Grado en Química
Matemáticas II
Curso 2023-2024 Hoja 1

Ejercicios

Sistemas lineales

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones en el plano $\mathbb{R}^2$, escríbelos como combinación afín de algunos vectores y represéntalos gráficamente.

$$(i)\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=0\\ 4x+5y=1\\ -2x-4y=1\\ 2x+2y=1\end{array}\right. \qquad (ii)\left\{\begin{array}{l} x+3y=4-x\\ 6x+2y-8=4-7y\end{array}\right. \qquad (iii)\left\{\begin{array}{l} x-2y=1\\ 2x+y=1\\ 3x+y=0\end{array}\right.$$

2. **(H)** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones en el espacio $\mathbb{R}^3$, escríbelos como combinación afín de algunos vectores y represéntalos gráficamente.

$$(i)\left\{\begin{array}{l} z=1-x-y\\ 2x+2y+2z=2\end{array}\right. \qquad (ii)\left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=0\\ z=0\\ x+y+z=1\end{array}\right. \qquad (iii)\left\{\begin{array}{l} x-y+z=0\\ 2x-2y-z=0\\ -x+y+2z=0\end{array}\right. \qquad (iv)\left\{\begin{array}{l} x-y=0\\ x+y-z=1\\ -x+y+z=2\end{array}\right.$$

3. ¿Para qué valores de a no tiene soluciones el sistema que sigue? ¿Para qué valores tiene exactamente una solución? ¿Para qué valores tiene una infinidad de soluciones?

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y-3z=4\\ 3x-y+5z=2\\ 4x+y+(a^2-14)z=a+2\end{array}\right.$$

Calcula la solución cuando el sistema es compatible determinado.

4. **(H)** Ajusta las siguientes reacciones

$$\mathrm{NO_3^-}(ac)+\mathrm{Al}(s)+\mathrm{OH^-}(ac)+\mathrm{H_2O}(\ell)\to\mathrm{NH_3}(ac)+\mathrm{AlO_2^-}(ac)$$

$$\mathrm{CO}(g)+\mathrm{H_2}(g)\to\mathrm{CH_4}(g)+\mathrm{CO_2}(g)+\mathrm{H_2O}(g)$$

planteando un sistema de ecuaciones lineales a partir de las leyes de conservación de la materia y de la carga.

5. Utilizando la ley de Hess, calcula la entalpía de formación estandar del gas etano a 298 K

$$2\,\mathrm{C(grafito)}+3\,\mathrm{H_2}(g)\to\mathrm{C_2H_6}(g)$$

a partir de las entalpías de combustión del C(grafito), del hidrógeno y del propio etano:

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{C_2H_6}(g)+\frac{7}{2}\,\mathrm{O_2}(g) & \to & 2\,\mathrm{CO_2}(g)+3\,\mathrm{H_2O}(\ell) & \Delta H^0_{298}(1)=-1560\ \mathrm{kJ\ mol^{-1}}\\ \mathrm{C(grafito)}+\mathrm{O_2}(g) & \to & \mathrm{CO_2}(g) & \Delta H^0_{298}(2)=-393.5\ \mathrm{kJ\ mol^{-1}}\\ \mathrm{H_2}(g)+\frac{1}{2}\,\mathrm{O_2}(g) & \to & \mathrm{H_2O}(\ell) & \Delta H^0_{298}(3)=-286\ \mathrm{kJ\ mol^{-1}} \end{array}$$

Plantea un sistema de ecuaciones lineales a partir del balance de materia para cada especie química.

