课程简介

- **任务**
  - 研究信号与系统理论的基本概念和基本分析方法
  - 初步认识如何建立信号与系统的数学模型，经适当的数学分析求解
  - 对所得结果给以物理解释、赋予物理意义。
- **研究范围**
  - 确定性信号（非随机信号）经线性、实不变系统传输与处理的基本理论
  - 时间域　　　变换域
  - 连续　　　离散
  - 输入—输出描述　　　状态描述
- **理论基础**
  - 数学基础：微分方程、差分方程、线性代数、级数、复变函数
  - 电路分析
- **与<电路>的关系**
  - 电路：电路分析的角度
  - 本课程：系统的观点

课程主要内容

- **第一部分：** 信号与系统的概念、分类、分析方法
- **第二部分：** 连续（时间）系统的时域分析（卷积、零输入和零状态响应）
- **第三部分：** 连续系统的频域分析（连续信号频域分析、能量谱和功率谱、傅里叶变换应用于通信系统—滤波、调制与抽样）
- **第四部分：** 离散（时间）系统的时域分析（离散系统描述、卷积）
- **第五部分：** 离散（时间）系统Z变换（Z变换、系统Z域分析、稳定性）

课程特点

- **特点：公式多、计算题多**
- **学习方法：**
  - **认真听讲**
  - **多看书**
  - **做习题**

信号与系统基本概念

内容提要

- ❖信号传输系统
- ❖信号的概念
- ❖奇异函数
- ❖信号的时域分解
- ❖系统的概念
- ❖线性非时变系统的分析

重点与难点

- 奇异函数的性质
- 信号分解为冲激脉冲
- 线性非时变系统的基本性质

信号传输系统

- 信号基本概念与信号传输、交换及处理
- 基本信号传输系统的组成

信号基本概念

- 信息：未知的内容，用信息量进行度量。
- 消息：为表达信息而按一定规则约定的符号、语言、文字、图像、编码等。
- 信号：信号是信息的表现形式，蕴含着信息的具体内容，是通信传输的客观对象。**信号是随时间变化的某种物理量**。即：信号广泛地出现在各个领域中，以各种各样的表现形式携带着特定的消息。
  - 古战场：以击鼓鸣金传达前进或撤退命令——声信号。
  - 近代：广泛应用于力、热、声、光、电等方面。——电信号、光信号、声信号等
- **本课程：电信号**
  - 随时间变换的电压、电流
  - 电荷、磁通
- **“信号”、“函数”两个名词通用**

信号传输

❖ **人们寻求各种方法，以实现信号的传输。**

（1）古代用烽火传送疆警报，这是最原始的光通信系统。3000多年前，西周周幽王烽火戏诸侯。

（2）利用击鼓鸣金报送时刻或传达命令，这是最早的声信号的传输。—缺点：距离、速度、可靠性、有效性

（3）19世纪初，人们开始研究利用电信号传送消息。1837年莫尔斯（F.B.Morse)发明了电报，采用点、划、空组合的代码表示字母和数字，这种代码称为莫尔斯电码。

1876年贝尔(A.G.Bell)发明了电话，直接将声信号（语音）转变为电信号沿导线传送。

信号传输

（４）１９世纪末，人们研究用电磁波传送无线电信号。赫兹（H.Hertz）、波波夫、马可尼等作出贡献。1901年马可尼成功地实现了横渡大西洋的无线电通信。从此，传输电信号的通信方式得到广泛应用和迅速发展。

如今：（１）卫星通信技术为基础“全球定位系统”（Global Positioning System, 缩写为GPS）用无线电信号的传输，测定地球表面和周围空间任意目标的位置，其精度可达十米左右。如汽车防盗、卫星导航。

（２）个人通信技术：无论任何人在任何时候和任何地方都能够和世界上其他人进行通信，WiFi和个域网。

（３）“全球通信网”是信息网络技术的发展必然趋势。目前的综合业务数字网（Integrated Services Digital Network,缩写为ISDN),Internet或称因特网，以及其他各种信息网络技术为全球通信网奠定了基础。

信号交换

现代的通信方式不是任意两点之间信号的直接传输，而是要利用某些集中转接设施组成复杂的信息网络，即经“交换”的功能以实现任意两点之间的传输。

比如：物联网（Internet of Things，IoT）典型的多跳网络

信号处理

❖ 对信号进行某种加工或变换。其目的是：削弱信号中的多余内容；滤除混杂的噪声和干扰；或者将信号变换成容易分析与识别的形式，便于估计和选择它的特征参量。

❖ 信号处理的应用已遍及许多科学技术领域。

（1）从月球探测器发来的无线信号可能被淹没在噪声之中，可利用信号处理技术予以增强，在地球上得到清晰的图像。

（2）石油勘探、地震测量以及核试验监测中所得数据的分析都依赖于信号处理技术的应用。

（3）心电图、脑电图分析、语音识别与合成、图像数据压缩、视频监视、工业生产自动控制以及经济形势预测（股票分析）等各领域广泛应用。

信号传输、信号交换和信号处理关系

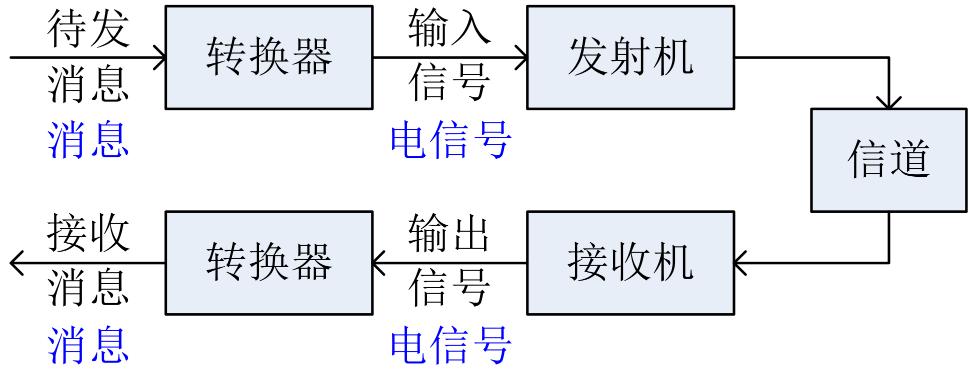
- 它们之间相互密切联系（可认为**交换是属于传输的组成部分**），又各自形成了相对独立的学科体系。
- 它们共同的理论基础之一是**研究信号的基本性能（进行信号分析）**，包括信号的描述、分解、变换、检测、特征提取以及为适应指定要求而进行信号设计。

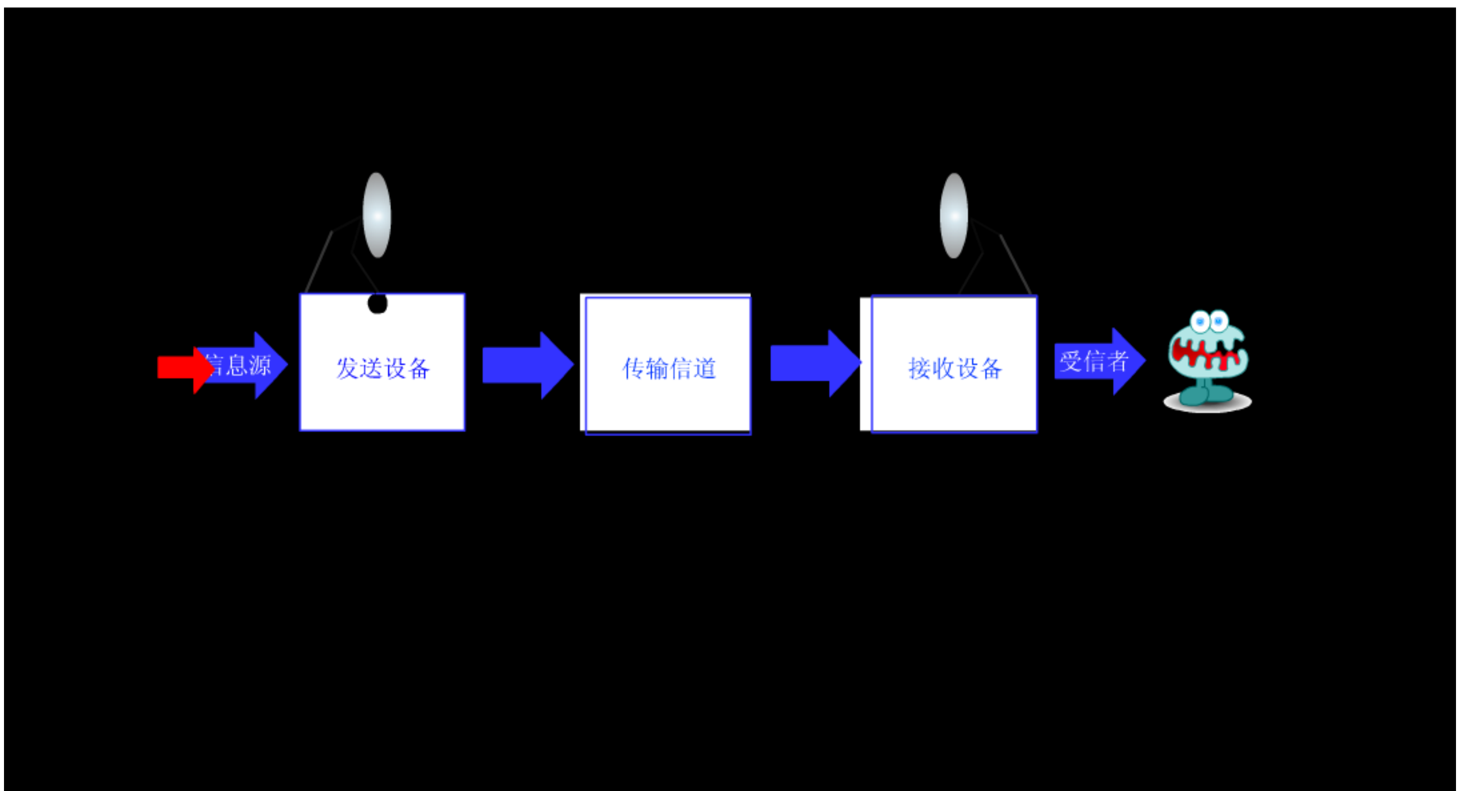
基本信号传输系统

- 信号的传输和处理要由许多不同功能的单元组成的一个复杂系统来实现，主要完成信号的转换（声、光、电转换，A/D转换等），信号的处理（放大、去噪、调制、滤波等）、信号的传输（信道）等功能。

基本信号传输系统

举例：一个基本信号传输系统

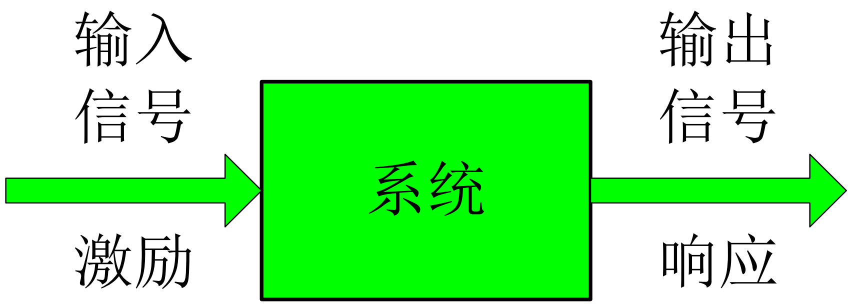




信号与系统的关系

❖信号

- 信息 (Information)
- 消息 (Message)
- 信号 (Signal)



信号是信息的载体。通过信号传递信息。

❖系统

系统(system)是指若干相互关联的事物组合而成具有特定功能的整体。

系统的基本作用是对输入信号进行加工和处理，将其转换为所需要的输出信号。

信号的分类和运算

- 信号的分类
- 信号的运算

信号的分类

❖确定信号和随机信号

- 确定信号：信号是一个确定的时间函数，给定一个时间值，就可以确定一个相应的函数值，如正弦信号。
- 随机信号：不是一个确定的时间函数，给定一个时间值，其函数值并不确定，而只知道信号取某一值的概率，如电子系统中的起伏热噪声、雷电干扰信号。

