Matemáticas. Grado en Química
Ejercicios - Curso 2023-24 Hoja 5

Aplicaciones de la derivada.

1. Halla los extremos relativos y absolutos de las funciones siguientes en los intervalos dados:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ en $[-1, 3]$;

b) $g(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x - \cos 2x$ en $[0, 2\pi]$;

c) $h(x) = 4 - |x - 4|$ en $[1, 6]$.

Sol: a) Máximo relativo: $(0, 0)$, mínimo relativo: $(2, -4)$,
máximos absolutos: $(0, 0), (3, 0)$, mínimos absolutos: $(-1, -4)$, $(2, -4)$.
b) Máximos relativos: $(\frac{\pi}{2}, 3), (\frac{3\pi}{2}, -1)$ mínimos relativos: $(\frac{7\pi}{6}, -\frac{3}{2}), (\frac{11\pi}{6}, -\frac{3}{2})$,
máximo absoluto: $(\frac{\pi}{2}, 3)$, mínimos absolutos: $(\frac{7\pi}{6}, -\frac{3}{2}), (\frac{11\pi}{6}, -\frac{3}{2})$.
c) Máximo relativo: $(4, 4)$, mínimos relativos: no hay,
máximo absoluto: $(4, 4)$, mínimo absoluto: $(1, 1)$.

2. Usa la regla de L'Hôpital para evaluar los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1 - x)}{x}; \qquad b)\ \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}; \qquad c)\ \lim_{x\to\infty} x^{1/x};$$

$$d)\ \lim_{x\to 0^+} x^2 \mathrm{cotg}\, x; \qquad e)\ \lim_{x\to 0^+} (e^x + x)^{1/x}.$$

Sol: a) 2, b) 1/2, c) 1, d) 0, e) e^2.

3. (**Interés compuesto**) La fórmula para calcular el interés acumulado después de t años en una cuenta de ahorro por un depósito inicial de C euros a una tasa de interés r acumulado n veces al año es

$$A(t) = C\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Usa la regla de L'Hôpital para probar que si el número de veces que se acumula el interés tiende a infinito el resultado es $A(t) = Ce^{rt}$.

4. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones en los intervalos dados:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$ en $(-\infty, \infty)$;

b) $g(x) = \frac{1}{x^2}$ en $(-\infty, \infty)$;

c) $h(x) = \mathrm{sen}\,x \cos x$ en $[0, 4\pi]$.

Sol: a) Decreciente en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$, creciente en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$.
b) Creciente en $(-\infty, 0)$, decreciente en $(0, \infty)$.
c) Creciente en $(0, \frac{\pi}{4})$, $(\frac{15\pi}{4}, 4\pi)$ y en $\left(\frac{(4k-1)\,\pi}{4}, \frac{(4k+1)\,\pi}{4}\right)$, con $k = 1, 2, 3$,
dececiente en los intervalos: $\left(\frac{(4k+1)\,\pi}{4}, \frac{(4k+3)\,\pi}{4}\right)$, con $k = 0, 1, 2, 3$.

5. Halla los extremos relativos y absolutos de las funciones dadas en el ejercicio anterior en los intervalos indicados.
Sol: a) Máximo relativo: $(0,0)$, mínimos relativos: $(-1,-1)$ y $(1,-1)$, máximos absolutos: no tiene, mínimos absolutos: $(-1,-1)$ y $(1,-1)$.
b) No tiene extremos ni relativos ni absolutos.
c) Máximos relativos: en los puntos $\left(\frac{(4k+1)\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$, con $k = 0, 1, 2, 3$,
mínimos relativos: en los puntos $\left(\frac{(4k+3)\pi}{4}, -\frac{1}{2}\right)$, con $k = 0, 1, 2, 3$,
En este caso, los extremos relativos coinciden con los extremos absolutos.

