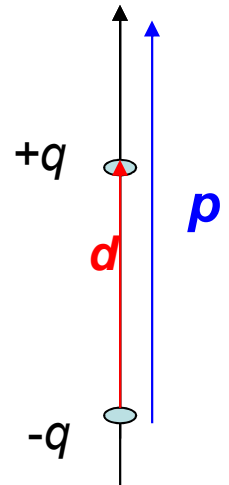


Dipolo Eléctrico

Definición

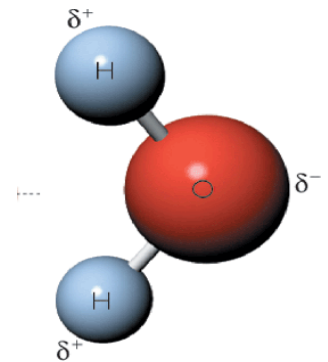
Un dipolo eléctrico es un sistema formado por dos cargas q y $-q$ separadas una distancia d , de forma que cuando la distancia d tiende a cero q tiende a infinito y el producto $p=qd$ se mantiene constante.

Se denomina **momento dipolar eléctrico** del dipolo al vector: $\mathbf{p}=q\mathbf{d}$, siendo \mathbf{d} el vector que tiene por módulo la distancia que hay entre las cargas, dirección en la recta que las une y el sentido que va de la carga negativa a la positiva.

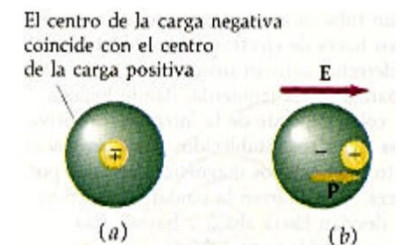


Ejemplos de dipolos en la naturaleza:

Moléculas polares: aquellas en las que no coincide el centro de distribución de cargas positivas y el de las negativas, un ejemplo significativo es la molécula de agua.



Las moléculas no polares, se hacen polares en presencia de un campo eléctrico, su formación en los materiales dieléctricos da lugar a la llamada Polarización.



Dipolo Eléctrico

Características de los dipolos eléctricos:

- El **potencial** debido a un dipolo eléctrico, para puntos situados a una distancia r , siendo $r \gg d$ es directamente proporcional a su momento dipolar e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del dipolo al punto.

$$V_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3}$$

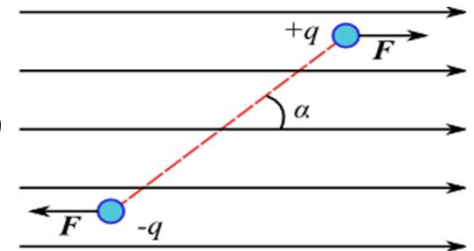
- El **campo** debido a un dipolo magnético en un punto r , cuando $r \gg d$ es inversamente proporcional al cubo de la distancia del dipolo al punto.

$$\mathbf{E}_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})}{r^2} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{p} \right]$$

- La energía potencial de un dipolo en presencia de un campo externo \mathbf{E}_0

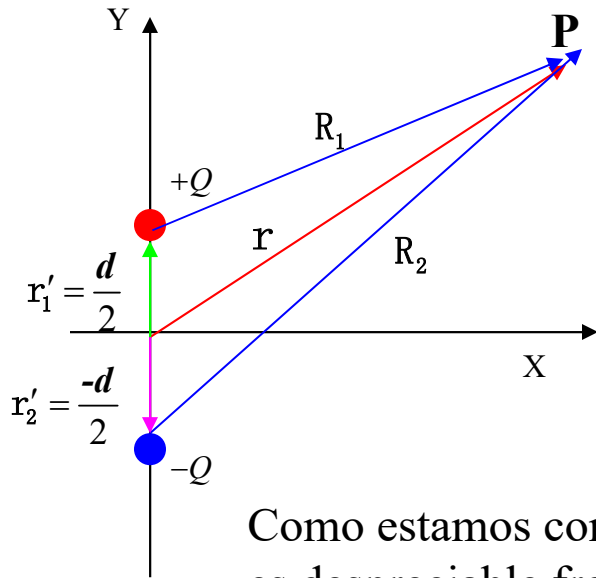
viene dada por : $W_D = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0$

- Par de fuerzas sobre un dipolo sometido a un campo \mathbf{E}_0 : sobre las cargas se produce un torque $\mathbf{T} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_0$ que obliga al dipolo a alinearse con el campo, buscando la posición de mínima energía potencial.



Dipolo Eléctrico

Potencial creado por un dipolo (desarrollo):



Consideremos la configuración de la figura.

Aplicando el principio de superposición del

potencial tenemos: $V_P(\mathbf{r}) = V_1(\mathbf{r}) + V_2(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

$$\frac{1}{R_1} = R_1^{-1} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|^{-1} = |(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1)(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1)|^{-\frac{1}{2}} = \left| \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2} \right) \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2} \right) \right|^{-\frac{1}{2}} = \left| r^2 + \left(\frac{d}{2} \right)^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}) \right|^{-\frac{1}{2}}$$

De forma análoga tenemos: $\frac{1}{R_2} = \left| r^2 + \left(\frac{d}{2} \right)^2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}) \right|^{-\frac{1}{2}}$

Como estamos considerando puntos P que verifican $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{d}|$ entonces el término $\left(\frac{d}{2} \right)^2$ es despreciable frente a r^2 y por tanto:

$$R_1^{-1} = \left| r^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}) \right|^{-\frac{1}{2}} = r^{-1} \left| 1 - \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} \right) \right|^{-\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad R_2^{-1} = r^{-1} \left| 1 + \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} \right) \right|^{-\frac{1}{2}}$$

Aplicando el T^a del Binomio: $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 + \dots$ (si $|x| < 1$), por tanto:

$$R_1^{-1} = r^{-1} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{2r^2} \right) \quad \text{y} \quad R_2^{-1} = r^{-1} \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{2r^2} \right)$$

De donde el potencial en P será:

$$V_P(\mathbf{r}) \cong \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{2r^2} - 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{2r^2} \right) = \frac{Q\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\text{siendo } \mathbf{p} = Q\mathbf{r} \text{ el "momento dipolar eléctrico"})$$

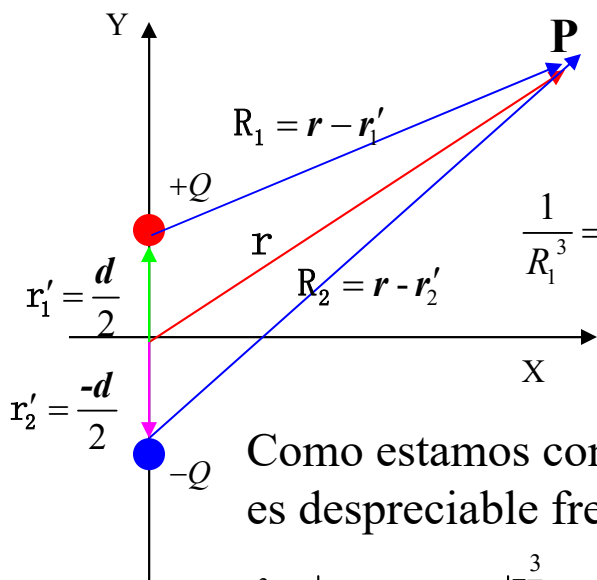
Dipolo Eléctrico

Campo eléctrico creado por un dipolo (desarrollo):

Consideremos la configuración de la figura.

Aplicando el principio de superposición del campo eléctrico tenemos:

$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{R}_1}{R_1^3} - \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} \right)$$



$$\frac{1}{R_1^3} = R_1^{-3} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1'|^{-3} = |(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1')(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1')|^{-\frac{3}{2}} = \left| \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2} \right) \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2} \right) \right|^{-\frac{3}{2}} = \left| r^2 + \left(\frac{d}{2} \right)^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}) \right|^{-\frac{3}{2}}$$

De forma análoga tenemos:

$$\frac{1}{R_2^3} = \left| r^2 + \left(\frac{d}{2} \right)^2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}) \right|^{-\frac{3}{2}}$$

Como estamos considerando puntos P que verifican $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{d}|$ entonces el término $\left(\frac{d}{2} \right)^2$ es despreciable frente a r^2 y por tanto:

$$R_1^{-3} = \left| r^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}) \right|^{-\frac{3}{2}} = r^{-3} \left| 1 - \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} \right) \right|^{-\frac{3}{2}} \quad \text{y} \quad R_2^{-3} = r^{-3} \left| 1 + \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} \right) \right|^{-\frac{3}{2}}$$

Aplicando el T^a del Binomio: $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 + \dots$ (si $|x| \ll 1$), por tanto:

$$R_1^{-3} = r^{-3} \left(1 + \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{2r^2} \right) \quad \text{y} \quad R_2^{-3} = r^{-3} \left(1 - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{2r^2} \right)$$

De donde el campo en P será:

$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{p} \right]$$

Dipolo Eléctrico

Campo eléctrico creado por un dipolo (a través de la función potencial)

Veamos otra forma de expresar el campo creado por un dipolo eléctrico, utilizando el hecho de que el campo \mathbf{E} es un campo conservativo, las cargas del dipolo se encuentran estáticas, y por tanto su rotacional es nulo ($\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$), de donde se deduce la existencia de una función escalar $V(\mathbf{r})$ (potencial) cuyo gradiente verifica: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$

El potencial creado por un dipolo en un punto P vimos que venía expresado en la forma:

$$V_P(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{pr \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = f(r, \theta)$$

Utilizando coordenadas esféricas para nuestros cálculos, tomando como base ortonormal de vectores $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$ y el operador diferencial nabla (∇) expresado en dicha base como: $(\nabla) = \hat{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)$ El campo en P será:

$$\mathbf{E}_P(r, \theta, \phi) = -\nabla V(r, \theta, \phi) = -\hat{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial V(r, \theta, \phi)}{\partial r} \right) - \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \left(\frac{\partial V(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} \right) - \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial V(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} \right)$$

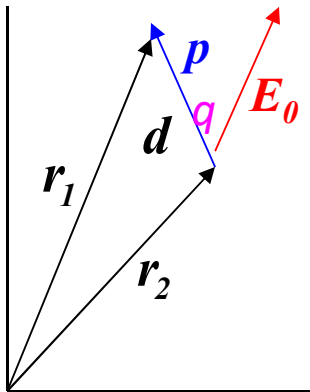
Como $V \neq V(\phi) \Rightarrow \left(\frac{\partial V(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} \right) = 0 \Rightarrow E_\phi = 0$, y nos queda:

$$\mathbf{E}_P(r, \theta, \phi) = \mathbf{E}_P(r, \theta) = E_r \hat{\mathbf{r}} + E_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial \left(\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)}{\partial r} - \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \frac{\partial \left(\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)}{\partial \theta} \Rightarrow \mathbf{E}_P(r, \theta, \phi) = \left(\frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Energía de un dipolo:

Veamos cual es la energía de un dipolo sometido a un campo externo E_0 :

La presencia de un campo externo E_0 se traduce en la existencia de una función potencial V extrínseca al sistema de cargas.



La energía potencial del sistema de cargas viene dada por:

$$W_D = qV(r_1) - qV(r_2) = qV(r_2 + d) - qV(r_2) = q(V(r_2 + d) - V(r_2))$$

Si el módulo de d es muy pequeño entonces se verifica:

$$dV = V(r_2 + d) - V(r_2) = d \cdot \nabla V(r)$$

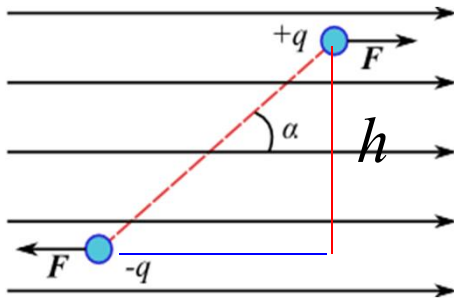
De donde:

$$W_D = q(V(r_2 + d) - V(r_2)) = qd \cdot \nabla V(r) = p \cdot \nabla V(r) = -p \cdot E_0$$

La energía es función del ángulo que forma el dipolo con el campo externo, siendo su rango de variación de $+pE_0$ cuando $\theta = \pi$ (energía potencial máxima) y $-pE_0$ cuando $\theta = 0$ (energía potencial mínima) en esta última posición el dipolo encuentra su equilibrio estable y su dirección y sentido coinciden con el del campo E_0 .

Par de Fuerzas sobre un dipolo:

La presencia de un campo externo E_0 produce una fuerza sobre cada una de las cargas del dipolo, en sentidos opuestos, generando un par de fuerzas que provocará, en ausencia de en ausencia de ligaduras que impidan el giro del dipolo, que este tienda a situarse en la dirección del campo externo.



Tomando como origen de momentos de fuerzas la carga negativa, el torque producido es: T , siendo su valor:

$$T = Fh = qE_0h = qE_0d\sin\theta$$

Expresando el torque en forma vectorial: $T = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_0$

Este par de fuerzas hace que el dipolo gire en el sentido de orientarse en la dirección del campo.

En $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ el par es nulo, y se corresponde con las posiciones de equilibrio del dipolo, en $\theta = 0$ el equilibrio es estable y por tanto la energía potencial del dipolo es mínima, y en $\theta = \pi$ el equilibrio es inestable y se corresponde con un máximo de energía.

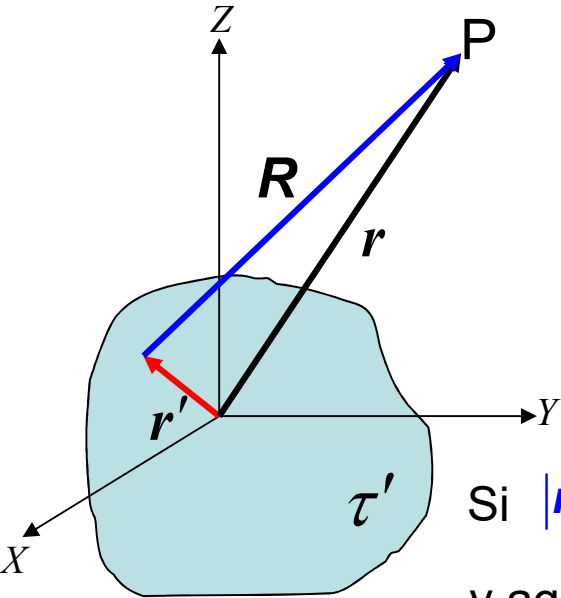
El valor del par es máximo para $\theta = \pi/2$, cuando el dipolo se encuentra orientado en la dirección perpendicular al campo.

