课程简介

- **任务**
  - 研究信号与系统理论的基本概念和基本分析方法
  - 初步认识如何建立信号与系统的数学模型，经适当的数学分析求解
  - 对所得结果给以物理解释、赋予物理意义。
- **研究范围**
  - 确定性信号（非随机信号）经线性、实不变系统传输与处理的基本理论
  - 时间域　　　变换域
  - 连续　　　离散
  - 输入—输出描述　　　状态描述
- **理论基础**
  - 数学基础：微分方程、差分方程、线性代数、级数、复变函数
  - 电路分析
- **与<电路>的关系**
  - 电路：电路分析的角度
  - 本课程：系统的观点

课程主要内容

- **第一部分：**信号与系统的概念、分类、分析方法
- **第二部分：**连续（时间）系统的时域分析（卷积、零输入和零状态响应）
- **第三部分：**连续系统的频域分析（连续信号频域分析、能量谱和功率谱、傅里叶变换应用于通信系统—滤波、调制与抽样）
- **第四部分：**离散（时间）系统的时域分析（离散系统描述、卷积）
- **第五部分：**离散（时间）系统Z变换（Z变换、系统Z域分析、稳定性）

课程特点

- **特点：公式多、计算题多**
- **学习方法：**
  - **认真听讲**
  - **多看书**
  - **做习题**

信号与系统基本概念

内容提要

- ❖信号传输系统
- ❖信号的概念
- ❖奇异函数
- ❖信号的时域分解
- ❖系统的概念
- ❖线性非时变系统的分析

重点与难点

- ❖奇异函数的性质
- ❖信号分解为冲激脉冲
- ❖线性非时变系统的基本性质

信号传输系统

- 信号基本概念与信号传输、交换及处理
- 基本信号传输系统的组成

信号基本概念

- 信息：未知的内容，用信息量进行度量。
- 消息：为表达信息而按一定规则约定的符号、语言、文字、图像、编码等。
- 信号：信号是信息的表现形式，蕴含着信息的具体内容，是通信传输的客观对象。**信号是随时间变化的某种物理量**。即：信号广泛地出现在各个领域中，以各种各样的表现形式携带着特定的消息。
  - 古战场：以击鼓鸣金传达前进或撤退命令——声信号。
  - 近代：广泛应用于力、热、声、光、电等方面。——电信号、光信号、声信号等
- 本课程：**电信号**
  - 随时间变换的电压、电流
  - 电荷、磁通
- “信号”、“函数”两个名词通用

信号传输

- 人们寻求各种方法，以实现信号的传输。

（1）古代用烽火传送疆警报，这是最原始的光通信系统。3000多年前，西周周幽王烽火戏诸侯。

（2）利用击鼓鸣金报送时刻或传达命令，这是最早的声信号的传输。—缺点：距离、速度、可靠性、有效性

（3）19世纪初，人们开始研究利用电信号传送消息。1837年莫尔斯（F.B.Morse)发明了电报，采用点、划、空组合的代码表示字母和数字，这种代码称为莫尔斯电码。

1876年贝尔(A.G.Bell)发明了电话，直接将声信号（语音）转变为电信号沿导线传送。

信号传输

（４）１９世纪末，人们研究用电磁波传送无线电信号。赫兹（H.Hertz）、波波夫、马可尼等作出贡献。1901年马可尼成功地实现了横渡大西洋的无线电通信。从此，传输电信号的通信方式得到广泛应用和迅速发展。

如今：（１）卫星通信技术为基础“全球定位系统”（Global Positioning System, 缩写为GPS）用无线电信号的传输，测定地球表面和周围空间任意目标的位置，其精度可达十米左右。如汽车防盗、卫星导航。

（２）个人通信技术：无论任何人在任何时候和任何地方都能够和世界上其他人进行通信，WiFi和个域网。

（３）“全球通信网”是信息网络技术的发展必然趋势。目前的综合业务数字网（Integrated Services Digital Network,缩写为ISDN),Internet或称因特网，以及其他各种信息网络技术为全球通信网奠定了基础。

信号交换

现代的通信方式不是任意两点之间信号的直接传输，而是要利用某些集中转接设施组成复杂的信息网络，即经“交换”的功能以实现任意两点之间的传输。

比如：**物联网**（Internet of Things，IoT）

典型的多跳网络

信号处理

- 对信号进行某种加工或变换。其目的是：削弱信号中的多余内容；滤除混杂的噪声和干扰；或者将信号变换成容易分析与识别的形式，便于估计和选择它的特征参量。
- 信号处理的应用已遍及许多科学技术领域。

（1）从月球探测器发来的无线信号可能被淹没在噪声之中，可利用信号处理技术予以增强，在地球上得到清晰的图像。

（2）石油勘探、地震测量以及核试验监测中所得数据的分析都依赖于信号处理技术的应用。

（3）心电图、脑电图分析、语音识别与合成、图像数据压缩、视频监视、工业生产自动控制以及经济形势预测（股票分析）等各领域广泛应用。

信号传输、信号交换和信号处理关系

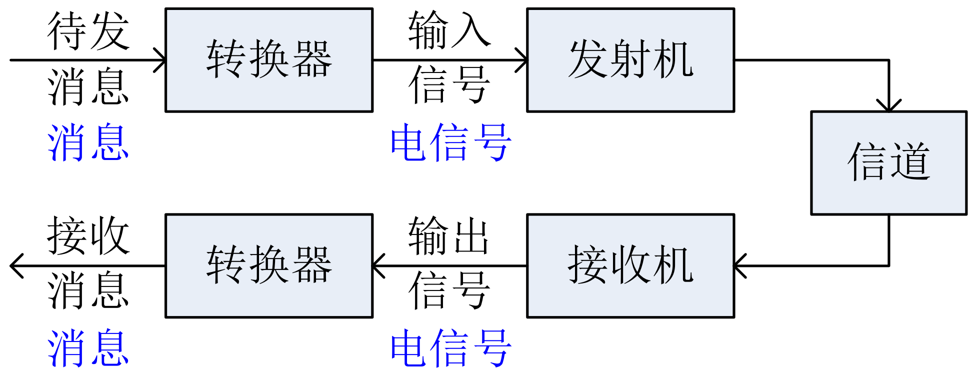
- 它们之间相互密切联系（可认为**交换是属于传输的组成部分**），又各自形成了相对独立的学科体系。
- 它们共同的理论基础之一是**研究信号的基本性能（进行信号分析）**，包括信号的描述、分解、变换、检测、特征提取以及为适应指定要求而进行信号设计。

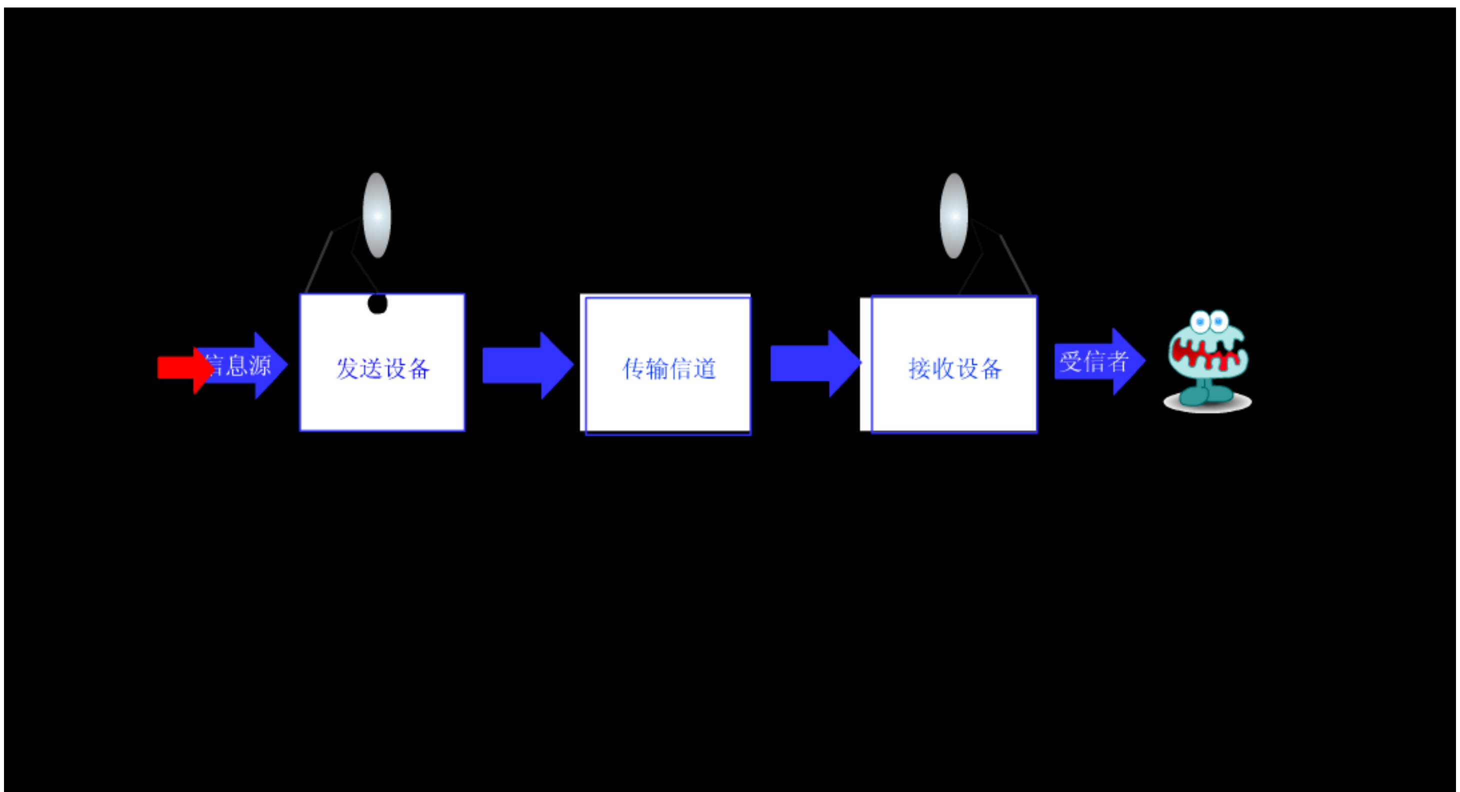
基本信号传输系统

- 信号的传输和处理要由许多不同功能的单元组成的一个复杂系统来实现，主要完成信号的转换（声、光、电转换，A/D转换等），信号的处理（放大、去噪、调制、滤波等）、信号的传输（信道）等功能。

基本信号传输系统

举例：一个基本信号传输系统

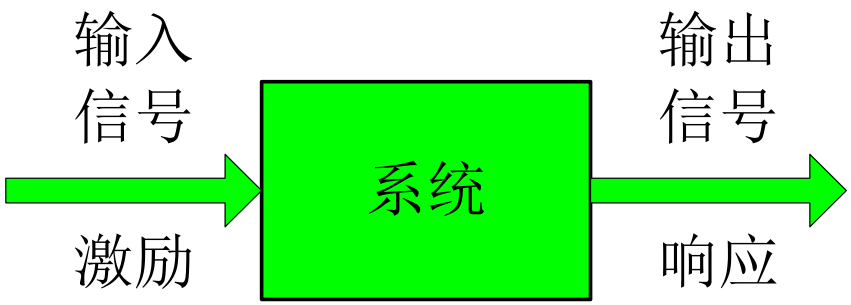




信号与系统的关系

❖信号

- 信息 (Information)
- 消息 (Message)
- 信号 (Signal)



信号是信息的载体。通过信号传递信息。

❖系统

系统(system)是指若干相互关联的事物组合而成具有特定功能的整体。

系统的基本作用是对输入信号进行加工和处理，将其转换为所需要的输出信号。

信号的分类和运算

- 信号的分类
- 信号的运算

信号的分类

❖确定信号和随机信号

- 确定信号：信号是一个确定的时间函数，给定一个时间值，就可以确定一个相应的函数值，如正弦信号。
- 随机信号：不是一个确定的时间函数，给定一个时间值，其函数值并不确定，而只知道信号取某一值的概率，如电子系统中的起伏热噪声、雷电干扰信号。

  实际信号一般都是随机信号。
  确定信号是一种近似的理想化了的信号。
  研究确定信号是研究随机信号的基础。
  本课程只讨论确定信号。

信号的分类 – 连续信号

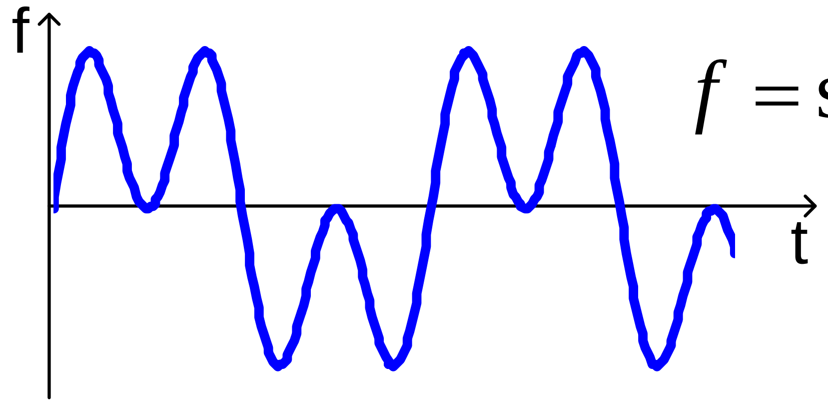
❖根据时间连续性分为：连续信号和离散信号

- 连续信号：在某一时间间隔内，对一切时间值，除了若干不连续点以外，都给出确定的函数值。

“连续”指时间变量在一个时间间隔内连续，也可含间断点，至于值域可连续也可不连续。实际中也常称为模拟信号。

有始函数：t<0时，函数值为0。

例如：



$$f = \sin 2\pi t + \sin 6\pi t$$

$$t > 0$$

信号的分类 – 离散信号

◆ 离散信号：只在一些不连续的时间值上给定函数值。

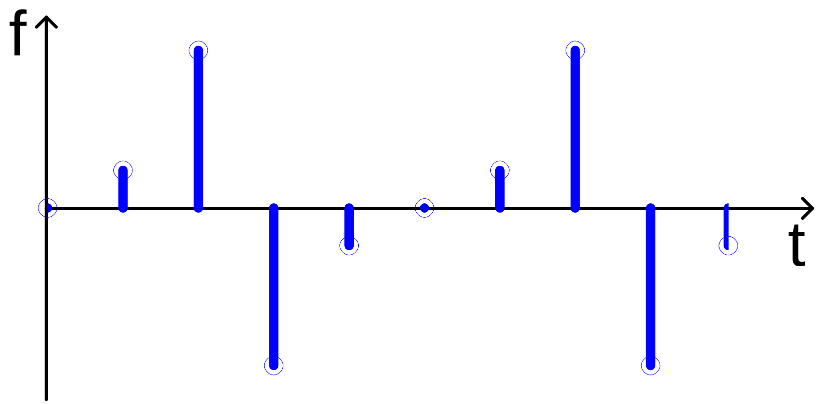
"离散"指时间变量取离散值。

幅度值取离散值的离散信号也称为数字信号。

例如：

$$f=\sin 2\pi t+\sin 6\pi t$$

$$t=0:0.2:\infty$$



$f(t)$仅在一些离散时刻t_k才有值。

相邻离散点的间隔$T_k=t_{k+1}-t_k$可以相等也可不等。

如果取等间隔T，离散信号可表示为$f(kT)$，简写为$f(k)$。

等间隔的离散信号也常称为序列，其中k称为序号。

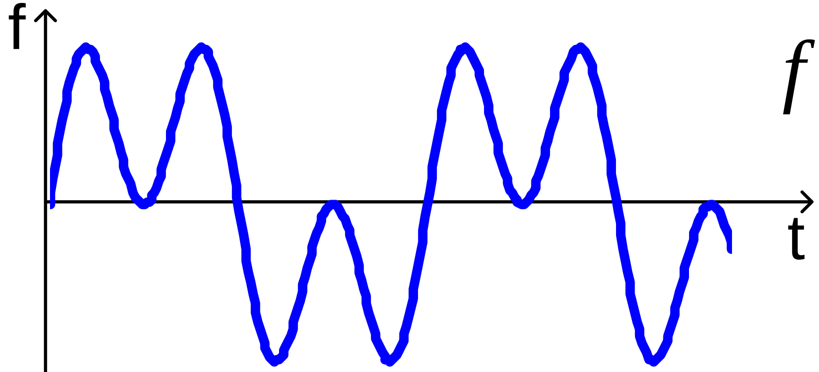
信号的分类 – 周期信号

❖周期信号和非周期信号

- 周期信号：按照一定规律重复变化的信号
- 非周期信号：不具有周期性的信号

信号重复的最小时间间隔称为信号的周期.

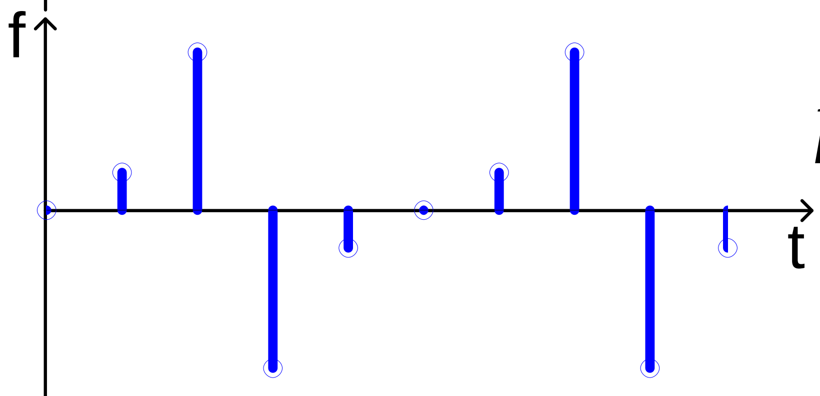
例如：



$$f = \sin 2\pi t + \sin 6\pi t$$

$$t > 0$$

周期为T=1



$$f = \sin 2\pi t + \sin 6\pi t$$

$$t = 0:0.2:\infty$$

信号的分类 – 能量信号

❖能量信号和功率信号

- 能量信号：总能量为有限值而平均功率为零。
- 功率信号：平均功率为有限值而总能量为无限大。

将信号$f(t)$施加于1Ω电阻上，它所消耗的瞬时功率为$|f(t)|^2$，在区间$(-\infty, \infty)$的能量E和平均功率P定义为

连续信号

$$E \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right|^2 dt$$

$$P \overset{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left| f(t) \right|^2 dt$$

离散信号

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)|^2$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2} |f(k)|^2$$

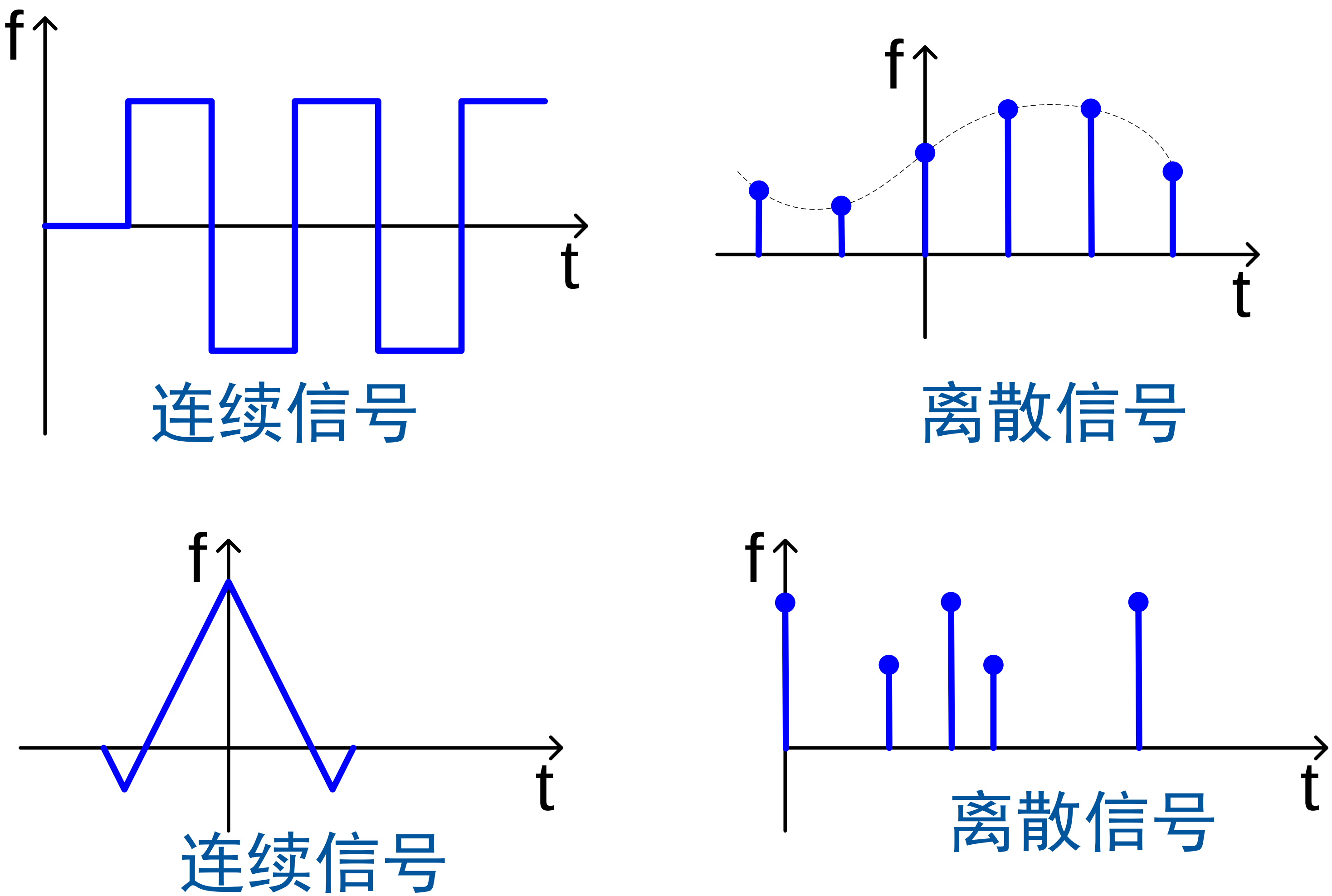
信号的分类 – 能量信号

周期信号都是功率信号。
只存在于有限时间内的信号是能量信号。
非周期信号可能是能量信号，也可能是功率信号。

有些信号既不是属于能量信号也不属于功率信号，
如 $f(t) = e^{t}$。

信号举例

Q1：判断下列信号是连续信号还是离散信号



信号举例

Q2：判断下列信号是周期信号还是非周期信号。若是周期信号，求其周期T。

$f_1(t) = 2\sin t - \sin 3t$　　　$f_2(t) = \sin 3t + \cos \pi t$

提示：两个周期信号x(t)，y(t)的周期分别为T_1和T_2，若其周期之比T_1/T_2为有理数，则其和信号x(t)+y(t)仍然是周期信号，其周期为T_1和T_2的最小公倍数。

sin*t*，T=2π　　　sin3*t*，T=2π/3

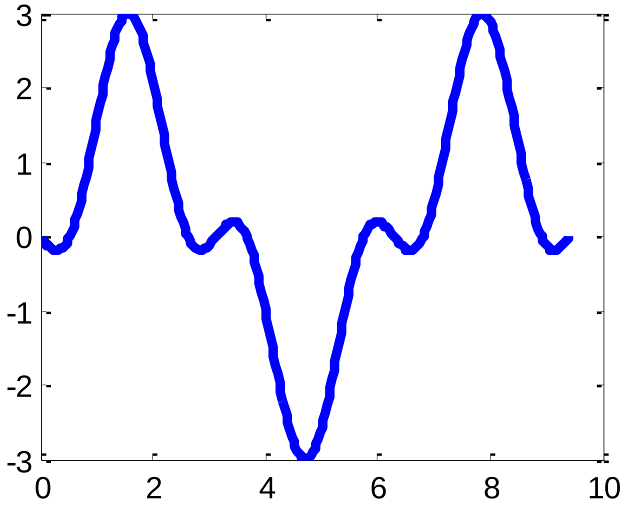
sin3*t*，T=2π/3　　　cosπ*t*，T=2

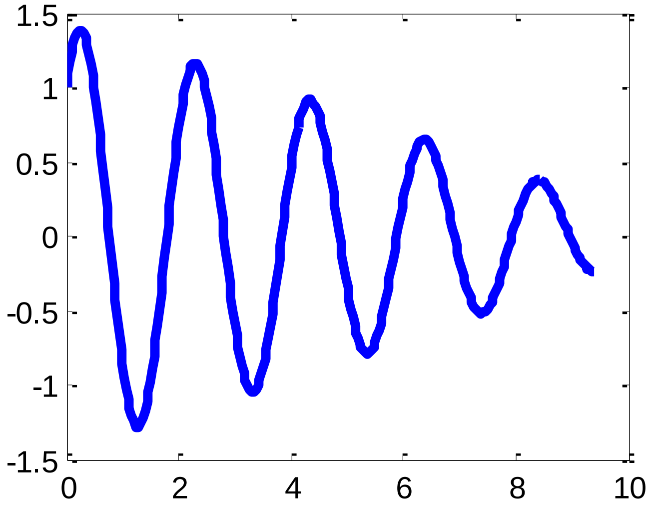
2sin*t*-sin3*t*，T=2π　　　sin3*t*+cos*πt*，非周期信号

Matlab编程

```
t=0:2*pi/201:(3*pi);
y=2*sin(t)-sin(3*t);
plot(t,y);
```

```
t=0:2*pi/201:(3*pi);
y=sin(3*t)+cos(pi*t);
plot(t,y);
```





信号举例

Q3：判断正弦序列 f(k)=sin(βk) 是否为周期信号，若是，确定其周期。

若为周期信号： sin(βk) = sin(βk+2mπ)，m为整数。

$$\sin\left(\beta k+2m\pi\right)=\sin\beta\left(k+m\frac{2\pi}{\beta}\right)$$

若2π/ β为整数，周期信号，T= 2π/ β

若2π/ β为有理数，周期信号，T= $\boxed{N}$(2π/ β) 整数

若2π/ β为无理数，非周期信号

Matlab编程

$$\beta=\frac{\pi}{4}$$

$$T=\frac{2\pi}{\beta}=8$$

```
k=0:20;
f=sin(pi/4*k);
stem(k,f)
```

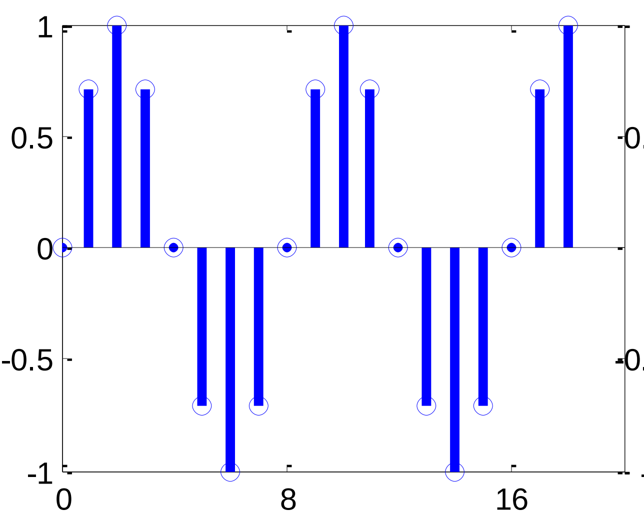
$$\beta=\frac{3\pi}{4},\frac{2\pi}{\beta}=\frac{8}{3}$$

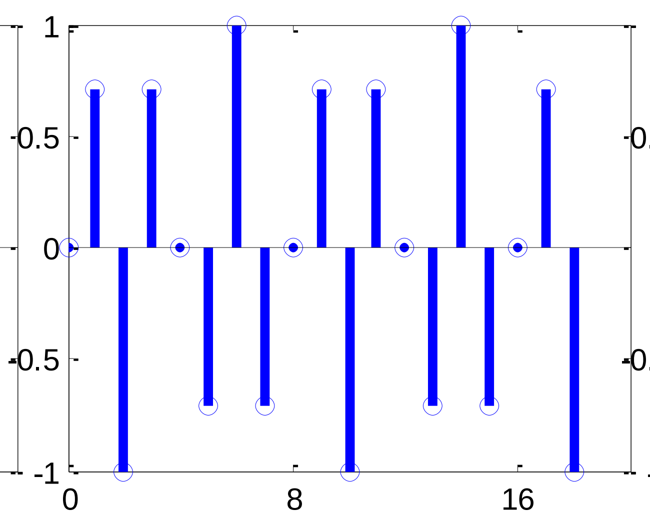
$$T=3\frac{2\pi}{\beta}=8$$

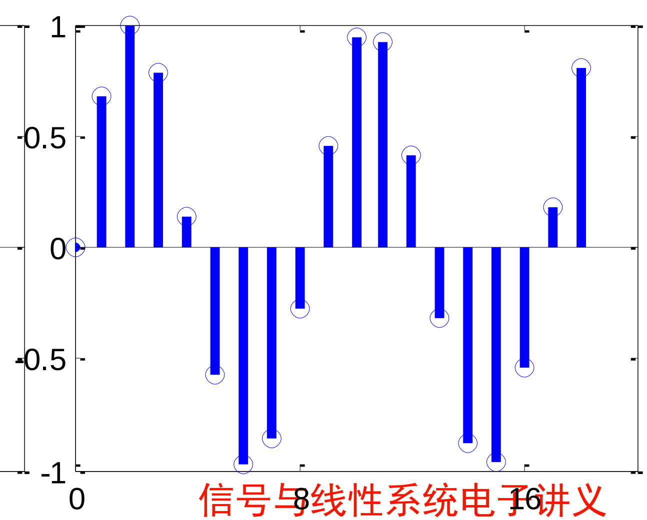
```
k=0:20;
f=sin(3*pi/4*k);
stem(k,f)
```

$$\beta=\frac{3}{4},\frac{2\pi}{\beta}=\frac{8\pi}{3}$$

```
k=0:20;
f=sin(3/4*k);
stem(k,f)
```







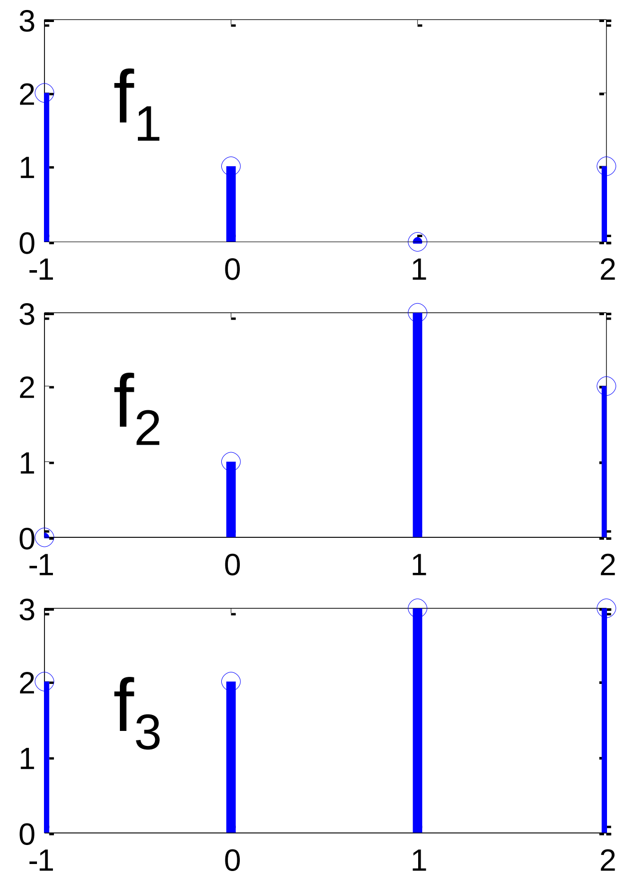
信号的基本运算－代数运算

❖信号的加、减、乘运算

◆ 相同时刻对应的信号值相加、相减、或相乘

$$f_1(k)=\begin{cases}2 & k=-1\\ 1 & k=0\\ 1 & k=2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad f_2(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 3 & k=1\\ 2 & k=2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

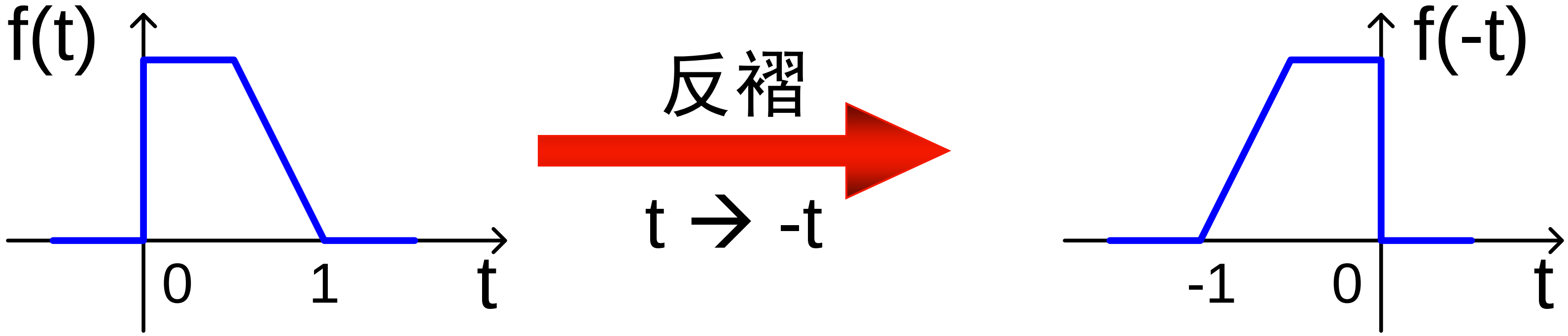
$$f_3(k)=f_1(k)+f_2(k)=\begin{cases}2 & k=-1\\ 2 & k=0\\ 3 & k=1\\ 3 & k=2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



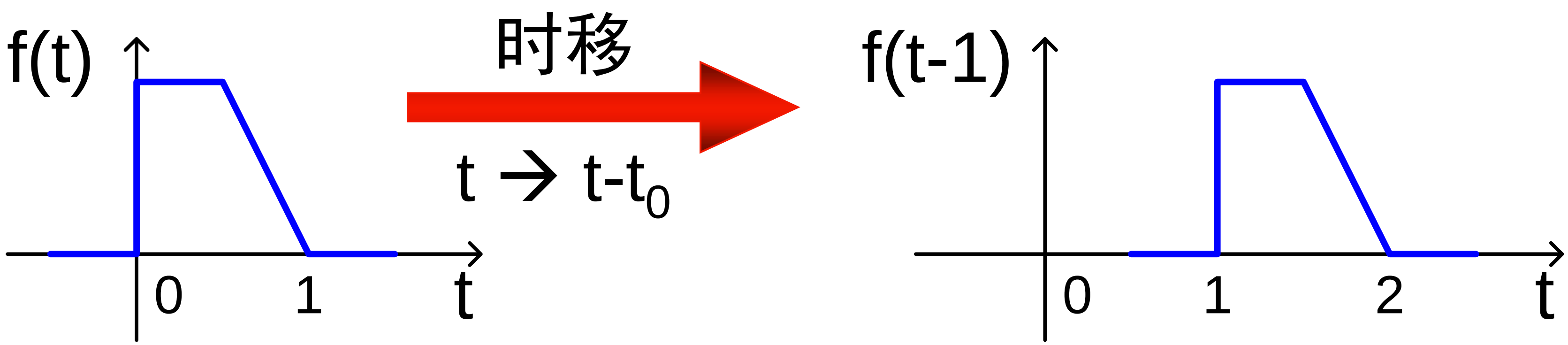
信号的基本运算 – 时间变换

❖信号的时间变换运算

◆ 反褶



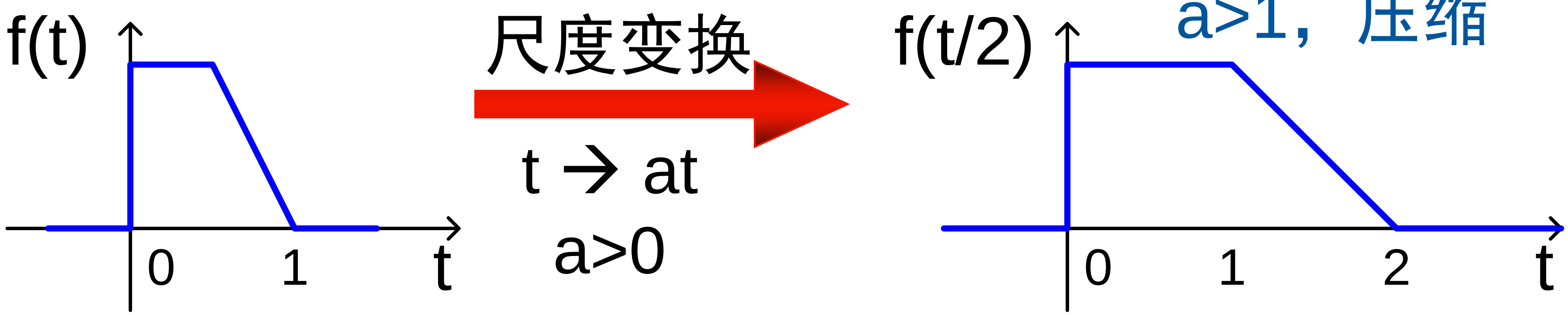
◆ 时移



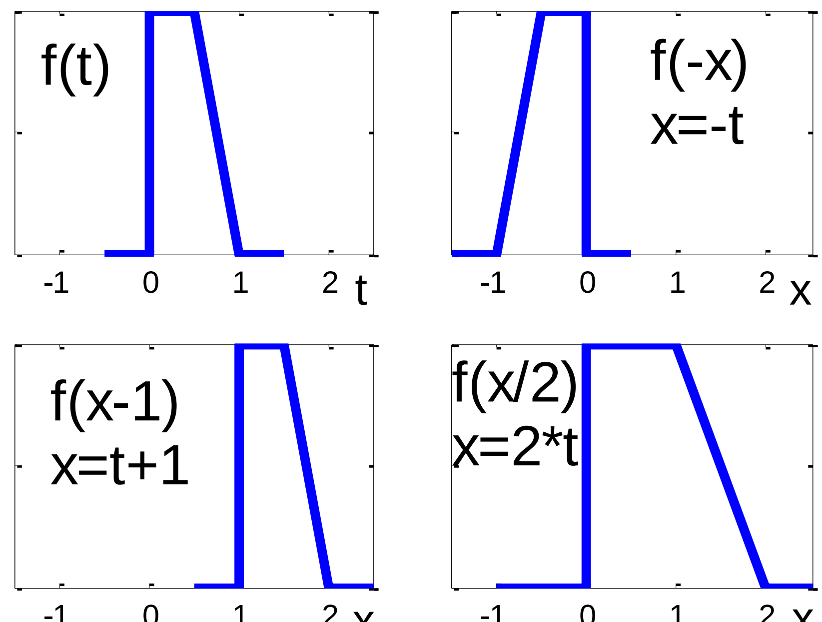
信号的基本运算 – 时间变换

- 尺度变换

a<1，伸展
a>1，压缩

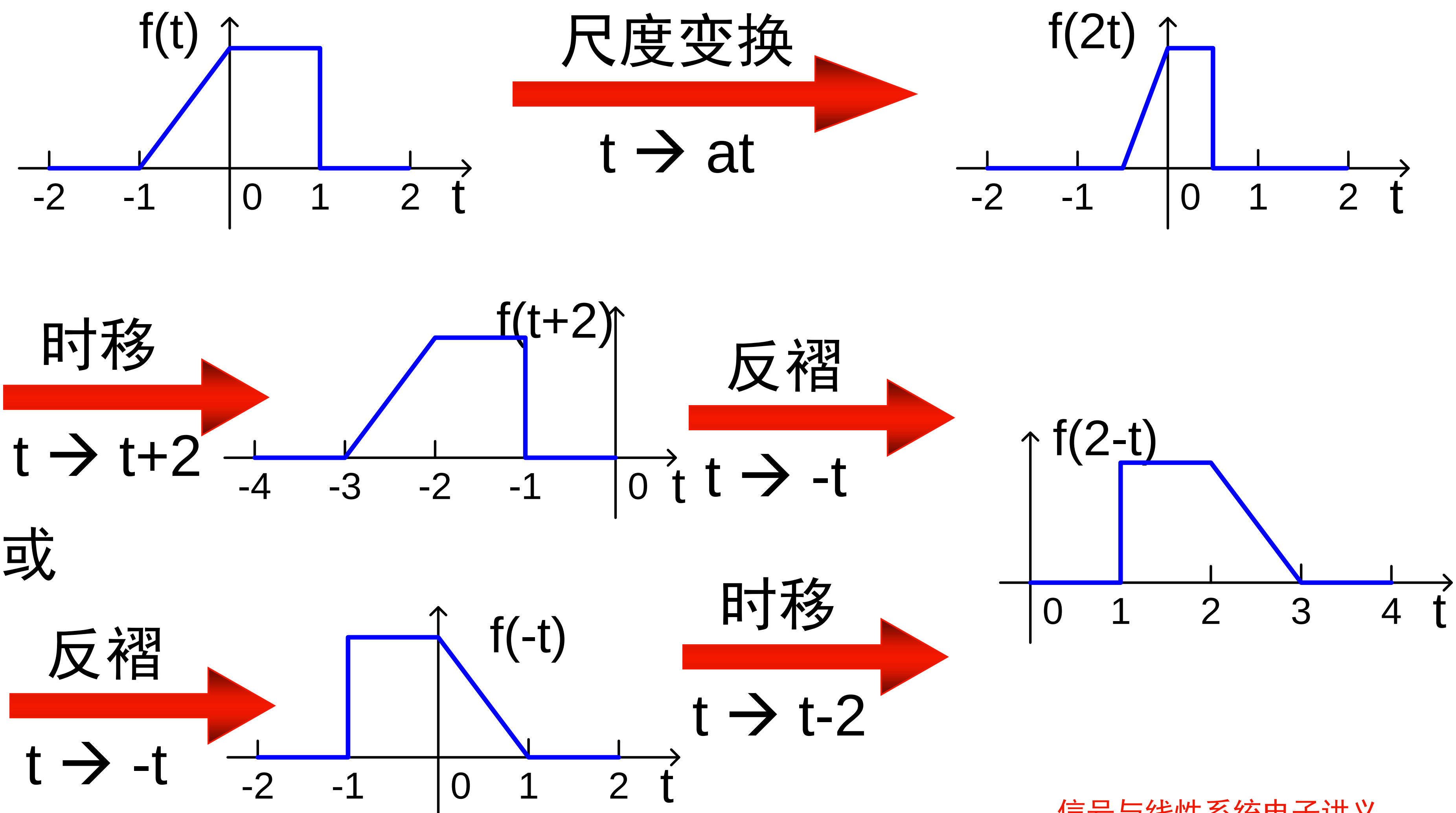



```
t=[-0.5 0 0 0.5 1 1.5 ];
f=[0 0 1 1 0 0];
subplot(2,2,1);plot(t,f);
subplot(2,2,2);plot(-t,f);
subplot(2,2,3);plot(t+1,f);
subplot(2,2,4);plot(2*t,f);
```



信号的基本运算举例

❖已知 f(t) 波形如图所示，试绘出 f(2t), f(2-t)。



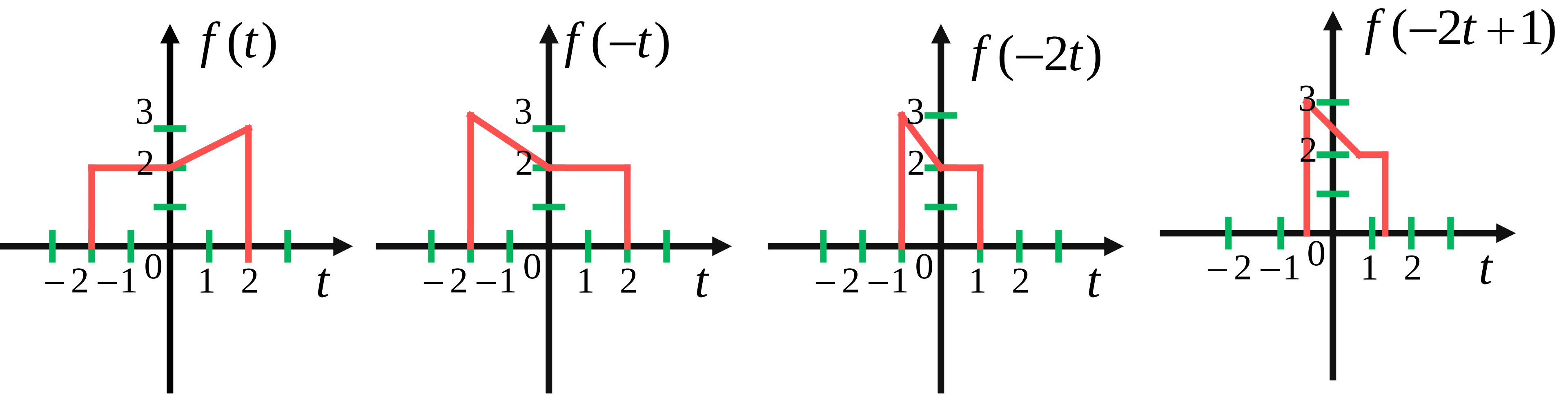
例子

❖已知信号f(t)的波形如图，求f(-2t+1)的波形。

解：图形变换的过程为: $f(-2t+1)=f[-2(t-\frac{1}{2})]$

先反折、尺度变换、时移。

（1）反折　（2）尺度变换　（3）时移



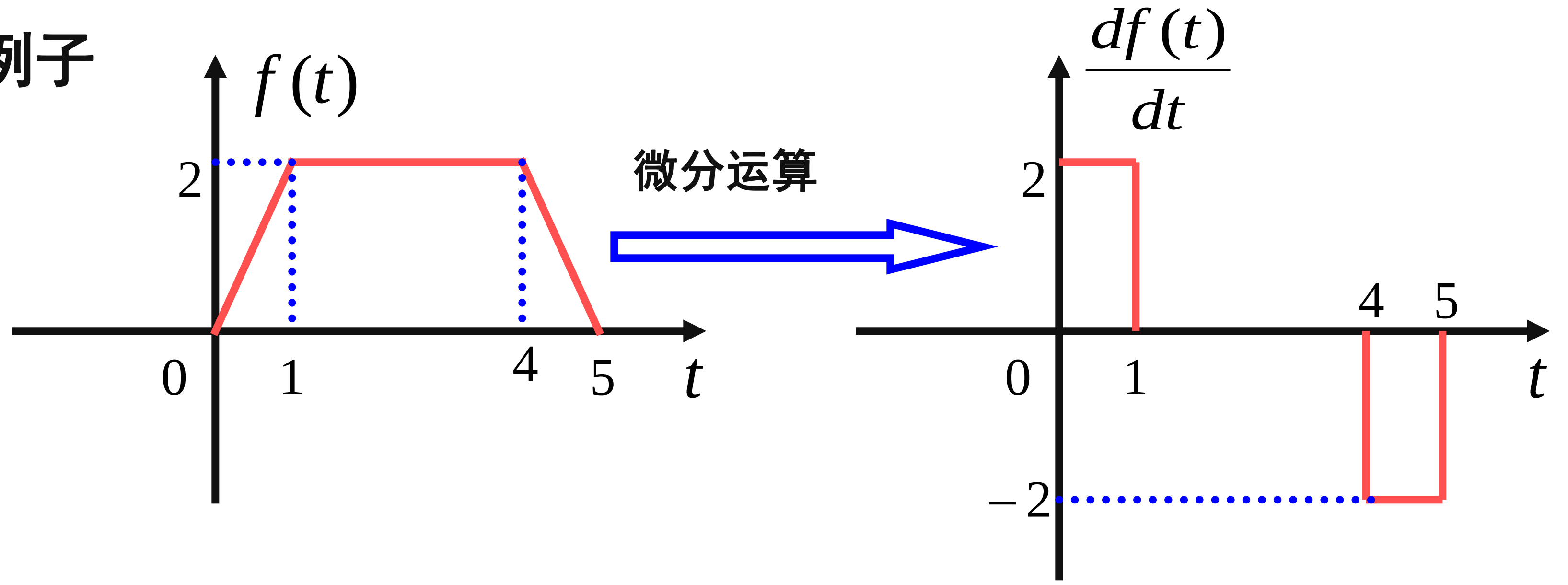
❖信号的微分

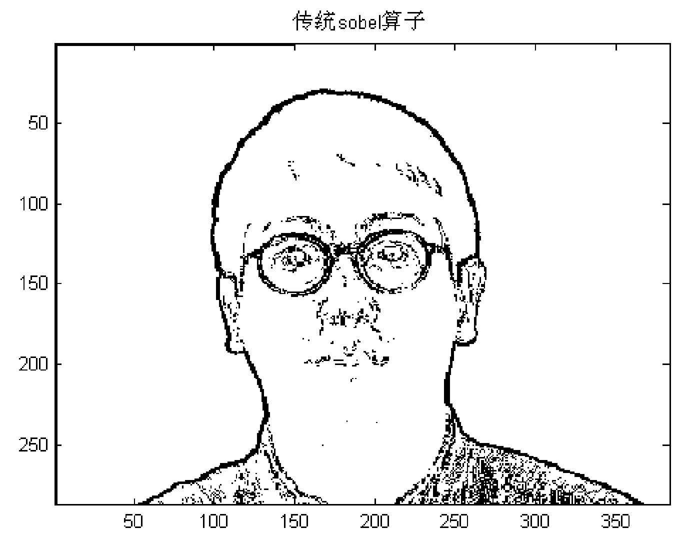
(6)微分： $f_7(t) \xrightarrow{微分} f_8(t) = f_7^{'}(t) = \dfrac{df_7(t)}{dt}$

突出显示函数变化部分

若f(t)是一幅黑白图像信号，那么经微分运算后将其图形的边缘轮廓突出。

例子：



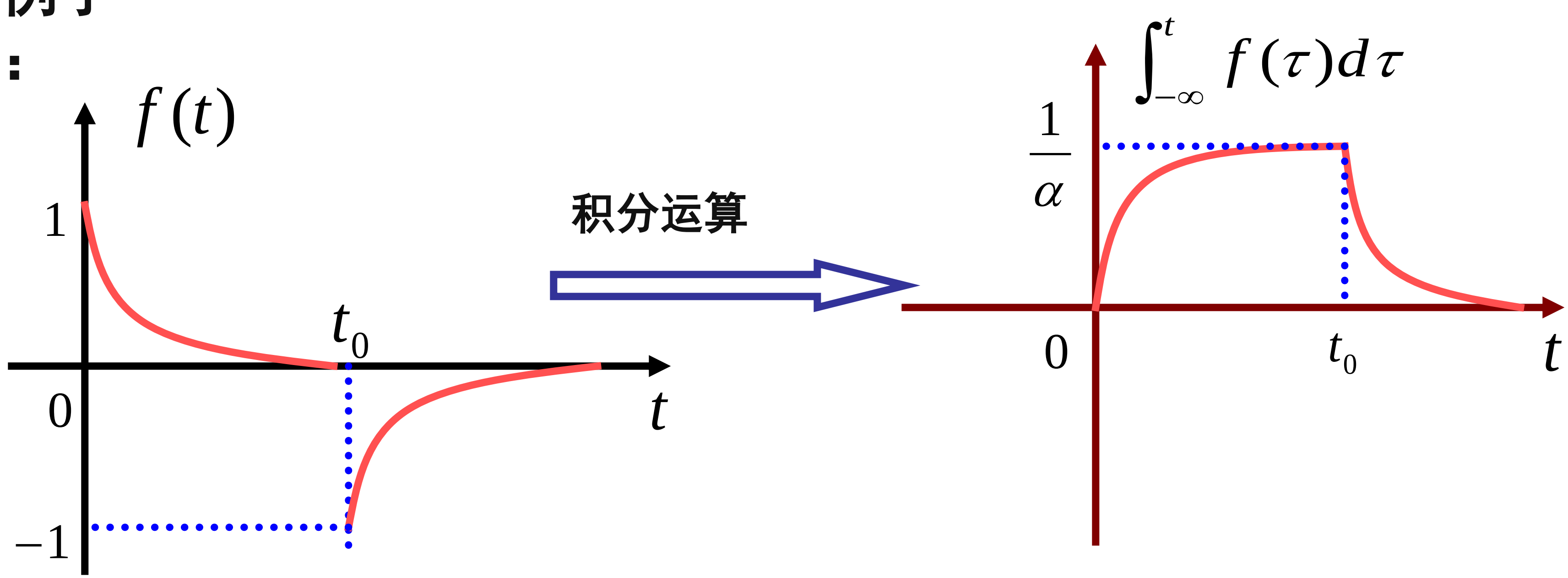

传统sobel算子
50
100
150
200
250
50
100
150
200
250
300
350

❖信号的积分

积分：$f_8(t) \xrightarrow{\text{积分}} f_9(t) = f_8^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{f}_8(\tau)d\tau$

信号经积分运算后其效果与微分相反，信号的突变部分可变得平滑，利用这一作用可削弱信号中混入的毛刺（噪声）的影响。

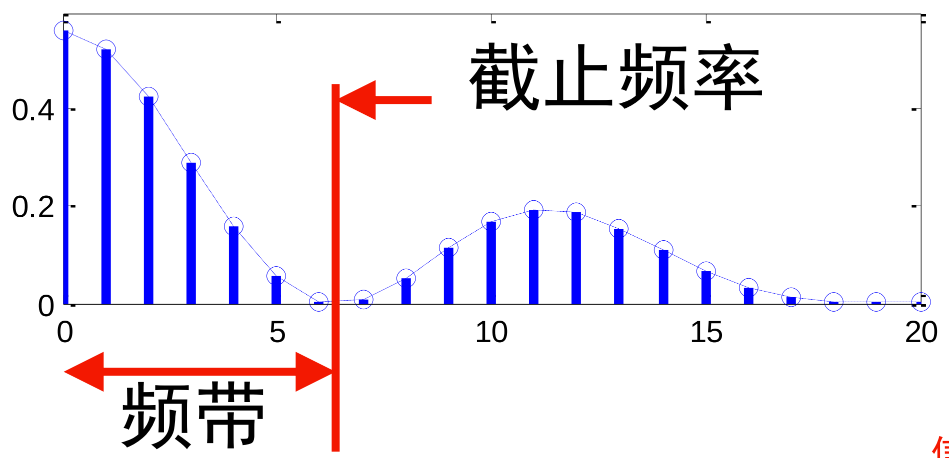
例子：



信号的时域、频域特性

- 频谱：利用Fourier分析法，将复杂信号分解成许多不同频率的正弦分量，按各个正弦分量的振幅和相位的高低依次排列成频谱。
- 频带：每个信号的频谱都有一个有效的频率范围，称为频带。
- 信号的时域和频域描述都包含了信号的全部信息量。

频谱举例



上一节复习

- 信号的概念及分类
  - 确定信号
  - 连续信号和离散信号
- 信号的基本运算
  - 代数运算
  - 反褶、时移、尺度变换

阶跃函数和冲激函数

- 最重要的两种理想信号模型

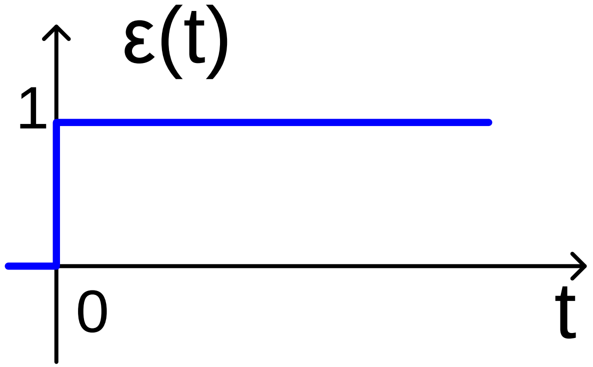
奇异函数 (Singularity Function)

- 奇异函数：这一类函数是理想化了的信号，有一个或多个间断点，在间断点上的导数不好确定。
- 最重要的两种奇异函数：阶跃函数(Step Function)、冲激函数(Impulse Function)。
- 涉及系统零状态响应的阶跃响应和冲激响应。

单位阶跃函数

- 阶跃函数在 t=0 时发生跃变
- 阶跃函数在 t=0 处函数值无定义
- 单位阶跃函数：高度为1的阶跃函数

$$\varepsilon(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$

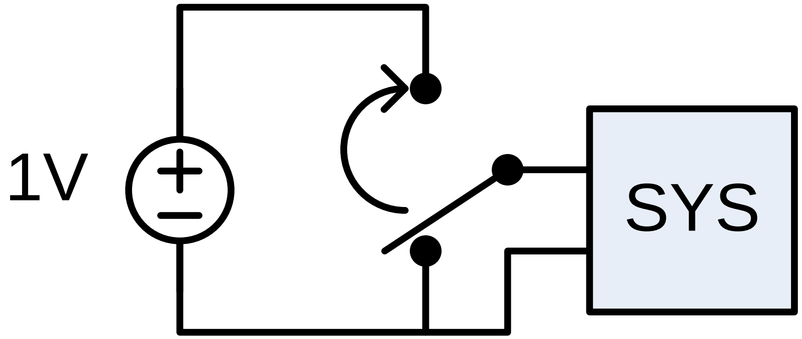


- 一般阶跃函数

$$\varepsilon_A(t) = A\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ A & t>0 \end{cases}$$

单位阶跃函数物理意义

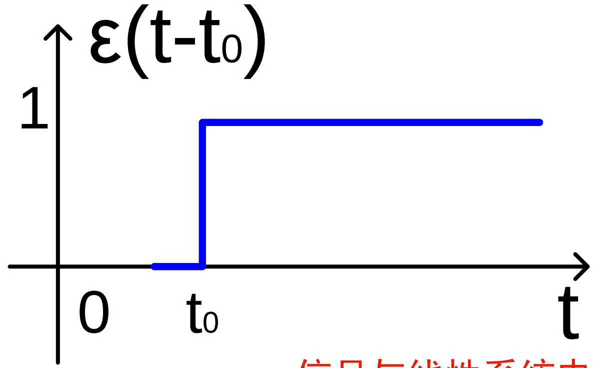
在 t=0 时刻对某一电路接入单位电源（1V电压源或1A电流源），并且无限持续下去。



思考：如果在 $t=t_0$ 时刻接入电源的函数的形式？

阶跃函数延时 t_0

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$



阶跃函数的性质

❖ 单边特性：任意函数乘以阶跃函数，阶跃之前为0，阶跃之后函数值不变。

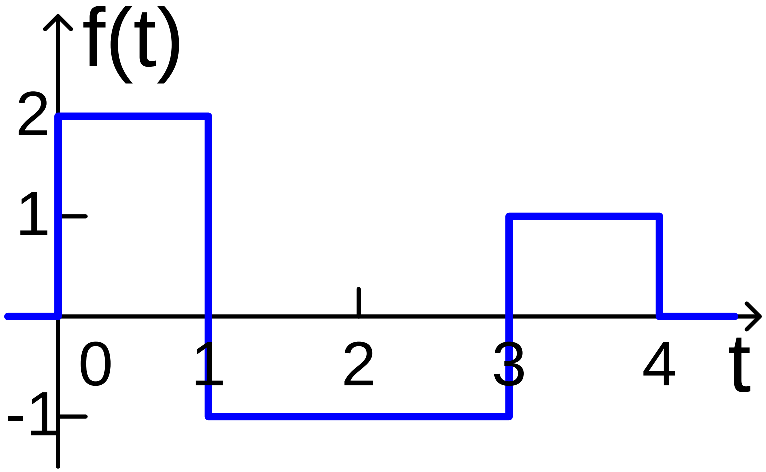
有始信号： $f(t)\varepsilon(t)$

等效于 $f(t) \quad t>0$

阶跃函数的性质应用举例

（1）表示矩形脉冲型信号

$$f(t)=2\varepsilon(t)-3\varepsilon(t-1)+2\varepsilon(t-3)-\varepsilon(t-4)$$



$$f(t)=\begin{cases}2 & 0<t<1\\ -1 & 1<t<3\\ 1 & 3<t<4\\ 0 & 其它\end{cases}$$

思考：符号函数

$$\operatorname{sgn} t=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$$

$$\operatorname{sgn} t=2\varepsilon(t)-1$$

$$或=\varepsilon(t)-\varepsilon(-t)$$

阶跃函数的性质应用举例

（2）表示信号的作用区间

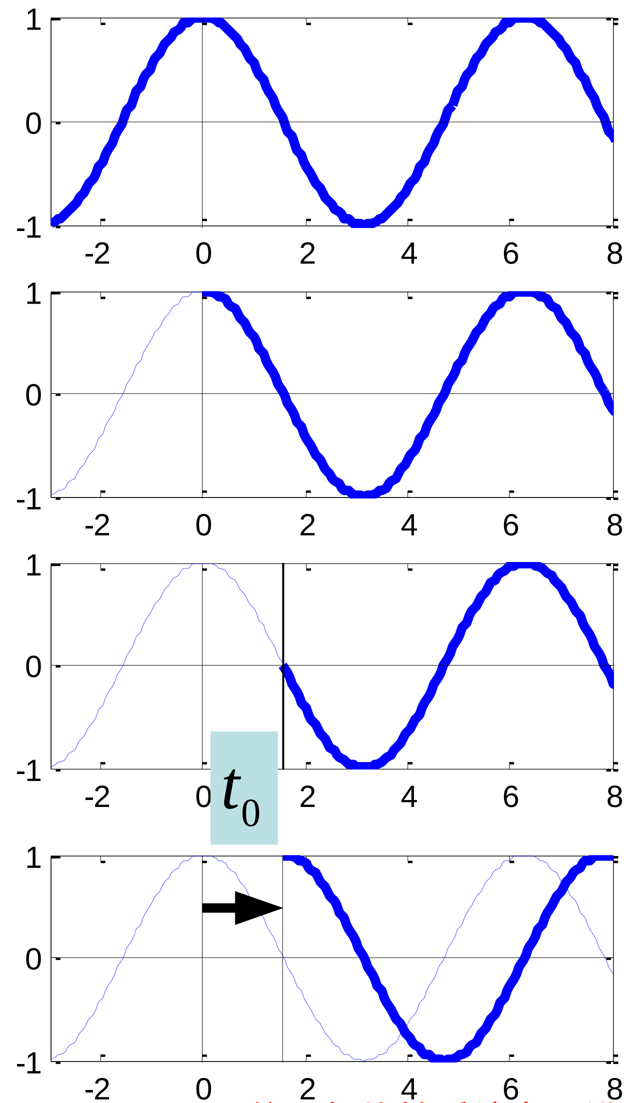
特点：只有时间区间的变化，函数值不变

$\cos\omega t$

$\varepsilon(t)\cos\omega t$

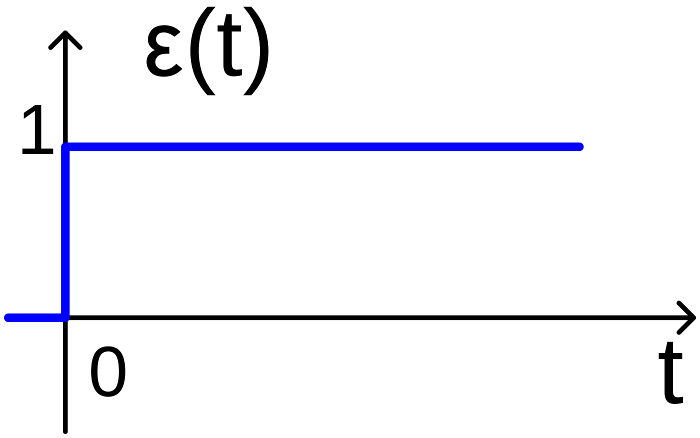
$\varepsilon(t-t_0)\cos\omega t$

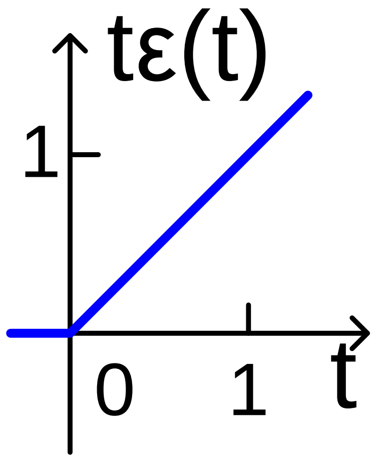
思考：$\varepsilon(t-t_0)\cos\omega(t-t_0)$