实际信号一般都是随机信号。
确定信号是一种近似的理想化了的信号。
研究确定信号是研究随机信号的基础。
本课程只讨论确定信号。

信号的分类 – 连续信号

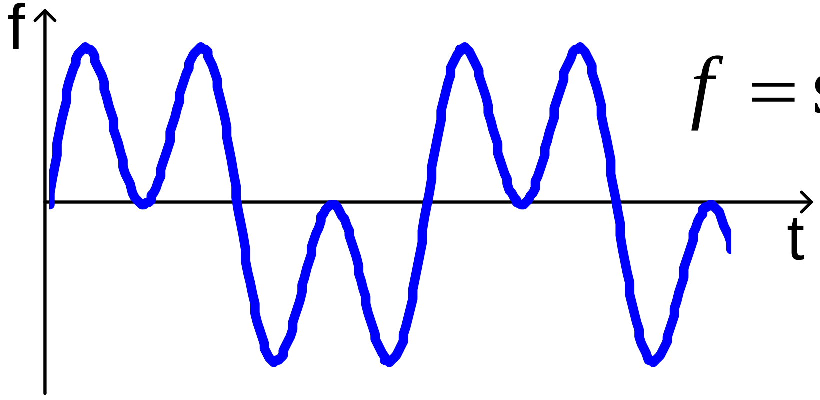
❖根据时间连续性分为：连续信号和离散信号

- 连续信号：在某一时间间隔内，对一切时间值，除了若干不连续点以外，都给出确定的函数值。

"连续"指时间变量在一个时间间隔内连续，也可含间断点，至于值域可连续也可不连续。实际中也常称为模拟信号。

有始函数：t<0时，函数值为0。

例如：



$$f=\sin 2\pi t+\sin 6\pi t$$

$$t>0$$

信号的分类 – 离散信号

◆ 离散信号：只在一些不连续的时间值上给定函数值。

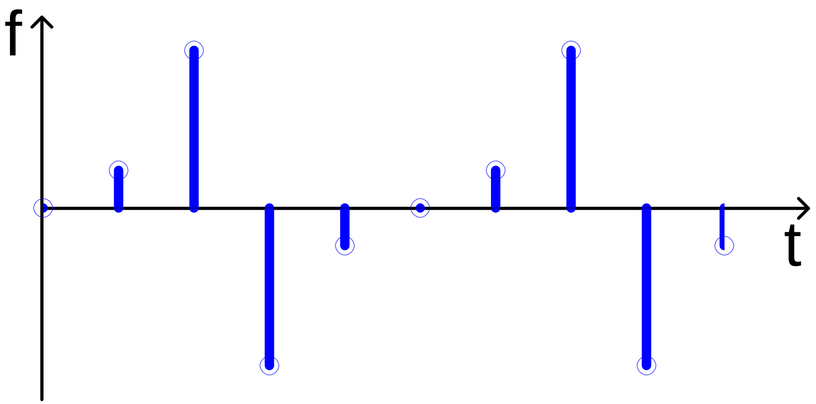
"离散"指时间变量取离散值。

幅度值取离散值的离散信号也称为数字信号。

例如：

$$f=\sin 2\pi t+\sin 6\pi t$$

$$t=0:0.2:\infty$$



$f(t)$仅在一些离散时刻t_k才有值。

相邻离散点的间隔$T_k=t_{k+1}-t_k$可以相等也可不等。

如果取等间隔T，离散信号可表示为$f(kT)$，简写为$f(k)$。

等间隔的离散信号也常称为序列，其中k称为序号。

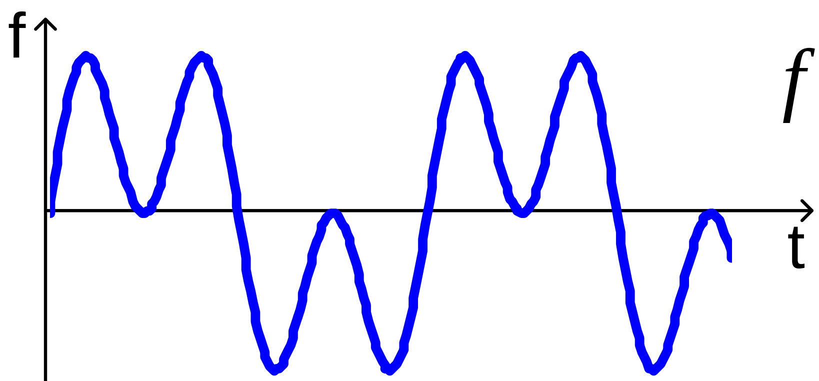
信号的分类 – 周期信号

❖周期信号和非周期信号

- 周期信号：按照一定规律重复变化的信号
- 非周期信号：不具有周期性的信号

信号重复的最小时间间隔称为信号的周期.

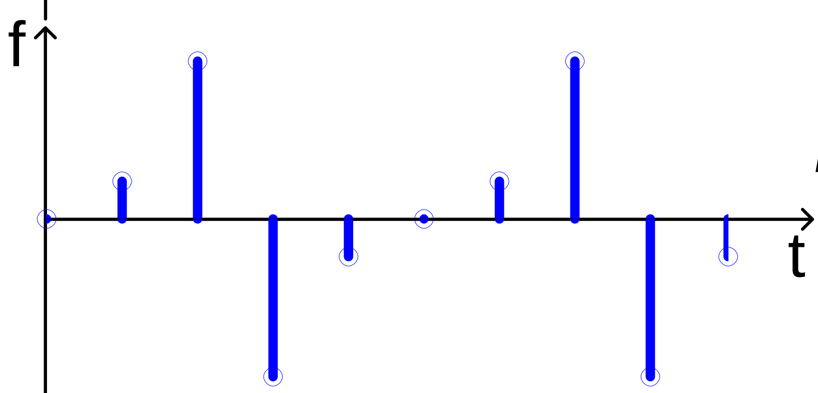
例如：



$$f=\sin 2\pi t+\sin 6\pi t$$

$$t>0$$

周期为T=1



$$f=\sin 2\pi t+\sin 6\pi t$$

$$t=0:0.2:\infty$$

信号的分类－能量信号

❖能量信号和功率信号

- 能量信号：总能量为有限值而平均功率为零。
- 功率信号：平均功率为有限值而总能量为无限大。

将信号$f(t)$施加于1Ω电阻上，它所消耗的瞬时功率为$|f(t)|^2$，在区间$(-\infty, \infty)$的能量E和平均功率P定义为

连续信号

$$E \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right|^2 dt$$

$$P \overset{\text{def}}{=} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left| f(t) \right|^2 dt$$

离散信号

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)|^2$$

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2} |f(k)|^2$$

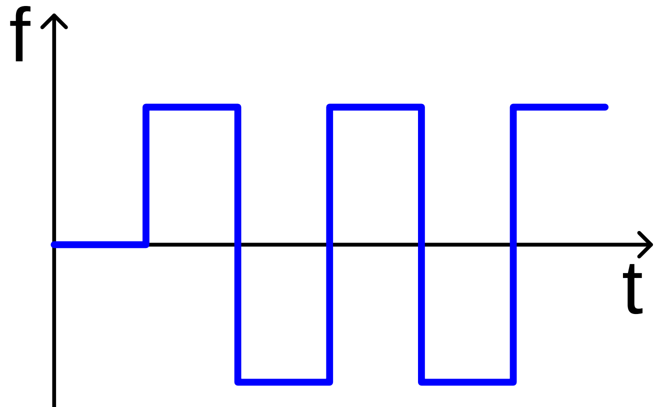
信号的分类 – 能量信号

周期信号都是功率信号。
只存在于有限时间内的信号是能量信号。
非周期信号可能是能量信号，也可能是功率信号。

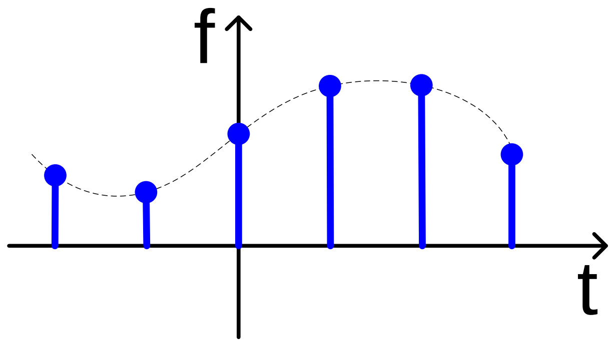
有些信号既不是属于能量信号也不属于功率信号，如 $f(t) = \mathrm{e}^{t}$。

信号举例

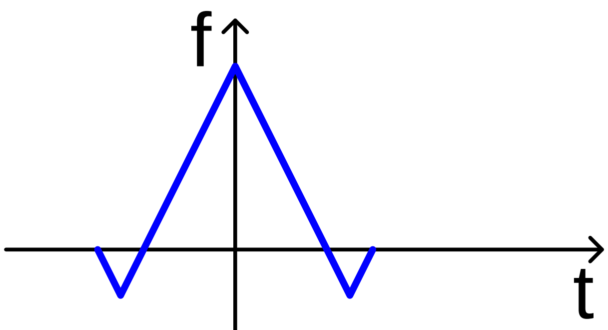
Q1：判断下列信号是连续信号还是离散信号



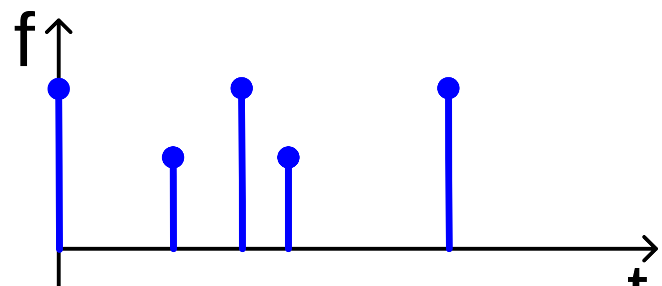
连续信号



离散信号



连续信号



离散信号

信号举例

Q2：判断下列信号是周期信号还是非周期信号。若是周期信号，求其周期T。

$f_1(t) = 2\sin t - \sin 3t$ $f_2(t) = \sin 3t + \cos \pi t$

提示：两个周期信号x(t)，y(t)的周期分别为T_1和T_2，若其周期之比T_1/T_2为有理数，则其和信号x(t)+y(t)仍然是周期信号，其周期为T_1和T_2的最小公倍数。

sin*t*，T=2π sin3*t*，T=2π/3

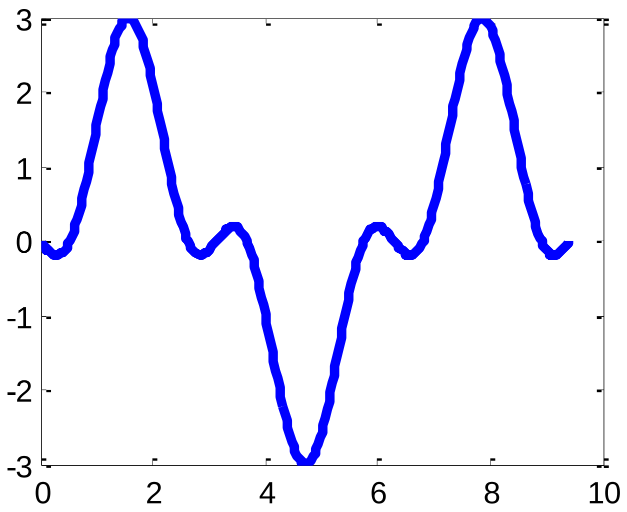
sin3*t*，T=2π/3 cosπ*t*，T=2

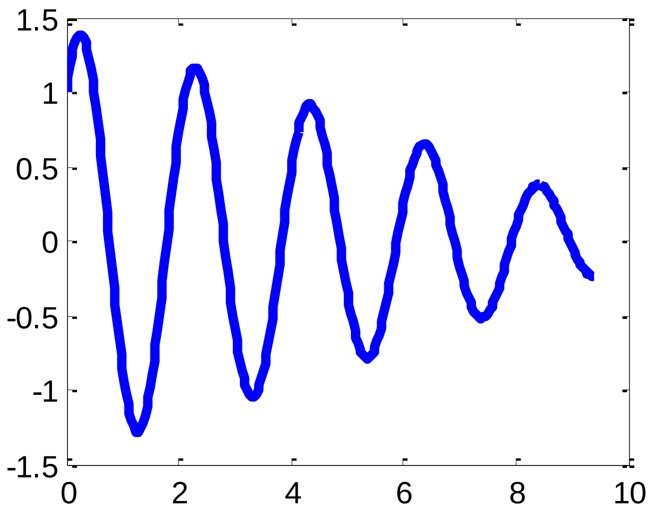
2sin*t*-sin3*t*，T=2π sin3*t*+cos*πt*，非周期信号

Matlab编程

```
t=0:2*pi/201:(3*pi);
y=2*sin(t)-sin(3*t);
plot(t,y);
```

```
t=0:2*pi/201:(3*pi);
y=sin(3*t)+cos(pi*t);
plot(t,y);
```





信号举例

Q3：判断正弦序列 f(k)=sin(βk) 是否为周期信号，若是，确定其周期。

若为周期信号： sin(βk) = sin(βk+2mπ)，m为整数。

$$\sin(\beta k + 2m\pi) = \sin\beta\left(k + m\frac{2\pi}{\beta}\right)$$

若2π/ β为整数，周期信号，T= 2π/ β

若2π/ β为有理数，周期信号，T= N(2π/ β) 整数

若2π/ β为无理数，非周期信号

Matlab编程

$$\beta=\frac{\pi}{4}$$

$$T=\frac{2\pi}{\beta}=8$$

```
k=0:20;
f=sin(pi/4*k);
stem(k,f)
```

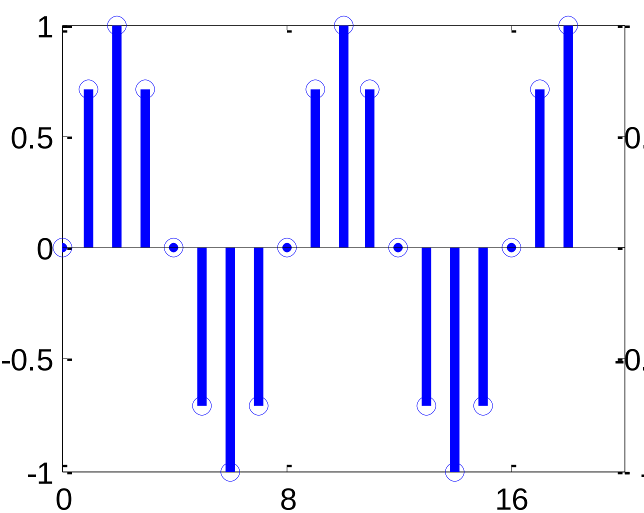
$$\beta=\frac{3\pi}{4},\frac{2\pi}{\beta}=\frac{8}{3}$$

