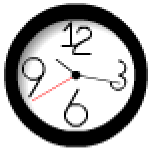
第二章 Laplace变换

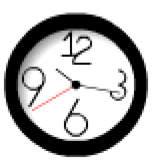


当函数$f(t)$在$t<0$时没有定义或者不需要知道时，可以认为当$t<0$时，$f(t)\equiv 0$. 这时, Fourier 变换的表达式为

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t.$$

但是仍然需要$f(t)$在$[0,+\infty)$上绝对可积的条件，这个要求限制了它的应用.

对定义在$[0,+\infty)$上的函数$f(t)$，如果考虑



$$f_1(t) = f(t) e^{-\beta t} \quad (\beta > 0),$$

那么 $f_1(t)$ 容易满足在 $[0,+\infty)$ 上绝对可积的要求. 例如，$f(t)$ 为常数、多项式、正弦与余弦函数时,

$$f_1(t) = f(t)e^{-\beta t} \quad (\beta > 0)$$

都在 $[0,+\infty)$ 上绝对可积. 这是因为 $t \to +\infty$ 时, $e^{-\beta t}$ 是衰减速度很快的函数，称它为指数衰减函数.

如果 $\beta > 0$ 取得适当大，那么

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t)e^{-\beta t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

的Fourier变换可能有意义. $f_1(t)$的Fourier变换

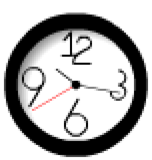
可表示为

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\beta t}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(\beta+i\omega)t}\mathrm{d}t.$$

将 $\beta + i\omega$ 记为s, 可写成

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

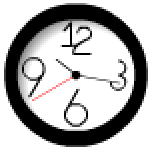
这就是本章要讨论的Laplace变换, 它放宽了对函数的限制并使之更适合工程实际, 并且仍然保留Fourier变换中许多好的性质, 更实用、更方便.



§2.1 Laplace变换的概念

1 Laplace变换的定义

2 周期函数和δ函数的Laplace变换



2.1.1 Laplace变换的定义

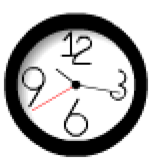
定义2.1 设 $f(t)$在 $t \geq 0$上有定义, 并且积分

$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ (s是复参变量)关于某一范围

s 收敛，则

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t,$$

称为函数 $f(t)$ 的**Laplace变换,** 并记做$\mathcal{L}\,[f(t)]$, 即



$$\mathcal{L}\,[f(t)]=F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

$F(s)$称为 $f(t)$ 的**像函数**，$f(t)$ 称为 $F(s)$ 的**像原函数**.

已知 $F(s)$是 $f(t)$ 的Laplace变换，则记

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)],$$

并称 $f(t)$为$F(s)$的**Laplace逆变换**.

例1 求**单位阶跃函数**

$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

的Laplace变换.

解 根据Laplace变换的定义，当 $\mathrm{Re}\,s>0$ 时，

$$\mathscr{L}\,[u(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s}.$$

因为在Laplace变换中不必考虑 $t<0$ 时的情况，

所以**经常记作** $\mathscr{L}\,[1]=\dfrac{1}{s}.$

例2 求**指数函数** $f(t)=e^{at}$ (其中a是实数)

的Laplace变换.

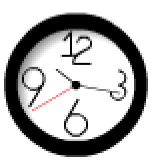
解 根据Laplace变换的定义

$$F(s)=\mathcal{L}\,[f(t)]=\mathcal{L}\,[e^{at}]=\int_0^{+\infty}e^{at}e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t,$$

这个积分当 $\mathrm{Re}\,s>a$ 时收敛，且

$$\int_0^{+\infty}e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{s-a},$$

所以



$$\mathcal{L}\,[e^{at}]=\frac{1}{s-a}\quad(\mathrm{Re}\,s>a).$$

Laplace变换存在定理

定理1 设函数 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 的任何有限区间内分段连续，并且当 $t \to +\infty$ 时，$f(t)$的增长速度不超过某一指数函数，即存在常数 $M > 0$ 和 $s_0 > 0$，使得在 $[0,+\infty)$ 上，

$$|f(t)| \leq M e^{s_0 t},$$

则在半平面 $\mathrm{Re}\, s > s_0$上，$\mathcal{L}[f(t)]$ 存在，且

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

是s的解析函数，其中 s_0 称为 $f(t)$的增长指数.

