

Objetivos

- Resolución de ecuaciones lineales: el método de Gauss-Jordan.
- Operaciones básicas algebraicas con matrices.

1 Sistemas de ecuaciones lineales

¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales? Este es un conjunto de ecuaciones en donde cada ecuación es de primer grado, tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 \dots &\dots \dots \dots = \dots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
 \end{aligned} \tag{1}$$

El sistema de m ecuaciones lineales tiene n incógnitas. Un sistema de este tipo puede tener solución única (compatible determinado), infinitas soluciones (compatible indeterminado) o no tener solución (incompatible).

¿Qué es una matriz? Una matriz es un elemento de un anillo, es decir, un sistema algebraico formado por un conjunto no vacío y dos operaciones internas, llamadas usualmente “suma” y “producto”. Una matriz $m \times n$ no es más que una tabla de números con m filas y n columnas. Se suele denotar a_{ij} al elemento que está en la fila i y en la columna j de una matriz A . El sistema de ecuación lineal se puede escribir como una matriz A con la siguiente estructura:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

La matriz de un sistema es una *matriz escalonada* (o el sistema está en forma escalonada) si cada fila no nula tiene siempre más ceros a la izquierda que la que está por encima y las filas nulas, si las hubiera, están colocadas al final. Las matrices escalonadas son de especial interés por la sencillez de encontrar soluciones al sistema de ecuaciones, como se muestra a continuación.

Siempre es posible reducir un sistema a forma escalonada empleando *tres transformaciones elementales* sobre las ecuaciones (o equivalentemente sobre las filas de la matriz):

1. Sumar a una ecuación un múltiplo de otra.
2. Multiplicar una ecuación por un número no nulo.
3. Intercambiar dos ecuaciones.

Al aplicar las transformaciones elementales, las soluciones al sistema de ecuaciones se preserva. Esta propiedad es muy útil para encontrar soluciones del sistema de ecuaciones. En particular, el algoritmo de *reducción de Gauss*, en inglés también se conoce como “Gaussian elimination”, consiste en aplicar estos tres procesos (el segundo no es estrictamente necesario) para producir ceros por columnas en la matriz y llegar a la forma escalonada.

Ejemplo. Consideremos el sistema:

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 2 \\x - y + z &= 0 \\x + 3y - z &= -2 \\3x + 4y + 3z &= 0\end{aligned}$$

Para resolver por reducción de Gauss, primero se crean los ceros en la primera columna bajo el primer elemento:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{f_2 \mapsto f_2 - f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - f_1 \\ f_4 \mapsto f_4 - 3f_1}]{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array} \right)$$

Intercambiar las filas nos permite evitar los cálculos con fracciones al crear los ceros de la segunda columna, por ejemplo:

$$\xrightarrow[f_2 \leftrightarrow f_3]{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{f_3 \mapsto f_3 + 3f_2 \\ f_4 \mapsto f_4 + 2f_2}]{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{array} \right)$$

Con un paso más llegamos a la forma escalonada:

$$\xrightarrow[f_4 \mapsto f_4 - f_3]{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Los elementos subrayados se llaman *elementos pivote* y señalan el principio de los

“escalones”. Un elemento pivote en una matriz escalonada es un elemento no nulo que tiene ceros a la izquierda. Las columnas que contienen a los elementos pivote se llaman columnas pivote.

Una vez que se ha llegado a la forma escalonada es fácil resolver el sistema, despejando de abajo a arriba las ecuaciones. Así en el ejemplo anterior la tercera ecuación de la forma escalonada implica $z = 1$, sustituyendo en la segunda se tiene $y = 0$ y estos resultados en la primera dan $x = -1$.

El algoritmo de *reducción de Gauss-Jordan* es similar al de Gauss pero cuando se ha finalizado éste se procede a crear ceros encima de los elementos pivote empleando las filas de abajo a arriba sin modificar la estructura escalonada. Multiplicando por un número adecuado (transformación 2) también se consigue que los elementos pivote sean unos. Esta forma escalonada en la que los elementos pivote son unos y el resto de los elementos de las columnas pivote son ceros a veces se llama *forma escalonada reducida*.

