T.2 - TRANSFORMACIONES LINEALES

F es transformación lineal si:

① $F(\vec{u}+\vec{v}) = F(\vec{u}) + F(\vec{v})$

② $F(\lambda\vec{u}) = \lambda F(\vec{u})$ (λ = cte)

(Ker) núcleo

$Nuc(F) = \{\vec{v} \in V_1 \mid F(\vec{x}) = 0\}$ $[F(\vec{0}) = 0]$

imagen

$Im(F) = \{\vec{w} \in V_2 \mid \exists \vec{u} \in V_1 \text{ con } F(\vec{u}) = \vec{w}\}$

PROPIEDADES DE F

- Si $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base de $V_1 \Rightarrow F(u_1), \dots, F(u_n)$ determinan la Im de cualquier vector de V_1
- Ec matricial de F, $\vec{y} = A\vec{x}$

EJEMPLO 1 ec. mat., Nuc., Im.

$\underbrace{\begin{bmatrix} F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (2x+y, x-y) \end{bmatrix}}_{\text{halla su ec. matricial}} = (x', y') \to \begin{cases} x' = 2x+y \\ y' = x-y \end{cases} \to \boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$

- Hallamos Núcleo: $Nuc(F) = \{(x,y) \mid \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}\} \xrightarrow{\text{resuelvo}} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \to \boxed{\{(0,0)\}}$ (núcleo)

son los que van a 0

- Hallamos Imagen: $Im(F) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 = V_2 \mid \exists (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2 = V_1 \text{ con } \begin{cases} 2u_1+u_2 = a \\ u_1-u_2 = b \end{cases}\} \xrightarrow{\text{resuelvo}} \boxed{\begin{cases} u_1 = \frac{a+b}{3} \\ u_2 = \frac{a-2b}{3} \end{cases}}$

x, y son u_1, u_2, IGUALO A a, b

! Si calculase $F(u_1,u_2)$ daría $x=a$ $y=b$ ("CONTRAIMAGEN")

CALCULAR EC. MATRICIAL DE $F: V_1 \to V_2$

$V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}^m$

$\{u_1, \dots, u_n\} = B_1$ $B_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$

$F(u_1) = a_{11}\vec{V_1} + \dots + a_{n1}\vec{V_n}$

$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$ $F(u_m) = a_{1m}v_1 + \dots + a_{nm}v_n$

EJERCICIO 1 (hoja 2)

$g_1: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1+x_2, x_3, x_1+x_2+x_3) = (x_1', x_2', x_3')$

- En la base canónica: $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

- Ahora en la base $B = \{ u_1 = (1,0,1), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,1,1) \}$

hallamos f de u_1, u_2, u_3

$f(u_1) = f(1,0,1) = (1+0, 1, 1+0, 1) = (1,1,2)$ ← tenemos que pasarlo a base B (encontrar λ_i)

$(1,1,2) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$

$f(u_2) = f(0,1,0) = (0+1, 0, 0+1+0) = (1,0,1) = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$ $(1,0,0)$

$f(u_3) = f(0,1,1) = (0+1, 1, 0+1+1) = (1,1,2) = 1u_1 + 0u_2 + 1u_3$ $(1,0,1)$

¿$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$? $(1,1,2) = \lambda_2(1,0,1) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(0,1,1) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$

$f(u_1) = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 = (1,0,1)$

$$\boxed{\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \\ \lambda_3' \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} fu_1 & fu_2 & fu_3 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}}$$

$\uparrow (1,0,1)$ $\uparrow (1,0,0)$ $\nwarrow (1,0,1)$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \longmapsto (\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3') = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, 0, \lambda_1 + \lambda_3)$

- ¿$Nuc(g_1)$? $= \{ A\vec{x} = \vec{0} \}$

- ¿$Im(g_1)$? $=$ <columnas

EJEMPLO 2

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

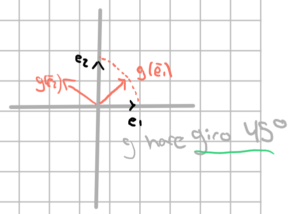
$(x,y) \to \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right) \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\vec{e}_1 = (1,0) \longrightarrow (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

$\vec{e}_2 = (0,1) \longrightarrow (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\alpha = 45^\circ$



g hace giro 45°

DIAGONALIZACIÓN

[$F: V \to V$, $\vec{y} = Ax$ ← A = matriz] Diremos que λ es un valor propio de F si existe $\vec{v} \neq \vec{0}$ tal que $F(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.

- Con la ec. matricial: "AUTOVECTOR" "AUTOVALOR" identidad.

  Buscamos vector $\vec{v}$ tal que $A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

$E(\lambda) = \{\vec{v} \in V \mid F(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\} = \{\vec{v} \mid (A-\lambda)(\vec{v}) = \vec{0}\} = \mathrm{Nuc}(A) - \lambda \cdot I$

EN EL EJ. 1

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ buscamos λ tal que $\left[\underset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} - \lambda \cdot \underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

① Para encontrar λ, determinante.