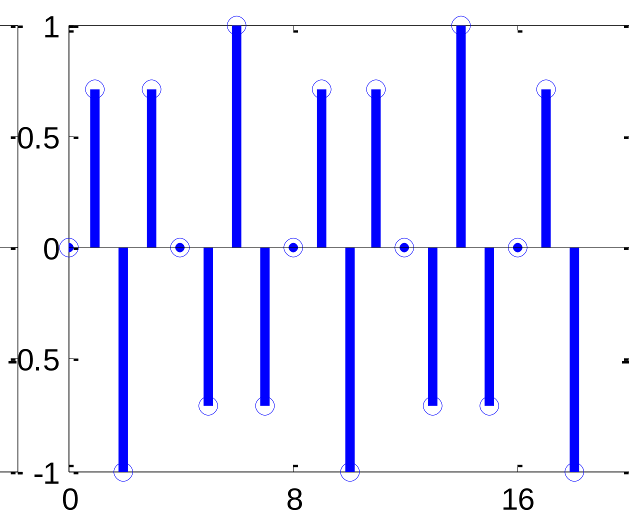
$$T=3\frac{2\pi}{\beta}=8$$

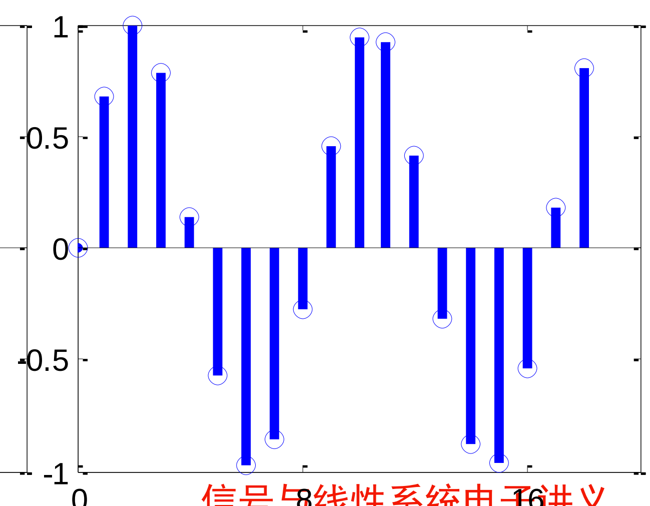
```
k=0:20;
f=sin(3*pi/4*k);
stem(k,f)
```

$$\beta=\frac{3}{4},\frac{2\pi}{\beta}=\frac{8\pi}{3}$$

```
k=0:20;
f=sin(3/4*k);
stem(k,f)
```







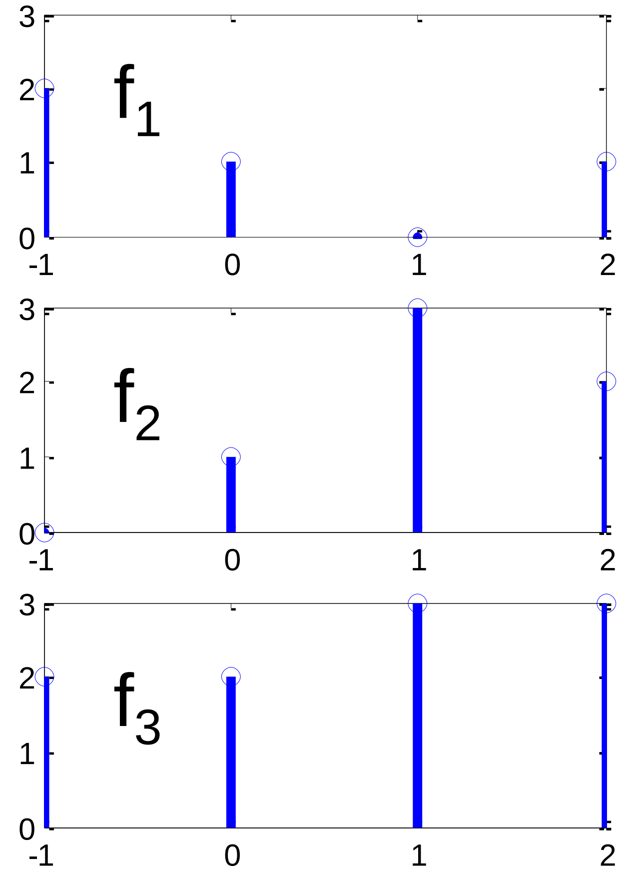
信号的基本运算 – 代数运算

❖信号的加、减、乘运算

- 相同时刻对应的信号值相加、相减、或相乘

$$f_1(k)=\begin{cases}2 & k=-1\\ 1 & k=0\\ 1 & k=2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad f_2(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 3 & k=1\\ 2 & k=2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

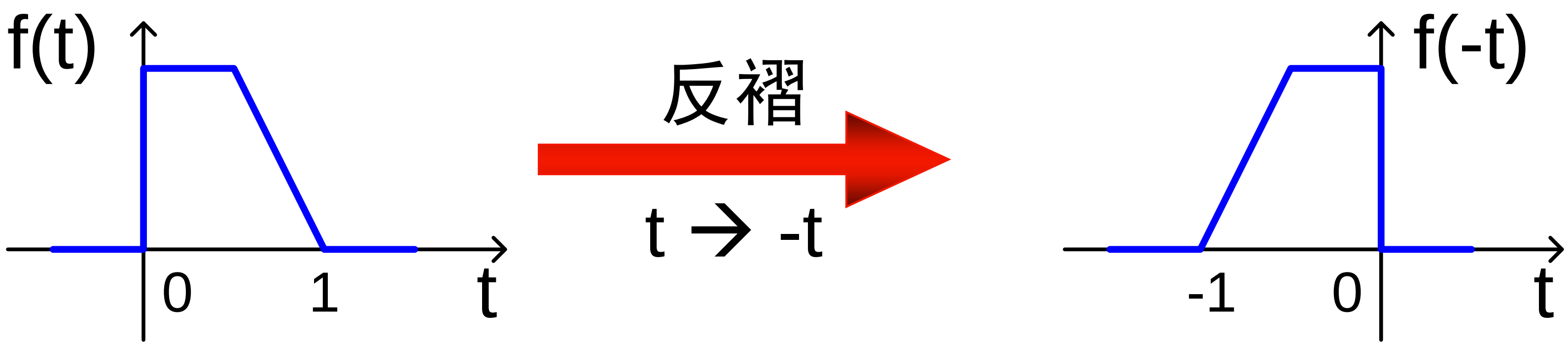
$$f_3(k)=f_1(k)+f_2(k)=\begin{cases}2 & k=-1\\ 2 & k=0\\ 3 & k=1\\ 3 & k=2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