6. (**Potencia eléctrica.**) La potencia eléctrica en watios en un circuito de corriente construido con dos tipos de resistencias es

$$P = \frac{I^2 R_1^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2},$$

donde I es la intensidad y R_1, R_2 los dos tipos de resistencias utilizados. Si I y R_1 se mantienen constantes, ¿cuál es la resistencia R_2 que produce la mayor potencia? Esboza la gráfica de P con respecto a R_2.
Sol: $R_2 = R_1$.

7. Halla los extremos relativos, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones en los intervalos dados:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ en $(-\infty, \infty)$;

b) $g(x) = x\sqrt{x+3}$ en $[-3, \infty)$;

c) $h(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$ en $[0, 4\pi]$.

Sol: Usa geogebra o algún otro programa parecido para comprobar tus resultados.

8. Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x+1}$;

b) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$;

c) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$;

d) $f(x) = (2-x)e^{-x}$;

e) $f(x) = (1 - e^{-(x-a)})^2$.

Sol: Usa geogebra o algún otro programa parecido para comprobar tus resultados.

9. Se desea fabricar latas de refresco de forma cilíndrica y un volumen de 1/3 de litro. ¿Qué dimensiones (radio y altura) debe tener el cilindro para que la cantidad de metal necesaria en la fabricación de la lata sea mínima? ¿Tienen las latas que se comercializan esas dimensiones?
Sol: $r = \frac{1}{\sqrt[3]{6\pi}}$ dm $(\sim 0{,}376$ dm$)$, $h = \frac{2}{\sqrt[3]{6\pi}}$ dm $(\sim 0{,}752$ dm$)$

10. Una página rectangular debe contener $408\,\text{cm}^2$ de área impresa, los márgenes en los laterales son de 2 cm cada uno y los márgenes superior e inferior son de 3 cm cada uno. ¿Qué dimensiones debe tener la hoja para usar la menor cantidad de papel?
Sol: $h \sim 30{,}74$ cm, $\quad h \sim 20{,}49$ cm

11. El coste de producción de x unidades diarias de un determinado producto es:

$$\frac{x^2}{4} + 35x + 25$$

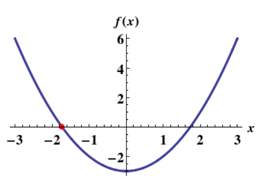
y el precio de venta de uno de ellos es $50 - x/4$. Halla el número de unidades que debe venderse diariamente para que el beneficio sea máximo.
Sol: 15 unidades

12. Escribe la fórmula de las iteraciones del método de Newton para las funciones dadas y escribe los resultados de tres de estas iteraciones.

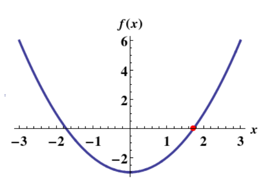
a) $f(x) = x^2 - 3$ *b*) $g(x) = 3\sqrt{x-1} - x$.

Aproxima el valor de los ceros de las funciones anteriores con el método de Newton hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de 0,001.
Ayuda: cada función tiene dos ceros. Usa como puntos de partida para $f(x)$ los valores $x_1 = -1$ y $x_1 = 1$ y para $g(x)$, los valores $x_1 = -1{,}1$ y $x_1 = 7$. ¿Qué pasa si para la función $g(x)$ intentamos usar como punto de partida $x_1 = -1$?
Sol:

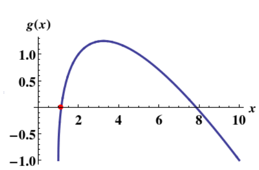
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad \text{con un resultado análogo para } g(x)$$



