

# 主要内容

按电源形式分： 按电路所处的状态：

直流电路 稳态 直流电阻电路 (邱cp1-5)

正弦电路 正弦交流电流电路 (邱cp8-12,胡cp15传输线)

其它电源 非正弦周期电流电路 (胡cp10)

    电路方程的矩阵形式 胡cp12 (大规模电路)

    二端口 胡cp13 (电路形式)

暂态 过渡过程，从一个稳态到另一个

    邱 cp6-7：时域法 (直流, 正弦交流、一二阶)

    胡cp11：复频域法 (阶跃、冲击、高阶)

    胡cp14：状态方程分析法 (多变量)

    胡cp16：均匀传输线 (波过程)

# 主要内容

基本分析方法

VAR+KCL+KVL

等效化简法

一般分析法 (支路法、节点法、回路法)

电路定理分析

基本定律/定理

基尔霍夫定律 (特勒根定理)

欧姆定律的各种形式

戴维南定理 (诺顿定理)

叠加定理，齐性定理，互易定理，替代定理

# 下学期学时安排：3.5学分56学时 1-16周 周4学时 (胡钋 高等教育出版社)

非正弦周期电流电路和信号的频谱	Cp10	6学时
一阶电路阶跃、冲激响应、强迫跃变 二阶电路、卷积	Cp5	10学时
拉普拉斯变换及网络函数	Cp11	8学时
电路方程的矩阵形式	Cp12	6学时
二端口网络	Cp13	6学时
状态变量、状态方程和输出方程	Cp14	4学时
均匀传输线	Cp 15-16	14学时
复习		2学时

学习任务的安排问题，基本要求（作业，考核）

# 作业 (抄题)

- Cp10: 3, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 17, 19, 21
- Cp5: 20, 22, 24, 26, 28
- Cp11 : 2, 4, 6, 8, 11, 14, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 32, 35, 36
- Cp12 : 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 15, 17, 20, 22
- Cp13: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 25, 28, 31
- Cp14 : 2, 4, 6, 9, 11, 13, 16
- Cp15: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19
- Cp16 : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13

# 3 电路分析的一般方法

## ●重点

熟练掌握电路方程的列写方法：

支路电流法

回路电流法

结点电压法

# 概 述

## ● 线性电路的一般分析方法

- (1) 普遍性：对任何线性电路都适用
- (2) 系统性：计算方法有规律可循

## ● 方法的基础

- (1) 电路结构的约束关系—KCL, KVL定律
- (2) 电路元件的电压、电流约束关系

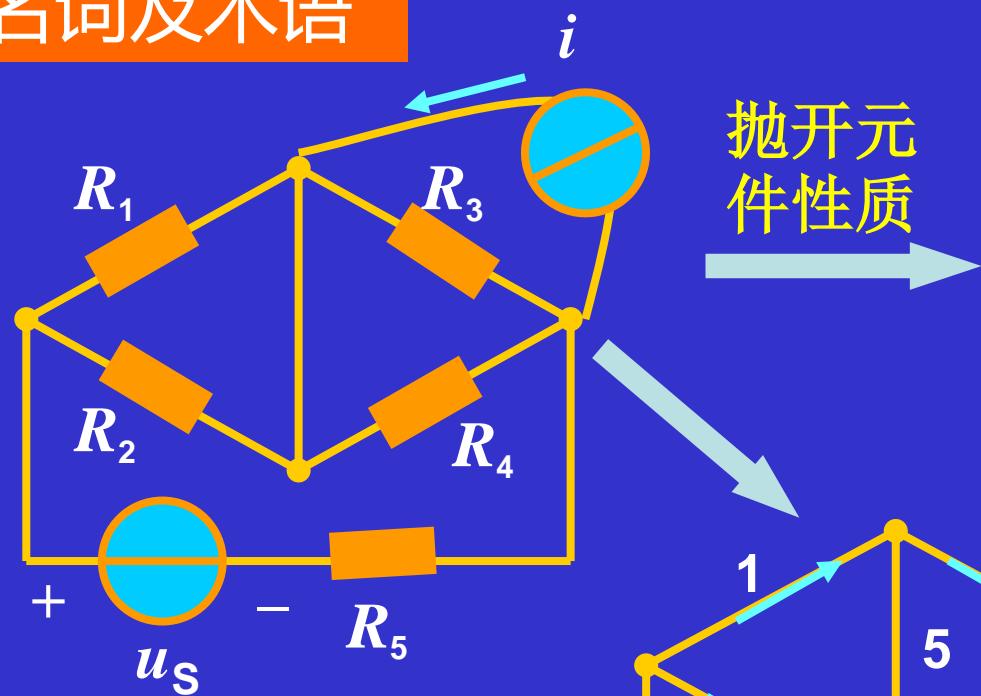
复杂电路的一般分析法就是根据KCL、KVL及元件电压和电流关系列方程、解方程

根据列方程时所选变量的不同可分为支路电流法、回路电流法和结点电压法等

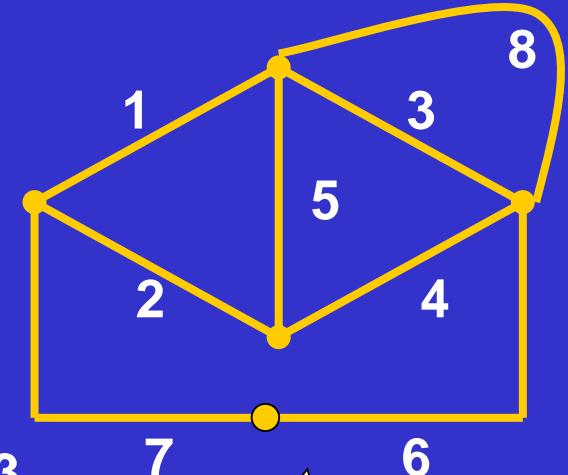
### 3. 1 网络图论的概念

#### 1. 名词及术语

$$n = 5 \quad b = 8$$



元件的串联及并联  
组合作为一条支路



一个元件  
作为一条支路

$$n = 4 \quad b = 6$$

有向图

电路的图是用以表示电路几何结构的图形，图中的支路和结点与电路的支路和结点一一对应

(1) 图的定义 (Graph)



$$G = \{\text{支路, 结点}\}$$



- a. 图中的点和支路各自是一个整体
- b. 移去图中的支路，与它所联接的点依然存在，因此允许有孤立结点存在

•



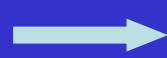
- c. 如把结点移去，则应把与它联接的全部支路同时移去

(2) 路径

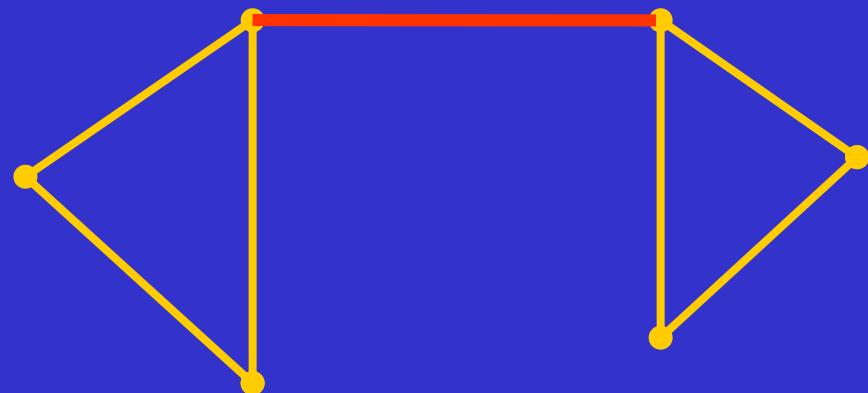


从图G的一个结点出发沿着一些支路连续移动到达另一结点所经过的支路构成路径

(3) 连通图



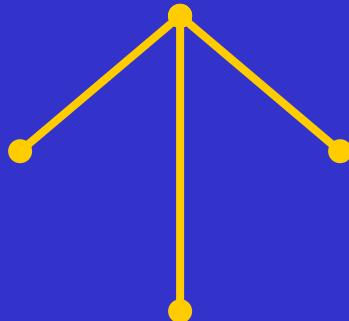
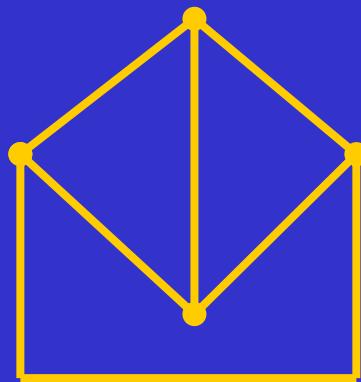
图G的任意两结点间至少有一条路径时称为连通图，非连通图至少存在两个分离部分



#### (4) 子图

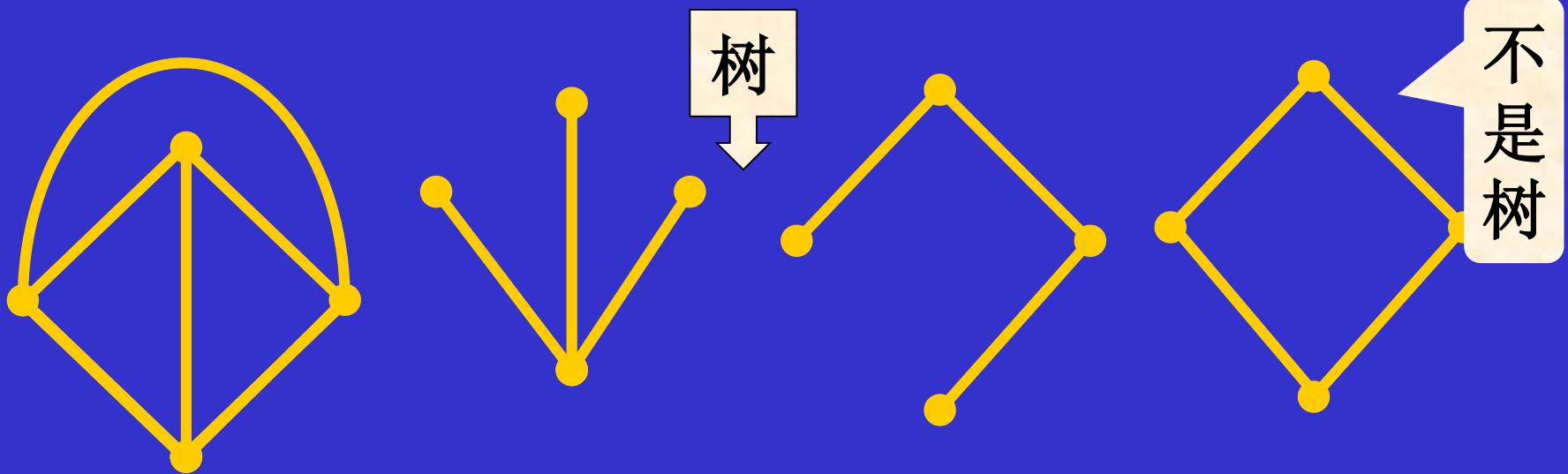


若图 $G_1$ 中所有支路和结点都是图G的支路和结点中的一部分，则称 $G_1$ 是G的子图



## 2. 几种重要的子图

- 树 (Tree) T是连通图中满足下列条件的一个子图：
  - (1) T仍是连通的
  - (2) 包含图G所有结点
  - (3) 不含闭合路径



树支：构成树的支路

连支：属于G而不属于T的支路

## 特点

1) 对应一个图有很多的树

2) 树支的数目是一定的：

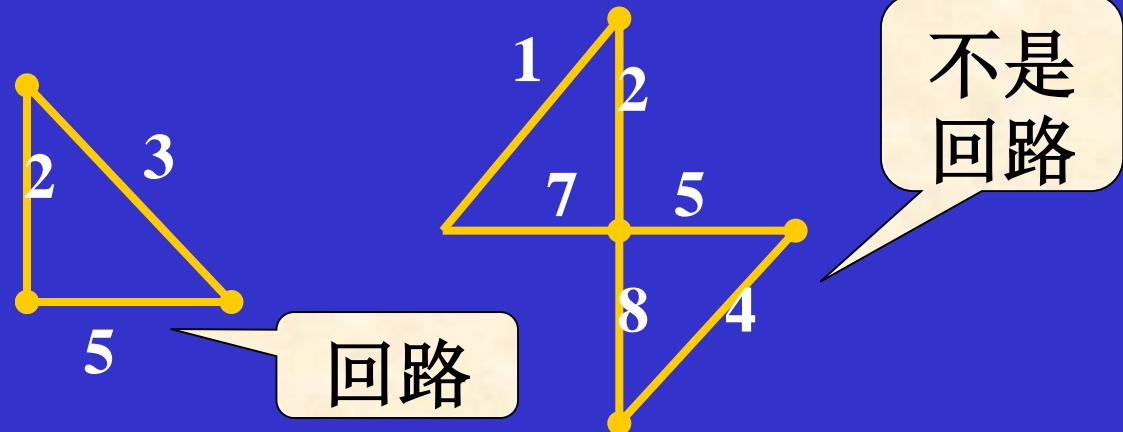
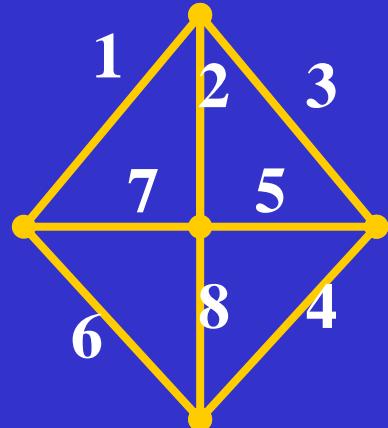
$$t = n - 1$$

连支数：

$$l = b - t = b - (n - 1)$$

## ● 回路 (Loop)

L是连通图的一个子图，构成一条闭合路径，并满足：(1)连通，(2)每个结点关联2条支路



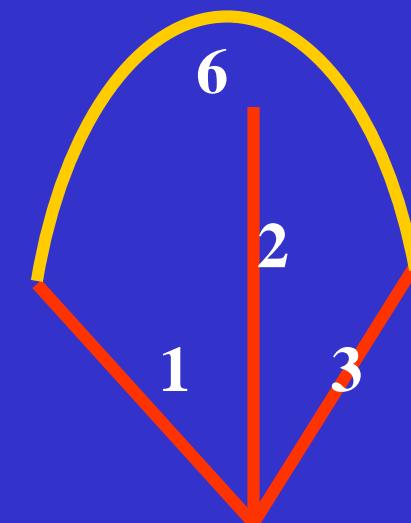
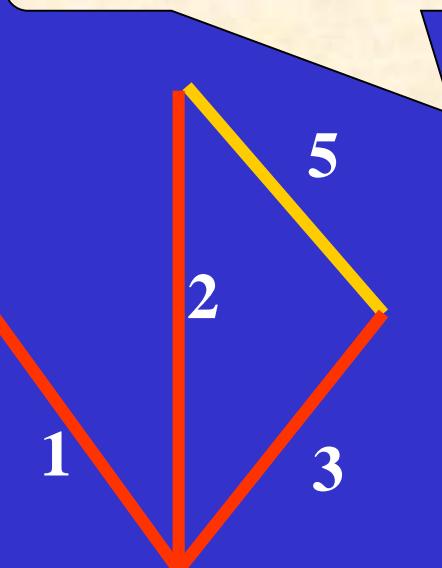
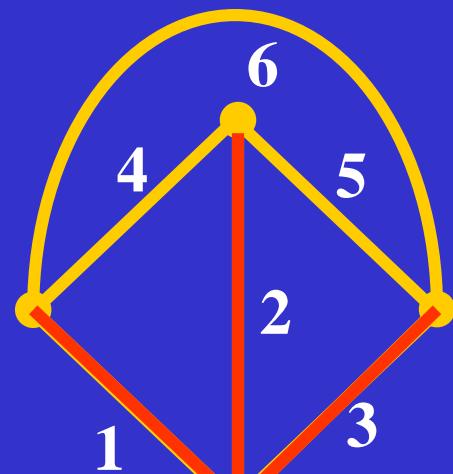
### 特点

- 1) 对应一个图有很多的回路
- 2) 基本回路的数目是一定的，为连支数
- 3) 对于平面电路，网孔数为基本回路数

$$l = b - (n - 1)$$

## 基本回路(单连支回路)

基本回路具有独占的一条连支



结论



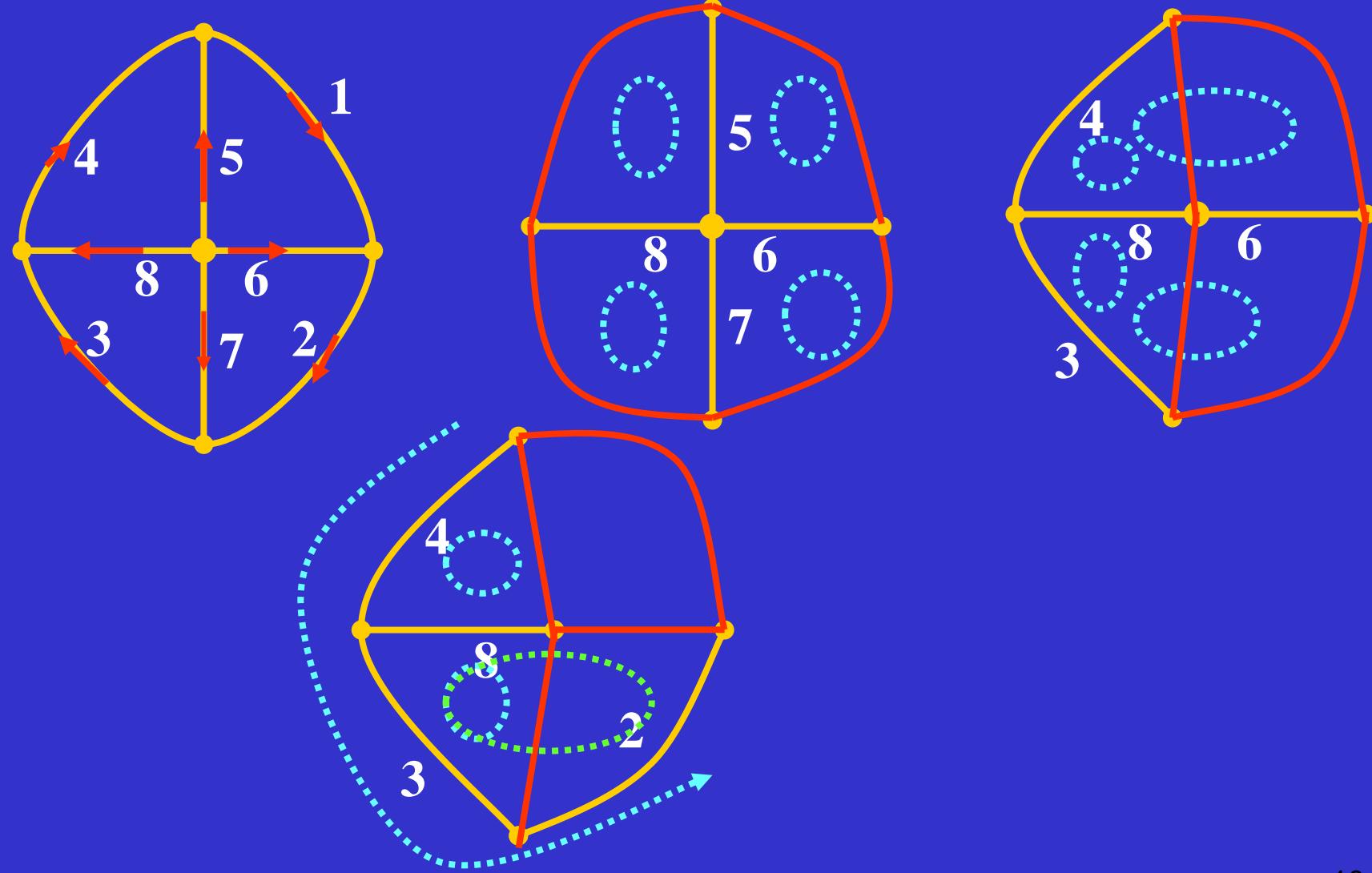
支路数 = 树支数 + 连支数  
= 结点数 - 1 + 基本回路数

结点、支路和  
基本回路关系

$$b = n + l - 1$$

例

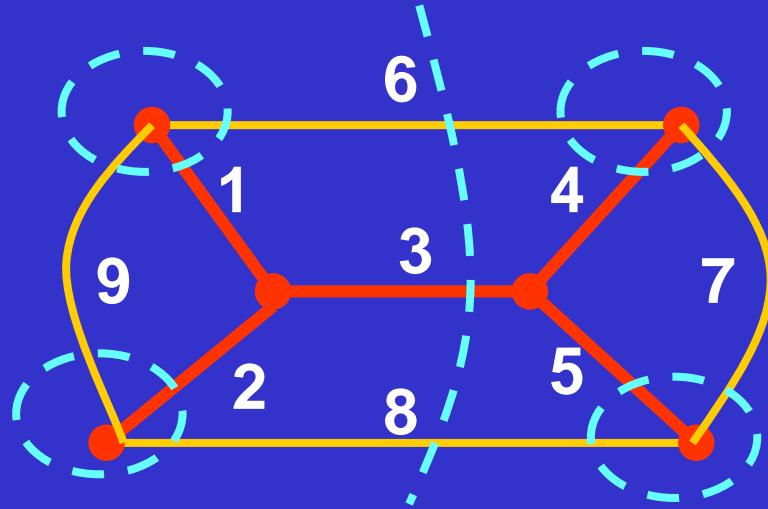
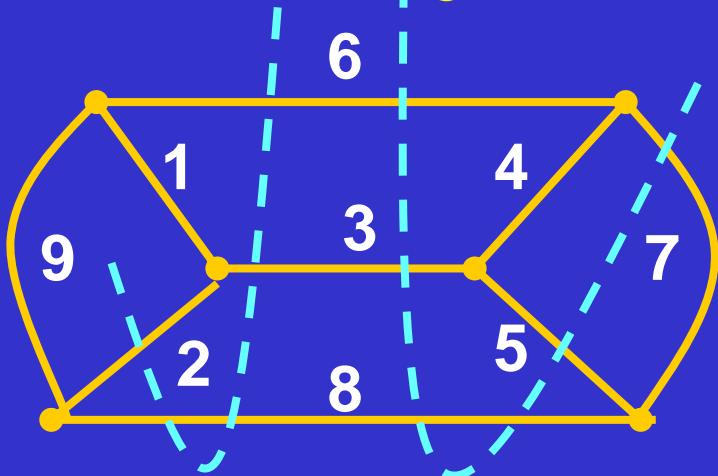
图示为电路的图，画出三种可能的树及其对应的基  
本回路。



## ● 割集Q (Cut set) →

Q是连通图G中支路的集合，具有下述性质

- (1) 把Q中全部支路移去，图分成二个分离部分
- (2) 任意放回Q 中一条支路，仍构成连通图



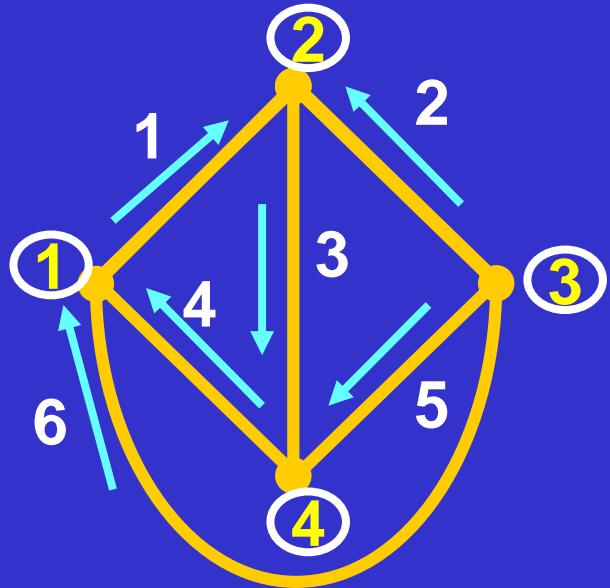
割集: (1 9 6) (2 8 9) (3 6 8) (4 6 7) (5 7 8)  
(3 6 5 8 7) (3 6 2 8) 是割集吗?

基本割集

→ 只含有一个树支的割集。割集数 = n-1

连支集合不能构成割集

### 3 . KCL、KVL的独立方程数



①  $i_1 - i_4 - i_6 = 0$   
②  $-i_1 - i_2 + i_3 = 0$   
③  $i_2 + i_5 + i_6 = 0$   
④  $-i_3 + i_4 - i_5 = 0$   
① + ② + ③ + ④ = 0

结论

n个结点的电路, 独立的KCL方程为n-1个。

KVL的独立方程数=基本回路数=b-(n-1)

## 结论

n个结点、b条支路的电路, 独立的  
KCL和KVL方程数为:

$$(n-1) + b - (n-1) = b$$

## ●要点回顾

图论G

树、树支、连支、回路、割集

独立结点

独立回路：单连支回路，基本回路

独立割集：单树支割集，基本割集

# 第五章 线性时不变动态电路暂态过程的时域分析

## ● 重点

1. 动态电路方程的建立及初始条件的确定
2. 一阶电路的零输入响应、零状态响应和全响应求解；求解全响应的三要素法
3. 稳态分量、暂态分量求解
4. 一阶电路的阶跃响应和冲激响应
5. 二阶电路的响应

# 5.1 一阶电路和高阶电路

## 1. 动态电路概述

### 电阻电路与动态电路

电阻电路: 电路中仅由电阻元件和电源元件构成。  
KCL、KVL方程和元件特性均为代数方程。  
因此描述电路的方程为代数方程。

(即时电路)

动态电路: 含储能元件 $L(M)$ 、 $C$ 。KCL、KVL方程仍  
为代数方程，而元件方程中含微分或积分形  
式。因此描述电路的方程为微分方程。

(记忆电路)

换路



电路结构、状态发生变化

支路接入或断开  
电路参数变化

过渡过程产生的原因



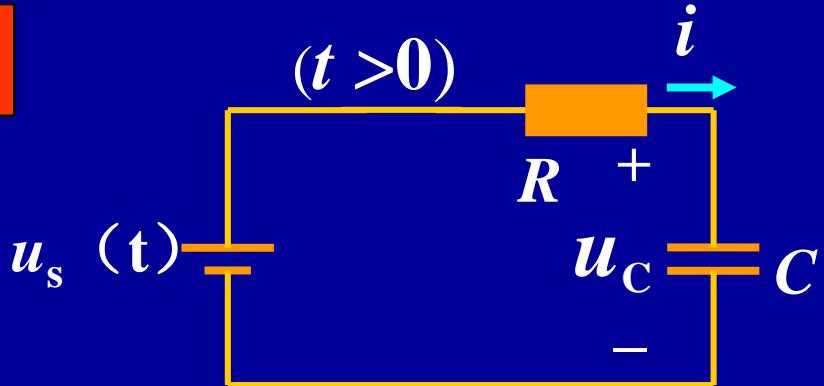
电路内部含有储能元件  $L$ 、 $C$ ，电路在换路时能量发生变化，而能量的储存和释放都需要一定的时间来完成

$$p = \frac{\Delta w}{\Delta t} \quad \Delta t \Rightarrow 0 \quad p \Rightarrow \infty$$

## 2. 动态电路的方程及阶数

应用KVL和电容的VCR得：

$$Ri + u_c = u_s(t)$$



$$i = C \frac{du_c}{dt}$$

→  $RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_s(t)$

若以电流为变量：

$$Ri + \frac{1}{C} \int idt = u_s(t)$$

→  $R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{du_s(t)}{dt}$

## 结论:

- (1) 描述动态电路的电路方程为微分方程
- (2) 动态电路方程的阶数等于电路中独立动态元件的个数

一阶电路



一阶电路中只有一个独立动态元件,描述  
电路的方程是一阶线性微分方程

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = e(t) \quad t \geq 0$$

二阶电路



二阶电路中有二个独立动态元件,描述电  
路的方程是二阶线性微分方程

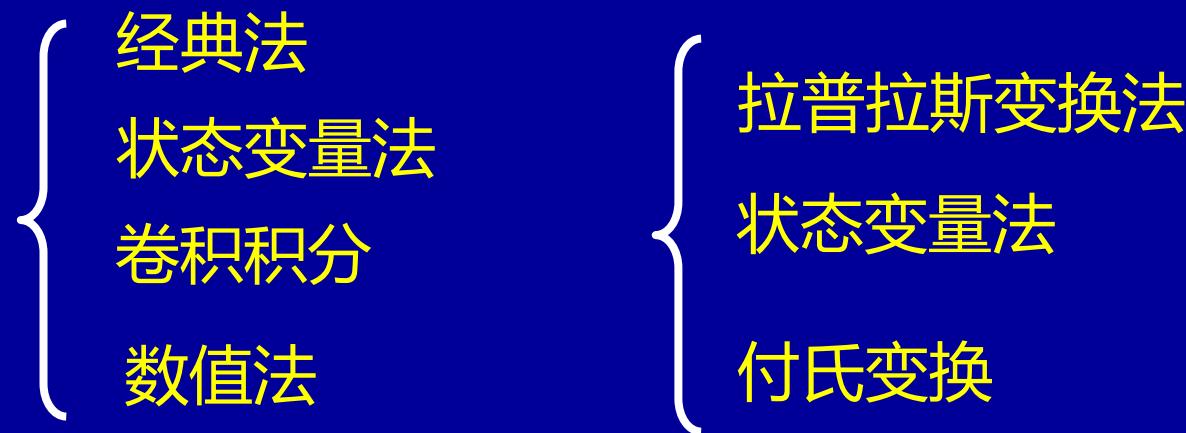
$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = e(t) \quad t \geq 0$$

## (2) 求解微分方程

本章  
采用

时域分析法

复频域分析法



工程中高阶微分方程应用计算机辅助分析求解。

# 稳态分析和动态分析的区别

稳态

动态

- |  |  |
|--|--|
| $\left\{ \begin{array}{l} \text{恒定或周期性激励} \\ \text{换路发生很长时间后状态} \\ \text{微分方程的特解} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} \text{任意激励} \\ \text{换路发生后的整个过程} \\ \text{微分方程的一般解} \end{array} \right.$ |
|--|--|

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = U_s$$

$$t \Rightarrow \infty$$

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

$$a_0 x = U_s$$

### 3. 电路动态过程的初始条件

#### 1) 电路的换路定则

(1)  $t = 0^+$  与  $t = 0^-$  的概念

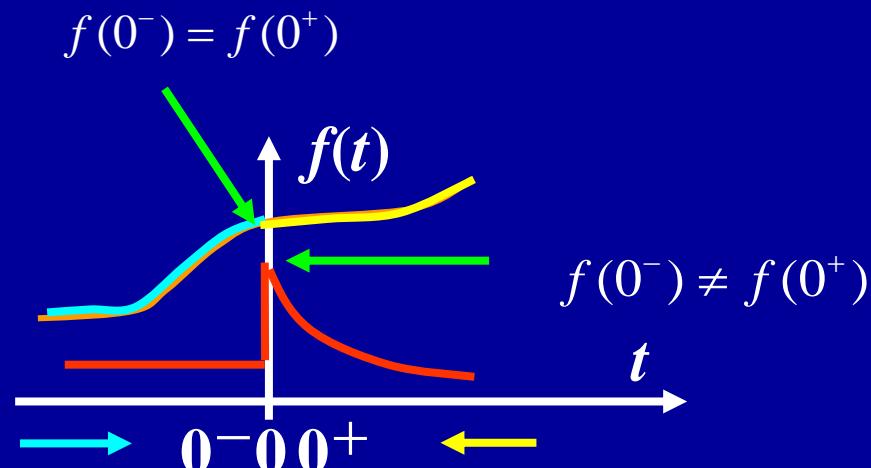
认为换路在  $t=0$  时刻进行

$0^-$  换路前一瞬间

$0^+$  换路后一瞬间

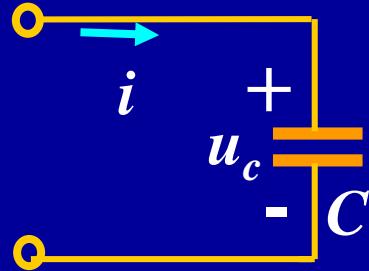
$$f(0^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} f(t)$$

$$f(0^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(t)$$



初始条件为  $t = 0^+$  时  $u$  ,  $i$  及其各阶导数的值

## (2) 电容的初始条件



$t = 0^+$ 时刻

当  $i(\xi)$  为有限值时

$$q = C u_c \rightarrow$$

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{0^-} i(\xi) d\xi + \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i(\xi) d\xi \\ &= u_C(0^-) + \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) + \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i(\xi) d\xi$$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-)$$

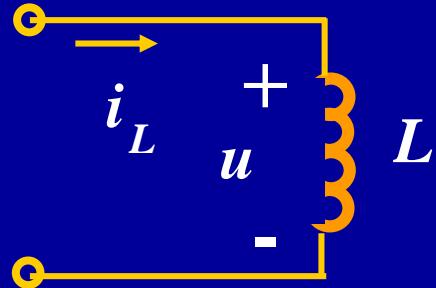
$$q(0^+) = q(0^-)$$

电荷  
守恒

结论

换路瞬间，若电容电流保持为有限值，  
则电容电压（电荷）换路前后保持不变。

### (3) 电感的初始条件



$t = 0^+$ 时刻

当  $u$  为有限值时

$$\psi = L i_L$$

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{0^-} u(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \int_{0^-}^t u(\xi) d\xi \\ &= i_L(0^-) + \frac{1}{L} \int_{0^-}^t u(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) + \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} u(\xi) d\xi$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

$$\psi_L(0^+) = \psi_L(0^-)$$

磁链  
守恒

结论

换路瞬间，若电感电压保持为有限值，  
则电感电流（磁链）换路前后保持不变。

## (4) 换路定则

$\begin{cases} q_c(0^+) = q_c(0^-) & \text{换路瞬间, 若电容电流保持为有限值,} \\ u_C(0^+) = u_C(0^-) & \text{则电容电压 (电荷) 换路前后保持不变。} \end{cases}$

$\begin{cases} \psi_L(0^+) = \psi_L(0^-) & \text{换路瞬间, 若电感电压保持为有限值,} \\ i_L(0^+) = i_L(0^-) & \text{则电感电流 (磁链) 换路前后保持不变。} \end{cases}$

注意:

- (1) 电容电流和电感电压为有限值是换路定则成立的条件
- (2) 换路则了能量不能跃变

## 5.2 一阶电路的零输入响应

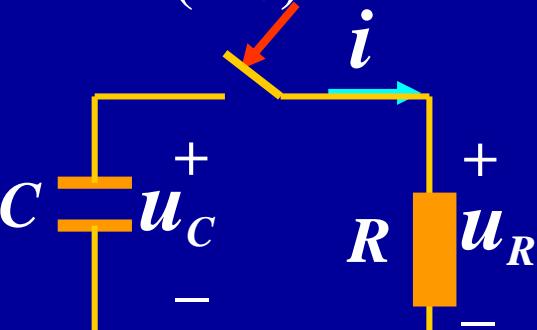
零输入响应

换路后外加激励为零，仅由动态元件初始储能所产生的电压和电流。

### 1. $RC$ 电路的零输入响应

已知  $u_C(0^-) = U_0$

$K(t=0)$



$$-u_R + u_C = 0$$

$$\begin{cases} i = -C \frac{du_C}{dt} \\ u_R = Ri \end{cases}$$

$$\begin{cases} RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \\ u_C(0^+) = U_0 \end{cases}$$

特征方程  $RCp + 1 = 0$

特征根  $p = -\frac{1}{RC}$

则

$$u_C = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$

(1) 电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数



(2) 响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与RC有关

令  $\tau = RC$ , 称 $\tau$ 为一阶电路的时间常数

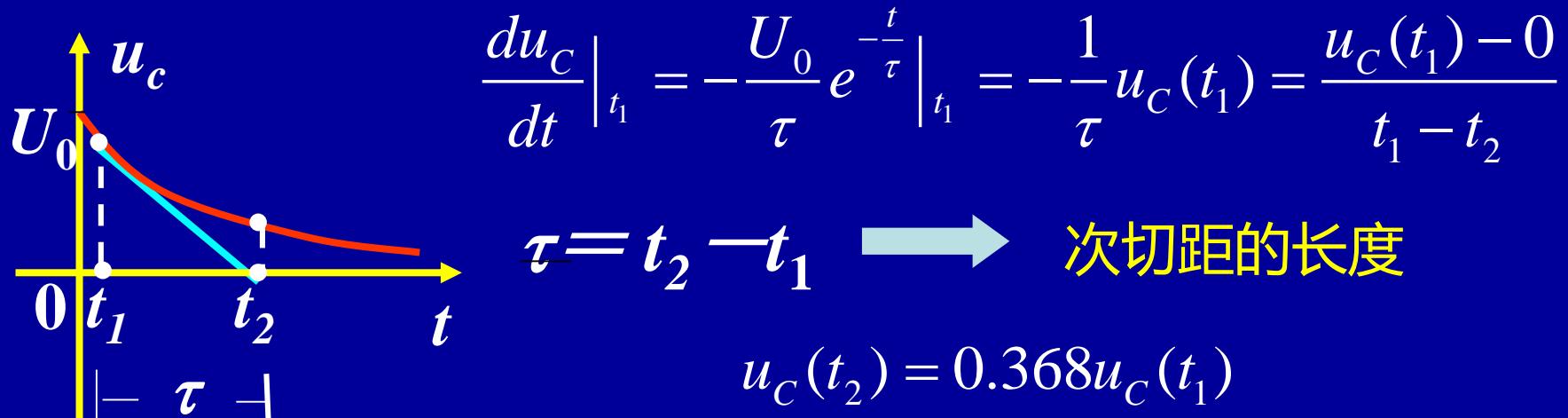
$$[\tau] = [RC] = [\text{欧}][\text{法}] = [\text{欧}] \left[ \frac{\text{库}}{\text{伏}} \right] = [\text{欧}] \left[ \frac{\text{安秒}}{\text{伏}} \right] = [\text{秒}]$$

$t$	0	$\tau$	$2\tau$	$3\tau$	$5\tau$
$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	$U_0$	$U_0 e^{-1}$	$U_0 e^{-2}$	$U_0 e^{-3}$	$U_0 e^{-5}$
	$U_0$	$0.368 U_0$	$0.135 U_0$	$0.05 U_0$	$0.007 U_0$

$\tau$ : 电容电压衰减到原来电压36.8%所需的时间。

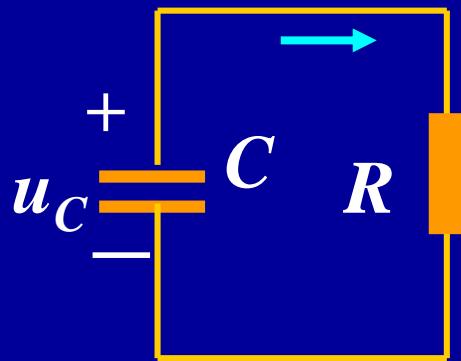
工程上认为， 经过  $3\tau - 5\tau$ ， 过渡过程结束。

几何意义：  $t_1$ 时刻曲线的斜率等于



(3) 能量关系  $\rightarrow$  电容不断释放能量被电阻吸收，

直到全部消耗完毕.



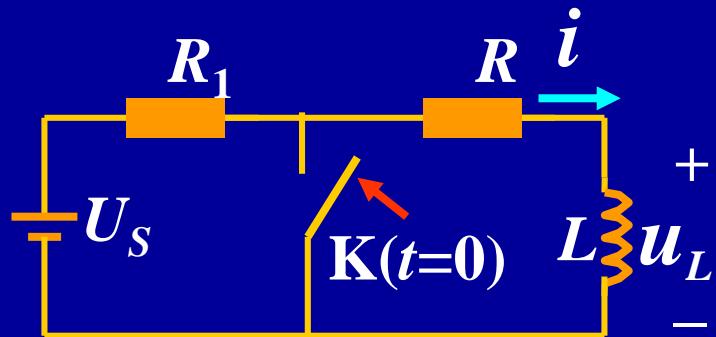
设  $u_C(0^+) = U_0$

电容放出能量:  $\rightarrow \frac{1}{2} C U_0^2$

电阻吸收（消耗）能量:  $\rightarrow$

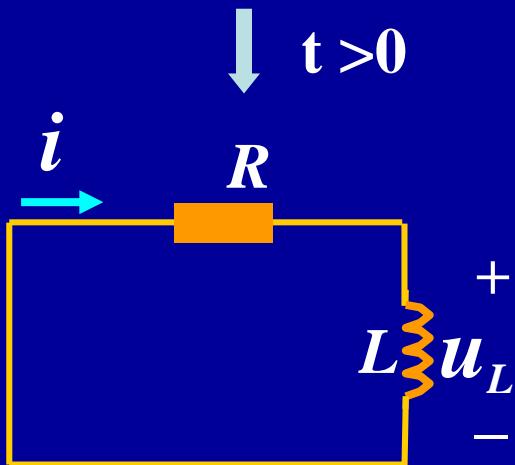
$$\begin{aligned} W_R &= \int_0^\infty i^2 R dt = \int_0^\infty \left(\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R dt \\ &= \frac{U_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{U_0^2}{R} \left(-\frac{RC}{2} e^{-\frac{2t}{RC}}\right) \Big|_0^\infty = \frac{1}{2} C U_0^2 \end{aligned}$$

## 2. RL电路的零输入响应



$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{U_S}{R_1 + R} = I_0$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad t \geq 0$$



特征方程  $Lp + R = 0$

特征根  $p = -\frac{R}{L}$

$$i(t) = Ae^{pt}$$

代入初始值  $i(0^+) = I_0 \rightarrow A = i(0^+) = I_0$

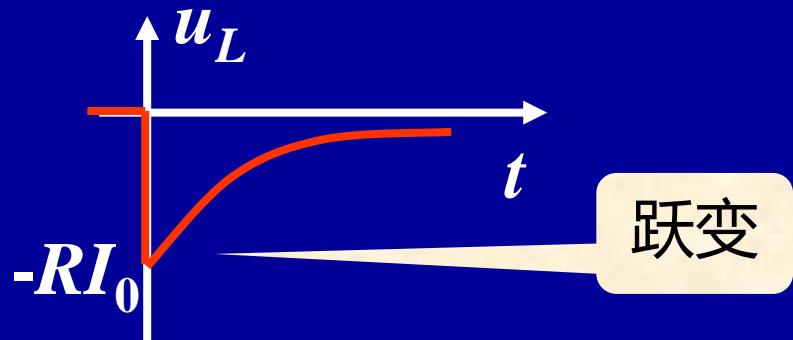
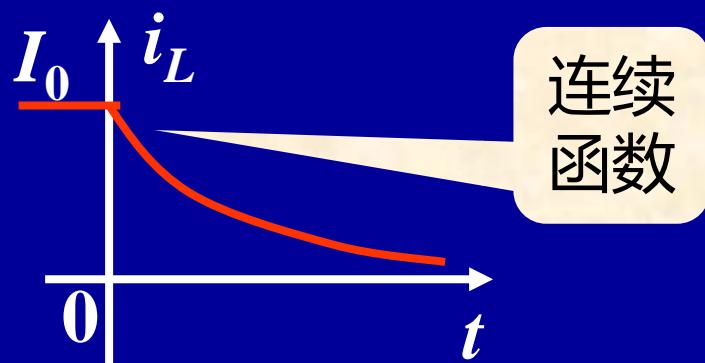
得  $i(t) = I_0 e^{pt} = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad t \geq 0$

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad t \geq 0$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{t}{L/R}}$$

从以上式子可以得出：

(1) 电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数；



(2) 响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与  $L/R$  有关；

令  $\tau = L/R$  , 称为一阶RL电路时间常数

$$[\tau] = \left[ \frac{L}{R} \right] = \left[ \frac{\text{亨}}{\text{欧}} \right] = \left[ \frac{\text{韦}}{\text{安}\cdot\text{欧}} \right] = \left[ \frac{\text{伏}\cdot\text{秒}}{\text{安}\cdot\text{欧}} \right] = [\text{秒}]$$

$$\tau = L/R \quad p = \frac{-1}{L/R} = \frac{-1}{\tau}$$

时间常数  $\tau$  的大小反映了电路过渡过程时间的长短

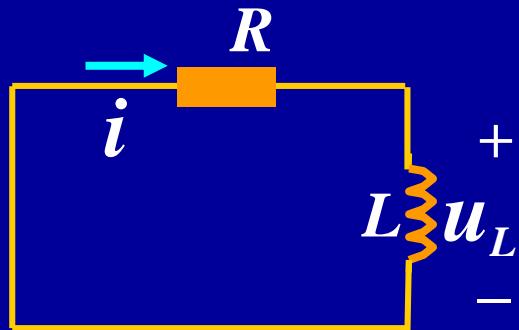
$\tau$  大  $\rightarrow$  过渡过程时间长       $\tau$  小  $\rightarrow$  过渡过程时间短

物理含义  $\longrightarrow$  电流初值  $i(0)$  一定：

$L$  大     $W = Li^2/2$  起始能量大                            } 放电慢  
 $R$  小     $P = Ri^2$  放电过程消耗能量小 }  $\tau$  大

(3) 能量关系  $\longrightarrow$  电感不断释放能量被电阻吸收，

直到全部消耗完毕.



设  $i_L(0^+) = I_0$

电感放出能量:  $\longrightarrow$

$$\frac{1}{2} L I_0^2$$

电阻吸收（消耗）能量:  $\longrightarrow$

$$W_R = \int_0^\infty i^2 R dt = \int_0^\infty (I_0 e^{-\frac{t}{L/R}})^2 R dt$$

$$= I_0^2 R \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{L/R}} dt = I_0^2 R \left( -\frac{L/R}{2} e^{-\frac{2t}{L/R}} \right) \Big|_0^\infty = \frac{1}{2} L I_0^2$$

## 小结

1. 一阶电路的零输入响应是由储能元件的初值引起的响应，都是由初始值衰减为零的指数衰减函数。

$$y(t) = y(0^+) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

RC 电路

$$u_C(0^+) = u_C(0^-)$$

RL 电路

$$i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

2. 衰减快慢取决于时间常数  $\tau$

RC 电路

$$\tau = RC ,$$

RL 电路

$$\tau = L/R$$

$R$  为与动态元件相连的一端口电路的等效电阻

3. 同一电路中所有响应具有相同的时间常数。

4. 一阶电路的零输入响应和初始值成正比，称为零输入线性。

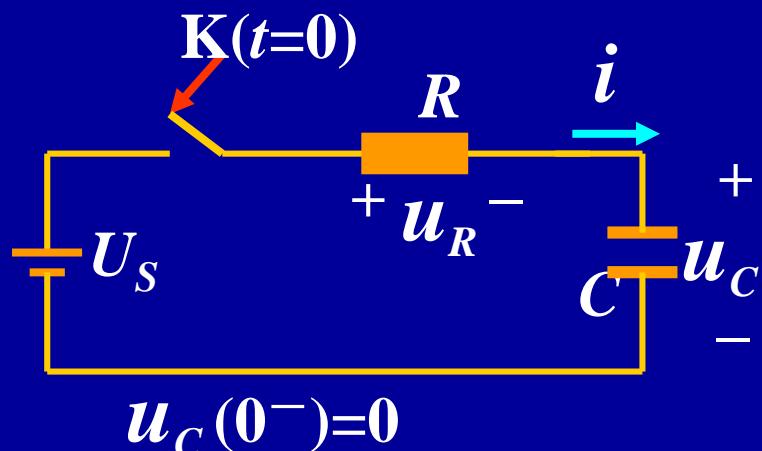
## 5.3 一阶电路的零状态响应

零状态响应

→ 动态元件初始能量为零，由 $t > 0$  电路中外加输入激励作用所产生的响应。

### 1. $RC$ 电路的零状态响应

列方程：



$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s$$

非齐次线性常微分方程

齐次方程通解

非齐次方程特解

解答形式为：  $u_c = u_c' + u_c''$

$u'_C$  → 特解 (强制分量, 稳态分量)

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s \quad \text{的特解} \rightarrow u'_C = U_s$$

与输入激励的变化规律有关, 为电路的稳态解

$u''_C$  → 通解 (自由分量, 暂态分量)

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad \text{的通解} \rightarrow u''_C = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

变化规律由电路参数和结构决定

全解  $u_C(t) = u'_C + u''_C = U_s + Ae^{-\frac{t}{RC}}$

由初始条件  $u_C(0^+) = 0$  定积分常数  $A$

$$u_C(0^+) = A + U_s = 0 \rightarrow A = -U_s$$

$$u_c = U_s - U_s e^{-\frac{t}{RC}} = U_s (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t \geq 0)$$

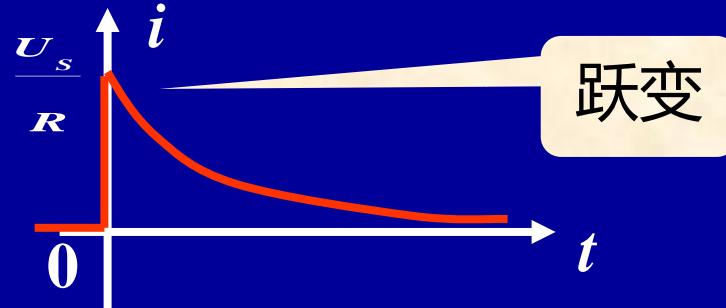
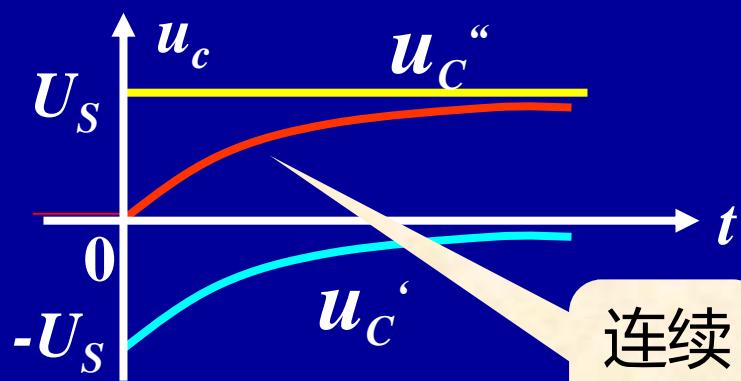
从以上式子可以得出：

$$i = C \frac{du_c}{dt} = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

(1) 电压、电流是随时间按同一指数规律变化的函数；  
电容电压由两部分构成：

稳态分量（强制分量）

+ 暂态分量（自由分量）

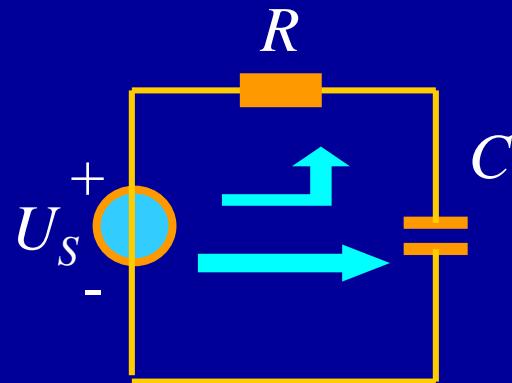


(2) 响应变化的快慢，由时间常数 $\tau = RC$ 决定； $\tau$ 大，充电慢， $\tau$ 小充电就快。

(3) 响应与外加激励成线性关系；

(4) 能量关系

电容储存： $\frac{1}{2}CU_s^2$



电源提供能量： $\int_0^\infty U_s i dt = U_s q = CU_s^2$

电阻消耗  $\int_0^\infty i^2 R dt = \int_0^\infty \left(\frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R dt = \frac{1}{2} CU_s^2$

电源提供的能量一半消耗在电阻上，  
一半转换成电场能量储存在电容中。

例

$t=0$ 时，开关K闭合，已知  $u_C(0^-) = 0$ ，求（1）电容电压和电流，（2） $u_C = 80V$ 时的充电时间t。

解

（1）这是一个RC电路零状态响应问题

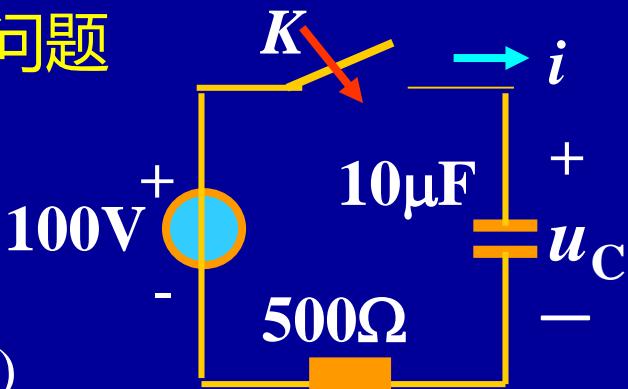
$$\tau = RC = 500 \times 10^{-5} = 5 \times 10^{-3} s$$

$$u_c = U_s (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = 100(1 - e^{-200t}) V \quad (t \geq 0)$$

$$i = C \frac{du_c}{dt} = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = 0.2 e^{-200t} A$$

（2）设经过 $t_1$ 秒， $u_C = 80V$

$$80 = 100(1 - e^{-200t_1}) \rightarrow t_1 = 8.045 ms$$



## 2. RL电路的零状态响应

已知  $i_L(0^-) = 0$ , 电路方程为:

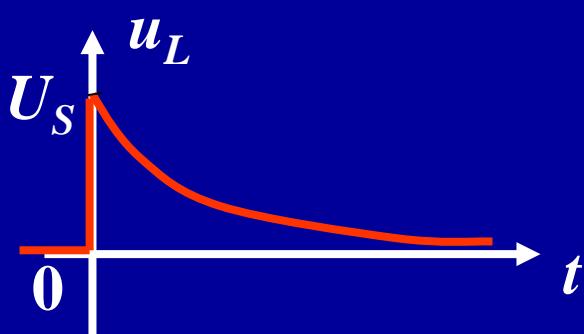
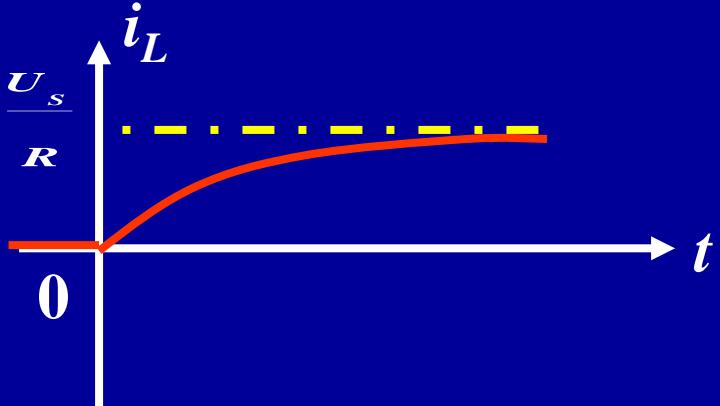
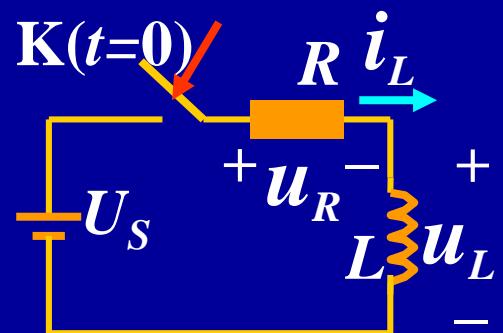
$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = U_s$$

$$i_L = i'_L + i''_L = \frac{U_s}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

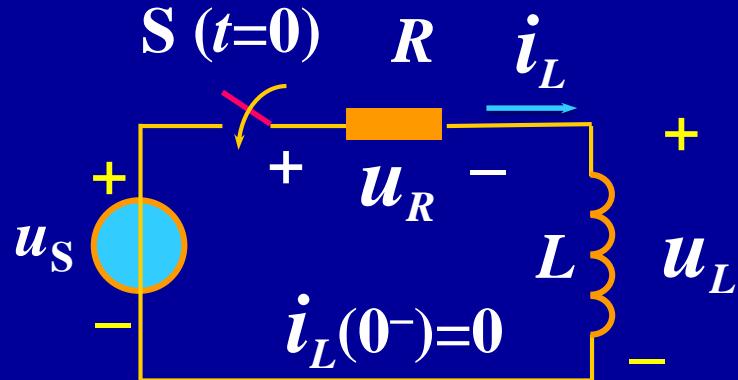
$$i_L(0^+) = 0 \rightarrow A = -\frac{U_s}{R}$$

$$i_L = \frac{U_s}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

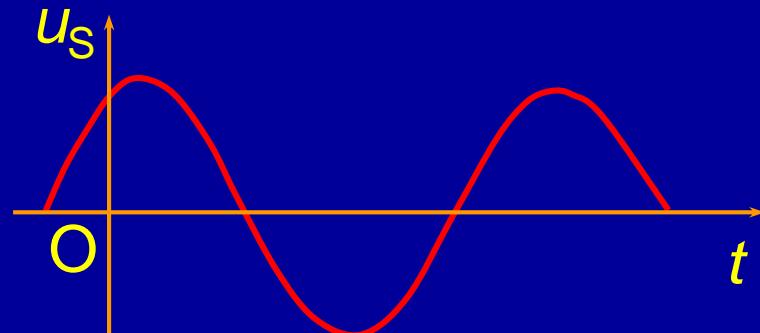
$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = U_s e^{-\frac{R}{L}t}$$



### 3. 正弦电源激励下的零状态响应(以RL电路为例)



$$u_s = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \text{ V}$$



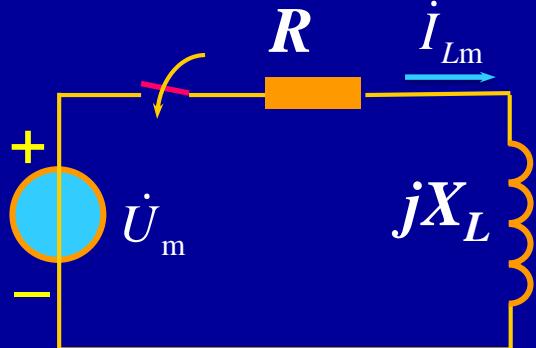
$$Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$i_L = i_L' + i_L'' = i_L' + A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

强制分量(稳态)

自由分量(暂态)

用相量法计算稳态解  $i_L'$ :



$$i_{Lm} = \frac{\dot{U}_m}{R + jX_L} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \angle \Psi_u - \varphi$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R} \quad I_{Lm} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

用待定系数法计算稳态解  $i_L'$ :

$$i_L' = I_{Lm} \sin(\omega t + \Psi_i) \quad Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$RI_{Lm} \sin(\omega t + \Psi_i) + \omega LI_{Lm} \cos(\omega t + \Psi_i) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$I_{Lm} \sqrt{R^2 + X_L^2} \left[ \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \sin(\omega t + \Psi_i) + \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \cos(\omega t + \Psi_i) \right] = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$I_{Lm} \sin(\omega t + \Psi_i + \varphi) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$\sin \varphi = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \quad \cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R} \quad I_{Lm} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

**定常数**       $i_L = i_L' + i_L'' = I_{Lm} \sin(\omega t + \Psi_u - \varphi) + A e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$i_L(0^+) = 0 = I_{Lm} \sin(\Psi_u - \varphi) + A$$

$$A = -I_{Lm} \sin(\Psi_u - \varphi)$$

解答为

$$i_L = I_{Lm} \sin(\omega t + \Psi_u - \varphi) - I_{Lm} \sin(\Psi_u - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

**讨论：**

(1)  $\Psi_u - \varphi = 0^\circ$ , 即合闸时  $\Psi_u = \varphi$

$A=0$  无暂态分量

$$i_L = I_{Lm} \sin(\omega t + \Psi_u - \varphi)$$

合闸后，电路直接进入稳态，不产生过渡过程。

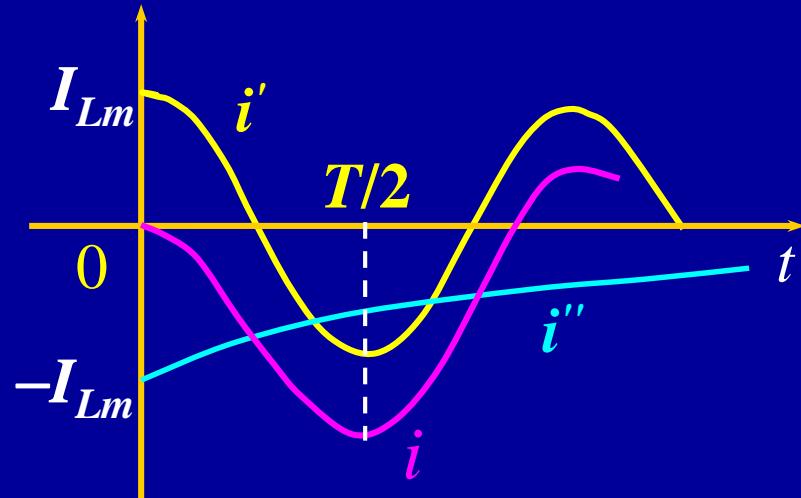
(2)  $\Psi_u - \varphi = \pm\pi/2$  即  $\Psi_u = \varphi \pm \pi/2$

$$A = \mp I_{Lm}$$

$$i_L'' = \mp I_{Lm} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_L = I_{Lm} \sin(\omega t + \Psi_u - \varphi) \mp I_{Lm} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\Psi_u = \varphi + \pi/2$  时波形为：



$$|i_{\max}| \leq 2I_{Lm}$$

$$\tau \rightarrow \infty \quad i_{L\max} = 2I_{Lm}$$

最大电流出现在合闸后半个周期时  $t = T/2$ 。

## 5.4 一阶电路的全响应

### 1. 全响应

电路的初始状态不为零，同时又有外加激励源作用时电路中产生的响应。

#### 全响应

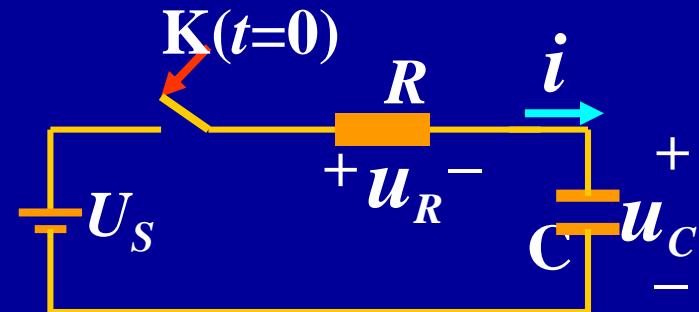
以RC电路为例，电路微分方程：

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s$$

解答为  $u_C(t) = u_C' + u_C''$

$$\begin{cases} \text{稳态解 } u_C' = U_s \\ \text{暂态解 } u_C'' = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

$$\tau = RC$$



$$u_C(0^-) = U_0$$

由起始值定A

$$u_C(0^-) = U_0$$

$$u_C(0^+) = A + U_s = U_0$$

$$\therefore A = U_0 - U_s$$

$$u_C = U_S + A e^{\frac{-t}{\tau}} = U_S + (U_0 - U_S) e^{\frac{-t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

强制分量(稳态解)

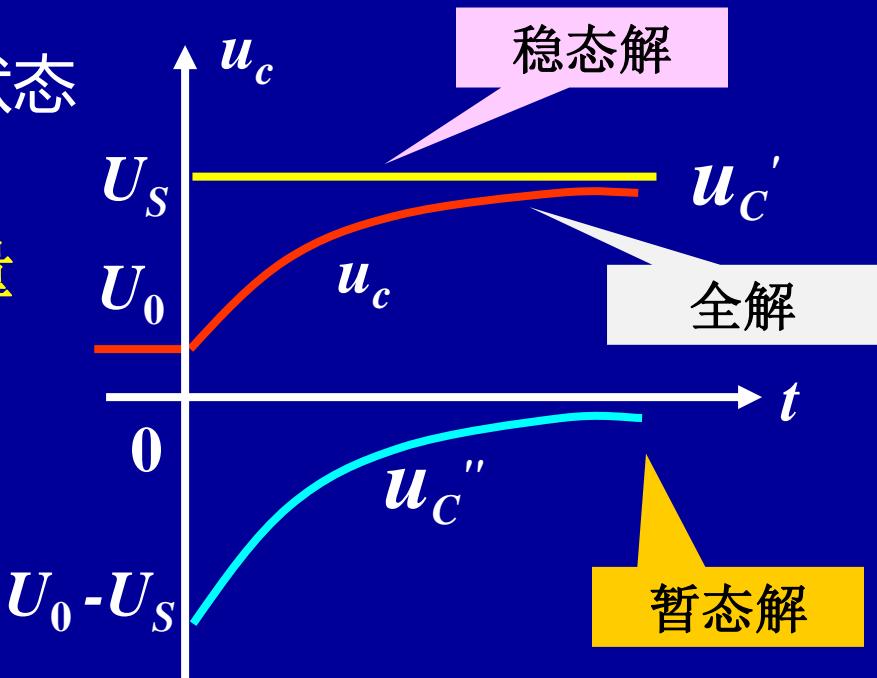
自由分量(暂态解)

## 2. 全响应的两种分解方式

(1) 着眼于电路的两种工作状态

全响应 = 稳态分量 + 暂态分量

物理概念清晰



(2) 着眼于因果关系

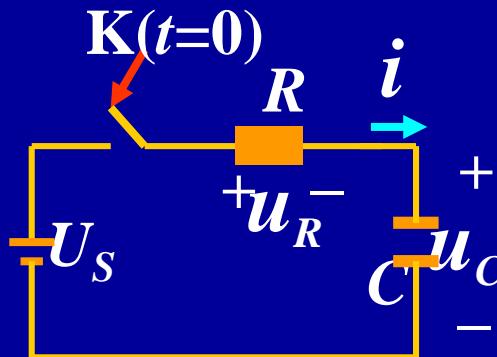
便于叠加计算

$$u_C = U_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0)$$

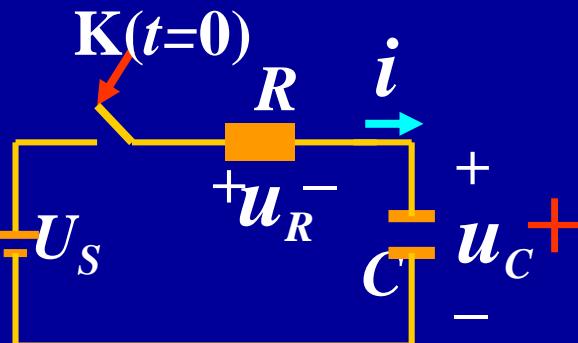
零状态响应

零输入响应

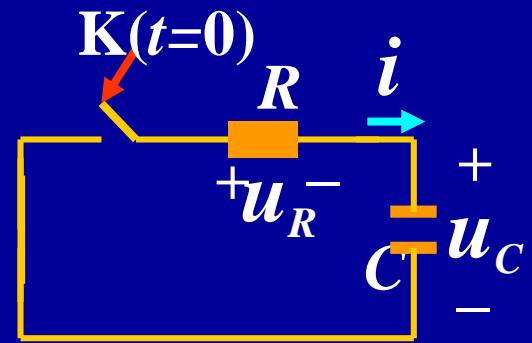
全响应 = 零状态响应 + 零输入响应



$$u_c(0^-) = U_0$$



$$u_c(0^-) = 0$$

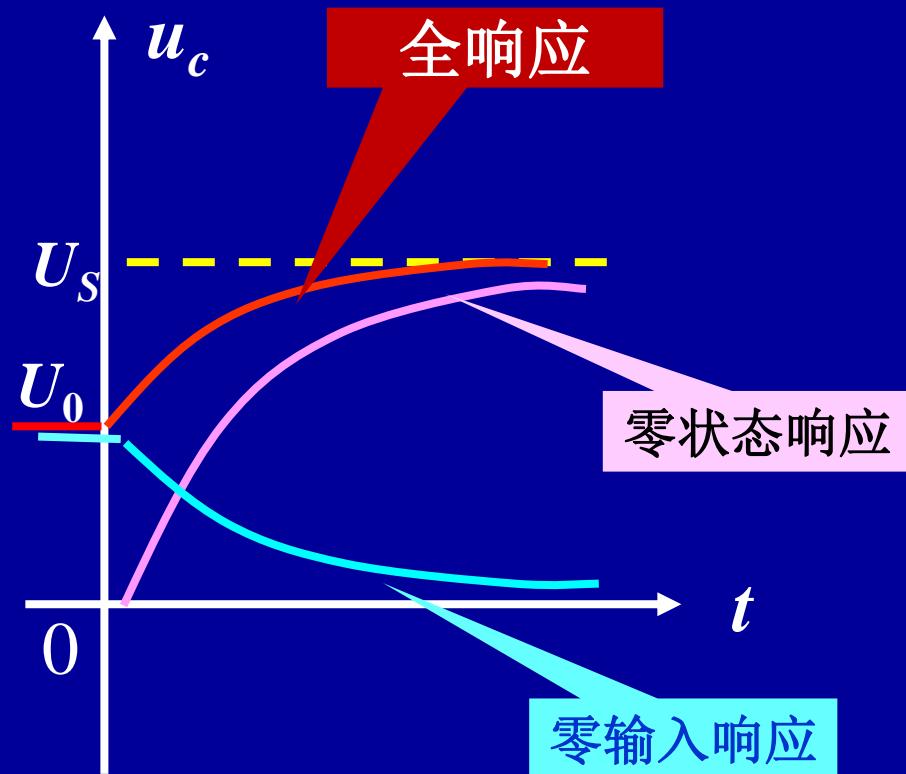


$$u_c(0^-) = U_0$$

$$u_C = U_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0)$$

零状态响应

零输入响应



## 5.5 三要素法

一阶电路的数学模型是一阶微分方程:  $a\frac{df}{dt} + bf = c$

其解答一般形式为:  $f(t) = f(\infty) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

令  $t = 0^+$        $f(0^+) = f(\infty)|_{0^+} + A$



直流激励时:

$$f(\infty)|_{0^+} = f(\infty)$$

$$f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)|_{0^+}]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

三要素	$\begin{cases} f(\infty) & \text{稳态解} \\ f(0^+) & \text{初始值} \\ \tau & \text{时间常数} \end{cases}$	$\rightarrow$ 用 $t \rightarrow \infty$ 的稳态电路求解
		$\rightarrow$ 用 $0^+$ 等效电路求解
		$\rightarrow$ 等效 R 电路求解

分析一阶电路问题转为求解电路的三个要素的问题

例3

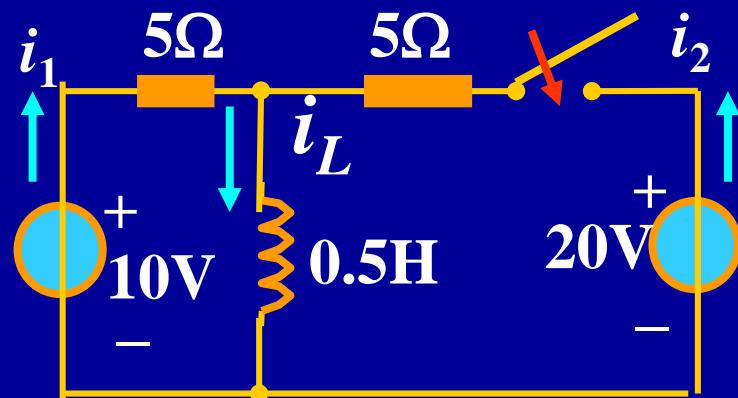
$t=0^-$ 时，开关闭合，求 $t>0$ 后的 $i_L$ 、 $i_1$ 、 $i_2$

解：三要素

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 10 / 5 = 2A$$

$$i_L(\infty) = 10 / 5 + 20 / 5 = 6A$$

$$\tau = L / R = 0.5 / (5 // 5) = 1 / 5s$$



应用三要素公式  $i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0^+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$i_L(t) = 6 + (2 - 6)e^{-5t} = 6 - 4e^{-5t} \quad t \geq 0$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = 0.5 \times (-4e^{-5t}) \times (-5) = 10e^{-5t}V$$

$$i_1(t) = (10 - u_L) / 5 = 2 - 2e^{-5t}A$$

$$i_2(t) = (20 - u_L) / 5 = 4 - 2e^{-5t}A$$

三要素为：

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 10 / 5 = 2A$$

$$i_L(\infty) = 10 / 5 + 20 / 5 = 6A$$

$$\tau = L / R = 0.5 / (5 / 5) = 1 / 5s$$

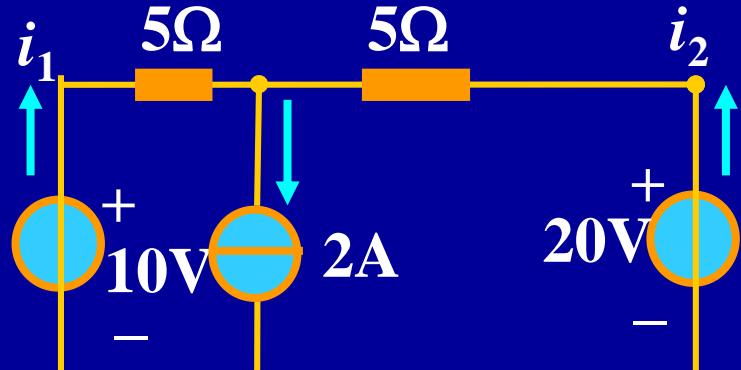
$$i_1(0^+) = \frac{(10 - 20)}{10} + 1 = 0A$$

$$i_2(0^+) = \frac{(20 - 10)}{10} + 1 = 2A$$

$$i_L(t) = 6 + (2 - 6)e^{-5t} = 6 - 4e^{-5t} \quad t \geq 0$$

$$i_1(t) = 2 + (0 - 2)e^{-5t} = 2 - 2e^{-5t} A$$

$$i_2(t) = 4 + (2 - 4)e^{-5t} = 4 - 2e^{-5t} A$$

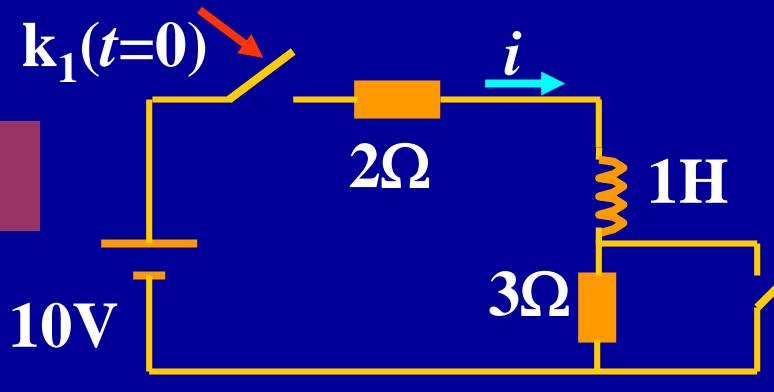


0<sup>+</sup>等效电路

$$i_1(0^+) = 10 / 5 = 2A$$

$$i_2(0^+) = 20 / 5 = 4A$$

例6



已知：电感无初始储能  
 $t = 0$  时合  $k_1$ ,  $t = 0.2s$  时合  $k_2$   
求两次换路后的电感电流  $i(t)$ 。

