Tema 1 - Sist. de ecuaciones lineales

Es. 1 - Gauss Jordan

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ x + 3y - z = -2 \\ 3x + 4y + 3z = 0 \end{cases} \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

coger 1ª fila y buscar ceros en los de abajo

QUEREMOS TRIANGULAR

quiero subir este 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(-1)\cdot I + III \\ (-3) I + IV}]{(-1)\cdot I + II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}\cdot IV]{II \leftrightarrow III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-1\cdot II + IV]{3 II + III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{7} IV]{-\frac{1}{14} III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{buscar 0 por arriba}]{\substack{-3 III + I \\ 4 III + II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

pasar a 1

$$\xrightarrow{-2 II + I} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}$$

YA ESTÁ TRIANGULADA $\mapsto$ $\boxed{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}}$ Sist. compatible determinado

! Si, por ejemplo, en la matriz aparece una ecuación que dice "$0 = 27$", sería un sistema indeterminado. $(0 \ 0 \ 0 \mid 27)$

Ejemplo 2: Calcula ec. paramétrica de una recta de los planos $x+y+z=0$, $x-y+z=0$.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-1 I + II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-1 II + I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{x+z=0} \boxed{\begin{array}{l} x = -z \\ y = 0 \\ z = z \end{array}}$$

Ecuación lineal de coef. reales en las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Es una expresión del tipo: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ (a y b son $\mathbb{R}$) $[A\vec{x} = \vec{b}]$

- Se le llama lineal homogénea si: $b = 0$, $\vec{b} = \vec{0}$
- Un sist. de ec. L. es homog. si todos sus ec. son homog.

Ejemplo: (sist.)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \to \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}$$

Sol.

- Si $b = 0$ $\quad V =$
  - x, y soluc. $\longrightarrow$ $x + y =$ soluc.
  - $c =$ cte, x soluc. $\longrightarrow$ $c \cdot x =$ soluc.
- Si $b \neq 0$ $\quad V = x_0 + \{\vec{y} \mid A\vec{y} = 0\}$

EJEMPLO

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

caso 1:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(0,0)\}$$

caso 2.

$$V = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{b}\} = \vec{x}_0 + V_1 = (1,1) + \vec{0} = \{(1,1)\}$$

EJEMPLO

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}\mathrm{II}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I}+\mathrm{I}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left[\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + 0\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \right] \to \left[V = \{ \underbrace{(1,1,0)}_{x_0} + \underbrace{\lambda(-1,0,1)}_{V_1} \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \right]$$

V_1 : sol del sist. hom. asociado $\rightarrow$ a $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

[Soluciones]

- $V =$ soluciones de $A\vec{x} = \vec{b}$

$\rightarrow \vec{x}_0 + V_1$

- $V_1 =$ sol. de $A\vec{x} = \vec{0}$

$\rightarrow$ $\vec{x} = \vec{x}_0 + (\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{x}_0 + \vec{w}$, pero $A\vec{w} = A(\vec{x} - \vec{x}_0) = A\vec{x} - A\vec{x}_0 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$

LUEGO, $\vec{x}$ ESTÁ EN EL CONJUNTO $x_0 + \vec{V}_1$

$\rightarrow$ igualmente, si $\vec{w}$ está en $V_1 \Rightarrow \vec{x}_0 + \vec{w}$ es solución de $A\vec{x} = \vec{b}$ ya que

$A(\vec{x}_0 + \vec{w}) = A\vec{x}_0 + A\vec{w} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$ $\boxtimes$

Def. - El espacio de soluciones del sist. hom ($A\vec{x} = 0$) se llama núcleo de A, y se denota $\ker(A)$. (Kernel)

$$\ker A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$$

PROPIEDADES

(1) $\vec{0} \in \ker A$

(2) $\vec{u}, \vec{v} \in \ker A \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in \ker A$

(3) $c \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \ker A \Rightarrow c\vec{x} \in \ker A$

(4) L_S (S) $A\vec{x} = b \rightsquigarrow$ sist. no hom.

entonces L_S: espacio de sol. de (S) $= P_0 + \ker A$

- $\vec{0} \in L_S$
- $p \in L_S$, $\vec{n} \in \ker A \Rightarrow p + \vec{n} \in L_S$
- $p, q \in L_S \Rightarrow \overline{pq} \in \ker A$
- $[L_S = P_0 + \ker A]$

