离散系统的时域分析

离散系统的时域分析

- 信号分为连续时间信号和离散时间信号，系统相应的分为连续时间系统和离散时间系统。
- 幅度量化的离散时间信号称为数字信号。
- 离散时间系统具有以下优点：精度高，可靠性好。数字化技术广泛应用。
- 连续时间系统也是必不可少的。两种系统都包含的系统称“混合系统”，例如数字化的无线电通信系统，发射和接收端是模拟信号(连续信号)，数据处理部分是数字信号(离散信号)。
- 系统分析的一个重要部分就是协调模拟与数字部件的组合。

离散时间系统的时域分析

	连续时间系统	离散时间系统
数学模型	常系数微分方程	常系数差分方程
时域解法	微分算子 卷积	移序算子 卷积和
变换域解法	Laplace变换 Fourier变换	Z变换 离散Fourier变换
模拟框图	积分器	延时器

$$\text{连续信号}\ \underset{\text{插值}}{\overset{\text{抽样}}{\rightleftharpoons}}\ \text{离散信号}$$

内容提要

- ❖取样信号与取样定理
- ❖离散时间系统的描述与模拟
- ❖LTI离散系统的零输入响应
- ❖单位函数响应
- ❖卷积和
- ❖LTI离散系统的零状态响应

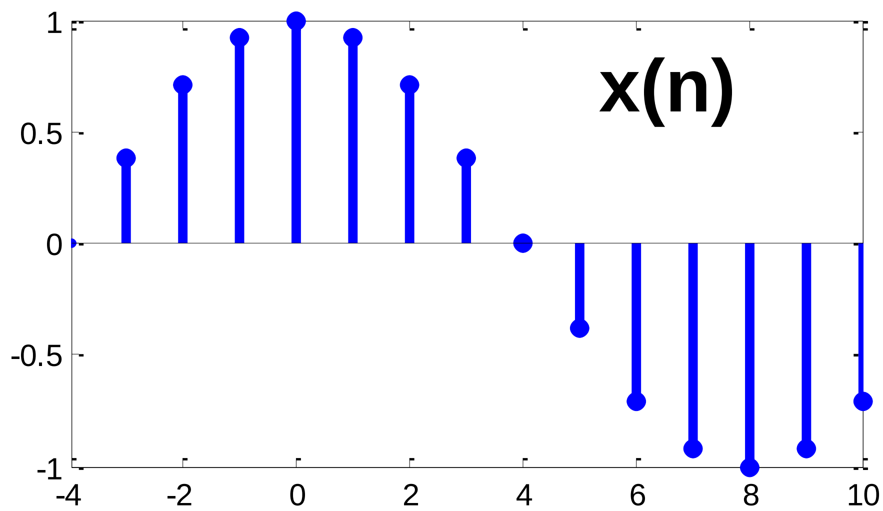
重点与难点

- ❖取样定理
- ❖差分方程
- ❖模拟框图
- ❖零输入响应
- ❖单位函数响应
- ❖卷积和
- ❖零状态响应

取样信号与取样定理

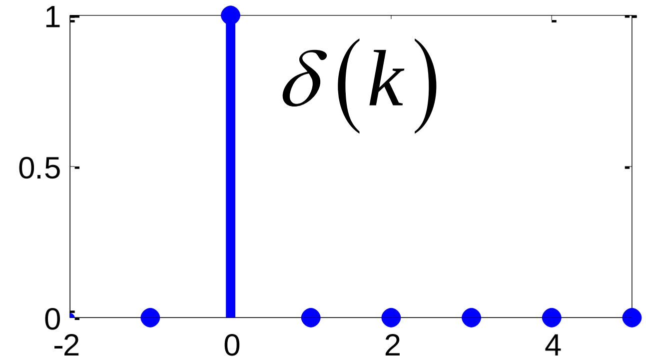
离散时间信号 – 序列

- 离散时间信号只在某些离散瞬时给出函数值，是时间上不连续的“序列”。
- 离散时间信号可以通过对连续时间信号进行取样得到，通常采用均匀时间间隔。若时间间隔为T，离散时间信号可以用 x(nT)，或 x(n) 来表示，n为整数。

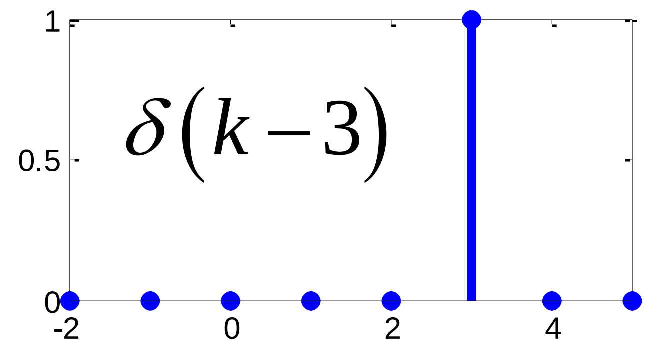


典型序列

❖单位函数序列



$$\delta(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$$



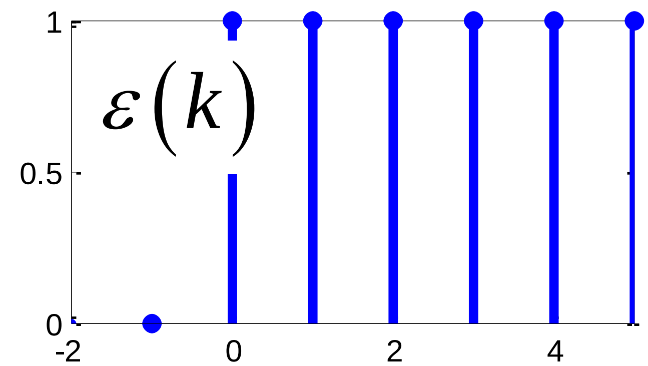
$$\delta(k-n)=\begin{cases}1 & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases}$$

对比单位冲激函数 $\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)d\tau=1\\ \delta(t)=0, t\neq 0\end{cases}$

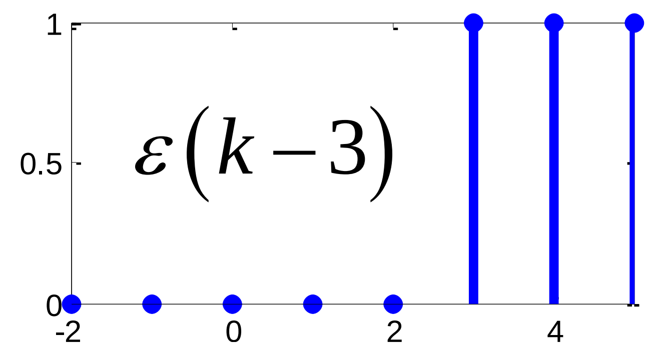
典型序列

❖单位阶跃序列

$$\varepsilon(k)=\begin{cases}1 & k\ge 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$



$$\varepsilon(k-n)=\begin{cases}1 & k\ge n\\ 0 & k<n\end{cases}$$



对比单位阶跃函数

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

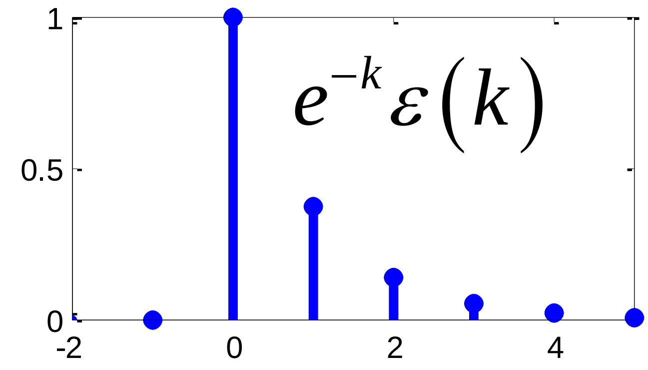
$$\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$$

$$\varepsilon(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(k-n)$$

典型序列

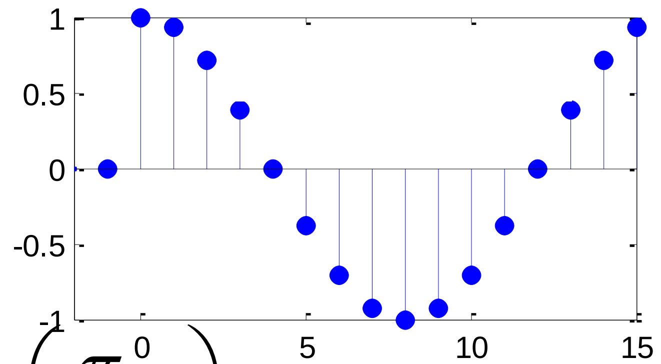
❖单边指数序列

$$e^{-k}\varepsilon(k)$$



❖单边余弦序列

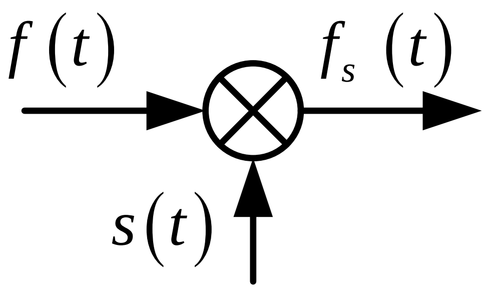
$$\cos(\beta k)\varepsilon(k)$$

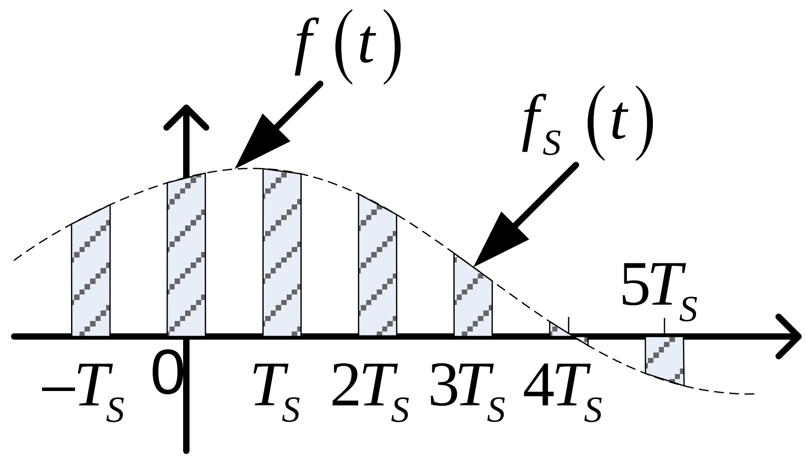


$$\cos\left(\frac{\pi}{8}k\right)\varepsilon(k)$$

取样信号

- ❖取样信号利用取样器(开关)实现。取样信号可看作原函数f(t)与开关函数s(t)的乘积。





$$f_S(t) = f(t)s(t)$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * S(j\omega)$$

