Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет Компьютерных сетей и систем

Кафедра Информатики

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

по курсу «Системы компьютерной алгебры»

Студент:
гр. 758641
Ярош Г.И.

Проверил:
Калугина М. А.

Минск, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

1. Операции с математическими выражениями и функциями в Maple

Задание 1. Упростите алгебраическое выражение.

1.1. $\dfrac{x^4-x^3-11x^2+9x+18}{x^4-3x^3-7x^2+27x-18}:\dfrac{x^3-9x^2+26x-24}{x^3-8x^2+19x-12}$.

```
> a := x^4 - x^3 - 11x^2 + 9 x + 18
                    a := x^4 - x^3 - 11 x^2 + 9 x + 18          (1)
> b := x^4 - 3 x^3 - 7 x^2 + 27 x - 18
                    b := x^4 - 3 x^3 - 7 x^2 + 27 x - 18        (2)
> c := x^3 - 9 x^2 + 26 x - 24
                    c := x^3 - 9 x^2 + 26 x - 24                (3)
> d := x^3 - 8 x^2 + 19 x - 12
                    d := x^3 - 8 x^2 + 19 x - 12                (4)
> a/b : c/d
```

$$\frac{x^3-9\,x^2+26\,x-24}{x^3-8\,x^2+19\,x-12} \qquad (5)$$

```
> simplify(%)
```

$$\frac{x-2}{x-1} \qquad (6)$$

```
>
```

Задание 2. Приведите выражение к многочлену стандартного вида.

2.1. $(2x-1)(3x^2+5)(5x+2)$.

```
> a := (2 x - 1)·(3 x^2 + 5)·(5 x + 2)
                    a := (2 x - 1) (3 x^2 + 5) (5 x + 2)        (1)
> expand(a)
                    30 x^4 - 3 x^3 + 44 x^2 - 5 x - 10          (2)
>
```

Задание 3. Разложите многочлен на множители.

3.1. $14x^4-46x^3-82x^2+138x+120$.

```
> a := 14 x^4 - 46 x^3 - 82 x^2 + 138 x + 120
                    a := 14 x^4 - 46 x^3 - 82 x^2 + 138 x + 120 (1)
> factor(a)
                    2 (7 x + 5) (x - 4) (x^2 - 3)               (2)
>
```

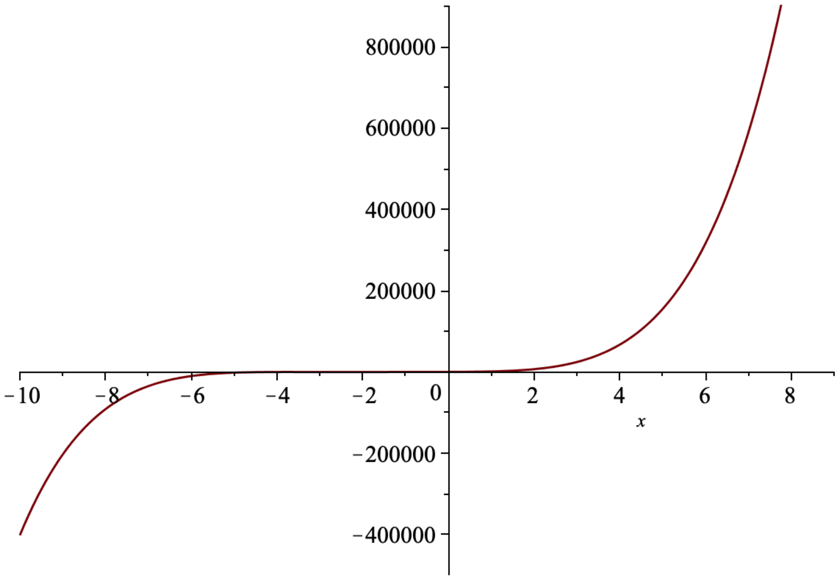
Задание 4. Постройте график многочлена $P_5(x)$ и найдите все его корни.

4.1. $P_5(x)=12x^5+108x^4+315x^3+360x^2+303x+252$.

> $p := 12\,x^5 + 108\,x^4 + 315\,x^3 + 360\,x^2 + 303\,x + 252;$

$$p := 12\,x^5 + 108\,x^4 + 315\,x^3 + 360\,x^2 + 303\,x + 252 \qquad (1)$$

> $plot(p)$



(2)

> $solve(p = 0, x)$

$$-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, -4, \mathrm{I}, -\mathrm{I} \qquad (3)$$

>

Задание 5. Разложите рациональную дробь на сумму простейших дробей.

5.1. $\dfrac{5x^4+7x^3+5x-4}{(x^2+4)(x-2)^2(x^2-1)}$.

> $a := \dfrac{5\,x^4+7\,x^3+5\,x-4}{(x^2+4)\cdot(x-2)^2\cdot(x^2-1)}$

$$a := \frac{5\,x^4+7\,x^3+5\,x-4}{(x^2+4)\,(x-2)^2\,(x^2-1)} \qquad (1)$$

(2)

> $convert(a, parfrac)$

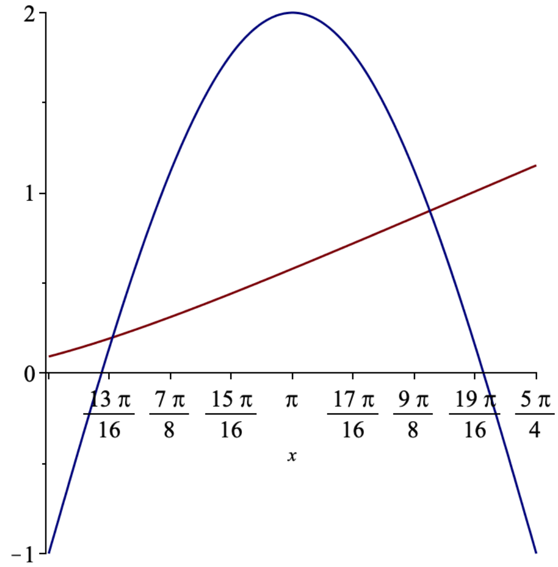
$$\frac{13}{10\,(x-1)} - \frac{17}{36\,(x-2)} + \frac{11}{90\,(x+1)} + \frac{-19\,x-23}{20\,(x^2+4)} + \frac{71}{12\,(x-2)^2} \qquad (3)$$

>

Задание 6. Решите графически уравнение и найдите его приближенные корни с точностью до 10^{-5}.

6.1. $\ln^2(x-1) = 3\cos 2x - 1.$

```
> eq := ln^2(x − 1) = 3 cos(2 x) − 1;
                    eq := ln(x − 1)^2 = 3 cos(2 x) − 1          (1)
                                                                (2)
> plot([lhs(eq), rhs(eq)], x = 3 Pi/4 .. 5 Pi/4)
```




```
> fsolve(eq, x)
                    2.561721559                                 (3)
> fsolve(eq, x, 3..5)
                    3.583824240                                 (4)
> 
```

Задание 7. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, определив номер n_ε, начиная с которого все члены последовательности попадут в ε-окрестность точки a. Проиллюстрируйте полученный результат с помощью чертежа в Maple, положив $\varepsilon = 0{,}1$.

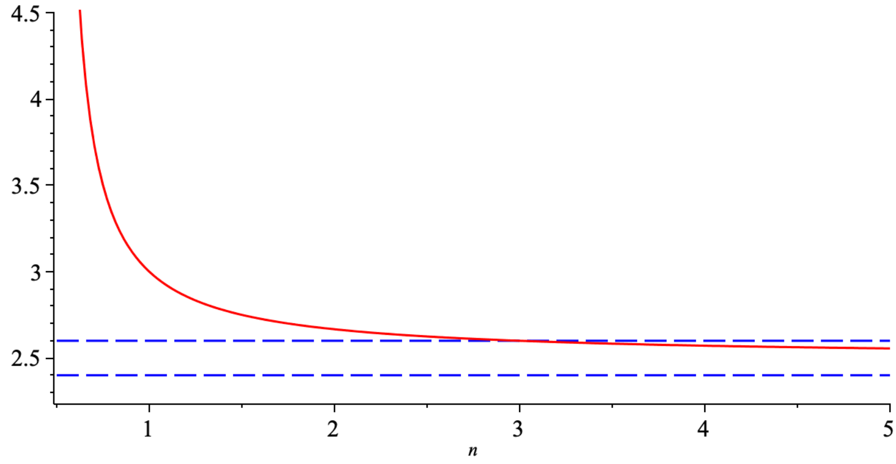
7.1. $a_n = \dfrac{5n-2}{2n-1}$, $a = \dfrac{5}{2}$.

```
> eps := 0.1
                    eps := 0.1                                  (1)
> a := 5/2
                    a := 5/2                                    (2)
> an := (5 n − 2)/(2 n − 1)
                    an := (5 n − 2)/(2 n − 1)                   (3)
```

```
> solve([|an - a| < eps, n > 1], n)
```

$$\{3. < n\} \qquad (4)$$

```
> plot([5/2 - eps, 5/2 + eps, an], n=0.5..5, linestyle=[dash, dash, solid], color=[blue, blue, red])
```



Задание 8. Вычислите пределы числовых последовательностей.

8.1. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$;

```
> limit(n·(√(n^2+1) - √(n^2-1)), n=infinity)
```

$$1 \qquad (1)$$

Задание 9. Для заданной кусочно-непрерывной функции выполните следующие действия:

1. Определите ее через функциональный оператор и постройте график.
2. В точке разрыва и на бесконечности найдите односторонние пределы.
3. Найдите производную и неопределенный интеграл на каждом из промежутков непрерывности.
4. Постройте в одной системе координат графики функции, производной и какой-нибудь первообразной.
5. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции и прямыми $x=1$, $x=5$, $y=0$. Сделайте чертеж.

9.1. $y=\begin{cases}5\sin 2x, & x<-\pi,\\ 7e^{-0,5x}, & x\ge -\pi.\end{cases}$

```
> y := x → piecewise(x < -Pi, 5·sin(2·x), x ≥ -Pi, 7·exp(-0.5·x))
```

$$y := x \mapsto \begin{cases} 5\sin(2x) & x < -\pi \\ 7\,e^{-0.5x} & -\pi \le x \end{cases} \qquad (1)$$

```
> limit(y(x), x=infinity);
  limit(y(x), x=-Pi, right);
  limit(y(x), x=-Pi, left);
```

$$0.$$
$$33.67334167$$
$$0. \quad (2)$$

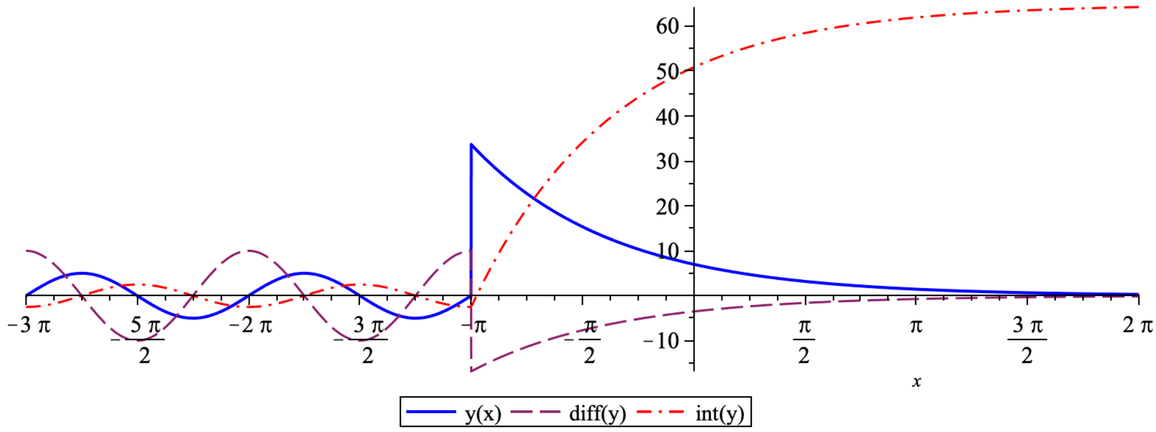
```
> y1 := simplify(diff(y(x), x));
```

$$y1 := \begin{cases} 10.\ \cos(2.\ x) & x < -3.141592654 \\ \mathrm{Float}(\mathrm{undefined}) & x = -3.141592654 \\ -3.500000000\ \mathrm{e}^{-0.5\ x} & -3.141592654 < x \end{cases} \quad (3)$$

```
> y2 := simplify(int(y(x), x));
```

$$y2 := \begin{cases} -2.500000000\ \cos(2.\ x) & x \le -3.141592654 \\ -14.\ \mathrm{e}^{-0.5\ x} + 64.84668333 & -3.141592654 < x \end{cases} \quad (4)$$

```
> plot(
    [y(x), y1, y2],
    x=-3·Pi..2·Pi,
    linestyle=[solid, dash, dashdot],
    thickness=[2, 1, 1],
    color=[blue, maroon, red],
    legend=["y(x)", "diff(y)", "int(y)"],
    size=[800, 300]
  )
```




```
> int(y(x), x=1..5)
```

$$7.342239255 \quad (5)$$

```
> plot([y(x)], x=1..5, filled, view=[-3..8, 0..6], size=[800, 300])
```

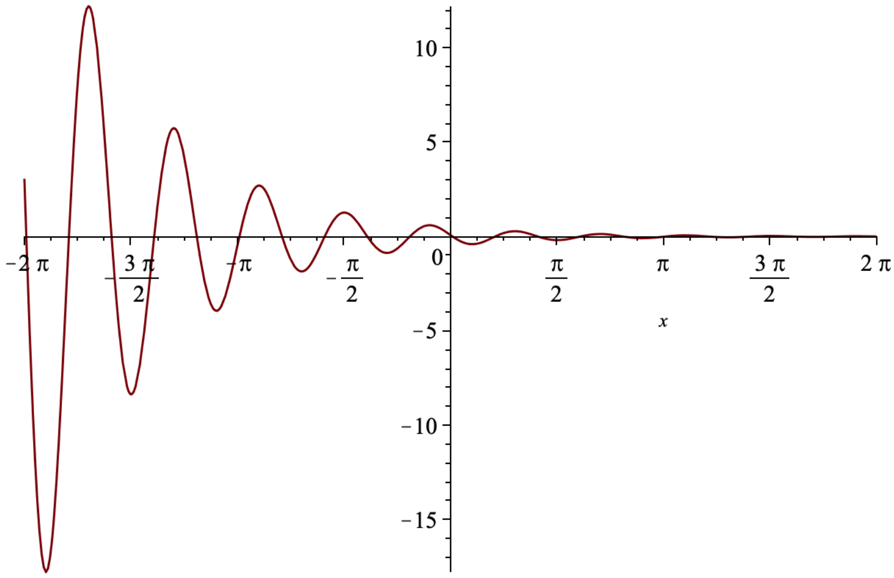
Задание 10. Постройте кривые на плоскости.

