Programare cu premeditare

Cătălin Frâncu

Prefață

Aici voi spune ceva introductiv.

- Problemele sînt ordonate după dificultate.
- Pentru Codeforces și Kilonova aveți nevoie de un cont pentru a vedea sursele.
- Am inclus legături către versiunile online ale surselor acolo unde evaluarea este publică. Rapoartele de evaluare arată și timpul și memoria.

Cuprins

Partea I

Structuri de date pe vectori

Următoarele capitole tratează structuri de date care pot procesa anumite operații pe vectori în timp mai bun decît $\mathcal{O}(N)$. Ocazional aceste structuri se aplică și matricilor.

Subiectele de ONI / baraj ONI / lot din anii trecuți abundă în probleme rezolvabile cu astfel de structuri:

- 3dist (baraj ONI 2022)
- 6 de Pentagrame (lot 2024)
- Babel (baraj ONI 2025)
- Balama (baraj ONI 2024)
- Bisortare (ONI 2021)
- Circuit (lot 2025)
- Emacs (baraj ONI 2021)
- Erinaceida (lot 2022)
- Guguștiuc (baraj ONI 2022)
- Împiedicat (baraj ONI 2023)
- Lupușor (ONI 2022)
- Medwalk (lot 2025)
- Perm (baraj ONI 2024)
- Piezișă (baraj ONI 2022)
- Subiectul III (lot 2024)
- Șirbun (baraj ONI 2023)
- Trapez (lot 2025)

Pare o idee bună să le învățăm și să le stăpînim bine. 🙂 Concret, vom studia trei structuri:

1. arbori de intervale;
2. arbori indexați binar;
3. descompunere în radical.

Vom exemplifica structurile și vom face benchmarks pe două probleme didactice. Apoi vom vedea, prin probleme, cum putem extinde aceleași structuri pentru nevoi mai complicate.

Varianta 1 (actualizări punctuale, interogări pe interval): Se dă un vector de N elemente întregi și Q operații de două tipuri:

1. $\langle 1, x, val \rangle$: Adaugă val pe poziția x a vectorului.
2. $\langle 2, x, y \rangle$: Calculează suma pozițiilor de la x la y inclusiv.

Varianta 2 (actualizări pe interval, interogări pe interval): Similar, dar operația 1 este pe interval:

1. $\langle 1, x, y, val \rangle$: Adaugă val pe pozițiile de la x la y inclusiv.
2. $\langle 2, x, y \rangle$: Calculează suma pozițiilor de la x la y inclusiv.

Vom menționa ocazional și **Varianta 3 (actualizări pe interval, interogări punctuale)**:

1. $\langle 1, x, y, val \rangle$: Adaugă val pe pozițiile de la x la y inclusiv.

2. $\langle 2, x \rangle$: Returnează valoarea poziției x.

Toate implementările mele sînt disponibile pe GitHub.

Capitolul 1

Arbori de intervale

Arborii de intervale[1] (AINT) sînt o structură foarte puternică și flexibilă. Ușurința implementării depinde de natura operațiilor pe care dorim să le admitem.

1.1 Reprezentare

Ca multe alte structuri (heap-uri, AIB, păduri disjuncte), arborii de intervale se reprezintă pe un simplu vector. Ei sînt arbori doar la nivel logic, în sensul că fiecare poziție din vector are o altă poziție drept părinte.

Pentru început, să presupunem că vectorul dat are $n = 2^k$ elemente. Atunci vectorul necesar S are $2n$ elemente, în care cele n elemente date sînt stocate începînd cu poziția n. Apoi,

- Cele $n/2$ elemente anterioare stochează valori agregate (sume, minime, xor etc.) pentru perechi de valori din vectorul dat.
- Cele $n/4$ elemente anterioare stochează valori agregate pentru grupe de 4 valori din vectorul dat.
- ...
- Elementul $S[1]$ stochează valoarea agregată a întregului vector.
- Valoarea $S[0]$ rămîne nefolosită.

Iată un exemplu pentru $n = 16$. Datele de la intrare se regăsesc pe pozițiile 16-31.

[1] Există o inversiune între nomenclatura internațională și cea românească. Internațional, structura pe care o învățăm astăzi se numește segment tree, iar interval tree este o structură diferită, care stochează colecții de intervale. Cîțiva ani am înotat împotriva curentului și am fost (posibil) singurul român care se referea la această structură ca „arbori de segmente". În acest curs am adoptat și eu denumirea încetățenită.

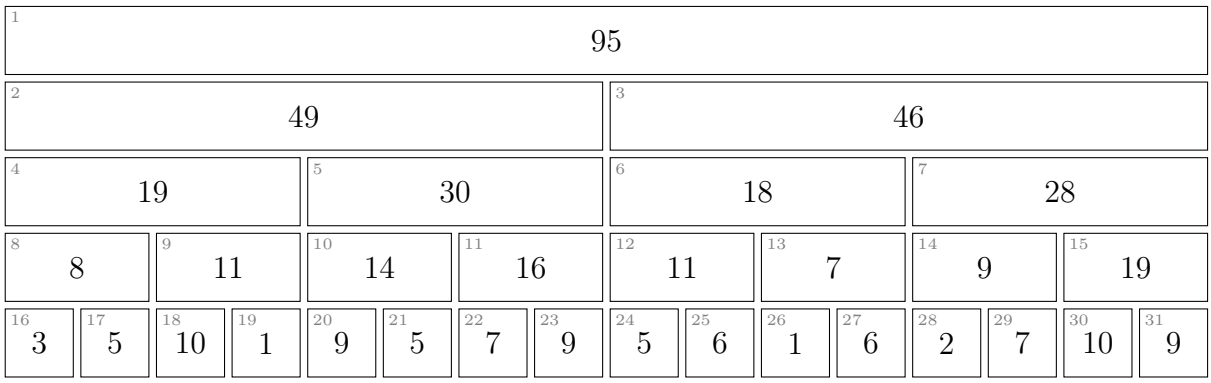


Figura 1.1: Un arbore de intervale cu 16 frunze și 15 noduri interne. Valorile din fiecare celulă reprezintă suma din frunzele subîntinse de acea celulă. Cu cifre mici este notat indicele fiecărei celule.

Facem cîteva observații preliminare:

- Fiii unui nod i sînt $2i$ și $2i + 1$.
- Părintele lui i este $\lfloor i/2 \rfloor$.
- Toți fiii stîngi au numere pare și toți fiii drepți au numere impare.

De exemplu, fiii lui 6 sînt 12 și 13, iar fiii acestora sînt respectiv 24-25 și 26-27. Aceasta corespunde cu intenția noastră ca 6 stocheze informații agregate (suma) despre nodurile 24-27.

După cum vom vedea în secțiunea următoare, arborii de intervale obțin timpi logaritmici pentru operații, deoarece numărul de niveluri este $\log n$.

1.1.1 Memoria necesară

În această formă, structura necesită $2n$ memorie pentru n elemente dacă n este putere a lui 2 sau foarte aproape. De exemplu, pentru $n = 1024$, sînt necesare 2048 de celule. Dar, dacă n depășește cu puțin o putere a lui 2, atunci el trebuie rotunjit în sus. Pentru $n = 1025$, baza arborelui necesită 2048 de celule, iar arborele în întregime necesită 4096 de celule. De aceea spunem că, în cel mai rău caz, arborele poate ajunge la $4n$ celule ocupate în cel mai rău caz.

În realitate, necesarul este doar de $3n$ cu puțină atenție la alocare. Pentru $n = 1025$, alocăm 2048 de celule pentru nivelurile superioare ale arborelui, dar putem aloca fix 1025 pentru bază (nu 2048). Totalul este circa $3n$.

Pentru a calcula următoare putere a lui 2, putem folosi bucla naivă:

```
int p = 1;
while (p < n) {
  p *= 2;
}
n = p;
```

Sau o buclă care folosește *bit hacks*:

```
while (n & (n - 1)) {
  n += n & -n;
}
```

Mai concis, putem folosi funcția `__builtin_clz(x)`, care ne spune cu cîte zerouri începe numărul `x`:

```
n = 1 << (32 - __builtin_clz(n - 1));
```

1.1.2 Reprezentări alternative

Există și reprezentări mai compacte, care ocupă exact $2n-1$ noduri, adică strictul necesar teoretic. Iată un exemplu pentru un vector cu 6 noduri.

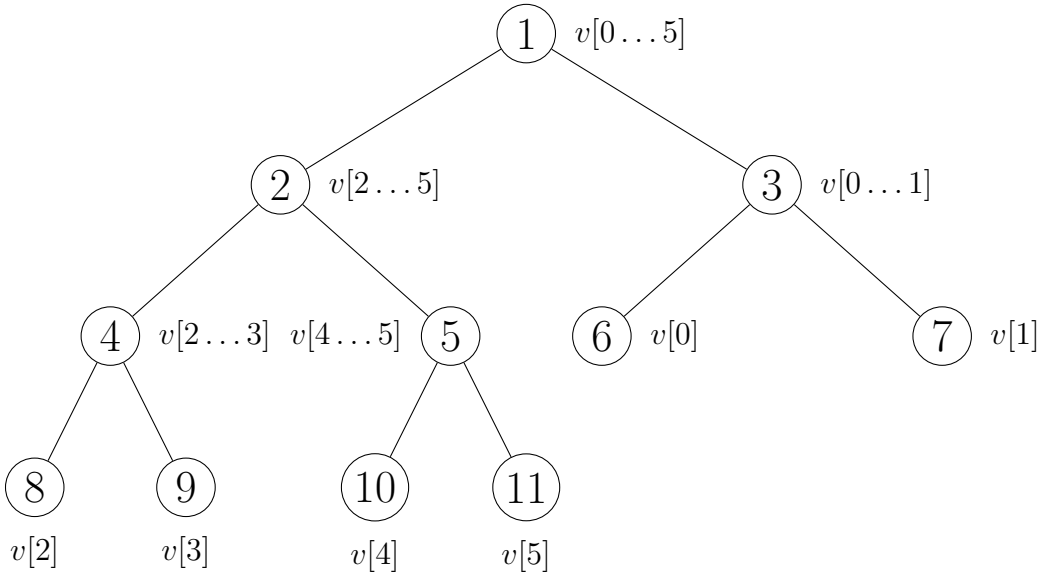


Figura 1.2: Reprezentarea arborilor de intervale cu exact $2n - 1$ noduri.

Vedem că frunzele (adică vectorul dat, $v[0] \dots v[5]$) se află pe pozițiile consecutive 6-11. În schimb, această reprezentare pare mai greu de vizualizat și încalcă o abstracție importantă: frunzele nu mai sînt la același nivel. Structura se pretează la operațiile de actualizare și interogare, dar nu sînt sigur că se pretează și la restul operațiilor pe care le discutăm în secțiunile următoare. De aceea prefer să folosesc și să predau structura rotunjită la 2^k noduri.

1.2 Operații elementare

1.2.1 Actualizarea punctuală

Nu uitați că poziția i din datele de intrare este stocată efectiv în $s[n + i]$. Apoi, cînd elementul aflat pe poziția i primește valoarea val, toate nodurile care acoperă poziția i trebuie recalculate:

```
void set(int pos, int val) {
```

```
  pos += n;
  s[pos] = val;
  for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
    s[pos] = s[2 * pos] + s[2 * pos + 1];
  }
}
```

Dacă nu ni se dă noua valoare absolută, ci variația δ față de valoarea anterioară, atunci codul este chiar mai simplu, căci toți strămoșii poziției se modifică tot cu δ:

```
void add(int pos, int delta) {
  for (pos += n; pos; pos /= 2) {
    s[pos] += delta;
  }
}
```

Apropo de *clean code*: Remarcați că am denumit funcțiile `set` și `add`, nu le-am denumit pe ambele `update`. Astfel am evidențiat diferența dintre ele.

1.2.2 Construcția în $\mathcal{O}(n \log n)$

O variantă de construcție este să invocăm funcția set de mai sus pentru fiecare valoare de la intrare. Complexitatea va fi $\mathcal{O}(n \log n)$.

1.2.3 Construcția în $\mathcal{O}(n)$

Putem reduce timpul de construcție dacă doar inserăm valorile frunzelor, fără a le propaga la strămoși. La final calculăm foarte simplu nodurile interne, în ordine descrescătoare.

```
void build() {
  for (int i = n - 1; i >= 1; i--) {
    s[i] = s[2 * i] + s[2 * i + 1];
  }
}
```

1.2.4 Calculul sumei pe interval

Să calculăm suma pe intervalul original [2, 12], care corespunde intervalului [18, 28] din reprezentarea internă. Ideea este să descompunem acest interval într-un număr logaritmic de segmente, mai exact [18,19], [20,23], [24,27] și [28,28]. Avantajul descompunerii este că avem deja calculate sumele acestor intervale, respectiv în nodurile 9, 5, 6 și 28.

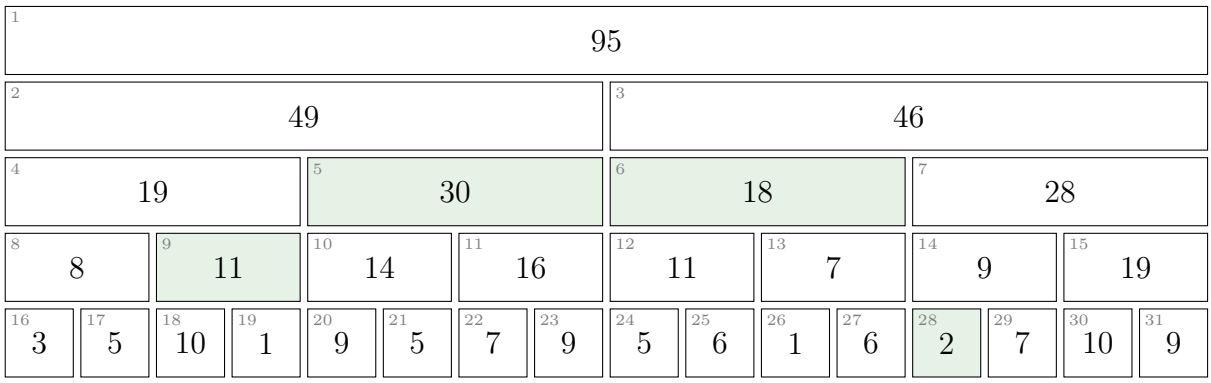


Figura 1.3: Suma intervalului [18, 28] este egală cu suma valorilor nodurilor 9, 5, 6 și 28.

Pornim cu doi pointeri l și r din capetele interogării date. Apoi procedăm astfel:

- Dacă l este fiu stîng, putem aștepta ca să includem un strămoș al său, care va include și alte poziții utile. În schimb, dacă l este fiu drept, trebuie să îl includem în sumă, căci orice strămoș al său va include și elemente inutile din stînga lui l. Apoi avansăm l spre dreapta.
- Printr-un raționament similar, dacă r este fiu stîng, includem valoarea sa în sumă și avansăm r spre stînga.
- Urcăm pe nivelul următor prin înjumătățirea lui l și r.
- Continuăm cît timp $l \leq r$.

Astfel, vom selecta cel mult două intervale de pe fiecare nivel al arborelui și vom restrînge corespunzător intervalul dat, pînă cînd îl reducem la zero. De aici rezultă complexitatea logaritmică.

```
long long query(int l, int r) { // [l, r] închis
  long long sum = 0;

  l += n;
  r += n;

  while (l <= r)  {
    if (l & 1) {
      sum += s[l++];
    }
    l >>= 1;

    if (!(r & 1)) {
      sum += s[r--];
    }
    r >>= 1;
  }

  return sum;
}
```

Clarificare: la ultimul nivel, dacă $l = r$, atunci $s[l]$ va fi selectat exact o dată, fie datorită lui l,

fie datorită lui r, după cum poziția este impară sau pară.

1.2.5 Căutarea unei sume parțiale

Ca și la AIB-uri, dacă toate valorile sînt pozitive are sens întrebarea: pe ce poziție suma parțială atinge valoarea P? Pentru simplitate, recomand să adăugați o santinelă de valoarea infinită pe poziția n. Aceasta garantează că suma parțială se atinge întotdeauna, iar dacă răspunsul este n, atunci de fapt suma parțială nu există în vectorul fără santinelă.

```
int search(int sum) {
  int pos = 1;

  while (pos < n) {
    pos *= 2;
    if (sum > s[pos]) {
      sum -= s[pos++];
    }
  }

  return pos - n;
}
```

1.2.6 Căutarea într-un arbore de maxime

Dat fiind un vector v cu n elemente, ni se cere să răspundem la interogări de tipul $\langle pos, val \rangle$ cu semnificația: găsiți cea mai mică poziție $i > pos$ pe care se află o valoare $v[i] > val$. În secțiunea următoare vom vedea problemele Points și Împiedicat care au această nevoie.

Pentru rezolvare, să construim peste acest vector un arbore de intervale de maxime. Fiecare nod stochează maximul dintre cei doi fii ai săi. Ca urmare, fiecare nod stochează maximul dintre frunzele pe care le subîntinde. Atunci soluția constă din doi pași:

- Mergi la dreapta și în sus, similar pointerului l din operația de sumă pe interval prezentată anterior. Oprește-te cînd ajungi la un nod cu o valoare $> val$. Știm că acest nod subîntinde cel puțin o frunză de valoare $> val$.
- Din acest nod, coboară în fiul care are la rîndul său o valoare $> val$. Dacă ambii fii au această proprietate, coboară în fiul stîng. Oprește-te cînd ajungi la o frunză.

Pentru a simplifica codul, putem adăuga o santinelă infinită la finalul vectorului, ca să ne asigurăm că problema are soluție.

```
int find_first_after(int pos, int val) {
  pos += n + 1;

  while (v[pos] <= val) {
    if (pos & 1) {
```

```
      pos++;
    } else {
      pos >>= 1;
    }
  }

  while (pos < n) {
    pos = (v[2 * pos] > val) ? (2 * pos) : (2 * pos + 1);
  }

  return pos - n;
}
```

Am inclus acest algoritm, deși este rar întîlnit în pratică, pentru a ilustra flexibilitatea uriașă a arborilor de intervale.

1.2.7 Adaptarea la alte tipuri de operații

Aceeași structură de date poate răspunde la multe alte feluri de actualizări și interogări. Nu detaliem aici, vom studia probleme. Ce este important este să ne dăm seama ce stocăm în fiecare nod și cum combină părintele informațiile din cei doi fii.

1.2.8 Implementarea recursivă

Există și o implementare recursivă, pe care nu o vom discuta acum (o menționez doar ca să o fac de rîs). O vom discuta mai tîrziu în acest capitol. Este păcat că mulți elevi învață și stăpînesc doar acea implementare, pe care o aplică și cînd nu este nevoie de ea, deși implementarea iterativă de mai sus este de 2-3 ori mai rapidă. Implementarea iterativă ar trebui să fie implementarea voastră de referință oricînd este suficientă.

Exemplu: din implementarea iterativă rezultă imediat că:

1. Complexitatea este $\mathcal{O}(\log n)$, întrucît l și r urcă exact un nivel la fiecare iterație.
2. De pe fiecare nivel selectăm cel mult două intervale.

Vă urez succes să demonstrați aceste lucruri în implementarea recursivă. 😈

1.3 Probleme

1.3.1 Problema Xenia and Bit Operations (Codeforces)

enunț • sursă

Problema este simplisimă. O includ doar ca exemplu de arbore care face operații diferite pe niveluri diferite.

1.3.2 Problema Distinct Characters Queries (Codeforces)

enunț • sursă

Există diverse abordări pentru această problemă. Una este să construim un AIB sau un AINT pentru fiecare caracter, cu memorie totală $\mathcal{O}(\Sigma n)$ (tradițional Σ denotă mărimea alfabetului). Fiecare structură reține pozițiile pe care apare un caracter. Modificările sînt simple: debifăm poziția în AIB-ul corespunzător vechiului caracter și o marcăm în AIB-ul noului caracter. Pentru interogări, verificăm pentru fiecare din cele 26 de caractere dacă suma pe intervalul dat este non-zero. Rezultă o complexitate de $\mathcal{O}(\Sigma q \log n)$.

Dar iată și o soluție mai elegantă, care reduce complexitatea la $\mathcal{O}(q \log n)$, folosind paralelismul nativ pe 32 de biți al procesorului. Vom folosi 26 de biți din fiecare întreg, cîte unul pentru fiecare caracter. Într-o frunză care stochează litera 'f' vom seta pe 1 doar cel de-al șaselea bit, așadar valoarea întreagă va fi `000...000100000`. Apoi, un nod intern va stoca OR-ul pe biți al frunzelor din intervalul acoperit. Acest gen de informație se numește **mască de biți** (engl. *bitmask*).

Ce semnifică acest OR pe biți? Fiecare dintre biți va fi 1 dacă și numai dacă litera corespunzătoare apare cel puțin o dată în intervalul acoperit. Să observăm că bitul 6 va fi 1 indiferent dacă intervalul conține un caracter 'f' sau multiple caractere 'f'. Rezultă că fiecare mască va avea atîția biți setați (biți 1) cîte caractere distincte există în interval.

Facem actualizări în acest arbore înlocuind masca din frunză și propagînd valoarea spre strămoși cu operația OR. Pentru a răspunde la interogări,

- colectăm cele $\mathcal{O}(\log n)$ măști care compun interogarea;
- le combinăm cu OR;
- numărăm biții din rezultat, de exemplu cu funcția `__builtin_popcount`.

1.3.3 Problema K-query (SPOJ)

enunț • surse

Problema fiind offline, este destul de natural să ordonăm interogările. Sper să vă obișnuiți și voi să luați în calcul această posibilitate.

Ordonarea după capătul stîng sau drept nu pare să ducă nicăieri. Exemplu: ordonăm interogările după capătul drept dr. Atunci, după ce adăugăm elementul $a[dr]$ la structura noastră (oricare ar fi ea), trebuie să răspundem la interogări de tipul: cîte numere $> k$ există începînd cu poziția st? Eu nu am reușit să găsesc o structură echilibrată care să răspundă la întrebări. Poate voi reușiți?

În schimb, ordonarea descrescătoare după valoare duce la o soluție relativ directă. Pentru o interogare (st, dr, k), marcăm (cu 1) într-o structură de date toate pozițiile elementelor mai mari decît k. Apoi numărăm valorile 1 din intervalul $[st, dr]$.

Pentru a găsi rapid toate elementele mai mari decît k (care nu au fost deja inserate în structură), rezultă că trebuie să sortăm și vectorul în ordine descrescătoare, reținînd și poziția originală a

fiecărei valori.

În fapt, putem implementa această soluție chiar și cu un AIB. Sursa este identică cu cea bază pe arbori de intervale cu excepția `struct`-ului. În acest caz, timpii de rulare sînt aproape egali, dar în general vă recomand să folosiți AIB unde se poate.

1.3.4 Problema Sereja and Brackets (Codeforces)

enunț • sursă

Iată și o problemă pentru a cărei rezolvare este mai puțin clar că ne ajunge un arbore de intervale. Vom construi un arbore în care nodurile stochează valori mai complexe care se combină după reguli speciale.

Să considerăm o subsecvență contiguă. Din ce constă ea? Dintr-un subșir (pe sărite) care este bine format, plus niște paranteze deschise neîmperecheate, plus niște paranteze închise neîmperecheate. De exemplu, în subșirul `))) ( () ( () ( () (` am evidențiat cu bold cele 6 caractere bine formate. Rămîn 4 paranteze deschise și 3 închise. Să notăm aceste cantități cu f (lungimea subșirului bine format), d (surplusul de paranteze deschise) și i (surplusul de paranteze închise).

Cum combinăm două subsecvențe adiacente (f_1, d_1, i_1) și (f_2, d_2, i_2)? Clar putem concatena porțiunile bine formate. Dar mai mult, putem prelua și $\min(d_1, i_2)$ perechi dintre surplusurile de paranteze deschise, respectiv închise. Șirul rezultat va fi bine format. Ne putem convinge de asta eliminînd porțiunile bine formate f_1 și f_2, ca și cînd ele nu ar exista. Dacă nu sînteți convinși, puteți apela la o definiție echivalentă pentru un șir de paranteze bine format: pentru orice prefix, diferența dintre numărul de paranteze deschise și închise este pozitivă.

Rezultă că intervalul concatenat va avea parametrii:

- $f = f_1 + f_2 + 2\min(d_1, i_2)$
- $d = d_1 + d_2 - \min(d_1, i_2)$
- $i = i_1 + i_2 - \min(d_1, i_2)$

Construcția arborelui se face ca de obicei, combinînd fiii doi cîte doi. La interogare este nevoie de puțină atenție pentru a colecta și combina intervalele în ordinea corectă (de la stînga la dreapta). Ne bazăm pe observația că operația de compunere nu este comutativă, dar este asociativă.

1.3.5 Problema Copying Data (Codeforces)

enunț • sursă

Aici întîlnim o formă complementară a arborilor de intervale: actualizări pe interval și interogări punctuale (*range update, point query*). Mecanismul necesar folosește o reprezentare puțin diferită. O problemă foarte similară este Range Update Queries (CSES).

(Cei dintre voi care stăpînesc arborii de intervale cu propagare *lazy* vor fi tentați să se repeadă la aceia: Pe fiecare nod ținem informația *lazy* că segmentul din b a fost suprascris cu un segment

din a începînd de la o poziție p (sau cu o deplasare $\pm p$, cum preferați). La actualizări, propagăm informația la fii după nevoie. La interogare, propagăm informația pînă în frunza cerută, pentru a afla de unde provine. Dar nu este nevoie de aceste complicații.)

Să pornim de la observația de bun simț: Dacă o copiere acoperă o poziție, atunci la descompunerea sa în intervale, unul dintre acele intervale va fi strămoș al poziției poziția (*duh!*).

Ne vom folosi și de numerele de ordine ale interogărilor, care vor funcționa ca niște momente de timp între 1 și q. Acum, să construim un arbore de intervale care, pentru o operație de copiere (x, y, k):

- Descompune intervalul $[y, y + k - 1]$ prin metoda obișnuită.
- Notează pe fiecare interval momentul t și diferența $x - y$.

Dacă ulterior o altă copiere va acoperi unul dintre aceste intervale, vom nota acolo momentul t' și diferența $x' - y'$. Atunci ultimul moment (și, implicit, ultima proveniență) a suprascrierii unei poziții este dată de cel mai mare moment de timp **dintre toți strămoșii poziției**.

1.3.6 Problema PHF (FMI No Stress 2013)

enunț • sursă

Problema ne cere să simulăm un șir de meciuri de piatră-hîrtie-foarfecă de tip „cîștigătorul la masă" și să admitem actualizări punctuale pe acest șir. Deoarece nu ne permitem o simulare în $\mathcal{O}(n)$ pentru fiecare din cele q actualizări, vom căuta să accelerăm simularea la $\mathcal{O}(\log n)$.

Caracterul de pe fiecare poziție, să-i spunem X, este un meci între X și cîștigătorul meciului de pe poziția anterioară. Echivalent, X este o funcție definită pe mulțimea $\{P, H, F\}$ cu valori tot în $\{P, H, F\}$, unde $X(c)$ este chiar rezultatul unui meci între X și c. De exemplu, P este funcția:

$$\begin{cases} P(P) &= P \\ P(H) &= H \\ P(F) &= P \end{cases}$$

Atunci o înșiruire de caractere este o compunere de funcții. De exemplu, dintr-un șir de intrare de patru caractere, numite generic $XYZT$, îl tratăm pe X ca argument, iar rezultatul final este $T(Z(Y(X)))$ sau $(T \circ Z \circ Y)(X)$.

Orice funcție are nevoie de un argument. 🙂 De aceea, tratăm separat primul caracter, iar pe celelalte $n-1$ le punem într-o structură. (O altă abordare este să definim primul caracter ca pe o funcție care returnează acel caracter independent de intrarea fictivă). Această structură trebuie să mențină rezultatul compunerii caracterelor, cu modificări. Vom folosi un arbore de intervale unde informația dintr-un nod este funcția compusă a intervalului subîntins. Reprezentăm aceste funcții prin tabelul complet (trei valori). Tabelele frunzelor le definim manual, iar tabelul unui nod intern este compunerea tabelelor celor doi fii. Tabelul rădăcinii este ceea ce ne interesează:

compunerea pozițiilor $2 \dots n$ din șir, adică o funcție pe care o vom aplica primului caracter din șir.

Implementarea mea rotunjește numărul de noduri la o putere a lui 2. De aceea la dreapta vom avea și noduri vide, pe care le tratăm ca pe funcții identice ($X(c) = X$).

1.3.7 Problema Points (Codeforces)

enunț • sursă

Problema are rating de 2800 pentru că se compune din multe blocuri, dar niciunul nu este de speriat, căci sîntem deja versați în arbori de intervale. 😎 Aș zice că problema ar fi grea la un baraj ONI sau ușoară la lot.

Ca să putem construi un arbore de intervale, în primul rînd normalizăm coordonatele x. Păstrăm și o tabelă cu valorile originale, căci pe acelea trebuie să le afișăm.

Am putea reformula întrebarea pentru operația `find x y`: dintre toate punctele cu $x' > x$, există vreunul cu $y' > y$? Ne gîndim că am putea folosi un AINT de maxime, indexat după x, cu valori din y, cu interogarea: „Caută maximul pe intervalul $[x + 1, n)$ și spune-mi dacă este mai mare decît y”.

Dar astfel aflăm doar dacă există un punct. Ca să-l găsim, întrebarea corectă este: „dă-mi cea mai din stînga poziție după x pe care maximul depășește y”. Din fericire, putem face asta cu același AINT maxime, așa cum am explicat în secțiunea de teorie:

1. Pornind de la prima poziție validă (în cazul nostru, $x + 1$), mergem în sus și spre dreapta, spre intervale tot mai mari, pînă cînd găsim o poziție de valoare $> y$. Ca să evităm cazurile particulare, adăugăm la finalul vectorului o santinelă de valoare infinită.
2. De la această poziție, coborîm în timp ce menținem în vizor valoarea $> y$. Dacă putem coborî în orice direcție, preferăm stînga.

Astfel putem gestiona operațiile de adăugare (cînd maximul pentru un x fixat poate doar să crească). Următoarea întrebare este cum gestionăm ștergerile. Cea mai directă soluție este să menținem cîte un `set` STL pentru fiecare coordonată x. Suma mărimilor acestor seturi nu va depăși n. Cu metoda `rbegin()` putem afla noul maxim după inserări și ștergeri.

Ultima întrebare, odată ce stabilim că răspunsul pentru `find x y` este la abscisa x', este: care dintre punctele cu această abscisă este răspunsul? Folosim același set și metoda `upper_bound()` pentru a afla cel mai mic y' strict mai mare decît y.

Complexitatea soluției este $\mathcal{O}(n \log n)$, atît pentru normalizarea inițială cît și pentru procesarea operațiilor. Fiecare operație necesită o căutare în set și o căutare sau actualizare în AINT.

1.3.8 Problema Medwalk (Lot 2025)

enunț • sursă

Problema admite și o soluție diferită, mult mai rapidă, bazată pe AIB-uri 2D, dar iată o soluție care folosește doar arbori de intervale.

Din enunț putem defini forma drumului: el va merge pe linia de sus a unor coloane, apoi va folosi ambele linii de pe o coloană c pentru a coborî, apoi va merge pe linia de jos a coloanelor rămase. Acum, să presupunem că avem un oracol care, pentru orice interogare, ne spune coloana c. Atunci vom muta restul coloanelor fie în stînga, fie în dreapta lui c, pentru a folosi valoarea de sus sau de jos, oricare este mai mică.

Cu alte cuvinte, mulțimea de valori de pe drumul care minimizează medianul constă din

- minimele de pe toate coloanele;
- minimul dintre maximele de pe coloane.

Răspunsul la fiecare interogare este elementul median al acestei mulțimi. Logica pentru a afla a k-a valoare este relativ simplă și implică trei valori: al k-lea minim, al $k-1$-lea minim și minimul maximelor. De aici înainte, putem abstractiza matricea ca doi vectori, unul cu minimele perechilor și altul cu maximele. De exemplu, cînd o coloană se modifică din (3, 6) în (3, 2), atunci minimul se modifică din 3 în 2, iar maximul din 6 în 3.

De aceea, avem nevoie de două structuri independente:

- O structură pentru maxime, care să admită actualizări punctuale și interogare de minim pe interval.
- O structură pentru minime, care să admită actualizări punctuale și interogări de al k-lea element pe interval.

Pentru prima structură, ochiul nostru de-acum experimentat ne spune că putem folosi un simplu AINT. Dar pentru a doua? Am găsit pe StackOverflow o idee bine explicată, pe care o reiau.

Vom folosi un arbore de intervale **pe valori**. Așadar, nu indexăm pozițiile conform cu pozițiile din vector, ci cu valorile existente în vector. Fiecare frunză din aint, corespunzătoare unei valori v, reține o colecție ordonată (un `set`, în esență) cu pozițiile pe care apare valoarea v. Fiecare nod intern reține reuniunea colecțiilor fiilor săi. Cu alte cuvinte, dacă un nod subîntinde valorile $[l, r]$, colecția sa va enumera toate pozițiile pe care apar valori între l și r.

Remarcăm că memoria necesară este $\mathcal{O}(n \log V_{max})$, deoarece aint-ul conține V_{max} valori, deci are înălțime $\log V_{max}$, iar fiecare poziție din vectorul original va fi enumerată în $\log V_{max}$ colecții.

Pentru actualizare, trebuie să ștergem poziția modificată din lista vechii valori minime și din listele tuturor strămoșilor. Apoi inserăm poziția în listele noii valori minime. De exemplu, dacă minimul coloanei 100 se modifică din 30 în 20, atunci de la poziția 30 din aint și din toți strămoșii eliminăm elementul 100 din colecție. Apoi la poziția 20 în aint și în toți strămoșii inserăm elementul 100.

Rămîne să descriem interogările. Pentru a afla al k-lea minim dintr-un interval de coloane $[l, r]$, pornim din rădăcina arborelui de intervale (luînd așadar în calcul toate valorile de la 0 la V_{max}). Consultăm fiul stîng (valorile $1 \ldots V_{max}/2$) și ne întrebăm: cîte apariții au aceste valori pe poziții din $[l, r]$? Putem răspunde la această întrebare printr-o diferență, reducînd întrebarea la forma:

cîte apariții au aceste valori pe pozițiile $0 \dots r$? Așadar, trebuie numărate elementele mai mici sau egale cu r din setul rădăcinii. Set-ul simplu din STL nu poate gestiona această întrebare, dar putem folosi un set extins din PB/DS. Nu detaliem acum, dar ne vom reîntîlni cu acest tip de date.

Dacă numărul de valori între 0 și $V_{max}/2$ care apar pe poziții între l și r este $\geq k$, atunci acolo se va afla și al k-lea element, deci coborîm în fiul stîng. Altfel coborîm în fiul drept.

Complexitatea algoritmului este $\mathcal{O}((n+q) \log n \log V_{max})$. De exemplu, fiecare interogare coboară $\log V_{max}$ niveluri, iar la fiecare nivel face o căutare într-un set de $\mathcal{O}(n)$ elemente în timp $\mathcal{O}(\log n)$.

Bibliografie

[1] CS Academy, *Segment Trees*, URL: https://csacademy.com/lesson/segment_trees.

[2] CP Algorithms, *Segment Tree*, URL: https://cp-algorithms.com/data_structures/segment_tree.html.

Capitolul 2

Arbori de intervale cu propagare *lazy*

2.1 Operații pe interval

Să reluăm exemplul din capitolul trecut și să spunem acum că dorim să adăugăm 100 pe intervalul [2, 12], corespunzător nodurilor [12, 28] din arbore.

Ca să nu facem efort $\mathcal{O}(n)$, vom descompune intervalul ca mai înainte și vom nota informația „+100" în nodurile 9, 5, 6 și 28, cu semnificația că valoarea reală a tuturor frunzelor de sub aceste noduri a crescut cu 100.

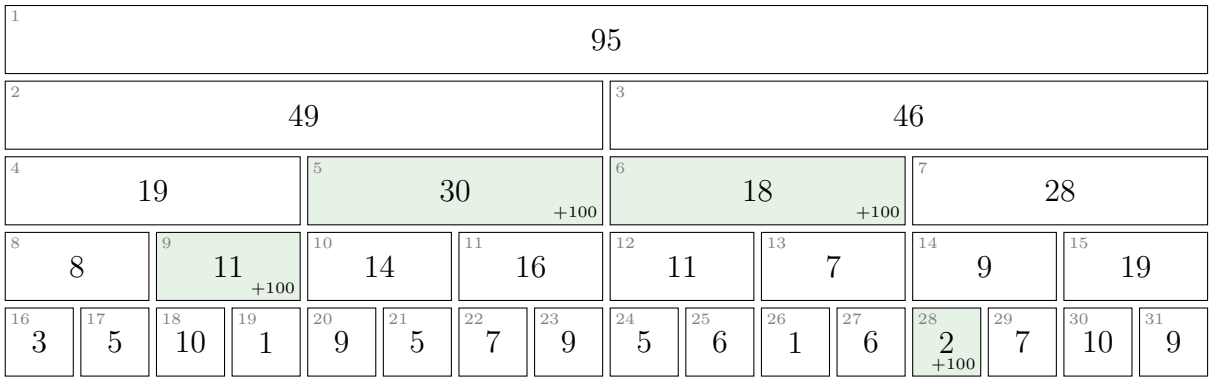


Figura 2.1: Pentru a adăuga 100 pe intervalul [18, 28], notăm valoarea *lazy* 100 pe nodurile 9, 5, 6 și 28.

Aceasta este o **informație *lazy***: o informație care stă într-un nod intern și care trebuie propagată tuturor frunzelor subîntinse de acel nod. Totuși, amînăm efortul acestei propagări pînă cînd el devine strict necesar; tocmai de aceea se numește **propagare *lazy***. (Mulți elevi denumesc întreaga structură „AINT cu *lazy*", dar asta este... lene.)

Evaluarea *lazy* este un concept des întîlnit:

- Memoizarea unor valori într-un vector / matrice, cu speranța că nu va fi nevoie să calculăm tabelul complet.

- Amînarea evaluării lui `y` în expresia booleană `x || y`, cu speranța că `x` va fi evaluat ca adevărat, iar `y` va deveni irelevant.
- Inițializarea unei componente costisitoare dintr-un program doar cînd devine necesară (o conexiune la baza de date, o zonă a hărții dintr-un joc).

Așadar, definim un al doilea vector numit `lazy` și executăm `lazy[x] += 100` pe pozițiile 9, 5, 6 și 28.

Motivul pentru care treaba se complică este următorul. Dacă acum primim o interogare de sumă pe intervalul [25,29]? Nu putem să însumăm, ca de obicei, pozițiile 25, 13 și 14, căci pierdem din vedere că unele dintre noduri au (cîte) +100. Sigur, putem lua asta în calcul, dar trebuie să clarificăm operațiile, altfel efortul poate deveni $\mathcal{O}(n)$.

În primul rînd, introducem două funcții noi (le puteți include în alte funcții, dar pentru claritate le puteți declara de sine stătătoare):

- `push()`, care propagă informația *lazy* de la un nod la fiii săi;
- `pull()`, care combină în părinte informația din cei doi fii după o actualizare.

```
void push(int node, int size) {
  s[node] += lazy[node] * size;
  lazy[2 * node] += lazy[node];
  lazy[2 * node + 1] += lazy[node];
  lazy[node] = 0;
}

void pull(int node, int size) {
  s[node] =
    s[2 * node] + lazy[2 * node] * size / 2 +
    s[2 * node + 1] + lazy[2 * node + 1] * size / 2;
}
```

Pentru problema dată (dar nu pentru toate problemele), codul are nevoie să știe numărul de frunze subîntinse (`size`).

Să presupunem acum că dorim să calculăm suma intervalului [2, 12] și că este posibil să avem niște sume *lazy* în multe alte noduri. Știm că codul descompune interogările în intervale mai scurte și nu urcă mai sus de acestea. Dacă există valori *lazy* mai sus (să zicem în rădăcină), codul nu va afla de ele. De aceea, în pregătirea interogării, trebuie să vizităm toți strămoșii intervalului și să propagăm în jos (*push*) informația *lazy*. Dar, dacă ne gîndim, lista completă a acestor strămoși constă doar din strămoșii capetelor de interval! Pentru intervalul [18,28], este nevoie să propagăm în jos informația *lazy* din strămoșii lui 18 (adică 1, 2, 4 și 9) și ai lui 28 (adică 1, 3, 7 și 14).

Dacă apelăm push din acești strămoși, de sus în jos, avem garanția că informația pe intervalele dorite este la zi. Vă rămîne vouă ca experiment de gîndire să demonstrați că, după operațiile *push*, nu va mai exista informație *lazy* în niciun strămoș al niciunei poziții din interogare.

Astfel obținem o funcție foarte similară cu cea din capitolul trecut

```
void push_path(int node, int size) {
  if (node) {
    push_path(node / 2, size * 2);
    push(node, size);
  }
}

long long query(int l, int r) {
  long long sum = 0;
  int size = 1;

  l += n;
  r += n;
  push_path(l / 2, 2); // pornim din părinte
  push_path(r / 2, 2);

  while (l <= r)  {
    if (l & 1) {
      sum += s[l] + lazy[l] * size;
      l++;
    }
    l >>= 1;

    if (!(r & 1)) {
      sum += s[r] + lazy[r] * size;
      r--;
    }
    r >>= 1;
    size <<= 1;
  }

  return sum;
}
```

Dacă viteza este crucială, putem scrie și o funcție `push_path` cu circa 10% mai rapidă, iterativă, folosind operații pe biți. Să considerăm nodul $22 = 10110_{(2)}$. Strămoșii lui sînt 1, 2, 5 și 11 care au respectiv reprezentările binare 1, 10, 101 și 1011, care sînt fix prefixele lui 10110! Deci îl vom deplasa pe 10110 la dreapta cu 4, 3, 2 și respectiv 1 bit pentru a-i obține strămoșii.

```
void push_path(int node) {
  int bits = 31 - __builtin_clz(n);
  for (int b = bits, size = n; b; b--, size >>= 1) {
    int x = node >> b;
    push(x, size);
  }
}

// Acum primul apel este chiar din frunză:
```

```
...
push_path(l);
push_path(r);
...
```

Actualizările sînt foarte similare. Apelăm `pull()` după terminarea actualizărilor, deoarece trebuie să lăsăm arborele într-o stare coerentă și trebuie să preluăm orice modificare de la fii.

```
void pull_path(int node) {
  for (int x = node / 2, size = 2; x; x /= 2, size <<= 1) {
    pull(x, size);
  }
}

void update(int l, int r, int delta) {
  l += n;
  r += n;
  int orig_l = l, orig_r = r;
  push_path(l / 2, 2);
  push_path(r / 2, 2);

  while (l <= r)  {
    if (l & 1) {
      lazy[l++] += delta;
    }
    l >>= 1;

    if (!(r & 1)) {
      lazy[r--] += delta;
    }
    r >>= 1;
  }

  pull_path(orig_l);
  pull_path(orig_r);
}
```

Iată și o altă implementare care combină bucla `while` principală cu funcția `pull_path`.

Notă: În această implementare, valoarea *lazy* se aplică întregului subarbore, inclusiv nodului însuși. În implementarea de pe CP Algorithms, valoarea *lazy* se aplică subarborelui fără nodul însuși. Oricare dintre formulări este acceptabilă, cîtă vreme o folosiți consecvent.

Notă: În practică, cîmpurile `lazy` și `s` merită încapsulate într-un `struct`. Datorită localității acceselor la memorie, diferența de viteză este notabilă (circa 25%). Aici le-am lăsat separate pentru concizie.

2.2 Implementare recursivă (actualizări punctuale)

Lecția trecută am spus că există și o implementare recursivă. Să o examinăm acum (mulți o știți deja).

```
void update(int node, int pl, int pr, int pos, int delta) {
  if (pr - pl == 1) {
    s[node] += delta;
  } else {
    int mid = (pl + pr) >> 1;
    if (pos < mid) {
      update(2 * node, pl, mid, pos, delta);
    } else {
      update(2 * node + 1, mid, pr, pos, delta);
    }
    s[node] = s[2 * node] + s[2 * node + 1];
  }
}
```

Metoda recursivă cară după ea 5 parametri:

- `node`: nodul curent din arbore (aka poziția în vector);
- `pl`, `pr`: intervalul din vectorul inițial acoperit de `node`. Eu am optat pentru implementarea cu `pl` inclusiv și `pr` exclusiv. Dacă preferați intervale închise, este OK.
- `pos`, `delta`: poziția de modificat și valoarea de adăugat/scăzut.

Vedem că funcția coboară recursiv în fiul stîng sau fiul drept, după caz. Un exemplu de apel ar fi:

```
update(1, 0, n, some_pos, some_val);
```

Mai interesant, iată și implementarea funcției de interogare (sumă pe interval):

```
long long query(int node, int pl, int pr, int l, int r) {
  if (l >= r) {
    return 0;
  } else if ((l == pl) && (r == pr)) {
    return s[node];
  } else {
    int mid = (pl + pr) >> 1;

    return
      query(node * 2, pl, mid, l, min(r, mid)) +
      query(node * 2 + 1, mid, pr, max(l, mid), r);
  }
}
```

Regăsim trei din aceiași parametri, `node`, `pl` și `pr`. În plus,

- `l`, `r`: Intervalul [închis, deschis) pe care dorim să calculăm suma.

Funcția se reapelează pe cei doi fii, restrîngînd corespunzător intervalul $[l, r)$. Iată o imagine care arată arborele de apeluri pentru calculul sumei pe intervalul [3, 10):

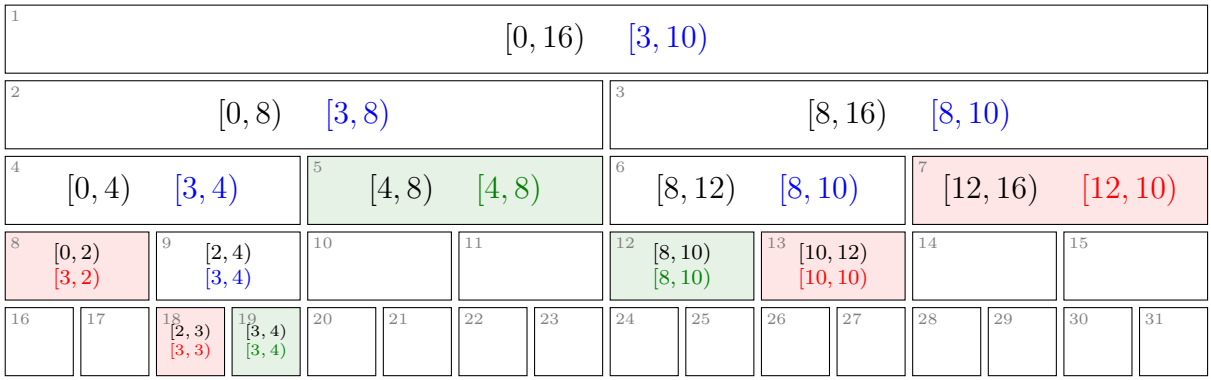


Figura 2.2: Arborele de apeluri în funcția de actualizare recursivă pe intervalul $[3, 10)$.

Am ilustrat cu albastru nodurile care au nevoie să-și apeleze descendenții, cu verde nodurile selectate integral, iar cu roșu nodurile eliminate.

Complexitatea rămîne $\mathcal{O}(\log n)$, deși funcția se reapelează pentru ambii fii. De ce?

Discutăm implementarea recursivă pentru că ea plutește prin supa culturală și vreau să puteți citi cod scris astfel. Dar ea este un exemplu de dopaj, de implementare repetată *mot à mot* indiferent de nevoile problemei. Implementarea recursivă este de 2-3 ori mai lentă decît cea iterativă pentru actualizări punctuale. Presupun că există două motive:

Implementarea recursivă cară după ea 5-6 parametri la fiecare apel, care trebuie copiați, puși/scoși de pe stivă etc. Implementarea iterativă folosește doar 3 variabile.

