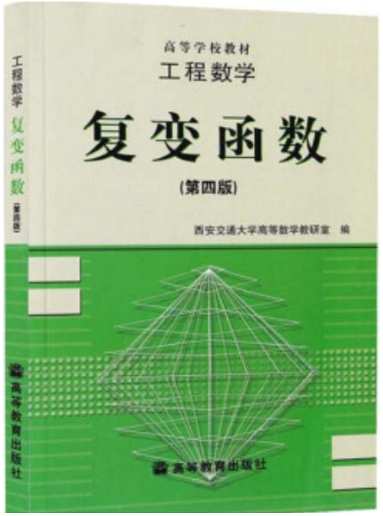
武漢大学 数学与统计学院
School of Mathematics and Statistics,Wuhan University

2020年秋季教学课件

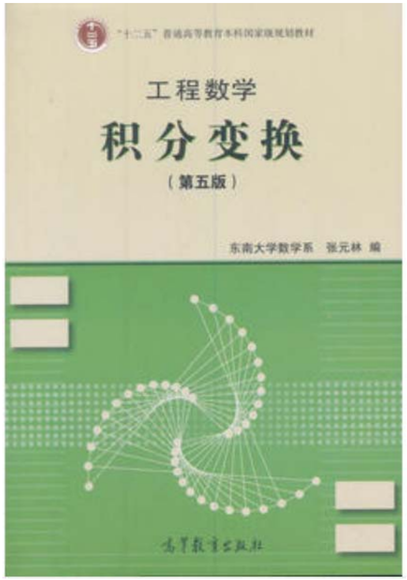
复变函数与积分变换

汪 玉 峰

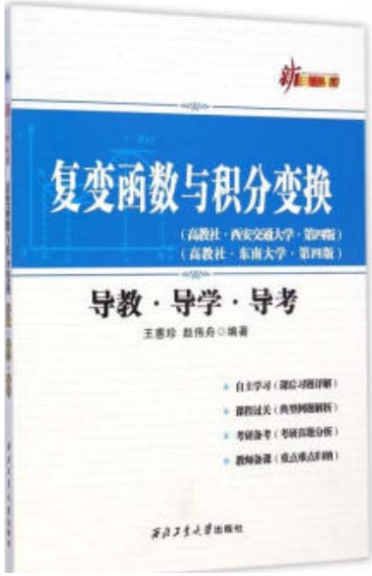
武汉大学数学与统计学院



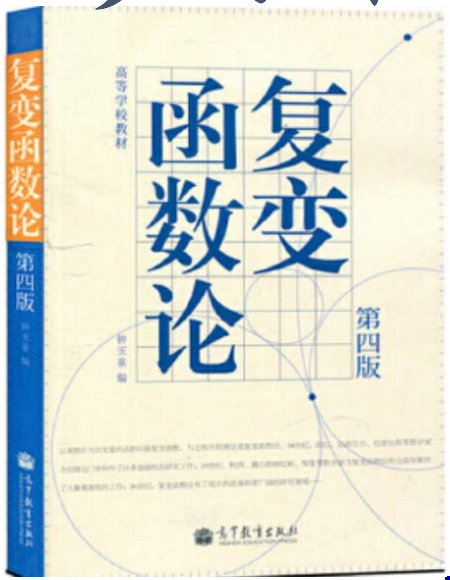
教材



习题指导



参考书



上页 下页 返回 结束

第一部分　复变函数

复变函数中许多概念、理论和方法是微积分在复数域内的推广和发展，它们之间有许多相似之处. 但又有不同。在学习中要善于比较与区别，特别要注意复数域上特有的性质与结果。

- 三位代表人物:
- A.L.Cauchy （1789-1866)应用积分研究复变函数
- K.Weierstrass(1815-1897)分别应用级数研究复变函数
- G.F.B.Riemann (1826-1866)研究复变函数的映照性质

第一章　复数与复变函数

§1　复数及其运算

一、复数的概念

二、复数的代数运算

一、复数的概念

形如 $z = x + yi$ 或 $z = x + iy$ 的数称为复数.

实部: $\mathrm{Re}\ z = x$; 虚部: $\mathrm{Im}\ z = y$

实数: $\mathrm{Im}\ z = 0$ 纯虚数: $\mathrm{Re}\ z = 0$

两个复数相等当且仅当它们的实部和虚部分别相等. 即设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ 是两个复数,

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2.$$

两个数如果不全是实数, 不能比较大小.

虚数单位 i 的规定:

(1) $i^2 = -1$; (2) i 可以与实数在一起按同样的法则进行四则运算.

上页 下页 返回 结束

虚数单位的特性：一般地，如果 n 是正整数，则

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i.$$

二、复数的代数运算

$$z_1=x_1+iy_1 \quad z_2=x_2+iy_2$$

和与差： $z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$

积： $z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2)$

商：
$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

共轭复数

实部相同, 而虚部绝对值相等符号相反的两个复数称为共轭复数.

即：若 $z = x + yi$, 则 $\overline{z} = x - yi$.

例1 计算共轭复数 $x + yi$ 与 $x - yi$ 的积.

解： $(x - yi)(x + yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$.

因此：两个共轭复数 $z, \overline{z}$ 的积是一个实数.

复数和与积的运算性质

(1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$； $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;

(2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

(3) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

共轭复数的运算性质:

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

(2) $\bar{\bar{z}} = z$;

(3) $z \cdot \bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$;

(4) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

例 2 设 $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -3 + 4i$, 求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 与 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)} = \frac{(-15-20)+(15-20)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i.$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i.$$

例3 设两复数 $z_1 = x_1 + iy_1$， $z_2 = x_2 + iy_2$，证明 $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)$.

证一:

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) + (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2) \\
&= (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2) \\
&\quad + (x_1x_2 + y_1y_2) + i(-x_2y_1 + x_1y_2) \\
&= 2(x_1x_2 + y_1y_2) \\
&= 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2).
\end{aligned}
$$

证二:

$$
z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot \bar{z}_2 + \overline{z_1 \cdot \bar{z}_2} = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2).
$$

§2　复数的几何表示

一、复平面

二、复球面

一、复平面

1. 复数的4种表示

(1) 点的表示

$$\left.\begin{array}{l} z = x + iy \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{有序实数对}(x, y) \\ \text{点}P(x, y) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{有序实数对}(x, y) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow z = x + iy \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{点}P(x, y)$$

总之,复数$z = x + iy$可用平面上坐标为(x, y)的点P表示. 此时,

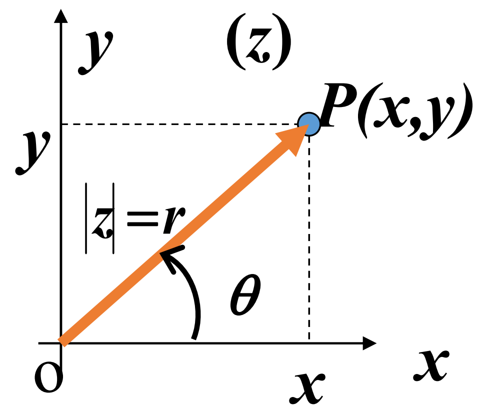
x轴 — 实 轴　　y轴 — 虚 轴

平 面 — 复 平 面 或z平 面

数z与点z同义.

上页 下页 返回 结束

(2) 向量表示



$z = x + iy \xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 点$P(x, y) \xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 向量$\overrightarrow{OP} = (x, y)$

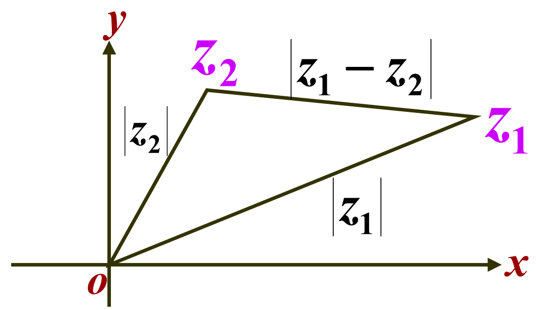
因此, 复数 $z = x + iy$ 可以用 向量$\overrightarrow{OP} = (x, y)$ 表示.

向量$\overrightarrow{OP} = (x, y)$的长度称为复数z的模或绝对值,记作

$$|z| = \left|\overrightarrow{OP}\right| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

显然成立:

$$|x| \le |z|, \quad |y| \le |z|,$$
$$|z| \le |x| + |y|,$$
$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |z^2|.$$

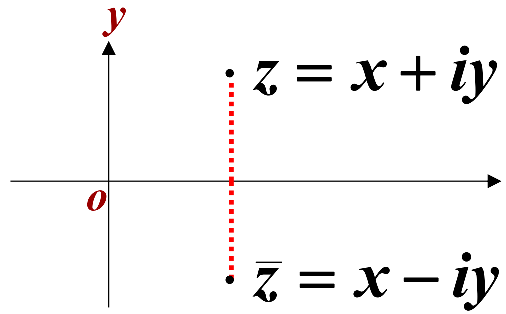


复数和与差的模的性质: 因为 $|z_1 - z_2|$ 表示点 z_1 和 z_2 之间的距离, 故

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|; \quad |z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|.$$

共轭复数的几何性质

一对共轭复数 z 和 $\overline{z}$ 在复平面内的位置是关于实轴对称的.



复数辐角的定义

当 $z \neq 0$ 时，以正实轴为始边，以表示z的向量$\overrightarrow{OP}$为终边的角的弧度数θ称为 z 的辐角(argument), 记作 $\mathrm{Arg}z = \theta$.

1 任何一个复数 $z \neq 0$有无穷多个辐角.

如果 θ_1 是其中一个辐角, 那么 z 的全部辐角为

$$\mathrm{Arg}\,z = \theta_1 + 2k\pi \quad (k\text{为任意整数})$$

2 当 $z = 0$时, 辐角不确定.

上页 下页 返回 结束

辐角主值

在 $z\,(\neq 0)$ 的辐角中，把满足 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ 的 θ_0 称为 $Argz$ 的主值，记作 $\theta_0 = \arg z.$

因此,

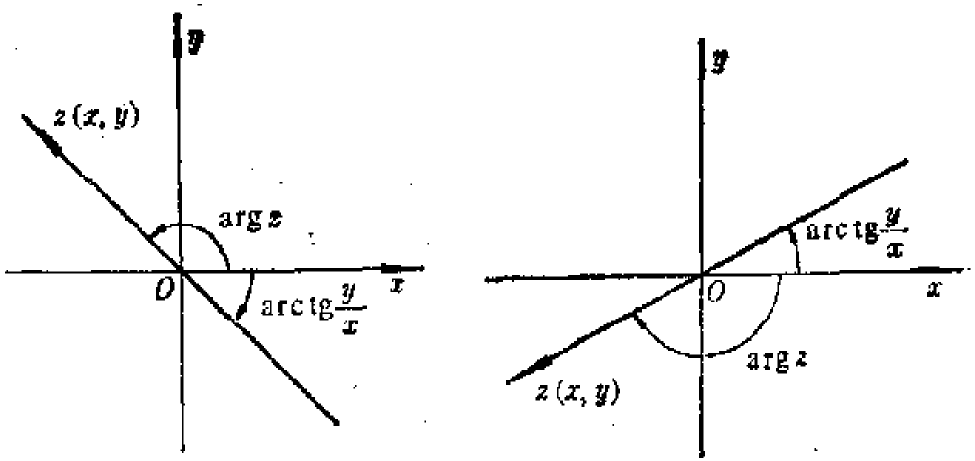
$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

$z \neq 0$ 辐角的主值

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \pm \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y \neq 0, \\ \arctan \dfrac{y}{x} \pm \pi, & x < 0, y \neq 0, \\ \pi, & x < 0, y = 0. \end{cases}$$

(其中 $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan \dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$)

上页 下页 返回 结束



(3) 复数的三角表示法

利用直角坐标与极坐标的关系 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 复数可以表示成

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

（4） 复数的指数表示法

利用Euler公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, 则复数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 可以表示为:

$$z = re^{i\theta}$$

例1 将下列复数化为三角表示式与指数表示式:

$$(1)\ z=-\sqrt{12}-2i; \qquad (2)\ z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5};$$

解: (1) $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$, 因 z 在第三象限,

$$\theta=\arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right)-\pi=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\pi=-\frac{5}{6}\pi,$$

故

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]=4e^{-\frac{5}{6}\pi i}.$$

(2) 显然 $r=|z|=1$, 又

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{10}, \quad \cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3\pi}{10},$$

故

$$z=\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}=e^{\frac{3}{10}\pi i}.$$

例2 设 z_1, z_2 为两个任意复数，证明：

$$(1)\quad |z_1\overline{z}_2| = |z_1||z_2|; \qquad (2)\quad |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|.$$

证明：

$$(1)\ |z_1\overline{z}_2| = \sqrt{(z_1\overline{z}_2)\overline{(z_1\overline{z}_2)}} = \sqrt{(z_1\overline{z}_2)(\overline{z}_1 z_2)} = \sqrt{(z_1\overline{z}_1)(\overline{z}_2 z_2)} = |z_1||z_2|.$$

$$(2)\ |z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)$$

$$= z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 + z_1\overline{z}_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \overline{z}_1 z_2 + z_1\overline{z}_2$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) \le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z}_2|$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2,$$

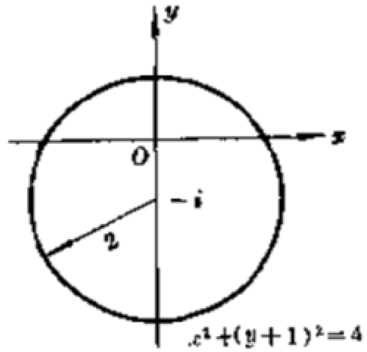
两边同时开方得

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|.$$

例3 求下列方程所表示的曲线:

$$(1)\ |z+i|=2; \qquad (2)\ |z-2i|=|z+2|; \qquad (3)\ \operatorname{Im}(i+\bar{z})=4.$$

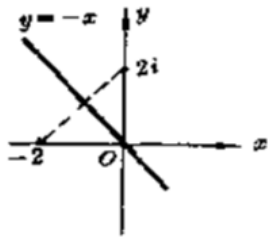
解: (1) 方程 $|z+i|=2$ 表示所有与点 $-i$ 距离为 2 的点的轨迹. 即表示中心为 $-i$, 半径为 2 的圆. 设 $z=x+iy$, 则



$$|x+(y+1)i|=2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2}=2$$

$$\Leftrightarrow \text{圆方程 } x^2+(y+1)^2=4.$$

(2) $|z-2i|=|z+2|$ 表示所有与点 $2i$ 和 -2 距离相等的点的轨迹. 故方程表示的曲线就是连接点 $2i$ 和 -2 的线段的垂直平分线.



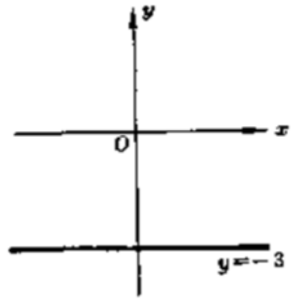
设 $z=x+iy$, 则 $|x+yi-2i|=|x+yi+2|$, 化简后得

$$y=-x.$$

(3) $\mathbf{Im}(i+\bar{z})=4$

设 $z=x+iy$, 则

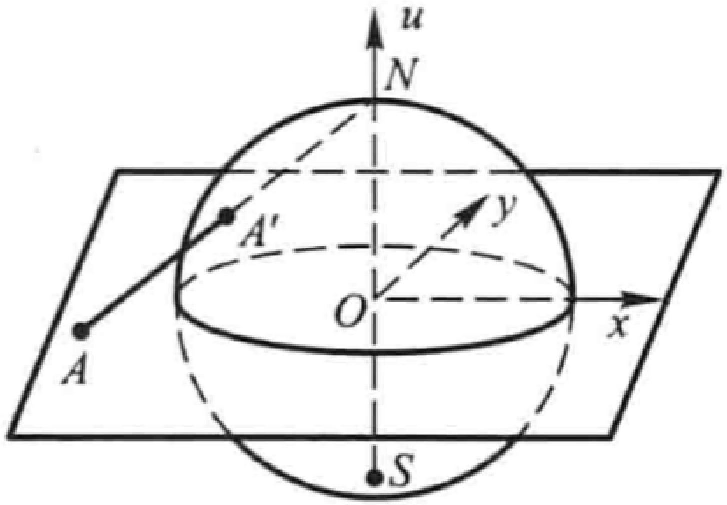
$$i+\bar{z}=x+(1-y)i,\ \mathrm{Im}(i+\bar{z})=1-y=4,$$



所求曲线方程为 $y=-3.$

二、复球面

如左下图： $N(0,0,1)$ 北极



$A(x,y,0)\in xoy$面 $\cong \mathbb{C}$

$A'(x',y',u')\in S$(单位球面)

A' 称为 A 在球面上的球极投影。

球面 S 也称为黎曼球面。

上页 下页 返回 结束

球面上的点，除去北极 N 外，与复平面内的点之间存在着一一对应的关系．于是，我们可用球面上的点来表示复数.

球面上的北极 N 不能对应复平面上的定点，但球面上的点离北极 N 越近，它所表示的复数的模越大.

我们规定: 复数中有一个唯一的“无穷大”与复平面上的无穷远点相对应, 记作 ∞ .

因而，球面上的北极 N 就是复数无穷大的几何表示.

不包括无穷远点的复平面称为有限复平面，或简称复平面.

包括无穷远点的复平面称为扩充复平面. 记 $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

球面上的每一个点与扩充复平面的每一个点构成了一一对应，这样的球面称为复球面.

关于无穷远运算法则

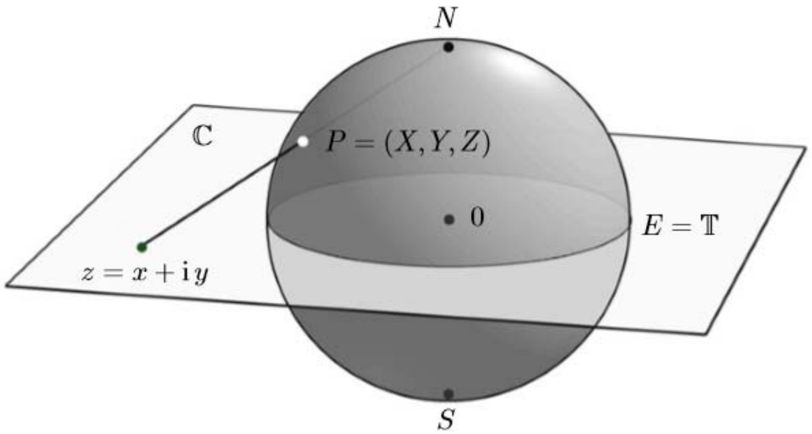
(1) 加法： $\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq\infty)$

(2) 减法： $\alpha-\infty=\infty-\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq\infty)$

(3) 乘法： $\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq 0)$

(4) 除法： $\dfrac{\alpha}{\infty}=0, \quad \dfrac{\infty}{\alpha}=\infty, (\alpha\neq\infty), \quad \dfrac{\alpha}{0}=\infty, (\alpha\neq 0)$

运算 $\infty\pm\infty, 0\cdot\infty, \dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$ 没有意义！



上页 下页 返回 结束

§3　复数的乘幂与方根

一、乘积与商

二、幂与根

一、乘积与商

定理一　两个复数乘积的模等于它们的模相乘，

两个复数乘积的辐角等于它们的辐角相加.

证明：设复数 z_1 和 z_2 的三角形式分别为

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

则

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 \cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\qquad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \end{aligned}$$

即

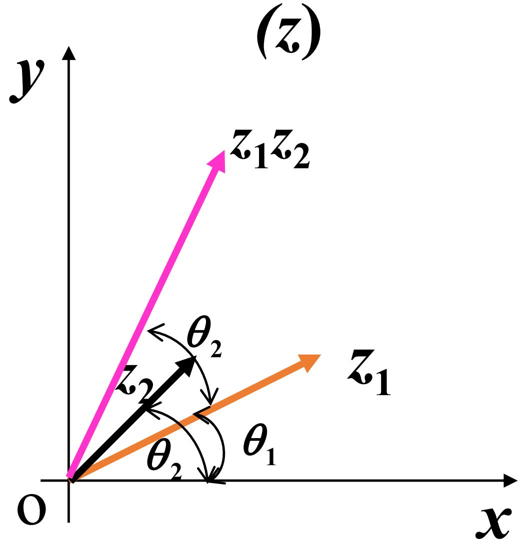
$$|z_1z_2| = r_1r_2,\quad \mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2$$

几何意义 将复数z_1按逆时针方向旋转一个角度$\text{Arg}z_2$，再将其伸缩到$|z_2|$倍.

复数乘法指数形式:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2},$$

则 $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.



n 个复数相乘的情况:

设 $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) = r_k e^{i\theta_k}, \quad (k = 1,2,\cdots,n)$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots\theta_n)}.$$

上页 下页 返回 结束

思考 怎么理解$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2$?

由于幅角的多值性，那么，该等式两端都是无穷多个数构成的两个数集. 等式应该理解为：等式两端可能取的值的全体是相同的，也就是说，对于左端的任一值，右端必有一值和它相等，并且反过来也一样.

例如：设$z_1=-1, z_2=i$,则 $z_1z_2=-i$.

$$\mathrm{Arg}\,z_1=\pi+2m\pi \qquad m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\mathrm{Arg}\,z_2=\frac{\pi}{2}+2n\pi \qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

因此,在这种情况下

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2 \iff \frac{3\pi}{2}+2(m+n)\pi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

要使上式成立,必须且只需 ***k=m+n+1***.

上页 下页 返回 结束

定理二　两个复数的商的模等于它们的模的商，
两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

证明：当 $z_2 \neq 0$ 时，

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{1}{|z_2|^2}|z_1|\cdot|z_2|(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

因此

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2.$$

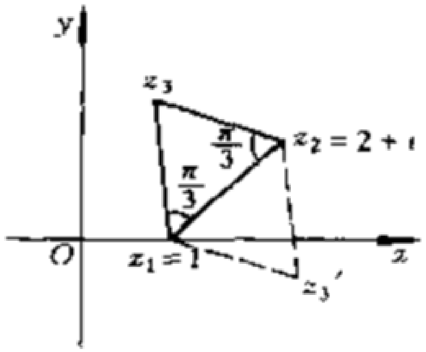
注解　设复数 z_1 和 z_2 的指数形式分别为 $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$，$z_2 = r_2e^{i\theta_2}$，则

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

上页　下页　返回　结束

例1 已知正三角形的两个顶点 $z_1=1$ 与 $z_2=2+i$，求它的另一个顶点.

解： 根据复数乘法几何意义，如图,



$$z_3-z_1=e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2-z_1)=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(1+i)$$

$$=(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})i$$

$$\Rightarrow \quad z_3=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i.$$

类似可得

$$z_3'=\frac{3-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i.$$

二、幂与根

定义 n个相同的复数z的乘积，称为z的n次幂，记作z^n，即

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n\text{个}}.$$

设$z=re^{i\theta}$，由复数的乘法定理和数学归纳法可证明

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

棣模佛(De Moivre)公式

特别，当 $|z| = 1$ 时，即 $z = \cos\theta + i\sin\theta$，

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

定义 $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}.$

由定义得 $z^{-n} = r^{-n}e^{-in\theta}$

定义 给定复数 z，方程 $w^n = z$ 的根称为 z 的 n 次方根，记为 $\sqrt[n]{z}$.

可以推得:

$$w_k = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

从几何上看，$\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值就是以原点为中心，

$r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

推导过程如下：

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

于是 $\rho^n = r$，$\cos n\varphi = \cos\theta$, $\sin n\varphi = \sin\theta$, 显然 $n\varphi = \theta + 2k\pi$, $(k = 0, \pm1, \cdots)$

故 $\rho = r^{\frac{1}{n}}$，$\varphi = \dfrac{\theta+2k\pi}{n}$,

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时, 得到 n 个相异的根:

$$w_0=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

$$w_1=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right),$$

$$\cdots\ \cdots$$

$$w_{n-1}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

当 k 以其他整数值代入时, 这些根又重复出现.

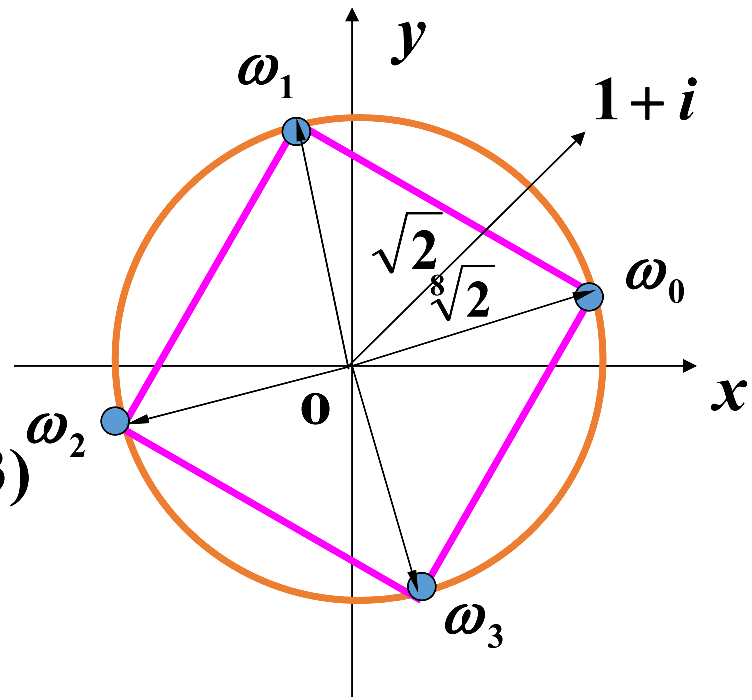
$$w_n=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2n\pi}{n}\right)=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

例1 计算 $\sqrt[4]{1+i}$ 的值.

解:

$$1+i=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right]\quad(k=0,1,2,3)$$



即

$$w_0=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right],\quad w_1=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right],$$

$$w_2=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right],\ w_3=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right].$$

这四个根是内接于中心在原点半径为 $\sqrt[8]{2}$ 的圆的正方形的四个顶点.

§4　区 域

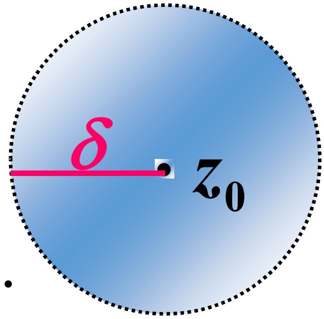
一、区域的概念

二、单连通域与多连通域

一、区域的概念

1. 邻域

平面上以z_0为中心，δ（任意的正数）为半径的圆内部点的集合 $|z-z_0|<\delta$ 称为 z_0 的δ邻域．



2. 去心邻域

称由不等式 $0<|z-z_0|<\delta$ 所确定的点的集合为z_0的去心邻域.

3. 内点

设 G 为一平面点集，z_0为 G 中任意一点．如存在z_0的一个邻域，该邻域内的所有点都属于G，那末z_0称为G的内点.

4. 开集

如果E 内每一点都是它的内点，那么称E 为开集.

5. 区域

连通的开集称为区域, 即：如果平面点集 D 满足以下两个条件, 则称它为一个区域.

D是一个开集；

D是连通的， 就是说D 中任何两点都可以用完全属于D 的一条折线连结起来.

6. 区域的边界点、边界

设E为一平面点集，z_1为一定点，如果z_1的任一邻域内既含有属于E的点,又含有不属于E的点， 那末z_1称为E的边界点.

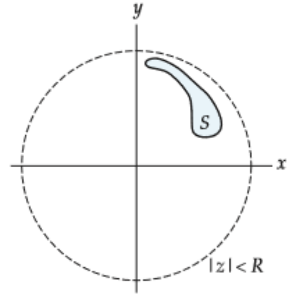
D的所有边界点组成D的边界.

区域的边界可能是由几条曲线和一些孤立的点所组成的.

区域D与它的边界一起构成闭区域或闭域.

