Matemáticas. Grado en Química
Ejercicios - Curso 2023-24 Hoja 1.2

Funciones elementales. Composición e inversa

1. La determinación del cero absoluto de temperatura se deduce de los trabajos del físico francés Jacques Charles (1746-1823). Charles descubrió que el volumen de un gas que se mantiene a presión constante varía linealmente con la temperatura del gas. En la tabla, 1 mol de hidrógeno se mantiene a la presión constante de 1 atmósfera. El volumen V se mide en litros y la temperatura en grados Celsius:

T	-40	-20	0	20	40	60	80
V	19,1482	20,7908	22,4334	24,0760	25,7186	27,3612	29,0038

a) Determinar una función lineal $V = mT + b$ que relacione T y V.

b) Usando el resultado del apartado anterior, calcula en grados Celsius el valor del cero absoluto de temperatura.

Sol: Cero absoluto: -273,145°C

2. Un trabajador dispone de dos opciones para ocupar dos puestos distintos en una empresa. En uno de ellos le pagan $12,50$ euros por hora más un suplemento de $0,75$ euros por unidad producida; en el otro, $9,20$ euros por hora más un suplemento de $1,30$ euros por unidad producida.

a) Encuentra las relaciones lineales que expresan los salarios en función del número de unidades producidas por hora para cada una de las opciones. Dibuja sus gráficas y halla el punto de intersección P.

b) Interpreta el significado del punto de intersección. ¿Cómo usaría el trabajador esta información para seleccionar la opción correcta si su objetivo fuera obtener el mayor sueldo por hora trabajada?

3. En cada uno de los casos halla las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$, indicando para cada una de ellas su dominio de definición.

a) $f(x) = x^2,\ g(x) = \sqrt{x}$ **b)** $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = x^2 + 1$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = \sqrt{x + c}$

Sol: (a) $\mathrm{Dom}(f \circ g) : x \in [0, \infty)$, $\mathrm{Dom}(g \circ f) : x \in \mathbb{R}$;
(b) $\mathrm{Dom}(f \circ g) : x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(g \circ f) : x \in \mathbb{R} - \{0\}$;
(c) $\mathrm{Dom}(f \circ g) : x \in (-c, \infty)$;
si $c > 0$ $\mathrm{Dom}(g \circ f) : x \in (-\infty, -\frac{1}{c}] \cup (0, \infty)$
si $c < 0$ $\mathrm{Dom}(g \circ f) : x \in (0, -\frac{1}{c}]$
si $c = 0$ $\mathrm{Dom}(g \circ f) : x \in (0, \infty)$

4. Halla la función inversa de cada una de las funciones dadas y dibuja en un mismo diagrama la gráfica de la función y de su función inversa (puedes hacerlo con algún programa de ordenador) ¿Qué relación hay entre las gráficas de ambas funciones? Indica en cada caso su dominio de definición y su recorrido.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ **b)** $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+7}}$, **c)** $h(x) = \frac{x}{x+k}$.

Sol: (a) $f^{-1}(x) = x^3 + 1$, $\mathrm{Dom}(f) : x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Img}(f) : x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f^{-1}) : x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Img}(f^{-1}) : x \in \mathbb{R}$;

(b) $g^{-1}(x) = x\sqrt{\frac{7}{1-x^2}}$, $\mathrm{Dom}(g) : x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Img}(g) : x \in (-1,1)$, $\mathrm{Dom}(g^{-1}) : x \in (-1,1)$, $\mathrm{Img}(g^{-1}) : x \in \mathbb{R}$;

(c) $h^{-1}(x) = \frac{k\,x}{1-x}$, $\mathrm{Dom}(h) : x \in \mathbb{R} - \{-k\}$, $\mathrm{Img}(h) : x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $\mathrm{Dom}(h^{-1}) : x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $\mathrm{Img}(h^{-1}) : x \in \mathbb{R} - \{-k\}$;

5. Dibuja la gráfica de cada una de las funciones $f(x) = |x-2|$ y $g(x) = |x-2| + |x+4|$ e indica en cada caso en qué intervalos es cada una de las funciones inyectiva.

6. El tiempo T, en minutos, que tarda un pequeño avión en subir hasta una altura de h metros es

$$T = 50\log_{10}\frac{5400}{5400-h}$$

donde 5400 es el tope de altitud del aparato.

a) Determinar el dominio de la función apropiado al contexto del problema.

b) Representar la función T y determinar sus asíntotas.

c) Cuando el avión se acerca a su techo tope ¿qué puede decirse del tiempo que necesita para ascender?

7. La presión atmosférica decrece exponencialmente con la altura. Se sabe que al nivel del mar es de 760 mm de mercurio y que a los 1000 metros es de 672,71 mm. Calcular la presión atmosférica a 3000 metros de altura.

