2022年秋季教学课件

复变函数与积分变换

汪 玉 峰

武汉大学数学与统计学院

第四章　复 级 数

第一节　复数项级数

第二节　幂级数

第三节　Taylor级数

第四节　Laurent级数

第一节　复数项级数

一、复数项级数

二、例题

一、复数项级数

1. 复数序列的极限

定义1.1 自变量取正整数的复值函数 $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{C}$ 称为复数序列, 记作$z_n=f(n)$ 或$\{z_n\}$. $z_n=a_n+ib_n, a_n, b_n\in\mathbb{R}$ 称为通项(一般项). 习惯上, 复数序列也写成

$$z_1=a_1+ib_1, z_2=a_2+ib_2,\ z_3=a_3+ib_3,\cdots,\ z_n=a_n+ib_n,\cdots.$$

复变函数的极限定义搬过来，我们有

定义1.2 设$\{z_n\}$是一个复数序列, z_0是一个复常数. 如果

$$(\forall\varepsilon>0)\left(\exists N\in\mathbb{Z}^+\right)\left(n>N\Rightarrow|z_n-z_0|<\varepsilon\right)$$

则称n趋于无穷大时数列$\{z_n\}$以 z_0为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}z_n=z_0 \text{ 或 } z_n\to z_0\ (n\to\infty).$$

此时也称复数列收敛, 否则称复数列发散 .

同复变函数的极限一样，我们有下列等价定理.

定理 1.1 设 $z_n = a_n + ib_n$,则复数列$\{z_n\}$收敛于$z_0 = a_0 + ib_0$当且仅当实数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$分别收敛于a_0和b_0.

注解 由等价定理知，实数列一些性质和运算法则可以搬到复数列上. 如Cauchy收敛原理：

复数列$\{z_n\}$收敛当且仅当对任意正数ε，存在$N>0$，当$m,n>N$ 时，

$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$

2. 复数项级数的和

定义1.3 形如

$$z_1 + z_2 + z_3 + \cdots z_n + \cdots$$

称为复数项级数，简称复级数. 记作 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 或 $\sum z_n$.

定义1.4　如果部分和序列

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

收敛,则称复级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛. 并且，极限 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ 称为复级数的和，也称 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 收敛于 σ. 记作

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} z_n .$$

若部分和数列 $\{\sigma_n\}$ 不收敛,则称复级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散.

定理1.2　复级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n)$ 收敛的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛.

证明:　$\sigma_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + i(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$

$$= \omega_n + i\tau_n ,$$

由此证实了定理.

注解 由定理1.2及其证明知,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n) = a + bi \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b.$$

定理1.3（收敛必要条件） 如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} z_n = 0.$

证明：如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 收敛，那么

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(\sigma_n - \sigma_{n-1}) = 0.$$

定理1.4（Cauchy收敛原理） 复级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 收敛当且仅当对任意正数ε，存在 $N > 0$，当 $n > N$，p为正整数时，

$$\left|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}\right| < \varepsilon.$$

证明：利用等价定理(定理1.2)及实数列的Cauchy收敛原理,并利用三角不等式

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}\right|,\left|b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}\right|\leq\left|z_{n+1}+z_{n+2}+\cdots+z_{n+p}\right|$$
$$\leq\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}\right|+\left|b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}\right|.$$

3. 绝对收敛与条件收敛

定义1.5 如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|z_n|$ 收敛，则称复级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n$ 绝对收敛. 非绝对收敛的收敛级数称为条件收敛.

定理1.5 如果复级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n$ 收敛.

证明: 由于$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$收敛, 那么$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{Z}^+$,使当$n>N$时,对$\forall p\in\mathbb{Z}^+$,有
$\left|z_{n+1}\right|+\left|z_{n+2}\right|+\cdots+\left|z_{n+p}\right|<\varepsilon$. 从而

$$\left|z_{n+1}+z_{n+2}+\cdots+z_{n+p}\right|\leq\left|z_{n+1}\right|+\left|z_{n+2}\right|+\cdots+\left|z_{n+p}\right|<\varepsilon,$$

这蕴含结论成立(引用Cauchy收敛原理(定理1. 4)).

定理1.6　设 $z_n = a_n + ib_n$,则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 绝对收敛当且仅当实级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$都绝对收敛.

