T.2 - Funciones

→ Fn. de una variable

$f: A \to B$ — Es una regla que a cada elem. del conjunto A asocia un único elemento del conjunto B.

Dominio de F: Dom(F)

Rango de F

Si $a \in A$, la imagen "a" por f es $f(a)$. → La IMAGEN es cada valor de la fn.

$\Rightarrow Im(f) = f(A) = \{f(a) : a \in A\} \subset B$

($\subset$: contiene)

Ejemplos de funciones

1.) $A = \{$alumnos de clase$\}$

$\mathbb{N}$ = nºs naturales

$f: A \to \mathbb{N}$

$a \mapsto$ edad de a

[$\mapsto$: ASIGNO]

Dom(F): alumnos

Im(F): edad

2.) $\left[f: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto 2n \right]$ $\boxed{f(n) = 2n}$

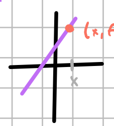
Dom(F): $\mathbb{N}$

Im(F): $\{n \in \mathbb{N} : n$ es par$\}$

3.) $\left[f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x+1 \right]$

Dom(F): $\mathbb{R}$

Im(F): $\mathbb{R}$

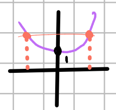


OBSERVACIÓN: Si $f: A \to B$ es una fn con A,B subconjuntos de $\mathbb{R}$ llamaremos gráfica de f al conjunto.

4.) $\left[f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2+1 \right]$

Dom(F): $\mathbb{R}$

Im(F): ?



La imagen (proyec) estará en un pto. o el que dos coinciden → $y = 2x^2+1$; $\frac{y-1}{2} = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{y-1}{2}} \Rightarrow$ Im será $[1, +\infty)$

Esta no es iny., tiene puntos coincidentes.

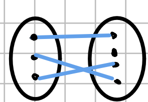
Tipos según

- Sea $f: A \to B$ una fn, f es **inyectiva** si distintos elementos del dominio tienen distintas imágenes.

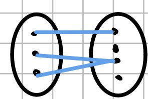
  Es decir: si $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ $[f(x_1) = f(x_2)]$

  "si dos imágenes son iguales, vienen del mismo sitio"

INYECTIVO



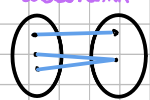
NO INYECTIVO



- $f: A \to B$ es **sobreyectiva** si todo elemento de B es imagen de A.

  Es decir: $f: A \to B \Rightarrow Im(f) = B$ $[f(x) = y]$

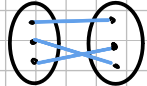
SOBREYECTIVA



(TODOS LOS PTOS. CUBIERTOS)

- $f: A \to B$ es **biyectiva** si es sobreyectiva e inyectiva.

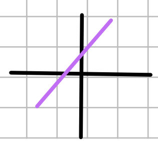
BIYECTIVA



Ej:

1.) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 2x+1$



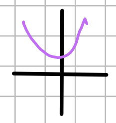
- Es inyect. si $f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$ SÍ

- Es sobrey. si $y \in \mathbb{R} \xrightarrow{f(x)=y} f\Big(\underbrace{\frac{y-1}{2}}_{x}\Big) = y \Rightarrow 2x+1 = y \Rightarrow 2x = y-1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{y-1}{2}}$ SÍ

  $\hookrightarrow = y$

2.) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 2x^2+1$



- No es iny., ya que tiene valores que se repiten $[f(1) = f(-1) = 3]$
- Sí es epiy. : $\left[f\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = y \right]$
- No es sobrey. : $[\, Im(f) = [1, +\infty) \,] \neq \mathbb{R}$

$\Downarrow$

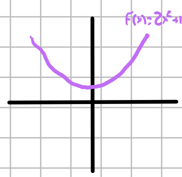
- No es biy.