ESPACIOS VECTORIALES

Un espacio vectorial V es un conjunto de vectores definidos por producto escalar y vectorial. Satisfacen:

SUMA

- $\vec{u}, \vec{v} \in V \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V$
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V \Rightarrow (\bar{u}+\bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v}+\bar{w})$
- existe $\vec{0} \in V$ tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ para todo $\bar{v} \in V$
- $\bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$

PROD (c,d = ctes)

- $c \cdot \vec{u} \in V$
- $c(\bar{u}+\bar{v}) = c\bar{u} + c\bar{v}$
- $(c+d)u = c\bar{u} + d\bar{u}$
- $(c \cdot d)\bar{u} = c(d \cdot \bar{u})$

EJEMPLOS (prop. vect. y matrices)

(1) $V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\}$

por ej.:

$\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\} \rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \dots$

(2) $V =$ pol de grado $\leq 2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2\}$

$$\begin{array}{l} p_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ p_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \end{array} \rightarrow (p_1 + p_2)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots$$

(3) $V = M_{m,n}(\mathbb{R}) = \left\{ A \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$

caso particular $(m=n=2)$

$$V = M_{2,2}(\mathbb{R}) = \left\{ A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right\} \rightarrow A+B = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$$

$$B = (\dots) \qquad c \cdot A = \begin{pmatrix} ca & ca \\ ca & ca \end{pmatrix}$$

(4) $V = C([a,b]) = \{ f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua} \} \rightarrow$ $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$

Def. - sea W un subespacio vectorial de V, W cumple:

1. $\vec{0} \in \vec{W}$ (pasa por el origen)
2. $\bar{u}, \bar{v} \in \vec{W} \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in W$
3. cte $\cdot \vec{u} \in \vec{W}$

EJEMPLO

$W = \{(x,y) \mid y = 2x\}$

es subesp. vect. de $\mathbb{R}^2$ porque

(1) $\bar{0} = (0,0) \in W$

(2) $\begin{array}{l} \bar{u} = (x_1, 2x_1) \in W \\ \bar{v} = (x_2, 2x_2) \in W \end{array} \Rightarrow \bar{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)) \in W$

(3) $\begin{array}{l} \bar{u} = (x_1, 2x_1) \in W \\ c = \text{cte} \in \mathbb{R} \end{array} \Rightarrow c \cdot \bar{u} = (cx_1, 2(cx_1)) \in W$

Def.- Definimos el subespacio vectorial engendrado por $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p \in V$ como el conjunto:

$$\langle \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p\} \rangle = \{c_1\bar{v}_1 + \dots + c_p\bar{v}_p\}$$

Def.- $W_1, W_2 \subset V$ son subesp.

- $W_1 \cap W_2 =$ vectores de V que están en W_1 y W_2
- $W_1 \cup W_2 = W_1 + W_2$

§ DEPENDENCIA LINEAL. BASES. DIMENSIÓN

EJEMPLO: $(V=\mathbb{R}^2)$, $\vec{v}_1 = (1,1)$, $\vec{v}_2 = (1,2)$ ¿son linealmente indep?

$c_1(1,1) + c_2(1,2) = (0,0)$ Si la única sol es 0, son L.I.

$\Rightarrow (c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1, c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 2) = (0,0)$ $\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 0 = c_1 + 2c_2 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{matrix}}$ SON L.I.

EJEMPLO: $\bar{v}_1 = (1,1)$, $\bar{v}_2 = (1,2)$, $\bar{v}_3 = (1,0)$

$c_1(1,1) + c_2(1,2) + c_3(1,0) = (0,0)$

$\Rightarrow (c_1 + c_2 + c_3, c_1 + 2c_2) = (0,0)$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases}$$

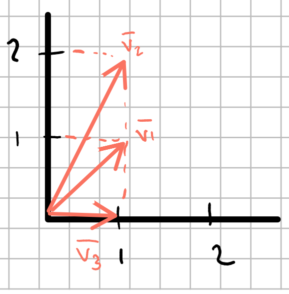
$\Downarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-I+II]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$ hay ∞ soluciones

$\rightarrow$ $\boxed{\text{NO LI}}$ (son LD)

Def. - Un conjunto maximal de vectores L.I. es el de mayor cardinal.