6. (H) Utilizando la ley de Hess, calcula la entalpía de formación estandar de la hematita (óxido de hierro III) a 298 K

$$2\,\mathrm{Fe}(s) + \frac{3}{2}\,\mathrm{O_2}(g) \to \mathrm{Fe_2O_3}(s)$$

a partir de las entalpías de las siguientes reacciones:

$$\begin{array}{cl}
\mathrm{Fe_2O_3}(s) + 3\,\mathrm{C(grafito)} \to 2\,\mathrm{Fe}(s) + 3\,\mathrm{CO}(g) & \Delta H^0_{298}(1) = 490 \text{ kJ mol}^{-1} \\
2\,\mathrm{CO}(g) + \mathrm{O_2}(g) \to 2\,\mathrm{CO_2}(g) & \Delta H^0_{298}(2) = -566 \text{ kJ mol}^{-1} \\
\mathrm{C(grafito)} + \mathrm{O_2}(g) \to \mathrm{CO_2}(g) & \Delta H^0_{298}(3) = -393 \text{ kJ mol}^{-1}
\end{array}$$

Para hacerlo, escribe la reacción final como combinación lineal de las otras tres reacciones.

Espacios vectoriales: Bases. Coordenadas. Cambio de base

7. Determina si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Para aquellos que lo sean proporciona una base.

- $A = \{(3x, x, x+y, y) \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}$.
- $B = \{(x, y) \,:\, x^2 - y^2 = 0\}$.
- $C = \{(x, y, x) \,:\, x = 1\}$.
- $D = \{(a, b, a, a) \,:\, ab = 0\}$.
- $E = \{(t, s+t, s-t, 5s) \,:\, s, t \in \mathbb{R}\}$.
- $F = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. *Este conjunto es una circunferencia.*

8. (H) Considera los vectores $\vec{h} = (3, 0)$, $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 2)$ de $\mathbb{R}^2$.

a) Escribe $\vec{h}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y representa gráficamente los tres vectores junto con la combinación lineal obtenida.

b) Dibuja el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ determinado por los vectores $a\vec{u} + b\vec{v}$ con $0 \le a \le 1$ y $0 \le b \le 1$.

c) Repite el apartado anterior con $0 \le a \le 2$ y $b \in \{0, 1\}$.

d) Repite el apartado anterior con $-\infty < a < \infty$ y $-\infty < b < \infty$.

9. (H) Sean $\vec{h} = (1, 2, 5)$, $\vec{u} = (3, 6, 0)$, $\vec{v} = (2, 4, 1)$ vectores de $\mathbb{R}^3$.

a) Calcula la dimensión del subespacio P de $\mathbb{R}^3$ generado por esos tres vectores.

b) ¿Está $\vec{s} = (1, 3, 0)$ en P? Haz un dibujo de los cuatro vectores y del subespacio P.

10. Determina una base para el subespacio vectorial P de $\mathbb{R}^4$ definido por la soluciones del sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ -x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Determina si $\vec{v} = (2, 0, 3, 1)$ pertenece a P y en caso afirmativo sus coordenadas en la base obtenida.

11. Considera el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$.

a) ¿Se pueden expresar los vectores $(1, 2, 3)$ y $(1, 1, 1)$ como combinación lineal de $(1, 0, 1)$ y $(0, 2, 2)$?

b) Comprueba que $\{(1, 0, 1), (2, -2, 1), (3, 1, -1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y halla las coordenadas del vector $(-1, -2, 0)$ en dicha base.

c) ¿Para qué valores de λ determinan los vectores $(\lambda, 1, 1)$, $(1, \lambda, 1)$, $(1, 1, \lambda)$ una base de $\mathbb{R}^3$?

d) Determina si los vectores $(1, 1, 1)$, $(3, 4, 5)$, $(2, 5, 6)$ y $(5, 2, 3)$ están contenidos en un plano.

12. Considera el espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$.

a) Determina valores de x e y de modo que el vector $(5, 7, x, y)$ sea combinación lineal de los vectores $(1, 2, 0, 2)$ y $(1, 1, 2, 3)$.

b) Di si las siguientes familias de vectores de $\mathbb{R}^4$ son linealmente independientes.

