武汉大学 数学与统计学院
School of Mathematics and Statistics,Wuhan University

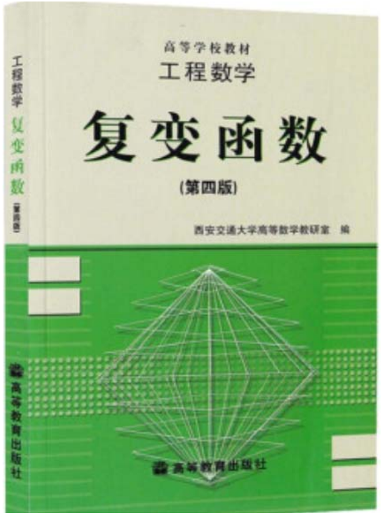
2020年秋季教学课件

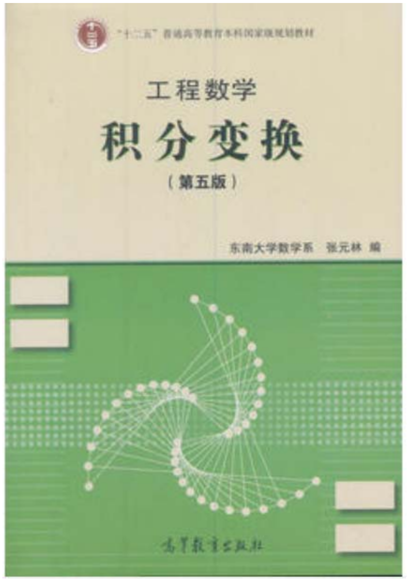
复变函数与积分变换

汪 玉 峰

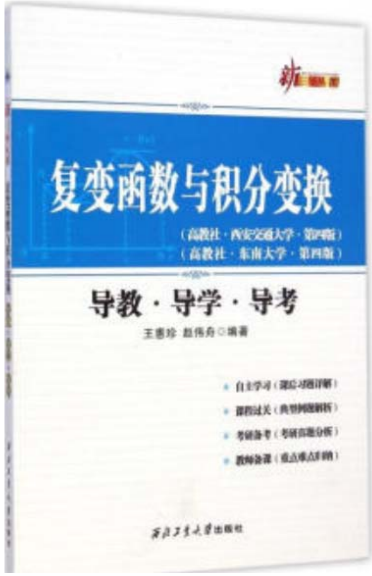
武汉大学数学与统计学院

教材

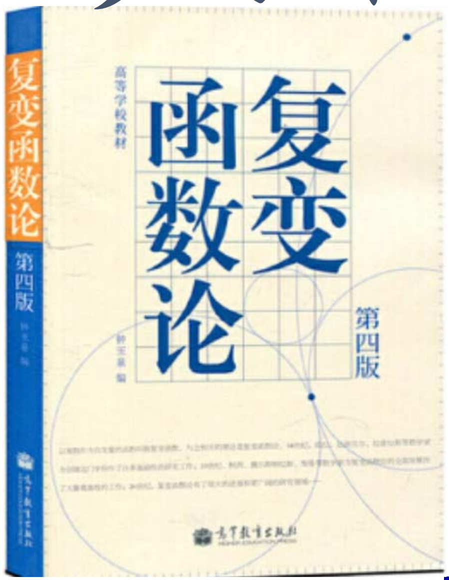

高等学校教材
工程数学
复变函数
(第四版)
西安交通大学高等数学教研室 编
高等教育出版社


工程数学
积分变换
(第五版)
东南大学数学系 张元林 编
高等教育出版社

习题指导


复变函数与积分变换
导教·导学·导考
西北工业大学出版社

参考书


高等学校教材
复变函数论
第四版
高等教育出版社

第一部分　复变函数

复变函数中许多概念、理论和方法是微积分在复数域内的推广和发展，它们之间有许多相似之处. 但又有不同。在学习中要善于比较与区别，特别要注意复数域上特有的性质与结果。

- 三位代表人物:
- A.L.Cauchy （1789-1866)应用积分研究复变函数
- K.Weierstrass(1815-1897)分别应用级数研究复变函数
- G.F.B.Riemann (1826-1866)研究复变函数的映照性质

第一章　复数与复变函数

§1　复数及其运算

一、复数的概念

二、复数的代数运算

一、复数的概念

形如 $\boldsymbol{z = x + yi}$ 或 $\boldsymbol{z = x + iy}$ 的数称为复数.

实部：$\mathrm{Re}\ z = x$; 虚部：$\mathrm{Im}\ z = y$

实数：$\mathrm{Im}\ z = 0$ 纯虚数：$\mathrm{Re}\ z = 0$

两个复数相等当且仅当它们的实部和虚部分别相等. 即设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$是两个复数,

$$\boldsymbol{z_1 = z_2} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x_1 = x_2,\ y_1 = y_2}.$$

两个数如果不全是实数, 不能比较大小.

虚数单位i的规定:

(1) $\boldsymbol{i^2 = -1}$; (2) i 可以与实数在一起按同样的法则进行四则运算.

虚数单位的特性：一般地，如果n是正整数,则

$$i^{4n}=1,\qquad i^{4n+1}=i,\qquad i^{4n+2}=-1,\qquad i^{4n+3}=-i.$$

二、复数的代数运算

$$z_1=x_1+iy_1\quad z_2=x_2+iy_2$$

和与差： $z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$

积： $z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2)$

商：

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

共轭复数

实部相同, 而虚部绝对值相等符号相反的两个复数称为共轭复数.

即：若 $z=x+yi$, 则 $\overline{z}=x-yi$.

例1 计算共轭复数 $x+yi$ 与 $x-yi$ 的积.

解： $(x-yi)(x+yi)=x^2-(yi)^2=x^2+y^2$.

因此：两个共轭复数 $z,\overline{z}$ 的积是一个实数.

复数和与积的运算性质

(1) $z_1+z_2=z_2+z_1$； $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$；

(2) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$, $z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)\cdot z_3$

(3) $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$

共轭复数的运算性质:

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

(2) $\bar{\bar{z}} = z$;

(3) $z \cdot \bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$;

(4) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

例 2 设 $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -3 + 4i$, 求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 与 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)} = \frac{(-15-20)+(15-20)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i.$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i.$$

例3 设两复数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, 证明 $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)$.

