[11/09/2023]

Números complejos

Se emplean para resolver problemas que no pueden ser resueltos con nºs reales.

$\mathbb{R}$ (recta real)

$[x^2+1=0]$

$x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}$ $\nexists\,\mathbb{R}$

$\boxed{\sqrt{-1}=i}$

$(i^2=-1,\ i^3=-1\sqrt{-1}=-i, \dots)$

→ Con ecuaciones más grandes

$[x^2+x+1=0]$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\underbrace{\frac{-1}{2}}_{\text{parte real}}\pm\underbrace{\frac{\sqrt{-3}}{2}}_{\text{parte imag.}}$$

$\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

→ **Representación**

- **Binomial:** $z=x+iy$
- **Par:** (x,y)
- **Módulo:** $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ (es un nº real positivo)
- **Trigonométrica:** $z=|z|\cos\varphi+i|z|\operatorname{sen}\varphi$
  - ↳ Por trigonom.: $\begin{cases} x=|z|\cos\varphi \\ y=|z|\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$ Sustituir en x e y
- **Mód.-arg.:** $|z|_\varphi$ $(\arg(z)=\{\varphi+2\pi k\})$ cualquier nº $\mathbb{Z}$

↓

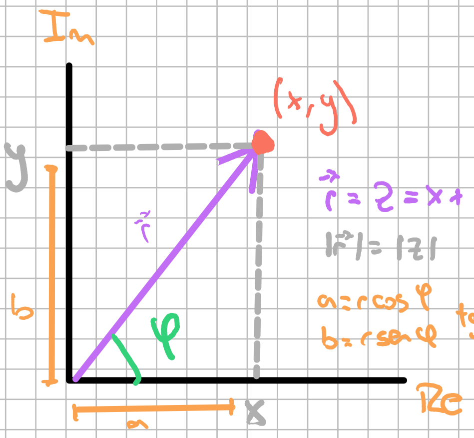
- **Fórmula de Euler:** $\boxed{e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi}$

/polar

$(\Rightarrow z=|z|\cdot e^{i\varphi}=|z|_\varphi)$

Los números complejos se pueden representar asignando un eje a la parte real y otro a la imaginaria.

(Se puede representar como punto o vector)



$\vec{r}=z=x+iy$

$|\vec{r}|=|z|$

$a=r\cos\varphi$

$b=r\operatorname{sen}\varphi$

$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$

→ Para hallar φ:

$$\tan\varphi=\frac{y}{x}\Rightarrow\varphi=\arctan\frac{y}{x}+\begin{cases}0 & \text{si } x\geq 0\\ \pi & \text{si } x<0\end{cases}$$

$\begin{cases} x=|z|\cos\varphi \\ y=|z|\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$

Si no hay parte real, φ será 90° ó -90° dependiendo del signo de la parte imaginaria

→ Argumento principal

Se denota como $\operatorname{Arg}(z)$, y es el único $\arg(z)$ que está entre $(-\pi,\pi]$.

(con minúscula ⇒ cualquier argum.)

→ OPERACIONES

- **SUMA / RESTA:** Componente a componente. (COMO VECTORES)

  Conviene operar en representación CANÓNICA.

- **MULTIPLICACIÓN:**
  - Existe propiedad distributiva.
  - $z \cdot 1 = z$
  - Existe z^{-1} excepto si $z=0$.
  - FACTOR COMÚN: $z_1 = |z_1| e^{i\varphi_1}$, $z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2}$ $\Big\{$ $z = z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

    (también válido en división)

- **DIVISIÓN:**
  - CONJUGADO: $z = x+yi \Rightarrow z^* = x - yi$ (CAMBIO SIGNO A UNA COMP.)

