连续系统的时域分析

连续系统的分析方法

❖ 建立及求解输入输出方程

- 常系数线性微分方程

❖ 求解方法

- 时域解法：直接求解，卷积积分
- 变换域解法：Fourier变换，Laplace变换

本章主要研究连续时间系统的时域分析法，这种方法比较直观，物理概念清楚，是学习各种变换域分析法的基础。

内容提要

- 直接求解微分方程（经典法） 直观但冗繁、应用局限性
  - 通解+特解
  - 零输入响应+零状态响应
- 阶跃响应和冲激响应
- 利用卷积积分求解系统零状态响应
  - 单位冲激响应
  - 卷积积分

重点与难点

- ❖零输入响应（直接求解）
- ❖零状态响应（直接求解和**卷积积分**）
- ❖单位冲激响应求解
- ❖卷积积分及其性质

LTI连续系统的响应

- 微分方程的经典解法
- 关于0-和0+初始值
- 零输入响应和零状态响应(直接求解)

LTI连续系统的描述

- ❖LTI系统由线性元件组成，参数恒定。
- ❖LTI连续系统的激励和响应或者输入和输出之间的联系可以用常系数线性微分方程描述。
- ❖输入输出方程的一般形式
  - ◆ y(t)：响应函数，即输出函数
  - ◆ f(t)：激励函数，即输入函数
  - ◆ a_0-a_{n-1}, a_n=1, b_0-b_m：常数系数

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{d\ y}{dt}+a_0 y=b_m\frac{d^m f}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}}+\ldots+b_1\frac{d\ f}{dt}+b_0 f$$

LTI系统方程时域求解

❖经典解法：通解+特解

- 通解：微分方程对应的齐次方程（令方程右边为零）的解，称为**自然响应**或**自由响应**。
- 特解：满足非齐次方程的解，根据系统激励函数的具体形式求解，称为**受迫响应**。

❖叠加法：零输入响应+零状态响应

- 零输入响应：输入激励为零，仅由初始条件决定。
- 零状态响应：初始状态为零，仅由输入激励决定。

零输入响应≠自然响应　　**零状态响应≠受迫响应**

只有初始储能　　*包含激励的影响*

经典解法 – 通解

❖求解齐次方程 $\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{d\ y}{dt}+a_0 y=0$

特征方程： $p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p\ +a_0=0$

特征根： $p_1, p_2, \cdots$

每一单实根p_i对应通解中1项： $Ce^{p_i t}$ 系数待定

每一k重实根p_i对应通解中k项： $e^{p_i t}\left(C_1+C_2 t+\ldots+C_k t^{k-1}\right)$

每一对复根 α ± j β 对应通解中2项：

$$e^{\alpha t}\left(C_1\cos\beta t+D_1\sin\beta t\right)$$

每一对k重复根 α ± j β 对应通解中2k项：

$$e^{\alpha t}\left[\left(C_1+C_2 t+\ldots C_k t^{k-1}\right)\cos\beta t+\left(D_1+D_2 t+\ldots D_k t^{k-1}\right)\sin\beta t\right]$$

经典解法 – 特解

❖与激励形式有关 $$\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{d\ y}{dt}+a_0 y=f(t)$$

若f(t)形如 $e^{\alpha t}P(t)$ α为常数，$P(t)$为多项式。

若α不是特征根，特解形式为 $Q(t)e^{\alpha t}$

若α是特征单根，特解形式为 $tQ(t)e^{\alpha t}$

若α是k重特征根，特解形式为 $t^k Q(t)e^{\alpha t}$

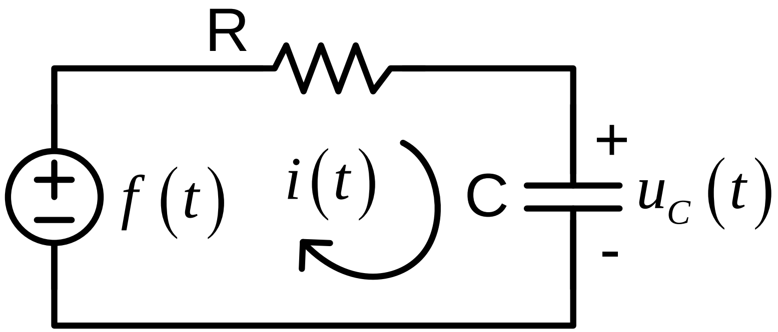
$Q(t)$为与$P(t)$同次的多项式，系数待定。

具体内容请参阅高等数学相关内容

时域求解举例

❖RC电路如图所示，已知R=1Ω, C=1F, $u_C(0)=1V$, $f(t)=1+e^{-3t}$, t>0, 求解$u_C(t)$。

电路方程：$i(t)=C\dfrac{du_C(t)}{dt}$



$$\boxed{\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=f(t)}$$

(1) 经典解法：

特征方程：$p+1=0$　　特征根：$p_1=-1$

通解：$\boxed{C_1 e^{-t}}$

激励形式：$f(t)=e^{0t}+e^{-3t}$　　特解形式：$\boxed{b_0+b_1e^{-3t}}$

特解满足电路方程，代回电路方程确定待定系数：

$$\frac{d\left[b_0+b_1e^{-3t}\right]}{dt}+\left[b_0+b_1e^{-3t}\right]=1+e^{-3t}$$

即 $b_0-2b_1e^{-3t}=1+e^{-3t}\quad\Rightarrow\begin{cases}b_0=1\\ b_1=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

特解：$\boxed{1-\dfrac{1}{2}e^{-3t}}$

全解形式：$\boxed{u_C(t)=C_1e^{-t}+1-\dfrac{1}{2}e^{-3t}\quad t>0}$

利用初始条件确定待定系数：

$$u_C(0) = C_1 + 1 - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$$

全解：

$$\boxed{u_C(t) = \underline{\frac{1}{2}e^{-t}} + \underline{1 - \frac{1}{2}e^{-3t}} \quad t > 0}$$

通解
自然响应
频率为特征根

特解
受迫响应
其它频率分量

(2) 叠加法：零输入响应+零状态响应

特征根：$p_1=-1$ 通解： Ce^{-t} 特解： $1-\frac{1}{2}e^{-3t}$

零输入响应：输入激励为零，把初始状态当作激励

形如： $\boxed{u_{zi}(t)=C_2e^{-t}}$

由初始状态 $u_C(0)=1$ 即 $u_{zi}(0)=1$ $\Rightarrow C_2=1$

$$u_{zi}(t)=e^{-t} \quad t>0$$

待定系数的确定

零输入响应：初始条件代入零输入响应。

自然响应（通解）：初始条件代入系统全解。

零状态响应：初始状态为零，只有输入激励作用

考虑 $$\boxed{u_{zs}(t) = \underline{C_3 e^{-t}} + \underline{1 - \frac{1}{2}e^{-3t}}}$$

用来消除初始条件的影响

特解

初始状态为零，即 $u_{zs}(0) = 0 \quad \Rightarrow C_3 = -\frac{1}{2}$

$$\boxed{u_C(t) = \underbrace{e^{-t}}_{\text{零输入响应}} \underbrace{- \frac{1}{2}e^{-t} + 1 - \frac{1}{2}e^{-3t}}_{\text{零状态响应}} \quad t > 0}$$

系统全响应为:

$$u_C(t)=\underline{e^{-t}}\underline{-\frac{1}{2}e^{-t}+1-\frac{1}{2}e^{-3t}}$$ 零输入响应+零状态响应

$$=\underline{\frac{1}{2}e^{-t}}+\underline{1-\frac{1}{2}e^{-3t}}$$ 自然响应(通解)+受迫响应(特解)

$$=\underline{1}+\underline{\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}}$$ 稳态响应+瞬态响应