Implementarea recursivă este nevoită să pornească din rădăcină, să coboare pînă la frunze, apoi să revină din recursivitate. Implementarea iterativă se oprește imediat ce termină de descompus intervalul $[l, r]$.

La varianta cu propagare *lazy* diferența de timp aproape dispare, pentru că ambele implementări trebuie să urce pînă la rădăcină.

Nu vă năpustiți la implementarea recursivă dacă nu este nevoie. Rezistați tentației de a fi leneși, de a învăța o singură structură de date, pe care să o pictați indiferent de situație! Trebuie să aspirați la mai mult de atît, dacă este să vă meritați locul în lot.

2.3 Implementare recursivă (actualizări pe interval)

În această implementare, observăm cum:

- apelăm `push` înainte de reapelarea recursivă, pentru a-i garanta fiecărui nod că deasupra sa nu mai există informații lazy;

- apelăm `pull` după revenirea din recursivitate, ca să lăsăm arborele într-o stare coerentă.

```
long long query(int node, int pl, int pr, int l, int r) {
  if (l >= r) {
    return 0;
  } else if ((l == pl) && (r == pr)) {
    return s[node] + lazy[node] * (r - l);
  } else {
    push(node, pr - pl);
    int mid = (pl + pr) >> 1;
    return
      query(node * 2, pl, mid, l, min(r, mid)) +
      query(node * 2 + 1, mid, pr, max(l, mid), r);
  }
}

void update(int node, int pl, int pr, int l, int r, int delta) {
  if (l >= r) {
    return;
  } else if ((l == pl) && (r == pr)) {
    lazy[node] += delta;
  } else {

    push(node, pr - pl);
    int mid = (pl + pr) >> 1, child_size = (pr - pl) >> 1;
    update(2 * node, pl, mid, l, min(r, mid), delta);
    update(2 * node + 1, mid, pr, max(l, mid), r, delta);
    pull(node, child_size);

  }
}

void process_ops() {
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    if (q[i].t == OP_UPDATE) {
      update(1, 0, n, q[i].l - 1, q[i].r, q[i].val);
    } else {
      answer[num_answers++] = query(1, 0, n, q[i].l - 1, q[i].r);
    }
  }
}
```

2.4 Arta proiectării unui arbore de intervale

Atunci cînd primim o problemă și avem de proiectat o structură de date, cum știm dacă un arbore de intervale se potrivește scopului? În general, trebuie să urmărim trei lucruri.

În primul rînd, pentru a putea procesa rapid actualizările pe interval, dorim să facem efort $\mathcal{O}(1)$

în fiecare interval elementar din descompunere. De aceea, în general informația *lazy* stochează fix ce primim de la operațiile de *update*: o cantitate de adăugat sau de atribuit, un bit de semn, un bit care arată că intervalul curent trebuie inversat etc.

Este nevoie de atenție la compunerea actualizărilor. Dacă avem două cantități de adăugat pe același interval, cîmpul *lazy* va reține suma cantităților. Dacă avem două atribuiri succesive pe același interval, cîmpul *lazy* o va reține doar pe ultima.

În al doilea rînd, pentru a putea procesa rapid interogările pe interval, dorim să facem efort $\mathcal{O}(1)$ în fiecare interval din descompunere. De aceea, informația propriu-zisă din fiecare nod trebuie să includă valorile pe care le cer operațiile de *query*. Acestea sînt un punct de pornire, dar uneori nu sînt suficiente, ci este nevoie să menținem mai multe valori din care să le putem alege pe cele cerute.

În sfîrșit, în al treilea rînd trebuie să verificăm că avem tot ce ne trebuie pentru a compune două intervale alăturate la interogare, pentru a recalcula un părinte din cei doi fii ai săi (operația *pull*) și pentru a propaga informația *lazy* de la părinte la fii (operația *push*).

O regulă de aur este că, la începutul și la sfîrșitul fiecărei funcții, arborele trebuie să fie într-o stare **coerentă**. Aceasta înseamnă că trebuie să definim un **contract**, o promisiune despre care este structura logică a fiecărui nod. Vă recomand chiar să notați acest contract într-un comentariu de una-două fraze, la începutul codului pentru AINT. Apoi, scrieți codul astfel încît, la intrarea și la ieșirea din orice funcție, toate nodurile arborelui să respecte acel contract.

De exemplu, dacă informația *lazy* este o cantitate de adăugat pe tot subarborele, atunci operația *push* trebuie neapărat să se încheie prin a pune pe 0 valoarea *lazy* din părinte. În niciun caz nu trebuie să încheiem operația *push* lăsînd aceeași valoare *lazy* în părinte și în fii.

2.5 Probleme

2.5.1 Problema Polynomial Queries (CSES)

enunț • surse

Problema seamănă mult cu cea discutată la teorie, dar pe intervale nu mai adăugăm constante, ci progresii aritmetice. Așadar, pare natural să reținem exact această informație *lazy*: în fiecare nod reținem că în fiecare frunză acoperită de acel nod trebuie să adăugăm cîte un termen al unei progresii cu un anumit prim element și pasul (deocamdată) 1. De exemplu, dacă în figura 2.1 facem o actualizare pe intervalul [18, 28], atunci în nodul 5 notăm progresia cu primul termen 3 și pasul 1. Informația *lazy* este o pereche $\langle 3, 1 \rangle$.

Trebuie tratate atent diversele cazuri care iau naștere. Dacă două progresii acoperă același interval, vor lua naștere progresii cu pas mai mare decît 1. Să luăm un exemplu:

- Progresia cu primul termen 5 și pasul 3, așadar 5, 8, 11, 14, ...
- Progresia cu primul termen 2 și pasul 7, așadar 2, 9, 16, 23, ...

- După însumare dorim să avem termenii 7, 17, 27, 37, ...
- Rezultă că suma este și ea o progresie cu primul termen 7 și pasul 10. Cu alte cuvinte, informațiile *lazy* se pot compune ușor: $\langle 5, 3\rangle + \langle 2, 7\rangle = \langle 7, 10\rangle$.

La propagarea în jos a informației *lazy*, în cei doi fii vom adăuga progresii cu același pas. În fiul drept, primul termen trebuie calculat, dar este ușor. Dacă într-un nod care acoperă 16 elemente avem o progresie cu primul element 3 și pasul 5, atunci fiul drept va începe cu al nouălea termen al progresiei:

$$3 + 5 \cdot (16/2) = 43$$

La operațiile de adăugare, pe toate intervalele din descompunere vom aduna progresii cu pasul 1, dar primul element diferă pentru fiecare interval (la fel, nu este greu de calculat).

Contractul pe care l-am ales pentru implementarea iterativă este:

- `first` și `step` înseamnă că pe nodurile din intervalul acoperit trebuie adăugate valorile `first`, `first + step`, `first + 2 * step`, ...
- Valoarea `s` din fiecare nod **nu** include și suma progresiei dată de `<first, step>` din acel nod.

2.5.2 Problema Nezzar and Binary String (Codeforces)

enunț • sursă

Problema este relativ directă odată ce „ne prindem” că trebuie să procesăm operațiile în ordine inversă. Știm șirul final f și fie $[l, r]$ ultimul interval inspectat de Nanako. În momentul inspecției, șirul curent trebuia să fie identic cu f pe pozițiile $[1, l) \cup (r, n]$, căci pe acelea nu le putem modifica. Pe pozițiile $[l, r]$ trebuiau să fie doar biți 0 sau doar biți 1. Care dintre ele? Știm că la ultima modificare am modificat strict mai puțin de jumătate din biți. Să notăm cu z numărul de zerouri și cu u numărul de unu de pe pozițiile $[l, r]$ din f. Iau naștere trei cazuri:

1. Dacă $z > u$, înseamnă că la pasul anterior $[l, r]$ conținea doar 0.
2. Dacă $z < u$, înseamnă că la pasul anterior $[l, r]$ conținea doar 1.
3. Dacă $z = u$, problema nu are soluție, căci nu putem opera modificarea necesară.

Astfel, toate operațiile sînt forțate, mergînd înapoi în timp. Răspunsul este `YES` doar dacă putem procesa toate operațiile, iar la final ajungem la șirul s.

Rezultă că, pentru a efectua efectiv operațiile, avem nevoie de un arbore de segmente cu valori de 0 și 1 în frunze, cu funcții de sumă pe interval (pentru a stabili majoritatea) și de atribuire pe interval (pentru a face *undo* la o operație).

2.5.3 Problema Simple (infO(1)Cup 2019)

enunț • sursă

Să aplicăm regula menționată ca să proiectăm un arbore de intervale pentru această problemă.

- În cîmpul *lazy* vom stoca valorile primite la update, așadar cantitățile de adăugat pe tot subarborele.
- În cîmpurile propriu-zise vom stoca valorile necesare pentru interogări, așadar minimul par pe interval și maximul impar pe interval.
- Ce altceva ne mai trebuie ca să putem menține informația la actualizări? Să observăm că o cantitate *lazy* impară schimă paritatea valorilor pe întregul interval. Noul minim par este fostul minim impar, plus cantitatea *lazy*. De acea, vom introduce încă două cantități: maximul par și minimul impar.

Ca de obicei, este important ca la implementare să alegem dacă valoarea *lazy* este deja inclusă în nodul curent și mai trebuie aplicată doar la subarbore sau dacă ea trebuie aplicată inclusiv nodului curent. Eu am ales prima variantă. Ambele sînt bune, cîtă vreme codul respectă alegerea făcută.

Pe unele intervale nu vor exista valori pare sau impare. Dacă facem cazuri speciale pentru toate acele situații, vom avea undeva între 5 și 10 `if`-uri de presărat prin cod. O abordare mai simplă este să notăm în acele noduri $+\infty$ pentru a arăta că nu există minime și $-\infty$ pentru a arăta că nu există maxime. Apoi lăsăm aceste valori să se combine fără să mai tratăm cazuri particulare. La final, știm că orice valori definite vor fi între 1 și $2 \cdot 20^9 + 2 \cdot 20^5 \cdot 2 \cdot 20^9$, conform limitelor din enunț. Valorile din afara acestui interval le interpretăm ca fiind nedefinite.

În cod am încercat să separ funcțiile specifice nodului de funcțiile specifice arborelui.

2.5.4 Problema Balama (Baraj ONI 2024)

enunț • surse

Vă veți întîlni des cu probleme unde soluția devine simplă dacă analizăm informațiile în altă ordine. În cazul de față, în loc să luăm în calcul liniile (care sînt subsecvențe ordonate), să analizăm coloanele.

Care va fi răspunsul pe ultima coloană? Desigur, va fi maximul din vector. Mult mai interesantă este întrebarea: care va fi răspunsul pe penultima coloană? Va fi cel mai mare element care este vreodată (în cel puțin o fereastră) **al doilea maxim**.

Exemplu: fie maximul global 1.000 și fie al doilea maxim global 999. Dacă 999 stă foarte departe de 1.000, la distanță de cel puțin k, atunci 999 va fi maxim în toate ferestrele de lățime k care îl conțin. Cu alte cuvinte, 999 se va regăsi doar pe ultima coloană în matricea B (și va fi mascat de 1.000). Să spunem că următoarele valori din șir, în ordine descrescătoare, sînt 998, 997 și 996 și toate se află la distanță mare unele de altele. Niciunul dintre ele nu va apărea pe penultima coloană în B.

În schimb, să spunem că următoarea valoare ca mărime, 995, se află aproape (la distanță $< k$) de o valoare anterioară, cum ar fi 997. Atunci există o fereastră în care 995 și 997 coexistă, deci 995 va fi al doilea maxim din acea fereastră și va apărea pe penultima coloană în B. Cum alte valori mai mari nu au această proprietate, 995 este răspunsul pe penultima poziție a soluției.

(Amănunt esențial 😉: 995 nu poate fi și al treilea maxim. Dacă exista o fereastră de lățime k care îl cuprindea pe 995 și alte două valori anterioare, atunci înainte să ajungem la 995 una dintre acele două valori anterioare ar fi fost al doilea maxim).

Astfel, putem considera elemente în ordine descrescătoare și, pentru fiecare element x ne întrebăm: cîte elemente văzute anterior conține fiecare dintre ferestrele care îl conțin pe x (cel mult k la număr)? Dacă o astfel de fereastră are e elemente, și dacă a $e+1$-a valoare din soluție (numărînd de la dreapta) este încă necunoscută, atunci pune x pe poziția $e+1$ a soluției.

Exemplu: Dacă considerăm elementul 900 și constatăm că într-una din ferestrele care îl conțin pe 900 existau deja alte 5 valori, atunci în acea fereastră 900 este al 6-lea element. Dacă a 6-a poziție din soluție este încă neocupată, scriem 900 acolo, acesta fiind maximul posibil.

Implementarea sună fioros, dar nu este! În realitate avem nevoie de o structură cu două operații:

- Incrementează pozițiile de la st la dr, pentru a arăta că în ferestrele de la $[st, st+k-1]$ și pînă la $[dr, dr+k-1]$ avem cîte un element în plus.
- Află maximul de pe pozițiile de la st la dr.

Operația a doua ne este suficientă deoarece ferestrele nu vor ajunge brusc la 6 elemente. Vor apărea mai întîi ferestre cu 1, 2, 3, 4, 5 elemente. Cu alte cuvinte, soluția se completează de la dreapta spre stînga.

Vom implementa un AINT de maxime în care informația *lazy* din fiecare nod este valoarea de adăugat pe fiecare poziție din intervalul acoperit.

Capitolul 3

Arbori indexați binar

Arborii indexați binar (AIB), numiți și arbori Fenwick, iar în engleză *binary indexed trees (BIT)*, servesc ca și arborii de intervale tot la rezolvarea în $\mathcal{O}(\log n)$ a unor operații pe vectori. Ei sînt mai puțin flexibili și universali decît arborii de intervale. Nu toate problemele rezolvabile cu AINT pot fi rezolvate și cu AIB. Dar acolo unde se potrivesc, AIB-urile sînt ușor de codat și sînt de 2-3 ori mai rapide decît arborii de intervale.

3.1 *Benchmarks*

Dacă se potrivesc mai multe structuri, contează pe care o alegem? Ca să alegem în cunoștință de cauză, iată niște măsurători de viteză (*benchmarks*). Le-am făcut în 2025 pe un procesor AMD Ryzen 7 4700U, la acea vreme comparabil cu evaluatoarele de la Kilonova și Codeforces.

Am măsurat timpii de rulare pentru diverse implementări ale problemei în ambele variante (actualizări punctuale sau pe interval).

- arbori indexați binar, $\mathcal{O}(\log n)$ per operație;
- arbori de segmente iterativi, $\mathcal{O}(\log n)$ per operație;
- arbori de segmente recursivi, $\mathcal{O}(\log n)$ per operație;
- descompunere în radical, $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ și cel mult două împărțiri per operație;
- descompunere în radical, $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ și $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ împărțiri per operație.

Precizez că vom discuta descompunerea în radical abia în capitolul următor, dar pare un moment bun să privim aceste *benchmarks*.

Am ales limitele $n = q = 500.000$ pentru ambele variante ale problemei. Pentru unele programe contează cîte dintre operații sînt interogări și cîte sînt actualizări. Pentru aceste situații, am măsurat doi timpi, notați astfel:

- 250u/250q: există cîte 250.000 de operații din fiecare tip;
- 100u/400q: există 100.000 de actualizări și 400.000 de interogări.

Toate testele sînt pe `long long` și 90% dintre intervale au lungime peste $n/2$. Toți timpii măsoară

strict partea de procesare (excluzînd citirea și scrierea).

3.1.1 Varianta 1 (*point update, range query*)

structură	**timp**
arbore indexat binar	23 ms
arbore de intervale iterativ (250u/250q)	46 ms
arbore de intervale iterativ (100u/400q)	55 ms
arbore de intervale recursiv (250u/250q)	116 ms
arbore de intervale recursiv (100u/400q)	130 ms
descompunere în radical (250u/250q)	113 ms
descompunere în radical (100u/400q)	177 ms
descompunere în radical cu împărțiri (250u/250q)	763 ms
descompunere în radical cu împărțiri (100u/400q)	1.219 ms

Tabela 3.1: Timpii de rulare pentru sume pe interval și actualizări punctuale.

3.1.2 Varianta 2 (*range update, range query*)

structură	**timp**
arbore indexat binar (250u/250q)	66 ms
arbore indexat binar (100u/400q)	58 ms
arbore de intervale iterativ (250u/250q)	183 ms
arbore de intervale iterativ (100u/400q)	175 ms
arbore de intervale recursiv (250u/250q)	211 ms
arbore de intervale recursiv (100u/400q)	203 ms
descompunere în radical (250u/250q)	235 ms
descompunere în radical (100u/400q)	274 ms

Tabela 3.2: Timpii de rulare pentru sume pe interval și actualizări pe interval.

3.1.3 Concluzii

Reținem că:

- Arborii indexați binar sînt de departe cei mai rapizi.
- Pentru actualizări punctuale, arborii de intervale iterativi sînt de două ori mai rapizi decît cei recursivi.
- Descompunerea în radical ține binișor pasul cu arborii de segmente. Din experiență, aceasta este o particularitate a problemei alese. Pentru alte probleme diferența poate fi mai mare.
- Împărțirile îngreunează enorm descompunerea în radical.

3.2 Actualizări punctuale și interogări pe interval

3.3 Reprezentare

AIB-ul descompune informația în felul următor: Poziția k din vector stochează suma ferestrei de p elemente care se termină la poziția k, unde p este cea mai mare putere a lui 2 care îl divide pe k. De exemplu, pentru $k = 40$, $p = 8$. Așadar, pe poziția 40 AIB-ul va stoca suma celor 8 valori de pe pozițiile $[33 \dots 40]$.

Iată un exemplu care arată sus valorile pe care dorim să le reținem, iar jos valorile concrete pe care ajunge să le stocheze vectorul. Subliniez că AIB-ul nu folosește memorie suplimentară, ci doar stochează diferit informația în același vector. Suspectez că și de aici provine eficiența lui în raport cu arborii de intervale.

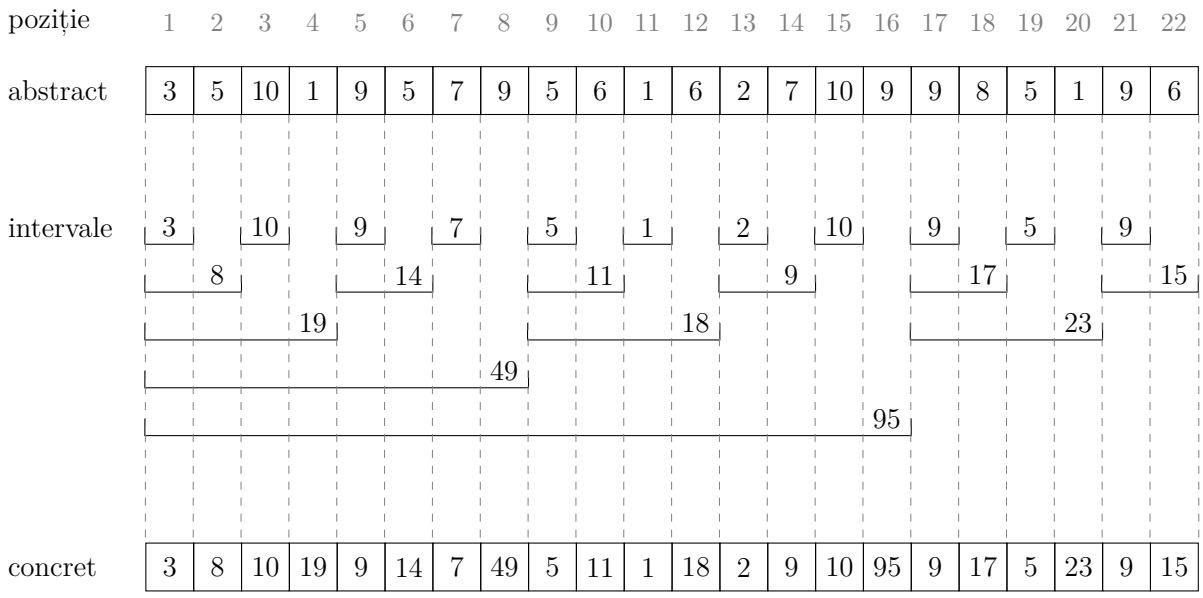


Figura 3.1: Un arbore indexat binar cu 22 de poziții. Vectorul de sus este cel abstract, iar vectorul de jos este cel stocat concret în memorie. Fiecare interval arată pozițiile a căror sumă o notăm în capătul din dreapta al intervalului.

3.4 Operația de interogare (suma unui interval)

AIB-urile tratează interogările pe un interval oarecare $[x, y]$ prin diferența a două interogări pe prefix, $[1, y]$ și $[1, x-1]$. Pentru a răspunde la o interogare pe prefix, de exemplu suma pe intervalul $[1, 21]$, descompunem acel prefix în intervale dintre cele stocate în AIB, respectiv $[1, 16]$, $[17, 20]$ și $[21, 21]$. Odată ce includem o poziție x și tot intervalul pe care îl acoperă ea, pentru a ajunge la următoarea poziție de însumat trebuie, prin definiție, să scădem cea mai mare putere a lui 2 care îl divide pe x. Rezultă codul:

```
struct fenwick_tree {
  int v[MAX_N + 1]; // indexare de la 1
```

```
  int prefix_sum(int pos) {
    int s = 0;
    while (pos) {
      s += v[pos];
      pos &= pos - 1;
    }
    return s;
  }

  int range_sum(int from, int to) {
    return prefix_sum(to) - prefix_sum(from - 1);
  }
};
```

Expresia `pos &= pos - 1` elimină cel mai din dreapta bit de 1 dintr-un număr; de exemplu, din $20 = 10100_{(2)}$ ea obține $16 = 10000_{(2)}$. Pe cazul general,

```
pos             = abc...xyz1000...000
pos - 1         = abc...xyz0111...111
pos & (pos - 1) = abc...xyz0000...000
```

De aici rezultă și complexitatea $\mathcal{O}(\log n)$, căci reprezentarea oricărei poziții în baza 2 are cel mult $\log n$ biți de 1.

3.5 Operația de actualizare (adăugare pe poziție)

La actualizarea pe o poziție, trebuie actualizate toate intervalele care conțin acea poziție. De exemplu, la actualizarea poziției 11 trebuie actualizate intervalele $[11, 11]$, $[9, 12]$ și $[1, 16]$, așadar trebuie recalculate pozițiile 11, 12 și 16 din AIB. Această parte pare magică: de ce pozițiile 13, 14 și 15 nu trebuie actualizate? Dar ne putem convinge că, cît ne îndepărtăm de poziția inițială (11), ne interesează doar pozițiile responsabile de intervale suficient de mari încît să acopere poziția 11.

```
void add(int pos, int val) {
  do {
    v[pos] += val;
    pos += pos & -pos;
  } while (pos <= n);
}
```

Pentru a înțelege expresia `pos & -pos`, să facem o scurtă digresiune. Numerele cu semn sînt reprezentate în calculator în complement față de 2. Aceasta înseamnă că, pentru a reprezenta un număr negativ,

- Reprezentăm întîi numărul pozitiv (valoarea absolută).

- Îi inversăm toți biții.
- Adăugăm 1.

De exemplu, pentru a îl reprezenta pe -20 procedăm astfel:

- Îl reprezentăm pe +20: `000...00010100`.
- Îi inversăm toți biții: `111...11101011`.
- Adăugăm 1: `111...11101100`.

Această reprezentare are două avantaje:

1. Putem folosi aceleași circuite logice pentru operații pe numere cu sau fără semn.
2. Reprezentările lui $+0$ și -0 sînt identice, `000...000`. În complement față de 1 există două reprezentări, `000...000` și `111...111`, ceea ce este straniu.

Revenind, observăm acum că `20 & -20` este `000...00000100`, adică formula `pos & -pos` izolează ultimul bit, adică mărimea intervalului subîntins de `pos`. Prin adăugarea acestei cantități la `pos`, obținem intervalul imediat următor care include poziția `pos`.

Dacă din orice motiv această expresie vă scapă din memorie, puteți inventa pe loc formule echivalente, de exemplu:

```
pos = (pos | (pos - 1)) + 1;
```

Complexitatea este tot $\mathcal{O}(\log n)$ deoarece la fiecare pas eliminăm cel puțin un bit 1 din reprezentarea binară a lui pos.

3.6 Construcția în $\mathcal{O}(n)$

Dat fiind un vector-sursă `src`, este tentant să construim arborele într-un al doilea vector apelînd de n ori rutina de adăugare:

```
void build(int* src) {
  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    add(i, src[i]);
  }
}
```

Această metodă cere timp $\mathcal{O}(n \log n)$. Există însă o metodă care refolosește vectorul și rulează în $\mathcal{O}(n)$:

```
void build() {
  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    int j = i + (i & -i);
    if (j <= n) {
      v[j] += v[i];
    }
```

```
  }
}
```

Explicație: fiecare element `v[i]` este propagat doar la următorul element `j` care include poziția `i`. Este treaba acelui segment să propage adaosul și mai departe. Pentru scenariul relativ comun în care construim AIB-ul, apoi facem n interogări și n actualizări, construcția în $\mathcal{O}(n)$ reduce costul de rulare cu circa 20%.

Paradoxal, tocmai fiindcă este atît de rapid, costul de funcționare al unui AIB este adesea înecat de costul altor operații (în special intrarea/ieșirea). De aceea optimizările sînt greu de observat. Dar *the hacker spirit* ne obligă să folosim oricum soluția inteligentă.

3.7 Găsirea unei valori punctuale

Pentru a găsi valoarea pe o singură poziție `k`, o putem calcula în $\mathcal{O}(\log n)$ ca pe `sum(k) - sum(k - 1)`. Sau, desigur, putem păstra o copie a vectorului real. Dar există și o implementare în $\mathcal{O}(1)$ amortizat.

Să considerăm poziția $k = 60$. Dacă o calculăm prin diferența sumelor parțiale, obținem

```
val(60) = sum(60) - sum(59) = (v[60]          + v[56] + v[48] + v[32]) -
                              (v[59] + v[58] + v[56] + v[48] + v[32])
                            = v[60] - (v[59] + v[58])
```

Se vede că, de la poziția 56 încolo, sumele de intervale se anulează în cele două paranteze. Nu este o coincidență. Fie:

```
k     = bbb...bbb10000
k - 1 = bbb...bbb01111
```

Unde `b` sînt niște biți oarecare, iar poziția k se termină într-un bit 1 urmat de cîțiva (posibil 0) biți de 0. Atunci, în calculul sumelor parțiale, pozițiile k și $k-1$ vor elimina biți de la coadă pînă cînd vor ajunge la strămoșul comun, care este

```
str   = bbb...bbb00000
```

De aceea, codul este:

```
int get_value_at(int pos) {
  int result = v[pos];
  int ancestor = pos & (pos - 1);
  pos--;
  while (pos != ancestor) {
    result -= v[pos];
    pos &= pos - 1;
  }
  return result;
```

```
}
```

Acest cod pare tot logaritmic. În realitate, jumătate din valorile din AIB (cele de pe poziții impare) stochează chiar valoarea în acel punct, deci bucla din `get_value_at()` va face 0 iterații. Un sfert din valorile din AIB vor face o iterație, o optime dintre ele vor face două iterații. În general, pentru o poziție k, funcția `get_value_at()` va face atîtea iterații cîte zerouri are la coadă reprezentarea binară a lui k. Media acestei valori este 1 (așadar constantă) dacă distribuția lui k este uniformă și aleatorie.

3.8 Căutarea binară a unei sume parțiale

Dacă vectorul (abstract) are doar valori non-negative, atunci sumele parțiale sînt nedescrescătoare și are sens întrebarea: Care este prima poziție pe care se atinge suma parțială S?

Putem face o căutare binară naivă: examinăm suma parțială la poziția $n/2$, apoi la una dintre pozițiile $n/4$ sau $3n/4$ după caz, etc. Dar fiecare dintre aceste interogări durează $\mathcal{O}(\log n)$, deci complexitatea totală a algoritmului va fi $\mathcal{O}(\log^2 n)$. Dar iată și o metodă în $\mathcal{O}(\log n)$, similară cu căutarea binară prin „metoda Mihai Pătrașcu” (ca să adoptăm nomenclatura din supa culturală olimpică).

Fie p cea mai mare putere a lui 2 cel mult egală cu n. Pentru exemplul inițial, $n = 22$, deci $p = 16$. Observația-cheie este că putem afla suma parțială pe pozițiile $[1 \ldots p]$ printr-o singură operație: ea este exact `v[p]`! După cum `v[p] < S` sau `v[p] > S`, ne îndreptăm atenția către pozițiile din stînga sau din dreapta lui p. Următoarea interogare o vom face la `v[p / 2]` sau la `v[3 * p / 2]`.

În practică, invariantul este: `pos` reprezintă cea mai mare poziție cunoscută pe care suma parțială **nu** atinge valoarea S. La final, funcția returnează `pos + 1`. De asemenea, ținem cont că nu întotdeauna putem avansa la dreapta (nu putem depăși valoarea n).

```
int bin_search(int sum) {
  int pos = 0;

  for (int interval = max_p2; interval; interval >>= 1) {
    if ((pos + interval <= n) && (v[pos + interval] < sum)) {
      sum -= v[pos + interval];
      pos += interval;
    }
  }

  return pos + 1;
}
```

Exemplu: pentru AIB-ul din figura 3.1 și suma parțială 72, algoritmul funcționează astfel:

- Verifică poziția 16. Suma este 95, prea mare.

- Verifică poziția 8. Suma este 49. Așadar, căutăm suma parțială 72 - 49 = 23 începînd dincolo de poziția 8.
- Verifică poziția 12. Suma este 18. Așadar, căutăm suma parțială 23 - 18 = 5 începînd dincolo de poziția 12.
- Verifică poziția 14. Suma este 9, prea mare.
- Verifică poziția 13. Suma este 2. Așadar, căutăm suma parțială 5 - 2 = 3 începînd dincolo de poziția 13.
- Răspunsul este poziția 14.

Aici, `max_p2` este cea mai mare putere a lui 2 care nu depășește n. O putem afla naiv, de exemplu astfel:

```
max_p2 = n;
while (max_p2 & (max_p2 - 1)) {
  max_p2 &= max_p2 - 1;
}
```

, sau într-o singură linie cu funcția `__builtin_clz(n)`, care returnează numărul de zerouri la stînga lui n:

```
max_p2 = 1 << (31 - __builtin_clz(n));
```

Corolar: putem folosi căutarea binară pentru a afla prima poziție cu o valoare nenulă într-un AIB. Aceasta este poziția pe care suma parțială atinge valoarea 1. Similar putem afla ultima poziție cu o valoare nenulă. Mai trebuie doar să menținem și suma elementelor din AIB, ceea ce cere două linii de cod.

Corolar: dacă AIB-ul ține valori de 0 și 1, putem folosi căutarea binară pentru a afla poziția celui de-al k-lea bit 1 (în engleză această valoare se numește *k-th order statistic*). Ea este fix poziția pe care suma parțială atinge valoarea k. Multe probleme de permutări, care necesită evidența elementelor văzute / nevăzute, se încadrează aici (exemplu: codificarea / decodificarea permutărilor).

3.9 Alte operații decît adunarea

Arborii Fenwick pot gestiona și alte operații, cîtă vreme ele sînt **inversabile**. Reamintesc că **suma** pe intervalul $[l \ldots r]$ se calculează ca **diferența** sumelor pe intervalele $[1 \ldots r]$ și $[1 \ldots l-1]$. Deci operația inversă (scăderea) trebuie să fie definită. Exemplu: operația xor, operația de înmulțire modulo un număr prim etc.

Deoarece operația *max* nu este inversabilă, AIB-urile nu suportă, pe cazul general, operațiile:

1. actualizare punctuală;
2. maxim pe interval.

Totuși, putem folosi AIB-uri pentru interogări de maxim dacă următoarele condiții sînt adevărate:

1. Toate interogările sînt pe prefix (capătul stînga este întotdeauna 1).
   - Sau toate interogările sînt pe sufix, caz în care putem reflecta toți indicii față de n.
2. Prin actualizare, valorile pot doar să crească.

Temă de gîndire: De ce este necesar ca toate valorile să crească? Ce poate să meargă prost dacă într-un AIB de maxime valorile pot să și scadă?

Raționamente similare putem aplica pentru operațiile *min*, *and* și *or*. Cum reformulăm condiția 2 pentru aceste operații?

Un exemplu mai extravagant este operația *or* pe `bitset`-uri, vezi problema Erinaceida.

3.10 Probleme

3.10.1 Problema The Permutation Game Again (SPOJ)

enunț • sursă

Problema ne cere să aflăm **rangul** unei permutări (engl. *rank*). Acesta este numărul de ordine al permutării în lista ordonată lexicografic a tuturor permutărilor mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Echivalent, trebuie să răspundem eficient la întrebarea: cîte permutări vin înaintea celei date în lista permutărilor?

Să considerăm un exemplu. Dacă primul element al permutării este 9, atunci toate permutările care încep cu $1, 2, \ldots, 8$ o vor preceda în listă. Există $8(n-1)!$ astfel de permutări.

Similar, dacă al doilea element este 3, atunci toate permutările care încep cu 91 sau 92 o vor preceda în listă. Există $2(n-2)!$ astfel de permutări.

Dar dacă al treilea element este 7? Acum trebuie să ținem cont de faptul că pe 3 l-am văzut deja. Trebuie să socotim permutările care încep cu $931, 932, 934, 935, 936$. Există $5(n-3)!$ astfel de permutări.

Cu alte cuvinte, trebuie să răspundem eficient la întrebarea: cîte elemente mai mici decît cel curent am văzut în prefixul dinaintea elementului curent? Putem gestiona această informație cu un AIB de 0 și 1. Cînd procesăm un element de valoare x, adunăm 1 pe poziția x în AIB. Astfel, suma parțială din AIB pe o poziție y ne va arăta cîte elemente mai mici decît y am procesat pînă în prezent.

Pentru un plus de eficiență, sursa nu reține întreaga permutare, ci doar citește cîte un element, îl ia în calcul la rang, îl bifează în AIB, apoi îl aruncă.

3.10.2 Problema Multiset (Codeforces)

enunț • sursă

„Aproape” putem rezolva problema cu un singur vector de frecvențe. Dar avem nevoie să găsim eficient al k-lea element ca să-l putem șterge. Un vector de frecvențe ne dă inserări în $\mathcal{O}(1)$, dar ștergeri în $\mathcal{O}(n)$.

De aceea, înlocuim vectorul cu un AIB în care pe poziția x notăm frecvența lui x în multiset. Astfel putem căuta al k-lea element reformulînd definiția: al k-lea element este poziția p pe care suma parțială atinge sau depășește valoarea k.

3.10.3 Problema Hanoi Factory (Codeforces)

enunț • sursă

Pare natural să sortăm inelele descrescător după diametrul exterior. Ce facem la egalitate? Toate inelele de același diametru exterior pot fi stivuite, caz în care îl vom prefera deasupra pe cel cu diametrul interior minim, ca să ne maximizăm șansele de a putea pune alt inel deasupra lui. Așadar, ca departajare, sortăm inelele descrescător după diametrul interior.

Acum orice turn valid va fi un subșir din șirul sortat, pe sărite, dar fără reordonare. Și atunci putem defini relativ ușor o recurență calculabilă în $\mathcal{O}(n^2)$. Fie H_i înălțimea maximă a unui turn care are în vîrf inelul i. Atunci inelul aflat imediat sub i, fie el j, respectă condițiile $j < i$ și $in_j < out_i$. Așadar,

$$H_i = h_i + \max_{j<i,\ in_j<out_i} H_j$$

Pentru a reduce complexitatea la $\mathcal{O}(n \log n)$, procesăm inelele de la stînga la dreapta. Atunci $j < i$ este întotdeauna respectată și trebuie doar să răspundem la întrebarea: dintre toate inelele cu $in_j <$ un x dat (unde $x = out_i$), care este valoarea maximă pentru H_j? Putem răspunde la întrebare cu un AIB de maxime, indexat după diametrele interioare, pe care îl interogăm despre maximul pe pozițiile $[1 \dots out_i - 1]$. După calcularea lui H_i, optimizăm maximul din AIB pe poziția in_i cu valoarea H_i.

Diametrele pot fi mari, dar le putem normaliza în intervalul $[1 \dots 2n]$.

Există și o soluție mai ingenioasă, cu o stivă ordonată, care nu face obiectul acestui capitol.

3.10.4 Problema Subsequences (Codeforces)

enunț • sursă

Problema pare abordabilă cu programare dinamică. Să căutăm întîi formula de recurență, care nu este dificilă. Fie $C_{l,i}$ numărul de subsecvențe crescătoare de lungime l terminate pe poziția i. Atunci:

$$C_{l,i} = \sum_{j<i,\ a_j<a_i} C_{l-1,j}$$

Implementarea în $\mathcal{O}(kn^2)$ este așadar directă. Cum procedăm să reducem calculul sumei de la $\mathcal{O}(n)$ la $\mathcal{O}(\log n)$? Observăm aici un mecanism pe care îl vom regăsi și la alte probleme. Pare că dorim o interogare bidimensională (suma valorilor $C_{l-1,j}$ pe poziții unde $j < i$ și simultan $a_j < a_i$). În realitate, însă, putem reduce interogarea la una unidimensională.

Să inserăm într-un AIB valorile $C_{l-1,1} \dots C_{l-1,i-1}$. Atunci condiția $j < i$ este automat satisfăcută și dorim suma valorilor pe pozițiile unde $a_j < a_i$. De aceea, vom indexa AIB-ul nu după j, ci după a_j. Cu alte cuvinte, vom scrie $C_{l-1,j}$ nu la poziția j, ci la poziția a_j. Desigur, după ce calculăm $C_{l,i}$ adăugăm și $C_{l-1,i}$ la AIB.

Ca fapt divers, puteam face reducerea la interogări unidimensionale pe dos: iterăm prin elemente în ordinea crescătoare a valorilor, astfel încît condiția $a_j < a_i$ să fie automat satisfăcută. Atunci AIB-ul ar fi fost indexat după pozițiile propriu-zise, deci $C_{l-1,j}$ ar fi stat chiar la poziția a_j.

Noua complexitate este $\mathcal{O}(kn \log n)$: pentru fiecare dintre cele $k \times n$ valori ale lui C facem o interogare și o actualizare în AIB. Ca optimizare de memorie, ne este suficientă o singură linie din matricea C.

3.10.5 Problema D-query (SPOJ)

enunț • sursă

La prima vedere AIB-urile ne sînt inutile aici, pentru că funcția „numărul de elemente distincte" nu poate fi calculată prin diferențe de intervale: dacă în intervalul $[1, 10]$ avem 5 elemente distincte, iar în $[1, 20]$ avem 8 elemente distincte, nu știm destule despre numărul de elemente distincte din $[11, 20]$.

Dar, ca la multe alte probleme, varianta offline (în care primim de la început toate interogările) este considerabil mai simplă decît varianta online (în care trebuie să răspundem la o interogare înainte de a o primi pe următoarea).

Pare natural să sortăm interogările și să le scanăm cumva, dar cum? Să fixăm o poziție r și să considerăm toate intervalele care se termină la r. Dacă un interval $[l, r]$ conține o valoare x, atunci o poate conține o dată sau de multiple ori, dar în mod sigur va include **cea mai din dreapta** apariție a lui x înainte de r. Și atunci, pentru o poziție fixată r, dorim să bifăm toate pozițiile $i \in [1, r]$ pentru care nu există o altă poziție $j \in [i + 1, r]$ cu $v[i] = v[j]$.

De exemplu, pentru $r = 8$ și prefixul (1 1 7 6 1 2 6 2), dorim să stocăm bifele (0 0 1 0 1 0 1 1), pentru a indica cele mai din dreapta apariții ale lui 1, 2, 6 și 7. Atunci răspunsul la interogarea $[5, 8]$ va fi tocmai numărul de bife (adică suma) din intervalul $[5, 8]$, pentru că astfel ne asigurăm că numărăm exact o apariție, ultima, a fiecărei valori din interval.

AIB-ul de bife este ușor de actualizat. Dacă, de exemplu, următorul element din vector este 7, trebuie să ștergem bifa de la ultima apariție a lui 7 (poziția 3) și să o aplicăm pe poziția 9. Avem nevoie de un vector cu poziția ultimei apariții a fiecărei valori (dacă există), ceea ce este fezabil deoarece valorile nu depășesc 1.000.000.

La final, reordonăm interogările conform ordinii inițiale și afișăm răspunsurile.

3.10.6 Problema Magic Board (CodeChef)

enunț • sursă

Pare că avem de-a face cu o matrice binară uriașă, dar secretul este să reținem separat informații despre linii și despre coloane. Observația-cheie este că operațiile `Set` modifică doar linii și coloane întregi.

Putem reformula o interogare de tipul `RowQuery i` astfel. Dacă ultima resetare a liniei i a fost la momentul de timp t (operația cu numărul t) și la valoarea 0, atunci cîte coloane au fost modificate din 0 în 1 după momentul t? Dacă au fost k coloane modificate, răspunsul la interogare este $n-k$.

Similar, dacă ultima resetare a liniei i a fost la momentul de timp t (operația cu numărul t) și la valoarea 1, și dacă ulterior k coloane au fost modificate din 1 în 0, atunci răspunsul la interogare este chiar k.

Astfel, trebuie să răspundem la întrebări de tipul: cîte modificări există la valoarea v la timpi $> t$? De aceea, vom ține două AIB-uri pe coloane, indexate după timp (adică după numărul operației), în care stocăm timpul ultimei resetări a fiecărei coloane în 0 și respectiv în 1.

De asemenea, cînd primim o interogare, trebuie să știm timpul ultimei modificări a acelei linii sau coloane, ceea ce putem stoca naiv: un vector de perechi (timp, valoare).

Informațiile pe linii și pe coloane sînt perfect simetrice. Vom studia codul ca să vedem cum putem elimina duplicarea codului. Asta doar dacă evitarea duplicării codului este importantă pentru noi. 😉

3.10.7 Problema Ball (Codeforces)

enunț • sursă

Să abstractizăm problema: date fiind n puncte în spațiu, cîte dintre ele sînt dominate de un alt punct? Spunem că un punct (x, y, z) domină un punct (x', y', z') dacă $x > x'$, $y > y'$ și $z > z'$.

Ca și la problema Subsequences, un prim pas este să reducem interogările tridimensionale la interogări bidimensionale. Să sortăm punctele descrescător după z. Dacă toate z-urile ar fi diferite, atunci am ști că toate punctele procesate anterior au z-ul mai mare decît toate cele viitoare. Dat fiind că z-urile pot fi egale, trebuie să ne adaptăm. Este suficient să procesăm punctele în grupuri cu același z. Pentru toate punctele dintr-un grup calculăm întîi răspunsul și abia apoi le adăugăm la structura de date (oricare ar fi ea).

Astfel, problema pentru punctul $p(p_x, p_y, p_z)$ devine: există vreun punct văzut anterior care să aibă și x-ul și y-ul mai mare? Interogarea pare bidimensională: trebuie să aflăm dacă există vreun punct în cadranul de la (p_x, p_y) la (∞, ∞). Iar coordonatele sînt prea mari pentru un AIB 2D.

Aici intervine ultimul artificiu. Dorim să reducem problema la o interogare unidimensională pe sufix: dintre toate punctele văzute anterior, considerîndu-le doar pe cele cu $x > p_x$, există vreunul cu $y > p_y$? Putem reformula această întrebare ca pe una de maxim: Dă-mi maximul lui y pe domeniul $[p_x, \infty)$. Dacă acest maxim este $> p_y$, atunci există un punct care îl domină pe p, altfel nu.

Putem răspunde la aceste întrebări cu un AIB de maxime, cu două observații:

Trebuie să normalizăm coordonatele x la intervalul $[1, n]$. Nu ne interesează valorile exacte, ci doar relațiile între ele.

AIB-ul de maxime știe să calculeze doar maxime pe prefix, nu pe sufix. Dar putem să reflectăm toate valorile x normalizate față de n pentru a transforma interogările pe sufix în interogări pe prefix.

Observație tangențială: Întotdeauna estimați mărimea fișierului de intrare! În acest caz, avem 1,5 milioane de numere pe 9 cifre plus spații, deci circa 15 MB. Timpul de rulare este efectiv dominat de citire. Sursa inclusă a rulat în 1.100 ms. O a doua sursă, cu citire rapidă, a rulat în 170 ms.

3.10.8 Problema Medwalk, revizitată (Lot 2025)

enunț • sursă

Am discutat această problemă și în capitolul de arbori de intervale. Am găsit o soluție bazată pe un AINT de seturi, construit peste valorile din matrice. Să vedem acum una de 5 ori mai rapidă, probabil cea pe care a dorit-o comisia.

Primele observații se mențin. Decuplăm (conceptual) matricea în doi vectori, unul cu minimele și unul cu maximele de pe fiecare coloană. Pentru a minimiza medianul (scorul unui interval $[l, r]$), căutăm un drum minim lexicografic. Acesta va consta din minimele de pe intervalul $[l, r]$ și din minimul maximelor. Medianul acestei mulțimi va fi una din trei valori posibile (logica deciziei este simplă):

- fie minimul maximelor;
- fie medianul minimelor;
- fie elementul anterior medianului minimelor.

Pentru cazul (1), minimul maximelor îl menținem într-un aint simplu, cu actualizări punctuale și cu interogări de minim pe interval. Pentru cazurile (2) și (3) trebuie să răspundem la interogări de al k-lea element pe interval. Aici introducem următoarea soluție, constînd dintr-un AIB offline 2D construit peste minimele din matrice.

Dorim să căutăm binar al k-lea element. Bunăoară, prima dată ne întrebăm: este el mai mare decît $V_{max}/2$? Dacă da, îl căutăm între $V_{max}/2$ și V_{max}. Dacă nu, îl căutăm între 1 și $V_{max}/2$. În general, pentru plaja de valori curentă, $[x, y]$, vom calcula mijlocul $m = (x+y)/2$ și îi vom adresa structurii de date întrebarea: cîte valori între x și m apar la intrare pe poziții între l și r? Dacă

răspunsul este $\geq k$, atunci al k-lea element are valoarea între x și m. Altfel, el are valoarea între m și y.