开关函数s(t) 取样间隔为T_S，f_S =1/T_S称为取样频率。

理想取样信号

❖理想开关函数 – 周期冲激序列

❖理想取样信号 – 冲激取样信号

$$f(t)\leftrightarrow F(j\omega) \qquad \delta_{T_S}(t)\leftrightarrow \omega_S\delta_{\omega_S}(\omega)$$

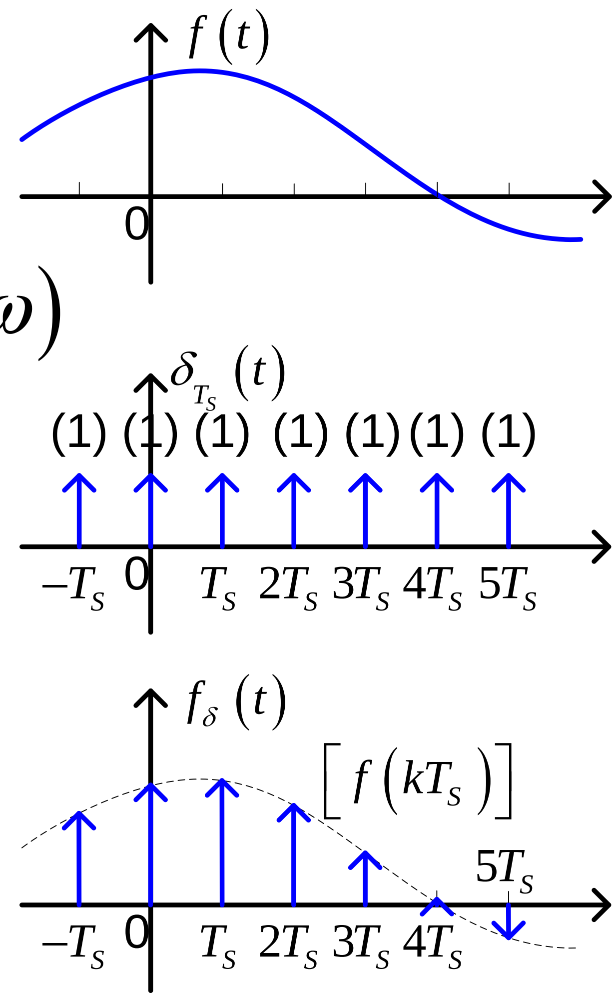
$$f_\delta(t)=f(t)\delta_{T_S}(t)$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F(j\omega)*\omega_S\delta_{\omega_S}(\omega)$$

$$=\frac{1}{T_S}F(j\omega)*\delta_{\omega_S}(\omega)$$

$$\omega_S=\frac{2\pi}{T_S}$$

$$=\frac{1}{T_S}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F[j(\omega-k\omega_S)]$$

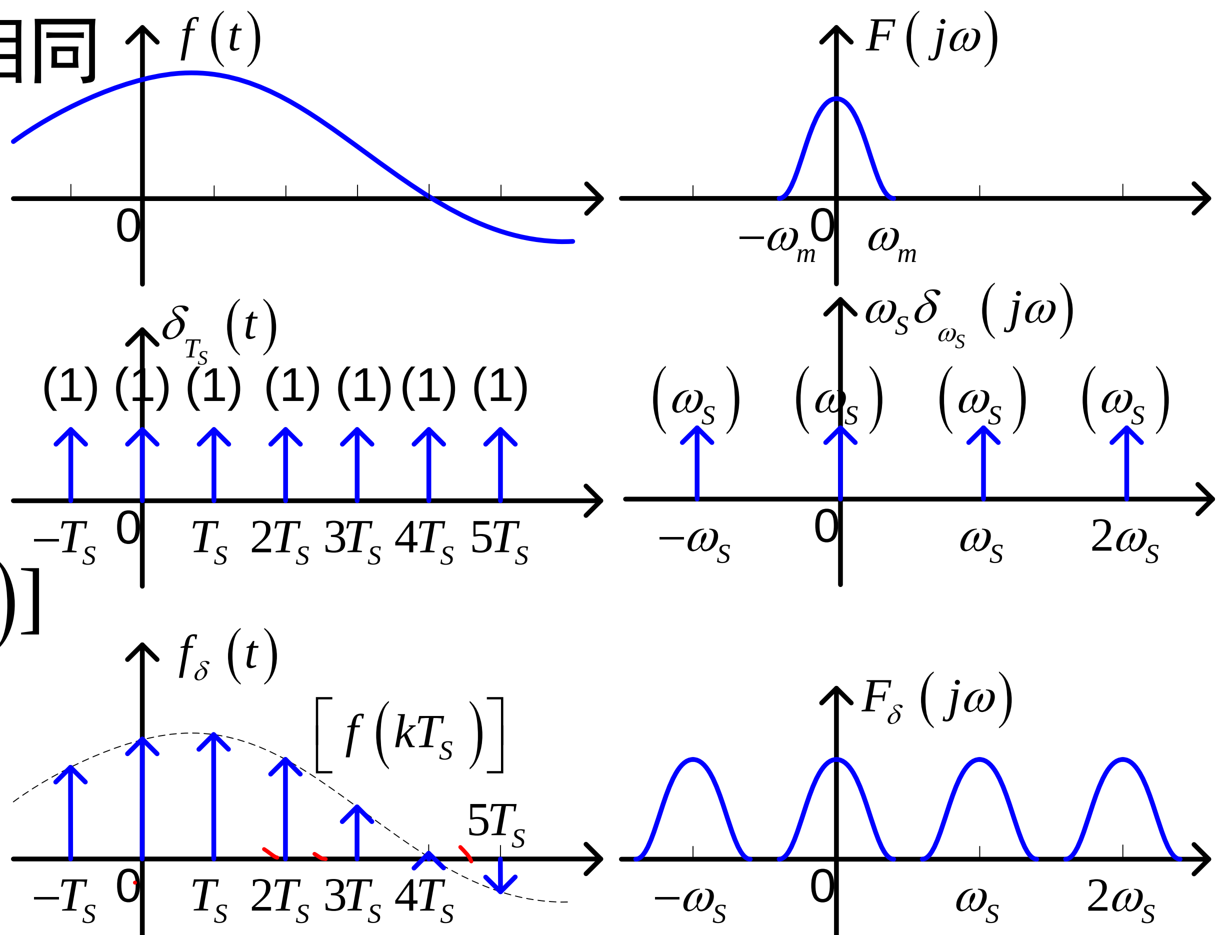


理想取样信号的频谱特性

❖理想取样信号的频谱是原函数频谱的周期形式，周期为$\omega_S=2\pi/T_S$。

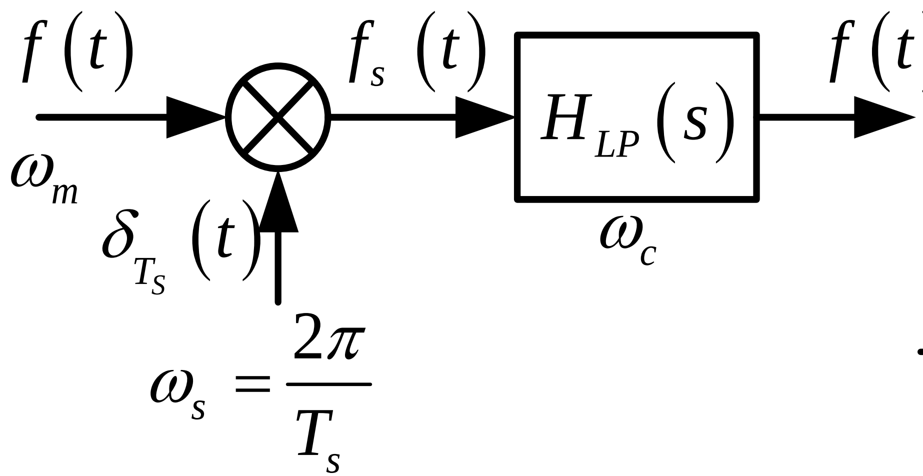
- 与F(jω)形状相同
- 乘上因子$1/T_S$
- 频谱间隔ω_S

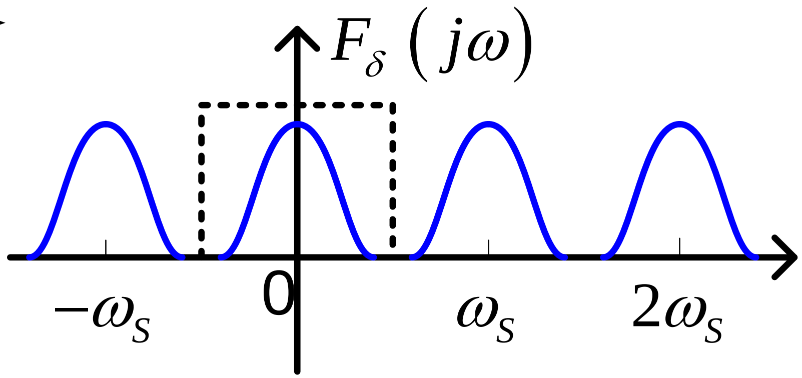
$$\frac{1}{T_S}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F[j(\omega-k\omega_S)]$$



信号的重建

- ❖理想取样信号的频谱中包含频率平移量为零的与原信号频谱形状相同，幅度为$1/T_S$的频谱。
- ❖理想取样信号通过截止频率为$\omega_S/2$，通带内幅度为T_S，相位为零的理想低通滤波器可重建原信号。





