Objetivos

- Espacios euclídeos. Producto escalar, ortogonalidad, proyecciones y ortogonalización de bases.
- Matrices ortogonales y unitarias: sus autovalores y autovectores.

1 Espacios euclídeos

Estamos acostumbrados a espacios geométricos que nos permiten medir distancias y ángulos. Sin embargo, la estructura de espacios vectoriales que hemos estudiado hasta ahora no permite calcular éstas propiedades geométricas. Para introducir esta variante geométrica en un espacio vectorial es necesario definir un *producto interno* adicional, llamado también *producto escalar*. En este curso nos vamos a centrar mayoritariamente en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

El producto escalar de dos vectores $\vec{v}$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ se define como la aplicación

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{u}) & \to \vec{v} \cdot \vec{u} \end{array}$$

que cumple las propiedades:

1. Simetría: $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$
2. Definida positiva: $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$
3. Bilinealidad: $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \mu(\vec{v} \cdot \vec{w}) \quad \forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Un espacio vectorial dotado de producto escalar se denomina *espacio euclídeo*. Para un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ comúnmente el producto escalar se define como

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = v_1 u_1 + \ldots + v_n u_n \tag{1}$$

o en el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^n$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} v_i^* u_i = v_1^* u_1 + \ldots + v_n^* u_n$$

donde v_i,u_i son las componentes de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ en la base canónica. Sin embargo, puede haber otras definiciones de producto escalar, ver el ejemplo siguiente.

Ejemplo. $\mathbb{R}^3$ con el siguiente producto escalar también es un espacio euclídeo,

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_3 + x_3y_1 + 2x_3y_2 = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t G\mathbf{y}$$

donde G es la matriz Gram asociada al producto escalar en la base canónica. Obsérvese que se cumple las tres propiedades de producto escalar. La primera, simetría, se cumple ya que la matriz G es simétrica. La propiedad bilineal también se cumple por construcción. La propiedad definida positiva se puede demostrar expresando el producto escalar entre un mismo vector como

$$\vec{x}\cdot\vec{x} = x_1x_1 + 2x_2x_2 + 3x_3x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_1 + 2x_2x_3 + x_3x_1 + 2x_3x_2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2$$

así siempre es positivo para $\vec{x} \neq \vec{0}$.

En general, el producto escalar entre dos vectores se puede expresar como

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}x_iy_j = \vec{x}^t G\vec{y} \quad \text{donde} \quad G = (g_{ij}) \quad y \quad g_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j \ (i, j = 1, \ldots, n) \quad (2)$$

siendo $(x_1, ..., x_n)$ y $(y_1, ..., y_n)$ las coordenadas de los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ en la base $\{\vec{e_i}\}$ y G la matriz de Gram (en la base dada).

Definido el producto escalar, se puede definir la *norma euclídea* de un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

como el caso bien conocido,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (v_i)^2}$$

Una vez definida la norma, hay tres puntos importantes a destacar:

- *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*, desigualdad muy útil para imponer límites geométricos:

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$$

- *Distancia* entre dos vectores, definida como

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

- El *coseno del ángulo* entre dos vectores definido como

$$\cos(\vec{x},\vec{y}) = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$$

Debido a la desigualdad de Cauchy-Schwarz se asegura que $\cos(\vec{x},\vec{y}) \in [-1,1]$.

Con la definición anterior del ángulo, se puede expresar el producto escalar de la suma de dos vectores como

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\,\vec{x}\cdot\vec{y} = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\,\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos(\vec{x},\vec{y})$$

Ejemplo. En el espacio euclídeo formado por $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

las normas de $\vec{v} = (1,2,1)$ y $\vec{u} = (1,1,0)$ son iguales a

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{12} \\ \|\vec{u}\| &= \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = 1 \end{aligned}$$

y producto escalar, distancia y ángulo entre ambos vectores viene dado por

$$\begin{aligned} \vec{v}\cdot\vec{u} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \\ \cos(\vec{v},\vec{u}) &= \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{ ángulo } (\vec{v},\vec{u}) = \frac{\pi}{6} \text{ radianes} \\ d(\vec{v},\vec{u}) &= \|(0,1,1)\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{7} \end{aligned}$$

2 Bases ortogonales y ortonormales

Dos vectores son *ortogonales* cuando se cumple

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

Utilizando la fórmula del coseno del ángulo, si el producto escalar entre dos vectores es 0, eso implica que el ángulo entre ellos forma $\pi/2$ rad (90º). De ello se deduce que dos vectores ortogonales cumple el teorema de Pitágoras

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\,\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

Traslademos el concepto de ortogonalidad a la base de un espacio vectorial:

- *Base ortogonal*: Sea E un espacio euclídeo de dimensión n y $\{\vec{e}_i\}$ una base de E. Si se cumple la condición de ortogonalidad $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ (i, j= 1, ..., n y $i \neq j$), se dice que $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ es una base ortogonal de E.