阶跃函数的性质应用举例

阶跃函数积分 $\int_{-\infty}^{t} \varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau = t\varepsilon(t)$



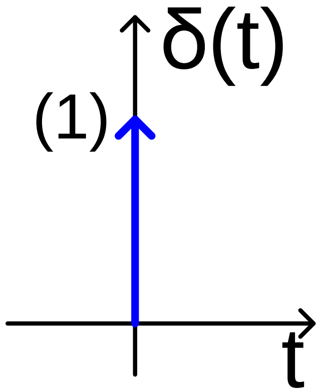


单位斜变函数

单位冲激函数

❖Dirac定义式

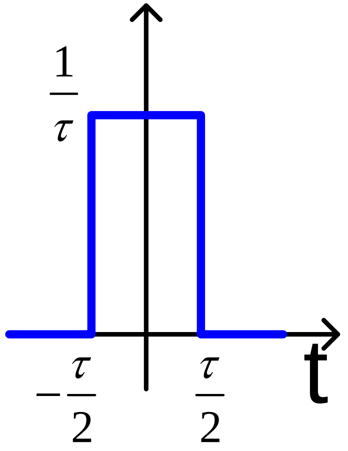
$$\begin{cases} \delta(t)=0 \qquad t\neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1 \end{cases}$$



冲激函数是对强度极大，作用时间极短一种物理量的理想化模型。

单位冲激函数冲激强度为1

冲激函数可看作是保持脉冲面积不变时脉宽趋近于零的矩形脉冲。



$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[\varepsilon\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

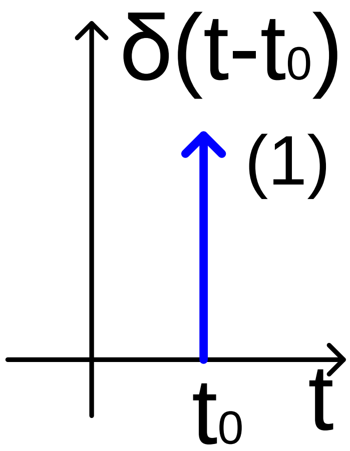
冲激函数

❖冲激强度为A

$$\delta_A(t) = A\delta(t)$$

❖任意时刻出现的冲激强度为1的冲激函数

$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 \qquad t\neq t_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1 \end{cases}$$



冲激函数的性质

❖偶函数 $\delta(t)=\delta(-t)$

❖取样特性 $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$ f(t) 在 t=0 处连续

思考： $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt$

$$=f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt$$

$$=f(0)$$

$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$ f(t) 在 $t=t_0$ 处连续

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$$

冲激函数的性质

❖与阶跃函数的关系

阶跃函数是冲激函数的积分

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\begin{cases}1 & t>0\\0 & t<0\end{cases}$$

$$\varepsilon(t)\overset{def}{=}\begin{cases}1 & t>0\\0 & t<0\end{cases}$$

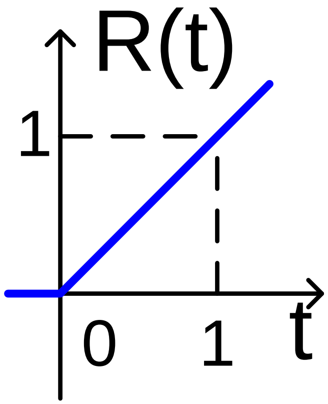
$$\boxed{\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\varepsilon(t)}$$

$$\boxed{\frac{d\varepsilon(t)}{dt}=\delta(t)}$$

其它奇异函数

❖单位斜变函数

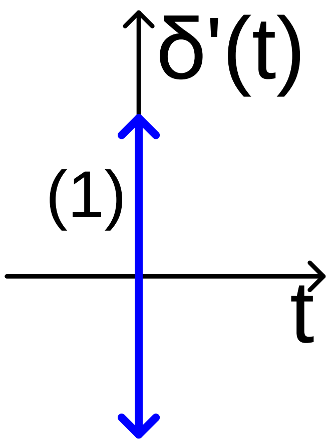
$$R(t)=\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(\tau)d\tau=\begin{cases} t & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$



$AR(t)$ A 为斜率

❖单位冲激偶 $\delta'(t)$

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[\delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$



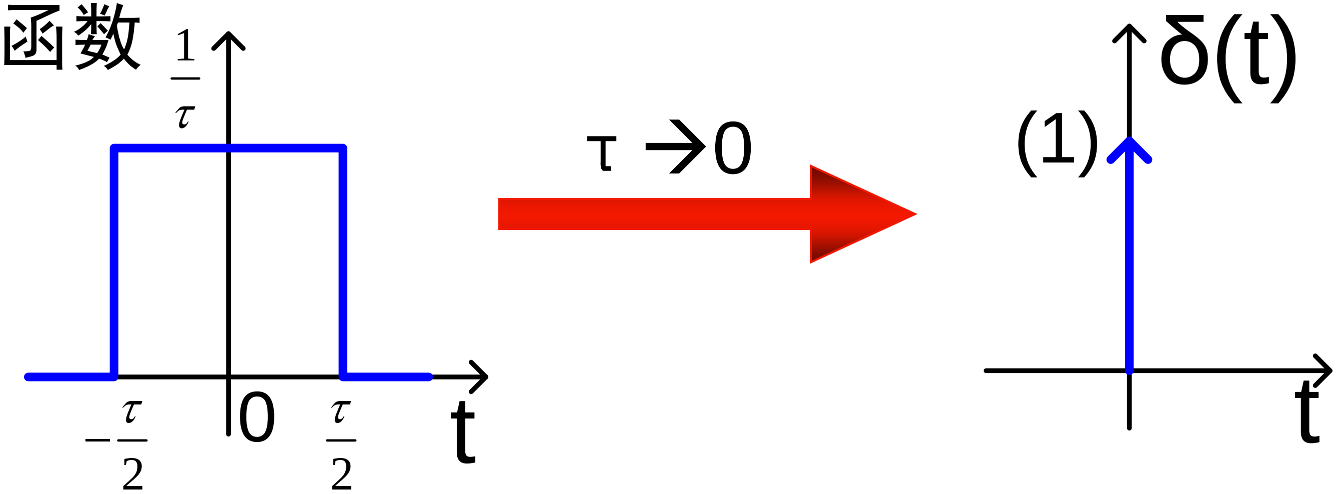
-0，正的无限大脉冲

+0，负的无限大脉冲

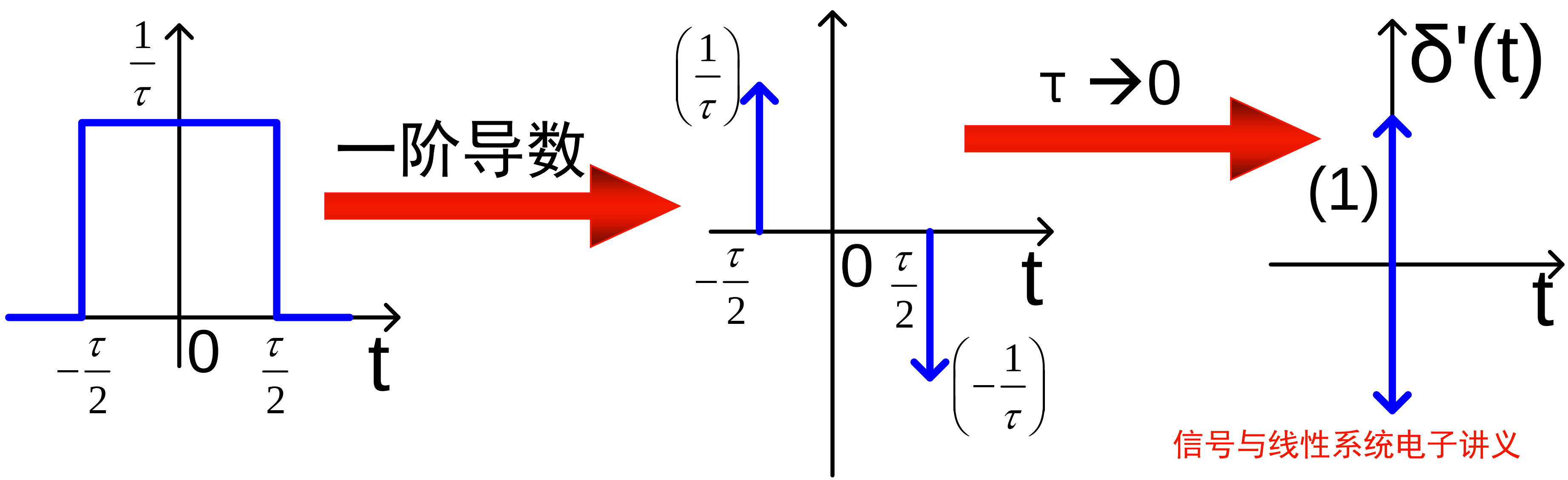
冲激强度为1

函数演变

冲激函数



冲激偶函数



冲激函数练习

❖求下列函数的值

$$\sin(t+\frac{\pi}{4})\delta(t) \quad =\frac{\sqrt{2}}{2}\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(t-\frac{\pi}{4})\delta(t)\,\mathrm{d}t \quad =-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{-3}^{0}\sin(t-\frac{\pi}{4})\delta(t-1)\,\mathrm{d}t \quad =0$$

$$\int_{-1}^{1}2\tau\delta(\tau-t)\,\mathrm{d}\tau \quad =\begin{cases}2t & -1<t<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{t}(\tau-1)^2\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad =\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}=\varepsilon(t)$$

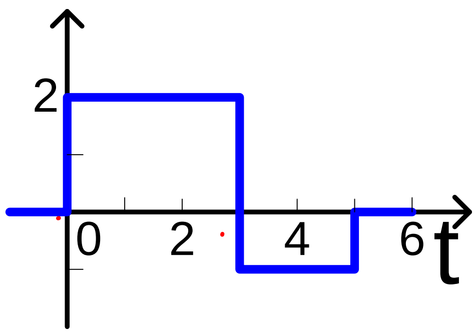
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-2t}\,\varepsilon(t)\right] \quad =\mathrm{e}^{-2t}\,\delta(t)-2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\varepsilon(t)=\delta(t)-2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\varepsilon(t)$$

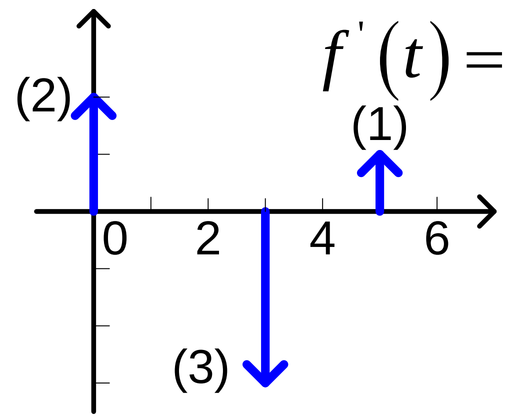
冲激函数练习

❖求下列波形信号的导数

$$f(t)=2\varepsilon(t)-3\varepsilon(t-3)+\varepsilon(t-5)$$

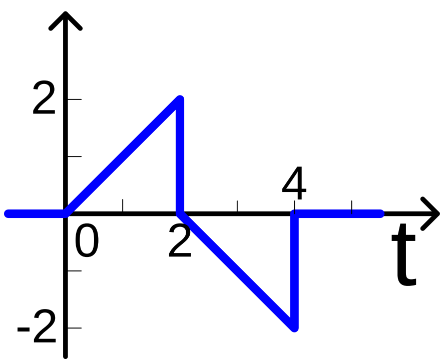
Q1：

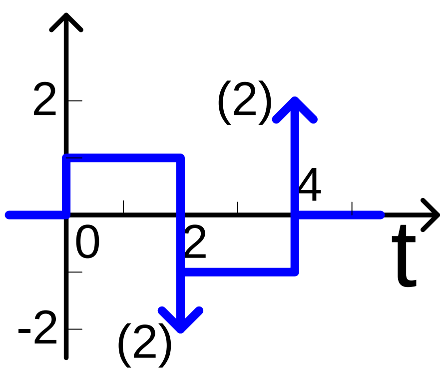




$$f'(t)=2\delta(t)-3\delta(t-3)+\delta(t-5)$$

Q2：



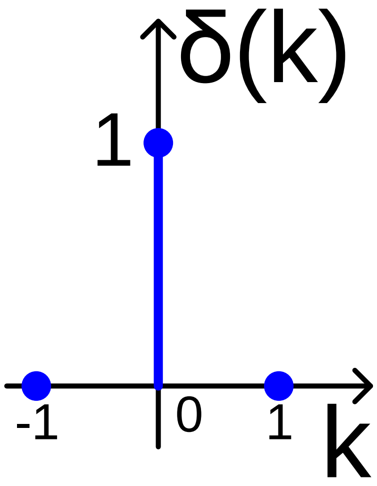


$$f(t)=t\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)\right]+(2-t)\left[\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-4)\right]$$

$$f'(t)=\varepsilon(t)-2\varepsilon(t-2)+\varepsilon(t-4)-2\delta(t-2)+2\delta(t-4)$$

单位冲激序列 $\delta(k)$

$$\delta(k) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$



取样特性：$f(k)\delta(k) = f(0)\delta(k)$

$$f(k)\delta(k-k_0) = f(k_0)\delta(k-k_0)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(k) = f(0)$$

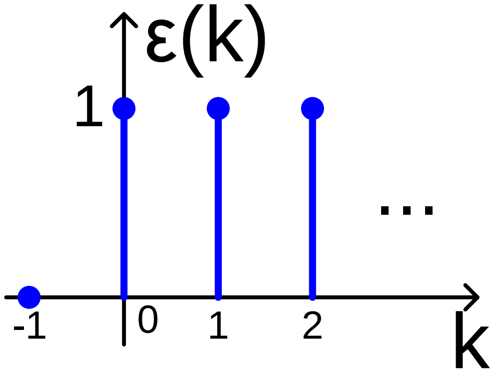
思考：$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k) = 1 \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k-5)\delta(k) = -5$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(k-i) = \varepsilon(k) + \varepsilon(-k-1) = \text{全1序列}$$

单位阶跃序列 $\varepsilon(k)$

❖ 单位阶跃序列 $\varepsilon(k)$

$$\varepsilon(k) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$



$\varepsilon(k)$与 $\delta(k)$的关系

$$\delta(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)$$

$$\varepsilon(k) = \delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k-2) + \ldots$$

$$\varepsilon(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} \delta(i) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta(k-j)$$

上一节复习

- 单位阶跃函数
  - 定义，符号，单边性
- 单位冲激函数
  - 定义，符号，取样性
- 单位阶跃函数和单位冲激函数的关系
- 单位阶跃序列
  - 定义，符号，波形
- 单位冲激序列
  - 定义，符号，波形
- 单位阶跃序列和单位冲激序列的关系

信号的时域分解

信号分解的意义

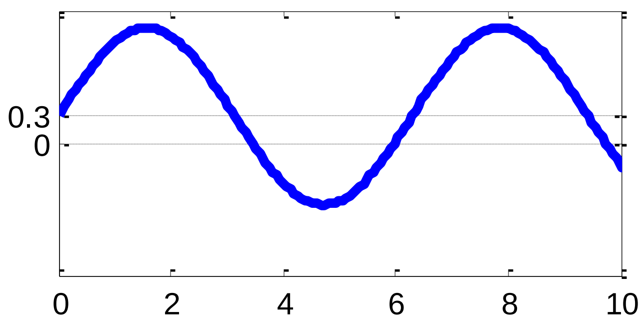
❖利用线性非时变系统的线性特性，可以将复杂输入信号或者初始状态分解成简单信号，分别求系统响应，再求和得到系统全响应。

全响应

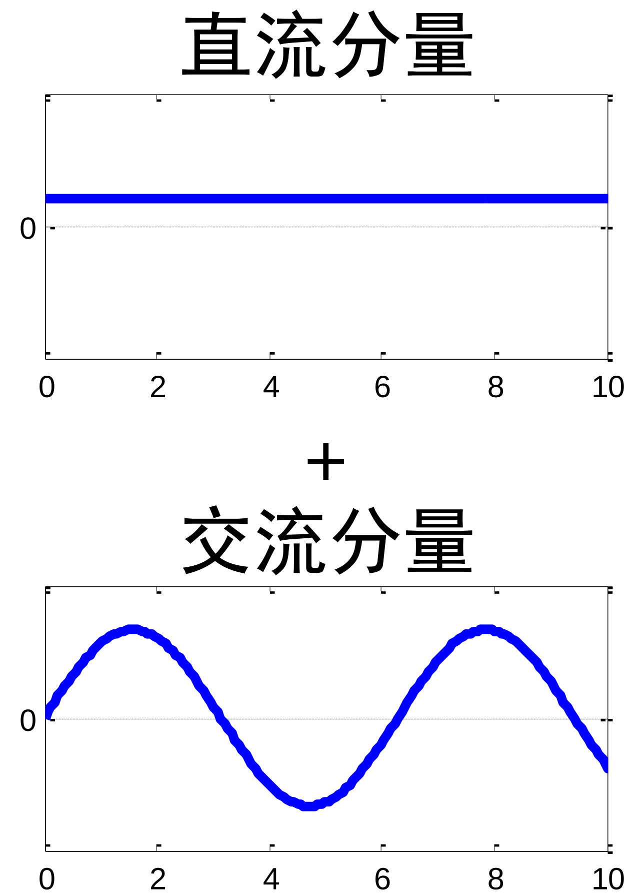
- 零输入响应
  由初始状态决定
  多用求微分方程
  通解的方法确定
  - $r_{zi1}(t)$ 状态1
  - $r_{zi2}(t)$ 状态2
  - $\vdots$ $\vdots$
  - $r_{zim}(t)$ 状态m
- 零状态响应
  由输入信号决定
  多分解为脉冲分
  量用卷积法确定
  - $r_{zs1}(t)$ $e_1(t)$
  - $r_{zs2}(t)$ $e_2(t)$
  - $\vdots$ $\vdots$
  - $r_{zsn}(t)$ $e_n(t)$

直流分量和交流分量

- 直流分量：信号的平均值
- 交流分量：去除直流分量的信号



=

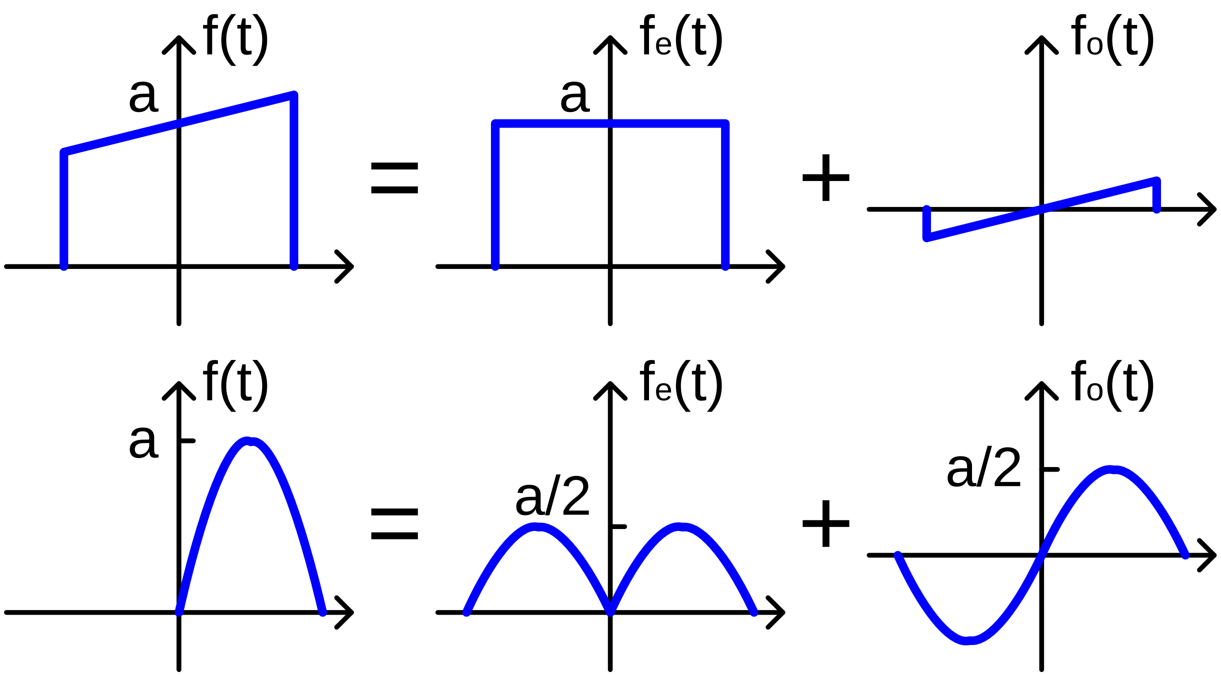


偶分量和奇分量

❖偶分量 $f_e(t)=f_e(-t)$

❖奇分量 $f_o(t)=-f_o(-t)$

$$f(t)=\underbrace{\frac{1}{2}\left[f(t)+f(-t)\right]}_{\text{偶分量}f_e(t)}+\underbrace{\frac{1}{2}\left[f(t)-f(-t)\right]}_{\text{奇分量}f_o(t)}$$



脉冲分量

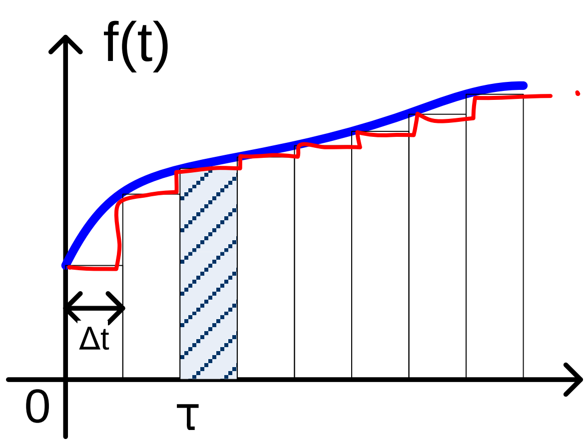
❖分解成矩形窄脉冲分量，极限情况即冲激信号叠加。

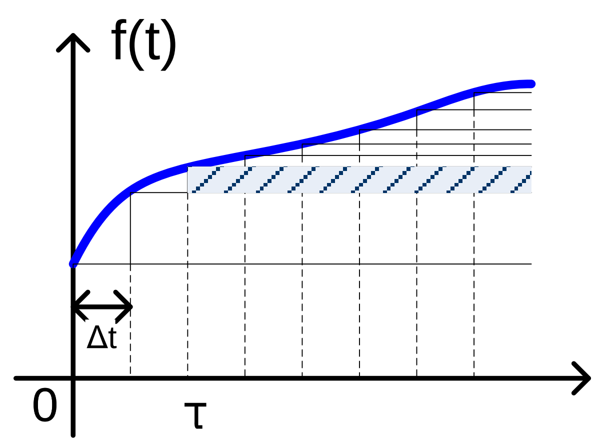
$$f(t)=\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} f(\tau)\left[\varepsilon(t-\tau)-\varepsilon(t-\tau-\Delta t)\right]$$

当 $\Delta t \to 0$ 演变成积分 $f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$

即卷积积分 $f(t)=f(t)*\delta(t)$ 用于求解零状态响应

❖分解成阶跃信号分量。





实部分量与虚部分量

原信号 $f(t)=f_r(t)+jf_i(t)$

共轭信号 $f^*(t)=f_r(t)-jf_i(t)$

实部分量 $f_r(t)=\frac{1}{2}\left[f(t)+f^*(t)\right]$

虚部分量 $f_i(t)=\frac{1}{2j}\left[f(t)-f^*(t)\right]$

$$\left|f(t)\right|^2=f(t)f^*(t)=f_r^2(t)+f_i^2(t)$$

正交函数分量

❖用正交函数集来表示一个信号 – Fourier级数。

三角函数

$$1, \sin\omega t, \sin 2\omega t, \ldots, \sin n\omega t$$

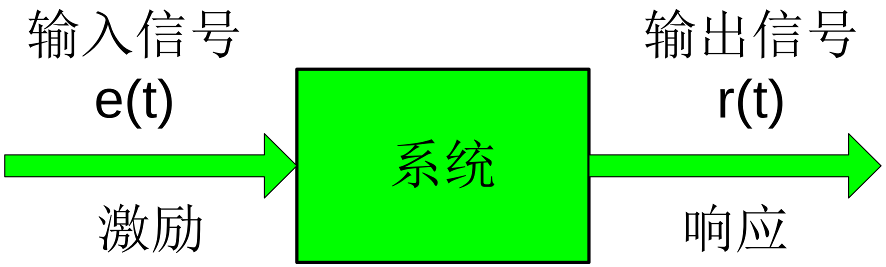
$$\cos\omega t, \cos 2\omega t, \ldots, \cos m\omega t$$

指数函数 $e^{\pm jn\omega t} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

系统的定义及分类

系统的定义

- 一个由若干互有关联的单元组成的并具有某种功能以用来达到某些特定目的的有机整体。
- 在电子学中，电路侧重于分析各支路或回路的电流电压，而系统侧重于输入输出关系或运算功能。系统功能的具体实现依赖于电路设计及分析。
- 系统的功能方框图
  - e(t) excitation
  - r(t) response



系统的分类

❖按信号的类型

- 连续系统：输入输出均为连续信号
- 离散系统：输入输出均为离散信号

混合系统

❖按输入输出端口数

- 单输入单输出系统（简单系统）
- 多输入多输出系统（复杂系统）

❖按是否满足因果关系

- 因果系统：系统具有因果性，有因（激励）才有果（响应）响应不可能先于激励出现。
- 非因果系统：系统不具有因果性。

系统的分类

❖按集总还是分布参数

- 集总参数系统
- 分布参数系统

❖按是否含有源元件

- 无源系统
- 有源系统

❖按是否具含有记忆元件

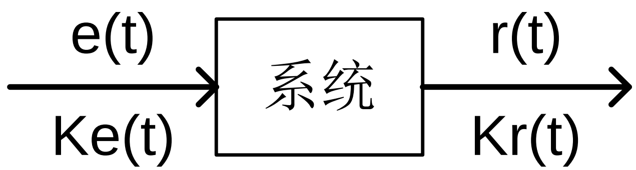
- 动态系统（记忆系统）：系统响应不仅与该时刻激励有关，还与历史状态有关。含有记忆元件(电容、电感等)。
- 即时系统（无记忆系统）：系统响应只与该时刻激励有关。

系统的分类 – 线性系统

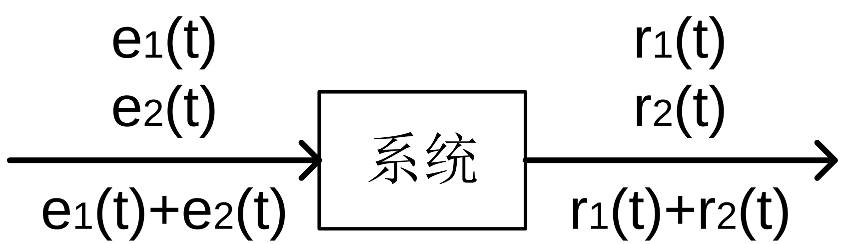
❖按线性特性

- 线性系统：由线性元件组成，具有齐次性和叠加性。
- 非线性系统：含有非线性元件，不具有齐次性和叠加性。

齐次性



叠加性



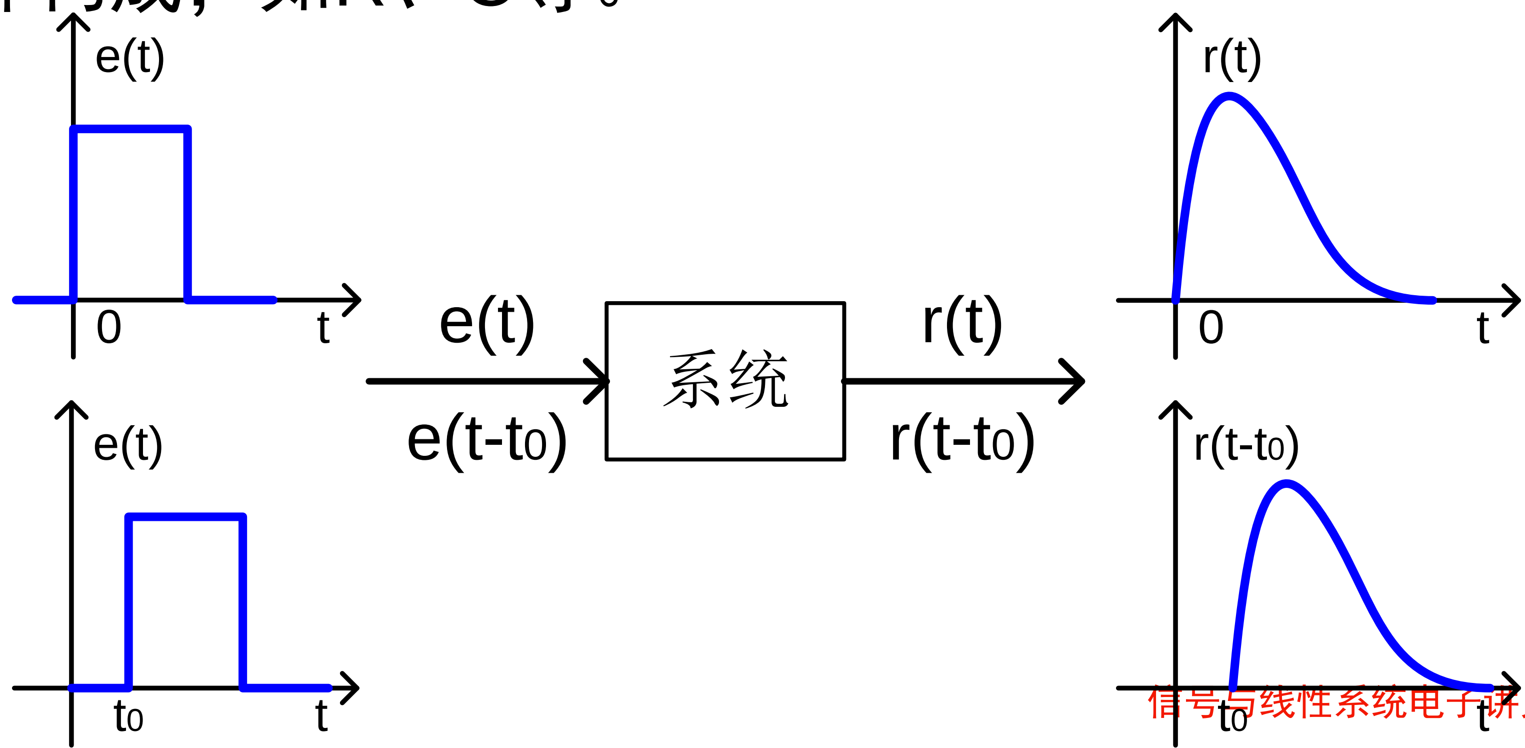
若$e_1(t)\rightarrow r_1(t)$，$e_2(t)\rightarrow r_2(t)$，
则$k_1e_1(t)+k_2e_2(t)\rightarrow k_1r_1(t)+k_2r_2(t)$

齐次叠加性

系统的分类 – 非时变系统

❖按时变特性

- 时变系统：含有时变元件，系统参数随时间变化。
- 非时变系统：系统参数不随时间变化，响应的形状不随着激励施加的时间不同而改变，通常由定常元件构成，如R、C等。



线性非时变系统（LTI系统）

❖ LTI系统：Linear Time-Invariant

若$e_1(t) \rightarrow r_1(t)$，$e_2(t) \rightarrow r_2(t)$，
则$k_1e_1(t-t_1)+k_2e_2(t-t_2) \rightarrow k_1r_1(t-t_1)+k_2r_2(t-t_2)$

本课程主要研究集总参数的线性非时变系统，包括连续时间系统和离散时间系统。

线性非时变系统的全响应

❖根据线性系统的齐次叠加性，线性系统的全响应可分为零输入响应和零状态响应两部分。

$$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$$

$r_{zi}(t)$：系统的零输入（zero input）响应，外加激励为零，由初始状态单独作用产生的响应。

$r_{zs}(t)$：系统的零状态（zero state）响应，初始状态为零，由外加激励单独作用产生的响应。

初始状态不为零的线性系统应同时满足零输入线性和零状态线性。

线性非时变系统练习1

❖证明线性非时变系统微分特性

若 $e(t)\rightarrow r(t)$　　则 $\dfrac{de(t)}{dt}\rightarrow\dfrac{dr(t)}{dt}$

$$\frac{de(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e(t)-e(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

$$e(t)-e(t-\Delta t)\rightarrow r(t)-r(t-\Delta t)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e(t)-e(t-\Delta t)}{\Delta t}\rightarrow\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(t)-r(t-\Delta t)}{\Delta t}=\frac{dr(t)}{dt}$$

积分特性同理 $\int_{-\infty}^{t}e(\tau)\mathrm{d}\tau\rightarrow\int_{-\infty}^{t}r(\tau)\mathrm{d}\tau$

线性非时变系统练习2

❖判断下列系统是否为线性系统？

(1) $\dfrac{dr(t)}{dt}+r(t)=e(t)+5$ 非线性系统

(2) $5\int_{-\infty}^{t} r(\tau)d\tau+tr(t)=\dfrac{de(t)}{dt}$ 线性系统

(3) $r(t)=\mathrm{e}^{-t}x(0)+\int_{0}^{t}\sin(\tau)e(\tau)d\tau$ 线性系统

$r_{zi}(t)=\mathrm{e}^{-t}x(0)$ 满足零输入线性

$r_{zs}(t)=\int_{0}^{t}\sin(\tau)e(\tau)d\tau$ 满足零状态线性

线性非时变系统练习3

❖判断下列系统是否为时变系统？

(1) $r(t)=e(t)+e(t-1)$ 非时变系统

(2) $r(t)=te(t)+5$ 时变系统

(3) $r(t)=e(-t)$ 时变系统

若输入信号延时为 t_0

(1) $r(t-t_0)=e(t-t_0)+e(t-t_0-1)$

(2) $r(t-t_0)=(t-t_0)e(t-t_0)+5\neq te(t-t_0)+5$

(3) $r(t-t_0)=e(-(t-t_0))\neq e(-t-t_0)$

线性非时变系统练习4

- 已知某LTI系统在初始状态为x(0),输入为e(t)时，系统全响应为$r_1(t)$，在初始状态为2x(0),输入为3e(t)时，系统全响应为$r_2(t)$，求系统在输入为f(t)时的零状态响应$r_3(t)$。

$$r_1(t)=1+\cos\pi t \quad t>0$$
$$r_2(t)=-2+3\cos\pi t \quad t>0$$

$$f(t)=\frac{de(t)}{dt}+2e(t-1)$$

$$\begin{cases} r_1(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t) \\ r_2(t)=2r_{zi}(t)+3r_{zs}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_{zi}(t)=5\varepsilon(t) \\ r_{zs}(t)=(-4+\cos\pi t)\varepsilon(t) \end{cases}$$

$$r_3(t)=\frac{dr_{zs}(t)}{dt}+2r_{zs}(t-1)$$
$$=-3\delta(t)-\pi\sin\pi t\varepsilon(t)-\left[8-2\cos\pi(t-1)\right]\varepsilon(t-1)$$

LTI系统的分析方法

系统分析的步骤

- ❖建立系统的数学模型，例如电路方程和系统方程。
- ❖运用数学方法处理，例如求解系统在一定初始条件和一定输入激励下的输出响应。
- ❖对所得的数学解给出物理解释，赋予物理意义。

第一步：建模

第二步：求解

第三步：解释

LTI连续时间系统

❖建模：常系数线性微分方程

- 输入输出方程
- 状态方程

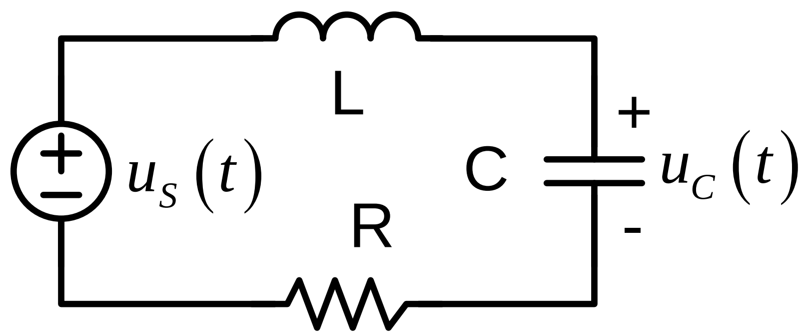
选取变量的观点和方法不同

❖数学求解

- 时域求解：直接解法，卷积法
- 变换域求解：Fourier变换，Laplace变换

连续系统输入输出方程举例：激励 $u_S(t)$ 响应 $u_C(t)$

$$\begin{cases} LC\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_S \\ u_C(0_+),\ u_C^{'}(0_+) \end{cases}$$



LTI离散时间系统

❖建模：常系数线性差分方程

- 输入输出方程
- 状态方程

❖数学求解

- 时域求解：卷积和
- 变换域求解：Z变换

差分方程由未知输出序列项与输入序列项构成。

例如：$r(k)-(1+\beta)r(k-1)=e(k)$　　　一阶差分方程

阶数：未知序列项最高序号与最低序号之差。

由n阶差分方程描述的系统称为n阶系统。

离散时间系统练习1

❖下列差分方程描述的系统，是否线性？是否非时变？并写出方程的阶数。

（1）$r(k) = e(k)+ e(k-1)$ 线性、非时变，一阶

（2）$r(k) + (k – 1)r(k – 1) = e(k)$ 线性、时变，一阶

（3）$r(k) + r(k+1)\, r(k – 1) = e^2(k)$ 非线性、非时变，二阶

（4）$r(k) + 2\, r(k – 1) = e(1 – k)+1$ 非线性、时变，一阶

判断方法：

方程中均为输出、输入序列的一次关系项，无常数项，则是线性的。输入输出序列前的系数为常数，且无反褶、尺度变换，则为非时变的。

非电系统的分析

- 和信号传输系统或别的电系统具有可比拟性，可以运用相似的电系统的分析来代替。
- 只要可以近似为线性系统，用线性微分或差分方程来描述，就可以用线性系统分析法来分析。

章节小结

- 基本概念
  - 信息，消息，信号（确定信号），系统（线性非时变系统，LTI系统）
- 奇异函数的定义及性质
- 线性非时变系统的特性
  - 齐次性，叠加性，非时变性

若$e_1(t) \rightarrow r_1(t)$，$e_2(t) \rightarrow r_2(t)$，
则$k_1e_1(t-t_1)+k_2e_2(t-t_2) \rightarrow k_1r_1(t-t_1)+k_2r_2(t-t_2)$

- 线性非时变系统的分析方法
  - 建模，求解，物理解释

LTI系统分析概述

- 研究对象：对给定的具体系统，求出它对给定激励的响应。
- 系统分析的方法
  - 输入输出法 – 外部法
  - 状态变量法 – 内部法（Chp.11）
- 外部法求解
  - 时域分析（Chp.2 Chp.3 Chp.7 ）
  - 变换域分析
    - 连续系统（频域分析Chp.4， 复频域分析Chp.5 ）
    - 离散系统（Z域分析Chp.8 ）
- 系统特性 – 系统函数（ Chp.6 ）

LTI系统求解

❖求解的基本思路

- 分开求零输入响应和零状态响应
- 把复杂信号分解为众多基本信号之和，利用线性系统的叠加性：多个基本信号作用于线性系统所引起的响应等于各个基本信号所引起的响应之和。

❖数学工具

- 卷积积分和卷积和
- Fourier变换
- Laplace变换
- Z变换

连续系统的时域分析

连续系统的分析方法

- 建立及求解输入输出方程
  - 常系数线性微分方程
- 求解方法
  - 时域解法：直接求解，卷积积分
  - 变换域解法：Fourier变换，Laplace变换

本章主要研究连续时间系统的时域分析法，这种方法比较直观，物理概念清楚，是学习各种变换域分析法的基础。

内容提要

- 直接求解微分方程（经典法） 直观但冗繁、应用局限性
  - 通解+特解
  - 零输入响应+零状态响应
- 阶跃响应和冲激响应
- 利用卷积积分求解系统零状态响应
  - 单位冲激响应
  - 卷积积分

重点与难点

- ❖零输入响应（直接求解）
- ❖零状态响应（直接求解和**卷积积分**）
- ❖单位冲激响应求解
- ❖卷积积分及其性质

LTI连续系统的响应

- 微分方程的经典解法
- 关于0-和0+初始值
- 零输入响应和零状态响应(直接求解)

LTI连续系统的描述

❖LTI系统由线性元件组成，参数恒定。

❖LTI连续系统的激励和响应或者输入和输出之间的联系可以用常系数线性微分方程描述。

❖输入输出方程的一般形式

- y(t)：响应函数，即输出函数
- f(t)：激励函数，即输入函数
- a_0-a_{n-1}, a_n=1, b_0-b_m：常数系数

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{d\ y}{dt}+a_0 y=b_m\frac{d^m f}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}}+\ldots+b_1\frac{d\ f}{dt}+b_0 f$$

LTI系统方程时域求解

❖ 经典解法：通解+特解

◆ 通解：微分方程对应的齐次方程（令方程右边为零）的解，称为**自然响应**或**自由响应**。

◆ 特解：满足非齐次方程的解，根据系统激励函数的具体形式求解，称为**受迫响应**。

❖ 叠加法：零输入响应+零状态响应

◆ 零输入响应：输入激励为零，仅由初始条件决定。

◆ 零状态响应：初始状态为零，仅由输入激励决定。

零输入响应≠自然响应　　　**零状态响应≠受迫响应**

只有初始储能　　　*包含激励的影响*

经典解法 – 通解

❖求解齐次方程 $\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{d\ y}{dt}+a_0 y=0$

特征方程：$p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p\ +a_0=0$

特征根： $p_1, p_2, \cdots$

每一单实根p_i对应通解中1项： $Ce^{p_i t}$ 系数待定

每一k重实根p_i对应通解中k项：$e^{p_i t}\left(C_1+C_2 t+\ldots+C_k t^{k-1}\right)$

每一对复根 α ± j β 对应通解中2项：

$$e^{\alpha t}\left(C_1\cos\beta t+D_1\sin\beta t\right)$$

每一对k重复根 α ± j β 对应通解中2k项：

$$e^{\alpha t}\left[\left(C_1+C_2 t+\ldots C_k t^{k-1}\right)\cos\beta t+\left(D_1+D_2 t+\ldots D_k t^{k-1}\right)\sin\beta t\right]$$

经典解法－特解

❖与激励形式有关 $$\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{d\ y}{dt}+a_0 y=f(t)$$

若f(t)形如 $e^{\alpha t}P(t)$ α 为常数，$P(t)$ 为多项式。

若α不是特征根，特解形式为 $Q(t)e^{\alpha t}$

若α是特征单根，特解形式为 $tQ(t)e^{\alpha t}$

若α是k重特征根，特解形式为 $t^k Q(t)e^{\alpha t}$

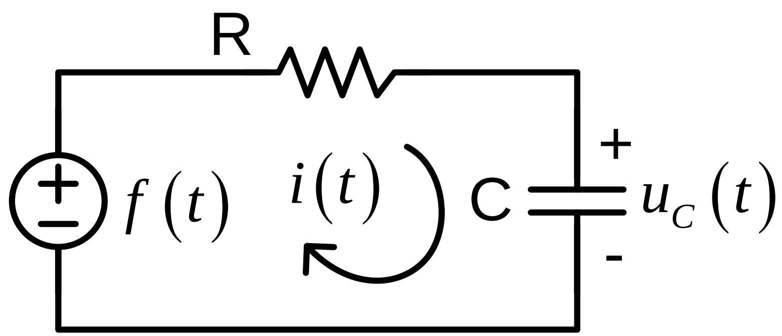
$Q(t)$ 为与$P(t)$同次的多项式，系数待定。

具体内容请参阅高等数学相关内容

时域求解举例

❖RC电路如图所示，已知R=1Ω, C=1F, $u_C(0)=1V$, $f(t)=1+e^{-3t}$, t>0, 求解$u_C(t)$。

电路方程： $i(t)=C\dfrac{du_C(t)}{dt}$



$$\boxed{\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=f(t)}$$

(1) 经典解法：

特征方程： $p+1=0$　　　特征根： $p_1=-1$

通解： $\boxed{C_1 e^{-t}}$

激励形式：$f(t)=e^{0t}+e^{-3t}$　　特解形式：$\boxed{b_0+b_1e^{-3t}}$

特解满足电路方程，代回电路方程确定待定系数：

$$\frac{d\left[b_0+b_1e^{-3t}\right]}{dt}+\left[b_0+b_1e^{-3t}\right]=1+e^{-3t}$$

即　$b_0-2b_1e^{-3t}=1+e^{-3t}$　$\Rightarrow\begin{cases}b_0=1\\ b_1=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

特解：

$$\boxed{1-\frac{1}{2}e^{-3t}}$$

全解形式：$\boxed{u_C(t)=C_1e^{-t}+1-\dfrac{1}{2}e^{-3t}\quad t>0}$

利用初始条件确定待定系数：

$$u_C(0)=C_1+1-\frac{1}{2}=1 \Rightarrow C_1=\frac{1}{2}$$

全解：

$$\boxed{u_C(t)=\underline{\frac{1}{2}e^{-t}}+\underline{1-\frac{1}{2}e^{-3t}} \quad t>0}$$

通解
自然响应
频率为特征根

特解
受迫响应
其它频率分量

(2) 叠加法：零输入响应+零状态响应

特征根：$p_1=-1$ 通解：Ce^{-t} 特解：$1-\frac{1}{2}e^{-3t}$

零输入响应：输入激励为零，把初始状态当作激励

形如：$\boxed{u_{zi}(t)=C_2e^{-t}}$

由初始状态 $u_C(0)=1$ 即 $u_{zi}(0)=1$ $\Rightarrow C_2=1$

$u_{zi}(t)=e^{-t} \quad t>0$

待定系数的确定

零输入响应：初始条件代入零输入响应。

自然响应（通解）：初始条件代入系统全解。

零状态响应：初始状态为零，只有输入激励作用

考虑 $$\boxed{u_{zs}(t)=\underline{C_3e^{-t}}+\underline{1-\frac{1}{2}e^{-3t}}}$$

用来消除初始条件的影响

特解

初始状态为零，即 $u_{zs}(0)=0 \Rightarrow C_3=-\frac{1}{2}$

$$\boxed{u_C(t)=\underline{e^{-t}}\underline{-\frac{1}{2}e^{-t}+1-\frac{1}{2}e^{-3t}} \quad t>0}$$

零输入响应　零状态响应

系统全响应为:

$$u_C(t)=\underline{e^{-t}}\underline{-\frac{1}{2}e^{-t}+1-\frac{1}{2}e^{-3t}}$$ 零输入响应+零状态响应

$$=\underline{\frac{1}{2}e^{-t}}+\underline{1-\frac{1}{2}e^{-3t}}$$ 自然响应(通解)+受迫响应(特解)

$$=\underline{1}+\underline{\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}}$$ 稳态响应+瞬态响应

稳态响应：响应中趋于稳定的部分

瞬态响应：当t→∞时，响应中趋于零的部分

叠加法求解推广

- ❖不仅可分解为零输入响应和零状态响应
- ❖复杂时间信号也可以分解为简单时间信号，分别对每个简单信号求响应。

全响应

零输入响应
由初始状态决定
多用求微分方程
通解的方法确定

$$\begin{cases} y_{zi1}(t) & 状态1 \\ y_{zi2}(t) & 状态2 \\ \vdots & \vdots \\ y_{zim}(t) & 状态m \end{cases}$$

零状态响应
由输入信号决定
多分解为脉冲分
量用卷积法确定

$$\begin{cases} y_{zs1}(t) & f_1(t) \\ y_{zs2}(t) & f_2(t) \\ \vdots & \vdots \\ y_{zsn}(t) & f_n(t) \end{cases}$$

叠加法求解举例

前例中 $e(t)=\left(1+e^{-3t}\right)U(t)$

分为两个激励信号：

$$f_1(t)=U(t) \text{ 和 } f_2(t)=e^{-3t}U(t)$$

分别求出两个零状态响应：

$$u_{zs1}(t)=\left(1-e^{-t}\right)U(t)$$

$$u_{zs2}(t)=\left(\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\right)U(t)$$

系统总的零状态响应：

$$u_{zs}(t)=u_{zs1}(t)+u_{zs2}(t)=\left(1-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\right)U(t)$$

信号分解 – 叠加积分

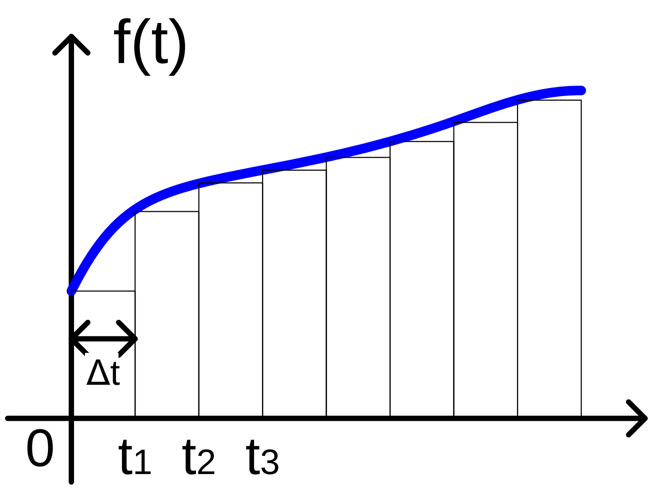
❖卷积积分

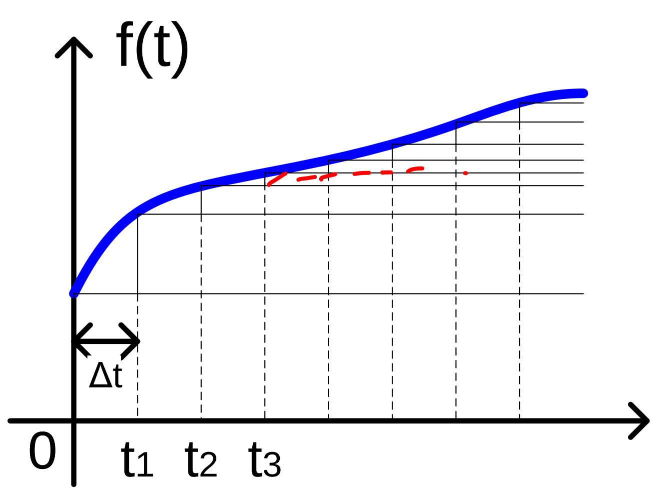
极限情况

- 信号分解为一系列的脉冲函数。 $\delta(t)$
- 系统对各脉冲函数响应的总和就是零状态响应。
- 脉冲宽度无限小时，求和演变为积分。

❖杜美阿尔积分

- 信号分解为一系列的阶梯形函数。 $U(t)$





0^-和0^+初始值

- 若输入信号f(t)在t=0时接入，$t=0^-$代表施加激励前一瞬间，$t=0^+$代表施加激励后一瞬间。
- 在$t=0^-$时刻的状态$y(0^-)$反映了系统的历史情况，与激励无关。
- 在$t=0^+$时刻的状态$y(0^+)$包含了因施加激励而产生的状态突变量。
- 当没有状态突变时， $y(0^-) = y(0^+)$ 。初始状态一般指$t=0^-$时刻的状态。
- **对零输入响应$y_{zi}(0^+)=y_{zi}(0^-)=y(0^-)$**
- **对零状态响应$y_{zs}(0^-)=0$。**

0^-和0^+初始值举例

❖描述某系统的微分方程如下，已知$y(0^-)=2$，$y'(0^-)=0$，$f(t)=U(t)$。求该系统的零输入响应和零状态响应。

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+6f(t)$$

(1) 零输入响应

$$y_{zi}''(t)+3y_{zi}'(t)+2y_{zi}(t)=0$$

特征根为p_1=-1，p_2=- 2

$$y_{zi}(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}\Rightarrow C_1+2C_2=0$$

$$y_{zi}(0^+)=y_{zi}(0^-)=y(0^-)=2\Rightarrow C_1+C_2=2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_1=4\\C_2=-2\end{cases}$$

$$\boxed{y_{zi}(t)=4e^{-t}-2e^{-2t}\quad t>0}$$

(2) 零状态响应 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2\delta(t)+6U(t)$

$$y_{zs}'(0^-)=y_{zs}(0^-)=0$$

由于y_{zs}(t)连续，$y_{zs}(0^+)=y_{zs}(0^-)=0$。

由于等式右端含有δ(t)，故y_{zs}''(t)含有δ(t)，所以y_{zs}'(t)跃变，即$y_{zs}'(0^+)\neq y_{zs}'(0^-)$。

等式两端0^-到0^+积分 $y_{zs}'(0^+)-y_{zs}'(0^-)=2\Rightarrow y_{zs}'(0^+)=2$

当t>0时 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=6$

齐次解：$C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$ 特解：3

$$y_{zs}(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+3$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{zs}(0^+)=0 \\ y_{zs}'(0^+)=2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} C_1=-4 \\ C_2=1 \end{cases}$$

$$\boxed{y_{zs}(t)=-4e^{-t}+e^{-2t}+3 \quad t\geq 0}$$

上一节复习

- LTI连续时间系统的输入输出方程 – 线性常系数微分方程
- 经典解法：通解+特解
- 叠加法：零输入响应+零状态响应
  - 零输入响应：由特征根得到响应的形式，再代入初始条件确定待定系数。
- 响应的分类
  - 零输入响应+零状态响应
  - 自然响应+受迫响应
  - 稳态响应+瞬态响应

系统方程的算子表示法

微分算子

❖微分算子 $p=\frac{d}{dt} \qquad p^n=\frac{d^n}{dt^n}$

❖积分算子 $\frac{1}{p}=\int_{-\infty}^{t}(\ \ )d\tau$

举例: $\frac{dx}{dt}=px \qquad \frac{d^n x}{dt^n}=p^n x \qquad \frac{1}{p}x=\int_{-\infty}^{t} x d\tau$

微分方程算子表示法:

$$\left(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p+a_0\right)y(t)$$
$$=\left(b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1 p+b_0\right)f(t)$$

微分算子的运算

❖和乘法运算规则相似。

❖p 代表一种运算过程，不是一个代数量

❖不能随便约去分子/分母,或等式两端的 p 算子。

例1：

$$\boxed{p\frac{1}{p}x \neq \frac{1}{p}px}$$

$$p\frac{1}{p}x = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} x d\tau = x$$

$$\frac{1}{p}px = \int_{-\infty}^{t}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=\tau} d\tau = x(t) - x(-\infty)$$

除非x(-∞)=0，否则 $p\frac{1}{p}x \neq \frac{1}{p}px$

例2： 若 $px = py$ 则 $x = y +$ 任意常数

转移/微分/传输算子

❖LTI系统的算子方程

$$\left(p^{n}+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_{1}p+a_{0}\right)y(\mathrm{t})$$

$$=\left(b_{m}p^{m}+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_{1}p+b_{0}\right)f(t)$$

将等式两边关于 p 的多项式记作 D(p) 和 N(p)

即 $D(p)y(\mathrm{t})=N(p)f(t)$ 或 $y(\mathrm{t})=\dfrac{N(p)}{D(p)}f(t)$

转移算子定义为：$\boxed{H(p)=\dfrac{N(p)}{D(p)}}$

系统的算子方程简写成：$y(\mathrm{t})=H(p)f(t)$

利用算子方程求解零输入响应

- 零输入响应：系统没有外加激励的情况下，由系统初始储能形成的系统输出响应，$y_{zi}(t)$。
- 即求解齐次算子方程 $D(p)y(t)=0$

  解法参考微分方程求通解

  (1) 令D(p)=0，求特征根 $p_1, p_2, \ldots, p_r$

  (2) 单实根 p_i 对应 $C_i e^{p_i t}$

  (3) k 重实根 p_j 对应 $\left(b_0+b_1 t+\ldots+b_{k-1} t^{k-1}\right) e^{p_j t}$

  (4) 根据初始条件确定待定系数。
- 特征方程 $\boxed{D(p)=0}$

特征方程练习1

已知系统方程 $(p-1)(p+1)(p-3)^3 y(t)=f(t)$

和y(0), y'(0), y''(0), $y^{(3)}(0)$, $y^{(4)}(0)$,求零输入响应。

$$D(p)=(p-1)(p+1)(p-3)^3=0$$

$p_1=1$ 对应 $C_1 e^t$

$p_2=-1$ 对应 $C_2 e^{-t}$

$p_3=3$ 对应 $\left(b_0+b_1 t+b_2 t^2\right)e^{3t}$

零输入响应：$y(t)=C_1 e^t+C_2 e^{-t}+\left(b_0+b_1 t+b_2 t^2\right)e^{3t}$

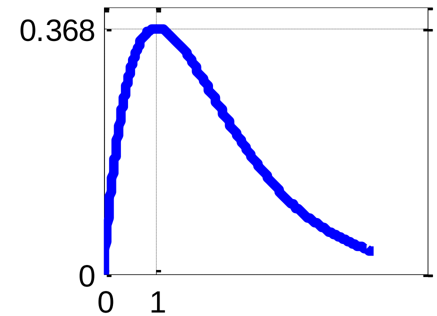
最后根据初始条件y(0), y'(0), y''(0), $y^{(3)}(0)$, $y^{(4)}(0)$ 确定待定系数。

特征方程练习2

已知特征方程 $D(p)=p^2+2p+1$

输入激励 f(t)=0, 输出电流 i(t)，初始条件

i(0)=0A, i’(0)=1A/s, 求零输入响应。



$$D(p)=(p+1)^2=0$$

二重实根 $p_{1,2}=-1$ 对应 $(b_0+b_1 t)e^{-t}$

$$i(t)=(b_0+b_1 t)e^{-t} \quad 及 \quad i'(t)=(-b_0+b_1-b_1 t)e^{-t}$$

由初始条件

$$\begin{aligned} i(0)&=b_0=0 \\ i'(0)&=-b_0+b_1=1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} b_0=0 \\ b_1=1 \end{cases}$$

零输入响应： $i(t)=te^{-t} \quad t\geq 0$

利用算子方程求解零状态响应

❖ 零状态响应 $y(\mathrm{t})=H(p)f(t)$

◆ 利用部分分式法求解冲激响应

$$h(\mathrm{t})=H(p)\delta(t) \quad H(p)\leftrightarrow h(t)$$

◆ 利用卷积求零状态响应

$$f(t)=f(t)*\delta(t) \quad y(\mathrm{t})=f(t)*h(t)$$

冲激响应和阶跃响应

- 冲激响应
- 阶跃响应

冲激响应

❖输入激励 f(t)=δ(t)时所引起的零状态响应称为单位冲激响应，简称冲激响应，记为 h(t)。

$$\left(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0\right)h(\mathrm{t})$$

$$= \left(b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0\right)\delta(t)$$

$$h(\mathrm{t}) = \frac{N(p)}{D(p)}\delta(t) = H(p)\delta(t)$$

$$= \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}\delta(t)$$

以一阶系统为例

$$h(\mathrm{t})=\frac{C}{p-p_1}\delta(t)\quad\Rightarrow h(\mathrm{t})=Ce^{p_1t}U(t)$$

推导过程 $\dfrac{dh(\mathrm{t})}{dt}-p_1h(\mathrm{t})=C\delta(t)$

两边乘以 e^{-p_1t}

$$\frac{dh(\mathrm{t})}{dt}e^{-p_1t}-p_1h(\mathrm{t})e^{-p_1t}=C\delta(t)e^{-p_1t}$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-p_1t}h(\mathrm{t})\right]=C\delta(t)e^{-p_1t}$$

$$e^{-p_1t}h(\mathrm{t})=\int_0^t Ce^{-p_1\tau}\delta(\tau)d\tau=CU(t)$$

由转移算子求冲激响应

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1 p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p+a_0}$$

原则：将H(p)分解成简单的分式，对每个分式求冲激响应，最后利用叠加原理，求所有冲激响应的和，即为系统的冲激响应。

部分分式法

$$H(p)=H_1(p)+H_2(p)+\ldots+H_l(p)$$

$$h(t)=h_1(t)+h_2(t)+\ldots+h_l(t)$$

转移算子对应的冲激响应

单根： $H_i(p)=\dfrac{C_i}{p-p_i}$ $h_i(t)=C_i e^{p_i t}U(t)$

k重根： $H_j(p)=\dfrac{C_{jk}}{(p-p_j)^k}$ $h_j(t)=\dfrac{C_{jk}}{(k-1)!}t^{k-1}e^{p_j t}U(t)$

