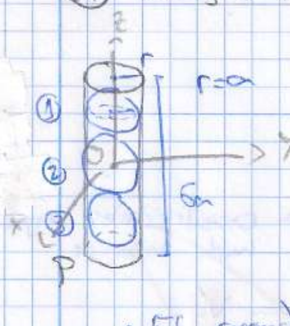
(Pec-1-EM) Álvaro Jerónimo Sánchez

EJERCICIOS:

(E1) ¿E y V en O?



- El campo en O será nulo, ya que se encuentra dentro de una esfera, y el campo dentro de un conductor es $\boxed{E_0 = 0}$

- Para hallar el potencial aplicamos superposición.

- El creado por el cilindro sin tener en cuenta los huecos es:

$V_{cil} = k\int_V \frac{\rho}{|r-r_0|} dV \rightarrow$ es 0 en el punto O : $\underline{E_{cil(0)} = 0}$

- La esfera central (2) no tendrá influencia ya que r=0 y el E que resta es 0 los otros dos huecos son simétricos por lo que:

$V_{1y2} = 2V_1$ (Puedo usar $\phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$ tanto para esferas macizas como huecas)

$\oint E \cdot dS = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot V}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho V}{S\varepsilon_0} = \frac{\rho 4\pi r^3}{3 \cdot 4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho r^3}{3 r_0^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho r^3}{12 a^2 \varepsilon_0}$

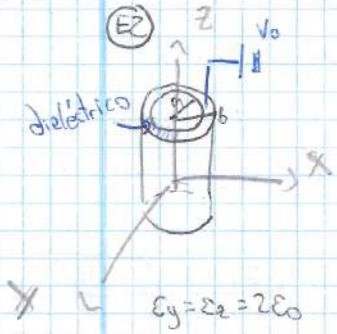
r_0 es el radio de la esfera Gaussiana que es $= 2a$

$V_{1y2} = -2\int_0^{2a} E \cdot dr = -2\frac{\rho}{12a^2\varepsilon_0}\int_0^{2a} r^3 dr = \frac{-2\rho(2a)^4}{4 \cdot 12 a^2 \varepsilon_0} = \frac{-2\rho a^4}{3a^2\varepsilon_0} = \frac{-2\rho a^2}{3\varepsilon_0}$

- Restamos el potencial de los huecos al del cilindro para hallar el total:

$V_{(0)} = 0 - V_{1y2} = \boxed{\frac{2\rho a^2}{3\varepsilon_0}}$

E2



$\varepsilon_y = \varepsilon_z = 2\varepsilon_0$

$\varepsilon_x = 5\varepsilon_0$

(anisótropo)

a) $\oint_S \vec{D}\, d\vec{s} = Q_{enc} = D\oint_S ds = D\, 2\pi r \cdot l$ (radio sup. gauss.)

(cte.)

$\Rightarrow D\, 2\pi r \cdot l = \dfrac{\sigma \cdot S}{1}$; La carga encerrada es la del cilindro con radio "a", ya que los dieléctricos no tienen cargas libres.

$\Rightarrow D 2\pi r \cancel{l} = \dfrac{\sigma 2\pi a \cancel{l}}{1} \Rightarrow \boxed{D = \dfrac{\sigma a}{r}}$ será $\perp$ a la superficie

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \rightarrow D = E\varepsilon$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma a \cos\varphi}{r\, 5\varepsilon_0}\vec{i} + \frac{\sigma a \sin\varphi}{r\, 2\varepsilon_0}\vec{j}}$$

b.) El V_0 se reparte y la suma de $Q_{int} + Q_{ext} = 0$. Diciendo que el cilindro interior tiene una densidad de carga $\boxed{\sigma = \sigma_a}$, podemos hallar la del exterior:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{Q_a}{2\pi a l} \Rightarrow Q_a = \sigma_a 2\pi a l \\ \sigma_b &= \frac{Q_b}{2\pi b l} \Rightarrow Q_b = \sigma_b 2\pi b l \end{aligned}\right\}$$

$Q_a = -Q_b$

$\sigma_a 2\pi a \cancel{l} = -\sigma_b 2\pi b \cancel{l}$

$\boxed{\sigma_b = \dfrac{-a}{b}\sigma_a}$

c.) $\boxed{\dfrac{Q_a}{l} = \sigma_a 2\pi a} = \lambda_a$

$\boxed{\dfrac{Q_b}{l} = -\dfrac{a}{b}\sigma_a 2\pi b} = \lambda_b$

(observamos que $\lambda_a = -\lambda_b$)

$\rightarrow \dfrac{C}{l} = \dfrac{\lambda}{V_0} = \dfrac{\sigma_a 2\pi a}{V_0}$

· Hallamos V_0:

$$V_0 = \int_C E\, dr = \int_a^b \frac{D}{\varepsilon}\, dr = \int_a^b \frac{\sigma a}{r\varepsilon}\, dr = \int_a^b \frac{Q}{2\pi r \varepsilon} = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\cdot \ln\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{C}{l} = \frac{\lambda}{V_0} = \boxed{\frac{2\pi\varepsilon}{\ln b/a}}$$

E3)

a.) $V_0 = k\int_V \frac{\rho}{r}\,dV = k\rho\left(\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{1}{\cancel{r}}\,\cancel{r}\,d\theta\; r\sin\theta\, d\varphi\, dr\right) =$

$= k\rho\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r(-\cos\pi+\cos 0)\,d\varphi\, dr\right) = k\rho\left(\int_0^{R} r\,2\pi\, dr\right) =$

$= k\rho\, 2\pi R^2 \longrightarrow V_0 = \frac{kQ\,2\cancel{\pi} R^{\cancel{2}}}{4/3\;\cancel{\pi} R^{\cancel{3}}} \Rightarrow Q = \frac{2V_0R}{3k} = \boxed{\frac{8V_0R\pi\varepsilon_0}{3}}$

b.)

