

连续系统的频域分析



连续系统的频域分析

- ❖ 谐振电路，滤波电路等电路的设计都与频率有关，相应的需要从频域角度来分析问题。
- ❖ 由时域分析进入频域分析，独立变量由时间变成频率。
- ❖ 时域分析以冲激函数为基本信号，输入信号分解为冲激函数；频域分析以三角函数和指数函数为基本信号，输入信号分解为不同频率的三角函数和指数函数。

内容提要

- ❖ 信号分解为正交函数 – 三角函数和指数函数
- ❖ Fourier级数 – 三角和指数Fourier级数
- ❖ 周期信号的频谱
- ❖ 非周期信号的频谱 – Fourier变换
- ❖ 周期信号的Fourier变换
- ❖ Fourier变换的性质
- ❖ 信号的能谱和功率谱
- ❖ LTI系统的频域分析法
- ❖ 理想低通滤波器
- ❖ 无失真传输的条件
- ❖ 抽样信号与抽样定理

重点与难点

- ❖ 周期信号的频谱
- ❖ 非周期信号的频谱
- ❖ Fourier变换及性质
- ❖ LTI系统的频域分析法

信号分解为正交函数

- ◆ 正交分解的概念
- ◆ 正交函数集 – 三角函数集和指数函数集
- ◆ 信号的正交分解

信号正交分解的概念

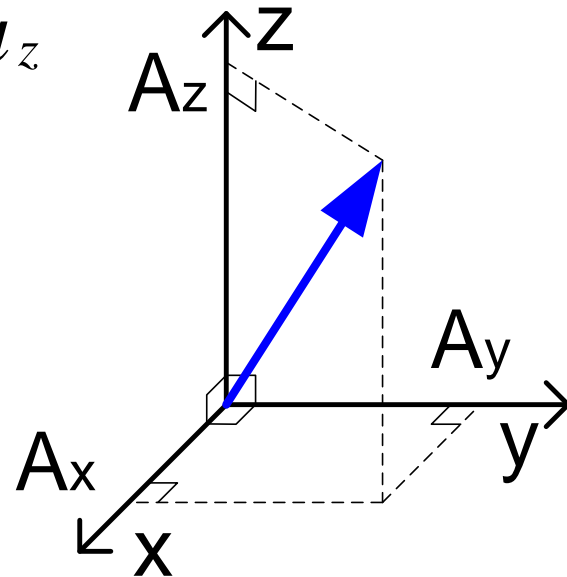
- ❖ 类似于三维空间的矢量在x,y,z轴上进行分解。
- ❖ x,y,z轴相互垂直，即三维正交空间，互相投影为零。

$$\vec{A} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z$$

- ❖ 推广至n维正交空间

$$\vec{A} = A_1 \vec{u}_1 + A_2 \vec{u}_2 + \dots + A_n \vec{u}_n$$

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \left| \vec{u}_i \right| \left| \vec{u}_j \right| \cos \theta = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$



正交函数集

❖ 两函数正交：若定义在区间 (t_1, t_2) 内的两个函数满足

$$\int_{t_1}^{t_2} g_1(t) g_2^*(t) dt = 0$$

则称两函数在区间 (t_1, t_2) 内正交

❖ 正交函数集：由一组函数构成的函数集，这些函数在区间 (t_1, t_2) 内满足

- ◆ 一函数和自己相乘求积分为常数

- ◆ 任意两个不同函数相乘求积分为零

则称这一组函数为区间 (t_1, t_2) 的正交函数集。

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j^*(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i \neq 0, & i = j \end{cases}$$

完备正交函数集

❖ 完备正交函数集：在正交函数集之外不存在函数满足正交条件。 - 无穷多项

◆ 典型完备正交函数集：三角函数集和指数函数集。

三角函数集 $1, \cos n\Omega t, \sin n\Omega t$

指数函数集 $e^{jn\Omega t}$

$$n = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$$

◆ 可用于表示任一信号，且均方误差趋于零。

$$f(t) = C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \dots + C_n g_n(t) + \boxed{\varepsilon_\Delta(t)}$$

$n \rightarrow \infty$, 误差趋于零

误差项

函数 $f(t)$ 可精确分解为无穷多项正交函数之和。

三角Fourier级数

- ◆三角正交函数集
- ◆Fourier级数的三角形式
- ◆函数奇偶特性与谐波特性

三角函数集

❖ 在区间 (t_1, t_1+T) 内，1，正弦和余弦函数构成正交函数集 $1, \cos n\Omega t, \sin n\Omega t, n = 1, 2, 3, \dots$ $\Omega = \frac{2\pi}{T}; T = \frac{2\pi}{\Omega}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{t_1}^{t_1+T} \cos^2 n\Omega t dt = \int_{t_1}^{t_1+T} \sin^2 n\Omega t dt = \frac{T}{2} \\ \int_{t_1}^{t_1+T} \cos m\Omega t \cos n\Omega t dt = \int_{t_1}^{t_1+T} \sin m\Omega t \sin n\Omega t dt = 0, m \neq n \\ \int_{t_1}^{t_1+T} \sin m\Omega t \cos n\Omega t dt = 0, m, n \text{任意} \end{array} \right.$$

❖ m, n 为正整数。

❖ 当 $n \rightarrow \infty$ 时，趋于完备正交函数集。

狄利克雷(Dirichlet)条件

- ❖ $f(t)$ 在一周期内绝对可积。 $\int_{t_1}^{t_1+T} |f(t)| dt < \infty$
- ❖ 在一周期内，函数的极限值数目有限。
- ❖ 在一周期内，如果有间断点存在，则间断点个数有限。

周期信号一般都能满足Dirichlet条件

三角Fourier级数

❖ 当满足Dirichlet条件时，周期为T的周期信号f(t)可以在区间(t₁, t₁+T)内表示为三角Fourier级数：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} \qquad \Omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{基波频率}$$

$$+ a_1 \cos \Omega t + a_2 \cos 2\Omega t + \dots + a_n \cos n\Omega t + \dots$$

$$+ b_1 \sin \Omega t + b_2 \sin 2\Omega t + \dots + b_n \sin n\Omega t + \dots$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

$$\frac{a_0}{2} \quad \text{直流分量} \quad a_1 \cos \Omega t + b_1 \sin \Omega t \quad \text{基波分量}$$

$$a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t \quad n > 1, \text{ n次谐波分量}$$

三角Fourier级数

❖ 各分量系数（见教材定理3-1，加权系数确定）

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt$$

通常取积分限为(0,T)
或(-T/2,T/2)

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos n\Omega t dt$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin n\Omega t dt$$

直流分量 $\overline{f(t)} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt = \frac{a_0}{2}$

误差函数

❖ 实际应用中，只能取有限项来进行分析。

❖ 有限项Fourier级数

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

❖ 误差函数

$$\varepsilon_N(t) = f(t) - S_N(t)$$

❖ 均方误差（常用于判定系统性能指标，MSE）

$$E_N = \overline{\varepsilon_N^2(t)} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \varepsilon_N^2(t) dt$$

a_0, a_n, b_n 给出最小均方
误差意义上的最佳近似

$$= \overline{f^2(t)} - \left[a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

三角Fourier级数

❖ 合并同频率项（教材3-2节）

两种常用表达式

三角型和余弦型

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \phi_n) \quad t \in (t_1, t_1 + T)$$

$$A_0 = a_0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{偶函数} \quad a_n = A_n \cos \phi_n \quad \text{偶函数}$$

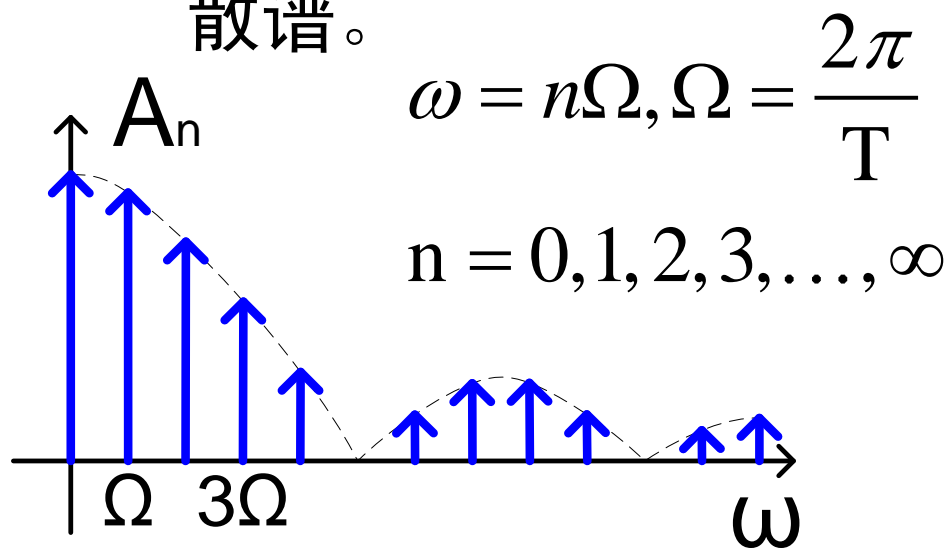
$$\phi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n} \quad \text{奇函数} \quad b_n = -A_n \sin \phi_n \quad \text{奇函数}$$

在一定时间间隔内，任意一个代表信号的函数 $f(t)$ 可以用一个直流分量和一系列谐波分量之和来表示。

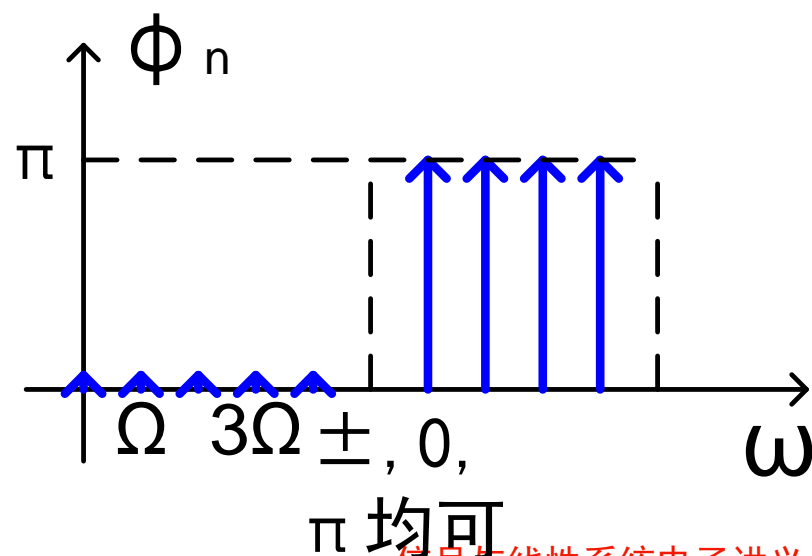
频谱图

❖ 频谱图

- ◆ $A_n \sim n\Omega$ 幅度频谱图（通常说频谱指幅度频谱），其中 A_0 为2倍直流分量。
- ◆ $\varphi_n \sim n\Omega$ 相位频谱图。
- ◆ 周期信号的频谱只出现在 $n\Omega$ 等离散频率点，是离散谱。



离散性、谐波性、收敛性

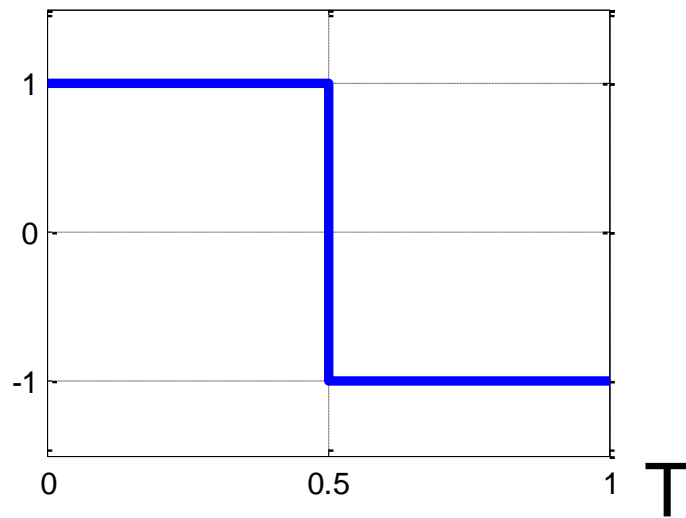


π 均可

三角Fourier级数练习

❖ 用三角Fourier级数表示方波信号。

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$



$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t) \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

三角Fourier级数练习

❖ 求分量系数，取积分限为(0,T)

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = 0 \qquad f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\Omega t$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\Omega t dt = 0 \qquad t \in (0, T)$$

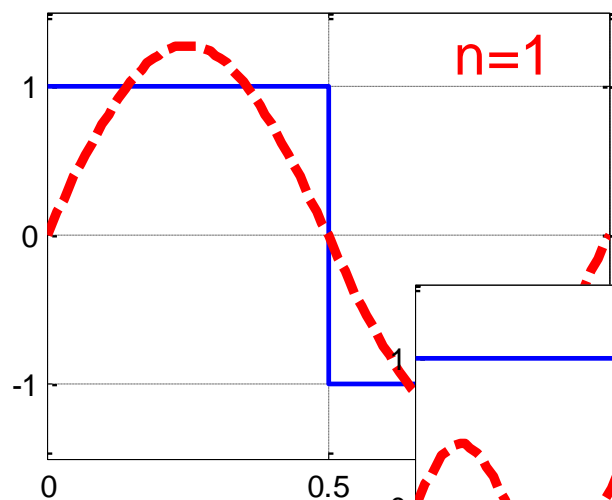
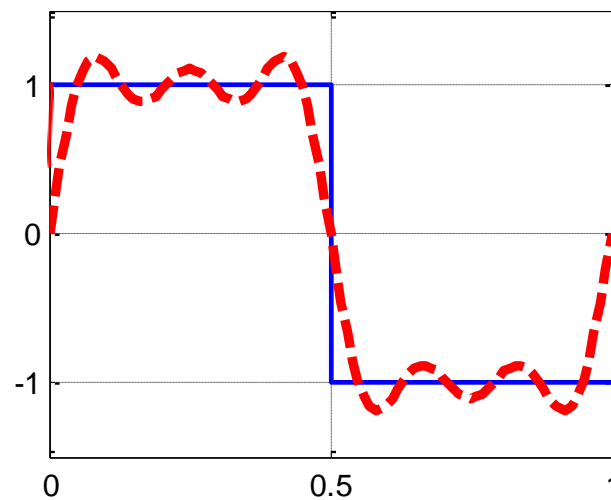
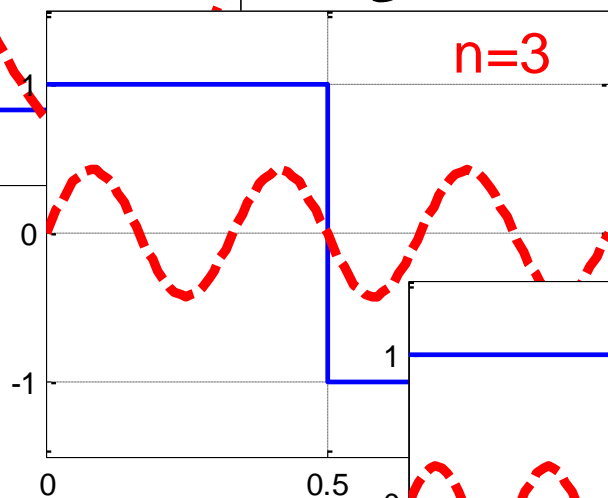
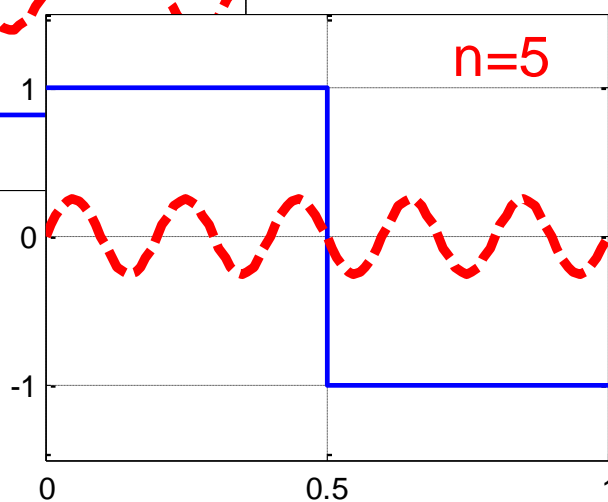
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\Omega t dt = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n \text{ 为奇数} \\ 0 & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

则在区间(0,T)内，信号f(t)可以写成：

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \Omega t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t + \frac{1}{5} \sin 5\Omega t + \dots \right) \quad t \in (0, T)$$

$\sin \Omega t$

前5次谐波叠加, $n \leq 5$


 $\frac{1}{3} \sin 3\Omega t$

 $\frac{1}{5} \sin 5\Omega t$


上一节复习

❖ 正交函数分解

❖ 三角Fourier级数

◆ 两种常用表达式

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \phi_n)$$

$$t \in (t_1, t_1 + T)$$

$$a_n = A_n \cos \phi_n$$

$$b_n = -A_n \sin \phi_n$$

$$A_0 = a_0$$

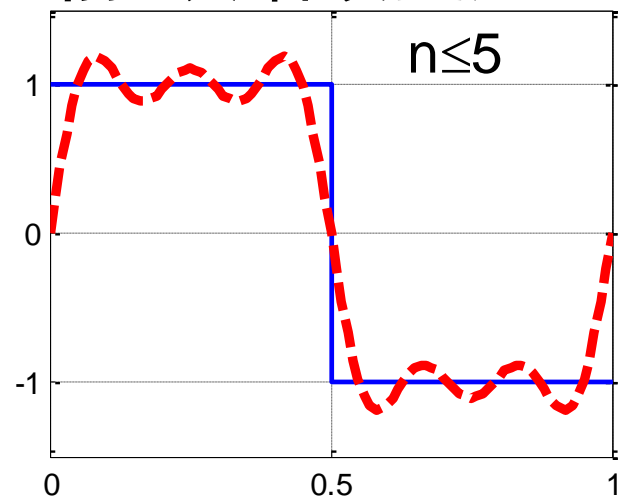
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\phi_n = -\operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}$$

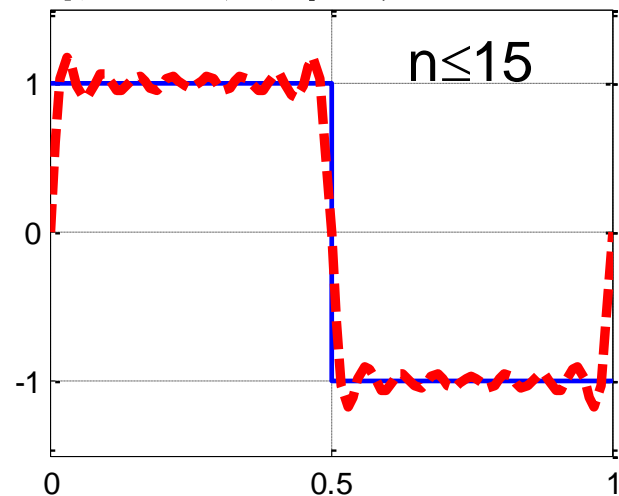
Fourier级数特点

- ❖ 谐波次数 n 越大，误差越小，近似程度越好。
- ❖ 对脉冲信号，在跃变点附近的波形必有一个起伏振荡，主要是受高频分量的影响。随着 n 值增大，这个振荡存在的时间缩短，但其引起的过冲值趋于9%的固定值，称为Gibbs现象。
- ❖ 低频分量主要影响脉冲顶部的形状。
- ❖ 脉冲变化越剧烈，高频分量越多，越缓慢，低频分量越多。
- ❖ 任一频率分量的幅度或相位发生相对变化，都会引起输出波形失真。

前5次谐波叠加



前15次谐波叠加

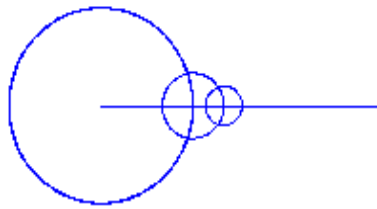


Fourier级数特点

周期方波的傅立叶级数展开

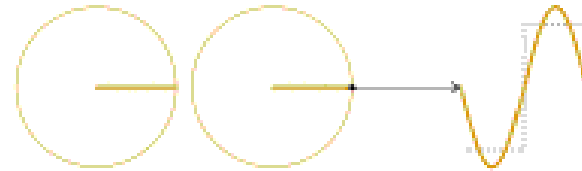
以前一个练习为例：三角Fourier级数表示方波信号

$$f(t) = \sin(\theta) + \sin(3\theta)/3 + \sin(5\theta)/5$$



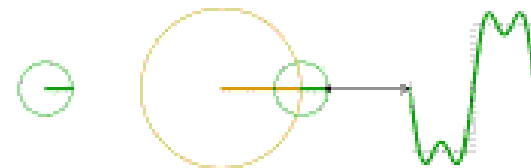
基波

$$\frac{4 \sin \theta}{\pi}$$



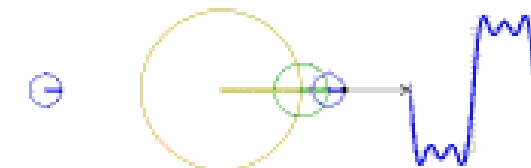
3次谐波

$$\frac{4 \sin 3\theta}{3\pi}$$



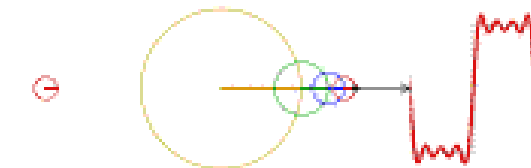
5次谐波

$$\frac{4 \sin 5\theta}{5\pi}$$



7次谐波

$$\frac{4 \sin 7\theta}{7\pi}$$



Fourier级数的周期性

(傅里叶级数展开动画)