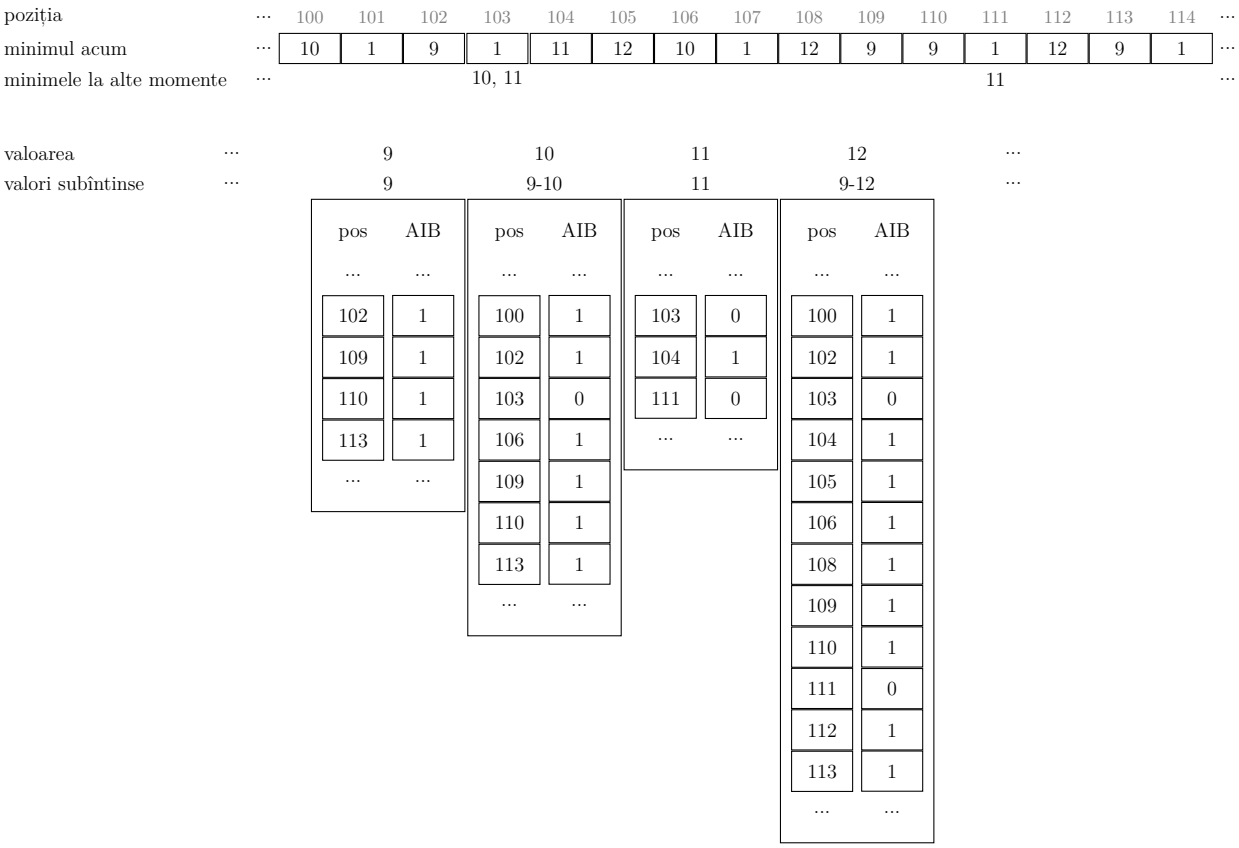
Să încercăm o structură naivă: o matrice binară uriașă A de dimensiuni $n \times V_{max}$, unde $A_{p,v}$ reține 1 dacă valoarea v apare în matrice la poziția p, 0 altfel. Atunci răspunsul la întrebarea „cîte valori între v_1 și v_2 apar pe poziții între l și r?" este suma dreptunghiului $[l, r] \times [v_1, v_2]$. Sună bine, dar memoria nu ne permite această matrice.

De aceea, vom comprima fiecare coloană într-un AIB pornind de la următoarea observație. Coloana v va reține 1, oricînd pe durata întregului program, doar pe liniile p cu proprietatea că poziția p în vectorul de minime va avea, cel puțin după o operație, valoarea v. De aceea, în primă fază simulăm operațiile și colectăm toate minimele posibile pe toate pozițiile, care vor fi cel mult $n + q$. (De aici provine partea de *offline* din nume.) Pe fiecare coloană v stocăm:

- O listă a pozițiilor posibile pentru valori 1, ordonate crescător.
- Un AIB de 0/1 construit peste această listă.

De exemplu, dacă valoarea 9 este măcar o dată minimă pe pozițiile 102, 109, 110, 113, atunci pe coloana 9 stocăm vectorul $[102, 109, 110, 113]$ și un AIB de 0/1 cu 4 poziții disponibile.

Dar facem mai mult decît atît, căci v-am promis un AIB 2D. 🙂 Vectorul de coloane este el însuși un AIB. Coloana v nu reține doar pozițiile aparițiilor lui v, ci ale oricărei valori din $(v - p, v]$, unde p este cea mai mare putere a lui 2 mai mică sau egală cu v. În particular, cele 4 valori 102, 109, 110, 113 exemplificate mai sus nu apar doar în lista coloanei 9, ci și în listele coloanelor $10, 12, 16, 32, 64, \ldots$.



Să observăm că fiecare poziție apare în lista unui număr logaritmic de coloane. De aceea, suma lungimilor tuturor listelor (și a tuturor AIB-urilor) este $\mathcal{O}(n \log V_{max})$.

Pe această structură putem răspunde în timp $\mathcal{O}(n \log n \log V_{max})$ la interogări de al k-lea element.

3.11 Interogări punctuale și actualizări pe interval

Putem privi actualizările pe interval ca pe un fel de „Șmen al lui Mars online". În șmenul lui Mars prelucrăm operațiile „adaugă x pe pozițiile $[l \dots r]$" adăugînd x pe poziția l și $-x$ pe poziția $r+1$. Deosebirea este că în Șmenul lui Mars interogările vin doar la sfîrșit, după toate actualizările, pe cînd în varianta online interogările pot veni și pe parcurs.

AIB-ul poate fi adaptat foarte ușor la această nevoie:

1. Actualizare: adaugă x pe poziția l și $-x$ pe poziția $r+1$.
2. Interogare pe poziția k: calculează suma prefixului $[1 \dots k]$.

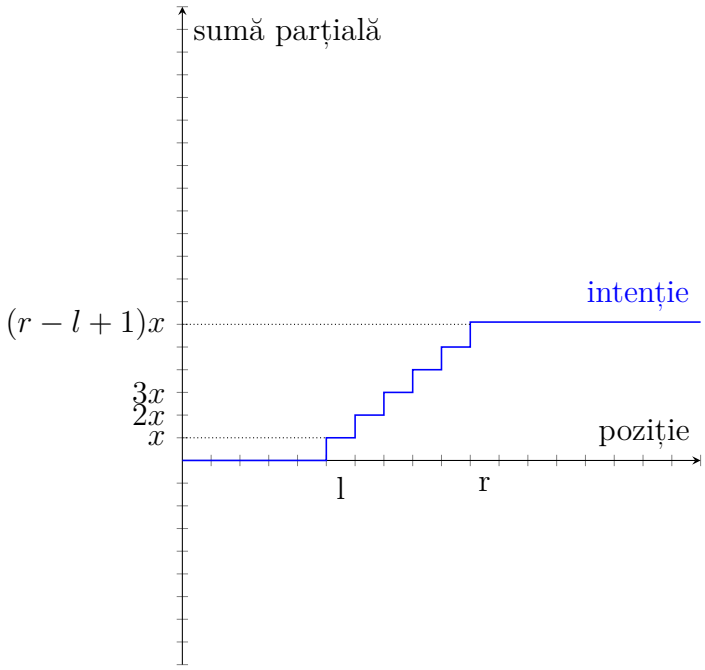
Aceasta funcționează deoarece, la interogarea pe poziția k,

1. Dacă $k < l$, atunci suma prefixului $[1 \dots k]$ nu va include pozițiile l și $r+1$.
2. Dacă $k > r$, atunci suma prefixului $[1 \dots k]$ va include pozițiile l și $r+1$, care se vor anula reciproc. Dorim aceasta, deoarece $k \notin [l, r]$, deci variația intervalului $[l, r]$ nu trebuie să afecteze poziția k.
3. Dacă $l \leq k \leq r$, atunci suma prefixului $[1 \dots k]$ va include doar poziția l, nu și poziția $r+1$, deci poziția k va fi afectată de variația pe intervalul $[l, r]$.

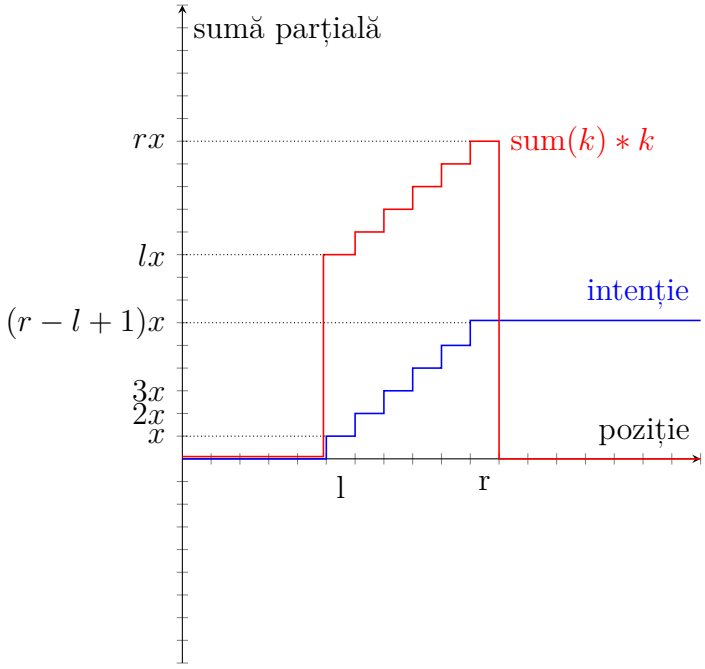
3.12 Interogări și actualizări pe interval

Să rezolvăm și această versiune, doar de amorul artei. Nu cred că discuția de mai jos se aplică la altceva decît la sume (la xor-uri, de pildă).

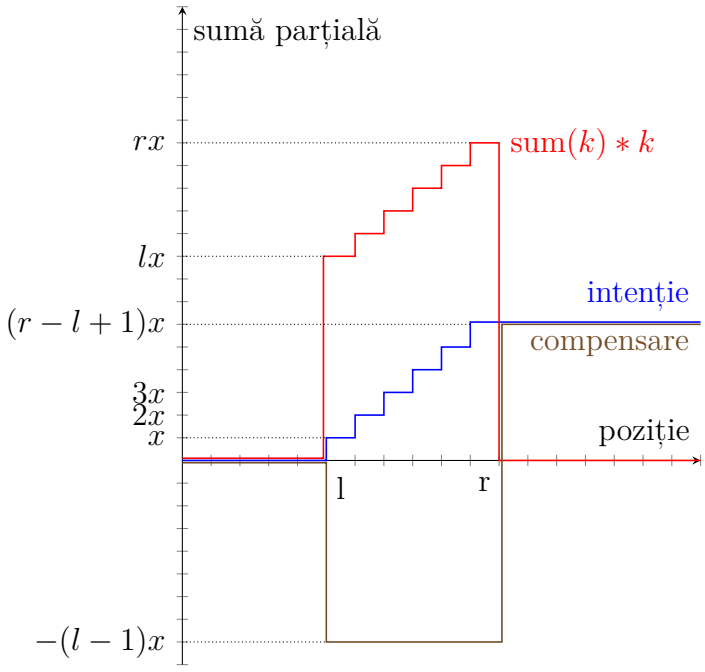
Avînd în vedere că AIB-urile se preocupă în special de sume parțiale, să examinăm grafic sumele parțiale după operația de adăugare a lui x pe intervalul $[l, r]$. Pe pozițiile $[l \dots r]$ ia naștere o funcție scară: dorim ca sumele parțiale să crească cu x, $2x$, ..., $(r-l+1)x$.



Intuitiv, deoarece suma parțială crește cu poziția, sîntem tentați să returnăm, la poziția k, valoarea $\text{sum}(k) \times k$. Pentru ca după r suma parțială să se oprească din crescut, adăugăm x la poziția l și scădem x la poziția $r+1$, similar cu șmenul lui Mars. Doar că atunci funcția $\text{sum}(k) \times k$ are graficul:



Într-adevăr, observăm că suma parțială la stînga lui l este 0, iar la dreapta lui r este $x - x = 0$. Totuși, pare că cele două grafice nu au nicio legătură! Dar nu este chiar așa. Observăm că diferența între cele două funcții arată relativ simplu:



Pentru a corecta al doilea grafic ca să arate ca primul, trebuie să menținem un al doilea AIB în care:

- să scădem pe pozițiile $l, \ldots, r$ valoarea $(l-1)x$;
- să adăugăm pe pozițiile $r+1, \ldots, n$ valoarea $(r-l+1)x$.

În termeni de sume parțiale, trebuie:

- să scădem pe poziția l valoarea $(l-1)x$;
- să adăugăm pe poziția $r+1$ valoarea rx.

Astfel ia naștere codul care, dacă nu-l înțelegem, poate părea foarte ezoteric:

```
struct fenwick_tree_2 {
  fenwick_tree v, w;

  void from_array(long long* src, int n) {
    v.n = n;
    w.from_array(src, n);
  }

  void range_add(int l, int r, long long val) {
    v.add(l, val);
    v.add(r + 1, -val);
    w.add(l, -val * (l - 1));
    w.add(r + 1, val * r);
  }

  long long prefix_sum(int pos) {
    return v.prefix_sum(pos) * pos + w.prefix_sum(pos);
  }
```

```
  long long range_sum(int l, int r) {
    return prefix_sum(r) - prefix_sum(l - 1);
  }
};
```

3.13 Arbori indexați binar 2D

Putem extinde arborii indexați binar la matrice, cu costuri $\mathcal{O}(\log^2 n)$ pentru operații. Să considerăm următoarele operații (*point update, rectangle query*):

- `1 row col val`: Adaugă val la coordonatele (row, col)
- `2 row1 col1 row2 col2`: Calculează suma dreptunghiului (row_1, col_1) - (row_2, col_2) inclusiv.

3.13.1 Structura informației

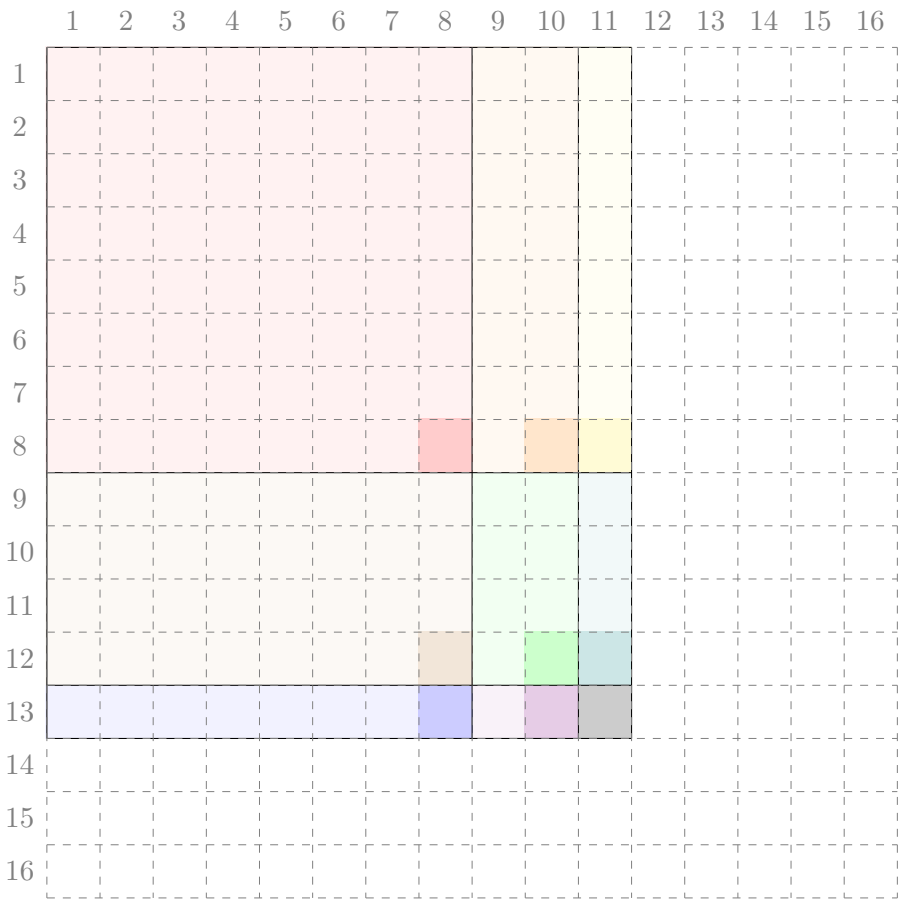
Așa cum arborele 1D modifică structura informației din vector, arborele 2D modifică structura informației din matrice. El stochează anumite sume parțiale. Mai exact, arborele stochează la poziția (r, c) suma elementelor din submatricea (originală) de dimensiuni $p \times q$ cu colțul dreapta-jos la coordonatele (r, c), unde

- p este cea mai mare putere a lui 2 care îl divide pe r
- q este cea mai mare putere a lui 2 care îl divide pe c.

De exemplu, la poziția 40, 60 arborele stochează suma elementelor din matricea de dimensiuni 8×4 cuprinsă între liniile 33 și 40 și coloanele 57 și 60.

3.13.2 Calculul sumei dintr-un dreptunghi

Putem folosi această structură pentru a calcula suma dreptunghiurilor de forma $(1, 1) - (r, c)$. Iată o figură pentru $r = 13$ și $c = 11$.



Dreptunghiul de dimensiune 13×11 se compune din 3×3 dreptunghiuri cu laturile puteri ale lui 2. Trebuie să însumăm valorile din colțurile jos-dreapta ale acestor dreptunghiuri (desenate mai întunecat). Codul este:

```
int prefix_sum(int row, int col) {
  int s = 0;

  for (int r = row; r; r &= r - 1) {
    for (int c = col; c; c &= c - 1) {
      s += mat[r][c];
    }
  }

  return s;
}
```

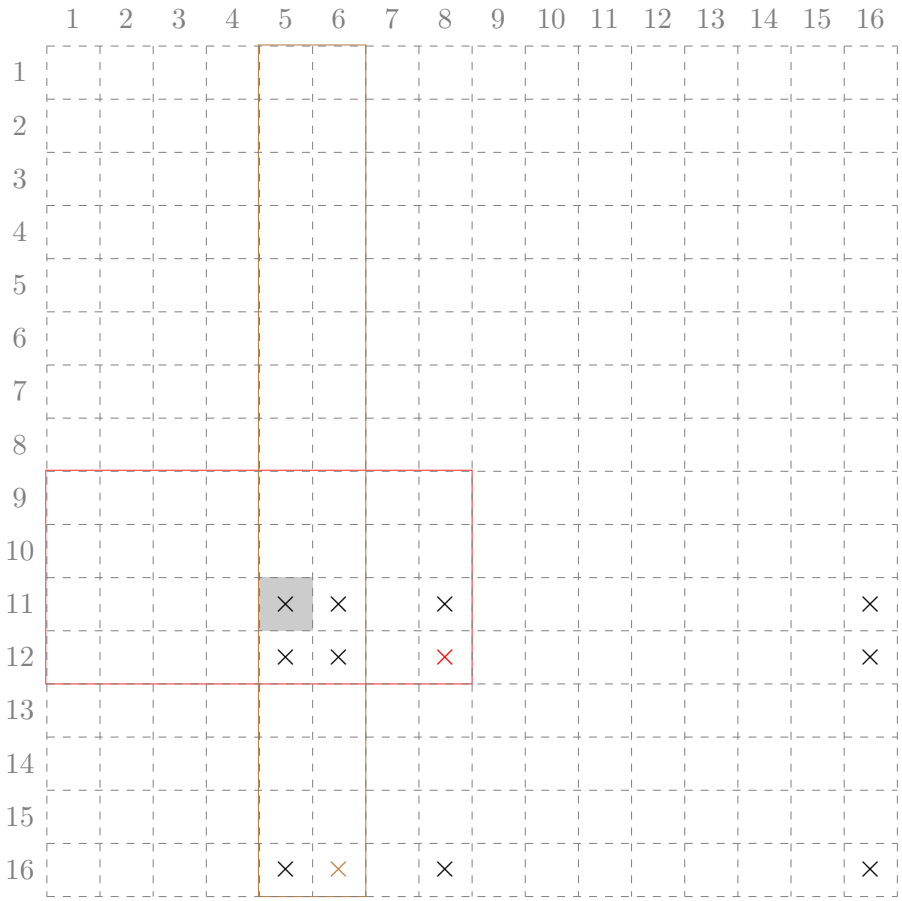
Desigur, putem calcula prin includeri și excluderi suma unui dreptunghi arbitrar:

```
int rectangle_sum(int row1, int col1, int row2, int col2) {
  return
    + prefix_sum(row2, col2)
    - prefix_sum(row2, col1 - 1)
    - prefix_sum(row1 - 1, col2)
    + prefix_sum(row1 - 1, col1 - 1);
```

```
}
```

3.13.3 Actualizări punctuale

Ca și la varianta 1D, cînd modificăm valoarea de la coordonatele (r, c) trebuie să modificăm corespunzător toate dreptunghiurile care includ acele coordonate. Iată un exemplu pentru linia 11, coloana 5:



Se observă că trebuie actualizate liniile 11, 12 și 16, adică exact cele care ar include poziția 11 într-un AIB unidimensional. Similar, trebuie actualizate coloanele 5, 6, 8 și 16, adică exact cele care ar include poziția 5. Am evidențiat cu roșu și cu auriu două dintre aceste coordonate, $(12, 8)$ și $(16, 6)$, și dreptunghiurile aferente lor, pentru a evidenția că ele includ celula $(11, 5)$.

Codul pentru actualizare este:

```
void add(int row, int col, int val) {
  for (int r = row; r <= n; r += r & -r) {
    for (int c = col; c <= n; c += c & -c) {
      mat[r][c] += val;
    }
  }
}
```

3.13.4 Construcția în $\mathcal{O}(n^2)$

Și acest arbore poate fi construit in-place, refolosind matricea dată la intrare și în timp $\mathcal{O}(1)$ per element.

În varianta unidimensională, trebuia să propagăm valoarea de la poziția x la poziția $x + (x \,\&\, -x)$. În varianta bidimensională am vrea să procedăm astfel:

- Fie $r' = r + (r \,\&\, -r)$ și $c' = c + (c \,\&\, -c)$.
- Propagăm valoarea de la poziția (r, c) la poziția (r, c'). De acolo, ea se va propaga automat la coloanele următoare.
- Propagăm valoarea de la poziția (r, c) la poziția (r', c). De acolo, ea se va propaga automat la liniile următoare, iar pe fiecare linie pe coloanele următoare.

Dar apare o problemă: valoarea de la (r, c) se va propaga la (r', c') de două ori, pe căi diferite! Din fericire, este suficient să o scădem o dată. Iată codul:

```
void build() {
  for (int r = 1; r <= n; r++) {
    for (int c = 1; c <= n; c++) {
      int next_r = r + (r & -r);
      int next_c = c + (c & -c);

      if (next_r <= n) {
        mat[next_r][c] += mat[r][c];
      }

      if (next_c <= n) {
        mat[r][next_c] += mat[r][c];
      }

      if ((next_r <= n) && (next_c <= n)) {
        mat[next_r][next_c] -= mat[r][c];
      }
    }
  }
}
```

Capitolul 4

Descompunere în radical

Pe lîngă faptul că oferă complexitate optimă pentru unele probleme, metoda oferă și un substitut bun pentru algoritmi în $\mathcal{O}(n \log n)$ și în special $\mathcal{O}(n \log^2 n)$, în cazul în care nu găsim ideea. Descompunerea în radical este, în experiența mea, mult mai ușor de implementat.

4.1 Actualizări punctuale

Revenim la problema inițială: actualizări punctuale, sume pe interval. Împărțim vectorul în blocuri de lungime $k = \sqrt{n}$. Așadar, vor exista $\lceil n/k \rceil$ blocuri (engl. *blocks* sau *buckets*). Pentru fiecare bloc, menținem o informație suplimentară: suma elementelor din acel bloc.

Memorie suplimentară: $\mathcal{O}(\sqrt{n})$.

```
int v[MAX_N];
int b[MAX_BUCKETS];
int bs, nb;

// Se poate implementa și cu împărțiri pentru concizie (sînt doar n).
void init_buckets() {
  nb = sqrt(n + 1);
  bs = n / nb + 1;

  for (int i = 0; i < nb; i++) {
    int bucket_start = i * bs;
    for (int j = 0; j < bs; j++) {
      b[i] += v[j + bucket_start];
    }
  }
}

int array_sum(int* v, int l, int r) {
  int sum = 0;
  while (l < r) {
    sum += v[l++];
```

```
  }
  return sum;
}

int fragment_sum(int l, int r) {
  return array_sum(v, l, r);
}

int bucket_sum(int l, int r) {
  return array_sum(b, l, r);
}

int range_sum(int l, int r) { // [l, r)
  int bl = l / bs, br = r / bs;
  if (bl == br) {
    return fragment_sum(l, r);
  } else {
    return
      // capete
      fragment_sum(l, (bl + 1) * bs) +
      fragment_sum(br * bs, r) +
      // blocuri complete
      bucket_sum(bl + 1, br);
  }
}

void point_add(int pos, int val) {
  v[pos] += val;
  b[pos / bs] += val;
}
```

Vă recomand să lucrați pe intervale închise la stînga, deschise la dreapta, ca să simplificați aritmetica.

Încheiem secțiunea cu observația că funcția `range_sum` are complexitatea $\mathcal{O}(k + n/k)$: Ea iterează naiv prin blocurile acoperite parțial, așadar $\mathcal{O}(k)$, și iterează rapid prin blocurile acoperite complet, așadar $\mathcal{O}(n/k)$. Alegem $k = \sqrt{n}$ ca să minimizăm acea sumă, dar vom vedea în unele exemple că pot lua naștere și alte sume care duc la valori diferite pentru k.

4.2 Actualizări pe interval

Folosim o informație suplimentară care amintește de informația propagată *lazy* din arborii de segmente. Pentru problema dată (sume pe interval), am denumit această informație `bdelta`. Ea are semnificația: `bdelta[j]` este o valoare care trebuie adăugată la fiecare element din blocul `j`. Așadar, valoarea reală a unui element `i` din blocul `j` este `v[i] + bdelta[j]`.

```
int fragment_sum(int l, int r, int bucket) {
```

```
  return
    (r - l) * bdelta[bucket] +
    array_sum(v, l, r);
}

int bucket_sum(int l, int r) {
  return
    array_sum(bsum, l, r) +
    bs * array_sum(bdelta, l, r);
}

int range_sum(int l, int r) {
  int bl = l / bs, br = r / bs;
  if (bl == br) {
    return fragment_sum(l, r, bl);
  } else {
    return
      // capete
      fragment_sum(l, (bl + 1) * bs, bl) +
      fragment_sum(br * bs, r, br) +
      // blocuri complete
      bucket_sum(bl + 1, br);
  }
}

void array_add(long long* v, int l, int r, int val) {
  while (l < r) {
    v[l++] += val;
  }
}

void fragment_add(int l, int r, int bucket, int val) {
  bsum[bucket] += (r - l) * val;
  array_add(v, l, r, val);
}

void range_add(int l, int r, int val) {
  int bl = l / bs, br = r / bs;
  if (bl == br) {
    fragment_add(l, r, bl, val);
  } else {
    // capete
    fragment_add(l, (bl + 1) * bs, bl, val);
    fragment_add(br * bs, r, br, val);

    // blocuri complete
    array_add(bdelta, bl + 1, br, val);
  }
}
```

Paranteză: conceptual, aint-urile fac același lucru cu descompunerea în radical, deci multe concepte se translatează între cele două, cum ar fi propagarea *lazy*. Marea inovație a arborilor de intervale este că garantează descompunerea în $\mathcal{O}(\log n)$ blocuri.

4.3 Optimizări

4.3.1 Evitați împărțirile!

Codul anterior face doar două împărțiri per operație. În general, aveți nevoie strict de o împărțire pentru fiecare indice primit ca parametru. Evitați stilul de mai jos, care face $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ împărțiri (sau operații modulo) per operație. El poate fi **de cîteva ori mai lent** (vedeți *benchmark*-urile).

```
int bl = l / bs, br = r / bs;
int sum = 0;

// stînga
do {
  sum += v[l++];
} while (l % bs);

// dreapta
while (r % bs) {
  sum += v[--r];
}

// blocuri complete
for (int i = bl + 1; i < br; i++) {
  sum += b[i];
}

return sum;
```

4.3.2 Alegerea mărimii blocurilor

Am auzit că mărimea blocului merită declarată constantă, deoarece compilatorul va optimiza împărțirile. Am experimentat, dar diferențele nu sînt semnificative. Am încercat chiar să declar mărimea o putere a lui 2, pentru ca împărțirile să fie ieftine. Codul rezultat a fost mai lent! Cred că motivul este că se dezechilibrează acea funcție $k + n/k$ pe care descompunerea în radical o optimizează.

Diferența de viteză este vizibilă cînd codul face multe împărțiri. Cînd codul face $\mathcal{O}(1)$ împărțiri per operație, nu mai contează.

Are sens să declarați mărimea constantă dacă vi se pare codul mai simplu (evitați cîteva calcule la inițializare). În acest caz, vă recomand să puneți constanta mică (3-4) cînd lucrați local și să-i

dați valoarea reală cînd trimiteți sursa. Altfel, dacă testați local pe teste mici și mărimea blocului 300, nu veți testa decît codul cu interogări și actualizări într-un singur bloc.

4.3.3 Alegerea mărimii blocurilor pentru operații inegale

Dacă programul vostru depășește timpul, merită să variați mărimea blocurilor în jurul lui $\sqrt{n}$ ca să vedeți dacă se schimbă ceva. Fie b numărul de blocuri și fie l lungimea unui bloc. Operațiile pot depinde doar de una dintre aceste variabile sau pot depinde de ambele, dar în mod inegal. Exemplu: dacă constanta pentru cele două capete de segment (de lungime medie $l/2$) este mult mai mare decît constanta pentru blocurile întregi, merită redus l-ul puțin.

Iată un exemplu mai interesant. Să spunem că nu știm să rezolvăm corect una dintre operații și găsim doar o implementare în $\mathcal{O}(b+l^2)$. Pare catastrofic: dacă alegem $b = l = \sqrt{n}$, avem de fapt o soluție în $\mathcal{O}(n)$. 🤔

Dar se poate asimptotic mai bine. Să alegem $b = n^{2/3}$, caz în care $l = n/b = n^{1/3}$. Dacă $n = 100.000$, atunci $b = 2.174$ și $l = 46$. O soluție în $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ per operație ar face circa 600 de operații, pe cînd a noastră va face circa 4.300 de operații. Desigur, diferența este notabilă, dar, cu o implementare eficientă, avem șanse să „ținem aproape".

Pauză de matematică: mai exact, noi vrem să găsim minimul funcției

$$f(x) = x^2 + \frac{n}{x}$$

Funcția își atinge minimul cînd derivata este zero, iar derivata este

$$f'(x) = 2x - \frac{n}{x^2} = \frac{2x^3 - n}{x^2}$$

Rezultă că l minim este $\sqrt[3]{n/2} \approx 37$, iar funcția va face sub 4.100 de operații.

4.4 Probleme

4.4.1 Problema Mexitate (ONI 2018 clasa a 9-a)

enunț • surse

Această problemă nu mi se pare nici în ruptul capului de clasa a 9-a. Posibil de baraj juniori.

Am notat cu m numărul de linii deoarece m vine înaintea lui n în alfabet, după cum și k vine înaintea lui l în alfabet.

Să luăm în calcul soluția naivă: calculăm mex-ul matricei din colțul stînga-sus, apoi translatăm în diverse feluri matricea pentru a recalcula incremental mex-urile celorlalte ferestre. De exemplu, putem urma un traseu șerpuit: translatăm matricea la dreapta pînă la capăt, apoi o dată în jos, apoi în stînga pînă la capăt etc.

La fiecare translație, menținem într-o structură S informații despre frecvența elementelor din matrice. Ștergem din structură elementele care ies din fereastră și le inserăm pe cele care intră în fereastră. Atunci complexitatea translatărilor va fi $\mathcal{O}(mnk + ml)$. Ca să minimizăm efortul, rotim sau transpunem matricea cînd $k > l$. Astfel, $k \leq l$ și complexitatea translatărilor va fi $\mathcal{O}(mn\sqrt{mn})$.

Odată ce am adus raționamentul pînă aici, eu am și trimis o sursă, cu structura S implementată naiv ca vector de frecvențe. Astfel m-am asigurat că restul programului funcționează, căci el are suficient de multă logică (matrice de dimensiuni arbitrare, transpoziții, șerpuire...). Deoarece am gîndit totul modular, am programat structura `frequency_tracker` să expună funcțiile `add`, `remove` și `mex`. Pentru versiunea optimizată, doar am rescris acele funcții.

Pentru punctaj maxim, ce ne dorim de la structura S? Dorim să facem $\mathcal{O}(mn\sqrt{mn})$ inserări și ștergeri și $\mathcal{O}(mn)$ calcule de mex. Rezultă că ne permitem $\mathcal{O}(\sqrt{mn})$ per apel de mex, dar avem nevoie de $\mathcal{O}(1)$ pe inserare și ștergere.

Atunci putem folosi descompunerea în radical. Stocăm vectorul naiv de frecvențe. În plus, în fiecare bloc stocăm numărul de valori nenule. Inițial această valoare este 0. Ea crește cu 1 ori de cîte ori frecvența unui element din bloc crește de la 0 la 1 și, invers, scade cu 1 ori de cîte ori frecvența unui element din bloc scade de la 1 la 0. Funcția mex caută din bloc în bloc pînă cînd găsește un bloc cu cel puțin o valoare nulă, apoi caută naiv prin acel bloc.

4.4.2 Problema Give Away (SPOJ)

enunț • surse

Problema are limită de timp mare (1-2 secunde, iar conform paginii *status*, chiar peste 6 secunde). Acesta este un indiciu bun că o soluție în $O((n+q)\sqrt{n})$ este arhisuficientă. Doar că pare mai rău de atît! Să presupunem că ținem pe fiecare bloc o structură S (nu știm încă ce). Atunci:

- Sigur putem procesa actualizările în $O(\sqrt{n})$, chiar și naiv la o adică.
- La căutare, pare simplu să procesăm naiv blocurile acoperite parțial, în $O(\sqrt{n})$.
- Dar ce facem cu blocurile acoperite complet? Dacă folosim orice structură echilibrată, introducem un factor logaritmic în plus pentru căutarea lui c.

Rezultă o complexitate de $\mathcal{O}(q\sqrt{n}\log n)$. Dar în 6 secunde, este acceptabil.

Mărimea blocurilor

Dacă am vrea să optimizăm suma $k + n/k$, am alege $k = \sqrt{n} \approx 707$. Dar noi dorim să optimizăm suma $k + n/k \log k$. Ochiometric log-ul va fi undeva între 7 și 12, deci este important să-l mărim pe k. Atunci $\log k$ va crește lent, dar n/k va scădea rapid. Din cîteva încercări pe hîrtie aflăm că valoarea optimă pentru k este 2.000 sau 3.000. Într-adevăr, timpii de execuție pe acolo ating optimul.

Detalii de implementare

Așadar, dorim o structură S care să admită inserări, ștergeri, și numărarea elementelor mai mari sau egale cu o valoare dată. Eu am izolat această structură într-un `struct` și am scris o primă implementare naivă (S este doar un vector). Cu doar 5 linii de cod în plus, sursa naivă mă ajută să verific corectitudinea restului programului.

A doua încercare a fost cu structuri de date din STL, care trece în 3 secunde. Dar este nevoie să memorați papagalicește două noțiuni (le vom relua în capitolele viitoare):

1. `set`-ul simplu nu este suficient, căci el poate să caute valoarea c, dar nu și să numere elementele mai mari sau egale cu c. Este nevoie de structuri cu statistici de ordine (PBDS).
2. Blocurile pot conține valori egale, deci ne trebuie un multiset. Multisetul PBDS este o încropeală, iar ștergerea trebuie rescrisă.

Dar a treia încercare este elementară și trece în 1.3 secunde: pe fiecare bloc ținem vectorul original (ca să știm ce element înlocuim) și o copie sortată. Putem căuta binar în acea copie, iar la inserare/ștergere o actualizăm prin deplasări naive.

4.4.3 Problema Holes (Codeforces)

enunț • sursă

Îmi place această problemă pentru că este nestandard. Nu facem efectiv împărțirea în blocuri și nu stocăm informații agregate pe fiecare bloc. În loc de aceasta, fiecare poziție *pos* reține informații ca să își accelereze trecerea prin blocul său:

- care este ultima destinație din același bloc pe care o vizitează o bilă pornind de la *pos*;
- cîte salturi face bila pînă la acea destinație.

Atunci operațiile sînt:

- La interogare, urmărim traseul bilei din bloc în bloc, în timp $\mathcal{O}(\sqrt{n})$.
- La actualizare, trebuie să recalculăm poziția modificată și toate pozițiile din stînga ei, din același bloc, tot în $\mathcal{O}(\sqrt{n})$.

Sursa mea se apropie de limita de timp (700 ms din 1000 ms). Am încercat următoarea optimizare care cred că ajută. Am ales o mărime mai mare pentru blocuri, 1.000 în loc de cea teoretică ($\sqrt{100.000} \approx 316$). Astfel accelerăm interogările, care traversează mai puține blocuri, în defavoarea actualizărilor, care au de recalculat mai multe poziții. Dar actualizările operează foarte local, pe 1.000 de poziții vecine și vor beneficia de cache. În schimb, interogările sar de colo-colo prin vector.

Remarc și că cele mai rapide soluții ajung la 122 ms. Ele folosesc *link-cut trees* pentru a obține $\mathcal{O}(n \log n)$. Putem percepe structura ca fiind arborescentă: părintele unei poziții este poziția unde sare bila. Atunci actualizările schimbă structura arborelui, ancorînd poziția modificată de un alt părinte. De aici (cred) decurge soluția cu *link-cut trees*.

4.4.4 Problema Piezișă (Baraj ONI 2022)

enunț • surse

Un element comun tuturor soluțiilor este: renumerotăm vectorul de la 1. Acum, dacă xorul pe $[l, r]$ este 0, atunci xorurile pe $[0, l-1]$ și $[0, r]$ sînt egale. Așadar, calculăm xorurile parțiale și le normalizăm, ca să fie indexabile. Acum răspunsul la orice interogare $[l, r]$ este o pereche (x, y) cu $0 \leq x < l$, $r \leq y \leq n$ și $v[x] = v[y]$.

Brute force de 100p

Menționez pentru completitudine că următorul *brute force* optimizat ia 100p: Răspundem la interogări online, imediat ce le primim. Fie o interogare $[l, r]$. Căutăm binar ultima apariție a lui $v[r]$ pe o poziție anterioară lui l (pentru aceasta, colectăm în prealabil listele de poziții pentru fiecare valoare distinctă din v). Fie această poziție q. Atunci avem o soluție de mărime r–q, posibil ∞ dacă elementul $v[r]$ nu apare înainte de poziția l. Repetăm aceeași întrebare la pozițiile $r+1, r+2, \ldots$. Menținem minimul răspunsurilor la aceste căutări, fie el m. Ne oprim la poziția $l+m$ (sau, desigur, la n), deoarece dincolo de ea am putea primi doar răspunsuri mai mari decît optimul curent. Afișăm răspunsul m.

Metoda 1

Fără sortarea interogărilor nu am găsit nicio soluție. Așadar, să sortăm interogările după capătul stîng și să răspundem la ele baleind l de la 1 la n. Acum, pentru o interogare $[l, r]$, dorim ca pentru fiecare poziție $r' \geq r$ să aflăm dacă valoarea $v[r']$ există pe vreo poziție $l' \leq l$. Aceasta este mult prea scump, deci dorim cumva să răspundem la întrebări pentru mai multe poziții simultan.

Să descompunem vectorul în bucăți de mărime $\sqrt{n}$. Pentru o interogare $[l, r]$, fie blocurile celor două capete bl și br. Atunci răspunsul poate avea capătul stîng fie în blocul bl (în stînga lui l), fie într-un bloc anterior. Similar pentru capătul drept. Cazul care ne încurcă este cel în care ambele capete sînt în blocurile bl, respectiv br. Vrem să evităm să comparăm naiv aceste $\mathcal{O}(\sqrt{n} \times \sqrt{n}) = \mathcal{O}(n)$ posibilități.

Astfel ne vine ideea să calculăm o singură informație pentru toate pozițiile din stînga lui l. Fie $left[x]$ ultima poziție (înaintea lui l) pe care apare valoarea x. Evident, putem menține vectorul $left$ în $\mathcal{O}(1)$ pe măsură ce l avansează.

Capătul drept al interogării poate varia oricum, și aici intervine descompunerea în radical. Fie $best[b]$ cea mai mică soluție cunoscută pînă în prezent între orice valoare din blocul b și orice valoare din stînga lui l. Putem menține vectorul $best$ în $\mathcal{O}(1)$ per bloc pe măsură ce l avansează (așadar efort $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$ efort global). Pentru aceasta, trebuie să cunoaștem, pentru elementul în curs de procesare $v[l]$, cea mai din stînga apariție a sa în fiecare bloc următor. Putem precalcula această informație la început, într-o manieră similară cu colectarea listelor de apariții a fiecărei valori. Vezi vectorul `ptr` și funcția `preprocess_values`.

Cu aceste informații, răspunsul pentru interogarea curentă $[l, r]$ este minimul dintre:

- Valorile *best* ale blocurilor mai mari decît br.
- Diferențele $r' - left[v[r']]$ pentru elementele din blocul br începînd cu poziția r.

Codul este lung, cam urît și cam lent, dar ia 100p.

Metoda 2

Citind surse mai rapide decît a mea, am găsit-o pe aceasta, care folosește o metodă mai simplă. Principala diferență este că sortează interogările diferit: crescător după blocul lui l, iar la egalitate descrescător după r. Această sortare amintește de algoritmul lui Mo, pe care îl vom discuta în curînd.

Vectorul $left$ are aceeași definiție ca mai înainte, dar include doar elementele dinaintea blocului bl.

La procesarea unui bloc, avem avantajul că toate r-urile scad. De aceea, și la dreapta putem ține un vector $right$ similar cu $left$: $right[x]$ indică prima apariție a lui x pe o poziție mai mare decît r-ul curent. Atenție, vectorul $right$ trebuie golit și recalculat pentru fiecare bloc bl. Acest efort este $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$, deci acceptabil.

Pe măsură ce r scade, menținem și valoarea minimă m a oricărei perechi $right[x] - left[x]$. Deoarece r doar scade, intervalele doar scad, deci m poate doar să scadă.

Acum, pentru $[l, r]$, răspunsul poate fi:

- chiar m, dacă soluția are capătul stîng înaintea blocului bl;
- altfel, minimul dintre $right[x] - x$ pentru toate valorile x din blocul bl, din stînga lui l.

Implementarea este conceptual mai simplă și de peste două ori mai rapidă!

4.5 Descompunere după operații

Iată acum o tehnică înrudită. Proiectăm o structură relativ naivă pentru procesarea operațiilor. Prin „naiv” înțelegem, de exemplu, inserarea într-un vector prin deplasarea elementelor, fără a folosi structuri de date echilibrate.

Facem aceste operații naive cîtă vreme ele se încadrează în $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ sau $\mathcal{O}(\sqrt{q})$ per operație.

Periodic, trebuie să intervenim pentru ca structura naivă să nu degenereze în timp și să nu ajungă la $\mathcal{O}(n)$ sau $\mathcal{O}(q)$. De aceea, aproximativ o dată la $\sqrt{q}$ operații iterăm prin structură și o „consolidăm” (ce înseamnă asta depinde de la problemă la problemă). Această consolidare poate dura $\mathcal{O}(n)$, pentru ca efortul total al consolidărilor să fie $\mathcal{O}(n\sqrt{q})$. Această limită de timp face consolidările să fie facile, în general.

Să studiem o problemă concretă.

4.6 Probleme

4.6.1 Problema Serega and Fun (Codeforces)

enunț • surse

Trebuie să procesăm eficient operațiile:

1. Rotește circular la dreapta, cu o poziție, un interval $[l, r]$.
2. Raportează frecvența unei valori k într-un interval $[l, r]$.

Iată întîi soluția „clasică”, cu descompunere în blocuri de mărime egală. Soluția relativ directă. În fiecare bloc putem menține:

1. O listă a elementelor.
2. Informații despre frecvență (`map` sau vector simplu).

Atunci, la rotire, trebuie să:

1. Rotim naiv blocurile acoperite parțial.
2. Rotim eficient blocurile acoperite complet. La rotire, adăugăm la începutul listei elementul care ne parvine de la blocul anterior și trimitem ultimul element din listă în blocul următor.

La interogare, trebuie să:

1. Consultăm element cu element blocurile acoperite parțial.
2. Consultăm vectorii de frecvență ai blocurilor acoperite complet.

Discuție despre implementarea cu structuri STL

Putem rezolva problema și cu structuri ca `deque`, `map` sau `unordered_map`, dar este nevoie de o implementare atentă ca să nu depășim timpul și memoria.

În particular, mare atenție la operatorul `[]`! Este tentant să îl folosim ca să aflăm frecvența unui element. Dacă elementul nu există în `map`, operatorul va returna 0, ceea ce este corect. Dar **operatorul inserează elementul** dacă nu exista deja.

Ce înseamnă asta? În mod normal, suma mărimilor tabelelor hash din toate blocurile va fi n. Dar, dacă pentru fiecare din cele q interogări noi căutăm o valoare inexistentă în fiecare dintre cele $\sqrt{n}$ blocuri, și dacă toate acele valori sînt inserate, suma mărimilor tabelelor va ajunge la $q\sqrt{n}$. Necesarul de memorie va crește enorm. Este obligatoriu să folosim iteratori pentru căutarea sau decrementarea frecvențelor, pentru ca mărimea tabelelor să rămînă $\mathcal{O}(\sqrt{n})$.

Detalii de implementare

Prime sursă stochează lista de elemente din fiecare bloc într-un `deque` din STL. A doua sursă folosește un simplu buffer circular: un vector de mărime `BUCKET_SIZE` împreună cu un pointer la primul element din listă. Atunci putem face rotirea completă în $\mathcal{O}(1)$ mutînd pointerul de start

cu un element spre stînga. Pe poziția noului element de start scriem valoarea provenită din blocul anterior.

O altă diferență este că prima sursă stochează frecvențele din fiecare bloc într-o tabelă hash, pe cînd a doua folosește un vector de frecvențe, căci elementele au valori de cel mult n. Necesarul de memorie crește la $\mathcal{O}(n \times numBuckets)$. Din acest motiv, merită să experimentăm cu mai puține blocuri de dimensiune mai mare. Într-adevăr, pentru blocuri de mărime $2\sqrt{n} \approx 640$, timpul scade la jumătate față de $\sqrt{n}$.

Mai remarcăm că frecvența într-un singur bloc încape pe tipul `short`, nu este nevoie de `int`. Doar cu această modificare am redus timpul de rulare cu 20%. Am experimentat și cu `unsigned char`, dar atunci frecvența maximă stocabilă ar fi 256, deci mărimea maximă a unui bloc ar trebui să fie 256, iar timpul se înrăutățește.

Soluție cu descompunere după operații

Iată acum și rezolvarea în care lăsăm blocurile să fluctueze ca lungime. La rotire, extragem efectiv elementul de pe poziția r din blocul său și îl inserăm la indicele corect în blocul poziției l. Blocurile dintre l și r rămîn nemodificate. Ca fapt divers, complexitatea rotirii depinde doar de mărimea blocului, nu și de numărul de blocuri.

Cu timpul, lungimile blocurilor pot degenera, ceea ce poate încetini operațiile: dacă un bloc devine foarte mare, atunci inserarea, ștergerea și numărarea de elemente din acel bloc vor fi lente. De aceea, periodic refacem structura blocurilor:

1. Colectăm toate blocurile într-un vector. Acesta este chiar conținutul real al vectorului.
2. Redistribuim elementele în blocuri de mărime egală.

Putem face redistribuirea fie periodic (la fiecare $\mathcal{O}(\sqrt{q})$ operații), fie la nevoie, cînd în momentul inserării detectăm că unul dintre blocuri a atins un anumit prag, să zicem dublu față de lungimea inițială. În ambele cazuri, complexitatea rămîne $\mathcal{O}(q\sqrt{n})$.

Această implementare este relativ elementară și se mișcă de circa două ori mai repede decît precedenta!

4.7 Procesări diferite înainte și după $\sqrt{n}$

Următoarele două secțiuni teoretice prezintă două tehnici care ating timp $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$ din motive matematice. Tehnicile nu duc la descompunere în radical „convențională”, cu blocuri, dar nu știu unde altundeva să le încadrez.

Prima tehnică pornește de la observațiile:

1. Între 1 și $\sqrt{n}$ există $\sqrt{n}$ valori[1].
2. Valorile de forma $\lfloor n/k \rfloor$, cu $k > \sqrt{n}$, iau doar $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ valori distincte.

[1] From the Department of Redundancy Department.