证明 对任何 $\operatorname{Re} s > s_0$ 内的点s, $\operatorname{Re} s = \beta > s_0$,

故 $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} \mathrm{d}t$ 绝对收敛，即

$$\int_0^{+\infty} \left| f(t) e^{-st} \right| \mathrm{d}t \le \int_0^{+\infty} M e^{-\beta t} e^{s_0 t} \mathrm{d}t$$

$$\le M \int_0^{+\infty} e^{-(\beta - s_0)t} \mathrm{d}t = \frac{M}{\beta - s_0}.$$

所以在 $\operatorname{Re} s > s_0$上，$f(t)$的Laplace变换存在.

可以证明 $F(s)$是 $\operatorname{Re} s > s_0$ 上的解析函数, 且

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} (-t) f(t) e^{-st} \mathrm{d}t.$$

例3 求 $f(t)=\sin\omega t$ 的Laplace变换.

解 因为$|f(t)|\le 1\cdot e^{0}$，故在 $\mathrm{Re}\,s>0$ 上，

Laplace变换存在，且

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin\omega t\mathrm{d}t=\frac{e^{-st}}{s^2+\omega^2}[-s\sin\omega t-\omega\cos\omega t]\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

于是 $\mathscr{L}[\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\quad(\mathrm{Re}\,s>0).$

类似可得 $\mathscr{L}[\cos\omega t]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}\quad(\mathrm{Re}\,s>0).$

2.1.2 周期函数和δ函数的Laplace变换

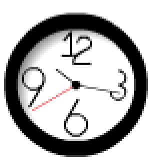
设 $f(t)$是以T 为周期的函数，即

$$f(t+T)=f(t)\quad(t>0),$$

且在一个周期内分段连续，则

$$\mathcal{L}\,[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

令 $t=\tau+kT,\ \ \tau\in[0,\ T)$，则



$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{T} f(\tau+kT)e^{-s(\tau+kT)}\mathrm{d}\tau,$$

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = e^{-kTs}\int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau.$$

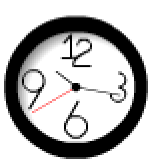
而当 $\mathrm{Re}\,s > 0$ 时，$\left|e^{-Ts}\right| < 1$，所以

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kTs}\int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t,$$

于是

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$



这就是**周期函数的Laplace变换公式.**

如果满足Laplace变换存在条件的函数 $f(t)$

在 $t=0$ 处有界时，积分

$$\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

的下限取 0^+ 或 0^- 不影响其结果. 如果在 $t=0$ 处

包含单位脉冲函数 $\delta(t)$, 积分理解为广义函数下

的积分时，取 0^+ 与 0^- 是不同的. 因为

$$\mathcal{L}_+[f(t)]=\int_{0^+}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t,$$

$$\mathcal{L}_-[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t+\mathcal{L}_+[f(t)].$$

如果 $f(t)$ 在 $t=0$ 附近有界或在通常意义下

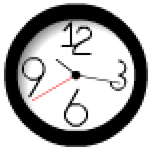
可积时，$\int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=0$，即 $\mathcal{L}_-[f(t)]=\mathcal{L}_+[f(t)]$;

如果在 $t=0$ 处包含了单位脉冲函数时，则

$\int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t\neq 0$，即 $\mathcal{L}_-[f(t)]\neq\mathcal{L}_+[f(t)]$.

因此把 $t\geq 0$ 上定义的函数延拓到 $t<0$ 上，

并且把Laplace变换定义为



$$\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}_-[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

例5　求**单位脉冲函数** $\delta(t)$ 的Laplace变换.

解　因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) \mathrm{d}t = f(0),$$

所以

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \mathcal{L}_{-}[\delta(t)]$$

$$= \int_{0^{-}}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} \mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} \mathrm{d}t = 1.$$

§2.2 Laplace变换的性质

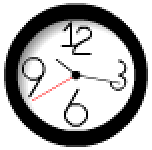
1 线性性质　　2 微分性质

3 像函数的微分性质　　4 积分性质

5 像函数的积分性质　　6 位移性质

7 延迟性质　　8 相似性质

9 初值和终值定理　　10 卷积定理



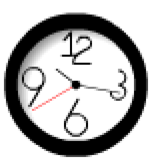
以下假定所考虑的 Laplace 变换的像原函数都满足存在定理的条件.