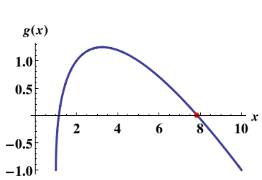

```
x = -1.   f[x] = -2.   f'[x] = -2.
x = -2.   f[x] = 1.   f'[x] = -4.
x = -1.75   f[x] = 0.0625   f'[x] = -3.5
x = -1.73214285714   f[x] = 0.000318877551021   f'[x] = -3.46428571429
x = -1.73205081001   f[x] = 8.47267411785×10^-9   f'[x] = -3.46410162003
x = -1.73205080757   f[x] = -4.4408920985×10^-16   f'[x] = -3.46410161514
Solución exacta x = -1.73205080757...
```




```
x = 1.   f[x] = -2.   f'[x] = 2.
x = 2.   f[x] = 1.   f'[x] = 4.
x = 1.75   f[x] = 0.0625   f'[x] = 3.5
x = 1.73214285714   f[x] = 0.000318877551021   f'[x] = 3.46428571429
x = 1.73205081001   f[x] = 8.47267411785×10^-9   f'[x] = 3.46410162003
x = 1.73205080757   f[x] = -4.4408920985×10^-16   f'[x] = 3.46410161514
Solución exacta x = 1.73205080757...
```




```
x = 1.1   g[x] = -0.151316701949   g'[x] = 3.74341649025
x = 1.14042208564   g[x] = -0.0162340360906   g'[x] = 3.00288902004
x = 1.14582822485   g[x] = -0.000204366999775   g'[x] = 2.92799082277
x = 1.14589802255   g[x] = -3.27979787773×10^-8   g'[x] = 2.92705113393
x = 1.14589803375   g[x] = -1.11022302463×10^-15   g'[x] = 2.92705098312
Solución exacta x = 1.14589803375...
```




```
x = 7.   g[x] = 0.34846922835   g'[x] = -0.387627564304
x = 7.89897948557   g[x] = -0.019206939985   g'[x] = -0.428917525986
x = 7.85419945486   g[x] = -0.0000416328046038   g'[x] = -0.427055057722
x = 7.85410196671   g[x] = -1.986109055×10^-10   g'[x] = -0.427050983144
x = 7.85410196625   g[x] = 0.   g'[x] = -0.427050983125
Solución exacta x = 7.85410196625...
```

(1.)

a.) $F(x)=x^3-3x^2$ en $[-1,3]$

$$F'(x)=3x^2-6x \qquad 3x^2-6x=0 \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array} \right.$$

PT. CRÍTICOS

$F(0)=0$

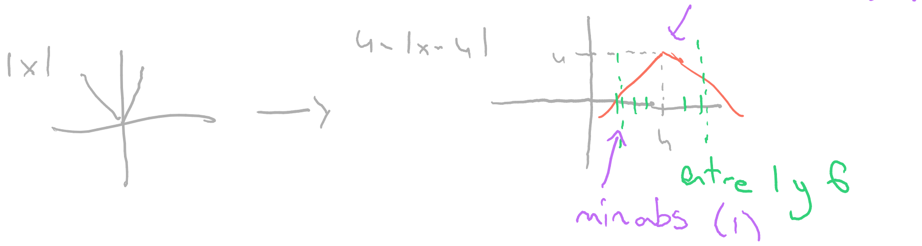
$F(2)=-4$

EXTREMOS

$x=-1$ $\quad F(-1)=-4$

$x=3$ $\quad F(3)=0$

c.) $h(x)=4-|x-4|$ en $[1,6]$



PARA RESOLVER NORMAL

$$\begin{cases} 4-(x-4) & \text{si } |\ | \geq 0 \\ 4+(x-4) & \text{si } |\ | \leq 0 \end{cases}$$

(2)

a.) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-(1-x)}{x} \xrightarrow{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{e^x+1}{1} = 2$$

e.) $$\lim_{x\to 0^+} (e^x+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln(e^x+x)} \longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \ln(e^x+x)$$

$$\xrightarrow{L'H} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{e^x+x}-(e^x+1)}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x+1}{e^x+x} = 2$$

$$\rightsquigarrow \boxed{e^2}$$

④

b.) $g(x) = \frac{1}{x^2}$ en $(-\infty, \infty)$

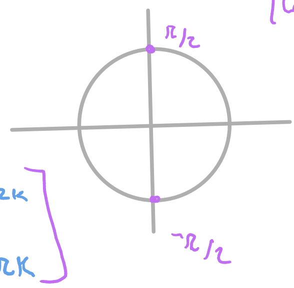
$Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