10.1. 1) $y = 0{,}5e^{-0{,}6x}\sin(5x+3)$; 2) $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 24x - 32 = 0$;

3) $\begin{cases} x = 2(t+\sin t), \\ y = 2(1-\cos t); \end{cases}$ 4) $\rho = 1 + 2\sin(3\varphi + \frac{\pi}{4})$.

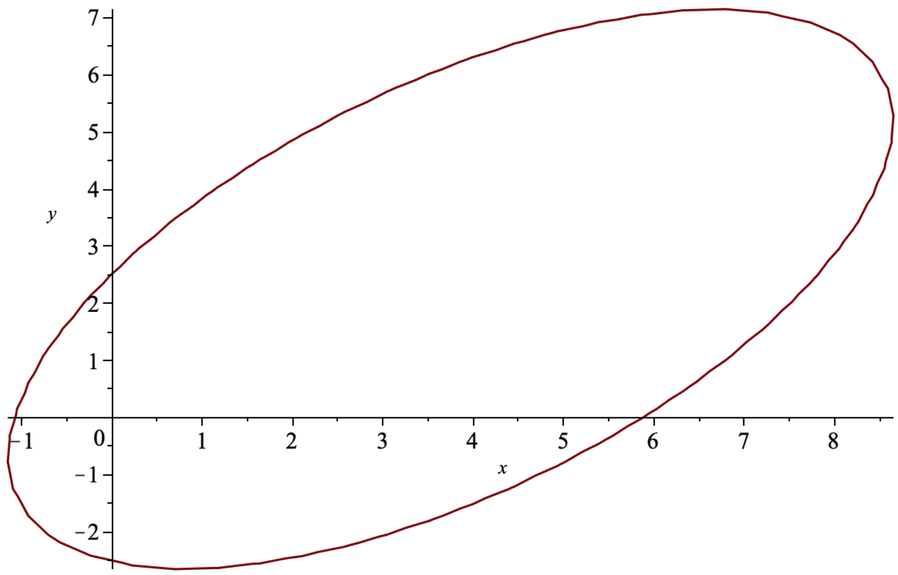
```
> y1 := 0.5·exp(-0.6·x)·sin(5·x+3) ;
  plot(y1, x)
```

$y1 := 0.5\, e^{-0.6\, x} \sin(5\, x + 3)$



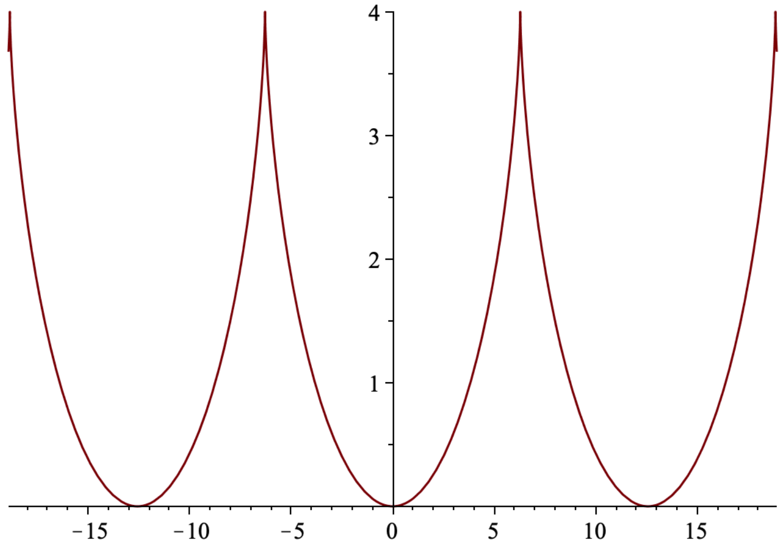

```
> y2 := 5·x^2 - 6·x·y + 5·y^2 - 24·x - 32=0;
  plots[implicitplot](y2, x=-10..10, y=-10..10)
```

$y2 := 5\, x^2 - 6\, x\, y + 5\, y^2 - 24\, x - 32 = 0$



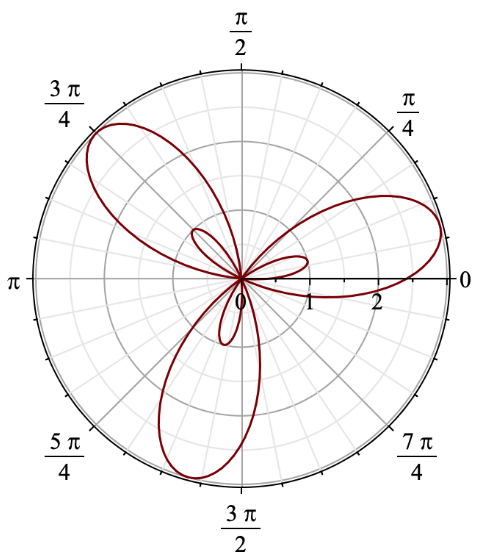
```
> x3 := 2·(t + sin(t));
  y3 := 2·(1 − cos(t));
  plot([x3, y3, t=-10..10])
```

$$x3 := 2\ t + 2\ \sin(t)$$
$$y3 := 2 - 2\ \cos(t)$$




```
> rho := 1 + 2·sin(3·phi + Pi/4);
  plots[polarplot](rho);
```

$$\rho := 1 + 2\ \sin\left(3\ \phi + \frac{\pi}{4}\right)$$



2. Числовые ряды

Задание 1. Постройте в прямоугольной системе координат 10 первых членов ряда и убедитесь в том, что для него выполняется необходимый признах сходимости.

Найдите сумму ряда и сравните с результатом, полученным в Maple.

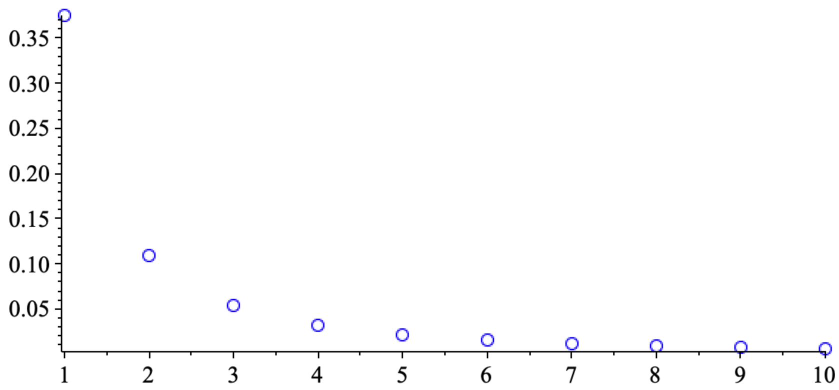
Определите минимальный порядок частичной суммы ряда, приближающей сумму ряда с точностью, не превышающей 0,1.

Проиллюстрируйте свой результат с помощью графических средств системы Maple.

1.1. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6}{9n^2+12n-5}$;

```
> an := 6/(9·n^2 + 12·n − 5);
  plots[pointplot]({seq([n, an], n=1..10)}, color=blue , symbol=circle, symbolsize=15);
```

$$an := \frac{6}{9\ n^2 + 12\ n - 5}$$



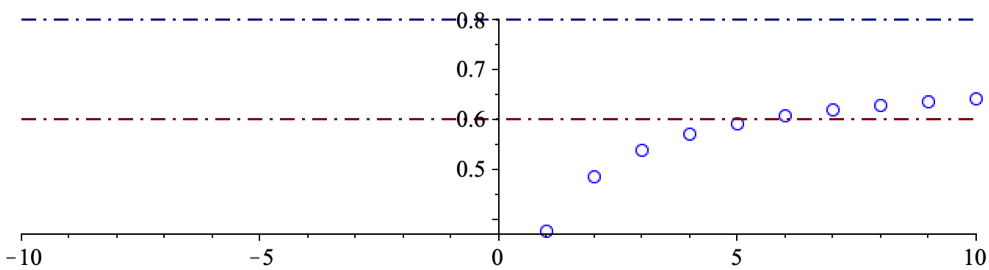
```
> an_sum := k→sum(an, n=1..k);
  s := an_sum(infinity);
  solve([|an_sum(k)−s| < 0.1, k > 1]);
```

$$an\_sum := k \mapsto \sum_{n=1}^{k} an$$

$$s := \frac{7}{10}$$

$$\{5.537291403 < k\} \quad (1)$$

```
> plot1 := plots[pointplot]({seq([k, an_sum(k)], k=1..10)}, color=blue, symbol=circle,
     symbolsize=15) :
  plot2 := plot([s − 0.1, s + 0.1], linestyle=[dashdot, dashdot]) :
  plots[display](plot1, plot2);
```



Задание 2. Докажите, что ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница.

Найдите минимальный порядок частичной суммы ряда, приближающей его сумму с точностью α, и сравните с результатом, полученным в СКА.

Проиллюстрируйте свой результат с помощью графических средств Maple.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n^2}, \quad \alpha = 0{,}01.$

```
> b := n -> 1/(3·n^2);
  a := n -> (-1)^(n+1)·1/(3·n^2);
```

$$b := n \mapsto \frac{1}{3\ n^2}$$

$$a := n \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{3\ n^2} \qquad (1)$$

```
> solve([b(n) ≥ b(n+1), n > 0]);
  limit(b(n), n=infinity);
```

$$\{0 < n\}$$

$$0 \qquad (2)$$

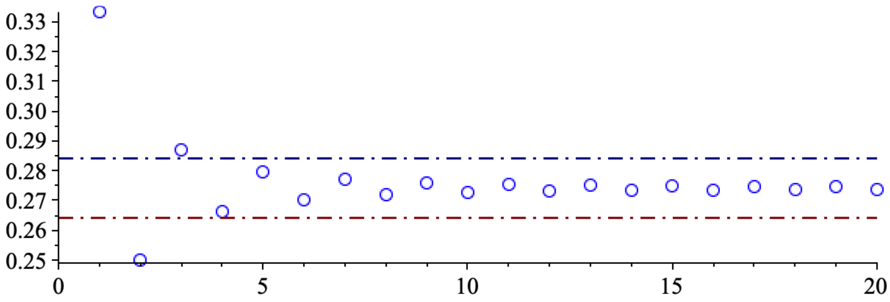
```
> alpha := 0.01;
  asum := k -> sum(a(n), n=1..k);
  s := asum(infinity);
```

$$\alpha := 0.01$$

$$asum := k \mapsto \sum_{n=1}^{k} a(n)$$

$$s := \frac{\pi^2}{36} \qquad (3)$$

```
> plot1 := plots[pointplot]({seq([k, asum(k)], k=1..20)}, color=blue, symbol=circle, symbolsize
     =15) :
  plot2 := plot([s - alpha, s + alpha], 0..20, linestyle=[dashdot, dashdot]) :
  plots[display](plot1, plot2);
```



Задание 3. Докажите справедливость равенства, убедившись в сходимости соответствующего числового ряда с помощью предельных признаков Даламбера или Коши. Проведите контрольные расчеты в системе Maple.