(1) 线性性质　设α, β是常数，$F_1(s)=\mathcal{L}[f_1(t)]$, $F_2(s)=\mathcal{L}[f_2(t)]$, 则

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$$

$$=\alpha\mathcal{L}[f_1(t)]+\beta\mathcal{L}[f_2(t)],$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)]=\alpha\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]+\beta\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)].$$



由Laplace变换的定义及积分的线性性质可证.

(2) 微分性质　设 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$，则

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0).$$

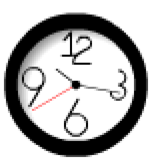
证明　根据Laplace变换的定义和分部积分公式

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= f(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

$$= sF(s) - f(0) \quad (\mathrm{Re}\, s > s_0).$$



推论 对正整数n, 有

$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=s^{n}F(s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).$$

特别地，当 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$时，

$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=s^{n}F(s).$$

在这个性质中，**要求** $f^{(k)}(t)$存在且满足Laplace

变换存在定理的条件 $(1\leq k\leq n)$.

例7　求　$f(t)=\cos\omega t$ 的Laplace变换.

解　因为

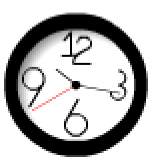
$$f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(t)=-\omega^2\cos\omega t,$$

根据微分性质和线性性质

$$\mathscr{L}[-\omega^2\cos\omega t]=s^2\mathscr{L}[\cos\omega t]-sf(0)-f'(0),$$

$$-\omega^2\mathscr{L}[\cos\omega t]=s^2\mathscr{L}[\cos\omega t]-s,$$

所以 $\mathscr{L}[\cos\omega t]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}.$



使用同样方法，可得 $\mathscr{L}[\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}.$

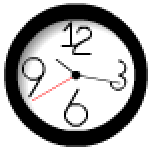
例8　求　$f(t)=t^2+\sin\omega t$ 的Laplace变换.

解

$$\mathcal{L}\,[t^2+\sin\omega t]$$

$$=\mathcal{L}\,[t^2]+\mathcal{L}\,[\sin\omega t]$$

$$=\frac{2!}{s^3}+\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$



利用微分性质也可以求出当m是正整数时，

$$\mathcal{L}\left[t^m\right]=\frac{m!}{s^{m+1}}.$$

事实上, 设 $f(t)=t^m$, 则

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(m-1)}(0)=0.$$

因为 $f^{(m)}(t)=m!$, $\mathcal{L}[1]=\dfrac{1}{s}$, 所以

$$m!\mathcal{L}[1]=s^m\mathcal{L}[t^m].$$

于是 $\mathcal{L}\left[t^m\right]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}.$

(3) 像函数的微分性质　设 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$, 则

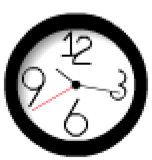
$$F'(s)=-\mathscr{L}[tf(t)].$$

一般地，对正整数n, 有

$$F^{(n)}(s)=(-1)^n\mathscr{L}[t^n f(t)].$$

证明　对解析函数

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$



求导, 右端求导时可在积分号下进行，即得.

例9　求 $f(t)=t\sin\omega t$ 的Laplace变换.

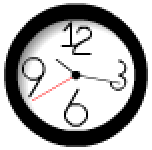
解

$$\mathcal{L}\,[t\sin\omega t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\,[\sin\omega t]$$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)=\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

使用同样方法，可得

$$\mathcal{L}\,[t\cos\omega t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\,[\cos\omega t]=\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}.$$



(4) 积分性质　设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$, 则

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}F(s).$$

证明　设 $\varphi(t)=\int_0^t f(t)\mathrm{d}t$, 则

$$\varphi'(t)=f(t),\quad \varphi(0)=0.$$

故由微分性质

$$\mathcal{L}[f(t)]=s\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]-\varphi(0),$$

于是结论得证. 一般地，对n次积分有

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{d}t\cdots\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s^n}F(s).$$

(5) 位移性质 设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$，则

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)\quad\big(\mathrm{Re}(s-a)>s_0\big),$$

其中 s_0 是 $f(t)$ 的增长指数.

