

1. ANALIZA SEMNALELOR

1.1 Noțiuni de semnal. Caracteristici generale ale semnalelor

Se numește **semnal** o mărime fizică măsurabilă, purtătoare de informație, care poate fi transmisă la distanță, recepționată și/sau prelucrată. Cu alte cuvinte, semnalele sunt mărimi fizice cu ajutorul cărora se transmit mesaje. Clasa semnalelor ce transmit mesaje este foarte largă, în practică întâlnindu-se o varietate aproape infinită de semnale. În cele ce urmează, se va aborda problema modelării formei semnalelor, fără a ne preocupa de conținutul în informație al semnalelor.

Un semnal **unidimensional**, numit și semnal 1D, este o funcție de timp, notată generic prin $s(t)$, $t \in \mathbb{R}$. De regulă, mărimea fizică variabilă reprezentând semnalul este o tensiune electrică. Totuși, în echipamentele de automatizări se utilizează și semnale de altă natură fizică, aşa cum sunt, de exemplu: curentul electric, presiunea aerului instrumental, deplasarea unui corp solid etc. În telecomunicații, semnalul 1D este întotdeauna o tensiune electrică variabilă în timp.

Semnalele se pot aplica unor circuite sau, mai general, unor sisteme dinamice. Fie $u(t)$ semnalul aplicat la intrarea unui sistem și $y(t)$ semnalul obținut la ieșirea acestuia, numit și *răspuns* al sistemului la semnalul de intrare (fig. 1.1).

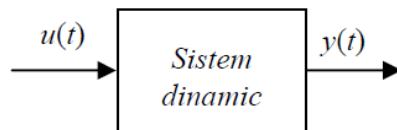


Fig. 1.1. Sistem dinamic.

Sistemele dinamice realizează prelucrarea semnalelor, conform cu funcțiunile realizate de echipamentele electronice în care sunt înglobate. Exemplificăm câteva operații uzuale de prelucrare a semnalelor: integrarea unui semnal, derivarea acestuia, filtrarea (extragerea unor componente spectrale ale semnalului sau, după caz, eliminarea componentelor parazite), modulația semnalelor etc. De fapt, cele mai multe echipamente electronice sunt formate din lanțuri de sisteme dinamice, care realizează prelucrări consecutive ale semnalelor, conform unei „tehnologii” care determină funcțiunile realizate de echipamentul respectiv.

Semnalele pot fi: *cu timp continuu* și *cu timp discret*. În circuitele analogice de procesare, semnalele sunt cu timp continuu, fiind adesea numite *semnale analogice*.

Semnalele numerice pot fi generate de echipamente numerice sau se pot obține din cele analogice prin două operații:

- *eșantionarea* semnalului, adică discretizarea timpului t cu un pas T_e , numit perioadă de eșantionare. Semnalul cu timp discret, $s(kT_e)$, este notat adesea cu $s(k)$, unde k reprezintă timpul discret, adică pasul curent de eșantionare;

- *cuantizarea* semnalului, adică discretizarea amplitudinii eșantioanelor $s(k)$. Se alege un pas

de cuantizare, Δ , iar rezultatul operației de cuantizare este un număr întreg, q , astfel încât produsul $q \cdot \Delta$ să fie cât mai apropiat de amplitudinea eşantionului cuantizat.

Cele două operații se realizează ușual în cadrul unui convertor analogic/numeric (A/N). La ieșirea acestuia se obține un sir de valori numerice, $\{s_k\}$, aferente momentelor de timp discrete k . Acest sir reprezintă un semnal numeric. Într-un sistem numeric (fig. 1.2), procesarea semnalului de intrare, $\{u_k\}$, în vederea obținerii răspunsului $\{y_k\}$ se realizează prin mijloace software.

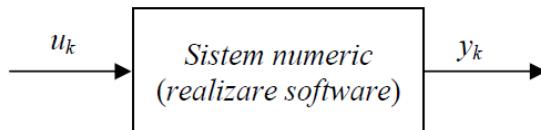


Fig. 1.2. Sistem dinamic.

Semnalele care au o evoluție ce nu este supusă hazardului se numesc **semnale deterministe** și pot fi exprimate prin funcții analitice de timp cu un număr finit de parametri. Alături de acestea, se întâlnesc și semnalele **aleatoare**, a căror evoluție în timp este supusă hazardului, așa cum sunt perturbațiile care afectează sistemele de transmitere și prelucrare a informațiilor.

Semnalele transmise în sistemele de telecomunicații, în scopul realizării schimbului de mesaje între doi sau mai mulți corespondenți au caracter aleator (întâmplător). Pentru verificarea și reglarea funcționării subansamblurilor constitutive ale sistemelor se transmit semnale deterministe, așa numitele semnale test. Cunoscând parametrii caracteristici ai semnalului test introdus într-un echipament sau sistem electronic, precum și funcțiile subansamblurilor acestuia, se măsoară parametrii oscilațiilor de la ieșire stabilindu-se dacă funcționarea este corectă.

Din clasa **semnalelor unidimensionale** menționăm: semnalul vocal, semnalul radio (modulat în amplitudine sau în frecvență), semnalele furnizate de traductoare ale mărimilor fizice uzuale (temperatură, viteza etc.) etc.

Semnalele **bidimensionale**, numite și semnale 2D, sunt, de regulă, imagini. Fie $u(x_1, x_2)$ un semnal bidimensional, în raport cu coordonatele spațiale x_1 și x_2 . Mărimea u reflectă valoarea nivelului de gri în punctul de coordonate x_1 și x_2 .

Analiza semnalelor stabilește posibilitățile de a reprezenta semnalele prin sume discrete sau continue de funcții elementare (sinusoide, exponențiale etc.). Această reprezentare este extrem de utilă în următoarele scopuri practice:

- analiza spectrală a semnalului în scopul determinării intervalului de frecvențe (banda de frecvență) ce trebuie alocat canalului de telecomunicații afectat pentru transmiterea lui.
- determinarea răspunsului circuitelor liniare la un semnal dat. Aceasta se realizează prin determinarea răspunsului circuitului analizat la un semnal elementar și apoi, aplicând principiul superpoziției, se determină răspunsul circuitului la suma de semnale elementare care exprimă semnalul dat.

Analiza semnalelor se simplifică într-o oarecare măsură dacă funcțiiile de timp prin care se exprimă au anumite proprietăți, cum ar fi: *periodicitatea*, *simetria* și *continuitatea*. Vom defini în continuare aceste noțiuni.

Periodicitatea. Un semnal $s(t)$ este periodic dacă funcția de timp care îl descrie satisfac relația:

$$s(t) = s(t \pm kT), \quad (1.1)$$

unde k este un număr natural: $k = 0, 1, 2, \dots$, iar T reprezintă perioada semnalului (intervalul minim după care $s(t)$ își repetă variația în timp).

În figura 1.3 (a, b) și (c, d) sunt reprezentate formele de undă (variațiile în timp) ale unor semnale periodice, respectiv neperiodice.

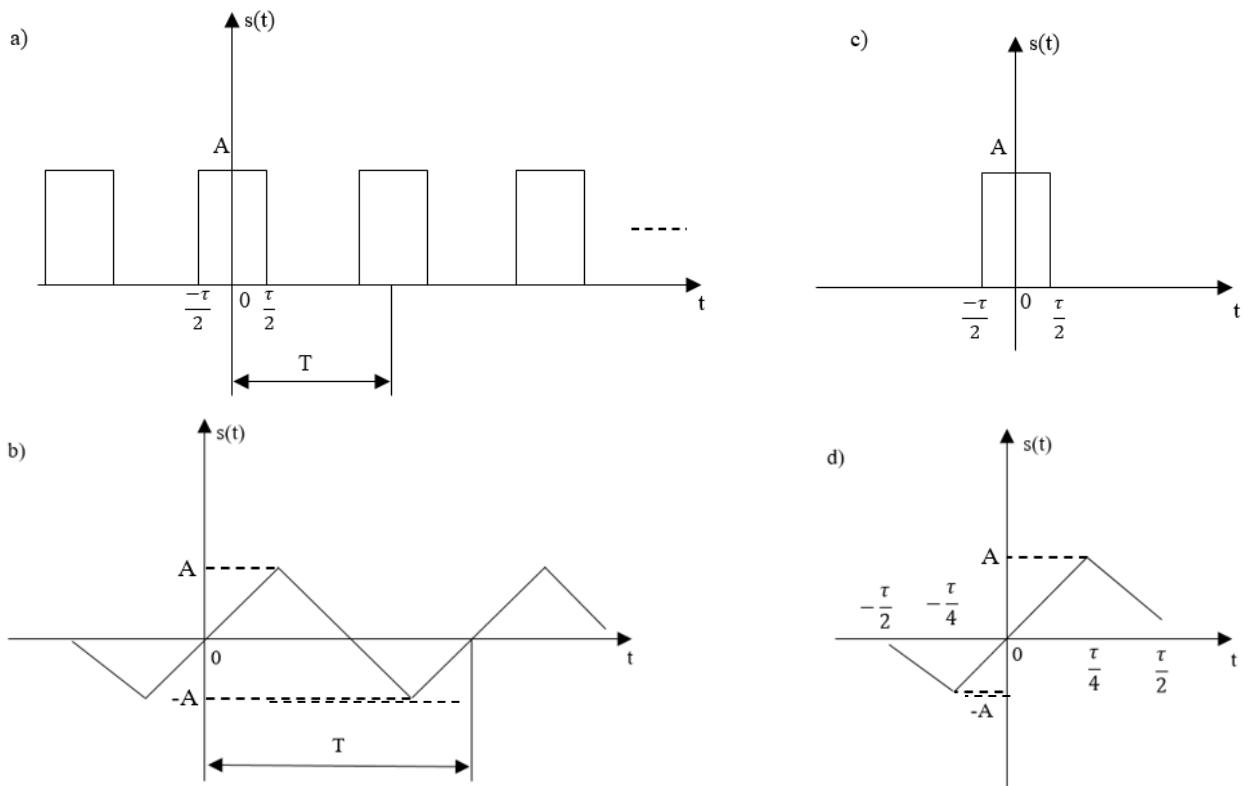


Fig. 1.3. Semnale periodice (a, b) și neperiodice (c, d).

Din aceste reprezentări se observă că semnalul neperiodic poate fi considerat un caz limită al semnalului periodic, la care perioada tinde la infinit. Această afirmație poate fi generalizată pentru orice semnal periodic.

Clasificarea semnalelor în semnale periodice și semnale neperiodice este utilă din punct de vedere teoretic, întrucât instrumentul matematic de analiză a semnalelor diferă în funcție de apartenența lor la una din categoriile menționate mai sus. Astfel, după cum se va vedea ulterior, pentru analiza semnalelor periodice, se utilizează seriile Fourier, iar pentru analiza semnalelor neperiodice transformata Fourier.

Simetria. Conform acestei proprietăți o mare parte a semnalelor poate fi clasificată în *semnale pare* și *semnale impare*. Un semnal este *par* sau *impar*, după cum funcția de timp prin care este definit

satisfac relația:

$$s(-t) = s(t); \quad (1.2)$$

respectiv:

$$s(-t) = -s(t). \quad (1.3)$$

Evident, există semnale care nu pot fi incluse în aceste două categorii. Semnalele din figura 1.3 (a, c) sunt pare, iar cele din figura 1.3 (b, d) sunt impare.

Notând un semnal par cu $s_p(t)$ și unul impar cu $s_i(t)$ se pot demonstra următoarele relații:

$$\int_{-t_0}^{t_0} s_p(t) dt = 2 \int_0^{t_0} s_p(t) dt \quad (1.4)$$

$$\int_{-t_0}^{t_0} s_p(t) dt = 0 \quad (1.5)$$

Vom demonstra relația (1.4):

$$\int_{-t_0}^{t_0} s_p(t) dt = \int_{-t_0}^0 s_p(t) dt + \int_0^{t_0} s_p(t) dt.$$

Făcând substituția $t = -t'$ în prima integrală a membrului drept, aceasta devine:

$$\int_{-t_0}^0 s_p(t) dt = \int_{t_0}^0 s_p(-t')(-dt') = - \int_{t_0}^0 s_p(-t') dt'.$$

Folosind relația (1.2) și inversând limitele de integrare, obținem succesiv:

$$-\int_{t_0}^0 s_p(-t') dt' = -\int_{t_0}^0 s_p(t') dt' = \int_0^{t_0} s_p(t') dt' = \int_0^{t_0} s_p(t) dt$$

și deci:

$$\int_{-t_0}^{t_0} s_p(t) dt = 2 \int_0^{t_0} s_p(t) dt.$$

Relația (1.5) se demonstrează în mod similar.

În analiza spectrală a semnalelor intervine deseori calculul unor integrale de forma (1.4) sau (1.5). Ca atare, clasificarea unor semnale în pare și impare aduce o simplificare substanțială a calculului lor.

Continuitatea. Un semnal $s(t)$ este continuu la momentul $t = t_0$, dacă:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s(t_0 - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s(t_0 + \varepsilon), \quad (1.6)$$

unde ε este o valoare pozitivă.

Conform acestei definiții, semnalele din figura 1.3 (c, b) sunt continue pe tot domeniul lor de definiție, în timp ce semnalul din figura 1.3 (a), prezintă discontinuități la $t = \pm \frac{\tau}{2} + kT$, iar cel din figura 1.3 (c), are două discontinuități la $-\frac{\tau}{2}$ și $+\frac{\tau}{2}$.

Mărimea discontinuității în punctul t_0 este definită prin relația :

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s(t_0 - \varepsilon) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s(t_0 + \varepsilon). \quad (1.7)$$

Pentru semnalul din figura 1.3 (c), $D = -A$ la $t = -\frac{\tau}{2}$ și $D = A$ la $t = \frac{\tau}{2}$.

1.2 Reprezentarea semnalelor în domeniul timp și în domeniul frecvență

Orice semnal $s(t)$ poate fi caracterizat prin două reprezentări:

- a) reprezentarea în domeniul timp;
- b) reprezentarea în domeniul frecvență.

ACESTE reprezentări mai sunt denumite în mod curent și *formă de undă* a semnalului, respectiv *spectrul de frecvențe* al semnalului. Oricare din aceste două reprezentări caracterizează în mod univoc semnalul. Altfel spus, unei reprezentări în domeniul timp îi corespunde o singură reprezentare în domeniul frecvență și, invers, unei reprezentări în frecvență îi corespunde o singură reprezentare în timp.

Trecerea de la o reprezentare la alta se face cu ajutorul seriilor Fourier pentru semnalele periodice, respectiv a transformatei Fourier sau a transformatei Laplace pentru semnalele neperiodice (atunci când seria Fourier, respectiv transformata Fourier sau Laplace există).

Pentru a înțelege această dublă reprezentare a semnalelor, să considerăm un semnal sinusoidal:

$$s(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.8)$$

unde A_0 , ω_0 , și φ_0 reprezintă în ordine: amplitudinea semnalului, frecvența unghiulară sau pulsația, respectiv faza inițială.

Considerând că semnalul descris prin (1.8) este un semnal electric, parametrii ce-l definesc sunt următorii:

- A_0 – amplitudinea semnalului [V] sau [A].

Observație:

În practică este des utilizată valoarea efectivă a semnalului, definită astfel:

$$A_{\text{ef}} = \frac{\sqrt{2}}{2} A_0 = 0,707 \cdot A_0.$$

- ω_0 - pulsația [rad /s]

Cum

$$\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T},$$

se pot pune în evidență alți doi parametrii:

- f - frecvența semnalului [Hz];
- T – perioada semnalului [s].

Relația matematică dintre frecvență și perioadă este următoarea:

$$f = \frac{1}{T}.$$

- φ_0 - faza inițială [rad].

Utilizând parametrii electrici asfel definiți, expresia analitică (1.8) a semnalului sinusoidal are forma:

$$s(t) = \sqrt{2}A_{ef} \sin(2\pi ft + \varphi_0) = \sqrt{2}A_{ef} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right).$$

Forma de undă a semnalului și semnificația parametrilor A_0 , ω_0 , și φ_0 sunt ilustrate în figura 1.4. În această reprezentare variabila independentă este t .

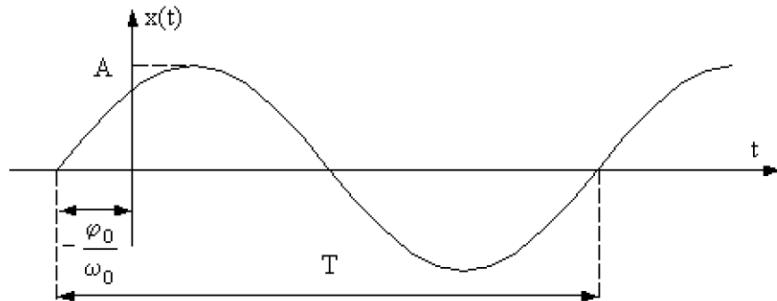


Fig. 1.4. Forma de undă a unui semnal sinusoidal.

Reprezentarea în domeniul frecvență se obține prin considerarea pulsației ω ca variabilă independentă.

Semnalul $s(t)$ este considerat în domeniul frecvență prin parametrii A_0 , ω_0 , φ_0 . Reprezentările grafice corespunzătoare sunt date în figura 1.5.

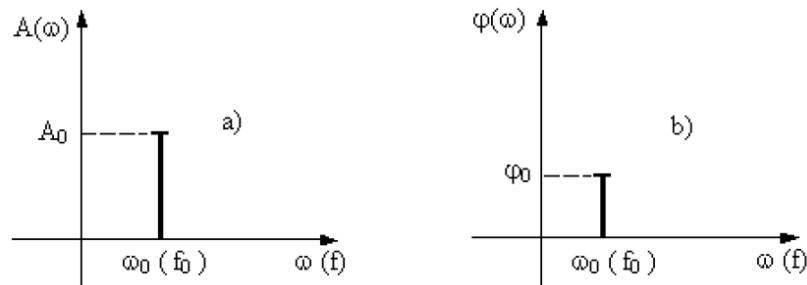


Fig. 1.5. Reprezentarea unui semnal sinusoidal în domeniul frecvență.

În cazul unui semnal exprimat printr-o sumă de semnale sinusoidale:

$$s(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad (1.9)$$

se obțin reprezentările în frecvență din figura 1.6.

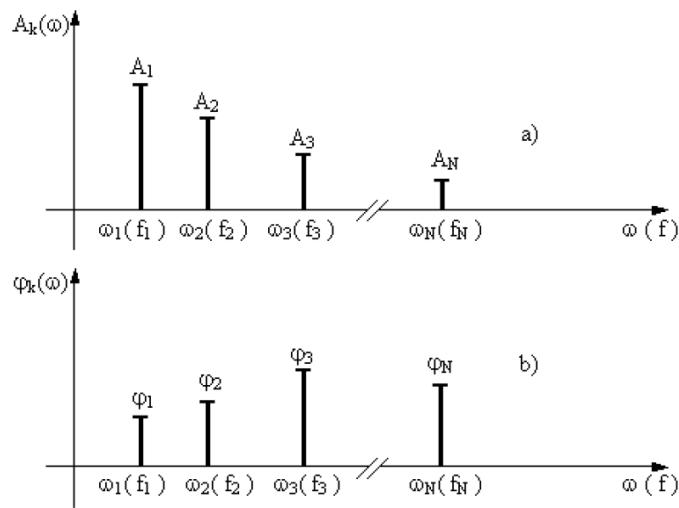


Fig. 1.6. Diagramale spectrale de amplitudini și faze.

Reprezentările grafice din figura 1.5 (a) și 1.6 (a) se numesc spectre de amplitudini, iar cele din figura 1.5 (b) și 1.6 (b) se numesc spectre de faze. Se remarcă faptul că fiecărui semnal sinusoidal îi corespunde câte o linie spectrală în cele două diagrame. Din acest motiv, aceste diagrame spectrale se numesc spectre discrete.

Dacă în expresia (1.9) N tinde la infinit, iar $(\omega_{i+1} - \omega_i)$ tinde la zero, atunci în diagramele spectrale de amplitudini și faze, liniile spectrale devin atât de dense încât nu se poate face nicio distincție între două linii succesive. În acest sens, spectrele discrete $A_i(\omega_i)$ și $\varphi_i(\omega_i)$ se transformă în spectrele continue $A(\omega)$ și $\varphi(\omega)$.

1.3. Semnale elementare

Determinarea răspunsului unui circuit liniar la o excitație oare care este mult simplificată dacă semnalul ce constituie excitația poate fi descompus într-o sumă de semnale elementare. Conform principiului superpoziției răspunsul circuitului la excitația dată va fi suma răspunsurilor la semnalele elementare ce formează excitația. Semnalele elementare trebuie să îndeplinească două cerințe esențiale:

- a) Să fie exprimate prin funcții de timp cât mai simple pentru a simplifica calculul răspunsului circuitului la semnalul elementar;
- b) Funcțiile prin care sunt reprezentate să aparțină unei clase de funcții care să permită descompunerea oricărui semnal într-o sumă convergentă de funcții aparținând acelei clase.

Există un număr de clase de funcții care satisfac aceste cerințe. Dintre acestea cele mai importante sunt funcțiile exponențiale, treaptă unitate și impuls unitate.

Vom prezenta în continuare cele trei tipuri de funcții.

Funcția exponențială este definită prin expresia:

$$f(t) = Ae^{st} \text{ pentru } -\infty < t < \infty, \quad (2.10)$$

unde s este în general o mărime complexă, cunoscută sub denumirea de frecvență complexă.

$$s = \sigma + j\omega. \quad (2.11)$$

Următoarele funcții se pot exprima cu ajutorul funcției exponențiale, dând valori diferite părților reală și imaginară ale lui s :

- a) Constanta, $A = Ae^{0t}$, se obține pentru $\sigma = 0, \omega = 0$;
- b) Exponențială reală, $Ae^{\sigma t}$, se obține pentru $\sigma \neq 0, \omega = 0$;
- c) Funcția cosinusoidală, $2A \cos \omega t = Ae^{j\omega t} + ae^{-j\omega t}$, se obține pentru $\sigma = 0, \omega \neq 0$;
- d) Cosinusoidală variind exponențial, $2Ae^{\sigma t} \cos \omega t = Ae^{(\sigma+j\omega)t} + Ae^{(\sigma-j\omega)t}$, se obține pentru $\sigma \neq 0, \omega \neq 0$.

Varietatea de funcții descrise prin exponențiala Ae^{st} justifică de ce aceasta stă la baza descompunerii oricărui semnal într-o sumă (discretă sau continuă) de funcții exponențiale.

Instrumentul matematic care realizează această descompunere este transformata Laplace.

Clasa funcțiilor ce pot fi reprezentate prin exponentială descrisă prin relația (2.10) este destul de largă, cuprindând toate formele de undă reprezentate în figura 2.5.

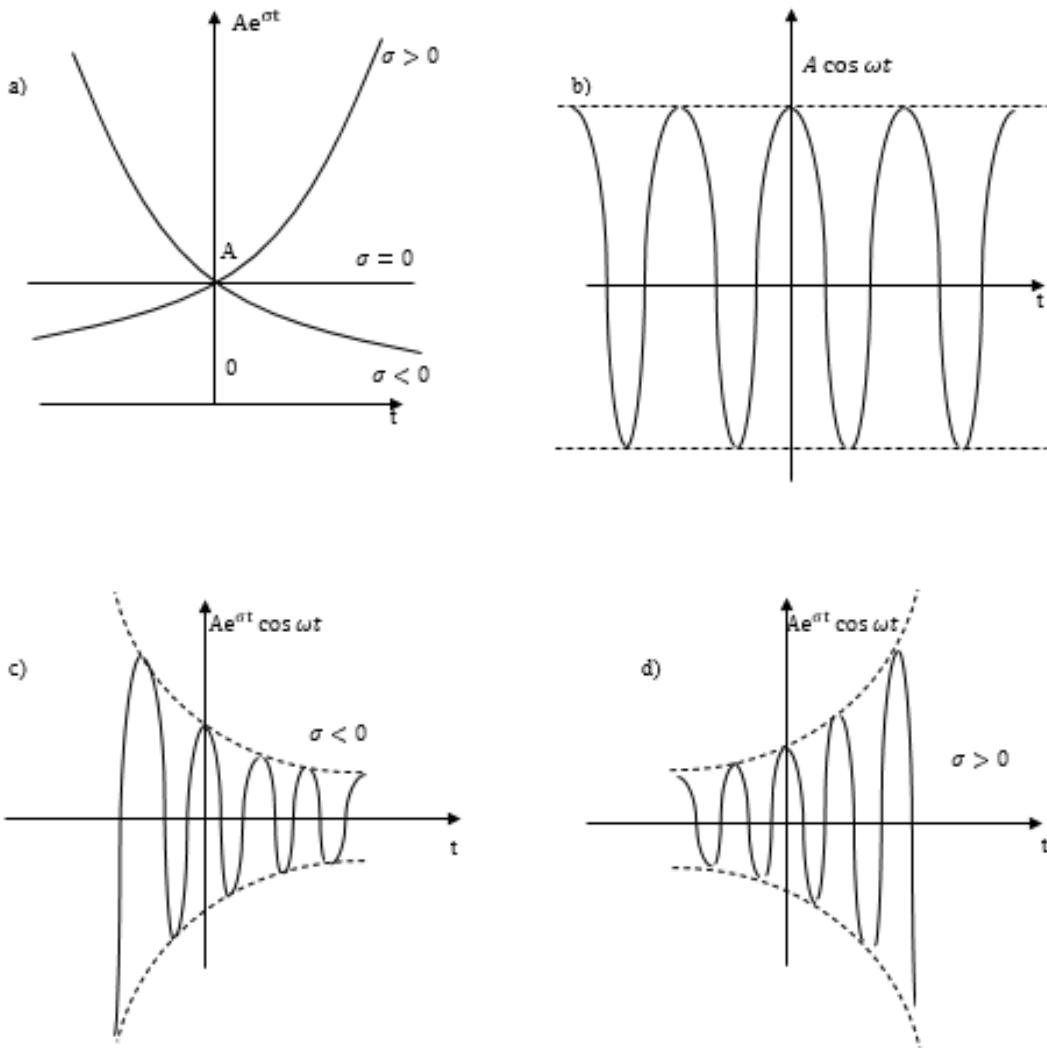


Fig.2.5. Formele de undă descrise de funcția exponențială Ae^{st} .

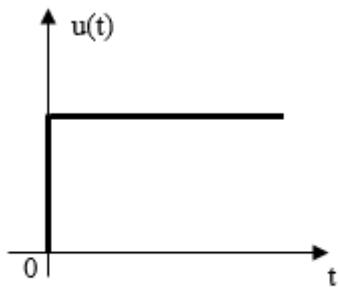
Funcția treaptă unitate reprezentată în figura 2.76 este definită astfel:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t < 0 \\ 1, & \text{pentru } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Prin schimbarea amplitudinii și deplasarea în timp, funcția treaptă servește la descompunerea unui semnal într-o sumă de funcții treaptă sau la compunerea unui semnal din funcții treaptă.

Astfel, impulsul din figura 2.7, a, poate fi constituit din două trepte unitate, conform relației:

$$s(t) = Au(t - T) - Au(t - 2T)$$



Formarea grafică a impulsului este ilustrată în figura 2.7, b.