稳态响应：响应中趋于稳定的部分

瞬态响应：当t→∞时，响应中趋于零的部分

叠加法求解推广

- ❖不仅可分解为零输入响应和零状态响应
- ❖复杂时间信号也可以分解为简单时间信号，分别对每个简单信号求响应。

全响应

- 零输入响应
  由初始状态决定
  多用求微分方程
  通解的方法确定
  - $y_{zi1}(t)$ 状态1
  - $y_{zi2}(t)$ 状态2
  - $\vdots$ $\vdots$
  - $y_{zim}(t)$ 状态m
- 零状态响应
  由输入信号决定
  多分解为脉冲分
  量用卷积法确定
  - $y_{zs1}(t)$ $f_1(t)$
  - $y_{zs2}(t)$ $f_2(t)$
  - $\vdots$ $\vdots$
  - $y_{zsn}(t)$ $f_n(t)$

叠加法求解举例

前例中 $e(t)=\left(1+e^{-3t}\right)U(t)$

分为两个激励信号：

$$f_1(t)=U(t) \text{ 和 } f_2(t)=e^{-3t}U(t)$$

分别求出两个零状态响应：

$$u_{zs1}(t)=\left(1-e^{-t}\right)U(t)$$

$$u_{zs2}(t)=\left(\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\right)U(t)$$

系统总的零状态响应：

$$u_{zs}(t)=u_{zs1}(t)+u_{zs2}(t)=\left(1-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\right)U(t)$$

信号分解－叠加积分

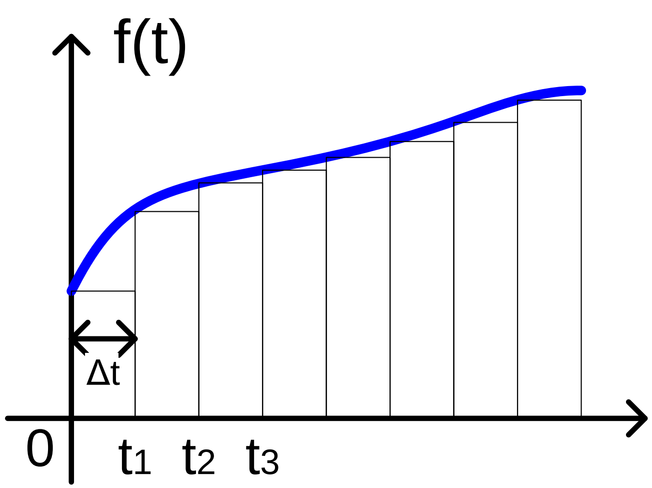
❖卷积积分

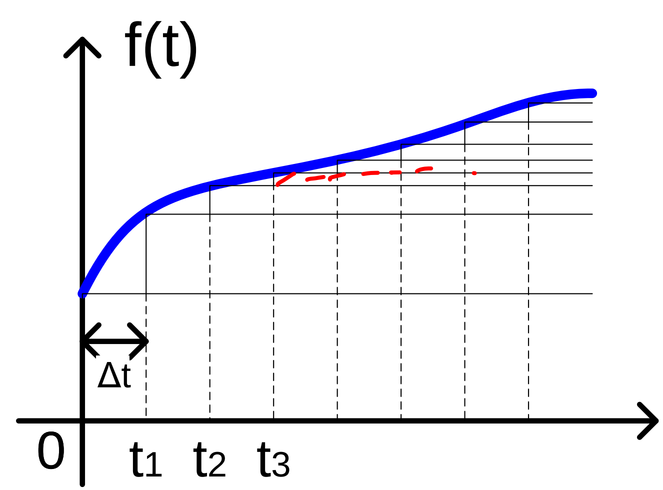
极限情况

- 信号分解为一系列的脉冲函数。 $\delta(t)$
- 系统对各脉冲函数响应的总和就是零状态响应。
- 脉冲宽度无限小时，求和演变为积分。

❖杜美阿尔积分

- 信号分解为一系列的阶梯形函数。 $U(t)$





0^-和0^+初始值

- 若输入信号f(t)在t=0时接入，$t=0^-$代表施加激励前一瞬间，$t=0^+$代表施加激励后一瞬间。
- 在$t=0^-$时刻的状态$y(0^-)$反映了系统的历史情况，与激励无关。
- 在$t=0^+$时刻的状态$y(0^+)$包含了因施加激励而产生的状态突变量。
- 当没有状态突变时， $y(0^-) = y(0^+)$ 。初始状态一般指$t=0^-$时刻的状态。
- **对零输入响应$y_{zi}(0^+)=y_{zi}(0^-)=y(0^-)$**
- **对零状态响应$y_{zs}(0^-)=0$。**

0^-和0^+初始值举例

❖描述某系统的微分方程如下，已知$y(0^-)=2$，$y'(0^-)=0$，$f(t)=U(t)$。求该系统的零输入响应和零状态响应。

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+6f(t)$$

(1) 零输入响应

$$y''_{zi}(t)+3y'_{zi}(t)+2y_{zi}(t)=0$$

特征根为$p_1=-1$，$p_2=-2$

$$y_{zi}(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}\Rightarrow C_1+2C_2=0$$

$$y_{zi}(0^+)=y_{zi}(0^-)=y(0^-)=2\Rightarrow C_1+C_2=2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_1=4\\C_2=-2\end{cases}$$

$$\boxed{y_{zi}(t)=4e^{-t}-2e^{-2t}\quad t>0}$$

(2) 零状态响应 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2\delta(t)+6U(t)$

$$y_{zs}'(0^-)=y_{zs}(0^-)=0$$

由于y_{zs}(t)连续，$y_{zs}(0^+)=y_{zs}(0^-)=0$。

由于等式右端含有δ(t)，故y_{zs}''(t)含有δ(t)，所以y_{zs}'(t)跃变，即$y_{zs}'(0^+)\neq y_{zs}'(0^-)$。

等式两端0^-到0^+积分 $y_{zs}'(0^+)-y_{zs}'(0^-)=2\Rightarrow y_{zs}'(0^+)=2$

当t>0时 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=6$

齐次解：$C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$ 特解：3

$$y_{zs}(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+3$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{zs}(0^+)=0 \\ y_{zs}'(0^+)=2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} C_1=-4 \\ C_2=1 \end{cases}$$

$$\boxed{y_{zs}(t)=-4e^{-t}+e^{-2t}+3\quad t\geq 0}$$

上一节复习

- LTI连续时间系统的输入输出方程 – 线性常系数微分方程
- 经典解法：通解+特解
- 叠加法：零输入响应+零状态响应
  - 零输入响应：由特征根得到响应的形式，再代入初始条件确定待定系数。
- 响应的分类
  - 零输入响应+零状态响应
  - 自然响应+受迫响应
  - 稳态响应+瞬态响应

系统方程的算子表示法

微分算子

❖ 微分算子 $p = \dfrac{d}{dt}$ $\quad p^n = \dfrac{d^n}{dt^n}$

❖ 积分算子 $\dfrac{1}{p} = \int_{-\infty}^{t} (\ ) d\tau$

举例： $\dfrac{dx}{dt} = px$ $\quad \dfrac{d^n x}{dt^n} = p^n x$ $\quad \dfrac{1}{p} x = \int_{-\infty}^{t} x d\tau$

微分方程算子表示法：

$$\left(p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 \right) y(t)$$
$$= \left(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0 \right) f(t)$$

微分算子的运算

- 和乘法运算规则相似。
- p 代表一种运算过程，不是一个代数量
- 不能随便约去分子/分母,或等式两端的 p 算子。

例1：

$$\boxed{p\frac{1}{p}x \neq \frac{1}{p}px}$$

$$p\frac{1}{p}x = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} x d\tau = x$$

$$\frac{1}{p}px = \int_{-\infty}^{t}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=\tau} d\tau = x(t) - x(-\infty)$$

