Calcul Numeric – Tema #2

Ex.1 Folosind metoda bisecţiei pentru $k = 2$ să se aproximeze manual soluţia ecuaţiei $8x^3+4x-1 = 0$ din intervalul $[0, 1]$. Să se evalueze eroarea de aproximare.

Ex.2 Fie ecuaţia $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$

a. Să se construiască în Matlab o procedură cu sintaxa $[x_{aprox}] =$ **MetBisectie**(f, a, b, ε).

b. Într-un fişier script să se construiască în Matlab graficul funcţiei $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$ pe intervalul $[0, 4]$. Să se calculeze soluţia aproximativă x_{aprox} cu eroarea $\varepsilon = 10^{-5}$, apelând procedura **MetBisectie** pentru fiecare interval în parte: 1. $[0, 1]$; 2. $[1; 3, 2]$; 3. $[3, 2; 4]$.

c. Să se construiască punctele $(x_{aprox}, f(x_{aprox}))$ calculate la b. în acelaşi grafic cu graficul funcţiei.

Ex.3

a. Să se construiască în Matlab graficele funcţiilor $y = e^x - 2$ şi $y = cos(e^x - 2)$;

b. Să se implementeze în Matlab metoda bisecţiei pentru a calcula o aproximare a soluţiei ecuaţiei $e^x - 2 = cos(e^x - 2)$ cu eroarea $\varepsilon = 10^{-5}$ pe intervalul $x \in [0, 5; 1, 5]$.

Ex.4 Să se găsească o aproximare a valorii $\sqrt{3}$, folosind metoda besecţiei, cu eroarea $\varepsilon = 10^{-5}$.

Ex.5 Fie ecuaţia $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$. Se ştie că ecuaţia are soluţie unică pe intervalul $[0; 2, 5]$. Justificaţi de ce şirul generat de metoda Newton - Raphson nu converge către soluţia din intervalul dat, dacă valoarea de pornire este $x_0 = 2$. Alegeţi o valoare pentru $x_0 \in [0; 2, 5]$, astfel încât şirul construit de metoda N-R să conveargă la soluţia din intervalul dat.

Ex.6 Fie ecuaţia $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$.

a. Să se construiască în Matlab o procedură cu sintaxa $[x_{aprox}] =$ **MetNR**$(f, df, x_0, \varepsilon)$ conform algoritmului metodei Newton-Raphson.

b. Într-un fişier script să se construiască graficul funcţiei $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$ pe intervalul $[0, 4]$. Alegeţi din grafic trei subintervale şi valorile iniţiale x_0 corespunzătoare fiecărui subinterval, astfel încât metoda Newton-Raphson să fie convergentă. Aflaţi cele trei soluţii apelând procedura **MetNR** cu eroarea de aproximare $\varepsilon = 10^{-3}$. Se va folosi criteriul de oprire $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_{k-1}|} < \varepsilon$.

Ex.7 Fie ecuaţia $8x^3 + 4x - 1 = 0, x \in [0, 1]$.

a. Să se demonstreze că ecuaţia dată admite soluţie unică.

b. Să se calculeze x_2 prin metodele Newton-Raphson, secantei şi poziţiei false.

Ex.8 Fie ecuaţia $x^3 - 18x - 10 = 0$.

a. Într-un fişier script să se construiască graficul funcţiei $f(x) = x^3 - 18x - 10$ pe intervalul $[-5, 5]$.

b. Să se construiască în Matlab o procedură cu sintaxa $[x_{aprox}] = \textbf{MetSecantei}(f, a, b, x_0, x_1, \varepsilon)$ conform algoritmului metodei secantei.

c. Să se construiască în Matlab o procedură cu sintaxa $[x_{aprox}] = \textbf{MetPozFalse}(f, a, b, \varepsilon)$ conform algoritmului metodei poziţiei false.

d. Alegeţi din grafic trei subintervale, astfel încât pe fiecare subinterval să existe solţie unică. Aflaţi cele trei soluţii apelând procedura **MetSecantei** cu eroarea de aproximare $\varepsilon = 10^{-5}$. Construiţi punctele $(x_{aprox}, f(x_{aprox}))$ pe graficul funcţiei.

e. Aflaţi cele trei soluţii apelând procedura **MetPozFalse** cu eroarea de aproximare $\varepsilon = 10^{-5}$. Construiţi punctele $(x_{aprox}, f(x_{aprox}))$ pe graficul funcţiei. Să se compare numărul de iteraţii necesare pentru obţinerea soluţiilor cu eroarea dată prin cele două metode.

Ex. 9 Să se rezolve manual conform algoritmilor: metoda Gauss fără pivotare, metoda Gauss cu pivotare parţială şi metoda Gauss cu pivotare totală următoarele sisteme:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_3 = 2 \end{cases} \tag{1}$$

Ex. 10 Să se construiască în Matlab procedura **SubsDesc** conform sintaxei x=**SubsDesc**(A, b) care rezolvă numeric sisteme liniare superior triunghiulare conform algoritmului (metoda substituţiei descendente).

Ex. 11 a. Să se construiască în Matlab trei proceduri **GaussFaraPiv**, **GaussPivPart** şi **GaussPivTot** conform sintaxelor:

$[x]$ =**GaussFaraPiv**(A, b)
$[x]$ =**GaussPivPart**(A, b)
$[x]$ =**GaussPivTot**(A, b)

care returneaza soluţia sistemului $Ax = b$ conform metodelor de eliminare Gauss fără pivotare, Gauss cu pivotare parţială şi respectiv, Gauss cu pivotare totală;

b. Să se apeleze procedurile pentru sistemele de la Ex. 9, apelând cele trei fişiere create la subpunctul *a.*;

c. Să se aplice:

- Metodele Gauss fără pivotare şi cu pivotare parţială pentru sistemul

$$\begin{cases} \varepsilon\, x_1 + x_2 = 1 \\ \quad x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \tag{2}$$

unde $\varepsilon = \mathsf{O}(10^{-20}) \ll 1$.

- Metodele Gauss cu pivotare parţială şi cu pivotare totală pentru sistemul

$$\begin{cases} x_1 + C\, x_2 = C \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \tag{3}$$

unde $C = \mathsf{O}(10^{20}) \gg 1$.

- Verificaţi în Matlab soluţiile şi comparaţi metodele.