- $S = \{(1, 2, 3, 0), (4, 3, 4, -16), (7, 3, 4, 5)\}$.
- $S = \{(1, 0, 0, -1), (2, 1, 1, -2), (0, 1, 1, 0), (1, -1, -1, -1)\}$.

c) Proporciona una base del subespacio vectorial que generan los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{u_1} = (1, 3, 0, -4)\ ,\ \vec{u_2} = (-1, -5, 2, 6)\ ,\ \vec{u_3} = (1, -2, 5, 1)\ .$$

13. (H) Comprueba que los vectores

$$\vec{u}_1 = (1, 2, 0, 0), \quad \vec{u}_2 = (0, 1, 2, -1), \quad \vec{u}_3 = (1, -1, -1, -1), \quad \vec{u}_4 = (0, 1, 1, 0).$$

son una base de $\mathbb{R}^4$ y determina las coordenadas de $\vec{e} = (1, 0, 0, 0)$ en dicha base.

14. (H) Determina una base para el subespacio vectorial P de $\mathbb{R}^4$ definido por la soluciones del sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{cases} x + 3y \phantom{{}-2z} - 4t &= 0 \\ x + 5y - 2z - 6t &= 0 \\ x - 2y + 5z + t &= 0 \end{cases}$$

Escribe la última ecuación como combinación lineal de las dos anteriores. ¿Por qué si quitamos la última ecuación las soluciones del sistema no varían?

15. Considera el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 3

$$\mathbb{R}_{\leq 3}[x] = \{a + bx + cx^2 + dx^3 : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

a) Prueba que $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base.

b) Determina si los polinomios $1 + x^3, 1 + x + x^2, 1 - x^2 + x^3, 1 + x^2 + x^3$ forman una base de $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

c) Sea W el subconjuno formado por los polinomios divisibles por $x - 1$. ¿Determina un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$? ¿De qué dimensiòn? Determina una base de W y las coordenadas del polinomio $x^2 - 1$ en dicha base.

16. (H) Considera el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a dos

$$\mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \{a + bx + cx^2 : \ a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

a) Toma la parábola $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ dada por la gráfica de $f(x) = 1 - x^2$. Dibuja P y las gráficas de las parábolas determinadas por $2f(x)$, $0.5f(x)$, $-f(x)$, $-2f(x)$ y $-0.5f(x)$.

b) Considera los polinomios cuyas gráficas son parábolas que pasan por el origen y con tangente horizontal en $x = 1$ ¿Forman estos polinomios un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$? ¿De qué dimensión?

17. Considera el plano $\mathbb{R}^2$ y la base β' obtenida al rotar (en sentido antihorario) un ángulo de 90^o los vectores de la base estándar $\beta_{\text{st}} = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Determina la aplicación de cambio de base entre la base estándar β_{st} y la base β'.

①

III) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 1 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(-2)\mathrm{I}+\mathrm{II} \\ (-3)\mathrm{I}+\mathrm{III}}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\frac{1}{5}\mathrm{II} \\ \frac{1}{7}\mathrm{III}}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 1 & -3/7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(-1)\mathrm{II}+\mathrm{III}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & -8/37 \end{array}\right) \rightsquigarrow \boxed{\text{Sist. INCOMPATIBLE}} \ (\nexists \text{ sol})$$

sist. incomp. $\equiv 0 + 0 \neq \frac{-8}{37}$

II) $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ \cancel{6x+9y=12} \end{cases}$ $\mapsto$ $\boxed{\text{Sist. indet.}}$ $2x+3y=4$

sobra, es la misma eq.

I) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 4x+5y=1 \\ -2x-4y=1 \\ 2x+2y=1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left[\begin{array}{l} x=3/2 \\ y=-1 \end{array}\right]$ $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$

(2)

I) $\begin{cases} z=1-x-y \\ 2x+2y+2z=2 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x=t \\ y=s \\ z=1-t-s \end{cases}}$ Ec. param. de un plano

pto(A) vectores direct. ($\vec{u}$ y $\vec{v}$)

$\begin{pmatrix} x= a_1+u_1t+v_1s \\ y= a_2+u_2t+v_2s \\ z= a_3+u_3t+v_3s \end{pmatrix}$

II) $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases} \rightarrow \boxed{Sol = \emptyset}$

III) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-2y-z=0 \\ -x+y+2z=0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I}+\text{III}]{(-2)\text{I}+\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{0} \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{3}\text{II}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

sist. hom. (tiene sol.)

