_n\| \leq \delta^\alpha M < \varepsilon.$$

这里的  $M = \sup_n \|f_n\| < +\infty$ , 是上一步中证明的结果. 这样一来, 等度连续性也被证明.

从而, 如上所述, 根据 Arzelà-Ascoli 定理,  $\text{Lip } \alpha$  是完备的赋范线性空间, 即 Banach 空间.

最后, 我们证明  $\text{lip } \alpha$  是  $\text{Lip } \alpha$  中的闭子空间.  $\text{lip } \alpha$  的作为子空间的封闭性是容易证明的. 事实上, 假若  $f, g \in \text{lip } \alpha$ , 则

$$0 \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega_\delta(f+g)}{\delta^\alpha} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \frac{\omega_\delta(f)}{\delta^\alpha} + \frac{\omega_\delta(g)}{\delta^\alpha} \right) = 0.$$

这是因为

$$\begin{aligned} \omega_\delta(f+g) &= \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \\ &\leq \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)| + \sup_{|x-y| \leq \delta} |g(x) - g(y)| = \omega_\delta(f) + \omega_\delta(g). \end{aligned}$$

如此一来,  $\text{lip } \alpha$  对向量加法就封闭了; 而它对数乘的封闭性是显然的.

只需再证明它是闭的. 考虑函数列  $\{f_n\} \subset \text{lip } \alpha$ . 设依范数的极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \in \text{Lip } \alpha$ .  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N$  使得当  $n > N$  时  $\|f - f_n\| < \varepsilon/2$ . 固定这个  $n$ , 对同一个  $\varepsilon$ , 因为  $f_n \in \text{lip } \alpha$ , 故存在  $\delta_0 > 0$  使得当  $\delta < \delta_0$  时  $\omega_\delta(f_n)/\delta^\alpha < \varepsilon/2$ . 注意

$$\begin{aligned} \omega_\delta(f) &\leq \omega_\delta(f_n) + \omega_\delta(f - f_n) \leq \omega_\delta(f_n) + \sup_{|x-y| \leq \delta} |(f - f_n)(x) - (f - f_n)(y)| \\ &\leq \omega_\delta(f_n) + \|f - f_n\| \delta^\alpha \leq \varepsilon \delta^\alpha. \end{aligned}$$

就立刻知道

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega_\delta(f)}{\delta^\alpha} = 0.$$

这就是  $\text{lip } \alpha$  的闭性. 综上所述说明了  $\text{lip } \alpha$  的完备性. □

注

$$[f]_\alpha = \sup_{\delta > 0} \{\delta^{-\alpha} \omega_\delta(f)\}$$

也称为  $\alpha$  阶 Hölder 半范数. 关于 Lipschitz 空间  $\Lambda^\alpha$  的更多性质, 参阅 [1], Section V.4., p.141.

**1.4.17** 设有商空间  $\mathcal{X}/\mathcal{X}_0$ .

i) 证明: 对任意  $x \in [x] \in \mathcal{X}/\mathcal{X}_0$ , 有  $\inf_{z \in \mathcal{X}_0} \|x - z\| = \|[x]\|_0$ ;

ii) 定义映射

$$\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}/\mathcal{X}_0, \quad x \mapsto [x].$$

证明:  $\varphi$  是连续线性映射;

iii) 证明: 对任意  $[x] \in \mathcal{X}/\mathcal{X}_0$ , 存在  $x \in \mathcal{X}$ , 使得  $\varphi(x) = [x]$ ,  $\|x\| \leq 2\|[x]\|_0$ ;

iv) 若  $\mathcal{X} = C[0, 1]$ ,  $\mathcal{X}_0 = \{f \in \mathcal{X} : f(0) = 0\}$ . 证明:  $\mathcal{X}/\mathcal{X}_0$  和  $\mathbb{K}$  等距同构.

i)

$$\|[x]\|_0 = \inf_{y \in [x]} \|y\| = \inf_{z \in \mathcal{X}_0} \|x - z\|.$$

ii)  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon$ , 那么对  $\forall \|x - y\| < \delta$ ,

$$\varphi(x) - \varphi(y) = [x] - [y] = [x - y].$$

进而

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_0 = \|[x - y]\|_0 = \inf_{u \in [x - y]} \|u\| \leq \|x - y\| < \varepsilon.$$

iii) 如果  $\|[x]\|_0 \neq 0$ , 根据下确界的性质, 当然存在  $x \in \mathcal{X}$

$$\|x\| < \|[x]\|_0 + \varepsilon < 2\|[x]\|_0$$

取  $\varepsilon$  足够小即可成立. 如果  $\|[x]\|_0 = 0$ , 则由于  $0 \in \mathcal{X}_0$  知道命题同样成立.

iv)  $\forall f \in C[0, 1]$ , 可以写成  $f = c + f_0$  的形式, 其中  $c$  是常数,  $f_0$  满足  $f_0(0) = 0$ . 这样的分解就诱导映射

$$\begin{aligned} \mathcal{X}/\mathcal{X}_0 &\longrightarrow \mathbb{K}, \\ \varphi: [f] = [c + f_0] = [c] &\longmapsto |c|. \end{aligned}$$

断言它是等距同构. 事实上, 该映射是良定义的 (与等价类代表元选取无关), 且

$$\|[f]\|_0 = \inf_{g \in [f]} \|g\| = \inf_{g \in [f]} \|c + g_0\| = \inf_{g \in [f]} \sup_{[0, 1]} |c + g_0| \geq |c|,$$

这里  $g_0 \in \mathcal{X}_0$ . 同时

$$\|[f]\|_0 = \|[c]\|_0 \geq |c|,$$

立刻知道  $\varphi$  是等距的. 也不难看出  $\varphi$  是一个同构. □

## 1.5 凸集与不动点

1.5.1 设  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  为赋范线性空间,  $E$  是真凸子集且  $0 \in E$ ,  $P$  为  $E$  的 Minkowski 泛函. 证明:

i)  $x \in \overset{\circ}{E}$  当且仅当  $P(x) < 1$ ;

ii)  $\overline{\overset{\circ}{E}} = \overline{E}$ .

i) 若  $x \in \overset{\circ}{E}$ , 则存在  $\varepsilon > 0$ , 使得  $(1 + \varepsilon)x \in E$ , 那么

$$P(x) \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1.$$

反过来, 假若  $P(x) < 1$ , 那么就可取  $\varepsilon > 0$ , 使得  $P(x) < 1 - \varepsilon < 1$ , 这样就有

$$\frac{1}{1 - \varepsilon}x \in E \Rightarrow x \in \overset{\circ}{E}.$$

ii) 注意

$$x \in \overline{E} \iff P(x) \leq 1 \iff x \in \overline{\overset{\circ}{E}}.$$

□

1.5.2\* 证明: 在 Banach 空间中, 列紧集的凸包为列紧集.

由  $D$  的列紧性可以选取  $D$  的有限  $\varepsilon/2$ -网  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . 现在取  $y_1, \dots, y_m \in D$ , 那它的凸组合

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i y_i \in \text{conv } D$$

其中,  $0 \leq \alpha_i \leq 1$ ,  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . 由  $\varepsilon/2$ -网的定义, 不妨设  $\|y_i - x_{k_i}\| < \varepsilon/2$ . 那么

$$\left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i - \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{k_i} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i (y_i - x_{k_i}) \right\| \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i \|y_i - x_{k_i}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

我们声称  $\{x_1, \dots, x_n\}$  生成的凸包

$$\text{conv}\{x_1, \dots, x_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{k_i} : 0 \leq \alpha_i \leq 1, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, i = 1, 2, \dots, m \right\}$$

是完全有界的. 这一事实我们稍后证明. 这样一来, 就存在  $\text{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$  的  $\varepsilon/2$ -网, 于是可以设

$$\left\| x_0 - \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{k_i} \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

这里  $x_0$  是  $\text{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$  的  $\varepsilon/2$ -网的一个元素. 自然

$$\left\| x_0 - \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i - \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{k_i} \right\| + \left\| x_0 - \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{k_i} \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这就说明了  $\text{conv } D$  的完全有界性, 从而得到列紧性.

余下我们只需要证明上述的声称. 为此, 考虑映射

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_1 = 1\} &\longrightarrow \text{conv}\{x_1, \dots, x_n\}, \\ \iota : (\alpha_1, \dots, \alpha_n) &\longmapsto \sum_{k=1}^m |\alpha_k| x_k. \end{aligned}$$

容易验证这个映射连续, 且  $\{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_1 = 1\}$  是紧集, 所以  $\text{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$  也是紧集, 从而是完全有界的. 这就证明我们的声称正确.  $\square$

**1.5.3** 设  $C$  是赋范线性空间  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  上的一个紧凸集, 设映射  $T : C \rightarrow C$  连续. 证明:  $T$  在  $C$  上有一个不动点.

注意紧集一定是闭集, 紧集的子集是列紧集, 根据 Schauder 不动点定理立即得到结论.  $\square$

**注** 关于紧集的子集是列紧集, 事实上紧集子集的闭包仍然是紧集, 所以是完全有界集; 而完全有界集的子集仍然完全有界, 所以原来子集是列紧的.

**1.5.4\*** 设  $C$  是 Banach 空间  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  中的有界闭凸集. 映射  $T_1, T_2 : C \rightarrow \mathcal{X}$  满足

$$i) \forall x, y \in C, T_1 x + T_2 y \in C;$$

$$ii) T_1 \text{ 是压缩映射且 } T_2 \text{ 是紧映射}.$$

证明:  $T_1 + T_2$  在  $C$  上至少有一个不动点.

要解决这一题, 最为关键的就是要构造如下算子:

$$S_y(x) = T_1 x + T_2 y.$$

根据条件, 对每一个给定的  $y$ ,  $S_y$  是  $C \rightarrow C$  的压缩算子. 因为  $C$  是有界闭凸集, 所以适用 Banach 不动点定理, 即存在唯一的  $x_y \in C$ , 使得  $S_y(x_y) = T_1 x_y + T_2 y = x_y$ . 这就诱导出映射

$$\varphi(y) = x_y.$$

这自然也是  $C \rightarrow C$  的.

现在我们声称,  $\varphi$  在  $C$  上存在不动点. 这一声称将留到后面证明. 假使  $y_0 \in C$  就是  $\varphi$  的不动点, 那么  $\varphi(y_0) = y_0$ , 从而

$$S_{y_0}(y_0) = T_1 y_0 + T_2 y_0 = y_0.$$

也就是说,  $y_0$  同时也是  $T_1 + T_2$  的不动点, 这样定理就得证了. 余下的事情就是要证明我们先作出的声称.

考虑利用 Schauder 不动点定理证明这一事实. 先说明  $\varphi$  的连续性. 不妨假定  $T_1$  的压缩系数是  $k \in (0, 1)$ , 那么对于  $\forall \varepsilon > 0$ , 根据  $T_2$  的连续性存在  $\delta_1$  使得  $\forall \|y_1 - y_2\| < \delta, \|T_2 y_1 - T_2 y_2\| < (1 - k)\varepsilon$ . 这样一来, 注意  $x_{y_i}$  都是  $S_{y_i}$  的不动点, 可以得到

$$\begin{aligned}\|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\| &= \|x_{y_1} - x_{y_2}\| = \|(T_1 x_{y_1} - T_1 x_{y_2}) + (T_2 y_1 - T_2 y_2)\| \\ &\leq k\|x_{y_1} - x_{y_2}\| + \|(T_2 y_1 - T_2 y_2)\| \leq k\|x_{y_1} - x_{y_2}\| + (1 - k)\varepsilon.\end{aligned}$$

移项之后可以知道

$$\|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\| = \|x_{y_1} - x_{y_2}\| < \varepsilon,$$

也就是  $\varphi$  是连续函数.

现在只需要证明  $\varphi(C)$  是列紧的即可. 首先,  $D = T_2(C)$  是列紧的, 因为  $T_2$  是紧算子. 由于我们有控制式

$$\|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\| \leq \frac{1}{1 - k} \|(T_2 y_1 - T_2 y_2)\|,$$

所以  $\{T_2 y_n\}$  如果是 Cauchy 列, 那么  $\{\varphi(y_n)\}$  也是 Cauchy 列. 根据  $T_2(C)$  的列紧性就知道  $\varphi(C)$  也是列紧的.

综上, 容易知道 Schauder 不动点定理的所有前提条件均被满足, 从而  $\varphi$  在  $C$  上是具有不动点的. 结合先前的逻辑, 我们完成了证明.  $\square$

**注** 本题的结论就是 Krasnoselskii 不动点定理. 它的原始形式就是题目中的形式. 事实上,  $S_y(x) = (\text{Id} - T_1)^{-1}(T_2 y)$ .

**1.5.5** 对  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 它的各个元素  $a_{ij} > 0$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ). 证明: 存在  $\lambda > 0$  以及各分量非负且不全为 0 的向量  $x \in \mathbb{R}^n$ , 使得  $Ax = \lambda x$ .

在赋予  $\ell^1$  范数下,  $\mathbb{R}^n$  的子集

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \right\},$$

就是单位球. 作  $C \rightarrow \mathbb{R}^n$  上的连续映射

$$f(x) = \frac{Ax}{\sum_{j=1}^n (Ax)_j}.$$

注意  $f(x) \in C$ . 这样一来通过 Brouwer 不动点定理立刻得到所求的特征值  $\lambda = \sum_{j=1}^n (Ax)_j$ , 属于它的特征向量也是分量非负且不全为 0 的.  $\square$

注 看起来, 我们得到的特征值似乎是和  $x$  有关系的, 但实际上并非如此. 我们先找到由  $A$  决定的  $f$  的不动点, 从而得到的特征值是  $A$  决定的, 而并非和  $x$  有关. 从头到尾, 我们没有也不能“选取”这个特征值, 它是由  $A$  决定的.

1.5.6\* 设  $K(x, y)$  为  $[0, 1] \times [0, 1]$  上正值连续函数, 定义映射

$$T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], u(x) \mapsto \int_0^1 K(x, y)u(y)dy.$$

证明: 存在  $\lambda > 0, u \in C[0, 1]$ , 其中  $u$  非负但不恒为 0, 满足  $Tu = \lambda u$ .

考虑赋予  $L^1(\mathbb{R})$  范数的  $C[0, 1]$  的真闭子集

$$D = \{f \in C[0, 1] : \|f\|_{L^1} = 1, f(x) \geq 0\}.$$

$D$  是闭集这一事实可以利用 Lebesgue 控制收敛定理证明. 作映射

$$\tilde{T}u(x) = \frac{\int_0^1 K(x, y)u(y)dy}{\int_0^1 \int_0^1 K(x, y)u(y)dydx}.$$

明显  $\tilde{T}$  是一个  $D \rightarrow D$  的连续映射. 为了使用 Schauder 不动点定理, 我们还需要验证  $D$  是凸集且  $T(D)$  是列紧的.

对  $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1, f, g \in D$ , 考虑

$$\|\alpha f + \beta g\|_{L^1} = \int_0^1 |\alpha f + \beta g|dx = \alpha \int_0^1 |f|dx + \beta \int_0^1 |g|dx = \alpha \|f\|_{L^1} + \beta \|g\|_{L^1} = \alpha + \beta = 1.$$

所以  $\|\alpha f + \beta g\|_{L^1} \in D$ , 从而  $D$  就是凸集.

为了验证  $\tilde{T}(D)$  是列紧集, 考虑应用 Ascoli-Arzelà 引理. 对等度连续性, 首先对  $f \in D$ , 我们先估计

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x, y)f(y)dydx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 f(y) \int_0^1 K(x, y)dx dy \geq m \int_0^1 f(y)dy = m.$$

这里用到了  $f$  恒非负且  $\|f\|_{L^1} = 1$  以及核函数  $K(x, y)$  在  $[0, 1]^2$  上恒正且连续, 从而有正下界  $m$ . 这样一来,  $\forall \varepsilon > 0$ , 这样取  $\delta$ : 对这个  $\varepsilon$ , 由核函数  $K(x, y)$  的连续性, 取  $\delta$  使得  $\forall x_1, x_2$  满足  $|x_1 - x_2| < \delta$ , 就有  $|K(x_1, y) - K(x_2, y)| < m\varepsilon$ . 得到  $\delta$  之后, 我们设  $|x_1 - x_2| < \delta$ , 那么对  $\forall f \in D$ , (注意  $f$  恒非负且  $\|f\|_{L^1} = 1$ )

$$|\tilde{T}f(x_1) - \tilde{T}f(x_2)| = \frac{\int_0^1 |K(x_1, y) - K(x_2, y)|f(y)dy}{\int_0^1 \int_0^1 K(x, y)f(y)dydx} \leq \frac{m}{m}\varepsilon = \varepsilon.$$

这就得到了等度连续性.

至于一致有界性, 注意  $K(x, y)$  有上界  $M$ , 所以

$$\tilde{T}f(x) = \frac{\int_0^1 K(x, y)f(y)dy}{\int_0^1 \int_0^1 K(x, y)f(y)dydx} \leq \frac{M}{m} < +\infty.$$

即得. 由 Ascoli-Arzelà 引理就得到  $\tilde{T}(D)$  的列紧性.

进而, 根据 Schauder 不动点定理, 存在  $\tilde{T}$  作用下的不动点  $u \in D$  使得

$$\tilde{T}u(x) = u(x)$$

即

$$Tu(x) = \|Tu\|_{L^1}u(x).$$

所以, 存在  $\lambda = \|Tu\|_{L^1} > 0$  以及恒非负的非零连续函数  $u(x) \in D$  满足题意. □

**注** 本题的构造思路同上题. 但是, 由于这是无穷维的情形, 我们无法利用 Brouwer 不动点定理, 随即一个很自然的想法就是使用无穷维的 Schauder 不动点定理. 另外, 关于得到的特征值看起来会和  $u$  有关, 但实则不然. 这在逻辑上和上一题是相似的, 见习题 1.5.5 的注.

## 1.6 内积空间

**1.6.1** 对复线性空间  $\mathcal{X}$ , 有共轭双线性函数  $a(x, y)$  和其诱导的二次型  $q(x)$ . 证明: 对任意  $x, y \in \mathcal{X}$ , 有  $a(x, y) = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y) + iq(x+iy) - iq(x-iy)]$ .

直接计算即可. □

**1.6.2** 证明: 在  $C[a, b]$  上不能引入内积满足,  $\forall f \in C[a, b]$ , 有  $(f, f)^{1/2} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ .

若存在这样的内积,  $C[a, b]$  上的无穷范数  $\|\cdot\|_\infty$  就必然满足平行四边形公式

$$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2).$$

事实上, 例如在  $C[0, 1]$  中, 取  $f(x) = x, g(x) = 1 - x$ , 那么

$$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 1 + 1 = 2 \neq 4 = 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2),$$

这产生了矛盾. □

**1.6.3** 在  $L^2[0, T]$  中, 考虑函数

$$f: L^2[0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x(t) \mapsto \left| \int_0^T e^{-(T-\tau)} x(\tau) d\tau \right|. \quad (\forall x \in L^2[0, T])$$

证明:  $f(x)$  在  $L^2[0, T]$  的单位球面上可以取到最大值. 求出最大值和最大值点.

考虑  $L^2[0, T]$  上  $L^2$  范数决定的内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . 在这个定义下, 对  $\|x(\tau)\|_{L^2} = 1$ , 由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\left| \int_0^T e^{-(T-\tau)} x(\tau) d\tau \right| = |\langle e^{-T+\tau}, x(\tau) \rangle| \leq \|e^{-T+\tau}\|_{L^2} \cdot \|x(\tau)\|_{L^2} = \left( \frac{1 - e^{-2T}}{2} \right)^{1/2}.$$

且上式等号取到当且仅当  $x(\tau)$  与  $e^{-T+\tau}$  线性相关, 即

$$x(\tau) = \pm \left( \frac{2}{1 - e^{-2T}} \right)^{1/2} e^{-(T-\tau)}.$$

□

**1.6.4** 设  $M, N$  是内积空间  $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  的子集. 证明: 若  $M \subset N$ , 则  $N^\perp \subset M^\perp$ .

注意

$$x \in N^\perp, y \in M \Rightarrow x \in N^\perp, y \in N \Rightarrow x \perp y \Rightarrow x \in M^\perp,$$

即  $N \subset M^\perp$ . □

**1.6.5** 设  $M$  是 Hilbert 空间  $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  的子集. 证明:  $(M^\perp)^\perp = \overline{\text{span} M}$ .

注意  $\forall y \in M^\perp$ , 都有  $y \perp M$ , 从而  $y \perp \text{span} M$ , 于是  $\text{span} M \subset (M^\perp)^\perp$ . 因为集合的正交补是闭线性子空间, 所以  $\overline{\text{span} M} \subset (M^\perp)^\perp$ .

另一方面, 因为  $M \subset \overline{\text{span } M}$ , 所以  $(M^\perp)^\perp \subset (\overline{\text{span } M}^\perp)^\perp$ . 只需说明  $(\overline{\text{span } M}^\perp)^\perp = \overline{\text{span } M}$ . 事实上, 由于  $\overline{\text{span } M}$  是闭线性子空间, 我们断言对闭线性子空间  $S$ , 一定有  $S = (S^\perp)^\perp$ .

事实上,  $\forall x \in \mathcal{X}$ , 作正交分解  $x = y + z$ , 其中  $y \in S, z \in S^\perp$ ; 同时也可以关于  $S^\perp$  作正交分解, 得到  $x = \tilde{y} + \tilde{z}$ , 其中  $\tilde{y} \in (S^\perp)^\perp, \tilde{z} \in S^\perp$ . 注意  $y \in S \subset (S^\perp)^\perp$ , 由正交分解的唯一性  $y = \tilde{y}, z = \tilde{z}$ , 由任意性得到  $(S^\perp)^\perp = S$ . 这就得到了我们的证明.  $\square$

#### 1.6.6 求 $L^2[-1, 1]$ 中偶函数集的正交补.

因为每个  $L^2[-1, 1]$  函数都能唯一分解为

$$f = f_o + f_e,$$

其中,

$$f_o = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad f_e = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

分别是奇函数和偶函数. 记  $L^2[-1, 1]$  上的奇函数类为  $\mathcal{O}$ , 和偶函数类  $\mathcal{E}$ , 通过上面的分解我们有

$$L^2[-1, 1] = \mathcal{O} \oplus \mathcal{E},$$

而对  $f \in \mathcal{O}, g \in \mathcal{E}$ , 显然

$$\int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx = 0.$$

所以  $\mathcal{E}^\perp = \mathcal{O}$ .  $\square$

#### 1.6.7\* 在 $L^2[a, b]$ 中, 考察子集 $S = \{e^{e\pi i n x}\}$ . 证明:

i) 若  $|b - a| \leq 1$ , 则  $S^\perp = \{0\}$ ;

ii) 若  $|b - a| > 1$ , 则  $S^\perp \neq \{0\}$ .

区间长度为 1 时, 由于  $e^{2\pi i n x}$  周期为 1, 这是 Fourier 分析的基本结论, 其详尽证明可以在任何一本介绍 Fourier 级数的数学分析教材中找到, 这里从略.

倘若  $b - a < 1$ , 用反证法, 假若存在  $u \in L^2[a, b]$  使得  $\forall n \in \mathbb{N}^+$ , 都有

$$\int_a^b u e^{2\pi i n x} dx = 0,$$

将  $u$  如下延拓到  $[a, a + 1]$  上:

$$\tilde{u} = \begin{cases} u, & x \in [a, b], \\ 0, & x \in (b, a + 1], \end{cases}$$

此时仍然有  $\tilde{u} \in L^2[a, a+1]$ . 且

$$\int_a^b \tilde{u} e^{2\pi i n x} dx = 0 \Rightarrow \tilde{u} = 0,$$

这就说明了  $u$  在  $[a, b]$  上也恒为 0, 这就说明了  $L^2[a, b]$  上函数族  $\{e^{2\pi i n x}\}$  的完备性.