除非x(-∞)=0，否则 $p\frac{1}{p}x \neq \frac{1}{p}px$

例2： 若 $px = py$ 则 $x = y +$ 任意常数

转移/微分/传输算子

❖LTI系统的算子方程

$$\left(p^{n}+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_{1}p+a_{0}\right)y(\mathrm{t})$$

$$=\left(b_{m}p^{m}+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_{1}p+b_{0}\right)f(t)$$

将等式两边关于 p 的多项式记作 D(p) 和 N(p)

即 $D(p)y(\mathrm{t})=N(p)f(t)$ 或 $y(\mathrm{t})=\dfrac{N(p)}{D(p)}f(t)$

转移算子定义为：$\boxed{H(p)=\dfrac{N(p)}{D(p)}}$

系统的算子方程简写成：$y(\mathrm{t})=H(p)f(t)$

利用算子方程求解零输入响应

- 零输入响应：系统没有外加激励的情况下，由系统初始储能形成的系统输出响应，$y_{zi}(t)$。
- 即求解齐次算子方程 $D(p)y(t)=0$

  解法参考微分方程求通解

  (1) 令D(p)=0，求特征根 $p_1, p_2, \ldots, p_r$

  (2) 单实根 p_i 对应 $C_i e^{p_i t}$

  (3) k 重实根 p_j 对应 $\left(b_0 + b_1 t + \ldots + b_{k-1} t^{k-1}\right) e^{p_j t}$

  (4) 根据初始条件确定待定系数。
- 特征方程 $\boxed{D(p)=0}$

特征方程练习1

已知系统方程 $(p-1)(p+1)(p-3)^3 y(t)=f(t)$

和y(0), y'(0), y''(0), $y^{(3)}(0)$, $y^{(4)}(0)$,求零输入响应。

$$D(p)=(p-1)(p+1)(p-3)^3=0$$

$p_1=1$ 对应 $C_1 e^t$

$p_2=-1$ 对应 $C_2 e^{-t}$

$p_3=3$ 对应 $\left(b_0+b_1 t+b_2 t^2\right)e^{3t}$

零输入响应：$y(t)=C_1 e^t+C_2 e^{-t}+\left(b_0+b_1 t+b_2 t^2\right)e^{3t}$

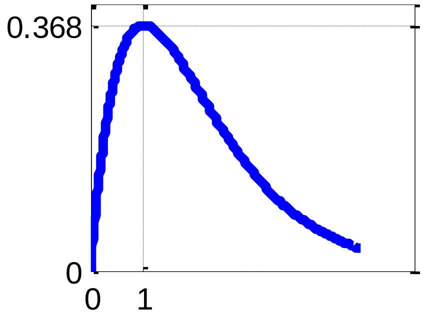
最后根据初始条件y(0), y'(0), y''(0), $y^{(3)}(0)$, $y^{(4)}(0)$ 确定待定系数。

特征方程练习2

已知特征方程 $D(p)=p^2+2p+1$

输入激励 f(t)=0, 输出电流 i(t)，初始条件

i(0)=0A, i’(0)=1A/s, 求零输入响应。



$$D(p)=(p+1)^2=0$$

二重实根 $p_{1,2}=-1$ 对应 $(b_0+b_1t)e^{-t}$

$$i(t)=(b_0+b_1t)e^{-t} \quad \text{及} \quad i'(t)=(-b_0+b_1-b_1t)e^{-t}$$

由初始条件

$$\begin{aligned} i(0)&=b_0=0 \\ i'(0)&=-b_0+b_1=1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} b_0=0 \\ b_1=1 \end{cases}$$

零输入响应： $i(t)=te^{-t} \quad t\geq 0$

利用算子方程求解零状态响应

❖ 零状态响应 $y(\mathrm{t}) = H(p)f(t)$

◆ 利用部分分式法求解冲激响应

$$h(\mathrm{t}) = H(p)\delta(t) \quad H(p) \leftrightarrow h(t)$$

◆ 利用卷积求零状态响应

$$f(t) = f(t) * \delta(t) \quad y(\mathrm{t}) = f(t) * h(t)$$

冲激响应和阶跃响应

- ◆冲激响应
- ◆阶跃响应

冲激响应

❖输入激励 f(t)=δ(t)时所引起的零状态响应称为单位冲激响应，简称冲激响应，记为 h(t)。

$$\left(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0\right)h(\mathrm{t})$$

$$=\left(b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1p+b_0\right)\delta(t)$$

$$h(\mathrm{t})=\frac{N(p)}{D(p)}\delta(t)=H(p)\delta(t)$$

$$=\frac{b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0}\delta(t)$$

以一阶系统为例

$$h(\mathrm{t}) = \frac{C}{p - p_1}\delta(t) \quad \Rightarrow h(\mathrm{t}) = Ce^{p_1 t}U(t)$$

推导过程 $\dfrac{dh(\mathrm{t})}{dt} - p_1 h(\mathrm{t}) = C\delta(t)$

两边乘以 $e^{-p_1 t}$

$$\frac{dh(\mathrm{t})}{dt}e^{-p_1 t} - p_1 h(\mathrm{t})e^{-p_1 t} = C\delta(t)e^{-p_1 t}$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-p_1 t}h(\mathrm{t})\right] = C\delta(t)e^{-p_1 t}$$

$$e^{-p_1 t}h(\mathrm{t}) = \int_0^t Ce^{-p_1 \tau}\delta(\tau)d\tau = CU(t)$$

由转移算子求冲激响应

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1 p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p+a_0}$$

原则：将H(p)分解成简单的分式，对每个分式求冲激响应，最后利用叠加原理，求所有冲激响应的和，即为系统的冲激响应。

部分分式法

$$H(p)=H_1(p)+H_2(p)+\ldots+H_l(p)$$

$$h(t)=h_1(t)+h_2(t)+\ldots+h_l(t)$$

转移算子对应的冲激响应

单根：
$$H_i(p)=\frac{C_i}{p-p_i} \qquad h_i(t)=C_i e^{p_i t}U(t)$$

k重根：
$$H_j(p)=\frac{C_{jk}}{\left(p-p_j\right)^k} \qquad h_j(t)=\frac{C_{jk}}{(k-1)!}t^{k-1}e^{p_j t}U(t)$$

常数项： 当n=m时H(p)可化为常数项和真分式之和。
$$H_l(p)=b_m \qquad h_l(t)=b_m\delta(t)$$

多项式项：当n<m时H(p)可化为多项式和真分式之和。
$$H_k(p)=k_1+k_2 p+\ldots$$
$$h_k(t)=k_1\delta(t)+k_2\delta'(t)+\ldots$$

冲激响应练习1

❖求下列微分方程表示的系统的冲激响应。

$$(1)\ \frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=f(t)$$

$$(2)\ \frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=f(t)$$

$$(1)\quad H(p)=\frac{1}{p+2}\qquad h(t)=e^{-2t}U(t)$$

$$(2)\quad H(p)=\frac{1}{p^2+3p+2}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2}$$

$$h(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)U(t)$$

冲激响应练习2

❖求下列微分方程表示的系统的冲激响应。

$$(1)\ \frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=f(t)$$

$$H(p)=\frac{1}{p^2+4p+4}=\frac{1}{(p+2)^2}\quad h(t)=te^{-2t}U(t)$$

$$(2)\ \frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=\frac{df(t)}{dt}+3f(t)$$

$$H(p)=\frac{p+3}{p^2+4p+4}=\frac{1}{p+2}+\frac{1}{(p+2)^2}$$

$$h(t)=(1+t)e^{-2t}U(t)$$

冲激响应练习2

(3) $H(p)=\dfrac{2p^2+9p+11}{p^2+4p+4}$

多项式除法

$$H(p)=\frac{2p^2+9p+11}{p^2+4p+4}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ p^2+4p+4 \overline{\smash{\big)}\, 2p^2+9p+11} \\ \underline{2p^2+8p+8} \\ p+3 \end{array}$$

