TEMA 3 - CÁLCULO DIFERENCIAL

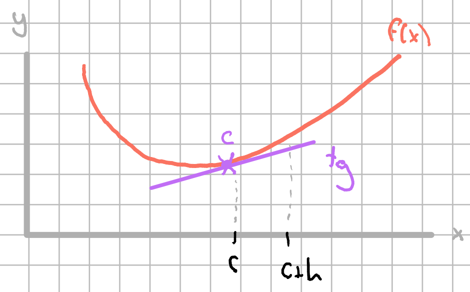
DEFINICIÓN

→ **TG**

La recta tangente es aquella a la que tiende el conjunto de rectas secantes a un punto.

Cuanto más cerca de "c", más se parece tg a $f(x)$.

(pto. en el que he hecho tg)



(un nº cualquiera)

(intervalo abierto)

Sea $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ es derivable en c si existe: $\left[\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \right]$

OBSERVACIÓN: si existe $f'(c)$, la recta tg es $y = f(c) + f'(c)(x-c)$, pasa por $(c, f(c))$ y tiene pendiente $= f'(c)$

→ **REGLAS DE DERIVACIÓN**

Sean f y g derivables en c, entonces:

- $f+g$ también se puede derivar en c, y se cumple:
  $$(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$$
- $f \cdot g$ también se puede derivar en c, y se cumple:
  $$(f \cdot g)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$
- f/g también se puede derivar en c, si $g'(c) \neq 0$, y se cumple:
  $$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$$
- **CADENA:** $f \circ g$ también es derivable en c, y se cumple:
  $$(f \circ g)'(c) = f'(g(c)) \cdot g'(c)$$
- **INVERSA:** f^{-1} también es derivable en $y = f(x)$, y se cumple:
  $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

OBSERVACIÓN: $(f \circ f^{-1})'(y) = y$

EJEMPLOS ¿Cuál es $f'(x)$?

(1) $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$, ya que $a = cte$

pendiente $= 0$

Su tg será $= a$.

DEMOSTRACIÓN

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

(2) $f(x) = mx+b \Rightarrow f'(x) = m$

su tg será $= m$

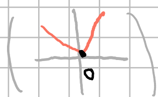
(3) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

DEMOSTRACIÓN

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$$

(4) $f(x) = |x| \Rightarrow f'(x) \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$\nexists f'(x)$ si $x = 0$



DEMOSTRACIÓN

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$$

OBSERVACIÓN: Si f es derivable en c, es continua en c, pero no viceversa.

será continua si: $\left[\lim_{x\to c} f(x) = f(c)\right]$

(5) $f(x) = x^{-n}$

$$f(x) = \frac{1}{x^n} = \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}$$

(6) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$

es la inversa de la exp.: $f'(x) = \frac{1}{g' \cdot g^{-1}(x)}$

(7) $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

(8) $f(x) = a^x \Rightarrow a^x \ln a$

↳ $(a^x = e^{x \ln a})$

(9) $f(x) = \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} = \ln x \cdot \frac{1}{\ln b} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln b}$

(10) $f(x) = x^a \Rightarrow f'(x) = a x^{a-1}$

↳ $(= e^{a \ln x} \Rightarrow f'(x) = e^{a \ln x} \frac{a}{x})$

Derivadas sencillas

(1) $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

(2) $f(x) = x^{-n} \rightarrow f'(x) = -n x^{-n-1}$

(3) $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$

(4) $f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

(5) $f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = a^x \ln a$

(6) $f(x) = x^a \rightarrow f'(x) = a x^{a-1}$

(7) $f(x) = \operatorname{sen} x \rightarrow f'(x) = \cos x$

(8) $f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$

(9) $f(x) = \operatorname{tg} x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

(10) $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\rightarrow f'(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(11) $f(x) = \operatorname{senh} x \rightarrow f'(x) = \cosh x$

Ejercicios

(1) $f(x) = x^3 \ln x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} = x^2 (3\ln x + 1)$

(2) $f(x) = 5x - 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{5(x^2+1) - (5x-2)2x}{(x^2+1)^2}$

(3) $f(x) = \cos x^3 \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x^3 \cdot 3x^2$

(4) $f(x) = (\cos x)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(\cos x)^2 (-\operatorname{sen} x)$

(5) $f(x) = \ln(1 + (x^2-3)^5) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+(x^2-3)^5} \, 5(x^2-3)^4 \cdot 2x$

(6) $f(x) = \arccos x = \cancel{\frac{1}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}}$

$g(x) = \cos x \rightarrow f(x) = g^{-1}(x)$

$\Rightarrow f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos x)} \rightarrow = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2})} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arccos x = \alpha$ $\quad \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

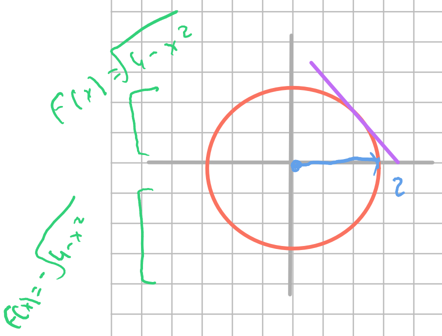
$x = \cos\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - x^2 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-x^2}$

(7) ¿Recta tg a $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en $(2,3)$?