倘若  $b - a > 1$ , 考虑

$$f(x) = \mathbb{1}_{[a, a+1]} - \mathbb{1}_{[b-1, b]}.$$

因为  $b - a > 1$  所以  $f$  不恒为 0. 可以验证这与  $\{e^{2\pi i n x}\}$  的元素都正交, 从而  $\{e^{2\pi i n x}\}$  不构成完备正交系. 事实上,

$$\langle f, e^{2\pi i n x} \rangle \int_a^b f(x) e^{2\pi i n x} dx = \int_a^{a+1} e^{2\pi i n x} dx - \int_{b-1}^b e^{2\pi i n x} dx,$$

如果  $n = 0$ , 那么两个积分项的值都是 1, 所以  $\langle f, e^{2\pi i n x} \rangle = 0$ ; 如果  $n \neq 0$ , 那么由于先前  $b - a < 1$  的情形,  $\{e^{2\pi i n x}\}$  在  $L^2[a, a+1]$  与  $L^2[b-1, b]$  上都构成完备正交系, 于是两个积分项都是 0, 亦有  $\langle f, e^{2\pi i n x} \rangle = 0$ . 于是这就构成一个例子, 说明了  $\{e^{2\pi i n x}\}$  在  $L^2[a, b]$  上不是完备正交系.  $\square$

**1.6.8** 设  $\mathcal{X}$  为闭单位圆上解析函数.  $\forall f, g \in \mathcal{X}$ , 定义

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z) \overline{g(z)}}{z} dz.$$

证明:  $\{z^n / \sqrt{2\pi}\}$  为正交规范集.

首先

$$\frac{1}{i} \oint_{|z|=1} f(z) \overline{g(z)} \frac{dz}{z} \stackrel{\substack{z=e^{i\theta} \\ dz=ie^{i\theta} d\theta}}{=} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) g(e^{-i\theta}) d\theta.$$

由

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{ni\theta}}{\sqrt{2\pi}} \right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 1$$

可见规范性; 而对  $n \neq m$ , 由

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{ni\theta}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-mi\theta}}{\sqrt{2\pi}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(n-m)i\theta} d\theta = 0$$

即可见正交性.  $\square$

**1.6.9** 设  $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  为 Hilbert 空间,  $\{e_n\}, \{f_n\}$  是正交规范集, 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2 < 1.$$

证明:  $\{e_n\}$  为完备的当且仅当  $\{f_n\}$  为完备的.

现在假设  $\{e_n\}$  完备, 利用反证法. 若  $\{f_n\}$  不完备, 那么就必然存在非零向量  $x \in \mathcal{X}$  使得  $\forall n, \langle x, f_n \rangle = 0$ . 但是

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n - f_n \rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x\|^2 \|e_n - f_n\|^2 < \|x\|^2.$$

这也就说我们一定有  $\|x\| > 1$ , 但很显然  $\tilde{x} = x/\|x\|$  也满足我们的假设, 所以产生矛盾!  $\square$

**1.6.10** 设  $\mathcal{X}_0$  是 Hilbert 空间  $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  的闭线性子空间, 且  $\{e_n\}, \{f_n\}$  分别是  $\mathcal{X}_0$  和  $\mathcal{X}_0^\perp$  的规范正交基. 证明:  $\{e_n\} \cup \{f_n\}$  是  $\mathcal{X}$  的规范正交基.

很显然, 我们只需要验证  $\{e_n\} \cup \{f_n\}$  构成一组基, 于是只需验证 Parseval 恒等式. 任取  $x \in \mathcal{X}$ , 由正交分解我们有  $x = y + z$ , 其中  $y \in \mathcal{X}_0, z \in \mathcal{X}_0^\perp$ . 由于  $\{e_n\}, \{f_n\}$  分别在  $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_0^\perp$  中是规范正交基, 所以

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|y + z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, e_n \rangle|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, f_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y + z, e_n \rangle|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y + z, f_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (|\langle x, e_n \rangle|^2 + |\langle x, f_n \rangle|^2). \end{aligned}$$

此即 Parseval 恒等式. 上面的推导过程中利用到了  $z \perp e_n, y \perp f_n$ .  $\square$

**1.6.11\*** 对  $\mathbb{C}$  中的单位开圆盘  $D$ , 记

$$H^2(D) = \left\{ u(z) \in \mathbf{H} : \iint_D |u(x + iy)|^2 dx dy < \infty \right\},$$

这里  $\mathbf{H}$  是解析函数类. 对任意  $u, v \in H^2(D)$ , 令

$$\langle u, v \rangle = \iint_D u(x + iy) \overline{v(x + iy)} dx dy.$$

证明:

i) 若  $u(z)$  有 Taylor 展开

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_n|^2}{1+n} < \infty;$$

ii) 若

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2(D), \quad v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H^2(D),$$

则

$$\langle u, v \rangle = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \bar{b}_n}{n+1}.$$

iii) 若有  $u(z) \in H^2(D)$ , 则  $\forall z \in D$ ,

$$|u(z)| \leq \frac{\|u\|}{\sqrt{\pi}(1-|z|)};$$

iv)  $H^2(D)$  为 Hilbert 空间.

下面是证法一. 另一种证法见本题注记.

i) & ii) 考虑

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \iint_D \left( \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m \right) \overline{\left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right)} dx dy \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} a_m \bar{b}_n \iint_D z^m \bar{z}^n dx dy \\ &\stackrel{z=re^{i\theta}}{\underset{dx dy=rdrd\theta}{=}} \sum_{n,m=0}^{\infty} a_m \bar{b}_n \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^{m+n} e^{(m-n)i\theta} r dr d\theta \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \delta_{mn} \cdot \frac{\pi a_m \bar{b}_n}{n+1} \\ &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \bar{b}_n}{n+1}. \end{aligned}$$

其中  $\delta_{mn}$  是 Kronecker 符号. 取  $u = v$  立得 i).

iii) 对

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned} |u(z)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right| \leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 \frac{\pi}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\pi} |z|^{2n} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u\| \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{1-|z|^2} \\ &\leq \frac{\|u\|}{\sqrt{\pi}(1-|z|)}. \end{aligned}$$

iv) 设

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in H^2(D),$$

满足

$$\|u\| = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_n|^2}{n+1}.$$

考虑映射

$$\begin{aligned} T: H^2(D) &\longrightarrow \ell^2, \\ u &\longmapsto \left( \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} b_n \right)_{n=0}^{\infty}. \end{aligned}$$

很明显,  $T$  把  $H^2(D)$  连续等距嵌入  $\ell^2$ .  $H^2(D)$  是闭子空间. 又因为  $\ell^2$  是完备空间, 这就说明  $H^2(D)$  的完备性.  $\square$

**注** 实际上本题描述的空间是 Bergman 空间, 常记为  $A^2(D)$ . 实际上亦可按 (4)-(1)-(2)-(3) 的顺序给出证明. 如下所示.

**证明.** iv) 为验证  $A^2(D)$  是 Hilbert 空间, 我们只需要证明其完备性.

令  $K \Subset D$ , 即  $K$  为紧集且  $\bar{K} \subset D$ . 设  $\delta = \text{dist}(K, \partial D) > 0$  (这里  $\text{dist}$  是欧氏距离), 取  $r = \delta/2$ . 对任意  $z \in K$ , 由解析函数的平均值性质,

$$f(z) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_D f(w) dS.$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\pi r^2} \left( \iint_D |f(w)|^2 dS \right)^{1/2} \cdot (\pi r^2)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_{L^2}.$$

于是对固定的  $K$ , 存在常数  $C_K = (\pi r^2)^{(-1/2)}$  使得

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq C_K \|f\|_{L^2}, \quad \forall f \in A^2(D).$$

这说明  $L^2$  范数能控制解析函数在任意紧集上的一致上界.

取在  $\|\cdot\|_2$  下的任意 Cauchy 列  $\{f_n\}$ , 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$  使得当  $m, n \geq N$  时,

$$\|f_n - f_m\|_{L^2} < \varepsilon.$$

由上式估计可得, 对任意紧集  $K \Subset D$ ,

$$\sup_{z \in K} |f_n(z) - f_m(z)| \leq C_K \|f_n - f_m\|_{L^2}.$$

因此  $\{f_n\}$  在  $K$  上关于一致范数  $\|\cdot\|_\infty$  是 Cauchy 列, 从而存在解析函数  $g_K$  使在  $K$  上  $f_n \rightrightarrows g_K$ . 这意味着不同紧集上定义的局部极限函数在它们的交集上取值相同, 所以可以拼成一个定义在整个  $D$  上的解析函数  $g$ , 并且满足

$$\sup_{z \in K} |f_n(z) - g(z)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

由于  $L^2(D)$  是完备的, 存在  $f \in L^2(D)$  使得  $\|f_n - f\|_{L^2} \rightarrow 0$ . 由第二步的结果, 存在子列  $\{f_{n_k}\}$  在每个紧集上一致收敛到  $g$ , 特别地, 它几乎处处收敛到  $g$ . 而  $L^2$  收敛蕴含存在子列几乎处处收敛到  $L^2$  极限, 因此  $f = g, a.e. z \in D$ . 由于解析函数若在连通域上几乎处处相等, 则处处相等, 故  $f = g$  在整个  $D$  上解析.

于是  $f \in A^2(D)$ , 并且  $\|f_n - f\|_{L^2} \rightarrow 0$ . 故  $A^2(D)$  在给定内积下完备.

i) 由于  $\{\varphi_n\}$  是 Hilbert 空间上的一组正交规范基, 根据 Parseval 恒等式,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle u, \varphi_n \rangle|^2 = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_n|^2}{1+n} = \pi \|u\|^2 < +\infty.$$

ii) 同样考虑

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n, \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} \langle v, \varphi_n \rangle \varphi_n,$$

那么

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} \langle u, \varphi_m \rangle \varphi_m, \sum_{n=0}^{\infty} \langle v, \varphi_n \rangle \varphi_n \right\rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \langle u, \varphi_m \rangle \overline{\langle v, \varphi_n \rangle} \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle u, \varphi_n \rangle \overline{\langle v, \varphi_n \rangle} \\ &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \bar{b}_n}{n+1}. \end{aligned}$$

iii) 这一部分同证法一的 iii) 部分.

□

我们在上面大费周章证明  $A^2(D)$  是 Hilbert 空间, 就是为了利用 Parseval 不等式. 虽然这似乎不太值当, 但是确实给出了另一种  $A^2(D)$  完备性的优美证法.

**1.6.12** 设  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  为内积空间,  $\{e_n\}$  是一个正交规范集. 证明: 对任意  $x, y \in \mathcal{H}$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle} \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

注意

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle \right| = \left| \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, y \right\rangle \right| = \langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

立即得到. □

**1.6.13** 设  $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  为内积空间, 对任意  $x_0 \in \mathcal{X}, r > 0$ , 记  $C = \{x \in \mathcal{X} : \|x - x_0\| \leq r\}$ .

i) 证明:  $C$  为  $\mathcal{X}$  中的闭凸集;

ii) 对任意  $x \in \mathcal{X}$ , 取

$$y = \begin{cases} x_0 + \frac{r(x - x_0)}{\|x - x_0\|}, & x \in C, \\ x, & x \notin C, \end{cases}$$

证明:  $y$  为  $x$  在  $C$  中的最佳逼近.

i) 设  $\alpha + \beta = 1$ , 取  $x_1, x_2 \in C$ , 注意

$$\|\alpha x_1 + \beta x_2 - x_0\| = \|\alpha(x_1 - x_0) + \beta(x_2 - x_0)\| \leq \alpha\|x_1 - x_0\| + \beta\|x_2 - x_0\| \leq r.$$

也就是  $C$  是凸集. 再证它是闭集, 考虑连续映射

$$\begin{aligned} \iota: C &\longrightarrow \iota(C), \\ x &\longmapsto \|x - x_0\|. \end{aligned}$$

很明显地,  $\iota(C) = [0, r]$  是闭集, 所以原像  $C$  是闭集. 这里  $\iota$  的连续性由范数的连续性保证.

ii) 若  $x \notin C$ , 不妨设  $x_0 = 0$ , 那么  $y = rx/\|x\|$ , 则  $\forall z \in C$ ,

$$\operatorname{Re} \langle x - y, y - z \rangle = \operatorname{Re} \left\langle x \left(1 - \frac{r}{\|x\|}\right), r \frac{x}{\|x\|} - z \right\rangle = \left(1 - \frac{r}{\|x\|}\right) \operatorname{Re} \left\langle x, r \frac{x}{\|x\|} - z \right\rangle.$$

其中,  $1 - \frac{r}{\|x\|} > 0$ , 而

$$\operatorname{Re} \left\langle x, r \frac{x}{\|x\|} - z \right\rangle = r\|x\| - \operatorname{Re} \langle x, z \rangle \geq r\|x\| - |\langle x, z \rangle| \geq \|x\|(r - \|z\|) \geq 0.$$

所以这个逼近是最优的. □

1.6.14 求  $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ , 使得

$$\int_0^1 |e^t - a_0 - a_1 t - a_2 t^2|^2 dt$$

取最小值.

在  $L^2[0, 1]$  上考虑闭线性子空间  $D = \text{span}\{1, x, x^2\}$ , 要取  $e^t$  在  $D$  上的最佳逼近. 首先这最佳逼近自然存在, 因为线性子空间是凸的. 通过最小二乘法

$$(\langle f_i, f_j \rangle)_{3 \times 3} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (\langle e^t, f_j \rangle)_{3 \times 1},$$

其中  $(\langle f_i, f_j \rangle)$  是  $D$  在基  $\{1, x, x^2\}$  下的 Gram 矩阵, 这里  $f_k \in \{1, x, x^2\}$ . 代入计算可得

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e - 1 \\ 1 \\ e - 2 \end{pmatrix}.$$

解之, 得

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39e - 105 \\ 588 - 216e \\ 210e - 570 \end{pmatrix}.$$

□

1.6.15\* 设  $f(x) \in C^2[a, b]$ , 满足边界条件  $f(a) = f(b) = 0, f'(a) = 1, f'(b) = 0$ . 证明:

$$\int_a^b |f''(x)|^2 dx \geq \frac{4}{b-a}.$$

一个自然的想法是用线性函数对  $f''$  作最优逼近. 取  $L = b - a$ , 设  $p(x) = mx + n$ , 考虑

$$\int_a^b p(x) f''(x) dx = (mx + n) f'(x) \Big|_a^b - m \int_a^b f'(x) dx = -ma - n,$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$|ma + n| = \left| \int_a^b p(x) f''(x) dx \right| \leq \left( \int_a^b [p(x)]^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_a^b [f''(x)]^2 dx \right)^{1/2}.$$

由于

$$\int_a^b [p(x)]^2 dx = \frac{1}{3m} [(mb + n)^3 - (ma + n)^3],$$

不妨  $ma + n = 1$ , 那么  $p(a) = 1$  且

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx \geq \frac{3m}{(mb + n)^3 - 1} = \frac{3m}{(mL + 1)^3 - 1}.$$

现在我们要最大化  $3m / [(mL + 1)^3 - 1]$ , 即最小化  $[(mL + 1)^3 - 1] / 3m$ . 注意

$$\frac{(mL + 1)^3 - 1}{3m} = \frac{1}{3}L^3 \left(m + \frac{3}{2L}\right)^2 + \frac{1}{4}L \geq \frac{1}{4}L,$$

所以

$$\max \frac{3m}{(mL + 1)^3 - 1} = 1 / \min \frac{(mL + 1)^3 - 1}{3m} = \frac{4}{b - a}.$$

这就是我们需要的. 等号在  $m = -\frac{3}{2L}$  时取得, 此时  $p(x) = 1 - \frac{3}{2L}(x - a)$ .  $\square$

**1.6.16\*** 设  $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  是 Hilbert 空间,  $a(x, y)$  是  $\mathcal{X}$  上的共轭双线性函数, 且存在  $\delta, M > 0$ , 使得  $\forall x \in \mathcal{X}$ , 有

$$\delta \|x\|^2 \leq a(x, x) \leq M \|x\|.$$

又考虑  $u_0 \in \mathcal{X}$  和  $\mathcal{X}$  的闭凸子集  $C$ . 证明: 函数

$$f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto a(x, x) - \operatorname{Re}(u_0, x)$$

在  $C$  上存在最小值和唯一的最小值点  $x_0$ , 且  $\forall x \in C$ ,

$$\operatorname{Re}(2a(x_0, x - x_0) - (u_0, x - x_0)) \geq 0.$$

设

$$J(x) = a(x, x) - \operatorname{Re}(u_0, x), \quad d = \inf_{x \in C} J(x).$$

注意到, 根据给定的条件和 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$J(x) \geq \delta \|x\|^2 - \|u_0\| \|x\| = \delta \left( \|x\| - \frac{\|u_0\|}{2\delta} \right)^2 - \frac{\|u_0\|^2}{4\delta} \geq -\frac{\|u_0\|^2}{4\delta}.$$

所以,  $d$  是一个有限数. 从而我们可以取  $C$  中的序列  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , 使得

$$d \leq J(x_n) < d + \frac{1}{n}.$$

我们只需要证明  $\{x_n\}$  是一个 Cauchy 列, 再根据  $C$  是完备空间中的闭集即知该序列的极限  $x_0$  就满足  $J(x_0) = d$  且  $x_0 \in C$ . 事实上,

$$\begin{aligned} \delta \|x_n - x_m\|^2 &\leq a(x_n - x_m, x_n - x_m) = 2a(x_n, x_n) + 2a(x_m, x_m) - a(x_n + x_m, x_n + x_m) \\ &= 2a(x_n, x_n) + 2a(x_m, x_m) - 4a\left(\frac{x_n + x_m}{2}, \frac{x_n + x_m}{2}\right) \\ &= 2J(x_n) + 2J(x_m) - 4J\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) \\ &\leq 2\left(d + \frac{1}{n}\right) + 2\left(d + \frac{1}{m}\right) - 4d = \frac{2}{n} + \frac{2}{m}. \end{aligned}$$

所以

$$\|x_n - x_m\| = \left( \frac{2}{\delta n} + \frac{2}{\delta m} \right)^{1/2} \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0.$$

即得  $C$  上  $J(x)$  的最小值可以在  $x = x_0 \in C$  时取到. 假若  $J(x_0) = J(\tilde{x}_0) = d$ , 那么同样考虑

$$\delta \|x_0 - \tilde{x}_0\|^2 \leq 2J(x_0) + 2J(\tilde{x}_0) - 4J\left(\frac{x_0 + \tilde{x}_0}{2}\right) = 0,$$

即可见  $x_0$  的唯一性.

再证明变分不等式. 固定  $x \in C$ , 考虑函数  $\varphi_x(t) = J(x_0 + t(x - x_0))$ ,  $t \in [0, 1]$ . 因为  $C$  是凸集, 所以对  $t \in [0, 1]$ ,  $x_0 + t(x - x_0)$  都在  $C$  上. 计算

$$\begin{aligned} \varphi_x(t) &= a(x_0 + t(x - x_0), x_0 + t(x - x_0)) - \operatorname{Re}\langle u_0, x_0 + t(x - x_0) \rangle \\ &= a(x_0, x_0) + 2t \operatorname{Re} a(x_0, x - x_0) + t^2 a(x - x_0, x - x_0) - \operatorname{Re}\langle u_0, x_0 \rangle - t \operatorname{Re}\langle u_0, x - x_0 \rangle \\ &= a(x_0, x_0) + t\{\operatorname{Re}[2a(x_0, x - x_0) - \langle u_0, x - x_0 \rangle]\} + t^2 a(x - x_0, x - x_0) \end{aligned}$$

因为  $x_0$  处  $J(x)$  取到最小值  $d$ , 所以  $\varphi_x(t)$  在  $[0, 1]$  上的最小值在  $t = 0$  处取到, 又因为  $\varphi_x(t)$  是一个二次函数, 所以  $\varphi'_x(0) \geq 0$ , 于是

$$\operatorname{Re}[2a(x_0, x - x_0) - \langle u_0, x - x_0 \rangle] \geq 0.$$

这就是要证的变分不等式. □

**注** 上面对  $\varphi_x(t)$  的构造, 以及对它求方向导数是变分法的基本技巧.

## 2 线性算子与线性泛函

### 2.1 线性算子的概念

**2.1.1** 证明:  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  的充要条件是  $T$  为线性算子且将  $\mathcal{X}$  中的有界集映为  $\mathcal{Y}$  中的有界集.

( $\implies$ ) 假设  $D \subset \mathcal{X}$  有界,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , 且  $\forall x \in D$ , 都有  $\|x\|_{\mathcal{X}} \leq M$ , 则

$$\|Tx\|_{\mathcal{Y}} \leq \|T\| \cdot \|x\|_{\mathcal{X}} \leq M\|T\| < +\infty,$$

意味着  $T(D)$  有界.

( $\impliedby$ ) 此时  $T(\{\|x\|_{\mathcal{X}} = 1\})$  有上界  $M$ , 注意

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} \|Tx\|_{\mathcal{Y}} \leq M$$

此即  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ . □

**2.1.2** 设  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , 证明:

i)  $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|;$

ii)  $\|A\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\|.$

i) 一方面,

$$\sup_{\|x\|_{\mathcal{X}} \leq 1} \|Ax\|_{\mathcal{Y}} \geq \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} \|Ax\|_{\mathcal{Y}} = \|A\|;$$

另一方面,

$$\sup_{\|x\|_{\mathcal{X}} \leq 1} \|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq \sup_{\substack{\|x\|_{\mathcal{X}} \leq 1 \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_{\mathcal{Y}}}{\|x\|_{\mathcal{X}}} \leq \sup_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_{\mathcal{Y}}}{\|x\|_{\mathcal{X}}} = \|A\|.$$

ii) 一方面,

$$\sup_{\|x\|_{\mathcal{X}} < 1} \|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}} \leq 1} \|Ax\|_{\mathcal{Y}} = \|A\|;$$

另一方面, 选定  $x \in \mathcal{X}$  使得  $\|x\|_{\mathcal{X}} = 1$ , 取序列  $\{x_n\}$  满足  $x_n = (1 - 1/n)x$ . 由  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  就有  $Ax_n \rightarrow Ax$ . 故  $\|Ax_n\|_{\mathcal{Y}} \rightarrow \|Ax\|_{\mathcal{Y}}$ . 进而因为有  $\|Ax_n\|_{\mathcal{Y}} \leq \sup_{\|y\|_{\mathcal{X}} < 1} \|Ay\|$ , 对  $n$  取极限推出

$$\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq \sup_{\|y\|_{\mathcal{X}} < 1} \|Ay\|.$$

再对所有的  $\|x\|_{\mathcal{X}} = 1$  取上确界得到

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} \|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq \sup_{\|y\|_{\mathcal{X}} < 1} \|Ay\|.$$

综合起来就是

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}} < 1} \|Ax\|_{\mathcal{Y}}.$$

□

**2.1.3** 设  $f \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ , 证明:

$$i) \|f\| = \sup_{\|x\|=1} f(x);$$

$$ii) \text{ 对任意 } \delta > 0, \text{ 有 } \sup_{\|x\| < \delta} f(x) = \delta \|f\|.$$

i) 注意  $f$  是线性泛函, 有

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| = \sup_{\|y\|=1} |f(y)|.$$

ii) 由习题 2.1.2 知道

$$\sup_{\|x\| < 1} f(x) = \sup_{\|x\| < 1} |f(x)| = \|f\|.$$

继而, 对  $\forall \delta > 0$ ,

$$\|f\| = \sup_{\|x/\delta\| < 1} \left| f\left(\frac{x}{\delta}\right) \right| = \frac{1}{\delta} \sup_{\|x\| < \delta} |f(x)|.$$

□

**2.1.4** 设  $y(t) \in C[0, 1]$ , 定义  $C[0, 1]$  上的泛函

$$f(x) = \int_0^1 x(t)y(t)dt, \quad (\forall x(t) \in C[0, 1])$$

求  $\|f\|$ .