7. 有界区域和无界区域

如果一个区域D可以被包含在一个以原点为中心的圆里面，即存在 $M>0$, 使区域的每一个点都满足 $|z|<M$，那末D称为界的，否则称为无界的



有界域

二、单连通域与多连通域

1. 连续曲线

如果$x(t)$和$y(t)$是两个连续的实函数，那么方程组

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (a \le t \le b)$$

代表一条平面曲线，称为连续曲线.

平面曲线的复数表示:

$$z = z(t) = x(t) + iy(t). \quad (a \le t \le b)$$

上页 下页 返回 结束

2. 光滑曲线

如果在 $a \le t \le b$ 上，$x'(t)$ 和 $y'(t)$ 都是连续的，

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \ne 0, t \in [a,b]$$

那么称这曲线为光滑的.

由几段依次相接的光滑曲线所组成的曲线称为按段光滑曲线.

3. Jordan曲线

设C：$z = z(t)$ $(a \le t \le b)$为一连续曲线，$z(a), z(b)$分别称为C的起点和终点.

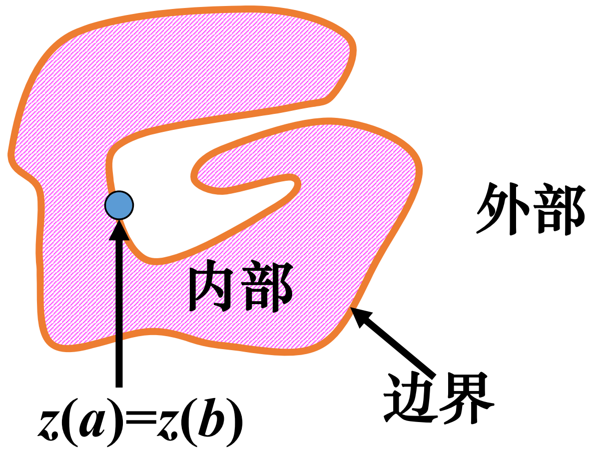
当$t_1 \ne t_2$ 而有$z(t_1) = z(t_2)$时，点$z(t_1)$称为曲线C的重点.

没有重点的连续曲线C称为简单曲线或Jordan(若尔当)曲线.

起点与终点重合的简单曲线C 称为简单闭曲线.

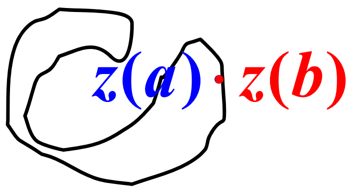
Jordan曲线的性质: 任意一条简单闭曲线C将复平面唯一地分成三个互不相交的点集.

Jordan曲线的性质如右图所示：

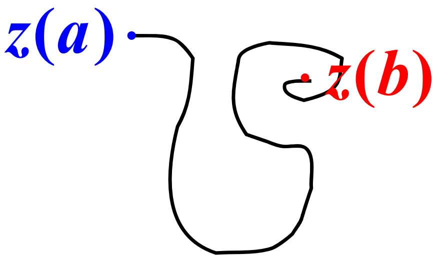


练习

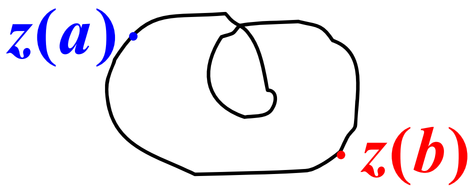
判断下列曲线是否为简单曲线?



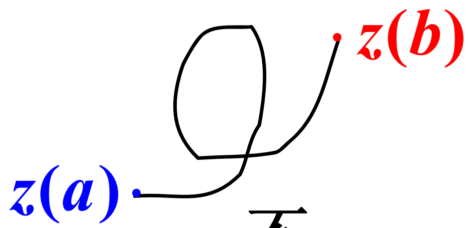
简单 闭



简单 不闭



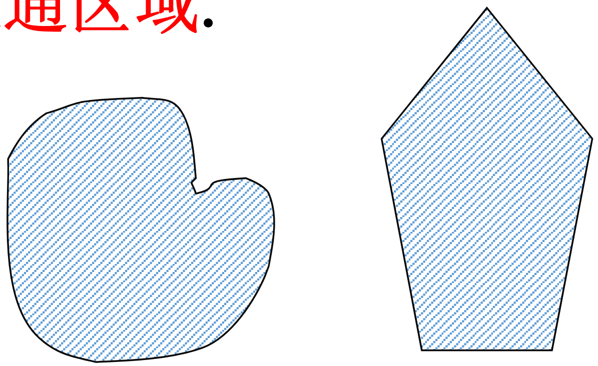
不简单 闭



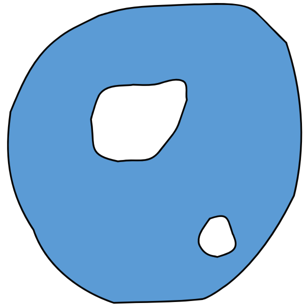
不简单 不闭

4. 单连通域与多连通域的定义

复平面上的一个区域D，如果在其中任作一条简单闭曲线，而曲线的内部总属于D，就称为**单连通区域**. 一个区域如果不是单连通域，就称为**多连通区域**.



单连通域



多连通域

§5　复变函数

一、复变函数的定义

二、映射的概念

一、复变函数的定义

设E是一个复数 $z=x+iy$ 的集合. 如果有一个确定的法则 f 存在, 按这个法则 f , 对于集合E 中的每一个复数 z, 就有一个或几个复数 $w=u+iv$ 与 之对应, 那末称 f 是定义在E上的复变数 z 的函数(简称复变函数), 与z对应的复变数 w称为函数值，记作 $w=f(z)$.

如果z的一个值对应着一个w的值, 那末我们称函数$f(z)$是单值的.

如果z的一个值对应着两个或两个以上w的值, 那末我们称函数$f(z)$是多值的.

集合 E 称为 $f(z)$ 的定义集合(定义域);

对应于E中所有z的一切w值所成的集合$f(E)$, 称为函数值集合(值域).

$$\boldsymbol{f(E)=\{w \mid \exists z\in E, f(z)=w\}}$$

复变函数与自变量之间的关系:

例如, 函数 $w = z^2$, 令 $z = x + iy$, $w = u + iv$, 则

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi,$$

于是函数 $w = z^2$ 对应于两个二元实变函 数:

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

复变函数w与 自变量z之间的关系 $w = f(z)$相当于两个关系式:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

它们确定了自变量为 x 和 y 的两个二元实变函数.则

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

二、映射的概念

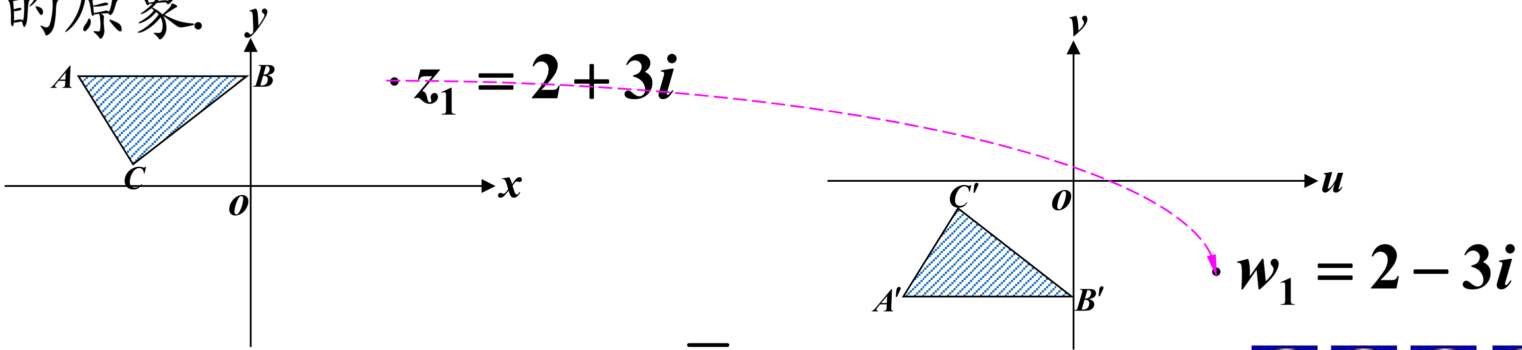
取两张复平面, 分别称为z 平面和w 平面.

如果用 z 平面上的点表示自变量 z 的值，而用另一个平面 w 平面上的点表示函数 w 的值, 那么函数 $w=f(z)$ 在几何上就可以看作是把 z 平面上的一个点集E(定义集合) 变到 w 平面上的一个点集 F (函数值集合) 的映射(或变换).

这个映射通常简称为由函数 $w=f(z)$ 所构成的映射.

如果E中的点z被映射 $w=f(z)$ 映射成 F中的点 w, 那么 w 称为z的象 (映象), 而 z 称为 w 的原象.

例1

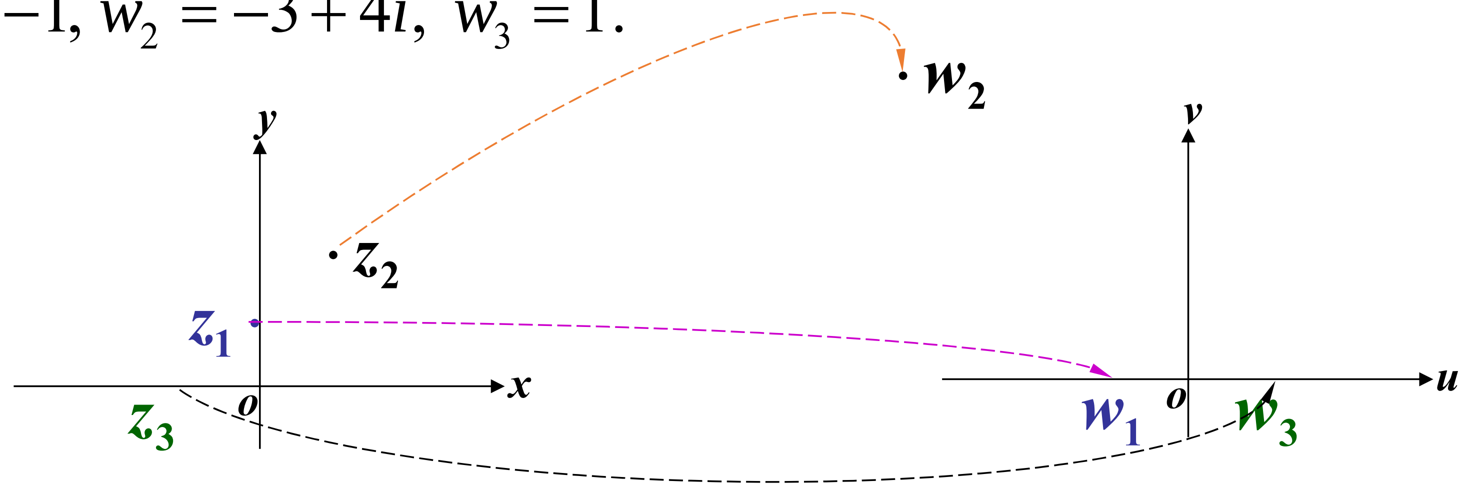


$$w=\overline{z}$$

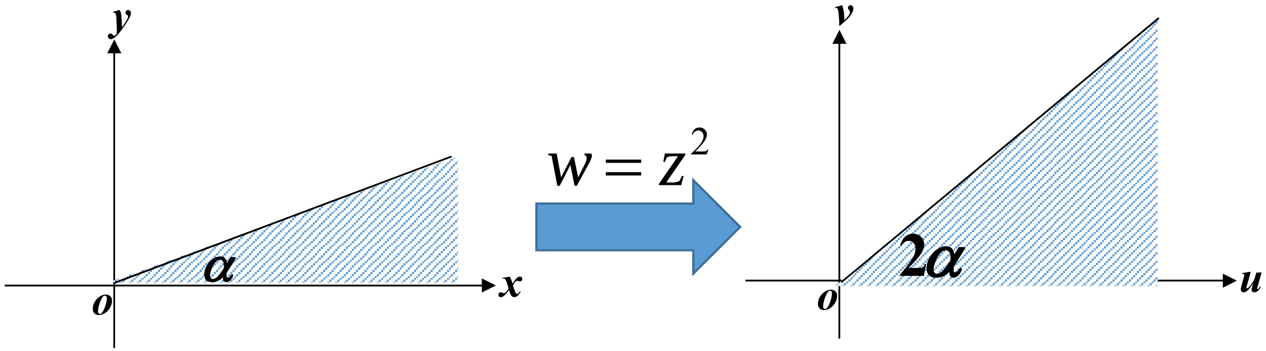
上页 下页 返回 结束

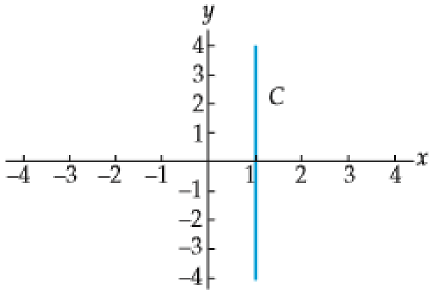
例2 函数 $w=z^2$ 构成的映射.

显然将 z 平面上的点 $z_1=i,\ z_2=1+2i,\ z_3=-1$ 映射成 w平面上的点 $w_1=-1,\ w_2=-3+4i,\ w_3=1.$



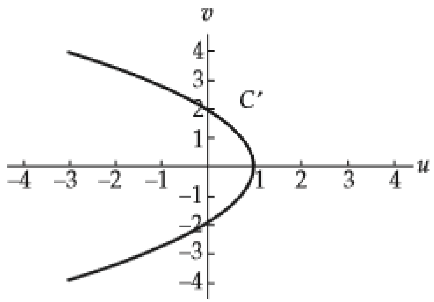
根据复数的乘法公式可知, 映射 $w=z^2$ 将 z 的辐角增大一倍.





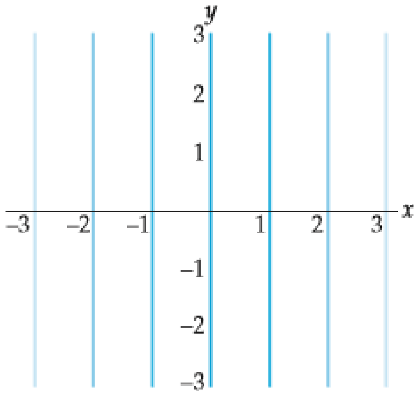
$x = 1$

$w = z^2$



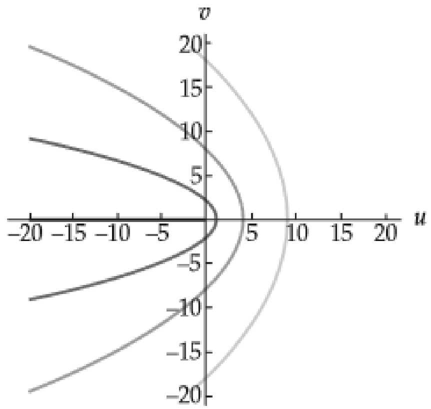
$u = 1 - y^2$

$v = 2y$

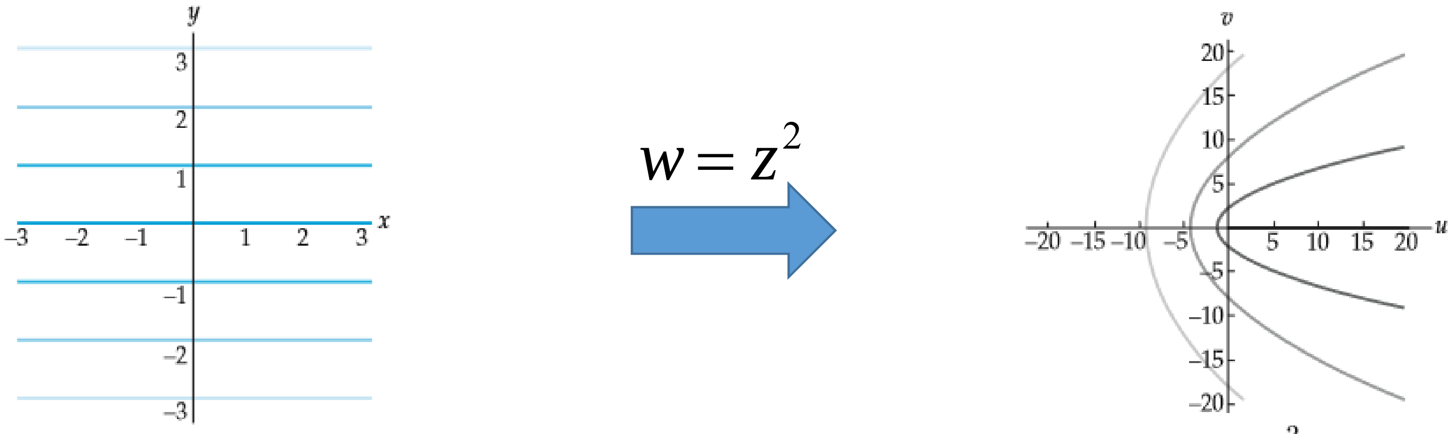


$z = k + iy,\ -\infty < y < \infty,$

$w = z^2$



$u = k^2 - y^2, \quad v = 2ky, \quad -\infty < y < \infty.$



$y = k,\ k \neq 0,$ $\qquad$ $u = \dfrac{v^2}{4k^2} - k^2$

反函数的定义:

设 $w = f(z)$ 的定义集合为 z 平面上的集合 E,函数值集合为 w 平面上的集合 $F = f(E)$, 那末F 中的每一个点 w 必将对应着 E 中的一个(或几个)点.

于是在 F上就确定了一个单值 (或多值)函数,记作$z = f^{-1}(w)$, 它称为函数 $w = f(z)$的反函数, 也称为映射 $w = f(z)$ 的逆映射.

如果函数 (映射) $w = f(z)$ 与它的反函数(逆映射) $z = \phi(w)$都是单值的, 那么称函数 (映射) $w = f(z)$是一一对应的.

上页 下页 返回 结束

§6　复变函数的极限与连续

一、复变函数的极限

二、复变函数的连续

一、复变函数的极限

定义6.1 设f是定义于E上的复变函数，z_0是E的极限点. 如果存在 $\alpha\in\mathbb{C}$ 使得

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(z\in\overset{o}{U}(z_0,\delta)\cap E\Rightarrow f(z)\in U(\alpha,\varepsilon)),$$

那么我们说，$z\xrightarrow{E}z_0$，$f(z)\to\alpha$. 记为

$$\lim_{z\in E,z\to z_0}f(z)=\alpha.$$

在不混淆的情况下，此极限式简记为

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\alpha.$$

注解 其它复变函数极限式：

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty\Leftrightarrow\forall M>0,\exists\rho>0,\text{ 当 }0<|z-z_0|<\rho\text{时}, |f(z)|>M$$

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=A\Leftrightarrow\forall\epsilon>0,\exists\rho>0,\text{ 当 }|z|>\rho\text{ 时}, |f(z)-A|<\epsilon$$

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \rho>0, \text{当}|z|>\rho\text{时}, |f(z)|>M$$

定理一 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y), \alpha=u_0+iv_0, z_0=x_0+iy_0$, 那么 $\lim_{z\to z_0} f(z)=\alpha$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

证明: (1) 必要性.

如果 $\lim_{z\to z_0} f(z)=A$, 根据极限的定义: 当 $0<|(x+iy)-(x_0+iy_0)|<\delta$ 时, $|(u+iv)-(u_0+iv_0)|<\varepsilon$, 或当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,

$$|(u-u_0)+i(v-v_0)|<\varepsilon, \Rightarrow |u-u_0|<\varepsilon, \quad |v-v_0|<\varepsilon,$$

故 $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$

(2) 充分性.

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$， $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$,那么当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$时，

有 $|u-u_0|<\dfrac{\varepsilon}{2}$， $|v-v_0|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，

$$|f(z)-A|=|(u-u_0)+i(v-v_0)|\le|u-u_0|+|v-v_0|.$$

故当 $0<|z-z_0|<\delta$时，$|f(z)-A|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$.

注解 该定理将求复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$的极限问题，转化为求两个二元实变函数 $u(x,y)$和 $v(x,y)$ 的极限问题.

定理二 设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$， $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$， 那么

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$;(2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)g(z)]=AB$;(3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\ne 0)$.

例1 证明函数 $f(z)=\dfrac{z}{\bar{z}}\ (z\neq 0)$ 当 $z\to 0$ 时的极限不存在.

证 令 $z=x+iy$, $f(z)=u+iv$, 则 $u(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $v(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$,

当 z 沿直线 $y=kx$ 趋于零时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} v(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2k}{1+k^2},$$

随 k 值的变化而变化, 所以 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)$ 不存在, **根据定理一可知,**

$\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在.

二、复变函数的连续

定义6.2 **如果** $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, **那么就称** $f(z)$ **在** z_0 **连续.**

注解 定义表明连续的三要素:

（1） $f(z)$在z_0处有定义

（2） $f(z)$在z_0处有极限

（3） $f(z)$在z_0处的极限值等于函数值

连续函数的性质

定理三 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在$z_0=x_0+iy_0$连续的充要条件是: $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0)处连续.

定理四

(1) 在 z_0连续的两个函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的和、差、积、商 (分母在 z_0不为零) 在 z_0处仍连续.

(2) 如果函数 $h=g(z)$在 z_0连续, 函数 $w=f(h)$在 $h_0=g(z_0)$ 连续, 那末复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 z_0处连续.

例如,

$$\boldsymbol{f(z)=\ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)},$$

$u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 在复平面内除原点外处处连续, 故$f(x,y)$在复平面内除原点外处处连续.

注解

(1) 如果$\boldsymbol{f(z)}$ 在 $\boldsymbol{E}$ 内处处连续,我们说$\boldsymbol{f(z)}$在 $\boldsymbol{E}$内连续,记为: $\boldsymbol{f(z)\in C(E)}$.

(2) 函数$f(z)$在曲线C上z_0处连续的意义是 $\lim\limits_{z\in C, z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

(3) 有理整函数(多项式) $\boldsymbol{w=P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n}$, 对复平面内的所有点$z$都是连续的;

(4) 有理分式函数 $w=P(z)/Q(z)$, 其中 $\boldsymbol{P(z)}$ 和 $\boldsymbol{Q(z)}$ 都是多项式, 在复平面内使分母不为零的点也是连续的.

例 2 设 $f(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\overline{z}}-\frac{\overline{z}}{z}\right)$, $z\neq 0$, 试证：$f(z)$在原点无极限,从而在原点不连续.

证明：

$$f(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\overline{z}}-\frac{\overline{z}}{z}\right)\overset{z=x+iy}{=}\frac{1}{2i}\left(\frac{(z-\overline{z})(z+\overline{z})}{z\overline{z}}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{2x\times 2iy}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

因此, $\lim\limits_{(x,y)\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}$不存在$\Rightarrow \lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\overline{z}}-\frac{\overline{z}}{z}\right)$不存在.

武汉大学 数学与统计学院
School of Mathematics and Statistics, Wuhan University

2020年秋季教学课件

复变函数与积分变换

汪 玉 峰

武汉大学数学与统计学院

第二章　　解析函数

§1　解析函数的概念

一、复变函数的导数与微分

二、解析函数的概念

一、复变函数的导数与微分

1.导数的定义

定义2.1 设函数$w = f(z)$在点z_0的某邻域内有定义, 若极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

存在且有限, 则称函数$f(z)$在z_0处可导，此极限值称为函数$f(z)$的导数，记为$f'(z_0)$，或$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}$,即

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

在定义中，$z \to z_0$(即$\Delta z \to 0$)的方式是任意的.

如果函数$f(z)$在区域D内处处可导, 我们就称$f(z)$在区域内D可导.

上页 下页 返回 结束

例1 问$f(z)=x+2yi$是否可导？

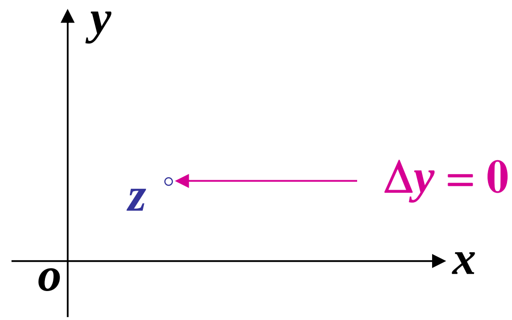
解: $$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(x+\Delta x)+2(y+\Delta y)i-x-2yi}{\Delta z}$$

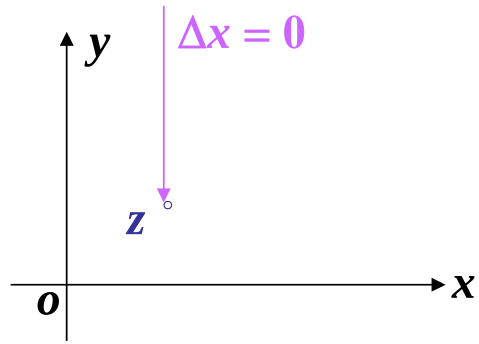
$$=\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}$$

由于

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{\substack{\Delta z\to 0,\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,\\ &\lim_{\substack{\Delta z\to 0,\\ \Delta x=0}}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{2\Delta yi}{\Delta yi}=2\end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$不存在 $\Rightarrow$ $f(z)$不可导





上页 下页 返回 结束

2.可导与连续的关系

函数 $f(z)$ 在 z_0 处可导则在 z_0 处一定连续, 但函数 $f(z)$ 在 z_0 处连续不一定在 z_0 处可导.

证明:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\cdot(z-z_0)+f(z_0)\right]$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\cdot\lim_{z\to z_0}(z-z_0)+\lim_{z\to z_0}f(z_0)$$

$$=f(z_0)$$

因此, $f(z)$在z_0连续.

显然, $f(z)=x+2yi$在复平面上处处连续,

但是, 例1已经证明$f(z)$在复平面上处处不可导.

3.求导法则:

(1) $(c)' = 0$, 其中c为复常数.

(2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中n为正整数.

(3) $[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$.

(4) $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

(5) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]' = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$. $(g(z) \neq 0)$

(6) $\{f[g(z)]\}' = f'(w)g'(z)$. 其中$w = g(z)$

(7) $f'(z) = \dfrac{1}{\varphi'(w)}$, 其中$w = f(z)$与$z = \varphi(w)$是两个互为反函数的单值 函数, 且$\varphi'(w) \neq 0$

4.微分的概念

复变函数微分的概念在形式上与一元实变函数的微分概念完全一致.

设函数 $w = f(z)$ 在 z_0 可导, 则

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0) \cdot \Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z$$

$\lim\limits_{\Delta z \to 0} \rho(\Delta z) = 0$, $|\eta| = |\rho(\Delta z)\Delta z|$ 是 $|\Delta z| \to 0$ 时的高阶无穷小, 于是

$$\Delta w = f'(z_0) \cdot \Delta z + o(\Delta z), \Delta z \to 0.$$

$f'(z_0) \cdot \Delta z$ 是函数 $w = f(z)$ 的改变量 Δw 的线性部分. $f'(z_0) \cdot \Delta z$ 称为函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的微分, 记作 $dw = f'(z_0) \cdot \Delta z$.

特别地, 当 $f(z) = z$ 时, $dz = dw = f'(z_0) \cdot \Delta z = \Delta z$,

$$dw = f'(z_0) \cdot \Delta z = f'(z_0) \cdot dz, \text{ 即 } f'(z_0) = \left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}$$

如果函数在z_0的微分存在, 则称函数$f(z)$在z_0可微.

如果函数 $f(z)$在区域D内处处可微, 则称$f(z)$在区域D内可微.

函数$w = f(z)$在z_0可导与在z_0可微是等价的.

二、解析函数的概念

1. 解析函数的定义

定义2.3 如果函数在某点一个邻域可导，则称函数在该点解析.

如果函数 $f(z)$在区域D内每一点解析, 则称$f(z)$在区域D内解析, 或称$f(z)$是区域D内的一个解析函数(全纯函数或正则函数). 记作$f(z) \in A(D)$.