Funcția impuls unitate sau impulsul Dirac $\delta(t)$. Funcția $\delta(t)$ poate fi definită prin relațiile următoare:

$$\delta(t) = 0 \text{ pentru } t \neq 0 \text{ și } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.13)$$

Fig.2.6. Funcția treaptă unitate.

Se observă că $\delta(t)$ nu este definit printr-o funcție de timp în sensul matematic. $\delta(t)$ poate fi considerat ca o limită a succesiunii de impulsuri dreptunghiulare de durată τ_k și înălțime $1/\tau_k$, când τ_k tinde la zero (fig.2.8).

Într-adevăr, pe măsură ce τ_k tinde la zero, impulsul dreptunghiular se îngustează din ce în ce mai mult, la limită localizându-se la $t = 0$. În tot acest proces de trecere la limită suprafața impulsului dreptunghiular se păstrează constantă și egală cu unitatea, pe seama creșterii amplitudinii, care tinde la ∞ când τ_k tinde la zero:

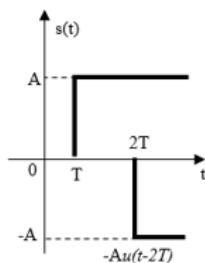
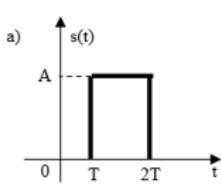
$$\lim_{\tau_k \rightarrow 0} p\tau_k(t) = \delta(t).$$

Exprimând impulsul dreptunghiular cu ajutorul funcțiilor treaptă, obținem:

$$p\tau_k = \frac{1}{\tau_k} [u(t) - u(t - \tau_k)] \quad (2.14)$$

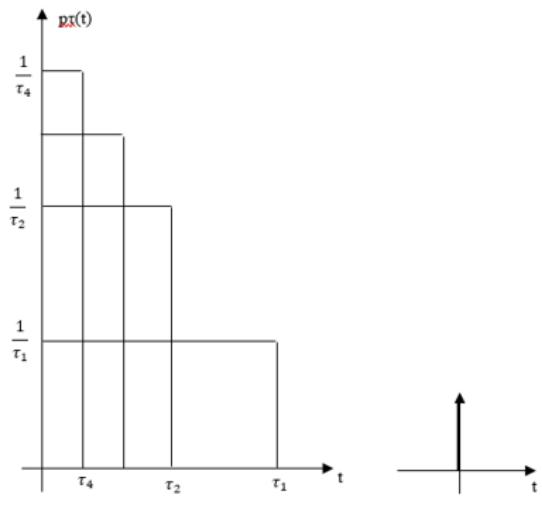
deci:

$$\delta(t) = \lim_{\tau_k \rightarrow 0} p\tau_k(t) = \lim_{\tau_k \rightarrow 0} \frac{u(t) - u(t - \tau_k)}{\tau_k} \quad (2.15)$$



b)

Fig.2.7. Descompunerea unui impuls dreptunghiular în funcții treaptă unitate.



a)

b)

Fig.2.8. Definirea funcției impuls unitate prin trecerea la limită (a) și reprezentarea convențională a funcției impuls unitate (b).

În membrul drept al relației (2.15) recunoaștem derivata funcției treaptă unitate. Așadar:

$$\delta(t) = u'(t), \quad (2.16)$$

Derivata treptei unitate este zero pe tot domeniul, cu excepția punctului de discontinuitate $t=0$ unde, riguros matematic, derivata nu ar trebui să existe. Totuși, utilizând această funcție impropriu care este impulsul Dirac, am găsit că derivata treptei unitate în punctul de discontinuitate $t = 0$ este un impuls Dirac localizat în $t = 0$. Dacă am mări treapta unitate de A ori, derivata va fi evident $A\delta(t)$. Pe de altă parte, mărimea discontinuității acestei noi funcții în punctul $t = 0$ este, conform relației (2.7):

$$D = A \left[\lim_{\tau \rightarrow 0} u(0 + \tau) - \lim_{\tau \rightarrow 0} u(0 - \tau) \right] = A.$$

Putem deci concluziona că derivata unei funcții într-un punct de discontinuitate t_0 este un impuls Dirac localizat în acel punct ponderat cu mărimea discontinuității funcției în punctul respectiv, adică $D\delta(t - t_0)$.

Astfel, pentru semnalul din figura 2.1, c, derivata în $t = -\tau/2$ este $A\delta(t + \tau/2)$, iar în punctul $t = \tau/2$, derivata este $-A\delta(t - \tau/2)$. Această proprietate conduce la calcule mult mai simplificate în analiza spectrală a semnalelor cu discontinuități.

O proprietate importantă a funcției $\delta(t)$ este exprimată de integrala:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t - t_0)dt = s(t_0). \quad (2.17)$$

Această integrală se poate evalua simplu, ținând seama de faptul că $\delta(t - t_0) = 0$ pentru orice $t \neq 0$. Relația (2.17) exprimă proprietatea de eșantionare a funcției impuls unitate. Evident, dacă $t_0=0$, obținem conform relației (2.17):

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t)dt = s(0). \quad (2.18)$$

1.4. Semnale periodice. Reprezentarea semnalelor periodice prin serii Fourier

Descompunerea semnalelor periodice în funcții elementare se realizează cu ajutorul seriilor Fourier. Un semnal periodic $s(t)$ de perioadă T poate fi dezvoltat în serie Fourier dacă satisfacă condițiile lui Dirichlet, și anume:

- a) $s(t)$ să fie o funcție de modul integrabil pe interval, adică

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |s(t)| dt \text{ să fie finită;} \quad (2.19)$$

- b) să aibă un număr finit de discontinuități finite în intervalul unei perioade;
c) să aibă un număr finit de maxime și minime în interiorul unei perioade.

Îndeplinirea acestor condiții asigură convergența uniformă a seriilor.

Dezvoltarea în serie Fourier poate să ia următoarele forme:

Forma trigonometrică:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (2.20)$$

unde $f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ reprezintă frecvența de repartiție a semnalului periodic (i se mai spune *frecvență fundamentală*).

Coefficienții a_0, a_n, b_n se calculează cu relațiile:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt; \quad (2.21)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cos n\omega_0 t dt; \quad (2.22)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \sin n\omega_0 t dt; \quad (2.23)$$

Seria trigonometrică poate fi reprezentată într-o formă mai compactă, denumită formă armonică, utilizând numai funcții cosinusoidale.

Forma armonică a seriei Fourier este:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n), \quad (2.24)$$

unde:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ și } \varphi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n} \quad (2.25)$$

Deci, seria Fourier armonică dă o descompunere a semnalului periodic $s(t)$ într-o sumă de semnale sinusoidale ale căror frecvențe sunt multipli ai frecvenței de repetiție a semnalului periodic. Aceste componente se mai numesc *armonici*. Atunci când determinăm analitic amplitudinile A_n , sau le măsurăm experimental, spunem că facem *analiza armonică a semnalului*.

Forma complexă sau exponențială a seriei Fourier este dată de expresia:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2.26)$$

și se obține din seria trigonometrică prin exprimarea funcțiilor sinus și cosinus, sub formă

exponențială, utilizând relațiile lui Euler. Coeficienții seriei Fourier complexe se calculează cu relația:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (2.27)$$

Coeficienții C_n sunt mărimi complexe și deci pot fi reprezentăți prin modul și fază:

$$C_n = |C_n| e^{j\phi_n}. \quad (2.28)$$

Relațiile de legătură dintre coeficienții C_n și coeficienții seriilor trigonometrică și armonică sunt:

$$C_n = C(n\omega_0) = \frac{a_n - f b_n}{2}; \quad (2.29)$$

$$C_n = C(-n\omega_0) = \frac{a_n + f b_n}{2}; \quad (2.30)$$

$$|C_n| = |C_{-n}| = \frac{A_n}{2}; \quad C_0 = \frac{a_0}{2}; \quad (2.31)$$

$$\phi_n = \varphi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n}. \quad (2.32)$$

Alegerea limitelor de integrare în evaluarea coeficienților seriilor Fourier este arbitrară; esențial este ca integrarea să se facă la o perioadă (de la $-T/2$ la $+T/2$, de la zero la T etc.)

Pentru semnalele pare, seria trigonometrică coincide cu cea armonică, deoarece $b_n = 0$ conform relațiilor (2.23) (în care se ia $t_0 = -T/2$) și (2.5). Similar, pentru semnalele impare, $a_0 = a_n = 0$ în baza relațiilor (2.21), (2.22) (cu $t_0 = -T/2$) și (2.5). Se obține astfel o sumă de funcții sinusoidale, care poate fi pusă în forma (2.24).

Caracteristica în domeniul frecvență a semnalelor periodice se face prin reprezentarea diagramelor spectrale de amplitudini și aşa cum este menționat în paragraful 2.2 se pot reprezenta fie diagramele spectrale asociate seriei armonice, $A_n(n\omega_0)$ și $\phi_n(n\omega_0)$, fie diagramele spectrale asociate seriei complexe $|C_n(n\omega_0)|$ și $\phi_n(n\omega_0)$.

Deoarece semnalele periodice sunt exprimate prin sume discrete de semnale elementare de tip cosinusoidal, respectiv exponențial, rezultă că spectrele de amplitudini și cele de faze vor fi discrete, liniile spectrale asociate fiecărei componente existând numai la multiplii frecvenței de repetiție.

La spectrele asociate seriei armonice, liniile spectrale vor fi localizate la frecvențele: $0, \omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ etc., în timp ce la spectrele asociate seriei exponențiale liniile spectrale vor fi localizate la: $0, \pm\omega_0, \pm2\omega_0, \pm3\omega_0, \dots$ etc. Semnificația frecvențelor negative rezultă din funcția cosinusoidală:

$$2A \cos \omega t = Ae^{j\omega t} + Ae^{-j\omega t}$$

două componente exponențiale localizate simetric față de ordonată se însumează și dau o componentă cosinusoidală de frecvență pozitivă. Frecvențele negative sunt introduse de acest instrument matematic de analiză, care este seria Fourier complexă, și care operează cu semnale exponențiale. Acestea nu au semnificație fizică luate individual, ci numai în perechi de

componente de frecvențe $\pm n\omega_0$. Ca atare, atunci când se analizează spectrul unui semnal periodic utilizând seria exponențială, trebuie să se țină seama că frecvențele componentelor cu existență reală sunt pozitive, iar amplitudinile acestor componente sunt duble față de cele date de seria complexă. Seria complexă este preferată celei armonice datorită simplității operațiilor (derivare, integrare) cu funcții exponențiale, precum și datorită caracterului mai general al acestei reprezentări. Transformatele Fourier și Laplace utilizate în analiza semnalelor neperiodice operează tot cu funcții exponențiale.

În majoritatea cazurilor coeficienții C_n sunt fie reali, fie pur imaginari. În aceste cazuri descriem funcția numai printr-un spectru, luând pe ordonată valorile reale ale amplitudinilor și nu valorile lor în modul. Acest spectru îi numai *spectru de frecvențe*.

Banda de frecvențe ocupată de un semnal periodic. Teoretic, spectrele semnalelor periodice se întind de la $\omega = 0$ la $\omega = \infty$. Practic spectrele sunt limitate. Reprezentarea diagramei spectrale de amplitudini pune în evidență legea de descreștere a amplitudinilor, permîțându-ne să limităm seria la un termen de la care începând amplitudinea componentelor este neglijabilă. Trunchierea seriei la un anumit termen depinde de cerințele impuse tipului de comunicație care utilizează semnalul respectiv. Astfel, analiza spectrală a unui semnal ne permite să stabilim lățimea benzii de frecvențe efectiv ocupată de acel semnal.

Exemplul 2.1. Să se determine seria Fourier complexă a semnalului periodic reprezentat prin succesiunea de impulsuri dreptunghiulare din figura 2.9 și să se reprezinte spectrul de frecvențe luând pe abscisă frecvența f în Hz. Reprezentarea spectrului se va face pentru următoarele cazuri:

- $A = 1V$, $T = 40$ ms, $\tau = 20$ ms;
- $A = 1V$, $T = 100$ ms, $\tau = 20$ ms.

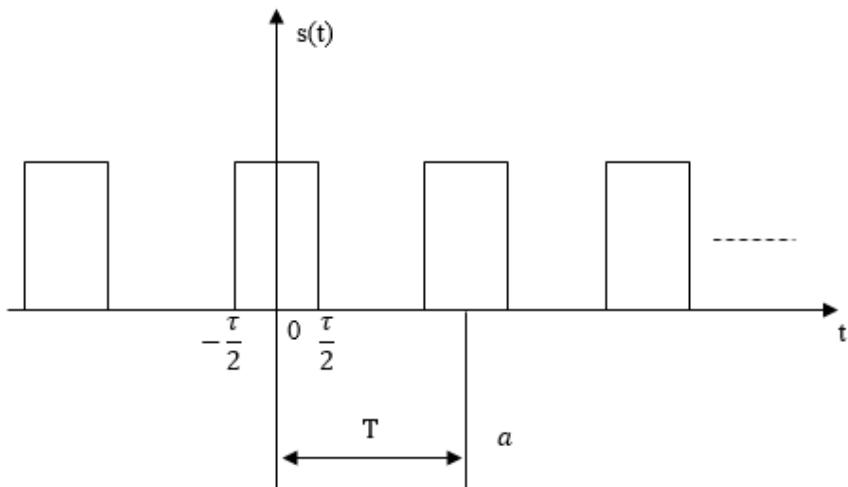


Fig.2.9. Semnal periodic dreptunghiular.

Soluție

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

$s(t)$ poate fi scris analitic pe o perioadă T astfel:

$$s(t) = \begin{cases} A \text{ pt. } (-\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}) \\ 0 \text{ pt. } (\frac{\tau}{2} < t < T - \frac{\tau}{2}) \end{cases} \quad (2.33)$$

Coefficienții C îi determinăm cu relația (2.27):

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} - \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-jn\omega_0 t} dt = -\frac{A}{jn\omega_0 T} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2A}{n\omega_0 T} \cdot \frac{e^{jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}}}{2j} = \\ &= \frac{2A}{n\omega_0 T} \cdot \frac{\tau}{2} \sin \frac{n\omega_0 \tau}{2} = \frac{A\tau}{T} \left(\frac{\sin \frac{n\omega_0 \tau}{2}}{\frac{n\omega_0 \tau}{2}} \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Funcția din paranteză este de forma $(\sin x) / x$. Această funcție are un rol important în teoria semnalelor.

$$\text{Notăm: } \text{sinc } x = (\sin x) / x. \quad (2.35)$$

Reprezentarea grafică a acestei funcții pare este arătată în figura 2.10.

Trecerea prin zero ale funcției sinc se obțin pentru $\sin x = 0$, adică $x = \pm k\pi$. Cu notația (2.35), relația (2.34) pentru C se scrie:

$$C_n = \frac{A\tau}{T} \text{sinc} \frac{n\omega_0 \tau}{2} = A\delta \text{sinc} \frac{n\omega_0 \tau}{2} = \frac{A\tau}{T} \text{sinc} n\pi\tau f_0 \quad (2.36)$$

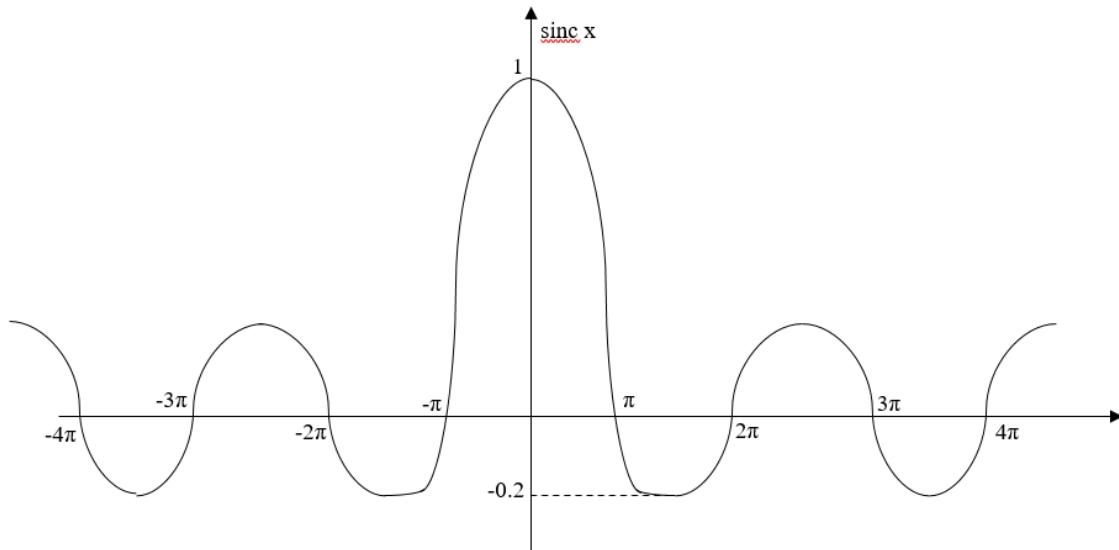


Fig.2.10. Reprezentarea grafică a funcției sinc x.

Raportul $\delta = \tau/T$ poartă denumirea de coeficient de umplere. Seria exponențială a semnalului $s(t)$ dat în figură este:

$$s(t) = A\delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc} \frac{n\omega_0 \tau}{2} e^{jn\omega_0 t}. \quad (2.37)$$

Din relația (2.36) se observă că C_n este real, deci reprezentarea în domeniul frecvență constă dintr-

un singur spectru: $C_n(n\omega_0)$. Deoarece sinc x este funcție pară, rezultă că $C_n = -C_{-n}$.

Frecvența fundamentală (de repetiție) este $\omega_0 = \pm (2\pi)/T$. Spectrul de frecvențe este o funcție discretă și există numai la $\omega = \pm \omega_0; 2\omega_0; \dots$ etc. Amplitudinile corespunzătoare se obțin din relația (2.36) în care $n = 0, 1, 2, \dots$ etc. și descresc după o înfășurătoare dată de funcția $A\delta \text{sinc} \frac{n\omega_0\tau}{2}$.

Trecerile prin zero ale acestei funcții au loc la $\text{sinc} \frac{n\omega_0\tau}{2} = 0$, adică:

$$\frac{n\omega_0\tau}{2} = \pm k\pi, \text{ sau } n\omega_0 = \pm \frac{2k\pi}{\tau} \quad (2.38)$$

Reprezentarea spectrului în cazul general (fără particularizările din enunț) este dată în figura 2.11, a și b, am reprezentat $C_n(nf_0)$ care diferă de $C_n(n\omega_0)$ doar printr-o raportare a axei frecvențelor la 2π , astfel încât trecerile prin zero ale înfășurătoarei devin:

$$nf_0 = \pm \frac{k}{\tau}, \quad (2.39)$$

iar componentele spectrale sunt localizate la $f = 0, \pm f_0, \pm 2f_0, \dots$, etc. unde $f_0 = 1/T$.

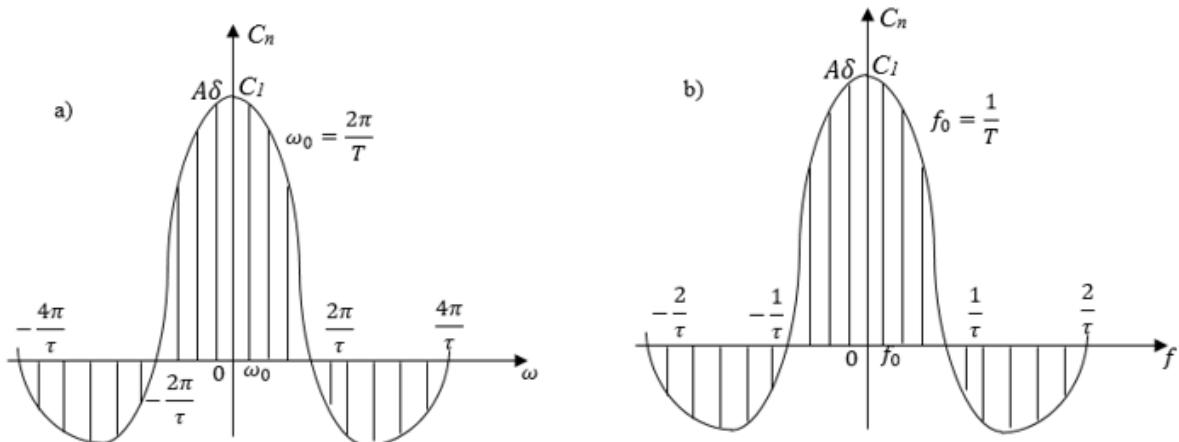


Fig.2.11. Spectrul de amplitudini al semnalului periodic dreptunghiular în funcție de pulsăția ω , respectiv frecvența f .

$$|C_n| = |C_{-n}| = \frac{A_n}{2}; C_0 = \frac{a_0}{2}$$

Să particularizăm acum spectrul din figura 2.11, b, pentru care cele două cazuri din enunț. Conform relațiilor (2.36) și (2.32) coeficienții C_n și A_n sunt egali: $C_0=0.5, C_1=0.318, C_2=0, C_3=-0.106, C_4=0$, etc., corespunzător amplitudinile $A_0=0.5, A_1=0.637, A_2=0, A_3=-0.212, A_4=0$, etc. În cazul a) și $C_0=0.2, C_1=0.187, C_2=0.151, C_3=0.101, C_4=0.047, C_5=0, C_6=-0.031, C_7=-0.043, C_8=-0.037, C_9=-0.021, C_{10}=0$, etc. corespunzător amplitudinile $A_0=0.2, A_1=0.374, A_2=0.302, A_3=0.202, A_4=0.094, A_5=0, A_6=-0.062, A_7=-0.086, A_8=-0.074, A_9=-0.042, A_{10}=0$, etc. în cazul b). Observăm că în ambele cazuri lățimea τ a impulsului este aceeași, $\tau = 20$ ms. Rezultă:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{20 \cdot 10^{-3}} = 50 \text{ Hz.}$$

În ambele cazuri trecerile prin zero au loc la ± 50 Hz. Perioada diferă de la un caz la altul. Frecvența fundamentală $f_0 = \frac{1}{T}$ este: 25 Hz în cazul a); 10 Hz în cazul b). Deci, componentele se

îndesesc pe măsură ce perioada crește. În banda de frecvențe $[0, 1/\tau]$ apare o singură componentă în cazul a) lipsesc armonicele $2f_0, 4f_0, 5f_0$ etc., care coincid cu trecerile prin zero. Similar, în cazul b) lipsesc armonicele $5f_0, 10f_0, 15f_0$ etc.

Înălțimile lobului central $A\delta$, care este chiar mărimea componentei continuie ($\omega = 0$) scade pe măsură ce perioada crește. Coeficientul de umplere δ are, în ordine, valorile 0,5 și 0,2. Spectrele de frecvențe $C_n(f)$ și $A_n(f)$ corespunzătoare celor două cazuri din enunț sunt reprezentate în figurile 2.12, a, b, c, d.

Se observă că pe măsură ce perioada crește, componentele se îndesesc dar scad în amplitudine. Astfel, în cazul b), componente sunt de 2,5 ori mai dese, dar amplitudinile sunt de 2,5 ori mai mici. Aceasta este o observație importantă pentru înțelegerea trecerii de la semnalul periodic la cel neperiodic.

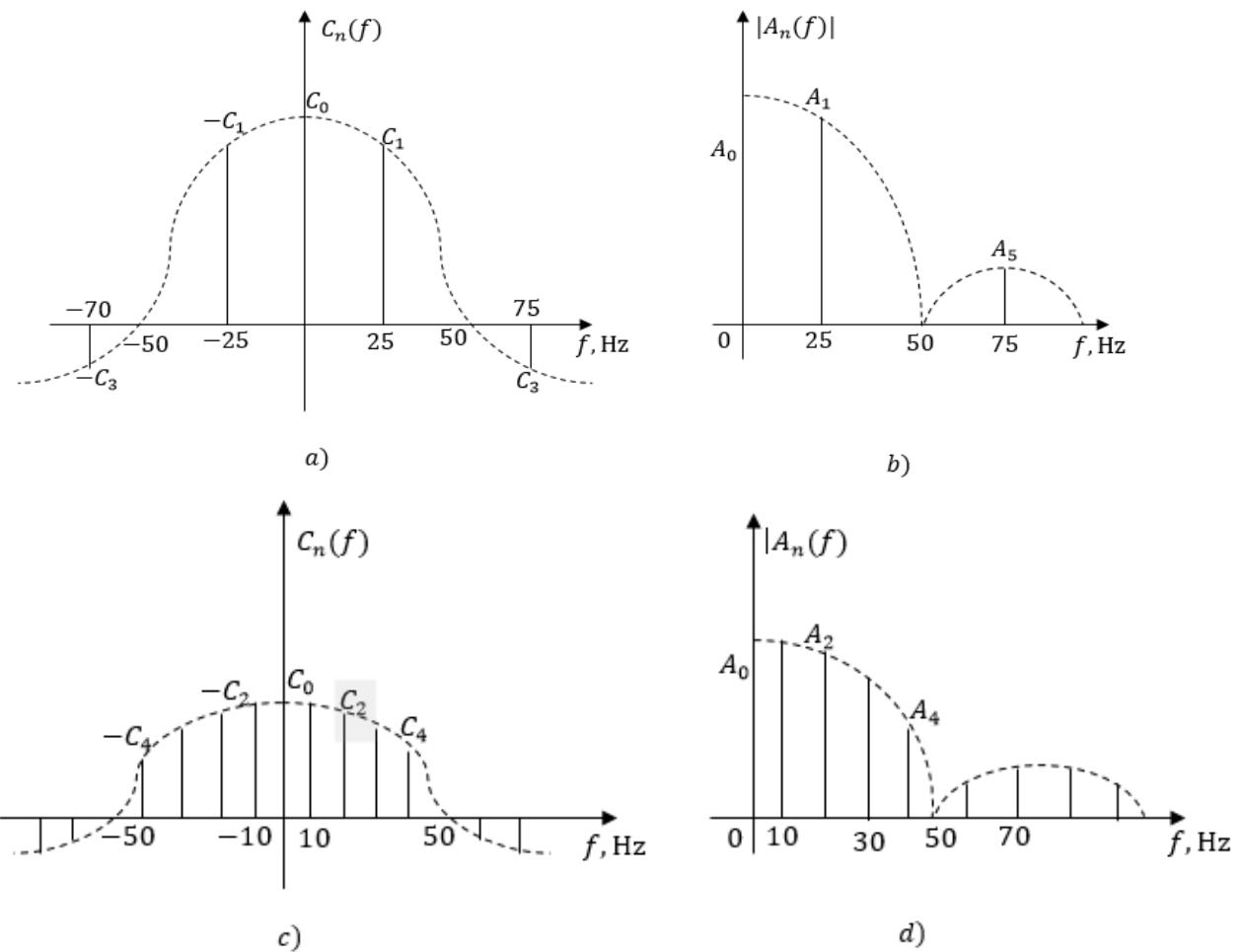


Fig.2.12. Spectrul de amplitudini asociate seriei Fourier exponențiale și armonice în funcție de frecvență.