信号重建的必要条件

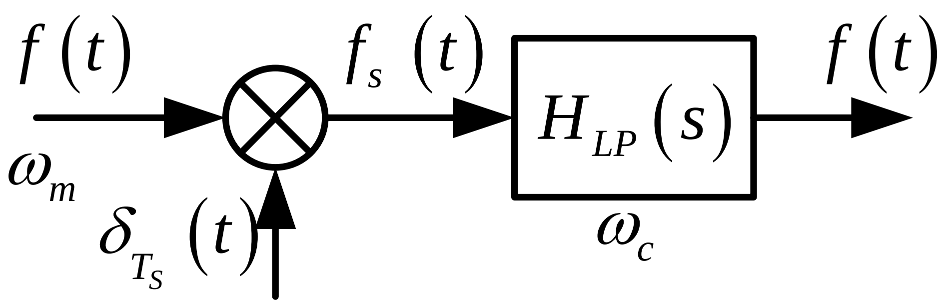
- 取样信号的频谱中两相邻周期的部分不能重叠。
  - F(j ω)频带有限，即$|\omega|\le\omega_m$
  - 取样频率大于或等于最大信号频率的2倍，$\omega_S\ge 2\omega_m$。
- 当理想低通滤波器的截止频率满足$\omega_m\le\omega_C\le\omega_S-\omega_m$时，理想低通的输出端可以得到原信号。

Shannon取样频率或Nyquist取样频率：$2\omega_m$或$2f_m$

Shannon取样间隔或Nyquist取样间隔：$1/2f_m$或π/ω_m

Shannon取样定理

❖一个在频谱中不包含大于频率fm的分量的有限频带信号，由对该信号以不大于$1/(2f_m)$的时间间隔进行取样的取样值唯一确定。当这样的信号通过截止频率满足$\omega_m \le \omega_C \le \omega_S - \omega_m$的理想低通滤波器后，可以将原信号完全重建。



$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$T_s \le \frac{1}{2f_m}$$

$$\omega_s \ge 2\omega_m$$

$$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$$

LTI离散时间系统的描述和模拟

LTI离散时间系统

❖线性特性

$$C_1e_1(k)+C_2e_2(k) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow C_1r_1(k)+C_2r_2(k)$$

❖移不变特性

$$e(k-N) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow r(k-N)$$

❖线性移不变特性

$$C_1e_1(k-M)+C_2e_2(k-N) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow C_1r_1(k-M)+C_2r_2(k-N)$$

差分运算

❖f(t)的取样信号f(kT)，简写为f(k)。

❖微分运算

$$\frac{df(t)}{dt}=\lim_{T\to 0}\frac{f(kT+T)-f(kT)}{T}=\lim_{T\to 0}\frac{f(kT)-f(kT-T)}{T}$$

❖差分运算

◆一阶前向差分 $$\frac{\Delta f(k)}{\Delta k}=\frac{f(k+1)-f(k)}{(k+1)-k}$$

◆一阶后向差分 $$\frac{\nabla f(k)}{\nabla k}=\frac{f(k)-f(k-1)}{k-(k-1)}$$

f(k+1)，f(k-1) 称为f(k)的移位序列

LTI离散时间系统的数学模型

❖输入输出方程一般形式：n阶常系数差分方程

$$r(k+n)+a_{n-1}r(k+n-1)+\ldots+a_1 r(k+1)+a_0 r(k)$$

$$=b_m e(k+m)+b_{m-1}e(k+m-1)+\ldots+b_1 e(k+1)+b_0 e(k)$$

差分方程包含离散变量及其增序或减序函数，描述离散序列中相邻几个数据点之间的数学关系。

差分方程的阶数=自变量最高和最低移序量之差。

对比LTI连续时间系统的数学模型 – n阶微分方程

$$r^{(n)}+a_{n-1}r^{(n-1)}+\ldots+a_1 r'+a_0 r$$

$$=b_m e^{(m)}+b_{m-1}e^{(m-1)}+\ldots+b_1 e'+b_0 e$$

$$r^{(n)}\rightarrow r(k+n)$$

差分方程练习1

❖微分方程与差分方程

$$\frac{d}{dt}r(t)+ar(t)=be(t)$$

$$t=kT,T\to 0 \qquad \frac{d}{dt}r(t)\approx\frac{r(kT+T)-r(kT)}{T}$$

则微分方程可用差分方程近似表示为

$$\frac{r(k+1)-r(k)}{T}+ar(k)=be(k)$$

$$r(k+1)+(aT-1)r(k)=bTe(k)$$

移序算子

- 移序算子 S

$$S\left[r(k)\right]=r(k+1)$$

- n阶差分方程算子表示

$$\left(S^{n}+a_{n-1}S^{n-1}+\ldots+a_{1}S+a_{0}\right)r(k)$$
$$=\left(b_{m}S^{m}+b_{m-1}S^{m-1}+\ldots+b_{1}S+b_{0}\right)e(k)$$

$$H(S)=\frac{N(S)}{D(S)}$$

对比LTI连续时间系统的算子方程

$$\left(p^{n}+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_{1}p+a_{0}\right)r(t)$$
$$=\left(b_{m}p^{m}+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_{1}p+b_{0}\right)e(t)$$