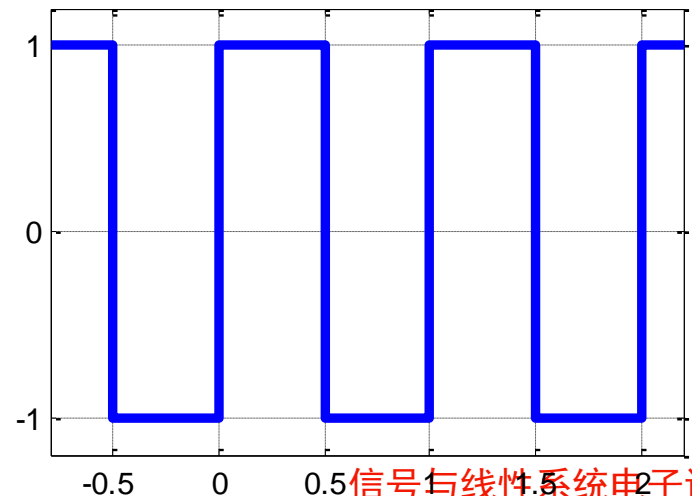
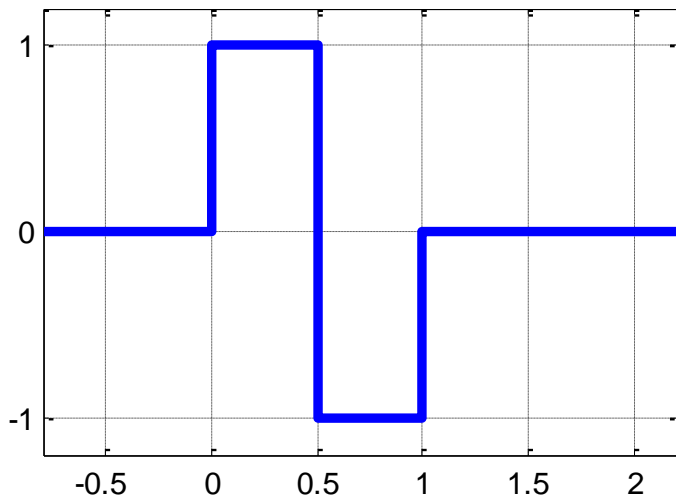
非周期信号

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \Omega t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t + \frac{1}{5} \sin 5\Omega t + \dots \right) \quad t \in (0, T)$$

周期信号

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \Omega t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t + \frac{1}{5} \sin 5\Omega t + \dots \right) \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

Fourier级数在整个时间区间内是周期为T的周期函数。



函数对称性与谐波特性

❖ 三角Fourier级数表达式

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \underline{\cos n\Omega t} dt$$

偶函数

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \underline{\sin n\Omega t} dt$$

奇函数

对偶函数积分

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_e(t) dt = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} f_e(t) dt$$

对奇函数积分

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_o(t) dt = 0$$

偶	×	偶	=	偶
奇	×	奇	=	偶
奇	×	偶	=	奇

偶函数谐波特性

❖ 以偶函数为例 $f(t) = f(-t)$

直流项(平均值)

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad \begin{cases} \neq 0 & \text{取决于} \\ = 0 & \text{具体信号} \end{cases}$$

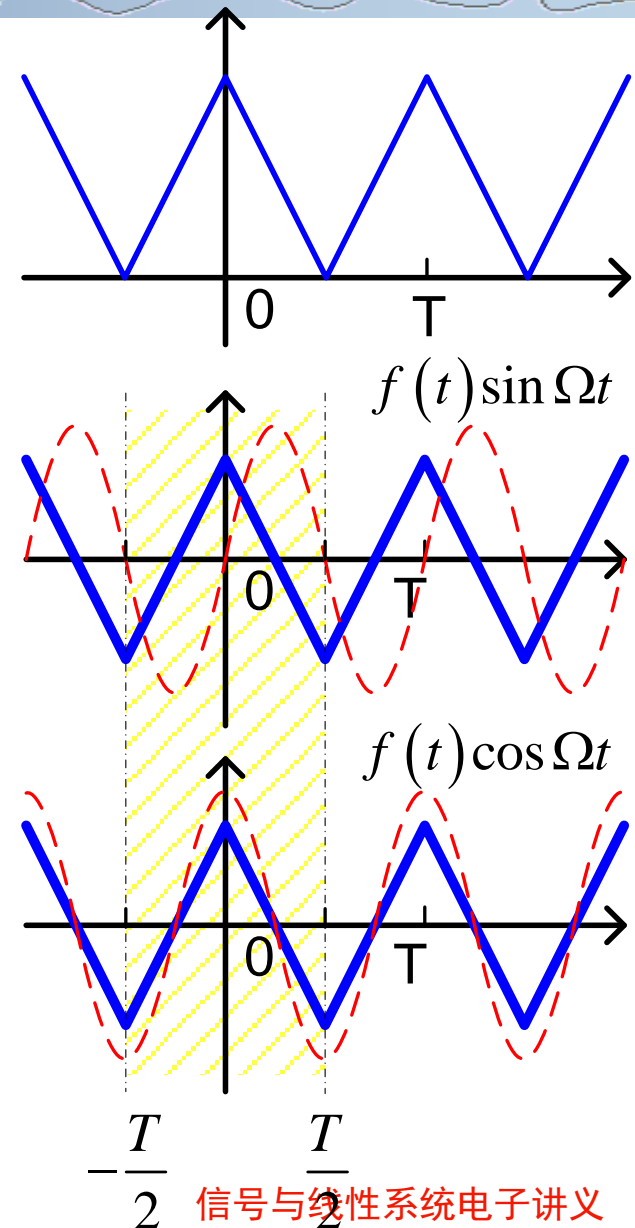
余弦项

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t) \cos n\Omega t dt}_{\text{偶函数}} \neq 0$$

正弦项

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t) \sin n\Omega t dt}_{\text{奇函数}} = 0$$



偶函数谐波特性

❖ 三角Fourier级数表达式

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

❖ 偶函数 关于纵轴对称 $f(t) = f(-t)$ $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt$

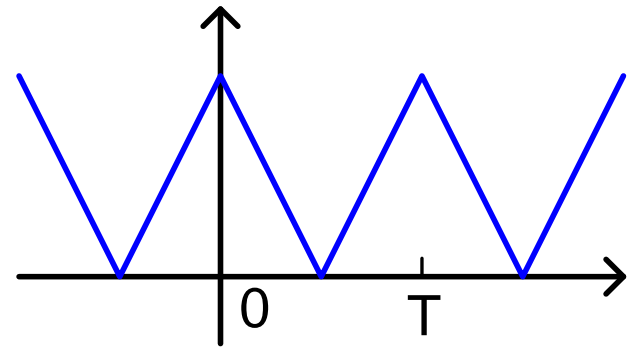
◆ 只包含直流分量和余弦谐波分量

◆ 无正弦谐波分量

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \neq 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt \neq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t dt = 0$$



$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t$$

奇函数谐波特性

❖ 三角Fourier级数表达式

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

❖ 奇函数 关于原点对称 $f(t) = -f(-t)$ $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = 0$

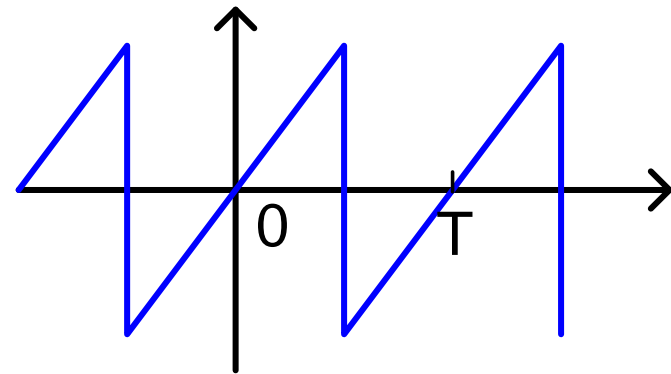
◆ 只包含正弦谐波分量

◆ 无直流分量和余弦谐波分量

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t dt \neq 0$$



$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega t$$

偶谐函数谐波特性

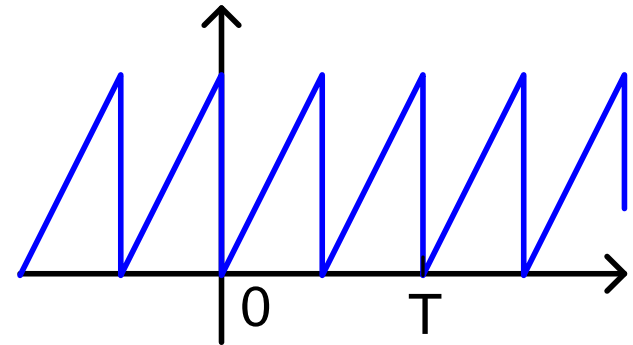
❖ 三角Fourier级数表达式

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

❖ 偶谐函数

半波函数 $f(t \pm \frac{T}{2}) = f(t)$

- ◆ 只包含偶次谐波分量和直流项
- ◆ 无奇次谐波分量



$$a_{2k+1} = 0, b_{2k+1} = 0$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k} \cos(2k)\Omega t + b_{2k} \sin(2k)\Omega t)$$

奇谐函数谐波特性

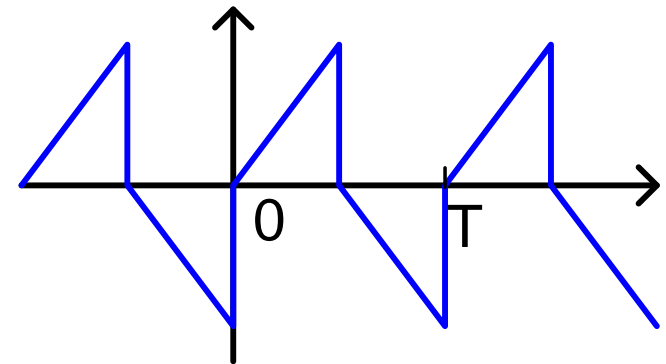
❖ 三角Fourier级数表达式

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

❖ 奇谐函数

半波对称函数 $f(t \pm \frac{T}{2}) = -f(t)$

- ◆ 只包含奇次谐波分量
- ◆ 无直流分量和偶次谐波分量



$$a_0 = 0, a_{2k} = 0, b_{2k} = 0$$

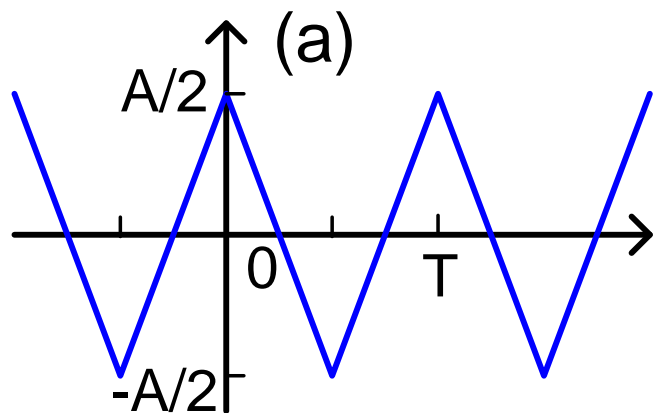
$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_{2k+1} \cos(2k+1)\Omega t + b_{2k+1} \sin(2k+1)\Omega t)$$

函数奇偶特性与谐波特性

- ❖ 函数奇偶特性决定了其谐波特性，即Fourier级数展开后的分量系数。
- ❖ 函数的奇偶关系，在移动坐标轴时，可能发生改变。
- ❖ 某些信号的Fourier级数可以利用信号的时域分解和常用信号的Fourier级数求出。

函数奇偶特性与谐波特性练习1

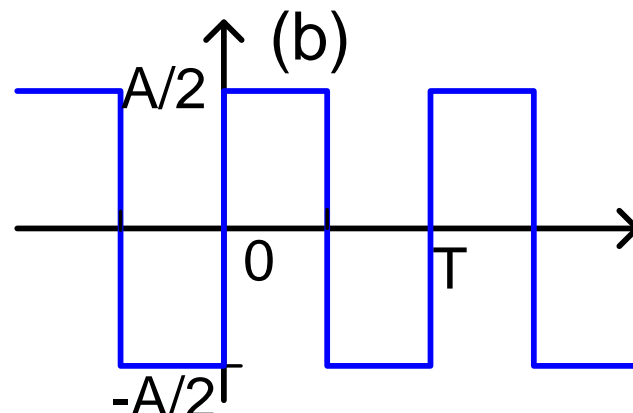
31



偶函数：直流项+余弦项

奇谐函数：奇次项

只有奇次余弦项



奇函数：正弦项

奇谐函数：奇次项

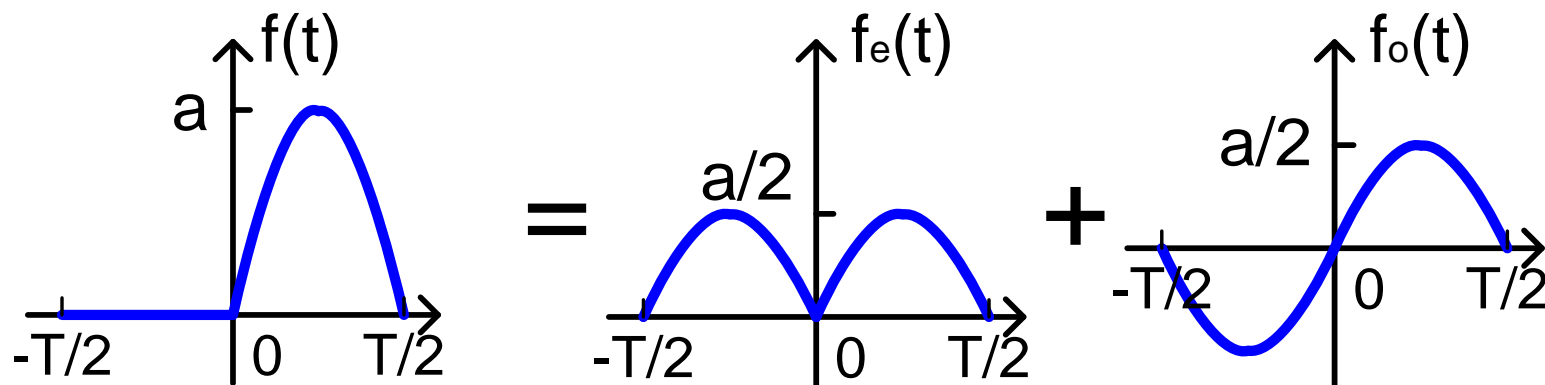
只有奇次正弦项

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)\Omega t$$

$$f(t) = \frac{4A}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)\Omega t$$

函数奇偶特性与谐波特性练习2 32

❖ 利用信号分解



偶函数：直流项+余弦项

奇函数：正弦项

偶谐函数：偶次项

奇谐函数：奇次项

只有偶次余弦项

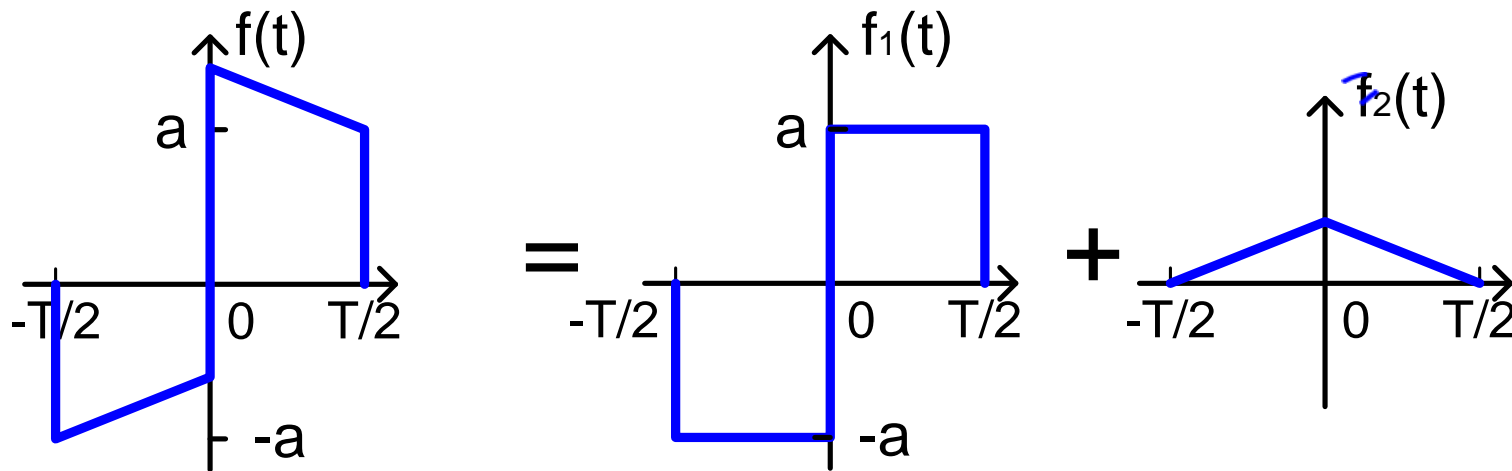
只有奇次正弦项

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cos(2k)\Omega t + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \sin(2k+1)\Omega t$$

函数奇偶特性与谐波特性练习3

33

❖ 利用信号分解



$f_1(t)$ 奇函数：正弦项

奇谐函数：奇次项

只有奇次正弦项

$f_2(t)$ 偶函数：余弦项+直流项

奇谐函数：奇次项 (去除直流项后)

只有直流项+奇次余弦项

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos((2k+1)\Omega t) + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \sin((2k+1)\Omega t)$$

指数Fourier级数



正交函数集 – 复习

❖ 两函数正交：若定义在区间 (t_1, t_2) 内的两个函数满足

$$\int_{t_1}^{t_2} g_1(t) g_2^*(t) dt = 0$$

则称两函数在区间 (t_1, t_2) 内正交

❖ 正交函数集：由一组函数构成的函数集，这些函数在区间 (t_1, t_2) 内满足

◆ 一函数和自己相乘求积分为常数

◆ 任意两个不同函数相乘求积分为零

则称这一组函数为区间 (t_1, t_2) 的正交函数集。

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j^*(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i \neq 0, & i = j \end{cases}$$

指数函数集

❖ 在区间 (t_1, t_1+T) 内，指数函数构成正交函数集

$$e^{jn\Omega t}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_1+T} e^{jn\Omega t} \left(e^{jn\Omega t} \right)^* dt = T \\ \int_{t_1}^{t_1+T} e^{jm\Omega t} \left(e^{jn\Omega t} \right)^* dt = 0 \quad m \neq n \end{cases}$$

❖ m, n 为正负整数。

❖ 当 $n \rightarrow \infty$ 时，趋于完备正交函数集。

指数Fourier级数

❖ 周期为T的周期信号f(t)可以在区间(t₁, t₁+T)内用指数Fourier级数表示为：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t}$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{基波频率}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

三角与指数Fourier级数

❖ 性质相同（直流分量+谐波分量），形式不同：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t}$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{基波频率}$$

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \phi_n)$$

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$= \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[e^{j(n\Omega t + \phi_n)} + e^{-j(n\Omega t + \phi_n)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} A_0 e^{j(0\Omega t + 0)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j(n\Omega t + \phi_n)} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} A_n e^{j(n\Omega t + \phi_n)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j\phi_n} e^{jn\Omega t}$$

复数

$$c_n = \frac{1}{2} A_n e^{j\phi_n}$$

Fourier级数复系数

❖ 指数Fourier级数和三角Fourier级数的系数：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t} \quad \Omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{基波频率}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j\phi_n} e^{jn\Omega t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega t} \quad \boxed{\dot{A}_n = A_n e^{j\phi_n}}$$

$$c_n = \frac{1}{2} \dot{A}_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

n次谐波的复数振幅

c_n 与 A_n 的频谱图幅值不同，引入负频率项之后，谐波分量的幅度应为正负两频率分量之和。

三角与指数Fourier级数

指数Fourier级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j\phi_n} e^{jn\Omega t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

三角Fourier级数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \phi_n)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t dt$$

三角与指数Fourier级数

指数Fourier级数

$$c_n = \frac{1}{2} A_n e^{j\phi_n} = \frac{1}{2} \dot{A}_n$$

$$= \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$$

$$A_n = 2|c_n|$$

$$\phi_n = \arctg \left(\frac{\Im(c_n)}{\Re(c_n)} \right)$$

$$A_{-n} = A_n \quad \text{偶函数}$$

$$\phi_{-n} = -\phi_n \quad \text{奇函数}$$

三角Fourier级数

$$a_n = A_n \cos \phi_n$$

$$b_n = -A_n \sin \phi_n$$

$$A_0 = a_0$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\phi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n}$$