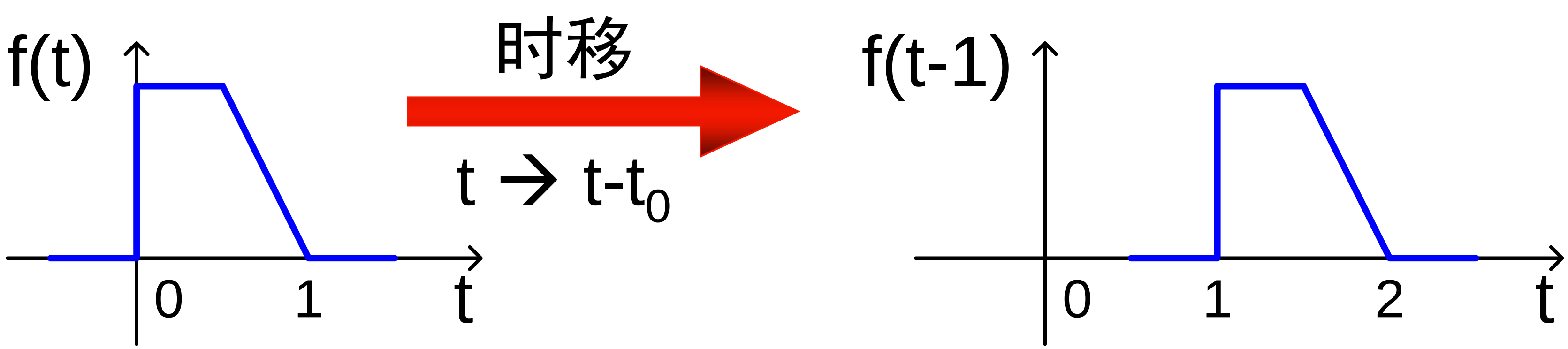
信号的基本运算 – 时间变换

❖信号的时间变换运算

◆ 反褶



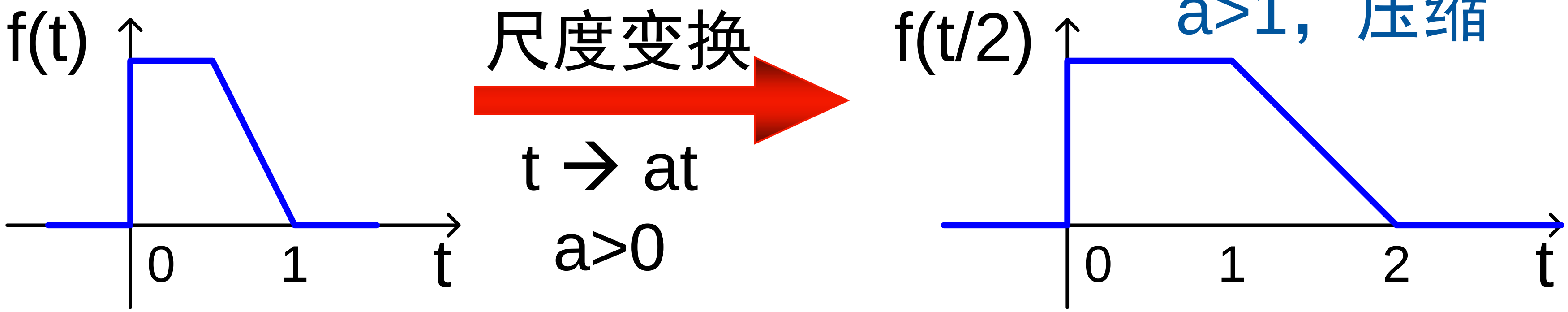
◆ 时移



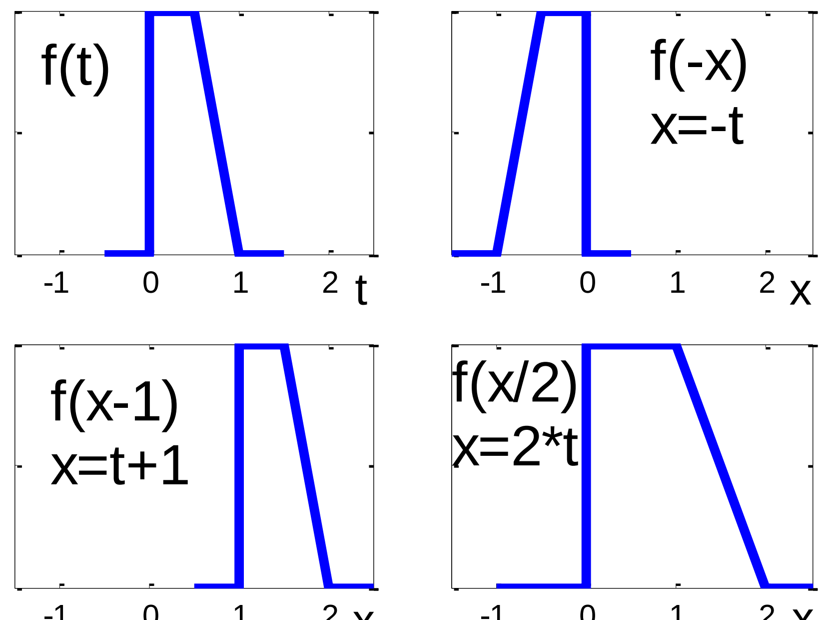
信号的基本运算 – 时间变换

◆ 尺度变换

a<1，伸展
a>1，压缩

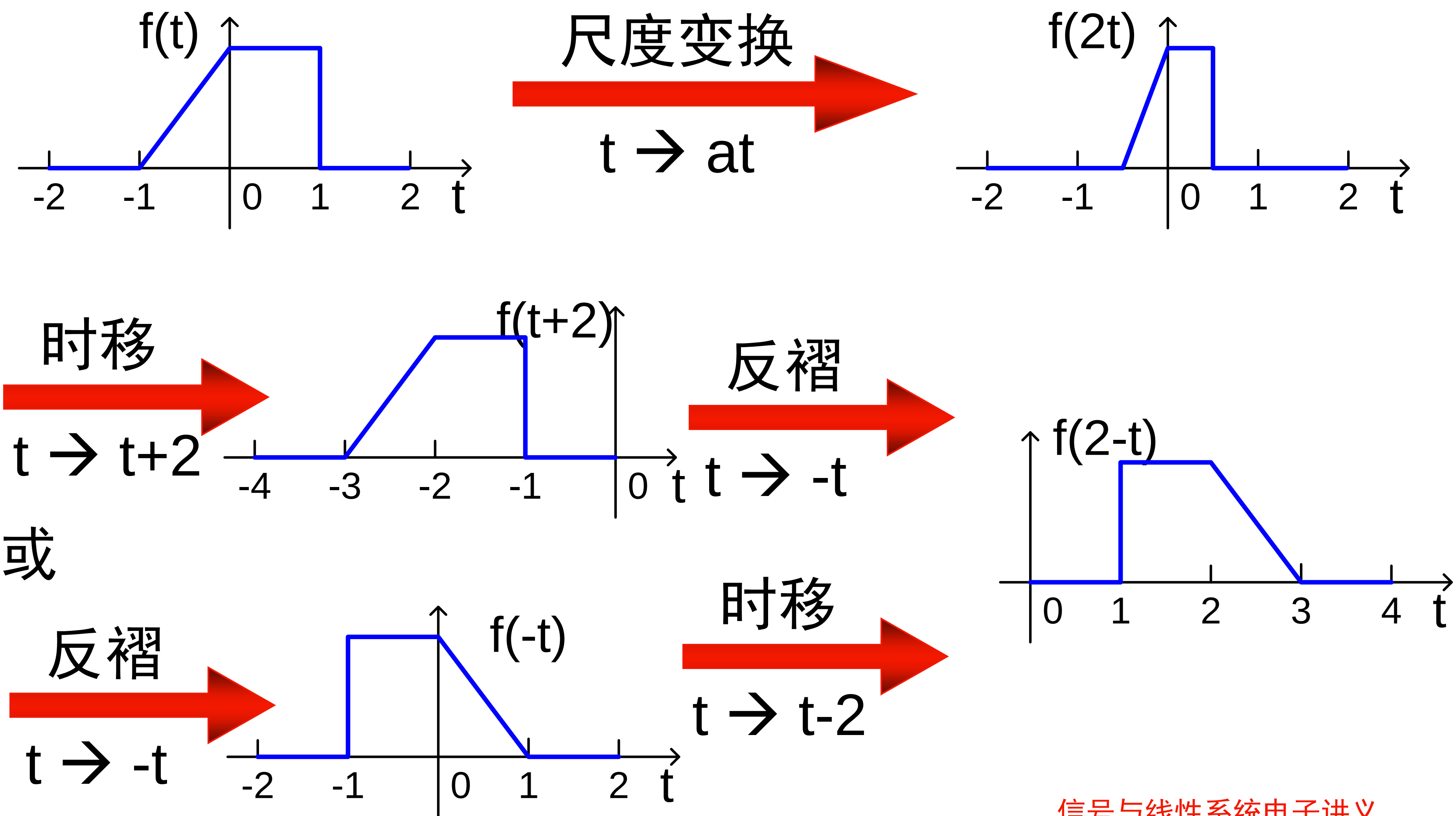



```
t=[-0.5 0 0 0.5 1 1.5 ];
f=[0 0 1 1 0 0];
subplot(2,2,1);plot(t,f);
subplot(2,2,2);plot(-t,f);
subplot(2,2,3);plot(t+1,f);
subplot(2,2,4);plot(2*t,f);
```



信号的基本运算举例

❖ 已知 f(t) 波形如图所示，试绘出 f(2t), f(2-t)。



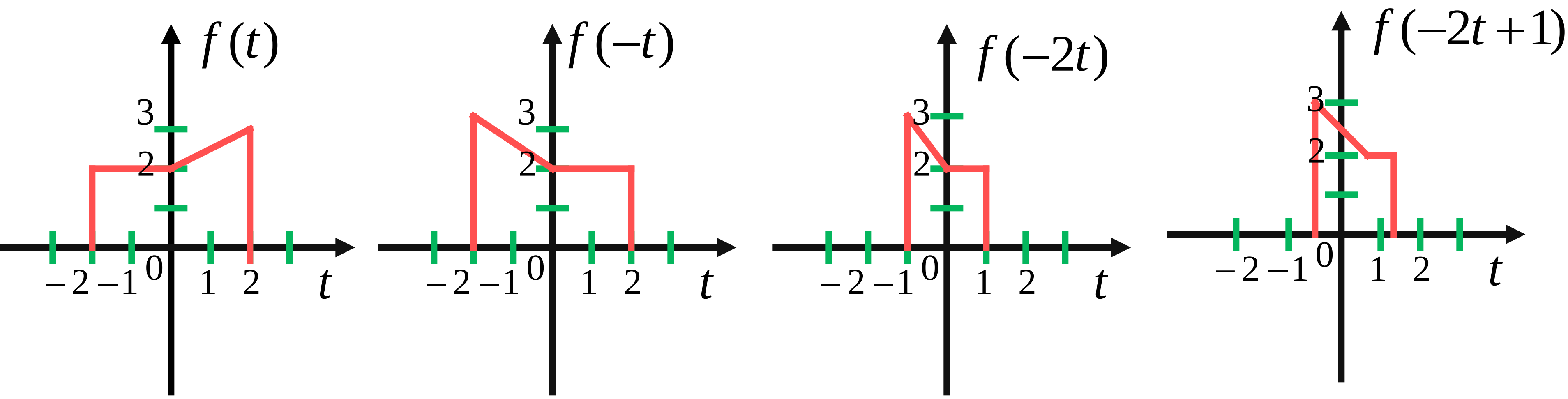
例子

❖已知信号f(t)的波形如图，求f(-2t+1)的波形。

解：图形变换的过程为：$f(-2t+1)=f[-2(t-\frac{1}{2})]$

先反折、尺度变换、时移。

（1）反折　（2）尺度变换　（3）时移



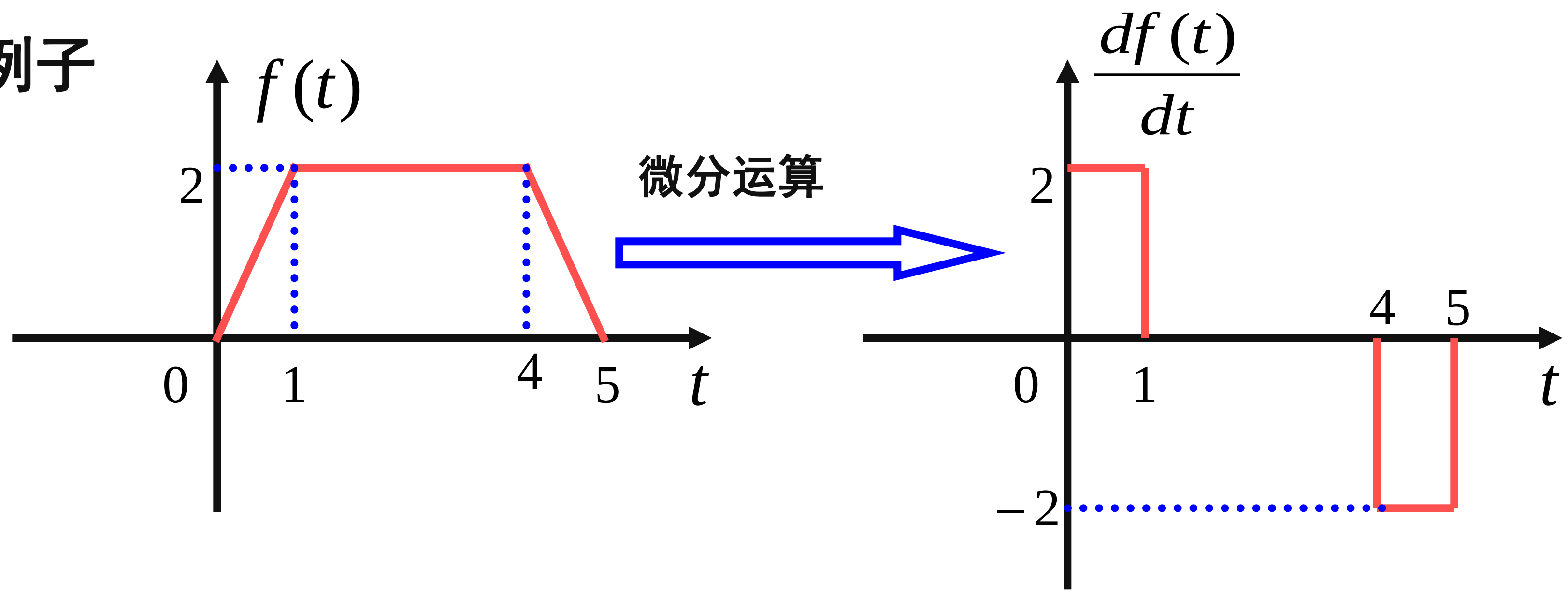
❖信号的微分

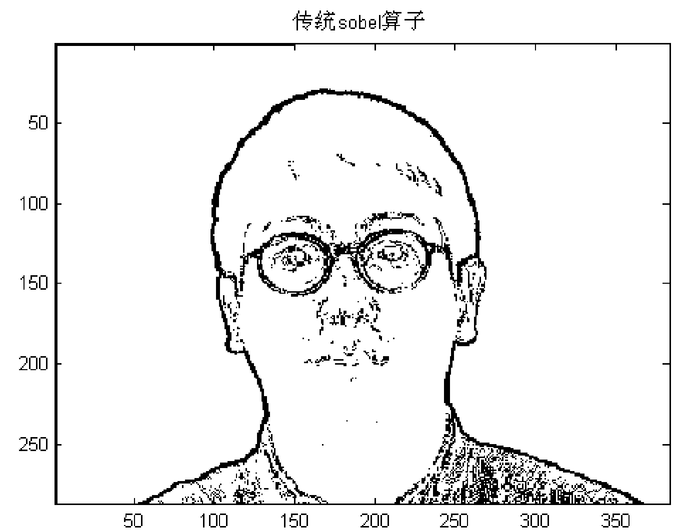
(6)微分：$f_7(t) \xrightarrow{\text{微分}} f_8(t) = f_7^{'}(t) = \dfrac{df_7(t)}{dt}$

突出显示函数变化部分

若f(t)是一幅黑白图像信号，那么经微分运算后将其图形的边缘轮廓突出。

例子：





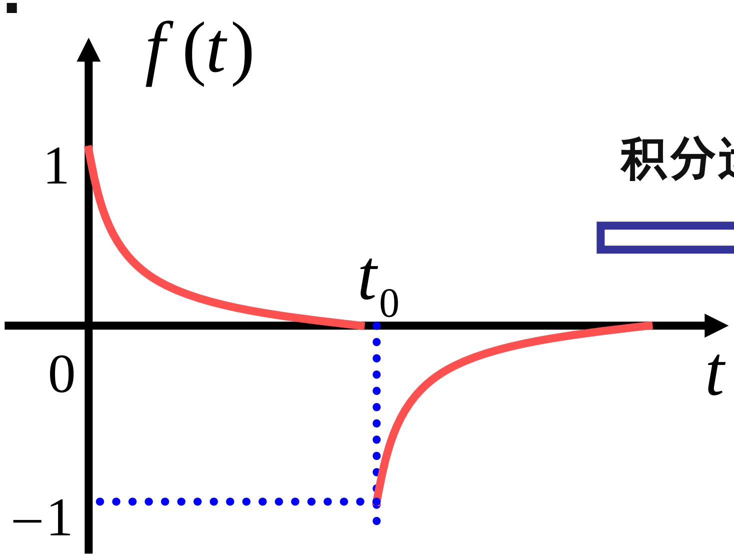
传统sobel算子
50
100
150
200
250
50
100
150
200
250
300
350

