

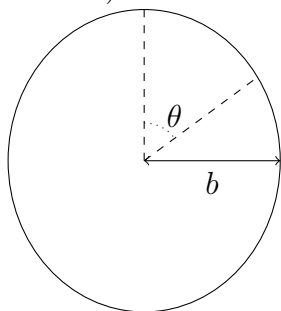
## Instrucciones

Esta PEC ha de realizarse **de forma manuscrita** y escaneando posteriormente las páginas de forma ordenada en formato PDF.

Hay que entregar las soluciones a través de la plataforma docente en un único fichero PDF con el siguiente nombre **Apellido1Apellido2-PEC1**. **La PEC entregada deberá ir firmada con una declaración explícita en la que se asume la autoría individual del trabajo**. Hay un modelo de declaración al final de este documento. No se corregirá ninguna PEC que no cumpla estos requisitos.

## Cuestiones

- Q1.** (0,5 puntos) Tenemos un conductor en forma de elipsoide de revolución, más alargado en los polos y más aplanado en el ecuador (véase en la figura adjunta el perfil de la elipse generatriz).



La superficie de este elipsoide se puede describir por la siguiente ecuación:

$$r_s(\theta, \varphi) = \frac{b}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 \theta}},$$

donde  $b, \epsilon$  son respectivamente el semieje menor y la excentricidad de la elipse generatriz.

Para excentricidades pequeñas, el potencial alrededor del elipsoide conductor tiene la siguiente expresión hasta orden  $\epsilon^2$ :

$$V(r, \theta) = \frac{A}{r} \left[ 1 + \frac{\epsilon^2}{6} \left( 1 + \left( \frac{b}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \right) \right].$$

Demuestre que la superficie del elipsoide es equipotencial hasta orden  $\epsilon^2$  y calcule el valor del potencial. Cuando sea oportuno puede usar el desarrollo de Taylor:  $(1+x)^n \simeq 1+nx$ .

- Q2.** (0,5 puntos) El cuadrupolo lineal es aquel que, expresado en una base tal que tiene forma diagonal, tiene una componente, generalmente  $Q_{zz} = Q$ , mayor que las demás en valor absoluto y, además, las otras componentes diagonales son iguales. Expresé de forma explícita el potencial producido por un cuadrupolo lineal en un punto genérico de coordenadas  $(r, \theta, \varphi)$ .

- Q3.** (0,5 puntos) La acetona es un líquido polar cuya constante dieléctrica vale  $\epsilon = 21 \epsilon_0$  y cuya molécula tiene un momento dipolar  $p_o = 9,7 \times 10^{-30}$  Cm. Calcule la polarización de una muestra de acetona en cuyo seno se establece un campo eléctrico de  $10^6$  V/m.

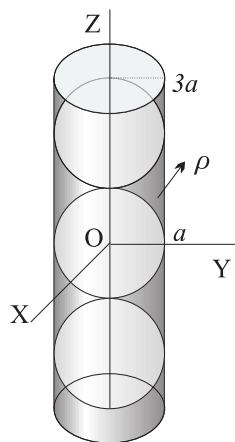
Calcule qué fracción de dipolos moleculares deben estar alineados para producir esa misma polarización (suponiendo que el resto de dipolos están distribuidos al azar y no

producen polarización neta). La densidad de la acetona es  $\rho_m = 784 \text{ kg/m}^3$  y su peso molecular  $P_M = 58,08 \text{ g/mol}$ .

- Q4.** (1 punto) Tenemos dos esferas concéntricas de radios  $R_1$  y  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ). Calcule de forma razonada los coeficientes de potencial,  $p_{ij}$  y los de capacidad e influencia de este sistema,  $C_{ij}$ . Demuestre explícitamente que  $p_{12} = p_{21}$ , o bien, alternativamente  $C_{12} = C_{22}$ .

## Ejercicios

- E1.** (2,5 puntos) En un cilindro dieléctrico de radio  $a$  y altura  $6a$  hay tres huecos esféricos de radio  $a$  dispuestos como muestra la figura. Sobre la zona del cilindro exterior a los huecos esféricos se distribuye una carga cuya densidad es  $\rho$ .



Calcule el campo y potencial electrostáticos debido a la distribución de carga en el punto O.

