2020年秋季教学课件

复变函数与积分变换

汪 玉 峰

武汉大学数学与统计学院

第二章　　解析函数

第一节　解析函数的概念

第二节　函数解析的充要条件

第三节　初等函数

§1　解析函数的概念

一、复变函数的导数与微分

二、解析函数的概念

一、复变函数的导数与微分

1.导数的定义

定义2.1 设函数$w=f(z)$在点z_0的某邻域内有定义, 若极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

存在且有限, 则称函数$f(z)$在z_0处可导，此极限值称为函数$f(z)$的导数，记为$f'(z_0)$，或$\left.\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}$,即

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

在定义中，$z\to z_0$(即$\Delta z\to 0$)的方式是任意的.

如果函数$f(z)$在区域D内处处可导，我们就称$f(z)$在区域内D可导.

例1　问$f(z)=x+2yi$是否可导？

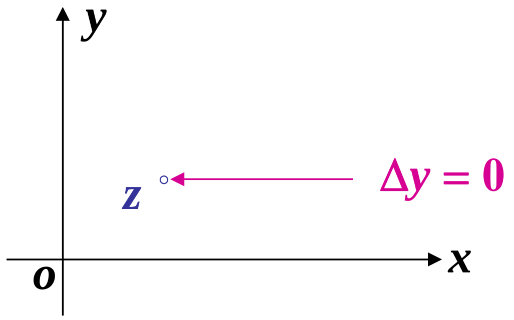
解:
$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(x+\Delta x)+2(y+\Delta y)i-x-2yi}{\Delta z}$$

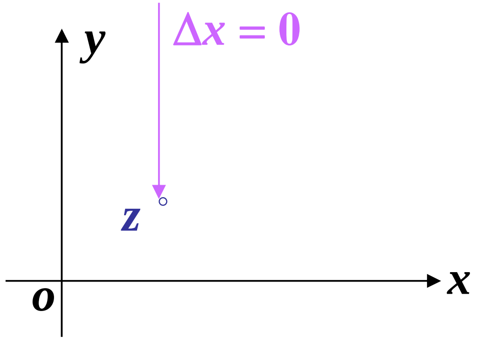
$$=\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}$$

由于

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{\substack{\Delta z\to 0,\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,\\ &\lim_{\substack{\Delta z\to 0,\\ \Delta x=0}}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{2\Delta yi}{\Delta yi}=2\end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$不存在 $\Rightarrow$ $f(z)$不可导





上页 下页 返回 结束

2.可导与连续的关系

函数 $f(z)$ 在 z_0 处可导则在 z_0 处一定连续, 但函数 $f(z)$ 在 z_0 处连续不一定在 z_0 处可导.

证明:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\cdot(z-z_0)+f(z_0)\right]$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\cdot\lim_{z\to z_0}(z-z_0)+\lim_{z\to z_0}f(z_0)$$

$$=f(z_0)$$

因此, $f(z)$在z_0连续.

显然, $f(z)=x+2yi$在复平面上处处连续,

但是, 例1已经证明$f(z)$在复平面上处处不可导.

上页 下页 返回 结束

3.求导法则:

(1) $(c)' = 0$, 其中c为复常数.

(2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中n为正整数.

(3) $[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$.

(4) $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

(5) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]' = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$. $(g(z) \neq 0)$

(6) $\{f[g(z)]\}' = f'(w)g'(z)$. 其中$w = g(z)$

(7) $f'(z) = \dfrac{1}{\varphi'(w)}$, 其中$w = f(z)$与$z = \varphi(w)$是两个互为反函数的单值 函数, 且$\varphi'(w) \neq 0$

4.微分的概念

复变函数微分的概念在形式上与一元实变函数的微分概念完全一致.

设函数 $w = f(z)$在 z_0 可导，则

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\cdot\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z$$

$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z) = 0, |\eta| = |\rho(\Delta z)\Delta z|$是$|\Delta z| \to 0$时的高阶无穷小，于是

$$\Delta w = f'(z_0)\cdot\Delta z + o(\Delta z), \Delta z \to 0.$$

$f'(z_0)\cdot\Delta z$ 是函数$w = f(z)$的改变量Δw的线性部分. $f'(z_0)\cdot\Delta z$ 称为函数 $w = f(z)$ 在点z_0的微分，记作$dw = f'(z_0)\cdot\Delta z$.

