Objetivos

- Transformaciones lineales.
- Autovalores y autovectores. Diagonalización de matrices. Caso especial: matrices simétricas.

1 Transformaciones lineales

Una *transformación lineal* (o *aplicación lineal*) es una función entre espacios vectoriales que preserva las operaciones (suma de vectores y producto por escalares). Desde el punto de vista práctico podemos considerar que una aplicación lineal $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es siempre una función de la forma $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ cuando escribimos $\vec{x}$ y $f(\vec{x})$ como vectores columna.

Ejemplo. La apliación $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y,z) = (x+y+2z, x-y)$ es lineal y su matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x+y+2z \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Geométricamente, una aplicación lineal es una manera de deformar los objetos [1], en cierta forma como verlos en perspectiva. Dicho sea de paso, las aplicaciones lineales que dan la perspectiva son cruciales en el software 3D (por ejemplo en OpenGL [5]) y curiosamente se representan por matrices $\mathcal{M}_{4\times 4}$.

Se llama *núcleo* de una aplicación lineal f, y se escribe $\mathrm{Nuc}(f)$, a las soluciones de $f(\vec{x}) = \vec{0}$. Siempre forman un subespacio y, como se ha sugerido antes, todos los subespacios de $\mathbb{R}^n$ se pueden conseguir así.

Ejemplo. El núcleo de $f(x,y,z) = (x+y+z, x+y, z)$ es la solución de $x+y+z=0$, $x+y=0$, $z=0$. Es fácil ver que la solución es dada por $x=\lambda$, $y=-\lambda$, $z=0$, con una λ arbitraria. Así, $\mathrm{Nuc}(f)$=$\{\lambda(1,-1,0)\}$ o equivalentemente $\mathcal{L}(\{(1,-1,0)\})$.

En los ejemplos anteriores, hemos supuesto que las coordenadas se refieren a la base canónica. Así, la matriz A será dependiente de la base. Por ejemplo, si se realiza un cambio de base $\vec{x} = M_c\,\vec{x}\,'$, la aplicación $f(\vec{x}) = \vec{y} = A\vec{x}$ se transformaría como $M_c\vec{y}\,' = AM_c\vec{x}\,' \Leftrightarrow \vec{y}\,' = M_c^{-1}AM_c\vec{x}\,'$. Así la matriz A en la nueva base se transformaría como $M_c^{-1}AM_c$.

2 Diagonalización

Las aplicaciones lineas que aplican $\mathbb{R}^n$ en sí mismo, es decir $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, son muy importantes y su matriz asociada es cuadrada, es decir $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Un problema natural aparece cuando se quiere encontrar una base que simplifica la forma de A. Esto es lo que motiva la *diagonalización de matrices*, donde una matriz cuadrada A se transforma en una matriz diagonal D, es decir $D = M_c^{-1}AM_c \Leftrightarrow A = M_cDM_c^{-1}$. Los elementos diagonales de D son los *valores propios*, o *autovalores* de A, que denotamos como $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, así D tiene la forma

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Decir que λ_i es un valor propio de A es equivalente a decir que el sistema de ecuaciones dado por $A\vec{v}_{\lambda_i} = \lambda_i\vec{v}_{\lambda_i}$ tiene una solución no nula $\vec{v}_{\lambda_i}$, vector conocido como *vector propio* o *autovector*. En resumen, la diagonalización de una matriz cuadrada se reduce en encontrar los autovalores y vectores propios. El procedimiento estándar parte de reescribir $A\vec{v}_{\lambda_i} = \lambda_i\vec{v}_{\lambda_i}$ como $(A - \lambda_i I)\vec{v}_{\lambda_i} = \vec{0}$. Tomando el determinante en ambos lados de la igualdad, obtenemos la *ecuación característica*

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

se encuentra $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, donde $p(\lambda)$ es un polinomio de λ, conocido como *polinomio característico*. Los ceros del polinomio corresponden a los valores propios λ_i. Veamos un ejemplo.

Ejemplo. Vamos a hallar los autovalores y autovectores de

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} &\longmapsto A\vec{x} \end{aligned} \qquad \text{con} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Los autovalores se obtienen resolviendo la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4$$

Para $\lambda = \lambda_1 = 1$ los autovectores son los múltiplos (no nulos) de $\vec{v}_{\lambda_1} = (-2, 1)$ porque

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 2 \\ 1 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x = -2\mu, \quad y = \mu$$

De la misma forma, para $\lambda = \lambda_2 = 4$ los autovectores son los múltiplos (no nulos) de $\vec{v}_{\lambda_2} = (1, 1)$ porque

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 2 \\ 1 & 3-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x = \mu, \quad y = \mu$$

Escogiendo los autovalores $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4)$, correspondiente a los autovectores $(\vec{v}_{\lambda_1}, \vec{v}_{\lambda_2})$, se puede construir la matriz diagonal D

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

En la base de autovectores, la aplicación lineal viene dada por la matriz diagonal D. Así, para relacionar A con D, podemos simplemente hacer un cambio de base, de la base canónica a la base de autovectores, mirad la Ec. (1) en tema 1b:

$$A = M_c D M_c^{-1} \quad \text{donde} \quad M_c = (\vec{v}_{\lambda_1}, \vec{v}_{\lambda_2}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La diagonalización de matrices tiene muchas aplicaciones, y en particular juega un papel fundamental en muchos códigos de Química Física. En este curso no entraremos en el aspecto numérico de la diagonalización, pero es muy importante tener claro los conceptos teóricos.