Banda de frecvențe ocupată de un astfel de semnal se consideră practic $B = 1/\tau$. Constatăm că banda nu depinde de perioadă ci de lățimea impulsurilor și va fi cu atât mai mare, cu cât impulsurile sunt mai înguste.

Exemplul 2.2. Să se calculeze coeficienții seriei Fourieri complexe a semnalului din figura 2.9 prin utilizarea funcției impuls unitate.

Soluție

În prezentarea funcției impuls unitate s-a arătat că la derivarea unei funcții ce prezintă discontinuitate finită de mărime D în punctul t_0 se obține impulsul $D\delta(t - t_0)$. Aplicând această proprietate pentru semnalul $s(t)$ din figura 2.9, se obține $s'(t)$ reprezentat pe o perioadă în figura 2.13 și exprimat prin expresia:

$$s'(t) = A\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - A\delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (2.40)$$

Derivând ambii membri ai expresiei ce reprezintă seria Fourieri complexă (relația 2.26), se obține:

$$s'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} jn\omega_0 C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2.41)$$

Din (2.41) rezultă relația pentru coeficienții D_n ai seriei complexe a lui $s'(t)$:

$$D_n = jn\omega_0 C_n \quad (2.42)$$

Deci coeficienții D_n vor fi:

$$D_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} s'(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{T} \left[\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) e^{-jn\omega_0 t} dt - \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-jn\omega_0 t} dt \right]. \quad (2.43)$$

Aplicând proprietatea de eșantionare a impulsului (2.17) se obține:

$$D_n = \frac{A}{T} \left(e^{+jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} \right) \quad (2.44)$$

dar din (2.42) și (2.44) rezultă:

$$C_n = \frac{D_n}{jn\omega_0} = \frac{A}{jn\omega_0 T} \left(e^{jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} \right) = \frac{A \cdot \tau}{T} \operatorname{sinc} \frac{n\omega_0 \tau}{2} \quad (2.45)$$

Calculul coeficienților seriei Fourieri a unui semnal exprimat cu ajutorul impulsurilor unitate este foarte simplu, de aceea metoda prezentă este indicată pentru acele semnale care prin derivări succesive conduc la impulsuri Dirac. De exemplu, pentru semnalul din fig. 2.1, b, prin două derivări succesive se ajunge la impulsuri unitate evitând astfel calculul unor integrale prin părți la care se ajunge pe calea generală.

1.5. Semnale neperiodice

1.5.1. Transformata Fourier

Așa cum s-a arătat în paragraful 2.1. semnalele neperiodice pot fi considerate un caz limită al semnalelor periodice și anume cazul când perioada T tinde la infinit. Această trecere la limită poate fi concepută și în modul următor: fiind dat semnalul neperiodic $S(t)$ limitat pe axa timpului, facem o prelungire periodică $S_T(t)$ a acestui semnal, de perioada T , ca în figura 2.14.

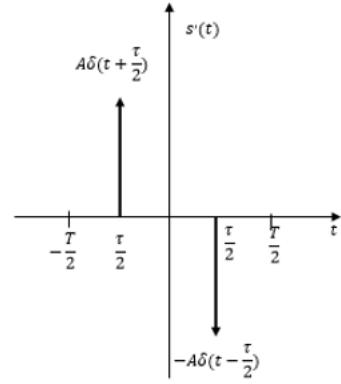


Fig.2.13. Derivarea semnalului dreptunghiular.

La limită făcând pe T să tindă la infinit, semnalul periodic va avea doar o perioadă pe întreg domeniul de timp ($-\infty < t < \infty$) și va fi reprezentat prin $s(t)$. Semnalul $s_T(t)$ poate fi dezvoltat în serie Fourier complexă. Această serie îl reprezintă pe $s_T(t)$ pe tot intervalul iar pe $s(t)$ numai pe intervalul $[-T/2, T/2]$. La limită, când T tinde la infinit, seria corespunzătoare lui $s_T(t)$ îl reprezintă pe $s(t)$ pe întreg intervalul ($-\infty < t < \infty$).

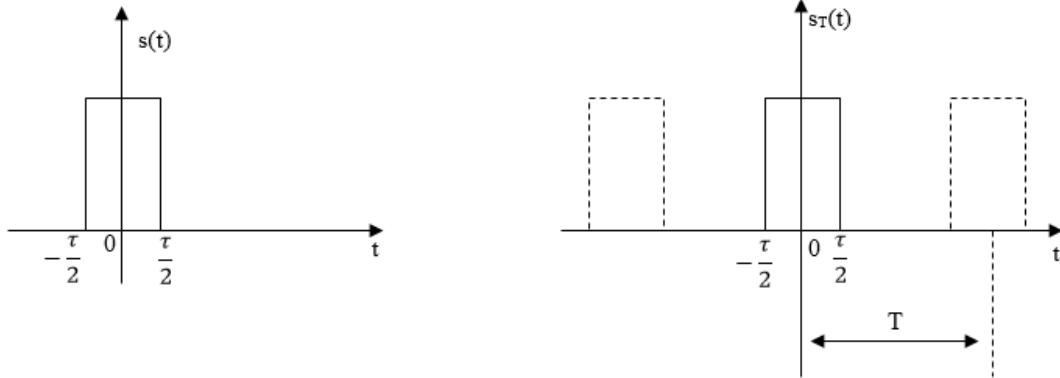


Fig. 2.14. Periodicizarea unui semnal neperiodic.

Seria Fourieri exponențială pentru $s_T(t)$ este:

$$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, \quad (2.46)$$

unde:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (2.47)$$

În exemplul 2.1 s-a constatat că cu cât T devine mai mare, frecvența fundamentală ω_0 devine tot mai mică, spectrul tot mai dens, iar amplitudinile componentelor spectrale din ce în ce mai mici. La limită nu se mai poate face o discriminare între două componente succesive, spectrul existând pentru orice ω ca rezultat spectrul discret devine un spectru continuu.

Să demonstrăm analitic acest lucru. Să facem substituția

$$n\omega_0 = \omega_n \quad (2.48)$$

În relațiile (2.46 – 2.47). Notând $C_n(n\omega_0) = C_n(n\omega_n)$, obținem:

$$s_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(\omega_n) e^{j\omega_n t} \quad (2.49)$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_T(t) e^{-j\omega_n t} dt. \quad (2.50)$$

Utilizând funcția $s(\omega_n)$, definită prin relația:

$$T C_n(\omega_n) = \frac{2\pi C_n(\omega_n)}{\omega_0} = s(\omega_n) \quad (2.51)$$

din expresiile (2.49) și (2.50) se obține:

$$s_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(\omega_n) e^{-j\omega_n t} \omega_0; \quad (2.52)$$

$$s(\omega_n) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_T(t) e^{-j\omega_n t} dt. \quad (2.53)$$

La limită, când T tinde la infinit, ω_0 devine infinit mic și se poate reprezenta prin $d\omega$; ω_n parcurge toată axa frecvențelor, devenind variabila ω ; suma discretă dată de (2.52) devine o sumă continuă (o integrală), iar

$$\lim_{T \rightarrow \infty} s_T(t) = s(t). \quad (2.54)$$

Cu aceste specificări, relațiile (2.52) și (2.53) iau forma:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.55)$$

$$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.56)$$

Relația (2.55) exprimă semnalul $s(t)$ ca o sumă continuă de funcții exponențiale având frecvențe $\omega \in (-\infty, \infty)$ și amplitudinile infinit mici: $S(\omega)d\omega/2\pi$.

Amplitudinile sunt proporționale cu funcția $S(\omega)$ care este denumită *funcție de densitate spectrală* sau *spectru de frecvențe*. Această funcție este continuă existând pentru orice ω .

Relația (2.56) reprezintă *transformata Fourier directă* notată simbolic $s(\omega) = \mathcal{F}\{s(t)\}$. Relația (2.55) reprezintă transformata Fourier inversă ce se notează simbolic: $s(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S(\omega)\}$.

Aceste două transformate exprimă corespondența între reprezentările în timp și în frecvență ale semnalului neperiodic.

În general $S(\omega)$ este o funcție complexă și poate fi scrisă sub formă de modul și fază:

$$S(\omega) = |S(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}. \quad (2.57)$$

$|S(\omega)|$ reprezintă *spectrul de amplitudini* al semnalului, iar $\varphi(\omega)$ reprezintă *spectrul de fază*. Dacă $S(\omega)$ este o funcție reală sau una pur imaginară se face o singură reprezentare spectrală: $S(\omega)$, respectiv: $S(\omega)/j$. Vom ilustra în continuare printr-un exemplu utilitatea analizei spectrale a semnalelor neperiodice.

Exemplul 2.3. Să se determine și să se reprezinte grafic funcțiile de densitate spectrală ale semnalelor din figura 2.15.

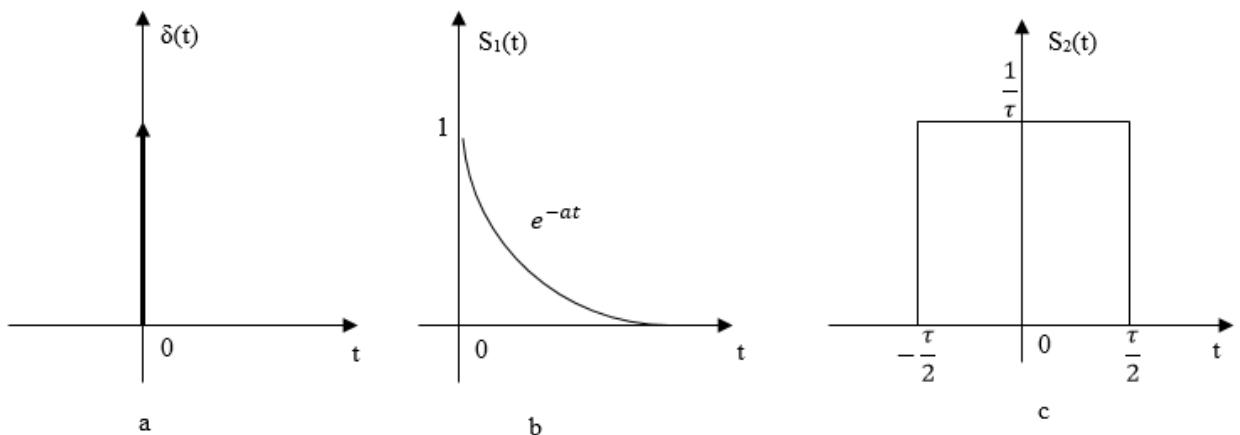


Fig.2.15.

Soluție

Se aplică relația (2.56) pentru semnalele din figurile 2.10, a, b, corespunzător:

$$a) \mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Utilizând proprietatea de eșantionare a impulsului unitate exprimată prin relația (2.17), se obține:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = e^0 = 1. \quad (2.58)$$

b) Semnalul $s_1(t)$ este definit prin relațiile:

$$s_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pt. } t \leq 0 \\ e^{-\alpha t} & \text{pt. } t > 0 \end{cases}$$

Deci:

$$\begin{aligned} S_1(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = +\frac{1}{\alpha + j\omega} \cdot \frac{\alpha - j\omega}{\alpha - j\omega} = +\frac{\alpha - j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \\ &= +\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} j \end{aligned}$$

$S_1(\omega)$ este o funcție complexă. Vom determina atât spectrul de amplitudini, cât și cel de faze.

$$|S_1(\omega)| = +\sqrt{\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} + \frac{\omega^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}} = +\sqrt{\frac{\alpha^2 + \omega^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}} = +\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}; \quad (2.60)$$

$$\varphi_1(\omega) = -arctg \frac{\omega}{\alpha} \quad (2.61)$$

c) Semnalul $s_2(t)$ este definit astfel:

$$s_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{pt. } |t| \leq \tau/2 \\ 0 & \text{pt. } |t| \geq \tau/2 \end{cases}$$

Aplicând transformata Fourier se obține:

$$S_2(\omega) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega\tau} \left(e^{j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} \right) = \frac{2}{\omega\tau} \sin \frac{\omega\tau}{2} = sinc \frac{\omega\tau}{2}. \quad (2.62)$$

Funcțiile de densitate spectrală corespunzătoare celor trei semnale analizate sunt reprezentate în figura 2.16.

Se observă că impulsul unitate are o densitate spectrală uniformă pe toată axa frecvențelor. Funcția impuls unitate conține toate componente de la $\omega = 0$ la $\omega = \infty$ cu aceeași amplitudine relativă. Banda de frecvențe ocupată de semnal este infinită.

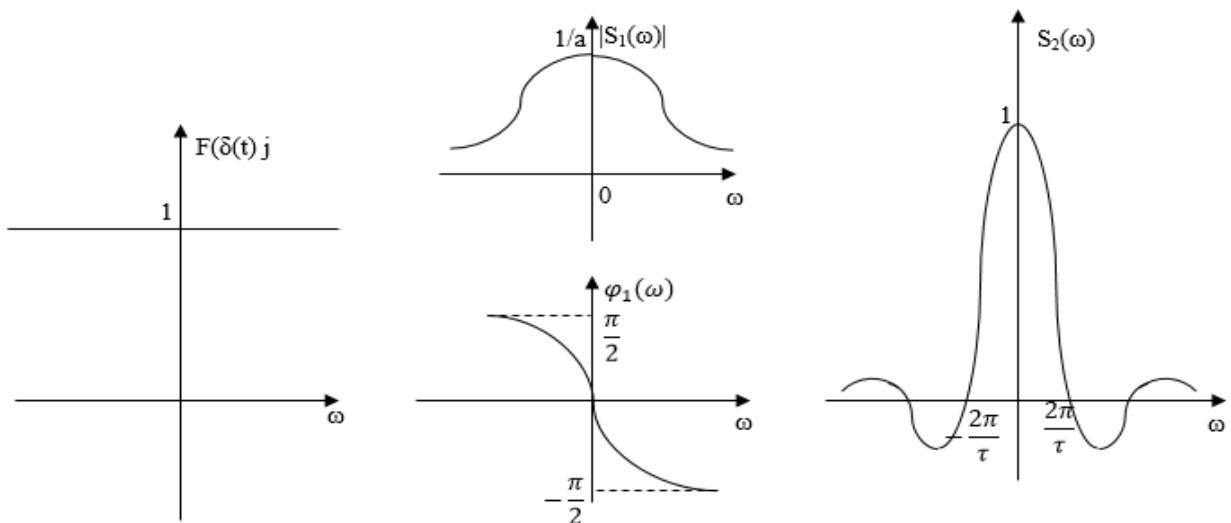


Fig.2.16. Funcțiile de densitate spectrală ale semnalelor din figura 2.15.

Impulsul dreptunghiular de lățime finită τ conține cea mai mare parte a energiei sale în intervalul $0 < \omega < 2\pi/\tau$, adică $0 < f < 1/\tau$. Această concluzie este utilă la stabilirea lățimii de bandă a sistemului de transmisiune pentru impulsurile de tipul considerat.

Exemplul 2.4. Să se determine semnalele $s(t)$ ale căror funcții de densitate spectrală $S(\omega)$ sunt reprezentate în figura 2.16.

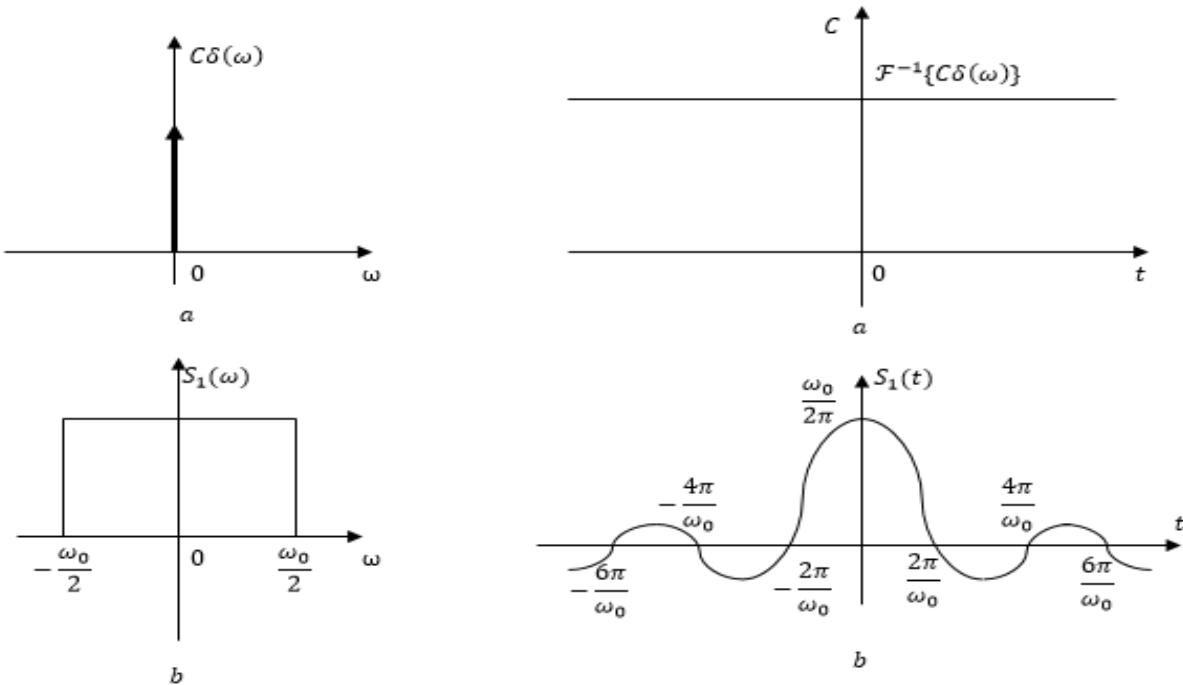


Fig.2.17. Funcțiile de densitate spectrală din exemplul 2.4.

Soluție:

Aplicând transformata Fourier inversă obținem:

$$a) \mathcal{F}^{-1}\{C\delta(\omega)\} = \frac{C}{2\pi} e^{j0t} = \frac{C}{2\pi}. \quad (2.64)$$

Dacă $s(t)$ este constantă, spectrul de frecvențe corespunzător conține numai o componentă cu

Fig.2.18. Formele de undă ale semnalelor din exemplul 2.4.

frecvență $\omega = 0$. Aceasta este un rezultat firesc, deoarece $s(t) = C$ reprezintă un semnal continuu ($\omega = 0$).

Din această transformare mai rezultă că dacă $s(t)$ conține o constantă:

$$s(t) = s_1(t) + C. \quad (2.65)$$

atunci transformata Fourier va conține un impuls unitate

$$S(\omega) = S_1(\omega) + 2\pi C\delta(\omega). \quad (2.66)$$

b) $S_1(\omega)$ este defini astfel:

$$S_1(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ pt. } |\omega| < \frac{\omega_0}{2} \\ 0 \text{ pt. } |\omega| \geq \frac{\omega_0}{2} \end{cases}$$

Utilizând relația (2.55) se obține:

$$s_1(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S_1(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi j\tau} e^{j\omega t} \Big|_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} = \frac{\omega_0}{2\pi} \operatorname{sinc} \frac{\omega_0 t}{2}. \quad (2.67)$$

Reprezentările grafice corespunzătoare în domeniul timp sunt date în figura 2.18.

Exemplele date pun în evidență proprietatea de simetrie a transformatei Fourier. Astfel, unui impuls unitate în domeniul timp îi corespunde un spectru uniform (o constantă) în domeniul frecvență și invers; unei constante în timp îi corespunde un impuls Dirac în frecvență.

De asemenea, se remarcă faptul că *unui semnal finit în timp îi corespunde un spectru infinit și invers*. Rezultă că, un semnal finit în timp este infinit în frecvență și invers. Aceasta este proprietatea care stă la baza transmiterii simultane a mai multor semnale pe un același canal de telecomunicații: semnalele fiind finite fie în timp, fie în frecvență, pot fi separate astfel încât să nu apară suprapunerile în domeniul respectiv. Transformatele Fourier, stabilind o corespondență binivocă între cele două domenii, rezultă că un semnal este unic determinat de oricare din aceste două reprezentări în timp sau în frecvență.

1.5.2. Proprietăți ale transformatei Fourier

Calculul transformatorilor Fourier pentru multe situații ce intervin în practică se simplifică substanțial dacă se ține seama de următoarele proprietăți:

1. *Liniaritatea.* Transformata Fourier a sumei dintre două semnale $s_1(t)$ și $s_2(t)$ este suma transformatorilor Fourier individuale:

$$\mathcal{F}\{c_1s_1(t) + c_2s_2(t)\} = c_1S_1(\omega) + c_2S_2(\omega). \quad (2.68)$$

Egalitatea (2.68) este evidentă pornind de la definiția (2.56).

2. *Simetria.* Transformatorile Fourier directă și inversă sunt simetrice în raport cu funcțiile ce se transformă.

Dacă

$$\mathcal{F}\{s(t)\} = S(\omega),$$

atunci

$$\mathcal{F}\{S(t)\} = 2\pi s(-\omega). \quad (2.69)$$

Demonstrație: Conform definițiilor (2.55) și (2.56) rezultă:

$$2\pi s(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-j\omega t} d\omega.$$

Deoarece variabila ω , în această integrală, este o variabilă arbitrară ea poate fi înlocuită cu variabila x . De aceea

$$2\pi s(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x) e^{-j\omega t} dx.$$

Înlocuind variabila t prin ω obținem

$$2\pi s(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x) e^{-jx\omega} dx.$$

Trecînd de la variabila arbitrară x la variabila t obținem

$$2\pi s(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{S(t)\}.$$

Dacă funcția $s(t)$ este o funcție pară, atunci $s(-t) = s(t)$ și

$$\mathcal{F}\{S(t)\} = 2\pi s(\omega). \quad (2.70)$$

Această proprietate este ilustrată în figura 2.19, de unde rezultă că transformata Fourier a funcției de declanșare (astfel poate fi numit impuls dreptunghiular) este funcția de pondere și invers transformata Fourier a funcției de pondere este funcția de declansare. Particularitatea de simetrie este valabilă pentru toate funcțiile pare sau impare. Dacă funcția este impară simetria nu-i atât de evidentă însă ea există, după cum reiese din relația (2.70).

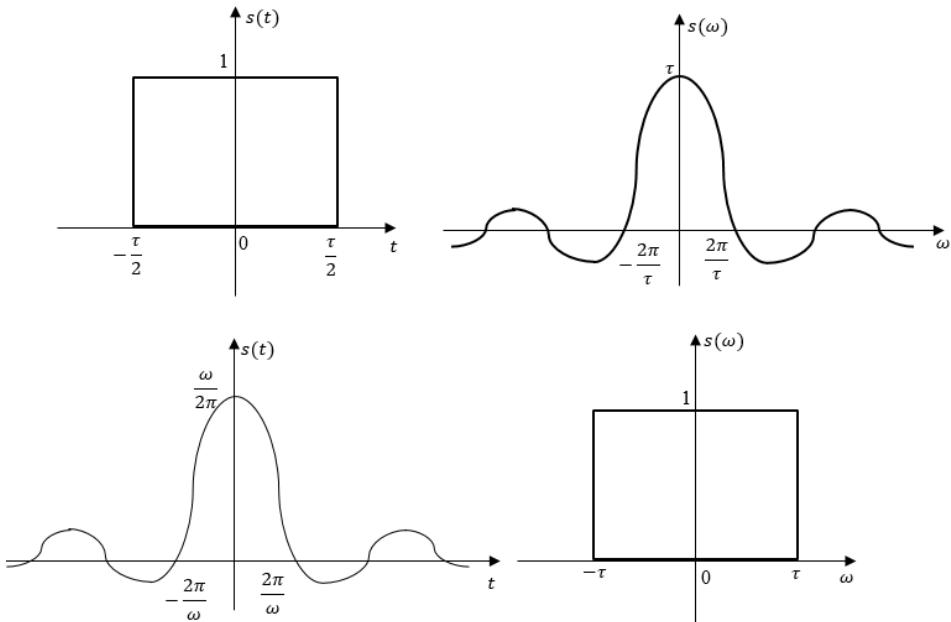


Fig.2.19. Proprietatea de simetrie a transformatei Fourier.

3. *Schimbarea scărilor.* O dilatare a scării timpului pentru $s(t)$ se reduce la o comprimare a scării frecvențelor pentru $S(\omega)$ și reciproc. Exprimarea analitică a acestei proprietăți este:

$$\mathcal{F}\{s(at)\} = \frac{1}{|\alpha|} S(\omega/\alpha). \quad (2.70)$$

Demonstrație: Fie $s(t)$ semnalul și $S(\omega)$ transformata Fourier a lui. Pentru un număr real pozitiv α la care se multiplică argumentul funcției $s(t)$ transformata Fourier se determină cu relația:

$$\mathcal{F}\{s(\alpha t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(\alpha t) e^{-j\omega t} dt.$$

Fie $x = \alpha t$. Atunci

$$\mathcal{F}\{s(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j\omega x/\alpha} dx = \frac{1}{\alpha} S(\omega/\alpha).$$

Deci semnalului $s(\alpha t)$ îi corespunde transformata Fourier $\frac{1}{\alpha} S(\omega/\alpha)$.

Similar se poate de arătat că pentru $\alpha < 0$

$$\mathcal{F}\{s(\alpha t)\} = \frac{1}{-\alpha} S\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Proprietatea (2.71) este demonstrată.

Semnalul comprimat în domeniul timpului se schimbă în timp de α ori mai repede și, ca urmare, frecvențele componentelor lui trebuie să se măsoare de α ori. Exprimarea analitică a acestei proprietăți este:

$$\mathcal{F}\{s(t/\alpha)\} = |\alpha| S(\alpha\omega). \quad (2.72)$$

Proprietatea schimbării scărilor este ilustrată în figura 2.20.