取  $x(t)$  满足  $\|x\|_{C[0,1]} = 1$ , 则

$$\left| \int_0^1 x(t)y(t)dt \right| \leq \int_0^1 |x(t)||y(t)|dt \leq \int_0^1 |y(t)|dt.$$

此即

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_{C[0,1]}=1} \left| \int_0^1 x(t)y(t)dt \right| \leq \int_0^1 |y(t)|dt.$$

下面证明反向的不等式. 事实上,  $\forall \varepsilon > 0$ , 由于  $y$  是非零连续函数, 零点个数至多可列, 所以取它的所有零点排成一列  $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ , 考虑集合

$$O_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} B\left(k_n, \frac{\varepsilon}{2^{n+1}M}\right),$$

其中,  $M = \sup_{[0,1]} y(t)$  对固定的  $y$  是常数. 那么  $O_\varepsilon$  是开集且  $|O_\varepsilon| < \varepsilon/2M$ , 作函数

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} y(t) & t \notin O_\varepsilon \cap [0, 1] \\ \text{线性}, & t \in O_\varepsilon \cap [0, 1] \end{cases}$$

且如若  $O_\varepsilon$  包含 0 或 1, 则取合适的边值使得  $|f_\varepsilon|$  的最大值不超过 1. 那么  $f_\varepsilon(t)$  连续,  $\|f\|_{C[0,1]} = 1$ , 且

$$\begin{aligned} \int_0^1 y(t) f_\varepsilon(t) dt &= \int_{[0,1] \setminus O_\varepsilon} |y(t)| dt + \int_{O_\varepsilon} f_\varepsilon(t) y(t) dt \\ &\geq \int_{[0,1] \setminus O_\varepsilon} |y(t)| dt - \int_{O_\varepsilon} |y(t)| dt \\ &= \int_0^1 |y(t)| dt - 2 \int_{O_\varepsilon} |y(t)| dt \\ &\geq \int_0^1 |y(t)| dt - 2M|O_\varepsilon| \\ &= \int_0^1 |y(t)| dt - \varepsilon. \end{aligned}$$

对所有充分小的  $\varepsilon$  取上确界, 立刻得到

$$\sup_{\|x\|_{C[0,1]}=1} \left| \int_0^1 x(t) y(t) dt \right| \geq \int_0^1 |y(t)| dt.$$

从而知道

$$\|f\| = \int_0^1 |y(t)| dt.$$

□

**注** 这样操作的思路是, 假若在  $L^2[0, 1]$  上我们只需取  $x(t) = \operatorname{sgn} y(t)$  立刻可以验证前面得到的上确界可以达到, 但是因为在连续函数空间中讨论, 而  $\operatorname{sgn} y(t) \notin C[0, 1]$ , 所以上面利用了一些技术, 取一族连续函数“逼近”  $\operatorname{sgn} y(t)$ .

**2.1.5\*** 设  $f$  为  $\mathcal{X}$  上的非零有界线性泛函, 令

$$d = \inf\{\|x\| : x \in \mathcal{X}, f(x) = 1\}$$

证明:  $\|f\| = 1/d$ .

对任何  $x \in \mathcal{X}$ , 都对应地取  $y = x/\|f(x)\|_{\mathcal{Y}}$ , 那么  $\|f(y)\|_{\mathcal{Y}} = 1$ , 且

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_{\mathcal{Y}}}{\|x\|_{\mathcal{X}}} \stackrel{(*)}{=} \sup_{\|f(y)\|_{\mathcal{Y}}=1} \frac{\|f(y)\|_{\mathcal{Y}}}{\|y\|_{\mathcal{X}}} = \frac{1}{\inf_{\|f(y)\|_{\mathcal{Y}}=1} \|y\|_{\mathcal{X}}} = \frac{1}{d}.$$

上式的 (\*) 成立是因为, 一方面,  $\mathcal{X} \setminus \{0\}$  决定了所有  $y$  使得  $\|f(y)\|_{\mathcal{Y}} = 1$ ; 另一方面, 决定  $\|f(y)\|_{\mathcal{Y}} = 1$  的  $x$  跑遍整个  $\mathcal{X} \setminus \ker f$ , 而  $\ker f$  中的点不影响这个上确界, 因为分子  $\|f|_{\ker f}(x)\|_{\mathcal{Y}} = 0$ .

**2.1.6** 设  $f \in \mathcal{X}^*$ , 证明: 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $x_0 \in \mathcal{X}$ , 有  $f(x_0) = \|f\|$  且  $\|x_0\| < 1 + \varepsilon$ .

由于上确界的性质, 且

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|,$$

存在  $x_0$  使得  $\|x_0\| = 1$  且  $f(x_0) = \|f\| - k_\varepsilon$ , 其中  $k_\varepsilon < \varepsilon\|f\|/(1 + \varepsilon)$ . 那么现在

$$f\left(\frac{\|f\|}{\|f\| - k_\varepsilon}x_0\right) = \|f\|,$$

且

$$\left\|\frac{\|f\|}{\|f\| - k_\varepsilon}x_0\right\| < 1 + \varepsilon.$$

这样就构造出来合题意的点. □

**注** 具体  $k_\varepsilon$  的取值是通过计算得到的.

**2.1.7\*** 设  $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  是线性算子, 令

$$N(T) = \{x \in \mathcal{X} : Tx = 0\}$$

- i) 若  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , 证明:  $N(T)$  为  $\mathcal{X}$  的闭子空间.
- ii)  $N(T)$  是  $\mathcal{X}$  的闭子空间能否推出  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ?
- iii) 若  $f$  是线性泛函, 证明:  $f \in \mathcal{X}^*$  当且仅当  $N(f)$  是闭线性子空间.

**注** 事实上  $N(T)$  就是线性算子  $T$  的核空间, 以下都记之为  $\ker T$ .

- i) 利用  $T$  的线性性,  $\ker T$  是线性子空间是容易验证的; 下面我们证明它是闭的. 取  $\ker T$  中一串收敛到  $x \in \mathcal{X}$  的点列  $\{x_n\}$ . 因为  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  是连续的, 所以

$$\|Tx\|_{\mathcal{Y}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n\|_{\mathcal{Y}} = 0.$$

所以  $Tx = 0$ , 意味着  $x \in \ker T$ .

- ii)  $\ker T$  是闭线性子空间并不能推出  $T$  是有界线性算子. 考虑  $C^1[0, 1]$  上赋予一致范数  $\|\cdot\|_\infty$ , 考虑求导算子, 很明显它在这个范数下是无界的, 而它的核空间是  $[0, 1]$  上所有常值函数, 由常值函数序列的一致范数下的极限自然也是常值函数, 所以核空间是闭的, 这就是一个反例.

**注** [6], p.300, 或 [8], p.76 中提供有一个 Banach 空间  $\ell^1$  上的反例.

iii) 这里只证明反向的结果, 即对线性泛函  $f$ , 往证  $\ker f$  是闭子空间能推出  $f$  有界. 不妨设  $f \neq 0$ , 那么  $\ker f$  是  $\mathcal{X}$  的真闭子空间. 取  $\mathcal{X}$  的任一点  $x_0$ , 满足  $f(x_0) = 1$ . 这是必然能取到的, 只需对核空间外元素作伸缩即可控制函数值是 1.  $\forall x \in \mathcal{X}$ , 考虑分解

$$x = (x - f(x)x_0) + f(x)x_0.$$

那么, 很显然  $x - f(x)x_0 \in \ker f$ , 且  $\ker f \cap \text{span}\{x_0\} = 0$ , 于是  $\mathcal{X}$  就有直和分解

$$\mathcal{X} = \ker f \oplus \text{span}\{x_0\}.$$

其中,  $\text{span}\{x_0\} = \mathcal{X} / \ker f$  是  $\mathcal{X}$  的一维线性子空间, 于是就诱导出  $X \rightarrow X / \ker T$  的典范映射  $\pi$ , 使得  $\pi(x) = [x]$ , 且  $\pi$  是连续映射 (见习题 1.4.17, ii)). 又考虑映射  $\tilde{f}: \mathcal{X} / \ker f \rightarrow \mathbb{K}$ , 由于  $\tilde{f}$  是有限维空间的线性映射, 自然就是连续的; 注意  $f = \tilde{f} \circ \pi$ , 所以  $f$  也是连续的.  $\square$

注 本题说明, 线性泛函的核空间的余维数是 1, 这是很特别的性质.

**2.1.8\*** 设  $f$  为  $\mathcal{X}$  上的线性泛函, 对任意  $\lambda \in \mathbb{K}$ , 令

$$H_f^\lambda = \{x \in \mathcal{X} : f(x) = \lambda\}$$

若  $f \in \mathcal{X}^*$  且  $\|f\| = 1$ , 证明:

i)  $\forall x \in \mathcal{X}$ , 有  $|f(x)| = \inf\{\|x - z\| : \forall z \in H_f^0\}$ ;

ii)  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ , 任意  $x \in H_f^\lambda$  到  $H_f^0$  的距离均为  $|\lambda|$ .

i) 一方面, 对  $z \in \ker f$  取下确界,

$$|f(x)| = \inf_{z \in \ker f} |f(x - z)| \leq \inf_{z \in \ker f} \|f\| \|x - z\| = \inf_{z \in \ker f} \|x - z\|.$$

另一方面, 根据习题 2.1.6 的结果,  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $x_0$  满足  $f(x_0) = \|f\| = 1$ , 且  $\|x_0\| < 1 + \varepsilon$ . 注意

$$x = (x - f(x)x_0) + f(x)x_0.$$

其中  $x - f(x)x_0 \in \ker f$ . 于是对  $z \in \ker f$ ,

$$\inf_{z \in \ker f} \|x - z\| = \inf_{z \in \ker f} \|(x - z - f(x)x_0) + f(x)x_0\| \leq |f(x)| \|x_0\| < (1 + \varepsilon) |f(x)|.$$

于是

$$|f(x)| \leq \inf_{z \in \ker f} \|x - z\| < (1 + \varepsilon) |f(x)|.$$

命  $\varepsilon \rightarrow 0$  即得.

ii) 由上一问, 对所有  $x$  满足  $f(x) = \lambda$ ,

$$|\lambda| = |f(x)| = \inf\{\|x - z\| : \forall z \in \ker f\}.$$

右侧的就是这些点到  $\ker f$  的“距离”。

□

**注** 当  $\|f\| \neq 1$  时, 同样有类似的结果, 只需构造  $\tilde{f} = f/\|f\|$ , 注意其范数为 1, 套用本题结论即可. 本题的几何意义是明确的, 即对于线性泛函, 它的等值面都是一些超平面, 一层一层叠在一起. “法向”则是任何函数值不为 0 的向量. 见习题 2.1.7\*, iii) 中对空间的直和分解.

另外, 如果承认选择公理, 本题 i) 的一个方向用 [6] 的定理 2.4.7, p.128 可以立即得到.

**2.1.9** 设  $\mathcal{X}^*$  为实赋范线性空间,  $f$  是  $\mathcal{X}$  上的非零实线性泛函, 证明: 不存在开球  $B(x_0, \delta)$ , 使得  $f(x_0)$  为  $f(x)$  在  $B(x_0, \delta)$  中的极值.

假若  $f(x_0) > 0$ , 则设开球  $B(x_0, \delta\|x_0\|)$ , 且不妨设  $\delta \ll 1$ . 这时候

$$\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)x_0 \in B(x_0, \delta\|x_0\|) \quad \text{且} \quad f\left[\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)x_0\right] = \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)f(x_0) < f(x_0),$$

$$\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)x_0 \in B(x_0, \delta\|x_0\|) \quad \text{且} \quad f\left[\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)x_0\right] = \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)f(x_0) > f(x_0),$$

意味着  $f(x_0)$  不是极大值也不是极小值. 而  $f(x_0) < 0$  情况是完全类似的.

假若  $f(x_0) = 0$ , 首先  $f(x_0)$  不可能既是极大值也是极小值, 否则在这个开球上  $f \equiv 0$ , 由  $f$  的线性,  $\forall x \in \mathcal{X} \setminus \{x_0\}$ , 可以用开球内的值表示  $f(x)$ , i.e.,

$$f(x) = f\left(x_0 + \frac{2}{R}\|x - x_0\| \cdot \frac{\frac{R}{2}(x - x_0)}{\|x - x_0\|}\right) = f(x_0) + \frac{2}{R}\|x - x_0\| \cdot f\left(\frac{\frac{R}{2}(x - x_0)}{\|x - x_0\|}\right) = 0 + 0 = 0.$$

这里  $R$  是开球的半径. 另外, 我们还有  $f(x_0) = 0$ , 这就意味着  $f$  在  $\mathcal{X}$  上恒为 0. 所以对每一个开球, 都存在某个  $x_1$  使得  $f(x_1)$  大于或小于  $f(x_0) = 0$ . 那么  $2x_0 - x_1$  也在这个球内部, 并且  $f(2x_0 - x_1) = -f(x_1)$ . 这意味着  $f(x_0) = 0$  不会是极大或极小值. □

**注** 这是一条很有趣的性质, 它说明了实赋范线性空间上的非零线性泛函的极值在任何球中均不可取到. 本题中的球事实上可以换为任何开集, 证明是类似的. 进一步地, 若实线性空间中的线性泛函在闭集上存在极值, 那极值一定在边界上取到. 在论证过程中, 我们还知道: 如果线性泛函在一个开集上取值恒为 0, 那这个线性泛函只能是 0.

这一性质还应用在加强 Hahn-Banach 定理几何形式的 Ascoli 推论的证明中, 见 [6], 推论 2.4.17, p.135. 这一结论在加强各种开集上的估计中也有使用. 在 2.4 节的习题中, 我们会多次用到这个性质.

## 2.2 Riesz 表示定理及其应用

注 本节中,  $H$  均指代一个 Hilbert 空间.

2.2.1 设  $f_1, \dots, f_n$  为  $H$  上的一组有界线性泛函, 对  $k = 1, \dots, n$ , 令

$$M = \bigcap_{k=1}^n \ker f_k.$$

$\forall x_0 \in H$ , 记  $y_0$  为  $x_0$  在  $M$  上的正交投影, 证明:  $\exists y_1, \dots, y_n \in (\ker f_k)^\perp, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ , 使得

$$y_0 = x_0 - \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k.$$

由 F.Riesz 表示定理, 可以设  $f_k(x) = \langle x, y_k \rangle, y_k \in H, k = 1, \dots, n$ . 不妨设  $\{y_k\}$  线性无关. 那么很显然  $\ker f_k = (\text{span}\{y_k\})^\perp, (\ker f_k)^\perp = \overline{\text{span}\{y_k\}} = \text{span}\{y_k\}$ . 设  $S = \text{span}\{y_1, \dots, y_n\}$ , 那么

$$S^\perp = (\text{span}\{y_1, \dots, y_n\})^\perp = \bigcap_{i=1}^n (\text{span}\{y_i\})^\perp = \bigcap_{i=1}^n \ker f_i = M.$$

这样就可以对  $x_0$  作正交分解

$$x_0 = y + z, \quad y \in S, z \in M.$$

这时, 因为  $S = \text{span}\{y_1, \dots, y_n\}$  有限维, 所以有

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i.$$

于是

$$x_0 = z + \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = y_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i.$$

这里  $\alpha_i \in \mathbb{K}, y_i \in \text{span}\{y_i\} = (\ker f_i)^\perp$ , 符合题意. □

2.2.2 设  $l$  为  $H$  上的实有界线性泛函,  $C$  为  $H$  中闭凸子集, 对任意  $v \in C$ , 设

$$f(v) = \frac{1}{2} \|v\|^2 - l(v)$$

i) 证明: 存在  $u^* \in H$ , 使得对任意  $v \in C, f(v) = \frac{1}{2} \|u^* - v^*\|^2 - \frac{1}{2} \|v^*\|^2$ .

ii) 证明: 存在唯一  $u_0 \in C$ , 使得  $f(u_0) = \inf_{v \in C} f(v)$ .

i) 由 F.Riesz 表示定理, 可以设  $l(v) = \langle v, y_l \rangle$ . 注意

$$\frac{1}{2} \|u^* - v\|^2 - \frac{1}{2} \|u^*\|^2 = \frac{1}{2} \|v\|^2 - \text{Re}\langle u^*, v \rangle,$$

而令  $u^* = y_l$  时, 上式恰为  $f(v)$ .

ii) 由 i),

$$f(v) = \frac{1}{2}\|y_l - v\|^2 - \frac{1}{2}\|y_l\|^2 \geq -\frac{1}{2}\|y_l\|^2,$$

且等号成立当且仅当  $v = y_l$ . □

**2.2.3\*** 设  $H$  中的元素为定义在  $S$  上的复值函数, 对任意  $x \in S, f \in H$ , 定义映射  $J_x : H \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto f(x)$  为  $H$  上的线性泛函. 证明: 如果  $J_x$  是连续的, 那么存在  $S \times S$  上的复值函数  $K(x, y)$ , 满足

i) 对任意固定的  $y \in S, K(x, y) \in H$  都是  $x$  的函数;

ii)  $\forall f \in H, y \in S, f(y) = \langle f, K(\cdot, y) \rangle$ .

注意  $J_y$  是  $H$  上的线性连续泛函, 根据 F.Riesz 表示定理, 存在  $k_y \in H$ , 使得  $J_y = \langle \cdot, k_y \rangle$ . 断言  $K(x, y) = k_y(x)$  即为所求. 事实上

$$\langle f, K(\cdot, y) \rangle = \langle f, k_y \rangle = J_y(f) = f(y)$$

对于  $\forall f \in H, y \in S$  成立, 所以  $K(\cdot, y) = k_y \in H$ . □

**注** 再生核是由给定的 (以集合上函数为元素的) Hilbert 空间决定的, 习题 2.2.4\* 就是一个例子. 可以证明, 再生核具有共轭对称性, 唯一性以及正定性. 下面我们给出共轭对称性的证明.

证明. 因为再生核  $K(x, y)$  具有性质

$$f(y) = \langle f, K(\cdot, y) \rangle,$$

固定  $y$ , 令  $f = K(\cdot, x)$ , 那么

$$K(y, x) = \langle K(\cdot, x), K(\cdot, y) \rangle = \overline{\langle K(\cdot, y), K(\cdot, x) \rangle} = \overline{K(x, y)}.$$

□

**2.2.4\***  $\forall z, w \in D, H^2(D)$  的再生核为

$$K(z, w) = \frac{1}{\pi(1 - z\bar{w})^2}.$$

本题与习题 1.6.11\* 与习题 2.2.3\* 相关. 为计算  $H^2(D)$  的再生核, 我们需要一条引理.

**引理** 假若  $\{e_n\}$  是  $H$  的一组规范正交基, 那么  $H$  的再生核

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(x) \overline{e_n(y)}.$$

引理的证明放到本题的注释中去. 一旦引理成立, 由 [6], p.73 所示,

$$\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} z^{n-1}, n = 1, 2, \dots$$

就是  $H^2(D)$  的一组规范正交基. 所以经过简单的级数计算可得

$$K(z, w) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n(z\bar{w})^{n-1} = \frac{1}{\pi(1-z\bar{w})^2}.$$

□

注 这条引理给出了 (以给定集合上函数为元素的) Hilbert 空间中再生核的具体形式.

引理的证明. 如果  $\{e_n\}$  是  $H$  的一组规范正交基, 那么

$$K(\cdot, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle K(\cdot, y), e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\langle e_n, K(\cdot, y) \rangle} e_n.$$

注意  $K(\cdot, y)$  是再生核,  $\forall f \in H, \langle f, K(\cdot, y) \rangle = f(y)$ , 所以

$$\overline{\langle e_n, K(\cdot, y) \rangle} = \overline{e_n(y)}.$$

于是

$$K(\cdot, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{e_n(y)} e_n.$$

两边作用在  $x$  上即得结果.

□

**2.2.5\*** 设  $L, M$  为  $H$  上的闭线性子空间, 证明:

$$i) L \perp M \iff P_L P_M = 0;$$

$$ii) L = M \iff P_L + P_M = \text{id};$$

$$iii) P_L P_M = P_{L \cap M} \iff P_L P_M = P_M P_L.$$

i) ( $\implies$ )  $\forall x \in H, P_M(x) \in M \perp L$ , 所以  $P_L P_M(x) = 0$ . 由  $x$  任意性知道  $P_L P_M = 0$ .

( $\impliedby$ ) 因为  $P_M(x)$  在  $x$  跑遍  $H$  同时跑遍  $M$ , 即  $P_M(H) = M$ , 于是  $P_L(M) = 0$ , 意味着  $\forall x \in M, x \perp L$ . 所以  $M \perp L$ .

ii) ( $\implies$ )  $\forall x \in H$ , 通过正交分解可以得到  $x = x_M + x_{M^\perp}$ , 其中  $x_M \in M, x_{M^\perp} \in M^\perp = L$ . 所以  $P_M(x) = x_M, P_L(x) = x_{M^\perp}, (P_M + P_L)(x) = x_M + x_{M^\perp} = x$ . 由  $x$  的任意性知道  $P_M + P_L = \text{id}$ .

( $\impliedby$ ) 因为按正交分解  $(P_M + P_L)(x) = x = x_M + x_{M^\perp}, P_M(x) = x_M$ , 所以  $P_L(x) = x_{M^\perp}$ , 故  $M^\perp \subset L$ , 同理  $L^\perp \subset M$ . 因为  $M, L$  都是闭线性子空间, 所以  $L = (L^\perp)^\perp \supset M^\perp$ . 进而  $L = M^\perp$ .

iii) ( $\implies$ )  $P_L P_M = P_{L \cap M} = (P_{M \cap L})^* = (P_L P_M)^* = P_M^* P_L^* = P_M P_L$ . 这里  $P^*$  表示  $P$  的伴随算子 (或共轭算子), 见 [9], p.75.

( $\impliedby$ ) 现在  $P_M P_L = P_L P_M$ . 首先我们需要一条引理.

**引理** 有界线性算子  $P$  是正交投影算子, 当且仅当它是幂等且自伴的, 即  $P^2 = P$  且  $\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$ .

引理的证明我们放到本题的注释中去. 现在如若引理成立, 那么不难验证  $P \stackrel{\text{def}}{=} P_M P_L$  是幂等且自伴的. 事实上,  $P^2 = P_M P_L P_M P_L = P_M^2 P_L^2 = P_M P_L$ , 且  $\langle P_M P_L x, y \rangle = \langle P_L x, P_M y \rangle = \langle x, P_L P_M y \rangle = \langle x, P_M P_L y \rangle$ . 随即它是一个正交投影算子, 设它投影到子空间  $N$ . 一方面,  $P_M P_L x \in M$ ,  $P_L P_M x \in L$ , 由于  $P_M P_L = P_L P_M$ , 那就有  $Px \in M \cap L$ , 于是  $N \subset M \cap L$ . 另一方面, 任取  $x \in M \cap L$ , 那么  $Px = P_M P_L x = P_M x = x$ , 所以  $x \in N$ . 于是  $P_M P_L \subset N$ . 从而  $P_M P_L = N$ , 根据正交分解的唯一性就说明了  $P_M P_L = P_{M \cap L}$ .  $\square$

**注** 引理的证明. 先证明必要性. 幂等性是显然的; 下面证明自伴性.  $\forall x, y \in H$ , 如果  $\text{Im } P = M$ , 考虑正交分解

$$x = \underbrace{Px}_{\in M} + \underbrace{(\text{id} - P)x}_{\in M^\perp}, \quad y = \underbrace{Py}_{\in M} + \underbrace{(\text{id} - P)y}_{\in M^\perp}.$$

那么  $\langle Px, y \rangle = \langle Px, Py \rangle = \langle x, Py \rangle$ . 此即自伴性.

记  $\text{Im } P = M$ . 我们分两步来证明充分性. 先证明  $M$  是闭线性子空间. 我们断言  $M = \ker(\text{id} - P)$ . 事实上, 对于任何  $y \in M$ , 都能取  $x \in H$  使得  $y = Px$ . 那么

$$(\text{id} - P)y = (\text{id} - P)Px = Px - P^2x = Px - Px = 0,$$

即  $M \subset \ker(\text{id} - P)$ . 另一方面, 对任何  $y \in \ker(\text{id} - P)$ ,

$$(\text{id} - P)y = 0 \iff Py = y \in M.$$

所以又有  $M \supset \ker(\text{id} - P)$ . 于是  $M = \ker(\text{id} - P)$  是闭线性子空间.

下面再证明  $P = P_M$ . 注意对  $\forall x \in H$  都有分解

$$x = Px + (\text{id} - P)x.$$

这里  $Px \in M$ , 而且注意  $\forall y \in H$ ,

$$\langle (\text{id} - P)x, Py \rangle = \langle P(\text{id} - P)x, y \rangle = 0.$$

上面利用了  $P$  的幂等性, 自伴性以及  $M = \ker(\text{id} - P)$ . 于是  $(\text{id} - P)x \in M^\perp$ . 根据正交分解的唯一性,  $P_M = P$ .  $\square$

这条引理的用处是提供了我们判别两个算子相等的手段: 对各自投影到的空间进行比较.