三角和指数Fourier级数的系数通过 A_n 和 ϕ_n 联系起来。

周期信号的频谱

- ◆典型周期信号的Fourier级数
- ◆周期信号频谱的特点

信号频谱图

- ❖ $A_n \sim \omega$ 和 $\phi_n \sim \omega$ 称为振幅频谱图和相位频谱图。
- ❖ 振幅频谱图用不同长度的线段来代表不同谐波分量的振幅，并按照频率高低依次排列。
- ❖ 频谱图以直观的形式给出各次谐波的幅值和相位随频率的变化关系及相对大小。

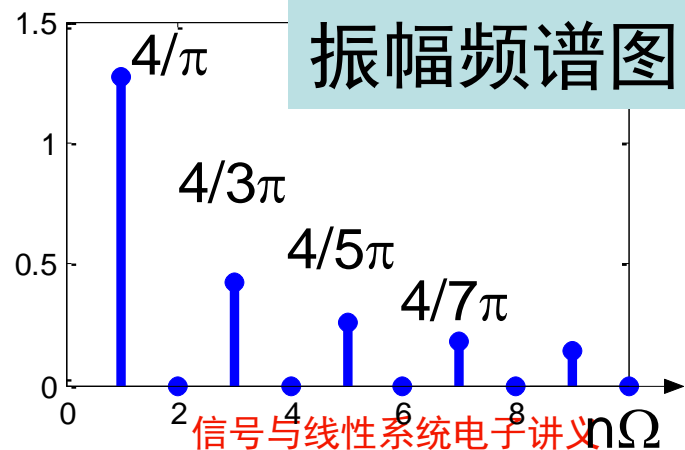
频谱图通常指振幅频谱图

方波信号

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \Omega t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t + \frac{1}{5} \sin 5\Omega t + \dots \right)$$

$$t \in (0, T)$$

横坐标代表频率
纵坐标代表振幅



周期信号的频谱举例

❖ 求周期信号的周期 T ，基波频率 Ω ，并画出频谱图。

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$T_1=8$$

$$T_2=6$$

周期 $T=24$ ，基波频率 $\Omega=2\pi/T=\pi/12$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \phi_n) \\ &= \frac{2}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(3\frac{\pi}{12}t - \frac{2\pi}{3} + \pi\right) + \frac{1}{4} \cos\left(4\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{2}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(3\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(4\frac{\pi}{12}t - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

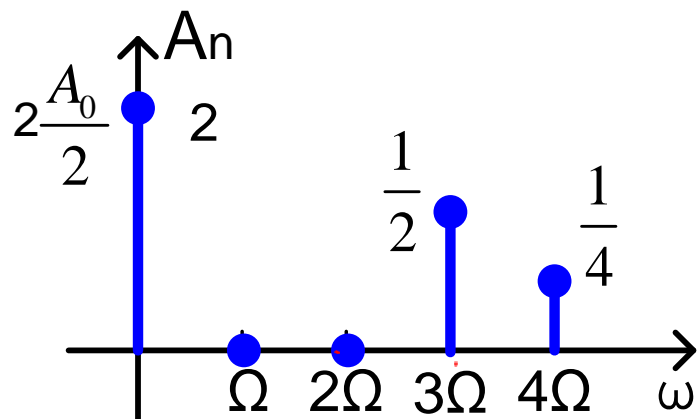
周期信号的频谱举例

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \phi_n) \quad \Omega = \frac{\pi}{12}$$

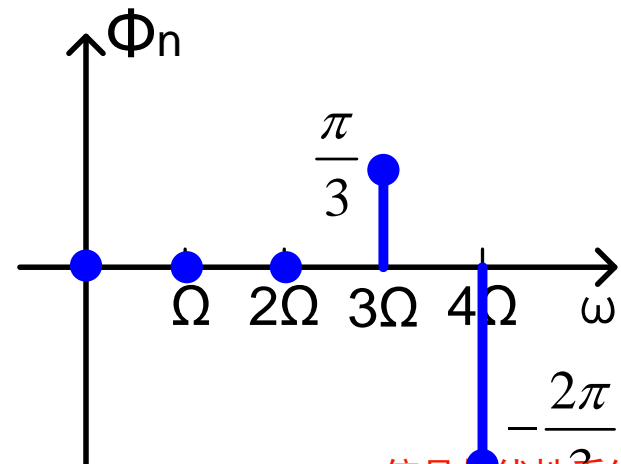
$$= \frac{2}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\underline{-\frac{3}{12}}\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\underline{-\frac{4}{12}}\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

3次谐波 4次谐波

振幅频谱



相位频谱



周期信号频谱的特点

❖ 离散性

- ◆ 谱线离散，谱线间隔为 $\Omega=2\pi/T$ 。
- ◆ 周期 T 越大，谱线越靠近，间隔 Ω 越小。

$T \rightarrow \infty$ 时，

周期信号 \rightarrow 非周期信号

离散频谱 \rightarrow 连续频谱

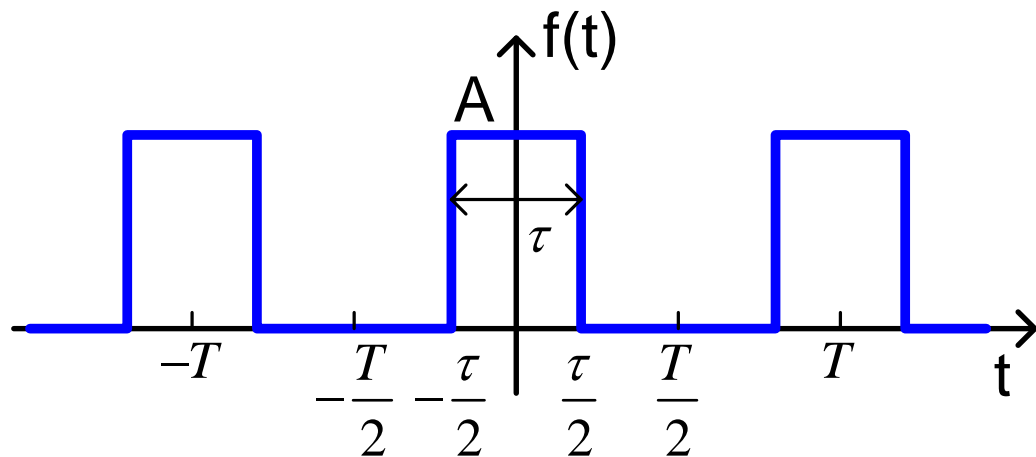
❖ 谐波性

- ◆ 每条谱线都在 Ω 的整数倍上。

❖ 收敛性

- ◆ 各次谐波的振幅总趋势是随着谐波次数增加而减小。

周期脉冲函数的频谱



$$f(t) = \begin{cases} A & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & -\frac{T}{2} < t < -\frac{\tau}{2} \text{ \& } \frac{\tau}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$Sa \frac{n\Omega\tau}{2} = \frac{\sin(n\Omega\tau/2)}{n\Omega\tau/2}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega t}$$

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$$= \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-jn\Omega t} dt$$

$$= \frac{4A}{n\Omega T} \sin \frac{n\Omega\tau}{2}$$

$$= \frac{2A\tau}{T} Sa \frac{n\Omega\tau}{2}$$

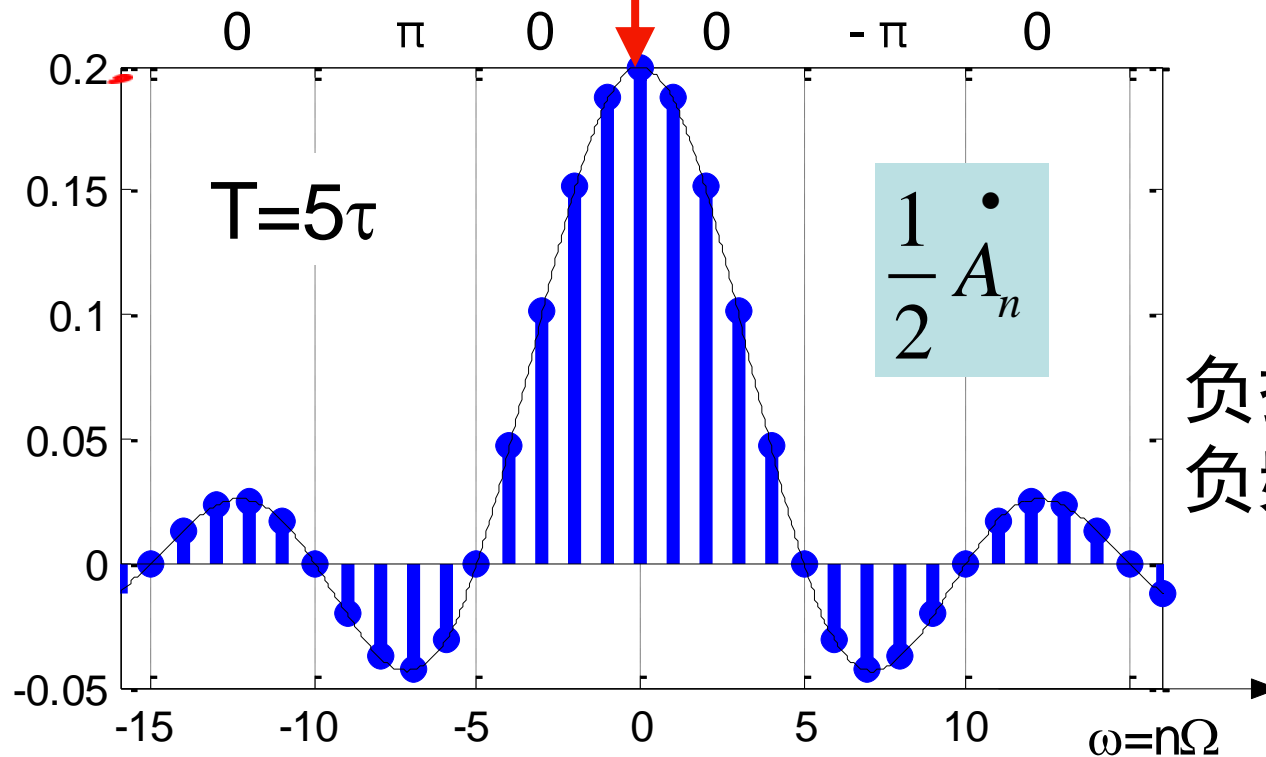
双边频谱图

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega t} \quad \dot{A}_n = \frac{2A\tau}{T} \text{Sa} \frac{n\Omega\tau}{2} = \frac{2A\tau}{T} \text{Sa} \frac{n\pi\tau}{T}$$

$A_0/2$: 直流分量

$$A_0 = \lim_{n \rightarrow 0} \left| \dot{A}_n \right| = \frac{2A\tau}{T}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{Sa}(x) = 1$$



负振幅代表相位 $-\pi$
负频率代表负指数项

单边频谱图

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \phi_n)$$

频谱对称性

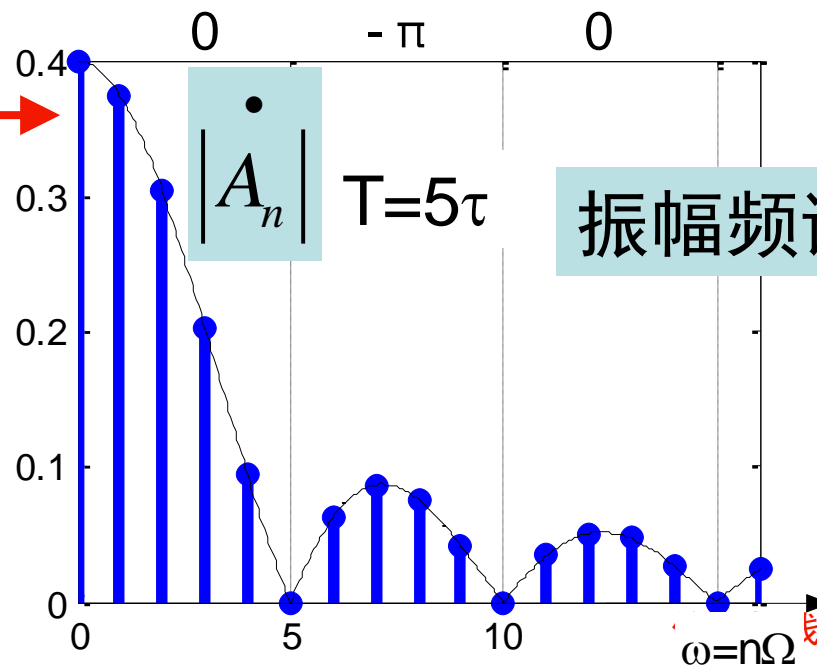
$$A_{-n} = A_n \quad \text{偶函数}$$

$$\phi_{-n} = -\phi_n \quad \text{奇函数}$$

$$A_n = \left| \dot{A}_n \right| = \frac{2A\tau}{T} \left| \text{Sa} \frac{n\Omega\tau}{2} \right|$$

A_0 : 2倍直流分量

$$A_0 = \frac{2A\tau}{T}$$



周期脉冲函数频谱特点

- ❖ 直流分量，基波及各次谐波分量大小正比于脉冲高度A和脉冲宽度 τ ，反比于周期T。

$$\dot{A}_n = \frac{2A\tau}{T} \text{Sa} \frac{n\Omega\tau}{2}$$

- ❖ 谱线幅度按包络线 $\text{Sa}(n\Omega\tau/2)$ 规律变化，包络线零点出现在 $2\pi/\tau$ 的整数倍处。

$$\text{当 } \frac{n\Omega\tau}{2} = m\pi \text{ 即 } n\Omega = m\frac{2\pi}{\tau} \text{ 时 } \text{Sa} \frac{n\Omega\tau}{2} = 0$$

- ❖ 周期脉冲信号可以分解为无数个谐波分量，主要能量集中在第一个零点以内(有效带宽)。

$$\omega < \frac{2\pi}{\tau}$$

τ 不变, $T=5\tau$ & $T=10\tau$

```
tao=1;
Nmax=25; % maximum n
% discrete
n=-Nmax:1:Nmax;
n0=Nmax+1;
T=5*tao; % or T=10*tao;
```

$$A_n = \frac{2A\tau}{T} \left| \text{Sa} \frac{n\Omega\tau}{2} \right|$$

$T=5\tau \rightarrow T=10\tau$, T 增加

- Ω 减小, 谱线变密集
- 同频率分量振幅减小
- 振幅为零处频率不变, n 增加

```
xc=(nc*W1*tao/2);
Ac=2*tao/T*(sin(xc)./xc);
```

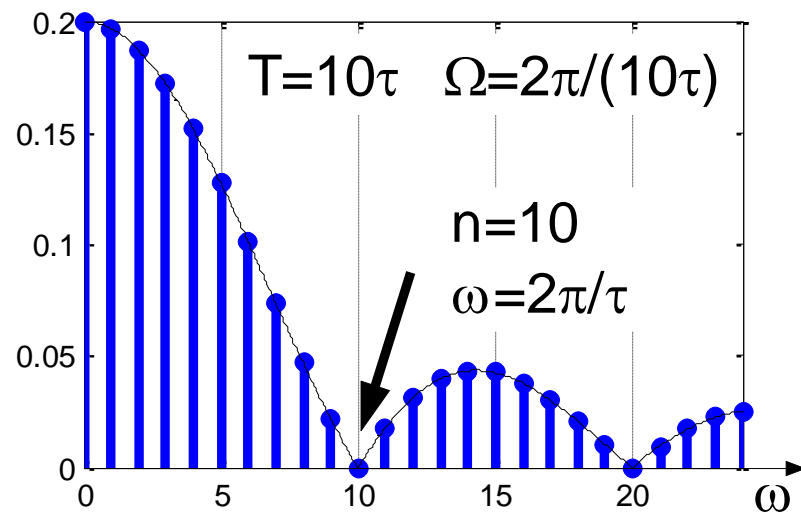
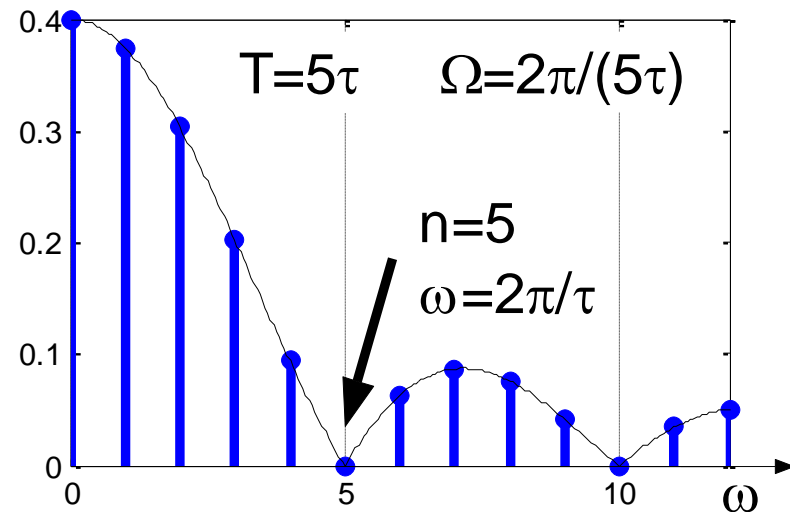
$T \rightarrow \infty$

周期信号 \rightarrow 非周期信号

离散谱线 \rightarrow 连续谱线

振幅 $\rightarrow 0$

```
hold on; plot(nc,Ac/2, 'k-')
```



T不变, $T=5\tau$ & $T=10\tau$

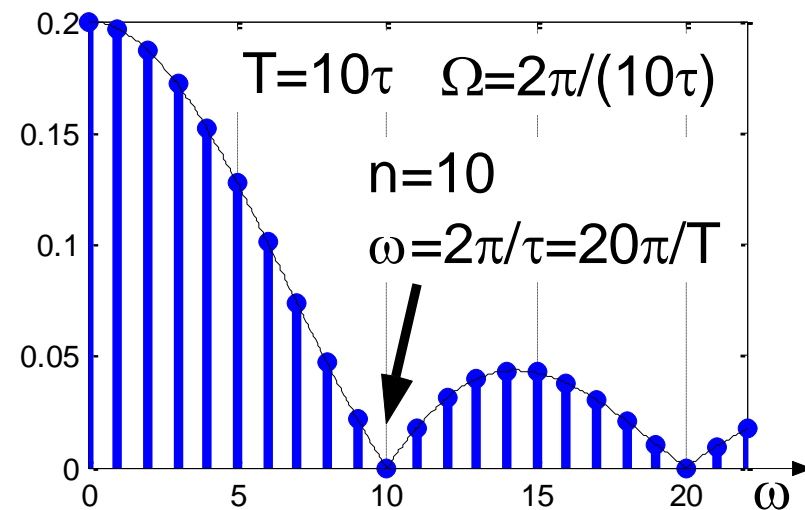
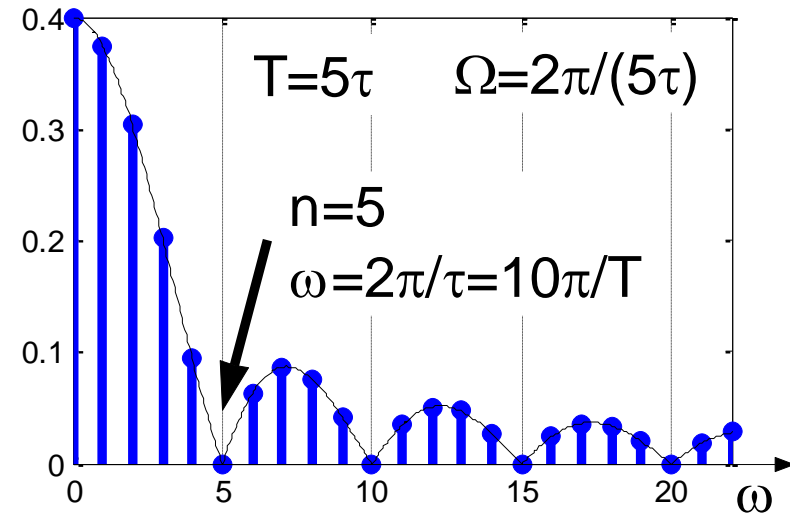
```
T=10;
Nmax=25; % maximum n
% discrete
n=-Nmax:1:Nmax;
n0=Nmax+1;
tao=T/5; % or tao=T/10;
```

$$A_n = \frac{2A\tau}{T} \left| \text{Sa} \frac{n\Omega\tau}{2} \right|$$

$T=5\tau \rightarrow T=10\tau$, τ 减小

- Ω 不变, 谱线间距不变
- 振幅收敛速度减慢
- 振幅整体减小
- 振幅为零处频率增加, n 增加

```
nc(nc0:end),abs(An(nc0:end)), 'filled')
hold on; plot(nc(nc0:end),abs(Ac(nc0:end)), 'k-')
% double side
figure
stem(n,An/2,'filled')
hold on; plot(nc,Ac/2, 'k-')
```