解：

$$0 < t < 0.2s$$

$$t > 0.2s$$

$$i(0^+) = i(0^-) = 0$$

$$i(0.2^-) = 2 - 2e^{-5 \times 0.2} = 1.26$$

$$\tau_1 = L / R = 1 / 5 = 0.2 \text{ s}$$

$$i(0.2^+) = 1.26A$$

$$i(\infty) = 10 / 5 = 2A$$

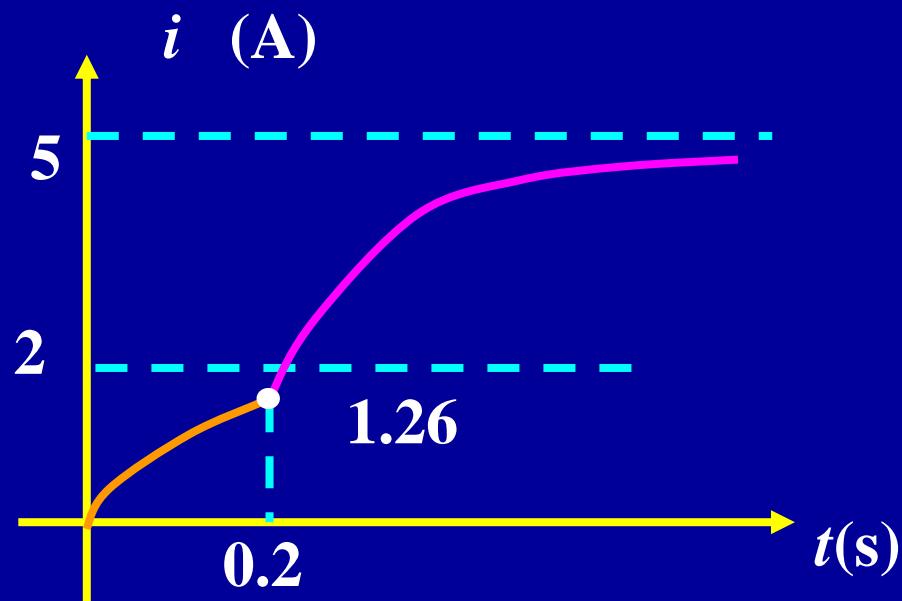
$$\tau_2 = L / R = 1 / 2 = 0.5$$

$$i(t) = 2 - 2e^{-5t} \text{ A}$$

$$i(t) = 5 - 3.74e^{-2(t-0.2)} \text{ A}$$

$$i = 2 - 2e^{-5t} \quad (0 < t \leq 0.2\text{s})$$

$$i = 5 - 3.74e^{-2(t-0.2)} \quad (t \geq 0.2\text{s})$$



# 5.6 阶跃函数和一阶电路的阶跃响应

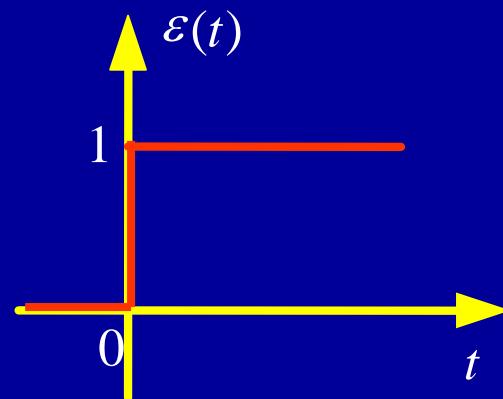
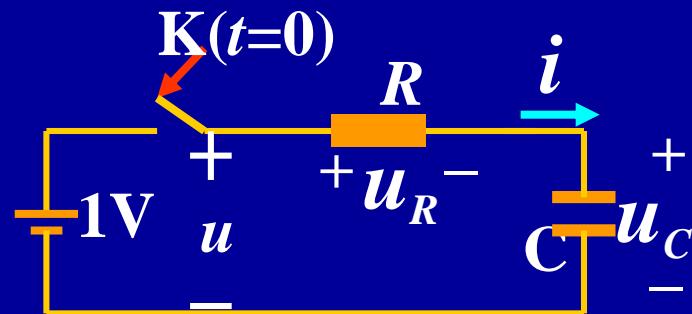
## 1、阶跃函数

### 1) 单位阶跃函数

对于图示零状态电路中，开关 K 的动作引起电压  $u(t)$  的变化，可以用单位阶跃函数  $\varepsilon(t)$  来表示。

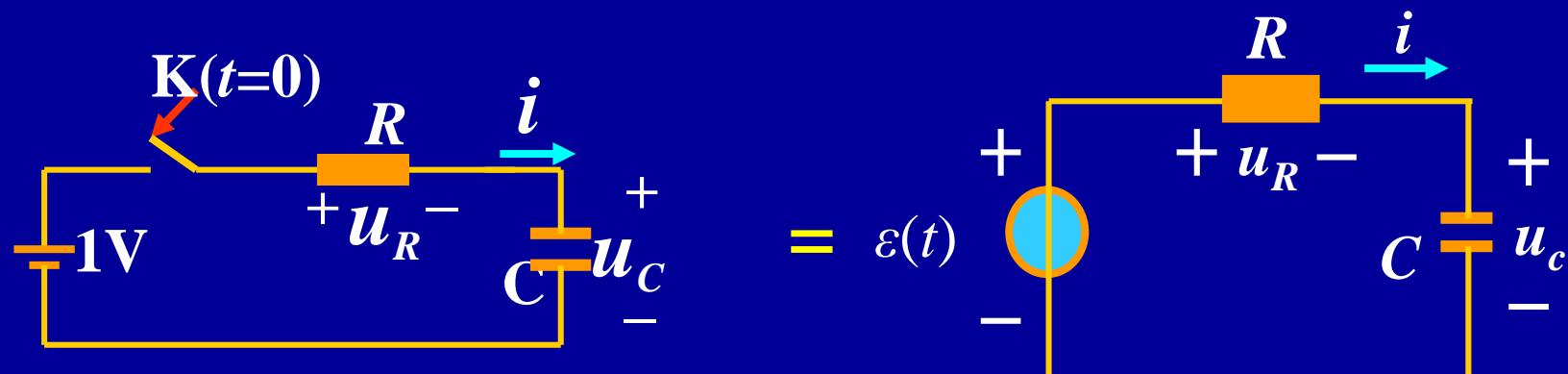
单位阶跃函数的定义式为：

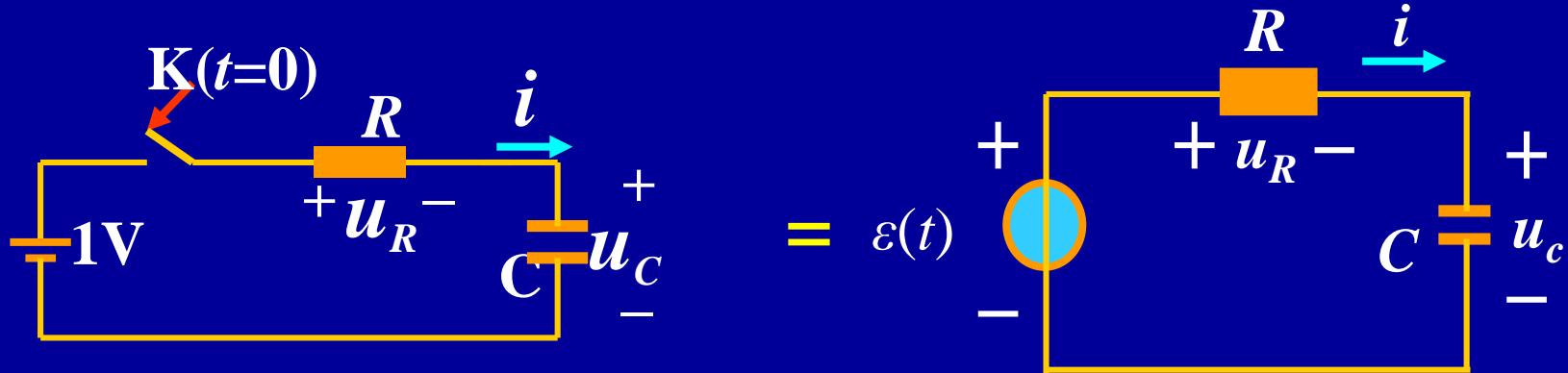
$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0_-) \\ 1 & (t \geq 0_+) \end{cases}$$



函数在  $t=0$  处出现一个台阶形跃变，且台阶的高度为1个单位，故称它为单位阶跃函数

用单位阶跃函数来替代开关K的动作，图所示零状态电路就可以用下图电路来描述





零状态电路，开关K闭合之前即 $t \leq 0$ 时，电压 $u(t)=0V$ ；开关K闭合之后即 $t \geq 0_+$ 时，电压 $u(t) = 1V$ 。由于1V的电压源是突然加上去的，可以看作是一个单位阶跃函数激励

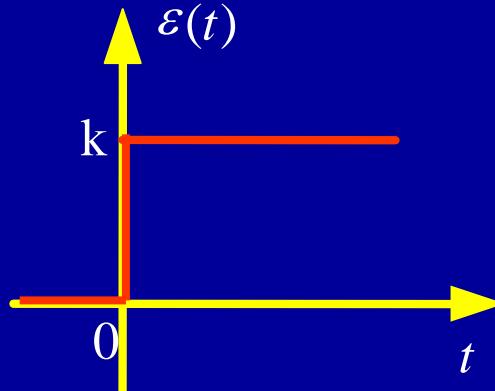
由于单位阶跃函数能表达电路中开关K的动作，它可以作为这一物理过程的数学模型，所以也称它为开关函数

## 2) 阶跃函数

阶跃函数用  $k\varepsilon(t)$  来表示  
k为常数

阶跃函数的定义式为：

$$k\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0_-) \\ k & (t \geq 0_+) \end{cases}$$



阶跃函数的波形与单位阶跃函数的图是一样的，  
只不过它的高度不是1 而是k

说明

如果电压源  $u_s$  在  $t=0$  时接入

如果电流源  $i_s$  在  $t=0$  时接入

如果电源激励都是直流时，  $u_s$  或  $i_s$  都是常数，  $u_s\varepsilon(t)$  或  $i_s\varepsilon(t)$  就是阶跃函数

其表达式为：

$$u_s(t) = u_s\varepsilon(t)$$

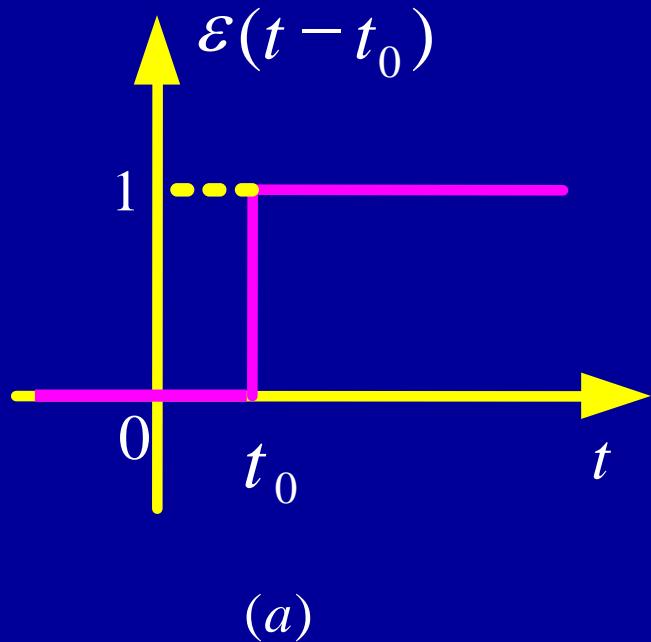
$$i_s(t) = i_s\varepsilon(t)$$

### 3) 延迟单位阶跃函数

延迟单位阶跃函数用 $\varepsilon(t-t_0)$ 来表示

延迟单位阶跃函数的定义式为：

$$\varepsilon(t-t_0) = \begin{cases} 0 & (t \leq t_{0_-}) \\ 1 & (t \geq t_{0_+}) \end{cases}$$

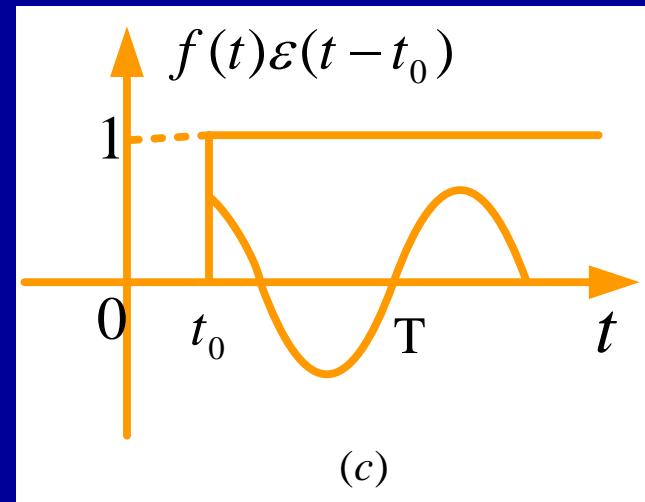
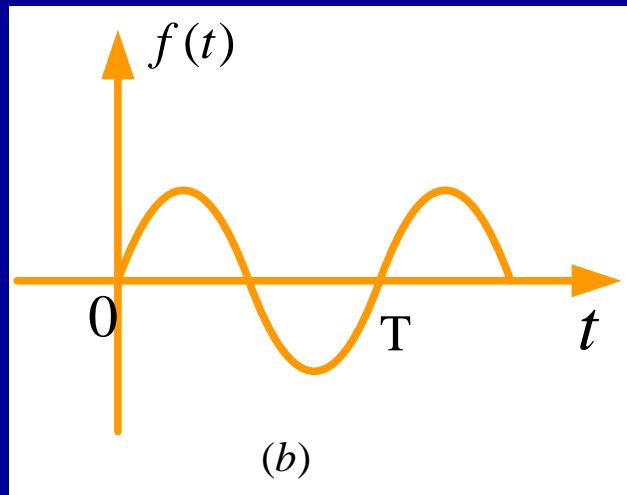


函数在 $t=t_0$ 处出现一个台阶形跃变，且台阶的高度为1个单位，它比单位阶跃函数的出现时间延迟了 $t_0$ ，故称它为——**延迟单位阶跃函数**

#### 4) 单位阶跃函数和延迟单位阶跃函数的作用

$$f(t) = \sin\omega t \cdot \varepsilon(t)$$

$$f(t) = \sin\omega t \cdot \varepsilon(t - t_0)$$

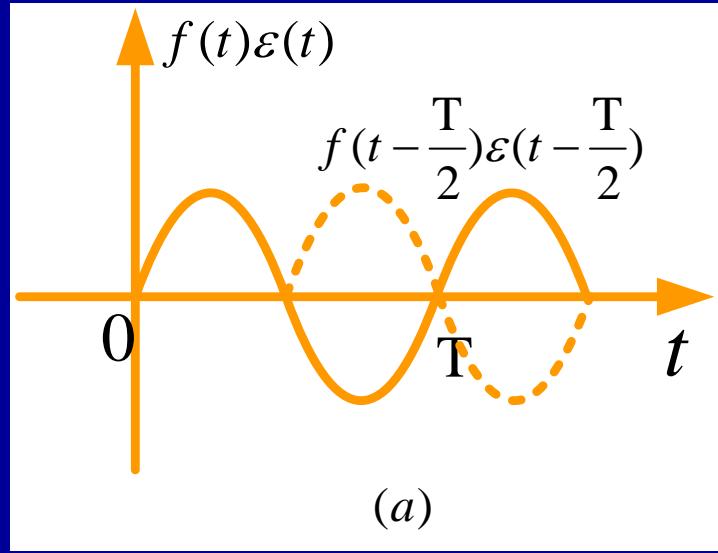
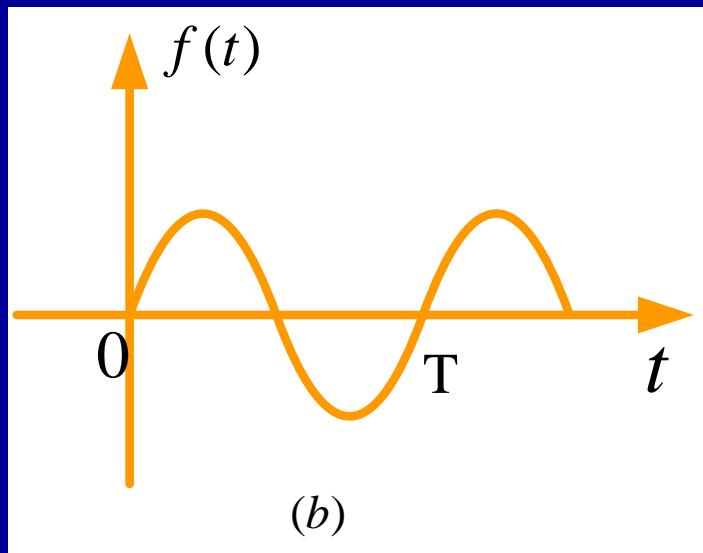


(1) 延迟单位阶跃函数乘以某已知函数的作用，是在任意时刻“起始”某一个函数

(2)用某已知函数与该函数的延迟函数相加，也可以改变已知函数的波形

$$f(t) = \sin \omega t \cdot \varepsilon(t)$$

$$f(t - \frac{T}{2})\varepsilon(t - \frac{T}{2})$$

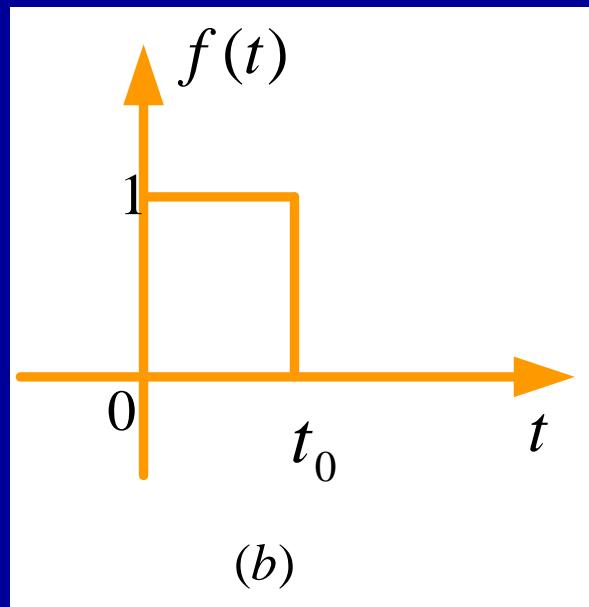


单个正弦波的前半周表示为：

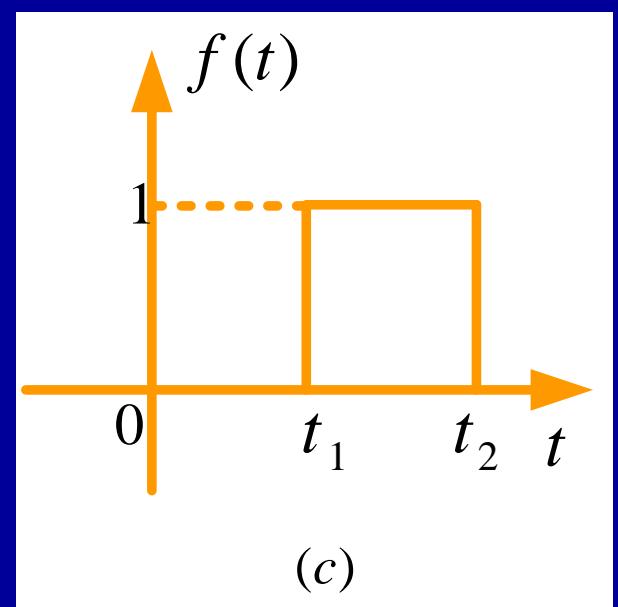
$$f(t)\varepsilon(t) + f(t - \frac{T}{2})\varepsilon(t - \frac{T}{2})$$

(3)用单位阶跃函数与延迟单位阶跃函数相减，可以组成某些特殊的波形

$$\varepsilon(t) - \varepsilon(t - t_0)$$



$$\varepsilon(t-t_1) - \varepsilon(t-t_2)$$



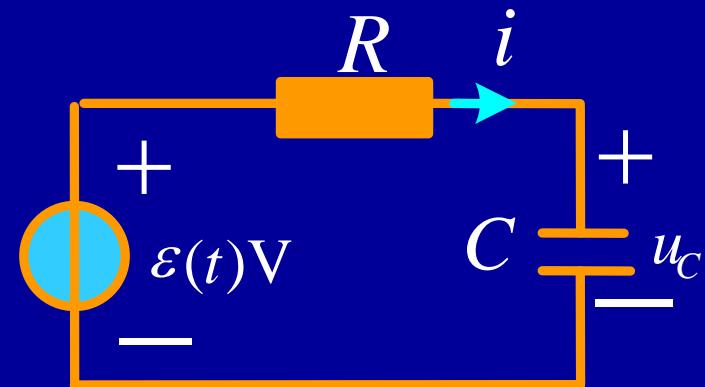
利用类似的方法还可以组成许多的特殊波形

## 2、一阶电路的阶跃响应

三要素法:  $u_C(0_+)=u_C(0_-)=0V$   $u_C(\infty)=1V$   $\tau=RC$

电容电压为:

$$u_C(t) = 1 + [0 - 1]e^{-\frac{t}{\tau}} = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)$$



说明:

电容电压响应表达式的后面乘以 $\varepsilon(t)$ , 其作用是确定响应的“起始”时间为 $0_+$

如果要计算电源为任意值k的阶跃响应, 只要在单位阶跃响应前面乘以k就行了

## 延迟单位阶跃响应:

电源电压的表达式含  $\varepsilon(t-t_0)$  V。其响应的表达式将单位阶跃响应中的  $t$  改变为  $t-t_0$ , 表示时间上的延时

例如:  $RC$  串联电路的延迟单位阶跃响应

$$u_C(t-t_0) = (1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}) \varepsilon(t-t_0)$$

## 说明:

电容电压响应表达式的后面乘以  $\varepsilon(t-t_0)$ , 其作用是确定响应的“起始”时间为  $t_{0+}$

如果要计算电源为任意值  $k$  的阶跃响应, 只要在延迟单位阶跃响应前面乘以  $k$  就行了

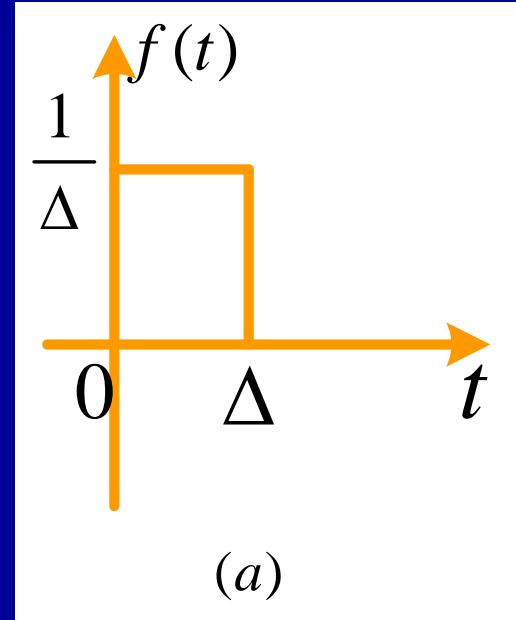
# 5.10 冲激函数和一阶电路的冲激响应

## 1. 冲激函数

### 1) 单位脉冲函数

单位脉冲函数的定义为：

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0_-) \\ \frac{1}{\Delta} & (0_- \leq t \leq \Delta_+) \\ 0 & (t > \Delta_+) \end{cases}$$



在  $t = 0_+$  处出现一个矩形脉冲，脉冲的宽度为  $\Delta$ ，

脉冲的高度为  $\frac{1}{\Delta}$  脉冲波形与横轴所包围的面积为 1 即：

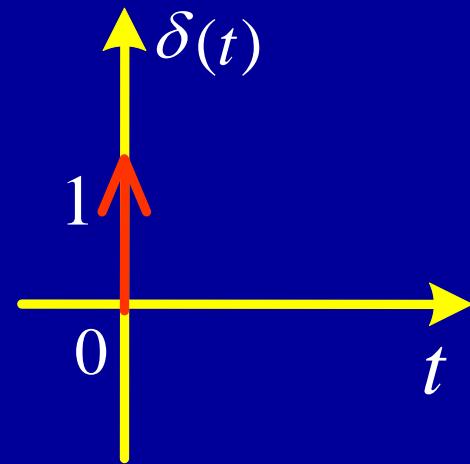
称为单位脉冲函数

$$S = \int_0^\infty f(t)dt = \Delta \cdot \frac{1}{\Delta} = 1$$

## 2) 单位冲激函数和冲激函数

单位冲激函数用 $\delta(t)$  表示，其定义为：

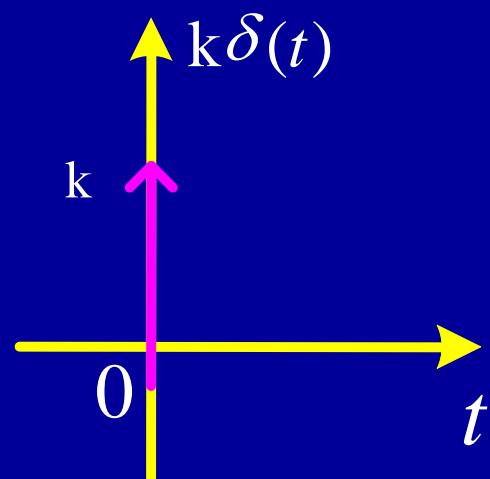
$$\delta(t) = \begin{cases} \delta(t) = 0 & (t \neq 0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$



$t=0$ 时刻出现一个向上的冲激量，冲激量的宽度很窄  
出现的时间很短，冲激量的高度很高  
用一个向上的箭头来表示它，并在其旁边标明一个数字“1”  
表示冲激量所包围的面积为1，它表明了冲激量的强度

如果单位冲激函数 $\delta(t)$ 前面的系数不是1而是一个任意常数k，我们称它为**冲激函数**，其表达式为 $k\delta(t)$ ，如图所示，其旁边标明一个数字“k”，表示冲激量所包围的面积为k，它表明了冲激量的强度。

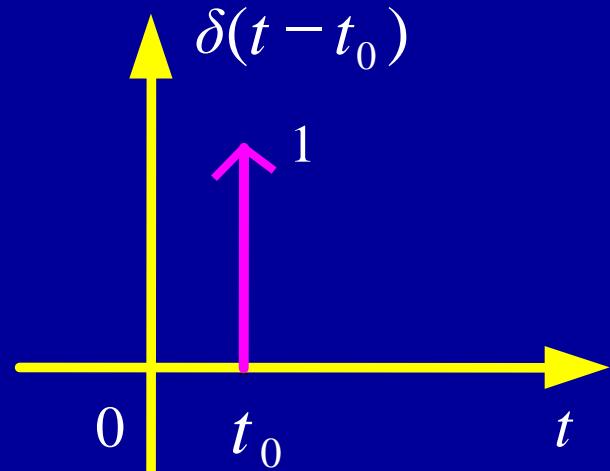
$$k\delta(t) = \begin{cases} k\delta(t) = 0 & (t \neq 0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} k\delta(t)dt = k \end{cases}$$



### 3) 单位延时冲激函数和延时冲激函数

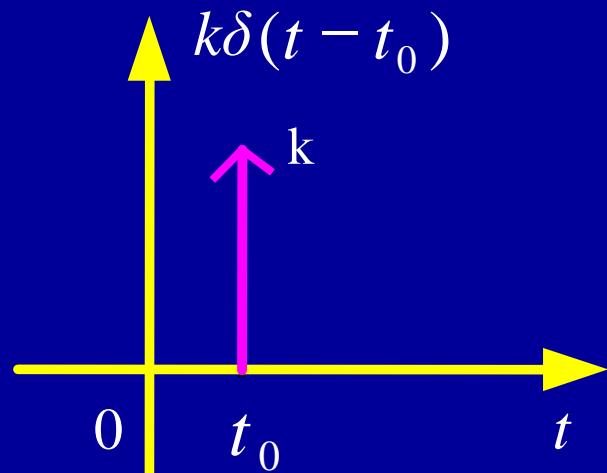
如果单位冲激函数 $\delta(t)$ 的出现时间不是0而是 $t_0$ , 我们称它为延迟单位冲激函数, 其表达式为 $\delta(t - t_0)$ 。

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \delta(t - t_0) = 0 & (t \neq t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \end{cases}$$



如果冲激函数 $k\delta(t)$ 的出现时间不是0而是 $t_0$ , 我们称它为延迟冲激函数, 其表达式为 $k\delta(t - t_0)$ 。

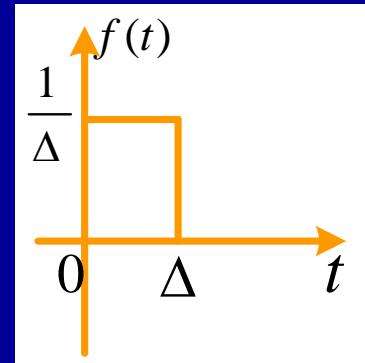
$$k\delta(t - t_0) = \begin{cases} k\delta(t - t_0) = 0 & (t \neq t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} k\delta(t - t_0) dt = k \end{cases}$$



## 2. 阶跃函数、脉冲函数、冲激函数的关系

单位脉冲函数的脉冲宽度 $\Delta$ 趋近于零，取极限就是冲激函数。

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} f(t) = \delta(t)$$



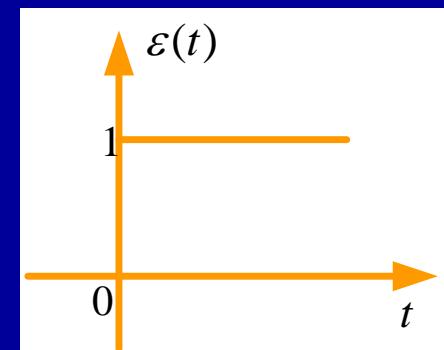
当单位脉冲函数的脉冲宽度 $\Delta$ 趋近于零，则其高度

$$\frac{1}{\Delta}$$

趋于无限大，单位脉冲函数就成为单位冲激函数。

单位冲激函数在时间段 $-\infty$ 到 $t$ 的积分就是单位阶跃函数

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = \begin{cases} 0 & (t \leq 0_-) \\ 1 & (t \geq 0_+) \end{cases} = \varepsilon(t)$$



单位阶跃函数是一种理想波形的抽象：

$t=0$ 处 上升速率非常大， 在该处的微分就是一个宽度很小而高度很大的脉冲

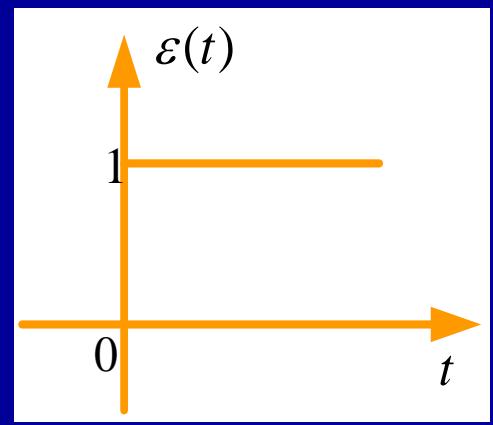
当 $t \neq 0$ 这些点的微分则等于零， 单位阶跃函数的微分就是单位冲激函数

$$\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \delta(t)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{d}{dt} p(t)$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \varepsilon(t)$$

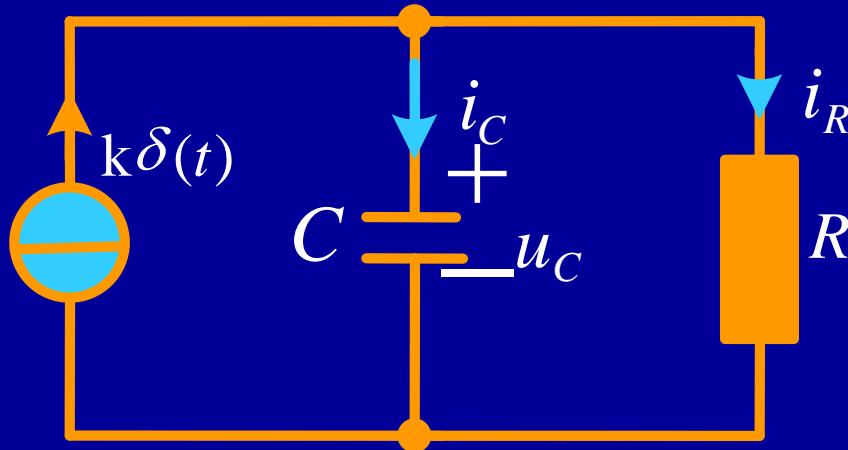
$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt \quad p(t) = \int_{-\infty}^t u(t) dt$$



### 3、一阶电路的冲激响应

#### 1) $RC$ 电路的冲激响应

如图所示电路，冲激电流源作用于 $RC$ 并联零状态电路



$t \leq 0_-$  电流源  $k\delta(t) = 0$ , 电流源相当于开路,  $u_C(0_-) = 0$ 。

$0_- < t < 0_+$  冲激电流源对电容充电, 电容储存能量,  
电容电压突然升高,  $u_C(0_+) \neq 0$ ; 也就是说, 当电路中存在冲  
激电源时, 一般情况下的换路定则  $u_C(0_-) = u_C(0_+)$  不再适用。

$t \geq 0_+$  电流源  $k\delta(t) = 0$ , 此时电流源又相当于开路, 电容通过电  
阻放电, 此时电路中的响应相当于零输入响应。

$t \geq 0+$

$$\dot{i}_C + i_R = 0$$

其微分方程:

$$C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R} = 0$$

方程的解为:

$$u_c = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

式中:

$$\tau = RC$$

为了确定积分常数A，必须知道电容电压的初始值 $u_C(0_+)$ 。

当t=0:  $i_C + i_R = k\delta(t)$

其微分方程为:

$$C \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{R} = k\delta(t)$$

$$C \frac{du_c}{dt}, \frac{u_c}{R}$$

相加等于一个冲激函数，可知

$$\frac{u_c}{R}$$

不是冲激函数，

$$C \frac{du_c}{dt}$$
 是冲激函数。



对方程 两边同时积分:

$$\int_{0_-}^{0_+} C \frac{d}{dt} u_c dt + \int_{0_-}^{0_+} \frac{u_c}{R} dt = \int_{0_-}^{0_+} k\delta(t) dt$$

$$C[u(0_+) - u(0_-)] = k$$

$$u(0_+) = \frac{k}{C}$$

由此可求得积分常数

$$\left. \begin{array}{l} u_c = A e^{-\frac{t}{\tau}} \\ u(0_+) = \frac{k}{C} \end{array} \right\} A = \frac{k}{C}$$

电容电压为:

$$u_c = \frac{k}{C} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{k}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) \text{V}$$

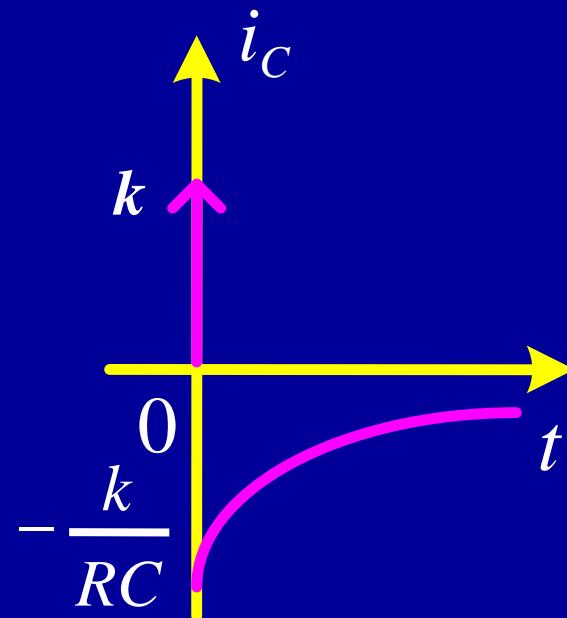
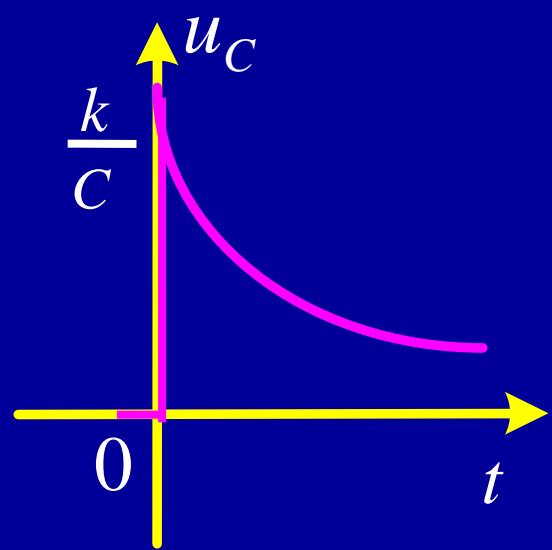
电容电流为:

$$i_c = C \frac{du_c}{dt} = k [e^{-\frac{t}{RC}} \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)] = k [\delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)] \text{A}$$

电容电压、电流的波形如图 所示。

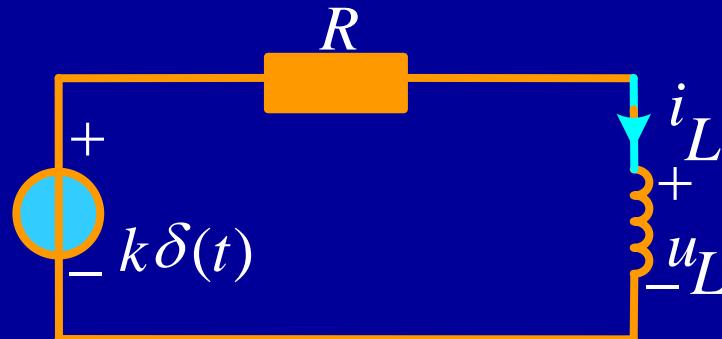
在 $t = 0$ 瞬间，冲激电流源 $k\delta(t)$ 全部流入电容，给电容充电，使电容电压发生跃变。

随后电源支路相当于开路，电容通过电阻放电，电容电压降低，放电电流逐渐减小，直至为零。



## 2) $RL$ 电路的冲激响应

冲激电压源作用于 $RL$ 串联零状态电路



$t \leq 0_-$  电压源  $k\delta(t) = 0$ , 电压源相当于短路,  $i_L(0_-) = 0$ 。

$0_- < t < 0_+$ : 冲激电压源对感提供能量, 电感储存能量, 电感电流突然增大,  $i_L(0_+) \neq 0$ ; 也就是说, 当电路中存在冲激电源时, 本章第二节推导出的一般情况下的换路定则  $i_L(0_-) = i_L(0_+)$  不再适用。

$t \geq 0_+$ : 电压源  $k\delta(t) = 0$ , 此时电压源又相当于短路, 电感通过电阻释放能量, 此时电路中的响应相当于零输入响应。

$t \geq 0_+$ : KVL方程  $u_L + u_R = 0$

$$Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = 0$$

方程的解为

$$i_L = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\tau = L/R)$$

为了确定积分常数，须计算电感电流的初始值  $i_L(0_+)$

当  $t=0$  时，电路的电流方程为：  $u_L + u_R = k\delta(t)$

$$Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = k\delta(t)$$

$Ri_L$  不是冲激函数，而  $L \frac{di_L}{dt}$  则是冲激函数

对上述方程两边同时积分：

$$\int_{0_-}^{0_+} Ri_L dt + \int_{0_-}^{0_+} L \frac{di_L}{dt} dt = \int_{0_-}^{0_+} k\delta(t) dt$$

$$L [i_L(0_+) - i_L(0_-)] = k$$

$$i(0_+) = \frac{k}{L}$$

积分常数：

$$\left. \begin{array}{l} i_L = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \\ i(0_+) = \frac{k}{L} \end{array} \right\} A = \frac{k}{L}$$

电感电流：

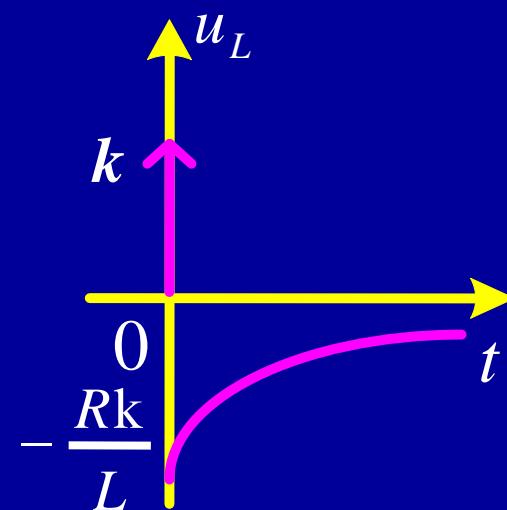
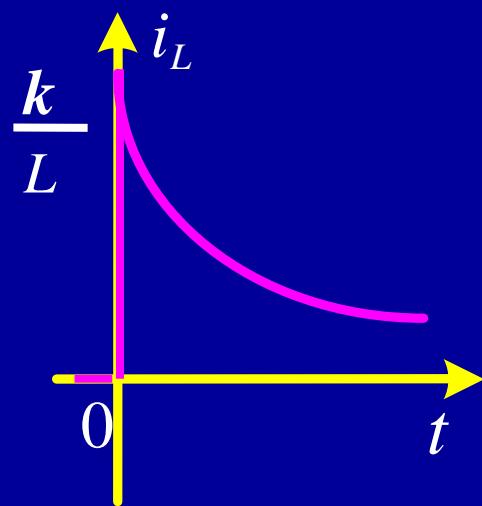
$$i_L = \frac{k}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{k}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t) \text{A}$$

电感电压：

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = k [e^{-\frac{R}{L}t} \delta(t) - \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t)] = k [\delta(t) - \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t)] \text{A}$$

电感电流、电压的波形如图所示。

在 $t=0$ 瞬间，冲激电压源 $k\delta(t)$ 全部流入电感，给电感储存磁场能量，使电感电流发生跃变。随后电源支路相当于短路，电感通过电阻释放能量，电感电压降低，放电电流逐渐减小，直至为零。



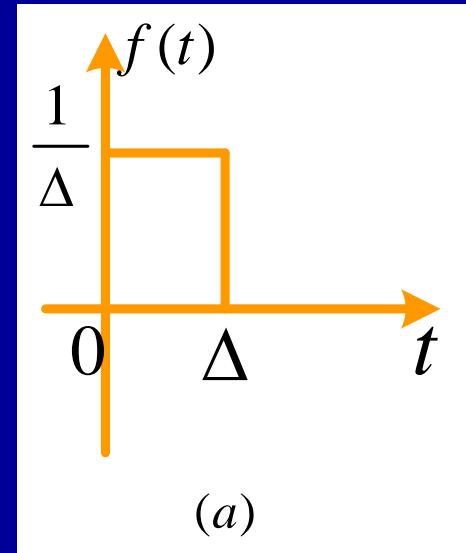
## 4、冲激响应与阶跃响应的关系

设一阶电路的阶跃响应为  $s(t)$ ，一阶电路的冲激响应为  $h(t)$ ，它们之间的关系为：

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(t)dt$$

证明：



图(a)所示的单位脉冲函数可以用两个阶跃函数之差来表示，即  
电路对单位冲激函数的响应：

$$f(t) = \frac{1}{\Delta} [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \Delta)]$$

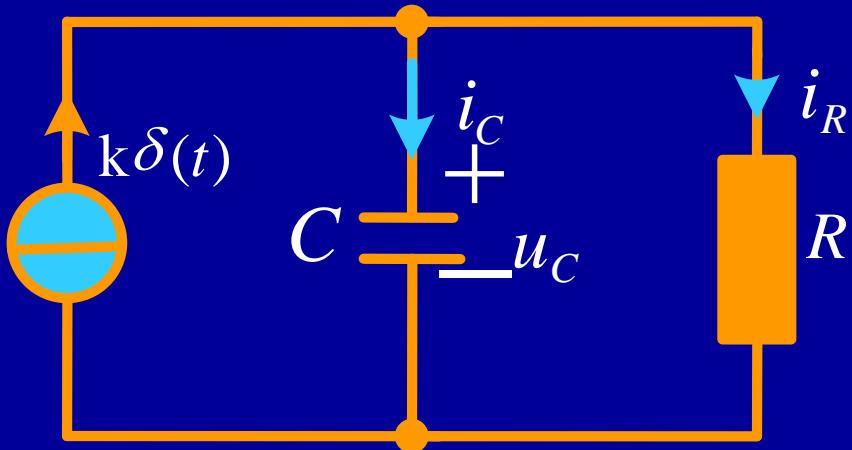
$$h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [s(t) - s(t - \Delta)]$$

应用罗彼塔法则将上式分子分母对 $\Delta$ 求导，可得：

$$h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{d[s(t) - s(t - \Delta)]}{d\Delta} = l \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{d[s(t - \Delta)]}{d(t - \Delta)} = \frac{ds(t)}{dt}$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(t) dt$$

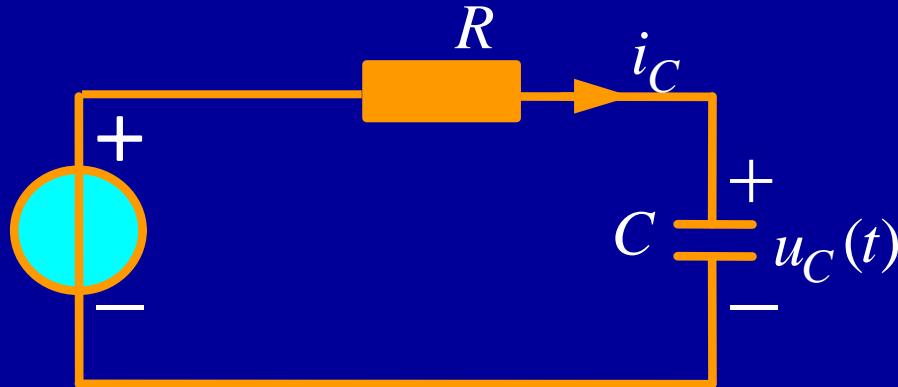
线性电路的单位阶跃响应对时间的导数就是该电路的单位冲激响应。反之，线性电路的单位冲激响应对时间的积分就是该电路的单位阶跃响应。



$$s_{uc}(t) = R(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

$$h(t) = \frac{ds_{uc}(t)}{dt} = \frac{dR(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}{dt} \varepsilon(t) + R(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\delta(t)$$

**例如：**对于计算图示电路的单位冲激响应，我们可以先用三要素法计算该电路的单位阶跃响应：



$$u_C(t) = s(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

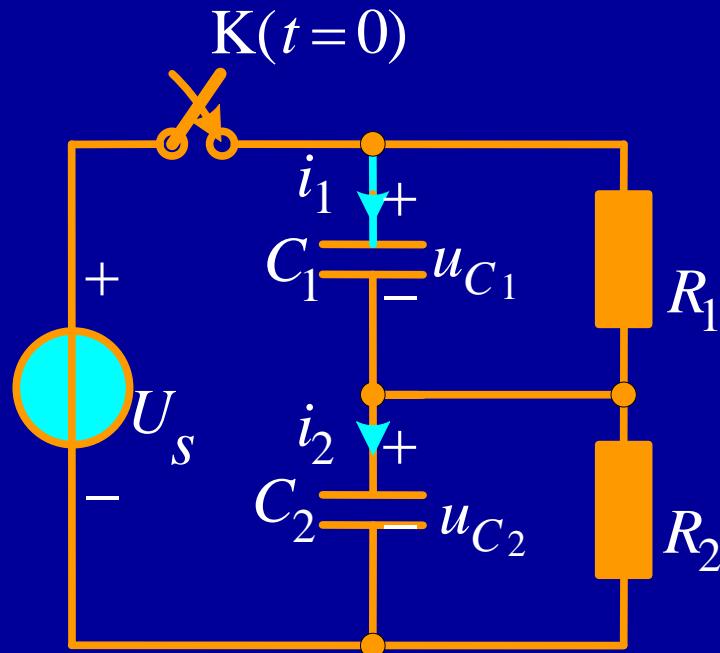
然后再用微分求其单位冲激响应：

$$\begin{aligned} u_C(t) = h(t) &= \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) \\ &= \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) + (1 - e^{-\frac{t}{RC}})\delta(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)(V) \end{aligned}$$

## 5、电容电压和电感电流的强迫跃变

### 1) 换路后由纯电容构成的回路或由电容与电压源构成的回路

图所示电路为理想电压源与零初始条件电容、电阻并联电路接通，换路后的电路有电容与电压源构成的回路，我们现在通过一个例题来分析电容电压与电流的变化规律。



**例1** 图示电路中，已知电源电压 $U_s=300V$ ,  $C_1=50\mu F$ ,  $C_2=100\mu F$ ,  $R_1=5000\Omega$ ,  $R_2=10000\Omega$ , 电容原未充电。求开关K闭合后两个电容的电压和电流的变化规律。

**解**

此电路虽然有两个电容，但是电容电压 $u_{C1}$ 、 $u_{C2}$ 只有一个  
是独立的，即只有一个独立的储能元件。

该电路还是一个一阶电路，可以用三要素法进行分析

在换路之前由于电容未充电，即 $u_{C1}(0_-)=u_{C2}(0_-)=0$

而在换路之后瞬间，电路中左边回路应满足KVL方程

$$u_{C_1}(0_+) + u_{C_2}(0_+) = U_s$$

在电压源与电容接通瞬间，电容电压发生了跃变，由电容电流与电容电压的关系分析，此时电容电流必定为冲击函数

而此时流过电阻的电流相比之下较小，可以忽略

$$i_1 = C_1 \frac{du_{C_1}}{dt} = i_2 = C_2 \frac{du_{C_2}}{dt}$$

即可以得到在换路之后瞬间有： $C_1 u_{C1}(0_+) = C_2 u_{C2}(0_+)$

也就是说，在换路之后瞬间两电容器所充的电荷量相等

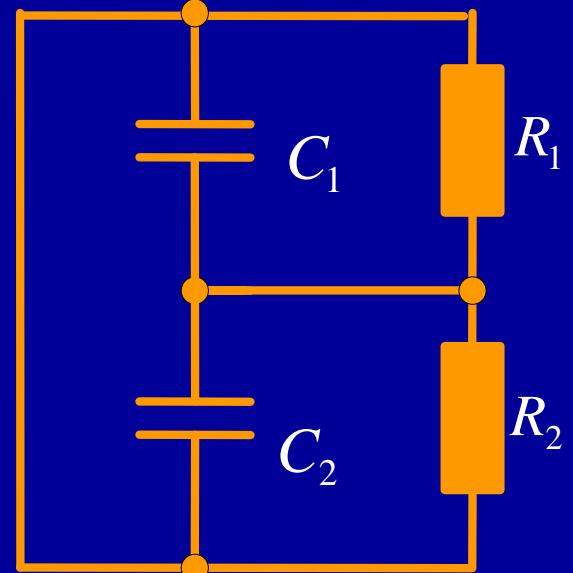
$$u_{C_1}(0_+) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U_s = 200(V)$$

$$u_{C_2}(0_+) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U_s = 100(V)$$

$$u_{C_1}(\infty) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_s = 100(V)$$

$$u_{C_2}(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_s = 200(V)$$

两个电容和两个电阻分别变成为并联

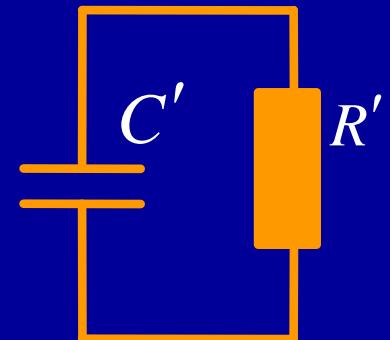


其等效电容和等效电阻为:  $C' = C_1 + C_2 = 150 \text{ } (\mu\text{F})$

$$R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 3333 \text{ } (\Omega)$$

电路的时间常数:

$$\begin{aligned}\tau &= R' C' \\ &= 150 \times 10^{-6} \times 3333 \\ &= 0.5 \text{ (s)}\end{aligned}$$



两个电容的电压分别为：

$$u_{C_1} = 100 + (200 - 100)e^{-2t} = (100 + 100e^{-2t})\varepsilon(t) \text{ (V)}$$

$$u_{C_2} = 200 + (100 - 200)e^{-2t} = (200 - 100e^{-2t})\varepsilon(t) \text{ (V)}$$

两个电容的电流分别为：

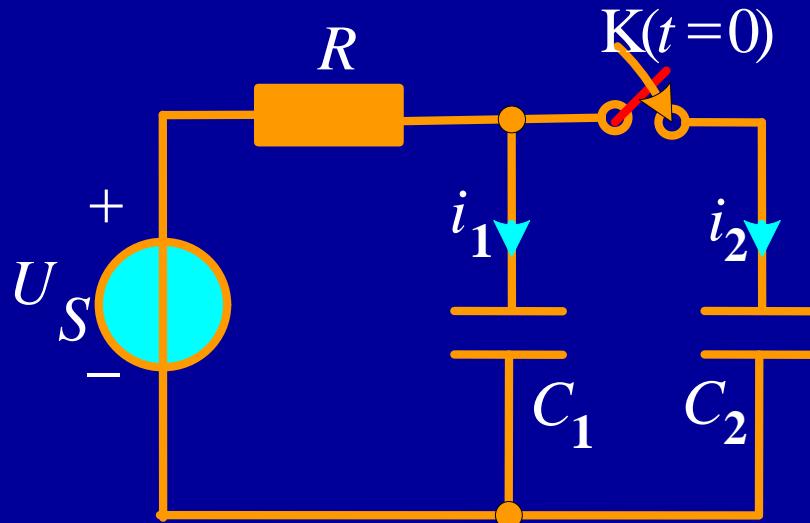
$$i_1 = C_1 \frac{du_{C_1}}{dt} = -0.01e^{-2t}\varepsilon(t) + 0.01\delta(t) \text{ (A)}$$

$$i_2 = C_2 \frac{du_{C_2}}{dt} = 0.02e^{-2t}\varepsilon(t) + 0.01\delta(t) \text{ (A)}$$

例2

图示电路开关k闭合前已处于稳定状态，电容 $C_2$ 原来未充电。已知 $U_S = 100 \text{ V}$ ,  $C_1 = 2\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 3\mu\text{F}$ ,  $R = 1000 \Omega$ 。在 $t=0$ 时开关k闭合，求 $t \geq 0$ 时的电容电压和各支路电流。

解



虽然该电路在换路之后有两个电容，但它们的电压是不独立的，所以还是一个一阶电路，仍然可以用三要素法分析。

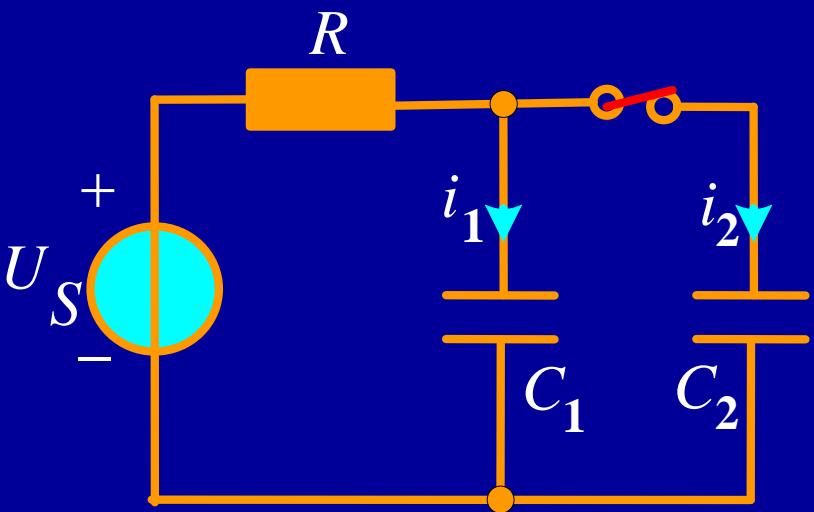
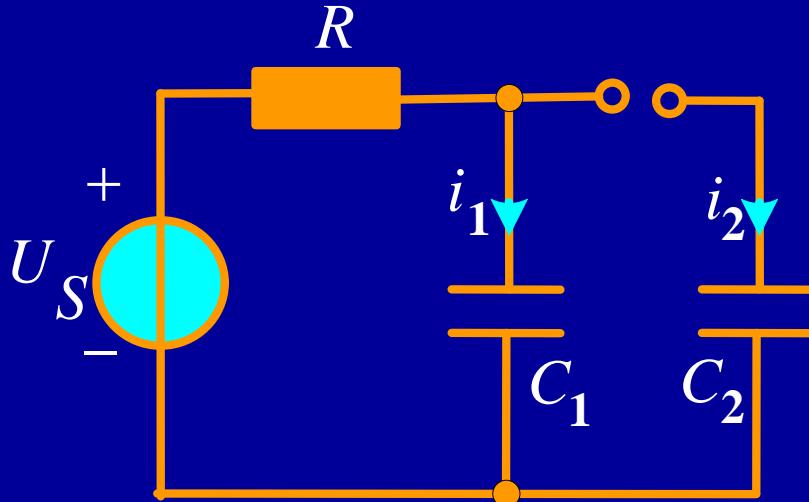
首先计算电容电压的初值。

由于开关k闭合前电路已处于稳定状态

$$u_{C1}(0_-) = U_S = 100 \text{ V}$$

由于电容 $C_2$ 原未充电，故

$$u_{C2}(0_-) = 0 \text{ V}$$



从开关k闭合后瞬间开始，两电容直接并联，并联后的等效电容为：

$$C = C_1 + C_2$$

$$u_{C1}(0_+) = u_{C2}(0_+)$$

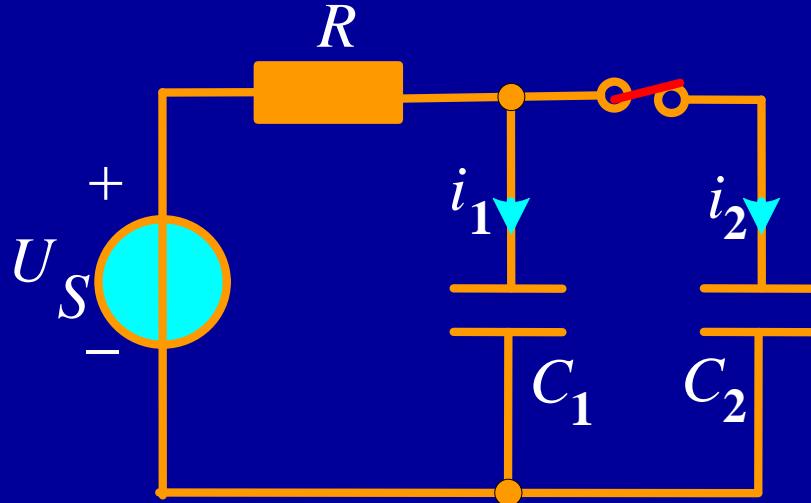
也就是说在换路前后瞬间，两个电容器的电压都发生了跃变。

在换路前后瞬间，两个电容器应遵循的规律是  $q(0_-) = q(0_+)$ 。  
即：  $C_1 u_{C1}(0_-) = (C_1 + C_2) u_C(0_+)$ 。

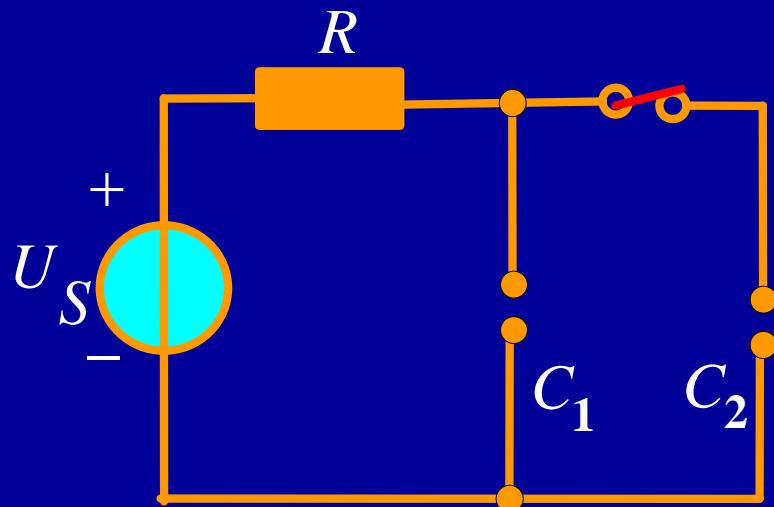
代入数值可得：

$$u_C(0_+) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} u_{C_1}(0_-) = 40\text{ (V)}$$

两个电容电压的初值：



$$u_{C1}(0_+) = u_{C2}(0_+) = 40 \text{ (V)}$$



两个电容电压的稳态值：

$$u_{C1}(\infty) = u_{C2}(\infty) = 100 \text{ (V)}$$

电路的时间常数:

$$\tau = RC = 1000 \times (2 + 3) \times 10^{-6} = 5 \text{ ms}$$

两个电容的电压分别为:

$$u_{C_1}(t) = 100 - 60e^{-200t} \varepsilon(t) \text{ (V)}$$

$$u_{C_2}(t) = (100 - 60e^{-200t}) \varepsilon(t) \text{ (V)}$$

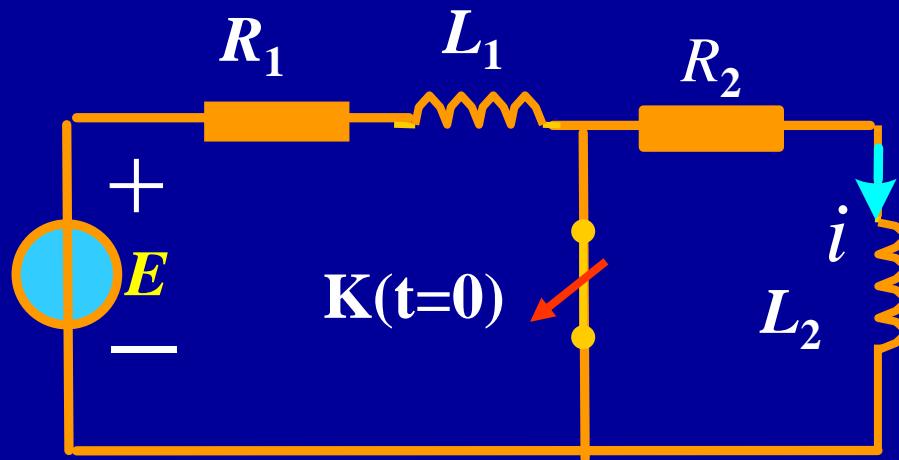
注意:  
 $\varepsilon(t)$ 的位置  
要表示电  
压 $t=0$ 时的  
跃变!

两个电容的电流分别为:

$$i_1 = C_1 \frac{du_{C_1}}{dt} = 0.024 e^{-200t} \varepsilon(t) - 1.2 \times 10^{-4} \delta(t) \text{ (A)}$$

$$i_2 = C_2 \frac{du_{C_2}}{dt} = 0.036 e^{-200t} \varepsilon(t) + 1.2 \times 10^{-4} \delta(t) \text{ (A)}$$

## 2) 换路后由纯电感构成的割集或由电感与电流源构成的割集



图所示电路为换路后由纯电感构成的割集，这种电路中电感电流在换路前后将发生跃变。

例3

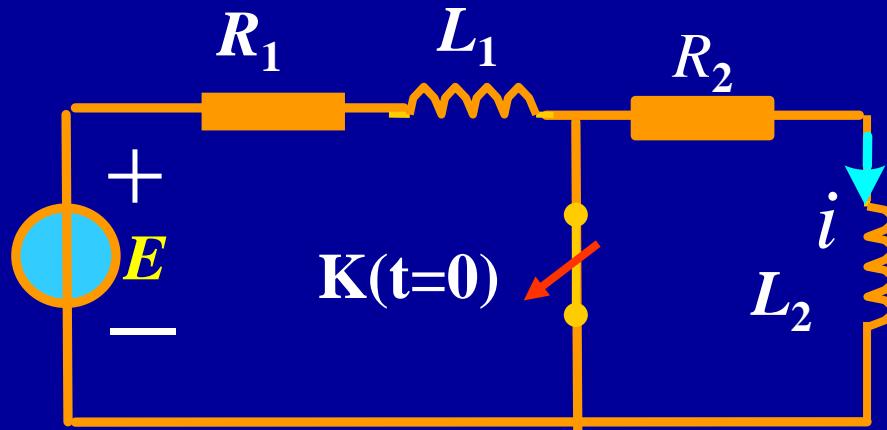
图示电路在开关k断开之前已处于稳定状态。

当 $t=0$ 时开关k断开，求 $t \geq 0$ 时回路中的电流*i*。

已知：  $E=10V$ ,  $R_1=2\Omega$ ,  $R_2=3\Omega$ ,  $L_1=0.3H$ ,  $L_2=0.1H$ 。

解

虽然该电路在换路之后有两个电感，但它们的电流是不独立的，所以还是一个一阶电路，仍然可以用三要素法分析。



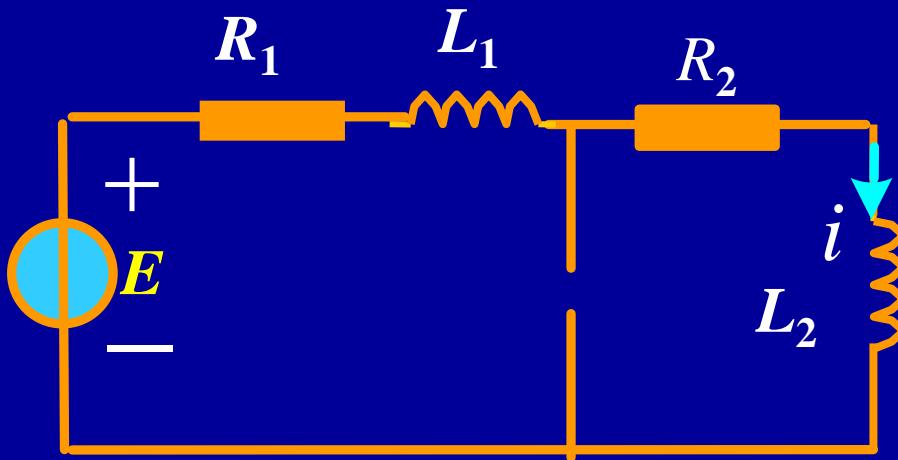
首先计算电感电流的初值。

由于开关k断开前电路已处于稳定状态，电感 $L_1$ 的电流可以计算出来，即

$$i_{L1}(0_+) = E / R_1 = 10 / 2 = 5 \text{ (A)}$$

由于电感 $L_2$ 原被开关短接，故

$$i_{L2}(0_+) = 0 \text{ A}$$



$t > 0+$  开关k断开后瞬间开始， 两电感直接串联， 串联后的等效电感为

$$L = L_1 + L_2$$

两个电感的电流应相等， 即

$$i_{L1}(0_+) = i_{L2}(0_+)$$

也就是说在换路前后瞬间， 两个电感的电流都发生了跃变。

在换路前后瞬间， 两个电感元件应遵循的规律是磁链不变——

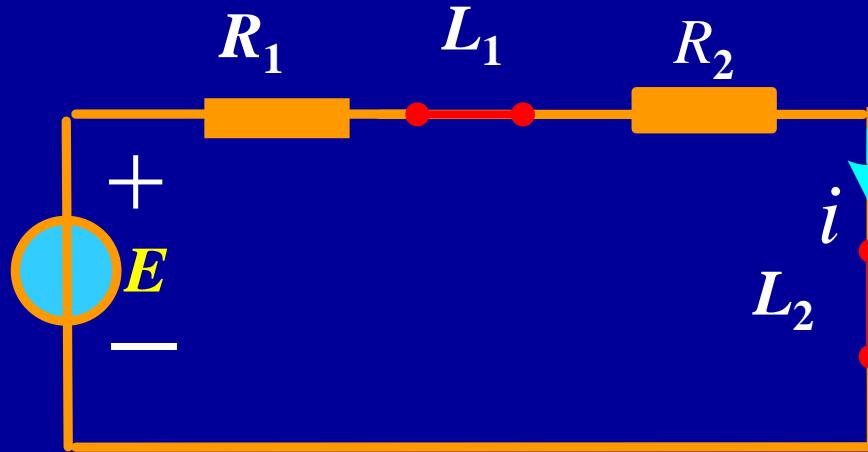
$$\Psi(0) = \Psi(0_+)$$

$$L_1 i_{L1}(0^-) = (L_1 + L_2) i_L(0_+)$$

代入数值可得：

$$i_L(0_+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i_{L_1}(0_-) = 3.75\text{A}$$

两个电感电流的稳态值：



$$i_{L_1}(\infty) = i_{L_2}(\infty) = E / (R_1 + R_2) = 2\text{A}$$

电路的时间常数：

$$\tau = L / R = \frac{0.3 + 0.1}{2 + 3} = \frac{1}{12.5}\text{s}$$

串联回路的电流：

$$i(t) = i_{L_2}(t) = 2 + (3.75 - 2)e^{-12.5t} = (2 + 1.75e^{-12.5t})\varepsilon(t)\text{A}$$

注意：  
 $\varepsilon(t)$ 的位置  
要表示电  
压 $t=0$ 时的  
跃变！

$$\begin{aligned} u_{L_2}(t) &= L_2 \frac{di_2}{dt} = L_2 [(2 + 1.75)e^{-12.5t} \varepsilon(t)]' \\ &= 0.1 [(-12.5 \times 1.75e^{-12.5t}) \varepsilon(t) + (2 + 1.75e^{-12.5t}) \times \delta(t)] \\ &= 0.375\delta(t) - 2.19e^{-12.5t}\varepsilon(t)V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{L_1}(t) &= 2 + (3.75 - 2)e^{-12.5t} = 2 + 1.75e^{-12.5t} = 5 - 3 + 1.75e^{-12.5t} \\ &= 5 + (-3 + 1.75e^{-12.5t})\varepsilon(t)\text{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{L_1}(t) &= L_1 \frac{di_1}{dt} = L_1 [5 + (-3 + 1.75)e^{-12.5t} \varepsilon(t)]' \\ &= 0.3 [-12.5 \times 1.75e^{-12.5t} \varepsilon(t) + (-3 + 1.75e^{-12.5t}) \times \delta(t)] \\ &= -0.375\delta(t) - 6.56e^{-12.5t}\varepsilon(t)V \end{aligned}$$

# 小结：一阶电路的冲激响应分类与求解

## 1. 由冲激激励在电路中产生的零状态响应



### 求解方法

由阶跃响应求冲激响应

单位阶跃

$$\varepsilon(t)$$

单位冲激

$$\delta(t)$$

单位阶跃响应

$$s(t)$$

单位冲激响应

$$h(t)$$

$$\delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

$$h(t) = \frac{d}{dt} s(t)$$

## 2. 换路前后电容电压和电感电流发生强迫跃变

结果：电容电流和电感电压会产生冲激响应

### 求解方法

(1) 由三要素法求电容电压、电感电流响应

由电路换路后的KVL、KCL方程及电容的电荷关系，电感的磁链关系计算储能元件的初值。

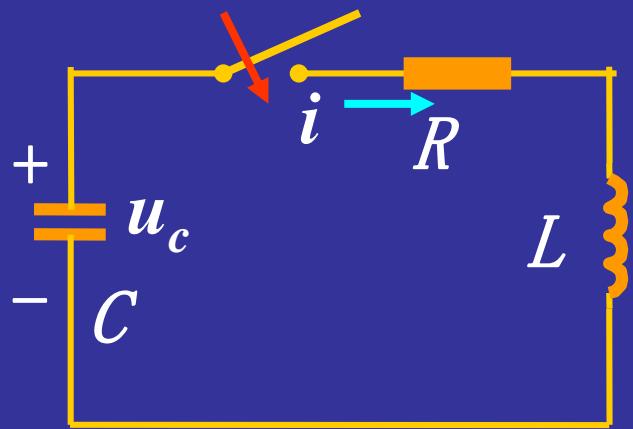
(2) 由元件方程求响应

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

## 5.7 二阶电路的零输入响应

### 1. RLC 电路的方程及求解



已知:  $u_c(0^+) = U_0 \quad i(0^+) = 0$

列电路方程:  $Ri + u_L - u_C = 0$

$$i = -C \frac{du_C}{dt} \quad u_L = L \frac{di}{dt}$$

若以电容电压为变量:

$$LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

以电容电压为变量时的初始条件:

$$u_c(0^+) = U_0 \quad i(0^+) = 0 \quad \rightarrow \quad \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0^+} = 0$$

电路方程:

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

特征方程:

$$LCP^2 + RCP + 1 = 0$$

特征根:

$$P_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$$

$$= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

## 2. 零状态响应的三种情况

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

两个不等负实根

过阻尼

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

两个相等负实根

临界阻尼

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

两个共轭复根

欠阻尼

$$(1) \quad R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$u_c = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t}$$

$$u_c(0^+) = U_0 \rightarrow A_1 + A_2 = U_0$$

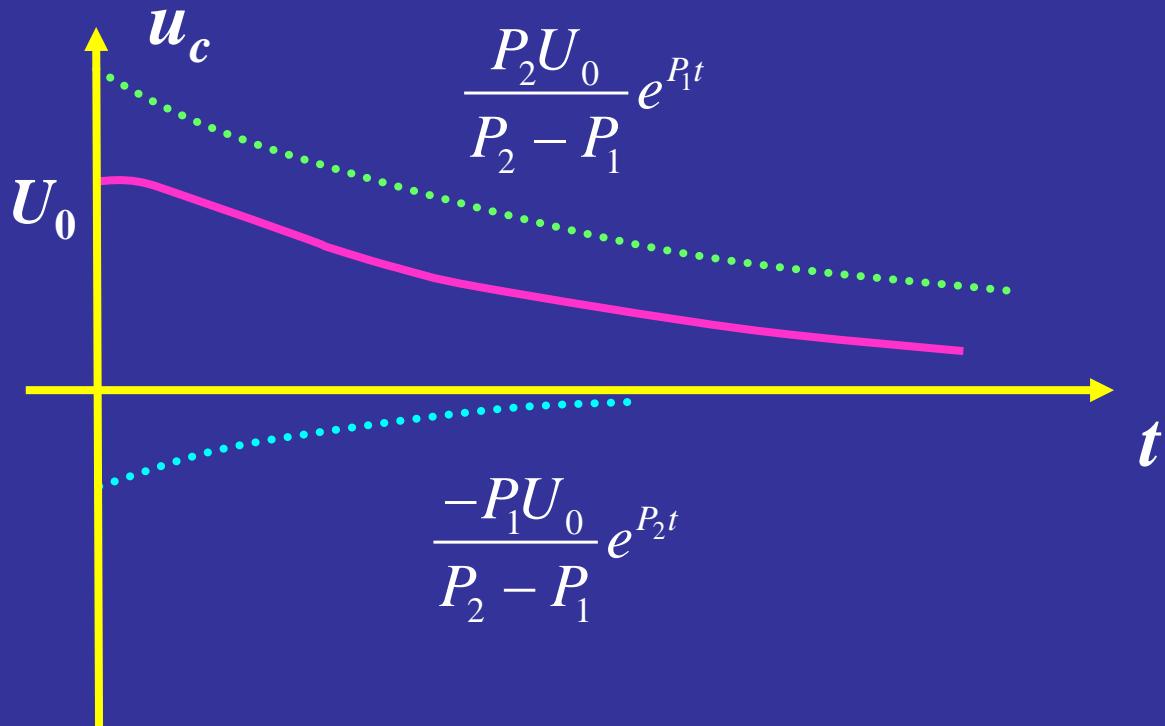
$$\left. \frac{du_c}{dt} \right|_{(0^+)} \rightarrow P_1 A_1 + P_2 A_2 = 0$$

$$\begin{cases} A_1 = \frac{P_2}{P_2 - P_1} U_0 \\ A_2 = \frac{-P_1}{P_2 - P_1} U_0 \end{cases}$$