## 2.3 纲与开映射定理

**2.3.1** 设  $\mathcal{X}$  为 Banach 空间,  $\mathcal{X}_0$  为  $\mathcal{X}$  的闭子空间, 定义映射  $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}/\mathcal{X}_0, x \mapsto [x]$ . 证明:  $\varphi$  为开映射.

本题与习题 1.4.17 相关. 显然  $\varphi$  是满射. 为了应用开映射定理, 我们只需要说明空间  $\mathcal{X}/\mathcal{X}_0$  是 Banach 空间. 它的证明在本书 [6] 的 p.44, 定理 1.4.32.  $\square$

**注** 即使  $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}$ , 结论也是成立的. 注意单点集未必是疏集, 这要取决于选定的拓扑.

**2.3.2** 设  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  为 Banach 空间,  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , 对任意  $y \in \mathcal{Y}$ , 方程  $Ux = y$  有解  $x \in \mathcal{X}$ , 且存在  $m > 0$ , 使得对任意  $x \in \mathcal{X}$ , 有  $\|Ux\| \geq m\|x\|$ . 证明:  $U$  有连续逆  $U^{-1}$  且  $\|U^{-1}\| \leq 1/m$ .

因为  $\forall y \in \mathcal{Y}, \exists x \in \mathcal{X}$  使得  $Ux = y$ , 所以  $U$  是满射; 又因为如果  $x_1 \neq x_2$ ,

$$\|U(x_1 - x_2)\|_{\mathcal{Y}} \geq m\|x_1 - x_2\|_{\mathcal{X}} > 0,$$

知道不可能有  $Ux_1 = Ux_2$ , 所以  $U$  是单射. 根据 Banach 逆算子定理,  $U^{-1}$  存在且连续. 而且

$$\|U^{-1}\| = \sup_{\|y\|_{\mathcal{Y}}=1} \|U^{-1}y\|_{\mathcal{X}} = \sup_{\|Ux_0\|_{\mathcal{Y}}=1} \|x_0\|_{\mathcal{X}} \leq \sup_{\|Ux_0\|_{\mathcal{Y}}=1} \frac{\|Ux_0\|_{\mathcal{Y}}}{m} = \frac{1}{m}.$$

$\square$

**2.3.3\*** 设  $\mathcal{X}$  为 Hilbert 空间,  $A \in \mathcal{L}(H)$ , 存在  $m > 0$ , 对任意  $x \in H$ , 有  $|\langle Ax, x \rangle| \geq m\|x\|^2$ . 证明: 存在  $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ .

为了应用 Banach 逆算子定理, 我们只需要说明  $A$  是双射即可. 取  $x_1, x_2 \in \mathcal{X}, x_1 \neq x_2$ , 注意

$$|\langle A(x_1 - x_2), x_1 - x_2 \rangle| \geq m\|x_1 - x_2\|^2 > 0,$$

所以  $A(x_1 - x_2)$  不可能是 0. 也就是说  $A$  是单射.

再说明  $A$  是满射. 我们先说明  $\text{im } A$  是闭线性子空间. 事实上, 取  $\text{im } A$  中的收敛到  $y_0$  的点列  $\{y_n\}$ , 且  $y_n = Ax_n$ , 那么由

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{m} \|Ax_n - Ax_m\| = \frac{1}{m} \|y_n - y_m\|$$

可以知道  $\{x_n\}$  是  $\mathcal{X}$  中的 Cauchy 列. 这里  $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{m} \|Ax_n - Ax_m\|$  是因为由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\|Ax\| \geq \frac{|\langle Ax, x \rangle|}{\|x\|} \geq m\|x\|.$$

因为  $\mathcal{X}$  是 Hilbert 空间, 那么  $\{x_n\}$  有极限  $x_0 \in \mathcal{X}$ . 由  $A$  的连续性,  $Ax_0 = y_0$ , 所以  $y_0 \in \text{im } A$ .

假若  $\text{im } A \neq \mathcal{Y}$ , 那么由于  $\text{im } A$  是闭线性子空间, 于是可以取  $y \in (\text{im } A)^\perp \setminus \{0\}$ , 那么

$$0 = \langle Ay, y \rangle \geq m\|y\|^2 > 0,$$

矛盾! 所以  $\text{im } A = \mathcal{Y}$ . 继而由 Banach 逆算子定理可以知道  $U^{-1}$  是  $H$  上的连续线性算子.  $\square$

**注** 尽管连续线性映射的核空间都是闭线性子空间, 但像空间却不然, 因此以上的验证是必要的, 否则像空间的正交补为  $\{0\}$  只能说明像在  $\mathcal{Y}$  中稠密. 下面给出一个连续线性映射的像空间不是闭线性子空间的例子.

考虑  $C[0, 1]$  上的积分算子  $I$ , 容易知道它是连续的. 然而,  $\text{im } I$  是  $[0, 1]$  上所有连续可微的函数, 即  $C^1[0, 1]$ . 连续可微函数的一致极限不一定是可微的, 事实上, Weierstrass 定理说明了多项式可以一致逼近闭区间上的一切连续函数, 关于 Weierstrass 定理及其相关证明, 可以参考某些数学分析或泛函分析教材, 例如 [9], 5.2 节, 或 [7], p.280.

**2.3.4** 设  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  为内积空间,  $D$  为  $\mathcal{X}$  的子空间, 且有线性映射  $A: D \rightarrow \mathcal{Y}$ . 证明:

- i) 若  $A$  连续且  $D$  为闭子空间, 则  $A$  是闭算子;
  - ii) 若  $A$  连续且为闭算子, 则若  $\mathcal{Y}$  完备,  $D$  就是闭子空间;
  - iii) 若  $A$  为单射且为闭算子, 则  $A^{-1}$  是闭算子;
  - iv) 若  $\mathcal{X}$  完备且闭算子  $A$  是单射且  $\text{Ran } A$  在  $\mathcal{Y}$  中稠密且  $A^{-1}$  连续, 则  $\text{Ran } A = \mathcal{Y}$ .
- i) 假设  $\{x_n\} \subset D$ ,  $x_n \rightarrow x$ ,  $Ax_n \rightarrow y$ , 由于  $D$  是闭线性子空间, 所以  $x \in D$ , 那么由  $A$  的连续性知道  $Ax_n \rightarrow Ax = y$ , 即  $A$  是闭算子.
- ii) 对  $D$  中任意的序列  $\{x_n\} \subset D$  满足  $x_n \rightarrow x \in \mathcal{X}$ , 那么它当然是 Cauchy 列. 因为

$$\|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \leq \|A\|\|x_n - x_m\|,$$

所以  $\{Ax_n\}$  也是 Cauchy 的, 由于  $\mathcal{Y}$  完备, 所以  $Ax_n \rightarrow y \in \mathcal{Y}$ . 接着,  $A$  是闭算子就保证了  $\lim x_n = x \in D$ . 所以  $D$  就是闭子空间.

- iii) 现在取  $\{y_n\} \subset \mathcal{Y}$  且  $y_n \rightarrow y$ ,  $A^{-1}y_n \rightarrow x$ , 因为  $A$  是闭算子, 那么  $A^{-1}y_n \rightarrow x$  且  $A(A^{-1}y_n) = y_n \rightarrow y$  可推出  $x \in \text{Dom } A$ ,  $Ax = y$ . 因为  $A$  是单射, 所以  $A^{-1}$  在  $\text{Ran } A$  上是良定义的. 于是  $y \in \text{Dom } A^{-1}$ , 且  $A^{-1}y = x$ . 这就说明  $A^{-1}$  是闭算子.
- iv) 由 iii),  $A$  是单射的闭算子意味着  $A^{-1}$  是闭算子; 又因为  $A^{-1}$  连续, 根据 ii) 知道  $\mathcal{X}$  完备意味着  $\text{Dom } A^{-1} = \text{Ran } A$  是闭的. 由于  $\text{Ran } A$  在  $\mathcal{Y}$  中稠密, 所以  $\text{Ran } A = \mathcal{Y}$ .  $\square$

**2.3.5 证明:**  $(C[0, 1], \|\cdot\|_{L^1})$  不是 Banach 空间.

用反证法, 假若  $C[0, 1]$  在两个范数下都完备, 由于

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx \leq \max_{[0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty,$$

所以等价范数定理保证了存在一个常数  $M$  使得

$$\|f\|_\infty \leq M\|f\|_1.$$

这是荒谬的, 因为对函数族  $\{x^n\} \subset C[0, 1]$ , 一方面  $\max_{[0,1]} x^n = 1$ , 另一方面

$$\int_0^1 |x^n| dx = \frac{1}{n+1}.$$

于是不可能存在常数  $M$  使得  $\|f\|_\infty \leq M\|f\|_1$ . □

**2.3.6\*** (Gelfand 引理) 设  $\mathcal{X}$  为 Banach 空间, 映射  $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  满足:

- i)  $\forall x \in \mathcal{X}, p(x) \geq 0$ ;
- ii)  $\forall x \in \mathcal{X}, \lambda > 0, p(\lambda x) = \lambda p(x)$ ;
- iii)  $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}, p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$ ;
- iv)  $x_n \rightarrow x$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n) \geq p(x)$ .

证明: 存在  $M > 0, \forall x \in \mathcal{X}, p(x) \leq M\|x\|$ .

Gelfand 引理最重要的构造是定义

$$\|x\|_p = \|x\| + \sup_{|\alpha|=1} p(\alpha x).$$

在本题的注释中, 我会说明如此构造大致的想法. 接下来, 我们先证明  $\|\cdot\|_p$  的确是一个范数, 而且很明显强于  $\|\cdot\|$ , 所以随后只需要验证  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_p)$  是 Banach 空间, 依据等价范数定理即可得到结果.

**Step 1.** 我们先说明  $p(0) = 0$ . 事实上, 取  $x$  使得  $p(x) = 1$ , 考虑点列  $\{x/n\}_{n=1}^\infty$ , 由  $p(x/n) = 1/n$  以及

$$0 \leq p(0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} p\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

可得.

**Step 2.** 为了验证  $\|\cdot\|_p$  是一个范数, 我们需要验证正定性, 齐次性和三角不等式.

- 正定性. 这是由于  $\|x\|_p \geq \|x\| \geq 0$  且因为  $p(0) = 0$ , 就有

$$\|x\|_p = 0 \iff \|x\| = 0.$$

- 齐次性. 注意对取定的  $\lambda$ , 由于  $\alpha$  取遍  $S^1$ ,

$$\|\lambda x\|_p = \|\lambda x\| + \sup_{|\alpha|=1} p(\alpha \lambda x) = |\lambda| \|x\| + |\lambda| \sup_{|\alpha|=1} p(\alpha x) = |\lambda| \|x\|_p.$$

- 三角不等式. 自然

$$\|x+y\|_p = \|x+y\| + \sup_{|\alpha|=1} p(\alpha(x+y)) \leq \|x\| + \|y\| + \sup_{|\alpha|=1} p(\alpha x) + \sup_{|\alpha|=1} p(\alpha y) = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

**Step 3.** 现在, 我们证明  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_p)$  是 Banach 空间, 即它是完备的. 考虑  $\mathcal{X}$  上关于范数  $\|\cdot\|_p$  的 Cauchy 列  $\{x_n\}$ , 因为  $\|x\|$  是更弱的范数, 所以  $\{x_n\}$  也是关于范数  $\|\cdot\|$  的 Cauchy 列. 那么在 Banach 空间  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  中, 就可以取该点列的极限  $x$ . 于是问题化为证明  $\|x_n - x\|_p \rightarrow 0$  即可. 为此只需证明

$$\sup_{|\alpha|=1} p(\alpha(x_n - x)) \rightarrow 0.$$

事实上, 由于  $\{x_n\}$  是 Cauchy 列, 于是  $\forall \varepsilon > 0$ , 可以选取  $N$  使得  $\forall m, n > N$ ,

$$\|x_m - x_n\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

如此一来, 就有

$$\|x_m - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{且} \quad \sup_{|\alpha|=1} p(\alpha(x_m - x_n)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

一方面, 固定  $n$ , 令  $m \rightarrow \infty$  就有

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面, 对固定的  $\alpha$  且  $|\alpha| = 1$ ,

$$p(\alpha(x - x_n)) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} p(\alpha(x_m - x_n)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

两边对  $\alpha$  取上确界即得

$$\sup_{|\alpha|=1} p(\alpha(x - x_n)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\|x - x_n\|_p = \|x - x_n\| + \sup_{|\alpha|=1} p(\alpha(x - x_n)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这就是完备性.

**Step 4.** 现在, 因为  $\mathcal{X}$  在范数  $\|\cdot\|$  和  $\|\cdot\|_p$  之下都是 Banach 空间, 且很显然

$$\|x\| \leq \|x\| + \sup_{|\alpha|=1} p(\alpha x) = \|x\|_p,$$

由等价范数定理, 存在与  $x$  无关的常数  $M$  使得

$$\|x\|_p \leq (M+1)\|x\|,$$

即

$$p(x) \leq \sup_{|\alpha|=1} p(\alpha x) \leq M\|x\|.$$

至此我们已经证明了 Gelfand 引理. □

**注** 这里给出的四个条件其实是在说  $p$  是一个下半连续的次线性泛函, 典型的例子是所有的半范数. 我们要证明的  $p$  被范数控制启发我们利用  $p$  构造另一个更强的范数, 借助范数等价定理证明, 正如我们在证明闭图像定理和共鸣定理时候做的那样. 然后在对题目所给的  $p$  作仔细研究之后, 你应该会发现,  $p(\lambda x) = \lambda p(x)$  中对于  $\lambda > 0$  的限制导致了  $p$  由每一个“方向”上的一点值所确定, 而为了包含这样的信息, 你也许就会想到对所有“方向”取一个上确界, 这就是如此构造的由来. 接着一切都是顺理成章的了. 不过事实上, 如果这个线性空间是复的, 定义

$$\|x\|_{p'} = \|x\| + p(x) + p(-x) + p(ix) + p(-ix)$$

也是可以类似地证出来的. 这也是笔者自己做的时候使用的方法. 不定义成  $\|x\| + p(x)$  是因为可以验证这不一定构成一个范数.

**2.3.7** 设  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  是 Banach 空间, , 有  $A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), n \in \mathbb{N}^*$ . 并且对任意  $x \in \mathcal{X}$ ,  $\{A_n x\}$  都在  $\mathcal{Y}$  中收敛. 证明: 存在  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = A, (\forall x \in \mathcal{X}), \quad \text{且} \quad \|A\| \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|.$$

取  $A$  满足  $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ , 那么  $A$  很明显是线性算子. 余下只需验证  $A$  是有界算子以及

$$\|A\| \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|.$$

事实上, 对任何  $x'$  满足  $\|x'\| = 1$ ,  $\|A_n x'\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|A_n x\|$ , 两边对  $n$  取下极限就有

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n x'\| \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|x\|=1} \|A_n x\|.$$

注意右侧是常数, 于是左侧对所有  $\|x\| = 1$  取上确界即得

$$\sup_{\|x\|=1} \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|x\|=1} \|A_n x\|.$$

左式中

$$\sup_{\|x\|=1} \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| = \|A\|,$$

并且由范数的定义,

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|x\|=1} \|A_n x\| = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|.$$

这样就得到了

$$\|A\| \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|.$$

因为对每个  $x$ ,  $\sup_{n \geq 1} \|A_n x\| < +\infty$ , 共鸣定理告诉我们, 上式右侧的极限是有限的, 所以  $A$  是有界算子.  $\square$

**注** 以上交换极限和确界的做法还会在习题2.3.10中用到. 你也可以直接根据共鸣定理, 取常数  $M$  使得  $\forall n = 1, 2, \dots, \|A_n\| \leq M$ , 考虑

$$\|Ax\| = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \|x\| \leq M \|x\|$$

得出  $A$  是有界算子.

**2.3.8\*** 设  $1 < p < \infty, 1/p + 1/q = 1$ , 如果序列  $\alpha = \{\alpha_k\}$  使得对任意  $x = \{\xi_k\} \in \ell^p$ , 都有  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$  收敛, 证明:  $\alpha \in \ell^q$ . 再定义  $f: x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$ , 证明:  $f$  作为  $\ell^p$  上线性泛函, 有

$$\|f\| = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^q \right)^{1/q}.$$

对  $x = \{\xi_k\} \in \ell^p$ , 构造

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k.$$

显然  $f_n \in (\ell^p)^*$ . 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$$

收敛, 所以由习题2.3.7,  $f \in (\ell^p)^*$ . 考虑构造序列  $x^{(n)}$ , 它的前  $n$  项为  $|\alpha_k|^{q-1} e^{-i\theta_k}, \theta_k = \arg \alpha_k$ , 其余项为 0. 所以它自然属于  $\ell^p$ . 可以计算得到

$$f(x^{(n)}) = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^q.$$

同时, 因为在  $\ell^p$  中

$$f(x^{(n)}) \leq \|f\|_p \|x^{(n)}\|_{\ell^p} = \|f\|_p \left( \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^q \right)^{1/p},$$

这里注意  $1/p + 1/q = 1$ . 于是就有

$$\|\alpha\|_{\ell^q} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^q \right)^{1/q} \leq \|f\|_p.$$

那么,  $\alpha \in \ell^q$ . 另一方向的估计, 由 Hölder 不等式给出:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_{\ell^p}=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|_{\ell^p}=1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k \right| \leq \sup_{\|x\|_{\ell^p}=1} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^q \right)^{1/q} = \|\alpha\|_{\ell^q}.$$

□

**2.3.9\*** 如果序列  $\alpha = \{\alpha_k\}$  使得对任意  $x = \{\xi_k\} \in \ell^1$ , 都有  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$  收敛, 证明:  $\alpha \in \ell^\infty$ . 再定义  $f: x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$ , 如果  $f$  是  $\ell^1$  上线性泛函, 那么

$$\|f\| = \sup_{k \geq 1} |\alpha_k|.$$

本题与习题 2.3.8\* 是类似的. 给定  $\alpha = \{\alpha_k\}$ , 对  $x = \{\xi_k\} \in \ell^1$ , 构造

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k.$$

显然  $f_n \in (\ell^1)^*$ . 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$$

收敛, 所以由习题 2.3.7,  $f \in (\ell^1)^*$ .

考虑构造序列  $x^{(n)}$ , 它的第  $n$  项为 1, 其余项为 0. 所以它自然属于  $\ell^1$ . 可以计算得到

$$|\alpha_n| = f(x^{(n)}) \leq \|f\| \|x^{(n)}\| = \|f\|.$$

所以  $\alpha \in \ell^\infty$ . 另一方向则由

$$|f_n(x)| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k \xi_k| \leq \max_{k \leq n} |\alpha_k| \sum_{k=1}^n |\xi_k| \leq \|\alpha\|_{\ell^\infty} \|x\|_{\ell^1},$$

所以  $\|f_n\| \leq \|\alpha\|_{\ell^\infty}$ . 习题 2.3.7 的结论告诉我们

$$\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| \leq \|\alpha\|_{\ell^\infty}.$$

这就完成另一边的估计.

□

**2.3.10** 证明: 用 Gelfand 引理证明共鸣定理.

Gelfand 引理见习题 2.3.6\*. 为了证明共鸣定理, 取  $\mathcal{X}$  到  $\mathcal{Y}$  的有界算子族  $W$ , 要证明  $\sup_{A \in W} \|Ax\| \leq M\|x\|$ , 这里  $M$  是与  $x$  无关的常数, 取  $p(x) = \sup_{A \in W} \|Ax\|$ , 只需验证 Gelfand 引理的若干条件即可. 这里我们仅验证当  $x_n \rightarrow x$  时,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} p(x_n) \geq p(x).$$

事实上, 对任何  $A' \in W$ ,  $\|A'x_n\| \leq \sup_{A \in W} \|Ax_n\|$ , 两边对  $n$  取下极限就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A'x_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{A \in W} \|Ax_n\|.$$

注意右侧是常数, 于是左侧对  $A \in W$  取上确界即得

$$\sup_{A \in W} \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{A \in W} \|Ax_n\|.$$

由范数的连续性,

$$\sup_{A \in W} \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\| = \sup_{A \in W} \|Ax\|.$$

这样就验证完毕了. □

**2.3.11\*** 设  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  为 Banach 空间,  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  是满射. 证明: 若在  $\mathcal{Y}$  中, 有  $y_n \rightarrow y_0$ , 则存在  $C > 0$ ,  $x_n \rightarrow x_0$ , 使得  $Ax_n = y_n$  且  $\|x_n\| \leq C\|y_n\|$ .

考虑映射

$$\tilde{A} : \mathcal{X} / \ker A \rightarrow \mathcal{Y}, \quad [x] \mapsto Ax.$$

容易验证  $\tilde{A}$  就是良定义的, 一一对应的连续线性映射. 由 Banach 逆算子定理  $\tilde{A}^{-1}$  也是连续线性映射.

现在由  $y_n \rightarrow y_0$  以及  $\tilde{A}^{-1}$  的连续性有  $\tilde{A}^{-1}y_n \rightarrow \tilde{A}^{-1}y_0$ . 于是取  $[x_n] = \tilde{A}^{-1}y_n$ ,  $[x_0] = \tilde{A}^{-1}y_0$ , 那么

$$\|[x_n]\|_0 = \|\tilde{A}^{-1}y_n\|_0 \leq \|\tilde{A}^{-1}\| \cdot \|y_n\| \leq C\|y_n\|.$$

下面我们只需要适当选取序列  $\{x_n\}$ , 分为两种情况讨论.

情形一,  $y_0 = 0$ . 此时如习题 1.4.17 中所讨论的, 可以对每个  $n$  选取  $x'_n \in [x_n]$  满足

$$\|x_n\| \leq 2\|[x_n]\|_0 \leq 2\|\tilde{A}^{-1}\| \cdot \|y_n\|.$$

同时显见  $x'_n \rightarrow 0$ , 这种情形的结论就成立了.

情形二,  $y_0 \neq 0$ . 现在  $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ , 则取  $x'_0 \in [x_0]$  满足  $\|x'_0\| \leq 2\|[x_0]\|_0$ , 再取  $x'_n \in [x_n]$  满足  $\|x'_n - x'_0\| \leq 2\|[x_n - x_0]\|_0$ . 这样选取就保证了  $x'_n \rightarrow x'_0$  且

$$Ax'_n = y_n, \quad Ax'_0 = y_0.$$

因为  $y_n - y_0 \rightarrow 0$ , 根据情形一的结论以及先前的估计,

$$\|x'_n - x'_0\| \leq 2\|\tilde{A}^{-1}\| \cdot \|y_n - y_0\| \quad \text{且} \quad \|x'_0\| \leq 2\|\tilde{A}^{-1}\| \cdot \|y_0\|.$$

令  $n$  充分大, 可以限制  $\|y_n - y_0\| \leq \frac{1}{2}\|y_0\| \leq \|y_n\|$ ,  $\|y_0\| \leq 2\|y_n\|$ . 于是

$$\|x'_n\| \leq \|x'_n - x'_0\| + \|x'_0\| \leq 5\|\tilde{A}^{-1}\|\|y_n\|.$$

□

注 这是从商空间的收敛列中选取原空间的收敛列的通用技术, 它的工具就是习题1.4.17中的引理: 存在  $x' \in [x]$  使得  $\|x\| \leq 2\|[x]\|_0$ . 事实上常数 2 可以改为任意大于 1 的数.