Desarrollo multipolar del potencial

Sea un cuerpo cargado en una región del espacio τ' y $\rho(\mathbf{r}')$ su densidad volumétrica de carga

El potencial eléctrico en el punto P creado por la distribución de carga es

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{R}|} d\tau'$$



Si $|\mathbf{r}| \gg \max_{\mathbf{r}' \in V} |\mathbf{r}'|$, desarrollando $\frac{1}{|\mathbf{R}|}$ en serie de potencias y agrupando los términos en potencias del mismo grado de $1/r$ obtenemos:

$$|\mathbf{R}|^{-1} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \approx \left[\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^5} - \frac{(r')^2}{r^3} \right) + \frac{1}{r} O\left(\frac{(r')^3}{(r)^3} \right) \right]$$

Desarrollo multipolar del potencial

El potencial en el punto P es: $V(\mathbf{r}) = V_M(\mathbf{r}) + V_D(\mathbf{r}) + V_Q(\mathbf{r})$

Término monopolar del potencial

$$V_M(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_V \rho(\mathbf{r}') d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

- Término dominante del desarrollo multipolar. $V_M(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{r}$
- Representa el potencial creado por una carga puntual situada en el origen de coordenadas igual a la carga total del cuerpo.
- Se denomina **momento monopolar** a $Q = \int_V \rho(\mathbf{r}') d\tau'$
- El momento monopolar es independiente de la elección del origen de coordenadas

Desarrollo multipolar del potencial

Término dipolar del potencial

$$V_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3}$$

- Término dominante del desarrollo multipolar cuando $Q = 0$. $\left(V_D(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{r^2} \right)$
- Representa el potencial creado por un dipolo situado en el origen de coordenadas de momento dipolar \mathbf{p}
- Se denomina **momento dipolar**:

- Para cargas puntuales: $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}'_i$
- Para distribuciones continuas: $\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau'$

- El momento dipolar depende exclusivamente de la distribución relativa de las cargas en V .

- El momento dipolar no depende de la elección del origen de coordenadas si

$$Q = 0. \quad (\mathbf{p}_{o'} = \mathbf{p}_o - Q \overrightarrow{OO'})$$

Desarrollo multipolar del potencial

Término cuadripolar del potencial

$$\begin{aligned} V_Q(\mathbf{r}) &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5} \int_V \rho(\mathbf{r}') \left[3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - (r')^2 r^2 \right] d\tau' = \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5} \sum_j \sum_k x_j \left(\int_V \rho(\mathbf{r}') \left[3x'_j x'_k - \delta_{jk} (r')^2 \right] d\tau' \right) x_k = \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5} \sum_j \sum_k x_j Q_{jk} x_k = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5} \mathbf{r}^t Q_{jk} \mathbf{r} \end{aligned}$$

Llamamos tensor **momento cuadripolar**:

$$Q_{jk} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix}$$

Propiedades del momento cuadripolar

- $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$
- $Q_{jk} = Q_{kj} \quad (j \neq k)$
- Si existe un eje de revolución respecto al cual sea simétrica la carga, tomando ese eje como eje Z, entonces $Q_{jk} \propto Q_{zz}$
- El momento cuadripolar no depende del origen de coordenadas cuando los momentos monopolar y dipolar son nulos.

Características del Tensor Cuadripolar

$$Q_{jk} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix}$$

- $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$
- $Q_{jk} = Q_{kj} \quad (j \neq k)$



Cinco términos independientes

Simetrías : A mayor simetría de la distribución de cargas, menor número de términos independientes en el tensor Q_{jk} .

Si las cargas se encuentran distribuidas en un plano (XZ) entonces $y=0$:

- $Q_{yk} = Q_{ky} = 0 \quad (k = x, z)$
- $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$



$$Q_{jk} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & 0 & Q_{xz} \\ 0 & Q_{yy} & 0 \\ Q_{xz} & 0 & Q_{zz} \end{pmatrix}$$

Tres términos independientes

Simetría axial respecto a un eje (z):

- $Q_{jk} = Q_{kj} = 0 \quad (j \neq k)$
- $Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q_{zz}$



$$Q_{jk} = -\frac{1}{2}Q_{zz} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

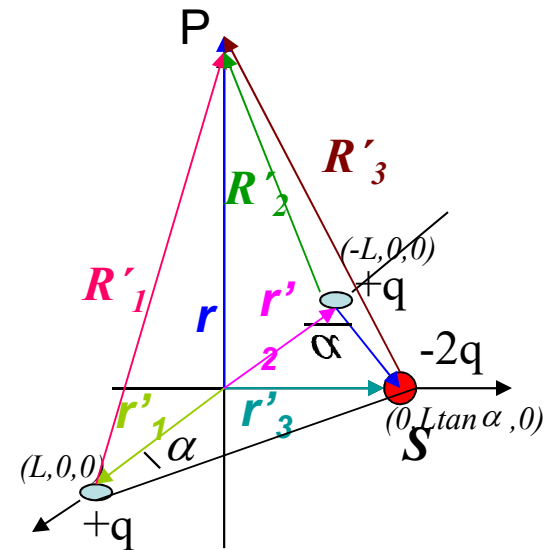
Un término independiente

Desarrollo multipolar del potencial

DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE CARGA	DISTRIBUCIÓN DISCRETA DE CARGA
$Q_{xx} = \int_V \rho(\mathbf{r}') (2x'^2 - y'^2 - z'^2) d\tau'$	$Q_{xx} = \sum_i q_i (2x_i'^2 - y_i'^2 - z_i'^2)$
$Q_{yy} = \int_V \rho(\mathbf{r}') (2y'^2 - x'^2 - z'^2) d\tau'$	$Q_{yy} = \sum_i q_i (2y_i'^2 - x_i'^2 - z_i'^2)$
$Q_{zz} = \int_V \rho(\mathbf{r}') (2z'^2 - x'^2 - y'^2) d\tau'$	$Q_{zz} = \sum_i q_i (2z_i'^2 - x_i'^2 - y_i'^2)$
$Q_{xy} = 3 \int_V \rho(\mathbf{r}') x' y' d\tau'$	$Q_{xy} = 3 \sum_i q_i x_i' y_i'$
$Q_{xz} = 3 \int_V \rho(\mathbf{r}') x' z' d\tau'$	$Q_{xz} = 3 \sum_i q_i x_i' z_i'$
$Q_{yz} = 3 \int_V \rho(\mathbf{r}') y' z' d\tau'$	$Q_{yz} = 3 \sum_i q_i y_i' z_i'$

En distribuciones lineales y superficiales de carga, se sustituirá $\rho(\mathbf{r}')$ por $\lambda(\mathbf{r}')$ o $\sigma(\mathbf{r}')$ y el diferencial de volumen $d\tau'$ por ds' o da' respectivamente.

Ejercicio 1: Dada la distribución de carga indicada en la figura, donde $q_1 = q_2 = q$ y $q_3 = -2q$ y la distancia entre la cargas positivas es $2L$, siendo α el ángulo que forma con el eje OX el vector posición relativa de cada una de éstas con la carga negativa. Determinar los momentos monopolar, dipolar y cuadripolar y comprobar que en $P(0,0,z)$, es el término cuadripolar el representativo del potencial, mientras que en $S(0,y,0)$ lo es el término dipolar..



1) **Momento monopolar :**

$$Q = \sum_{i=1}^3 q_i = +q + q - 2q = 0$$

Término monopolar:

$$V_M(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = 0$$

2) **Momento dipolar :**

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \sum_{i=1}^3 q_i \mathbf{r}'_i = +q\mathbf{r}'_1 + q\mathbf{r}'_2 - 2q\mathbf{r}'_3 = q(L, 0, 0) + q(-L, 0, 0) - 2q(0, D, 0) = \\ &= -2q(0, D, 0) = -2qL \tan \alpha \mathbf{j} \end{aligned}$$

Término dipolar del potencial:

$$V_D(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{(0, -2qL \tan \alpha, 0)(x, y, z)}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2qLy \tan \alpha}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3) **Momento cuadripolar :**

$$Q_{jk} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}'_1 = (L, 0, 0) \quad \mathbf{r}'_2 = (-L, 0, 0) \quad \mathbf{r}'_3 = (0, D, 0) = (0, L \tan \alpha, 0)$$

$$Q_{xx} = \sum_i q_i (2x_i'^2 - y_i'^2 - z_i'^2) = q(2L^2) + q(2L^2) - 2q(-L^2 \tan^2 \alpha) = 2qL^2 (2 + \tan^2 \alpha)$$

$$Q_{yy} = \sum_i q_i (2y_i'^2 - x_i'^2 - z_i'^2) = q(-L^2) + q(-L^2) - 2q(2L^2 \tan^2 \alpha) = -2qL^2 (1 + 2 \tan^2 \alpha)$$

$$Q_{zz} = \sum_i q_i (2z_i'^2 - x_i'^2 - y_i'^2) = q(-L^2) + q(-L^2) - 2q(-L^2 \tan^2 \alpha) = -2qL^2 (1 - \tan^2 \alpha)$$

Ejercicio 1 (Continuación)

3) *Momento cuadrupolar :*

$$Q_{jk} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix} \quad r'_1 = (L, 0, 0) \quad r'_2 = (-L, 0, 0) \quad r'_3 = (0, D, 0) = (0, L \tan \alpha, 0)$$

$$Q_{xy} = 3 \sum_{i=1}^3 q_i x'_i y'_i = q(0) + q(0) - 2q(0) = 0 = Q_{yx}$$

$$Q_{xz} = 3 \sum_{i=1}^3 q_i x'_i z'_i = q(0) + q(0) - 2q(0) = 0 = Q_{zx}$$

$$Q_{yz} = 3 \sum_{i=1}^3 q_i y'_i z'_i = q(0) + q(0) - 2q(0) = 0 = Q_{zy}$$

$$Q_{jk} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix} = 2qL^2 \begin{pmatrix} 2 + \tan^2 \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 - 2 \tan^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 + \tan^2 \alpha \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1 (Continuación)

4) Cálculo exacto del potencial en P(0,0,z):

$$\begin{aligned} V_P(\mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^3 \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{L^2 + z^2}} + \frac{q}{\sqrt{L^2 + z^2}} + \frac{-2q}{\sqrt{L^2 \tan^2 \alpha + z^2}} \right) = \\ &= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{L^2 + z^2} \sqrt{L^2 \tan^2 \alpha + z^2}} \left(\sqrt{L^2 \tan^2 \alpha + z^2} - \sqrt{L^2 + z^2} \right) \end{aligned}$$

Siendo:

$$R_1 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1| = |(0, 0, z) - (L, 0, 0)| = |(-L, 0, z)| = \sqrt{L^2 + z^2}$$

$$R_2 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2| = |(0, 0, z) - (-L, 0, 0)| = |(L, 0, z)| = \sqrt{L^2 + z^2}$$

$$R_3 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_3| = |(0, 0, z) - (0, D, 0)| = |(0, -D, z)| = \sqrt{D^2 + z^2} = \sqrt{L^2 \tan^2 \alpha + z^2}$$

Término dipolar del potencial en P(0,0,z):

Hemos visto que:

$$V_D(\mathbf{r}) = - \frac{2qLy \tan \alpha}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} ; \text{ en nuestro caso } \mathbf{r} = (0, 0, z) \text{ y por tanto:}$$

$$V_D(0, 0, z) = 0, \text{ el termino dipolar no tiene influencia para puntos situados en el eje OY}$$

Ejercicio 1 (Continuación)

Término cuadripolar del potencial en P(0,0,z):

$$\begin{aligned} V_Q(0,0,z) &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5} \mathbf{r}^t Q_{jk} \mathbf{r} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5} (x, y, z) 2qL^2 \begin{pmatrix} 2 + \tan^2 \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 - 2 \tan^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 + \tan^2 \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \\ &= \frac{qL^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} (0,0,z) \begin{pmatrix} 2 + \tan^2 \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 - 2 \tan^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 + \tan^2 \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \frac{qL^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} (0,0,z(-1 + \tan^2 \alpha)) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \\ &= \frac{qL^2 z^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} (-1 + \tan^2 \alpha) = \frac{qL^2}{4\pi\epsilon_0 z^3} (-1 + \tan^2 \alpha) \end{aligned}$$

Cuando hacemos que (L/z) tienda a cero entonces, el valor del potencial coincidiría con el Término cuadripolar del potencial, como veremos a continuación:

Ejercicio 1 (Continuación)

Para puntos r muy alejados tal que $z \gg L$ podemos encontrar una solución aproximada del potencial real:

$$\begin{aligned}
 V_P(\mathbf{r}) &= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{L^2+z^2}\sqrt{L^2\tan^2\alpha+z^2}}\left(\sqrt{L^2\tan^2\alpha+z^2}-\sqrt{L^2+z^2}\right) = \frac{2q\left(\sqrt{L^2\tan^2\alpha+z^2}-\sqrt{L^2+z^2}\right)\left(\sqrt{L^2\tan^2\alpha+z^2}+\sqrt{L^2+z^2}\right)}{4\pi\epsilon_0\sqrt{L^2+z^2}\sqrt{L^2\tan^2\alpha+z^2}\left(\sqrt{L^2\tan^2\alpha+z^2}+\sqrt{L^2+z^2}\right)} = \\
 &= \frac{2q\left(L^2\tan^2\alpha+z^2-\left(L^2+z^2\right)\right)}{4\pi\epsilon_0\sqrt{L^2+z^2}\sqrt{L^2\tan^2\alpha+z^2}\left(\sqrt{L^2\tan^2\alpha+z^2}+\sqrt{L^2+z^2}\right)} = \frac{2q\left(L^2\tan^2\alpha-L^2\right)}{4\pi\epsilon_0\sqrt{L^2+z^2}\sqrt{L^2\tan^2\alpha+z^2}\left(\sqrt{L^2\tan^2\alpha+z^2}+\sqrt{L^2+z^2}\right)} = \\
 &= \frac{2qL^2\left(\tan^2\alpha-1\right)}{4\pi\epsilon_0\sqrt{L^2+z^2}\sqrt{L^2\tan^2\alpha+z^2}\left(\sqrt{L^2\tan^2\alpha+z^2}+\sqrt{L^2+z^2}\right)} = \frac{2qL^2\left(\tan^2\alpha-1\right)}{4\pi\epsilon_0\sqrt{L^2+z^2}\left(L^2\tan^2\alpha+z^2\right)+\left(L^2+z^2\right)\sqrt{L^2\tan^2\alpha+z^2}} \quad \square \\
 &\square \frac{2qL^2\left(-1+\tan^2\alpha\right)}{4\pi\epsilon_0z^3\left(\sqrt{\left(\frac{L}{z}\right)^2+1}\left(\left(\frac{L}{z}\right)^2\tan^2\alpha+1\right)+\left[\left(\frac{L}{z}\right)^2+1\right]\sqrt{\left(\frac{L}{z}\right)^2\tan^2\alpha+1}\right)} = \\
 &= \frac{2qL^2\left(-1+\tan^2\alpha\right)}{4\pi\epsilon_0z^3\left(\sqrt{\left(\frac{L}{z}\right)^2+1}\left(\left(\frac{L}{z}\right)^2\tan^2\alpha+1\right)+\left[\left(\frac{L}{z}\right)^2+1\right]\sqrt{\left(\frac{L}{z}\right)^2\tan^2\alpha+1}\right)} \quad \square \\
 &\square \frac{2V_Q(r)}{\left(\sqrt{0+1}\left(\left(\frac{L}{z}\right)^2\tan^2\alpha+1\right)+[0+1]\sqrt{\left(\frac{L}{z}\right)^2+1}\right)} = \frac{2V_Q(r)}{\left(\left(\frac{L}{z}\right)^2\tan^2\alpha+1\right)+\sqrt{\left(\frac{L}{z}\right)^2\tan^2\alpha+1}}
 \end{aligned}$$