常数项： 当n=m时H(p)可化为常数项和真分式之和。

$H_l(p)=b_m$ $h_l(t)=b_m\delta(t)$

多项式项：当n<m时H(p)可化为多项式和真分式之和。

$$H_k(p)=k_1+k_2p+\ldots$$

$$h_k(t)=k_1\delta(t)+k_2\delta'(t)+\ldots$$

冲激响应练习1

❖求下列微分方程表示的系统的冲激响应。

$$(1)\ \frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=f(t)$$

$$(2)\ \frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=f(t)$$

$$(1)\quad H(p)=\frac{1}{p+2} \qquad h(t)=e^{-2t}U(t)$$

$$(2)\quad H(p)=\frac{1}{p^2+3p+2}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2}$$

$$h(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)U(t)$$

冲激响应练习2

❖求下列微分方程表示的系统的冲激响应。

(1) $$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=f(t)$$

$$H(p)=\frac{1}{p^2+4p+4}=\frac{1}{(p+2)^2} \quad h(t)=te^{-2t}U(t)$$

(2) $$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=\frac{df(t)}{dt}+3f(t)$$

$$H(p)=\frac{p+3}{p^2+4p+4}=\frac{1}{p+2}+\frac{1}{(p+2)^2}$$

$$h(t)=(1+t)e^{-2t}U(t)$$

冲激响应练习2

(3) $H(p)=\dfrac{2p^2+9p+11}{p^2+4p+4}$

多项式除法

$$\begin{array}{r} 2 \\ p^2+4p+4\overline{\big)\,2p^2+9p+11} \\ \underline{2p^2+8p+8} \\ p+3 \end{array}$$

$$H(p)=\frac{2p^2+9p+11}{p^2+4p+4}$$

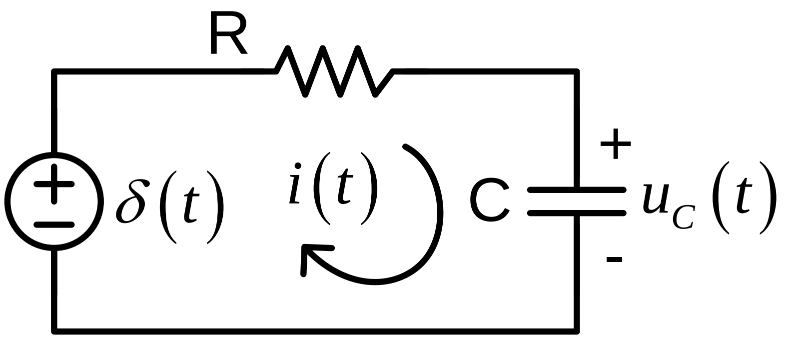
$$=2+\frac{p+3}{p^2+4p+4}$$

$$=2+\frac{1}{p+2}+\frac{1}{(p+2)^2}$$

$$h(t)=2\delta(t)+(1+t)e^{-2t}U(t)$$

冲激响应练习3

❖RC串联电路如图所示，电路初始状态为零，求电路冲激响应$u_C(t)$。



复习R,L,C的电压电流关系

❖电容

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i_C(\tau)d\tau=\frac{1}{Cp}i_C(t)=u_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_{0^+}^{t}i_C(\tau)d\tau$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}=Cpu_C(t)$$

❖电感

$$u_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}=Lpi_L(t)$$

$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u_L(\tau)d\tau=\frac{1}{Lp}u_L(t)=i_L(0^-)+\frac{1}{L}\int_{0^+}^{t}u_L(\tau)d\tau$$

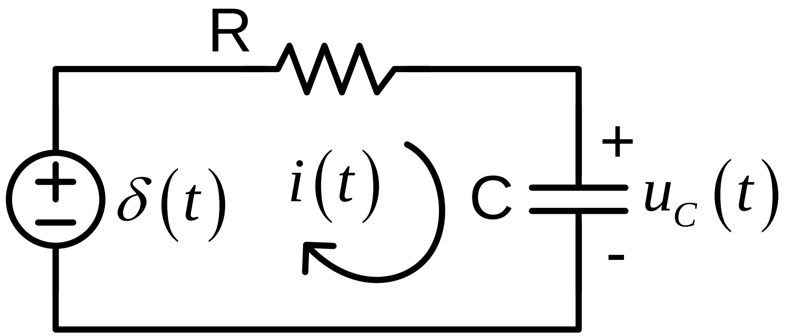
❖电阻

$$u_R(t)=Ri_R(t)$$

$$i_R(t)=\frac{u_R(t)}{R}$$

冲激响应练习3

❖RC串联电路如图所示，电路初始状态为零，求电路冲激响应$u_C(t)$。



回路电压方程：

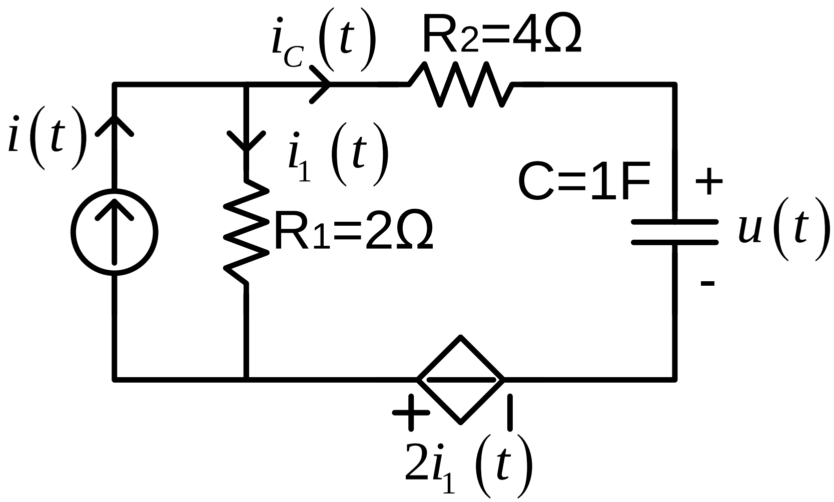
$$u_R(t)+u_C(t)=RC\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=\delta(t)$$

$$(RCp+1)u_C(t)=\delta(t)$$

$$H(p)=\frac{\frac{1}{RC}}{p+\frac{1}{RC}} \qquad h(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}U(t)$$

冲激响应练习4

❖电路如图所示，输入激励为i(t)，求电路阶跃响应u(t)。



$$i_C = \frac{du}{dt} = pu$$

$$i_1 = i - pu$$

$$R_1 i_1 = R_2 i_C + u - 2i_1$$

$$2(i - pu) = 4pu + u - 2(i - pu)$$

$$H(p) = \frac{u}{i} = \frac{\frac{1}{2}}{p + \frac{1}{8}}$$

$$h(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{8}t} U(t)$$

阶跃响应

- $\delta(t)$ 与$U(t)$ 为微积分关系

$$U(t)=\int_{0^-}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad \delta(t)=\frac{dU(t)}{dt}$$

- 阶跃响应和冲激响应也为微积分关系

$$g(t)=\int_{0^-}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad h(t)=\frac{dg(t)}{dt}$$

对冲激响应练习4求阶跃响应

由 $h(t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{8}t}U(t)$

$$g(t)=\int_{0^-}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$g(t)=\int_{0^-}^{t}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{8}\tau}U(\tau)d\tau$$

$$=-4\int_{0^-}^{t}\left(e^{-\frac{1}{8}\tau}\right)'U(\tau)d\tau$$

$$=-4\left[e^{-\frac{1}{8}\tau}U(\tau)\Big|_{0^-}^{t}-\int_{0^-}^{t}e^{-\frac{1}{8}\tau}\delta(\tau)d\tau\right]$$

$$==-4\left[e^{-\frac{1}{8}t}U(t)-1\right]=4-4e^{-\frac{1}{8}t}U(t)$$

上一节复习

❖引入微分算子后如何由系统方程求

- 转移算子

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}$$

- 零输入响应

$$D(p)y_{zi}(t)=0$$

- 冲激响应

$$h(t)=H(p)\delta(t) \qquad h(t)\leftrightarrow H(p)$$

- 阶跃响应
- 零状态响应

$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)$$

待定系数的确定

❖以特征根全部是单根为例

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$$

$$=\sum C_i e^{p_i t}+f(t)*\underbrace{\sum k_i e^{p_i t}}_{h(t)}$$

C_i 由初始条件确定

k_i 由部分分式法确定

卷积积分

- 利用冲激响应求零状态响应
- 卷积的定义
- 图解法求卷积
- 卷积的性质

任意信号作用下的零状态响应

❖信号分解为冲激函数

根据h(t)的定义：$\delta(t) \to h(t)$

由时不变性：$\delta(t-\tau) \to h(t-\tau)$

由齐次性：$f(\tau)\delta(t-\tau) \to f(\tau)h(t-\tau)$

由叠加性：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$f(t) = f(t) * \delta(t) \qquad\qquad y(t) = f(t) * h(t)$$

卷积的定义

- 一种数学运算，用符号*表示，在区间(– ∞, +∞)上定义为

$$r(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

$$=f_2(t)*f_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau$$

- 若$f_1(t)$和$f_2(t)$均为有始信号，则积分区间为(0,t)
- 利用叠加原理，LTI系统的零状态响应可利用冲激响应和卷积来求解。

激励：$f(t)=f(t)*\delta(t)$ 零状态响应：$y(t)=f(t)*h(t)$

卷积积分练习

$$f_1(t)=e^t \quad -\infty<t<+\infty \qquad f_2(t)=\left(6e^{-2t}-1\right)U(t)$$

$$r(t)=f_1(t)*f_2(t)=?$$

$$r(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau}\left(6e^{-2(t-\tau)}-1\right)U(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{t} e^{\tau}\left(6e^{-2(t-\tau)}-1\right)\overset{=1}{\boxed{U(t-\tau)}}d\tau$$

$$+\int_{t}^{+\infty} e^{\tau}\left(6e^{-2(t-\tau)}-1\right)\overset{=0}{\boxed{U(t-\tau)}}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{t}\left(6e^{-2t}e^{3\tau}-e^{\tau}\right)d\tau=2e^{-2t}e^{3t}-e^{t}=e^{t}$$

常用函数的卷积

❖表2-2 卷积表 pp.59

$$f(t)*\delta(t)=f(t)$$

$$f(t)*U(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$$

$$U(t)*U(t)=tU(t)$$

若$p_1=0$或$p_2=0$

$$e^{\lambda t}U(t)*U(t)$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{\lambda t}\right)U(t)$$

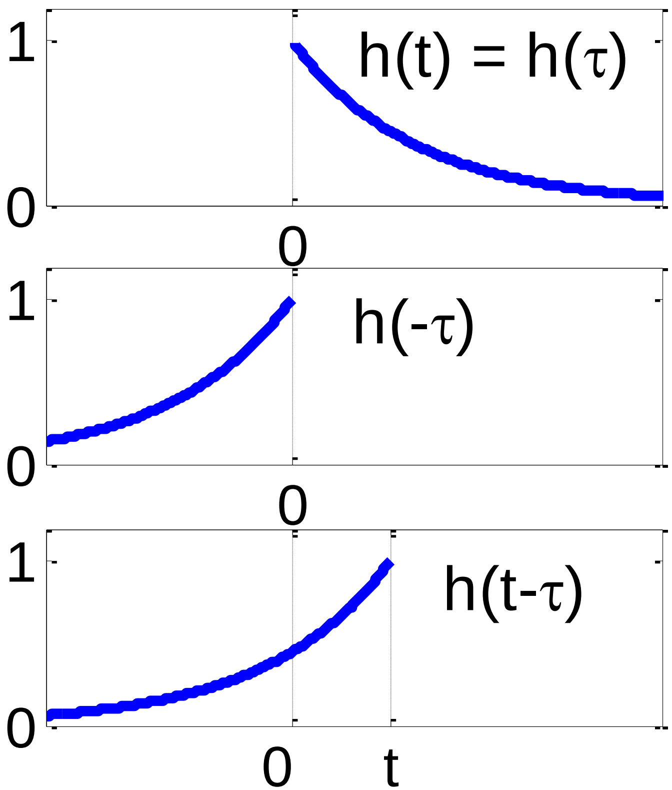
$$e^{p_1 t}U(t)*e^{p_2 t}U(t)=\begin{cases}\boxed{\dfrac{1}{p_2-p_1}\left(e^{p_2 t}-e^{p_1 t}\right)U(t) \qquad p_1\neq p_2} \\ te^{\lambda t}U(t) \qquad p_1=p_2=\lambda\end{cases}$$

卷积的图解法

$$y(t)=e(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

❖四步：反褶，平移，乘积，求面积

- 反褶和平移是为了从 h(t) 得到 h(t- τ)



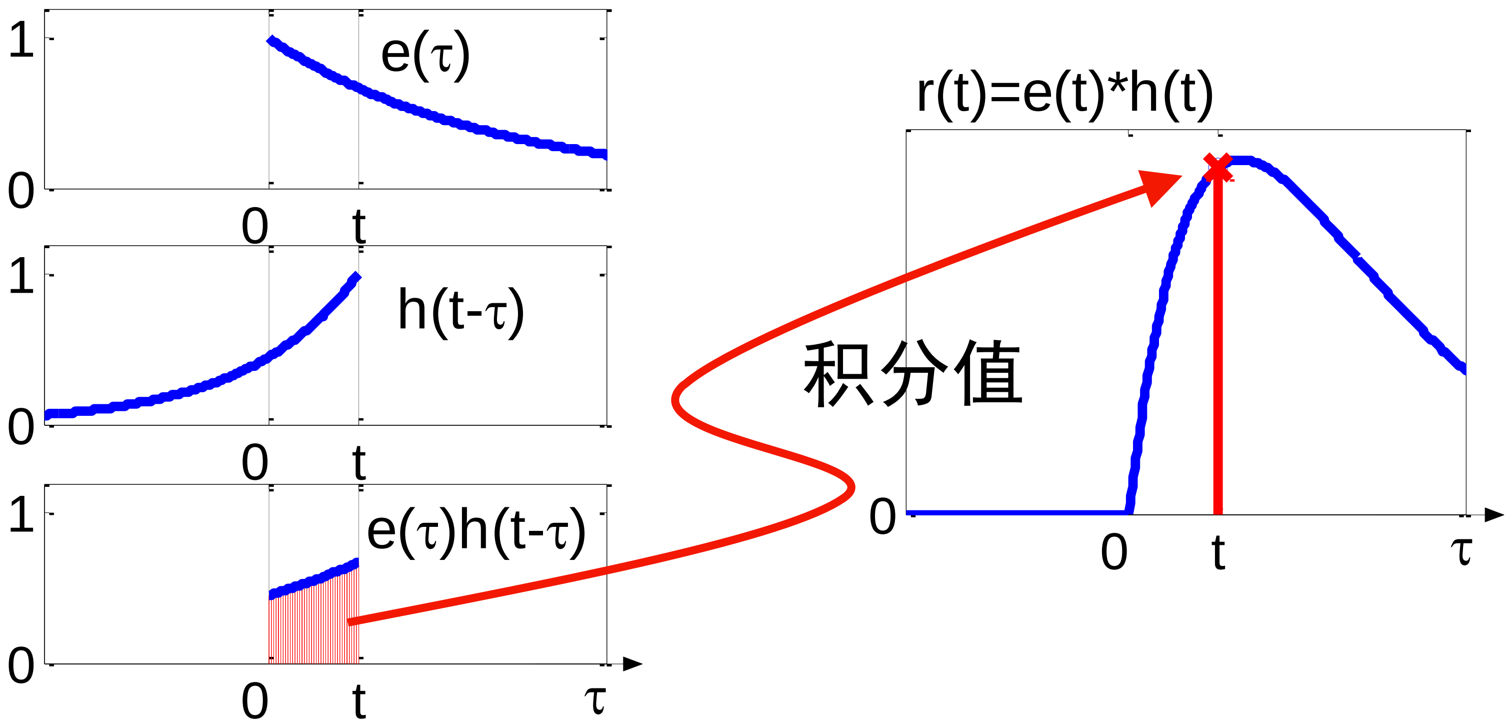
本例中e(t), h(t)均为有始函数

- 计算卷积

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

若t<0，乘积为零，y(t)=0

若t>0，乘积仅在(0,t)区间内不为零，求积分，即求(0,t)内的乘积曲线下的面积。



- 求卷积积分确定积分的上下限是关键。
- 图解法一般比较繁琐，但若只求某一时刻卷积值时还是比较方便的。
- 利用卷积的性质及卷积表可以简化卷积运算。

卷积积分的性质

- 卷积的代数运算
- 卷积的微积分特性
- 卷积的延时特性
- 奇异函数的卷积特性

代数运算

- 具有和乘法运算类似的性质

- 交换律 $u(t)*v(t)=v(t)*u(t)$

- 分配律 $u(t)*\left[v(t)+w(t)\right]=u(t)*v(t)+u(t)*w(t)$

- 结合律 $u(t)*\left[v(t)*w(t)\right]=\left[u(t)*v(t)\right]*w(t)$

微积分特性

❖微分特性

$$\frac{d}{dt}\left[u(t)*v(t)\right]=\frac{du(t)}{dt}*v(t)=u(t)*\frac{dv(t)}{dt}$$

❖积分特性

$$\int_{-\infty}^{t}u(\tau)*v(\tau)d\tau=u(t)*\int_{-\infty}^{t}v(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau*v(t)$$

❖推论

$$u(t)*v(t)=\frac{du(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}v(\tau)d\tau$$

单位冲激响应　　　　单位阶跃响应

$$y(t)=f(t)\boxed{*h(t)}=\frac{df(t)}{dt}\boxed{*g(t)}$$

证明微分特性

$$\frac{d}{dt}\left[u(t)*v(t)\right]=\frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)v(t-\tau)d\tau\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)\frac{dv(t-\tau)}{dt}d\tau \qquad d(t-\tau)=dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)\frac{dv(t-\tau)}{d(t-\tau)}d\tau$$

$$=u(t)*\frac{dv(t)}{dt}$$

延时特性

若 $r(t)=u(t)*v(t)$

则 $r(t-t_1-t_2)=u(t-t_1)*v(t-t_2)$

证明：

$$u(t-t_1)*v(t-t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau-t_1)v(t-\tau-t_2)d\tau$$

$$\boxed{\begin{aligned}x&=\tau-t_1\\dx&=d\tau\end{aligned}}$$

积分限不变

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x)v(t-t_1-t_2-x)dx$$

$$=r(t-t_1-t_2)$$

奇异函数卷积

$$f(t)*\delta(t)=\delta(t)*f(t)=f(t)$$

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

$$f(t)*\delta'(t)=f'(t)$$

$$f(t)*\delta^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)$$

$$f(t)*U(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)U(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$U(t)*U(t)=tU(t)$$

卷积与相关

❖两个实时间函数x(t)和y(t)的相关函数可以用卷积定义如下：

- x(t)与y(t)的互相关函数

$$R_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)y(\tau-t)d\tau=x(t)*y(-t)$$

- y(t)与x(t)的互相关函数

$$R_{yx}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}y(\tau)x(\tau-t)d\tau=x(-t)*y(t)=R_{xy}(-t)$$

- x(t)的自相关函数

$$R_{xx}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)x(\tau-t)d\tau=x(t)*x(-t)=R_{xx}(-t)$$

卷积积分练习1

❖利用卷积性质求下列卷积

(1) $\delta(t-1)*\left[U(t)-U(t-3)\right]=U(t-1)-U(t-4)$

冲激函数卷积 $f(t)*\delta(t)=f(t)$

延时特性 $r(t-t_1-t_2)=u(t-t_1)*v(t-t_2)$

(2) $U(t)*U(t-1)=(t-1)U(t-1)$

阶跃函数卷积 $U(t)*U(t)=tU(t)$

延时特性 $r(t-t_1-t_2)=u(t-t_1)*v(t-t_2)$

卷积积分练习1

❖利用卷积性质求下列卷积

(3)$\left[U(t-1)-U(t-3)\right]*\left[U(t)-U(t-2)\right]$

方法一：

分配律

阶跃函数卷积 $U(t)*U(t)=tU(t)$

延时特性

$$=U(t-1)*U(t)-U(t-1)*U(t-2)-U(t-3)*U(t)+U(t-3)*U(t-2)$$

$$=(t-1)U(t-1)-(t-3)U(t-3)-(t-3)U(t-3)+(t-5)U(t-5)$$

$$=(t-1)U(t-1)-2(t-3)U(t-3)+(t-5)U(t-5)$$

卷积积分练习1

(3) $\left[U(t-1)-U(t-3)\right]*\left[U(t)-U(t-2)\right]$

方法二：

分配律

微积分特性

冲激函数卷积

延时特性

$$u(t)*v(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau*\frac{dv(t)}{dt}$$

$$f(t)*\delta(t)=f(t)$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{t}U(\tau-1)d\tau-\int_{-\infty}^{t}U(\tau-3)d\tau\right]*\left[\delta(t)-\delta(t-2)\right]$$

$$=\left[(t-1)U(t-1)-(t-3)U(t-3)\right]*\left[\delta(t)-\delta(t-2)\right]$$

$$=(t-1)U(t-1)-2(t-3)U(t-3)+(t-5)U(t-5)$$

卷积积分练习1

❖利用卷积性质求下列卷积

$$(4)\left[U(t-1)-U(t-3)\right]*\left[e^{-t}U(t)\right]$$

方法一：

分配律

卷积表 $U(t)*e^{\lambda t}U(t)=-\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{\lambda t}\right)U(t)$

延时特性

$$=U(t-1)*e^{-t}U(t)-U(t-3)*e^{-t}U(t)$$

$$=\left(1-e^{-(t-1)}\right)U(t-1)-\left(1-e^{-(t-3)}\right)U(t-3)$$

卷积积分练习1

(4) $\left[U(t-1)-U(t-3)\right]*\left[e^{-t}U(t)\right]$

方法二：

微积分特性 $u(t)*v(t)=\dfrac{du(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}v(\tau)d\tau$

冲激函数卷积 $f(t)*\delta(t)=f(t)$

延时特性

$$=\frac{d\left[U(t-1)-U(t-3)\right]}{dt}*\int_{-\infty}^{t}e^{-\tau}U(\tau)d\tau$$

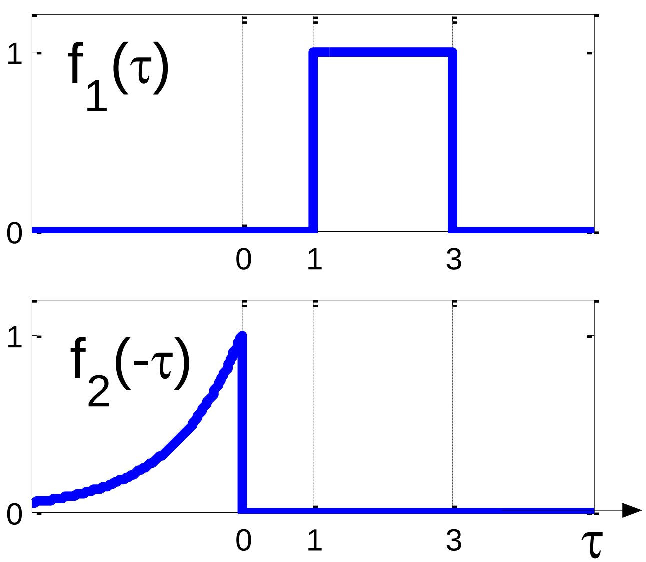
$$=\left[\delta(t-1)-\delta(t-3)\right]*\left(1-e^{-t}\right)U(t)$$

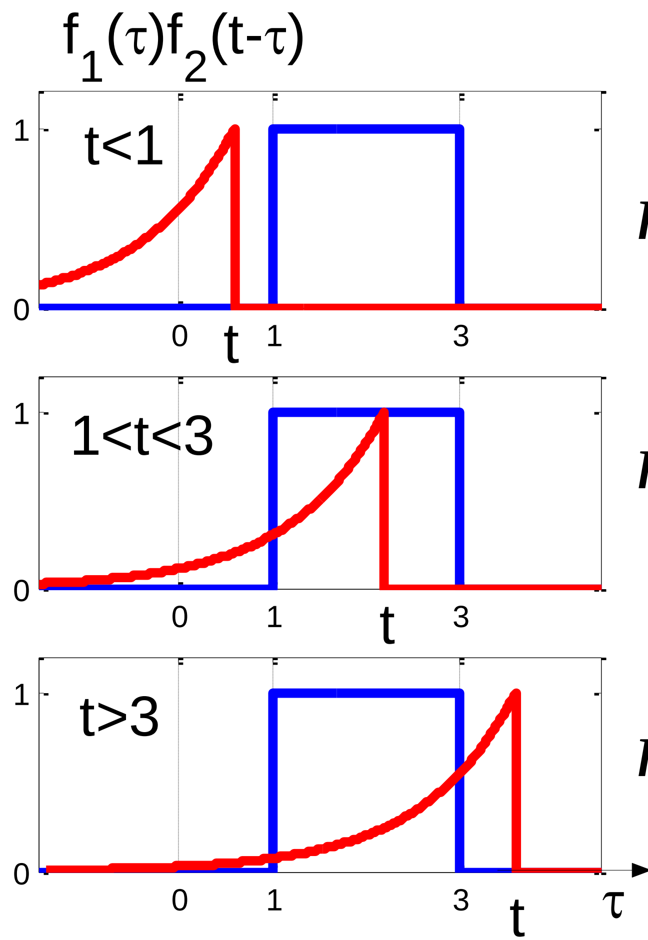
$$=\left(1-e^{-(t-1)}\right)U(t-1)-\left(1-e^{-(t-3)}\right)U(t-3)$$

卷积积分练习1

$$(4)\left[U(t-1)-U(t-3)\right]*\left[e^{-t}U(t)\right]$$

方法三：图解法，注意积分区间的变化 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$





$$r(t)=0$$

$$r(t)=\int_1^t e^{-(t-\tau)}d\tau$$

$$r(t)=\int_1^3 e^{-(t-\tau)}d\tau$$

反褶，平移，
乘积，求面积

卷积积分练习1

$$r(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ \int_{1}^{t} e^{-(t-\tau)}d\tau & 1<t<3\\ \int_{1}^{3} e^{-(t-\tau)}d\tau & t>3\end{cases}$$

即

$$r(t)=\int_{1}^{t} e^{-(t-\tau)}d\tau\left[U(t-1)-U(t-3)\right]$$

$$+\int_{1}^{3} e^{-(t-\tau)}d\tau\left[U(t-3)\right]$$

$$=\left(1-e^{-(t-1)}\right)\left[U(t-1)-U(t-3)\right]+\left(e^{-(t-3)}-e^{-(t-1)}\right)U(t-3)$$

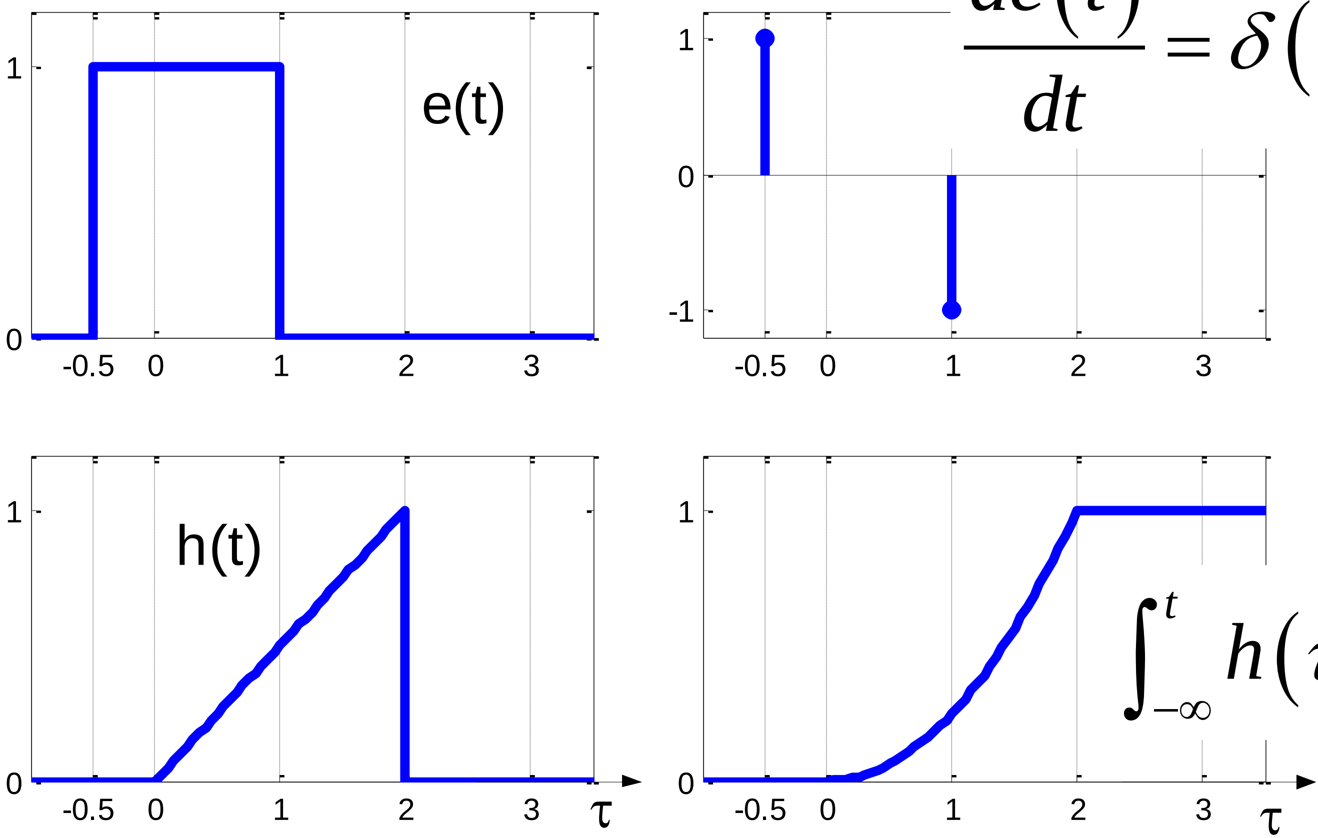
$$=\left(1-e^{-(t-1)}\right)U(t-1)-\left(1-e^{-(t-3)}\right)U(t-3)$$

卷积积分练习2

❖如图所示两信号卷积

$$e(t)*h(t)=\frac{de(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

$$\frac{de(t)}{dt}=\delta(t+0.5)-\delta(t-1)$$

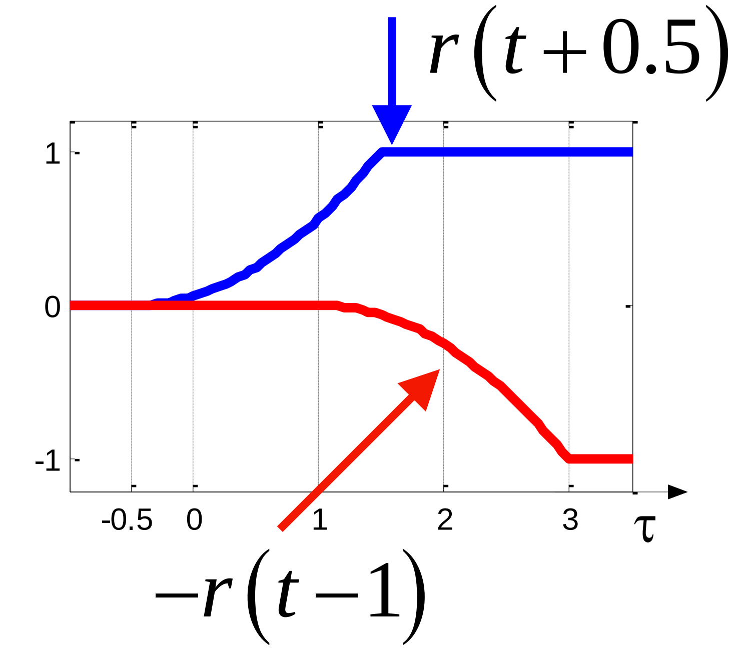


$$\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

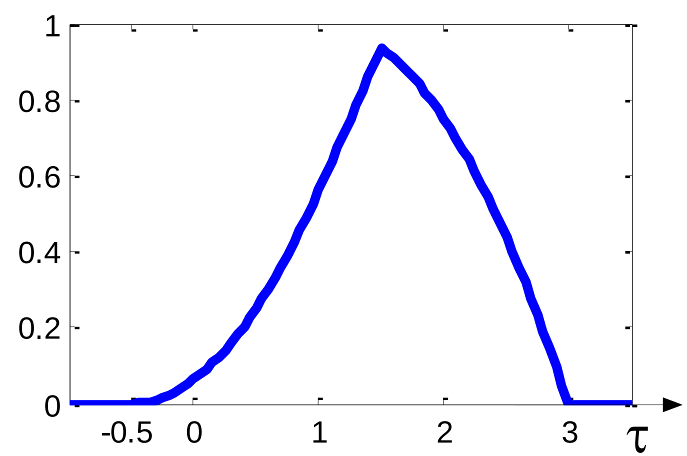
卷积积分练习2

$$\frac{de(t)}{dt}=\delta(t+0.5)-\delta(t-1)$$

令 $r(t)=\delta(t)*\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$



$$s(t)=g(t+0.5)-g(t-1)$$



系统零状态响应练习1

❖已知某LTI系统的冲激响应为h(t)=e^{-t}U(t)，求激励为f(t)=t U(t)时的零状态响应。

$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=e^{-t}U(t)*tU(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{t}e^{-\tau}U(\tau)d\tau*\frac{d\left[tU(t)\right]}{dt}$$

$$=\int_{0}^{t}e^{-\tau}d\tau*U(t)$$

$$=\left[1-e^{-t}\right]U(t)*U(t)$$

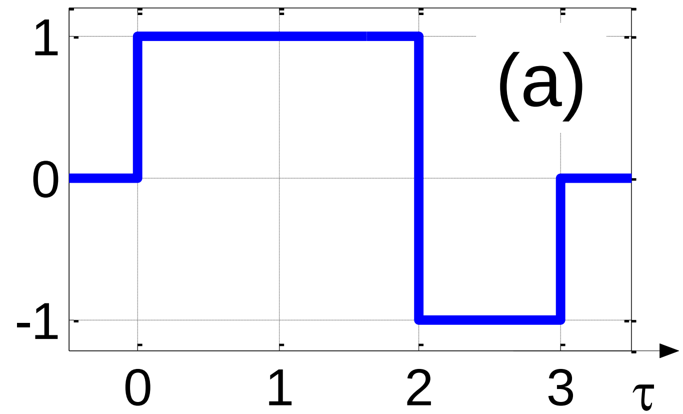
$$=tU(t)-\left[1-e^{-t}\right]U(t)=\left[e^{-t}+t-1\right]U(t)$$

系统零状态响应练习2

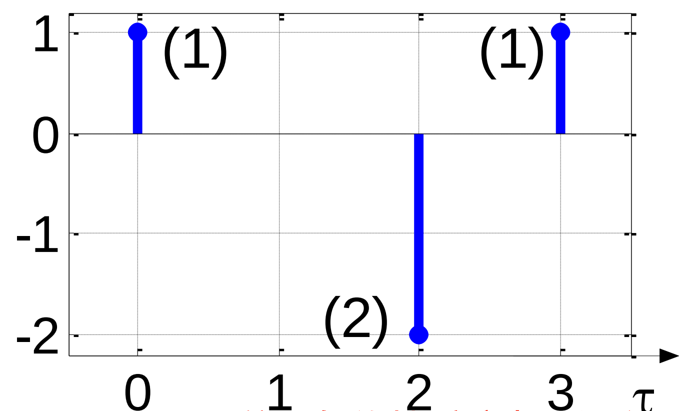
❖已知系统单位阶跃响应g(t)，求下列输入信号引起的系统零状态响应。

$$g(t)=\left(2e^{-2t}-1\right)U(t)$$

提示：$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=f(t)*\dfrac{dg(t)}{dt}$



$$\frac{dg(t)}{dt}=\delta(t)-2\delta(t-2)+\delta(t-3)$$



$$y_{zs}(t)=\left(2e^{-2t}-1\right)U(t)$$
$$-2\left(2e^{-2(t-2)}-1\right)U(t-2)$$
$$+\left(2e^{-2(t-3)}-1\right)U(t-3)$$

系统零状态响应练习2

❖已知系统单位阶跃响应g(t)，求下列输入信号引起的系统零状态响应。$g(t)=\left(2e^{-2t}-1\right)U(t)$

(b) $f(t)=tU(t)$

提示： $y_{zs}(t)=\dfrac{df(t)}{dt}*g(t)$

$$\frac{df(t)}{dt}=U(t)$$

$$U(t)*e^{\lambda t}U(t)=-\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{\lambda t}\right)U(t)$$

$$y_{zs}(t)=U(t)*\left(2e^{-2t}-1\right)U(t)$$

$$=\left(1-e^{-2t}\right)U(t)-tU(t)$$

系统全响应练习1

❖已知系统微分方程，激励信号，和初始状态，求单位冲激响应，零状态响应，零输入响应。

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{df(t)}{dt}+3f(t)$$

$$f(t)=e^{-3t}U(t)$$

$$y(0)=1$$

$$y^{'}(0)=2$$

系统全响应练习1

(1) 单位冲激响应 h(t)

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{p+3}{p^2+3p+2}$$

部分分式法：

令 $D(p)=0$ 特征根：$p_1=-1$ $p_2=-2$ 均为单根

$$H(p)=\frac{k_1}{p+1}+\frac{k_2}{p+2}=\frac{(k_1+k_2)p+(2k_1+k_2)}{p^2+3p+2}$$

$$H(p)=\frac{p+3}{p^2+3p+2}=\frac{2}{p+1}+\frac{-1}{p+2}$$

$$\begin{cases} k_1+k_2=1 \\ 2k_1+k_2=3 \end{cases}$$

$$h(t)=\left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)U(t)$$

系统全响应练习1

(2) 零状态响应 $y_{zs}(t)$

$$h(t)=\left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)U(t)$$

$$f(t)=e^{-3t}U(t)$$

$$\begin{aligned}
y_{zs}(t)&=f(t)*h(t)\\
&=e^{-3t}U(t)*\left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)U(t)\\
&=e^{-3t}U(t)*2e^{-t}U(t)-e^{-3t}U(t)*e^{-2t}U(t)\\
&=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)U(t)
\end{aligned}$$

卷积表: $e^{p_1 t}U(t)*e^{p_2 t}U(t)=\dfrac{1}{p_2-p_1}\left(e^{p_2 t}-e^{p_1 t}\right)U(t)$

系统全响应练习1

(3) 零输入响应 $r_{zi}(t)$

$$D(p)=p^2+3p+2 \quad 特征根 \quad p_1=-1 \quad p_2=-2$$

$$y_{zi}(t)=\left[C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}\right]U(t)$$

代入初始条件： $y(0)=1 \quad y'(0)=2$

$$\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ -C_1-2C_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=4 \\ C_2=-3 \end{cases}$$

$$y_{zi}(t)=\left[4e^{-t}-3e^{-2t}\right]U(t)$$

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\left[5e^{-t}-4e^{-2t}\right]U(t)$$

章节小结

- 微分算子的引入
  - 连续系统算子方程 $D(p)y(t)=N(p)f(t)$
  - 转移算子 $H(p)=\dfrac{N(p)}{D(p)}$
- 零输入响应
  - 求解齐次方程 $D(p)y_{zi}(t)=0$
- 单位冲激响应
  - 部分分式法 $h(t)=H(p)\delta(t)$
- 零状态响应 $y_{zs}(t)=f(t)*h(t)$
- 卷积及其性质
  - 常用卷积

连续系统的频域分析

连续系统的频域分析

- 谐振电路，滤波电路等电路的设计都与频率有关，相应的需要从频域角度来分析问题。
- 由时域分析进入频域分析，独立变量由时间变成频率。
- 时域分析以冲激函数为基本信号，输入信号分解为**冲激函数**；频域分析以三角函数和指数函数为基本信号，输入信号分解为不同频率的**三角函数**和**指数函数**。

内容提要

- 信号分解为正交函数 – 三角函数和指数函数
- Fourier级数 – 三角和指数Fourier级数
- 周期信号的频谱
- 非周期信号的频谱 – Fourier变换
- 周期信号的Fourier变换
- Fourier变换的性质
- 信号的能谱和功率谱
- LTI系统的频域分析法
- 理想低通滤波器
- 无失真传输的条件
- 抽样信号与抽样定理

重点与难点

- ❖周期信号的频谱
- ❖非周期信号的频谱
- ❖Fourier变换及性质
- ❖LTI系统的频域分析法

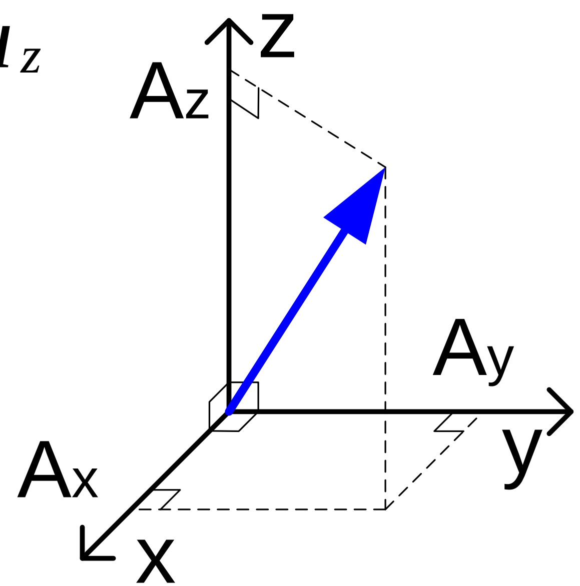
信号分解为正交函数

- 正交分解的概念
- 正交函数集－三角函数集和指数函数集
- 信号的正交分解

信号正交分解的概念

- ❖类似于三维空间的矢量在x,y,z轴上进行分解。
- ❖x,y,z轴相互垂直，即三维正交空间，互相投影为零。

$$\vec{A} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z$$



- ❖推广至n维正交空间

$$\vec{A} = A_1 \vec{u}_1 + A_2 \vec{u}_2 + \ldots + A_n \vec{u}_n$$

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \left|\vec{u}_i\right| \left|\vec{u}_j\right| \cos\theta = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

正交函数集

❖两函数正交：若定义在区间(t_1,t_2)内的两个函数满足

$$\int_{t_1}^{t_2} g_1(t)\, g_2^*(t)\, dt = 0$$

则称两函数在区间(t_1,t_2)内正交

❖正交函数集：由一组函数构成的函数集，这些函数在区间(t_1,t_2)内满足

- 一函数和自己相乘求积分为常数
- 任意两个不同函数相乘求积分为零

则称这一组函数为区间(t_1,t_2)的正交函数集。

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t)\, g_j^*(t)\, dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i \neq 0, & i = j \end{cases}$$

完备正交函数集

❖完备正交函数集：在正交函数集之外不存在函数满足正交条件。- 无穷多项

◆ 典型完备正交函数集：三角函数集和指数函数集。

三角函数集 $1, \cos n\Omega t, \sin n\Omega t$ 　　指数函数集 $e^{jn\Omega t}$

$n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$ 　　$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty$

◆ 可用于表示任一信号，且均方误差趋于零。

$$f(t) = C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \ldots + C_n g_n(t) + \boxed{\varepsilon_\Delta(t)}$$

误差项

n→∞, 误差趋于零

函数 f(t) 可精确分解为无穷多项正交函数之和。

三角Fourier级数

- 三角正交函数集
- Fourier级数的三角形式
- 函数奇偶特性与谐波特性

三角函数集

❖在区间(t_1,t_1+T)内，1，正弦和余弦函数构成正交函数集 $1,\cos n\Omega t,\sin n\Omega t, n=1,2,3,\ldots \Omega=\frac{2\pi}{T};T=\frac{2\pi}{\Omega}$

$$
\begin{cases}
\int_{t_1}^{t_1+T}\cos^2 n\Omega t dt=\int_{t_1}^{t_1+T}\sin^2 n\Omega t dt=\frac{T}{2} \\
\int_{t_1}^{t_1+T}\cos m\Omega t\cos n\Omega t dt=\int_{t_1}^{t_1+T}\sin m\Omega t\sin n\Omega t dt=0, m\neq n \\
\int_{t_1}^{t_1+T}\sin m\Omega t\cos n\Omega t dt=0,\mathrm{m,n}\text{任意}
\end{cases}
$$

❖m,n为正整数。

❖当n→∞时，趋于完备正交函数集。

狄利克雷(Dirichlet)条件

- f(t)在一周期内绝对可积。$\int_{t_1}^{t_1+T}\left|f(t)\right|dt<\infty$
- 在一周期内，函数的极限值数目有限。
- 在一周期内，如果有间断点存在，则间断点个数有限。

周期信号一般都能满足Dirichlet条件

三角Fourier级数

❖当满足Dirichlet条件时，周期为T的周期信号f(t)可以在区间(t_1,t_1+T)内表示为三角Fourier级数：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}$$

$$\Omega=\frac{2\pi}{T}$$ 基波频率

$$+a_1\cos\Omega t+a_2\cos 2\Omega t+\ldots+a_n\cos n\Omega t+\ldots$$

$$+b_1\sin\Omega t+b_2\sin 2\Omega t+\ldots+b_n\sin n\Omega t+\ldots$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t\right)$$

$\frac{a_0}{2}$ 直流分量　　$a_1\cos\Omega t+b_1\sin\Omega t$ 基波分量

$a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t$　n>1, n次谐波分量

三角Fourier级数

❖各分量系数（见教材定理3–1，加权系数确定）

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)dt$$

通常取积分限为(0,T)或(-T/2,T/2)

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)\cos n\Omega t dt$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)\sin n\Omega t dt$$

$$n=1,2,3,\ldots$$

直流分量 $\overline{f(t)}=\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)dt=\frac{a_0}{2}$

误差函数

❖实际应用中，只能取有限项来进行分析。

❖有限项Fourier级数

$$S_N(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t\right)$$

❖误差函数

$$\varepsilon_N(t)=f(t)-S_N(t)$$

❖均方误差（常用于判定系统性能指标，MSE）

$$E_N=\overline{\varepsilon_N^2(t)}=\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}\varepsilon_N^2(t)\,dt$$

a_0, a_n, b_n 给出最小均方误差意义上的最佳近似

$$=\overline{f^2(t)}-\left[a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2+b_n^2\right)\right]$$

三角Fourier级数

两种常用表达式

三角型和余弦型

❖合并同频率项（教材3-2节）

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(n\Omega t+\phi_n\right)\qquad t\in\left(t_1,t_1+T\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t\right)$$

$$A_0=a_0$$

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$ 偶函数

$$a_n=A_n\cos\phi_n$$ 偶函数

$$\phi_n=-arctg\frac{b_n}{a_n}$$ 奇函数

$$b_n=-A_n\sin\phi_n$$ 奇函数

在一定时间间隔内，任意一个代表信号的函数f(t)可以用一个直流分量和一系列谐波分量之和来表示。

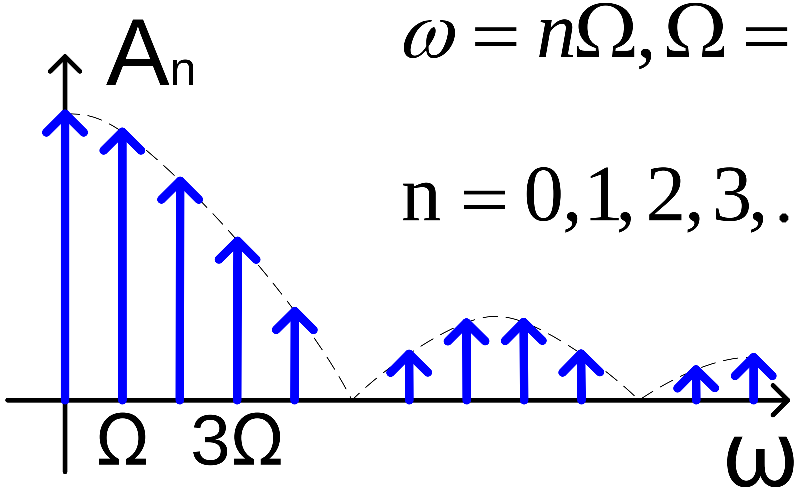
频谱图

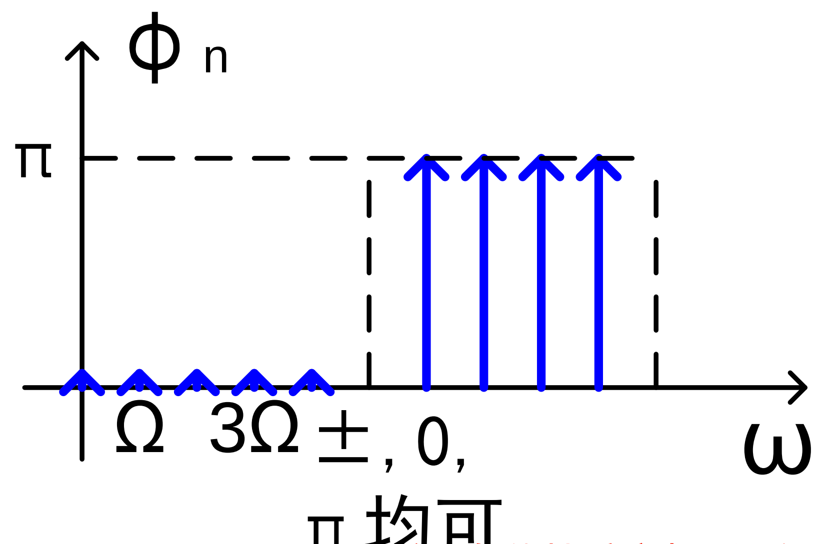
❖频谱图

- A_n~nΩ幅度频谱图（通常说频谱指幅度频谱），其中A_0为2倍直流分量。
- φ_n~nΩ相位频谱图。
- **周期信号的频谱只出现在nΩ等离散频率点，是离散谱。**

$$\omega = n\Omega, \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\mathrm{n} = 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty$$



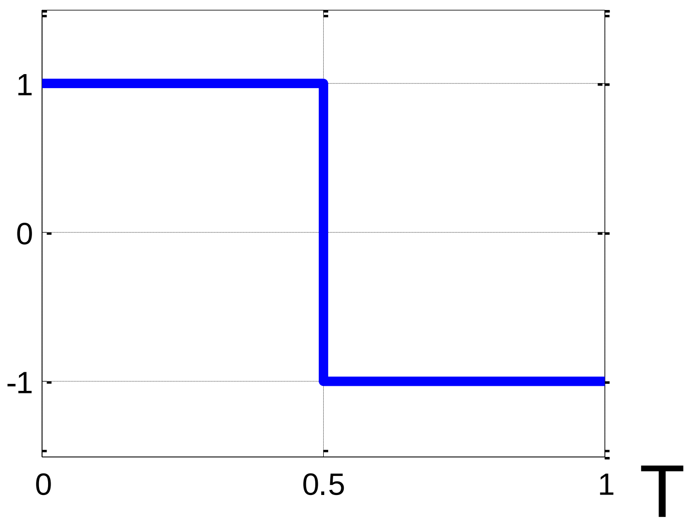


离散性、谐波性、收敛性

三角Fourier级数练习

❖用三角Fourier级数表示方波信号。

$$f(t)=\begin{cases}1 & 0<t<\dfrac{T}{2}\\ -1 & \dfrac{T}{2}<t<T\end{cases}$$



$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t\right)\qquad \Omega=\frac{2\pi}{T}$$

三角Fourier级数练习

❖求分量系数，取积分限为(0,T)

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt=0$$

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\Omega t$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\Omega t dt=0$$

$$t\in(0,T)$$

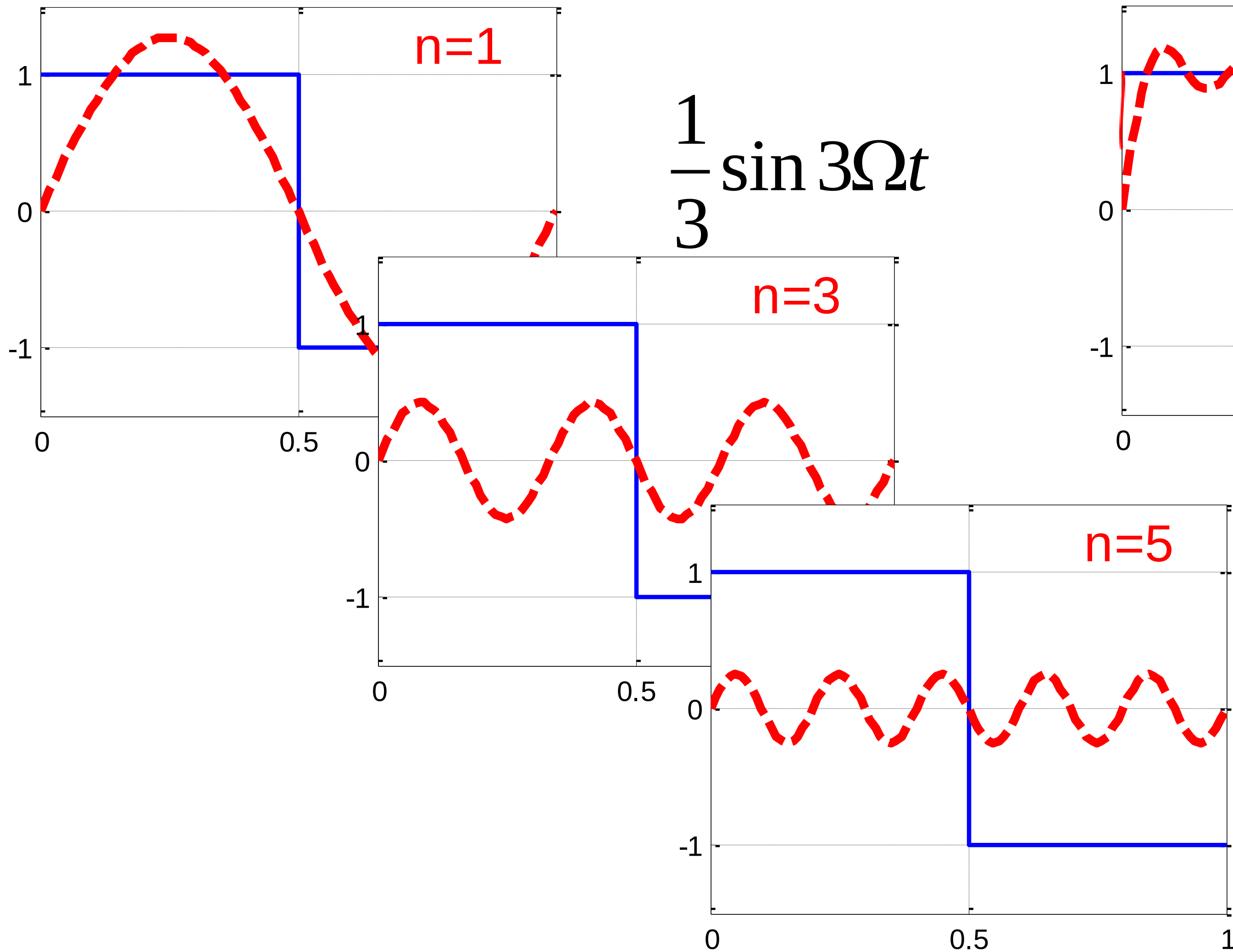
$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\Omega t dt=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi} & n\text{为奇数}\\ 0 & n\text{为偶数}\end{cases}$$

则在区间(0,T)内，信号f(t)可以写成：

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin\Omega t+\frac{1}{3}\sin 3\Omega t+\frac{1}{5}\sin 5\Omega t+\ldots\right)\quad t\in(0,T)$$

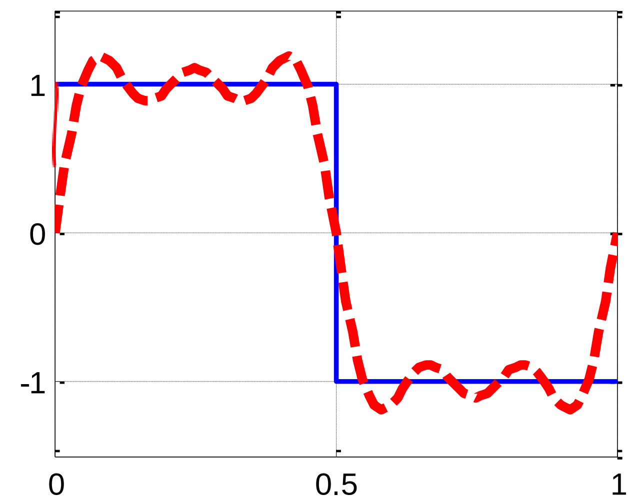
$\sin \Omega t$

前5次谐波叠加，n≤5



$\frac{1}{3}\sin 3\Omega t$

$\frac{1}{5}\sin 5\Omega t$



上一节复习

- 正交函数分解
- 三角Fourier级数
  - 两种常用表达式

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t\right)$$

$$a_n=A_n\cos\phi_n$$

$$b_n=-A_n\sin\phi_n$$

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(n\Omega t+\phi_n\right)$$

$$A_0=a_0$$

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

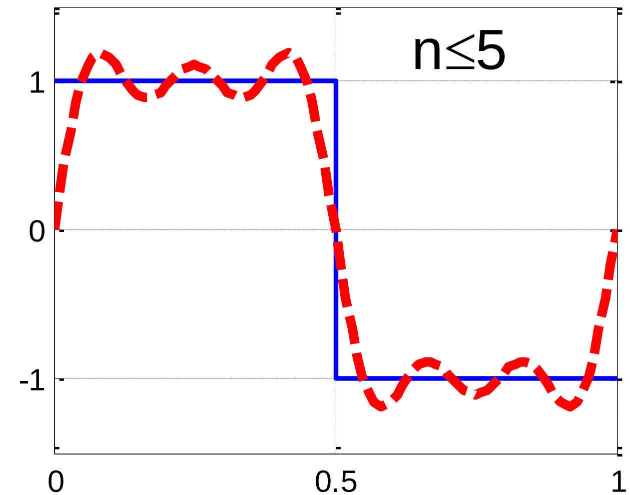
$$t\in\left(t_1,t_1+T\right)$$

$$\phi_n=-arctg\frac{b_n}{a_n}$$

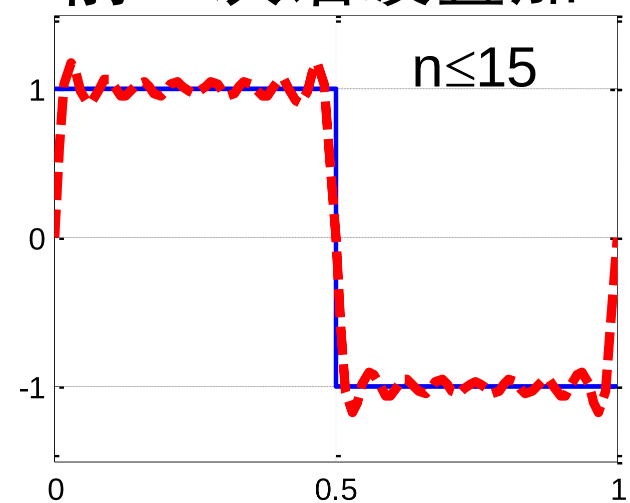
Fourier级数特点

- 谐波次数n越大，误差越小，近似程度越好。
- 对脉冲信号，在跃变点附近的波形必有一个起伏振荡，主要是受高频分量的影响。随着n值增大，这个振荡存在的时间缩短，但其引起的过冲值趋于9%的固定值，称为Gibbs现象。
- 低频分量主要影响脉冲顶部的形状。
- 脉冲变化越剧烈，高频分量越多，越缓慢，低频分量越多。
- 任一频率分量的幅度或相位发生相对变化，都会引起输出波形失真。

前5次谐波叠加



前15次谐波叠加

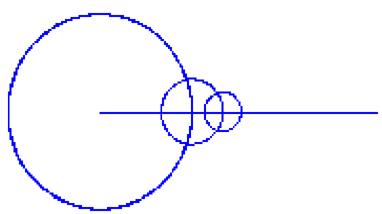


Fourier级数特点

周期方波的傅立叶级数展开

以前一个练习为例：三角Fourier级数表示方波信号

f(t)=sin(θ)+sin(3θ)/3+sin(5θ)/5

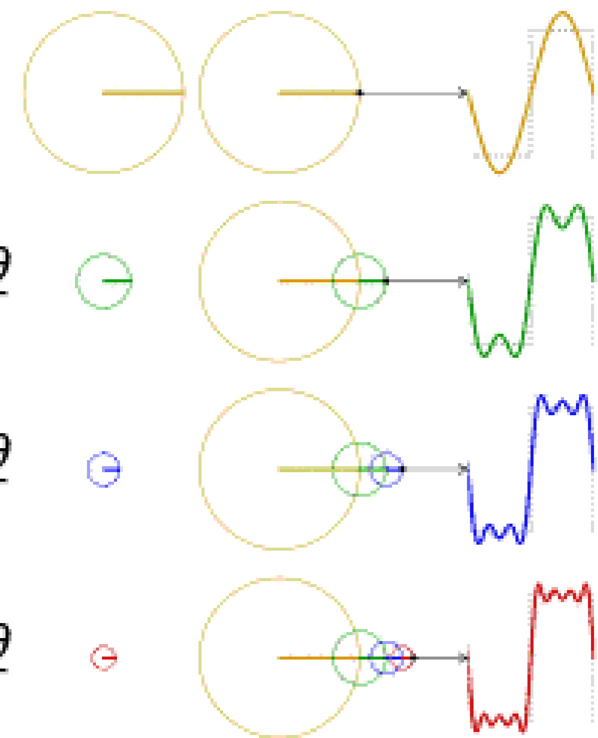


基波 $\frac{4\sin\theta}{\pi}$

3次谐波 $\frac{4\sin 3\theta}{3\pi}$

5次谐波 $\frac{4\sin 5\theta}{5\pi}$

7次谐波 $\frac{4\sin 7\theta}{7\pi}$



Fourier级数的周期性 （傅里叶级数展开动画）

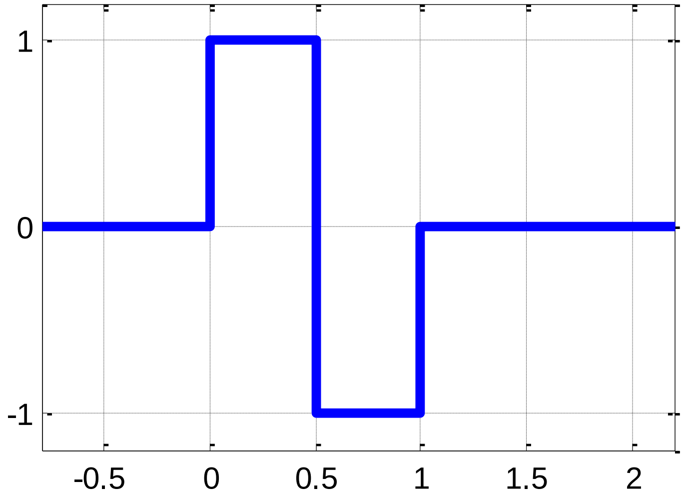
非周期信号

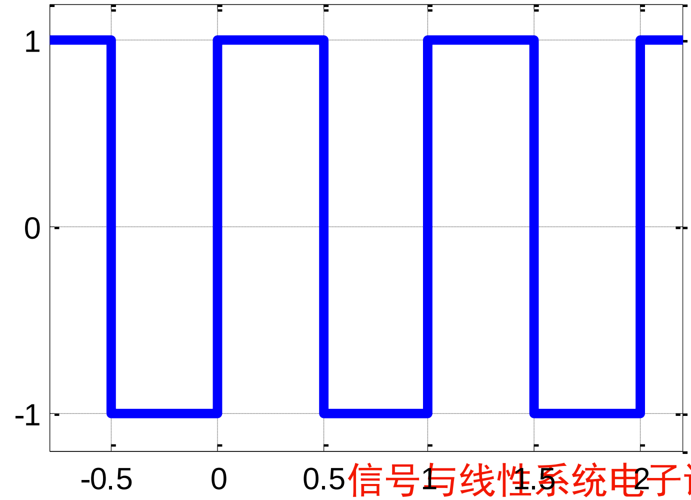
$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin\Omega t+\frac{1}{3}\sin 3\Omega t+\frac{1}{5}\sin 5\Omega t+\dots\right) \quad \boxed{t\in(0,T)}$$