3.1. $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0.$

> $a := n \rightarrow \frac{n!}{n^n}$

$$a := n \mapsto \frac{n!}{n^n} \qquad (1)$$

> $is\left(limit\left(\frac{a(n+1)}{a(n)}, n = \text{infinity}\right) < 1\right)$

$$true \qquad (2)$$

> $is\left(limit\left(\sqrt[n]{a(n)}, n = \text{infinity}\right) \neq \text{infinity}\right)$

$$true \qquad (3)$$

> $limit(a(n), n = \text{infinity})$

$$0 \qquad (4)$$

3. Функциональные ряды. Степенные ряды

Задание 1. Найдите область сходимости функционального ряда, постройте график его суммы и сравните с полученным результатом.

1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(3x^2+4x+2\right)^n}$.

```
> a := n -> (2·n)/(n+1) · 1/(3·x^2+4·x+2)^n
```

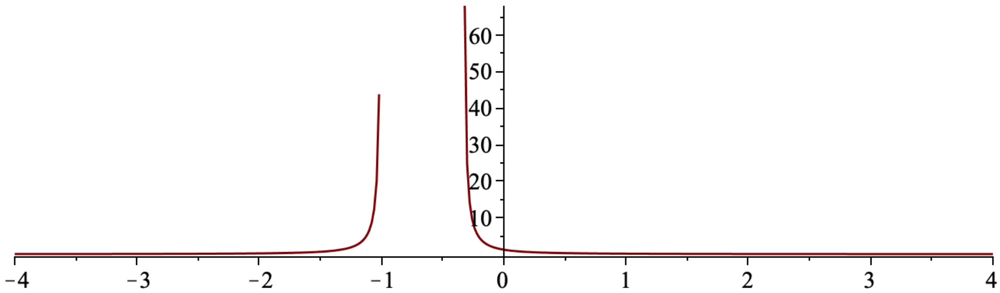
$$a := n \mapsto \frac{2\ n}{(n+1)\ (3\ x^2+4\ x+2)^n} \qquad (1)$$

```
> solve(limit(a(n+1)/a(n), n=infinity) < 1, x)
```

$$(-\infty, -1), \left(-\frac{1}{3}, \infty\right) \qquad (2)$$

```
> asum := sum(a(n), n=1..infinity);
  xx := [seq(k/50, k=-200..200)]:
  yy := [seq(eval(asum, x=k/50), k=-200..200)]:
  plot(xx, yy)
```

$$asum := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\ n}{(n+1)\ (3\ x^2+4\ x+2)^n}$$



Задание 2. Докажите равномерную сходимость функционального ряда на отрезке $[0,1]$. Для контроля результата выполните расчеты в системе Maple и найдите наименьшее значение $n_{\min}$, при котором $|r_{n_{min}}(x)| < 0{,}1\ \forall x \in [0,1]$. Убедитесь, что график частичной суммы $S_{n_{\min}}$ ряда не выходит на отрезке [0,1] за пределы 0,2-полосы, центрированной относительно графика суммы ряда.

2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{7n-11}$.

```
> a := n→(-1)^n·x^n/(7·n - 11);
  assume(x ≥ 0, x ≤ 1);
```

$$a := n \mapsto \frac{(-1)^n\ x^n}{7\ n - 11} \quad (1)$$

```
> b := n→x^n/(7·n - 11) :
  solve([b(n) ≥ b(n+1), n > 1], n);
  c := n→1/(7·n - 11) :
  solve([c(n) ≥ |b(n)|, n > 1], n);
  limit(c(n), n=infinity);
```

$$\left\{\frac{11}{7} < n\right\}$$
$$\left\{\frac{11}{7} < n\right\}$$
$$0 \quad (2)$$

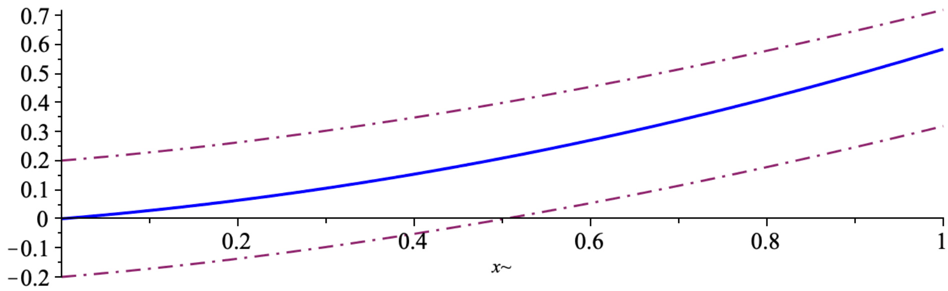
```
> asum := k→sum(a(n), n=1..k) :
  solve(|eval(a(k), x=1)| < 0.1, k);
```

$$(-\infty, 1.571428571), (1.571428571, \infty) \quad (3)$$


```
> asum := k→sum(a(n), n=1..k) :
  solve(|eval(a(k), x=1)| < 0.1, k);
```

$$(-\infty, 1.571428571), (1.571428571, \infty) \quad (3)$$


```
> plot(
    [asum(2), asum(infinity) + 0.2, asum(infinity) - 0.2],
    x=0..1,
    linestyle=[solid, dashdot, dashdot],
    color=[blue, maroon, maroon],
    thickness=[2, 1, 1]
  )
```



Задание 3. Вычислите интеграл с точностью до 0,001 и проконтролируйте результат с помощью расчетов в системе Maple. Обоснуйте свое решение.

3.1. $\int_0^{0,1} e^{-6x^2}dx$.

```
> y := x→exp(-6·x^2)
```

$$y := x \mapsto e^{-6\ x^2} \quad (1)$$

```
> evalf(int(y(x), x=0..0.1), 4)
```

$$0.09804 \quad (2)$$

4. Ряды Фурье

Задание 1. Для 2π-периодической кусочно-непрерывной функции $f(x)$ по ее аналитическому определению на главном периоде получите разложение в тригонометрический ряд Фурье. Убедитесь в правильности результата, проведя расчеты в системе Maple.

Создайте пользовательскую процедуру-функцию, осуществляющую построение тригонометрического ряда Фурье для произвольной функции, удовлетворяющей теореме Дирихле.

Постройте в одной системе координат на промежутке $[-\pi,\pi]$ график заданной функции $f(x)$, графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ ряда и его суммы $S(x)$

Постройте графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_3(x)$, $S_{10}(x)$ ряда и график его суммы $S(x)$ на промежутке $[-3\pi,3\pi]$. Сравните полученные чертежи.

Анимируйте процесс построения графиков сумм ряда, взяв в качестве параметра порядковый номер частичной суммы.

1.1. $f(x)=\begin{cases}\pi+2x, & -\pi\le x<0;\\ -\pi, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

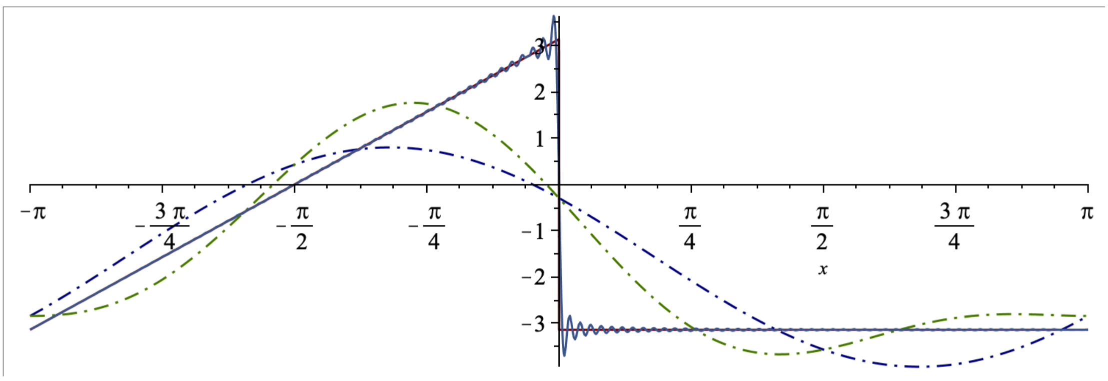
```
> f := x→piecewise(-Pi ≤ x ≤ 0, Pi + 2·x, 0 ≤ x ≤ Pi, -Pi)
```

$$f := x \mapsto \begin{cases} \pi + 2\,x & -\pi \le x \le 0 \\ -\pi & 0 \le x \le \pi \end{cases} \qquad (1)$$

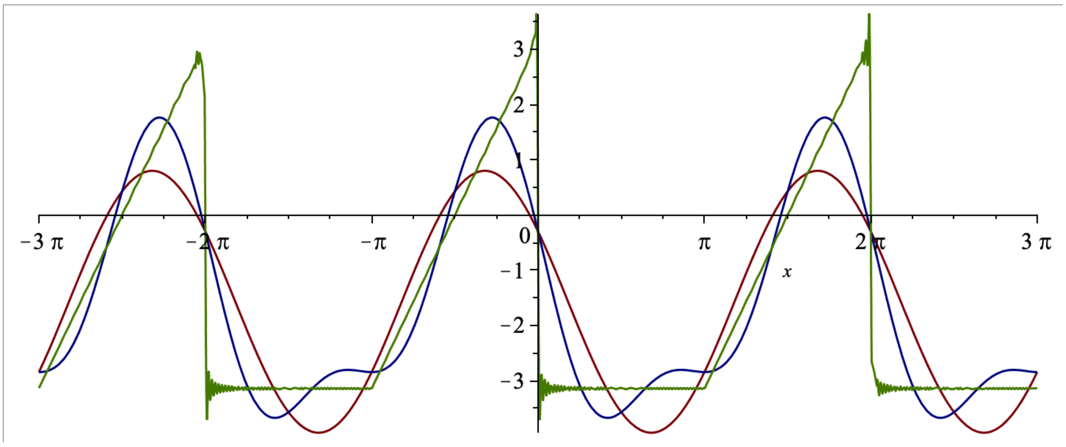
```
> fourier :=proc(f) local a0, a, b;
   a0 := 1/Pi int(f(x), x=-Pi..Pi);
   a := n→1/Pi int(f(x)·cos(n·x), x=-Pi..Pi);
   b := n→1/Pi int(f(x)·sin(n·x), x=-Pi..Pi);
   return (k, x)→a0/2 + sum(a(n)·cos(n·x) + b(n)·sin(n·x), n=1..k);
  end proc:
> s := fourier(f);
```

$$s := (k, x) \mapsto \frac{a0}{2} + \sum_{n=1}^{k}\left(a(n)\,\cos(n\,x) + b(n)\,\sin(n\,x)\right) \qquad (2)$$

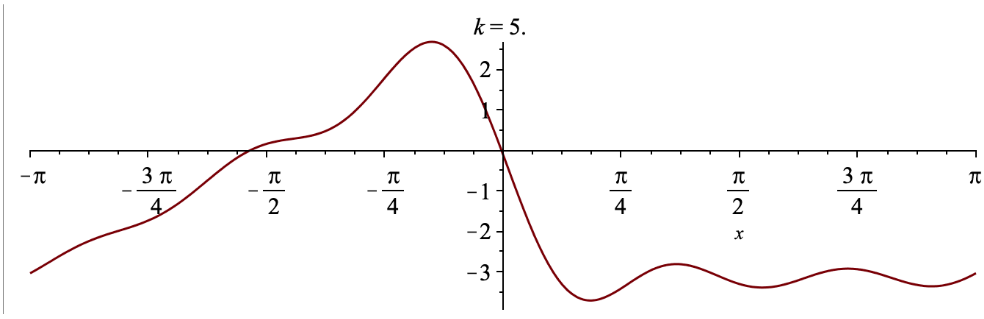
```
> plot([f(x), s(1, x), s(2, x), s(100, x)], x=-Pi..Pi, linestyle=[solid, dashdot, dashdot, solid])
```



```
> plot([s(1, x), s(2, x), s(100, x)], x=-3·Pi..3·Pi)
```



```
> plots[animate](plot, [s(k, x), x=-Pi..Pi], k=[seq(k, k=1..5)]);
```



Задание 2. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию $y = f(x)$, заданную на промежутке $(0, x_1)$ формулой $y = ax + b$, а на $[x_1, x_2]$ – $y = c$.

Убедитесь в правильности результата, проведя расчеты в системе Maple.

Воспользуйтесь созданной ранее процедурой (задание 1).

Постройте в одной системе координат график заданной функции $f(x)$, графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ ряда и его суммы $S(x)$ на промежутке $[0, x_2]$.

Постройте график суммы ряда $S(x)$ на промежутке $[-2x_2, 2x_2]$. Сравните полученные чертежи.

Анимируйте процесс построения графиков сумм ряда, взяв в качестве параметра порядковый номер частичной суммы.