4. *Întârzierea semnalului.* Întârzierea în domeniul timp a lui $s(t)$ cu t_0 conduce la o multiplicare a transformatei Fourier $S(\omega)$ cu $e^{-j\omega t_0}$.

$$\mathcal{F}\{s(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} S(\omega). \quad (2.73)$$

Demonstrație:

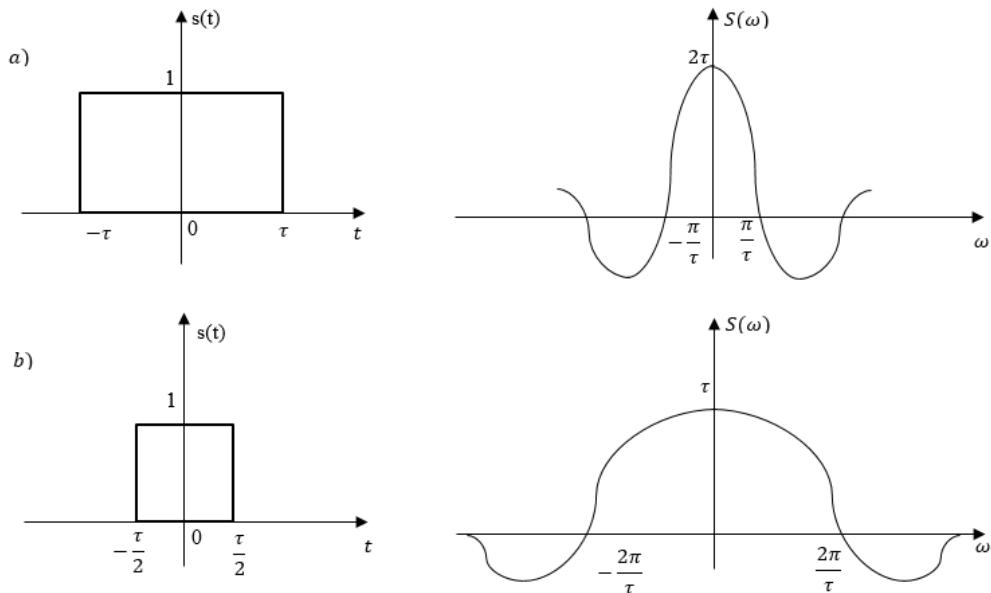


Fig.2.20. Ilustrarea procesului de comprimare a funcției în timp: a) funcția de durată 2τ și transformata ei Fourier; b) funcția de durată τ și transformata ei Fourier.

$$\mathcal{F}\{s(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t - t_0) e^{-j\omega t} dt.$$

Notând $t - t_0 = \tau$ rezultă că $dt = d\tau$ și înlocuind în integrala precedentă se găsește:

$$\mathcal{F}\{s(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-j\omega(\tau + t_0)} d\tau = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Ultima integrală este tocmai $S(\omega)$, deci relația (2.73) este demonstrată.

Această însușire ne demonstrează că deplasarea în timp a funcției semnalului cu t_0 nu schimbă spectrul de amplitudini $|S(\omega)|$. Schimbările intervin numai în spectrul de faze care se multiplică cu $-\omega t_0$ a fiecărei componente ale semnalului păstrând forma lor inițială.

5. *Deplasarea spectrului (modularea).* Orice deplasare a funcției de densitate spectrală $S(\omega)$ cu ω_0 conduce la o multiplicare a semnalului $s(t)$ cu $e^{j\omega_0 t}$. Expresia analitică a acestei proprietăți este dată prin relația:

$$\mathcal{F}^{-1}\{S(\omega - \omega_0)\} = e^{j\omega_0 t} s(t). \quad (2.74)$$

Demonstrație: Fie $S(\omega)$ transformata Fourier și $S(\omega - \omega_0)$ funcția deplasată cu ω_0 . Vom zice:

$$\mathcal{F}^{-1}\{S(\omega - \omega_0)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega.$$

Notând $\omega - \omega_0 = \lambda$, găsim:

$$\mathcal{F}^{-1}\{S(\omega - \omega_0)\} = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega - \omega_0) e^{j\lambda t} d\lambda,$$

de unde decurge relația (2.74).

Necesitatea deplasării spectrului de frecvențe a semnalelor apare în sistemele de telecomunicații. De obicei, deplasarea spectrului se realizează în rezultatul înmulțirii semnalului $s(t)$ cu un semnal sinusoidal. Această procedură este cunoscută sub denumirea de *modulație*. Deoarece semnalul sinusoidal poate fi exprimat printr-o sumă de exponențe, evident, înmulțirea $s(t)$ cu semnalul sinusoidal va deplasa tot spectrul semnalului. Să demonstrăm această afirmație pornind de la următoarea identitate:

$$s(t) \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [s(t) e^{j\omega_0 t} + s(t) e^{-j\omega_0 t}].$$

Dacă semnalului $s(t)$ îi corespunde transformata Fourier $S(\omega)$, atunci în baza proprietății deplasării spectrului obținem:

$$\mathcal{F}\{s(t) \cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2} [S(\omega - \omega_0) + S(\omega + \omega_0)]. \quad (2.75)$$

Similar se poate de demonstrat că:

$$\mathcal{F}\{s(t) \sin \omega_0 t\} = \frac{j}{2} [S(\omega - \omega_0) - S(\omega + \omega_0)]. \quad (2.76)$$

Deci, în procesul de modulație se produce deplasarea spectrului cu $\pm \omega_0$. Acest rezultat este foarte important pentru teoria telecomunicațiilor. În figura 2.21 se ilustrează deplasarea spectrului în

rezultatul modulației.

6. *Derivarea în domeniul timp.* Transformata Fourier a derivatei unui semnal $s(t)$ este de $j\omega$ ori transformata Fourier a semnalului.

$$\mathcal{F}\{s'(t)\} = j\omega S(\omega). \quad (2.77)$$

Pentru o derivare de n ori în timp se obține relația:

$$\mathcal{F}\{s^n(t)\} = (j\omega)^n S(\omega). \quad (2.78)$$

Demonstrație:

$$s'(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

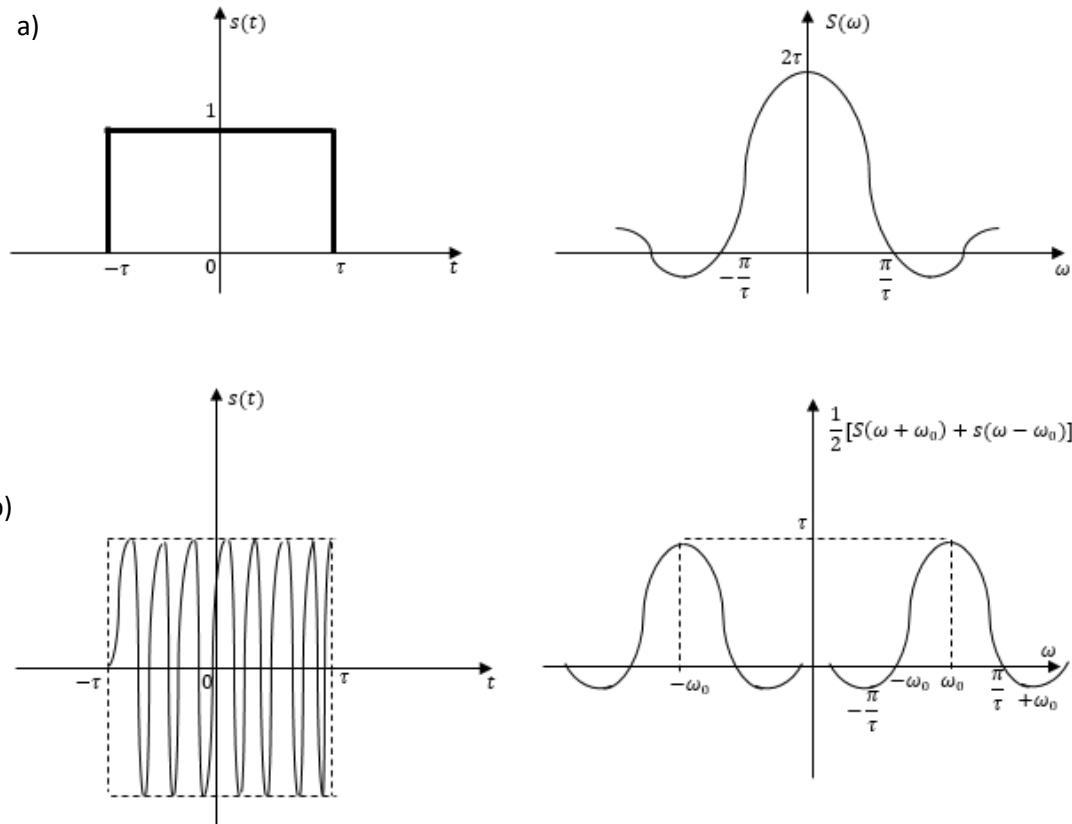


Fig.2.21. Deplasarea spectrului prin modulare:

- a) impulsul dreptunghiular și spectrul său; b) semnalul modulat și spectrul său.

Derivând sub integrală se găsește

$$s'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega S(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

deci,

$$\mathcal{F}\{s'(t)\} = j\omega S(\omega).$$

7. *Integrarea în domeniul timp.* Transformata Fourier a integralei unui semnal $s(t)$ este transformata Fourier a semnalului împărțit cu $j\omega$:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right\} = \frac{S(\omega)}{j\omega}. \quad (2.79)$$

Demonstrație:

$$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega,$$

deci relația (2.79) este demonstrată.

Teoremele de derivare și integrare în timp (2.77) și (2.79) pot fi demonstreate în baza unei judecăți logice. Transformata Fourier exprimă funcția $s(t)$ printr-o sumă infinită de funcții exponențiale de tipul $e^{j\omega t}$. De aceea derivata funcției $s(t)$ este egală cu o sumă continuă de derive ale funcțiilor exponențiale componente. Însă derivata funcției $e^{j\omega t}$ este $j\omega e^{j\omega t}$, deci procesul de derivare a funcției $s(t)$ este echivalentă înmulțirii cu $j\omega$ a fiecarei componente exponențiale. Deci,

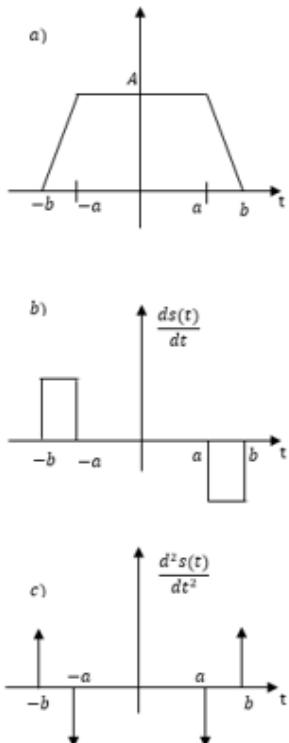
$$\mathcal{F}\{s'(t)\} = j\omega S(\omega).$$

Similar se poate proceda în cazul integrării.

Concluzionăm că, derivării în domeniul timp îi corespunde înmulțirii cu $j\omega$ în domeniul frecvență și integrării în domeniul timp îi corespunde împărțirea cu $j\omega$ în domeniul frecvență.

În baza proprietății de derivare în domeniul timp pot fi simplu determinate transformatele Fourier a unor funcții continue pe porțiuni. Un atare procedeu este demonstrat în exemplul 2.5.

Exemplul 2.5. Se dă semnalul din figura 2.22. Să se găsească densitatea spectrală a acestui semnal.



Soluție

Derivând de două ori această funcție obținem o consecutivitate de impulsuri unitate (fig.2.22, c). Transformata Fourier a impulsului unitate, determinată anterior, este egală cu unitatea. Din figura 2.22 reiesă că

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} = \frac{A}{b-a} [\delta(t+b) - \delta(t-a) + \delta(t-b)]. \quad (2.80)$$

În baza proprietății deplasării în domeniul timp funcției $\delta(t-a)$ îi corespunde transformata Fourier $e^{-j\omega a}$. În baza acestui rezultat și a proprietății de derivare în domeniul timp, transformata Fourier a funcției (2.80) va fi:

$$(j\omega)^2 S(\omega) = \frac{A}{b-a} [e^{j\omega b} - e^{j\omega a} - e^{-j\omega a} - e^{-j\omega b}],$$

de unde urmează:

$$S(\omega) = \frac{2A}{b-a} \frac{\cos a\omega - \cos b\omega}{\omega^2}.$$

Fig.2.22. Determinarea $S(\omega)$ a funcției continue pe porțiuni.

Acest exemplu ne indică o metodă numerică de calcul a transformatei Fourier. Orice funcție continuă poate fi aproximată cu segmente de drepte. Precizia aproximării se determină de numărul de segmente utilizate în aproximare. Derivata a două a

funcției aproimate are forma unei succesiuni de impulsuri unitate transformata Fourier a căror se determină simplu. Transformata $S(\omega)$ a funcției date este egală cu produsul transformatei Fourier a derivatei a doua la $1 / (j\omega)^2$.

8. *Derivarea în domeniul frecvenței.* Dacă funcției $s(t)$ îi corespunde transformata $S(\omega)$, atunci

$$dS(\omega) / d\omega = \mathcal{F}\{(-jt)s(t)\}. \quad (2.81)$$

Pentru a demonstra această proprietate folosim definiția (2.56) pe care o derivăm în domeniul frecvenței:

$$\frac{dS(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Schimbând ordinea de derivare și integrare obținem:

$$\frac{dS(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} (-jt)s(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Evident că funcția $[-jt s(t)]$ îi corespunde transformata $dS(\omega) / d\omega$. Pentru derivatele de ordin superior a funcției $S(\omega)$ se obține:

$$d^n S(\omega) / d\omega^n = \mathcal{F}\{(-jt)^n s(t)\}.$$

Deci, derivarea în domeniul frecvențelor este echivalentă înmulțirii cu $-jt$ în domeniul timpului.

9. *Teorema convulției.* Teorema convulției este una din cele mai eficiente metode pentru analiza semnalelor în domeniul frecvențelor.

Fiind date două semnale $s_1(t)$ și $s_2(t)$, se numește *funcție de convulție* sau *produs de convulție* integrala:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau)s_2(t - \tau) d\tau. \quad (2.82)$$

Această integrală se notează simbolic astfel:

$$f(t) = s_1(t) * s_2(t). \quad (2.83)$$

Se poate demonstra proprietatea de *comutativitate* a integralei de convulție:

$$s_1(t) * s_2(t) = s_2(t) * s_1(t). \quad (2.84)$$

Într-adevăr, dacă în (2.82) se notează $t - \tau = t'$, se obține:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t')s_1(t - t') dt' = s_2(t) * s_1(t).$$

Teorema convulției în timp. Fiind date două semnale $s_1(t)$ și $s_2(t)$, ale căror transformate Fourier $S_1(\omega)$ și $S_2(\omega)$, rezultă:

$$\mathcal{F}\{s_1(t) * s_2(t)\} = S_1(\omega)S_2(\omega). \quad (2.85)$$

Demonstrație:

$$\mathcal{F}\{s_1(t) * s_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau \right] dt.$$

Inversând mai întâi ordinea de integrare și apoi notând $t - \tau = t'$, se obține:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{s_1(t) * s_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} s_2(t - \tau) dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} s_2(t') e^{-j\omega t'} dt' \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) e^{-j\omega \tau} S_2(\omega) d\tau \\ &= S_2(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = S_1(\omega) S_2(\omega). \end{aligned}$$

Deci convulției semnalelor în domeniul timp îi corespunde în domeniul frecvență produsul transformatorilor Fourier.

Teorema convulției în frecvență este exprimată prin următoarea relație:

$$\mathcal{F}\{S_1(t) S_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} S_1(\omega) S_2(\omega), \quad (2.86)$$

unde integrala de convulție în frecvență este similară cu cea definită în timp:

$$S_1(\omega) * S_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\lambda) S_2(\omega - \lambda) d\lambda. \quad (2.87)$$

Derivarea produsului de convulție. Această proprietate se exprimă analitic astfel:

$$s_1(t) * s_2'(t) = s_1'(t) * s_2(t). \quad (2.88)$$

Cele două teoreme de convulție pot fi exprimate sintetic astfel: fiind date două semnale $s_1(t)$ și $s_2(t)$, *convulției lor în timp îi corespunde produsul transformatorilor Fourier, iar produsul în timp îi corespunde convulția transformatorilor Fourier*: produsului într-un domeniu îi corespunde convulția în celălalt domeniu.

Aceste teoreme de convulție prezintă o mare utilitate, permitînd obținerea cu ușurință a unor

rezultate practice foarte importante în analiza circuitelor și a semnalelor.

Reprezentarea grafică a convulției. Reprezentarea grafică a convulției semnalelor este extrem de utilizată în teoria telecomunicațiilor, cît și în teoria circuitelor, mai ales, pentru analiza circuitelor liniare cînd semnalul de la intrare $s(t)$ și funcția de pondere $k(t)$ sănă date numai sub formă grafică. Pentru a ilustra această afirmație să presupunem că semnalele $s_1(t)$ și $s_2(t)$ au forma unui impuls dreptunghiular și triunghiular (fig.2.23). Să determinăm convulția acestor semnale. După definiție

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau.$$

În această integrală τ este o variabilă independentă. În figura 2.23, b, sunt arătate funcțiile $s_1(\tau)$ și $s_2(-\tau)$. Remarcăm că $s_2(-\tau)$ s-a obținut prin rotirea funcției $s_2(\tau)$ față de axa orizontală. Graficul funcției $s_2(t - \tau)$ reprezintă funcția $s_2(-\tau)$ deplasată cu t s, în direcția axei pozitive (fig.2.23, c). Valoarea integralei convulției pentru $t = t_1$ este determinată de suprafața funcției de produs $s_1(\tau)s_2(t - \tau)$. Aceasta este suprafața hașurată pe figura 2.23, d, și indicată cu o linie punctată, pentru $t = t_1$, pe figura 2.23, e.

Pentru a construi graficul convulției ca o funcție în timp atribuim diferite valori lui t , deplasăm corespunzător funcția $s_2(-\tau)$ și determinăm suprafața funcției produsului. În rezultat obținem graficul funcției de convulție, indicat în figura 2.23, e.

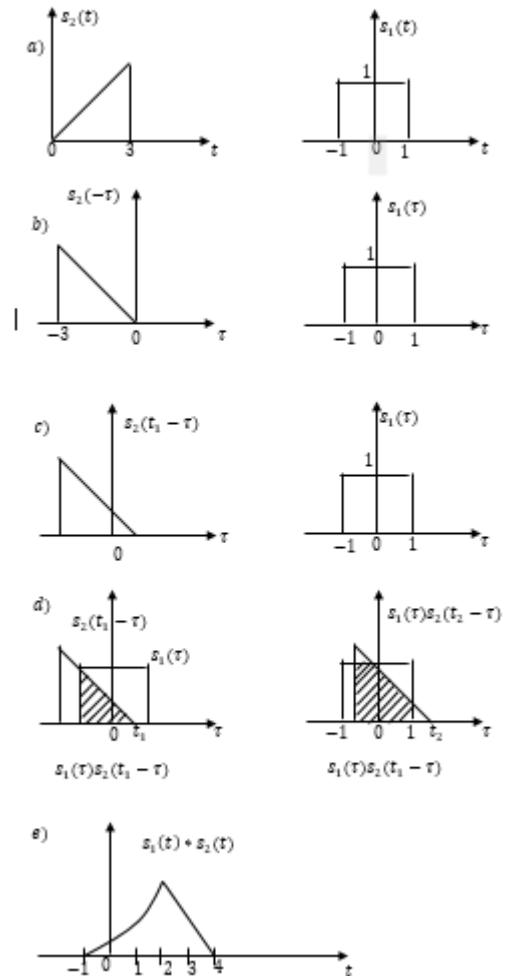


Fig.2.23. Interpretarea grafică a convulției semnalelor.

Observăm că, în timpul determinării funcției de convulție $s(t) = s_1(t) * s_2(t)$, funcția $s_2(-\tau)$ se deplasează în direcția pozitivă a axei τ pentru valori pozitive a timpului t și invers.

10. *Convulția funcției cu impulsul unitate.* Convulția funcției $s(t)$ cu impulsul unitate este însuși funcția $s(t)$. Conform teoremei convulției în timp se obține:

$$\mathcal{F}\{s(t) * \delta(t)\} = S(\omega) \cdot 1 = S(\omega). \quad (2.89)$$

Relația în timp, echivalentă celei în frecvență, exprimată prin (2.89) este:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = s(t). \quad (2.90)$$

Relația (2.90) realizează descompunerea unui semnal într-o sumă de funcții impuls unitate. Această descompunere prezintă o mare însemnatate în analiza circuitelor deoarece permite determinarea prin superpoziție a răspunsului unui circuit la orice semnal $s(t)$ atunci cînd se cunoaște răspunsul lui la impuls unitate.

Transformata Fourier poate fi aplicată semnalelor periodice, ceea ce permite o tratare unică atât a semnalelor periodice, cât și și a celor neperiodice, facilitînd soluționarea problemelor de analiză a semnalelor și a circuitelor în care intervin ambele tipuri de semnale. În mod riguros, transformata Fourier a unui semnal periodic nu există deoarece semnalul periodic nu satisfacă condiția de integrabilitate $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$. Această condiție este satisfăcută numai pe un interval finit. Transformata Fourier a semnalului periodic se obține totuși printr-o trecere la limită.

1.5.3. Transformata Laplace

După cum s-a arătat în paragraful 2.3, semnalul exponențial e^{st} poate descrie o varietate de forme de undă. Transformata Fourier descompune un semnal neperiodic într-o sumă de semnale exponențiale de forma $e^{j\omega t}$. Această formă este un caz particular al semnalului e^{st} și anume, cazul $\sigma = 0$, $\omega \neq 0$.

Descompunerea semnalelor în sume de semnale exponențiale de forma e^{st} este dată de transformata Laplace. Evident, clasa semnalelor care au transformata Fourier, deoarece transformata Laplace operează cu funcția e^{st} , care este mai generală decît $e^{j\omega t}$. Prin definiție, transformata Laplace $G(s)$ a unui semnal $g(t)$ este:

$$G(s) = \int_{-0}^{\infty} g(t) e^{-st} dt. \quad (2.91)$$

Semnalul $g(t)$ este presupus nul la $t < 0$. Limita inferioară $t = -0$ este introdusă pentru a se lăsa în considerație și impulsul unitate sau derivatele sale care pot să apară în origine. Notația simbolică a relației (2.91) este:

$$G(s) = L\{g(t)\}.$$

Condiția de existență a transformatei Laplace este:

$$\int_0^{\infty} |g(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty. \quad (2.92)$$

Transformata Laplace inversă $L^{-1}\{G(s)\}$ este:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G(s) e^{st} ds. \quad (2.93)$$

Limitele de integrare din expresia (2.93) arată că integrarea se face pe un contur paralel cu axa imaginară $j\omega$, astfel încît integrala (2.93) să fie convergentă.

Utilizarea transformatelor Laplace ale semnalelor în studiul circuitelor electrice conduce la transformarea ecuațiilor diferențiale în ecuații operaționale.

2. SEMNALE EŞANTIONATE

2.6.1. NECESITATEA EŞANTIONĂRII SEMNALELOR ÎN TIMP

După cum s-a arătat în paragraful 2.2, un semnal este complet determinat fie prin specificarea sa în domeniul timp, fie prin specificarea sa în domeniul frecvență. Acesta este conceptul fundamental pe care se bazează transmiterea simultană a mai multor semnale pe același canal de telecomunicații. Astfel, N semnale pot fi transmise simultan pe același canal de telecomunicații dacă pot fi separate fie în domeniul frecvență, fie în domeniul timp. Aceasta înseamnă că semnalele trebuie să ocupe fie benzi de frecvență diferite, fie intervale de timp diferite.

Transmiterea simultană a mai multor semnale pe un același canal fizic, prin separarea lor în domeniul frecvență este denumită multiplexare în frecvență, iar transmiterea simultană a mai multor semnale prin separarea lor în domeniul timp se numește multiplexare în timp.

În capitolul precedent s-a mai arătat că un semnal finit în timp este infinit în frecvență și invers. Prin urmare, la multiplexarea în frecvență, semnalele ce se transmit simultan, având spectre de frecvențe diferite, dar finite, sunt infinite în domeniul timp, deci apar mixate în domeniul timp. Similar, la multiplexarea în timp, semnalele ce se transmit sunt mixate în frecvență (spectrele lor se întind, teoretic, de la $\omega = 0$ la $\omega = \infty$).

Separarea semnalelor la recepție se face pe baza identității păstrate în domeniul frecvență, respectiv în domeniul timp.

Multiplexarea în timp se bazează pe eșantionarea semnalelor și transmiterea eșantionelor la momente de timp diferite, astfel încât eșantioanele diferitelor semnale să nu se suprapună (fig.2.24).

Identificarea fiecărui semnal este dată de durata τ_i față de anumite momente de referință marcate prin impulsuri de sincronizare (fig.2.24). La recepție, eșantionele diferitelor semnale se repară prin detecția sincronă.

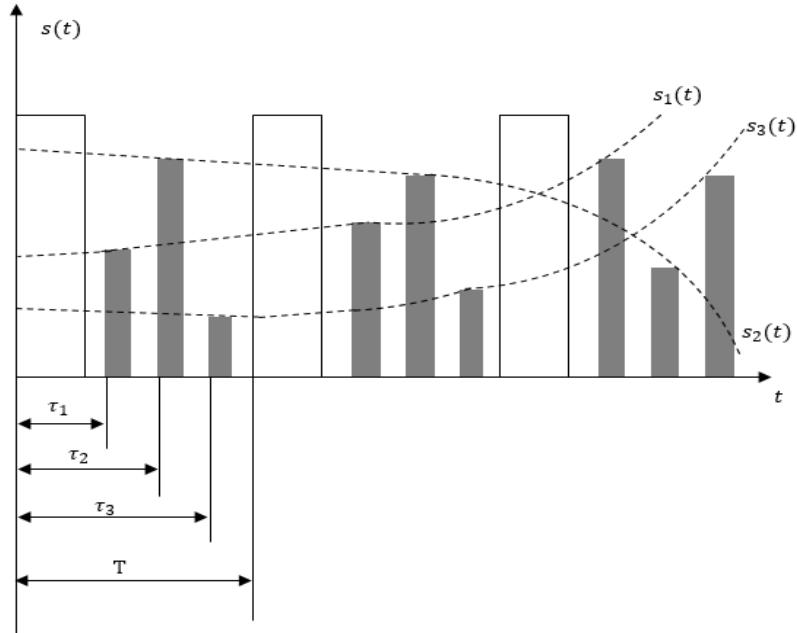


Fig.2.24. Principiul multiplexării în timp.

Din cele arătate rezultă că multiplexarea în timp este realizabilă în principiu. Mai trebuie să demonstrăm și cum se poate aplica. Demonstrația constă în a arăta că semnalul ce se eșantionează poate fi reconstruit numai din cunoașterea acestor eșantioane, sau, altfel spus, că semnalul este unic determinat de eșantioanele sale. Aceasta formează obiectul teoremei eșantionării:

Teorema eșantionării uniforme stabilește următoarele:

Un semnal de bandă limitată este univoc determinat de valorile sale considerate la momentele de timp echidistante, dacă distanța T dintre două momente succese satisfac relația:

$$T \leq \frac{1}{2f_m}, \quad (2.94)$$

unde f_m reprezintă frecvența maximă din spectrul semnalului.

Semnalul de bandă limitată este definit de relația:

$$S(\omega) = 0 \text{ pentru } |\omega| \geq \omega_m. \quad (2.95)$$

Reprezentările grafice în timp și în frecvență ale unui astfel de semnal sunt date în figura 2.25.

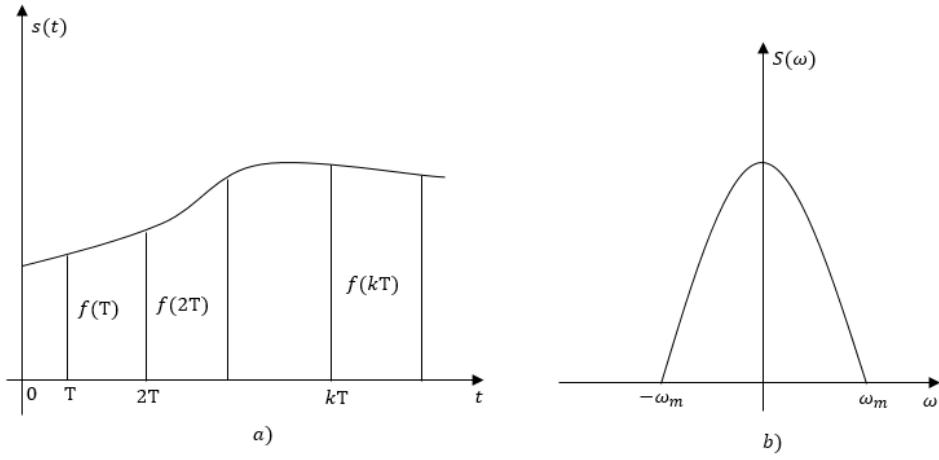


Fig.2.25. Semnal de bandă limitată.