**2.3.12\*** 设  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  为 Banach 空间,  $T$  为闭线性算子,  $\text{Dom } T \subset X, \text{Ran } T \subset \mathcal{Y}, \ker T = \{x \in \mathcal{X} | Tx = 0\}$ . 证明:

- i)  $\ker T$  是  $\mathcal{X}$  的闭子空间;
- ii)  $\ker T = \{0\}$  且  $\text{Ran } T$  是  $\mathcal{Y}$  的闭子空间, 当且仅当存在  $\alpha > 0$ , 使得  $\forall x \in \text{Dom } T$ , 都有  $\|x\| \leq \alpha\|Tx\|$ ;
- iii)  $\text{Ran } T$  为  $\mathcal{Y}$  的闭子空间当且仅当存在  $\alpha > 0$ , 使得  $\forall x \in \text{Dom } T$ , 都有  $d(x, \ker T) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{z \in \ker T} \|z - x\| \leq \alpha\|Tx\|$ .
- i)  $\ker T$  是线性子空间这一事实由  $T$  是线性算子是显然的. 取一列  $\{x_n\} \subset \ker T$  且  $x_n \rightarrow x$ , 因为  $T$  是闭算子, 所以  $x \in \text{Dom } T$  且  $Tx = \lim Tx_n$ . 于是  $\lim x_n \in \ker T$ .
- ii) ( $\implies$ ) 在闭图像定理的证明过程 (见 [6], p.113) 中, 我们已经证明了当  $T$  是两个 Banach 空间之间的闭算子时,  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_G)$  是 Banach 空间, 其中

$$\|x\|_G = \|x\| + \|Tx\|.$$

接着我们再证明  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_T)$  也构成 Banach 空间, 其中  $\|x\|_T = \|Tx\|$ . 因为  $T$  是定义在  $\mathcal{X}$  上的闭线性算子, 根据闭图像定理就知道它是连续的. 取  $\{x_n\}$  是  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_T)$  的一个 Cauchy 列, 那么  $\|Tx_m - Tx_n\| \rightarrow 0$ . 因为  $\text{Ran } T$  在  $\mathcal{Y}$  中是闭集, 那么就存在  $y$  使得  $Tx_n \rightarrow y \in \text{Ran } T$ , 又因为  $T$  是单射, 从而存在唯一的  $x \in \mathcal{X}$  使得  $Tx_n \rightarrow y = Tx$ . 注意

$$\|x_n - x\|_T = \|Tx_n - Tx\| \rightarrow 0,$$

所以这就证得了  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_T)$  是 Banach 空间. 紧接着, 根据等价范数定理, 因为显然  $\|\cdot\|_G$  强于  $\|\cdot\|_T$ , 所以存在常数  $\alpha > 0$  使得

$$\|x\|_G \leq (\alpha + 1)\|x\|_T.$$

于是

$$\|x\|_G = \|x\| + \|Tx\| \leq (\alpha + 1)\|x\|_T,$$

此即  $\|x\| \leq \alpha\|x\|_T = \alpha\|Tx\|$ .

( $\impliedby$ ) 采用上面的记号. 因为  $\|x\| \leq \alpha\|Tx\|$ , 所以  $T$  必然是单射, 因为  $Tx = 0$  意味着

$$0 = \alpha\|x\| \leq \|Tx\| \leq 0,$$

此即  $x = 0$ , 于是  $\ker T = \{0\}$ . 下面再说明  $\text{Ran } T$  是闭集.

任取  $\text{Ran } T$  中的收敛列  $y_n = Tx_n \rightarrow y_0$ , 则  $\{x_n\}$  是 Cauchy 列, 因为

$$\|x_n - x_m\| \leq \alpha \|T(x_n - x_m)\| = \alpha \|Tx_n - Tx_m\|.$$

那么就可以设  $x_n \rightarrow x_0 \in \mathcal{X}$ , 由  $T$  是闭算子, 就得到  $y_0 = Tx_0 \in \text{Ran } T$ . 如此一来就说明了  $\text{Ran } T$  是闭集.

iii) 注意  $d(x, \ker T) = \|[x]\|_0$ , 这就引导我们把视角转到商空间  $\mathcal{X}/\ker T$  中去. 考虑映射

$$\tilde{T}: \mathcal{X}/\ker T \rightarrow \text{Ran } T, \quad [x] \mapsto Tx.$$

容易验证  $\tilde{T}$  就是良定义的, 一一对应的连续线性映射. 于是  $\tilde{T}$  满足  $\ker \tilde{T} = \{0\}$ , 且  $\|Tx\| = \|\tilde{T}[x]\|$ . 根据上一问的结果, 我们只需要再证明  $\tilde{T}$  是闭算子即可知

$$\|[x]\|_0 \leq \alpha \|\tilde{T}[x]\|_0$$

的充要条件就是  $\text{Ran } \tilde{T}$  是闭的. 注意  $\text{Ran } T = \text{Ran } \tilde{T}$ , 这就证完了.

所以最后我们需要证明  $\tilde{T}$  是闭算子. 于是取序列  $\{[x_n]\} \rightarrow [x_0]$  且  $\tilde{T}[x_n] \rightarrow y_0$ . 类似习题 2.3.11\*, 可以取  $x'_0$  满足  $\|x'_0\| \leq 2\|[x_0]\|_0$ ,  $x'_n$  满足  $\|x'_n - x'_0\| \leq 2\|[x_n - x_0]\|_0$ . 这样就取出了一列  $\{x'_n\} \rightarrow x'_0$ , 且  $Tx'_n = \tilde{T}[x_n] \rightarrow y_0$ . 由于  $T$  是闭算子, 这就能推出

$$x'_0 \in \text{Dom } T, \quad \text{且} \quad Tx'_0 = y_0.$$

这就意味着

$$[x_0] \in \text{Dom } \tilde{T}, \quad \text{且} \quad \tilde{T}[x_0] = y_0.$$

即  $\tilde{T}$  是闭算子. □

注 ii) 的 ( $\implies$ ) 方向有更加简短的证明, 利用了 Banach 逆算子定理. 见 [8], p.103.

**2.3.13\*** 设  $a(x, y)$  是 Hilbert 空间  $H$  上的共轭双线性泛函, 满足

$$i) \exists M > 0, \forall x, y \in H, \text{ 有 } |a(x, y)| \leq M\|x\| \cdot \|y\|;$$

$$ii) \exists \delta > 0, \forall x \in H, \text{ 有 } |a(x, x)| \geq \delta\|x\|^2.$$

证明: 对任意  $f \in H^*$ , 存在唯一连续依赖于  $f$  的  $y_f \in H$ , 使得对任意  $x \in H$ , 有  $a(x, y_f) = f(x)$ .

由 F.Riesz 表示定理, 对于固定的连续线性泛函  $f$ , 存在唯一的  $z_f$  使得  $f(x) = \langle x, z_f \rangle$ ; 由 Lax-Milgram 定理, 存在具有连续逆的线性变换  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ , 使得  $a(x, y) = \langle x, Ay \rangle$ . 那么取  $y_f = A^{-1}z_f$ , 则

$$a(x, y_f) = a(x, A^{-1}z_f) = \langle x, z_f \rangle = f(x).$$

至于  $y_f$  对  $f$  的连续依赖性, 考虑如果  $\|f_\varepsilon - f\| < \varepsilon$ , 则

$$\|y_{f_\varepsilon} - y_f\| = \|A^{-1}(z_{f_\varepsilon} - z_f)\| \leq \|A^{-1}\| \|z_{f_\varepsilon} - z_f\| = \|A^{-1}\| \|f_\varepsilon - f\| < \|A^{-1}\| \varepsilon.$$

这里用到了 F.Riesz 表示定理的推论: 线性泛函的范数等于它表示元的范数. 事实上, 设 Hilbert 空间上的连续线性泛函  $f$  的表示元为  $z_f$ , 则一方面

$$\|z_f\|^2 = \langle z_f, z_f \rangle = f(z_f) \leq \|f\| \|z_f\|,$$

另一方面

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} \langle x, z_f \rangle \leq \sup_{\|x\|=1} \|x\| \|z_f\| = \|z_f\|.$$

即  $\|f\| = \|z_f\|$ . □

**注** 本题用到的共轭双线性函数相关定理, 见 [6] 中的定理 2.2.2, p.94, Lax-Milgram 定理 (定理 2.3.18, p.116). 它们给出了范数控制下的共轭双线性函数的一些性质. 本题的结果可以视为 Hilbert 空间中 (与内积函数等价的) 共轭双线性函数的 F.Riesz 表示定理.

**2.3.14** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  为边界连续光滑的有界开区域,  $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  是有界可测函数, 满足对  $0 < \alpha_0 \leq \alpha$ , 这里  $\alpha_0$  是一个常数. 对  $f \in L^2(\Omega)$ , 规定

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + \alpha uv) dx dy; \quad (\forall u, v \in W^{1,2}(\Omega))$$

$$F(v) = \int_{\Omega} f v dx dy. \quad (\forall v \in L^2(\Omega))$$

证明: 存在唯一  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ , 使得

$$a(u, v) = F(v). \quad (v \in W^{1,2}(\Omega))$$

因为很明显  $F(v)$  是  $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$  上的有界线性泛函, 所以我们只需要验证习题 2.3.13\* 中的条件, 即存在  $\delta > 0, M > 0$ , 使得

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_{W^{1,2}} \cdot \|v\|_{W^{1,2}} \quad \text{且} \quad |a(x, x)| \geq \delta \|u\|_{W^{1,2}}^2$$

对  $\forall u, v \in W^{1,2}(\Omega)$  成立即可. 这里  $W^{1,2}(\Omega)$  表示  $\Omega$  上的一个 Sobolev 空间, 其范数定义为  $\|u\|_{W^{1,2}}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2$ .

设  $|\alpha| < M$ , 那么

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \int_{\Omega} \alpha uv dx dy \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + M (\|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}) \\ &\leq (1 + M) (\|u\|_{W^{1,2}} \|v\|_{W^{1,2}}). \end{aligned}$$

另外还有

$$a(u, u) \geq \min\{1, \alpha_0\} \|u\|_{W^{1,2}}^2.$$

所以按先前的结论, 合题意的  $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$  存在且唯一. □

## 2.4 Hahn-Banach 定理

注 一旦过程中用到了 Hahn-Banach 定理及其推论, 即默认承认了选择公理, 除非另有说明.

2.4.1 设  $p$  是实线性空间  $\mathcal{X}$  上的次线性泛函, 证明:

i)  $p(0) = 0$ ;

ii)  $p(-x) \geq -p(x)$ ;

iii) 对任意给定  $x_0 \in \mathcal{X}$ , 存在  $\mathcal{X}$  上实线性泛函  $f$ , 使得  $f(x_0) = p(x_0)$ , 且对任意  $x \in \mathcal{X}$ , 有  $f(x) \leq p(x)$ .

i) 注意  $p(0) = 2p(0)$ , 所以  $p(0) = 0$ .

ii) 注意

$$0 = p(0) = p(x - x) \leq p(x) + p(-x).$$

iii) 考虑定义在  $\text{span}\{x_0\}$  上的  $f_0: kx_0 \mapsto kp(x_0)$ , 那么  $f_0$  是  $\text{span}\{x_0\}$  上的实线性泛函且

$$f_0(kx_0) = kp(x_0) \leq p(kx_0).$$

这里的不等号在  $k \geq 0$  时由正齐次性是等号, 在  $k < 0$  时通过上一问可知不等号成立. 于是由 Hahn-Banach 定理,  $f_0$  可以延拓成实线性空间  $\mathcal{X}$  上的实线性泛函, 满足  $f(x) \leq p(x) (\forall x \in \mathcal{X})$ , 且  $f(x_0) = p(x_0)$ .  $\square$

注 本题所证是次线性泛函的基本性质. 次线性泛函即满足正齐次性  $p(\lambda x) = \lambda p(x) (\lambda > 0)$  和次可加性  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  的泛函.

2.4.2 设  $\mathcal{X}$  为由实数列  $x = \{a_n\}$  全体组成的实线性空间, 元素间相等和线性运算由坐标运算定义, 对任意  $x = \{a_n\} \in \mathcal{X}$ , 定义

$$p(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

证明:  $p(x)$  是  $\mathcal{X}$  上的次线性泛函.

验证正齐次性和次可加性即可. 设  $x = (\alpha_j)_{j=1}^\infty$ ,  $\lambda > 0$ , 那么

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \lambda \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \lambda \alpha_k = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \alpha_k = \lambda p(x)$$

即为正齐性. 又设  $y = (\beta_j)_{j=1}^\infty$ , 次可加性由

$$p(x + y) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + \beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} (\alpha_k + \beta_k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \alpha_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \beta_k = p(x) + p(y)$$

可见.  $\square$

注 本题的  $p$  就是一个是次线性泛函而非线性泛函的例子, 例如  $p(-x)$  往往不等于  $-p(x)$ .

**2.4.3** 设  $\mathcal{X}$  为复线性空间,  $p$  为  $\mathcal{X}$  上半范数, 且对任意  $x \in \mathcal{X}$ , 都有  $p(x) \neq 0$ . 证明: 对给定  $x_0 \in \mathcal{X}$ , 都存在  $\mathcal{X}$  上线性泛函  $f$ , 满足

$$i) f(x_0) = 1;$$

$$ii) \text{ 对任意 } x \in \mathcal{X}, |f(x)| \leq p(x)/p(x_0).$$

在  $\text{span}\{x_0\}$  上, 考虑线性泛函  $f_0(\lambda x_0) = \lambda$ , 那么

$$|f_0(\lambda x_0)| = |\lambda| = \frac{p(\lambda x_0)}{p(x_0)}.$$

注意右侧也是一个次线性泛函, 所以根据 Hahn-Banach 定理  $f_0$  可以延拓成  $\mathcal{X}$  上的线性泛函, 满足  $f(x_0) = 1$  且  $|f(x)| \leq p(x)/p(x_0)$ .  $\square$

注 半范数指的是具有次可加性和齐次性  $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$  ( $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ) 的泛函. 相比次线性泛函它的齐次性是更强的, 即它是特殊的次线性泛函.

**2.4.4** 设  $\mathcal{X}$  为赋范线性空间,  $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ . 证明: 若对任意  $f \in \mathcal{X}^*$ , 都有  $\{f(x_n)\}$  有界, 那么  $\{x_n\}$  有界.

不妨  $x_n \neq 0$ . 对每个正整数  $n$  构造  $\mathcal{X}^*$  上的泛函  $T_n: f \mapsto f(x_n)$ , 那么对  $\forall f \in \mathcal{X}^*$ , 依据条件都有

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n f < +\infty.$$

所以根据算子的一致有界定理,  $\{T_n\}$  必然存在一致的界  $M$ , 即  $\|T_n\| \leq M$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ). 同时由 Hahn-Banach 定理的推论 (见 [6] 的推论 2.4.6, p.127), 存在满足  $f(x_n) = \|x_n\|$  且  $\|f\| = 1$  的有界线性泛函  $f$ , 所以

$$\|T_n\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x_n)| = \|x_n\|.$$

这样一来, 点列  $\{x_n\}$  也有一致的界  $M$ .  $\square$

注 本题结论的一个重要推论是: 弱收敛序列  $\{x_n\}$  一定是有界的, 换言之, 其范数序列  $\{\|x_n\|\}$  有界.

**2.4.5** 设  $\mathcal{X}_0$  为赋范线性空间  $\mathcal{X}$  的闭子空间. 证明: 对任意  $x \in \mathcal{X}$ , 有

$$\inf_{y \in \mathcal{X}_0} \|x - y\| = \sup\{|f(x)| : f \in \mathcal{X}^*, \|f\| = 1, f(\mathcal{X}_0) = 0\}.$$

固定  $x \in \mathcal{X}$ , 那么 [6] 的定理 2.4.7(p.128) 确保了

$$d(x, \mathcal{X}_0) \leq \sup\{|f(x)| : f \in \mathcal{X}^*, \|f\| = 1, f(\mathcal{X}_0) = 0\}.$$

只需证明反面. 习题2.1.8\*的结论告诉我们, 对  $\|f\| = 1$ ,

$$|f(x)| = d(x, \ker f).$$

现在如若  $f(\mathcal{X}_0) = 0$ , 则  $\mathcal{X}_0 \subset \ker f$ , 于是  $d(x, \mathcal{X}_0) \geq d(x, \ker f)$ . 注意左侧与  $f$  无关, 所以

$$\begin{aligned} d(x, \mathcal{X}_0) &\geq \sup\{d(x, \ker f) : f \in \mathcal{X}^*, \|f\| = 1, \ker f \supset \mathcal{X}_0\} \\ &= \sup\{|f(x)| : f \in \mathcal{X}^*, \|f\| = 1, f(\mathcal{X}_0) = 0\}. \end{aligned}$$

这就得证了. □

**2.4.6** 设  $\mathcal{X}$  为赋范线性空间. 给定  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}$  线性无关,  $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}, M > 0$ . 证明: 存在  $f \in \mathcal{X}^*$ , 满足  $f(x_k) = C_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), 且  $\|f\| \leq M$ , 必须且只需对任意  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ , 有

$$\left| \sum_{k=1}^n \alpha_k C_k \right| \leq M \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\|.$$

( $\Rightarrow$ ) 如果存在这样的  $f$ , 注意

$$f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k C_k.$$

所以

$$\left| \sum_{k=1}^n \alpha_k C_k \right| = \left| f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \right| \leq \|f\| \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\| \leq M \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\|.$$

( $\Leftarrow$ ) 考虑记  $\mathcal{X}_0 = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ , 取定义在  $\mathcal{X}_0$  上的线性泛函  $f_0$  满足

$$f_0\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k C_k.$$

由于  $\{x_1, \dots, x_n\}$  线性无关, 所以  $\mathcal{X}_0$  中元素在这组基下的表示是唯一确定的. 并且因为  $\mathcal{X}_0$  是有限维的空间, 线性代数的理论告诉我们这样的  $f_0$  是存在的. 另外, 在  $\mathcal{X}_0$  上,

$$\|f_0\|_{\mathcal{X}_0} = \sup_{\sum \alpha_k x_k \neq 0} \frac{\left| f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \right|}{\left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\|} = \sup_{\sum \alpha_k x_k \neq 0} \frac{\left| \sum_{k=1}^n \alpha_k C_k \right|}{\left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\|} \leq M.$$

通过 Hahn-Banach 定理对  $f_0$  进行保范延拓, 就得到定义在  $\mathcal{X}$  上的连续线性泛函  $f$ , 且  $\|f\|_{\mathcal{X}} = \|f_0\|_{\mathcal{X}_0} \leq M$ . □

**2.4.7** 设  $\mathcal{X}$  为赋范线性空间,  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}$  线性无关. 证明: 存在  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{X}^*$ , 使得  $f_i(x_j) = \delta_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ).

对  $n$  作归纳法.  $n = 1$  时, 由  $x_1 \neq 0$ , 那么存在  $f$  使得  $f(x_1) = \|x_1\|$  且  $\|f\| = 1$ , 取  $f_1 = f/\|x_1\|$  即可.

设命题对  $n = k$  成立, 往证  $n = k + 1$  情形. 因为  $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}$  线性无关, 那么  $x_{k+1} \notin \text{span}\{x_1, \dots, x_k\} \stackrel{\text{def}}{=} M$ . 那么存在  $f$  使得  $f|_M = 0$  且  $f(x_{k+1}) = d(x_{k+1}, M)$ . 注意  $d(x_{k+1}, M)$  即可, 这是因为  $\text{span}\{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}\}$  是有限维的线性空间.  $\square$

**注**  $n = 1$  和  $n = k + 1$  的情形下  $f$  的存在性分别是根据 [6] 的推论 2.4.6(p.127) 和定理 2.4.7(p.128) 得到的. 当然本题你也可以直接构造任一个  $f_i$ , 方法与  $n = k + 1$  的情形相似.

**2.4.8** 设  $\mathcal{X}$  是线性空间. 证明:  $M$  是  $\mathcal{X}$  的极大线性子空间当且仅当  $\dim \mathcal{X}/M = 1$ .

( $\Leftarrow$ ) 取线性空间  $\widetilde{M}$  使得  $M \subsetneq \widetilde{M}$ . 取  $x_0 \in \widetilde{M}/M$ , 那么  $x_0 \in \mathcal{X}/M$ . 因为  $\dim \mathcal{X}/M = 1$ , 所以不妨设  $x_0 \neq 0$ , 从而  $\text{span}\{x_0\} = \mathcal{X}/M$ , 所以  $\mathcal{X}/M \subset \widetilde{M}$ . 于是  $\widetilde{M} = \mathcal{X}$  意味着  $M$  是极大的线性子空间.

( $\Rightarrow$ ) 如果  $M$  是极大线性子空间, 那么取  $x_0 \notin M$ , 则由极大性  $M \oplus \text{span}\{x_0\} = \mathcal{X}$ , 于是  $\mathcal{X}/M = \text{span}\{x_0\}$ , 所以  $\dim \mathcal{X}/M = 1$ .  $\square$

**注**  $\dim(\mathcal{X}/M)$  往往也记为  $\text{codim } M$ , 即  $M$  的余维数.

**2.4.9** 设  $\mathcal{X}$  为复线性空间,  $E$  为  $\mathcal{X}$  中的非空均衡集,  $f$  为  $\mathcal{X}$  上的线性泛函. 证明: 对任意  $x \in E$ , 有

$$|f(y)| \leq \sup_{y \in E} \text{Re } f(y).$$

因为  $E$  是均衡集, 所以对任何  $x \in E, |\alpha| = 1$ , 都有  $\alpha x \in E$ , 且  $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ . 我们取  $\alpha = \overline{f(x)}/|f(x)|$ , 这满足  $|\alpha| = 1$ , 于是使得  $f(\alpha x) = |f(x)| \in \mathbb{R}$ , 于是  $|f(x)| = \text{Re } f(\alpha x)$ . 这样一来

$$|f(x)| = \text{Re } f(\alpha x) \leq \sup_{y \in E} \text{Re } f(y).$$

$\square$

**注** 均衡性保证了我们可以旋转向量而不离开集合, 从而最大化泛函的实部.

**2.4.10\*** 设  $\mathcal{X}$  为赋范线性空间,  $E \subset \mathcal{X}$  为非空均衡闭凸集. 证明: 对任意  $x_0 \in \mathcal{X}/E$ , 存在  $f \in \mathcal{X}^*$ , 以及实数  $\alpha > 0$ , 使得对任意  $x \in E$ , 有

$$|f(x)| < \alpha < |f(x_0)|.$$

我们先证明凸集分离定理的复情形, 即,  $A, B$  是  $E$  中的不交非空凸子集. 如果  $A$  是开集, 那么就存在  $f \in E^* \setminus \{0\}$  和实数  $\alpha$  使得

$$\text{Re } f(A) \leq \alpha \leq \text{Re } f(B).$$

事实上, 因为一个复线性泛函由它的实部唯一确定 (见注释), 所以可以先把  $E$  看作实线性空间 (集合和向量加法不变, 但是只允许进行实数的数乘). 根据实情形的凸集分离定理, 存在  $\varphi \in E^*$  使得  $\operatorname{Re} \varphi(A) \leq \alpha \leq \operatorname{Re} \varphi(B)$ . 取  $f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$  就是要求的连续线性泛函.

据此, 利用实情形的 Ascoli 定理给出的实线性泛函  $\varphi$ , 同样也可以定义复线性泛函  $f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$ , 从而给出复情形的 Ascoli 定理, 即, 如若还有  $A$  是闭的,  $B$  是单点集  $\{x_0\}$ , 那么存在  $f \in E^*$  和实数  $\alpha$  使得

$$\operatorname{Re} f(A) < \alpha < \operatorname{Re} f(B).$$

这是 Ascoli 定理实情形和凸集分离定理复情形的直接推论. 因为  $E$  是均衡闭凸集, 于是根据以上和习题 2.4.9 的结论, 有

$$|f(x)| = \operatorname{Re} f(\lambda_x x) < \alpha < \operatorname{Re} f(x_0) \leq |f(x_0)|. \quad (\forall x \in E)$$

这里  $\lambda_x = \overline{f(x)}/|f(x)|$ , 使得  $|f(x)| = \operatorname{Re} f(\lambda_x x)$ , 且  $\lambda_x x \in E$ . □

**注** 有关 Ascoli 定理的实情形, 见 [6], 推论 2.4.17, p.135. 还要说明的是, [8], p.126 提供的解法里直接套用 Ascoli 定理的做法是不正确的, 因为这里并没有  $\mathcal{X}$  是实赋范线性空间这一条件.