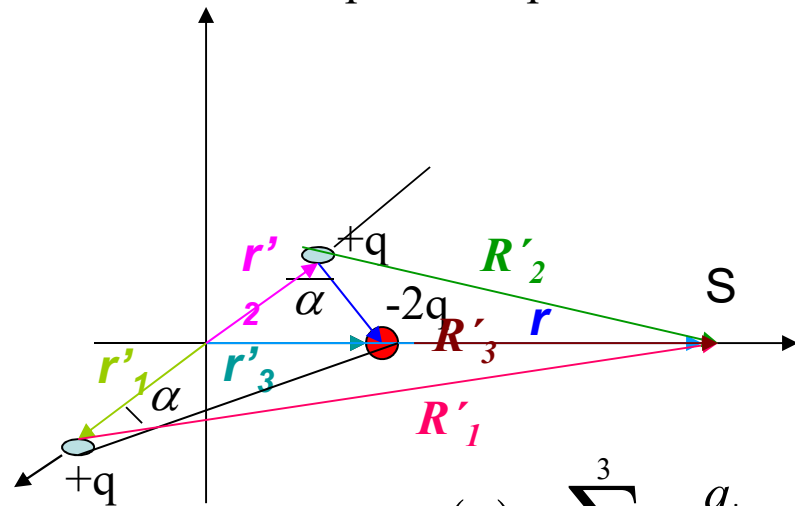
Ejercicio 1 (Continuación)

Cuando hacemos que (L/z) tienda a cero entonces, el valor del potencial coincidiría con el Término cuadripolar del potencial, como veremos a continuación:

$$V_P(\mathbf{r}) = \frac{2V_Q(\mathbf{r} = \mathbf{r}_p)}{\left[\left(\left(\frac{L}{z} \right)^2 \tan^2 \alpha + 1 \right) + \sqrt{\left(\frac{L}{z} \right)^2 \tan^2 \alpha + 1} \right]} \approx \frac{2V_Q(\mathbf{r} = \mathbf{r}_p)}{[1 + \sqrt{1}]} = V_Q(\mathbf{r} = \mathbf{r}_p)$$

Ejercicio 1 (Continuación)

5) Determinación del potencial en el punto campo $S(0,y,0)$ y comparación con el término dipolar del potencial



Cálculo exacto del potencial en $S(0,y,0)$:

$$V_S(r) = \sum_{i=1}^3 \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{L^2 + y^2}} + \frac{q}{\sqrt{L^2 + y^2}} + \frac{-2q}{y - L \tan \alpha} \right) =$$

$$= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 \left(\sqrt{L^2 + y^2} \right) (y - L \tan \alpha)} \left(y - L \tan \alpha - \sqrt{L^2 + y^2} \right)$$

Siendo:

$$R_1 = |r - r'_1| = |(0, y, 0) - (L, 0, 0)| = |(-L, y, 0)| = \sqrt{L^2 + y^2}$$

$$R_2 = |r - r'_2| = |(0, y, 0) - (-L, 0, 0)| = |(L, y, 0)| = \sqrt{L^2 + y^2}$$

$$R_3 = |r - r'_3| = |(0, y, 0) - (0, D, 0)| = |(0, y - D, 0)| = y - L \tan \alpha$$

Ejercicio 1 (Continuación)

Término dipolar del potencial en S(0,y,0):

$$\begin{aligned} V_D(\mathbf{r} = \mathbf{r}_s) &= \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{(0, -2qL \tan \alpha, 0)(0, y, 0)}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \\ &= -\frac{2qLy \tan \alpha}{4\pi\epsilon_0 y^3} = -\frac{2qL \tan \alpha}{4\pi\epsilon_0 y^2} \end{aligned}$$

Cuando hacemos que (L/y) tienda a cero entonces, el valor del potencial coincidiría con el Término dipolar del potencial, como veremos a continuación:

Ejercicio 1 (Continuación)

Para ver que ocurre cuando (L/y) tienda a cero vamos a desarrollar el potencial real y lo vamos a expresar en términos de (L/y) , de forma que sólo tengamos que sustituir esta expresión por cero para observar que el valor del potencial tendería a coincidir con el Término dipolar del potencial,

$$V_s(\mathbf{r}) = \frac{2q \left((y - L \tan \alpha) - \sqrt{L^2 + y^2} \right)}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{L^2 + y^2} (y - L \tan \alpha)} = \frac{2q \left((y - L \tan \alpha)^2 - y^2 \right)}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{L^2 + y^2} (y - L \tan \alpha)} = \text{(multiplicando por el conjugado de$$

la expresion entre parentesis del numerador a la fraccion nos queda):

$$\begin{aligned} &= \frac{2q(y^2 - 2yL \tan \alpha + L^2 \tan^2 \alpha - y^2)}{4\pi\epsilon_0 \left(\sqrt{L^2 + y^2} (y - L \tan \alpha)^2 + (L^2 + y^2)(y - L \tan \alpha) \right)} = \\ &= \frac{2qL(-2y \tan \alpha + L \tan^2 \alpha)}{4\pi\epsilon_0 \left(y \left(\sqrt{\left(\frac{L}{y} \right)^2 + 1} \right) (y^2 - 2yL \tan \alpha + L^2 \tan^2 \alpha) + (y^2)(y - L \tan \alpha) \right)} = \\ &= \frac{2qL(-2 \tan \alpha + \frac{L}{y} \tan^2 \alpha)}{\frac{4\pi\epsilon_0}{y} \left(y(y^2 - 2yL \tan \alpha + L^2 \tan^2 \alpha) + (y^2)(y - L \tan \alpha) \right)} = \frac{2qL(-2 \tan \alpha + \frac{L}{y} \tan^2 \alpha)}{4\pi\epsilon_0 \left((y^2 - 2yL \tan \alpha + L^2 \tan^2 \alpha) + (y)(y - L \tan \alpha) \right)} = \\ &= \frac{2qL(-2 \tan \alpha + \frac{L}{y} \tan^2 \alpha)}{4\pi\epsilon_0 y^2 \left(\left(1 - 2 \frac{L}{y} \tan \alpha + \frac{L}{y} L \tan^2 \alpha \right) + \left(1 - \frac{L}{y} \tan \alpha \right) \right)} \end{aligned}$$

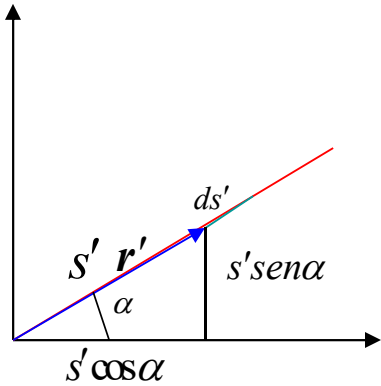
Ejercicio 1 (Continuación)

Si el punto campo se encuentra muy alejado, es decir y toma un valor muy grande, entonces (L/y) tiende a cero y la expresión anterior quedará:

$$V_S(\mathbf{r}) = \frac{2qL(-2 \tan \alpha + \frac{L}{y} \tan^2 \alpha)}{4\pi\epsilon_0 y^2 \left((1 - 2 \frac{L}{y} \tan \alpha + \frac{L}{y} L \tan^2 \alpha) + (1 - \frac{L}{y} \tan \alpha) \right)} \square \frac{-2qL(2 \tan \alpha)}{4\pi\epsilon_0 y^2 ((1 + (1)))} = \frac{-2qL(\tan \alpha)}{4\pi\epsilon_0 y^2} = V_D(\mathbf{r} = \mathbf{r}_s)$$

como queríamos demostrar. En este caso el término significativo del potencial para puntos del eje OY suficientemente alejados sería el término dipolar.

Ejercicio 2: Una carga lineal de densidad lineal λ , constante, de longitud L , está sobre el primer cuadrante del plano XY con uno de sus extremos en el origen. Forma un ángulo α con el eje X positivo. Encontrar los momentos monopolar, dipolar y cuadripolar del potencial. Expresar el término cuadripolar del potencial debido a esta distribución de cargas en función de las coordenadas rectangulares del punto de campo.



$$\mathbf{r}' = s' \cos \alpha \mathbf{i} + s' \sin \alpha \mathbf{j}$$

1) **Momento monopolar :**

$$Q = \int_L \lambda ds' = \lambda \int_L ds' = \lambda L$$

2) **Momento dipolar :**

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_L \lambda \mathbf{r}' ds' = \lambda \int_L (s' \cos \alpha \mathbf{i} + s' \sin \alpha \mathbf{j}) ds' = \lambda \left[\int_L s' \cos \alpha ds' \mathbf{i} + \int_L s' \sin \alpha ds' \mathbf{j} \right] = \lambda \left[\left(\frac{\cos \alpha L^2}{2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\sin \alpha L^2}{2} \right) \mathbf{j} \right] = \\ &= \frac{\lambda L^2}{2} [\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}] \end{aligned}$$

3) **Momento cuadripolar :**

$$Q_{jk} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \int_L \lambda (2x'^2 - y'^2 - z'^2) ds' = \lambda \left[\int_L 2(s' \cos \alpha)^2 ds' - \int_L (s' \sin \alpha)^2 ds' \right] = \lambda \left[\left(\frac{\cos^2 \alpha L^3}{3} \right) + \left(\frac{\sin^2 \alpha L^3}{3} \right) \right] = \\ &= \frac{\lambda L^3}{3} [2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha] = \frac{\lambda L^3}{3} (3 \cos^2 \alpha - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{yy} &= \int_L \lambda (2y'^2 - x'^2 - z'^2) ds' = \lambda \left[\int_L 2(s' \sin \alpha)^2 ds' - \int_L (s' \cos \alpha)^2 ds' \right] = \lambda \left[\left(\frac{\sin^2 \alpha L^3}{3} \right) + \left(\frac{\cos^2 \alpha L^3}{3} \right) \right] = \\ &= \frac{\lambda L^3}{3} [2 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha] = \frac{\lambda L^3}{3} (3 \sin^2 \alpha - 1) \end{aligned}$$

Ejercicio 2: (Continuación)

3) *Momento cuadripolar:*

$$\begin{aligned} Q_{zz} &= \int_L \lambda(2z'^2 - x'^2 - y'^2) ds' = \lambda \left[\int_L -(s' \cos \alpha)^2 ds' - \int_L (s' \operatorname{sen} \alpha)^2 ds' \right] = -\lambda \left[\left(\frac{\cos^2 \alpha L^3}{3} \right) + \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha L^3}{3} \right) \right] = \\ &= -\frac{\lambda L^3}{3} [\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha] = -\frac{\lambda L^3}{3} \end{aligned}$$

Comprobemos que: $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$

$$\frac{\lambda L^3}{3} (3 \cos^2 \alpha - 1) + \frac{\lambda L^3}{3} (3 \operatorname{sen}^2 \alpha - 1) - \frac{\lambda L^3}{3} = \frac{\lambda L^3}{3} (3 \cos^2 \alpha + 3 \operatorname{sen}^2 \alpha - 2 - 1) = \frac{\lambda L^3}{3} (3 - 3) = 0$$

$$\begin{aligned} Q_{xy} &= 3 \int_L \lambda x' y' ds' = 3 \lambda \int_L (s' \cos \alpha) (s' \operatorname{sen} \alpha) ds' = 3 \lambda \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \int_L s'^2 ds' = \frac{3 \lambda \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha L^3}{3} \\ &= \lambda \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha L^3 = Q_{yx} \end{aligned}$$

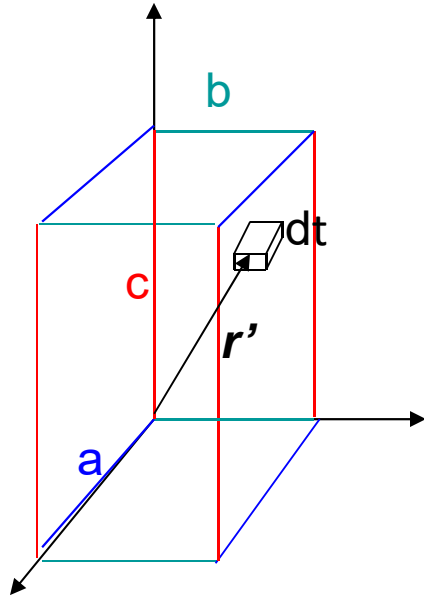
$$Q_{xz} = 3 \int_L \lambda x' z' ds' = 0 = Q_{zx}$$

Ejercicio 2: (Continuación)

Término Cuadripolar del potencial:

$$\begin{aligned} V_Q(\mathbf{r}) &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5} \mathbf{r}^t Q_{jk} \mathbf{r} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5} (x, y, z) \frac{\lambda L^3}{3} \begin{pmatrix} 3\cos^2 \alpha - 1 & 3\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 3\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha & 3\operatorname{sen}^2 \alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \\ & \frac{\lambda L^3}{24\pi\epsilon_0 r^5} \left[(3\cos^2 \alpha - 1)x + 3\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha y, 3\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha x + (3\cos^2 \alpha - 1)y, -z \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \\ & \frac{\lambda L^3}{24\pi\epsilon_0 r^5} \left[(3\cos^2 \alpha - 1)x^2 + 3\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha xy + 3\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha xy + (3\cos^2 \alpha - 1)y^2 - z^2 \right] = \\ & \frac{\lambda L^3}{24\pi\epsilon_0 r^5} \left[(3\cos^2 \alpha)x^2 + 6\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha xy + (3\cos^2 \alpha)y^2 - x^2 - y^2 - z^2 \right] = \frac{\lambda L^3}{24\pi\epsilon_0 r^5} \left[3(\cos \alpha x + \operatorname{sen} \alpha y)^2 - r^2 \right] \end{aligned}$$

Ejercicio 3: Una carga Q se encuentra distribuida con densidad volumétrica ρ , constante, en todo el volumen V del paralelepípedo de lados a, b, c de la figura. Encontrar los momentos monopolar, dipolar y cuadripolar del potencial. Expresar el término cuadripolar del potencial debido a esta distribución de cargas en función de las coordenadas esféricas del punto de campo.