上一节复习

❖ 三角Fourier级数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \phi_n)$$

❖ Fourier级数的周期性

❖ 函数对称性与谐波特性

- ◆ 奇函数、偶函数、奇谐函数、偶谐函数

❖ 指数Fourier级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j\phi_n} e^{jn\Omega t}$$

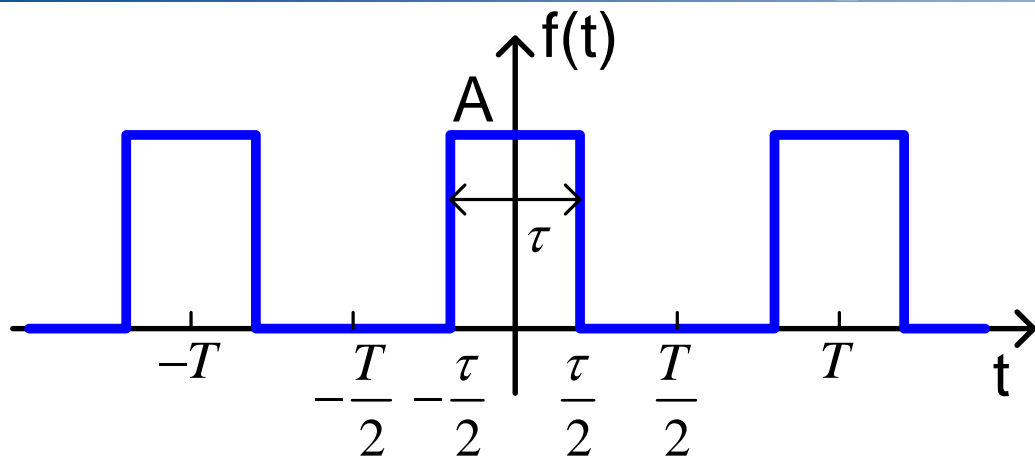
$$c_n = \frac{1}{2} A_n e^{j\phi_n} = \frac{1}{2} \dot{A}_n$$

$$= \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$$

❖ 周期信号的频谱图

- ◆ 离散性、谐波性、收敛性

周期脉冲信号的单边频谱图

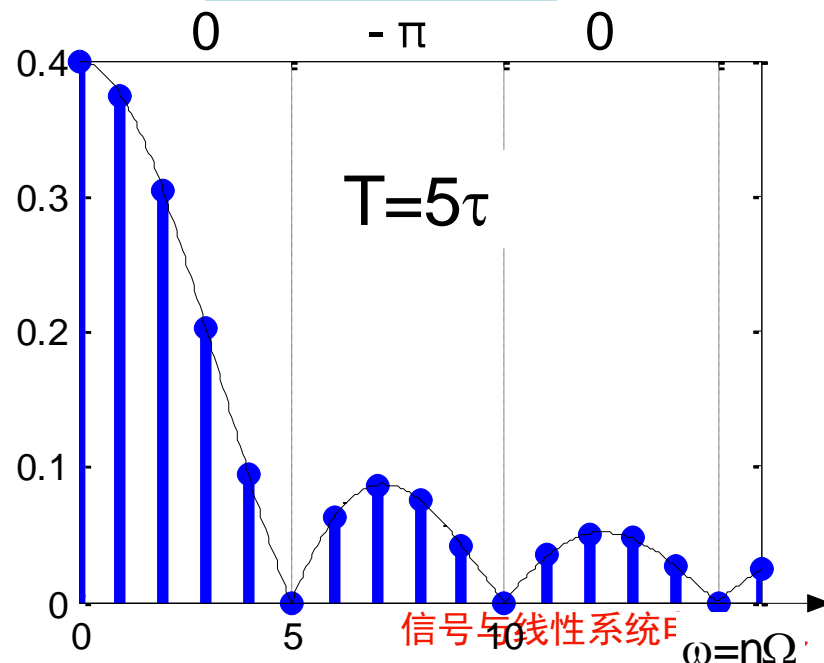


$$A_n = \frac{2A\tau}{T} \left| \text{Sa} \frac{n\Omega\tau}{2} \right|$$

$$f(t) = \begin{cases} A & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & -\frac{T}{2} < t < -\frac{\tau}{2} \text{ \& } \frac{\tau}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \phi_n)$$

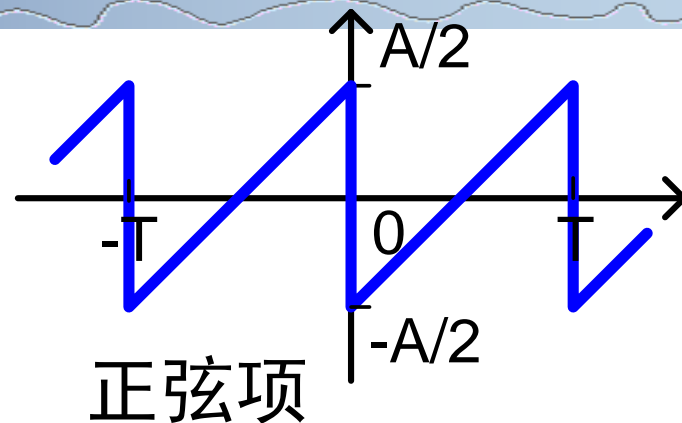
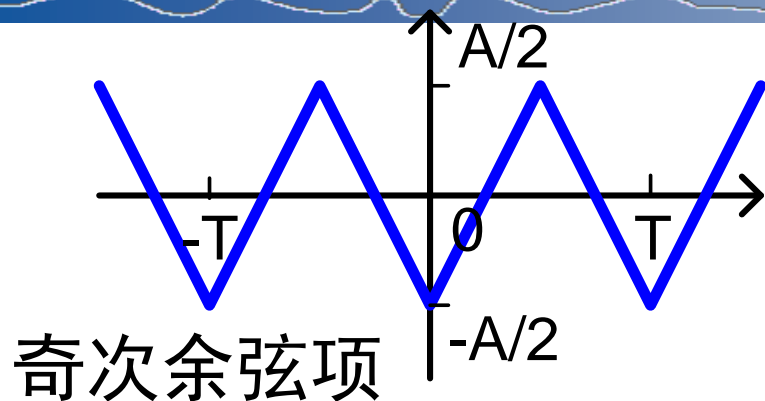
振幅频谱



频带宽度

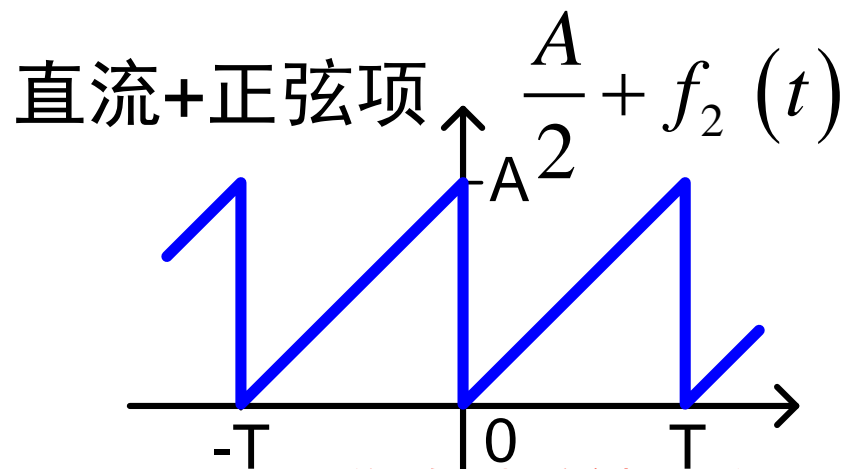
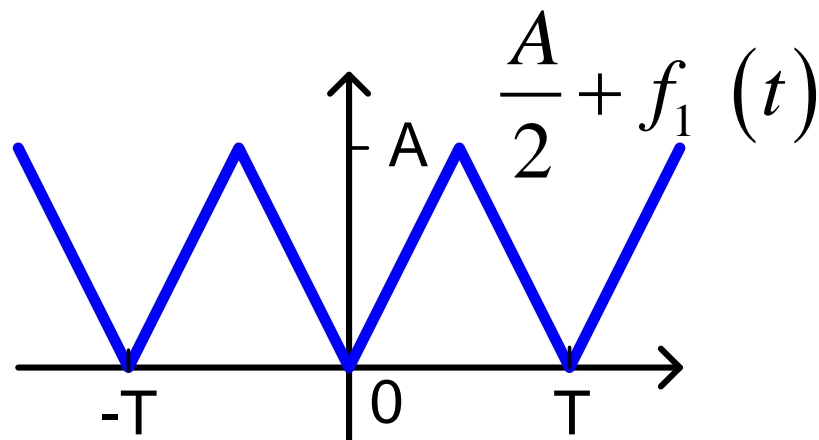
- ❖ 周期脉冲信号的谐波分量有无穷多个。实际应用中不可能考虑无穷多项谐波分量。由频谱图的收敛性，大部分能量集中在频谱图的低频部分。所以实用中考虑较低的一部分谐波分量就足够了。
- ❖ 一般情况下，定义频带宽度从零频率到谱线包络降为最大值的10%的频率点。
- ❖ 脉冲信号的脉宽与频宽成反比。脉宽↓ 包络收敛速度↓
- ❖ 时间函数变化较快的信号具有较宽的频带宽度。
例如有跃变点的信号

常用周期信号的Fourier级数

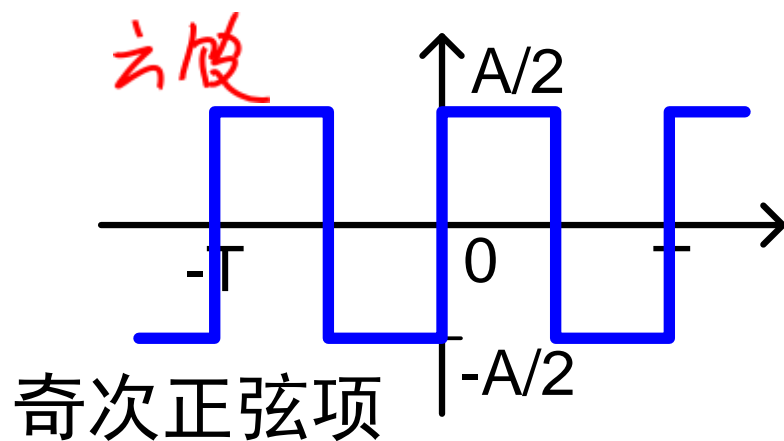


$$f_1(t) = -\frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n\Omega t) \quad f_2(t) = -\frac{A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\Omega t)}{n}$$

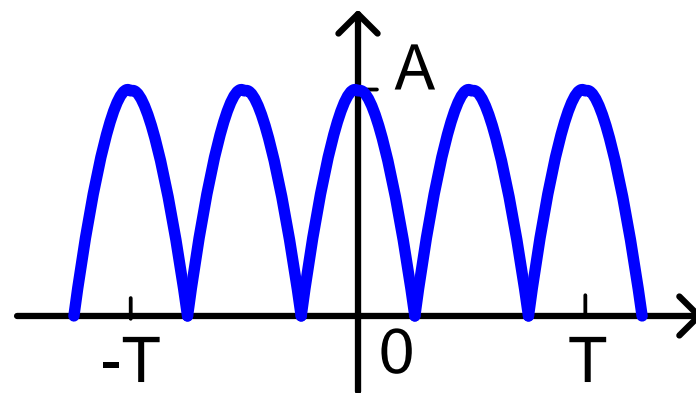
直流+奇次余弦项



常用周期信号的Fourier级数



$$f_3(t) = \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\Omega t)$$



直流+偶次余弦项

$$f_4(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{n^2 - 1} \cos(n\Omega t)$$

Fourier变换

- ◆Fourier变换与反变换
- ◆常用函数的Fourier变换
- ◆Fourier变换的性质

非周期信号的频谱

- ❖ 非周期信号可看成是 T 趋于无穷大的周期信号。
- ❖ 当周期 T 趋于无穷大时，谱线间隔 Ω 趋于无穷小，离散频谱趋向于连续频谱。各频率分量的幅度也趋于无穷小，但各分量振幅存在相对差别，且总和仍为一有限值。
- ❖ 为了描述非周期信号的频谱特性，引入频谱密度函数，表示单位频带的频谱值，简称频谱函数 $F(j\omega)$ 。

频谱函数

❖ 当 $T \rightarrow \infty$ ，周期信号趋于非周期信号

◆ 复数振幅 $\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \rightarrow 0$

◆ 谱线间隔 $\Omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow d\omega$ 无穷小

◆ 离散变量 $n\Omega \rightarrow \omega$ 连续变量

非周期信号的频谱由周期信号通过极限的方式得到，称为Fourier变换。

❖ 定义频谱函数 $F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T \dot{A}_n}{2} = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \pi \frac{\dot{A}_n}{\Omega}$

$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

频谱函数的模量和相位

❖ 频谱函数是复函数

Fourier正变换

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = |F(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

- ◆ 模量代表各频率分量的相对大小，是 ω 的偶函数。
- ◆ 相位代表各频率分量的相位，是 ω 的奇函数。

当 $T \rightarrow \infty$ 时，各频率分量的实际振幅大小为无穷小。

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \left| \overset{\bullet}{A}_n \right| = \frac{|F(j\omega)| d\omega}{\pi} \rightarrow 0$$

非周期信号频谱图不能由振幅直接作出，而是由
 频谱密度函数作出，一般作幅度频谱 ($|F(j\omega)| \sim$
 ω) 和相位频谱 ($\phi(\omega) \sim \omega$) 。

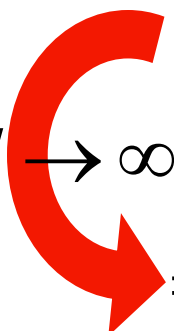
Fourier反变换

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega t}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \right] e^{jn\Omega t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \right] e^{jn\Omega t}$$

$T \rightarrow \infty$



$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

当 $T \rightarrow \infty$

有 $\Omega \rightarrow d\omega$

$n\Omega \rightarrow \omega$

$\frac{1}{T} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi}$

$\sum_{-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$

Fourier变换对

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}$$

$$F(j\omega) = \underbrace{|F(j\omega)|}_{\text{偶函数}} e^{j\underbrace{\phi(\omega)}_{\text{奇函数}}}$$

非周期函数 $f(t)$ 的Fourier
变换存在的充分条件

Dirichlet条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$

Fourier级数与Fourier变换

Fourier级数

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \phi_n)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$$A_n = 2|c_n|$$

$$T \rightarrow \infty \quad \text{基波频率} \quad \Omega \rightarrow d\omega \quad n\Omega \rightarrow \omega$$

频率分量为从零到无穷的一切频率。

频率分量的振幅 $\frac{|F(j\omega)|}{\pi} d\omega \rightarrow 0$

不能做振幅的频谱，只能作密度函数的频谱

Fourier变换

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

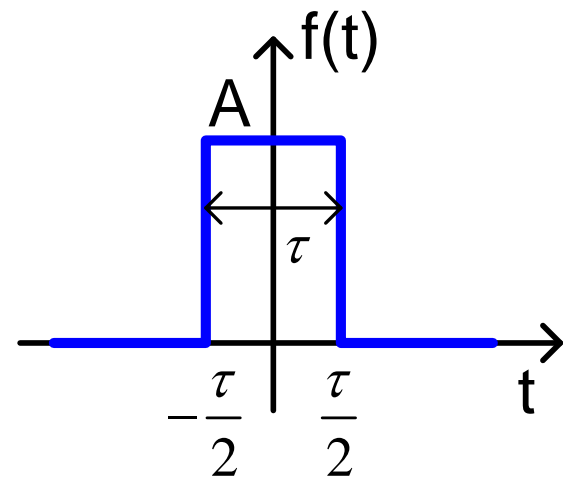
$$= \int_0^{\infty} \frac{|F(j\omega)|}{\pi} \cos(\omega t + \phi(\omega)) d\omega$$

非周期信号的频谱函数举例

❖ 门函数

$$G_{\tau}(t) = \begin{cases} A & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & t < -\frac{\tau}{2} \text{ 或 } t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

脉冲宽度为 τ



$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{A}{-j\omega} \left[e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{j\omega \frac{\tau}{2}} \right] \rightarrow = -2j \sin \frac{\omega\tau}{2}$$

$$= \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} = A\tau \text{Sa} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) \rightarrow = \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

非周期信号的频谱函数举例

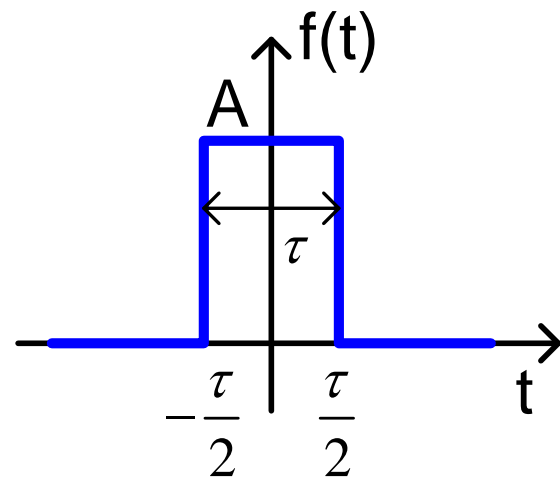
$$F(j\omega) = A\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

模量

$$|F(j\omega)| = A\tau \left| \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right| \quad \text{偶函数}$$

相位

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0 & \frac{4n\pi}{\tau} < \omega < \frac{4n\pi + 2\pi}{\tau} \\ -\pi & \frac{4n\pi + 2\pi}{\tau} < \omega < \frac{4n\pi + 4\pi}{\tau} \end{cases}$$



奇函数

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

每隔 $2\pi / \tau$
变换一次

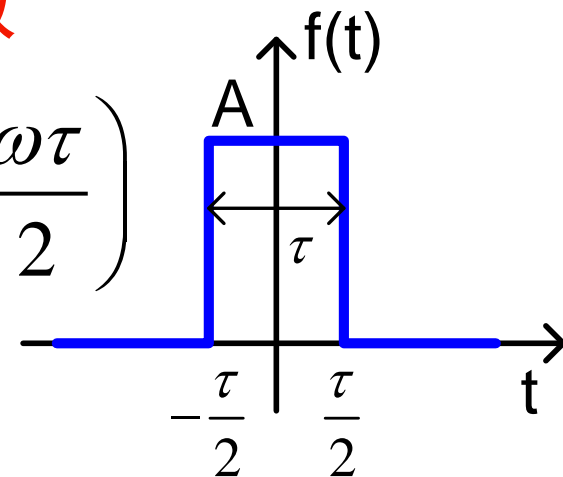
非周期信号的频谱函数举例

❖ 比较周期脉冲信号的Fourier级数

$$T \rightarrow \infty \quad n\Omega \rightarrow \omega$$

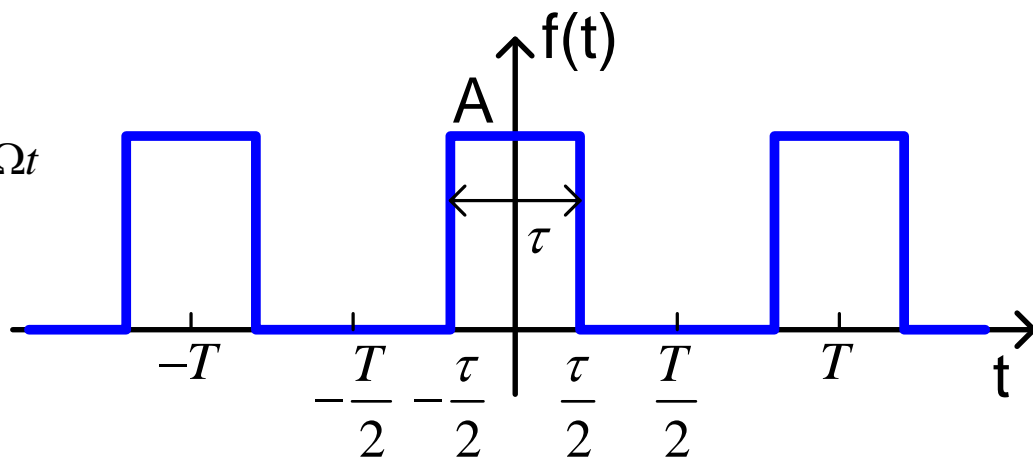
$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\dot{A}_n T}{2}$$

$$F(j\omega) = A\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega t}$$

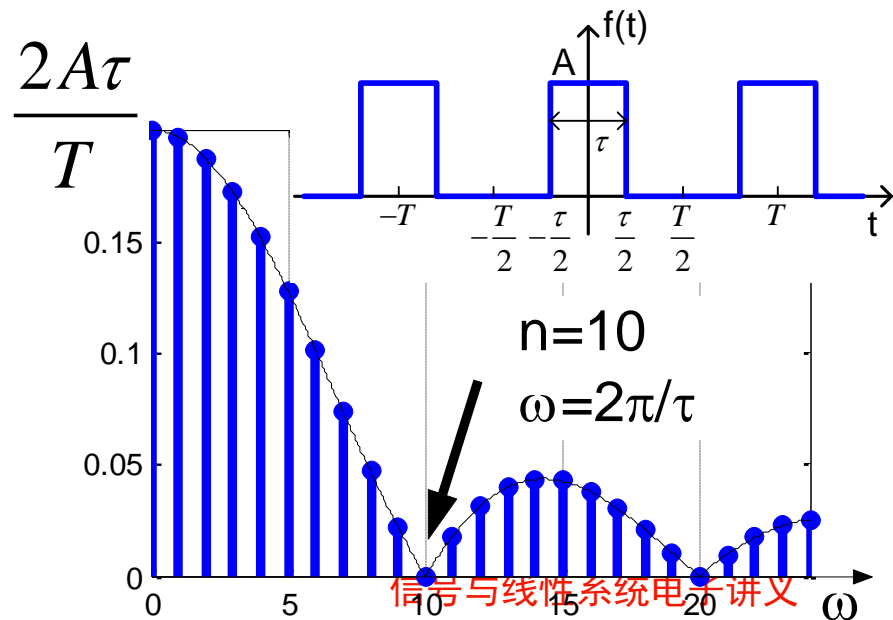
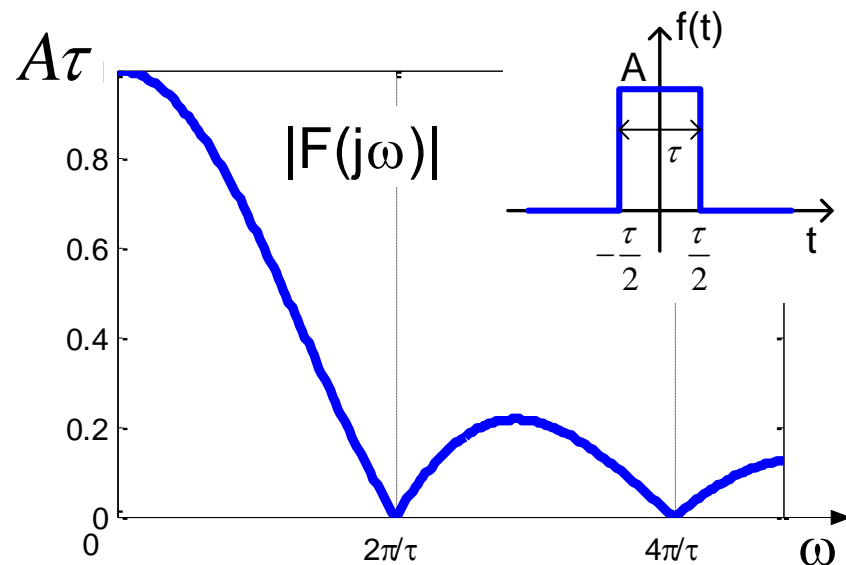
$$\dot{A}_n = \frac{2A\tau}{T} \text{Sa}\frac{n\Omega\tau}{2}$$