周期信号

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin\Omega t+\frac{1}{3}\sin 3\Omega t+\frac{1}{5}\sin 5\Omega t+\dots\right) \quad \boxed{t\in(-\infty,+\infty)}$$

Fourier级数在整个时间区间内是周期为T的周期函数。





函数对称性与谐波特性

❖三角Fourier级数表达式

$n=1,2,3,\ldots$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t\right)$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\underbrace{\cos n\Omega t dt}_{\text{偶函数}}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\underbrace{\sin n\Omega t dt}_{\text{奇函数}}$$

对偶函数积分

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_e(t)dt=2\int_{0}^{\frac{T}{2}}f_e(t)dt$$

对奇函数积分

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_o(t)dt=0$$

偶x偶=偶
奇x奇=偶
奇x偶=奇

偶函数谐波特性

❖以偶函数为例 $f(t)=f(-t)$

直流项(平均值)

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt \begin{cases}\neq 0 \\ =0\end{cases}$$ 取决于具体信号

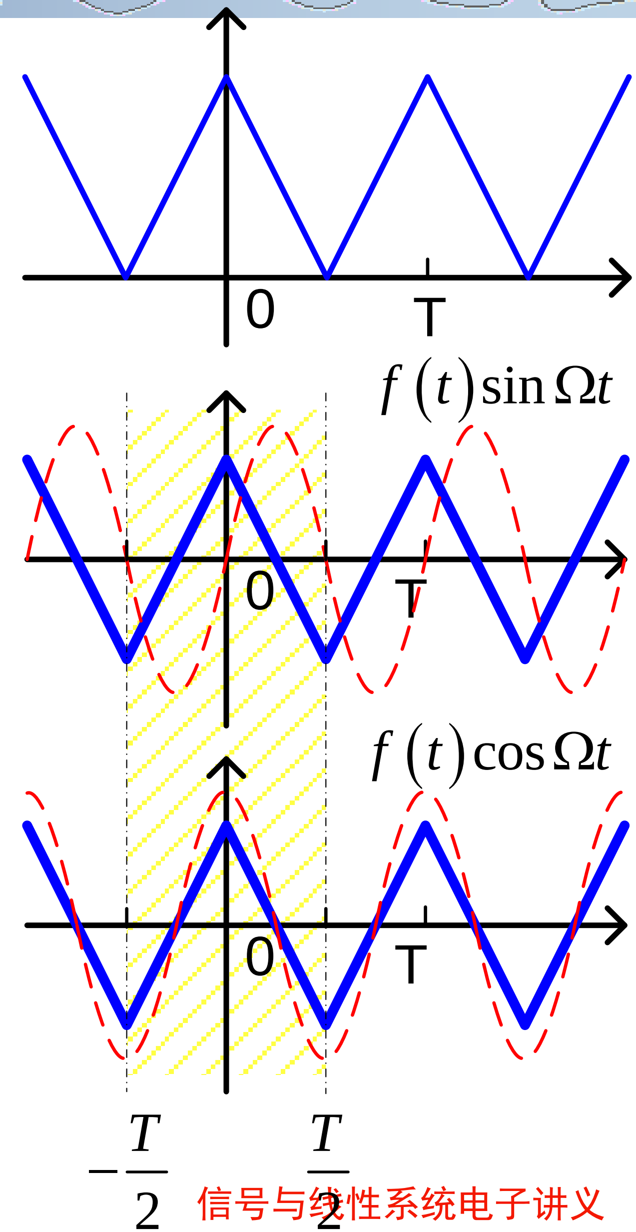
余弦项

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t)\cos n\Omega t}_{\text{偶函数}}dt \neq 0$$

正弦项

$n=1,2,3,\ldots$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t)\sin n\Omega t}_{\text{奇函数}}dt =0$$



偶函数谐波特性

❖三角Fourier级数表达式

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t\right)$$

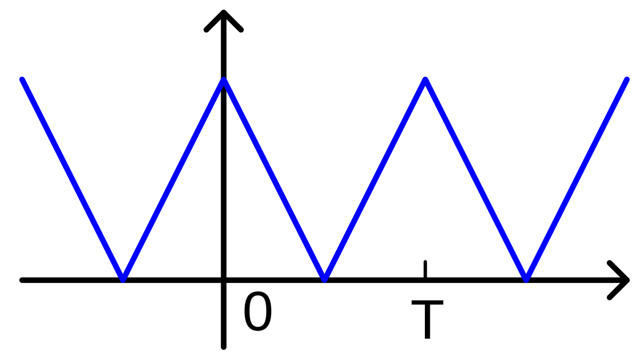
❖偶函数 关于纵轴对称 $f(t)=f(-t)$ $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt=2\int_{0}^{\frac{T}{2}}f(t)dt$

- 只包含直流分量和余弦谐波分量
- 无正弦谐波分量

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt\neq 0$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\Omega t dt\neq 0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin n\Omega t dt=0$$



$$\boxed{f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\Omega t}$$

奇函数谐波特性

- 三角Fourier级数表达式

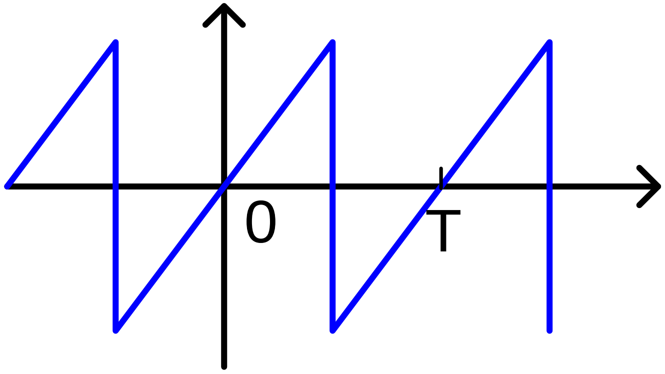
$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t\right)$$

- 奇函数 关于原点对称 $f(t)=-f(-t)$ $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt=0$
  - 只包含正弦谐波分量
  - 无直流分量和余弦谐波分量

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt=0$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\Omega t dt=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin n\Omega t dt\neq 0$$



$$\boxed{f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\Omega t}$$

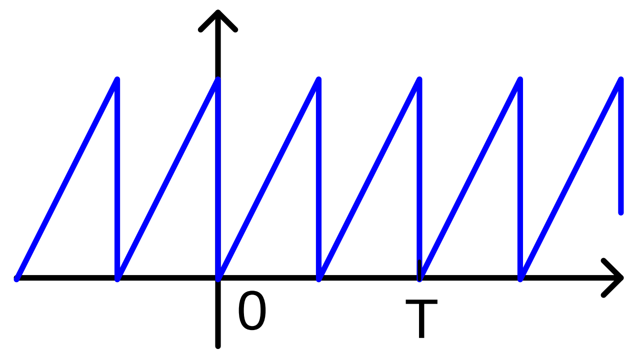
偶谐函数谐波特性

❖三角Fourier级数表达式

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t\right)$$

❖偶谐函数

半波函数 $f(t\pm\frac{T}{2})=f(t)$



- 只包含偶次谐波分量和直流项
- 无奇次谐波分量

$$a_{2k+1}=0, b_{2k+1}=0$$

$$\boxed{f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{2k}\cos(2k)\Omega t+b_{2k}\sin(2k)\Omega t\right)}$$

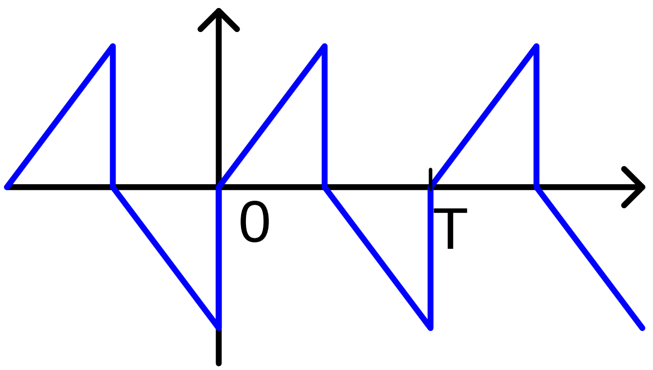
奇谐函数谐波特性

❖三角Fourier级数表达式

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t\right)$$

❖奇谐函数

半波对称函数 $f(t\pm\frac{T}{2})=-f(t)$



◆只包含奇次谐波分量

◆无直流分量和偶次谐波分量

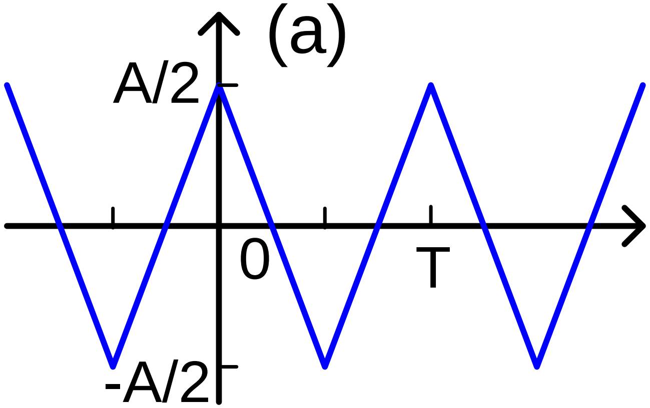
$$a_0=0,a_{2k}=0,b_{2k}=0$$

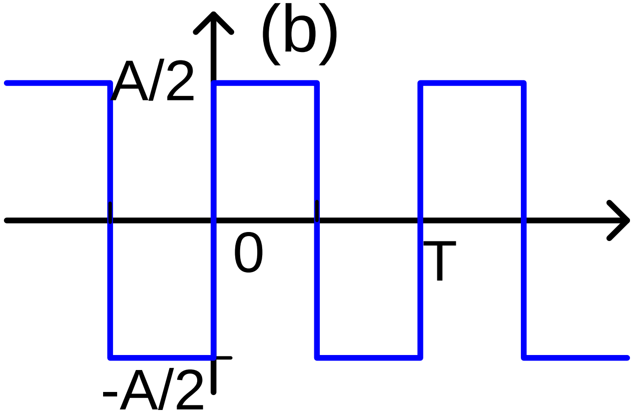
$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_{2k+1}\cos\left(2k+1\right)\Omega t+b_{2k+1}\sin\left(2k+1\right)\Omega t\right)}$$

函数奇偶特性与谐波特性

- 函数奇偶特性决定了其谐波特性，即Fourier级数展开后的分量系数。
- 函数的奇偶关系，在移动坐标轴时，可能发生改变。
- 某些信号的Fourier级数可以利用信号的时域分解和常用信号的Fourier级数求出。

函数奇偶特性与谐波特性练习1





偶函数：直流项+余弦项　　　奇函数：正弦项

奇谐函数：奇次项　　　奇谐函数：奇次项

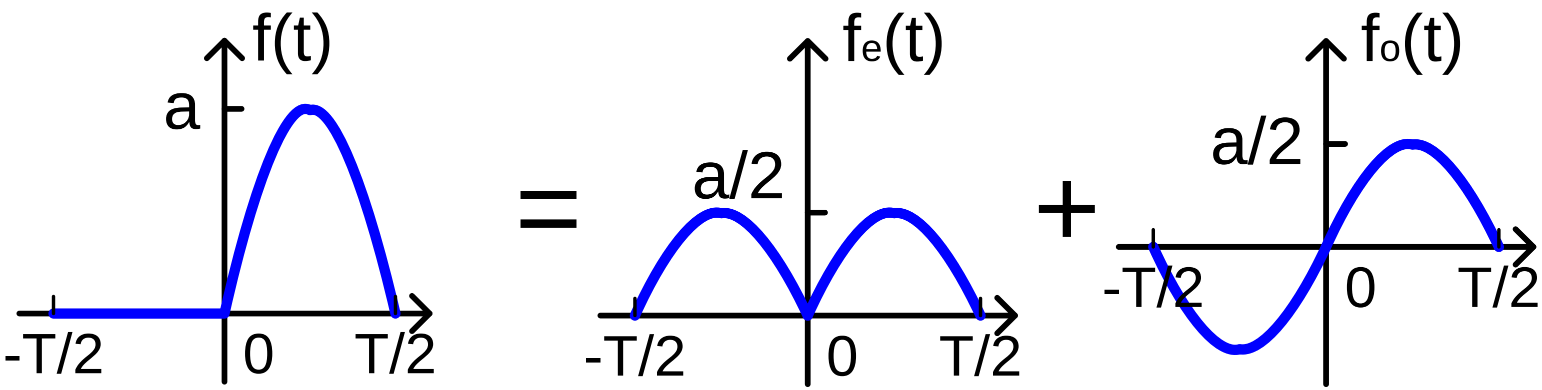
只有奇次余弦项　　　只有奇次正弦项

$$f(t)=\frac{2A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left(2k+1\right)\Omega t$$

$$f(t)=\frac{4A}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(2k+1\right)^2}\cos\left(2k+1\right)\Omega t$$

函数奇偶特性与谐波特性练习2

❖利用信号分解



偶函数：直流项+余弦项　　奇函数：正弦项

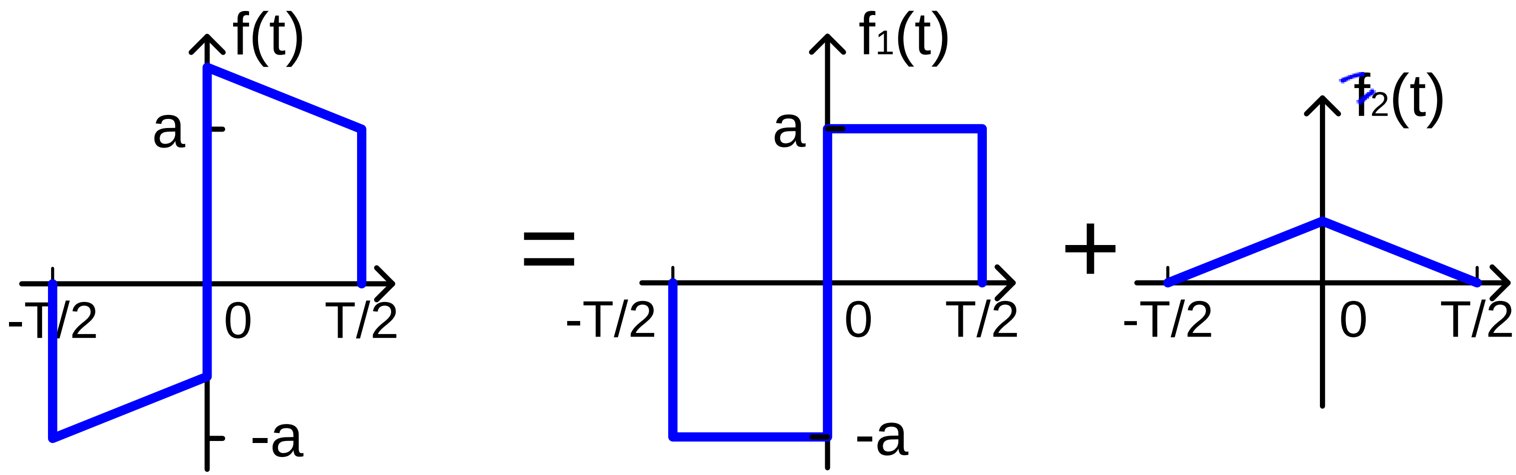
偶谐函数：偶次项　　奇谐函数：奇次项

只有偶次余弦项　　只有奇次正弦项

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}\cos(2k)\Omega t+\sum_{k=0}^{\infty}b_{2k+1}\sin(2k+1)\Omega t$$

函数奇偶特性与谐波特性练习3

❖利用信号分解



$f_1(t)$ 奇函数：正弦项

奇谐函数：奇次项

只有奇次正弦项

$f_2(t)$ 偶函数：余弦项+直流项

奇谐函数：奇次项 (去除直流项后)

只有直流项+奇次余弦项

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}\cos\left(2k+1\right)\Omega t+\sum_{k=0}^{\infty}b_{2k+1}\sin\left(2k+1\right)\Omega t$$

指数Fourier级数

正交函数集－复习

❖两函数正交：若定义在区间(t_1,t_2)内的两个函数满足

$$\int_{t_1}^{t_2} g_1(t)g_2^*(t)dt=0$$

则称两函数在区间(t_1,t_2)内正交

❖正交函数集：由一组函数构成的函数集，这些函数在区间(t_1,t_2)内满足

- 一函数和自己相乘求积分为常数
- 任意两个不同函数相乘求积分为零

则称这一组函数为区间(t_1,t_2)的正交函数集。

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t)g_j^*(t)dt=\begin{cases} 0, & i\neq j \\ K_i\neq 0, & i=j \end{cases}$$

指数函数集

- 在区间(t_1,t_1+T)内，指数函数构成正交函数集

$$e^{jn\Omega t}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_1+T} e^{jn\Omega t} \left(e^{jn\Omega t} \right)^* dt = T \\ \int_{t_1}^{t_1+T} e^{jm\Omega t} \left(e^{jn\Omega t} \right)^* dt = 0 \quad m \neq n \end{cases}$$

- m,n为正负整数。
- 当n→∞时，趋于完备正交函数集。

指数Fourier级数

❖ 周期为T的周期信号f(t)可以在区间(t_1,t_1+T)内用指数Fourier级数表示为：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}$$

$$\Omega=\frac{2\pi}{T}$$ 基波频率

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

三角与指数Fourier级数

❖性质相同（直流分量+谐波分量），形式不同：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{jn\Omega t}$$

$$\Omega=\frac{2\pi}{T}$$ 基波频率

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\Omega t+\phi_n\right)$$

$$\cos\theta=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$$

$$=\frac{A_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[e^{j\left(n\Omega t+\phi_n\right)}+e^{-j\left(n\Omega t+\phi_n\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}A_0 e^{j(0\Omega t+0)}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j\left(n\Omega t+\phi_n\right)}+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1} A_n e^{j\left(n\Omega t+\phi_n\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j\phi_n} e^{jn\Omega t}$$

复数 $\boxed{c_n=\frac{1}{2}A_n e^{j\phi_n}}$

Fourier级数复系数

❖指数Fourier级数和三角Fourier级数的系数：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{jn\Omega t}$$

$$\Omega=\frac{2\pi}{T}$$ 基波频率

$$f(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j\phi_n} e^{jn\Omega t}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n \mathrm{e}^{jn\Omega t}$$

$$\boxed{\dot{A}_n=A_n e^{j\phi_n}}$$

$$c_n=\frac{1}{2}\dot{A}_n=\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

$$\dot{A}_n=\frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

n次谐波的复数振幅

c_n与A_n的频谱图幅值不同，引入负频率项之后，谐波分量的幅度应为正负两频率分量之和。

三角与指数Fourier级数

指数Fourier级数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{jn\Omega t}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j\phi_n} e^{jn\Omega t}$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

$$n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$

三角Fourier级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t\right)$$

$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\left(n\Omega t+\phi_n\right)$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\Omega t dt$$

$$n=1,2,3,\ldots$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\Omega t dt$$

三角与指数Fourier级数

指数Fourier级数

$$c_n = \frac{1}{2} A_n e^{j\phi_n} = \frac{1}{2} \dot{A}_n$$

$$= \frac{1}{2}\left(a_n - jb_n\right)$$

$$A_n = 2\left|c_n\right|$$

$$\phi_n = arctg\left(\frac{\Im\left(c_n\right)}{\Re\left(c_n\right)}\right)$$

三角Fourier级数

$$a_n = A_n \cos\phi_n$$

$$b_n = -A_n \sin\phi_n$$

$$A_0 = a_0$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\phi_n = -arctg \frac{b_n}{a_n}$$

$A_{-n} = A_n$ 偶函数

$\phi_{-n} = -\phi_n$ 奇函数

三角和指数Fourier级数的系数通过A_n和ϕ_n联系起来。

周期信号的频谱

- 典型周期信号的Fourier级数
- 周期信号频谱的特点

信号频谱图

- ❖ $A_n \sim \omega$ 和 $\phi_n \sim \omega$ 称为振幅频谱图和相位频谱图。
- ❖ 振幅频谱图用不同长度的线段来代表不同谐波分量的振幅，并按照频率高低依次排列。
- ❖ 频谱图以直观的形式给出各次谐波的幅值和相位随频率的变化关系及相对大小。

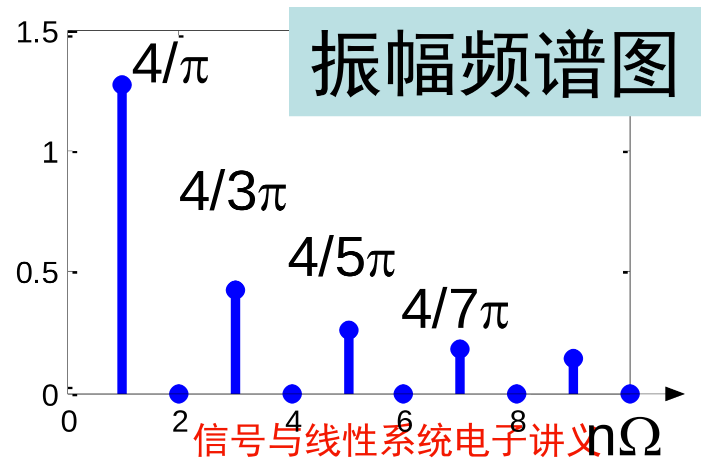
频谱图通常指振幅频谱图

横坐标代表频率
纵坐标代表振幅

方波信号

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin\Omega t+\frac{1}{3}\sin 3\Omega t+\frac{1}{5}\sin 5\Omega t+\ldots\right)$$

$$t\in(0,T)$$



周期信号的频谱举例

❖求周期信号的周期T，基波频率Ω，并画出频谱图。

$$f(t)=1-\underline{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{2\pi}{3}\right)}+\underline{\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$T_1=8$　　　　$T_2=6$

周期 T=24，基波频率 Ω=2π/T= π/12

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(n\Omega t+\phi_n\right)$$

$$=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(3\frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}+\pi\right)+\frac{1}{4}\cos\left(4\frac{\pi}{12}t-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(3\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}\cos\left(4\frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}\right)$$

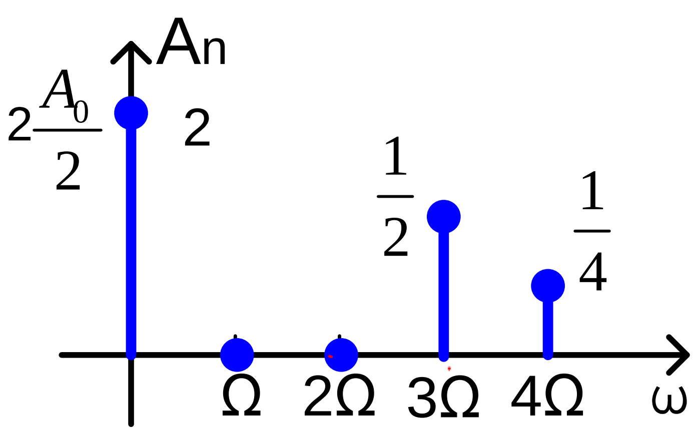
周期信号的频谱举例

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(n\Omega t+\phi_n\right)\qquad \Omega=\frac{\pi}{12}$$

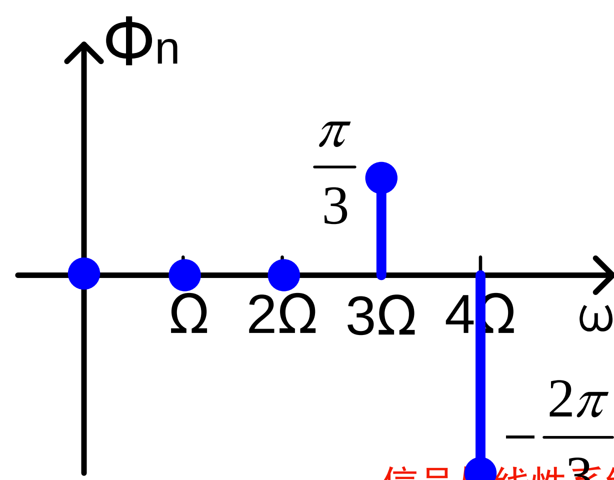
$$=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(3\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}\cos\left(4\frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}\right)$$

3次谐波　　4次谐波

振幅频谱



相位频谱



周期信号频谱的特点

❖离散性

- 谱线离散，谱线间隔为Ω=2π/T。
- 周期T越大，谱线越靠近，间隔Ω越小。

T→∞时，

周期信号→非周期信号

离散频谱→连续频谱

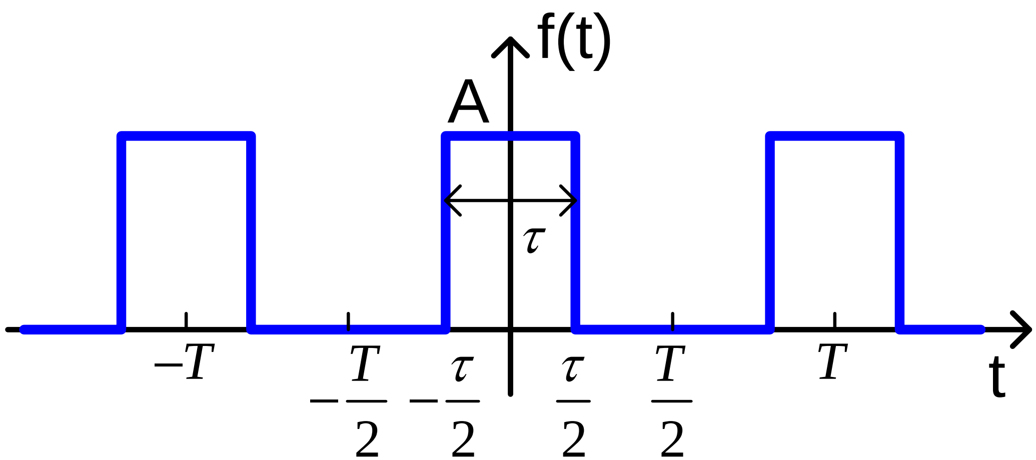
❖谐波性

- 每条谱线都在Ω的整数倍上。

❖收敛性

- 各次谐波的振幅总趋势是随着谐波次数增加而减小。

周期脉冲函数的频谱



$$f(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dot{A}_n e^{jn\Omega t}$$

$$\dot{A}_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

$$=\frac{2}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ae^{-jn\Omega t}dt$$

$$=\frac{4A}{n\Omega T}\sin\frac{n\Omega\tau}{2}$$

$$=\frac{2A\tau}{T}Sa\frac{n\Omega\tau}{2}$$

$$f(t)=\begin{cases} A & -\frac{\tau}{2}<t<\frac{\tau}{2} \\ 0 & -\frac{T}{2}<t<-\frac{\tau}{2}\ \&\ \frac{\tau}{2}<t<\frac{T}{2} \end{cases}$$

$$Sa\frac{n\Omega\tau}{2}=\frac{\sin(n\Omega\tau/2)}{n\Omega\tau/2}$$

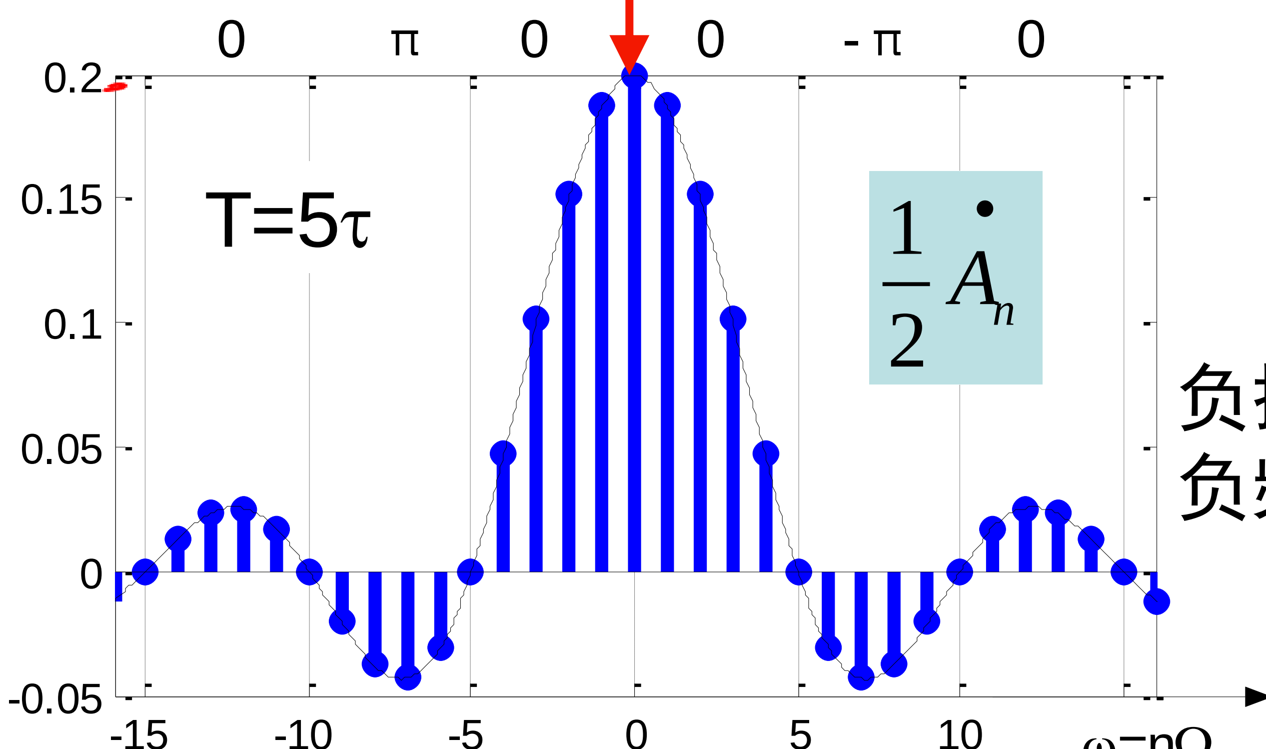
双边频谱图

$$f(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dot{A}_n e^{jn\Omega t}\qquad \dot{A}_n=\frac{2A\tau}{T}Sa\frac{n\Omega\tau}{2}=\frac{2A\tau}{T}Sa\frac{n\pi\tau}{T}$$

$A_0/2$: 直流分量

$$A_0=\lim_{n\to 0}\left|\dot{A}_n\right|=\frac{2A\tau}{T}$$

$$\lim_{x\to 0}Sa(x)=1$$



负振幅代表相位 − π
负频率代表负指数项

单边频谱图

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(n\Omega t+\phi_n\right)$$

$$A_n=\left|\dot{A}_n\right|=\frac{2A\tau}{T}\left|Sa\frac{n\Omega\tau}{2}\right|$$

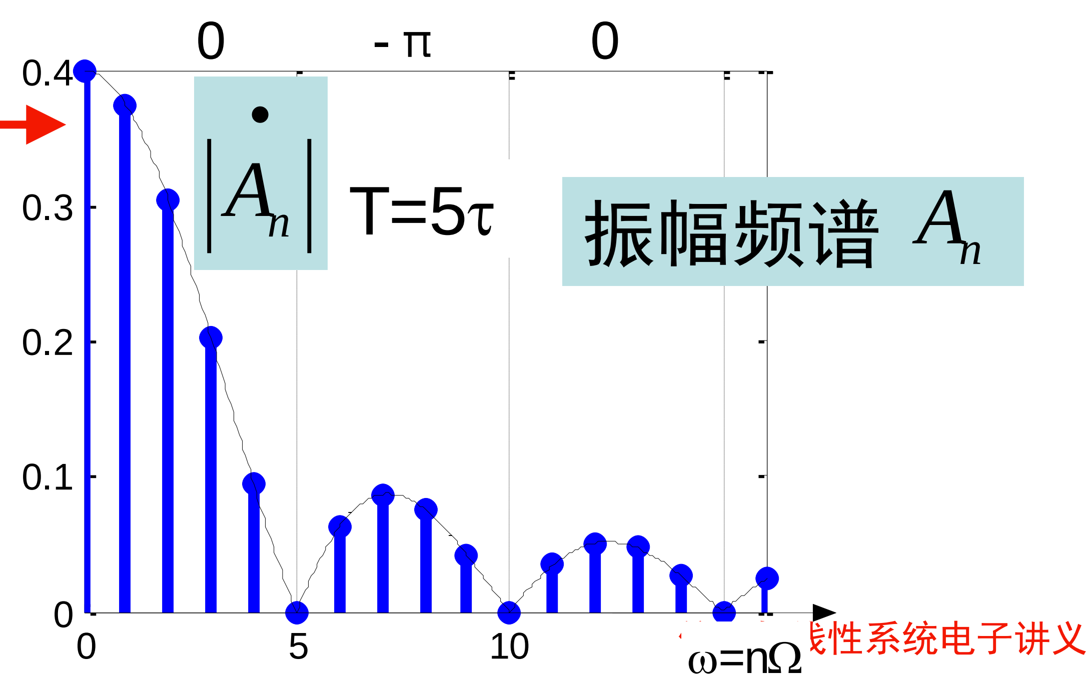
频谱对称性

$A_{-n}=A_n$ 偶函数

$\phi_{-n}=-\phi_n$ 奇函数

$\boxed{A_0\text{：2倍直流分量}}$

$$A_0=\frac{2A\tau}{T}$$



周期脉冲函数频谱特点

❖直流分量，基波及各次谐波分量大小正比于脉冲高度A和脉冲宽度τ，反比于周期T。

$$\dot{A}_n = \frac{2A\tau}{T} Sa\frac{n\Omega\tau}{2}$$

❖谱线幅度按包络线Sa(nΩτ/2)规律变化，包络线零点出现在2π/τ的整数倍处。

$$当\quad \frac{n\Omega\tau}{2} = m\pi \ 即\ n\Omega = m\frac{2\pi}{\tau}\ 时\ Sa\frac{n\Omega\tau}{2} = 0$$

❖周期脉冲信号可以分解为无数个谐波分量，主要能量集中在第一个零点以内(有效带宽)。

$$\omega < \frac{2\pi}{\tau}$$

τ不变，T=5τ &T=10τ

```
tao=1;
Nmax=25; % maximum n
% discrete
n=-Nmax:1:Nmax;
n0=Nmax+1;
T=5*tao; % or T=10*tao;
```

$$A_n = \frac{2A\tau}{T}\left|Sa\frac{n\Omega\tau}{2}\right|$$

T=5τ → T=10τ, T增加

- ➢Ω减小，谱线变密集
- ➢同频率分量振幅减小
- ➢振幅为零处频率不变，n增加

```
xc=(nc*W1*tao/2);
Ac=2*tao/T*(sin(xc)./xc);
```

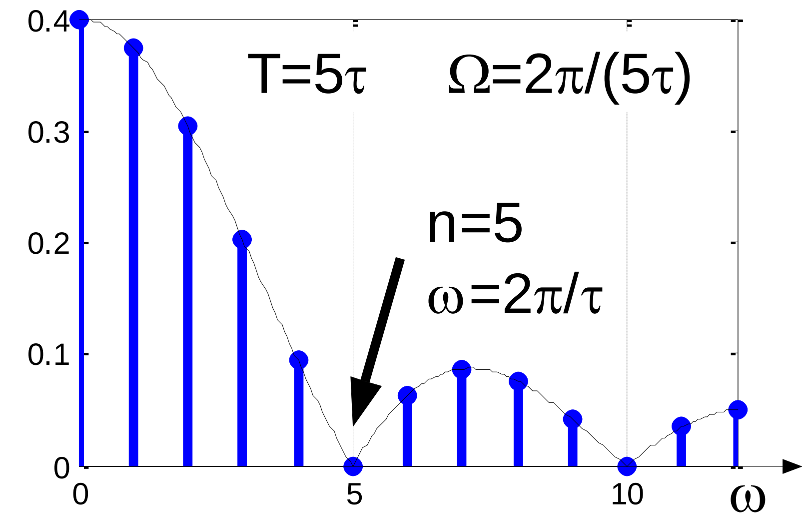
T → ∞

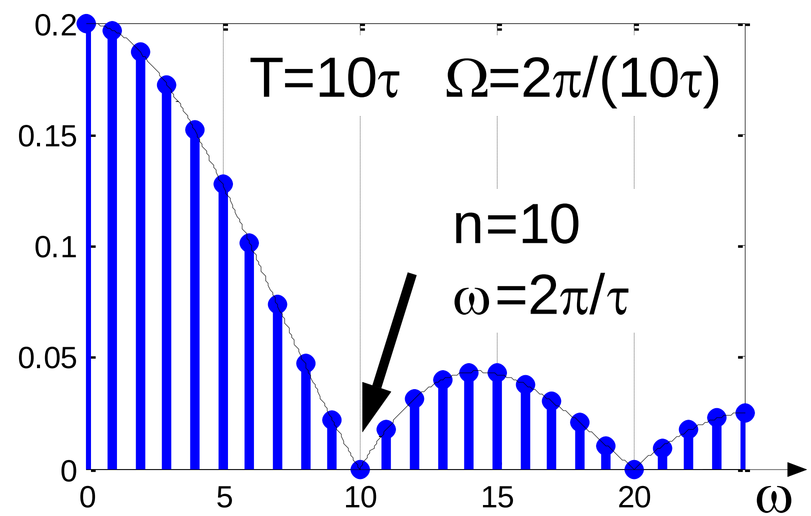
周期信号 → 非周期信号

离散谱线 → 连续谱线

振幅 → 0

```
hold on; plot(nc,Ac/2,'k-')
```





T不变，T=5τ &T=10τ

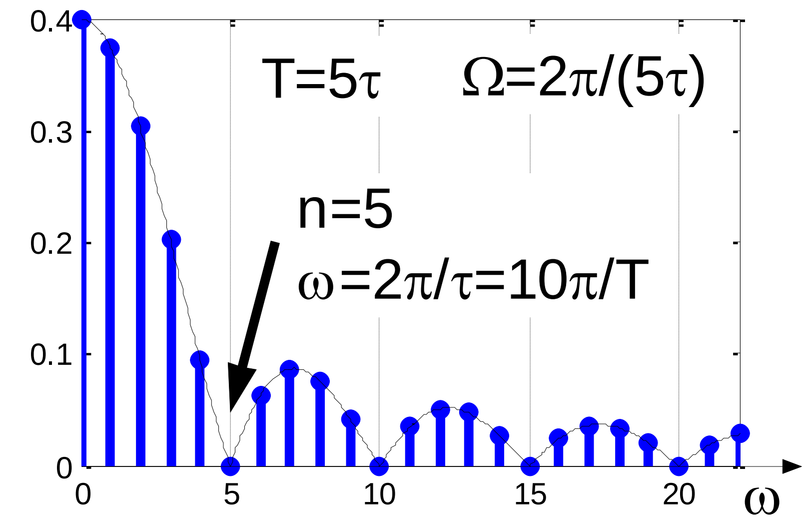
```
T=10;
Nmax=25; % maximum n
% discrete
n=-Nmax:1:Nmax;
n0=Nmax+1;
tao=T/5; % or tao=T/10;
```

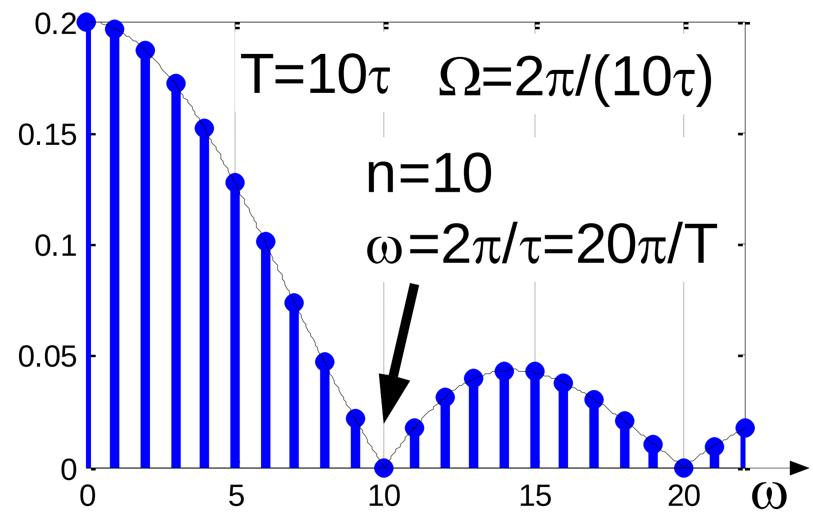
$$A_n = \frac{2A\tau}{T}\left|Sa\frac{n\Omega\tau}{2}\right|$$

T=5τ → T=10τ，τ 减小

- Ω不变，谱线间距不变
- 振幅收敛速度减慢
- 振幅整体减小
- 振幅为零处频率增加，n增加

```
% single side
figure
stem(n(n0:end),abs(An (n0:end)),'filled')
hold on; plot(nc(nc0:end),abs(Ac(nc0:end)), 'k-')
% double side
figure
stem(n,An/2,'filled')
hold on; plot(nc,Ac/2, 'k-')
```





上一节复习

- 三角Fourier级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t\right)$$

$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(n\Omega t+\phi_n\right)$$

- Fourier级数的周期性
- 函数对称性与谐波特性
  - 奇函数、偶函数、奇谐函数、偶谐函数
- 指数Fourier级数

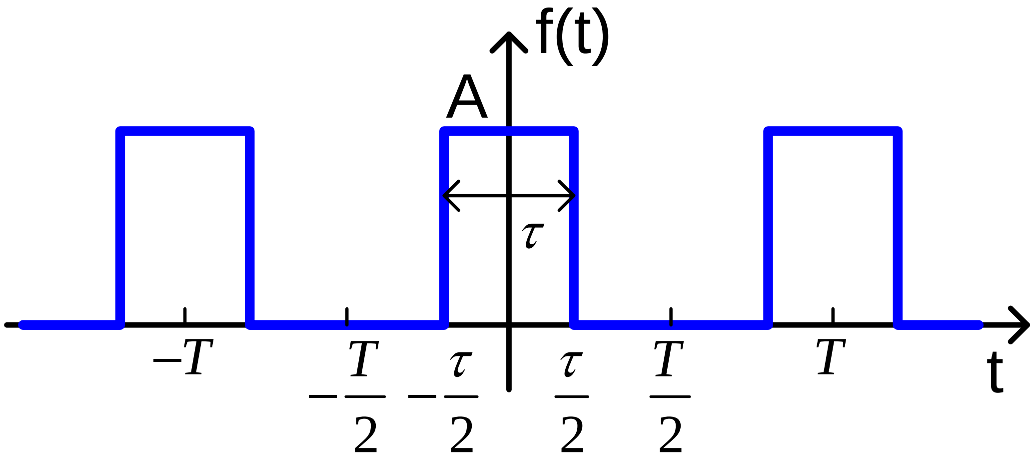
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n e^{j\phi_n}e^{jn\Omega t}$$

$$c_n=\frac{1}{2}A_n e^{j\phi_n}=\frac{1}{2}\dot{A}_n$$

$$=\frac{1}{2}\left(a_n-jb_n\right)$$

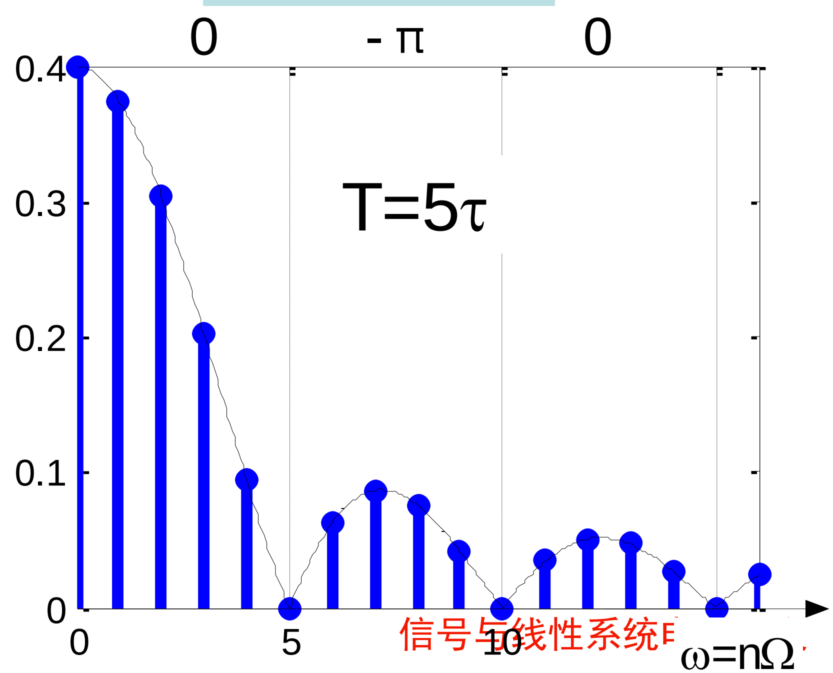
- 周期信号的频谱图
  - 离散性、谐波性、收敛性

周期脉冲信号的单边频谱图



$$A_n = \frac{2A\tau}{T}\left|Sa\frac{n\Omega\tau}{2}\right|$$

振幅频谱



$$f(t)=\begin{cases} A & -\frac{\tau}{2}<t<\frac{\tau}{2} \\ 0 & -\frac{T}{2}<t<-\frac{\tau}{2} \ \& \ \frac{\tau}{2}<t<\frac{T}{2} \end{cases}$$

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(n\Omega t+\phi_n\right)$$

频带宽度

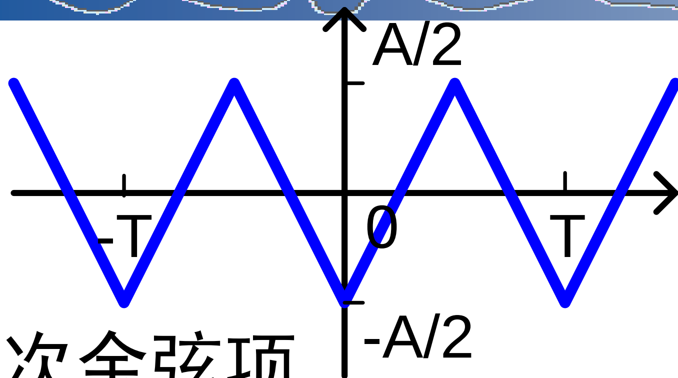
- 周期脉冲信号的谐波分量有无穷多个。实际应用中不可能考虑无穷多项谐波分量。由频谱图的收敛性，大部分能量集中在频谱图的低频部分。所以实用中考虑较低的一部分谐波分量就足够了。
- 一般情况下，定义频带宽度从零频率到谱线包络降为最大值的10%的频率点。
- 脉冲信号的脉宽与频宽成反比。

脉宽↓
包络收敛速度↓

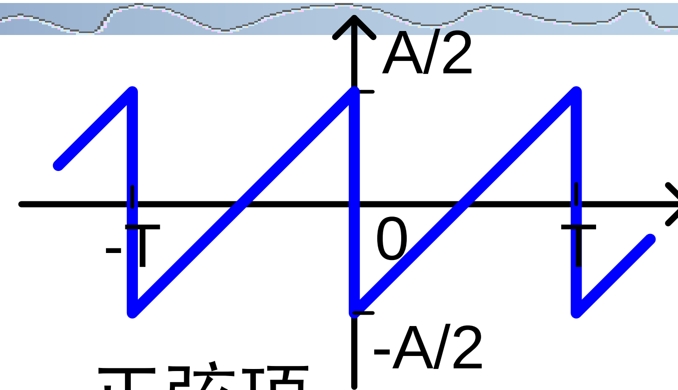
- 时间函数变化较快的信号具有较宽的频带宽度。

例如有跃变点的信号

常用周期信号的Fourier级数



奇次余弦项



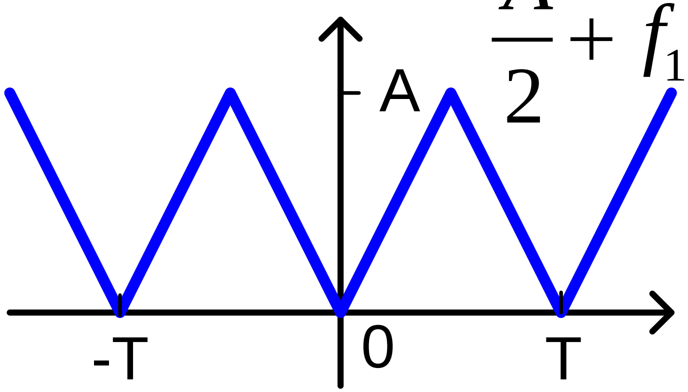
正弦项

$$f_1(t)=-\frac{4A}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(n\Omega t)$$

$$f_2(t)=-\frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\Omega t)}{n}$$

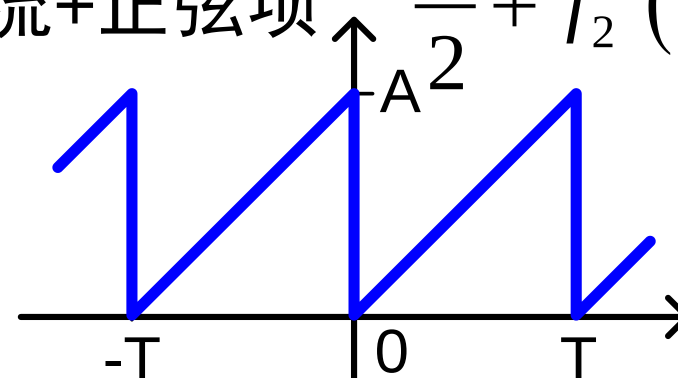
直流+奇次余弦项

$$\frac{A}{2}+f_1(t)$$



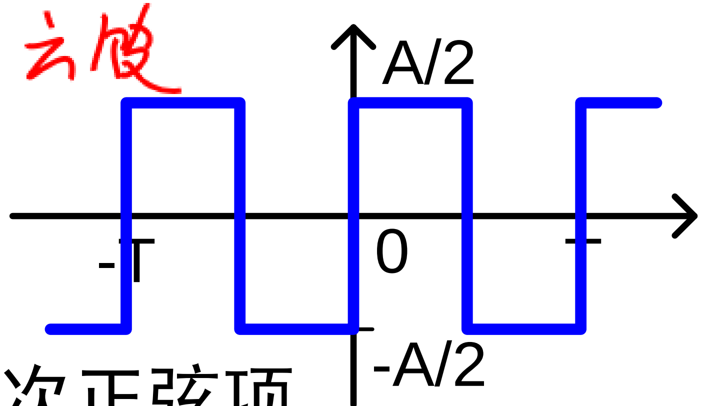
直流+正弦项

$$\frac{A}{2}+f_2(t)$$



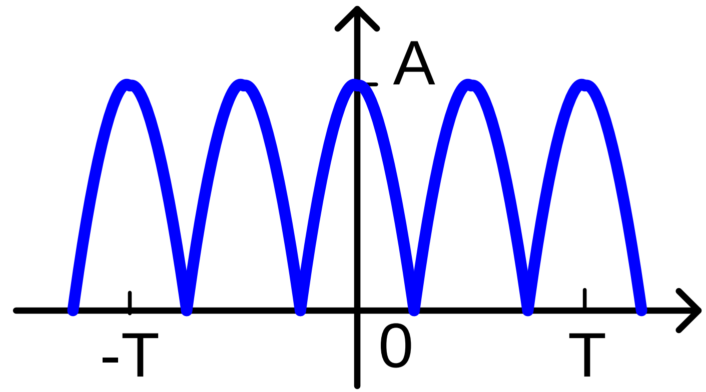
常用周期信号的Fourier级数

方波



奇次正弦项

$$f_3(t)=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\Omega t)$$



直流+偶次余弦项

$$f_4(t)=\frac{2A}{\pi}+\frac{4A}{\pi}\sum_{n=2,4,6,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{n^2-1}\cos(n\Omega t)$$

Fourier变换

- Fourier变换与反变换
- 常用函数的Fourier变换
- Fourier变换的性质

非周期信号的频谱

❖非周期信号可看成是T趋于无穷大的周期信号。

❖当周期T趋于无穷大时，谱线间隔Ω趋于无穷小，离散频谱趋向于连续频谱。各频率分量的幅度也趋于无穷小，但各分量振幅存在相对差别，且总和仍为一有限值。

❖为了描述非周期信号的频谱特性，引入频谱密度函数，表示**单位频带的频谱值**，简称频谱函数 F(jω)。

频谱函数

❖当T→∞，周期信号趋于非周期信号

- 复数振幅 $\dot{A}_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\Omega t}dt \to 0$
- 谱线间隔 $\Omega = \frac{2\pi}{T} \to d\omega$ 无穷小
- 离散变量 $n\Omega \to \omega$ 连续变量

非周期信号的频谱由周期信号通过极限的方式得到，称为Fourier变换。

❖定义频谱函数

$$F(j\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{T\dot{A}_n}{2} = \lim_{\Omega\to 0}\pi\frac{\dot{A}_n}{\Omega}$$

$$F(j\omega) = \lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

频谱函数的模量和相位

❖频谱函数是复函数

Fourier正变换

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\left|F(j\omega)\right|e^{j\phi(\omega)}$$

- 模量代表各频率分量的相对大小，是ω的偶函数。
- 相位代表各频率分量的的相位，是ω的奇函数。

当T→∞时，各频率分量的实际振幅大小为无穷小。

$$\lim_{\Omega\to 0}\left|\dot{A}_n\right|=\frac{\left|F(j\omega)\right|d\omega}{\pi}\to 0$$

非周期信号频谱图不能由振幅直接作出，而是由频谱密度函数作出，一般作幅度频谱 (|F(jω)|~ω) 和相位频谱(φ(ω)~ω) 。

Fourier反变换

$$f(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dot{A}_n e^{jn\Omega t}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\Omega t}dt\right]e^{jn\Omega t}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\Omega t}dt\right]e^{jn\Omega t}$$

$T\to\infty$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\right]e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

当 $T\to\infty$

有 $\Omega\to d\omega$

$n\Omega\to\omega$

$\frac{1}{T}\to\frac{d\omega}{2\pi}$

$\sum_{-\infty}^{\infty}\to\int_{-\infty}^{\infty}$

Fourier变换对

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \mathscr{F}\{f(t)\}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \mathscr{F}^{-1}\{F(j\omega)\}$$

$$F(j\omega) = \underbrace{|F(j\omega)|}_{\text{偶函数}} e^{j\underbrace{\phi(\omega)}_{\text{奇函数}}}$$

非周期函数 f(t) 的Fourier
变换存在的充分条件

Dirichlet条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \mathrm{d}t < \infty$

Fourier级数与Fourier变换

Fourier级数

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(n\Omega t+\phi_n\right)$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

$$A_n=2\left|c_n\right|$$

Fourier变换

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$F(j\omega)=\left|F(j\omega)\right|e^{j\phi(\omega)}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{\left|F(j\omega)\right|}{\pi}\cos\left(\omega t+\phi(\omega)\right)d\omega$$

$T\to\infty$　基波频率 $\Omega\to d\omega$　　$n\Omega\to\omega$

频率分量为从零到无穷的一切频率。

频率分量的振幅 $\dfrac{\left|F(j\omega)\right|d\omega}{\pi}\to 0$

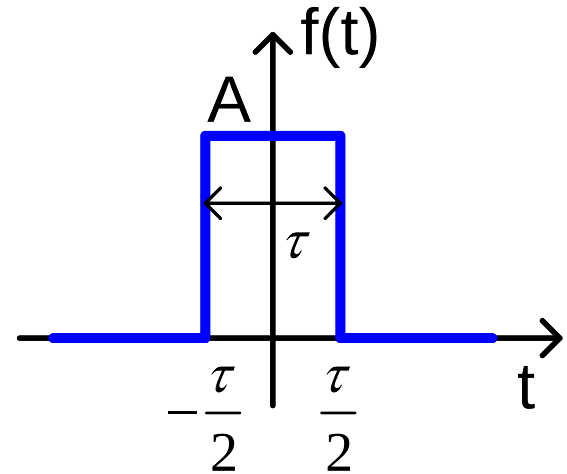
不能做振幅的频谱，只能作密度函数的频谱

非周期信号的频谱函数举例

❖门函数

$$G_\tau(t)=\begin{cases} A & -\dfrac{\tau}{2}<t<\dfrac{\tau}{2} \\ 0 & t<-\dfrac{\tau}{2}\text{或}t>\dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$

脉冲宽度为 τ



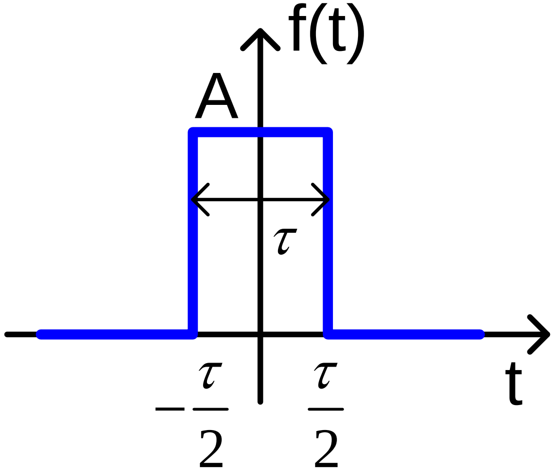
$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\mathrm{A}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{A}{-j\omega}\boxed{\left[e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{j\omega\frac{\tau}{2}}\right]} \rightarrow =-2j\sin\frac{\omega\tau}{2}$$

$$=\frac{2\mathrm{A}}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}=\mathrm{A}\tau\boxed{\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} \rightarrow =\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

非周期信号的频谱函数举例

$$F(j\omega) = \mathrm{A}\tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



模量

$$\left|F(j\omega)\right| = \mathrm{A}\tau \left|\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right|$$ 偶函数

奇函数

相位

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0 & \frac{4n\pi}{\tau} < \omega < \frac{4n\pi + 2\pi}{\tau} \\ -\pi & \frac{4n\pi + 2\pi}{\tau} < \omega < \frac{4n\pi + 4\pi}{\tau} \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

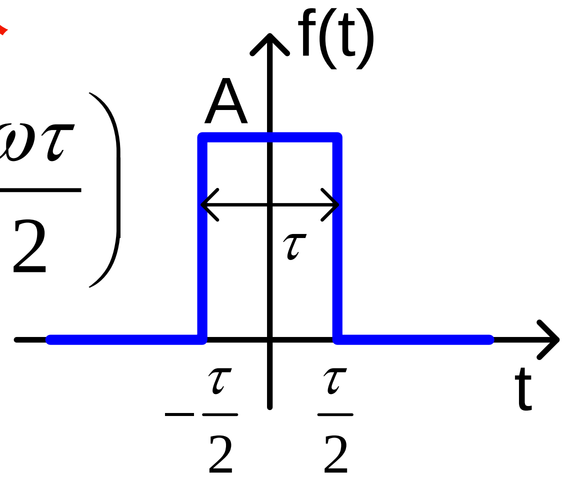
每隔2π/τ变换一次

非周期信号的频谱函数举例

❖比较周期脉冲信号的Fourier级数

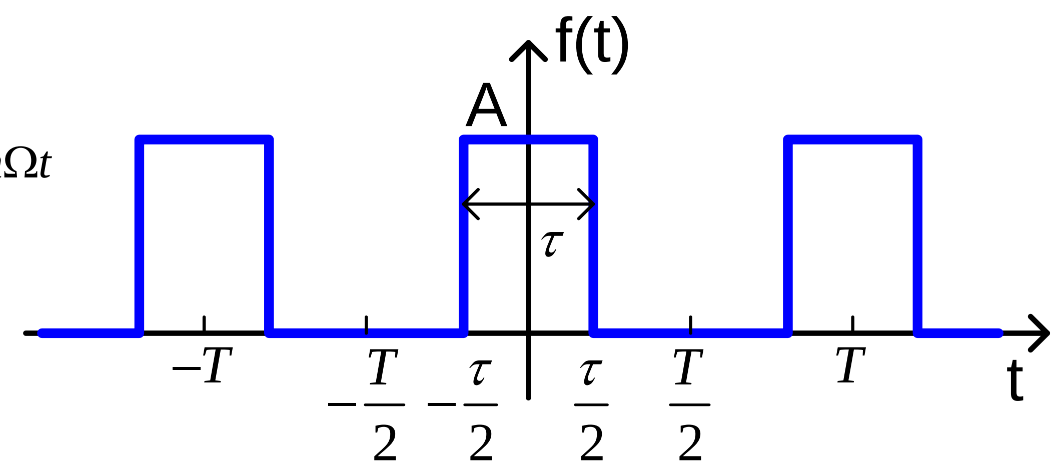
$$\boxed{\begin{gathered} T \to \infty \qquad n\Omega \to \omega \\ F(j\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\dot{A}_n T}{2} \end{gathered}}$$

$$F(j\omega) = A\tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega t}$$

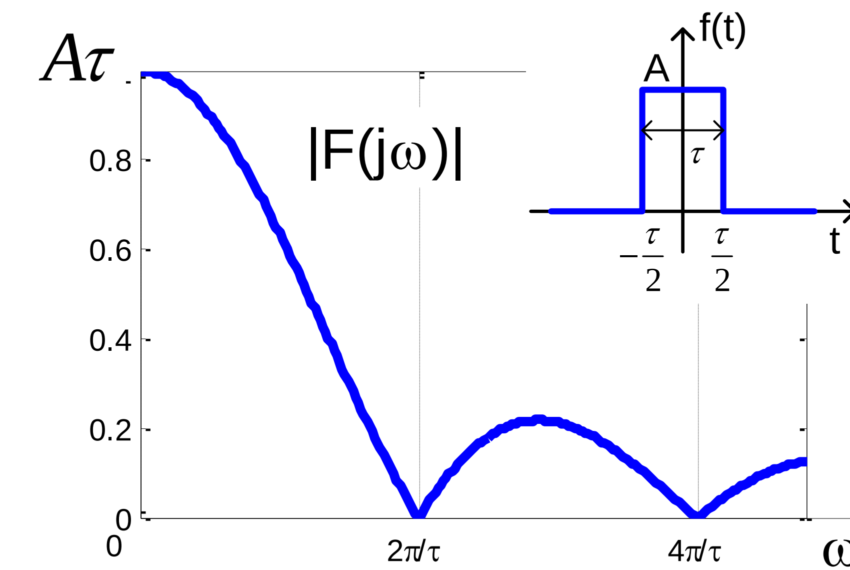
$$\dot{A}_n = \frac{2A\tau}{T} Sa\frac{n\Omega\tau}{2}$$