理解下列关系:

函数在区域内解析 $\Longleftrightarrow$ 函数在区域内可导

函数在z_0点解析 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 函数在z_0点可导

上页 下页 返回 结束

2. 奇点的定义

定义2.4 如果函数 $f(z)$ 在 z_0不解析, 但在的z_0任一邻域内总有$f(z)$的解析点, 则称 z_0 为$f(z)$的奇点.

$$\text{如}w=\frac{1}{z}\text{奇点为}z=0$$

1) 函数在一个点解析，是指在这个点的某个邻域内可导，因此在这个点可导，反之，在一个点的可导不能得到在这个点解析.

2) 闭区域上的解析函数是指在包含这个区域的一个更大的区域上解析.

例3 研究函数 $f(z)=z^2, g(z)=x+2yi$ 和$h(z)=|z|^2$ 的解析性.

解: $f(z)=z^2$ 在复平面内是解析的； $g(z)=x+2yi$ 处处不解析；

下面讨论 $h(z)=|z|^2$ 的解析性，

$$\frac{h(z_0+\Delta z)-h(z_0)}{\Delta z}=\frac{|z_0+\Delta z|^2-|z_0|^2}{\Delta z}=\frac{(z_0+\Delta z)(\overline{z_0}+\overline{\Delta z})-z_0\overline{z_0}}{\Delta z}$$

$$=\overline{z_0}+\overline{\Delta z}+z_0\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z},$$

(1) $z_0=0$,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{h(z_0+\Delta z)-h(z_0)}{\Delta z}=0.$$

(2) $z_0\neq 0$,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\text{不存在}\quad\Longrightarrow\quad\lim_{\Delta z\to 0}\frac{h(z_0+\Delta z)-h(z_0)}{\Delta z}\text{不存在.}$$

因此 $h(z)=|z|^2$ 仅在 $z=0$ 处可导，而在其他点都不可导，根据定义，它在复平面内处处不解析.

定理

(1) 在区域 D 内解析的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商(除去分母为零的点)在 D 内解析.

(2) 设函数 $h=g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析，函数 $w=f(h)$ 在 h 平面上的区域 G 内解析. 如果对 D 内的每一个点 z，函数 $g(z)$ 的对应值 h 都属于 G，那末复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 D 内解析，且

$$\frac{dw}{dz}=\frac{df(h)}{dh}\cdot\frac{dh(z)}{dz}$$

根据定理可知:

(1) 所有多项式在复平面内是处处解析的.

(2) 任何一个有理分式函数 $\boldsymbol{P(z)/Q(z)}$ 在不含分母为零的点的区域内是解析的，使分母为零的点是它的奇点.

§2　函数解析的充要条件

一、柯西-黎曼条件

二、柯西-黎曼条件的应用

一、柯西-黎曼条件

定理一 (复可微的充要条件) 设复函数 $f(z)=u(x,y)+v(x,y)i$ 定义于区域 D 上, 那么该函数在 $z_0=x_0+y_0 i\in D$ 复可微的充要条件是

（1）$u(x,y)$, $v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+y_0 i$ 都实可微;

（2）$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad -\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}.$$

条件(2)常称为柯西—黎曼条件（简称C-R条件）.

证明: 必要性.

设复函 f 在 $z_0=x_0+y_0 i\in D$ 的导数为 $\alpha=a+ib, a,b\in\mathbb{R}$.据导数定义,

当 $z_0+\Delta z\in D(\Delta z\neq 0)$时,

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\alpha\Delta z+o(|\Delta z|) \qquad (1)$$

$$=(a+ib)(\Delta x+i\Delta y)+o(|\Delta z|)(|\Delta z|\to 0),$$

其中$\Delta z=\Delta x+i\Delta y, \Delta x, \Delta y$是实增量。比较等式（1）两边实部与虚部，得

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x,y)=a\Delta x-b\Delta y+o(|\Delta z|)(|\Delta z|\to 0), \tag{2}$$

$$v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x,y)=b\Delta x+a\Delta y+o(|\Delta z|)(|\Delta z|\to 0). \tag{3}$$

因此，在点$z_0=x_0+y_0i$，$u(x,y)$和$v(x,y)$可微,且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-b,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=b,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=a, \tag{4}$$

由此导致柯西-黎曼方程.

充分性.

由于$u(x,y)$，$v(x,y)$在$z_0=x_0+y_0i$都实可微,并且柯西-黎曼方程成立,那么

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x,y)=a\Delta x-b\Delta y+o(|\Delta z|)(|\Delta z|\to 0),$$

$$v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x,y)=b\Delta x+a\Delta y+o(|\Delta z|)(|\Delta z|\to 0).$$

此两式相加得

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\alpha\Delta z+o(|\Delta z|)$$
$$=(a+ib)(\Delta x+i\Delta y)+o(|\Delta z|)(|\Delta z|\to 0),$$

$\Rightarrow$ $f(z)$在$z_0=x_0+y_0i$复可微。

若复函 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+y_0 i$ 复可微（或复可导），则

$$f'(z)=u_x(x,y)+iv_x(x,y)=v_y(x,y)-iu_y(x,y)$$
$$=u_x(x,y)-iu_y(x,y)=v_y(x,y)+iv_x(x,y)$$

定理二 (函数在区域D内解析的充要条件)

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 区域 D内解析的充要条件是

(1) 实部 $u(x,y)$和虚部 $v(x,y)$在区域 D内处处（实）可微,

(2) $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内满足柯西-黎曼方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

二、柯西-黎曼条件的应用

例1　设 $f(z)=x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$,问常数 a,b,c,d 取何值时, $f(z)$ 在复平面内处处解析?

解： 记 $u(x,y)=x^2+axy+by^2,\ v(x,y)=cx^2+dxy+y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+ay,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=ax+2by,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=2cx+dy,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=dx+2y,$$

欲使 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},$

$$2x+ay=dx+2y,\ -2cx-dy=ax+2by,$$

所求 $a=2,\ b=-1,\ c=-1,\ d=2.$

例2　如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在区域 D 内为一常数.

证： $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}\equiv 0 \Longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}\equiv 0,$

所以 $u=$常数，$v=$常数. 因此，$f(z)$ 在区域 D 内为一常数.

例3　讨论 $|z|^2$ 的可导性与解析性.

解：由于

$$u(x,y)=x^2+y^2, v(x,y)=0,$$

那么

$$u_x=2x, u_y=2y, v_x=v_y=0$$

由于 u_x, u_y, v_x, v_y 在整个复平面上连续，但只在原点满足 $C-R$ 条件，

所以 $f(z)$ 只在 $z=0$ 处可导，而处处不解析 .

§3　初等函数

一、指数函数

二、对数函数

三、幂函数

四、三角函数和双曲函数

五、反三角函数和反双曲函数

一、指数函数

1. 定义

对任何复数$z=x+iy$,用关系式

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

来规定指数函数e^z(或$\exp z$).

显然,

$$\mathrm{Re}(\exp(z)) = e^x \cos y \qquad \mathrm{Im}(\exp(z)) = e^x \sin y$$

$$|\exp(z)| = e^x \qquad \mathrm{Arg}(\exp(z)) = y + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$$

为简便,常用下面记号

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

2. 指数函数的基本性质

(1) 对实数$z = x, e^z$定义与通常实指数函数定义一致.

(2) $e^z \neq 0, z \in \mathbb{C}$.

(3) 指数函数$w = e^z$在整个复平面是解析，且有：

$$\left(e^z\right)' = e^z, z \in \mathbb{C}.$$

证明： $u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y,$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

四个偏导数均连续,且 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

故 $f(z)$ 在复平面内处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z) = e^x(\cos y + i \sin y) = f(z).$$

上页 下页 返回 结束

(4) 运算法则:$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}, \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}$。

证明：设$z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$，则

$$
\begin{aligned}
e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)\bullet e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2) \\
&= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)] \\
&= e^{z_1+z_2}
\end{aligned}
$$

(5) 指数函数$w=e^z$是周期为$2\pi i$的周期函数：

证明：$$e^{z+2\pi i}=e^z e^{2\pi i}=e^z(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^z.$$

(6)指数函数的渐进性态：$z\to\infty$时, 无极限, 但有

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z=x>0}} e^z=\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty;\ \lim_{\substack{z\to\infty\\ z=x<0}} e^z=\lim_{x\to-\infty} e^x=0.$$

(1) e^z仅是记号, 无幂的意义.

(2) 微积分中的微分中值定理**不能**推广到复函数中来.

如 $e^z = e^{z+2\pi i}$ 但$(e^z)' = e^z \neq 0$

二、对数函数

1. 对数函数的定义

满足方程 $e^w = z \ (z \neq 0)$ 的函数 $w = f(z)$称为z 的对数函数，记为 $w = \mathrm{Ln} z$.

令$w = u + iv$，$z = re^{i\theta}$，则 $e^{u+iv} = re^{i\theta}$; 于是$u = \ln r$，$v = \theta + 2k\pi$ (k为整数)

或

$$u = \ln|z|, \quad v = \mathrm{Arg} z;$$

因此

$$w = \mathrm{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1) 对数函数 $w = \mathrm{Ln}\ z$ 是指数函数 $w = e^z$ 的反函数.

2) 对数函数 $w = \mathrm{Ln}\ z$ 是多值的. 其多值性是由虚部幅角函数引起的.

3) 积与商的对数运算法则: $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0,$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ln}(z_1 z_2) &= \ln|z_1 z_2| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z_1 z_2) \\
&= \ln|z_1| + \ln|z_2| + \mathrm{i}(\mathrm{Arg}\,z_1 + \mathrm{Arg}\,z_2) \\
&= \mathrm{Ln}\,z_1 + \mathrm{Ln}\,z_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2} &= \ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2} \\
&= \ln|z_1| - \ln|z_2| + \mathrm{i}(\mathrm{Arg}\,z_1 - \mathrm{Arg}\,z_2) \\
&= \mathrm{Ln}\,z_1 - \mathrm{Ln}\,z_2.
\end{aligned}$$

我们得到

$$(1)\ \ \mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\,z_1 + \mathrm{Ln}\,z_2\,, \qquad (2)\ \ \mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\,z_1 - \mathrm{Ln}\,z_2\,.$$

但是 $\mathrm{Ln}\,z^n \neq n\mathrm{Ln}\,z.$

定义复函数

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z,\ z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0], \tag{1}$$

其中

$$\arg z \in (-\pi, \pi),\ z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$$

是主幅角函数. 因此, $w = \ln z$ 是多值函数

$$w = \mathrm{Ln}\, z$$

的单值连续分支.

待证

$$\frac{d \ln z}{dz} = \frac{1}{z},\quad z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]. \tag{2}$$

因此, 由(1)定义的 $w = \ln z$ 是单值解析分支.

导数公式(2) 证明：任取 $z, z_0 \in \mathbb{C}-(-\infty, 0]$, $w=\ln z$ 的连续性蕴含

$$z \to z_0 \Rightarrow w \to w_0 = \ln z_0. \tag{3}$$

另一方面，$w=\ln z$ 的单值性蕴含

$$z \neq z_0 \Rightarrow w \neq w_0. \tag{4}$$

因此, 联合(3) (4) 并注意到 $e^w = z,\ e^{w_0} = z_0,$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\ln z - \ln z_0}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{\dfrac{e^w - e^{w_0}}{w - w_0}} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0}, \quad z_0 \in \mathbb{C}-(-\infty, 0].$$

证毕.

1 一般不成立

$$\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 .$$

计算时一定要特别小心！

2 1) 对数函数 $w=\mathrm{Ln}\ z$ 在区域 $\mathbb{C}-(-\infty,0]$ 可分出无穷个单值解析分支

$$w_k=\ln z+2k\pi i,\ z\in\mathbb{C}-(-\infty,0],\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

2) 特殊点 0, ∞ 是对数函数的单值解析分支点, 简称分支点. 我们也称为无穷阶支点(或对数支点).

例1 计算 $\mathrm{Ln}(-1),\mathrm{Ln}(2-3i)$ 的值.

解: 因为 $|-1|=1,\ \arg(-1)=\pi$, 所以有

$$\mathrm{Ln}(-1)=\ln 1+i(\pi+2\mathrm{k}\pi)=(2k+1)\pi i \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

因为 $|2-3i|=\sqrt{13},\ \arg(2-3i)=-\arctan\frac{3}{2}$, 所以有

$$\mathrm{Ln}(2-3\mathrm{i})=\ln\sqrt{13}+i(-\arctan\tfrac{3}{2}+2\mathrm{k}\pi)$$
$$=\tfrac{1}{2}\ln 13-i(\arctan\tfrac{3}{2}-2k\pi) \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

三、幂函数

1. 基本定义

我们用下列等式定义z的α次幂

$$z^{\alpha}=e^{\alpha \operatorname{Ln} z}(z\neq 0,\alpha\in\mathbb{C}).$$

α为正实数，且z=0时，还规定$z^{\alpha}=0$.

由于

$$w=z^{\alpha}=e^{\alpha\ln z}e^{\alpha 2k\pi i}(\ln 1=0,-\pi<\arg z\leq\pi)$$

因此，对同一个 $z\neq 0, z^{\alpha}$ 的不同值的个数等于不同的数值因子

$$e^{a\cdot 2k\pi i}(k\in\mathbb{Z})$$

的个数.

上页 下页 返回 结束

2. 分类讨论

1) $\alpha = n \in \mathbb{Z}^+$,

$$z^n = e^{n\ln z} e^{n2k\pi i} = e^{n\ln z} = e^{\ln z + \cdots + \ln z} = \underbrace{z \cdot \cdots \cdot z}_{n},$$

单值

这与第一章n次幂的定义相吻合，其中用到公式

$$n\ln z = \underbrace{\ln z + \cdots + \ln z}_{n} \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi i).$$

2) $\alpha = \frac{1}{n} (n \in \mathbb{Z}^+)$,

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln z} e^{\frac{1}{n}2k\pi i}$$

$$= \sqrt[n]{|z|} e^{i(\arg z + 2k\pi)/n} \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

n值

$$= \sqrt[n]{z}$$

这与n次根的定义相吻合.

3) $\alpha=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}(n\geq 1,m,n\in\mathbb{Z})$是既约分数,

$$z^{\frac{m}{n}}=e^{\frac{m}{n}\mathrm{Ln}\,z}=e^{\frac{m}{n}[\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)]}=e^{\frac{m}{n}\ln z}e^{\frac{mk}{n}i2\pi}$$

是n值的 $(k=0,1,\cdots,n-1)$.

4) $\alpha\in\mathbb{C}$-$\mathbb{Q}$, 即指数为无理数或虚数,

$$z^{\alpha}=e^{\alpha\ln z}e^{\alpha 2k\pi i},\quad k\in\mathbb{Z},$$

是无穷多值的.

3. 幂函数的单值解析分支

1) $n\in\mathbb{Z}^{+},n>1$, 幂函数

$$w=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$$

又称根式函数.

根式函数在区域 $\mathbb{C}-(-\infty,0]$ 有n个不同的单值解析分支

$$w_k=\sqrt[n]{|z|}e^{i(\arg z+2k\pi)/n}, \arg z\in(-\pi,\pi), z\in\mathbb{C}-(-\infty,0], \quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

根式函数的分支改写为

$$w_k=e^{\frac{1}{n}\ln z}e^{\frac{1}{n}2k\pi i}, z\in\mathbb{C}-(-\infty,0],$$

由此利用复合求导公式得

$$\frac{dw_k}{dz}=\frac{1}{n}\frac{e^{\frac{1}{n}\ln z}e^{\frac{1}{n}2k\pi i}}{z}, z\in\mathbb{C}-(-\infty,0]$$

$$=\frac{1}{n}\frac{e^{\frac{1}{n}\ln z}}{z}e^{\frac{1}{n}2k\pi i}$$

$$=\frac{1}{n}\frac{z^{\frac{1}{n}}}{z}=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}.$$

2) $\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}\left(n\geq 2, m, n\in\mathbb{Z}\right)$是既约分数，幂函数

$$w = z^{\frac{m}{n}}$$

同根式函数类似地分出单值解析分支.

3) $\alpha\in\mathbb{C}$-$\mathbb{Q}$, 幂函数

$$w = z^{\alpha}$$

类似地分出无穷个单值解析分支.

例2 求 $(-3)^{\sqrt{5}}$ 和 2^{1+i} 的值.

解： $(-3)^{\sqrt{5}} = e^{\sqrt{5}\mathrm{Ln}(-3)} = e^{\sqrt{5}(\ln 3+\pi i+2k\pi i)} = 3^{\sqrt{5}}[\cos\sqrt{5}(2k+1)\pi + i\sin\sqrt{5}(2k+1)\pi]$,

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

$$2^{1+i} = e^{(1+i)\mathrm{Ln}2} = e^{(1+i)[\ln 2+i(\arg 2+2k\pi)]} = e^{(1+i)[\ln 2+2k\pi i)]} = e^{\ln 2+2k\pi i+i\ln 2-2k\pi}$$

$$= e^{(\ln 2-2k\pi)+i(\ln 2+2k\pi)} = 2e^{-2k\pi}(\cos\ln 2+i\sin\ln 2) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

四、三角函数和双曲函数

1. 三角函数的定义

因为 $e^{iy}=\cos y+i\sin y$, $e^{-iy}=\cos y-i\sin y$,将两式相加与相减，得

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\quad \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}.$$

定义2.5 定义

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$

并分别称为z的正弦函数和余弦函数.

2. 性质

(1) 当z为实数时与通常定义一致.

(2) $\sin z$ 是奇函数, $\cos z$ 是偶函数.

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z.$$

(3)正弦函数和余弦函数都是以 2π 为周期的.

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z.$$

(4)正弦函数和余弦函数在复平面内都是解析函数.

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

(5)在复数域内不成立 $|\sin z| \le 1, |\cos z| \le 1$.

当 $y \to \infty$时, $|\sin yi| \to \infty$, $|\cos yi| \to \infty$.

$$\cos yi = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}, \quad \sin yi = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}$$

(这是与实变函数完全不同的.)

(6) 有关正弦函数和余弦函数的公式仍成立. 如

$$(1)\quad \begin{cases} \cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2, \\ \sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2, \\ \sin^2 z+\cos^2 z=1. \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \cos(x+yi)=\cos x\cos yi-\sin x\sin yi, \\ \sin(x+yi)=\sin x\cos yi+\cos x\sin yi. \end{cases}$$

对任何复数z, 有

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,$$

这是欧拉公式.

(7) $\sin z$的零点为$z=n\pi,(n=0,\pm1,\cdots)$.

$\cos z$的零点为$z=(n+\dfrac{1}{2})\pi,(n=0,\pm1,\cdots)$.

定义2.6　规定

正切函数 $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$,　　**余切函数** $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$,

正割函数 $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$,　　**余割函数** $\csc z = \dfrac{1}{\sin z}$.

在复平面上分母不为零的点解析, 且

$$(\tan z)' = \sec^2 z, \qquad (\cot z)' = -\csc^2 z,$$

$$(\sec z)' = \sec z \tan z, \qquad (\csc z)' = -\csc z \cot z.$$

正切函数和余切函数都是以 π 为周期的.

正割函数和余割函数都是以 2π 为周期的.

上页　下页　返回　结束

3. 双曲函数的定义

定义

双曲余弦函数： $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$,

双曲正弦函数： $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$,

双曲正切函数为 $\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z} = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}$.

双曲正弦函数和双曲余弦函数在复平面内也都是解析函数

$$(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z, (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z.$$

容易证明

$$\operatorname{sh}(z + 2\pi i) = \operatorname{sh} z, \operatorname{ch}(z + 2\pi i) = \operatorname{ch} z.$$

另外

$$\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z, \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z.$$

并有如下公式:

$$\cosh yi = \cos y, \quad \sinh yi = i \sin y.$$

例2　求 $\cos(1+i)$ 的值.

解:

$$\cos(1+i) = \frac{e^{i(1+i)} + e^{-i(1+i)}}{2} = \frac{e^{-1+i} + e^{1-i}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[e^{-1}(\cos 1 + i \sin 1) + e(\cos 1 - i \sin 1)]$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-1} + e)\cos 1 + \frac{1}{2}(e^{-1} - e) i \sin 1$$

$$= \cos 1 \cosh 1 - i \sin 1 \sinh 1.$$

五、反三角函数和反双曲函数

设 $z=\cos w$，那么w称为z的反余弦函数，记为$w=\mathrm{Arc}\cos z$.

由 $z=\cos w=\dfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$，得 $e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0$，方程的根为 $e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}$，

两端取对数得

$$\mathrm{Arc}\cos z=-i\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}).$$

同样得到

反正弦函数 $\mathrm{Arcsin}z=-i\mathrm{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2})$，

反正切函数 $\mathrm{Arctan}z=-\dfrac{i}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{1+iz}{1-iz}$.

反双曲正弦 $\mathrm{Arsh}z=\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$，反双曲余弦 $\mathrm{Arch}z=\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$，

反双曲正切 $\mathrm{Arth}z=\dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{1+z}{1-z}$.

2022年秋季教学课件

复变函数与积分变换

汪 玉 峰

武汉大学数学与统计学院

第三章　复变函数的积分

第一节　复变函数积分的概念

一、复变函数的积分定义

二、积分的存在条件及计算法

三、积分的性质

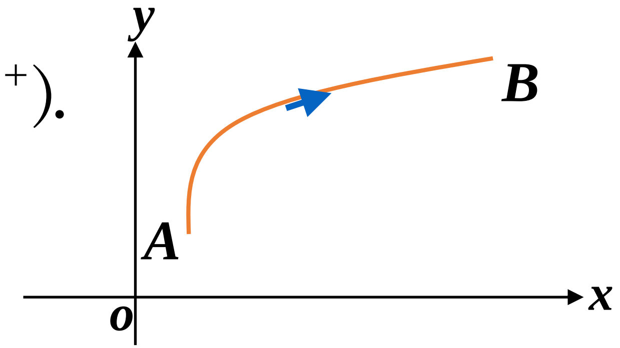
一、复变函数的积分定义

1. 有向曲线

设 C 为平面上给定的一条分段光滑曲线. 如果选定 C 的两个可能方向中的一个作为正方向(或正向), 那么我们就把 C 理解为带有方向的曲线, 称为有向曲线.

如果 A 到 B 作为曲线 C 的正向, 记为 C(或C^{+}).

那么 B 到 A 就是曲线 C 的负向, 记为 C^{-}.



关于曲线方向的说明

1) 以后把两个端点中的一个作为起点, 另一个作为终点. 除特殊声明外, 正方向总是指从起点到终点的方向.

2) 对简单封闭曲线而言, 总默认逆时针方向为正向, 除非另有说明.

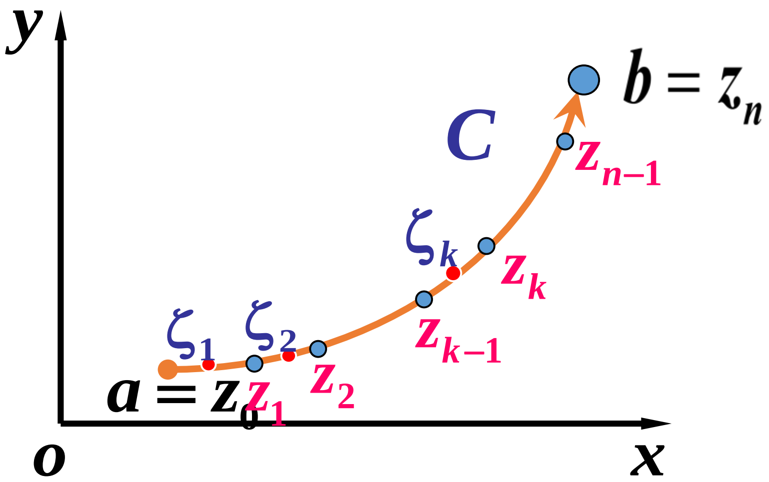
2. 复积分的定义

设复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是复平面有向曲线C上的有界函数，其中C是以a为起点b为终点.

(1) 分割

在C上插入n-1个分点, 连同两个端点, 共n+1个点按顺序排列为

$$a=z_0,z_1,z_2,\cdots,z_{k-1},z_k,\cdots,z_{n-1},z_n=b$$



(2) 近似、求和

在每个弧段$z_{k-1}z_k\,(k=1,2,3,\cdots,n)$上任意取一点$\zeta_k$, 作和式

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k=S_n$$

这里 $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$. 记 $\delta=\max\{\Delta s_k \mid 1\le k\le n\}$, 其中 $\Delta s_k=z_kz_{k-1}$的长度.

(3) 求极限

当 n 无限增加且 $\delta \to 0$ 时，如果极限

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

存在，则称 $f(z)$ 在 C 上可积. 其极限值称为函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分，记为 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$.

关于复积分的说明

1) 复积分是《微积分》第二类曲线积分的推广.

2) 用 $\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$ 表示函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的负向的积分.

3) 常用 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 表示函数 $f(z)$ 沿封闭曲线 C 的积分.

4) 当 $C = [a, b] \subset \mathbb{R}$，前面的复积分就是实变复值函数 $f:[a,b] \to \mathbb{C}$ 的**定积分**. 此时积分记为 $\int_a^b f(z)\mathrm{d}z$.

5) 复积分与对曲线C的分法无关，也与 ζ_k 取法无关.

复积分一般不写成 $\int_a^b f(z)dz$, 除非意义很明确.

二、积分的存在条件及计算法

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k) \tag{3.1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k] + i\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

假定 $f(z)$ 在 C 上连续. 则 u,v 也在C上连续. 于是, 据《微积分》关于实变函数的第二类曲线积分的结果, 当 $\delta\to 0$ 时, (3. 1) 式右端极限存在. 因此, $f(z)$ 在C上可积，且

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy. \tag{3.2}$$

注解 公式(3.2)在形式上可以看成是 $f(z)=u+iv$ 与 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y$ 相乘后求积分得到

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C (u+iv)(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)$$
$$=\int_C u\mathrm{d}x+iv\mathrm{d}x+iu\mathrm{d}y-v\mathrm{d}y$$
$$=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+i\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y$$

总之，复函数的积分可表为两个实的第二类曲线积分.

设有向曲线C的参数方程为

$$z(t)=x(t)+iy(t),\alpha\le t\le\beta,a=z(\alpha),b=z(\beta),$$

其中 a,b 分别为起点与终点. 代入公式(3.2)右端

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta \{u[x(t),y(t)]x'(t) - v[x(t),y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t$$

$$+i\int_\alpha^\beta \{v[x(t),y(t)]x'(t) + u[x(t),y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_\alpha^\beta \{u[x(t),y(t)] + iv[x(t),y(t)]\}\{x'(t) + iy'(t)\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t.$$

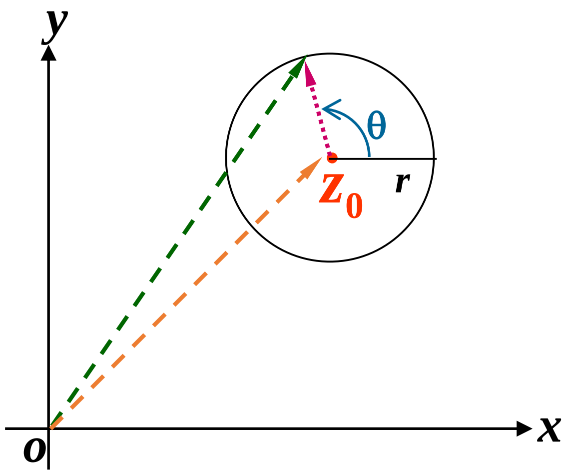
因此, 我们得到复积分计算公式

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t. \longrightarrow$$ 积分换元

例1 求 $I_n = \oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$, C为以z_0为中心, r为半径的正向圆周, n为整数.