证明 根据定义，有

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=\int_0^{+\infty}e^{at}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t=F(s-a).$$

例10　求　$\mathscr{L}[te^{at}\sin at]$和$\mathscr{L}[te^{at}\cos at]$.

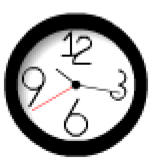
解

$$\mathscr{L}[t\sin at]=\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}.$$

故根据位移性质

$$\mathscr{L}[te^{at}\sin at]=\frac{2a(s-a)}{[(s-a)^2+a^2]^2}.$$

使用同样方法，可得



$$\mathscr{L}[te^{at}\cos at]=\frac{(s-a)^2-a^2}{[(s-a)^2+a^2]^2}=\frac{s(s-2a)}{[(s-a)^2+a^2]^2}.$$

例11 求 $\mathcal{L}\left[\int_0^t te^{at}\sin at\,dt\right]$.

解

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t te^{at}\sin at\,dt\right]=\frac{2a(s-a)}{s[(s-a)^2+a^2]^2}.$$

使用同样方法，可得

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t te^{at}\cos at\,dt\right]=\frac{s-2a}{[(s-a)^2+a^2]^2}.$$

(6) 像函数的积分性质　设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$, 且

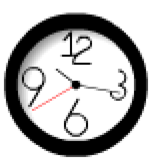
$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t)}{t}$ 存在，积分 $\int_s^{+\infty}F(u)\mathrm{d}u$ 收敛，则

$$\int_s^{+\infty}F(u)\mathrm{d}u=\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$

证明　根据解析函数的惟一性定理，u取在正实轴

从s 到$+\infty$, 则

$$\int_s^{+\infty}F(u)\mathrm{d}u=\int_s^{+\infty}\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}f(t)e^{-ut}\mathrm{d}t$$



$$=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t\int_s^{+\infty}e^{-ut}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-st}\mathrm{d}t=\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$

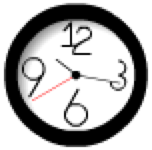
推论　如果像函数积分性质的条件满足，且

积分 $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$ 收敛，则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} F(s) \mathrm{d}s.$$

事实上，对于像函数积分性质

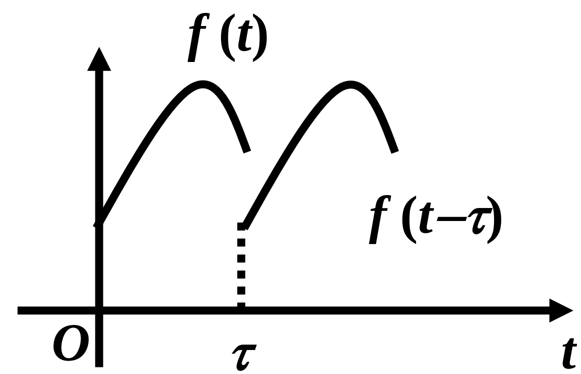
$$\int_s^{+\infty} F(u) \mathrm{d}u = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right],$$



令 $s \to 0^+$ 即可.

(7) 延迟性质　设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$, 若当 $t<0$ 时, $f(t)=0$, 则对任何非负实数 τ, 有

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s).$$

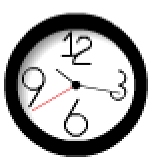


证明　根据定义

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)]=\int_0^{+\infty} f(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\tau} f(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t+\int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

因为当 $t<0$ 时, $f(t)=0$, 所以在 $[0,\tau]$ 上, 有 $f(t-\tau)=0$, 从而



$$\mathcal{L}\,[f(t-\tau)]=\int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{+\infty} f(u)e^{-(u+\tau)s}\mathrm{d}u=e^{-\tau s}\int_{0}^{+\infty} f(u)e^{-us}\mathrm{d}u$$