- E2.** (2,5 puntos) Entre dos cilindros coaxiales, conductores e idealmente infinitos, de radios  $a, b$  ( $a < b$ ), hay un material dieléctrico anisótropo. Si el cilindro tiene el eje coincidente con el eje  $z$ , las constantes dieléctricas principales del medio son  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 2\varepsilon_0$  y  $\varepsilon_x = 5\varepsilon_0$ . Aplicamos una d.d.p.  $V_0$  entre los dos conductores.
- Calcule los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  en el interior del medio dieléctrico.
  - Calcule la distribución de carga en las superficies de ambos cilindros.
  - Calcule la carga por unidad de longitud en ambos conductores y la capacidad por unidad de longitud del condensador formado por ambos.
- E3.** (2,5 puntos) Una gota de agua, que consideramos como un conductor, se somete a un potencial  $V_0$ . La gota tiene un radio  $R$ .
- Calcule la carga que adquiere la gota de agua.

Desconectamos la batería que proporciona el potencial  $V_0$  y entonces la gota se rompe en otras dos gotas —digamos A y B— de tamaños  $R_A, R_B = 2R_A$ , de forma que quedan tocándose tangentes una a la otra.

- (b) Calcule las cargas y potenciales de las nuevas gotas de agua, en función los parámetros del enunciado,  $V_0$  y  $R$ .

Las gotas se separan de forma que los puntos más cercanos entre ambas quedan separados por una milésima del radio de la gota original ( $s = 10^{-3}R$ ). La gota más pequeña se conecta a tierra.

- (c) Calcule las cargas y potenciales de ambas gotas en esta situación.

Nota: Los coeficientes de capacidad e influencia de dos gotas de tamaños  $R_A, R_B$ , con  $R_B = 2R_A$ , cuando los puntos más próximos de su superficie se encuentran separados por una distancia  $s \ll R_A$ , se pueden aproximar por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}C_{AA}(s) &= 4\pi\epsilon_0 R_A \left( \frac{1}{3} \ln \frac{R_A}{s} + 0,975 \right), \\C_{BB}(s) &= 4\pi\epsilon_0 R_A \left( \frac{1}{3} \ln \frac{R_A}{s} + 2,184 \right), \\C_{AB}(s) &= -4\pi\epsilon_0 R_A \left( \frac{1}{3} \ln \frac{R_A}{s} + 0,481 \right).\end{aligned}$$

La forma de proceder en el segundo apartado es hacer los cálculos suponiendo  $s > 0$  y solo al final tomar el límite  $s \rightarrow 0$ .

**Declaración de Autoría**

El alumno Álvaro Jerónimo Sánchez.....  
con DNI número 09847051S....., declara que es el autor  
único e individual de este trabajo, y que no ha usado sis-  
temas de inteligencia artificial generativa para la redacción  
u obtención de resultados.



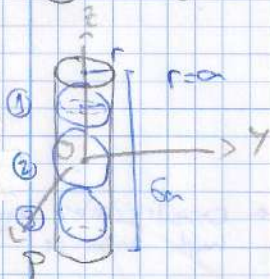
Fdo:

(Pec-1-EM)

Álvaro Sebastián Sánchez

### EJERCICIOS

① ¿E y V en O?



- El campo en O será nulo, ya que se encuentran dentro de una esfera, y el campo dentro de un conductor es  $(E_0 = 0)$ .
- Para hallar el potencial aplicamos superposición.

- El campo por el cilindro sin tener en cuenta los huecos es:

$$V_{\text{cil}} = k \int \frac{\rho}{\sqrt{r^2 + z^2}} dV \rightarrow \text{es } 0 \text{ en el tubo } O : \underline{E_{\text{cil}(O)} = 0}$$

- La esfera central (2) no tendrá influencia, ya que  $r=0$  y el E que resta es 0. Los otros dos huecos son simétricos por lo que:

$$V_{1+3} = 2V_1 \quad (\text{Puedo usar } \phi = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \text{ tanto para esferas vacías como huecos})$$

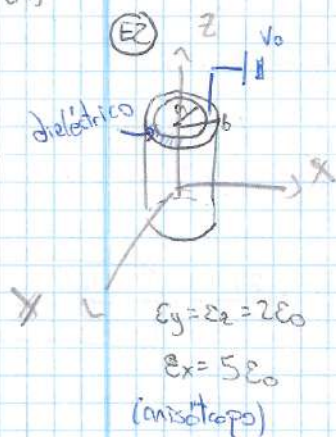
$$\oint E \cdot dS = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot V}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho V}{S \epsilon_0} = \frac{\rho 4\pi r^3}{3 \cdot 4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\rho r^3}{3 \epsilon_0 \epsilon_0} = \frac{\rho r^3}{3 \epsilon_0^2}$$