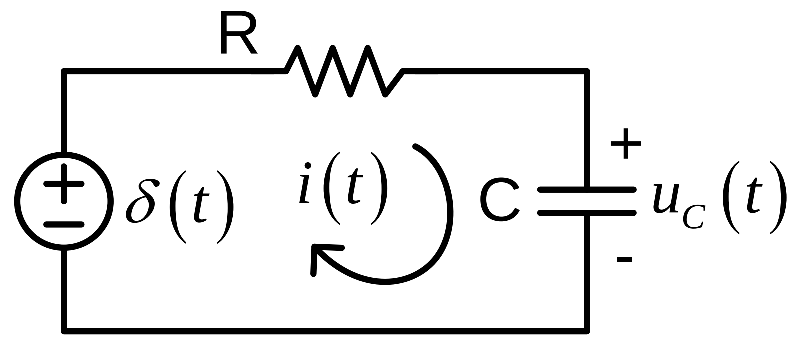
$$=2+\frac{p+3}{p^2+4p+4}$$

$$=2+\frac{1}{p+2}+\frac{1}{(p+2)^2}$$

$$h(t)=2\delta(t)+(1+t)e^{-2t}U(t)$$

冲激响应练习3

❖RC串联电路如图所示，电路初始状态为零，求电路冲激响应$u_C(t)$。



复习R,L,C的电压电流关系

❖电容

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau=\frac{1}{Cp}i_C(t)=u_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_{0^+}^{t} i_C(\tau)d\tau$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}=Cpu_C(t)$$

❖电感

$$u_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}=Lpi_L(t)$$

$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L(\tau)d\tau=\frac{1}{Lp}u_L(t)=i_L(0^-)+\frac{1}{L}\int_{0^+}^{t} u_L(\tau)d\tau$$

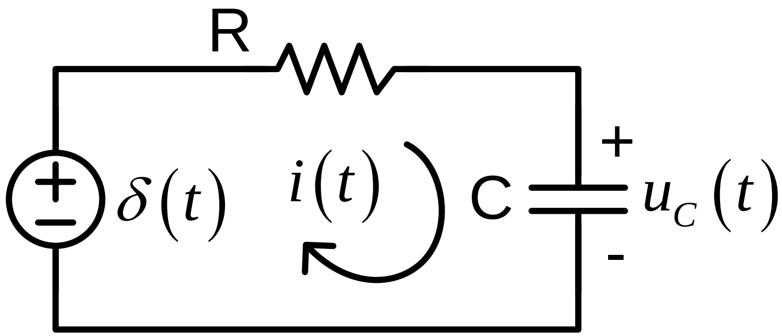
❖电阻

$$u_R(t)=Ri_R(t)$$

$$i_R(t)=\frac{u_R(t)}{R}$$

冲激响应练习3

❖RC串联电路如图所示，电路初始状态为零，求电路冲激响应$u_C(t)$。



回路电压方程：

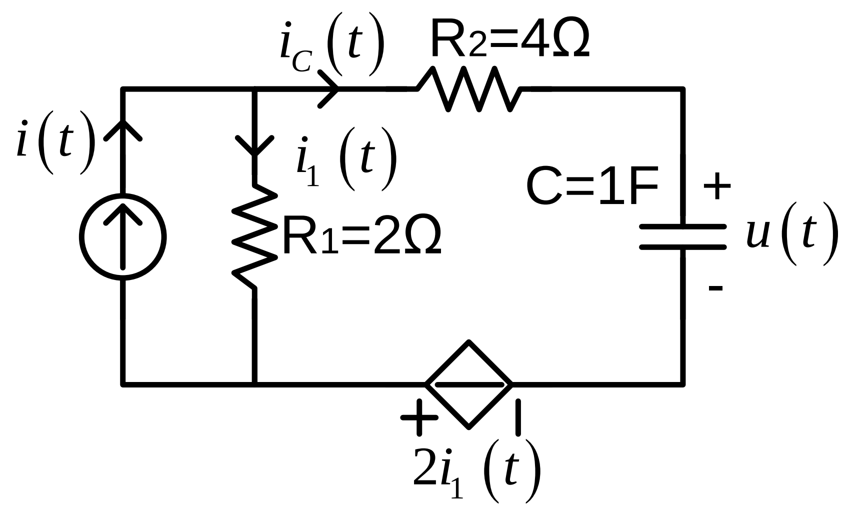
$$u_R(t)+u_C(t)=RC\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=\delta(t)$$

$$(RCp+1)u_C(t)=\delta(t)$$

$$H(p)=\frac{\frac{1}{RC}}{p+\frac{1}{RC}} \qquad h(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}U(t)$$

冲激响应练习4

❖电路如图所示，输入激励为i(t)，求电路阶跃响应u(t)。



$$i_C = \frac{du}{dt} = pu$$

$$i_1 = i - pu$$

$$R_1 i_1 = R_2 i_C + u - 2i_1$$

$$2(i - pu) = 4pu + u - 2(i - pu)$$

$$H(p) = \frac{u}{i} = \frac{\frac{1}{2}}{p + \frac{1}{8}}$$

$$h(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{8}t} U(t)$$

阶跃响应

- ❖ *δ(t)* 与 *U(t)* 为微积分关系

$$U(t)=\int_{0^-}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad \delta(t)=\frac{dU(t)}{dt}$$

- ❖ 阶跃响应和冲激响应也为微积分关系

$$g(t)=\int_{0^-}^{t}h(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad h(t)=\frac{dg(t)}{dt}$$

对冲激响应练习4求阶跃响应

由 $h(t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{8}t}U(t)$

$$g(t)=\int_{0^-}^{t} h(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$g(t)=\int_{0^-}^{t}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{8}\tau}U(\tau)d\tau$$

$$=-4\int_{0^-}^{t}\left(e^{-\frac{1}{8}\tau}\right)' U(\tau)d\tau$$

$$=-4\left[e^{-\frac{1}{8}\tau}U(\tau)\Big|_{0^-}^{t}-\int_{0^-}^{t}e^{-\frac{1}{8}\tau}\delta(\tau)d\tau\right]$$

$$==-4\left[e^{-\frac{1}{8}t}U(t)-1\right]=4-4e^{-\frac{1}{8}t}U(t)$$

上一节复习

❖ 引入微分算子后如何由系统方程求

- 转移算子

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}$$

- 零输入响应

$$D(p)y_{zi}(t)=0$$

- 冲激响应

$$h(t)=H(p)\delta(t) \qquad h(t)\leftrightarrow H(p)$$

- 阶跃响应
- 零状态响应

$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)$$

待定系数的确定

❖以特征根全部是单根为例

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

$$= \sum C_i e^{p_i t} + f(t) * \underbrace{\sum k_i e^{p_i t}}_{h(t)}$$

C_i 由初始条件确定

k_i 由部分分式法确定

卷积积分

- 利用冲激响应求零状态响应
- 卷积的定义
- 图解法求卷积
- 卷积的性质

任意信号作用下的零状态响应

❖信号分解为冲激函数

根据h(t)的定义：$\delta(t) \rightarrow h(t)$

由时不变性：$\delta(t-\tau) \rightarrow h(t-\tau)$

由齐次性：$f(\tau)\delta(t-\tau) \rightarrow f(\tau)h(t-\tau)$

由叠加性：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$f(t) = f(t) * \delta(t) \qquad\qquad y(t) = f(t) * h(t)$$

卷积的定义

❖一种数学运算，用符号*表示，在区间(– ∞, +∞)上定义为

$$r(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

$$=f_2(t)*f_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau$$

❖若$f_1(t)$和$f_2(t)$均为有始信号，则积分区间为(0,t)