特别地，当 $f(z) = z$时，$dz = dw = f'(z_0)\cdot\Delta z = \Delta z$,

$$dw = f'(z_0)\cdot\Delta z = f'(z_0)\cdot dz\text{，即}\quad f'(z_0) = \left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}$$

如果函数在z_0的微分存在, 则称函数$f(z)$在z_0可微.

如果函数 $f(z)$在区域D内处处可微, 则称$f(z)$在区域D内可微.

函数$w = f(z)$在 z_0 可导与在 z_0 可微是等价的.

二、解析函数的概念

1. 解析函数的定义

定义2.3 如果函数在某点一个邻域可导， 则称函数在该点解析.

如果函数 $f(z)$在区域D内每一点解析, 则称$f(z)$在区域D内解析, 或称$f(z)$是区域D 内的一个解析函数(全纯函数或正则函数). 记作$f(z) \in A(D)$.

理解下列关系:

函数在区域内解析 $\Longleftrightarrow$ 函数在区域内可导

函数在z_0点解析 $\xrightarrow{\quad}$ 函数在z_0点可导
$\cancel{\longleftarrow}$

2. 奇点的定义

定义2.4 如果函数 $f(z)$ 在 z_0不解析, 但在的z_0任一邻域内总有$f(z)$的解析点, 则称 z_0 为$f(z)$的奇点.

如$w=\dfrac{1}{z}$ 奇点为$z=0$

1) 函数在一个点解析，是指在这个点的某个邻域内可导，因此在这个点可导，反之，在一个点的可导不能得到在这个点解析.

2) 闭区域上的解析函数是指在包含这个区域的一个更大的区域上解析.

例3 研究函数 $f(z)=z^2, g(z)=x+2yi$ 和$h(z)=|z|^2$ 的解析性.

解: $f(z)=z^2$ 在复平面内是解析的； $g(z)=x+2yi$ 处处不解析；

上页 下页 返回 结束

下面讨论 $h(z)=|z|^2$ 的解析性，

$$\frac{h(z_0+\Delta z)-h(z_0)}{\Delta z}=\frac{|z_0+\Delta z|^2-|z_0|^2}{\Delta z}=\frac{(z_0+\Delta z)(\overline{z_0}+\overline{\Delta z})-z_0\overline{z_0}}{\Delta z}$$

$$=\overline{z_0}+\overline{\Delta z}+z_0\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z},$$

(1) $z_0=0,$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{h(z_0+\Delta z)-h(z_0)}{\Delta z}=0.$$

(2) $z_0\neq 0,$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\text{不存在}\quad\Longrightarrow\quad\lim_{\Delta z\to 0}\frac{h(z_0+\Delta z)-h(z_0)}{\Delta z}\text{不存在.}$$

因此 $h(z)=|z|^2$ 仅在 $z=0$ 处可导，而在其他点都不可导，根据定义，它在复平面内处处不解析.

定理

(1) 在区域 D 内解析的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商(除去分母为零的点)在 D 内解析.

(2) 设函数$h = g(z)$在 z 平面上的区域D内解析，函数$w = f(h)$在 h 平面上的区域G内解析. 如果对D内的每一个点 z，函数 $g(z)$ 的对应值h都属于G，那末复合函数 $w = f[g(z)]$ 在D内解析，且

$$\frac{dw}{dz} = \frac{df(h)}{dh} \bullet \frac{dh(z)}{dz}$$

根据定理可知:

(1) 所有多项式在复平面内是处处解析的.

(2) 任何一个有理分式函数 $P(z)/Q(z)$ 在不含分母为零的点的区域内是解析的，使分母为零的点是它的奇点.

上页 下页 返回 结束

§2　函数解析的充要条件

一、柯西-黎曼条件

二、柯西-黎曼条件的应用

一、柯西-黎曼条件

定理一 (复可微的充要条件) 设复函数 $f(z)=u(x,y)+v(x,y)i$ 定义于区域D上, 那么该函数在 $z_0=x_0+y_0i\in D$复可微的充要条件是

（1）$u(x,y)$, $v(x,y)$在 $z_0=x_0+y_0i$ 都实可微;

（2）$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad -\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}.$$

条件(2)常称为柯西—黎曼条件（简称C-R条件）.