1) **Momento monopolar :**

$$Q = \int_V \rho d\tau' = \rho \int_V d\tau' = \rho abc$$

2) **Momento dipolar :**

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_V \rho \mathbf{r}' d\tau' = \rho \int_V (x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}) dx' dy' dz' = \rho \left[\int_V x' dx' dy' dz' \mathbf{i} + \int_V y' dx' dy' dz' \mathbf{j} + \int_V z' dx' dy' dz' \mathbf{k} \right] = \\ &= \rho \left[\int_0^a x' dx' \int_0^b dy' \int_0^c dz' \mathbf{i} + \int_0^a dx' \int_0^b y' dy' \int_0^c dz' \mathbf{j} + \int_0^a dx' \int_0^b dy' \int_0^c z' dz' \mathbf{k} \right] = \rho \left(\frac{a^2 bc}{2} \mathbf{i} + \frac{ab^2 c}{2} \mathbf{j} + \frac{abc^2}{2} \mathbf{k} \right) = \\ &= \rho \frac{abc}{2} (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \end{aligned}$$

Vemos que el momento dipolar es igual al producto de la carga Q por la posición del centro del paralelepípedo

3) **Momento cuadripolar :**

$$Q_{jk} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 (Continuación)

3) *Momento cuadripolar :*

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \int_V \rho (2x'^2 - y'^2 - z'^2) d\tau' = \rho \left(\int_0^a 2x'^2 dx' \int_0^b dy' \int_0^c dz' - \int_0^a dx' \int_0^b y'^2 dy' \int_0^c dz' - \int_0^a dx' \int_0^b dy' \int_0^c z'^2 dz' \right) = \\ &= \rho \left(\frac{2a^3 bc}{3} - \frac{ab^3 c}{3} - \frac{abc^3}{3} \right) = \frac{\rho abc}{3} (2a^2 - b^2 - c^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{yy} &= \int_V \rho (2y'^2 - x'^2 - z'^2) d\tau' = \rho \left(\int_0^a dx' \int_0^b 2y'^2 dy' \int_0^c dz' - \int_0^a x'^2 dx' \int_0^b dy' \int_0^c dz' - \int_0^a dx' \int_0^b dy' \int_0^c z'^2 dz' \right) = \\ &= \rho \left(\frac{2ab^3 c}{3} - \frac{a^3 bc}{3} - \frac{abc^3}{3} \right) = \frac{\rho abc}{3} (2b^2 - a^2 - c^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{zz} &= \int_V \rho (2z'^2 - x'^2 - y'^2) d\tau' = \rho \left(\int_0^a dx' \int_0^b dy' \int_0^c 2z'^2 dz' - \int_0^a x'^2 dx' \int_0^b dy' \int_0^c dz' - \int_0^a dx' \int_0^b y'^2 dy' \int_0^c dz' \right) = \\ &= \rho \left(\frac{2abc^3}{3} - \frac{a^3 bc}{3} - \frac{ab^3 c}{3} \right) = \frac{\rho abc}{3} (2c^2 - a^2 - b^2) \end{aligned}$$

Comprobemos que : $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$

$$\frac{\rho abc}{3} (2a^2 - b^2 - c^2) + \frac{\rho abc}{3} (2b^2 - a^2 - c^2) + \frac{\rho abc}{3} (2c^2 - a^2 - b^2) =$$

$$\frac{\rho abc}{3} (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - b^2 - c^2 - a^2 - c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

Ejercicio 3 (Continuación)

3) **Momento cuadripolar :**

$$Q_{xy} = 3 \int_V \rho x' y' d\tau' = 3\rho \int_0^a x' dx' \int_0^b y' dy' \int_0^c dz' = \frac{3\rho a^2 b^2 c}{4} = \frac{3Qab}{4} = Q_{yx}$$

$$Q_{xz} = 3 \int_V \rho x' z' d\tau' = 3\rho \int_0^a x' dx' \int_0^b dy' \int_0^c z' dz' = \frac{3\rho a^2 b c^2}{4} = \frac{3Qac}{4} = Q_{zx}$$

$$Q_{yz} = 3 \int_V \rho y' z' d\tau' = 3\rho \int_0^a dx' \int_0^b y' dy' \int_0^c z' dz' = \frac{3\rho a b^2 c^2}{4} = \frac{3Qbc}{4} = Q_{zy}$$

$$Q_{jk} = Q \begin{pmatrix} \frac{2a^2 - b^2 - c^2}{3} & \frac{3ab}{4} & \frac{3ac}{4} \\ \frac{3ab}{4} & \frac{2b^2 - a^2 - c^2}{3} & \frac{3bc}{4} \\ \frac{3ac}{4} & \frac{3bc}{4} & \frac{2c^2 - a^2 - b^2}{3} \end{pmatrix} ; \text{ siendo: } Q = \rho abc \text{ la carga total}$$

Ejercicio 3 (Continuación)

4) Término cuadripolar del potencial (en coordenadas esfericas) para un cubo de lado a

$$Q_{jk} = Q \begin{pmatrix} 0 & \frac{3a^2}{4} & \frac{3a^2}{4} \\ \frac{3a^2}{4} & 0 & \frac{3a^2}{4} \\ \frac{3a^2}{4} & \frac{3a^2}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

El termino cuadripolar del potencial en coordenadas esfericas es:

$$\begin{aligned} V_Q &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5} (r \sin\theta \sin\varphi, r \sin\theta \cos\varphi, r \cos\theta) \frac{3Qa^2}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \sin\theta \sin\varphi \\ r \sin\theta \cos\varphi \\ r \cos\theta \end{pmatrix} = \\ &= \frac{3Qa^2}{32\pi\epsilon_0 r^5} (r \sin\theta \cos\varphi + r \cos\theta, r \sin\theta \sin\varphi + r \cos\theta, r \sin\theta \sin\varphi + r \sin\theta \cos\varphi) \begin{pmatrix} r \sin\theta \sin\varphi \\ r \sin\theta \cos\varphi \\ r \cos\theta \end{pmatrix} = \\ &= \frac{3Qa^2}{32\pi\epsilon_0 r^5} \begin{pmatrix} r^2 \sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi + r^2 \sin\theta \cos\theta \sin\varphi + r^2 \sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi + r^2 \sin\theta \cos\theta \cos\varphi + \\ r^2 \sin\theta \cos\theta \sin\varphi + r^2 \sin\theta \cos\theta \cos\varphi \end{pmatrix} = \\ &= \frac{3Qa^2 r^2 \sin\theta}{32\pi\epsilon_0 r^5} (2 \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi + 2 \cos\theta \sin\varphi + 2 \cos\theta \cos\varphi) = \\ &= \frac{3Qa^2 r^2 \sin\theta}{16\pi\epsilon_0 r^5} (\sin\theta \sin\varphi \cos\varphi + \cos\theta (\sin\varphi + \cos\varphi)) \end{aligned}$$

Ejercicio 3.3: Consideramos una molécula en forma de hexágono regular como la indicada en la figura P3.3-a.

- 1) Calcular el momento dipolar de la molécula.
- 2) Sin modificar las distancias L entre los átomos, comprimimos la molécula en la dirección del eje X, de forma que el ángulo α cambie de 120° a $120^\circ - \theta$.

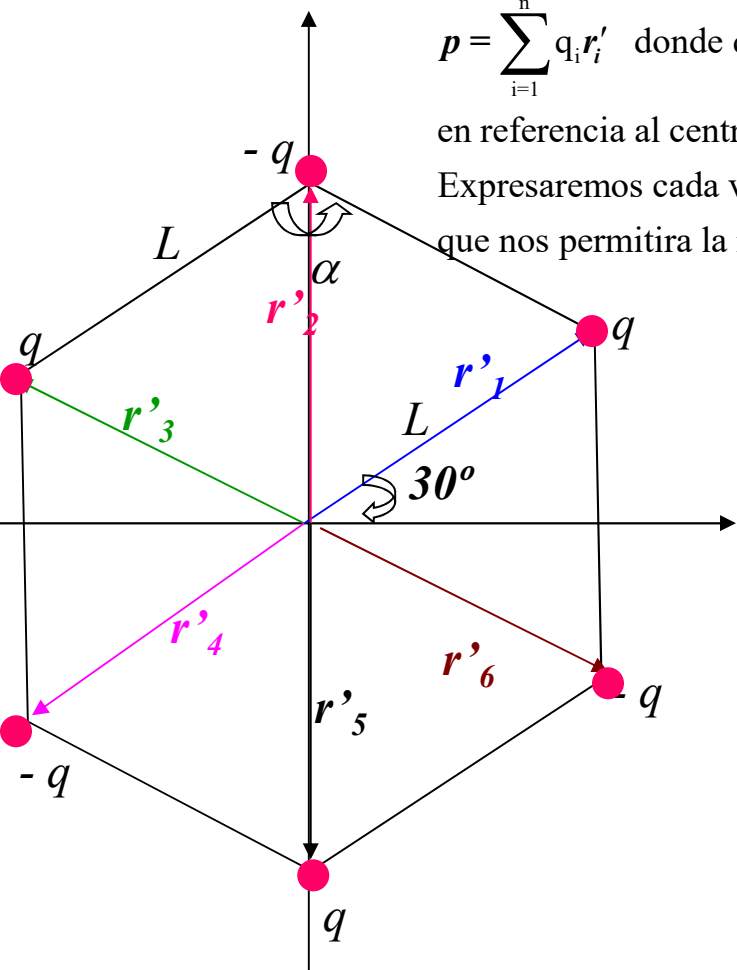
Calcular la variación del momento dipolar en función de θ .

1) Para calcular el momento dipolar de un sistema de n cargas puntuales se utiliza la expresión:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}'_i \quad \text{donde } q_i \text{ son las cargas del sistema y } \mathbf{r}'_i \text{ son los vectores posición de cada una de ellas}$$

en referencia al centro de coordenadas que hemos tomado, en este caso, en el centro del hexágono.

Expresaremos cada vector por sus componentes referidas a los ejes OX y OY y construiremos una tabla que nos permitira la resolución del ejercicio de una forma rapida y ordenada.



Cargas

Vector Posicion

$$q_1 = q$$

$$\mathbf{r}'_1 = (L \cos 30^\circ, L \sin 30^\circ)$$

$$q_2 = -q$$

$$\mathbf{r}'_2 = (0, L)$$

$$q_3 = q$$

$$\mathbf{r}'_3 = (-L \cos 30^\circ, L \sin 30^\circ)$$

$$q_4 = -q$$

$$\mathbf{r}'_4 = (-L \cos 30^\circ, -L \sin 30^\circ)$$

$$q_5 = q$$

$$\mathbf{r}'_5 = (0, -L)$$

$$q_6 = -q$$

$$\mathbf{r}'_6 = (L \cos 30^\circ, -L \sin 30^\circ)$$

Ejercicio 3.3 (Continuación)

Efectuando el sumatorio de terminos tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i &= q(L \cos 30, L \sin 30) - q(0, L) + q(-L \cos 30, L \sin 30) - q(-L \cos 30, -L \sin 30) \\ &\quad + q(0, -L) - q(L \cos 30, -L \sin 30) = \\ &= q(L \cos 30 - L \cos 30 + L \cos 30 - L \cos 30, L \sin 30 - L + L \sin 30 + L \sin 30 - L + L \sin 30) \\ &= q(0, 4L \sin 30 - 2L) = q(0, 0) = (0, 0) \end{aligned}$$

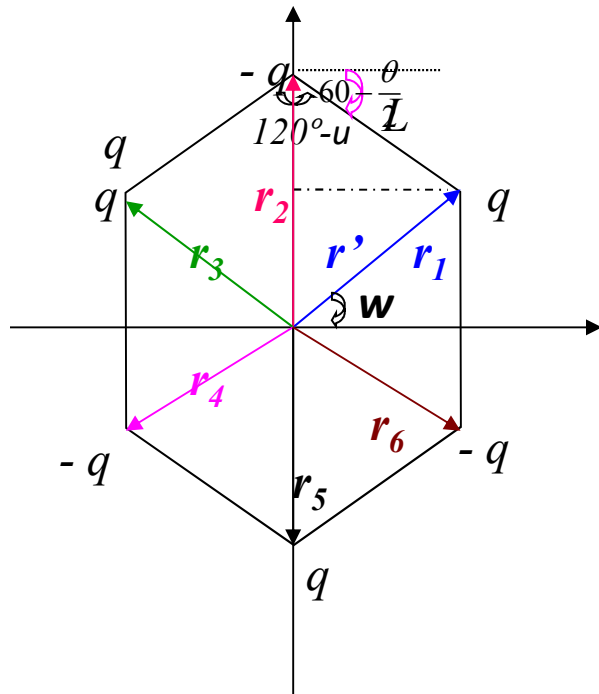
Vemos que el momento dipolar del sistema de cargas es nulo, debido a la simetria con la que estan dispuestas las cargas dentro del sistema.

Ejercicio 3.3 (Continuación)

2) Sin modificar las distancias L entre los átomos, comprimimos la molécula en la dirección del eje X , de forma que el ángulo α cambie de 120° a $120^\circ - \theta$.

Calcular la variación del momento angular en función de θ .