证明：由于

$$|a_k|,|b_k| \le \sqrt{a_k^2+b_k^2} \le |a_k|+|b_k| \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|a_k|,\sum_{k=1}^{n}|b_k| \le \sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+b_k^2} \le \sum_{k=1}^{n}|a_k| + \sum_{k=1}^{n}|b_k|,$$

那么结论立即得到.

定理1.7(Cauchy) 设复级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n'$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n''$ 绝对收敛,且和分别为σ'及σ'',则级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(z_1'z_n''+z_2'z_{n-1}''+\cdots+z_n'z_1''\right)$$

绝对收敛于$\sigma'\sigma''$.

二、例题

例1　数列 $\alpha_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}}$ 是否收敛?

解：因为

$$\alpha_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\Rightarrow a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n},\quad b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=1,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=0$$

所以数列 $\alpha_n=(1+\frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=1$.

例2　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$ 是否绝对收敛?

解: 因为

$$\left|\frac{(8i)^n}{n!}\right| = \frac{8^n}{n!},$$

所以由正项级数的比值判别法知: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$ 收敛,故原级数绝对收敛.

例3　级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i\right]$ 是否绝对收敛?

解: 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 也收敛, 故原级数收敛.

但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 为条件收敛, 所以原级数非绝对收敛.

第二节　幂级数

一、复变函数项级数和复变函数序列

二、幂级数

一、复变函数项级数和复变函数序列

定义2.1 设 $f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ 定义在复平面点集E上,则

$$f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$$

称作E上的复变函数项级数, 记作$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$或$\sum f_n(z)$.

如果对于任意$z\in E$,数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$收敛于某个复数$f(z)$,则称函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$在$E$上收敛于复函数$f(z)$, $f(z)$称作复变函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$的和函数. 记作$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(z)=f(z)$.

而 $f_1(z)$, $f_2(z),\cdots$, $f_n(z),\cdots$ 称作复变函数序列, 记作$\{f_n(z)\}_{n=1}^{+\infty}$或 $\{f_n(z)\}$.若 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(z)=\varphi(z),\forall z\in E$, $\varphi(z)$称作复变函数序列的极限函数.

二、幂级数

1. 幂级数的概念及Abel定理

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots,\quad c_n \in \mathbb{C} \qquad (2.1)$$

称为幂级数.

定理一(Abel)如果幂级数(2.1)在某点$z_1(\neq a)$收敛,则必在圆$U:|z-a|<|z_1-a|$内绝对收敛. 如果幂级数(2.1)在某点$z_0(\neq a)$发散,则必在圆$U:|z-a|>|z_0-a|$内发散.

证明: 证明的基本思想与《高等数学》中实幂级数完全一致.

设z是圆U内任一点.因为级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1-a)^n$ 收敛, 所以它的各项必有界, 即

$$\left|c_n\left(z_1-a\right)^n\right| \le M \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