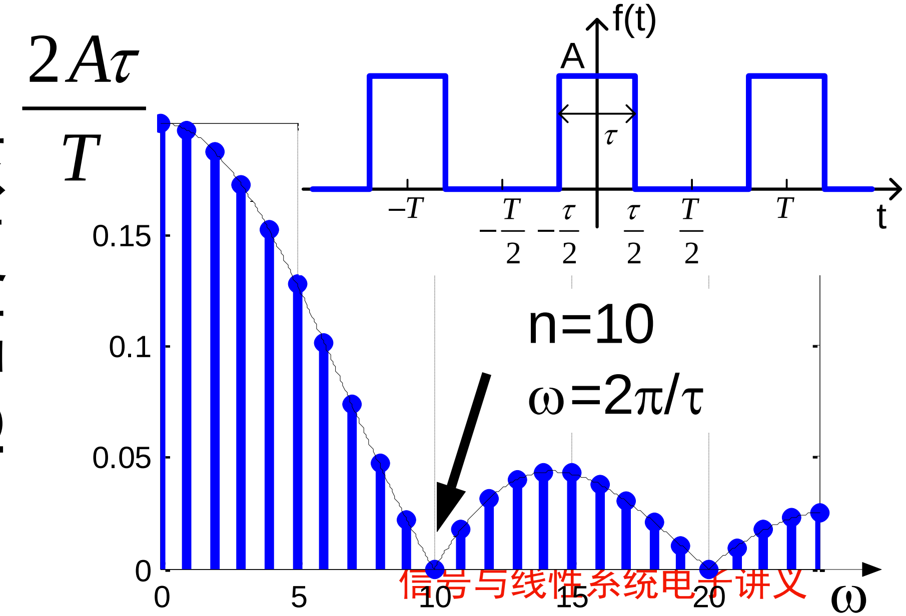


$$F(j\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{T\dot{A}_n}{2}=\lim_{\Omega\to 0}\pi\frac{\dot{A}_n}{\Omega}$$

信号周期T变化时(T→∞)，频谱振幅和谱线间隔改变，但包络线形状不变，即各频率分量振幅的比例关系不变。

非周期脉冲信号的频谱和由该脉冲按一定周期T=2π/Ω重复后构成的周期信号的复数振幅谱之间相差系数2/T， ω和nΩ代换之后可以互求。





常用函数的Fourier变换

❖常用函数的Fourier变换表 表3-2 pp.108-109

利用Fourier变换还可方便计算一些积分

$$F(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\mathrm{d}\omega$$

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

常用函数的Fourier变换

❖单边指数函数 $e^{-\alpha t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{\alpha+j\omega}$ $\quad\alpha>0$ 绝对可积

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha t}\varepsilon(t)e^{-j\omega t}dt$$

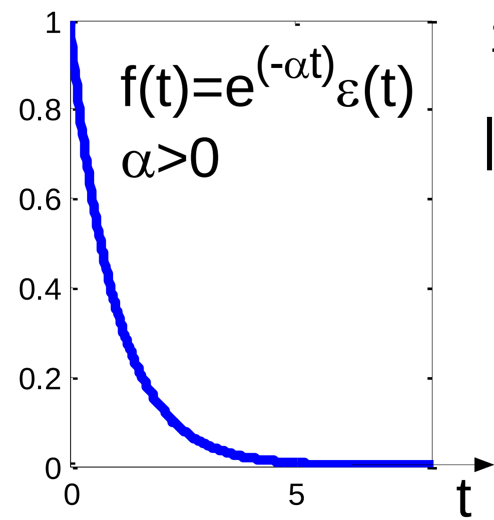
$$=\int_{0}^{\infty}e^{-(\alpha+j\omega)t}dt$$

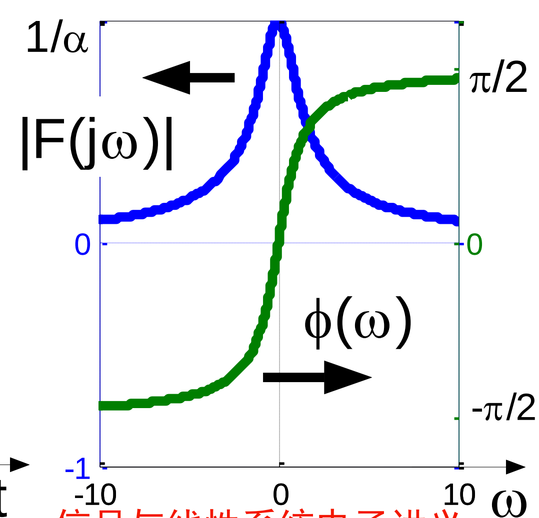
$$=-\frac{1}{\alpha+j\omega}e^{-(\alpha+j\omega)t}\Big|_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{\alpha+j\omega}$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}-j\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$\begin{cases}|F(j\omega)|=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\\[2ex]\phi(\omega)=-arctg\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right)\end{cases}$$





常用函数的Fourier变换

❖双边指数函数 $e^{-\alpha|t|} \leftrightarrow \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$ $\alpha>0$ 绝对可积

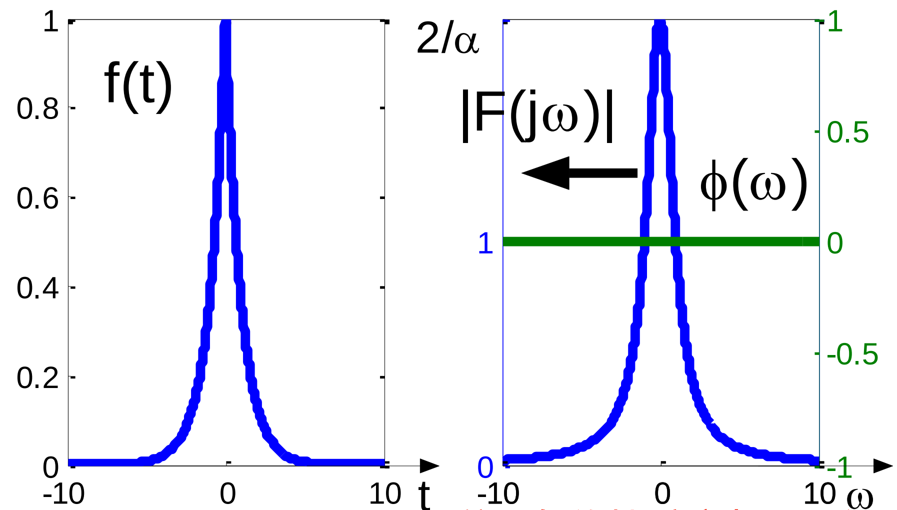
$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{\alpha-j\omega}+\frac{1}{\alpha+j\omega}$$

$$=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$\begin{cases} |F(j\omega)|=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \\ \phi(\omega)=0 \end{cases}$$



常用函数的Fourier变换

❖门函数(矩形脉冲)

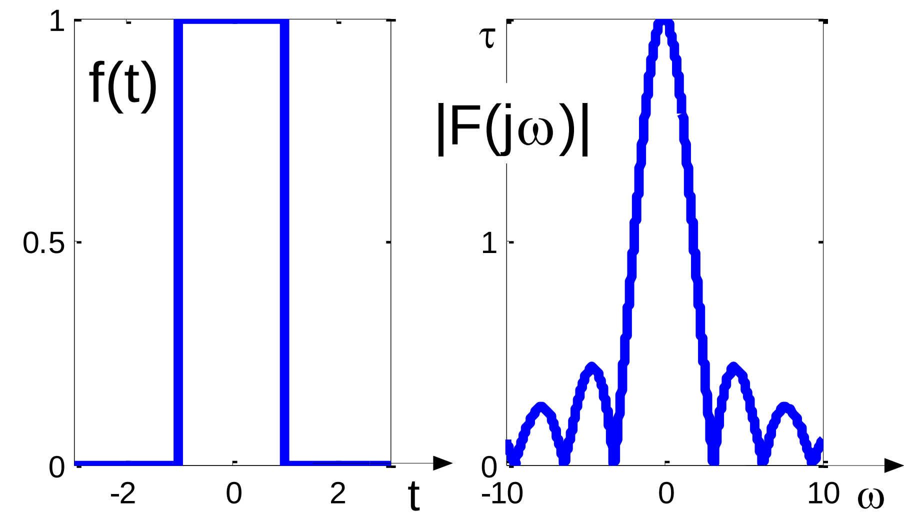
$$G_\tau(t)=\varepsilon\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\leftrightarrow \tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}G_\tau(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\left.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{j\omega\frac{\tau}{2}}}{-j\omega}$$

$$=\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$=\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



常用函数的Fourier变换

❖冲激函数 δ (t)， δ ’(t)

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

$$\delta'(t) \leftrightarrow j\omega$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) e^{-j\omega t} dt = -\frac{d}{dt} e^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = j\omega$$

常用函数的Fourier变换

❖ 常数 $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$ 不满足绝对可积条件

方法一：利用极限由双边指数函数的Fourier变换得到

$$e^{-\alpha|t|} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \quad \alpha > 0$$

$$f(t) = 1 = \lim_{\alpha\to 0} e^{-\alpha|t|}$$

冲激函数？

则 $$F(j\omega) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} = \begin{cases} 0 & \omega \neq 0 \\ \infty & \omega = 0 \end{cases} = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}d\omega = \lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{1+\left(\omega/\alpha\right)^2}d\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} 2arctg\left.\frac{\omega}{\alpha}\right|_{-\infty}^{\infty} = 2\pi$$

常用函数的Fourier变换

❖ 常数 $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$ 不满足绝对可积条件

方法二：利用冲激函数的Fourier变换得到

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

由Fourier反变换定义式

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

$t \to -\omega$ 变量替换 $\omega \to t$

$$\delta(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt$$

$$2\pi\delta(\omega) = 2\pi\delta(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt \leftrightarrow 1$$

常用函数的Fourier变换

❖阶跃函数

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$ 不满足绝对可积条件

利用极限由单边指数函数的Fourier变换得到

$$e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j\frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \quad \alpha > 0$$

$$f(t) = \varepsilon(t) = \lim_{\alpha \to 0} e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \begin{cases} 0 & \omega \neq 0 \\ \infty & \omega = 0 \end{cases}$$ 冲激函数? $= \pi\delta(\omega)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\omega/\alpha}{1 + \left(\omega/\alpha\right)^2} \right] d\omega$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} arctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = \pi$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \left[-j\frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right] = \frac{1}{j\omega}$$

常用函数的Fourier变换

❖符号函数

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}-1 & t<0 \\ 1 & t>0\end{cases} \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

不满足绝对可积条件

利用极限由下面的指数函数的Fourier变换得到

$$f_\alpha(t)=\begin{cases}-e^{\alpha t} & t<0 \\ e^{-\alpha t} & t>0\end{cases} \quad \alpha>0$$

$$f_\alpha(t) \leftrightarrow F_\alpha(j\omega)=\frac{1}{\alpha+j\omega}-\frac{1}{\alpha-j\omega}=-\frac{2j\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$\operatorname{sgn}(t)=\lim_{\alpha\to 0} f_\alpha(t)$$

$$\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \lim_{\alpha\to 0} F_\alpha(j\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\left(-\frac{2j\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right)=\frac{2}{j\omega}$$

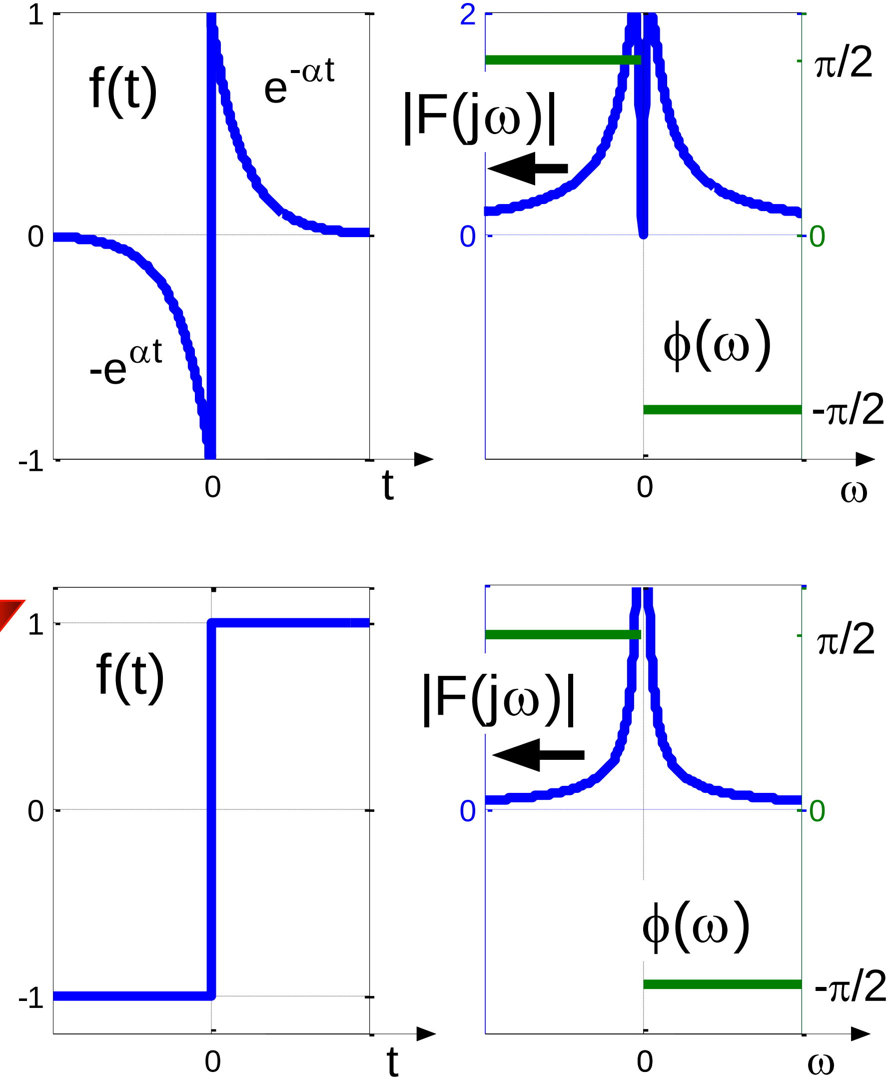
❖符号函数的频谱图

$$\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$$

$$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



Fourier变换汇总

$$F(j\omega)=\mathscr{F}\{f(t)\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$$

时域　　　频域

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}\{F(j\omega)\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\delta(t)\leftrightarrow 1$$

$$\delta'(t)\leftrightarrow j\omega$$

$$1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$\varepsilon(t)\leftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

$$\varepsilon\left(t+\tau/2\right)-\varepsilon\left(t-\tau/2\right)\leftrightarrow \tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\mathrm{sgn}(t)\leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)\leftrightarrow \frac{1}{\alpha+j\omega}$$

$$\alpha>0$$

$$e^{-\alpha|t|}\leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

指数函数的Fourier变换

$$f(t)=e^{j\omega_c t} \quad \leftrightarrow \quad F(j\omega)=\mathscr{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_c)t}dt$$

由 $\delta(t)\leftrightarrow 1$ 间接求积分

$$\mathscr{F}^{-1}\{1\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}d\omega=\delta(t)=\delta(-t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}d\omega$$

$$2\pi\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}d\omega$$

$t\rightarrow\omega-\omega_c$ 变量替换 $\omega\rightarrow t$

$$2\pi\delta(\omega-\omega_c)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_c)t}dt$$

$$\boxed{e^{j\omega_c t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_c)}$$

周期信号的Fourier变换

❖ 周期信号可以写成Fourier级数的形式

$$f(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{A}_n e^{jn\Omega t} \qquad \dot{A}_n=\frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}f(t)e^{-jn\Omega t}dt \qquad \Omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$F(j\omega)=\mathscr{F}\{f(t)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\dot{A}_n}{2}\mathscr{F}\{e^{jn\Omega t}\}$$

$$e^{j\omega_c t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_c) \quad \Rightarrow \quad e^{jn\Omega t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-n\Omega)$$

$$\boxed{F(j\omega)=\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{A}_n\delta(\omega-n\Omega)}$$

周期信号的Fourier变换是冲激序列。

各个冲激位于各次谐波频率处。
冲激强度为谐波振幅的 π 倍。

上一节复习

❖频谱密度函数

$$F(j\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{T\dot{A}_n}{2}$$

❖Fourier正变换和反变换定义式

$$F(j\omega)=\mathscr{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}\{F(j\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

❖常用函数的Fourier变换 $F(j\omega)=|F(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$

❖周期信号的Fourier变换是冲激序列

$$F(j\omega)=\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{A}_n\delta(\omega-n\Omega)$$

Fourier变换练习1

❖利用指数函数的Fourier变换，求下列函数的Fourier变换。

$$e^{j\omega_c t} \leftrightarrow 2\pi\delta\left(\omega-\omega_c\right)$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta\left(\omega\right)$$ 因为 $$\lim_{\omega_c \to 0} e^{j\omega_c t} = 1$$ 直流分量

$$\cos\omega_c t = \frac{e^{j\omega_c t}+e^{-j\omega_c t}}{2} \leftrightarrow \pi\left[\delta\left(\omega+\omega_c\right)+\delta\left(\omega-\omega_c\right)\right]$$

基波 单位余弦

$$\sin\omega_c t = \frac{e^{j\omega_c t}-e^{-j\omega_c t}}{2j} \leftrightarrow j\pi\left[\delta\left(\omega+\omega_c\right)-\delta\left(\omega-\omega_c\right)\right]$$

基波 单位正弦

只有一个谐波分量

Fourier变换练习2

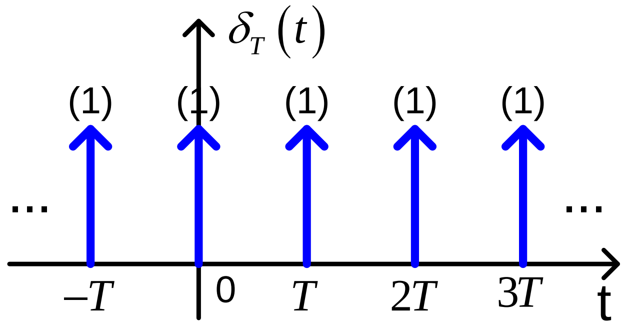
❖均匀冲激序列的Fourier变换 $\delta_T(t) \leftrightarrow \Omega\delta_\Omega(\omega)$

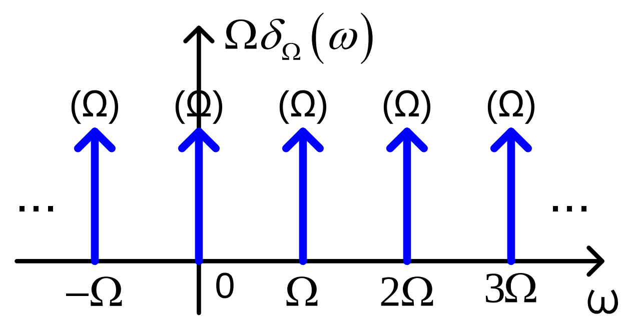
$$\delta_T(t) = \delta(t) + \delta(t \pm T) + \delta(t \pm 2T) + \ldots$$ 周期为T

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\Omega t}dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)e^{-jn\Omega t}dt = \frac{2}{T} \qquad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$F(j\omega) = \pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{A}_n\,\delta(\omega - n\Omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\Omega) = \Omega\delta_\Omega(\omega)$$

冲激序列的Fourier变换仍是冲激序列。





Fourier变换的性质

线性特性

❖Fourier变换定义式

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$F(j\omega) = \mathscr{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} dt$$

❖线性特性

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$$

$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$$

Fourier变换是线性运算

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega)$$

延时和移频特性

❖ 延时特性

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$f(t-t_0) \leftrightarrow F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

时域延时 t_0

频域相位 ωt_0

❖ 移频特性

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$f(t)e^{j\omega_C t} \leftrightarrow F(j(\omega-\omega_C))$$

频域移频 ω_c

时域乘上 $e^{j\omega_c t}$

推论

$$f(t)\cos\omega_C t \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[F(j(\omega+\omega_C))+F(j(\omega-\omega_C))\right]$$

$$f(t)\sin\omega_C t \leftrightarrow \frac{j}{2}\left[F(j(\omega+\omega_C))-F(j(\omega-\omega_C))\right]$$

尺度变换特性

❖尺度变换特性

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

a=-1 $\quad f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$

$$f(at-t_0) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right) e^{-\frac{j\omega t_0}{a}}$$

a=1, 延时特性

t_0=0, 尺度变换特性

推导

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$f_1(t) = f(at) \leftrightarrow F_1(j\omega) = \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

$$f(at-t_0) = f_1(t-t_0/a) \leftrightarrow F_1(j\omega) e^{-j\omega\frac{t_0}{a}} = \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\omega\frac{t_0}{a}}$$

或 $\quad f_1(t) = f(t-t_0)$

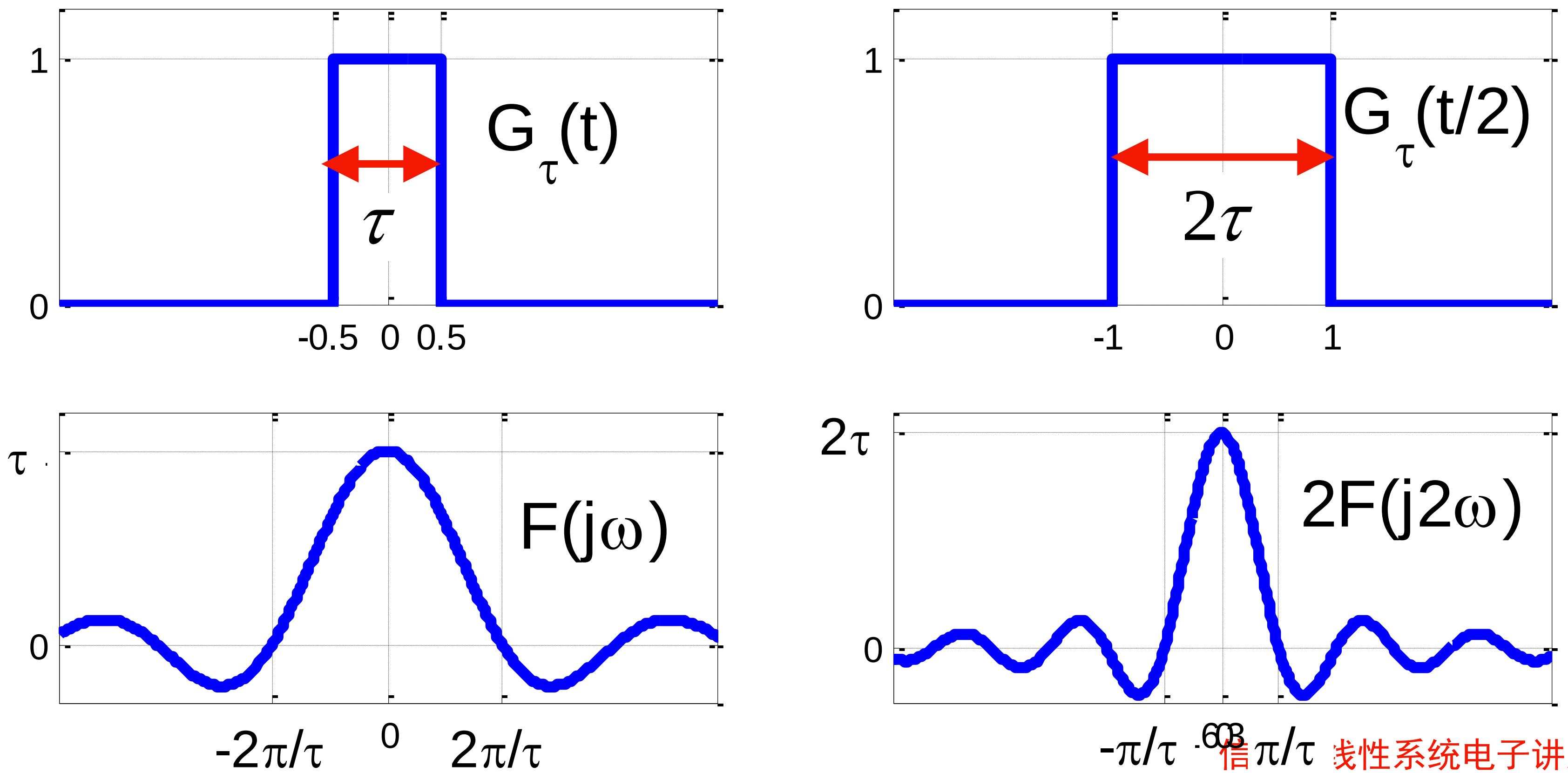
$$f(at-t_0) = f_1(at)$$

尺度变换特性举例

- 时域脉宽扩展为1/a倍。
- 频域频宽减小为a倍。
- 脉宽 X 频宽 = 常数

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$



奇偶特性

$$F(j\omega)=|F(j\omega)|e^{-j\phi(\omega)}=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t dt-j\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t dt=R(\omega)-jX(\omega)$$

$$R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t dt$$ 实偶函数 $$R(\omega)=R(-\omega)$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t dt$$ 实奇函数 $$X(\omega)=-X(-\omega)$$

$$|F(j\omega)|=\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)}$$ 实偶函数

$$|F(j\omega)|=|F(-j\omega)|$$

$$\phi(\omega)=arctg\frac{X(\omega)}{R(\omega)}$$ 实奇函数

$$\phi(\omega)=-\phi(-\omega)$$

❖若 f(t) 为实偶函数 $f(t)=f(-t)$

$X(\omega)=0$

实偶函数频谱为实偶函数

$$F(j\omega)=R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt=2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt$$

❖若 f(t) 为实奇函数 $f(t)=-f(-t)$

$R(\omega)=0$

实奇函数频谱为虚奇函数

$F(j\omega)=-jX(\omega)$

$$=-j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt=-2j\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$$

对称特性

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \qquad F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

系数相差2π

推导：$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(jt) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\{F(jt)\}$$

对称特性

对实偶函数 $f(t)=f(-t)$

Fourier变换为实偶函数 $f(t)\leftrightarrow F(j\omega)=R(\omega)$

由对称特性得到 $R(t)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)=2\pi f(\omega)$

或 $\dfrac{1}{2\pi}R(t)\leftrightarrow f(\omega)$

利用对称特性可以进行时间函数和频谱函数的互求。

$$\delta(t)\leftrightarrow 1 \qquad 1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$\operatorname{sgn}(t)\leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \qquad \frac{2}{jt}\leftrightarrow -2\pi\operatorname{sgn}(\omega)$$

时域微积分特性

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

❖时域求导相当于频域乘上因子jω。

$$\boxed{\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(j\omega)} \qquad \frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

❖时域积分相当于频域除以因子jω。

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}F(j\omega)$$

若F(0)=0 $\boxed{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}F(j\omega)}$

时域微分特性推导

❖时域求导相当于频域乘上因子jω。

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \qquad \frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(j\omega)$$

由Fourier反变换定义式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}\left[F(j\omega)e^{j\omega t}\right]d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[j\omega F(j\omega)\right]e^{j\omega t}d\omega$$

时域积分特性推导

$$\mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\}e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\underline{\varepsilon(t-\tau)}d\tau\right\}e^{-j\omega t}dt \qquad \tau > t, \varepsilon(t-\tau) = 0$$

变换积分顺序

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left\{\underline{\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t-\tau)e^{-j\omega t}dt}\right\}d\tau$$

$$\varepsilon(t-\tau) \leftrightarrow \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]e^{-j\omega\tau}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\pi\delta(\omega)e^{-j\omega\tau}d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$= \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}F(j\omega)$$

频域微积分特性

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$-jtf(t) \leftrightarrow \frac{dF(j\omega)}{d\omega}$$

$$\pi f(0)\delta(t) + j\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(j\Omega)d\Omega$$

卷积定理

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) \qquad f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$$

时域卷积定理：
时域的卷积运算相当于频域的乘法运算

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) F_2(j\omega)$$

频域卷积定理：
频域的卷积运算相当于时域的乘法运算

$$f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\left[F_1(j\omega) * F_2(j\omega)\right]$$

卷积定理

推导

$$\mathcal{F}\left\{f_1(t)*f_2(t)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right\}e^{-j\omega t}dt$$

变换积分顺序 $=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)\underline{\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right\}}d\tau$

延时特性 $F_2(j\omega)e^{-j\omega\tau}$

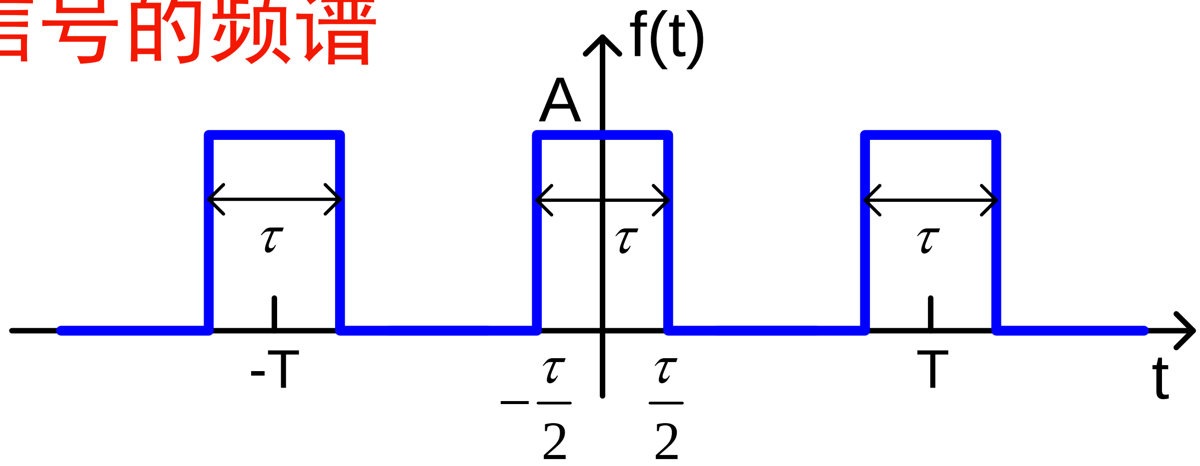
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)F_2(j\omega)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right\}F_2(j\omega)$$

$$=F_1(j\omega)F_2(j\omega)$$

Fourier变换的性质练习1

❖求图示三脉冲信号的频谱



提示：

$$G_\tau(t) \leftrightarrow \tau \,\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

延时特性 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ $f(t-t_0) \leftrightarrow F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

$$f(t) = AG_\tau(t+T) + AG_\tau(t) + AG_\tau(t-T)$$

$$F(j\omega) = A\tau\,\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})\left[e^{j\omega T} + 1 + e^{-j\omega T}\right]$$

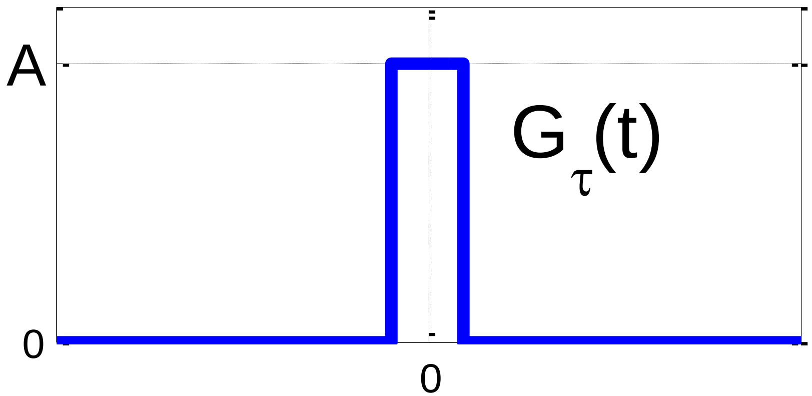
$$= A\tau\,\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})\left[1 + 2\cos(\omega T)\right]$$

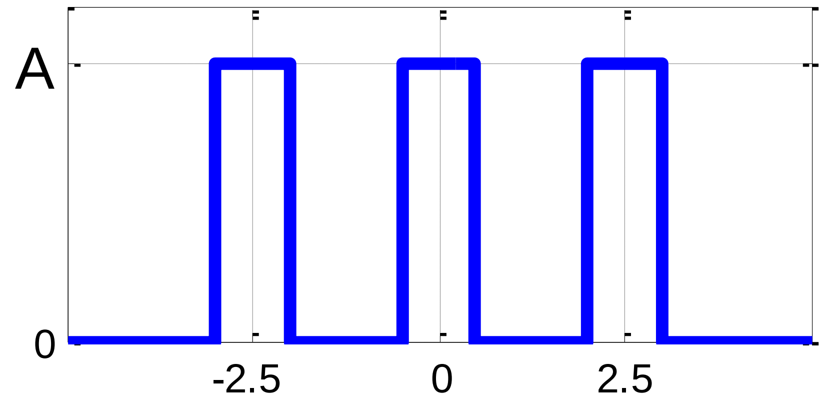
Fourier变换的性质练习1

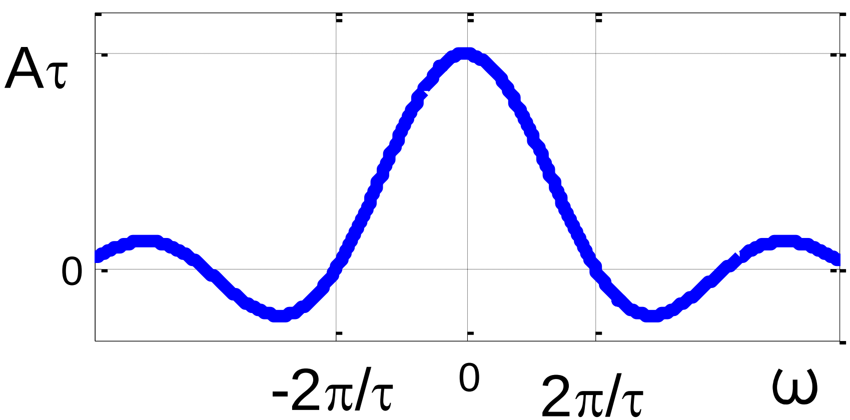
❖ 频谱图

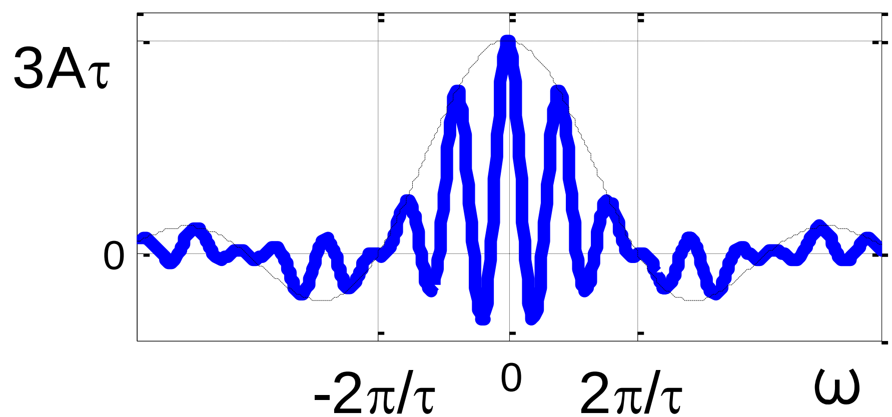
三脉冲间隔T=2.5

$$G_\tau(t) \leftrightarrow \tau\,\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2}) \qquad A\tau\,\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})\left[1+2\cos(\omega T)\right]$$



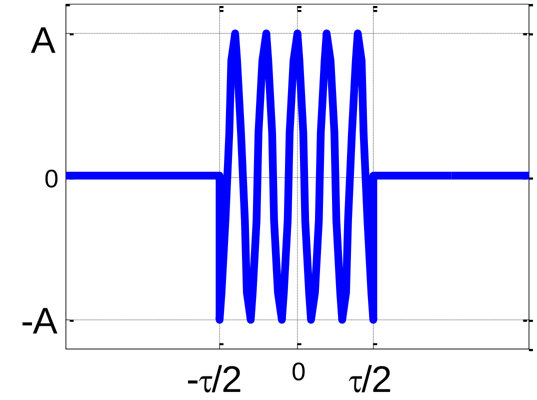






Fourier变换的性质练习2

❖ 求矩形调幅信号的Fourier变换



$$f(t)=G_\tau(t)\cos\omega_0 t$$

方法一：

$$G_\tau(t)\leftrightarrow \tau\,\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

移频特性及其推论 $f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$

$$f(t)e^{j\omega_C t_0}\leftrightarrow F\left(j\left(\omega-\omega_C\right)\right)$$

$$f(t)\cos\omega_C t\leftrightarrow\frac{1}{2}\left[F\left(j\left(\omega+\omega_C\right)\right)+F\left(j\left(\omega-\omega_C\right)\right)\right]$$

$$F(j\omega)=\frac{A\tau}{2}\left[\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau}{2}\left(\omega+\omega_0\right)\right)+\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau}{2}\left(\omega-\omega_0\right)\right)\right]$$

Fourier变换的性质练习2

方法二： $f\left(t\right)=G_{\tau}\left(t\right)\cos\omega_0 t$

卷积定理

$$G_{\tau}\left(t\right)\leftrightarrow \tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\cos\omega_0 t\leftrightarrow \pi\left[\delta\left(\omega+\omega_0\right)+\delta\left(\omega-\omega_0\right)\right]$$

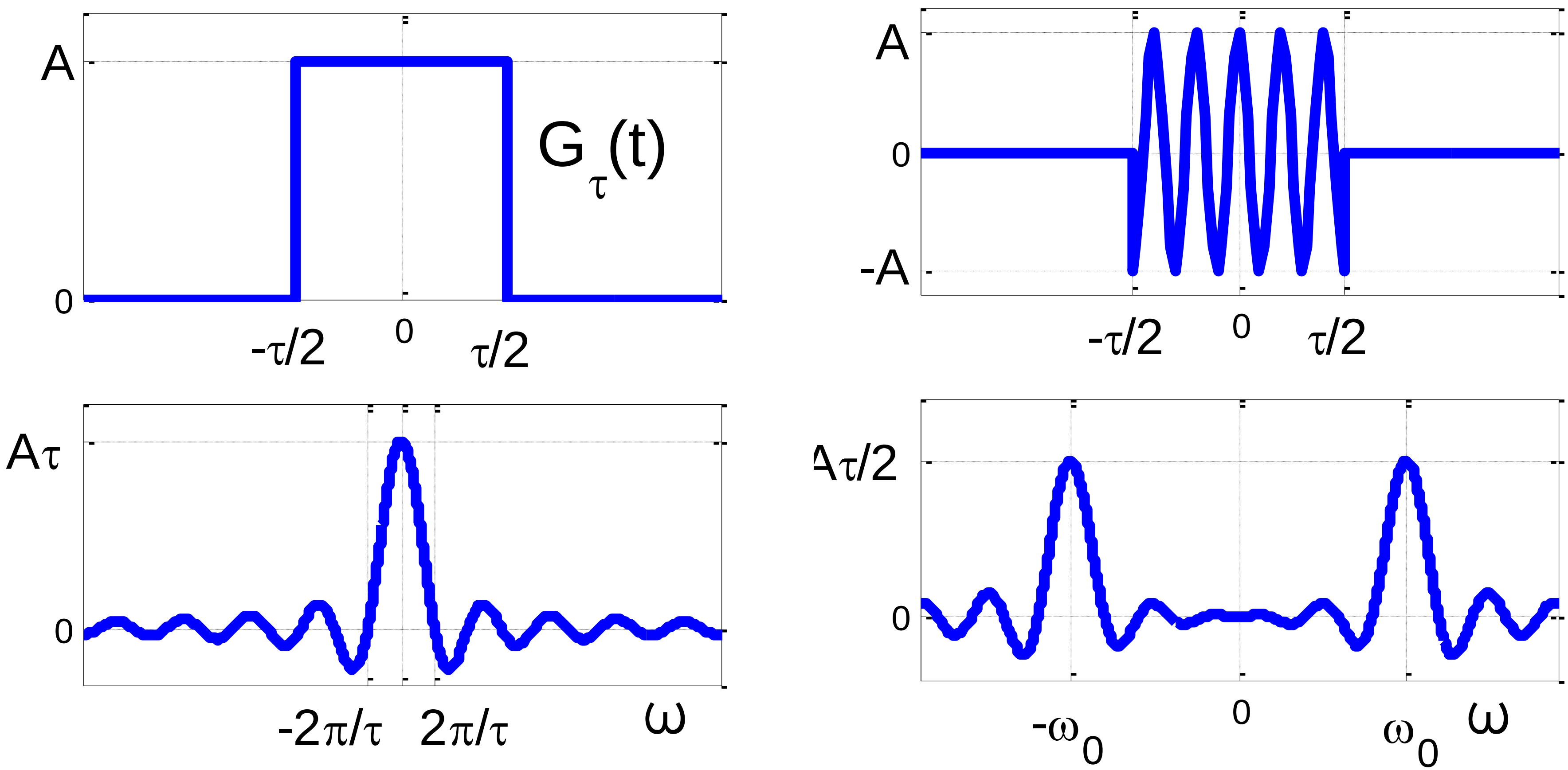
$$F(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\left\{A\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)*\pi\left[\delta\left(\omega+\omega_0\right)+\delta\left(\omega-\omega_0\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{A\tau}{2}\left\{\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau}{2}\left(\omega+\omega_0\right)\right)+\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau}{2}\left(\omega-\omega_0\right)\right)\right\}$$

Fourier变换的性质练习2

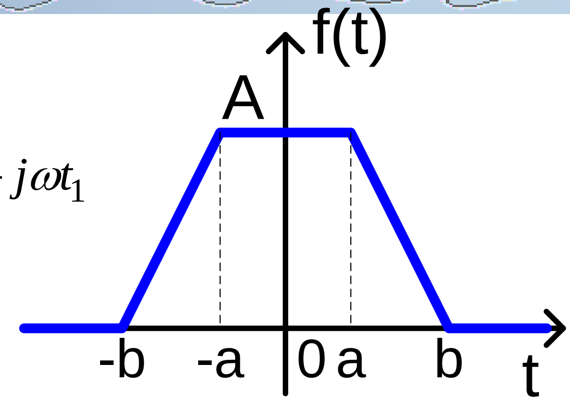
❖频谱图

f(t)乘上$\cos\omega_0 t$ 或 $\sin\omega_0 t$ 将频谱 $F(j\omega)$ 一分为二，左右各平移 ω_0。



Fourier变换的性质练习3

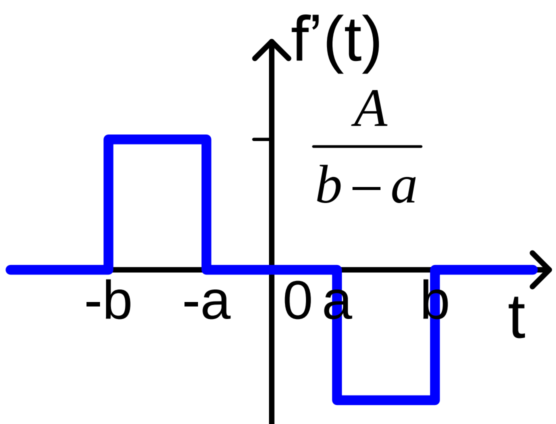
❖ 求图示梯形脉冲的频谱

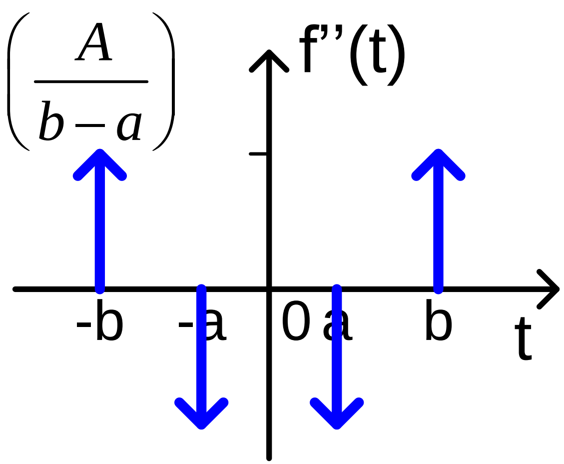


利用时域微积分特性和 $\delta(t-t_1) \leftrightarrow e^{-j\omega t_1}$

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t)=\frac{A}{b-a}\left[\delta(t+b)-\delta(t+a)-\delta(t-a)+\delta(t-b)\right]$$

$$(j\omega)^2F(j\omega)=\frac{A}{b-a}\left[e^{j\omega b}-e^{j\omega a}-e^{-j\omega a}+e^{-j\omega b}\right]$$





Fourier变换的性质练习3

整理得

$$F(j\omega)=\frac{2A}{b-a}\left[\frac{\cos(b\omega)-\cos(a\omega)}{\omega^{2}}\right]$$

分段直线组成的信号可以通过求导变成冲激函数后再利用Fourier变换的性质求出其频谱函数。

也可以通过Fourier变换定义式求其频谱函数，要利用分段积分，并注意积分限的变化。

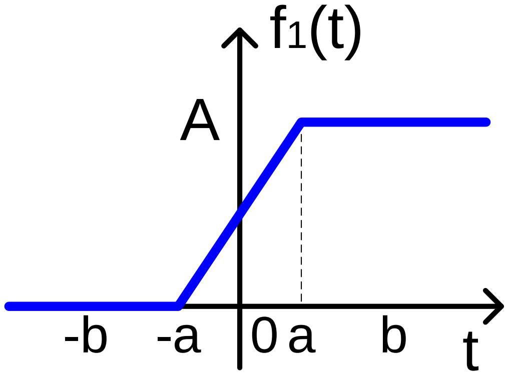
Fourier变换的性质练习3

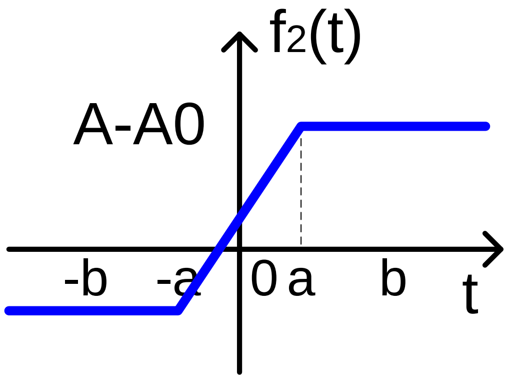
积分常数的影响

$$f_2(t) = f_1(t) - A_0$$

$$\frac{d}{dt} f_2(t) = \frac{d}{dt} f_1(t)$$

$$F_2(j\omega) \overset{?}{=} F_1(j\omega)$$ X





Fourier变换的性质练习4

❖求 f(t)。 $F(j\omega)=-\dfrac{2}{\omega^2}$

提示：

$$\operatorname{sgn} t \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

频域微分特性 $-jtf(t) \leftrightarrow \dfrac{dF(j\omega)}{d\omega}$

$$-jt\operatorname{sgn} t \leftrightarrow -\frac{2}{j\omega^2}$$

$$t\operatorname{sgn} t = |t| \leftrightarrow -\frac{2}{\omega^2}$$

同理：

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$t \leftrightarrow j2\pi\delta'(\omega)$$

$$t^n \leftrightarrow j^n 2\pi\delta^n(\omega)$$

周期信号的Fourier变换

❖利用延时特性得到周期信号的Fourier变换

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_0(t-nT) \qquad f_0(t)\leftrightarrow F_0(j\omega)$$

$$F(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(j\omega)e^{-j\omega nT}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(j\omega)e^{j\omega nT}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{A}_n e^{jn\Omega t}=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn\Omega t}$$

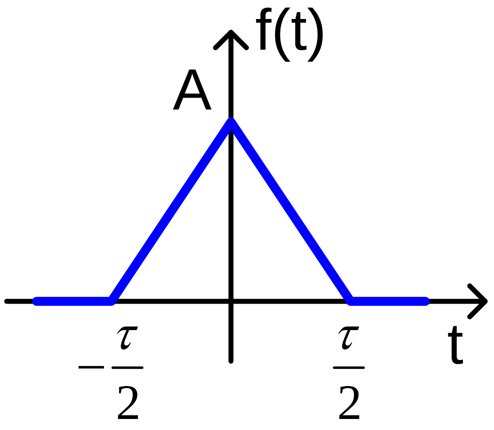
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Omega)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{A}_n e^{jnT\omega}=\frac{1}{\Omega}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jnT\omega}$$

$$F(j\omega)=\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_0(j\omega)\delta(\omega-n\Omega)=\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{A}_n\delta(\omega-n\Omega)$$

Fourier变换的性质练习5

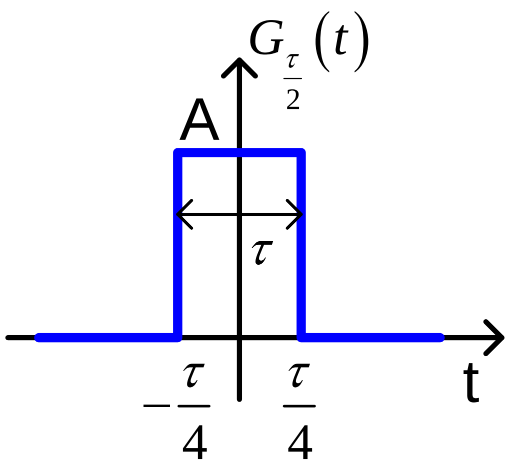
❖求Fourier变换。

$$f(t)=\begin{cases} A\left(1-\dfrac{2|t|}{\tau}\right) & |t|\le \dfrac{\tau}{2} \\ 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$



提示：

$$f(t)=\frac{2A}{\tau}G_{\frac{\tau}{2}}(t)*G_{\frac{\tau}{2}}(t)$$



卷积定理 $G_{\tau}(t)\leftrightarrow \tau\,\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$

$$F(j\omega)=\frac{2A}{\tau}\left[\frac{\tau}{2}\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{4})\right]^2=\frac{A\tau}{2}\left[\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{4})\right]^2$$

上一节复习

❖Fourier变换的性质

- ◆ 线性特性
- ◆ 延时和移频特性
- ◆ 尺度变换特性：脉宽 x 频宽 = 常数
- ◆ 奇偶特性
- ◆ 对称特性
- ◆ 时域/频域微积分特性
- ◆ 时域/频域卷积定理

Parseval定理与能量频谱

Parseval定理的意义

- Parseval定理从能量的角度考察信号的时域和频域特性间的关系。
- 信号的分类 – 从能量的角度
  - 功率信号：能量无限大，功率有限，
    典型信号：周期信号
  - 能量信号：能量有限，功率为零
    典型信号：非周期单脉冲信号
- 对功率信号，考察信号功率在时域和频域的表达式。
- 对能量信号，考察信号能量在时域和频域的表达式。

Parseval定理

❖对周期信号 – 在时域和频域求得的信号功率相等，且功率等于该信号在完备正交函数集中各分量的功率之和。

Fourier级数 $f(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t\right)$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n e^{j\phi_n}e^{jn\Omega t}$$

$$P=\overline{f^2(t)}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[f(t)\right]^2dt$$

时域中的功率

= 各谐波分量功率之和

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{A_n}{2}\right)^2=\left(\frac{a_0}{2}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n^2+b_n^2}{2}\right)$$

Parseval定理

❖对能量信号－在时域中求得的能量等于该信号在频域中求得的能量。

$$W=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f\left(t\right)\right]^{2}dt$$

Rayleigh定理

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F\left(j\omega\right)\right|^{2}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\left|F\left(j2\pi f\right)\right|^{2}df$$

定义能量密度频谱(能谱)函数G(ω)，频带d ω内的信号能量为G(ω)d ω，信号在整个频率范围内的能量为

$$W=\int_{0}^{\infty}G\left(\omega\right)d\omega \qquad G\left(\omega\right)=\frac{1}{\pi}\left|F\left(j\omega\right)\right|^{2}$$

能谱与幅谱平方的形状相同，与相位频谱无关。

频带宽度和脉冲宽度

❖从能量角度，脉冲宽度 τ 定义为脉冲中绝大部分能量所集中的那段时间。

$$\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \left[f\left(t\right) \right]^2 dt = \eta W$$

❖从能量角度，频带宽度 BW 定义为脉冲中绝大部分能量所集中的那段频段。

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{BW} \left| F\left(j\omega \right) \right|^2 d\omega = \eta W$$

LTI系统的频域分析法

LTI系统时域和频域分析法特点

❖时域分析法

- 以时间为变量。
- 求解时域中的线性常系数微分方程。
- 信号分解为冲激函数，利用冲激响应和卷积积分求得系统的零状态响应。

共同处：利用线性系统的叠加性和齐次性

❖频域分析法

- 以频率为变量。
- 求解频域中的代数方程。
- 信号分解为正弦函数或指数函数，利用Fourier变换将时域问题转换到频域以简化运算。

缺点：增加两次积分运算

变换域分析法求解系统响应

- 通过函数变量的转换，将时域中求解响应的问题转换到变换域(频域，复频域，Z域等)，使系统方程转换成便于处理的简便形式。
- 在变换域中求解之后需要再转换回时域得到最终结果。

系统函数的定义

❖输入激励

$$e(t) \leftrightarrow E(j\omega)$$

❖零状态响应

$$r(t) \leftrightarrow R(j\omega)$$

$$r(t) = e(t) * h(t) \leftrightarrow R(j\omega) = E(j\omega)H(j\omega)$$

❖系统函数或频率响应函数：联系频域中零状态响应与输入激励的函数。

$$H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)}$$

系统函数和单位冲激响应为Fourier变换对

$$h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$$

系统函数的求解

❖对微分方程两边求Fourier变换。

$$\frac{d^n r}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}r}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{d\ r}{dt}+a_0 r$$

$$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$$

$$=b_m\frac{d^m e}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}e}{dt^{m-1}}+\ldots+b_1\frac{d\ e}{dt}+b_0 e$$

$$\frac{df(t)}{dt}\leftrightarrow j\omega F(j\omega)$$

$$\left\{(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\ldots+a_1(j\omega)+a_0\right\}R(j\omega)$$

$$=\left\{b_m(j\omega)^m+b_{m-1}(j\omega)^{m-1}+\ldots+b_1(j\omega)+b_0\right\}E(j\omega)$$

$$H(j\omega)=\frac{R(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{b_m(j\omega)^m+b_{m-1}(j\omega)^{m-1}+\ldots+b_1(j\omega)+b_0}{(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\ldots+a_1(j\omega)+a_0}$$

❖直接由电路方程得到。

频域分析法步骤

❖时域→频域，得到频域的输入激励信号。

$$e(t) \to E(j\omega)$$

❖根据系统方程，找出系统函数。$H(j\omega)$

可以得到单位冲激响应 $H(j\omega) \leftrightarrow h(t)$

❖在频域中求零状态响应。

$$R(j\omega) = E(j\omega)H(j\omega)$$

❖频域→时域，得到时域的输出信号。

$$R(j\omega) \to r(t)$$

时域到频域 → 频域求解代数方程 → 频域到时域

LTI频域分析法练习1

❖已知系统微分方程和输入激励信号，求响应。

$$\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=e(t) \qquad e(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$$

(1) $e(t)\leftrightarrow E(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega+1}$

(2) $(j\omega+2)R(j\omega)=E(j\omega) \qquad H(j\omega)=\dfrac{R(j\omega)}{E(j\omega)}=\dfrac{1}{j\omega+2}$

(3) $R(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega+2}\dfrac{1}{j\omega+1}=\dfrac{1}{j\omega+1}-\dfrac{1}{j\omega+2}$

(4) $R(j\omega)\leftrightarrow r(t)=\left[e^{-t}-e^{-2t}\right]\varepsilon(t)$

LTI频域分析法练习2

❖电路如图所示，求单位冲激响应$u_c(t)$。

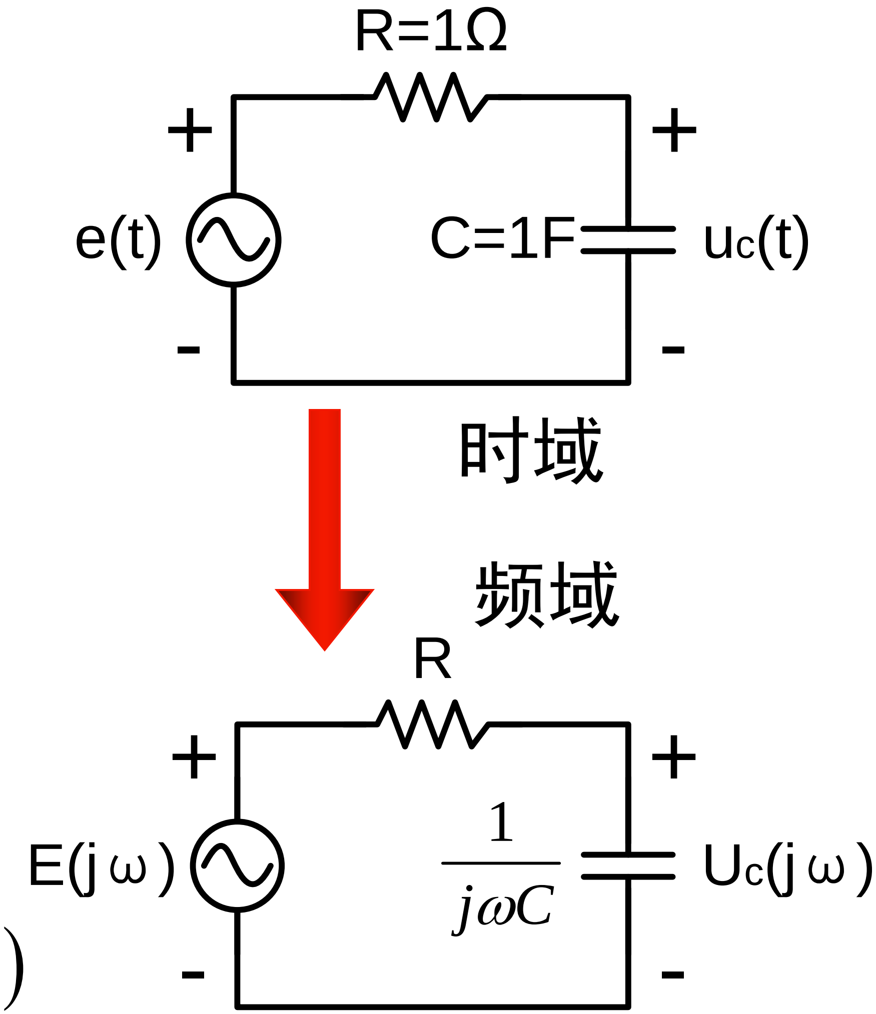
$$U_C(j\omega)=I\frac{1}{j\omega C}$$

$$E(j\omega)=U_C(j\omega)+U_R(j\omega)$$

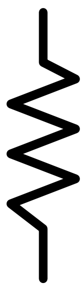
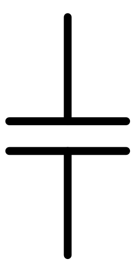
$$=I\left(R+\frac{1}{j\omega C}\right)$$

$$H(j\omega)=\frac{U_C(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}+R}$$

$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}\leftrightarrow h(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$$



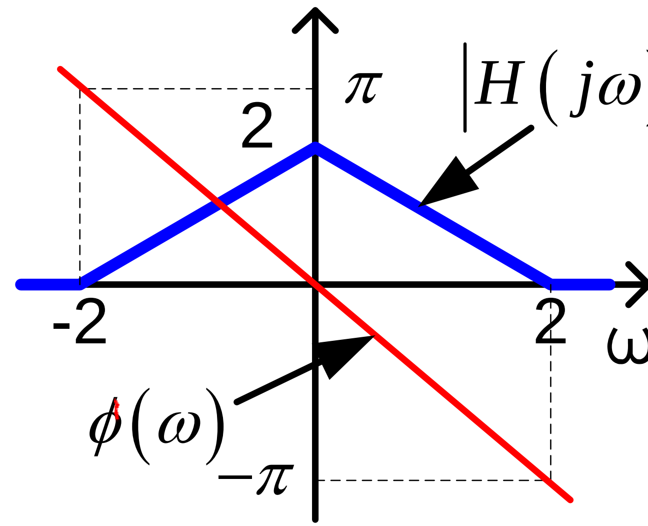
RLC频域阻抗

		时域	频域
		$z=\dfrac{u(t)}{i(t)}$	$Z=\dfrac{U(j\omega)}{I(j\omega)}$
R		R	R
L		pL	$j\omega L$
C		$\dfrac{1}{pC}$	$\dfrac{1}{j\omega C}$

LTI频域分析法练习3

❖ 已知线性系统频响曲线和输入激励，求零状态响应。

$$e(t)=2+4\cos t+4\cos 2t$$



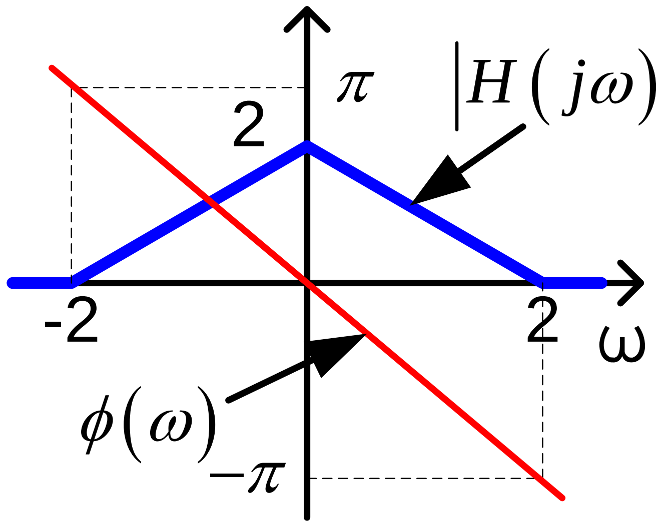
(1) 时域→频域，e(t)→E(jω)

$$E(j\omega)=4\pi\delta(\omega)+4\pi\left[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)\right]$$
$$+4\pi\left[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)\right]$$

LTI频域分析法练习3

(2) 系统函数 H(jω)

$$H(j\omega)=\begin{cases}(2-|\omega|)e^{-j\frac{\pi}{2}\omega} & |\omega|<2\\ 0 & |\omega|\geq 2\end{cases}$$



(3) 频域求解 R(jω)

$$R(j\omega)=E(j\omega)H(j\omega)$$
$$=8\pi\delta(\omega)+4\pi\delta(\omega+1)e^{j\frac{\pi}{2}}+4\pi\delta(\omega-1)e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

