Calcul Numeric – Tema #6

Ex. 1 Să se afle funcţia de interpolare spline liniară S asociată funcţiei $f(x) = sin(x)$ relativ la diviziunea $(-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2})$.

Ex. 2 Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.

a) Să se construiască în Matlab procedura **SplineL** având sintaxa $y =$**SplineL**(X, Y, x), conform metodei de interpolare spline liniară. Datele de intrare: vectorul X, componentele căruia sunt nodurile de interpolare, i.e. $a = X_1 < X_2 < ... < X_{n+1} = b$; vectorul Y definit prin $Y_i = f(X_i), i = \overline{1, n+1}$; variabila scalară $x \in [a, b]$. Datele de ieşire: Valoarea numerică y reprezentând valoarea funcţiei spline liniară $S(x)$ calculată conform metodei spline liniare.

b) Fie datele: $f(x) = sin(x)$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; $n = 2, 4, 10$; X - o diviziune echidistantă a intervalului $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cu $n + 1$ noduri; $Y = f(X)$. Să se construiască grafic funcţia f, punctele de interpolare (X, Y) şi un vector S calculat conform procedurii **SplineL**, corespunzător unei discretizări x a intervalului $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cu 100 de noduri. Ind.: $S_i =$ **SplineL**$(X, Y, x_i), i = \overline{1, 100}$.

e) Să se modifice procedura $y =$**SplineL**(X, Y, x), astfel încât parametrii de intrare/ieşire x şi respectiv y să poată fi vectori.

Ex. 3 Să se afle funcţia de interpolare spline pătratică S asociată funcţiei $f(x) = sin(x)$ relativ la diviziunea $(-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2})$.

Ex. 4 Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.

a) Să se construiască în Matlab procedura **SplineP** având sintaxa $[y, z] =$**SplineP**(X, Y, fpa, x), conform metodei de interpolare spline pătratică. Datele de intrare: vectorul X, componentele căruia sunt nodurile de interpolare, i.e. $a = X_1 < X_2 < ... < X_{n+1} = b$; vectorul Y definit prin $Y_i = f(X_i), i = \overline{1, n+1}$; derivata funcţiei f în capătul din stânga a intervalului, $fpa = f'(a)$; variabila scalară $x \in [a, b]$. Datele de ieşire: Valoarile numerice y, z reprezentând valoarile funcţiei spline pătratică $S(x)$ şi derivatei $S'(x)$ calculate conform metodei spline pătratice. Indicaţie: $z = b_j + 2c_j(x - x_j)$.

b) Fie datele: $f(x) = sin(x)$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; $n = 2, 4, 10$; X - o diviziune echidistantă a intervalului $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cu $n + 1$ noduri; $Y = f(X)$. Să se construiască grafic funcţia f, punctele de interpolare (X, Y) şi functia spline $S(x)$ calculată conform procedurii **SplineP**, corespunzător unei discretizări x a intervalului $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cu 100 de noduri.

c) Într-o altă figură să se construiască grafic derivata funcţiei spline şi derivata funcţiei f.

d) Să se modifice procedura $[y, z]$ $=$**SplineP**(X, Y, fpa, x), astfel încât parametrii de intrare/ieşire x şi respectiv y, z să poată fi vectori.

Ex. 5 Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.

a) Să se construiască în Matlab procedura **SplineC** având sintaxa $[y, z, t]$ =**SplineC** (X, Y, fpa, fpb, x), conform metodei de interpolaree spline cubice. Datele de intrare: vectorul X, componentele căruia sunt nodurile de interpolare, i.e. $a = X_1 < X_2 < ... < X_{n+1} = b$; vectorul Y definit prin $Y_i = f(X_i), i = \overline{1, n+1}$; derivata funcţiei f în capetele intervalului, $fpa = f'(a)$ şi $fpb = f'(b)$; variabila scalară $x \in [a, b]$. Obs.: Pentru rezolvarea sistemului din care determină coeficienţii $b_i, i = \overline{1, n+1}$ se va apela metoda Jacobi pentru matrice diagonal dominante. Se va considera $\varepsilon = 10^{-8}$. Datele de ieşire: Valoarile numerice y, z, t reprezentănd valorile funcţiei spline cubice $S(x)$, primei derivate $S'(x)$ şi derivatei a doua $S''(x)$ determinate numeric. Indicaţie: $z = b_j + 2c_j(x - X_j) + 3d_j(x - X_j)^2$; $t = 2c_j + 6d_j(x - X_j)$.