❖利用叠加原理，LTI系统的零状态响应可利用冲激响应和卷积来求解。

激励：$f(t)=f(t)*\delta(t)$ 零状态响应：$y(t)=f(t)*h(t)$

卷积积分练习

$$f_1(t)=e^t \quad -\infty<t<+\infty \qquad f_2(t)=\left(6e^{-2t}-1\right)U(t)$$

$$r(t)=f_1(t)*f_2(t)=?$$

$$r(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau}\left(6e^{-2(t-\tau)}-1\right)U(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{t} e^{\tau}\left(6e^{-2(t-\tau)}-1\right)\underbrace{\boxed{U(t-\tau)}}_{=1}\,d\tau$$

$$+\int_{t}^{+\infty} e^{\tau}\left(6e^{-2(t-\tau)}-1\right)\underbrace{\boxed{U(t-\tau)}}_{=0}\,d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{t}\left(6e^{-2t}e^{3\tau}-e^{\tau}\right)d\tau=2e^{-2t}e^{3t}-e^{t}=e^{t}$$

常用函数的卷积

❖ 表2-2 卷积表 pp.59

$$f(t)*\delta(t)=f(t)$$

$$f(t)*U(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$$

$$U(t)*U(t)=tU(t)$$

若$p_1=0$或$p_2=0$

$$e^{\lambda t}U(t)*U(t)$$

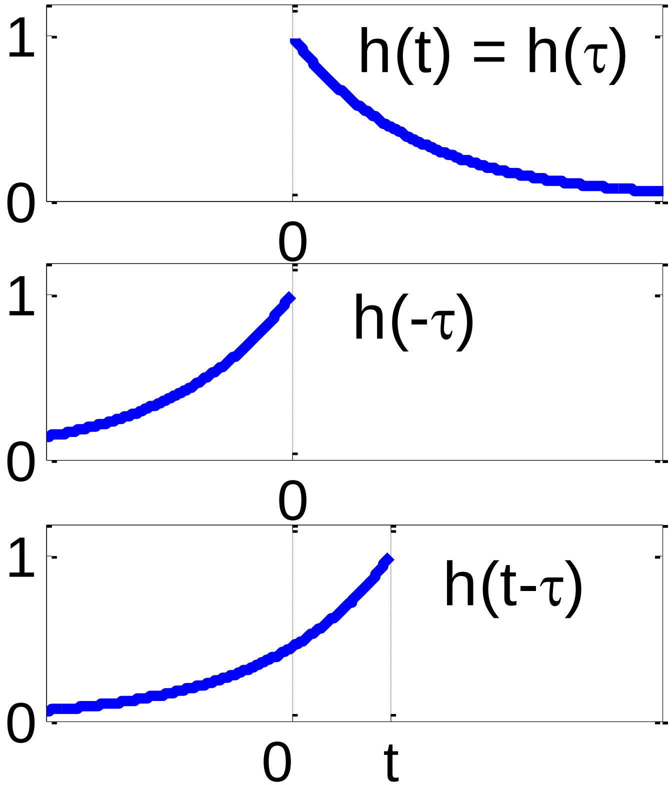
$$=-\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{\lambda t}\right)U(t)$$

$$e^{p_1 t}U(t)*e^{p_2 t}U(t)=\begin{cases}\boxed{\dfrac{1}{p_2-p_1}\left(e^{p_2 t}-e^{p_1 t}\right)U(t) \qquad p_1\neq p_2} \\ te^{\lambda t}U(t) \qquad p_1=p_2=\lambda\end{cases}$$

卷积的图解法

$$y(t)=e(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- ❖四步：反褶，平移，乘积，求面积
  - ◆ 反褶和平移是为了从 h(t) 得到 h(t- τ)



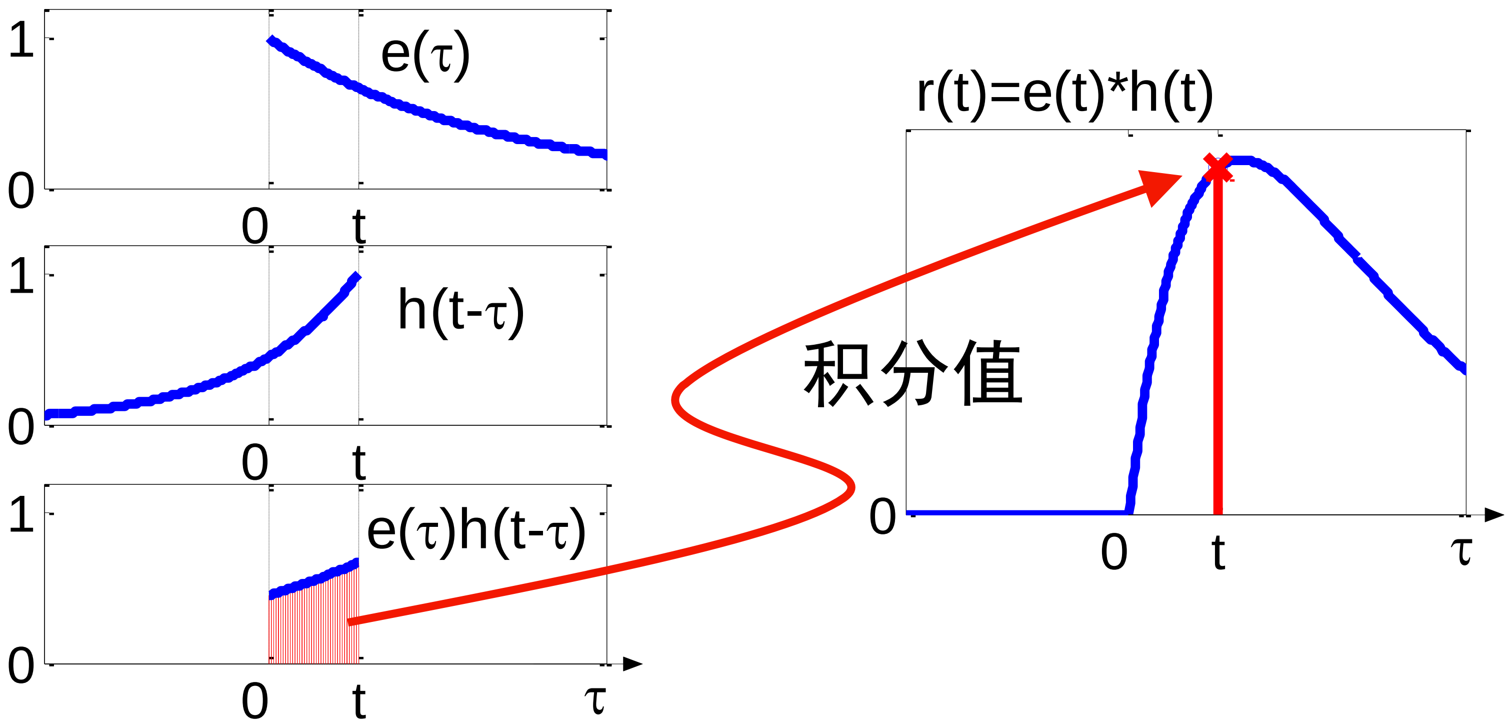
本例中e(t), h(t)均为有始函数

- 计算卷积

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

若t<0，乘积为零，y(t)=0

若t>0，乘积仅在(0,t)区间内不为零，求积分，即求(0,t)内的乘积曲线下的面积。



- 求卷积积分确定积分的上下限是关键。
- 图解法一般比较繁琐，但若只求某一时刻卷积值时还是比较方便的。
- 利用卷积的性质及卷积表可以简化卷积运算。

卷积积分的性质

- ◆卷积的代数运算
- ◆卷积的微积分特性
- ◆卷积的延时特性
- ◆奇异函数的卷积特性

代数运算

❖具有和乘法运算类似的性质

❖交换律 $u(t)*v(t)=v(t)*u(t)$

❖分配律 $u(t)*\left[v(t)+w(t)\right]=u(t)*v(t)+u(t)*w(t)$

❖结合律 $u(t)*\left[v(t)*w(t)\right]=\left[u(t)*v(t)\right]*w(t)$

微积分特性

❖微分特性

$$\frac{d}{dt}\left[u(t)*v(t)\right]=\frac{du(t)}{dt}*v(t)=u(t)*\frac{dv(t)}{dt}$$