    $z = |z| \cdot e^{i\varphi} \Rightarrow z^* = |z| \cdot e^{-i\varphi} = |z| (\cos(-\varphi) + i \operatorname{sen}(-\varphi)) = |z| (\cos\varphi - i \operatorname{sen}\varphi)$

  Se usa para pasar a forma CANÓNICA.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \cdot \frac{y_2 - y_2 i}{x_2 - y_2 i} = \frac{(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 i^2) + (x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2) i}{x_2^2 - (y_2 i)^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}}_{\text{Real}} + \underbrace{\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}}_{\text{Im.}} i$$

Ej.) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$

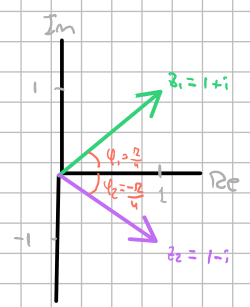
- $z_1 \cdot z_2 = (1+i)(1-i) = 1 - i + i - i^2 = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$

  2ª forma $\rightarrow \sqrt{2} e^{i\pi/4} \cdot \sqrt{2} e^{-i\pi/4} = 2$

- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1-i)}{1-i-i+i^2} = \frac{1-i+i-i^2}{-2i} = \frac{-4i}{4i^2} = i$

  $\rightarrow \frac{\sqrt{2} e^{i\pi/4}}{\sqrt{2} e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/2} = i$

  mód. $=1 \Rightarrow$ EJE ORDENADAS



→ POTENCIAS

$$z^k = |z|^k e^{i(k\varphi)}$$

$|z|$ → dist. del origen

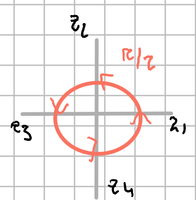
$\left[z = x + yi \quad z^4 = 1 \right] = e^{i0} \Rightarrow z_1 = 1^{1/4} = e^{i \cdot 0/4} = e^{i0} = \boxed{1}$ (4 SOL)

(0)

(2π) DA 1 VUELTA → $z_2 = (e^{i2\pi})^{1/4} = e^{i\pi/2} = \boxed{i}$

(4π) DA 2 VUELTAS → $z_3 = (e^{i4\pi})^{1/4} = e^{i\pi} = \boxed{-1}$

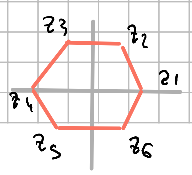
(6π) DA 3 VUELTAS → $z_4 = (e^{i6\pi})^{1/4} = e^{i3\pi/2} = \boxed{-i}$



4 SOLUCIONES (ya que está elevado a 4)

$z^n \rightarrow$ Nº SOL $= n$

Si FUESE $z^6 = 1$

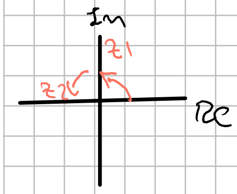


$z_1 = e^{i0}$	$z_4 = e^{i\pi}$
$z_2 = e^{i\pi/3}$	$z_5 = e^{i4\pi/3}$
$z_3 = e^{i2\pi/3}$	$z_6 = e^{i5\pi/3}$

(ÁNGULOS HEXÁGONO)

[14/09/2023]

$[z^4 = i] = e^{i\pi/2} \Rightarrow z_1 = i^{1/4} = \left(e^{i\pi/2}\right)^{1/4} = e^{i\pi/8}$



$z_2 = \left(e^{5\pi/2}\right)^{1/4} = e^{5\pi/8}$

$z_3 = \left(e^{9\pi/2}\right)^{1/4} = e^{9\pi/8}$

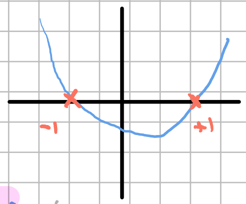
$z_4 = \left(e^{13\pi/2}\right)^{1/4} = e^{i13\pi/8}$

~EN GENERAL: $[z^{1/n}]$

$\Rightarrow z = |z| e^{i\varphi} \rightsquigarrow z^{1/n} = |z|^{1/n} e^{i(\varphi + 2\pi k)}$ $(k = 0, 1, 2 \dots n-1)$

→ TEOREMA GENERAL DEL ÁLGEBRA

- $P_n(x) = x^2 - 1$ 2 RAÍCES $P_n(x) = 0 \Rightarrow x < \begin{matrix} -1 \\ +1 \end{matrix}$



- $P_n(x) = x^2 + 2x + 1$
- $P_n(x) = x^2 + x + 1$ $P_n(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} < \begin{matrix} x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{matrix}$ (negativo) $(i = \sqrt{-1})$
- $P_n(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ $P_n(x) = 0$

RUFFINI

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & & -1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$x_1 = -1$

$\Rightarrow 0 = (x+1)(x^2+1)$

$\Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow < \begin{matrix} x_2 = i \\ x_3 = -i \end{matrix}$