另外, 一个复线性泛函由它的实部唯一确定, 而且在将复向量空间视为实向量空间时, 它的实部也是一个实线性泛函. 下面给出证明:

**证明.** 假设  $g$  是实线性泛函, 如果  $f$  是复线性泛函且  $\operatorname{Re} f = g$ , 那么设  $f = g + ih$ ,  $h$  也是实线性泛函, 注意

$$if(x) = ig(x) - h(x),$$

所以  $\operatorname{Re} f(ix) = \operatorname{Re}(if(x)) = -h(x)$ . 又注意  $h = \operatorname{Im} f$ , 于是

$$\operatorname{Im} f(x) = -\operatorname{Re}(f(ix)) = -g(ix).$$

这就说明了一个复线性泛函由它的实部唯一确定.

下面证明它的实部, 在将复向量空间视为实向量空间的意义上, 也是实线性泛函. 事实上, 设  $f = g + ih$ , 其中  $g, h$  都是实线性泛函. 那么

$$f(x+y) = g(x+y) + ih(x+y),$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = [g(x) + g(y)] + i[h(x) + h(y)],$$

取实部就有

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

此即  $g(x) = \operatorname{Re} f(x)$  的线性性. 齐次性类似可得. □

**2.4.11** 设  $E, F$  为实赋范线性空间  $\mathcal{X}$  中不交的非空凸集且  $E$  为均衡开集. 证明: 存在  $f \in \mathcal{X}^*$ , 使得对任意  $x \in E$ , 有

$$|f(x)| < \inf_{y \in F} |f(y)|.$$

在习题 2.4.10\* 的证明过程中, 我们将凸集分离定理推广到了复线性空间的情形. 依此我们可以知道存在  $f \in \mathcal{X}^*$  以及实数  $\alpha$  使得

$$\operatorname{Re} f(E) \leq \alpha \leq \operatorname{Re} f(F).$$

那么, 一方面

$$\alpha \leq \inf_{y \in F} \operatorname{Re} f(y) \leq \inf_{y \in F} |f(y)|,$$

另一方面, 注意  $E$  是均衡的, 所以对每一个  $x \in E$ , 都存在一个  $\lambda_x$ , 满足  $|\lambda_x| = 1$ , 使得

$$|f(x)| = f(\lambda_x x) = \operatorname{Re} f(\lambda_x x).$$

而我們不可能有  $\operatorname{Re} f(E) \equiv \alpha$ , 事实上, 反设不然, 则任取  $x \in E$ , 设  $f(x) = \alpha + i\beta$ , 从而

$$f(-x) = -\alpha - \beta$$

意味着  $\alpha = 0$ , 而

$$f(ix) = i\alpha - \beta$$

意味着  $\beta = -\alpha = 0$ , 所以  $f(x) = 0$ , 即  $E \subset \ker f$ . 这是不可能的, 因为  $E$  是开集, 根据习题 2.1.9 的注, 在开集上恒为 0 的线性泛函只能是零泛函. 而  $f$  当然不是零泛函, 这是凸集分离定理保证的 (超平面的定义中不允许取零泛函). 所以我们可以找到  $x \in E$ , 使得

$$|f(x)| = \operatorname{Re} f(\lambda_x x) < \alpha \leq \inf_{y \in F} |f(y)|.$$

□

**2.4.12** 设  $E$  为实赋范线性空间  $\mathcal{X}$  中的凸集. 证明: 对  $x_0 \in \overset{\circ}{E}, x_1 \in \partial E$ , 对任何  $m > 1$ ,  $x_2 = m(x_1 - x_0) + x_0 \notin E$ .

由 Mazur 定理 (见 [6], 推论 2.4.18 的注, p.136; 或 [6], 定理 2.4.21, p.137), 存在  $\mathcal{X}$  上的非零线性泛函  $f$  以及  $s \in \mathbb{R}$ , 使得

$$f(\overline{E}) \leq s, \quad f(x_1) = s.$$

因为  $\partial E \cap \overset{\circ}{E} = \emptyset$ . 现在假设存在  $m > 1$ , 使得对应的  $x_2 \in E$ , 那么有

$$f(x_0) \leq s, \quad f(x_2) \leq s, \quad f(x_1) = s.$$

注意

$$f(x_2) = mf(x_1) - (m-1)f(x_0) \geq ms - (m-1)s = s,$$

于是只能有  $f(x_2) = s$ , 随即  $f(x_0) = s$ . 注意  $x_0 \in \overset{\circ}{E}$  且

$$f(\overset{\circ}{E}) \leq s,$$

但是由习题 2.1.9, 在开集  $\overset{\circ}{E}$  上非零线性泛函不可能取到极值, 矛盾! 所以只能有  $x_2 \notin E$ .  $\square$

**2.4.13\*** 设  $M$  为赋范线性空间  $\mathcal{X}$  上的闭凸集. 证明:  $\forall x \in \mathcal{X} \setminus M$ , 存在  $f \in \mathcal{X}^*$ , 使得  $\|f\| = 1$ , 且

$$\sup_{y \in M} f(y) \leq f(x) - \inf_{z \in M} \|x - z\|.$$

固定  $x_0 \in \mathcal{X} \setminus M$ , 记  $d(x_0) = \inf_{z \in M} \|x_0 - z\|$ . 由凸集分离定理, 对不交的凸集  $M$  和  $B \stackrel{\text{def}}{=} B(x_0, d(x_0))$ , 存在非零的有界线性泛函  $f$  使得

$$\sup_{z \in M} f(z) \leq \inf_{x \in B} f(x).$$

不妨设  $\|f\| = 1$ , 假若  $\|f\| \neq 1$  取  $\tilde{f} = f/\|f\|$  即可. 因为上式两侧齐次,  $\tilde{f}$  也符合上式. 注意

$$\inf_{x \in B} f(x) = f(x_0) + \inf_{\|x\| < d(x_0)} f(x).$$

而根据范数的定义 (主要是习题 2.1.2, ii) 的结果),

$$\inf_{\|x\| < d(x_0)} f(x) \geq - \sup_{\|x\| < d(x_0)} -f(x) = - \sup_{\|x\| < d(x_0)} f(x) \geq -d(x_0) \sup_{\|x\| < 1} |f(x)| = -d(x_0).$$

所以

$$\sup_{z \in M} f(z) \leq f(x_0) + \inf_{\|x\| < d(x_0)} f(x) \leq f(x_0) - d(x_0).$$

$\square$

**注** 本题事实上是相当于定量估计了 Ascoli 定理中  $\alpha$  取值的范围. 注意, 一般赋范线性空间中的闭凸集上的最佳逼近元未必能取到 (Hilbert 空间可以, 见 [6], 推论 1.6.32, p.77), 这给我们带来了一定的麻烦, 即不能取  $y_0 \in \partial M \cap \partial B$ , 于是我们只能用一些更间接的方法证明.

**2.4.14\*** 设  $M$  为实赋范线性空间  $\mathcal{X}$  中的闭凸集. 证明:  $\forall x \in \mathcal{X}$ ,

$$\inf_{z \in M} \|x - z\| = \sup_{\substack{f \in \mathcal{X}^* \\ \|f\|=1}} \{f(x) - \sup_{z \in M} f(z)\}.$$

对所有  $f \in \mathcal{X}^*$ ,  $\|f\| = 1$ , 都有

$$f(x) - \sup_{z \in M} f(z) \leq \inf_{z \in M} \|x - z\| \stackrel{\text{def}}{=} d(x).$$

根据下确界的定义, 取  $\|x - z\|$  的极小化序列  $z_n \in M$ , 满足

$$\|x - z_n\| < d(x) + \frac{1}{n}.$$

那么对所有  $n = 1, 2, \dots$ , 都有

$$f(x) - \sup_{z \in M} f(z) = f(x) - \sup_{z \in M} f(z) \leq f(x) - f(z_n) \leq \|f\| \|x - z_n\| = d(x) + \frac{1}{n}.$$

令  $n \rightarrow \infty$  就得到

$$f(x) - \sup_{z \in M} f(z) \leq d(x).$$

所以

$$\sup_{\substack{\|f\|=1 \\ z \in M}} f(x - z) \leq d(x).$$

反向的不等式分两种情况讨论:

**Case 1.**  $x \in \mathcal{X} \setminus M$ . 事实上, 习题2.4.13\*中构造出了一个  $f_0$  使得

$$d(x) \leq f_0(x) - \sup_{z \in M} f_0(z).$$

这就说明了另一方向的不等式.

**Case 2.**  $x \in M$ . 那么  $z = x$  时, 所有线性泛函  $f$  都有  $f(x - z) = 0 = d(x)$ , 这也就说明了另一方向的不等式.

综合起来, 我们就得到了结论. □

**注** 本题待证式右侧的就是距离函数的“对偶表示”.

**2.4.15** 设  $\mathcal{X}$  为 Banach 空间, 记  $\overline{\mathbb{R}}$  为扩充实数域  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . 现在设  $f: \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  是连续凸泛函且  $f(x) \not\equiv \infty$ . 定义  $f^*: \mathcal{X}^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , 使得

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \{x^*(x) - f(x)\}. \quad (\forall x^* \in \mathcal{X}^*)$$

证明:  $f^*(x^*) \not\equiv \infty$ .

参考 [6], 定理 2.4.27, p.142, 该题是它的直接推论, 考虑取  $x^* \in \partial(0) \neq \emptyset$  即可. □

**注** 本题所证的结论意味着, 连续的凸泛函, 即使没有给定线性结构, 也能找到有界的线性泛函, 在相差一个常数的意义下逼近它. 这是连续凸泛函次微分非空的直接推论.

**2.4.16** 设  $\mathcal{X}$  为 Banach 空间,  $x(t): [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$  为连续的抽象函数, 取  $[a, b]$  的分割

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b,$$

$$\|\Delta\| \stackrel{\text{def}}{=} \max_{0 \leq i \leq n-1} \{ |t_{i+1} - t_i| \}.$$

证明: 在  $\mathcal{X}$  中, 极限

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

存在.

因  $x(t)$  在紧集  $[a, b]$  上连续, 所以是一致的连续. 即对任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对任意  $s, t \in [a, b]$ , 若  $|s - t| < \delta$ , 则

$$\|x(s) - x(t)\| < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

设  $\Delta, \Delta'$  为满足  $\|\Delta\| < \delta, \|\Delta'\| < \delta$  的分割. 取它们的公共加细  $\Delta''$ , 记  $\Delta''$  的分点为  $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = b$ .

在公共细分  $\Delta''$  上, 把这两个和都按  $\Delta''$  的小区间重写

$$S(\Delta) = \sum_{j=0}^{m-1} x(\tau_j)(s_{j+1} - s_j), \quad S(\Delta') = \sum_{j=0}^{m-1} x(\tau'_j)(s_{j+1} - s_j),$$

那么

$$\|S(\Delta) - S(\Delta')\| = \left\| \sum_{j=0}^{m-1} (x(\tau_j) - x(\tau'_j))(s_{j+1} - s_j) \right\| \leq \sum_{j=0}^{m-1} \|x(\tau_j) - x(\tau'_j)\| \cdot |s_{j+1} - s_j|.$$

由一致连续性, 因为  $|\tau_j - \tau'_j| < \delta$ , 所以

$$\|S(\Delta) - S(\Delta')\| < \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\epsilon}{b - a} \cdot |s_{j+1} - s_j| = \frac{\epsilon}{b - a} \sum_{j=0}^{m-1} |s_{j+1} - s_j| = \frac{\epsilon}{b - a} (b - a) = \epsilon.$$

所以只要分划足够细, 和式  $S(\Delta)$  相差不大. 加之  $\mathcal{X}$  是 Banach 空间, 易证极限存在.  $\square$

**注** 这是对 Riemann 积分的推广. 值得一提的是, Lebesgue 积分在 Banach 空间上的推广常称为 Bochner 积分.

**2.4.17** 设  $\mathcal{X}$  为 Banach 空间,  $G$  为  $\mathbb{C}$  上简单闭曲线  $L$  围成的开区域. 若  $x(z) : \overline{G} \rightarrow \mathcal{X}$  在  $G$  上解析且在  $\overline{G}$  上连续, 证明:  $\int_L x(z) dz = 0$ .

任取  $\varphi \in \mathcal{X}^*$ , 那么容易验证  $\varphi(x(z)) : \overline{G} \rightarrow \mathcal{X}$  在  $G$  内解析, 在  $\overline{G}$  上连续. 因为  $L$  是  $\mathbb{C}$  中的简单闭曲线, 根据经典的 Cauchy 积分定理,

$$\int_L \varphi(x(z)) dz = 0.$$

按定义由  $\varphi$  的线性性和连续性能证明

$$\varphi \left( \int_L x(z) dz \right) = \int_L \varphi(x(z)) dz = 0,$$

那么, 因为这对任何  $\varphi \in \mathcal{X}^*$  成立, 只能有  $\int_L x(z) = 0$ , 因为  $\mathcal{X}^*$  中的泛函一定能区分两个不同的点. 见 [6], 推论 2.4.5, p.127.  $\square$

**注** 这是对 Cauchy 积分定理的推广.

**2.4.18** 试证明:

i)  $|x|$  在  $\mathbb{R}$  上为凸映射.

ii)  $|x|$  在  $x = 0$  处的次微分为  $\partial|x|(0) = [-1, 1]$ .

i)  $|x|$  的上方图在  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  中很显然是凸集, 所以  $|x|$  就是凸的;

ii) 从图像上这是明显的, 在  $x = 0$  处上方图  $\text{epi } |x|$  的承托超平面就是  $\{f(x) = \alpha x : \alpha \in [-1, 1]\}$ , 所以  $\partial|x|(0) = [-1, 1]$ . □

**注** 这题涉及到的只是对次微分的基本概念的理解. 需要指出的是, 次微分作为微分的推广, 在凸分析和诸多应用数学的理论中具有广泛的应用.

## 2.5 共轭空间, 弱收敛, 自反空间

**注** 下面的题目中我会大量使用对偶积的记号用以使各种共轭算子等运算时保持清晰, 这里有必要说明一下. 例如共轭算子的定义中, 我会记

$$f(Tx) \stackrel{\text{def}}{=} \langle Tx, f \rangle = \langle x, T^*f \rangle = (T^*f)(x).$$

这就是对偶积的记号. 一般地, 我记  $f(x)$  为  $\langle x, f \rangle$ , 即对偶积的左侧 (第一变量) 是自变量, 右侧 (第二变量) 是一个泛函 (在有的参考资料中, 它们的位置是反过来的, 但这容易区分). 对偶积的运算结果是一个实数或复数, 取决于选定的空间. 对偶积的两个变量不能随意交换位置.

**2.5.1\*** 证明:

$$(\ell^p)^* = \ell^q. \quad \left(1 \leq p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.\right)$$

**Case 1.**  $p > 1$ .

一方面, 根据习题2.3.8\*,  $\forall \alpha \in \ell^q$ , 令

$$f_\alpha : \quad \xi \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k,$$

都有  $f_\alpha \in (\ell^p)^*$ . 也就是说, 这确定了诱导映射

$$\iota : \quad \alpha \mapsto f_\alpha,$$

而且它很明显是一个单射. 下面再证明它是等距的满射即可.

任取  $f \in (\ell^p)^*$ , 对任何  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \in \ell^p$ , 考虑取  $\tilde{\xi}_k = (\xi_1, \dots, \xi_k, 0, 0, \dots)$ . 再记  $f(e_k) = \alpha_k$ , 这里  $e_k$  指的是第  $k$  位上是 1, 其余都是 0 的  $\ell^p$  序列.

现在, 我们有

$$f(\tilde{\xi}_k) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \xi_i,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{\xi}_k - \xi\|_{\ell^p} = \left( \sum_{i=k+1}^{\infty} \xi_i^p \right)^{1/p} = 0,$$

所以

$$|f(\tilde{\xi}_k) - f(\xi)| \leq \|f\| \|\tilde{\xi}_k - \xi\| \rightarrow 0.$$

所以

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i = f(\xi) < \infty.$$

而根据习题2.3.8\*的结论,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots) \in \ell^q$  且  $\|f\| = \|\alpha\|_{\ell^q}$ . 于是  $\iota$  确实是等距的满射.

这样我们就证得了  $\ell^q = (\ell^p)^*$ , 这里  $1 < p < \infty$ .

**Case 2.**  $p = 1$ .

根据习题 2.3.9\*, 同样证明映射

$$f_\alpha : \xi \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k \quad (\alpha \in \ell^\infty, \xi \in \ell^1.)$$

诱导的映射  $\alpha \mapsto f_\alpha$  是等距同构即可. 方法与  $p > 1$  情形完全类似. □

**注** 证明一个空间是另一个的对偶, 需要找出它们之间的等距同构. 这往往是困难的.

**2.5.2\*** 设  $c$  为收敛数列全体, 赋以范数

$$\|\cdot\| : \{\xi_k\} \mapsto \sup_{k \geq 1} |\xi_k|.$$

证明:  $c^* = \ell^1$ .

设  $e = (1, 1, \dots, 1, \dots)$ , 那么

$$c = c_0 \oplus \mathbb{K}e.$$

这是因为每一个收敛序列  $\xi$ , 设它的极限是  $a \in \mathbb{K}$  ( $\mathbb{K}$  是讨论的序列空间的底域, 是  $\mathbb{R}$  或  $\mathbb{C}$  其中之一), 都能唯一写成  $\xi = (\xi - ae) + ae$  的形式.

那么, 如果我们能证得

$$c^* = c_0^* \oplus (\mathbb{K}e)^*$$

再加之, 显然  $(\mathbb{K}e)^* = \mathbb{K}$ , 而由习题 2.5.3\*,  $c_0^* = \ell^1$ , 就知道

$$c^* = \ell^1 \oplus \mathbb{K}.$$

这就是说, 给定  $\alpha = (\alpha_k) \in \ell^1$  与  $\beta \in \mathbb{K}$ , 则对  $\xi \in c, \xi_k \rightarrow \ell$ ,

$$f_{\alpha, \beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (\xi_k - \ell) + \beta \ell.$$

由于  $\ell^1 \oplus \mathbb{K}$  与  $c^*$  范数是相容的, 所以

$$\|(\alpha, \beta)\|_{\oplus} = \|f_{\alpha, \beta}\|_{c^*} = \sup_{\|\xi\|_{\ell^\infty}=1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (\xi_k - \ell) + \beta \ell \right| = \sup_{\|\xi\|_{\ell^\infty}=1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k + \ell \left( \beta - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \right) \right|.$$

命  $\alpha_0 = \ell \left( \beta + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \right)$ , 类似  $c_0$  中的证明可以证得 (见习题 2.5.3\* 的证明过程)

$$\|(\alpha, \beta)\|_{\oplus} = |\alpha_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|.$$

命  $\tilde{\alpha} = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ , 上式右侧就是  $\tilde{\alpha}$  的  $\ell^1$  范数. 这样就说明了  $\ell^1 \oplus \mathbb{K}$  和  $\ell^1$  是等距同构. 所以最后我们得到

$$c^* = \ell^1 \oplus \mathbb{K} = \ell^1.$$

那么下面我们就来证明这样一条引理.

**引理** 假若赋范线性空间  $X = Y \oplus Z$ , 其中  $Y$  是闭子空间,  $Z$  是有限维的子空间, 那么  $X^* = Y^* \oplus Z^*$ .

**证明.** 取  $P_Y, P_Z$  分别是  $X$  到  $Y, Z$  的投影算子. 因为  $Z$  有限维, 所以  $P_Z$  是连续的, 随即  $P_Y = \text{id} - P_Z$  也是连续的, 因为  $\|P_Y\| \leq \|\text{id}\| + \|P_Z\| < +\infty$ . 那么, 把  $f \in X^*$  分解成  $f = f \circ P_Y + f \circ P_Z$ , 由投影算子的连续性, 这里的  $f \circ P_Y$  和  $f \circ P_Z$  分别可看作是  $Y^*$  和  $Z^*$  上的有界泛函. 容易看出这样的表示是唯一的, 就知道  $X^* \subset Y^* \oplus Z^*$ . 而反面  $X^* \supset Y^* \oplus Z^*$  是显然的.  $\square$

这样一来, 将引理运用到  $c = c_0 \oplus \mathbb{K}e$  上, 再由以上的推理过程立刻就得到结果.  $\square$

**注** a) [8], p.136 的解答中有一处关键错误, 即我们不能在  $c$  上直接写

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k.$$

这是因为一般地说, 右边的级数在  $\ell^\infty$  范数的意义下是不收敛的. 例如, 每一个位置上都是 1 的列是  $c$  的但不是  $c_0$  的元素, 它就不能表示成这样的级数形式, 因为

$$\left\| \xi - \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \right\|_{\ell^\infty} \equiv 1,$$

使  $n \rightarrow \infty$  也根本不收敛.

b) 另外, 本题所用到的引理有一条更普遍的形式, 其证明的方法与正文中是类似的.

**引理** 假若赋范线性空间  $X = Y \oplus Z$ , 则  $X^* = Y^* \oplus Z^*$  当且仅当  $X = Y \oplus Z$  是拓扑直和, 即  $Y, Z$  都是闭子空间且  $X$  到它们的投影映射都是连续的. 也称此时的  $Y$  (或  $Z$ ) 是可补子空间.

Hilbert 空间中, 投影到闭子空间上的正交投影算子一定是连续的; 而 Banach 空间上投影确实有可能是连续的. 投影算子的不连续性意味着子空间不可补, 意味着存在一列  $x_n \rightarrow 0$ , 但  $|Px_n| \not\rightarrow 0$ , 甚至  $|Px_n| \rightarrow \infty$ . 换言之, 在  $M$  方向上的分量可以被无限放大, 投影操作对小扰动极其不稳定. 一个例子是  $c_0$  是  $\ell^\infty$  中的闭子空间, 但不是可补的. 具体证明可以参考 [2], Section 2.2, p.33.

**2.5.3\*** 设  $c_0$  为以 0 为极限的数列全体, 赋以范数

$$\|\cdot\| : \{\xi_k\} \mapsto \sup_{k \geq 1} |\xi_k|.$$

**证明:**  $c_0^* = \ell^1$ .

$\forall \alpha = \{\alpha_k\} \in \ell^1, \xi = \{\xi_k\} \in c_0$ , 考虑泛函  $f_\alpha$  使得

$$f_\alpha(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k,$$

容易知道  $f_\alpha$  是线性泛函. 而又利用 Hölder 不等式,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| |\xi_k| \leq \|\xi\|_{\ell^\infty} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| = \|\alpha\|_{\ell^1} \|\xi\|_{\ell^\infty}.$$

可见

$$\|f_\alpha\| = \sup_{\|\xi\|_{\ell^\infty}=1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k \right| \leq \sup_{\|\xi_k\|=1} \|\alpha\|_{\ell^1} \|\xi\|_{\ell^\infty} = \|\alpha\|_{\ell^1}.$$

事实上  $\|f_\alpha\| = \|\alpha\|_{\ell^1}$ . 考虑取

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{sgn} \alpha_k, & k \leq n \\ 0, & k \geq n. \end{cases}$$

此时即可见

$$|f_\alpha(\xi^{(n)})| = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|.$$

于是

$$\|\alpha\|_{\ell^1} \leq \sup_n |f_\alpha(\xi^{(n)})| \leq \sup_{\|\xi\|_{\ell^\infty}=1} |f_\alpha(\xi)| = \|f_\alpha\|.$$

另一方面, 为了  $f \mapsto \alpha$  是双射, 还需要证明它是满射, 即  $\forall f \in c_0^*$ , 存在  $\alpha \in \ell^1$  使得  $f = f_\alpha$ . 取  $e_k$ , 即第  $k$  位上是 1, 其余位置都是 0 的数列, 显然  $e_k \in c_0$ . 由于,  $\forall \xi \in c_0$ ,  $\xi$  都有级数表示

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k.$$

这是因为右侧总在  $\ell^\infty$  范数意义下收敛到  $\xi$ . 再根据  $f$  的连续性, 就有

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k).$$

取  $\alpha_k = f(e_k)$ , 则

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \alpha_k = f_\alpha(\xi).$$

于是只需再证明

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(e_k)| < \infty$$

即可得到  $f \mapsto \alpha$  是等距同构, 从而  $c_0^* = \ell^1$ . 事实上由前面的步骤,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(e_k)| = \|\alpha\|_{\ell^1} = \|f_\alpha\| = \|f\| < +\infty.$$

□

注 这就间接说明了  $c, c_0$  都不是自反空间, 因为  $(\ell^1)^* = \ell^\infty$ .