❖信号的积分

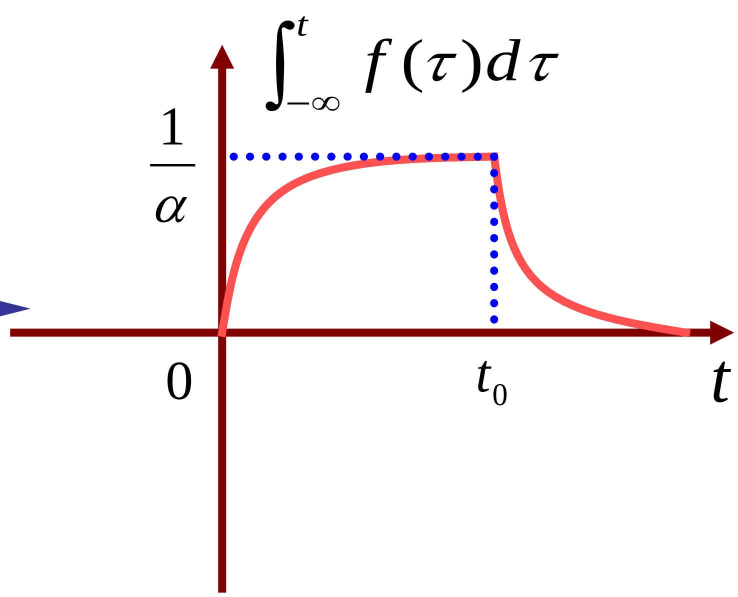
积分：$f_8(\mathrm{t}) \xrightarrow{\text{积分}} f_9(\mathrm{t}) = f_8^{(-1)}(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{f}_8(\tau)d\tau$

信号经积分运算后其效果与微分相反，信号的突变部分可变得平滑，利用这一作用可削弱信号中混入的毛刺（噪声）的影响。

例子：



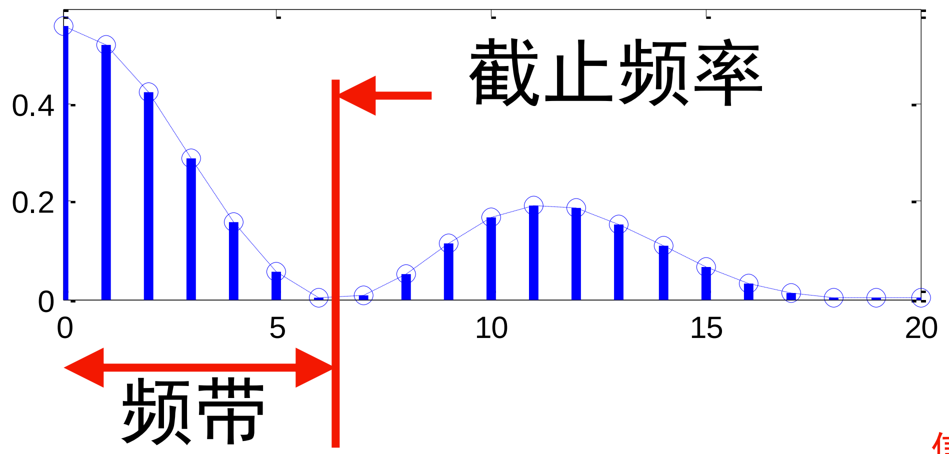
积分运算



信号的时域、频域特性

- ❖频谱：利用Fourier分析法，将复杂信号分解成许多不同频率的正弦分量，按各个正弦分量的振幅和相位的高低依次排列成频谱。
- ❖频带：每个信号的频谱都有一个有效的频率范围，称为频带。
- ❖信号的时域和频域描述都包含了信号的全部信息量。

频谱举例



上一节复习

- 信号的概念及分类
  - 确定信号
  - 连续信号和离散信号
- 信号的基本运算
  - 代数运算
  - 反褶、时移、尺度变换

阶跃函数和冲激函数

- 最重要的两种理想信号模型

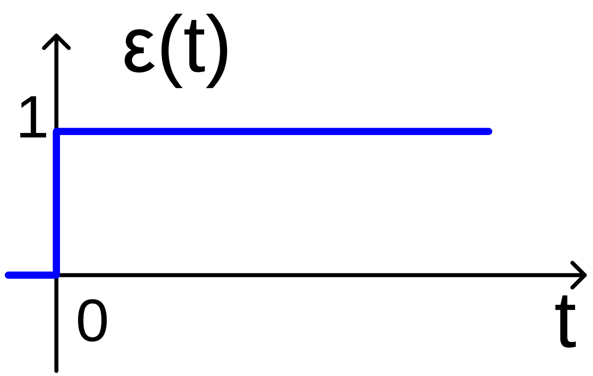
奇异函数 (Singularity Function)

- 奇异函数：这一类函数是理想化了的信号，有一个或多个间断点，在间断点上的导数不好确定。
- 最重要的两种奇异函数：阶跃函数(Step Function)、冲激函数(Impulse Function)。
- 涉及系统零状态响应的阶跃响应和冲激响应。

单位阶跃函数

- ❖阶跃函数在 t=0 时发生跃变
- ❖阶跃函数在 t=0 处函数值无定义
- ❖单位阶跃函数：高度为1的阶跃函数

$$\varepsilon(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$

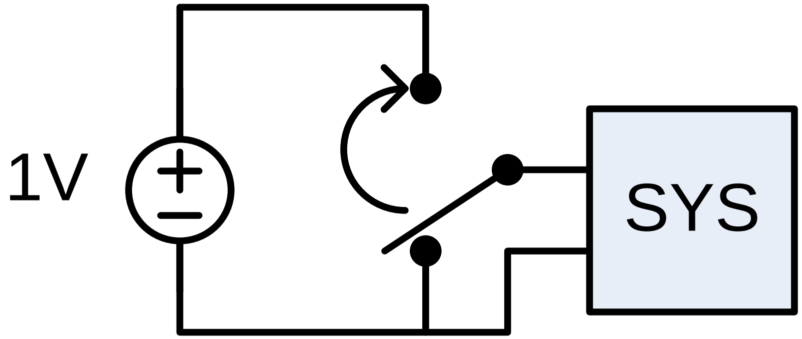


- ❖一般阶跃函数

$$\varepsilon_A(t) = A\varepsilon\left(t\right) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ A & t>0 \end{cases}$$

单位阶跃函数物理意义

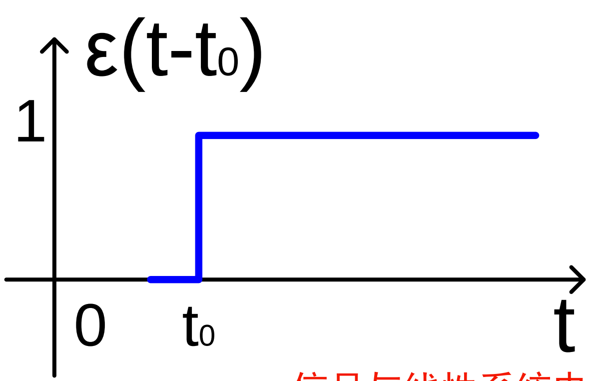
在 $t=0$ 时刻对某一电路接入单位电源（1V电压源或1A电流源），并且无限持续下去。



思考：如果在 $t=t_0$ 时刻接入电源的函数的形式？

阶跃函数延时 t_0

$$\varepsilon\left(t-t_0\right)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$



阶跃函数的性质

❖ 单边特性：任意函数乘以阶跃函数，阶跃之前为0，阶跃之后函数值不变。

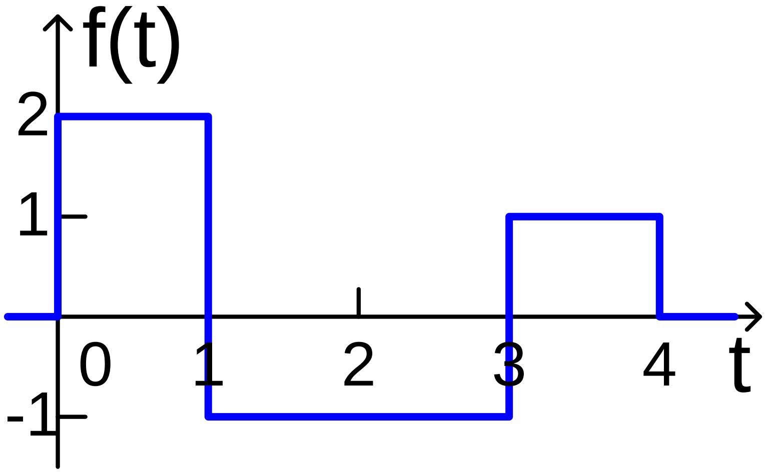
有始信号： $f\left(t\right)\varepsilon\left(t\right)$

等效于 $f\left(t\right) \quad t>0$

阶跃函数的性质应用举例

（1）表示矩形脉冲型信号

$$f(t)=2\varepsilon(t)-3\varepsilon(t-1)+2\varepsilon(t-3)-\varepsilon(t-4)$$



$$f(t)=\begin{cases}2 & 0<t<1\\ -1 & 1<t<3\\ 1 & 3<t<4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

思考：符号函数

$$\operatorname{sgn} t=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$$

$$\operatorname{sgn} t=2\varepsilon(t)-1$$

$$\text{或}=\varepsilon(t)-\varepsilon(-t)$$

阶跃函数的性质应用举例

（2）表示信号的作用区间

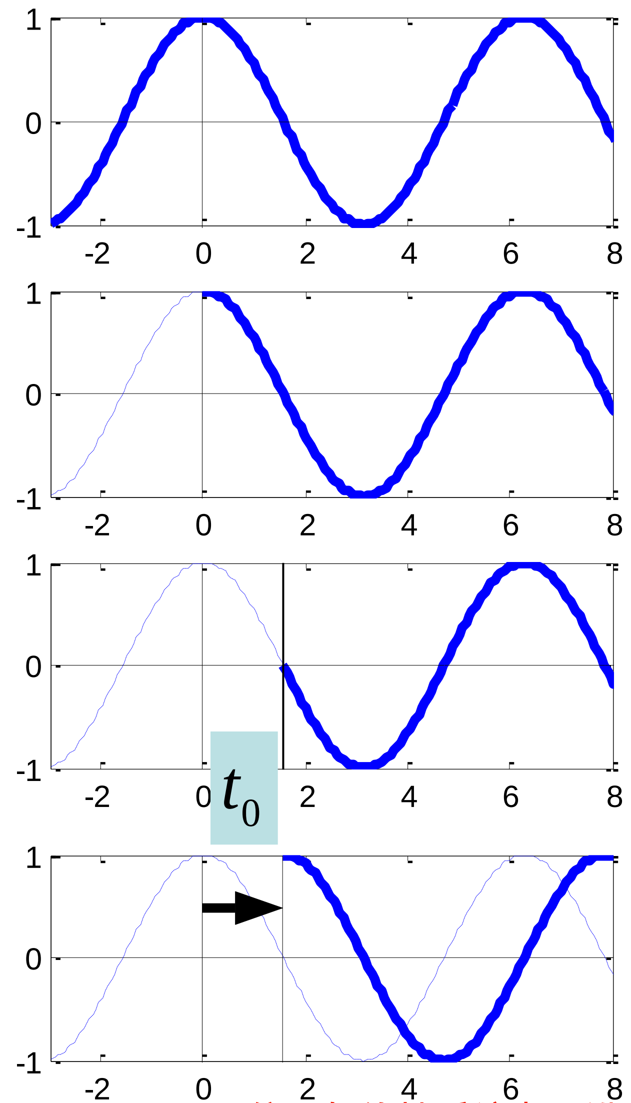
$\cos \omega t$

特点：只有时间区间的变化，函数值不变

$\varepsilon(t)\cos \omega t$

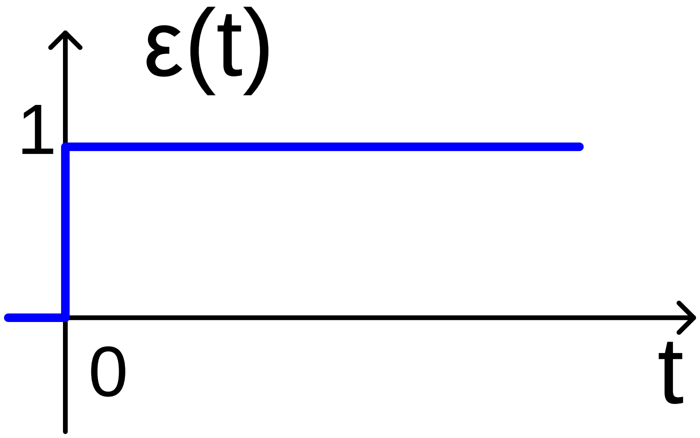
$\varepsilon(t-t_0)\cos \omega t$

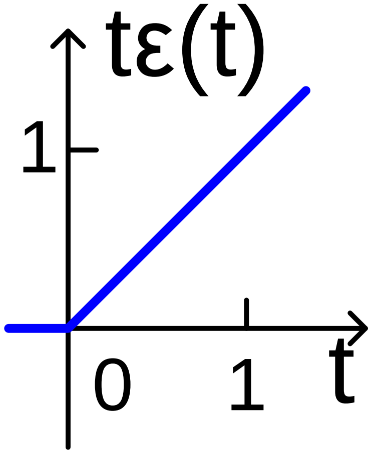
思考：$\varepsilon(t-t_0)\cos \omega(t-t_0)$



阶跃函数的性质应用举例

阶跃函数积分 $\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau = t\varepsilon(t)$