4.8 Probleme

4.8.1 Problema Time to Raid Cowavans (Codeforces)

enunț • sursă

În foarte multe cuvinte, problema ne dă un vector cu n elemente și q interogări $\langle prim, pas \rangle$. Răspunsul fiecărei interogări este suma valorilor de pe pozițiile care formează progresia cu primul termen $prim$ și pasul pas.

Desigur, codul naiv care însumează progresiile este lent:

```
long long naive_prog_sum(int first, int step) {
  long long sum = 0;
  for (int i = first; i <= n; i += step) {
    sum += w[i];
  }
  return sum;
}
```

Dar... nu chiar atît de lent! Dacă pasul este cel puțin $\sqrt{n}$, progresia va avea cel mult $\sqrt{n}$ termeni. Rămîne să tratăm progresiile cu pasul mic (așadar $1, 2, \ldots, \sqrt{n}$). Ne permitem să facem o preprocesare în $\mathcal{O}(n)$ pentru fiecare din acești pași. Pentru un pas pas, preprocesăm efectiv $prep[i]$ = răspunsul la progresia cu primul termen i și pasul pas. Apoi putem răspunde la interogările pentru acel pas în $\mathcal{O}(1)$.

```
void preprocess(int step) {
  for (int i = n; (i > n - step) && (i >= 1); i--) {
    prep[i] = w[i];
  }
  for (int i = n - step; i >= 1; i--) {
    prep[i] = w[i] + prep[i + step];
  }
}
```

Complexitatea totală este:

- $\mathcal{O}(q\sqrt{n})$ pentru progresiile cu pas mare (calculate naiv);
- $\mathcal{O}(n\sqrt{n} + q)$ pentru preprocesarea tuturor răspunsurilor pentru pași mici.

Alte probleme similare:

- Train Maintenance (Codeforces);
- Căsuța (Lot juniori 2025) – atenție, la momentul scrierii acestei secțiuni problema nu are checker.

4.9 Descompunere în valori distincte

Această tehnică pornește de la observația: dacă suma unor numere naturale este n, atunci numerele au $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ valori distincte. Demonstrația decurge din inversa sumei Gauss.

4.10 Probleme

4.10.1 Problema Sandor (Baraj ONI 2025)

enunț • sursă

Observăm că algoritmul lui Sandor este un algoritm *greedy* pentru problema rucsacului. Să facem trei experimente de gîndire despre natura acestui algoritm.

În primul rînd, dacă eliminăm un obiect pe care algoritmul oricum nu l-ar selecta (pentru că nu încape), atunci vom obține aceeași sumă ca și cînd nu am elimina nimic. Practic, obiectul nu există pentru algoritm.

Mai interesant, putem generaliza prima observație. Dacă există k obiecte de aceeași greutate și, la acel pas în algoritm, în rucsac încap mai puțin de k din aceste obiecte, atunci pe oricare dintre ele încercăm să-l eliminăm vom obține aceeași greutate ca și cînd nu am elimina nimic. De ce? Dacă, de exemplu, există 5 obiecte identice și doar 3 încap în rucsac, atunci dacă îl eliminăm pe primul algoritmul îl va adăuga pe al 4-lea.

În sfîrșit, deoarece în rucsac punem obiecte cu greutatea totală cel mult g, rezultă că vom pune $\mathcal{O}(\sqrt{g})$ greutăți distincte.

De aceea, merită să stocăm mai degrabă un vector de serii (în sursă le-am numit *runs*) de elemente egale, $\langle val, cnt \rangle$, decît valorile originale. Peste acest vector precalculăm niște *jump pointers*, adică răspunsurile la întrebări de tipul „Cu ce serie să continui algoritmul dacă rucsacul mai are capacitate rămasă c?” Cu această reprezentare, evaluarea algoritmului lui Sandor este elementară și necesită timp $\mathcal{O}(\sqrt{g})$. Mai mult, putem parametriza algoritmul ca să-l putem rula începînd cu oricare dintre serii, nu neapărat cu prima.

Cerința 1

De aici rezultă un algoritm relativ naiv pentru cerința 1. El necesită $\mathcal{O}(\sqrt{g}^2)$, adică $\mathcal{O}(g)$.

Mergînd de la stînga la dreapta prin vector, considerăm fiecare serie $\langle val, cnt \rangle$. Dacă în prezent în rucsac încap mai puțin de cnt obiecte, atunci conform observației din preambul oricum am elimina un element din serie obținem tot soluția inițială (avem cnt astfel de moduri).

Dacă încap toate obiectele, atunci are sens să ne punem întrebarea „dar dacă eliminăm unul, ce obținem?”. Deci punem în rucsac doar $cnt - 1$ obiecte și simulăm algoritmul lui Sandor (naiv) pentru restul vectorului. Apoi revenim la problema originală, punem în rucsac toate cele cnt obiecte și continuăm.

Așadar, facem $\mathcal{O}(\sqrt{g})$ simulări ale algoritmului, pentru o complexitate totală de $\mathcal{O}(g)$. Este important să nu luăm în calcul valorile care nu încap în rucsac, deoarece complexitatea ar crește la $\mathcal{O}(n\sqrt{g})$. Acele valori le sărim folosind *jump pointers*. Doar le contorizăm, prin diferența între n și numărul de valori pe care le-am luat în calcul. Fiecare valoare sărită ne dă un mod de a obține greutatea algoritmului lui Sandor fără eliminări.

Vom parametriza și cerința 1 pentru a o putea rula începînd cu orice serie și cu orice capacitate reziduală a rucsacului, nu neapărat cu prima serie și cu capacitatea g.

Cerința 2

Dacă reușim să facem același gen de trecere prin vector și pentru cerința 2, și să delegăm subprobleme la algoritmul naiv (fără eliminări) și la cerința 1 (o eliminare), atunci vom obține o complexitate de $\mathcal{O}(g\sqrt{g})$. Pentru aceasta, trebuie să analizăm cazurile posibile.

În primul rînd, cîtă vreme din seria curentă nici măcar un obiect nu încape un rucsac, trecem la seria următoare și contorizăm numărul de obiecte ignorate. Fie acest contor *mult*. Să spunem că avem capacitatea $c = 100$ și am ignorat serii de greutate 200, 150 și 130, totalizînd $mult = 10$ obiecte. Atunci avem $C^2_{mult} = 45$ de moduri de a elimina două din aceste obiecte. Rulăm algoritmul lui Sandor naiv și vedem ce sumă obținem. Adăugăm 45 la răspunsul pentru acea sumă.

Dacă măcar un exemplar încape în rucsac, atunci putem încerca să eliminăm un obiect din seriile anterioare și unul din seria curentă. Deci apelăm cerința 1 începînd cu poziția curentă, și îi transmitem că fiecare soluție găsită trebuie socotită de *mult* ori, deoarece există *mult* moduri de a elimina un obiect dinaintea seriei curente.

Dacă seria curentă include cel puțin două obiecte, putem încerca să eliminăm două obiecte din seria curentă, punînd $cnt-2$ în rucsac. Desigur, există C^2_{cnt} moduri de a face asta, iar pentru restul vectorului rulăm Sandor varianta de bază. Îi trimitem algoritmului parametrizat multiplicatorul C^2_{cnt} pentru soluția pe care o va găsi.

Similar, putem elimina doar un obiect din grupa curentă, punînd $cnt-1$ în rucsac, ceea ce putem face în *cnt* moduri distincte. Iar pentru seriile următoare apelăm cerința 1, spunîndu-i că soluțiile găsite trebuie numărate de cîte *cnt* ori.

În sfîrșit, putem să punem toate obiectele în rucsac și să reconsiderăm cerința 2 de la seria următoare.

4.10.2 Problema Puzzle-bila (Lot 2025)

enunț • sursă

Formularea programării dinamice

Vom denumi **fereastră** o serie de celule libere consecutive.

Pare firesc să ne dorim să calculăm valori de următorul tip. Fie $C_{r,c}$ costul pentru a aduce bila pe rîndul r, coloana c. E destul de clar că $C_{r,c}$ va depinde doar de valori din C de pe rîndul $r-1$. Dacă $C_{r,c}$ va depinde de $C_{r-1,c'}$, atunci va trebui să calculăm și costul de a aduce pe rîndul r o fereastră pe intervalul $[c', c]$.

Așadar, să definim și $D_{r,c,l}$ ca fiind costul de a aduce pe rîndul r o fereastră de lățime (cel puțin) l terminată la coloana c. Acum putem defini recurența pentru C:

$$C_{r,c} = \min_{c'=1}^{c}(C_{r-1,c'} + D_{r,c,c-c'+1})$$

Recurența modelează ideea că mergem pe rîndul $r-1$ pînă la coloana c', apoi coborîm pe rîndul r unde am pregătit o fereastră care ne duce pînă la coloana c.

Reducerea complexității

O soluție în $\mathcal{O}(nm^2)$ procedează astfel: pentru fiecare celulă (r, c) considerăm fiecare fereastră de pe rîndul r. Dacă fereastra are lățime l și trebuie deplasată cu p celule pentru a o alinia la dreapta cu coloana c, atunci putem optimiza $C_{r,c}$ cu cantitatea:

$$p + \text{rmq}(C_{r-1,c-l+1}, \ldots, C_{r-1,c})$$

, unde desigur rmq este funcția de minim pe interval. Doar că există $\mathcal{O}(m)$ ferestre pe fiecare rînd, deci complexitatea este prea mare. Aici intervine descompunerea în valori distincte! Există doar $\mathcal{O}(\sqrt{m})$ lățimi distincte de ferestre pe fiecare rînd. De aceea putem itera doar prin aceste lungimi. Pentru o lungime fixată l, nu are sens să testăm decît cele mai apropiate ferestre din stînga, respectiv din dreapta coloanei curente c. De aici rezultă complexitatea totală $\mathcal{O}(nm\sqrt{m})$.

Implementarea nu este deloc simplă datorită următoarei situații pe care o enunțăm, dar nu o detaliem (ea este descrisă cu exemple în cea de-a doua sursă). Cînd aducem o fereastră din stînga coloanei c, decizia este simplă: trebuie să o deplasăm pînă cînd capătul ei drept atinge coloana c. Dar, cînd aducem o fereastră din dreapta coloanei c, avem libertatea să o deplasăm fie pînă cînd capătul ei stîng atinge coloana c, fie mai mult de atît. Depinde ce coloană $c' < c$ ne interesează să „prindem" în recurență. Poate există o valoare c' destul de mică (costul deplasării pînă acolo este mare), dar unde $C_{r-1,c'}$ este foarte mic și justifică costul deplasării. Ia naștere un al doilea tabel RMQ construit nu peste valorile $C_{r-1,c}$, ci peste $C_{r-1,c} - c$.

Cîteva cuvinte despre Arpa's trick

Eu sînt mereu în căutare de noi structuri pentru RMQ. 😂 Îmi displace tabela rară deoarece folosește $\mathcal{O}(n \log n)$ memorie și evit să mă reped la ea. Iată o structură interesantă, numită Arpa's trick. Aparent, și alte nații au șmenurile lor... CP Algorithms are o lecție foarte bună.

Algoritmul răspunde la interogări în ordine crescătoare după capătul drept. Deci putem întîi să sortăm interogările sau să le distribuim în liste după capătul drept. Apoi folosim o pădure de

mulțimi disjuncte, pe care o instanțiem pe măsură ce baleiem poziția capătului drept.

Cînd ajungem la o poziție nouă p unde se află valoarea x, în primul rînd instanțiem o nouă rădăcină în DSF: părintele lui p este p. În plus, p devine părinte și pentru toate rădăcinile anterioare p' care aveau valori $x' > x$. Procedăm astfel deoarece, pentru orice interogări viitoare, valoarea x' nu va fi niciodată RMQ, deoarece x va face și ea parte din orice interogare care îl conține pe x'. Pentru implementarea acestei părți folosim o stivă ordonată.

La interogarea $\text{rmq}[p', p]$, unde p este poziția curentă, răspunsul este rădăcina arborelui lui p'. Într-adevăr, dorim cea mai mică valoare cu care a fost p' unit la orice moment.

Am rezolvat problema Puzzle-bila folosind *Arpa's trick*. Implementarea este dificilă și ineficientă, deoarece colectarea în avans și ordonarea interogărilor de care vom avea nevoie îngreunează codul (ca să folosesc un eufemism). Dar codul pentru *Arpa's trick* în sine este scurt și clar. El funcționează în $\mathcal{O}(\log^* n)$ amortizat cu memorie $\mathcal{O}(n)$.

```
struct arpa_s_trick {
  int val[MAX_N];
  int parent[MAX_N];
  int n;

  // O stivă cu pozițiile care încă nu au un element mai mic la dreapta.
  int st[MAX_N], ss;

  void reset() {
    ss = 0;
    n = 0;
  }

  void append(int x) {
    while (ss && (val[st[ss - 1]] >= x)) {
      parent[st[--ss]] = n;
    }
    st[ss++] = n;
    parent[n] = n;
    val[n++] = x;
  }

  int find(int p) {
    return (parent[p] == p)
      ? p
      : (parent[p] = find(parent[p]));
  }

  int rmq(int p) {
    return val[find(p)];
  }
};
```

Capitolul 5

Algoritmul lui Mo

Algoritmul lui Mo atinge tot complexitatea de $\mathcal{O}((q+n)\sqrt{n})$, ca și metoda descompunerii în radical, dar printr-o metodă destul de diferită. El duce adesea la cod mai simplu, dar necesită ca interogările să fie date în avans (*offline*).

5.1 Algoritmul lui Mo fără actualizări

Algoritmul lui Mo ordonează interogările și le procesează în această ordine:

1. După blocul capătului stîng.
2. La egalitate, după capătul drept.

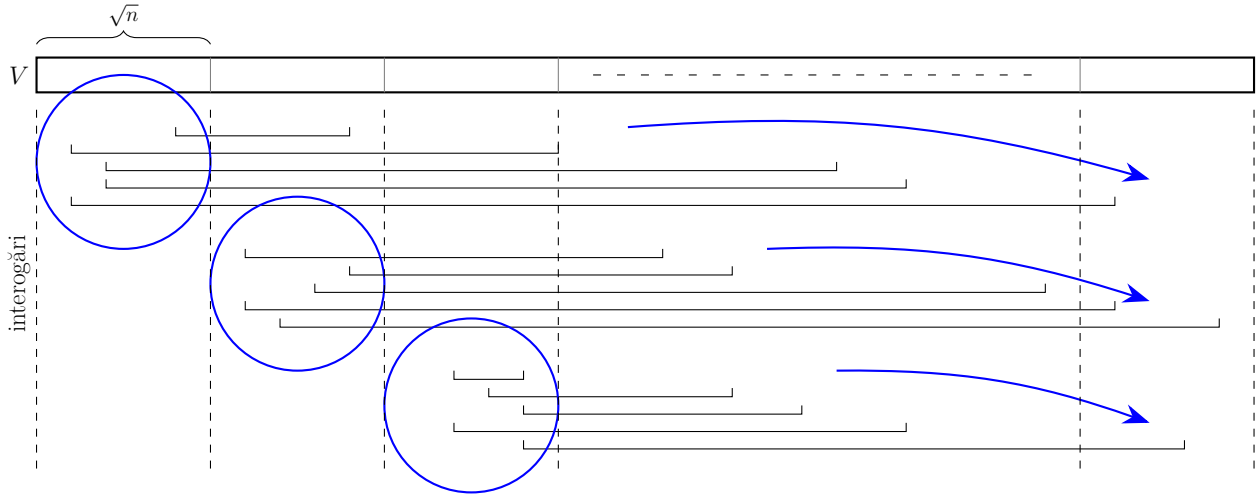


Figura 5.1: Ordonarea interogărilor în algoritmul lui Mo.

Algoritmul lui Mo ține minte informații despre interogarea curentă (răspunsul, dar posibil și alte informații). Pentru a trece la următoarea interogare, algoritmul:

1. Extinde intervalul curent cu cîte un pas, pînă cînd ajunge să includă și următoarea interogare.

2. Restrînge intervalul curent cu cîte un pas, pînă cînd ajunge să coincidă cu următoarea interogare.

Atenție! Pașii trebuie executați în această ordine. Altfel puteți ajunge la intervale negative, din care încercați să eliminați elemente care nu au fost adăugate, cu consecințe neprevăzute.

Vom relua problema D-query (SPOJ) și vom examina implementarea algoritmului lui Mo. Logica este considerabil mai simplă decît la implementarea cu AIB, în $\mathcal{O}(n \log n)$. Surprinzător, timpul de rulare este identic!

5.1.1 Analiză de complexitate

La fiecare interogare, trebuie să deplasăm capetele intervalului curent ca să se suprapună cu interogarea. Care este efortul total?

- Capătul stîng se poate deplasa cu cel mult $\sqrt{n}$ la fiecare interogare, plus n pași pentru toate trecerile între blocuri. Efortul total este de cel mult $q\sqrt{n} + n$ pași.
- Capătul drept se deplasează cu cel mult n pași la dreapta pentru toate interogările dintr-un bloc, apoi cu cel mult n pași înapoi la stînga la trecerea între blocuri. Există $\sqrt{n}$ blocuri, deci efortul total este de cel mult $2n\sqrt{n}$ pași.

Să spunem că includerea sau excluderea unei poziții durează $\mathcal{O}(f(n))$. Pentru problema Dquery efortul este $\mathcal{O}(1)$, dar pentru alte probleme costul poate diferi. Atunci complexitatea totală a algoritmului lui Mo este:

$$\mathcal{O}((q+n)\sqrt{n}f(n))$$

5.1.2 Optimizare de viteză

Nu ne costă aproape nimic (doar un `if` în plus la sortare) ca, în cadrul unui bloc, să ordonăm interogările astfel:

- crescător după capătul drept în blocurile impare;
- descrescător după capătul drept în blocurile impare.

Atunci nu mai plătim costul deplasării spre stînga „în gol” a capătului drept al intervalului curent. Iată o sursă cu această optimizare la problema Dquery. Timpii de rulare nu diferă, dar în general optimizarea poate ajuta.

De amorul artei, strict pentru problema Dquery, am normalizat valorile din vectorul dat. Pot fi cel mult 30.000 de valori distincte, ceea ce înseamnă că vectorul de frecvențe (pe `short`) poate ocupa doar 60 kB, în loc de 2 MB. Din nou, timpii nu diferă.

Aș preciza, tot pentru Dquery, că soluțiile țin foarte bine pasul cu soluția cu AIB (70-75 ms în loc de 60-65).

5.2 Algoritmul lui Mo cu actualizări

Algoritmul lui Mo se pretează și la probleme care au actualizări, cu o complexitate de $\mathcal{O}((q+n)n^{2/3})$. El este în continuare offline, avînd nevoie să citească și să sorteze interogările (și, posibil, să normalizeze valorile).

Esența este să introducem o nouă dimensiune pentru operații, în afară de capetele de interval l și r: timpul t, adică indicele operației (între 1 și q). Structura de date curentă stochează informații despre un interval $[L, R]$ la un moment de timp T, adică despre vectorul cu toate actualizările cu indici mai mici sau egali cu T. Pentru a răspunde la interogarea $[l, r]$ la momentul t, trebuie să:

1. Extindem intervalul curent pînă îl include pe $[l, r]$ (ca și pînă acum).
2. Restrîngem intervalul curent pînă devine egal cu $[l, r]$ (ca și pînă acum).
3. „Avansăm" timpul dacă $T < t$, procesînd actualizările din intervalul $(T, t]$.
4. „Dăm înapoi" timpul dacă $t < T$, inversînd actualizările din intervalul $[t, T)$.

Dacă actualizările efectuate sau inversate se întîmplă în intervalul curent $[l, r]$, actualizăm și structura de date, altfel nu.

5.2.1 Mărimea blocului, ordinea operațiilor, complexitate

Să alegem B blocuri de mărime S. Acum, să sortăm operațiile după blocul lui l, apoi după blocul lui r, apoi după t. Atunci:

Poziția lui l se schimbă cu $\mathcal{O}(S)$ la fiecare operație, plus $\mathcal{O}(n)$ la toate trecerile între blocuri, așadar cu $O(n + qS)$ în total.

Poziția lui r se schimbă cu $\mathcal{O}(S)$ la fiecare operație. În plus, pentru fiecare bloc al lui l (deci de B ori), r va face o trecere prin cele n poziții cu un efort total de $\mathcal{O}(qS + nB)$.

Pentru fiecare pereche de blocuri, t poate trece prin toate cele q operații, cu un efort total de $\mathcal{O}(qB^2)$.

Așadar, complexitatea algoritmului este $\mathcal{O}(qS + nB + qB^2)$. De aceea dorim ca $B^2 \approx S$ și alegem $B \approx n^{1/3}$ și $S \approx n^{2/3}$, pentru o complexitate totală de $\mathcal{O}((q+n)n^{2/3})$.

5.3 Probleme

5.3.1 Problema Powerful Array (Codeforces)

enunț • sursă

Problema este o aplicație directă a algoritmului lui Mo. Am copiat sursa de la D-query și am adaptat-o. Atenție doar la lucrul pe 64 de biți.

5.3.2 Problema Most Frequent Value (SPOJ)

enunț • sursă

Problema este doar puțin mai complicată decît precedentele. Odată ce ne vine ideea că am putea-o rezolva cu algoritmul lui Mo, întrebarea este: ce ne trebuie ca să menținem cea mai mare frecvență?

Răspunsul, desigur, este: menținem toate frecvențele. Dar nu este suficient. Cînd frecvența lui x crește, să spunem de la 7 la 8, atunci frecvența maximă:

- se păstrează dacă era deja 8 sau mai mare;
- crește la 8 dacă era 7 (notă: nu putea fi mai mică de 7, căci x avea frecvența 7).

Pînă aici, toate bune. Dar cînd frecvența lui x scade, să spunem de la 8 la 7? Atunci frecvența maximă:

- se păstrează dacă era mai mare decît 8 (un alt element y avea frecvență maximă);
- se păstrează dacă era 8 și mai există un alt element y cu frecvență 8;
- altfel scade la 7.

Cazul al doilea este critic. Cum aflăm dacă alt element are frecvența egală cu frecvența elementului care iese din interval? Răspunsul este: menținem numărul de elemente care au fiecare frecvență. Un fel de frecvență a frecvențelor, dacă vreți. 🙂 Cînd frecvența lui x scade de la 8 la 7, decrementăm numărul de elemente cu frecvență 8 și îl incrementăm pe cel cu frecvență 7. Dacă frecvența maximă era 8, dar acum nu mai există elemente cu frecvență 8, atunci ne aflăm în cazul al treilea.

5.3.3 Problema RangeMode (Infoarena Cup 2013)

enunț • sursă

Problema seamănă cu precedenta, dar nu cere frecvența maximă, ci elementul minim care atinge această valoare. Nu mai putem folosi fix aceeași abordare din cauza ștergerilor. Dacă există mai multe elemente cu frecvența maximă, și dacă cel mai mic dintre ele dispare, care este următorul minim?

Soluția este simplă: nu facem ștergeri! 😅 Glumesc, iar soluția nu este deloc evidentă. Ea împrumută sortarea interogărilor din algoritmul lui Mo. Atunci o interogare $[l, r]$ constă din:

1. „Partea stîngă”: porțiunea de la l pînă la sfîrșitul blocului curent, care poate varia cu $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ elemente între interogări.
2. „Partea dreaptă”: porțiunea de la începutul blocului următor pînă la r, care poate doar să crească între interogări.

Desigur, mai există și cazul particular în care l și r se află în același bloc.

Încercăm să aflăm răspunsul la fiecare interogare aditiv, compunînd partea dreaptă cu partea stîngă. Structura de date pe care o proiectăm, S, menține pentru partea dreaptă un vector de

frecvențe simplu, în $\mathcal{O}(n)$ pentru toate interogările din bloc. Cînd trecem la blocul următor de interogări, golim acest vector. Așadar, efortul total pentru partea dreaptă este $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$.

Ce facem cu partea stîngă? Dacă adăugăm elemente în S, va trebui să le ștergem la final. Am vrea să clonăm S pentru fiecare interogare, dar acea operație este scumpă. Iată o soluție struțo-cămilă, dar care funcționează:

1. După ce terminăm de adăugat elementele din partea dreaptă, salvăm din structura S doar răspunsul (elementul cu frecvența maximă).
2. Continuăm să adăugăm în S elementele din partea stîngă și să recalculăm răspunsul.
3. La final, notăm răspunsul. Acesta este răspunsul la interogare.
4. Eliminăm din S elementele din partea stîngă, fără să mai recalculăm răspunsul.
5. Restaurăm răspunsul salvat la pasul (1).

Soluția merge pentru că face ștergeri, dar evită componenta pe care nu știm s-o rezolvăm, a recalculării răspunsului la ștergere.

5.3.4 Problema Machine Learning (Codeforces)

enunț • sursă

Problema cere să admitem 100.000 operații de două tipuri pe un vector cu 100.000:

1. Pentru un interval $[l, r]$ tipărește mex-ul frecvențelor acelui interval. Așadar, tipărește valoarea minimă $f > 0$ pentru care nu există un element de frecvență f în intervalul $[l, r]$.
2. Modifică punctual vectorul, $a[i] = x$.

Implementarea mea este școlărească și medie ca eficiență. Iată ce am învățat din ea.

Pare mai natural să stocăm separat actualizările și interogările.

Ca să pot face *undo* la actualizări, cel mai simplu mi s-a părut să stochez și vechea valoare în fiecare operație de actualizare. Putem obține vechile valori în mod elementar, scriind actualizările într-un vector pe măsură ce le facem (avem nevoie de o copie a vectorului original, pe care o distrugem).

Ca să descriu momentul curent, am ales să mențin un indice în vectorul de actualizări, care pointează la prima operație încă neaplicată. Ca să „derulez" sistemul la momentul de timp t, avansez spre dreapta în vectorul de actualizări dacă timpul operației neaplicate este mai mic decît t, respectiv avansez spre stînga dacă timpul ultimei operații aplicate este mai mare decît t. Ca fapt divers, timpii nu pot fi egali, căci t este timpul unei interogări, care nu va apărea în vectorul de actualizări.

Mi-a fost mai simplu să adaug santinele la timpii 0 și $q + 1$, ca să nu verific condiții suplimentare de ieșire din vector.

Strict referitor la problema Machine Learning: funcția mex pare greu de menținut incremental. Dacă o frecvență f încetează să mai aibă elemente, iar f este mai mic decît mex-ul curent, atunci

f devine noul mex. Aceasta este partea simplă. Dar dacă apare un nou element de frecvența mex-ului, cum recalculăm noul mex? Riscăm să introducem un factor suplimentar la complexitate.

Soluția este de fapt brutală. Pot exista cel mult $\sqrt{n}$ frecvențe diferite (deoarece suma frecvențelor este n, așa cum am arătat în capitolul de descompunere în radical). De aceea, putem calcula funcția mex naiv pentru fiecare interogare cu o complexitate totală de $\mathcal{O}(q\sqrt{n})$, care nu este dominantă.

O ultimă observație specifică problemei: ne interesează doar frecvențele valorilor, nu ordinea lor relativă. De aceea, am ales o variantă mai simplă pentru codul de normalizare.

Partea II

Măiestrie pe biți

Tehnici pentru calcule compacte și eficiente

Capitolul 6

Operații pe biți. Compactarea variabilelor

6.1 Operații elementare

Multe dintre structurile de date pe care le folosim au legătură cu puterile lui 2: arborii indexați binar, arborii de segmente, heapurile, *bitsets*... De aceea, este important să fiți familiari cu o listă de operații utile.

Această listă este inspirată din articolele Bit Twiddling Hacks și Bit manipulation.

6.1.1 Noțiuni de bază

- C are suport pentru constante hexazecimale (`0xdeadbeef`) și binare (`0b1100101101`).
- De asemenea, puteți tipări valori în bazele 8 și 16 cu printf sau folosind STL.
- O cifră hexa are 4 biți în baza 2. Deci `0xce = 0b1100'1110`.
- Uneori valorile hexa ajută la claritate. `0xff'ffff` arată că avem 24 de biți 1, poate mai clar decît `((1 << 24) - 1)`. Dar depinde de gusturi.

6.1.2 Măști

Conceptual, o mască pe n biți este un număr binar care descrie o submulțime a unei mulțimi cu n elemente, indexate de la 0 la $n-1$. Bitul k are valoarea 1 dacă și numai dacă submulțimea descrisă include elementul k. Măștile se pretează la submulțimi mici (32 sau 64 de biți). Dincolo de aceasta avem nevoie de vectori de măști (cum ar fi `bitset` din STL).

Exemple din lumea reală:

- Multe constante predefinite în limbajele de programare ocupă un singur bit (sînt puteri ale lui 2), iar programatorul le poate combina cu OR pe biți. Vezi codurile de eroare din PHP. Programatorul poate decide să afișeze sau să ascundă anumite tipuri de eroare. De exemplu, apelînd funcția `error_reporting(E_ALL & ~E_NOTICE & ~E_DEPRECATED)`, programatorul

arată că vrea să vadă toate erorile în afară de cele minore (`E_NOTICE`) și cele despre perimare (`E_DEPRECATED`).

- În multe programe, utilizatorii au permisiuni, care sînt definite ca puteri ale lui 2, iar permisiunile unui utilizator sînt o mască (o submulțime din mulțimea totală).
- Programele de șah moderne descriu tabla ca pe o colecție de măști pe 64 de biți: una pentru pozițiile pionilor albi, una pentru pozițiile pionilor negri etc. Este foarte convenabil că tabla de șah are fix 64 de pătrate.

Măștile au anumite avantaje, cum ar fi:

1. Este foarte ușor să facem operații de intersecție, reuniune, diferență folosind operatorii pe biți `&`, `|`, `^` și `~`.
2. Valoarea numerică a măștii creează o bijecție naturală între mulțimea $\{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ și mulțimea submulțimilor unei mulțimi. Deci putem stoca eficient informații despre toate submulțimile într-un vector de 2^n elemente indexate după ordinea lexicografică a submulțimii.

6.1.3 Operații pe măști de biți

operația	**efectul**
`x & 31` sau `x & 0x1f`	Restul împărțirii lui x la 32.
`x & 1`	Test de (im)paritate.
`x & (1 << k)`	Test dacă al k-lea bit este 1. Atenție, nu returnează 0/1, ci $0/2^k$.
`(x >> k) & 1`	Test dacă al k-lea bit este 1. Returnează 0/1.
`x |= (1 << k)`	Setează bitul k pe 1.
`x &= ~(1 << k)`	Setează bitul k pe 0.
`x ^= (1 << k)`	Neagă bitul k.
`x & (x-1)`	Elimină ultimul bit 1 din n. Util și ca test dacă n este putere a lui 2.

Tabela 6.1: Operații pe măști de biți.

6.2 Numărarea biților de 1 dintr-o valoare (popcount)

De exemplu, pentru 187, care în binar este 10111011, dorim răspunsul 6. Vom discuta metodele de mai jos și vom studia codul. Puteți citi și programul complet care măsoară timpii de rulare.

6.2.1 Metoda naivă

Shiftăm în mod repetat numărul la dreapta și numărăm biții de 1.

```
pop = 0;
while (x) {
  pop += x & 1;
  x >>= 1;
```

```
}
```

6.2.2 Metoda Kernighan

Eliminăm și contorizăm cîte un bit de 1.

6.2.3 Funcții built-in

Folosim funcțiile `__builtin_popcount` (pentru `int`) și `__builtin_popcountll` (pentru `long long`) sau `std::popcount` din STL. Atenție, aceasta din urmă apare doar în standardul C++20.

6.2.4 Tabel precalculat

Construim un tabel de 256 de valori care precalculează rezultatul pentru un octet. Extragem octeții numărului prin shiftare.

6.2.5 Tabel precalculat + conversie

Construim același tabel de 256 de valori. Extragem octeții numărului prin conversia la `char*`.

6.2.6 Calcul paralel

Iată o metodă bazată pe calcul paralel, care face `log(sizeof(n))` operații.

Partea III

Arbori

Capitolul 7

Unelte și algoritmi esențiali

Acest curs presupune deja cunoscute reprezentarea arborilor și parcurgerile DFS și BFS. De aceea, în acest capitol vom prezenta doar o unealtă pentru depanare (generatoarele de arbori) și vom rezolva cîteva probleme de bază.

7.1 Generatoare de arbori aleatorii

Generarea unor arbori aleatorii este și interesantă din punct de vedere teoretic, dar vă poate ajuta și la depanarea problemelor pe arbori.

Dacă nu ne interesează forma arborelui, generatoarele de arbori sînt la fel de ușor de scris ca generatoarele de vectori + interogări. Iată un generator de bază care generează un arbore cu n noduri și k interogări de tip pereche de noduri. L-am folosit la problema Max Flow (USACO).

În schimb, dacă dorim să testăm viteza unei soluții, sau dacă compunem o problemă și dorim date de test greu de fentat, avem nevoie ca:

- Arborele să aibă un lanț foarte lung.
- Arborele să aibă un nod cu foarte mulți vecini.
- Aceste structuri să nu poată fi decelate din datele de intrare (de exemplu, lanțul să nu conțină fix nodurile $1, 2, \ldots, n/2$.
- Generarea să dureze $\mathcal{O}(n)$.

Iată un generator avansat care răspunde acestor nevoie și poate genera, la cerere, și interogări sau actualizări. El poate fi apelat în trei moduri și poate fi ușor adaptat la altele:

1. Doar structura arborelui, fără valori în noduri, fără operații.
2. Valori inițiale în fiecare nod, actualizări în noduri, interogări în noduri.
3. Fără valori în noduri, interogări pe căi (perechi de noduri).

El acceptă trei parametri pentru definirea structurii:

1. n: numărul de noduri;
2. c: lungimea minimă garantată a cel puțin unui lanț;

3. d: gradul minim garantat al cel puțin unui nod.

Generatorul funcționează astfel:

- Generează o permutare aleatorie a nodurilor.
- Unește primele c noduri în lanț.
- Unește următoarele $n - d - c$ noduri de noduri dinaintea lor, alese aleatoriu.
- Unește ultimele d noduri de un nod dintre primele $n - d$, ales aleatoriu.
- După ce a generat cele $n - 1$ muchii, le amestecă, astfel încît primele $c - 1$ muchii tipărite să nu formeze un lanț etc.

7.2 Probleme

7.2.1 Problema Subordinates (CSES)

enunț • surse

Cerința este clasică: aflarea mărimii subarborelui fiecărui nod. Am inclus două implementări: cu vectori STL și cu liste înlănțuite scrise de la zero. Implementarea cu liste este de două ori mai rapidă.

7.2.2 Problema Tree Matching (CSES)

enunț • sursă

Problema se rezolvă cu un singur DFS. Ea este un bun exemplu de raționament recursiv pe arbore. Ca în multe alte situații, putem trata nodul curent în relație cu fiul său (dacă nodul și fiul sînt necuplați, cuplează-i) sau în raport cu părintele (dacă nodul și părintele sînt necuplați, cuplează-i).

7.2.3 Problema Tree Diameter (CSES)

enunț • surse

Există două soluții relativ diferite. Una face două parcurgeri DFS (puteți citi aici o demonstrație de corectitudine):

- Facem un DFS pornind din orice nod x. Fie a nodul cel mai depărtat de x.
- Facem un al doilea DFS pornind din a. Fie b nodul cel mai depărtat de a.
- $a \rightsquigarrow b$ este unul dintre diametrele arborelui.

Soluția cu o singură parcurgere este cu 20% mai rapidă (ambele neoptimizate). Implementăm recursiv observația că diametrul constă din două lanțuri descendente care pornesc dintr-un strămoș comun u. (Este ușor de tratat și cazul cînd diametrul este doar un lanț pornind din rădăcină, considerînd atunci al doilea lanț ca fiind rădăcina însăși, o cale de lungime zero.) Atunci fiecare nod are două sarcini:

- Să actualizeze un maxim global cu suma maximă a căilor raportate de oricare doi fii distincți. La fiecare cale, u adaugă 1 (muchia care pleacă din u însuși).
- Să raporteze la părinte distanța maximă de la u pînă la orice frunză din subarbore.

Ambele soluții trebuie să fie scurte (5-6 linii în plus față de șablonul de declarații, citire, DFS).

Discuție secundară: pentru claritate, `diam` nu trebuia să fie variabilă globală, ci DFS-ul trebuia să-l returneze, ca maxim dintre valorile raportate de fii. Pentru viteză, însă, și pentru economisirea memoriei pe stivă, cred că putem face concesia să-l declarăm pe `diam` global. Cititorii mai pedanți decît mine 😅 pot încapsula `diam` și parcurgerea DFS într-o clasă.

7.2.4 Problema Tree Distances II (CSES)

enunț • sursă

Pentru un nod fixat (să zicem 1), putem calcula răspunsul cu un singur DFS. Apoi, vom introduce un concept întîlnit ocazional: recalcularea unei valori la schimbarea rădăcinii. Să spunem că suma cerută pentru nodul u este S_u și dorim să o calculăm pe S_v pentru nodul v, vecin cu u. Să spunem că, raportat la muchia $u-v$, de partea lui u avem n_u noduri, iar de partea lui v avem $n_v = n - n_u$ noduri. Atunci, ca să trecem din S_u în S_v, observăm că:

- pentru n_v noduri distanțele scad cu 1;
- pentru n_u noduri distanțele cresc cu 1;

Rezultă tranziția simplă $S_v = S_u - n_v + n_u = S_u + n - 2n_v$.

Dacă facem toate tranzițiile dinspre rădăcina inițială (1) spre fii, atunci n_v va fi întotdeauna mărimea subarborelui lui v.

7.2.5 Problema White-Black Balanced Subtrees (Codeforces)

enunț • sursă

Includ această problemă pentru a discuta o altă parcurgere decît DFS, în cazul în care arborele este dat printr-un vector de părinți. Am ales o problemă simplă. Pentru una cu mai multă substanță, vedeți Arbsumpow (baraj ONI 2021).

Avantajul acestei reprezentări este că simplitatea și memoria redusă: $n-1$ întregi în loc de $2(n-1)$.

Desigur, puteți converti formatul dat la cel obișnuit (liste de vecini). Dar uneori vectorul de părinți este suficient. În multe probleme trebuie să calculăm pentru fiecare nod o valoare care depinde, recurent, de valorile fiilor. Atunci putem folosi codul:

```
for (int u = 1; u <= n; u++) {
  scanf("%d", &p[u]);
  num_children[p[u]]++;
}
```

```
for (int u = 1; u <= n; u++) {
  int s = u;
  while (s && !num_children[s]) {
    process(s);  // raportează la părinte ce trebuie raportat
    s = p[s];
    num_children[s]--;
  }
}
```

Rolul funcției `process` este să raporteze la părinte informațiile dintr-un nod. Pe parcurs, valoarea `num_children[u]` arată cîți fii ai lui `u` încă nu și-au raportat informațiile. Astfel, cînd îi va veni rîndul părintelui să fie procesat, el va fi acumulat informațiile de la toți fiii.

Ordinea nodurilor este *bottom-up*. Programul încearcă vizitarea fiecărui nod de cel mult două ori: fie cînd îi vine rîndul în ordine numerică, fie în momentul în care ultimul său fiu este vizitat.

7.2.6 Problema Blood Cousins (Codeforces)

enunț • sursă

Soluția propusă în editorial, în $\mathcal{O}(q \log n)$, procedează astfel.

- Măsoară timpii DFS și adîncimea fiecărui nod.
- Pentru a afla eficient al p-lea strămoș, construiește în fiecare nod lista strămoșilor de gradele $1, 2, \ldots, 2^k$.
- Colectează nodurile arborelui, în ordinea DFS, în liste separate pentru fiecare adîncime. Așadar $L[0]$ va conține doar rădăcina, $L[1]$ va conține fiii rădăcinii etc.
- Pentru a afla numărul de descendenți la distanță p ai unui nod u care are timpii DFS $t_i[u]$ și $t_o[u]$, căutăm binar în lista $L[d[u] + p]$ primul și ultimul nod cu timpi DFS între $t_i[u]$ și $t_o[u]$.

Iată și o soluție în timp liniar. Mi se pare mai simplă, căci folosește doar liste și două parcurgeri DFS.

- Distribuim interogările (v, p) în liste după nodul v.
- Rulăm un DFS în care menținem o stivă explicită de noduri în curs de vizitare. Concret, la intrarea în nodul u la adîncime $d[u]$ notăm $st[d[u]] = u$.
- La intrarea în nodul v, procesăm toate interogările (v, p). Al p-lea strămoș al lui v este $st[d[v] - p]$ (dacă există). Înlocuim fiecare p cu acest strămoș.

Astfel, după un prim DFS, toate interogările au luat forma: cîți descendenți are nodul v la adîncime p? Vom scădea 1 pentru a răspunde la cerința problemei. Putem răspunde la aceste întrebări cu un al doilea DFS.

- Redistribuim interogările (v, p) în liste după noul nod v.

- Rulăm un DFS în care menținem numărul de noduri vizitate pe fiecare nivel. Concret, la intrarea în nodul u la adîncime $d[u]$ îl incrementăm pe $st[d[u]]$.
- Acum răspunsul pentru o interogare (v, p) este diferența între $st[d[v] + p]$ la intrarea și la ieșirea din nodul v. Iterăm prin toate interogările referitoare la nodul v la intrarea și la ieșirea din recursivitate.

Capitolul 8

Liniarizarea arborilor

Să considerăm un arbore cu n noduri și cu valori în noduri. Liniarizarea acestui arbore este o parcurgere DFS care calculează informații suplimentare. Putem folosi aceste informații ca să gestionăm operații pe arbore, cum ar fi:

- Modificarea valorii unui nod sau a unei muchii.
- Modificarea valorilor pe calea de la un nod la rădăcină.
- Modificarea valorilor în tot subarborele unui nod.
- Interogări despre valoarea unui nod.
- Interogări despre valorile pe calea de la un nod spre rădăcină.
- Interogări despre valorile din subarborele unui nod.

8.1 Timpi de intrare și de ieșire din DFS

Să considerăm următoarea parcurgere DFS. Ea este elementară, cu o singură noutate: menține un contor global pe care îl incrementează la intrarea și la ieșirea dintr-un nod. (Din motive inginerești, ca să evidențiez că variabila `time` este folosită doar în funcția `dfs`, nu am declarat-o globală, ci statică în funcție. Efectul este același.)

```
void dfs(int u, int parent) {
  static int time = 0;

  time_in[u] = ++time;
  for (int v: adj[u]) {
    if (v != parent) {
      dfs(v, u);
    }
  }
  time_out[u] = ++time;
}
```

Dacă vreți, `time` este un metronom care bate la fiecare parcurgere a unei muchii, fie în jos (la

intrarea într-un nod), fie în sus (la ieșirea dintr-un nod). Toate valorile din vectorii `time_in` și `time_out` vor fi distincte și cuprinse între 1 și $2n$. Iată un exemplu.

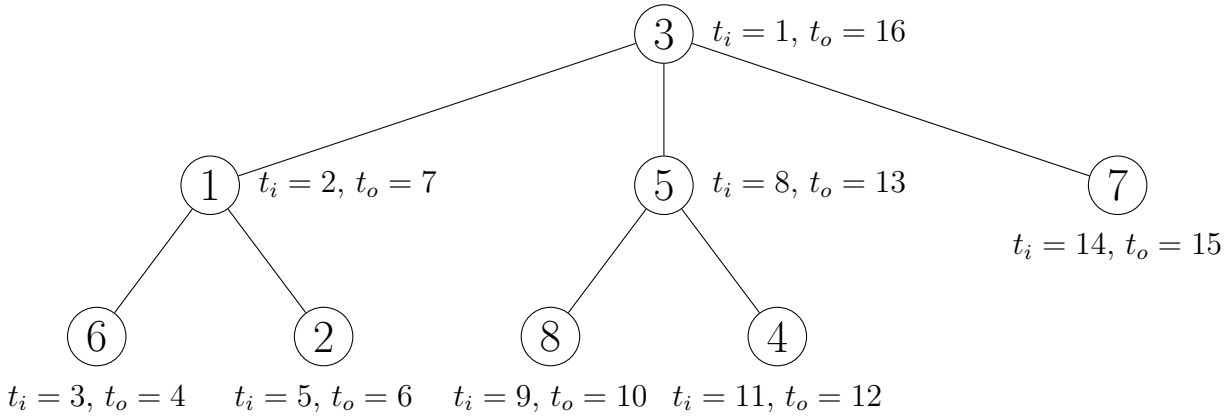


Figura 8.1: Timpii de intrare și de ieșire din noduri, varianta 1.

Într-o altă variantă, incrementăm timpul numai la intrarea în nod, nu și la ieșire. Atunci în vectorii t_i și t_o vom avea valori între 1 și n. Iată aceste valori pentru același arbore:

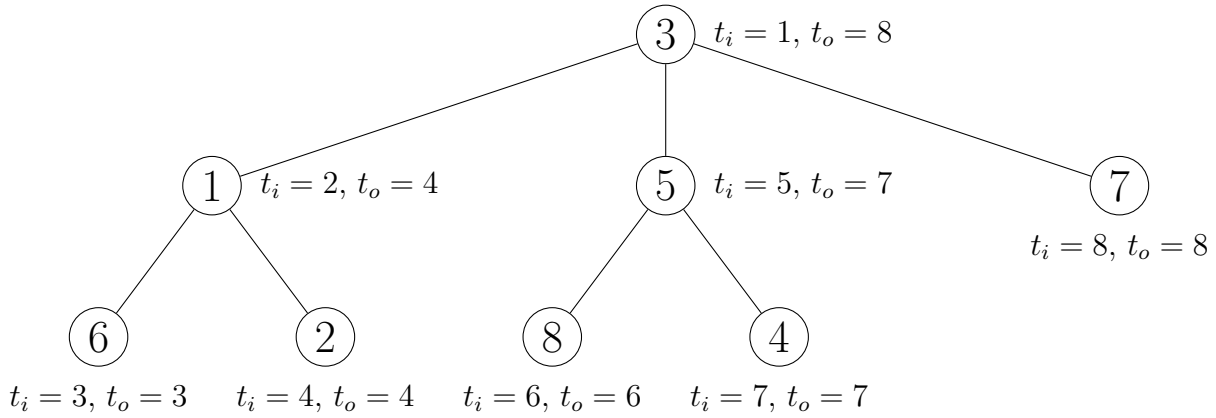


Figura 8.2: Timpii de intrare și de ieșire din noduri, varianta 2.

8.2 Testul de strămoș

O aplicație directă a timpilor de intrare și de ieșire este că putem decide în $\mathcal{O}(1)$ dacă un nod u este strămoș al altui nod v. Este necesar ca $t_i[u] < t_i[v] < t_o[v] < t_o[u]$. Inegalitatea poate fi strictă ($<$) sau permisivă ($\leq$) în funcție de varianta aleasă mai sus și dacă dorim ca u să fie considerat propriul său strămoș sau nu.

8.3 Liniarizarea. Tipuri de liniarizare

Liniarizarea unui arbore este un vector. Obținem acest vector printr-o parcurgere DFS în care emitem, la anumite momente, numărul nodului curent. Acest instrument puternic ne permite să rezolvăm probleme pe arbori folosind structuri familiare pe vectori: AIB, arbori de segmente, căutări binare, algoritmul lui Mo...

Există trei tipuri de liniarizări, foarte asemănătoare și la fel de ușor de obținut. Fiecare este utilă în alte situații.

8.3.1 Liniarizarea DFS

În această liniarizare, emitem nodul curent (adică îl adăugăm la vectorul rezultat) cînd intrăm în nod. Pentru arborele din Figura 8.2, vectorul este:

poziție	1	2	3	4	5	6	7	8
nod	3	1	6	2	5	8	4	7

Tabela 8.1: Liniarizarea de tip DFS.

Cu alte cuvinte, această liniarizare constă din nodurile arborelui în ordinea în care le descoperă DFS-ul. Tocmai de aceea, fiecare nod u apare în vector la poziția $t_i[u]$ (în varianta 2, din figura 8.2). De altfel, pentru acest tip de liniarizare în practică nu vom construi efectiv vectorul, ci doar vectorii t_i și t_o.