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}$$

差分方程数值解法

- 差分方程本质上是递推的代数方程，若已知初始条件和激励，利用迭代法可求得其数值解。
- 一阶常系数差分方程

$$r(k+1)+2r(k)=e(k) \qquad r(0)=1 \qquad e(k)=2^k\varepsilon(k)$$

前向差分方程, 已知 r(k) e(k)，推出 r(k+1)及 r(k+2)， r(k+3)， …

$$r(1)=e(0)-2r(0)=-1$$

$$r(2)=e(1)-2r(1)=4$$

$$r(3)=e(2)-2r(2)=-4$$

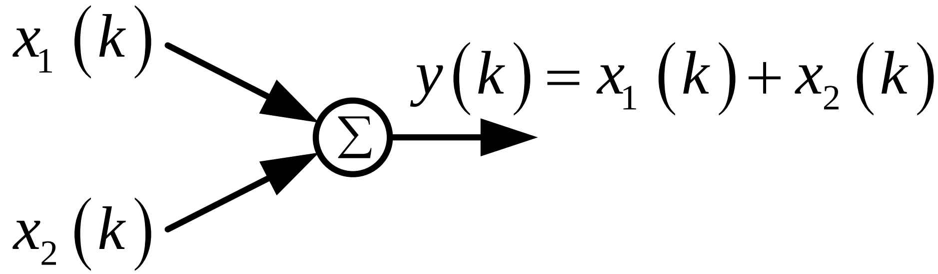
…

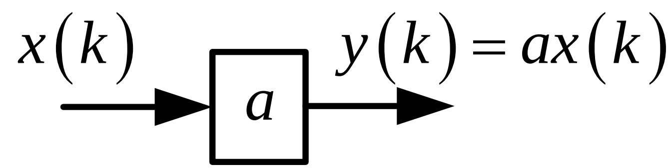
一般无法得到解析解

LTI离散时间系统模拟框图

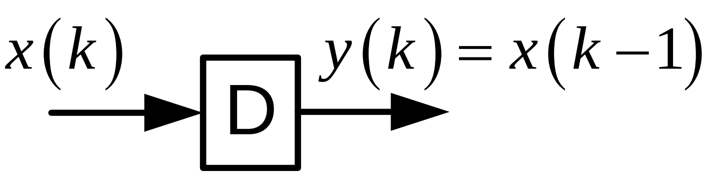
❖基本元件

- 加法器
- 标量乘法器
- 延时器

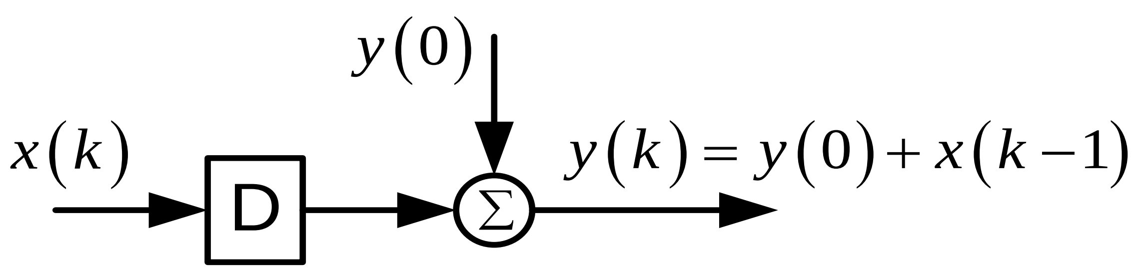




初始条件为零



初始条件不为零



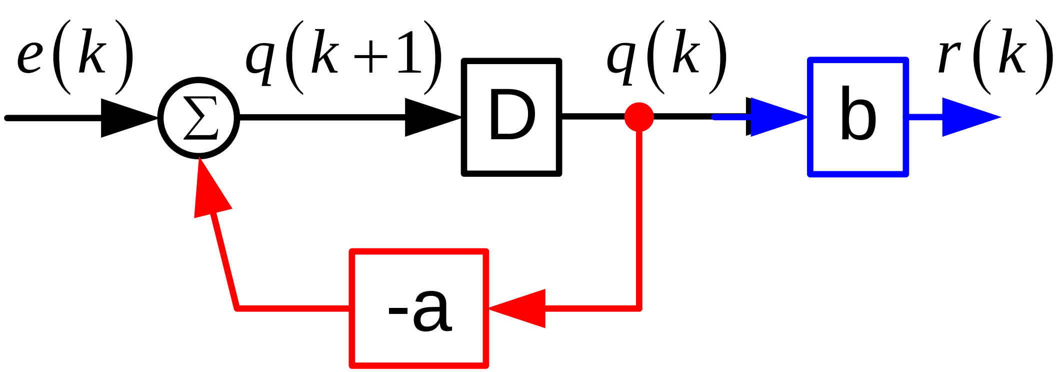
LTI离散时间系统模拟框图

❖一阶系统

$$r(k+1)+ar(k)=be(k)$$

- 延时器个数：n=1
- 引入辅助变量q(k)，构造两个辅助方程

$$\begin{cases} q(k+1)+aq(k)=e(k) \\ r(k)=bq(k) \end{cases}$$



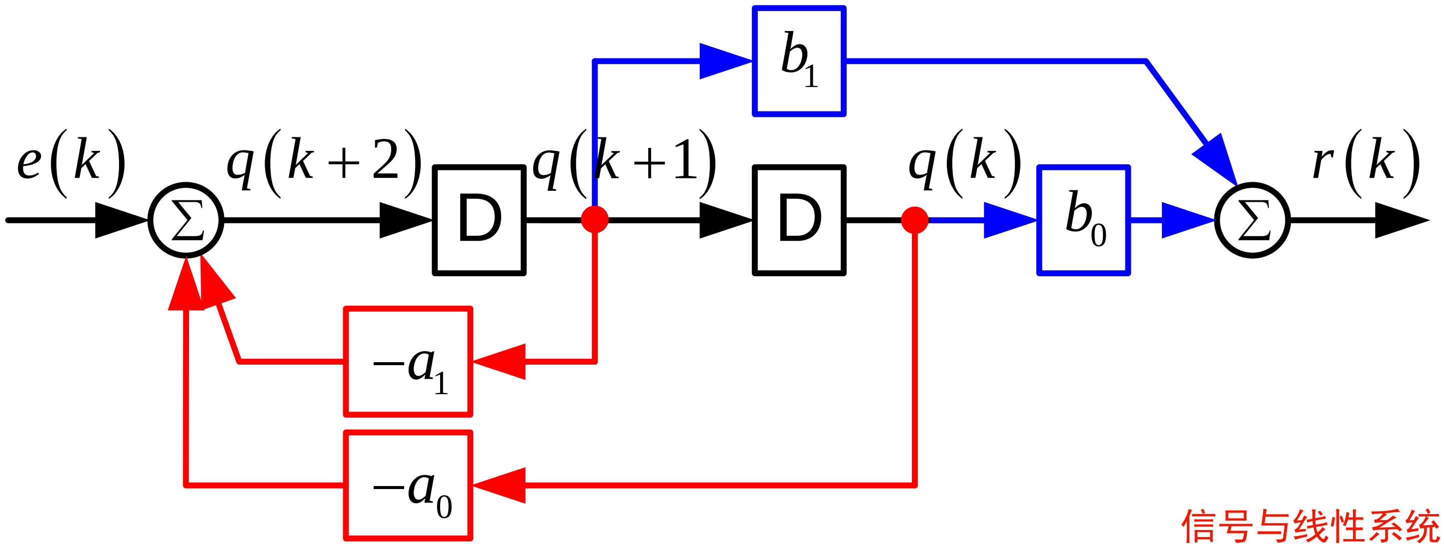
LTI离散时间系统模拟框图

❖二阶系统

$$r(k+2)+a_1 r(k+1)+a_0 r(k)=b_1 e(k+1)+b_0 e(k)$$

$$\begin{cases} q(k+2)+a_1 q(k+1)+a_0 q(k)=e(k) \\ r(k)=b_1 q(k+1)+b_0 q(k) \end{cases}$$

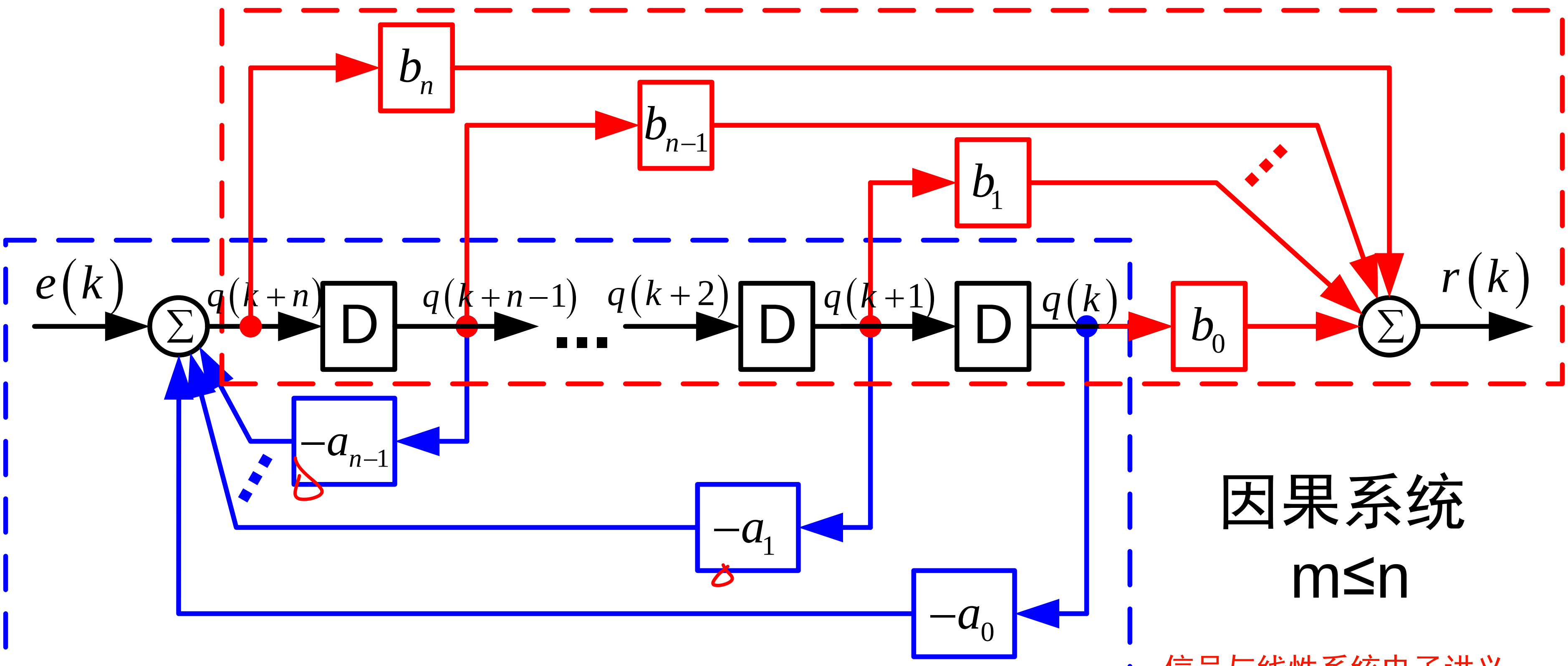
延时器个数：n=2



LTI离散时间系统模拟框图

❖n阶系统一般形式 m=n

$$r(k+n)+a_{n-1}r(k+n-1)+\ldots+a_1r(k+1)+a_0r(k)$$
$$=b_me(k+m)+b_{m-1}e(k+m-1)+\ldots+b_1e(k+1)+b_0e(k)$$



因果系统
m≤n

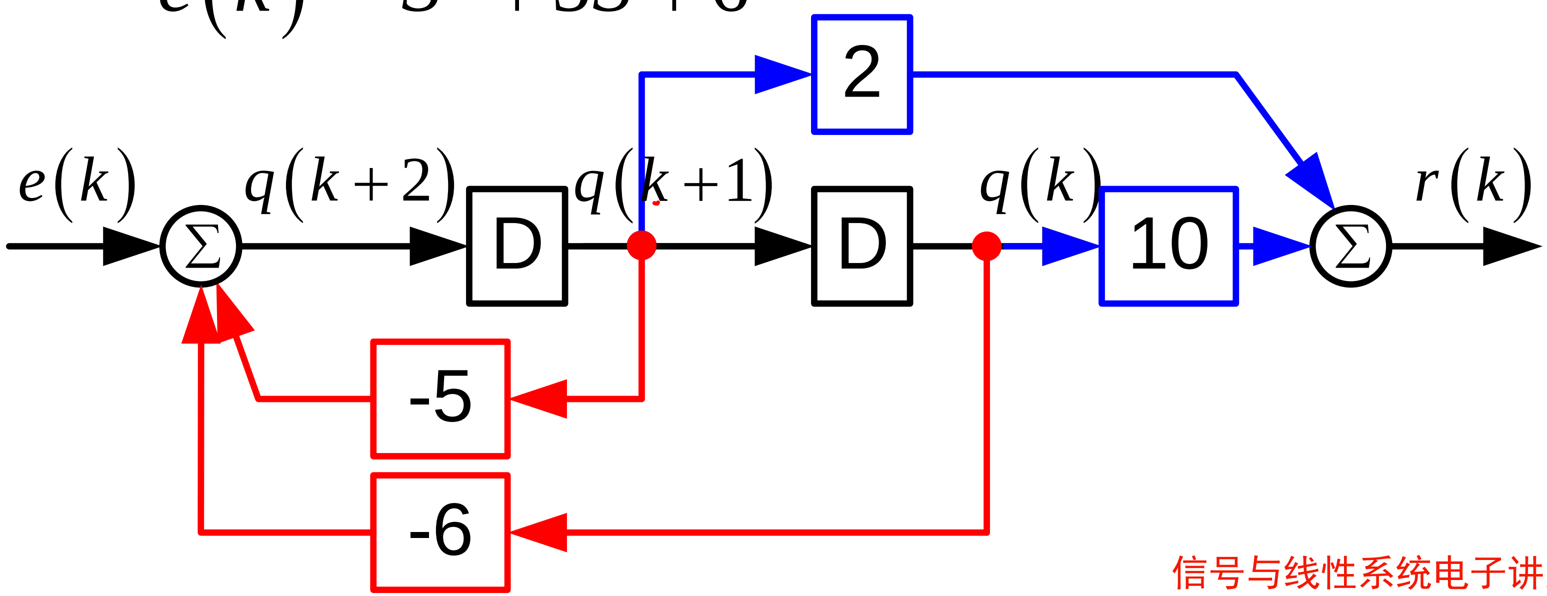
差分方程练习2

❖差分方程的系统函数

$$r(k+2)+5r(k+1)+6r(k)=2e(k+1)+10e(k)$$

$$\left(S^2+5S+6\right)r(k)=(2S+10)e(k)$$

$$H(S)=\frac{r(k)}{e(k)}=\frac{2S+10}{S^2+5S+6}$$



LTI离散时间系统的零输入响应

零输入响应

❖e(k)=0，求解齐次方程

$$r(k+n)+a_{n-1}r(k+n-1)+\ldots+a_1 r(k+1)+a_0 r(k)=0$$

或 $$\left[S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\ldots+a_1 S+a_0\right]r(k)=0$$