解：积分路径的参数方程为

$$z = z_0 + re^{i\theta}, \theta: 0 \to 2\pi.$$



代入积分换元公式, 并注意到

$$dz = ire^{i\theta} d\theta.$$

则有

$$I_n = \oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}} d\theta = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta.$$

当$n=0$时,

$$I_0 = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i;$$

当$n \neq 0$时,

$$I_n = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}(\cos n\theta - i\sin n\theta)d\theta = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}\cos n\theta d\theta - \frac{1}{r^n}\int_0^{2\pi}\sin n\theta d\theta = 0.$$

上页 下页 返回 结束

因此, 我们获得公式

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, n=0, \\ 0, n \neq 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

记住公式(3. 3)!

三、积分的性质

1) $\int_C f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z.$ (方向性)

2) $\int_C \alpha f(z)\mathrm{d}z = \alpha \int_C f(z)\mathrm{d}z, \ \forall \alpha \in \mathbb{C}.$

3) $\int_C [f(z) \pm g(z)]\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\mathrm{d}z.$

(线性性)

4) 若$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$(分段光滑曲线), 则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \cdots + \int_{C_n}\right) f(z)\mathrm{d}z.$$ (对积分曲线可加性)

5) $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)||\mathrm{d}z|, |\mathrm{d}z| = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \mathrm{d}s.$

6) 设曲线 C 的长度为 L. 若 $|f(z)| \le M$, 则 $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le ML.$

(积分估值)

证明性质(5)和(6):

因为$|\Delta z_k|$是z_k与$z_{k\text{-}1}$两点之间的距离, Δs_k为这两点之间弧段的长度,

所以, 我们有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k| \le \sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)|\cdot\Delta s_k$$

两端取极限, 并利用极限保不等式性, 得

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s.$$

易见

$$\sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)|\cdot\Delta s_k \le M\sum_{k=1}^{n}\Delta s_k = ML \Longrightarrow$$ 性质6).

引申 若 $F, f:[a,b]\to\mathbb{C}, F'=f$, 则成立实变复值函数的牛顿–莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a).$$

证明： 设 $F=U+\mathrm{i}V,\ f=u+\mathrm{i}v:[a,b]\to\mathbb{C}$, 则$F'=f\Rightarrow U'=u, V'=v.$ 于是

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b u(t)\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_a^b v(t)\mathrm{d}t=\left[U(b)-U(a)\right]+\mathrm{i}\left[V(b)-V(a)\right]=F(b)-F(a).$$

例2 设C为从原点到点$3+4i$的直线段, 试求积分$\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z$绝对值的一个上界.

解：C 的参数方程为$z=(3+4i)t$，$(0\le t\le 1)$根据估值不等式知

$$\left|\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z\right|\le \int_C \left|\frac{1}{z-i}\right|\mathrm{d}s\le \frac{5}{3}\int_C \mathrm{d}s=\frac{25}{3}$$

因为在C上, $\left|\frac{1}{z-i}\right|=\frac{1}{|3t+(4t-1)i|}=\frac{1}{\sqrt{(3t)^2+(4t-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{25\left(t-\frac{4}{25}\right)^2+\frac{9}{25}}}\le\frac{5}{3}.$

第二、三节　柯西定理

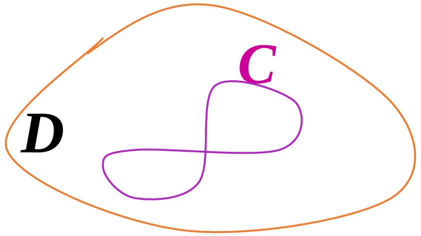
一、Cauchy-Goursat基本定理

二、复合闭路柯西定理

一、Cauchy-Goursat基本定理

定理 (柯西一古萨基本定理) 设D为单连通域，如果函数 $f(z)\in A(D)$, 那么对 D 内的任何一条封闭曲线 C,有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$



此定理常称为**柯西积分定理**.

定理中的 C 可以不是简单曲线. 如右图.

证明：附加条件"$f'(z)$在D内连续",用格林公式

$$\left.\begin{aligned}\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y&=-\iint_G(v_x+u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\\ \int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y&=\iint_G(u_x-v_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

定理 (推广的柯西定理) 设C是一条周线,D为C之内部,$f(z)$在D内解析,在$\overline{D}=D+C$上连续,则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

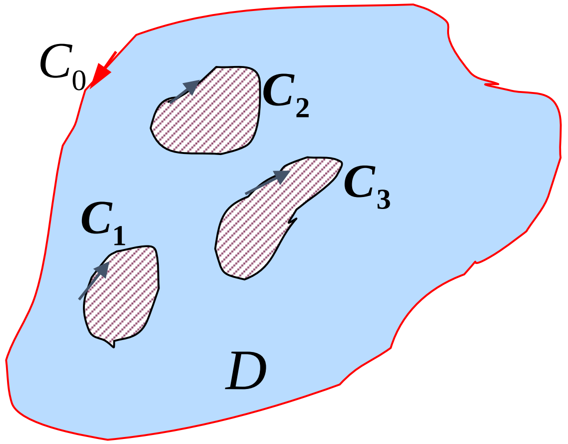
这个定理的证明十分困难，其证明的难度取决于边界曲线光滑性.

二、复合闭路柯西定理

考虑$n+1$条周线$C_0,C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n$,其中$C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n$中每一条都在其余各条的外部,而它们又全在$C_0$的内部,在$C_0$的内部又在$C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n$外部的点构成一个有界的$n+1$连通区域$D$, 以$C_0,C_1,\ C_2,\cdots,\ C_n$为它的边界,在这种情形下我们称区域$D$的边界是一条复周线,记作

$$C=C_0+C_1^-+\cdots+C_n^-.$$

它包括了取正向的C_0,以及取负向的$C_1, C_2, \cdots, C_n$.(如右图)



直观上，假如观察者沿着复周线C 的正向绕行时，区域D 总在它的左手边.

定理 设D是由复周线 $C=C_0+C_1^-+\cdots+C_n^-$ 所围的有界$n+1$连通区域.若函数$f(z)$在闭域$\overline{D}=D+C$上解析,即$f\in A(\overline{D})$, 则$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0$或写成

$$\int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\int_{C_n^-} f(z)\mathrm{d}z=0$$

或写成

$$\int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

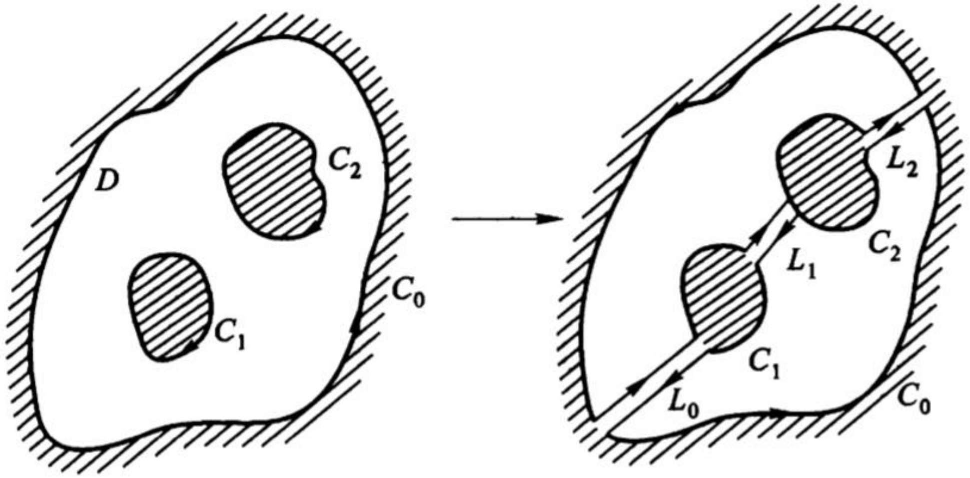
沿外边界积分等于沿内边界积分之和.

证明: 取n条互不相交且在D内的光滑弧

$L_0, L_1, \cdots, L_n$作为割线. 用它们顺次与

$C_0, C_1, \cdots, C_n$ 连接, 将多连通区域D割开,

于是多连通区域D被分成两个单连通域.



这两个单连通域的边界分别记为Γ_0, Γ_1. (如图)

利用单连通域柯西定理,

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = 0, \int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

将两式相加, 并注意到沿着 $L_0, L_1, \cdots, L_n$的积分, 从相反的方向各取了一次.

利用复积分的性质,

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

另两个等式容易得到.

复合闭路柯西定理可以推广成下列形式:

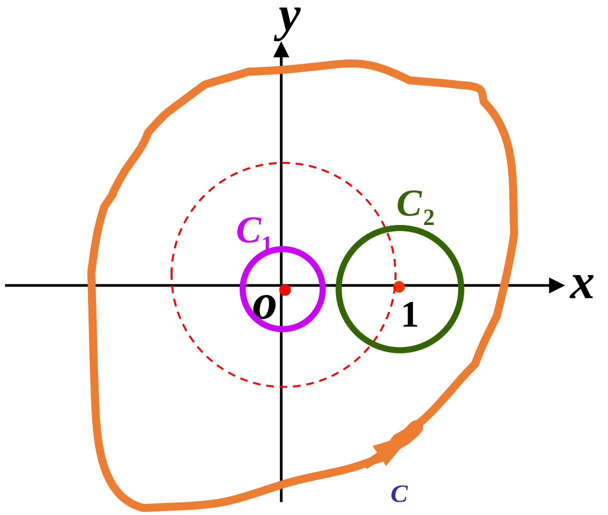
设C是一条复周线,D为C之内部,$f(z)$在D内解析,在$\overline{D}=D+C$上连续,则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

例 **计算积分**$\oint_C \dfrac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$**,** C**为包含圆周** $|z|=1$ 在内的任何正向简单闭曲线.

解: 因为函数$\dfrac{2z-1}{z^2-z}$ 在复平面内有两个奇点$z=0$和$z=1$,

依题意知, **C也包含这两个奇点.在 C内作两个互不包含也互不相交的圆周C_1 和 C_2, C_1 只包含奇点$z=0$, C_2 只包含奇点$z=1$, 则$C+C_1^-+C_2^-$构成复周线**(如右图)



根据复合闭路定理,

$$\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$$

于是,

$$\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz = \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z}dz + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z}dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{1}{z-1}dz + \oint_{C_1} \frac{1}{z}dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1}dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z}dz$$

$$= 0 + 2\pi i + 2\pi i + 0$$

$$= 4\pi i.$$

第四节　原函数与不定积分

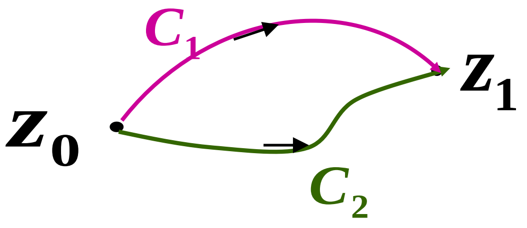
一、积分与路径无关

二、原函数

一、积分与路径无关

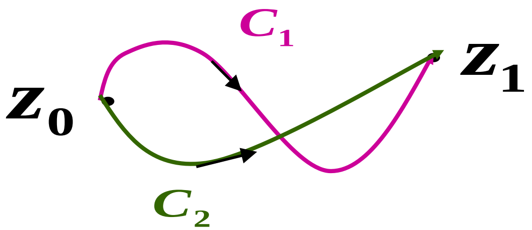
定理一 设f是单连通区域D内的解析函数，则f在D内的积分与路径无关，即 $\forall z_0, z_1 \in D$, 积分

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$$



之值,不依赖于D内连接起点z_0与终点z_1的曲线.

证明：设C_1与C_2是D内连接起点z_0与终点z_1的任两条曲线,则正方向曲线C_1与负方向C_2^-曲线就连接成D内一条闭曲线C.

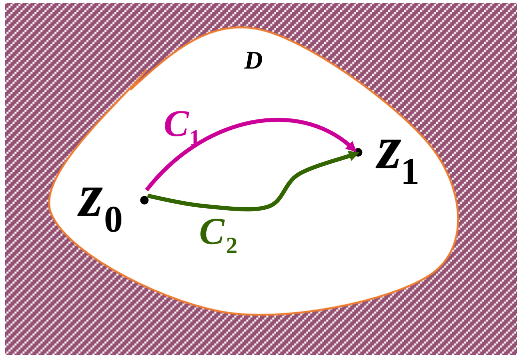


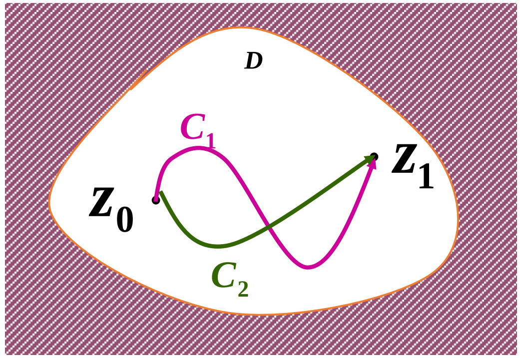
由柯西−古萨基本定理及复积分的基本性质有

$$0 = \int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

注解 如果起点为z_0，终点为z_1，



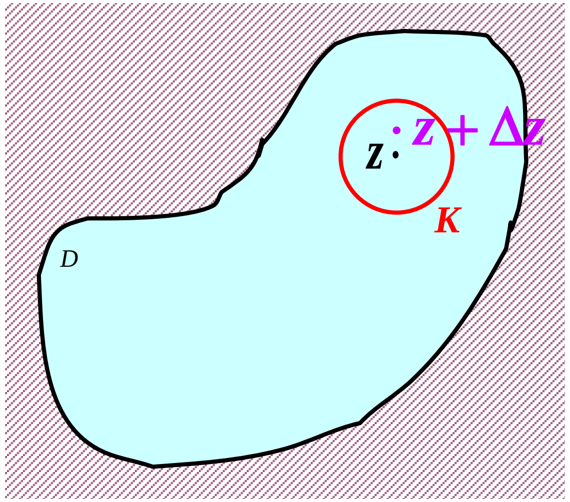


$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z$$

如果固定 z_0，让 z_1 在 D 内变动，并令 $z_1 = z$，便可确定D内的一个单值函数

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

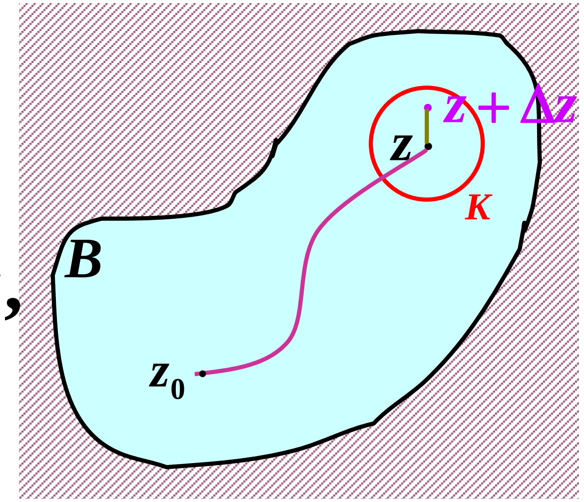
定理二 如果函数$f(z)$在单连通域D内处处解析,那末函数$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 必为D的一个解析函数，并且 $F'(z) = f(z)$.



证明：利用导数的定义来证. 设 z 为 D 内任一点，以 z 为中心作一含于 D 内的小圆 K，取$|\Delta z|$ 充分小使 $z+\Delta z$ 在 K 内.

由$F(z)$的定义,

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$



由于积分与路线无关,$\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 的积分路线可先取z_0到z,

(注意:这一段与 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 的路线相同)

然后从z沿直线到$z+\Delta z$,于是

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta,$$

因为$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\mathrm{d}\zeta=f(z)\int_{z}^{z+\Delta z}\mathrm{d}\zeta=f(z)\Delta z$,所以

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta$$

由$f(z)$在D内连续,故对$\forall\varepsilon>0$,只要开始小圆充分小,则小圆内任一点ζ均合条件$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$, 故

上页 下页 返回 结束

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$\leq\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$\leq\frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z|$$

$$=\varepsilon.$$

于是 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=0$, 即 $F'(z)=f(z)$. 证毕.

二、原函数

定义 如果函数 $\Phi(z)$ 在区域 D 内的导数为$f(z)$, 即 $\Phi'(z)=f(z)$, 那么称$\Phi(z)$为$f(z)$在区域D内的一个原函数.

显然 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 是 $f(z)$ 的一个原函数.

原函数之间的关系: $f(z)$的任何两个原函数相差一个常数.

证明: 设 $\Phi(z)$ 及 $F(z)$ 都是 $f(z)$ 在 D 内的原函数,我们有

$$[\Phi(z)-F(z)]'=\psi'(z)=0,$$

在这里 $\psi(z)=\Phi(z)-F(z)$. 于是

$$\psi(z)=\alpha,$$

亦即 $\Phi(z)=F(z)+\alpha$,这里 α 是一常数.

注解 如果f在区域D内有一个原函数F, 那么它就有无穷多个原函数,

其全体原函数可表示为: $F(z)+c$ (c为任意常数).

定义 称$f(z)$的原函数的一般表达式 $F(z)+c$ (c为任意常数)为$f(z)$ 的不定积分, 记作

$$\int f(z)\mathrm{d}z=F(z)+c.$$

定理三 (复积分的Newton-Leibnitz公式) 设 $f(z)\in C(D)$, D 是区域，并且在 D 上有原函数. 如果 $\alpha,\beta\in D$, 并且 C 是 D 内连接 α,β 的光滑曲线，那么成立

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = F(\beta)-F(\alpha).$$

证明： 如果曲线 C 是光滑曲线 $z=z(t)\ (a\leqslant t\leqslant b)$, $z(a)=\alpha$, $z(b)=\beta$, 那么

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b F'(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

因为 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(z(t))=F'(z(t))z'(t)$, 并且因为微积分基本定理对实变数复数值函数显然成立，所以

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(z(t))\Big|_a^b = F(z(b))-F(z(a)) = F(\beta)-F(\alpha).$$

注解

1) 定理三对分段光滑曲线依然成立.

2) 若复函 f,g 满足定理三的条件，那么成立分部积分公式

$$\int_C f(z)\mathrm{d}g(z) = f(z)g(z)\Big|_\alpha^\beta - \int_C g(z)\mathrm{d}f(z).$$

例1　求 $\int_0^i z\cos z dz$ 的值.

解: 因为 $z\cos z$ 是解析函数, 它的一个原函数是 $z\sin z+\cos z$, 由牛顿-莱布尼兹公式知,

$$\int_0^i z\cos z dz=[z\sin z+\cos z]_0^i=i\sin i+\cos i-1=i\frac{e^{-1}-e}{2i}+\frac{e^{-1}+e}{2}-1=e^{-1}-1.$$

另解: $\int_0^i z\cos z dz=\int_0^i z d(\sin z)=[z\sin z]_0^i-\int_0^i \sin z dz=e^{-1}-1.$

例2 试沿区域 $\mathrm{Im}(z)\geq 0$, $\mathrm{Re}(z)\geq 0$ 内的圆弧 $|z|=1$, 求 $\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz$ 的值.

解: 函数 $\frac{\ln(z+1)}{z+1}$ 在所设区域内解析, 它的一个原函数为 $\frac{\ln^2(z+1)}{2}$,

$$\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz=\left.\frac{\ln^2(z+1)}{2}\right|_1^i=\frac{1}{2}[\ln^2(1+i)-\ln^2 2]=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}i\right)^2-\ln^2 2\right]$$

$$=-\frac{\pi^2}{32}-\frac{3}{8}\ln^2 2+\frac{\pi\ln 2}{8}i.$$

第五、六节　柯西积分公式与高阶导数公式

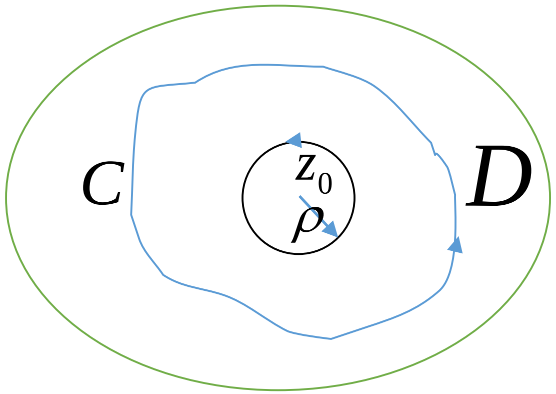
一、Cauchy积分公式

二、高阶导数公式

一、柯西积分公式

1. 启发性思考

设 $z_0\in D$, D是单连通区域, $f\in A(D)$.（如右图）



那么 $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ 在 z_0 不解析. 然而,注意到

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \xlongequal{\text{多连通域柯西定理}} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \xlongequal{z=z_0+\rho e^{i\theta}} i\int_0^{2\pi} f\left(z_0+\rho e^{i\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

$\rho\to 0$

$2\pi i f(z_0)$

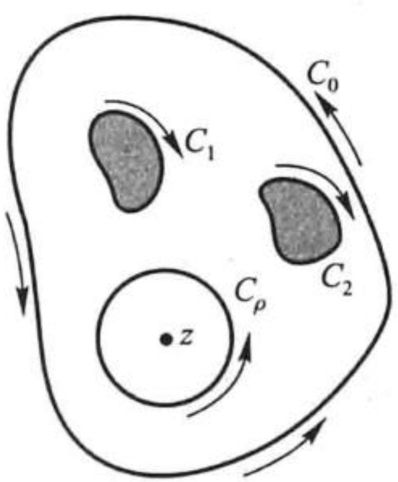
问题： 积分$\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$与$\rho$无关,那么是否成立

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0)?$$

2. 柯西公式

定理 设区域D的边界是周线(或复周线)C. 若函数$f(z)$在D内解析. 在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，则有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta \quad (z\in D).$$



柯西(积分)公式

证明： 任意固定 $z\in D, F(\zeta)=\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$, $\zeta\in\overline{D}$, $\zeta\neq z$ 作为ζ的函数在D内除z外均解析. 今以点z为心, 充分小的$\rho>0$为半径作圆周C_ρ,

使C_ρ及其内部均含于D, 对于复周线 $\Gamma=C+C_\rho^-$ 及函数$F(\zeta)$, 引用柯西定理,

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\oint_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta+\oint_{C_\rho}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

$$=2\pi i f(z)+\oint_{C_\rho}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

=0.(下面证之)

另一方面, 由于$f(z)$在 z_0连续，那么

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta>0,\ |\zeta - z| = \rho < \delta \Rightarrow |f(\zeta) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \quad (\zeta \in C_\rho).$$

因此, 我们有估计

$$\left|\oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta\right| \le \oint_{C_\rho} \frac{|f(\zeta)-f(z)|}{|\zeta - z|} |\mathrm{d}\zeta| < \frac{\varepsilon}{2\pi\rho} \oint_{C_\rho} \mathrm{d}s = \varepsilon,$$

这蕴含

$$\oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = 0.$$

证毕.

注解 1）条件同定理，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \begin{cases} f(z),\ z \in D, & \text{柯西公式} \\ 0, z \in \mathbb{C} - \overline{D}. & \text{柯西定理} \end{cases}$$

2）柯西积分公式表达了一个有趣的事实：在闭区域$\overline{D}$上连续，在区域D上全纯的函数的值完全由它在边界上的值决定.

二、高阶导数公式

定理 设区域D的边界是周线(或复周线)C. 若函数$f(z)$在D内解析，在$\overline{D}=D+C$上连续，则有

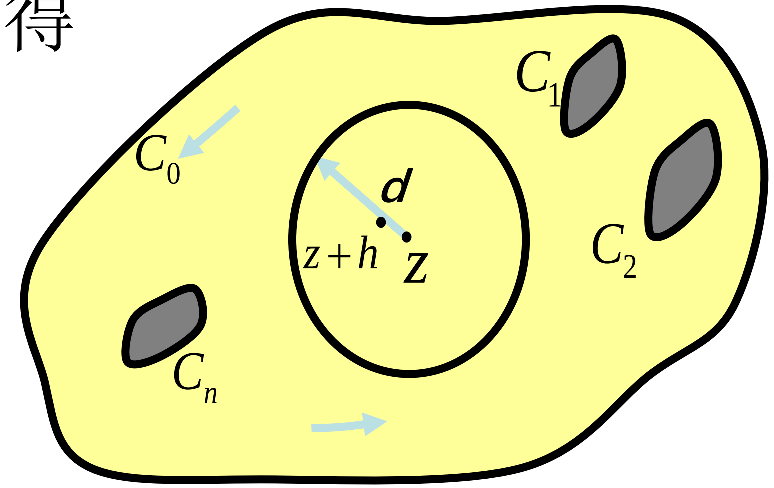
$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\quad(z\in D,n=1,2,3,\cdots).$$

证明: 首先证结论$n=1$时成立. 设$z+h\in D$, 仅需证明,h趋近于0时,下式也趋近于0:

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta=\frac{1}{h}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z-h}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{h}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right]$$

$$=\frac{h}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}d\zeta$$

现在估计上式最后一个积分. 设以z为心, 以d为半径的圆盘完全在D内, 并且在这个圆盘内取$z+h$, 使得$0<|h|<d/2$, 那么当 $\zeta\in C$,



$$|\zeta-z|>d, |\zeta-z-h|>d/2,$$

设$|f(z)|$在C上的一个上界是M, 并且设C的长度是L, 于是, 我们有

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}d\zeta\right|\le\frac{|h|}{2\pi}\cdot\frac{ML}{\frac{d}{2}\cdot d^2}\to 0,\ \ h\to 0,$$

这蕴含待证积分

$$\frac{h}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}d\zeta\to 0,\ \ h\to 0.$$

要完成定理的证明，现在应用数学归纳法．设$n=k$时，结论成立．取z及$z+h$同上，那么有

$$\frac{f^{(k)}(z+h)-f^{(k)}(z)}{h}-\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta$$

$$=\frac{1}{h}\left[\frac{k!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^{k+1}}d\zeta-\frac{k!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta\right]-\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta$$

$$=\frac{k!}{2\pi ih}\int_C\frac{\left[(\zeta-z)^{k+1}-(\zeta-z-h)^{k+1}\right]f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^{k+1}(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta-\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta$$

$$=\frac{k!}{2\pi i}\sum_{j=0}^{k}\int_C\frac{\left[(\zeta-z)^{j+1}(\zeta-z-h)^{k-j}-(\zeta-z-h)^{k+1}\right]f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^{k+1}(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta$$

$$=\frac{k!}{2\pi i}\sum_{j=0}^{k}\int_C\frac{\left[(\zeta-z)^{j+1}-(\zeta-z-h)^{j+1}\right]f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^{j+1}(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta=\frac{k!h}{2\pi i}\sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{j}\int_C\frac{(\zeta-z)^{\ell}(\zeta-z-h)^{j-\ell}f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^{j+1}(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta$$

$$=\frac{k!h}{2\pi i}\sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{j}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^{\ell+1}(\zeta-z)^{k-\ell+2}}d\zeta$$

同前部分一样估计，我们有

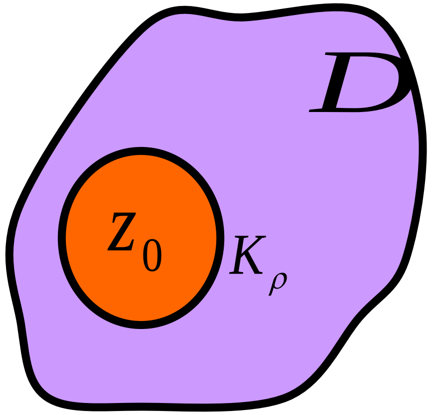
$$\left|\frac{k!h}{2\pi i}\sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{j}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^{\ell+1}(\zeta-z)^{k-\ell+2}}d\zeta\right| \le \frac{k!|h|}{2\pi}\sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{j}\frac{ML}{\left(d/2\right)^{\ell+1}d^{k-\ell+2}} = \frac{k!|h|}{2\pi}\sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{j}\frac{2^{\ell+1}ML}{d^{k+3}} \to 0, h\to 0,$$

这导致

$$\frac{f^{(k)}(z+h)-f^{(k)}(z)}{h}-\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta \to 0, h\to 0.$$

由此证明了定理的结论当$n=k+1$时成立. 因此, 归纳法原理表明定理得证.