$$=e^{-\tau s}F(s)\ \left(\mathrm{Re}\, s>s_0\right).$$

利用单位阶跃函数 $u(t)$，可以将

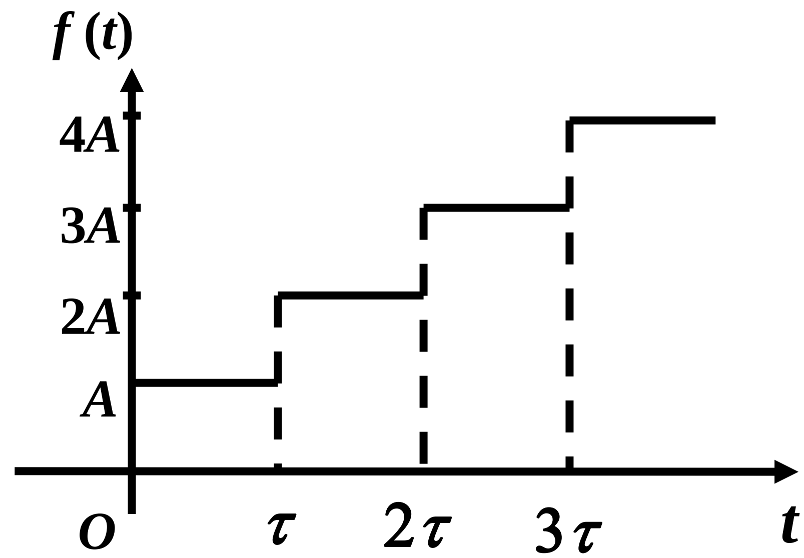
$$\mathcal{L}\,[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s).$$

写成

$$\mathcal{L}\,[f(t-\tau)u(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s).$$

例12　求如图所示阶梯函数的Laplace变换.

解　利用Heaviside函数



$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

图中的函数 $f(t)$ 可表示为

$$f(t)=A[u(t)+u(t-\tau)+u(t-2\tau)+\cdots]$$

$$=A\sum_{k=0}^{\infty}u(t-k\tau).$$

因为 $L\ [u(t)]=\dfrac{1}{s}$，所以由 延迟性质

$$\mathcal{L}\,[u(t-k\tau)] = \frac{1}{s}e^{-k\tau s}.$$

再注意到 $\left|e^{-s\tau}\right| < 1 \ \ (\mathrm{Re}\,s > 0)$, 于是

$$\mathcal{L}\,[f(t)] = \frac{A}{s}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\tau s} = \frac{A}{s(1-e^{-s\tau})}$$

$$= \frac{A}{s} \times \frac{1}{(1-e^{-\frac{s\tau}{2}})(1+e^{-\frac{s\tau}{2}})}$$

$$= \frac{A}{2s}\left(1+\mathrm{cth}\frac{s\tau}{2}\right) \ \ (\mathrm{Re}\,s > 0).$$

(8) 相似性质　　设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$, 则

$$\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\quad(a>0),\ \text{其中 } \mathrm{Re}\,s>as_0.$$

证明　根据定义 $\mathcal{L}[f(at)]=\int_0^{+\infty}f(at)e^{-st}\mathrm{d}t$, 故

$$\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(u)e^{-\frac{s}{a}u}\mathrm{d}u=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

例13 求 $\mathscr{L}[u(5t)]$和$\mathscr{L}[u(5t-2)]$.

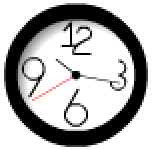
解 因为$\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$, 所以

$$\mathscr{L}[u(5t)]=\frac{1}{5}\times\frac{1}{\frac{s}{5}}=\frac{1}{s}.$$

实际上, 由$u(5t)=u(t)$, 可直接得到结论. 又由于

$$u(5t-2)=u\left[5\left(t-\frac{2}{5}\right)\right],$$

故



$$\mathscr{L}[u(5t-2)]=e^{-\frac{2}{5}s}\mathscr{L}[u(5t)]=\frac{1}{s}e^{-\frac{2}{5}s}.$$

下面介绍Laplace变换的卷积性质—卷积定理.

Laplace变换的卷积性质不仅能用来求出某些函数的Laplace逆变换, 而且在线性系统的研究中起着重要作用.