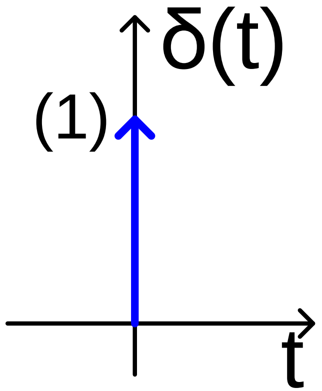


单位斜变函数

单位冲激函数

❖Dirac定义式

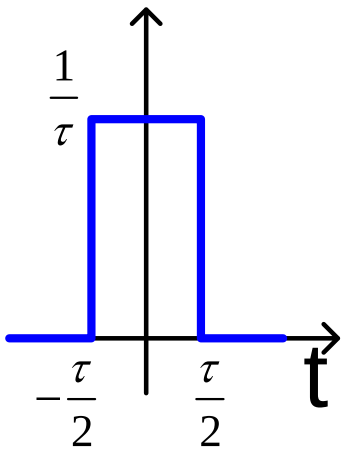
$$\begin{cases} \delta(t)=0 & t\neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1 \end{cases}$$



冲激函数是对强度极大，作用时间极短一种物理量的理想化模型。

单位冲激函数冲激强度为1

冲激函数可看作是保持脉冲面积不变时脉宽趋近于零的矩形脉冲。



$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[\varepsilon\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

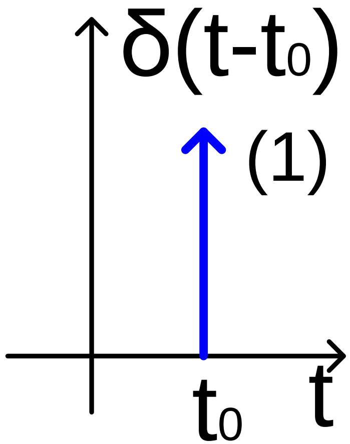
冲激函数

❖冲激强度为A

$$\delta_A(t) = A\delta(t)$$

❖任意时刻出现的冲激强度为1的冲激函数

$$\begin{cases} \delta(t-t_0) = 0 & t \neq t_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,dt = 1 & \end{cases}$$



冲激函数的性质

❖偶函数 $\delta(t)=\delta(-t)$

❖取样特性 $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$ f(t) 在 t=0 处连续

思考： $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt$

$= f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt$

$= f(0)$

$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$ f(t) 在 t=t_0 处连续

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$

冲激函数的性质

❖与阶跃函数的关系

阶跃函数是冲激函数的积分

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$\varepsilon(t)\overset{def}{=}\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

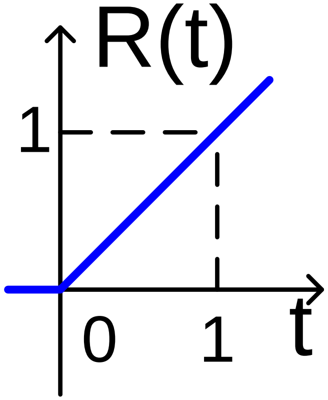
$$\boxed{\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\varepsilon(t)}$$

$$\boxed{\frac{d\varepsilon(t)}{dt}=\delta(t)}$$

其它奇异函数

❖单位斜变函数

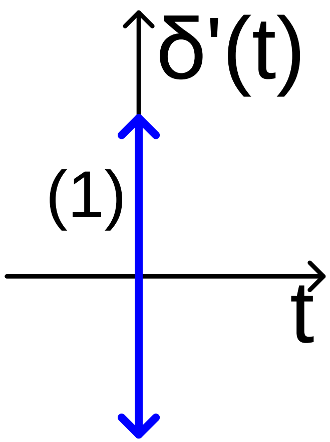
$$R(t)=\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(\tau)d\tau=\begin{cases}t & t>0\\0 & t<0\end{cases}$$



$AR(t)$ A 为斜率

❖单位冲激偶 $\delta'(t)$

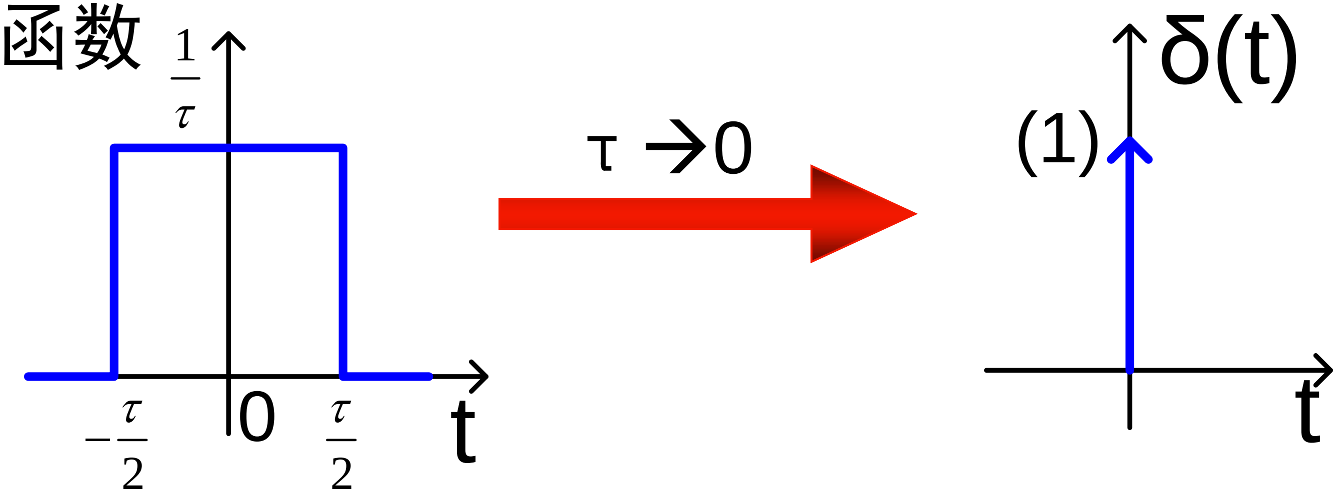
$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[\delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$



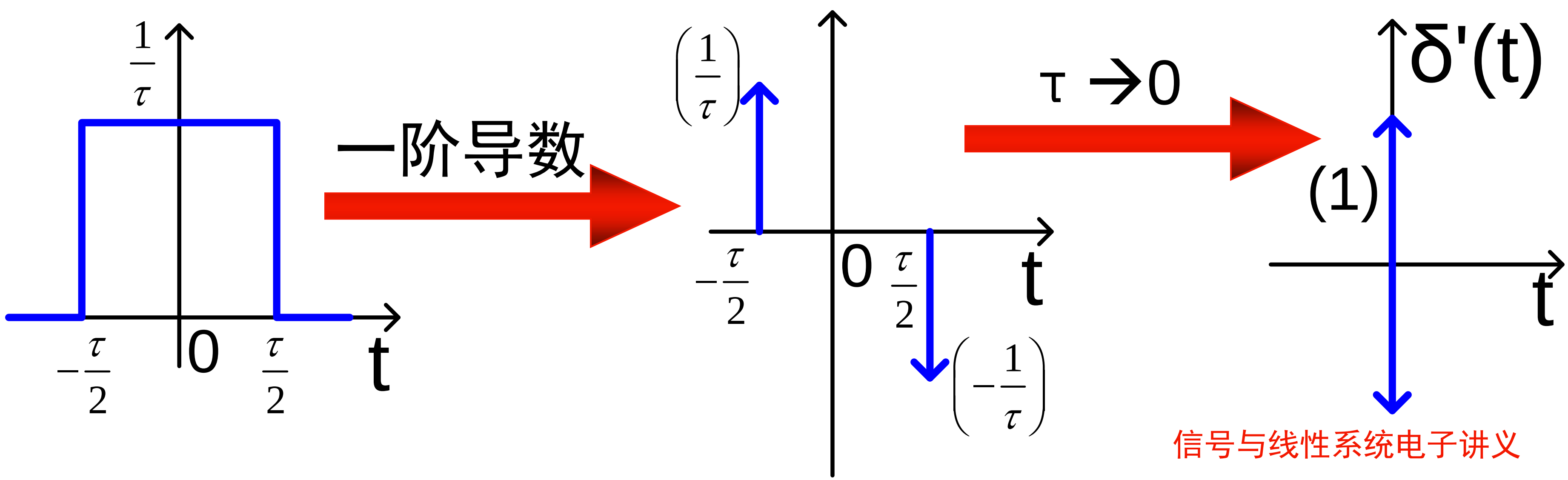
-0，正的无限大脉冲
+0，负的无限大脉冲
冲激强度为1

函数演变

冲激函数



冲激偶函数



冲激函数练习

❖ 求下列函数的值

$$\sin(t+\frac{\pi}{4})\delta(t) \quad =\frac{\sqrt{2}}{2}\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(t-\frac{\pi}{4})\delta(t)\,\mathrm{d}t \quad =-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{-3}^{0}\sin(t-\frac{\pi}{4})\delta(t-1)\,\mathrm{d}t \quad =0$$

$$\int_{-1}^{1}2\tau\delta(\tau-t)\,\mathrm{d}\tau \quad =\begin{cases}2t & -1<t<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{t}(\tau-1)^2\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad =\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}=\varepsilon(t)$$

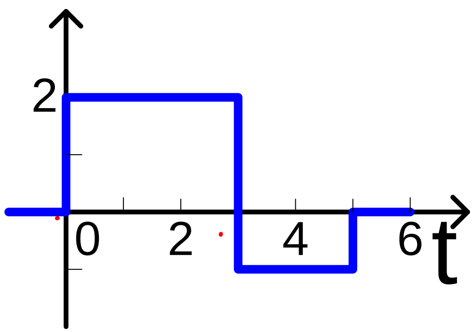
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)\right] \quad =\mathrm{e}^{-2t}\delta(t)-2\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)=\delta(t)-2\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$$

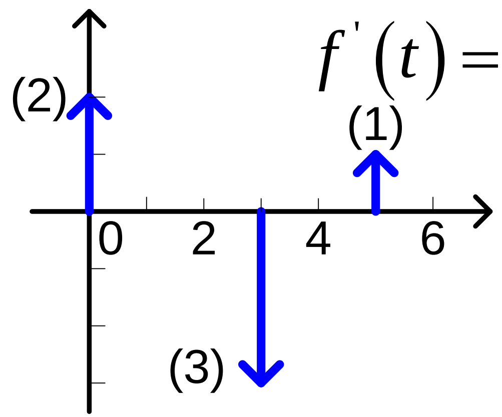
冲激函数练习

❖求下列波形信号的导数 $f(t)=2\varepsilon(t)-3\varepsilon(t-3)+\varepsilon(t-5)$

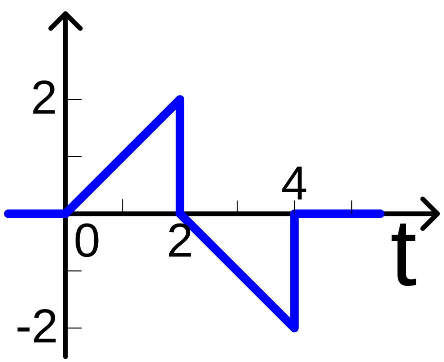
$$f'(t)=2\delta(t)-3\delta(t-3)+\delta(t-5)$$

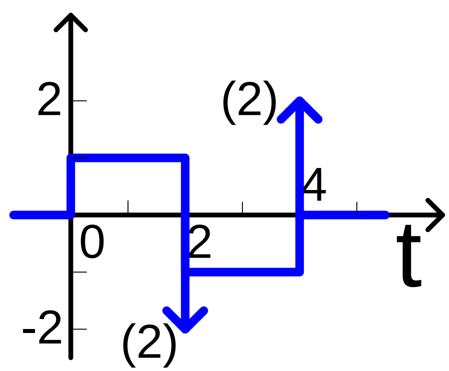
Q1：





Q2：



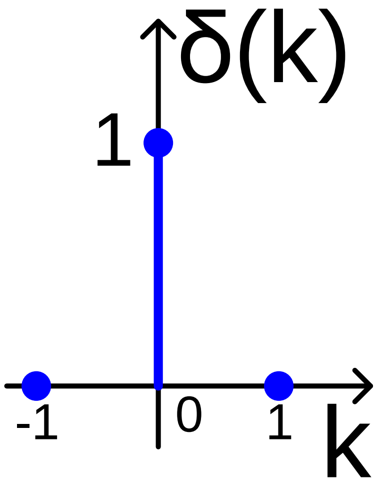


$$f(t)=t\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)\right]+(2-t)\left[\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-4)\right]$$

$$f'(t)=\varepsilon(t)-2\varepsilon(t-2)+\varepsilon(t-4)-2\delta(t-2)+2\delta(t-4)$$

单位冲激序列 $\delta(k)$

$$\delta(k) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$



取样特性：

$$f(k)\delta(k) = f(0)\delta(k)$$

$$f(k)\delta(k-k_0) = f(k_0)\delta(k-k_0)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(k) = f(0)$$