注解 柯西公式应用——证明解析函数无穷可微性



结论 若 $f(z)\in A(D)$, D是区域, 则f 在D内有任意阶导数.

证明： $\forall z_0\in D$, 作闭圆$K_\rho:|z-z_0|\le\rho$, 使$K_\rho\subset D$(如右图).

根据定理, $f(z)$在K_ρ内有各阶导数, 因而$f(z)$在z_0有各阶导数.

由z_0的任意性, $f(z)$在D内有各阶导数.

上页 下页 返回 结束

例1 计算下列积分,其中 C 为正向圆周: $|z| = r > 1$.

(1) $\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz$; (2) $\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz$.

解: (1) 函数 $\frac{\cos \pi z}{(z-1)^5}$ 在 C 内 $z=1$ 处不解析, 但 $\cos \pi z$ 在 C 内处处解析,

根据公式 $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

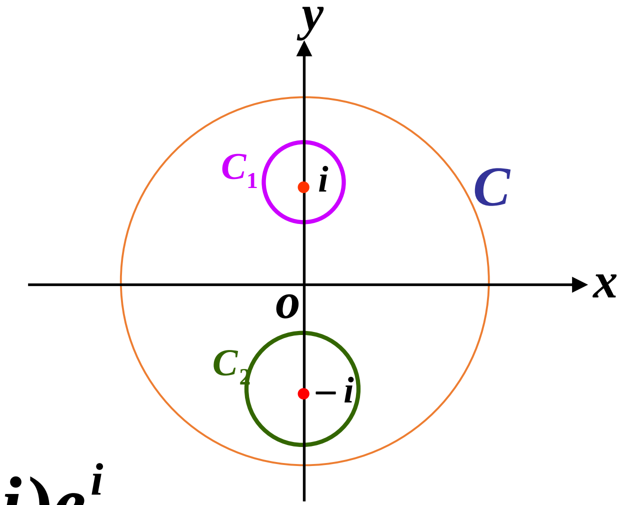
$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{(5-1)!}(\cos \pi z)^{(4)}\Big|_{z=1} = -\frac{\pi^5 i}{12};$$

(2) 函数 $\frac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 C 内的 $z = \pm i$ 处不解析,在 C 内以 i 为中心作一个正向圆周 C_1,

以 $-i$ 为中心作一个正向圆周 C_2, 则函数 $\frac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在由 C, C_1, C_2 围成的

区域内解析.

根据复合闭路原理，



$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z$$

$$\oint_{C_1}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{\dfrac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{(2-1)!}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i}=\frac{(1-i)e^i}{2}\pi,$$

同理可得 $\displaystyle\oint_{C_2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z=\frac{-(1+i)e^{-i}}{2}\pi$，于是

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z=\frac{(1-i)e^i}{2}\pi+\frac{-(1+i)e^{-i}}{2}\pi=\frac{\pi}{2}(1-i)(e^i-ie^{-i})$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-i)^2(\cos 1-\sin 1)=i\pi(\sin 1-\cos 1).$$

上页 下页 返回 结束

第七节　调和函数

一、调和函数的概念

二、解析函数与调和函数的关系

三、计算实例

一、调和函数的概念

定义　如果二元实变函数 $\phi(x,y)$ 在区域 D内具有二阶连续偏导数，并且满足*Laplace*方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

则称 $\phi(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数.

说明 **工程中的许多问题，如平面上的稳定温度场、静电场和稳定流场等都满足Laplace方程.**

二、解析函数与调和函数的关系

定理　任何在区域 D 内解析的函数, 它的实部和虚部都是 D 内的调和函数.

证明：设 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为区域 D 内的一个解析函数，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

根据解析函数的导数仍是解析函数，因此 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 具有任意阶的连续偏导数，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 分别关于x,y求导

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}.$$

再由二阶导函数的连续性

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，因此 $u(x,y)$ 是调和函数.

同理 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$, 因此$v(x,y)$是调和函数.

问题 任给区域D内的两个调和函数$u(x,y)$, $v(x,y)$, $u(x,y)+iv(x,y)$在D内是否为解析函数?

答：不一定. 例如：$f(z)=x^2-y^2-2xyi$.

定义 设 $u(x,y)$ 为区域 D 内给定的调和函数, 我们把使$u+iv$在D内构成解析函数的调和函数$v(x,y)$称为$u(x,y)$的**共轭调和函数.**

推论：区域 D 内解析函数的虚部为实部的共轭调和函数.

问题 已知 $u(x,y)$是区域D上的调和函数，是否存在$u(x,y)$的共轭调和函数$v(x,y)$，使得函数 $f(z)=u+iv$是D上的解析函数?

或者已知调和函数 $v(x,y)$ 时，是否存在调和函数 $u(x,y)$，使得 $f(z)=u+iv$是D上的解析函数?

三、计算实例

例1 证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为全平面上的调和函数，并求以其为实部的解析函数.

解： 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6y,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3x^2,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y,$

于是 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 故 $u(x,y)$ 为调和函数.

令 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy,$

$$v=-6\int xy\mathrm{d}y=-3xy^2+g(x) \Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+g'(x),$$

又 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-3y^2+3x^2,$

$$\Longrightarrow -3y^2+g'(x)=-3y^2+3x^2,$$

上页 下页 返回 结束

$$g(x)=\int 3x^2\mathrm{d}x = x^3 + c, \quad (c\text{为任意常数})$$

$$v(x,y)= x^3 - 3xy^2 + c$$

$$w = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2 + c).$$

$$w = f(z) = i(z^3 + c).$$

解法2：

$$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y = i\left(3x^2 - 3y^2\right) - 6xy = 3iz^2, z \in \mathbb{C}$$

$$f(z) = iz^3 + iC, \; C \in \mathbb{R}.$$

注解 已知解析函数的实部求虚部，至多相差一个常数。

2022年秋季教学课件

复变函数与积分变换

汪 玉 峰

武汉大学数学与统计学院

第四章　　复 级 数

第一节　复数项级数

一、复数项级数

二、例题

一、复数项级数

1. 复数序列的极限

定义1.1 自变量取正整数的复值函数 $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{C}$ 称为复数序列, 记作$z_n=f(n)$ 或$\{z_n\}$. $z_n=a_n+ib_n, a_n, b_n\in\mathbb{R}$ 称为通项(一般项). 习惯上, 复数序列也写成

$$z_1=a_1+ib_1, z_2=a_2+ib_2,\ z_3=a_3+ib_3,\cdots,\ z_n=a_n+ib_n,\cdots.$$

复变函数的极限定义搬过来，我们有

定义1.2 设$\{z_n\}$是一个复数序列, z_0是一个复常数. 如果

$$(\forall\varepsilon>0)\left(\exists N\in\mathbb{Z}^+\right)\left(n>N\Rightarrow|z_n-z_0|<\varepsilon\right)$$

则称n趋于无穷大时数列$\{z_n\}$以 z_0为极限, 记作

$$\lim_{n\to\infty}z_n=z_0 \text{ 或 } z_n\to z_0\ (n\to\infty).$$

此时也称复数列收敛, 否则称复数列发散 .

同复变函数的极限一样，我们有下列等价定理.

定理 1.1 设 $z_n = a_n + ib_n$,则复数列$\{z_n\}$收敛于$z_0 = a_0 + ib_0$当且仅当实数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$分别收敛于a_0和b_0.

注解 由等价定理知，实数列一些性质和运算法则可以搬到复数列上.

如Cauchy收敛原理：

复数列$\{z_n\}$收敛当且仅当对任意正数ε，存在$N > 0$，当$m, n > N$ 时，

$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$

2. 复数项级数的和

定义1.3 形如

$$z_1 + z_2 + z_3 + \cdots z_n + \cdots$$

称为复数项级数，简称复级数. 记作 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 或 $\sum z_n$.

定义1.4 如果部分和序列

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

收敛,则称复级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛. 并且，极限 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ 称为复级数的和，也称 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 收敛于 σ. 记作

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

若部分和数列 $\{\sigma_n\}$ 不收敛, 则称复级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散.

定理1.2 复级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n)$ 收敛的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛.

证明： $\sigma_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + i(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$

$$= \omega_n + i\tau_n,$$

由此证实了定理.

注解　由定理1.2及其证明知，

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n) = a + bi \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b.$$

定理1.3（收敛必要条件）　如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} z_n = 0.$

证明：如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 收敛，那么

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(\sigma_n - \sigma_{n-1}) = 0.$$

定理1.4（Cauchy收敛原理）　复级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 收敛当且仅当对任意正数ε，存在 $N>0$，

当 $n>N$，p为正整数时，

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

证明：利用等价定理(定理1.2)及实数列的Cauchy收敛原理，并利用三角不等式

上页　下页　返回　结束

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}\right|,\left|b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}\right|\le\left|z_{n+1}+z_{n+2}+\cdots+z_{n+p}\right|$$

$$\le\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}\right|+\left|b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}\right|.$$

3. 绝对收敛与条件收敛

定义1.5 如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|z_n|$ 收敛，则称复级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n$ 绝对收敛. 非绝对收敛的收敛级数称为条件收敛.

定理1.5 如果复级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n$ 收敛.

证明: 由于$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$收敛, 那么$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{Z}^+$,使当$n>N$时,对$\forall p\in\mathbb{Z}^+$,有 $\left|z_{n+1}\right|+\left|z_{n+2}\right|+\cdots+\left|z_{n+p}\right|<\varepsilon.$ 从而

$$\left|z_{n+1}+z_{n+2}+\cdots+z_{n+p}\right|\le\left|z_{n+1}\right|+\left|z_{n+2}\right|+\cdots+\left|z_{n+p}\right|<\varepsilon,$$

这蕴含结论成立(引用Cauchy收敛原理(定理1. 4)).

定理1.6　设 $z_n=a_n+ib_n$,则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 绝对收敛当且仅当实级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$都绝对收敛.

证明：由于

$$|a_k|,|b_k|\le\sqrt{a_k^2+b_k^2}\le|a_k|+|b_k|\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}|a_k|,\sum_{k=1}^{n}|b_k|\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+b_k^2}\le\sum_{k=1}^{n}|a_k|+\sum_{k=1}^{n}|b_k|,$$

那么结论立即得到.

定理1.7(Cauchy)设复级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n'$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n''$ 绝对收敛,且和分别为σ'及σ'',则级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(z_1'z_n''+z_2'z_{n-1}''+\cdots+z_n'z_1''\right)$$

绝对收敛于$\sigma'\sigma''$.

二、例题

例1 数列 $\alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}}$ 是否收敛?

解：因为

$$\alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\Rightarrow a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n},\quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

所以数列 $\alpha_n = (1+\frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 1.$

例2 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$ 是否绝对收敛?

解: 因为

$$\left|\frac{(8i)^n}{n!}\right| = \frac{8^n}{n!},$$

所以由正项级数的比值判别法知: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$ 收敛,故原级数绝对收敛.

例3　级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i\right]$ 是否绝对收敛?

解: 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 也收敛, 故原级数收敛.

但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 为条件收敛, 所以原级数非绝对收敛.

第二节　幂级数

一、复变函数项级数和复变函数序列

二、幂级数

一、复变函数项级数和复变函数序列

定义2.1 设 $f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ 定义在复平面点集E上,则

$$f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$$

称作E上的复变函数项级数, 记作$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$或$\sum f_n(z)$.

如果对于任意$z\in E$,数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$收敛于某个复数$f(z)$,则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$在$E$上收敛于复函数$f(z)$, $f(z)$称作复变函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$的和函数.

记作$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)=f(z)$.

而 $f_1(z)$, $f_2(z),\cdots$, $f_n(z),\cdots$ 称作复变函数序列, 记作$\{f_n(z)\}_{n=1}^{+\infty}$或 $\{f_n(z)\}$.若

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(z)=\varphi(z),\forall z\in E$, $\varphi(z)$称作复变函数序列的极限函数.

上页 下页 返回 结束

二、幂级数

1. 幂级数的概念及Abel定理

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots, \quad c_n \in \mathbb{C} \tag{2.1}$$

称为幂级数.

定理一 (Abel) 如果幂级数(2.1)在某点$z_1(\neq a)$收敛, 则必在圆$U: |z-a| < |z_1 - a|$内绝对收敛. 如果幂级数(2.1)在某点$z_0(\neq a)$发散, 则必在圆$U: |z-a| > |z_0 - a|$内发散.

证明: 证明的基本思想与《高等数学》中实幂级数完全一致.

设z是圆U内任一点. 因为级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_1 - a)^n$收敛, 所以它的各项必有界, 即

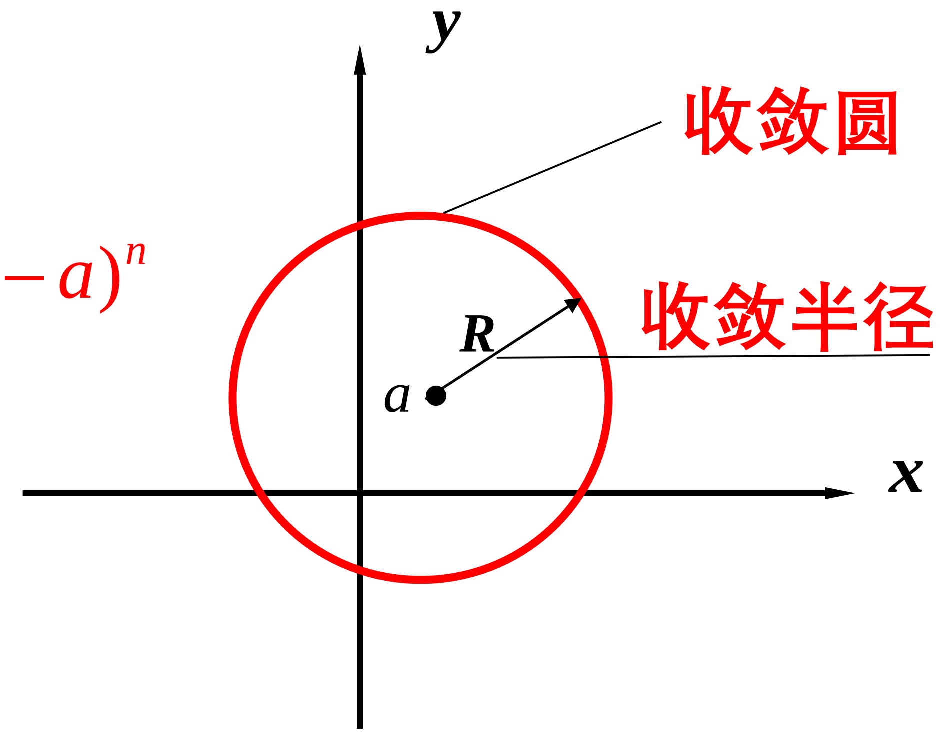
$$\left| c_n (z_1 - a)^n \right| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

于是有

$$\left|c_n(z-a)^n\right| = \left|c_n(z_1-a)^n\right| \cdot \left|\frac{z-a}{z_1-a}\right|^n \le M\left|\frac{z-a}{z_1-a}\right|^n$$

由于$|z-a|<|z_1-a|$, 故级数$\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\dfrac{z-a}{z_1-a}\right|^n$为收敛的等比级数. 因而, 级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$在圆$U$内绝对收敛. 定理另一部分用反证法可证.

2. 收敛半径



同实幂级数类似, 存在有限正数R, 使$\sum c_n(z-a)^n$在圆周$|z-a|=R$内绝对收敛, 在圆周$|z-a|=R$外发散, R称为此幂级数的收敛半径, $|z-a|<R$为收敛圆盘, $|z-a|=R$为收敛圆.

注解 一个幂级数在收敛圆周上有三种情况:

1)处处收敛;

2)处处发散;

3)既有收敛点, 也有发散点.

方法1（比值法） 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda$, 则

(1) $\lambda = 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在复平面内处处收敛, 即 $R = \infty$.

(2) $\lambda = \infty$, 则对 $z \neq 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 均发散, 即 $R = 0$.

(3) $0 < \lambda < \infty$, 那么收敛半径 $R = \dfrac{1}{\lambda}$.

证明: 只证明(3).

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}z^{n+1}|}{|c_n z^n|}=|z|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lambda|z|,$$

那么，根据达朗贝尔判别法，

$$|z|<\frac{1}{\lambda}\text{时},\sum_{n=1}^{\infty}|c_n z^n|\ \text{收敛}\ \xrightarrow{\text{Abel定理}}\ \sum_{n=1}^{\infty}|c_n z^n|\ \text{在}|z|<\frac{1}{\lambda}\text{内收敛}. \quad (2.2)$$

另一方面，用反证法证明断言：

$$|z|>\frac{1}{\lambda}\text{时},\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n\text{发散}. \quad (2.3)$$

假设(2.3)不真. 那么存在$|z_0|>1/\lambda$使得$\sum_{n=1}^{\infty}c_n z_0^n$收敛. 取$z_1$满足$|z_0|>|z_1|>1/\lambda$.

根据Abel定理，$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n z_1^n|$收敛. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}z_1^{n+1}|}{|c_n z_1^n|}=|z_1|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lambda|z_1|>1,$$

这与达朗贝尔判别法矛盾！因此，(2. 3) 成立.

总之，联合 (2. 2) (2. 3) 知结论 (3) 成立.

方法2 (根值法) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lambda$，则

(1) $\lambda=0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 在复平面内处处收敛，即 $R=\infty$.

(2) $\lambda=\infty$, 则对 $z\neq 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 均发散，即 $R=0$.

(3) $0<\lambda<\infty$, 那么收敛半径 $R=\dfrac{1}{\lambda}$.

例 试求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^p}$ (p为正整数) 的收敛半径.

解：因为$c_n = \dfrac{1}{n^p}$,

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p} = 1.$$

所以 $R = \dfrac{1}{\lambda} = 1.$

3. 幂级数的运算性质

(1) 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ R = r_1,\quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,\ R = r_2.$

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n,$$

$$f(z)g(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n) z^n,$$

其中 $|z| < R$, $R = \min(r_1, r_2)$

定理四 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$的收敛半径为$R$, 则

(1) 它的和函数$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$在收敛圆$|z-a|<R$内解析.

(2) 当$|z-a|<R$时， $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$.

(3) 设C为$|z-a|<R$内的一条(可求长)光滑曲线，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_C (z-a)^n \mathrm{d}z \text{ 或 } \int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}.$$

例 把函数$\dfrac{1}{z-b}$表成形如$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$的幂级数, 其中$a$与$b$是不相等的复常数 .

解: 把函数$\dfrac{1}{z-b}$写成如下的形式:

$$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{(z-a)-(b-a)}=-\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{b-a}}$$

代数变形，使其分母中出现$(z-a)$

凑出$\dfrac{1}{1-g(z)}$

当 $\left|\dfrac{z-a}{b-a}\right|<1$时，$\dfrac{1}{1-\frac{z-a}{b-a}}=1+\left(\dfrac{z-a}{b-a}\right)+\left(\dfrac{z-a}{b-a}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{z-a}{b-a}\right)^n+\cdots,$

故 $\dfrac{1}{z-b}=-\dfrac{1}{b-a}-\dfrac{1}{(b-a)^2}(z-a)-\dfrac{1}{(b-a)^3}(z-a)^2-\cdots-\dfrac{1}{(b-a)^{n+1}}(z-a)^n-\cdots$

设 $|b-a|=R$，那末当 $|z-a|<R$时，级数收敛，且其和为$\dfrac{1}{z-b}$.

上页 下页 返回 结束

第三节　Taylor级数

一、解析函数的泰勒展式

二、Taylor展开应用举例

一、解析函数的泰勒展式

Taylor定理

定理 设$f(z)\in A(D), a\in D, D$为区域. 若圆盘$U:|z-a|<R$含于D,则

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

这里

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a), n=0,1,2,\cdots,$$

其中$C_\rho:|\zeta-a|=\rho, 0<\rho<R.$

证明: 设$z\in U$. $\exists C_\rho:|\zeta-a|=\rho, 0<\rho<R$, 使$z$在$C_\rho$内. 由柯西积分公式,

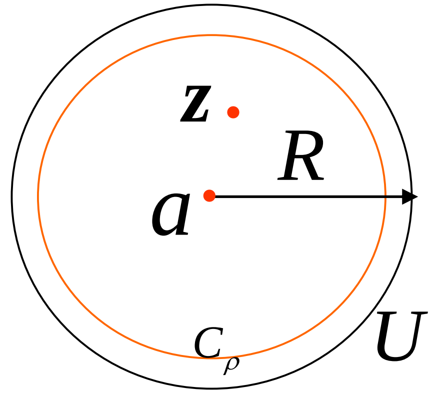
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

由于

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\frac{1}{1-(z-a)/(\zeta-a)},$$

和

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|=\frac{|z-a|}{\rho}<1,\quad \zeta\in C_\rho,$$



那么

$$\frac{1}{1-(z-a)/(\zeta-a)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

右端级数在C_ρ上关于ζ一致收敛.以C_ρ上有界函数$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-a}$乘上式两边得,

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n,$$

右端级数在C_ρ上关于ζ一致收敛. 上式两边沿C_ρ积分,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\,(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}(z-a)^n.$$

1 定理表明：若$f(z)\in A(U(a,\ R)), R\in(0,+\infty)$，则

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, z\in U(a,R), \tag{3.1}$$

这个表达式称为f在$z=a$点的Taylor展式. 这个表达式的右端幂级数称为f在$z=a$点的Taylor级数. 而

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\triangleq c_n$$

称作Taylor系数. 根据定理，Taylor系数还可以用积分表示.

2 在《高等数学》中，某邻域无穷可导的实变函数不一定在该邻域可以展开成幂级数. 但是，解析函数在解析点可以展开成幂级数的.

3 Taylor级数的收敛半径大于或等于R. 从定理证明过程看，解析函数的幂级数展开可以归结为柯西核$\dfrac{1}{\zeta-z}$的展开！

结论1 幂级数是它的和函数在收敛圆盘内的Taylor展式. 换言之,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = f(z), z \in U(a,R) \Rightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n = 0,1,2,\cdots.$$

求和

证明: 利用逐项积定理.

解析函数幂级数展式唯一性

结论2 若f在某圆盘解析, 则它在此圆盘内的幂级数展式是唯一的.

换言之,

展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, z \in U(a,R) \Rightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n = 0,1,2,\cdots.$$

证明: 利用逐项积定理.

二、Taylor展开应用举例

例1 求 $e^z, \cos z$及$\sin z$在 $z=0$ 的泰勒展开式.

解：如《高等数学》一样，利用Taylor定理直接计算得

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad R = +\infty;$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad , R = +\infty;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, R = +\infty.$$

注解 用直接法将函数展开成Taylor级数：计算

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \; n = 0, 1, 2, \cdots$$

再用Taylor定理确定R.

例2 设 $f(z)=\ln(1+z)$是$\mathrm{Ln}(1+z)$ 的单值解析分支,满足条件 $f(0)=0$,求其在 $z=0$ 的泰勒展开式.

解：-1是它的一个奇点，所以

$$[\ln(1+z)]'=\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n \quad (|z|<1)$$

设C为收敛圆 $|z|<1$ 内从 0 到 z 的线段, 将展开式两端沿 C逐项积分, 得

$$\int_0^z \frac{1}{1+z}\mathrm{d}z=\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \mathrm{d}z,$$

即

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}+\cdots,\quad |z|<1.$$

例3 求函数 $f(z)=(1+z)^{\alpha}, f(0)=1$, 在 $z=0$ 处的幂级数展开式,并求收敛半径.

解：同《高等数学》，计算在 $z=0$ 处的 n 阶导数

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1).$$

二项展开式的推广

利用Taylor定理得

$$f(z)=(1+z)^{\alpha}=1+\alpha z+\binom{\alpha}{2}z^{2}+\cdots+\binom{\alpha}{n}z^{n}+\cdots, \quad |z|<1,$$

这里

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

小结

借助于一些已知基本初等解析函数的Taylor展开式(上面例1–例3)，结合解析函数的性质，幂级数运算性质（四则运算，逐项求导，逐项积分等)和其它数学技巧（如代换等），求解其它初等解析函数的Taylor展式. 这种方法通常称为间接法.

例如，求 $\sin z$ 在 $z=0$ 的Taylor展开式.

$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

间接法的优点:

不需要求各阶导数与收敛半径，因而比直接展开更为简洁，使用范围也更为广泛.

例4 把函数 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解：由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 在 $|z|=1$ 上有一奇点 $z=-1$，且在 $|z|<1$ 内处处解析,

可展开成 z 的幂级数,

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots \quad |z|<1$$

上式两边逐项求导,

$$\frac{1}{(1+z)^2}=-\left(\frac{1}{1+z}\right)'=1-2z+3z^2-\cdots+(-1)^{n-1}nz^{n-1}+\cdots, \quad |z|<1.$$

注解 本题可以直接用公式:

$$(1+z)^\alpha=1+\alpha z+\binom{\alpha}{2}z^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}z^n+\cdots, \ |z|<1.$$

例5 将$e^z\cos z$展成z的幂级数.（课后习题类似题）

解法1： 容易知道收敛半径$R=+\infty$. 由于

$$e^z\cos z=\frac{1}{2}\left[e^{(1+i)z}+e^{(1-i)z}\right],$$

那么

$$e^z\cos z=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}z^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1-i)^n}{n!}z^n\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n+(1-i)^n}{n!}z^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n\left(e^{\frac{n\pi}{4}i}+e^{\frac{n\pi}{4}i}\right)}{n!}z^n$$

继续化简得

$$e^z\cos z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}z^n.$$

解法2： 用级数乘法.

$$e^z \cos z = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^j}{j!} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \sum_{j,k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{j!(2k)!} z^{j+2k}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j+2k=n} \frac{(-1)^k}{j!(2k)!} \right) z^n$$

(Cauchy乘积公式)

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{2k}{n} \right) z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{n!} \mathrm{Re}\left[(1+i)^n \right] \right\} z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n \cos \frac{n\pi}{4}}{n!} z^n.$$

第四节　Laurent级数

一、Laurent展式

二、例题

一、Laurent展式

1. 双边幂级数

形如

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad (4.1)$$

的幂级数称为双边幂级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} \xrightarrow{\zeta=(z-z_0)^{-1}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^{n} \xrightarrow{\text{收敛半径}R} |\zeta|<R\text{收敛} \longrightarrow |z-z_0| > \frac{1}{R} = R_1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \xrightarrow{\text{收敛半径}R_2} |z-z_0| < R_2$$

收敛域

小结

1) $R_1 > R_2$: 两收敛域无公共部分,

2) $R_1 < R_2$: 两收敛域有公共部分 $R_1 < |z-z_0| < R_2$.

定义4.1　若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} \quad 和 \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \tag{4.2}$$

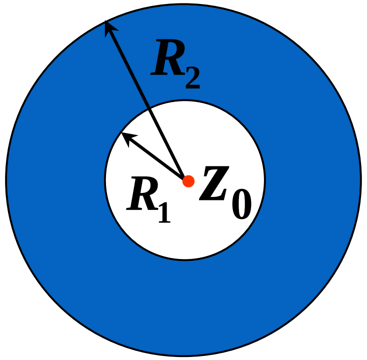
都收敛，则称双边幂级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \tag{4.3}$$

收敛，并且，双边幂级数的和函数等于(4.1)两个幂级数的和函数相加. 进一步，双边幂级数(4.2)发散当且仅当(4.1)中至少一个幂级数发散.

类似定义双边幂级数绝对收敛、一致收敛和内闭一致收敛，等等.

2. 幂级数的性质搬至双边幂级数



前一部分讨论表明：双边幂级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$的收敛区域为圆环域$R_1<|z-z_0|<R_2$.