$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T \dot{A}_n}{2} = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \pi \frac{\dot{A}_n}{\Omega}$$

信号周期 T 变化时($T \rightarrow \infty$), 频谱振幅和谱线间隔改变, 但包络线形状不变, 即各频率分量振幅的比例关系不变。

非周期脉冲信号的频谱和由该脉冲按一定周期 $T=2\pi/\Omega$ 重复后构成的周期信号的复数振幅谱之间相差系数 $2/T$, ω 和 $n\Omega$ 代换之后可以互求。



常用函数的Fourier变换

❖ 常用函数的Fourier变换表 表3-2 pp.108-109

利用Fourier变换还可方便计算一些积分

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) d\omega$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

常用函数的Fourier变换

❖ 单边指数函数

$$e^{-\alpha t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad \alpha > 0 \quad \text{绝对可积}$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} \varepsilon(t) e^{-j\omega t} dt$$

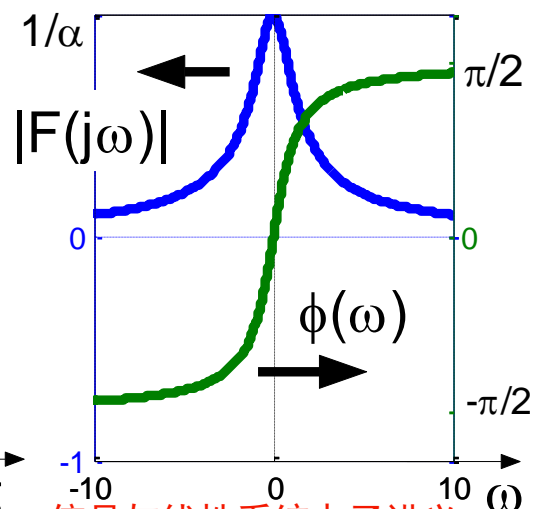
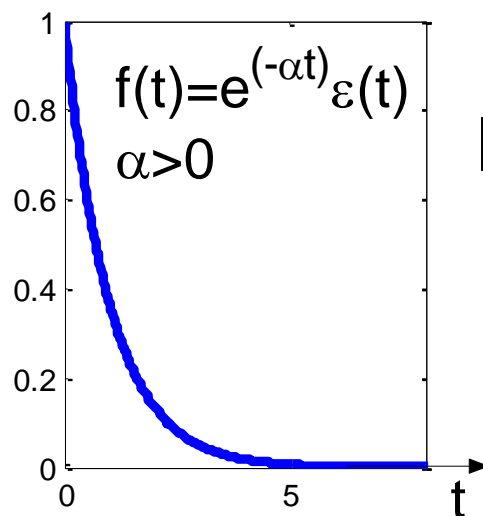
$$= \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt$$

$$= -\frac{1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \bigg|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\begin{cases} |F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \\ \phi(\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \end{cases}$$



常用函数的Fourier变换

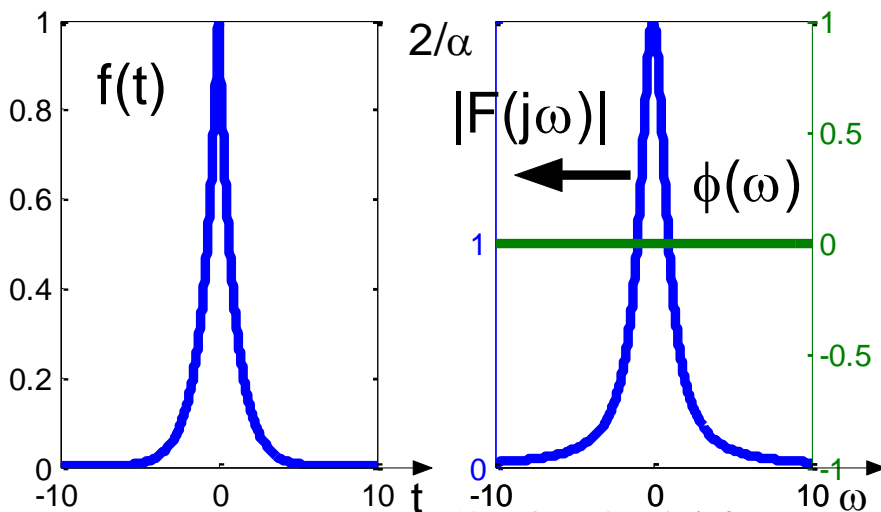
❖ 双边指数函数

$$e^{-\alpha|t|} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad \alpha > 0 \quad \text{绝对可积}$$

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |F(j\omega)| = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \\ \phi(\omega) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \end{aligned}$$



常用函数的Fourier变换

❖ 门函数(矩形脉冲)

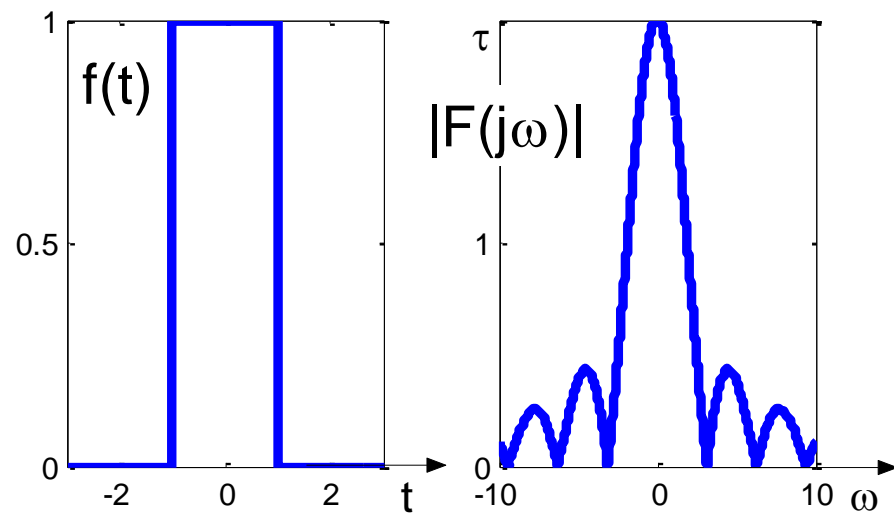
$$G_{\tau}(t) = \varepsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\tau}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{j\omega \frac{\tau}{2}}}{-j\omega}$$

$$= \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$= \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



常用函数的Fourier变换

❖ 冲激函数 $\delta(t)$, $\delta'(t)$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

$$\delta'(t) \leftrightarrow j\omega$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) e^{-j\omega t} dt = - \left. \frac{d}{dt} e^{-j\omega t} \right|_{t=0} = j\omega$$

常用函数的Fourier变换

❖ **常数** $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$ 不满足绝对可积条件

方法一：利用极限由双边指数函数的Fourier变换得到

$$e^{-\alpha|t|} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad \alpha > 0$$

$$f(t) = 1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha|t|}$$

$$\text{则 } F(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \begin{cases} 0 & \omega \neq 0 \\ \infty & \omega = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{冲激函数?} \\ = 2\pi\delta(\omega) \end{matrix}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} d\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} 2 \arctg \frac{\omega}{\alpha} \bigg|_{-\infty}^{\infty} = 2\pi$$



常用函数的Fourier变换

❖ **常数** $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$ 不满足绝对可积条件
方法二：利用冲激函数的Fourier变换得到

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

由Fourier反变换定义式

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

$t \rightarrow -\omega$

 变量替换
 
 $\omega \rightarrow t$

$$\delta(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt$$

$$2\pi\delta(\omega) = 2\pi\delta(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt \leftrightarrow 1$$

常用函数的Fourier变换

❖ 阶跃函数 $\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$ 不满足绝对可积条件

利用极限由单边指数函数的Fourier变换得到

$$e^{-\alpha t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \quad \alpha > 0$$

$$f(t) = \varepsilon(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha t} \varepsilon(t) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \begin{cases} 0 & \omega \neq 0 \\ \infty & \omega = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{冲激函数?} \\ = \pi\delta(\omega) \end{matrix} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\omega/\alpha}{1 + (\omega/\alpha)^2} \right] d\omega$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[-j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right] = \frac{1}{j\omega} \quad = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \arctg \left(\frac{\omega}{\alpha} \right) = \pi$$

常用函数的Fourier变换

❖ 符号函数

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \quad \text{不满足绝对可积条件}$$

利用极限由下面的指数函数的Fourier变换得到

$$f_{\alpha}(t) = \begin{cases} -e^{\alpha t} & t < 0 \\ e^{-\alpha t} & t > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0$$

$$f_{\alpha}(t) \leftrightarrow F_{\alpha}(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{\alpha - j\omega} = -\frac{2j\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\text{sgn}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} f_{\alpha}(t)$$

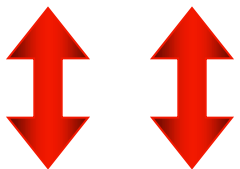
$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} F_{\alpha}(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-\frac{2j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right) = \frac{2}{j\omega}$$

❖ 符号函数的频谱图

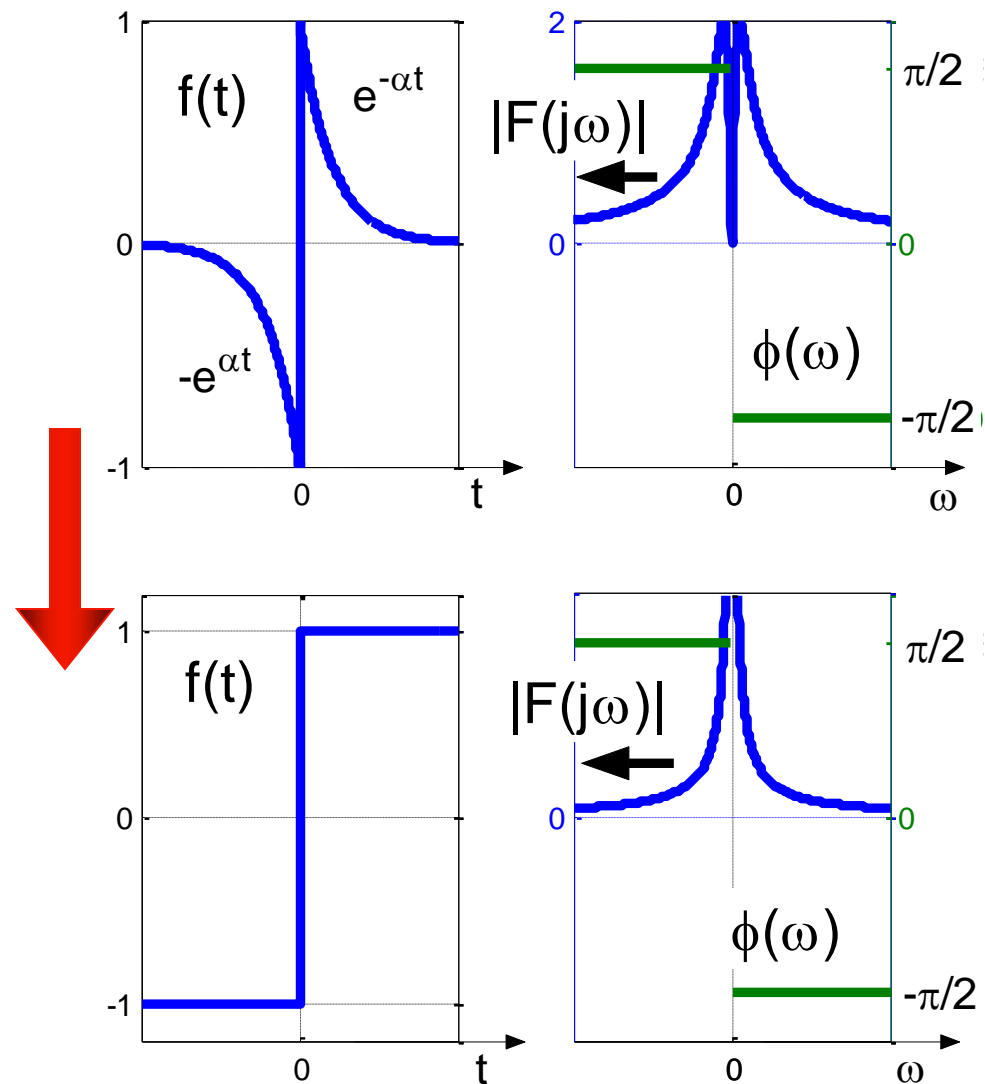
$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t)$$



$$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



Fourier变换汇总

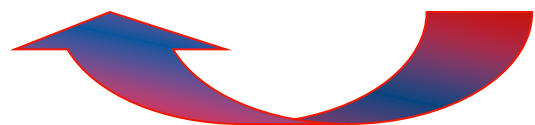
$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$



$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

时域 频域



$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\varepsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta'(t) \leftrightarrow j\omega$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$e^{-\alpha t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$\alpha > 0$$

$$e^{-\alpha|t|} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

指数函数的Fourier变换

$$f(t) = e^{j\omega_c t} \leftrightarrow F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_c)t} dt$$

由 $\delta(t) \leftrightarrow 1$ 间接求积分

$$\mathcal{F}^{-1}\{1\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \delta(t) = \delta(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} d\omega$$

$$2\pi\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} d\omega$$

$t \rightarrow \omega - \omega_c$

 变量替换
 
 $\omega \rightarrow t$

$$2\pi\delta(\omega - \omega_c) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_c)t} dt$$

$$e^{j\omega_c t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_c)$$

周期信号的Fourier变换

❖ 周期信号可以写成Fourier级数的形式

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega t} \quad \dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\dot{A}_n}{2} \mathcal{F}\{e^{jn\Omega t}\}$$

$$e^{j\omega_c t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_c) \Rightarrow e^{jn\Omega t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - n\Omega)$$

$$F(j\omega) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n \delta(\omega - n\Omega)$$

**周期信号的Fourier
变换是冲激序列。**

各个冲激位于各次谐波频率处。
冲激强度为谐波振幅的 π 倍。

上一节复习

❖ 频谱密度函数

$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T \dot{A}_n}{2}$$

❖ Fourier正变换和反变换定义式

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

❖ 常用函数的Fourier变换 $F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$

❖ 周期信号的Fourier变换是冲激序列

$$F(j\omega) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n \delta(\omega - n\Omega)$$

Fourier变换练习1

❖ 利用指数函数的Fourier变换，求下列函数的Fourier变换。

$$e^{j\omega_c t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_c)$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad \text{因为} \quad \lim_{\omega_c \rightarrow 0} e^{j\omega_c t} = 1 \quad \text{直流分量}$$

$$\cos \omega_c t = \frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2} \leftrightarrow \pi \left[\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c) \right]$$

基波 单位余弦

$$\sin \omega_c t = \frac{e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{2j} \leftrightarrow j\pi \left[\delta(\omega + \omega_c) - \delta(\omega - \omega_c) \right]$$

基波 单位正弦

只有一个谐波分量

Fourier变换练习2

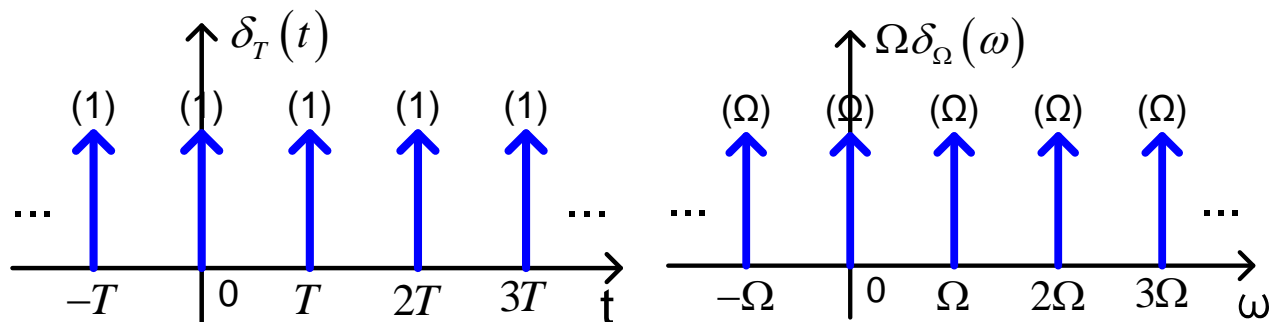
❖ 均匀冲激序列的Fourier变换 $\delta_T(t) \leftrightarrow \Omega \delta_\Omega(\omega)$

$$\delta_T(t) = \delta(t) + \delta(t \pm T) + \delta(t \pm 2T) + \dots \quad \text{周期为 } T$$

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{2}{T} \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$F(j\omega) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n \delta(\omega - n\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega) = \Omega \delta_\Omega(\omega)$$

冲激序列的
Fourier变换仍
是冲激序列。



Fourier变换的性质



线性特性

❖ Fourier变换定义式

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} dt$$

❖ 线性特性

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$$

$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$$

Fourier变换
是线性运算

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega)$$

延时和移频特性

❖ 延时特性

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

时域延时 t_0

$$f(t - t_0) \leftrightarrow F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

频域相位 ωt_0

❖ 移频特性

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

频域移频 ω_c

$$f(t)e^{j\omega_c t} \leftrightarrow F(j(\omega - \omega_c))$$

时域乘上 $e^{j\omega_c t}$

推论

$$f(t)\cos\omega_c t \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[F(j(\omega + \omega_c)) + F(j(\omega - \omega_c))\right]$$

$$f(t)\sin\omega_c t \leftrightarrow \frac{j}{2}\left[F(j(\omega + \omega_c)) - F(j(\omega - \omega_c))\right]$$