证明: 必要性.

设复函 f 在 $z_0=x_0+y_0i\in D$ 的导数为 $\alpha=a+ib,a,b\in\mathbb{R}$.据导数定义,

当 $z_0+\Delta z\in D(\Delta z\neq 0)$时,

$$\begin{aligned} f(z+\Delta z)-f(z)&=\alpha\Delta z+o(|\Delta z|) \qquad\qquad (1)\\ &=(a+\mathrm{i}b)(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)+o(|\Delta z|)(|\Delta z|\to 0), \end{aligned}$$

其中$\Delta z=\Delta x+i\Delta y, \Delta x, \Delta y$是实增量。比较等式（1）两边实部与虚部，得

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x,y)=a\Delta x-b\Delta y+o(|\Delta z|)(|\Delta z|\to 0), \qquad (2)$$

$$v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x,y)=b\Delta x+a\Delta y+o(|\Delta z|)(|\Delta z|\to 0). \qquad (3)$$

因此，在点$z_0=x_0+y_0 i$，$u(x,y)$和$v(x,y)$可微,且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-b, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=b, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=a, \qquad (4)$$

由此导致柯西-黎曼方程.

充分性.

由于$u(x,y)$，$v(x,y)$在$z_0=x_0+y_0 i$都实可微,并且柯西-黎曼方程成立,那么

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x,y)=a\Delta x-b\Delta y+o(|\Delta z|)(|\Delta z|\to 0),$$

$$v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x,y)=b\Delta x+a\Delta y+o(|\Delta z|)(|\Delta z|\to 0).$$

此两式相加得

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\alpha\Delta z+o(|\Delta z|)$$

$$=(a+ib)(\Delta x+i\Delta y)+o(|\Delta z|)(|\Delta z|\to 0),$$

$f(z)$在$z_0=x_0+y_0 i$复可微。

上页 下页 返回 结束

若复函 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+y_0i$ 复可微（或复可导），则

$$f'(z)=u_x(x,y)+iv_x(x,y)=v_y(x,y)-iu_y(x,y)$$

$$=u_x(x,y)-iu_y(x,y)=v_y(x,y)+iv_x(x,y)$$

定理二(函数在区域D内解析的充要条件)

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 区域 D内解析的充要条件是

(1) 实部 $u(x,y)$和虚部 $v(x,y)$在区域 D内处处（实）可微,

(2) $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内满足柯西-黎曼方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

二、柯西-黎曼条件的应用

上页 下页 返回 结束

例1　设 $f(z)=x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$,问常数 a, b, c, d 取何值时, f(z) 在复平面内处处解析?

解： 记 $u(x,y)=x^2+axy+by^2,\ v(x,y)=cx^2+dxy+y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+ay,\ \frac{\partial u}{\partial y}=ax+2by,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2cx+dy,\ \frac{\partial v}{\partial y}=dx+2y,$$

欲使 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},$

$$2x+ay=dx+2y,\ -2cx-dy=ax+2by,$$

所求 $a=2,\ b=-1,\ c=-1,\ d=2.$

例2　如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在区域 D 内为一常数.

证： $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}\equiv 0 \Longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}\equiv 0,$

上页 下页 返回 结束

所以 $u=$常数, $v=$常数. 因此, $f(z)$ 在区域 D 内为一常数.

例3　讨论 $|z|^2$ 的可导性与解析性.

解: 由于

$$u(x,y)=x^2+y^2, v(x,y)=0,$$

那么

$$u_x=2x, u_y=2y, v_x=v_y=0$$

由于 u_x, u_y, v_x, v_y 在整个复平面上连续, 但只在原点满足 $C-R$ 条件,

所以 $f(z)$ 只在 $z=0$ 处可导, 而处处不解析 .

§3　初等函数

一、指数函数

二、对数函数

三、幂函数

四、三角函数和双曲函数

五、反三角函数和反双曲函数

一、指数函数

1. 定义

对任何复数$z=x+iy$,用关系式

$$e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$$

来规定指数函数e^{z}(或$\exp z$).