(4) 频域→时域，R(jω)→r(t)

$$r(t)=4+4\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=4+4\sin t$$

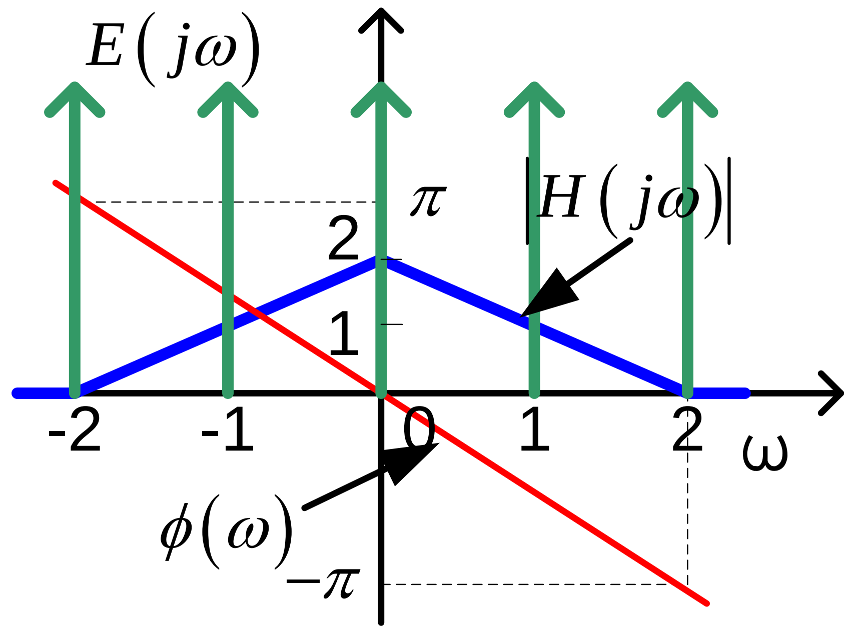
LTI频域分析法练习3

方法二：利用Fourier级数

$$e(t)=2+4\cos t+4\cos 2t$$

$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\phi_n)$$

T=2π　Ω=1



输入激励包含有直流，基波(一次谐波)，二次谐波分量。

对直流、基波和二次谐波的系统函数为：

$$H(j\omega)=\begin{cases}2 & n=0\\ e^{-j\frac{\pi}{2}} & n=1\\ 0 & n=2\end{cases}$$

系统响应为：

$$r(t)=4+4\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=4+4\sin t$$

上一节复习

❖Parseval定理

- 功率信号
- 能量信号

$$P=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[f(t)\right]^{2}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{A_n}{2}\right)^{2}$$

$$W=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(t)\right]^{2}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(j\omega)\right|^{2}d\omega=\int_{0}^{\infty}G(\omega)d\omega$$

❖变换域分析法一般思路

- 时域→变换域；变换域求解；变换域→时域

❖频域分析法

- 利用Fourier变换得到频域的信号及系统方程
- 系统函数

$$H(j\omega)=\frac{R(j\omega)}{E(j\omega)}\qquad h(t)\leftrightarrow H(j\omega)$$

无失真传输

信号失真的原因

- 系统对组成信号的各个频率分量的幅度衰减程度不同，造成信号各频率分量的相对比例关系发生变化，称为幅度失真。
- 系统对组成信号的各个频率分量的相移不与频率成正比，造成信号各频率分量在时间轴上的相对位置关系发生变化，称为相位失真。
- 幅度失真和相位失真都没有产生新的频率分量，属于线性失真。

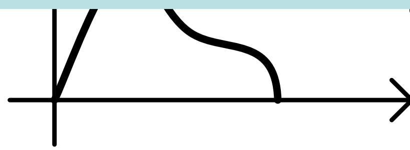
无失真传输

❖ 无失真传输指信号经过传输系统之后，只有幅度大小和出现的时间的不同，信号的形状完全不变。

$$r(t)=Ke(t-t_0)$$

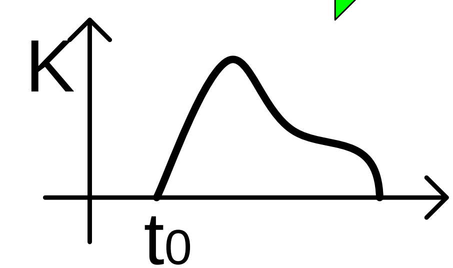
输入信号

当传输有限带宽的信号时，只要在信号占有频带范围内，系统的幅频、相频特性满足无失真传输条件即可。



输出信号

r(t)

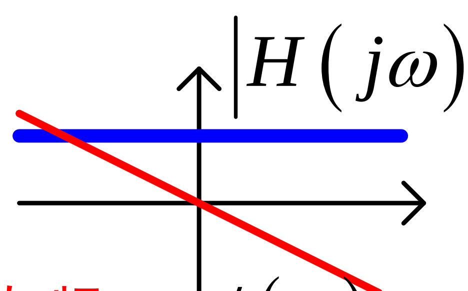


无失真传输的理想条件

$$H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

$$=Ke^{-j\omega t_0}$$

相位变化与频率变化成比例



不是绝对！

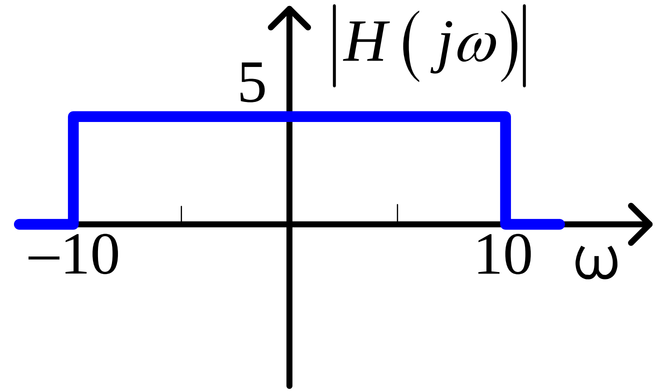
$$h(t)=K\delta(t-t_0)$$

无失真传输练习

❖系统的幅频特性|H(jω)|和相频特性如图所示，下列信号通过该系统时，哪些信号不会失真？

(1) $e(t)=\cos t+4\cos 8t$ 相位失真

Ω=1 基波 8次谐波

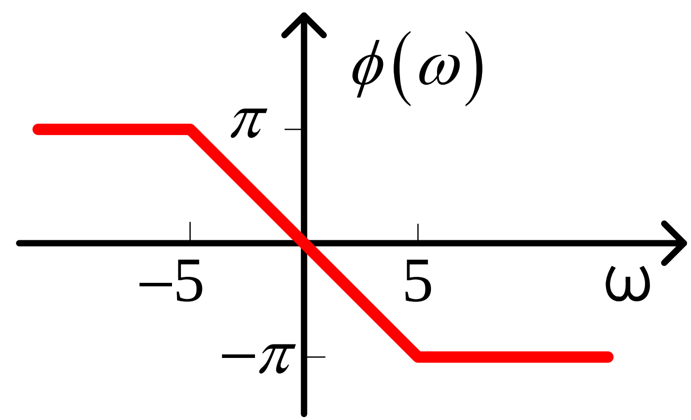


(2) $e(t)=\sin 2t+\sin 4t$ 无失真

(3) $e(t)=\cos^2 4t$ 无失真

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 8t$$

只有一个谐波，相当于延迟恒定值



(4) $e(t)=\sin t\sin 7t$ 无失真

$$=\frac{1}{2}\cos 6t+\frac{1}{2}\cos 8t$$

cos(6t-pi)+cos(8t-pi)

=-cos6t-cos8t 关于横坐标对称，

也可认为两个谐波均延迟半周期

理想低通滤波器

理想低通滤波器

❖理想低通滤波器的频响特性

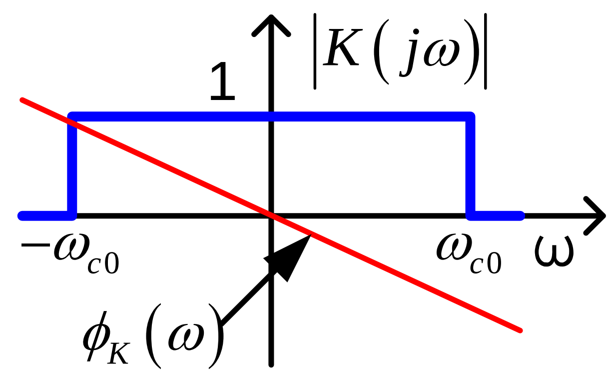
- 低于截止频率的频率分量可以无失真地通过。
- 高于截止频率的频率分量不能通过。

低通滤波去除高频分量，必然存在失真

❖系统函数(归一化)

$$K(j\omega)=|K(j\omega)|e^{j\phi_K(\omega)}=\begin{cases}e^{-j\omega t_0} & |\omega|<\omega_{c0}\\ 0 & |\omega|>\omega_{c0}\end{cases}$$

模量在通频带内为常数，通频带外为零。幅角在通频带内与频率成正比。即激励信号中低于截止频率的分量可以一致均匀的通过，在时间上延时 t_0。



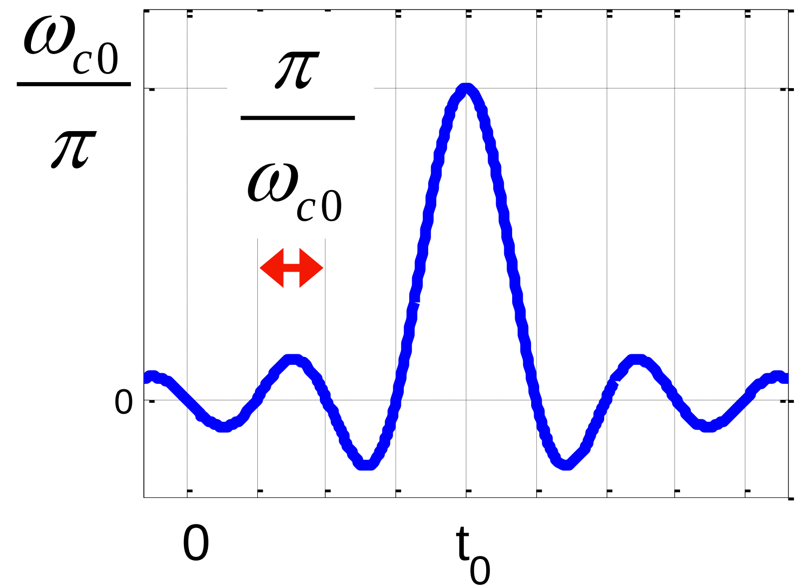
单位冲激响应

由Fourier反变换定义式

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{c0}}^{\omega_{c0}}e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j(t-t_0)}\right|_{-\omega_{c0}}^{\omega_{c0}}=\frac{\omega_{c0}}{\pi}Sa\left(\omega_{c0}(t-t_0)\right)$$



利用门函数，系统函数可以写成

$$K(j\omega)=e^{-j\omega t_0}G_{2\omega_{c0}}(\omega)\leftrightarrow\frac{\omega_{c0}}{\pi}Sa\left(\omega_{c0}(t-t_0)\right)$$

单位阶跃响应

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \qquad R_\varepsilon(j\omega) = \begin{cases} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_{c0} \\ 0 & |\omega| > \omega_{c0} \end{cases}$$

由Fourier反变换定义式

$$r_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{c0}}^{\omega_{c0}} \pi\delta(\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{c0}}^{\omega_{c0}} \frac{e^{-j\omega(t-t_0)}}{j\omega} d\omega$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_{c0}(t-t_0)} \frac{\sin\left[\omega(t-t_0)\right]}{\omega(t-t_0)} d\omega(t-t_0)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si\left[\omega_{c0}(t-t_0)\right]$$

理想低通的响应

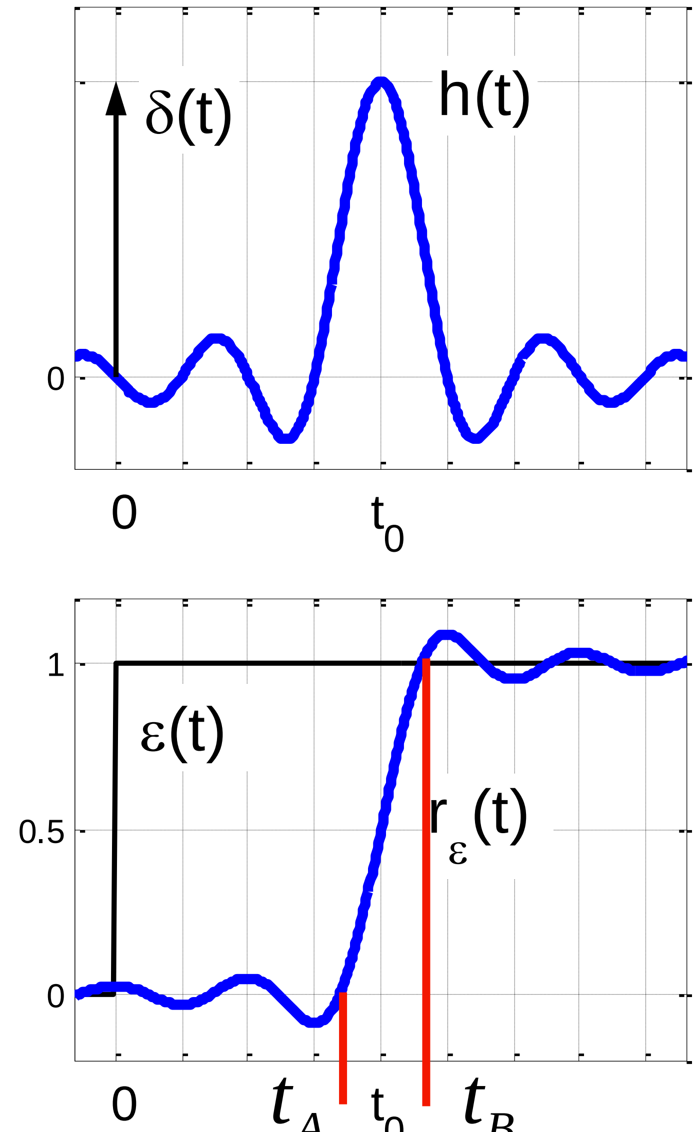
❖响应比激励延时t_0出现。

❖由于高频分量被滤除，响应的波形与激励相比有所不同。

❖截止频率增加，高频分量增多，响应的边沿越陡峭，也越接近激励的形状。

❖输出波形前沿倾斜，说明响应的建立需要一定的时间。响应建立需要的时间与通频带成反比。

$$t_B - t_A = \frac{3.84}{\omega_{c0}}$$



Paley-Wiener准则

- 理想滤波器是无法实现的，因为在t<0的区域中出现响应，不满足系统因果性。
- 系统因果性在时域中表现为响应必须出现在激励之后，在频域中意味着系统转移函数的幅频特性必须满足

必要条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(j\omega)\right|^2 d\omega<\infty \quad 且 \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\ln\left|H(j\omega)\right|\right|}{1+\omega^2}d\omega<\infty$$

对一个因果系统，|H(jω)|可以在不连续点上为零，但不允许在一个有限频带内为零。

理想滤波器都是物理上无法实现，物理上可实现的滤波器特性只能接近于理想特性。

第三、四章小结

- Fourier级数
  - 三角和指数Fourier级数
  - 函数奇偶性与谐波分量的关系
- 频谱图
  - 周期信号频谱图(离散性，谐波性，收敛性)
  - 非周期信号的频谱图(频谱密度函数即Fourier变换)
- Fourier变换的性质
- Parseval定理与能量密度函数
- 频域分析法求LTI系统的零状态响应
- 无失真传输的条件
- 理想低通滤波器的频响特性

频域分析法综合练习1

❖求单位冲激响应，单位阶跃响应，零状态响应。系统转移函数及输入激励为：

$$H(j\omega)=\frac{1-j\omega}{1+j\omega} \qquad e(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)$$

$$H(j\omega)=\frac{1-j\omega}{1+j\omega}=-1+\frac{2}{1+j\omega}$$

$$\delta(t)\leftrightarrow 1$$

$$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{\alpha+j\omega}$$

$$h(t)=-\delta(t)+2e^{-t}\varepsilon(t)$$

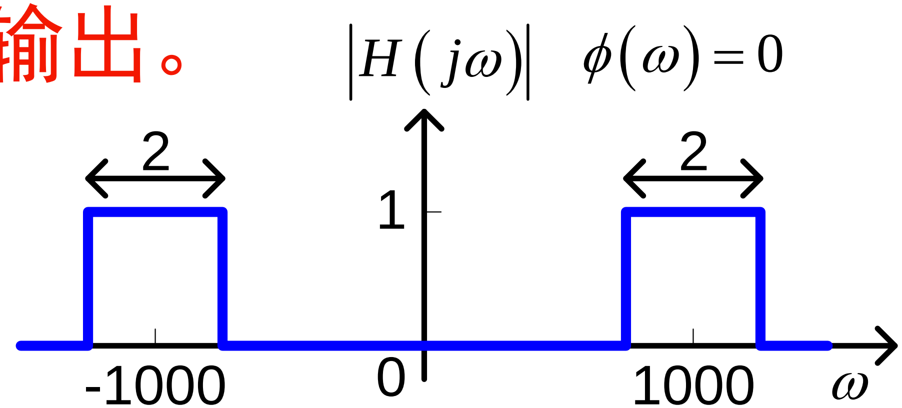
$$r_{\varepsilon}(t)=\varepsilon(t)*h(t)=\left(1-2e^{-t}\right)\varepsilon(t)$$

$$r(t)=e(t)*h(t)=\left(2e^{-t}-3e^{-2t}\right)\varepsilon(t)$$

频域分析法综合练习2

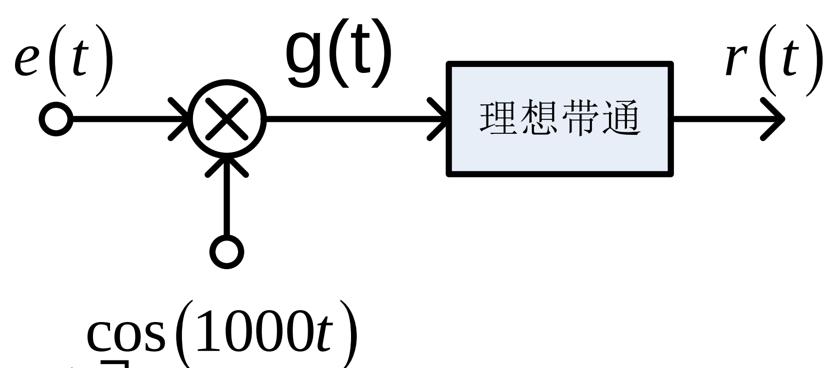
❖ 系统框图及理想带通的系统函数如图所示。求图示信号通过系统后的输出。

$$e(t)=\frac{\sin 2\pi t}{2\pi t}$$



$$\frac{\sin(\Omega t/2)}{\Omega t/2}\leftrightarrow\frac{2\pi}{\Omega}\left[\varepsilon\left(\omega+\frac{\Omega}{2}\right)-\varepsilon\left(\omega-\frac{\Omega}{2}\right)\right]$$

$$\Omega=4\pi$$



$$E(j\omega)=\frac{1}{2}\left[\varepsilon(\omega+2\pi)-\varepsilon(\omega-2\pi)\right]$$

$$e(t)\cos(\omega_0 t)\leftrightarrow\frac{1}{2}\left[E\left(j(\omega+\omega_0)\right)+E\left(j(\omega-\omega_0)\right)\right]$$

频域分析法综合练习2

$$G(j\omega)=\frac{1}{2}\left[E\big(j(\omega+1000)\big)+E\big(j(\omega-1000)\big)\right]$$

$$R(j\omega)=G(j\omega)H(j\omega)$$

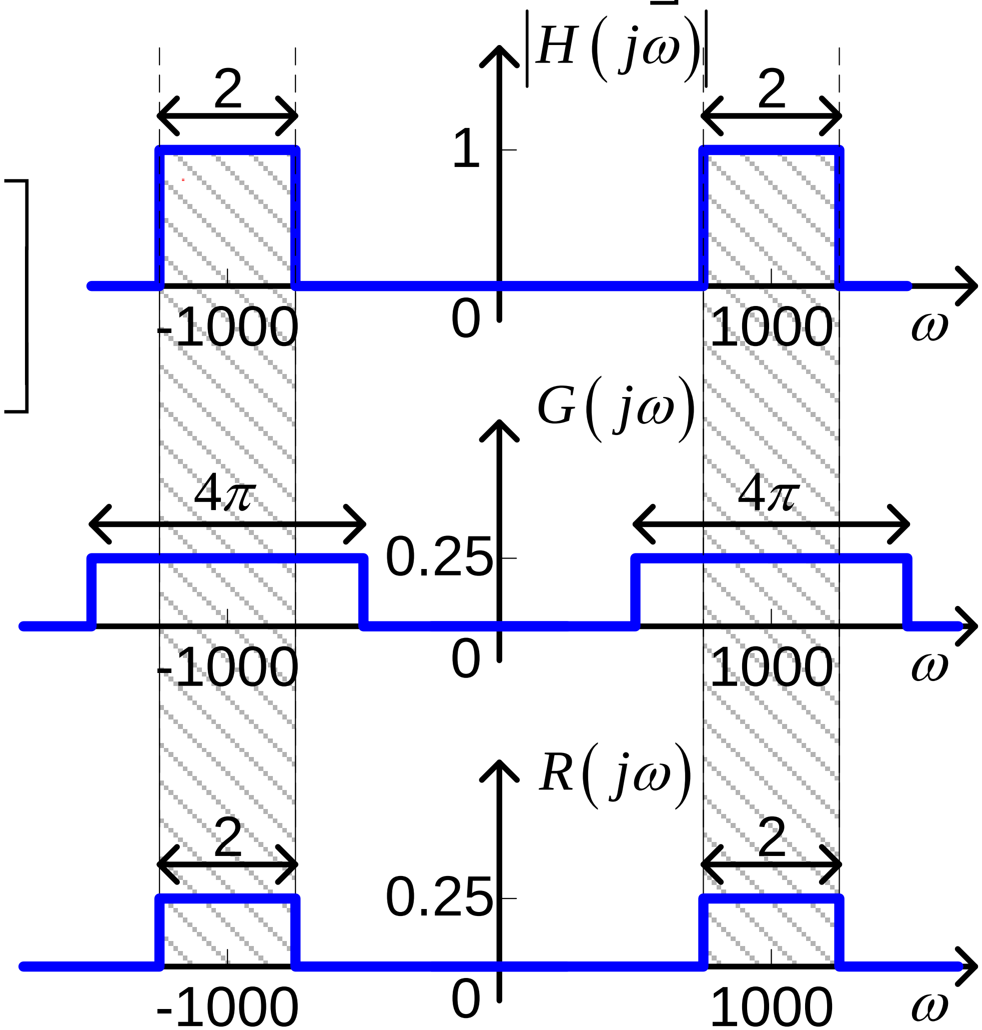
$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}Q\big(j(\omega+1000)\big)\\+Q\big(j(\omega-1000)\big)\end{bmatrix}$$

$$Q(j\omega)=\frac{1}{2}\left[\varepsilon(\omega+1)-\varepsilon(\omega-1)\right]$$

$$\leftrightarrow q(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin t}{t}$$

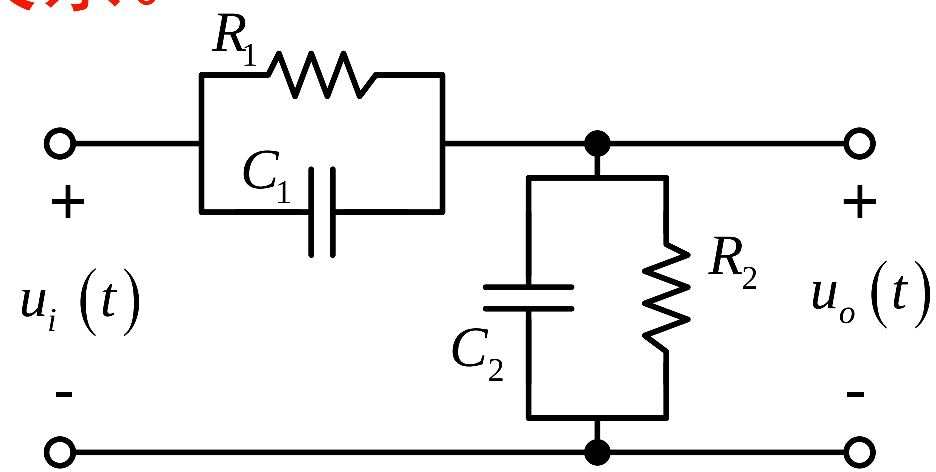
$$r(t)=q(t)\cos 1000t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin t}{t}\cos 1000t$$



频域分析法综合练习3

❖宽带分压器如图所示。为使电压能无失真传输，电路元件应满足何种关系。



$$H(j\omega)=\frac{U_o}{U_i}=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}$$

$$Z_1=\frac{R_1\dfrac{1}{j\omega C_1}}{R_1+\dfrac{1}{j\omega C_1}}=\frac{R_1}{1+j\omega R_1C_1}$$

$$Z_2=\frac{R_2}{1+j\omega R_2C_2}$$

$$|H(j\omega)|=\frac{\dfrac{R_1R_2}{C_1}}{\dfrac{R_1R_2}{C_2}}\left|\frac{1+\dfrac{1}{1+j\omega R_2C_2}}{1+\dfrac{1}{1+j\omega R_1C_1}}\right|=K$$

$$\Rightarrow R_1C_1=R_2C_2$$

离散系统的时域分析

离散系统的时域分析

- 信号分为连续时间信号和离散时间信号，系统相应的分为连续时间系统和离散时间系统。
- 幅度量化的离散时间信号称为数字信号。
- 离散时间系统具有以下优点：精度高，可靠性好。数字化技术广泛应用。
- 连续时间系统也是必不可少的。两种系统都包含的系统称“混合系统”，例如数字化的无线电通信系统，发射和接收端是模拟信号(连续信号)，数据处理部分是数字信号(离散信号)。
- 系统分析的一个重要部分就是协调模拟与数字部件的组合。

离散时间系统的时域分析

	连续时间系统	离散时间系统
数学模型	常系数微分方程	常系数差分方程
时域解法	微分算子 卷积	移序算子 卷积和
变换域解法	Laplace变换 Fourier变换	Z变换 离散Fourier变换
模拟框图	积分器	延时器

$$\text{连续信号} \underset{\text{插值}}{\overset{\text{抽样}}{\rightleftharpoons}} \text{离散信号}$$

内容提要

- ❖取样信号与取样定理
- ❖离散时间系统的描述与模拟
- ❖LTI离散系统的零输入响应
- ❖单位函数响应
- ❖卷积和
- ❖LTI离散系统的零状态响应

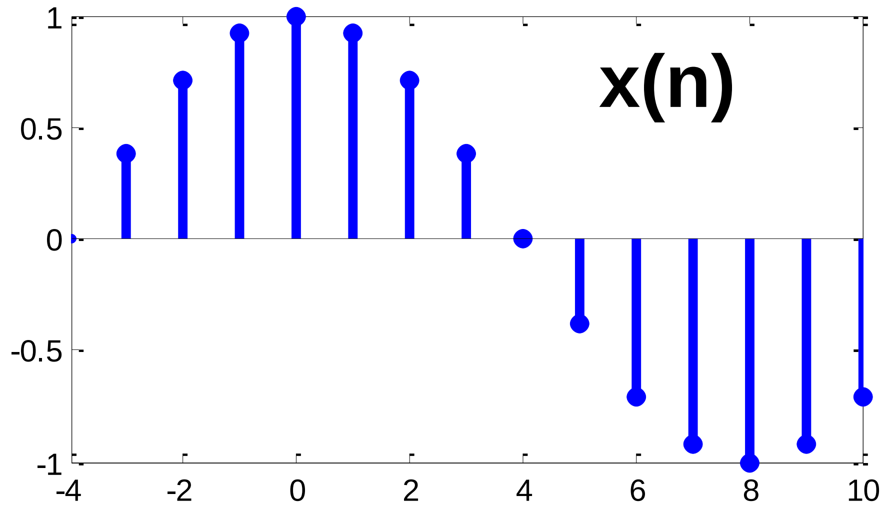
重点与难点

- ❖取样定理
- ❖差分方程
- ❖模拟框图
- ❖零输入响应
- ❖单位函数响应
- ❖卷积和
- ❖零状态响应

取样信号与取样定理

离散时间信号 – 序列

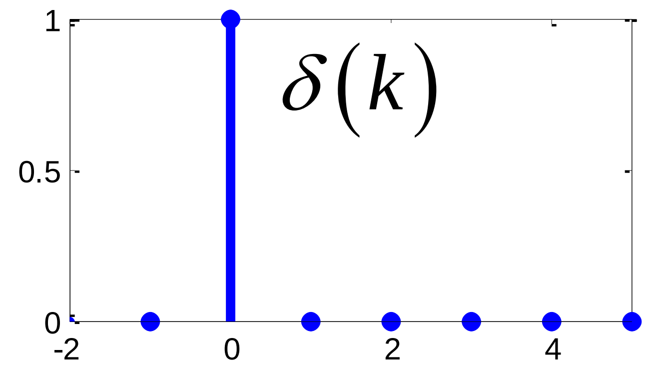
- 离散时间信号只在某些离散瞬时给出函数值，是时间上不连续的“序列”。
- 离散时间信号可以通过对连续时间信号进行取样得到，通常采用均匀时间间隔。若时间间隔为T，离散时间信号可以用 x(nT)，或 x(n) 来表示，n为整数。



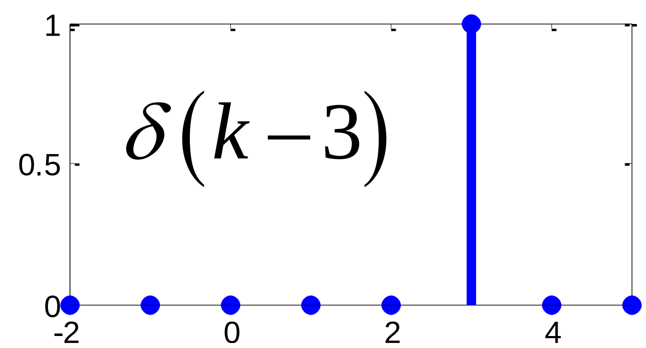
典型序列

❖单位函数序列

$$\delta(k)=\begin{cases}1 & k=0\\0 & k\neq 0\end{cases}$$



$$\delta(k-n)=\begin{cases}1 & k=n\\0 & k\neq n\end{cases}$$

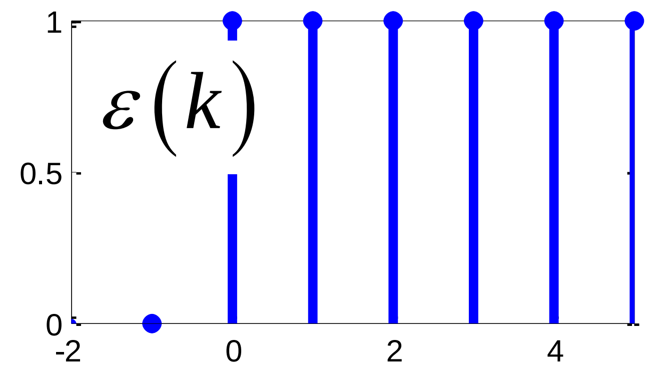


对比单位冲激函数
$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)d\tau=1\\ \delta(t)=0,t\neq 0\end{cases}$$

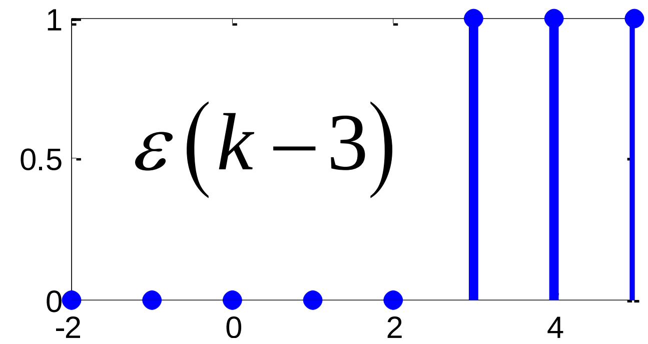
典型序列

❖单位阶跃序列

$$\varepsilon(k)=\begin{cases}1 & k\geq 0\\0 & k<0\end{cases}$$



$$\varepsilon(k-n)=\begin{cases}1 & k\geq n\\0 & k<n\end{cases}$$



对比单位阶跃函数

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}1 & t>0\\0 & t<0\end{cases}$$

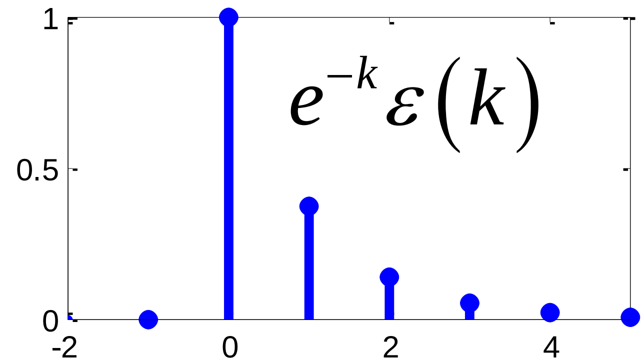
$$\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$$

$$\varepsilon(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(k-n)$$

典型序列

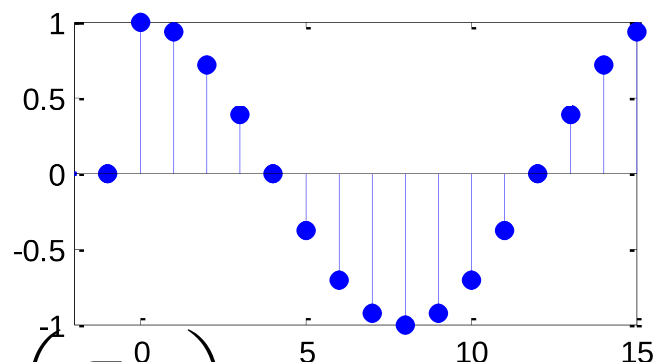
❖单边指数序列

$$e^{-k}\varepsilon(k)$$



❖单边余弦序列

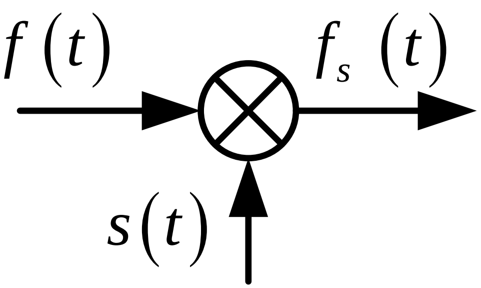
$$\cos(\beta k)\varepsilon(k)$$

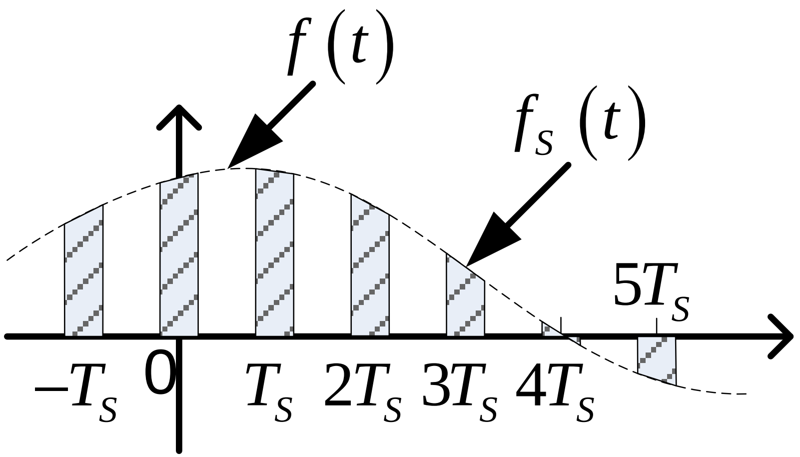


$$\cos\left(\frac{\pi}{8}k\right)\varepsilon(k)$$

取样信号

❖取样信号利用取样器(开关)实现。取样信号可看作原函数f(t)与开关函数s(t)的乘积。





$$f_S(t) = f(t)s(t)$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * S(j\omega)$$

开关函数s(t) 取样间隔为T_S，f_S =1/T_S称为取样频率。

理想取样信号

- ❖理想开关函数 – 周期冲激序列
- ❖理想取样信号 – 冲激取样信号

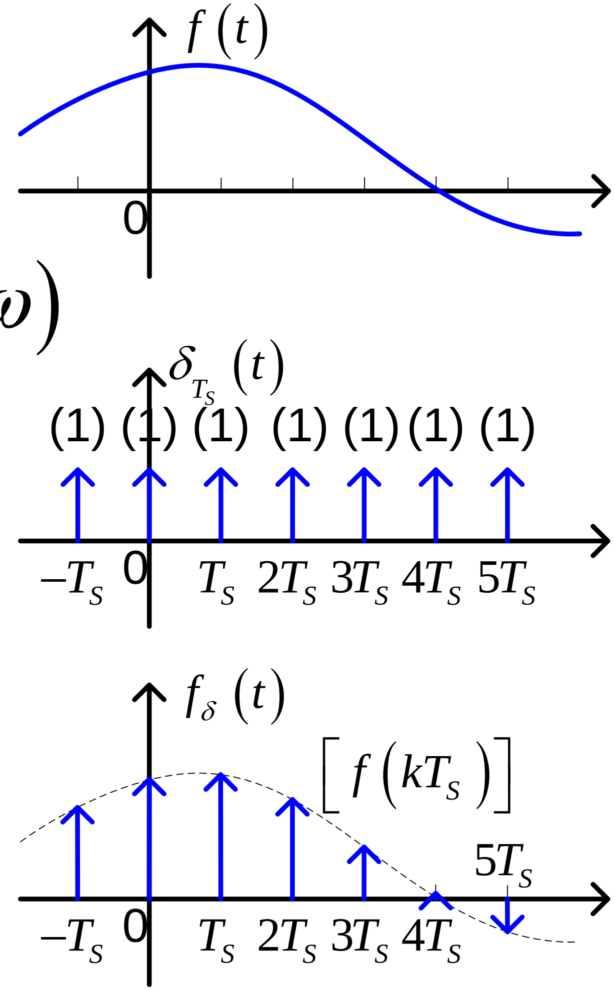
$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \qquad \delta_{T_S}(t) \leftrightarrow \omega_S \delta_{\omega_S}(\omega)$$

$$f_\delta(t) = f(t)\delta_{T_S}(t)$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \omega_S \delta_{\omega_S}(\omega)$$

$$= \frac{1}{T_S} F(j\omega) * \delta_{\omega_S}(\omega) \qquad \omega_S = \frac{2\pi}{T_S}$$

$$= \frac{1}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - k\omega_S)]$$

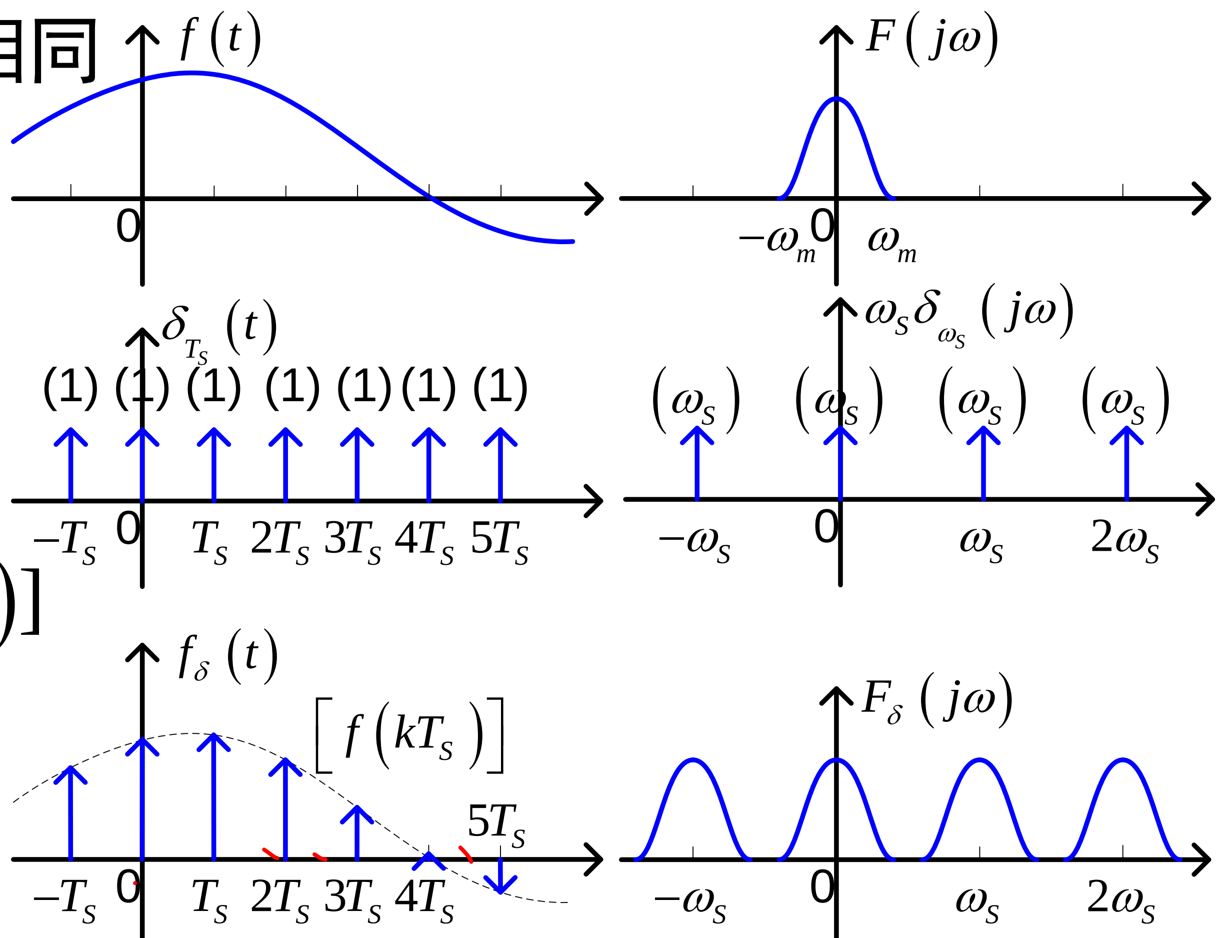


理想取样信号的频谱特性

❖理想取样信号的频谱是原函数频谱的周期形式，周期为$\omega_S=2\pi/T_S$。

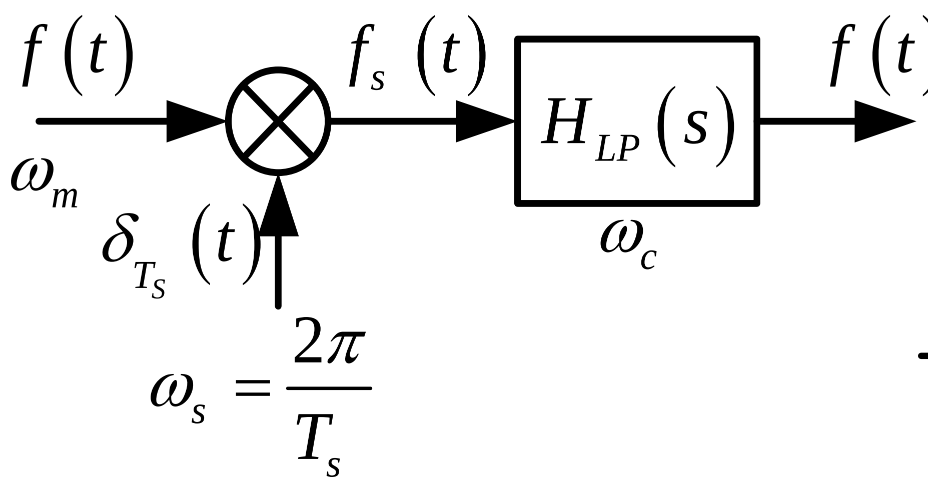
- 与F(jω)形状相同
- 乘上因子$1/T_S$
- 频谱间隔ω_S

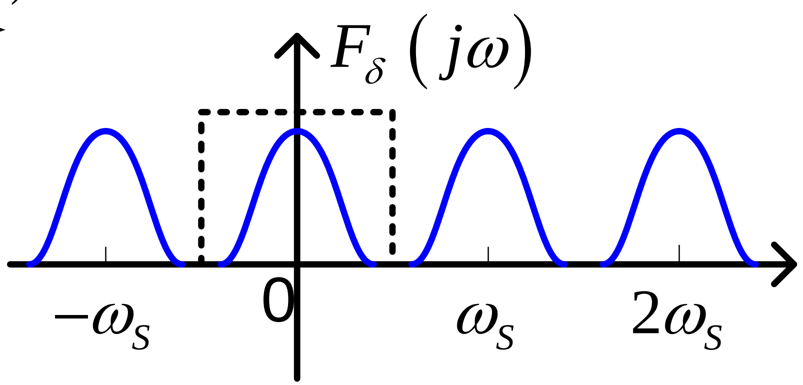
$$\frac{1}{T_S}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F[j(\omega-k\omega_S)]$$



信号的重建

- 理想取样信号的频谱中包含频率平移量为零的与原信号频谱形状相同，幅度为$1/T_S$的频谱。
- 理想取样信号通过截止频率为$\omega_S/2$，通带内幅度为T_S，相位为零的理想低通滤波器可重建原信号。





信号重建的必要条件

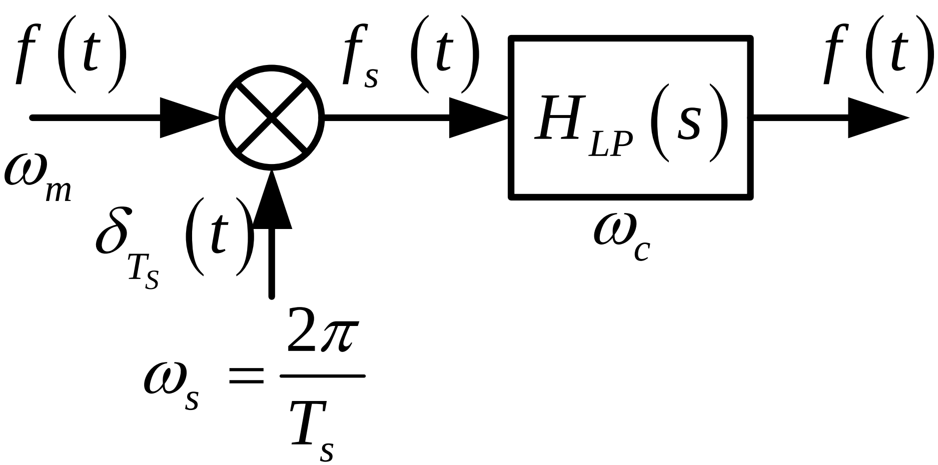
- 取样信号的频谱中两相邻周期的部分不能重叠。
  - F(jω)频带有限，即$|\omega|\le\omega_m$
  - 取样频率大于或等于最大信号频率的2倍，$\omega_S\ge 2\omega_m$。
- 当理想低通滤波器的截止频率满足$\omega_m\le\omega_C\le\omega_S-\omega_m$时，理想低通的输出端可以得到原信号。

Shannon取样频率或Nyquist取样频率：$2\omega_m$或$2f_m$

Shannon取样间隔或Nyquist取样间隔：$1/2f_m$或π/ω_m

Shannon取样定理

- 一个在频谱中不包含大于频率fm的分量的有限频带信号，由对该信号以不大于$1/(2f_m)$的时间间隔进行取样的取样值唯一确定。当这样的信号通过截止频率满足$\omega_m \le \omega_C \le \omega_S - \omega_m$的理想低通滤波器后，可以将原信号完全重建。



$$T_s \le \frac{1}{2f_m}$$

$$\omega_s \ge 2\omega_m$$

$$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$$

LTI离散时间系统的描述和模拟

LTI离散时间系统

❖线性特性

$$C_1 e_1(k) + C_2 e_2(k) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow C_1 r_1(k) + C_2 r_2(k)$$

❖移不变特性

$$e(k-N) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow r(k-N)$$

❖线性移不变特性

$$C_1 e_1(k-M) + C_2 e_2(k-N) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow C_1 r_1(k-M) + C_2 r_2(k-N)$$

差分运算

❖f(t)的取样信号f(kT)，简写为f(k)。

❖微分运算

$$\frac{df(t)}{dt}=\lim_{T\to 0}\frac{f(kT+T)-f(kT)}{T}=\lim_{T\to 0}\frac{f(kT)-f(kT-T)}{T}$$

❖差分运算

◆一阶前向差分 $$\frac{\Delta f(k)}{\Delta k}=\frac{f(k+1)-f(k)}{(k+1)-k}$$

◆一阶后向差分 $$\frac{\nabla f(k)}{\nabla k}=\frac{f(k)-f(k-1)}{k-(k-1)}$$

f(k+1)，f(k-1) 称为f(k)的移位序列

LTI离散时间系统的数学模型

❖输入输出方程一般形式：n阶常系数差分方程

$$r(k+n)+a_{n-1}r(k+n-1)+\ldots+a_1 r(k+1)+a_0 r(k)$$
$$=b_m e(k+m)+b_{m-1}e(k+m-1)+\ldots+b_1 e(k+1)+b_0 e(k)$$

差分方程包含离散变量及其增序或减序函数，描述离散序列中相邻几个数据点之间的数学关系。

差分方程的阶数=自变量最高和最低移序量之差。

对比**LTI**连续时间系统的数学模型 – **n**阶微分方程

$$r^{(n)}+a_{n-1}r^{(n-1)}+\ldots+a_1 r'+a_0 r$$
$$=b_m e^{(m)}+b_{m-1}e^{(m-1)}+\ldots+b_1 e'+b_0 e$$

$$r^{(n)}\to r(k+n)$$

差分方程练习1

❖微分方程与差分方程

$$\frac{d}{dt}r(t)+ar(t)=be(t)$$

$$t=kT,T\to 0 \qquad \frac{d}{dt}r(t)\approx\frac{r(kT+T)-r(kT)}{T}$$

则微分方程可用差分方程近似表示为

$$\frac{r(k+1)-r(k)}{T}+ar(k)=be(k)$$

$$r(k+1)+(aT-1)r(k)=bTe(k)$$

移序算子

❖移序算子 S

$$S\left[r(k)\right]=r(k+1)$$

❖n阶差分方程算子表示

$$\left(S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\ldots+a_1S+a_0\right)r(k)$$
$$=\left(b_mS^m+b_{m-1}S^{m-1}+\ldots+b_1S+b_0\right)e(k)$$

$$H(S)=\frac{N(S)}{D(S)}$$

对比LTI连续时间系统的算子方程

$$\left(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0\right)r(t)$$
$$=\left(b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1p+b_0\right)e(t)$$

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}$$

差分方程数值解法

- 差分方程本质上是递推的代数方程，若已知初始条件和激励，利用迭代法可求得其数值解。
- 一阶常系数差分方程

$$r(k+1)+2r(k)=e(k) \qquad r(0)=1 \qquad e(k)=2^k\varepsilon(k)$$

前向差分方程, 已知 r(k) e(k)，推出 r(k+1)及 r(k+2)， r(k+3)， …

$$r(1)=e(0)-2r(0)=-1$$

$$r(2)=e(1)-2r(1)=4$$

$$r(3)=e(2)-2r(2)=-4$$

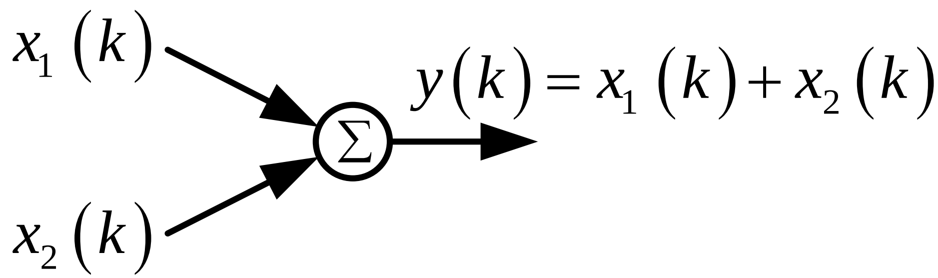
$$\cdots$$

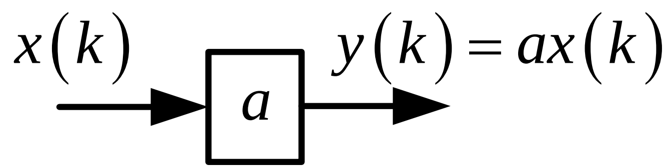
一般无法得到解析解

LTI离散时间系统模拟框图

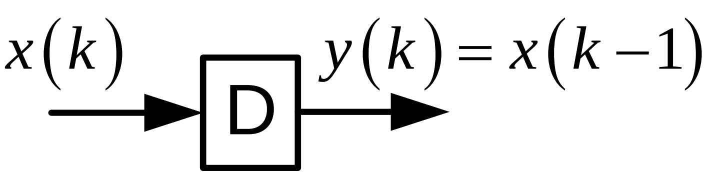
❖ 基本元件

- 加法器
- 标量乘法器
- 延时器

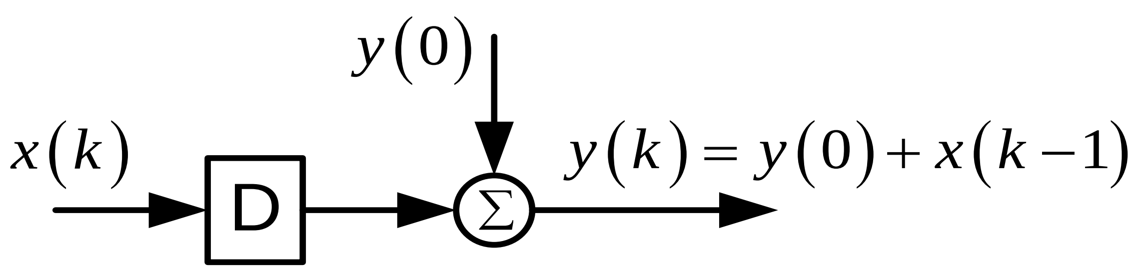




初始条件为零



初始条件不为零



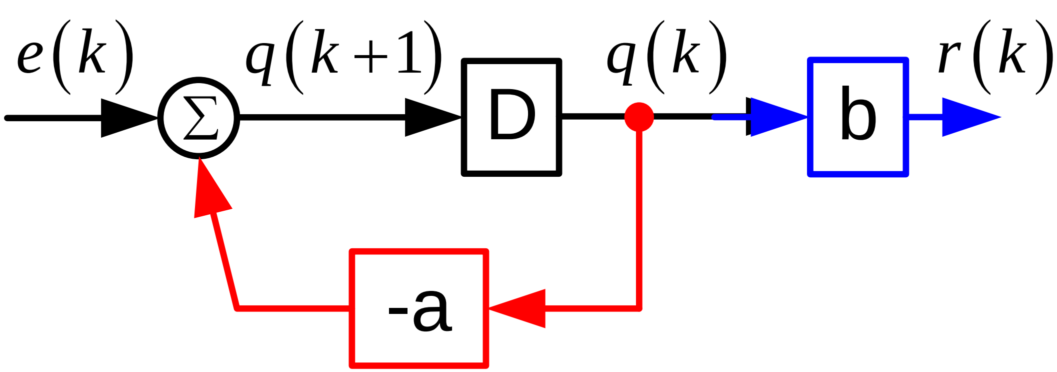
LTI离散时间系统模拟框图

❖一阶系统

$$r(k+1)+ar(k)=be(k)$$

- 延时器个数：n=1
- 引入辅助变量q(k)，构造两个辅助方程

$$\begin{cases} q(k+1)+aq(k)=e(k) \\ r(k)=bq(k) \end{cases}$$



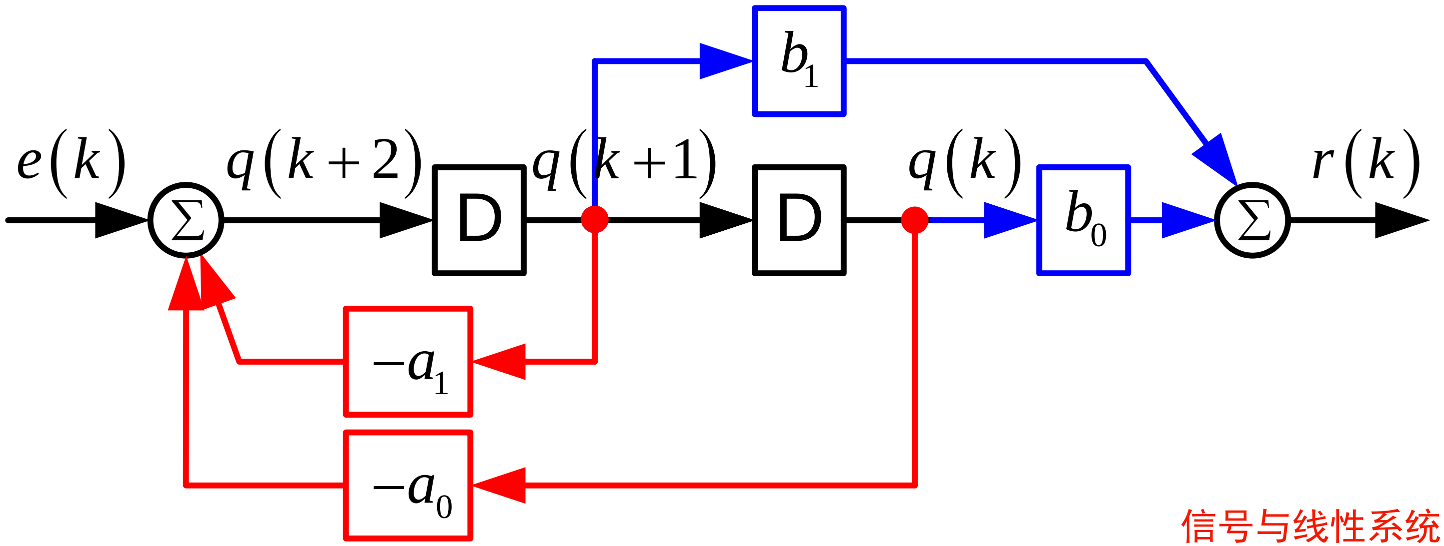
LTI离散时间系统模拟框图

❖二阶系统

$$r(k+2)+a_1 r(k+1)+a_0 r(k)=b_1 e(k+1)+b_0 e(k)$$

$$\begin{cases} q(k+2)+a_1 q(k+1)+a_0 q(k)=e(k) \\ r(k)=b_1 q(k+1)+b_0 q(k) \end{cases}$$

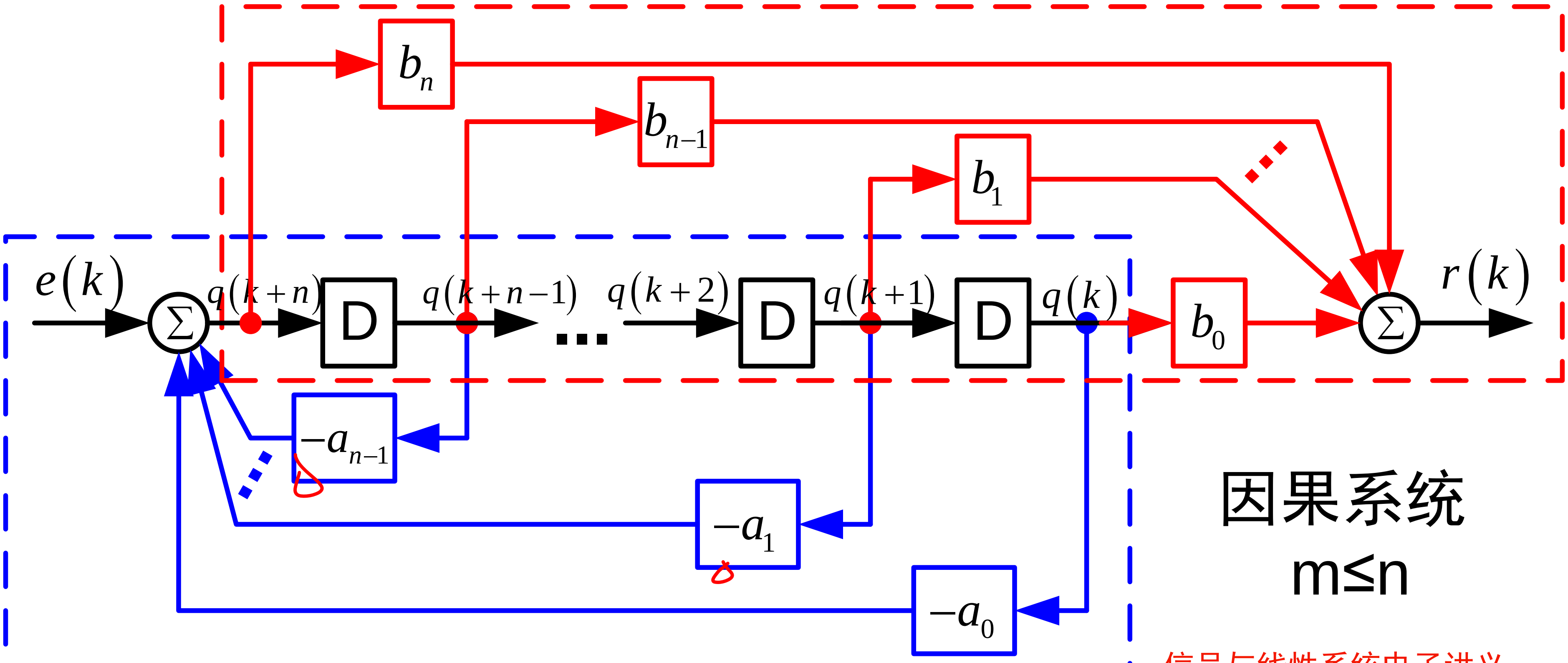
延时器个数：n=2



LTI离散时间系统模拟框图

❖n阶系统一般形式 m=n

$$r(k+n)+a_{n-1}r(k+n-1)+\ldots+a_1r(k+1)+a_0r(k)$$
$$=b_me(k+m)+b_{m-1}e(k+m-1)+\ldots+b_1e(k+1)+b_0e(k)$$