**2.5.4 证明:** 有限维赋范线性空间是自反的.

设  $\mathcal{X} \cong \mathbb{K}^n$  是一个有限维的赋范线性空间. 因为  $f \in \mathcal{X}^*$  只由它在基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  上的作用决定, 故可以记  $f = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ . 可见  $\mathcal{X}^* \cong \mathbb{K}^n$ , 从而  $\mathcal{X}^{**} \cong \mathbb{K}^n$ . 那么对任意的  $x^{**} \in \mathcal{X}^{**}$ , 可以设  $x^{**} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , 且

$$x^{**}(f) = f(e_1)\alpha_1 + f(e_2)\alpha_2 + \dots + f(e_n)\alpha_n.$$

于是取  $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , 注意

$$f(x) = \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \dots + \alpha_n f(e_n),$$

观察知道

$$\langle x, f \rangle = \langle f, x^{**} \rangle. \quad (\forall f \in \mathcal{X}^*)$$

那么我们就对任取的  $x^{**} \in \mathcal{X}^{**}$ , 都找到了  $x \in \mathcal{X}$  使得

$$\langle x, f \rangle = \langle f, x^{**} \rangle$$

对任意  $f \in \mathcal{X}^*$  成立. 这就说明  $\mathcal{X}$  是自反的. □

注 有限维赋范线性空间的对偶空间与它自己同构, 但在给定范数下如果不构成 Hilbert 空间则不能说对偶空间就是它自己, 因为对偶空间就是原空间, 当且仅当该空间等距同构于某 Hilbert 空间. 然而本题的结论说明不论如何, 其二次对偶空间都是这个空间本身.

**2.5.5\* 证明:** Banach 空间是自反的, 当且仅当它的共轭空间是自反的.

( $\Rightarrow$ ) 现在  $\mathcal{X}$  是自反的, 要证明  $\mathcal{X}^*$  也是自反的, 就是要证明  $\mathcal{X}^* \rightarrow \mathcal{X}^{***}$  的嵌入映射是满的. 具体地说, 就是要说明对任何  $x_0^{***} \in \mathcal{X}^{***}$ , 都能找到  $x_0^* \in \mathcal{X}^*$  满足

$$\langle x^{**}, x_0^{***} \rangle = \langle x_0^*, x^{**} \rangle. \quad (\forall x^{**} \in \mathcal{X}^{**})$$

为此, 考虑原空间嵌入二次共轭空间的映射和它的共轭

$$\begin{aligned} \iota: \mathcal{X} &\hookrightarrow \mathcal{X}^{**}, & \iota^*: \mathcal{X}^{***} &\rightarrow \mathcal{X}^*, \\ x &\mapsto x^{**}, & x^{***} &\mapsto x^*. \end{aligned}$$

我们断言, 取  $x_0^* = \iota^* x_0^{***}$  就满足上面的式子. 事实上, 任取  $x \in \mathcal{X}$ , 代入得到

$$\langle x_0^*, x^{**} \rangle = \langle x_0^*, \iota x \rangle = \langle x, x_0^* \rangle \stackrel{\text{sub}}{=} \langle x, \iota^* x_0^{***} \rangle = \langle \iota x, x_0^{***} \rangle = \langle x^{**}, x_0^{***} \rangle.$$

上面第二个和倒数第二个等号用到了  $\mathcal{X}$  是自反的性质, 即对任何  $x_1^{**} \in \mathcal{X}^{**}$ , 都能找到  $x_1 \in \mathcal{X}$  满足

$$\langle x^*, x_1^{**} \rangle = \langle x_1, x^* \rangle. \quad (\forall x^* \in \mathcal{X}^*).$$

( $\Leftarrow$ ) 由习题 2.5.6 的结论,  $\mathcal{X}$  是 Banach 空间, 从而  $\iota\mathcal{X} \subset \mathcal{X}^{**}$  在  $\mathcal{X}^{**}$  中是闭的子空间. 根据已证明的方向的结论, 由  $\mathcal{X}^*$  自反可以得到  $\mathcal{X}^{**}$  是自反的. 再根据 Pettis 定理 (见 [6], 定理 2.5.27, p.169), 自反空间中的闭子空间  $\iota\mathcal{X} = \mathcal{X}$  自反. □

**注** 事实上, 对赋范线性空间  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ , 算子  $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  是同构时,  $T^*$  也是同构, 且  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ . 反过来, 如果  $\mathcal{X}$  是完备的, 那  $T^*$  是同构时,  $T$  也是同构. 证明见习题 2.5.10 及 [9], p.174.

本题中运用了大量的对偶积记号. 关于我使用的对偶积记号的说明, 见 2.5 节下的注.

这个看起来显然的命题, 其实一点都不显然. 证明过程参考了 Pettis 定理证明的技巧. 当然, 更凝练的一种写法是  $\mathcal{X}$  自反, 等价于  $\iota_{\mathcal{X}}$  是满射, 等价于  $\iota_{\mathcal{X}}^*$  是单射 (注意  $\text{im } \iota_{\mathcal{X}}$  是闭的, 因为  $\mathcal{X}$  完备), 等价于  $\iota_{\mathcal{X}^*}$  是满射 (注意  $\iota_{\mathcal{X}}^* \circ \iota_{\mathcal{X}^*} = \text{id}_{\mathcal{X}^*}$  是双射), 等价于  $\mathcal{X}^*$  自反.

**2.5.6** 设  $\mathcal{X}$  是赋范线性空间,  $T$  是  $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{X}^{**}$  的自然嵌入. 证明:  $\text{Ran } T$  为闭的, 当且仅当  $\mathcal{X}$  是完备的.

( $\Rightarrow$ ) 假若  $\mathcal{X}$  不完备, 则能取出一个在  $\mathcal{X}$  中取不到极限的 Cauchy 列  $\{x_n\}$ . 因为  $T$  是  $\mathcal{X} \rightarrow \text{Ran } T$  的等距同构,  $\{Tx_n\}$  就是  $\mathcal{X}^{**}$  中的 Cauchy 列. 由于对偶空间都是完备的, 所以可以设  $Tx_n \rightarrow y \in \mathcal{X}^{**}$ . 根据假设,  $\text{Ran } T$  是闭的, 而  $\{Tx_n\} \subset \text{Ran } T$ , 所以  $y \in \text{Ran } T$ , 则可以设  $y = Tx$ . 容易验证,  $x_n \rightarrow x$ , 矛盾!

( $\Leftarrow$ ) 若  $\mathcal{X}$  完备, 那么考虑  $\text{Ran } T$  中任意的 Cauchy 列  $\{Tx_n\}$ , 只需证它的极限  $y \in \text{Ran } T$  中. 事实上, 因为  $T$  是  $\mathcal{X} \rightarrow \text{Ran } T$  的等距同构, 所以  $\{x_n\}$  是  $\mathcal{X}$  中的 Cauchy 列, 收敛到  $x \in \mathcal{X}$ . 那么容易验证  $Tx$  就是  $\{Tx_n\}$  的极限, 可见  $y = Tx \in \text{Ran } T$ .  $\square$

**2.5.7** 在  $\ell^1$  中定义算子

$$T: (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto (0, x_1, \dots, x_n, \dots).$$

证明:  $T \in \mathcal{L}(\ell^1)$ , 并求  $T^*$ .

任取  $x \in \ell^1$ ,

$$\|Tx\|_{\ell^1} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \|x\|_{\ell^1}.$$

所以  $\|T\| = 1 < +\infty$ , 即  $T \in \mathcal{L}(\ell^1)$ .

根据习题 2.5.1\* 的结论,  $\forall f_b \in (\ell^1)^* = \ell^\infty$ , 可以把  $f_b$  写成  $\ell^\infty$  序列  $(b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ . 对于  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in \ell^1$ , 习题 2.3.9\* 和习题 2.5.1\* 告诉我们

$$f_b(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \quad f_b(Ta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_{n+1}.$$

由伴随算子的定义,

$$\langle a, T^* f_b \rangle = \langle Ta, f_b \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_{n+1}.$$

上式对于所有  $f_b \in \ell^\infty$  均成立, 意味着

$$T^*(b_1, b_2, \dots, b_n, \dots) = (b_2, b_3, \dots, b_n, \dots).$$

$\square$

**注** 注意, 如果算子  $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ , 那么它的共轭算子  $T^*: \mathcal{Y}^* \rightarrow \mathcal{X}^*$ . 本例中,  $\ell^1$  上的右移算子的共轭是  $\ell^\infty$  上的左移算子.

### 2.5.8 在 $\ell^2$ 中定义算子

$$T: (x_1, \dots, x_n, \dots) \mapsto \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots\right)$$

证明:  $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ , 并求  $T^*$ .

任取  $x \in \ell^2$ ,

$$\|Tx\|_{\ell^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{k^2} \leq \|x\|_{\ell^2}^2.$$

所以  $\|T\| < +\infty$ , 即  $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ .

根据习题 2.5.1\* 的结论,  $\forall f_b \in (\ell^2)^* = \ell^2$ , 可以把  $f_b$  写成  $\ell^2$  序列  $(b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ . 对于  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in \ell^2$ , 习题 2.3.8\* 告诉我们

$$f_b(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \quad f_b(Ta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n}.$$

由伴随算子的定义,

$$\langle a, T^* f_b \rangle = \langle Ta, f_b \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n}.$$

对所有  $f_b \in \ell^2$  恒成立. 所以可见  $T^* = T$ . □

**2.5.9** 设  $H$  为 Hilbert 空间,  $A \in \mathcal{L}(H)$ , 满足  $\forall x, y \in H, \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$  (内积). 证明:

i)  $A^* = A$ ;

ii) 若  $\text{Ran } A$  在  $H$  中稠密, 则  $\forall y \in \text{Ran } A$ , 方程  $Ax = y$  有唯一解  $x \in H$ .

i) 对任意的  $y \in H$ , 根据 F.Riesz 表示定理,  $y^* = \langle \cdot, y \rangle$  (内积) 是有界的线性泛函, 从而内积  $\langle Ax, y \rangle$  可以写作对偶积  $\langle Ax, y^* \rangle$ . 下面我们就不加以区分两者, 也不把  $y$  表示的有界线性泛函写作  $y^*$ . 这样看, 题目的条件刚好就是

$$\langle x, A^* y \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle. \quad (\forall x, y \in H)$$

这就意味着  $A$  是自伴的, 即  $A^* = A$ .

ii) 我们需要一条引理.

**引理** 设  $T$  是 Hilbert 空间  $H$  中的线性变换, 那么  $H = \overline{\text{im } T} \oplus \ker T^*$ .

引理的证明我们放到本题的注中. 现在由条件,  $\text{Ran } A = \text{im } A$  在  $H$  中稠密意味着  $\ker A^* = (\text{Ran } A)^\perp = \{0\}$ . 又因为  $A^* = A$ , 所以  $\ker A = \{0\}$ . 自然  $\forall y \in \text{Ran } A$ ,  $Ax = y$  有唯一解  $x \in H$ . □

注 下面是引理的证明.

证明. 任取  $y \in (\overline{\operatorname{im} T})^\perp$ , 那么对  $\forall x \in H$ , 注意  $Tx \in \operatorname{im} T$ , 则

$$0 = \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle,$$

所以  $y \in \ker T^*$ . 反之, 任取  $y \in \ker T^*$ ,  $\forall x \in H$ ,

$$0 = \langle x, T^*y \rangle = \langle Tx, y \rangle,$$

可见  $y \in (\operatorname{im} T)^\perp = (\overline{\operatorname{im} T})^\perp$ . 由 Hilbert 空间上的正交分解定理可知  $H = \overline{\operatorname{im} T} \oplus \ker T^*$ .  $\square$

**2.5.10** 设  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  是赋范线性空间, 算子  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  是双射, 且  $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ . 证明:

i)  $(A^*)^{-1}$  存在且  $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^*, \mathcal{Y}^*)$ ;

ii)  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ .

i) 由条件,  $A$  是双射. 根据 Banach 逆算子定理, 只需说明  $A^*$  是双射即可. 设  $f \in \mathcal{Y}^*$  使  $A^*f = 0$ , 则  $\forall x \in \mathcal{X}$ ,  $A^*f(x) = 0$ . 于是

$$\langle Ax, f \rangle = \langle x, A^*f \rangle = 0.$$

因为  $A$  是双射, 随着  $x$  跑遍  $\mathcal{X}$ ,  $Ax$  也跑遍  $\mathcal{Y}$ , 所以  $f(\mathcal{Y}) = 0$ , 意味着  $f = 0$ , 从而  $A^*$  是单射.

再证明  $A^*$  是满射. 对任意  $g \in \mathcal{X}^*$ , 命  $f \in \mathcal{Y}^*$  满足  $f(y) = g(A^{-1}y)$ ,  $y \in \mathcal{Y}$ , 则  $A^*f = g$ . 这是因为

$$\langle x, A^*f \rangle = \langle Ax, f \rangle \stackrel{y=Ax}{=} \langle y, f \rangle = \langle A^{-1}y, g \rangle = \langle x, g \rangle. \quad (\forall x \in \mathcal{X})$$

这就说明了  $A^*$  是满射,  $(A^*)^{-1}$  就存在. 再由 Banach 逆算子定理, 就知道  $(A^*)^{-1}$  是有界的线性算子.

ii) 由习题 2.5.11,

$$(A^{-1})^*A^* = (AA^{-1})^* = \operatorname{id}_{\mathcal{Y}}^* = \operatorname{id}_{\mathcal{Y}^*},$$

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = \operatorname{id}_{\mathcal{X}}^* = \operatorname{id}_{\mathcal{X}^*}.$$

立刻得到结果.  $\square$

**2.5.11** 设  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$  为赋范线性空间. 证明: 若  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ,  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ , 则  $(AB)^* = B^*A^*$ .

用对偶积的形式写, 对所有  $x \in \mathcal{X}$ ,  $f \in \mathcal{Z}^*$ ,

$$\langle x, (AB)^*f \rangle = \langle ABx, f \rangle = \langle Bx, A^*f \rangle = \langle x, B^*A^*f \rangle.$$

所以  $(AB)^* = B^*A^*$ .  $\square$

**2.5.12** 设  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  是 Banach 空间,  $T$  是  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  的线性算子, 满足对任意  $g \in \mathcal{Y}^*$ ,  $(g \circ T)$  都是  $\mathcal{X}$  上有界线性泛函. 证明:  $T$  是连续的.

**证法一** 因为  $g \circ T = T^* \circ g$ , 所以  $\forall g \in \mathcal{Y}^*$ , 条件告诉我们  $T^* \circ g \in \mathcal{X}^*$ , 于是

$$\|T^*\| = \sup_{\|g\|_{\mathcal{Y}^*}=1} \|T^* \circ g\|.$$

要证明右边是有限的, 根据共鸣定理, 只需证明  $\forall x \in \mathcal{X}$ ,

$$\sup_{\|g\|=1} |(T^* \circ g)(x)| < +\infty.$$

事实上,

$$|(T^* \circ g)(x)| = |(g \circ T)(x)| \leq \|g\| \cdot \|Tx\| = \|Tx\|.$$

因为对每一个  $x \in \mathcal{X}$ , 右侧的上界对  $g$  是一致的, 所以

$$\sup_{\|g\|=1} |(T^* \circ g)(x)| \leq \|Tx\| < +\infty.$$

这样,  $\|T^*\| < +\infty$ , 从而  $\|T\| = \|T^*\| < +\infty$ . □

**证法二** 设一个序列  $\{x_n\}$  满足  $x_n \rightarrow x$  且  $y_n \stackrel{\text{def}}{=} Tx_n \rightarrow y$ . 取  $g$  是任意连续线性泛函, 所以就有  $g(y_n) \rightarrow g(y)$ . 又因为  $g \circ T$  是连续线性泛函, 所以  $(g \circ T)(x_n) \rightarrow g \circ T(x)$ . 所以

$$g(Tx_n) \rightarrow g(y) \quad \text{且} \quad g(Tx_n) \rightarrow g(Tx). \quad (\forall g \in \mathcal{Y}^*)$$

那么, 因为  $\mathcal{Y}^*$  上的所有连续线性泛函都无法区分  $Tx$  和  $y$ , 就有  $Tx = y$  (见 [6], 推论 2.4.5, p.127), 这就说明  $T$  是一个闭算子. 注意  $T$  是定义在  $\mathcal{X}$  上的, 而  $\mathcal{X}$  当然是闭的, 那么闭图像定理就告诉我们  $T$  是连续的线性算子. □

**注** 若将  $g$  的任意性改为存在性命题不成立, 除了 0 之外我们还有非平凡的反例, 设  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \ell^2$ , 命  $g(x)$  是取  $x$  第 1 个位置的值, 显见它是线性的; 命  $Tx$  将  $x$  的第  $n$  位乘  $n$  倍的算子,  $T$  自然是无界的, 但是  $g \circ T = g$  是有界的.

**2.5.13** 设  $x_n \in C[a, b], x \in C[a, b]$  且  $x_n \xrightarrow{w} x$ . 证明:  $x_n(t) \rightarrow x(t), \forall t \in [a, b]$ .

对任意  $t \in [a, b]$ , 考虑有界线性泛函  $t^*: t^*(f) \mapsto f(t)$ . 因为  $x_n \xrightarrow{w} x$ , 所以  $t^*(x_n) \rightarrow t^*(x)$ , 此即  $x_n(t) \rightarrow x(t)$ . □

**注** 事实上, 所谓泛函的点点收敛就是弱 \* 收敛. 本题即证明了泛函构成的空间中, 弱收敛总强于弱 \* 收敛.

**2.5.14** 设赋范线性空间  $\mathcal{X}$  上序列  $\{x_n\} \xrightarrow{w} x_0$ . 证明:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \geq \|x_0\|.$$

由 Hahn-Banach 定理的推论 ([6], 推论 2.4.6, p.127), 可以取到有界线性泛函  $f$  满足

$$\|f\| = 1 \quad \text{且} \quad f(x_0) = \|x_0\|.$$

又因为  $x_n \xrightarrow{w} x_0$ , 所以  $f(x_n) \rightarrow f(x_0) = \|x_0\|$ , 而

$$f(x_n) \leq \|f\| \|x_n\| = \|x_n\|,$$

所以

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

□

**注** 本题说明, 即使弱收敛不能保证范数序列收敛, 但是弱收敛的范数仍然是下半连续的, 换句话说, 范数是弱下半连续的.

**2.5.15** 设  $H$  为 Hilbert 空间,  $\{e_n\}$  为  $H$  的正交规范基. 证明:  $x_n \xrightarrow{w} x_0$  当且仅当

i)  $\|x_n\|$  有界;

ii)  $\langle x_n, e_k \rangle \rightarrow \langle x_0, e_k \rangle$ . ( $k = 1, 2, \dots$ )

( $\implies$ ) 根据习题 2.4.4, 对所有  $f \in \mathcal{X}^*$ , 假若  $\{f(x_n)\}$  都有界, 那么  $\{x_n\}$  就有界, 即  $\|x_n\|$  有界. 另外, 考虑有界线性泛函  $f_k \stackrel{\text{def}}{=} \langle \cdot, e_k \rangle$ , 因为  $x_n \xrightarrow{w} x_0$ , 所以  $f_k(x_n) \rightarrow f_k(x_0)$ , 也就是  $\langle x_n, e_k \rangle \rightarrow \langle x_0, e_k \rangle$ .

( $\impliedby$ )  $\forall f \in H^*$ , 根据 F.Riesz 表示定理, 存在  $y_f \in \mathcal{X}$ , 使得  $f = \langle \cdot, y_f \rangle$ . 所以要证  $x_n \xrightarrow{w} x$ , 只需证明  $\forall y \in H, \langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x_0, y \rangle$ . 而在正交规范基  $\{e_n\}$  下, 可以设  $y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ ,  $y_m = \sum_{n=1}^m \alpha_n e_n$ , 那么  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $m$  充分大使得  $\|y_m - y\| \leq \varepsilon/3M$ . 这里  $M$  是  $\{\|x_n\|\}_{n=0}^{\infty}$  的上界 (注意, 包含了  $x_0$ ), 依条件  $M < +\infty$ . 那么

$$\begin{aligned} & |\langle x_n, y \rangle - \langle x_0, y \rangle| \\ & \leq |\langle x_n, y \rangle - \langle x_n, y_m \rangle| + |\langle x_n, y_m \rangle - \langle x_0, y_m \rangle| + |\langle x_0, y_m \rangle - \langle x_0, y \rangle| \\ & \leq \|x_n\| \|y - y_m\| + \|x_0\| \|y - y_m\| + |\langle x_n, y_m \rangle - \langle x_0, y_m \rangle| \\ & \leq \frac{2}{3} \varepsilon + |\langle x_n, y_m \rangle - \langle x_0, y_m \rangle|. \end{aligned}$$

现在对固定的  $m$ , 再取  $n$  充分大, 使得  $|\langle x_n, y_m \rangle - \langle x_0, y_m \rangle| < \varepsilon/3$  即可, 事实上这是可以做到的, 因为

$$|\langle x_n, y_m \rangle - \langle x_0, y_m \rangle| = \left| \sum_{k=1}^m \alpha_k \langle x_n - x_0, e_k \rangle \right| \leq \sum_{k=1}^m |\alpha_k| |\langle x_n - x_0, e_k \rangle|.$$

而我们有  $\langle x_n - x_0, e_k \rangle \rightarrow 0$ , 所以可以取

$$\langle x_n - x_0, e_k \rangle < \frac{\varepsilon}{3m\|y\|}.$$

注意  $\alpha_k = \langle y, e_k \rangle \leq \|y\|$ , 所以就有

$$|\langle x_n, y_m \rangle - \langle x_0, y_m \rangle| < \sum_{k=1}^m |\alpha_k| |\langle x_n - x_0, e_k \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

这样一来,  $|\langle x_n, y \rangle - \langle x_0, y \rangle| < \varepsilon$ . 依据  $\varepsilon$  的任意性就推出了  $x_n \xrightarrow{w} x$ . □

**注** 其实, 直接运用 Banach-Steinhaus 定理即可证明. 注意  $\text{span}\{e_n\}$  在  $H$  中是稠密的子集即可. 不过我打都打出来了, 就不删掉了.

**2.5.16** 设  $S_n$  为  $L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$  的算子 ( $1 \leq p < \infty$ ). 对任意  $u \in L^p(\mathbb{R})$ , 定义

$$(S_n u)(x) = \begin{cases} u(x), & |x| \leq n, \\ 0, & |x| > n. \end{cases}$$

证明:  $\{S_n\}$  强收敛于  $\text{id}$  但不一致收敛于  $\text{id}$ .

对  $u \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $(\text{id} - S_n)u = u\chi_{\{|x| \geq n\}}$ . 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u\chi_{\{|x| \geq n\}}\|_{L^p}^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} (u(x)\chi_{\{|x| \geq n\}})^p dx,$$

因为  $u\chi_{\{|x| \geq n\}}$  有控制函数  $u \in L^p(\mathbb{R})$ , 所以由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} (u(x)\chi_{\{|x| \geq n\}})^p dx = \int_{\mathbb{R}} (u(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{\{|x| \geq n\}})^p dx = 0.$$

所以算子  $S_n$  强收敛到  $\text{id}$ .

但是另一方面,

$$\|S_n - \text{id}\|_{L^p \rightarrow L^p} = \sup_{\|u\|_{L^p}=1} |(S_n - \text{id})u|.$$

而对任意固定的  $n$ , 都能取  $u = \chi_{[n, n+1]}$ , 满足  $\|u\|_{L^p} = 1$  且

$$\|(\text{id} - S_n)u\|_{L^p} = \|u\|_{L^p} = 1.$$

所以

$$\|S_n - \text{id}\|_{L^p \rightarrow L^p} \geq 1.$$

对任意自然数  $n$  成立, 所以算子  $S_n$  并不一致收敛到  $\text{id}$ . □

**2.5.17** 设  $H$  为 Hilbert 空间, 在  $H$  中  $\{x_n\} \xrightarrow{w} x_0$  且  $y_n \xrightarrow{s} y_0$ . 证明:  $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x_0, y_0 \rangle$ .