思考：

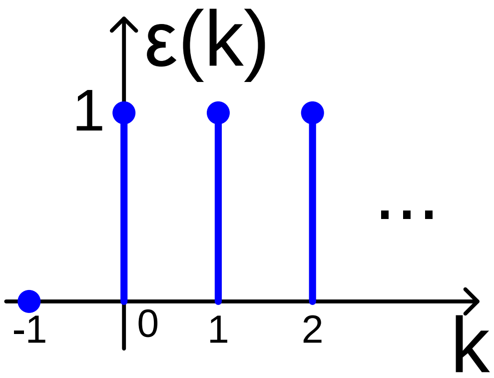
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k) = 1 \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k-5)\delta(k) = -5$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(k-i) = \varepsilon(k) + \varepsilon(-k-1) = \text{全1序列}$$

单位阶跃序列 $\varepsilon(k)$

❖ 单位阶跃序列$\varepsilon(k)$

$$\varepsilon(k) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$



$\varepsilon(k)$与 $\delta(k)$的关系

$$\delta(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)$$

$$\varepsilon(k) = \delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k-2) + \ldots$$

$$\varepsilon(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} \delta(i) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta(k-j)$$

上一节复习

- ❖ 单位阶跃函数
  - ◆ 定义，符号，单边性
- ❖ 单位冲激函数
  - ◆ 定义，符号，取样性
- ❖ 单位阶跃函数和单位冲激函数的关系
- ❖ 单位阶跃序列
  - ◆ 定义，符号，波形
- ❖ 单位冲激序列
  - ◆ 定义，符号，波形
- ❖ 单位阶跃序列和单位冲激序列的关系

信号的时域分解

信号分解的意义

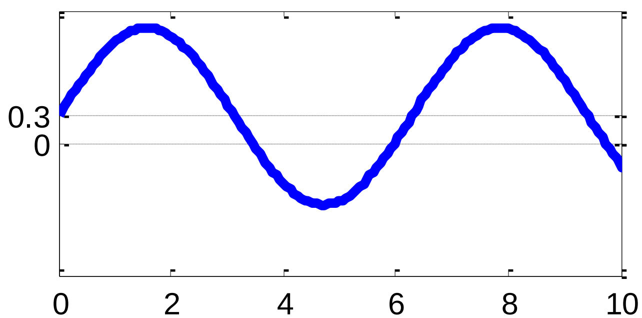
❖利用线性非时变系统的线性特性，可以将复杂输入信号或者初始状态分解成简单信号，分别求系统响应，再求和得到系统全响应。

全响应

- 零输入响应
  由初始状态决定
  多用求微分方程
  通解的方法确定
  - $r_{zi1}(t)$　状态1
  - $r_{zi2}(t)$　状态2
  - $\vdots$　$\vdots$
  - $r_{zim}(t)$　状态m
- 零状态响应
  由输入信号决定
  多分解为脉冲分
  量用卷积法确定
  - $r_{zs1}(t)$　$e_1(t)$
  - $r_{zs2}(t)$　$e_2(t)$
  - $\vdots$　$\vdots$
  - $r_{zsn}(t)$　$e_n(t)$

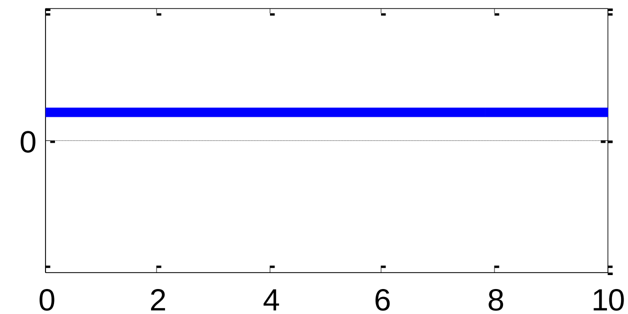
直流分量和交流分量

- 直流分量：信号的平均值
- 交流分量：去除直流分量的信号



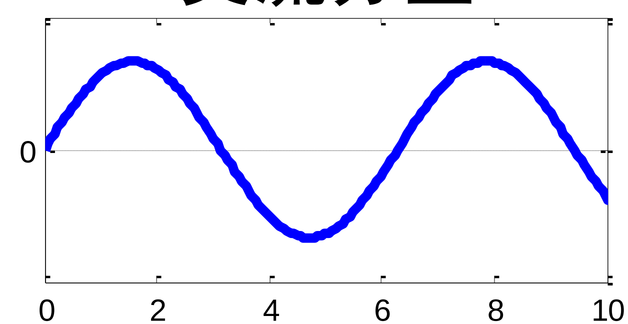
=

直流分量



+

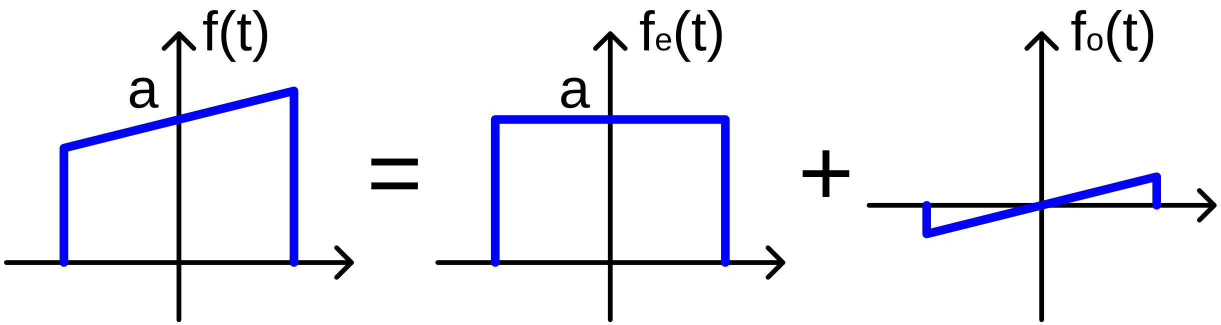
交流分量

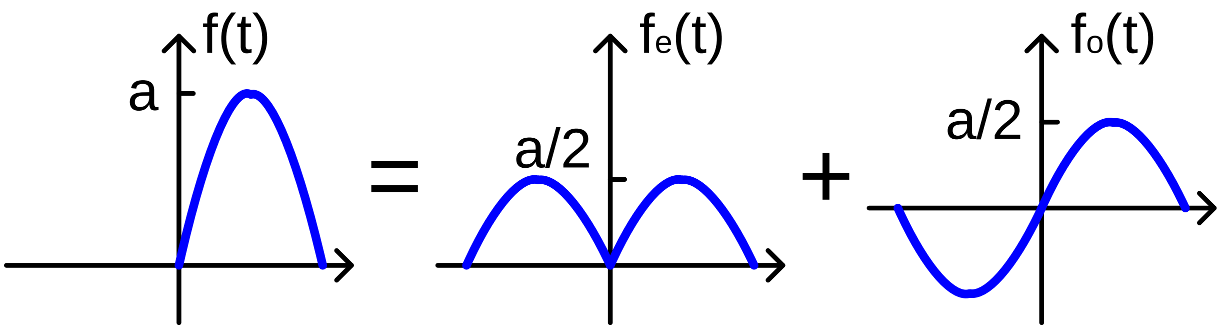


偶分量和奇分量

- 偶分量 $f_e(t) = f_e(-t)$
- 奇分量 $f_o(t) = -f_o(-t)$

$$f(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\left[f(t) + f(-t)\right]}_{\text{偶分量}f_e(t)} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[f(t) - f(-t)\right]}_{\text{奇分量}f_o(t)}$$





脉冲分量

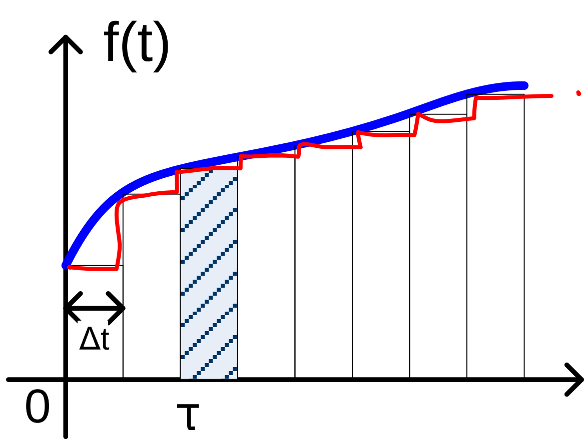
❖分解成矩形窄脉冲分量，极限情况即冲激信号叠加。

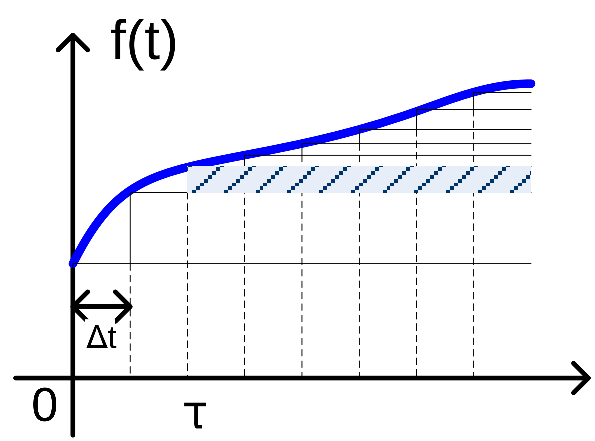
$$f(t)=\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} f(\tau)\left[\varepsilon(t-\tau)-\varepsilon(t-\tau-\Delta t)\right]$$

当 $\Delta t \to 0$ 演变成积分 $f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$

即卷积积分 $f(t)=f(t)*\delta(t)$ 用于求解零状态响应

❖分解成阶跃信号分量。





实部分量与虚部分量

原信号 $f(t)=f_r(t)+jf_i(t)$

共轭信号 $f^*(t)=f_r(t)-jf_i(t)$

实部分量 $f_r(t)=\frac{1}{2}\left[f(t)+f^*(t)\right]$

虚部分量 $f_i(t)=\frac{1}{2j}\left[f(t)-f^*(t)\right]$

$$\left|f(t)\right|^2=f(t)f^*(t)=f_r^2(t)+f_i^2(t)$$

正交函数分量

❖用正交函数集来表示一个信号 – Fourier级数。

三角函数

$$1, \sin \omega t, \sin 2\omega t, \ldots, \sin n\omega t$$

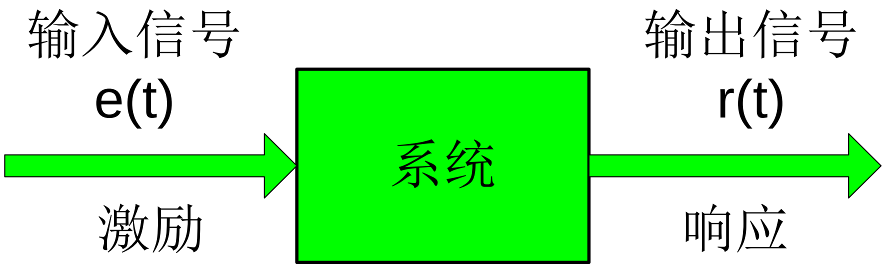
$$\cos \omega t, \cos 2\omega t, \ldots, \cos m\omega t$$

指数函数 $e^{\pm jn\omega t}$ $\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

系统的定义及分类

系统的定义

- 一个由若干互有关联的单元组成的并具有某种功能以用来达到某些特定目的的有机整体。
- 在电子学中，电路侧重于分析各支路或回路的电流电压，而系统侧重于输入输出关系或运算功能。系统功能的具体实现依赖于电路设计及分析。
- 系统的功能方框图
  - e(t) excitation
  - r(t) response



系统的分类

❖按信号的类型

- 连续系统：输入输出均为连续信号
- 离散系统：输入输出均为离散信号

混合系统

❖按输入输出端口数

- 单输入单输出系统（简单系统）
- 多输入多输出系统（复杂系统）

❖按是否满足因果关系

- 因果系统：系统具有因果性，有因（激励）才有果（响应）响应不可能先于激励出现。
- 非因果系统：系统不具有因果性。

系统的分类

❖按集总还是分布参数

- 集总参数系统
- 分布参数系统

❖按是否含有源元件

- 无源系统
- 有源系统

❖按是否具含有记忆元件

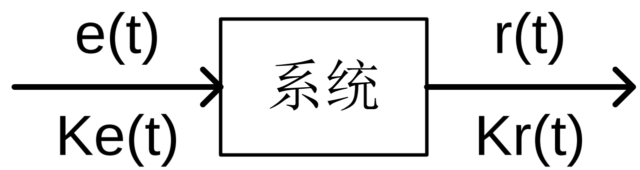
- 动态系统（记忆系统）：系统响应不仅与该时刻激励有关，还与历史状态有关。含有记忆元件(电容、电感等)。
- 即时系统（无记忆系统）：系统响应只与该时刻激励有关。