O observație importantă pentru toate liniarizările este că subarborele oricărui nod corespunde unui interval contiguu din vector. De exemplu, nodurile 5, 8 și 4 apar pe poziții consecutive. În liniarizarea DFS, subarborele oricărui nod u acoperă pozițiile dintre $t_i[u]$ și $t_o[u]$ inclusiv. De exemplu, subarborele nodului 5 ocupă pozițiile de la 5 la 7. Pentru a exploata această structură, în probleme de arbori cu valori în noduri vom stoca într-un vector valoarea fiecărui nod u pe poziția $t_i[u]$. Atunci, folosind structurile cunoscute pe vector, putem face actualizări și interogări pe subarbori întregi.

8.3.2 Liniarizarea Euler

În această liniarizare, emitem nodul curent de două ori: la intrare și la ieșire. Pentru arborele din Figura 8.1, vectorul este:

poziție	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
nod	3	1	6	6	2	2	1	5	8	8	4	4	5	7	7	3

Tabela 8.2: Liniarizarea de tip Euler.

Observăm că pozițiile nodului u în vector sînt $t_i[u]$ și $t_o[u]$. Vom studia probleme care arată cum folosim această liniarizare pentru a admite actualizări și interogări pe calea de la rădăcină la un nod oarecare u.

8.3.3 Liniarizarea Euler cu repetiție

Pe Internet nu am găsit o distincție clară între liniarizarea anterioară și aceasta, așa că am inventat un nume, sper că acceptabil. În această liniarizare, emitem nodul curent la intrare și la revenirea din fiecare fiu. În particular, emitem frunzele o singură dată. Pentru arborele din Figura 8.1, vectorul este:

poziție	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
nod	3	1	6	1	2	1	3	5	8	5	4	5	3	7	3

Tabela 8.3: Liniarizarea de tip Euler cu repetiție.

Lungimea acestei liniarizări este întotdeauna $2n-1$. Emitem fiecare nod la intrare, ceea ce ocupă n poziții. În plus, emitem fiecare nod de atîtea ori cîți fii are. Dar suma numărului de fii pentru toate nodurile este $n-1$, deoarece fiecare nod este fiul cuiva, cu excepția rădăcinii.

Folosim această liniarizare cu preponderență pentru interogări de LCA (engl. *lowest common ancestor*), pe care le vom studia în capitolul 10.

8.4 Probleme

8.4.1 Problema Tree Queries (Codeforces)

enunț • sursă

Probabil am putea implementa următoarea soluție. Pentru fiecare interogare, pornim din cel mai de jos dintre noduri, mergînd pînă la rădăcină, și vedem dacă întîlnim toate celelalte noduri sau părinții acestora. Dar această soluție necesită $\mathcal{O}(n)$ per interogare pentru un arbore degenerat. Probabil ea poate fi adusă la $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ sau $\mathcal{O}(\log n)$ prin tehnici mai complicate.

În loc de acesta, să procedăm astfel. Fie u cel mai de jos nod dintr-o interogare. Atunci toate celelalte noduri **sau** părinții lor trebuie să se afle pe calea de la u la rădăcină. Cu alte cuvinte, să fie strămoși ai lui u. Mai mult, decizia se simplifică astfel: dacă un nod v este pe calea de la u la rădăcină, atunci și părintele lui v se va afla pe calea de la u la rădăcină. Deci este suficient să testăm doar părinții și să răspundem la întrebarea: Sînt părinții tuturor nodurilor dintr-o interogare strămoși ai celui mai de jos nod? (Complicația cu noduri și părinți este mai mult un *red herring*, o diversiune care poate păcăli pe cineva.)

Vom folosi testul de strămoș studiat anterior: v este strămoș al lui u dacă și numai dacă $t_i[v] < t_i[u] < t_o[u] < t_o[v]$.

Detalii de implementare

Am preferat să declar variabila `time` statică, în interiorul funcției `euler_tour`, ca să evidențiez că nu este folosită altundeva.

Nodurile dintr-o interogare nu trebuie stocate, sortate etc. Nu avem nevoie de adîncimea nodurilor. Pur și simplu îl reținem pe cel mai de jos găsit pînă atunci, fie el l. Cînd citim un nod nou, u, îi aflăm părintele p. Pot lua naștere trei cazuri:

- Dacă p este strămoș al lui l, atunci l nu se modifică, iar calea care conține toate nodurile de pînă acum rămîne calea de la l la rădăcină.

- Dacă l este strămoș al lui p, atunci p îl înlocuiește pe l, iar calea care conține toate nodurile de pînă acum este calea de la p la rădăcină.
- Altfel nu există nicio cale care să le conțină pe l și pe p, deci răspunsul la interogarea curentă este `NO`.

8.4.2 Problema Subtree Queries (CSES)

enunț • sursă

Această problemă este o aplicație directă a liniarizării. Facem o liniarizare de tip DFS pentru a calcula doar vectorul t_i (timpul de intrare în fiecare nod). Apoi construim un vector indexat după timp, în care notăm valoarea fiecărui nod u la poziția $t_i[u]$. Peste acest vector construim un simplu arbore Fenwick sau orice structură preferați care să ofere actualizare punctuală + sumă pe interval.

O altă variantă clasică a acestei probleme ar fi ca operațiile de actualizare să fie pe subarbore: atribuie tuturor nodurilor din subarborele lui u o valoare x, incrementează toate nodurile cu o cantitate x etc. Desigur, aceste operații s-ar traduce în operații de actualizare pe interval, pentru care putem folosi un arbore de intervale cu propagare *lazy*.

8.4.3 Problema Path Queries (CSES)

enunț • sursă

Această problemă ne arată utilitatea liniarizării Euler. Să considerăm momentul în care DFS-ul intră în nodul u, adică $t_i[u]$. El corespunde prefixului din liniarizare de la poziția 1 pînă la poziția $t_i[u]$. Observăm că:

1. Nodurile complet vizitate înainte de intrarea în u (numite și *noduri negre*) apar de cîte două ori.
2. Nodurile în curs de vizitare (calea de la u la rădăcină, numite și *noduri gri*) apar cîte o dată.
3. Nodurile încă nevizitate (numite și *noduri albe*) nu apar niciodată.

Putem exprima punctul (2) și în termeni de strămoși, discutați anterior: strămoșii lui u sînt singurele noduri ale căror intervale cuprind intervalul lui u.

De aici rezultă cum putem folosi paritatea aparițiilor ca să notăm informații de pe calea spre rădăcină. Notăm valoarea fiecărui nod v cu semnul + la poziția $t_i[v]$ și cu semnul - la poziția $t_o[v]$. Astfel, suma prefixului $[1, t_i[u]]$ va fi exact suma valorilor pe calea de la u la rădăcină.

8.4.4 Problema New Year Tree (Codeforces)

enunț • sursă

Problema este relativ directă, doar cu puțin mai complicată decît precedentele. După liniarizare, avem nevoie de o structură de date care să admită operațiile:

1. `range_set(l, r, val)`: scrie valoarea val pe tot intervalul $[l, r]$
2. `range_count_distinct(l, r)`: returnează numărul de valori distincte din intervalul $[l, r]$.

Problema numărării de elemente distincte cu actualizări nu este trivială, dar varianta de față are un avantaj: valorile sînt între 1 și 60, deci putem folosi măști de biți. Rezultă că avem nevoie de un arbore de intervale cu propagare *lazy*, cu operațiile:

1. atribuiri pe interval;
2. OR pe biți pe interval.

8.4.5 Problema Max Flow (USACO)

enunț • surse

Metoda 1: Vectori de diferențe pe arbore

O primă soluție aduce cu vectori de diferențe („șmenul lui Mars"), dar în varianta arborescentă. Pentru fiecare nod dorim să calculăm numărul de căi care trec prin acel nod. Atunci, pentru fiecare cale (u, v), dorim să incrementăm valorile tuturor nodurilor de pe cale. Fie w cel mai de jos strămoș comun (LCA) al perechii (u, v). Atunci dorim, echivalent,

- Să incrementăm toate valorile de la u la rădăcină.
- Să incrementăm toate valorile de la v la rădăcină.
- Să scădem cu 1 valoarea lui w (care a fost incrementat de două ori).
- Să scădem cu 2 valorile de la părintele lui w la rădăcină.

Putem face asta adunînd ± 1 în nodurile respective, apoi propagînd în sus acele valori. Implementarea este lungă întrucît trebuie să calculeze LCA și am ales să fac asta cu algoritmul lui Tarjan, cel mai eficient în situația offline (vom detalia în viitorul apropiat).

Metoda 2: AIB peste liniarizare

La momentul vizitării nodului u, putem împărți arborele în 3 zone disjuncte:

1. Zona 1 este porțiunea vizitată înainte de u.
2. Zona 2 este subarborele lui u.
3. Zona 3 este porțiunea care va fi vizitată după revenirea din u.

Atunci, căile care trec printr-un nod u sînt de trei feluri:

1. Cele care încep în zona 1 și se termină în zona 2.
2. Cele care încep în u, indiferent dacă se termină în zona 2 sau în zona 3.
3. Cele care pornesc dintr-un descendent al lui u și trec prin u, fie că se termină în alt descendent al lui u, fie în zona 3.

Pentru a afla aceste informații pentru fiecare nod, facem întîi o liniarizare de tip DFS imediat ce citim arborele. Reamintim că subarborele fiecărui nod ocupă un interval contiguu în această liniarizare.

Abia acum citim restul datelor (căile). Pentru fiecare nod u colectăm lista de căi care încep din u și lista de căi care se termină în u. Mai exact, pentru fiecare cale (u, v), cunoscînd liniarizarea, ne asigurăm că $t_i[u] < t_i[v]$ (le interschimbăm la nevoie). Apoi adăugăm v la lista de căi care pornesc din u și u la lista de căi care se termină în v.

Acum putem rula o a doua parcurgere DFS în care ținem evidența căilor active. La intrarea într-un nod marcăm ca active căile care pornesc din u. La ieșire, marcăm ca inactive căile care se termină în u (adică le ștergem din evidență).

Care este structura necesară pentru această evidență? De exemplu, pentru întrebarea (1) de mai sus avem nevoie să știm ce căi active se termină în zona 2. Putem folosi un arbore Fenwick peste liniarizare în care notăm +1 la momentul nodului de sfîrșit al căilor active. Atunci răspunsul la (1) este suma pe $[t_i[u], t_o[u]]$.

Pentru (2) răspunsul este pur și simplu lungimea listei de căi care încep în u.

Pentru (3), la revenirea dintr-un fiu v avem nevoie să știm ce căi active au început în subarborele lui v. De aceea, vom folosi un al doilea arbore Fenwick în care notăm +1 la momentul nodului de început al căilor active.

Această metodă nu mai necesită calculul LCA.

Metoda 3 (cred): *Small to large*

Cred că fiecare nod își poate menține colecția de căi care trec prin el. Un părinte va unifica aceste colecții, eliminîndu-le pe cele care apar de două ori (pentru care părintele este LCA). Dacă folosim cea mai mare colecție dintre cele ale fiilor, timpul rezultat va fi $\mathcal{O}(n + q \log q)$.

8.4.6 Problema Distinct Colors (CSES)

enunț • sursă

După liniarizare și după normalizarea culorilor, problema se reduce destul de direct la numărarea culorilor distincte dintr-un interval. O variantă este cu algoritmul lui Mo, în $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$. O altă variantă posibilă este cu tehnica *small to large* (vom reveni cînd studiem tehnica).

Soluția mai eficientă, în $\mathcal{O}(n \log n)$, este cea studiată în capitolele anterioare (problema D-query). Procesăm interogările în ordinea crescătoare a capătului drept. Pe parcursul procesării, într-un AIB ținem valori de 1 pentru poziția celei mai din dreapta apariții a fiecărei culori.

În practică implementarea se simplifică mult, căci interogările pe liniarizare au o structură foarte specială. Dacă răspundem la interogări la revenirea din nod, atunci în mod evident ele vor fi ordonate după capătul drept, deoarece capătul drept este dat de timpul curent din DFS, care poate doar să crească! De aceea,

1. Nu mai este nevoie să colectăm și să sortăm interogările. Le putem procesa chiar în DFS.
2. Putem renunța complet la stocarea timpilor de intrare în nod.

3. Nu (prea) mai are sens să normalizăm culorile în prealabil. Putem extinde AIB-ul să se ocupe de asta.

De aceea vă încurajez mereu să adaptați cunoștințele voastre la particularitățile problemei. Per ansamblu, veți cîștiga timp și eficiență.

8.4.7 Problema Disconnect (Infoarena)

enunț • sursă

Precizez că testele par incorect alese. Soluțiile cele mai rapide traversează naiv arborele. Ne facem că n-am observat. 😀

O rezolvare directă este similară cu problema Max Flow. Marcăm muchiile șterse cu 1. Apoi, două noduri sînt conectate dacă suma pe calea dintre ele este 0. Pentru a calcula suma pe o cale, calculăm sumele de la fiecare nod pînă la rădăcină, minus dublul sumei de la LCA la rădăcină.

Iată și o altă rezolvare, care evită nevoia de a calcula LCA. Alegem o rădăcină oarecare (1). Cînd ștergem o muchie, marcăm nodul de adîncime mai mare ca șters. Acum definim un concept clasic: pentru orice nod u, fie $LMA(u)$ (engl. *lowest marked ancestor*) cel mai de jos nod marcat pe calea de la u la rădăcină, inclusiv.

Pentru a răspunde la o interogare de conectivitate (u, v), considerăm 4 cazuri:

1. $LMA(u)$ și $LMA(v)$ sînt nedefinite. Atunci, desigur, calea este liberă și u și v sînt conectate.
2. Exact unul dintre $LMA(u)$ și $LMA(v)$ este definit. Atunci nodul marcat există undeva mai jos de $LCA(u, v)$, așadar el deconectează u de v.
3. $LMA(u)$ și $LMA(v)$ există și sînt egale. Atunci nodul marcat există undeva mai sus de $LCA(u, v)$, deci nu există alte obstacole. u și v sînt conectate.
4. $LMA(u)$ și $LMA(v)$ există și sînt diferite. Atunci fiecare nod are propriul său blocaj mai jos de $LCA(u, v)$, deci nodurile sînt deconectate.

Condiția este mai ușor de testat decît pare. Dacă lăsăm $LMA(u) = 0$ pentru valori nedefinite, atunci trebuie doar să testăm dacă $LMA(u) = LMA(v)$.

Cum menținem informația de LMA? Este suficient un singur arbore de segmente, fără propagare *lazy*, construit peste liniarizare. La marcarea unui nod u ca șters, marcăm tot intervalul subîntins de u chiar cu valoarea u. La interogarea $LMA(v)$, pornim din frunza din AINT corespunzătoare nodului v și raportăm prima valoare întîlnită (sau 0 dacă nu întîlnim valori scrise).

Mai există un singur aspect important. Un nod din AINT poate fi acoperit de mai multe noduri din arbore. Dacă mai multe actualizări (ștergeri) acoperă același nod, cînd suprascriem valori și cînd nu? Este important că nodurile respective din arbore sînt toate în relația strămoș-descendent. De aceea, cele mai de jos au prioritate. Echivalent, cele care subîntind un interval mai mic în AINT au prioritate. AINT-ul procedează exact astfel: acordă valorilor scrise priorități egale cu lungimea intervalului scris.

Capitolul 9

Tehnica small-to-large

9.1 Generalități

Există o clasă de probleme pe arbori care, implementate naiv, au complexitate $\mathcal{O}(n^2)$. În aceste probleme, informația pentru un nod are mărime $\mathcal{O}(n)$ și trebuie compusă din informațiile fiilor. Exemplu: fiecare nod u dorește să-și cunoască frecvențele adîncimilor nodurilor din subarbore, raportate la u. Cu alte cuvinte, u dorește să știe cîți fii, nepoți, strănepoți etc. are. Pentru a calcula acest vector, u trebuie:

1. să însumeze vectorii primiți de la fii;
2. să translateze cu 1 toate valorile (fiul fiului lui u este nepotul lui u);
3. să se adauge pe sine însuși la distanță 0.

Pentru un arbore degenerat (un lanț de lungime n), o implementare naivă va copia și modifica succesiv vectori de lungime $1, 2, 3, \ldots, n$, așadar $\mathcal{O}(n^2)$ în total.

Tehnica *small-to-large* spune: este OK să transferăm O(mărimea fiului) informații de la fiecare fiu la părinte, **cîtă vreme ne asigurăm că transferăm din structura mai mică în cea mai mare**. Astfel, fiecare informație va fi transferată într-o structură de (cel puțin) două ori mai mare, deci numărul de transferuri este limitat la $\log n$. Complexitatea totală este $\mathcal{O}(n \log n)$ sau, în unele cazuri, chiar $\mathcal{O}(n)$.

Pentru exemplul de mai sus, vectorii ar putea fi `deque`, astfel încît părintele să se poată adăuga la începutul listei. Aceasta rezolvă cerințele (2) și (3) în $\mathcal{O}(1)$. Pentru cerința (1), este suficient ca părintele să folosească cea mai lungă listă primită de la vreun fiu și să adune listele celorlalți fii la aceasta.

9.2 Probleme

9.2.1 Problema Fixed-Length Paths I (CSES)

enunț • sursă

Putem rezolva problema exact cu ideile expuse teoretic. Fiecare nod raportează la părintele său o listă cu numărul de noduri aflate la distanțe 0 (el însuși), 1 (fiii), 2 (nepoții) etc. Pentru a-și calcula lista, fiecare nod:

1. Însumează listele primite de la toți fiii.
2. Deplasează lista rezultată cu o poziție (fiul fiului meu este nepotul meu).
3. Se adaugă pe sine însuși la distanță 0.

Pentru implementare, putem folosi un deque, care oferă inserarea la început în $\mathcal{O}(1)$. Pentru însumarea listelor, adăugăm mereu lista mai scurtă la cea mai lungă. În plus, fiecare nod u răspunde la întrebarea: pentru cîte căi de lungime k sînt eu LCA (nodul cel mai de sus de pe cale)? Apoi adaugă această valoare la un contor global. Pentru a calcula răspunsul, nodul u confruntă lista primită de la fiecare fiu v cu listele obținute și însumate anterior: dacă fiul v raportează a noduri la o distanță l și fiii anteriori raportaseră b noduri la o distanță $k-2-l$, adăugăm $a \cdot b$ la contorul global.

Care este complexitatea? Pare că ar fi $\mathcal{O}(n \log n)$, după cum spuneam: cînd copiem un nod din lista L_1 în lista L_2, la final L_2 va stoca informații (frecvențe) despre cel puțin dublul numărului de noduri din L_1. Deci fiecare nod poate fi copiat de cel mult $\log n$ ori.

Dar putem da o limită și mai strînsă. Pentru această problemă soluția este, de fapt, $\mathcal{O}(n)$! Programul nu operează cu noduri, ci doar cu distanțe. Cînd frecvența unei distanțe d în L_1 este 2 sau mai mare, nu mai pierdem timp individual ca să copiem acele noduri din L_1 în L_2, ci le „copiem" pe toate simultan, însumînd niște frecvențe. Practic, fiecare nod este copiat o singură dată. Vă puteți convinge de asta adăugînd contoare globale în interiorul buclelor critice și verificînd că ele nu depășesc valoarea totală n.

Notă: pentru a interschimba două liste, folosiți întotdeauna metoda `swap()`, care doar schimbă pointeri între ei. Niciodată nu folosiți operatorul `=`, care face copieri de elemente și are complexitate $\mathcal{O}$(lungime)!

9.2.2 Problema Distinct Colors (CSES) (din nou)

enunț • sursă

Să reluăm această problemă și să o rezolvăm cu tehnica *small-to-large*. O variantă ar fi ca fiecare nod să țină o listă sortată de culori. Atunci părintele trebuie să interclaseze listele fiilor. Dar nu putem face interclasarea în O(lista mai scurtă), ci doar în O(suma lungimilor). Aceasta duce la o soluție în $\mathcal{O}(n^2)$. Exemplu: $n = 1.000.000$, iar rădăcina are 1.000 de fii, fiecare cu cîte 1.000 de noduri în subarbore. Toate culorile sînt distincte. Atunci costul total al interclasărilor în rădăcină ar fi:

$$2.000 + 3.000 + \cdots + 1.000.000$$

Ca să combinăm doi fii în O(fiul mai mic), putem menține culorile într-o tabelă hash (`unordered_set`).

Atunci este ușor să „vărsăm” tabela mai mică în cea mai mare.

Două observații de implementare:

1. Această variantă consumă mai mult spațiu pe stivă, căci are variabile locale mai mari. Pe calculatorul meu local, testele mari chiar umplu stiva!
2. Această variantă este mai lentă decît cea cu AIB (nicio surpriză).

9.2.3 Problema Lomsat Gelral (Codeforces)

enunț • surse

Folosim tehnica *small-to-large*, așa cum se poate deduce și din numele problemei 🦊. Este important ca fiecare fiu să stocheze $\mathcal{O}$(subarbore) informații, nu $\mathcal{O}(n)$. Deci vom folosi o tabelă hash de culori cu frecvențele lor.

Ca observație interesantă, este mult mai eficient să calculați și să returnați din DFS tabela hash și celelalte informații, decît să le stocați în fiecare nod. Iată și o astfel de implementare, considerabil mai lentă.

Există și o soluție cu algoritmul lui Mo, puțin mai lentă, dar care consumă mai puțină memorie. Este necesară atenție la detalii. Ce informații stochează intervalul curent? Vă recomand să izolați acele structuri de date într-un `struct` sau o clasă separată.

Problemă similară: Christmas Balls (IIOT 2021/22 runda 2).

9.2.4 Problema Tokens on a Tree (CodeChef)

enunț • surse

O problemă echivalentă este Short Code (inspirată din viața reală, avînd în vedere cum își denumesc unii elevi variabilele).

Să demonstrăm teoretic ce avem de făcut. Iată diverse observații.

Observația 1. O monedă A poate „sări” aparent peste altă monedă B: practic, monedele fiind identice, o urcăm pe B pînă la destinația dorită, apoi pe A în locul lui B.

Observația 2. În orice soluție, monedele se vor afla la vîrful arborelui. Niciodată nu vom avea o monedă sub un nod gol, căci am putea face o mutare în plus.

Observația 3. Dacă rădăcina conține inițial o monedă, atunci acea monedă nu pleacă nicăieri și nicio altă monedă nu îi va lua locul. Deci putem rezolva problema independent pentru subarbori.

Observația 4. Dacă rădăcina nu conține inițial o monedă, atunci dintr-unul dintre subarborii fiilor o monedă va urca în rădăcină. Restul fiilor vor fi rezolvați independent, conform Observației 3. Moneda care va urca în rădăcină este cea de adîncime maximă după ce rezolvăm fiii, ca să facem cît mai mulți pași în plus. Urcarea este aparentă, conform Observației 1.

Așadar, implementarea trebuie să combine în mod eficient fiii unui nod, apoi să găsească cea mai de jos monedă și să o urce în părinte. Am găsit două variante de implementare.

Implementare cu *small-to-large*

Fiecare nod u calculează un vector/listă f unde $f[i]$ pentru $i \geq 0$ este numărul de monede la distanță i de u. Fiecare părinte însumează listele fiilor așa cum știm, iar algoritmul este $\mathcal{O}(n)$, căci nodurile odată comasate își pierd identitatea. În plus, nodul u se adaugă pe sine însuși la începutul listei și, dacă este loc, simulează urcarea unei monede transferînd o unitate de pe ultima poziție din f pe prima.

Detalii de implementare. Implementarea cu `std::list` este cu vreo 25 de linii mai scurtă decît cea cu liste proprii, dar este de două ori mai lentă și consumă dublul memoriei. Implementarea cu `std::deque` este nefolosibilă ca timp și ca memorie (spre 1 GB). Probabil, clasa `deque` are costuri fixe, iar multe deque-uri mici sînt foarte scumpe.

Implementare cu liniarizare + RMQ

Construim o liniarizare DFS și notăm, în nodurile care conțin monede, adîncimea acelor noduri. În nodurile care nu conțin monede nu notăm nimic. Pentru a găsi cea mai de jos monedă din subarborele unui nod u, găsim maximul pe intervalul subîntins de u. Pentru a muta moneda, scriem 0 în locul acelui maxim (moneda dispare) și scriem adîncimea lui u la poziția nodului u (moneda apare acolo). Apoi creștem numărul total de mutări cu diferența dintre cele două adîncimi. Avem nevoie de RMQ cu actualizare, deci putem folosi varianta pe arbori de segmente. Rezultă o complexitate de $\mathcal{O}(n \log n)$. Codul este puțin mai lent și consumă mai multă memorie decît implementarea cu *small-to-large*.

9.2.5 Problema Blood Cousins Return (Codeforces)

enunț • surse

Toate soluțiile încep prin a transforma numele în numere. Cea mai la îndemînă implementare folosește un `unordered_map`.

Implementarea cu *small-to-large*

O soluție destul de brutală cu *small-to-large* este: fiecare nod u ține un vector de set-uri, unde setul de pe poziția i reține numerele distincte regăsite la adîncime i (raportat la adîncimea lui u) în subarborele lui u. Cînd combinăm doi vectori, combinăm două cîte două seturile reprezentînd aceeași adîncime. Trebuie să avem grijă să folosim *small-to-large* în două locuri:

1. Copiem vectorul mai mic în cel mai mare.
2. Pentru fiecare pereche de seturi, îl copiem pe cel mai mic în cel mai mare.

Note de implementare:

1. `unsorted_set` este mai lent decît `set`, deși algoritmic vorbind ne-ar trebui prima, care oferă timp constant. Dar tabelele hash (adică `unsorted_set`) au o mărime minimă dată de vectorul pe care se bazează.
2. Reprezentarea listelor de adiacență cu `deque` este de două ori mai lentă decît cu `vector`.

Implementarea este rezonabil de scurtă, dar nu prea eficientă.

Implementarea cu tehnici de bază

Iată și o abordare care necesită doar parcurgeri, liniarizare și căutare binară. Soluția este greu de codat, dar este mai rapidă.

1. Calculăm ordinea BFS. Atunci răspunsul la orice interogare se va traduce în numărarea elementelor distincte de pe un interval contiguu din BFS. Știm să facem asta folosind un simplu AIB și ordonînd interogările după capătul drept (vezi problema D-query).
2. Pentru fiecare interogare, rămîne să aflăm primul și ultimul nod de la o anumită adîncime din subarborele lui u, ca să știm pe ce interval din BFS facem numărarea. Putem face asta cu două parcurgeri DFS și o stivă. La intrarea în fiecare nod, notăm valoarea sa pe stivă în dreptul adîncimii sale. La revenirea din nod, lăsăm stiva intactă. Atunci, la revenirea într-un nod u aflat la adîncimea d, putem ști care este **ultimul** său descendent de la adîncimea d': fie nu există, fie este nodul de la poziția d' de pe stivă. Pentru a afla **primul** descendent de la adîncimea dorită, facem același DFS, dar iterînd prin fiii nodurilor în ordine inversă.

Sună rezonabil din vorbe, dar prima implementare a fost migăloasă.

O soluție considerabil mai scurtă (cea inclusă în anexă) procedează astfel:

1. Calculăm aceeași ordine BFS.
2. Înlocuim fiecare interogare $\langle u, d\rangle$ cu interogarea $\langle depth[u]+d, t_{in}[u], t_{out}[u]\rangle$. Cu alte cuvinte, fiecare interogare interoghează un interval aflat la o anumită adîncime și cu noduri între timpii dați. Sortăm și procesăm interogările cu un AIB ca de obicei.

O a treia implementare este: colectăm nodurile separat pe fiecare nivel, în ordinea timpilor de vizitare (care este chiar ordinea DFS). Acum intervalul de interes pentru o interogare referitoare la nodul u este pe un nivel cunoscut și este delimitat de timpii de intrare și de ieșire din u.

Este greu să construim cîte un AIB pe fiecare nivel, dar putem folosi un `set` cu aceeași informație: pozițiile ultimelor apariții ale fiecărui element distinct. Iată o implementare curată a fostului olimpic Alex Nuță.

9.3 DFS exclusiv

Am învățat această tehnică din sursa unui legendary grandmaster. 🤩 Ulterior am aflat că ea se mai numește și Sack sau DSU pe arbori. Pot fi de acord cu prima denumire, dar nu și cu a doua, în primul rînd pentru că DSU este un nume greșit pentru DSF (engl. *disjoint set forest*) și în al doilea rînd pentru că structura face adăugări și ștergeri care n-au nicio legătură cu implementarea

canonică de mulțimi disjuncte. Prefer să îi spun **DFS exclusiv**, care descrie mult mai bine cum funcționează tehnica.

Implementarea din acel tutorial mi se pare criptică. Sper că o pot clarifica.

Să ne gîndim la clasa de probleme care fac interogări pe subarbore: frecvențe, sume, numere distincte etc. De exemplu, problema următoare, Tree and Queries, face interogări pe un arbore cu valori în fiecare nod. Interogările au forma (v, k) = numărul de valori distincte care apar de cel puțin k ori în subarborele lui v. Multe din aceste probleme se pot rezolva cu tehnica *small-to-large* deja studiată.

Iată și o rezolvare cu un DFS „pe steroizi". În loc să calculăm cîte o structură în fiecare nod, vom menține o singură structură globală, S. DFS-ul va adăuga și va șterge din S informații despre noduri la diverse momente. El garantează că, pentru orice nod u, va exista un moment în DFS cînd S va conține informații exact despre subarborele lui u. La acel moment vom putea răspunde la interogările despre u.

Desigur, nu putem face un DFS simplu, căci atunci la intrarea într-un nod S va fi deja populată cu date din afara subarborelui său, ceea ce va da răspunsuri incorecte la orice interogări despre u. În loc de aceasta, începem prin a calcula pentru fiecare nod u care este fiul său cu subarborele cel mai mare. Notăm această informație cu $h[u]$ (de la *heavy*). Acum, $DFS(u)$ procedează astfel:

1. Apelează recursiv toți fiii cu excepția lui $h[u]$.
2. La revenirea din fiecare fiu v, elimină recursiv din S toate nodurile din subarborele lui v.
3. Apelează recursiv $DFS(h[u])$. De data aceasta, lasă informațiile în S.
4. Adaugă la loc subarborii eliminați la pasul (2).
5. Adaugă în S nodul u însuși.
6. Răspunde la interogări despre subarborele lui u.

Se nasc două întrebări. Prima: de ce funcționează corect algoritmul? Mai exact, de ce la pasul (6) vectorii conțin doar informații despre subarborele lui u? Să considerăm un alt nod w, din afara subarborelui lui u. Există trei posibilități.

1. w este strămoș al lui u („nod gri"). Atunci, în mod garantat, w nu apare în structura de date la momentul procesării lui u, deoarece w este adăugat în structură doar la finalul recursivității.
2. w este un „nod negru" într-un subarbore deja vizitat. Fie a strămoșul comun al lui u și v și fie a_w și a_u fiii lui a care pornesc către w, respectiv către u. Deoarece sîntem în procesul de vizitare a lui a_u, înseamnă că a_w și tot subarborele său (inclusiv w) au fost temporar șterși din structură.
3. w este un „nod alb", undeva într-un subarbore încă nevizitat. Atunci w încă nu a fost descoperit de DFS.

A doua întrebare: care este complexitatea algoritmului? Dacă nu am trata special nodul $h[u]$, atunci complexitatea ar fi pătratică. Fiecare nod este eliminat la pasul (2) și readăugat la pasul (5) pentru fiecare strămoș al său.

Dacă tratăm special fiii *heavy*, să analizăm numărul de eliminări și readăugări. Ori de cîte ori un strămoș w cauzează eliminarea unui descendent u, înseamnă că w **nu** este fiu *heavy* al părintelui său. Echivalent, părintele lui w este cel puțin de două ori mai mare decît w. Așadar, eliminarea nodului u poate fi cauzată de cel mult $\log n$ dintre strămoșii săi. Complexitatea parcurgerii este $\mathcal{O}(n \log n)$.

Cum fiecare eliminare și adăugare necesită o operație în AIB, rezultă că complexitatea întregului algoritm este $\mathcal{O}(n \log^2 n)$.

Vom citi codul care rezolvă problema următoare.

9.4 Probleme

9.4.1 Problema Tree and Queries (Codeforces)

enunț • surse

Implementare brută

Să vedem mai întîi abordarea cu *small-to-large* clasic. Proiectăm o structură de date care:

1. Să mențină frecvențele culorilor din subarborele curent.
2. Să raporteze numărul de frecvențe cel puțin egale cu o valoare dată.

Pentru (2) am dori un vector de frecvențe ale frecvențelor: $g[x]$ stochează numărul de culori care au frecvența x. Pe acest vector, răspunsul la o interogare (u, x) este suma pe sufixul $g[x \dots n]$. Dar implementarea este alunecoasă, căci dorim ca structura să ocupe spațiu $\mathcal{O}$(subarbore), nu $\mathcal{O}(n)$. Deci orice AIB sau arbore de intervale construit peste g trebuie extins dinamic pe măsură ce urcăm în arbore.

În schimb, putem folosi un multiset: un set ordonat al tuturor frecvențelor (nenule). Ca să putem răspunde la întrebarea „cîte frecvențe mai mari sau egale cu x există?”, avem nevoie de PBDS (*policy-based data structure*), o colecție extinsă de structuri de date din STL. Ne-am mai întîlnit cu seturi PBDS la problema Give Away, în capitolul de descompunere în radical.

Soluția este relativ directă, dar ca să o puteți scrie în timp de concurs trebuie să memorați două lucruri:

1. Incantația magică necesară pentru a declara o structură de date PBDS.
2. Codul necesar pentru ștergerea dintr-un multiset. Cînd o frecvență se modifică, noi dorim să ștergem din multiset o singură apariție a vechii frecvențe, dar un simplu apel la `erase` le-ar șterge pe toate.

Implementare cu DFS exclusiv

Vom menține aceleași informații, dar global:

- un vector de frecvențe;
- un AIB peste vectorul de frecvențe ale frecvențelor.

Notă de implementare: putem stoca listele de adiacență și listele de interogări ca `vector` sau ca `list`, căci nu avem nevoie de acces aleatoriu. Implementarea cu `list` este considerabil mai lentă și consumă mai multă memorie.

Capitolul 10

Cel mai apropiat strămoș comun

Dat fiind un arbore cu rădăcină, pentru orice două noduri u și v definim **cel mai apropiat strămoș comun** ca fiind nodul de adîncime maximă (sau nodul „cel mai jos") care le are ca descendenți atît pe u, cît și pe v. Considerăm că un nod este propriul său descendent, ceea ce înseamnă că cel mai apropiat strămoș comun al lui u și v poate fi chiar unul dintre aceste noduri, dacă este strămoș al celuilalt.

În literatura română am întîlnit și denumirea „cel mai mic strămoș comun", doar că această denumire mi se pare improprie. Nu comparăm nodurile ca mărime, ci ca adîncime. Pentru abreviere, o vom folosi pe cea din limba engleză (LCA - *lowest common ancestor*).

Formal, dat fiind un arbore cu n noduri, dorim să răspundem la q întrebări de forma:

- $LCA(u, v)$: găsește nodul de adîncime maximă care este strămoș atît al lui u, cît și al lui v.

CP Algorithms inventariază multe dintre metodele disponibile.

O aplicație directă a LCA-ului este aflarea distanțelor între noduri. Notăm cu $d[u]$ adîncimea unui nod u. Atunci

$$dist(u, v) = (d[u] - d[LCA]) + (d[v] - d[LCA]) = d[u] + d[v] - 2 \cdot d[LCA]$$

10.1 Sumar: RMQ (*range minimum query*)

RMQ este o problemă clasică pe vectori. Dat fiind un vector V cu n elemente, trebuie să răspundem la q întrebări de forma $\langle l, r \rangle$ cu semnificația: să se găsească minimul valorilor $V[l \dots r]$.

Problema are diverse variațiuni. Ni se poate cere *valoarea* minimă sau *poziția* valorii minime. Vectorul poate fi static sau poate avea actualizări.

Acest curs nu are un capitol dedicat pentru RMQ, dar o vom trata superficial aici întrucît ea se leagă de algoritmii pentru LCA. Iată un sumar al metodelor folosite în programarea competitivă.

Precizări:

metodă	**preprocesare**	**interogări**	**memorie extra**
Arbore de intervale	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(q \log n)$	$\mathcal{O}(n)$
Arbore Fenwick (AIB)	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(q \log n)$	0
Descompunere în radical	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(q\sqrt{n})$	$\mathcal{O}(\sqrt{n})$
Tabelă rară (*sparse table*)	$\mathcal{O}(n \log n)$	$\mathcal{O}(q)$	$\mathcal{O}(n \log n)$
Stivă ordonată	$\mathcal{O}(q \log q)$	$\mathcal{O}(n + q \log n)$	$\mathcal{O}(n)$

Tabela 10.1: Metode pentru problema RMQ.

- Tabela rară și stiva ordonată nu permit actualizări.
- Arborele Fenwick permite doar interogări pe prefix și doar actualizări descrescătoare.

Să trecem în revistă, doar pentru completitudine, structurile de date.

10.1.1 RMQ cu arbore de intervale

Construim un arbore de intervale în care nodul părinte reține minimul fiilor săi. Admite actualizări punctuale sau, în varianta cu propagare *lazy*, și actualizări pe interval. Am tot studiat aceste structuri de date, nu mai detaliem aici.

10.1.2 RMQ cu arbore indexat binar

Construim un AIB peste vector. Admite doar interogări pe prefix și doar actualizări descrescătoare.

10.1.3 RMQ cu descompunere în radical

Pentru fiecare bloc reținem minimul. Asimptotic operațiile sînt mai lente, dar aș zice că actualizarea pe interval este mai simplu de codat decît la arborii de intervale.

10.1.4 RMQ cu tabelă rară

Elevii se dau în vînt după această metodă. Codul este aproximativ:

```
void compute_rmq(int* v, int n) {
  // r[p][i] = minimul pe intervalul v[i]...v[i + 2^p - 1]
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    r[0][i] = v[i];
  }
  for (int p = 1; (1 << p) <= n; p++) {
    for (int i = 0; i + (1 << p) <= n; i++) {
      r[p][i] = min(r[p - 1][i], r[p - 1][i + (1 << (p - 1))]);
    }
  }
}
```

```
int rmq(int left, int right) { // inclusiv
  int p = 31 - __builtin_clz(right - left + 1); // log_2 din lungime
  return min(r[p][left], r[p][right - (1 << p) + 1];
}
```

Totuși, consumul de memorie al metodei *sparse table* este enorm. În afară de cazul în care avem multe interogări, timpul de $\mathcal{O}(1)$ per interogare nu justifică risipa de memorie. Exemplu: Cu *sparse table*, pentru $n = 200\,000$ vom folosi $200\,000 \times 18$ întregi, adică 14,4 MB. Pentru arborele de intervale, presupunînd că îl completăm pînă la 256K elemente, vom folosi 512K întregi, adică 2 MB. Nu am rulat benchmark-uri, dar mă aștept să existe o diferență de viteză din cauza cache-ului.

10.1.5 RMQ cu stivă ordonată

Includ și această metodă ad-hoc. Ordonăm interogările după capătul drept. Parcurgem vectorul de la stînga la dreapta și menținem o stivă crescătoare de minime parțiale. La poziția r putem răspunde la toate interogările $[l, r]$. Răspunsul este valoarea minimă din stivă aflată pe o poziție mai mare sau egală cu l. Așadar este suficientă o căutare binară.

Exemplu: fie vectorul $V = (6, 3, \mathbf{2}, 10, 8, \mathbf{6}, 9, 15, \mathbf{9}, \mathbf{20}, \dots)$. Cînd ajungem la elementul 20, stiva constă din valorile trecute cu aldin. Cînd răspundem la interogările cu capătul r pe elementul 20, răspunsul va fi una dintre valorile din stivă, în funcție de poziția capătului l.

10.2 LCA cu liniarizare

Facem o liniarizare Euler cu repetiție. În vector notăm nodurile, dar ne interesează de fapt adîncimea acelor noduri. Astfel, putem reformula interogările LCA ca „găsește nodul de adîncime minimă dintre ultima apariție a lui u și prima apariție a lui v”. Așadar, toate metodele de RMQ pe vector se aplică și aici.

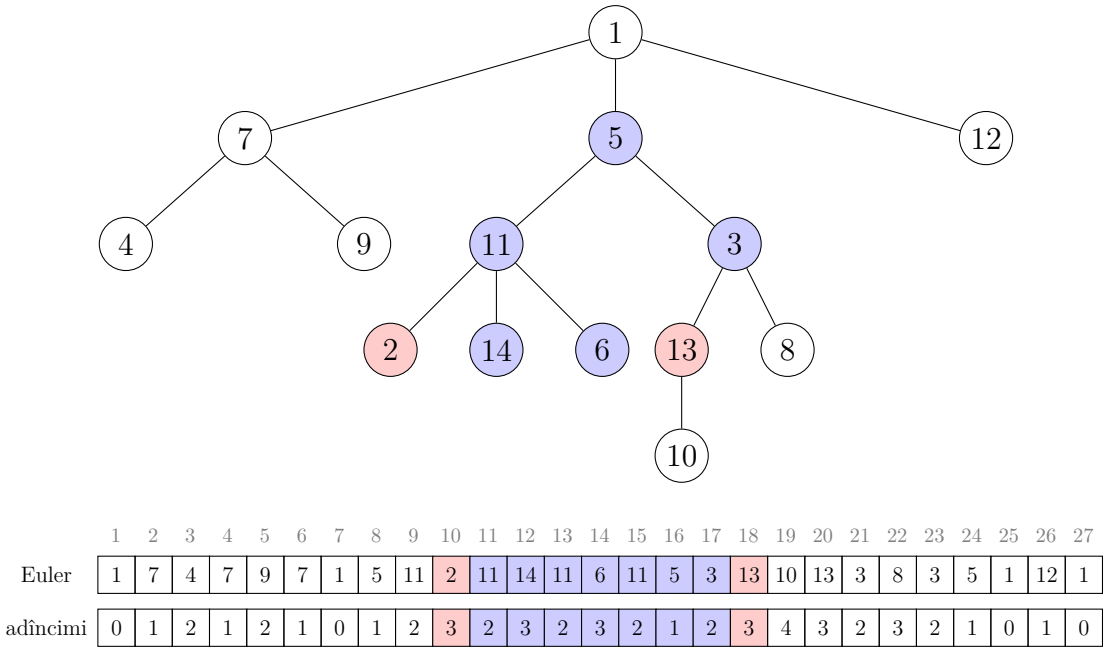


Figura 10.1: Aflarea LCA printr-o liniarizare Euler cu repetiție. LCA(2,13) se reduce la o interogare de minim pe intervalul [10,18]. Adîncimea minimă este 1, corespunzătoare nodului 5.

În continuare, vom mai discuta patru metode specifice arborilor, respectiv:

metodă	**preprocesare**	**interogări**	**memorie extra**
Descompunere în radical	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(q\sqrt{n})$	$\mathcal{O}(n)$
Binary lifting ($\log n$ pointeri)	$\mathcal{O}(n \log n)$	$\mathcal{O}(q \log n)$	$\mathcal{O}(n \log n)$
Binary lifting (2 pointeri)	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(q \log n)$	$\mathcal{O}(n)$
Tarjan offline	$\mathcal{O}(q + n \log^* n)$	—	$\mathcal{O}(n)$

Tabela 10.2: Metode pentru aflarea LCA.

10.3 LCA cu descompunere în radical

Următoarele trei metode folosesc noțiunea de *jump pointers*: pointeri la strămoși care ne ajută să accelerăm urcarea din u și din v în căutarea LCA-ului. Pentru descompunerea în radical,

- Fiecare nod ține un pointer la părinte și unul la strămoșul aflat cu $\sqrt{n}$ noduri mai sus.
- Construcția evidentă durează $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$: din fiecare nod, urcăm $\sqrt{n}$ niveluri. Ea poate fi redusă la $\mathcal{O}(n)$ dacă menținem stiva DFS pe durata parcurgerii.
- Fiecare interogare durează $\mathcal{O}(\sqrt{n})$.
- Variantă: fiecare nod stochează un pointer la cel mai de jos strămoș de adîncime multiplu de $\sqrt{n}$.

implementare

10.4 LCA cu binary lifting ($\log n$ pointeri per nod)

- Fiecare nod ține pointeri la strămoșii aflați mai sus cu 1, 2, 4, 8... niveluri.
- Construcția durează $\mathcal{O}(n \log n)$, similară algoritmului de RMQ.
- Necesită $\mathcal{O}(n \log n)$ memorie.
- Fiecare interogare durează $\mathcal{O}(\log n)$.
  - Deci nu prea mai merită. Pe vector plăteam memoria $\mathcal{O}(n \log n)$ pentru că interogările durau $\mathcal{O}(1)$.

Detaliu de implementare

Metodele cu *jump pointers* pot fi implementate în două feluri:

1. Aducem nodurile la aceeași adîncime. Apoi urcăm în paralel cu ambele pînă la strămoșul comun.
2. Îl urcăm pe u cît timp nu devine strămoș al lui v. La final, u este LCA-ul.

A doua implementare (cu test de strămoș) este mai scurtă și puțin mai rapidă.

implementări

10.5 LCA cu binary lifting (2 pointeri per nod)

- Un articol bun pe Codeforces (imaginile sînt foarte utile).
- Fiecare nod x ține un pointer la părinte și un pointer numit jump, construit după regula:
- Fie y părintele lui x, fie $z = jump[y]$ și fie $t = jump[z]$.
- Dacă distanțele între y-z și z-t sînt egale, atunci $jump[x] = t$.
- Altfel $jump[x] = y$.
- Iau naștere niște pointeri cu o structură curioasă. Cei pasionați pot citi despre secvență pe OEIS, secvențele A082850 și A182105.
- Folosim această informație pentru a găsi LCA în $\mathcal{O}(\log n)$.
- Orice structură de pointeri „aproximativ" logaritmică funcționează aici. Am făcut și un experiment cu formula LSB (exemplu: un nod la adîncime $20 = 10100_2$ va pointa patru nivele mai sus).

implementări

10.6 LCA cu algoritmul lui Tarjan (offline)

- Funcționează cînd interogările sînt date în avans.
- Distribuie interogările după noduri. Interogarea (u, v) este distribuită în listele lui u și v.
- Răspunde la interogări într-un singur DFS (!).
- Principiu de bază: grupăm nodurile deja vizitate („negre") și pe cele în curs de vizitare („gri") în mulțimi disjuncte (cu *union-find*).

- Fiecare mulțime va conține exact un nod gri, plus toți descendenții săi, cu excepția nodului gri în care se află acum DFS-ul. La terminarea unui nod gri, el este unit cu părintele său.
- Putem răspunde la o interogare (u, v) în momentul în care v este negru, iar pe u tocmai îl vizităm. Răspunsul (LCA) este nodul gri din mulțimea lui v.

implementare

10.7 Benchmarks

Am făcut aceste teste pe un arbore cu 200.000 de noduri, cu un lanț de cel puțin 150.000 de noduri. Fișierele de intrare au 5,2 MB.

- Tarjan: 160 ms
- *binary lifting*, doi pointeri (cu test de strămoș sau nu): 190 ms
- *binary lifting*, doi pointeri (metoda LSB): 250 ms
- *binary lifting*, $\log n$ pointeri, cu test de strămoș: 290 ms
- *binary lifting*, $\log n$ pointeri: 320 ms
- descompunere în radical: 900 ms

Concluzii: cînd interogările sînt date în avans, Tarjan cîștigă. În rest, metodele cu *binary lifting* cu doar doi pointeri per nod sînt mai rapide și consumă mai puțină memorie decît metoda cu $\log n$ pointeri per nod.