2.1. $a = 1, b = 2, c = -1, x_1 = 2, x_2 = 5$.

```
> a := 1:
  b := 2:
  c := -1:
  x1 := 2:
  x2 := 5:
> f := x→piecewise(0 < x < x1, a·x + b, x1 < x < x2, c);
```

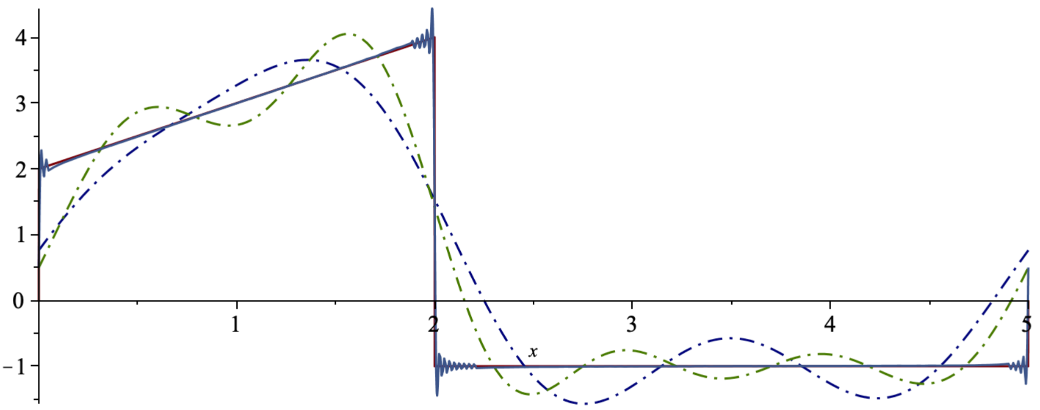
$$f := x \mapsto \begin{cases} a\,x + b & 0 < x < x1 \\ c & x1 < x < x2 \end{cases} \qquad (1)$$

```
> fourier := proc(f, l) local a0, a, b;
    a0 := 2/l*int(f(x), x=0..l);
    a := n -> 2/l*int(f(x)*cos(2*Pi*n*x/l), x=0..l);
    b := n -> 2/l*int(f(x)*sin(2*Pi*n*x/l), x=0..l);
    return (k, x) -> a0/2 + sum(a(n)*cos(2*Pi*n*x/l) + b(n)*sin(2*Pi*n*x/l), n=1..k);
  end proc:
```

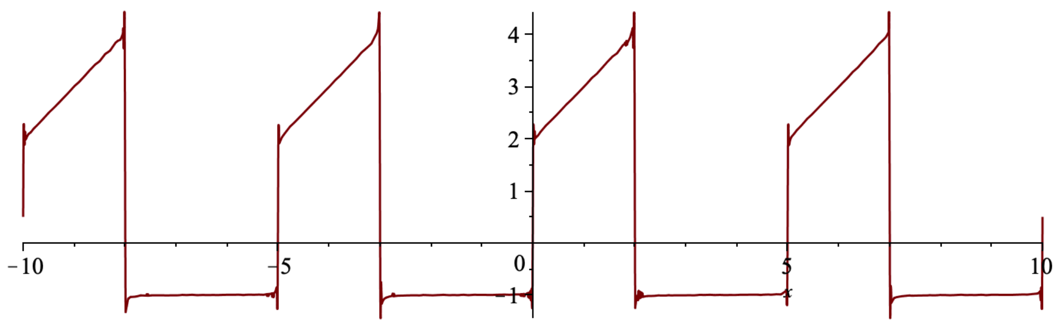
```
> s := fourier(f, x2)
```

$$s := (k, x) \mapsto \frac{a0}{2} + \sum_{n=1}^{k} \left(a(n)\ \cos\left(\frac{2\ \pi\ n\ x}{5}\right) + b(n)\ \sin\left(\frac{2\ \pi\ n\ x}{5}\right)\right) \qquad (2)$$

```
> plot([f(x), s(3, x), s(5, x), s(200, x)], x=0..x2, linestyle=[solid, dashdot, dashdot, solid])
```



```
> plot([s(200, x)], x=-2*x2..2*x2, linestyle=[solid])
```



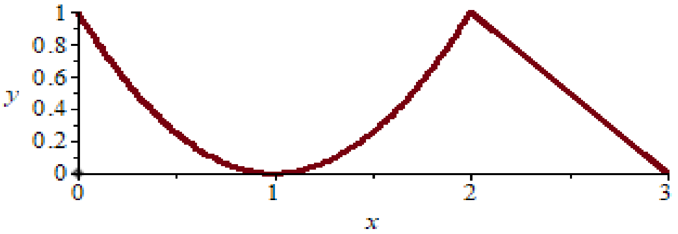
Задание 3. Для графически заданной на промежутке функции как комбинации квадратичной и линейной постройте три разложения в тригонометрический ряд Фурье, считая, что функция определена:

- на полном периоде,
- на полупериоде (является четной),
- на полупериоде (является нечетной).

Убедитесь в правильности результата, проведя расчеты в системе Maple.

Постройте для <u>каждого</u> ряда график его суммы на промежутках, превышающих длину заданного в 3-5 раз. Сравните с графиками порождающих их функций.

3.1.




```
> fourier :=proc(f, l) local a0, a, b;
    a0 := 2/l int(f(x), x=0..l);
    a := n→2/l int(f(x)·cos(2·Pi·n·x/l), x=0..l);
    b := n→2/l int(f(x)·sin(2·Pi·n·x/l), x=0..l);
    return (k, x)→a0/2 + sum(a(n)·cos(2·Pi·n·x/l) + b(n)·sin(2·Pi·n·x/l), n=1..k);
  end proc:
```

```
> even_fourier :=proc(f, l) local a0, a, b;
    a0 := 2/l int(f(x), x=0..l);
    a := n→2/l int(f(x)·cos(Pi·n·x/l), x=0..l);
    return (k, x)→a0/2 + sum(a(n)·cos(Pi·n·x/l), n=1..k);
  end:
```

```
> odd_fourier :=proc(f, l) local a0, a, b;
    b := n→2/l int(f(x)·sin(Pi·n·x/l), x=0..l);
    return (k, x)→sum(b(n)·sin(Pi·n·x/l), n=1..k);
  end:
```

```
> f := x → piecewise(0 ≤ x ≤ 2, (x − 1)^2, 2 ≤ x ≤ 3, 3 − x)
```

$$f := x \mapsto \begin{cases} (x-1)^2 & 0 \le x \le 2 \\ 3 - x & 2 \le x \le 3 \end{cases} \qquad (1)$$

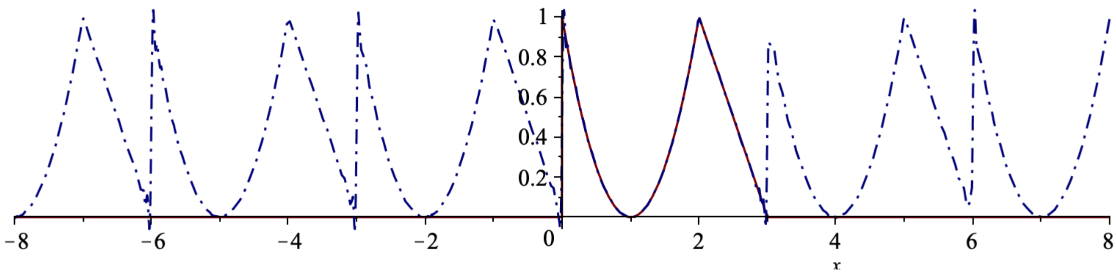
```
> s := fourier(f, 3);
  s1 := even_fourier(f, 3);
  s2 := odd_fourier(f, 3);
```

$$s := (k, x) \mapsto \frac{a0}{2} + \sum_{n=1}^{k} \left(a(n) \cos\left(\frac{2\pi n x}{3}\right) + b(n) \sin\left(\frac{2\pi n x}{3}\right) \right)$$

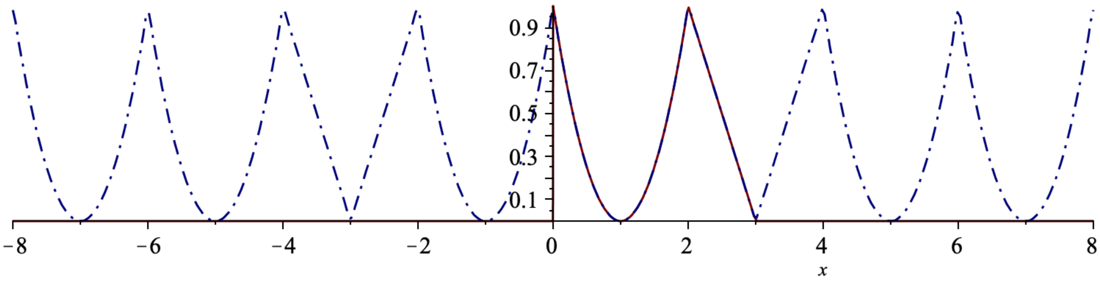
$$s1 := (k, x) \mapsto \frac{a0}{2} + \left(\sum_{n=1}^{k} a(n) \cos\left(\frac{\pi n x}{3}\right) \right)$$

$$s2 := (k, x) \mapsto \sum_{n=1}^{k} b(n) \sin\left(\frac{\pi n x}{3}\right) \qquad (2)$$

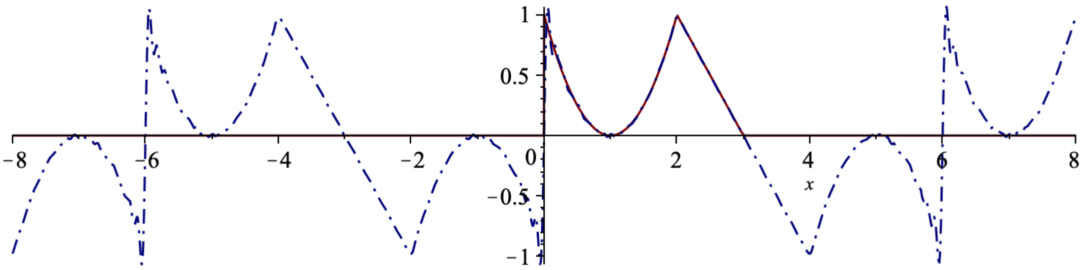
```
> plot([f(x), s(50, x)], x=-8..8, linestyle=[solid, dashdot], size=[1000, 200])
```



```
> plot([f(x), s1(50, x)], x=-8..8, linestyle=[solid, dashdot], size=[1000, 200])
```




```
> plot([f(x), s2(50, x)], x=-8..8, linestyle=[solid, dashdot], size=[1000, 200])
```



5. Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Задание 2. 1) Найдите линию, проходящую через точку M_0, и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M нормальный вектор $\overrightarrow{MN}$ с концом на оси Oy имеет длину, равную a, и образует острый угол с положительным направлением оси Oy. Сделайте чертеж.

2) Найдите линию, проходящую через точку M_0, и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор $\overrightarrow{MN}$ с концом на оси Ox имеет проекцию на ось Ox, обратно пропорциональную абсциссе точки M. Коэффициент пропорциональности равен a. Сделайте чертеж.

2.1. 1) $M_0(15,\ 1),\quad a=25.$ 2) $M_0(1,\ \mathrm{e}),\quad a=-1/2.$

```
> a := 25 :
  Mx := 15 :
  My := 1 :
```

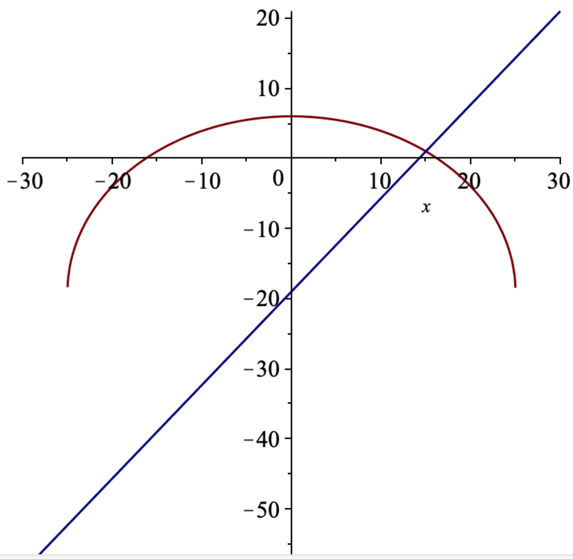
```
> result := dsolve([y'(x)^2 = x^2/(a^2 - x^2), y(Mx) = My], y(x));
```

$$result := y(x) = -\frac{(x-25)\ (x+25)}{\sqrt{-(x-25)\ (x+25)}} - 19,\ y(x) = \frac{(x-25)\ (x+25)}{\sqrt{-(x-25)\ (x+25)}} + 21 \qquad (1)$$

```
> y_normal := (x0, y0, x, y) -> -(x - x0)/eval(diff(y, x), x = x0) + y0;
```

$$y\_normal := (x0,\ y0,\ x,\ y) \rightarrow -\frac{x - x0}{\left.\frac{\partial}{\partial x}\,y\right|_{x = x0}} + y0 \qquad (2)$$

```
> plot([rhs(result[1]), y_normal(Mx, My, x, rhs(result[1]))], x=-30..30)
```



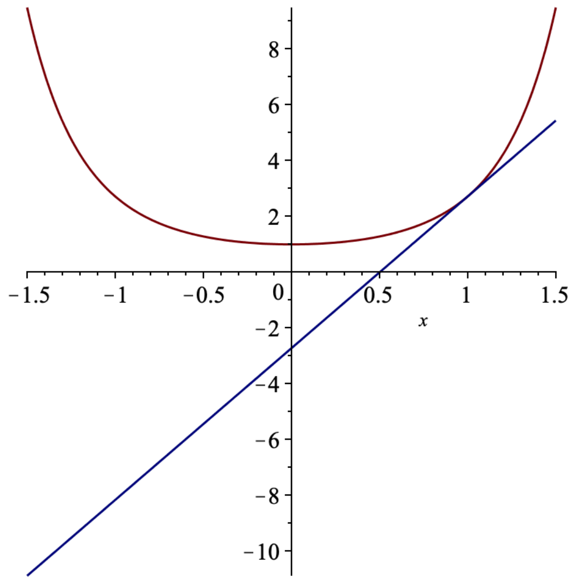
```
> a := -1/2 :
  Mx := 1 :
  My := exp(1) :
> result := simplify(dsolve([y'(x) = -(x·y(x))/a, y(Mx) = My], y(x)))
```

$$result := y(x) = e^{x^2} \qquad \textbf{(3)}$$

```
> y_tangent := (x0, y0, x, y)→eval(diff(y, x), x = x0)·(x − x0) + y0;
```

$$y\_tangent := (x0, y0, x, y) \rightarrow \left(\left. \frac{\partial}{\partial x} y \right|_{x = x0} \right) (x - x0) + y0 \qquad \textbf{(4)}$$

```
> plot([rhs(result), y_tangent(Mx, My, x, rhs(result))], x=-1.5..1.5)
```



Задание 3. Найдите общий интеграл уравнения. Постройте на одном чертеже вблизи особой точки уравнения поле направлений и какую-либо интегральную кривую. Сделайте вывод о типе особой точки.