$r_0$  es el radio de la esfera Gaussiana que es  $\underline{2a}$

$$V_{1+3} = -\int_0^{2a} E \cdot dr = -2 \frac{\rho}{3 \epsilon_0^2} \int_0^{2a} r^3 dr = \frac{-2 \rho (2a)^4}{4 \cdot 12 a^2 \epsilon_0} = \frac{-2 \rho a^4}{3 a^2 \epsilon_0} = \underline{\underline{\frac{-2 \rho a^2}{3 \epsilon_0}}}$$

- Restamos el potencial de los huecos al del cilindro para hallar el total:

$$V(O) = 0 - V_{1+3} = \boxed{\frac{2 \rho a^2}{3 \epsilon_0}}$$



$$a) \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{enc} = D \oint_S dS = D 2\pi r \cdot L \quad (\text{radio sup. gauss.})$$

$$\Rightarrow D 2\pi r \cdot L = \frac{\sigma \cdot S}{1} = \frac{\sigma \cdot 2\pi a \cdot L}{1}$$

La carga encerrada es la del cilindro con radio 'a', ya que los dieléctricos no tienen cargas libres.

$$\Rightarrow D 2\pi r \cdot L = \frac{\sigma 2\pi a L}{1} \Rightarrow \boxed{D = \frac{\sigma a}{r}} \quad \text{será } \perp \text{ a la superficie}$$

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\epsilon_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \rightarrow D = E \epsilon$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma a \cos \theta}{r 5\epsilon_0} \hat{i} + \frac{\sigma a \sin \theta}{r 2\epsilon_0} \hat{j}}$$

b.) El V0 se reparte y la suma de Qint + Qext = 0. Diciendo que el cilindro interior tiene una densidad de carga  $\sigma = \sigma_a$ , podemos hallar la del exterior:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a &= \frac{Q_a}{2\pi a L} \Rightarrow Q_a = \sigma_a 2\pi a L \\ \sigma_b &= \frac{Q_b}{2\pi b L} \Rightarrow Q_b = \sigma_b 2\pi b L \end{aligned} \right\}$$

$$Q_a = -Q_b$$

$$\sigma_a 2\pi a L = -\sigma_b 2\pi b L$$

$$\boxed{\sigma_b = -\frac{a}{b} \sigma_a}$$

$$c.) \left. \begin{aligned} \frac{Q_a}{L} &= \sigma_a 2\pi a = \lambda_a \\ \frac{Q_b}{L} &= -\frac{a}{b} \sigma_a 2\pi b = \lambda_b \end{aligned} \right\} \quad (\text{observamos que } \lambda_a = -\lambda_b)$$

$$\frac{C}{L} = \frac{1}{V_0} = \frac{\sigma_a 2\pi a}{V_0}$$

• Hallamos V0:

$$V_0 = \int_c E dr = \int_a^b \frac{D}{\epsilon} dr = \int_a^b \frac{\sigma_a}{\epsilon} dr = \int_a^b \frac{Q}{2\pi r \epsilon} = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon} \cdot \ln \frac{b}{a}$$

$$\hookrightarrow \frac{C}{L} = \frac{1}{V_0} = \boxed{\frac{2\pi \epsilon}{\ln b/a}}$$

E3)



$$a.) V_0 = k \int_V \frac{\rho}{r} dV = k\rho \left( \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{1}{r} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \right) =$$

$$= k\rho \left( \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r (-\cos\pi + \cos 0) d\theta d\phi \right) = k\rho \left( \int_0^{2\pi} r 2 d\phi \right) =$$

$$= k\rho 2\pi R^2 \rightarrow V_0 = \frac{kQ 2\pi R^2}{4/3 \cdot \pi R^3} \Rightarrow Q = \frac{2V_0 R}{3k} = \boxed{\frac{8V_0 R \pi \epsilon_0}{3}}$$

b.)



$$R_B = 2R_A$$

La carga se repartirá entre ambas superficies, y ya que están en contacto, su potencial será el mismo:

$$\boxed{V_A = V_B = V_0} \rightarrow \frac{3Q_A}{8\pi\epsilon_0 R_A} = \frac{3Q_B}{8\pi\epsilon_0 R_B} \Rightarrow \frac{Q_A}{R_A} = \frac{Q_B}{R_B}$$

$$\hookrightarrow \boxed{Q_A = \frac{Q_B}{2}} \quad (R_B = 2R_A)$$



$$s = 10^{-3} R$$

$$\boxed{V_A = 0}$$

$$\boxed{Q_A \approx 0}$$

Ambas esferas tienen capacidades distintas, por lo que es necesario saber la carga restante en B:

$$Q_B = C_{BB} V_B + C_{BA} V_A$$

$\uparrow$   
 $V_B = V_0$

$$\Rightarrow \boxed{Q_B = V_0 4\pi\epsilon_0 R_A \left( \frac{1}{3} \ln \frac{R_A}{10^{-3} R} + 2.184 \right)} \quad \boxed{V_B \approx V_0}$$

$$Q_A = C_{AA} V_A + C_{AB} V_B = \boxed{-V_0 4\pi\epsilon_0 R_A \left( \frac{1}{3} \ln \frac{R_A}{10^{-3} R} + 0.181 \right)}$$