- 特征多项式 $D(S)=0$
- 特征根 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots$
- 对单根 γ_i $\quad r_i(k)=C_i\gamma_i^k$
- 对p重根 γ_i $\quad r_i(k)=\left(b_1+b_2k+\ldots+b_pk^{p-1}\right)\gamma_i^k$

n阶系统，n个初始条件，y(0), y(1), … , y(n-1)

对比连续系统

$$r_i(t)=C_i e^{\lambda_i t} \qquad r_i(t)=\left(b_1+b_2t+\ldots+b_pt^{p-1}\right)e^{\lambda_i t}$$

一阶系统零输入响应

$$r(k+1)+a_0 r(k)=0$$

迭代求解

$$r(1)=-a_0 r(0)$$

$$r(2)=-a_0 r(1)=(-a_0)^2 r(0)$$

$$r(3)=-a_0 r(2)=(-a_0)^3 r(0)$$

…… ……

$$r(k)=(-a_0)^k r(0)$$

$$D(S)=S+a_0$$

$$\gamma=-a_0$$

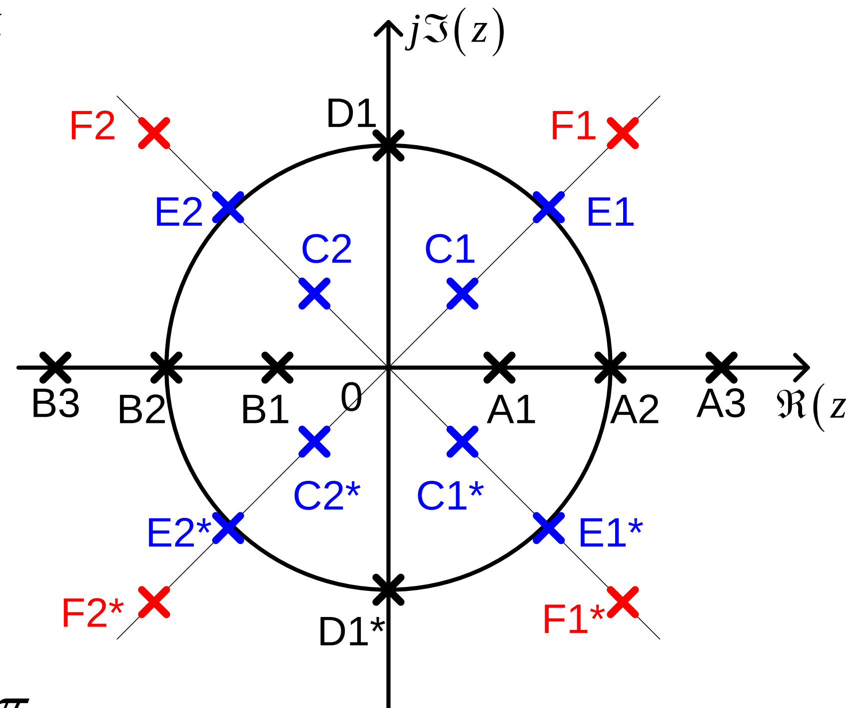
$$r(k)=C\gamma^k$$

$$r(0)=C$$

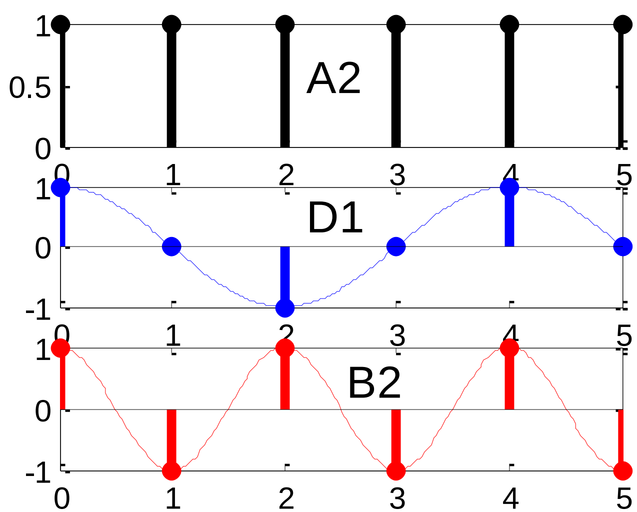
极点对应的时间函数

❖Z平面上极点 γ 对应 γ^k

$$\gamma = |\gamma| e^{j\phi} \qquad \gamma^k = |\gamma|^k e^{jk\phi}$$

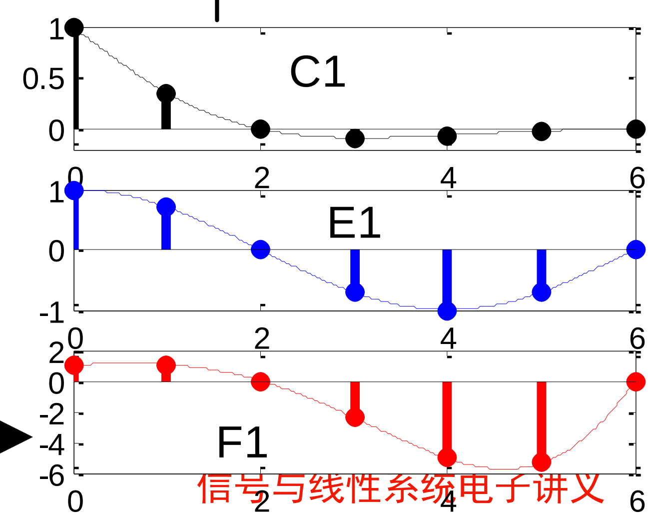


极点的模量决定振荡幅度
极点的相位决定振荡频率



$$|\gamma| = 1, \phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$$

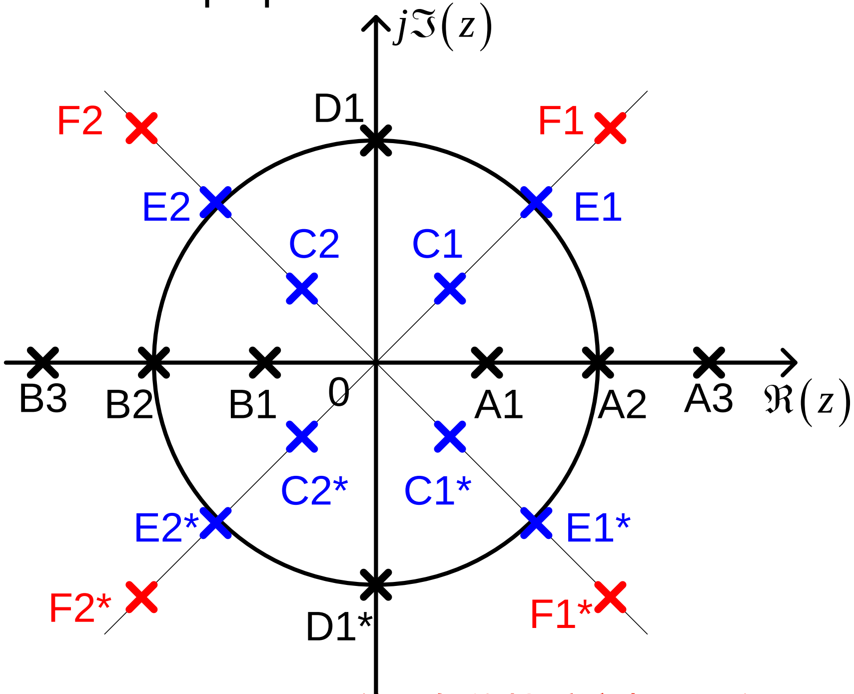
$$|\gamma| = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \phi = \frac{\pi}{4}$$



系统稳定性

❖Z平面上极点位置　γ_i 对应 γ_i^k

- 单位圆内，减幅，系统稳定　$|\gamma|<1$
- 单位圆上单阶极点，等幅，临界稳定　$|\gamma|=1$
- 单位圆外，增幅，系统不稳定　$|\gamma|>1$



零输入响应练习1

❖ **求零输入响应** $r(k+2)+4r(k+1)+4r(k)=0$

$r(0)=2, r(1)=2$

$$D(S)=S^2+4S+4=(S+2)^2=0$$

特征根 $\gamma_{1,2}=-2$

$$y_{zi}(k)=(C_1+C_2k)(-2)^k\varepsilon(k)$$

$$\begin{cases} r(0)=C_1=2 \\ r(1)=(C_1+C_2)(-2)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=2 \\ C_2=-3 \end{cases}$$

$$y_{zi}(k)=(2-3k)(-2)^k\varepsilon(k)$$

零输入响应练习2

❖求零输入响应

$$r(k+3)+6r(k+2)+12r(k+1)+8r(k)=0$$

$$r(0)=1, r(1)=1, r(2)=0$$

$$D(S)=S^3+6S^2+12S+8=(S+2)^3=0$$

特征根 $\gamma_{1,2,3}=-2$

$$y_{zi}(k)=\left(C_1+C_2k+C_3k^2\right)(-2)^k\varepsilon(k)$$

$$=\left(1-\frac{5}{2}k+k^2\right)(-2)^k\varepsilon(k)$$

$$\begin{cases} r(0)=C_1=1 \\ r(1)=\left(C_1+C_2+C_3\right)(-2)=1 \\ r(2)=\left(C_1+2C_2+4C_3\right)(-2)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=-5/2 \\ C_3=1 \end{cases}$$