Sol: 527 mm de mercurio

8. El gerente de una fábrica estima que un operario puede producir a lo sumo 30 unidades diarias. La curva de aprendizaje para el número N de unidades producidas al día por un obrero que lleva t días trabajando es $N = 30(1 - e^{kt})$. Tras 20 días de estancia en la fábrica, un trabajador produce 19 unidades diarias.

a) Hallar su curva de aprendizaje.

b) ¿Cuántos días después producirá 25 unidades diarias?

Sol: $k = -0{,}050$ días^{-1}, $t = 36$ días

9. Resuelve las ecuaciones siguientes: **a)** $\ln\sqrt{x+1} = 2$ **b)** $\ln x + \ln(x-3) = 0$ **c)** $e^{a-x^2} = 4$ **d)** $a\arctan(x+b) = 1$ **e)** $\sinh\theta = 1$.

Sol: (a) $x = e^4 - 1$, (b) $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, (c) $x = \pm\sqrt{a - \ln 4}$, $\forall a \geq \ln 4$,

(d) $x = \tan\frac{1}{a} - b$, $\frac{1}{a} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, (e) $\theta = \ln(1+\sqrt{2})$ $(= \operatorname{arc\,sinh} 1)$

10. En la escala de Richter, la magnitud R de un terremoto de intensidad I es

$$R = \frac{\ln I - \ln I_0}{\ln 10},$$

donde I_0 es la menor intensidad posible usada para comparar. Supongamos que $I_0 = 1$.

a) Halla la intensidad del terremoto de San Francisco de 1906 cuya magnitud en la escala de Richter fue 8,3.

b) Halla el factor por el que aumenta la intensidad de un terremoto si la magnitud en la escala de Richter se duplica.

11. Sin utilizar la calculadora halla el valor de las siguientes expresiones:
a) $\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}\frac{3}{4})$, **b)** $\sec(\operatorname{arcsen}\frac{4}{5})$ **c)** $\cos(\operatorname{arcsen}\frac{5}{13})$

Sol: (a) 3/5, (b) 5/3, (c) 12/13

12. Decide si son o no correctas las fórmulas siguientes con funciones hiperbólicas:

$$\textbf{a)}\ \cosh^2 x = \frac{1+\cosh 2x}{2}. \qquad \textbf{b)}\ \operatorname{senh}^2 x = \frac{-1+\cosh 2x}{2}.$$

3. En cada uno de los casos halla las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$, indicando para cada una de ellas su dominio de definición.
a) $f(x) = x^2,\ g(x) = \sqrt{x}$ **b)** $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = x^2+1$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = \sqrt{x+c}$

b.) $f(x) = \frac{1}{x} \to \text{Dom} = \mathbb{R} - \{0\}$

$g(x) = x^2+1 \to \text{Dom} = \mathbb{R}$

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{x^2+1} \to D = \mathbb{R}$

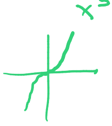
$(g\circ f)(x) = \frac{1}{x^2}+1 \to D = \mathbb{R}-\{0\}$

4. Halla inversa, di dom. y representa.

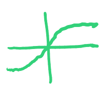
a.) $f(x) = \sqrt[3]{x-1} \to \text{Dom} = \mathbb{R},\ \text{Im} = \mathbb{R}$

$(= (x-1)^{1/3})$ es justo inversa de $(x-1)^3 \equiv$

x^3



$x^{1/3}$



$(x-1)^{1/3}$

se hace 0 en x=1

INV. (cambio el lugar de y por la x) $y = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow y^3 = x-1 \Rightarrow x = y^3+1$

$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = x^3+1}$

b) $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}} \rightarrow$ Dom $= \mathbb{R}$

IMPAR $(g(-x) = -g(x))$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1 \rightarrow$ COMO ES IMPAR $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$

INV.

$y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}} \Rightarrow y^2 = \dfrac{x^2}{x^2+7} = \dfrac{x^2+7-7}{x^2+7} = 1 - \dfrac{7}{x^2+7}$

sé que x e y tiene deben mismo signo

DESPEJO x

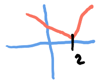
$\Rightarrow x^2 = \dfrac{7y^2}{1-y^2} \Rightarrow x = \pm y\sqrt{\dfrac{7}{1-y^2}}$

$\Rightarrow \boxed{g^{-1}(x) = x\sqrt{\dfrac{7}{1-x}}}$

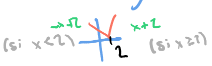
COMO y^2 TIENE QUE SER SIEMPRE POSITIVO, $\frac{7}{x^2+7}$ TIENE QUE SER <1

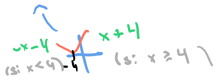
ASÍ QUE $\text{Im} = (-1, 1)$

5. Dibuja.

$f(x) = |x-2| \rightarrow$ la gráfica de $|x|$ es , por lo que: 

$g(x) = |x-2| + |x+4|$





$$\begin{cases} \text{si } x \geq 2 \rightarrow \overbrace{x-2}^{|x-2|} + \overbrace{x+4}^{|x+4|} \\ \text{si } -4 < x < 2 \rightarrow -x+2+x+4 \\ \text{si } x \leq -4 \rightarrow -x+2-x-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+2 \\ 6 \\ -2x-2 \end{cases}$$

6. Dominio

$T(h) = 50 \log \dfrac{5400}{5400-h}$

a) Dom $= [0, 5400)$

7. pres a 3000 m?