Ejemplo. Partiendo del ejemplo anterior, después de seguir el algoritmo de Gauss, hacemos 1 la tercera fila

$$\xrightarrow{f_3 \mapsto -f_3/14} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

y se empieza a crear ceros encima del tercer elemento pivote y después del segundo:

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} f_2 \mapsto f_2 + 4f_3 \\ f_1 \mapsto f_1 - 3f_3 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_1 \mapsto f_1 - 2f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Al emplear la reducción de Gauss-Jordan en la columna de la derecha leeremos la solución del sistema, si es que es única. Si una de la últimas ecuaciones fuera “0 = constante no nula” entonces se llegaría a una contradicción y no habría solución. En otro caso, si hay columnas que no son columnas pivote las incógnitas correspondientes se pueden elegir como parámetros arbitrarios.

El algoritmo de Gauss-Jordan es conveniente para resolver simultáneamente varios sistemas que comparten la misma matriz de coeficientes (la formada por los a_{ij}). Para ello simplemente se añaden nuevas columnas a la derecha correspondientes a los diversos sistemas.

Ejemplo. Para resolver simultáneamente

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ 3x - 6y + 2z = 0 \end{array} \right\} \quad y \quad \left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 2 \\ 3x - 6y + 2z = 1 \end{array} \right\}$$

la matriz tendría la estructura

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -6 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

y se reduce a la forma escalonada reducida aplicando

$$f_2 \mapsto f_2 - 3f_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 \mapsto -f_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{f_1 \mapsto f_1 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

En ambos casos la segunda variable es un parámetro arbitrario, digamos $y = \lambda$ y se tiene como soluciones del primer y del segundo sistema, respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right. \quad y \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -3 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 5 \end{array} \right.$$

2 Matrices y sus operaciones

Denotamos $\mathcal{M}_{m \times n}$ para indicar el conjunto de todas las matrices de m filas y n columnas. Las matrices de $\mathcal{M}_{m \times n}$ tiene dos operaciones “suma” y “multiplicación”. La *suma de matrices* tiene la forma esperada; sumando los elementos en las mismas posiciones. La multiplicación de dos matrices sólo se define si el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda. Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n'}$ y $B \in \mathcal{M}_{n' \times n}$ entonces $AB \in \mathcal{M}_{m \times n}$. El elemento ij del producto se calcula con la fórmula $\sum_k a_{ik}b_{kj}$. Esto equivale a decir que se hace el producto escalar habitual de la fila i de A por la columna j de B.

Ejemplo. Se tiene la siguiente suma y producto de matrices:

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{array} \right) \quad , \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} -8 & 3 \\ -17 & 6 \end{array} \right)$$

Hay algunas matrices básicas que reciben nombres especiales:

1. Las matrices con el mismo número de filas y columnas, es decir $\mathcal{M}_{n \times n}$, son *matrices cuadradas* de dimensión n .
2. Las matrices cuadradas A con $a_{ij} = a_{ji}$ se dice que son *matrices simétricas*.
3. Las matrices *complejas* cuadradas A con $a_{ij}^* = a_{ji}$ se dice que son *matrices simétricas*. Notad que eso implica que los elementos en la diagonal son reales.
4. Las matrices cuadradas A tales que $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$ se denominan *matrices diagonales*.
5. La matriz diagonal tal que $a_{ii} = 1$ es la *matriz identidad* y se suele denotar con I . Es el elemento neutro de la multiplicación, es decir $A = AI = IA$ para cualquier $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$.
6. La matriz que tiene todos sus elementos cero se llama *matriz nula* y a veces se denota con O . Es el elemento neutro de la suma, es decir $A = A + O = O + A$.

Teniendo en cuenta las operaciones entre matrices, se puede definir un sistema de ecuaciones dado por (1) como $A\vec{x} = \vec{b}$, donde se define

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Las transformaciones elementales en los algoritmos de Gauss y Gauss-Jordan pueden escribirse en términos de multiplicaciones de matrices y eso tiene su interés teórico, veremos un ejemplo en los ejercicios a realizar (hoja 1 - problema 4).

A las matrices cuadradas se les asocia un número llamado *determinante*, denotado por la matriz limitada por barras verticales. En el caso de dimensión 2 se tiene

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

y en el caso de dimensión 3 se tiene

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

En general el determinante de una matriz $n \times n$ se define inductivamente desarrollando por una fila o columna (véase [2]). Con lo visto en este curso, el determinante

también se puede definir y calcular como el producto de los elementos de la diagonal tras aplicar reducción de Gauss sin utilizar el segundo proceso y cambiando el signo de una fila cuando se intercambia con otra.