于是有

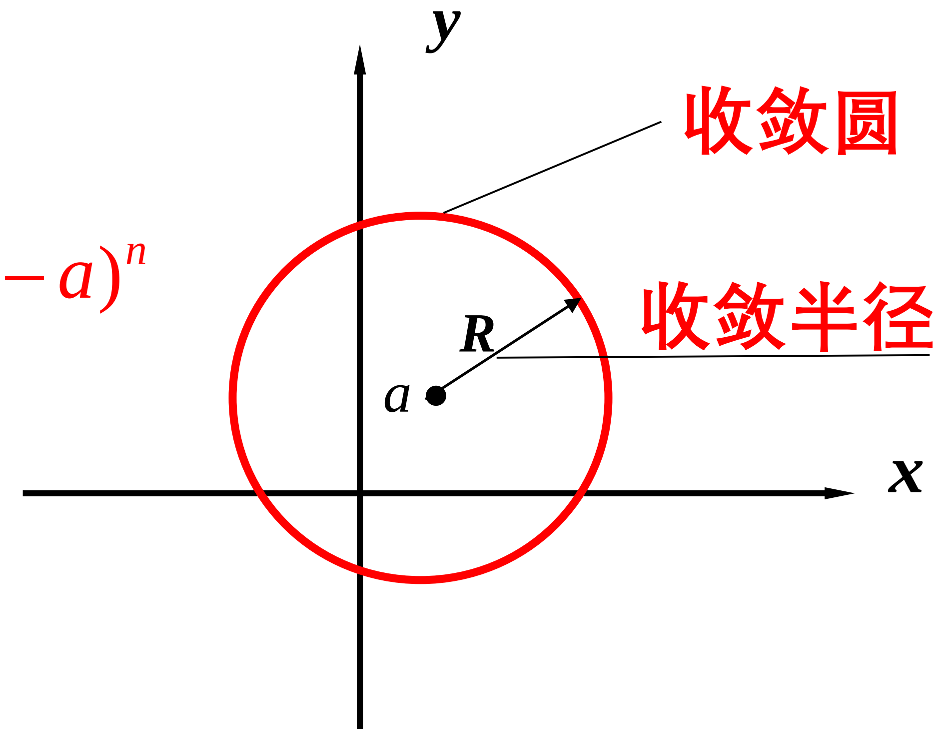
上页 下页 返回 结束

$$\left|c_n(z-a)^n\right|=\left|c_n(z_1-a)^n\right|\cdot\left|\frac{z-a}{z_1-a}\right|^n\le M\left|\frac{z-a}{z_1-a}\right|^n$$

由于$|z-a|<|z_1-a|$,故级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}M\left|\dfrac{z-a}{z_1-a}\right|^n$为收敛的等比级数. 因而, 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$在圆$U$内绝对收敛. 定理另一部分用反证法可证.

2. 收敛半径

同实幂级数类似,存在有限正数R,使$\sum c_n(z-a)^n$在圆周$|z-a|=R$内绝对收敛,在圆周$|z-a|=R$外发散,R称为此幂级数的收敛半径,$|z-a|<R$为收敛圆盘,$|z-a|=R$为收敛圆.



注解 一个幂级数在收敛圆周上有三种情况:

1)处处收敛;

2)处处发散;

3)既有收敛点, 也有发散点.

方法1（比值法） 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda$, 则

(1) $\lambda = 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在复平面内处处收敛, 即 $R = \infty$.

(2) $\lambda = \infty$, 则对 $z \neq 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 均发散, 即 $R = 0$.

(3) $0 < \lambda < \infty$, 那么收敛半径 $R = \dfrac{1}{\lambda}$.

证明: 只证明(3).

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|c_{n+1}z^{n+1}\right|}{\left|c_n z^n\right|}=|z|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lambda|z|,$$

那么，根据达朗贝尔判别法,

$$|z|<\frac{1}{\lambda}\text{时,}\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_n z^n\right|\text{ 收敛 }\xRightarrow{\text{Abel定理}}\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_n z^n\right|\text{ 在}|z|<\frac{1}{\lambda}\text{内收敛.}\qquad(2.2)$$

另一方面,用反证法证明断言:

$$|z|>\frac{1}{\lambda}\text{时,}\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n\text{发散.}\qquad(2.3)$$

假设(2.3)不真. 那么存在$|z_0|>1/\lambda$使得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n z_0^n$收敛. 取$z_1$满足$|z_0|>|z_1|>1/\lambda$.

根据Abel定理,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|c_n z_1^n\right|$收敛. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|c_{n+1}z_1^{n+1}\right|}{\left|c_n z_1^n\right|}=\left|z_1\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lambda\left|z_1\right|>1,$$

这与达朗贝尔判别法矛盾！因此，(2. 3) 成立.

总之，联合 (2. 2) (2. 3) 知结论 (3) 成立.

方法2 (根值法) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lambda$，则

(1) $\lambda=0$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 在复平面内处处收敛，即 $R=\infty$.

(2) $\lambda=\infty$，则对 $z\neq 0$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 均发散，即 $R=0$.

(3) $0<\lambda<\infty$，那么收敛半径 $R=\dfrac{1}{\lambda}$.

例 试求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^p}$ (p为正整数) 的收敛半径.

解：因为$c_n = \dfrac{1}{n^p}$,

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p} = 1.$$

所以 $R = \dfrac{1}{\lambda} = 1.$

3. 幂级数的运算性质

(1) 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ R = r_1,\quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,\ R = r_2.$

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n,$$

$$f(z)g(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n) z^n,$$

其中 $|z| < R$, $R = \min(r_1, r_2)$

上页 下页 返回 结束

定理四 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ 的收敛半径为R, 则

(1) 它的和函数$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 在收敛圆 $|z-a|<R$ 内解析.

