Guía de estudio:
Espacios vectoriales.

Prof. Matemáticas II

19 de febrero de 2024

Índice

1. Sistema de ecuaciones lineales

Una *ecuación lineal en las variables $x_1, \ldots, x_n$ con coeficientes reales* es una ecuación del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b \ , \tag{1}$$

donde $a_1, \ldots, a_n$, b son números reales. Si $b = 0$, la ecuación anterior se dice *ecuación lineal homogénea*. Un *sistema de ecuaciones lineales* es un conjunto finito de ecuaciones del tipo (1). El sistema se dice *homogéneo* si cada ecuación del sistema es una ecuación homegénea. En general, un sistema de m ecuaciones en las variables $x_1, \ldots, x_n$ es un sistema del tipo

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + \cdots + a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + a_{mn}x_n = & b_m \end{array} . \tag{2}$$

El anterior sistema admite una reescritura matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} . \tag{3}$$

También lo escribiremos de forma abreviada $A\vec{x} = \vec{b}$. Llamaremos *matriz del sistema* a la matriz A, y *matriz aumentada del sistema* a la matriz $(A|\vec{b})$.

Una n-upla $(s_1, \ldots, s_n)$ de números reales se dice *una solución del sistema* (2) si satisface el sistema, es decir $A\vec{s} = \vec{b}$, donde $\vec{s} := (s_1, \ldots, s_n)^t$. Diremos que el sistema (2) es un sistema *compatible determinado* si tiene una única solución. Será *compatible indeteminado* si tiene más de una solución. Caso de no tener solución el sistema se dice *incompatible*.

1.1. Algoritmo de Gauss-Jordan para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales es una herramienta básica en la resolución de problemas tanto de ciencia básica como de ingeniería. El método aplicado para resolverlos es el dado por el algoritmo de Gauss-Jordan. A continuación expondremos los pasos a seguir, si bien son necesarios algunos conceptos previos

1.1.1. Matrices escalonadas y transformaciones elementales

Fijada una matriz M, diremos que su *fila* i-ésima es *nula* si todas las entradas de esta fila son 0. Una matriz M se dice escalonada si la fila i-ésima tiene más ceros a la izquierda que la fila j-ésima para $j < i$. Por ejemplo, la siguiente matriz está en forma escalonada:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{4}$$

El sistema lineal en variavles x, y, z asociado a esta matriz sería:

$$x + 2z = 0 \ , \ 5z = 10 \ . \tag{5}$$

El primer elemento no nulo de una fila dada se llama *elemento pivote*. La columna en a la que hay un elemento pivote se llama *columna pivote*. Una matriz está en forma *escalonada reducida* es una matriz escalonada, los elementos pivote son todos unos, a los que llamaremos *unos pivote del sistema*, y los únicos elementos no nulos en las columnas pivote son los unos pivote.

Todas las matrices, cuadradas o no, se pueden escalonar usando las siguientes transformaciones, llamadas *transformaciones elementales*:

1. Intercambiar dos filas.
2. Multiplicar una fila por una constante c no nula.
3. Multiplicar una fila por una constante $c \neq 0$ y sumarsela a otra.

Ilustraremos estas transformaciones sobre la matriz M dada en (4) cuyas filas serán denotadas en números romanos por I, II, III.

$$M \overset{(1/5)II}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(-2)II+I}{\longrightarrow} E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Es de señalar que E es la matriz escalonada reducida asociada a M. El sistema lineal en variavles x, y, z asociado a esta matriz E sería:

$$x = -4 \ , \ z = 2 \ . \tag{7}$$

Observa que tanto (5) como (7) tiene por espacio de soluciones:

$$L := \{(-4, t, 2) \mid t \in \mathbb{R}\} = (-4, 0, 2) + (0, 1, 0)\mathbb{R} \ . \tag{8}$$

Por tanto, L es la recta de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $(-4, 0, 2)$ y tiene vector director $\vec{u} = (0, 1, 0)$.

El procedimiento que permite obtener una matriz escalonada reducida partiendo una matriz ampliada de un sistema lineal mediante transformaciones elementales, se llama *Algoritmo de Gauss-Jordan*. Lo describimos a continuación.

1.1.2. Algoritmo de Gauss-Jordan

El algoritmo de Gauss consta de los siguientes pasos:

- **Input:** Matriz ampliada del sistema, $(A|\vec{b})$ de tamaño $m \times (n+1)$.
- **Output:** Matriz escalonada $(C|\vec{d})$

1. Localiza la primera columna no nula de la matriz $(A|\vec{b})$. Supongamos que es la columna j.
2. Si a_{ij} es el primer elemento no nulo de la columna j, entonces
   - Intercambia fila 1 por fila j y dividela por a_{ij}. Has obtenido así el primer 1 pivote del sistema.
   - Mediante las transformaciones elementales 1, 2, 3, procede a eliminar los elementos no nulos de la columna j. Así obtendrás una columna j en el que el primer elemento es un 1 y todos los demás son 0.
3. Considera la matriz obtenida al eliminar la primera fila de la matriz anterior. Denotemos esta matriz por $(A_1|\vec{b_1})$.
4. Repite el proceso anterior para la matriz $(A_1|\vec{b_1})$, es decir ve al Paso 1, hasta que $A_1 = \mathbf{0}$ o hayas realizado m pasos del algoritmo.