En este segundo caso, molécula deformada, considerando de nuevo el origen de coordenadas en el centro del hexágono y descomponiendo los vectores posición en sus componentes (x,y) nos queda la siguiente tabla:



Cargas

Vector Posicion

$$q_1 = q$$

$$r'_1 = (r' \cos \varphi, r' \sin \varphi)$$

$$q_2 = -q$$

$$r'_2 = \left(0, L \cos\left(60 - \frac{\theta}{2}\right) + r' \sin \varphi \right)$$

$$q_3 = q$$

$$r'_3 = (-r' \cos \varphi, r' \sin \varphi)$$

$$q_4 = -q$$

$$r'_4 = (-r' \cos \varphi, -r' \sin \varphi)$$

$$q_5 = q$$

$$r'_5 = \left(0, -L \cos\left(60 - \frac{\theta}{2}\right) - r' \sin \varphi \right)$$

$$q_6 = -q$$

$$r'_6 = (r' \cos \varphi, -r' \sin \varphi)$$

Ejercicio 3.3 (Continuación)

Efectuando el sumatorio de terminos tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i' = q(r' \cos \varphi, r' \operatorname{sen} \varphi) - q \left(0, L \cos(60 - \frac{\theta}{2}) + r' \operatorname{sen} \varphi \right) + q(-r' \cos \varphi, r' \operatorname{sen} \varphi) - q(-r' \cos \varphi, -r' \operatorname{sen} \varphi) \\ &\quad + q \left(0, -L \cos(60 - \frac{\theta}{2}) - r' \operatorname{sen} \varphi \right) - q(r' \cos \varphi, -r' \operatorname{sen} \varphi) = \\ &= q(r' \cos \varphi - r' \cos \varphi + r' \cos \varphi - r' \cos \varphi, r' \operatorname{sen} \varphi - L \cos(60 - \frac{\theta}{2}) - r' \operatorname{sen} \varphi + r' \operatorname{sen} \varphi + r' \operatorname{sen} \varphi - L \cos(60 - \frac{\theta}{2}) - r' \operatorname{sen} \varphi + r' \operatorname{sen} \varphi) = \\ &= q \left[0, 2r' \operatorname{sen} \varphi - 2L \cos(60 - \frac{\theta}{2}) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Al ser: } r' \operatorname{sen} \varphi = \frac{L}{2}$$

$$\mathbf{p} = q \left[0, 2 \frac{L}{2} - 2L \cos(60 - \frac{\theta}{2}) \right] = qL \left[0, 1 - 2 \cos(60 - \frac{\theta}{2}) \right] = qL \left[0, 1 - 2(\cos 60 \cos \frac{\theta}{2} + \operatorname{sen} 60 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}) \right] \Rightarrow$$

$$\mathbf{p} = qL(0, 1 - \cos \frac{\theta}{2} - \sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}) \quad \text{si tomamos desarrollos en serie de } \cos \frac{\theta}{2} \text{ y de } \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \text{ y nos quedamos en}$$

terminos de primer orden, entonces podemos dar una expresion mas simple para el momento dipolar:

$$\mathbf{p} = qL(0, 1 - \cos \frac{\theta}{2} - \sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}) = qL(0, 1 - 1 + \frac{\theta^2}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2} \theta) = qL(0, -\frac{\sqrt{3}}{2} \theta) = -qL(0, \frac{\sqrt{3}}{2} \theta)$$

Vemos que la componente x de \mathbf{p} sigue siendo nula, ya que la simetría de la distribución, tal como se ha producido la deformación del hexágono, es la misma respecto al eje x.

Problema 3.4

Calcular los momentos dipolar y cuadripolar de la distribución de cargas indicada en la figura.

En los puntos $(d,0,0)$, $(-d,0,0)$, $(0,d,0)$, $(0,-d,0)$, $(0,0,d)$ y $(0,0,-d)$ existe una carga $-q$.

En el punto $(0,0,\Delta d)$ existe una carga $4q$.

Momento dipolar:

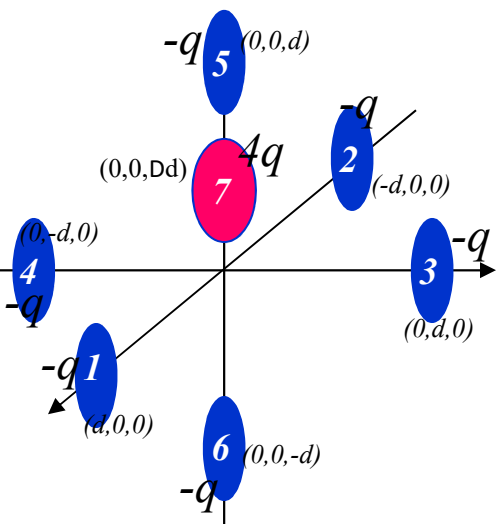
$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}'_i = -q(d,0,0) - q(-d,0,0) - q(0,d,0) - q(0,-d,0) - q(0,0,d) - q(0,0,-d) + 4q(0,0,\Delta d) = \\ &= 4q(0,0,\Delta d) = (4q\Delta d) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Este resultado era previsible debido a la simetría existente en las cargas $-q$ respecto al origen de coordenadas $P(0,0,0)$

Momento Cuadripolar:

Viene representado por el tensor

$$Q_{jk} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix}$$



Cargas

Vector Posición

$q_1 = -q$	$\mathbf{r}'_1 = (d, 0, 0)$
$q_2 = -q$	$\mathbf{r}'_2 = (-d, 0, 0)$
$q_3 = -q$	$\mathbf{r}'_3 = (0, d, 0)$
$q_4 = -q$	$\mathbf{r}'_4 = (0, -d, 0)$
$q_5 = -q$	$\mathbf{r}'_5 = (0, 0, d)$
$q_6 = -q$	$\mathbf{r}'_6 = (0, 0, -d)$
$q_7 = 4q$	$\mathbf{r}'_7 = (0, 0, \Delta d)$

Problema 3.4 (continuación)

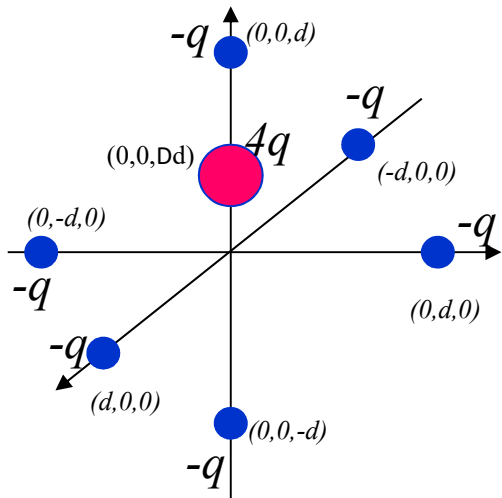
Momento Cuadripolar: (continuación)

$$Q_{xx} = \sum_{i=1}^7 q_i (2x_i'^2 - y_i'^2 - z_i'^2) = -q(2d^2) - q(2d^2) - q(-d^2) - q(-d^2) - q(-d^2) - q(-d^2) + 4q(-(\Delta d)^2) = -4q(\Delta d)^2$$

$$Q_{yy} = \sum_{i=1}^7 q_i (2y_i'^2 - x_i'^2 - z_i'^2) = -q(-d^2) - q(-d^2) - q(2d^2) - q(2d^2) - q(-d^2) - q(-d^2) + 4q(-(\Delta d)^2) = -4q(\Delta d)^2$$

$$Q_{zz} = \sum_{i=1}^7 q_i (2z_i'^2 - x_i'^2 - y_i'^2) = -q(-d^2) - q(-d^2) - q(-d^2) - q(-d^2) - q(2d^2) - q(2d^2) + 4q(2(\Delta d)^2) = 8q(\Delta d)^2$$

El valor de Q_{zz} lo podemos haber obtenido de la condición de que la suma de los elementos de la diagonal principal del tensor Q_{jk} es nula. $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0 \Rightarrow Q_{zz} = -Q_{xx} - Q_{yy} = -(-4q(\Delta d)^2) - (-4q(\Delta d)^2) = 8q(\Delta d)^2$



Los términos Q_{jk} ($j \neq k$) vienen dados por las expresiones:

$$Q_{xy} = 3 \sum_{i=1}^7 q_i x_i' y_i' = 3[-6q(0) + 4q(0)] = 0 = Q_{yx}$$

$$Q_{xz} = 3 \sum_{i=1}^7 q_i x_i' z_i' = 3[-6q(0) + 4q(0)] = 0 = Q_{zx}$$

$$Q_{yz} = 3 \sum_{i=1}^7 q_i y_i' z_i' = 3[-6q(0) + 4q(0)] = 0 = Q_{zy}$$

Problema 3.4 (continuación)

Momento Cuadripolar: (continuación)

Estos términos son nulos debido a que las coordenadas de todas las cargas del sistema tienen dos componentes nulas.

Sustituyendo en el tensor momento cuadripolar nos queda:

$$Q_{jk} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix} = 4q(\Delta d)^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

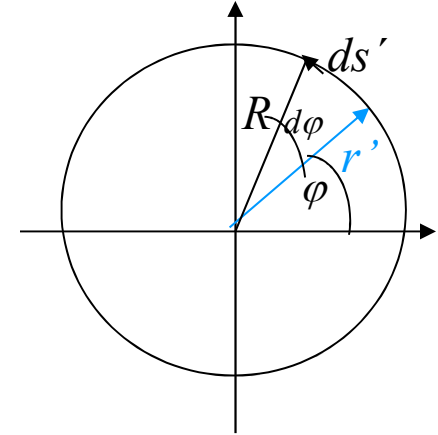
Problema 3.8

Sobre un hilo metálico, cuya sección es despreciable frente a su longitud y dispuesto en forma de circunferencia de radio R sobre el plano XY , se distribuye una densidad lineal de carga $\lambda = \lambda_0(1 - \cos \varphi)$

Calcular los momentos monopolar, dipolar y cuadripolar de la distribución de carga.

1) *Momento monopolar :*

$$Q = \int_L \lambda ds' = \lambda_0 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi) R d\varphi = \lambda_0 R (\varphi + \operatorname{sen} \varphi)_0^{2\pi} = 2\pi R \lambda_0$$



2) *Momento dipolar :*

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_L \lambda \mathbf{r}' ds' = \lambda_0 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi) (R \cos \varphi \mathbf{i} + R \operatorname{sen} \varphi \mathbf{j}) R d\varphi = \lambda_0 \int_0^{2\pi} R^2 \cos \varphi d\varphi \mathbf{i} - \lambda_0 \int_0^{2\pi} R^2 \cos^2 \varphi d\varphi \mathbf{i} + \\ &+ \lambda_0 \int_0^{2\pi} R^2 \operatorname{sen} \varphi d\varphi \mathbf{j} - \frac{1}{2} \lambda_0 \int_0^{2\pi} R^2 \operatorname{sen} 2\varphi d\varphi \mathbf{j} = \lambda_0 R^2 \left[\underbrace{(\operatorname{sen} \varphi)_0^{2\pi}}_{=0} \mathbf{i} - \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi \mathbf{i} - \underbrace{(\cos \varphi)_0^{2\pi}}_{=0} \mathbf{j} + \frac{1}{4} \underbrace{(\cos 2\varphi)_0^{2\pi}}_{=0} \mathbf{j} \right] \Rightarrow \\ \mathbf{p} &= \lambda_0 R^2 \left[-\left(\frac{\varphi}{2}\right)_0^{2\pi} \mathbf{i} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \mathbf{i} \right] = \lambda_0 R^2 \left[-\pi \mathbf{i} - \frac{1}{4} \underbrace{(\operatorname{sen} 2\varphi)_0^{2\pi}}_{=0} \mathbf{j} \right] = -\lambda_0 R^2 \pi \mathbf{i} \end{aligned}$$

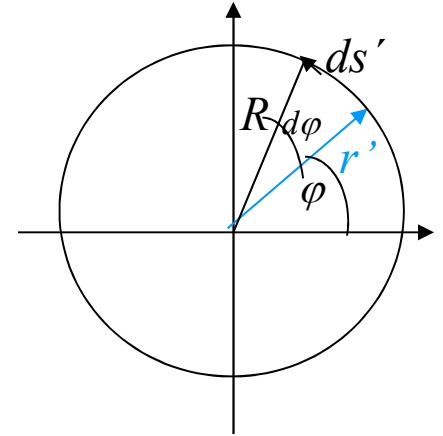
Problema 3.8 (Continuación)

3) Calcular el momento cuadripolar de la distribución de carga.

3) *Momento cuadripolar :*

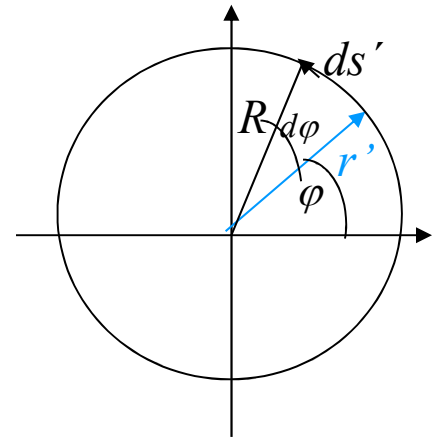
$$Q_{jk} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \int_L \lambda(2x'^2 - y'^2 - z'^2) ds' = \left[\int_0^{2\pi} \lambda_0(1 - \cos \varphi) \left[2(R \cos \varphi)^2 - (R \sin \varphi)^2 \right] R d\varphi \right] = \\ &= \lambda_0 R^3 \left[\int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi) [2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi] d\varphi \right] = \lambda_0 R^3 \left[\int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi) [2 - 3 \sin^2 \varphi] d\varphi \right] = \\ &= \lambda_0 R^3 \left[\int_0^{2\pi} 2 d\varphi - \int_0^{2\pi} 2 \cos \varphi d\varphi - \int_0^{2\pi} 3 \sin^2 \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \right] = \\ &= \lambda_0 R^3 \left[(2\varphi)_0^{2\pi} - \underbrace{2(\sin \varphi)_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi} 3 \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi + \underbrace{(\sin^3 \varphi)_0^{2\pi}}_{=0} \right] = \lambda_0 R^3 \left[4\pi - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \right] = \\ &= \lambda_0 R^3 \left[4\pi - \frac{3}{2} (\varphi)_0^{2\pi} + \frac{3}{4} \underbrace{(\sin 2\varphi)_0^{2\pi}}_{=0} \right] = \lambda_0 R^3 \pi \end{aligned}$$



Problema 3.8 (Continuación)

3) Calcular el momento cuadripolar de la distribución de carga.



$$Q_{zz} = \int_L \lambda(2z'^2 - x'^2 - y'^2) ds' = \left[\int_0^{2\pi} \lambda_0(1 - \cos \varphi) \left[0 - (R \cos \varphi)^2 - (R \sin \varphi)^2 \right] R d\varphi \right] =$$

Para calcular Q_{yy} aplicamos la condición de que la suma de los elementos de la diagonal del tensor Q_{jk} , verifica: $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$, por lo tanto:

$$Q_{yy} = -(Q_{xx} + Q_{zz}) = -(\pi\lambda_0 R^3 - 2\pi\lambda_0 R^3) = \pi\lambda_0 R^3$$

En cuanto a los términos de Q_{jk} tal que $j \neq k$ $\left(\underbrace{Q_{jk} = 3 \int_L \lambda(r') j' k' ds'}_{j \neq k} \right)$, cuando uno de los valores de j o k sea z ,

el valor de ese término será nulo y por tanto:

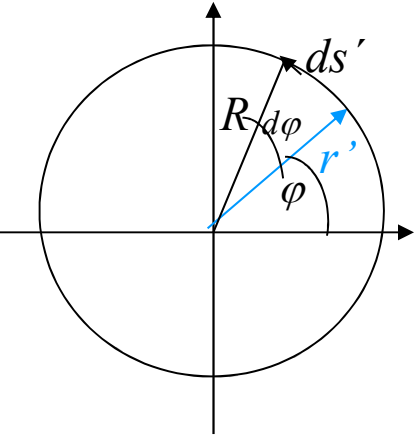
$$Q_{xz} = Q_{zx} = Q_{yz} = Q_{zy} = 0$$

Solo falta calcular, para tener el tensor de momento cuadripolar, el término:

$$\begin{aligned} Q_{xy} = Q_{yx} &= 3 \int_L \lambda(r') j' k' ds' = 3\lambda_0 \int_L (1 - \cos \varphi) xy ds' = 3\lambda_0 R^3 \left[\int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi - \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \right] \\ &= 3\lambda_0 R^3 \left[\underbrace{\frac{1}{2} (\sin^2 \varphi)_0^{2\pi}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{3} (\cos^3 \varphi)_0^{2\pi}}_{=0} \right] = 0 \end{aligned}$$

Problema 3.8 (Continuación)

3) Calcular el momento cuadripolar de la distribución de carga.