"decrece exponencialmente" (A, K ctes.)

$P(h) = Ae^{-kh}$

$\hookrightarrow p(0) = 760 = Ae^0 \Rightarrow A = 760$

$\Rightarrow p(h) = 760\, e^{-kh}$

$\hookrightarrow p(1000) = 760\, e^{-k1000} \rightarrow 672'71 = 760\, e^{-1000k}$

$\hookrightarrow = 672'71$

$\dfrac{672'71}{760} = e^{-1000k} \Rightarrow \ln\left(\dfrac{672'71}{760}\right) = -1000k$

$\Rightarrow k = \dfrac{\ln\left(\frac{672'71}{760}\right)}{-1000} \approx 0'00653437$

$\rightarrow p(h) = 760\, e^{-0'00066 h} \Rightarrow p(3000) = \boxed{527}$

9. Resuelve.

b) $\ln x + \ln(x-3) = 0$

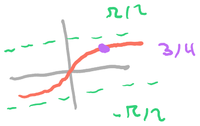
$\ln(x\cdot(x-3)) = 0$

$e^0 = x(x-3)$

$1 = x^2 - 3x \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} \boxed{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} \\ \cancel{\frac{3-\sqrt{13}}{2}} \text{ (es} < 0\text{)} \end{cases}$

11. Calcula

a) $\text{sen}(\underbrace{\text{arctg}}_{\alpha \text{ (entre } (-\pi/2,\, \pi/2))}(3/4)) \rightarrow \text{tg}\,\alpha = 3/4$



$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4} \rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}\text{sen}\,\alpha = \cos\alpha \\ \text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \end{cases} \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = (3/5)^2$

$\rightarrow \text{sen}\,\alpha = \begin{cases} 3/5 \\ \cancel{-3/5} \end{cases}$

(el ángulo está en 1er cuad)

$\Rightarrow \alpha = \text{arcsen}\, 3/5$

$\Rightarrow \boxed{\text{sen}(\text{arcsen}\, 3/5) = 3/5}$

Hoja 3

(1.)

a.) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3+x^2-x-1} \overset{L'H}{\rightarrow} \frac{2x}{3x^2+2x-1} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$

c.) $\lim_{x\to 16} \frac{4-\sqrt{x}}{x-16} \overset{L'H}{\rightarrow} \frac{-1/2}{\sqrt{x}} = \frac{-1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{2\cdot 4} = \boxed{\frac{-1}{8}}$

e.) $\lim_{x\to \pi/4} \frac{1-tg\,x}{sen\,x-\cos x} = \lim_{x\to \pi/4} \frac{1-\frac{sen\,x}{\cos x}}{sen\,x-\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - sen\,x}{sen\,x-\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = \boxed{-\sqrt{2}}$

(2)

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{x^2}\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{sen^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x} =$

$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{sen\,x}{x}\right)}_{1}\underbrace{\left(\frac{sen\,x}{x}\right)}_{1}\underbrace{\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)}_{1/2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

(4)

b.) $g(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-x-6}$

• AV: $x^2-x-6=0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4(-6)}}{2} = \frac{-1\pm 5}{2} \to 2,\ -3$

$\boxed{\exists \text{ en } x = 2, -3}$ → RECUPERABLE ⇒ es "recuperable" si extiend la fn, ya que $\lim_{x\to -3} g(x) = \frac{4}{5}$, no es indet.

Dom $= \mathbb{R}\setminus\{2,-3\}$

$\left[\ \hat{g}(x) = \begin{cases} g(x) & si\ \mathbb{R}\setminus\{2,-3\} \\ 4/5 & si\ x=-3 \end{cases}\ \right]$

• AH: $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 1$ $\boxed{\exists \text{ AH en } y=1}$

b.) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^{10}-1}{10x^{11}-3} = \boxed{0}$

d.) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to\infty} -\left(\frac{x^2}{x^2-x}\right)^{1/2} = \boxed{-1}$

e.) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-\cos x}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 - \frac{\cos x}{x}$

para $x>0$: $-1 \leq \cos x \leq 1$

$\frac{-1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$

$x\to\infty$: $\frac{-1}{x}\to 0$, $\frac{1}{x}\to 0$

por lo que $\frac{\cos x}{x} \underset{x\to\infty}{\rightarrow} 0$

$\Rightarrow \boxed{1}$

f.) $\lim_{x \to -\infty} x + \sqrt{x^2+3} = -\infty + \infty \longrightarrow \lim_{x \to -\infty} (x + \sqrt{x^2+3}) \dfrac{(x - \sqrt{x^2+3})}{(x - \sqrt{x^2+3})} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{-3}{x - \sqrt{x^2+3}}$