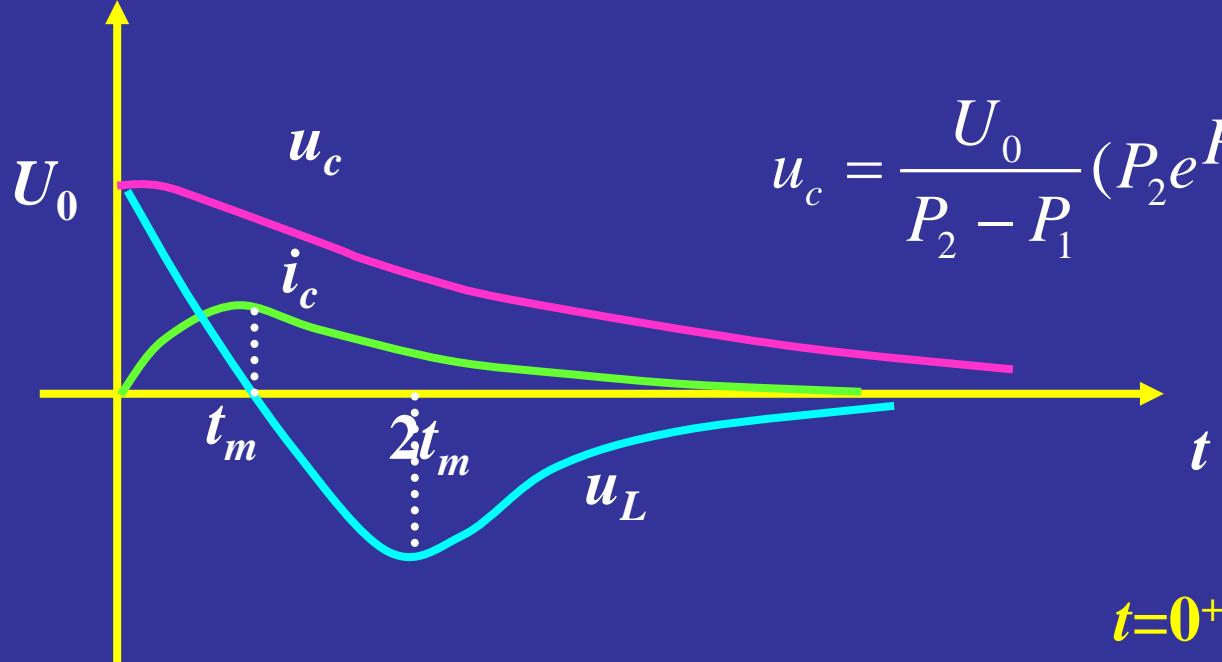
$$u_C = \frac{U_0}{P_2 - P_1} (P_2 e^{P_1 t} - P_1 e^{P_2 t})$$

$$u_c = \frac{U_0}{P_2 - P_1} (P_2 e^{P_1 t} - P_1 e^{P_2 t})$$

设  $|P_2| > |P_1|$



非振荡放电过程



$$u_c = \frac{U_0}{P_2 - P_1} (P_2 e^{P_1 t} - P_1 e^{P_2 t})$$

$$t=0^+ \quad i_c=0 \quad , \quad t=\infty \quad i_c=0$$

$$i_c = -C \frac{du_c}{dt} = \frac{-U_0}{L(P_2 - P_1)} (e^{P_1 t} - e^{P_2 t})$$

$i_c > 0 \quad t = t_m$  时  $i_c$  最大

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \frac{-U_0}{(P_2 - P_1)} (P_1 e^{P_1 t} - P_2 e^{P_2 t})$$

$0 < t < t_m \quad i$  增加,  $u_L > 0$

$t > t_m \quad i$  减小,  $u_L < 0$

$$t = 0, \quad u_L = U_0 \quad t = \infty, u_L = 0$$

$t = 2t_m$  时  $u_L$  最大

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \frac{-U_0}{(P_2 - P_1)} (P_1 e^{P_1 t} - P_2 e^{P_2 t})$$

$i_C=i$ 为极值时的 $t_m$ 即 $u_L=0$ 时的 $t$ ,计算如下:

$$(P_1 e^{P_1 t} - P_2 e^{P_2 t}) = 0$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{e^{P_1 t_m}}{e^{P_2 t_m}}$$

$$t_m = \frac{\ell n \frac{p_2}{p_1}}{p_1 - p_2}$$

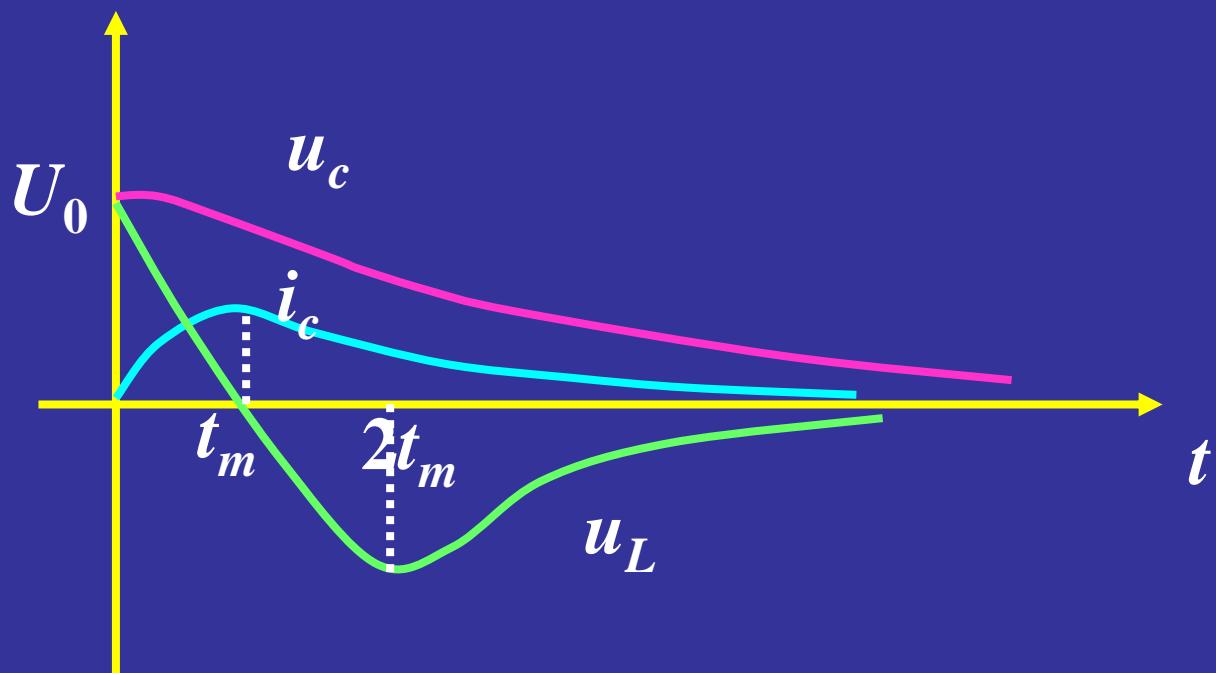
由 $du_L/dt$ 可确定 $u_L$ 为极小时的 $t$ .

$$(P_1^2 e^{P_1 t} - P_2^2 e^{P_2 t}) = 0 \quad t = \frac{2 \ell n \frac{p_2}{p_1}}{p_1 - p_2}$$



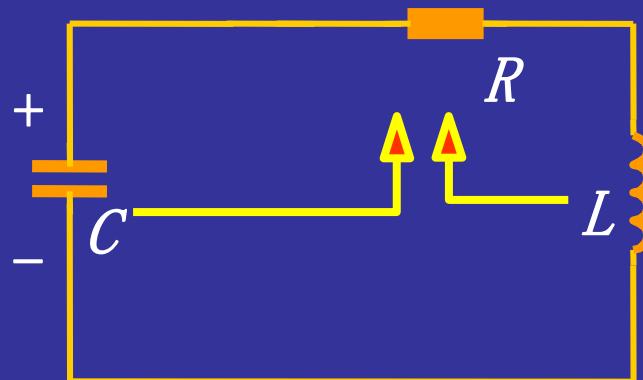
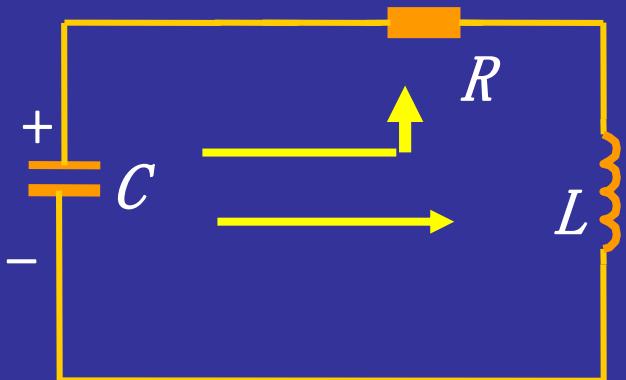
$$t = 2t_m$$

## 能量转换关系



$0 < t < t_m \quad u_c$  减小,  $i$  增加。

$t > t_m \quad u_c$  减小,  $i$  减小。



$$(2) R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$P = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

特征根为一对共轭复根

$$\begin{aligned} \text{令: } \delta &= \frac{R}{2L} \quad (\text{衰减系数}) & \text{则 } \omega &= \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (\text{谐振角频率}) & & \quad (\text{固有振荡角频率}) \\ & & P &= -\delta \pm j\omega \end{aligned}$$

$u_c$ 的解答形式:  $u_c = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = e^{-\delta(t)} (A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t})$

经常写为:

$$u_c = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

$A, \beta$ 为待定常数

## 推导

$$u_c = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = e^{-\delta(t)} (A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t})$$

$A_1$ 和 $A_2$ 共轭

$$A_1 = k e^{j\theta}$$

$$A_2 = k e^{-j\theta}$$

$$\begin{cases} A_1 = \frac{P_2}{P_2 - P_1} U_0 \\ A_2 = \frac{-P_1}{P_2 - P_1} U_0 \end{cases}$$

$$u_c = e^{-\delta(t)} (k e^{j\theta} e^{j\omega t} + k e^{-j\theta} e^{-j\omega t})$$

$$= k e^{-\delta(t)} \left[ e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)} \right]$$

$$= 2 k e^{-\delta(t)} \cos(\omega t + \theta)$$

$$= A e^{-\delta(t)} \sin(\omega t + \beta)$$

$$\begin{cases} A = 2k \\ \beta = \theta + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

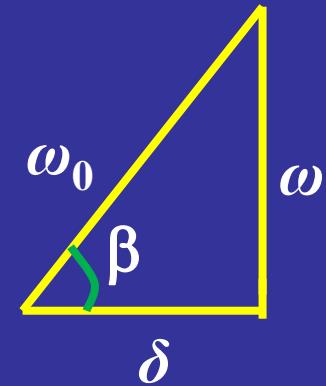
由初始条件

$$\begin{cases} u_c(0^+) = U_0 \rightarrow A \sin \beta = U_0 \\ \frac{du_c}{dt}(0^+) = 0 \rightarrow A(-\delta) \sin \beta + A\omega \cos \beta = 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{U_0}{\sin \beta} \quad , \quad \beta = \arctg \frac{\omega}{\delta}$$

$\omega, \omega_0, \delta$ 间的关系:

$$\sin \beta = \frac{\omega}{\omega_0} \quad A = \frac{\omega_0}{\omega} U_0$$

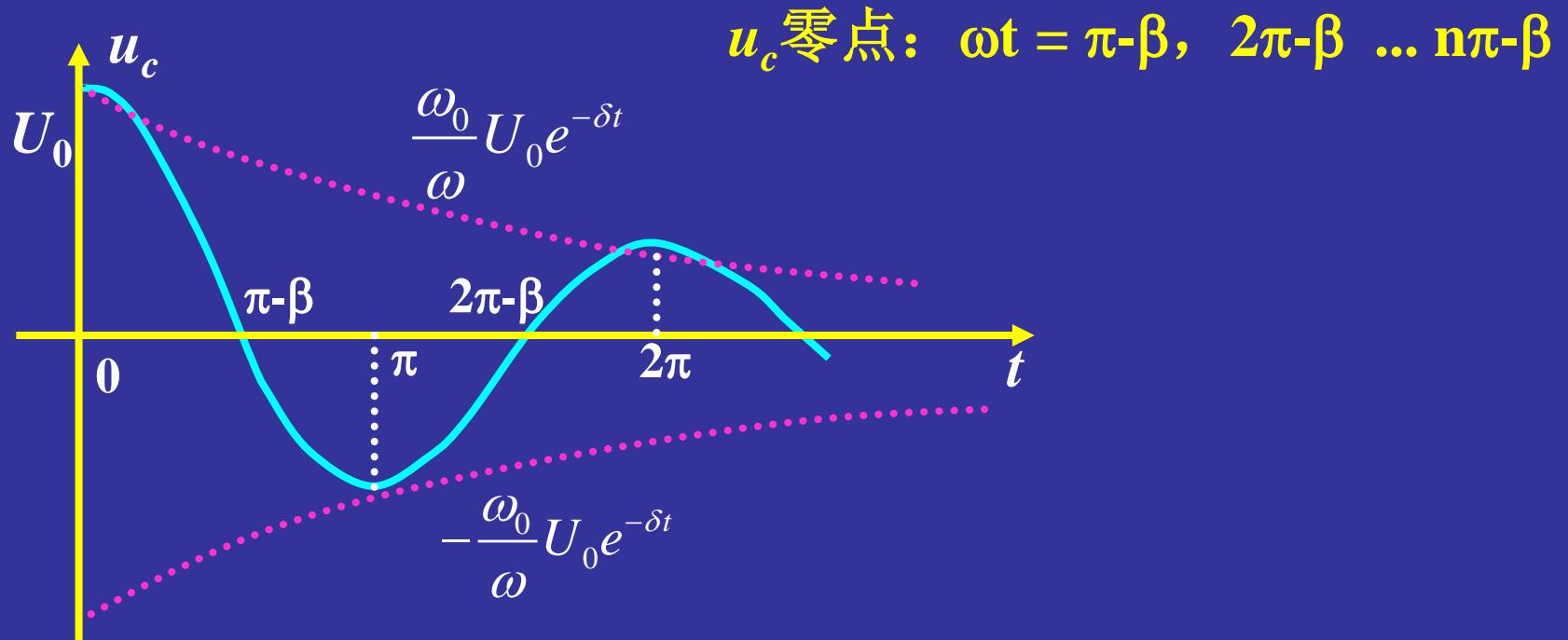


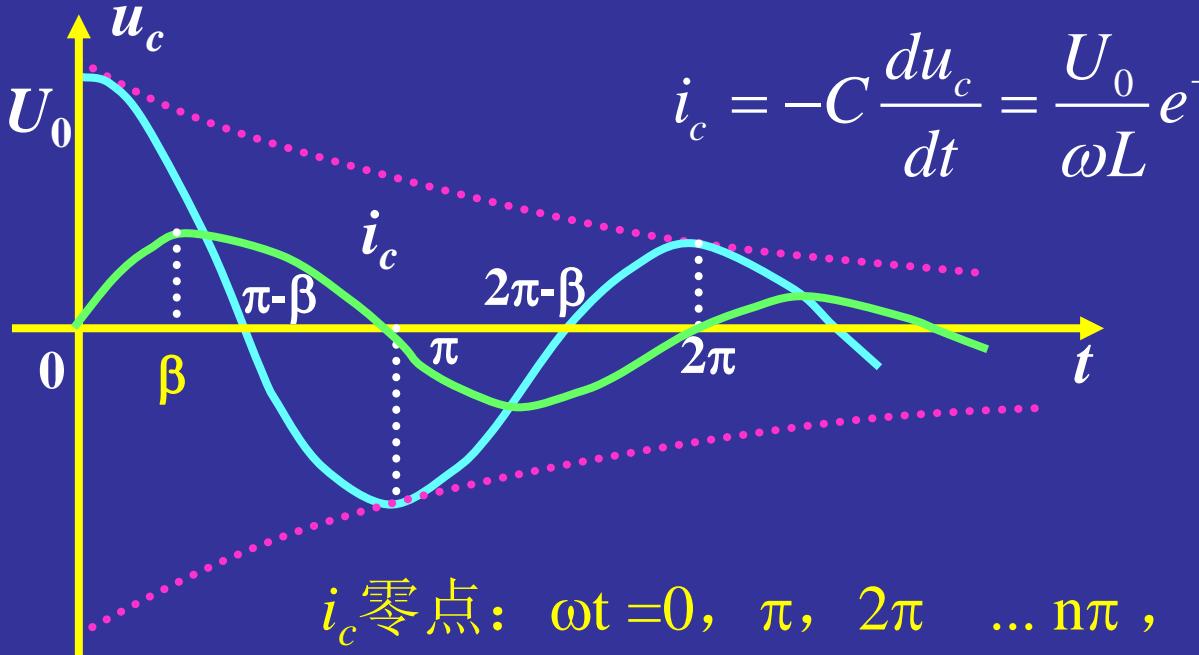
$$u_c = \frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

$$u_c = \frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

$u_c$  是其振幅以  $\pm \frac{\omega_0}{\omega} U_0$  为包络线依指数衰减的正弦函数。

$t=0$  时  $u_c=U_0$





$$i_c = -C \frac{du_c}{dt} = \frac{U_0}{\omega L} e^{-\delta t} \sin \omega t$$

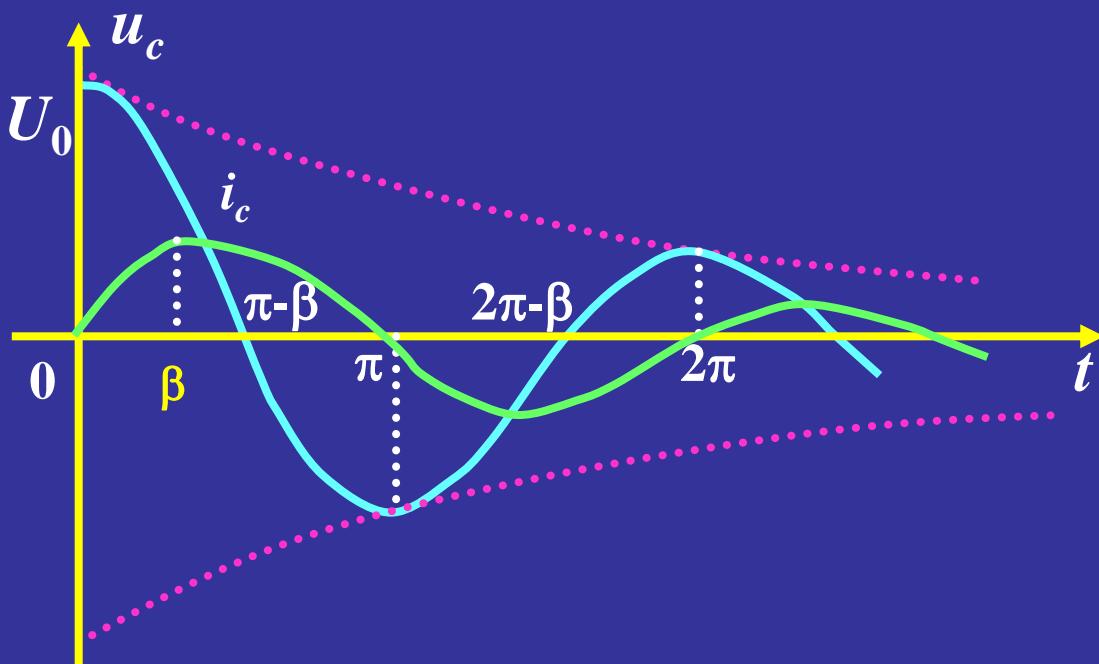
$i_c$ 零点:  $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \dots n\pi$ , 为  $u_c$ 极值点

$i_c$ 极值点为  $u_L$ 零点。

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t - \beta)$$

$u_L$ 零点:  $\omega t = \beta, \pi + \beta, 2\pi + \beta, \dots n\pi + \beta$

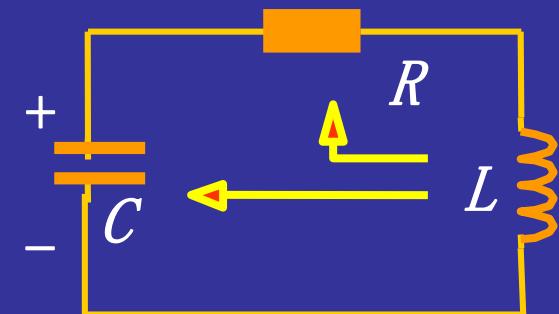
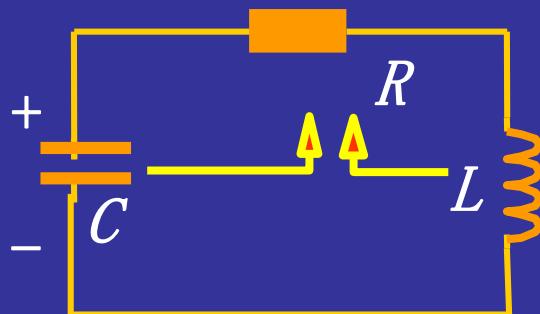
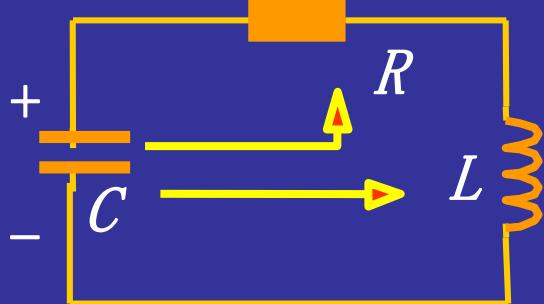
能量转换关系:



$$0 < \omega t < \beta$$

$$\beta < \omega t < \pi - \beta$$

$$\pi - \beta < \omega t < \pi$$



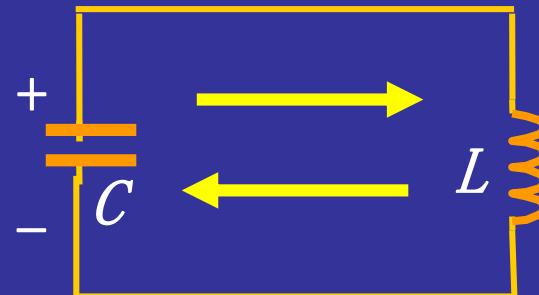
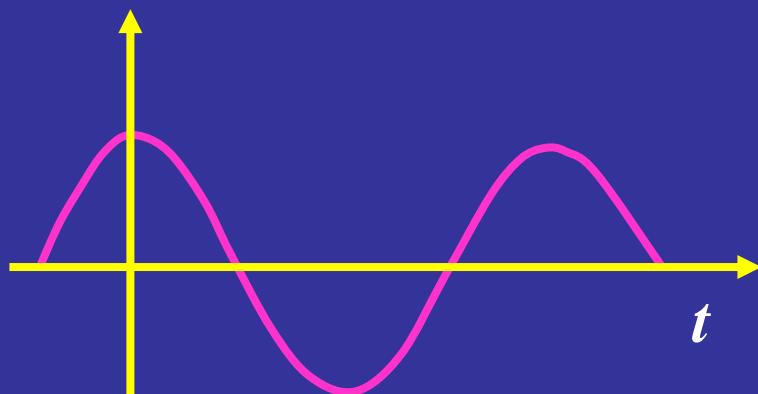
## 特例： R=0时

则  $\delta = 0$  ,  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$u_c = U_0 \sin(\omega t + 90^\circ) = u_L$$

$$i = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t$$

→ 等幅振荡



$$(3) \quad R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$P_1 = P_2 = -\frac{R}{2L} = -\delta$$

$$u_c = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t}$$

由初始条件  $\begin{cases} u_c(0^+) = U_0 \rightarrow A_1 = U_0 \\ \frac{du_c}{dt}(0^+) = 0 \rightarrow A_1(-\delta) + A_2 = 0 \end{cases}$

解出：

$$\left. \begin{cases} A_1 = U_0 & u_c = U_0 e^{-\delta t} (1 + \delta t) \\ A_2 = U_0 \delta & i_c = -c \frac{du_c}{dt} = \frac{U_0}{L} t e^{-\delta t} \\ u_L = L \frac{di}{dt} = U_0 e^{-\delta t} (1 - \delta t) \end{cases} \right\} \text{非振荡放电}$$

## 小结:

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$
 过阻尼, 非振荡放电  $u_c = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t}$

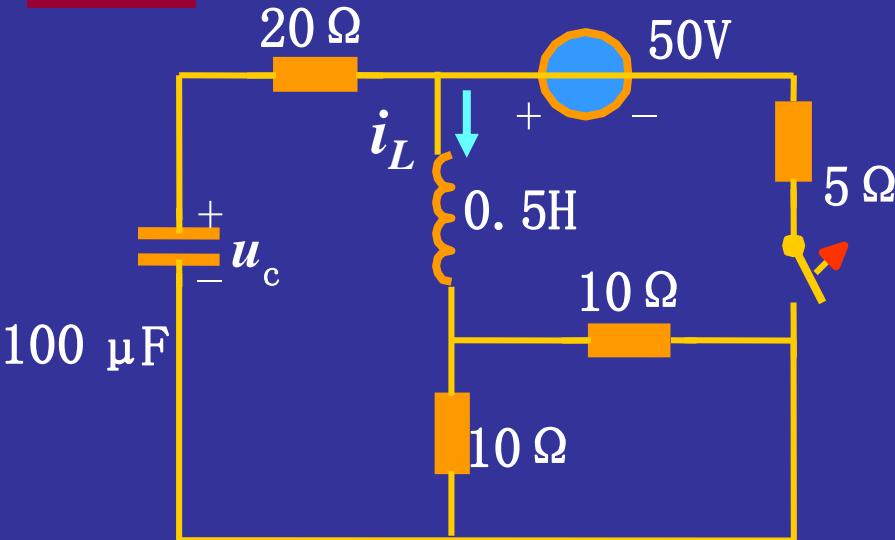
$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$
 临界阻尼, 非振荡放电  $u_c = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t}$

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$
 欠阻尼, 振荡放电  $u_c = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$

由初始条件  $\begin{cases} u_c(0^+) \\ \frac{du_c}{dt}(0^+) \end{cases}$  定常数

可推廣应用于一般二阶电路

## 例1.



电路如图,  $t=0$ 时打开开关。  
求 $u_c$ ,并画出其变化曲线。

解

$$(1) \quad u_c(0^-) = 25V$$

$$i_L(0^-) = 5A$$

(2) 开关打开为RLC串联电路, 方程为:

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

特征方程为:  $50P^2 + 2500P + 10^6 = 0$

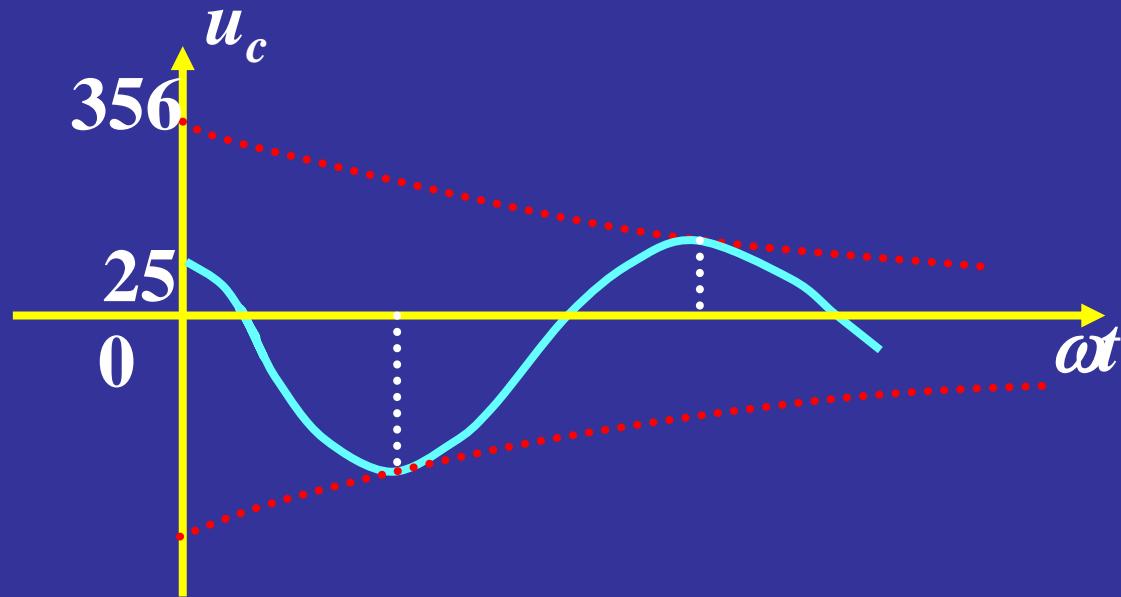
$$P = -25 \pm j139$$

$$u_c = Ae^{-25t} \sin(139t + \beta)$$

$$u_c = Ae^{-25t} \sin(139t + \beta)$$

(3)  $\begin{cases} u_c(0^+) = 25 \\ C \frac{du_c}{dt} \Big|_{0^+} = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A \sin \beta = 25 \\ A(139 \cos \beta - 25 \sin \beta) = \frac{-5}{10^{-4}} \end{cases}$

$$A = 356, \quad \beta = 176^\circ$$

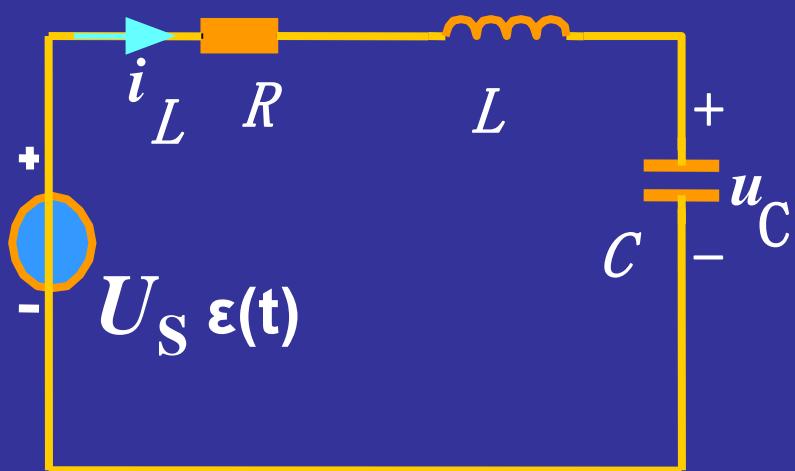


$$u_c = 356e^{-25t} \sin(139t + 176^\circ) \text{V}$$

## 5.8 二阶电路的零状态响应和阶跃响应

### 1. 零状态响应

$$u_c(0^-)=0, i_L(0^-)=0$$



微分方程为:

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = U_s$$

求通解的特征方程为;

$$LCP^2 + RCP + 1 = 0$$

$$u_c = u_c' + u_c''$$

特解

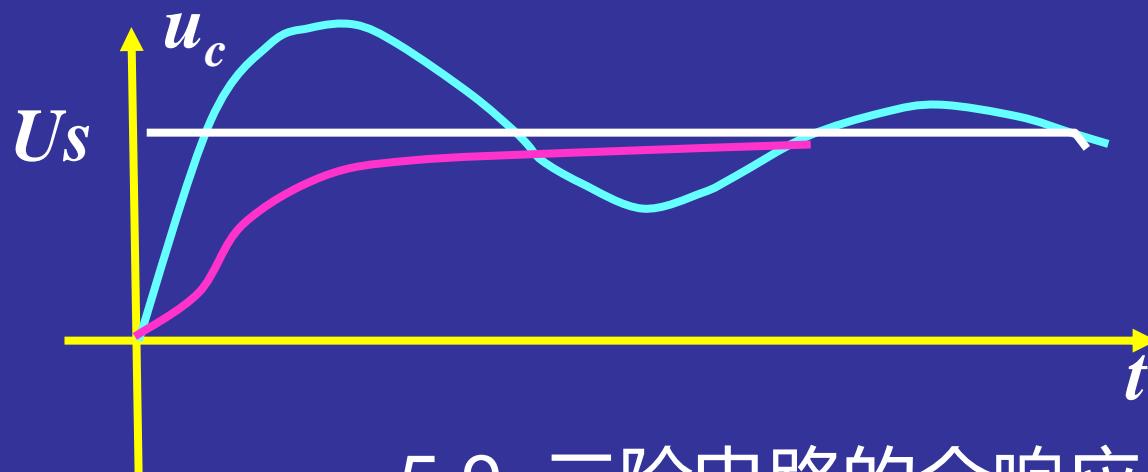
通解

$$\text{特解: } u_c' = U_s$$

$u_c$ 解答形式为：

$$\left\{ \begin{array}{l} u_c = U_s + A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t} \quad (P_1 \neq P_2) \\ u_c = U_s + A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t} \quad (P_1 = P_2 = -\delta) \\ u_c = U_s + A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta) \quad (P_{1,2} = -\delta \pm j\omega) \end{array} \right.$$

由初值  $\begin{cases} u_c(0^+) \\ \frac{du_c}{dt}(0^+) \end{cases}$  确定二个常数



# 零输入响应

$$\left\{ \begin{array}{l} LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0 \quad LCP^2 + RCP + 1 = 0 \\ u_c(0^+) \\ \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0^+} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{非零} \\ u_c = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t} \\ u_c = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t} \\ u_c = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta) \end{array}$$

零状态响应

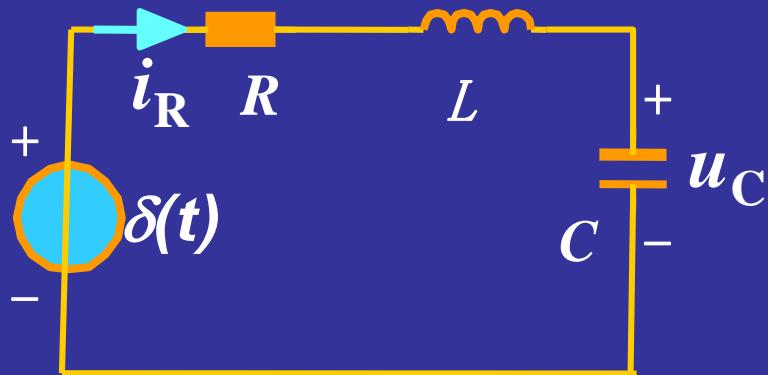
全响应

阶跃响应

$$\left\{ \begin{array}{l} LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = U_s \quad LCP^2 + RCP + 1 = 0 \\ u_c(0^+) \\ \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0^+} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{零状态} \\ u_c = U_s + A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t} \quad (P_1 \neq P_2) \\ u_c = U_s + A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta) \quad (P_{1,2} = -\delta \pm j\omega) \\ u_c = U_s + A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t} \quad (P_1 = P_2 = -\delta) \end{array}$$

5.10

# 二阶电路的冲激响应



定量分析，方程为：

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = \delta(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} dt + \int_{0^-}^{0^+} RC \frac{du_c}{dt} dt + \int_{0^-}^{0^+} u_c dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt$$

有限值

有限值

$t$  在  $0^-$  至  $0^+$  间

$$\int_{0^-}^{0^+} LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} dt = 1$$

$$LC \frac{du_c}{dt}(0^+) - LC \frac{du_c}{dt}(0^-) = 1$$

$$LC \frac{du_c}{dt}(0^+) - LC \frac{du_c}{dt}(0^-) = 1$$

→  $i_L(0^+) = i_C(0^+) = \frac{1}{L}$

$t > 0^+$  为零输入响应

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \rightarrow \quad u_c = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ A_1 P_1 + A_2 P_2 = \frac{1}{LC} \end{cases} \quad A_2 = -A_1 = \frac{1}{P_2 - P_1}$$

$$u_c = \frac{-1}{LC(P_2 - P_1)} (e^{P_1 t} - e^{P_2 t}) \varepsilon(t)$$

$$\textcolor{blue}{R} < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$(P_{1,2}=-\delta \pm j\omega)$$

$$u_c=Ae^{-\delta~t}\sin(\omega t+\beta)$$

$$u_c=\frac{1}{\omega LC}e^{-\delta~t}\sin(\omega t)\varepsilon(t)$$

## 小结:

(1)二阶电路含二个独立储能元件，是用二阶常微分方程所描述的电路。

(2)二阶电路的性质取决于特征根，特征根取决于电路结构和参数，与激励和初值无关。

$$p = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$\delta > \omega_0$  过阻尼，非振荡放电

$$u_c = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$\delta = \omega_0$  临界阻尼，非振荡放电

$$u_c = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t}$$

$\delta < \omega_0$  欠阻尼，振荡放电

$$u_c = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

## 5.11 The convolution integral

### Definition

Term convolution means “folding.”

The convolution of two signals consists of time-reversing one of the signals, shifting it, and multiplying it point by point with the second signal, and integrating the product, defined as

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

or simply

$$r(t) = e(t) * h(t)$$

Where  $\tau$  is a dummy variable, and asterisk denotes convolution.

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

States: the output is equal to the input convolved with the unit impulse response.

Explain

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

$$\delta(t-\tau) \rightarrow h(t-\tau)$$

$$x(\tau)\delta(t-\tau) \rightarrow x(\tau)h(t-\tau)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

If  $e(t)=0$  for  $t<0$ , then

$$r(t) = \int_0^{\infty} e(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

and If  $h(t)=0$  for  $t<0$ , then

$$h(t)=0 \Rightarrow h(t-\tau)=0 \text{ for } t-\tau < 0 \text{ or } t < \tau$$

$$r(t) = \int_0^t e(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

## Properties of convolution integral

$$r(t) = e(t) * h(t) = h(t) * e(t) \quad (\text{commutative}) \quad \text{交换}$$

$$f(t) * [x(t) + y(t)] = f(t) * x(t) + f(t) * y(t) \quad (\text{distributive})$$

$$f(t) * [x(t) * y(t)] = [f(t) * x(t)] * y(t) \quad (\text{associative}) \quad \text{分配}$$

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t) \quad \text{组合}$$

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$$

$$f(t) * \delta'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta'(t - \tau) d\tau = f'(t)$$

$$f(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \eta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

## Example 1

if  $e(t) = 4e^{-t}$ ,  $h(t) = 5e^{-2t}$ , find the  $r(t) = e(t) * h(t)$ .

## Solution

$$\begin{aligned}r(t) &= e(t) * h(t) = \int_0^t 4e^{-\tau} \cdot 5e^{-2(t-\tau)} d\tau \\&= 20e^{-2t} \int_0^t e^{-\tau} e^{2\tau} d\tau \\&= 20e^{-2t} (e^t - 1) \\&= 20e^{-t} - 20e^{-2t} (t \geq 0_+)\end{aligned}$$

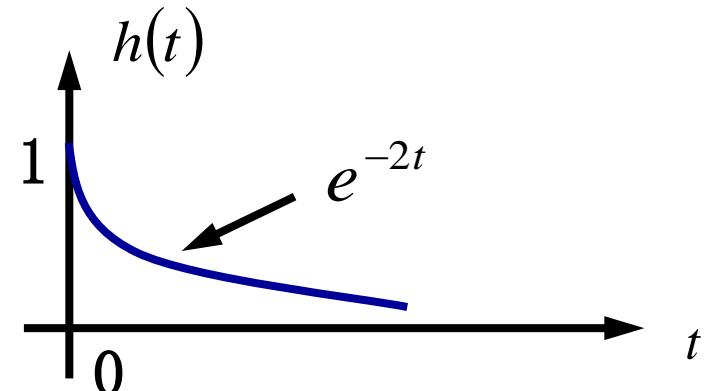
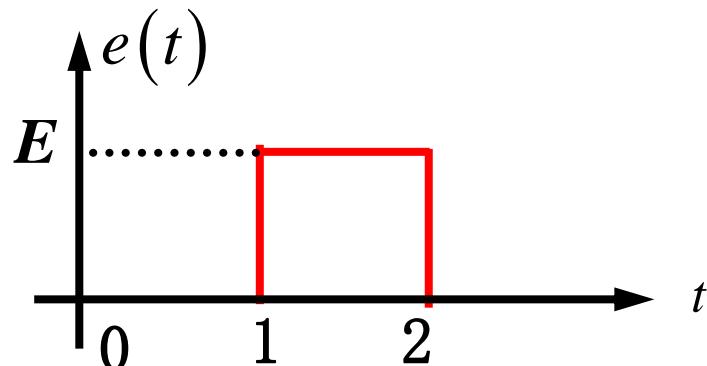
## Steps of convolution integral

### steps

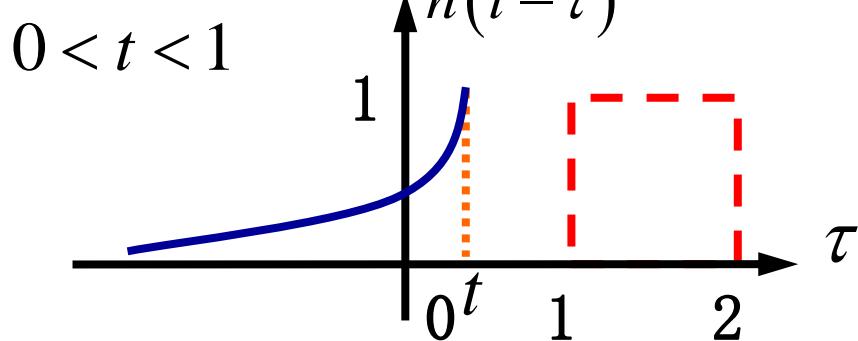
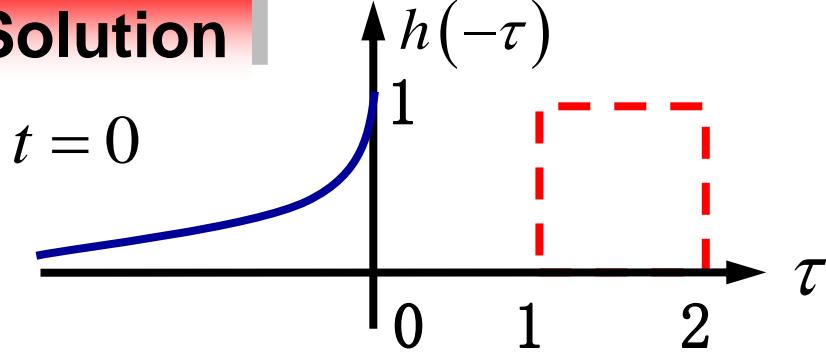
1. Folding: Take the mirror image of  $h(\tau)$  about the ordinate axis to obtain  $h(-\tau)$ .
2. Displacement: Shift or delay  $h(-\tau)$  by  $t$  to obtain  $h(t-\tau)$ .
3. Multiplication: Find the product of  $h(t-\tau)$  and  $e(\tau)$ .
4. Integration: For a given time  $t$ , calculate the area under the product  $h(t-\tau) e(\lambda)$  for  $0 < \tau < t$  to get  $r(t)$  at  $t$ .

## Example 2

Find the convolution of the two signal in Fig. 2.1



## Solution



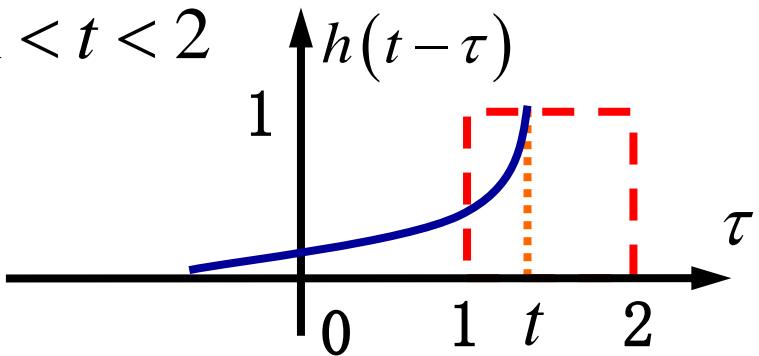
Sketching  $x(\lambda)$  and  $h(-\tau)$

$$e(t) * h(t) = 0$$

$h(t-\lambda)$  involves reflecting  $h(\lambda)$  about vertical axis and shifting it by  $t$

$$e(t) * h(t) = 0$$

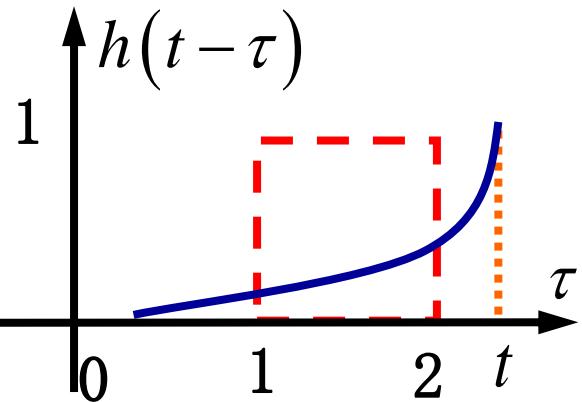
$1 < t < 2$



The two signal overlap between  $[1, t]$

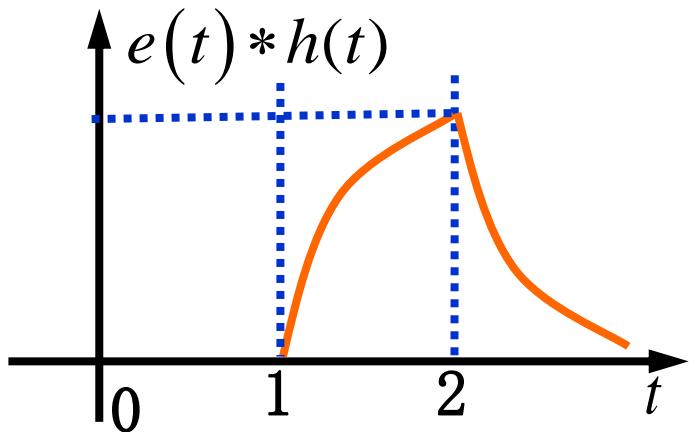
$$e(t) * h(t) = \int_1^t E e^{-2(t-\tau)} d\tau = E/2 [1 - e^{-2(t-1)}]$$

$t > 2$



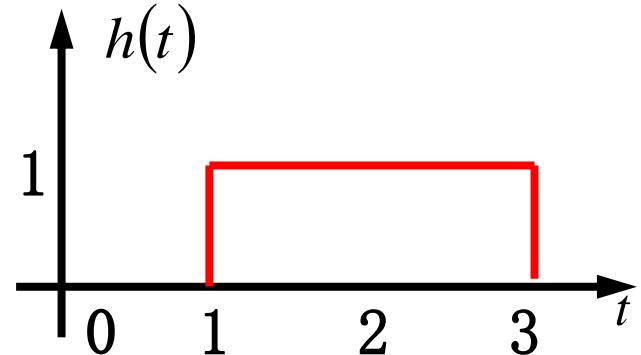
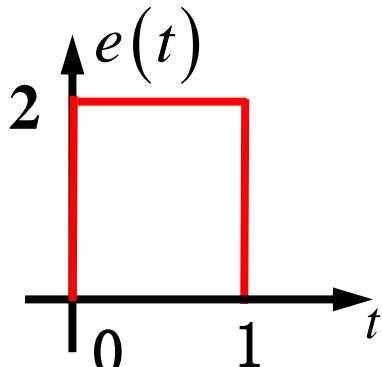
The two signal overlap between  $[1, 2]$

$$e(t) * h(t) = \int_1^2 E e^{-2(t-\tau)} d\tau = E/2 [e^{-2(t-2)} - e^{-2(t-1)}]$$



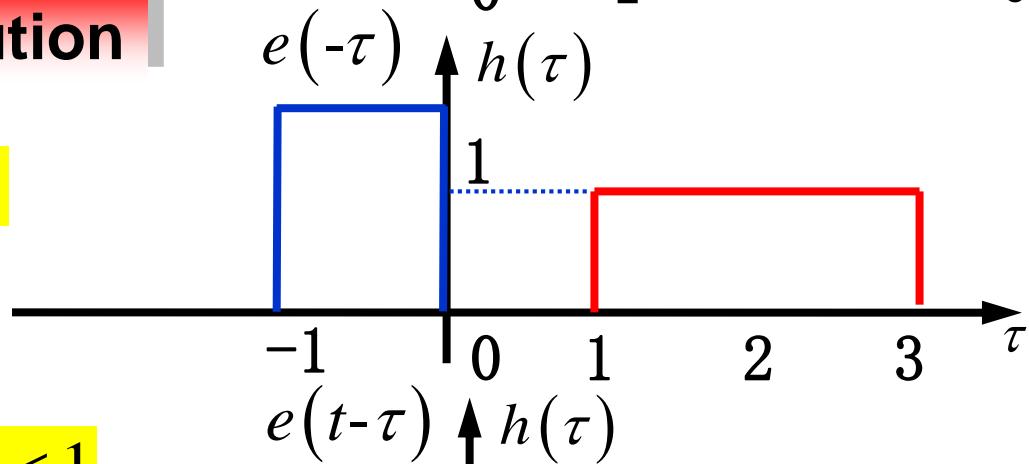
## Example 3

Find the convolution of the two signal in Fig. 3.1



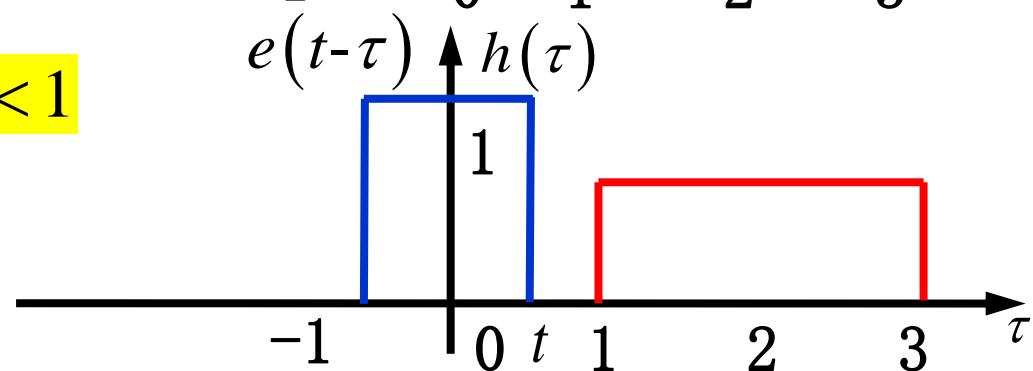
## Solution

$t = 0$

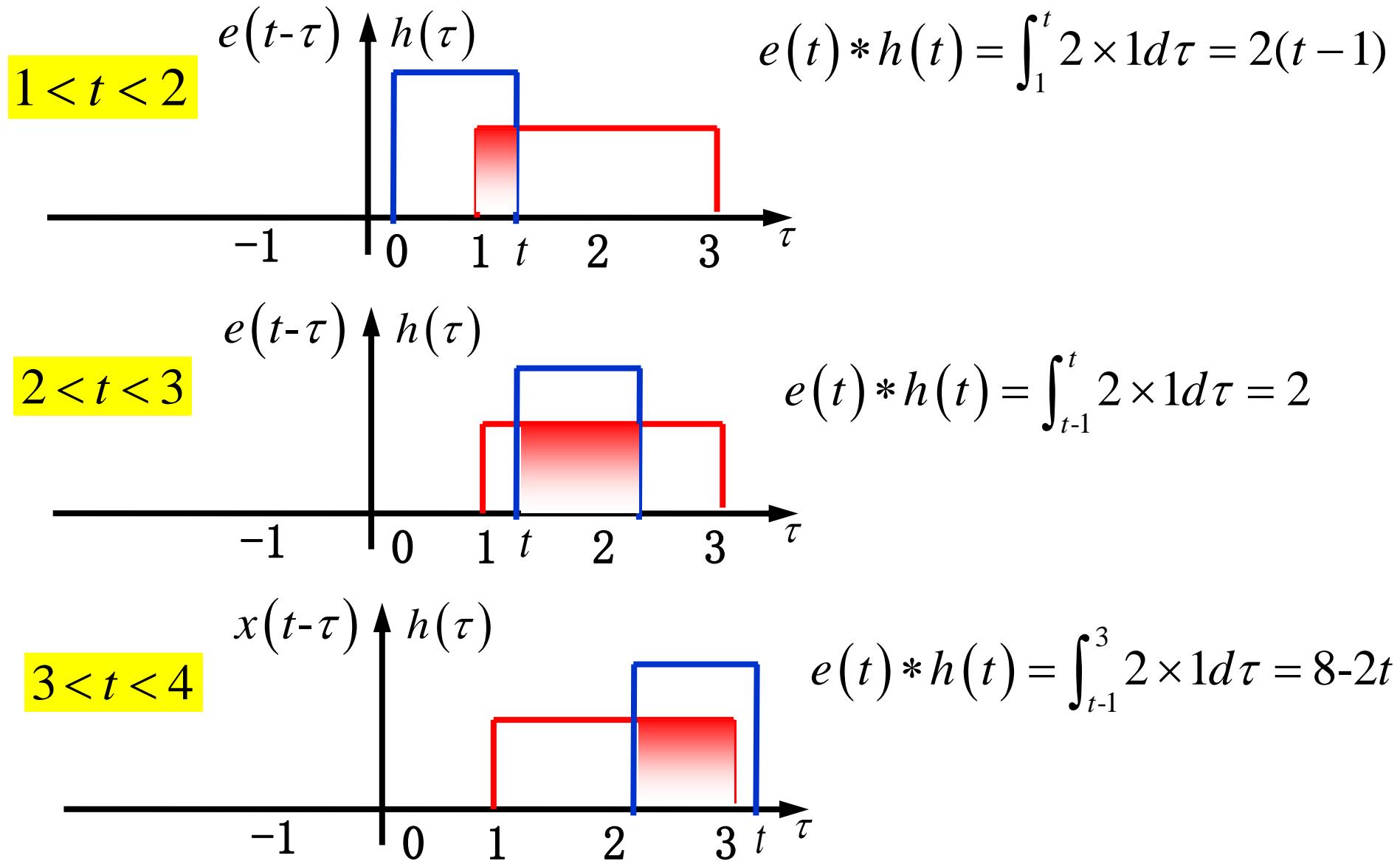


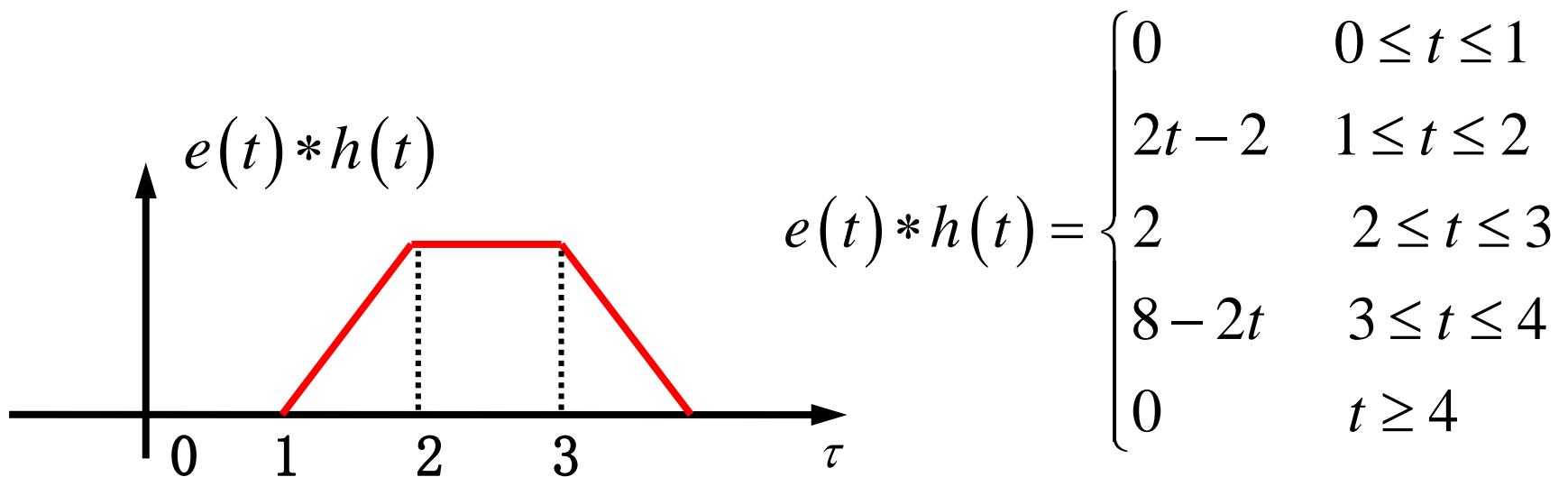
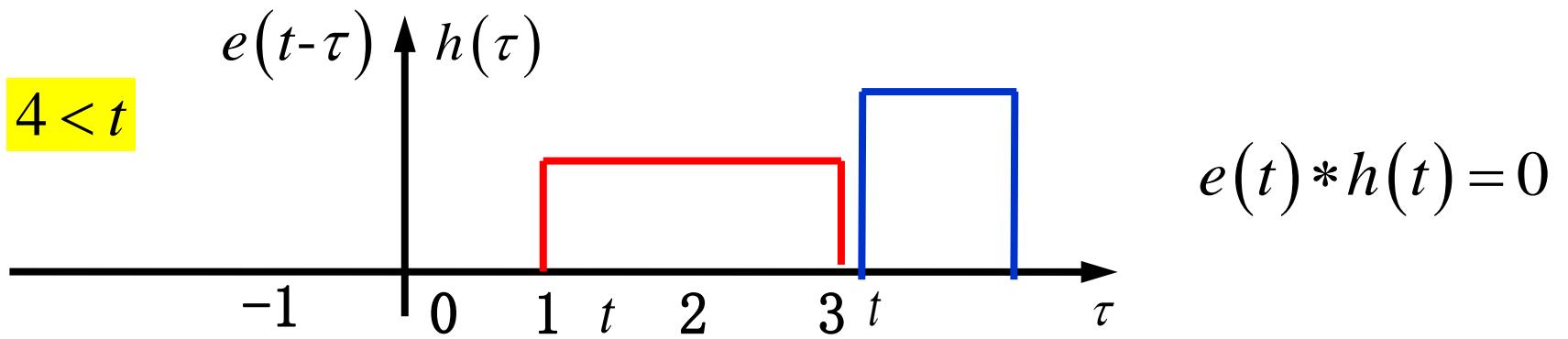
$$e(t) * h(t) = 0$$

$0 < t < 1$



$$e(t) * h(t) = 0$$





# 第10章 非正弦周期电流电路

## ● 重点

1. 周期函数分解为付里叶级数
2. 非正弦周期函数的有效值和平均功率
3. 非正弦周期电流电路的计算

# 10.1 非正弦周期电流电路的基本概念

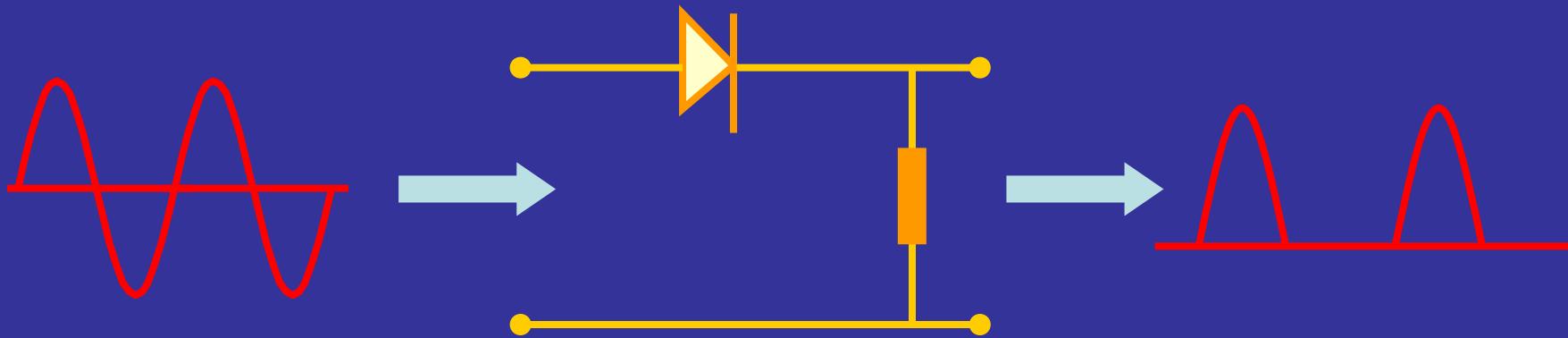
## 1. 电路中的非正弦周期电流、电压

生产实际中不完全是正弦电路，经常会遇到非正弦周期电流电路。在电子技术、自动控制、计算机和无线电技术等方面，电压和电流往往都是周期性的非正弦波形。

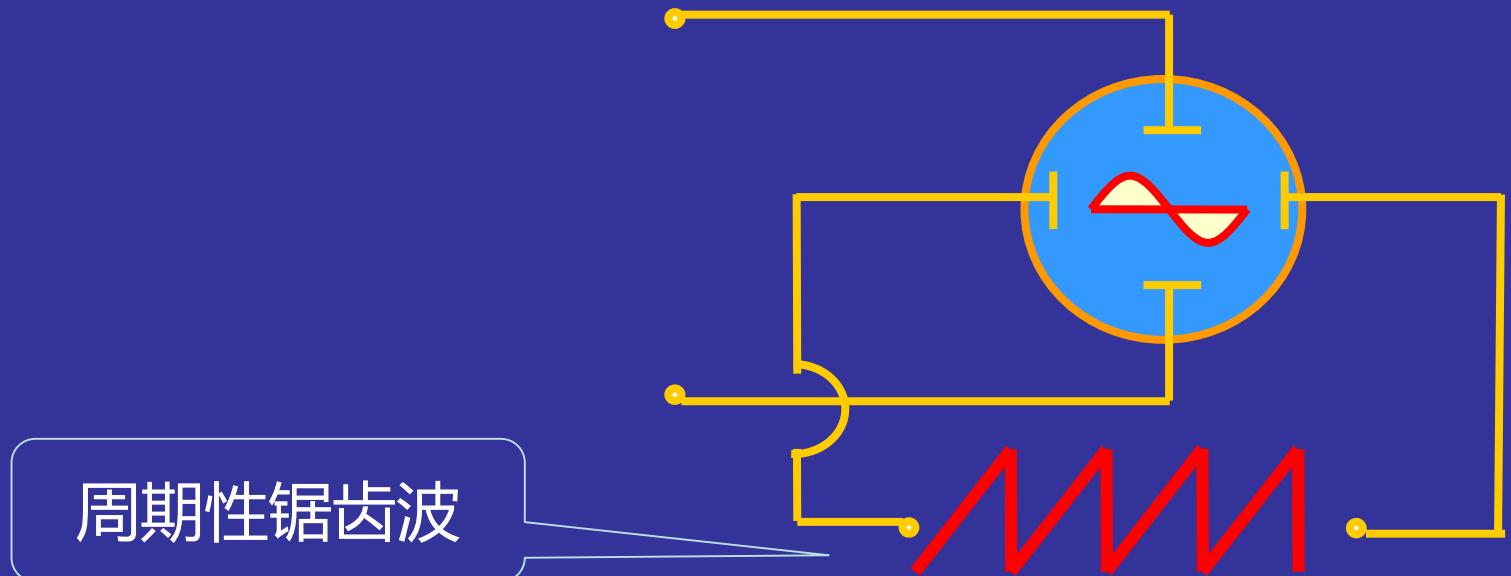
### ● 非正弦周期交流信号的特点

- (1) 不是正弦波
- (2) 按周期规律变化 →  $f(t) = f(t + kT)$

## 例1 半波整流电路的输出信号

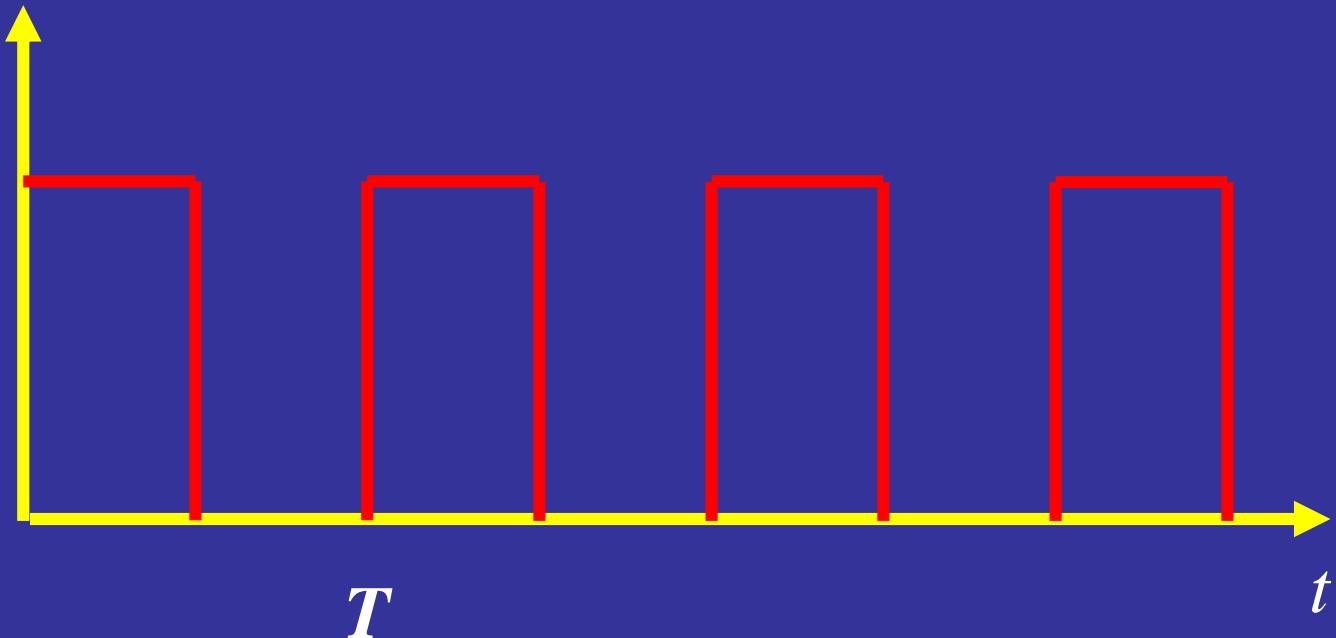


## 例2 示波器内的水平扫描电压

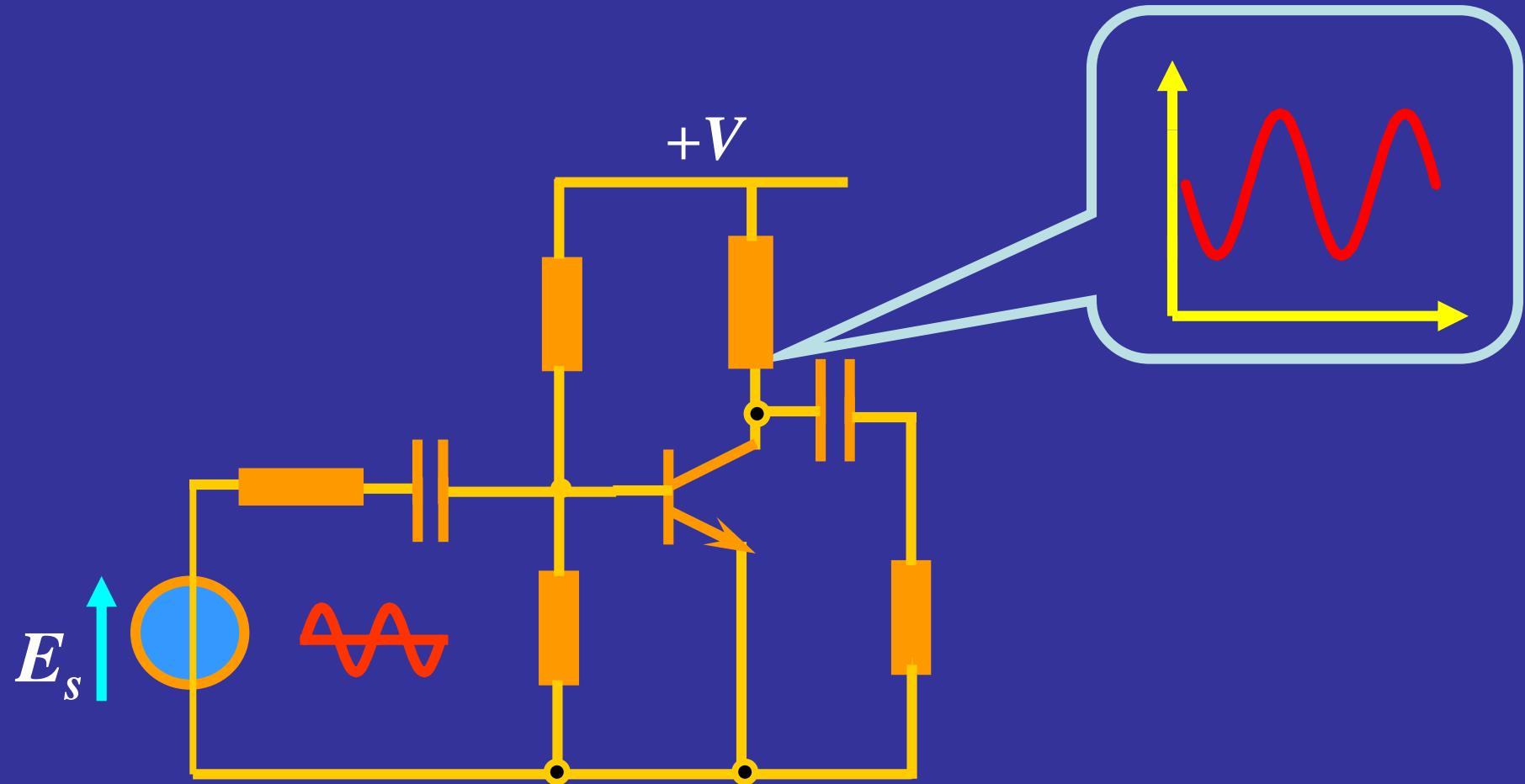


例3

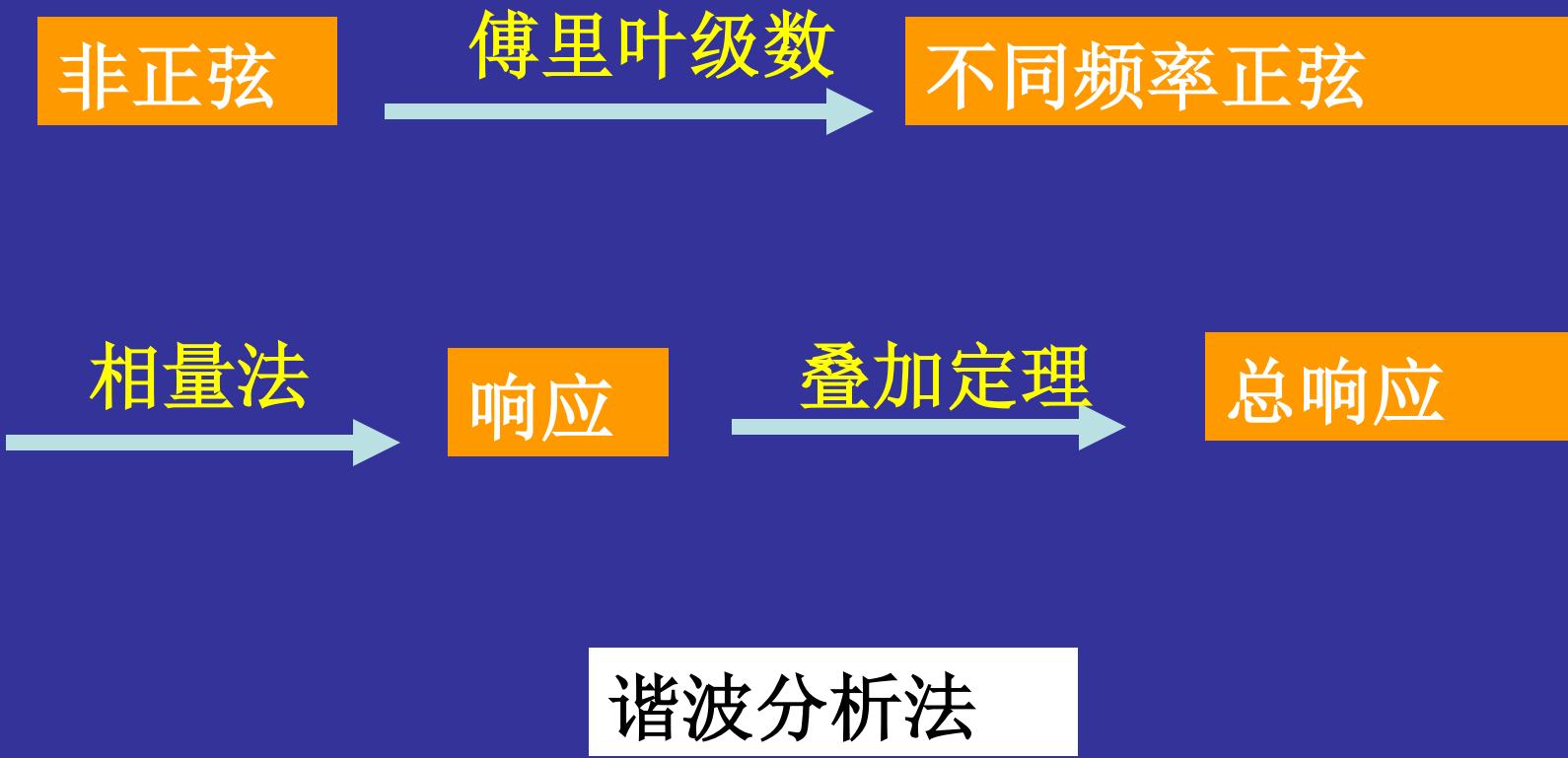
脉冲电路中的脉冲信号



## 例4 交直流共存电路



## 2. 非正弦周期电流电路的分析方法



## 10.2-10.4 周期函数分解和合成

### 1. 周期函数展开成付里叶级数

$$f(t) = A_0 + A_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) +$$

$$+ A_{2m} \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots$$

$$+ A_{nm} \sin(n\omega t + \varphi_n) + \dots$$

直流分量

基波（和原  
函数同频）

二次谐波  
(2倍频)

高次谐波

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

也可表示成：

$$A_{km} \sin(k\omega t + \phi_k) = a_k \cos k \omega t + b_k \sin k \omega t$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos k \omega t + b_k \sin k \omega t]$$

系数之间的关系为

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = a_0 \\ A_{km} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ a_k = A_{km} \sin \varphi_k \quad b_k = A_{km} \cos \varphi_k \\ \varphi_k = \arctan \frac{a_k}{b_k} \end{array} \right.$$