Una matriz cuadrada A con $|A| \neq 0$ es invertible, eso significa que existe una matriz que denotamos como A^{-1} , llamada *matriz inversa* de A , tal que $I = AA^{-1} = A^{-1}A$. Si A es una matriz invertible, entonces el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución única dada por $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

En dimensión 2, la fórmula para la inversa es:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

El cálculo de la inversa es costoso especialmente en dimensiones grandes. Hay una fórmula general pero involucra muchos determinantes y por tanto es poco práctica más allá de dimensión 3 o 4.

Una manera de calcular la matriz inversa de A es tratar de resolver la ecuación matricial $AX = I$ donde X es una matriz $n \times n$ cuyos elementos son incógnitas. Esto conduce a n sistemas de ecuaciones, todos ellos con la misma matriz de coeficientes e igualados a cada una de las columnas de I . Con ello se deduce que el cálculo de la inversa equivale a aplicar el algoritmo de Gauss-Jordan a $(A|I)$. Si A es invertible, el final del algoritmo será $(I|A^{-1})$.

Ejemplo. Calculemos la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Los pasos del algoritmo de Gauss-Jordan son:

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{f_3 \mapsto f_3 - 2f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{f_3 \mapsto f_3 + 5f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 5 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{f_3 \mapsto f_3/7} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 & 5/7 & 1/7 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 \mapsto f_2 - 3f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6/7 & -8/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 & 5/7 & 1/7 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{f_1 \mapsto f_1 - 2f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/7 & 16/7 & 6/7 \\ 0 & 1 & 0 & 6/7 & -8/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 & 5/7 & 1/7 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/7 & 16/7 & 6/7 \\ 6/7 & -8/7 & -3/7 \\ -2/7 & 5/7 & 1/7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Referencias. Hay muchos libros de álgebra lineal y casi todos tienen contenidos

parecidos. Uno con muchos ejemplos y buenas explicaciones es [2]. Una faceta del álgebra lineal, en la que desafortunadamente no incidimos en este curso, es la cantidad de aplicaciones que tiene. Éstas aplicaciones están en gran medida sustentadas por la posibilidad de programar eficientemente muchos cálculos de álgebra lineal. Un libro que cubre las aplicaciones y los cálculos numéricos es [4]. Por otro lado, [1] satisfará a los que tengan interés en la interpretación geométrica y física del álgebra lineal, aunque quizá no sea fácil de encontrar. Por último, para los estudiantes muy avanzados, [3] es un libro escrito por un matemático de primera línea que constituye una excepción a la uniformidad de temas de los libros de álgebra lineal.

Referencias

- [1] L. I. Golovina, *Álgebra Lineal y Algunas de sus Aplicaciones*, Mir, 1986.
- [2] E. Hernández, M.J. Vázquez, and M.A. Zurro, *Álgebra lineal y Geometría*, Addison-Wesley, third edition, 2012.
- [3] P. D. Lax, *Linear algebra, Pure and Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, 1997.
- [4] G. Strang, *Linear algebra and its applications*, Academic Press, second edition, 1980.

Objetivos

- Espacios vectoriales.
- Independencia lineal. Bases, dimensión, cambio de bases.

1 Espacios vectoriales

Probablemente estamos familiarizados con el espacio vectorial creado por vectores de números reales con la forma

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix},$$

en algebra se representa como \mathbb{R}^n , \vec{v} es el *vector* que pertenece al espacio vectorial \mathbb{R}^n , es decir $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. n es la dimensión, y los números reales a_i nos referimos a ellos como *escalares* o *elementos del cuerpo*. Un espacio vectorial tiene una *operación interna* bien definida, por ejemplo en \mathbb{R}^n es la suma; $\vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. La operación interna cumple:

1. Propiedad conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. Propiedad asociativa: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3. Elemento neutro " $\vec{0}$ ": $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
4. Elemento opuesto " $-\vec{u}$ ": $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Un espacio vectorial también tiene una *operación externa*, por ejemplo en \mathbb{R}^n es la multiplicación por un escalar $\lambda \cdot \vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. La operación externa cumple:

1. Propiedad asociativa: $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{v}$
2. Propiedad distributiva de vectores: $\lambda \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \lambda \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{u}$
3. Propiedad distributiva de escalares: $(\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{v}$
4. Elemento neutro multiplicativo " 1 ": $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

En conclusión, un *espacio vectorial* es una estructura algebraica de un conjunto no vacío con una operación interna e externa que cumplen las propiedades anteriores. Podemos encontrar otros espacios vectoriales, por ejemplo \mathbb{C}^n , donde los elementos del cuerpo son números complejos, o por ejemplo las matrices $\mathcal{M}_{m \times n}$ que hemos visto en el tema 2, o por ejemplo polinomios también pueden formar un espacio vectorial. En este curso trabajaremos principalmente con \mathbb{R}^n .

2 Subespacios vectoriales

Otra definición muy importante es el concepto de subespacio vectorial. Un *subespacio vectorial* es un espacio vectorial incluido en otro con las mismas operaciones. Así, para demostrar que un subespacio vectorial S está bien definido, al aplicar las operaciones interna e externa no nos salimos del subespacio, esto es:

$$1) \vec{u}, \vec{v} \in S \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in S \quad \text{y} \quad 2) \vec{u} \in S, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{u} \in S$$

Ejemplo. Si definimos los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^3 :

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}, \quad V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}, \\ V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}, \quad V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y + 2z = 0\},$$

el primero no es subespacio porque $(0, 1, 1)$ y $(1, 0, 0)$ están en V_1 pero no su suma, el segundo tampoco lo es porque $(1, 0, 0) \in V_2$ pero $2 \cdot (1, 0, 0) \notin V_2$, finalmente V_3 y V_4 sí son subespacios. La razón es simplemente que podemos separar sumas de cosas que dan cero con paréntesis o que podemos multiplicar algo igualado a cero por cualquier número.

Una conclusión del ejemplo anterior es que un sistema de ecuaciones lineales igualadas a cero en \mathbb{R}^n siempre definen un subespacio vectorial. De hecho, todos los subespacios de \mathbb{R}^n se pueden expresar de esta forma [2].

Dados los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, una *combinación lineal* de ellos es cualquier expresión tipo $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Es fácil ver que los vectores que se obtienen como combinaciones lineales de elementos de un conjunto de vectores $C = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ forman un subespacio vectorial. El *subespacio generado* por C se denota con $\mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\})$.

3 Independencia lineal

Se dice que los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, son *linealmente independientes* si ninguno es combinación lineal de los otros. Otra forma de expresar esto es que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ es la única solución de

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

Para saber si un conjunto de vectores son linealmente independientes, utilizaremos la reducción de Gauss aprendida en el tema 1, como mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Estudiemos si los vectores $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 0)$, $(4, 5, 2) \in \mathbb{R}^3$ son linealmente independientes. Así que tenemos que buscar los valores de λ_1 , λ_2 , y λ_3 tal que se cumple la condición

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto es equivalente a escribir el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \end{array} \right\} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Supongamos que existiera una solución única. Si fuera así, entonces la solución debe ser necesariamente $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ y, por tanto, los vectores son independientes. Éste último corolario es muy útil, así que recordad: *decidir si ciertos vectores son linealmente independientes se reduce a estudiar si un sistema homogéneo (igualado a cero) tiene solución única*. Si utilizamos reducción de Gauss, esto equivale a que al poner los vectores en columna haya tantos escalones como columnas en la matriz escalonada. En este caso en particular, al hacer la reducción de Gauss obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El sistema tiene infinitas soluciones (porque el número de escalones, dos, no coincide con el de columnas, tres), por tanto no son linealmente independientes.

4 Base de un espacio vectorial

Una *base* B de un espacio vectorial V es un subconjunto que verifica $\mathcal{L}(B) = V$ (*sistema de generadores*) y que es linealmente independiente. Intuitivamente, es un conjunto de vectores que no tiene información redundante y que sirve para construir todos los vectores del espacio. Más formalmente, dada una base

$$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$$

cualquier vector $\vec{v} \in V$ se puede escribir de forma única como combinación lineal

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n,$$

donde los números $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ se llaman *coordenadas* o *componentes* de \vec{v} en la base B . La *dimensión* de un espacio vectorial V , que denotamos como $\dim V$, es igual al número de vectores de la base.