上页　下页　返回　结束

定理4.0 若双边幂级数（4.3）的收敛圆环为

$$H: r < |z - z_0| < R \quad (0 \le r < R \le +\infty)$$

则

1) 双边幂级数在H内收敛且内闭收敛于$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$;

2) 和函数$f(z)$在H内解析，即$f \in A(H)$;

3) 在H内可逐项求导 p 次$(p = 1, 2, \cdots)$，即

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left[(z - z_0)^n \right]^{(p)}, z \in H.$$

4) 可沿H内分段光滑曲线C逐项积分,即

$$\int_C f(z) \mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_C (z - z_0)^n \mathrm{d}z.$$

上页 下页 返回 结束

3. 解析函数的洛朗(Laurent)展开

洛朗(Laurent)定理

定理4.1 在圆环$H: r<|z-a|<R \ (0\le r<R\le +\infty)$内解析的函数必可展成双边幂级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \tag{4.4}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots), \tag{4.5}$$

Γ为圆$|\zeta-a|=\rho(r<\rho<R)$,并且展式是唯一的.

证明:设z为圆环H内任意取定的点,作含于H内的圆周$\Gamma_1:|\zeta-a|=\rho_1$, $\Gamma_2:|\zeta-a|=\rho_2$,使得 $\rho_1<|z-a|<\rho_2$, 由柯西积分公式有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{4.6}$$

于Γ_2上，$\dfrac{1}{\zeta-z}=\dfrac{1}{\zeta-a}\dfrac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$关于$\zeta$一致收敛. 因此， 我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,(n=0,1,2,\ldots). \tag{4.7}$$

于Γ_1上，$\dfrac{1}{\zeta-z}=-\dfrac{1}{z-a}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}}=-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}$关于$\zeta$一致收敛.因此， 我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta(z-a)^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-a)^n,$$

其中

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta,(n=1,2,\ldots). \tag{4.8}$$

故 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$,其系数$c_n$由(4.7)(4.8)给出.由Cauchy定理得,(4.7)和(4.8)可换成沿$\Gamma:|\zeta-a|=\rho(r<\rho<R)$的积分.由此得到(4.5).

最后,来证展式是唯一的.若

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n(z-a)^n,\ z\in H,$$

其两边乘Γ上的有界函数$\dfrac{1}{(z-a)^{m+1}}$并沿Γ积分得

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}}d\zeta=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n\int_\Gamma \frac{1}{(\zeta-a)^{-n+m+1}}d\zeta=2\pi i c'_m.$$

即

$$c'_m=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}}d\zeta.$$

故 $c_n=c'_n\ \ (n=0,\pm1,\cdots)$. 证毕.

定理4.1表明：在圆环$H: r<|z-a|<R \ (0\le r<R\le+\infty)$内解析的函数必可展成

$$f(z)=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n}_{\text{Laurent级数}}=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{主要部分}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n}_{\text{解析部分}}$$

其中

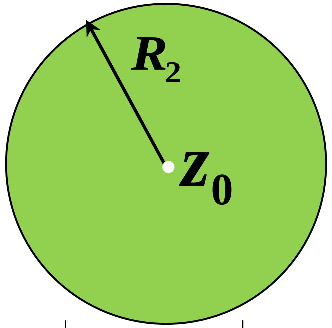
$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

Laurent系数

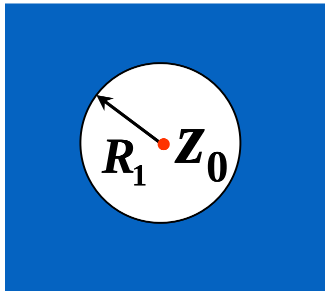
Γ为圆$|\zeta-a|=\rho(r<\rho<R)$，并且展式是唯一的.

Taylor级数为Laurent级数的特殊情形.

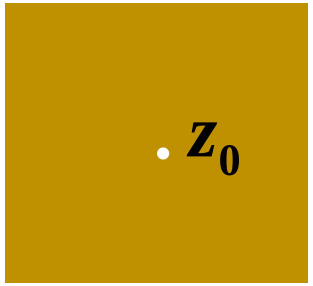
特殊圆环：



$0<|z-z_0|<R_2$



$R_1<|z-z_0|<\infty$



$0<|z-z_0|<\infty$

二、例题

理论上应该有两种方法：**直接法与间接法**

(1) 直接展开法：**利用定理公式计算系数** c_n

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

然后写出

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

这种方法只有在找不到更好方法时才用.

(2) 间接展开法

根据解析函数 Laurent 级数展开式的唯一性，可运用代数运算、代换、求导和积分等方法去展开 .

这一方法成为Laurent 级数展开的常用方法。

例1 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域:

1) $0<|z|<1$; 2) $1<|z|<2$; 3) $2<|z|<+\infty$.

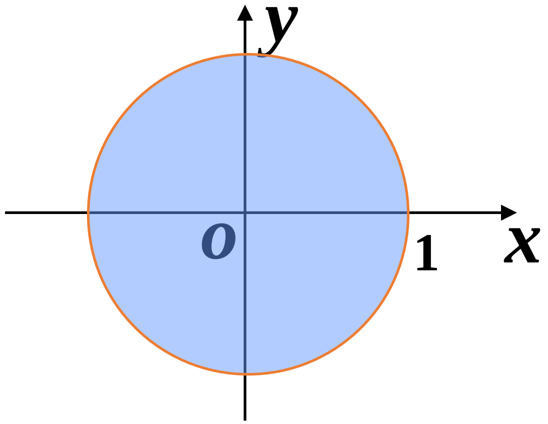
内解析，把 $f(z)$ 在这些区域内展成Laurent级数.

解:

$$f(z)=\frac{1}{(1-z)}-\frac{1}{(2-z)},$$

1) 在 $0<|z|<1$ 内，由于 $|z|<1$，从而 $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$ 则 $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$

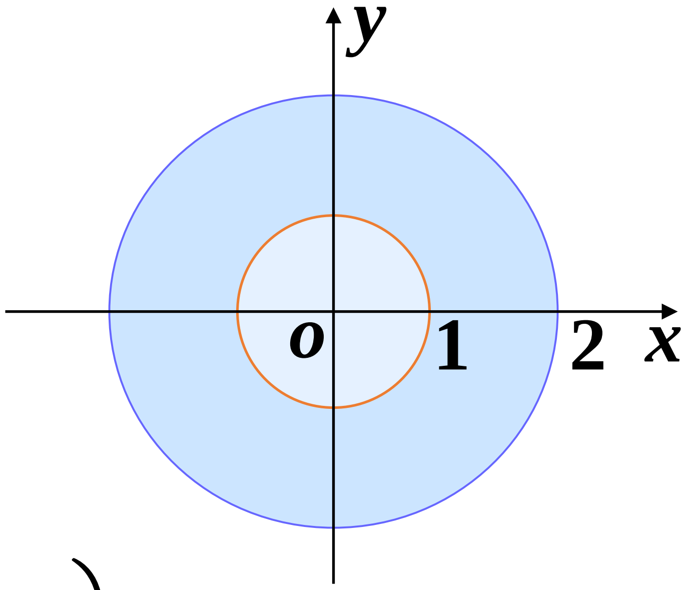
$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right)$$



上页 下页 返回 结束

所以 $f(z)=(1+z+z^2+\cdots)-\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{4}+\cdots\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}z+\dfrac{7}{8}z^2+\cdots$

2) 在 $1<|z|<2$ 内,



由 $|z|>1 \longrightarrow \left|\dfrac{1}{z}\right|<1$

$|z|<2 \longrightarrow \left|\dfrac{z}{2}\right|<1$

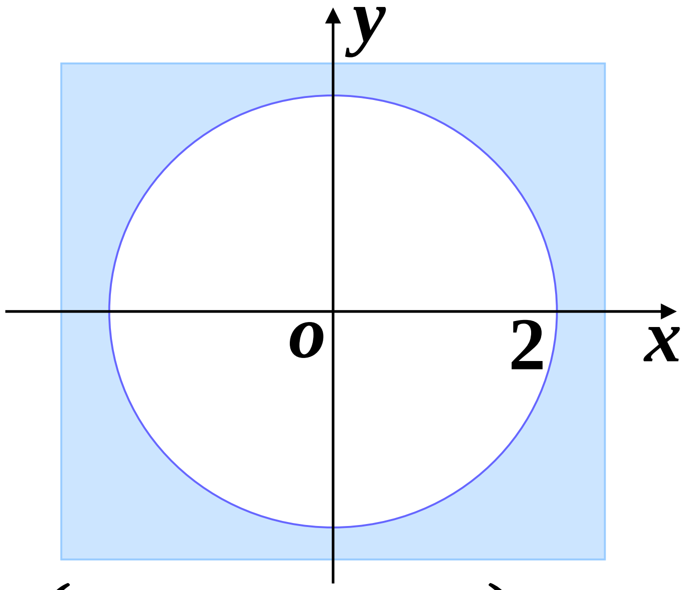
$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

且仍有

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right)$$

于是 $f(z)=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots\right)$

$$=\cdots-\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z^{n-1}}-\cdots-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}-\cdots$$



3) 在 $2<|z|<\infty$ 内,

由 $|z|>2 \longrightarrow \left|\frac{2}{z}\right|<1$ 此时 $\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\cdots\right)$

此时 $\left|\frac{1}{z}\right|<\left|\frac{2}{z}\right|<1$, 仍有 $\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$

故 $f(z)=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\cdots\right)-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)=\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\cdots.$

例2 求函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$分别在$z=1,2$去心邻域内的Laurent展式.

解：(1) 在1的(最大)去心邻域$0<|z-1|<1$内：

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-(z-1)}=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n.$$

(2) 在2的(最大)去心邻域$0<|z-2|<1$内：

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{(z-2)+1}=\frac{1}{z-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n.$$

例3 求函数$f(z)=\dfrac{1}{1-z}e^z$在圆环$0<|1-z|<+\infty$内的Laurent展开式.

解：$f(z)$在$0<|1-z|<+\infty$内解析,故

$$f(z)=\frac{1}{1-z}e^z=\frac{1}{1-z}e^{z-1+1}=-\frac{e}{z-1}e^{z-1}=-\frac{e}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}=-e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-1)^{n-1}$$

$$(0<|z-1|<+\infty).$$

2022年秋季教学课件

复变函数与积分变换

汪 玉 峰

武汉大学数学与统计学院

第五章　　留　数

第一节　孤立奇点

第二节　留数

第三节　留数在定积分上应用

第一节　孤立奇点

一、可去奇点

二、极点

三、本性奇点

四、零点与极点关系

五、函数在无穷远性态

一、孤立奇点分类

如果函数$f(z)$在a的某去心邻域$0<|z-a|<r$内解析，则称a为$f(z)$的孤立奇点.

如果函数$f(z)$在∞的某去心邻域$r<|z|<+\infty$内解析，则称∞为$f(z)$的孤立奇点.

于是，如果a为$f(z)$的孤立奇点，则存在$R>0$，使$f(z)$在$0<|z-a|<R$内可展成$z-a$的Laurent级数. 在圆环$H:0<|z-z_0|<R\ (0<R\leq+\infty)$内解析的函数$f$可展成

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{主要部分}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n}_{\text{解析部分}}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\quad(n=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

Γ为圆$|\zeta-z_0|=\rho(r<\rho<R)$，并且展式是唯一的.

定义1.1 设z_0为$f(z)$的孤立奇点，有三种情况发生：

1）如果$f(z)$在点z_0的主要部分为零,则称z_0为$f(z)$的可去奇点;

2）如果$f(z)$在点z_0的主要部分为有限项,设为

$$\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0},\quad (c_{-m}\neq 0)$$

那么称z_0为$f(z)$的m阶极点（m级极点）. 若$m=1$,则称z_0为$f(z)$的单极点.
若$m>1$,则称z_0为$f(z)$的m重极点;

3）如果$f(z)$在点z_0的主要部分有无限多项,那么称z_0为$f(z)$的本性奇点.

小结

孤立奇点分类	可去奇点	m 阶极点	本性奇点
Laurent系数特征	$\forall n<0, c_n=0$	$c_{-m}\neq 0, \forall n>m, c_{-n}=0$	无限多个$n<0$使$c_n\neq 0$

二. 可去奇点的特征

命题 1.1 若z_0为$f(z)$的可去奇点,则下列三条件等价:

1) $f(z)$在点z_0的主要部分为零;

2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=b\ (b\neq\infty)$;

3) $f(z)$在点z_0的某去心邻域内有界.

因此,它们中任何一条都是可去奇点的特征.

证明: "1) $\Rightarrow$ 2)" 由于

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots \quad (0<|z-z_0|<R),$$

那么$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0\neq\infty$;

"2) $\Rightarrow$ 3)" 由于$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=b\ (b\neq\infty)$, 由函数极限的性质, $f(z)$在点的某邻域去心邻域内有界;

"3) $\Rightarrow$ 1)" 设$|f(z)|\le M$，$0<|z-z_0|<r$. 考察$f(z)$在点z_0的主要部分

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n},\ c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta, (n=-1,-2,\ldots),$$

Γ为圆周$|\zeta - z_0|=\rho$ $(0<\rho<r)$. 由于ρ可以充分小, 于是

$$|c_n|\le \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|^{n+1}}|d\zeta|\le \frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{n+1}}2\pi\rho=\frac{M}{\rho^n}\to 0 \quad (\rho\to +0,\ n=-1,-2,\cdots),$$

得 $c_n=0$ $(n=-1,-2,\cdots)$. 即$f(z)$在点z_0的主要部分为零.

注解 若z_0为$f(z)$的可去奇点,则

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots \quad (0<|z-z_0|<R).$$

若命$f(z_0)=c_0$,则$f(z)$在$|z-z_0|<R$内解析. 如$f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$,若令$f(0)=1$,则

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z}, & z\ne 0\\ 1, & z=0\end{cases}\in A(\mathbb{C}).$$

即可将$f(z)$在z_0加以适当定义,使$f(z)$在$z=z_0$解析.

例　确定函数$f(z)=\dfrac{\tan z}{z}$的孤立奇点$z=0$的类型.

解：由于$\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\tan z}{z}=1$，那么$z=0$为 $f(z)=\dfrac{\tan z}{z}$ 的可去奇点.

三. 极点的特征

命题 1.2　若z_0为$f(z)$的极点,则下列三条件等价：

1） $f(z)$在点z_0的主要部分为

$$\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}\quad (c_{-m}\neq 0);$$

2） $f(z)$在点z_0的某去心邻域$U(z_0,\delta)$内能表成

局部因式分解

$$f(z)=\frac{\lambda(z)}{(z-z_0)^m},\quad z\in U(z_0,\delta),\quad \lambda\in A(U(z_0,\delta)),\quad \lambda(z_0)\neq 0.$$

3） $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$以点z_0为m阶零点(可去奇点当解析点看,只要令$g(z_0)=0$).

上页　下页　返回　结束

证明: "1) ⇒ 2)" 若1)为真, 则在点 z_0 的某去心邻域内有

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$$

$$=\frac{1}{(z-z_0)^m}[c_{-m}+c_{-(m-1)}(z-z_0)+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_0(z-z_0)^m+\cdots\cdots]=\frac{\lambda(z)}{(z-z_0)^m},z\in U(z_0,\delta),$$

其中$\lambda(z)$显然在点z_0的邻域$U(z_0,\delta)$内解析, 且$\lambda(z_0)=c_{-m}\neq 0$;

"2) ⇒ 3)" 若2)为真, 则在点 z_0 的某去心邻域内有

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-z_0)^m}{\lambda(z)},\quad z\in U(z_0,\delta),\quad \lambda\in A(U(z_0,\delta)),\quad \lambda(z_0)\neq 0.$$

其中$\dfrac{1}{\lambda(z)}$在z_0的邻域$U(z_0,\delta)$内解析且$\dfrac{1}{\lambda(z_0)}\neq 0$.因此, z_0为g的m阶零点;

"3) ⇒ 1)" 由z_0为$g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$的m阶零点,则在点z_0的某邻域$U(z_0,\delta)$内有

$$g(z)=(z-z_0)^m\varphi(z),\ z\in U(z_0,\delta),\quad \varphi\in A(U(z_0,\delta)),\quad \varphi(z_0)\neq 0.$$

因此，我们有

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\frac{1}{\varphi(z)},\quad z\in U(z_0,\delta),\quad \frac{1}{\varphi}\in A(U(z_0,\delta)),\quad \frac{1}{\varphi}(z_0)\neq 0.$$

这导致在此邻域成立

$$\frac{1}{\varphi(z)}=c_{-m}+c_{-(m-1)}(z-z_0)+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_0(z-z_0)^m+\cdots.$$

于是，f在 z_0 的主要部分为

$$\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0},\quad c_{-m}=\frac{1}{\varphi(z_0)}\neq 0.$$

证毕.

命题 1.1　函数$f(z)$的孤立奇点z_0为极点的充要条件是$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

证明: 下面等价关系链表明定理为真:

函数$f(z)$以z_0为极点 $\Leftrightarrow \exists m>0$: $\dfrac{1}{f(z)}$以点z_0为m阶零点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

注解

命题 1.1更精确描述:

设z_0为$f(z)$的孤立奇点,则z_0为$f(z)$的m级极点的充要条件是

$\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$存在且不为零.

例 确定函数 $f(z)=\dfrac{5z+1}{(z-1)(2z+1)^2}$ 孤立奇点的类型.

解: $f(z)$的孤立奇点为$z=1,-\dfrac{1}{2}$. 由于

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{(2z+1)^2}{5z+1}(z-1)=\frac{4(z-1)}{5z+1}(z+\frac{1}{2})^2,$$

那么1为g的 单零点, $-\dfrac{1}{2}$为g的二阶零点. 故$z=1$为f的单极点, $z=-\dfrac{1}{2}$为$g(z)$的2阶极点.

四. 本质奇点的特征

命题 1.3 $f(z)$的孤立奇点z_0为本性奇点的充要条件是

$$\lim_{z\to z_0} f(z) \neq \begin{cases} b & (\text{有限数}) \\ \infty & \end{cases}, \text{ 即} \lim_{z\to z_0} f(z)\text{不存在}.$$

证明: 利用命题1.1及定理1.2.

推论 1.1 若$z=z_0$为函数$f(z)$的本性奇点,且在点z_0的充分小去心邻域内没有零点,

则$z=z_0$亦为$\dfrac{1}{f(z)}$的本性奇点.

证明: 利用命题1.3, 结论显然.

例 研究函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$ 孤立奇点的类型.

解: $f(z)$的孤立奇点为$z=1$.

$$e^{\frac{1}{z-1}}=1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{(z-1)^n}+\cdots,\ 0<|z-1|<+\infty. \Longrightarrow z=1\text{为}e^{\frac{1}{z-1}}\text{的本质奇点.}$$

小结 我们把孤立奇点分类及判别法总结如下表:

孤立奇点分类	可去奇点	极点	本性奇点
Laurent级数特征	无负幂项	有限负幂项	无限负幂项
极限特点	有限	无穷	不存在

例2 问 $z=0$ 是 $\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 的二级极点吗?

解:

$$\frac{e^z-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-1\right)=\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\cdots=\frac{1}{z}\varphi(z),$$

所以 $z=0$ 不是二级极点, 而是一级极点.

五、解析函数在无穷远的性质

定义 5.1 设函数 $f(z)$在无穷远点某去心邻域$R<|z|<+\infty(R\geq 0)$内解析,则称点∞为 $f(z)$的一个孤立奇点.

注解 若∞是 $f(z)$的奇点的聚点,则∞为 $f(z)$的非孤立奇点.

假如∞为 $f(z)$的孤立奇点,利用变换$w=\dfrac{1}{z}$, 则$\varphi(w)=f(\dfrac{1}{w})$在$0<|w|<\dfrac{1}{R}$内解析,即$w=0$为$\varphi(w)$的孤立奇点.然后把 $f(z)$在∞去心邻域内性质转换为讨论$\varphi(w)$在原点的去心邻域内的性质.

定义 5.2 若$w=0$为$\varphi(w)$的可去奇点,m级极点或本质奇点，则相应地称$z=\infty$为 $f(z)$的可去奇点,m级极点或本质奇点.

定义 5.3 设 $f(z)$在$R<|z|<+\infty$内Laurent展式为 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n z^n+\sum\limits_{n=0}^{-\infty}b_n z^n$. 则对应$\varphi(w)$在$w=0$的Laurent展式

$$\varphi(w)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n w^{-n}+\sum_{n=0}^{+\infty}b_{-n}w^{n}$$

解析部分

称$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n z^n$(正幂)为 $f(z)$在$z=\infty$的主要部分.

注解 有关有限孤立奇点的类型判别法则完全可以转移到无穷远点的情形.

定理 5.1 设$z=\infty$为函数 $f(z)$的孤立奇点.则

1) $z=\infty$为可去奇点$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$存在且有限;

2) $z=\infty$为极点 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$;

3) $z=\infty$为本质奇点极点 $\Leftrightarrow$不存在有限或无穷的极限$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

命题 5.1 设 $f(z)$在孤立奇点∞的Laurent展式为 $f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n+\sum_{n=0}^{-\infty} b_n z^n$.则

1）若$\forall b_n=0, n=1,2,\cdots$,则$\infty$为 $f(z)$的可去奇点;

2）若只有有限个$b_n\neq 0(n\geq 1)$,则∞为 $f(z)$的极点;

3）若有无穷个$b_n\neq 0(n\geq 1)$,则∞为 $f(z)$的本质奇点.

小结 我们把无穷远点作为孤立奇点的分类及判别法总结如下表:

无穷远作为孤立奇点的分类	可去奇点	极点	本质奇点
Laurent级数特征	无正幂项	有限正幂项	无限正幂项
极限特点	有限	无穷	不存在(包含无穷)

无穷远点作为孤立奇点，我们判别其类型也有些特别方法:

命题 5.2 设 $f(z)$在 $R<|z|<+\infty$ 内解析，则 $z=\infty$为 $f(z)$的可去奇点的充要条件：存在 $r>R$, 使得 $f(z)$在 $r<|z|<+\infty$内有界.

命题 5.3 设 $f(z)$在 $R<|z|<+\infty$ 内解析，则 $z=\infty$为 $f(z)$的m阶极点的充要条件：$f(z)=z^m g(z)$, $g(z)$在 $|z|>R$内解析, $g(\infty)\neq 0$.

例 3 函数

$$f(z)=\frac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$$

有些什么奇点, 如果是极点, 指出它的级.

2022年秋季教学课件

复变函数与积分变换

汪 玉 峰

武汉大学数学与统计学院

第五章

留　数

第2节　留数理论

一、留数定理

二、留数的计算

三、无穷远处的留数

一、留数定理

1. 留数的定义

定义1.1 设函数$f(z)$以有限点z_0为孤立奇点,即$f(z)$在点z_0的某去心邻域

$0<|z-z_0|<R$内解析,则称积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\mathrm{d}z,\quad C:|z-z_0|=r,0<r<R$$

为$f(z)$在点z_0的留数(residue),$\mathrm{Res}(f,z_0)$. 即有

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} f(z)\mathrm{d}z,0<r<R.$$

函数$f(z)$在点z_0的某去心邻域$0<|z-z_0|<R$内解析,则

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n,\quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$$

其逐项积分得

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\int_C (z-z_0)^n\mathrm{d}z=2\pi i c_{-1},$$

这导致公式

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=c_{-1},$$

即$f(z)$在$z=z_0$的留数为其Laurent展式之$(z-z_0)^{-1}$的系数.

2 有限可去奇点的留数为零. 即

$$z=z_0\in\mathbb{C}\text{为}f\text{的可去奇点}\Rightarrow \mathrm{Res}(f,z_0)=0.$$

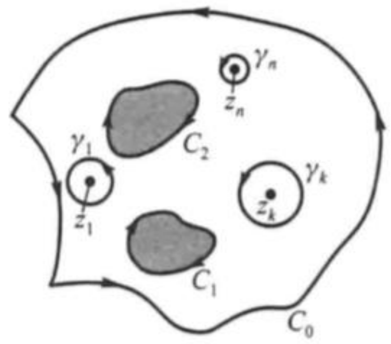
2. 留数定理

定理1.1 如果$f(z)$在周线或复周线C所围的区域D内,除$z_1,z_2,\cdots,z_n$外解析,在闭域$\overline{D}=D+C$上除$z_1,z_2,\cdots,z_n$外连续,那么

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k).$$

证明：如图，根据复合闭路柯西定理

$$\oint_C \boldsymbol{f(z)dz} = \oint_{\gamma_1} f(z)dz + \oint_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{\gamma_n} f(z)dz.$$



$C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_m^-$

于是，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_n} f(z)dz$$

$$= \mathrm{Res}(f, z_1) + \mathrm{Res}(f, z_2) + \cdots + \mathrm{Res}(f, z_n).$$ （留数定义）

证毕.

留数定理将沿封闭曲线C积分转化为求被积函数在C内各孤立奇点处的留数.

二、留数的计算

1. 通用方法: 应用Laurent展式求留数

设$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n, 0<|z-z_0|<R$, 则

$$\operatorname{Res}(f, z_0)=c_{-1}.$$

例1 求$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z-1}{z^5}, 0\right)$.

解:

$$\frac{e^z-1}{z^5}=\frac{1}{z^5}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots-1\right)=\frac{1}{z^4}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z}+\frac{1}{5!}+\cdots,$$

$$0<|z|<+\infty;$$

这蕴含

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z-1}{z^5}, 0\right)=\frac{1}{4!}.$$

2. 求极点留数的一般方法

命题1.1 若z_0为$f(z)$的n阶极点,

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}\quad (\text{即}\,\varphi(z)=(z-z_0)^n f(z)),$$

其中$\varphi(z)$在点z_0解析,$\varphi(z_0)\neq 0$,则

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{\varphi^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}. \tag{1.1}$$

证明:

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}\mathrm{d}z=\frac{\varphi^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}. \tag{1.2}$$

在命题1.1条件下,公式(1.1)可以写成

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^m f(z)]^{(m-1)},\ m\geq n. \tag{1.3}$$

公式(1.3)的证明只需修改(1.2)就可:

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(z)(z-z_0)^{m-n}}{(z-z_0)^m}\mathrm{d}z=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^m f(z)]^{(m-1)},m\ge n.$$

公式 (1.3)有时使用比(1.2)方便.

推论1.1 设z_0为$f(z)$的一阶极点,则$\operatorname{Res}(f,z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.

推论1.2 设z_0为$f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$的一阶极点($\varphi(z)$及$\psi(z)$在点$z_0$解析,且

$\varphi(z_0)\ne 0,\psi(z_0)=0,\psi'(z_0)\ne 0$)则

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

证明:因为z_0为$f(z)=\varphi(z)\big/\psi(z)$的一阶极点,所以

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{[\psi(z)-\psi(z_0)]\big/(z-z_0)}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

例2 求函数 $\dfrac{z}{\cos z}$ 在点 $z=\dfrac{\pi}{2}$ 的留数.

解: 因 $z=\dfrac{\pi}{2}$ 为 $\dfrac{z}{\cos z}$ 的一阶极点, 所以

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z}{\cos z},\frac{\pi}{z}\right)=\left.\frac{z}{(\cos z)'}\right|_{z=\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{\pi}{2}}{-\sin(\frac{\pi}{2})}=-\frac{\pi}{2}.$$

3. 利用留数计算周线积分

例3 计算积分 $I=\int_{|z|=2}\dfrac{e^{\sin z}}{z^2(z^2+1)}\mathrm{d}z.$

解: $f(z)=\dfrac{e^{\sin z}}{z^2(z^2+1)}$ 在 $|z|=2$ 内有一个二阶极点 0, 和两个一阶极点 $\pm i$,

由命题1.1与推论1.1得

$$\operatorname{Res}(f,0)=(z^2 f(z))'|_{z=0}=\left(\frac{e^{\sin z}}{(z^2+1)}\right)'_{z=0}=1;$$

上页 下页 返回 结束

$$\operatorname{Res}(f,i)=\left[(z-i)f(z)\right]\Big|_{z=i}=\frac{e^{\sin z}}{z^2(z+i)}\Bigg|_{z=i}=-\frac{e^{\sin i}}{2i}=-\frac{e^{i\,\mathrm{sh}1}}{2i};$$

$$\operatorname{Res}(f,-i)=\frac{e^{\sin z}}{z^2(z-i)}\Bigg|_{z=-i}=\frac{e^{-\sin i}}{2i}=\frac{e^{-i\,\mathrm{sh}1}}{2i}.$$

故由留数定理

$$I=2\pi i\left(1-\frac{e^{i\,\mathrm{sh}1}}{2i}+\frac{e^{-i\,\mathrm{sh}1}}{2i}\right)$$

$$=2\pi i\left[1-\sin(\mathrm{sh}1)\right].$$

上页 下页 返回 结束

三、函数在无穷远点的留数

1. 无穷远留数的定义

定义1.2 设∞为$f(z)$的一个孤立奇点,即$f(z)$在∞的去心邻域$N-\{\infty\}$:
$0 \le r < |z| < +\infty$内解析,则称

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z \quad C:|z| = \rho > r,$$

为$f(z)$在∞**点的留数**,记为$\mathrm{Res}(f,\infty)$.