10.8 Probleme

10.8.1 Problema Gold Transfer (Codeforces)

enunț • sursă

Atenție mare la garanția din enunț: $c_i > c_{p_i}$. Cu alte cuvinte, pentru orice operație de cumpărare trebuie să pornim din rădăcină spre nodul u și să cumpărăm orice cantități disponibile, pînă satisfacem cererea.

Cu timpul, nodurile de la rădăcină se vor goli, deci pare o idee bună să găsim rapid cel mai de jos strămoș care încă are aur disponibil. Dacă reușim să-l găsim în $\mathcal{O}(f(n))$ (intenția problemei fiind $f(n) = \log n$), atunci complexitatea globală va fi $\mathcal{O}(q \cdot f(n) + n)$. De ce? Din acel strămoș putem parcurge lanțul în jos pas cu pas, cumpărînd tot aurul disponibil, pînă satisfacem cererea. Fiecare nod poate fi golit cel mult o dată, deci efortul total pentru parcurgerea lanțurilor este $\mathcal{O}(n)$.

Detalii de implementare

Arborele este dinamic, deci nu putem construi o liniarizare.

Am ales să accelerez urcarea în arbore cu *binary lifting* cu doi pointeri, dar orice altă metodă este acceptabilă.

Odată ce golim un nod, avem nevoie să coborîm în fiul său care duce spre nodul original. Am ales să fac acest lucru cu o stivă, dar soluția este cam lentă (2x față de altele).

Întrucît nu avem de ce să parcurgem toți fiii unui nod, nu avem nevoie de liste de adiacență, ci doar de pointeri la părinte.

10.8.2 Problema A and B and Lecture Rooms (Codeforces)

enunț • sursă

Problema cere să răspundem la m întrebări de forma: Date fiind nodurile u și v (posibil egale), cîte noduri din arbore se află la distanță egală de u și de v?

Pentru soluția teoretică, următoarea vizualizare este utilă. Să „atîrnăm" arborele de nodurile u și v, ca pe o ghirlandă bine întinsă. Atunci calea cea mai scurtă $u - v$ va fi orizontală, iar de lanțurile de pe cale vor atîrna restul subarborilor.

Dacă distanța $u - v$ este impară, atunci răspunsul este 0. Dacă distanța este pară, atunci fie w nodul de la jumătatea distanței. Nodurile aflate la distanță egală de u și de v vor fi w și orice nod din subarborii care atîrnă din w.

În practică vom alege o rădăcină și vom precalcula informații pentru LCA. Apoi, eu am redus problema la următoarele cazuri (poate se poate și mai simplu):

1. Dacă distanța $u - v$ este impară, răspunsul este 0.
2. Dacă $u = v$, răspunsul este n.
3. Dacă u și v au adîncimi egale, atunci răspunsul este: mărimea subarborelui lui $LCA(u, v)$ minus mărimile subarborilor fiilor lui $LCA(u, v)$ care pornesc către u, respectiv către v.
4. Altfel, să presupunem că u are adîncime mai mare decît v. Atunci nodul w este undeva mai jos de LCA, mergînd către u. Răspunsul este: mărimea subarborelui lui w minus mărimea subarborelui fiului lui w care pornește către u.

Detalii de implementare

Punctul (4) presupune să calculăm al k-lea strămoș. De exemplu, dacă adîncimile sînt $d[u] = 50$, $d[v] = 20$ și $d[LCA] = 10$, atunci distanța $u - v$ este $40 + 10 = 50$, jumătatea distanței este 25, iar nodul w este al 25-lea strămoș al lui u.

De aceea, metoda lui Tarjan nu ne prea ajută, ci avem nevoie de o metodă cu *jump pointers*.

La punctele (3) și (4), pentru a afla „fiul lui w care pornește către u", putem refolosi informațiile pentru al k-lea strămoș. Dacă notăm cu k diferența pe înălțime între w și u, atunci răspunsul este al $k - 1$-lea strămoș al lui u.

La arbori, multe informații sînt redundante și putem stoca doar o submulțime. Exemple:

- Mărimea subarborelui lui u nu trebuie stocată implicit dacă cunoaștem timpii DFS, ci poate fi calculată ca $t_o[u] - t_i[u] + 1$.
- Paritatea distanței poate fi calculată fără a calcula distanța efectivă. Calculăm doar suma adîncimilor.
- Al k-lea strămoș al unui nod poate fi găsit ca strămoșul de la adîncimea $d[u] - k$ al unui nod, dacă cunoaștem adîncimile nodurilor.

10.8.3 Problema Company (Codeforces)

enunț • sursă

Problema poate fi rezumată astfel: dintre toate nodurile cu numere de la l la r, cum putem elimina un nod astfel încît LCA-ul celor rămase să aibă o adîncime cît mai mare, raportată la rădăcină?

Întrebarea teoretică la care trebuie să răspundem este: care este LCA-ul unei submulțimi de noduri? Observăm că nu este nevoie să iterăm prin toate, ci este suficient să calculăm LCA-ul între primul și ultimul nod în ordinea descoperirii lor în DFS. De aceea, ca să încercăm să coborîm LCA-ul, trebuie să eliminăm unul dintre aceste noduri. Altfel LCA-ul submulțimii după eliminarea unui nod va rămîne nemodificat față de LCA-ul original.

Să presupunem că găsim aceste noduri, fie ele x și y. Încercăm să îl eliminăm pe x și să calculăm LCA-ul submulțimii $[l, x-1] \cup [x+1, r]$. Apoi îl eliminăm pe y și calculăm LCA-ul submulțimii $[l, y-1] \cup [y+1, r]$. Afișăm varianta care duce la un LCA de adîncime maximă.

Detalii de implementare

Ca să găsim timpii DFS minim/maxim ai nodurilor din intervalul $[l, r]$, putem construi un vector $t[]$ unde $t[u]$ este timpul vizitării nodului u. Astfel reducem subproblema la una de RMQ. Pentru a deduce, din acești timpi, nodul efectiv (primul nod vizitat dintre toate din $[l, r]$) este suficient un vector $inv[]$ unde $inv[i]$ este nodul vizitat la momentul i. Practic t și inv sînt permutări inverse.

Pentru intervalele la care ajungem după eliminarea lui x și y (respectiv $[l, x-1]$, $[x+1, r]$ și celelalte) avem nevoie să aflăm LCA-ul, deci avem nevoie tot de RMQ ca să aflăm primul și ultimul nod în ordinea DFS. Dar am făcut următoarea observație care reduce mult numărul de interogări.

Fie a, b, c, d primul, al doilea, penultimul și respectiv ultimul nod din intervalul $[l, r]$, în ordinea DFS. Atunci iau naștere două cazuri:

- Dacă îl eliminăm pe a, LCA-ul nodurilor rămase este $LCA(b, d)$.
- Dacă îl eliminăm pe d, LCA-ul nodurilor rămase este $LCA(a, c)$.

De aceea, am proiectat o structură de date care să returneze, pentru o interogare $[l, r]$, primele două minime și primele două maxime din intervalul $[l, r]$. Practic structura returnează exact cele patru valori a, b, c, d.

Putem folosi RMQ cu sparse table, cu atenție la detalii la calculul celui de-al doilea maxim/minim (intervalele de lungime putere a lui 2 pot fi suprapuse). Dar nu-mi place ideea de a consuma memorie $\mathcal{O}(n \log n)$ fără rost. 😐 De aceea, am implementat structura ca pe un arbore de intervale. Operația critică este combinarea a două tupluri (a', b', c', d') și (a'', b'', c'', d''). Implementarea este relativ ușoară:

- Dacă $a' < a''$ atunci primul minim este a', iar al doilea minim este $\min(b', a'')$.
- Dacă $a' \geq a''$ atunci primul minim este a'', iar al doilea minim este $\min(b'', a')$.
- Similar pentru maxime.

Sursa mea este printre cele mai rapide, cu excepția celor care parsează intrarea. Suspectez că ajută mult (1) economia de memorie și (2) calculul simultan al minimelor și al maximelor, în aceeași structură de date.

10.8.4 Problema Duff in the Army (Codeforces)

enunț • sursă • coloană sonoră 🙂

Rezumat: Se dă un arbore cu n noduri și m locuitori. Locuitorul i locuiește în orașul c_i. Răspundeți la q interogări de forma (u, v, a) cu semnificația: tipăriți primii a locuitori, ordonați după ID, care locuiesc pe calea (u, v). Notă: $a \leq 10$.

Problema se duce tot în direcția aflării LCA. Dacă $LCA(u, v) = w$, și dacă aflăm populațiile pe căile (u, w) și (v, w), putem să le interclasăm în $\mathcal{O}(a)$ și să păstrăm cele mai mici a valori.

Cum aflăm populația pe o cale? Nu văd o soluție în $\mathcal{O}(a + \log n)$, dar $\mathcal{O}(a \log n)$ este facilă. Orice algoritm de LCA ne oferă această complexitate dacă precalculăm, împreună cu pointerii în sus, și populația acoperită de acei pointeri. De exemplu, cu metoda *binary lifting*, fiecare din pointerii peste 1, 2, 4, 8, ... niveluri reține și primii a membri ai populației de pe acea cale. Populația pe calea de lungime 16 se obține interclasînd cele două populații pe căile de lungime 8 și păstrînd cel mult 10 minime.

Atenție la metoda folosită! *Binary lifting* cu memorie $\mathcal{O}(n \log n)$ va necesita $100\,000 \times 18 \times 10$ întregi, adică 72 MB în plus. Este fezabil, dar este de evitat. Implementarea mea este printre cele mai rapide și nu face nimic deosebit, doar folosește *binary lifting* cu doi pointeri. Economia de memorie înseamnă economie de timp.

Ne întîlnim, din nou, cu o situație care cere să particularizați structurile de date, nu doar să le pictați. Un alt exemplu de astfel de problemă este: să se preproceseze un arbore astfel încît să putem răspunde eficient la interogări de forma $(u, v) =$ maximul pe calea $u - v$. Și aici putem face fiecare *jump pointer* să rețină maximul pe calea subîntinsă. Problema are și soluții mai eficiente, dar aceasta este relativ elementară.

Capitolul 11

Algoritmul lui Mo pe arbore

11.1 Limitele liniarizărilor

Ca o scurtă recapitulare, liniarizările ne ajută:

- pentru interogări pe subarbore: liniarizarea DFS atribuie fiecărui subarbore un interval compact din vector;
- pentru interogări pe calea de la un nod la rădăcină: liniarizarea Euler + vectorii de diferențe atribuie fiecărei căi un prefix din vector.

Uneori știm să procesăm și interogări pe căi arbitrare, vezi problema Max Flow. Dar algoritmii funcționează exprimînd calea (u, v) ca pe o combinație de căi (u, r), (v, r) și (l, r), unde r este rădăcina arborelui, iar $l = LCA(u, v)$. Așadar, avem nevoie ca funcțiile pe fiecare cale să fie **inversabile** (sume, xor-uri). În probleme de minim/maxim, valori distincte etc., ce știm pînă acum este insuficient.

11.2 Reducerea la algoritmul lui Mo

Putem folosi algoritmul lui Mo pentru a răspunde la interogări pe căi în unele cazuri neinversabile. Găsiți un tutorial destul de bun pe Codeforces, pe care îl vom relua aici. În esență,

1. Construim o liniarizare de tip Euler (două apariții pentru fiecare nod).
2. Transformăm interogările pe căi (u, v) în interogări pe intervale în liniarizare.
3. Sortăm interogările și le aflăm răspunsurile cu algoritmul lui Mo.

Desigur, misterul este la pasul 2. De aceea, să considerăm...

11.3 Un exemplu

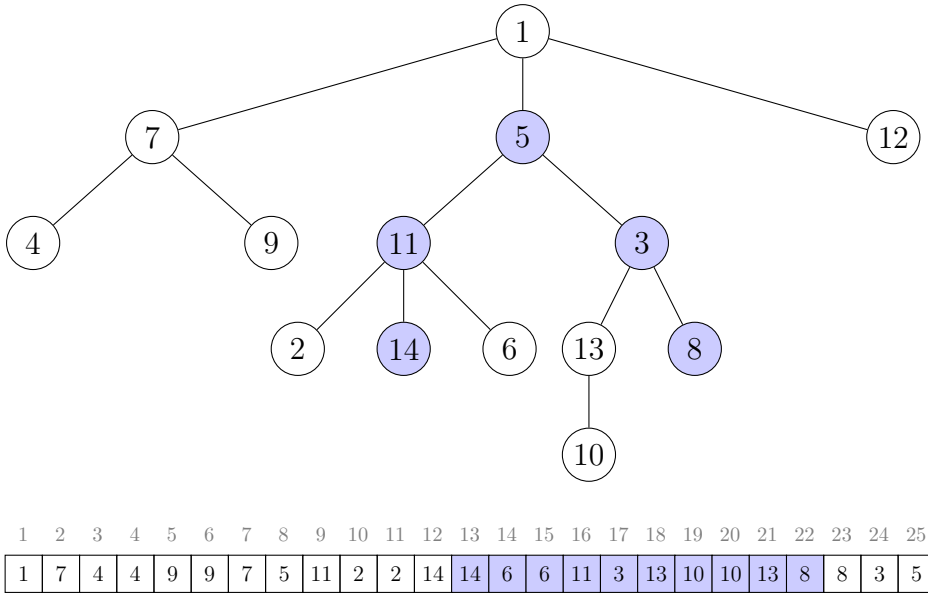


Figura 11.1: Un arbore cu liniarizarea Euler și intervalul corespunzător interogării pe calea $(14, 8)$.

Să considerăm interogarea $(14, 8)$, privitoare la nodurile 14, 11, 5, 3, 8. În liniarizarea Euler, ne interesează intervalul dintre timpii 13 și 22. Am ales acest interval deoarece el se întinde de la **ultima** apariție a lui 14 pînă la **prima** apariție a lui 8. Să facem niște observații privitoare la acest interval.

1. Nodurile 14, 11, 3 și 8 apar exact o dată.
2. Nodul $5 = LCA(14, 8)$ nu apare.
3. Nodurile 6, 13 și 10 apar de două ori.
4. Celelalte noduri (1, 2 etc.) nu apar.

Ne putem convinge ușor că aceste observații sînt generale. Trebuie doar să urmărim evoluția DFS-ului. De exemplu, observația (1): pornim de la momentul cînd DFS-ul părăsește nodul 14, deci va părăsi în curînd și nodul 11. Apoi explorează nodurile 3 și 8, dar nu apucă să pe părăsească în intervalul ales. De aceea, toate aceste noduri apar exact o dată.

11.4 Un caz particular

Mai trebuie să tratăm și cazul cînd, pentru o interogare (u, v), avem $LCA(u, v) = u$, cu alte cuvinte u este strămoș al lui v.

Clarificare: mereu vom ordona perechea (u, v) în ordinea descoperirii în DFS. De aceea LCA-ul poate fi doar u, niciodată v. Aceasta deoarece un nod este descoperit înaintea tuturor descendenților săi.

Pentru interogarea (5,14), privitoare la nodurile 5, 11, și 14, vom considera intervalul de timp [8, 12], cuprins între primele apariții ale lui 5 și 14. Se schimbă doar observația (2): LCA-ul apare

și el exact o dată.

11.5 Descrierea completă

Pentru o interogare (u, v) cu $t_i[u] < t_i[v]$:

1. Dacă u este strămoș al lui v, atunci considerăm intervalul din liniarizare $[t_i[u], t_i[v]]$. Nodurile de pe cale sînt cele care apar exact o dată în acest interval.
2. Dacă u **nu** este strămoș al lui v, atunci considerăm intervalul $[t_o[u], t_i[v]]$. Nodurile de pe cale sînt cele care apar exact o dată, plus nodul $LCA(u, v)$.

11.6 Structura de date necesară

Acum putem specifica ultimul amănunt: ce anume stochează structura de date pentru intervalul curent? Desigur, depinde de problemă, dar un mecanism este general.

Structura trebuie să țină minte ce noduri apar în ea exact o dată. De exemplu, pentru subsecvența (5 11 2 2 14), structura trebuie să știe că nodurile 5, 11 și 14 apar exact o dată. Dacă extindem spre dreapta secvența și încorporăm încă un 14, informația despre nodul 14 trebuie **ștearsă** din structură, căci 14 nu mai este pe cale.

Pe măsură ce extindem și contractăm intervalul cu algoritmul lui Mo, la anumite momente structura va reține date pentru intervale care nu corespund unor căi. Dar asta este OK cîtă vreme, în momentul unei interogări, structura este coerentă.

11.7 Probleme

11.7.1 Problema Dating (Codeforces)

enunț • surse

Dacă doriți probleme suplimentare, puteți încerca:

- ușoară: Count on a Tree II (SPOJ)
- grea: So Close Yet So Far (CodeChef)

Problema se încadrează destul de clar în situația sus-menționată. Interogările sînt pe cale și nu sînt ușor de combinat din bucăți. Dacă notăm cu $l = LCA(u, v)$, nu este evident cum am putea calcula, apoi însuma, valorile pe căile (u, l) și (l, v).

În schimb, dacă ne vine ideea să încercăm algoritmul lui Mo pe arbore, soluția este facilă. Structura curentă menține

- un boolean pentru fiecare nod, ca să știm ce noduri se află în structură;
- frecvența numerelor favorite, separat pentru fete și pentru băieți.

Includerea / excluderea unui nod este ușoară. Pe parcurs, menținem în permanență răspunsul (numărul de perechi pe care le putem forma).

Anexa include tot codul, dar esența este:

```
struct mo_tracker {
  bool on[MAX_NODES + 1];  // nodurile care apar exact o dată în interval
  int f[MAX_NODES + 1][2]; // frecvența numerelor favorite pentru fiecare gen
  int l, r;
  unsigned num_pairs;

  void init() {
    l = 1;
    r = 0;
  }

  void toggle(int pos) {
    int u = euler[pos];
    on[u] = !on[u];
    int sign = on[u] ? +1 : -1;
    f[nd[u].fav][nd[u].gender] += sign;
    num_pairs += sign * f[nd[u].fav][!nd[u].gender];
  }

  unsigned query(int target_l, int target_r, int extra_fav, bool extra_gender) {
    while (l > target_l) {
      toggle(--l);
    }
    while (r < target_r) {
      toggle(++r);
    }
    while (l < target_l) {
      toggle(l++);
    }
    while (r > target_r) {
      toggle(r--);
    }

    if (extra_fav) {
      return num_pairs + f[extra_fav][!extra_gender];
    } else {
      return num_pairs;
    }
  }
};
```

Comparația implementărilor

Implementarea pe care o consideram mai eficientă este cea cu Tarjan pentru LCA și cu liste proprii. Dar ea este doar cu 10% mai rapidă decît implementarea mai scurtă, cu metoda celor doi pointeri pentru LCA și cu vectori STL. Fie Codeforces este foarte neconsecvent, fie eu nu mai înțeleg lumea. 🥲

Capitolul 12

Descompunere *heavy-light*

Descompunerea *heavy-light* (engl. *heavy-light decomposition* sau HLD, numită și *heavy path decomposition*) este încă o tehnică de liniarizare a arborilor, utilă pentru interogări pe căi.

HLD costă un factor suplimentar de $\mathcal{O}(\log n)$, așadar genul de întrebări la care răspundem în $\mathcal{O}(\log n)$ pe vector ne vor costa $\mathcal{O}(\log^2 n)$ pe arbore.

Înainte de a studia HLD, subliniez că este o unealtă puternică, dar greu de codat și lentă. Înainte de a vă repezi la ea, întrebați-vă dacă nu există o soluție mai simplă, adaptată nevoilor problemei. HLD intră doar în materia de lot (nu de baraj).

12.1 Limitările structurilor anterioare

Să pornim de la următoarea cerință. Se dă un arbore cu n noduri. Fiecare nod are o valoare. Trebuie să procesăm q operații de două tipuri:

1. `update(v, x)`: Valoarea nodului v devine x.
2. `max(u, v)`: Găsește valoarea maximă de pe lanțul $u - v$.

Să trecem în revistă uneltele pe care le-am studiat pînă acum.

- Un simplu DFS nu pare că poate propaga suficiente informații.
- Liniarizarea DFS se pretează la interogări pe subarbore, nu pe cale.
- Liniarizarea Euler se pretează la interogări pe calea de la un nod u la rădăcină. Pentru interogări de maxime, nu putem descompune căi arbitrare în diferențe de căi pînă la rădăcină.
- Tehnica *small-to large* nu ne ajută aici.
- LCA + *binary lifting* rezolvă doar problema fără actualizări. Fiecare pointer notează și maximul nodurilor peste care trece. Dar la actualizare, dacă avem un nod cu $\mathcal{O}(n)$ fii, vom fi nevoiți să actualizăm informația din $\mathcal{O}(n)$ pointeri.
- Similar și pentru orice tentativă de descompunere în radical.
- Algoritmul lui Mo pe arbore funcționează, dar lent. Structura pentru intervalul curent

trebuie să admită inserarea și ștergerea de valori și interogarea de maxim. Complexitatea va fi $\mathcal{O}(q\sqrt{n}\log n)$.

12.2 Descompunerea

Știm deja că liniarizarea DFS garantează că orice subarbore corespunde unui interval compact. Dar dorim mai mult de atît. Să examinăm Figura 12.1

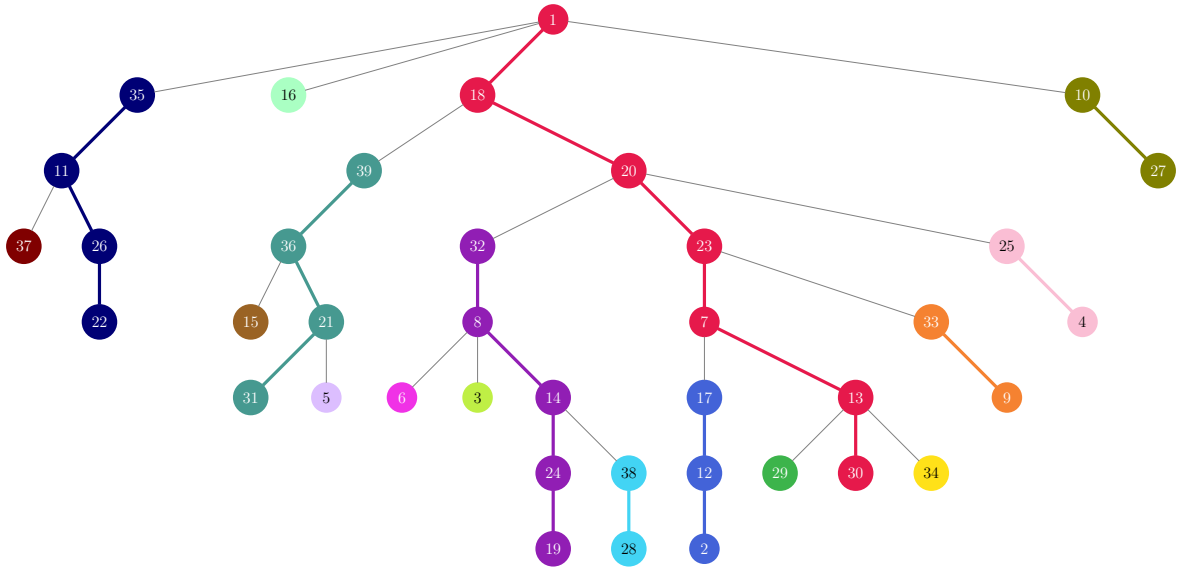


Figura 12.1: Un arbore în care muchia grea a fiecărui nod este îngroșată și colorată. Fiecare culoare indică un lanț de muchii grele consecutive.

Pentru fiecare nod intern u din arbore, identificăm fiul v cu subarborele maxim (cu cele mai multe noduri). Numim nodul v **fiu greu** (engl. *heavy*) al lui u, iar muchia (u, v) **muchie grea**. Ceilalți fii ai lui u și celelalte muchii care coboară din u se numesc **fii ușori** (engl. *light*), respectiv **muchii ușoare**. De exemplu, fiul greu al rădăcinii 1 este 18. Figura 1 indică muchiile ușoare cu linii subțiri, iar muchiile grele cu linii groase și colorate. Dacă un nod are mai mulți fii cu același număr maxim de noduri în subarbore, îl putem alege pe oricare ca greu.

Observăm că, dacă pornim din orice nod, putem urma muchia grea pînă la o frunză. Astfel iau naștere **lanțuri grele**. Am colorat muchiile grele din același lanț folosind aceeași culoare.

Mai facem un pas esențial: reorganizăm lista de adiacență a fiecărui nod ca să mutăm fiul greu primul (vom vedea cum implementăm asta în practică). Este important că această modificare nu schimbă răspunsurile la problemele tipice de arbori. Ordinea fiilor nu contează. Pentru arborele din Figura 12.1, versiunea reorganizată apare în Figura 12.2.

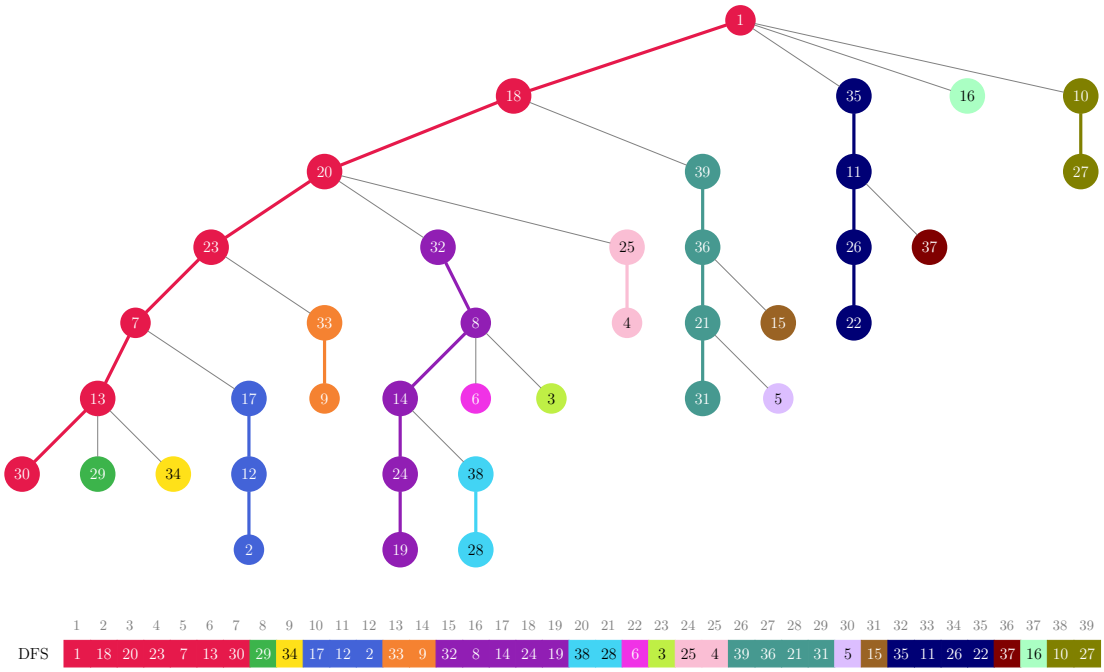


Figura 12.2: Același arbore în care, în fiecare listă de adiacență, am mutat fiul greu primul. Lanțurile corespund la intervale contigue în liniarizarea DFS.

Despre acest arbore putem da două garanții foarte puternice.

1. Lanțurile formate din muchii grele corespund la intervale contigue în liniarizare. Într-adevăr, fiecare fiu greu este primul nod pe care îl vizitează părintele său. De exemplu, la intrarea în nodul 32, următoarele noduri vizitate vor fi 8, 14, 24 și 19.
2. Calea de la orice nod la rădăcină vizitează, total sau parțial, cel mult $\log n$ lanțuri. Echivalent, calea conține cel mult $\log n$ muchii ușoare. Demonstrația este identică cu cea de la metoda small to large: când urcăm dintr-un fiu v în părintele u aflat pe alt lanț, prin definiție traversăm o muchie ușoară. Deci v este fiu ușor al lui u, ceea ce înseamnă că v are un frate greu h. Subarborele lui h este cel puțin la fel de mare ca al lui v, deci subarborele lui u este cel puțin dublu față de subarborele lui v.

Proprietatea (1) ne spune că putem trata lanțurile ca pe niște vectori. În particular, putem construi peste ele structuri de date ca arbori Fenwick sau arbori de intervale, care ne dau informații despre porțiuni de lanțuri în $\mathcal{O}(\log n)$. Proprietatea (2) ne spune că orice cale $u - v$ vizitează $\mathcal{O}(\log n)$ lanțuri. Avem, așadar, o metodă generală de a răspunde la interogări pe căi în $\mathcal{O}(\log^2 n)$.

12.3 Detalii de implementare

Facem întîi un DFS pentru calcularea mărimii subarborilor și a fiilor grei. Nu modificăm listele de adiacență, ci doar calculăm un cîmp `heavy` pe fiecare nod. Apoi facem un al doilea DFS, care liniarizează arborele, apelînd întîi fiul greu, apoi pe ceilalți.

Nu construim cîte o structură (AIB, AINT etc.) pe fiecare lanț! Ca la orice liniarizare, construim o singură structură peste toate cele n noduri. Este datoria programului să nu acceseze intervale

care „încalecă” mai multe lanțuri.

Ce structură folosim depinde de natura problemei. Dacă problema cere informații pe căi de la noduri la rădăcină, atunci căile vizitează doar prefixe (capetele de sus) ale lanțurilor. Deci s-ar putea ca un AIB să fie suficient. Dacă problema cere informații între orice două noduri, atunci căile pot vizita și porțiuni din mijlocul lanțurilor. Deci probabil avem nevoie de arbori de segmente.

Nu este necesar să implementăm LCA. În loc de asta, fiecare nod menține un pointer la capătul superior al lanțului. Astfel urcăm „naiv” din lanț în lanț, căci știm deja că numărul de lanțuri este logaritmic.

12.4 Probleme

12.4.1 Problema Heavy Path Decomposition (Infoarena)

enunț • surse

Aceasta este exact problema studiată la teorie. Vom citi codul.

Prima versiune este cea „canonică”. A doua versiune face o optimizare minoră care elimină nevoia calculării înălțimii nodurilor. Ea pornește de la următoarea observație. Dorim ca, odată ce u ajunge pe lanțul comun, să se oprească din urcat și să-l aștepte și pe v (pe acel lanț comun vom face ultima interogare). Dar, dacă u a ajuns pe lanțul comun, iar v încă nu, atunci în mod necesar $t_{in}[u] < t_{in}[v]$, căci toate nodurile de pe acel lanț sînt vizitate primele în DFS, fiind noduri heavy. Așadar, este suficient să comparăm timpii DFS ai lui u și v.

Subliniem că în funcția `query` parcurgem mereu lanțul al cărui capăt de sus are adîncime mai mare. De ce nu comparăm pur și simplu înălțimile lui u și v? Dați un contraexemplu!

O problemă echivalentă este Path Queries II (CSES).

12.4.2 Problema Disruption (USACO)

enunț • surse

Vom discuta trei soluții, de amorul artei.

Soluția cu HLD

Să considerăm o cale de înlocuire (u, v). Căror muchii le poate ea suplini dispariția? Doar celor de pe calea $u - v$ din arbore. Așadar, o soluție teoretică este: pentru fiecare cale de înlocuire (u, v) de cost c, notifică toate muchiile de pe calea $u - v$ că au la dispoziție o înlocuire de cost c. După procesarea tuturor căilor, pentru fiecare muchie tipărește costul minim despre care a fost notificată, sau -1 dacă muchia nu a primit notificări.

Concret, ce înseamnă aceste notificări? Fie $l = LCA(u, v)$. Atunci vrem să marcăm costul c pe căile $u - l$ și $v - l$. De aici ne poate veni ideea descompunerii *heavy-light*, care garantează că o cale de înlocuire va genera cel mult $\mathcal{O}(\log n)$ intervale de actualizat.

Ce structură folosim? Pe fiecare lanț avem nevoie de operațiile:

1. `range_set(l, r, c)`: pe fiecare poziție $l \leq i \leq r$, atribuie $v[i] = \min(v[i], c)$.
2. `query(i)`: returnează $v[i]$.

Desigur, `range_set` va descompune $[l, r]$ în niște intervale și va scrie valoarea c pe acele intervale. Cum procedăm după aceasta? Nu vă repeziți la implementarea cu propagare *lazy*! Interogările sînt punctuale, nu pe interval, deci este suficient să vizităm toți strămoșii unui nod (din aint) și să returnăm minimul valorilor găsite. Mai mult, toate interogările vor veni după toate actualizările. Deci putem face o singură propagare top-down la sfîrșitul actualizărilor. Atunci în fiecare frunză din aint vom avea exact răspunsul dorit.

Mai sînt două mici goluri de umplut:

1. Arborele de intervale trebuie inițializat cu ∞.
2. Conceptual, problema cere informații despre muchii. Dar, datorită DFS-ului, fiecare muchie unește un fiu de părintele său. Vom stoca informațiile în fiu.

Soluția cu *small-to-large*

Soluția oficială pornește de la altă observație teoretică. Orice muchie (u, v) poate fi înlocuită de o cale de înlocuire (x, y) cu proprietatea că x și y se află de părți diferite ale muchiei (u, v). Formulată în termeni de DFS, condiția este: muchia de la orice nod u la părintele său poate fi înlocuită de orice cale de înlocuire (x, y) care are **exact** un capăt în subarborele lui u. Să denumim o astfel de cale de înlocuire **viabilă pentru** u.

Așadar, dorim ca fiecare nod u să-și calculeze mulțimea de căi viabile și să o raporteze pe cea de cost minim. Atunci mulțimea unui nod u provine din:

1. reuniunea mulțimilor fiilor,
2. plus căile care au un capăt chiar în u,
3. minus căile care apar de două ori în (1) și (2), deoarece o cale care începe și se termină în subarborele lui u nu este viabilă pentru u.

Putem folosi tehnica *small-to-large* pentru a garanta că fiecare element este transferat între mulțimi de cel mult $\log m$ ori. Mulțimile însăși trebuie să poată raporta valoarea minimă, deci vor avea un cost logaritmic (de exemplu, cu `std::set`). Complexitatea totală este $\mathcal{O}(n \log m + m \log^2 m)$.

Puteți găsi o implementare foarte concisă (dar cam lentă) aici. Ea stochează în seturi perechi $(cost, id)$: costul unei căi servește la găsirea costului minim, iar ID-ul servește la găsirea duplicatelor, pentru eliminarea lor. Eu am ales o modalitate diferită: am sortat căile de înlocuire după cost, astfel încît ID-urile mai mici să corespundă la costuri mai mici.

Iată încă un detaliu de folosire a `set`-urilor. O implementare naivă va insera sau șterge căi cu următorul cod:

```
if (s.count(id)) {
  s.erase(id);
} else {
  s.insert(id);
}
```

Totuși, acest cod face două căutări per operație: una pentru găsirea elementului și a doua pentru inserare sau ștergere, după caz. Dar se poate și cu o singură căutare! Funcția insert, dacă eșuează, returnează un iterator la elementul care a cauzat eșecul.

```
std::pair<set::iterator, bool> p = s.insert(id);
if (!p.second) {
  // Inserarea a eșuat, iar p.first pointează chiar la elementul-duplicat.
  s.erase(p.first);
}
```

Soluția cu DFS exclusiv

Dacă vă amintiți, la problema Tree and Queries am discutat un DFS special care folosește o singură structură de date globală. DFS-ul garantează că fiecare nod u va avea acces, la un moment dat în timp, la structura de date care conține informații doar despre subarborele lui u.

Putem folosi acest algoritm și aici. Avem nevoie să includem/excludem noduri din structură, ceea ce presupune să includem/excludem căile care au un capăt în acele noduri. Așadar, avem nevoie de o structură de date cu operațiile:

1. Activează/dezactivează o poziție.
2. Returnează poziția minimă activă (sau o valoare specială dacă nu există poziții active).

Un AIB este suficient, cu căutare binară pentru (2). Ce complexitate are această soluție?

Benchmarks

Testele sînt mici, deci nu prea concludente, dar iată rezultatele:

- Cu descompunere *heavy-light*: 30 ms, 7 MB.
- Cu *small-to-large*: 74 ms, 18 MB.
- Cu *small-to-large* exclusiv: 55 ms, 12 MB.

12.4.3 Problema Rafaela (Lot 2014)

enunț • surse

Ca observație preliminară, interogările pot fi reformulate astfel: dacă aș înrădăcina arborele în nodul u, care este populația maximă a unui subarbore al rădăcinii?

În practică vom fixa rădăcina în nodul 1. Fie $S(u)$ populația subarborelui nodului u. Iau naștere două cazuri:

1. Răspunsul la interogare este $S(1) - S(u)$ dacă populația maximă sosește pe muchia de la u la părinte. Desigur, $S(1)$ este populația întregului arbore, care este trivial de întreținut.
2. Răspunsul la interogare este $\max S(v)$, unde v este un fiu al lui u.

Soluție doar cu arbore de intervale

Pare natural să încercăm să menținem $S(u)$ pentru toate nodurile. Cînd populația lui u se modifică cu Δ, toți strămoșii lui u cîștigă Δ populație, deci parcurgem toate lanțurile de la u la rădăcină și adăugăm Δ pe prefixele corespunzătoare ale acestor lanțuri.

Cum stabilim maximul pentru cazul (2) de mai sus? Este nevoie de puțin spirit de observație. Dacă insistăm să interogăm doar fiii lui u, aceștia sînt dispersați prin liniarizare. Dar este suficient să interogăm **tot subarborele** lui u, fără u însuși. Nu avem cum să greșim, căci, dacă maximul s-ar afla într-un nepot sau strănepot al lui u, cu atît mai mult fiul din care provine acel nepot sau strănepot ar avea populație și mai mare. Așadar, aflăm subarborele maxim cu o interogare pe intervalul $[t_{in}[u] + 1, t_{out}[u]]$.

Implementarea necesită doar un arbore de intervale cu adăugare pe interval și maxim pe interval.

Soluție cu arbore de intervale + caz separat pentru fiul greu

Nu-mi place să dau doar soluții de idee. Pentru aceea există matematica. 😁 Iată și o soluție mai muncitorească.

Din nou, la actualizarea unui nod facem operații de adăugare pe interval pe toate lanțurile. Acum diferențiem cazul (2) în două subcazuri: Subarborele cu populație maximă îl are fiul greu sau unul dintre fiii ușori. Ca să evităm confuzia, reamintesc că fiul greu este ales după numărul de noduri, care nu are neapărat și populația maximă.

Fiul greu îl putem interoga în $\mathcal{O}(\log n)$. Putem chiar să folosim doar un arbore Fenwick (AIB) cu actualizare pe interval și interogare punctuală.

Nu ne permitem să interogăm toți fiii ușori, dar este suficient să-l aflăm eficient pe cel mai populat. Cel mai „ciobănește", fiecare nod poate menține un `std::multiset` cu mărimile subarborilor ușori (așadar nu și mărimea subarborelui greu). Atunci pentru a răspunde la interogări comparăm trei valori:

1. Părintele (populația totală minus populația nodului însuși).
2. Fiul greu.
3. Fiul ușor (maximul din `multiset`).

Ce implică actualizările în această structură? Partea frumoasă este că **nu** trebuie să actualizăm seturile nodurilor de pe fiecare lanț vizitat, căci acele lanțuri constau, prin definiție, din muchii grele. Trebuie actualizate doar nodurile-părinte ale fiecărui lanț, căci doar acele muchii sînt ușoare.

De amorul artei, putem folosi și o structură mai elegantă decît seturile STL. O parcurgere BFS este suficientă, căci în acea parcurgere fiii fiecărui nod devin vecini. Așadar, ne este suficient un arbore de intervale peste parcurgerea BFS, cu actualizare punctuală și interogare de maxim pe interval. Iată o implementare.

Am observat că testele nu pedepsesc iterarea naivă prin fiii ușori. Am trimis și o ultimă sursă care ia 100p astfel.

Soluție cu descompunere în radical

Includ și această soluție pentru familiarizarea cu astfel de alternative la HLD. Ea obține 70 de puncte.

Procesăm operațiile în blocuri de mărime circa $\sqrt{q}$. La începutul fiecărui bloc facem un DFS ca să calculăm $S(u)$ pentru toate nodurile. Acum, pentru o interogare în nodul u, am dori să luăm maximul dintre valorile pentru fiii lui u ai căror arbori nu au suferit modificări (valori pe care le știm deja) și valorile fiilor modificați, aduse la zi. Similar, exteriorul subarborelui lui u poate să fi suferit modificări.

Dacă avem 10 interogări într-un singur nod u, pe permitem să consultăm toți fiii lui u **o singură dată**. Asta face, de exemplu, DFS-ul, al cărui efort total este $\mathcal{O}(n)$. Nu ne permitem să iterăm prin toți fiii lui u pentru fiecare interogare, căci ajungem la $\mathcal{O}(q \cdot n)$, de exemplu pentru un arbore-stea cu toate interogările în centrul arborelui.

Observațiile-cheie sînt că există interogări despre cel mult $\sqrt{q}$ noduri, iar pentru fiecare nod u cel mult $\sqrt{q}$ dintre subarborii lui u au modificări.

Restul nu este trivial, dar sînt doar detalii de implementare care urmăresc să obțină:

1. Efort $\mathcal{O}(n)$ la începutul blocului.
2. Vizitarea fiilor nemodificați ai lui u o singură dată per bloc $\rightarrow$ efort total $\mathcal{O}(n)$ per bloc.
3. Vizitarea fiilor modificați o dată per interogare $\rightarrow$ efort $\mathcal{O}(\sqrt{q})$ per interogare.

Dacă facem asta, obținem complexitatea totală $\mathcal{O}((n+q)\sqrt{q})$.

Distribuim actualizările din bloc în noduri. Colectăm actualizările din bloc și le sortăm după timpul DFS. Este important să avem în vedere că nu toate actualizările se aplică tuturor interogărilor. Depinde de ordinea lor cronologică dinaintea sortării. Din punct de vedere al unui nod u, actualizările vor fi:

- actualizări în afara subarborelui lui u;
- actualizări în u însuși;
- actualizări în primul fiu al lui u;

- ...
- actualizări în ultimul fiu al lui u;
- actualizări în afara subarborelui lui u.

Astfel putem afla trei cantități pentru fiecare interogare

1. modificările din afara subarborelui (spre părinte);
2. modificările pe cel mai populat fiu nemodificat;
3. modificările pe fiecare fiu modificat.

Calculăm aceste informații într-o singură trecere prin fiii lui u. Categoriile (1) și (2) cer efort $\mathcal{O}(1)$, iar categoria (3) cere efort $\mathcal{O}(1)$ per interogare, căci trebuie să decidem dacă modificarea se aplică fiecărei interogări sau nu.

12.4.4 Problema Doi arbori (Lot 2024)

enunț • surse

Facem întîi o observație teoretică. Drumul cel mai scurt de la G_u la H_v este calea $u - v$ plus un ocol dus-întors de la unul dintre nodurile de pe calea $u - v$ la o frunză activă. Așadar problema se reduce la două subprobleme:

1. (simplă) Aflarea distanțelor între noduri.
2. (grea) Aflarea distanței minime de la orice drum de pe calea $u - v$ la o frunză activă.

Facem și o altă observație: nodul 1 poate fi și el frunză (în sensul că poate avea grad 1). Dacă înrădăcinați arborele în nodul 1 ca toată lumea, aceasta poate fi o sursă de buguri. Pare totuși că testele nu acoperă acest caz.

Soluția cu HLD

Să înrădăcinăm arborele în 1 și să construim HLD. Acum fie o interogare (u, v) și fie $w = LCA(u, v)$. Prin definiție, orice cale în arbore întîi urcă, apoi coboară (și urcușul și coborîșul pot avea lungime 0). De aceea, cînd căutăm calea spre cea mai apropiată frunză activă de orice nod de pe calea $u - v$ este suficient să tratăm cazurile:

1. Pornim dintr-un nod de pe cale și coborîm pînă la frunză.
2. Pornim din w, urcăm și apoi coborîm.

Vom stoca pe lanțuri informații care să ne permită să tratăm aceste două cazuri.

Cazul I: Drumul spre frunză coboară

Să considerăm unul dintre lanțurile vizitate pe calea $(u - w)$. Din acest lanț vom interoga o porțiune $[x, y]$. x este fie capătul de sus al lanțului, fie w. y este fie u, fie nodul în care se ancorează lanțul vizitat anterior.

Dacă drumul spre o frunză pornește chiar din y, atunci ne-ar ajuta să aflăm rapid adîncimea minimă a unei frunze active din subarborele lui y. Știm să facem asta cu un arbore de intervale S_1

cu actualizări punctuale și interogări de minim. La activarea unei frunze, notăm chiar adîncimea frunzei pe poziția corespunzătoare în liniarizare. La dezactivarea frunzei, notăm ∞. Putem afla adîncimea minimă a unei frunze din subarborele lui y cu o interogare în S_1 pe intervalul subîntins de y. Distanța pînă la frunza f este diferența de adîncimi dintre f și y.

Dacă drumul spre frunză pornește de undeva dintr-un nod-ancoră $a \in [x, y)$, atunci distanța pînă la frunză este diferența de adîncimi dintre frunză și a. Desigur, nu vrem să interogăm fiecare nod din $[x, y)$, dar facem următoarea observație. O frunză de adîncime 30 ancorată într-un nod de adîncime 20 are aceeași distanță (10) ca și o frunză de adîncime 31 ancorată într-un nod de adîncime 21. De aceea, menținem un al doilea arbore de intervale S_2 care stochează pentru un nod u **diferența** dintre adîncimea oricărei frunze din subarborele lui u și adîncimea lui u.

Cazul II: Drumul spre frunză urcă din w

Vom urca pe lanțuri pînă la rădăcină. Din nou, fie $[x, y]$ porțiunea din lanțul curent pe care o interogăm.

Dacă drumul spre frunză pornește chiar din y, atunci ne interesează chiar adîncimea frunzei, iar din lanțul $w - y -$ frunză aflăm imediat distanța de la calea $u - v$ la frunză. Arborele de intervale S_1 este util și aici.

Dacă drumul spre frunza f pornește dintr-un nod-ancoră $a \in [x, y)$, atunci distanța totală de la calea $u - v$ la f este (notînd cu $d(u)$ adîncimea nodului u):

$$[d(w) - d(a)] + [d(f) - d(a)] = d(w) + [d(f) - 2 \cdot d(a)]$$

De aceea, avem nevoie de un al treilea arbore de intervale, S_3, care stochează pentru un nod u diferența dintre adîncimea oricărei frunze din subarborele lui u și **dublul** adîncimii lui u.

Detaliu (esențial)

La schimbarea stării unei frunze f vom recalcula în arborii de intervale valorile următoarelor noduri:

- frunza f;
- nodul în care se ancorează lanțul frunzei;
- nodul în care se ancorează lanțul anterior;
- etc.

Remarcăm, în particular, că frunza f nu notifică alți strămoși de pe propriul ei lanț. Fie x un astfel de strămoș. Se poate întîmpla următorul scenariu:

- Frunza f este activată.
- O altă frunză f' din subarborele lui x este activată.
- f' declanșează actualizarea lui x, care va include și informații despre f.
- Frunza f este deactivată.
- x nu mai află niciodată despre dezactivarea lui f.

Soluția este ca, la propagarea în sus a unei modificări, să interogăm în S_1 **doar subarborele light al unui nod**. Ce modificare este necesară ca să putem identifica intervalul corespunzător din liniarizare?

Soluția cu descompunere în radical

Menționez foarte pe scurt și o soluție în $\mathcal{O}((n+q)\log q)$. Ea nu trece testele mari. Dar, în general, soluțiile cu descompunere în radical sînt o alternativă viabilă și posibil mai ușor de înțeles. Iar matematic $\sqrt{n}$ nu este departe de $\log^2 n$ pe plaja de valori pentru n din problemele obișnuite.