Ejemplo. El ejemplo más simple de una base en \mathbb{R}^n es la llamada base canónica $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ donde \vec{e}_j es el vector con todas sus coordenadas cero excepto la j -ésima que vale 1. Las coordenadas de un vector con respecto a esta base son las coordenadas en el sentido habitual. Así en \mathbb{R}^3 ,

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

En un subespacio vectorial de dimensión n , n vectores linealmente independientes forman una base. Siempre que tengamos un subespacio definido por ecuaciones lineales igualadas a cero, al resolver el sistema habremos expresado las soluciones como combinación lineal de vectores multiplicados por parámetros arbitrarios, mirar el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Para hallar una base del subespacio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$, debemos resolver la ecuación $x + 2y + 3z = 0$. Obviamente podemos escoger las dos últimas variables como parámetros arbitrarios: $y = \lambda$, $z = \mu$ y entonces $x = -2\lambda - 3\mu$. Entonces cada vector del subespacio es de la forma

$$(-2\lambda - 3\mu, \lambda, \mu) = \lambda(-2, 1, 0) + \mu(-3, 0, 1)$$

Los vectores $(-2, 1, 0)$ y $(-3, 0, 1)$ forman una base porque todos los vectores del subespacio son combinación lineal de ellos y porque son linealmente independientes.

Por definición, $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ es siempre un sistema de generadores del subespacio $\mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\})$, pero podría no ser base porque algunos vectores fueran combinaciones lineales de otros (linealmente dependientes). A veces se presenta el problema de quitar algunos vectores para obtener una base. Si hemos comprobado que no son linealmente independientes usando reducción de Gauss, siempre los vectores de las columnas pivote dan lugar a una base.

El número de columnas pivote, esto es, el número de vectores linealmente independientes, se llama *rango*. Es bien conocido que la discusión de las soluciones de un sistema lineal se reduce a consideraciones sobre el rango.

Ejemplo. Sabíamos por un ejemplo anterior que los vectores $\vec{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (4, 5, 2)$ no son linealmente independientes. Por tanto no son base de $\mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\})$. Como al aplicar reducción de Gauss las columnas pivote eran la primera y la segunda, se tiene que $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es base de este subespacio.

5 Cambio de base

Un vector se puede representar con bases diferentes. Por ejemplo, supongamos dos bases $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de \mathbb{R}^3 , tal que

$$\vec{v} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + y_3\vec{u}_3$$

Si se conoce las coordenadas de los tres vectores B' con respecto a la base B :

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{u}_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{u}_3 &= a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3\end{aligned}$$

se puede encontrar la relación entre las coordenadas de las dos bases:

$$\begin{aligned}x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 &= y_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3) \\ &+ y_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3) + y_3(a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3)\end{aligned}$$

igualando los coeficientes que multiplican a los vectores en ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned}x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ x_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M_c \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

donde

$$M_c = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2 \quad \vec{u}_3)_{\{\vec{e}_i\}} \quad (1)$$

recibe el nombre de *matriz de cambio de base*. Nótese que la matriz de cambio de base se puede escribir poniendo en columnas las coordenadas de los vectores B' con respecto B .

Referencias. Hay muchos libros de álgebra lineal y casi todos tienen contenidos parecidos. Uno con muchos ejemplos y buenas explicaciones es [2]. Una faceta del álgebra lineal, en la que desafortunadamente no incidimos en este curso, es la cantidad de aplicaciones que tiene. Éstas aplicaciones están en gran medida sustentadas por la posibilidad de programar eficientemente muchos cálculos de álgebra lineal. Un libro que cubre las aplicaciones y los cálculos numéricos es [4]. Por otro lado, [1] satisfará a los que tengan interés en la interpretación geométrica y física del álgebra lineal, aunque quizá no sea fácil de encontrar. Por último, para los estudiantes muy avanzados, [3] es un libro escrito por un matemático de primera línea que constituye una excepción a la uniformidad de temas de los libros de álgebra lineal.

Referencias

- [1] L. I. Golovina, *Álgebra Lineal y Algunas de sus Aplicaciones*, Mir, 1986.
- [2] E. Hernández, M.J. Vázquez, and M.A. Zurro, *Álgebra lineal y Geometría*, Addison-Wesley, third edition, 2012.
- [3] P. D. Lax, *Linear algebra, Pure and Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, 1997.
- [4] G. Strang, *Linear algebra and its applications*, Academic Press, second edition, 1980.