显然,

$$\mathrm{Re}(\exp(z))=e^{x}\cos y \qquad \mathrm{Im}(\exp(z))=e^{x}\sin y$$

$$|\exp(z)|=e^{x} \qquad \mathrm{Arg}(\exp(z))=y+2k\pi \quad (k=0,\ \pm 1,\cdots)$$

为简便，常用下面记号

$$e^{z}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$$

上页 下页 返回 结束

2. 指数函数的基本性质

(1) 对实数$z=x, e^z$定义与通常实指数函数定义一致.

(2) $e^z \neq 0, z \in \mathbb{C}$.

(3) 指数函数$w=e^z$在整个复平面是解析，且有：

$$\left(e^z\right)' = e^z, z \in \mathbb{C}.$$

证明： $u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y,$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

四个偏导数均连续,且 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

故 $f(z)$ 在复平面内处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z) = e^x(\cos y + i \sin y) = f(z).$$

上页 下页 返回 结束

(4) 运算法则:$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$, $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}$。

证明：设$z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$，则

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)\bullet e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)] \\ &= e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

(5) 指数函数$w=e^z$是周期为$2\pi i$的周期函数：

证明：$$e^{z+2\pi i}=e^z e^{2\pi i}=e^z(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^z.$$

(6)指数函数的渐进性态：$z\to\infty$时, 无极限, 但有

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z=x>0}} e^z = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty;\ \lim_{\substack{z\to\infty\\ z=x<0}} e^z = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

上页 下页 返回 结束

(1) e^z仅是记号, 无幂的意义.

(2) 微积分中的微分中值定理不能推广到复函数中来.

如 $e^z = e^{z+2\pi i}$ 但$(e^z)' = e^z \neq 0$

二、对数函数

1. 对数函数的定义

满足方程 $e^w = z\ (z \neq 0)$ 的函数 $w = f(z)$称为z 的对数函数，记为 $w = \mathrm{Ln}z$.

令$\boldsymbol{w = u + iv}$，$\boldsymbol{z = re^{i\theta}}$，则 $\boldsymbol{e^{u+iv} = re^{i\theta}}$; 于是$\boldsymbol{u = \ln r}$，$\boldsymbol{v = \theta + 2k\pi}$ (**k为整数**)

或

$$u = \ln|z|,\quad v = \mathrm{Arg}z;$$

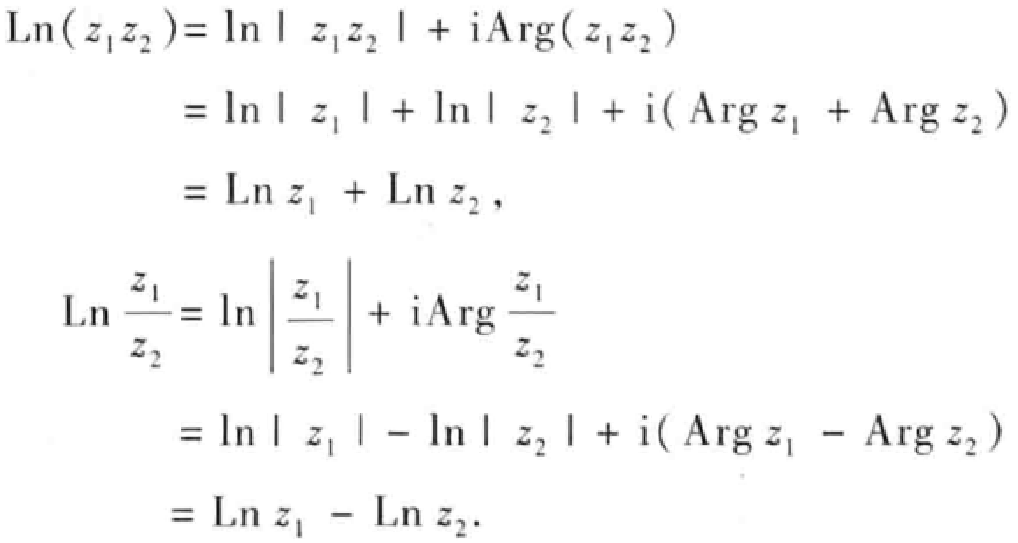
因此

$$w = Lnz = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\quad k \in \mathbb{Z}.$$

1) 对数函数 $w = \mathrm{Ln}\ z$ 是指数函数 $w = e^z$ 的反函数.