## 2. 傅里叶系数的确定

$$A_0 = a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos k \omega t dt$$

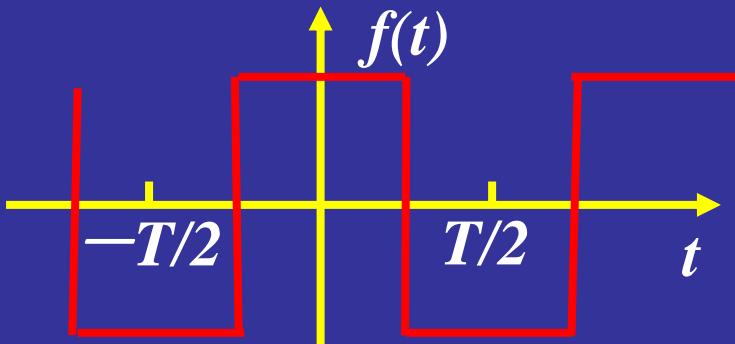
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin k \omega t dt$$

求出  $A_0$ 、 $a_k$ 、 $b_k$  便可得到原函数  $f(t)$  的展开式

### 3. 几种特殊的周期函数

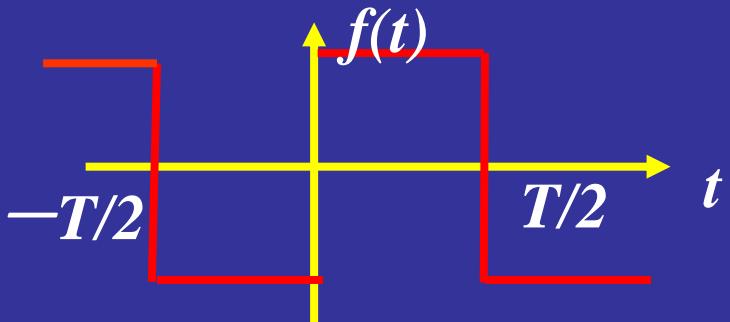
#### (1) 偶函数

$$f(t) = f(-t) \quad b_k = 0$$



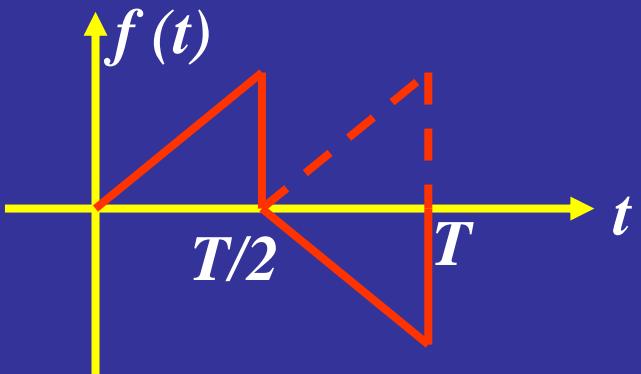
#### (2) 奇函数

$$f(t) = -f(t) \quad a_k = 0$$

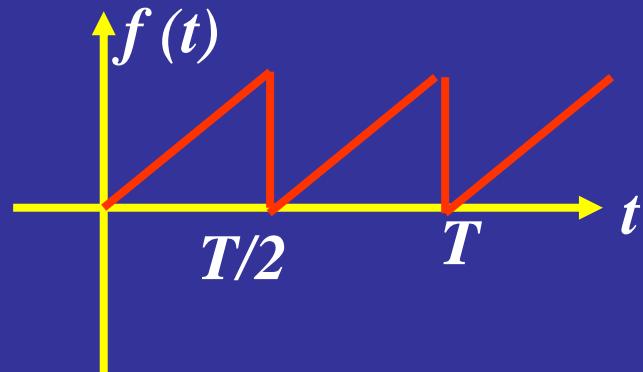


#### (3) 奇谐波函数

$$f(t) = -f(t + \frac{T}{2}) \quad a_{2k} = b_{2k} = 0$$



#### (4) 偶谐波函数



$$f(t) = f(t + \frac{T}{2}) \quad a_k = b_k = 0 \text{ (} k \text{ 为偶数)}$$

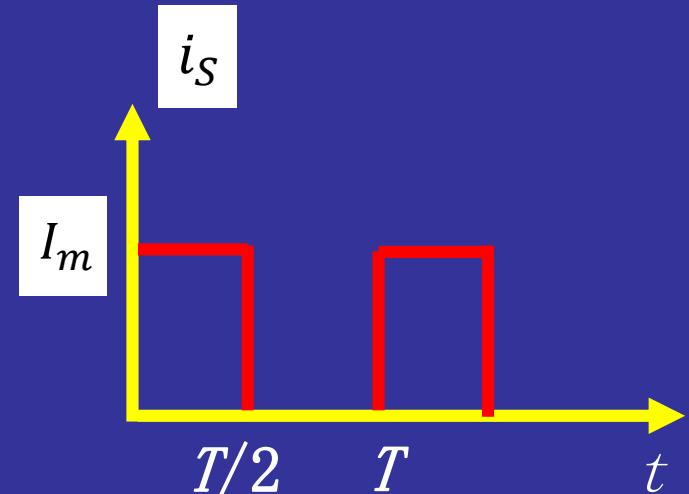
例1

## 周期性方波信号的分解

解

图示矩形波电流在一个周期内的表达式为：

$$i_S(t) = \begin{cases} I_m & 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$



直流分量：  $I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i_S(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} I_m dt = \frac{I_m}{2}$

谐波分量：  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i_S(\omega t) \sin k \omega t d(\omega t)$

$$= \frac{I_m}{\pi} \left( -\frac{1}{k} \cos k \omega t \right) \Big|_{0}^{\pi} = \begin{cases} \frac{2I_m}{k\pi} & K \text{为偶数} \\ 0 & K \text{为奇数} \end{cases}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} i_S(\omega t) \cos k \omega t d(\omega t)$$

$$= \frac{2I_m}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \sin k \omega t \Big|_0^{\pi} = 0$$

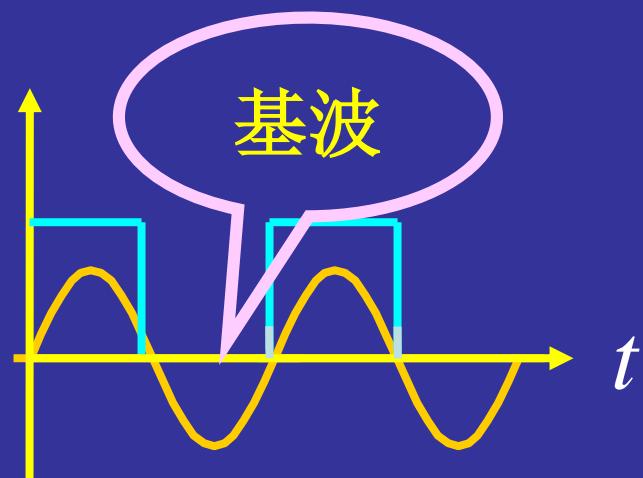
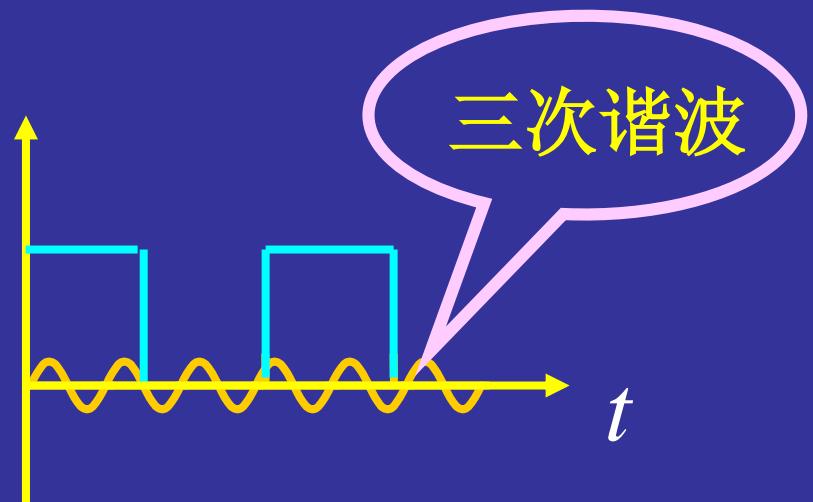
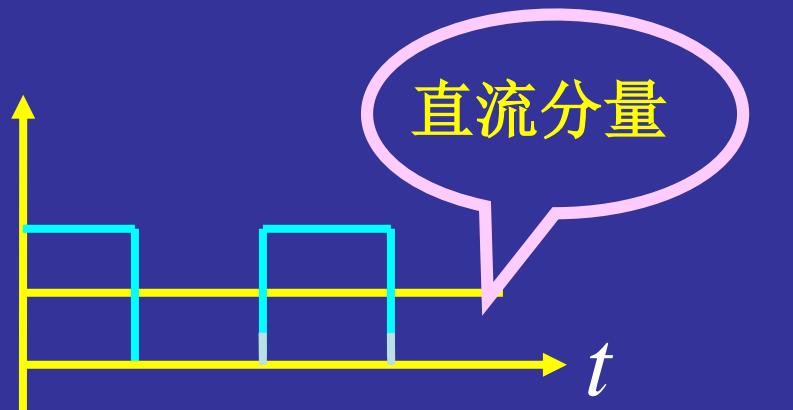
$$A_k = \sqrt{b_k^2 + a_k^2} = b_k = \frac{2I_m}{k\pi} \quad (\text{K为奇数})$$

$$\varphi_k = \arctan \frac{a_k}{b_k} = 0$$

$i_s$  的展开式为：

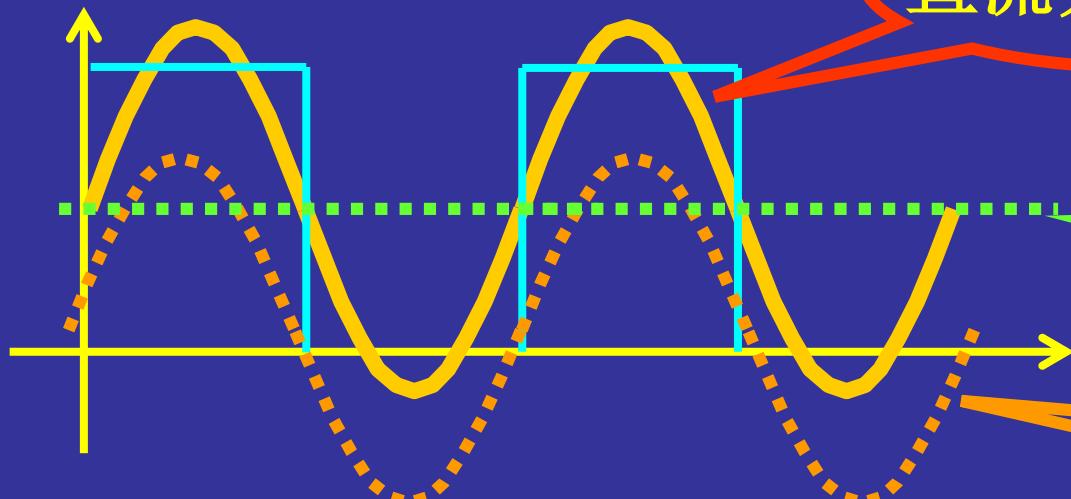
$$i_S = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega t + \dots \right)$$

# 周期性方波波形分解



五次谐波

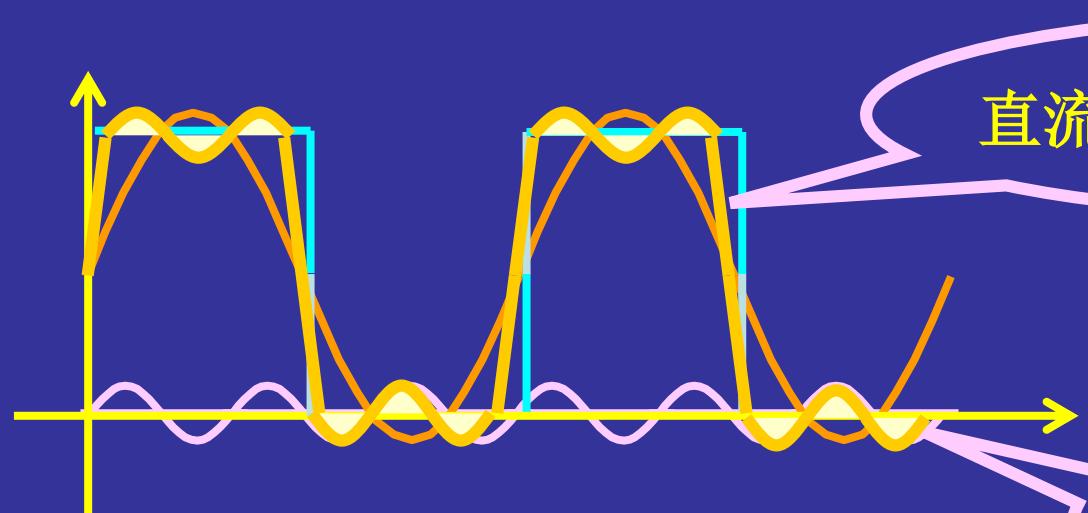
七次谐波



直流分量+基波

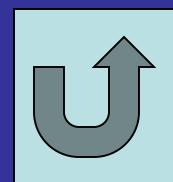
直流分量

基波

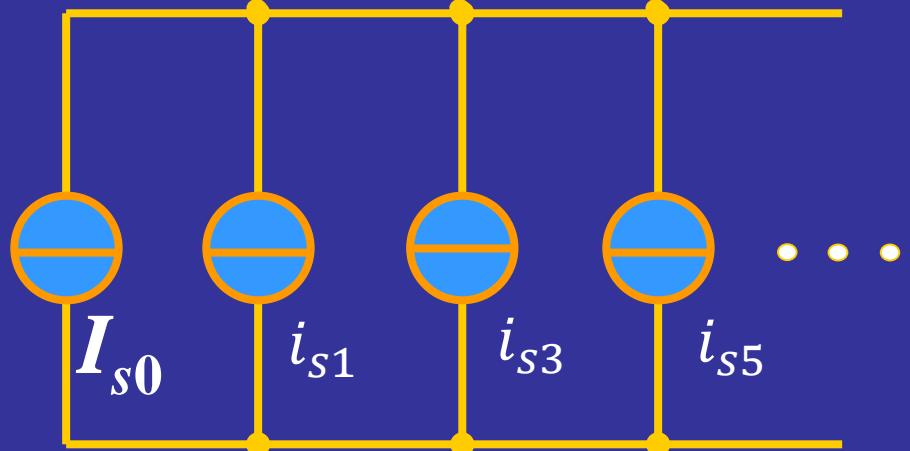
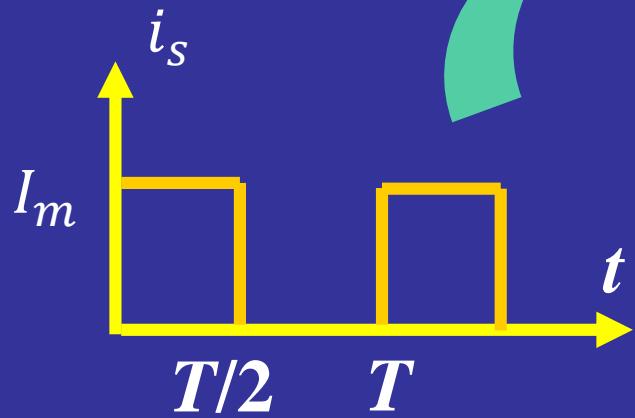


直流分量+基波+三次谐波

三次谐波



等效电源



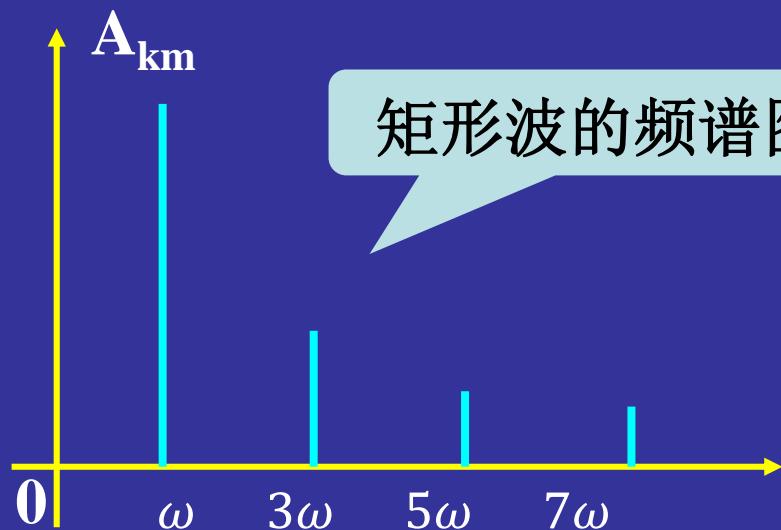
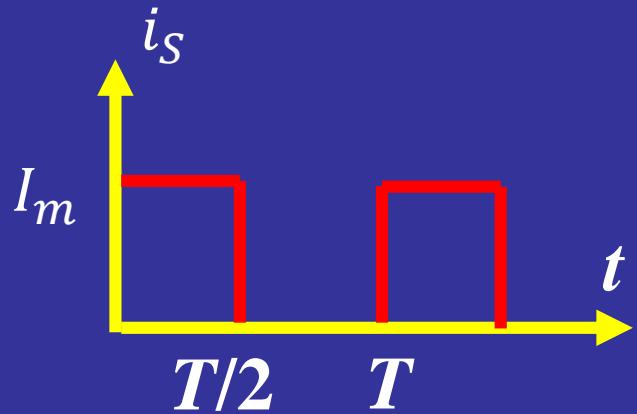
$$i_s = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega t + \dots \right)$$

$I_{s0}$

$i_{s1}$

$i_{s3}$

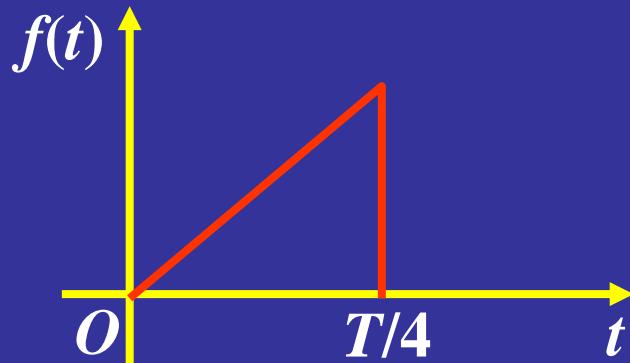
$i_{s5}$



$$i_S = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

## 例2

给定函数  $f(t)$  的部分波形如图所示。为使  $f(t)$  的傅立叶级数中只包含如下的分量：

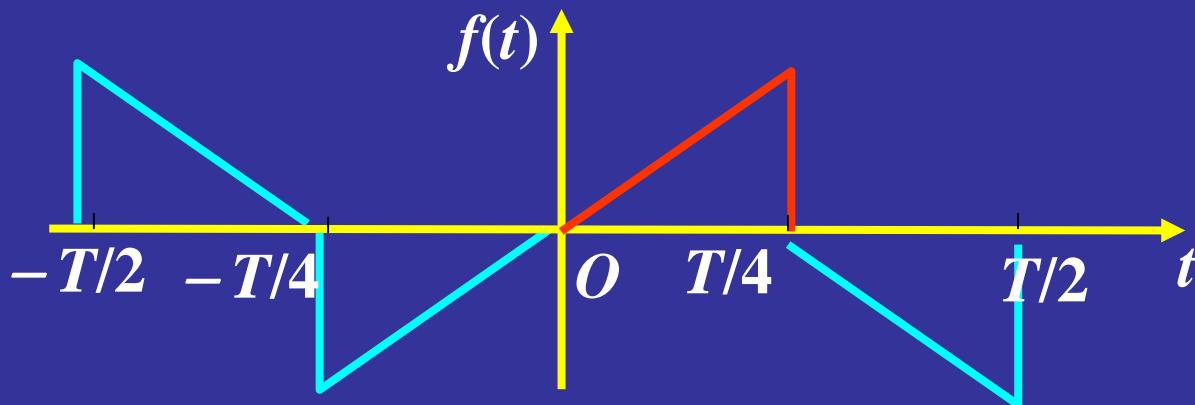


(1) 正弦分量；(2) 余弦分量；

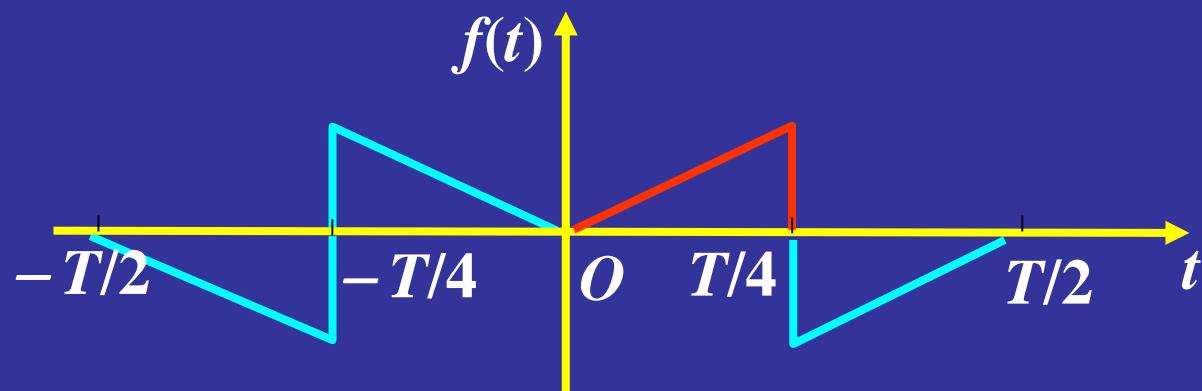
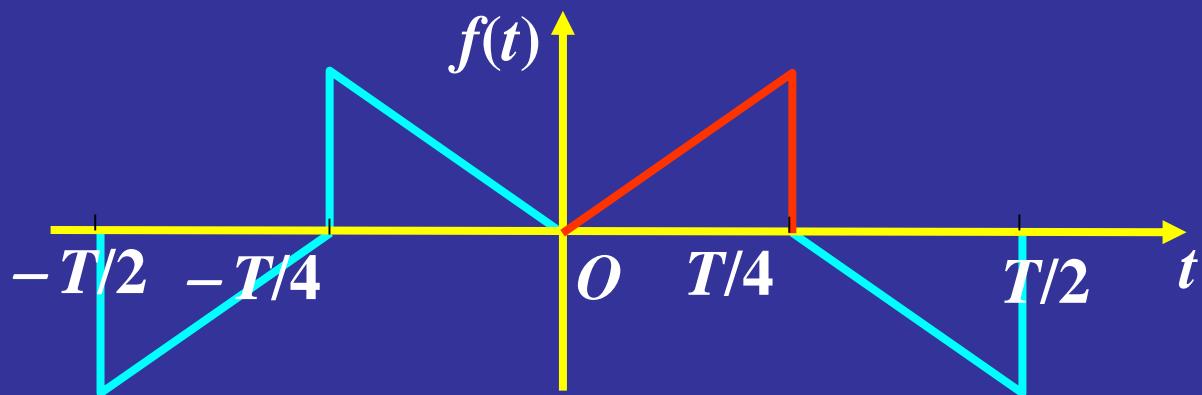
试画出  $f(t)$  的波形。

## 解

(1) 正弦分量；奇函数



## (2) 余弦分量；偶函数



# 10.5 有效值、平均值和平均功率

## 1. 三角函数的性质

(1) 正弦、余弦信号一个周期内的积分为0

$$\int_0^{2\pi} \sin k \omega t d(\omega t) = 0 \quad \int_0^{2\pi} \cos k \omega t d(\omega t) = 0$$

k整数

(2)  $\sin^2$ 、 $\cos^2$ 在一个周期内的积分不为零

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 k \omega t d(\omega t) = \pi \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 k \omega t d(\omega t) = \pi$$

$$\int_0^T \sin^2 k \omega t dt = \frac{T}{2} \quad \int_0^T \cos^2 k \omega t dt = \frac{T}{2}$$

### (3) 三角函数的正交性

$$\int_0^{2\pi} \cos k \omega t \cdot \sin p \omega t d(\omega t) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos k \omega t \cdot \cos p \omega t d(\omega t) = 0$$

$$(k \neq p)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin k \omega t \cdot \sin p \omega t d(\omega t) = 0$$

## 2. 非正弦周期电流、电压的有效值

$$i(t) = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \varphi_2) + I_{3m} \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots$$

代入电流有效值的定义式

$$I =$$

$$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \varphi_2) + I_{3m} \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots]^2 dt}$$

四种类型： 直流分量的平方；      直流和交流乘积的2倍；  
单一交流分量的平方； 不同频率分量乘积的2倍；

利用三角函数的正交性得：

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{km}^2}{2}}$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots}$$

同理可得

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots}$$

**结论** 周期电压、电流的有效值为直流分量及各次谐波分量有效值平方和的平方根

### 3. 非正弦周期电流的平均值

#### (1) 算术平均值

若  $i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t + \phi_k)$

则其平均值为：

$$I_{AV} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = I_0$$

正弦量的平均值为0

## (2) 绝对平均值

$$I_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt$$

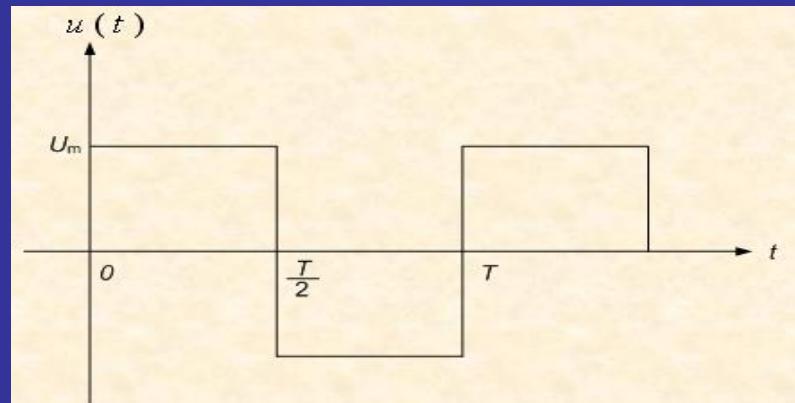
若  $i(t) = I_m \sin \omega t$

$$\begin{aligned} I_{av} &= \frac{1}{T} \int_0^T |I_m \sin \omega t| dt = \frac{2}{T} I_m \int_0^{T/2} \sin \omega t dt \\ &= \frac{2I_m}{\omega t} (-\cos \omega t) \Big|_0^{T/2} = \frac{2I_m}{\pi} = 0.673I_m = 0.898I \end{aligned}$$

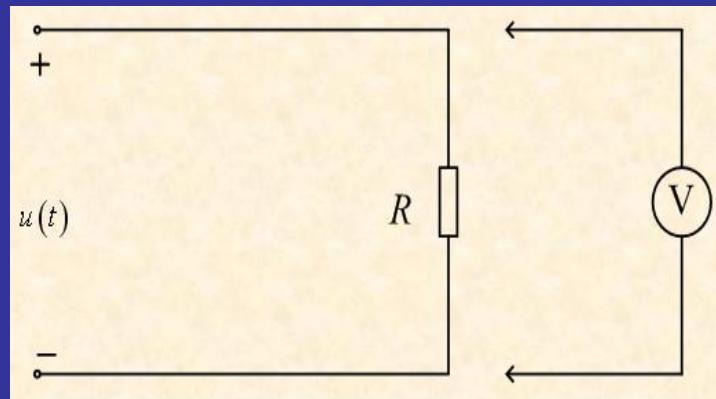
正弦信号有效值与av平均值的关系为

$$I = \frac{I_{av}}{0.898} = 1.11I_{av}$$

**例10-3** 一个矩形波电源  $u(t)$  加在电阻  $R$  两端，如图10-6所示。已知  $U_m=100V$ ，现在分别用磁电系电压表、电磁系电压表及整流式电压表测量电阻电压  $u(t)$ ，求各种表的读数。



(a) 矩形波电源



(b) 测电阻电压

**解：**磁电系电压表测出的是电压  $u(t)$  的直流分量，由于电压  $u(t)$  的波形在横轴的上下面积相等，即  $a_0 = 0$ ，所以磁电系电压表的读数为零。

电磁系电压表测出的是电压 $u(t)$ 的有效值，根据有效值定义

$$U = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_m^2 dt} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_m^2 dt} = U_m = 100V$$

所以电磁系电压表的读数为100 V。

要求整流式电压表的读数，应先计算出电压 $u(t)$ 的平均值 $U_{av}$

$$U_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_m dt = U_m = 100V$$

整流式电压表的读数为  $1.11 U_{av} = 1.11 \times 100 = 111$  V (按正弦交流整定)

## 4. 非正弦周期交流电路的平均功率

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \phi_{uk}) \\ i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \phi_{ik}) \\ P = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i dt \end{array} \right.$$

利用三角函数的正交性，得

$$\begin{aligned} P &= U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \phi_k \quad (\phi_k = \phi_{uk} - \phi_{ik}) \\ &= P_0 + P_1 + P_2 + \dots \end{aligned}$$

结论

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots$$

平均功率=直流分量的功率+各次谐波的平均功率

## 10.6 非正弦周期交流电路的计算

### 1. 计算步骤

- (1) 利用付里叶级数，将非正弦周期函数展开成若干种频率的谐波信号；
- (2) 利用正弦交流电路的计算方法，对各谐波信号分别应用相量法计算；
- (3) 将以上同一支路的计算结果迭加，即为非正弦激励所产生的响应。

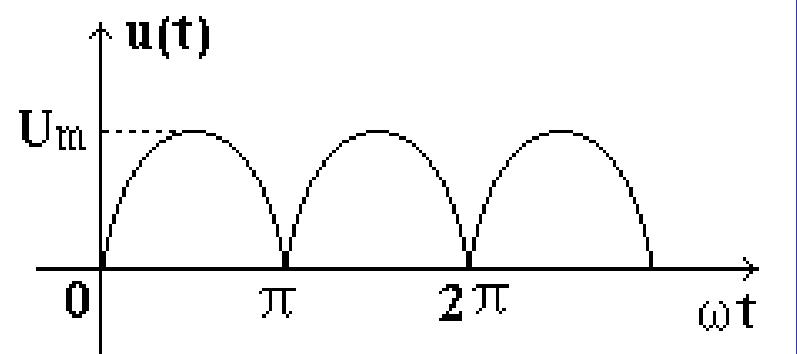
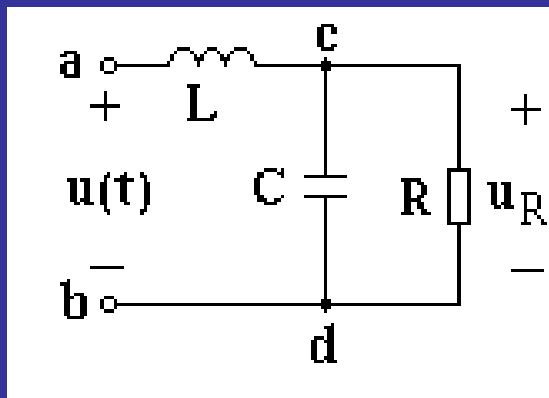
## 2. 注意

- (1) 直流分量作用于电路时，电路中的电感相当于短路，电容相当于开路
- (2) 当各次谐波分量作用于电路时，不同频率的激励不能放在一起运算。因为电感和电容对于不同的谐波呈现不同的电抗值，例如电感L对于基波呈现的感抗值为 $\omega L$ ，而对于k次谐波呈现的感抗值为 $k\omega L$ ；电容C对于基波呈现的容抗值为  $\frac{1}{\omega C}$ ，而对于k次谐波呈现的容抗值为  $\frac{1}{k\omega C}$
- (3) 在含有电感L、电容C的电路中，可能对于某一频率的谐波分量发生串联谐振或并联谐振，计算过程中应注意

### 3. 计算举例

例1

图示电路为一全波整流的滤波电路，其中  $L = 2.5 \text{ H}$ ,  $C = 9\mu\text{F}$ 。负载电阻  $R = 2000 \Omega$ 。加在滤波电路的入端电压  $u(t)$  是一个全波整流电压，波形如图所示，其中  $U_m = 314 \text{ V}$ ,  $\omega = 314 \text{ rad/s}$ 。求负载电阻  $R$  两端各次谐波分量电压幅值及  $R$  两端电压有效值。



解

1 查表将  $u(t)$  分解为傅里叶级数

$$u(t) = \frac{2}{\pi}U_m - \frac{4}{\pi}U_m\left(\frac{1}{3}\cos 2\omega t + \frac{1}{15}\cos 4\omega t + \dots\right)V$$

取到4次谐波，将 $U_m=314$  V代入

$$u(t) = 200 - 133.3 \cos 2\omega t - 26.7 \cos 4\omega t V$$

## 2 计算各次谐波分量电压幅值

(1) 当直流分量作用于电路时，电感相当于短路，电容相当于开路，电阻R两端直流分量电压 $U_{R(0)} = 200$  V。

(2) 当二次谐波分量作用于电路时

感抗  $X_{L(2)} = 2\omega L = 2 \times 314 \times 2.5 = 1570 \Omega$

容抗  $X_{C(2)} = 1 / 2\omega C = 177 \Omega$

$$Z_{cd(2)} = \frac{R \times (-jX_{C(2)})}{R - jX_{C(2)}} = 176\angle -84.9^\circ \Omega$$

$$Z_{ab(2)} = jX_{L(2)} + Z_{cd(2)} = 1395\angle 89.4^\circ \Omega$$

电阻  $R$  两端二次谐波分量电压幅值

$$U_{Rm(2)} = \left| \frac{Z_{cd(2)}}{Z_{ab(2)}} \right| U_{m(2)} = \frac{176}{1395} \times 133.3 = 16.8V$$

( 3 ) 当四次谐波分量作用于电路时

感抗  $X_{L(4)} = 4\omega L = 4 \times 314 \times 2.5 = 3140 \Omega$

容抗  $X_{C(4)} = 1/(4\omega C) = 88.5 \Omega$

$$Z_{cd(4)} = \frac{R \times (-jX_{C(4)})}{R - jX_{C(4)}} = 88.4 \angle -87.5^\circ \Omega$$

$$Z_{ab(4)} = jX_{L(4)} + Z_{cd(4)} = 3051.7 \angle 89.9^\circ \Omega$$

电阻R两端四次谐波分量电压幅值

$$U_{Rm(4)} = \left| \frac{Z_{cd(4)}}{Z_{ab(4)}} \right| U_{m(4)} = \frac{88.4}{3501.7} \times 26.7 = 0.773V$$

### 3、电阻R两端电压有效值

$$\begin{aligned} U_R &= \sqrt{U_{R(0)}^2 + \frac{U_{Rm(2)}^2}{2} + \frac{U_{Rm(4)}^2}{2}} \\ &= \sqrt{200^2 + \frac{16.8^2}{2} + \frac{0.773^2}{2}} \\ &= 200.35V \end{aligned}$$

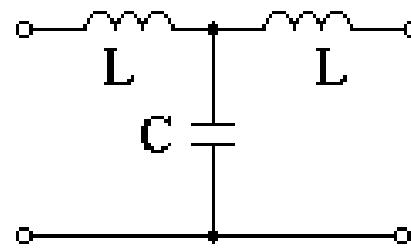
R两端四次谐波分量电压幅值与直流分量的比值为

$$\frac{0.773}{200} \times 100\% = 0.387\%$$

### 3. 濾波器的概念

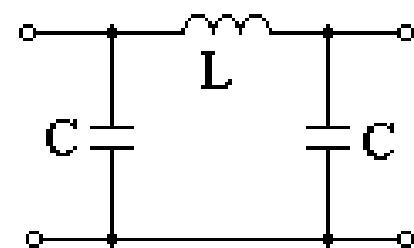
濾波器

具有阻止某些谐波通过的电路器件

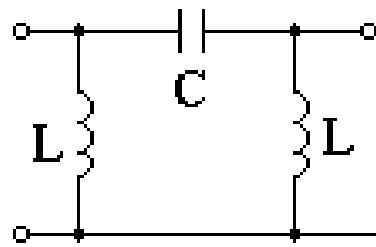


(a) T型

低通濾波器

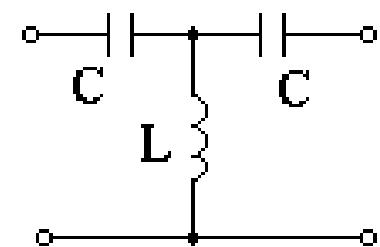


(b)  $\pi$ 型



(a)  $\pi$ 型

高通濾波器



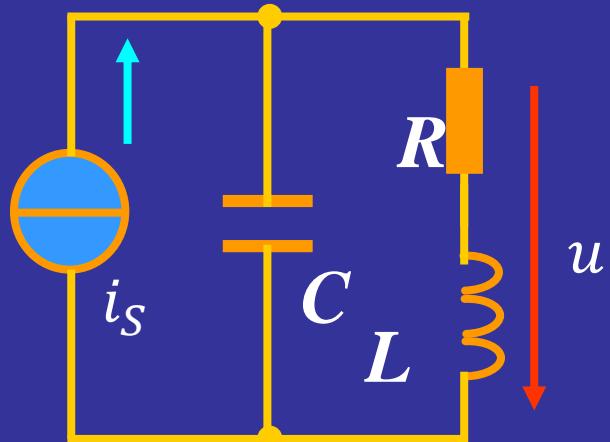
(b) T型

## 例2

方波信号激励的电路。求 $u$ , 已知:

$$R = 20\Omega, L = 1\text{mH}, C = 1000\text{pF}$$

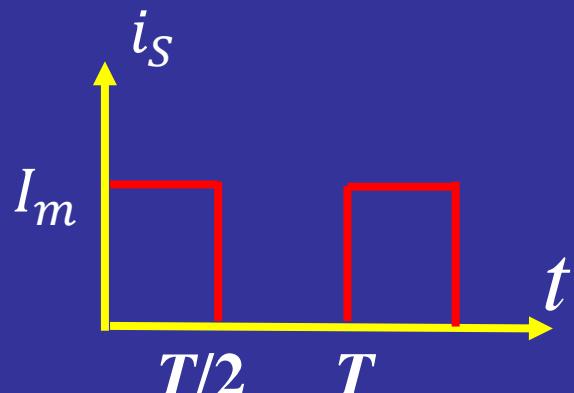
$$I_m = 157\mu\text{A}, T = 6.28\mu\text{s}$$



解

(1) 已知方波信号的展开式为:

$$i_S = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$



代入已知数据:

$$I_m = 157\mu\text{A} \quad T = 6.28\mu\text{s}$$

直流分量  $I_0 = \frac{I_m}{2} = \frac{157}{2} = 78.5 \mu\text{A}$

基波最大值  $I_{1m} = \frac{2I_m}{\pi} = \frac{2 \times 1.57}{3.14} = 100 \mu\text{A}$

三次谐波最大值  $I_{3m} = \frac{1}{3} I_{1m} = 33.3 \mu\text{A}$

五次谐波最大值  $I_{5m} = \frac{1}{5} I_{1m} = 20 \mu\text{A}$

角频率  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{6.28 \times 10^{-6}} = 10^6 \text{ rad/s}$

电流源各频率的谐波分量为

$$I_{S0} = 78.5 \mu\text{A} \quad i_{s1} = 100 \sin 10^6 t \mu\text{A}$$

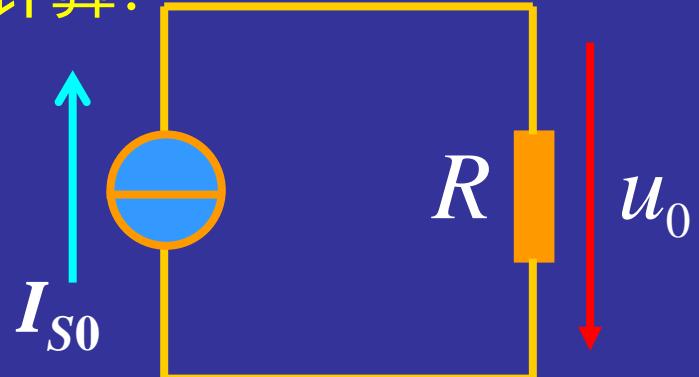
$$i_{s3} = \frac{100}{3} \sin 3 \cdot 10^6 t \mu\text{A} \quad i_{s5} = \frac{100}{5} \sin 5 \cdot 10^6 t \mu\text{A}$$

(2) 对各种频率的谐波分量单独计算：

(a) 直流分量  $I_{S0}$  作用

$$I_{S0} = 78.5 \mu\text{A}$$

电容断路，电感短路：

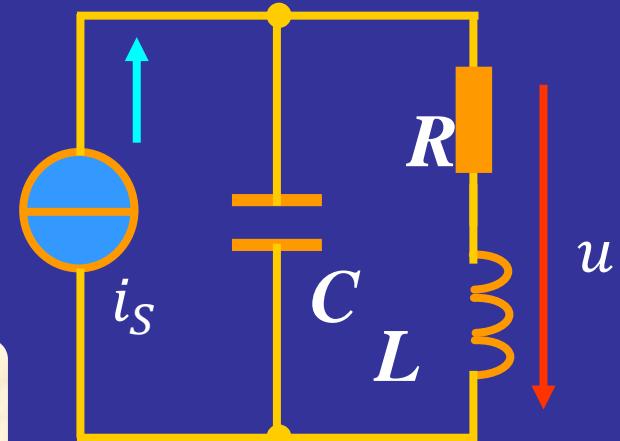


$$U_0 = RI_{S0} = 20 \times 78.5 \times 10^{-6} = 1.57 \text{ mV}$$

(b) 基波作用  $i_{s1} = 100 \sin 10^6 t$

$$\frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{10^6 \times 1000 \times 10^{-12}} = 1\text{k}\Omega$$
$$\omega_1 L = 10^6 \times 10^{-3} = 1\text{k}\Omega$$

$X_L >> R$



$$Z(\omega_1) = \frac{(R + jX_L) \cdot (-jX_C)}{R + j(X_L - X_C)} \approx \frac{X_L X_C}{R} = \frac{L}{RC} = 50\text{k}\Omega$$

$$Z(\omega_1) = 50k\Omega \quad i_{s1} = 100 \sin 10^6 t \text{ } \mu\text{A}$$

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \cdot Z(\omega_1) = \frac{100 \times 10^{-6}}{\sqrt{2}} \cdot 50 = \frac{5000}{\sqrt{2}} \text{ mV}$$

(c) 三次谐波作用  $i_{s3} = \frac{100}{3} \sin 3 \cdot 10^6 t$

$$\frac{1}{3\omega_1 C} = \frac{1}{3 \times 10^6 \times 1000 \times 10^{-12}} = 0.33k\Omega$$

$$3\omega_1 L = 3 \times 10^6 \times 10^{-3} = 3\text{k}\Omega$$

$$Z(3\omega_1) = \frac{(R + jXL3)(-jXC3)}{R + j(XL3 - XC3)} = 374.5 \angle -89.19^0 \Omega$$

$$\dot{U}_3 = \dot{I}_{S3} \cdot Z(3\omega_1) = 33.3 \times \frac{10^{-6}}{\sqrt{2}} \times 374.5 \angle -89.19^0$$

$$= \frac{12.47}{\sqrt{2}} \angle -89.2^0 \text{mV}$$

(d) 五次谐波作用

$$i_{s5} = \frac{100}{5} \sin 5 \cdot 10^6 t \text{ } \mu\text{A}$$

$$\frac{1}{5\omega_1 C} = \frac{1}{5 \times 10^6 \times 1000 \times 10^{-12}} = 0.2(k\Omega)$$
$$5\omega_1 L = 5 \times 10^6 \times 10^{-3} = 5\text{k}\Omega$$

$$Z(5\omega_1) = \frac{(R + jXL5)(-jXC5)}{R + j(5XL5 - XC5)} = 208.3 \angle -89.53^\circ \Omega$$

$$\dot{U}_5 = \dot{I}_{5s} \cdot Z(5\omega_1) = 20 \times 10^{-6} / \sqrt{2} \cdot 208.3 \angle -89.53^\circ$$
$$= \frac{4.166}{\sqrt{2}} \angle -89.53^\circ \text{mV}$$

(3) 各谐波分量计算结果瞬时值迭加:

$$U_0 = 1.57 \text{ mV}$$

$$\dot{U}_3 = \frac{12.47}{\sqrt{2}} \angle -89.2^\circ \text{ mV}$$

$$\dot{U}_1 = \frac{5000}{\sqrt{2}} \text{ mV}$$

$$\dot{U}_5 = \frac{4.166}{\sqrt{2}} \angle -89.53^\circ \text{ mV}$$

$$u = U_0 + u_1 + u_3 + u_5$$

$$\approx 1.57 + 5000 \sin \omega t$$

$$+ 12.47 \sin(3\omega t - 89.2^\circ)$$

$$+ 4.166 \sin(5\omega t - 89.53^\circ) \text{ mV}$$

### 例3

已知无源网络N的入端电压为  $u(t) = 100 \sin 314t + 50 \sin(942t - 30^\circ)$ V，入端电流为  $i(t) = 10 \sin 314t + 1.755 \sin(942t + \theta_3)$ A，如果N可以看作是R、L、C串联电路，试求(1) R、L、C的值；(2)  $\theta_3$ 的值；(3) 无源网络N消耗的有功功率。

### 解

(1) 基波电压作用于网络时，电流与电压同相位，故此时为串联谐振，即

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, 314L = \frac{1}{314C}$$
$$R = \frac{U_{(1)}}{I_{(1)}} = \frac{100 \div \sqrt{2}}{10 \div \sqrt{2}} = 100\Omega$$

三次谐波电压作用于网络时，复阻抗的模

$$Z_{(3)} = \frac{50 \div \sqrt{2}}{1.755 \div \sqrt{2}} = 28.5 \Omega$$

$$Z_{(3)} = \sqrt{R^2 + (942L - \frac{1}{942C})^2} = 28.5 \Omega$$

将  $L = \frac{1}{314^2 C}$  ,  $R = 10$  代入上式

$$28.5^2 = 10^2 + (942L - \frac{1}{942C})^2$$

解得  $C = 318.3 \mu\text{F}$ ,  $L = 31.9 \text{ mH}$ 。

(2) 三次谐波作用时的复阻抗

$$Z_{(3)} = 10 + j \left( 942 \times 31.9 \times 10^{-3} \cdot \frac{1}{942 \times 318.3 \times 10^{-6}} \right)$$

$$= 10 + j(30 - 3.3) = 28.5 \angle 69.46^\circ \Omega$$

$$\dot{U}_{(3)} = 50 \angle -30^\circ \text{ V}$$

$$I_{(3)} = \dot{U}_3 / Z_{(3)} = \frac{50 \angle -30^\circ}{28.5 \angle 69.46^\circ} = 1.755 \angle -99.46^\circ A$$

故  $\theta_3 = -99.46^\circ$

(3) 无源网络N消耗的有功功率

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3$$

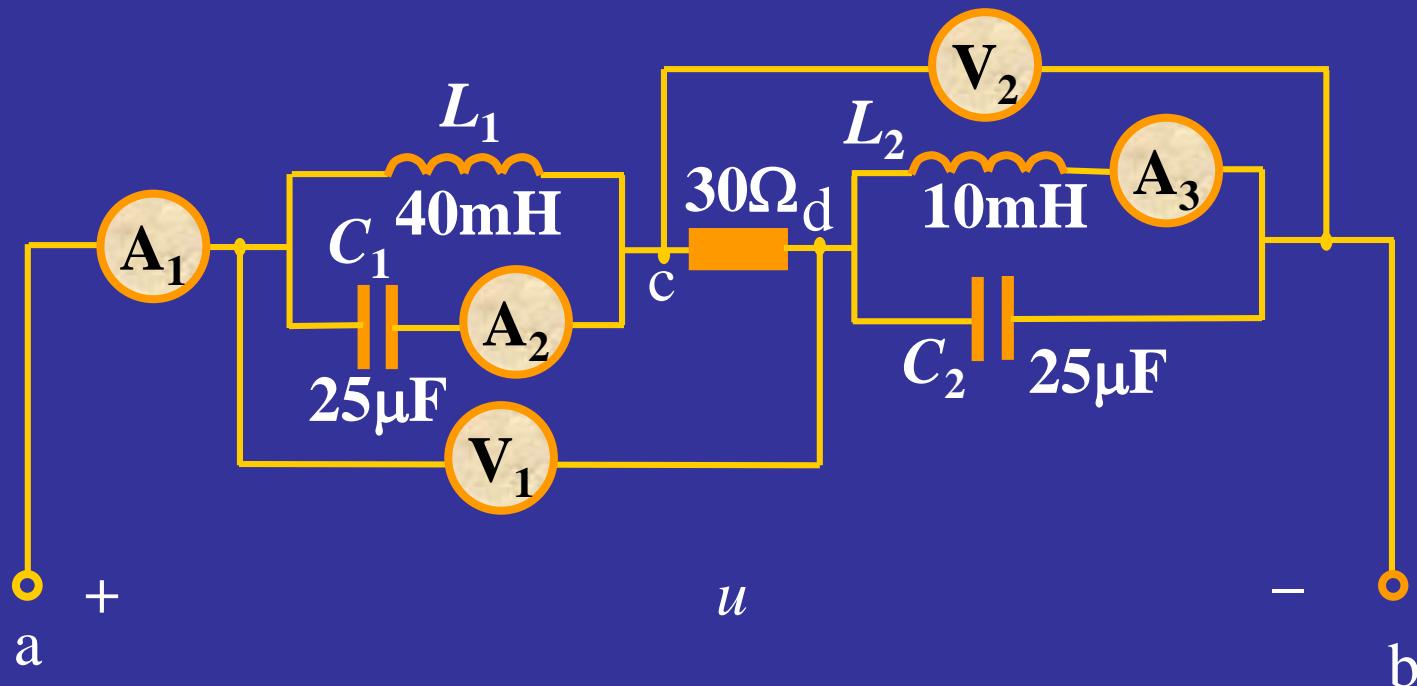
$$= \frac{100}{\sqrt{2}} \times \frac{10}{\sqrt{2}} \cos 0^\circ + \frac{50}{\sqrt{2}} \times \frac{1.755}{\sqrt{2}} \cos[-30^\circ - (-99.46^\circ)]$$

$$= 500 + 15.4 = 515.4 \text{ W}$$

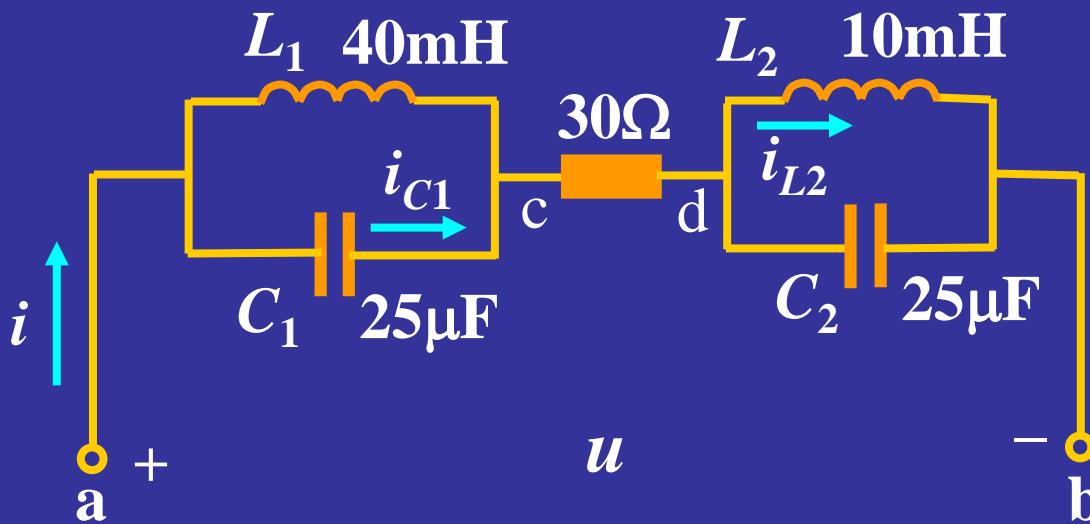
#### 例4

已知:  $u = 30 + 120 \cos 1000t + 60 \cos(2000t + \frac{\pi}{4})$  V.

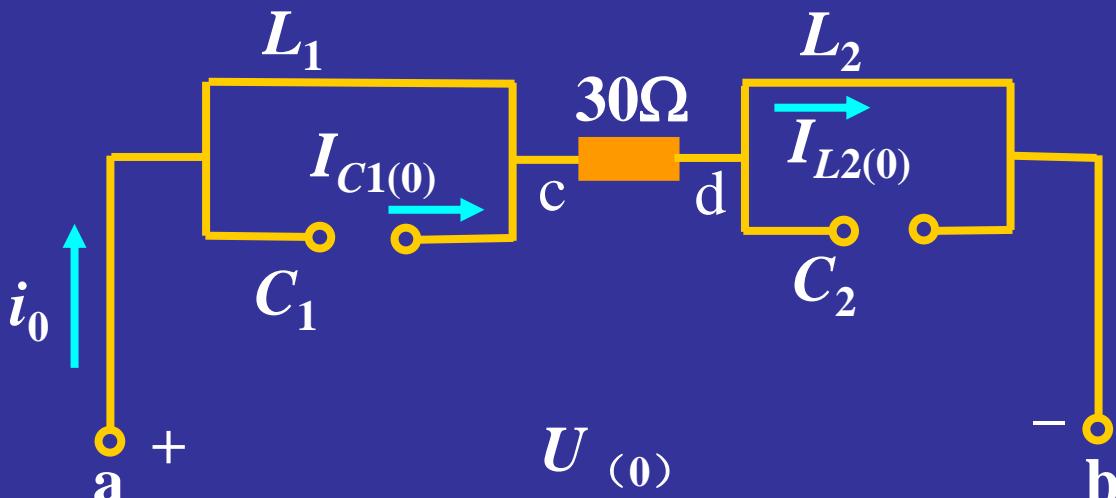
求图示电路中各表读数(有效值)及电路吸收的功率。



解



(1)  $u_0=30\text{V}$ 作用于电路,  $L_1$ 、 $L_2$ 短路,  $C_1$ 、 $C_2$ 开路。



$$I_{(0)} = I_{L2(0)} = U_{(0)}/R = 30/30 = 1\text{A}, I_{C1(0)} = 0$$

$$U_{ad(0)} = U_{cb(0)} = U_{(0)} = 30\text{V}$$

(2)  $u_1 = 120\cos 1000t$  V作用

$$\omega L_1 = 1000 \times 40 \times 10^{-3} = 40\Omega \quad \omega L_2 = 1000 \times 10 \times 10^{-3} = 10\Omega$$

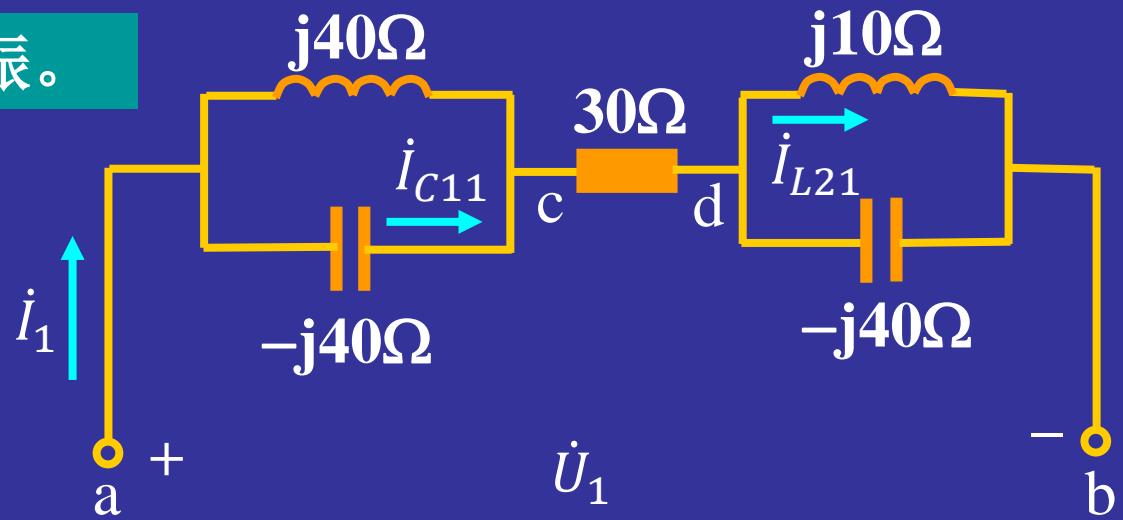
$$\frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{1000 \times 25 \times 10^{-6}} = 40\Omega$$

$L_1$ 、 $C_1$ 发生并联谐振。

$$\dot{U}_{(1)} = 120\angle 0^\circ \text{V}$$

$$\dot{I}_{(1)} = \dot{I}_{L2(1)} = 0$$

$$\dot{U}_{cb(1)} = 0$$



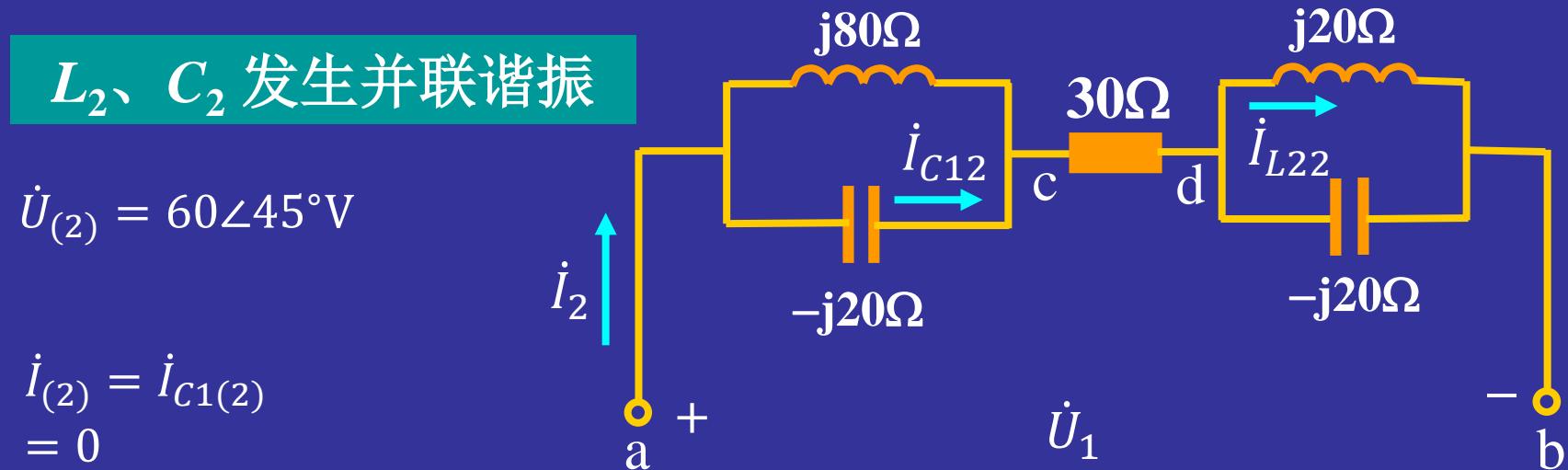
$$\dot{U}_{ad(1)} = \dot{U}_{(1)} = 120\angle 0^\circ \text{V}$$

$$\dot{I}_{C1(1)} = j\omega C_1 \dot{U}_1 = \frac{120\angle 0^\circ}{-j40} = 3\angle 90^\circ \text{A}$$

(3)  $u_2 = 60\cos(2000t + \pi/4)$ V作用

$$2\omega L_1 = 2000 \times 40 \times 10^{-3} = 80\Omega, \quad 2\omega L_2 = 2000 \times 10 \times 10^{-3} = 20\Omega$$

$$\frac{1}{2\omega C_1} = \frac{1}{2\omega C_2} = \frac{1}{2000 \times 25 \times 10^{-6}} = 20\Omega$$



$$\dot{U}_{\mathbf{ad}(2)} = 0, \quad \dot{U}_{\mathbf{cb}(2)} = \dot{U}_{(2)} = 60\angle 45^\circ$$

$$\dot{I}_{L2(2)} = \frac{\dot{U}_1}{\mathbf{j}2\omega L_2} = \frac{60\angle 45^\circ}{\mathbf{j}20} = 3\angle -45^\circ$$

所求的电压、电流的瞬时值为：

$$i = i_0 + i_1 + i_2 = 1\text{A}$$

$$i_{C1} = i_{C10} + i_{C11} + i_{C12} = 3\cos(1000t + 90^\circ) \text{ A}$$

$$i_{L2} = i_{L20} + i_{L21} + i_{L22} = 1 + 3\cos(2000t - 45^\circ) \text{ A}$$

$$u_{ad} = u_{ad0} + u_{ad1} + u_{ad2} = 30 + 120\cos 1000t \text{ V}$$

$$u_{cb} = u_{cb0} + u_{cb1} + u_{cb2} = 30 + 60\cos(2000t + 45^\circ) \text{ V}$$

电流表A<sub>1</sub>的读数：  $I = 1 \text{ A}$       电流表A<sub>2</sub>的读数：  $3/\sqrt{2} = 2.12 \text{ A}$

电流表A<sub>3</sub>的读数： $\sqrt{1^2 + (3/\sqrt{2})^2} = 2.35 \text{ A}$

电压表V<sub>1</sub>的读数： $\sqrt{30^2 + (120/\sqrt{2})^2} = 90 \text{ V}$

电压表V<sub>2</sub>的读数： $\sqrt{30^2 + (60/\sqrt{2})^2} = 52.0 \text{ V}$

## 例5

已知 $u(t)$ 是周期函数，波形如图， $L=1/2\pi H$ ,

$C=125/\pi \mu F$ ，求理想变压器原边电流 $i_1(t)$ 及输出电压 $u_2$ 的有效值。

解

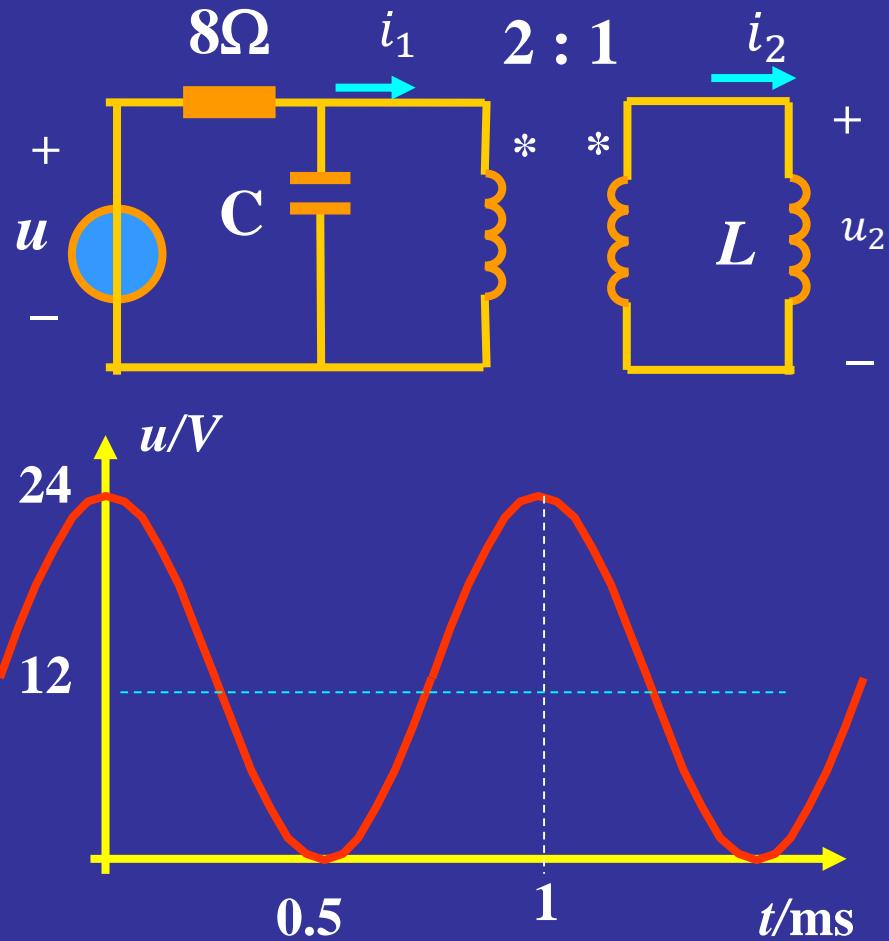
$$\omega = 2\pi/T = 2\pi \times 10^3 rad/s$$

$$u(t) = 12 + 12 \cos(\omega t)$$

当 $u=12V$ 作用时，电容开路、  
电感短路，有：

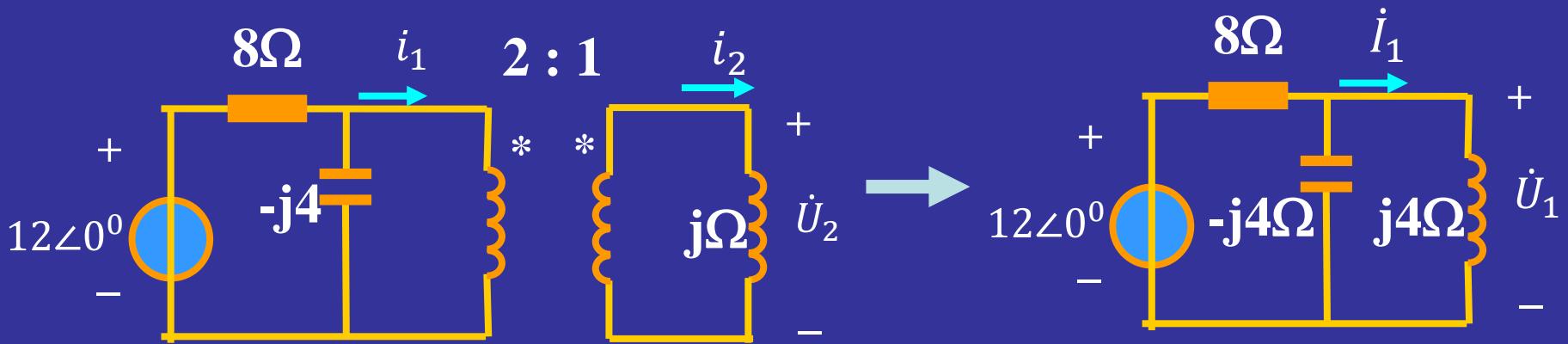
$$i_1^{(0)} = 12/8 = 1.5A$$

$$u_2^{(0)} = 0$$



当  $u = 12 \cos(\omega t)$  作用时  $X_C = \frac{-1}{\omega C} = \frac{-\pi}{2\pi \times 10^3 \times 125 \times 10^{-6}} = 4\Omega$

$$X_L = \omega L = 2\pi \times 10^3 \times \frac{1}{2\pi} \times 10^{-3} = 1\Omega$$



$$\dot{I}_1^{(1)} = \frac{\dot{U}^{(1)}}{j4} = \frac{12}{j4} = -j3A$$

$$\dot{U}_2^{(1)} = \frac{1}{n} \dot{U}_1^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot -j3 = -j1.5A$$

$$\dot{U}_1^{(1)} = \dot{U}^{(1)} = 12\angle0^0V$$

$$i_1 = 1.5 + 3 \cos(\omega t - 90^\circ)A$$

$$U_2 = U_2^{(1)} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 4.243V$$

## 例6

$$\text{已知 } u_1 = 220\sqrt{2} \cos \omega t V$$

$$u_2 = 220\sqrt{2} \cos \omega t + 100\sqrt{2} \cos(3\omega t + 30^\circ) V$$

电感基波阻抗 $20\Omega$ , 求 $U_{ab}$ 、 $i$ 、及功率表的读数。

解

$$U_{ab} = \sqrt{440^2 + 100^2} = 451.22V$$

一次谐波作用时:  $\dot{U}_{ab(1)} = 440\angle 0^\circ V$

$$\dot{I}_{(1)} = \frac{440}{60 + j20} = \frac{22}{3 + j} = 6.96\angle -18.4^\circ A$$

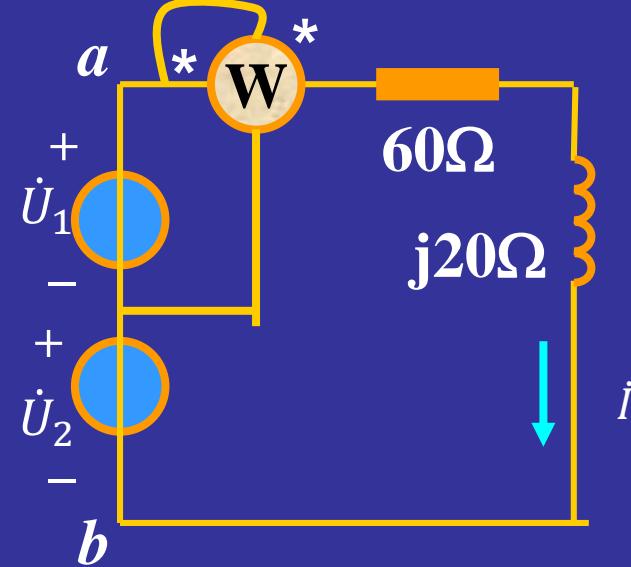
三次谐波作用时:  $\dot{U}_{ab(3)} = 100\angle 30^\circ V$

$$\dot{I}_{(3)} = \frac{100\angle 30^\circ}{60 + j60} = \frac{5\angle 30^\circ}{3 + j3} = 1.18\angle -45^\circ A$$

$$i = 6.96\sqrt{2} \cos(\omega t - 18.4^\circ) + 1.18\sqrt{2} \cos(3\omega t - 45^\circ) A$$

$$\begin{aligned} P &= 220 \times 6.96 \cos 18.4 \\ &= 1452.92W \end{aligned}$$

测的是 $u_1$ 的功率



解

$$u_1 = 220\sqrt{2} \cos \omega t V$$

$$u_2 = 220\sqrt{2} \cos \omega t + 100\sqrt{2} \cos(3\omega t + 30^\circ) V$$

$u_1$ 一次谐波作用时:  $\dot{U}_{ac(1)} = 220\angle 0^\circ V$

$$\dot{I}_{(1)1} = \frac{220}{60 + j20} = \frac{22}{3 + j} = 3.46\angle -18.4^\circ A$$

$$\begin{aligned} P &= 220 \times 3.46 \cos 18.4 \\ &= 726.46 W \end{aligned}$$

$u_2$ 一次谐波作用时:  $\dot{U}_{cb(1)} = 220\angle 0^\circ V$

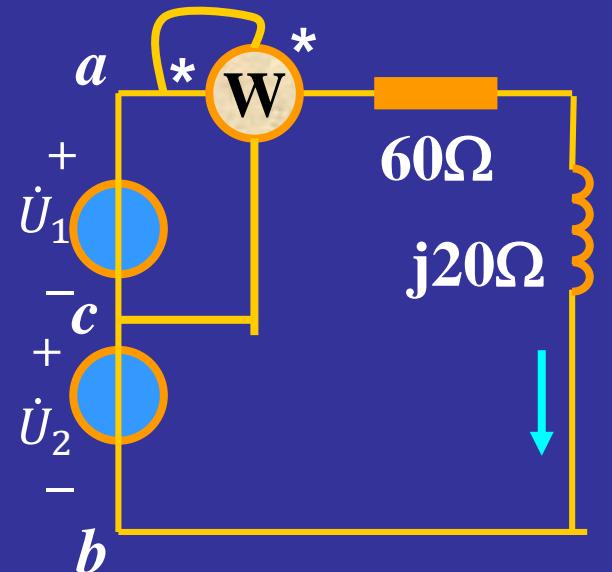
$$\dot{I}_{(1)2} = \frac{220}{60 + j20} = \frac{22}{3 + j} = 3.46\angle -18.4^\circ A$$

$$P = 0 W$$

三次谐波作用时:  $\dot{U}_{ab(3)} = 100\angle 30^\circ V$

$$\dot{I}_{(3)} = \frac{100\angle 30^\circ}{60 + j60} = \frac{5\angle 30^\circ}{3 + j3} = 1.18\angle -15^\circ A$$

$$i = 6.96\sqrt{2} \cos(\omega t - 18.4^\circ) + 1.18\sqrt{2} \cos(3\omega t - 15^\circ) A \quad P = 0 W$$



不一样? ?