❖积分特性

$$\int_{-\infty}^{t}u(\tau)*v(\tau)d\tau=u(t)*\int_{-\infty}^{t}v(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau*v(t)$$

❖推论

$$u(t)*v(t)=\frac{du(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}v(\tau)d\tau$$

单位冲激响应 单位阶跃响应

$$y(t)=f(t)\boxed{*h(t)}=\frac{df(t)}{dt}\boxed{*g(t)}$$

证明微分特性

$$\frac{d}{dt}\left[u(t)*v(t)\right]=\frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)v(t-\tau)d\tau\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)\frac{dv(t-\tau)}{dt}d\tau \qquad d(t-\tau)=dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)\frac{dv(t-\tau)}{d(t-\tau)}d\tau$$

$$=u(t)*\frac{dv(t)}{dt}$$

延时特性

若 $r(t)=u(t)*v(t)$

则 $r(t-t_1-t_2)=u(t-t_1)*v(t-t_2)$

证明：

$$u(t-t_1)*v(t-t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau-t_1)v(t-\tau-t_2)d\tau$$

$$\boxed{\begin{aligned}x&=\tau-t_1\\ dx&=d\tau\end{aligned}}$$

积分限不变

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x)v(t-t_1-t_2-x)dx$$

$$=r(t-t_1-t_2)$$

奇异函数卷积

$$f(t)*\delta(t)=\delta(t)*f(t)=f(t)$$

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

$$f(t)*\delta'(t)=f'(t)$$

$$f(t)*\delta^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)$$

$$f(t)*U(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)U(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$U(t)*U(t)=tU(t)$$

卷积与相关

❖两个实时间函数x(t)和y(t)的相关函数可以用卷积定义如下：

- x(t)与y(t)的互相关函数

$$R_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)y(\tau-t)d\tau=x(t)*y(-t)$$

- y(t)与x(t)的互相关函数

$$R_{yx}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}y(\tau)x(\tau-t)d\tau=x(-t)*y(t)=R_{xy}(-t)$$

- x(t)的自相关函数

$$R_{xx}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)x(\tau-t)d\tau=x(t)*x(-t)=R_{xx}(-t)$$

卷积积分练习1

❖利用卷积性质求下列卷积

(1) $\delta(t-1)*\left[U(t)-U(t-3)\right] = U(t-1)-U(t-4)$

冲激函数卷积 $f(t)*\delta(t)=f(t)$

延时特性 $r(t-t_1-t_2)=u(t-t_1)*v(t-t_2)$

(2) $U(t)*U(t-1) = (t-1)U(t-1)$

阶跃函数卷积 $U(t)*U(t)=tU(t)$

延时特性 $r(t-t_1-t_2)=u(t-t_1)*v(t-t_2)$

卷积积分练习1

❖利用卷积性质求下列卷积

(3)$\left[U(t-1)-U(t-3)\right]*\left[U(t)-U(t-2)\right]$

方法一：

分配律

阶跃函数卷积 $U(t)*U(t)=tU(t)$

延时特性

$$=U(t-1)*U(t)-U(t-1)*U(t-2)-U(t-3)*U(t)+U(t-3)*U(t-2)$$

$$=(t-1)U(t-1)-(t-3)U(t-3)-(t-3)U(t-3)+(t-5)U(t-5)$$

$$=(t-1)U(t-1)-2(t-3)U(t-3)+(t-5)U(t-5)$$

卷积积分练习1

(3) $\left[U(t-1)-U(t-3)\right]*\left[U(t)-U(t-2)\right]$

方法二：

分配律

微积分特性

$$u(t)*v(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau*\frac{dv(t)}{dt}$$

冲激函数卷积

$$f(t)*\delta(t)=f(t)$$

延时特性

$$=\left[\int_{-\infty}^{t}U(\tau-1)d\tau-\int_{-\infty}^{t}U(\tau-3)d\tau\right]*\left[\delta(t)-\delta(t-2)\right]$$

$$=\left[(t-1)U(t-1)-(t-3)U(t-3)\right]*\left[\delta(t)-\delta(t-2)\right]$$

$$=(t-1)U(t-1)-2(t-3)U(t-3)+(t-5)U(t-5)$$

卷积积分练习1

❖利用卷积性质求下列卷积

$$(4)\left[U(t-1)-U(t-3)\right]*\left[e^{-t}U(t)\right]$$

方法一：

分配律

卷积表 $U(t)*e^{\lambda t}U(t)=-\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{\lambda t}\right)U(t)$

延时特性

$$=U(t-1)*e^{-t}U(t)-U(t-3)*e^{-t}U(t)$$

$$=\left(1-e^{-(t-1)}\right)U(t-1)-\left(1-e^{-(t-3)}\right)U(t-3)$$

卷积积分练习1

(4)$\left[U(t-1)-U(t-3)\right]*\left[e^{-t}U(t)\right]$

方法二：

微积分特性 $u(t)*v(t)=\dfrac{du(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}v(\tau)d\tau$

冲激函数卷积 $f(t)*\delta(t)=f(t)$

延时特性

$$=\frac{d\left[U(t-1)-U(t-3)\right]}{dt}*\int_{-\infty}^{t}e^{-\tau}U(\tau)d\tau$$

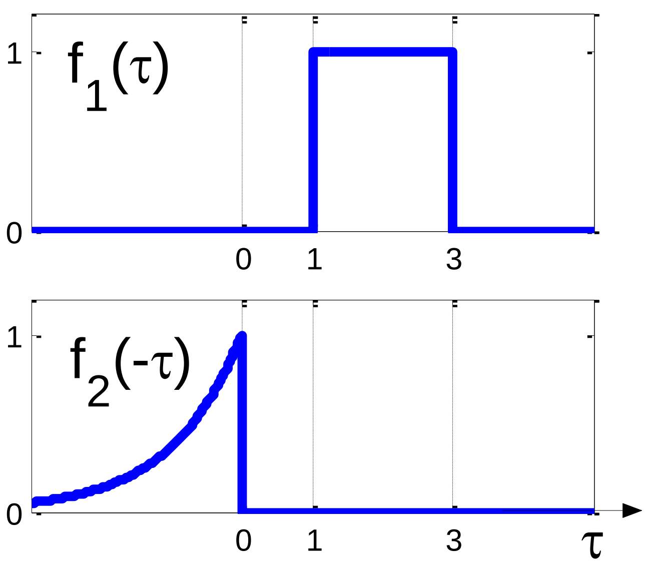
$$=\left[\delta(t-1)-\delta(t-3)\right]*\left(1-e^{-t}\right)U(t)$$