Valorile semnalului la momentele kT se numesc valori de analiză sau eșantionare. T se numește perioadă de eșantionare, iar $\Omega = 2\pi/T$ reprezintă frecvența de eșantionare.

Conform teoremei eșantionării, informația completă asupra lui $s(t)$ este conținută în valorile de analiză $s(kT)$, luate uniform la distanța T una față de cealaltă. Teorema eșantionării poate fi demonstrată cu ajutorul teoremei convoluției în frecvență.

Considerăm un semnal de bandă limitată $s(t)$ și funcția impuls periodică $\delta_T(t)$. Produsul $s(t)\delta_T(t)$ reprezintă o succesiune de impulsuri localizate la intervale echidistante cu T și având suprafetele egale cu valorile lui $s(t)$ la momentele corespunzătoare (fig.2.26). Acest produs reprezintă semnalul $s(t)$ eșantionat uniform, pe care îl notăm $s^*(t)$:

$$s^*(t) = s(t)\delta_T(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\delta(t - nT). \quad (2.96)$$

Seria Fourier exponențială a semnalului periodic $\delta_T(t)$ este:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\Omega t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega t}, \quad (2.97)$$

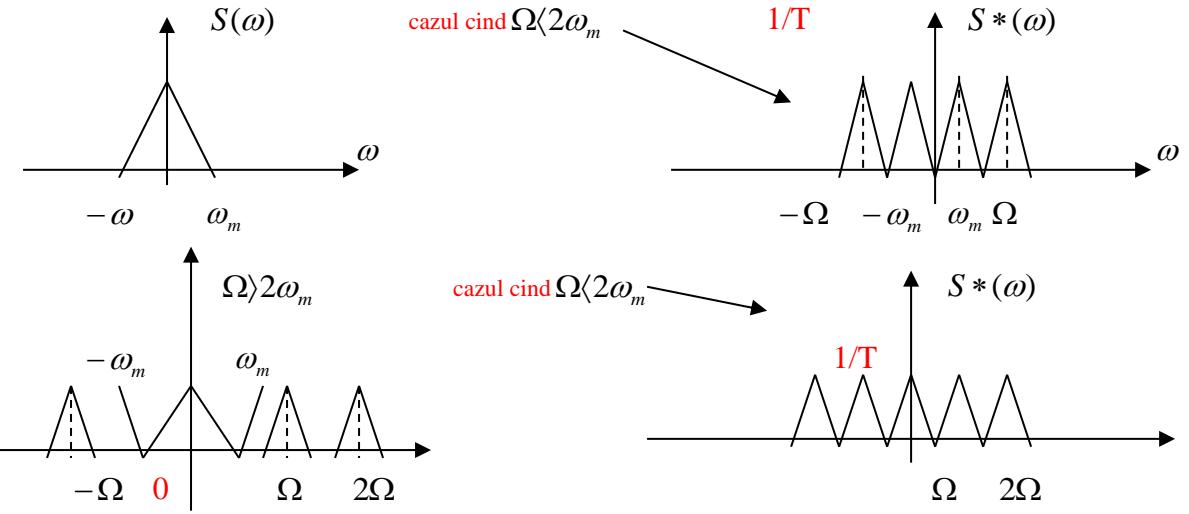
unde $\Omega = \frac{2\pi}{T}$. Transformatei Fourier a semnalului $\delta_T(t)$ va fi: $F\{ \delta_T(t) \} =$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega t} e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(w - n\Omega) = \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - n\Omega).$$

Funcția $S^*(w)$ poate fi determinată utilizând teorema de convoluție în domeniul frecvență: $S^*(w) = F\{S(t)\delta_T(t)\} = \frac{1}{2\pi} [S(w) * \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - n\Omega)] = \frac{1}{T} [S(w) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - n\Omega)];$

$$S(w) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - n\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(w - n\Omega); S^*(w) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(w - n\Omega).$$

Aceasta expresie arată că spectrul unui semnal eșantionat $S^*(t)$ este o repetare periodică a spectrului semnal $s(t)$ cu periodicitatea după frecvență Ω .



Se observă că spectrul este ce se repeta a semnal eșantionat nu se suprapun pînă cazul când $w \geq 2\omega_m$

,adică când se respectă condiția ca $T \leq \frac{1}{2f}$ care se numește condiția lui Nyquist, T se numește perioada lui Nyquist, iar $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2f_m}$ se numește frecvența Nyquist.

$$S(\omega)H(\omega) = \frac{1}{T}S(\omega), \quad (2.103)$$

unde $H(\omega)$ este funcția FTJ reprezentată în figura 2.27, a.

În domeniul timp, operația echivalentă produsului exprimat în frecvență prin relația (2.103) este conoluția. Așadar,

$$s(t) = Ts^*(t) * h(t) \quad (2.104)$$

Dar $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi j t} e^{j\omega t} \Big|_{-\omega_m}^{\omega_m} = \frac{1}{\pi t} \sin \omega_m t \quad t = \frac{\omega_m \sin \omega_m t}{\pi} = \frac{\omega_m}{\pi} \text{sinc } \omega_m t$, astfel încât:

$$s(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[nT] \delta(t - nt) * \frac{\omega_m}{\pi} \text{sinc } \omega_m t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[nT] \text{sinc } \omega_m (t - nt). \quad (2.105)$$

În obținerea expresiei (2.105) s-au utilizat relațiile:

$$\delta(t - \tau) * s(t) = s(t - \tau)$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{\omega_m}.$$

Relațiile (2.105) exprimă modul de reconstruire în domeniul timp a semnalului $s(t)$ din eșantioanele sale. Pentru aceasta se ponderează fiecare funcție *sinc* centralată la nT cu valoarea de analiză corespunzătoare $s[nT]$ și apoi se face sumarea. Ponderea intervine numai asupra funcției *sinc* trecând prin zero la momentul respectiv. Construirea lui $s(t)$ pe baza descompunerii dată de (2.105) este ilustrată în figura 2.28.

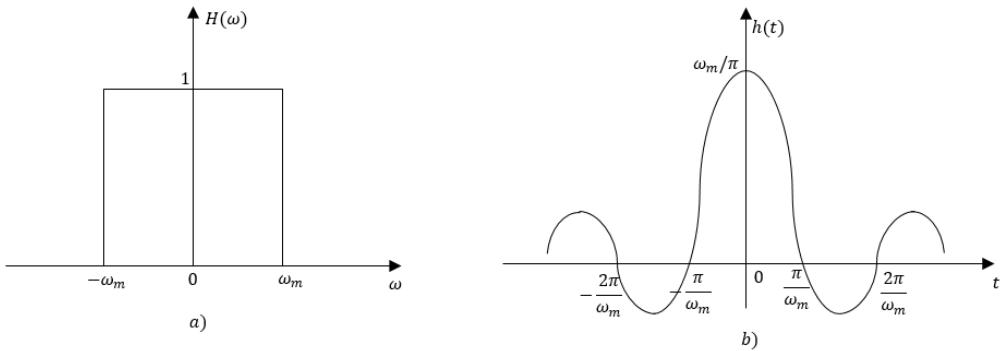


Fig.2.27. Funcția de transfer $H(\omega)$ a unui FTJ ideal (a) și funcția de pondere $h(t)$ corespunzătoare (b).

Teorema eșantionării are o mare importanță practică, deoarece arată că un *semnal continuu de bandă limitată* poate fi înlocuit într-o succesiune de eșantionare fără a se pierde din informație, în felul acesta problema transmiterii unui astfel de semnal se reduce la transmiterea unui număr finit de valori de analiză.

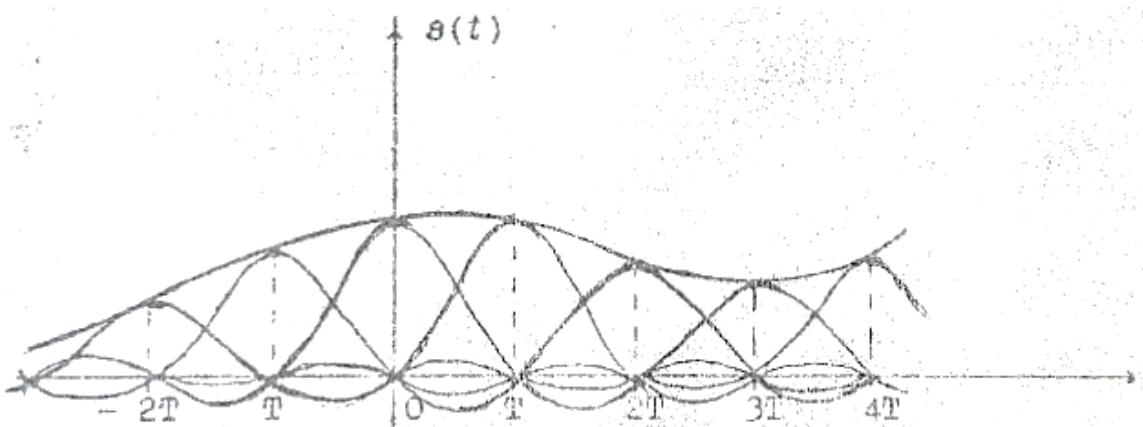


Fig.2.28. Reconstruirea semnalului continuu $s(t)$ din valorile sale de analiză.

Pentru ca un semnal să fie de bandă limitată el trebuie să existe pe un interval infinit de timp. Semnalele întâlnite în telecomunicații nu respectă această cerință. Totuși, din punct de vedere practic, majoritatea semnalelor de telecomunicații pot fi considerate de bandă limitată, deoarece cea mai mare parte a energiei lor este conținută în componentele localizate în interiorul unui interval finit de frecvență. În afara intervalului, funcția de densitate spectrală scade foarte mult, tinzând rapid la zero.

2.6.2. Cuantizarea semnalelor eșantionate

După cum s-a arătat în paragraful 2.6.1., semnalul este discretizat în timp obținându-se în felul acesta valorile de analiză la momente discrete de timp. Valorile de analiză variază în mod continuu, adică pot lua orice valoare între amplitudinea minimă și amplitudinea maximă. Eșantionarea semnalelor în amplitudine, numită cuantizare, realizează o discretizare în amplitudine, adică o discretizare a valorilor de analiză. Pentru aceasta, intervalul continuu de variație a amplitudinilor

semnalului este împărțit într-un număr finit de intervale de cuantizare denumite trepte de cuantizare, aşa cum este arătat în figura 2.29.

S-a notat cu q mărimea treptei de cuantizare, iar cu N numărul maxim de trepte de cuantizare necesare pentru eşantionarea în amplitudine. Este evident că N va fi cu atât mai mare cu cât q este mai mic.

Valorile de analiză sunt approximate prin numere întregi de trepte de cuantizare. Tuturor amplitudinilor care se găsesc în intervalul $kq - q/2, kq + q/2$ li se atribuie în urma cuantizării valoarea kq . În felul acesta reducem transmisia la transmiterea unor numere întregi egale cu valorile de analiză exprimate în trepte de cuantizare.

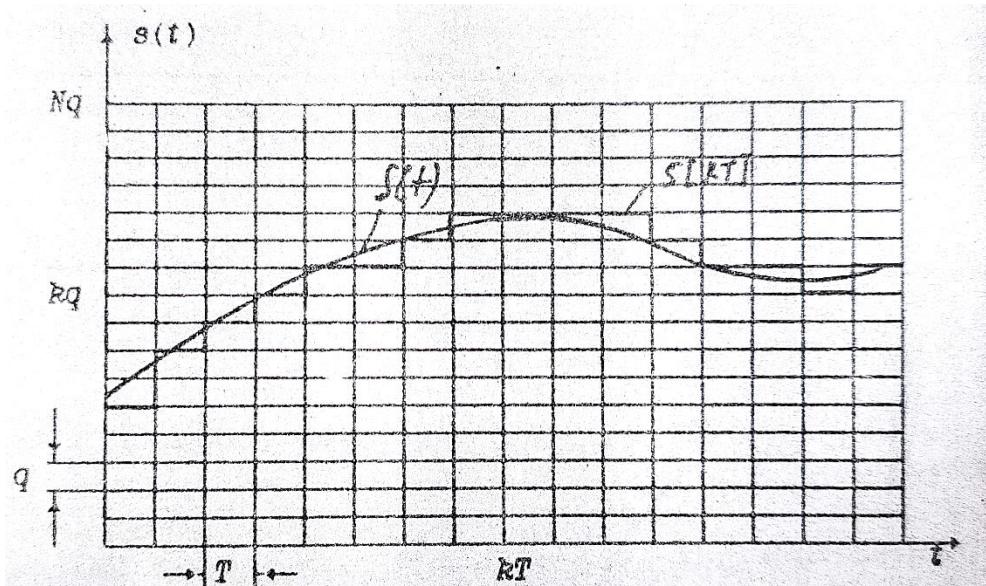


Fig.2.29. Eşantionarea şi cuantizarea semnalului $s(t)$.

Spre deosebire de eşantionare, care ne duce la pierderea informaţiei atâtă timp cât sunt îndeplinite condiţiile teoremei eşantionării, la cuantizare se pierde din informaţie prin aproximarea valorilor de analiză. Eroarea maximă de aproximare este $q/2$. Datorită erorilor introduse de cuantizare, semnalul continuu $s(t)$ refăcut la receptie nu va mai fi identic cu cel de la emisie. Semnalul diferenţă are caracterul statistic al unui zgomot suprapus peste semnalul original şi se numeşte zgomot de cuantizare. Zgomotul de cuantizare depinde de q , ceea ce conduce la mărirea lui N care totuşi nu poate fi făcut oricât de mare (limitare tehnologică). Eşantioanele exprimate în numere întregi de trepte de cuantizare nu se transmit ca atare, ci se exprimă numărul întreg respectiv în cadrul unui anumit sistem de numărare (binar, ternar, zecimal, etc.) şi apoi se transmit câte un impuls pentru fiecare poziţie a sistemului de numărare.

Modulația semnalelor

Multiplexarea în frecvență a semnalelor se bazează pe deplasarea spectrelor de frecvență ale diverselor semnale astfel încât ele să ocupe benzi de frecvență diferite. Procedura de deplasare a spectrelor semnalelor poate fi realizată prin modulare. În procesul de modulare intervin urmatoarele semnale:

- 1) $S(t)$ ce conține informația numită semnal modulator
- 2) Semnalul $P(t)$ asupra căruia se transferă informația numită semnal purtator
- 3) Semnalul $S_M(t)$ – rezultat prin acțiunea semnalului modulator $S(t)$ asupra semnalului purtator $P(t)$ denumit semnal modulat.
- 4) Modularea constă în modificarea unui parametru al purtatorului $P(t)$ de către semnalul modulator $S(t)$ ce necesită de a fi transmis.

În conformitate cu natura semnalului purtator putem distinge:

- 1) Modulații cu purtatori sinusoidali

Purtatorul $P(t)$ cu oscilație armonica poate fi descris de următoarea relație:

$$P(t) = A_0 * \cos(\omega_0 * t + \varphi_0);$$

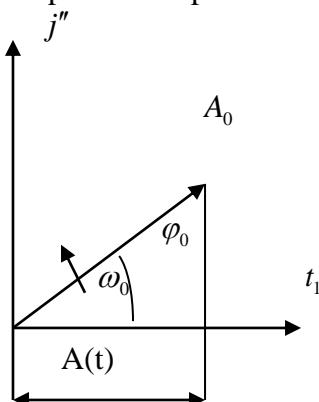
Unde:

A_0 – amplitudinea oscilației

ω_0 - frecvența oscilației

φ_0 – faza initială

Acest semnal poate fi reprezentat în planul complex cu un vector de lungimea A_0



Acest vector se rotește cu viteza unghiulară ω_0 și în momentul initial când $t=0$ are unghiul φ_0 față de axa reală. În alte momente de timp unghiul $\theta = \omega_0 * t + \varphi_0$;

Proiecția acestui vector pe axa reală în orice moment de timp va fi egală cu valoarea instantaneie a amplitudinei.

A modula înseamnă să stabili o dependență între un parametru al purtatorului $P(t)$ și semnalul modulator $S(t)$. Este indicat că această dependență să fie liniară fiecare dintre cele 3 parametri care definesc purtatorul poate prelua variația semnalului modulator $S(t)$ astfel putem obține următoarele tipuri de modulații:

- 1) Modulații de amplitudinea MA
- 2) Modulații de frecvență MF
- 3) Modulații de fază Phaze

In cazul modulatiei de amplitudine :

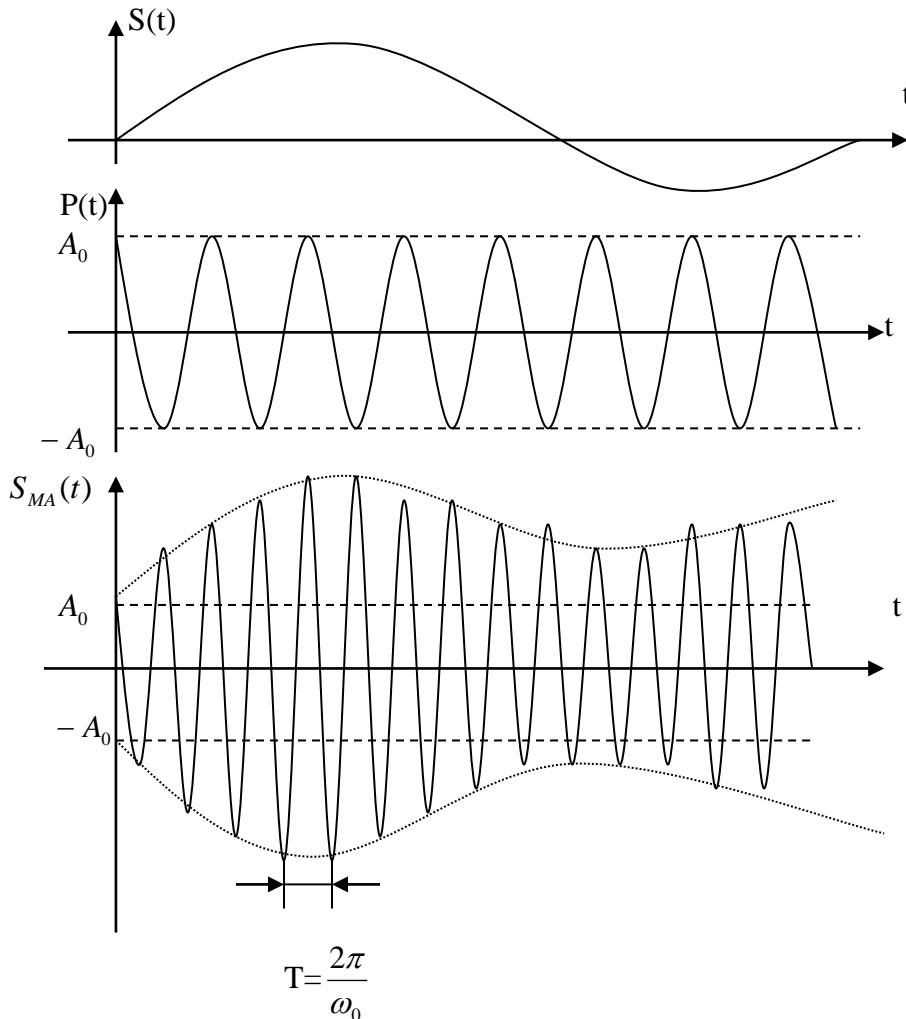
Amplitudinea instantaneie $A(t)$ a semnalului modulat in amplitudine trebuie sa fie intr-o relatie de dependenta liniara fata de semnalul $S(t)$ in acest caz :

$$A(t) = A_0 + KS(t);$$

Expresia in domeniul timp a semnalului modulat in amplitudine va fi :

$$S_{MA}(t) = A(t) * \cos(w_0 * t + \varphi_0) = [A_0 * t + K * S(t)] * \cos(w_0 * t + \varphi_0);$$

Sa reprezentam formele de unda a unui semnal modulator $S(t)$ purtator $P(t)$ si modulat in amplitudine $S_{MA}(t)$



Curba reprezinta punctat in figura poarta denumirea de infasuratoare sau anvelopa a semnalului modulat in amplitudine si reproduce forma semnalului modulator $S(t)$. Pentru a defini celelalte tipuri de modulatii in frecventa si in faza sa definim mai inti notiunea de „functie sinusoidalala generalizata” astfel in modul obisnuit functia sinusoidalala se caracterizeaza prin intermediul a 3 parametri: amplitudine frecventa si faza care sunt constante in timp. In cazul functiei sinusoidale generalizate aceste 3 parametri pot sa fie variabile in timp.

In cei ce priveste semnalul sinusoidal generalizat el poate fi exprimat prin urmatoarele expresii:

$P(t) = A(t) * \cos\theta(t); \theta(t) – faza semnalului la un moment dat si se numeste faza instantaneie a semnalului$

Frecventa instantaneie:

$$\nu_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt};$$

Care in cazul semnalului sinusoidal generalizat variaza in timp
Din aceste considerente reatia de determinare a lui $\theta(t) = \int \omega_i(t) dt$;

2) Modulatii cu purtatori in impulsuri

Modulatia de frecvență. A modula în frecvență purtătorului $P(t)$ înseamnă a crea o dependență liniară între frecvența instantanee a purtătorului modulat și semnalul modulator $S(t)$ în conformitate cu următoarea relație:

$w_i(t) = w_o + ks(t)$ de aici putem determina faza instantanee a semnalului modulat.

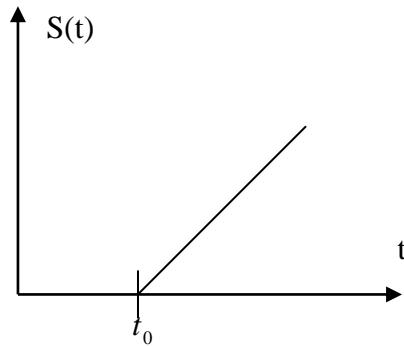
$$\theta(t) = \int w_i(t) dt = w_0 t + k \int S(t) dt + \varphi_0$$

Expresia analitică a semnalului modulat în frecvență în forma cea mai generală se reprezintă în felul următor :

$$S_{MA}(t) = A_0 \cos \theta(t) = A_0 \cos \left[w_0 t + k \int S(t) dt + \varphi_0 \right]$$

unde φ_0 este o constantă arbitrară și poate fi luată=0.

Modulatia in faza. A modula in faza inseamna a stabili o relatie de dependenta liniara intre faza instantanee a purtătorului modulat si semnal modulator $S(t)$. $\theta(t) = \omega_0 t + \phi_0 + kS(t)$.Expresia analitica in forma cea mai generala a unui semnal modulat in faza are urmatoarea forma: $S_{MP}(t) = A_0 \cos \theta(t) = A_0 \cos [\omega_0 t + \phi_0 + kS(t)]$.P\ u a sublinia diferența intre modulat de fregvența si cea de faza construim graficele reprezentarii in timpale semnalelor modulate cu unu si acelasi semnal modulator $S(t)$.Presupunem $S(t)=at$ si faza initiala a purtătorului $\phi_0=0, t_0=0$ deci:



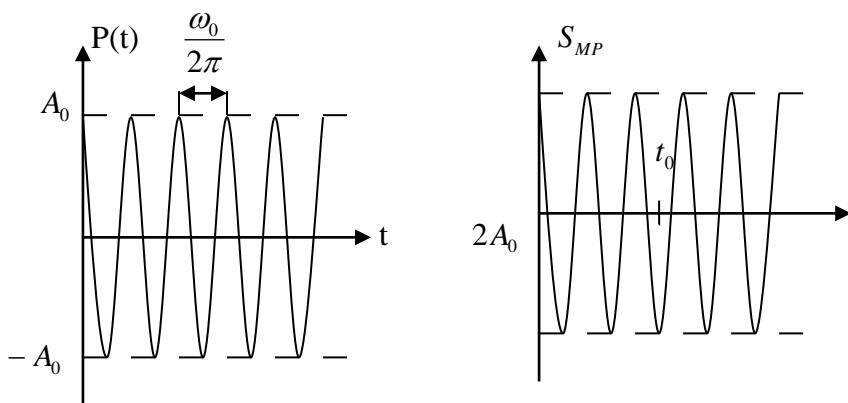
In cazul modulat in fregvența valoarea instantanee a semnal modulat se descrie astfel:

$$S_{MF} = A_0 \cos \left[w_0 t + k \int at dt \right] = A_0 \cos \left[w_0 t + \frac{kat^2}{2} \right]$$

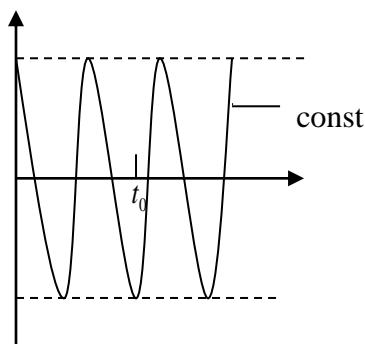
unde $\left[\omega_0 t + \frac{kat^2}{2} \right]$ se înscrie faza semnal modulat in orice moment de timp .P\ u a construi

reprezentarea in timp a semnal modulat gasim fregvența instantanee: $\theta(t) = w_0 t + \frac{kat^2}{2}$;

$\omega_i(t) = \frac{d\Theta(t)}{dt} = \omega_0 + kat$.Se observa ca fregvența semnal modulat creste liniar incepind cu moment de timp t_0 .



In cazul modulat in faza semnal modulat e determinat de urmatoarea expresie: $S_{MP}(t) = A_0 \cos[\omega_o t + kat]$, $\omega_i(t) = \frac{d\Theta(t)}{dt} = \omega_o + ka = const$. Se observa ca-n momentu de timp t_0 freqventa se schimba cu valoarea lui ka si mai departe ramine constant.



Spectrele semnalelor modulate în amplitudine

Examinam reprezentarea semnal modulat in amplitudine in domeniul freqventa p\u00f3 u 3 cazuri diferite a formei de unda a semnal modulat $S(t)$.