因果系统

m≤n

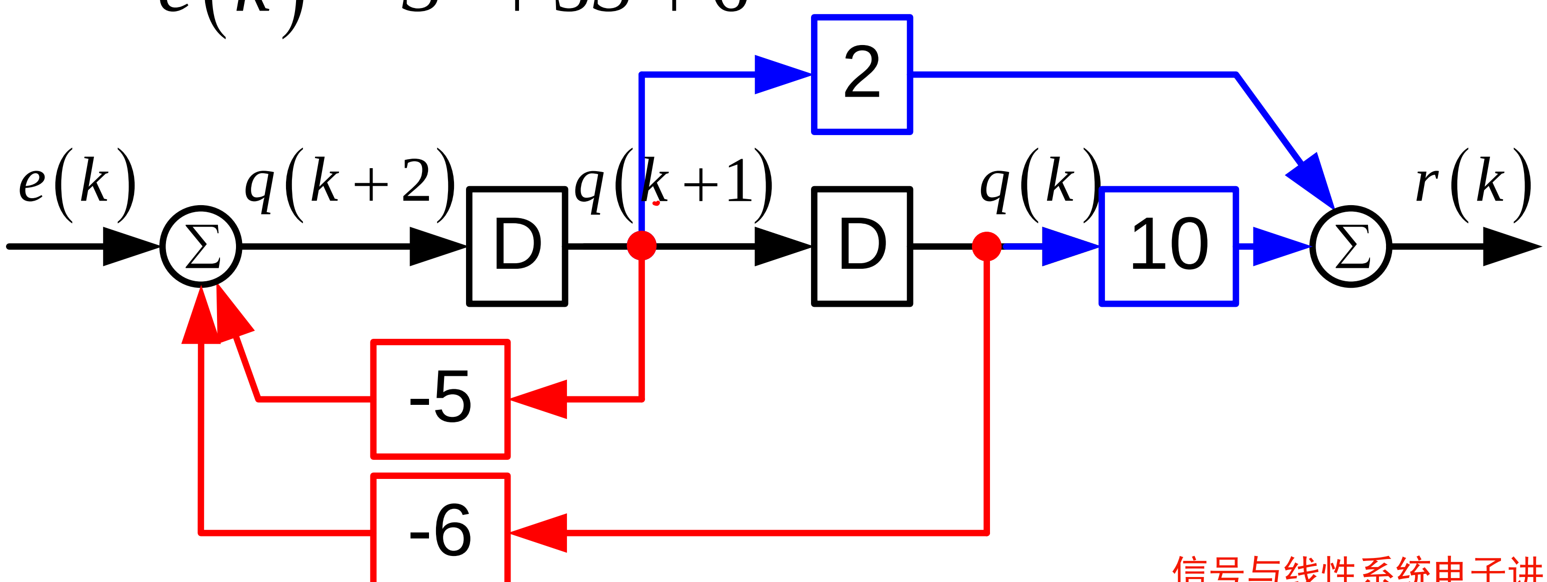
差分方程练习2

❖差分方程的系统函数

$$r(k+2)+5r(k+1)+6r(k)=2e(k+1)+10e(k)$$

$$\left(S^2+5S+6\right)r(k)=(2S+10)e(k)$$

$$H(S)=\frac{r(k)}{e(k)}=\frac{2S+10}{S^2+5S+6}$$



LTI离散时间系统的零输入响应

零输入响应

❖e(k)=0，求解齐次方程

$$r(k+n)+a_{n-1}r(k+n-1)+\ldots+a_1 r(k+1)+a_0 r(k)=0$$

或 $$\left[S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\ldots+a_1 S+a_0\right]r(k)=0$$

- 特征多项式 $D(S)=0$
- 特征根 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots$
- 对单根 γ_i　$r_i(k)=C_i\gamma_i^k$
- 对p重根 γ_i　$r_i(k)=\left(b_1+b_2 k+\ldots+b_p k^{p-1}\right)\gamma_i^k$

n阶系统，n个初始条件，y(0), y(1), … , y(n-1)

对比连续系统

$$r_i(t)=C_i e^{\lambda_i t}\qquad r_i(t)=\left(b_1+b_2 t+\ldots+b_p t^{p-1}\right)e^{\lambda_i t}$$

一阶系统零输入响应

$$r(k+1)+a_0 r(k)=0$$

迭代求解

$$r(1)=-a_0 r(0)$$

$$r(2)=-a_0 r(1)=(-a_0)^2 r(0)$$

$$r(3)=-a_0 r(2)=(-a_0)^3 r(0)$$

…… ……

$$r(k)=(-a_0)^k r(0)$$

$$D(S)=S+a_0$$

$$\gamma=-a_0$$

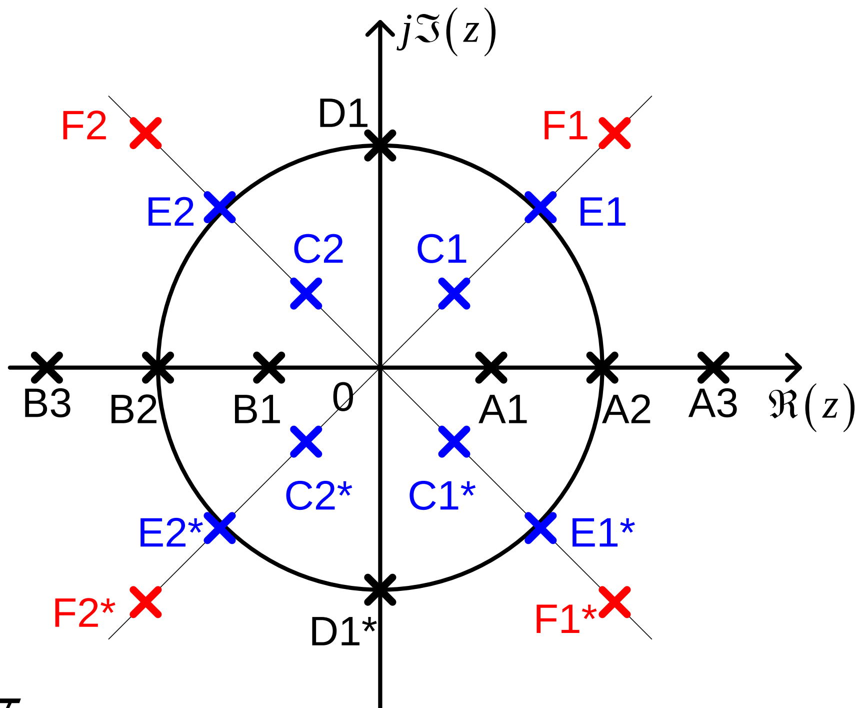
$$r(k)=C\gamma^k$$

$$r(0)=C$$

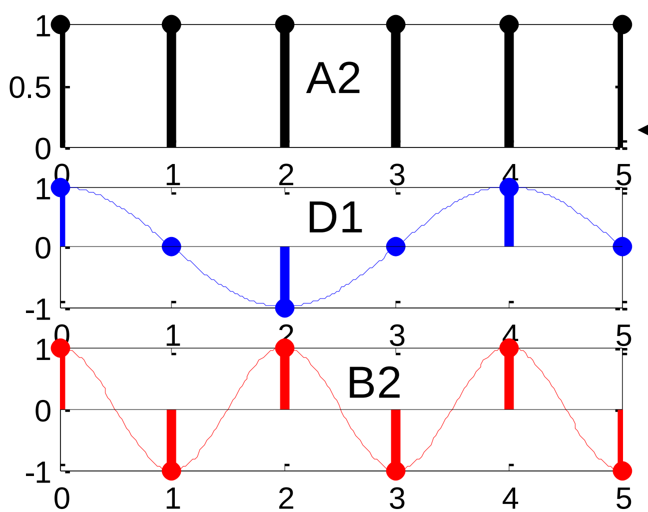
极点对应的时间函数

❖Z平面上极点 γ 对应 γ^k

$$\gamma = |\gamma| e^{j\phi} \qquad \gamma^k = |\gamma|^k e^{jk\phi}$$

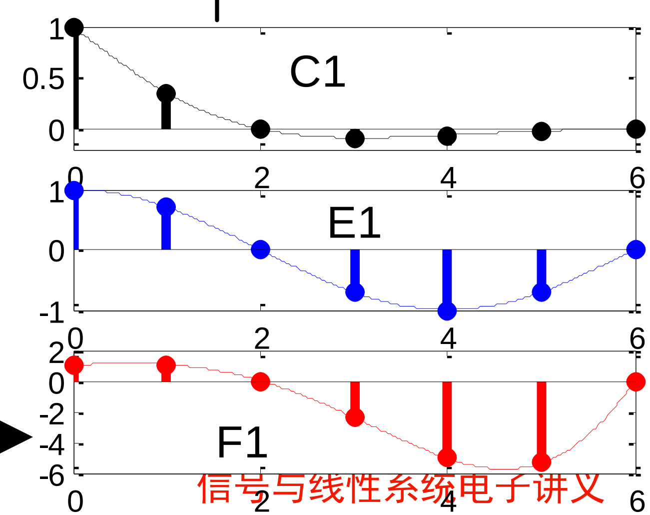


极点的模量决定振荡幅度
极点的相位决定振荡频率



$$|\gamma| = 1, \phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$$

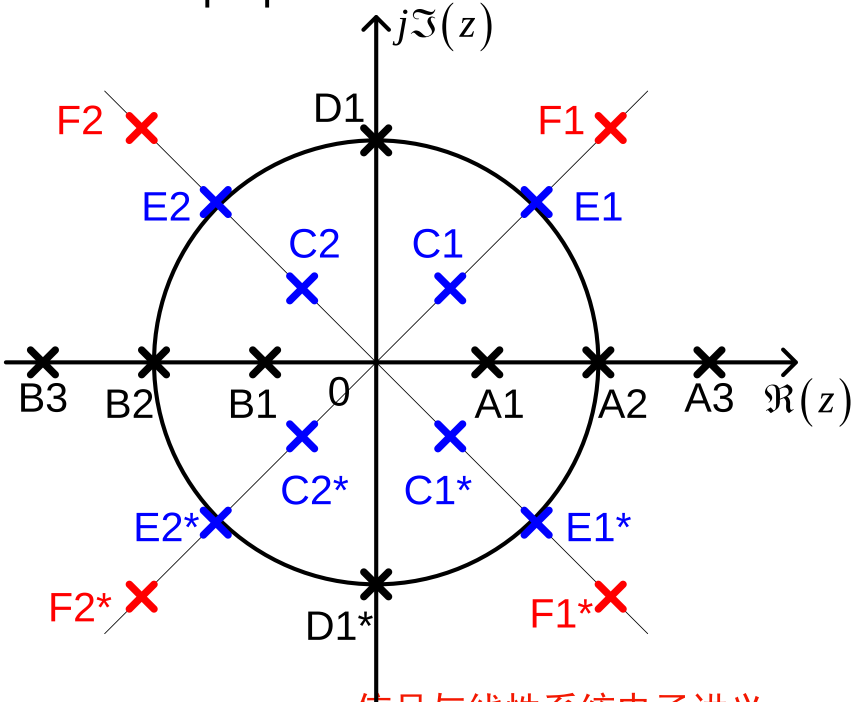
$$|\gamma| = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \phi = \frac{\pi}{4}$$



系统稳定性

❖Z平面上极点位置　γ_i 对应 γ_i^k

- 单位圆内，减幅，系统稳定 $|\gamma|<1$
- 单位圆上单阶极点，等幅，临界稳定 $|\gamma|=1$
- 单位圆外，增幅，系统不稳定 $|\gamma|>1$



零输入响应练习1

❖ 求零输入响应 $r(k+2)+4r(k+1)+4r(k)=0$

$r(0)=2, r(1)=2$

$$D(S)=S^2+4S+4=(S+2)^2=0$$

特征根 $\gamma_{1,2}=-2$

$$y_{zi}(k)=(C_1+C_2k)(-2)^k\varepsilon(k)$$

$$\begin{cases} r(0)=C_1=2 \\ r(1)=(C_1+C_2)(-2)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=2 \\ C_2=-3 \end{cases}$$

$$y_{zi}(k)=(2-3k)(-2)^k\varepsilon(k)$$

零输入响应练习2

❖求零输入响应

$$r(k+3)+6r(k+2)+12r(k+1)+8r(k)=0$$

$$r(0)=1, r(1)=1, r(2)=0$$

$$D(S)=S^3+6S^2+12S+8=(S+2)^3=0$$

特征根 $\gamma_{1,2,3}=-2$

$$y_{zi}(k)=\left(C_1+C_2k+C_3k^2\right)(-2)^k\varepsilon(k)$$

$$=\left(1-\frac{5}{2}k+k^2\right)(-2)^k\varepsilon(k)$$

$$\begin{cases} r(0)=C_1=1 \\ r(1)=\left(C_1+C_2+C_3\right)(-2)=1 \\ r(2)=\left(C_1+2C_2+4C_3\right)(-2)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=-5/2 \\ C_3=1 \end{cases}$$

零输入响应练习3

❖求零输入响应

$$r(k+4)-2r(k+3)+2r(k+2)-2r(k+1)+r(k)=0$$

$$r(1)=1, r(2)=0, r(3)=1, r(5)=1$$

$$D(S)=S^4-2S^3+2S^2-2S+1=(S-1)^2(S^2+1)=0$$

特征根 $\gamma_{1,2}=1, \gamma_{3,4}=\pm j$

$$y_{zi}(k)=(C_1+C_2k)1^k+C_3j^k+C_4(-j)^k$$

或 $=(C_1+C_2k)1^k+C_3e^{j\frac{\pi}{2}k}+C_4e^{-j\frac{\pi}{2}k}$

或 $=(C_1+C_2k)1^k+C_3\cos\frac{k\pi}{2}+C_4\sin\frac{k\pi}{2}$

$$y_{zi}(k)=1+\cos\frac{k\pi}{2}$$

单位函数响应

单位函数响应

❖ 系统对单位样值序列δ(k)的零状态响应，称单位函数响应，表示为h(k)。

- 令 e(k)=δ(k)，求解差分方程

$$\left(S^{n}+a_{n-1}S^{n-1}+\ldots+a_{1}S+a_{0}\right)h(k)$$
$$=\left(b_{m}S^{m}+b_{m-1}S^{m-1}+\ldots+b_{1}S+b_{0}\right)\delta(k)$$

- 从转移算子求解，利用部分分式法及表7-2 pp. 253

$$H(S)=\frac{N(S)}{D(S)}=\sum H_{i}(S)\Rightarrow h(k)=\sum h_{i}(k)$$

转移算子对应的单位函数响应

❖ 表7-2 pp. 253

$H(S)$	$h(k)$
1	$\delta(k)$
$\dfrac{1}{S-\gamma}$	$\gamma^{k-1}\varepsilon(k-1)$
$\dfrac{S}{S-\gamma}$	$\gamma^{k}\varepsilon(k)$
$\dfrac{S}{(S-\gamma)^2}$	$k\gamma^{k-1}\varepsilon(k)$

$$\frac{S}{(S-\gamma)^p}$$

$$\frac{1}{(p-1)!}\frac{k!}{(k-p+1)!}\gamma^{k-p+1}\varepsilon(k)$$

单位函数响应练习1

❖一阶系统

差分方程 $h(k+1)-\gamma h(k)=\delta(k)$

$$H(S)=\frac{1}{S-\gamma}$$

$$\boxed{h(k)=\gamma^{k-1}\varepsilon(k-1)}$$

$$h(0)=\delta(-1)+\gamma h(-1)=0$$

$$h(1)=\delta(0)+\gamma h(0)=1=\gamma^{0}$$

$$h(2)=\delta(1)+\gamma h(1)=\gamma h(1)=\gamma$$

$$\delta(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$$

$$h(k)=\delta(k-1)+\gamma h(k-1)$$

$$=\gamma h(k-1)=\gamma\left[\gamma h(k-2)\right]=\gamma^{k-1}h(1)$$

单位函数响应练习1

差分方程 $r(k+1)-\gamma r(k)=e(k+1)$

$$H(S)=\frac{r(k)}{e(k)}=\frac{S}{S-\gamma}=1+\frac{\gamma}{S-\gamma}$$

$$\boxed{h(k)=\gamma^{k}\varepsilon(k)}$$

$$h(k)=\delta(k)+\gamma\gamma^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

$$=\delta(k)+\gamma^{k}\left[\varepsilon(k)-\delta(k)\right]=\gamma^{k}\varepsilon(k)$$

$$r(k)=\left[1+\frac{\gamma}{S-\gamma}\right]e(k)=\underbrace{e(k)}_{\text{直通分量}}+\frac{\gamma}{S-\gamma}e(k)$$

当系统转移算子m=n，且比值常数1时，
输出响应中包含一个输入激励的直通分量。

单位函数响应练习1

❖n阶系统

$$H(S)=\frac{b_mS^m+b_{m-1}S^{m-1}+\ldots+b_1S+b_0}{S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\ldots+a_1S+a_0}$$

m<n, $b_0 \neq 0$

$$H(S)=\sum\frac{A_i}{S-\gamma_i} \qquad h(k)=\sum A_i\gamma_i^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

m<n, $b_0=0$

$$H(S)=S\left[\sum\frac{A_i}{S-\gamma_i}\right] \qquad h(k)=\sum A_i\gamma_i^{k}\varepsilon(k)$$

m=n, $b_0 \neq 0$

$$H(S)=1+\sum\frac{A_i}{S-\gamma_i} \qquad h(k)=\delta(k)+\sum A_i\gamma_i^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

单位函数响应练习2

❖求单位函数响应

(1) $r(k+2)+2r(k+1)-3r(k)=e(k+1)+2e(k)$

$$H(S)=\frac{S+2}{S^2+2S-3}=\frac{3/4}{S-1}+\frac{1/4}{S+3}$$

$$h(k)=\frac{3}{4}1^{k-1}\varepsilon(k-1)+\frac{1}{4}(-3)^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

(2) $r(k+2)-2\gamma r(k+1)+\gamma^2 r(k)=e(k)$

$$H(S)=\frac{1}{(S-\gamma)^2}=\left[\frac{S}{(S-\gamma)^2}-\frac{1}{S-\gamma}\right]\frac{1}{\gamma}$$

$$h(k)=\left[k\gamma^{k-1}\varepsilon(k)-\gamma^{k-1}\varepsilon(k-1)\right]\gamma^{-1}=(k-1)\gamma^{k-2}\varepsilon(k-1)$$

卷积和

卷积和的定义

❖有始信号的卷积和

$$e(k)*h(k)=\sum_{j=0}^{k}e(j)h(k-j)$$

有始信号的卷积积分 $e(t)*h(t)=\int_0^t e(\tau)h(t-\tau)d\tau$

❖卷积和的计算方法

- 定义式
- 图解法
- 查表+卷积和的性质 表7-4 pp.258

卷积和的性质

- 交换律

$$e(k)*h(k)=h(k)*e(k)$$

- 分配律

$$\left[e(k)+f(k)\right]*h(k)=e(k)*h(k)+f(k)*h(k)$$

- 结合律

$$\left[e(k)*f(k)\right]*h(k)=e(k)*\left[f(k)*h(k)\right]$$

- 移序

$$e(k)*h(k)=y(k)$$

$$e(k-M)*h(k-N)=y(k-M-N)$$

常用卷积和

- 表7-4 pp.258

$$e(k)*\delta(k)=e(k)$$

$$\varepsilon(k)*\varepsilon(k)=(k+1)\varepsilon(k)$$

$$\gamma^k\varepsilon(k)*\gamma^k\varepsilon(k)=(k+1)\gamma^k\varepsilon(k)$$

$$\gamma_1^k\varepsilon(k)*\gamma_2^k\varepsilon(k)=\frac{\gamma_1^{k+1}-\gamma_2^{k+1}}{\gamma_1-\gamma_2}\varepsilon(k)$$

$$\gamma^k\varepsilon(k)*\varepsilon(k)=\frac{1-\gamma^{k+1}}{1-\gamma}\varepsilon(k)$$

卷积和练习1

❖ 求卷积和 $f(k)=a^k\varepsilon(k) \quad h(k)=b^k\varepsilon(k) \quad a<b$

$$y(k)=\sum_{j=0}^{k} f(j)h(k-j)$$

$$=\sum_{j=0}^{k} a^j b^{k-j}=b^k\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{a}{b}\right)^j$$

$$=b^k\frac{1-(a/b)^{k+1}}{1-a/b}\varepsilon(k)=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{b-a}\varepsilon(k)$$

若 $a>b$ $\quad y(k)=a^k\dfrac{1-(b/a)^{k+1}}{1-b/a}\varepsilon(k)=\dfrac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}\varepsilon(k)$

卷积和练习2

❖求卷积和 $e(k)=2^k\varepsilon(k)\quad h(k)=(-0.5)^{k-1}\varepsilon(k-1)$

$$h(k)=(-0.5)^{k-1}\varepsilon(k-1)=(-0.5)^{k-1}\left[\varepsilon(k)-\delta(k)\right]$$

$$=-2(-0.5)^k\varepsilon(k)+2\delta(k)$$

$$y(k)=2^k\varepsilon(k)*\left[-2(-0.5)^k\varepsilon(k)\right]+2^k\varepsilon(k)*2\delta(k)$$

$$=-2\frac{2^{k+1}-(-0.5)^{k+1}}{2.5}\varepsilon(k)+2^{k+1}\varepsilon(k)$$

$$=\left[\frac{2}{5}2^k-\frac{2}{5}(-0.5)^k\right]\varepsilon(k)$$

卷积和练习2

❖利用移序特性

$$f(k)=2^k\varepsilon(k)*(-0.5)^k\varepsilon(k)=\frac{2^{k+1}-(-0.5)^{k+1}}{2.5}\varepsilon(k)$$

$$=\frac{2}{5}2^{k+1}\varepsilon(k)-\frac{2}{5}(-0.5)^{k+1}\varepsilon(k)$$

$$y(k)=f(k-1)$$

$$=\frac{2}{5}2^{k}\varepsilon(k-1)-\frac{2}{5}(-0.5)^{k}\varepsilon(k-1)$$

$$=\frac{2}{5}2^{k}\varepsilon(k)-\frac{2}{5}(-0.5)^{k}\varepsilon(k)$$

上一节复习

- LTI离散时间系统的描述
  - 差分方程，模拟框图，线性移不变特性，转移算子
- 极点对应时间函数的形式
  - 离散时间系统稳定性判断
- 零输入响应

$$H_i(S)=\frac{1}{S-\gamma} \qquad h_i(k)=\gamma^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

- 零状态响应
  - 单位函数响应

$$H_i(S)=\frac{S}{S-\gamma} \qquad h_i(k)=\gamma^{k}\varepsilon(k)$$

  - 卷积和

$$e(k)*h(k)=\sum_{j=0}^{k}e(j)h(k-j)$$

卷积和练习3

❖已知 e(0)=1, e(1)=3, e(2)=1, e(3)=3, h(0)=1, h(1)=1, h(2)=3, h(3)=1, 求卷积和

$$y(k)=\sum_{j=0}^{k} e(j)h(k-j)$$

两个有限长序列求卷积和
卷积和长度：L=M+N-1
M和N分别为两个序列的长度

$$y(0)=e(0)h(0)=1$$

$$y(1)=\sum_{j=0}^{1} e(j)h(1-j)=e(0)h(1)+e(1)h(0)=5$$

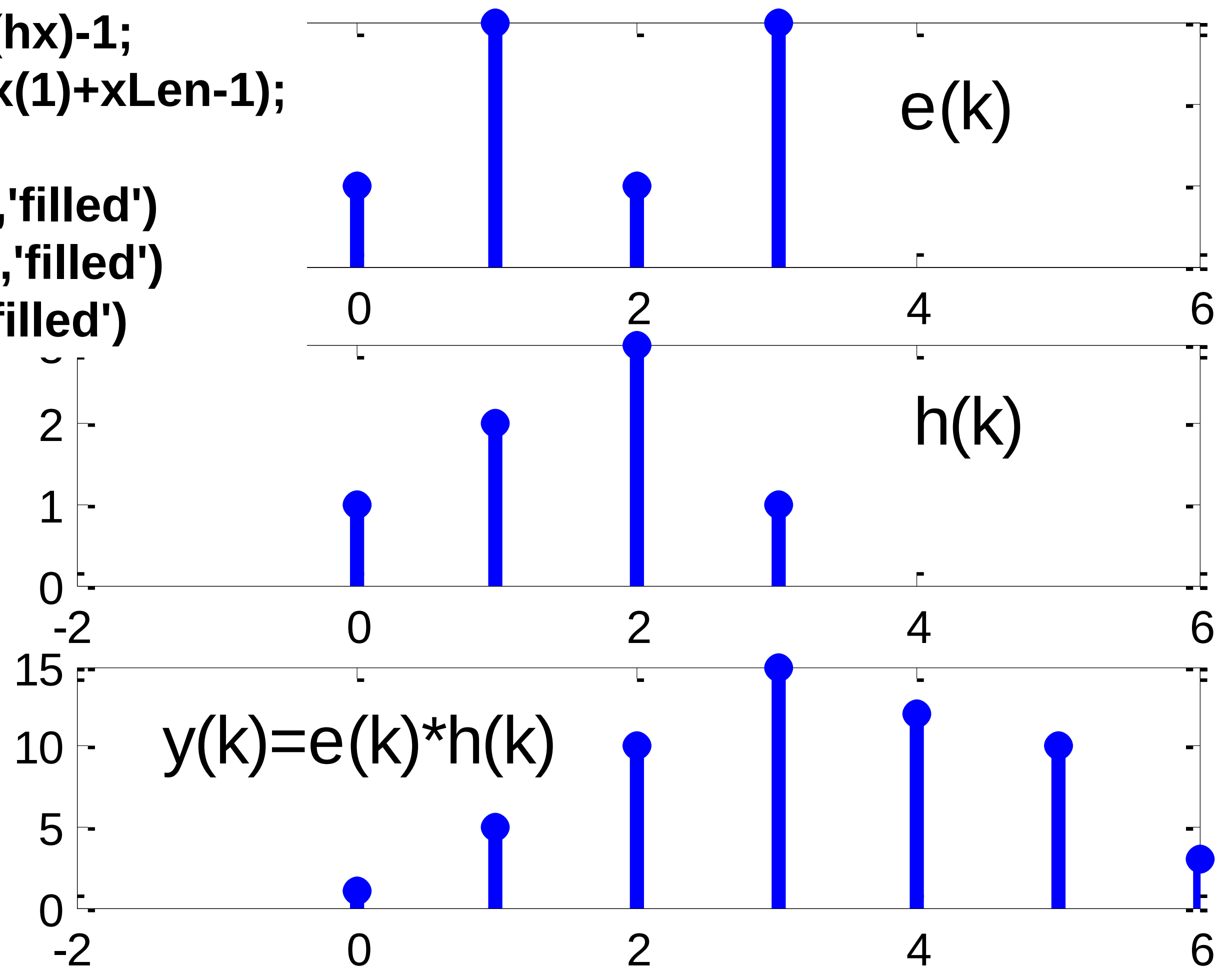
$$y(2)=e(0)h(2)+e(1)h(1)+e(2)h(0)=10$$

依此类推，序列不足补零

$$y(3)=15 \quad y(4)=12 \quad y(5)=13 \quad y(6)=3$$

卷积和练习2

```
ex=0:3;e=[1 3 1 3];
hx=0:3;h=[1 2 3 1];
y=conv(e,h);
xLen=length(ex)+length(hx)-1;
x=(ex(1)+hx(1)):(ex(1)+hx(1)+xLen-1);
figure
subplot(3,1,1);stem(ex,e,'filled')
subplot(3,1,2);stem(hx,h,'filled')
subplot(3,1,3);stem(x,y,'filled')
```

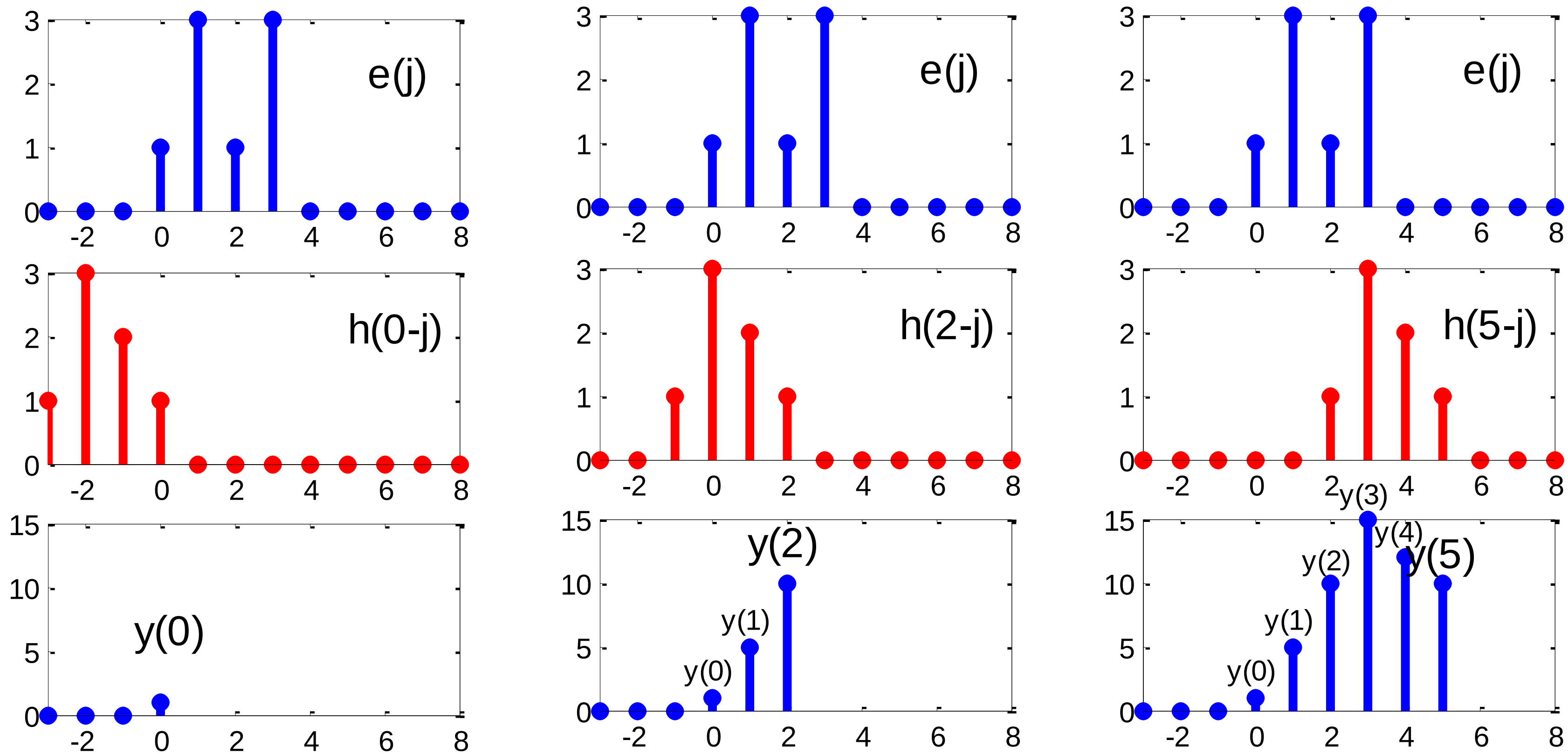


卷积和练习2

❖ 图解法

◆ 反褶，平移，相乘，求和

$$y(k)=\sum_{j=0}^{k} e(j)h(k-j)$$



LTI离散时间系统的零状态响应

LTI离散时间系统的零状态响应

❖利用卷积和求系统零状态响应

$$e(k)=\sum_{j=0}^{k}e(j)\delta(k-j)=e(k)*\delta(k)$$

$$r_{zs}(k)=\sum_{j=0}^{k}e(j)h(k-j)=e(k)*h(k)$$

对比连续时间系统零状态响应

$$e(t)=\int_{0}^{t}e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=e(t)*\delta(t)$$

$$r_{zs}(t)=\int_{0}^{t}e(\tau)h(t-\tau)d\tau=e(t)*h(t)$$

离散时间系统全响应

❖离散时间系统全响应

$$r(k)=r_{zi}(k)+r_{zs}(k)$$

表7-1 表7-2

$$=\sum C_i\gamma_i^k\varepsilon(k)+e(k)*h(k)$$

对比连续时间系统全响应

$$t=kT_S$$

$$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$$

$$e^{\lambda t}\to\gamma^k$$

$$=\sum C_i e^{\lambda_i t}\varepsilon(t)+e(t)*h(t)$$

$$e^{\lambda T_S}\to\gamma$$

离散时间系统综合练习1

❖系统差分方程，求系统全响应

$$r(k+2)-3r(k+1)+2r(k)=e(k+1)-3e(k)$$

$$e(k)=\varepsilon(k) \quad r_{zi}(0)=1 \quad r_{zi}(1)=0$$

$$H(S)=\frac{r(k)}{e(k)}=\frac{S-3}{S^2-3S+2}=\frac{2}{S-1}+\frac{-1}{S-2}$$

$$h(k)=\left[2(1)^{k-1}-(2)^{k-1}\right]\varepsilon(k-1)$$

$$=\left[2(1)^{k-1}-(2)^{k-1}\right]\left[\varepsilon(k)-\delta(k)\right]$$

$$=\left[2-\frac{1}{2}2^k\right]\varepsilon(k)-\frac{3}{2}\delta(k)$$

离散时间系统综合练习1

零输入响应

$$r_{zi}(k)=\left[C_1(1)^k+C_2(2)^k\right]\varepsilon(k)$$

$$\begin{cases} r_{zi}(0)=C_1+C_2=1 \\ r_{zi}(1)=C_1+2C_2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} C_1=2 \\ C_2=-1 \end{cases}$$

$$=\left[2-2^k\right]\varepsilon(k)$$

零状态响应

$$r_{zs}(k)=e(k)*h(k)$$

$$\gamma^k\varepsilon(k)*\varepsilon(k)=\frac{1-\gamma^{k+1}}{1-\gamma}\varepsilon(k)$$

$$=\varepsilon(k)*\left[2-\frac{1}{2}2^k\right]\varepsilon(k)-\varepsilon(k)*\frac{3}{2}\delta(k)$$

$$=\left[2k+\frac{1}{2}\left(1-2^{k+1}\right)\right]\varepsilon(k)-\frac{3}{2}\varepsilon(k)=\left[2k-2^k-1\right]\varepsilon(k)$$

离散时间系统综合练习1

全响应

$$
\begin{aligned}
r(k) &= r_{zi}(k) + r_{zs}(k) \\
&= \left[2 - 2^{k}\right]\varepsilon(k) + \left[2k - 2^{k} - 1\right]\varepsilon(k) \\
&= \left[2k - 2^{k+1} + 1\right]\varepsilon(k)
\end{aligned}
$$

离散时间系统综合练习2

❖图示模拟框图

- 写出系统差分方程
- 求单位函数响应
- 求系统全响应

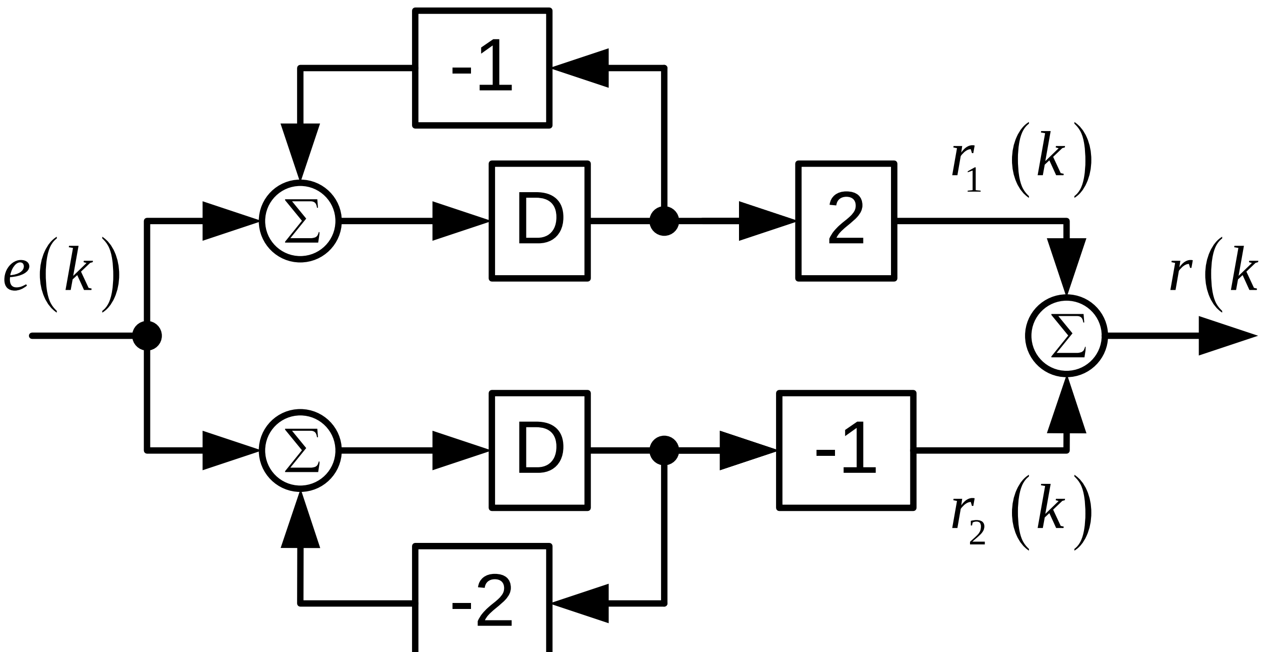
$$H_1(S)=\frac{r_1(k)}{e(k)}=\frac{2}{S+1}$$

$$H_2(S)=\frac{r_2(k)}{e(k)}=\frac{-1}{S+2}$$

$$e(k)=\delta(k)$$

$$r_{zi}(0)=1$$

$$r_{zi}(1)=2$$



离散时间系统综合练习2

$$r(k)=r_1(k)+r_2(k)$$

$$H(S)=H_1(S)+H_2(S)=\frac{2}{S+1}+\frac{-1}{S+2}=\frac{S+3}{S^2+3S+2}$$

系统差分方程

$$\left(S^2+3S+2\right)r(k)=(S+3)e(k)$$

$$r(k+2)+3r(k+1)+2r(k)=e(k+1)+3e(k)$$

单位函数响应

$$h(k)=\left[2(-1)^{k-1}-(-2)^{k-1}\right]\varepsilon(k-1)$$

离散时间系统综合练习2

零输入响应

$$r_{zi}(k)=\left[C_1(-1)^k+C_2(-2)^k\right]\varepsilon(k)$$

$$\begin{cases} r_{zi}(0)=C_1+C_2=1 \\ r_{zi}(1)=-C_1-2C_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=4 \\ C_2=-3 \end{cases}$$

$$=\left[4(-1)^k-3(-2)^k\right]\varepsilon(k)$$

零状态响应

$$r_{zs}(k)=e(k)*h(k)=h(k)=\left[2(-1)^{k-1}-(-2)^{k-1}\right]\varepsilon(k-1)$$

全响应 $r(k)=r_{zi}(k)+r_{zs}(k)$

$$=\left[4(-1)^k-3(-2)^k\right]\varepsilon(k)+\left[2(-1)^{k-1}-(-2)^{k-1}\right]\varepsilon(k-1)$$

$$=\left[2(-1)^k-\frac{5}{2}(-2)^k\right]\varepsilon(k)+\frac{3}{2}\delta(k)$$

离散时间系统综合练习3

❖求系统零输入响应、零状态响应、全响应。

$$r(k+2)+3r(k+1)+2r(k)=e(k+2)$$

$$e(k)=2^k\varepsilon(k) \qquad r(-1)=0 \qquad r(-2)=0.5$$

零输入响应和零状态响应初始条件

$$r_{zi}(-1)=r(-1)=0 \qquad r_{zs}(-1)=0$$

$$r_{zi}(-2)=r(-2)=0.5 \qquad r_{zs}(-2)=0$$

零输入响应

$$r_{zi}(k+2)+3r_{zi}(k+1)+2r_{zi}(k)=0$$

$$r_{zi}(0)+3r_{zi}(-1)+2r_{zi}(-2)=0 \Rightarrow r_{zi}(0)=-1$$

$$r_{zi}(1)+3r_{zi}(0)+2r_{zi}(-1)=0 \Rightarrow r_{zi}(1)=3$$

离散时间系统综合练习3

两个单根 $\gamma_1=-1,\gamma_2=-2$

$$r_{zi}(k)=\left[C_1(-1)^k+C_2(-2)^k\right]\varepsilon(k)$$

$$\begin{cases} r_{zi}(0)=-1 \\ r_{zi}(1)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=-2 \end{cases}$$

$$r_{zi}(k)=\left[(-1)^k-2(-2)^k\right]\varepsilon(k)$$

零状态响应

$$r_{zs}(k+2)+3r_{zs}(k+1)+2r_{zs}(k)=e(k+2)$$

$$H(S)=\frac{S^2}{S^2+3S+2}=\frac{-S}{S+1}+\frac{2S}{S+2}$$

$$h(k)=\left[-(-1)^k+2(-2)^k\right]\varepsilon(k)$$

离散时间系统综合练习3

$$r_{zs}(k)=e(k)*h(k)$$

$$=2^k\varepsilon(k)*\left[-(-1)^k+2(-2)^k\right]\varepsilon(k)$$

$$\begin{cases} r_{zs}(0)=1 \\ r_{zs}(1)=-1 \end{cases}$$

$$=-\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}\varepsilon(k)+2\frac{2^{k+1}-(-2)^{k+1}}{4}\varepsilon(k)$$

$$=\left[\frac{1}{3}2^k-\frac{1}{3}(-1)^k+(-2)^k\right]\varepsilon(k)$$

$$\begin{cases} r(0)=0 \\ r(1)=2 \end{cases}$$

全响应

$$r(k)=r_{zi}(k)+r_{zs}(k)=\left[\frac{1}{3}2^k+\frac{2}{3}(-1)^k-(-2)^k\right]\varepsilon(k)$$

第七章复习

- 冲激取样信号及其频谱特点（教材的第四章）
- 取样定理 – 取样信号的重建（教材的第四章）
- 离散时间系统的描述 – **差分方程**和模拟框图
- **零输入响应**
- **单位函数响应**
- 卷积和
- **零状态响应**

离散时间系统的Z域分析

离散时间系统的Z域分析

❖ 连续时间系统通过Laplace变换将微分方程转换成代数方程，离散时间系统通过Z变换将差分方程转换成代数方程。

$$\text{时域} \xrightarrow{\text{Z变换}} \text{Z域} \xrightarrow{\text{反Z变换}} \text{时域}$$

内容提要

- Z变换的定义和收敛区
- Z变换的性质
- 反Z变换
- Z变换与Laplace变换
- 离散时间系统的z 域分析法

重点与难点

- z平面与s平面的对应关系
- Z变换
  - 正反变换
  - 收敛区
  - 性质
- 离散时间系统的Z域分析法
  - 零输入响应
  - 零状态响应
  - 全响应
- 离散时间系统的稳定性

Z变换

从Laplace变换到Z变换

❖冲激取样信号

$$f_\delta(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$

双边拉普拉斯变换

$$F_{Sd}(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)e^{-st}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\,\mathrm{e}^{-skT}$$

令引入复变量 $z=e^{sT}$，f(kT)写成 f(k)

双边Z变换 $F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}$

Z变换的定义

$f(k) \leftrightarrow F(z)$ z为复变量 $z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$

双边Z变换 $F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k}$

单边Z变换 $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$ 有始序列

$$= f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \ldots$$

Z变换是z^{-1}的幂级数，级数的系数即f(k)。
幂级数收敛时，Z变换才存在 – 收敛区。

Z变换的收敛区

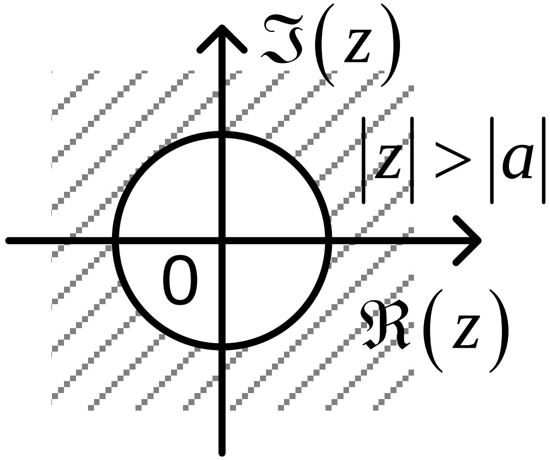
❖收敛区：使F(z)存在并有限的z的取值范围。

单边Z变换

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}=f(0)+\frac{f(1)}{z}+\frac{f(2)}{z^2}+\ldots$$

若 $f(k)=a^k\varepsilon(k)$

则 $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^k$ 等比级数求和



收敛区为：$\left|\frac{a}{z}\right|<1$ 即 $|z|>|a|$

原点为中心的圆外

收敛区练习1

❖有限长序列 f(k)=[1 2 3 2 1]，k=[-2 -1 0 1 2]。

双边Z变换 $$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}=z^{2}+2z+3+2z^{-1}+z^{-2}$$

$$0<|z|<\infty$$

单边Z变换 $$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}=3+2z^{-1}+z^{-2}$$

$$|z|>0$$

只要有限长序列各项存在且有限，则其z变换一定存在。
当包含z的正幂项时，收敛区不包含∞点。
当包含z的负幂项时，收敛区不包含0点。

收敛区练习2

❖右边序列

$$f(k)=\begin{cases}a^k & k\ge k_1\\ 0 & k<k_1\end{cases}$$

双边Z变换 $F(z)=\sum\limits_{k=k_1}^{\infty}f(k)z^{-k}=\dfrac{z}{z-a}$

若 $k_1<0\Rightarrow |a|<|z|<\infty$ 原点为中心的圆外，但不包括无穷大点

若 $k_1\ge 0\Rightarrow |z|>|a|$ 原点为中心的圆外

单边Z变换 $F(z)=\sum\limits_{k=\max(0,k_1)}^{\infty}f(k)z^{-k}=\dfrac{z}{z-a}\qquad |z|>|a|$

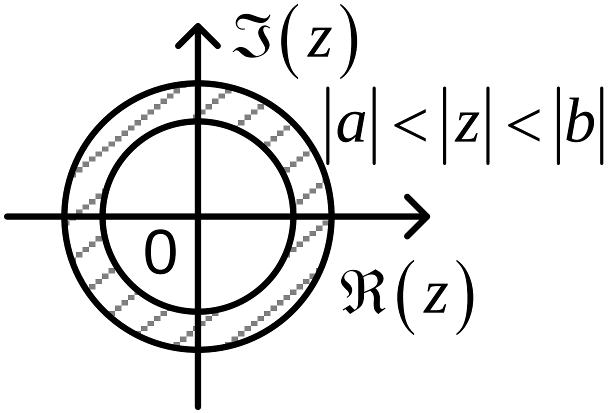
收敛区练习3

❖ 双边序列

$$f(k)=\begin{cases}a^k & k\ge 0\\ b^k & k<0\end{cases}=a^k\varepsilon(k)+b^k\varepsilon(-k-1)$$

双边Z变换 $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}+\sum_{k=-\infty}^{-1}b^k z^{-k}=\dfrac{z}{z-a}-\dfrac{z}{z-b}$

若 $|a|<|b|\Rightarrow|a|<|z|<|b|$

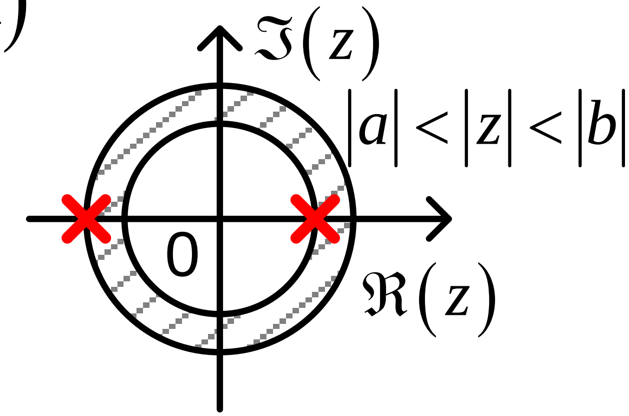


单边Z变换 $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}=\dfrac{z}{z-a}$ $|z|>|a|$

双边Z变换与双边Laplace变换

$$f(k)=f_a(k)\varepsilon(k)+f_b(k)\varepsilon(-k-1)$$

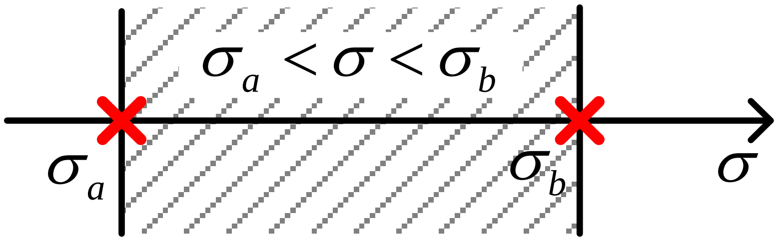
双边Z变换 $|a|<|z|<|b|$



$$F(z)=F_a(z)-F_b(z)$$

$$F_b(z)\leftrightarrow f_b(k)\varepsilon(k)$$

$$f(t)=f_a(t)\varepsilon(t)+f_b(t)\varepsilon(-t)$$



双边Laplace变换

$$F(s)=F_a(s)-F_b(s)\quad \sigma_a<\sigma<\sigma_b$$

$$F_b(s)\leftrightarrow f_b(t)\varepsilon(t)$$

所有极点都在收敛区外

表8-1 pp.277

常见右边序列的Z变换

❖ 见书pp.275　　$\delta(k)\leftrightarrow 1$　整个z平面

$\lvert z\rvert > \lvert\gamma\rvert$	$\gamma=1$	$\gamma=e^{\lambda T}$
$\gamma^k\varepsilon(k)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-\gamma}$	$\varepsilon(k)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-1}$	$e^{\lambda kT}\varepsilon(k)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-e^{\lambda T}}$
$\gamma^{k-1}\varepsilon(k-1)\leftrightarrow\dfrac{1}{z-\gamma}$	$\varepsilon(k-1)\leftrightarrow\dfrac{1}{z-1}$	$e^{\lambda(k-1)T}\varepsilon(k-1)\leftrightarrow\dfrac{1}{z-e^{\lambda T}}$
$k\gamma^{k-1}\varepsilon(k)\leftrightarrow\dfrac{z}{(z-\gamma)^2}$	$k\varepsilon(k)\leftrightarrow\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$ke^{\lambda(k-1)T}\varepsilon(k)\leftrightarrow\dfrac{z}{\left(z-e^{\lambda T}\right)^2}$

Z变换练习1

❖ 双边序列

$$|a|<|b|$$

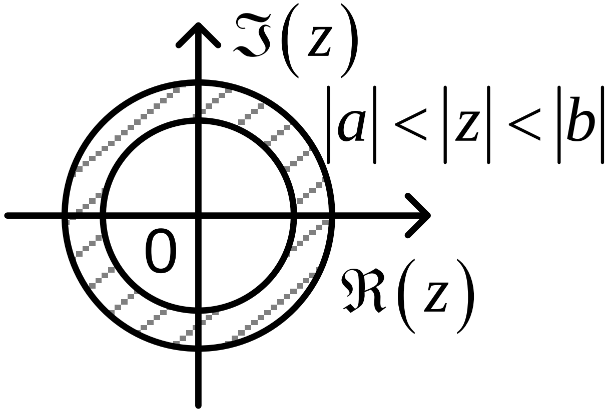
$$f(k)=\begin{cases} a^k & k\geq 0 \\ b^k & k<0 \end{cases} = a^k\varepsilon(k)+b^k\varepsilon(-k-1)$$

方法一：双边Z变换定义式：

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}+\sum_{k=-\infty}^{-1}b^k z^{-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}+\sum_{j=1}^{\infty}b^{-j} z^{j}$$

$$=\frac{1}{1-a/z}+\frac{z/b}{1-z/b}=\frac{z}{z-a}+\frac{z}{b-z}$$



Z变换练习1

方法二：分别对左边和右边序列求Z变换

右边序列 $a^k\varepsilon(k)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-a}$

左边序列：三步

$$b^k\varepsilon(-k-1)\xrightarrow{k=-n}b^{-n}\varepsilon(n-1)\xrightarrow{Z变换}F(\omega)\xrightarrow{\omega=z^{-1}}F(z)$$

$$b^{-n}\varepsilon(n-1)=\frac{1}{b}\frac{1}{b}^{n-1}\varepsilon(n-1)\leftrightarrow F(\omega)=\frac{1/b}{\omega-1/b}$$

$$F(z)\leftrightarrow\frac{-z}{z-b}$$

Z变换练习1

方法三：

$$f(k)\varepsilon(k) \leftrightarrow F(z) \qquad |z|>|a|$$

$$f(k)\varepsilon(-k-1) \leftrightarrow -F(z) \qquad |z|<|a|$$

右边序列 $a^k\varepsilon(k) \leftrightarrow \dfrac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$

左边序列 $b^k\varepsilon(-k-1) \leftrightarrow \dfrac{-z}{z-b} \qquad |z|<|b|$

$$F(z)=\frac{z}{z-a}-\frac{z}{z-b} \qquad |a|<|z|<|b|$$

Z变换的性质

Z变换的性质 – 线性特性

❖(单边)Z变换定义式

$$f(k) \leftrightarrow F(z) \qquad F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

❖线性特性 $f_1(k) \leftrightarrow F_1(z),\ f_2(k) \leftrightarrow F_2(z)$

$$a_1 f_1(k)+a_2 f_2(k) \leftrightarrow a_1 F_1(z)+a_2 F_2(z)$$

一般情况下，收敛区为两个序列收敛区的公共部分。
某些特殊情况下，收敛区有扩大的可能。

例如 $\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)=\delta(k)$

Z变换的性质 – 移序特性

❖移序特性 $f(k) \leftrightarrow F(z)$

单边Z变换

$$f(k+1) \leftrightarrow z\left[F(z) - f(0)\right]$$

$$f(k+n) \leftrightarrow z^n\left[F(z) - \sum_{i=0}^{n-1} f(i) z^{-i}\right] \qquad n>0$$

$$= z^n\left[F(z) - f(0) - z^{-1} f(1) - z^{-2} f(2) - \dots\right]$$

$$f(k-n)\varepsilon(k-n) \leftrightarrow z^{-n} F(z)$$

一般情况下，收敛区不变。某些特殊情况下，收敛区有变化的可能。

$\delta(k) \leftrightarrow 1$ 整个z平面

$\delta(k+n) \leftrightarrow z^n \quad |z| < \infty$

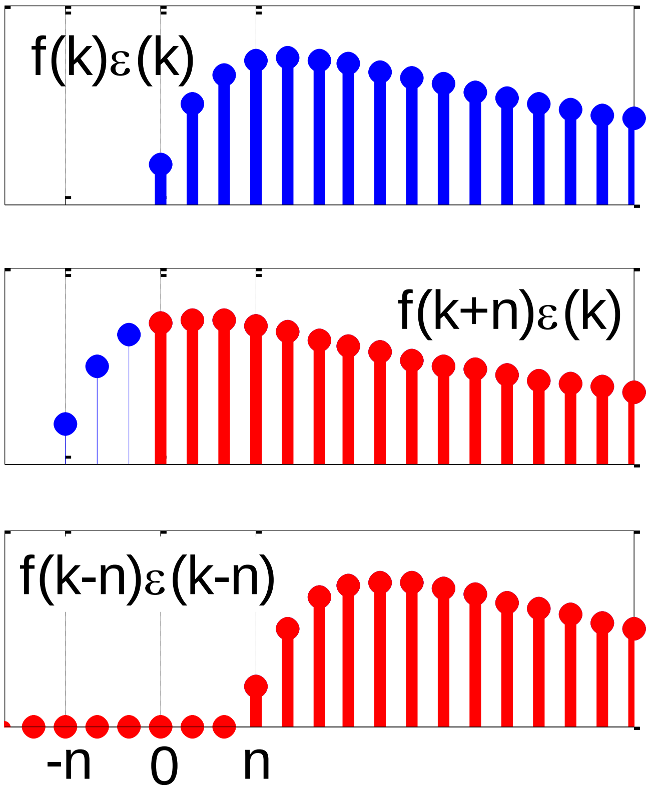
$\delta(k-n) \leftrightarrow z^{-n} \quad |z| > 0$

有始序列移序特性

❖对双边Z变换 $f(k)\varepsilon(k) \leftrightarrow F(z)$

$$f(k+n)\varepsilon(k+n) \leftrightarrow z^{n}F(z) \qquad n>0$$

$$f(k-n)\varepsilon(k-n) \leftrightarrow z^{-n}F(z)$$



❖对单边Z变换

$$f(k+n)\varepsilon(k+n) \qquad n>0$$

相当于 $f(k+n)\varepsilon(k)$

$$\leftrightarrow z^{n}\left[F(z)-\sum_{i=0}^{n-1} f(i)z^{-i}\right]$$

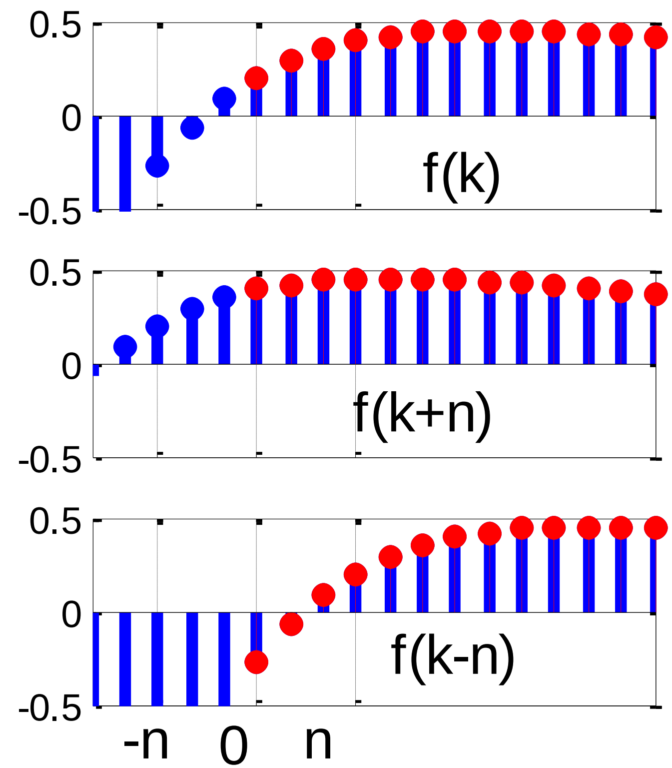
$$f(k-n)\varepsilon(k-n) \leftrightarrow z^{-n}F(z)$$

双边序列移序特性

❖对双边Z变换 $f(k) \leftrightarrow F(z)$

$$f(k+n) \leftrightarrow z^{n}F(z) \qquad n>0$$

$$f(k-n) \leftrightarrow z^{-n}F(z)$$



❖对单边Z变换 $n>0$

$$f(k+n) \leftrightarrow z^{n}\left[F(z)-\sum_{i=0}^{n-1} f(i)z^{-i}\right]$$

$$f(k-n) \leftrightarrow z^{-n}\left[F(z)+\sum_{i=-n}^{-1} f(i)z^{-i}\right]$$

Z变换的性质 – z域尺度变换

❖ z域尺度变换 $f(k) \leftrightarrow F(z) \quad \gamma_1 < |z| < \gamma_2$

$$a^k f(k) \leftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right) \quad a\gamma_1 < |z| < a\gamma_2$$

推导

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k f(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = F\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$\gamma_1 < \left|\frac{z}{a}\right| < \gamma_2$$

Z变换的性质练习1

❖求(单边)Z变换

$$f(k)=a^k\varepsilon(k)-a^k\varepsilon(k-1)$$

$$f_1(k)=a^k\varepsilon(k)\leftrightarrow F_1(z)=\frac{z}{z-a}\qquad |z|>|a|$$

$$f_2(k)=a^k\varepsilon(k-1)\leftrightarrow F_2(z)=\frac{a}{z-a}\qquad |z|>|a|$$

$$F(z)=\frac{z-a}{z-a}=1$$ 整个z平面　收敛区扩大

或 $$f(k)=a^k\left[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)\right]=\delta(k)\leftrightarrow F(z)=1$$

Z变换的性质练习2

❖求(单边)Z变换

$$\gamma^k\varepsilon(k)\leftrightarrow\frac{z}{z-\gamma},|z|>|\gamma|$$

$$\cos k\omega_0\varepsilon(k)=\frac{e^{jk\omega_0}\varepsilon(k)+e^{-jk\omega_0}\varepsilon(k)}{2}\qquad |z|>1$$

$$\leftrightarrow\frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}+\frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}\right]=\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$$

$$\sin k\omega_0\varepsilon(k)=\frac{e^{jk\omega_0}\varepsilon(k)-e^{-jk\omega_0}\varepsilon(k)}{2}$$

$$\leftrightarrow\frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}-\frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}\right]=\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$$

Z变换的性质练习3

❖求(单边)Z变换 $f(k)=\beta^k\cos k\omega_0\varepsilon(k)$

$$\cos k\omega_0\varepsilon(k)\leftrightarrow F(z)=\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}\qquad |z|>1$$

$$F(\frac{z}{\beta})=\frac{\frac{z}{\beta}\left(\frac{z}{\beta}-\cos\omega_0\right)}{\left(\frac{z}{\beta}\right)^2-2\frac{z}{\beta}\cos\omega_0+1}=\frac{1-\beta z^{-1}\cos\omega_0}{1-2\beta z^{-1}\cos\omega_0+\beta^2z^{-2}}$$

$$\left|\frac{z}{\beta}\right|>1\Rightarrow|z|>|\beta|$$

Z变换的性质 – z域微分

❖ z域微分 $f(k) \leftrightarrow F(z)$

$$kf(k) \leftrightarrow -z\frac{d}{dz}F(z)$$

推导

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

$$\frac{d}{dz}z^{-k}=-kz^{-k-1}$$

$$\frac{d}{dz}F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\frac{d}{dz}z^{-k}=-z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} kf(k)z^{-k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} kf(k)z^{-k}=\mathscr{Z}\{kf(k)\}$$

Z变换的性质 – 卷积定理

❖ 卷积定理 $f_1(k) \leftrightarrow F_1(z),\, f_2(k) \leftrightarrow F_2(z)$

$$f_1(k) * f_2(k) \leftrightarrow F_1(z) F_2(z)$$

推导

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_1(j) f_2(k-j) \right] z^{-k}$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_1(j) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_2(k-j) z^{-k} \right]$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_1(j) z^{-j} F_2(z) = F_1(z) F_2(z)$$

Z变换的性质 – 初值终值定理

❖初值和终值定理 $f(k) \leftrightarrow F(z)$

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z) \qquad F(z)=f(0)+\sum_{k=1}^{\infty}f(k)z^{-k}$$

$$f(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

$$\lim_{z\to 1}\sum_{k=0}^{\infty}\left[f(k+1)-f(k)\right]z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[f(k+1)-f(k)\right]=f(\infty)-f(0)$$

又因为 $f(k+1)-f(k) \leftrightarrow z\left[F(z)-f(0)\right]-F(z)$

$$\lim_{z\to 1}\sum_{k=0}^{\infty}\left[f(k+1)-f(k)\right]z^{-k}=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)-f(0)$$

f(∞)存在的条件：F(z)的收敛区是单位圆外整个z平面，或极点在单位圆内，若在单位圆上则是单阶极点。

Z变换的性质练习4

❖求(单边)Z变换

$$k\varepsilon(k) \leftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z}{(z-1)^2} \qquad |z|>1$$

$$k^2\varepsilon(k) \leftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \qquad |z|>1$$

$$\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} \qquad kf(k) \leftrightarrow -z\frac{d}{dz}F(z)$$

Z变换的性质练习5

❖求卷积和 $f_1(k)=a^k\varepsilon(k) \quad f_2(k)=b^k\varepsilon(k)$

$$F_1(z)=\frac{z}{z-a} \quad |z|>|a|$$

$$F_2(z)=\frac{z}{z-b} \quad |z|>|b| \qquad |z|>\max(|a|,|b|)$$

$$F(z)=\frac{z}{z-a}\frac{z}{z-b}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{az}{z-a}-\frac{bz}{z-b}\right)$$

$$f(k)=\frac{1}{a-b}\left(aa^k\varepsilon(k)-bb^k\varepsilon(k)\right)=\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}\varepsilon(k)$$

