2022年秋季教学课件

复变函数与积分变换

汪 玉 峰

武汉大学数学与统计学院

第五章

留 数

第3节　留数计算的应用

1. 积分型一: $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$, $R(x,y)$为有理分式

2. 积分型二: $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$， $R(x)$为有理函数

3. 积分型三: $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{i\alpha x}\mathrm{d}x, \alpha\in\mathbb{R}^+, R(x)$为有理函数

1. 积分型一：$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$, $R(x,y)$为有理分式

要求 $R(x,y)$在圆周$C: x^2+y^2=1$上分母不等于0.

方法 用变换$z=e^{i\theta}$把定积分化为一个解析函数沿单位圆周的复积分. 再用留数计算. **具体说来,**

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta \xlongequal{z=e^{i\theta}} \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz} = \sum_{|z_k|<1} \mathrm{Res}\left[R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}, z_k\right]$$

$$z=e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}z = ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta \Rightarrow \mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}, \\ \sin\theta=\dfrac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})=\dfrac{z^2-1}{2iz}, \\ \cos\theta=\dfrac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=\dfrac{z^2+1}{2z}, \end{cases}$$

例1 计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{(a+\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta\ (a>1)$.

解: 令 $z=e^{i\theta}$, 则

$$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z},\ \mathrm{d}\theta=\frac{dz}{iz},$$

于是

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{(a+\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}\frac{1}{(a+\frac{z^2+1}{2z})^2}\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$=\frac{4}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z}{(z^2+2az+1)^2}\mathrm{d}z=\frac{4}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2}\mathrm{d}z,$$

其中$\alpha=a-\sqrt{a^2-1},\beta=a+\sqrt{a^2-1}$为实二次方程$z^2+2az+1=0$的二相异实根.

由$\alpha\beta=1$，且显然$|\beta|>|\alpha|$，故必有$|\alpha|<1,|\beta|>1$. 于是，$f(z)=\dfrac{z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2}$在$|z|=1$上无奇点，在$|z|<1$只有一个二阶极点$z=\alpha$，由命题1.1得

$$\mathrm{Res}(f,\alpha)=\left[\frac{z}{(z-\beta)^2}\right]'\Bigg|_{z=\alpha}=-\frac{\alpha+\beta}{(\alpha-\beta)^3}=\frac{a}{4(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

由留数定理

$$I=\frac{4}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z}{(z^2+2az+1)^2}\mathrm{d}z=\frac{4}{i}\,2\pi i\mathrm{Res}(f,\alpha)$$

$$=8\pi\frac{a}{4(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{2\pi a}{(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

2. 积分型二:$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$，$R(x)$为有理函数

要求 $R(z)=P(z)/Q(z)$，其中

$$P(z)=c_0z^m+c_1z^{m-1}+\cdots+c_m,\quad (c_0\neq 0);$$

$$Q(z)=b_0z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_n,\quad (b_0\neq 0);$$

为互质多项式,且满足条件:(1)$n-m\geq 2$, (2)$Q(x)\neq 0, x\in\mathbb{R}$.

方法 围道积分法: 构造一封闭“围道”，把积分化为解析函数沿围道的的复积分，再用留数定理计算复积分.

引理3.1 设 $f(z)$沿圆弧$C_R: z=Re^{i\theta}(\theta_1\leq\theta\leq\theta_2, R$充分大$)$上连续,且

$$\lim_{R\to+\infty} zf(z)=\lambda$$

于C_R上一致成立(即θ无关),则

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=i(\theta_2-\theta_1)\lambda.$$

证明：对$\forall \varepsilon>0$,由已知条件$\exists R_0(\varepsilon)>0$,使当$R>R_0$时,有

$$\left|zf(z)-\lambda\right|<\frac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1},z\in C_R.$$

于是有

$$\left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z-i(\theta_2-\theta_1)\lambda\right|=\left|\int_{C_R}\frac{zf(z)-\lambda}{z}\mathrm{d}z\right|\le\frac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}\frac{l}{R}=\varepsilon,$$

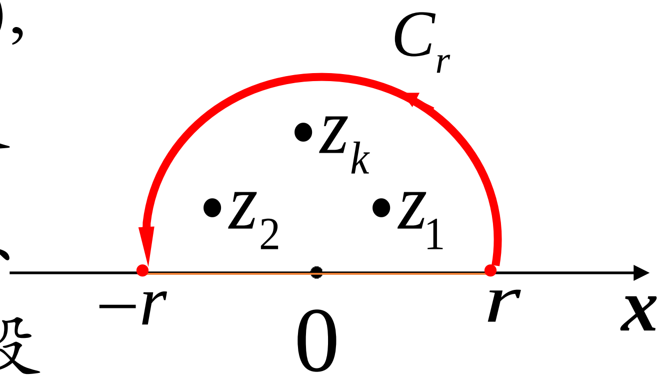
其中l表示圆弧C_R长度.