(2) 当$|z-a|<R$时， $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$.

(3) 设C为$|z-a|<R$内的一条(可求长)光滑曲线，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_C (z-a)^n \mathrm{d}z \text{ 或 } \int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}.$$

例 把函数$\dfrac{1}{z-b}$表成形如$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$的幂级数, 其中$a$与$b$是不相等的复常数.

解: 把函数$\dfrac{1}{z-b}$写成如下的形式:

$$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{(z-a)-(b-a)}=-\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}$$

代数变形，使其分母中出现$(z-a)$

凑出$\dfrac{1}{1-g(z)}$

当 $\left|\dfrac{z-a}{b-a}\right|<1$时，$\dfrac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}=1+(\dfrac{z-a}{b-a})+(\dfrac{z-a}{b-a})^2+\cdots+(\dfrac{z-a}{b-a})^n+\cdots,$

故 $$\frac{1}{z-b}=-\frac{1}{b-a}-\frac{1}{(b-a)^2}(z-a)-\frac{1}{(b-a)^3}(z-a)^2-\cdots-\frac{1}{(b-a)^{n+1}}(z-a)^n-\cdots$$

设 $|b-a|=R$，那末当 $|z-a|<R$时，级数收敛，且其和为 $\dfrac{1}{z-b}$.

第三节　Taylor级数

一、解析函数的泰勒展式

二、Taylor展开应用举例

一、解析函数的泰勒展式

Taylor定理

定理 设$f(z)\in A(D), a\in D, D$为区域. 若圆盘$U:|z-a|<R$含于D,则

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

这里

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a), n=0,1,2,\cdots,$$

其中$C_\rho:|\zeta-a|=\rho, 0<\rho<R.$

证明: 设$z\in U$. $\exists C_\rho:|\zeta-a|=\rho, 0<\rho<R$,使$z$在$C_\rho$内. 由柯西积分公式,

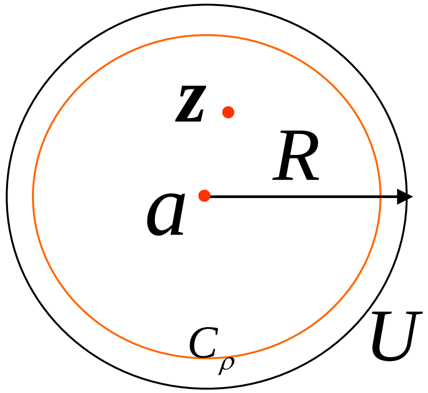
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

由于

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\frac{1}{1-(z-a)/(\zeta-a)},$$

和

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|=\frac{|z-a|}{\rho}<1,\quad \zeta\in C_\rho,$$



那么

$$\frac{1}{1-(z-a)/(\zeta-a)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

右端级数在C_ρ上关于ζ一致收敛.以C_ρ上有界函数$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-a}$乘上式两边得,

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n,$$

右端级数在C_ρ上关于ζ一致收敛. 上式两边沿C_ρ积分,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\,(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}(z-a)^n.$$

1 **定理表明**: 若$f(z)\in A(U(a, R)), R\in(0,+\infty)$, 则

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, z\in U(a,R), \qquad (3.1)$$

这个表达式称为 f 在$z=a$点的Taylor展式. 这个表达式的右端幂级数称为 f 在$z=a$点的Taylor级数. 而

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\triangleq c_n$$

称作Taylor系数. 根据定理，Taylor系数还可以用积分表示.

2 在《高等数学》中, 某邻域无穷可导的实变函数不一定在该邻域可以展开成幂级数. 但是, 解析函数在解析点可以展开成幂级数的.

3 Taylor级数的收敛半径大于或等于R. 从定理证明过程看, 解析函数的幂级数展开可以归结为柯西核$\dfrac{1}{\zeta-z}$ 的展开!

结论1 幂级数是它的和函数在收敛圆盘内的Taylor展式. 换言之,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \overset{求和}{=} f(z), z \in U(a,R) \Rightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n = 0,1,2,\cdots.$$

求和

证明: 利用逐项积定理.