EJEMPLO $\bar{v}_1 = (1,1)$, $\bar{v}_2 = (1,2)$, $\bar{v}_3 = (1,0)$



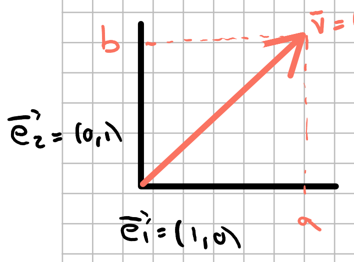
obs a) $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ L.I.

b) Si $\bar{v}_4 = (a,b)$, ¿$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_4$ LI?

$\Rightarrow c_1(1,1) + c_2(1,2) + c_3(a,b) = (0,0)$ $\begin{cases} c_1 + c_2 + ac_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + bc_3 = 0 \end{cases}$

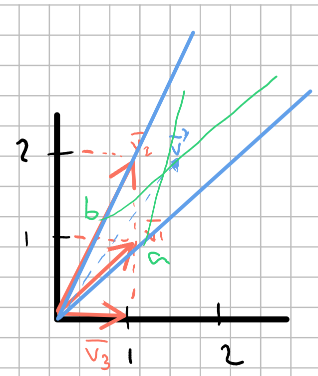
GAUSS ... $\rightarrow$ $\left(\begin{array}{ccc|c} c_1 & c_2 & ac_3 & 0 \\ 0 & c_2 & (b-a)c_3 & 0 \end{array}\right)$ $\vec{0}$ no puede ser $=0$, $(a+c, b+c)$, cualquier otra sol. vale. $\rightarrow$ COMP. INDET

Recordar: coord. cartesianas.



$\vec{v} = (a,b) = a\cdot\vec{e}_1 + b\cdot\vec{e}_2$

$\longrightarrow$ CAMBIO EJES



EJEMPLO: $\vec{w} = (5,7)$ ¿coord. en ejes $\vec{v}_1 = (1,1)$, $\vec{v}_2 = (1,2)$?

$\Rightarrow \vec{w} = (5,7) = \overset{?}{a}(1,1) + \overset{?}{b}(1,2) \longrightarrow \begin{cases} a+b = 5 \\ a+2b = 7 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} a=3 \\ b=2 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{\vec{w} = 3(1,1) + 2(1,2)}$

EJEMPLO: $\vec{v}_1 = (1,1,0)$, $\vec{v}_2 = (1,2,0)$, $\vec{v}_3 = (0,0,1)$

¿Son base? ($\mathbb{R}^3 = 3D$) $\begin{cases} \text{L.I.} \\ \text{Si añadimos otro } \vec{v} = (a,b,c) \neq 0, \text{ sst es indet.} \end{cases}$

BASES Y COORD

Unos vectores $\vec{v}$ de V serán base de V si: $\begin{cases} \text{son L.I.} \\ \end{cases}$

sea $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ base de V, son coord. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ si $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \dots + \lambda_n\vec{v}_n$

EJEMPLO

Calcula coord. de $\vec{v} = (-2,3)_B$ en la base $B = \{\vec{w}_1 = (1,0), \vec{w}_2 = (1,2)\}$ en la base $\tilde{B} = \{\vec{u}_1 = (1,1), \vec{u}_2 = (1,-1)\}$.

hay que hallar $(\lambda, \mu)_{\tilde{B}}$

$\boxed{\text{sol}}$ $\vec{v} = (-2,3) = -2\vec{w}_1 + 3\vec{w}_2 = -2(1,0) + 3(1,2) = (1,6)$

Nos piden calcular (λ_1, λ_2) tales que $\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 = (\lambda_1, \lambda_2)_{\tilde{B}}$

entonces, $\vec{v} = (1,6) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1) = (\lambda_1+\lambda_2, \lambda_1-\lambda_2)$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1-\lambda_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 7/2 \\ \lambda_2 = -5/2 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\vec{v} = \left(\frac{3}{2}, \frac{-5}{2}\right)_{\tilde{B}}}$

EN EL CASO DE $V = \mathbb{R}^2$

Datos: $\vec{v} = (x_1, y_1)_B = x_1\vec{w}_1 + y_1\vec{w}_2$

$B = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ $\quad \tilde{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

$\vec{w}_1 = \frac{1}{2}\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2$ | en gral. $\longrightarrow$ $= a_{11}\vec{u}_1 + a_{12}\vec{u}_2$

$\vec{w}_2 = \frac{3}{2}\vec{u}_1 - \frac{1}{2}\vec{u}_2$ | $= a_{21}\vec{u}_1 + a_{22}\vec{u}_2$