Obteniendo el momento cuadripolar que viene dado por el tensor:

$$Q_{jk} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix} = \pi\lambda_0 R^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 3.10

Dada la distribución de carga lineal $\lambda = \lambda_0 \cos\left(\frac{\varphi}{4}\right)$ sobre la circunferencia de radio "a" que muestra la figura, calcular los momentos monopolar y dipolar, así como el potencial en el punto P(0, 0, a)

1) Momento Monopolar: se corresponde con la carga total de la distribución

$$Q = \int_L \lambda(\mathbf{r}') ds' = \int_0^{2\pi} \lambda_0 \cos\left(\frac{\varphi}{4}\right) a d\varphi = 4\lambda_0 a \left[\sin\left(\frac{\varphi}{4}\right) \right]_0^{2\pi} = 4\lambda_0 a \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = 4\lambda_0 a$$

2) Momento dipolar

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_L \lambda(\mathbf{r}') \mathbf{r}' ds' = \int_0^{2\pi} \lambda_0 \cos\left(\frac{\varphi}{4}\right) [a \cos \varphi \mathbf{i} + a \sin \varphi \mathbf{j}] a d\varphi = \lambda_0 a^2 \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{\varphi}{4}\right) [\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}] d\varphi = \\ &= \lambda_0 a^2 \left[\int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{\varphi}{4}\right) \cos \varphi d\varphi \mathbf{i} + \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{\varphi}{4}\right) \sin \varphi d\varphi \mathbf{j} \right] \end{aligned}$$

$$\text{como: } \cos(mx + nx) = \cos(mx) \cos(nx) - \sin(mx) \sin(nx)$$

$$\cos(mx - nx) = \cos(mx) \cos(nx) + \sin(mx) \sin(nx)$$

$$\text{sumando nos queda: } \cos(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\cos(mx + nx) + \cos(mx - nx)]$$

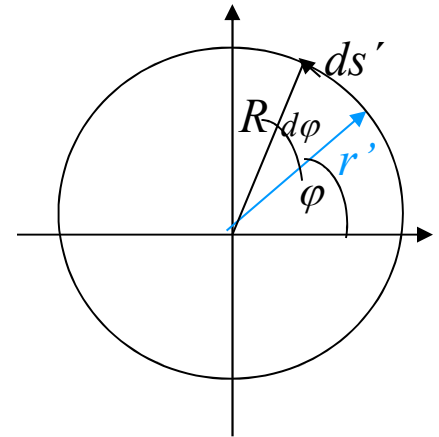
Analogamente:

$$\sin(mx + nx) = \sin(mx) \cos(nx) + \cos(mx) \sin(nx)$$

$$\sin(mx - nx) = \sin(mx) \cos(nx) - \cos(mx) \sin(nx)$$

$$\text{sumando nos queda: } \sin(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\sin(mx + nx) + \sin(mx - nx)]$$

$$\mathbf{p} = \lambda_0 a^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\cos\left(\frac{\varphi}{4} + \varphi\right) + \cos\left(\frac{\varphi}{4} - \varphi\right) \right] \mathbf{i} d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\sin\left(\frac{\varphi}{4} + \varphi\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{4} - \varphi\right) \right] \mathbf{j} d\varphi \right]$$



Ejercicio 3.10 (Continuación)

2) Momento dipolar (Continuación)

Desarrollando la expresion tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \frac{1}{2} \lambda_0 a^2 \left[\left(\int_0^{2\pi} \cos \frac{5\varphi}{4} d\varphi + \int_0^{2\pi} \cos \frac{3\varphi}{4} d\varphi \right) \mathbf{i} + \left(\int_0^{2\pi} \text{sen} \frac{5\varphi}{4} d\varphi + \int_0^{2\pi} \text{sen} \frac{3\varphi}{4} d\varphi \right) \mathbf{j} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \lambda_0 a^2 \left[\left(\frac{4}{5} \left(\text{sen} \frac{5\varphi}{4} \right)_0^{2\pi} + \frac{4}{3} \left(\text{sen} \frac{3\varphi}{4} \right)_0^{2\pi} \right) \mathbf{i} + \left(-\frac{4}{5} \left(\cos \frac{5\varphi}{4} \right)_0^{2\pi} - \frac{4}{3} \left(\cos \frac{3\varphi}{4} \right)_0^{2\pi} \right) \mathbf{j} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \lambda_0 a^2 \left[\left(\frac{4}{5} \text{sen} \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3} \text{sen} \frac{3\pi}{2} \right) \mathbf{i} + \left(+\frac{4}{5} \cos 0 + \frac{4}{3} \cos 0 \right) \mathbf{j} \right] = 2 \lambda_0 a^2 \left[\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) \mathbf{j} \right] = \\ &= 2 \lambda_0 a^2 \left[\left(-\frac{2}{15} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{8}{15} \right) \mathbf{j} \right] = \frac{4}{15} \lambda_0 a^2 [-\mathbf{i} + 4\mathbf{j}]\end{aligned}$$

Ejercicio 3.10 (Continuación)

Calculo del potencial en P(0,0,a):

Sabemos que el potencial de cualquier distribucion de cargas podemos descomponerlo en suma de terminos monopolar, dipolar, cuadripolar, etc.; donde los ordenes de magnitud son inversamente proporcionales, en distintos grados a las distancias al punto donde queremos calcular el potencial. Asi, el termino monopolar $V_M(\mathbf{r}) \propto \left(\frac{1}{r}\right)$, el dipolar

$V_D(\mathbf{r}) \propto \left(\frac{1}{r^2}\right)$ y el cuadripolar $V_Q(\mathbf{r}) \propto \left(\frac{1}{r^3}\right)$. Esto se traduce en que, si existe termino monopolar su valor es

mucho mayor que los otros dos para puntos P muy alejados, y seria el termino dominante del sumatorio. Si este termino fuera nulo y el momento dipolar no lo fuera, entonces el momento dipolar seria el termino prevaleciente del desarrollo, y asi sucesivamente.

$$V(\mathbf{r} = \mathbf{r}_P) = V_M(\mathbf{r}) + V_D(\mathbf{r}) + V_Q(\mathbf{r}) + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} + \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5} \mathbf{r}^t Q_{jk} \mathbf{r} + \dots$$

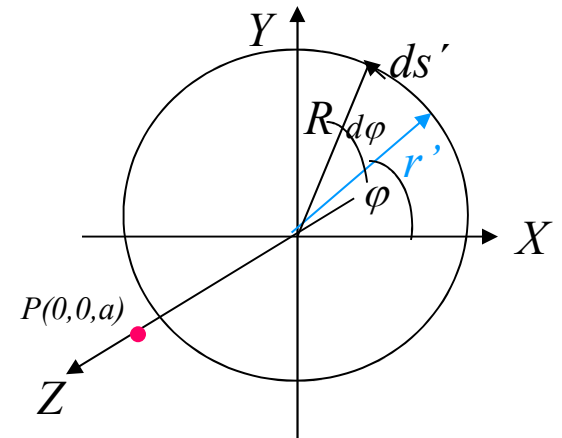
En nuestro caso:

$$V_M(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} = \frac{\lambda_0}{\pi\epsilon_0}$$

$$V_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} = \frac{4}{4\pi\epsilon_0} \frac{(0,0,a) \cdot (-1,4,0)}{15a^3} = 0$$

Para puntos a suficientemente alejados el termino monopolar sera muy superior al cuadripolar, por tanto podemos aproximar el calculo del potencial para P(0,0,a) por su termino monopolar:

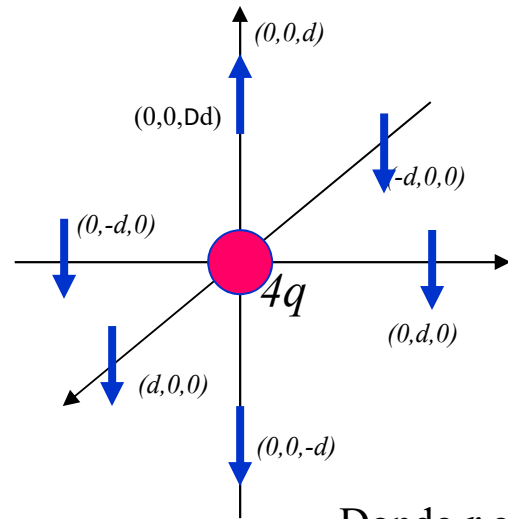
$$V(\mathbf{r} = \mathbf{r}_P) \approx V_M(\mathbf{r}) = \frac{\lambda_0}{\pi\epsilon_0}$$



Problema 3.13

Una parte de la molécula de un material dieléctrico está formada por iones distribuidos como indica la figura. El momento dipolar de todos los iones es del mismo módulo p y su dirección y sentido se indica en la figura.

Calcular la fuerza sobre el ión situado en el origen de coordenadas con carga $4q$.



Los momentos dipolares existentes generan un campo eléctrico en cada punto del espacio \mathbf{E}_p , de forma que sobre la carga $4q$ aparecerá una fuerza dada por: $\mathbf{F} = 4q \mathbf{E}_0$, donde \mathbf{E}_0 es el valor que toma el campo en el origen de coordenadas donde se encuentra la carga $4q$.

El campo creado por un dipolo en el origen de coordenadas viene dado por la expresión:

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{p} \right]$$

Donde \mathbf{r} es el vector posición del punto campo, en nuestro caso $\mathbf{r} = \mathbf{0}$

Cuando el dipolo no se encuentra situado en el origen de coordenadas, sino en una posición \mathbf{r}' , entonces la expresión del campo viene dada por:

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^3} \left[\frac{3((\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p})(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} - \mathbf{p} \right]$$

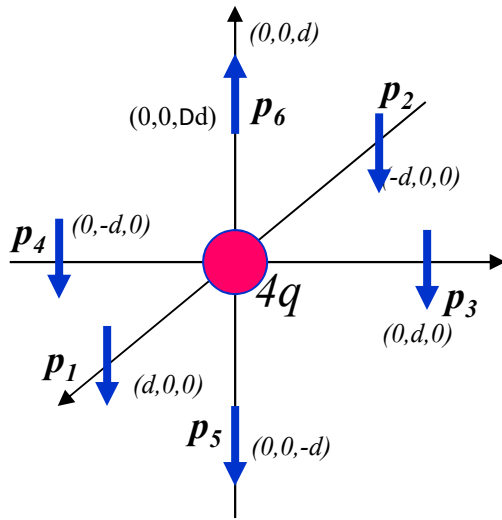
Siendo los módulos:

$$r=0 \quad y \quad r'=d \quad \Rightarrow \quad r-r'=d$$

Para todos los dipolos

Problema 3.13 (Continuación)

Calcular la fuerza sobre el ión situado en el origen de coordenadas con carga $4q$.



La expresión del campo eléctrico debido a cada uno de los seis dipolos en el origen de coordenadas quedará:

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d^3} \left[\frac{3(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{p})(\mathbf{r}')}{d^2} - \mathbf{p} \right]$$

Campo creado por el dipolo \mathbf{p}_1

$$\mathbf{E}_{p_1}(\mathbf{r} = (0,0,0)) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d^3} \left[\frac{3((d,0,0) \cdot (0,0,-p))(d,0,0)}{d^2} - (0,0,-p) \right] = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 d^3} \mathbf{k}$$

Campo creado por el dipolo \mathbf{p}_2

$$\mathbf{E}_{p_2}(\mathbf{r} = (0,0,0)) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d^3} \left[\frac{3((-d,0,0) \cdot (0,0,-p))(-d,0,0)}{d^2} - (0,0,-p) \right] = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 d^3} \mathbf{k}$$

Campo creado por el dipolo \mathbf{p}_3

$$\mathbf{E}_{p_3}(\mathbf{r} = (0,0,0)) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d^3} \left[\frac{3((0,d,0) \cdot (0,0,-p))(0,d,0)}{d^2} - (0,0,-p) \right] = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 d^3} \mathbf{k}$$

Campo creado por el dipolo \mathbf{p}_4

$$\mathbf{E}_{p_4}(\mathbf{r} = (0,0,0)) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d^3} \left[\frac{3((0,-d,0) \cdot (0,0,-p))(0,-d,0)}{d^2} - (0,0,-p) \right] = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 d^3} \mathbf{k}$$

<u>Dipolo</u>	<u>Posición (\mathbf{r}')</u>
$\mathbf{p}_1 = (0,0,-p)$	$\mathbf{r}'_1 = (d,0,0)$
$\mathbf{p}_2 = (0,0,-p)$	$\mathbf{r}'_2 = (-d,0,0)$
$\mathbf{p}_3 = (0,0,-p)$	$\mathbf{r}'_3 = (0,d,0)$
$\mathbf{p}_4 = (0,0,-p)$	$\mathbf{r}'_4 = (0,-d,0)$
$\mathbf{p}_5 = (0,0,p)$	$\mathbf{r}'_5 = (0,0,d)$
$\mathbf{p}_6 = (0,0,-p)$	$\mathbf{r}'_6 = (0,0,-d)$

Problema 3.13 (Continuación)

Calcular la fuerza sobre el ión situado en el origen de coordenadas con carga $4q$.