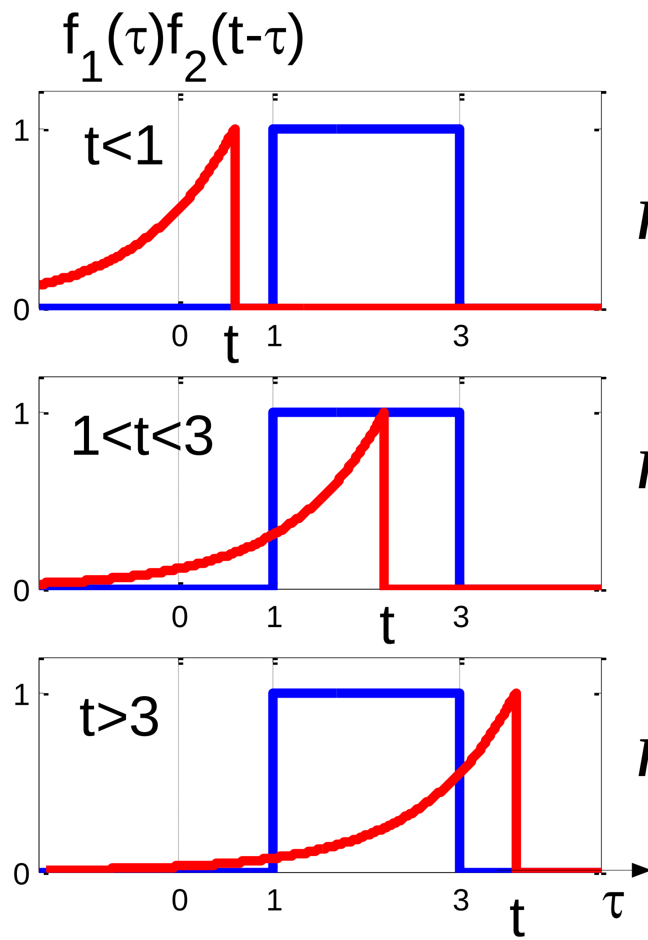
$$=\left(1-e^{-(t-1)}\right)U(t-1)-\left(1-e^{-(t-3)}\right)U(t-3)$$

卷积积分练习1

$$(4)\left[U(t-1)-U(t-3)\right]*\left[e^{-t}U(t)\right]$$

方法三：图解法，注意积分区间的变化 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau$





$$r(t)=0$$

$$r(t)=\int_1^t e^{-(t-\tau)}d\tau$$

$$r(t)=\int_1^3 e^{-(t-\tau)}d\tau$$

反褶，平移，
乘积，求面积

卷积积分练习1

$$r(t)=\begin{cases} 0 & t<1 \\ \int_1^t e^{-(t-\tau)}d\tau & 1<t<3 \\ \int_1^3 e^{-(t-\tau)}d\tau & t>3 \end{cases}$$

即

$$r(t)=\int_1^t e^{-(t-\tau)}d\tau\left[U(t-1)-U(t-3)\right]$$

$$+\int_1^3 e^{-(t-\tau)}d\tau\left[U(t-3)\right]$$

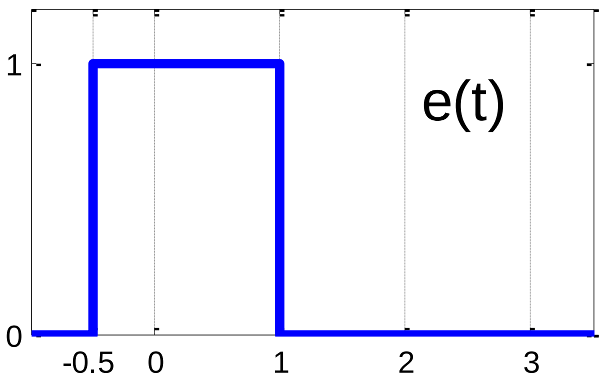
$$=\left(1-e^{-(t-1)}\right)\left[U(t-1)-U(t-3)\right]+\left(e^{-(t-3)}-e^{-(t-1)}\right)U(t-3)$$

$$=\left(1-e^{-(t-1)}\right)U(t-1)-\left(1-e^{-(t-3)}\right)U(t-3)$$

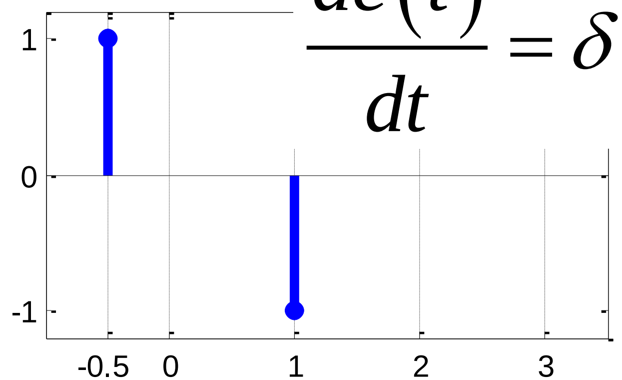
卷积积分练习2

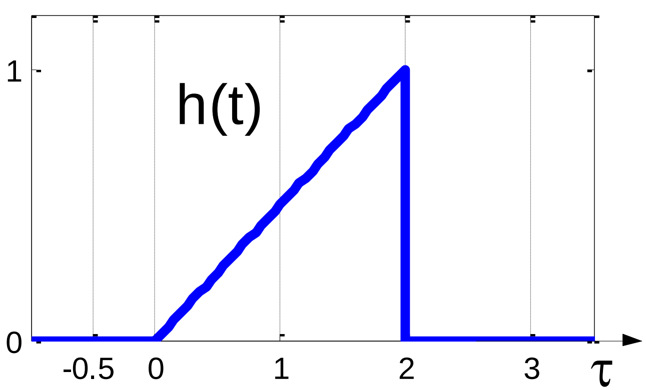
❖如图所示两信号卷积

$$e(t)*h(t)=\frac{de(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

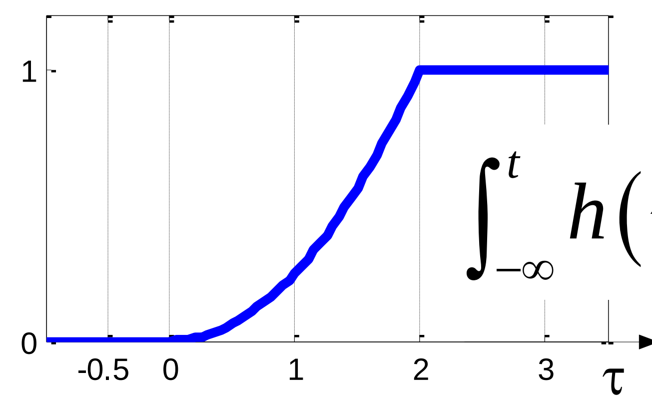


$$\frac{de(t)}{dt}=\delta(t+0.5)-\delta(t-1)$$





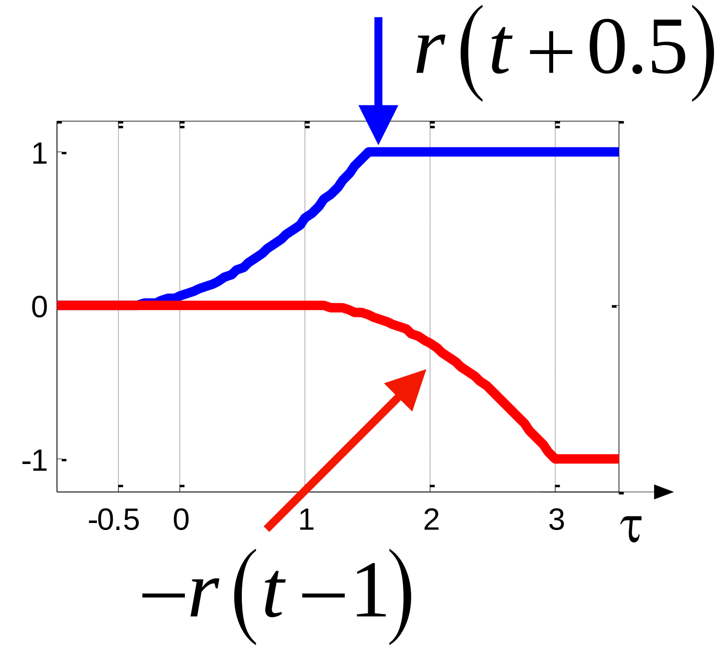
$$\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$