- *Base ortonormal*: Una base $\{\vec{e}_i\}$ de un espacio euclídeo de dimensión n es ortonormal si verifica las dos propiedades siguientes: i) $\{\vec{e}_i\}$ es ortogonal, ii) $\|\vec{e}_i\| = 1$, $i = 1, ..., n$.

Si $\{\vec{e}_i\}$ es una base ortonormal, entonces la expresión del producto escalar se puede expresar como

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, x_2 \ldots, x_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

es decir, utilizando la Eq. (2), la matriz de Gram viene dada por $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, i, j = 1, \ldots, n$.

Una nota importante es la posibilidad de escribir un vector en una base ortonormal como

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{e}_1)\,\vec{e}_1 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_2)\,\vec{e}_2 + \ldots + (\vec{v} \cdot \vec{e}_n)\,\vec{e}_n$$

o sea, la coordenada j-ésima del vector $\vec{v}$ en la base $\{\vec{e}_i\}$ se obtiene con el producto escalar entre $\vec{v}$ y $\vec{e}_j$.

3 Proyecciones

Una de las propiedades geométricas más utilizadas es encontrar vectores ortogonales a un determinado subespacio vectorial o encontrar la proyección de un vector en un determinado subespacio. Por ejemplo, en la figura 1, se muestra un plano (subespacio) y nos gustaría encontrar un vector ortogonal (perpendicular) a éste. Mirad el siguiente ejemplo para más información. De forma general, un vector $\vec{x}$ del espacio euclídeo E es *ortogonal al subespacio* W si se cumple

$$\vec{x} \text{ ortogonal a } W \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \cdot \vec{a}_i = 0, \qquad i = 1, \ldots p$$

donde $\{\vec{a}_i\}$ es una base de W. Dicho de otra forma, el vector $\vec{x}$ es ortogonal a todos los vectores de W.

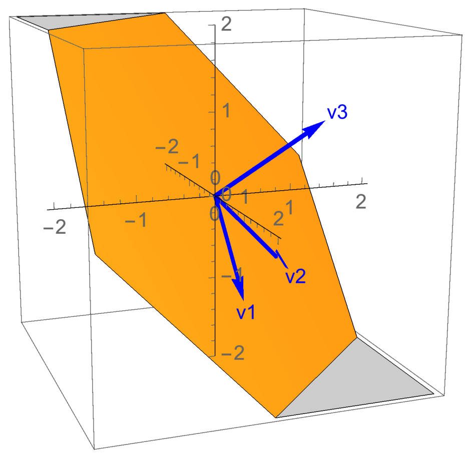

Figure 1: Los vectores $\vec{v}_1 = (1, 0, -1)$ y $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$ forman un plano $x+y+z = 0$. $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$ es ortogonal al plano.

Ejemplo. El plano $z = -x - y$ está formado por los vectores

$$(x, y, z) = (x, y, -x - y) = x\,(1, 0, -1) + y\,(0, 1, -1)$$

$\vec{v}_1 = (1, 0, -1)$ y $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$. Como el vector $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$ cumple $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0$ y $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$, entonces $\vec{v}_3$ es ortogonal al plano formado por $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

Otra propiedad importante es la *proyección ortogonal de un vector* $\vec{v} \in E$ *sobre* *un subespacio* W, definido como

$$\Pr|_W \vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{e}_1)\,\vec{e}_1 + \ldots + (\vec{v}\cdot\vec{e}_p)\,\vec{e}_p = \sum_{i=1}^{p} (\vec{v}\cdot\vec{e}_i)\,\vec{e}_i$$

donde, importante, $\{\vec{e}_i\}$ es una base ortonormal de W. Veamos un ejemplo.