## 10.7 对称三相电路的高次谐波（选学）

### 1. 三相发电机产生的高次谐波电压

发电机输出的三相电压表示为：

$$u_A = u(t), \quad u_B = u(t - T/3), \quad u_C = u(t - 2T/3)$$

发电机输出的三相电压为奇谐波函数，其展开式为：

$$u_A = U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \\ U_{5m} \sin(5\omega t + \psi_5) + U_{7m} \sin(7\omega t + \psi_7) + \dots$$

$$u_B = U_{1m} \sin[\omega(t - \frac{T}{3}) + \psi_1] + U_{3m} \sin[3\omega(t - \frac{T}{3}) + \psi_3] + \\ U_{5m} \sin[5\omega(t - \frac{T}{3}) + \psi_5] + U_{7m} \sin[7\omega(t - \frac{T}{3}) + \psi_7] + \dots$$

$$u_C = U_{1m} \sin\left[\omega(t - \frac{2T}{3}) + \psi_1\right] + U_{3m} \sin\left[3\omega(t - \frac{2T}{3}) + \psi_3\right] + \\ U_{5m} \sin\left[5\omega(t - \frac{2T}{3}) + \psi_5\right] + U_{7m} \sin\left[7\omega(t - \frac{2T}{3}) + \psi_7\right] + \dots$$

$T = 2\pi$ , 即  $T = 2\pi / \omega$ 。将此代入  $u_B$ 、 $u_C$  的表达式

$$u_B = \underbrace{U_{1m} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \psi_1)}_{\text{Red}} + \underbrace{U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3)}_{\text{Blue}} + \\ \underbrace{U_{5m} \sin(5\omega t - \frac{4\pi}{3} + \psi_5)}_{\text{Yellow}} + \underbrace{U_{7m} \sin(7\omega t - \frac{2\pi}{3} + \psi_7)}_{\text{Green}} + \dots$$

$$u_C = \underbrace{U_{1m} \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3} + \psi_1)}_{\text{Yellow}} + \underbrace{U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3)}_{\text{Blue}} + \\ \underbrace{U_{5m} \sin(5\omega t - \frac{2\pi}{3} + \psi_5)}_{\text{Red}} + \underbrace{U_{7m} \sin(7\omega t - \frac{4\pi}{3} + \psi_7)}_{\text{Green}} + \dots$$

$$u_A = \underbrace{U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)}_{\text{Red}} + \underbrace{U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3)}_{\text{Blue}} + \\ \underbrace{U_{5m} \sin(5\omega t + \psi_5)}_{\text{Green}} + \underbrace{U_{7m} \sin(7\omega t + \psi_7)}_{\text{Red}} + \dots$$

$u_A$ 、 $u_B$ 、 $u_C$  三相电压的同次谐波特点：

- (1) 基波1、七次谐波7（十三次谐波13、十九次谐波19等），分别都是对称的三相电压，其相序为A - B - C，即为顺序，构成顺序对称组
- (2) 三次谐波3（九次谐波9、十五次谐波15等），电压有效值都是相等的，其初相位相同，相位差为零，构成零序对称组
- (3) 五次谐波5（十一次谐波11、十七次谐波17等），分别都是对称的三相电压，其相序为A - C - B，即为逆序，构成逆序对称组

这就是说，对称三相非正弦电压可以分解为三个组：顺序对称组、零序对称组、逆序对称组。

$u_A$ 、 $u_B$ 、 $u_C$ 三相电源星形连接：

$$u_A = u_{A(1)} + u_{A(3)} + u_{A(5)} + u_{A(7)} + \dots$$

$$u_B = u_{B(1)} + u_{B(3)} + u_{B(5)} + u_{B(7)} + \dots$$

$$u_C = u_{C(1)} + u_{C(3)} + u_{C(5)} + u_{C(7)} + \dots$$

各次谐波的线电压分别为

$$\dot{U}_{AB(1)} = \dot{U}_{A(1)} - \dot{U}_{B(1)} = \sqrt{3}\dot{U}_{A(1)}\angle 30^0$$

有效值关系

$$U_{l(1)} = \sqrt{3}U_{p(1)}$$

$$\dot{U}_{AB(3)} = \dot{U}_{A(3)} - \dot{U}_{B(3)} = 0$$

有效值关系

$$U_{l3} = 0$$

$$\dot{U}_{AB(5)} = \dot{U}_{A(5)} - \dot{U}_{B(5)} = \sqrt{3}\dot{U}_{A(5)}\angle -30^0$$

有效值关系

$$U_{l(5)} = \sqrt{3}U_{p(5)}$$

相电压

$$U_P = \sqrt{U_{P(1)}^2 + U_{P(3)}^2 + U_{P(5)}^2 + U_{P(7)}^2 + \dots}$$

线电压

$$U_l = \sqrt{U_{\ell(1)}^2 + U_{\ell(5)}^2 + U_{\ell(7)}^2 + \dots}$$

结论

线电压中不含零序分量

$$U_l < \sqrt{3}U_P$$

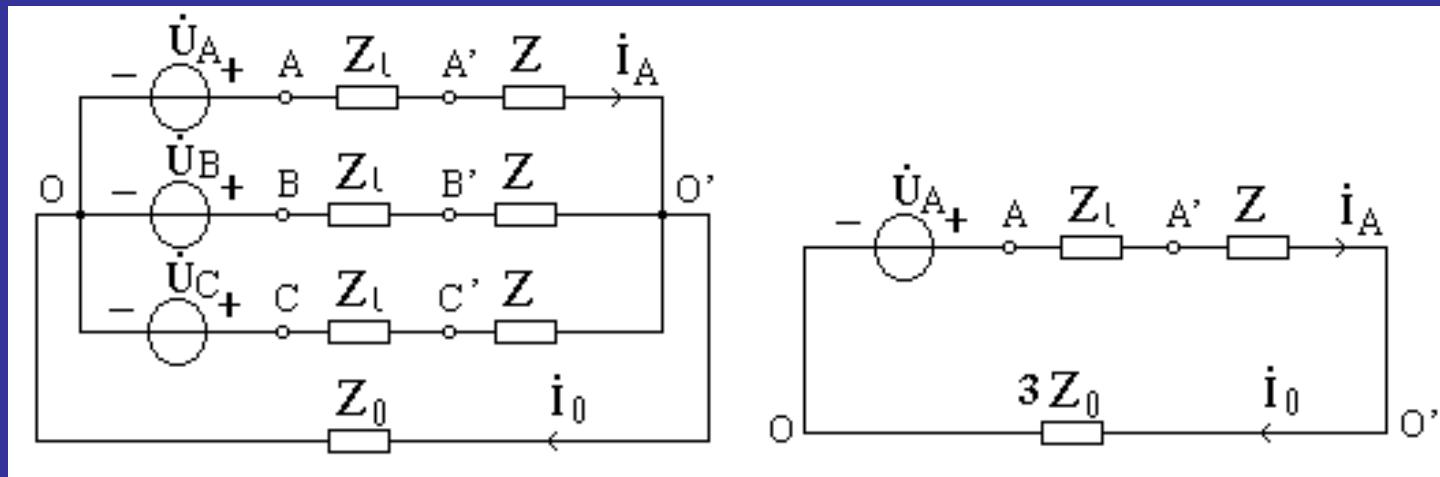
## 三相负载星形连接：

如果三相负载星形连接且无中线，由于电源线电压中不含零序分量，所以负载的相电压和线电压中都不含零序分量，线电流中也不含零序分量。负载中点与电源中电之间的电压为零序分量电压，这里和Y-Y联接的对称三相正弦交流电路中，两中点间电压为零的结论是不一样的。由于负载的相电压和线电压中都不含零序分量，所以在负载端：

$$U_l = \sqrt{3}U_P$$

如果三相负载星形连接且有中线，则线电流（等于相电流）中含零序分量，中线上的电流是每一相负载零序电流的三倍。在化三相电路为单相电路计算时，一相等值电路中的中线阻抗要乘以三。由于负载相电流中含有零序分量，所以负载的相电压中含零序分量，负载的线电压中仍然不含零序分量，所以：

$$U_l < \sqrt{3} U_P$$



### 三相电源三角形连接：

三相电源作三角形连接，将形成一个闭合回路。在这个闭合回路中顺序对称组电压和逆序对称组电压为零，而零序对称组电压则不为零，它是一相电源零序电压的三倍，并在回路中产生环流。由于三相电源的内阻很小，所以环流相当大，它对电机运行产生不良影响。故零序分量电压较高的电源，不应作三角形连接。

## 高次谐波的危害：

- (1) 使电动机的运行性能变坏
- (2) 增大仪表误差，比如整流式仪表
- (3) 对通讯讯号有干扰
- (4) 可能使电力系统的局部电路对某次谐波发生谐振，产生谐振过电压

# 11.6 网络函数的定义及性质

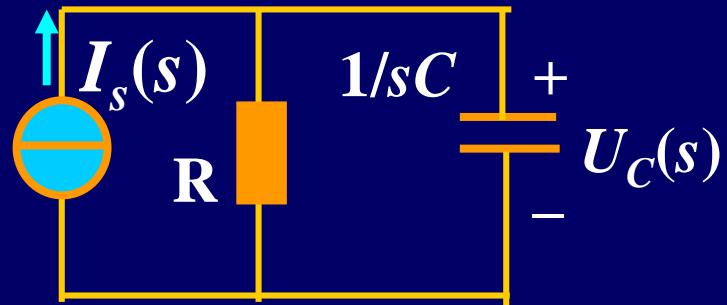
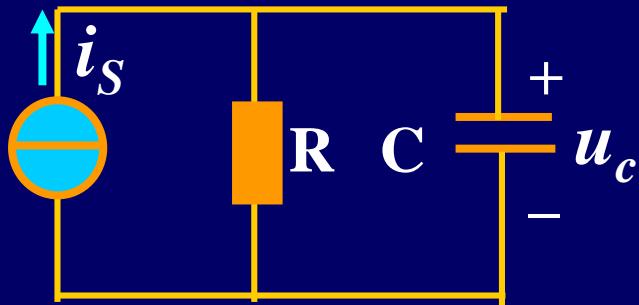
## 1. 网络函数 $H(s)$ 的定义

在线性网络中，当无初始能量，且只有一个独立激励源作用时，网络中某一处响应的象函数与网络输入的象函数之比，叫做该响应的网络函数。

$$H(S) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{L}[\text{零状态响应}]}{\mathcal{L}[\text{激励函数}]} = \frac{\mathcal{L}[r(t)]}{\mathcal{L}[e(t)]} = \frac{R(S)}{E(S)}$$

例

电路激励 $i_s(t)=\delta(t)$ , 求冲击响应 $h(t)$ , 即电容电压 $u_c(t)$ 。



$$H(s) = \frac{U_c(s)}{I_s(s)} = \frac{U_c(s)}{1} = \frac{1}{sC + \frac{1}{R}} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$h(t) = u_c(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s + 1/RC}\right] = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$

注意

$H(s)$ 仅取决于网络的参数与结构, 与输入 $E(s)$ 无关, 因此网络函数反映了网络中响应的基本特性。

## 2. 网络函数的性质

- ①由网络函数是一个实系数的有理分式;
- ②网络函数的原函数就是电路的冲激响应;

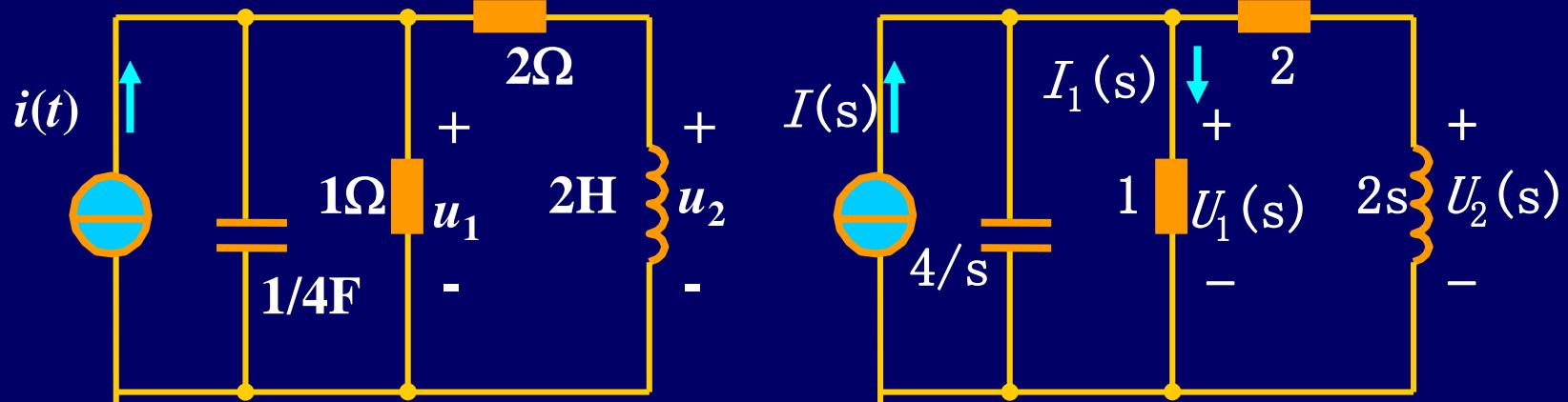
$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} \rightarrow R(s) = H(s)E(s)$$

- ③由网络函数求取任意激励的零状态响应

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} \rightarrow R(s) = H(s)E(s)$$

例

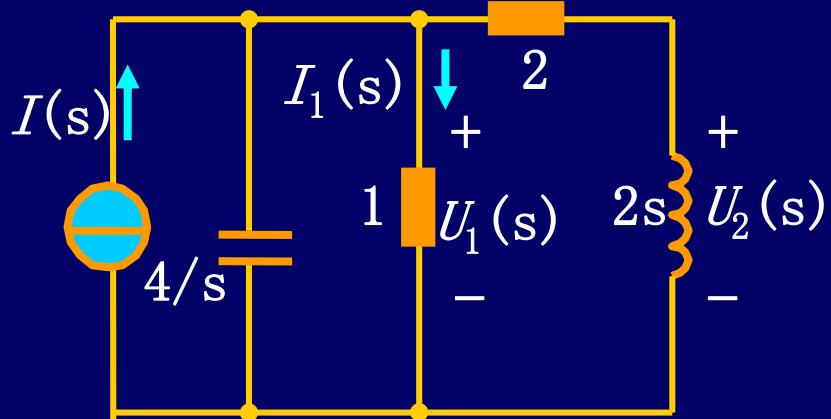
图示电路， $i_s(t) = \varepsilon(t)$ ，响应为 $u_1$ 、 $u_2$ ，  
求阶跃响应 $S_1(t)$ 、 $S_2(t)$



解

$$H_1(s) = \frac{U_1(s)}{I_S(s)}$$

$$= \frac{1}{\frac{s}{4} + 1 + \frac{1}{2 + 2s}} = \frac{4s + 4}{s^2 + 5s + 6}$$



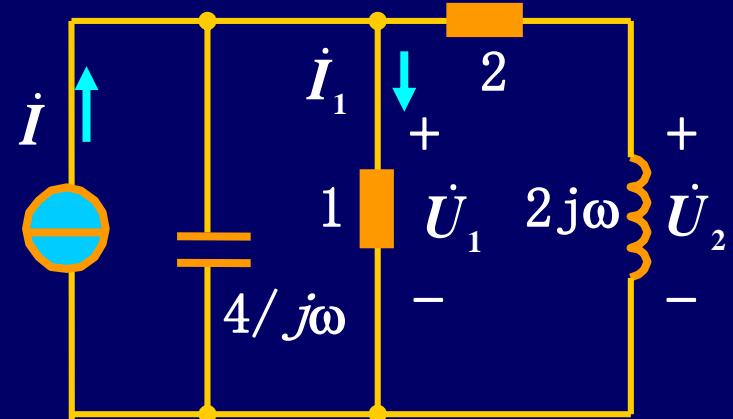
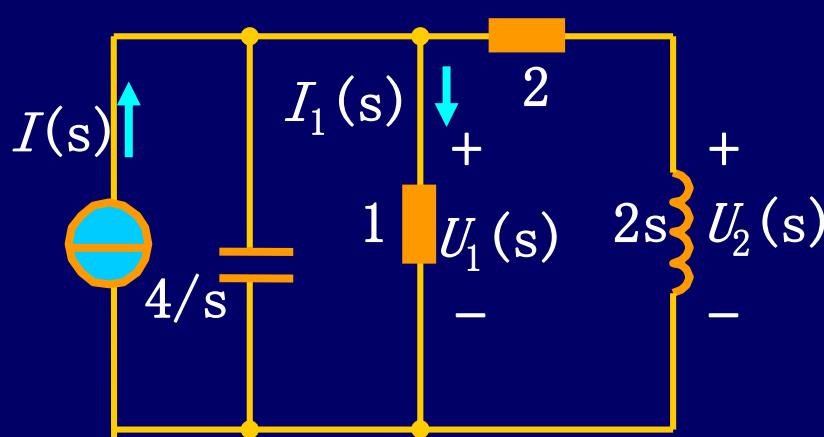
$$H_2(s) = \frac{U_2(s)}{I_S(s)} = \frac{2sU_1(s)}{2 + 2s} = \frac{4s}{s^2 + 5s + 6}$$

$$U_1(s) = H_1(s)I(s) = \frac{4s + 4}{s(s^2 + 5s + 6)}$$

$$U_2(s) = H_2(s)I(s) = \frac{4s}{s(s^2 + 5s + 6)}$$

$$S_1(t) = \frac{2}{3} + 2e^{-2t} - \frac{8}{3}e^{-3t} \quad S_2(t) = 4e^{-2t} - 4e^{-3t}$$

#### ④由网函数确定正弦稳态响应



$$\text{令: } sL \rightarrow j\omega L \quad \frac{1}{sC} \rightarrow \frac{1}{j\omega C} \quad U(s) \rightarrow \dot{U} \quad I(s) \rightarrow \dot{I}$$

$$\text{得: } \dot{U}_1 = H_1(j\omega)\dot{I} \quad \dot{U}_2 = H_2(j\omega)\dot{I}$$

$H(s)$ 中令  $s = j\omega$  得正弦稳态下的网络函数

$$H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{\dot{R}}{\dot{E}}$$

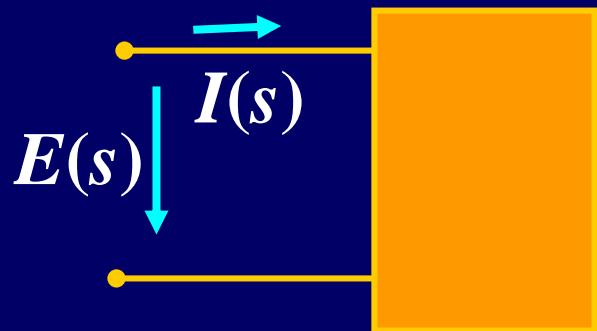
响应相量

激励相量

### 3. 网络函数 $H(s)$ 的分类

#### ① 驱动点函数

激励是电流源，响应是电压

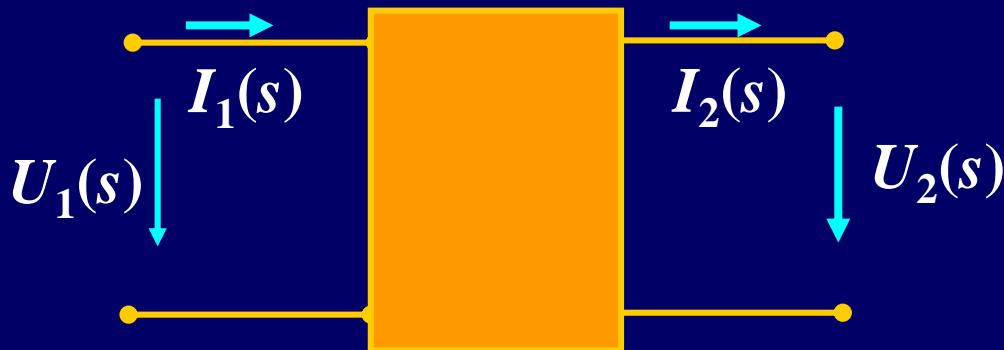


$$H(S) = \frac{E(S)}{I(S)}$$
 驱动点阻抗

激励是电压源，响应是电流

$$H(S) = \frac{I(S)}{E(S)}$$
 驱动点导纳

## ② 转移函数(传递函数)



激励是电压源

$$H(s) = \frac{I_2(s)}{U_1(s)}$$
 转移导纳

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$$
 转移电压比

激励是电流源

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{I_1(s)}$$
 转移阻抗

$$H(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)}$$
 转移电流比

# 11.7 网络函数的极点和零点

复平面（或s平面）

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{H_0(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

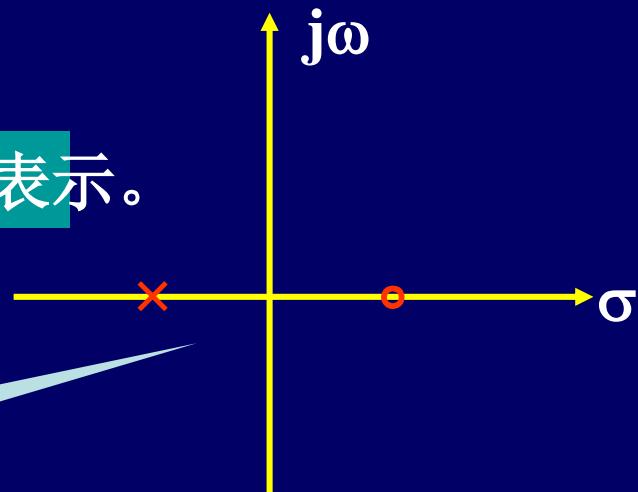
当  $s = z_1 \cdots z_m$  时  $H(s) = 0$ , 称  $z_1 \cdots z_m$  为零点

当  $s = p_1 \cdots p_n$  时  $H(s) = \infty$ , 称  $p_1 \cdots p_n$  为极点

$$s = \sigma + j\omega$$

极点用“ $\times$ ”表示，零点用“ $\circ$ ”表示。

零、极点分布图



例

$$H(s) = \frac{2s^2 - 12s + 16}{s^3 + 4s^2 + 6s + 3} \quad \text{绘出其极零点图}$$

解

$$N(s) = 2s^2 - 12s + 16 = 2(s - 2)(s - 4)$$

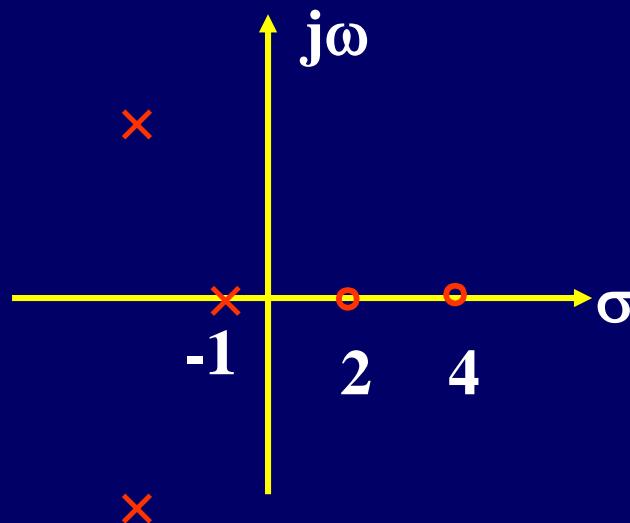
$H(s)$ 的零点为  $z_1 = 2, z_2 = 4$

$$D(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 3 = (s + 1)\left(s + \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s + \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$H(s)$ 的极点为

$$p_1 = -1$$

$$p_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$



## 11.8 极点、零点与冲激响应



$$R(s) = H(s)E(s)$$

当  $e(t) = \delta(t)$  时,  $E(s) = 1$ ,

$$R(s) = H(s), r(t) = h(t)$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)], h(t) \text{ 称为冲激响应}$$



网络函数和冲激响应构成 一对拉氏变换对

例

已知网络函数有两个极点分别在  $s=0$  和  $s=-1$  处，一个单零点在  $s=1$  处，且有  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 10$ ，求  $H(s)$  和  $h(t)$ 。

解

由已知的零、极点可知：

$$H(s) = \frac{k(s-1)}{s(s+1)}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k(s-1)}{s(s+1)}\right] = -k + 2ke^{-t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 10 \rightarrow k = -10$$

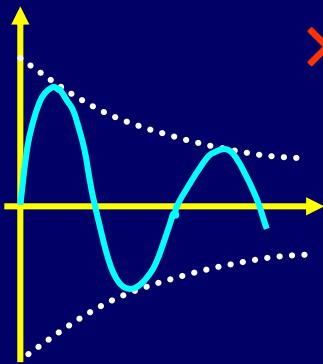
$$\therefore H(s) = \frac{-10(s-1)}{s(s+1)}$$

若网络函数为真分式且分母具有单根，则网络的冲击响应为

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - p_i}\right] = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}$$

显然极点位置不同，响应性质不同，极点反映网络响应的动态过程中自由分量的变化规律。

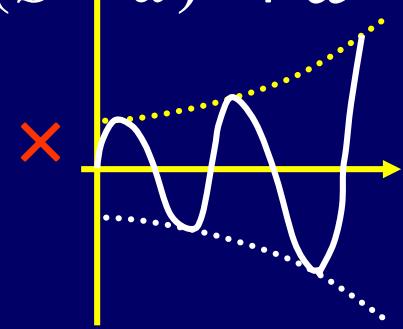
$$H_i(S) = \frac{\omega}{(S+a)^2 + \omega^2}$$



$$H_i(S) = \frac{1}{S}$$

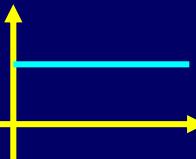
$j\omega$

$$H_i(S) = \frac{\omega}{(S+a)^2 + \omega^2}$$



$$H_i(S) = \frac{1}{S+a}$$

×



$$H_i(S) = \frac{1}{S-a} \quad \sigma$$

$$H_i(S) = \frac{\omega}{S^2 + \omega^2} \times$$

$j\omega$

## 11.9 极点、零点与频率响应

令网络函数 $H(s)$ 中复频率 $s=j\omega$ , 分析 $H(j\omega)$ 随 $\omega$ 变化的特性, 根据网络函数零、极点的分布可以确定正弦输入时的频率响应。

对于某一固定的角频率 $\omega$

$$H(j\omega) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m (j\omega - z_i)}{\prod_{j=1}^n (j\omega - p_j)} = |H(j\omega)| e^{j\varphi}$$

幅频特性

$$|H(j\omega)| = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m |(j\omega - z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(j\omega - p_j)|}$$

相频特性

$$\varphi = \arg[H(j\omega)] = \sum_{i=1}^m \arg(j\omega - z_i) - \sum_{j=1}^n \arg(j\omega - p_j)$$

## 例

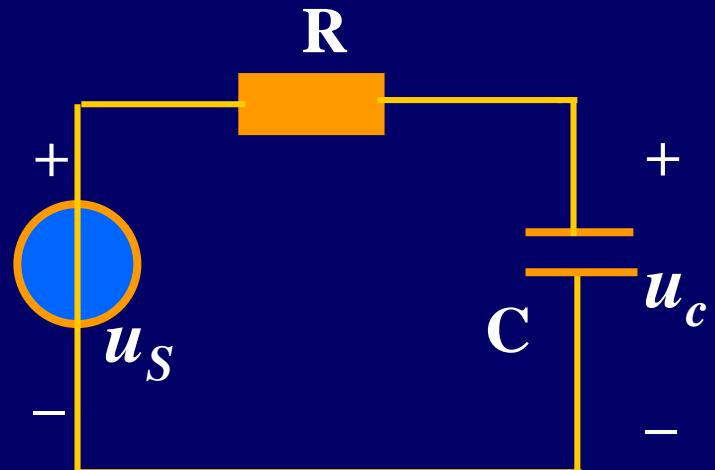
定性分析RC串联电路以电压 $u_c$ 为输出时电路的频率响应。

解

$$H(s) = \frac{U_c(s)}{U_s(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{sC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

一个极点  $s = \frac{-1}{RC}$

设  $H_0 = \frac{1}{RC}$ ,  $s = j\omega$

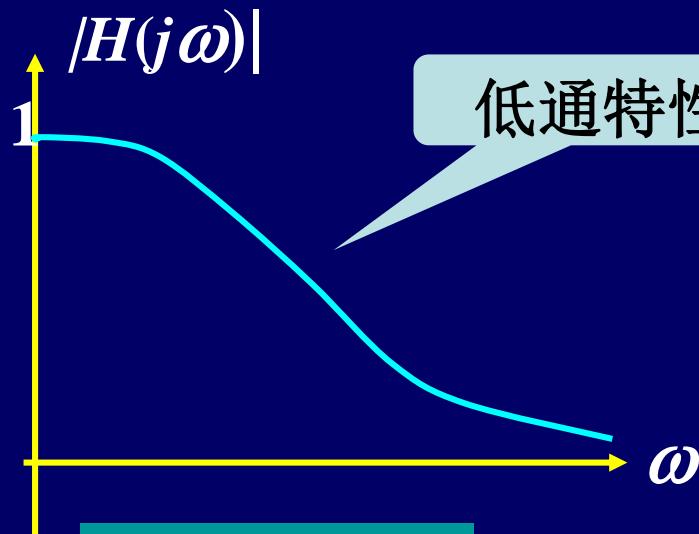


$$H(j\omega) = \frac{H_0}{j\omega + 1/RC} = |H(j\omega)| \angle \theta(j\omega)$$

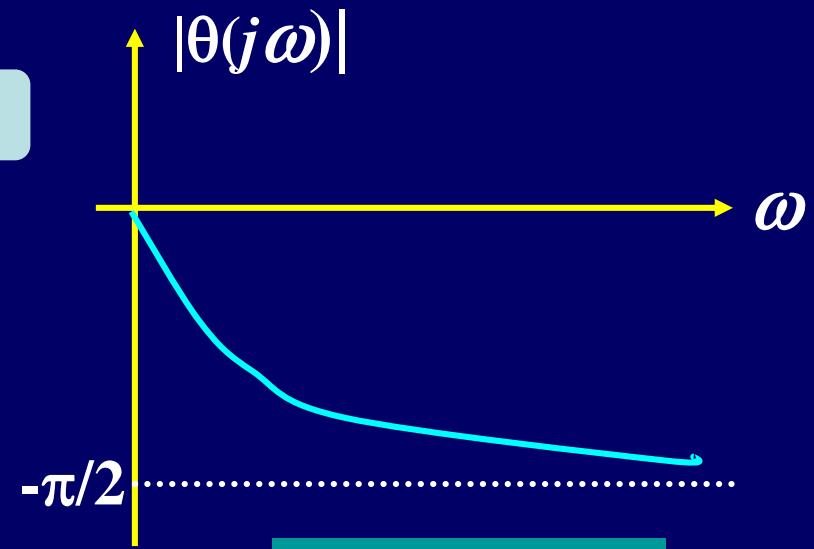
$$H(j\omega) = \frac{H_0}{j\omega + 1/RC} = \frac{H_0}{j\omega - p_1}$$

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{Me^{j\theta}}$$

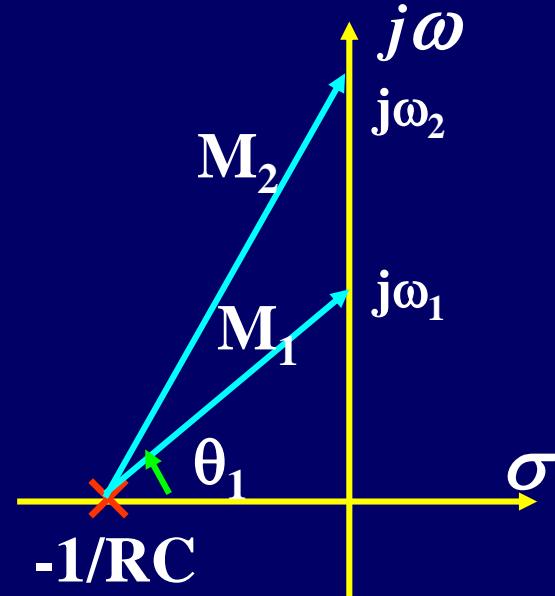
$j\omega - p_1$  用线段  $M_1$  表示



低通特性



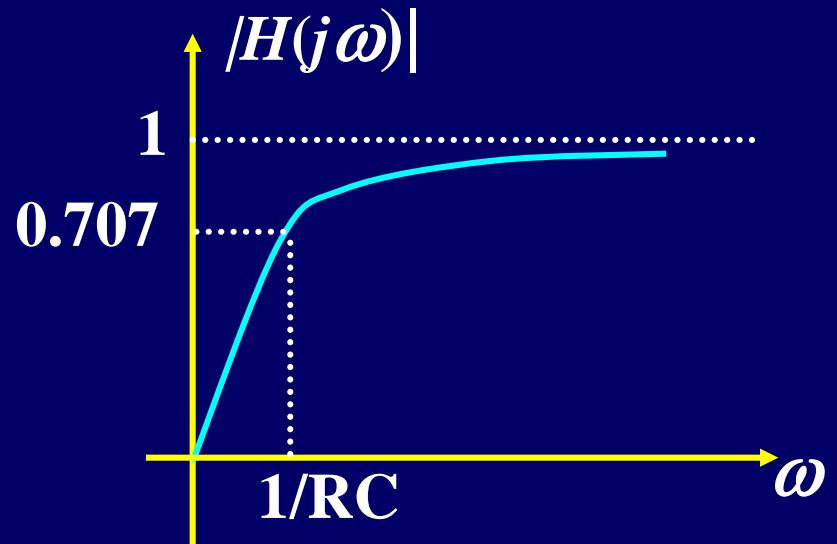
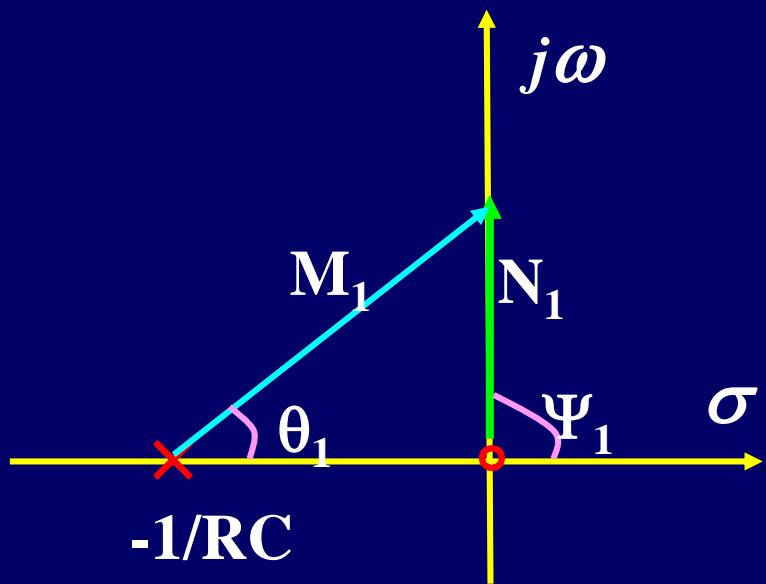
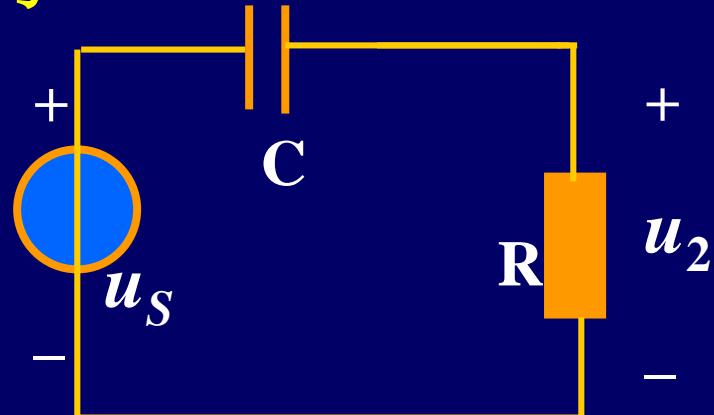
相频特性



若以电压 $u_R$ 为输出时电路的频率响应为

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_s(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$H(j\omega) = \frac{Ne^{j\psi}}{Me^{j\theta}}$$



# 11.10 卷积定理

## 1. 拉氏变换的卷积定理

卷积积分

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= f_2(t) * f_1(t) \\ &= \int_0^t f_1(\xi) f_2(t - \xi) d\xi = \int_0^t f_1(t - \xi) f_2(\xi) d\xi \end{aligned}$$

卷积定理

$$\text{若 } \mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s) \quad \mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$$

$$\text{则 } \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s)$$

$$\text{证: } \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_0^\infty e^{-st} [\int_0^t f_1(t-\xi) f_2(\xi) d\xi] dt$$

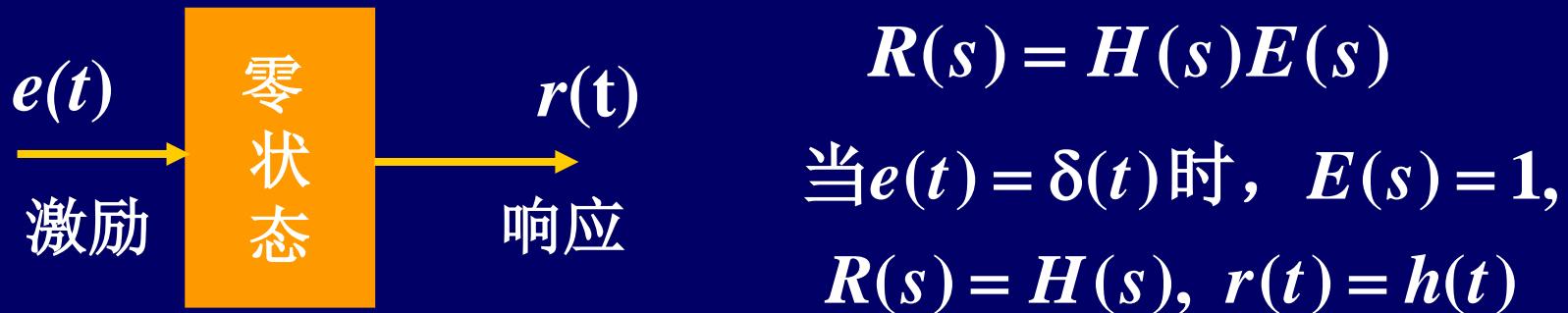
根据  $\varepsilon(t - \xi) = \begin{cases} 1 & (t - \xi) > 0, \quad t > \xi \\ 0 & (t - \xi) < 0, \quad t < \xi \end{cases}$

$$\int_0^t f_1(t - \xi) f_2(\xi) d\xi = \int_0^\infty f_1(t - \xi) \varepsilon(t - \xi) f_2(\xi) d\xi$$

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_0^\infty [\int_0^\infty f_1(t - \xi) \varepsilon(t - \xi) f_2(\xi) d\xi] e^{-st} dt$$

$\text{令 } x = t - \xi$ $t = x + \xi$	$= \int_0^\infty \int_0^\infty f_1(x) \varepsilon(x) f_2(\xi) d\xi e^{-sx} e^{-s\xi} dx$ $= \int_0^\infty f_1(x) \varepsilon(x) e^{-sx} dx \int_0^\infty f_2(\xi) e^{-s\xi} d\xi$ $= F_1(S) F_2(S)$
--	---

## 2. 应用卷积定理求电路响应



$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)E(s)] = h(t) * e(t)$$

$$= \int_0^t e(t-\xi)h(\xi)d\xi = \int_0^t e(\xi)h(t-\xi)d\xi$$

例 已知图示电路  $u_s = 0.6e^{-2t}$ , 冲击响应  $h(t) = 5e^{-t}$ , 求  $u_c(t)$



解1  $u_c(t) = r(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)E(s)]$

$$U_c(s) = \frac{5}{s+1} \frac{0.6}{s+2} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_1=3, K_2=-3$$

$$u_c = -3e^{-2t} + 3e^{-t}$$

解2

$$u_c(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)E(s)] = h(t) * e(t)$$

$$= \int_0^t h(t-\xi) u_s(\xi) d\xi = \int_0^t 5e^{-(t-\xi)} \times 0.6e^{-2\xi} d\xi$$

$$= \int_0^t 3e^{-(t+\xi)} d\xi = 3e^{-t} \int_0^t e^{-\xi} d\xi = 3(e^{-t} - e^{-2t})$$

# 第12章 大规模电路的矩阵分析方法

## ●重点

1. 关联矩阵、割集矩阵、基本回路矩阵和基本割集矩阵的概念
2. 回路电流方程、节点电压方程和割集电压方程的矩阵形式

## 12.1-12.2 图论基础

电路的图G表征了网络的结构和拓扑，依据电路的图，可以写出网络的KCL和KVL方程。

图的基本概念

支路、节点、树、回路、割集

基本回路

基本割集

## 12.3 关联矩阵、回路矩阵、割集矩阵

电路的图表征了网络的结构和拓扑，依据电路的图，可以写出网络的KCL和KVL方程。

图的矩阵表示



用矩阵描述图的拓扑性质，  
即KCL和KVL的矩阵形式。

节点	— 支路	关联矩阵
回路	— 支路	回路矩阵
割集	— 支路	割集矩阵

## 1. 关联矩阵

一条支路连接两个节点，称该支路与这两个节点相关联，节点和支路的关联性质可以用关联矩阵 $A_a$ 描述。

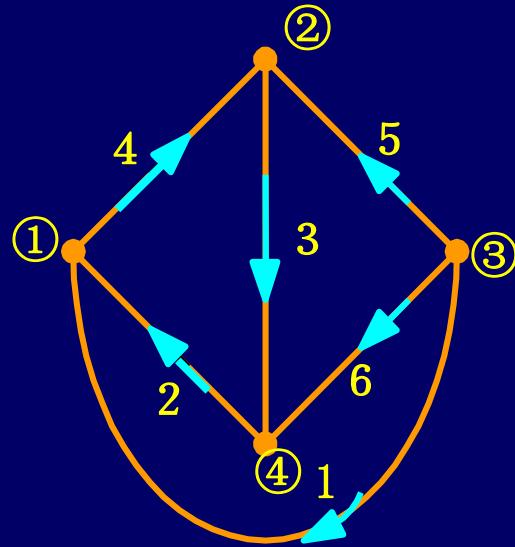
$N$ 个节点 $b$ 条支路的图用 $n \times b$ 的矩阵描述

$$A_a = \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \downarrow \quad [n \times b] \\ \text{节点} n \end{array}$$

支路 $b$       每一行对应一个节点，  
每列对应一条支路，  
矩阵 $A_a$ 的每一个元素定义为：

$$a_{jk} \begin{cases} a_{jk} = 1 & \text{支路 } k \text{ 与节点 } j \text{ 关联, 方向背离节点。} \\ a_{jk} = -1 & \text{支路 } k \text{ 与节点 } j \text{ 关联, 方向指向节点} \\ a_{jk} = 0 & \text{支路 } k \text{ 与节点 } j \text{ 无关} \end{cases}$$

例



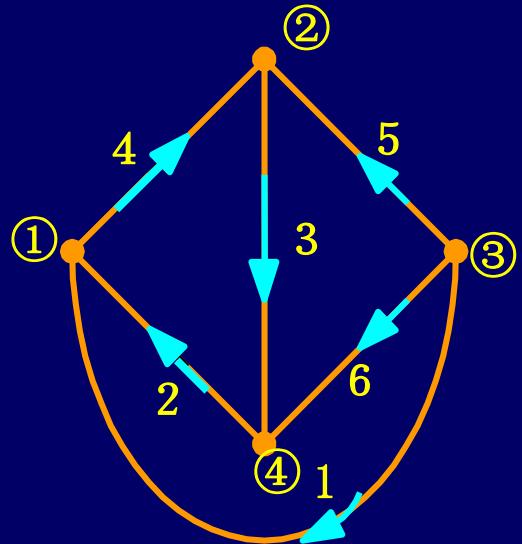
支节

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

关联矩阵 $A_a$ 的特点：

- ① 每一列只有两个非零元素，一个是+1，一个是-1， $A_a$ 的每一列元素之和为零。
- ② 矩阵中任一行可以从其他 $n-1$ 行中导出，即只有 $n-1$ 行是独立的。

引入降阶关联矩阵 $A$   $A = \begin{bmatrix} (n-1) \times b \\ \text{节点 } (n-1) \end{bmatrix} \longrightarrow \text{支路 } b$



设④为参考节点,得降阶关联矩阵

$$A = \begin{array}{c} \text{支} \\ \diagdown \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

设③为参考节点,得降阶关联矩阵

$$A_a = \begin{array}{c} \text{支} \\ \diagdown \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

注

给定A可以确定A<sub>a</sub>,  
从而画出有向图。

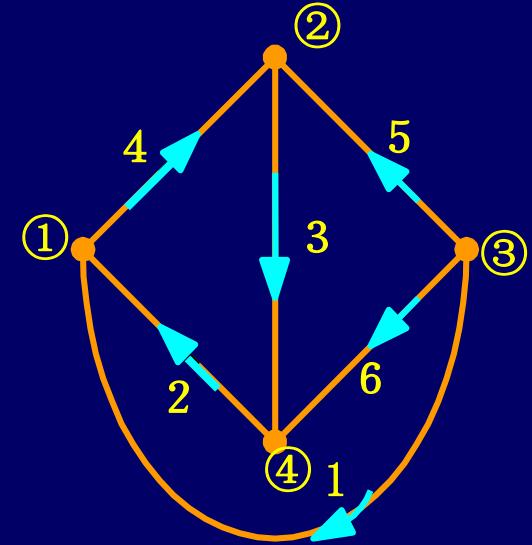
引入关联矩阵A的作用：

①用关联矩阵A表示矩阵形式的KCL方程

设:  $[i] = [i_1 \ i_2 \ i_3 \ i_4 \ i_5 \ i_6]^T$

以④为参考节点

$$[A][i] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_1 - i_2 + i_4 \\ i_3 - i_4 - i_5 \\ i_1 + i_5 + i_6 \end{bmatrix} = 0$$



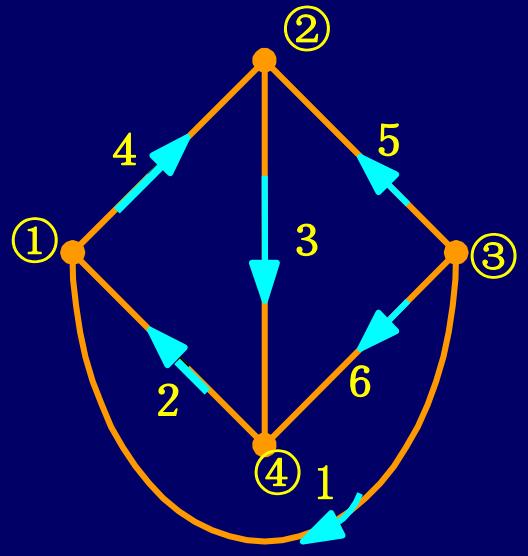
矩阵形式的KCL:  $[A][i] = 0$

n-1个独立方程

## ②用矩阵 $[A]^T$ 表示矩阵形式的KVL方程

设:  $[u] = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6]^T$

$$[u_n] = \begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n3} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{n1} + u_{n3} \\ -u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n1} - u_{n2} \\ -u_{n2} + u_{n3} \\ u_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

矩阵形式的KVL  $[u] = [A]^T [u_n]$

## 2. 回路矩阵B

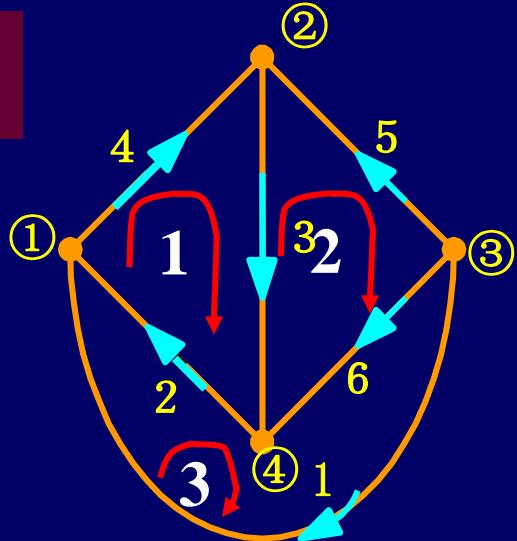
一个回路由某些支路组成，称这些支路与该回路相关联，独立回路与支路的关联性质可以用回路矩阵B描述。

$$[B] = \begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{2cm}} \text{支路} b \\ \downarrow \left[ \begin{array}{c} l \times b \end{array} \right] \\ \text{独立回路} l \end{array}$$

每一行对应一个独立回路，  
每一列对应一条支路，矩阵  
B的每一个元素定义为：

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{支路} j \text{ 在回路} i \text{ 中方向一致} \\ -1 & \text{支路} j \text{ 在回路} i \text{ 中方向相反} \\ 0 & \text{支路} j \text{ 不在回路} i \text{ 中} \end{cases}$$

例



取网孔为独立回路，顺时针方向

$$B = \begin{matrix} & \text{支} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \text{回} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$$

注

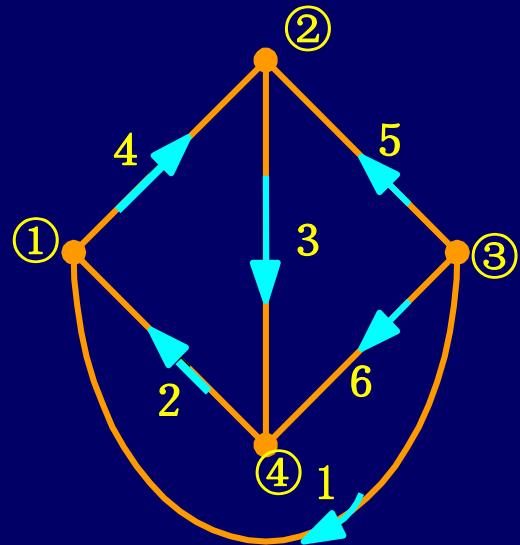
给定B可以画出有向图。

若独立回路选单连支回路得基本回路矩阵 $[B_f]$ ，规定：

1. 连支电流方向为回路电流方向
2. 支路排列顺序为先树支后连支，  
回路顺序与连支顺序一致

例

选 4、5、6为树，连支顺序为1、2、3。



回 支

$$\mathbf{B} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \left[ \begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} B_t \\ B_l \end{matrix}$$

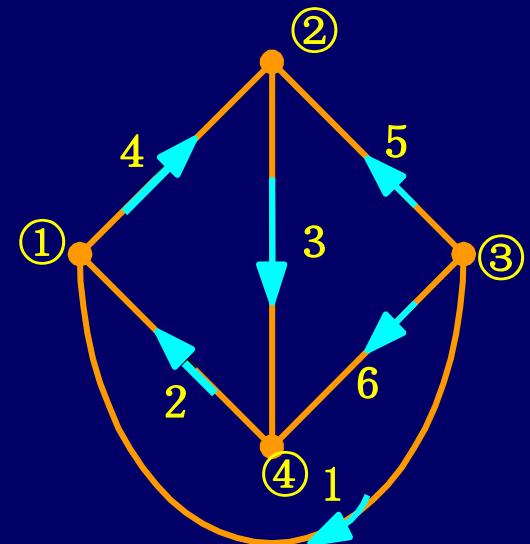
$$= [ \mathbf{B}_t \ 1 ]$$

## 引入回路矩阵[B]的作用:

①用回路矩阵[B]表示矩阵形式的KVL方程

$$\text{设 } [u] = [\underbrace{u_4 \ u_5 \ u_6}_{u_t} \ \underbrace{u_1 \ u_2 \ u_3}_{u_l}]^T$$

$$[\mathbf{B}][u] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_4 - u_5 + u_1 \\ u_4 - u_5 + u_6 + u_2 \\ u_5 - u_6 + u_3 \end{bmatrix} = 0$$



矩阵形式的KVL:  $[\mathbf{B}][u] = 0$

$$[\mathbf{B}_f][\mathbf{u}] = \mathbf{0} \text{ 可写成 } [\mathbf{B}_t \ 1] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_l \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

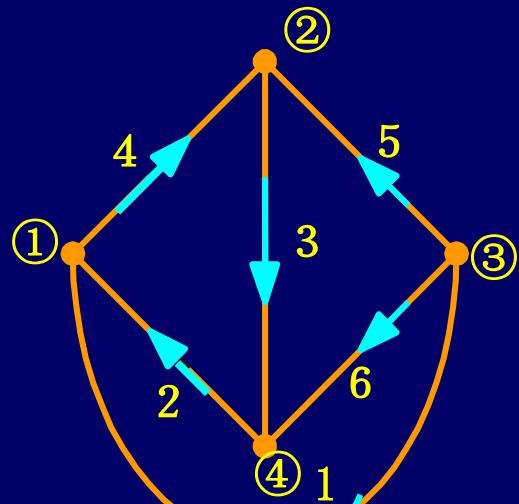
$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_5 \\ \mathbf{u}_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_t \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_l = \mathbf{0} \quad \mathbf{u}_l = -\mathbf{B}_t \mathbf{u}_t$$

连支电压用树支电压表示

②用回路矩阵 $[\mathbf{B}]^T$ 表示矩阵形式的KCL方程

$$\text{设 } [\mathbf{i}] = [i_4 \ i_5 \ i_6 \ i_1 \ i_2 \ i_3]^T$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 + i_2 \\ -i_1 - i_2 + i_3 \\ i_2 - i_3 \\ \dots \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ \dots \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

$$[B_f] = [B_t \ 1] \quad [B_f]^T = \begin{bmatrix} B_t^T \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_t^T \\ 1 \end{bmatrix} [i_l] = \begin{bmatrix} i_t \\ i_l \end{bmatrix} \quad \therefore \quad B_t^T i_l = i_t$$

独立回路电流  
树支电流用连支电流表出

矩阵形式的KCL:  $[B]^T [i_l] = [i_b]$

### 3. 基本割集矩阵Q

割集与支路的关联性质可以用割集矩阵描述，这里主要指基本割集矩阵。

$$[Q] = \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{支路 } b} \\ \downarrow \\ \left[ \begin{array}{c} (n-1) \times b \\ \hline \end{array} \right] \end{array}$$

每一行对应一个基本割集  
每一列对应一条支路，矩阵Q的每一个元素定义为：

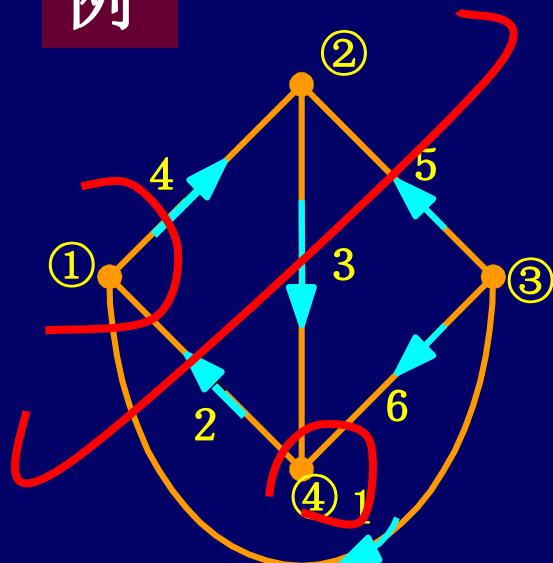
$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{支路 } j \text{ 在割集 } i \text{ 中且与割集方向一致} \\ -1 & \text{支路 } j \text{ 在割集 } i \text{ 中且与割集方向相反} \\ 0 & \text{支路 } j \text{ 不在割集中} \end{cases}$$

若选单树枝割集为独立割集，得基本割集矩阵 $[Q_f]$

规定：

- (1) 割集方向为树支方向
- (2) 支路排列顺序先树支后连支
- (3) 割集顺序与树支次序一致

例



选 4、5、6支路为树

$$Q_1:\{1,2,4\} \quad Q_2:\{1,2,3,5\} \quad Q_3:\{2,3,6\}$$

$$Q = \begin{matrix} \text{割集} \\ \begin{matrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{matrix} \end{matrix} \left[ \begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{matrix} \end{array} \right] = [1 \quad Q_t] \quad Q_l$$

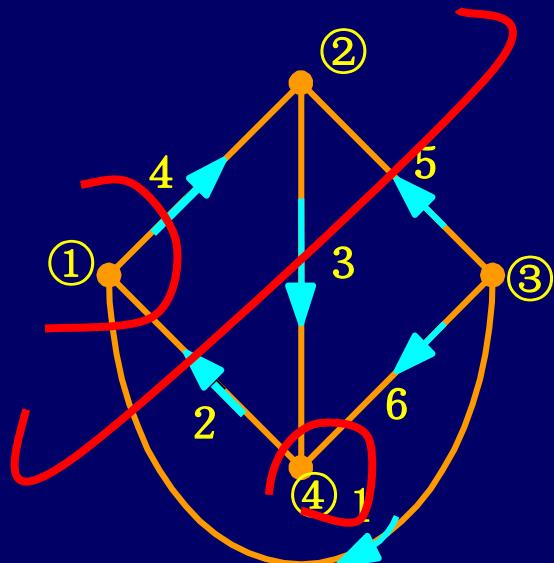
引入基本割集矩阵 $[Q_f]$ 的作用：

- ①用基本割集矩阵 $[Q_f]$ 表示矩阵形式的KCL方程

设  $[i_b] = [i_4 \ i_5 \ i_6 \ i_1 \ i_2 \ i_3]^T$

矩阵形式的KCL：

$$[Q_f][i_b] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_4 - i_1 - i_2 \\ i_5 + i_1 + i_2 - i_3 \\ i_6 - i_2 + i_3 \end{bmatrix} = 0$$

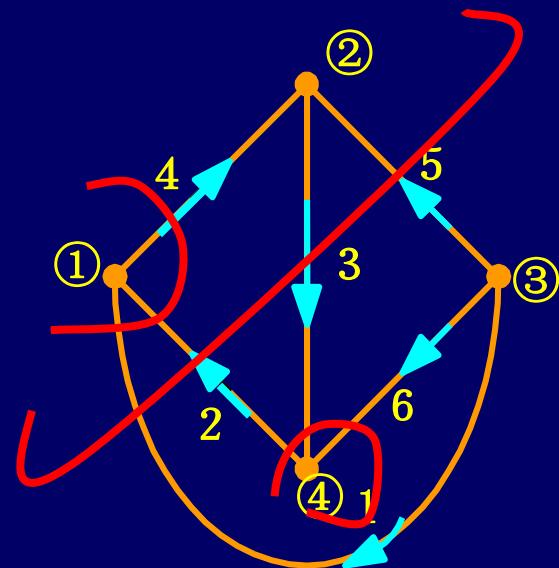


矩阵形式的KCL:  $[Q_f][i_b] = 0$

②用 $[Q_f]^T$ 表示矩阵形式的KVL方程

设树枝电压（或基本割集电压）：

$$u_t = [u_4 \ u_5 \ u_6]^T$$



$$[Q_f]^T [u_t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ -u_4 + u_5 \\ -u_4 + u_5 - u_6 \\ -u_5 + u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = [u_b]$$

矩阵形式的KVL:  $[Q_f]^T [u_t] = [u_b]$

$$[Q_f]^T [u_t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ -u_4 + u_5 \\ -u_4 + u_5 - u_6 \\ -u_5 + u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = [u_b]$$

$$\therefore [u_b] = \begin{bmatrix} u_t \\ u_l \end{bmatrix} = [Q_f]^T [u_t] = \begin{bmatrix} 1 \\ Q_l^T \end{bmatrix} [u_t]$$

$$\therefore u_l = Q_l^T u_t \quad \text{连支电压用树支电压表示}$$

## 小结:

	$A$	$B$	$Q$
KCL	$Ai=0$	$B^T i_l = i$ $\mathbf{B}_t^T \mathbf{i}_l = \mathbf{i}_t$	$Qi=0$ $i_t = -Q_l i_l$
KVL	$A^T u_n = u$	$Bu=0$ $u_l = -B_t u_t$	$Q^T u_t = u$ $u_l = Q_l^T u_t$

## 12.4 矩阵A、B<sub>f</sub>、Q<sub>f</sub>之间的关系

在任一网络的有向图中，选一个参考结点可以写出关联矩阵A，选择一树可以写出基本回路矩阵[B<sub>f</sub>]和基本割集矩阵[Q<sub>f</sub>]，因此三个矩阵是从不同角度表示同一网络的连接性质，它们之间自然存在着一定的关系。

### 1. A与B之间的关系

对同一有向图，支路排列次序相同时，满足：

$$\begin{cases} [u_b] = [A]^T [u_n] \\ [B][u_b] = 0 \end{cases} \rightarrow [B][A]^T [u_n] = 0$$

$$[B][A]^T = 0 \quad or \quad [A][B]^T = 0$$

## 2. B与Q之间的关系

对同一有向图，任选一树，满足：

$$\begin{cases} [i_b] = [B]^T [i_l] \rightarrow [Q][B]^T [i_l] = 0 \\ [Q][i_b] = 0 \end{cases}$$

$$[Q][B]^T = 0 \quad or \quad [B][Q]^T = 0$$

$$\because [Q_f][B_f]^T = [1 \quad Q_l] \begin{bmatrix} B_t^T \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$Q_l = -B_t^T$$

### 3. A与Q之间的关系

对同一有向图，任选一树，按先树枝后连枝顺序写出矩阵：

$$\begin{cases} [A] = [A_t \ A_l] \\ [B_f] = [B_t \ 1] \\ [Q_f] = [1 \ Q_l] \end{cases} \rightarrow [A][B_f]^T = [A_t \ A_l] \begin{bmatrix} B_t^T \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\therefore A_t B_t^T + A_l = 0 \quad or \quad B_t^T = -A_t^{-1} A_l$$

$$\therefore Q_l = -B_t^T = A_t^{-1} A_l$$

$$[Q_f] = [1 \ A_t^{-1} A_l]$$

例

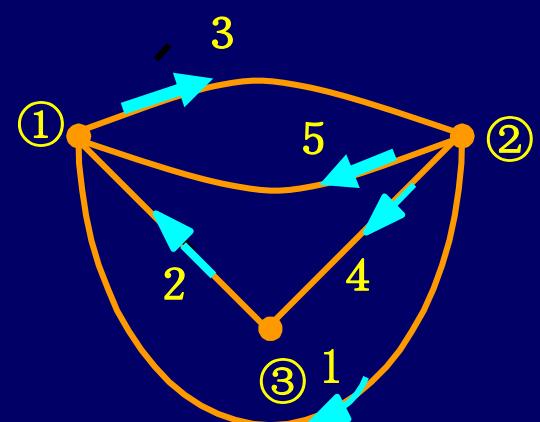
已知:  $[B_f] = \begin{matrix} & \text{回} \\ & \text{支} \\ \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$

求基本割集矩阵，并画出网络图。

解

$$\therefore Q_l = -B_t^T = -\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [Q_f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



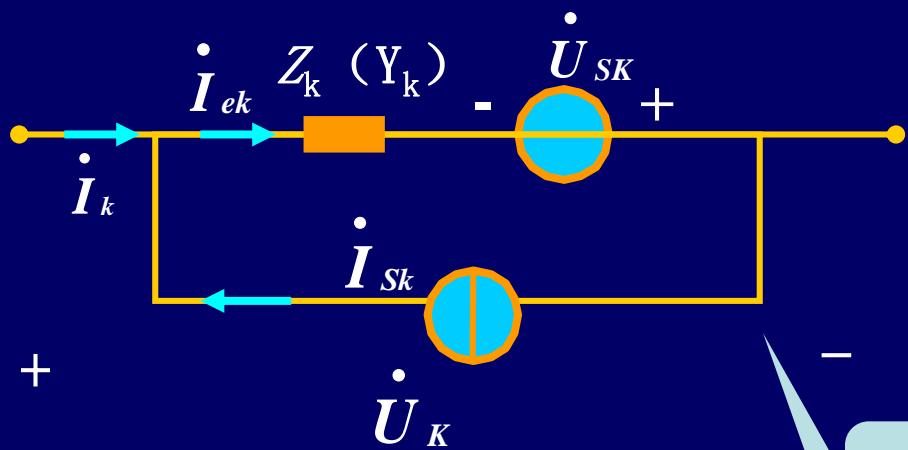
# 12.5 支路电压电流关系的矩阵形式

反映元件性质的支路电压和支路电流关系的矩阵形式是网络矩阵分析法的基础。

## 1. 复合支路

设标准支路为：

特点：



- ①  $\dot{U}_{SK}$   $\dot{I}_{SK}$  分别表示 K 号支路的独立电压源和电流源，其方向与支路电压电流 方向相反；
- ② 支路电压与支路电流的 方向关联；

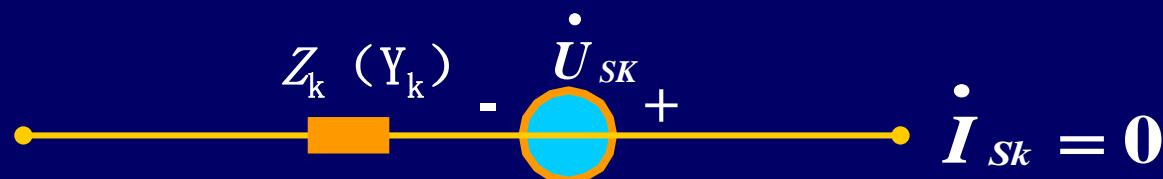
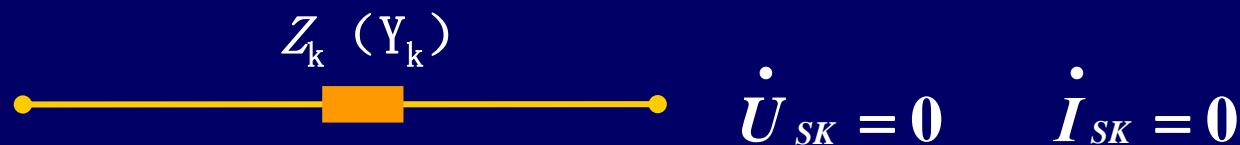
复合支路

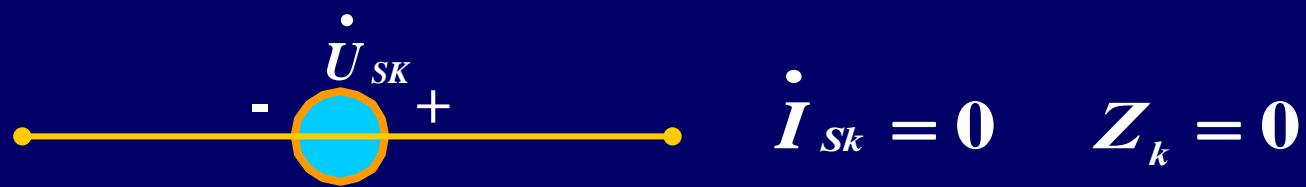
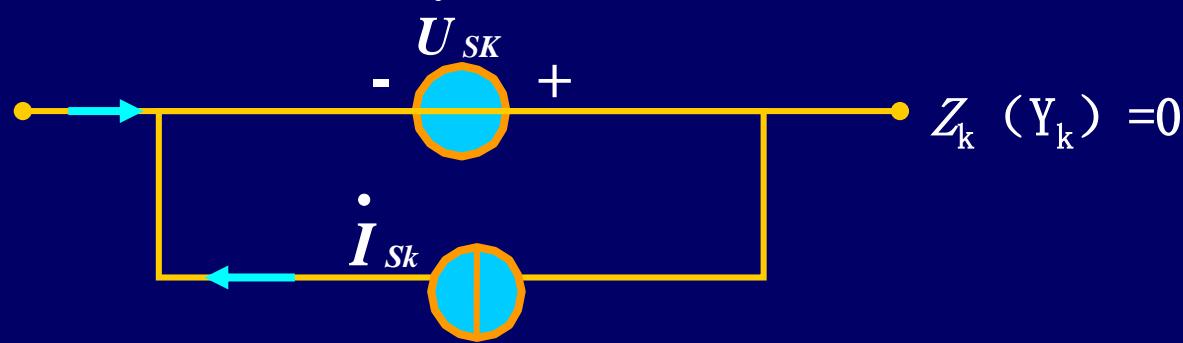
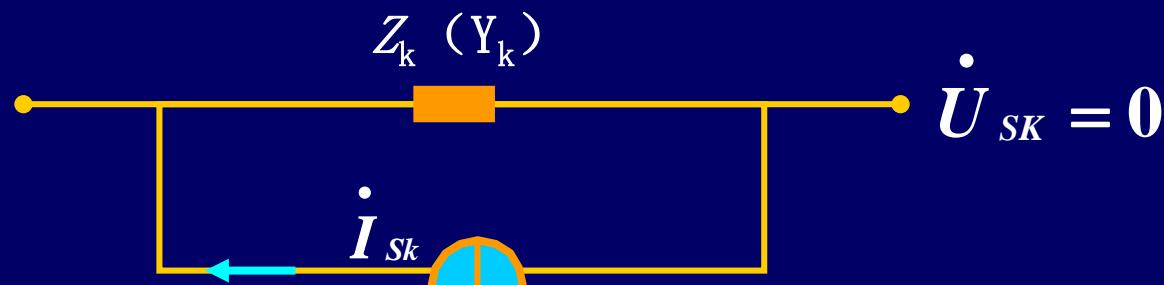
③  $Z_k (Y_k)$  是支路的阻抗（或导纳），只能是单一的电阻、电容、电感，而不能是它们的组合。

即  $Z_k = \begin{cases} R_k \\ j\omega L_k \\ \frac{1}{j\omega C_k} \end{cases}$

注

复合支路只是定义了一条支路最多可以包含的不同元件数及连接方法，但允许缺少某些元件。





## 2. 阻抗矩阵形式

应用KCL和KVL可以写出用阻抗表示的k支路电压、电流关系方程：

$$\dot{U}_k = (\dot{I}_k + \dot{I}_{sk})Z_k - \dot{U}_{sk}$$

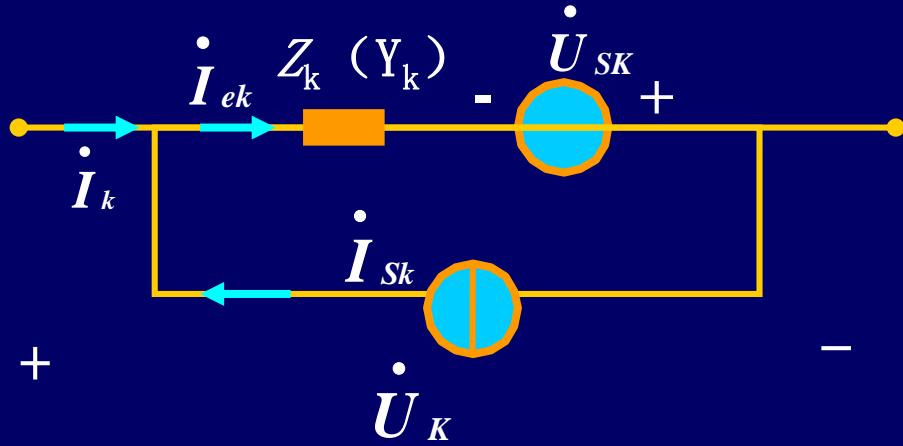
如有b条支路，则有：

$$\dot{U}_1 = (\dot{I}_1 + \dot{I}_{s1})Z_1 - \dot{U}_{s1}$$

$$\dot{U}_2 = (\dot{I}_2 + \dot{I}_{s2})Z_2 - \dot{U}_{s2}$$

... ... ... ...

$$\dot{U}_b = (\dot{I}_b + \dot{I}_{sb})Z_b - \dot{U}_{sb}$$



设

$$[\dot{I}] = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 & \dot{I}_2 & \dots & \dot{I}_b \end{bmatrix}^T \rightarrow \text{支路电流列向量}$$

$$[\dot{U}] = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 & \dot{U}_2 & \dots & \dot{U}_b \end{bmatrix}^T \rightarrow \text{支路电压列向量}$$

$$[\dot{U}_s] = \begin{bmatrix} \dot{U}_{s1} & \dot{U}_{s2} & \dots & \dot{U}_{sb} \end{bmatrix}^T \rightarrow \text{电压源的电压列向量}$$

$$[\dot{I}_s] = \begin{bmatrix} \dot{I}_{s1} & \dot{I}_{s2} & \dots & \dot{I}_{sb} \end{bmatrix}^T \rightarrow \text{电流元的电流列向量}$$

$$[Y] = \text{diag}[Y_1 Y_2 \dots Y_b]$$

整个网络的支路电压、电流关系矩阵：

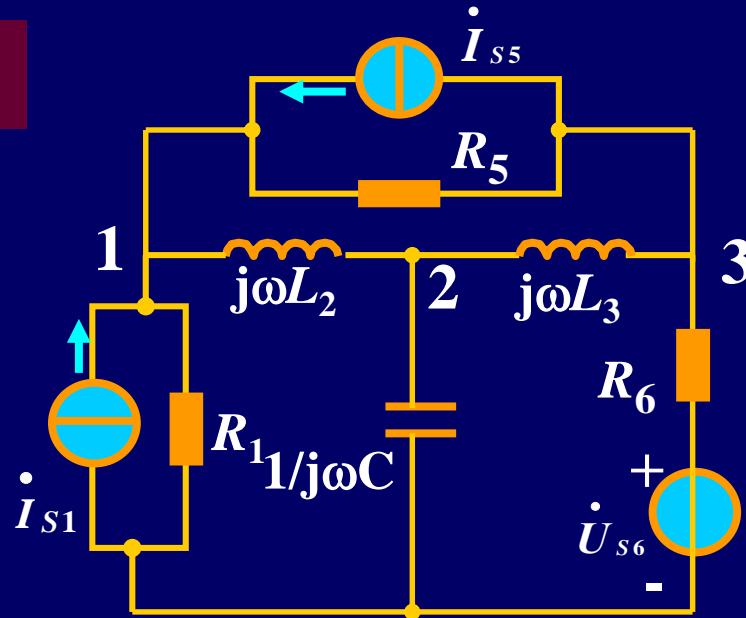
$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{U}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\bar{U}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Z_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{I}}_1 + \dot{\bar{I}}_{s1} \\ \vdots \\ \dot{\bar{I}}_b + \dot{\bar{I}}_{sb} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\bar{U}}_{s1} \\ \vdots \\ \dot{\bar{U}}_{sb} \end{bmatrix}$$

b×b阶对角阵

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{U}} \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} \dot{\bar{I}} \end{bmatrix} + [Z] \begin{bmatrix} \dot{\bar{I}}_S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\bar{U}}_S \end{bmatrix}$$

$$[Z] = \text{diag}[Z_1 Z_2 \dots Z_b]^T$$

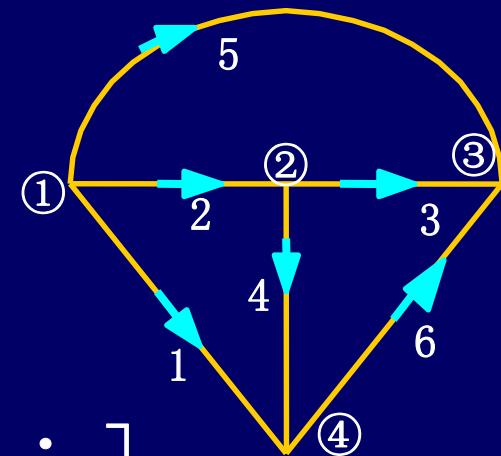
例



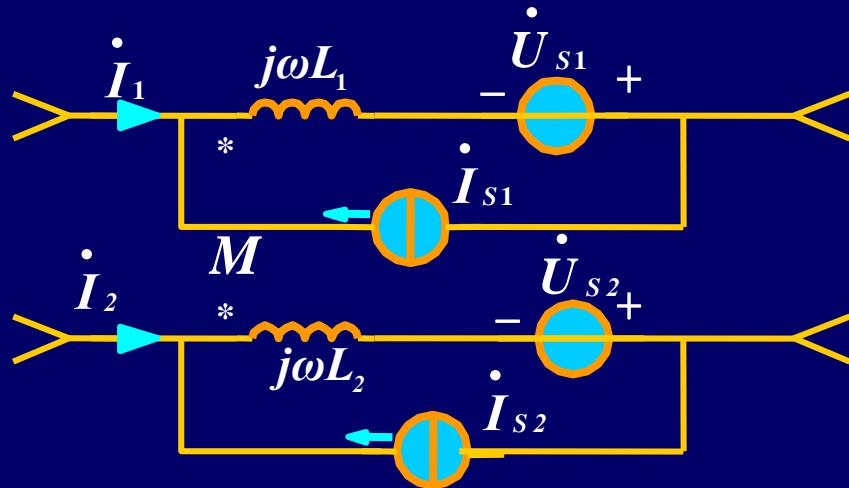
$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \vdots \\ \dot{U}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & \dots & & & & \\ 0 & j\omega L_2 & & & & \\ 0 & \dots & j\omega L_3 & \dots & & \\ 0 & \dots & & 1/j\omega C & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & & R_5 & 0 \\ 0 & \dots & & & & R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 + \dot{I}_{s1} \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 + \dot{I}_{s5} \\ \dot{I}_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{U}_{s6} \end{bmatrix}$$

写出图示电路支路电压、  
电流关系矩阵：

解



## 有互感时的阻抗矩阵形式



$$\dot{U}_1 = j\omega L_1(\dot{I}_{S1} + \dot{I}_1) + j\omega M(\dot{I}_{S2} + \dot{I}_2) - \dot{U}_{S1}$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2(\dot{I}_{S2} + \dot{I}_2) + j\omega M(\dot{I}_{S1} + \dot{I}_1) - \dot{U}_{S2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{S1} + \dot{I}_1 \\ \dot{I}_{S2} + \dot{I}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{U}_{S1} \\ \dot{U}_{S2} \end{bmatrix}$$