解析函数幂级数展式唯一性

结论2 若f在某圆盘解析, 则它在此圆盘内的幂级数展式是唯一的.

换言之,

展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, z \in U(a,R) \Rightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n = 0,1,2,\cdots.$$

证明: 利用逐项积定理.

二、Taylor展开应用举例

例1 求 e^z, $\cos z$及$\sin z$在 $z=0$ 的泰勒展开式.

解： 如《高等数学》一样，利用Taylor定理直接计算得

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad R=+\infty;$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\quad,R=+\infty;$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots,R=+\infty.$$

注解 用直接法将函数展开成Taylor级数：计算

$$c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0),\quad n=0,1,2,\cdots$$

再用Taylor定理确定R.

例2 设 $f(z)=\ln(1+z)$是$\mathrm{Ln}(1+z)$ 的单值解析分支,满足条件 $f(0)=0$,求其在 $z=0$ 的泰勒展开式.

解：-1是它的一个奇点，所以

$$[\ln(1+z)]'=\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n \quad (|z|<1)$$

设C为收敛圆 $|z|<1$ 内从 0 到 z 的线段, 将展开式两端沿 C逐项积分, 得

$$\int_0^z \frac{1}{1+z}\mathrm{d}z=\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \mathrm{d}z,$$

即

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}+\cdots,\quad |z|<1.$$

例3 求函数$f(z)=(1+z)^{\alpha}, f(0)=1$, 在$z=0$处的幂级数展开式,并求收敛半径.

解: 同《高等数学》，计算在$z=0$处的n阶导数

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1).$$

二项展开式的推广

利用Taylor定理得

$$f(z)=(1+z)^{\alpha}=1+\alpha z+\binom{\alpha}{2}z^{2}+\cdots+\binom{\alpha}{n}z^{n}+\cdots,\quad |z|<1,$$

这里

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

小结

借助于一些已知基本初等解析函数的Taylor展开式(上面例1–例3)，结合解析函数的性质， 幂级数运算性质（四则运算，逐项求导，逐项积分等)和其它数学技巧（如代换等），求解其它初等解析函数的Taylor展式. 这种方法通常称为间接法.

例如，求 $\sin z$ 在 $z=0$ 的$Taylor$展开式.

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

间接法的优点:

不需要求各阶导数与收敛半径，因而比直接展开更为简洁，使用范围也更为广泛.

上页 下页 返回 结束

例4 把函数 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解：由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 在 $|z|=1$ 上有一奇点 $z=-1$，且在 $|z|<1$ 内处处解析，

可展开成 z 的幂级数，

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots \qquad |z|<1$$

上式两边逐项求导，

$$\frac{1}{(1+z)^2}=-\left(\frac{1}{1+z}\right)'=1-2z+3z^2-\cdots+(-1)^{n-1}nz^{n-1}+\cdots, \qquad |z|<1.$$

注解 本题可以直接用公式：

$$(1+z)^{\alpha}=1+\alpha z+\binom{\alpha}{2}z^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}z^n+\cdots,\ |z|<1.$$

例5 将$e^z\cos z$展成z的幂级数.（课后习题类似题）

解法1：容易知道收敛半径$R=+\infty$. 由于

$$e^z\cos z=\frac{1}{2}\left[e^{(1+i)z}+e^{(1-i)z}\right],$$

那么

$$e^z\cos z=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}z^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1-i)^n}{n!}z^n\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n+(1-i)^n}{n!}z^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n\left(e^{\frac{n\pi}{4}i}+e^{\frac{n\pi}{4}i}\right)}{n!}z^n$$

继续化简得

$$e^z\cos z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}z^n.$$

解法2：用级数乘法.

$$e^z\cos z=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{z^j}{j!}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}=\sum_{j,k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{j!(2k)!}z^{j+2k}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{j+2k=n}\frac{(-1)^k}{j!(2k)!}\right)z^n \qquad \text{(Cauchy乘积公式)}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{2k}{n}\right)z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\frac{1}{n!}\mathrm{Re}\left[(1+i)^n\right]\right\}z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}z^n.$$