命题3.1 如果R是满足前面要求的有理函数，那么

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\,\mathrm{d}x=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}z_k>0}\operatorname{Res}(f,z_k). \tag{3.1}$$

其中 $z_k(k=1,2,...,n,)$ 为$f(z)$在上半平面内的所有极点.

证明: 取上半圆周$C_r: z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}(0 \le \theta \le \pi)$作为辅助线(如图),于是由线段$[-r,r]$及$C_r$合成一周线$C_r+[-r,r]$,先取$r$充分大使$C_r+[-r,r]$内部包含$R(z)$在上半平面内的一切孤立奇点(实际上只有有限个极点).由条件(2),$R(z)$在$C_r+[-r,r]$上没有奇点.



根据留数定理得

$$\int_{-r}^{r} R(x)\mathrm{d}x + \int_{C_r} R(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(R, z_k). \tag{3.2}$$

条件(1)蕴含$\lim\limits_{z\to+\infty} zR(z) = 0$于$C_r$上一致成立,则引理3.1蕴含

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{C_r} R(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{3.3}$$

在等式(3.2)中命$r \to +\infty$,并引用(3.1),知 结论(3.1)成立.

例2 设$a>0$,计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4}$.

解法一:直接用命题3.1.

因$R(z)=\frac{1}{z^4+a^4}$满足“要求”，且$R(z)$在上半平面只两个一级极点

$$z_k=ae^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i},k=0,1.$$

而

$$\mathrm{Res}(f,z_k)=\frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=z_k}=\frac{1}{4z_k^3}=-\frac{z_k}{4a^4}.$$

因此，我们有

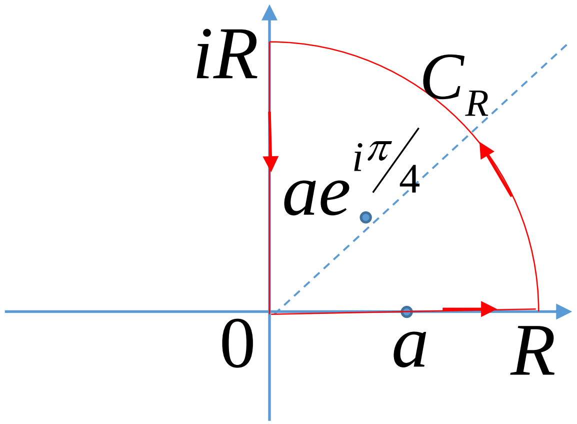
$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f,z_0)+\mathrm{Res}(f,z_1)\right] \quad \text{(命题3.1)}$$

$$=-\frac{\pi i}{4a^4}(ae^{i\pi/4}+ae^{i3\pi/4})$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}a^3}.$$

解法二: 记$C_R: z = R\mathrm{e}^{i\theta}, \theta \in [0, \pi/2], R > a > 0.$

如图，取围道$[0,R]+C_R+[iR,0]$为扇形边界. $z_0 = ae^{i\pi/4}$是



$$R(z) = \frac{1}{z^4 + a^4}$$

在扇形内唯一的一个一阶极点,且

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = -\frac{z_0}{4a^4}.$$

根据留数定理得

$$\int_0^R R(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} R(z)\mathrm{d}z + \int_{[iR,0]} R(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\mathrm{Res}(f, z_0)$$

即

$$\int_0^R R(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} R(z)\mathrm{d}z + \int_{[iR,0]} R(z)\mathrm{d}z = -\frac{\pi i e^{i\pi/4}}{2a^3}. \qquad (3.4)$$

上页 下页 返回 结束

$\lim\limits_{z\to+\infty} zR(z)=0$ 于C_R上一致成立,则引理3.1蕴含

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} R(z)\mathrm{d}z=0. \tag{3.5}$$

在等式(3.4)中命$R\to+\infty$,并引用(3.5),知

$$(1-\mathrm{i})\int_0^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi i e^{i\pi/4}}{2a^3},$$

这导致

$$I=\frac{\pi}{2\sqrt{2}a^3}.$$

解法一与解法二都是围道积分法，只是构造的围道不同而已. 相比较而言, 命题3.1的围道常见些!