No todas las matrices cuadradas son diagonalizables. Un teorema importante es que una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ con coeficientes reales es diagonalizable si existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de A. Eso implica que al diagonalizar A, los autovectores obtenidos deben ser linealmente independientes.

Ejemplo. Calculemos los autovalores y autovectores de $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Primero empezamos calculando la ecuación característica

$$|A - \lambda I| = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 40\lambda + 36 = (9 - \lambda)(\lambda - 2)^2 = 0$$

y obtenemos dos autovalores $\lambda_1 = 9$ y $\lambda_2 = 2$ (raíz doble). Ahora calculamos los autovectores, primero empezamos por λ_1 resolviendo el sistema de ecuaciones $(A - 9I)\vec{x} = \vec{0}$. La solución és $\vec{v}_{\lambda_1} = (1, 1, 1)$. Para que sea diagonalizable tiene que haber dos autovectores independientes para $\lambda_2 = 2$ (pues es una raíz doble). Nuevamente calculamos los autovectores resolviendo el sistema $(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad z = \lambda, \quad y = \mu, \quad x = \frac{1}{2}\mu - 3\lambda$$

Es decir $(x, y, z) = \lambda(-3, 0, 1) + \mu(1/2, 1, 0)$ son autovectores y podemos elegir $\vec{v}_{\lambda_2} = (-3, 0, 1)$, $\vec{u}_{\lambda_2} = (1/2, 1, 0)$ y la aplicación lineal es diagonalizable (porque los dos autovectores con el mismo autovalor son linealmente independientes). En este caso obtendríamos

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} = A = M_c D M_c^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Es bien conocido que *autovalores distintos implica autovectores linealmente independientes*. De ello se concluye que si la ecuación característica de una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tiene n raíces distintas, es diagonalizable.

Se puede dar el caso que una matriz no es diagonalizable en un espacio $\mathbb{R}^n$, pero si lo es en un espacio $\mathbb{C}^n$. Veamos un ejemplo.

Ejemplo. La aplicación lineal $f(x, y) = (-y, x)$ tiene una matriz cuyo polinomio característico es $\lambda^2 + 1$. El polinomio característico no tiene raíces reales pero sí dos raíces complejas distintas $\lambda = \pm i$. Entonces es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$ (pero no sobre $\mathbb{R}$). Un cálculo como el de antes prueba que una posible elección de los autovectores correspondientes a los autovalores $\lambda = \pm i$ es $\vec{v}_\lambda = (\pm i, 1)$, donde $\vec{v}_\lambda \in \mathbb{C}^2$.

Otro apunte importante es que las matrices simétricas y hermíticas de dimensión n siempre son diagonalizables y sus autovalores son siempre reales.

Para acabar enseñamos un ejemplo de una matriz cuadrada no diagonalizable.

Ejemplo. Comprobemos que la aplicación lineal $f(x,y) = (x+y,y)$ no es diagonalizable. Procedemos de la forma estándar para calcular los autovalores y autovectores:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0, \quad (A-I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema tiene una raíz doble $\lambda_1 = 1$, pero al calcular los autovectores obtenemos que la solución implica múltiplos del vector $(1,0)$. Como no tenemos dos autovectores linealmente independientes, la matriz A no es diagonalizable.

Referencias. Hay muchos libros de álgebra lineal y casi todos tienen contenidos parecidos. Uno con muchos ejemplos y buenas explicaciones es [2]. Una faceta del álgebra lineal, en la que desafortunadamente no incidimos en este curso, es la cantidad de aplicaciones que tiene. Éstas aplicaciones están en gran medida sustentadas por la posibilidad de programar eficientemente muchos cálculos de álgebra lineal. Un libro que cubre las aplicaciones y los cálculos numéricos es [4]. Por otro lado, [1] satisfará a los que tengan interés en la interpretación geométrica y física del álgebra lineal, aunque quizá no sea fácil de encontrar. Por último, para los estudiantes muy avanzados, [3] es un libro escrito por un matemático de primera línea que constituye una excepción a la uniformidad de temas de los libros de álgebra lineal.

Referencias

[1] L. I. Golovina, *Álgebra Lineal y Algunas de sus Aplicaciones*, Mir, 1986.

[2] E. Hernández, M.J. Vázquez, and M.A. Zurro, *Álgebra lineal y Geometría*, Addison-Wesley, third edition, 2012.

[3] P. D. Lax, *Linear algebra, Pure and Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, 1997.

[4] G. Strang, *Linear algebra and its applications*, Academic Press, second edition, 1980.

[5] http://www.opengl-tutorial.org/es/beginners-tutorials/tutorial-3-matrices/