Par / Impar

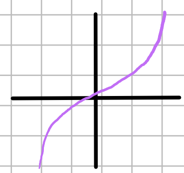
Una función $f: (-a, a) \to \mathbb{R}$ (intervalo)

- Es PAR si: $f(x) = f(-x)$ ← simétrica respecto al eje y
- Es IMPAR si: $f(-x) = -f(x)$ ← simétrica respecto al origen

PAR



IMPAR



3.) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

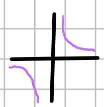
$f(x) = x^3$

$\{ f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

IMPAR

4.) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (excluye el 0)

$f(x) = \frac{1}{x}$



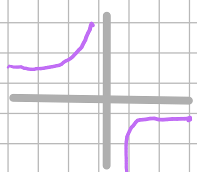
- Es inyec. si: $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ [Sí]

- Es sobrey. : $Im(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (todos los nºs son válidos)

Si $g(x) = -f(x)$

o si $g(x) = f(-x)$



SIMÉTRICO

$\hookrightarrow f(x) = \frac{1}{x-2}$

$\left(f(x) = \frac{1}{x} \pm 1 \equiv \text{TRASL. VERTICAL}\right)$

TRASLACIÓN. TIENEN LAS MISMAS PROPIEDADES PERO ≠ VALORES

→ Composición de Fn

Dadas $f: A \to B$, $g: C \to D$ $\{$ Con $g(C) \subset A$ definimos: $f \circ g: C \to B$

$(f \circ g)(c) = f(g(c))$ para todo $c \in C$

Ej.) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ $\qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (2x+1)^2$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\underbrace{2x+1}_{x^2}) = \boxed{(2x+1)^2}$ $\qquad f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \boxed{2x^2+1}$ $\qquad f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$h: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{2}{x-1}$

$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f\left(\frac{2}{x-1}\right) = \boxed{\frac{4}{(x-1)^2}}$ $\qquad f \circ h: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$

$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(x^2) = \boxed{\frac{2}{x^2-1}}$ $\qquad h \circ f: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$

- La función identidad en un conjunto C es $id_C : C \to C$
  $(id_C)(x) = x$

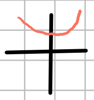
Dada $f: A \to B$ si existe $g: B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$ y $g \circ f = id_A$, g será inversa de f y la denotamos f^{-1}.

SÓLO TIENEN INVERSA LAS FUNCIONES BIYECTIVAS

Ej.) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = 7x + 5$
¿inversa?

$\to 7x + 5 = y \Rightarrow x = \frac{y-5}{7} \to \boxed{g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{x-5}{7}}$

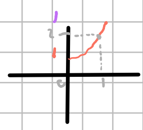
2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^2 + 1$



NO ES INVERTIBLE (NO ES INYEC.) → SÓLO COJO UN TROZO

$\Rightarrow [f: [0, +\infty) \to [1, +\infty)]$

→ la del trozo es biyectiva



INVERSA: $g: [1, +\infty) \to [0, +\infty)$

$x^2 + 1 = y \Rightarrow x^2 = y - 1 \Rightarrow x = \oplus\sqrt{y-1}$

→ me quedo con ⊕ porque he cogido el trozo dcho.

→ **MÁS EJ. DE FN**

POLINÓMICAS

$[f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}]$
$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \dots$

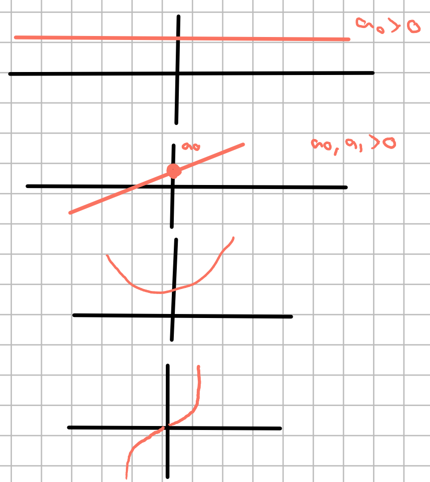
si $a_i \in \mathbb{R} \to n \in \mathbb{N}$
si $a_n \neq 0 \to n$ = grado del polin.