尺度变换特性

❖ 尺度变换特性

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

$$a=-1 \quad f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$$

$$f(at - t_0) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right) e^{-\frac{j\omega t_0}{a}}$$

a=1, 延时特性
t₀=0, 尺度变换特性

推导

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$\text{或 } f_1(t) = f(t - t_0)$$

$$f_1(t) = f(at) \leftrightarrow F_1(j\omega) = \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

$$f(at - t_0) = f_1(at)$$

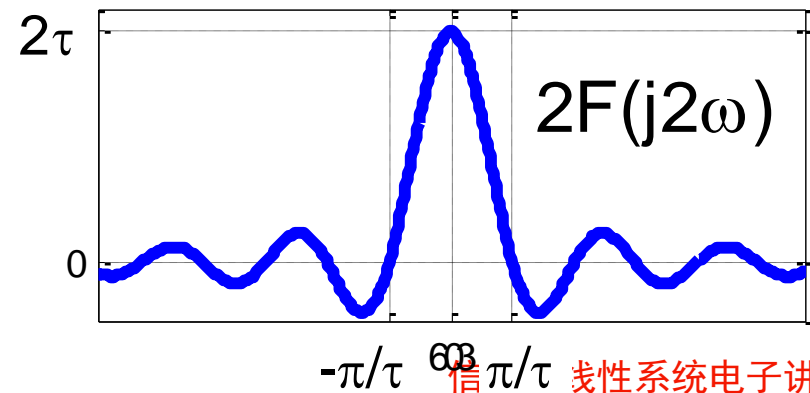
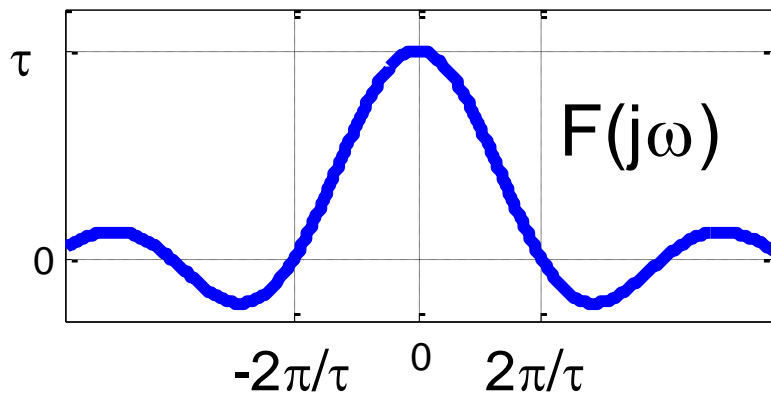
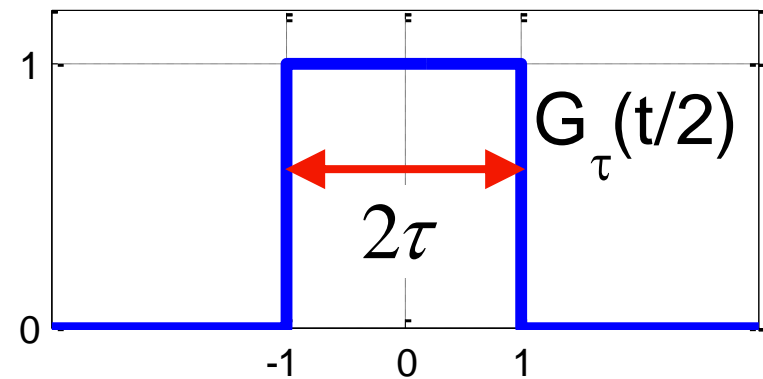
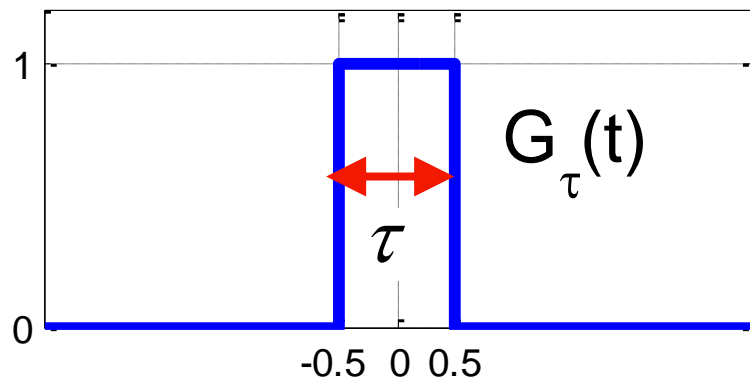
$$f(at - t_0) = f_1(t - t_0/a) \leftrightarrow F_1(j\omega) e^{-j\omega \frac{t_0}{a}} = \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\omega \frac{t_0}{a}}$$

尺度变换特性举例

- ❖ 时域脉宽扩展为 $1/a$ 倍。
- ❖ 频域频宽减小为 a 倍。
- ❖ 脉宽 \times 频宽 = 常数

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$



奇偶特性

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{-j\phi(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = R(\omega) - jX(\omega)$$

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad \text{实偶函数} \quad R(\omega) = R(-\omega)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad \text{实奇函数} \quad X(\omega) = -X(-\omega)$$

$$|F(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \quad \text{实偶函数}$$

$$\phi(\omega) = \arctg \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \quad \text{实奇函数}$$

$$|F(j\omega)| = |F(-j\omega)|$$

$$\phi(\omega) = -\phi(-\omega)$$

❖ 若 $f(t)$ 为实偶函数 $f(t) = f(-t)$

$$X(\omega) = 0$$

实偶函数频谱为实偶函数

$$F(j\omega) = R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

❖ 若 $f(t)$ 为实奇函数 $f(t) = -f(-t)$

$$R(\omega) = 0$$

实奇函数频谱为虚奇函数

$$F(j\omega) = -jX(\omega)$$

$$= -j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = -2j \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

对称特性

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \quad F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

系数相差 2π

推导: $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(jt) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{F(jt)\}$$

对称特性

对实偶函数 $f(t) = f(-t)$

Fourier变换为实偶函数 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega) = R(\omega)$

由对称特性得到 $R(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) = 2\pi f(\omega)$

$$\text{或 } \frac{1}{2\pi} R(t) \leftrightarrow f(\omega)$$

利用对称特性可以进行时间函数和频谱函数的互求。

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \qquad 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \qquad \frac{2}{jt} \leftrightarrow -2\pi \text{sgn}(\omega)$$

时域微积分特性

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

❖ 时域求导相当于频域乘上因子 $j\omega$ 。

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(j\omega)$$

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

❖ 时域积分相当于频域除以因子 $j\omega$ 。

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \pi F(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(j\omega)$$

若 $F(0)=0$

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(j\omega)$$

时域微分特性推导

❖ 时域求导相当于频域乘上因子 $j\omega$ 。

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \quad \frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(j\omega)$$

由Fourier反变换定义式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} [F(j\omega) e^{j\omega t}] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [j\omega F(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

时域积分特性推导

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \underline{\varepsilon(t-\tau)} d\tau\right\} e^{-j\omega t} dt \quad \tau > t, \varepsilon(t-\tau) = 0\end{aligned}$$

变换积分顺序

$$\begin{aligned}&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\varepsilon(t-\tau)} e^{-j\omega t} dt \right\} d\tau \\ &\quad \varepsilon(t-\tau) \leftrightarrow \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{-j\omega\tau} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \pi\delta(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \pi F(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(j\omega)\end{aligned}$$

频域微积分特性

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$-jtf(t) \leftrightarrow \frac{dF(j\omega)}{d\omega}$$

$$\pi f(0)\delta(t) + j\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(j\Omega)d\Omega$$

卷积定理

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$$

时域卷积定理：

时域的卷积运算相当于频域的乘法运算

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) F_2(j\omega)$$

频域卷积定理：

频域的卷积运算相当于时域的乘法运算

$$f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F_1(j\omega) * F_2(j\omega)]$$

卷积定理

推导

$$\mathcal{F} \{ f_1(t) * f_2(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right\} e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{变换积分顺序} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right\} d\tau$$

$$\text{延时特性 } F_2(j\omega) e^{-j\omega\tau}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) F_2(j\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

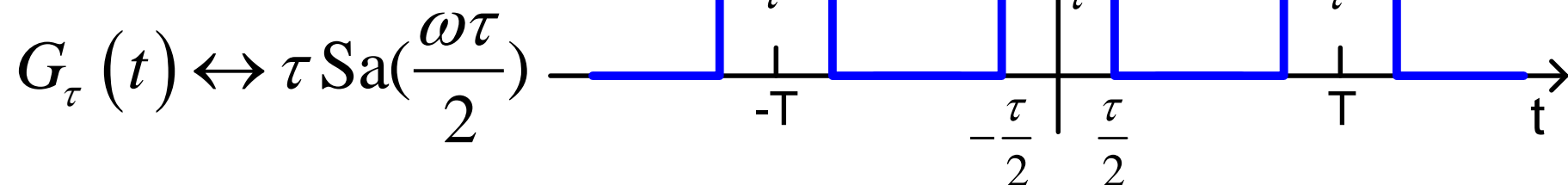
$$= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} F_2(j\omega)$$

$$= F_1(j\omega) F_2(j\omega)$$

Fourier变换的性质练习1

❖ 求图示三脉冲信号的频谱

提示:



延时特性 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ $f(t-t_0) \leftrightarrow F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

$$f(t) = AG_{\tau}(t+T) + AG_{\tau}(t) + AG_{\tau}(t-T)$$

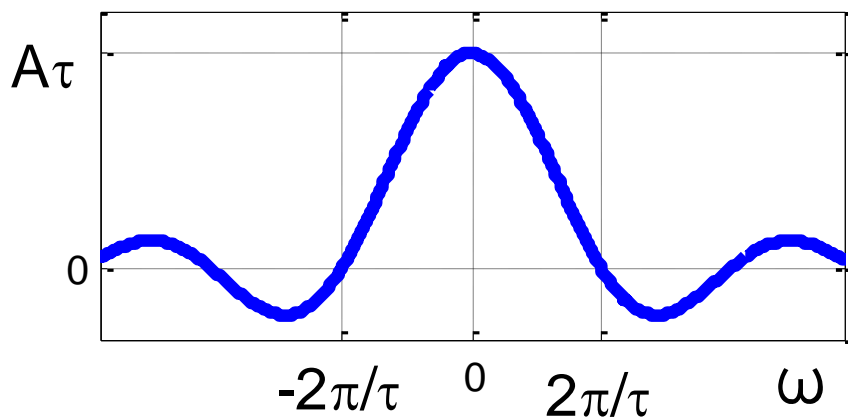
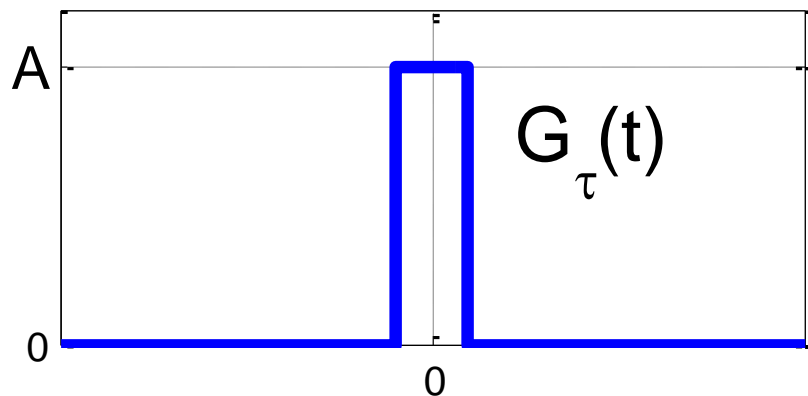
$$F(j\omega) = A\tau \text{Sa}(\frac{\omega\tau}{2}) [e^{j\omega T} + 1 + e^{-j\omega T}]$$

$$= A\tau \text{Sa}(\frac{\omega\tau}{2}) [1 + 2\cos(\omega T)]$$

Fourier变换的性质练习1

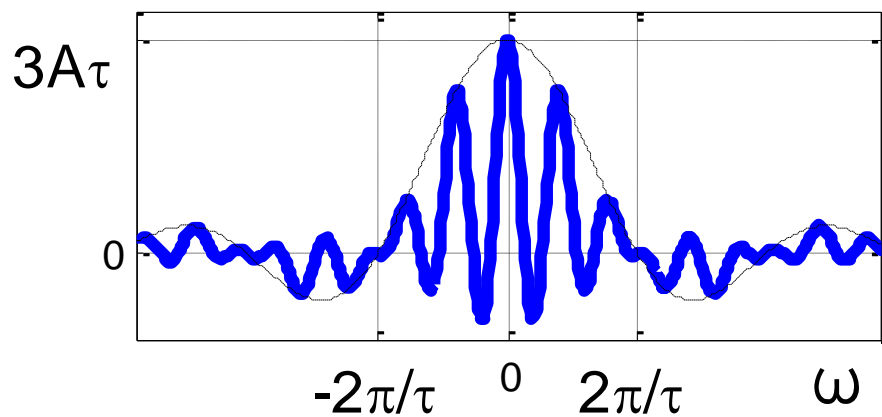
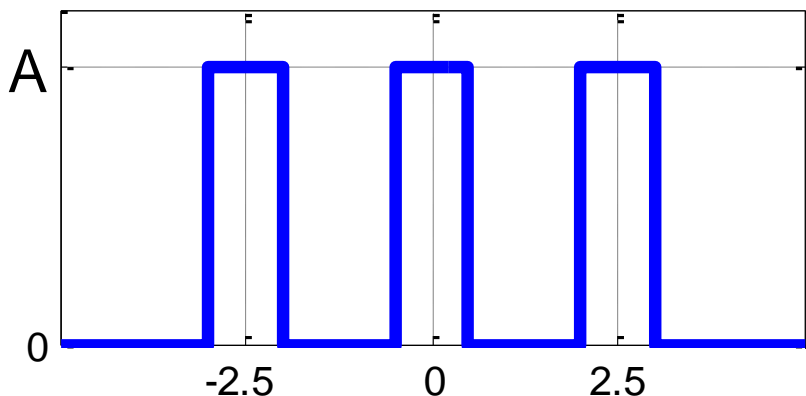
❖ 频谱图

$$G_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



三脉冲间隔 $T=2.5$

$$A\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) [1 + 2\cos(\omega T)]$$



Fourier变换的性质练习2

❖ 求矩形调幅信号的Fourier变换

$$f(t) = G_{\tau}(t) \cos \omega_0 t$$

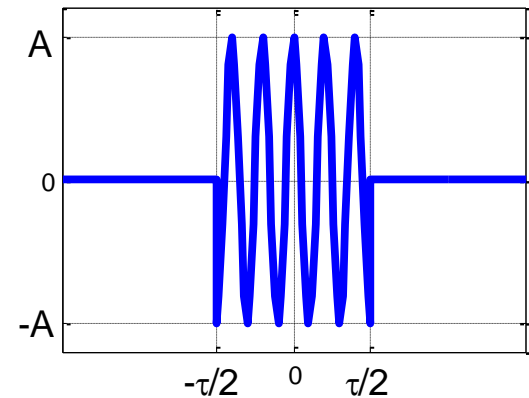
方法一: $G_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

移频特性及其推论 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

$$f(t)e^{j\omega_c t_0} \leftrightarrow F(j(\omega - \omega_c))$$

$$f(t)\cos \omega_c t \leftrightarrow \frac{1}{2} \left[F(j(\omega + \omega_c)) + F(j(\omega - \omega_c)) \right]$$

$$F(j\omega) = \frac{A\tau}{2} \left[\text{Sa}\left(\frac{\tau}{2}(\omega + \omega_0)\right) + \text{Sa}\left(\frac{\tau}{2}(\omega - \omega_0)\right) \right]$$



Fourier变换的性质练习2

方法二: $f(t) = G_{\tau}(t) \cos \omega_0 t$

卷积定理

$$G_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi \left[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) \right]$$

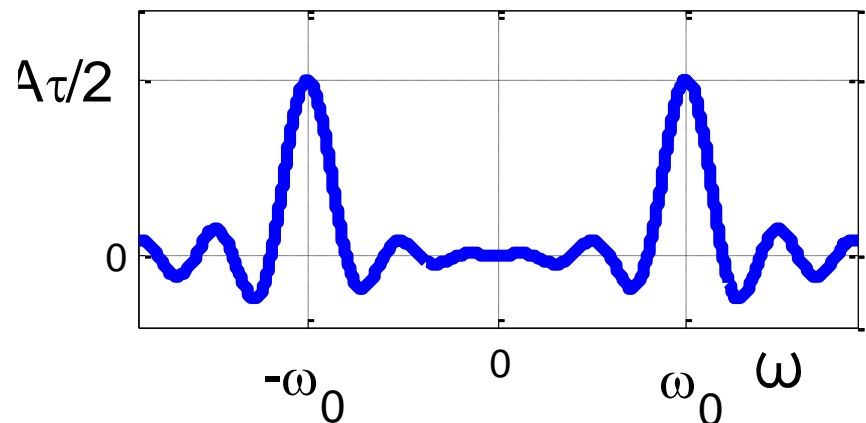
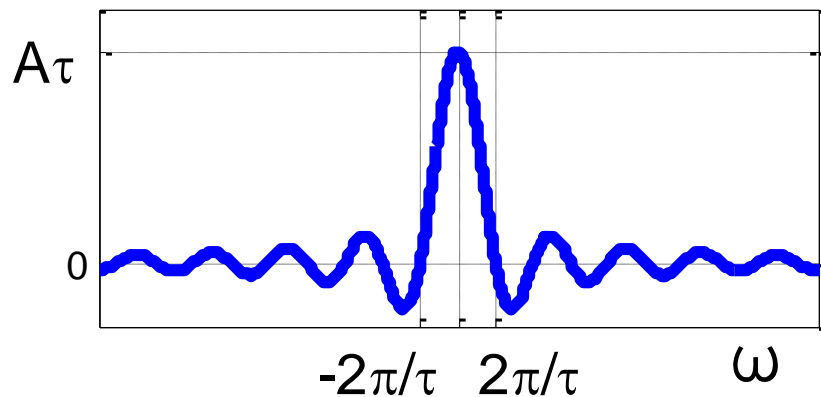
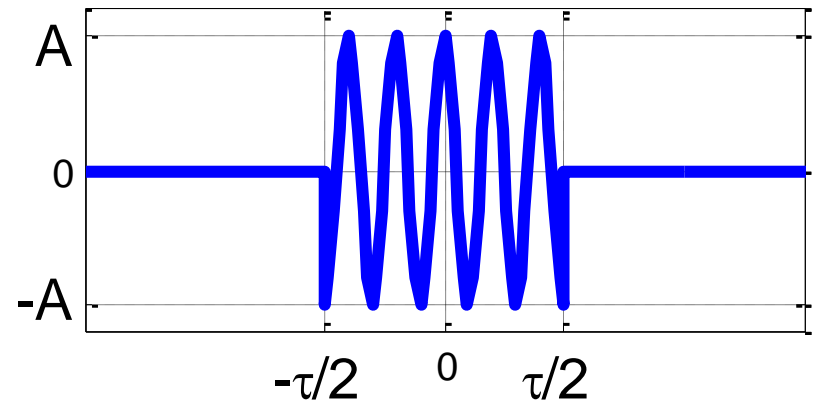
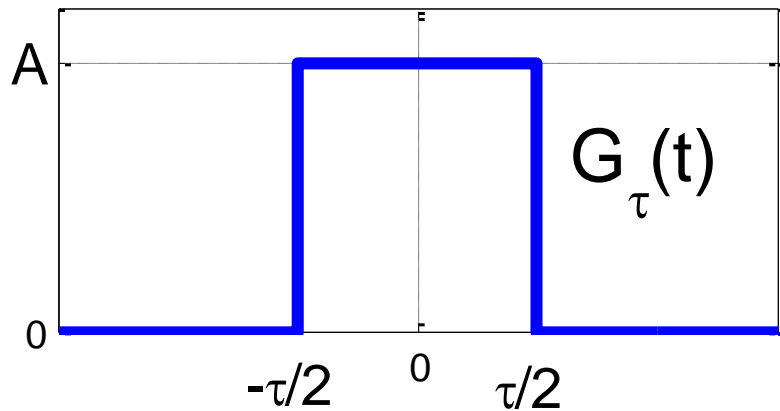
$$F(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \left\{ A\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) * \pi \left[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) \right] \right\}$$

$$= \frac{A\tau}{2} \left\{ \text{Sa}\left(\frac{\tau}{2}(\omega + \omega_0)\right) + \text{Sa}\left(\frac{\tau}{2}(\omega - \omega_0)\right) \right\}$$

Fourier变换的性质练习2

❖ 频谱图

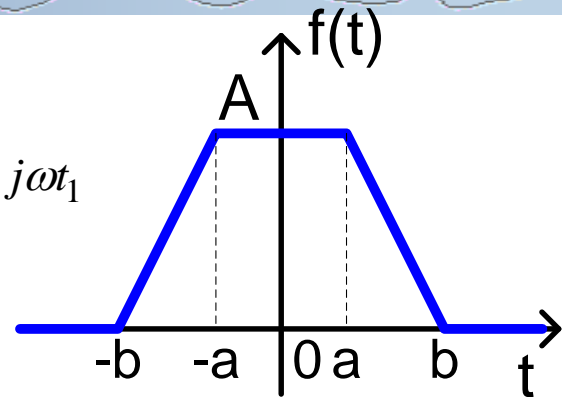
$f(t)$ 乘上 $\cos\omega_0 t$ 或 $\sin\omega_0 t$ 将频谱 $F(j\omega)$ 一分为二，左右各平移 ω_0 。