Ejemplo. Supongamos el subespacio W creado por los vectores del ejemplo anterior $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$. Una base ortonormal del subespacio W viene dada por los vectores $\vec{e}_1 = (1,0,-1)/\sqrt{2}$ y $\vec{e}_2 = (-1,2,-1)/\sqrt{6}$. En la siguiente sección explicaremos un modo para encontrar esta base ortonormal. La proyección de un vector $\vec{v} = (1,2,0)$ sobre el subespacio W viene dada por

$$\Pr|_W \vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{e}_1)\,\vec{e}_1 + (\vec{v}\cdot\vec{e}_2)\,\vec{e}_2$$

Empezamos calculando los productos escalares:

$$\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\vec{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\vec{v}\cdot\vec{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Asi, la proyección ortogonal de $\vec{v}$ en W es

$$\Pr|_W \vec{v} = (0,1,-1)$$

4 Método de ortonormalización de Gram-Schmidt

Para ciertas aplicaciones, si tenemos un espacio euclídeo E definido por un base $\{\vec{a}_i\}$, nos gustaría encontrar una base ortonormal $\{\vec{e}_i\}$ tal que forma el mismo espacio E. Uno de los procedimientos más utilizados para encontrar una base ortonormal es el conocido método de ortonormalización de Gram-Schmidt. Veamos un ejemplo particular.

Ejemplo. Un espacio euclídeo definido por la base $\{(1,0,-1),(0,1,-1),(1,2,0)\}$ en $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{x}^{\,t}G\vec{y}$$

Se escoge un elemento de la base y se normaliza, por ejemplo $\vec{a}_1 = (1,0,-1) \to \vec{e}_1 = \vec{a}_1/\|\vec{a}_1\| = (1,0,-1)/\sqrt{2}$. Ahora, para encontrar el segundo vector ortonormal $\vec{e}_2$, quitamos de un segundo vector de la base inicial la proyección correspondiente sobre $\vec{e}_1$, por ejemplo

$$\vec{e}\,'_2 = \vec{a}_2 - \mathrm{Pr}|_{\langle e_1\rangle}[\vec{a}_2] = \vec{a}_2 - (\vec{a}_2\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 = (-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})$$

Notad que $\vec{a}_2$ no era ortogonal a $\vec{e}_1$, ya que $\vec{a}_2\cdot\vec{e}_1 = 1/\sqrt{2}$. Sin embargo, el nuevo vector $\vec{e}\,'_2$ si es ortogonal a $\vec{e}_1$; $\vec{e}\,'_2\cdot\vec{e}_1 = 0$. Ahora, solo falta normalizar $\vec{e}\,'_2$ para hacerlo unitario y obtenemos $\vec{e}_2 = \vec{e}\,'_2/\|\vec{e}\,'_2\| = (-1,2,-1)/\sqrt{6}$. Volvemos a repetir el mismo procedimiento, quitando ahora la proyección del tercer vector de la base inicial en el subespacio creado por $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$, o sea

$$\vec{e}\,'_3 = \vec{a}_3 - \mathrm{Pr}|_{\langle e_1,e_2\rangle}[\vec{a}_3] = \vec{a}_3 - (\vec{a}_3\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 - (\vec{a}_3\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2 = (1,1,1)$$

Notad que $\vec{e}\,'_3$ es ortogonal tanto a $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$. Finalmente, sólo queda normalizar $\vec{e}\,'_3$ y obtener $\vec{e}_3 = \vec{e}\,'_3/\|\vec{e}\,'_3\| = (1,1,1)/\sqrt{3}$. Observad que $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ obtenida por el método de Gram-Schmidt, pero ya sabemos que no es la única base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo la base canónica $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ también es una base ortonormal.

Vamos a describir el método de Gram-Schmidt para un caso general. Sea E un espacio euclídeo de dimension n, y $\{\vec{a}_i\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes que forman un subespacio W con dimensión $p \le n$, para construir una conjunto de vectores ortonormales $\{\vec{e}_i\}$ que expanden el mismo subespacio W, procedemos del siguiente modo:

1.b Normalizamos un vector de la base inicial: $\vec{e}_1 = \vec{a}_1/\|\vec{a}_1\|$

2.a Encontramos un vector ortogonal a $\vec{e}_1$:

$$\vec{e}\,'_2 = \vec{a}_2 - \mathrm{Pr}|_{\langle e_1\rangle}[\vec{a}_2] = \vec{a}_2 - (\vec{a}_2\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1$$

2.b Normalizamos el vector encontrado: $\vec{e}_2 = \vec{e}\,'_2/\|\vec{e}\,'_2\|$

...

k.b Normalizamos el vector encontrado: $\vec{e}_k = \vec{e}\,'_k/\|\vec{e}\,'_k\|$

k+1.a Encontramos el vector $k+1$ ortogonal a los vectores $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_k\}$:

$$\vec{e}'_{k+1} = \vec{a}_{k+1} - \mathrm{Pr}|_{\langle e_1, e_2, ..., e_k\rangle}[\vec{a}_{k+1}] = \vec{a}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (\vec{a}_{k+1} \cdot \vec{e}_i)\vec{e}_i$$

k+1.b Normalizamos el vector encontrado: $\vec{e}_{k+1} = \vec{e}'_{k+1} / \|\vec{e}'_{k+1}\|$