因为在Laplace变换中, 总认为$t<0$时像原函数$f(t)$恒为零. 因此, $f_1(t)$与$f_2(t)$的卷积为

$$f_1(t)*f_2(t)=\left(f_1*f_2\right)(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

卷积定理 设 $f_1(t)$和 $f_2(t)$满足Laplace变换存在的条件，即存在$M>0$和 $s_0>0$，使得

$$\left|f_1(t)\right|\le Me^{s_0 t}, \quad \left|f_2(t)\right|\le Me^{s_0 t}.$$

如果

$$F_1(s)=\mathcal{L}\,[f_1(t)],\ F_2(s)=\mathcal{L}\,[f_2(t)],$$

则

$$\mathcal{L}\left[\left(f_1 * f_2\right)(t)\right]=F_1(s)F_2(s),$$

或

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F_1(s)F_2(s)\right]=\left(f_1 * f_2\right)(t).$$

证明　当 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$分段连续时，其卷积

$\left(f_1 * f_2\right)(t)$ 也是分段连续的. 不妨设 $s_0 \geq 1$, 由于

$$\left|\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| \leq \int_0^t \left|f_1(\tau)\right|\left|f_2(t-\tau)\right|\mathrm{d}\tau$$

$$\leq \int_0^t M e^{s_0\tau} M e^{s_0(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = M^2 t e^{s_0 t} \leq M^2 e^{2 s_0 t},$$

因此, $\left(f_1 * f_2\right)(t)$ 也满足Laplace变换存在的条件.

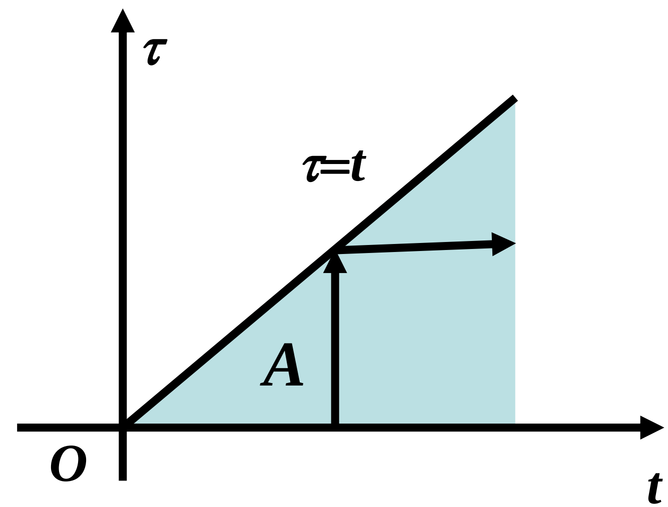
$$L\left[\left(f_1 * f_2\right)(t)\right]=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]e^{-st}\mathrm{d}t,$$

$$=\iint_A f_1(\tau) f_2(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t,$$

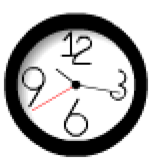
其中A是 $tO\tau$平面内 t 轴

和第一象限的角平分线

$\tau = t$ 围成的角形区域.



交换积分次序



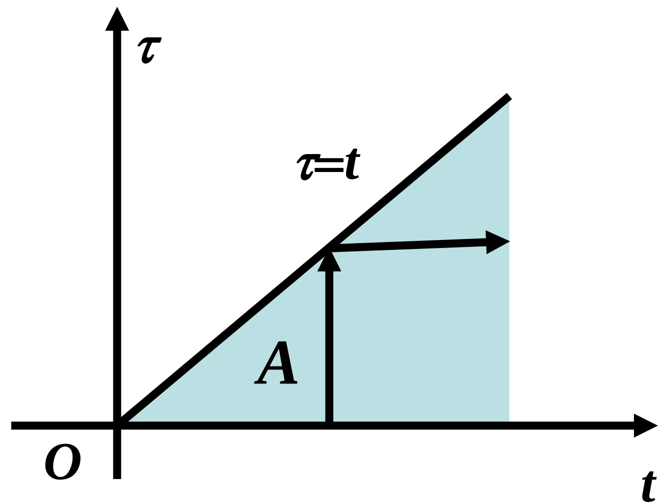
$$\left[\left(f_1 * f_2\right)(t)\right] = \iint_A f_1(\tau) f_2(t-\tau) e^{-st} \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\tau \int_\tau^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) e^{-st} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \mathrm{d}\tau \int_\tau^{+\infty} f_2(t-\tau) e^{-st} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \mathrm{d}\tau \int_0^{+\infty} f_2(u) e^{-(u+\tau)s} \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} \mathrm{d}\tau \int_0^{+\infty} f_2(u) e^{-su} \mathrm{d}u$$