$\Rightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=0+0\cdot t=0 \end{cases}}$

RECORDAR: ec. paramét. recta en $\mathbb{R}^3$

$\begin{cases} x=a_1+u_1t \\ y=a_2+u_2t \\ z=a_3+u_3t \end{cases}$ (recta que pasa por $A(a_1,a_2,a_3)$ y tiene $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$)

(3)

$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 3x-y+5z=2 \\ 4x+y+(a^2-14)z=a+2 \end{cases} \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{array}\right) \xrightarrow[(-4)\text{I}+\text{III}]{(-3)\text{I}+\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)\text{II}+\text{III}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[-\frac{1}{7}(\text{II})]{} \left[\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right)\right]$ $(a^2-16=a-4)$

- Si $a^2-16\neq 0 \rightarrow$ Sist. comp. D.
  - si $a=4 \rightarrow$ Sist. comp. D. $\rightarrow$
  - si $a=-4 \rightarrow$ Sist. incomp. $(0\neq -8)$

$\begin{cases} x=\frac{1}{7}\left(\frac{8a+25}{a+4}\right) \\ y=\frac{2}{7}\left(\frac{5a+27}{a+4}\right) \\ z=\frac{1}{a+4} \end{cases}$

(4) ¿Es subesp. vect.?

$A=\{(3x, x, x+y, y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$
t t t s s

$\begin{cases} x_1=3t \\ x_2=t \\ x_3=t+s \\ x_4=s \end{cases}$ → A es un plano que pasa por $(0,0,0,0)$ y hacia $<\{(3,1,1,0),(0,0,1,1)\}>$

$B=\{(x,y) \mid x^2-y^2=0\}$

$=\{x+y=0\}\cup\{x-y=0\} = x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ $\boxed{\text{NO ES}}$

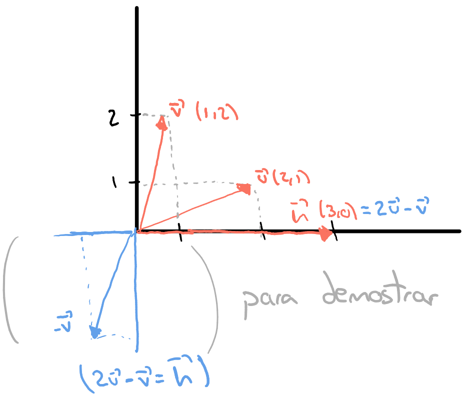
$C=\{(1,y,1) \mid y\in\mathbb{R}\}$ NO PASA POR 0 → $\boxed{\text{NO}}$

⑤

$\vec{h} = (3,0)$ a.) $\vec{h} = c_1\vec{u} + c_2\vec{v} \Rightarrow (3,0) = c_1(2,1) + c_2(1,2) \Rightarrow \begin{cases} 2c_1 + c_2 = 3 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow [c_1 = 2 \ , c_2 = 1]$

$\vec{u} = (2,1)$

$\vec{v} = (1,2)$



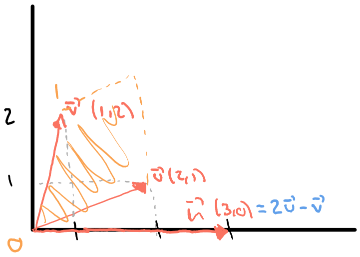
para demostrar combinación lineal

b.) ¿$a\vec{n} + b\vec{v} = ?$

$a \in [0,1]$

$b \in [0,1]$

(cuánto varía?)

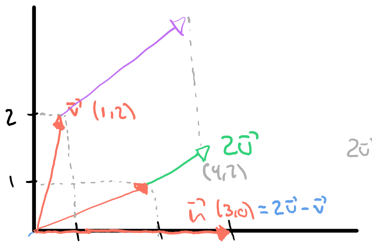


(0 · vector , 1 · vector)

c.) $a\vec{u} + b\vec{v}$

$a \in [0,2]$

$b = 0$ ó 1



Si $b=1$, obtengo segmento que une (1,2) con (5,4).

$2\vec{u} = 2(2,1) = (4,2)$

d.) ¿$a\vec{n} \cdot b\vec{n}$?