系统的分类 – 线性系统

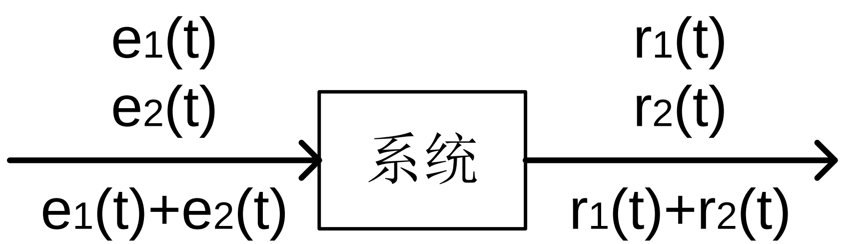
❖按线性特性

- 线性系统：由线性元件组成，具有齐次性和叠加性。
- 非线性系统：含有非线性元件，不具有齐次性和叠加性。

齐次性



叠加性



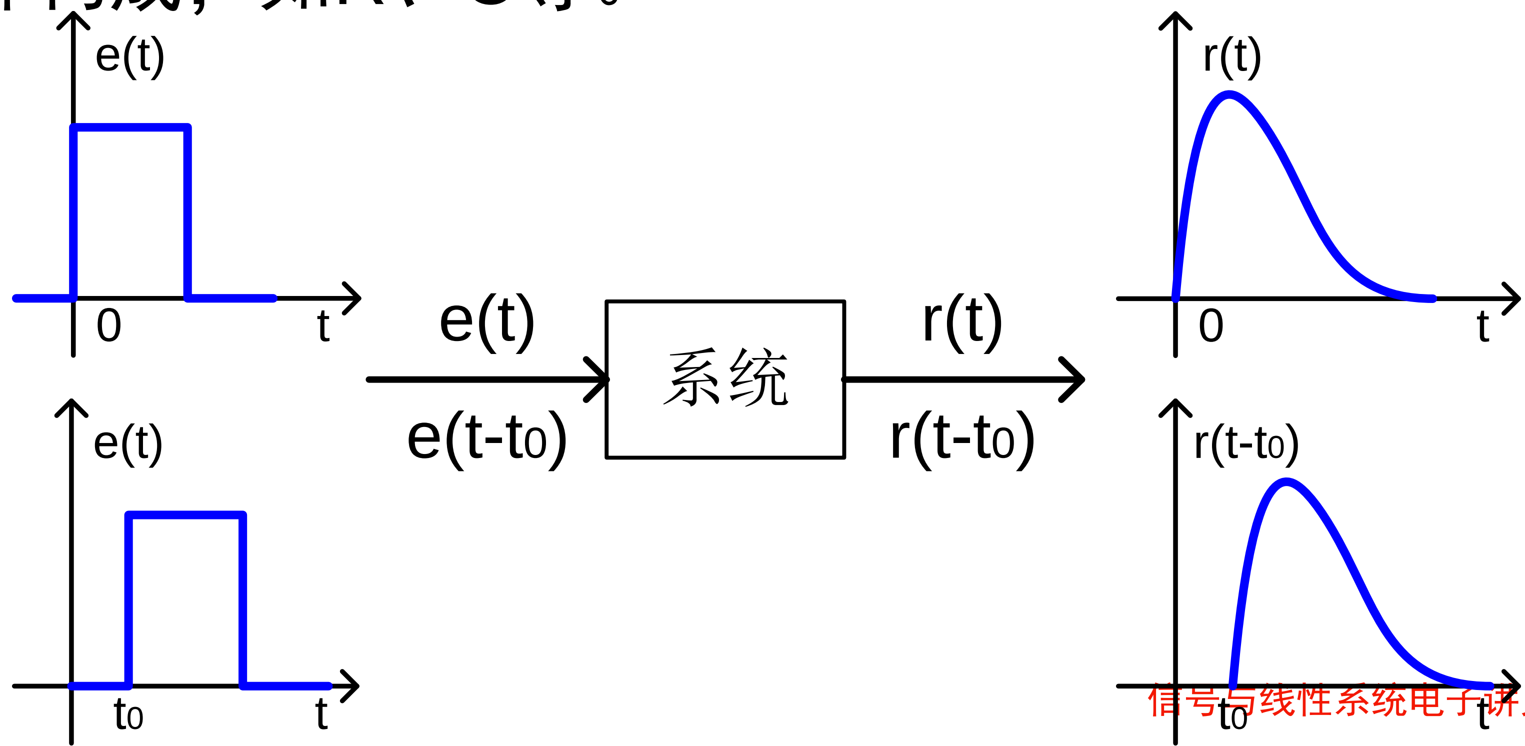
若$e_1(t) \rightarrow r_1(t)$，$e_2(t) \rightarrow r_2(t)$，
则$k_1e_1(t)+k_2e_2(t) \rightarrow k_1r_1(t)+k_2r_2(t)$

齐次叠加性

系统的分类 – 非时变系统

❖按时变特性

- 时变系统：含有时变元件，系统参数随时间变化。
- 非时变系统：系统参数不随时间变化，响应的形状不随着激励施加的时间不同而改变，通常由定常元件构成，如R、C等。



线性非时变系统（LTI系统）

❖LTI系统：Linear Time-Invariant

若$e_1(t) \rightarrow r_1(t)$，$e_2(t) \rightarrow r_2(t)$，
则$k_1e_1(t-t_1)+k_2e_2(t-t_2) \rightarrow k_1r_1(t-t_1)+k_2r_2(t-t_2)$

本课程主要研究集总参数的线性非时变系统，包括连续时间系统和离散时间系统。

线性非时变系统的全响应

❖根据线性系统的齐次叠加性，线性系统的全响应可分为零输入响应和零状态响应两部分。

$$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$$

$r_{zi}(t)$：系统的零输入（zero input）响应，外加激励为零，由初始状态单独作用产生的响应。

$r_{zs}(t)$：系统的零状态（zero state）响应，初始状态为零，由外加激励单独作用产生的响应。

初始状态不为零的线性系统应同时满足零输入线性和零状态线性。

线性非时变系统练习1

❖证明线性非时变系统微分特性

若 $e(t)\to r(t)$ 则 $\dfrac{de(t)}{dt}\to\dfrac{dr(t)}{dt}$

$$\frac{de(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e(t)-e(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

$$e(t)-e(t-\Delta t)\to r(t)-r(t-\Delta t)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e(t)-e(t-\Delta t)}{\Delta t}\to\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(t)-r(t-\Delta t)}{\Delta t}=\frac{dr(t)}{dt}$$

积分特性同理 $\int_{-\infty}^{t}e(\tau)\mathrm{d}\tau\to\int_{-\infty}^{t}r(\tau)\mathrm{d}\tau$

线性非时变系统练习2

❖判断下列系统是否为线性系统？

(1) $$\frac{dr(t)}{dt}+r(t)=e(t)+5$$ 非线性系统

(2) $$5\int_{-\infty}^{t} r(\tau)d\tau+tr(t)=\frac{de(t)}{dt}$$ 线性系统

(3) $$r(t)=\mathrm{e}^{-t}x(0)+\int_{0}^{t}\sin(\tau)e(\tau)d\tau$$ 线性系统

$$r_{zi}(t)=\mathrm{e}^{-t}x(0)$$ 满足零输入线性

$$r_{zs}(t)=\int_{0}^{t}\sin(\tau)e(\tau)d\tau$$ 满足零状态线性

线性非时变系统练习3

❖判断下列系统是否为时变系统?

(1) $r(t)=e(t)+e(t-1)$ 非时变系统

(2) $r(t)=te(t)+5$ 时变系统

(3) $r(t)=e(-t)$ 时变系统

若输入信号延时为 t_0

(1) $r(t-t_0)=e(t-t_0)+e(t-t_0-1)$

(2) $r(t-t_0)=(t-t_0)e(t-t_0)+5\neq te(t-t_0)+5$

(3) $r(t-t_0)=e(-(t-t_0))\neq e(-t-t_0)$

线性非时变系统练习4

❖已知某LTI系统在初始状态为x(0),输入为e(t)时，系统全响应为$r_1(t)$，在初始状态为2x(0),输入为3e(t)时，系统全响应为$r_2(t)$，求系统在输入为f(t)时的零状态响应$r_3(t)$。

$$r_1(t)=1+\cos\pi t \quad t>0$$
$$r_2(t)=-2+3\cos\pi t \quad t>0$$

$$f(t)=\frac{de(t)}{dt}+2e(t-1)$$

$$\begin{cases} r_1(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t) \\ r_2(t)=2r_{zi}(t)+3r_{zs}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_{zi}(t)=5\varepsilon(t) \\ r_{zs}(t)=(-4+\cos\pi t)\varepsilon(t) \end{cases}$$

$$r_3(t)=\frac{dr_{zs}(t)}{dt}+2r_{zs}(t-1)$$

$$=-3\delta(t)-\pi\sin\pi t\varepsilon(t)-\left[8-2\cos\pi(t-1)\right]\varepsilon(t-1)$$

LTI系统的分析方法

系统分析的步骤

- 建立系统的数学模型，例如电路方程和系统方程。
- 运用数学方法处理，例如求解系统在一定初始条件和一定输入激励下的输出响应。
- 对所得的数学解给出物理解释，赋予物理意义。

第一步：建模

第二步：求解

第三步：解释

LTI连续时间系统

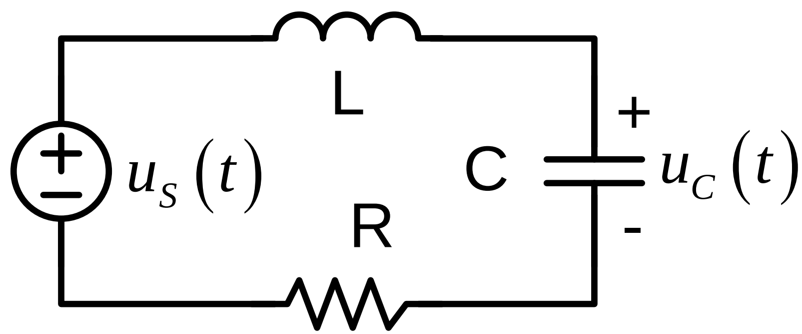
- **建模：常系数线性微分方程**
  - 输入输出方程
  - 状态方程

选取变量的观点和方法不同

- **数学求解**
  - 时域求解：直接解法，卷积法
  - 变换域求解：Fourier变换，Laplace变换

连续系统输入输出方程举例： 激励 $u_S(t)$ 响应 $u_C(t)$

$$\begin{cases} LC\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_S \\ u_C(0_+),\ u_C'(0_+) \end{cases}$$



LTI离散时间系统

❖建模：常系数线性差分方程

- 输入输出方程
- 状态方程

❖数学求解

- 时域求解：卷积和
- 变换域求解：Z变换

差分方程由未知输出序列项与输入序列项构成。

例如：$r(k)-(1+\beta)r(k-1) = e(k)$ 一阶差分方程

阶数：未知序列项最高序号与最低序号之差。

由n阶差分方程描述的系统称为n阶系统。

离散时间系统练习1

❖下列差分方程描述的系统，是否线性？是否非时变？并写出方程的阶数。

（1）$r(k) = e(k)+ e(k-1)$ 线性、非时变，一阶

（2）$r(k) + (k – 1)r(k – 1) = e(k)$ 线性、时变，一阶

（3）$r(k) + r(k+1) r(k – 1) = e^2(k)$ 非线性、非时变，二阶

（4）$r(k) + 2 r(k – 1) = e(1 – k)+1$ 非线性、时变，一阶

判断方法：

方程中均为输出、输入序列的一次关系项，无常数项，则是线性的。输入输出序列前的系数为常数，且无反褶、尺度变换，则为非时变的。

非电系统的分析

- 和信号传输系统或别的电系统具有可比拟性，可以运用相似的电系统的分析来代替。
- 只要可以近似为线性系统，用线性微分或差分方程来描述，就可以用线性系统分析法来分析。

章节小结

- 基本概念
  - 信息，消息，信号（确定信号），系统（线性非时变系统，LTI系统）
- 奇异函数的定义及性质
- 线性非时变系统的特性
  - 齐次性，叠加性，非时变性

若$e_1(t) \rightarrow r_1(t)$，$e_2(t) \rightarrow r_2(t)$，
则$k_1e_1(t-t_1)+k_2e_2(t-t_2) \rightarrow k_1r_1(t-t_1)+k_2r_2(t-t_2)$

- 线性非时变系统的分析方法
  - 建模，求解，物理解释

LTI系统分析概述

- 研究对象：对给定的具体系统，求出它对给定激励的响应。
- 系统分析的方法
  - 输入输出法 – 外部法
  - 状态变量法 – 内部法（Chp.11）
- 外部法求解
  - 时域分析（Chp.2 Chp.3 Chp.7 ）
  - 变换域分析
    - 连续系统（频域分析Chp.4， 复频域分析Chp.5 ）
    - 离散系统（Z域分析Chp.8 ）
- 系统特性 – 系统函数（ Chp.6 ）

LTI系统求解

❖求解的基本思路

- 分开求零输入响应和零状态响应
- 把复杂信号分解为众多基本信号之和，利用线性系统的叠加性：多个基本信号作用于线性系统所引起的响应等于各个基本信号所引起的响应之和。

❖数学工具

- 卷积积分和卷积和
- Fourier变换
- Laplace变换
- Z变换