• QUESTIONS:

Q2

$Q_{zz} > Q_{xx} = Q_{yy}$  • Sabiendo que  $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$   
( $Q_{zz} = "Q"$ )

$$2Q_{xx} + Q_{zz} = 0 \Rightarrow Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{Q}{2}$$

$$V_c = k \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \frac{q_i q_k}{r_{ik}} = \text{tiene forma diagonal por lo que } Q_{crossed} = 0$$

$$= k \frac{1}{2} \left( \frac{r_x^2 (-Q)}{r^5} - \frac{r_y^2 Q}{r^5} + \frac{r_z^2 Q}{r^5} \right) = \boxed{\frac{kQ}{4r^5} (-r_x^2 - r_y^2 + 2r_z^2)}$$

Q3

$$\epsilon = 21\epsilon_0$$

$$P_0 = 9.7 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$$

$$E_{ext} = 10^6 \text{ V/m}$$

$$\rho_x = 784 \text{ kg/m}^3$$

$$P_m = 58.08 \text{ g/mol}$$

$$P = \epsilon_0 \chi \cdot E \longrightarrow \boxed{(\epsilon_0 \cdot 20 \cdot 10^9) \text{ C}\cdot\text{m}}$$

$$\epsilon = 21\epsilon_0 = \epsilon_0(1 + \chi) \Rightarrow \chi = 20$$

$$\boxed{1.77 \cdot 10^{-4} \text{ C}\cdot\text{m}}$$

• Para calcular cuántos dipolos (moléculas) deben estar alineados, igualamos la polarización de las moléculas (con un cociente "a") a la deseada:

$$P = a \frac{P_0 \cdot n^{\text{moléculas}}}{m^3}$$

$$784 \frac{\text{kg}}{m^3} \cdot \frac{1 \text{ mol}}{58.08 \text{ g}} \cdot \frac{1000 \text{ g}}{1 \text{ kg}} \cdot \frac{6.022 \cdot 10^{23} \text{ moléculas}}{1 \text{ mol}} = 8.13 \cdot 10^{23} \frac{\text{moléculas}}{m^3}$$

$$b) a = \frac{P}{8.13 \cdot 10^{23} \cdot P_0} = \boxed{0.0022} \rightarrow \boxed{0.22\%}$$

Q4



Para la esfera interior, la exterior se comporta como una q puntual en su centro.

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} \right) \quad (\text{potencial propio + el de } Q_2)$$

Para la exterior, la interior actúa como puntual en el centro también:

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1 + Q_2}{R_2} \right)$$

• Sabiendo que  $V_i = \sum_j P_{ij} Q_j$ , podemos extraer los coeficientes de potencial de las expresiones marcadas: \*

$$\left. \begin{array}{ll} P_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1} & P_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2} \\ P_{22} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2} & P_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2} \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{P_{21} = P_{12}}$$

- Hallamos los de capacidad:

$$C = P^{-1} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 1/R_1 & 1/R_2 \\ 1/R_2 & 1/R_1 \end{pmatrix} \rightarrow |P| = \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2^2} K$$

$$C = \frac{1}{|P|} \begin{pmatrix} 1/R_2 & -1/R_2 \\ -1/R_2 & 1/R_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{K} \begin{pmatrix} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} & \frac{-R_1 R_2}{R_2 - R_1} \\ \frac{-R_1 R_2}{R_2 - R_1} & \frac{R_2^2}{R_2 - R_1} \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} C_{11} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} & C_{12} = \frac{-4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \\ C_{22} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_2^2}{R_2 - R_1} & C_{21} = \frac{-4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{C_{12} = C_{21}}$$

#### DECLARACIÓN DE AUTORÍA

El alumno Álvaro Jerónimo Sánchez con DNI número 09847051S, declara que es el autor único e individual de este trabajo, y que no ha usado sistemas de inteligencia artificial generativa para la redacción u obtención de resultados.

Fdo:

*Á. Sánchez*