算出的积分是反常积分的主值.因为反常积分收敛，所以主值就是积分的值.

3. 积分型三:$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{i\alpha x}\mathrm{d}x, \alpha \in \mathbb{R}^{+}$, $R(x)$为有理函数

要求 $R(z)=P(z)/Q(z)$, 其中

$$P(z)=c_0 z^m+c_1 z^{m-1}+\cdots+c_m, \quad (c_0 \neq 0);$$

$$Q(z)=b_0 z^n+b_1 z^{n-1}+\cdots+b_n, \quad (b_0 \neq 0);$$

为互质多项式,且满足条件:(1)$n-m \geq 1$, (2)$Q(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$.

方法 围道积分法: 构造一封闭“围道”,把积分化为解析函数沿围道的的复积分, 再用留数定理计算复积分.

引理3.1(Jordan) 设 $g(z)$沿圆弧$C_R: z=R\mathrm{e}^{i\theta}(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, R$充分大)上连续,且

$$\lim_{R\to+\infty} g(R\mathrm{e}^{i\theta})=0$$

于C_R上一致成立(即θ无关),则

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} g(z)\mathrm{e}^{i\alpha z}\,\mathrm{d}z=0, \alpha>0.$$

证明：记$M(R)=\max\left\{|g(z)|:z\in C_R\right\}$.于是就有

$$\left|\int_{C_R} g(z)e^{i\alpha z}\mathrm{d}z\right|=\left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} g(R\mathrm{e}^{i\theta})e^{i\alpha R\mathrm{e}^{i\theta}}R\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{i}\mathrm{d}\theta\right|$$

$$\le M(R)R\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-\alpha R\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\le M(R)R\int_{0}^{\pi} e^{-\alpha R\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=2M(R)R\int_{0}^{\pi/2} e^{-\alpha R\sin\theta}\mathrm{d}\theta,$$

即

$$\left|\int_{C_R} g(z)e^{i\alpha z}\mathrm{d}z\right|\le 2M(R)R\int_{0}^{\pi/2} e^{-\alpha R\sin\theta}\mathrm{d}\theta. \tag{3.6}$$

于是由Jordan不等式 $\frac{2\theta}{\pi}\le\sin\theta\le\theta\quad(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$, 将(3.6)化为

$$\left|\int_{C_R} g(z)e^{i\alpha z}dz\right| \le 2M(R)R\int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$\le 2M(R)R\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi}\alpha R\theta}\mathrm{d}\theta \tag{3.7}$$
$$< 2M(R)R\int_0^{+\infty} e^{-\frac{2}{\pi}\alpha R\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{\pi}{\alpha}M(R)$$

$\lim\limits_{R\to+\infty} g(R\mathrm{e}^{i\theta})=0$于$C_R$上一致成立(即$\theta$无关),则

$$\lim_{R\to+\infty} M(R)=0. \tag{3.8}$$

联合(3.7)(3.8)就有

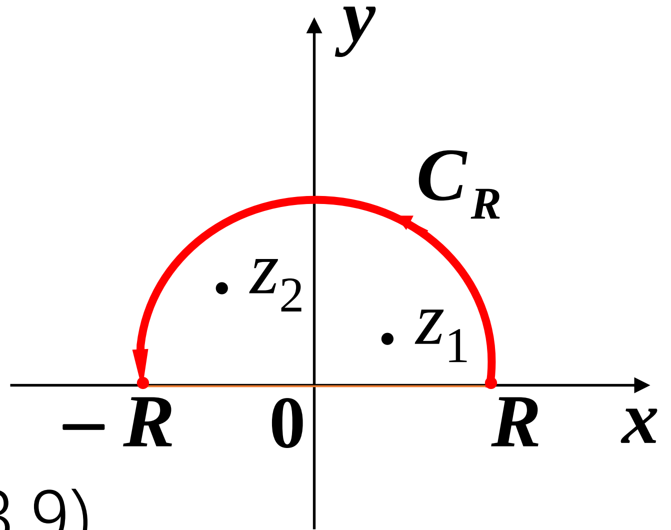
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} g(z)\mathrm{e}^{i\alpha z}\,\mathrm{d}z=0,\alpha>0.$$

命题3.2 设$R(z)=P(z)/Q(z)$，其中$P(z)$及$Q(z)$是互质多项式，且满足条件

1) $Q(z)$的次数比$P(z)$的次数高；

2) $Q(x)\neq 0, x\in\mathbb{R}$；

3) $\alpha>0$；



则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname{Res}(e^{i\alpha z}R(z), z_k). \qquad (3.9)$$

证明： 类似命题3.1. 请自证一下!

