2022年秋季教学课件

复变函数与积分变换

汪 玉 峰

武汉大学数学与统计学院

第五章

留　数

第2节　留数理论

一、留数定理

二、留数的计算

三、无穷远处的留数

一、留数定理

1. 留数的定义

定义1.1 设函数$f(z)$以有限点z_0为孤立奇点,即$f(z)$在点z_0的某去心邻域

$0<|z-z_0|<R$内解析,则称积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\mathrm{d}z, \quad C:|z-z_0|=r, 0<r<R$$

为$f(z)$在点z_0的留数(residue),$\mathrm{Res}(f,z_0)$. 即有

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} f(z)\mathrm{d}z, 0<r<R.$$

函数$f(z)$在点z_0的某去心邻域$0<|z-z_0|<R$内解析,则

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$$

其逐项积分得

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_C (z-z_0)^n \mathrm{d}z = 2\pi i c_{-1},$$

这导致公式

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = c_{-1},$$

即$f(z)$在$z = z_0$的留数为其Laurent展式之$(z-z_0)^{-1}$的系数.

2 有限可去奇点的留数为零. 即

$$z = z_0 \in \mathbb{C}\text{为}f\text{的可去奇点} \Rightarrow \mathrm{Res}(f, z_0) = 0.$$

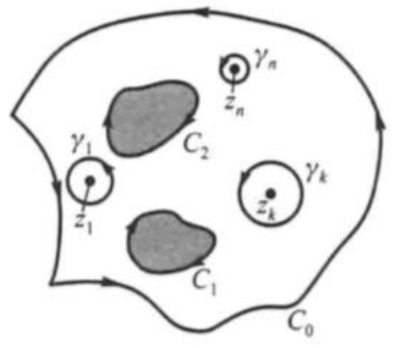
2. 留数定理

定理1.1 如果$f(z)$在周线或复周线C所围的区域D内,除$z_1, z_2, \cdots, z_n$外解析,在闭域$\overline{D} = D + C$上除$z_1, z_2, \cdots, z_n$外连续,那么

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

证明：如图，根据复合闭路柯西定理

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{\gamma_1} f(z)dz + \oint_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{\gamma_n} f(z)dz.$$



$C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_m^-$

于是，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_n} f(z)dz$$

$$= \mathrm{Res}(f, z_1) + \mathrm{Res}(f, z_2) + \cdots + \mathrm{Res}(f, z_n).$$ （留数定义）

证毕.

留数定理将沿封闭曲线C积分转化为求被积函数在C内各孤立奇点处的留数.

二、留数的计算

1. 通用方法: 应用Laurent展式求留数

设$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n, 0<|z-z_0|<R$, 则

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=c_{-1}.$$

例1 求$\mathrm{Res}\left(\frac{e^z-1}{z^5},0\right)$.

解:

$$\frac{e^z-1}{z^5}=\frac{1}{z^5}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots-1\right)=\frac{1}{z^4}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z}+\frac{1}{5!}+\cdots,$$

$$0<|z|<+\infty;$$

这蕴含

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^z-1}{z^5},0\right)=\frac{1}{4!}.$$

2. 求极点留数的一般方法

命题1.1 若z_0为$f(z)$的n阶极点,

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}\quad (\text{即}\ \varphi(z)=(z-z_0)^n f(z)),$$

其中$\varphi(z)$在点z_0解析,$\varphi(z_0)\neq 0$,则

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{\varphi^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}. \tag{1.1}$$

证明:

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}\mathrm{d}z=\frac{\varphi^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}. \tag{1.2}$$

在命题1.1条件下, 公式(1.1)可以写成

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^m f(z)]^{(m-1)},\ m\geq n. \tag{1.3}$$

公式(1.3)的证明只需修改(1.2)就可:

上页 下页 返回 结束

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(z)(z-z_0)^{m-n}}{(z-z_0)^m}\mathrm{d}z=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^m f(z)]^{(m-1)},m\geq n.$$

公式(1.3)有时使用比(1.2)方便.

推论1.1 设z_0为$f(z)$的一阶极点,则$\operatorname{Res}(f,z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.

推论1.2 设z_0为$f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$的一阶极点($\varphi(z)$及$\psi(z)$在点$z_0$解析,且

$\varphi(z_0)\neq 0,\psi(z_0)=0,\psi'(z_0)\neq 0$)则

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

证明: 因为z_0为$f(z)=\varphi(z)\big/\psi(z)$的一阶极点,所以

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{[\psi(z)-\psi(z_0)]\big/(z-z_0)}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

例2　求函数$\dfrac{z}{\cos z}$在点$z=\dfrac{\pi}{2}$的留数.

解: 因$z=\dfrac{\pi}{2}$为$\dfrac{z}{\cos z}$的一阶极点,所以

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z}{\cos z},\frac{\pi}{z}\right)=\left.\frac{z}{(\cos z)'}\right|_{z=\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{\pi}{2}}{-\sin(\frac{\pi}{2})}=-\frac{\pi}{2}.$$

3. 利用留数计算周线积分

例3　计算积分$I=\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{e^{\sin z}}{z^2(z^2+1)}\mathrm{d}z.$

解: $f(z)=\dfrac{e^{\sin z}}{z^2(z^2+1)}$在$|z|=2$内 有一个二阶极点0,和两个一阶极点$\pm i$,

由命题1.1与推论1.1得

$$\operatorname{Res}(f,0)=(z^2f(z))'|_{z=0}=\left.\left(\frac{e^{\sin z}}{(z^2+1)}\right)'\right|_{z=0}=1;$$

$$\operatorname{Res}(f,i)=\left[(z-i)f(z)\right]\Big|_{z=i}=\frac{e^{\sin z}}{z^2(z+i)}\Bigg|_{z=i}=-\frac{e^{\sin i}}{2i}=-\frac{e^{i\operatorname{sh}1}}{2i};$$

$$\operatorname{Res}(f,-i)=\frac{e^{\sin z}}{z^2(z-i)}\Bigg|_{z=-i}=\frac{e^{-\sin i}}{2i}=\frac{e^{-i\operatorname{sh}1}}{2i}.$$

故由留数定理

$$I=2\pi i\left(1-\frac{e^{i\operatorname{sh}1}}{2i}+\frac{e^{-i\operatorname{sh}1}}{2i}\right)$$

$$=2\pi i\left[1-\sin(\operatorname{sh}1)\right].$$

三、函数在无穷远点的留数

1. 无穷远留数的定义

定义1.2 设∞为$f(z)$的一个孤立奇点,即$f(z)$在∞的去心邻域$N-\{\infty\}$:

$0 \le r < |z| < +\infty$内解析,则称

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z \quad C: |z| = \rho > r,$$

为$f(z)$在∞**点的留数**,记为$\mathrm{Res}(f,\infty)$.

若$f(z)$在无穷远邻域$N-\{\infty\}$内Laurent展式为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, z \in N - \{\infty\} = \{z : |z| > r\},$$

则

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z = -c_{-1}.$$

3. 无穷远点留数的换元公式

命题1.2 设∞为$f(z)$的一个孤立奇点,即$f(z)$在∞的去心邻域$N-\{\infty\}$:
$0\le r<|z|<+\infty$内解析,则

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=-\operatorname{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right).$$

证明: 令 $z={}^{1}\!/_{t}$, 则$C:|z|=\rho\to\gamma:|t|={}^{1}\!/_{\rho}$, 且$\varphi(t)=f({}^{1}\!/_{t})$在$t=0$内解析.

于是

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{-2\pi}f(\rho e^{i\theta})\rho ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}f\left(\frac{1}{re^{i\phi}}\right)\frac{i}{re^{i\phi}}\mathrm{d}\phi \qquad (令\theta=-\phi,换元)$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}f\left(\frac{1}{re^{i\phi}}\right)\frac{1}{(re^{i\phi})^2}\mathrm{d}\left[re^{i\phi}\right]$$

继续进行

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=\cdots=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{re^{i\phi}}\right)\frac{1}{(re^{i\phi})^2}\mathrm{d}\left[re^{i\phi}\right]$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r} f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta$$

$$=-\operatorname{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right).$$

证毕.

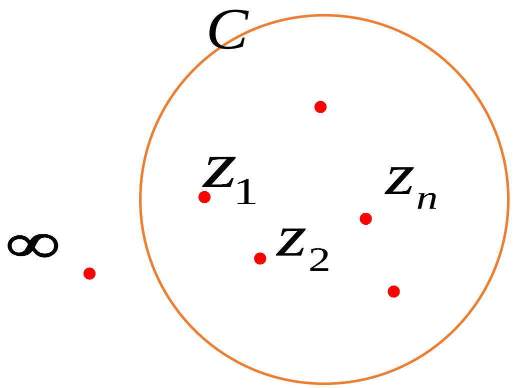
4. 留数的第二定理

定理1.2 如果$f(z)$在扩充z平面上只有有限个孤立奇点(包括∞在内),设为$z_1,z_2,\cdots,z_n,\infty$,则$f(z)$在各点的留数总和为零,**即**

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,z_k)+\operatorname{Res}(f,\infty)=0.$$

上页 下页 返回 结束

证明: 以原点为心作圆周C,使$z_1, z_2, \cdots, z_n$皆含于C的内部(如图).



则由**留数定理(定理1.1)**得

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k) - \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = 0. \qquad (1.7)$$

由留数定义

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z \qquad (1.8)$$

把(1.8)代入(1.7)立即得到

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0.$$

注解 由定理得无穷远处又一计算公式

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k).$$

有时我们用下面模式计算积分

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k)$$ (留数定理, 定理1.1)

$$=-2\pi i\mathrm{Res}(f,\infty).$$

其目的就是避免了计算某些有限点处的留数计算.

例4 计算积分$I=\int_{|z|=4}\dfrac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+1)^3}\mathrm{d}z.$

解: 被积函数一共有七个奇点

$$z=\pm i, z=\sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i}, k=0,1,2,3\text{以及}\infty,$$

其中$z=\pm i, z=\sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i}, k=0,1,2,3$均含在$|z|=4$内部. 由留数定理及定理2.2得

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{6}\mathrm{Res}(f, z_k) = -2\pi i\mathrm{Res}(f,\infty),$$

其中

$$f(z)=\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+1)^3}$$

以∞为一阶零点. 计算得

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = -\lim_{z\to\infty}\left[zf(z)\right] = -1.$$

故$I=-2\pi i\mathrm{Res}(f,\infty)=2\pi i$.

无穷远留数也可以用下列公式计算:

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = -\mathrm{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2}, 0\right).$$

上页 下页 返回 结束

注意到

$$f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}=\frac{\frac{1}{t^5}}{\left(\frac{1}{t^2}+1\right)^2\left(\frac{1}{t^4}+2\right)^3}=\frac{1}{t(1+t^2)^2(1+2t^4)^3}$$

以$t=0$为一阶极点,

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-\mathrm{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right)=-\left.\frac{1}{(1+t^2)^2(1+2t^4)^3}\right|_{z=0}=-1.$$

例5 计算积分 $I=\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$, C为正向圆周：$|z|=2$.

解: 被积函数 $f(z)=\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$ 除∞点外, 其他奇点为 $-i,1,3$.

于是

$$I = 2\pi i\{\mathrm{Res}(f,-i)+\mathrm{Res}(f,1)\}$$ (留数定理, 定理1.1)

$$= -2\pi i\left[\mathrm{Res}(f,3)+\mathrm{Res}(f,\infty)\right]$$ (定理1.2)

$$= -2\pi i\left\{\frac{1}{2(3+i)^{10}}+0\right\}$$

$$= -\frac{\pi i}{(3+i)^{10}}.$$

此处 f 在无穷远有12阶零点,此时

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=0.$$