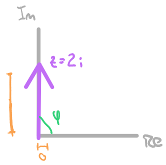
$\boxed{z^2}$



✓. La calculadora sólo dará entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$

$z = 2i \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\frac{2}{0} \Rightarrow \cancel{\varphi = \frac{\pi}{2}}$

↳ Forma polar $z = 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

$z^2 = (1+i)^2 = 1 + i + i + i^2 = i^2 + 2i + 1 = -1 + 2i + 1 = 2i$ ($i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$)

$\boxed{\frac{1}{z}} \Rightarrow \frac{1}{1+i} = \frac{1+i}{(1+i)^2} = \frac{1+i}{1+i+i+i^2} = \frac{1+i}{i^2+2i+1} = \frac{1+i}{2i} = \frac{1}{2i} + \frac{i}{2i} = \frac{2i}{4i^2} + \frac{2i^2}{4i^2} = \frac{i}{2} + \frac{1}{2}$

$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1/2}{1/2} = \operatorname{arctg} 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$ (45°)

×MULTIP. POR $\bar{z}$ (conj)

$\boxed{\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{(1+i)^2} = \frac{1}{2i} = \frac{2i}{4i^2} = \frac{i}{-2}$

$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{-1/2}{0} \Rightarrow \varphi = \frac{-\pi}{2}$ ✓ (−90°)

[12/09/2023]

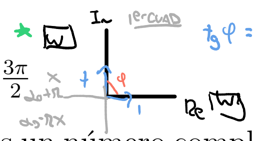
Los números complejos. Raices de polinomios

1. Considera el número complejo $z = 1 + i$. Calcula el argumento (φ) de los siguientes números complejos:

$$z^2, \ \frac{1}{z}, \ \frac{1}{z^2}.$$

Si t es un parámetro real y consideras el número complejo $w = 1 + ti$, ¿Cuál es su argumento? ¿Y el de w^2?

* está en 1er cuad. - puedo usar calculadora sin sumar/restar π



$\boxed{w}$ $\operatorname{tg}\varphi = \frac{t}{1} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} t$

$\boxed{w^2}$ $\varphi = \operatorname{arctg} t^2$

Sol: $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$, $\arg(z^2) = \frac{\pi}{2}$, $\arg(1/z) = \frac{7\pi}{4}$, $\arg(1/z^2) = \frac{3\pi}{2}$

2. Considera el número complejo $w = 3+4i$. Si $z = x+iy$ es un número complejo arbitrario, calcula la parte real, la parte imaginaria, el conjugado, el módulo y el argumento de los siguientes números complejos:

$$z, \ w, \ z - w, \ zw, \ \frac{1}{z}, \ \frac{z}{w}.$$

Sol: $|z\,w| = 5\ (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\arg(z\,w) = \arctan\frac{4x+3y}{3x-4y}$ $(+\pi \text{ si } 3x - 4y < 0)$,
$|z/w| = \frac{1}{5}\ (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\arg(z/w) = \arctan\frac{3y-4x}{3x+4y}$ $(+\pi \text{ si } 3x + 4y < 0)$

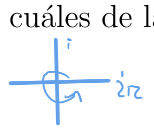
3. Calcular su módulo, su argumento y expresar los siguientes números complejos en sus formas trigonométrica y polar:

$$1 + i, \quad \frac{1}{2} - \sqrt[3]{2}i, \quad -\frac{1}{2}i - \sqrt[3]{2}, \quad -2 - 2i.$$

Sol: $|1 + i| = \sqrt{2}$, $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$
$|\frac{1}{2} - \sqrt[3]{2}i| = \sqrt{\frac{1}{4} + 2^{2/3}}$, $\arg(\frac{1}{2} - \sqrt[3]{2}i) = -\arctan(2^{4/3})$
$|-\frac{1}{2}i - \sqrt[3]{2}| = \sqrt{\frac{1}{4} + 2^{2/3}}$, $\arg(-\frac{1}{2}i - \sqrt[3]{2}) = \arctan(2^{-4/3}) + \pi$
$|-2 - 2i| = 2\sqrt{2}$, $\arg(-2 - 2i) = \frac{5\pi}{4}$

4. Decide razonadamente cuáles de las siguientes fórmulas son ciertas:

a) $e^{2\pi i} = 1$ ✓



b) $e^{-i\theta} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$ $\quad e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta) = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$ ✓

c) $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$ $\quad e^{i\theta} + e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) + (\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta) = 2\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ ✓

d) $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$ (igual que ↑)

e) $\dfrac{1}{\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$ (igual que ↑)