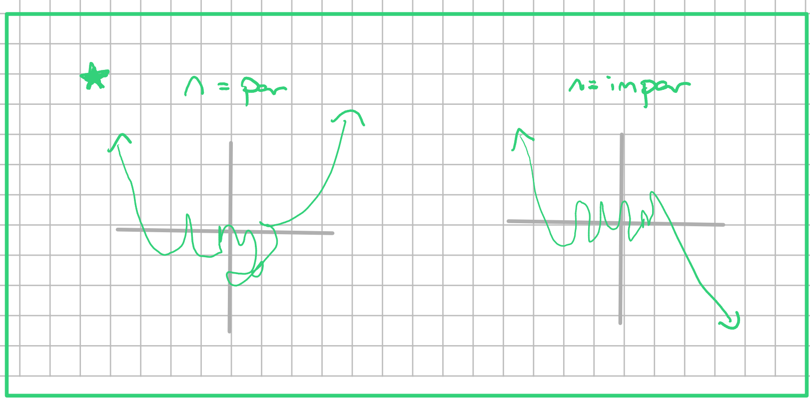
→ $n=0$ $[f(x) = a_0]$
Función ctc

→ $n=1$ $[f(x) = a_0 + a_1x]$
ej.) $y = a_0 + a_1x$

→ $n=2$ $[f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2]$
ej.) $f(x) = a_0 + a_2x^2$

$[\dots]$
→ $n=3$ $f(x) = x^3$





FN. RACIONALES (cocientes de polinomios) $\left[F(x) = \frac{P(x)}{q(x)} \right]$

(Ej:s)

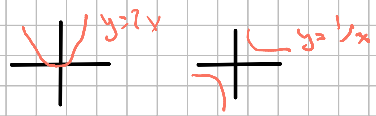
$\left[F(x) = \frac{1}{x} \right] \to Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

$$g(x) = \frac{2x^4 + 2x^3 + x + 1}{x^2 + x} = \frac{2x^3(x+1) + (x+1)}{x(x+1)}$$

IGUALO A $0 < \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix}$ { PERO SE PUEDE SIMPLIF. PARA DEFINIR MEJOR

$$\Rightarrow \frac{2x^3(x+1) + (x+1)}{x(x+1)} = \frac{2x^3\cancel{(x+1)}}{x\cancel{(x+1)}} + \frac{\cancel{(x+1)}}{x\cancel{(x+1)}}$$

$\hat{g} = 2x^2 + \frac{1}{x}$



FN. EXP. Y LOG.

$$\left[e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right]$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

! LOG ES INVERSA DE EXP

$y = \ln x \longleftrightarrow e^y = x$

PROPIEDADES LOG.

$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$

$\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y$

$\log_b x^\theta = \theta \log_b x$

$\log_b b^x = a^{\log_a x}$

PROPIEDADES EXP.

$a^0 = 1$

$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta$

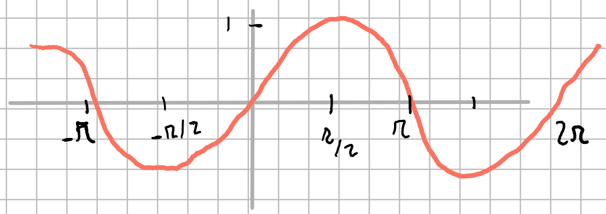
$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$

$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$

- DADO $a > 0$, definimos: $a^x = e^{x \ln a}$
- DADO $b > 0 \neq 1$, definimos: $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$ $\quad y = \log_b x \longleftrightarrow x = b^y$

FN. TRIGONOMÉTRICAS

$[f(x) = \operatorname{sen} x]$



Es PERIÓDICA, es decir, existe $p > 0$ tal que $f(x) = f(x+p)$

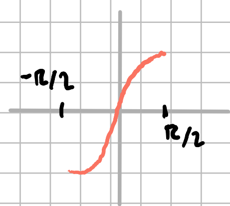
$f(x) = \operatorname{sen} x$ tiene periodo 2π

- $Dom = \mathbb{R}$
- $Im = [-1, 1]$
- IMPAR $(f(-x) = -f(x))$

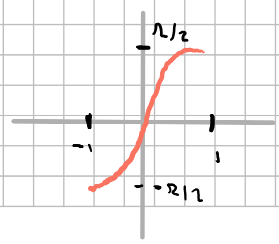
Si restringimos Dom

$Dom = [-\pi/2, \pi/2]$

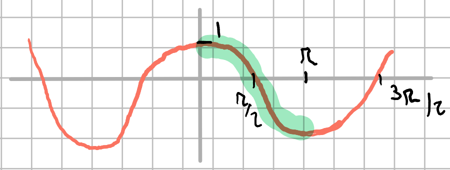
$\to$ Sen x es INYECTIVA



Es INVERTIBLE, y corresponde con el arcsen x $(\cos^{-1} x)$

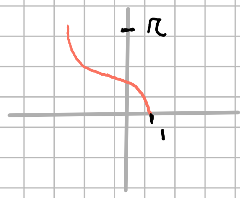


[$F(x) = \cos x$]