零输入响应练习3

❖求零输入响应

$$r(k+4)-2r(k+3)+2r(k+2)-2r(k+1)+r(k)=0$$

$$r(1)=1,r(2)=0,r(3)=1,r(5)=1$$

$$D(S)=S^4-2S^3+2S^2-2S+1=(S-1)^2(S^2+1)=0$$

特征根 $\gamma_{1,2}=1,\gamma_{3,4}=\pm j$

$$y_{zi}(k)=(C_1+C_2k)1^k+C_3j^k+C_4(-j)^k$$

或 $=(C_1+C_2k)1^k+C_3e^{j\frac{\pi}{2}k}+C_4e^{-j\frac{\pi}{2}k}$

或 $=(C_1+C_2k)1^k+C_3\cos\frac{k\pi}{2}+C_4\sin\frac{k\pi}{2}$

$$y_{zi}(k)=1+\cos\frac{k\pi}{2}$$

单位函数响应

单位函数响应

❖ 系统对单位样值序列δ（k）的零状态响应，称单位函数响应，表示为h(k)。

◆ 令 e(k)=δ(k)，求解差分方程

$$\left(S^{n}+a_{n-1}S^{n-1}+\ldots+a_{1}S+a_{0}\right)h(k)$$

$$=\left(b_{m}S^{m}+b_{m-1}S^{m-1}+\ldots+b_{1}S+b_{0}\right)\delta(k)$$

◆ 从转移算子求解，利用部分分式法及表7-2 pp. 253

$$H(S)=\frac{N(S)}{D(S)}=\sum H_{i}(S)\Rightarrow h(k)=\sum h_{i}(k)$$

转移算子对应的单位函数响应

❖ 表7-2 pp. 253

$H(S)$	$h(k)$
1	$\delta(k)$
$\dfrac{1}{S-\gamma}$	$\gamma^{k-1}\varepsilon(k-1)$
$\dfrac{S}{S-\gamma}$	$\gamma^{k}\varepsilon(k)$
$\dfrac{S}{(S-\gamma)^2}$	$k\gamma^{k-1}\varepsilon(k)$

$$\frac{S}{(S-\gamma)^p}$$

$$\frac{1}{(p-1)!}\frac{k!}{(k-p+1)!}\gamma^{k-p+1}\varepsilon(k)$$

单位函数响应练习1

❖一阶系统

差分方程 $h(k+1)-\gamma h(k)=\delta(k)$

$$H(S)=\frac{1}{S-\gamma}$$

$$\boxed{h(k)=\gamma^{k-1}\varepsilon(k-1)}$$

$$h(0)=\delta(-1)+\gamma h(-1)=0$$

$$h(1)=\delta(0)+\gamma h(0)=1=\gamma^{0}$$

$$h(2)=\delta(1)+\gamma h(1)=\gamma h(1)=\gamma$$

$$\delta(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$$

$$h(k)=\delta(k-1)+\gamma h(k-1)$$

$$=\gamma h(k-1)=\gamma\left[\gamma h(k-2)\right]=\gamma^{k-1}h(1)$$

单位函数响应练习1

差分方程 $r(k+1)-\gamma r(k)=e(k+1)$

$$H(S)=\frac{r(k)}{e(k)}=\frac{S}{S-\gamma}=1+\frac{\gamma}{S-\gamma}$$

$$\boxed{h(k)=\gamma^{k}\varepsilon(k)}$$

$$h(k)=\delta(k)+\gamma\gamma^{k-1}\varepsilon(k-1)$$
$$=\delta(k)+\gamma^{k}\left[\varepsilon(k)-\delta(k)\right]=\gamma^{k}\varepsilon(k)$$

$$r(k)=\left[1+\frac{\gamma}{S-\gamma}\right]e(k)=\underbrace{e(k)}_{\text{直通分量}}+\frac{\gamma}{S-\gamma}e(k)$$

当系统转移算子m=n，且比值常数1时，
输出响应中包含一个输入激励的直通分量。

单位函数响应练习1

❖n阶系统

$$H(S)=\frac{b_m S^m + b_{m-1}S^{m-1}+\ldots+b_1 S+b_0}{S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\ldots+a_1 S+a_0}$$

m<n, $b_0 \neq 0$

$$H(S)=\sum\frac{A_i}{S-\gamma_i} \qquad h(k)=\sum A_i\gamma_i^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

m<n, $b_0 = 0$

$$H(S)=S\left[\sum\frac{A_i}{S-\gamma_i}\right] \qquad h(k)=\sum A_i\gamma_i^{k}\varepsilon(k)$$

m=n, $b_0 \neq 0$

$$H(S)=1+\sum\frac{A_i}{S-\gamma_i} \qquad h(k)=\delta(k)+\sum A_i\gamma_i^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

单位函数响应练习2

❖ 求单位函数响应

(1) $r(k+2)+2r(k+1)-3r(k)=e(k+1)+2e(k)$

$$H(S)=\frac{S+2}{S^2+2S-3}=\frac{3/4}{S-1}+\frac{1/4}{S+3}$$

$$h(k)=\frac{3}{4}1^{k-1}\varepsilon(k-1)+\frac{1}{4}(-3)^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

(2) $r(k+2)-2\gamma r(k+1)+\gamma^2 r(k)=e(k)$

$$H(S)=\frac{1}{(S-\gamma)^2}=\left[\frac{S}{(S-\gamma)^2}-\frac{1}{S-\gamma}\right]\frac{1}{\gamma}$$

$$h(k)=\left[k\gamma^{k-1}\varepsilon(k)-\gamma^{k-1}\varepsilon(k-1)\right]\gamma^{-1}=(k-1)\gamma^{k-2}\varepsilon(k-1)$$

卷积和

卷积和的定义

❖有始信号的卷积和

$$e(k)*h(k)=\sum_{j=0}^{k}e(j)h(k-j)$$

有始信号的卷积积分 $e(t)*h(t)=\int_0^t e(\tau)h(t-\tau)d\tau$

❖卷积和的计算方法

- 定义式
- 图解法
- 查表+卷积和的性质 表7-4 pp.258

卷积和的性质

❖交换律

$$e(k)*h(k)=h(k)*e(k)$$

❖分配律

$$\left[e(k)+f(k)\right]*h(k)=e(k)*h(k)+f(k)*h(k)$$

❖结合律

$$\left[e(k)*f(k)\right]*h(k)=e(k)*\left[f(k)*h(k)\right]$$

❖移序

$$e(k)*h(k)=y(k)$$

$$e(k-M)*h(k-N)=y(k-M-N)$$

常用卷积和

❖ 表7-4 pp.258

$$e(k)*\delta(k)=e(k)$$

$$\varepsilon(k)*\varepsilon(k)=(k+1)\varepsilon(k)$$

$$\gamma^k\varepsilon(k)*\gamma^k\varepsilon(k)=(k+1)\gamma^k\varepsilon(k)$$

$$\gamma_1^k\varepsilon(k)*\gamma_2^k\varepsilon(k)=\frac{\gamma_1^{k+1}-\gamma_2^{k+1}}{\gamma_1-\gamma_2}\varepsilon(k)$$

$$\gamma^k\varepsilon(k)*\varepsilon(k)=\frac{1-\gamma^{k+1}}{1-\gamma}\varepsilon(k)$$

卷积和练习1

❖求卷积和 $f(k)=a^k\varepsilon(k)\quad h(k)=b^k\varepsilon(k)\quad a<b$

$$y(k)=\sum_{j=0}^{k} f(j)h(k-j)$$

$$=\sum_{j=0}^{k} a^j b^{k-j}=b^k\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{a}{b}\right)^j$$

$$=b^k\frac{1-(a/b)^{k+1}}{1-a/b}\varepsilon(k)=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{b-a}\varepsilon(k)$$

若 $a>b$ $\quad y(k)=a^k\dfrac{1-(b/a)^{k+1}}{1-b/a}\varepsilon(k)=\dfrac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}\varepsilon(k)$

卷积和练习2

❖求卷积和 $e(k)=2^k\varepsilon(k)$ $h(k)=(-0.5)^{k-1}\varepsilon(k-1)$

$$h(k)=(-0.5)^{k-1}\varepsilon(k-1)=(-0.5)^{k-1}\left[\varepsilon(k)-\delta(k)\right]$$

$$=-2(-0.5)^k\varepsilon(k)+2\delta(k)$$

$$y(k)=2^k\varepsilon(k)*\left[-2(-0.5)^k\varepsilon(k)\right]+2^k\varepsilon(k)*2\delta(k)$$

$$=-2\frac{2^{k+1}-(-0.5)^{k+1}}{2.5}\varepsilon(k)+2^{k+1}\varepsilon(k)$$

$$=\left[\frac{2}{5}2^k-\frac{2}{5}(-0.5)^k\right]\varepsilon(k)$$

卷积和练习2

❖利用移序特性

$$f(k)=2^k\varepsilon(k)*(-0.5)^k\varepsilon(k)=\frac{2^{k+1}-(-0.5)^{k+1}}{2.5}\varepsilon(k)$$

$$=\frac{2}{5}2^{k+1}\varepsilon(k)-\frac{2}{5}(-0.5)^{k+1}\varepsilon(k)$$

$$y(k)=f(k-1)$$

$$=\frac{2}{5}2^{k}\varepsilon(k-1)-\frac{2}{5}(-0.5)^{k}\varepsilon(k-1)$$

$$=\frac{2}{5}2^{k}\varepsilon(k)-\frac{2}{5}(-0.5)^{k}\varepsilon(k)$$

上一节复习

- LTI离散时间系统的描述
  - 差分方程，模拟框图，线性移不变特性，转移算子
- 极点对应时间函数的形式
  - 离散时间系统稳定性判断
- 零输入响应

$$H_i(S)=\frac{1}{S-\gamma} \qquad h_i(k)=\gamma^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