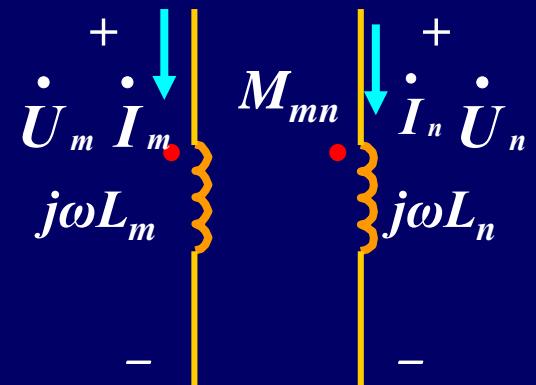
$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \vdots \\ \dot{U}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M & 0 & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ j\omega M & j\omega L_2 & Z_3 & & \\ 0 & & & Z_b & \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{S1} + \dot{I}_1 \\ \vdots \\ \dot{I}_{Sb} + \dot{I}_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{U}_{S1} \\ \vdots \\ \dot{U}_{sb} \end{bmatrix}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M & 0 & & \\ j\omega M & j\omega L_2 & & & \\ 0 & & Z_3 & \ddots & \\ & & & & Z_b \end{bmatrix}$$

## 一般情况

$$\dot{\mathcal{U}}_m = j\omega L_m \dot{I}_m + j\omega M_{mn} \dot{I}_n$$

$$\dot{\mathcal{U}}_n = j\omega L_n \dot{I}_n + j\omega M_{mn} \dot{I}_m$$



→ 电流

$$[Z] = \begin{bmatrix} & & & & \\ & \ddots & \cdots & & \cdots \\ \cdots & j\omega L_m & j\omega M_{mn} & & \cdots \\ \vdots & j\omega M_{mn} & j\omega L_n & & \cdots \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

↓  
电压

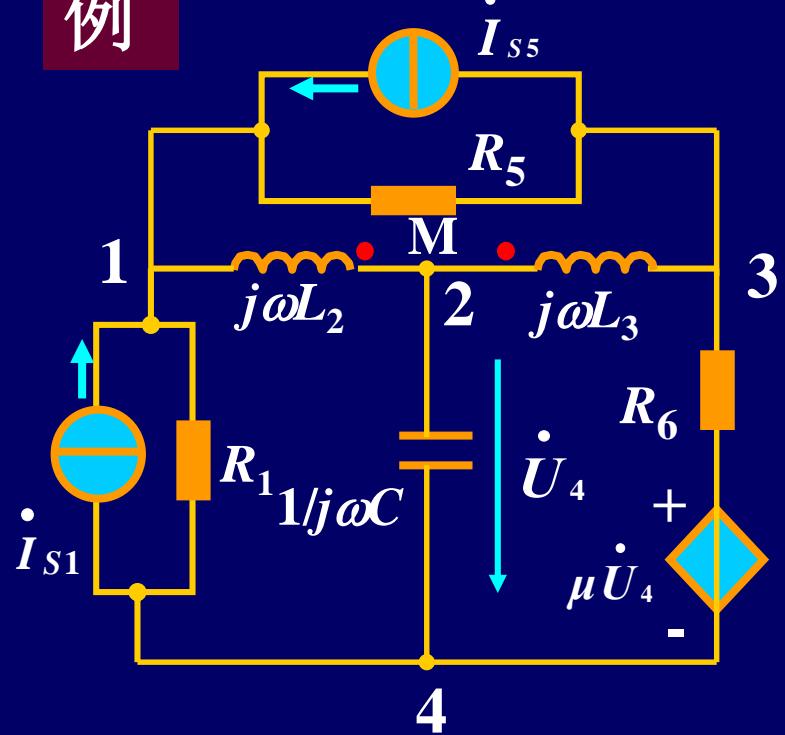
[z]不是对角阵，  $Z_{mn}$  和  $Z_{nm}$  不为零

# 含有受控源电压源的网络

电流控制的电压源

电压控制电压源转换成CCVS

例



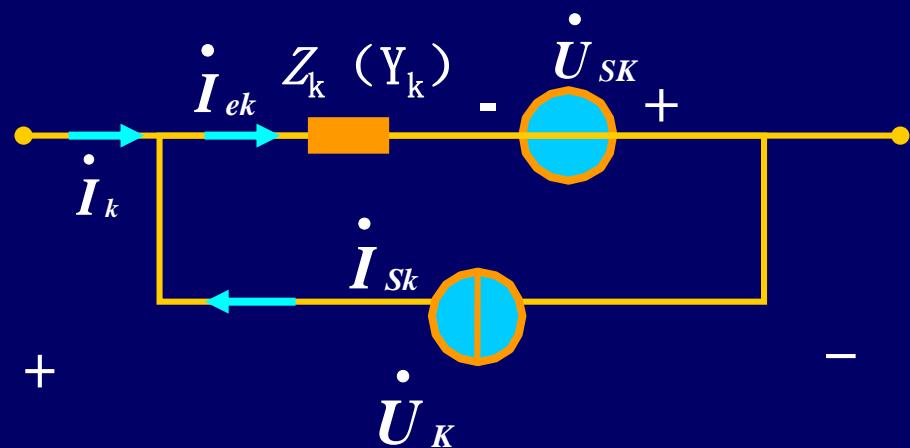
$$[Z] = \begin{bmatrix} R_1 & \dots & & & & 0 \\ 0 & j\omega L_2 & j\omega M & \dots & & 0 \\ 0 & j\omega M & j\omega L_3 & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & & 1/j\omega C & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & & & R_5 \\ 0 & \dots & & \mu/j\omega C & 0 & R_6 \end{bmatrix}$$

$$\dot{U}_6 = R_6 \dot{I}_6 + \mu_{64} \dot{U}_4 = R_6 \dot{I}_6 + \mu_{64} \frac{\dot{I}_4}{j\omega C}$$

## 5. 支路导纳矩阵形式

$$\dot{\vec{U}}_k = (\dot{I}_k + \dot{I}_{sk}) Z_k - \dot{U}_{sk}$$

$$\dot{\vec{I}}_k = Y_k \dot{\vec{U}}_k + Y_k \dot{\vec{U}}_{sk} - \dot{I}_{sk}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \vdots \\ \dot{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & Y_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 + \dot{U}_{s1} \\ \vdots \\ \dot{U}_b + \dot{U}_{sb} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{I}_{s1} \\ \vdots \\ \dot{I}_{sb} \end{bmatrix}$$

$$[\dot{\vec{I}}] = [Y] [\dot{\vec{U}}] + [Y] [\dot{\vec{U}}_S] - [\dot{\vec{I}}_S]$$

## 不含互感和受控源的网络

$$[Y] = [Z]^{-1} = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Y_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{Z_b} \end{bmatrix}$$

b×b阶对角阵

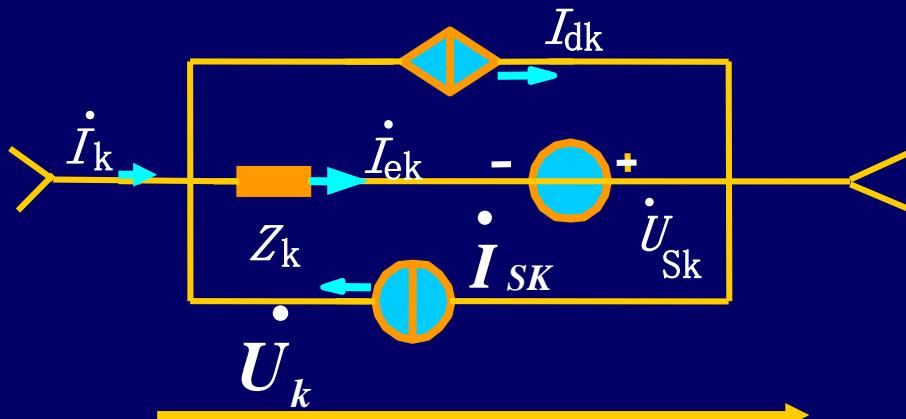
## 含互感的网络

$$[Y] = [Z]^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{Z_b} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$[Z_{11}]^{-1} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{L_2}{\Delta} & -\frac{M}{\Delta} \\ -\frac{M}{\Delta} & \frac{L_1}{\Delta} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = j\omega(L_1 L_2 - M^2)$$

# 含有受控电流源的网络



(1)  $\dot{I}_{dk}$  为 VCCS

$$\text{设 } \dot{I}_{dk} = g_{kj} \dot{U}_{ej}$$

$$\dot{I}_{ek} = Y_k \dot{U}_{ek} = Y_k (\dot{U}_k + \dot{U}_{sk})$$

$$\dot{I}_{dk} = g_{kj} \dot{U}_{ej} = g_{kj} (\dot{U}_j + \dot{U}_{sj})$$

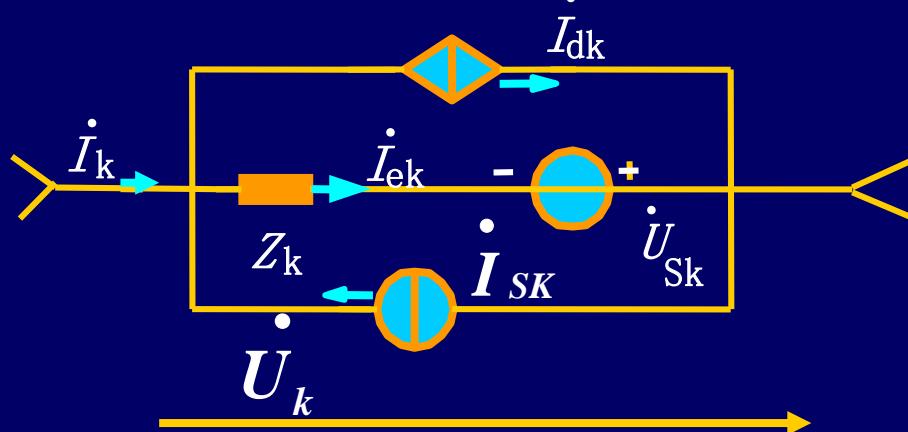
$$\therefore \dot{I}_k = Y_k (\dot{U}_k + \dot{U}_{sk}) + g_{kj} (\dot{U}_j + \dot{U}_{sj}) - \dot{I}_{sk}$$

$$\text{设 } \dot{I}_{dk} = g_{kj} \dot{U}_j$$

$$\therefore \dot{I}_k = Y_k (\dot{U}_k + \dot{U}_{sk}) + g_{kj} \dot{U}_j - \dot{I}_{sk} \quad \text{如何放置?}$$

$$\therefore \dot{I}_k = Y_k (\dot{U}_k + \dot{U}_{sk}) + g_{kj} (\dot{U}_j + \dot{U}_{sj}) - g_{kj} \dot{U}_{sj} - \dot{I}_{sk}$$

# 含有受控电流源的网络



(2)  $\dot{I}_{dk}$  为 CCCS

$$\text{设 } \dot{I}_{dk} = \beta_{kj} \dot{I}_{ej}$$

$$\dot{I}_{ej} = Y_j (\dot{U}_j + \dot{U}_{sj})$$

$$\therefore \dot{I}_k = Y_k (\dot{U}_k + \dot{U}_{sk}) + \beta_{kj} Y_j (\dot{U}_j + \dot{U}_{sj}) - \dot{I}_{sk}$$

$$\text{设 } \dot{I}_{dk} = \beta_{kj} \dot{I}_j$$

$$\therefore \dot{I}_k = Y_k (\dot{U}_k + \dot{U}_{sk}) + g_{kj} \dot{U}_j - \dot{I}_{sk}$$

如何放置?

$$\therefore \dot{I}_k = Y_k (\dot{U}_k + \dot{U}_{sk}) + g_{kj} (\dot{U}_j + \dot{U}_{sj}) - g_{kj} \dot{U}_{sj} - \dot{I}_{sk}$$

$$\therefore \dot{I}_k = Y_k(\dot{U}_k + \dot{U}_{sk}) + g_{kj}(\dot{U}_j + \dot{U}_{sj}) - \dot{I}_{sk}$$

考虑b个支路时：

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \vdots \\ \dot{I}_k \\ \vdots \\ \dot{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & Y_k & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & Y_j & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & Y_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{U}_1 + \dot{U}_{s1} \\ \vdots \\ \dot{U}_k + \dot{U}_{sk} \\ \vdots \\ \dot{U}_j + \dot{U}_{sj} \\ \vdots \\ \dot{U}_b + \dot{U}_{sb} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{I}_{s1} \\ \vdots \\ \dot{I}_{sk} \\ \vdots \\ \dot{I}_{sj} \\ \vdots \\ \dot{I}_{sb} \end{bmatrix}$$

$\beta_{kj} g_{kj}$

# 12.6 网络矩阵的分析方法

有了反映元件性质的支路电压和支路电流矩阵方程和KCL、KVL的矩阵表示，就可以对任意复杂的网络进行网络矩阵分析。

## 1. 节点电压方程的矩阵分析

最常用的方法

$$[\dot{I}] = [Y] [\dot{U}] + [Y] [\dot{U}_s] - [\dot{I}_s]$$

由KCL有  $[A] [\dot{I}] = \mathbf{0}$

$$[A][Y]\dot{U} + [A][Y]\dot{U}_s - [A]\dot{I}_s = \mathbf{0}$$

由KVL有  $[\dot{U}] = [A]^T [\dot{U}_n]$

$$\frac{[A][Y][A]^T}{[Y_n]} [\dot{U}_n] = [A] [\dot{I}_S] - [A][Y] [\dot{U}_S] = [\dot{I}_{sn}]$$

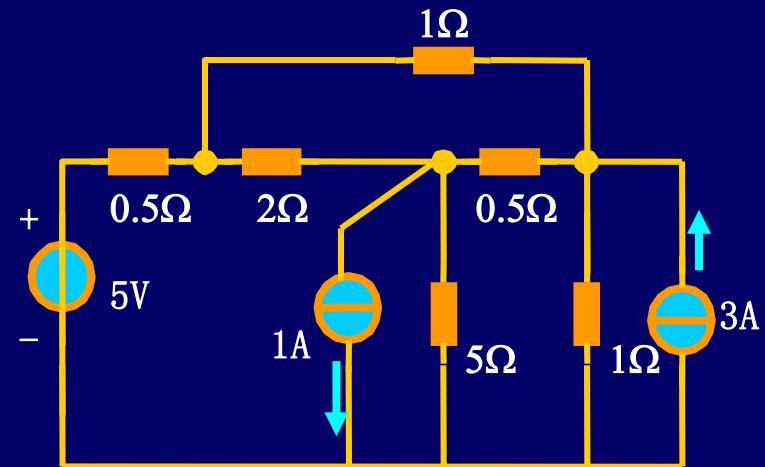
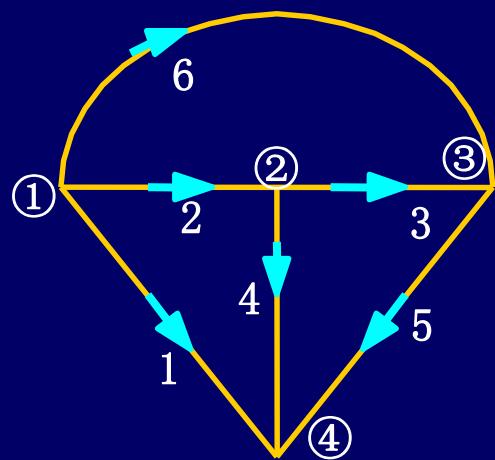
节点导纳阵

独立电源引起的流入节  
点的电流列向量

$$[Y_n] [\dot{U}_n] = [\dot{I}_{Sn}]$$

# 节点分析法的一般步骤

第一步：抽象为有向图

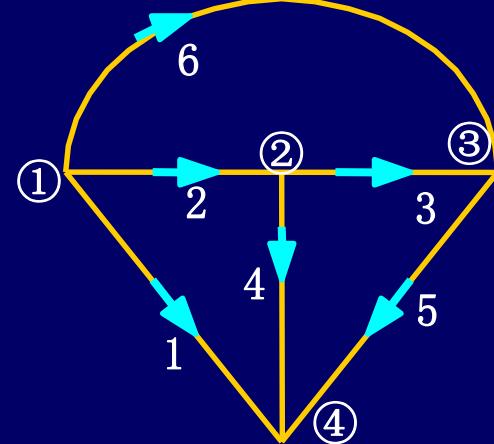
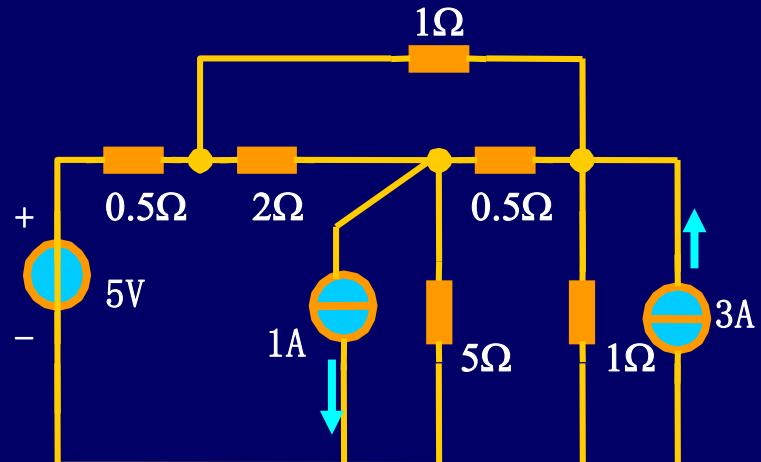


第二步：形成[A]

$$A = \begin{matrix} & \text{支} \\ \text{节} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

### 第三步：形成[Y]

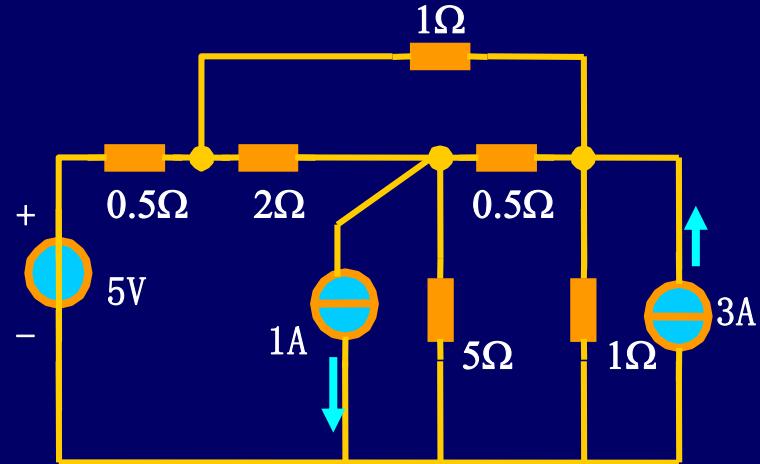
$$[Y] = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 & 2 & 0.2 & 1 & 1 \\ 0.5 & 2 & 0.2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



第四步：形成 $[U_S]$ 、 $[I_S]$

$$[U_S] = [-5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

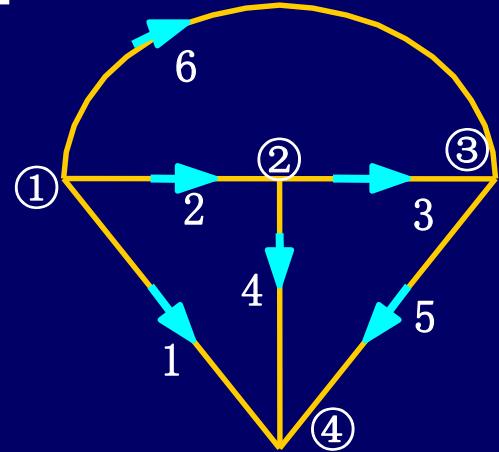
$$[I_S] = [0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 3 \ 0]^T$$



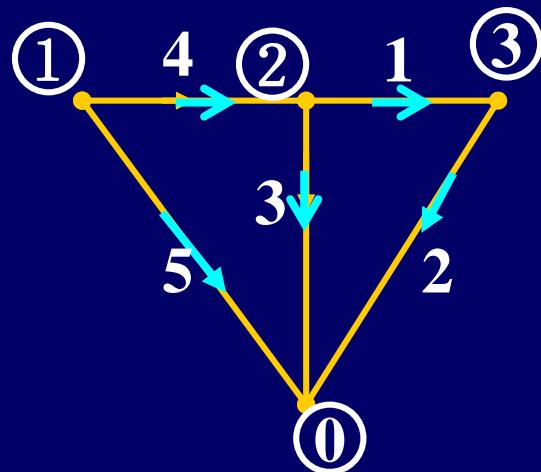
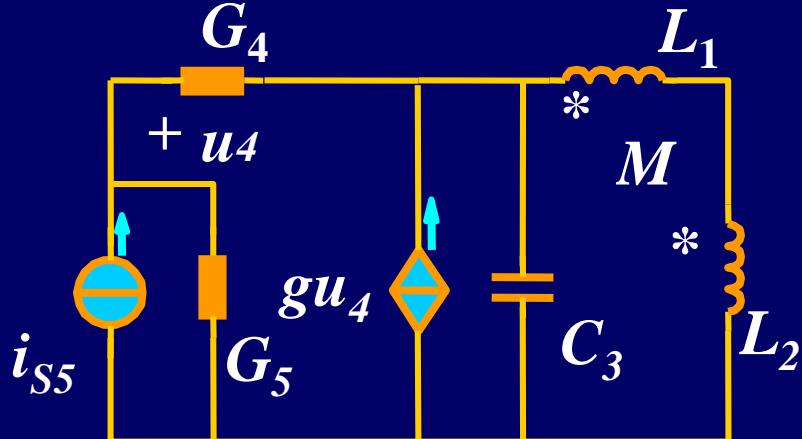
第五步：用矩阵乘法求得节点方程

$$[A][Y][A]^T \begin{bmatrix} \dot{U}_n \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \dot{I}_S \end{bmatrix} - [A][Y] \begin{bmatrix} \dot{U}_S \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2.7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{n1} \\ \dot{U}_{n2} \\ \dot{U}_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$



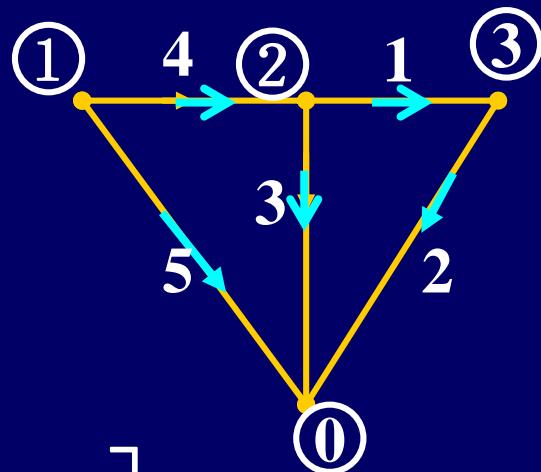
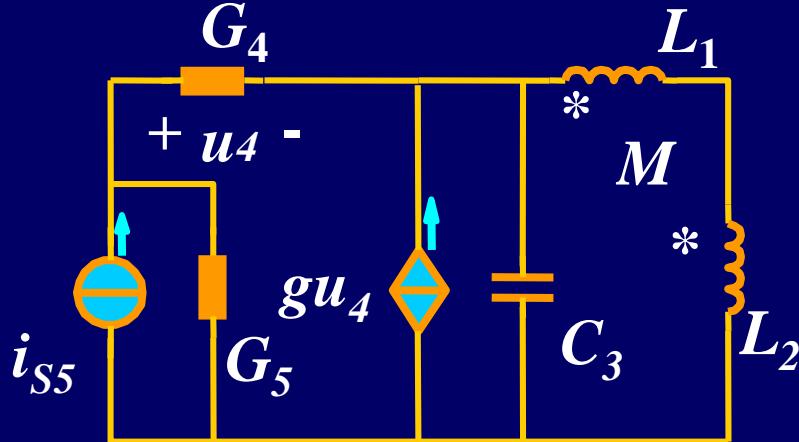
例



$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{I}}_s = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ i_{s5}]$$

例



$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{L_2}{\Delta} & \frac{-M}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{M}{\Delta} & \frac{L_1}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j\omega L_3 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_5} \end{bmatrix}$$

$$\dot{I}_3 = j\omega C_3 \dot{U}_3 - g \dot{U}_4$$

代入

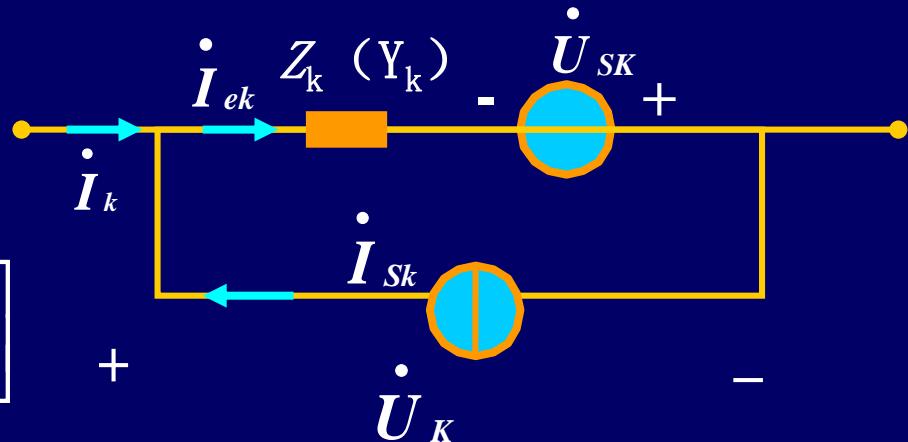
$$[A][Y][A]^T \begin{bmatrix} \dot{U}_n \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \dot{I}_s \end{bmatrix} - [A][Y] \begin{bmatrix} \dot{U}_s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} G_4 + G_5 & -G_4 & 0 \\ -g - G_4 & g + G_4 + j\omega L_3 + \frac{L_2}{\Delta} & -\frac{L_2 + M}{\Delta} \\ 0 & -\frac{L_2 + M}{\Delta} & \frac{L_1 + L_2 + 2M}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{n1} \\ \dot{U}_{n2} \\ \dot{U}_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{s5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 2. 回路矩阵分析法

用阻抗表示的支路方程:

$$\left[ \dot{\underline{U}}_b \right] = [Z] \left[ \dot{\underline{I}}_b \right] + [Z] \left[ \dot{\underline{I}}_S \right] - \left[ \dot{\underline{U}}_S \right]$$



KVL:  $[B] \left[ \dot{\underline{U}}_b \right] = 0$

回路电流  $\dot{\underline{I}}_l$   
( $b-n+1 \times 1$  阶)

KCL:  $\left[ \dot{\underline{I}}_b \right] = [B]^T \left[ \dot{\underline{I}}_l \right]$

$$[B] \left[ \dot{\underline{U}}_b \right] = [B] [Z] \left[ \dot{\underline{I}}_b \right] + [B] [Z] \left[ \dot{\underline{I}}_S \right] - [B] \left[ \dot{\underline{U}}_S \right] = 0$$

$$[B][Z][B]^T \begin{bmatrix} \dot{I}_l \end{bmatrix} = -[B] \begin{bmatrix} \dot{U}_S \end{bmatrix} + [B][Z] \begin{bmatrix} \dot{I}_S \end{bmatrix}$$

$[Z_l] = [B][Z][B]^T \rightarrow$  回路阻抗阵，主对角线元素为自阻抗，其余元素为互阻抗。

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{lS} \end{bmatrix} = -[B] \begin{bmatrix} \dot{U}_S \end{bmatrix} + [B][Z] \begin{bmatrix} \dot{I}_S \end{bmatrix} \rightarrow$$
 回路电压源向量

$$[Z_l] \begin{bmatrix} \dot{I}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{lS} \end{bmatrix} \rightarrow$$
 回路矩阵方程

## 回路分析法的步骤：

①从已知网络，写出  $[B] [Z] \begin{bmatrix} \dot{U}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_s \end{bmatrix}$

②求出  $[Z_l] \begin{bmatrix} \dot{U}_l \end{bmatrix}$  列出回路方程  $[Z_l] \begin{bmatrix} \dot{I}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_l \end{bmatrix}$

③求出  $\begin{bmatrix} \dot{I}_l \end{bmatrix}$  由KCL解出  $\begin{bmatrix} \dot{I}_b \end{bmatrix} = [B]^T \begin{bmatrix} \dot{I}_l \end{bmatrix}$

根据支路方程解出  $\begin{bmatrix} \dot{U}_b \end{bmatrix}$

### 3. 割集矩阵分析法

以树支电压为未知量

用导纳表示的支路方程

$$KCL: [Q_f] \begin{bmatrix} \dot{I}_b \end{bmatrix} = 0$$
$$KVL: \begin{bmatrix} \dot{U}_b \end{bmatrix} = [Q_f]^T \begin{bmatrix} \dot{U}_t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_b \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} \dot{U}_b \end{bmatrix} + [Y] \begin{bmatrix} \dot{U}_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{I}_s \end{bmatrix}$$

$$[Q_f] \begin{bmatrix} \dot{I}_b \end{bmatrix} = [Q_f][Y] \begin{bmatrix} \dot{U}_b \end{bmatrix} + [Q_f][Y] \begin{bmatrix} \dot{U}_s \end{bmatrix} - [Q_f] \begin{bmatrix} \dot{I}_s \end{bmatrix} = 0$$

$$[Q_f][Y][Q_f]^T \begin{bmatrix} \dot{U}_t \end{bmatrix} = [Q_f] \begin{bmatrix} \dot{I}_s \end{bmatrix} - [Q_f][Y] \begin{bmatrix} \dot{U}_s \end{bmatrix}$$

$$[Q_f][Y][Q_f]^T \begin{bmatrix} \dot{U}_t \end{bmatrix} = [Q_f] \begin{bmatrix} \dot{I}_S \end{bmatrix} - [Q_f][Y] \begin{bmatrix} \dot{U}_S \end{bmatrix}$$

$$[Y_t] = [Q][Y][Q]^T \rightarrow$$

割集导纳矩阵，主对角线元素为相应割集各支路的导纳之和，总为正；其余元素为相应两割集之间共有支路导纳之和。

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_t \end{bmatrix} = [Q_f] \begin{bmatrix} \dot{I}_S \end{bmatrix} - [Q_f][Y] \begin{bmatrix} \dot{U}_S \end{bmatrix} \rightarrow$$

割集电流源向量

$$[Y_t] \begin{bmatrix} \dot{U}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_t \end{bmatrix} \rightarrow$$

割集矩阵方程

## 割集分析法的步骤：

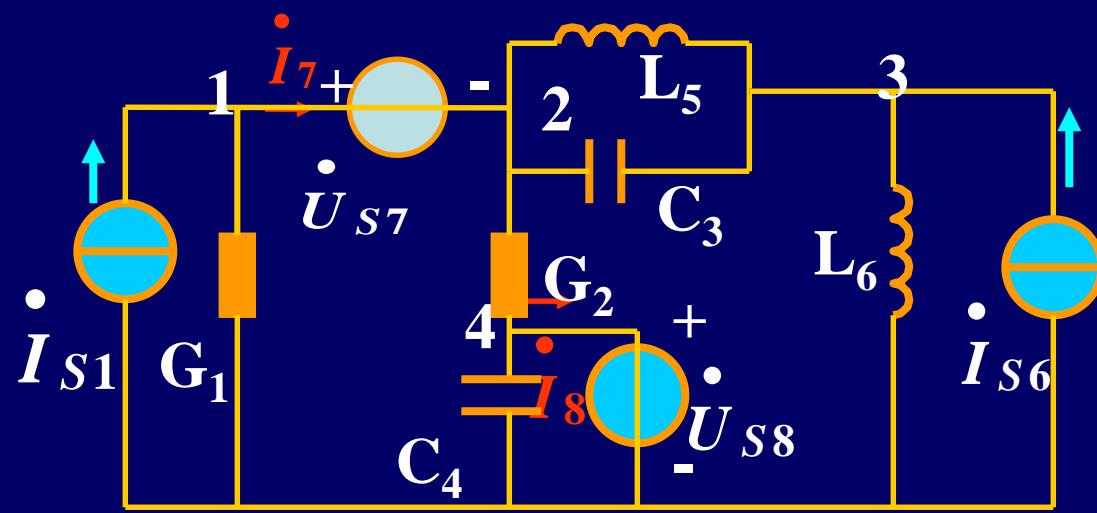
①选定一个树，写出  $[Q_f] [Y] \begin{bmatrix} \dot{U}_s \\ \dot{I}_s \end{bmatrix}$

②求出  $[Y_t] \begin{bmatrix} \dot{I}_t \end{bmatrix}$  列出割集方程  $[Y_t] \begin{bmatrix} \dot{U}_t \\ \dot{I}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_t \end{bmatrix}$

③求出  $\begin{bmatrix} \dot{U}_t \end{bmatrix}$  由KVL解出  $\begin{bmatrix} \dot{U}_b \end{bmatrix}$

根据支路方程解出  $\begin{bmatrix} \dot{I}_b \end{bmatrix}$

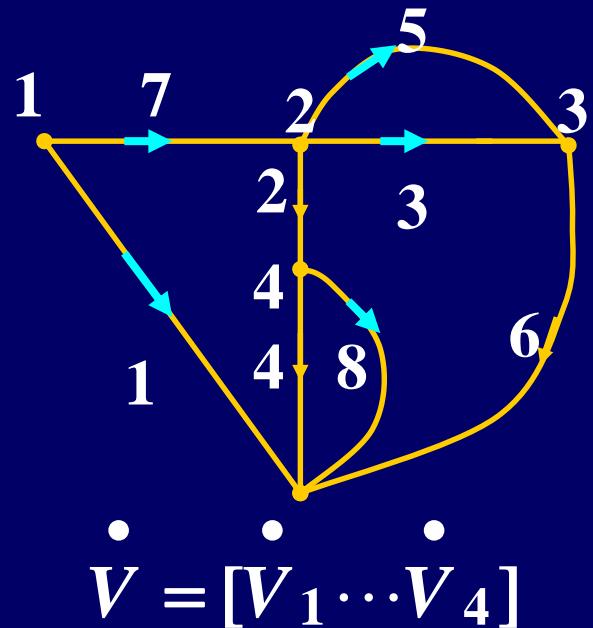
## 15. 4 改进节点法

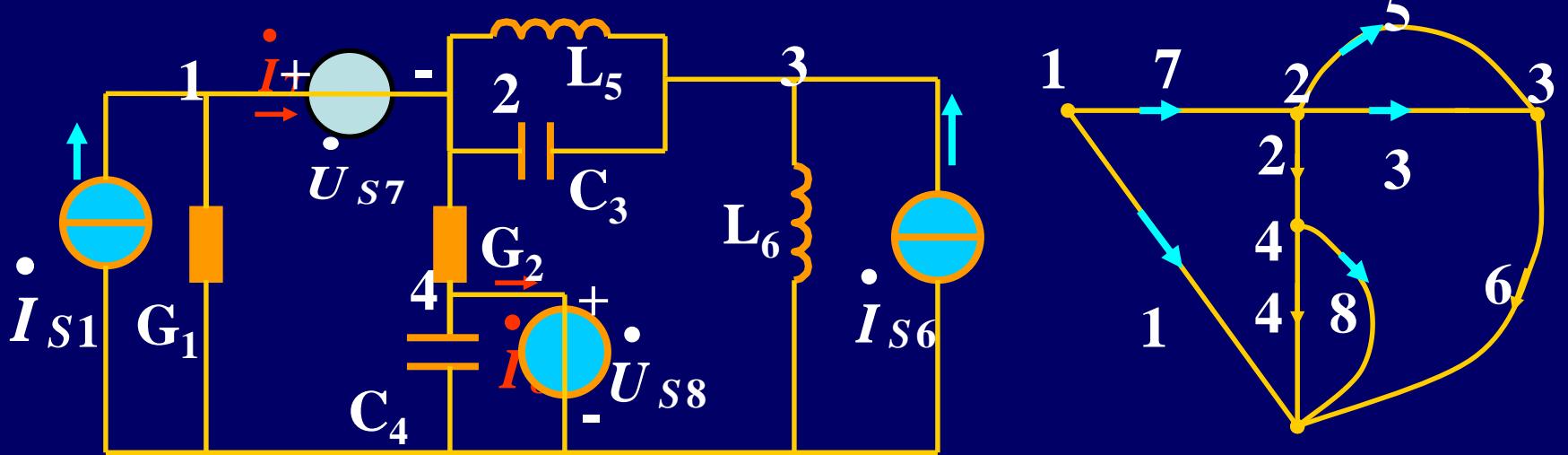


$$1: \quad G_1 V_1 + I_7 = I_{S1}$$

$$2: \quad (G_2 + \frac{1}{j\omega L_5} + j\omega C_3) V_2 - (\frac{1}{j\omega L_5} + j\omega C_3) V_3 - G_2 V_4 - I_7 = 0$$

$$3: \quad -(\frac{1}{j\omega L_5} + j\omega C_3) V_2 - (\frac{1}{j\omega L_5} + j\omega C_3 + \frac{1}{j\omega L_6}) V_3 = I_{S6}$$





$$4: \quad -G_2 \dot{V}_2 + (G_2 + j\omega C_4) \dot{V}_4 + \dot{I}_8 = 0$$

$$\dot{V}_1 - \dot{V}_2 = \dot{U}_{S7}$$

$$\dot{V}_4 = \dot{U}_{S8}$$

矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix}
 G_1 & 0 & 0 & 1 & \dot{V}_1 \\
 0 & (G_2 + j\omega C_3 + \frac{1}{j\omega L_5}) & -(j\omega C_3 + \frac{1}{j\omega L_5}) & -G_2 & -1 & 0 \\
 0 & -(j\omega C_3 + \frac{1}{j\omega L_5}) & (\frac{1}{j\omega L_6} + j\omega C_3 + \frac{1}{j\omega L_5}) & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -G_2 & 0 & (G_2 + j\omega C_4) & 0 & 1 \\
 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 \dot{I}_{S1} \\
 0 \\
 I_{S6} \\
 0 \\
 U_{S7} \\
 \dot{U}_{S8}
 \end{bmatrix}$$

一般形式:

$$\begin{bmatrix}
 Y_n & H_{12} \\
 H_{21} & 0
 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}
 \dot{V} \\
 \dot{I}_E
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 \dot{J}_n \\
 \dot{U}_S
 \end{bmatrix}$$

$Y_n$ : 为 电压源支路断开后的电路结点导纳阵

$H_{12}$ : 表明每个结点和哪几个纯电压源支路相关联

$H_{21}$ : 表明这些支路电压和哪些结点电压相关联

$$\begin{cases}
 0 \\ +1 \\ -1
 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 1 & \dot{V}_1 \\ 0 & (G_2 + j\omega C_3 + \frac{1}{j\omega L_5}) & -(j\omega C_3 + \frac{1}{j\omega L_5}) & -G_2 & -1 & 0 \\ 0 & -(j\omega C_3 + \frac{1}{j\omega L_5}) & (\frac{1}{j\omega L_6} + j\omega C_3 + \frac{1}{j\omega L_5}) & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -G_2 & 0 & (G_2 + j\omega C_4) & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{S1} \\ 0 \\ I_{S6} \\ 0 \\ U_{S7} \\ \dot{U}_{S8} \end{bmatrix}$$

一般形式:

$$\begin{bmatrix} Y_n & H_{12} \\ H_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{V}} \\ \dot{\bar{I}}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{J}}_n \\ \dot{\bar{U}}_S \end{bmatrix}$$

$\dot{\bar{V}}$ : 为节点电压列矢量

$\dot{\bar{I}}_E$ : 为电压源支路设定的电流列矢量

$\dot{\bar{J}}_n$ : 为注入结点的电流源列矢量

$\dot{\bar{U}}_S$ : 为电压源支路的电压列矢量

# 第14章 状态变量法

## ●重点

1. 状态变量
2. 状态方程列写
3. 输出方程的列写

# 电路动态过程分析方法的演变

分析方法	数学模型	特点	局限、难点
时域分析法 经典法	高阶 微分方程	单一变量 单一解	高阶 求解困难
复频域分析法 变换域	代数方程组	多个变量求解	反变换
网络函数法	有理式	简单 单输入-单输出	求解变量有限
手工计算 线性定常系统			

状态变量法：

- 多输入-多输出》内部法
- 适用于用计算机对大型网络进行暂态分析
- 线性网络、 非线性网络、 时变

状态变量法具有以上优点，目前已得到广泛应用

## 14.1 状态变量

**状态：**系统理论中的专门术语

电路理论中定义：

网络在  $t_0$  时刻的状态指的是必须知道的一组最少量的数据  
这组数据连同  $t_0$  时的外施激励，则  $t_0$  以后网络中的响应唯一确定

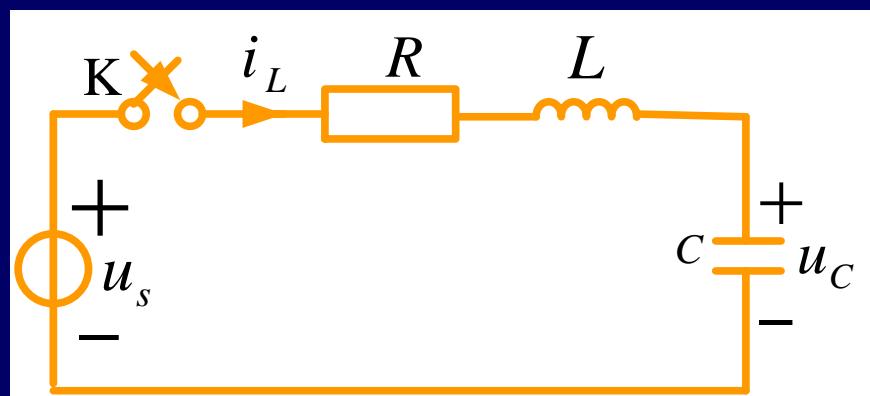
**状态变量：**一组独立的动态网络变量，电路中：电容电压  $u_c$ （或电荷  $q_c$ ）、电感电流  $i_L$ （或磁链  $\psi_L$ ）就是网络的状态变量  
这组网络变量在时刻  $t_0$  的值，给出了  $t_0$  时的状态

## 14.2 状态方程

状态方程：以状态变量为因变量列出的方程称为状态变量方程

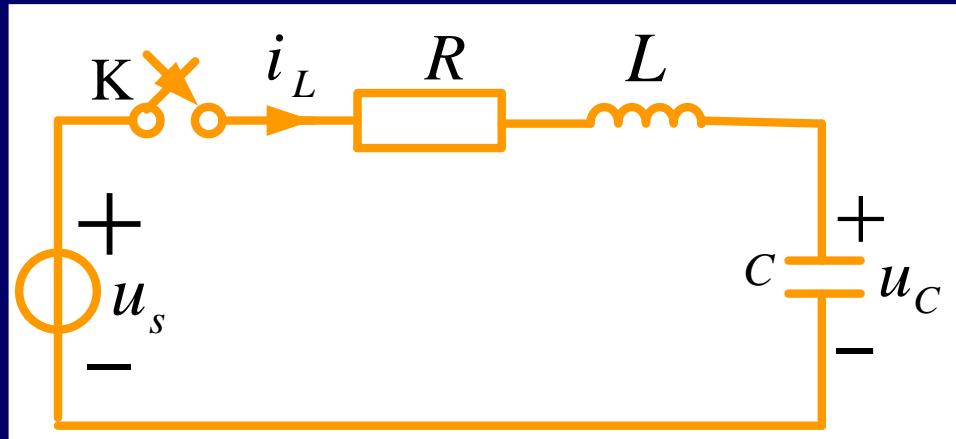
状态方程特点：

在具有 $n$ 个独立储能元件的网络中，其状态方程是 $n$ 个一阶微分方程组，这组方程的每一个方程中只有一个状态变量的一阶微分，其余的是状态变量和激励函数



$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u_s$$

用来确定积分常数的初始条件是  $u_c(t_{0-})$  和  $i_L(t_{0-})$



以电容电压  $u_c$  和电感电流  $i_L$  作为状态变量，并以它们作为因变量列方程

$$C \frac{du_c}{dt} = i_L$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -u_c - Ri_L + u_s$$

$$LC \frac{d^2u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_s$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_C}{dt} &= \frac{1}{C} i_L \\ \frac{di_L}{dt} &= -\frac{1}{L} u_C - \frac{R}{L} i_L + \frac{1}{L} u_s \end{aligned} \right\}$$

以电容电压和电感电流为状态变量的状态方程  
 电路中有两个独立储能元件  
 两个一阶微分方程组

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} [u_s]$$

$$x_1 = u_C, x_2 = i_L, \dot{x}_1 = \frac{du_C}{dt}, \dot{x}_2 = \frac{di_L}{dt}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + B[u_s]$$

$$\dot{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}}^T, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T, \quad V = [u_s]$$

状态方程的标准形式       $\dot{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}}^T = AX + BV$

**X:** 状态向量  $n \times 1$  ( $n$ 为独立储能元件数)

**V:** 输入向量  $m \times 1$ ( $m$ 为独立电源的个数)

**A:** 系数矩阵  $n \times n$       **B:** 系数矩阵,  $n \times m$

## 状态方程的编写

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + B[u_s]$$

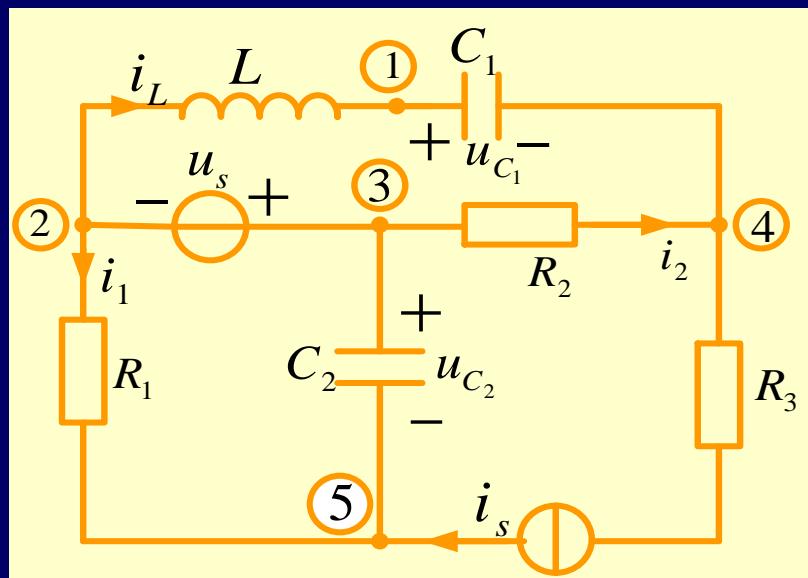
### 1. 直观编写法    适用范围：简单电路

基本原则：

- (1) 选电容电压和电感电流为状态变量
- (2) 对电路中电容所在的节点（或割集）列写电流方程
- (3) 对于电感所在的回路（或网孔）列写电压方程，且每个回路只包含一个电感
- (4) 最后消去非状态变量，写成标准形式

例：列出图示电路的状态方程

解：选 $u_{c1}$ 、 $u_{c2}$ 、 $i_L$ 为状态变量，可列出其状态方程



节点①: 节点⑤:

$$C_1 \frac{du_{C1}}{dt} = i_L$$

$$C_2 \frac{du_{C2}}{dt} = -i_1 - i_s = -\frac{-u_s + u_{C2}}{R_1} - i_s$$

电感所在的网孔列电压方程：

$$L \frac{di_L}{dt} = -u_s + R_2 i_2 - u_{C1} = -u_s + R_2 (-i_L + i_s) - u_{C1}$$

整理以上方程后写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} \frac{du_{C1}}{dt} \\ \frac{du_{C2}}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & -\frac{1}{C_2 R_1} & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{C_2 R_1} & -\frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & \frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}$$

$x_1 = u_{C1}$	$x_2 = u_{C2}$	$x_3 = i_L$
$\dot{x}_1 = \frac{du_{C1}}{dt}$	$\dot{x}_2 = \frac{du_{C2}}{dt}$	$\dot{x}_3 = \frac{di_L}{dt}$

$$\dot{\vec{X}} = A\vec{X} + B\vec{V}$$

## 2. 系统公式法

适用范围：复杂电路，常态网络

基本原则：在网络的图中选定一个特有树（常态树）来辅助建立状态方程

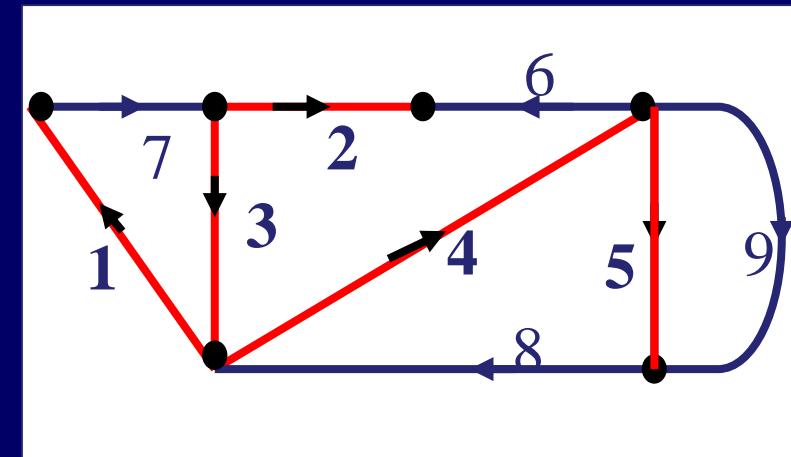
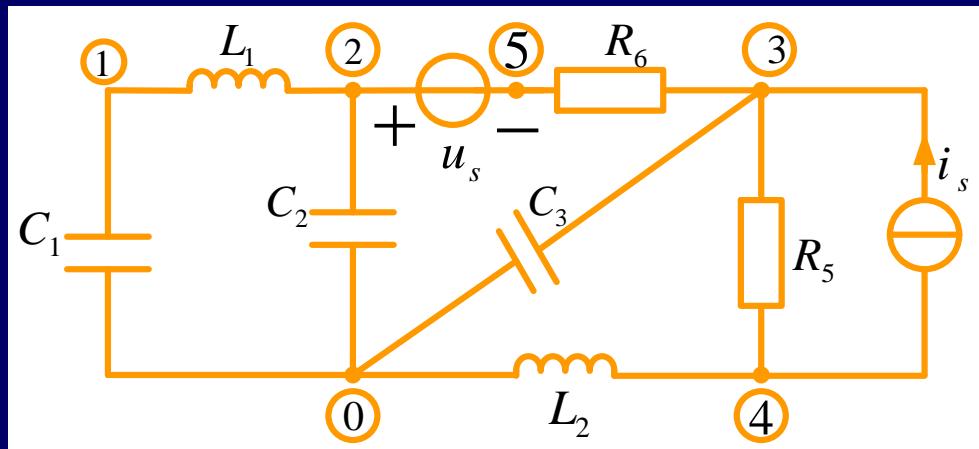
特有树：选全部电容和理想电压源包含在树支中、全部电感和理想电流源包含在连支中；而电阻支路可根据需要选入树支或连支

常态网络：能选定特有树的网络

非常态网络：仅由电容或电容与理想电压源构成回路，以及仅由电感或电感与理想电流源构成割集的网络，这样的网络选不出常态树

例：图示网络是一个常态网络，试写出其状态方程。

解：画出图示网络的有向图，选定特有树



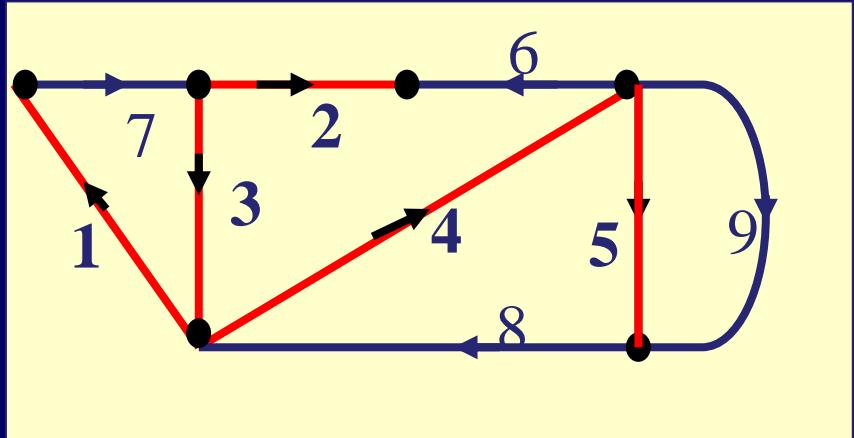
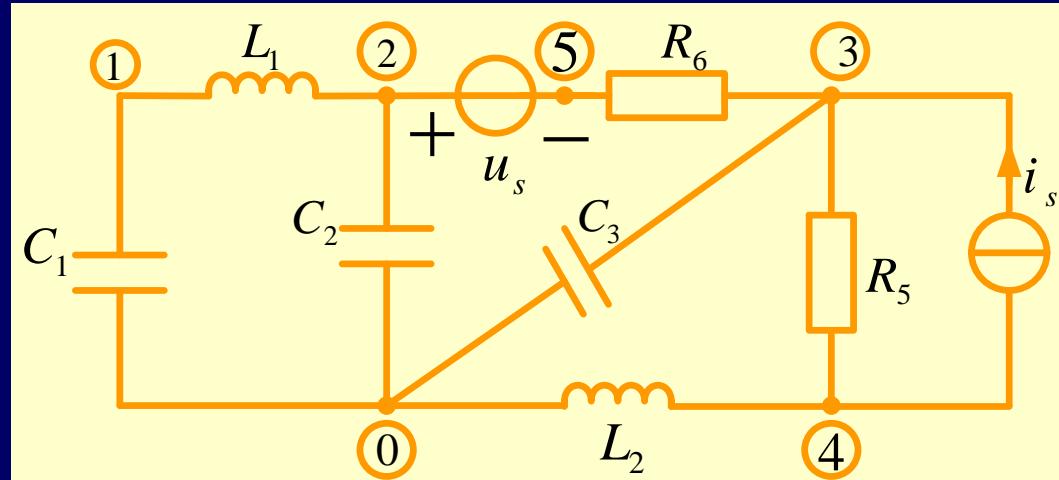
(1) 选状态变量。对常态网络一般选电容电压和电感电流作为网络的状态变量

以 $u_{c1}$ 、 $u_{c2}$ 、 $u_{c3}$ 和 $i_{L1}$ 、 $i_{L2}$ 作为状态变量

(2) 选择常态树，选1、2、3、4、5支路为树支

(3) 列出网络中各电容树支2、3、4所属的基本割集的电流方程和各电感连支7、8所属的基本回路的电压方程

$$\left. \begin{aligned} C_1 \frac{du_{c1}}{dt} &= i_{L1} \\ C_2 \frac{du_{c2}}{dt} &= i_6 + i_{L1} \\ C_3 \frac{du_{c3}}{dt} &= i_6 + i_{L2} \\ L_1 \frac{di_{L1}}{dt} &= -u_{c1} - u_{c2} \\ L_2 \frac{di_{L2}}{dt} &= -u_{c3} - u_5 \end{aligned} \right\}$$

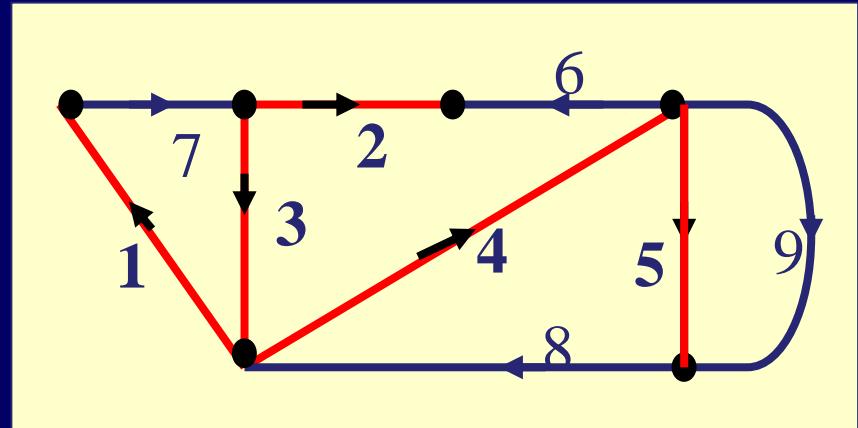
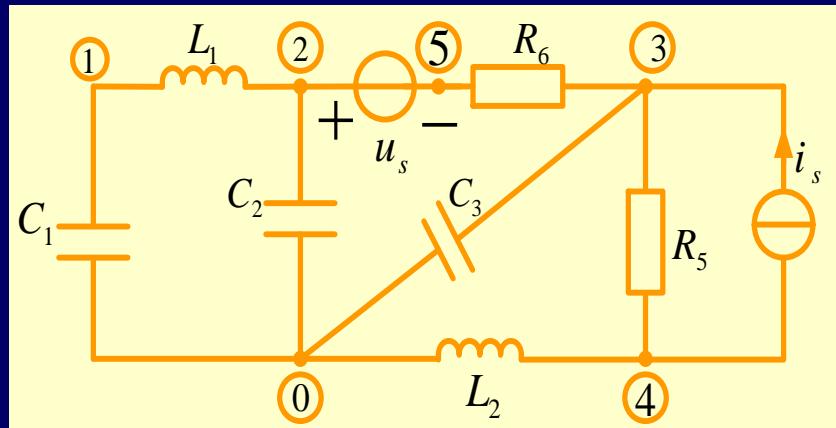


4、消去上述方程中的非状态变量 $u_5$ 和 $i_6$   
 支路5是树支》割集，支路6是连支找回路

$$u_5 = R_5 i_5 = R_5 (i_{L2} + i_s)$$

$$i_6 = \frac{u_6}{R_6} = \frac{1}{R_6} (-u_{c2} - u_{c3} + u_s)$$

将 $u_5$ 、 $i_6$ 代入第三步所获得的方程中去，使方程的右端只含有状态变量和激励函数项，而不含有其它非状态变量



经整理后可得：

$$\frac{du_{C1}}{dt} = \frac{1}{C_1} i_{L1}$$

$$\frac{du_{C2}}{dt} = -\frac{1}{C_2 R_6} u_{C2} - \frac{1}{C_2 R_6} u_{C3} + \frac{1}{C_2} i_{L1} + \frac{1}{C_2 R_6} u_s$$

$$\frac{du_{C3}}{dt} = -\frac{1}{C_3 R_6} u_{C2} - \frac{1}{C_3 R_6} u_{C3} + \frac{1}{C_3} i_{L2} + \frac{1}{C_3 R_6} u_s$$

$$\frac{di_{L1}}{dt} = -\frac{1}{L_1} u_{C1} - \frac{1}{L_1} u_{C2}$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = -\frac{1}{L_2} u_{C3} - \frac{R_5}{L_2} i_{L2} - \frac{R_5}{L_2} i_s$$

$$\text{令 } x_1 = u_{C1}, x_2 = u_{C2}, x_3 = u_{C3}, x_4 = i_{L1}, x_5 = i_{L2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2 R_6} & -\frac{1}{C_2 R_6} & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_3 R_6} & -\frac{1}{C_3 R_6} & 0 & \frac{1}{C_3} \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & 0 & \frac{R_5}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{C_2 R_6} & 0 \\ \frac{1}{C_3 R_6} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_5}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}$$

## 14.3 输出方程

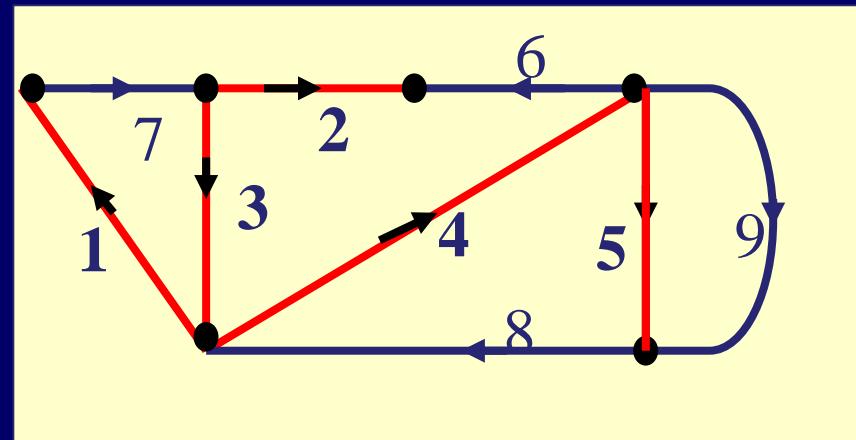
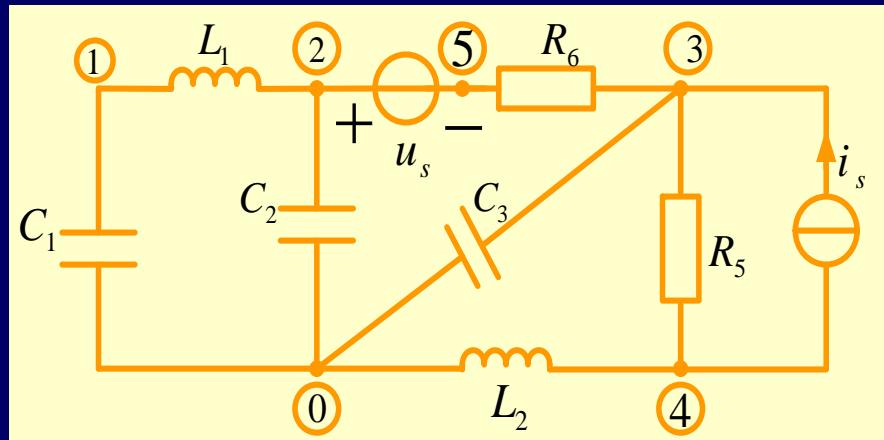
如果网络的输出变量就是网络的状态变量，则求解网络的状态方程组，就可获得网络的输出变量

如果网络的输出是非状态变量，则必须建立网络的输出方程

如果以节点电压 $u_{n1}$ 、 $u_{n2}$ 、 $u_{n3}$ 、 $u_{n4}$ 作为输出

$$u_{n1} = -u_{c1} \quad u_{n2} = u_{c2} \quad u_{n3} = -u_{c3}$$

$$u_{n4} = -u_{c3} - u_5 = -u_{c3} - R_5(i_{L2} + i_s)$$



整理后写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n3} \\ u_{n4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ u_{c3} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}$$

以上矩阵方程就是以节点电压为输出量的输出方程。如果要以独立电压源的电流、独立电流源的电压作为输出量，还可以写出另外的输出方程。

输出方程的一般形式为：

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{v}$$

在一般情况下，设网络有 $n$ 个状态变量

$m$ 个激励函数， $h$ 个输出变量

则输出向量的阶数为 $h \times 1$

系数矩阵 $C$ 的阶数为 $h \times n$

系数矩阵 $D$ 的阶数为 $h \times m$

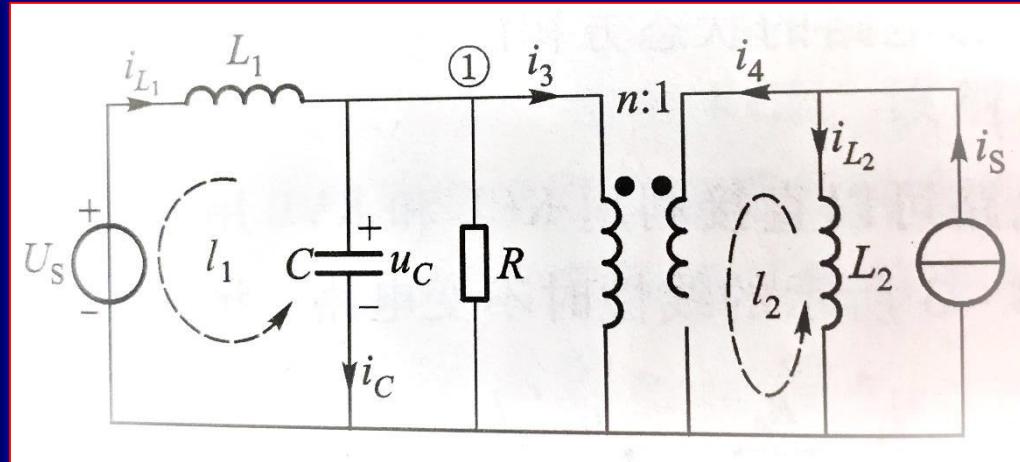
例：图示网络是一个常态网络，试写出其状态方程。

含理想变压器

方法与不含理想变压器一样

两个L一个C

两回路KVL，一个节点KCL



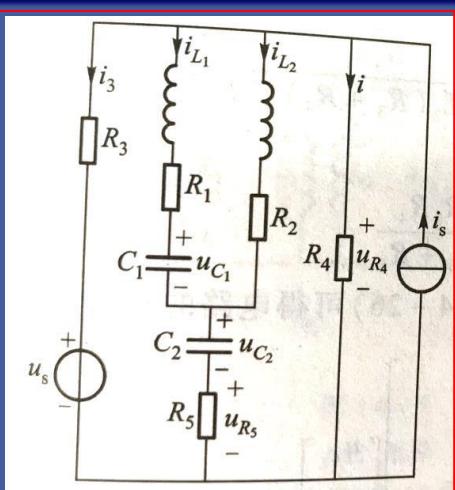
$$i_C = \frac{du_C}{dt} = i_{L1} - \frac{u_C}{R} - i_3 = i_{L1} - \frac{u_C}{R} + \frac{1}{n}i_4 = i_{L1} - \frac{u_C}{R} + \frac{1}{n}(-i_{L2} + i_s) = -\frac{u_C}{R} + i_{L1} - \frac{1}{n}i_{L2} + \frac{1}{n}i_s$$

$$u_{L1} = L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = -u_C + u_s$$

$$u_{L2} = L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = \frac{1}{n}u_C$$

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_{L1}}{dt} \\ \frac{di_{L2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} & -\frac{1}{nC} \\ -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{nL_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{nC} \\ \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}$$

例：图示网络是一个常态网络，试写出其状态方程



$$u_{L1} = L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = -u_{R1} - u_{C1} - u_{C2} - u_{R5} + u_{R4}$$

$$u_{L2} = L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = -u_{R2} - u_{C2} - u_{R5} + u_{R4}$$

$$u_{R1} = R_1 i_{L1}$$

$$u_{R2} = R_2 i_{L2}$$

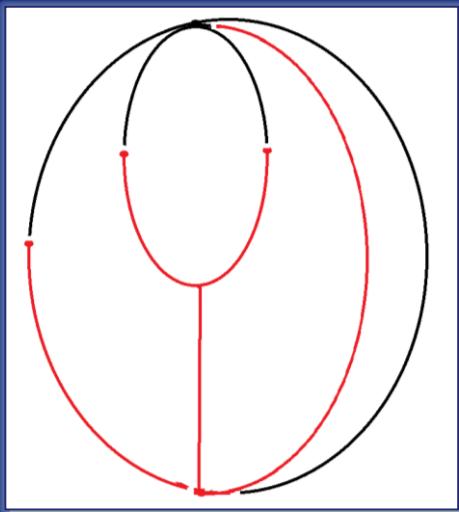
$$\frac{u_{R4} - u_s}{R_3} + \frac{u_{R4}}{R_4} + i_{L1} + i_{L2} = i_s$$

$$u_{R5} = R_5 (i_{L1} + i_{L2})$$

$$i_{C1} = C_1 \frac{du_{C1}}{dt} = i_{L1}$$

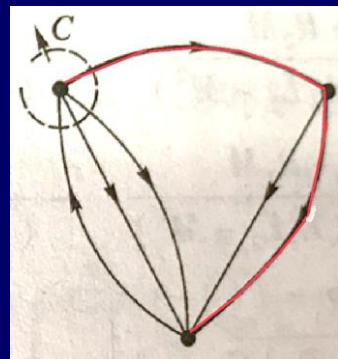
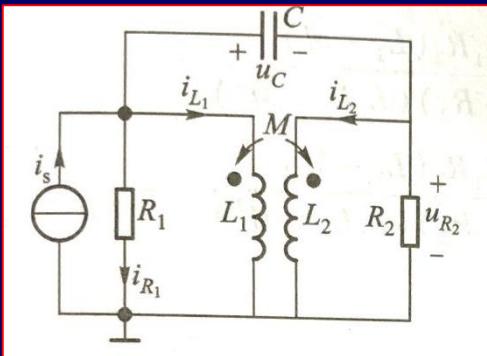
$$i_{C2} = C_2 \frac{du_{C2}}{dt} = i_{L1} + i_{L2}$$

$$R = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + R_5$$



$$\begin{bmatrix} \frac{du_{C1}}{dt} \\ \frac{du_{C2}}{dt} \\ \frac{di_{L1}}{dt} \\ \frac{di_{L2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & -\frac{R_1 + R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \\ 0 & -\frac{1}{L_2} & -\frac{R}{L_2} & -\frac{R_2 + R}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \frac{R}{R_3 + R_4} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{L_1} & \frac{R_3}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} & -\frac{R_3}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}$$

例：图示网络是一个常态网络，试写出其状态方程。



互感支路》作为两条支路》连支》耦合

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = i_s - i_{R1} - i_{L1}$$

$$L_1 \frac{di_{L1}}{dt} + M \frac{di_{L2}}{dt} = u_C + u_{R2}$$

$$M \frac{di_{L1}}{dt} + L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = u_{R2}$$

$$i_{R1} + i_{L1} + i_{L2} + \frac{u_{R2}}{R_2} = i_s$$

节点KCL 回路KVL

$$\frac{di_{L1}}{dt} = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} u_C + \frac{L_2 - M}{L_1 L_2 - M^2} u_{R2}$$

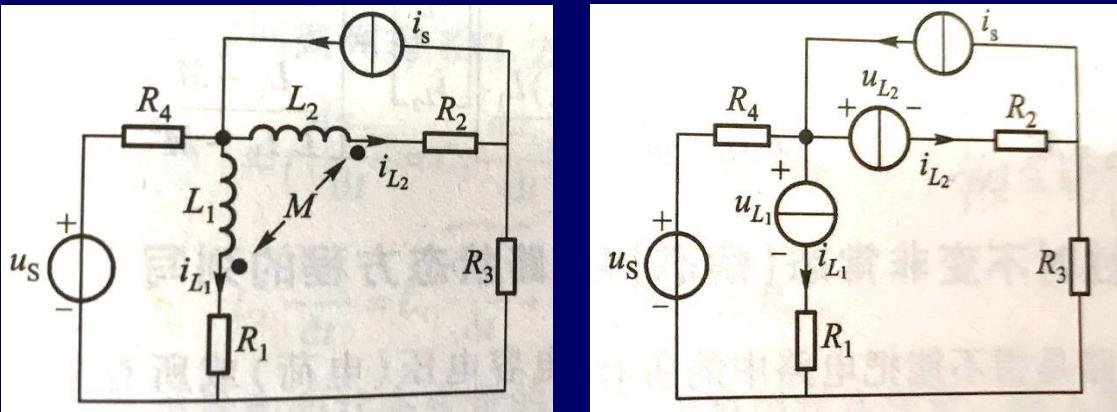
$$\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} u_C + \frac{L_1 - M}{L_1 L_2 - M^2} u_{R2}$$

R<sub>2</sub>树支 节点KCL

$$-R_1 i_{R1} + u_C + u_{R2} = 0 \quad R_1 \text{连支 回路KVL}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_{L1}}{dt} \\ \frac{di_{L2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} & -\frac{R_1}{(R_1 + R_2)C} & \frac{R_2}{(R_1 + R_2)C} \\ \frac{R_2 L_2 + R_2 M}{(R_1 + R_2)C} & -\frac{R_1 R_2 (L_2 - M)}{(R_1 + R_2)(L_1 L_2 - M^2)} & -\frac{R_1 R_2 (L_2 - M)}{(R_1 + R_2)(L_1 L_2 - M^2)} \\ -\frac{R_2 L_1 + R_1 M}{(R_1 + R_2)(L_1 L_2 - M^2)} & -\frac{R_1 R_2 (L_1 - M)}{(R_1 + R_2)(L_1 L_2 - M^2)} & -\frac{R_1 R_2 (L_1 - M)}{(R_1 + R_2)(L_1 L_2 - M^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_1}{(R_1 + R_2)C} \\ \frac{R_1 R_2 (L_2 - M)}{(R_1 + R_2)(L_1 L_2 - M^2)} \\ \frac{R_1 R_2 (L_1 - M)}{(R_1 + R_2)(L_1 L_2 - M^2)} \end{bmatrix} [i_s]$$

例：图示网络是一个常态网络，试写出其状态方程



## 方法1：等效替代+叠加

$$i_{L1} \text{单独作用: } u_{L1}^{(1)} = -(R_1 + R_4)i_{L1} \quad u_{L2}^{(1)} = -R_4i_{L1}$$

$$i_{L2} \text{单独作用: } u_{L1}^{(2)} = -R_4i_{L2} \quad u_{L2}^{(2)} = -(R_2 + R_3 + R_4)i_{L2}$$

$$u_s \text{单独作用: } u_{L1}^{(3)} = u_s \quad u_{L2}^{(3)} = u_s$$

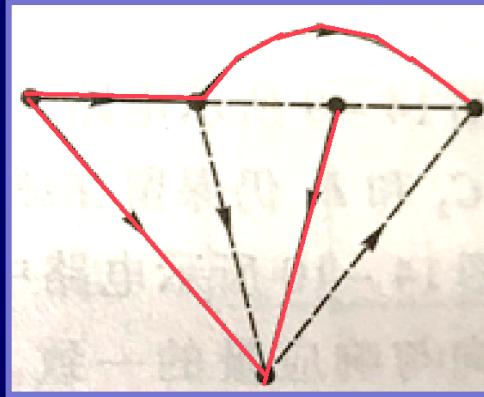
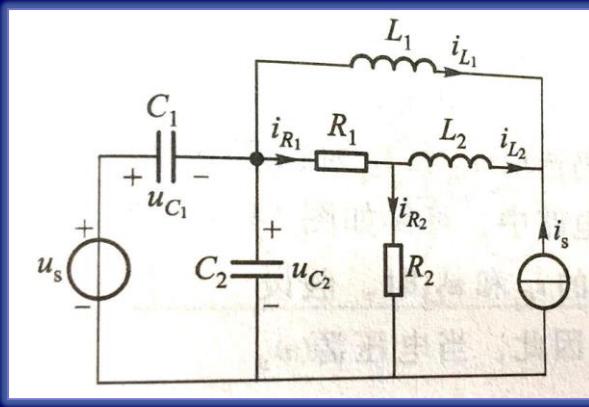
$$i_s \text{单独作用: } u_{L1}^{(4)} = R_4i_s \quad u_{L2}^{(4)} = (R_3 + R_4)i_s$$

$$u_{L1} = u_{L1}^{(1)} + u_{L1}^{(2)} + u_{L1}^{(3)} + u_{L1}^{(4)} = L_1 \frac{di_{L1}}{dt} + M \frac{di_{L2}}{dt} = -(R_1 + R_4)i_{L1} - R_4i_{L2} + u_s + R_4i_s$$

$$u_{L2} = u_{L2}^{(1)} + u_{L2}^{(2)} + u_{L2}^{(3)} + u_{L2}^{(4)} = M \frac{di_{L1}}{dt} + L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = -R_4i_{L1} - (R_2 + R_3 + R_4)i_{L2} + u_s + (R_3 + R_4)i_s$$

$$\begin{bmatrix} \frac{di_{L1}}{dt} \\ \frac{di_{L2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_4M - (R_1 + R_4)L_2 & (R_2 + R_3 + R_4)M - R_4L_2 \\ L_1L_2 - M^2 & L_1L_2 - M^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_2 - M}{L_1L_2 - M^2} & \frac{R_4L_2 - (R_3 + R_2)M}{L_1L_2 - M^2} \\ \frac{L_1 - M}{L_1L_2 - M^2} & \frac{(R_3 + R_4)L_1 - R_4M}{L_1L_2 - M^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}$$