1 若$f(z)$在无穷远邻域$N-\{\infty\}$内Laurent展式为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, z \in N-\{\infty\} = \{z:|z|> r\},$$

则

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z = -c_{-1}.$$

3. 无穷远点留数的换元公式

命题1.2 设∞为$f(z)$的一个孤立奇点,即$f(z)$在∞的去心邻域$N-\{\infty\}$:

$0\le r<|z|<+\infty$内解析,则

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-\mathrm{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right).$$

证明: 令 $z=1/t$, 则$C:|z|=\rho\to\gamma:|t|=1/\rho$, 且$\varphi(t)=f(1/t)$在$t=0$内解析.

于是

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{-2\pi}f(\rho e^{i\theta})\rho ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}f\left(\frac{1}{re^{i\phi}}\right)\frac{i}{re^{i\phi}}\mathrm{d}\phi \qquad (令\theta=-\phi,换元)$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}f\left(\frac{1}{re^{i\phi}}\right)\frac{1}{(re^{i\phi})^2}\mathrm{d}\left[re^{i\phi}\right]$$

继续进行

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=\cdots=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{re^{i\phi}}\right)\frac{1}{(re^{i\phi})^2}\mathrm{d}\left[re^{i\phi}\right]$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r} f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta$$

$$=-\operatorname{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right).$$

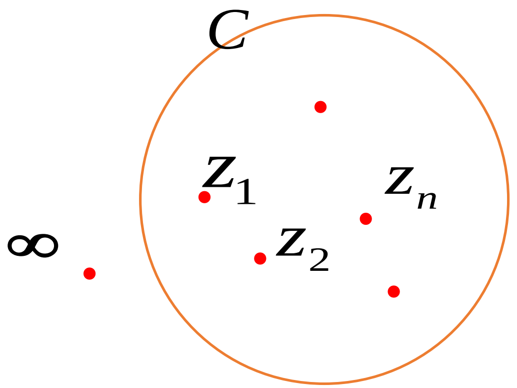
证毕.

4. 留数的第二定理

定理1.2 如果$f(z)$在扩充z平面上只有有限个孤立奇点(包括∞在内),设为$z_1,z_2,\cdots,z_n,\infty$,则$f(z)$在各点的留数总和为零,**即**

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,z_k)+\operatorname{Res}(f,\infty)=0.$$

证明：以原点为心作圆周C，使$z_1, z_2, \cdots, z_n$皆含于C的内部(如图).



则由留数定理(定理1.1)得

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k) - \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)dz = 0. \tag{1.7}$$

由留数定义

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)dz \tag{1.8}$$

把(1.8)代入(1.7)立即得到

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0.$$

注解 由定理得无穷远处又一计算公式

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

有时我们用下面模式计算积分

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k) \quad \text{(留数定理, 定理1.1)}$$

$$= -2\pi i \operatorname{Res}(f,\infty).$$

其目的就是避免了计算某些有限点处的留数计算.

例4 计算积分 $I = \int_{|z|=4} \dfrac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+1)^3}\mathrm{d}z.$

解: 被积函数一共有七个奇点

$$z = \pm i, z = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i}, k = 0,1,2,3 \text{以及} \infty,$$

上页 下页 返回 结束

其中$z=\pm i, z=\sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i}, k=0,1,2,3$均含在$|z|=4$内部. 由留数定理及定理2.2得

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{6}\mathrm{Res}(f, z_k) = -2\pi i\mathrm{Res}(f,\infty),$$

其中

$$f(z)=\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+1)^3}$$

以∞为一阶零点. 计算得

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = -\lim_{z\to\infty}[zf(z)] = -1.$$

故$I=-2\pi i\mathrm{Res}(f,\infty)=2\pi i.$

无穷远留数也可以用下列公式计算:

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = -\mathrm{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2}, 0\right).$$

注意到

$$f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}=\frac{\frac{1}{t^5}}{\left(\frac{1}{t^2}+1\right)^2\left(\frac{1}{t^4}+2\right)^3}=\frac{1}{t(1+t^2)^2(1+2t^4)^3}$$

以$t=0$为一阶极点，

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=-\operatorname{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right)=-\left.\frac{1}{(1+t^2)^2(1+2t^4)^3}\right|_{z=0}=-1.$$

例5　计算积分 $I=\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$，$C$为正向圆周：$|z|=2$.

解：被积函数 $f(z)=\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$ 除∞点外，其他奇点为 $-i,1,3$.

于是

$$I = 2\pi i\{\mathrm{Res}(f,-i)+\mathrm{Res}(f,1)\}$$ (留数定理, 定理1.1)

$$= -2\pi i\left[\mathrm{Res}(f,3)+\mathrm{Res}(f,\infty)\right]$$ (定理1.2)

$$= -2\pi i\left\{\frac{1}{2(3+i)^{10}}+0\right\}$$

$$= -\frac{\pi i}{(3+i)^{10}}.$$

此处 f 在无穷远有12阶零点,此时

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=0.$$

2022年秋季教学课件

复变函数与积分变换

汪 玉 峰

武汉大学数学与统计学院

第五章

留数

第3节　留数计算的应用

1. 积分型一：$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$, $R(x,y)$为有理分式

2. 积分型二：$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$，$R(x)$为有理函数

3. 积分型三：$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{i\alpha x}\mathrm{d}x, \alpha\in\mathbb{R}^{+}, R(x)$为有理函数

1. 积分型一：$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$, $R(x,y)$为有理分式

要求 $R(x,y)$在圆周$C: x^2+y^2=1$上分母不等于0.

方法 用变换$z=e^{i\theta}$把定积分化为一个解析函数沿单位圆周的复积分. 再用留数计算. **具体说来,**

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta \xlongequal{z=e^{i\theta}} \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz} = \sum_{|z_k|<1}\operatorname{Res}\left[R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}, z_k\right]$$

$$z=e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}z = ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta \Rightarrow \mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{d}z}{iz}, \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta}) = \dfrac{z^2-1}{2iz}, \\ \cos\theta = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) = \dfrac{z^2+1}{2z}, \end{cases}$$

例1 计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{(a+\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta\ (a>1).$

解: 令 $z=e^{i\theta}$, 则

$$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z},\ \mathrm{d}\theta=\frac{dz}{iz},$$

于是

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{(a+\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}\frac{1}{(a+\frac{z^2+1}{2z})^2}\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$=\frac{4}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z}{(z^2+2az+1)^2}\mathrm{d}z=\frac{4}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2}\mathrm{d}z,$$

其中$\alpha=a-\sqrt{a^2-1},\beta=a+\sqrt{a^2-1}$为实二次方程$z^2+2az+1=0$的二相异实根.

上页 下页 返回 结束

由$\alpha\beta=1$,且显然$|\beta|>|\alpha|$,故必有$|\alpha|<1,|\beta|>1$. 于是，$f(z)=\dfrac{z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2}$

在$|z|=1$上无奇点,在$|z|<1$只有一个二阶极点$z=\alpha$,由命题1.1得

$$\operatorname{Res}(f,\alpha)=\left[\frac{z}{(z-\beta)^2}\right]'\Bigg|_{z=\alpha}=-\frac{\alpha+\beta}{(\alpha-\beta)^3}=\frac{a}{4(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

由留数定理

$$I=\frac{4}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z}{(z^2+2az+1)^2}\mathrm{d}z=\frac{4}{i}\,2\pi i\operatorname{Res}(f,\alpha)$$

$$=8\pi\frac{a}{4(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{2\pi a}{(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

上页 下页 返回 结束

2. 积分型二:$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$，$R(x)$为有理函数

要求 $R(z)=P(z)/Q(z)$，其中

$$P(z)=c_0z^m+c_1z^{m-1}+\cdots+c_m,\quad (c_0\neq 0);$$

$$Q(z)=b_0z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_n,\quad (b_0\neq 0);$$

为互质多项式,且满足条件:(1)$n-m\geq 2$, (2)$Q(x)\neq 0, x\in\mathbb{R}$.

方法 围道积分法: 构造一封闭“围道”，把积分化为解析函数沿围道的的复积分，再用留数定理计算复积分.

引理3.1 设 $f(z)$沿圆弧$C_R: z=\mathrm{Re}^{i\theta}(\theta_1\leq\theta\leq\theta_2, R$充分大)上连续,且

$$\lim_{R\to+\infty} zf(z)=\lambda$$

于C_R上一致成立(即θ无关),则

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=i(\theta_2-\theta_1)\lambda.$$

证明：对$\forall\varepsilon>0$,由已知条件$\exists R_0(\varepsilon)>0$,使当$R>R_0$时,有

$$\left|zf(z)-\lambda\right|<\frac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1},z\in C_R.$$

于是有

$$\left|\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z-i(\theta_2-\theta_1)\lambda\right|=\left|\int_{C_R}\frac{zf(z)-\lambda}{z}\mathrm{d}z\right|\le\frac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}\frac{l}{R}=\varepsilon,$$

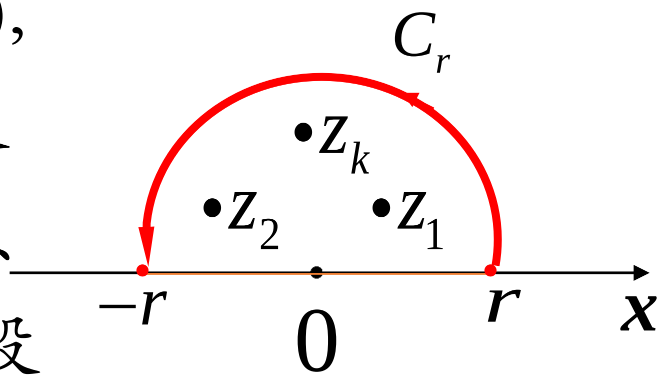
其中l表示圆弧C_R长度.

命题3.1 如果R是满足前面要求的有理函数，那么

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\,\mathrm{d}x=2\pi i\sum_{\mathrm{Im}\,z_k>0}\mathrm{Res}(f,z_k).\tag{3.1}$$

其中 $z_k(k=1,2,\ldots,n,)$ 为$f(z)$在上半平面内的所有极点.

证明：取上半圆周$C_r: z=re^{i\theta}(0\le\theta\le\pi)$作为辅助线(如图)，于是由线段$[-r,r]$及$C_r$合成一周线$C_r+[-r,r]$，先取$r$充分大使$C_r+[-r,r]$内部包含$R(z)$在上半平面内的一切孤立奇点(实际上只有有限个极点)．由条件(2)，$R(z)$在$C_r+[-r,r]$上没有奇点．



根据留数定理得

$$\int_{-r}^{r} R(x)\mathrm{d}x+\int_{C_r} R(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname{Res}(R,z_k). \tag{3.2}$$

条件(1)蕴含$\lim\limits_{z\to+\infty} zR(z)=0$于$C_r$上一致成立，则引理3.1蕴含

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{C_r} R(z)\mathrm{d}z=0. \tag{3.3}$$

在等式(3.2)中命$r\to+\infty$，并引用(3.1)，知 结论(3.1)成立．

例2 设$a>0$,计算积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4}$.

解法一:直接用命题3.1.

因$R(z)=\frac{1}{z^4+a^4}$满足“要求”,且$R(z)$在上半平面只两个一级极点

$$z_k=ae^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i},k=0,1.$$

而

$$\mathrm{Res}(f,z_k)=\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=z_k}=\frac{1}{4z_k^3}=-\frac{z_k}{4a^4}.$$

因此, 我们有

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f,z_0)+\mathrm{Res}(f,z_1)\right] \quad (命题3.1)$$

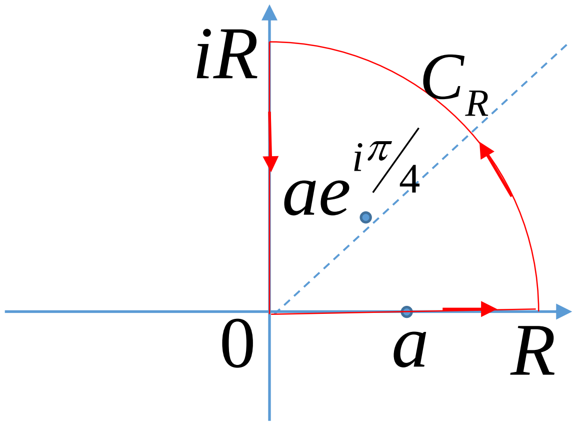
$$=-\frac{\pi i}{4a^4}\left(ae^{i\pi/4}+ae^{i3\pi/4}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}a^3}.$$

解法二：记$C_R: z=R\mathrm{e}^{i\theta}, \theta\in[0,\pi/2], R>a>0.$

如图，取围道$[0,R]+C_R+[iR,0]$为扇形边界. $z_0=ae^{i\pi/4}$是

$$R(z)=\frac{1}{z^4+a^4}$$



在扇形内唯一的一个一阶极点,且

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=-\frac{z_0}{4a^4}.$$

根据留数定理得

$$\int_0^R R(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R}R(z)\mathrm{d}z+\int_{[iR,0]}R(z)\mathrm{d}z=2\pi i\mathrm{Res}(f,z_0)$$

即

$$\int_0^R R(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R}R(z)\mathrm{d}z+\int_{[iR,0]}R(z)\mathrm{d}z=-\frac{\pi i e^{i\pi/4}}{2a^3}. \qquad (3.4)$$

$\lim\limits_{z\to+\infty} zR(z)=0$ 于C_R上一致成立,则引理3.1蕴含

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} R(z)\mathrm{d}z=0. \tag{3.5}$$

在等式(3.4)中命$R\to+\infty$,并引用(3.5),知

$$(1-\mathrm{i})\int_0^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi i e^{i\pi/4}}{2a^3},$$

这导致

$$I=\frac{\pi}{2\sqrt{2}a^3}.$$

解法一与解法二都是围道积分法，只是构造的围道不同而已. 相比较而言, 命题3.1的围道常见些!

算出的积分是反常积分的主值.因为反常积分收敛，所以主值就是积分的值.

3. 积分型三:$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}dx, \alpha \in \mathbb{R}^+, R(x)$为有理函数

要求 $R(z) = P(z)/Q(z)$, 其中

$$P(z) = c_0 z^m + c_1 z^{m-1} + \cdots + c_m, \quad (c_0 \neq 0);$$

$$Q(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n, \quad (b_0 \neq 0);$$

为互质多项式,且满足条件:(1)$n - m \geq 1$, (2)$Q(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$.

方法 围道积分法: 构造一封闭“围道”, 把积分化为解析函数沿围道的的复积分, 再用留数定理计算复积分.

引理3.1(Jordan) 设 $g(z)$沿圆弧$C_R: z = Re^{i\theta}(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, R$充分大)上连续,且

$$\lim_{R\to+\infty} g(Re^{i\theta}) = 0$$

于C_R上一致成立(即θ无关),则

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} g(z)e^{i\alpha z}\,dz = 0, \alpha > 0.$$

证明：记$M(R)=\max\left\{|g(z)|:z\in C_R\right\}$.于是就有

$$\left|\int_{C_R} g(z)e^{i\alpha z}\mathrm{d}z\right|=\left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} g(R\mathrm{e}^{i\theta})e^{i\alpha R\mathrm{e}^{i\theta}}R\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{i}\mathrm{d}\theta\right|$$

$$\le M(R)R\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-\alpha R\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\le M(R)R\int_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=2M(R)R\int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R\sin\theta}\mathrm{d}\theta,$$

即

$$\left|\int_{C_R} g(z)e^{i\alpha z}\mathrm{d}z\right|\le 2M(R)R\int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R\sin\theta}\mathrm{d}\theta. \tag{3.6}$$

于是由Jordan不等式 $\dfrac{2\theta}{\pi}\le\sin\theta\le\theta \quad (0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2})$, 将(3.6)化为

$$\left|\int_{C_R} g(z)e^{i\alpha z}dz\right| \le 2M(R)R\int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\le 2M(R)R\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi}\alpha R\theta}\mathrm{d}\theta \qquad (3.7)$$

$$< 2M(R)R\int_0^{+\infty} e^{-\frac{2}{\pi}\alpha R\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\pi}{\alpha}M(R)$$

$\lim\limits_{R\to+\infty} g(R\mathrm{e}^{i\theta}) = 0$于$C_R$上一致成立(即$\theta$无关),则

$$\lim_{R\to+\infty} M(R) = 0. \qquad (3.8)$$

联合(3.7)(3.8)就有

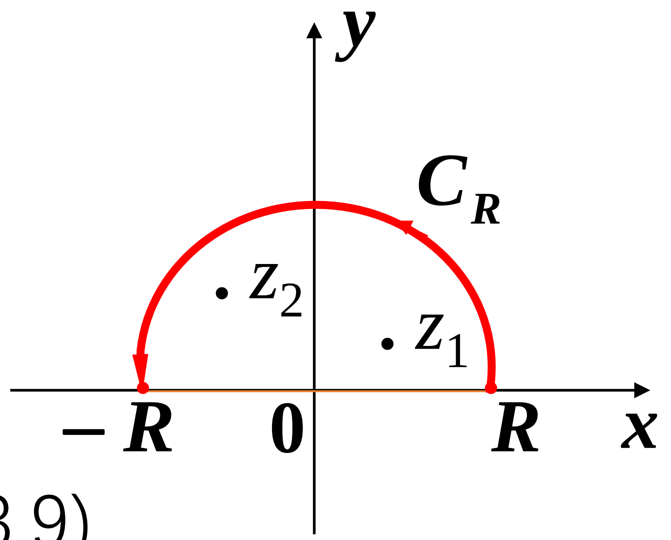
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} g(z)\mathrm{e}^{i\alpha z}\,\mathrm{d}z = 0, \alpha > 0.$$

命题3.2 设$R(z)=P(z)/Q(z)$,其中$P(z)$及$Q(z)$是互质多项式,且满足条件

1) $Q(z)$的次数比$P(z)$的次数高;

2) $Q(x)\neq 0, x\in\mathbb{R}$;

3) $\alpha>0$;



则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname{Res}(e^{i\alpha z}R(z), z_k). \qquad (3.9)$$

证明: 类似命题3.1. 请自证一下!

将(3.9)分开实虚部, 就可得到积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos\alpha x\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin\alpha x\mathrm{d}x$$

之计算公式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{\alpha ix}\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z_k>0} \mathrm{Res}[R(z)e^{\alpha iz}, z_k]$$

$$\Big\Downarrow \; e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\sin\alpha x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\alpha x\mathrm{d}x + i\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\alpha x\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z_k>0} \mathrm{Res}[R(z)e^{\alpha iz}, z_k]$$

$$\Big\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\alpha x\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left\{2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z_k>0} \mathrm{Res}[R(z)e^{\alpha iz}, z_k]\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\alpha x\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left\{2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z_k>0} \mathrm{Res}[R(z)e^{\alpha iz}, z_k]\right\}$$

公式的积分是反常积分的主值. 因为反常积分收敛,所以主值就是积分的值.

例3　计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x,\quad (a>0).$

解:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x.$$

作辅助函数

$$f(z)=\frac{z}{z^2+a^2}e^{iz},$$

这里$m-n=1$, $f(z)$在实轴上无孤立奇点，故积分存在. $f(z)$又在上半平面只有一阶极点$\boldsymbol{z=ai}$，故

$$I=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{z}{z^2+a^2}e^{iz},ai\right]\right\}=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{2\pi i\cdot\frac{e^{-a}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\pi e^{-a}.$$

4. 积分路径上有奇点的积分计算

引理3.3 设$f(z)$沿圆弧$C_r: z-a=re^{i\theta}(\theta_1\le\theta\le\theta_2, r$充分小$)$上连续，且

$$\lim_{r\to 0}(z-a)f(z)=\lambda$$

于C_r上一致成立，则

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z=i(\theta_2-\theta_1)\lambda.$$

证明： 对$\forall\varepsilon>0$，由已知条件$\exists r_0(\varepsilon)>0$，使当$0<r<r_0$时，有

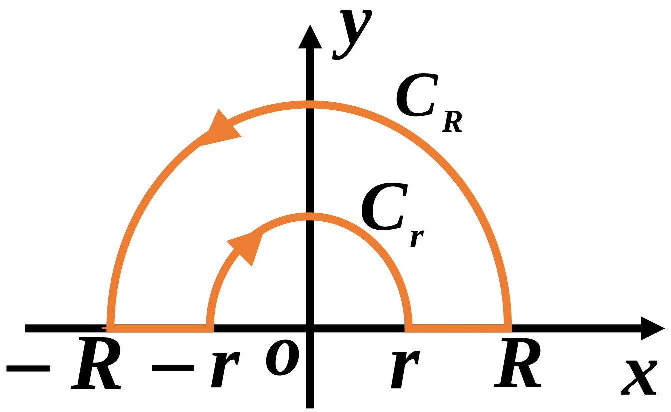
$$|(z-a)f(z)-\lambda|<\frac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}, z\in C_r.$$

于是有

$$\left|\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z-i(\theta_2-\theta_1)\lambda\right|=\left|\int_{C_r}\frac{(z-a)f(z)-\lambda}{z-a}\mathrm{d}z\right|\le\frac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}\frac{l}{R}=\varepsilon,$$

其中l表示圆弧C_R长度.

例4 计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$



解：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$存在，且

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

考虑$f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$沿如图所示之闭曲线C的积分. 由Cauchy积分定理

$$\int_C f(z)dz=0\Leftrightarrow\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x-\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_r^R\frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x=0, \tag{3.10}$$

这里$C_R: z=Re^{i\theta}, C_r: z=re^{i\theta}\,(0\le\theta\le\pi, r<R)$都是按逆时针方向取的.

由引理3.2知

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0; \tag{3.11}$$

由引理3.3知

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = i\pi. \tag{3.12}$$

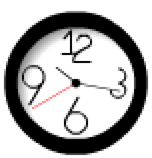
在(3.10)中令$r\to 0, R\to +\infty$,取极限即得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x = i\pi,$$

因此，我们有

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x\right) = \frac{\pi}{2}.$$

第二章 Laplace变换

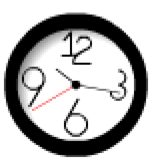


当函数$f(t)$在$t<0$时没有定义或者不需要知道时，可以认为当$t<0$时，$f(t)\equiv 0$. 这时, Fourier变换的表达式为

$$\mathrm{F}\,[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t.$$

但是仍然需要$f(t)$在$[0,+\infty)$上绝对可积的条件，这个要求限制了它的应用.

对定义在$[0,+\infty)$上的函数$f(t)$，如果考虑



$$f_1(t) = f(t) e^{-\beta t} \quad (\beta > 0),$$

那么 $f_1(t)$ 容易满足在 $[0,+\infty)$ 上绝对可积的要求. 例如，$f(t)$ 为常数、多项式、正弦与余弦函数时，

$$f_1(t) = f(t)e^{-\beta t} \quad (\beta > 0)$$

都在 $[0,+\infty)$ 上绝对可积. 这是因为 $t \to +\infty$ 时，$e^{-\beta t}$ 是衰减速度很快的函数，称它为**指数衰减函数**.

如果 $\beta > 0$ 取得适当大，那么

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t)e^{-\beta t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

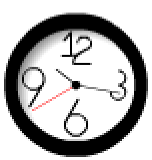
的Fourier变换可能有意义. $f_1(t)$的Fourier变换可表示为

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\beta t}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(\beta+i\omega)t}\mathrm{d}t.$$

将 $\beta+i\omega$ 记为s, 可写成

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

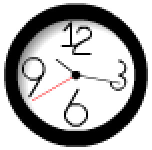
这就是本章要讨论的**Laplace变换**, 它放宽了对函数的限制并使之更适合工程实际, 并且仍然保留Fourier变换中许多好的性质, 更实用、更方便.



§2.1 Laplace变换的概念

1 Laplace变换的定义

2 周期函数和δ函数的Laplace变换



2.1.1 Laplace变换的定义

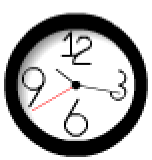
定义2.1　设 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 上有定义, 并且积分

$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ (s是复参变量)关于某一范围

s 收敛，则

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t,$$

称为函数 $f(t)$ 的Laplace变换, 并记做 $\mathcal{L}[f(t)]$, 即



$$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

$F(s)$称为 $f(t)$ 的像函数，$f(t)$ 称为 $F(s)$ 的像原函数.

已知 $F(s)$是 $f(t)$ 的Laplace变换，则记

$$f(t) = L^{-1}[F(s)],$$

并称 $f(t)$为$F(s)$的Laplace逆变换.

例1 求单位阶跃函数

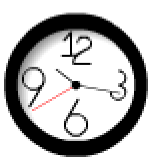
$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

的Laplace变换.

解 根据Laplace变换的定义，当 $\operatorname{Re} s>0$ 时，

$$\mathscr{L}\,[u(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s}.$$

因为在Laplace变换中不必考虑 $t<0$ 时的情况，



所以经常记作 $\mathscr{L}\,[1]=\dfrac{1}{s}.$

例2　求指数函数 $f(t)=e^{at}$ (其中a是实数)的Laplace变换.

解　根据Laplace变换的定义

$$F(s)=\mathcal{L}\,[f(t)]=\mathcal{L}\,[e^{at}]=\int_0^{+\infty}e^{at}e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t,$$

这个积分当 $\operatorname{Re}s>a$ 时收敛，且

$$\int_0^{+\infty}e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{s-a},$$

所以

$$\mathcal{L}\,[e^{at}]=\frac{1}{s-a}\quad(\operatorname{Re}s>a).$$

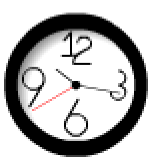
Laplace变换存在定理

定理1 设函数 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 的任何有限区间内分段连续，并且当 $t \to +\infty$ 时，$f(t)$的增长速度不超过某一指数函数，即存在常数 $M>0$ 和 $s_0>0$，使得在 $[0,+\infty)$ 上，

$$|f(t)| \leq Me^{s_0 t},$$

则在半平面 $\mathrm{Re}\, s > s_0$上，$\mathcal{L}[f(t)]$ 存在，且

$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$$



是s的解析函数，其中 s_0 称为 $f(t)$的增长指数.

证明 对任何 $\operatorname{Re} s > s_0$ 内的点s, $\operatorname{Re} s = \beta > s_0$,

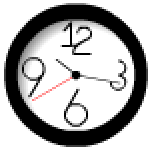
故 $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} \mathrm{d}t$ 绝对收敛，即

$$\int_0^{+\infty} \left| f(t) e^{-st} \right| \mathrm{d}t \le \int_0^{+\infty} M e^{-\beta t} e^{s_0 t} \mathrm{d}t$$

$$\le M \int_0^{+\infty} e^{-(\beta - s_0)t} \mathrm{d}t = \frac{M}{\beta - s_0}.$$

所以在 $\operatorname{Re} s > s_0$上，$f(t)$的Laplace变换**存在**.

可以证明 $F(s)$是 $\operatorname{Re} s > s_0$ 上的解析函数, 且



$$F'(s) = \int_0^{+\infty} (-t) f(t) e^{-st} \mathrm{d}t.$$

例3 求 $f(t)=\sin\omega t$ 的Laplace变换.