Fourier变换的性质练习3

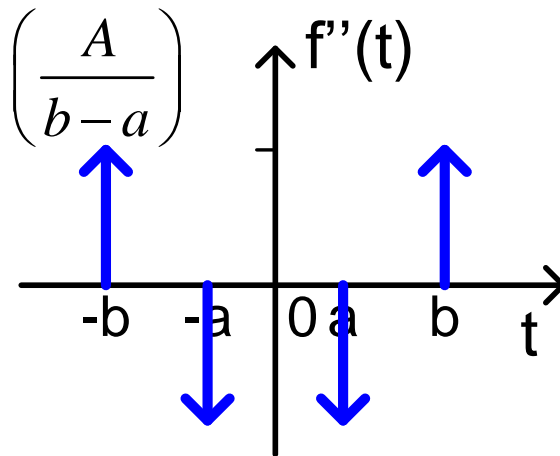
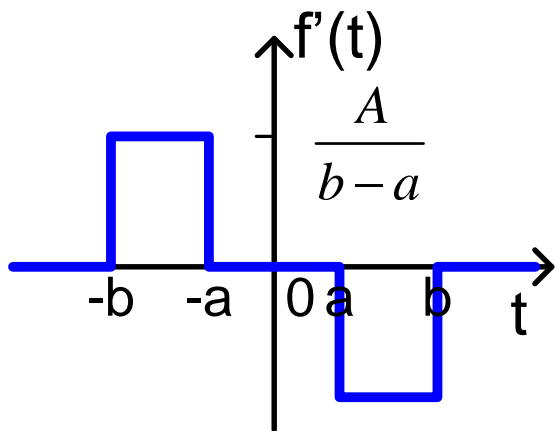
❖ 求图示梯形脉冲的频谱

利用时域微积分特性和 $\delta(t-t_1) \leftrightarrow e^{-j\omega t_1}$



$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) = \frac{A}{b-a} [\delta(t+b) - \delta(t+a) - \delta(t-a) + \delta(t-b)]$$

$$(j\omega)^2 F(j\omega) = \frac{A}{b-a} [e^{j\omega b} - e^{j\omega a} - e^{-j\omega a} + e^{-j\omega b}]$$



Fourier变换的性质练习3

整理得

$$F(j\omega) = \frac{2A}{b-a} \left[\frac{\cos(b\omega) - \cos(a\omega)}{\omega^2} \right]$$

分段直线组成的信号可以通过求导变成冲激函数后再利用Fourier变换的性质求出其频谱函数。

也可以通过Fourier变换定义式求其频谱函数，要利用分段积分，并注意积分限的变化。

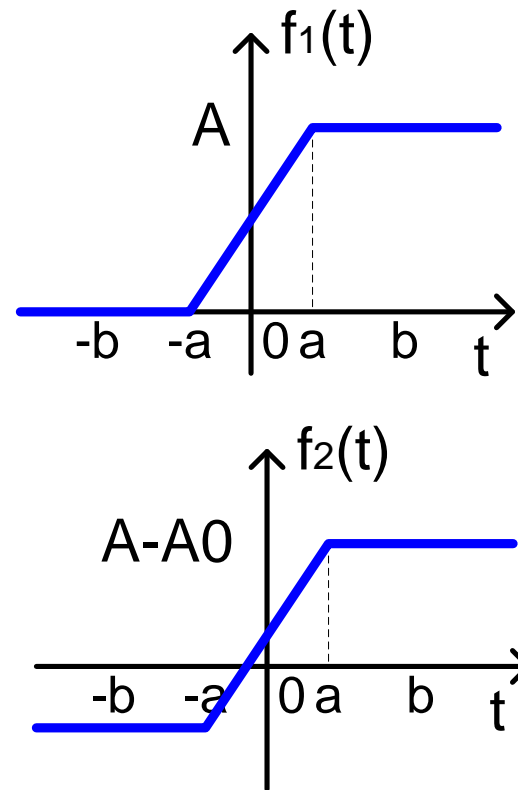
Fourier变换的性质练习3

积分常数的影响

$$f_2(t) = f_1(t) - A_0$$

$$\frac{d}{dt} f_2(t) = \frac{d}{dt} f_1(t)$$

$$F_2(j\omega) \stackrel{?}{=} F_1(j\omega) \quad \text{X}$$



Fourier变换的性质练习4

❖ 求 $f(t)$ 。 $F(j\omega) = -\frac{2}{\omega^2}$

提示：

$$\operatorname{sgn} t \leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \quad \text{频域微分特性} \quad -jtf(t) \leftrightarrow \frac{dF(j\omega)}{d\omega}$$

$$-jt \operatorname{sgn} t \leftrightarrow -\frac{2}{j\omega^2}$$

$$t \operatorname{sgn} t = |t| \leftrightarrow -\frac{2}{\omega^2}$$

同理：

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$t \leftrightarrow j2\pi\delta'(\omega)$$

$$t^n \leftrightarrow j^n 2\pi\delta^n(\omega)$$

周期信号的Fourier变换

❖ 利用延时特性得到周期信号的Fourier变换

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_0(t - nT) \quad f_0(t) \leftrightarrow F_0(j\omega)$$

$$F(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(j\omega) e^{-j\omega nT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(j\omega) e^{j\omega nT}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega t}$$

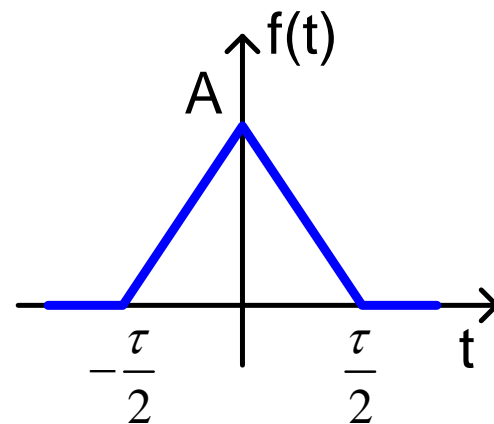
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jnT\omega} = \frac{1}{\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnT\omega}$$

$$F(j\omega) = \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(j\omega) \delta(\omega - n\Omega) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n \delta(\omega - n\Omega)$$

Fourier变换的性质练习5

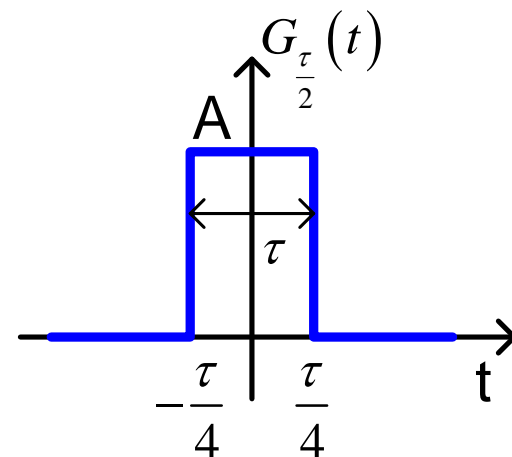
❖ 求Fourier变换。

$$f(t) = \begin{cases} A \left(1 - \frac{2|t|}{\tau} \right) & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



提示：

$$f(t) = \frac{2A}{\tau} G_{\frac{\tau}{2}}(t) * G_{\frac{\tau}{2}}(t)$$



卷积定理 $G_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

$$F(j\omega) = \frac{2A}{\tau} \left[\frac{\tau}{2} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \right]^2 = \frac{A\tau}{2} \left[\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \right]^2$$

上一节复习

❖ Fourier变换的性质

- ◆ 线性特性
- ◆ 延时和移频特性
- ◆ 尺度变换特性：脉宽 \times 频宽 = 常数
- ◆ 奇偶特性
- ◆ 对称特性
- ◆ 时域/频域微积分特性
- ◆ 时域/频域卷积定理

Parseval定理与能量频谱



Parseval定理的意义

- ❖ Parseval定理从能量的角度考察信号的时域和频域特性间的关系。
- ❖ 信号的分类 – 从能量的角度
 - ◆ 功率信号：能量无限大，功率有限，
典型信号：周期信号
 - ◆ 能量信号：能量有限，功率为零
典型信号：非周期单脉冲信号
- ❖ 对功率信号，考察信号功率在时域和频域的表达式。
- ❖ 对能量信号，考察信号能量在时域和频域的表达式。

Parseval定理

❖ 对周期信号 – 在时域和频域求得的信号功率相等，且功率等于该信号在完备正交函数集中各分量的功率之和。

Fourier级数
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j\phi_n} e^{jn\Omega t}$$

$$P = \overline{f^2(t)} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt$$

时域中的功率
= 各谐波分量功率之和

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{A_n}{2} \right)^2 = \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \right)$$

Parseval定理

❖ 对能量信号 – 在时域中求得的能量等于该信号在频域中求得的能量。

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt \quad \text{Rayleigh定理}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |F(j2\pi f)|^2 df$$

定义能量密度频谱(能谱)函数 $G(\omega)$ ，频带 $d\omega$ 内的信号能量为 $G(\omega)d\omega$ ，信号在整个频率范围内的能量为

$$W = \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega \quad G(\omega) = \frac{1}{\pi} |F(j\omega)|^2$$

能谱与幅谱平方的形状相同，与相位频谱无关。

频带宽度和脉冲宽度

❖ 从能量角度，脉冲宽度 τ 定义为脉冲中绝大部分能量所集中的那段时间。

$$\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} [f(t)]^2 dt = \eta W$$

❖ 从能量角度，频带宽度 BW 定义为脉冲中绝大部分能量所集中的那段频段。

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{BW} |F(j\omega)|^2 d\omega = \eta W$$

LTI系统的频域分析法



LTI系统时域和频域分析法特点 ¹¹⁸

❖ 时域分析法

- ◆ 以时间为变量。
- ◆ 求解时域中的线性常系数微分方程。
- ◆ 信号分解为冲激函数，利用冲激响应和卷积积分求得系统的零状态响应。

❖ 频域分析法

共同处：利用线性系统的叠加性和齐次性

- ◆ 以频率为变量。
- ◆ 求解频域中的代数方程。
- ◆ 信号分解为正弦函数或指数函数，利用Fourier变换将时域问题转换到频域以简化运算。

缺点：增加两次积分运算

变换域分析法求解系统响应

- ❖ 通过函数变量的转换，将时域中求解响应的问题转换到变换域(频域，复频域，Z域等)，使系统方程转换成便于处理的简便形式。
- ❖ 在变换域中求解之后需要再转换回时域得到最终结果。

系统函数的定义

❖ 输入激励

$$e(t) \leftrightarrow E(j\omega)$$

❖ 零状态响应

$$r(t) \leftrightarrow R(j\omega)$$

$$r(t) = e(t) * h(t) \leftrightarrow R(j\omega) = E(j\omega)H(j\omega)$$

❖ 系统函数或频率响应函数：联系频域中零状态响应与输入激励的函数。

系统函数和单位冲激响应为Fourier变换对

$$H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)} \quad h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$$

系统函数的求解

❖ 对微分方程两边求Fourier变换。

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^n r}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} r}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d r}{dt} + a_0 r & f(t) &\leftrightarrow F(j\omega) \\
 & = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{d e}{dt} + b_0 e & \frac{df(t)}{dt} &\leftrightarrow j\omega F(j\omega) \\
 & \left\{ (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0 \right\} R(j\omega) \\
 & = \left\{ b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0 \right\} E(j\omega) \\
 & H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}
 \end{aligned}$$

❖ 直接由电路方程得到。

频域分析法步骤

❖ 时域→频域，得到频域的输入激励信号。

$$e(t) \rightarrow E(j\omega)$$

❖ 根据系统方程，找出系统函数。 $H(j\omega)$

可以得到单位冲激响应 $H(j\omega) \leftrightarrow h(t)$

❖ 在频域中求零状态响应。

$$R(j\omega) = E(j\omega)H(j\omega)$$

❖ 频域→时域，得到时域的输出信号。

$$R(j\omega) \rightarrow r(t)$$

时域到频域 → 频域求解代数方程 → 频域到时域

LTI频域分析法练习1

❖ 已知系统微分方程和输入激励信号，求响应。

$$\frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = e(t) \quad e(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$$

$$(1) e(t) \leftrightarrow E(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$(2) (j\omega + 2)R(j\omega) = E(j\omega) \quad H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{1}{j\omega + 2}$$

$$(3) R(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} \frac{1}{j\omega + 1} = \frac{1}{j\omega + 1} - \frac{1}{j\omega + 2}$$

$$(4) R(j\omega) \leftrightarrow r(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]\varepsilon(t)$$

LTI频域分析法练习2

❖ 电路如图所示，求单位冲激响应 $u_c(t)$ 。

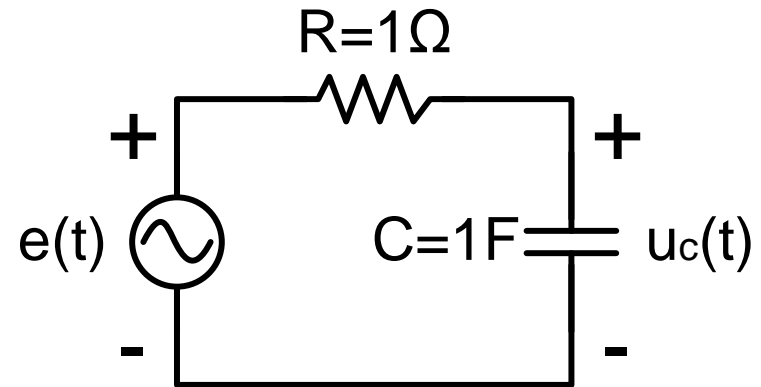
$$U_c(j\omega) = I \frac{1}{j\omega C}$$

$$E(j\omega) = U_c(j\omega) + U_R(j\omega)$$

$$= I \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right)$$

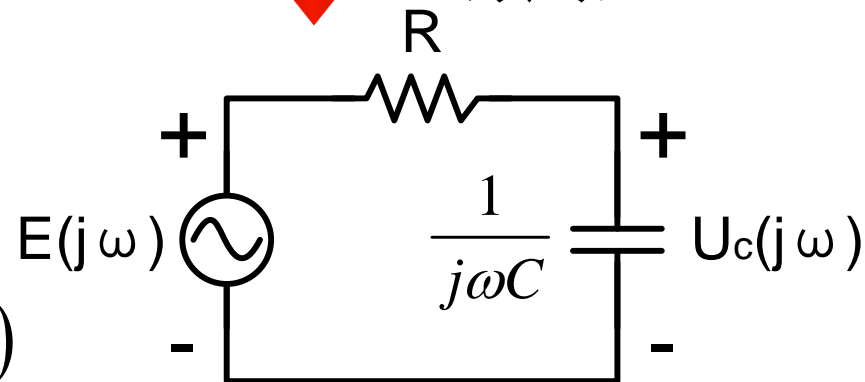
$$H(j\omega) = \frac{U_c(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} \leftrightarrow h(t) = e^{-t} \varepsilon(t)$$



时域

频域



RLC频域阻抗

时域

频域

$$z = \frac{u(t)}{i(t)}$$

$$Z = \frac{U(j\omega)}{I(j\omega)}$$

R



R

R

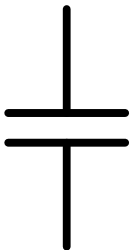
L



pL

$j\omega L$

C



$\frac{1}{pC}$

$\frac{1}{j\omega C}$

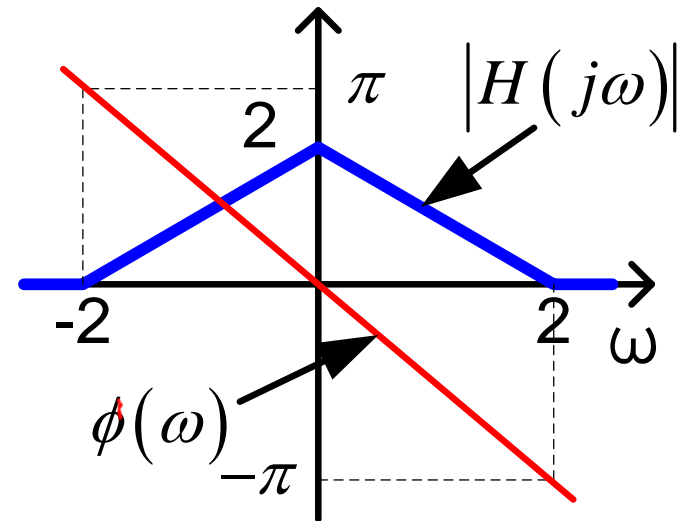
LTI频域分析法练习3

❖ 已知线性系统频响曲线和输入激励，求零状态响应。

$$e(t) = 2 + 4\cos t + 4\cos 2t$$

(1) 时域 \rightarrow 频域, $e(t) \rightarrow E(j\omega)$

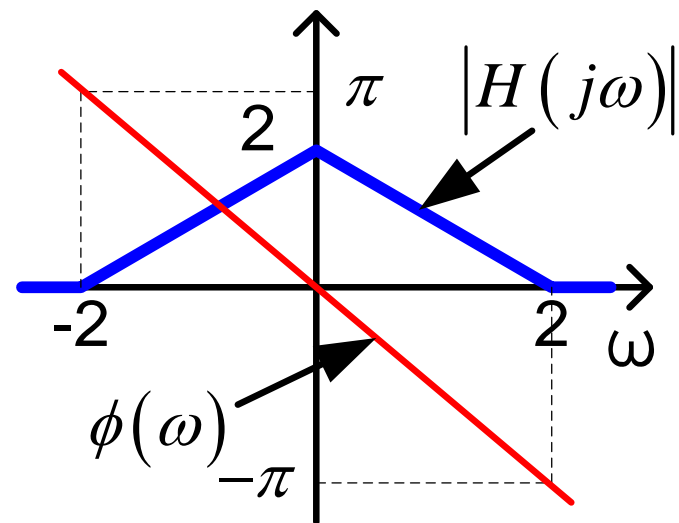
$$\begin{aligned} E(j\omega) &= 4\pi\delta(\omega) + 4\pi[\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1)] \\ &\quad + 4\pi[\delta(\omega+2) + \delta(\omega-2)] \end{aligned}$$



LTI频域分析法练习3

(2) 系统函数 $H(j\omega)$

$$H(j\omega) = \begin{cases} (2 - |\omega|) e^{-j\frac{\pi}{2}\omega} & |\omega| < 2 \\ 0 & |\omega| \geq 2 \end{cases}$$



(3) 频域求解 $R(j\omega)$

$$\begin{aligned} R(j\omega) &= E(j\omega)H(j\omega) \\ &= 8\pi\delta(\omega) + 4\pi\delta(\omega+1)e^{j\frac{\pi}{2}} + 4\pi\delta(\omega-1)e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

(4) 频域 \rightarrow 时域, $R(j\omega) \rightarrow r(t)$

$$r(t) = 4 + 4\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 4 + 4\sin t$$

LTI频域分析法练习3

方法二：利用Fourier级数

$$e(t) = 2 + 4\cos t + 4\cos 2t$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \phi_n)$$

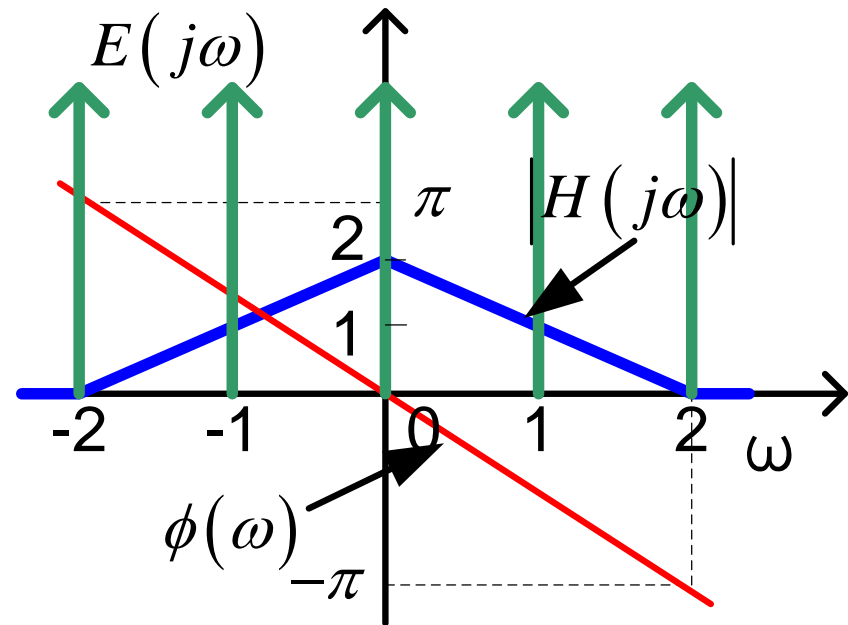
$$T=2\pi \quad \Omega=1$$

输入激励包含有直流，基波（一次谐波），二次谐波分量。

对直流、基波和二次谐波的系统函数为：

系统响应为：

$$r(t) = 4 + 4\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 4 + 4\sin t$$



$$H(j\omega) = \begin{cases} 2 & n=0 \\ e^{-j\frac{\pi}{2}} & n=1 \\ 0 & n=2 \end{cases}$$

上一节复习

❖ Parseval定理

◆ 功率信号

◆ 能量信号

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{A_n}{2} \right)^2$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega$$

❖ 变换域分析法一般思路

◆ 时域→变换域；变换域求解；变换域→时域

❖ 频域分析法

◆ 利用Fourier变换得到频域的信号及系统方程

◆ 系统函数 $H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)} \quad h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$