5 Matrices ortogonales y unitarias

Una matriz cuadrada $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}$, con elementos reales $\mathbb{R}$, es una *matriz ortogonal* cuando cumple

$$Q^{\mathrm{T}} Q = Q Q^{\mathrm{T}} = I$$

donde Q^{T} es la matriz transpuesta, $Q^{\mathrm{T}}|_{ij} = Q|_{ji}$, y I la matriz identidad. Se puede ver que las columnas o vectores de las matrices ortogonales son vectores ortonormales, es decir

$$\begin{aligned}
Q &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & ... & \vec{v}_n \end{pmatrix} \\
Q^{\mathrm{T}} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ ... \\ \vec{v}_n \end{pmatrix} \\
Q^{\mathrm{T}} Q &= \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ ... \\ \vec{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & ... & \vec{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1\cdot\vec{v}_1 & \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 & ... & \vec{v}_1\cdot\vec{v}_n \\ \vec{v}_2\cdot\vec{v}_1 & \vec{v}_2\cdot\vec{v}_2 & ... & \vec{v}_2\cdot\vec{v}_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \vec{v}_n\cdot\vec{v}_1 & \vec{v}_n\cdot\vec{v}_2 & ... & \vec{v}_n\cdot\vec{v}_n \end{pmatrix} = I
\end{aligned}$$

En Mecánica Cuántica, las *matrices unitarias* U, matrices cuadradas con elementos complejos $\mathbb{C}$, son muy importantes y cumplen la propiedad análoga a las matrices ortogonales

$$U^\dagger U = U U^\dagger = I$$

donde ahora $U^\dagger$ es la matriz transpuesta y conjugada, es decir $U^\dagger|_{ij} = U^*_{ji}$.

Algunas propiedades interesantes de las matrices ortogonales y unitarias:

- Supongamos $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ con el producto escalar definido por (1), una aplicación lineal definida por una matriz ortogonal Q preserva el producto escalar, es decir:
$$(Q\vec{u})^{\mathrm{T}}(Q\vec{v}) = \vec{u}^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}Q\vec{v} = \vec{u}^{\mathrm{T}}\vec{v}$$

- Una matriz A es *ortogonalmente diagonalizable* si y sólo si A es simétrica. Si miramos el tema anterior, al diagonalizar una matriz A simétrica encontramos
$$A = M_c D M_c^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad A = QDQ^{\mathrm{T}}$$
siendo Q una matriz ortogonal. Observad que $A^{\mathrm{T}} = (QDQ^T)^{\mathrm{T}} = QD^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}} = QDQ^{\mathrm{T}} = A$.

- El punto anterior es análogo para matrices unitarias en el espacio complejo. Por ejemplo, en mecánica cuántica es común trabajar con matrices hermíticas H tal que $H^\dagger = H$. Una matriz hermítica se puede diagonalizar como
$$H = M_c D M_c^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad H = UDU^\dagger$$
donde U es una matriz unitaria y la matriz diagonal D sólo acepta números reales, es decir, los autovalores de las matrices hermíticas son siempre reales.

Referencias. Hay muchos libros de álgebra lineal y casi todos tienen contenidos parecidos. Uno con muchos ejemplos y buenas explicaciones es [2]. Una faceta del álgebra lineal, en la que desafortunadamente no incidimos en este curso, es la cantidad de aplicaciones que tiene. Éstas aplicaciones están en gran medida sustentadas por la posibilidad de programar eficientemente muchos cálculos de álgebra lineal. Un libro que cubre las aplicaciones y los cálculos numéricos es [4]. Por otro lado, [1] satisfará a los que tengan interés en la interpretación geométrica y física del álgebra lineal, aunque quizá no sea fácil de encontrar. Por último, para los estudiantes muy avanzados, [3] es un libro escrito por un matemático de primera línea que constituye una excepción a la uniformidad de temas de los libros de álgebra lineal.

Referencias

[1] L. I. Golovina, *Álgebra Lineal y Algunas de sus Aplicaciones*, Mir, 1986.

[2] E. Hernández, M.J. Vázquez, and M.A. Zurro, *Álgebra lineal y Geometría*, Addison-Wesley, third edition, 2012.

[3] P. D. Lax, *Linear algebra, Pure and Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, 1997.

[4] G. Strang, *Linear algebra and its applications*, Academic Press, second edition, 1980.