解 因为 $|f(t)|\le 1\cdot e^{0}$，故在 $\operatorname{Re}s>0$ 上，

Laplace变换存在，且

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{e^{-st}}{s^2+\omega^2}[-s\sin\omega t-\omega\cos\omega t]\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

于是 $\mathcal{L}\,[\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\quad(\operatorname{Re}s>0).$

类似可得 $\mathcal{L}\,[\cos\omega t]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}\quad(\operatorname{Re}s>0).$

2.1.2 周期函数和δ函数的Laplace变换

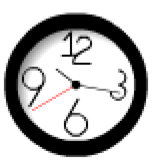
设 $f(t)$是以T 为周期的函数，即

$$f(t+T)=f(t)\quad(t>0),$$

且在一个周期内分段连续，则

$$\mathcal{L}\,[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kT}^{(k+1)T}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

令 $t=\tau+kT$，$\tau\in[0,\ T)$，则



$$\int_{kT}^{(k+1)T}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^T f(\tau+kT)e^{-s(\tau+kT)}\mathrm{d}\tau,$$

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = e^{-kTs}\int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau.$$

而当 $\mathrm{Re}\, s > 0$ 时，$\left|e^{-Ts}\right| < 1$，所以

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kTs}\int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t,$$

于是

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

这就是**周期函数的Laplace变换公式.**

如果满足Laplace变换存在条件的函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 处有界时，积分

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

的下限取 0^{+} 或 0^{-} 不影响其结果. 如果在 $t=0$ 处包含单位脉冲函数 $\delta(t)$, 积分理解为广义函数下的积分时，取 0^{+} 与 0^{-} 是不同的. 因为

$$\mathscr{L}_{+}[f(t)]=\int_{0^{+}}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t,$$

$$\mathscr{L}_{-}[f(t)]=\int_{0^{-}}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0^{-}}^{0^{+}} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t+\mathscr{L}_{+}[f(t)].$$

如果 $f(t)$ 在 $t=0$ 附近有界或在通常意义下

可积时，$\int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=0$，即 $\mathcal{L}_-[f(t)]=\mathcal{L}_+[f(t)]$；

如果在 $t=0$ 处包含了单位脉冲函数时，则

$\int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t\neq 0$，即 $\mathcal{L}_-[f(t)]\neq\mathcal{L}_+[f(t)]$.

因此把 $t\geq 0$ 上定义的函数延拓到 $t<0$ 上，

并且把Laplace变换定义为

$$\mathcal{L}\,[f(t)]=\mathcal{L}_-[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

例5 求**单位脉冲函数** $\delta(t)$ 的Laplace变换.

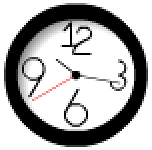
解 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) \mathrm{d}t = f(0),$$

所以

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \mathcal{L}_{-}[\delta(t)]$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} \mathrm{d}t$$



$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} \mathrm{d}t = 1.$$

§2.2 Laplace变换的性质

1 线性性质

2 微分性质

3 像函数的微分性质

4 积分性质

5 像函数的积分性质

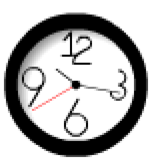
6 位移性质

7 延迟性质

8 相似性质

9 初值和终值定理

10 卷积定理



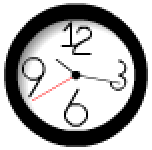
以下假定所考虑的 Laplace 变换的像原函数都满足存在定理的条件.

(1) 线性性质 设α, β是常数，$F_1(s)=\mathcal{L}[f_1(t)]$, $F_2(s)=\mathcal{L}[f_2(t)]$, 则

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$$

$$=\alpha\mathcal{L}[f_1(t)]+\beta\mathcal{L}[f_2(t)],$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)]=\alpha\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]+\beta\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)].$$



由Laplace变换的定义及积分的线性性质可证.

(2) 微分性质　设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$，则

$$\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0).$$

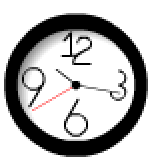
证明　根据Laplace变换的定义和分部积分公式

$$\mathcal{L}[f'(t)]=\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=f(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=s\mathcal{L}[f(t)]-f(0)$$

$$=sF(s)-f(0)\quad(\mathrm{Re}\,s>s_0).$$



推论　对正整数n, 有

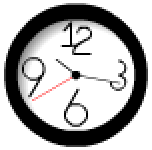
$$\mathcal{L}\,[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

特别地，当 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$时,

$$\mathcal{L}\,[f^{(n)}(t)] = s^n F(s).$$

在这个性质中，**要求** $f^{(k)}(t)$存在且满足Laplace

变换存在定理的条件 $(1 \le k \le n)$.



例7　求　$f(t)=\cos\omega t$ 的Laplace变换.

解　因为

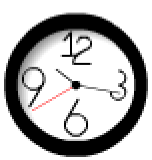
$$f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(t)=-\omega^2\cos\omega t,$$

根据微分性质和线性性质

$$\mathcal{L}[-\omega^2\cos\omega t]=s^2\mathcal{L}[\cos\omega t]-sf(0)-f'(0),$$

$$-\omega^2\mathcal{L}[\cos\omega t]=s^2\mathcal{L}[\cos\omega t]-s,$$

所以 $\mathcal{L}[\cos\omega t]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}.$



使用同样方法，可得 $\mathcal{L}[\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}.$

例8　求　$f(t)=t^2+\sin\omega t$ 的Laplace变换.

解

$$\mathcal{L}\,[t^2+\sin\omega t]$$

$$=\mathcal{L}\,[t^2]+\mathcal{L}\,[\sin\omega t]$$

$$=\frac{2!}{s^3}+\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

利用微分性质也可以求出当m是正整数时，

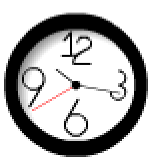
$$\mathcal{L}\left[t^m\right]=\frac{m!}{s^{m+1}}.$$

事实上, 设 $f(t)=t^m$, 则

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(m-1)}(0)=0.$$

因为 $f^{(m)}(t)=m!$, $\mathcal{L}[1]=\dfrac{1}{s}$, 所以

$$m!\mathcal{L}[1]=s^m\mathcal{L}[t^m].$$



于是 $\mathcal{L}\left[t^m\right]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}.$

(3) 像函数的微分性质　设 $F(s)=\mathcal{L}\,[f(t)]$, 则

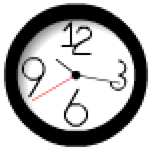
$$F'(s)=-\mathcal{L}\,[tf(t)].$$

一般地，对正整数n, 有

$$F^{(n)}(s)=(-1)^n\mathcal{L}\,[t^n f(t)].$$

证明　对解析函数

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$



求导, 右端求导时可在积分号下进行，即得.

例9　　求　$f(t)=t\sin\omega t$ 的Laplace变换.

解

$$\mathcal{L}[t\sin\omega t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}[\sin\omega t]$$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)=\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

使用同样方法，可得

$$\mathcal{L}[t\cos\omega t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}[\cos\omega t]=\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

(4) 积分性质　设 $F(s)=\mathcal{L}\,[f(t)]$，则

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}F(s).$$

证明　设 $\varphi(t)=\int_0^t f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\varphi'(t)=f(t),\quad \varphi(0)=0.$$

故由微分性质

$$\mathcal{L}\,[f(t)]=s\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]-\varphi(0),$$

于是结论得证. 一般地，对n次积分有

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{d}t\cdots\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s^n}F(s).$$

(5) 位移性质　设 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$，则

$$\mathscr{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)\quad\left(\mathrm{Re}(s-a)>s_0\right),$$

其中 s_0 是 $f(t)$ 的增长指数.

证明　根据定义，有

$$\mathscr{L}[e^{at}f(t)]=\int_0^{+\infty}e^{at}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t=F(s-a).$$

例10　求　$\mathcal{L}\,[te^{at}\sin at]$和$\mathcal{L}\,[te^{at}\cos at]$.

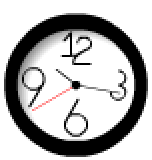
解

$$\mathcal{L}\,[t\sin at]=\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}.$$

故根据位移性质

$$\mathcal{L}\,[te^{at}\sin at]=\frac{2a(s-a)}{[(s-a)^2+a^2]^2}.$$

使用同样方法，可得



$$\mathcal{L}\,[te^{at}\cos at]=\frac{(s-a)^2-a^2}{[(s-a)^2+a^2]^2}=\frac{s(s-2a)}{[(s-a)^2+a^2]^2}.$$

例11 求 $L\left[\int_0^t te^{at}\sin at\,\mathrm{d}t\right]$.

解

$$L\left[\int_0^t te^{at}\sin at\,\mathrm{d}t\right]=\frac{2a(s-a)}{s[(s-a)^2+a^2]^2}.$$

使用同样方法，可得

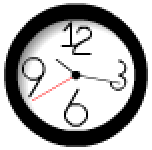
$$L\left[\int_0^t te^{at}\cos at\,\mathrm{d}t\right]=\frac{s-2a}{[(s-a)^2+a^2]^2}.$$

(6) 像函数的积分性质　设 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$, 且 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t)}{t}$ 存在，积分 $\int_s^{+\infty}F(u)\mathrm{d}u$ 收敛，则

$$\int_s^{+\infty}F(u)\mathrm{d}u=\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$

证明　根据解析函数的惟一性定理，u取在正实轴从s 到$+\infty$, 则

$$\int_s^{+\infty}F(u)\mathrm{d}u=\int_s^{+\infty}\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}f(t)e^{-ut}\mathrm{d}t$$



$$=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t\int_s^{+\infty}e^{-ut}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-st}\mathrm{d}t=\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$

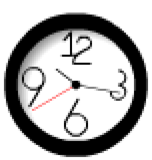
推论 如果像函数积分性质的条件满足，且

积分 $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$ 收敛，则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} F(s) \mathrm{d}s.$$

事实上，对于像函数积分性质

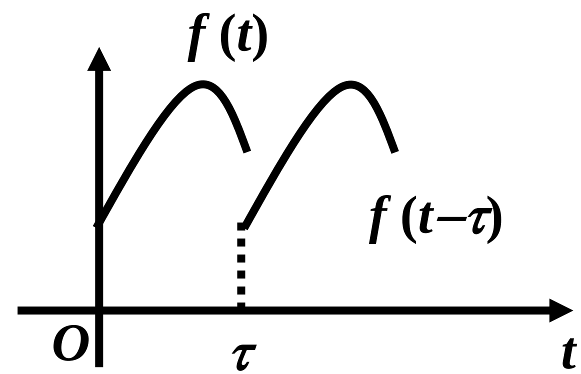
$$\int_s^{+\infty} F(u) \mathrm{d}u = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right],$$



令 $s \to 0^+$ 即可.

(7) 延迟性质 设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$, 若当 $t<0$ 时, $f(t)=0$, 则对任何非负实数 τ, 有

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s).$$



证明 根据定义

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)]=\int_0^{+\infty}f(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\tau}f(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t+\int_{\tau}^{+\infty}f(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

因为当 $t<0$ 时, $f(t)=0$, 所以在 $[0,\tau]$ 上, 有 $f(t-\tau)=0$, 从而

$$\mathcal{L}\,[f(t-\tau)]=\int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t$$

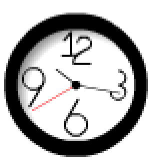
$$=\int_{0}^{+\infty} f(u)e^{-(u+\tau)s}\mathrm{d}u=e^{-\tau s}\int_{0}^{+\infty} f(u)e^{-us}\mathrm{d}u$$

$$=e^{-\tau s}F(s)\ \left(\mathrm{Re}\,s>s_0\right).$$

利用单位阶跃函数 $u(t)$，可以将

$$\mathcal{L}\,[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s).$$

写成

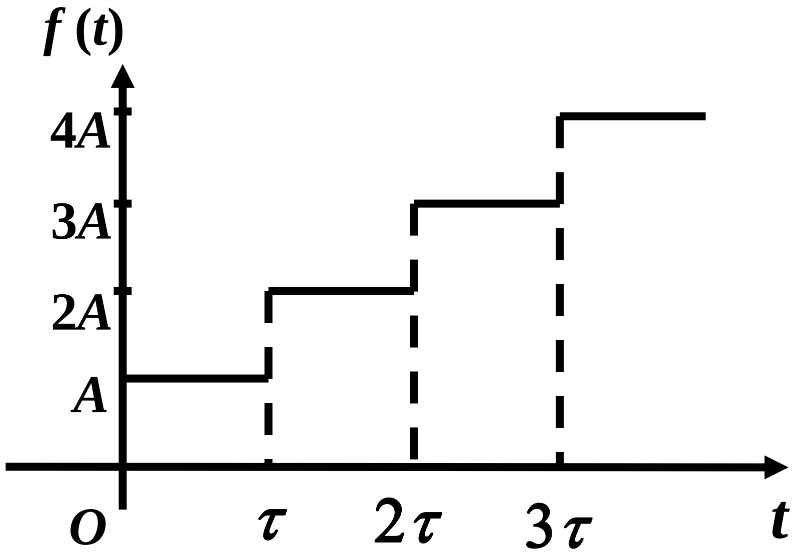


$$\mathcal{L}\,[f(t-\tau)u(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s).$$

例12　求如图所示阶梯函数的Laplace变换.

解　利用Heaviside函数

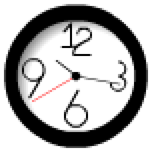
$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$



图中的函数 $f(t)$可表示为

$$f(t)=A[u(t)+u(t-\tau)+u(t-2\tau)+\cdots]$$

$$=A\sum_{k=0}^{\infty}u(t-k\tau).$$



因为$L\ [u(t)]=\dfrac{1}{s}$，所以由 延迟性质

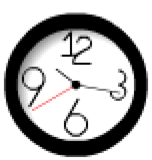
$$\mathcal{L}\,[u(t-k\tau)]=\frac{1}{s}e^{-k\tau s}.$$

再注意到 $\left|e^{-s\tau}\right|<1\ \ (\mathrm{Re}\,s>0)$, 于是

$$\mathcal{L}\,[f(t)]=\frac{A}{s}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k\tau s}=\frac{A}{s(1-e^{-s\tau})}$$

$$=\frac{A}{s}\times\frac{1}{(1-e^{-\frac{s\tau}{2}})(1+e^{-\frac{s\tau}{2}})}$$

$$=\frac{A}{2s}\left(1+\mathrm{cth}\frac{s\tau}{2}\right)\ \ (\mathrm{Re}\,s>0).$$



(8) 相似性质　　设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$, 则

$$\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\quad(a>0),\ \text{其中 } \mathrm{Re}\,s>as_0.$$

证明　根据定义 $\mathcal{L}[f(at)]=\int_0^{+\infty}f(at)e^{-st}\mathrm{d}t$, 故

$$\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(u)e^{-\frac{s}{a}u}\mathrm{d}u=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

例13 求 $\mathscr{L}\,[u(5t)]$ 和 $\mathscr{L}\,[u(5t-2)]$.

解 因为 $\mathscr{L}\,[u(t)] = \dfrac{1}{s}$，所以

$$\mathscr{L}\,[u(5t)] = \frac{1}{5}\times\frac{1}{\frac{s}{5}} = \frac{1}{s}.$$

实际上, 由 $u(5t) = u(t)$, 可直接得到结论. 又由于

$$u(5t-2) = u\left[5\left(t-\frac{2}{5}\right)\right],$$

故

$$\mathscr{L}\,[u(5t-2)] = e^{-\frac{2}{5}s}\mathscr{L}\,[u(5t)] = \frac{1}{s}e^{-\frac{2}{5}s}.$$

下面介绍Laplace变换的卷积性质—卷积定理.

Laplace变换的卷积性质不仅能用来求出某些函数的Laplace逆变换, 而且在线性系统的研究中起着重要作用.

因为在Laplace变换中, 总认为$t<0$时像原函数$f(t)$恒为零. 因此, $f_1(t)$与$f_2(t)$的卷积为

$$f_1(t)*f_2(t)=\left(f_1*f_2\right)(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

卷积定理 设 $f_1(t)$和 $f_2(t)$满足Laplace变换存在的条件，即存在$M>0$和 $s_0>0$，使得

$$|f_1(t)|\le Me^{s_0 t},\quad |f_2(t)|\le Me^{s_0 t}.$$

如果

$$F_1(s)=\mathcal{L}\,[f_1(t)],\ F_2(s)=\mathcal{L}\,[f_2(t)],$$

则

$$\mathcal{L}\,\big[(f_1*f_2)(t)\big]=F_1(s)F_2(s),$$

或

$$\mathcal{L}^{-1}\big[F_1(s)F_2(s)\big]=(f_1*f_2)(t).$$

证明 当 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 分段连续时，其卷积 $(f_1 * f_2)(t)$ 也是分段连续的. 不妨设 $s_0 \geq 1$, 由于

$$\left|\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right| \leq \int_0^t |f_1(\tau)||f_2(t-\tau)|\mathrm{d}\tau$$

$$\leq \int_0^t Me^{s_0\tau} Me^{s_0(t-\tau)}\mathrm{d}\tau = M^2 te^{s_0 t} \leq M^2 e^{2s_0 t},$$

因此, $(f_1 * f_2)(t)$ 也满足Laplace变换存在的条件.

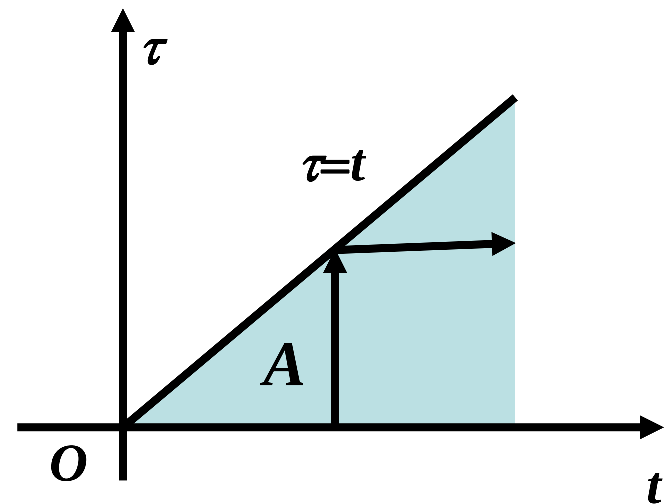
$$\mathcal{L}\left[\left(f_1 * f_2\right)(t)\right] = \int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right] e^{-st}\mathrm{d}t,$$

$$= \iint\limits_A f_1(\tau) f_2(t-\tau) e^{-st}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t,$$

其中A是 $tO\tau$平面内 t 轴

和第一象限的角平分线

$\tau = t$ 围成的角形区域.



交换积分次序

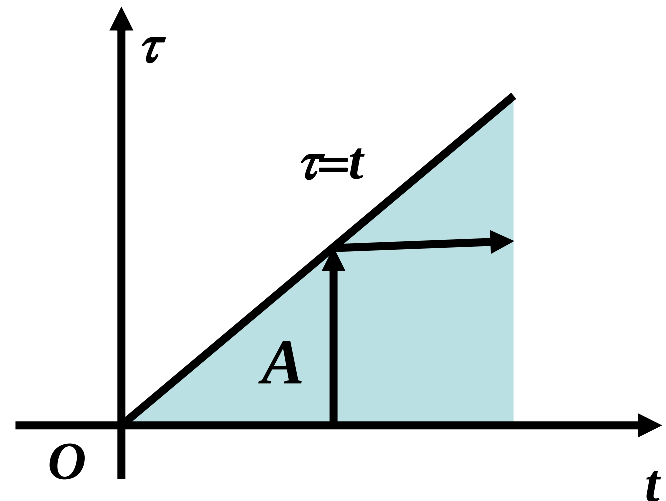
$$\left[\left(f_1 * f_2 \right)(t)\right] = \iint_A f_1(\tau) f_2(t-\tau) e^{-st} \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\tau \int_\tau^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) e^{-st} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \mathrm{d}\tau \int_\tau^{+\infty} f_2(t-\tau) e^{-st} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \mathrm{d}\tau \int_0^{+\infty} f_2(u) e^{-(u+\tau)s} \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} \mathrm{d}\tau \int_0^{+\infty} f_2(u) e^{-su} \mathrm{d}u$$



$$= L\,[f_1(t)] L\,[f_2(t)] = F_1(s) F_2(s).$$

例14 设 $F(s)=\mathcal{L}\,[f(t)]$, 利用卷积定理

证明Laplace变换的积分性质

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{s}F(s).$$

证明 设 $f_1(t)=f(t),\ f_2(t)=1$, 则

$$\mathcal{L}\left[f_1(t)\right]=F(s),\ \mathcal{L}\left[f_2(t)\right]=\frac{1}{s}.$$

于是

$$\mathcal{L}\left[\left(f_1*f_2\right)(t)\right]=\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{s}F(s).$$

应用卷积定理可求某些Laplace逆变换.

例15 求 $\mathcal{L}\left[\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right]$，并证明

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{t}\int_{0}^{\sqrt{t}}e^{-u^{2}}\mathrm{d}u.$$

解 因为

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{0}^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{+\infty}e^{-t^{2}}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi},$$

故

$$\mathscr{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right]=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}.$$

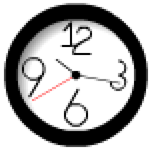
根据位移性质 $\mathscr{L}[e^t]=\dfrac{1}{s-1}$，则由卷积定理

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}*e^t=\int_0^t e^{t-\tau}\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^t\int_0^t e^{-\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\mathrm{d}\tau=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^t\int_0^{\sqrt{t}}e^{-u^2}\mathrm{d}u.$$

§2.3 Laplace 逆变换

本节给出Laplace逆变换积分表达式，应用复变函数论中的留数理论作为工具，给出一种较一般的方法.



已知 $F(s)=\mathcal{L}\,[f(t)]$ 在收敛域内解析，但并不是所有解析函数都是某一函数的Laplace变换像函数.

另外，函数 $f(t)$ 的Laplace变换实际上就是 $f(t)u(t)e^{-\beta t}$ 的Fourier变换. 因此, 当 $f(t)u(t)e^{-\beta t}$ 满足Fourier积分定理的条件时, 根据Fourier积分

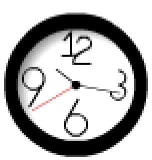
公式，$f(t)$在连续点处

$$f(t)u(t)e^{-\beta t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)u(\tau)e^{-\beta\tau}e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\int_{0}^{+\infty}f(\tau)e^{-(\beta+i\omega)\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\quad(t>0),$$

在等式两端同乘以$e^{\beta t}$，故当$t>0$时，



$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+i\omega)e^{(\beta+i\omega)t}\mathrm{d}\omega.$$

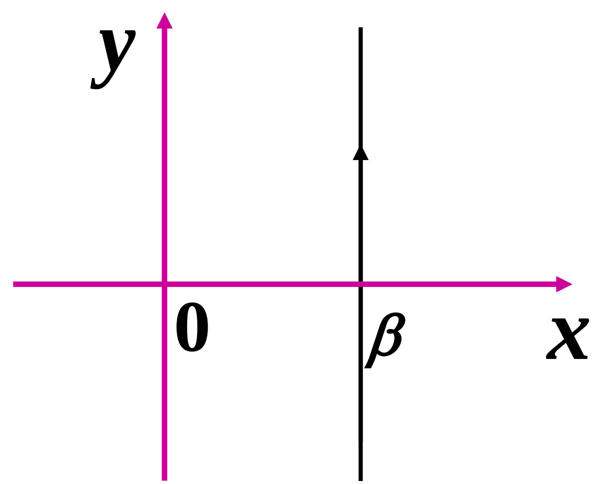
令 $\beta + i\omega = s$, 则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}s\quad (t>0),$$

其中 $\beta > s_0$，s_0是 $f(t)$的增长指数. 积分路径是

在右半平面 $\mathrm{Re}\, s > s_0$上的任意一条直线 $\mathrm{Re}\, s = \beta$.

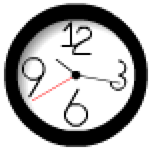
这就是Laplace逆变换的一般公式, 称为Laplace 变换的**反演积分**. 这是复变函数的积分, 在一定条件下, 可利用留数来计算.



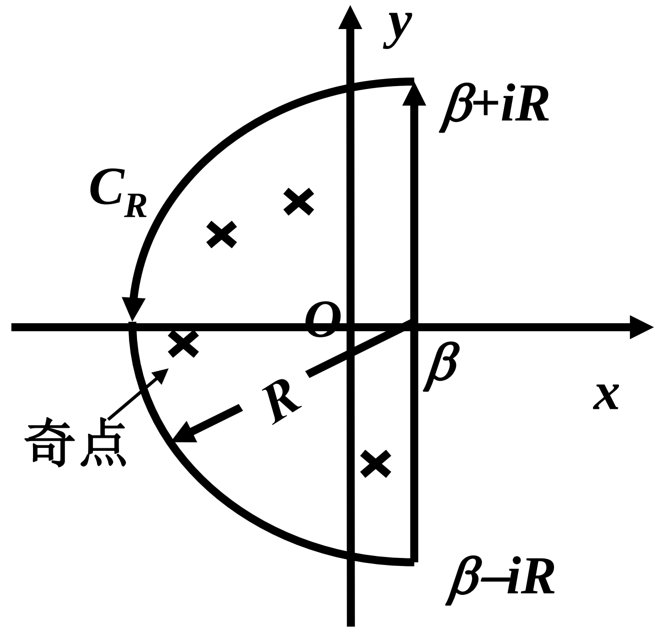
利用留数求Laplace逆变换的公式

定理3 设 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是 $F(s)$ 的所有孤立奇点(有限个)，除这些点外，$F(s)$ 处处解析，且存在 $R_0 > 0$，当 $|s| \geq R_0$ 时，$|F(s)| \leq M(|s|)$，其中 $M(r)$ 是 r 的实函数，且 $\lim\limits_{r\to+\infty} M(r) = 0$．选取 β，使所有孤立奇点都在 $\mathrm{Re}\, s < \beta$ 内，则当 $t > 0$ 时，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_k]$$



证明　取 $R>0$ 充分大，使得 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 都在圆弧 C_R 和直线 $\mathrm{Re}\,s=\beta$ 所围成的区域内．因为 e^{st} 是全平面上的解析函数，因此，$s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是 $F(s)e^{st}$ 的孤立奇点，除这些奇点之外，$F(s)e^{st}$ 处处解析．



于是，根据留数基本定理

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\beta-iR}^{\beta+iR}F(s)e^{st}ds+\int_{C_R}F(s)e^{st}\mathrm{d}s\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st},s_k].$$

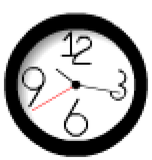
利用 **Jordan引理**

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(s)e^{st}\mathrm{d}s = 0 \quad (t>0).$$

令 $R\to+\infty$，得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_k].$$

特别当 $F(s)$是有理函数，且为分母次数高于分子次数的有理真分式，则Laplace逆变换存在，



$$\boxed{f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_k].}$$

例16 求 $F(s)=\dfrac{s}{s^2+1}$ 的Laplace逆变换.

解 $s=\pm i$ 是 $\dfrac{s}{s^2+1}e^{st}$ 的1级极点， 由计算留数的法则,

$$\operatorname{Res}\left[\frac{s}{s^2+1}e^{st},\ \pm i\right]=\left.\frac{se^{st}}{2s}\right|_{s=\pm i}=\frac{1}{2}e^{\pm it},$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\operatorname{Res}\left[\frac{s}{s^2+1}e^{st},\ i\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{s}{s^2+1}e^{st},\ -i\right]$$

$$=\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})=\cos t.$$

例20 求 $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$ 的Laplace逆变换.

解 $s_1=0$ 和 $s_2=1$ 分别是 $\dfrac{1}{s(s-1)^2}e^{st}$ 的1级和2级极点. 故由计算留数的法则

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{s(s-1)^2}e^{st},\ 0\right]=\lim_{s\to 0}\frac{e^{st}}{(s-1)^2}=1,$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{s(s-1)^2}e^{st},\ 1\right]=\lim_{s\to 1}\left[\frac{e^{st}}{s}\right]'=e^{t}(t-1),$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)^2}\right]=1+e^{t}(t-1)\quad (t>0).$$