任取  $\varepsilon > 0$ , 考虑

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| &\leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y_0 \rangle| + |\langle x_n, y_0 \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y_0 \rangle| + |\langle x_n - x_0, y_0 \rangle|. \end{aligned}$$

这里, 根据习题 2.5.15 的结论,  $\|x_n\|$  对所有  $n$  有一致上界  $M$ , 又因为  $y_n \xrightarrow{s} y_0$ , 所以可以取  $n > N_1$  使得  $\|y_n - y_0\| < \varepsilon/2M$ . 从而根据 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$|\langle x_n, y_n - y_0 \rangle| \leq \|x_n\| \|y_n - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面, 对有界线性泛函  $f_0 = \langle \cdot, y_0 \rangle$ , 因为  $x_n \xrightarrow{w} x_0$ , 所以  $f_0(x_n - x_0) \rightarrow 0$ . 于是可取  $n > N_2$  使得

$$|\langle x_n - x_0, y_0 \rangle| = |f_0(x_n - x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

综合起来, 对充分大的  $n$ , 就有

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| < |\langle x_n, y_n - y_0 \rangle| + |\langle x_n - x_0, y_0 \rangle| < \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  的任意性就得到结论. □

**注** 事实上, 这个结论不能改进成两个序列都是弱收敛的. 事实上取  $x_n \equiv y_n$ , 则结论  $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x_0, y_0 \rangle$  意味着  $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$ , 下面的引理表示, 如果这成立则意味着 Hilbert 空间中弱收敛序列  $\{x_n\}$  可推出强收敛, 这当然是荒谬的, 一个典型的反例是  $\ell^2$  上的标准正交基序列  $\{e_n\}$  弱收敛到 0, 但显然不是强收敛的.

**引理** Hilbert 空间中, 序列  $\{x_n\}$  如果满足  $x_n \xrightarrow{w} x_0$  且  $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$ , 则  $x_n \xrightarrow{s} x_0$ . 但是这对于一般的 Banach 空间不一定成立.

**证明.** 在 Hilbert 空间中, 考虑

$$\|x_n - x_0\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x_0\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x_n, x_0 \rangle,$$

而弱收敛告诉我们,  $\langle x_n, x_0 \rangle \rightarrow \langle x_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$ , 又由  $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$  得

$$\|x_n - x_0\|^2 \rightarrow 0.$$

此即  $x_n \xrightarrow{s} x_0$ .

对于一般的 Banach 空间, 这个性质未必成立. 例如收敛于 0 的序列空间  $c_0$ , 赋以无穷范数形成的 Banach 空间中的一列序列  $\{x_n\}$  (表示第 1 位和第  $n$  位是 1, 其余全为 0), 可以证明  $x_n \xrightarrow{w} e_1$ ,  $\|e_n\|_\infty = 1$  但  $\|x_n - e_1\|_\infty = 1 \not\rightarrow 0$ . 这里  $e_1$  表示第 1 位是 1, 其余全为 0 的序列. □

事实上, 如果一个空间满足  $x_n \xrightarrow{w} x_0$  且  $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$  就能推出  $x_n \xrightarrow{s} x_0$ , 称这个空间具有 Kadec-Klee 性质 (也称 Radon-Riesz 性质). 具有 Kadec-Klee 性质的空间的一个充分条件就是它是一个一致凸的 Banach 空间.

**注** 空间  $\mathcal{X}$  称为一致凸的, 如果对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta(\varepsilon) > 0$ , 使得对所有  $x, y \in \mathcal{X}$  满足  $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$  且  $\|x - y\| \geq \varepsilon$ , 有

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon).$$

这是比严格凸更强的性质.

更深入的理论, 请查阅一致凸空间, Orlicz 空间等相关内容, 例如 [3],[4],[5].

**2.5.18** 设  $H$  为 Hilbert 空间,  $\{e_n\}$  为  $H$  的正交规范基. 证明: 在  $H$  中,  $\{e_n\} \xrightarrow{w} 0$ , 但  $e_n \not\xrightarrow{s} 0$ .

因为对任何  $i \neq j$ ,  $\|e_i - e_j\|^2 = \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle e_i, e_j \rangle = 2$ , 很明显  $e_i \not\xrightarrow{s} 0$ . 但是  $\forall f \in H^*$ , 由 F.Riesz 表示定理, 存在  $y_f \in H$  使得  $f = \langle \cdot, y_f \rangle$ . 设

$$y_f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, y_f \rangle e_n,$$

则由 Parseval 恒等式,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, y_f \rangle|^2 = \|y_f\|^2 < +\infty,$$

意味着

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle e_n, y_f \rangle = 0,$$

此即  $e_n \xrightarrow{w} 0$ . □

**2.5.19** 设  $H$  为 Hilbert 空间. 证明: 在  $H$  中,  $x_n \xrightarrow{s} x_0$  当且仅当  $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$  且  $\{x_n\} \xrightarrow{w} x_0$ .  
( $\Leftarrow$ ) 在 Hilbert 空间中, 考虑

$$\|x_n - x_0\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x_0\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x_n, x_0 \rangle,$$

而弱收敛告诉我们,  $\langle x_n, x_0 \rangle \rightarrow \langle x_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$ , 又由  $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$  得

$$\|x_n - x_0\|^2 \rightarrow 0.$$

此即  $x_n \xrightarrow{s} x_0$ . □

( $\Rightarrow$ ) 显然.

**注** 关于这个性质, 详见习题 2.5.17 的注.

**2.5.20 证明:** 在自反的 Banach 空间中, 集合的弱列紧性与有界性等价.

事实上这是两个定理的直接推论. 弱列紧集一定有界, 假若不然, 则选取一个无界弱列紧集, 取出一个点列  $\{x_n\}$  满足  $\|x_n\| \geq 1/n$ , 则由弱列紧性可以从中选取弱收敛的子列  $\{x_{n_k}\}$ . 注意它是无界的, 这就产生矛盾. 见 [6], 定理 2.5.21, p.165. 自反空间中有界集弱列紧, 是 Emberlein-Šmulian 定理证明过程中得到的结论, 见 [6], 定理 2.5.28, p.169 – 170.  $\square$

**2.5.21 证明:** 赋范线性空间中的闭凸集都是弱闭的, i.e., 若  $M$  是闭凸集,  $\{x_n\} \subset M$  且  $x_n \xrightarrow{w} x_0$ , 则  $x_0 \in M$ .

反设  $x_0 \notin M$ , 那么由 Ascoli 定理 (见 [6], 推论 2.4.17, p.135) 知道, 存在  $f \in \mathcal{X}^*$ , 使得  $f(M) < \alpha < f(x_0)$ . 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \alpha < f(x_0),$$

与  $x_n \xrightarrow{w} x_0$  矛盾! 于是  $x_0 \in M$ .  $\square$

**注** 不同于其名字, 弱闭集事实上强于闭集. 这是因为弱拓扑比范数拓扑弱 (即开集数量更少), 所以成为弱拓扑下的闭集 (即弱闭集) 的要求更高. 本题说明了赋范线性空间上, 闭集如果是凸集, 那它就是弱闭的. 事实上, 本题的结论是 Mazur 定理 (拓扑版本) 的一个特殊情形, 参见 [9], 推论 8.2.10, p.159.

**2.5.22 设**  $\mathcal{X}$  是自反的 Banach 空间,  $M$  是  $\mathcal{X}$  中的一个有界闭凸集. **证明:** 任取  $f \in \mathcal{X}^*$ ,  $f$  在  $M$  上都可取到最值.

**证法一.** 设  $M = \sup_{x \in M} f(x)$ , 那么取  $f(x)$  的极大化序列  $x_n$ , 满足

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M.$$

由 Emberlein-Šmulian 定理, 自反空间的有界闭集  $M$  是弱列紧的, 所以可以从中抽出一个弱收敛的子列  $\{x_{n_k}\}$ , 设  $x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0$ , 于是  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$ . 而且因为

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M,$$

知道  $f(x_0) = M$ . 最小值的情形同理.

**证法二\*.** Emberlein-Šmulian 定理保证了自反空间的有界闭集  $M$  是弱列紧的, 习题 2.5.21 的结论保证  $M$  是弱闭的, 于是  $M$  是弱紧集. 而在范数拓扑下的连续映射在弱拓扑下也是连续函数 (参见 [9], 定理 8.3.2, p.161). 所以在给定的拓扑下连续函数把紧集映成紧集, 就知道  $f$  在  $M$  上的最值存在, 因为  $\mathbb{R}$  上的紧集就是有界闭集.  $\square$

**注** 连续映射把紧集映成紧集, 但未必把闭集映成闭集, 所以单单是 Banach 空间中的闭集不足以保证连续泛函在它上面取到最值. 本题的结论说明了, 增加一定的条件之后, 满足这些条件的闭集上就都能取到最值, 增加的这些条件的本质可参见本题的证法二. 下面是一个闭集上线性泛函取不到最值的例子.

在赋以上确界范数的收敛到 0 的实序列空间  $c_0$  上, 定义线性泛函

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}.$$

其有界性由

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_{c_0}=1} |f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$$

得到, 但是在闭单位球  $\{x \in c_0 : \|x\|_{c_0} < 1\}$  上,  $f(x)$  显然永远取不到上确界  $\pi^2/6$  (因为  $x_n \rightarrow 0$ , 所以至少有一个  $x_k < 1 - \varepsilon$ ,  $\forall 0 < \varepsilon < 1$ ).

**2.5.23** 设  $\mathcal{X}$  是自反的 Banach 空间,  $M$  是  $\mathcal{X}$  中非空闭凸集. 证明: 存在  $x_0 \in M$ , 使得  $\|x_0\| = \inf\{\|x\| : x \in M\}$ .

记  $m = \inf\{\|x\| : x \in M\}$ , 取它的极小化序列  $\{x_n\}$ , 满足

$$\|x_n\| \leq m + \frac{1}{n}.$$

那么  $\{x_n\}$  有界, 因为  $\|x_n\| \leq m + 1$ . 由 Eberlein-Šmulian 定理, 它是弱列紧的, 所以具有一个子列  $\{x_{n_k}\}$  使得  $x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0$ . 而由习题 2.5.14, 对序列  $x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0$ , 有

$$m = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k}\| \geq \|x_0\| \geq m.$$

于是  $\|x_0\| = m$ . 再根据习题 2.5.21 的结论,  $x_0 \in M$ . □

## 2.6 线性算子的谱

**2.6.1** 设  $\mathcal{X}$  为 Banach 空间. 证明:  $\mathcal{L}(\mathcal{X})$  中有有界逆的算子集为开集.

取  $T_0$  是  $\mathcal{X}$  上具有有界逆的算子, 再任取  $T$  满足  $\|T - T_0\| < 1/\|T_0^{-1}\|$ . 那么

$$\|\text{id} - T_0^{-1}T\| = \|T_0^{-1}(T_0 - T)\| \leq \|T_0^{-1}\| \|T_0 - T\| < 1.$$

那么根据 Neumann 引理 (见 [6], 引理 2.6.6, p.183), 算子  $\text{id} - (\text{id} - T_0^{-1}T) = T_0^{-1}T$  存在有界逆, 记  $T_1 = (T_0^{-1}T)^{-1}$ , 则  $T_1^{-1} = T_0^{-1}T$ . 容易验证,  $T_1 T_0^{-1}$  就是  $T$  的逆, 且根据  $T_0$  和  $T_1$  的有界性就知道  $T$  的逆算子的有界性. 再由  $T$  和  $T_0$  选取的任意性知道具有有界逆的算子集都是开集.  $\square$

**注** 证明一个算子是另一个的逆, 说明其左乘右乘都等于恒等映射即可.

**2.6.2** 设  $A$  是闭算子,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \sigma_p(A)$  两两互异, 设  $x_i$  为  $\lambda_i$  的特征元 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

证明:  $\{x_1, \dots, x_n\}$  是线性无关的.

反设不然, 存在若干个数  $k_i$  使得

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n = 0,$$

于是,  $\forall f \in \mathcal{X}^*$ ,

$$k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) + \dots + k_n f(x_n) = 0$$

那么, 两边依次用  $A, A^2, \dots, A^{n-1}$  作用, 得到方程

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) + \dots + k_n f(x_n) = 0, \\ \lambda_1 k_1 f(x_1) + \lambda_2 k_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n k_n f(x_n) = 0, \\ \lambda_1^2 k_1 f(x_1) + \lambda_2^2 k_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n^2 k_n f(x_n) = 0, \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} k_1 f(x_1) + \lambda_2^{n-1} k_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n^{n-1} k_n f(x_n) = 0. \end{array} \right.$$

它的系数矩阵非奇异, 因为 Vandermonde 行列式在  $\lambda_i$  两两不同时非零, 于是上式只有零解. 因为这对所有  $f \in \mathcal{X}^*$  成立, 于是只能是  $k_i \equiv 0$ , 即  $\{x_1, \dots, x_n\}$  线性无关.  $\square$

**2.6.3\*** 在双边  $\ell^2$  空间 (记为  $\ell^2_{\pm}$ ) 上, 考虑右推移算子

$$A : x = \{\xi_k\}_{-\infty}^{\infty} \mapsto Ax = \{\eta_k\}_{-\infty}^{\infty},$$

其中, 对  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $\eta_m = \xi_{m-1}$ . 证明:  $\sigma_c(A) = \sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ .

首先, 用 Gelfand 定理计算谱半径. 注意  $A$  是保距的, 即  $\|Ax\| = \|x\|$ . 所以

$$r_{\sigma}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} = 1.$$

即  $A$  的谱半径是 1. 下面我们研究  $A$  的谱.

若  $\lambda \in \sigma_p(A)$ , 那么  $A\xi = \lambda\xi$  意味着

$$\xi_{n-1} = \lambda\xi_n.$$

记  $\eta = A\xi$ , 则

$$\|\xi\| = \|\eta\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\lambda\xi_n|^2 = \lambda^2 \|\xi\|,$$

意味着必须有  $\|\lambda\| = 1$ , 且

$$\xi = (\cdots, \lambda^n \xi_0, \lambda^{n-1} \xi_0, \cdots, \lambda \xi_0, \xi_0, \lambda^{-1} \xi_0, \cdots, \lambda^{-n} \xi_0, \cdots) \notin \ell_{\pm}^2.$$

所以  $\sigma_p(A) = \emptyset$ .

于是  $\lambda \text{id} - A$  恒为单射. 设  $|\lambda| \leq 1$ . 先证明  $\text{Ran}(\lambda \text{id} - A)$  在  $\ell^2$  上稠密. 为此只需证明所有至多有限项不为 0 的双边  $\ell^2$  序列构成的子空间  $\ell_{0,\pm}^2$  在  $\text{Ran}(\lambda \text{id} - A)$  中, 因为  $\overline{\ell_{0,\pm}^2} = \ell_{\pm}^2$ . 设  $\eta = \{\eta_n\} \in \ell_{0,\pm}^2$ , 不妨设

$$\eta = (\cdots, 0, 0, \eta_{-n}, \eta_{-n+1}, \cdots, \eta_{n-1}, \eta_n, 0, 0, \cdots).$$

现在要找出  $\xi$  使得  $\lambda\xi_k - \xi_{k-1} = \eta_k$ . 注意取

$$\eta_{-n} = \lambda\xi_{-n} - \xi_{-n-1},$$

不妨取  $\xi_{-n-1} = 0$ , 则

$$\xi_{-n} = \frac{1}{\lambda} \eta_{-n}.$$

继续,

$$\eta_{-n+1} = \lambda\xi_{-n+1} - \xi_{-n}$$

就知道

$$\xi_{-n+1} = \frac{1}{\lambda} [\eta_{-n+1} + \xi_{-n}] = \frac{1}{\lambda} \eta_{-n+1} + \frac{1}{\lambda^2} \eta_{-n}.$$

以此类推, 就知道取

$$\xi = (\cdots, 0, 0, \frac{1}{\lambda} \eta_{-n}, \frac{1}{\lambda} \eta_{-n+1} + \frac{1}{\lambda^2} \eta_{-n}, \cdots, \frac{1}{\lambda} \eta_{n-1} + \cdots + \frac{1}{\lambda^{2n}} \eta_{-n}, 0, 0, \cdots)$$

即可. 于是就知道  $\ell_{0,\pm}^2 \subset \text{Ran}(\lambda \text{id} - A)$ , 于是  $\overline{\text{Ran}(\lambda \text{id} - A)} = \ell^2$ . 从而  $\sigma_r(A) = \emptyset$ .

再证明  $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \subset \sigma_c$ . 我们说明, 对  $|\lambda| = 1$ ,  $\text{im}(\lambda \text{id} - A) \neq \ell^2$ . 考虑  $\ell^2$  序列

$$\eta_n = \begin{cases} \frac{1}{n\lambda^{n-1}}, & n \geq 1 \\ 0, & n \leq 0, \end{cases}$$

那么若  $\lambda \text{id} - A$  是满射, 可以设  $(\lambda \text{id} - A)\xi = \eta$ . 据此可以计算得到

$$\xi = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right), & n \geq 1, \\ 0, & n \leq 0. \end{cases}$$

而因为

$$|\xi_n| = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

所以  $\xi \notin \ell^2$ , 矛盾! 于是  $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \subset \sigma_c$ ,

最后, 我们用一条引理说明反包含关系. 它的证明我们放到本题的注中.

**引理** 设线性算子  $T$  具有连续逆, 那么  $\lambda \in \sigma(T^{-1}) \iff \lambda^{-1} \in \sigma(T)$ .

注意  $A$  的逆算子是左推移算子, 容易计算其谱半径同样为 1, 所以根据引理  $A$  的谱包含在  $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq 1\}$  中. 因为  $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ , 所以

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

又因为  $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \subset \sigma_c(A)$ , 所以

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

□

**注** 本题所用引理的证明.

证明. 注意

$$\lambda \text{id} - T^{-1} = -\frac{1}{\lambda} T^{-1} \left( \frac{1}{\lambda} \text{id} - T \right).$$

于是可见, 若  $\lambda \text{id} - T^{-1}$  是双射, 因为  $T^{-1}$  是双射, 所以  $\frac{1}{\lambda} \text{id} - T$  也是双射, 反之亦然. 这就意味着

$$\lambda \in \rho(T^{-1}) \iff \frac{1}{\lambda} \in \rho(T).$$

于是

$$\lambda \in \sigma(T^{-1}) \iff \frac{1}{\lambda} \in \sigma(T).$$

□

另外, 在验证  $\overline{\text{Ran}(\lambda \text{id} - A)} = \ell^2$  时, 还可以利用习题 2.5.9 的引理, 用到这里就是对 Hilbert 空间  $\ell^2$  中的线性算子  $\lambda \text{id} - A$ ,  $\ell^2 = \overline{\text{im}(\lambda \text{id} - A)} \oplus \ker(\lambda \text{id} - A)^*$ . 注意  $\lambda \text{id} - A$  是自伴的且  $\ker(\lambda \text{id} - A) = \{0\}$ , 所以  $\ell^2 = \overline{\text{im}(\lambda \text{id} - A)}$ .

2.6.4\* 在  $\ell^2$  空间上, 考虑左推移算子

$$A: (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \mapsto (\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n+1}, \dots)$$

证明:  $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ ,  $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ , 且  $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$ .

首先, 用 Gelfand 定理计算谱半径. 容易知道  $\|A\| = 1$ . 一方面,  $\|A^n\| \leq \|A\|^n = 1$ ; 另一方面, 取  $e_{n+1}$  为第  $n+1$  位上是 1, 其余都是 0 的序列,  $\|e_{n+1}\| = 1$  且  $\|A^n e_{n+1}\| = \|e_1\| = 1$  意味着  $\|A^n\| \geq 1$ . 所以

$$r_\sigma(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} = 1.$$

即  $A$  的谱半径是 1. 下面我们研究  $A$  的谱.

对  $|\lambda| < 1$ , 注意点列  $x_\lambda = (1, \lambda, \dots, \lambda^n, \dots) \in \ell^2$ , 因为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} = \frac{1}{1-\lambda} < \infty.$$

且  $Ax_\lambda = (\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n+1}, \dots) = \lambda x$ , 意味着  $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subset \sigma_p(A)$ , 即单位开圆盘包含在点谱中. 再说明反包含. 假若某个  $\lambda = e^{i\theta}$  满足存在  $x_\lambda \in \ell^2$ ,  $Ax_\lambda = \lambda x$ , 那么,  $a_2 = \lambda a_1$ ,  $a_3 = \lambda a_2$ , 以此类推,  $x_\lambda = (a_1, \lambda a_1, \lambda^2 a_1, \dots)$ , 而

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda^{k-1} a_1|^2 = \infty$$

意味着  $x_\lambda \notin \ell^2$ , 矛盾! 所以  $\sigma_p(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ . 至此我们已经知道  $A$  的点谱就是  $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ .

再计算连续谱. 要证明  $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ , 只需说明对单位圆周上的  $\lambda$ ,  $\lambda \text{id} - A$  都不是满射但值域在  $\ell^2$  中稠密. 先考虑元素个数有限的情形. 设  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, 0, \dots) \in \ell^2$ ,  $b = (\lambda \text{id} - A)a = (b_1, \dots, b_n, 0, \dots)$ , 容易得到关系

$$a_n = \frac{1}{\lambda} b_n, \quad a_{n-1} = \frac{1}{\lambda} b_{n-1} + \frac{1}{\lambda^2} b_n, \quad \dots, \quad a_1 = \frac{1}{\lambda} b_1 + \frac{1}{\lambda^2} b_2 + \dots + \frac{1}{\lambda^n} b_n.$$

也就是, 在  $\ell^2$  中只有有限个元素非 0 的子列构成的子集  $\ell_0^2$  中,  $\lambda \text{id} - A$  是双射. 因为  $\ell_0^2$  在  $\ell^2$  中稠密, 所以就知道

$$\ell^2 = \overline{\ell_0^2} \subset \overline{\text{Ran}(\lambda \text{id} - A)} \subset \ell^2.$$

所以此时  $\lambda \text{id} - A$  的值域在  $\ell^2$  中稠密. 但并非每个  $\ell^2$  序列都在其值域中, 例如

$$y = \left( \lambda, \frac{\lambda^2}{2}, \frac{\lambda^3}{3}, \dots, \frac{\lambda^n}{n}, \dots \right),$$

若  $d = (d_1, d_2, \dots)$  满足  $(\lambda \text{id} - A)d = y$ , 那么

$$d_1 - \frac{1}{\lambda} d_2 = 1; \frac{1}{\lambda} d_2 - \frac{1}{\lambda^2} d_3 = \frac{1}{2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{\lambda^{n-1}} d_n - \frac{1}{\lambda^n} d_{n+1} = \frac{1}{n}.$$

也就是,

$$d_n = \lambda^{n-1} \left( d_1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right).$$

当  $n \rightarrow \infty$  时  $a_n \rightarrow -\infty$ , 使得  $d$  不可能是  $\ell^2$  序列. 所以

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \subset \sigma_c(A).$$

因为谱半径是 1, 所以  $A$  连续谱就恰好是  $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ , 剩余谱是空集, 正则值为单位闭圆盘的补集. □

## 参考文献

- [1] E.M.Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.
- [2] Fernando Albiac, Nigel J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory(Second Edition)*, Springer, 2016.
- [3] Daniele Tampieri, rpk, and Ayman Moussa, *Weak convergence + convergence of the norm implies strong convergence in orlicz spaces*, 2023 - 11 - 24, <https://mathoverflow.net/questions/459061/weak-convergence-convergence-of-the-norm-implies-strong-convergence-in-orlicz>.
- [4] Joram Lindenstrauss, Lior Tzafriri, *Classical Banach Spaces I: Sequence Spaces*, Springer, 1977.
- [5] ———, *Classical Banach Spaces II: Function Spaces*, Springer, 1979.
- [6] 张恭庆, 林源渠, 泛函分析讲义 (第二版)(上), 北京大学出版社, 2021.
- [7] 张筑生, 数学分析新讲 (第三册), 北京大学出版社, 1991.
- [8] 林源渠, 泛函分析学习指南, 北京大学出版社, 2009.
- [9] 许全华, 马涛, 尹智, 泛函分析讲义, 高等教育出版社, 2017.