3.1. $y' = \dfrac{4x + 21y - 25}{24x + y - 25}$.

```
> de := diff(y(x), x) = (4·x + 21·y(x) − 25)/(24·x + y(x) − 25);
```

$$de := \frac{d}{dx} y(x) = \frac{4\ x + 21\ y(x) - 25}{24\ x + y(x) - 25} \qquad \textbf{(1)}$$

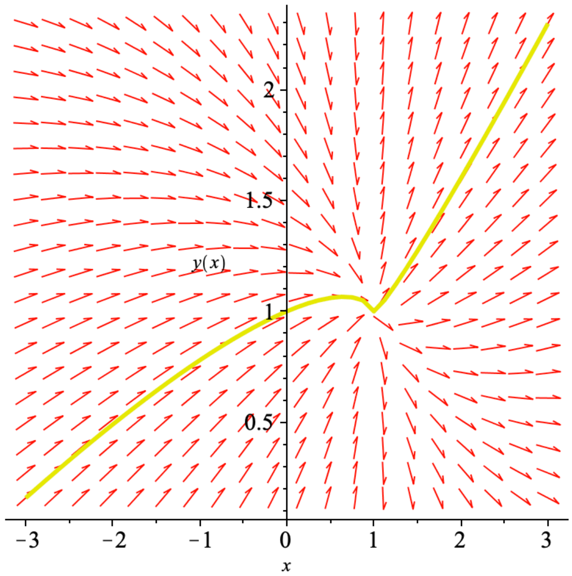
```
> dsolve([de], y(x));
```

$$\left[\left\{-5\ \ln\left(\frac{-y(x) + x}{x - 1}\right) + 4\ \ln\left(-\frac{y(x) - 5 + 4\ x}{x - 1}\right) - \ln(x - 1) - \_C1 = 0\right\}\right] \qquad \textbf{(2)}$$

```
> solve([4·x + 21·y − 25 = 0, 24·x + y − 25])
```

$$\{x = 1, y = 1\} \qquad \textbf{(3)}$$

```
> plot1 := DEtools[dfieldplot](de, y(x), x=-3..3, y=-3..3) :
  plot2 := DEtools[DEplot](de, y(x), x=-3..3, [[y(0)=1]]);
```



Задание 4. Найдите решение задачи Коши. Сделайте чертеж интегральной кривой.

4.1. $y' + xy = (1+x)e^{-x} y^2, \quad y(0) = 1.$

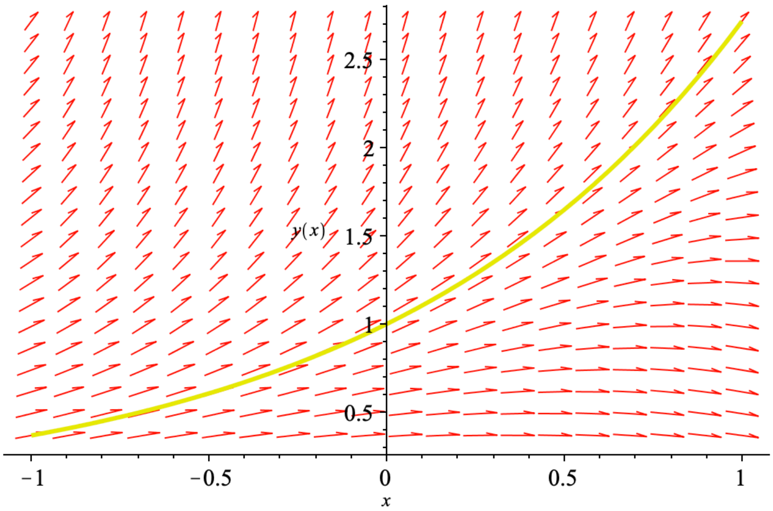
```
> de := y'(x) + x·y(x) = (1 + x)·exp(-x)·y(x)^2;
```

$$de := \frac{d}{dx} y(x) + x\, y(x) = (1+x)\, e^{-x}\, y(x)^2 \qquad \textbf{(1)}$$

```
> result := simplify(dsolve([de, y(0)=1]))
```

$$result := y(x) = e^x \qquad \textbf{(2)}$$

```
> DEtools[DEplot]([de], y(x), x=-1..1, [[y(0)=1]])
```



Задание 6. Найдите все решения уравнения. Постройте в одной системе координат график особого решения и интегральных кривых при целых значениях произвольной постоянной от -3 до 3.

6.1. $y = xy' + 2y'^2 - 1.$

```
> de := y(x) = x·y'(x) + 2·y'(x)^2 − 1;
```

$$de := y(x) = x\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + 2\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)^2 - 1 \quad \textbf{(1)}$$

```
> result := [dsolve(de, y(x))]
```

$$result := \left[y(x) = -\frac{x^2}{8} - 1,\ y(x) = 2\ \_C1^2 + x\ \_C1 - 1\right] \quad \textbf{(2)}$$

```
> f1 := (c1, x)→rhs(subs(_C1 = c1, result[1]));
  f2 := (c1, x)→rhs(subs(_C1 = c1, result[2]));
```

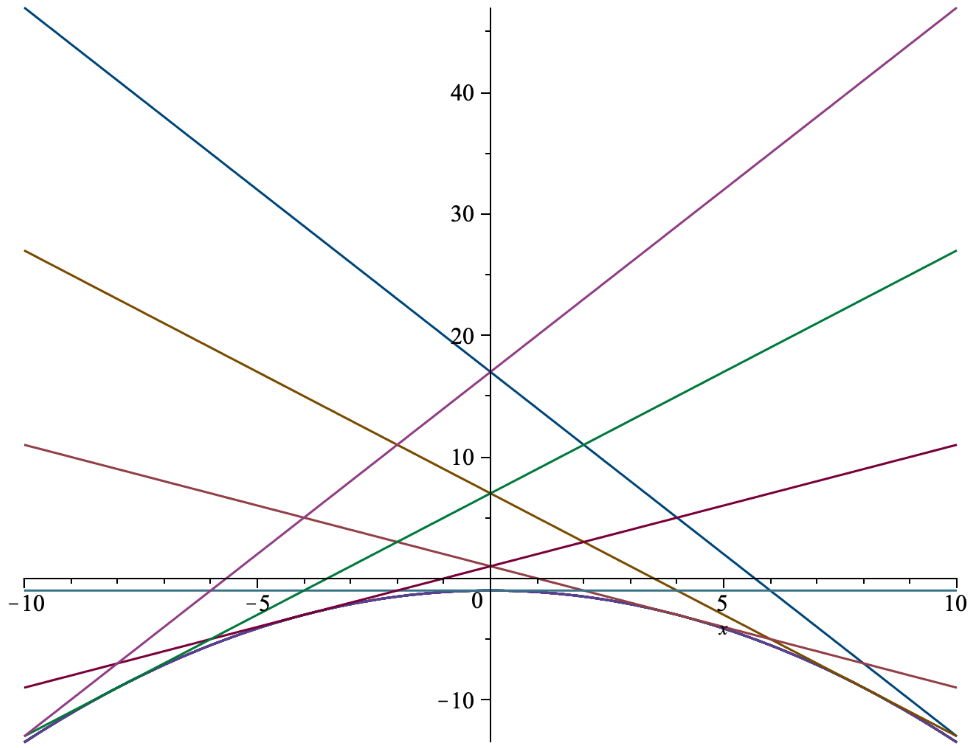
$$f1 := (c1, x) \mapsto rhs\left(subs\left(\_C1 = c1, result_1\right)\right)$$

$$f2 := (c1, x) \mapsto rhs\left(subs\left(\_C1 = c1, result_2\right)\right) \quad \textbf{(3)}$$

```
> c1 = seq(x, x = -3..3)
```

$$c1 = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3) \quad \textbf{(4)}$$

```
> plot([seq(f1(c1, x), c1 = -3..3), seq(f2(c1, x), c1 = -3..3)], x)
```



6. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков

Задание 1. Решите уравнения и сравните с результатами, полученными в Maple. Постройте в одной системе координат несколько интегральных кривых.

1.1 1) $x = y'' + e^{-y''}$; 2) $yy'' - y'^2 - yy'ctgx = 0$;

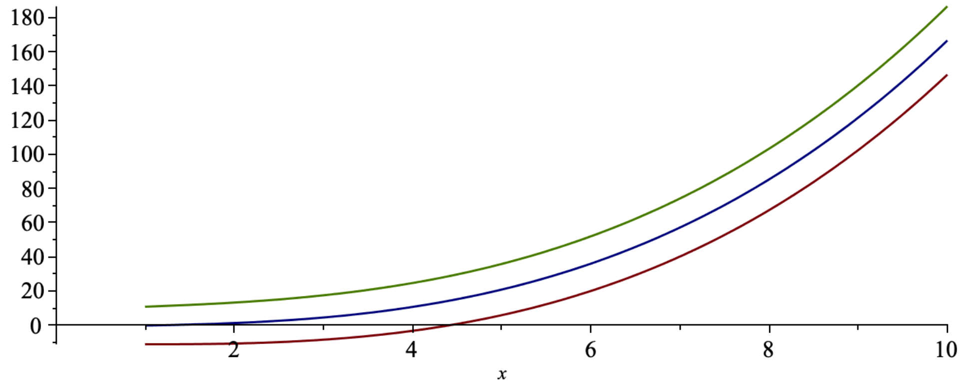
3) $y''\left(1+y^2\right) + y'^3 = 0$; 4) $y'' = 3\left(\dfrac{y'}{x} - \dfrac{y}{x^2}\right) + \dfrac{2}{x^3}\sin\dfrac{1}{x^2}$.

```
> de1 := x=y''(x) + exp(-y''(x));
  result := simplify(dsolve(de1));
```

$$de1 := x = \frac{d^2}{dx^2}\,y(x) + e^{-\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)}$$

$$result := y(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{\mathrm{LambertW}\left(-e^{-x}\right)^3}{6} + \frac{3\,\mathrm{LambertW}\left(-e^{-x}\right)^2}{4} + \mathrm{LambertW}\left(-e^{-x}\right) + \_C1\,x + \_C2 \quad \textbf{(1)}$$

```
> plot([seq(rhs(subs(_C1=c1, _C2=c1·10, result)), c1=-1..1)], x=0..10)
```

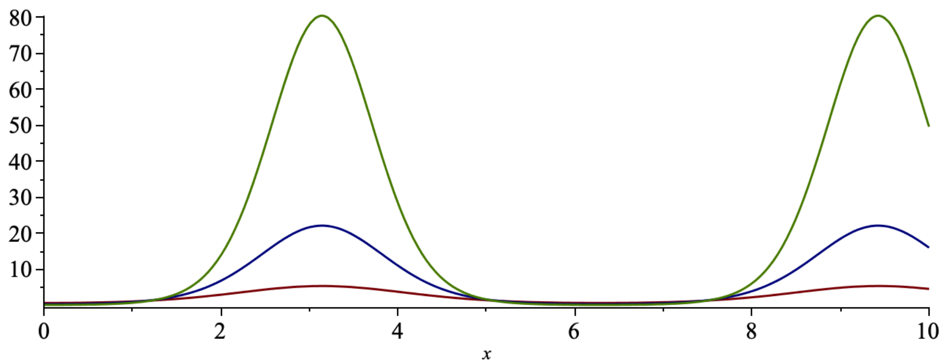



```
> de2 := y(x)·y''(x) − (y'(x))^2 − y(x)·y'(x)·cot(x) = 0;
  result := simplify(dsolve(de2))
```

$$de2 := y(x)\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) - \left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)^2 - y(x)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)\cot(x) = 0$$

$$result := y(x) = e^{-\_C1\,\cos(x)}\,\_C2 \quad \textbf{(2)}$$

```
> plot([seq(rhs(subs(_C1=c1, _C2=c1+1, result)), c1=1..3)], x=0..10)
```