Llamaremos *Algoritmo de Gauss-Jordan* para la matriz $(A|\vec{b})$ al algoritmo de Gauss aplicado a la matriz escalonada $(C|\vec{d})$ cuando en esta matriz se consideran las filas numeradas en orden inverso. Su aplicación a la matriz $(A|\vec{b})$ permite obtener la forma escalonada reducida $(E|\vec{f})$ de la matriz ampliada $(A|\vec{b})$. Un ejemplo numérico puede verse en (6).

2. Espacios vectoriales

2.1. Espacio de soluciones de un sistema lineal

Consideraremos en este apartado un sistema lineal de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$ como en (3), es decir con m ecuaciones y n incógnitas. Su espacio de soluciones S es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ cuya estructura algebraica estudiaremos en esta sección. Distinguiremos dos comportamientos distintos de este conjunto según el sistema lineal sea homogéneo o no.

Caso homogéneo. El espacio de soluciones S de un sistema homogéneo tiene las siguientes propiedades

1. El vector $\vec{0}$ siempre está en S
2. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ están en S, entonces su suma $\vec{u}+\vec{v}$ está en S.
3. Si c es una constante real y $\vec{u}$ está en S, entonces $c\vec{u}$ está en S.

Si un subsonjunto de $\mathbb{R}^n$ satisface las propiedades anteriores diremos que es un *espacio vectorial en* $\mathbb{R}^n$. En particular, el espacio de soluciones de un sistema lineal homogéneo es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Caso no homogéneo. En primer lugar, para describir el espacio de soluciones de un sistema no homogéneo $A\vec{x}=\vec{b}$, tenemos que considerar el esparcio S_h de soluciones del sistema homogéneo asociado:

$$A\vec{x}=\vec{0}.$$

Entonces, el espacio de soluciones S del sistema no homogéneo tiene las siguientes propiedades

1. El vector $\vec{0}$ nunca está en S
2. Si p_0 es una solución del sistema no homogéneo, y $\vec{u}$ está en S_h, entonces $p_0+\vec{u}$ está en S. Es decir, $S=p_0+S_h$.
3. Si p , q están en S, entonces el vector $\vec{pq}$ está en S_h.

Esta estructura algebraica que posee S la llamaremos *estructura afín*, y a S *espacio afín asociado al sistema* $A\vec{x}=\vec{b}$. El espacio de soluciones del sistema homogéneo asociado recibe el nombre de *espacio de direcciones* de S.

2.2. Espacios vectoriales generales

Un *espacio vectorial real* es un conjunto V no vacío de objetos llamados *vectores* en el que están definidas dos operaciones, llamadas *suma*, denotada po $+$ y *producto por un escalar*, denotado por $\cdot$, que satisfacen las siguientes propiedades:

E. 1. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ están en V, entonces $\vec{u}+\vec{v}$ está en V.

E. 2. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ están en V, entonces $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.

E. 3. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

E. 4. Existe un elemento $\vec{0}$, llamado *vector cero*, tal que $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$.

E. 5. Para cada vector $\vec{u}$ existe un vector, llamado *su vector opuesto* y denotado por $-\vec{u}$ tal que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.

E. 6. Si c es un escalar real y $\vec{u}$ un vector, entonces $c\cdot\vec{u}$ es un vector de V.

E. 7. Si c es un escalar real y $\vec{u}$, $\vec{v}$ están en V, entonces $c\cdot(\vec{u}+\vec{v})=c\cdot\vec{u}+c\cdot\vec{v}$.

E. 8. Si c,d son escalares reales y $\vec{u}$ un vector de V, entonces $(c+d)\cdot\vec{u}=c\cdot\vec{u}+d\cdot\vec{u}$.

E. 9. Si c,d son escalares reales y $\vec{u}$ un vector de V, entonces $(cd)\cdot\vec{u}=c\cdot(d\cdot\vec{u})$.

E. 10. Para cualquier vector $\vec{u}$de V, se tiene que $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$.

Como consecuencia de las propiedades anteriores se da también para vector $\vec{u}$ en V:

1. $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

2. $c \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

3. $-\vec{u} = (-1) \cdot \vec{u}$.