No es INYECTIVA

Cojo un TROZO → y lo traslado



[$F(x) = tg\, x$] $= \dfrac{sen\, x}{\cos x}$

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

cos hiperbólico

[$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$]

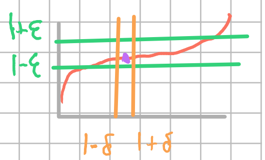
[$senh\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$]

→ LÍM. DE FN. FN. CONTINUAS

El lím de $F(x)$ cuando $x \to c$ es l.

(Los valores se acercan a l)

[$\lim\limits_{x \to c} F(x) = l$]



INTERV.

$|x| < 3$

$= -3 < x < 3$

["Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$"]

← un valor posit. ← otro valor posit.

Para cada valor x existe valor y.

• LÍM. LATERALES

[$\lim\limits_{x \to c^{\pm}} F(x) = l$]

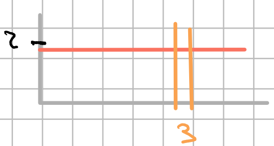
Definen el límite de sólo una región de $F(x)$.

Por la parte negativa o positiva.

EJEMPLOS

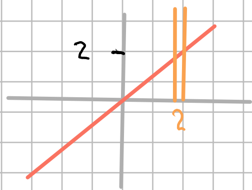
(1) $F(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 3} F(x) = 2$



(2) $F(x) = x$

$\lim\limits_{x \to 2} F(x) = 2$



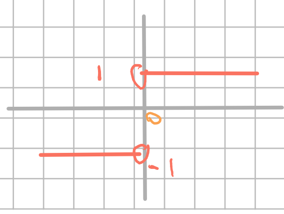
(3) $F(x) = x^2$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$

(4) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ $\begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$

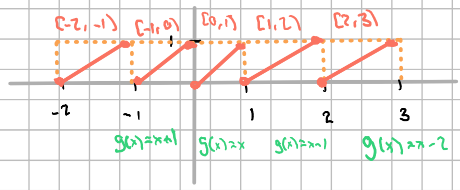


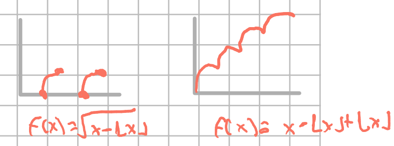
(5) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ← PARTE ENTERA: ej. $\lfloor 3'002 \rfloor = 3$, $\lfloor 3'999 \rfloor = 3$ { ENTRE $[n$ y $n+1)$, $\lfloor x \rfloor = n$ $\lfloor -0'25 \rfloor = -1$

"me quedo con el de abajo"

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$ (1'002)

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$ (0'999)





• PROPIEDADES LÍM.

- Si existe un lím, este es único.
- Si $\lim_{x \to c} f(x) = l$, $\lim_{x \to c} g(x) = m$ { $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = l + m$
  { si $m \neq 0$, $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$

y "$1 - \cos^2 x$" = "$\operatorname{sen}^2 x$"

★ $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

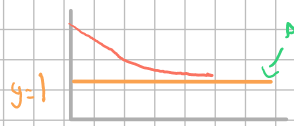
$\left(\lim \frac{\operatorname{sen}(x/2)}{x} \sim \lim_{[t = x/2]} \frac{\operatorname{sen} t}{2t} = \frac{1}{2} \right)$

• LÍM. EN ∞ = ASÍNTOTAS

PROPS.
$e^{\infty} = \infty$
$e^{-\infty} = 0$
$\frac{1}{0^+} = +\infty$
$\frac{1}{\infty} = 0$

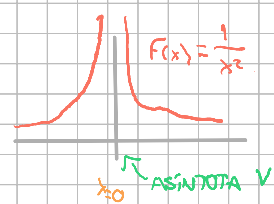
ASÍNTOTA HORIZ.

$\left[\lim_{x \to \infty} f(x) = l \right]$



ASÍNTOTA VERT.