1) Presupunem ca semnal modulator $S(t)$ e un semnal sinusoidal de urmatoarea forma

$$S(t) = A_0 \cos(\Omega_0 t + \phi_0) - 1.$$

Amplitudinea instantanee a semnal modulat in amplitudine se descrie

$$A(t) = A_0 + ks(t) = A_0 + ka_0 \cos(\Omega_0 t + \phi_0) = A_0[1 + m \cos(\Omega_0 t + \phi_0)] - 2.$$

Expresia analitica a semnal modulat in amplitudine:

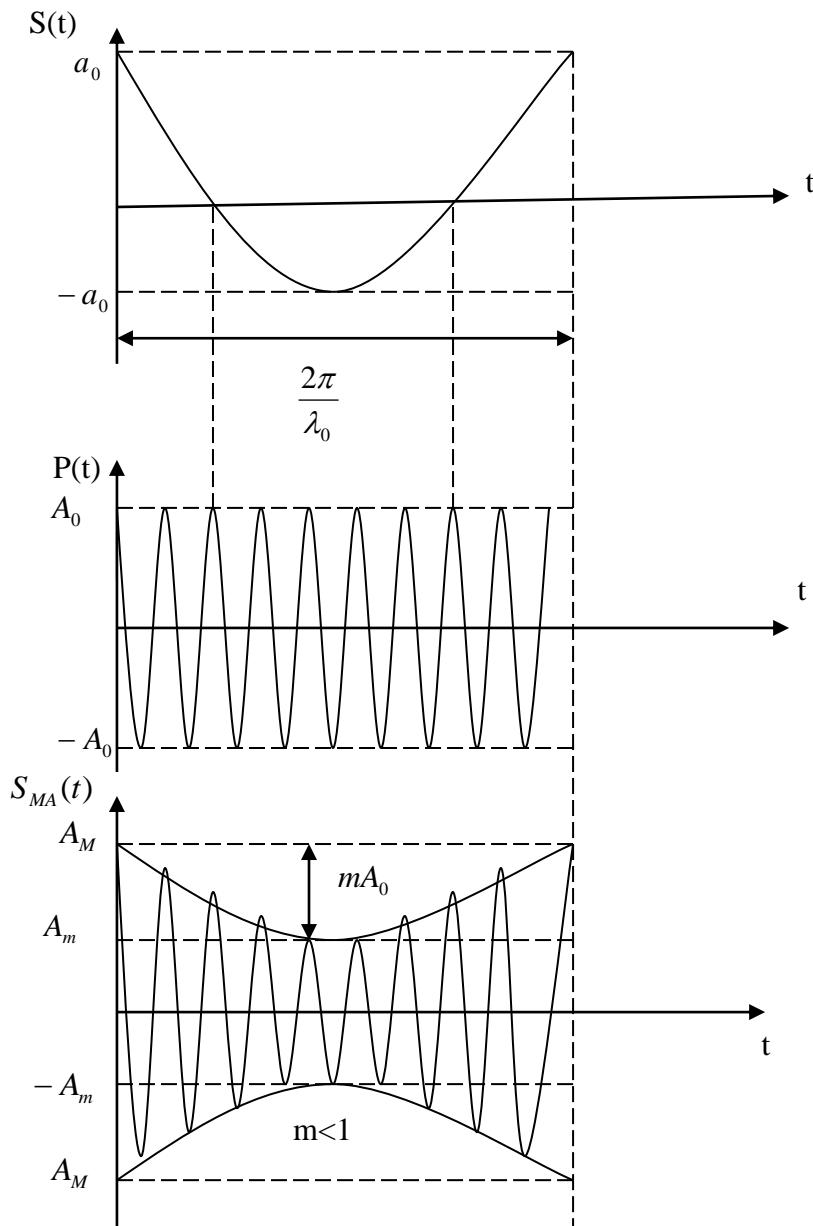
$$S_{MA}(t) = A_0[1 + m \cos(\Omega_0 t + \phi_0)] \cos(\omega_0 t + \phi_0) - 3,$$

unde $m = \frac{ka_0}{A_0}$ reprezinta gradul de modulatie ,se observa ca el e proportional cu amplitudinea semnal modulator $S(t)$. Din 2 putem determina amplitudinea maxima A_M si amplitudinea A_{min} a semnal modulat in amplitudine,deci

$$A_M = A_0(1+m) \quad A_{min} = A_0(1-m) \quad -4.$$

$$\text{Din relatia 4 putem scrie ca: } m = \frac{A_M - A_0}{A_0} = \frac{A_0 - A_m}{A_0} = \frac{A_M - A_m}{A_M + A_m} \quad -5;$$

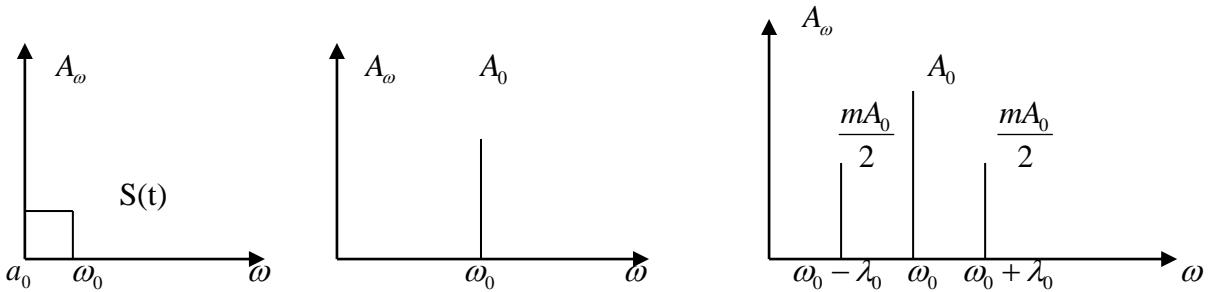
Formele de unda a semn $S(t), P(t)$ si $S_{MA}(t)$ p\u00f3 u cazul dat vor avea urmatoarea reprezentare:



Se presupune conditia ca gradul de modulatie $m \leq 1$, daca $m > 1$ atunci infasuratoarea semnal modulat in amplitudine nu mai produce forma semnal modulat $S(t)$ si aceasta nu poate fi obtinut prin demodulare. Din expresia 3 se obtine urmatoarea reprezentare a semnal modulat in amplitudine.

$$S_{MA}(t) = A_0 \cos(\omega_o t + \phi_0) + \frac{mA_0}{2} \cos[(\omega_o + \Omega_0)t + \phi_0 - \phi_0] + \frac{mA_0}{2} \cos[(\omega_o + \Omega_0)t + \phi_0 + \phi_0] - 6$$

Expresia 6 pune in evidenta componentele spectrale ale semnal modulat in amplitudine. Sa reprezentam spectrele de amplitudine a semnal modulator $S(t)$ purtator $P(t)$ si modulat in amplitudine $S_{MA}(t)$.



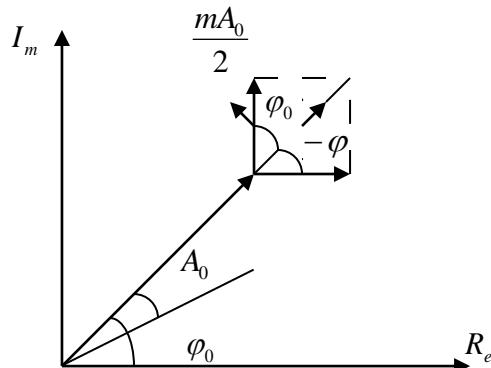
Observam ca semnal modulat in amplitudine contine 3 elemente spectrale ,una cu fregventa de ω_0 si amplitudinea A_0 care e insusi purtator si 2 componente laterale le fregvenetele $\omega_0+\Omega_0$ si $\omega_0-\Omega_0$ de amplitudine $\frac{mA_0}{2}$ ce se numeste component lateral superioara si inferioara.Banda de fregventa a semnal in amplitudine $B = 2\Omega$.

Reprezentarea fazoriala a semnalului modulat. Cele 3 componente din spectru de amplitudine din spectru modulat se reprezinta sub forma de vectori rotitori de amplitudine A_0 si

respectiv $\frac{mA_0}{2}$ cu fregvenetele respective ω_0 si $(\omega_0 + \Omega_0)$ si $(\omega_0 - \Omega_0)$,insumarea acestor 3

vectori se face plasind in virful vectorului aferent purtatoare cele 2 componente laterale ce se rotesc cu fregvenetele $+\Omega_0$ si $-\Omega_0$ in raport cu vectorul purtator ,insumarea acestor 3 vectori conduce la un vector resultant cu lungimea periodic variabila de perioada ω_0 ce se roteste in jurul centrului de coordonate incepind cu faza initiala ϕ_0 .

$$S_{MA}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) + \frac{mA_0}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega_0)t + \phi_0 + \Theta_s] + \frac{mA_0}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega_0)t + \phi_0 - \Theta_0]$$



2) Semnal modulator e o suma de componente sinusoidale:

$$S(t) = \sum_{k=1}^m a_k \cos(\Omega_k t + \phi_k), \quad P(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

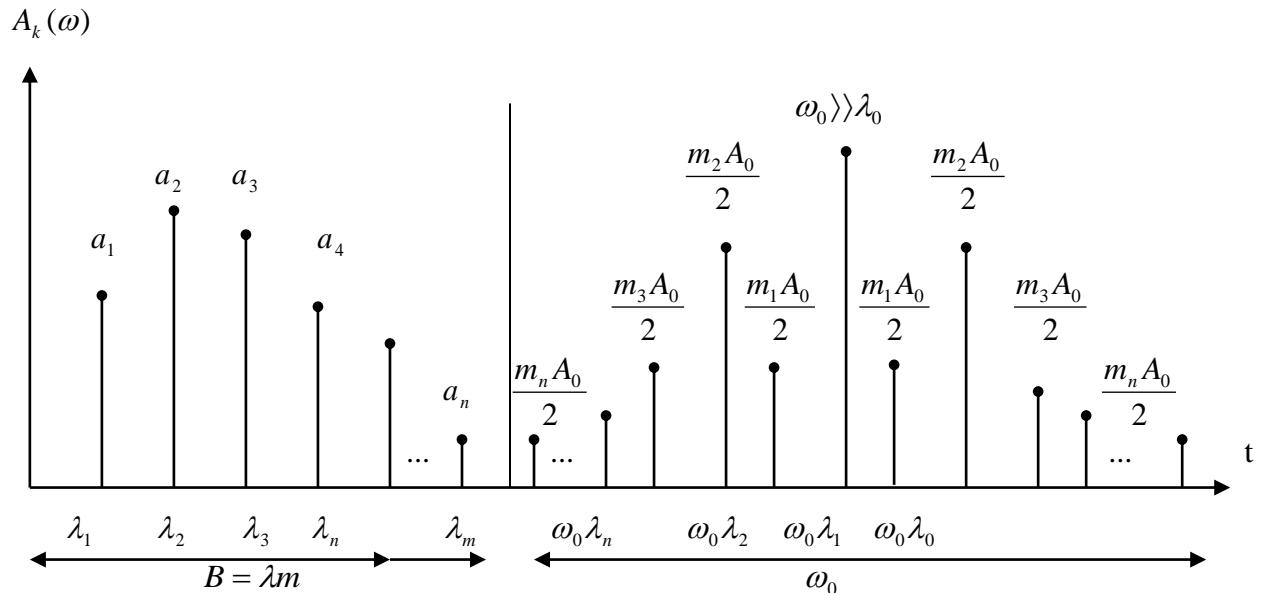
Amplitudinea instantanea in acest caz va fi:

$$A(t) = A_0 [1 + \sum_{k=1}^m m_k \cos(\Omega_k t + \phi_k)] .$$

Semnal modulat in amplitudine :

$$S_{MA}(t) = A(t) \cos(\Omega_0 + \varphi_0); S_{MA}(t) = A_0 \cos(\Omega_0 t + \varphi_0) + \sum_{k=1}^m \frac{m_k A_0}{2} \cos[(\Omega_0 + \Omega_k)t + \varphi_0 + \Phi_k] + \sum_{k=1}^m \frac{m_k A_0}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega_k)t + \varphi_0 - \Phi_k].$$

Spectrele de amplitudine ale semnal S(t) si S_{MA}(t) pot fi reprezentate astfel:



Din aceste diagrame se observa ca e necesar sa se indeplineasca urmatoarea conditie $(\omega_0 - \Omega_m) > \Omega_m$ sau $\omega_0 > 2\Omega_m$ pentru ca diagram spectrale ale semnal S(t) si S_{MA}(t) sa nu se suprapuna ,de asemenea se mai observa ca semnal modulat in amplitudine in acest caz contine nu 2 componente laterale ci 2 benzi laterale ,banda laterală superioara si inferioara.Banda de fregvență modulată in amplitudine e de 2 ori mai mare decit banda semnal modulat S(t) ,

$$B_{MA} = 2B = 2\Omega_m, B = \Omega_m.$$

3) Semnalul modulat S(t) e o functie de timp arbitrara neperiodica.

Daca semnal modulat S(t) admite transformata Fourier care o notam S(ω) atunci se poate calcula f-tia de densitate spectrala a semnalului modulat S_{MA}(ω),

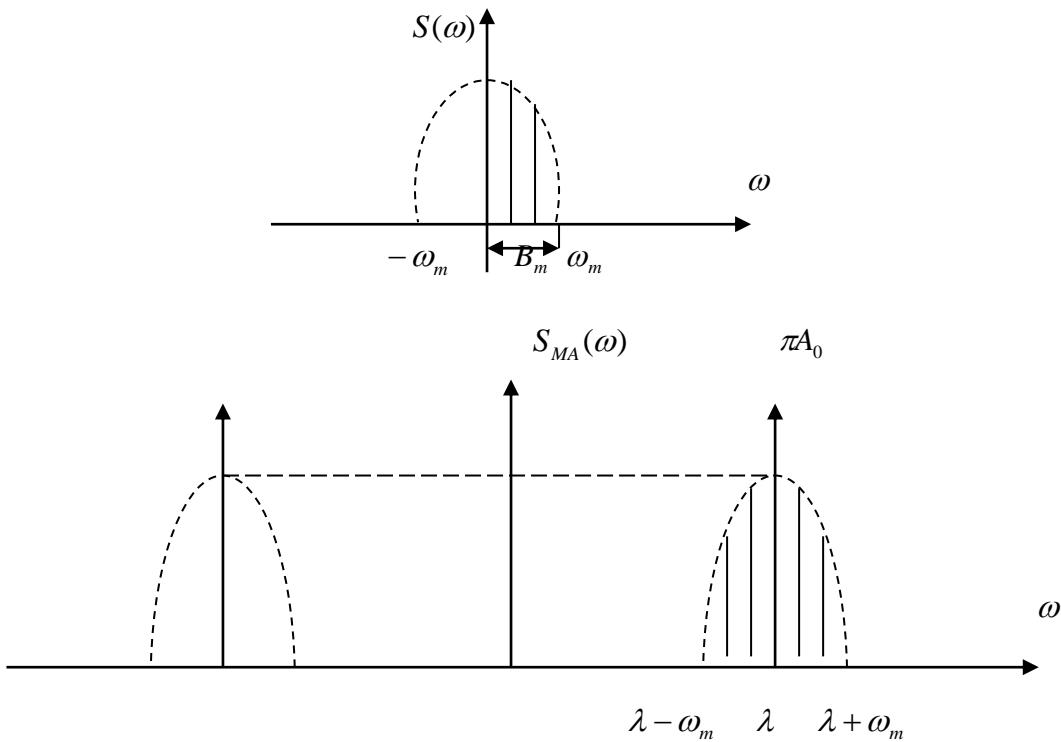
$$S_{MA}(\omega) = F\{[A_0 + Ks(t)]\cos(\omega_0 + \varphi_0)\} = F\{[A_0 + ks(t)]\} \frac{e^{j\omega_0 + \varphi_0} + e^{-j(\omega_0 + \varphi_0)}}{2} = \frac{A_0}{2} e^{j\varphi_0} F\{e^{j\omega_0 t}\} +$$

$$\frac{A_0}{2} e^{-j\varphi_0} F\{e^{-j\omega_0 t} s(t)\};$$

Utilizind proprietatile deplasarii infregvență a transformatei Fourier obținem ca:

$F\{e^{j\omega_0 t} s(t)\} = S(\Omega - \omega_0)$, $F\{e^{-j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\Omega - \omega_0)$ atunci functia de densitate spectrala a semnalului in amplitudine va fi:

$$S_{MA}(\omega) = \pi A_0 [e^{j\varphi_0} \delta(\Omega - \omega_0) + e^{-j\varphi_0} \delta(\Omega + \omega_0)] + \frac{k}{2} [e^{j\varphi_0} S(\Omega - \omega_0) + e^{-j\varphi_0} S(\Omega + \omega_0)]$$



. Reprezentarea grafica a f-tiei de densitate spectrala a semnalelor $S(t)$ si $S_{MA}(t)$ luate in cadrul cind $\phi_0=0$ pot fi urmatoarele:

1)Dupa cum se observa modulat de amplitud translat functia de densitate spectrala $S(\omega)$ a semnal modulat cu $+/-\omega_0$,in plus functia $S_{MA}(\omega)$ contine 2 impulsuri localizate la fregventele $+/-\omega_0$ a caror integrami $=\pi A_0$.

Ca si în cazul precedent se definesc 2 benzi inferioare si superioara.In practica transmiterii semnal modulate-n amplitudine se poate efectua prin mai multe metode rezultind astfel mai multe tipuri de modulati in amplitudine:

- 1)cu purtator si ambele benzi laterale,
- 2)cu purtator suprimat si ambele benzi laterale

3)cu banda laterală unica.Avantaje si dezavantaze:1)in cazul modulat de amplitud cu purtator si ambele benzi laterale avem avantajul unei reconstructii simple a mesaj la receptie .Acet tip de modulatie e indicat atunci cind echipament de receptie trebuie sa fie cit mai simplu in schimb semnal modulat ocupa o banda de fregventa dubla fata de semnal modulator,iar emitatorul necesita o putere mare p\u00fcr a transmite atit purtatorul cit si ambele benzi laterale.

2)Sistemele cu modulat in amplitudine cu modul suprimat prezinta avantaj unei puteri mai mici la emisie eficienta fiind 100%,banda de fregventa e aceiasi ca si-n caz precedent,iar primul dezavantaj il constituie complicarea detectiei,deoarece la receptie e necesar de a genera un purtator sincron si sinfazic cu purtator de la emisie.

3)Sistemele cu modulatie in amplitudine cu banda laterală unica au avantaj ca se reduce de 2 ori banda de fregventa necesara p\u00fcr transmiterea fata de primele cazuri,de asemenea si puterea emitatorului e mai mica insa receptorul e mult mai complicat deoarece e necesar de a genera purtatori la receptie.

Spectrele semnalelor modulate în frecvență

Fie un semnal modulator $s(t)$ și un purtător sinusoidal $P(t) = A_0 \cos(\Omega_0 t + \phi_0)$. A modula în frecvență purtătorul $P(t)$, înseamnă a crea o dependență liniară între frecvența instantanee a purtătorului modulat și semnalul modulator $s(t)$, conform relației

$$\Omega_i(t) = \Omega_0 + ks(t) \quad (2.48)$$

Utilizând relațiile (2.47) și (2.42) se determină faza instantanee a semnalului modulat și expresia analitică a semnalului MF

$$\phi(t) = \int \Omega_i(t) dt = \Omega_0 t + k \int s(t) dt + \phi_0 \quad (2.49)$$

$$S_{MF}(t) = A_0 \cos \phi(t) = A_0 \cos[\Omega_0 t + k \int s(t) dt + \phi_0] \quad (2.50)$$

Expresia (2.50) reprezintă în forma cea mai generală un semnal MF în domeniul timp. ϕ_0 este o constantă arbitrară și poate fi luată zero. Dacă $s(t)$ este nul la $t < 0$, atunci limitele de integrare sunt 0 și t . Notând:

$$g(t) = \int_0^t s(t) dt \quad (2.51)$$

expresia (2.50) devine:

$$S_{MF}(t) = A_0 \cos[\Omega_0 t + kg(t)] = A_0 \cos \Omega_0 t \cos[kg(t)] - A_0 \sin \Omega_0 t \sin[kg(t)] \quad (2.52)$$

Evaluarea spectrului de frecvențe al semnalului MF este complicată din punct de vedere matematic din cauză că $g(t)$ apare în argumentul funcțiilor trigonometrice. Dacă este însă satisfăcută condiția:

$$k|g(t)|_{\max} \ll \frac{\pi}{2} \quad (2.53)$$

atunci expresia (2.52) se simplifică mult și spectrul $S_{MF}(\omega)$ se determină foarte simplu. În cazul în care:

$$k|g(t)|_{\max} \gg \frac{\pi}{2} \quad (2.54)$$

analiza spectrală pentru un $s(t)$ oarecare devine dificilă. Prin considerarea semnalului modulator $s(t)$ ca un simplu semnal sinusoidal, analiza se simplifică. Rezultatele obținute în această ipoteză simplificatoare sunt însă concluzioane pentru proprietățile MF.

Relațiile (2.53) și (2.54) definesc modulația de frecvență de bandă îngustă, respectiv modulația de frecvență de bandă largă.

MF de bandă îngustă. Ținând seama de condiția (2.53) se pot face aproximările:

$$\begin{aligned} \cos[kg(t)] &\approx 1 \\ \sin[kg(t)] &\approx kg(t) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Introducând (2.55) în (2.52) se obține:

$$S_{MF}(t) = A_0 \cos \Omega_0 t - kA_0 g(t) \sin \Omega_0 t \quad (2.56)$$

Spectrul semnalului MF de bandă îngustă se determină foarte simplu, aplicând proprietatea de deplasare în frecvență a transformatei Fourier. Obținem:

$$\begin{aligned}
S_{MA}(\omega) &= A_0 F \left\{ \frac{e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}}{2} \right\} - k A_0 F \left\{ \frac{e^{-j\Omega_0 t} - e^{-j\Omega_0 t}}{2j} g(t) \right\} = \\
&= \pi A_0 [\delta(\omega - \Omega_0) + \delta(\omega + \Omega_0)] + j \frac{kA_0}{2} [G(\omega - \Omega_0) - G(\omega + \Omega_0)]
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Deoarece:

$$g(t) = \int_0^t s(t) dt \tag{2.58}$$

pe baza proprietății de integrare în timp, rezultă că:

$$S_{MF}(\omega) = \pi A_0 [\delta(\omega - \Omega_0) + \delta(\omega + \Omega_0)] + \frac{kA_0}{2} \left[\frac{S(\omega - \Omega_0)}{\omega - \Omega_0} - \frac{S(\omega + \Omega_0)}{\omega + \Omega_0} \right] \tag{2.58}$$

Se observă că spectrul semnalului MF de bandă îngustă este similar cu cel al semnalului MA (relația 2.19), obținându-se și în acest caz purtătorul și cele două benzi laterale. Deci, lățimea de bandă a semnalului MF este ca și la MA : $B = 2\omega_m$ (în ipoteza că semnalul modulator $s(t)$ are spectrul limitat la ω_m). Deosebirea esențială între spectrele MA și MF de bandă îngustă constă în faptul că, în timp ce la MA, cele două benzi laterale sunt în fază, la MF acestea sunt în opozitie de fază. Din punct de vedere matematic, acest lucru este evidențiat prin împărțirea lui $S(\omega - \Omega_0)$ la $(\omega - \Omega_0)$, împărțire care schimbă sau nu semnul lui $S(\omega - \Omega_0)$, după cum $\omega < \Omega_0$, respectiv $\omega > \Omega_0$. Deși din punct de vedere al spectrelor semnalele MA și MF de bandă îngustă au multe asemănări, formele lor de undă sunt totuși foarte diferite. La un semnal MA, frecvența

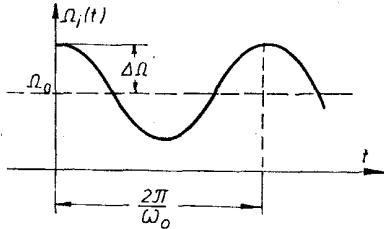


Fig. 2.19. Variația frecvenței instantanee a semnalului MF.

este constantă și amplitudinea variază în timp, iar la un semnal MF, amplitudinea este constantă și frecvența variază în timp.

MF de bandă largă. S-a afirmat anterior că analiza spectrală a semnalului MF de bandă largă se poate face cu relativ ușurință dacă semnalul modulator este un semnal sinusoidal:

$$s(t) = a_0 \cos \omega_0 t \tag{2.60}$$

înlocuind pe $s(t)$ în (2.48) se obține frecvența instantanee a semnalului MF:

$$\Omega_i(t) = \Omega_0 + k a_0 \cos \omega_0 t = \Omega_0 + \nabla \Omega \cos \omega_0 t \tag{2.61}$$

unde $\Delta\Omega = k a_0$ poartă denumirea de *deviație de frecvență* s. semnalului MF, măsurând depărtarea maximă a frecvenței instantanee $\Omega_i(t)$ față de Ω_0 .

În figura 2.19 este reprezentată variația în timp a lui $\Omega_i(t)$.

Faza instantanee și semnalul MF, determinate cu relațiile (2.49) și (2.50) devin:

$$\phi(t) = \Omega_0 t + \frac{\Delta\Omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t = \Omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t \tag{2.62}$$

$$S_{MF}(t) = A_0 \cos(\Omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t) \tag{2.63}$$

unde

$$\beta = \frac{\Delta\Omega}{\omega_0} \quad (2.64)$$

poartă denumirea de *indice de modulație de frecvență*. Se observă că p variază invers proporțional cu frecvența semnalului modulator. Relația (2.63) se mai poate scrie:

$$S_{MF}(t) = A_0 \cos \omega_0 t \cos(\beta \sin \omega_0 t) - A_0 \sin \Omega_0 t \sin(\beta \sin \omega_0 t) \quad (2.65)$$

Funcțiile: $\cos(\beta \sin \omega_0 t)$ și $\sin(\beta \sin \omega_0 t)$ sunt funcții periodice, de perioadă $\frac{2\pi}{\omega_0}$. Prima este o funcție pară, iar a doua este o funcție impară. Aceste funcții se pot dezvolta în serii Fourier. Se obține:

$$\cos(\beta \sin \omega_0 t) = J_0(\beta) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\beta) \cos 2k\omega_0 t \sin(\beta \sin \omega_0) - 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\beta) \sin(2k+1)\omega_0 t \quad (2.66)$$

Coeficienții $J_k(\beta)$ reprezintă valorile funcțiilor *Bessel*. $J_k(x)$ de speță întâi și ordinul k , calculate pentru $x = \beta$.

Introducând dezvoltările (2.66) în relația (2.65) și transformând produsele de funcții trigonometrice în sume de funcții trigonometrice, se obține:

$$S_{MF}(t) = A_0 J_0(\beta) \cos \Omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} [A_0 J_n(\beta) \cos(\Omega_0 + n\omega_0)t + (-1)^n A_0 J_n(\beta) \cos(\Omega_0 - n\omega_0)t] \quad (2.67)$$

Expresia (2.67) pune în evidență componentele spectrale ale semnalului MF. Se constată că semnalul MF conține un număr infinit de componente nu numai trei cum avea semnalul MA. Teoretic, lățimea de bandă ocupată de semnalul MF este infinită. Practic, amplitudinile componentelor spectrale depărtate de Ω_0 devin neglijabile; aproape toată energia semnalului MF este conținută în componentele spectrale localizate în interiorul unei benzi finite.

Acest fapt se explică dacă examinăm reprezentările grafice ale funcțiilor Bessel de speță I, ordinul k și argument β (fig. 2.20).