Ejemplo 1. *Listaremos a continuación varios ejemplos de espacios vectoriales.*

a) *El espacio de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo.*

b) $V = \mathbb{R}^n$ *con las operaciones:*

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n), \tag{9}$$

$$c \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (ca_1, \ldots, ca_n). \tag{10}$$

c) $V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$, *el espacio de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que* 2.

d) $V = \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, *el espacio de matrices* $m \times n$ *con entradas reales.*

e) $V = \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$, *el espacio de funciones continuas* $f : D \to \mathbb{R}$ *definida en el dominio* D.

f) *El espacio de sucesiones números reales es un espacio vectorial.*

2.2.1. Subespacios vectoriales

Consideremos en este apartado un espacio vectorial real V y W un subconjunto no vacío de V. Diremos que W es un *subespacio vectorial* de V, si en W se satisfacen las propiedades:

1. El vector $\vec{0}$ siempre está en W

2. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ están en W, entonces su suma $\vec{u} + \vec{v}$ está en W.

3. Si c es una constante real y $\vec{u}$ está en W, entonces $c\vec{u}$ está en W.

Ejemplo 2. *En* $\mathbb{R}^3$ *los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales:*

- $W_1 = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$.

- $W_2 = \{(-2t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$.

En algunas ocasiones tenemos que considerar espacios vectoriales generados por una familia de vectores. Estos espacios admiten una descripción matemática precisa. La detallamos a continuación.

Definición 1. *Dado unos vectores* $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_\ell}$ *de un espacio vectorial* V, *denotaremos por* $<\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_\ell}\}>$ *al conjunto*

$$< \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_\ell}\} > := \{c_1 \vec{v_1} + \cdots + c_\ell \vec{v_\ell} \mid c_j \in \mathbb{R}\ \}\,. \tag{11}$$

Este subespacio vectorial de V *se llama el subesppacio vectorial generado por* $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_\ell}\}$.

Ejemplos de estos subespacios son las rectas y planos de $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen.

Observación 2. *La familia de subespacios vectoriales de un espacio vectial tiene algunas propiedades algebraicas importantes. Por ejemplo*

2.3. Dependencia lineal y bases. Dimensión

En un espacio vectorial V pueden existir relaciones entre sus elementos de varios tipos. En esta sección estudiaremos las relaciones, llamadas lineales entre los vectores.
Diremos que $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_\ell}$ son *linealmente independientes* si cada combinación lineal del tipo $c_1\vec{v_1} + \cdots + c_\ell\vec{v_\ell} = \vec{0}$ sólo se da si los escalares son nulos, es decir $c_1 = 0, \ldots c_\ell = 0$. En otro caso diremos que son linealmente dependientes.
Si el espacio vectorial V está generado por una familia finita de vectores $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_d}$ que son linealmente independientes, entonces decimos que el conjunto $B = \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_d}\}$ son una *base* de V. El número d se llama la *dimensión* de V, y se escribe $\dim V = d$.

Ejemplo 3. 1. *El espacio vectoria* $\mathbb{R}^3$ *tiene dimensión* 3.

2. *El espacio de matrices* 2×3 *tiene dimensión* 6.

3. *El espacio de los polinomios de grado* ≤ 2 *tiene dimensión* 3.

2.4. Coordenadas y bases

Fijemos un espacio vectorial V de dimensión d, y una base $B = \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_d}\}$. Consideremos un vector arbitrario $\vec{w} \in V$. Entonces este vector se puede expresar como combinación lineal de los vectores de B ya que $V =< B >$. En concreto,

$$\vec{w} = \lambda_1\vec{v_1} + \cdots + \lambda_d\vec{v_d}. \tag{12}$$

La d-upla $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ se llama las *coordenadas de en la base B*.
Es de señalar que tpa upla depende de la base. Es decir, si cambiamos la base a otr B', cambian las coordenada que identifican al mismo vector $\vec{w}$. Las fórmulas que relacionan las coordenadas en la base B con las coordenadas en la base B' se llaman *fórmulas de cambio de corrdenadas de la base B a la base B'*. Ilustraremos este hecho con un ejenplo.

Ejemplo 4. *Consideremos la base canónica de* $\mathbb{R}^2$, $B = \{\vec{e_1} = (1,0), \vec{e_2} = (0,1)\}$, *y la base* $B' = \{\vec{u_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2}, \vec{u_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2}\}$.
Entonces, fijado un vector $\vec{w}$ en R^2, se tiene:

$$\vec{w} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} = \lambda_1'\vec{u_1} + \lambda_2'\vec{u_2}.$$

Entonces,

$$\vec{w} = \lambda_1'(\vec{e_1} + \vec{e_2}) + \lambda_2'\vec{e_1} - \vec{e_2}) = (\lambda_1' + \lambda_2')\vec{e_1} + (\lambda_1' - \lambda_2')\vec{e_2}.$$

En consecuencia, obtenemos la siguiente fórmula de cambio de base de B a B':

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix}.$$