b) Fie datele: $f(x) = sin(x)$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; $n = 2, 4, 10$; X - o diviziune echidistantă a intervalului $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cu $n + 1$ noduri; $Y = f(X)$. Să se construiască grafic funcţia f, punctele de interpolare (X, Y) şi funcţia S calculat conform procedurilor **SplineC**, corespunzător unei discretizări x a intervalului $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cu 100 de noduri.

c) Într-o altă figură să se construiască grafic derivata funcţiei spline şi derivata funcţiei f.

d) Într-o altă figură să se construiască grafic derivata a doua a funcţiei spline şi a funcţiei f.

e) Să se modifice procedura y =**SplineC**(X, Y, fpa, fpb, x), astfel încât parametrii de intrare/ieşire x şi respectiv y să poată fi vectori.

Ex. 6 a) Să se creeze în Matlab procedura **DerivNum** cu sintaxa dy =**DerivNum**$(x, y, metoda)$. Parametrii de intrare sunt: vectorul x, reprezentând discretizarea $x_1 < a = x_2 < \ldots < x_m = b < x_{m+1}$; vectorul y, reprezentând valoarea funcţiei f în x; $metoda \in \{'diferente\ finite\ progresive', 'diferente\ finite\ regresive', 'diferente\ finite\ centrale'\}$. Parametrul de ieşire este vectorul dy calculat conform Algoritmului (Derivare numerică).

Se va folosi instrucţiunea de selecţie **switch** cu sintaxa Matlab:

```
switch variabila_switch
    case variabila_case
        corp de instrucţiuni
    case variabila_case
        corp de instrucţiuni
    ...
    otherwise (optinal)
        corp de instrucţiuni
```

unde **variabila_switch** poate fi un scalar sau un şir de caractere delimitat cu apostrof la început şi la final. Instrucţiunea **switch** alege să execute acel bloc de instrucţiuni pentru care **variabila_switch** coincide cu **variabila_case**.

b) Fie datele: $f(x) = sin(x)$, $a = 0, b = \pi$; $m = 100$;; $y = f(x)$. Să se construiască grafic, derivata funcţiei f şi derivata obţinută numeric în baza procedurii **DerivNum**, pe intervalul $[0, \pi]$.

c) Într-un alt grafic construiţi eroarea, reprezentând diferenţa în modul dintre derivata exactă şi cea calculată numeric.

Ex. 7 a) Să se construiască în Matlab procedura **MetRichardson** cu sintaxa
$[df] =$**MetRichardson**(f, x, h, n), conform algoritmului (Formula de extrapolare Richardson).

b) Să se construiască grafic funcţia $f'(x)$ şi derivata aproximativă determinată în baza procedurii **MetRichardson** pe intervalul $[a, b]$. Consideraţi x o discretizare a intervalului $[a, b]$ cu 100 de noduri şi construiţi vectorul df apelând procedura **MetRichardson** în fiecare nod al discretizării.

Se vor considera următoarele date:

- $a = 0; b = \pi$
- $sin(x)$;
- $n = 4, 6, 8$;
- $\phi(x, h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

c) Să se construiască grafic într-o altă figură eroarea pe intervalul $[a, b]$, reprezentând diferenţa dintre valoarea exactă a derivatei $f'(x)$ şi valoarea aproximativă calculată cu ajutorul procedurii **MetRichardson**.

d) Să se calculeze derivata aproximativă $f''(x)$ prin Metoda Richardson cu ordinul de aproximare $O(h^n)$ apelând aceaşi procedură, $[d2f] =$**MetRichardson**$(f, x, h, n-1)$ şi $\phi(x, h) = \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$.

Obs.: Datorită faptului că formula de aproximare pentru $f''(x)$ este de ordinul doi am suprimat o coloană, astfel că matricea Q_{ij} va avea $n-1$ linii şi $n-1$ coloane.

e) Să se reprezinte grafic pe intervalul $[a, b]$ derivata de ordinul doi exactă şi aproximativă calculată conform procedurii **MetRichardson**.