- 零状态响应
  - 单位函数响应

$$H_i(S)=\frac{S}{S-\gamma} \qquad h_i(k)=\gamma^{k}\varepsilon(k)$$

  - 卷积和

$$e(k)*h(k)=\sum_{j=0}^{k}e(j)h(k-j)$$

卷积和练习3

❖已知 e(0)=1, e(1)=3, e(2)=1, e(3)=3, h(0)=1, h(1)=1, h(2)=3, h(3)=1, 求卷积和

$$y(k)=\sum_{j=0}^{k}e(j)h(k-j)$$

两个有限长序列求卷积和

卷积和长度：L=M+N-1

M和N分别为两个序列的长度

$$y(0)=e(0)h(0)=1$$

$$y(1)=\sum_{j=0}^{1}e(j)h(1-j)=e(0)h(1)+e(1)h(0)=5$$

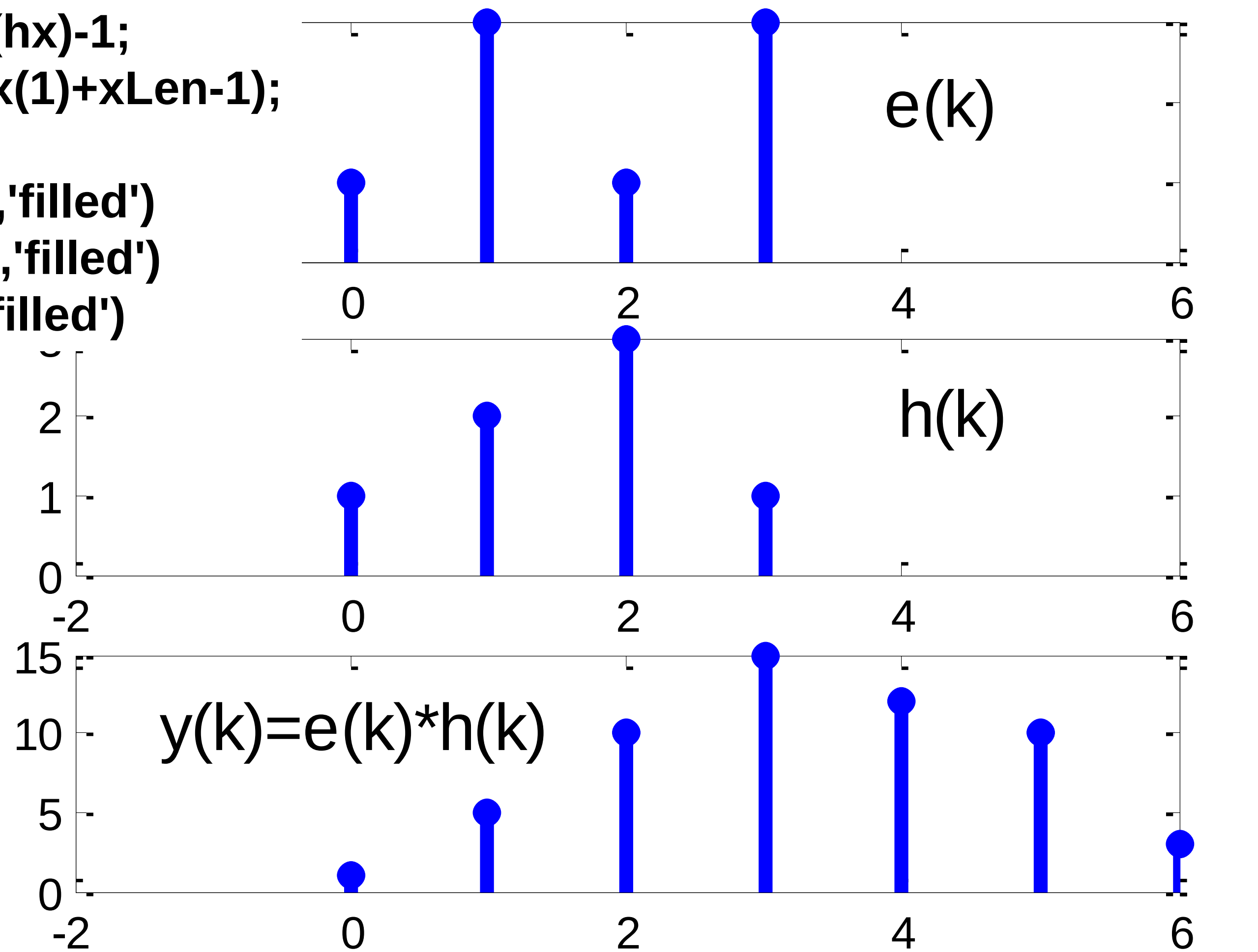
$$y(2)=e(0)h(2)+e(1)h(1)+e(2)h(0)=10$$

依此类推，序列不足补零

$$y(3)=15 \quad y(4)=12 \quad y(5)=13 \quad y(6)=3$$

卷积和练习2

```
ex=0:3;e=[1 3 1 3];
hx=0:3;h=[1 2 3 1];
y=conv(e,h);
xLen=length(ex)+length(hx)-1;
x=(ex(1)+hx(1)):(ex(1)+hx(1)+xLen-1);
figure
subplot(3,1,1);stem(ex,e,'filled')
subplot(3,1,2);stem(hx,h,'filled')
subplot(3,1,3);stem(x,y,'filled')
```

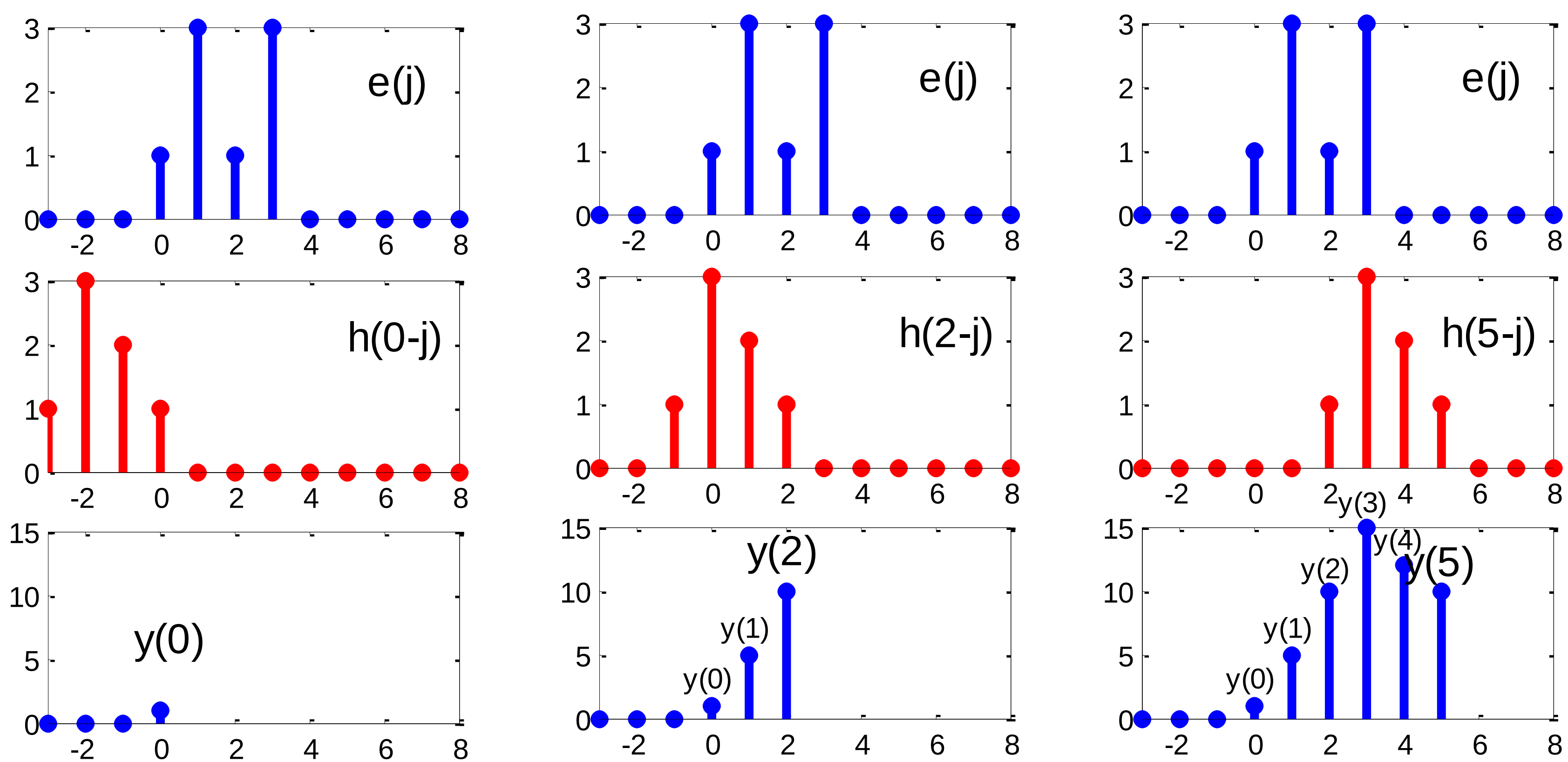


卷积和练习2

❖图解法

- 反褶，平移，相乘，求和

$$y(k)=\sum_{j=0}^{k} e(j)h(k-j)$$



LTI离散时间系统的零状态响应

LTI离散时间系统的零状态响应

❖利用卷积和求系统零状态响应

$$e(k)=\sum_{j=0}^{k}e(j)\delta(k-j)=e(k)*\delta(k)$$

$$r_{zs}(k)=\sum_{j=0}^{k}e(j)h(k-j)=e(k)*h(k)$$

对比连续时间系统零状态响应

$$e(t)=\int_{0}^{t}e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=e(t)*\delta(t)$$