$$= L\,[f_1(t)] L\,[f_2(t)] = F_1(s) F_2(s).$$

例14 设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$, 利用卷积定理

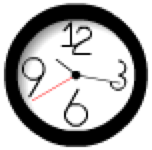
证明Laplace变换的积分性质

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{s}F(s).$$

证明 设 $f_1(t)=f(t),\ f_2(t)=1,$ 则

$$\mathcal{L}\left[f_1(t)\right]=F(s),\ \mathcal{L}\left[f_2(t)\right]=\frac{1}{s}.$$

于是



$$\mathcal{L}\left[\left(f_1*f_2\right)(t)\right]=\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{s}F(s).$$

应用卷积定理可求某些Laplace逆变换.

例15 求 $\mathcal{L}\left[\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right]$，并证明

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{t}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-u^2}\mathrm{d}u.$$

解 因为

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi},$$

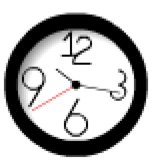
故

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right]=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}.$$

根据位移性质 $\mathcal{L}\,[e^t]=\dfrac{1}{s-1}$，则由卷积定理

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}*e^t=\int_0^t e^{t-\tau}\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^t\int_0^t e^{-\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\mathrm{d}\tau=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^t\int_0^{\sqrt{t}}e^{-u^2}\mathrm{d}u.$$



§2.3 Laplace 逆变换

本节给出Laplace逆变换积分表达式，应用复变函数论中的留数理论作为工具，给出一种较一般的方法.

已知 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$ 在收敛域内解析，但并不是所有解析函数都是某一函数的Laplace变换像函数.

另外，函数 $f(t)$ 的Laplace变换实际上就是 $f(t)u(t)e^{-\beta t}$ 的Fourier变换. 因此, 当 $f(t)u(t)e^{-\beta t}$ 满足Fourier积分定理的条件时, 根据Fourier积分

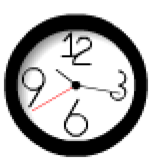
公式，$f(t)$ 在连续点处

$$f(t)u(t)e^{-\beta t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(\tau)e^{-\beta\tau}e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\int_{0}^{+\infty} f(\tau)e^{-(\beta+i\omega)\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta+i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \quad (t>0),$$

在等式两端同乘以 $e^{\beta t}$，故当$t>0$时，



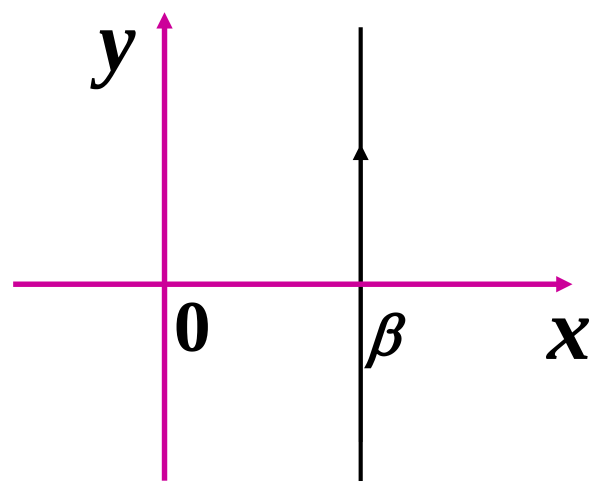
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta+i\omega)e^{(\beta+i\omega)t}\mathrm{d}\omega.$$

令 $\beta + i\omega = s$, 则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} F(s) e^{st} \mathrm{d}s \quad (t > 0),$$

其中 $\beta > s_0$，s_0是 $f(t)$的增长指数. 积分路径是

在右半平面 $\mathrm{Re}\, s > s_0$上的任意一条直线 $\mathrm{Re}\, s = \beta$.