$\rightsquigarrow x_1\vec{w}_1 + y_1\vec{w}_2 = x_1(a_{11}\vec{u}_1 + a_{12}\vec{u}_2) + y_1(a_{21}\vec{u}_1 + a_{22}\vec{u}_2)$

$= \underbrace{(a_{11}x_1 + a_{21}y_1)}\vec{u}_1 + \underbrace{(a_{12}x_1 + a_{22}y_1)}\vec{u}_2$

$\rightarrow v = (x_2, y_2)_{\tilde{B}} = \underbrace{x_2}\vec{u}_1 + \underbrace{y_2}\vec{u}_2$

$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = a_{11}x_1 + a_{21}y_1 \\ y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}y_1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}}$

($a_{11} = 1/2$, $a_{21} = 3/2$, $a_{12} = 1/2$, $a_{22} = -1/2$; $x_1 = -2$, $y_1 = 3$)

En el caso $V=$ polinomio grado ≤ 2

$B=\{1, x, x^2\}$ (coord. en B)

$\tilde{B}=\{1, x-1, (x-1)^2\}$

$\vec{v}=p(x)=\underline{a_0}+\underline{a_1}x+\underline{a_2}x^2 = \underset{\tilde{a}_0}{\bigcirc}\cdot 1+\underset{\tilde{a}_1}{\bigcirc}(x-1)+\underset{\tilde{a}_2}{\bigcirc}(x-1)^2$ — $p(1)$, $p'(1)$, $\frac{p''(1)}{2}$

TAYLOR

$p'(x)=a_1x+2a_2x$

$p''(x)=2a_2$

$$\left\{\begin{array}{l}\tilde{a}_0=a_0+a_1+a_2 \\ \tilde{a}_1=a_1+2a_2 \\ \tilde{a}_2=2a_2\,\frac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}$$

(lo que vale $p(x)$ en 1)

- ¿son LI? (todas las $c=0$)

$$c_1\cdot 1+c_2(x-1)+c_3(x-1)^2=0 \Rightarrow c_1+c_2x+c_3x^2-2c_3x+c_3=0$$

$$\Rightarrow (c_1-c_2+c_3)+(c_2-2c_3)x+c_3x^2=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}c_3=0\\ c_2-2c_3=0\\ c_1-c_2+c_3=0\end{array}\right. \Rightarrow c_1=c_2=c_3=0$$

[Sí son L.I. (son base)]

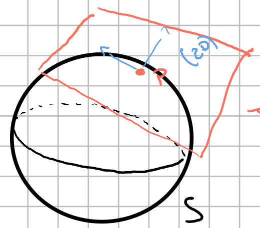
-

Dimensión de un espacio vectorial

Teniendo $B=(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)$ base de V con todo $\vec{u}\in V \Rightarrow \vec{n}=\lambda_1\vec{v}_1+\dots+\lambda_n\vec{v}_n\equiv(\lambda_1,\dots,\lambda_n)_B$:

- Todas las bases de V tienen el mismo nº de elementos ("cardinal").
- $\dim V=$ el cardinal de B.

Obs:



$\simeq\mathbb{R}^2$

$T_pS=$ espacio tg a S en P

$\dim S=2$ (si te paras en un pt. y pones espacio tg. te sale un plano en 2D)

Ej: condición para que dos vect. de $\mathbb{R}^2$ sean base. ¿$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ son base? < L.I. / sist. generador

$$\left[\begin{array}{l}\vec{v}_1=(1,2)\\ \vec{v}_2=(3,4)\end{array}\right]$$

- ¿Son L.I.?

$c_1(1,2)+c_2(3,4)=\vec{0} \Rightarrow (c_1+3c_2, 2c_1+4c_2)=(0,0)$

- ¿Es sist. gen? λ_1, λ_2 siempre compatible

$\vec{u}=(a,b) \Rightarrow \lambda_1v_1+\lambda_2v_2=(a,b)$

[Lo puedo hacer a la vez] $\rightarrow$

$$\begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & \vec{0} & \vec{u}\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&0&a\\2&4&0&b\end{array}\right)\xrightarrow{(-2)\mathrm{I}+\mathrm{II}}\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&0&a\\0&-2&0&b-2a\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(\frac{1}{2})\mathrm{II}}\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&0&a\\0&1&0&\frac{-b+2a}{2}\end{array}\right)$$

$c_1 \quad c_2$

$\rightsquigarrow$ a, b son siempre compatibles, el sist. es compat.