$g'(x) = \frac{-2}{x^3} \rightarrow$ [Crec. en $(-\infty, 0)$ / Decrec. en $(0, \infty)$] (Pruebo números neg. y pos.)

c.) $h(x) = \operatorname{sen}x \cos x$ en $[0, 4\pi]$ (cuando es 0)

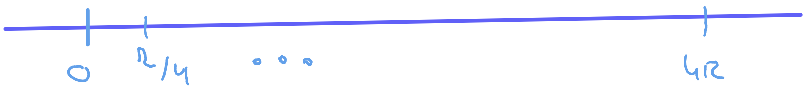
$\rightarrow h(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$

$h'(x) = \frac{1}{2} 2\cos(2x) \Rightarrow 0 = \cos(2x) \rightarrow \left[2x = \frac{\pi}{2} + \underbrace{2\pi k}_{} \; ; \; 2 = \frac{-\pi}{2} + \underbrace{2\pi k}_{\text{incluye todas las vueltas}} \right]$



incluye todas las vueltas

$\rightsquigarrow$ Hay que coger sólo los que están entre $[0, 4\pi]$

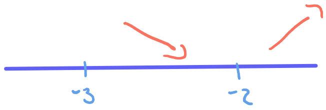


y ver si crece o decrece entre los ptos.

(7)

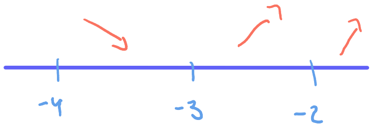
b) $g(x) = x\sqrt{x+3}$ en $[-3,\infty)$

$$g'(x) = \sqrt{x+3} + x\frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}} \rightsquigarrow 0 = \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}} \Rightarrow x=-2$$



CONCAVIDAD

$$g''(x) = \frac{3}{2}\,\frac{\sqrt{x+3} - (x+2)\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{x+3} = \frac{3}{4}\,\frac{2(x+3)-(x+2)}{(x+3)^{1+1/2}} \rightsquigarrow = 0 \to x=-4$$



cóncava hacia arriba

(8)

e) $f(x) = \left(1-e^{-(x-a)}\right)^2$

Caso $a=0$ $\begin{cases} a>0 & \text{mover a dcha} \\ a<0 & \text{mover a izq.} \end{cases}$ (podemos quitar a)

$x=0 \to f(0)=0 \rightsquigarrow (0,0)$

$y=0 \to (1-e^{-x})^2=0 \Rightarrow 1-e^{-x}=0 \Rightarrow x=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

$\to \boxed{y=1}$

Crec.

$f'(x) = \dots$

$f''(x) = \dots$

HOJA 6

(1) $F(x)=\int_1^{x^2}\frac{1}{1+\operatorname{sen} t}\,dt \quad x\geq 1 \quad ¿F'(\sqrt{\pi})?$

$F(x)=\int_0^{x}\frac{1}{1+\operatorname{sen} t}\,dt \to f(x)=(F\circ h)(x)$

$h(x)=x^2$

$\to f'(x)=F'(h(x))h'(x)=F'(x^2)\,2x=\frac{1}{1\operatorname{sen}(x^2)}\cdot 2x$

$\Rightarrow f'(\sqrt{\pi})=\frac{1}{1+\operatorname{sen}(\pi)}\,2\sqrt{\pi}$

(2) $F(x)=\int_{e^{-x}}^{e^x}\frac{1}{\ln t}\,dt \to F'(x)=\frac{1}{\ln e^x}e^x-\frac{1}{\ln(e^{-x})}(-e^{-x})=\frac{e^x-e^{-x}}{x}$