将(3.9)分开实虚部，就可得到积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos\alpha x\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin\alpha x\,\mathrm{d}x$$

之计算公式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{\alpha ix}\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname{Res}[R(z)e^{\alpha iz}, z_k]$$

$$\Big\Downarrow \; e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\sin\alpha x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\alpha x\mathrm{d}x + i\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\alpha x\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname{Res}[R(z)e^{\alpha iz}, z_k]$$

$$\Big\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\alpha x\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\left\{2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname{Res}[R(z)e^{\alpha iz}, z_k]\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\alpha x\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\left\{2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname{Res}[R(z)e^{\alpha iz}, z_k]\right\}$$

公式的积分是反常积分的主值. 因为反常积分收敛,所以主值就是积分的值.

例3 计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x,\quad (a>0).$

解:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x.$$

作辅助函数

$$f(z)=\frac{z}{z^2+a^2}e^{iz},$$

这里 $m-n=1$, $f(z)$ 在实轴上无孤立奇点，故积分存在. $f(z)$ 又在上半平面只有一阶极点 $\boldsymbol{z=ai}$, 故

$$I=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{z}{z^2+a^2}e^{iz},ai\right]\right\}=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{2\pi i\cdot\frac{e^{-a}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\pi e^{-a}.$$

4. 积分路径上有奇点的积分计算

引理3.3 设$f(z)$沿圆弧$C_r: z-a=re^{i\theta}(\theta_1 \le \theta \le \theta_2, r$充分小$)$上连续,且

$$\lim_{r\to 0}(z-a)f(z)=\lambda$$

于C_r上一致成立,则

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z = i(\theta_2-\theta_1)\lambda.$$

证明: 对$\forall \varepsilon>0$,由已知条件$\exists r_0(\varepsilon)>0$,使当$0<r<r_0$时,有

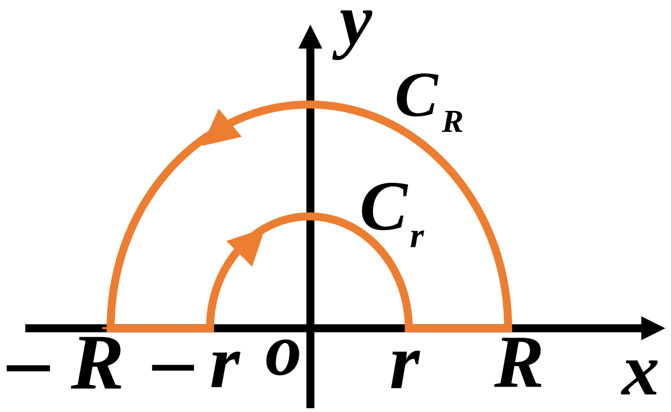
$$\left|(z-a)f(z)-\lambda\right| < \frac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}, z\in C_r.$$

于是有

$$\left|\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z - i(\theta_2-\theta_1)\lambda\right| = \left|\int_{C_r} \frac{(z-a)f(z)-\lambda}{z-a}\mathrm{d}z\right| \le \frac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}\frac{l}{R} = \varepsilon,$$

其中l表示圆弧C_R长度.

例4 计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$



解： $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$存在，且

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

考虑$f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$沿如图所示之闭曲线C的积分. 由Cauchy积分定理

$$\int_C f(z)dz=0\Leftrightarrow\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x-\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_r^R\frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x=0, \qquad (3.10)$$

这里$C_R:z=Re^{i\theta},C_r:z=re^{i\theta}\left(0\le\theta\le\pi,r<R\right)$都是按逆时针方向取的.

由引理3.2知

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0; \qquad (3.11)$$

上页 下页 返回 结束

由引理3.3知

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = i\pi. \tag{3.12}$$

在(3.10)中令$r\to 0$, $R\to +\infty$,取极限即得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x = i\pi,$$

因此，我们有

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi}{2}.$$