第四节　Laurent级数

一、Laurent展式

二、例题

一、Laurent展式

1. 双边幂级数

形如

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad (4.1)$$

的幂级数称为双边幂级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} \xrightarrow{\zeta=(z-z_0)^{-1}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n \xrightarrow{\text{收敛半径}R} |\zeta|<R\text{收敛} \longrightarrow |z-z_0| > \frac{1}{R} = R_1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \xrightarrow{\text{收敛半径}R_2} |z-z_0| < R_2$$

收敛域

小结

1) $R_1 > R_2$: 两收敛域无公共部分,

2) $R_1 < R_2$: 两收敛域有公共部分 $R_1 < |z-z_0| < R_2$.

定义4.1 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} \quad 和 \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \tag{4.2}$$

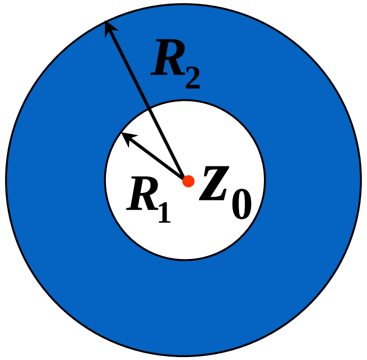
都收敛，则称双边幂级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \tag{4.3}$$

收敛，并且，双边幂级数的和函数等于(4.1)两个幂级数的和函数相加. 进一步，双边幂级数(4.2)发散当且仅当(4.1)中至少一个幂级数发散.

类似定义双边幂级数绝对收敛、一致收敛和内闭一致收敛，等等.

2. 幂级数的性质搬至双边幂级数



前一部分讨论表明：双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛区域为圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$.

定理4.0 若双边幂级数（4.3）的收敛圆环为

$$H: r < |z - z_0| < R \quad (0 \le r < R \le +\infty)$$

则

1) 双边幂级数在H内收敛且内闭收敛于$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$;

2) 和函数$f(z)$在H内解析，即$f \in A(H)$;

3) 在H内可逐项求导 p 次$(p = 1, 2, \cdots)$，即

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left[(z - z_0)^n \right]^{(p)}, z \in H.$$

4) 可沿H内分段光滑曲线C逐项积分,即

$$\int_C f(z) \mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_C (z - z_0)^n \mathrm{d}z.$$

3. 解析函数的洛朗(Laurent)展开

洛朗(Laurent)定理

定理4.1 在圆环$H: r<|z-a|<R\ \ (0\le r<R\le+\infty)$内解析的函数必可展成双边幂级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n, \tag{4.4}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\quad(n=0,\pm1,\pm2,\dots), \tag{4.5}$$

Γ为圆$|\zeta-a|=\rho(r<\rho<R)$,并且展式是唯一的.

证明:设z为圆环H内任意取定的点,作含于H内的圆周$\Gamma_1:|\zeta-a|=\rho_1$, $\Gamma_2:|\zeta-a|=\rho_2$,

使得 $\rho_1<|z-a|<\rho_2$, 由柯西积分公式有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{4.6}$$

于Γ_2上，$\dfrac{1}{\zeta-z}=\dfrac{1}{\zeta-a}\dfrac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$关于$\zeta$一致收敛. 因此， 我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,(n=0,1,2,\ldots). \qquad (4.7)$$

于Γ_1上，$\dfrac{1}{\zeta-z}=-\dfrac{1}{z-a}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}}=-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}$关于$\zeta$一致收敛.因此， 我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta(z-a)^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-a)^n,$$

其中

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta,(n=1,2,\ldots). \qquad (4.8)$$

故 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$，其系数$c_n$由(4.7)(4.8)给出. 由Cauchy定理得，(4.7)和(4.8)可换成沿$\Gamma: |\zeta-a|=\rho (r<\rho<R)$的积分.由此得到(4.5).

最后,来证展式是唯一的.若

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n'(z-a)^n,\ \ z\in H,$$

其两边乘Γ上的有界函数$\dfrac{1}{(z-a)^{m+1}}$并沿Γ积分得

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}}d\zeta=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n'\int_\Gamma \frac{1}{(\zeta-a)^{-n+m+1}}d\zeta=2\pi i c_m'.$$

即

$$c_m'=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}}d\zeta.$$

故 $c_n=c_n'\ \ (n=0,\pm1,\cdots)$. 证毕.