$\left(=\frac{2\operatorname{senh} x}{x}\right)$

(3)

a.) $\int\frac{\ln x}{x}\,dx \to \int t\,dt=\frac{t^2}{2}+C \rightsquigarrow \frac{(\ln x)^2}{2}+C$

$\ln x=t$

$\frac{1}{x}dx=dt$

d.) $\int\sqrt{1-x^2}\,dx \to \int\cos t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,dt=\int\cos^2 t\,dt=\int\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt$

$\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t=1$

$x=\operatorname{sen} t$

$dx=\cos t\,dt$

f.) $\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsen(t)+C=\arcsen(e^x)+C$

$t=e^x$

$dt=e^x dx$

(4)

c.) $\int\sec x\,dx=\int\sec x\,(\sec x+\operatorname{tg} x)\,dx=\int\frac{\sec^2 x+\operatorname{tg} x\sec x}{\sec x+\operatorname{tg} x}\,dx=$

$t=\sec x+\operatorname{tg} x$

$dt=(\sec^2 x+\sec x\operatorname{tg} x)\,dx$

$=\int\frac{dt}{t}=\ln t+C=\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|+C$

2º método

$\int\frac{1}{\cos x}\,dx=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx=\int\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx \to \int\frac{dt}{(1-t)(1+t)}$

$\operatorname{sen} x=t$

$\cos x\,dx=dt$

(5)

a.) $\int x^2e^{-x}\,dx \to -x^2e^{-x}+2\int e^{-x}x\,dx=-x^2e^{-x}+2\left(-xe^{-x}+1\int e^{-x}\right)+C$

$F=x^2 \to f=2x$

$g=e^{-x} \to G=-e^{-x}$

$F=x \to f=1$

$g=e^{-x} \to G=-e^{-x}$

b.) $\int x\ln x\,dx \to \frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x}\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C$

$F=\ln x \to f=\frac{1}{x}$

$g=x \to G=\frac{x^2}{2}$

c.) $\int\frac{x}{\cos^2 x}\,dx \to x\operatorname{tg} x-\int\operatorname{tg} x\,dx=x\operatorname{tg} x-\int\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)dx \to x\operatorname{tg} x-\int\frac{dt}{t}=x\operatorname{tg} x-\ln|t| \to x\operatorname{tg} x-\ln|\cos x|+C$

$F=x \to f=1$

$g=\frac{1}{\cos^2 x} \to G=\operatorname{tg} x$

$t=\cos x$

$dt=-\operatorname{sen} x\,dx$

⑥

a.) $\int \frac{4x}{(1-2x^2)^2}\,dx \xrightarrow[\substack{t=1-2x^2\\ -4x\,dx=dt}]{} -\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{t^{-1}}{-1} = \frac{1}{t}+C \longrightarrow \frac{1}{1-2x^2}+C$

↱ Buscar raíces: $x^2-2x-15=0 \begin{cases} -3 \\ 5 \end{cases}$

b.) $\int \frac{1}{x^2-2x-15}\,dx = \int \frac{1}{(x-5)(x+3)} \rightsquigarrow \frac{1}{(x-5)(x+3)} = \frac{A_1}{x-5} + \frac{A_2}{x+3} \Rightarrow 1 = A_1(x+3) + A_2(x-5)$

⇝ para $x=-3$ $\quad 1 = A_2(-8) \Rightarrow A_2 = -1/8$

⇝ para $x=5$ $\quad 1 = A_1\, 8 \Rightarrow A_1 = 1/8$

↳ $\frac{1}{(x-5)(x+3)} = \frac{1/8}{x-5} + \frac{-1/8}{x+3}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{(x-5)(x+3)}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{x-5}\,dx - \frac{1}{8}\int \frac{1}{x+3}\,dx = \frac{1}{8}\ln|x-5| - \frac{1}{8}\ln|x+3| + C$