2) 对数函数 $w = \mathrm{Ln}\ z$ 是多值的. 其多值性是由虚部幅角函数引起的.

3) 积与商的对数运算法则: $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0,$



$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(z_1 z_2) &= \ln|z_1 z_2| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(z_1 z_2)\\ &= \ln|z_1| + \ln|z_2| + \mathrm{i}(\mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2)\\ &= \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2} &= \ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2}\\ &= \ln|z_1| - \ln|z_2| + \mathrm{i}(\mathrm{Arg}\, z_1 - \mathrm{Arg}\, z_2)\\ &= \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2.\end{aligned}$$

我们得到

$$(1)\ \ \mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2\ , \qquad (2)\ \ \mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2\ .$$

但是 $\mathrm{Ln}\, z^n \neq n\mathrm{Ln}\, z.$

上页 下页 返回 结束

定义复函数

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z,\ z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0], \tag{1}$$

其中

$$\arg z \in (-\pi, \pi),\ z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$$

是主幅角函数. 因此, $w = \ln z$ 是多值函数

$$w = \mathrm{Ln}\, z$$

的单值连续分支.

待证

$$\frac{d \ln z}{dz} = \frac{1}{z},\quad z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]. \tag{2}$$

因此, 由 (1) 定义的 $w = \ln z$ 是单值解析分支.

导数公式(2)证明：任取 $z, z_0 \in \mathbb{C}-(-\infty,0]$, $w=\ln z$ 的连续性蕴含

$$z \to z_0 \Rightarrow w \to w_0 = \ln z_0 . \qquad (3)$$

另一方面，$w=\ln z$ 的单值性蕴含

$$z \neq z_0 \Rightarrow w \neq w_0 . \qquad (4)$$

因此, 联合(3) (4) 并注意到 $e^{w}=z,\ \ e^{w_0}=z_0,$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\ln z\text{-}\ln z_0}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\dfrac{e^{w}-e^{w_0}}{w-w_0}}=\frac{1}{e^{w_0}}=\frac{1}{z_0},\quad z_0\in\mathbb{C}-(-\infty,0].$$

证毕.

1 一般不成立

$$\ln(z_1\cdot z_2)=\ln z_1+\ln z_2 .$$

计算时一定要特别小心！

上页 下页 返回 结束

2 1) 对数函数 $w = \mathrm{Ln}\ z$ 在区域 $\mathbb{C}-(-\infty,0]$ 可分出无穷个单值解析分支

$$w_k = \ln z + 2k\pi i,\ z \in \mathbb{C}-(-\infty,0],\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

2) 特殊点 0, ∞ 是对数函数的单值解析分支点, 简称分支点. 我们也称为无穷阶支点(或对数支点).

例1 计算 $\mathrm{Ln}(-1), \mathrm{Ln}(2-3i)$ 的值.

解: 因为 $|-1|=1,\ \arg(-1)=\pi,$ 所以有

$$\mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2\mathrm{k}\pi) = (2k+1)\pi i \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

因为 $|2-3i| = \sqrt{13},\ \arg(2-3i) = -\arctan\frac{3}{2},$ 所以有

$$\mathrm{Ln}(2-3\mathrm{i}) = \ln\sqrt{13} + i(-\arctan\tfrac{3}{2} + 2\mathrm{k}\pi)$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln 13 - i(\arctan\tfrac{3}{2} - 2k\pi) \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

三、幂函数

1. 基本定义

我们用下列等式定义z的α次幂

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \,\mathrm{Ln}\, z} (z \neq 0, \alpha \in \mathbb{C}).$$

α 为正实数，且z=0时，还规定 $z^{\alpha} = 0$.

由于

$$w = z^{\alpha} = e^{\alpha \ln z} e^{\alpha\, 2k\pi i} (\ln 1 = 0, -\pi < \arg z \leq \pi)$$

因此，对同一个 $z \neq 0, z^{\alpha}$ 的不同值的个数等于不同的数值因子

$$e^{a\cdot 2k\pi i} (k \in \mathbb{Z})$$

的个数.