Pentru $\beta \ll \frac{\pi}{2}$ (practic $\beta < 0,5$), numai $J_0(\beta)$ și $J_1(\beta)$ au o amplitudine semnificativă. Toate celelalte funcții: $J_2(\beta)$, $J_3(\beta)$...sunt neglijabile. În acest caz semnalul MF este asemănător semnalului M, având expresia:

$$(2.68)$$

Acesta este desigur semnalul MF de bandă îngustă; β este tocmai acel parametru $k | g(t) |_{\max}$ prezentat anterior, pe baza căruia s-au clasificat semnalele

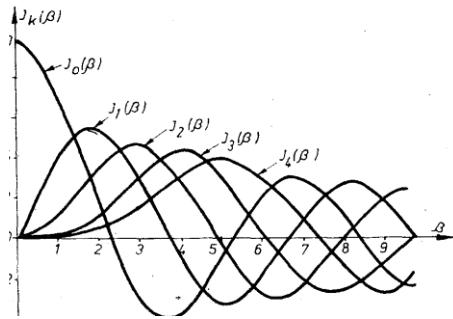


Fig. 2.20. Reprezentarea grafică a funcțiilor Bessel de speță 1 și ordinul k .

MF în semnale de bandă îngustă și de bandă largă. Se remarcă din relația (2.68) că la componenta laterală inferioară apare un defazaj de n față de componenta corespunzătoare a semnalului MA, ceea ce de fapt a fost demonstrat în cazul general [s (t) oarecare] al semnalului MF de bandă îngustă.

Pentru ($\beta=2$, coeficienții J_5 (2), J_6 (2) etc., sunt neglijabili, funcțiile $J_5(\beta)$, $J_6(\beta)$ etc., încă „nedesprinzându-se” de abscisă. Componentele spectrale semnificative sînt: Ω_0 , $\Omega_0 \pm \omega$, $\Omega_0 \pm 2\omega$, $\Omega_0 \pm 3\omega$, $\Omega_0 \pm 4\omega$, iar lățimea de bandă ocupată: $B = \Omega_0 + 4\omega - (\Omega_0 - 4\omega) = 8\omega$.

Pe măsură ce β crește, componentele laterale de ordin mai mare devin semnificative. Numărul de componente laterale N care trebuie luate în considerație se determină din considerentul ca ele să conțină 99% din puterea semnalului MF. Considerând puterile debităte pe o rezistență de 1 Ω , rezultă:

$$A_0^2 \sum_{k=-N}^N (\beta) = 0,99$$

Prin urmare, N se poate determina din relația:

$$\sum_{k=-N}^N J_k^2(\beta) = 0,99 \quad (2.69)$$

Soluția aproximativă a ecuației transcendentă (2.69) este /ST/:

$$N \approx \beta + 1 \quad (2.70)$$

ceea ce conduce la o bandă efectivă:

$$B = 2N\omega_0 = 2(\beta + 1)\omega_0 \quad (2.71)$$

Se observă că pentru $\beta \ll 1$, banda semnalului MF este $B = 2\omega_0$, iar pentru $\beta \gg 1$:

$$B \approx 2\beta\omega_0 \approx 2\Delta\Omega = 2ka_0 \quad (2.72)$$

Banda necesară pentru transmiterea unui semnal MF de bandă largă este aproximativ de două ori deviația maximă de frecvență a purtătorului. Aceasta înseamnă că pentru β suficient de mare, banda efectivă a semnalului MF nu depinde de frecvența mesajului.

Din reprezentările grafice ale funcțiilor Bessel (fig. 2.20) se observă că purtătorul conținut în semnalul modulat, de amplitudine $A_0 J_0(\beta)$, nu mai are totdeauna cea mai mare amplitudine, ca în cazul MA.

Mai mult, pentru valorile lui β la care $J_0(\beta)$ intersectează abscisa, purtătorul lipsește din semnalul MF. Se mai remarcă faptul că pentru orice β , amplitudinele componentelor relativ depărtate de Ω_0 , descresc tînzând către zero, adică se află în relația:

$$J_k(\beta) \gg J_{k+1}(\beta) \gg J_{k+2}(\beta) \dots, \quad (2.73)$$

unde k depinde de valoarea lui β .

Relația de monotonie (2.73) nu este valabilă pentru componentele apropiate de Ω_0 .

Cu aceste precizări se poate reprezenta spectrul de amplitudini al unui semnal MF de bandă largă (fig. 2.21).

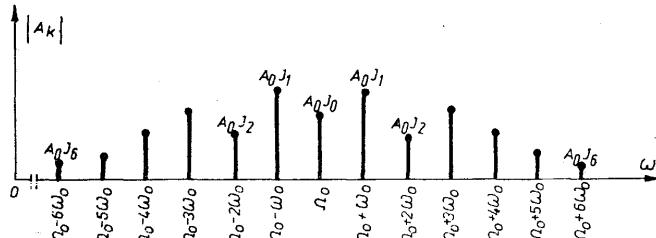


Fig. 2.21. Spectrul de amplitudini al semnalului MF.

Spectrele semnalelor modulate în fază

Modulația de fază (MØ). A modula în fază înseamnă a stabili o relație de dependență liniară între faza instantanee a purtătorului modulat și semnalul modulator $s(t)$:

$$\phi(t) = \Omega_0 t + \phi_0 + ks(t) \quad (2.74)$$

Expresia cea mai generală a unui semnal MØ în domeniul timp este dată analitic de:

$$S_{MØ}(t) = A_0 \cos[\Omega_0 t + \phi_0 + ks(t)] \quad (2.75)$$

întrucât $s(t)$ intră în argumentul funcției cosinus, analiza în domeniul frecvență (analiza spectrală) este dificilă pentru $s(t)$ oarecare. Ne rezumăm la cazul:

$$s(t) = a_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.76)$$

Pentru acest mesaj, faza instantanee $\phi(t)$ și semnalul modulat $s_{MØ}(t)$ sunt date de relațiile:

$$\phi(t) = \Omega_0 t + \phi_0 + ka_0 \sin \omega_0 t = \Omega_0 t + \phi_0 + \alpha \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.77)$$

unde $\alpha = ka_0$ reprezintă *deviația de fază*, analog cu deviația de frecvență $\Delta\Omega$ de la modulația de frecvență.

Considerând, pentru simplificarea calculelor $\phi_0 = \varphi_0 = 0$, relația (2.78) devine:

$$S_{MØ}(t) = A_0 \cos(\Omega_0 t + \alpha \sin \omega_0 t) \quad (2.79)$$

Se observă că $s_{MØ}(t)$ are aceeași expresie ca $s_{MF}(t)$ dat de relația (2.63), singura deosebire fiind înlocuirea lui β cu α . În consecință, dezvoltarea lui $s_{MØ}(t)$, care pune în evidență componentele spectrale, este aceeași cu cea de la MF (relația (2.67)), dacă se înlocuiește β cu α :

$$S_{MØ}(t) = A_0 J_0(\alpha) \cos \Omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} A_0 J_n(\alpha) [\cos(\Omega_0 + n\omega_0)t + (-1)^n \cos(\Omega_0 - n\omega_0)t] \quad (2.79)$$

Toate considerațiile făcute la MF asupra spectrelor semnalelor MF de bandă îngustă ($\beta < 0,5$) și de bandă largă ($\beta > 5$), rămân valabile și la MØ.

Relația aproximativă pentru determinarea benzii de frecvențe ocupată de semnalul MØ este:

$$B \approx 2(\alpha + 1)\omega_0 \quad (2.80)$$

Pentru $\alpha \ll 1$ rezultă $B = 2\omega_0$, astfel că spectrul de amplitudini al semnalului MØ de bandă îngustă este similar cu cel pentru MA.

Pentru $\alpha \gg 1$ se obține:

$$B = 2\alpha\omega_0 = 2ka_0\omega_0 \quad (2.81)$$

4.2.2. Modulația în amplitudine de tip produs

Modulația de tip produs elimină cel de-al doilea dezavantaj din cele menționate în secțiunea anterioară. Modelul matematic este detaliat mai jos.

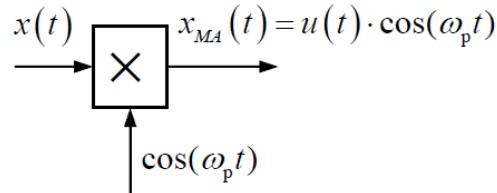


Fig. 4.8 Modulator de tip produs

Fie $x(t)$ semnalul modulator. Presupunem că acesta modulează un purtător cosinusoidal cu amplitudinea A_p . Semnalul modulat este:

$$(4.15) \quad x_{MA}(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_p t)$$

Schema modulatorului și forma semnalului modulat sunt date în fig. 4.8, respectiv fig. 4.9.

Atunci când semnalul modulator, $x(t)$, își schimbă semnul, în momentul t_0 (vezi fig. 4.9), semnalul modulat în amplitudine cu modulație de tip produs își inversează fază.

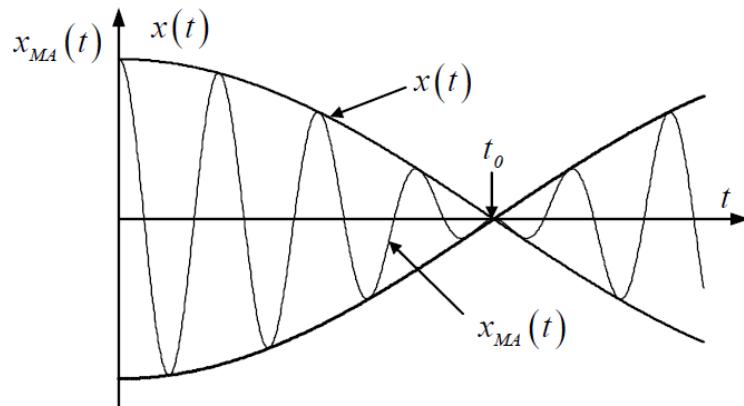


Fig. 4.9 Modulația de tip produs a unui semnal

Reprezentarea spectrală a semnalelor cu modulație de tip produs

Se calculează transformata Fourier a semnalului $x_{MA}(t)$, exprimat prin relația (4.15).

Din $x_{MA}(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_p t)$ rezultă:

$$\begin{aligned} X_{MA}(\omega) &= \mathcal{F}\{x(t) \cdot \cos(\omega_p t)\} = \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes \mathcal{F}\{\cos(\omega_p t)\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes \left\{ \pi [\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)] \right\} \end{aligned}$$

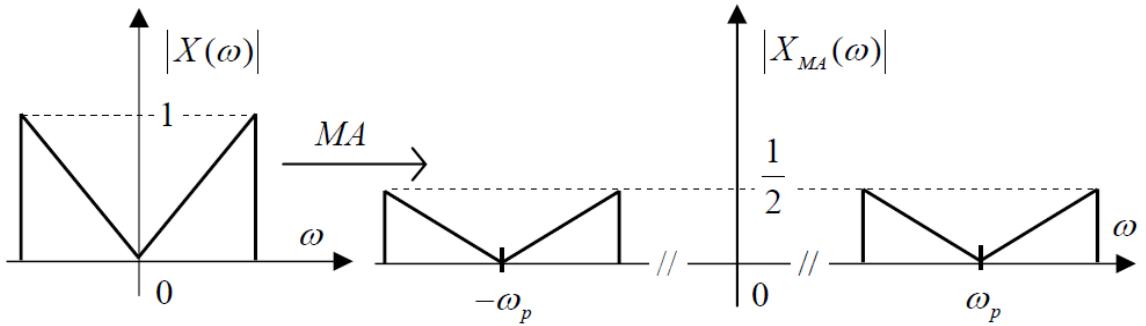


Fig. 4.10 Spectrul semnalului $M4$ cu modulație de tip produs

Ținând cont de relația (4.13), ultima relație devine:

$$(4.16) \quad X_{M4}(\omega) = \frac{1}{2} \cdot [X(\omega - \omega_p) + X(\omega + \omega_p)]$$

Caracteristica spectrală $X_{M4}(\omega)$ este ilustrată în fig. 4.10. Se observă absența purtătoarei, însă rămâne dezavantajul că banda semnalului modulat este dublă față de cea minimă necesară.

Aplicația 4.2:

Să se determine caracteristica spectrală a semnalului din fig. 4.11, unde $\tau = 2T_0$ și $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

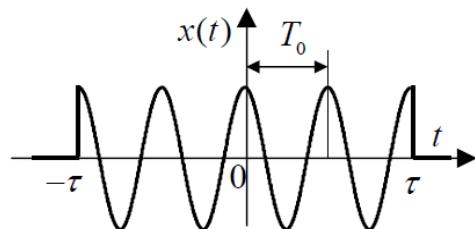


Fig. 4.11 Semnalul de analizat (aplicația 4.2)

Semnalul se pune sub forma $x(t) = u(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$ (fig. 4.11, a)), unde $u(t)$ este un impuls real de amplitudine unitară și arie 2τ (fig. 4.11, b)).

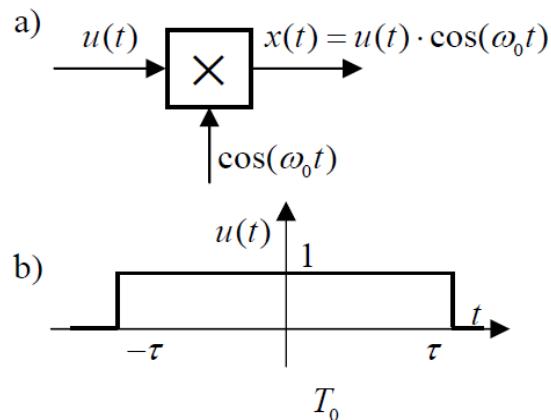


Fig. 4.12 Generarea semnalului $x(t)$ din fig. 4.11

Prin aplicarea transformatei Fourier semnalului $x(t)$, se obține:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \mathcal{F}\{u(t) \cdot \cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{u(t)\} \otimes \mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\tau \cdot \text{sinc}(\omega\tau) \cdot \pi \cdot [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] = \\ &= \tau \cdot [\text{sinc}((\omega - \omega_0) \cdot \tau) + \text{sinc}((\omega + \omega_0) \cdot \tau)] \end{aligned}$$

În relația de mai sus se folosește faptul că $\omega_0\tau = \frac{2\pi}{T_0} \cdot 2T_0 = 4\pi$. Rezultă:

$$X(\omega) = \tau \cdot [\text{sinc}(\omega\tau - 4\pi) + \text{sinc}(\omega\tau + 4\pi)] = X_1(\omega) + X_2(\omega)$$

În fig. 4.13, a) sunt reprezentate funcțiile $X_1(\omega)$, respectiv $X_2(\omega)$, iar în fig. 4.13, b) caracteristica spectrală $X(\omega)$.

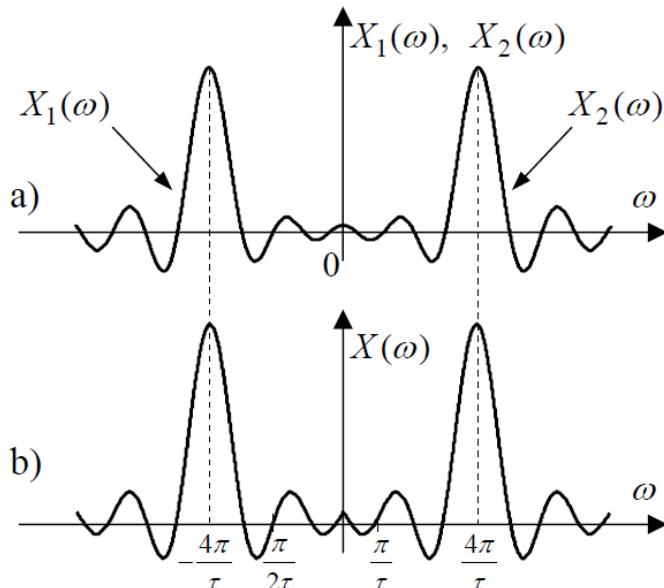


Fig. 4.13 Caracteristicile spectrale $X(\omega)$, $X_1(\omega)$ și $X_2(\omega)$ (aplicația 4.2)

Demodulația de tip produs

Extragerea semnalului de bază din cel modulat nu se poate face printr-o simplă detecție/redresare, pentru că – aşa cum se remarcă din fig. 4.9 – atunci când se schimbă faza semnalului modulat, trebuie să se inverseze semnul semnalului extras din înfăşurătoarea lui $x_{MA}(t)$. O asemenea comportare se realizează cu un demodulator sensibil la fază. Schema bloc a demodulatorului pentru semnale MA de tip produs este dată în fig. 4.14. El implică existența purtătoarei $x_p(t)$ la recepție (unde se realizează demodularea).

Pentru simplificarea calculelor, vom presupune $A_p = 1$. La ieșirea circuitului de tip produs se obține variabila $v(t) = x_{MA}(t) \cdot \cos(\omega_p t)$, a cărei caracteristică spectrală se deduce ca mai jos:

$$V(\omega) = \mathcal{F}\left\{x_{MA}(t) \cdot \cos(\omega_p t)\right\} = \frac{1}{2\pi} \cdot X_{MA}(\omega) \otimes \left\{\pi[\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)]\right\}$$

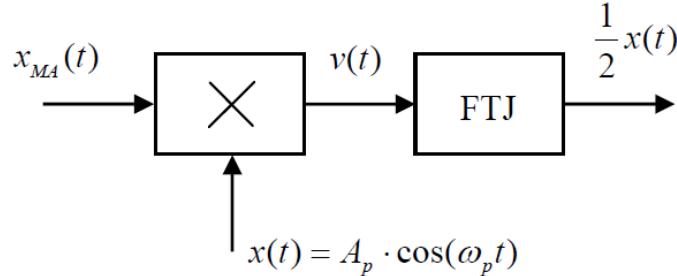


Fig. 4.14 Demodulator de tip produs

Înlocuind $X_{MA}(\omega)$ prin relația (4.16), rezultă:

$$\begin{aligned} V(\omega) &= \frac{1}{4} [X(\omega - \omega_p) + X(\omega + \omega_p)] \otimes [\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)] = \\ &= \frac{1}{4} [X(\omega - 2\omega_p) + X(\omega + \omega_p - \omega_p) + \\ &\quad + X(\omega - \omega_p + \omega_p) + X(\omega + 2\omega_p)] \end{aligned}$$

În final se obține:

$$(4.17) \quad V(\omega) = \frac{1}{4} \cdot [X(\omega - 2\omega_p) + 2X(\omega) + X(\omega + 2\omega_p)]$$

Caracteristicile spectrale $X_{MA}(\omega)$ și $V(\omega)$ sunt prezentate în fig. 4.15.

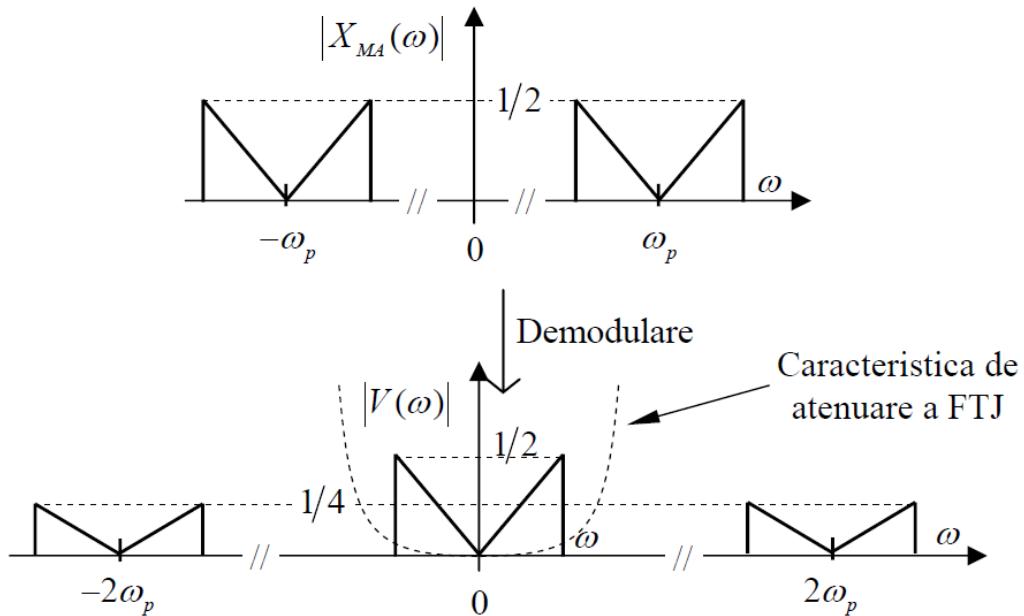


Fig. 4.15 Funcționarea demodulatorului de tip produs

Filtrul trece-jos (FTJ), situat după circuitul de înmulțire, elimină componentele de înaltă frecvență din zona pulsațiilor $\omega \pm 2\omega_p$, și extrage

numai componenta spectrală de joasă frecvență: $\frac{1}{4} \cdot 2X(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega)$. În consecință, la ieșirea FTJ se va obține $(1/2) \cdot x(t)$.

4.2.3. Modulația în amplitudine cu bandă laterală unică (BLU)

În modulația de tip produs, analizată în secțiunea anterioară, banda ocupată de semnalul modulat este dublă față de cea minimă necesară. Pentru a mări capacitatea de transmisie a unui canal fizic, este util să se utilizeze o modulație care furnizează o singură bandă din cele 2 benzi rezultate în modulația de tip produs: fie banda superioară (în raport cu pulsația ω_p), fie banda inferioară. O asemenea modulație se numește *cu bandă laterală unică (BLU)*.

O soluție aparent simplă de obținere a unui semnal *MA-BLU* constă în selectarea, cu ajutorul unui filtru trece-bandă (FTB), a uneia din benzile laterale obținute cu un modulator de tip produs. Această soluție are un dezavantaj important în transmisiunile telefonice, unde banda semnalului de bază este în domeniul $0.3 - 3.4$ kHz: ecartul între limita inferioară a benzii laterale superioare și limita superioară a benzii laterale inferioare este foarte mic, de $0.3 + 0.3 = 0.6$ kHz, în jurul frecvenței purtătoare f_p . Rezultă că FTB trebuie să aibă o foarte bună selectivitate, astfel încât să suprime banda inferioară fără a afecta zonele adiacente din banda laterală superioară.

Pentru evitarea utilizării FTB de înaltă selectivitate sunt elaborate două soluții, care vor fi prezentate în cele ce urmează: **metoda semnalului analitic** (bazată pe transformata Hilbert) și **metoda Weaver**.

4.2.4. Modulația BLU utilizând transformata Hilbert (metoda semnalului analitic)

În schema de principiu care ilustrează această metodă există două modulatoare de tip produs (fig. 4.16). Primul modulează un semnal cosinusoidal, semnalul modulator fiind $x(t)$. La cel de-al doilea modulator, intrarea este transformata Hilbert a lui $x(t)$, purtătorul fiind sinusoidal.

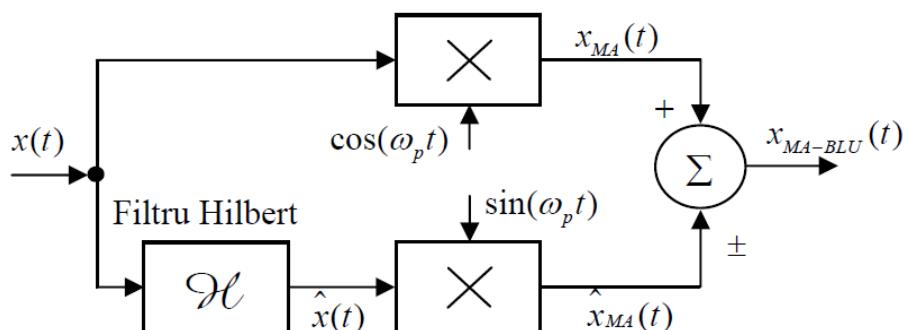


Fig. 4.16 Modulația BLU – metoda semnalului analitic

Caracteristica spectrală a semnalului la ieșirea filtrului Hilbert este (vezi

relația (3.94)) $\hat{X}(\omega) = -j \cdot X(\omega) \cdot \text{sign}(\omega)$, de unde rezultă:

$$j\hat{X}(\omega) = X(\omega) \cdot \text{sign}(\omega)$$

În fig. 4.17, a) sunt reprezentate schematic funcțiile spectrale $X(\omega)$ și $j\hat{X}(\omega)$. Se observă că, pentru $\omega > 0$, $j\hat{X}(\omega) = X(\omega)$, iar pentru $\omega < 0$, $j\hat{X}(\omega) = -X(\omega)$.