Continuando con los dipolos situados en el eje Z tendremos:

Campo creado por el dipolo p_5

$$\mathbf{E}_{p_5}(\mathbf{r} = (0,0,0)) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d^3} \left[\frac{3((0,0,d) \cdot (0,0,p))(0,0,d)}{d^2} - (0,0,p) \right] = \left[\frac{3dp(0,0,d)}{d^2} - (0,0,p) \right] = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 d^3} \mathbf{k}$$

Campo creado por el dipolo p_6

$$\mathbf{E}_{p_6}(\mathbf{r} = (0,0,0)) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d^3} \left[\frac{3((0,0,-d) \cdot (0,0,-p))(0,0,-d)}{d^2} - (0,0,-p) \right] = \left[\frac{3dp(0,0,-d)}{d^2} - (0,0,-p) \right] = \frac{-2p}{4\pi\epsilon_0 d^3} \mathbf{k}$$

El campo total que crean los seis dipolos en el origen es, aplicando el principio de superposición de campos:

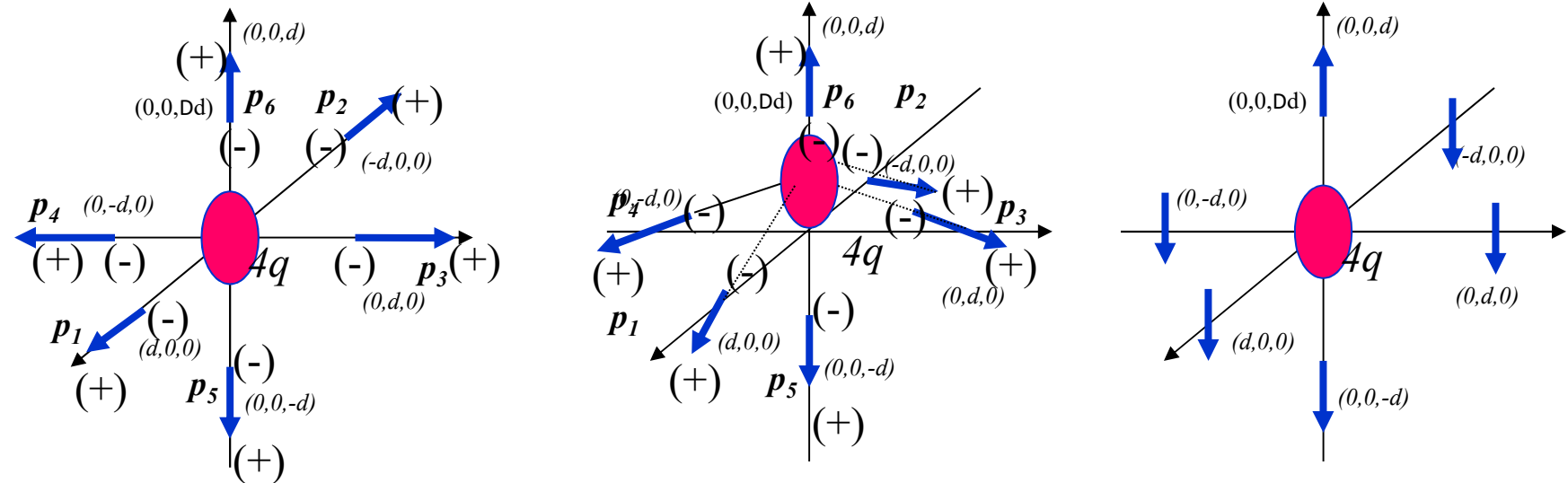
$$\mathbf{E}(\mathbf{r} = (0,0,0)) = \sum_{i=1}^6 \mathbf{E}_{p_i} = \frac{4p}{4\pi\epsilon_0 d^3} \mathbf{k} + \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 d^3} \mathbf{k} - \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 d^3} \mathbf{k} = \frac{p}{\pi\epsilon_0 d^3} \mathbf{k}$$

Y por tanto la fuerza que ejercen los dipolos sobre la carga $4q$ vendrá dada por:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r} = (0,0,0)) = 4q\mathbf{E}(\mathbf{r} = (0,0,0)) = \frac{4qp}{\pi\epsilon_0 d^3} \mathbf{k}$$

La fuerza tiende a desplazar el ión $4q$ en la dirección positiva del eje Z.

Problema 3.13 (Continuación)



El ejemplo propuesto es una estructura de iones, seis con carga $-q$ y uno en el centro con carga $4q$ que nos permite explicar el fenómeno siguiente.

Inicialmente el ion central produce unos desplazamientos de la nube electrónica de todos los iones hacia el origen de coordenadas. Si por el efecto de una pequeña perturbación el ion de carga

$4q$ se desplaza hacia $Z > 0$, este provoca un desplazamiento en la dirección del eje Z de la nube electrónica de los iones que están en el plano XY y como consecuencia se genera un momento dipolar como el indicado. Los iones que están sobre el eje Z sufren una ligera modificación del momento que tenían antes de la perturbación, que además, como hemos visto no afecta a la fuerza sobre $4q$

Los dipolos sobre el plano XY ejercen una fuerza sobre la carga $4q$ que tiende a desplazarla más hacia $Z > 0$. Es decir, la perturbación provoca unos momentos dipolares que tienden a mantener el desplazamiento, y esto da lugar a una polarización del sistema de iones propuesto

Problema 3.11

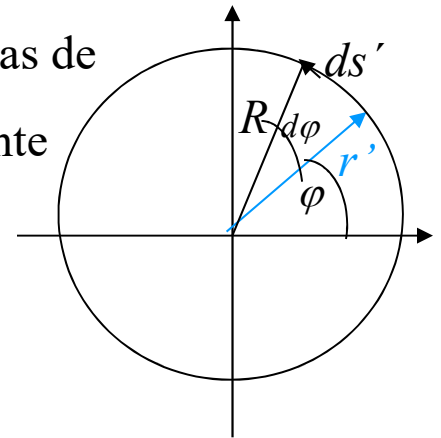
Sobre una circunferencia de radio R , situada en el plano ZY , tenemos una distribución lineal y uniforme de carga que cumple la condición $2\pi R\lambda = Q$. Sobre el eje Y , a una distancia $d=R/2$, se sitúa una carga $-Q$. Calcular los momentos monopolar, dipolar y cuadripolar con respecto al origen O .

- 1) **Momento Monopolar:** se corresponde con la carga total de la distribución, en este caso tenemos una distribución lineal de carga en la circunferencia y una carga aislada, por tanto :

$$Q_{total} = \int \lambda(\mathbf{r}') ds' + (-Q) = \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi R} R d\varphi - Q = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi - Q = Q - Q = 0$$

- 2) **Momento Dipolar:** cuando tengamos distribuciones continuas de carga y cargas puntuales simultáneamente utilizaremos la siguiente expresión para determinar el momento dipolar:

$$\mathbf{p} = \int \lambda(\mathbf{r}') \mathbf{r}' ds' + \iint \sigma(\mathbf{r}') \mathbf{r}' da' + \iiint \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dv' + \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i'$$



En nuestro caso sólo tenemos distribución lineal y una carga puntual.

Problema 3.11 (Continuación)

2) Momento Dipolar: (continuación)

Teniendo en cuenta que $\mathbf{r}' = R\mathbf{u}_r$ y que $ds' = R d\varphi$ nos queda:

$$\mathbf{p} = \frac{QR}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_r d\varphi - \frac{QR}{2} \mathbf{u}_y, \text{ tenemos que tener mucha precaucion al operar la integral,}$$

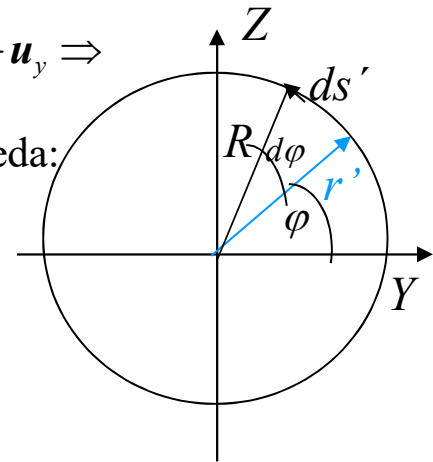
ya que el vector en la direccion radial \mathbf{u}_r , no es constante, tomando una direccion diferente para cada punto de la circunferencia y por tanto $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_r(\varphi)$ y no puede salir fuera de la integral. Expresaremos el vector \mathbf{u}_r , en funcion de los vectores de la base canonica y aparecera de este modo su dependencia angular.

$\mathbf{u}_r = \sin\varphi \mathbf{u}_y + \cos\varphi \mathbf{u}_z$, estos vectores ($\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$) de la Base canonica son constantes para todo punto y por tanto no estan afectados por la variacion angular.

$$\mathbf{p} = \frac{QR}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin\varphi \mathbf{u}_y + \cos\varphi \mathbf{u}_z) d\varphi - \frac{QR}{2} \mathbf{u}_y = \frac{QR}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \sin\varphi \mathbf{u}_y d\varphi + \int_0^{2\pi} \cos\varphi \mathbf{u}_z d\varphi \right) - \frac{QR}{2} \mathbf{u}_y \Rightarrow$$

teniendo en cuenta que las dos integrales se anulan al integrar entre 0 y 2π , nos queda:

$$\mathbf{p} = -\frac{QR}{2} \mathbf{u}_y$$



Problema 3.11 (Continuación)

3) Momento Cuadripolar:

Calcularemos la contribución al momento cuadripolar de la carga y de la distribución lineal de carga y luego sumaremos ambas contribuciones.

- **Cálculo del momento cuadripolar generado por la carga -Q**

La posición de la carga $-Q$ viene dada por $\mathbf{r}' = (0, R/2, 0)$, es decir que en las expresiones dadas para una distribución de cargas (diapositiva 12) tenemos que tomar $x' = z' = 0$, lo que se traduce en que todos los términos del tensor cuadripolar que tienen el producto cruzado con x' o z' , son nulos y por tanto:

$$Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = Q_{yx} = Q_{zx} = Q_{zy} = 0$$

$$Q_{xx} = \sum_i q_i (2x'^2 - y'^2 - z'^2) = Q \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \frac{QR^2}{4}$$

$$Q_{yy} = \sum_i q_i (2y'^2 - x'^2 - z'^2) = -Q \left(2 \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right) = \frac{-QR^2}{2}$$

$$Q_{zz} = \sum_i q_i (2z'^2 - x'^2 - y'^2) = Q \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \frac{QR^2}{4}$$

$$\text{Verificandose que: } Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = \frac{QR^2}{4} - \frac{QR^2}{2}$$

Problema 3.11 (Continuación)

- **Cálculo del momento cuadripolar generado por la carga $-Q$ (continuación):**

El tensor momento cuadripolar de la carga $-Q$ queda:

$$Q_{jk} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix} = \frac{QR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Cálculo del momento cuadripolar generado por la distribución lineal de carga:**

La circunferencia descansa sobre el plano YZ, por tanto el vector posición de un elemento de carga será: $\mathbf{r} = (0, y', z')$, siendo $y' = R \cos j$ y $z' = R \sin j$.

Los términos del tensor Q'_{jk} , donde j o k sea x' serán nulos: $Q'_{xy} = Q'_{yx} = Q'_{xz} = Q'_{zx} = 0$

El resto de términos los sacaremos utilizando las expresiones de la diapositiva 12, para el caso de una distribución lineal de carga.

Problema 3.11 (Continuación)

• Cálculo del momento cuadripolar generado por la distribución lineal de carga:

$$Q'_{yz} = Q'_{zy} = 3 \int y' z' ds' = 3 \int_0^{2\pi} R^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi R d\varphi = 3R^3 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi d\varphi \Rightarrow$$

$$Q'_{yz} = Q'_{zy} = \frac{3R^3}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2\varphi d\varphi = -\frac{3R^3}{2} \int_0^{2\pi} -2 \operatorname{sen} 2\varphi d\varphi = -\frac{3R^3}{2} (\cos 2\varphi)_0^{2\pi} = 0$$

$$Q'_{xx} = \int \lambda(\mathbf{r}') (2x'^2 - y'^2 - z'^2) ds' = \int_0^{2\pi} \lambda (-R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - R^2 \cos^2 \varphi) R d\varphi \Rightarrow$$

$$Q'_{xx} = -\lambda R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi = -2\pi \lambda R^3 = -QR^2$$

$$Q'_{yy} = \int \lambda(\mathbf{r}') (2y'^2 - x'^2 - z'^2) ds' = \int_0^{2\pi} \lambda (2R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - R^2 \cos^2 \varphi) R d\varphi \Rightarrow$$

$$Q'_{yy} = \lambda R^3 \int_0^{2\pi} (2 \operatorname{sen}^2 \varphi - \cos^2 \varphi) d\varphi = \lambda R^3 \int_0^{2\pi} \left(2 \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) - \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) \right) d\varphi =$$

$$= \lambda R^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - 3 \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \lambda R^3 \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi - \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \right) =$$

$$= \frac{\lambda R^3}{2} 2\pi - \frac{3\lambda R^3}{4} (\operatorname{sen} 2\varphi)_0^{2\pi} = \lambda \pi R^3 - 0 = \lambda \pi R^3 = \frac{QR^2}{2}$$

Problema 3.11 (Continuación)

- **Cálculo del momento cuadrupolar generado por la carga $-Q$ (continuación):**

$$Q'_{zz} = \int \lambda(\mathbf{r}') (2z'^2 - x'^2 - y'^2) ds' = \int_0^{2\pi} \lambda (2R^2 \cos^2 \varphi - R^2 \sin^2 \varphi) R d\varphi \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} Q'_{zz} &= \lambda R^3 \int_0^{2\pi} (2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) d\varphi = \lambda R^3 \int_0^{2\pi} \left(2 \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) - \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) \right) d\varphi = \\ &= \lambda R^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + 3 \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \lambda R^3 \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi + \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \right) = \\ &= \frac{\lambda R^3}{2} 2\pi + \frac{3\lambda R^3}{4} (\sin 2\varphi)_0^{2\pi} = \lambda \pi R^3 + 0 = \lambda \pi R^3 = \frac{QR^2}{2} \end{aligned}$$