5. Encontrar dos números complejos tales que su cuadrado sea $8 - 6i$
Sol: $z_1 = -3 + i$, $z_1 = 3 - i$

$z^2 = 8 - 6i \Rightarrow (a + bi)^2 = 8 - 6i \Rightarrow a^2 + 2abi - b^2 = 8 - 6i$ $\begin{cases} \text{Re: } a^2 - b^2 = 8 \to \frac{9}{b^2} - b^2 = 8 \\ \text{Im: } 2ab = -6 \Rightarrow a = \frac{-3}{b} \end{cases}$

$\mapsto \Rightarrow a - b^4 = 8b^2 \Rightarrow -b^4 - 8b^2 + 9 = 0 \Rightarrow -u^2 - 8u + 9 = 0 \Rightarrow u = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(-1)9}}{-2}$

$u = b^2$

$\Rightarrow u = b^2 \begin{cases} \cancel{b = \sqrt{-9}} \\ b = \pm 1 \end{cases}$ $\mapsto a = \begin{cases} \frac{-3}{1} = -3 \\ \frac{-3}{-1} = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} z_1 = -3 + i \\ z_2 = 3 - i \end{matrix}}$

$u = \begin{cases} -9 \\ 1 \end{cases}$

6. Calcular los diferentes valores de

$$\sqrt{1-i},\ \sqrt[3]{-8},\ \sqrt[3]{-i},\ \sqrt[4]{16i},\ \sqrt{-9},\ .$$

Sol: $\sqrt{1-i} = \{2^{1/4}\ \left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{8}\right), 2^{1/4}\ \left(\cos\frac{15\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{15\pi}{8}\right)\}$,
$\sqrt[3]{-8} = \{1+\sqrt{3}\,i, -2, 1-\sqrt{3}\,i\}$,
$\sqrt[3]{-i} = \{i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i, , \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\}$,
$\sqrt[4]{16i} = \{2c + 2i\,s, -2s + 2i\,c, -2c - 2i\,s, 2s - 2i\,c\}$ $\quad (s \equiv \sin\frac{\pi}{8},\ c \equiv \cos\frac{\pi}{8})$,
$\sqrt{-9} = \{3\,i, -3\,i\}$

7. Comprobar la igualdad de polinomios $X^5 - 1 = (X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$ y utilizarla para encontrar las soluciones de la ecuación $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

8. Resolver las siguientes ecuaciones algebraicas:

a) $x^4 + 7x^2 - 144 = 0$

b) $x^3 - x^2 - 3x + 6 = 0$

c) $x^2 + 2x + 1 - 2i = 0$

Sol: (b) {-2, $\frac{1}{2}\,(3 - i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}\,(3 + i\sqrt{3})$ }
(c) { $-2 - i$, i }

9. Comprueba que la igualdad $\sqrt{z}\sqrt{w} = \sqrt{zw}$ no es cierta en general para números complejos, calculando el producto $\sqrt{-1}\sqrt{-1}$ primero usando la forma polar de $\sqrt{-1}$ y después usando dicha igualdad. Analiza en qué casos se cumple dicha igualdad.

---

2. Considera el número complejo $w = 3+4i$. Si $z = x+iy$ es un número complejo arbitrario, calcula la parte real, la parte imaginaria, el conjugado, el módulo y el argumento de los siguientes números complejos:

$$z,\ w,\ z-w,\ zw,\ \frac{1}{z},\ \frac{z}{w}\ .$$

$z.)$ Re: x, Im: y $\quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$ $\quad w.)$ Re: 3 Im: 4 $\quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{+4}{3} \Rightarrow \varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{+4}{3} = +0'93$ rad

$\bar{z} = x - yi$ $\quad |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \bar{w} = 3 - 4i$ $\quad |w| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$z-w.)$ Re: $x-3$ Im: $y-4$ $\quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y-4}{x-3} \Rightarrow \varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{y-4}{x-3}$ $\quad zw.)$ Re: $3x$ Im: $4y$ $\quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{4y}{3x} \Rightarrow \varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{4y}{3x}$