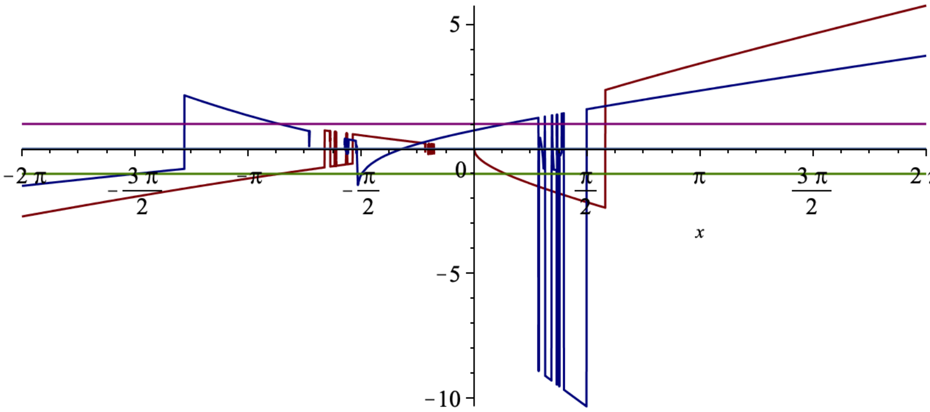
```
> de3 := y''(x)·(1 + (y(x))^2) + (y'(x))^3 = 0;
  result := [dsolve(de3, y(x))];
```

$$de3 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right)\left(1+y(x)^2\right)+\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)^3=0$$

$$result := \left[y(x)=\_C1,\ y(x)=\tan\left(RootOf\left(2\sin(\_Z)\ \_C1+2\sin(\_Z)\ \_Z-\ln\left(\frac{1}{\cos(\_Z)^2}\right)\cos(\_Z)\right.\right.\right. \tag{3}$$

$$\left.\left.\left.-2\ \_C2\cos(\_Z)-2\,x\cos(\_Z)\right)\right)\right]$$

```
> plot([seq(rhs(subs(_C1 = c1, _C2 = c1, result[2])), c1 = 0..1), seq(rhs(subs(_C1 = c1, result[1])), c1 = -1..1)], x)
```

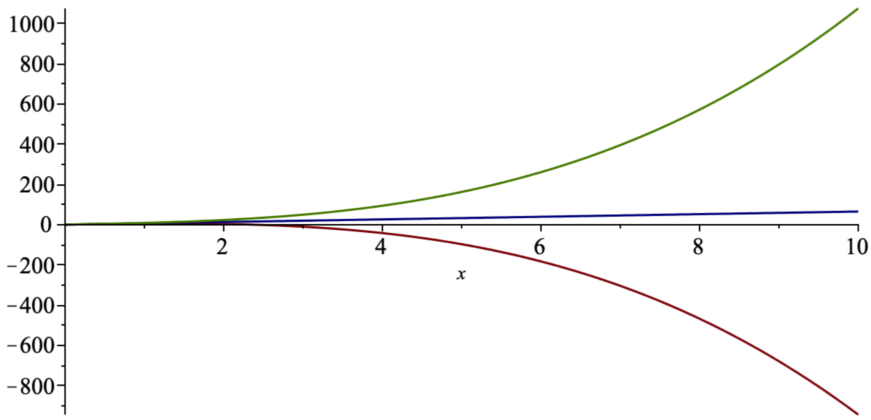



```
> de4 := y''(x) = 3·(y'(x)/x - y(x)/x^2) + 2/x^3·sin(1/x^2);
  result := simplify(dsolve(de4, y(x)))
```

$$de4 := \frac{d^2}{dx^2}\,y(x)=\frac{3\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)}{x}-\frac{3\,y(x)}{x^2}+\frac{2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^3}$$

$$result := y(x)=x^3\ \_C2+\_C1\ x-\frac{x^3\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{2} \tag{4}$$

```
> plot([seq(rhs(subs(_C1 = c1 + 5, _C2 = c1 - 2, result)), c1 = 1..3)], x = 0..10)
```



Задание 2. Найдите общее решение уравнения и сравните с результатом, полученным в системе Maple.

2.1. $y'''x\ln x = y''$.

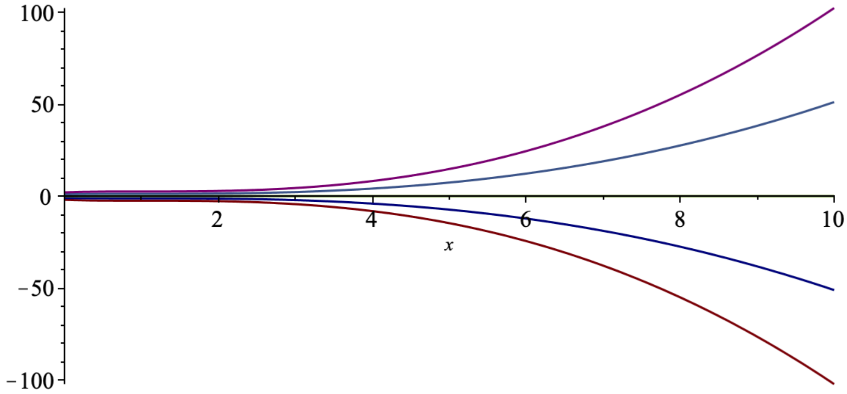
```
> de := y'''(x)·x·ln(x) = y''(x);
```

$$de := \left(\frac{d^3}{dx^3} y(x)\right) x \ln(x) = \frac{d^2}{dx^2} y(x) \qquad (1)$$

```
> result := simplify(dsolve(de))
```

$$result := y(x) = \frac{\_C1 \ln(x)\, x^2}{2} - \frac{3\, \_C1\, x^2}{4} + \_C2\, x + \_C3 \qquad (2)$$

```
> plot([seq(rhs(subs(_C1 = c, _C2 = c, _C3 = c, result)), c = -2..2)], x = 0..10);
```



Задание 3. Найдите общее решение дифференциального уравнения.

3.1. $y'' + 2y' = 4e^{x}(\sin x + \cos x)$.

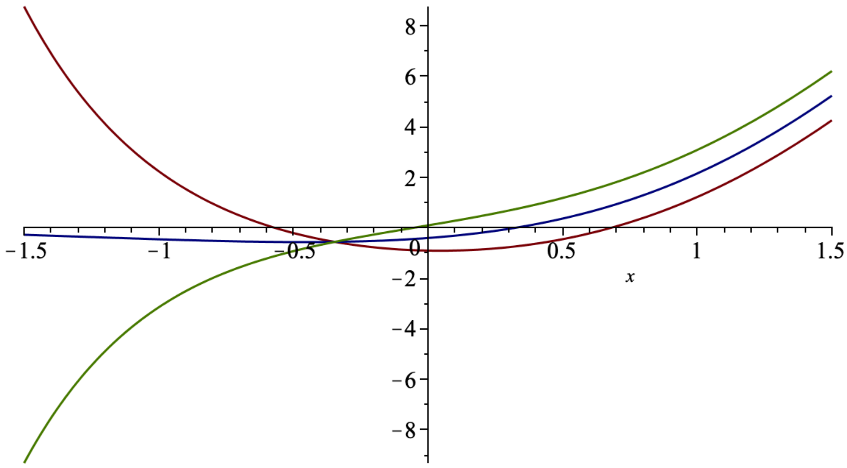
```
> de := y''(x) + 2·y'(x) = 4·exp(x)·(sin(x) + cos(x));
```

$$de := \frac{d^2}{dx^2} y(x) + 2\, \frac{d}{dx} y(x) = 4\, e^{x}\, (\sin(x) + \cos(x)) \qquad (1)$$

```
> result := simplify(dsolve(de));
```

$$result := y(x) = -\frac{e^{-2x}\left(\left(\frac{4\cos(x)}{5} - \frac{12\sin(x)}{5}\right) e^{3x} - 2\, \_C2\, e^{2x} + \_C1\right)}{2} \qquad (2)$$

```
> plot([seq(rhs(subs(_C1 = c, _C2 = c, result)), c = -1..1)], x = -1.5..1.5)
```



7. Системы дифференциальных уравнений

Задание 1. Для данных систем установите тип фазовых картин и изобразите их. Сравните найденные собственные значения и векторы матрицы системы с результатами, полученными в Maple.

Найдите общее решение системы и выделите фундаментальную систему решений. Сравните с результатами, полученными в Maple.

Постройте в прямоугольной системе Oxy_1y_2 пространственную кривую, удовлетворяющую системе, и содержащую точку $(0,0,0)$.

1.1. $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 7y_1 + 3y_2 \end{cases}$

```
> de := {y1'(x) = -2·y1(x) + 2·y2(x), y2'(x) = 7·y1(x) + 3·y2(x)};
  result := dsolve(de, [y1(x), y2(x)]);
```

$$de := \left\{\frac{d}{dx}\,y1(x) = -2\;y1(x) + 2\;y2(x),\ \frac{d}{dx}\,y2(x) = 7\;y1(x) + 3\;y2(x)\right\}$$

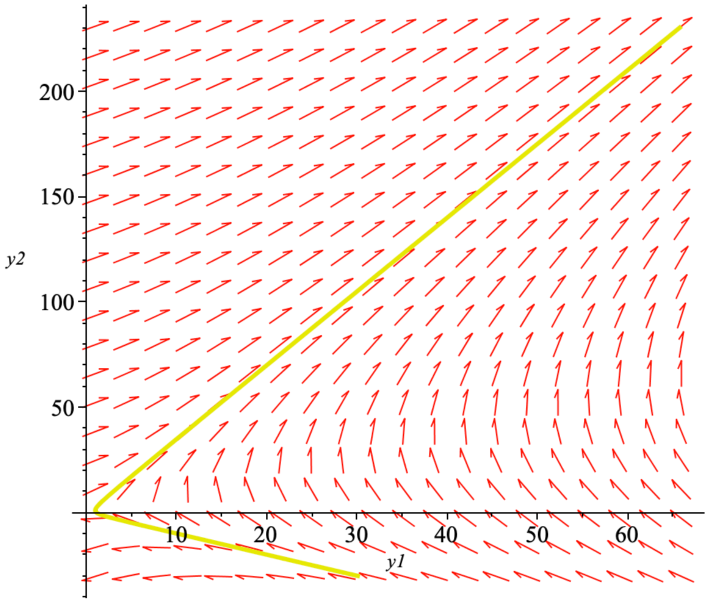
$$result := \left\{y1(x) = -\_C1\;e^{-4\,x} + \frac{2\;\_C2\;e^{5\,x}}{7},\ y2(x) = \_C1\;e^{-4\,x} + \_C2\;e^{5\,x}\right\} \qquad \textbf{(1)}$$

```
> A := Matrix([[-2, 2], [7, 3]]);
  LinearAlgebra[Eigenvectors](A);
```

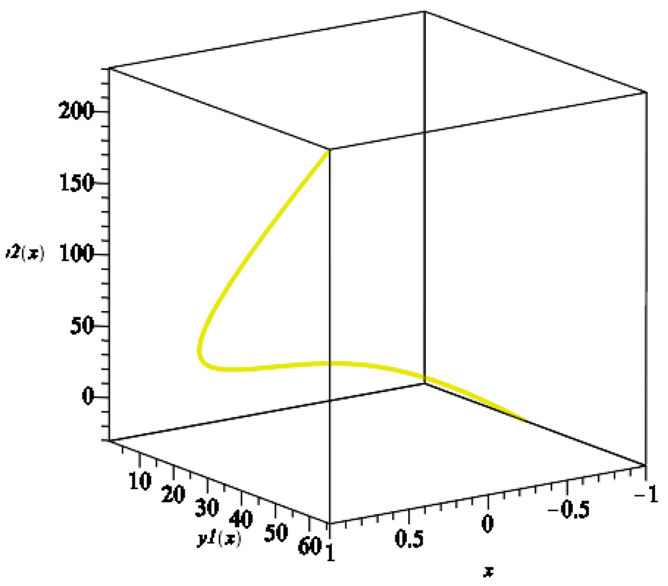
$$A := \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{7} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

```
> DEtools[phaseportrait](de, [y1(x), y2(x)], -1..1, [[y1(0) = 1, y2(0) = 1]])
```



```
> DEtools[DEplot3d](de, [y1(x), y2(x)], x=-1..1, [[y1(0)=1, y2(0)=1]])
```



Задание 2. Решите систему методом исключений и сравните результат с ответом, полученным Maple.