Z变换的性质练习6

❖利用Z变换解差分方程

$$r(k+1)-0.9r(k)=0.05\varepsilon(k+1) \quad r(-1)=0$$

两边同时进行Z变换

$$R(z)-0.9z^{-1}R(z)=0.05\frac{z}{z-1} \qquad |z|>1$$

$$R(z)=\frac{0.05z^2}{(z-0.9)(z-1)}=\frac{-0.45z}{z-0.9}+\frac{0.5z}{z-1}$$

$$f(k)=\left[0.5-0.45(0.9)^k\right]\varepsilon(k)$$

Z变换的性质练习7

❖ 求零状态响应

$$e(k)=\varepsilon(k) \qquad h(k)=a^{k}\varepsilon(k)-a^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

$$e(k)=\varepsilon(k)\leftrightarrow E(z)=\frac{z}{z-1} \qquad |z|>1$$

$$h(k)=a^{k}\varepsilon(k)-a^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

$$\leftrightarrow H(z)=\left(1-z^{-1}\right)\frac{z}{z-a}=\frac{z-1}{z-a} \qquad |z|>|a|$$

$$R(z)=E(z)H(z)=\frac{z}{z-a}\leftrightarrow r(k)=a^{k}\varepsilon(k)$$

反Z变换

单边Laplace反变换 – 复习

- 定义式
- 查表+Laplace变换的性质
- 部分分式法(Heaviside展开法)
- 围线积分法(留数法)

n个单阶极点 $D(s)=(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)=0$

部分分式法

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}K_i e^{s_i t}\varepsilon(t)$$

$$K_i=\left[(s-s_i)\frac{N(s)}{D(s)}\right]_{s=s_i}$$

留数法

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}_i\,\varepsilon(t)$$

$$\mathrm{Res}_i=\left[(s-s_i)F(s)e^{st}\right]_{s=s_i}$$

反Z变换

- 定义式 – 幂级数展开法
- 查表+Z变换的性质
- 部分分式展开法
- 留数法(围线积分法)

幂级数展开法

❖ Z变换定义式

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \qquad |z|>|a|$$

❖ 幂级数展开 – 利用长除法得到幂级数系数

$$F(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=A_0+A_1 z^{-1}+A_2 z^{-2}+\ldots$$

❖ 反Z变换

$$f(0)=A_0,\ f(1)=A_1,\ f(2)=A_2,\ldots$$

反Z变换练习1

❖求反变换

$$F(z)=\frac{z}{(z-1)^2} \qquad |z|>1$$

$$\begin{array}{r l}
 & z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\ldots\ldots \\
z^2-2z+1 \big) & z \\
 & \underline{z-2+z^{-1}} \\
 & 2-z^{-1} \\
 & \underline{2-4z^{-1}+2z^{-2}} \\
 & 3z^{-1}-2z^{-2} \\
 & \underline{3z^{-1}-6z^{-2}+3z^{-3}} \\
 & 4z^{-2}-3z^{-3} \\
 & \cdots \quad \cdots
\end{array}$$

$$F(z)=0+z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\ldots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k}$$

$$f(k)=k\varepsilon(k)$$

不易得到f(k)的数学表达式

部分分式展开法

基本变换 – 分子包含z

$$\frac{z}{z-\gamma}\leftrightarrow\gamma^{k}\varepsilon(k)\qquad\frac{z}{(z-\gamma)^{2}}\leftrightarrow k\gamma^{k-1}\varepsilon(k)$$

一般对F(z)/z进行展开　　F(z)/z引入一个等于零的极点

若全部为单根 $$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_0}{z}+\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{z-\gamma_i}$$

即 $$F(z)=K_0+\sum_{i=1}^{n}\left[K_i\frac{z}{z-\gamma_i}\right]$$

γ_i为F(z)的极点

$$\leftrightarrow f(k)=K_0\delta(k)+\sum_{i=1}^{n}K_i\gamma_i^{k}\varepsilon(k)$$

部分分式法待定系数的确定

❖同Laplace反变换中待定系数的确定方法

- 待定系数法
- 系数计算公式（单根）

$$K_0=\left[F(z)\right]_{z=0}\qquad K_i=\left[\left(z-\gamma_i\right)\frac{F(z)}{z}\right]_{z=\gamma_i}$$

反Z变换练习2

❖求反变换 $F(z)=\dfrac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}\qquad |z|>1$

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z}{z^2-1.5z+0.5}=\frac{z}{(z-0.5)(z-1)}=\frac{K_1}{z-0.5}+\frac{K_2}{z-1}$$

$$K_1=-1, K_2=2$$

$$F(z)=\frac{-z}{z-0.5}+\frac{2z}{z-1}\qquad |z|>1$$ 右边序列

$$\frac{z}{z-\gamma}\leftrightarrow\gamma^k\varepsilon(k)$$

$$f(k)=\left(2-0.5^k\right)\varepsilon(k)$$

反Z变换练习3

❖求反变换 $F(z)=\dfrac{z^2}{z^2+16}$ $\quad |z|>4$

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z}{z^2+16}=\frac{K_1}{z-4j}+\frac{K_2}{z+4j}$$

共轭单阶极点

$\pm 2j$

$$K_1=\frac{1}{2}, K_2=K_1^*=\frac{1}{2}$$

$$F(z)=\frac{1/2}{z-4j}+\frac{1/2}{z+4j}$$

$$f(k)=\frac{1}{2}\left[(4j)^k+(-4j)^k\right]\varepsilon(k)$$

$$=\frac{4^k}{2}\left[\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)^k+\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)^k\right]\varepsilon(k)$$

$$=4^k\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)\varepsilon(k)$$

反Z变换练习4

❖求对应的右边序列

$$F(z)=\frac{4z^3+7z^2+3z+1}{z^3+z^2+z}$$

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{4z^3+7z^2+3z+1}{z^2\left(z^2+z+1\right)}=\frac{K_0}{z}+\frac{K_1}{z^2}+\frac{K_2z+K_3}{z^2+z+1}$$

$$K_0=2,K_1=1,K_2=2,K_3=4$$

三个极点

$$0,-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}j=e^{\pm\frac{2}{3}\pi}$$

$$F(z)=2+\frac{1}{z}+\underline{\frac{2z^2+4z}{z^2+z+1}}=F_1(z)$$

$$f(k)=2\delta(k)+\delta(k-1)+f_1(k)$$

反Z变换练习4

$$\begin{cases} \dfrac{z\left(z-\cos\omega_0\right)}{z^2-2z\cos\omega_0+1} \leftrightarrow \cos\omega_0 k\varepsilon(k) \\[2ex] \dfrac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1} \leftrightarrow \sin\omega_0 k\varepsilon(k) \end{cases}$$

$$\cos\omega_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2}{3}\pi$$

$$F_1(z) = \frac{2z^2+4z}{z^2+z+1} = \frac{2z\left(z+\dfrac{1}{2}\right)}{z^2+z+1} + \frac{2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}z\right)}{z^2+z+1}$$

$$f_1(k) = 2\cos\left(\frac{2}{3}k\pi\right)\varepsilon(k) + 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{2}{3}k\pi\right)\varepsilon(k)$$

$$f(k) = 2\delta(k) + \delta(k-1) + 4\cos\left(\frac{2}{3}k\pi - \frac{\pi}{3}\right)\varepsilon(k)$$

反Z变换练习5

❖求反变换 $$F(z)=\frac{z(z+1)}{(z-3)(z-1)^2}\qquad |z|>3$$

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{(z+1)}{(z-3)(z-1)^2}=\frac{K_1}{z-1}+\frac{K_2}{(z-1)^2}+\frac{K_3}{z-3}$$

$$K_1=-1, K_2=-1, K_3=1\qquad |z|>3$$ 右边序列

$$F(z)=\frac{-z}{z-1}+\frac{-z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-3}\qquad \frac{z}{z-\gamma}\leftrightarrow \gamma^k\varepsilon(k)$$

$$f(k)=\left(3^k-k-1\right)\varepsilon(k)\qquad \frac{z}{(z-\gamma)^2}\leftrightarrow k\gamma^{k-1}\varepsilon(k)$$

反Z变换练习5

❖p重根 – 待定系数

$$\frac{F_i(z)}{z}=\frac{K_{i1}}{(z-\gamma_i)}+\frac{K_{i2}}{(z-\gamma_i)^2}+\dots+\frac{K_{ip}}{(z-\gamma_i)^p}=\sum_{k=1}^{p}\frac{K_{ik}}{(z-\gamma_i)^k}$$

$$K_{ik}=\frac{1}{(p-k)!}\frac{d^{p-k}}{dz^{p-k}}\left[(z-\gamma_i)^p\frac{F(z)}{z}\right]_{z=\gamma_i}$$

$$K_{ip}=\left[(z-\gamma_i)^p\frac{F(z)}{z}\right]_{z=\gamma_i}\qquad K_{i(p-1)}=\frac{d}{dz}\left[(z-\gamma_i)^p\frac{F(z)}{z}\right]_{z=\gamma_i}$$

$$f_i(t)=\left[K_{i1}\gamma_i^k+K_{i2}k\gamma_i^{k-1}+\frac{K_{i3}}{2!}k(k-1)\gamma_i^{k-2}+\dots\right]\varepsilon(k)$$

反Z变换练习5

❖p重根

$$\frac{z}{(z-\gamma)^{p}} \leftrightarrow \frac{k(k-1).....(k-p+2)}{(p-1)!}\gamma^{k-p+1}\varepsilon(k)$$

$$\frac{z}{z-\gamma} \leftrightarrow \gamma^{k}\varepsilon(k)$$

两边同时对 γ 求导

$$\frac{z}{(z-\gamma)^{2}} \leftrightarrow k\gamma^{k-1}\varepsilon(k)$$

$$\frac{z}{(z-\gamma)^{3}} \leftrightarrow \frac{1}{2}k(k-1)\gamma^{k-2}\varepsilon(k)$$

反Z变换练习6

❖求反变换 $F(z)=\dfrac{z^3+z^2}{(z-1)^3}$ $|z|>1$

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z^2+z}{(z-1)^3}=\frac{K_1}{(z-1)^3}+\frac{K_2}{(z-1)^2}+\frac{K_3}{z-1}$$

$$K_1=(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=1}=2 \qquad K_2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\right]_{z=1}=3$$

$$K_3=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\right]_{z=1}=1$$

$$F(z)=\frac{2z}{(z-1)^3}+\frac{3z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}$$

反Z变换练习6

$$F(z)=\frac{z^3+z^2}{(z-1)^3}\qquad |z|>1$$

$$F(z)=\frac{2z}{(z-1)^3}+\frac{3z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}$$

右边序列 $f(k)=\left[k(k-1)+3k+1\right]\varepsilon(k)$

留数法(围线积分法)

❖C为收敛区内一包含原点的闭合曲线

$$f(k)=\sum \mathrm{Res}\left[\underline{F(z)}z^{k-1}\right]_{C内极点}$$

F(z)z^{k-1}的极点

只考虑有始序列

$$f(k)=\sum \mathrm{Res}_i$$

所有极点均在C内

k=0时，出现原点处一阶极点。

k<0时，原点处出现极点阶数随k变化的极点。

需分别计算留数。

单阶极点

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i}}=\left[(z-\gamma_i)F(z)z^{k-1}\right]_{z=\gamma_i}$$

p阶极点

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i}}=\frac{1}{(p-1)!}\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\left[(z-\gamma_i)^p F(z)z^{k-1}\right]_{z=\gamma_i}$$

留数法(围线积分法)

❖ 复变函数理论：具有有限个极点的复变函数在复平面内所有极点留数的和加上函数在无穷远点留数的和等于零。

$$\boxed{\mathrm{Res}\left[F(z)z^{k-1}\right]_{C\text{内极点}}} = f(k)$$

$$+\mathrm{Res}\left[F(z)z^{k-1}\right]_{C\text{外极点}}+\mathrm{Res}\left[F(z)z^{k-1}\right]_{z=\infty}=0$$

$$f(k)=-\mathrm{Res}\left[F(z)z^{k-1}\right]_{C\text{外极点}}-\mathrm{Res}\left[F(z)z^{k-1}\right]_{z=\infty}$$

$$\mathrm{Res}\left[\underline{F(z)z^{k-1}}\right]_{z=\infty}=-\mathrm{Res}\left[\underline{F\left(z^{-1}\right)z^{-k+1}z^{-2}}\right]_{z=0}$$

X(z) $\qquad\qquad$ $X(z^{-1})z^{-2}$

反Z变换练习7

❖求反变换 $F(z)=\dfrac{z^3+2z^2+1}{z(z-1)(z-0.5)}\quad |z|>1$

$$F(z)z^{k-1}=\frac{z^3+2z^2+1}{z(z-1)(z-0.5)}z^{k-1}=\frac{z^3+2z^2+1}{(z-1)(z-0.5)}z^{k-2}$$

$k\geq 2$ 时，两个单阶极点 $z_1=1, z_2=0.5$

$$\mathrm{Res}_1=\left[(z-1)F(z)z^{k-1}\right]_{z=1}=\left[\frac{z^3+2z^2+1}{(z-0.5)}z^{k-2}\right]_{z=1}=8$$

$$\mathrm{Res}_2=\left[(z-0.5)F(z)z^{k-1}\right]_{z=0.5}=\left[\frac{z^3+2z^2+1}{(z-1)}z^{k-2}\right]_{z=0.5}=-13(0.5)^k$$

$k\geq 2$ 时 $\quad f(k)=8-13(0.5)^k$

反Z变换练习7

$$F(z)z^{k-1}=\frac{z^3+2z^2+1}{(z-1)(z-0.5)}z^{k-2}$$

$k=1$ 时，三个单阶极点 $z_1=1, z_2=0.5, z_3=0$

$$\mathrm{Res}_3=\left[zF(z)z^{k-1}\right]_{z=0,k=1}$$

$$=\left[\frac{z^3+2z^2+1}{(z-1)(z-0.5)}z^{k-1}\right]_{z=0,k=1}=2$$

$$f(k)=8-13(0.5)^1+2=3.5$$

反Z变换练习7

$$F(z)z^{k-1}=\frac{z^3+2z^2+1}{(z-1)(z-0.5)}z^{k-2}$$

$k=0$ 时，四个极点 $z_1=1, z_2=0.5, z_{3,4}=0$

$$\mathrm{Res}_{3,4}=\frac{1}{(2-1)!}\left\{\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[z^2F(z)z^{k-1}\right]\right\}_{z=0,k=0}$$

$$=\frac{d}{dz}\left[\frac{z^3+2z^2+1}{(z-0.5)(z-1)}\right]_{z=0}=6$$

$$f(0)=8-13(0.5)^0+6=1$$

反Z变换练习7

$$f(k)=\begin{cases} 1 & k=0 \\ 3.5 & k=1 \\ 8-13(0.5)^k & k\geq 2 \end{cases}$$

双边序列

❖判断极点归属

- 极点在收敛区内边界以内，极点对应右边序列。
- 极点在收敛区外边界以外，极点对应左边序列。

❖右边序列部分可由部分分式法或留数法得到。

❖左边序列部分分三步进行

- $z=w^{-1}$，F(w)； F(w)→f(n)；n=-k，f(k)。

❖左边序列部分也可以由下面关系得到

$$f(k)\varepsilon(k) \leftrightarrow F(z) \qquad |z|>|a|$$

$$f(k)\varepsilon(-k-1) \leftrightarrow -F(z) \qquad |z|<|a|$$

反Z变换练习8

❖求反变换 $F(z)=\dfrac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$

$$\frac{z}{z-\gamma}\leftrightarrow \gamma^{k}\varepsilon(k)$$

$$F(z)=\frac{3z}{(z-1)^{2}}+\frac{z}{z-1}$$

$$\frac{z}{(z-\gamma)^{2}}\leftrightarrow k\gamma^{k-1}\varepsilon(k)$$

$|z|>1$ 时，右边序列 $f(k)=(3k+1)\varepsilon(k)$

$|z|<1$ 时，左边序列

$$F(w)=F(z)\Big|_{z=w^{-1}}=\frac{-1}{w-1}+\frac{3w}{(w-1)^{2}}$$

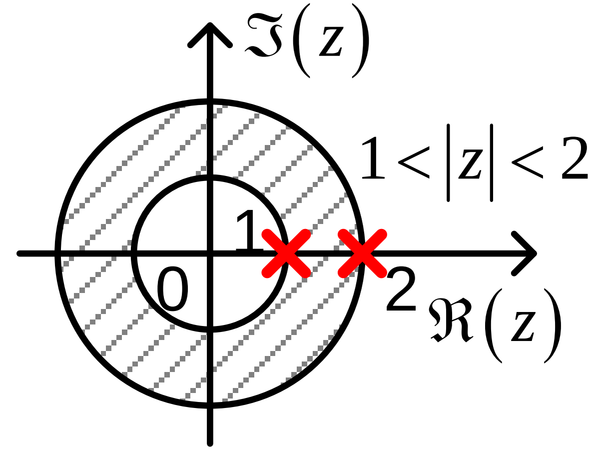
$$F(w)\leftrightarrow f(n)=(3n-1)\varepsilon(n-1)$$

$$f(k)=f(n)\Big|_{n=-k}=-(3k+1)\varepsilon(-k-1)$$

反Z变换练习9

❖求反变换 $F(z)=\dfrac{3z^2-5z}{(z-1)(z-2)}$ $\quad 1<|z|<2$

$$F(z)=\frac{2z}{z-1}+\frac{z}{z-2}$$



对应的右边序列为

$$f_1(k)=2\varepsilon(k)+2^k\varepsilon(k)$$

$\gamma_1=1$ 对应右边序列 $f(k)\varepsilon(k)$

$\gamma_2=2$ 对应左边序列 $-f(k)\varepsilon(-k-1)$

$$f(k)=2\varepsilon(k)-2^k\varepsilon(-k-1)$$

Z变换综合练习1

(1) $f(k)=4^{-k}\left[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-2)\right]$

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k}=\sum_{k=0}^{1}4^{-k}z^{-k}=1+\frac{1}{4}z^{-1}$$

(2) $f(k)=k(-1)^{k}\varepsilon(k)$

$$F(z)=-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z+1}\right)=\frac{-z}{(z+1)^{2}}$$

(3) $f(k)=\sum_{n=0}^{k}a^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}\varepsilon(k-n)=a^{k}\varepsilon(k)*\varepsilon(k)$

$$F(z)=\frac{z}{z-a}\frac{z}{z-1}$$

Z变换综合练习1

也可以利用定义式求 (3) $f(k)=\sum_{n=0}^{k}a^n$

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{k}a^n\right]z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}a^n\varepsilon(k-n)\right]z^{-k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\left[\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon(k-n)z^{-k}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\left[z^{-n}\frac{z}{z-1}\right]=\frac{z}{z-a}\frac{z}{z-1}$$

Z变换综合练习2

❖留数法

$$F(z)=\frac{3z^2-5z}{(z-2)(z-1)}$$

$$F(z)z^{k-1}=\frac{3z-5}{(z-2)(z-1)}z^k$$

两个单阶极点 $\gamma_1=1,\gamma_2=2$

只考虑|z|>2，右边序列的情况，即k≥0

$$\mathrm{Res}_1=\left[(z-1)F(z)z^{k-1}\right]_{z=1}=\left[\frac{3z-5}{(z-2)}z^k\right]_{z=1}=2$$

$$\mathrm{Res}_2=\left[(z-2)F(z)z^{k-1}\right]_{z=2}=\left[\frac{3z-5}{(z-1)}z^k\right]_{z=2}=2^k$$

$$f(k)=2\varepsilon(k)+2^k\varepsilon(k)$$

Z变换综合练习3

❖求反变换 $F(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}=\dfrac{\frac{1}{3}z}{z+1}+\dfrac{\frac{2}{3}z}{z-2}$

(1) $|z|>2$ (2) $|z|<1$ (3) $1<|z|<2$

(1) $|z|>2$ 右边序列 $f(k)=\left(\dfrac{1}{3}(-1)^k+\dfrac{2}{3}2^k\right)\varepsilon(k)$

(2) $|z|<1$ 左边序列 $f(k)=-\left(\dfrac{1}{3}(-1)^k+\dfrac{2}{3}2^k\right)\varepsilon(-k-1)$

(3)$1<|z|<2$ 双边序列

$$f(k)=\frac{1}{3}(-1)^k\varepsilon(k)-\frac{2}{3}2^k\varepsilon(-k-1)$$

Z变换与Laplace变换的关系

Z变换与Laplace变换

❖将F(s)所对应的连续时间函数进行取样得到的离散时间信号的F(z)。

$$F(s)\xrightarrow{\text{L反变换}} f(t)\xrightarrow{\text{取样}} f(k)\xrightarrow{\text{Z变换}} F(z)$$

Laplace反变换 $$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\,ds$$

以间隔T_S取样 $$f(kT_S)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)\mathrm{e}^{skT_S}\,ds$$

Z变换 $$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT_S)z^{-k}$$

Z变换与Laplace变换

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi j}\left[\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) \mathrm{e}^{skT_S} \, ds\right] z^{-k}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{skT_S} \, z^{-k}\right] ds$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\frac{z}{z-e^{sT_S}} ds$$

留数形式

$$F(z)=\sum \mathrm{Res}\left[\frac{zF(s)}{z-e^{sT_S}}\right]$$

Z变换与Laplace变换

留数形式 $$F(z)=\sum \operatorname{Res}\left[\frac{zF(s)}{z-e^{sT_S}}\right]$$

❖F(s)的一阶极点s_1对应F(z)的一阶极点 γ_1

$$\operatorname{Res}_1=\left[(s-s_1)\frac{zF(s)}{z-e^{sT_S}}\right]_{s=s_1}=\frac{K_1 z}{z-e^{s_1 T_S}}=\frac{K_1 z}{z-\gamma_1}$$

$$K_1=\left[(s-s_1)F(s)\right]_{s=s_1}$$

$$\boxed{\gamma_1=e^{s_1 T_S}}$$

Z变换与Laplace变换练习1

❖ 求Z变换 $f(k)=\sin k\omega_0 T_S\,\varepsilon(kT_S)$

(1) F(s) $f(t)=\sin\omega_0 t\varepsilon(t)\leftrightarrow F(s)=\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

$$s_1=j\omega_0,\ s_2=-j\omega_0$$

(2) 求留数 $K_1=\left[(s-s_1)F(s)\right]_{s=s_1}=-\dfrac{j}{2}$

$$K_2=\left[(s-s_2)F(s)\right]_{s=s_2}=\frac{j}{2}$$

(3) $F(z)=\dfrac{K_1 z}{z-e^{s_1 T_S}}+\dfrac{K_2 z}{z-e^{s_2 T_S}}=\dfrac{z\sin\omega_0 T_S}{z^2-2z\cos\omega_0 T_S+1}$

Z变换与Laplace变换练习2

❖ 求Z变换 $f(k)=e^{-akT_S}\varepsilon(kT_S)$

(1) F(s) $f(t)=e^{-at}\varepsilon(t)\leftrightarrow F(s)=\dfrac{1}{s+a}$

$s_1=-a$

(2) 求留数 $K_1=\left[(s+a)F(s)\right]_{s=-a}=1$

(3) $F(z)=\dfrac{K_1 z}{z-e^{s_1 T_S}}=\dfrac{z}{z-e^{-aT_S}}$

z平面与s平面的映射关系

$z = e^{sT_S}$ 复频率 $s = \sigma + j\omega$

则 $z = e^{sT_S} = e^{(\sigma + j\omega)T_S}$

$z = re^{j\theta}$ $r = e^{\sigma T_S}$ $\theta = \omega T_S$

s平面虚轴映射为z平面上单位圆 $\sigma = 0$ $r = 1$

s平面右半平面映射为单位圆的圆外 $\sigma > 0$ $r > 1$

s平面左半平面映射为单位圆的圆内 $\sigma < 0$ $r < 1$

H(s)极点位于左半平面，系统稳定。

对应H(z)极点位于单位圆内，系统稳定。

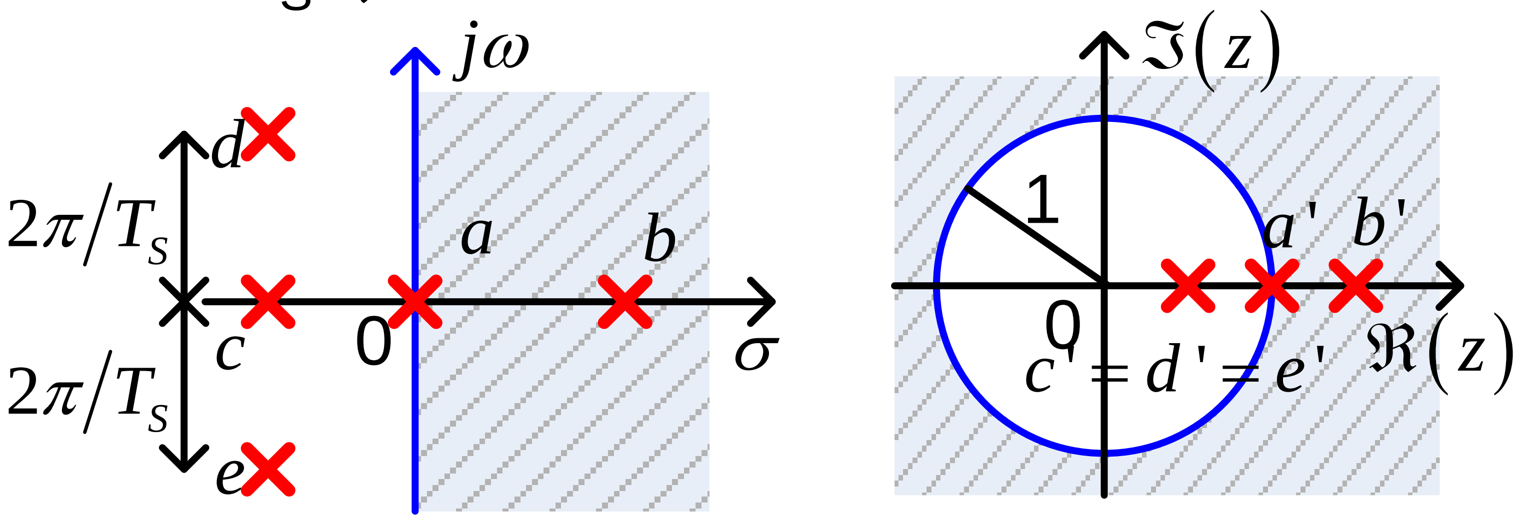
z平面与s平面的映射关系

复频率 $s = \sigma + j\omega$

$$z = re^{j\theta} = e^{sT_S} = e^{(\sigma + j\omega)T_S} \qquad r = e^{\sigma T_S} \qquad \theta = \omega T_S$$

s平面虚轴上相差2π/T_S 的点映射为z平面上同一个点。

ω改变2π/T_S ， θ旋转一圈。



s平面上高度为2π/T_S 的窄带映射整个z平面

离散时间系统的Z域分析法

时域到Z域 → Z域求解代数方程 → Z域到时域

Z域求解系统响应

❖时域→Z域，得到Z域的输入激励信号。

$$e(k) \to E(z)$$

❖得到Z域系统方程 – 对差分方程进行Z变换

- 零输入响应：包含初始条件，令e(k)=0
- 零状态响应：不包含初始条件，e(k)→E(z)
- 全响应：包含初始条件， e(k)→E(z)

❖由Z域系统方程求系统响应

$$H(z) = \frac{R_{zs}(z)}{E(z)}$$

$$R_{zi}(z) + R_{zs}(z) \qquad R(z)$$

❖Z域→时域，得到时域的输出信号。

$$R_{zi}(z) + R_{zs}(z) \to r_{zi}(k) + r_{zs}(k) \qquad R(z) \to r(k)$$

对差分方程进行Z变换

❖利用移序特性 $f(k) \leftrightarrow F(z)$

❖一般单边z变换 （$k \geq 0$） 教材pp.295-296

$$f(k+n) \leftrightarrow z^{n}\left[F(z)-\sum_{i=0}^{n-1} f(i) z^{-i}\right]$$

$$f(k-n) \leftrightarrow z^{-n}\left[F(z)+\sum_{i=-n}^{-1} f(i) z^{-i}\right]$$

Z域求解系统响应练习1

❖求响应

$$r(k+2)-0.7r(k+1)+0.1r(k)=7e(k+2)-2e(k+1)$$

$$r_{zi}(0)=2,r_{zi}(1)=4 \quad e(k)=\varepsilon(k)$$

零输入响应 – 差分方程齐次解

$$r(k+2)-0.7r(k+1)+0.1r(k)=0$$

$$\gamma_1=0.5,\gamma_2=0.2$$

$$r_{zi}(k)=\left[C_1 0.5^k+C_2 0.2^k\right]\varepsilon(k)$$

$$=\left[12(0.5)^k-10(0.2)^k\right]\varepsilon(k)$$

Z域求解系统响应练习1

零输入响应 – 对差分方程进行Z变换

$$r(k+2)-0.7r(k+1)+0.1r(k)=0$$

$$\left[z^2R_{zi}(z)-z^2r_{zi}(0)-zr_{zi}(1)\right]$$
$$-0.7\left[zR_{zi}(z)-zr_{zi}(0)\right]+0.1R_{zi}(z)=0$$

$$R_{zi}(z)=\frac{2z^2+2.6z}{z^2-0.7z+0.1}=\frac{12z}{z-0.5}-\frac{10z}{z-0.2}$$

$$r_{zi}(k)=\left[12(0.5)^k-10(0.2)^k\right]\varepsilon(k)$$

Z域求解系统响应练习1

零状态响应 – 系统函数H(z)

$$\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$r(k+2)-0.7r(k+1)+0.1r(k)=7e(k+2)-2e(k+1)$$

$$H(S)=\frac{7S^2-2S}{S^2-0.7S+0.1} \quad H(z)=\frac{7z^2-2z}{z^2-0.7z+0.1}$$

$$R_{zs}(z)=\frac{7z^2-2z}{z^2-0.7z+0.1}\frac{z}{z-1}=\frac{12.5z}{z-1}-\frac{5z}{z-0.5}-\frac{0.5z}{z-0.2}$$

$$r_{zs}(k)=\left[12.5-5(0.5)^k-0.5(0.2)^k\right]\varepsilon(k)$$

$$r(k)=r_{zi}(k)+r_{zs}(k)=\left[12.5+7(0.5)^k-10.5(0.2)^k\right]\varepsilon(k)$$

Z域求解系统响应练习1

全响应 – 对差分方程进行Z变换

$$r(k+2)-0.7r(k+1)+0.1r(k)=7e(k+2)-e(k+1)$$

$$\left[z^2R(z)-z^2r(0)-zr(1)\right]-0.7\left[zR(z)-zr(0)\right]+0.1R(z)$$

$$=7\left[z^2E(z)-z^2e(0)-ze(1)\right]-2\left[zE(z)-ze(0)\right]$$

代入 $r(0)=r_{zi}(0)+r_{zs}(0)\quad r(1)=r_{zi}(1)+r_{zs}(1)$

$$\left(z^2-0.7z+0.1\right)R(z)-\underline{\left(z^2-0.7z\right)r_{zi}(0)-zr_{zi}(1)}$$

$$\underline{-\left(z^2-0.7z\right)r_{zs}(0)-zr_{zs}(1)}$$

两项相抵消

$$=\left(7z^2-2z\right)E(z)\underline{-\left(7z^2-2z\right)e(0)-7ze(1)}$$

Z域求解系统响应练习1

全响应 – 对差分方程进行Z变换

$$r(k+2)-0.7r(k+1)+0.1r(k)=7e(k+2)-e(k+1)$$

$$\left[z^2R(z)-z^2r_{zi}(0)-zr_{zi}(1)\right]-0.7\left[zR(z)-zr_{zi}(0)\right]$$

$$+0.1R(z)=7z^2E(z)-zE(z)$$

$$R(z)=\underbrace{\frac{7z^2-z}{z^2-0.7z+0.1}E(z)}_{R_{zs}(z)}+\underbrace{\frac{2z^2+2.6z}{z^2-0.7z+0.1}}_{R_{zi}(z)}$$

$$r(k)=r_{zi}(k)+r_{zs}(k)=\left[12.5+7(0.5)^k-10.5(0.2)^k\right]\varepsilon(k)$$

Z域求解系统响应练习2

❖求单位函数响应，并写出差分方程。

$$e(k)=\left(-\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon(k)\qquad r_{zs}(k)=\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k+4\left(-\frac{1}{3}\right)^k-\frac{9}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right]\varepsilon(k)$$

$$E(z)=\frac{z}{z+1/2}\qquad R_{zs}(z)=\frac{3/2\,z}{z-1/2}+\frac{4z}{z+1/3}-\frac{9/2\,z}{z+1/2}$$

$$H(z)=\frac{R_{zs}(z)}{E(z)}=\frac{z^2+2z}{z^2-\frac{1}{6}z-\frac{1}{6}}=\frac{3z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{-2z}{z+\frac{1}{3}}$$

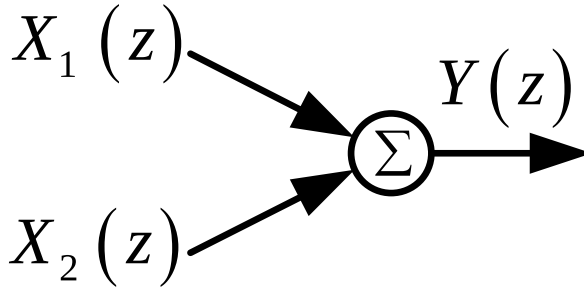
$$h(k)=\left[3\left(\frac{1}{2}\right)^k-2\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right]\varepsilon(k)$$

$$r(k+2)-\frac{1}{6}r(k+1)-\frac{1}{6}r(k)=e(k+2)+2e(k+1)$$

Z域框图

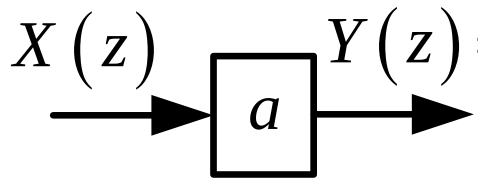
❖ 基本元件

◆ 加法器



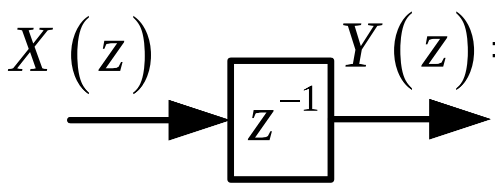
$$Y(z) = X_1(z) + X_2(z)$$

◆ 标量乘法器



$$Y(z) = aX(z)$$

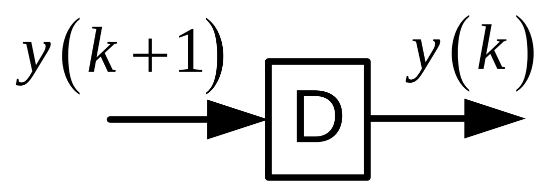
◆ 延时器



$$Y(z) = z^{-1}X(z)$$

❖ 引入两个辅助方程框图

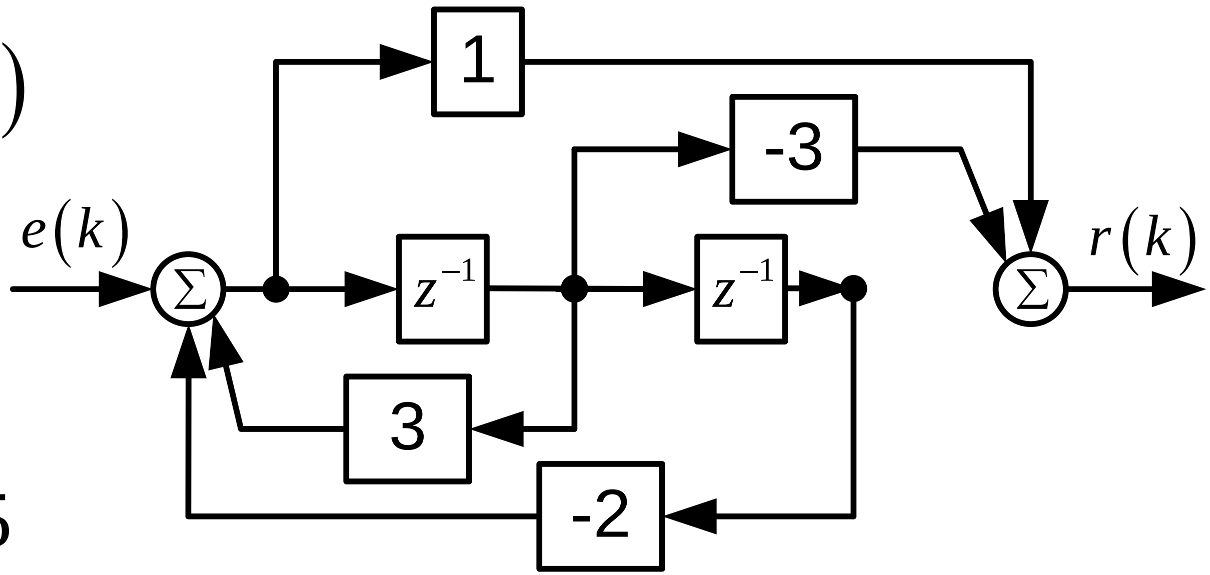
时域



Z域求解系统响应练习3

❖求单位函数响应，零状态响应，零输入响应

$$e(k)=\varepsilon(k)$$



$$r(-1)=0$$

$$r(-2)=0.5$$

$$\begin{cases} z^2Q-3zQ+2Q=E(z) \\ R(z)=z^2Q-3zQ \end{cases}$$

$$H(z)=\frac{z^2-3z}{z^2-3z+2}$$

Z域求解系统响应练习3

$$H(z)=\frac{z^2-3z}{z^2-3z+2}=\frac{2z}{z-1}-\frac{z}{z-2}$$

$$h(k)=\left(2-2^k\right)\varepsilon(k)$$

$$e(k)=\varepsilon(k)\leftrightarrow\frac{z}{z-1}$$

$$R_{zs}(z)=\frac{z^2-3z}{z^2-3z+2}\frac{z}{z-1}=\frac{z^2(z-3)}{(z-1)^2(z-2)}$$

$$=\frac{2z}{(z-1)^2}+\frac{3z}{z-1}+\frac{-2z}{z-2}$$

$$r_{zs}(k)=\left[2k+3-2(2)^k\right]\varepsilon(k)$$

Z域求解系统响应练习3

$$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2$$

$$r_{zi}(k) = \left(C_1 + C_2 2^k\right)\varepsilon(k)$$

$$\begin{aligned} r_{zi}(-1) &= r(-1) = 0 \\ r_{zi}(-2) &= r(-2) = 0.5 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -2 \end{cases}$$

$$r_{zi}(k) = \left[1 - 2(2)^k\right]\varepsilon(k)$$

$$r(k) = \left[2k + 4 - 4(2)^k\right]\varepsilon(k)$$

离散时间系统的稳定性

❖从极点分布进行判断：

- 极点在单位圆内，系统稳定。
- 单位圆上单阶极点，系统临界稳定。

$$H(z)=\frac{N(z)}{D(z)} \qquad D(z)=0 \rightarrow \text{极点}$$

❖通过特征方程系数进行判断

- 利用双线性变换和Routh-Hurwitz判据

$$z=\frac{\lambda+1}{\lambda-1} \qquad D(z)=0 \xrightarrow{z=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} G(\lambda)=0$$

单位圆外极点→右半平面极点 　　Routh-Hurwitz判据

离散时间系统稳定性练习1

$$r(k+2)+0.1r(k+1)-0.2r(k)=e(k+2)+e(k+1)$$

$$H(z)=\frac{z^2+z}{z^2+0.1z-0.2}=\frac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.5)}$$

$$\gamma_1=0.4,\gamma_2=-0.5$$

两极点均在单位圆内 → 系统稳定

离散时间系统稳定性练习2

$$D(z)=z^3-0.5z^2+0.25z-0.075$$

$$G(\lambda)=D\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)=\frac{\boxed{0.675\lambda^3+2.475\lambda^2+3.025\lambda+1.825}}{(\lambda-1)^3}$$

分子多项式系数同号且无缺项，Routh-Hurwitz阵列

λ^3	0.675	3.025
λ^2	2.475	1.825
λ	2.527	
1	1.825	

G(λ)=0 无右半平面根

→ D(z)=0 无单位圆外根

→ 系统稳定

构筑Routh-Hurwitz阵列的步骤：

第一步：把$G(\lambda)$分子所有系数按如下顺序排成两行。

$$
\begin{array}{llll}
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7}
\end{array}
$$

以此类推，排到 a_0 为止

第二步：排列R-H阵列规则如下

A_n	B_n	C_n	D_n …
A_{n-}	B_{n-1}	C_{n-1}	D_{n-1} …
A_{n-2}	B_{n-2}	C_{n-2}	
A_{n-3}	-3	C_{n-3}	
⋮			
A_2			
A_1			
A_0			

头两行就是第一步特征方程的系数所排成的两行！

$$A_n = a_n$$

$$A_{n-1} = a_{n-1}$$

$$B_n = a_{n-2}$$

$$B_{n-1} = a_{n-3}$$

$$C_n = a_{n-4}$$

Routh-Hurwitz阵列计算公式：

下面各行按下列公式计算：

$$A_{n-2} = -\frac{1}{A_{n-1}}\begin{vmatrix} A_n & B_n \\ A_{n-1} & B_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$B_{n-2} = -\frac{1}{A_{n-1}}\begin{vmatrix} A_n & C_n \\ A_{n-1} & C_{n-1} \end{vmatrix} \qquad C_{n-2} = -\frac{1}{A_{n-1}}\begin{vmatrix} A_n & D_n \\ A_{n-1} & D_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$A_{n-3} = -\frac{1}{A_{n-2}}\begin{vmatrix} A_{n-1} & B_{n-1} \\ A_{n-2} & B_{n-2} \end{vmatrix} \qquad B_{n-3} = -\frac{1}{A_{n-2}}\begin{vmatrix} A_{n-1} & C_{n-1} \\ A_{n-2} & C_{n-2} \end{vmatrix}$$

离散时间系统稳定性练习3

❖使系统稳定的常数P的范围

$$D(z)=z^2+0.25z+P$$

$$G(\lambda)=D\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)=\frac{\left(5/4+P\right)\lambda^2+\left(2-2P\right)\lambda+\left(3/4+P\right)}{\left(\lambda-1\right)^3}$$

分子多项式系数同号且无缺项，Routh-Hurwitz阵列

$$\begin{array}{lll} \lambda^2 & \frac{5}{4}+P & \frac{3}{4}+P \\ \lambda & 2-2P & \\ 1 & \frac{3}{4}+P & \end{array}$$

$$P>-\frac{3}{4}$$

$$P>-\frac{5}{4}$$

$$P<1$$

$$-\frac{3}{4}<P<1$$

离散时间系统Z域分析法练习1

❖求零状态响应 $r(k+2)-5r(k+1)+6r(k)=e(k)$

$$e(k)=\varepsilon(k)$$

$$H(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}$$

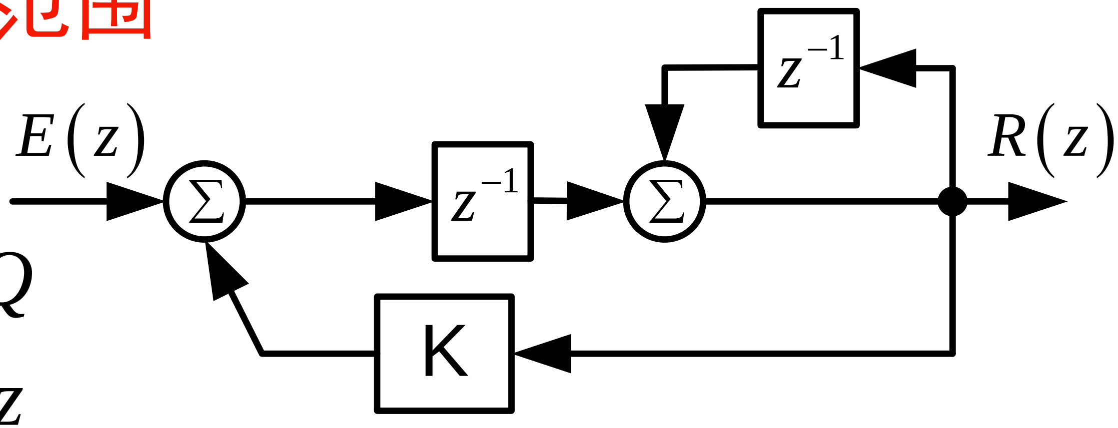
$$Y_{zs}(z)=E(z)H(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}\frac{z}{z-1}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-2}+\frac{1}{2}\frac{z}{z-3}$$

$$r(k)=\left[\frac{1}{2}-2^k+\frac{1}{2}3^k\right]\varepsilon(k)$$

离散时间系统Z域分析法练习2

❖ 系统稳定的K值范围



$$\begin{cases} R(z) = R(z)z^{-1} + Q \\ E(z) + KR(z) = Qz \end{cases}$$

$$R(z) = R(z)z^{-1} + z^{-1}\left[E(z) + KR(z)\right]$$

$$H(z) = \frac{R(z)}{E(z)} = \frac{1}{z-(K+1)}$$

$|K+1| \le 1$ $-2 \le K \le 0$ 系统稳定

离散时间系统的频率响应

离散序列的Fourier变换

❖s平面虚轴s=jω对应于z平面单位圆，单位圆上Z变换即序列的Fourier变换。

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)z^{-k}$$

$$F(e^{j\omega})=F(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)e^{-jk\omega}$$

$$f(k)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{z=e^{jw}} F(z)z^{k\text{-}1}dz=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(e^{j\omega})e^{jk\omega}d\omega$$

$F(e^{j\omega})$具有周期性　$-\pi<\omega<\pi$

ω与T_S无关，称归一化频率， ω=2π相当于ω_S

离散序列的Fourier变换

❖若考虑采样频率，则

$$F\left(e^{j\Omega T_S}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(kT_S\right)e^{-jkT_S\Omega} \qquad \omega=\Omega T_S=2\pi\frac{\Omega}{\omega_S}$$

$$f\left(kT_S\right)=\frac{1}{\omega_S}\int_{-\frac{\omega_S}{2}}^{+\frac{\omega_S}{2}} F\left(e^{j\Omega T_S}\right)e^{jkT_S\Omega}d\Omega \qquad -\frac{\omega_S}{2}<\Omega<\frac{\omega_S}{2}$$

Ω 实际角频率 ω 归一化角频率

$$F\left(e^{j\Omega T_S}\right) \qquad F\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\left(-\frac{\omega_s}{2},\frac{\omega_s}{2}\right)or\left(0,\omega_s\right) \qquad \left(-\pi,\pi\right)or\left(0,2\pi\right)$$

离散时间系统的频率特性

❖当Laplace变换收敛区包含虚轴时

$$H(j\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}$$

❖当Z变换收敛区包含单位圆时

$$H\left(e^{j\omega}\right)=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)e^{-jk\omega}$$

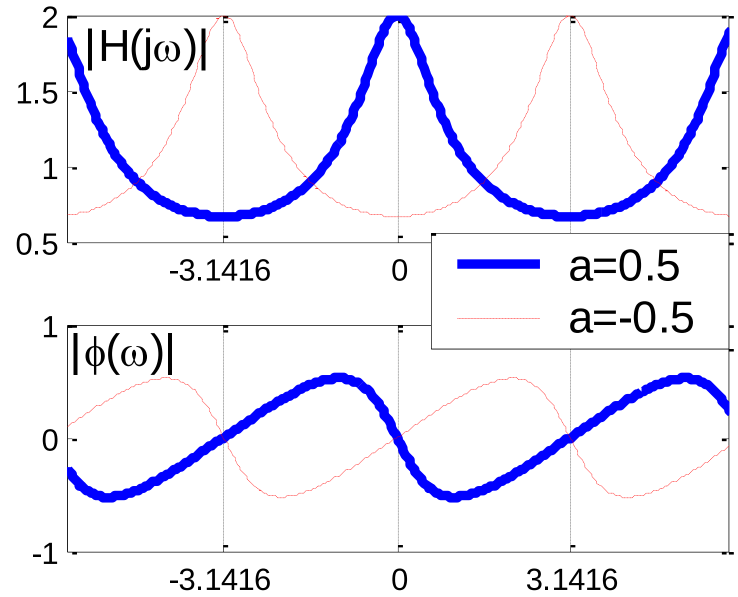
$$H\left(e^{j\omega}\right)=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\phi(\omega)}$$

归一化频率响应函数

- 周期函数，周期为2π
- 幅度频谱为偶函数
- 相位频谱为奇函数

离散时间系统的频率特性练习1

❖求系统频率特性



$$r(k+1)-ar(k)=e(k+1)$$

$$0<a<1$$

$$H(z)=\frac{z}{z-a} \qquad |z|>a$$

$$h(k)=a^k\varepsilon(k)$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right|=\frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}$$

$$\phi(\omega)=-arctg\left(\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}\right)$$

离散时间系统的频率特性练习2

❖求系统零状态响应

$$e(k)=e^{jk\omega}\varepsilon(k)$$

$$H(z)\leftrightarrow h(k)$$

$$r_{zs}(k)=e(k)*h(k)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}h(i)e(k-i)$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}h(i)e^{j(k-i)\omega}$$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}h(i)\left(e^{j\omega}\right)^{-i}=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$=e^{jk\omega}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}h(i)\left(e^{j\omega}\right)^{-i}$$

$$r_{zs}(k)=e^{jk\omega}H\left(e^{j\omega}\right)$$

离散指数序列的响应为同频率的离散指数序列

离散时间系统的频率特性练习2

$$e(k)=e^{jk\omega}\varepsilon(k)\qquad r_{zs}(k)=e^{jk\omega}H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$e(k)=\cos(k\pi)\varepsilon(k)=\frac{1}{2}e^{jk\pi}\varepsilon(k)+\frac{1}{2}e^{-jk\pi}\varepsilon(k)$$

$$r_{zs}(k)=\frac{1}{2}e^{jk\pi}H\left(e^{j\pi}\right)+\frac{1}{2}e^{-jk\pi}H\left(e^{-j\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left|H\left(e^{j\pi}\right)\right|e^{jk\pi+\phi(\pi)}+\frac{1}{2}\left|H\left(e^{-j\pi}\right)\right|e^{-j\left[k\pi+\phi(\pi)\right]}$$

$$=\left|H\left(e^{j\pi}\right)\right|\cos\left[k\pi+\phi(\pi)\right]$$

第八章复习

- ❖ Z变换
  - ◆ 定义式
  - ◆ 收敛区
  - ◆ 性质
  - ◆ 反变换
- ❖ Z变换与Laplace变换的关系
- ❖ 离散时间系统Z域分析法
- ❖ 离散时间系统的稳定性
- ❖ 离散时间系统的频率响应特性

离散时间系统综合练习1

❖求Z变换

$$f(k)=\left[k(-1)^k\sum_{n=0}^{k}2^n\right]\varepsilon(k)$$

$$f_1(k)=\left[\sum_{n=0}^{k}2^n\right]\varepsilon(k)=\varepsilon(k)*2^k\varepsilon(k)$$

$$\leftrightarrow F_1(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z-2)} \qquad |z|>2$$

$$a^k f(k)\leftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$f_2(k)=(-1)^k f_1(k)\leftrightarrow F_2(z)=\frac{z^2}{(z+1)(z+2)}$$

离散时间系统综合练习1

$$kf(k) \leftrightarrow -z\frac{d}{dz}F(z)$$

$$f(k) = kf_2(k) \leftrightarrow F(z) = -z\frac{d}{dz}F_2(z)$$

$$F(z) = -z\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+1)(z+2)} = \frac{-z^2(3z+4)}{(z+1)^2(z+2)^2} \qquad |z| > 2$$

离散时间系统综合练习2

❖求反Z变换

$$F(z)=\ln\left(1+\frac{a}{z}\right) \qquad |z|>|a|$$

$$\frac{d}{dz}F(z)=\frac{1}{1+\frac{a}{z}}\cdot\left(-\frac{a}{z^2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{a}{z}\right)^k\cdot\left(-\frac{a}{z^2}\right)$$

$$-z\frac{d}{dz}F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a^{k+1}z^{-k-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a^n z^{-n}$$

$$k+1=n$$

$$kf(k)=(-1)^{k-1}a^k\varepsilon(k-1)$$

$$f(k)=(-1)^{k-1}\frac{a^k}{k}\varepsilon(k-1)$$

离散时间系统综合练习3

- ❖画出模拟框图 (时域或Z域)
- ❖求系统函数，绘出极零图
- ❖判断系统稳定性
- ❖系统零状态响应

$$r(k+2)-\frac{3}{4}r(k+1)+\frac{1}{8}r(k)=e(k+2)+\frac{1}{3}e(k+1)$$

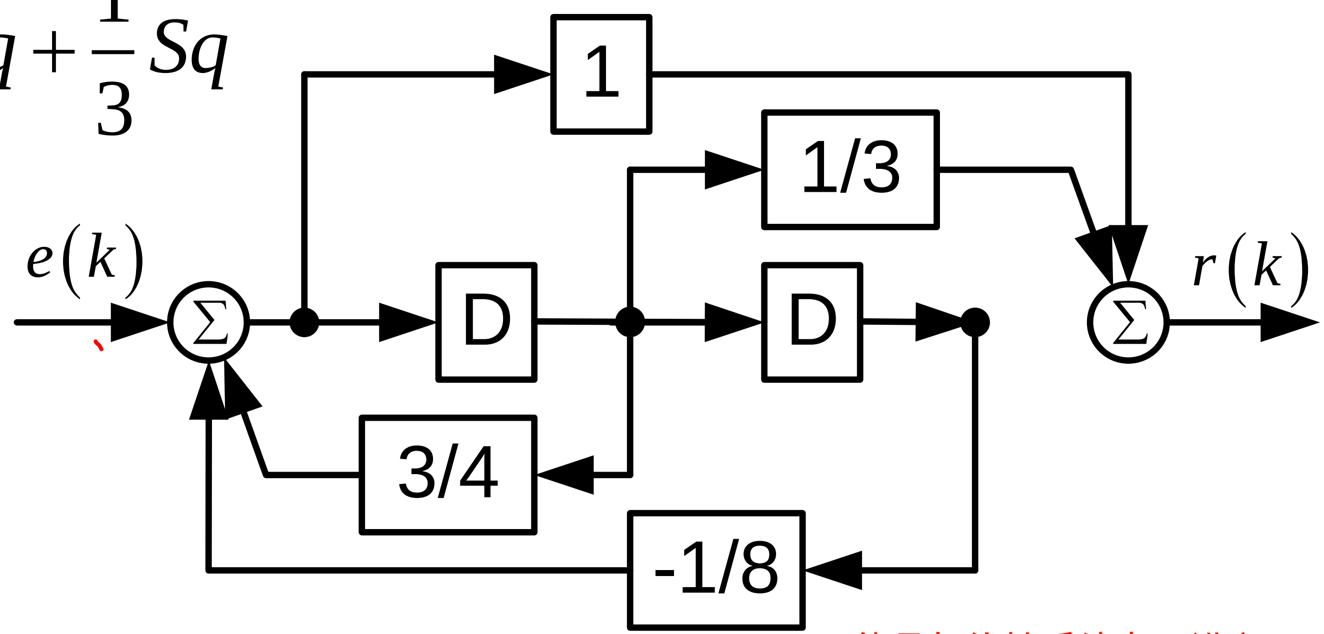
$$e(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$$

离散时间系统综合练习3

$$r(k+2)-\frac{3}{4}r(k+1)+\frac{1}{8}r(k)=e(k+2)+\frac{1}{3}e(k+1)$$

$$\begin{cases} S^2q-\frac{3}{4}Sq+\frac{1}{8}q=e(k) \\ r(k)=S^2q+\frac{1}{3}Sq \end{cases}$$

时域模拟框图

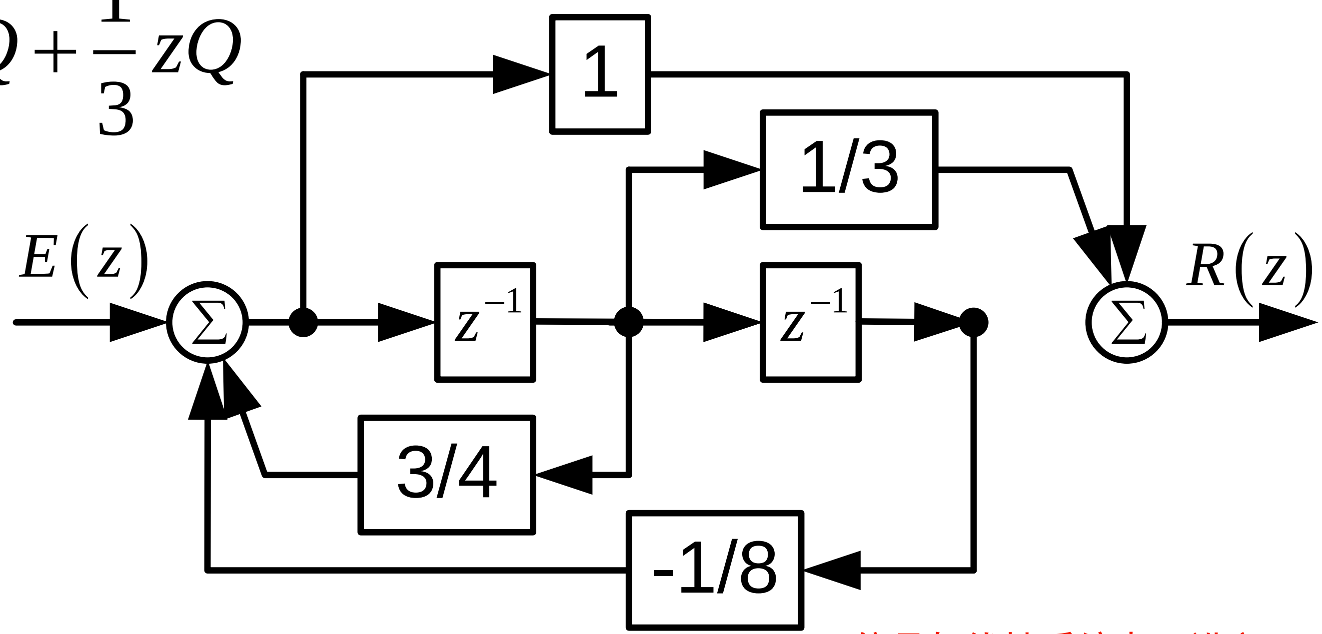


离散时间系统综合练习3

$$r(k+2)-\frac{3}{4}r(k+1)+\frac{1}{8}r(k)=e(k+2)+\frac{1}{3}e(k+1)$$

$$\begin{cases} z^2Q-\frac{3}{4}zQ+\frac{1}{8}Q=E(z) \\ R(z)=z^2Q+\frac{1}{3}zQ \end{cases}$$

Z域模拟框图



离散时间系统综合练习3

$$r(k+2)-\frac{3}{4}r(k+1)+\frac{1}{8}r(k)=e(k+2)+\frac{1}{3}e(k+1)$$

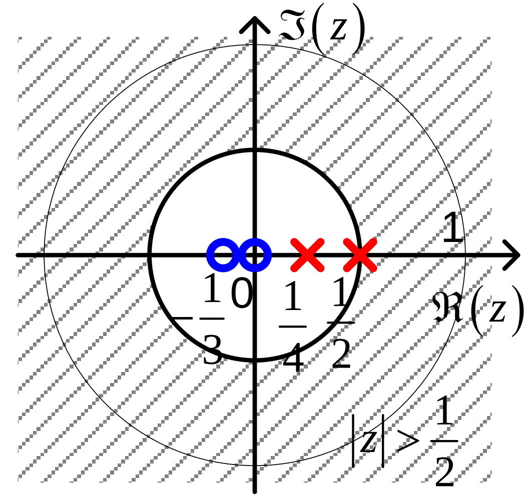
$$H(z)=\frac{z^2+\frac{1}{3}z}{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}=\frac{-\frac{7}{3}z}{z-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{10}{3}z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

$$h(k)=-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k\varepsilon(k)+\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon(k)$$

两个极点：1/4，1/2

两个零点：0，-1/3

系统稳定



离散时间系统综合练习3

$$e(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)=\delta(k)\leftrightarrow 1$$

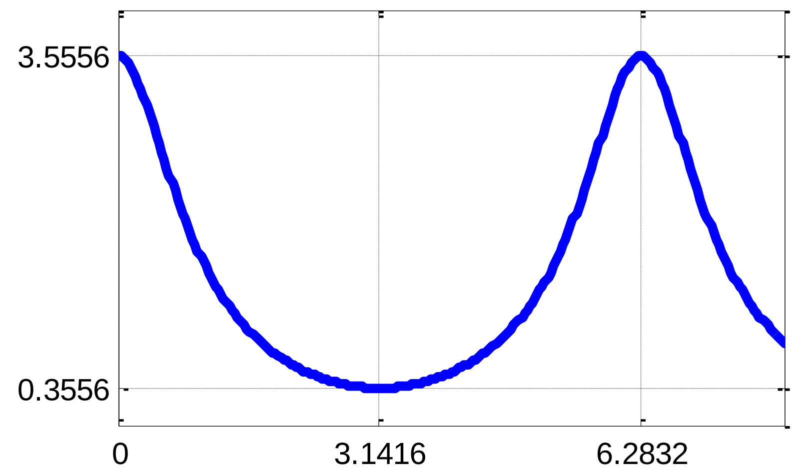
$$|z|>\frac{1}{2}$$

$$R_{zs}(z)=H(z)=\frac{z^2+\frac{1}{3}z}{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}=\frac{-\frac{7}{3}z}{z-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{10}{3}z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$r_{zs}(k)=h(k)=-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k\varepsilon(k)+\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon(k)$$

离散时间系统综合练习3

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{e^{j2\omega}+\frac{1}{3}e^{j\omega}}{e^{j2\omega}-\frac{3}{4}e^{j\omega}+\frac{1}{8}}$$



$$\omega=0\Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{32}{9}$$

$$\omega=\pi\Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{16}{45}$$

$$\omega=2\pi\Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{32}{9}$$

变换域分析法比较

❖离散系统Z域分析法	❖连续系统复频域分析法
◆ Z变换	◆ Laplace变换
◆ 差分方程→代数方程	◆ 微分方程→代数方程
◆ $z^k=(a+bj)^k$	◆ $e^{st}=e^{(a+bj)t}$
◆ 圆外：$\|z\|>a$	◆ 直线以右：$\sigma>a$
◆ 单位圆内极点	◆ 左半平面极点
◆ 单位圆上 → $F(e^{j\omega})$	◆ 虚轴上 → $F(j\omega)$

都可以用部分分式法和留数法求反变换
都有单双边变换
变换都可自动引入初始条件
都可把卷积运算转换成乘积运算