例：图示网络非常态网络，试写出其状态方程



$C_2$ 未选为树支  
 $L_1$ 未选为连支

$$C_1 \frac{du_{C1}}{dt} = C_2 \frac{du_{C2}}{dt} + i_{R1} - i_{L2} - i_s$$

$$L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = L_2 \frac{di_{L2}}{dt} + u_{C1} - u_s + R_2 i_{R2}$$

$$\frac{du_{C2}}{dt} = \frac{du_s}{dt} - \frac{du_{C1}}{dt}$$

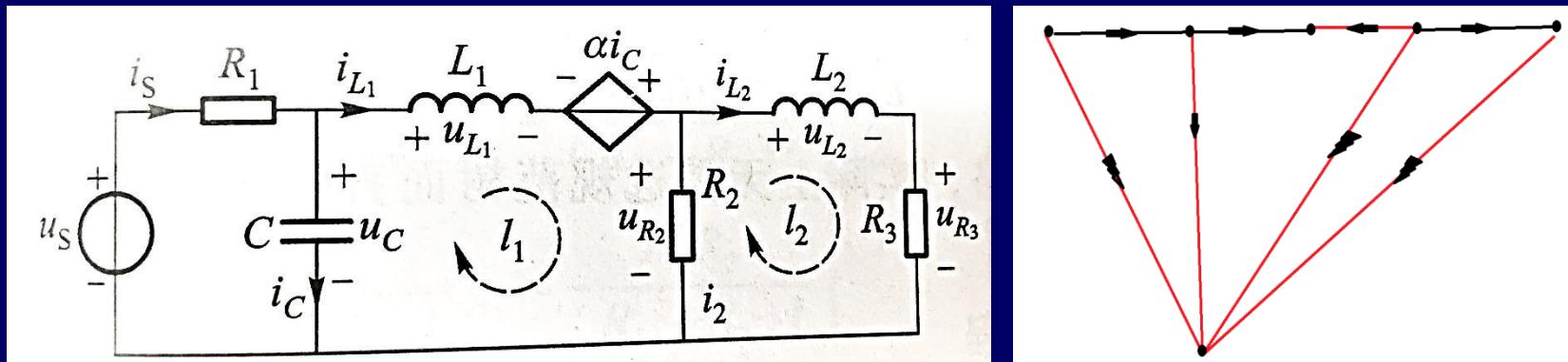
$$\frac{di_{L1}}{dt} = -\frac{di_{L2}}{dt} - \frac{di_s}{dt}$$

$$i_{R1} = \frac{u_s - u_{C1} + R_2 i_{L2}}{R_1 + R_2}$$

$$i_{R2} = \frac{u_s - u_{C1} - R_1 i_{L1}}{R_1 + R_2}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{du_{C1}}{dt} \\ \frac{di_{L2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(C_1 + C_2)(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1}{(C_1 + C_2)(R_1 + R_2)} \\ -\frac{R_1}{(L_1 + L_2)(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 R_2}{(L_1 + L_2)(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{(C_1 + C_2)(R_1 + R_2)} & -\frac{1}{C_1 + C_2} \\ -\frac{R_1}{(L_1 + L_2)(R_1 + R_2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_2}{(C_1 + C_2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1 + L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du_s}{dt} \\ \frac{di_s}{dt} \end{bmatrix}$$

例：图示网络是一个常态网络，试写出其状态方程



树支：C电压源 受控电压源 连支：L电流源

$$C \frac{du_C}{dt} = i_{R1} - i_{L1}$$

$$L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = \alpha i_C + u_C - u_{R2}$$

$$L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = u_{R2} - u_{R3}$$

$$C \frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{R_1} u_{C2} - i_{L1} - \frac{1}{R_1} u_s$$

$$L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = \left(1 - \frac{\alpha}{R_1}\right) u_C - (\alpha + R_2) i_{L1} + R_2 i_{L2} + \frac{\alpha}{R_1} u_s$$

$$L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = R_2 i_{L1} - (R_2 + R_3) i_{L2}$$

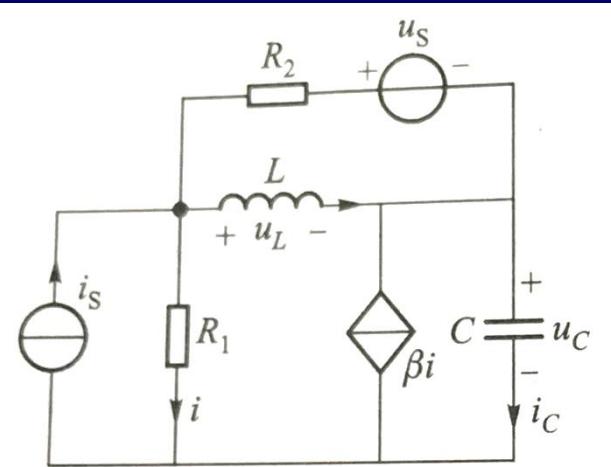
$$i_{R1} = \frac{1}{R_1} u_s - \frac{1}{R_1} u_C$$

$$u_{R2} = R_2 (i_{L1} - i_{L2})$$

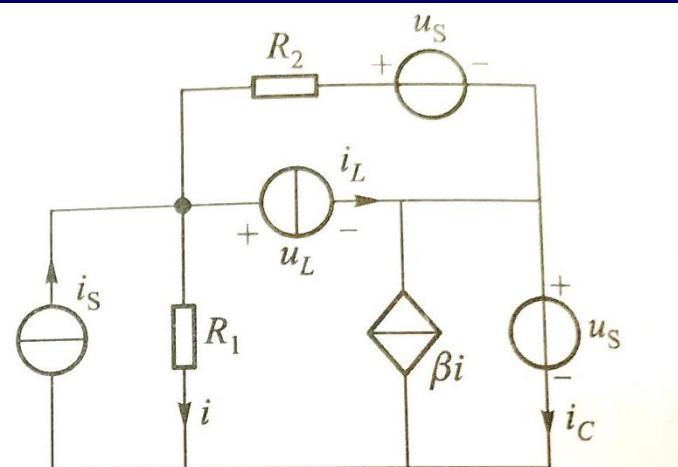
$$u_{R3} = R_3 i_{L2}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_{L1}}{dt} \\ \frac{di_{L2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} & 0 \\ \frac{\alpha - R_1}{R_1 L_1} & -\frac{\alpha + R_2}{L_1} & \frac{R_2}{R_1 L_1} \\ 0 & \frac{R_2}{L_2} & \frac{R_3 + R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ \frac{\alpha}{R_1 L_1} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix}$$

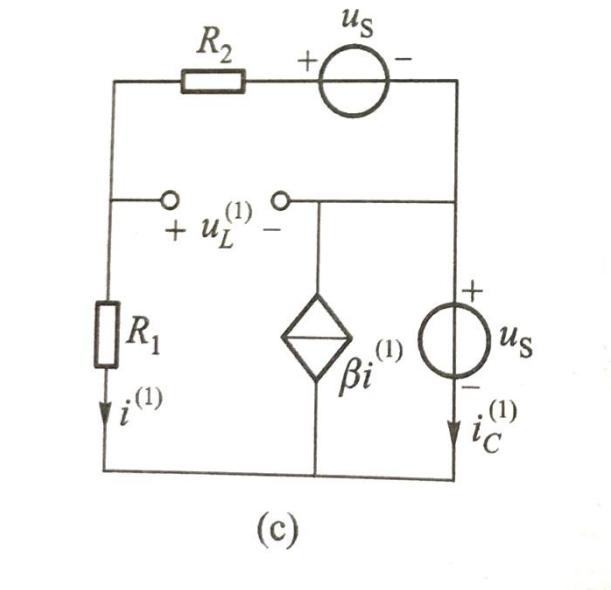
例：图示网络是一个常态网络，试写出其状态方程



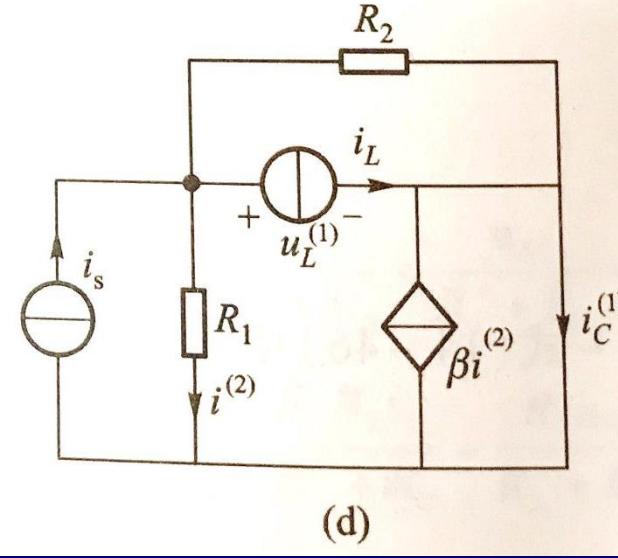
(a)



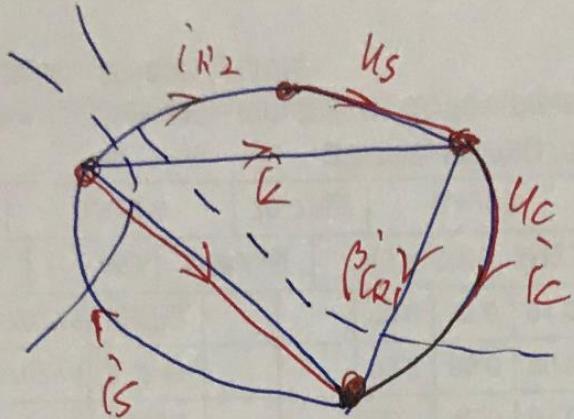
(b)



(c)



(d)



寫方程  $C_1 \frac{du_{C1}}{dt} = i_C = i_L + i_{R2} - \beta i_{R1} \quad (1)$

回路  $\angle \frac{di}{dt} = u_L = -u_C + R_1 i_{R1} \quad (2)$

寫方程  $i_{R1} + i_L - i_S + i_{R2} = 0 \quad (3)$

回路  $R_2 i_{R2} + u_S + u_C = R_1 i_{R1} \quad (4)$

$(3) (4) \rightarrow i_{R2} i_{R1}$

代入 (1) (2)

$$\beta i^{(1)} - i^{(1)} = (\beta - 1) i^{(1)} = \frac{\beta - 1}{R_1 + R_2} (u_c + u_s), \quad u_L^{(1)} = -R_2 i^{(1)} + u_s = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} u_c + \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_s$$

当单个电源单独作用时，电路如图 14-12(d) 所示。由 KVL 可得  $R_1 i^{(2)} + R_2 (i^{(2)} + i_L - i_s) = 0$

由 KCL 可得  $i^{(2)} + i_C^{(2)} = \beta i^{(2)} + i_s$ ，又有  $u_L^{(2)} = R_2 (i_s - i^{(2)} - i_L)$

立以上三式可得

$$i_C^{(2)} = -\frac{(\beta - 1) R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{R_1 + \beta R_2}{R_1 + R_2} i_s, \quad u_L^{(2)} = -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_s$$

提

$$C \frac{du_c}{dt} = i_c = \frac{\beta - 1}{R_1 + R_2} u_c - \frac{(\beta - 1) R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{\beta - 1}{R_1 + R_2} u_s + \frac{R_1 + \beta R_2}{R_1 + R_2} i_s$$

$$L \frac{di_L}{dt} = u_L = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} u_c - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_s + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_s$$

由以上两式可得该电路的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \frac{du_c}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta - 1}{(R_1 + R_2) C} & -\frac{(\beta - 1) R_2}{(R_1 + R_2) C} \\ -\frac{R_2}{(R_1 + R_2) L} & -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\beta - 1}{(R_1 + R_2) C} & \frac{R_1 + \beta R_2}{(R_1 + R_2) C} \\ \frac{R_1}{(R_1 + R_2) L} & \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}$$

# 第15章 均匀传输线

- 15. 1 分布参数电路与均匀传输线概念
- 15. 2 均匀传输线的一般方程—偏微分方程组
- 15. 3 均匀传输线方程的正弦稳态解 15. 4
- 15. 5 特性阻抗与传播常数
- 15. 6 均匀传输线上的电压和电流行波
- 15. 7 终端接特性阻抗的传输线
- 15. 7 终端接任意阻抗的传输线
- 15. 8 无损耗均匀传输线

## 重 点

- 均匀传输线的基本概念
- 均匀传输线方程的正弦稳态解
- 均匀传输线上的电压和电流行波
- 波的反射与终端接特性阻抗的传输线

## 15.1-2 均匀传输线及其基本方程

### 一、分布参数电路的基本概念

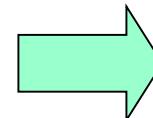
集总参数电路：

用理想化的集总元件来代替实际电路元件和连接导线而构成电路模型。

分布参数电路：

(1) 元件参数具有分布性

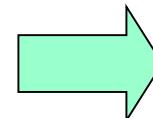
电阻按一定的规律分布在导体的每一部分  
导体的每一部分也存在电感  
任何两段导体间均存在电容和漏电导



严格地说所有实际电路都是分布参数电路

(2) 信号传输具有延迟性

分布电容和分布电导的影响  
电磁波传播的延迟效应



能否用集总参数电路代替分布参数电路

- 由于信号、电能的传输是以电磁波形式按一定速度传播的
- 故导体上信号或电能的传播出现延迟效应
- 导体越长，延迟效应越明显

例 我国电力系统频率  $f = 50 \text{ Hz}$

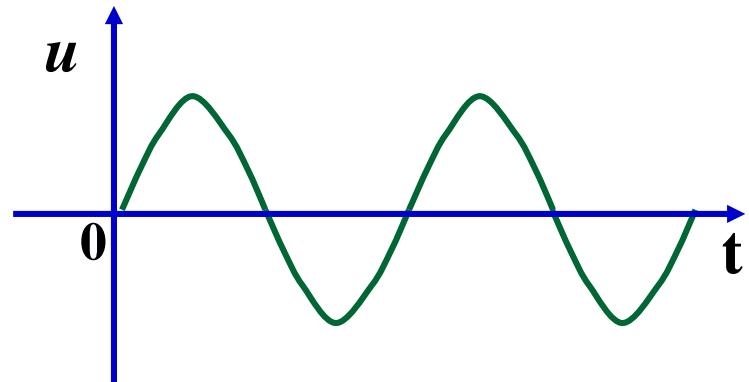
$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \times 10^8}{50} = 6000 \text{ km}$$

若设输电线长为1500km

线路始端输出电压为  $u_1 = \sqrt{2}U \sin 2\pi ft$

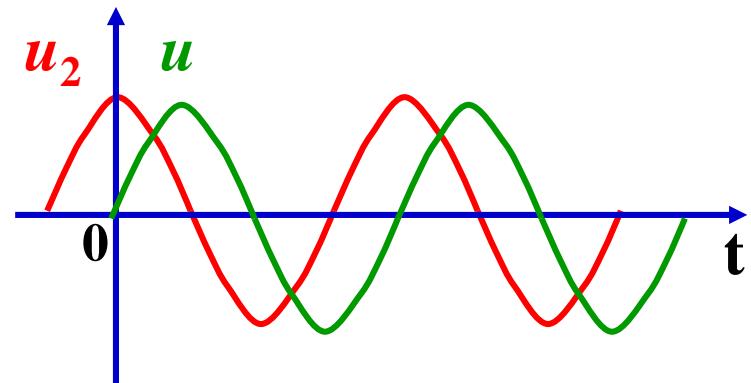
电压从线路始端传输到末端所需时间为：

$$t_1 = 1.5 \times 10^6 / (3 \times 10^8) = 0.005 \text{ s}$$



不考虑因导线阻抗引起的电压衰减和相位变化  
则线路末端电压为：

$$\begin{aligned} u_2 &= \sqrt{2}U \sin 2\pi f(t - 0.005) \\ &= \sqrt{2}U \sin(2\pi ft - 0.5\pi) \\ &= \sqrt{2}U \cos 2\pi ft \end{aligned}$$



由于延迟效应使得线路始、末端电压相位相差 $90^\circ$ ，如线路始端电压达到幅值，则线路末端电压将为零  
如将该导线当作集总元件来处理，将会得出错误的结论

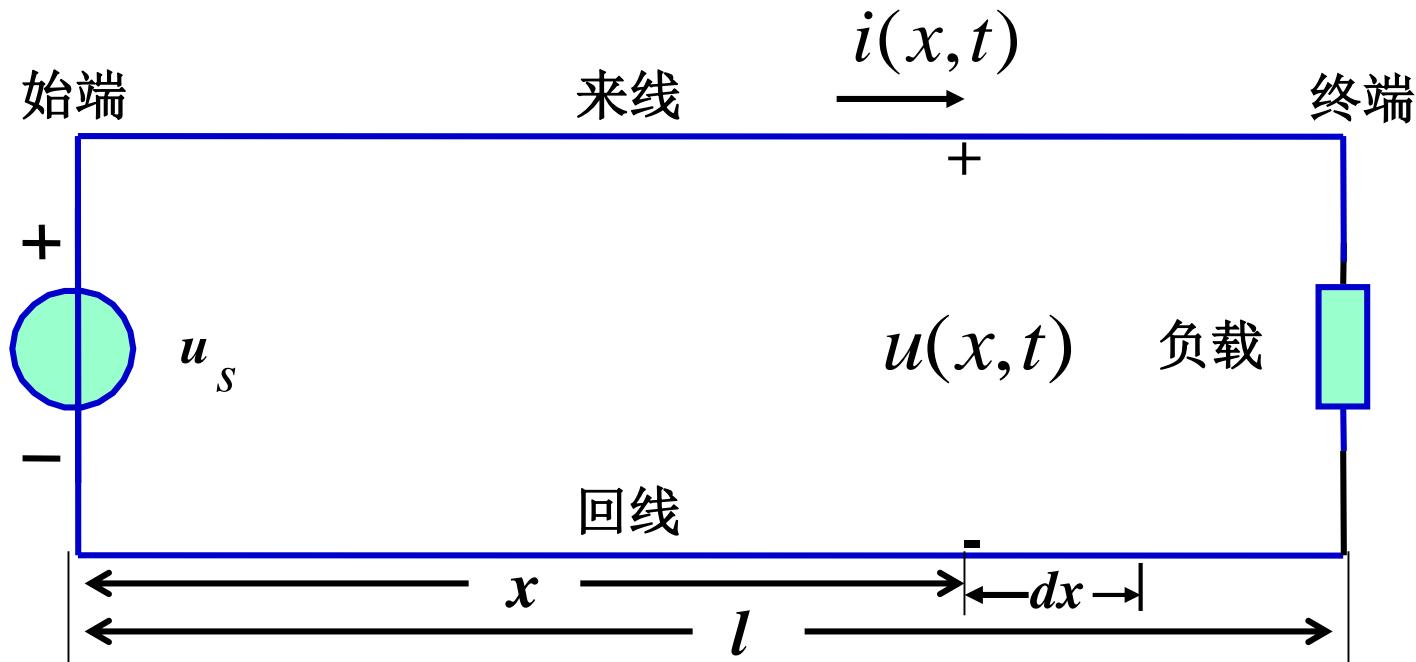
**结论：**

(1) 一般来说，只有当导体的几何尺寸与导体上所传播信号的波长相比很小时，才可当作集总参数电路来处理

$$\ell \leq \frac{\lambda}{100} = \frac{1}{100} \times \frac{v}{f}$$

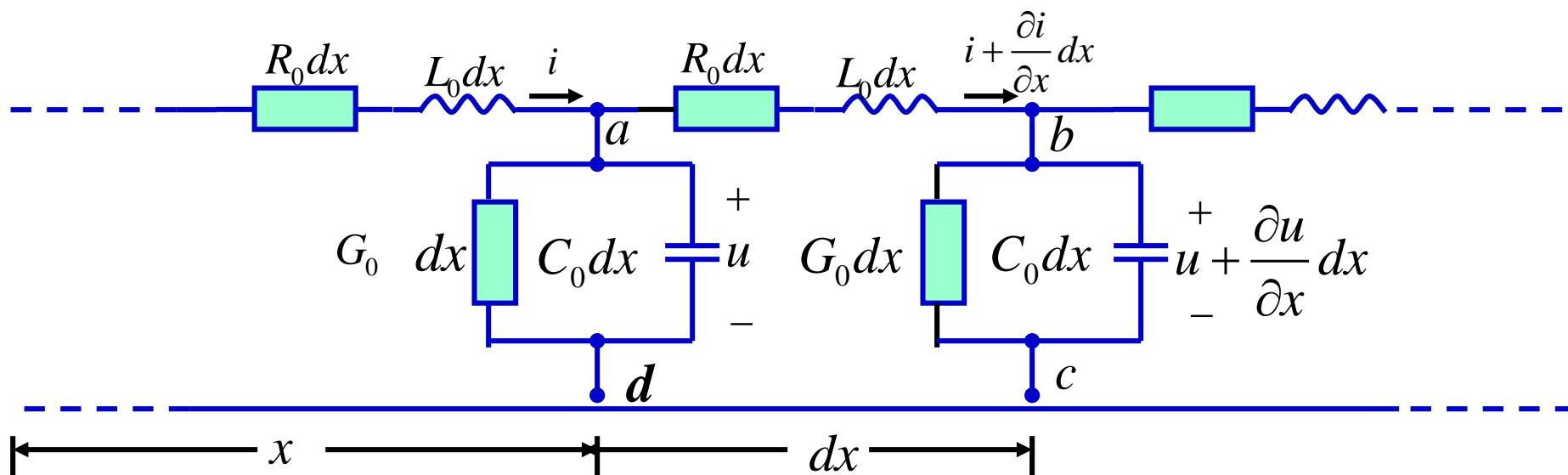
(2) 集总参数电路实际上是分布参数电路的近似处理结果

## 二、均匀传输线及其基本方程



均匀传输线：电阻、电感、电导和电容等参数  
沿 线 均 匀 分 布 的 传 输 线

实际上严格的均匀传输线是不存在的  
在满足计算精度要求的前提下  
可将实际传输线近似地当作均匀传输线处理

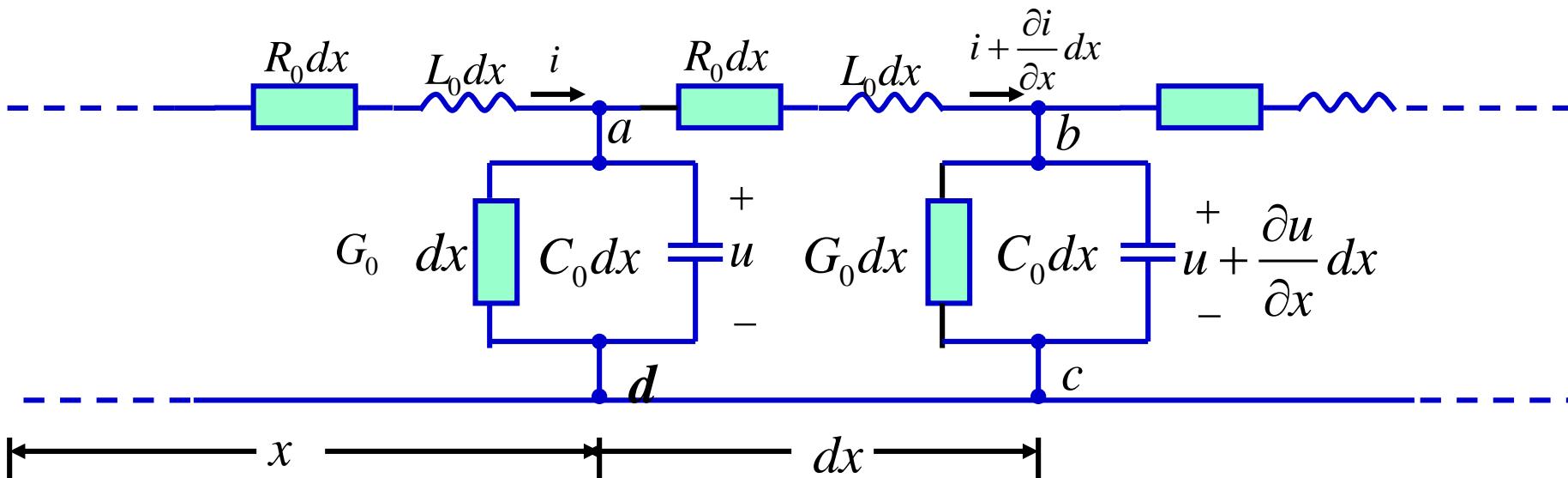


均匀传输线电路模型

原参数

$R_0$ :	单位长度两线电阻	$\Omega/m$
$L_0$ :	单位长度两线电感	$H/m$
$C_0$ :	单位长度两线电容	$F/m$
$G_0$ :	单位长度两线电导	$S/m$

对其每一个微元段，其长度与信号波长相比将是无穷小，因此传输线的每一个微元段都可当作集总参数电路处理。

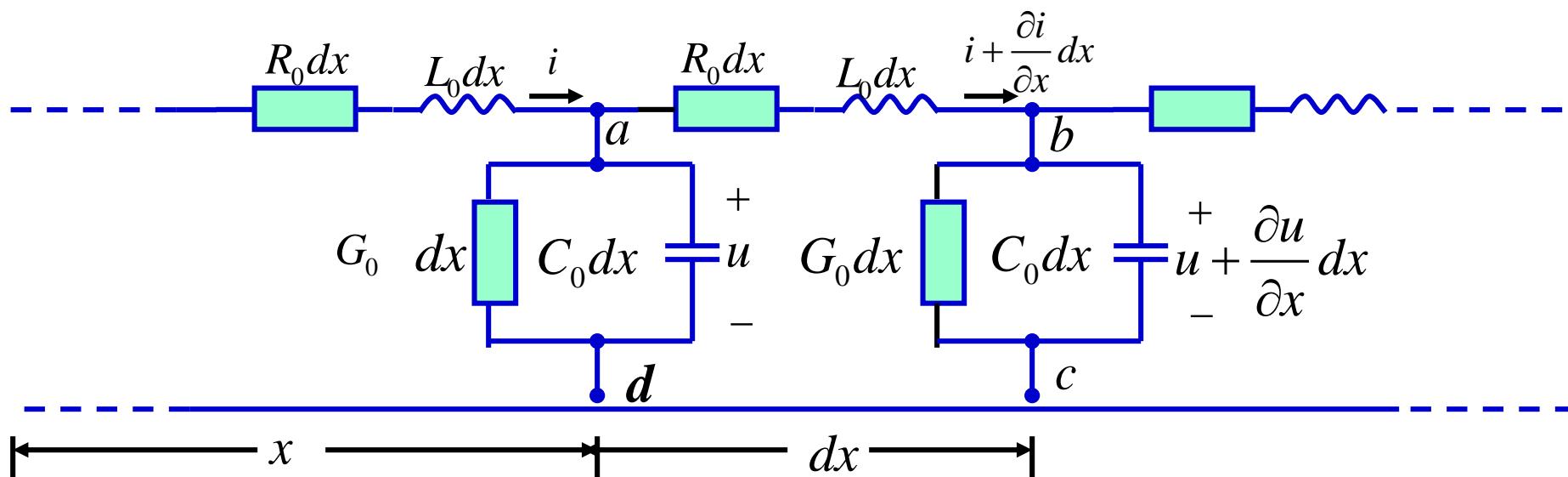


对节点a列写KCL方程，对回路abcd列写KVL方程，可得：

$$i = (G_0 dx)u + (C_0 dx) \frac{\partial u}{\partial t} + (i + \frac{\partial i}{\partial x} dx)$$

$$u = (R_0 dx)(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx) + (L_0 dx) \frac{\partial}{\partial t} (i + \frac{\partial i}{\partial x} dx) + (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx)$$

对上述二式进行整理化简并略去高阶微分项后，可得：



$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial i}{\partial x} = (G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}) \\ -\frac{\partial u}{\partial x} = (R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}) \end{array} \right.$$

沿线电流减少率等于单位长度上漏电流和电容电流之和。

沿线电压减少率等于单位长度上电阻和电感上的电压降。

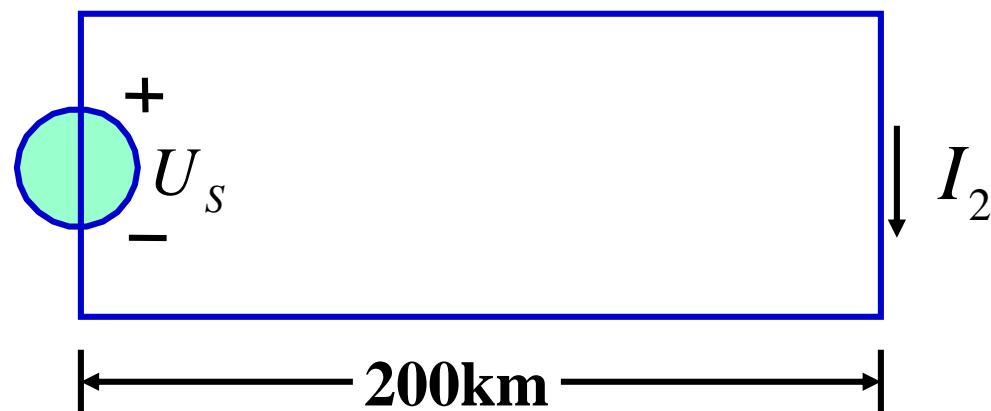
给定均匀传输线的边界条件和初始条件，求解该方程式，就可得沿线各处的电流和电压。

## 例1

已知：传输线单位长度的参数分别为：

$$R_0 = 1\Omega / \text{km}, \quad \text{直流电源: } U_s = 200 \text{ V}$$

$$G_0 = 5 \times 10^{-5} \text{ S/km}$$



试分别用分布参数电路模型和集总参数电路模型计算终端稳态电流。

解

(1) 采用分布参数电路模型求解。

直流稳态情况下，沿线电压和电流的分布均与时间无关。

均匀传输线的基本方程可改写为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dI}{dx} = -G_0 U \\ \frac{dU}{dx} = -R_0 I \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = (G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}) \\ -\frac{\partial u}{\partial x} = (R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}) \end{array} \right.$$

对第二个方程再求导一次，可消去变量  $I$ ，得

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = R_0 G_0 U$$

该常微分方程的通解为: 
$$U = A_1 e^{-\alpha x} + A_2 e^{\alpha x}$$
$$\alpha = \sqrt{R_0 G_0} = \sqrt{50} \times 10^{-3} \text{V/km}$$

边界条件  $U(0) = U_s = 200 \text{ V}, U(200) = 0$

$$A_1 + A_2 = 200$$

$$A_1 e^{-200 \times \sqrt{50} \times 10^{-3}} + A_2 e^{200 \times \sqrt{50} \times 10^{-3}} = 0$$

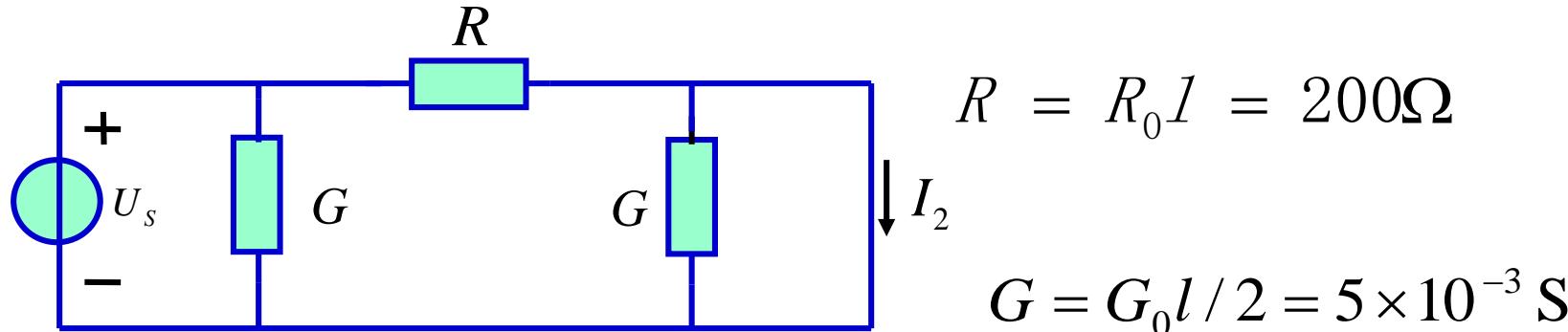
解得

$$A_1 = 212.56, A_2 = -12.56$$

所以 
$$U = 212.56 e^{-\sqrt{50} \times 10^{-3} x} - 12.56 e^{\sqrt{50} \times 10^{-3} x} \text{ V}$$

$$I_2 = -\frac{1}{R_0} \frac{dU}{dx} \Big|_{x=l} = 0.73 \text{ A}$$

(2) 采用如图所示集总参数电路模型求解



直流传输线的集总参数电路模型

由图示电路

$$I_2 = \frac{U_s}{R} = \frac{200}{200} = 1 \text{ A}$$

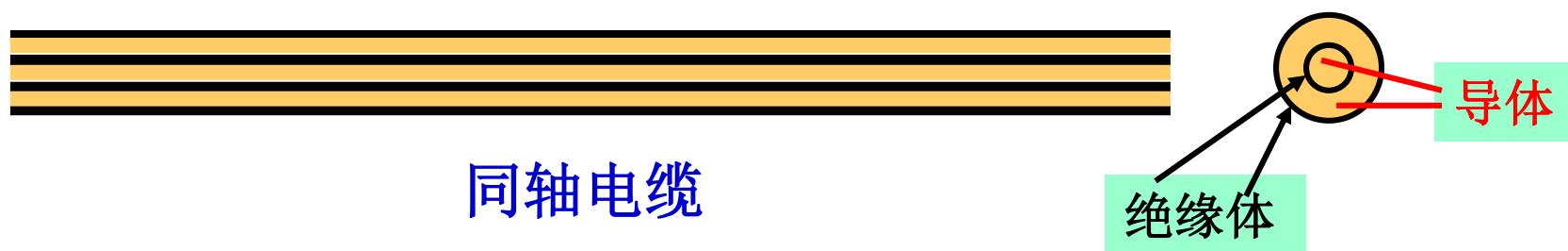
将传输线当作集总参数电路处理带来的相对计算误差

$$(1 - 0.73) / 0.73 \times 100\% = 37\%$$

忽略沿线分布的线间漏电流所导致的结果

### 三、分布参数电路理论在工程中的应用

- 高电压长距离输电线（如架空双输电线，同轴电缆）



频率低

50HZ乃至 $f=0$  (直流输电)

电压高

10kV-----500kV

距离长

10km-----数1000km

- 无线电通信技术领域：电波的发射机与天线，接收机与天线连接所用电缆

频率极高（波长很短 短波 微波）

- 计算机与自动控制系统中使用的电缆有时也要作为分布参数处理

## □ 4、高速集成电路的分析与设计

传输线效应：当波长和电路尺寸处于同一数量级时，信号的传输具有电磁波的性质，经过传输将会受到一定程度的退化和变质，如出现延时、畸变、回波、串音、散射等现象，这些现象称为传输线效应

传输线效应是制约高速集成电路发展的重要因素  
(集成电路的特征尺寸为 $0.25\sim0.01\mu\text{m}$ )

结论：分布参数概念是电路理论与现代技术的结合点



## 15.3-4 均匀传输线方程的正弦稳态解

### 一、正弦稳态情况下均匀传输线方程的通解

当均匀传输线终端接负载阻抗，始端施加角频率为 $\omega$ 的正弦交变电源时，稳态情况下沿线各处的电流和电压也是同频率的时间函数。

利用相量法，可将这些电流和电压表示为如下形式：

$$u(x, t) = \text{Im}[\sqrt{2} \dot{U} e^{j\omega t}]$$

$$i(x, t) = \text{Im}[\sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t}]$$

其中：  $\dot{U} = U(x) e^{j\psi_u(x)}$

$$\dot{I} = I(x) e^{j\psi_i(x)}$$

将上述各式代入均匀传输线的基本方程式，经化简后可得：

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} &= (G_0 \mathbf{u} + C_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) \\ -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} &= (R_0 \mathbf{i} + L_0 \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}) \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{ }} \quad \begin{aligned} \frac{d \dot{\mathbf{I}}}{dx} &= -(G_0 + j\omega C_0) \dot{\mathbf{U}} = -Y_0 \dot{\mathbf{U}} \\ \frac{d \dot{\mathbf{U}}}{dx} &= -(R_0 + j\omega L_0) \dot{\mathbf{I}} = -Z_0 \dot{\mathbf{I}} \end{aligned}$$

电流和电压相量仅为空间位置 $x$ 的函数，因此原来的一阶偏微分方程组化为相量形式的一阶常微分方程组

$$Y_0 = G_0 + j\omega C_0$$

-----单位长度均匀传输线的线间导纳

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0$$

-----单位长度均匀传输线的阻抗

$$\frac{d\dot{I}}{dx} = -(G_0 + j\omega C_0)\dot{U} = -Y_0 \dot{U} \quad \text{求一次导数}$$



$$\frac{d\dot{U}}{dx} = -(R_0 + j\omega L_0)\dot{I} = -Z_0 \dot{I}$$



$$\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = -Y_0 \frac{d\dot{U}}{dx}$$

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = -Z_0 \frac{d\dot{I}}{dx}$$

$$\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = Z_0 Y_0 \dot{I} = \gamma^2 \dot{I}$$

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = Z_0 Y_0 \dot{U} = \gamma^2 \dot{U}$$

传输线的传播常数：

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta$$

$$\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = Z_0 Y_0 \dot{I} = \gamma^2 \dot{I}$$

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = Z_0 Y_0 \dot{U} = \gamma^2 \dot{U}$$

特征方程相同  $p^2 - \gamma^2 = 0$

特征根:  $p = \pm \gamma$

通解:

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}$$

$$\dot{I} = A_3 e^{-\gamma x} - A_4 e^{\gamma x}$$

$$\frac{d \dot{U}}{dx} = -(R_0 + j\omega L_0) \dot{I} = -Z_0 \dot{I}$$



$$\dot{I} = -\frac{1}{Z_0} \frac{d \dot{U}}{dx} = \frac{\gamma}{Z_0} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x})$$

$$A_3 = \frac{\gamma}{Z_0} A_1$$

$$A_4 = \frac{\gamma}{Z_0} A_2$$

$$\dot{I} = \frac{\gamma}{Z_0} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x})$$

令

$$Z_c = \frac{Z_0}{\gamma} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}$$

(传输线的波阻抗)

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}$$

$$\dot{I} = \frac{1}{Z_c} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x})$$

传输线上的电流电压的正弦稳态解  
 $A_1$  和  $A_2$  由线路两端的边界条件确定  
电压、电流关联，非独立

## 二、均匀传输线正弦稳态方程通解讨论

### 1) 给定边界条件为始端电压电流

以始端为起点时有

$$\dot{U}(x=0) = \dot{U}_1, \quad \dot{I}(x=0) = \dot{I}_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_1 = A_1 + A_2 \\ \dot{I}_1 = \frac{1}{Z_c} A_1 - \frac{1}{Z_c} A_2 \end{array} \right.$$

解得：

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 + Z_c \dot{I}_1) \\ A_2 = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 - Z_c \dot{I}_1) \end{array} \right.$$

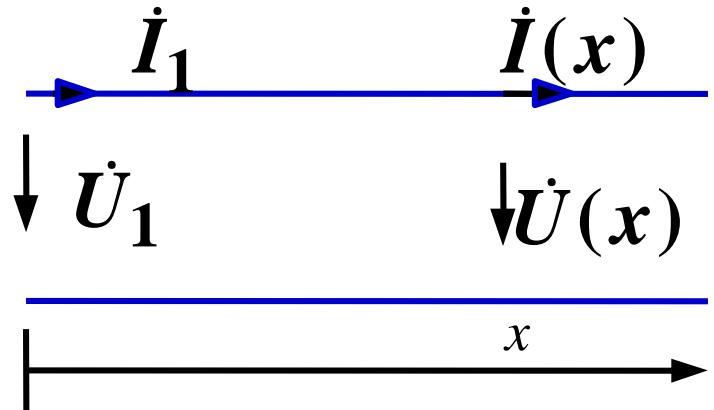
$x$ 处的电压、电流为：

$$\begin{cases} \dot{\dot{U}} = \frac{1}{2} \left( \dot{\dot{U}}_1 + Z_c \dot{\dot{I}}_1 \right) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2} \left( \dot{\dot{U}}_1 - Z_c \dot{\dot{I}}_1 \right) e^{\gamma x} \\ \dot{\dot{I}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\dot{U}}_1}{Z_c} + \dot{\dot{I}}_1 \right) e^{-\gamma x} - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\dot{U}}_1}{Z_c} - \dot{\dot{I}}_1 \right) e^{\gamma x} \end{cases}$$

双曲函数代入上式：

$$\begin{cases} ch\gamma x = \frac{1}{2} (e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) \\ sh\gamma x = \frac{1}{2} (e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\dot{U}} = \dot{\dot{U}}_1 ch\gamma x - Z_c \dot{\dot{I}}_1 sh\gamma x \\ \dot{\dot{I}} = \frac{-\dot{\dot{U}}_1}{Z_c} sh\gamma x + \dot{\dot{I}}_1 ch\gamma x \end{cases}$$



写成如下矩阵形式

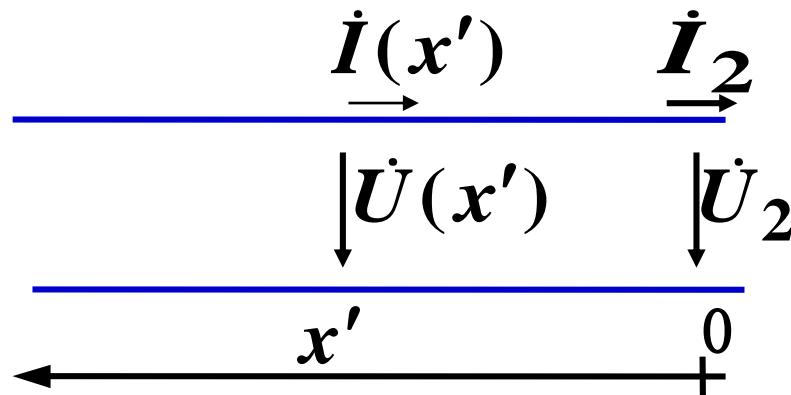
$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma x & -Z_C \operatorname{sh} \gamma x \\ -\frac{1}{Z_C} \operatorname{sh} \gamma x & \operatorname{ch} \gamma x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{ch} \gamma x = \frac{1}{2} (e^{\gamma x} + e^{-\gamma x})$$

$$\operatorname{sh} \gamma x = \frac{1}{2} (e^{\gamma x} - e^{-\gamma x})$$

2) 已知边界条件为终端电压、电流  $\dot{U}_2, \dot{I}_2$

求距终端 $x'$ 处的电压，电流。



则可解得：

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma x' & Z_C \operatorname{sh} \gamma x' \\ \frac{1}{Z_C} \operatorname{sh} \gamma x' & \operatorname{ch} \gamma x' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

### 3) 边界条件不同对比

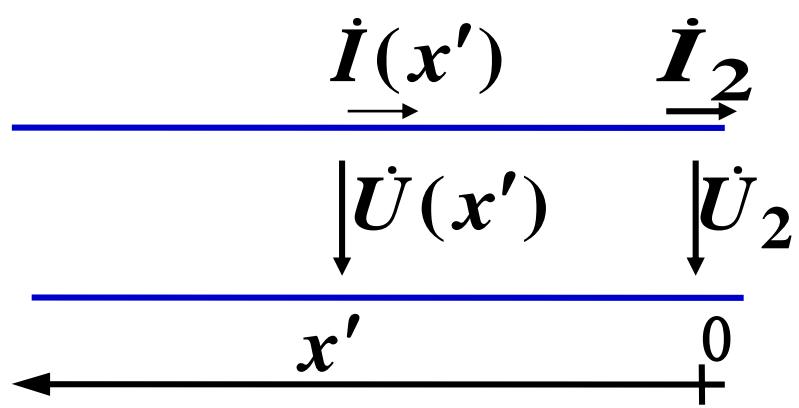
$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma x & -Z_C \operatorname{sh} \gamma x \\ -\frac{1}{Z_C} \operatorname{sh} \gamma x & \operatorname{ch} \gamma x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma x' & Z_C \operatorname{sh} \gamma x' \\ \frac{1}{Z_C} \operatorname{sh} \gamma x' & \operatorname{ch} \gamma x' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

形似质不同 类比  
合

例2

某三相高压输电线长  $l = 300 \text{ km}$



$$R_0 = 0.08 \Omega / \text{km},$$

$$L_0 = 1.33 \text{ mH/km}$$

$$C_0 = 8.5 \times 10^{-3} \text{ F/km},$$

$$G_0 = 0.1 \times 10^{-6} \text{ S/km}$$

线路终端在维持线电压为220kV的前提下输出200MW功率，  
功率因数为0.9（感性）

要求：求线路始端相电压和相电流

解

先求得以下电路参数：

## 传输常数

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)} \sqrt{(G_0 + j\omega C_0)} \\&= \sqrt{(0.08 + j2\pi \times 50 \times 1.33 \times 10^{-3})} \cdot \sqrt{(0.1 \times 10^{-6} + j2\pi \times 50 \times 8.5 \times 10^{-9})} \\&= \sqrt{(-1.1066 \times 10^{-6} + j0.25528 \times 10^{-6})} \quad 1/\text{km} \\&= 1.136 \times 10^{-3} \angle 83.5^\circ \quad 1/\text{km}\end{aligned}$$

## 波阻抗

$$\begin{aligned}Z_c &= \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} \\&= \sqrt{\frac{0.08 + j2\pi \times 50 \times 1.33 \times 10^{-3}}{0.1 \times 10^{-6} + j2\pi \times 50 \times 8.5 \times 10^{-9}}} = 400 \angle -4.34^\circ \Omega\end{aligned}$$

$$\gamma l = 1.066 \times 10^{-3} \angle 83.51^\circ \times 300 = 0.0361 + j0.3178$$

$$e^{\gamma l} = e^{0.0361+j0.3178} = 0.9848 + j0.3242$$

$$e^{-\gamma l} = e^{-(0.0361+j0.3178)} = 0.9161 - j0.3016$$

$$ch\gamma l = \frac{1}{2}(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l})$$

$$= \frac{1}{2}(0.9848 + j0.3242 + 0.9161 - j0.3016)$$

$$= 0.9506 \angle 0.68^\circ$$

$$sh\gamma l = \frac{1}{2}(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l})$$

$$= \frac{1}{2}(0.9848 + j0.3242 - 0.9161 + j0.3016)$$

$$= 0.3148 \angle 83.75^\circ$$

设终端相电压为：

$$\dot{U}_2 = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 127 \angle 0^\circ \text{ kV}$$

则可得：

$$I_2 = \frac{P_2}{\sqrt{3}U_{l2} \cos \varphi_2} = \frac{200 \times 10^6}{\sqrt{3} \times 220 \times 10^3 \times 0.9} = 0.5832 \text{ kA}$$

$$\therefore \varphi_2 = \cos^{-1} 0.9 = 25.84^\circ$$

$$\therefore \dot{I}_2 = 0.5832 \angle -25.84^\circ \text{ kA}$$

于是可得始端相电压和相电流为：

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z_c \operatorname{sh} \gamma l$$

$$= 127 \times 0.9506 \angle 0.68^\circ$$

$$+ 400 \angle -4.34^\circ \times 0.5832 \angle -25.84^\circ \times 0.3148 \angle 83.75^\circ$$

$$= 175.12 \angle 20.22^\circ \text{ kV}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma l + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l$$

$$= \frac{127 \angle 0^\circ}{400 \angle -4.34^\circ} \times 0.3148 \angle 83.75^\circ$$

$$+ 0.5832 \angle -25.84^\circ \times 0.9506 \angle 0.68^\circ$$

$$= 0.523 \angle -15.05^\circ \text{ kA}$$

# 15.5 均匀传输线上的电压和电流行波

## 一、均匀传输线方程的正弦稳态解对应的时间函数

正弦稳态解：

$$\begin{cases} \dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} = \dot{U}_\varphi + \dot{U}_\psi \\ \dot{I} = \frac{A_1}{Z_C} e^{-\gamma x} - \frac{A_2}{Z_C} e^{\gamma x} = \dot{I}_\varphi - \dot{I}_\psi \end{cases}$$

回到原本 分

式中

$$\dot{U}_\varphi = A_1 e^{-\gamma x} = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 + Z_c \dot{I}_1) e^{-\gamma x} = Z_c \dot{I}_\varphi$$

$$\dot{U}_\psi = A_2 e^{\gamma x} = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 - Z_c \dot{I}_1) e^{\gamma x} = Z_c \dot{I}_\psi$$

$$A_1 = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 + Z_c \dot{I}_1)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} (\dot{U}_1 - Z_c \dot{I}_1)$$

已知起点电压电流

第一项  $\dot{U}_\phi = A_1 e^{-\gamma x}$        $A$ 与 $x$ 无关

$$A_1 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + Z_C \dot{I}_1) = |A_1| e^{j\xi_1}$$

$$e^{-\gamma x} = e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} = e^{-\alpha x} \angle -\beta x$$

$$\dot{U}_\phi = A_1 e^{-\gamma x} = |A_1| e^{-\alpha x} \angle \xi_1 - \beta x = U_\phi e^{-\alpha x} \angle \xi_1 - \beta x$$

瞬时值表达式为：

$$u_\phi(x, t) = \sqrt{2} U_\phi e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \xi_1)$$

时、空表达式

第二项  $\dot{U}_\psi = A_2 e^{\gamma x}$

$$u_\psi(x, t) = \sqrt{2} U_\psi e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \xi_2)$$

电压  $u = u_\varphi + u_\psi$

$$u = \sqrt{2} U_\varphi e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \xi_1) + \sqrt{2} U_\psi e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \xi_2)$$

电流

$$I = \frac{A_1}{Z_C} e^{-\gamma x} - \frac{A_2}{Z_C} e^{\gamma x} \quad Z_C = |Z_C| \angle \theta$$

$$i = \sqrt{2} \frac{U_\varphi}{|Z_C|} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \xi_1 - \theta) - \sqrt{2} \frac{U_\psi}{|Z_C|} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \xi_2 - \theta)$$

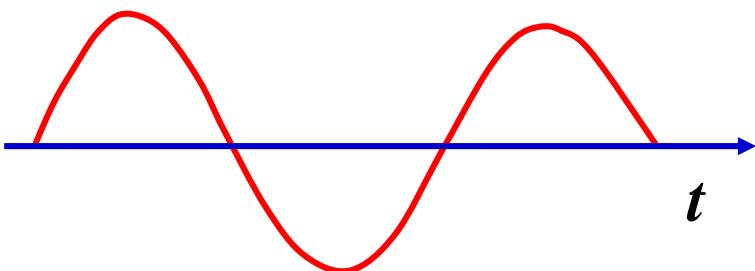
## 二、均匀传输线上的正向行波

### 1、电压正向行波的传播方向

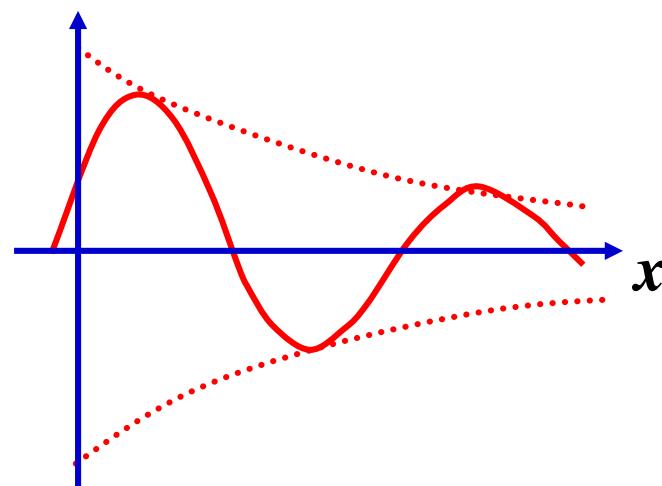
考察电压表达式的第一项

$$u_\varphi = \sqrt{2}U_\varphi e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \xi_1)$$

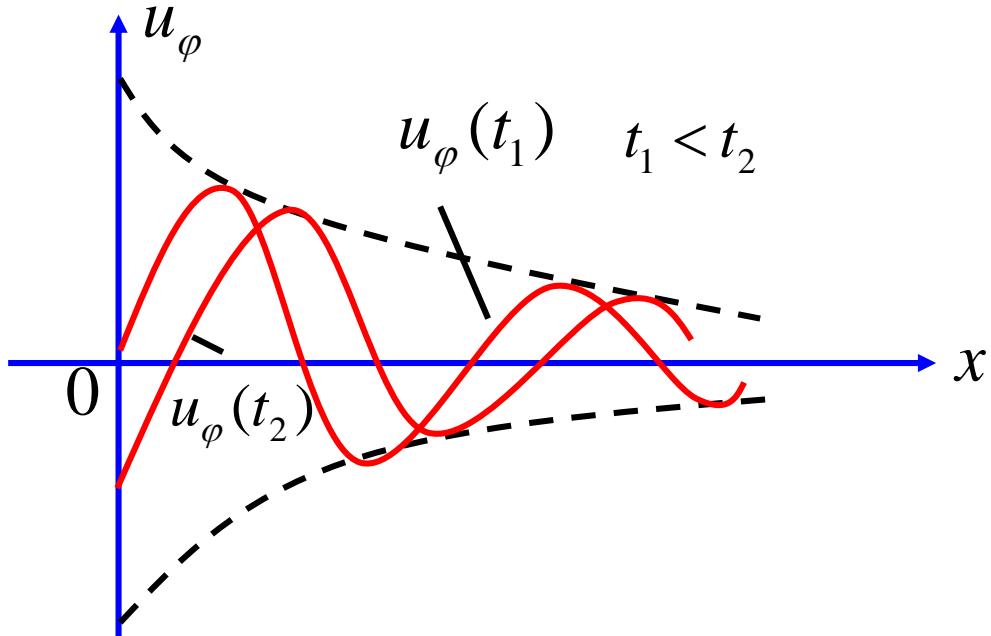
(1) 在传输线的任一固定点x处观察: 则它将以正弦规律随时间t交变(时间波)



(2) 如在某一固定时刻t来观察: 则它将在传输线上以衰减正弦波的规律随x变化(空间波)



整体看 $u$ 既随 $t$ 变化, 又随 $x$ 变化,  
称为行波



为了清楚地了解 $u_\phi$ 随 $x$ 、 $t$ 的变化规律，可对若干不同的时刻，作图给出传输线上的分布情况。

画出了两个不同时刻 $u_\phi$ 的沿线分布。

∴ 当时间由  $t_1$  增加到  $t_2$  时， $u_\phi$  的波形从传输线的始端向终端整体移动了一段距离，但幅值有所衰减。

∴ 可将  $u_\phi$  看作一个随时间增加从传输线的始端向终端运动的衰减正弦波。

∴  $u_\phi$  ----- 正向电压行波/入射波



两个问题：往那移？速度？

特殊情况：设  $\alpha=0$

$$u_\varphi = \sqrt{2}U_\varphi \sin(\omega t - \beta x + \xi_1)$$

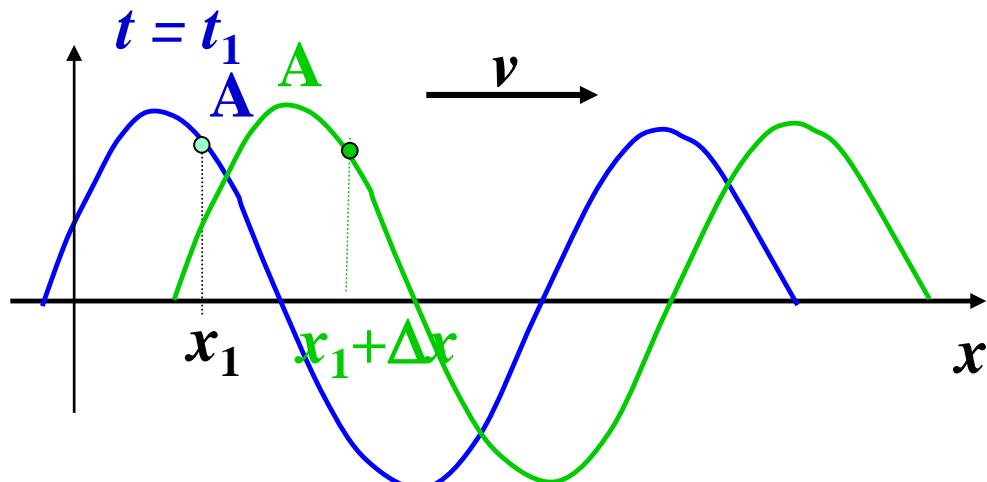
选两个同相位的点观察

当  $t = t_1$  时，A点在  $x_1$  处。

当  $t = t_1 + \Delta t$  时，A点在  $x = x_1 + \Delta x$  处

$$\omega t_1 - \beta x_1 + \xi_1$$

$$\omega(t_1 + \Delta t) - \beta(x_1 + \Delta x) + \xi_1$$



结论  
波向  $x$  增加  
的方向移动

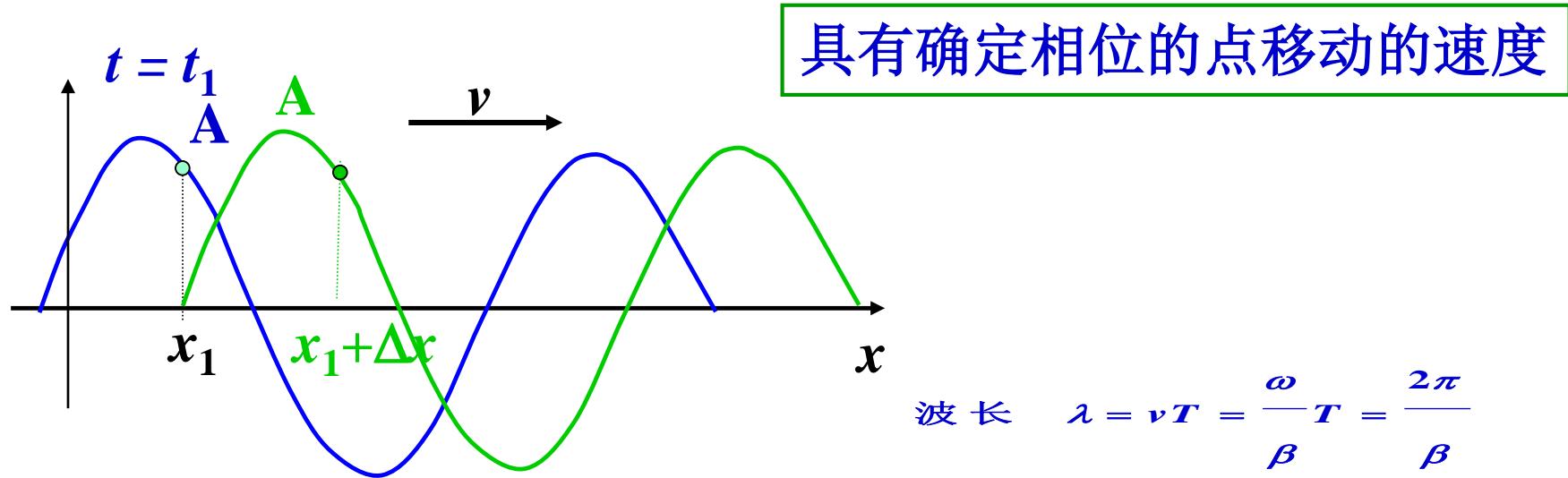
$$\omega \Delta t - \beta \Delta x = 0 \Rightarrow$$

## 2、电压正向行波的传播速度

当 $x \rightarrow x + \Delta x$ ,  $u_\phi$ 的值不变，则应有：

$$\omega t - \beta x + \xi_1 = \text{常数}, \text{ 即 } \frac{d}{dt}(\omega t - \beta x + \xi_1) = 0$$

$$\omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0 \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = v \quad \text{相速}$$



行波的波长 ----- 行波同一瞬间相位相差  $2\pi$  的两点间的距离

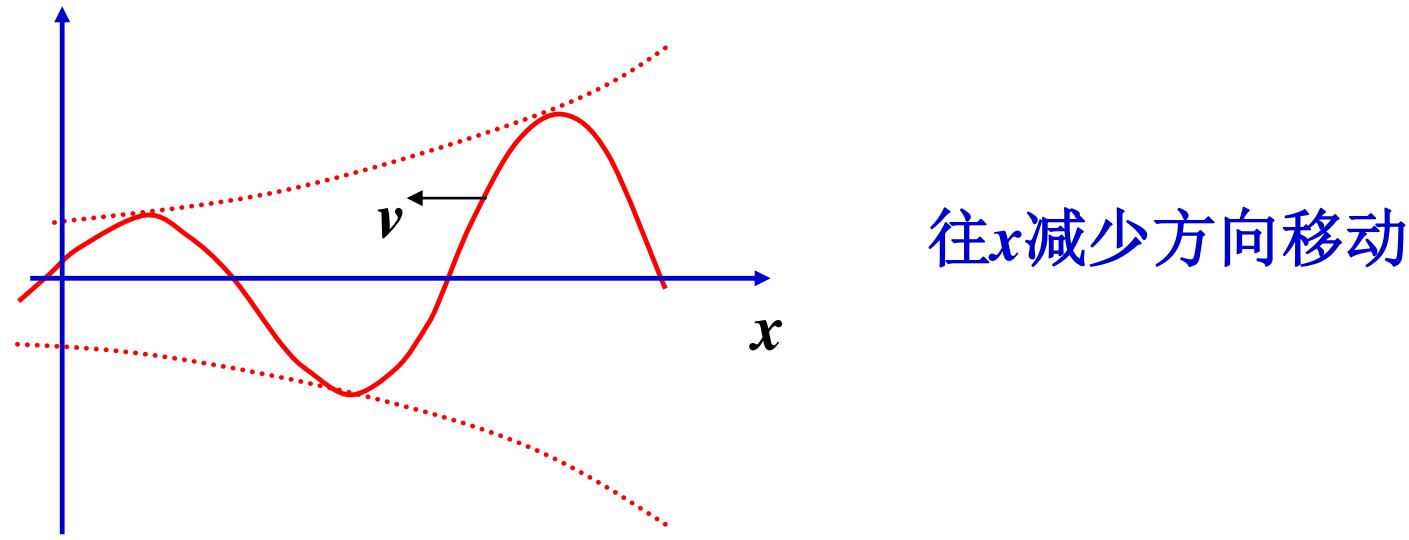
### 3、电流正向行波

$$i_{\varphi} = \sqrt{2} \frac{U_{\varphi}}{|Z_C|} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \xi_1 - \theta)$$

同样可知  $i_{\varphi}$  也是一个与  $U_{\varphi}$  具有相同传播速度和方向的正向行波，但在相位上要  $U_{\varphi}$  滞后一个  $\theta$  角。

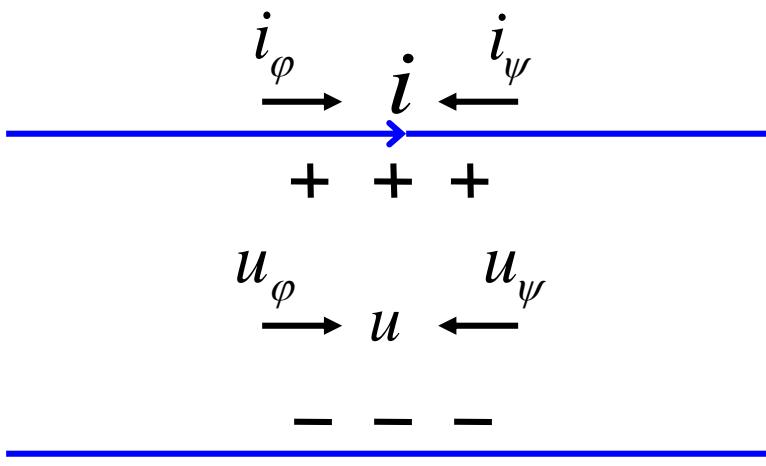
### 三、均匀传输线上的反向行波

第二项  $u_\psi = \sqrt{2}U_\psi e^{\gamma x} \sin(\omega t + \beta x + \xi_2)$



由终端向始端行进的波称为反向行波(反射波)

根据以上分析结果可作出传输线上电压、电流及相应行波的参考方向如图所示。



结论：

- (1) 传输线上任一点处的线间电压都是一个正向电压行波和一个反向电压行波叠加的结果。
- (2) 传输线上任一点处的电流也是由一个正向电流行波和一个反向电流行波叠加的结果

$\therefore u$  与  $u_\phi$  及  $u_\psi$  的参考方向相同。

$$\therefore u = u_\phi + u_\psi$$

$\therefore i$ ,  $i_\phi$  与  $i_\psi$  的参考方向相反

$$\therefore i = i_\phi - i_\psi$$

# 15.6 特性阻抗与传播常数

## 一、均匀传输线的特性阻抗

传输线的特性阻抗 -----同向电压、电流行波相量的比值.