$f(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow \underbrace{f'(2) = -2}_{\text{PENDIENTE}} \rightarrow \frac{y-3}{x-2} = -2 \Rightarrow \boxed{y-3 = -2(x-2)}$

→ Derivación implícita



$x^2+y^2=4$

$\sqrt{x^2+y^2}=2$

$y^2=4-x^2 \Rightarrow \left[y=\pm\sqrt{4-x^2}\right]$

¿Tg. en $x=1$?

$1^2+y^2=4$

$y^2=3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{3}$ Cojo el + porque está en la recta.

↳ [Tg en $(1,\sqrt{3})$]

$f(x)=(4-x^2)^{1/2} \rightarrow f'(1)=\frac{-1}{\sqrt{3}}$

• [AHORA CON DERIV. IMP.]

$x^2+y^2=4$ ← cambio la y por y(x): $x^2+y^2(x)=4$

DERIVO y, y añado y': $2yy'$

$2x+2yy'=0 \Rightarrow 2yy'=-2x$

para $y\neq 0 \rightarrow y'=\frac{-x}{y} \rightarrow y'(1,\sqrt{3})=\frac{-1}{\sqrt{3}}$

• $x^2+2y=\ln(y^2+1)+4$ ¿Tg en $(2,0)$?

DERIV. ↳ $2x+2y'=\frac{1}{y^2+1}(2yy')$

$2x(y^2+1)+2(y^2+1)=2yy'$

$y'(y-(y^2+1))=x(y^2+2)$

$y'(-1+y-y^2)=x(y^2+1) \rightarrow y'=\frac{x(y^2+1)}{-1+y-y^2}$

$\Rightarrow y'(2,0)=\frac{2}{-1}=-2$

↳ $\frac{y-0}{x-2}=-2 \Rightarrow \boxed{\text{Tg. } y=-2(x-2)}$

- $f(x) = (\cosh x + x^2)^{(x^2+1)}$

$f(x) = e^{(x^2+1)\ln(\cosh x + x^2)}$

$\Rightarrow f'(x) = e^{(x^2+1)\ln(\cosh x + x^2)}\left((x^2+1)\ln(\cosh x + x^2)\right)'$

$= (\cosh x + x^2)^{(x^2+1)}\left[2x\ln(\cosh x + x^2) + (x^2+1)\frac{1}{\cosh x + x^2}(\operatorname{senh} x + 2x)\right]$

(OTRA MANERA) $\hookrightarrow$ DERIV. LOGARÍTMICA:

$y = (\cosh x + x^2)^{(x^2+1)} \Rightarrow \ln y = \ln(\cosh x + x^2)^{(x^2+1)}$

$\ln y = (x^2+1)\ln(\cosh x + x^2)$

$\frac{1}{y}y' = 2x\ln(\cosh x + x^2) \rightarrow y' = (\cosh x + x^2)^{(x^2+1)}\left[2x\ln \ldots\right]$

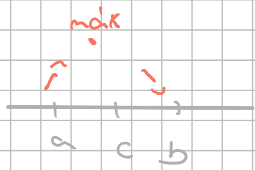
→ Fn. CREC. Y DECREC.

Una fn. en un intervalo es creciente si $f(x_1) \leq f(x_2)$ para $\mathbb{R}$.
↳ decreciente si $f(x_1) \geq f(x_2)$ para $\mathbb{R}$.
↳ estrictamente si $f(x_1) < f(x_2)$ ($>$)

→ CRITERIO 1ª DERIVADA

- Sea $f(a,b)$ derivable en $\mathbb{R}$
  - * Si $f'(x) > 0$ → f CRECIENTE
  - * Si $f'(x) < 0$
- Sea $f(a,b)$ derivable en $(a,b)\setminus\{c\}$ (AL REVÉS PARA MÍN)
  - * Si $f'(x) > 0$
  - * Si $f'(x) < 0$

  → c es un máximo



- Si $f[a,b]$ es continua → Tiene máx y mín.

EJEMPLO Halla extremos absolutos de $f(x)=3x^4-4x^3$ en $[-1,2]$.

• **MÁX/MÍN:** $f'(x)=0 \Rightarrow 12x^3-12x^2=0 \Rightarrow x^2(12x-12)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

¿Cuál es máx y cuál mín?

Pt. críticos $\left[\begin{array}{l} f(0)=0 \leftarrow \text{máx en } x=0 \\ f(1)=-1 \leftarrow \text{mín en } x=1 \end{array}\right.$

(TAMBIEN SE PUEDE HALLAR CON CRECIMIENTO

(si queremos hallar máx/mín locales, también hacer $f(x)$ de los extremos)

• **CONCAVIDAD:**

Cóncava hacia arriba

→ **CRITERIO 2ª DERIV.**

• Si $f''(x)>0 \rightarrow f$ es cóncava en I hacia arriba

$<0 \rightarrow f$ es cóncava hacia abajo

• Si existe pt. inflexión $\rightarrow f''(c)=0$

(no ocurre con todos los x de $f''(x)$)