El tensor Q'_{jk} queda:

$$Q'_{jk} = \begin{pmatrix} Q'_{xx} & Q'_{xy} & Q'_{xz} \\ Q'_{yx} & Q'_{yy} & Q'_{yz} \\ Q'_{zx} & Q'_{zy} & Q'_{zz} \end{pmatrix} = \frac{QR^2}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3.11 (Continuación)

- Cálculo del momento cuadrupolar total:**

$$\begin{aligned}
 Q'_{zz} &= \int \lambda(\mathbf{r}') (2z'^2 - x'^2 - y'^2) ds' = \int_0^{2\pi} \lambda (2R^2 \cos^2 \varphi - R^2 \sin^2 \varphi) R d\varphi \Rightarrow \\
 Q'_{zz} &= \lambda R^3 \int_0^{2\pi} (2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) d\varphi = \lambda R^3 \int_0^{2\pi} \left(2 \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) - \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) \right) d\varphi = \\
 &= \lambda R^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + 3 \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \lambda R^3 \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi + \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \right) = \\
 &= \frac{\lambda R^3}{2} 2\pi + \frac{3\lambda R^3}{4} (\sin 2\varphi)_0^{2\pi} = \lambda \pi R^3 + 0 = \lambda \pi R^3 = \frac{QR^2}{2}
 \end{aligned}$$

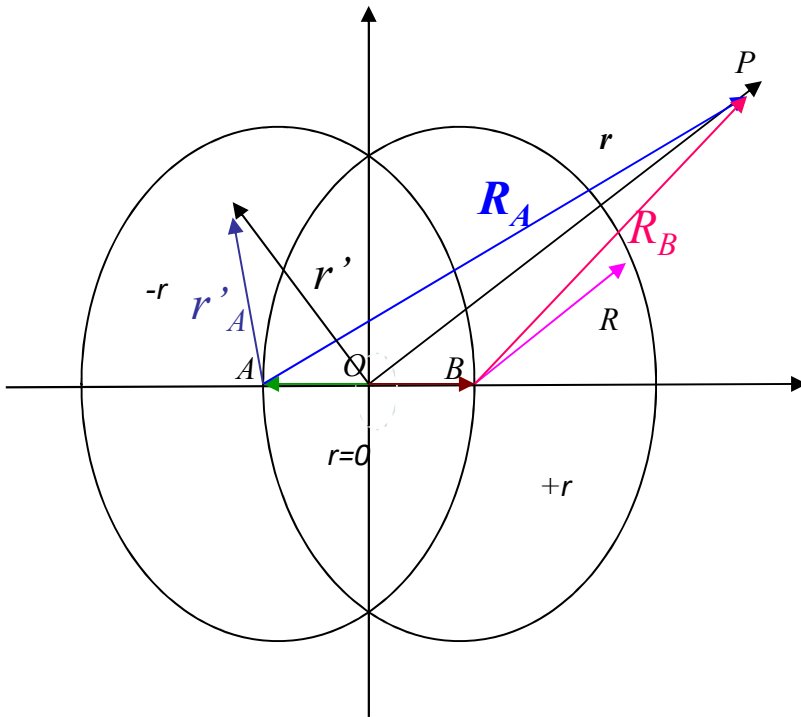
El tensor momento cuadrupolar $(Q_{jk})_{\text{Total}}$ queda:

$$\begin{aligned}
 (Q_{jk})_{\text{Total}} &= Q_{jk} + Q'_{jk} = \frac{QR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{QR^2}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{QR^2}{4} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Problema 3.12

La distribución de carga que se muestra en la figura P3.12 se compone de la siguiente forma: Dos esferas de radio “R”, cuyos centros respectivos están en $y=-R/2$ e $y=R/2$, y entre las que se produce una intersección. En la esfera de la izquierda existe una densidad de carga $-r$, salvo en la intersección, y la esfera derecha tiene una densidad de carga $+r$, salvo en la intersección.

Calcular los términos monopolar y dipolar del potencial debido a la citada distribución de carga en un punto situado a una distancia “r” del origen de coordenadas.



•Término Monopolar del Potencial:

El momento monopolar viene dado por la totalidad de la carga distribuida en las dos esferas, a todos los efectos podemos considerar que tenemos dos esferas con densidades de carga $+r$ y $-r$ respectivamente, ya que la contribución al espacio de intersección sería equivalente a la distribución que nos dice el enunciado (Principio de Superposición).

$Q = \int \rho(r') d\tau' + \int -\rho(r') d\tau' = 0$, pues las esferas donde se encuentran distribuidas las cargas $+\rho$ y $-\rho$ son iguales.

El término monopolar del potencial es pues:

$$V_M = 0$$

•Término Dipolar del Potencial:

Para determinar el momento dipolar continuamos aplicando el Principio de Superposición y consideramos el momento creado por dos esferas de radio “R” y cargas $-r$ y $+r$.

Problema 3.12

•Término Dipolar del Potencial: (continuación)

Momento dipolar creado por la esfera de densidad $-\rho$, y centro A respecto del origen O: \mathbf{P}_{AO}

$$\mathbf{P}_{AO} = \int_V -\rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d\tau' = \text{momento dipolar de la esfera de radio } R \text{ y centro A respecto de el origen O}$$

(siendo \mathbf{r}' el vector posición de cualquier punto de la esfera medido desde O)

$$\begin{aligned} \text{Sabemos que: } \mathbf{r}' &= \mathbf{r}'_A + \mathbf{OA} = \mathbf{r}'_A + \frac{R}{2}(-\mathbf{u}_y) \Rightarrow \mathbf{P}_{AO} = \int_{V_A} -\rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d\tau' = -\rho \int_{V_A} \left(\mathbf{r}'_A + \frac{R}{2}(-\mathbf{u}_y) \right) d\tau' = \\ &= -\rho \int_{V_A} \mathbf{r}'_A d\tau' + \rho \frac{R}{2} \int_{V_A} \mathbf{u}_y d\tau' = \int_{V_A} -\rho \mathbf{r}'_A d\tau' + \rho \frac{R}{2} \int_{V_A} \mathbf{u}_y d\tau' = \mathbf{P}_A + \rho \frac{R}{2} V_A \mathbf{u}_y \end{aligned}$$

Donde \mathbf{P}_A es el momento dipolar de la esfera respecto de su centro A, comprobemos a continuación que su valor es cero:

Momento dipolar de una esfera de centro A respecto a su centro: \mathbf{P}_A

$$\mathbf{P}_A = \int_{V_A} -\rho \mathbf{r}'_A d\tau' = \int_{V_A} -\rho \mathbf{r}'_A \hat{\mathbf{u}}_r d\tau', \text{ donde } \hat{\mathbf{u}}_r \text{ es un vector unitario}$$

radial referido al centro A. Dicho vector unitario es una función del ángulo así:

$\hat{\mathbf{u}}_r = \sin\theta \cos\varphi (\hat{\mathbf{u}}_x) + \sin\theta \sin\varphi (\hat{\mathbf{u}}_y) + \cos\theta (\hat{\mathbf{u}}_z)$, y por tanto no se puede sacar de la integral de volumen, que incluye variaciones en θ y φ .

El diferencial de volumen $d\tau' = r'^2_A \sin\theta dr'_A d\theta d\varphi \Rightarrow$

Problema 3.12

•Término Dipolar del Potencial: (continuación)

Momento dipolar de una esfera de centro A respecto a su centro: \mathbf{P}_A

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_A &= -\rho \int_{V_A} r'_A \left(\sin\theta \cos\varphi (\mathbf{u}_x) + \sin\theta \sin\varphi (\mathbf{u}_y) + \cos\theta (\mathbf{u}_z) \right) r'_A{}^2 \sin\theta dr'_A d\theta d\varphi = \\
 &= -\rho \int_0^R r'_A{}^3 dr'_A \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi (\mathbf{u}_x)}_{=0} - \rho \int_0^R r'_A{}^3 dr'_A \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi (\mathbf{u}_y)}_{=0} - \rho \int_0^R r'_A{}^3 dr'_A \int_0^\pi \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi (\mathbf{u}_z) = \\
 &= 0(\mathbf{u}_x) + 0(\mathbf{u}_y) - \rho \int_0^R r'_A{}^3 dr'_A \int_0^\pi \sin\theta \cos\theta d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi (\mathbf{u}_z)}_{=2\pi} = 0(\mathbf{u}_x) + 0(\mathbf{u}_y) - 2\pi\rho \left(\frac{r'_A{}^3}{4} \right)_0^R \left(\frac{1}{2} \right)_0^\pi \int_0^\pi \sin 2\theta d\theta (\mathbf{u}_z) = -\pi\rho \frac{R^4}{4} \underbrace{(-\cos 2\theta)_0^\pi}_{=0} (\mathbf{u}_z) \Rightarrow \\
 \mathbf{P}_A &= 0(\mathbf{u}_x) + 0(\mathbf{u}_y) + 0(\mathbf{u}_z) = \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

Por tanto el momento dipolar de la distribución de carga situada en la esfera de centro A con respecto al origen de coordenadas O viene dado por:

$$\mathbf{P}_{AO} = \mathbf{P}_A + \rho \frac{R}{2} V_A \mathbf{u}_y = \rho \frac{R}{2} V_A \mathbf{u}_y = \frac{2}{3} \pi R^4 \rho \mathbf{u}_y$$

Problema 3.12

•Término Dipolar del Potencial: (continuación)

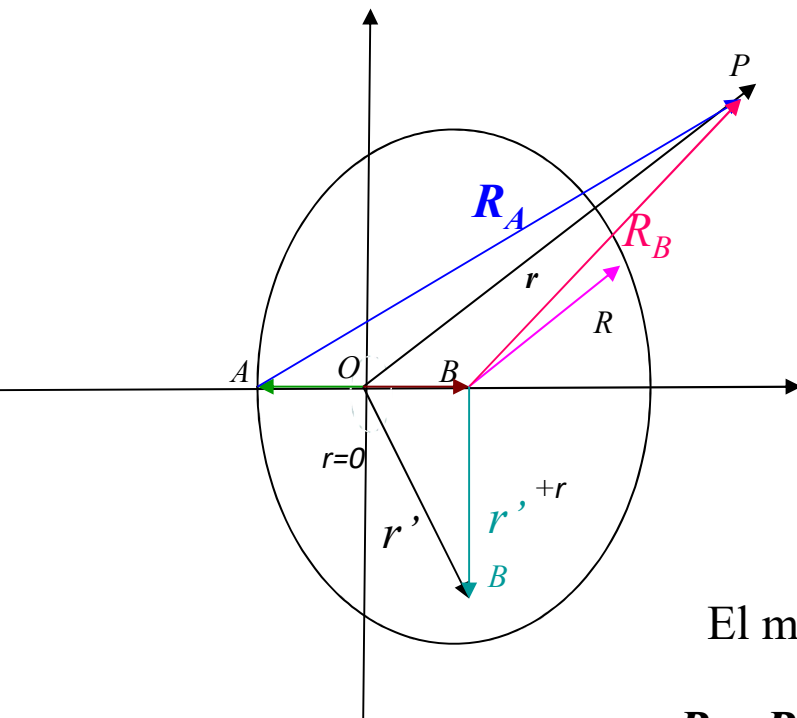
Momento dipolar creado por la esfera de densidad $+r$, y centro B respecto del origen O: \mathbf{P}_{BO}

$$\mathbf{P}_{BO} = \int_V \rho(r') \mathbf{r}' d\tau' = \text{momento dipolar de la esfera de radio } R \text{ y centro B respecto de el origen O}$$

(siendo \mathbf{r}' el vector posición de cualquier punto de la esfera medido desde O)

$$\text{Sabemos que: } \mathbf{r}' = \mathbf{r}'_B + \mathbf{OB} = \mathbf{r}'_B + \frac{R}{2}(\mathbf{u}_y) \Rightarrow \mathbf{P}_{BO} = \int_{V_A} \rho(r') \mathbf{r}' d\tau' = \rho \int_{V_A} \left(\mathbf{r}'_B + \frac{R}{2}(\mathbf{u}_y) \right) d\tau' =$$

$$= \rho \int_{V_A} \mathbf{r}'_B d\tau' + \rho \frac{R}{2} \int_{V_A} \mathbf{u}_y d\tau' = \int_{V_A} \rho \mathbf{r}'_B d\tau' + \rho \frac{R}{2} \int_{V_A} \mathbf{u}_y d\tau' = \mathbf{P}_B + \rho \frac{R}{2} V_B \mathbf{u}_y$$



Donde \mathbf{P}_B es el momento dipolar de la esfera respecto de su centro B, y como ya demostramos con la esfera de centro A es un vector nulo.

Por tanto el momento dipolar de la distribución de carga situada en la esfera de centro B con respecto al origen de coordenadas O viene dado por:

$$\mathbf{P}_{BO} = \mathbf{P}_B + \rho \frac{R}{2} V_B \mathbf{u}_y = \rho \frac{R}{2} V_B \mathbf{u}_y = \frac{2}{3} \pi R^4 \rho \mathbf{u}_y$$

El momento dipolar creado por el sistema de cargas es:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{AO} + \mathbf{P}_{BO} = \frac{2}{3} \pi R^4 \rho(\mathbf{u}_y) + \frac{2}{3} \pi R^4 \rho(\mathbf{u}_y) = \frac{4}{3} \pi R^4 \rho(\mathbf{u}_y)$$

Problema 3.12

•Término Dipolar del Potencial: (continuación)

Una vez calculado el momento dipolar de la distribución de cargas respecto a O, aplicamos para calcular el Término Dipolar del Potencial la expresión:

$$V_D = \frac{\mathbf{Pr}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^4 \rho(\hat{\mathbf{u}}_y \cdot \mathbf{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{R^4 \rho(\hat{\mathbf{u}}_y \cdot \hat{\mathbf{u}}_r)}{3\epsilon_0 r^3} = \frac{R^4 \rho(\hat{\mathbf{u}}_y \cdot \hat{\mathbf{u}}_r)}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{R^4 \rho \cos \phi}{3\epsilon_0 r^2}$$

Siendo \mathbf{r} el vector que va del origen O al punto P donde queremos calcular el valor del potencial y ϕ el ángulo que forman los vectores $\hat{\mathbf{u}}_y$ y $\hat{\mathbf{u}}_r$.