(波阻抗)

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = |Z_c| \angle \theta$$

$|Z_c|$  -----波阻抗的模

$\theta$  -----波阻抗阻抗角

(1) 在直流情况下，

$$Z_c = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}} = z_c \quad \text{特性阻抗为纯电阻}$$

(2) 对无畸变线 (满足条件  $R_0 / L_0 = G_0 / C_0$  的传输线) ,

$$Z_c = \sqrt{\frac{R_0(1 + j\omega \frac{L_0}{R_0})}{G_0(1 + j\omega \frac{C_0}{G_0})}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

特性阻抗也是纯电阻

(3) 对超高压输电线， 导线截面积较大

$$\omega C_0 \gg G_0, \quad \omega L_0 \gg R_0$$

$$\therefore Z_c \approx \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

可近似将波  
阻抗当作纯  
电阻来处理

(4) 对工作频率较高的传输线，有类似超高压输电线的结果

### 架空线和电缆波阻抗

	波阻抗	备注
架空线	300~400Ω	
电 缆	75 Ω 和 50 Ω	电缆的线间距离要较架空线小， 且线间绝缘材料的介电常数要大于空气的介电常数， $C$ 大， $L$ 小

## 二、均匀传输线的传播常数

传播常数

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta$$

实部  $\alpha$  -----传输线的衰减常数

反映了波传播过程中的衰减特性

虚部  $\beta$  -----传输线的相位常数

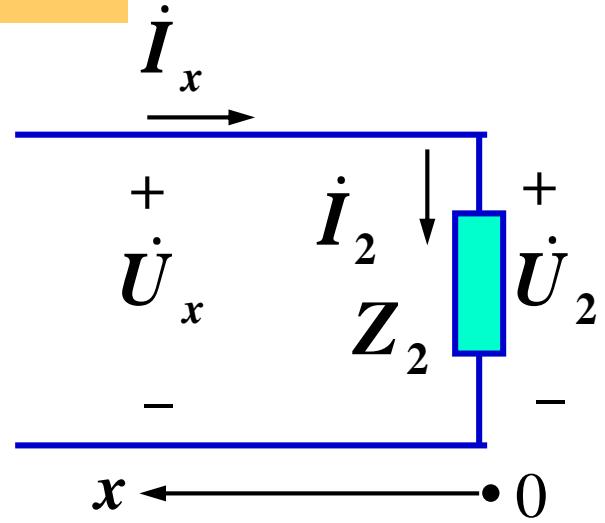
反映了波传播过程中的相位变化

$$\begin{aligned} \because |\gamma|^2 &= \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)} \\ \gamma^2 &= \alpha^2 - \beta^2 + j2\alpha\beta \\ &= (R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0) + j(G_0 \omega L_0 + R_0 \omega C_0) \\ \therefore \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)} \right]} \\ \beta &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \omega^2 L_0 C_0 - R_0 G_0 + \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)} \right]} \\ \therefore \text{衰减常数 } \alpha &\text{ 随 } R_0, G_0 \text{ 的增大而单调增长} \\ \text{相位常数 } \beta &\text{ 随 } L_0, C_0 \text{ 和频率的增大而单调增长} \\ \text{对无畸变线, 有: } \alpha &= \sqrt{R_0 G_0} \\ \beta &= \sqrt{L_0 C_0} \end{aligned}$$

# 15.5 终端接特性阻抗的传输线

## 一、终端接任一阻抗传输线

设传输线终端所接负载阻抗为  $Z_2$  ,



$$\therefore \dot{U}_2 = \dot{U}_{2\phi} + \dot{U}_{2\psi}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{2\phi} - \dot{I}_{2\psi}$$

$$\therefore Z_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}_{2\phi} + \dot{U}_{2\psi}}{\dot{I}_{2\phi} - \dot{I}_{2\psi}} = \frac{Z_c \dot{I}_{2\phi} + Z_c \dot{I}_{2\psi}}{\dot{I}_{2\phi} - \dot{I}_{2\psi}}$$

$$\therefore Z_c \dot{I}_{2\phi} + Z_c \dot{I}_{2\psi} = Z_2 \dot{I}_{2\phi} - Z_2 \dot{I}_{2\psi}$$

$$\therefore \frac{\dot{U}_{2\psi}}{\dot{U}_{2\phi}} = \frac{\dot{I}_{2\psi}}{\dot{I}_{2\phi}} = \frac{Z_2 - Z_c}{Z_2 + Z_c} = N$$

由上式可见，当线路终端负载阻抗  $Z_2$  与传输线波阻抗不相等时，反射系数  $N$  不等于零，这时反向电压（电流）行波与正向电压（电流）行波成正比

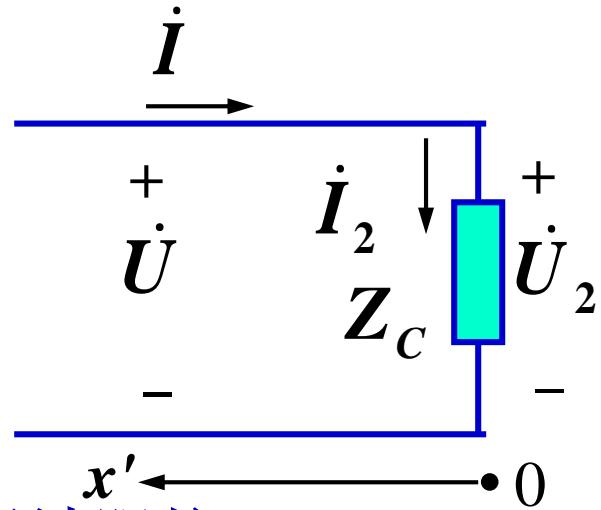
正向电压（电流）行波实际上是由电源发出的入射波，而反向电压（电流）行波则是入射波传播到终端时由于负载阻抗与传输线波阻抗不相等而产生的反射波

## 二、终端接特性阻抗的传输线

传输线终端所接负载阻抗与传输线波阻抗相等，反射系数等于零，不存在反射波，称传输线处于**匹配状态**

$$\therefore \begin{cases} \dot{U} = \frac{1}{2} \left( \dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2 \right) e^{\gamma x'} + \frac{1}{2} \left( \dot{U}_2 - Z_c \dot{I}_2 \right) e^{-\gamma x'} = \dot{U}_2 e^{\gamma x'} \\ \dot{I} = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{U}_2}{Z_c} + \dot{I}_2 \right) e^{\gamma x'} - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{U}_2}{Z_c} - \dot{I}_2 \right) e^{-\gamma x'} = \dot{I}_2 e^{\gamma x'} \end{cases}$$

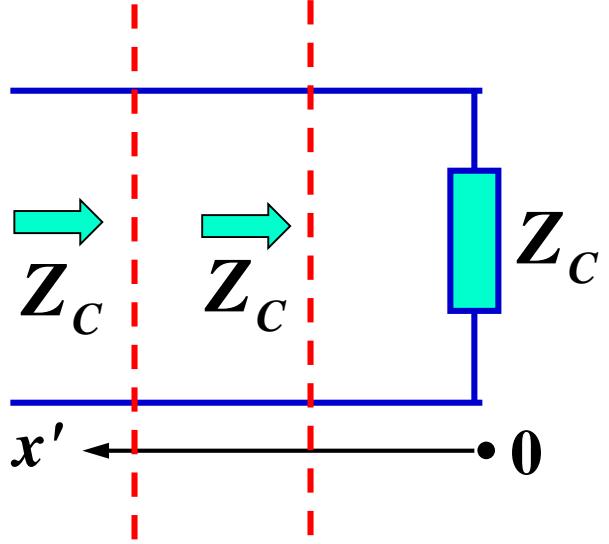
已知末端  
电压电流  
表达式子



∴ 传输线上任一点向终端看的输入阻抗

$$Z_{in}(x') = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = Z_c$$

传输线向终端看的输入阻抗处处相等，等于波阻抗



## 电压、电流有效值沿线分布

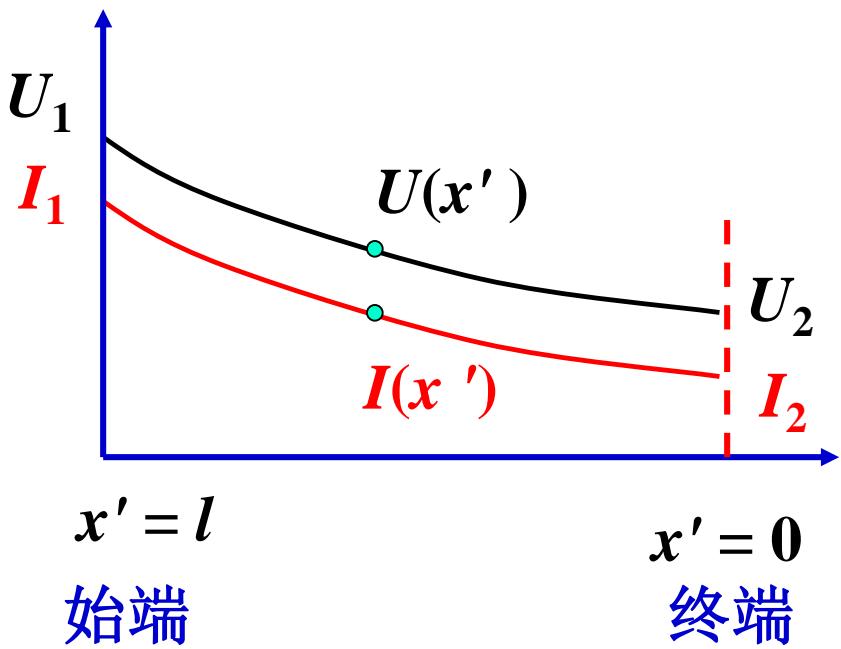
$$U(x') = U_2 e^{\alpha x'}$$

$$I(x') = I_2 e^{\alpha x'}$$

始端

$$U_1 = U_2 e^{\alpha l}$$

$$I_1 = I_2 e^{\alpha l}$$



反射波在传播过程中将携带能量，在匹配状态下由入射波传送至终端的能量将全部被负载所吸收，这时传输效率是最高

自然功率 ----- 匹配状态下传输线传输的功率

∴ 线路末端负载吸收的有功功率

$$P_2 = \operatorname{Re}[\dot{U}_2 \dot{I}_2^*] = U_2 I_2 \cos \theta$$

线路始端电源发出的有功功率

$$\begin{aligned} P_1 &= \operatorname{Re}[\dot{U} \dot{I}_1^*] = \operatorname{Re}[\dot{U}_2 e^{(\alpha + j\beta)l} \dot{I}_2^* e^{(\alpha - j\beta)l}] \\ &= U_2 I_2 \cos \theta e^{2\alpha l} = P_2 e^{2\alpha l} \end{aligned}$$

∴ 传输效率为  $\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha l}$

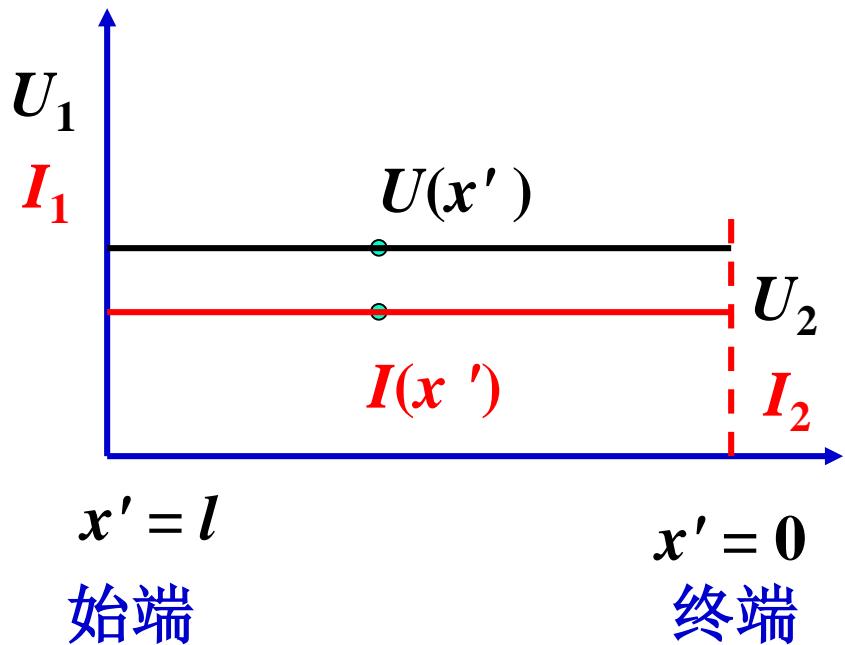
# 结 论

- 1、计算输入、输出功率时的阻抗角相等
- 2、沿线上电容、电感处于相互补偿状态
- 3、能量传输效率最高。当沿线上电阻、电导为零时， $\eta=1$

电压、电流有效值沿线分布

$$U_1 = U_2$$

$$I_1 = I_2$$



# 15.7 均匀传输线的负载特性

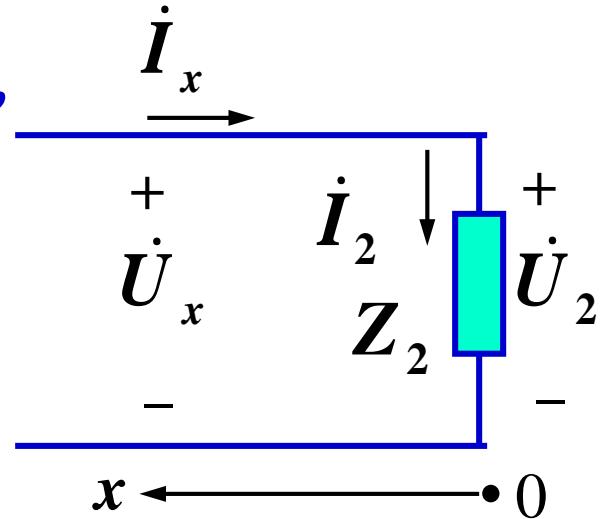
## 一、波的反射与反射系数

反射系数：任一点反射波相量和入射波相量之比

设传输线终端所接负载阻抗为  $Z_2$  ,

$$\therefore \dot{U}_2 = \dot{U}_{2\phi} + \dot{U}_{2\psi}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{2\phi} - \dot{I}_{2\psi}$$



$$\therefore Z_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}_{2\phi} + \dot{U}_{2\psi}}{\dot{I}_{2\phi} - \dot{I}_{2\psi}} = \frac{Z_c \dot{I}_{2\phi} + Z_c \dot{I}_{2\psi}}{\dot{I}_{2\phi} - \dot{I}_{2\psi}}$$

$$\therefore Z_c \dot{I}_{2\phi} + Z_c \dot{I}_{2\psi} = Z_2 \dot{I}_{2\phi} - Z_2 \dot{I}_{2\psi}$$

$$\therefore \frac{\dot{U}_{2\psi}}{\dot{U}_{2\phi}} = \frac{\dot{I}_{2\psi}}{\dot{I}_{2\phi}} = \frac{Z_2 - Z_c}{Z_2 + Z_c} = N$$

当线路终端负载阻抗  $Z_2$  与传输线波阻抗不相等时，反射系数不等于零，这时反向电压（电流）行波与正向电压（电流）行波成正比

正向电压（电流）行波实际上是由电源发出的入射波，而反向电压（电流）行波则是入射波传播到终端时由于负载阻抗与传输线波阻抗不相等而产生的反射波

## 二、终端开路

∴ 传输线终端开路时相当于接无穷大的负载阻抗

∴ 反射系数  $N = \frac{Z_2 - Z_c}{Z_2 + Z_c} = 1$

∴  $\dot{U}_{2\psi} = \dot{U}_{2\varphi}, \dot{I}_{2\psi} = \dot{I}_{2\varphi}$

∴  $\dot{U}_2 = \dot{U}_{2\varphi} + \dot{U}_{2\psi} = 2\dot{U}_{2\varphi}$

$\dot{I}_2 = \dot{I}_{2\varphi} - \dot{I}_{2\psi} = 0$

特点：1、线路终端发生了全反射，输出电流为零  
2、终端电压为入射波电压的2倍

## 终端开路时线路上任一点的电压和电流相量

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma x' & Z_c \operatorname{sh} \gamma x' \\ \frac{1}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x' & \operatorname{ch} \gamma x' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

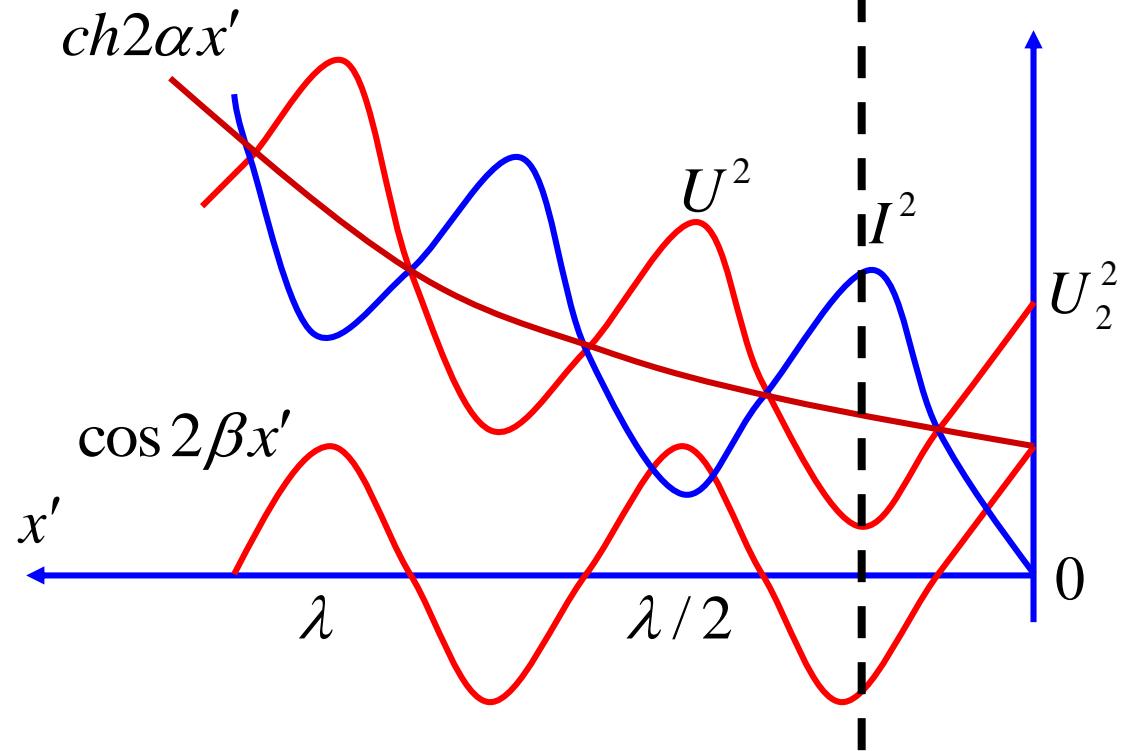
$$\dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x'$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x'$$

为了便于分析沿线电压和电流的分布状况，可由二式求得其有效值分别为

$$U^2 = \frac{1}{2} U_2^2 (\operatorname{ch} 2\alpha x' + \cos 2\beta x')$$

$$I^2 = \frac{1}{2Z_c^2} U_2^2 (\operatorname{ch} 2\alpha x' - \cos 2\beta x')$$



由二式可作出  $U^2$  和  $I^2$  随  $x$  变化的波形曲线如图所示。



由该图可知，如终端开路传输线的长度等于四分之一个波长，则沿线电压分布将从线路始端到终端呈现单调上升状态，终端电压将远高于始端电压（空载危害）

**结论：**这种现象称为空载线路的电容效应，是一个在高压输电线路运行时须防范和避免的严重问题（1500公里）

### 三、终端短路

∴ 传输线终端短路时负载阻抗为零

∴ 反射系数  $N = \frac{Z_2 - Z_c}{Z_2 + Z_c} = -1$

∴  $\dot{U}_{2\psi} = -\dot{U}_{2\varphi}, \dot{I}_{2\psi} = -\dot{I}_{2\varphi}$

∴  $\dot{U}_2 = \dot{U}_{2\varphi} + \dot{U}_{2\psi} = 0$

$\dot{I}_2 = \dot{I}_{2\varphi} - \dot{I}_{2\psi} = 2\dot{I}_{2\varphi}$

- 特点： 1、线路终端发生了负的全反射  
2、终端电流为入射波电流的2倍

## 终端短路时线路上任一点的电压和电流相量

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma x & Z_c \operatorname{sh} \gamma x \\ \frac{1}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x & \operatorname{ch} \gamma x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{U} = Z_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma x$$

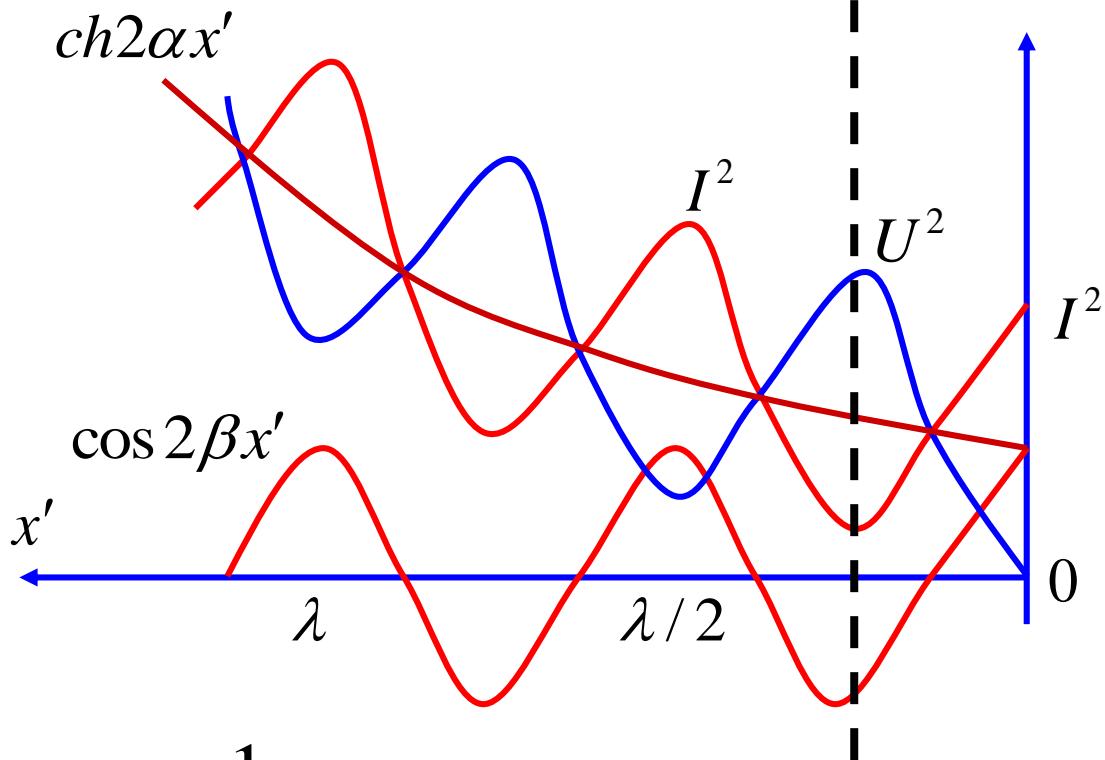
$$\dot{I} = I_2 \operatorname{ch} \gamma x$$

可求得对应的有效值为 (推导过程P557)

$$U^2 = \frac{1}{2} z_c^2 I_2^2 (\operatorname{ch} 2\alpha x - \cos 2\beta x)$$

$$I^2 = \frac{1}{2} I_2^2 (\operatorname{ch} 2\alpha x + \cos 2\beta x)$$

此时  $U^2$  的分布与终端开路时的  $I^2$  分布相似, 而  $I^2$  的分布则与终端开路时的  $U^2$  分布相似



由二式可作出  $U^2$   
和  $I^2$  随  $x$  变化的波  
形曲线如图所示



$$U^2 = \frac{1}{2} z_c^2 I_2^2 (\text{ch } 2\alpha x' - \cos 2\beta x')$$

$$I^2 = \frac{1}{2} I_2^2 (\text{ch } 2\alpha x' + \cos 2\beta x')$$

对比

$$U^2 = \frac{1}{2} U_2^2 (\text{ch } 2\alpha x' + \cos 2\beta x')$$

$$I^2 = \frac{1}{2Z_c} U_2^2 (\text{ch } 2\alpha x' - \cos 2\beta x')$$

#### 四、终端接任意负载

$$\dot{U}_2 = Z_2 \dot{I}_2$$

线路上任一点的电压和电流相量

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x + Z_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma x = Z_2 \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x + Z_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma x$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x = \frac{Z_2}{Z_c} \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma x + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x$$

开路

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x$$

短路

$$\dot{U} = Z_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma x$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x$$

$$\dot{I} = I_2 \operatorname{ch} \gamma x$$

电压和电流可由开路和短路时的结果叠加

## 四、终端接任意负载

当传输线终端接任意负载阻抗  $Z_2$  时，在终端有  $\dot{U}_2 = Z_2 \dot{I}_2$ 。

$$\dot{U} = \dot{U}_2 ch\gamma x + Z_c \dot{I}_2 sh\gamma x = Z_2 \dot{I}_2 ch\gamma x + Z_c \dot{I}_2 sh\gamma x$$

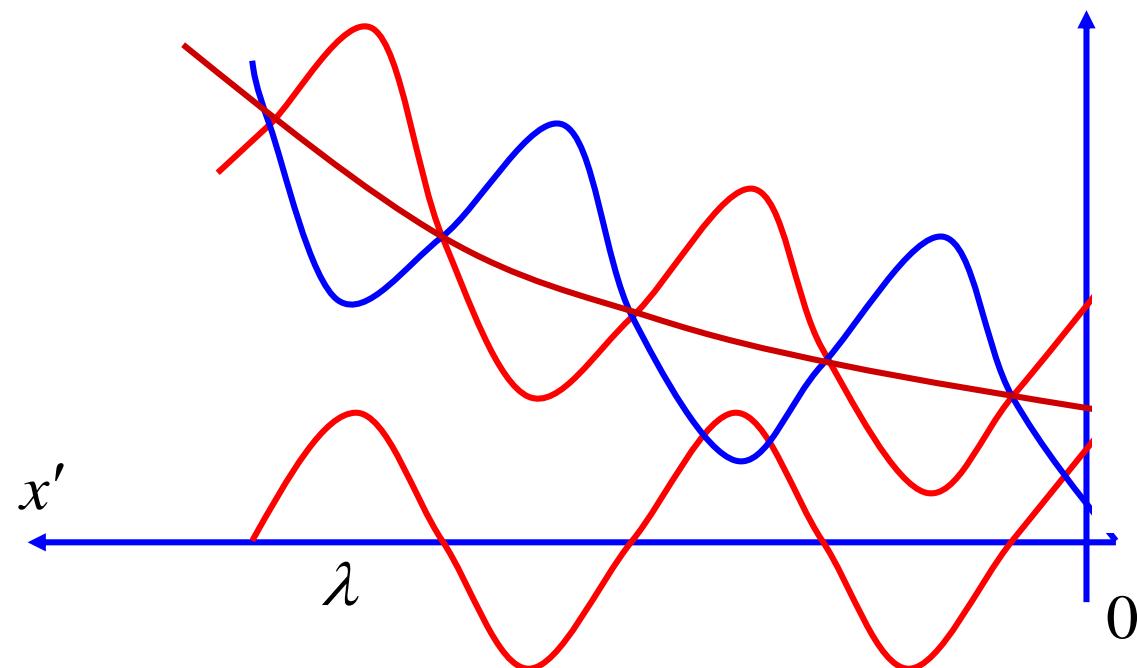
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_2}{Z_c} sh\gamma x + \dot{I}_2 ch\gamma x = \frac{Z_2}{Z_c} \dot{I}_2 sh\gamma x + \dot{I}_2 ch\gamma x$$

从线路上任一点向终端看进去的输入阻抗为：

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_c \frac{Z_2 + Z_c th\gamma x}{Z_2 th\gamma x + Z_c}$$

在该式中取负载阻抗为无穷大或零  
就可得终端开路或短路时的输入阻抗

- 当传输线终端接任意负载阻抗  $Z_2$  为容性时，与终端开路时相似，首个电压最低点、电流最大点小于四分之一波长
- 当传输线终端接任意负载阻抗  $Z_2$  为感性时，与终端短路时相似，首个电流最高点、电压最小点小于四分之一波长



- 3、当传输线终端接任意负载阻抗  $Z_2$  与特性阻抗相近时，大于特性阻抗，终端电压偏高；反之偏低
- 4、当传输线终端负载阻抗 变化幅度很大的长距离输电线，为使电压电流沿线分布均匀，可在沿线适当位置并联可调电感、电容

## 15.8 无损耗均匀传输线

无损耗线 ----- 电阻 $R_0$ 和线间漏电导 $G_0$ 等于零的传输线

特点：在无损耗线中电磁波的传播将不会产生损耗

严格地说，这种理想情况的无损耗线实际上是不存在的。但有时将传输线当作无损耗线处理所获得的计算结果误差较小，而这样处理可使分析过程大为简化。

例如：高频传输线由于  $\omega L_0 \gg R_0, \omega C_0 \gg G_0$

可近似为无损线

# 一、无损耗传输线的正弦稳态解

无损线导出参数的特点：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{传播常数} \quad \gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = j\omega \sqrt{L_0 C_0} \\ \\ \text{衰减系数} \quad \alpha = 0 \\ \\ \text{相位系数} \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} \\ \\ \text{波阻抗} \quad Z_c = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = z_c \end{array} \right.$$

(电阻) 与频率无关的纯电阻

$$\therefore \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma x' & Z_C \operatorname{sh} \gamma x' \\ \frac{1}{Z_C} \operatorname{sh} \gamma x' & \operatorname{ch} \gamma x' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{ch} \gamma x' = \operatorname{ch} j\beta x' = \cos \beta x'$$

$$\operatorname{sh} \gamma x' = \operatorname{sh} j\beta x' = j \sin \beta x'$$

$$\operatorname{th} \gamma x' = \operatorname{th} j\beta x' = j \operatorname{th} \beta x'$$

$\therefore$  无损耗线的正弦稳态解

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta x' & j z_c \sin \beta x' \\ j \frac{1}{z_c} \sin \beta x' & \cos \beta x' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

线路上任一点向终端看进去的输入阻抗

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_c \frac{Z_2 + Z_c th\gamma x'}{Z_2 th\gamma x' + Z_c}$$

→  $Z_{in} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_c \frac{Z_2 + jZ_c tg \beta x'}{jZ_2 tg \beta x' + Z_c}$

终端接任意负载阻抗的无损耗线的电压和电流可由开路和短路时的结果叠加来求得，对此两种情况进行分析就可得到一般结果

## 二、终端接特性阻抗

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta x' & jZ_c \sin \beta x' \\ j\frac{1}{Z_c} \sin \beta x' & \cos \beta x' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta x' + jZ_c \dot{I}_2 \sin \beta x'$$

$$= \dot{U}_2 (\cos \beta x' + j \sin \beta x') = \dot{U}_2 e^{j\beta x'}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2 (\cos \beta x' + j \sin \beta x') = \dot{I}_2 e^{j\beta x'}$$

- (1) 当无损线终端接**匹配负载**时，终端反射系数为**0**
- (2) 终端将不产生反射，在无损线上只存在入射波，而无反射波  
这时无损线处于纯行波状态
- (3) 入射波携带到终端的能量将全部被负载所消耗
- (4) 任意一点出的电压和电流有效值相等

### 三、终端开路——驻波状态

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta x & jz_c \sin \beta x \\ j\frac{1}{z_c} \sin \beta x & \cos \beta x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$
$$\dot{I}_2 = 0$$

$$\therefore \dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta x \quad \dot{I} = \frac{1}{z_c} j \dot{U}_2 \sin \beta x$$

设终端电压为

$$u_2 = \sqrt{2} U_2 \sin \omega t$$

则沿线电压电流分布的  
瞬时值表达式为：

$$i = \sqrt{2} \frac{1}{z_c} U_2 \sin \beta x \cos \omega t$$

电压幅值沿线按余弦函数分布， 电流幅值按正弦函数分布，  
沿线各点的电压和电流则分别随时间按正弦函数和余弦函数  
的规律交变

$$u = \sqrt{2}U_2 \cos \beta x' \sin \omega t$$

$$i = \frac{1}{Z_c} \sqrt{2} U_2 \sin \beta x' \cos \omega t$$

利用积化和差公式，可将二式化为

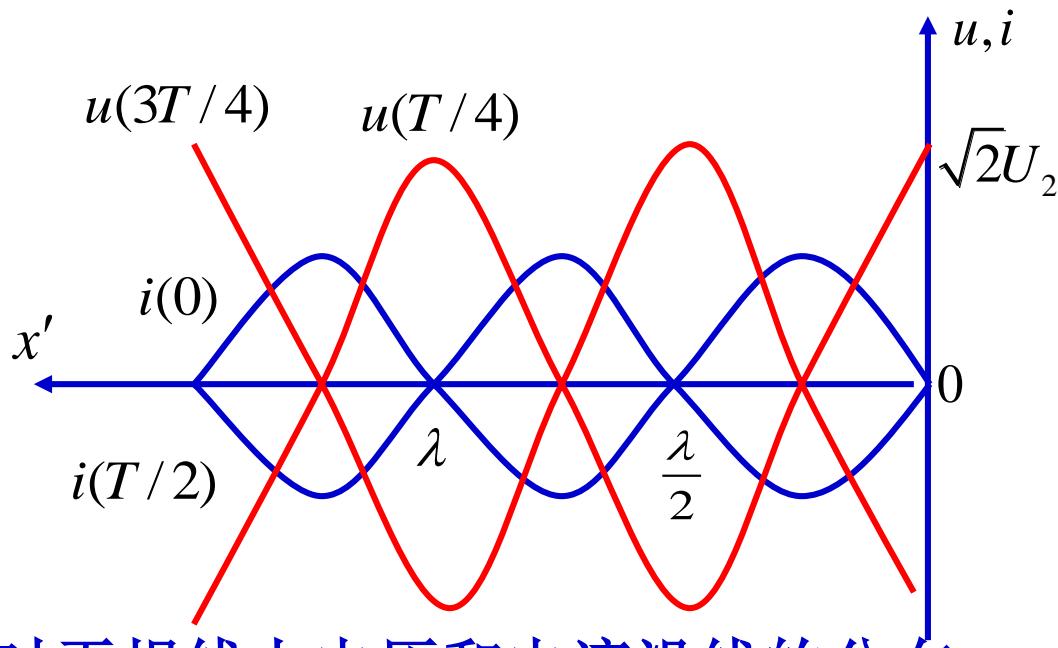
$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} U_2 \left[ \underbrace{\sin(\omega t + \beta x')}_{\text{入射波}} + \underbrace{\sin(\omega t - \beta x')}_{\text{反射波}} \right]$$

$$i = \frac{1}{\sqrt{2} Z_c} U_2 \left[ \underbrace{\sin(\omega t + \beta x')}_{\text{入射波}} - \underbrace{\sin(\omega t - \beta x')}_{\text{反射波}} \right]$$

因此  $u$  与  $i$  分别为两个幅值相同、传播方向相反，且不衰减的正向电压（电流）行波和反向电压（电流）行波叠加的结果

## 电压、电流分布特点

- 电压、电流在空间相位相差 $90^\circ$ ，时间相位也相差 $90^\circ$
- 当 $x' = 0$ 和 $x' = 2k\lambda/4$ 时,出现电压最大值(波腹)和电流最小值(波节)
- 当 $x' = (2k+1)\lambda/4$ 时,出现电压最小值(波节)和电流最大值(波腹)
- 电压、电流在空间分布是一个振幅随时间作正弦变化驻立不动的波（驻波）



终端开路时无损线上电压和电流沿线的分布

波节-----振幅绝对值最小点      波腹-----振幅绝对值最大点

驻波--波腹、 波节位置不变的波

在  $x' = \lambda/4, 3\lambda/4, \dots$ , 电压值总为零, 电流达最大值或最小值

在  $x' = 0, \lambda/2, \lambda, \dots$ , 电流值总为零, 电压达最大值或最小值

电压或电流的波节处，总有  $U = 0$  或  $I = 0$ ，因此经这些点传输的净功率恒等于零，意味着波节处正向行波和反向行波所携带的功率正好完全抵消

将线路从终端开始以  $\lambda/4$  的长度分成若干段，则段与段之间将无净能量的交换，而在每个段的内部，其电容和电感则相互交换能

$$\therefore Z_2 = \infty$$

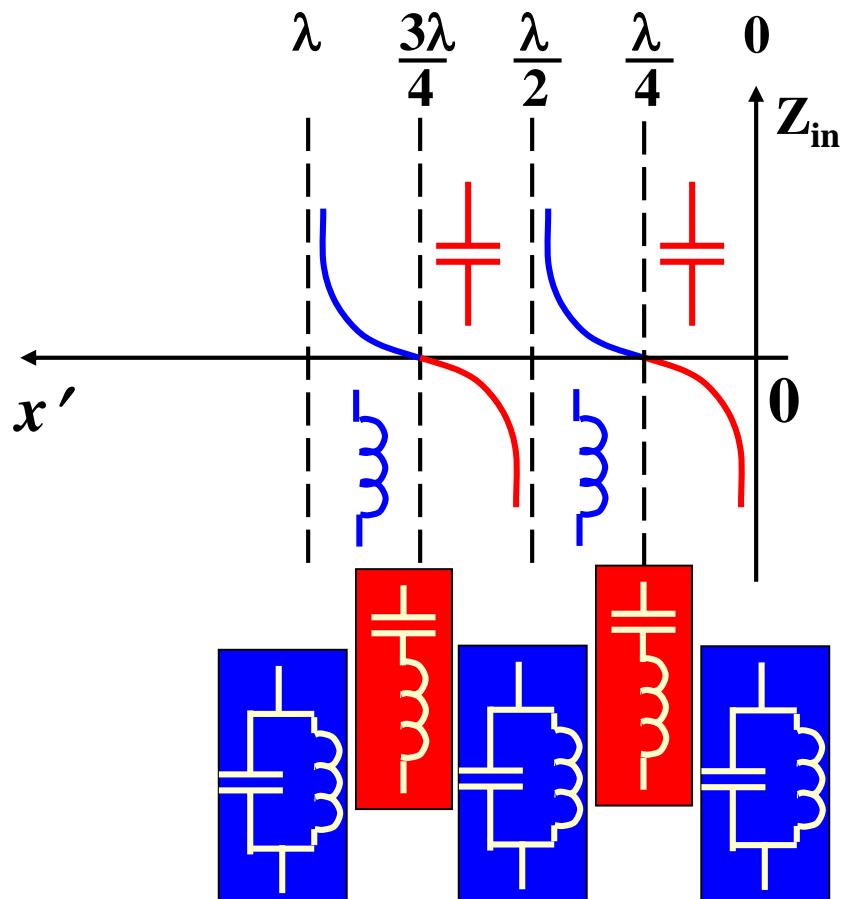
$\therefore$  终端开路时从线路上任一点向终端看进去的输入阻抗为

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_c \frac{Z_2 + jZ_c \operatorname{tg} \beta x'}{jZ_2 \operatorname{tg} \beta x' + Z_c} = \frac{Z_c}{j \operatorname{tg} \beta x'} = -jZ_c \operatorname{ctg} \beta x'$$

# 终端开路的输入阻抗

$$Z_{in} = -jZ_c \operatorname{ctg} \beta x'$$

线 长	$Z_{in}$
$0 < x' < \frac{\lambda}{4}$	$< 0$ (容性)
$\frac{\lambda}{4} < x' < \frac{\lambda}{2}$	$> 0$ (感性)
$\frac{\lambda}{2} < x' < \frac{3\lambda}{4}$	$< 0$ (容性)
$\frac{3\lambda}{4} < x' < \lambda$	$> 0$ (感性)
$\frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \dots$	$= 0$
$0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \dots$	$= \infty$



P569 例15-9

#### 四、终端短路的无损耗传输线

$$\dot{U}_2 = 0$$

$$\therefore \dot{U} = jz_c \dot{I}_2 \sin \beta x$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2 \cos \beta x$$

如设终端电流为  $i_2 = \sqrt{2} I_2 \sin \omega t$

则沿电压电流分布的瞬时值表达式可写为：

$$u = \sqrt{2} z_c I_2 \sin \beta x \cos \omega t$$

$$i = \sqrt{2} I_2 \cos \beta x \sin \omega t$$

电压幅值沿线按正弦函数分布，电流幅值按余弦函数分布

沿线各点的电压和电流随时间按余弦函数和正弦函数规律交变

同样  $u$  与  $i$  也分别为两个幅值相同、传播方向相反，且不衰减的正向电压（电流）行波和反向电压（电流）行波叠加的结果。

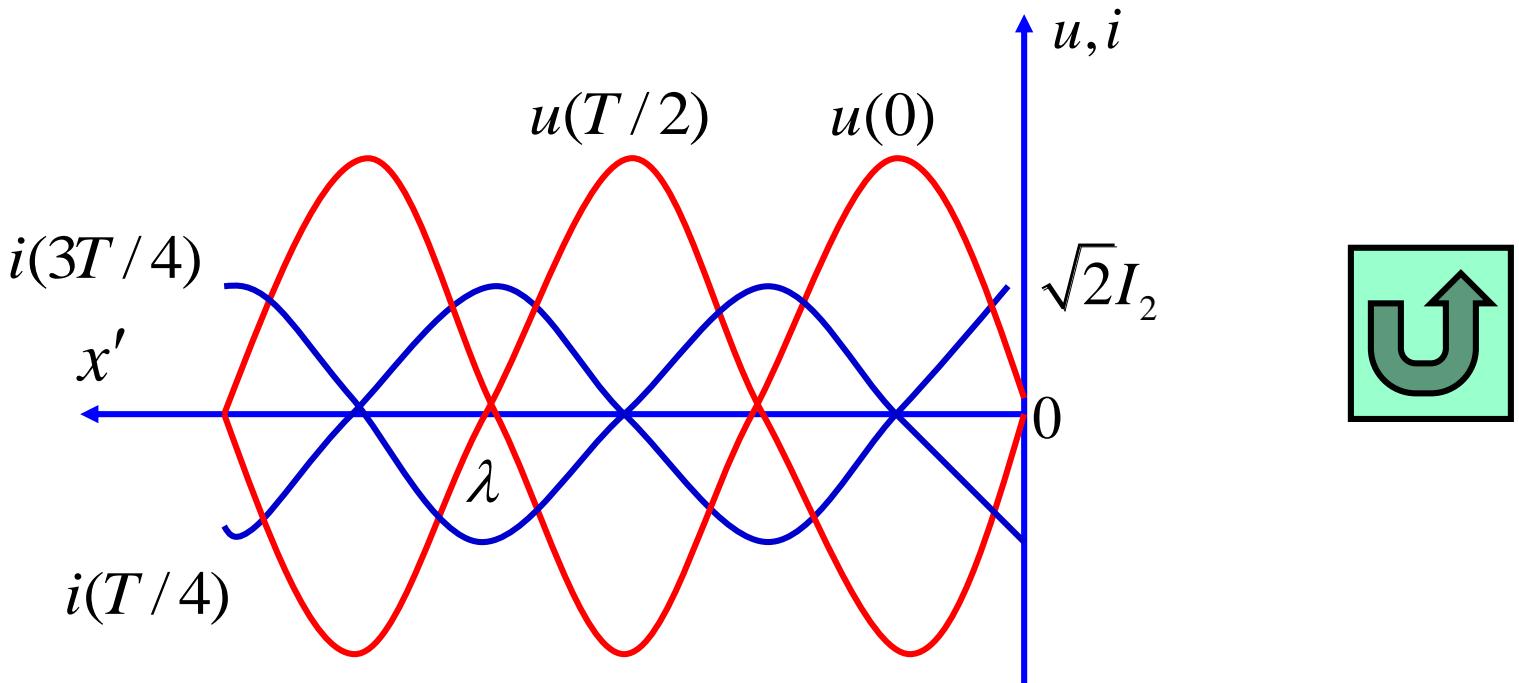
$$u = \sqrt{2}z_c I_2 \sin \beta x' \cos \omega t$$

$$i = \sqrt{2}I_2 \cos \beta x' \sin \omega t$$

利用积化和差公式，可将二式化为

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} z_c I_2 \left[ \frac{\sin(\omega t + \beta x')}{\text{入射波}} - \frac{\sin(\omega t - \beta x')}{\text{反射波}} \right]$$

$$i = \frac{1}{\sqrt{2}} I_2 \left[ \frac{\sin(\omega t + \beta x')}{\text{入射波}} + \frac{\sin(\omega t - \beta x')}{\text{反射波}} \right]$$



终端短路时无损线上电压和电流沿线的分布

如图所示为终端短路时电压和电流沿线的分布，其波形同样为驻波，但波节和波腹出现的位置与终端开路时不同。

电压波节和电流波腹出现在  $x' = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \dots$

电流波节和电压波腹出现在  $x' = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \dots$

$$Z_2 = 0$$

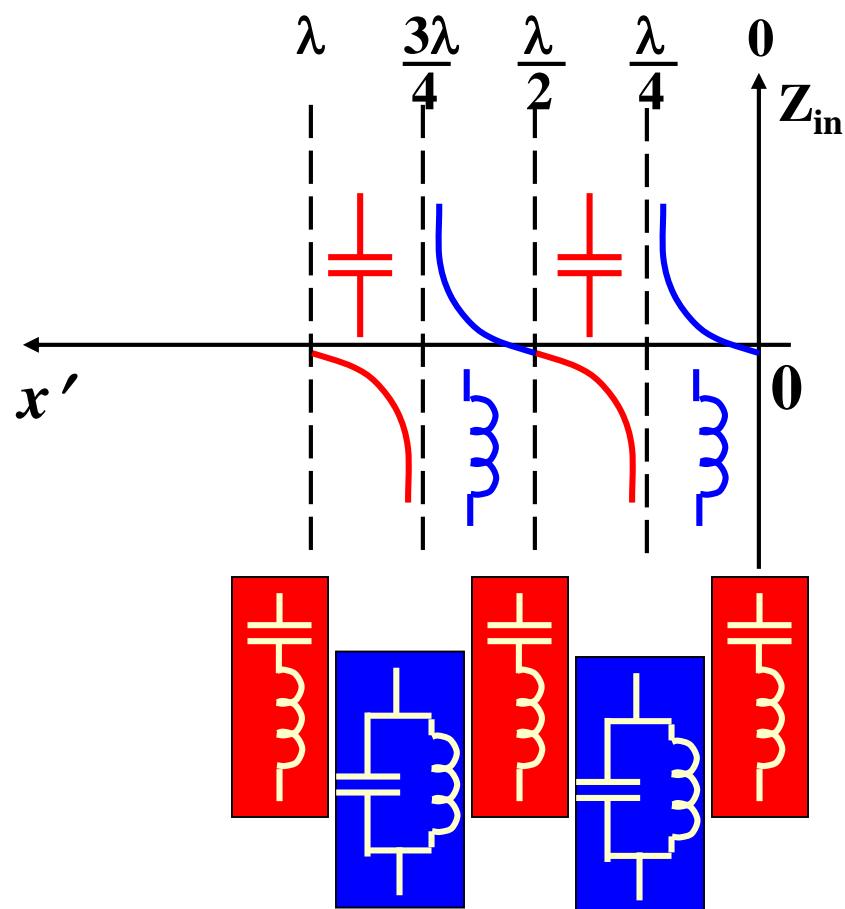
## 终端短路的输入阻抗

线 长	$Z_{in}$
$0 < x' < \frac{\lambda}{4}$	$> 0$ (感性)
$\frac{\lambda}{4} < x' < \frac{\lambda}{2}$	$< 0$ (容性)
$\frac{\lambda}{2} < x' < \frac{3\lambda}{4}$	$> 0$ (感性)
$\frac{3\lambda}{4} < x' < \lambda$	$< 0$ (容性)
$0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \dots$	$= 0$
$\frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \dots$	$= \infty$

P572 例15-10

## 输入阻抗

$$Z_{in} = jz_c \operatorname{tg} \beta x'$$



## 五、终端接负载的无损耗传输线

### 1、终端接纯电抗的情况——定性分析

当无损线终端接纯电抗时，线路终端不损耗能量，属于全反射  
传输线上会出现驻波

电容和电感分别可用一段长度小于四分之一个波长的开路或  
短路无损线来代替

无损线终端接纯电容或纯电抗相当于加长了无损线的长度，  
从而使无损线上波节与波腹的分布发生变化

# 1、终端接纯电抗的情况——定量分析（以电容为例）

当负载为电容时，反射系数

$$N = \frac{1/j\omega C - z_c}{1/j\omega C + z_c} = \frac{1 - j\omega C z_c}{1 + j\omega C z_c} = e^{-j2\varphi} \quad \varphi = \operatorname{tg}^{-1} \omega C z_c$$

沿线电压分布的相量表达式

$$\dot{U} = \dot{U}_{2\varphi} [e^{j\beta x} + e^{-j(\beta x + 2\varphi)}] = \dot{U}_{2\varphi} e^{-j\varphi} [e^{j(\beta x + \varphi)} + e^{-j(\beta x + \varphi)}]$$

$$= 2 \dot{U}_{2\varphi} e^{-j\varphi} \cos[\beta(x + \frac{\varphi}{\beta})]$$

若记  $\dot{U}_{2\varphi} = U_{2\varphi} \angle 0^\circ$

则可得沿线电压分布的瞬时值表达式

$$u = 2\sqrt{2} U_{2\varphi} \cos[\beta(x + \frac{\varphi}{\beta})] \sin(\omega t - \varphi)$$

## 终端开路无损线的电压分布表达式

$$u = \sqrt{2}U_2 \cos \beta x \sin \omega t \quad i = \sqrt{2} \frac{1}{Z_c} U_2 \sin \beta x \cos \omega t$$

$$u = 2\sqrt{2}U_{2\varphi} \cos[\beta(x + \frac{\varphi}{\beta})] \sin(\omega t - \varphi)$$

沿线电压分布依然为驻波

波节的位置出现在  $\frac{\lambda}{4} - \frac{\varphi}{\beta}, \frac{3\lambda}{4} - \frac{\varphi}{\beta}, \dots$

波腹的位置出现在  $-\frac{\varphi}{\beta}, \frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi}{\beta}, \dots$

终端接电容的无损线相当于一长度延长了  $\varphi / \beta$  的开路无损线  
可知：

1. 其电流分布也有相同的结果

2. 终端接电感的无损线相当于一长度延长了的短路无损线

## 2、终端接任意负载的情况

### 定性分析：

当无损线终端接任意负载时，终端反射系数一般将是模值小于1的复数。这时将在终端产生反射

电压和电流反射波的幅值将小于入射波的幅值

沿线电压和电流是两个幅值不等、传播方向相反，且不衰减的正向电压（电流）行波和反向电压（电流）行波叠加的结果

这时无损线既不处于纯行波状态，也不处于纯驻波状态

如将正向电压（电流）行波分解为两部分，使其中一部分的幅值与反向电压（电流）行波的幅值相等，则该部分与反向电压（电流）行波叠加成驻波，剩余部分依然为行波，因此称无损线处于行驻波状态

## 定量分析：

设负载为纯电阻  $R_2 > z_c$ ，则有：

正向电压行波为

$$u_\varphi = \sqrt{2}U_\varphi \sin(\omega t + \beta x')$$

反向电压行波为

$$u_\psi = \sqrt{2}NU_\varphi \sin(\omega t - \beta x')$$

分解  $u_\varphi$

$$u_\varphi = \underline{\sqrt{2}NU_\varphi \sin(\omega t + \beta x')}$$
 +  $\underline{\sqrt{2}(1-N)U_\varphi \sin(\omega t + \beta x')}$

$$= u_{\varphi 1} + u_{\varphi 2}$$

$$u_{\varphi 1} = \sqrt{2} N U_\varphi \sin(\omega t + \beta x')$$

$$u_{\psi} = \sqrt{2} N U_\varphi \sin(\omega t - \beta x')$$

$u_{\varphi 1}$  幅值相等，二者叠加的结果为驻波。 $u_{\varphi 2}$  为一平行波  
 $u_{\psi}$

出现行驻波状态是负载不匹配的结果，通常用驻波比来衡量负载的匹配程度

驻波比 
$$S = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{U_{2\varphi} + U_{2\psi}}{U_{2\varphi} - U_{2\psi}} = \frac{1 + |N|}{1 - |N|}$$

反射系数越大，驻波比也越大，驻波的成份就越大

$$\begin{cases} S = 1 & \text{在负载匹配的情况下} \\ S = \infty & \text{当线路工作于纯驻波状态时} \end{cases}$$

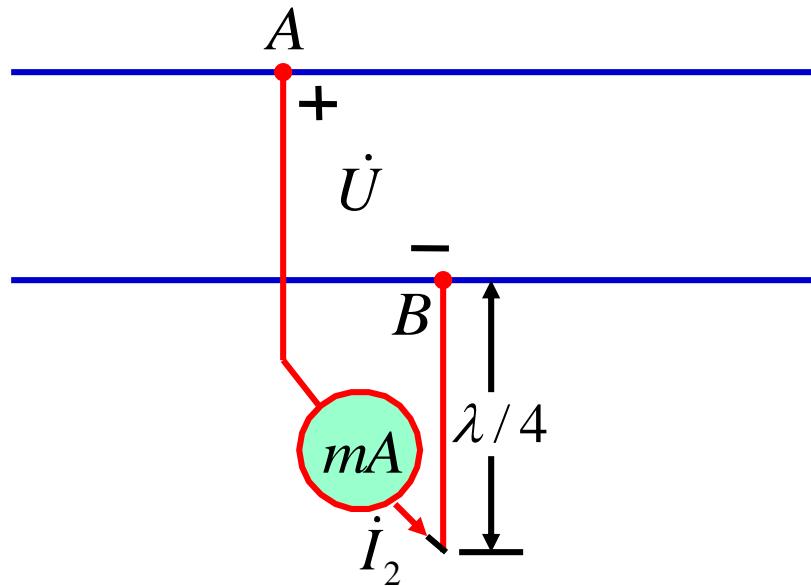
## 六、无损耗传输线的应用

由于开路和短路无损线特殊的阻抗特性，使它们在超高频技术中获得了广泛的应用

(1) 在超高频工作状态下，常用的电容器和电感线圈不能作为电容和电感元件来使用，可利用开路或短路无损线来替代

(2) 在超高频情况下，采用固体介质绝缘子支撑传输线会产生很大的介质损耗，而采用长度为  $\lambda/4$  的终端短路无损线作绝缘子，则由于其输入阻抗为无穷大，从而几乎不消耗功率

(3) 长度为  $\lambda/4$  的终端短路无损线还可用来测量均匀传输线上的电压分布

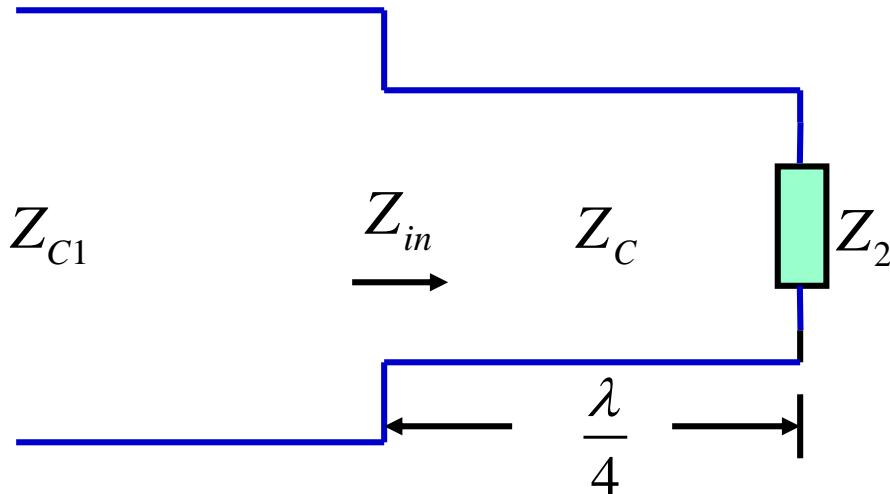


如图所示，用长度为  $\lambda/4$  的无损线作测量引线，线的终端接入热偶式毫安计，由于毫安计可看作短路，因此A、B两点间的电压与毫安计所测电流之间有如下关系：

$$\dot{U} = jz_c \dot{I}_2 \sin \frac{\pi}{2} = jz_c \dot{I}_2$$

由于测量引线入端阻抗为无穷大，所以可在不影响线路工作状态的前提下测得沿线电压分布

#### (4) 长度为 $\lambda/4$ 的无损线还可用作阻抗变换器



当负载阻抗  $Z_2$  与传输线波阻抗  $Z_{c1}$  不匹配时，可在传输线与负载之间接入一段长度为  $\lambda/4$  的无损线作阻抗变换器

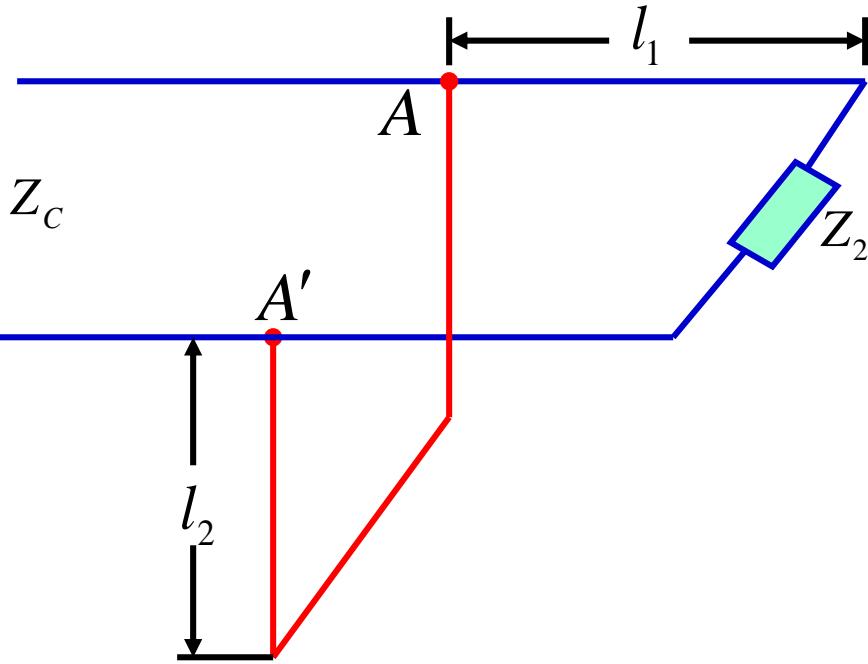
该无损线的入端阻抗为

$$Z_{in} = z_c \frac{Z_2 + jz_c \operatorname{tg} \beta \frac{\lambda}{4}}{jZ_2 \operatorname{tg} \beta \frac{\lambda}{4} + z_c} = z_c \frac{Z_2 + jz_c \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4}}{jZ_2 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} + z_c} = \frac{z_c^2}{Z_2}$$

由该式即可得需接入的  $\lambda/4$  无损线的波阻抗

例4

如图所示无损线终端接有负载阻抗  $Z_2 = \frac{1}{2} Z_c$ ，试证明：



(1) 存在一个离终端的距离  $l_1$ ，从这里向终端看进去的入端导纳的电导部分正好等于  $\frac{1}{Z_c}$ ，并求出该距离。

(2) 如在  $AA'$  处并联一段具有相同波阻抗的短路无损线，则通过调节短路线的长度  $l_2$ ，可使无损线在  $AA'$  处重新获得匹配。满足条件的  $l_2$  应取何值？

解：（1）终端接负载无损线从 $AA'$ 处看进去的入端阻抗为

$$Z_{inl} = z_c \frac{z_c/2 + jz_c \operatorname{tg} \beta l_1}{jz_c \operatorname{tg} \beta l_1 / 2 + z_c} = z_c \frac{1/2 + j \operatorname{tg} \beta l_1}{j \operatorname{tg} \beta l_1 / 2 + 1}$$

于是可得

$$Y_{inl} = \frac{1}{Z_{inl}} = \frac{1}{z_c} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \beta l_1 - j \frac{3}{4} \operatorname{tg} \beta l_1}{\frac{1}{4} + \operatorname{tg}^2 \beta l_1}$$

令实部

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \beta l_1 = \frac{1}{4} + \operatorname{tg}^2 \beta l_1$$

即：

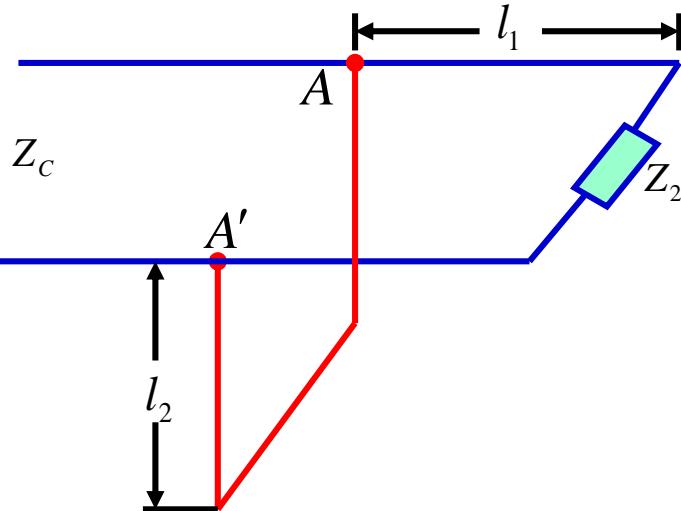
$$\operatorname{tg} \beta l_1 = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

可解得：

$$l_1 = 0.0979\lambda$$

$$Y_{inl} = \frac{1}{z_c} \left(1 - j \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(2) 欲使无损线在  $AA'$  处重新获得匹配，只需取短路无损线的入端阻抗为：



$$Y_{in} = Y_{in1} + Y_{in2}$$

$$= \frac{1}{Z_c} \left( 1 - j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + Y_{in2} = \frac{1}{Z_c}$$

$$Y_{in2} = \frac{j}{\sqrt{2} Z_c}$$

$$Z_{in2} = \frac{1}{Y_{in2}} = \frac{1}{j / \sqrt{2} Z_c} = -j \sqrt{2} Z_c$$

由于短路无损线的入端阻抗为

$$Z_{in2} = j Z_c \operatorname{tg} \beta l_2$$

于是可解得

$$l_2 = 0.348\lambda$$

因此可使无损线在  $AA'$  处重新获得匹配。

例题：15-9 某无损耗线位于空气介质中，在始段接内阻  $R_0 = 150\Omega$ 、空载电压（有效值）为5V的正弦电源，（1）以电源电压向量为参考相量，求传输线始端电压相量，电流相量和终端电压相量；（2）绘出电压、电流有效值的沿线分布图  $l = 13 m \quad Z_c = 346.4\Omega$

解：（1） $\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{3 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 3 m$

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} l = \frac{2\pi}{3} \times 13 = 8\frac{2}{3}\pi rad$$

$$Z_1 = -jZ_c \cot \beta l = -j346.4 \times \cot\left(\frac{2}{3}\pi\right) = j200 \Omega$$

$$I_1 = \frac{5\angle 0^\circ}{150 + j200} = 20\angle -53.1^\circ mA$$

$$U_1 = j200 \times 0.02\angle -53.1^\circ = 4\angle 36.9^\circ V$$

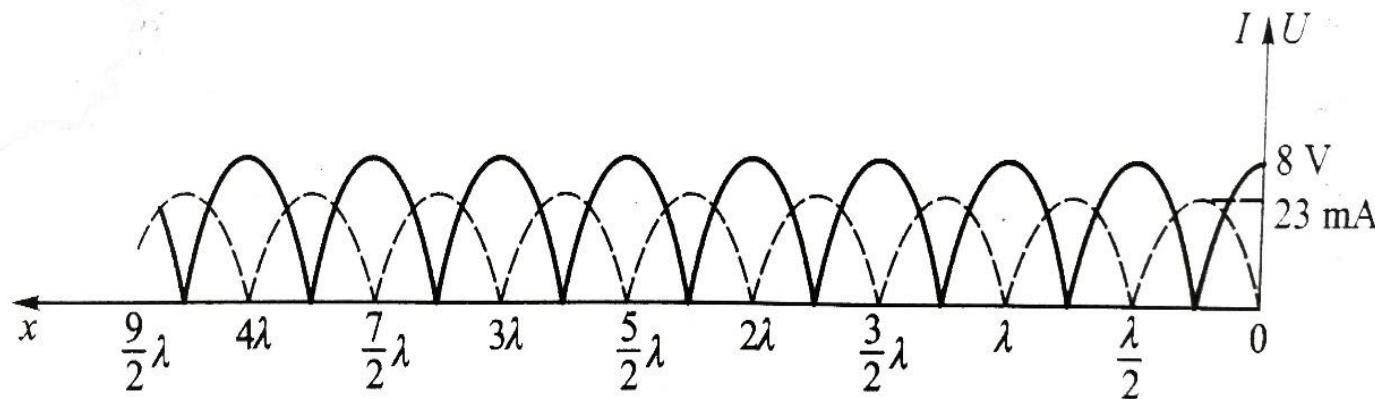
$$I_1 = j(U_2 / Z_c) \sin \beta l$$

$$U_2 = -j \frac{I_1 Z_c}{\sin(2\pi/3)} = -j \frac{0.02\angle -53.1^\circ \times 346.4}{0.866} = 8\angle -143.1^\circ V$$

15-9 (2) : 根据终端开路无损耗线的电压、电流相量关系可得电压、电流有效值沿线分布情况如图

$$l = 13 \text{ m} = 4\frac{1}{3}\lambda$$

$$\lambda = 3 \text{ m}, U_{\max} = U_2 = 8 \text{ V}, I_{\max} = \frac{U_2}{Z_c} = \frac{8}{346.4} = 23 \text{ mA}$$



例题：15-10 某无损耗线位于空气介质中，试求该无损传输线在终端短路情况下线上电压、电流有效值的沿线分布及其分布图。

$$l = 7 \text{ m} \quad Z_c = 100 \Omega \quad u_s = 3\sqrt{2} \sin 10^8 \pi t \text{ V}$$

解：  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v_p / f} = \frac{2\pi}{3 \times 10^8 / 50 \times 10^6} = \frac{1}{3}\pi \text{ rad/s}$

$$\boxed{U_2 = 0}$$

$$Z_{\text{in}} = jZ_c \tan(\beta x) = j100\sqrt{3} \Omega$$

$$\boxed{I_1 = \frac{U_1}{Z_{\text{in}}} = \frac{3\angle 0^\circ}{j100\sqrt{3}} = -j17.3 \text{ mA}}$$

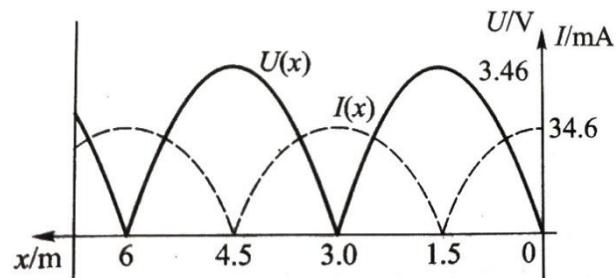
$$\boxed{I_2 = \frac{I_1}{\cos \beta x} = \frac{-j17.3}{\cos \frac{7\pi}{3}} = -j34.6 \text{ mA}}$$

$$\boxed{U = j100(-j34.6 \times 10^{-3}) \sin \beta x = 3.46 \sin \beta x \text{ V}}$$

$$\boxed{I = -j34.6 \cos \beta x \text{ mA}}$$

$$u(x, t) = 3.46\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{3}x \sin \omega x \text{ V}$$

$$i(x, t) = 3.46\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{3}x \cos(\omega x - \frac{\pi}{2}) \text{ mA}$$



$$U = \left| 3.46 \sin \frac{\pi}{3}x \right| \text{ V}$$

$$I = \left| 3.46 \sin \frac{\pi}{3}x \right| \text{ mA}$$

例题：15-11 无损耗线  $L_0 = 2.2 \times 10^{-6} H/m$   $C_0 = 5.05 \times 10^{-12} F/m$   $\lambda = 20 m$   $l = 100 m$

求：（1）波阻抗  $Z_c$ ，相位常数  $\beta$ ，波速  $v_p$

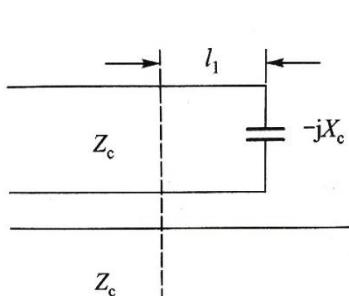
（2）当终端接一个  $100 pF$  的电容时，电压波和电流波距终端最近波腹位置。

解：（1） $Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{2.2 \times 10^{-8}}{5.05 \times 10^{-12}}} \approx 660 \Omega$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{20} = 0.314 \text{ rad/m}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{2.2 \times 10^{-6} \times 5.05 \times 10^{-12}}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

（2）



$$Z_2 = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{2\pi f C} = -j \frac{1}{2\pi \frac{v_p}{\lambda} C} = -j \frac{1}{2\pi \frac{3 \times 10^8}{20} \times 100 \times 10^{-12}} = -j 106.1 \Omega$$

$$l_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \arccot \frac{X_c}{Z_c} = \frac{20}{2\pi} \arccot \frac{106.1}{660} = 3.183 \times 80.87^\circ = 3.183 \times 80.87^\circ \times \frac{\pi}{180} = 4.492 \text{ m}$$

$$l_1 = \frac{\lambda}{4} - l_0 = \frac{20}{2} - 4.492 = 0.508 \text{ m}$$

例题：15-11 无损耗线  $L_0 = 2.2 \times 10^{-6} H/m$   $C_0 = 5.05 \times 10^{-12} F/m$   $\lambda = 20 m$   $l = 100 m$

求：（1）波阻抗  $Z_c$ ，相位常数  $\beta$ ，波速  $v_p$

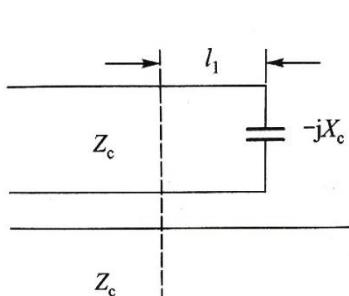
（2）当终端接一个  $100 pF$  的电容时，电压波和电流波距终端最近波腹位置。

解：（1） $Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{2.2 \times 10^{-8}}{5.05 \times 10^{-12}}} \approx 660 \Omega$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{20} = 0.314 \text{ rad/m}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{2.2 \times 10^{-6} \times 5.05 \times 10^{-12}}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

（2）



$$Z_2 = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{2\pi f C} = -j \frac{1}{2\pi \frac{v_p}{\lambda} C} = -j \frac{1}{2\pi \frac{3 \times 10^8}{20} \times 100 \times 10^{-12}} = -j 106.1 \Omega$$

$$l_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \arccot \frac{X_c}{Z_c} = \frac{20}{2\pi} \arccot \frac{106.1}{660} = 3.183 \times 80.87^\circ = 3.183 \times 80.87^\circ \times \frac{\pi}{180} = 4.492 \text{ m}$$

$$l_1 = \frac{\lambda}{4} - l_0 = \frac{20}{2} - 4.492 = 0.508 \text{ m}$$

**例15-12** 空气绝缘的电缆线的阻抗特性 $Z_c = 50 \Omega$ , 终端短路, 工作频率为300MHz。问这个电缆最短的长度应等于多少才能使其输入阻抗相当于 (1) 一个 $0.025\mu\text{H}$ 的电感? (2) 一个 $10\text{pF}$ 的电容?

解：(1) 相位常数 $\beta$ 、感抗 $X_L$ 和 $X_C$ 分别为

$$\beta = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi \times 300 \times 10^6}{3 \times 10^8} = 2\pi \text{ rad/m}$$

$$X_L = \omega L = 2\pi \times 300 \times 10^6 \times 0.025 \times 10^{-6} = 47.12 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \times 300 \times 10^6 \times 10 \times 10^{-12}} = 53.05 \Omega$$

相当于一个 $0.025\mu\text{H}$ 电感时最短的长度为

$$l_L = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \left( \frac{X_L}{Z_c} \right) = \frac{1}{\beta} \arctan \left( \frac{X_L}{Z_c} \right) = \frac{1}{2\pi} \arctan(0.9428) \times \frac{\pi}{180^\circ} \approx 0.12 \text{ m}$$

相当于一个10pF电容时最短的长度为

$$l_c = \frac{1}{\beta} \left[ \arctan \left( \frac{-X_c}{Z_c} \right) \right] \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{1}{\beta} (\pi - 46.7^\circ) \times \frac{\pi}{180^\circ} = 0.37 \text{ m}$$

即对于终端短路无损耗线，长度  $l < \frac{\lambda}{4}$  相当于电感

$$\frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2} \quad \text{可等为电容}$$

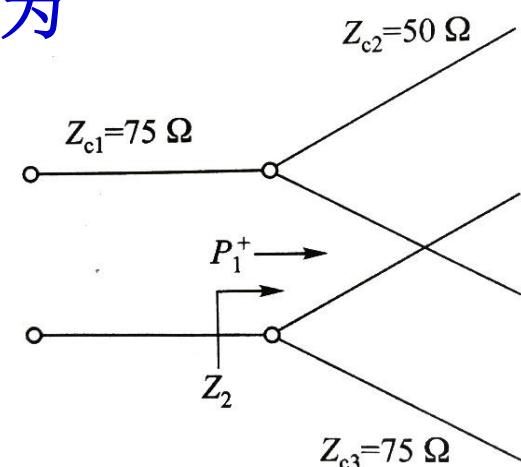
例 15-14 有三对传输线在同一对端点相连接。设第一对线上向连接点入射的行波功率为 $P_{1+}$ ，且设第二对线和第三对线均工作于匹配状态，即不考虑波进入第二对线和第三对线后的反射，求在连接点处反射回第一对线的功率是多少？进入第二对线和第三对线的入射功率是多少？

解：（1）设在连接点处的电压、电流分别为

$$N = \frac{\dot{U}^-}{\dot{U}^+} = \frac{\dot{I}^-}{\dot{I}^+}$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_1^+ + \dot{U}_1^-$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_1^+ - \dot{I}_1^-$$



不考虑反射波，则二三对线上的输入阻抗为波阻抗，因此连接点处第一对线的等效负载阻抗为

$$Z_2 = \frac{Z_{c2} Z_{c3}}{Z_{c2} + Z_{c3}} = \frac{50 \times 75}{50 + 75} = 30 \Omega$$

连接点处的反射系数为

$$N = \frac{Z_2 - Z_{c1}}{Z_2 + Z_{c1}} = \frac{30 - 75}{30 + 75} = -\frac{3}{7}$$

$$U_1^- = N U_1^+ \quad I_1^- = N I_1^+$$

连接点处反射回第一对线的功率为

$$P_1^- = U_1^- I_1^- = N^2 U_1^+ I_1^+ = N^2 P_1^+ = \frac{9}{49} P_1^+$$

(2) 设连接点出进入第二对线、第三对线的电流为

$$I_2^+ = \frac{U_1}{Z_{c2}} \quad I_3^+ = \frac{U_1}{Z_{c3}}$$

两对线在连接点处的入射功率分别为

$$P_2^+ = U_1 I_2^+ = \frac{U_1^2}{Z_{c2}}$$

$$P_3^+ = U_1 I_3^+ = \frac{U_1^2}{Z_{c3}}$$

$$\frac{P_2^+}{P_3^+} = \frac{Z_{c3}}{Z_{c2}} = \frac{75}{50} = 1.5$$

根据功率守恒定律有

$$P_1^+ = P_2^+ + P_3^+ + P_1^-$$

$$P_2^+ + P_3^+ = P_1^+ - P_1^- = P_1^+ - \frac{9}{49}P_1^+ = \frac{40}{49}P_1^+$$

$$P_2^+ = \frac{24}{49}P_1^+$$

联立求解

$$P_3^+ = \frac{16}{49}P_1^+$$

例 15-15 空气中的某无损线长  $l=4.5\text{m}$ , 特性阻抗为  $Z_c = 300 \Omega$ 。始端接一有效值为  $10\text{V}$ 、频率为  $100\text{MHz}$  的正弦电压源, 电源内阻  $R_0 = 100 \Omega$ , 终端所接负载。计算距始端  $1\text{m}$  处的电压相量。

解: 角频率、相位常数、波长以及  $\beta l$  分别为

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^8 \text{ rad/m}$$

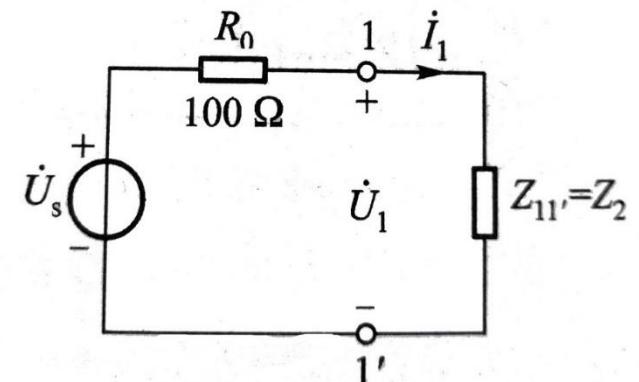
$$\beta = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi \times 10^8}{3 \times 10^8} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/m}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 3 \text{ m}$$

$$\beta l = \frac{2\pi}{3} \times 4.5 = 3\pi$$

从电源端看进去的输入阻抗为

$$Z_{11'} = \frac{Z_2 + jZ_c \tan(\beta l)}{1 + j \frac{Z_2}{Z_c} \tan(\beta l)} = \frac{Z_2 + jZ_c \tan(3\pi)}{1 + j \frac{Z_2}{Z_c} \tan(3\pi)} = Z_2$$



即输入阻抗恒等于终端接入阻抗。应用无损条件，用始端电压、电流表示的距始端x处的电压向量为

$$\dot{U} = \dot{U}_1 ch(\gamma x) - Z_c \dot{I}_1 sh(\gamma x) = \dot{U}_1 \cos(\beta x) - jZ_c \dot{I}_1 \sin(\beta x)$$

$$\dot{U}_1 = \frac{Z_{11}}{R_0 + Z_{11}} \dot{U}_s = \frac{-j500}{100 - j500} \times 10 \angle 10^\circ = 9.806 \angle -11.31^\circ V$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_{11}} = \frac{9.806 \angle -11.31^\circ}{-j500} = 0.0196 \angle 78.69^\circ A$$

$$\begin{aligned}\dot{U}|_{x=1m} &= \dot{U}_1 \cos(\beta x) - jZ_c \dot{I}_1 \sin(\beta x) \\ &= 9.806 \angle -11.31^\circ \times \cos\left(\frac{2\pi}{3} \times 1\right) - j0.0196 \angle 78.69^\circ \times 300 \times \sin\left(\frac{2\pi}{3} \times 1\right) \\ &= 9.806 \angle -11.31^\circ \times \left(-\frac{1}{2}\right) - j0.0196 \angle 78.69^\circ \times 300 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 0.192 - j0.0366 \\ &= 0.192 \angle -10.70^\circ V\end{aligned}$$

例 15-16某电缆的特性阻抗 $Z_c=60\Omega$ , 其在聚乙烯绝缘介质中的相速 $v_p=2\times 10^8\text{m/s}$ , 线路始端所接电源电压有效值 $U_s=1\text{V}$ , 频率 $f=50\text{MHz}$ , 内阻 $R_0=300\Omega$ , 终端负载为一电阻 $Z_2=R_2=12\Omega$ , 线路损耗可以忽略。试计算在电缆长度分别为1m和2m时负载端的电压和功率。

解：波长  $\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{2\times 10^8}{50\times 10^6} = 4\text{ m}$

(1) 电缆长为1m时,  $l = \frac{1}{4}\lambda$

始端输入阻抗为  $Z_{11'} = \frac{Z_c^2}{Z_2} = \frac{60^2}{12} = 300\Omega$

电缆始端电流为  $I_1 = \frac{U_s}{R_0 + Z_{11'}} = \frac{1}{300 + 300} = \frac{1}{600}\text{ A}$

无损耗线终端负载吸收功率等于始端输入功率，即负载吸收功率为

$$P_2 = P_1 = I_1^2 Z_{11} = \left( \frac{1}{600} \right)^2 \times 300 = 0.833 \text{ mW}$$

$$P_2 = \frac{U_2^2}{Z_2} \quad U_2 = \sqrt{Z_2 P_2} = \sqrt{12 \times \frac{1}{1200}} V = 0.1 V$$

(2) 电缆长为2m时， $l = \frac{1}{2}\lambda$ ，始输入阻抗为

$$Z_{11} = \frac{Z_2 + jZ_c \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{2}\right)}{1 + j \frac{Z_2}{Z_c} \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{2}\right)} = Z_2 = 12 \Omega$$

电缆始端电流为

$$I_1 = \frac{U_s}{R_0 + Z_{11}} = \frac{1}{300 + 12} = 3.205 \text{ mA}$$

负载吸收功率为

$$P_2 = P_1 = I_1^2 Z_{11} = \left( \frac{1}{312} \right)^2 \times 12 W = 0.1233 mW$$

二分之一波长电路，故终端电压等于始端电压，即有

$$U_2 = U_1 = \frac{1}{312} \times 12 V = 0.03846 V$$

# 总结

均匀传输线的参数和基本方程

均匀传输线的直流和正弦稳态解

均匀传输线的正向行波和反向行波

均匀传输线的终端接负载

## 总结

无损均匀传输线的参数和基本方程、稳态解

终端开路的无损线——电压 电流 驻波 输入阻抗

终端短路的无损线——电压 电流 驻波 输入阻抗

终端接特性阻抗的无损线——电压 电流 输入阻抗

终端接电抗元件的无损线——电压 电流 输入阻抗

终端接任意负载的无损线——电压 电流 输入阻抗 行驻波

# 武汉大学 2022 —2023 学年度第一学期教学日历

课程: 电路 (下) 学院 (系): 电气与自动化学院 专业: 电气工程与自动化 班级: 2021 级  
 学分: 3.5 (必修) 讲课: 56 学时 习题课: 2 学时 实验: 0 学时 共计: 56 学时  
 周数: 14 周 考核形式: 平时 (作业十期中测验) 30%+期末考试 70% 答疑时间、地点: 上班时间, 樊亚东教授办公室

课次	周次	讲课内容及时数		练习内容及时数			实验(上机)内容及时数			课外作业或参考书说明
		(教材章节、名称)	学时	习题课、课堂讨论、测验等	课堂时数	课外时数	课堂实习(实验室上机)内容	课堂时数	课外时数	
1 (9/5)	1	Cp10 傅里叶级数	2							Cp10: 3, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 17, 19, 21
2 (9/7)	1	Cp10 有效值 平均值 谐波分析法	2							
3 (9/12)	2	Cp10 非正弦周期电流电路	2							
4 (9/14)	2	Cp5 一阶电路的阶跃响应	2							Cp5: 20, 22, 24, 26, 28
5 (9/19)	3	Cp5 一阶电路的冲激响应 强迫跃变	2							
6 (9/21)	3	Cp5 二阶电路的零输入响应 零状态响应	2							
7 (9/26)	4	Cp5 二阶电路的全响应 阶跃响应 冲激响应	2							
8 (9/28)	4	Cp11 拉氏变化和反变换	2							Cp11 : 1, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 13, 16, 17, 20, 23, 26, 31, 34, 37
9 (10/10)	6	Cp11 运算法 I	2							
10 (10/12)	6	Cp11 运算法 II 网络函数概念	2							
11 (10/17)	7	Cp11 网络函数的零极点 频率响应	2							
12 (10/19)	7	习题 期中测试	2							

13(10/24)	8	Cp12 ABQ 矩阵	2							
14(10/26)	8	Cp12 电路的矩阵形式	2							Cp12 :2, 4, 6, 9, 11, 14, 16, 19, 23
15(10/31)	9	Cp12 电路矩阵方程	2							
16(11/2)	9	Cp13 双端口网络参数和方程	2							Cp13: 1, 3, 5, 7, 9, 10, 13, 16, 17, 19, 23, 27, 30
17(11/7)	10	Cp13 双端口参数求解双端口网络的等效和联接	2							
18(11/9)	10	Cp13 联结 II 二端口转移函数, 有/无端接二端口网络函数	2							
19(11/14)	11	Cp14 状态变量 状态方程 I	2							Cp14 :2, 4, 6, 9, 11, 13, 16
20(11/16)	11	Cp14 状态方程 II 输出方程	2							
21(11/21)	12	复习 习题课	2							
22(11/23)	12	Cp15 均匀传输线及其基本方程 均匀传输线方程的正弦稳态解	2							Cp15: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19
23(11/28)	13	Cp15 电压和电流行波 特性阻抗与传播常数	2							
24(11/30)	13	Cp15 波的反射与终端接特性阻抗的传输线 终端接任意阻抗的传输线	2							
25(12/5)	14	Cp15 无损耗均匀传输线 无损耗均匀传输线方程的通解 无损耗线接特性阻抗和任意阻抗	2							
26(12/7)	14	Cp15 无损线的作用 驻波	2							
27(12/12)	15	Cp16 传输线上波的产生、无损耗线上波的入射 和反射 折射	2							Cp16 :1, 3, 5, 7, 9, 11, 13
28(12/14)	15	Cp16 彼德生法则 复习	2							

本课程主讲教师 樊亚东

学生所在院系负责人 专祥涛

2022 年 9 月 2 日