2. 分类讨论

1) $\alpha=n\in\mathbb{Z}^{+}$,

$$z^{n}=e^{n\ln z}e^{n2k\pi i}=e^{n\ln z}=e^{\ln z+\cdots+\ln z}=\underbrace{z\cdot\cdots\cdot z}_{n},$$

单值

这与第一章n次幂的定义相吻合，其中用到公式

$$n\ln z=\underbrace{\ln z+\cdots+\ln z}_{n}\quad(\mathrm{mod}\ \ 2\pi i).$$

2) $\alpha=\dfrac{1}{n}(n\in\mathbb{Z}^{+})$,

$$z^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln z}\,e^{\frac{1}{n}2k\pi i}$$

$$=\sqrt[n]{|z|}e^{i(\arg z+2k\pi)/n}\,(k=0,1,\cdots,n-1)$$

n值

$$=\sqrt[n]{z}$$

这与n次根的定义相吻合.

上页 下页 返回 结束

3) $\alpha=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}\left(n\geq 1, m, n\in\mathbb{Z}\right)$是既约分数,

$$z^{\frac{m}{n}}=e^{\frac{m}{n}\mathrm{Ln}\,z}=e^{\frac{m}{n}[\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)]}=e^{\frac{m}{n}\ln z}e^{\frac{mk}{n}i2\pi}$$

是n值的 $(k=0,1,\cdots,n-1)$.

4) $\alpha\in\mathbb{C}$-$\mathbb{Q}$, 即指数为无理数或虚数,

$$z^{\alpha}=e^{\alpha\ln z}e^{\alpha\, 2k\pi i},\quad k\in\mathbb{Z},$$

是无穷多值的.

3. 幂函数的单值解析分支

1) $n\in\mathbb{Z}^{+}, n>1$, 幂函数

$$w=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$$

又称根式函数.

根式函数在区域 $\mathbb{C}-(-\infty,0]$有n个不同的单值解析分支

$$w_k=\sqrt[n]{|z|}e^{i(\arg z+2k\pi)/n},\arg z\in(-\pi,\pi),z\in\mathbb{C}-(-\infty,0],\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

根式函数的分支改写为

$$w_k=e^{\frac{1}{n}\ln z}e^{\frac{1}{n}2k\pi i},z\in\mathbb{C}-(-\infty,0],$$

由此利用复合求导公式得

$$\frac{dw_k}{dz}=\frac{1}{n}\frac{e^{\frac{1}{n}\ln z}e^{\frac{1}{n}2k\pi i}}{z},z\in\mathbb{C}-(-\infty,0]$$

$$=\frac{1}{n}\frac{e^{\frac{1}{n}\ln z}}{z}e^{\frac{1}{n}2k\pi i}$$

$$=\frac{1}{n}\frac{z^{\frac{1}{n}}}{z}=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}.$$

2) $\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}(n\geq 2, m, n\in\mathbb{Z})$是既约分数，幂函数

$$w=z^{\frac{m}{n}}$$

同根式函数类似地分出单值解析分支.

3) $\alpha\in\mathbb{C}$-$\mathbb{Q}$, 幂函数

$$w=z^{\alpha}$$

类似地分出无穷个单值解析分支.

例2 求 $(-3)^{\sqrt{5}}$ 和 2^{1+i} 的值.

解： $(-3)^{\sqrt{5}}=e^{\sqrt{5}\mathrm{Ln}(-3)}= e^{\sqrt{5}(\ln 3+\pi i+2k\pi i)}=3^{\sqrt{5}}[\cos\sqrt{5}(2k+1)\pi+i\sin\sqrt{5}(2k+1)\pi],$

$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$

$$2^{1+i}=e^{(1+i)\mathrm{Ln}2}=e^{(1+i)[\ln 2+i(\arg 2+2k\pi)]}=e^{(1+i)[\ln 2+2k\pi i)]}=e^{\ln 2+2k\pi i+i\ln 2-2k\pi}$$

$$=e^{(\ln 2-2k\pi)+i(\ln 2+2k\pi)}=2e^{-2k\pi}(\cos\ln 2+i\sin\ln 2)\qquad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

四、三角函数和双曲函数

1. 三角函数的定义

因为 $e^{iy}=\cos y+i\sin y$, $e^{-iy}=\cos y-i\sin y$,将两式相加与相减，得

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\quad \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}.$$

定义2.5 定义

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$

并分别称为z的正弦函数和余弦函数.