定理4.1表明: 在圆环$H: r<|z-a|<R \ (0\le r<R\le +\infty)$内解析的函数必可展成

$$f(z)=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n}_{\text{Laurent级数}}=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{主要部分}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n}_{\text{解析部分}}$$

其中

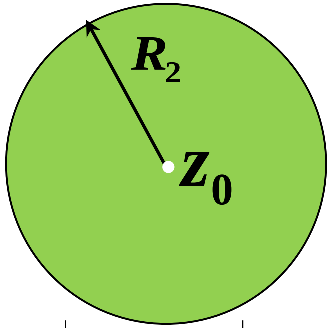
$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

Laurent系数

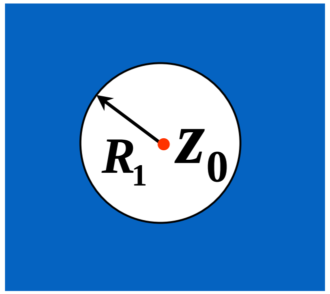
Γ为圆$|\zeta-a|=\rho(r<\rho<R)$, 并且展式是唯一的.

Taylor级数为Laurent级数的特殊情形.

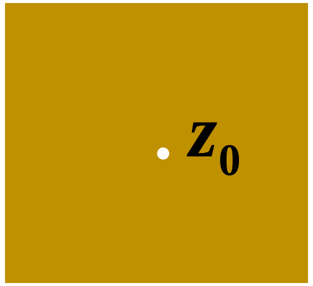
特殊圆环:



$0<|z-z_0|<R_2$



$R_1<|z-z_0|<\infty$



$0<|z-z_0|<\infty$

二、例题

理论上应该有两种方法：**直接法与间接法**

(1) 直接展开法：利用定理公式计算系数 c_n

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

然后写出

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n .$$

这种方法只有在找不到更好方法时才用.

(2) 间接展开法

根据解析函数 Laurent 级数展开式的唯一性， 可运用代数运算、代换、求导和积分等方法去展开 .

这一方法成为Laurent 级数展开的**常用方法**。

例1 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域:

1) $0<|z|<1$;　　2) $1<|z|<2$;　　3) $2<|z|<+\infty$.

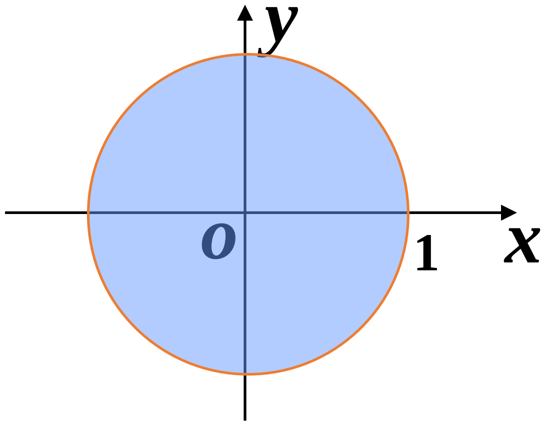
内解析，把 $f(z)$ 在这些区域内展成Laurent级数.

解:

$$f(z)=\frac{1}{(1-z)}-\frac{1}{(2-z)},$$

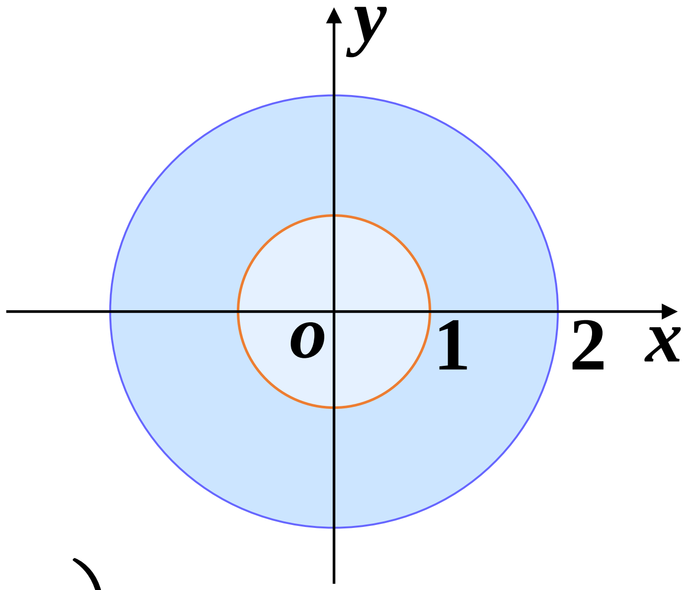
1) 在 $0<|z|<1$ 内，由于 $|z|<1$，从而 $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$ 则 $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right)$$