$R_B = 2R_A$

La carga se repartirá entre ambas superficies, y ya que están en contacto, su potencial será el mismo:

$\boxed{V_A = V_B = V_0} \longrightarrow \frac{3Q_A}{8\pi\varepsilon_0 R_A} = \frac{3Q_B}{8\pi\varepsilon_0 R_B} \Rightarrow \frac{Q_A}{R_A} = \frac{Q_B}{R_B}$

$\xrightarrow{(R_B = 2R_A)} \boxed{Q_A = \frac{Q_B}{2}}$

c.)

$s = 10^{-3}R$

$\boxed{V_A = 0}$

~~$Q_A \simeq 0$~~

Ambas esferas tienen capacidades distintas, por lo que es necesario saber la carga restante en B:

$Q_B = C_{BB}V_B + \cancel{C_{BA}V_A}^{0}$

$V_B = V_0$

$\Rightarrow \boxed{Q_B = V_0\, 4\pi\varepsilon_0 R_A\left(\frac{1}{3}\ln\frac{R_A}{10^{-3}R} + 2'184\right)}$ $\boxed{V_B \simeq V_0}$

$Q_A = \cancel{C_{AA}V_A}^{0} + C_{AB}V_B = \boxed{-V_0\, 4\pi\varepsilon_0 R_A\left(\frac{1}{3}\ln\frac{R_A}{10^{-3}R} + 0'481\right)}$

• CUESTIONES:

(Q2)

$Q_{zz} > Q_{xx} = Q_{yy}$ $\quad$ • Sabiendo que $Q_{xx}+Q_{yy}+Q_{zz}=0$:

$(Q_{zz} = \text{"}Q\text{"})$

$$2Q_{xx}+Q_{zz}=0 \Rightarrow Q_{xx}=Q_{yy}=\frac{-Q}{2}$$

$$V_E = k\frac{1}{2}\sum_j\sum_k \frac{jk}{r^5}Q_{jk} =$$ Tiene forma diagonal por lo que $Q_{cruzadas}=0$

$$= k\frac{1}{2}\left(\frac{r_x^2(-Q)}{r^5\,2} - \frac{r_y^2\,Q}{r^5\,2} + \frac{r_z^2\,Q}{r^5}\right) = \boxed{\frac{kQ}{4r^5}\left(-r_x^2-r_y^2+2r_z^2\right)}$$

(Q3)

$\varepsilon = 21\varepsilon_0$

$p_0 = 9'7\cdot 10^{-30}$ C·m

$E_{ext} = 10^6$ V/m

$d_{ac} = 784$ kg/m³

$P_M = 58'08$ g/mol

$$P = \varepsilon_0\chi\cdot E \longrightarrow = \boxed{\varepsilon_0\cdot 20\cdot 10^6 \quad C\cdot m}$$

$$\varepsilon = 21\varepsilon_0 = \varepsilon_0(1+\chi) \Rightarrow \chi = 20 \qquad = \boxed{1'77\cdot 10^{-4}\ C\cdot m}$$

• Para calcular cuantos dipolos (moléculas) deben estar alineadas, igualamos la polarización de las moléc/m³ (con un cociente "a") a la deseada:

$$P = a\,\frac{p_0\cdot n^{\circ}\text{moléc}}{m^3}$$

$$784\,\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{1\,mol}{58'08\,g}\cdot\frac{1000\,g}{1\,kg}\cdot\overbrace{\frac{6'022\cdot 10^{23}\,\text{moléc}}{1\,mol}}^{N_A} = 8'13\cdot 10^{27}\,\frac{\text{moléc}}{m^3}$$

$$\hookrightarrow a = \frac{P}{8'13\cdot 10^{27}\cdot p_0} = \boxed{0'0022} \rightarrow \simeq \boxed{0'22\%}$$

(Q4)

Para la esfera interior, la exterior se comporta como una q puntual en su centro.

$$\boxed{V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_1}+\frac{Q_2}{R_2}\right)}$$ (potencial propio + el de Q_2)

$\rightarrow p_{11}$ ★

Para la exterior, la interior actúa como puntual en el centro también:

$$\boxed{V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1+Q_2}{R_2}\right)}$$

• Sabiendo que $V_i = \sum_j p_{ij}Q_j$, podemos extraer los coeficientes de potencial de las expresiones halladas: ★

$$\boxed{\begin{matrix} p_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} & p_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \\ p_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} & p_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \end{matrix}} \rightarrow \boxed{p_{21} = p_{12}}$$

• Hallamos los de capacidad:

$$C = P^{-1} \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1/R_1 & 1/R_2 \\ 1/R_2 & 1/R_2 \end{pmatrix} \rightarrow |P| = \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2^2} k$$

$$C = \frac{1}{|P|} \begin{pmatrix} 1/R_2 & -1/R_2 \\ -1/R_2 & 1/R_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} & \frac{-R_1 R_2}{R_2 - R_1} \\ \frac{-R_1 R_2}{R_2 - R_1} & \frac{R_2^2}{R_2 - R_1} \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\begin{array}{ll} C_{11} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} & C_{12} = \frac{-4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \\ C_{22} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}{R_2 - R_1} & C_{21} = \frac{-4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \end{array}} \rightarrow \boxed{C_{12} = C_{21}}$$

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

El alumno Álvaro Jerónimo Sánchez con DNI número 09847051S, declara que es el autor único e individual de este trabajo, y que no ha usado sistemas de inteligencia artificial generativa para la redacción u obtención de resultados.

Fdo: