



武汉大学 数学与统计学院
School of Mathematics and Statistics, Wuhan University

2022年秋季教学课件

复变函数与积分变换

汪 玉 峰

武汉大学数学与统计学院

第三章 复变函数的积分

第一节 复变函数积分的概念

第二、三节 柯西定理

第四节 原函数与不定积分

第五、六节 柯西积分公式与高阶导数公式

第七节 调和函数

第一节 复变函数积分的概念

一、复变函数的积分定义

二、积分的存在条件及算法

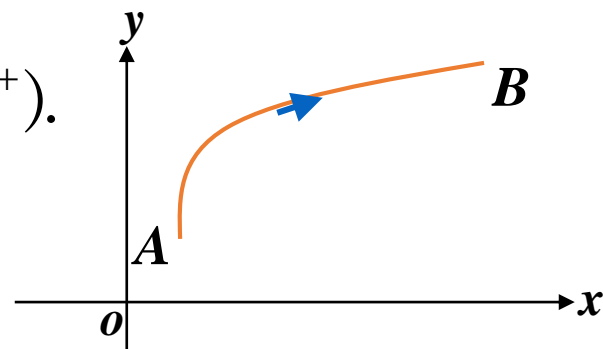
三、积分的性质

一、复变函数的积分定义

1. 有向曲线

设 C 为平面上给定的一条分段光滑曲线. 如果选定 C 的两个可能方向中的一个作为正方向(或正向), 那么我们就把 C 理解为带有方向的曲线, 称为有向曲线.

如果 A 到 B 作为曲线 C 的正向, 记为 C (或 C^+).
那么 B 到 A 就是曲线 C 的负向, 记为 C^- .



关于曲线方向的说明

- 1) 以后把两个端点中的一个作为起点, 另一个作为终点. 除特殊声明外, 正方向总是指从起点到终点的方向.
- 2) 对简单封闭曲线而言, 总默认逆时针方向为正向, 除非另有说明.

2. 复积分的定义

设复变函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 是复平面有向曲线 C 上的有界函数, 其中 C 是以 a 为起点 b 为终点.

(1) 分割

在 C 上插入 $n-1$ 个分点, 连同两个端点, 共 $n+1$ 个点按顺序排列为

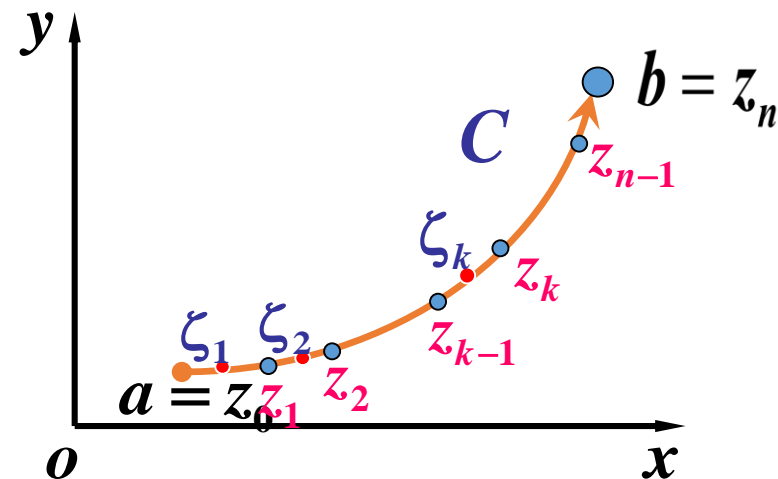
$$a = z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{k-1}, z_k, \cdots, z_{n-1}, z_n = b$$

(2) 近似、求和

在每个弧段 $z_{k-1}z_k$ ($k = 1, 2, 3, \cdots, n$) 上任意取一点 ζ_k , 作和式

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\Delta z_k = S_n$$

这里 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. 记 $\delta = \max \{ \Delta s_k \mid 1 \leq k \leq n \}$, 其中 $\Delta s_k = z_k z_{k-1}$ 的长度.



(3) 求极限

当 n 无限增加且 $\delta \rightarrow 0$ 时, 如果极限

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k$$

存在, 则称 $f(z)$ 在 C 上可积. 其极限值称为函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分, 记为 $\int_C f(z) dz$.

关于复积分的说明

- 1) 复积分是《微积分》第二类曲线积分的推广.
- 2) 用 $\int_{C^-} f(z) dz$ 表示函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的负向的积分.
- 3) 常用 $\oint_C f(z) dz$ 表示函数 $f(z)$ 沿封闭曲线 C 的积分.
- 4) 当 $C = [a, b] \subset \mathbb{R}$, 前面的复积分就是实变复值函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 的定积分. 此时积分记为 $\int_a^b f(z) dz$.

5) 复积分与对曲线C的分法无关, 也与 ζ_k 取法无关.

 复积分一般不写成 $\int_a^b f(z)dz$, 除非意义很明确.

二、积分的存在条件及算法

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k &= \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) + i v(\xi_k, \eta_k)] (\Delta x_k + i \Delta y_k) \\ &= \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] + i \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k]\end{aligned}\quad (3.1)$$

假定 $f(z)$ 在 C 上连续. 则 u, v 也在 C 上连续. 于是, 据《微积分》关于实变函数的第二类曲线积分的结果, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时, (3.1) 式右端极限存在. 因此, $f(z)$ 在 C 上可积, 且

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy. \quad (3.2)$$

注解

公式(3.2)在形式上可以看成是 $f(z) = u + iv$ 与 $dz = dx + idy$ 相乘后求积分得到

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_C udx + ivdx + iudy - vdy \\ &= \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy\end{aligned}$$

总之，复函数的积分可表为两个实的第二类曲线积分.

设有向曲线C的参数方程为

$$z(t) = x(t) + iy(t), \alpha \leq t \leq \beta, a = z(\alpha), b = z(\beta),$$

其中 a, b 分别为起点与终点. 代入公式(3.2)右端

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_{\alpha}^{\beta} \{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t)\}dt \\
&\quad + i \int_{\alpha}^{\beta} \{v[x(t), y(t)]x'(t) + u[x(t), y(t)]y'(t)\}dt \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\} \{x'(t) + iy'(t)\}dt \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dt.
\end{aligned}$$

因此, 我们得到复积分计算公式

$$\int_C f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dt. \longrightarrow \text{积分换元}$$

例1 求 $I_n = \oint_C \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} dz$, C 为以 z_0 为中心, r 为半径的正向圆周, n 为整数.

解：积分路径的参数方程为

$$z = z_0 + re^{i\theta}, \theta: 0 \rightarrow 2\pi.$$

代入积分换元公式, 并注意

$$dz = ire^{i\theta} d\theta.$$

则有

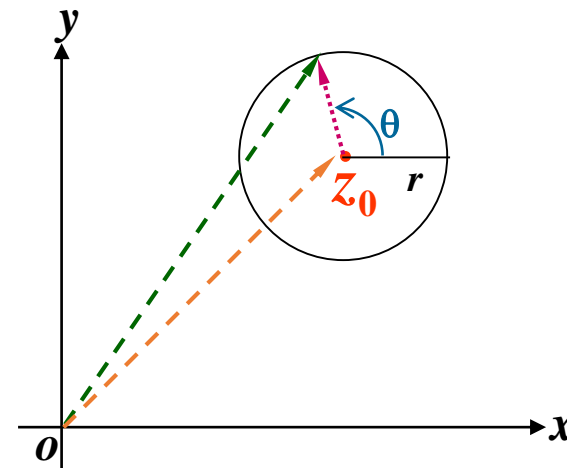
$$I_n = \oint_C \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} d\theta = \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta.$$

当 $n = 0$ 时,

$$I_0 = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i;$$

当 $n \neq 0$ 时,

$$I_n = \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} (\cos n\theta - i \sin n\theta) d\theta = \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} \cos n\theta d\theta - \frac{1}{r^n} \int_0^{2\pi} \sin n\theta d\theta = 0.$$



因此, 我们获得公式

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} 2\pi i, n=0, \\ 0, n \neq 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

 记住公式 (3.3) !

三、积分的性质

1) $\int_C f(z) dz = -\int_{C^-} f(z) dz.$ (方向性)

2) $\int_C \alpha f(z) dz = \alpha \int_C f(z) dz, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$

3) $\int_C [f(z) \pm g(z)] dz = \int_C f(z) dz \pm \int_C g(z) dz.$

(线性性)

4) 若 $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ (分段光滑曲线), 则

$$\int_C f(z) dz = \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \cdots + \int_{C_n} \right) f(z) dz. \quad (\text{对积分曲线可加性})$$

$$5) \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|, |dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = ds.$$

$$6) \text{ 设曲线 } C \text{ 的长度为 } L. \text{ 若 } |f(z)| \leq M, \text{ 则 } \left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML.$$

(积分估值)

证明性质 (5) 和 (6) :

因为 $|\Delta z_k|$ 是 z_k 与 z_{k-1} 两点之间的距离, Δs_k 为这两点之间弧段的长度, 所以, 我们有

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \cdot \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k) \cdot \Delta z_k| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| \cdot \Delta s_k$$

两端取极限, 并利用极限保不等式性, 得

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds.$$

易见

$$\sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| \cdot \Delta s_k \leq M \sum_{k=1}^n \Delta s_k = ML \quad \longrightarrow \quad \text{性质6).}$$

引申

若 $F, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, F' = f$, 则成立实变复值函数的牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

证明: 设 $F = U + iV, f = u + iv: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, 则 $F' = f \Rightarrow U' = u, V' = v$. 于是

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt = [U(b) - U(a)] + i[V(b) - V(a)] = F(b) - F(a).$$

例2 设 C 为从原点到点 $3 + 4i$ 的直线段, 试求积分 $\int_C \frac{1}{z-i} dz$ 绝对值的一个上界.

解: C 的参数方程为 $z = (3 + 4i)t, (0 \leq t \leq 1)$ 根据估值不等式知

$$\left| \int_C \frac{1}{z-i} dz \right| \leq \int_C \left| \frac{1}{z-i} \right| ds \leq \frac{5}{3} \int_C ds = \frac{25}{3}$$

因为在 C 上, $\left| \frac{1}{z-i} \right| = \frac{1}{|3t + (4t-1)i|} = \frac{1}{\sqrt{(3t)^2 + (4t-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{25\left(t - \frac{4}{25}\right)^2 + \frac{9}{25}}} \leq \frac{5}{3}.$

第二、三节 柯西定理

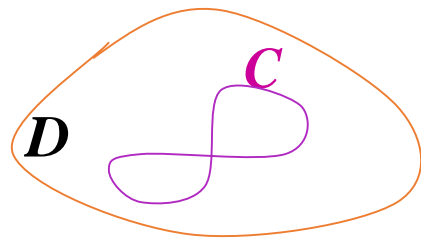
一、Cauchy-Goursat基本定理

二、复合闭路柯西定理

一、Cauchy-Goursat基本定理

定理 (柯西-古萨基本定理) 设 D 为单连通域,如果函数 $f(z) \in A(D)$,那么对 D 内的任何一条封闭曲线 C ,有

$$\oint_C f(z)dz=0.$$



 此定理常称为**柯西积分定理**.

定理中的 C 可以**不是**简单曲线. 如右图.

证明: 附加条件" $f'(z)$ 在 D 内连续",用格林公式

$$\left. \begin{aligned} \int_C udx - vdy &= -\iint_G (v_x + u_y) dxdy = 0 \\ \int_C vdx + udy &= \iint_G (u_x - v_y) dxdy = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \oint_C f(z)dz=0.$$

定理 (推广的柯西定理) 设 C 是一条周线, D 为 C 之内部, $f(z)$ 在 D 内解析,在 $\overline{D} = D + C$ 上连续,则

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

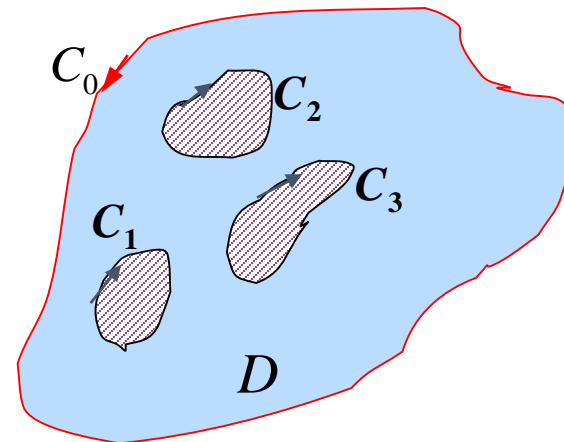
 这个定理的证明十分困难, 其证明的难度取决于边界曲线光滑性.

二、复合闭路柯西定理

考虑 $n+1$ 条周线 $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$, 其中 C_1, C_2, \dots, C_n 中每一条都在其余各条的外部, 而它们又全在 C_0 的内部, 在 C_0 的内部又在 C_1, C_2, \dots, C_n 外部的点构成一个有界的 $n+1$ 连通区域 D , 以 $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ 为它的边界, 在这种情形下我们称区域 D 的边界是一条复周线, 记作

$$C = C_0 + C_1^- + \dots + C_n^-.$$

它包括了取正向的 C_0 ,以及取负向的 C_1, C_2, \dots, C_n .
(如右图)

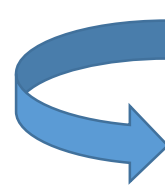


直观上, 假如观察者沿着复周线 C 的正向绕行时, 区域 D 总在它的左边.

定理 设 D 是由复周线 $C = C_0 + C_1^- + \dots + C_n^-$ 所围的有界 $n+1$ 连通区域. 若函数 $f(z)$ 在闭域 $\bar{D} = D + C$ 上解析, 即 $f \in A(\bar{D})$, 则 $\int_C f(z)dz = 0$ 或写成

$$\int_{C_0} f(z)dz + \int_{C_1^-} f(z)dz + \dots + \int_{C_n^-} f(z)dz = 0$$

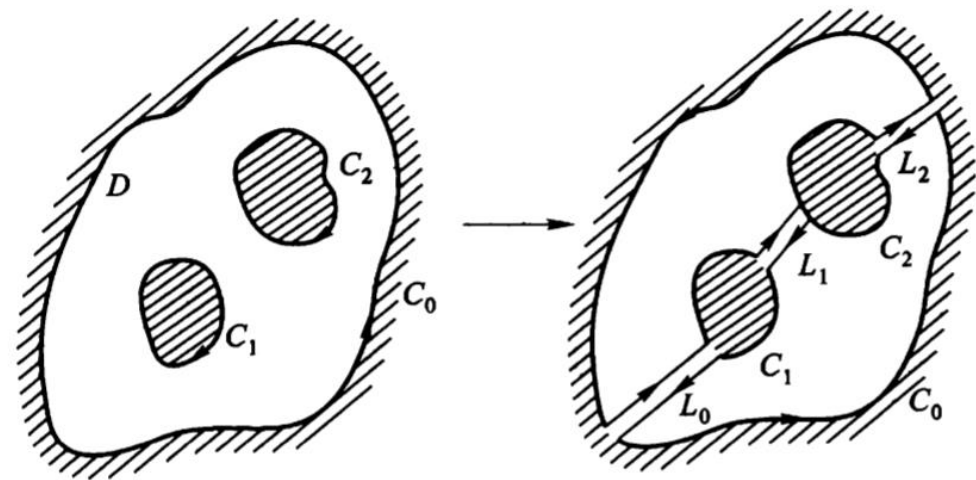
或写成


$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \dots + \int_{C_n} f(z)dz.$$

沿外边界积分等于沿内边界积分之和.

证明: 取 n 条互不相交且在 D 内的光滑弧

L_0, L_1, \dots, L_n 作为**割线**. 用它们顺次与 C_0, C_1, \dots, C_n 连接, 将多连通区域 D 割开, 于是多连通区域 D 被分成两个单连通域.



这两个单连通域的边界分别记为 Γ_0, Γ_1 . (如图)

利用单连通域柯西定理,

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = 0, \int_{\Gamma_2} f(z)dz = 0.$$

将两式相加, 并注意到沿着 L_0, L_1, \dots, L_n 的积分, 从相反的方向各取了一次. 利用复积分的性质,

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

另两个等式容易得到.



复合闭路柯西定理可以推广成下列形式:

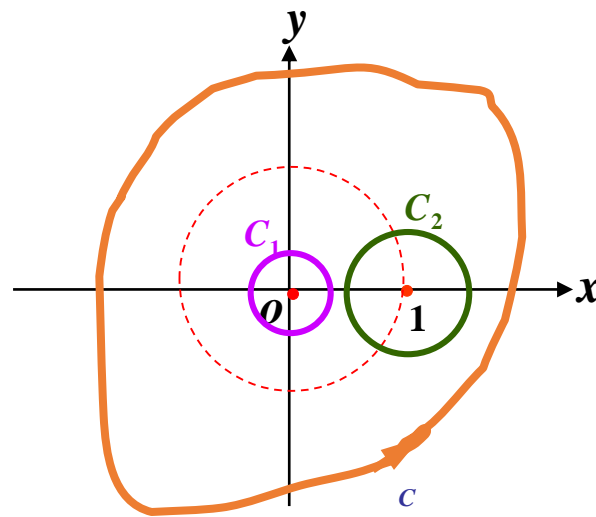
设 C 是一条复周线, D 为 C 之内部, $f(z)$ 在 D 内解析,在 $\bar{D} = D + C$ 上连续,则

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

例 计算积分 $\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz$, C 为包含圆周 $|z|=1$ 在内的任何正向简单闭曲线.

解: 因为函数 $\frac{2z-1}{z^2-z}$ 在复平面内有两个奇点 $z=0$ 和 $z=1$,

依题意知, C 也包含这两个奇点.在 C 内作两个互不包含也互不相交的圆周 C_1 和 C_2 , C_1 只包含奇点 $z=0$, C_2 只包含奇点 $z=1$,则 $C + C_1^- + C_2^-$ 构成复周线 (如右图) 根据复合闭路定理,



$$\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz = \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z} dz + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z} dz$$

于是,

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz &= \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z} dz + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z} dz \\&= \oint_{C_1} \frac{1}{z-1} dz + \oint_{C_1} \frac{1}{z} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z} dz \\&= \mathbf{0} + 2\pi i + 2\pi i + \mathbf{0} \\&= 4\pi i.\end{aligned}$$

第四节 原函数与不定积分

一、积分与路径无关

二、原函数

一、积分与路径无关

定理一 设 f 是单连通区域 D 内的解析函数, 则 f 在 D 内的积分与路径无关, 即 $\forall z_0, z_1 \in D$, 积分

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz$$

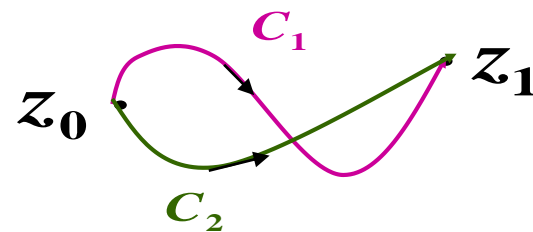
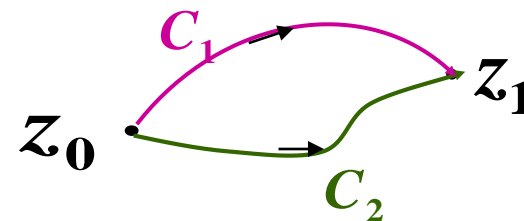
之值, 不依赖于 D 内连接起点 z_0 与终点 z_1 的曲线.

证明: 设 C_1 与 C_2 是 D 内连接起点 z_0 与终点 z_1 的任两条曲线, 则正方向曲线 C_1 与负方向 C_2 曲线就连接成 D 内一条闭曲线 C .

由柯西-古萨基本定理及复积分的基本性质有

$$0 = \int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2^-} f(z) dz$$

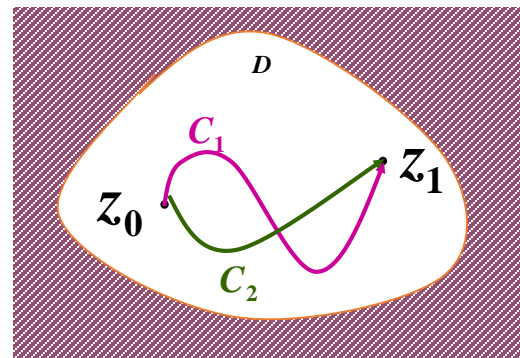
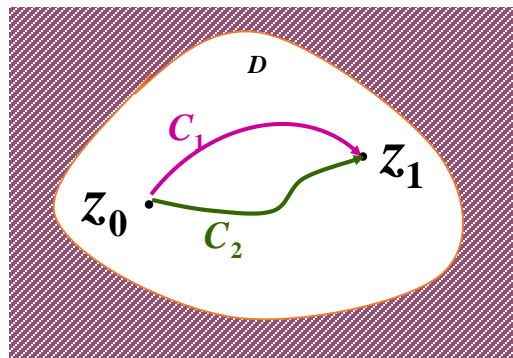
➡
$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$



注解

如果起点为 z_0 , 终点为 z_1 ,

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$$



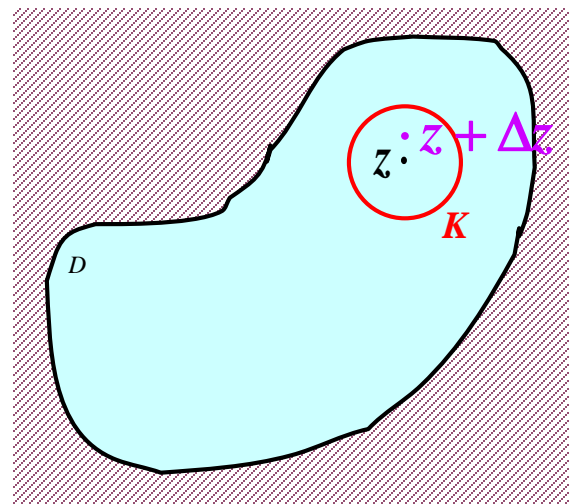
如果固定 z_0 , 让 z_1 在 D 内变动, 并令 $z_1 = z$, 便可确定 D 内的一个单值函数

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta.$$

定理二 如果函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析, 那末函数 $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$

必为 D 的一个解析函数, 并且 $F'(z) = f(z)$.

证明: 利用导数的定义来证. 设 z 为 D 内任一点, 以 z 为中心作一含于 D 内的小圆 K , 取 $|\Delta z|$ 充分小使 $z + \Delta z$ 在 K 内.

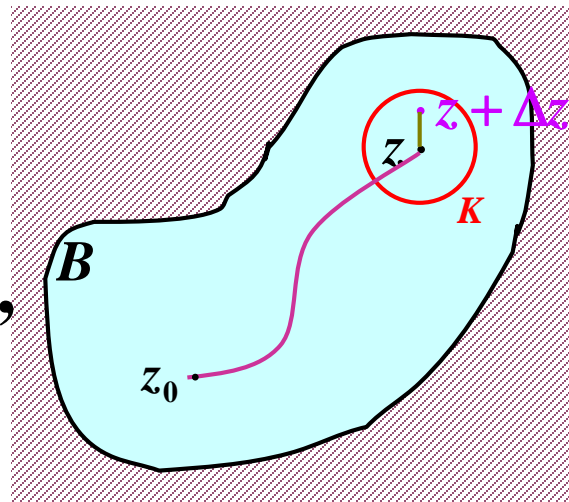


由 $F(z)$ 的定义,

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

由于积分与路线无关, $\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta$ 的积分路线可先取 z_0 到 z ,

(注意: 这一段与 $\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ 的路线相同)



然后从 z 沿直线到 $z + \Delta z$, 于是

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta,$$

因为 $\int_z^{z+\Delta z} f(z) d\zeta = f(z) \int_z^{z+\Delta z} d\zeta = f(z) \Delta z$, 所以

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta$$

由 $f(z)$ 在 D 内连续, 故对 $\forall \varepsilon > 0$, 只要开始小圆充分小, 则小圆内任一点 ζ 均合条件 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$, 故

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| &= \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta \right| \\
&\leq \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} |f(\zeta) - f(z)| d\zeta \right| \\
&\leq \frac{1}{|\Delta z|} \cdot \varepsilon \cdot |\Delta z| \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

于是 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = 0$, 即 $F'(z) = f(z)$. 证毕.

二、原函数

定义 如果函数 $\Phi(z)$ 在区域 D 内的导数为 $f(z)$, 即 $\Phi'(z) = f(z)$, 那么称 $\Phi(z)$ 为 $f(z)$ 在区域 D 内的一个原函数.

显然 $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ 是 $f(z)$ 的一个原函数.

原函数之间的关系: $f(z)$ 的任何两个原函数相差一个常数.

证明: 设 $\Phi(z)$ 及 $F(z)$ 都是 $f(z)$ 在 D 内的原函数, 我们有

$$[\Phi(z) - F(z)]' = \psi'(z) = 0,$$

在这里 $\psi(z) = \Phi(z) - F(z)$. 于是

$$\psi(z) = \alpha,$$

亦即 $\Phi(z) = F(z) + \alpha$, 这里 α 是一常数.

注解 如果 f 在区域 D 内有一个原函数 F , 那么它就有无穷多个原函数,

其全体原函数可表示为: $F(z) + c$ (c 为任意常数).

定义 称 $f(z)$ 的原函数的一般表达式 $F(z) + c$ (c 为任意常数) 为 $f(z)$ 的不定积分, 记作

$$\int f(z) dz = F(z) + c.$$

定理三 (复积分的Newton-Leibnitz公式) 设 $f(z) \in C(D)$, D 是区域, 并且在 D 上有原函数. 如果 $\alpha, \beta \in D$, 并且 C 是 D 内连接 α, β 的光滑曲线, 那么成立

$$\int_C f(z) dz = F(\beta) - F(\alpha).$$

证明: 如果曲线 C 是光滑曲线 $z=z(t) (a \leq t \leq b)$, $z(a) = \alpha, z(b) = \beta$, 那么

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b F'(z(t)) z'(t) dt.$$

因为 $\frac{d}{dt} F(z(t)) = F'(z(t)) z'(t)$, 并且因为微积分基本定理对实变数复数值函数显然成立, 所以

$$\int_C f(z) dz = F(z(t)) \Big|_a^b = F(z(b)) - F(z(a)) = F(\beta) - F(\alpha).$$

注解

1) 定理三对分段光滑曲线依然成立.

2) 若复函 f, g 满足定理三的条件, 那么成立 **分部积分公式**

$$\int_C f(z) dg(z) = f(z)g(z) \Big|_\alpha^\beta - \int_C g(z) df(z).$$

例1 求 $\int_0^i z \cos z dz$ 的值.

解: 因为 $z \cos z$ 是解析函数, 它的一个原函数是 $z \sin z + \cos z$, 由牛顿-莱布尼兹公式知,

$$\int_0^i z \cos z dz = [z \sin z + \cos z]_0^i = i \sin i + \cos i - 1 = i \frac{e^{-1} - e}{2i} + \frac{e^{-1} + e}{2} - 1 = e^{-1} - 1.$$

另解: $\int_0^i z \cos z dz = \int_0^i z d(\sin z) = [z \sin z]_0^i - \int_0^i \sin z dz = e^{-1} - 1.$

例2 试沿区域 $\text{Im}(z) \geq 0, \text{Re}(z) \geq 0$ 内的圆弧 $|z|=1$, 求 $\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$ 的值.

解: 函数 $\frac{\ln(z+1)}{z+1}$ 在所设区域内解析, 它的一个原函数为 $\frac{\ln^2(z+1)}{2}$,

$$\begin{aligned} \int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz &= \left. \frac{\ln^2(z+1)}{2} \right|_1^i = \frac{1}{2} [\ln^2(1+i) - \ln^2 2] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} i \right)^2 - \ln^2 2 \right] \\ &= -\frac{\pi^2}{32} - \frac{3}{8} \ln^2 2 + \frac{\pi \ln 2}{8} i. \end{aligned}$$

第五、六节 柯西积分公式与高阶导数公式

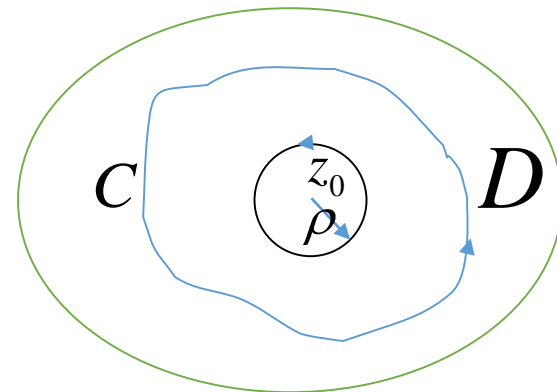
一、Cauchy积分公式

二、高阶导数公式

一、柯西积分公式

1. 启发性思考

设 $z_0 \in D$, D 是单连通区域, $f \in A(D)$. (如右图)

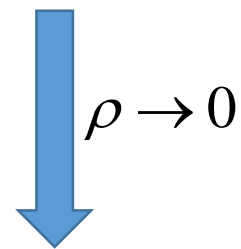


那么 $\frac{f(z)}{z - z_0}$ 在 z_0 不解析. 然而, 注意到

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \stackrel{\text{多连通域柯西定理}}{=} \oint_{|z - z_0| = \rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \stackrel{z = z_0 + \rho e^{i\theta}}{=} i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

问题: 积分 $\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ 与 ρ 无关, 那么是否成立

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)?$$



$$2\pi i f(z_0)$$

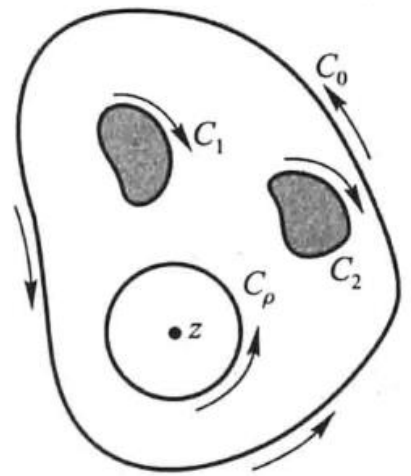
2. 柯西公式

定理 设区域 D 的边界是周线(或复周线) C . 若函数 $f(z)$ 在 D 内解析. 在 $\bar{D} = D + C$ 上连续, 则有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in D).$$



柯西(积分)公式



证明: 任意固定 $z \in D$, $F(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, $\zeta \in \bar{D}$, $\zeta \neq z$ 作为 ζ 的函数在 D 内除 z 外均解析. 今以点 z 为心, 充分小的 $\rho > 0$ 为半径作圆周 C_ρ ,

使 C_ρ 及其内部均含于 D , 对于复周线 $\Gamma = C + C_\rho^-$ 及函数 $F(\zeta)$, 引用柯西定理,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= 2\pi i f(z) + \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \end{aligned}$$

=0.(下面证之)

另一方面, 由于 $f(z)$ 在 z_0 连续, 那么

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |\zeta - z| = \rho < \delta \Rightarrow |f(\zeta) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \quad (\zeta \in C_\rho).$$

因此, 我们有估计

$$\left| \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \oint_{C_\rho} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| < \frac{\varepsilon}{2\pi\rho} \oint_{C_\rho} ds = \varepsilon,$$

这蕴含

$$\oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

证毕.

注解

1) 条件同定理, 则

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \in \mathbb{C} - \bar{D}. \end{cases}$$

柯西公式

柯西定理

2) 柯西积分公式表达了一个有趣的事实：在闭区域 \bar{D} 上连续，在区域 D 上全纯的函数的值完全由它在边界上的值决定.

二、高阶导数公式

定理 设区域 D 的边界是周线(或复周线) C . 若函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在 $\bar{D} = D + C$ 上连续，则有

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (z \in D, n = 1, 2, 3, \dots).$$

证明：首先证结论 $n = 1$ 时成立. 设 $z + h \in D$ ，仅需证明， h 趋近于0时，下式也趋近于0：

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta &= \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z - h} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{h}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right] \\ &= \frac{h}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2} d\zeta \end{aligned}$$

现在估计上式最后一个积分. 设以 z 为心, 以 d 为半径的圆盘完全在 D 内, 并且在这个圆盘内取 $z+h$, 使得 $0 < |h| < d/2$, 那么当 $\zeta \in C$,

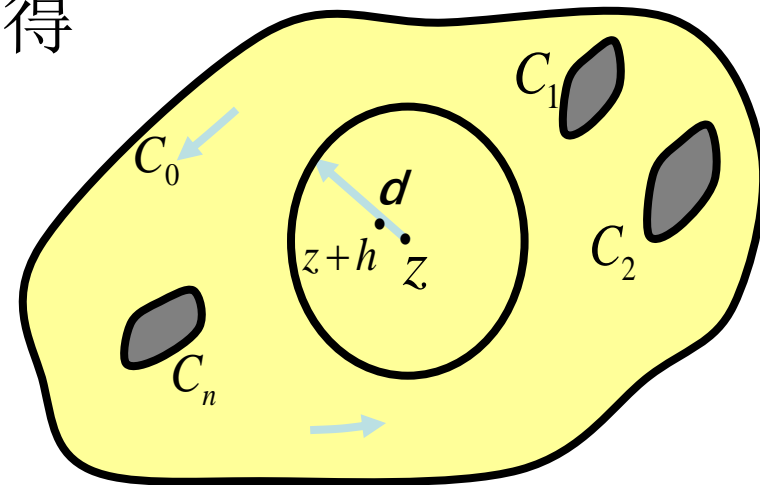
$$|\zeta - z| > d, |\zeta - z - h| > d/2,$$

设 $|f(z)|$ 在 C 上的一个上界是 M , 并且设 C 的长度是 L , 于是, 我们有

$$\left| \frac{h}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{|h|}{2\pi} \cdot \frac{ML}{\frac{d}{2} \cdot d^2} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0,$$

这蕴含待证积分

$$\frac{h}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2} d\zeta \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$



要完成定理的证明，现在应用数学归纳法. 设 $n=k$ 时，结论成立.
取 z 及 $z+h$ 同上，那么有

$$\begin{aligned}
 & \frac{f^{(k)}(z+h) - f^{(k)}(z)}{h} - \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}} d\zeta \\
 &= \frac{1}{h} \left[\frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)^{k+1}} d\zeta - \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right] - \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}} d\zeta \\
 &= \frac{k!}{2\pi i h} \int_C \frac{[(\zeta - z)^{k+1} - (\zeta - z - h)^{k+1}] f(\zeta)}{(\zeta - z - h)^{k+1} (\zeta - z)^{k+1}} d\zeta - \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}} d\zeta \\
 &= \frac{k!}{2\pi i} \sum_{j=0}^k \int_C \frac{[(\zeta - z)^{j+1} (\zeta - z - h)^{k-j} - (\zeta - z - h)^{k+1}] f(\zeta)}{(\zeta - z - h)^{k+1} (\zeta - z)^{k+2}} d\zeta \\
 &= \frac{k!}{2\pi i} \sum_{j=0}^k \int_C \frac{[(\zeta - z)^{j+1} - (\zeta - z - h)^{j+1}] f(\zeta)}{(\zeta - z - h)^{j+1} (\zeta - z)^{k+2}} d\zeta = \frac{k! h}{2\pi i} \sum_{j=0}^k \sum_{\ell=0}^j \int_C \frac{(\zeta - z)^\ell (\zeta - z - h)^{j-\ell} f(\zeta)}{(\zeta - z - h)^{j+1} (\zeta - z)^{k+2}} d\zeta \\
 &= \frac{k! h}{2\pi i} \sum_{j=0}^k \sum_{\ell=0}^j \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)^{\ell+1} (\zeta - z)^{k-\ell+2}} d\zeta
 \end{aligned}$$

同前部分一样估计, 我们有

$$\left| \frac{k!h}{2\pi i} \sum_{j=0}^k \sum_{\ell=0}^j \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)^{\ell+1} (\zeta - z)^{k-\ell+2}} d\zeta \right| \leq \frac{k!|h|}{2\pi} \sum_{j=0}^k \sum_{\ell=0}^j \frac{ML}{\left(\frac{d}{2}\right)^{\ell+1} d^{k-\ell+2}} = \frac{k!|h|}{2\pi} \sum_{j=0}^k \sum_{\ell=0}^j \frac{2^{\ell+1} ML}{d^{k+3}} \rightarrow 0, h \rightarrow 0,$$

这导致

$$\frac{f^{(k)}(z+h) - f^{(k)}(z)}{h} - \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}} d\zeta \rightarrow 0, h \rightarrow 0.$$

由此证明了定理的结论当 $n=k+1$ 时成立. 因此, 归纳法原理表明定理得证.

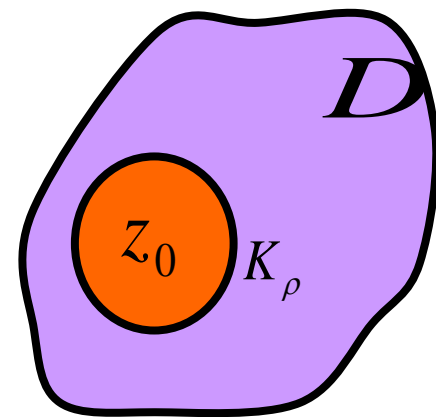
注解 柯西公式应用——证明解析函数无穷可微性

结论 若 $f(z) \in A(D)$, D 是区域, 则 f 在 D 内有任意阶导数.

证明: $\forall z_0 \in D$, 作闭圆 $K_\rho: |z - z_0| \leq \rho$, 使 $K_\rho \subset D$ (如右图).

根据定理, $f(z)$ 在 K_ρ 内有各阶导数, 因而 $f(z)$ 在 z_0 有各阶导数.

由 z_0 的任意性, $f(z)$ 在 D 内有各阶导数.



例1 计算下列积分,其中 C 为正向圆周: $|z|=r>1$.

$$(1) \oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz; \quad (2) \oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz.$$

解: (1) 函数 $\frac{\cos \pi z}{(z-1)^5}$ 在 C 内 $z=1$ 处不解析, 但 $\cos \pi z$ 在 C 内处处解析,

根据公式 $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{(5-1)!} (\cos \pi z)^{(4)} \Big|_{z=1} = -\frac{\pi^5 i}{12};$$

(2) 函数 $\frac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 C 内的 $z=\pm i$ 处不解析, 在 C 内以 i 为中心作一个正向圆周 C_1 ,

以 $-i$ 为中心作一个正向圆周 C_2 , 则函数 $\frac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在由 C, C_1, C_2 围成的

区域内解析.

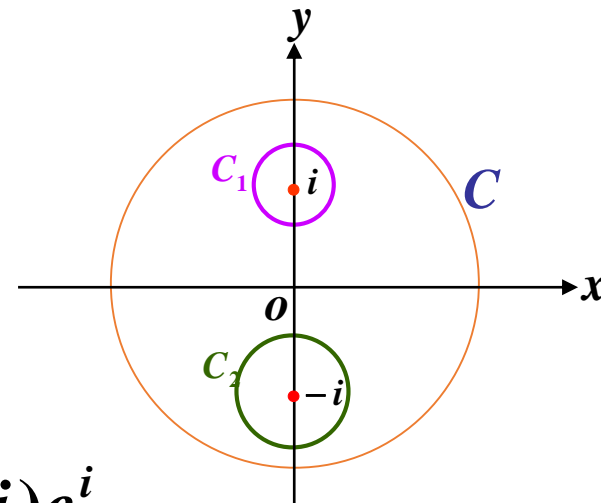
根据复合闭路原理,

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz$$

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z+i)^2(z-i)^2} dz = \frac{2\pi i}{(2-1)!} \left[\frac{e^z}{(z+i)^2} \right]' \bigg|_{z=i} = \frac{(1-i)e^i}{2} \pi,$$

同理可得 $\oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{-(1+i)e^{-i}}{2} \pi$, 于是

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz &= \frac{(1-i)e^i}{2} \pi + \frac{-(1+i)e^{-i}}{2} \pi = \frac{\pi}{2} (1-i)(e^i - ie^{-i}) \\ &= \frac{\pi}{2} (1-i)^2 (\cos 1 - \sin 1) = i\pi (\sin 1 - \cos 1). \end{aligned}$$



第七节 调和函数

一、调和函数的概念

二、解析函数与调和函数的关系

三、计算实例

一、调和函数的概念

定义 如果二元实变函数 $\phi(x,y)$ 在区域 D 内具有二阶连续偏导数, 并且满足 *Laplace* 方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

则称 $\phi(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数.

说明 工程中的许多问题, 如平面上的稳定温度场、静电场和稳定流场等都满足 *Laplace* 方程.

二、解析函数与调和函数的关系

定理 任何在区域 D 内解析的函数, 它的实部和虚部都是 D 内的调和函数.

证明：设 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 为区域 D 内的一个解析函数，则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

根据解析函数的导数仍是解析函数，因此 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 具有任意阶的连续偏导数， $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ， $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ 分别关于 x, y 求导

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

再由二阶导函数的连续性

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ，因此 $u(x, y)$ 是调和函数.

同理 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, 因此 $v(x, y)$ 是调和函数.

问题 任给区域 D 内的两个调和函数 $u(x, y)$, $v(x, y)$, $u(x, y) + iv(x, y)$ 在 D 内是否为解析函数?

答: 不一定. 例如: $f(z) = x^2 - y^2 - 2xyi$.

定义 设 $u(x, y)$ 为区域 D 内给定的调和函数, 我们把使 $u + iv$ 在 D 内构成解析函数的调和函数 $v(x, y)$ 称为 $u(x, y)$ 的 **共轭调和函数**.

推论: 区域 D 内解析函数的虚部为实部的共轭调和函数.

问题 已知 $u(x, y)$ 是区域 D 上的调和函数, 是否存在 $u(x, y)$ 的共轭调和函数 $v(x, y)$, 使得函数 $f(z) = u + iv$ 是 D 上的解析函数?

或者已知调和函数 $v(x, y)$ 时, 是否存在调和函数 $u(x, y)$, 使得 $f(z) = u + iv$ 是 D 上的解析函数?

三、计算实例

例1 证明 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ 为全平面上的调和函数, 并求以其为实部的解析函数.

解: 因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y$,


于是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 故 $u(x, y)$ 为调和函数.



令 $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -6xy$,


$$v = -6 \int xy dy = -3xy^2 + g(x) \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -3y^2 + g'(x),$$

$$\text{又 } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + 3x^2,$$

$$\longrightarrow -3y^2 + g'(x) = -3y^2 + 3x^2,$$


 $g(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + c, \quad (c \text{ 为任意常数})$

 $v(x, y) = x^3 - 3xy^2 + c$  $w = y^3 - 3x^2y +$
 $i(x^3 - 3xy^2 + c).$

 $w = f(z) = i(z^3 + c).$

解法2:

$$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y = i(3x^2 - 3y^2) - 6xy = 3iz^2, z \in \mathbb{C}$$

 $f(z) = iz^3 + iC, C \in \mathbb{R}.$

注解

已知解析函数的实部求虚部，至多相差一个常数。