$[x-3+(y-4)i]$ $\quad \overline{z-w} = z-3-(y-4)i$ $\quad |z-w| = \sqrt{25+x^2+y^2}$ $\quad [3x+4yi]$ $\quad \overline{zw} = 3x-4yi$ $\quad |zw| = \sqrt{9x^2+16y^2}$

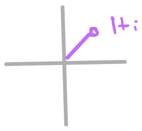
$\frac{z}{w}.)$

$\left[= \frac{(x+iy)}{(3+4i)}\,\frac{(3-4i)}{(3-4i)} = \frac{(x+iy)(3-4i)}{25} = \frac{1}{25}\,(3x + 3yi - 4xi - 4y\overset{=-1}{i^2}) = \frac{3x+4y}{25} + \frac{(3y-4x)}{25}\,i \right]$

$\bar{w}$

3. Calcular su módulo, su argumento y expresar los siguientes números complejos en sus formas trigonométrica y polar:

$$1+i,\quad \frac{1}{2}-\sqrt[3]{2}i,\quad -\frac{1}{2}i-\sqrt[3]{2},\quad -2-2i\ .$$



• $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{1} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

↳ F. POLAR: $\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ ✱

$z = 1+i$

$z = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + i\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\, i =$

$= \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

• $\left|\frac{1}{2} - \sqrt[3]{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + 2^{1/3}} = \left(\frac{13}{12}\right)^{1/6} = \sqrt{13/12} = 1'041$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1/2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt[3]{2}} = 0'378$

★ PARA POTENCIAS GRANDES

$z = (1+i) = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

$z^{2023} = \left(2^{1/2} e^{i\pi/4}\right)^{2023} = 2^{2023/2} e^{2023 i\pi/4} = 2^{1011} e^{[2023 i\pi/4]}$ → PASAR A FORMATO PARA VER POS. Y "VUELTAS"

$$\boxed{\left[\frac{2023}{4} = \underbrace{2\pi k}_{\text{vueltas}} + \underbrace{r}_{\text{radio}}\right]}$$

$2023 = 8\cdot 252 + 7$

$\frac{2023}{4} = \frac{8\cdot 252+7}{4} = 2\cdot 252 + \frac{7}{4}$

$\frac{2023}{4}\pi = 252\cdot 2\pi + \frac{7}{4}\pi$

$\Rightarrow e^{i\frac{2023}{4}\pi} = e^{i\frac{7}{4}\pi}$ ★

6. Calcular los diferentes valores de

$$\sqrt{1-i},\ \sqrt[3]{-8},\ \sqrt[3]{-i},\ \sqrt[4]{16i},\ \sqrt{-9},\ .$$

$\sqrt[4]{16i} \Rightarrow x^4 = 16i$ ← nº de vueltas ⇒ CADA RAÍZ: $k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=3$

$16i = 2^4 e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$

$\left(2^4 e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}\right)^{1/4} = 2\ e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right)}$

$k=0 \to 2e^{i\pi/8} =$

$k=1 \to 2e^{i\left(\pi/8+\pi/2\right)} =$

$k=2 \to 2e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{2}\right)} =$

$k=3 \to 2e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{2}\right)} =$

7. Comprobar la igualdad de polinomios $X^5-1=(X-1)(X^4+X^3+X^2+X+1)$ y utilizarla para encontrar las soluciones de la ecuación $x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

$x^5-1 = x^5 + \cancel{x^4} + \dots + \cancel{x^2} + \cancel{x} - \cancel{x^4} - \dots - \cancel{x^2} - \cancel{x} - 1$

Sí ES IGUAL

Las raíces de $x^5-1=0 \Rightarrow x^5=1$

$\to \left(e^{(2\pi k)i}\right)^{1/5} = e^{i2\pi k/5}$ $(k=0,1,2,3,4)$

Son

8. Resolver las siguientes ecuaciones algebraicas:

a) $x^4+7x^2-144=0$

b) $x^3-x^2-3x+6=0$

c) $x^2+2x+1-2i=0$ $\Rightarrow x = \dfrac{-2\pm\sqrt{4-4(1-2i)}}{2} = \dfrac{-2\pm\sqrt{8i}}{2} = \dfrac{-2\pm\left(8e^{i\pi/2}\right)^{1/2}}{2} =$

$= \dfrac{-2\pm 2\sqrt{2}\ e^{i\pi/4}}{2}$ $\begin{cases} x = i \\ x = -2-i \end{cases}$