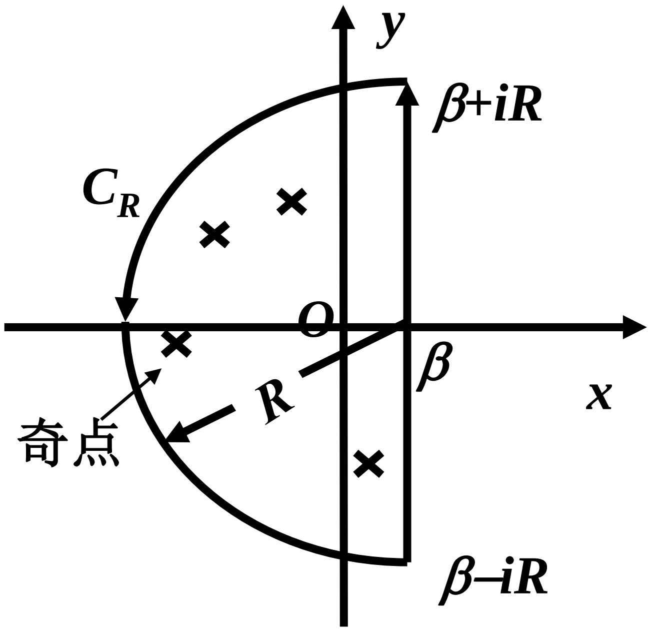
这就是Laplace逆变换的一般公式，称为Laplace 变换的**反演积分**. 这是复变函数的积分，在一定条件下，可利用留数来计算.

利用留数求Laplace逆变换的公式

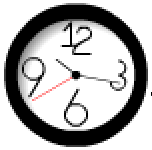
定理3 设 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是 $F(s)$ 的所有孤立奇点(有限个)，除这些点外，$F(s)$ 处处解析，且存在 $R_0>0$，当 $|s| \geq R_0$ 时，$|F(s)| \leq M(|s|)$，其中 $M(r)$ 是 r 的实函数，且 $\lim\limits_{r\to+\infty} M(r)=0$．选取 β，使所有孤立奇点都在 $\mathrm{Re}\, s<\beta$ 内，则当 $t>0$ 时，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_k]$$

证明 取 $R>0$ 充分大，使得 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 都在圆弧 C_R 和直线 $\mathrm{Re}\, s=\beta$ 所围成的区域内. 因为 e^{st} 是全平面上的解析函数，因此，$s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是 $F(s)e^{st}$ 的孤立奇点，除这些奇点之外，$F(s)e^{st}$ 处处解析.



于是，根据留数基本定理



$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\beta-iR}^{\beta+iR} F(s)e^{st}ds+\int_{C_R} F(s)e^{st}ds\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_k].$$

利用 **Jordan引理**

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(s)e^{st}\mathrm{d}s = 0 \quad (t>0).$$

令 $R\to+\infty$，得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_k].$$

特别当 $F(s)$是有理函数，且为分母次数高于分子次数的有理真分式，则Laplace逆变换存在，

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_k].$$

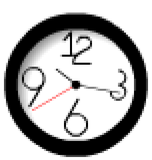
例16 求 $F(s)=\dfrac{s}{s^2+1}$ 的Laplace逆变换.

解 $s=\pm i$ 是 $\dfrac{s}{s^2+1}e^{st}$ 的1级极点，由计算留数的法则，

$$\operatorname{Res}\left[\frac{s}{s^2+1}e^{st},\ \pm i\right]=\left.\frac{se^{st}}{2s}\right|_{s=\pm i}=\frac{1}{2}e^{\pm it},$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\operatorname{Res}\left[\frac{s}{s^2+1}e^{st},\ i\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{s}{s^2+1}e^{st},\ -i\right]$$

$$=\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})=\cos t.$$



例20 求 $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$ 的Laplace逆变换.

解 $s_1=0$ 和 $s_2=1$ 分别是 $\dfrac{1}{s(s-1)^2}e^{st}$ 的1级和2级极点. 故由计算留数的法则

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{s(s-1)^2}e^{st},\ 0\right]=\lim_{s\to 0}\frac{e^{st}}{(s-1)^2}=1,$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{s(s-1)^2}e^{st},\ 1\right]=\lim_{s\to 1}\left[\frac{e^{st}}{s}\right]'=e^t(t-1),$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)^2}\right]=1+e^t(t-1)\ \ (t>0).$$