无失真传输



信号失真的原因

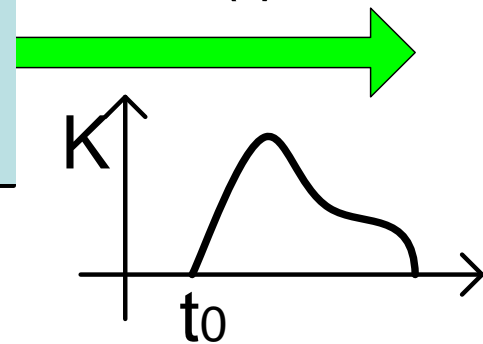
- ❖ 系统对组成信号的各个频率分量的幅度衰减程度不同，造成信号各频率分量的相对比例关系发生变化，称为幅度失真。
- ❖ 系统对组成信号的各个频率分量的相移不与频率成正比，造成信号各频率分量在时间轴上的相对位置关系发生变化，称为相位失真。
- ❖ 幅度失真和相位失真都没有产生新的频率分量，属于线性失真。

无失真传输

❖ 无失真传输指信号经过传输系统之后，只有幅度大小和出现的时间的不同，信号的形状完全不变。

输入信号 $r(t) = Ke(t - t_0)$ 输出信号 $r(t)$

当传输有限带宽的信号时，只要在信号占有频带范围内，系统的幅频、相频特性满足无失真传输条件即可。



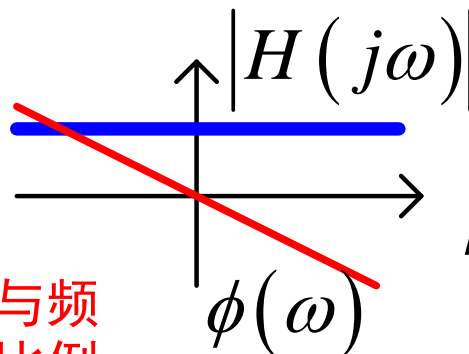
无失真传输的理想条件

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

$$= Ke^{-j\omega t_0}$$

相位变化与频率变化成比例

不是绝对!



$$h(t) = K\delta(t - t_0)$$

无失真传输练习

❖ 系统的幅频特性 $|H(j\omega)|$ 和相频特性如图所示，
下列信号通过该系统时，哪些信号不会失真？

(1) $e(t) = \cos t + 4 \cos 8t$ 相位失真
 $\Omega=1$ 基波 8次谐波

(2) $e(t) = \sin 2t + \sin 4t$ 无失真

(3) $e(t) = \cos^2 4t$ 无失真

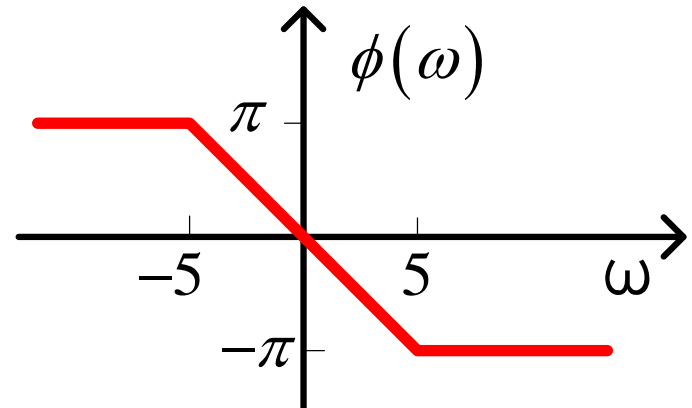
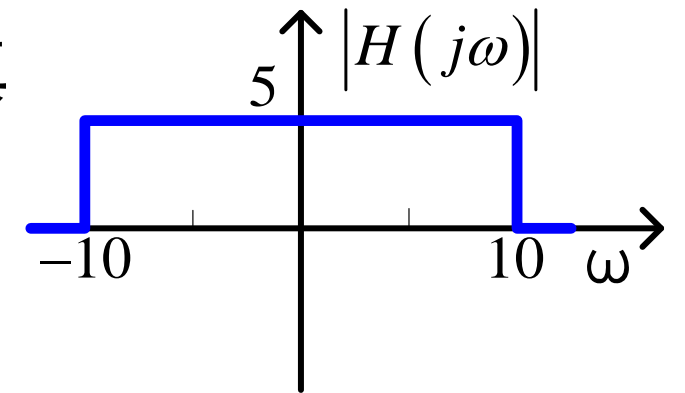
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 8t$$

只有一个谐波，
相当于延迟恒定值

(4) $e(t) = \sin t \sin 7t$ 无失真

$$= \frac{1}{2} \cos 6t + \frac{1}{2} \cos 8t$$

$\cos(6t-\pi) + \cos(8t-\pi)$
 $= -\cos 6t - \cos 8t$ 关于横坐标对称，
 也可认为两个谐波均延迟半周期



理想低通滤波器



理想低通滤波器

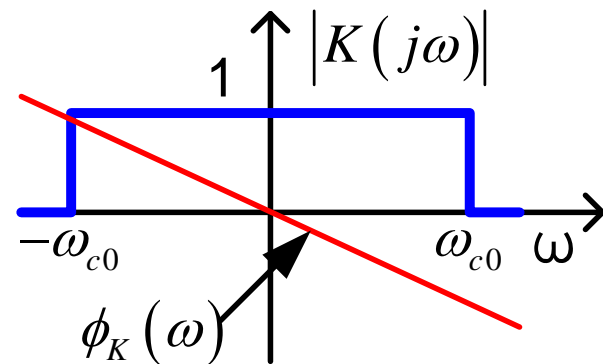
❖ 理想低通滤波器的频响特性

- ◆ 低于截止频率的频率分量可以无失真地通过。
- ◆ 高于截止频率的频率分量不能通过。低通滤波去除高频分量，必然存在失真

❖ 系统函数(归一化)

$$K(j\omega) = |K(j\omega)| e^{j\phi_K(\omega)} = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_{c0} \\ 0 & |\omega| > \omega_{c0} \end{cases}$$

模量在通频带内为常数，通频带外为零。幅角在通频带内与频率成正比。即激励信号中低于截止频率的分量可以一致均匀的通过，在时间上延时 t_0 。



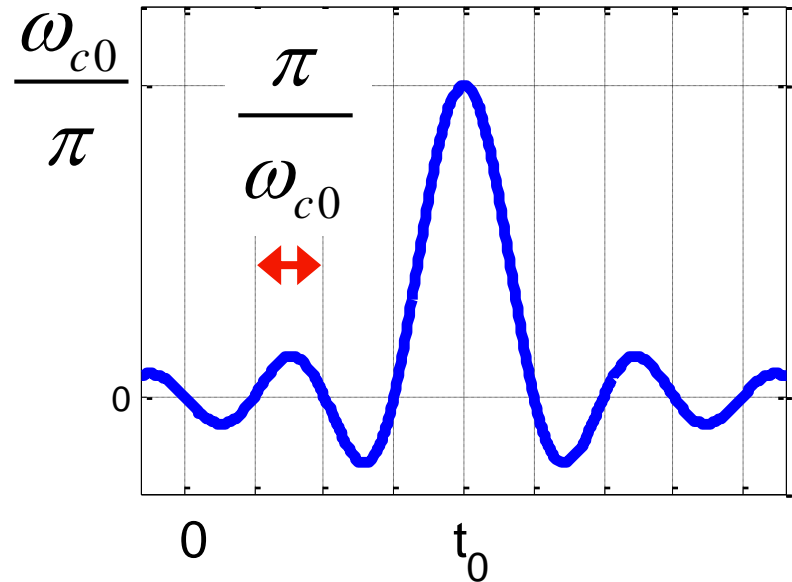
单位冲激响应

由Fourier反变换定义式

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{c0}}^{\omega_{c0}} e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j(t-t_0)} \Big|_{-\omega_{c0}}^{\omega_{c0}} = \frac{\omega_{c0}}{\pi} \text{Sa}\left(\omega_{c0}(t-t_0)\right)$$



利用门函数，系统函数可以写成

$$K(j\omega) = e^{-j\omega t_0} G_{2\omega_{c0}}(\omega) \leftrightarrow \frac{\omega_{c0}}{\pi} \text{Sa}\left(\omega_{c0}(t-t_0)\right)$$

单位阶跃响应

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad R_\varepsilon(j\omega) = \begin{cases} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_{c0} \\ 0 & |\omega| > \omega_{c0} \end{cases}$$

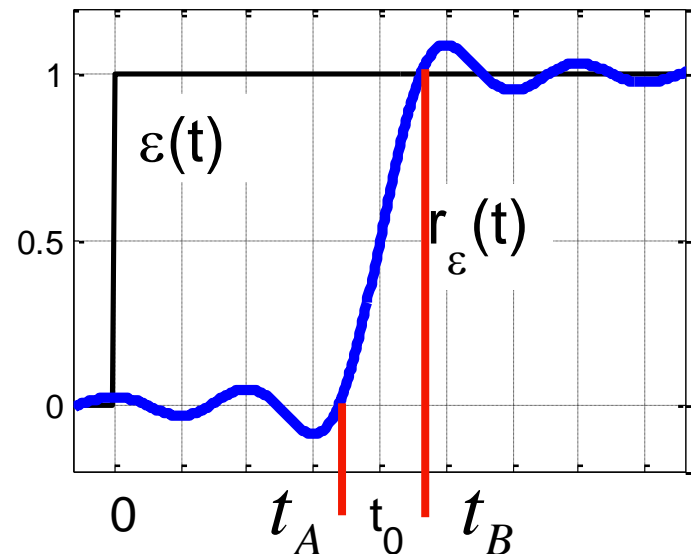
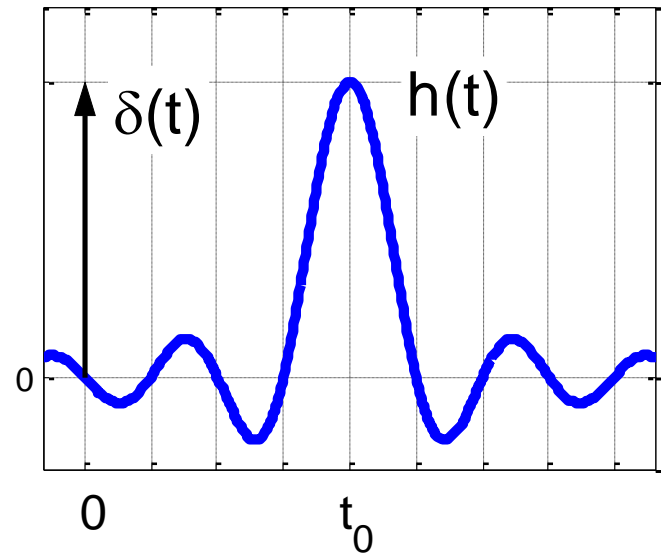
由Fourier反变换定义式

$$\begin{aligned} r_\varepsilon(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{c0}}^{\omega_{c0}} \pi\delta(\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{c0}}^{\omega_{c0}} \frac{e^{-j\omega(t-t_0)}}{j\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{c0}(t-t_0)} \frac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\omega(t-t_0)} d\omega(t-t_0) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si[\omega_{c0}(t-t_0)] \end{aligned}$$

理想低通的响应

- ❖ 响应比激励延时 t_0 出现。
- ❖ 由于高频分量被滤除，响应的波形与激励相比有所不同。
- ❖ 截止频率增加，高频分量增多，响应的边沿越陡峭，也越接近激励的形状。
- ❖ 输出波形前沿倾斜，说明响应的建立需要一定的时间。响应建立需要的时间与通频带成反比。

$$t_B - t_A = \frac{3.84}{\omega_{c0}}$$



Paley-Wiener准则

- ❖ 理想滤波器是无法实现的，因为在 $t < 0$ 的区域中出现响应，不满足系统因果性。
- ❖ 系统因果性在时域中表现为响应必须出现在激励之后，在频域中意味着系统转移函数的幅频特性必须满足

必要条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < \infty \quad \text{且} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty$$

对一个因果系统， $|H(j\omega)|$ 可以在不连续点上为零，但不允许在一个有限频带内为零。

理想滤波器都是物理上无法实现，物理上可实现的滤波器特性只能接近于理想特性。

第三、四章小结

❖ Fourier级数

- ◆ 三角和指数Fourier级数
- ◆ 函数奇偶性与谐波分量的关系

❖ 频谱图

- ◆ 周期信号频谱图(离散性, 谐波性, 收敛性)
- ◆ 非周期信号的频谱图(频谱密度函数即Fourier变换)

❖ Fourier变换的性质

❖ Parseval定理与能量密度函数

❖ 频域分析法求LTI系统的零状态响应

❖ 无失真传输的条件

❖ 理想低通滤波器的频响特性

频域分析法综合练习1

❖ 求单位冲激响应，单位阶跃响应，零状态响应。
系统转移函数及输入激励为：

$$H(j\omega) = \frac{1-j\omega}{1+j\omega} \quad e(t) = e^{-2t} \varepsilon(t)$$

$$H(j\omega) = \frac{1-j\omega}{1+j\omega} = -1 + \frac{2}{1+j\omega} \quad \begin{aligned} \delta(t) &\leftrightarrow 1 \\ e^{-\alpha t} \varepsilon(t) &\leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega} \end{aligned}$$

$$h(t) = -\delta(t) + 2e^{-t} \varepsilon(t)$$

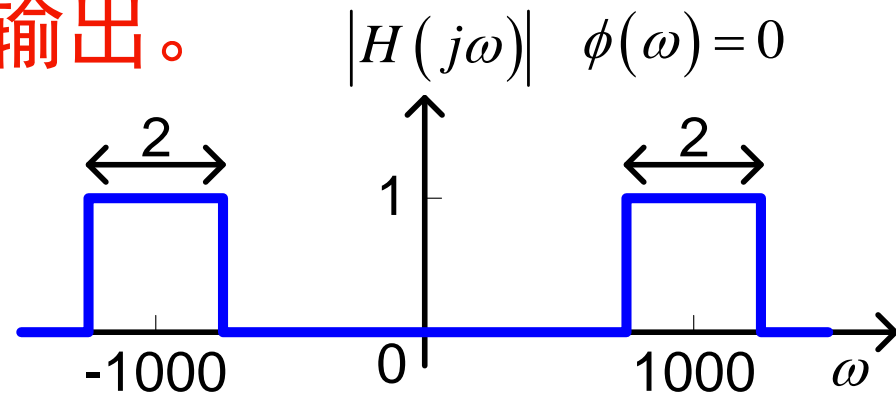
$$r_{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t) * h(t) = (1 - 2e^{-t}) \varepsilon(t)$$

$$r(t) = e(t) * h(t) = (2e^{-t} - 3e^{-2t}) \varepsilon(t)$$

频域分析法综合练习2

❖ 系统框图及理想带通的系统函数如图所示。求图示信号通过系统后的输出。

$$e(t) = \frac{\sin 2\pi t}{2\pi t}$$



$$\frac{\sin(\Omega t/2)}{\Omega t/2} \leftrightarrow \frac{2\pi}{\Omega} \left[\varepsilon\left(\omega + \frac{\Omega}{2}\right) - \varepsilon\left(\omega - \frac{\Omega}{2}\right) \right]$$

$$\Omega = 4\pi$$

System block diagram: The input signal $e(t)$ is multiplied by $\cos(1000t)$ (indicated by a circle with an 'X' and an arrow from the cosine term). The result $g(t)$ is then passed through an "理想带通" (Ideal Bandpass) block to produce the output $r(t)$.

$$E(j\omega) = \frac{1}{2} \left[\varepsilon(\omega + 2\pi) - \varepsilon(\omega - 2\pi) \right] \cos(1000t)$$

$$e(t) \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \left[E(j(\omega + \omega_0)) + E(j(\omega - \omega_0)) \right]$$

频域分析法综合练习2

$$G(j\omega) = \frac{1}{2} [E(j(\omega + 1000)) + E(j(\omega - 1000))]]$$

$$R(j\omega) = G(j\omega) H(j\omega)$$

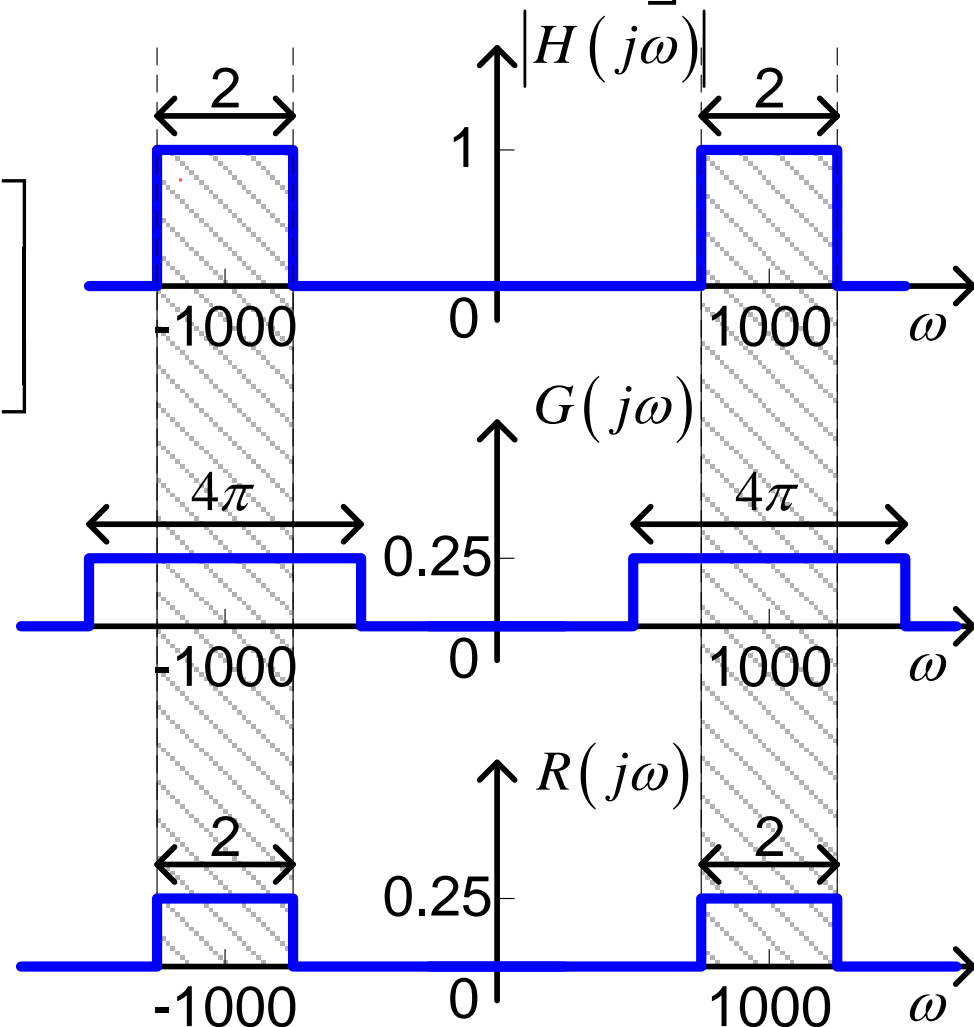
$$= \frac{1}{2} \left[Q(j(\omega + 1000)) + Q(j(\omega - 1000)) \right]$$

$$Q(j\omega) = \frac{1}{2} [\varepsilon(\omega + 1) - \varepsilon(\omega - 1)]$$

$$\leftrightarrow q(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin t}{t}$$

$$r(t) = q(t) \cos 1000t$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin t}{t} \cos 1000t$$



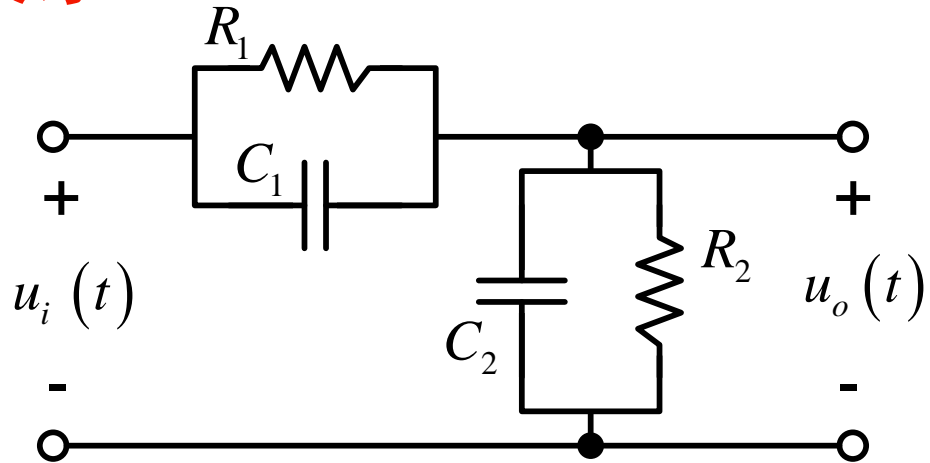
频域分析法综合练习3

❖ 宽带分压器如图所示。为使电压能无失真传输，电路元件应满足何种关系。

$$H(j\omega) = \frac{U_o}{U_i} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$Z_1 = \frac{R_1 \frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

$$Z_2 = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}$$



$$|H(j\omega)| = \frac{\frac{R_1 R_2}{C_1}}{\frac{R_1 R_2}{C_2} \left| \frac{1 + \frac{1}{1 + j\omega R_2 C_2}}{1 + \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1}} \right|} = K$$

$$\Rightarrow R_1 C_1 = R_2 C_2$$