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

⑥ $\vec{h} = (1,2,5)$

$\vec{u} = (3,6,0)$

$\vec{v} = (2,4,1)$

$V = \langle \vec{h}, \vec{u}, \vec{v} \rangle$

a.) ¿dim V?

▸ Son L.I.? ✗

$c_1\vec{h} + c_2\vec{u} + c_3\vec{v} = \vec{0}$

$c_1(1,2,5) + c_2(3,6,0) + c_3(2,4,1) = (0,0,0)$ $\begin{cases} c_1 + 3c_2 + 2c_3 = 0 \\ 2c_1 + 6c_2 + 4c_3 = 0 \\ 5c_1 + c_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Gauss}} \dots \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sist. comp. indet.

[No son L.I. (sobra alguno)]

▸ ¿$\vec{h}, \vec{u}$ L.I.? ✓

$c_1\vec{h} + c_2\vec{u} = \vec{0} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{array}$ [Son L.I.]

son base $\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle$ de V, entonces $\boxed{\dim V = 2}$

b.) ¿está el (1,3,0) en V? (tiene que ser comb. lineal)

$\underbrace{(1,3,0)}$ = $\overbrace{\lambda_1\vec{h} + \lambda_2\vec{u}}^{\text{ctes}}$ = $\lambda_1(1,2,5) + \lambda_2(3,6,0)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 \neq 1$ Sist. incomp.

$\boxed{(1,3,0) \text{ no } \in}$

(12) considera $P(x) \leq 3$ $\quad (V = \{a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\})$

a) $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ ¿base de V? [Sí es BASE]

- gen? sí
- LI sí

$$c_1 1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x = 0 \rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{cases}$$

b) ¿base $1+x^3,\ 1+x+x^2,\ 1-x^2+x^3,\ 1+x^2+x^3$?

- LI?

polinomio 0

$$c_1 (1+x^3) + c_2 (1+x+x^2) + c_3 (1-x^2+x^3) + c_4 (1+x^2+x^3) = 0$$

$$\underbrace{(c_1+c_2+c_3+c_4)}_{=0} \cdot 1 + \underbrace{(c_2)}_{=0} \cdot x + \underbrace{(c_2-c_3+c_4)}_{=0} x^2 + \underbrace{(c_1+c_3+c_4)}_{=0?} x^3 = 0$$

$$\begin{cases} c_1 + \cancel{c_2} + c_3 + c_4 = 0 \\ c_2 = 0 \\ \cancel{c_2} - c_3 + c_4 = 0 \\ c_1 + c_3 + c_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} c_3 = c_4 \\ c_2 = 0 \\ c_1 = -c_3 - c_4 = -2c_3 \\ c_3 = c_3 \end{bmatrix}$$

∞ sol, no son LI

$\boxed{\text{NO BASE}}$

c) W = polinomios de V divisibles entre $(x-1)$

divisible $(x-1)$

$$P(x) = (ax^2 + bx + c)(x-1) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - c$$

$$= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

$$W = \left\{ (a_0, a_1, a_2, a_3)_B \;\middle|\; \begin{array}{l} a_0 = a \\ a_1 = -a + b \\ a_2 = -b + c \\ a_3 = -c \end{array} \right\} = \langle (1,-1,0,0), (0,1,-1,0), (0,0,1,-1) \rangle \quad (\dim = 3)$$

HOJA 2 Nº1

(1) ¿ecuaciones matriciales de g_2 en B?

$g_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$(1,0) \rightarrow (0,0)$
$(2,1) \rightarrow (1,1)$
respecto a $B = \{\vec{e_1} = (1,0), \vec{e_2} = (0,1)\}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$g_2(\bar{e_2})$

$\bar{e_1}$

$[g_2(\bar{e_1}) = (0,0) = 0\bar{e_1} + 0\bar{e_2}]$

$g_2(e_2) = ?$

$g_2(2\bar{e_1} + \bar{e_2}) = \bar{e_1} + \bar{e_2}$

$g_2(2e_1) + g_2(\bar{e_2}) = 2g_2(e_1) + g_2(e_2)$

$[\Rightarrow g_2(e_2) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2]$

③

$f: \mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}\ldots$

$A \mapsto A\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}A$

$\mathcal{B} = \left\{ E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \right\}$