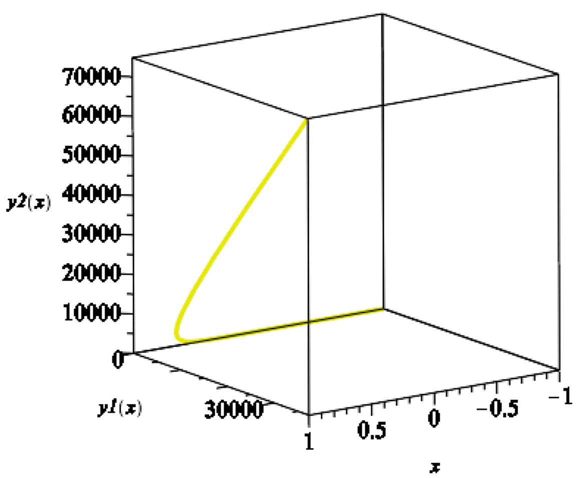
2.1. $\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 3y_2, \\ y_2' = 4y_1 + 9y_2 \end{cases}$

```
> de := {y1'(x)=5·y1(x) + 3·y2(x), y2'(x)=4·y1(x) + 9·y2(x)};
  result = dsolve(de);
```

$$de := \left\{\frac{d}{dx} y1(x) = 5\ y1(x) + 3\ y2(x),\ \frac{d}{dx} y2(x) = 4\ y1(x) + 9\ y2(x)\right\}$$

$$result = \left\{y1(x) = \_C1\ e^{3x} + \_C2\ e^{11x},\ y2(x) = -\frac{2\ \_C1\ e^{3x}}{3} + 2\ \_C2\ e^{11x}\right\} \quad \textbf{(1)}$$

```
> DEtools[DEplot3d](de, [y1(x), y2(x)], x=-1..1, [[y1(0)=1, y2(0)=1]]);
```



Задание 3. Решите задачу Коши с помощью методов Лагранжа и Даламбера. Сравните с результатом, полученным в Maple. Сделайте чертеж.

1.1. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y + 1; \end{cases}$

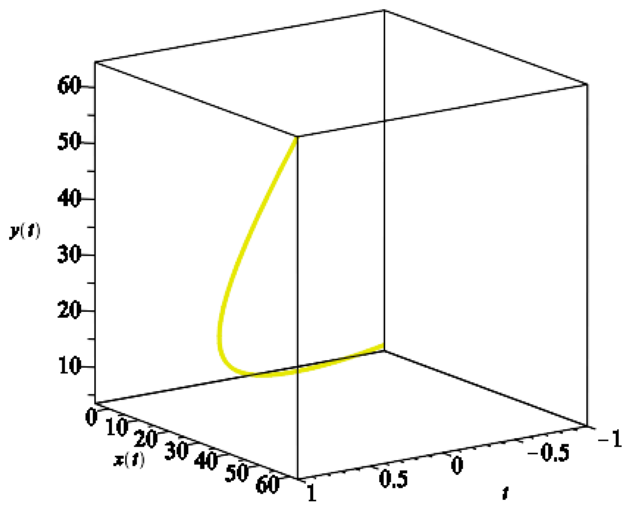
$x(0) = 0, y(0) = 5.$

```
> eq1 := x'(t) = x(t) + 2·y(t) :
  eq2 := y'(t) = 2·x(t) + y(t) + 1 :
  de := {eq1, eq2, x(0) = 0, y(0) = 5};
  result := [dsolve(de, [x(t), y(t)])];
```

$$de := \{x(0) = 0, y(0) = 5, D(x)(t) = x(t) + 2\ y(t), D(y)(t) = 2\ x(t) + y(t) + 1\}$$

$$result := \left[\left\{x(t) = -2\ e^{-t} + \frac{8\ e^{3\ t}}{3} - \frac{2}{3}, y(t) = 2\ e^{-t} + \frac{8\ e^{3\ t}}{3} + \frac{1}{3}\right\}\right] \quad \textbf{(1)}$$

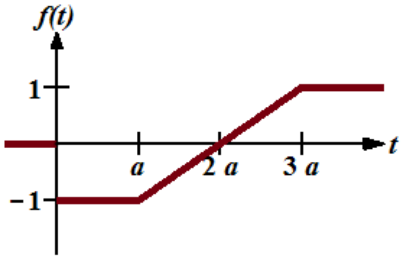
```
> DEtools[DEplot3d]({eq1, eq2}, [x(t), y(t)], t=-1..1, [[x(0)=1, y(0)=5]]);
```



8. Элементы операционного исчисления

Задание 1. По данному графику оригинала найти изображение. Получить ответ в системе Maple и сравнить результаты.

1.1.




```
> a := 1;
```

$$a := 1 \tag{1}$$

```
> f := piecewise(x < 0, 0, 0 ≤ x ≤ a, -1, a < x ≤ 3·a, x − 2·a, 3·a < x, 1);
```

$$f := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -1 & 0 \le x \le 1 \\ x - 2 & 1 < x \le 3 \\ 1 & 3 < x \end{cases} \tag{2}$$

```
> inttrans[laplace](f, x, p);
```

$$-\frac{1}{p} + \frac{-e^{-3\,p} + e^{-p}}{p^2} \tag{3}$$

Задание 2. Найдите оригинал по заданному изображению «вручную» и с помощью команды Maple. При разложении на сумму простейших дробей контролируйте свои результаты с результатами, полученными системой.

2.1. $\dfrac{4p+5}{(p-2)\left(p^2+4p+5\right)}$.

```
> f := (4·p + 5)/((p − 2)·(p^2 + 4·p + 5));
```

$$f := \frac{4\,p+5}{(p-2)\,\left(p^2+4\,p+5\right)} \tag{1}$$

```
> inttrans[invlaplace](f, p, x);
```

$$\frac{13\,e^{2\,x}}{17} + \frac{(-13\,\cos(x) + 16\,\sin(x))\,e^{-2\,x}}{17} \tag{2}$$

Задание 3. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условиям $y(0)=0$ и $y'(0)=0$, операторным методом (используя интеграл Дюамеля) и методом Лагранжа. Сравните результаты и проконтролируйте их с помощью системы Maple.

3.1. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^t}{1+t^2}$.

```
> de := y''(x) - 2·y'(x) + y(x) = exp(x)/(1 + x^2);
```

$$de := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) - 2\, \frac{d}{dx}\, y(x) + y(x) = \frac{e^x}{x^2+1} \qquad (1)$$

```
> dsolve([de, y(0) = 0, y'(0) = 0], y(x))
```

$$y(x) = -\frac{e^x\, \left(-2\,\arctan(x)\,\, x + \ln\left(x^2+1\right)\right)}{2} \qquad (2)$$

Задание 4. Операторным методом решите задачу Коши и сравните с решением Maple.

$$4.1. \begin{cases} y'' + y = 6e^{-t}, \\ y(0) = 3, y'(0) = 1. \end{cases}.$$


```
> de := y''(x) - 2·y'(x) + y(x) = exp(x)/(1 + x^2);
```

$$de := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) - 2\, \frac{d}{dx}\, y(x) + y(x) = \frac{e^x}{x^2+1} \qquad (1)$$

```
> dsolve([de, y(0) = 0, y'(0) = 0], y(x))
```

$$y(x) = -\frac{e^x\, \left(-2\,\arctan(x)\,\, x + \ln\left(x^2+1\right)\right)}{2} \qquad (2)$$

Задание 5. Решите систему дифференциальных уравнений операторным методом. Сравните с решением, полученным в Maple.

$$5.1. \begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x - y + 1; \end{cases}$$

$$x(0) = -1, y(0) = 2.$$

```
> eq1 := x'(t) = x(t) + 3·y(t) + 2;
```

$$eq1 := D(x)(t) = x(t) + 3\, y(t) + 2 \qquad (1)$$

```
> eq2 := y'(t) = x(t) - y(t) + 1;
```

$$eq2 := D(y)(t) = x(t) - y(t) + 1 \qquad (2)$$

```
> dsolve([eq1, eq2, x(0) = -1, y(0) = 2], [x(t), y(t)]);
```

$$\left\{x(t) = \frac{15\, e^{2\,t}}{8} - \frac{13\, e^{-2\,t}}{8} - \frac{5}{4}, y(t) = \frac{5\, e^{2\,t}}{8} + \frac{13\, e^{-2\,t}}{8} - \frac{1}{4}\right\} \qquad (3)$$

9. Элементы комплексного анализа

Задание 1. Найдите все значения корня «вручную», в Maple и постройте соответствующие им точки в комплексной плоскости.

1.1. $\sqrt[4]{-1}.$

```
> a := root[4](-1);
  evalc(a);
```

$$a := (-1)^{1/4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{I\sqrt{2}}{2} \qquad (1)$$

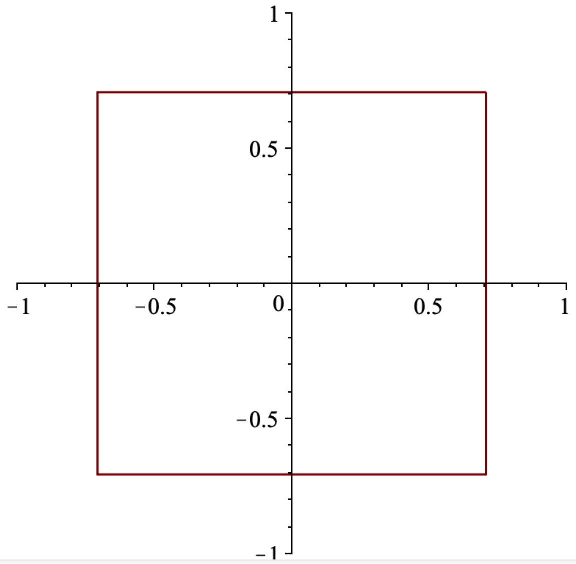
```
> w := k -> root[4](abs(-1)) · (cos((argument(-1) + 2·Pi·k)/4) + I·sin((argument(-1) + 2·Pi·k)/4));
```

$$w := k \mapsto |-1|^{1/4}\left(\cos\left(\frac{\arg(-1)}{4} + \frac{\pi\,k}{2}\right) + \mathrm{I}\,\sin\left(\frac{\arg(-1)}{4} + \frac{\pi\,k}{2}\right)\right) \qquad (2)$$

```
> values := [seq(w(k), k=0..4)];
```

$$values := \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\mathrm{I}\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\mathrm{I}\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\mathrm{I}\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\mathrm{I}\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\mathrm{I}\sqrt{2}}{2}\right] \qquad (3)$$

```
> plots[complexplot](values, -1..1, -1..1);
```



Задание 2. Представьте выражение в алгебраической форме. Изобразите точки, соответствующие аргументу и значению функции, в одной системе координат.

2.1. $\sin(\pi/4 + 2i).$

> $z := \frac{\mathrm{Pi}}{4} + 2 \cdot I;$

$$z := \frac{\pi}{4} + 2\,\mathrm{I} \tag{1}$$

> $complex\_exp := z \rightarrow \exp(\mathrm{Re}(z)) \cdot (\cos(\mathrm{Im}(z)) + I \cdot \sin(\mathrm{Im}(z)));$

$$complex\_exp := z \mapsto \mathrm{e}^{\Re(z)}\,\left(\cos(\Im(z)) + \mathrm{I}\,\sin(\Im(z))\right) \tag{2}$$

> $complex\_sin := z \rightarrow \frac{(complex\_exp(I \cdot z) - complex\_exp(-I \cdot z))}{2 \cdot I};$

$$complex\_sin := z \mapsto -\frac{\mathrm{I}}{2}\,\left(complex\_exp(\mathrm{I}\,z) - complex\_exp(-\mathrm{I}\,z)\right) \tag{3}$$

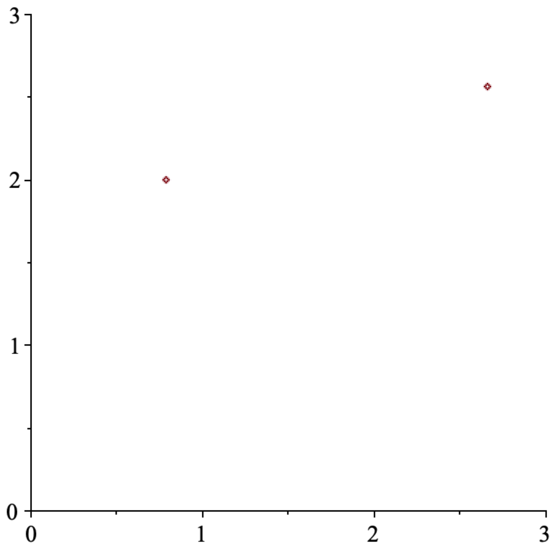
> $val := evalc(complex\_sin(z));$

$$val := \frac{\mathrm{e}^{-2}\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{2}}{4} + \mathrm{I}\,\left(-\frac{\mathrm{e}^{-2}\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{2}}{4}\right) \tag{4}$$

> $is(val = evalc(\sin(z)));$

$$true \tag{5}$$

> $plots[complexplot]([z, val], 0..3, 0..3, style = point);$



Задание 3. Представьте выражение в алгебраической форме и получите результат в Maple. Найдите его главное значение.