2. 性质

(1) 当z为实数时与通常定义一致.

(2) $\sin z$ 是奇函数，$\cos z$ 是偶函数.

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z.$$

(3)正弦函数和余弦函数都是以 2π 为周期的.

$$\sin(z+2\pi) = \sin z, \quad \cos(z+2\pi) = \cos z.$$

(4)正弦函数和余弦函数在复平面内都是解析函数.

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

(5)在复数域内不成立 $|\sin z| \le 1, |\cos z| \le 1$.

当 $y \to \infty$时，$|\sin yi| \to \infty$, $|\cos yi| \to \infty$.

$$\cos yi = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2}, \quad \sin yi = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}$$

（这是与实变函数完全不同的.）

(6) 有关正弦函数和余弦函数的公式仍成立. 如

$$(1)\quad \begin{cases} \cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2, \\ \sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2, \\ \sin^2 z+\cos^2 z=1. \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \cos(x+yi)=\cos x\cos yi-\sin x\sin yi, \\ \sin(x+yi)=\sin x\cos yi+\cos x\sin yi. \end{cases}$$

对任何复数z, 有

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,$$

这是欧拉公式.

(7) $\sin z$的零点为$z=n\pi,(n=0,\pm1,\cdots)$.

$\cos z$的零点为$z=(n+\dfrac{1}{2})\pi,(n=0,\pm1,\cdots)$.

上页 下页 返回 结束

定义2.6 规定

正切函数 $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, **余切函数** $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$,

正割函数 $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$, **余割函数** $\csc z = \dfrac{1}{\sin z}$.

在复平面上分母不为零的点解析, 且

$$(\tan z)' = \sec^2 z, \qquad (\cot z)' = -\csc^2 z,$$

$$(\sec z)' = \sec z \tan z, \qquad (\csc z)' = -\csc z \cot z.$$

正切函数和余切函数都是以 π 为周期的.

正割函数和余割函数都是以 2π 为周期的.

3. 双曲函数的定义

定义

双曲余弦函数: $\mathrm{ch}\, z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$,

双曲正弦函数: $\mathrm{sh}\, z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$,

双曲正切函数为 $\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z} = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$.

双曲正弦函数和双曲余弦函数在复平面内也都是解析函数

$$(\mathrm{ch}\, z)' = \mathrm{sh}\, z, (\mathrm{sh}\, z)' = \mathrm{ch}\, z.$$

容易证明

$$\mathrm{sh}(z + 2\pi i) = \mathrm{sh}\, z, \mathrm{ch}(z + 2\pi i) = \mathrm{ch}\, z.$$

另外

$$\operatorname{sh}(-z)=-\operatorname{sh} z, \operatorname{ch}(-z)=\operatorname{ch} z.$$

并有如下公式:

$$\cosh yi=\cos y, \quad \sinh yi=i\sin y.$$

例2　求 $\cos(1+i)$ 的值.

解:

$$\cos(1+i)=\frac{e^{i(1+i)}+e^{-i(1+i)}}{2}=\frac{e^{-1+i}+e^{1-i}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}[e^{-1}(\cos 1+i\sin 1)+e(\cos 1-i\sin 1)]$$

$$=\frac{1}{2}(e^{-1}+e)\cos 1+\frac{1}{2}(e^{-1}-e)i\sin 1$$

$$=\cos 1\cosh 1-i\sin 1\sinh 1.$$

上页 下页 返回 结束

五、反三角函数和反双曲函数

设 $z=\cos w$，那么w称为z的反余弦函数，记为$w=\mathrm{Arc}\cos z$.

由 $z=\cos w=\dfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$，得 $e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0$，方程的根为 $e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}$，

两端取对数得

$$\mathrm{Arc}\cos z=-i\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}).$$

同样得到

反正弦函数 $\mathrm{Arcsin}z=-i\mathrm{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2})$，

反正切函数 $\mathrm{Arctan}z=-\dfrac{i}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{1+iz}{1-iz}$.

反双曲正弦 $\mathrm{Arsh}z=\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$，反双曲余弦 $\mathrm{Arch}z=\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$，

反双曲正切 $\mathrm{Arth}z=\dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{1+z}{1-z}$.