证一:

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) + (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2) \\
&= (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2) \\
&\quad + (x_1x_2 + y_1y_2) + i(-x_2y_1 + x_1y_2) \\
&= 2(x_1x_2 + y_1y_2) \\
&= 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2).
\end{aligned}
$$

证二:

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot \bar{z}_2 + \overline{z_1 \cdot \bar{z}_2} = 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2).$$

§2　复数的几何表示

一、复平面

二、复球面

一、复平面

1. 复数的4种表示

(1) 点的表示

$$\left.\begin{aligned} z=x+iy &\xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{有序实数对}(x,y) \\ \text{点}P(x,y) &\xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{有序实数对}(x,y) \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow z=x+iy \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{点}P(x,y)$$

总之,复数$z=x+iy$可用平面上坐标为(x,y)的点P表示. 此时,

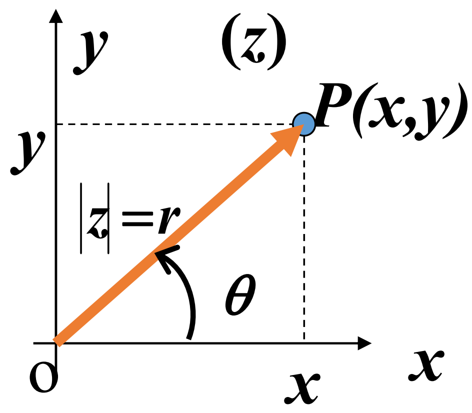
x轴 — 实 轴　　y轴 — 虚 轴

平 面 — 复 平 面 或 z平 面

数z与点z同义.

(2) 向量表示

$$z = x + iy \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{点}P(x, y) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{向量}\overrightarrow{OP} = (x, y)$$



因此, 复数 $z = x + iy$ 可以用 向量$\overrightarrow{OP} = (x, y)$ 表示.

向量$\overrightarrow{OP} = (x, y)$的长度称为复数z的模或绝对值,记作

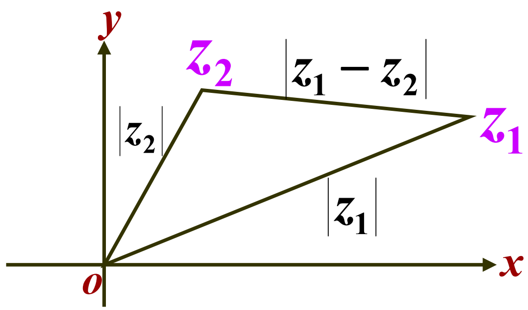
$$|z| = \left|\overrightarrow{OP}\right| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

显然成立:

$$|x| \le |z|, \quad |y| \le |z|,$$

$$|z| \le |x| + |y|,$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = \left|z^2\right|.$$

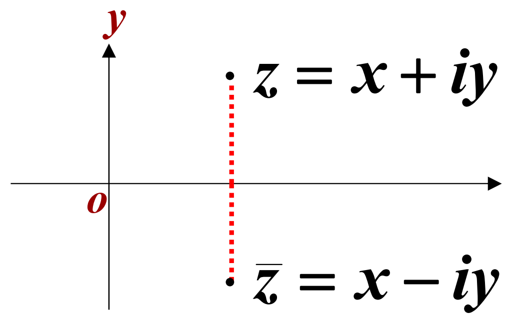


复数和与差的模的性质: 因为 $|z_1 - z_2|$ 表示点 z_1 和 z_2 之间的距离, 故

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|; \quad |z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|.$$

共轭复数的几何性质

一对共轭复数 z 和 $\overline{z}$ 在复平面内的位置是关于实轴对称的.



复数辐角的定义

当 $z \neq 0$ 时，以正实轴为始边，以表示z的向量$\overrightarrow{OP}$为终边的角的弧度数θ称为 z 的辐角(argument), 记作 $\mathrm{Arg}z = \theta$.

1 任何一个复数 $z \neq 0$有无穷多个辐角.

如果 θ_1 是其中一个辐角, 那么 z 的全部辐角为

$$\mathrm{Arg}\, z = \theta_1 + 2k\pi \quad (k\text{为任意整数})$$

2 当 $z = 0$时, 辐角不确定.

辐角主值

在 $z(\neq 0)$ 的辐角中，把满足 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ 的 θ_0 称为 $Argz$ 的主值，记作 $\theta_0 = \arg z$.

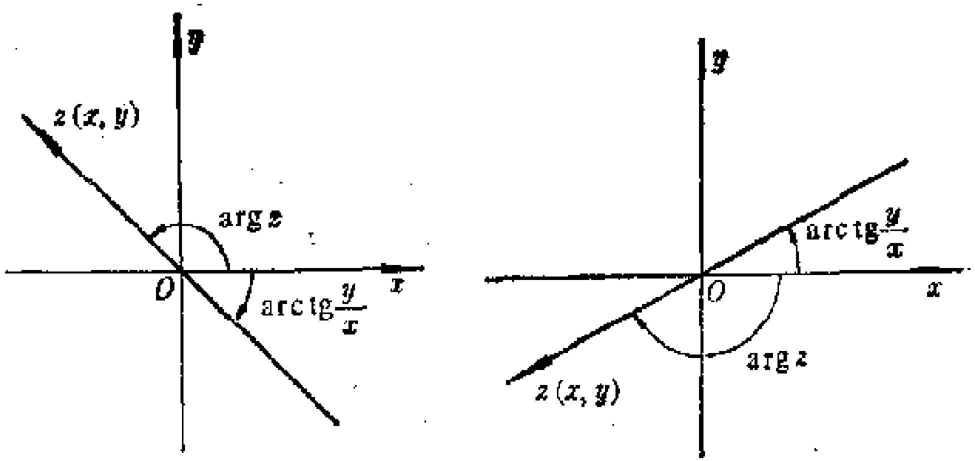
因此，

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

$z \neq 0$ 辐角的主值

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \pm \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y \neq 0, \\ \arctan \dfrac{y}{x} \pm \pi, & x < 0, y \neq 0, \\ \pi, & x < 0, y = 0. \end{cases}$$

(其中 $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan \dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$)



(3) 复数的三角表示法

利用直角坐标与极坐标的关系 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 复数可以表示成

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

（4） 复数的指数表示法

利用**Euler**公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, 则复数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 可以表示为:

$$z = re^{i\theta}$$

例1 将下列复数化为三角表示式与指数表示式:

$$(1)\ z=-\sqrt{12}-2i; \qquad (2)\ z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5};$$

解: (1) $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$, 因 z 在第三象限,

$$\theta=\arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right)-\pi=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\pi=-\frac{5}{6}\pi,$$

故

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]=4e^{-\frac{5}{6}\pi i}.$$

(2) 显然 $r=|z|=1$, 又

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{10}, \quad \cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3\pi}{10},$$

故

$$z=\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}=e^{\frac{3}{10}\pi i}.$$

例2 设 z_1, z_2 为两个任意复数，证明：

$$(1)\quad |z_1\overline{z}_2| = |z_1||z_2|; \qquad (2)\quad |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

证明：

$$(1)\quad |z_1\bar{z}_2| = \sqrt{(z_1\bar{z}_2)\overline{(z_1\bar{z}_2)}} = \sqrt{(z_1\bar{z}_2)(\bar{z}_1 z_2)} = \sqrt{(z_1\bar{z}_1)(\bar{z}_2 z_2)} = |z_1||z_2|.$$

$$(2)\quad |z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

$$= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\bar{z}_2|$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2,$$

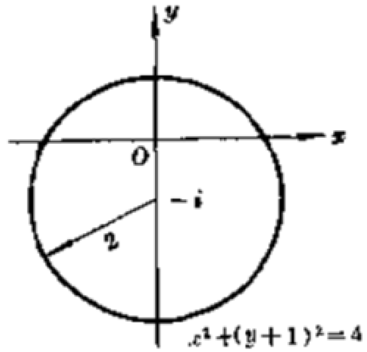
两边同时开方得

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

例3 求下列方程所表示的曲线:

$$(1)\ |z+i|=2; \qquad (2)\ |z-2i|=|z+2|; \qquad (3)\ \operatorname{Im}(i+\bar{z})=4.$$

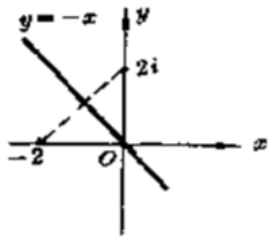
解: (1) 方程 $|z+i|=2$ 表示所有与点 $-i$ 距离为 2 的点的轨迹. 即表示中心为 $-i$, 半径为 2 的圆. 设 $z=x+iy$, 则



$$|x+(y+1)i|=2 \Longleftrightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2}=2$$

$$\Longleftrightarrow \text{圆方程 } x^2+(y+1)^2=4.$$

(2) $|z-2i|=|z+2|$ 表示所有与点 $2i$ 和 -2 距离相等的点的轨迹. 故方程表示的曲线就是连接点 $2i$ 和 -2 的线段的垂直平分线.



设 $z=x+iy$, 则 $|x+yi-2i|=|x+yi+2|$, 化简后得

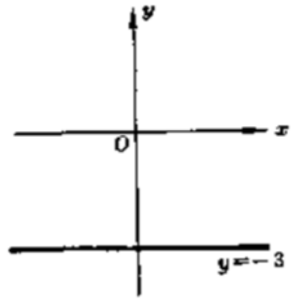
$$y=-x.$$

(3) $\mathrm{Im}(i+\bar{z})=4$

设 $z=x+iy$, 则

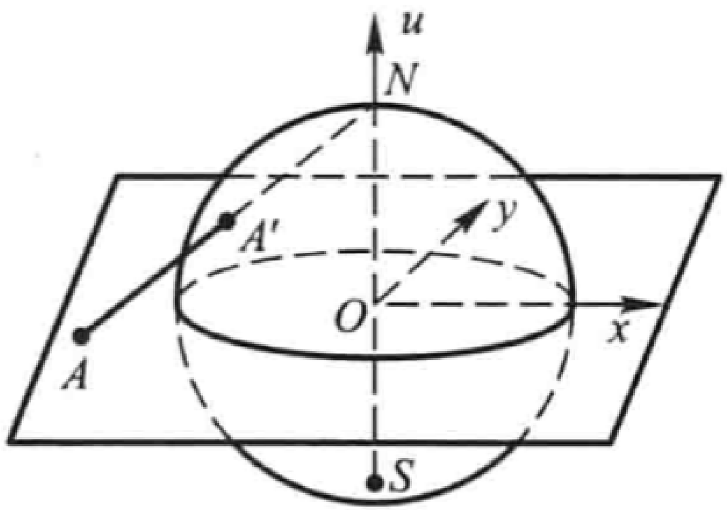
$$i+\bar{z}=x+(1-y)i,\ \mathrm{Im}(i+\bar{z})=1-y=4,$$

所求曲线方程为 $y=-3$.



二、复球面

如左下图：$N(0,0,1)$ 北极



$A(x,y,0)\in xoy$面 $\cong \mathbb{C}$

$A'(x',y',u')\in S$(单位球面)

A' 称为 A 在球面上的球极投影。

球面 S 也称为黎曼球面。

球面上的点，除去北极 N 外，与复平面内的点之间存在着一一对应的关系．于是，我们可用球面上的点来表示复数.

球面上的北极 N 不能对应复平面上的定点，但球面上的点离北极 N 越近，它所表示的复数的模越大.

我们规定: 复数中有一个唯一的“无穷大”与复平面上的无穷远点相对应, 记作 ∞ .

因而，球面上的北极 N 就是复数无穷大的几何表示.

不包括无穷远点的复平面称为有限复平面，或简称复平面.

包括无穷远点的复平面称为扩充复平面. 记 $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

球面上的每一个点与扩充复平面的每一个点构成了一一对应，这样的球面称为复球面.

关于无穷远运算法则

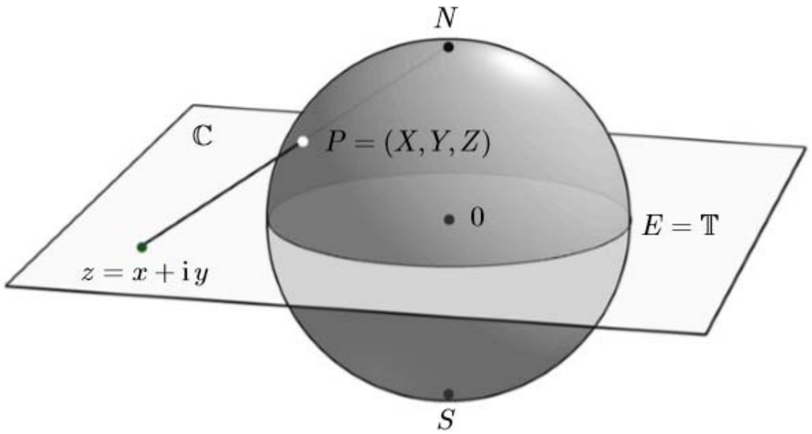
(1) 加法： $\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty,\quad(\alpha\neq\infty)$

(2) 减法： $\alpha-\infty=\infty-\alpha=\infty,\quad(\alpha\neq\infty)$

(3) 乘法： $\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty,\quad(\alpha\neq0)$

(4) 除法： $\dfrac{\alpha}{\infty}=0,\quad\dfrac{\infty}{\alpha}=\infty,(\alpha\neq\infty),\quad\dfrac{\alpha}{0}=\infty,(\alpha\neq0)$

运算 $\infty\pm\infty,0\cdot\infty,\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$ 没有意义!



§3　复数的乘幂与方根

一、乘积与商

二、幂与根

一、乘积与商

定理一 两个复数乘积的模等于它们的模相乘，两个复数乘积的辐角等于它们的辐角相加.

证明：设复数 z_1 和 z_2 的三角形式分别为

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

则

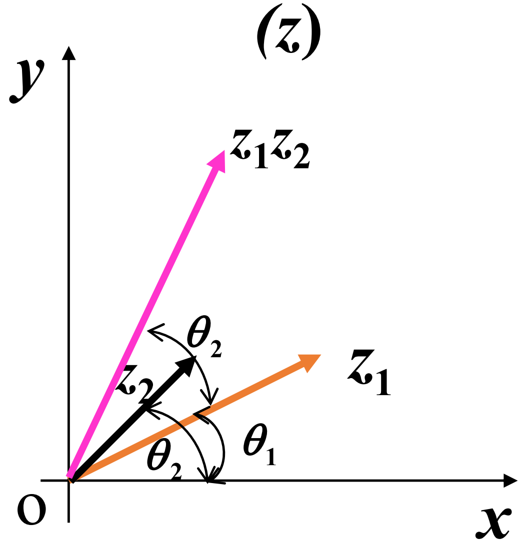
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 \cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\quad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \end{aligned}$$

即

$$|z_1z_2| = r_1r_2,\quad \mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2$$

几何意义 将复数z_1按逆时针方向旋转一个角度$\mathrm{Arg}z_2$，再将其伸缩到$|z_2|$倍.

复数乘法指数形式：



$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2},$$

则 $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

n 个复数相乘的情况:

设 $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) = r_k e^{i\theta_k}$，$(k = 1,2,\cdots,n)$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots\theta_n)}.$$

思考 怎么理解$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2$?

由于幅角的多值性，那么，该等式两端都是无穷多个数构成的两个数集. 等式应该理解为：等式两端可能取的值的全体是相同的，也就是说，对于左端的任一值，右端必有一值和它相等，并且反过来也一样.

例如：设$z_1=-1, z_2=i$,则 $z_1z_2=-i$.

$$\operatorname{Arg} z_1=\pi+2m\pi \quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\operatorname{Arg} z_2=\frac{\pi}{2}+2n\pi \quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

因此,在这种情况下

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2 \Longleftrightarrow \frac{3\pi}{2}+2(m+n)\pi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

要使上式成立,必须且只需 ***k=m+n+1***.

定理二　两个复数的商的模等于它们的模的商，

两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

证明：当 $z_2 \neq 0$ 时，

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{1}{|z_2|^2} |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

因此

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg} z_1 - \mathrm{Arg} z_2.$$

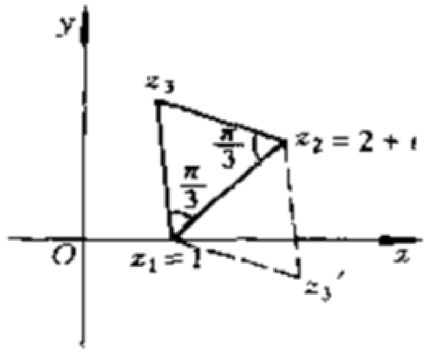
注解 设复数 z_1 和 z_2 的指数形式分别为 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$，$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$，则

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

上页　下页　返回　结束

例1 已知正三角形的两个顶点 $z_1 = 1$与$z_2 = 2 + i$，求它的另一个顶点.

解： 根据复数乘法几何意义，如图,



$$z_3 - z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2 - z_1) = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(1 + i)$$

$$= (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) + (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})i$$

$$z_3 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i.$$

类似可得

$$z_3' = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i.$$

二、幂与根

定义　n个相同的复数z的乘积，称为z的n次幂，记作z^n，即

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n\text{个}}.$$

设$z=re^{i\theta}$，由复数的乘法定理和数学归纳法可证明

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

棣模佛(De Moivre)公式

特别，当 $|z|=1$ 时，即 $z=\cos\theta+i\sin\theta$,

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

定义　$z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}.$

由定义得　$z^{-n}=r^{-n}e^{-in\theta}$

定义 给定复数 z，方程 $w^n = z$ 的根称为 z 的 n 次方根，记为 $\sqrt[n]{z}$.

可以推得:

$$w_k = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

从几何上看，$\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值就是以原点为中心，

$r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

推导过程如下：

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

于是 $\rho^n = r$，$\cos n\varphi = \cos\theta$, $\sin n\varphi = \sin\theta$, 显然 $n\varphi = \theta + 2k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \cdots)$

故 $\rho = r^{\frac{1}{n}}$， $\varphi = \dfrac{\theta+2k\pi}{n}$,

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时, 得到 n 个相异的根：

$$w_0=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

$$w_1=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right),$$

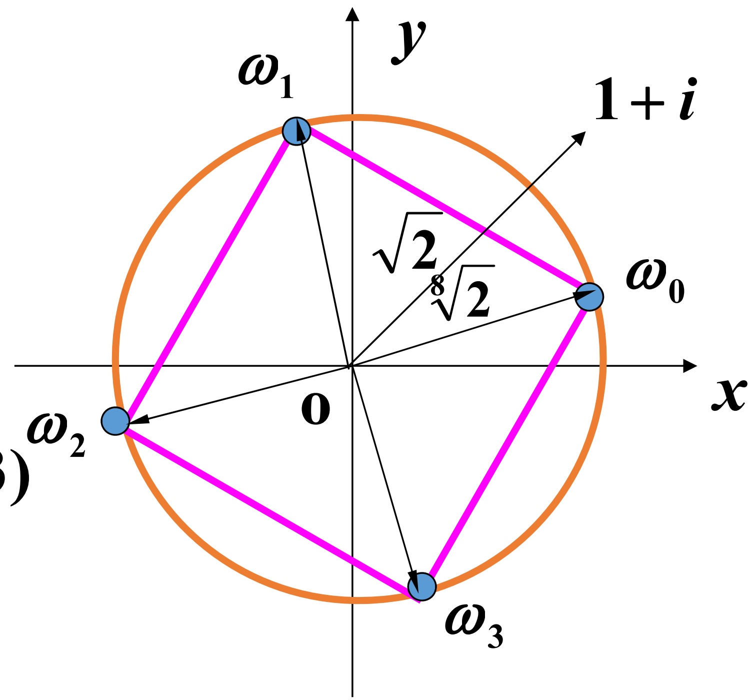
$$\cdots\ \cdots$$

$$w_{n-1}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

当 k 以其他整数值代入时, 这些根又重复出现.

$$w_n=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2n\pi}{n}\right)=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

例1 计算 $\sqrt[4]{1+i}$ 的值.



解:

$$1+i=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right]\quad(k=0,1,2,3)$$

即

$$w_0=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right],\quad w_1=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right],$$

$$w_2=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right],\quad w_3=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right].$$

这四个根是内接于中心在原点半径为 $\sqrt[8]{2}$ 的圆的正方形的四个顶点.

§4　区　域

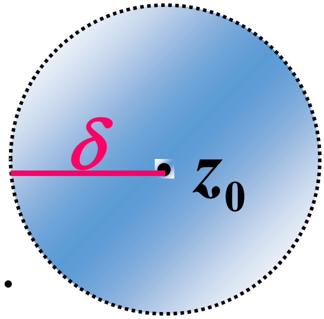
一、区域的概念

二、单连通域与多连通域

一、区域的概念

1. 邻域

平面上以z_0为中心，δ（任意的正数）为半径的圆内部点的集合 $|z-z_0|<\delta$ 称为 z_0 的δ邻域.



2. 去心邻域

称由不等式 $0<|z-z_0|<\delta$ 所确定的点的集合为z_0的去心邻域.

3. 内点

设 G 为一平面点集，z_0为 G 中任意一点. 如存在z_0的一个邻域，该邻域内的所有点都属于G，那末z_0称为G的内点.

4. 开集

如果E 内每一点都是它的内点，那么称E 为开集.

5. 区域

连通的开集称为区域，即：如果平面点集 D 满足以下两个条件，则称它为一个区域.

D是一个开集；

D是连通的，就是说D 中任何两点都可以用完全属于D 的一条折线连结起来.

6. 区域的边界点、边界

设E为一平面点集，z_1为一定点，如果z_1的任一邻域内既含有属于E的点，又含有不属于E的点，那末z_1称为E的边界点.

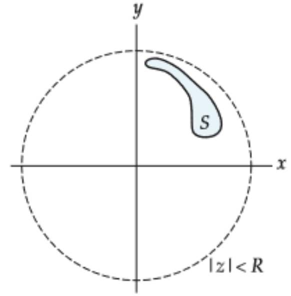
D的所有边界点组成D的边界.

区域的边界可能是由几条曲线和一些孤立的点所组成的.

区域D与它的边界一起构成闭区域或闭域.

7. 有界区域和无界区域

如果一个区域 D 可以被包含在一个以原点为中心的圆里面，即存在 $M>0$，使区域的每一个点都满足 $|z|<M$，那末 D 称为界的，否则称为无界的



有界域

二、单连通域与多连通域

1. 连续曲线

如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个连续的实函数，那么方程组

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (a \le t \le b)$$

代表一条平面曲线，称为连续曲线.

平面曲线的复数表示:

$$z = z(t) = x(t) + iy(t). \quad (a \le t \le b)$$

2. 光滑曲线

如果在 $a \le t \le b$ 上，$x'(t)$ 和 $y'(t)$ 都是连续的，

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0, t \in [a,b]$$

那么称这曲线为光滑的.

由几段依次相接的光滑曲线所组成的曲线称为按段光滑曲线.

3. Jordan曲线

设$C: z = z(t)\ (a \le t \le b)$为一连续曲线，$z(a), z(b)$分别称为$C$的起点和终点.

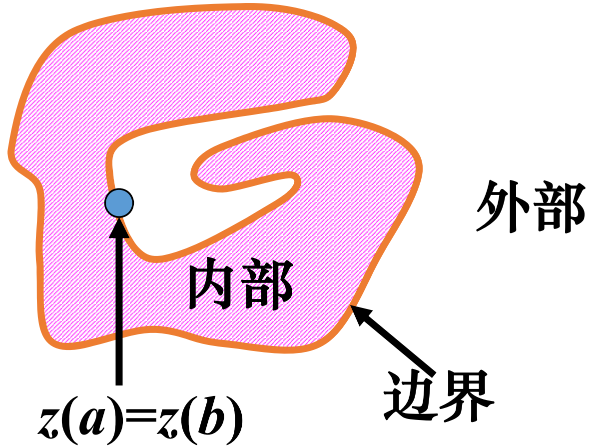
当$t_1 \neq t_2$ 而有$z(t_1) = z(t_2)$时，点$z(t_1)$称为曲线C的重点.

没有重点的连续曲线C称为简单曲线或Jordan(若尔当)曲线.

起点与终点重合的简单曲线C 称为简单闭曲线.

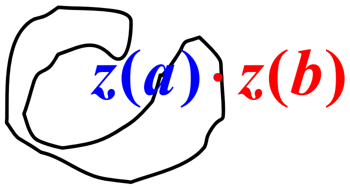
Jordan曲线的性质: 任意一条简单闭曲线C将复平面唯一地分成三个互不相交的点集.

Jordan曲线的性质如右图所示：

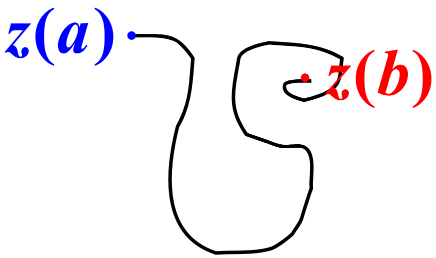


练习

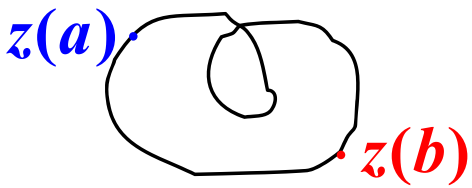
判断下列曲线是否为简单曲线?



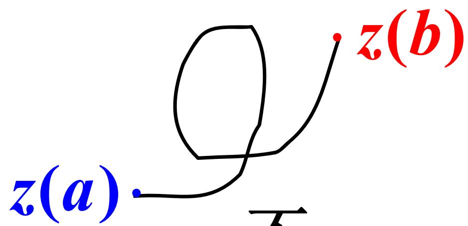
简单闭



简单不闭



不简单闭

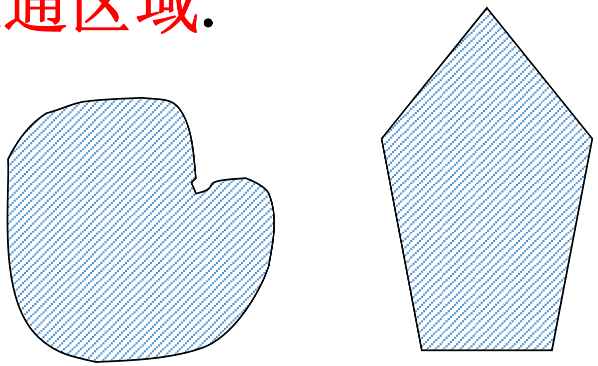


不简单不闭

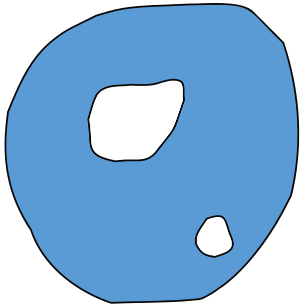
上页 下页 返回 结束

4. 单连通域与多连通域的定义

复平面上的一个区域D，如果在其中任作一条简单闭曲线，而曲线的内部总属于D，就称为**单连通区域**．一个区域如果不是单连通域，就称为**多连通区域**．



单连通域



多连通域

§5　复变函数

一、复变函数的定义

二、映射的概念

一、复变函数的定义

设E是一个复数 $z=x+iy$ 的集合. 如果有一个确定的法则 f 存在, 按这个法则 f , 对于集合E 中的每一个复数 z, 就有一个或几个复数 $w=u+iv$ 与 之对应, 那末称 f 是定义在E上的复变数 z 的函数(简称复变函数), 与z对应的复变数 w称为函数值，记作 $w= f(z)$.

如果z的一个值对应着一个w的值, 那末我们称函数$f(z)$是单值的.

如果z的一个值对应着两个或两个以上w的值, 那末我们称函数$f(z)$是多值的.

集合 E 称为 $f(z)$ 的定义集合(定义域);

对应于E中所有z的一切w值所成的集合$f(E)$, 称为函数值集合(值域).

$$\boldsymbol{f(E)=\{w \mid \exists z\in E, f(z)=w\}}$$

复变函数与自变量之间的关系:

例如, 函数 $w = z^2$, 令 $z = x + iy$, $w = u + iv$, 则

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi,$$

于是函数 $w = z^2$ 对应于两个二元实变函 数:

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

复变函数w与 自变量z之间的关系 $w = f(z)$相当于两个关系式:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

它们确定了自变量为 x 和 y 的两个二元实变函数.则

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

二、映射的概念

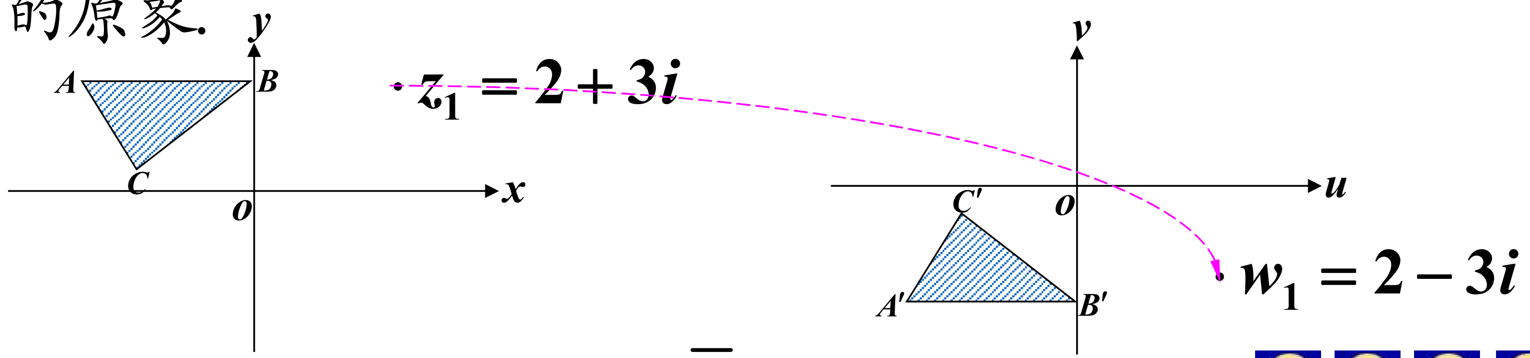
取两张复平面, 分别称为 z 平面和 w 平面.

如果用 z 平面上的点表示自变量 z 的值, 而用另一个平面 w 平面上的点表示函数 w 的值, 那么函数 $w=f(z)$ 在几何上就可以看作是把 z 平面上的一个点集 E(定义集合) 变到 w 平面上的一个点集 F (函数值集合) 的映射(或变换).

这个映射通常简称为由函数 $w=f(z)$ 所构成的映射.

如果 E 中的点 z 被映射 $w=f(z)$ 映射成 F 中的点 w, 那么 w 称为 z 的象 (映象), 而 z 称为 w 的原象.

例1

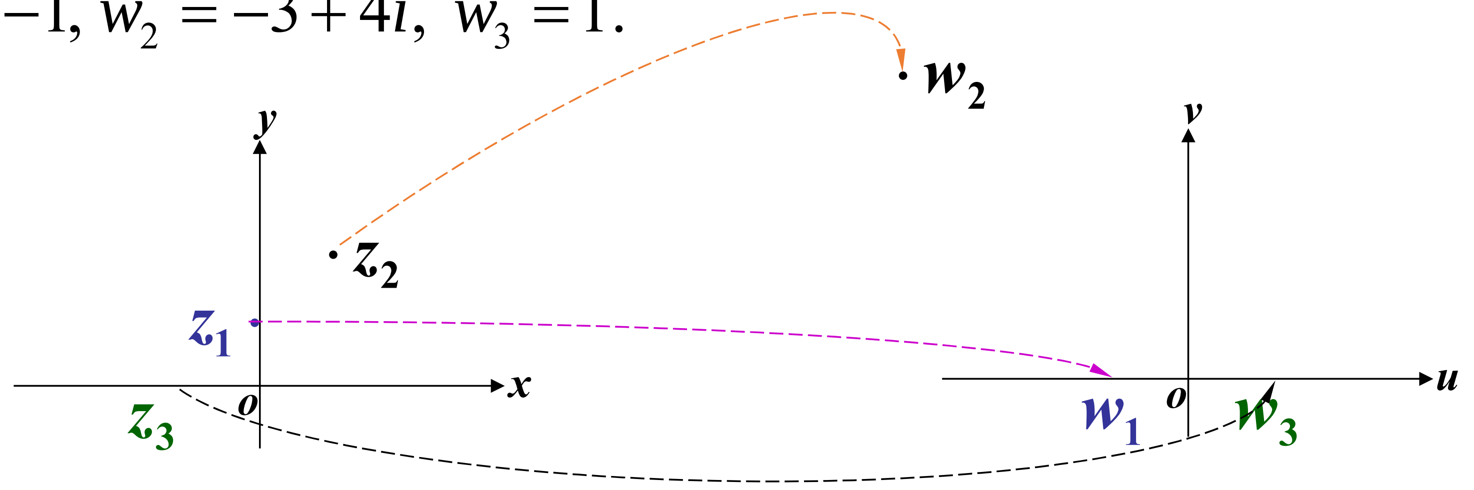


$$w=\overline{z}$$

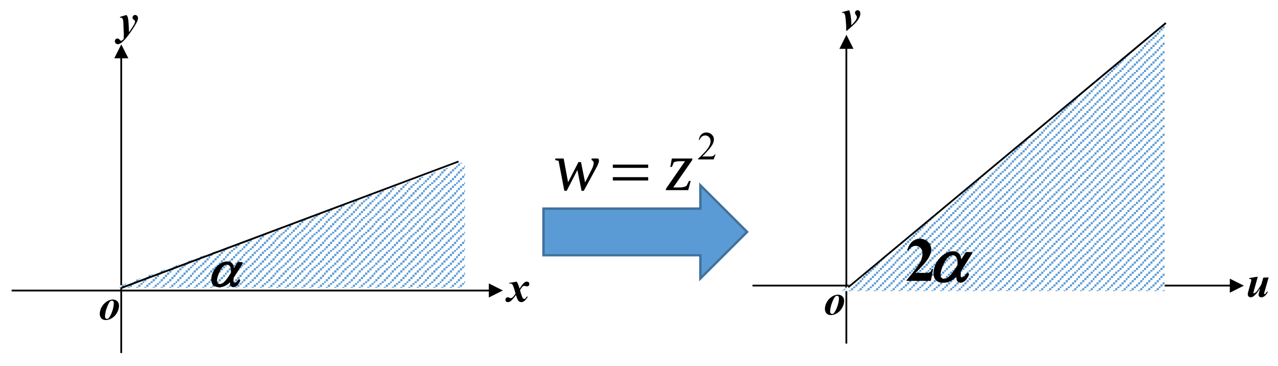
上页 下页 返回 结束

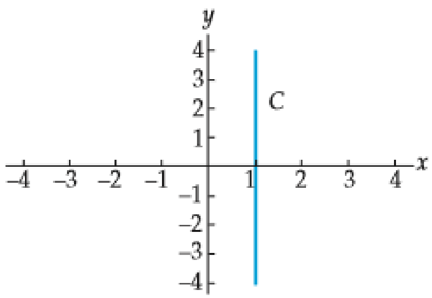
例2 函数 $w=z^2$ 构成的映射.

显然将 z 平面上的点 $z_1=i, z_2=1+2i, z_3=-1$ 映射成 w平面上的点 $w_1=-1, w_2=-3+4i, w_3=1.$



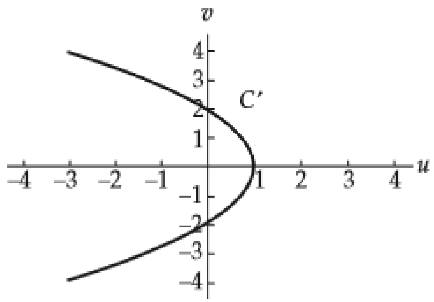
根据复数的乘法公式可知, 映射 $w=z^2$ 将 z 的辐角增大一倍.





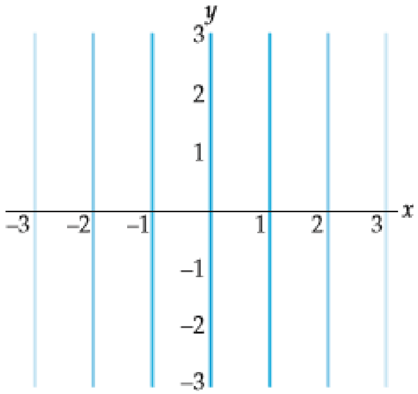
$x = 1$

$w = z^2$



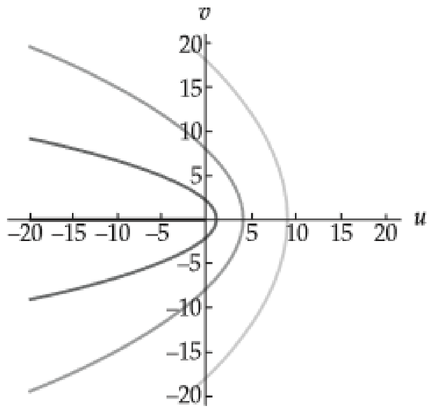
$u = 1 - y^2$

$v = 2y$



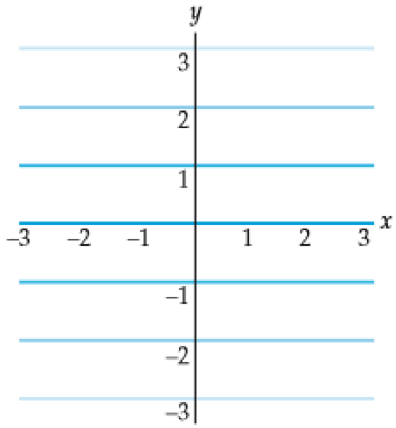
$z = k + iy,\ -\infty < y < \infty,$

$w = z^2$



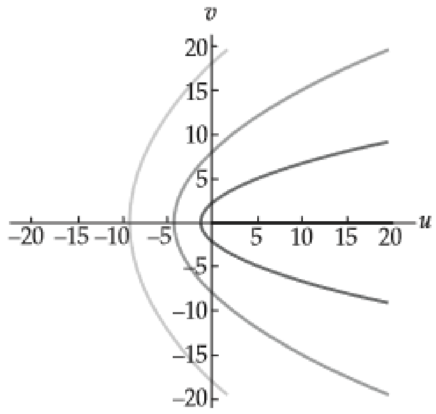
$u = k^2 - y^2, \quad v = 2ky, \quad -\infty < y < \infty.$

上页 下页 返回 结束



$y = k,\ k \neq 0,$

$w = z^2$



$u = \dfrac{v^2}{4k^2} - k^2$

反函数的定义:

设 $w = f(z)$ 的定义集合为 z 平面上的集合 E,函数值集合为 w 平面上的集合 $F = f(E)$, 那末F 中的每一个点 w 必将对应着 E 中的一个(或几个)点.

于是在 F上就确定了一个单值 (或多值)函数,记作$z = f^{-1}(w)$, 它称为函数 $w = f(z)$的反函数, 也称为映射 $w = f(z)$ 的逆映射.

如果函数 (映射) $w = f(z)$ 与它的反函数(逆映射) $z = \phi(w)$都是单值的, 那么称函数 (映射) $w = f(z)$是一一对应的.

§6　复变函数的极限与连续

一、复变函数的极限

二、复变函数的连续

一、复变函数的极限

定义6.1 设f是定义于E上的复变函数，z_0是E的极限点. 如果存在 $\alpha \in \mathbb{C}$ 使得

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(z \in \overset{o}{U}(z_0, \delta) \cap E \Rightarrow f(z) \in U(\alpha, \varepsilon)),$$

那么我们说，$z \xrightarrow{E} z_0$，$f(z) \to \alpha$. 记为

$$\lim_{z \in E, z \to z_0} f(z) = \alpha.$$

在不混淆的情况下，此极限式简记为

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha.$$

注解 其它复变函数极限式：

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \rho > 0$, 当 $0 < |z - z_0| < \rho$时, $|f(z)| > M$

$\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \rho > 0$, 当 $|z| > \rho$ 时, $|f(z) - A| < \epsilon$

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\rho>0, \text{当}|z|>\rho\text{时}, |f(z)|>M$$

定理一 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y), \alpha=u_0+iv_0, z_0=x_0+iy_0$, 那么 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\alpha$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

证明: (1) 必要性.

如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, 根据极限的定义: 当 $0<|(x+iy)-(x_0+iy_0)|<\delta$ 时,

$|(u+iv)-(u_0+iv_0)|<\varepsilon$, 或当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,

$$|(u-u_0)+i(v-v_0)|<\varepsilon, \Rightarrow |u-u_0|<\varepsilon, \quad |v-v_0|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0, \quad \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$

(2) 充分性.

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} u(x,y)=u_0$， $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} v(x,y)=v_0$，那么当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$时，

有 $|u-u_0|<\dfrac{\varepsilon}{2}$， $|v-v_0|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，

$$|f(z)-A|=|(u-u_0)+i(v-v_0)|\le|u-u_0|+|v-v_0|.$$

故当 $0<|z-z_0|<\delta$时， $|f(z)-A|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$.

注解 该定理将求复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$的极限问题，转化为求两个二元实变函数 $u(x,y)$和 $v(x,y)$ 的极限问题.

定理二 设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$， $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$， 那么

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$;(2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)g(z)]=AB$;(3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0)$.

例1 证明函数 $f(z)=\dfrac{z}{\bar{z}}\ (z\neq 0)$ 当 $z\to 0$ 时的极限不存在.

证 令 $z=x+iy$, $f(z)=u+iv$, 则 $u(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $v(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$,

当 z 沿直线 $y=kx$ 趋于零时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} v(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2k}{1+k^2},$$

随 k 值的变化而变化, 所以 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)$ 不存在, **根据定理一可知,**

$\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在.

二、复变函数的连续

定义6.2 **如果** $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, **那么就称** $f(z)$ **在** z_0 **连续.**

注解 定义表明连续的三要素:

(1) $f(z)$在z_0处有定义

(2) $f(z)$在z_0处有极限

(3) $f(z)$在z_0处的极限值等于函数值

连续函数的性质

定理三 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在$z_0=x_0+iy_0$连续的充要条件是: $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0)处连续.

定理四

(1) 在 z_0连续的两个函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的和、差、积、商 (分母在 z_0不为零) 在 z_0处仍连续.

(2) 如果函数 $h=g(z)$在 z_0连续, 函数 $w=f(h)$在 $h_0=g(z_0)$ 连续, 那末复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 z_0处连续.

例如,

$$\boldsymbol{f(z)=\ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)},$$

$u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 在复平面内除原点外处处连续, 故$f(x,y)$在复平面内除原点外处处连续.

注解

(1) 如果$f(z)$ 在 E 内处处连续,我们说$f(z)$在 E内连续,记为: $f(z)\in C(E)$.

(2) 函数$f(z)$在曲线C上z_0处连续的意义是 $\lim\limits_{z\in C, z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

(3) 有理整函数(多项式) $w=P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$, 对复平面内的所有点$z$都是连续的;

(4) 有理分式函数 $w=P(z)/Q(z)$, 其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是多项式, 在复平面内使分母不为零的点也是连续的.

例 2 设 $f(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\overline{z}}-\frac{\overline{z}}{z}\right)$, $z\neq 0$, 试证：$f(z)$在原点无极限,从而在原点不连续.

证明:

$$f(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\overline{z}}-\frac{\overline{z}}{z}\right)\overset{z=x+iy}{=}\frac{1}{2i}\left(\frac{(z-\overline{z})(z+\overline{z})}{z\overline{z}}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{2x\times 2iy}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

因此, $\lim\limits_{(x,y)\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}$不存在 $\Rightarrow \lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\overline{z}}-\frac{\overline{z}}{z}\right)$不存在.