Precalculăm liniarizarea Euler cu repetiție a arborelui, peste care construim tabela rară de RMQ. Astfel putem răspunde la interogări de LCA în $\mathcal{O}(1)$ (avem nevoie de $\mathcal{O}(1)$ deoarece vom face $\mathcal{O}(q\sqrt{q})$ astfel de interogări).

Precalculăm *binary lifting*, preferabil varianta cu doar doi pointeri. Astfel vom putea calcula în $\mathcal{O}(\log n)$ o anumită informație pe căi.

Procesăm interogările în blocuri de mărime $\sqrt{q}$. Clasificăm frunzele active în două categorii:

1. Frunze safe: frunze active pe durata întregului bloc.
2. Frunze unsafe: frunze active pe porțiuni din bloc.

La începutul fiecărui bloc, facem următoarea preprocesare în $\mathcal{O}(n)$:

1. Clasifică frunzele active în *safe* și *unsafe*.
2. Calculează distanța minimă de la fiecare nod la o frunză *safe*. Este suficient un BFS multi-sursă.
3. Pentru fiecare pointer de salt, calculează distanța minimă de la orice nod acoperit de salt la o frunză *safe*. Este suficient un DFS.

Efortul total pentru preprocesări este $\mathcal{O}(n\sqrt{q})$. Procesăm operațiile din bloc și ținem evidența mulțimii de frunze *unsafe*. Pentru o interogare (u, v), răspunsul va fi minimul dintre

1. Distanța minimă de la cale la o frunză *safe*, calculată în $\mathcal{O}(\log n)$ cu *jump pointers*.
2. Pentru fiecare frunză *unsafe* f, distanța $d(u, f) + d(f, v)$.

Deoarece fiecare dintre cele q interogări poate consulta $\mathcal{O}(\sqrt{q})$ frunze *unsafe*, efortul total este $\mathcal{O}(q \log q)$ pentru interogări.

Momentul de inginerie: măsurarea timpului

Pentru soluția cu descompunere în radical, nu am reușit să reduc timpul de rulare sub 4-5 secunde pe testele mari. Nevenindu-mi să cred că poate fi nevoie de atît de mult timp, am măsurat numărul de apeluri la diverse funcții și timpul petrecut în ele. Las aici codul pe care l-am folosit, în caz că îl ajută pe inginerul din voi.

```
#include <sys/time.h>
```

```
long long t0, t_total, cnt;

void start_clock() {
  timeval tv;
  gettimeofday(&tv, NULL);
  t0 = 1'000'000LL * tv.tv_sec + tv.tv_usec;
}

void stop_clock() {
  timeval tv;

  gettimeofday(&tv, NULL);
  long long t = 1'000'000LL * tv.tv_sec + tv.tv_usec;
  t_total += t - t0;
}

int preprocess_block(int start) {
  cnt++;
  start_clock();   // <---------------
  int end = classify_leaves(start);
  bfs_from_safe_leaves();
  jdist_dfs(1);
  stop_clock();    // <---------------

  return end;
}

int main() {
  ...
  fprintf(stderr, "Time: %0.6lf cnt: %lld\n", t_total * 0.000001, cnt);
}
```

12.4.5 Problema Query on a Tree VI (CodeChef)

enunț • sursă

Problema are un enunț simplu și elegant, dar este foarte laborioasă.

Am „trișat” un pic la rezolvare, căci știam că este problemă de HLD și mi-am pus întrebarea: HLD ne ajută să facem operații pe căi, deci cum aș folosi-o la o problemă despre subarbori? Așa am ajuns la o soluție parțială.

Definim **domeniul unui nod** u ca fiind mulțimea de noduri din subarborele lui u, de aceeași culoare cu u, și legate de u prin noduri de aceeași culoare. Fie $S(u)$ = mărimea domeniului lui u. Atunci, ca să răspundem la o interogare despre u, urcăm din u cît timp se poate, mergînd pe noduri de aceeași culoare. Fie w ultimul nod atins. Răspunsul este $S(w)$.

Dacă folosim HLD, îl putem găsi pe w dacă menținem pe fiecare lanț un AIB de culori (0/1) cu suport pentru căutare binară.

Treburile se complică la actualizare. Cînd un nod u își schimbă culoarea, schimbările necesare sînt:

1. Toți strămoșii consecutivi care au vechea culoare a lui u pierd $S(u)$ din domeniu.
2. Recalculăm $S(u)$.
3. Toți strămoșii consecutivi care au noua culoare a lui u cîștigă $S(u)$ la domeniu.

Operațiile (1) și (3) sînt operații de adăugare / scădere pe interval. Dar nu am reușit să implementez eficient operația (2). Astfel ajungem la soluția oficială. Menținem pentru fiecare nod **două valori**:

1. $S_B(u)$ = mărimea domeniului lui u dacă u ar fi negru.
2. $S_W(u)$ = mărimea domeniului lui u dacă u ar fi alb.

Actualizarea acestor valori presupune niște cazuri particulare. De exemplu, dacă un nod u devine alb, atunci toți strămoșii săi negri, **dar și primul strămoș alb**, pierd $S_B(u)$ din $S_B(w)$.

Temă de gîndire: „Aint pe timp"

Am implementat și o altă soluție bazată pe metoda TODO:referință-internă ștergerii dintr-o structură care nu admite (ușor) ștergeri, cu un arbore de intervale indexat după timp. Problema fiind una de conectivitate online, ideea mi s-a părut bună. Dar am făcut o greșeală copilărească: aici nu activăm și dezactivăm muchii, ci noduri. Deci o operație poate cauza $\mathcal{O}(n)$ operații în pădurea de mulțimi disjuncte. Sursa mea ia TLE pe teste adversariale.

Nu știu dacă putem reduce complexitatea. Voi ce credeți?

12.4.6 Problema Adă caii (Lot 2025)

enunț • sursă

Să pornim de la o descompunere *heavy-light* tradițională. Nu ne batem prea mult capul cu operația de interogare. Aceea este punctuală, deci probabil că orice structură vom construi peste lanțuri vom putea să aflăm o valoare punctuală. În schimb, să analizăm migrația spre un nod u. Observăm că:

1. Pe un lanț L aflat între u și rădăcină, caii migrează către nodul în care calea către u se desprinde din L.
2. Pe alte lanțuri, caii migrează în sus.
3. Caii pot sări de pe un lanț pe altul.

De exemplu, în figura 12.2, migrația către nodul 28 (albastru-deschis) înseamnă că:

1. Pe lanțul roșu 1-30, caii migrează către nodul 20.
2. Caii din nodul 20 coboară pe lanțul violet în nodul 32.
3. Pe lanțul violet 32-19 caii migrează către nodul 14.
4. Caii din nodul 14 coboară pe lanțul albastru deschis în nodul 38.
5. Pe alte lanțuri, caii migrează în sus.

6. Caii aflați în nodurile din vîrful altor lanțuri migrează pe lanțul-părinte.

Așadar, pe fiecare lanț dorim să stocăm o structură de date care implementează rezonabil de eficient operațiile:

1. Migrează toate valorile spre stînga (spre rădăcină).
2. Migrează toate valorile spre o poziție din structură.
3. Citește / modifică o poziție.

Operațiile (1) și (3) sînt ușor de implementat în $\mathcal{O}(1)$ cu un buffer circular pe fiecare lanț. Am ales să stochez aceste buffere într-un singur vector global, separat de nodurile arborelui.

În schimb, operația (2) pare a fi $\mathcal{O}(\text{lungime\_lanț})$. De aceea, vom pune o limită de $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ pe lungimea oricărui lanț. Dacă un lanț ar fi, în mod natural, mai lung de atît, după primele $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ noduri vom forța începerea unui lanț nou. Aceasta va cauza apariția mai multor lanțuri, dar nu multe.

Cu această modificare, și pentru o optimizare posibil valoroasă, vom implementa (2) copiind naiv jumătatea mai scurtă a vectorului și shiftînd-o pe cea mai lungă conform bufferului circular.

În plus, ținem evidența lanțurilor nevide, deoarece doar pe acelea avem de implementat operația (1). Pot exista $\mathcal{O}(n)$ lanțuri, de exemplu într-un arbore stea, dar pare imposibil să menținem populații de cai pe $\mathcal{O}(n)$ lanțuri. Cu fiecare operație de migrare, unele populații de cai se vor ciocni și se vor însuma.

Sînt 99% sigur că acest algoritm este eficient, dar demonstrația este alunecoasă. Intuiția mea îmi spune astfel. Temerea noastră este că poate exista o migrație (sau mai multe) care să necesite efort $\mathcal{O}(n)$. Aceasta s-ar putea întîmpla dacă există $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ lanțuri pe calea de la u la rădăcină (datorită limitei de lungime), iar pe fiecare lanț este nevoie să facem operația (2) și să copiem naiv $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ elemente.

Dar, dacă drumul de la u la rădăcină include vreun lanț complet, pe acela nu vom face efort $\mathcal{O}(\text{lungime})$, ci doar $\mathcal{O}(1)$, deoarece migrația în acel lanț va fi doar în jos, spre u! De exemplu, în figura 12.2, pentru $u = 30$ elementele de pe lanțul roșu migrează doar în jos.

De aceea, un caz adversarial ar fi o cale de la u la rădăcină care, ori de cîte ori schimbă lanțul, se „înțeapă" undeva la jumătatea noului lanț. Or acest lucru este imposibil datorită modului în care funcționează decompunerea *heavy-light*. Din punct de vedere al nodului de înțepare, lanțul ar prefera să continue pe calea spre u, dacă aceasta este destul de lungă. Așadar, dacă am avea $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ lanțuri, toate de lungime $\mathcal{O}(\sqrt{n})$, numărul total de noduri de pe acea cale ar deveni $\mathcal{O}(n)$ și majoritatea lanțurilor s-ar începa în capătul de jos al lanțului anterior.

Capitolul 13

Descompunere în centroizi

Încheiem studiul arborilor cu tehnica descompunerii în centroizi. Ea ne permite să rezolvăm probleme rezistente la alte abordări.

Ca și descompunerea *heavy-light*, descompunerea în centroizi este o unealtă avansată. Este bine să o știți, căci uneori nu găsim o soluție mai elementară. Dar problemele de ONI și Baraj ONI se pot rezolva și cu tehnici mai simple.

13.1 Definiție

Fiind dat un arbore cu n noduri, un **centroid** este un nod al arborelui cu proprietatea că, dacă îl eliminăm, atunci toți arborii rezultați au cel mult $\lfloor n/2 \rfloor$ noduri.

Centroidul este un centru de masă, definit în funcție de greutatea subarborilor (ca număr de noduri). A nu se confunda cu **centrul**, care este definit în funcție de distanțe (el minimizează distanța maximă pînă la alt nod).

13.2 Proprietăți

Orice arbore are un singur centroid sau doi centroizi adiacenți. Pentru demonstrație, să considerăm figura următoare.

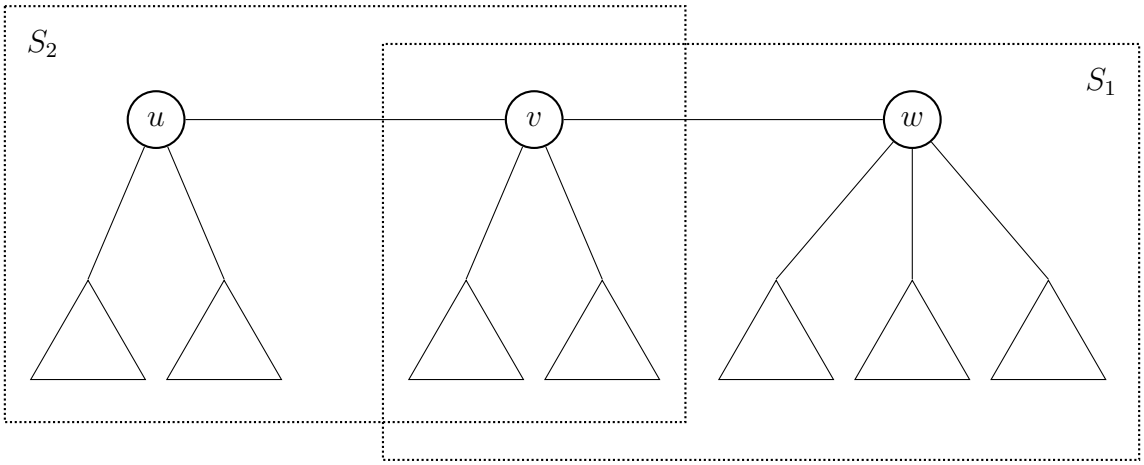


Figura 13.1: Un arbore ipotetic cu doi centroizi aflați la distanță 2.

Să presupunem că u și w ar fi centroizi aflați la distanță 2. Din punctul de vedere al lui u, subarborele S_1 are cel mult $\lfloor n/2 \rfloor$ noduri. Din punctul de vedere al lui w, subarborele S_2 are, de asemenea, cel mult $\lfloor n/2 \rfloor$ noduri. Rezultă că

$$|S_1| + |S_2| \leq n$$

Dar acest lucru este imposibil, căci în mod evident S_1 și S_2 acoperă întreg arborele, iar nodul v (și orice eventuali subarbori ai săi) sînt acoperiți de două ori. Deci $|S_1| + |S_2| \geq n + 1$.

Așadar, dacă există mai mulți centroizi, atunci ei sînt adiacenți. Dar într-un arbore nu putem amplasa mai mult două noduri astfel încît oricare două să fie adiacente. Deci există cel mult doi centroizi.

13.3 Găsirea unui centroid

După cum vom vedea în problema TODO:ref Finding a Centroid, algoritmul de găsire a unui centroid este simplu. Facem un DFS pentru calculul mărimilor subarborilor. Apoi, pornind din rădăcină, căutăm succesiv fii cu mai mult de $n/2$ noduri și coborîm în ei pînă cînd nu mai găsim niciunul. Complexitatea este $\mathcal{O}(n)$.

13.4 Descompunerea în centroizi

Descompunerea în centroizi repetă de mai multe ori următoarea procedură:

1. Găsește un centroid pentru subarborele curent.
2. Colectează informații din subarborele curent care ajută la rezolvarea problemei. Probabil folosește unul sau mai multe DFS-uri pornind din centroid.
3. Elimină centroidul.
4. Reapelează recursiv algoritmul pentru subarborii disjuncți care iau naștere.

5. Cazul de bază este un subarbore cu un singur nod. Nodul este centroid.

Iată un exemplu în care descompunerea în centroizi necesită cinci niveluri de adîncime.

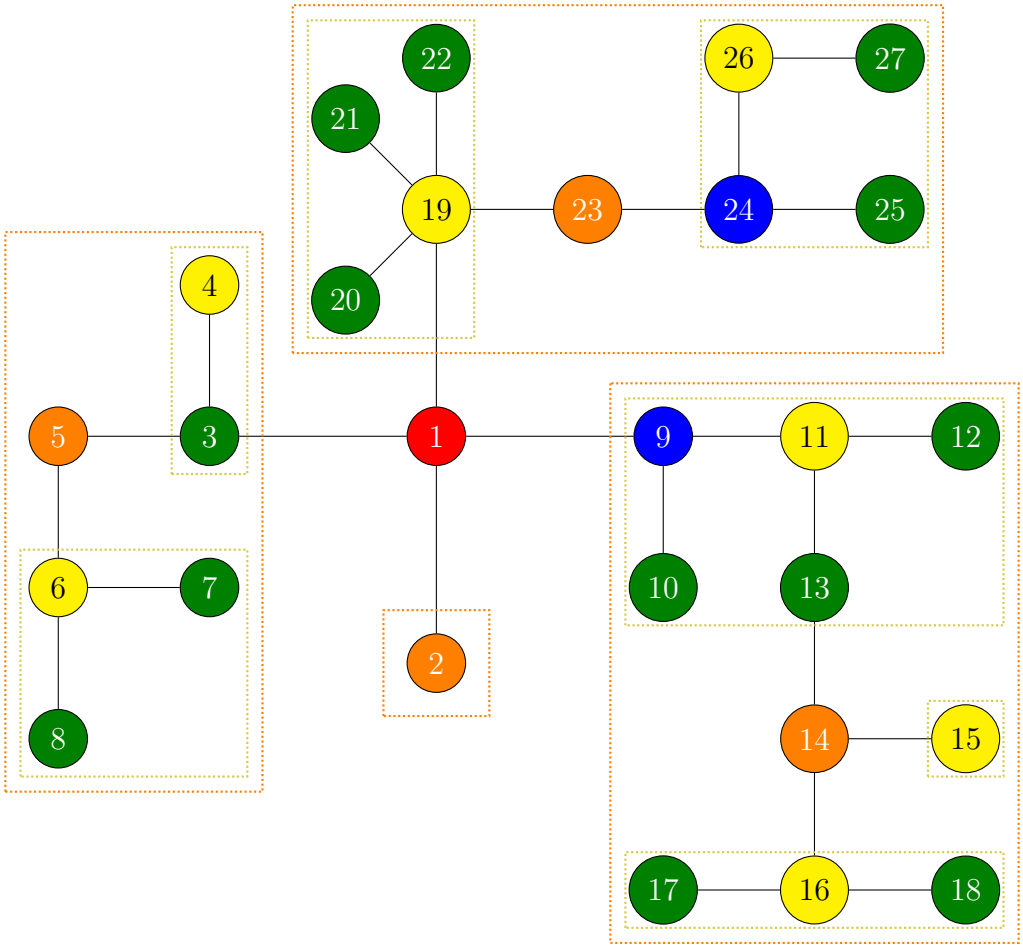


Figura 13.2: Un arbore descompus în centroizi. Nodul 1 (roșu) este centroid de nivelul 1. Pentru subarborii rezultați prin eliminarea lui 1, nodurile portocalii sînt centroizi de nivelul 2. Nodurile galbene, verzi și albastre sînt centroizi de nivelurile 3, 4 și respectiv 5.

Această abordare are avantajul că fiecare nod face parte din cel mult $\lceil \log n \rceil$ descompuneri. De exemplu, nodul 8 face parte din:

- Arborele inițial (cu centroidul 1).
- Arborele cu centroidul 5 (chenar portocaliu).
- Arborele cu centroidul 6 (chenar galben).
- Arborele constînd doar din nodul 8, cu centroidul 8.

De aceea, o implementare care face efort $\mathcal{O}(\text{mărime\_subarbore})$ în fiecare subarbore, cum ar fi de exemplu un DFS, va ajunge la o complexitate totală de $\mathcal{O}(n \log n)$.

Atenție! Efortul trebuie să depindă de mărimea subarborelui, **nu** de n. Fiecare nod va deveni centroid la un nivel mai mare sau mai mic de fărîmițare. Așadar, dacă orice bucată din cod face efort $\mathcal{O}(n)$ per nod, atunci complexitatea totală va deveni $\mathcal{O}(n^2)$. Uneori această condiție necesită un efort conștient, de exemplu la dimensionarea, inițializarea și ștergerea structurilor de date pentru subarborele curent.

Dacă efortul într-un subarbore este mai mare decît liniar, atunci descompunerea în centroizi adaugă un factor logaritmic. De exemplu, dacă efortul într-un subarbore de mărime k este $\mathcal{O}(k \log k)$, atunci complexitatea totală devine $\mathcal{O}(n \log^2 n)$. Pentru detalii, vedeți Master Theorem, cazul 2.

Descompunerea în centroizi ne spune „este OK să apelezi un DFS din fiecare nod". Desigur, ce face acel DFS depinde de la problemă la problemă. Dar ocazional putem scrie algoritmi relativ naivi (plus șablonul de cod pentru descompunere) și totuși să obținem complexitate $\mathcal{O}(n \log n)$.

13.5 Probleme

13.5.1 Problema Finding A Centroid (CSES)

enunț • surse

Nu este foarte mult de spus, problema este directă. Reținem șablonul util pentru toate problemele de descompunere în centroizi:

1. DFS-ul inițial dintr-un nod oarecare, cu aflarea mărimii subarborilor.
2. Caută un fiu greu al nodului curent.
3. Dacă există un fiu greu, coboară în el și mergi la pasul anterior.
4. Ultimul nod găsit este centroidul.

Există două implementări. Cea recursivă (la coadă) combină pașii (2) și (3) într-o singură funcție. Odată identificat fiul greu, reapelăm căutarea centroidului din acel fiu. Implementarea iterativă separă pașii (2) și (3) și rezolvă pasul (3) cu un `while`.

13.5.2 Problema Mystery Tree (CodeChef)

enunț • sursă

Iată o problemă simpatică, interactivă. Se dă un arbore cu $n \leq 200\,000$ de noduri, cu valori în noduri. Structura arborelui este cunoscută, dar valorile nu. Trebuie să găsim un maxim local: un nod cu valoarea mai mare sau egală cu valorile tuturor vecinilor săi. Putem pune cel mult 20 de întrebări de forma „Este u un maxim local?". Interactorul ne răspunde cu -1 dacă am găsit un maxim local sau, în caz contrar, cu un nod v cu valoare strict mai mică decît a lui u.

Cum am rezolva problema pe un vector?

Pentru generalizarea pe arbore, trebuie să punem fiecare întrebare despre un nod care reduce problema la jumătate sau mai puțin. Acesta este exact centroidul subproblemei curente.

Ca implementare, aici putem vedea cum ștergem un nod. Nu modificăm listele de adiacență, ci doar îl marcăm ca fiind șters.

Din păcate, la această problemă nu putem trimite surse. Dar am încredere în corectitudinea soluției mele!

13.5.3 Problema Ciel the Commander (Codeforces)

enunț • surse

Soluția cu descompunere în centroizi

Problema se reduce absolut elementar la decompunerea în centroizi. În centroidul întregului arbore scriem A, în centroizii de nivel 2 scriem B etc. Alfabetul este suficient deoarece $\lceil \log_2 100\,000 \rceil = 17$.

Soluție cu un singur DFS și măști de biți

Putem folosi și următoarea abordare *greedy*. În frunze scriem Z, căci nu avem niciun motiv să nu facem asta. În părinții frunzelor putem scrie Y. Complicațiile apar cînd un nod are un fiu Y și un fiu Z. Ce facem în cazul general?

Să introducem noțiunea de **vizibilitate**. Spunem că o literă X este **vizibilă** dintr-un nod u dacă există o apariție a lui X undeva în subarborele lui u care să nu fie **mascată** de o literă mai mică decît X pe calea pînă la u.

Ideea centrală este că o literă mai mică maschează toate literele mai mari din subarbore, care nu mai necesită alte acțiuni.

Atunci am putea pune în u cea mai mare literă care satisface două condiții:

1. Trebuie să fie mai mică decît orice literă care este vizibilă din doi fii diferiți ai lui u, deoarece trebuie să separăm cele două apariții.
2. Trebuie să fie diferită de orice literă vizibilă din u.

Odată ce ia această decizie, u returnează la părinte mulțimea de litere vizibile. Putem folosi măști de biți și operații de aflare a LSB pentru a obține o soluție în $\mathcal{O}(n)$.

13.5.4 Problema Fixed-Length Paths I (CSES) (din nou)

enunț • sursă

Ne reîntîlnim cu această problemă, pe care am rezolvat-o cu tehnica *small-to-large*. În lipsa acelei idei, descompunerea în centroizi ne poate da o idee mai directă.

O cale de lungime k (și orice cale în general) fie trece prin centroidul arborelui, fie este conținută complet într-unul dintre subarbori. Deci putem însuma răspunsurile întrebărilor, pentru fiecare centroid, „Cîte căi de lungime k trec prin tine?”.

Iar răspunsul la această întrebare este comparativ mai simplu decît tehnica *small-to-large*. Facem un DFS din centroid. Fiecare fiu al centroidului raportează distribuția pe adîncimi a nodurilor din subarborele său. Părintele (centroidul) combină aceste informații. Putem face asta în diverse feluri, dar esența este: un nod aflat la adîncime d formează căi de lungime k cu toate nodurile aflate la adîncime $k - d$ în fiii centroidului vizitați anterior.

Această implementare este de peste 2 ori mai lentă decît implementarea cu *small-to-large*.

Întrebare despre cod: care este rostul variabilei `max_depth`?

13.5.5 Problema Xenia and Tree (Codeforces)

enunț • surse

Soluția cu descompunere în radical

Menționăm sumar și această soluție, ca să fiți mereu alerți la posibilitățile de rezolvare. Este o soluție lunguță, dar nu grea. Soluția seamănă mult cu cea de la Doi arbori și este mai simplă decît aceea.

Procesăm operațiile în blocuri de circa $\sqrt{q}$. La începutul unui bloc facem o parcurgere BFS din toate nodurile roșii. Acesta ne va oferi pentru fiecare nod u o cantitate $d[u]$ care reprezintă distanța minimă de la u pînă la orice nod roșu.

Acum, răspunsul la o interogare din acel bloc va fi minimul dintre $d[u]$ și distanța de la u pînă la orice nod colorat în roșu cîndva în blocul curent. Dar în blocul curent colorăm în roșu cel mult $\sqrt{q}$ noduri, deci putem răspunde la interogări calculînd cel mult $\sqrt{q}$ distanțe.

Pentru a obține timp $\mathcal{O}(\sqrt{q})$ per interogare, este necesar să putem calcula distanțe în $\mathcal{O}(1)$, ceea ce se reduce la a calcula LCA în $\mathcal{O}(1)$. Vom folosi structura cu care ne-am mai întîlnit: o parcurgere Euler peste care construim tabela rară de RMQ.

Soluția se încadrează lejer în timp (sub 1s pe limită de timp de 5s).

Soluția cu descompunere în centroizi

Și acum, la subiectul zilei! Calea de la un nod u la orice nod roșu (sau, în general, orice alt nod) va fi cuprinsă complet într-un subarbore centroid: în cel mai rău caz subarborele centroid al nodului 1 (care este întregul arbore), dar posibil într-un subarbore mai mic.

Prin natura ei, descompunerea în centroizi garantează că orice nod u face parte din cel mult $\log n$ subarbori centroizi sau, echivalent, are cel mult $\log n$ strămoși centroizi. Și atunci, la o interogare, am putea să-i verificăm pe toți acești strămoși. Așadar, pentru interogarea u și pentru fiecare v strămoș centroid al lui v, ne întrebăm:

1. Care este distanța de la u la v?
2. Care este distanța de la v pînă la orice nod roșu din subarborele centroid al lui v?

Partea frumoasă este că putem accesa aceste distanțe în $\mathcal{O}(1)$ fără *binary lifting*, LCA, RMQ sau alte structuri suplimentare. Reamintiți-vă că **ne permitem cîte un DFS din fiecare centroid**. Într-un astfel de DFS dintr-un centroid de nivel k vom calcula distanțele de la fiecare nod din subarborele centroidului pînă la centroid. Facem această preprocesare înainte de a procesa interogările.

Memoria necesară pentru aceste informații este $\mathcal{O}(n \log n)$.

Ce implică actualizările? La colorarea unui nod u, toți strămoșii centroizi ai lui u trebuie notificați că în subarborele lor a apărut un nod nod roșu. Fiecare strămoș v își reține distanța pînă la cel mai apropiat nod roșu din subarborele său și și-o minimizează cu distanța $u - v$ (pe care u o cunoaște din DFS-urile de preprocesare).

Complexitatea provine din:

1. Descompunerea în centroizi, care știm că este $\mathcal{O}(n \log n)$.
2. Procesarea celor q operații. Colorările și interogările presupun modificarea sau consultarea unui vector de $\log n$ elemente.

Rezultă o complexitate totală de $\mathcal{O}((n + q) \log n)$. Cum este și de așteptat, sursa este de peste două ori mai rapidă decît cea bazată pe descompunere în radical.

13.5.6 Problema Flareon (Lot 2017)

enunț • sursă

Să presupunem că ne-a venit deja ideea să folosim descompunerea în centroizi. 😈 Să considerăm o flacără care pornește dintr-un nod u. Fie $c_1, c_2, \ldots, c_k$ strămoșii centroizi ai nodului u, unde c_1 este rădăcina arborelui (nodul 1 în majoritatea implementărilor), iar c_k este chiar nodul u. Vom contabiliza separat contribuția flăcării pe căi care trec prin c_1, pe căi care trec prin c_2 fără să ajungă la c_1 etc.

Deci vom încerca o soluție în doi pași. Fie r rădăcina (centroidul) subarborelui curent.

1. Colectăm în r lista de flăcări care provin din subarborele lui r. Pentru fiecare flacără ne interesează puterea cu care ajunge în rădăcină.
2. Propagăm această listă de flăcări în tot subarborele. Nu avem voie să propagăm o flacără în subarborele din care provine.

Notînd cu s mărimea subarborelui curent, este important ca ambii pași să funcționeze în $\mathcal{O}(s)$. În particular, nu putem colecta flăcările într-o listă, ci trebuie să le compactăm cumva într-o structură de mărime cel mult s.

Reprezentarea flăcărilor

Ideea compactării este următoarea. Dacă dintr-un nod pornesc 3 flăcări de mărime 2, 5 și 10, le putem unifica într-o singură flacără de mărime 17, a cărei putere scade cu 3 la fiecare muchie parcursă. Așadar, reținem doar suma puterilor și numărul de flăcări. La fiecare deplasare, suma puterilor scade cu numărul de flăcări.

Aceasta funcționează... o vreme. În primul nod avem putere 17, în următorul 14 (= 1 + 4 + 9), iar în următorul 11 (= 0 + 3 + 8). Dar aici flacăra mică se stinge, iar puterea trebuie să continue să scadă doar cu 2. Următoarea putere este 9 (= 2 + 7).

Totuși, sîntem pe calea bună. Putem grupa flăcările după putere. Să spunem că în rădăcina r am acumulat $f[p]$ flăcări de putere p, unde $p \geq 1$. Atunci cînd propagăm aceste flăcări în subarbore, la un nod de la adîncimea d trebuie însumate doar flăcările cu $p \geq d$. Cînd reapelăm DFS-ul pentru un fiu, ne aflăm la adîncime $d+1$, deci le scădem din numărul total de flăcări pe cele $f[d]$ care s-au stins.

Remarcăm că puterile pot fi mari (problema nu specifică, dar ele se apropie de 10^9). Nu putem stoca un vector atît de mare, dar nici nu este nevoie. Față de abordarea inițială (doar cu numărul de flăcări și numărul puterilor), ne interesează și frecvențele **doar pentru flăcările care se vor stinge cîndva**. Flăcările care au o putere mai mare sau egală cu s nu se vor stinge în acest subarbore.

Recapitulînd, informațiile necesare în rădăcină sînt (1) numărul de flăcări, (2) suma puterilor acestora și (3) distribuția pe frecvențe a flăcărilor de putere mai mică decît s.

Evitarea propagării în același fiu

Cum spuneam, o flacără nu trebuie propagată din r înspre același fiu din care flacăra a ajuns în r. Văd două abordări aici.

Una este să stocăm informații despre fiecare fiu în parte: ce flăcări ajung acolo și cu ce puteri rămase? Cînd propagăm flăcările printr-un fiu u, calculăm în fiecare nod diferența dintre informațiile din r și u.

Dintr-o sursă de pe Kilonova am învățat și o altă abordare elegantă.

1. Inițial contabilizăm toate flăcările cu semnul „+”.
2. Înainte de propagarea flăcărilor într-un fiu, facem un DFS ca sa contabilizăm flăcările din acel fiu cu semnul „-”.
3. După terminarea propagării, apelăm același DFS ca să contabilizăm flăcările din acel fiu, de data aceasta cu semnul „+”.

Din păcate, incluzînd și DFS-ul pentru găsirea centroidului, ajungem la 5 DFS-uri din fiecare centroid. Este o constantă măricică.

Idee de implementare: ștergerea nodurilor

Tocmai fiindcă codul include multiple DFS-uri, mi-am dat seama că „tîrăsc” după mine peste tot condiția `!nd[u].dead` prin tot codul. Astfel mi-a venit ideea: nu este mai scurt/rapid/clar să ștergem efectiv nodul?

Mai scurt nu este, căci la ștergerea lui u trebuie consultate toate listele de adiacență ale vecinilor lui u și șterse aparițiile lui u din acele liste. Deci codul se lungește cu 10-15 linii.

Mai rapid... discutabil. A doua sursă a mea este mai rapidă cu 14%, dar poate fi și un dram de noroc acolo. Eliminarea unui nod face totuși un efort proporțional cu suma gradelor vecinilor.

Paradoxal, am optimizat codul ca să fac eliminarea în $\mathcal{O}(1)$ per muchie ștearsă și a devenit mai lent.

Dar aș argumenta că codul devine mai clar. Efectiv, arborele devine o pădure prin fărîmițare, iar subarborii nu au cunoștință unul de celălalt. Listele de adiacență nu mai sînt poluate de gunoaie.

Rămîne la alegerea voastră ce variantă folosiți.

13.5.7 Problema Digit Tree (Codeforces)

enunț • surse

Problema amintește puțin de Fixed Length Paths I, doar că nu trebuie să numărăm căile de o anumită lungime, ci pe cele care, citite ca număr zecimal, sînt divizibile cu M.

Din nou, vom arăta cum să rezolvăm problema pentru o rădăcină fixată, iar descompunerea în centroizi va face restul pentru noi.

Căi în sus și în jos

Cum procesăm o cale care trece prin rădăcină? Pare natural să o spargem în:

- calea care urcă pînă la rădăcină, care dă restul r_1 modulo M;
- calea care coboară din rădăcină, de lungime d muchii, care dă restul r_2 modulo M.

Întreaga cale va avea atunci restul $r_1 \cdot 10^d + r_2 \pmod M$. Dacă dorim ca acest rest să fie 0, atunci putem scrie

$$r_1 = (-r_2) \cdot 10^{-d}$$

Deci, pentru fiecare nod u, calculăm restul r_2 al căii de la rădăcină la u, apoi căutăm numărul de căi de la alte noduri v la rădăcină care dau restul r_1 dorit. Atenție, u și v trebuie să se găsească **în fii diferiți ai rădăcinii**. De asemenea, perechile (u, v) sînt ordonate. Cel mai corect pare să facem două DFS-uri separate, întîi pentru căile care urcă, apoi pentru cele care coboară.

Recapitulînd, pentru fiecare centroid:

1. Facem o parcurgere DFS. Calculăm resturile pe care le putem obține pe căi care urcă pînă în rădăcină și frecvențele acestor resturi.
2. Facem o a doua parcurgere DFS. Menținem lungimea căii curente și restul modulo M. În fiecare nod, calculăm restul-pereche necesar pentru a obține restul total 0. Aflăm frecvența acelui rest-pereche, ignorînd frecvența din fiul rădăcinii în care se află DFS-ul curent.

Mai trebuie tratate și două cazuri particulare, relativ simple:

1. Căi care doar urcă. După primul DFS, creștem răspunsul cu frecvența restului 0, indiferent din ce fiu.

2. Căi care doar coboară. În al doilea DFS, ori de cîte ori restul căii curente este 0, incrementăm răspunsul.

`map` și `unordered_map`

Concret, ce structură de date stocăm? Prima mea încercare a fost cu doar două tabele. Dat fiind un rest r pe o cale care urcă din u în rădăcină, într-un fiu v al rădăcinii, am incrementat două valori:

1. $t[r]$, unde r este un `map` de la întreg (restul) la întreg (frecvența restului). Așadar, t menține frecvențele resturilor indiferent din ce fiu provin.
2. $c[\langle r, v\rangle]$, unde c este un map de la (întreg,întreg) (restul și fiul rădăcinii pe care am pornit) la întreg (frecvența).

Atunci, în al doilea DFS, pornind pe un fiu al rădăcinii v și aflîndu-ne în nodul curent u, calculăm restul căii care coboară, r_2. Apoi calculăm restul corespunzător necesar r_1. În sfîrșit, aflăm numărul de apariții utile ale lui r_1 cu expresia

$$t[r_1] - c[\langle r_1, v\rangle]$$

Procedăm astfel deoarece calea nu poate să urce și să coboare tot prin v.

Am avut surpriza (deși nu mai este chiar surpriză) că `unordered_map` este mult mai lent decît `map`. O explicație poate fi că pentru fiecare centroid (așadar, de n ori) instanțiem două `unordered_maps`, ceea ce este lent. Cu `map` am obținut un timp mediu pe CF (1500-1600 ms). Complexitatea teoretică a crescut la $\mathcal{O}(n \log^2 n)$.

`map` cu eliminare și reinserare

Pentru un cod mai lent, dar considerabil mai scurt, folosim același artificiu ca la problema Flareon:

1. Menținem un singur map de frecvențe, t.
2. În acesta stocăm, ca mai sus, frecvențele resturilor pe căi care urcă.
3. La al doilea DFS, pe căile care coboară, iterăm prin fiii rădăcinii.
4. Înainte de a lansa DFS-ul dintr-un fiu, eliminăm căile care urcă prin acel fiu.
5. După revenirea din fiu, adăugăm la loc căile care urcă prin acel fiu.

Astfel evităm să combinăm căile care urcă și coboară prin acel fiu. Esența codului este:

```
void count_pairs_through(int u) {
  // ...

  for (edge e: nd[u].adj) {
    if (!nd[e.v].dead) {
      head_dfs(e.v, u, 1, e.digit, +1);
    }
  }
```

```
  for (edge e: nd[u].adj) {
    if (!nd[e.v].dead) {
      head_dfs(e.v, u, 1, e.digit, -1);
      tail_dfs(e.v, u, 1, e.digit);
      head_dfs(e.v, u, 1, e.digit, +1);
    }
  }

  // ...
}
```

Vectori + sortare + căutare binară

De amorul artei, am încercat și următoarea abordare. Să observăm că întîi facem toate inserările în structura noastră de date, apoi toate interogările de frecvență. De aceea, am înlocuit `map`-urile cu doi vectori:

1. În locul lui t, un vector de perechi <rest, frecvență>.
2. În locul lui c, un vector de tripleți <rest, fiu, frecvență>.

După primul DFS, am sortat tripleții și am comasat duplicatele (însumînd frecvențele). Pentru a căuta informații, am folosit căutarea binară.

Timpul de rulare s-a înjumătățit. De reținut!

Partea IV

Probleme diverse

Capitolul 14

Probleme diverse

Acest capitol include probleme care fie necesită doar cunoștințe de bază (engl. *core*, numite în supa culturală și probleme ad-hoc), fie necesită cunoștințe specifice, dar pentru care cursul încă nu are un capitol dedicat.

14.1 Problema Liars (Baraj ONI 2025)

enunț • sursă

14.1.1 Generalități

Problema este una tipică de recurență pe arbore[1], dar acest curs nu are un capitol dedicat subiectului. Poate într-o zi cu soare. Problema necesită multă atenție la implementare.

Să începem cu numărarea configurațiilor posibile. În problemele de recurență pe arbore, de obicei judecăm recursiv. Informația pe care o dorim să o calculăm într-un nod u decurge din combinarea informațiilor similare calculate în fiecare dintre fiii lui u. În plus, **încercăm să decuplăm subarborele lui u de restul arborelui**. Pentru aceasta, luăm în calcul toate posibilitățile pentru u sau (în alte probleme) pentru părintele lui u. Nu știm care dintre posibilități ne va trebui în final, dar astfel ne asigurăm că problema nu „se revarsă" în restul arborelui.

14.1.2 Numărarea configurațiilor

În cazul de față, vom considera pe rînd că u este sincer, apoi mincinos. Să considerăm cazul în care u este sincer și fie r numărul de vecini mincinoși ai lui u (citit de la intrare). **În principiu** dorim să calculăm recursiv, pentru fiecare fiu v al lui u, numărul de configurații valide pentru

[1]Simt nevoia unei digresiuni despre termenul *programare dinamică*. Olimpicii tind să denumească orice recurență programare dinamică (și, pentru maximum de efect, să-și denumească variabilele aferente `dp`). Dar această denumire este incorectă în cazul arborilor. Pentru a putea încadra o soluție ca programare dinamică, ea are nevoie de două trăsături: substructura optimă și suprapunerea subproblemelor. În cazul recurențelor pe arbore, prin definiție **nu** există subprobleme suprapuse, deoarece în acest caz subproblemele unui nod sînt fiii nodului, deci prin definiție sînt disjuncte.

v și subarborele său, apoi să contorizăm numărul de moduri în care putem alege r fii mincinoși pentru u. Doar că ne mai lipsește o informație: valoarea de adevăr a părintelui lui u, fie el p. Dacă p este mincinos, atunci lui u îi mai trebuie doar $r-1$ fii mincinoși.

Astfel ajungem la mulțimea finală de informații necesare în fiecare nod u, respectiv numărul de configurații valide pentru subarborele lui u în patru cazuri:

1. u este sincer, iar p este sincer;
2. u este sincer, iar p este mincinos;
3. u este mincinos, iar p este sincer;
4. u este mincinos, iar p este mincinos.

Să considerăm acum că avem aceste 4 cantități calculate în toți fiii lui u. Dacă u este sincer, atunci, după cum am spus, ne interesează în cîte moduri putem asigna r sau $r-1$ fii mincinoși (în funcție de valoarea lui p. Dacă u este mincinos, atunci dimpotrivă ne interesează să asignăm orice număr de fii mincinoși în afară de r, respectiv $r-1$. Această din urmă cantitate este mai simplu de calculat dacă aflăm numărul total de configurații în subarborele lui u (indiferent de numărul de fii mincinoși) din care scădem cantitatea care l-ar face pe u să fie sincer.

Cum combinăm informațiile din fii? Limitele problemei ne permit complexitatea $\mathcal{O}(d_u^2)$ în fiecare nod, unde cu d_u am notat numărul de fii ai lui u. Aceasta ne permite o logică rezonabil de simplă (la acest nivel). Pentru nodul curent u, și pentru o valoare fixată pentru u, să calculăm numărul de configurații în care printre fiii lui u există $0, 1, 2, d_u$ mincinoși.

Aceasta este o subproblemă de programare dinamică (reală, în acest caz). Fie $C(i, j)$ numărul de moduri de a obține j mincinoși folosind primii i fii. Inițial, $C(0, 0) = 1$, căci cu primii 0 fii putem obține (doar) 0 mincinoși într-un singur mod. Apoi, $C(i, j)$ provine

- din $C(i-1, j)$ dacă asignăm al i-lea fiu ca fiind sincer;
- din $C(i-1, j-1)$ dacă asignăm al j-lea fiu ca fiind mincinos.

14.1.3 Găsirea unei configurații

Odată numărate configurațiile în această manieră *bottom up*, putem găsi una dintre ele într-o manieră *top down*. Ce valoare să punem în rădăcină (nodul 1)? Prin convenție, să asignăm rădăcina ca sinceră dacă ea raportează cel puțin o configurație validă în care ea este sinceră, altfel o asignăm ca mincinoasă. Din nou, efectul acestei asignări este că decuplăm subarborii rădăcinii.

O dată fixată valoarea unui nod u, îi putem asigna și fiii. Acest proces este elementar, dar necesită un pic de cod, în două faze.

În primă fază, asignăm toți fiii lui u care sînt impuși. Dacă un fiu v nu are nicio asignare în care el să fie sincer, iar părintele său u să aibă valoarea fixată, atunci obligatoriu v trebuie să fie mincinos. Similar decidem dacă v trebuie să fie sincer. Dintre restul fiilor, care pot lua orice valoare, știm cîți trebuie să fie sinceri și cîți mincinoși, în funcție de numărul de vecini mincinoși declarați de u și de valoarea acestuia de adevăr. Asignăm și restul de fii ai lui u respectînd aceste

cantități. Procedăm astfel pînă în frunze.