$$r_{zs}(t)=\int_{0}^{t}e(\tau)h(t-\tau)d\tau=e(t)*h(t)$$

离散时间系统全响应

❖离散时间系统全响应

$$r(k)=r_{zi}(k)+r_{zs}(k)$$

表7-1 表7-2

$$=\sum C_i\gamma_i^k\varepsilon(k)+e(k)*h(k)$$

对比连续时间系统全响应

$$t=kT_S$$

$$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$$

$$e^{\lambda t}\to\gamma^k$$

$$=\sum C_i e^{\lambda_i t}\varepsilon(t)+e(t)*h(t)$$

$$e^{\lambda T_S}\to\gamma$$

离散时间系统综合练习1

❖ 系统差分方程，求系统全响应

$$r(k+2)-3r(k+1)+2r(k)=e(k+1)-3e(k)$$

$$e(k)=\varepsilon(k) \quad r_{zi}(0)=1 \quad r_{zi}(1)=0$$

$$H(S)=\frac{r(k)}{e(k)}=\frac{S-3}{S^2-3S+2}=\frac{2}{S-1}+\frac{-1}{S-2}$$

$$h(k)=\left[2(1)^{k-1}-(2)^{k-1}\right]\varepsilon(k-1)$$

$$=\left[2(1)^{k-1}-(2)^{k-1}\right]\left[\varepsilon(k)-\delta(k)\right]$$

$$=\left[2-\frac{1}{2}2^{k}\right]\varepsilon(k)-\frac{3}{2}\delta(k)$$

离散时间系统综合练习1

零输入响应

$$r_{zi}(k)=\left[C_1(1)^k+C_2(2)^k\right]\varepsilon(k)$$

$$\begin{cases} r_{zi}(0)=C_1+C_2=1 \\ r_{zi}(1)=C_1+2C_2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} C_1=2 \\ C_2=-1 \end{cases}$$

$$=\left[2-2^k\right]\varepsilon(k)$$

零状态响应

$$r_{zs}(k)=e(k)*h(k)$$

$$\gamma^k\varepsilon(k)*\varepsilon(k)=\frac{1-\gamma^{k+1}}{1-\gamma}\varepsilon(k)$$

$$=\varepsilon(k)*\left[2-\frac{1}{2}2^k\right]\varepsilon(k)-\varepsilon(k)*\frac{3}{2}\delta(k)$$

$$=\left[2k+\frac{1}{2}\left(1-2^{k+1}\right)\right]\varepsilon(k)-\frac{3}{2}\varepsilon(k)=\left[2k-2^k-1\right]\varepsilon(k)$$

离散时间系统综合练习1

全响应

$$r(k)=r_{zi}(k)+r_{zs}(k)$$

$$=\left[2-2^{k}\right]\varepsilon(k)+\left[2k-2^{k}-1\right]\varepsilon(k)$$

$$=\left[2k-2^{k+1}+1\right]\varepsilon(k)$$

离散时间系统综合练习2

❖图示模拟框图

- 写出系统差分方程
- 求单位函数响应
- 求系统全响应

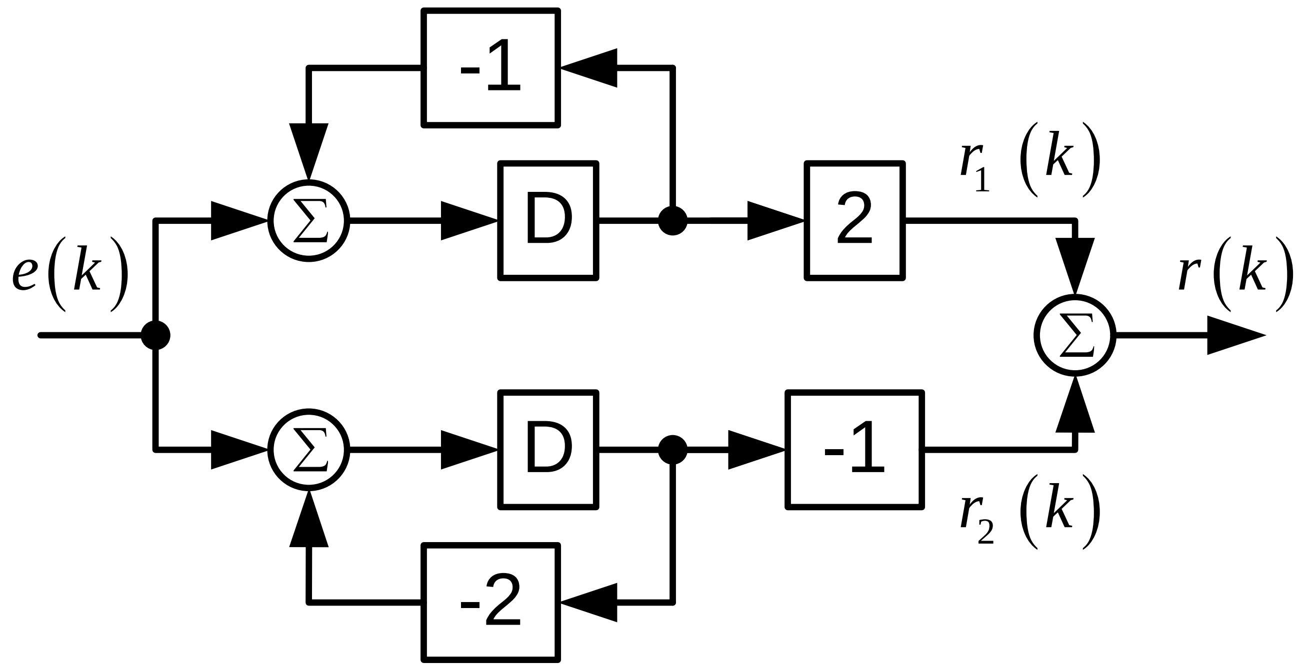
$$H_1(S)=\frac{r_1(k)}{e(k)}=\frac{2}{S+1}$$

$$H_2(S)=\frac{r_2(k)}{e(k)}=\frac{-1}{S+2}$$

$$e(k)=\delta(k)$$

$$r_{zi}(0)=1$$

$$r_{zi}(1)=2$$



离散时间系统综合练习2

$$r(k)=r_1(k)+r_2(k)$$

$$H(S)=H_1(S)+H_2(S)=\frac{2}{S+1}+\frac{-1}{S+2}=\frac{S+3}{S^2+3S+2}$$

系统差分方程

$$\left(S^2+3S+2\right)r(k)=(S+3)e(k)$$

$$r(k+2)+3r(k+1)+2r(k)=e(k+1)+3e(k)$$

单位函数响应

$$h(k)=\left[2(-1)^{k-1}-(-2)^{k-1}\right]\varepsilon(k-1)$$

离散时间系统综合练习2

零输入响应

$$r_{zi}(k)=\left[C_1(-1)^k+C_2(-2)^k\right]\varepsilon(k)$$

$$\begin{cases} r_{zi}(0)=C_1+C_2=1 \\ r_{zi}(1)=-C_1-2C_2=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} C_1=4 \\ C_2=-3 \end{cases}$$

$$=\left[4(-1)^k-3(-2)^k\right]\varepsilon(k)$$

零状态响应

$$r_{zs}(k)=e(k)*h(k)=h(k)=\left[2(-1)^{k-1}-(-2)^{k-1}\right]\varepsilon(k-1)$$

全响应 $r(k)=r_{zi}(k)+r_{zs}(k)$

$$=\left[4(-1)^k-3(-2)^k\right]\varepsilon(k)+\left[2(-1)^{k-1}-(-2)^{k-1}\right]\varepsilon(k-1)$$

$$=\left[2(-1)^k-\frac{5}{2}(-2)^k\right]\varepsilon(k)+\frac{3}{2}\delta(k)$$

离散时间系统综合练习3

❖求系统零输入响应、零状态响应、全响应。

$$r(k+2)+3r(k+1)+2r(k)=e(k+2)$$

$$e(k)=2^k\varepsilon(k) \qquad r(-1)=0 \qquad r(-2)=0.5$$

零输入响应和零状态响应初始条件

$$r_{zi}(-1)=r(-1)=0 \qquad r_{zs}(-1)=0$$

$$r_{zi}(-2)=r(-2)=0.5 \qquad r_{zs}(-2)=0$$

零输入响应

$$r_{zi}(k+2)+3r_{zi}(k+1)+2r_{zi}(k)=0$$

$$r_{zi}(0)+3r_{zi}(-1)+2r_{zi}(-2)=0 \Rightarrow r_{zi}(0)=-1$$

$$r_{zi}(1)+3r_{zi}(0)+2r_{zi}(-1)=0 \Rightarrow r_{zi}(1)=3$$

离散时间系统综合练习3

两个单根 $\gamma_1=-1,\gamma_2=-2$

$$r_{zi}(k)=\left[C_1(-1)^k+C_2(-2)^k\right]\varepsilon(k)$$

$$\begin{cases} r_{zi}(0)=-1 \\ r_{zi}(1)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=-2 \end{cases}$$

$$r_{zi}(k)=\left[(-1)^k-2(-2)^k\right]\varepsilon(k)$$

零状态响应

$$r_{zs}(k+2)+3r_{zs}(k+1)+2r_{zs}(k)=e(k+2)$$

$$H(S)=\frac{S^2}{S^2+3S+2}=\frac{-S}{S+1}+\frac{2S}{S+2}$$

$$h(k)=\left[-(-1)^k+2(-2)^k\right]\varepsilon(k)$$

离散时间系统综合练习3

$$r_{zs}(k)=e(k)*h(k)$$

$$=2^k\varepsilon(k)*\left[-(-1)^k+2(-2)^k\right]\varepsilon(k)$$

$$\begin{cases} r_{zs}(0)=1 \\ r_{zs}(1)=-1 \end{cases}$$

$$=-\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}\varepsilon(k)+2\frac{2^{k+1}-(-2)^{k+1}}{4}\varepsilon(k)$$

$$=\left[\frac{1}{3}2^k-\frac{1}{3}(-1)^k+(-2)^k\right]\varepsilon(k)$$

$$\begin{cases} r(0)=0 \\ r(1)=2 \end{cases}$$

全响应

$$r(k)=r_{zi}(k)+r_{zs}(k)=\left[\frac{1}{3}2^k+\frac{2}{3}(-1)^k-(-2)^k\right]\varepsilon(k)$$

第七章复习

- 冲激取样信号及其频谱特点（教材的第四章）
- 取样定理 – 取样信号的重建（教材的第四章）
- 离散时间系统的描述 – **差分方程**和模拟框图
- **零输入响应**
- **单位函数响应**
- 卷积和
- **零状态响应**