$P_A(x) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}}_{(A-\lambda I)} = \underbrace{\lambda^2 - \lambda - 3}_{\text{polinomio característico}} \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\cdot 3}}{2} < \begin{matrix} \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \end{matrix}$ ← factores de escala

② Autovalores

$2-\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$, $2-\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

$E(\lambda_1) = \left\{ \frac{3-\sqrt{13}}{2}x + y = 0 \right\} = \left(-1, \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\mathbb{R} = \vec{u}\,\mathbb{R}$

$E(\lambda_2) = \left\{ \frac{3+\sqrt{13}}{2}x + y = 0 \right\} = \left(-1, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\mathbb{R} = \vec{v}\,\mathbb{R}$

[En base $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\} \Rightarrow F(\vec{u}) = \lambda_1\vec{u}$, $F(\vec{v}) = \lambda_2\vec{v}$ y tiene en base $\mathcal{B}$ la matriz $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$]

EN EL EJ. 2

$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \longrightarrow$ buscamos λ tal que $[A - \lambda I]\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

① $p(x) = \det(A) = \lambda^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\lambda + 1 = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{2/\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2}$ ← $\nexists$ [$\nexists$ coef. dilatación/contracción]

(Diagonaliz.)

Teorema:

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$
$m_1 = d_1$
$m_r = d_r$
$\Big| \to f$ es diagonaliz.

★ Si es simét. también

▸ **Método para encontrar λ:** (autovalores)

autoval. [Paso 1] $P_A(\lambda) = |A - \lambda I|$

$P_A(\lambda) = 0 \to \begin{cases} \lambda_1, \text{ de multiplic. algebraica } m_1 \\ \vdots \\ \lambda_r, \text{ de mult. alg. } m_r \end{cases} \Bigg| \; P_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$

autovec. [Paso 2] $E(\lambda_1) = \{ A\vec{v} = \lambda_1 \vec{v} \} = | (A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \}$

$= \{ (x_1, \dots, x_n) \mid (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \}$ esp. de sol. del sist. $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$d_1 = \dim E(\lambda_1)$ = multiplic. geom. de λ_1 ★ Sea B_1 base de $E(\lambda_1)$

(En el caso del Teorema:) $m_1 = d_1 \to B_1$ base de $E(\lambda_1)$ de cardinal d_1
$m_2 = d_2 \to B_2$ base de $E(\lambda_2)$ de cardinal d_2
$\vdots$
$m_r = d_r \to B_r$ base de $E(\lambda_r)$ de cardinal d_r

[Paso 3] $\tilde{B} := B_1 \cup \dots B_r \cup$ $(\tilde{B} = d_1 + \dots + d_r = m_1 + \dots + m_r = n = \dim(V))$

Como consecuencia, en $\tilde{B}$ la matriz de f es: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r I_{m_r} \end{pmatrix}$

EJEMPLO: ¿es diag? ¿en qué base? $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[Paso 1] $P_A(\lambda) = |A| = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 2)$
$\lambda_1 = 1$ $m_1 = 1$
$\lambda_2 = (5+\sqrt{17})/2$ $m_2 = 1$
$\lambda_3 = (5 - \sqrt{17})/2$ $m_3 = 1$

todo elevado a 1

[Paso 2] $E(\lambda_1) = (A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \to (0,0,1)$ [dim = 1] ($\lambda_1 = 1$)

$E(\lambda_2) = (A - \frac{5+\sqrt{17}}{2} I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{-1-\sqrt{17}}{2}x - 2y = 0 \\ -2x + \frac{1-\sqrt{17}}{2} y = 0 \\ (1-\lambda_2)z = 0 \end{cases} \to (-4, 1+\sqrt{17}, 0)$ $[d_2 = 1]$

$E(\lambda_3) = \left(A - \frac{5-\sqrt{17}}{2} I\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} y = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}x \\ z = 0 \end{cases} \to (4, -1+\sqrt{17}, 0)$ $[d_3 = 1]$

[Paso 3] Como $m_1 = d_1$, $m_2 = d_2$, $m_3 = d_3 \to$ es diag. en base:

$\tilde{B} = \{ v_1 = (0,0,1), v_2 = (-4, 1+\sqrt{17}, 0), v_3 = (4, -1+\sqrt{17}, 0) \}$

$f(v_1) = \lambda_1 v_1 = 1 v_1 + 0 v_2 + 0 v_3$
$f(v_2) = \lambda_2 v_2 = 0 v_1 + \lambda_2 v_2 + 0 v_3$
$f(v_3) = \lambda_3 v_3 = 0 v_1 + 0 v_2 + \lambda_3 v_3$

Si base $\tilde{B}$: $\left[f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \right]$