$\rightsquigarrow \quad A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2a_{11}-2a_{11}-2a_{21} & a_{11}+2a_{12}-2a_{12}-a_{22} \\ 2a_{21}-2a_{21} & a_{21}+2a_{22}-2a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a_{21} & a_{11}-a_{22}\\ 0 & a_{21}\end{pmatrix} =$

$= -a_{21}E_{11} + (a_{11}-a_{22})E_{12} + 0\cdot E_{21} + a_{21}E_{22}$

función $\longrightarrow$ $\boxed{(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \mapsto (-a_{21}, a_{11}-a_{22}, 0, a_{21})}$

ec. matric. $\longrightarrow$

$$\boxed{\begin{pmatrix}a_{11}'\\a_{12}'\\a_{21}'\\a_{22}'\end{pmatrix} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\1&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}a_{11}&a_{12}&a_{21}&a_{22}\end{array}\end{array} \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{21}\\a_{22}\end{pmatrix}}$$

④

$\mathbb{R}_{\le 3}[x] \xrightarrow{D} \mathbb{R}_{\le 3}[x]$

$p \mapsto \frac{dp}{dx}$

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$

$p \mapsto \frac{dp}{dx}$

$1 \to 0$

$x \to 1$

$x^2 \to 2x$

$x^3 \to 3x^2$

$$\rightarrow \boxed{\begin{pmatrix}\tilde{a}_0\\\tilde{a}_1\\\tilde{a}_2\\\tilde{a}_3\end{pmatrix} = \begin{array}{c}\begin{array}{cccc}D(1)&D(x)&D(x^2)&D(x^3)\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array} \begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}}$$

Ejercicio 3 (halla matriz imagen)

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1+x_2,\ x_3,\ x_1+x_3) = (x_1', x_2', x_3')$

$$\boxed{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}$$

c) Halla imagen W_3.

$W_3 = \{t(1,-1,1) \mid t \in \mathbb{R}\} = (1,-1,1)\mathbb{R}$

$f(t(1,-1,1)) = t\, f(1,-1,1)$

$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto (x_1+x_2,\ x_3,\ x_1+x_3)$

$[(1,-1,1) \longmapsto (0,\ 1,\ 2)]$

$\boxed{\text{La im. de } W_3 \text{ es la recta } f(W_3) = (0,1,2)\mathbb{R}}$

b) $W_2 = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{z=0\}$

$(x_1, x_2, 0) \xrightarrow{f} (x_1+x_2, 0, x_1)$

(z=0)

$\begin{cases} x_1' = t+s \\ x_2' = 0\cdot t + 0\cdot s \\ x_3' = 1\cdot t + 0\cdot s \end{cases}$

$\longrightarrow$ La imagen de W_2: $\boxed{f(W_2) = \{y=0\}}$

a) $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

*ha decidido llamar t, s a x_1, x_2 porque sí.

$= \{(t+s, -t, -s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$

$$\boxed{F(W_1) = \{(t+s, -t-s, -s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}}$$

$\begin{cases} x = t + s \\ y = -t - s \\ z = -s \end{cases} \rightarrow$

$\vec{u} = (1, -1, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, -1)$

→ Si quiero pasar a implícitas:

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ -1 & -1 & y \\ 0 & -1 & z \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & -z \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & x+y \end{array}\right) \rightsquigarrow$ Es el plano: $\{x + y = 0\}$

EJ. 5

¿es diagonalizable? ¿en qué base?

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

paso 1 $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$ $<$ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ (autovalores)

$E(\lambda_1) = E(2) = Nuc(A - 2I) = \{x + y = 0\} = (1, -1)\mathbb{R}$ (dos rectas)

$E(\lambda_3) = E(3) = Nuc(A - 3I) = \{x = 0\} = (0, 1)\mathbb{R}$

$\beta = \{u_1 = (0, 1), u_2 = (1, -1)\} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$ matriz diagonalizada