$\hookrightarrow c_1=0$

$\hookrightarrow c_2=0$ $\underline{\text{L.I.}}$

$\hookrightarrow$ SON BASE

Ej: son base $\mathbb{R}^3$?

$$\left[\begin{array}{l} \vec{v}_1 = (1,1,0) \\ \vec{v}_2 = (1,-1,0) \\ \vec{v}_3 = (1,0,0) \end{array}\right]$$

▸ ¿Son L.I.?

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0} = (0,0,0)$$

▸ ¿Gener.?

$$\vec{v} = (a,b,c) = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)I+II]{} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -2 & -1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}II]{} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & -\frac{b+a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right)$$

No es L.I. → ∞ sol ("escalera peldaño 2")
[SIST. COMP. INDET.]

No es siempre compat.

↳ $c=0$ si $c=2S$, $2S\neq 0$

["Sist 1" (pregunta 1)
"Sist 2" (pregunta 2)]

↳ $\boxed{\text{NO BASE}}$

ESPACIO DE MATRICES

EJEMPLO Matriz 2×2

▸ $\mathbb{M}_{2,2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

▸ $\begin{pmatrix} a_1 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}$

▸ $\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$ ▸ $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ▸ $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

BASE DE MATRICES

§ Obs.: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es un conj. generador

$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ← SON L.I., SON BASE

↳ Fila/columna en la que se encuentra el 1

Obs: $\mathbb{M}_{2\times 3}$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ Tiene por base $E_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$, $\dim M_{2,3} \overset{(2\cdot 3)}{=} 6$

(tiene un 1 en "i", "j")

§ Coords y cambio de base

Sabiendo $v_1 = a_{1n}\vec{u}_{1n} + \dots + a_{n1}\vec{u}_{n1}$ observa que:

$\vdots$

$a_{n1}\vec{u}_{n1} + \dots + a_{nn}\vec{u}_{nn}$

$$\vec{w} = \lambda'_1\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\vec{u}_j\right) + \dots + \lambda'_n\left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj}\vec{u}_j\right)$$

$$\left[= \sum_{j=1}^{n}\left(\lambda'_1 a_{1j} + \dots + \lambda'_n a_{nj}\right)\vec{u}_j \right]$$

entonces:
$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda'_1 a_{11} + \dots + \lambda'_n a_{n1} \\ \\ \lambda_n = \lambda'_1 a_{1n} + \dots + \lambda'_n a_{nn} \end{cases}$$

EJEMPLO $B = \{\bar{e}_1 = (1,0), \bar{e}_2 = (0,1)\}$, $B' = \{\bar{v}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{v}_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2\}$ calcular fórm. cambio de base.

$\bar{e}_1 = \vec{u}_1$, $\bar{e}_2 = \vec{u}_2$

$\vec{w} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \vec{w} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2$

$\vec{w} = \lambda'_1\vec{v}_1 + \lambda'_2\vec{v}_2$

la relación entre λ y λ' nos da la fórm. de cambio.

$$\vec{w} = \lambda'_1(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + \lambda'_2(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = \boxed{(\lambda'_1 + \lambda'_2)}\vec{u}_1 + (\lambda'_1 - \lambda'_2)\vec{u}_2$$

Fórmulas de cambio de coordenadas
$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda'_1 + \lambda'_2 \\ \lambda_2 = \lambda'_1 - \lambda'_2 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \end{pmatrix}}$$

FÓRM. DE CAMBIO DE BASE B A BASE B'

- **EN GRAL:** EC. MATRICIAL DE CAMBIO DE BASE

$[\vec{\lambda} = P\vec{\lambda}']$ $(\vec{x} = P\vec{x}')$ (P = matriz del cambio de base)

$\Rightarrow \vec{\lambda}' = P^{-1}\vec{\lambda}$

[INVERSA DE UNA MATRIZ] $(P \mid I) \overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow} (I \mid P^{-1})$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}}_{P} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\right) \xrightarrow[(-1)I+II]{} \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right) \xrightarrow[\frac{II}{-2}]{} \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 \end{matrix}\right) \xrightarrow[-II+I]{} \left(\overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}^{I} \middle| \overbrace{\begin{matrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{matrix}}^{P^{-1}}\right)$$

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}}$$