$\left[\lim_{x \to c} f(x) = \infty \right]$



★ $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$ $\frac{(x+1)\frac{1}{x}}{(\sqrt{x^2+1})\frac{1}{x}}$

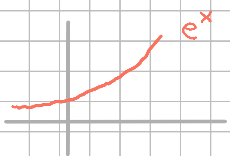
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{-\sqrt{1}} = -1$

Queda un menos en $\frac{1}{x}$, que tendrían que quedar fuera

TAMBIÉN SE PUEDE USAR L'HOPITAL

↳ o SIMPLIF.: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{x} = -\infty$ (desprecio x)

$\left[\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \right]$



$\left[\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = c \right]$ ASÍNTOTA OBLÍCUA

↳ $\left[\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - bx) \right]$

→ Lím con e

$(1+\frac{1}{x}) > 0$ (∄ log neg.) ⊛

$$\left[\, e = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \right] \longrightarrow f(x) = \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right] \quad x\neq 0$$

⊛ Sacar Dom.: $\left(1+\frac{1}{x}\right) > 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x} > 0$

$x+1 > 0 \longrightarrow x > -1$
$x > 0$

		-1		0	
$(x+1)$	$-$		$+$		$+$
(x)	$-$		$-$		$+$
	$+$		$-$		$+$

$Dom = (-\infty,-1) \cup (0,\infty)$

(Ej.) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{x/2} \xrightarrow[t=3x]{} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t/2\cdot 3} = \lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{1/6} = \boxed{e^{1/6}}$

- $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x} = \boxed{0}$
- $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+5}{7x^3+e^{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x+5}{7x^3+2e\cdot e^x} = \lim \frac{1+\overbrace{\frac{5}{e^x}}^{0}}{\underbrace{\frac{7x^3}{e^x}}_{0}+2e} = \boxed{\frac{1}{2e}}$

Continuidad

- f(x) es continua en un pto. si:
  - $\exists f(c)$ (pertenece al dominio)
  - $\lim_{x\to c} = \lim_{x\to c^-} = \lim_{x\to c^+}$

  $\left[\lim_{x\to c} f(x) = f(c)\right]$ ← agrupa todo, sólo es necesario comprobar esto

- F(x) es continua en un intervalo...
  - abierto si: es continua en (a,b)
  - cerrado si: es continua en (a,b) y $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ (se coge un extremo)

(discontinuidad/"hueco" que está en el Dom)

↳ Si f(x) tiene una discontinuidad evitable[(a)], se parte en trozos y uno de ellos se establece igual a "a".

→ PROPIEDADES

→ Si $f(x)$ y $g(x)$ es continua en x, $(f(x)+g(x))$ también, y $(f(x)\cdot g(x))$ también.

→ Si $f(x)\neq 0$, $\frac{1}{g(x)}$ es continua en x.

→ Para componer fn$_s$:

• Si g es continua en a y f en $g(a)$, → $f\circ g$ es continua en a.

• Determinar asíntotas:

$$f(x)=\frac{x^2-x-2}{x+2}=\frac{x^2}{x+2}-1$$

• A.H.: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}-1\right)=\infty\ [\nexists]$

• A.O.: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=1=m$

$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=$

$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x-2}{x+2}\right)=-3$

• A.V.: $x+2=0 \Rightarrow [x=-2]$

$\lim_{x\to-2^+}f(x)=+\infty$

$(\Rightarrow -2+0'00001)$

$\lim_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$

! Si quieres saber si la fn corta la asíntota, resuelve:

$$\begin{cases} y=x-3 & \leftarrow \text{ASÍNTOTA} \\ y=\frac{x^2}{x+2}-1 & \leftarrow f(x) \end{cases}$$

En este caso no corta.

→ BOLZANO

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, y con $f(a), f(b)\neq 0$ y de signos opuestos.

↳ EXISTE c (dentro de (a,b)) TAL QUE $f(c)=0$

(ej) Continua en $x=a$ → $\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$

→ VALOR INTERMEDIO

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, y α es un nº entre $f(a)$ y $f(b)$.

↳ EXISTE c (dentro de $[a,b]$) TAL QUE $f(c)=\alpha$

→ WEIERSTRESS

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, tiene un MÁX y MÍN.

- $M \in [a,b]$ es máx. si $f(x) \leq f(M)$. $f(M)$ es valor máx.
- Un máx local es uno rodeado por dos mín.
- Uno abs es mayor que TODO

(lo mismo con mínimos)