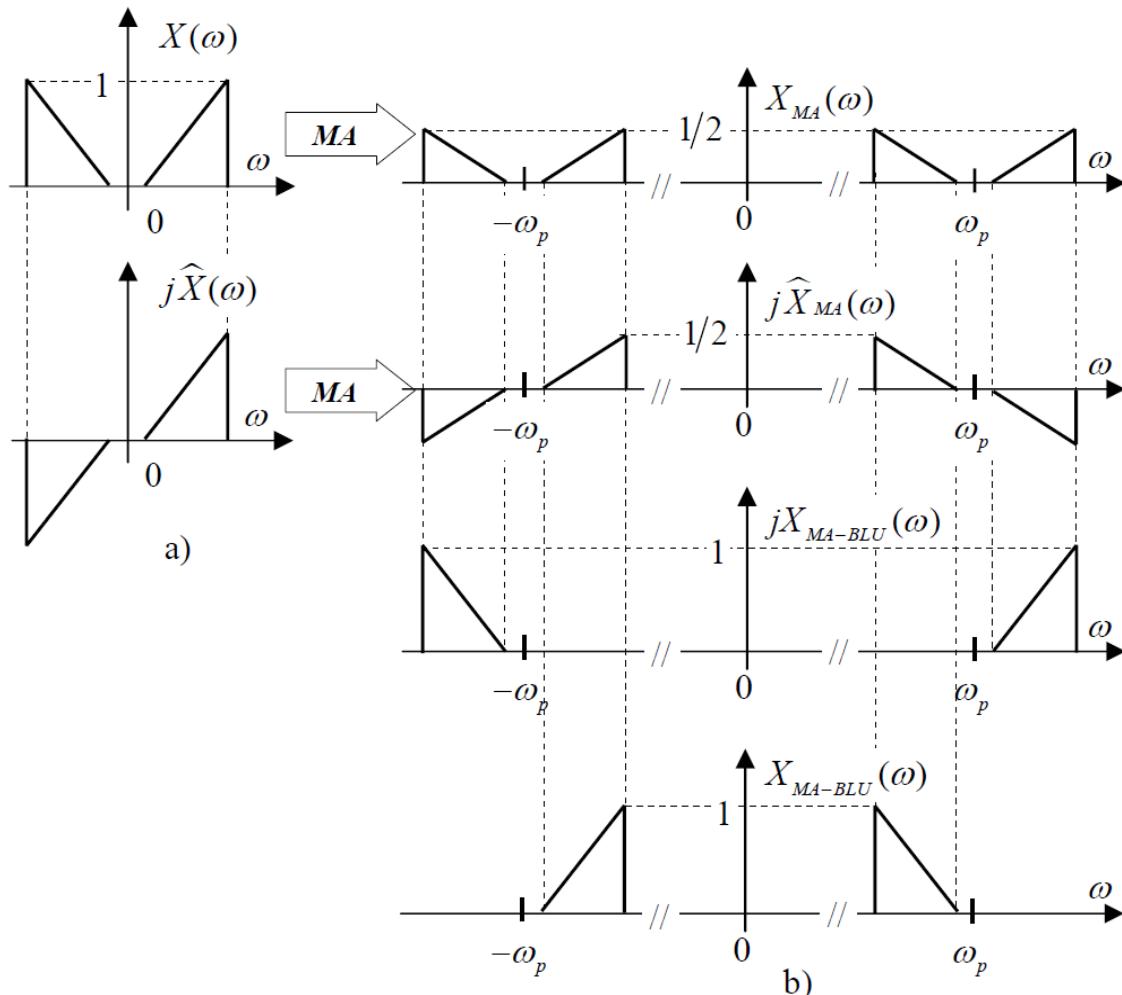


Fig. 4.17 Caracteristicile spectrale ale semnalelor implicate în schema din fig. 4.16

La ieșirea primului modulator de tip produs se obține semnalul $x_{MA}(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_p t)$. Caracteristica spectrală a acestuia, având expresia (4.16), este reprezentată în fig. 4.17, b). La ieșirea celui de-al doilea modulator se obține semnalul $\hat{x}_{MA}(t) = \hat{x}(t) \cdot \sin(\omega_p t)$, pentru care vom determina caracteristica spectrală:

$$\hat{X}_{MA}(\omega) = \mathcal{F}\{\hat{x}(t) \cdot \sin(\omega_p t)\} = \frac{1}{2\pi} \hat{X}(\omega) \otimes \mathcal{F}\{\sin(\omega_p t)\}$$

Utilizând expresia (3.37) pentru $\mathcal{F}\{\sin(\omega_p t)\}$ se obține:

$$\begin{aligned}\widehat{X}_{MA}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \widehat{X}(\omega) \otimes \left\{ \frac{\pi}{j} \left[\delta(\omega - \omega_p) - \delta(\omega + \omega_p) \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left[-j\widehat{X}(\omega - \omega_p) + j\widehat{X}(\omega + \omega_p) \right]\end{aligned}$$

din care rezultă:

$$(4.18) \quad \hat{X}_{MA}(\omega) = \frac{1}{2} \left[-j\widehat{X}(\omega - \omega_p) + j\widehat{X}(\omega + \omega_p) \right]$$

Această funcție spectrală, reprezentată în fig. 4.17, b), are două componente: cea situată în jurul pulsației ω_p , $\frac{1}{2}j\widehat{X}(\omega - \omega_p)$, obținută prin inversarea semnului și decalarea la dreapta a caracteristicii $j\widehat{X}(\omega)$, și cea situată în jurul pulsației $-\omega_p$, $\frac{1}{2}j\widehat{X}(\omega + \omega_p)$, obținută prin deplasarea spre stânga a caracteristicii spectrale $j\widehat{X}(\omega)$. Din fig. 4.17, b), se observă că, dacă se scad funcțiile $X_{MA}(\omega)$ și $\widehat{X}_{MA}(\omega)$ (la elementul de însumare din fig. 4.16, semnele sunt $,$ $+$ și respectiv $,$ $-$), se obține $X_{MA-BLU}(\omega)$, fiind suprimată banda laterală inferioară. Dacă se adună $X_{MA}(\omega)$ și $\widehat{X}_{MA}(\omega)$ (elementul de însumare din schemă, are semnul $,$ $+$ la ambele intrări), se obține $X_{MA-BLU}(\omega)$, cu banda superioară suprimată.

3.3. MODULAȚIA IMPULSURILOR

Diferența față de modulațiile studiate anterior constă în aceea că purtătorul este o succesiune periodică de impulsuri (Fig. 3.10). Succesiunea de impulsuri este caracterizată de următorii parametri: amplitudinea A , durata τ a impulsului, poziția impulsurilor pe axa timpului și frecvența lor de repetiție.

Prin modificarea unuia din acești parametri proporțional cu semnalul modulator se obțin următoarele tipuri de modulație a impulsurilor.

- modulația impulsurilor în amplitudine (MIA);
- modulația impulsurilor în durată sau lățime (MID sau MIL);
- modulația impulsurilor în poziție (MIP);
- modulația impulsurilor în frecvență (MIF).

Modificarea frecvenței impulsurilor implică modificarea poziției lor, astfel că de fapt MIF poate fi considerată o MIP.]

Specific pentru modulația de impuseuri este faptul că oricare ar fi parametrul variabil al purtătorului, acesta depinde de valorile

pe care le ia semnalul modulator $s(t)$ în intervalele de timp în care sunt plasate impulsurile purtătorului.

Pentru a nu se pierde nimic din informația cuprinsă în $s(t)$ trebuie ca momentele de timp la care această informație se transferă asupra unui parametru al purtătorului să satisfacă condiția Nyquist.

Asta înseamnă că frecvența purtătorului în impulsuri trebuie să satisfacă relația:

$$F = \frac{1}{T} \geq 2f_m. \quad (3.60)$$

unde f_m este frecvența maximă a semnalului modulator.

Prin urmare, se poate spune că teorema eșantionării constituie baza teoretică pentru tehniciile de modulație a impulsurilor.

3.3.1. MODULAȚIA IMPULSURILOR ÎN AMPLITUDINE (MIA)

MIA este de fapt o eșantionare a semnalului modulator $s(t)$ cu purtătorul în impulsuri $p(t)$. Deosebirea față de eșantionarea cu $\delta_T(t)$ prezentă în paragraful 2.6, denumită eșantionare instantanee sau ideală, constă în aceea că, la MIA, purtătorul este o succesiune de impulsuri de lățime finită T . MIA este deci o eșantionare neinstantanee sau neideală. În consecință, expresia în timp a unui semnal MIA este:

$$s_{MIA}(t) = s(t)p(t) \quad (3.61)$$

MIA este o modulație de produs.

Formele de undă ale semnalelor $s(t)$, $p(t)$ și $s_{MIA}(t)$ sunt reprezentate în figura 3.11, a, b, c.

Funcția de densitate spectrală $S_{MIA}(\omega)$ se determină prin conoluția lui $S(\omega)$ cu $P(\omega)$:

$$S_{MIA}(\omega) = \frac{1}{2\pi} S(\omega) \times P(\omega). \quad (3.62)$$

Seria Fourier exponențială, corespunzătoare purtătorului $p(t)$ este:

$$p(t) = A \frac{T}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin \frac{n\Omega t}{2} e^{jn\Omega t},$$

unde $\Omega = 2\pi/T$. Transformata Fourier a acestei serii $P(\omega) = \mathcal{F}\{p(t)\}$ se determină astfel:

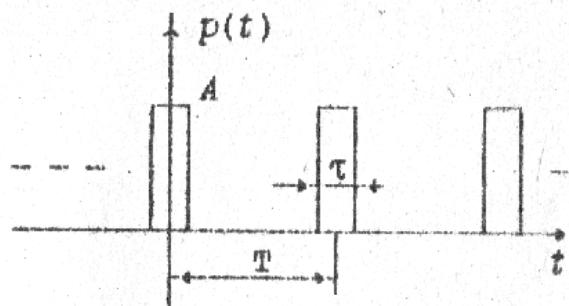


Fig.3.10. Purtațor în impulsuri

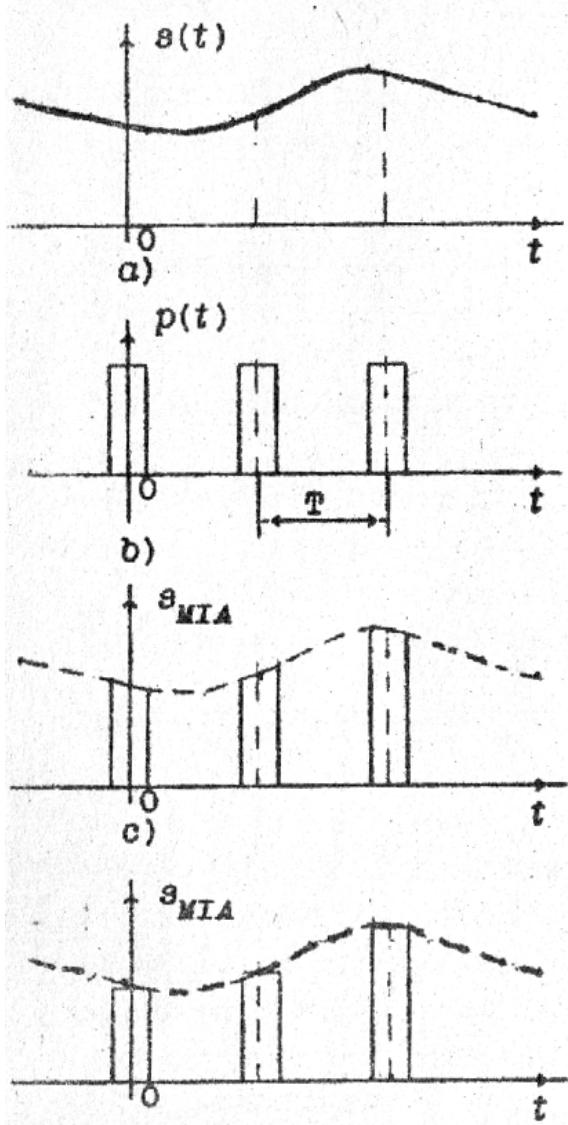


Fig. 3.11. Modulația impulsurilor în amplitudine - forme de undă

Reprezentările grafice ale spectrelor $S(\omega)$, $P(\omega)$ și $S_{MIA}(\omega)$, pentru $\Omega > 2\omega_m$, sunt date în figura 3.12.

Semnalul original $s(t)$ poate fi reconstituit din $s_{MIA}(t)$ prin folosirea unui FTJ cu frecvențe de tăiere la ω_m . De remarcat, că semnalul $s(t)$ se reconstituie fără distorsion. Aceasta se observă din faptul că, în expresia (3.76), spectrul $S(\omega)$ este multiplicat cu o constantă ($\text{sinc} = 1$) și nu cu o funcție de frecvență.

Lățimea de bandă necesară pentru MIA este finită, deoarece spectrul $S_{MIA}(\omega)$ descrește cu ω și are o energie neglijabilă în componentele spectrale de frecvențe mai înalte.

Banda semnalului MIA depinde de lățimea T a impulsurilor. Cu cît T este mai mare, cu atât spectrul descrește mai repede și deci banda

$$P(\omega) = A \frac{T}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc} \frac{n\Omega T}{2} F(e^{jn\Omega t}) = \\ = \frac{2\pi AT}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc} \frac{n\Omega T}{2} \delta(\omega - n\Omega). \quad (3.63)$$

Introducind expresia (3.63) în (3.62) se obține:

$$S_{MIA}(\omega) = \frac{AT}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc} \frac{n\Omega T}{2} \delta(\omega - n\Omega) \times S(\omega) = \\ = \frac{AT}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc} \frac{n\Omega T}{2} S(\omega - n\Omega). \quad (3.64)$$

Relația (3.64) arată că $S_{MIA}(\omega)$ este o repetare periodică a spectrului continuu $S(\omega)$, ca și în cazul eșantionării ideale. Deosebită constă în faptul că la eșantionarea ideală toate spectrele repetate au aceeași amplitudine, pe cind la MIA (eșantionare neideală) fiecare spectru e ponderat cu un coeficient, și anume $\text{sinc} \frac{n\Omega T}{2}$.

Că atare, spectrele repetate vor descrește în amplitudine, având înăsurătoarea $\text{sinc}(n\Omega T/2)$.

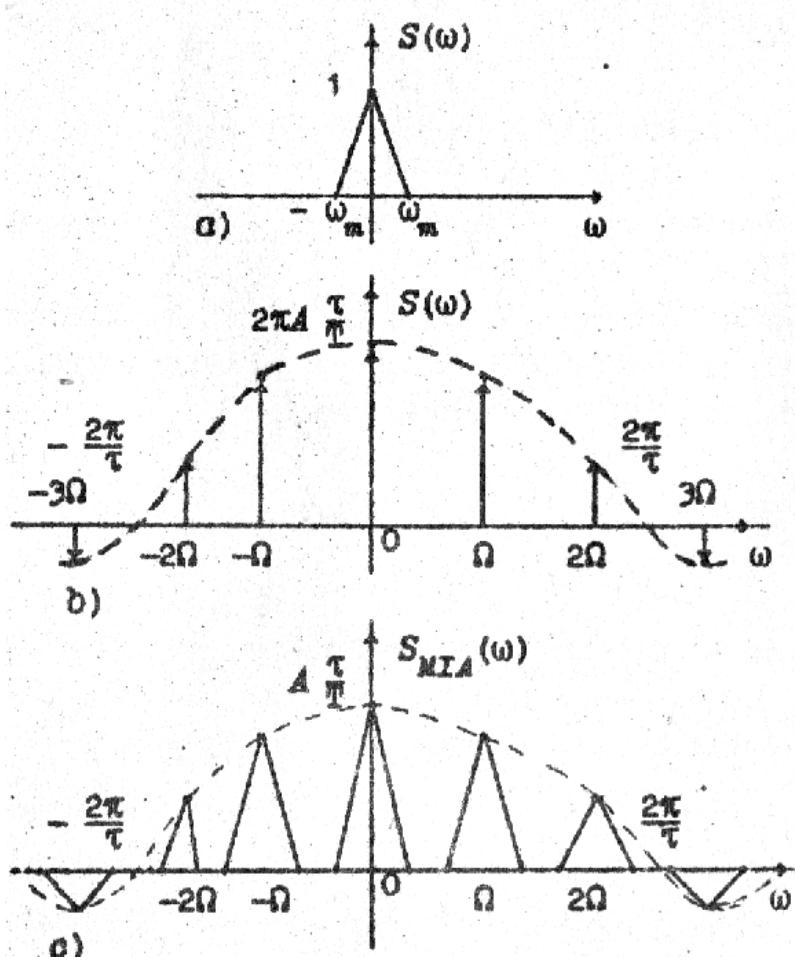


Fig. 3.12. Funcțiile de densitate spectrală ale semnalului modulator (a), purtătorului (b) și semnalului modulat în amplitudine (c)

este mai îngustă (fig. 3.12.c.).) În schimb, numărul de semnale MIA ce se vor putea transmite simultan pe un același canal scade în acest caz. Deci, la alegerea lui τ trebuie avute în vedere ambele aspecte (în timp și în frecvență).

În MIA prezentată, amplitudinea fiecărui impuls variază pe întreaga durată τ a impulsului, urmărind forma de undă a semnalului modulator. Mai există însă și un alt tip de MIA la care amplitudinea unui impuls este constantă pe toată durata sa, fiind proporțională cu valoarea semnalului modulator la momentul de eșantionare respectiv. Acest tip de semnal MIA este prezentat în figura 3.13, d și poate fi descris matematic prin relația:

$$s_{MIA}(t) = s^*(t) \times p_\tau(t), \quad (3.65)$$

unde $p_\tau(t)$ este funcția din figura 3.13.b.

Să arătăm că relația (3.65) este adevarată. Pentru aceasta calcul

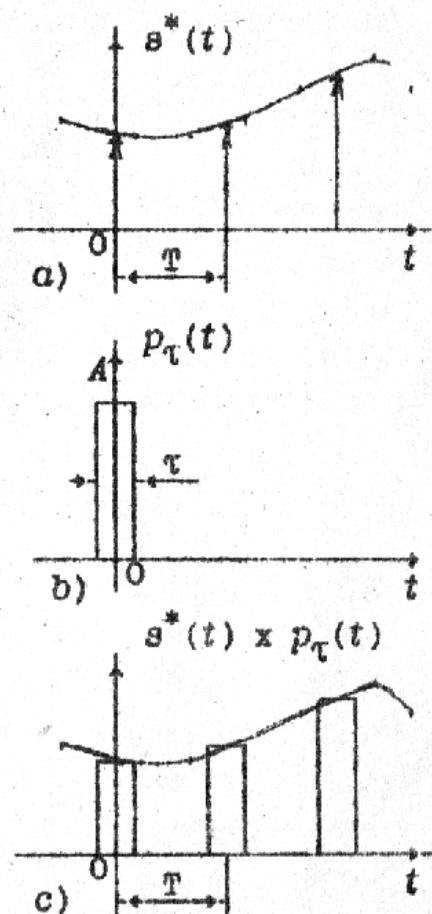


Fig. 3.13. Principiul obținerii $s_{MIA}(t)$ cu impulsurile constante pe toată durata lor

lăm produsul de convoluție

$$s^*(t) \times p_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\delta(t-nT) \times p_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)p_\tau(t-nT). \quad (3.66)$$

Suma de funcții $p_\tau(t)$ centrate la nT și ponderate cu $s(nT)$ reprezintă în mod evident pe $s_{MIA}(t)$.

Analiza spectrală a semnalului modulat este foarte simplă. Convoluției celor două funcții în domeniul timp fi corespunde produsul tru informațiilor Fourier în domeniul frecvență. Deci:

$$S(\omega) = P_\tau(\omega)S^*(\omega) = -\frac{AT}{T} \sin \frac{\omega T}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega - n\Omega). \quad (3.67)$$

Spectrul este similar cu cel din figura 3.12, c., cu deosebirea că aici spectrele repetate sunt ponderate cu o funcție de frecvență (înfășurătoarea punctată din figura 3.12, c), care are ca efect distorsionarea semnalului. Această distorsionare se numește efect de apertura și este cu atât mai mare cu atât τ este mai mare (funcția $\sin(\omega T/2)$ mai abruptă).

3.3.2. MODULAȚIA IMPULSURILOR ÎN DURată (MID) ȘI ÎN POZIȚIE (MIP)

Acstea modulații se numesc și modulații de timp ale impulsurilor. La MID și MIP amplitudinea impulsurilor este păstrată constantă. În scimb durata, respectiv poziția impulsurilor, variază proporțional cu valorile semnalului modulator $s(t)$ la momentele corespunzătoare. Poziția pe axa timpului a unui impuls este definită în general prin poziția axei de simetrie a impulsului. În figura 3.14, sunt reprezentate formele de undă ale semnalelor MID și MIP.

Analiza spectrală a semnalelor MID și MIP este relativ complicață și pentru a determina banda de frecvențe, necesară pentru transmitere acestor semnale, vom admite că semnalul modulator este un semnal armonic $s(t) = a_0 \sin \omega_0 t$. Dacă impulsul purtătorului are originea timpului la mijlocul întrevalului τ modulația lui în poziție cu un semnal armonic îl deplasează față de momentul de referință (fig. 3.15) în poziția $\tau_1 = -\tau/2 + ca_0 \sin \omega_0 t$; $\tau_2 = \tau/2 + ca_0 \sin \omega_0 (t-\tau)$, unde ca_0 este deplasarea maximală a impulsului.

Seria Fourier a purtătorului este determinat de expresia:

$$p(t) = A - \frac{\tau}{T} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{\sin \frac{k\Omega_1 \tau}{2}}{\frac{k\Omega_1 \tau}{2}} \cos k\Omega_1 t \right]. \quad (3.68)$$

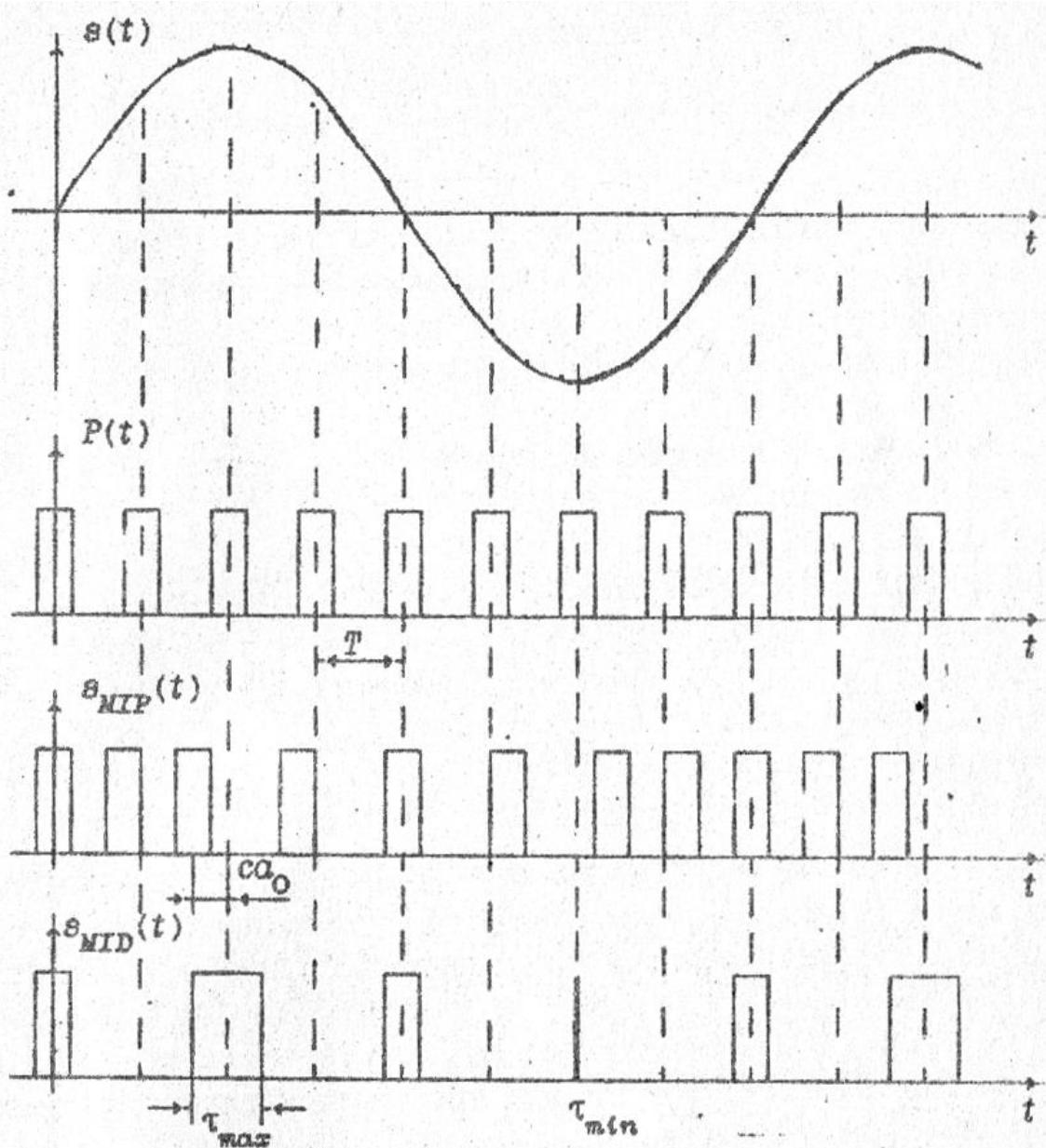
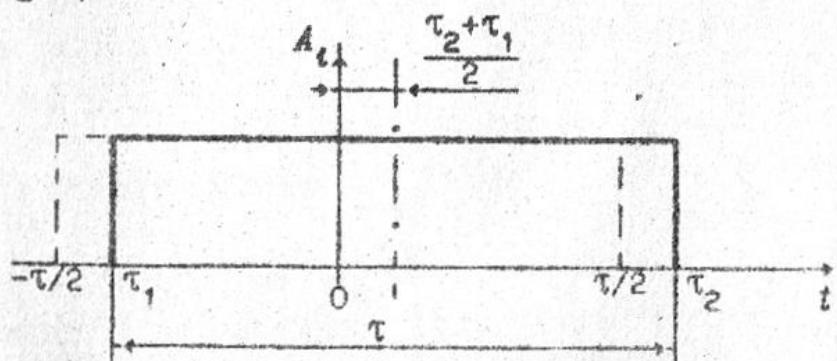


Fig. 3.14. Modulația impulsurilor în durată și în poziție

Pentru a determina semnalul $s_{MIP}(t)$ în expresia (3.68) înlocuim durata impulsului τ cu $\tau_2 - \tau_1$, pentru a lua în considerație deplasarea frontului de ridicare și cădere a impulsului, și timpul t îl înlocuim cu $t - (\tau_2 + \tau_1)/2$, care determină deplasarea impulsului față de



nomenului de referință. Deci:

$$s_{MIP}(t) = A \frac{\tau_2 - \tau_1}{T} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{\sin \frac{k\Omega_1(\tau_2 - \tau_1)}{2}}{\frac{k\Omega_1(\tau_2 - \tau_1)}{2}} \cos k\Omega_1 \left(t - \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \right) \right]$$

Inlocuind produsul sinusului cu cosinusul conform transformărilor trigonometrice și luând în considerație că $T\Omega_1 = 2\pi$, obținem:

$$s_{MIP}(t) = A \frac{\tau_2 - \tau_1}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} A \frac{1}{k\pi} [\sin k\Omega_1(t - \tau_1) - \sin k\Omega_1(t - \tau_2)].$$

In ultima expr. sie înlocuim variabilele τ_1 , τ_2 și $\tau_2 - \tau_1$ cu valorile lor. In rezultat obținem:

$$\begin{aligned} s_{MIP}(t) = & A \frac{\tau}{T} + A \frac{ca_0}{T} \sin c\omega_0(t - \tau) - A \frac{ca_0}{T} \sin c\omega_0 t + \\ & + A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \left\{ \sin k\Omega_1 \left[t + \frac{\tau}{2} - ca_0 \sin \omega_0 t \right] - \right. \\ & \left. - \sin k\Omega_1 \left[t - \frac{\tau}{2} - ca_0 \sin \omega_0(t - \tau) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Din analiza expresiei (3.69) rezultă că spectrul semnalului MIP este compus din componenta constantă, componenta cu frecvența semnalului modulator ω_0 , componenta cu frecvență de bază Ω_1 și armonicile multiple superioare cu frecvențele $k\Omega_1$. Însă pe lîngă armonica de bază și fiecare din armonicile superioare apar benzi de armonici laterale discrete cu frecvențele $k\Omega_1 \pm m\omega_0$, asemănătoare cu benzile laterale ale semnalelor MF și MF cu purtător sinusoidal.

Spectrele semnalelor modulate în durată sau în frecvență după componentă sunt similare spectrelor modulate în poziție. Banda de frecvențe necesară pentru transmiterea semnalelor MIP și MID este determinată de durata minimală a impulsului T .

Deosebirea din punct de vedere al benzii de frecvențe ocupate între MIA și MID, MIP este ușor de intuit. Astfel, de exemplu la MIP, pentru ca prin deplasarea impulsurilor din poziția originală să nu apară suprapunerile între impulsurile adiacente este necesar să îngustăm impulsurile. Dar, comprimarea în timp este echivalentă cu extinderea în frecvență, deci banda de frecvență ocupată de semnalul modulat va fi mai mare.

Degăvantajul măririi benzii de frecvențe necesare pentru transmisarea semnalelor MIP și MID este compensată de protecția mult mai bună contra perturbațiilor deosebit la MIA, protecție obținută tocmai pe seama măririi benzii.