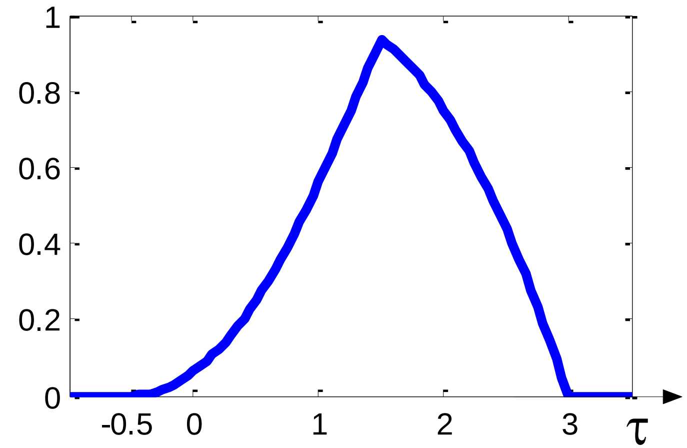
卷积积分练习2

$$\frac{de(t)}{dt}=\delta(t+0.5)-\delta(t-1)$$

令 $r(t)=\delta(t)*\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$



$$s(t)=g(t+0.5)-g(t-1)$$



系统零状态响应练习1

❖已知某LTI系统的冲激响应为h(t)=e^{-t}U(t)，求激励为f(t)=t U(t)时的零状态响应。

$$y_{zs}(t)= f(t)*h(t)=e^{-t}U(t)*tU(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{t} e^{-\tau}U(\tau)d\tau * \frac{d\left[tU(t)\right]}{dt}$$

$$=\int_{0}^{t} e^{-\tau}d\tau * U(t)$$

$$=\left[1-e^{-t}\right]U(t)*U(t)$$

$$=tU(t)-\left[1-e^{-t}\right]U(t)=\left[e^{-t}+t-1\right]U(t)$$

系统零状态响应练习2

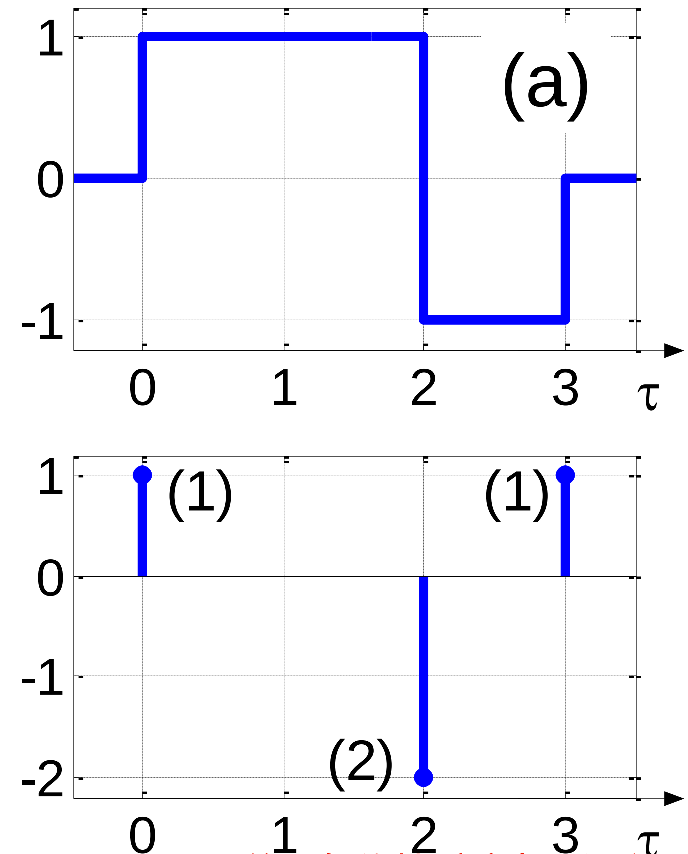
❖已知系统单位阶跃响应g(t)，求下列输入信号引起的系统零状态响应。

$$g(t)=\left(2e^{-2t}-1\right)U(t)$$

提示：$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=f(t)*\dfrac{dg(t)}{dt}$

$$\frac{dg(t)}{dt}=\delta(t)-2\delta(t-2)+\delta(t-3)$$

$$y_{zs}(t)=\left(2e^{-2t}-1\right)U(t)$$
$$-2\left(2e^{-2(t-2)}-1\right)U(t-2)$$
$$+\left(2e^{-2(t-3)}-1\right)U(t-3)$$



系统零状态响应练习2

❖已知系统单位阶跃响应g(t)，求下列输入信号引起的系统零状态响应。$g(t)=\left(2e^{-2t}-1\right)U(t)$

(b) $f(t)=tU(t)$

提示： $y_{zs}(t)=\dfrac{df(t)}{dt}*g(t)$

$$\frac{df(t)}{dt}=U(t)$$

$$U(t)*e^{\lambda t}U(t)=-\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{\lambda t}\right)U(t)$$

$$y_{zs}(t)=U(t)*\left(2e^{-2t}-1\right)U(t)$$

$$=\left(1-e^{-2t}\right)U(t)-tU(t)$$

系统全响应练习1

❖已知系统微分方程，激励信号，和初始状态，求单位冲激响应，零状态响应，零输入响应。

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{df(t)}{dt}+3f(t)$$

$$f(t)=e^{-3t}U(t)$$

$$y(0)=1$$

$$y'(0)=2$$

系统全响应练习1

(1) 单位冲激响应 h(t)

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{p+3}{p^2+3p+2}$$

部分分式法：

令 $D(p)=0$ 特征根：$p_1=-1$ $p_2=-2$ 均为单根

$$H(p)=\frac{k_1}{p+1}+\frac{k_2}{p+2}=\frac{(k_1+k_2)p+(2k_1+k_2)}{p^2+3p+2}$$

$$H(p)=\frac{p+3}{p^2+3p+2}=\frac{2}{p+1}+\frac{-1}{p+2}$$

$$\begin{cases} k_1+k_2=1 \\ 2k_1+k_2=3 \end{cases}$$

$$h(t)=\left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)U(t)$$

系统全响应练习1

(2) 零状态响应 $y_{zs}(t)$

$$h(t)=\left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)U(t)$$

$$f(t)=e^{-3t}U(t)$$

$$\begin{aligned}y_{zs}(t)&=f(t)*h(t)\\&=e^{-3t}U(t)*\left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)U(t)\\&=e^{-3t}U(t)*2e^{-t}U(t)-e^{-3t}U(t)*e^{-2t}U(t)\\&=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)U(t)\end{aligned}$$

卷积表: $e^{p_1 t}U(t)*e^{p_2 t}U(t)=\dfrac{1}{p_2-p_1}\left(e^{p_2 t}-e^{p_1 t}\right)U(t)$

系统全响应练习1

(3) 零输入响应 $r_{zi}(t)$

$$D(p) = p^2 + 3p + 2 \quad \text{特征根} \quad p_1 = -1 \quad p_2 = -2$$

$$y_{zi}(t) = \left[C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}\right] U(t)$$

代入初始条件： $y(0) = 1 \quad y'(0) = 2$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 - 2C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = -3 \end{cases}$$

$$y_{zi}(t) = \left[4e^{-t} - 3e^{-2t}\right] U(t)$$

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = \left[5e^{-t} - 4e^{-2t}\right] U(t)$$

章节小结

❖ 微分算子的引入

◆ 连续系统算子方程

$$D(p)y(t)=N(p)f(t)$$

◆ 转移算子

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}$$

❖ 零输入响应

◆ 求解齐次方程 $D(p)y_{zi}(t)=0$

❖ 单位冲激响应

◆ 部分分式法 $h(t)=H(p)\delta(t)$

❖ 零状态响应 $y_{zs}(t)=f(t)*h(t)$

❖ 卷积及其性质

◆ 常用卷积