3.1. $\mathrm{Arctg}\dfrac{1 - i\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\sqrt{3} + 1 + i}$.

> $z := \frac{(1 - I \cdot (\sqrt{3} - 1))}{\sqrt{3} + 1 + I};$

$$z := \frac{1 - \mathrm{I}\,\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\sqrt{3} + 1 + \mathrm{I}} \tag{1}$$

> $complex\_ln := z \rightarrow \ln(\mathrm{abs}(z)) + I \cdot (\mathrm{argument}(z)\ +\ 2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot k);$

$$complex\_ln := z \mapsto \ln(|z|) + \mathrm{I}\,\left(arg(z) + 2\,\pi\,k\right) \tag{2}$$

> $complex\_arctg := z \rightarrow -\frac{I}{2} \cdot complex\_ln\left(\frac{(1 + I \cdot z)}{(1 - I \cdot z)}\right);$

$$complex\_arctg := z \mapsto -\frac{\mathrm{I}}{2}\,complex\_ln\left(\frac{1 + \mathrm{I}\,z}{1 - \mathrm{I}\,z}\right) \tag{3}$$

> $val := simplify(evalc(complex\_arctg(z)));$

$$val := \frac{\pi}{12} + \pi\,k - \frac{\mathrm{I}\,\ln(2)}{2} \tag{4}$$

```
> main_val := subs(k=0, val);
```

$$main\_val := \frac{\pi}{12} - \frac{\mathrm{I}\ \ln(2)}{2} \qquad (5)$$

```
> is(main_val = evalc(arctan(z)));
```

$$true \qquad (6)$$

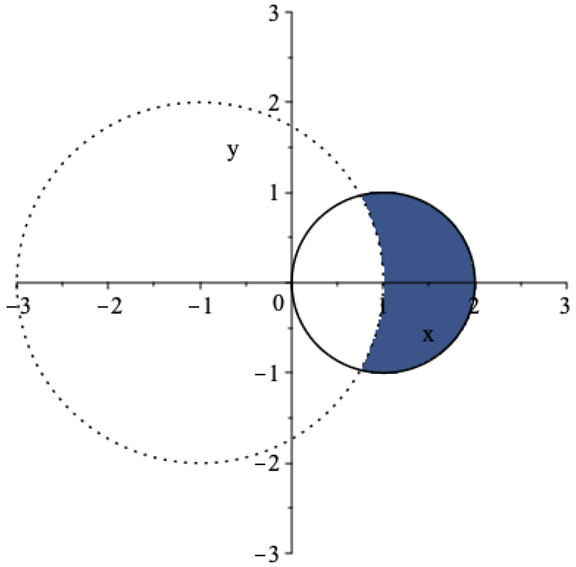
Задание 4. Изобразите области, заданные неравенствами.

4.1. 1) $|z-1| \le 1, |z+1| > 2.$ 2) $|z-i| \le 1, 0 < \arg z \le \frac{\pi}{4}.$

$> ineqs := [|z-1| \le 1,\ |z+1| > 2]:$

$> transformed\_ineqs := \left[\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \le 1,\ \sqrt{(x+1)^2 + y^2} > 2\right]:$

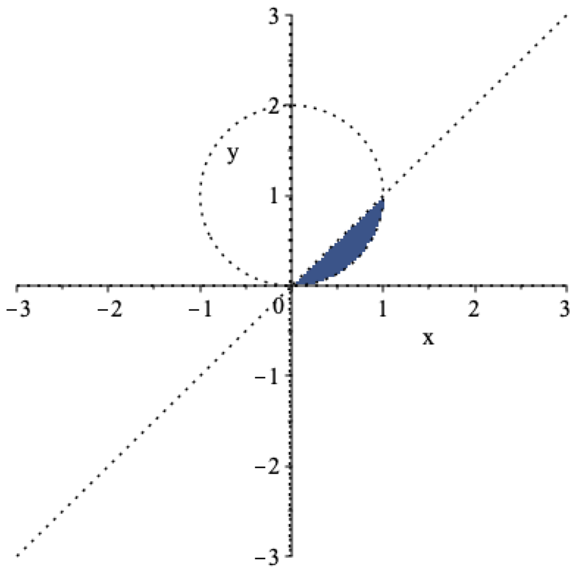
```
> plots[inequal](transformed_ineqs, x=-3..3, y=-3..3)
```



$> ineqs := \left[|z-i| < 1,\ 0 < \mathrm{argument}(z) < \frac{\mathrm{Pi}}{4}\right]:$

$> transformed\_ineqs := \left[\sqrt{x^2 + (y-1)^2} < 1,\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) < \frac{\mathrm{Pi}}{4},\ 0 < \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right]:$

```
> plots[inequal](transformed_ineqs, x=-3..3, y=-3..3);
```



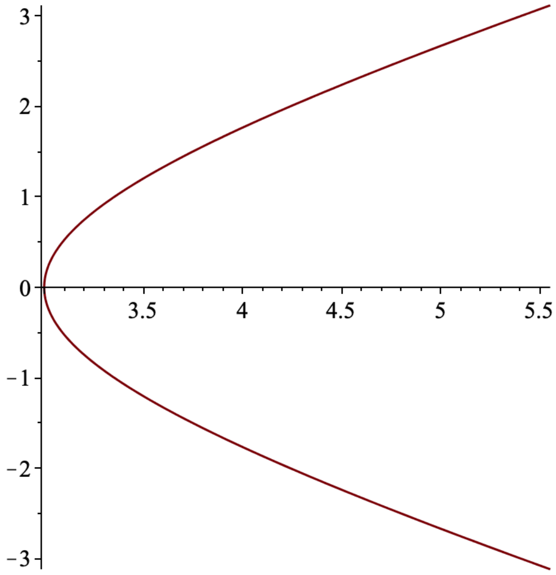
Задание 5. Определите вид кривой. Сделайте чертеж.

5.1. $z = 3\sec t + i2\,\mathrm{tg}\,t$.

```
> z := 3·sec(t) + 2·I·tan(t);
```

$$z := 3\sec(t) + 2\,\mathrm{I}\tan(t) \quad (1)$$

```
> plots[complexplot](z, t=-1..1)
```



Задание 6. Восстановите аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной $u(x,y)$ или мнимой $v(x,y)$ части и значению $f(z_0)$.

6.1. $u = x^2 - y^2 + x, f(0) = 0.$

```
> u := x^2 - y^2 + x;
```

$$u := x^2 - y^2 + x \quad (1)$$

```
> eq := diff(f(z), z) = simplify(diff(u, x) - I·diff(u, y), {x + I·y = z});
```

$$eq := \frac{d}{dz} f(z) = 1 + 2\,z \quad (2)$$

```
> dsolve([eq, f(0) = 0], f(z))
```

$$f(z) = z^2 + z \quad (3)$$

Задание 8. Найдите все лорановские разложения заданной функции по степеням z. Получите о`твет в системе Maple.

8.1. $\dfrac{z-4}{z^4 + z^3 - 2z^2}$.

```
> f(z) := (z - 4)/(z^4 + z^3 - 2·z^2);
```

$$f := z \to \frac{z-4}{z^4 + z^3 - 2\,z^2} \quad (1)$$

```
> numapprox[laurent](f(z), z, 10)
```

$$2\,z^{-2} + \frac{1}{2}\,z^{-1} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8}\,z + \frac{17}{16}\,z^2 + \frac{31}{32}\,z^3 + \frac{65}{64}\,z^4 + \frac{127}{128}\,z^5 + \frac{257}{256}\,z^6 + \frac{511}{512}\,z^7 + O(z^8) \quad (2)$$

Задание 9. Найдите все лорановские разложения данной функции по степеням $z - z_0$.

9.1. $\dfrac{z+1}{z(z-1)}, z_0 = 1+2i.$

```
> f(z) := (z + 1)/(z·(z − 1));
```

$$f := z \to \frac{z+1}{z\ (z-1)} \qquad \mathbf{(1)}$$

```
> subs(z − 1 − 2·I = z − z0, numapprox[laurent](f(z), z = 1 + 2·I, 10))
```

$$-\frac{1}{5} - \frac{3\ \mathrm{I}}{5} + \left(\frac{19}{50} - \frac{4\ \mathrm{I}}{25}\right)(z - z0) + \left(\frac{11}{125} + \frac{117\ \mathrm{I}}{500}\right)(z - z0)^2 + \left(-\frac{681}{5000} + \frac{24\ \mathrm{I}}{625}\right)(z - z0)^3 + \left(-\frac{41}{3125} - \frac{3733\ \mathrm{I}}{50000}\right)(z - z0)^4 + \left(\frac{19369}{500000} - \frac{44\ \mathrm{I}}{15625}\right)(z - z0)^5 + \left(-\frac{29}{78125} + \frac{95917\ \mathrm{I}}{5000000}\right)(z - z0)^6 + \left(-\frac{458081}{50000000} - \frac{336\ \mathrm{I}}{390625}\right)(z - z0)^7 + \left(\frac{1199}{1953125} - \frac{2136933\ \mathrm{I}}{500000000}\right)(z - z0)^8 + \left(\frac{9886969}{5000000000} + \frac{3116\ \mathrm{I}}{9765625}\right)(z - z0)^9 + \mathrm{O}\left((z - z0)^{10}\right) \qquad \mathbf{(2)}$$

Задача 11. Вычислите интеграл.

11.1. $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{z\left(z^2+1\right)}.$

```
> f(z) := 1/(z·(z^2 + 1));
  singular(f(z));
```

$$f := z \to \frac{1}{z\ (z^2+1)}$$

$$\{z = 0\},\ \{z = -\mathrm{I}\},\ \{z = \mathrm{I}\} \qquad \mathbf{(1)}$$

```
> singularities := [0, -I, I]
```

$$singularities := [0, -\mathrm{I}, \mathrm{I}] \qquad \mathbf{(2)}$$

```
> c(z) := is(abs(z) < 1/2)
```

$$c := z \to is\left(|z| < \frac{1}{2}\right) \qquad \mathbf{(3)}$$

```
> 2·Pi·I·add(residue(f(z), z = a), a = select(c, singularities));
```

$$2\ \mathrm{I}\ \pi \qquad \mathbf{(4)}$$

Задание 12. Вычислите интеграл.

12.1. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z^2 - 1}{z^3}\mathrm{d}z.$

```
> f(z) := (cos(z^2) − 1)/z^3;
  singular(f(z));
```

$$f := z \to \frac{\cos(z^2) - 1}{z^3}$$

$$\{z = 0\} \qquad \mathbf{(1)}$$

```
> singularities := [0]
                              singularities := [0]                        (2)
> c(z) := is(abs(z) < 1)
                              c := z→is(|z| < 1)                           (3)
> 2·Pi·I·add(residue(f(z), z=a), a=select(c, singularities));
                                      0                                    (4)
```

Задача 13. Вычислите интеграл.

13.1. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{3\pi z - \sin 3\pi z}{z^2 - \operatorname{sh}^2 \pi^2 z} \mathrm{d}z.$

```
> f(z) := (3·Pi·z - sin(3·Pi·z))/(z^2 - sinh(Pi^2·z)^2);
  evalf(eval(singular(f(z))));
                        f := z→(3 π z - sin(3 π z))/(z^2 - sinh(π^2 z)^2)
                              {z = 0.}, {z = 0.}                           (1)
> singularities := [0.]
                              singularities := [0.]                        (2)
> c(z) := is(abs(z) < 0.2)
                              c := z→is(|z| < 0.2)                         (3)
> 2·Pi·I·add(residue(f(z), z=a), a=select(c, singularities));
                                      0                                    (4)
```

Задание 14. Вычислите интеграл.

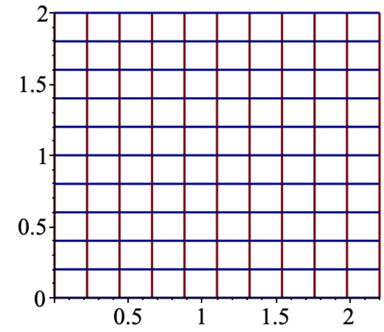
14.1. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2+\sqrt{3}\sin t}.$

```
> f(t) := 1/(2 + sqrt(3)·sin(t));
                              f := t→1/(2 + √3 sin(t))                     (1)
> int(f(t), t=0..2·Pi)
                                     2 π                                   (2)
```

Задание 15. Постройте образ квадрата, прилежащего к координатным осям в 1-й четверти, с вершиной $(2, 2+2i)$ при заданном преобразовании.

15.1. $z \to z^2$.

```
> plots[conformal](z, z=0..2.2+2·I);
```




```
> plots[conformal](z^2, z=0..2.2+2·I)
```