所以 $f(z)=(1+z+z^2+\cdots)-\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{4}+\cdots\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}z+\dfrac{7}{8}z^2+\cdots$

2) 在 $1<|z|<2$ 内,



由 $|z|>1 \longrightarrow \left|\dfrac{1}{z}\right|<1$

$|z|<2 \longrightarrow \left|\dfrac{z}{2}\right|<1$

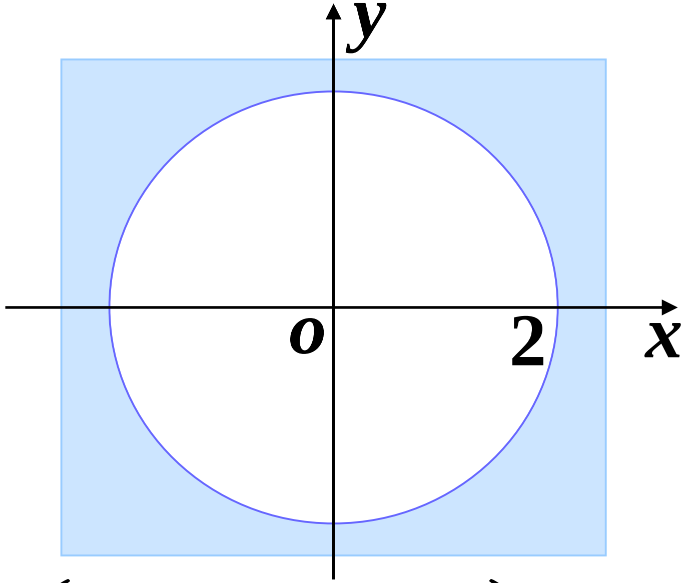
$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

且仍有

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right)$$

于是 $f(z)=-\dfrac{1}{z}\left(1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}+\cdots\right)-\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{2^2}+\cdots\right)$

$$=\cdots-\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z^{n-1}}-\cdots-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}-\cdots$$



3) 在 $2<|z|<\infty$ 内,

由 $|z|>2 \longrightarrow \left|\dfrac{2}{z}\right|<1$ 此时 $\dfrac{1}{2-z}=-\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{z}}=-\dfrac{1}{z}\left(1+\dfrac{2}{z}+\dfrac{4}{z^2}+\cdots\right)$

此时 $\left|\dfrac{1}{z}\right|<\left|\dfrac{2}{z}\right|<1$, 仍有 $\dfrac{1}{1-z}=-\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=-\dfrac{1}{z}\left(1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}+\cdots\right)$

故 $f(z)=\dfrac{1}{z}\left(1+\dfrac{2}{z}+\dfrac{4}{z^2}+\cdots\right)-\dfrac{1}{z}\left(1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}+\cdots\right)=\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{3}{z^3}+\dfrac{7}{z^4}+\cdots.$

例2 求函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$分别在$z=1,2$去心邻域内的Laurent展式.

解：(1) 在1的(最大)去心邻域$0<|z-1|<1$内：

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-(z-1)}=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n.$$

(2) 在2的(最大)去心邻域$0<|z-2|<1$内：

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{(z-2)+1}=\frac{1}{z-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n.$$

例3 求函数$f(z)=\dfrac{1}{1-z}e^z$在圆环$0<|1-z|<+\infty$内的Laurent展开式.

解：$f(z)$在$0<|1-z|<+\infty$内解析，故

$$f(z)=\frac{1}{1-z}e^z=\frac{1}{1-z}e^{z-1+1}=-\frac{e}{z-1}e^{z-1}=-\frac{e}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}=-e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-1)^{n-1}$$

$$(0<|z-1|<+\infty).$$

上页 下页 返回 结束