Partea V

Anexă: Cod-sursă

Anexa A

Arbori de intervale

A.1 Problema Xenia and Bit Operations (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 1 << 17;

struct segment_tree {
  int v[2 * MAX_N];
  int n;

  void init(int n) {
    this->n = n;
  }

  void set(int pos, int val) {
    v[pos + n] = val;
  }

  void build() {
    bool is_or = true;
    for (int i = n - 1; i; i--) {
      int l = 2 * i, r = 2 * i + 1;
      v[i] = is_or ? (v[l] | v[r]) : (v[l] ^ v[r]);
      if ((i & (i - 1)) == 0) {
        is_or = !is_or;
      }
    }
  }

  int update(int pos, int val) {
    pos += n;
    v[pos] = val;
```

```
    bool is_or = true;
    for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
      int l = 2 * pos, r = 2 * pos + 1;
      v[pos] = is_or ? (v[l] | v[r]) : (v[l] ^ v[r]);
      is_or = !is_or;
    }
    return v[1];
  }
};

segment_tree st;
int num_queries;

void read_array() {
  int n;
  scanf("%d %d", &n, &num_queries);
  n = 1 << n;
  st.init(n);

  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int x;
    scanf("%d", &x);
    st.set(i, x);
  }

  st.build();
}

void process_queries() {
  while (num_queries--) {
    int pos, val;
    scanf("%d %d", &pos, &val);
    int root = st.update(pos - 1, val);
    printf("%d\n", root);
  }
}

int main() {
  read_array();
  process_queries();

  return 0;
}
```

A.2 Problema Distinct Characters Queries (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```
#include <stdio.h>
#include <string.h>

const int MAX_N = 1 << 17;
const int T_UPDATE = 1;

int next_power_of_2(int n) {
  return 1 << (32 - __builtin_clz(n - 1));
}

struct segment_tree {
  int v[2 * MAX_N];
  int n;

  void init(char* s) {
    int len = strlen(s);
    this->n = next_power_of_2(len);

    for (int i = 0; i < len; i++) {
      v[i + this->n] = 1 << (s[i] - 'a');
    }

    build();
  }

  void build() {
    for (int i = n - 1; i; i--) {
      v[i] = v[2 * i] | v[2 * i + 1];
    }
  }

  void update(int pos, char val) {
    pos += n;
    v[pos] = 1 << (val - 'a');

    for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
      v[pos] = v[2 * pos] | v[2 * pos + 1];
    }
  }

  int popcount_query(int l, int r) {
    int mask = 0;

    l += n;
    r += n;

    while (l <= r)  {
      if (l & 1) {
        mask |= v[l++];
```

```
      }
      l >>= 1;

      if (!(r & 1)) {
        mask |= v[r--];
      }
      r >>= 1;
    }

    return __builtin_popcount(mask);
  }
};

segment_tree st;

void read_string() {
  char s[MAX_N + 1];
  scanf("%s", s);
  st.init(s);
}

void process_ops() {
  int num_ops, type;
  scanf("%d", &num_ops);

  while (num_ops--) {
    scanf("%d", &type);

    if (type == T_UPDATE) {
      int pos;
      char val;
      scanf("%d %c", &pos, &val);
      st.update(pos - 1, val);
    } else {
      int l, r;
      scanf("%d %d", &l, &r);
      int num_distinct = st.popcount_query(l - 1, r - 1);
      printf("%d\n", num_distinct);
    }
  }
}

int main() {
  read_string();
  process_ops();

  return 0;
}
```

A.3 Problema K-query (SPOJ)

înapoi

Sursă cu arbori de intervale.

```
// Complexitate: O(n log n)
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 32'768;
const int MAX_Q = 200'000;

int next_power_of_2(int n) {
  while (n & (n - 1)) {
    n += (n & -n);
  }

  return n;
}

struct segment_tree {
  short v[2 * MAX_N];
  int n;

  void init(int n) {
    this->n = next_power_of_2(n);
  }

  void set(int pos) {
    pos += n;
    while (pos) {
      v[pos]++;
      pos /= 2;
    }
  }

  short range_count(int l, int r) {
    int sum = 0;

    l += n;
    r += n;

    while (l <= r)  {
      if (l & 1) {
        sum += v[l++];
      }
      l >>= 1;

      if (!(r & 1)) {
```

```
        sum += v[r--];
      }
      r >>= 1;
    }

    return sum;
  }
};

struct elem {
  int val;
  short pos;
};

struct query {
  short left, right;
  int val;
  int orig_pos;
};

elem v[MAX_N];
query q[MAX_Q];
// Mai curat ar fi să punem răspunsurile în struct. Dar atunci ar trebui să
// sortăm interogările încă o dată la final.
short answer[MAX_Q];
segment_tree st;
int n, num_queries;

void read_data() {
  scanf("%d", &n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    scanf("%d", &v[i].val);
    v[i].pos = i + 1;
  }

  scanf("%d", &num_queries);
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    scanf("%hd %hd %d", &q[i].left, &q[i].right, &q[i].val);
    q[i].orig_pos = i;
  }
}

void sort_array_by_val() {
  std::sort(v, v + n, [](elem a, elem b) {
    return a.val > b.val;
  });
}

void sort_queries_by_val() {
  std::sort(q, q + num_queries, [](query& a, query& b) {
```

```
    return a.val > b.val;
  });
}

void process_queries() {
  st.init(n);

  int j = 0;
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    while ((j < n) && (v[j].val > q[i].val)) {
      st.set(v[j++].pos);
    }
    answer[q[i].orig_pos] = st.range_count(q[i].left, q[i].right);
  }
}

void write_answers() {
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    printf("%d\n", answer[i]);
  }
}

int main() {
  read_data();
  sort_array_by_val();
  sort_queries_by_val();
  process_queries();
  write_answers();

  return 0;
}
```

Sursă cu arbori indexați binar.

```
// Complexitate: O(n log n)
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 30'000;
const int MAX_Q = 200'000;

struct fenwick_tree {
  short v[MAX_N + 1];
  int n;

  void init(int n) {
    this->n = n;
  }
```

```
  void set(int pos) {
    do {
      v[pos]++;
      pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
  }

  short prefix_count(int pos) {
    int sum = 0;
    while (pos) {
      sum += v[pos];
      pos &= pos - 1;
    }
    return sum;
  }

  short range_count(int l, int r) {
    return prefix_count(r) - prefix_count(l - 1);
  }
};

struct elem {
  int val;
  short pos;
};

struct query {
  short left, right;
  int val;
  int orig_pos;
};

elem v[MAX_N];
query q[MAX_Q];
// Mai curat ar fi să punem răspunsurile în struct. Dar atunci ar trebui să
// sortăm interogările încă o dată la final.
short answer[MAX_Q];
fenwick_tree fen;
int n, num_queries;

void read_data() {
  scanf("%d", &n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    scanf("%d", &v[i].val);
    v[i].pos = i + 1;
  }

  scanf("%d", &num_queries);
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    scanf("%hd %hd %d", &q[i].left, &q[i].right, &q[i].val);
```

```
    q[i].orig_pos = i;
  }
}

void sort_array_by_val() {
  std::sort(v, v + n, [](elem a, elem b) {
    return a.val > b.val;
  });
}

void sort_queries_by_val() {
  std::sort(q, q + num_queries, [](query& a, query& b) {
    return a.val > b.val;
  });
}

void process_queries() {
  fen.init(n);

  int j = 0;
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    while ((j < n) && (v[j].val > q[i].val)) {
      fen.set(v[j++].pos);
    }
    answer[q[i].orig_pos] = fen.range_count(q[i].left, q[i].right);
  }
}

void write_answers() {
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    printf("%d\n", answer[i]);
  }
}

int main() {
  read_data();
  sort_array_by_val();
  sort_queries_by_val();
  process_queries();
  write_answers();

  return 0;
}
```

A.4 Problema Sereja and Brackets (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```cpp
// Complexitate: O(n + q log n).
#include <stdio.h>
#include <string.h>

const int MAX_N = 1 << 20;

int next_power_of_2(int n) {
  while (n & (n - 1)) {
    n += (n & -n);
  }

  return n;
}

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

struct node {
  int matched, open, closed;

  node combine(node& other) {
    int new_matches = min(open, other.closed);
    return {
      .matched = matched + other.matched + 2 * new_matches,
      .open = open + other.open - new_matches,
      .closed = closed + other.closed - new_matches,
    };
  }
};

struct segment_tree {
  node v[2 * MAX_N];
  int n;

  void init(char* s) {
    int len = strlen(s);
    this->n = next_power_of_2(len);

    for (int i = 0; i < len; i++) {
      v[i + this->n] = {
        .matched = 0,
        .open = (s[i] == '('),
        .closed = (s[i] == ')'),
      };
    }

    build();
  }
```

```
  void build() {
    for (int i = n - 1; i; i--) {
      v[i] = v[2 * i].combine(v[2 * i + 1]);
    }
  }

  int query(int l, int r) {
    node left = { 0, 0, 0 };
    node right = { 0, 0, 0 };

    l += n;
    r += n;

    while (l <= r)  {
      if (l & 1) {
        left = left.combine(v[l++]);
      }
      l >>= 1;

      if (!(r & 1)) {
        right = v[r--].combine(right);
      }
      r >>= 1;
    }

    node answer = left.combine(right);
    return answer.matched;
  }
};

segment_tree st;

void read_string() {
  char s[MAX_N + 1];
  scanf("%s", s);
  st.init(s);
}

void process_ops() {
  int num_ops;
  scanf("%d", &num_ops);

  while (num_ops--) {
    int l, r;
    scanf("%d %d", &l, &r);
    printf("%d\n", st.query(l - 1, r - 1));
  }
}
```

```
int main() {
  read_string();
  process_ops();

  return 0;
}
```

A.5 Problema Copying Data (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```
// Complexitate: O(q log n)
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 1 << 17;
const int T_COPY = 1;

struct change {
  int time;
  int shift;
};

int next_power_of_2(int x) {
  return 1 << (32 - __builtin_clz(x - 1));
}

struct segment_tree {
  change v[2 * MAX_N];
  int n;

  void init(int n) {
    this->n = next_power_of_2(n);
  }

  change query(int pos) {
    change latest = { 0, 0 };
    for (pos += n; pos; pos >>= 1) {
      if (v[pos].time > latest.time) {
        latest = v[pos];
      }
    }
    return latest;
  }

  void update(int l, int r, change c) {
    l += n;
    r += n;
```

```
    while (l <= r)  {
      if (l & 1) {
        v[l++] = c;
      }
      l >>= 1;

      if (!(r & 1)) {
        v[r--] = c;
      }
      r >>= 1;
    }
  }
};

segment_tree st;
int a[MAX_N], b[MAX_N];
int n, num_ops;

void read_arrays() {
  scanf("%d %d", &n, &num_ops);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    scanf("%d", &a[i]);
  }
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    scanf("%d", &b[i]);
  }
}

void process_ops() {
  st.init(n);
  int type, x, y, k;
  for (int op = 1; op <= num_ops; op++) {
    scanf("%d", &type);
    if (type == T_COPY) {
      scanf("%d %d %d", &x, &y, &k);
      x--;
      y--;
      change c = { .time = op, .shift = x - y };
      st.update(y, y + k - 1, c);
    } else {
      scanf("%d", &x);
      x--;
      change latest = st.query(x);
      int val = latest.time ? a[x + latest.shift] : b[x];
      printf("%d\n", val);
    }
  }
}

int main() {
```

```
  read_arrays();
  process_ops();

  return 0;
}
```

A.6 Problema PHF (FMI No Stress 2013)

‹ înapoi • versiune online

```
#include <stdio.h>

typedef unsigned char byte;

const int MAX_N = 1'000'000;
const int MAX_SEGTREE_NODES = 1 << 21;

const int IDENTITY = 3;
const byte CROSS_TABLE[4][3] = {
  { 0, 1, 0 }, // P
  { 1, 1, 2 }, // H
  { 0, 2, 2 }, // F
  { 0, 1, 2 }, // identitate
};

char FROM_CHAR[27] = ".....2.1.......0..........";
char TO_CHAR[4] = "PHF";

byte from_char(char c) {
  return FROM_CHAR[c - 'A'] - '0';
}

int next_power_of_2(int x) {
  return 1 << (32 - __builtin_clz(x - 1));
}

struct segment_tree_node {
  byte f[3];

  void make_leaf(byte c) {
    for (int i = 0; i < 3; i++) {
      f[i] = CROSS_TABLE[c][i];
    }
  }

  segment_tree_node compose(segment_tree_node other) {
    return {
      other.f[f[0]],
```

```
      other.f[f[1]],
      other.f[f[2]],
    };
  }
};

struct segment_tree {
  segment_tree_node v[MAX_SEGTREE_NODES];
  int n;

  void init(char* s, int _n) {
    n = next_power_of_2(_n);
    for (int i = 0; i < _n; i++) {
      v[n + i].make_leaf(s[i]);
    }

    for (int i = _n; i < n; i++) {
      v[n + i].make_leaf(IDENTITY);
    }

    for (int i = n - 1; i; i--) {
      v[i] = v[2 * i].compose(v[2 * i + 1]);
    }
  }

  void update(int pos, byte b) {
    pos += n;
    v[pos].make_leaf(b);
    for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
      v[pos] = v[2 * pos].compose(v[2 * pos + 1]);
    }
  }

  char get_value(byte input) {
    return TO_CHAR[v[1].f[input]];
  }
};

char s[MAX_N + 1];
segment_tree st;
int n, num_queries;

void read_string() {
  scanf("%d %d ", &n, &num_queries);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    s[i] = from_char(getchar());
  }
}

void process_updates() {
```

```
  int pos;

  while (num_queries--) {
    scanf("%d ", &pos);
    pos--;
    s[pos] = from_char(getchar());
    if (pos) {
      st.update(pos - 1, s[pos]);
    }
    putchar(st.get_value(s[0]));
  }
}

int main() {
  read_string();
  st.init(s + 1, n - 1);
  putchar(st.get_value(s[0]));
  process_updates();
  putchar('\n');

  return 0;
}
```

A.7 Problema Points (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```
#include <algorithm>
#include <set>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 1 << 18;
const int INFINITY = 2'000'000'000;
const int T_ADD = 1;
const int T_REMOVE = 2;
const int T_FIND = 3;

struct query {
  char type;
  int x, y;
};

int next_power_of_2(int n) {
  while (n & (n - 1)) {
    n += (n & -n);
  }

  return n;
```

```
}

int max(int x, int y) {
  return (x > y) ? x : y;
}

struct max_segment_tree {
  int v[2 * MAX_N];
  int n;

  void init(int n) {
    n++; // santinelă infinită la final
    n = next_power_of_2(n);
    this->n = n;

    for (int i = 1; i < 2 * n; i++) {
      v[i] = -1; // fără puncte
    }

    set(n - 1, INFINITY);
  }

  void set(int pos, int val) {
    pos += n;
    v[pos] = val;
    for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
      v[pos] = max(v[2 * pos], v[2 * pos + 1]);
    }
  }

  // Returnează prima poziție după pos unde valoarea depășește val.
  int find_first_after(int pos, int val) {
    pos += n;
    pos++;

    // Urcă pînă cînd găsim un maxim mai mare decît val.
    while (v[pos] <= val) {
      if (pos & 1) {
        pos++;
      } else {
        pos >>= 1;
      }
    }

    // Coboară spre valoarea dorită, mergînd la stînga oricînd putem.
    while (pos < n) {
      pos = (v[2 * pos] > val) ? (2 * pos) : (2 * pos + 1);
    }

    return pos - n;
```

```
  }

};

query q[MAX_N];
int pos[MAX_N]; // pentru normalizare
int orig_x[MAX_N];
max_segment_tree segtree;
std::set<int> whys[MAX_N];
int n;

void read_queries() {
  char s[10];
  scanf("%d", &n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    scanf("%s %d %d", s, &q[i].x, &q[i].y);
    switch (s[0]) {
      case 'a': q[i].type = T_ADD; break;
      case 'r': q[i].type = T_REMOVE; break;
      default: q[i].type = T_FIND;
    }
  }
}

void normalize_x() {
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    pos[i] = i;
  }

  std::sort(pos, pos + n, [](int a, int b) {
    return q[a].x < q[b].x;
  });

  int ptr = 0;
  orig_x[ptr] = q[pos[0]].x;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    if (q[pos[i]].x != orig_x[ptr]) {
      orig_x[++ptr] = q[pos[i]].x;
    }
    q[pos[i]].x = ptr;
  }
}

void add_query(int x, int y) {
  whys[x].insert(y);
  segtree.set(x, *whys[x].rbegin());
}

void remove_query(int x, int y) {
  whys[x].erase(y);
```

```
  if (whys[x].empty()) {
    segtree.set(x, -1);
  } else {
    segtree.set(x, *whys[x].rbegin());
  }
}

void find_query(int x, int y) {
  int first = segtree.find_first_after(x, y);
  if (first < n) {
    int first_above = *whys[first].upper_bound(y);
    printf("%d %d\n", orig_x[first], first_above);
  } else {
    printf("-1\n");
  }
}

void process_queries() {
  segtree.init(n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    switch (q[i].type) {
      case T_ADD: add_query(q[i].x, q[i].y); break;
      case T_REMOVE: remove_query(q[i].x, q[i].y); break;
      default: find_query(q[i].x, q[i].y);
    }
  }
}

int main() {
  read_queries();
  normalize_x();
  process_queries();

  return 0;
}
```

A.8 Problema Medwalk (Lot 2025)

‹ înapoi • versiune online

```
// Complexitate: O((N + Q) log N log MAX_VAL).
//
// v2: Nu actualiza aint-ul de minime dacă valoarea nu s-a schimbat.
#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
#include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 100'000;
```

```
const int MAX_VALUE = 300'000;
const int MAX_POS_SEGTREE_NODES = 1 << 18;
const int MAX_VAL_SEGTREE_NODES = 1 << 20;
const int INF = 1'000'000;
const int OP_UPDATE = 1;

typedef __gnu_pbds::tree<
  int,
  __gnu_pbds::null_type,
  std::less<int>,
  __gnu_pbds::rb_tree_tag,
  __gnu_pbds::tree_order_statistics_node_update
  > set;

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

int max(int x, int y) {
  return (x > y) ? x : y;
}

struct pair {
  int v[2];

  void set(int pos, int val) {
    v[pos] = val;
  }

  int get_min() {
    return min(v[0], v[1]);
  }

  int get_max() {
    return max(v[0], v[1]);
  }
};

pair mat[MAX_N];
int n, num_queries;

int next_power_of_2(int x) {
  return 1 << (32 - __builtin_clz(x - 1));
}

// Admite actualizări punctuale și interogări de minim pe interval.
struct min_segment_tree {
  int v[MAX_POS_SEGTREE_NODES];
  int n;
```

```
  void init(int size) {
    n = next_power_of_2(size);
  }

  void update(int pos, int val) {
    pos += n;
    v[pos] = val;
    for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
      v[pos] = min(v[2 * pos], v[2 * pos + 1]);
    }
  }

  int range_min(int l, int r) {
    l += n;
    r += n;
    int result = INF;

    while (l <= r)  {
      if (l & 1) {
        result = min(result, v[l++]);
      }
      l >>= 1;

      if (!(r & 1)) {
        result = min(result, v[r--]);
      }
      r >>= 1;
    }

    return result;
  }
};

// Kudos https://stackoverflow.com/a/22075025/6022817
//
// Arbore de intervale pe valori. Fiecare nod care subîntinde valorile [x, y)
// reține un set cu pozițiile pe care apar acele valori.
struct val_segment_tree {
  set s[MAX_VAL_SEGTREE_NODES];
  int n;

  void init(int size) {
    n = next_power_of_2(size);
  }

  void insert(int pos, int val) {
    for (val += n; val; val /= 2) {
      s[val].insert(pos);
    }
  }
```

```
  void erase(int pos, int val) {
    for (val += n; val; val /= 2) {
      s[val].erase(pos);
    }
  }

  // Cîte poziții din [l, r] sînt ocupate de valori subîntinse de acest nod?
  int count_positions_between(int node, int l, int r) {
    return s[node].order_of_key(r + 1) - s[node].order_of_key(l);
  }

  // Contract: k este 0-based, iar [l, r] este interval închis.
  int kth_element(int k, int l, int r) {
    int node = 1;

    while (node < n) {
      int on_left = count_positions_between(2 * node, l, r);
      if (on_left > k) {
        node = 2 * node;
      } else {
        k -= on_left;
        node = 2 * node + 1;
      }
    }

    return node - n;
  }
};

void read_data() {
  scanf("%d %d", &n, &num_queries);
  for (int r = 0; r < 2; r++) {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
      int x;
      scanf("%d", &x);
      mat[i].set(r, x);
    }
  }
}

min_segment_tree maxima;
val_segment_tree occur;

void build_segment_trees() {
  maxima.init(n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    maxima.update(i, mat[i].get_max());
  }
```

```
  occur.init(MAX_VALUE + 1);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    occur.insert(i, mat[i].get_min());
  }
}

void update(int row, int col, int val) {
  int old_min = mat[col].get_min();
  mat[col].set(row, val);
  int new_min = mat[col].get_min();

  maxima.update(col, mat[col].get_max());

  if (new_min != old_min) {
    occur.erase(col, old_min);
    occur.insert(col, new_min);
  }
}

int query(int left, int right) {
  int len = right - left + 2;
  int median_pos = (len - 1) / 2;
  int median = occur.kth_element(median_pos, left, right);
  int best_max = maxima.range_min(left, right);

  if (best_max >= median) {
    return median;
  } else {
    // best_max trebuie inserat înainte de median_pos. Răspunsul poate fi la
    // poziția median_pos - 1 sau poate fi chiar best_max.
    int prev = occur.kth_element(median_pos - 1, left, right);
    return max(prev, best_max);
  }
}

void process_queries() {
  while (num_queries--) {
    int type;
    scanf("%d", &type);
    if (type == OP_UPDATE) {
      int r, c, x;
      scanf("%d %d %d", &r, &c, &x);
      r--;
      c--;
      update(r, c, x);
    } else {
      int left, right;
      scanf("%d %d", &left, &right);
      left--;
      right--;
```

```
      printf("%d\n", query(left, right));
    }
  }
}

int main() {
  read_data();
  build_segment_trees();
  process_queries();

  return 0;
}
```

Anexa B

Arbori de intervale cu propagare *lazy*

B.1 Problema Polynomial Queries (CSES)

înapoi

Sursă cu AINT iterativ.

```
// Complexitate: O(q log n)
//
// Metodă: menține un arbore de intervale care admite sume pe interval și
// adăugarea unei progresii pe interval.
#include <stdio.h>

const int MAX_SEGTREE_NODES = 1 << 19;
const int T_UPDATE = 1;

int next_power_of_2(int n) {
  return 1 << (32 - __builtin_clz(n - 1));
}

long long progression_sum(long long first, long long step, int len) {
  return first * len + step * (len - 1) * len / 2;
}

// Invarianți:
//
// 1. Valorile reale ale nodurilor subîntines sînt valorile lor v respective
//    plus o progresie aritmetică definită prin first și step.
// 2. Valoarea v a unui nod nu include progresia nodului.
struct segment_tree_node {
  long long s;
  long long first, step;

  long long get_value(int size) {
    return s + progression_sum(first, step, size);
```

```
  }
};


struct segment_tree {
  segment_tree_node v[MAX_SEGTREE_NODES];
  int n;

  void init(int n) {
    this->n = next_power_of_2(n);
  }

  void set(int pos, int val) {
    v[pos + n].s = val;
  }


  void build() {
    for (int i = n - 1; i; i--) {
      v[i].s = v[2 * i].s + v[2 * i + 1].s;
    }
  }

  void push(int t, int size) {
    int l = 2 * t, r = 2 * t + 1;

    v[l].first += v[t].first;
    v[l].step += v[t].step;

    long long first_right = v[t].first + v[t].step * size / 2;
    v[r].first += first_right;
    v[r].step += v[t].step;

    v[t].s += progression_sum(v[t].first, v[t].step, size);
    v[t].first = 0;
    v[t].step = 0;
  }

  void push_path(int node, int size) {
    if (node) {
      push_path(node / 2, size * 2);
      push(node, size);
    }
  }

  void pull(int t, int size) {
    int l = 2 * t, r = 2 * t + 1;
    v[t].s = v[l].get_value(size / 2) + v[r].get_value(size / 2);
  }
```

```
void pull_path(int node) {
  for (int x = node / 2, size = 2; x; x /= 2, size <<= 1) {
    pull(x, size);
  }
}

void add_progression(int l, int r) {
  l += n;
  r += n;
  int orig_l = l, orig_r = r, size = 1;
  push_path(l / 2, 2);
  push_path(r / 2, 2);

  while (l <= r)  {
    // Prima frunză subîntinsă de nodul x este x * size.
    if (l & 1) {
      v[l].first += l * size - orig_l + 1;
      v[l].step++;
      l++;
    }
    l >>= 1;

    if (!(r & 1)) {
      v[r].first += r * size - orig_l + 1;
      v[r].step++;
      r--;
    }
    r >>= 1;
    size <<= 1;
  }

  pull_path(orig_l);
  pull_path(orig_r);
}

long long range_sum(int l, int r) {
  long long sum = 0;
  int size = 1;

  l += n;
  r += n;
  push_path(l / 2, 2);
  push_path(r / 2, 2);

  while (l <= r)  {
    if (l & 1) {
      sum += v[l++].get_value(size);
    }
    l >>= 1;
```

```
      if (!(r & 1)) {
        sum += v[r--].get_value(size);
      }
      r >>= 1;
      size <<= 1;
    }

    return sum;
  }

};

segment_tree st;
int n, num_ops;

void read_array() {
  scanf("%d %d", &n, &num_ops);
  st.init(n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int x;
    scanf("%d", &x);
    st.set(i, x);
  }
  st.build();
}

void process_ops() {
  while (num_ops--) {
    int type, l, r;
    scanf("%d %d %d", &type, &l, &r);
    l--; r--;
    if (type == T_UPDATE) {
      st.add_progression(l, r);
    } else {
      printf("%lld\n", st.range_sum(l, r));
    }
  }
}

int main() {
  read_array();
  process_ops();

  return 0;
}
```

Sursă cu AINT recursiv.

```
// Complexitate: O(q log n)
```

```
//
// Metodă: menține un arbore de intervale care admite sume pe interval și
// adăugarea unei progresii pe interval.
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 1 << 18;
const int T_UPDATE = 1;

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

int max(int x, int y) {
  return (x > y) ? x : y;
}

int next_power_of_2(int n) {
  return 1 << (32 - __builtin_clz(n - 1));
}

long long progression_sum(long long first, long long step, int len) {
  return first * len + step * (len - 1) * len / 2;
}

// Invarianți:
//
// 1. Valorile reale ale nodurilor subîntines sînt valorile lor v respective
//    plus o progresie aritmetică definită prin first și step.
// 2. v[k] include first[k] și step[k], dar nu și valorile de la strămoși.
// 3. Toate intervalele sînt [închis, deschis).
struct segment_tree {
  long long v[2 * MAX_N];
  long long first[2 * MAX_N];
  long long step[2 * MAX_N];
  int n;

  void init(int n) {
    this->n = next_power_of_2(n);
  }

  void set(int pos, int val) {
    v[pos + n] = val;
  }

  void build() {
    for (int i = n - 1; i; i--) {
      v[i] = v[2 * i] + v[2 * i + 1];
    }
  }
```

```
void push(int t, int len) {
  first[2 * t] += first[t];
  step[2 * t] += step[t];
  v[2 * t] += progression_sum(first[t], step[t], len / 2);

  int right_first = first[t] + step[t] * len / 2;
  first[2 * t + 1] += right_first;
  step[2 * t + 1] += step[t];
  v[2 * t + 1] += progression_sum(right_first, step[t], len / 2);

  first[t] = 0;
  step[t] = 0;
}

void pull(int t) {
  v[t] = v[2 * t] + v[2 * t + 1];
}

// pos1 = poziția unde scriem 1
void add_progression_helper(int t, int pl, int pr, int l, int r, int pos1) {
  if (l >= r) {
    return;
  } else if ((l == pl) && (r == pr)) {
    int value_at_l = l - pos1 + 1;
    first[t] += value_at_l;
    step[t]++;
    v[t] += progression_sum(value_at_l, 1, r - l);
  } else {
    push(t, pr - pl);
    int mid = (pl + pr) >> 1;
    add_progression_helper(2 * t, pl, mid, l, min(r, mid), pos1);
    add_progression_helper(2 * t + 1, mid, pr, ::max(l, mid), r, pos1);
    pull(t);
  }
}

void add_progression(int left, int right) {
  add_progression_helper(1, 0, n, left, right, left);
}

long long range_sum_helper(int t, int pl, int pr, int l, int r) {
  if (l >= r) {
    return 0;
  } else if ((l == pl) && (r == pr)) {
    return v[t];
  } else {
    push(t, pr - pl);
    int mid = (pl + pr) >> 1;
    return range_sum_helper(2 * t, pl, mid, l, min(r, mid)) +
      range_sum_helper(2 * t + 1, mid, pr, ::max(l, mid), r);
```

```
    }
  }

  long long range_sum(int left, int right) {
    return range_sum_helper(1, 0, n, left, right);
  }
};

segment_tree s;
int n, num_ops;

void read_array() {
  scanf("%d %d", &n, &num_ops);
  s.init(n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int x;
    scanf("%d", &x);
    s.set(i, x);
  }
  s.build();
}

void process_ops() {
  while (num_ops--) {
    int type, l, r;
    scanf("%d %d %d", &type, &l, &r);
    if (type == T_UPDATE) {
      s.add_progression(l - 1, r);
    } else {
      printf("%lld\n", s.range_sum(l - 1, r));
    }
  }
}

int main() {
  read_array();
  process_ops();

  return 0;
}
```

B.2 Problema Nezzar and Binary String (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```
// Complexitate: O(q log n).
#include <stdio.h>
```

```
const int MAX_N = 256 * 1024;
const int MAX_OPS = 200'000;
const int ST_CLEAN = 2;

int next_power_of_2(int n) {
  return 1 << (32 - __builtin_clz(n - 1));
}

// Arbore de intervale cu valori 0/1, atribuire pe interval și sumă pe
// interval.
//
// Contract: state[x] poate fi:
// * 0/1 pentru a indica o valoare de atribuit pe toți descendenții lui x, sau
// * ST_CLEAN pentru a arăta că am apelat deja push.
//
// sum[node] ține cont și de state[node].
struct segment_tree {
  int sum[2 * MAX_N];
  int state[2 * MAX_N];
  int n;

  void init(char* s, int len) {
    n = next_power_of_2(len);
    for (int i = 0; i < len; i++) {
      sum[n + i] = s[i] - '0';
    }
    for (int i = len; i < n; i++) {
      sum[n + i] = 0;
    }
    for (int i = 1; i < 2 * n; i++) {
      state[i] = ST_CLEAN;
    }

    build();
  }

  void build () {
    for (int i = n - 1; i; i--) {
      sum[i] = sum[2 * i] + sum[2 * i + 1];
    }
  }

  void push(int x) {
    if (state[x] != ST_CLEAN) {
      state[2 * x] = state[2 * x + 1] = state[x];
      sum[2 * x] = sum[2 * x + 1] = sum[x] / 2;
      state[x] = ST_CLEAN;
    }
  }
```

```
void push_all() {
  for (int i = 1; i < n; i++) {
    push(i);
  }
}

void push_path(int x) {
  int bits = __builtin_popcount(n - 1);
  for (int b = bits; b; b--) {
    push(x >> b);
  }
}

void pull_path(int x) {
  for (x /= 2; x; x /= 2) {
    if (state[x] == ST_CLEAN) {
      sum[x] = sum[2 * x] + sum[2 * x + 1];
    }
  }
}

void range_set(int l, int r, int val) {
  l += n;
  r += n;
  int orig_l = l, orig_r = r;
  int size = 1;

  push_path(l);
  push_path(r);

  while (l <= r)  {
    if (l & 1) {
      sum[l] = size * val;
      state[l++] = val;
    }
    l >>= 1;

    if (!(r & 1)) {
      sum[r] = size * val;
      state[r--] = val;
    }
    r >>= 1;
    size <<= 1;
  }

  pull_path(orig_l);
  pull_path(orig_r);
}

int range_sum(int l, int r) {
```

```
    int result = 0;

    l += n;
    r += n;
    push_path(l);
    push_path(r);

    while (l <= r)  {
      if (l & 1) {
        result += sum[l++];
      }
      l >>= 1;

      if (!(r & 1)) {
        result += sum[r--];
      }
      r >>= 1;
    }

    return result;
  }

  bool equals(char* s, int len) {
    push_all();

    int i = 0;
    while ((i < len) && (s[i] - '0' == sum[n + i])) {
      i++;
    }

    return (i == len);
  }
};

struct operation {
  int l, r;
};

segment_tree st;
char start[MAX_N + 1], finish[MAX_N + 1];
operation op[MAX_OPS];
int len, num_ops;

void read_data() {
  scanf("%d %d %s %s", &len, &num_ops, start, finish);
  for (int i = 0; i < num_ops; i++) {
    scanf("%d %d\n", &op[i].l, &op[i].r);
    op[i].l--;
    op[i].r--;
  }
```

```
}

bool process_op(operation op) {
  int num_ones = st.range_sum(op.l, op.r);
  int num_zeroes = (op.r - op.l + 1) - num_ones;
  if (num_ones == num_zeroes) {
    return false;
  } else {
    int majority = (num_ones > num_zeroes) ? 1 : 0;
    st.range_set(op.l, op.r, majority);
    return true;
  }
}

void process_test() {
  read_data();
  st.init(finish, len);
  int i = num_ops - 1;
  while ((i >= 0) && process_op(op[i])) {
    i--;
  }

  bool success = (i < 0) && st.equals(start, len);
  printf("%s\n", success ? "YES" : "NO");
}

int main() {
  int num_tests;
  scanf("%d", &num_tests);
  while (num_tests--) {
    process_test();
  }

  return 0;
}
```

B.3 Problema Simple (infO(1)Cup 2019)

‹ înapoi • versiune online

```
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 200'000;
const int MAX_SEGTREE_NODES = 1 << 19;
const long long INF = 1LL << 60;
const int OP_ADD = 0;

long long min(long long x, long long y) {
```

```
  return (x < y) ? x :  y;
}

long long max(long long x, long long y) {
  return (x > y) ? x :  y;
}

// Un arbore de intervale cu propagare lazy. Fiecare nod reține
// * minimul par,  maximul par, minimul impar și maximul impar;
// * o cantitate delta de adăugat pe tot subarborele.
//
// Contract: Nodul curent și-a aplicat deja delta sie însuși.
struct node {
  long long e, E, o, O;
  long long delta;

  void empty() {
    // Astfel operațiile de minim/maxim funcționează fără cazuri particulare.
    // 2x pentru că ne lăsăm loc să creștem/scădem.
    e = o = 2 * INF;
    E = O = -2 * INF;
    delta = 0;
  }

  void set(int val) {
    empty();
    if (val % 2) {
      o = O = val;
    } else {
      e = E = val;
    }
  }

  void swap() {
    long long tmp = e; e = o; o = tmp;
    tmp = E; E = O; O = tmp;
  }

  void push(node& a, node& b) {
    a.add(delta);
    b.add(delta);
    delta = 0;
  }

  void pull(node a, node b) {
    // Dacă nodul este *dirty*, atunci el știe mai bine situația curentă. Fiii
    // săi au informație perimată.
    if (!delta) {
      e = min(a.e, b.e);
      E = max(a.E, b.E);
```

```
      o = min(a.o, b.o);
      O = max(a.O, b.O);
    }
  }

  void add(long long val) {
    delta += val;
    if (val % 2) {
      // Exemplu: [9,15] și [6,30] +5 ⇒ [11,35] și [14,20].
      swap();
    }
    e += val;
    E += val;
    o += val;
    O += val;
  }
};

struct segment_tree {
  node v[MAX_SEGTREE_NODES];
  int n, bits;

  void init(int _n) {
    bits = 32 - __builtin_clz(_n - 1);
    n = 1 << bits;

    for (int i = n + _n; i < 2 * n; i++) {
      // Necesar deoarece altfel nodurile de la _n la n rămîn pe zero.
      v[i].empty();
    }
  }

  void raw_set(int pos, int val) {
    v[pos + n].set(val);
  }

  void build() {
    for (int i = n - 1; i; i--) {
      v[i].pull(v[2 * i], v[2 * i + 1]);
    }
  }

  void push_path(int pos) {
    for (int b = bits - 1; b; b--) {
      int t = pos >> b;
      v[t].push(v[2 * t], v[2 * t + 1]);
    }
  }

  void pull_path(int pos) {
```

```
  for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
    v[pos].pull(v[2 * pos], v[2 * pos + 1]);
  }
}

void range_add(int l, int r, int val) {
  l += n;
  r += n;
  int orig_l = l, orig_r = r;
  push_path(l);
  push_path(r);

  while (l <= r)  {
    if (l & 1) {
      v[l++].add(val);
    }
    l >>= 1;

    if (!(r & 1)) {
      v[r--].add(val);
    }
    r >>= 1;
  }

  pull_path(orig_l);
  pull_path(orig_r);
}

node range_query(int l, int r) {
  node accumulator;
  accumulator.empty();

  l += n;
  r += n;
  push_path(l);
  push_path(r);

  while (l <= r)  {
    if (l & 1) {
      accumulator.pull(accumulator, v[l++]);
    }
    l >>= 1;

    if (!(r & 1)) {
      accumulator.pull(accumulator, v[r--]);
    }
    r >>= 1;
  }

  return accumulator;
```

```
  }
};

segment_tree st;
int n;

void read_array_into_segtree() {
  scanf("%d", &n);
  st.init(n);

  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int x;
    scanf("%d", &x);
    st.raw_set(i, x);
  }

  st.build();
}

void process_ops() {
  int num_ops, type, l, r, val;

  scanf("%d", &num_ops);
  while (num_ops--) {
    scanf("%d %d %d", &type, &l, &r);
    l--;
    r--;
    if (type == OP_ADD) {
      scanf("%d", &val);
      st.range_add(l, r, val);
    } else {
      node nd = st.range_query(l, r);
      long long e = (nd.e > INF) ? -1 : nd.e;
      long long O = (nd.O < -INF) ? -1 : nd.O;
      printf("%lld %lld\n", e, O);
    }
  }
}

int main() {
  read_array_into_segtree();
  process_ops();
  return 0;
}
```

B.4 Problema Balama (Baraj ONI 2024)

înapoi

Sursă cu AINT iterativ (versiune online).

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 200'000;
const int MAX_SEGTREE_NODES = 1 << 19;

struct hinge {
  int r, pos;
};

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

int max(int x, int y) {
  return (x > y) ? x : y;
}

int next_power_of_2(int n) {
  return 1 << (32 - __builtin_clz(n - 1));
}

struct segment_tree_node {
  int m, delta;
};

struct segment_tree {
  segment_tree_node v[MAX_SEGTREE_NODES];
  int n, bits;

  void init(int _n) {
    n = next_power_of_2(_n);
    bits = 31 - __builtin_clz(n);
  }

  void push_path(int node) {
    for (int b = bits; b; b--) {
      int t = node >> b;
      v[2 * t].delta += v[t].delta;
      v[2 * t].m += v[t].delta;
      v[2 * t + 1].delta += v[t].delta;
      v[2 * t + 1].m += v[t].delta;
      v[t].delta = 0;
    }
  }

  void pull_path(int node) {
```

```
    for (int t = node / 2; t; t /= 2) {
      v[t].m = v[t].delta + max(v[2 * t].m, v[2 * t + 1].m);
    }
  }

  int range_max_and_inc(int l, int r) {
    l += n;
    r += n;
    push_path(l);
    push_path(r);

    int result = 0;
    int orig_l = l, orig_r = r;

    while (l <= r)  {
      if (l & 1) {
        result = max(result, v[l].m);
        v[l].m++;
        v[l].delta++;
        l++;
      }
      l >>= 1;

      if (!(r & 1)) {
        result = max(result, v[r].m);
        v[r].m++;
        v[r].delta++;
        r--;
      }
      r >>= 1;
    }

    pull_path(orig_l);
    pull_path(orig_r);

    return result;
  }
};

hinge h[MAX_N];
int sol[MAX_N];
segment_tree st;
int n, k;

void read_data() {
  FILE* f = fopen("balama.in", "r");
  fscanf(f, "%d %d", &n, &k);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    fscanf(f, "%d", &h[i].r);
    h[i].pos = i;
```

```
  }
  fclose(f);
}

void sort_by_r() {
  std::sort(h, h + n, [](hinge a, hinge b) {
    return a.r > b.r;
  });
}

void scan_hinges() {
  int next_to_fill = 0;
  int i = 0;

  st.init(n);

  while (next_to_fill < k) {
    int left = max(h[i].pos - k + 1, 0);
    int right = min(h[i].pos, n - k);
    int m = st.range_max_and_inc(left, right);
    if (m == next_to_fill) {
      sol[next_to_fill++] = h[i].r;
    }
    i++;
  }
}

void write_answers() {
  FILE* f = fopen("balama.out", "w");
  for (int i = k - 1; i >= 0; i--) {
    fprintf(f, "%d ", sol[i]);
  }
  fprintf(f, "\n");
  fclose(f);
}

int main() {
  read_data();
  sort_by_r();
  scan_hinges();
  write_answers();

  return 0;
}
```

Sursă cu AINT recursiv (versiune online).

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>
```

```
const int MAX_N = 1 << 18;

struct hinge {
  int r, pos;
};

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

int max(int x, int y) {
  return (x > y) ? x : y;
}

int next_power_of_2(int n) {
  while (n & (n - 1)) {
    n += (n & -n);
  }

  return n;
}

// Arbore de segmente cu operațiile:
//
// 1. update: inc(left, right) -- incrementează pozițiile [left, right]
// 2. query: max(left, right) -- returnează maximul din [left, right]
//
// Invariant:
//
// * lazy_sum este valoarea de adăugat pe fiecare nod din subarbore
// * m este maximul real din subarbore, inclusiv lazy_sum
struct segment_tree {
  int m[2 * MAX_N];
  int lazy_sum[2 * MAX_N];
  int n;

  void init(int n) {
    this->n = next_power_of_2(n);
  }

  void push(int t) {
    lazy_sum[2 * t] += lazy_sum[t];
    m[2 * t] += lazy_sum[t];
    lazy_sum[2 * t + 1] += lazy_sum[t];
    m[2 * t + 1] += lazy_sum[t];
    lazy_sum[t] = 0;
  }

  void pull(int t) {
```

```
    m[t] = ::max(m[2 * t], m[2 * t + 1]);
  }

  void inc_helper(int t, int pl, int pr, int l, int r) {
    if (l >= r) {
      return;
    } else if ((l == pl) && (r == pr)) {
      lazy_sum[t]++;
      m[t]++;
    } else {
      push(t);
      int mid = (pl + pr) >> 1;
      inc_helper(2 * t, pl, mid, l, min(r, mid));
      inc_helper(2 * t + 1, mid, pr, ::max(l, mid), r);
      pull(t);
    }
  }

  void inc(int left, int right) {
    inc_helper(1, 0, n, left, right + 1);
  }

  int max_helper(int t, int pl, int pr, int l, int r) {
    if (l >= r) {
      return 0;
    } else if ((l == pl) && (r == pr)) {
      return m[t];
    } else {
      push(t);
      int mid = (pl + pr) >> 1;
      return ::max(max_helper(2 * t, pl, mid, l, min(r, mid)),
                   max_helper(2 * t + 1, mid, pr, ::max(l, mid), r));
    }
  }

  int max(int left, int right) {
    return max_helper(1, 0, n, left, right + 1);
  }
};

hinge h[MAX_N];
int sol[MAX_N];
segment_tree st;
int n, k;

void read_data() {
  FILE* f = fopen("balama.in", "r");
  fscanf(f, "%d %d", &n, &k);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    fscanf(f, "%d", &h[i].r);
```

```
    h[i].pos = i;
  }
  fclose(f);
}

void sort_by_r() {
  std::sort(h, h + n, [](hinge a, hinge b) {
    return a.r > b.r;
  });
}

void scan_hinges() {
  int next_to_fill = 0;
  int i = 0;

  st.init(n);

  while (next_to_fill < k) {
    int left = max(h[i].pos - k + 1, 0);
    int right = min(h[i].pos, n - k);
    int m = st.max(left, right);
    st.inc(left, right);
    if (m == next_to_fill) {
      sol[next_to_fill++] = h[i].r;
    }
    i++;
  }
}

void write_answers() {
  FILE* f = fopen("balama.out", "w");
  for (int i = k - 1; i >= 0; i--) {
    fprintf(f, "%d ", sol[i]);
  }
  fprintf(f, "\n");
  fclose(f);
}

int main() {
  read_data();
  sort_by_r();
  scan_hinges();
  write_answers();

  return 0;
}
```

Anexa C

Arbori indexați binar

C.1 Problema The Permutation Game Again (SPOJ)

înapoi

```
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 200'000;
const int MOD = 1'000'000'007;

struct fenwick_tree {
  int v[MAX_N + 1];
  int n;

  void init(int n) {
    this->n = n;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
      v[i] = 0;
    }
  }

  void check(int pos) {
    do {
      v[pos]++;
      pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
  }

  int prefix_sum(int pos) {
    int s = 0;
    while (pos) {
      s += v[pos];
      pos &= pos - 1;
    }
    return s;
```

```
  }
};

fenwick_tree fen;

void solve_test() {
  int n, x;
  scanf("%d", &n);
  fen.init(n);
  long long rank = 0;

  for (int place = n; place; place--) {
    scanf("%d", &x);
    int not_seen_before = x - 1 - fen.prefix_sum(x);
    rank = (rank * place + not_seen_before) % MOD;
    fen.check(x);
  }

  rank++; // Noi calculăm rangul începînd cu 0.

  printf("%lld\n", rank);
}

int main() {
  int num_tests;
  scanf("%d", &num_tests);
  while (num_tests--) {
    solve_test();
  }

  return 0;
}
```

C.2 Problema Multiset (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 1'000'000;

struct fenwick_tree {
  int v[MAX_N + 1];
  int n, max_p2;

  void init(int n) {
    this->n = n;
    max_p2 = 1 << (31 - __builtin_clz(n));
```

```
  }

  void add(int pos, int val) {
    do {
      v[pos] += val;
      pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
  }

  // Returnează poziția unde suma parțială atinge sau depășește sum.
  int bin_search(int sum) {
    int pos = 0;

    for (int interval = max_p2; interval; interval >>= 1) {
      if ((pos + interval <= n) && (v[pos + interval] < sum)) {
        sum -= v[pos + interval];
        pos += interval;
      }
    }

    return pos + 1;
  }

  void remove_kth_element(int k) {
    int pos = bin_search(k);
    add(pos, -1);
  }

  int get_smallest() {
    int pos = bin_search(1);
    return (pos <= n) ? pos : 0;
  }
};

fenwick_tree fen;
int n, num_ops;

void read_initial_multiset() {
  scanf("%d %d", &n, &num_ops);
  fen.init(n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int x;
    scanf("%d", &x);
    fen.add(x, 1);
  }
}

void process_queries() {
  while (num_ops--) {
    int x;
```

```
    scanf("%d", &x);
    if (x > 0) {
      fen.add(x, 1);
    } else {
      fen.remove_kth_element(-x);
    }
  }
}

void write_answer(int answer) {
  printf("%d\n", answer);
}

int main() {
  read_initial_multiset();
  process_queries();
  int answer = fen.get_smallest();
  write_answer(answer);

  return 0;
}
```

C.3 Problema Hanoi Factory (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 100'000;

struct ring {
  int in, out, h;
};

long long max(long long x, long long y) {
  return (x > y) ? x : y;
}

struct max_fenwick_tree {
  long long* v;
  int n;

  void init(long long* v, int n) {
    this->v = v;
    this->n = n;
    for (int i = 0; i <= n; i++) {
      v[i] = 0;
```

```
    }
  }

  void improve(int pos, long long val) {
    do {
      v[pos] = max(v[pos], val);
      pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
  }

  long long prefix_max(int pos) {
    long long m = 0;
    while (pos) {
      m = max(m, v[pos]);
      pos &= pos - 1;
    }
    return m;
  }
};

ring r[MAX_N];
// folosit și pentru arborele fenwick, și pentru normalizarea mărimilor
long long v[2 * MAX_N + 1];
max_fenwick_tree fen;
int n;

void read_rings() {
  scanf("%d", &n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    scanf("%d %d %d", &r[i].in, &r[i].out, &r[i].h);
  }
}

void sort_rings() {
  std::sort(r, r + n, [](ring& a, ring& b) {
    return (a.out > b.out) || ((a.out == b.out) && (a.in > b.in));
  });
}

int bin_search(int val) {
  int l = 0, r = 2 * n;
  while (v[l] != val) { // valoarea există garantat în v
    int m = (l + r) / 2;
    if (v[m] > val) {
      r = m;
    } else {
      l = m;
    }
  }
  return l;
```

```
}

void normalize_diameters() {
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    v[2 * i] = r[i].in;
    v[2 * i + 1] = r[i].out;
  }
  std::sort(v, v + 2 * n);

  for (int i = 0; i < n; i++) {
    r[i].in = 1 + bin_search(r[i].in);
    r[i].out = 1 + bin_search(r[i].out);
  }
}

long long solve_recurrence() {
  fen.init(v, 2 * n);

  long long max_height = 0;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    long long best = r[i].h + fen.prefix_max(r[i].out - 1);
    fen.improve(r[i].in, best);
    max_height = max(max_height, best);
  }

  return max_height;
}

void write_answer(long long answer) {
  printf("%lld\n", answer);
}

int main() {
  read_rings();
  sort_rings();
  normalize_diameters();
  long long answer = solve_recurrence();
  write_answer(answer);

  return 0;
}
```

C.4 Problema Subsequences (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```
// Folosim un singur vector pentru cnt, înlocuind cîte un element pe rînd.
#include <stdio.h>
```

```
const int MAX_N = 100'000;

struct fenwick_tree {
  long long v[MAX_N + 1];
  int n;

  void init(int n) {
    this->n = n;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
      v[i] = 0;
    }
  }

  void add(int pos, long long val) {
    do {
      v[pos] += val;
      pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
  }

  long long prefix_sum(int pos) {
    long long s = 0;
    while (pos) {
      s += v[pos];
      pos &= pos - 1;
    }
    return s;
  }
};

fenwick_tree fen;
int a[MAX_N];
long long cnt[MAX_N];
int n, k;

void read_data() {
  scanf("%d %d", &n, &k);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    scanf("%d", &a[i]);
  }
}

void iterate_lengths() {
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    cnt[i] = 1;
  }

  while (k--) {
    fen.init(n);
```

```
    for (int i = 0; i < n; i++) {
      long long old_cnt = cnt[i];
      cnt[i] = fen.prefix_sum(a[i] - 1);
      fen.add(a[i], old_cnt);
    }
  }
}

long long array_sum(long long* v, int n) {
  long long sum = 0;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    sum += v[i];
  }
  return sum;
}

void write_answer(long long answer) {
  printf("%lld\n", answer);
}

int main() {
  read_data();
  iterate_lengths();
  long long total = array_sum(cnt, n);
  write_answer(total);

  return 0;
}
```

C.5 Problema D-query (SPOJ)

‹ înapoi

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 30000;
const int MAX_QUERIES = 200000;
const int MAX_VAL = 1000000;

struct query {
  short l, r;
  int orig_index;
  short answer;
};

struct fenwick_tree {
```

```
  short v[MAX_N + 1];
  int n;

  void init(int n) {
    this->n = n;
  }

  void add(int pos, int val) {
    do {
      v[pos] += val;
      pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
  }

  short prefix_sum(int pos) {
    int sum = 0;
    while (pos) {
      sum += v[pos];
      pos &= pos - 1;
    }
    return sum;
  }

  short range_sum(int l, int r) {
    return prefix_sum(r) - prefix_sum(l - 1);
  }
};

int a[MAX_N + 1];
query q[MAX_QUERIES];
short prev_occur[MAX_VAL + 1];
fenwick_tree fen;
int n, num_queries;

void read_data() {
  scanf("%d", &n);
  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    scanf("%d", &a[i]);
  }
  scanf("%d", &num_queries);
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    scanf("%hd %hd", &q[i].l, &q[i].r);
    q[i].orig_index = i;
  }
}

void sort_queries_by_right_end() {
  std::sort(q, q + num_queries, [](query& a, query& b) {
    return a.r < b.r;
  });
```

```
}

void update_last_occurrence(int pos) {
  if (prev_occur[a[pos]]) {
    fen.add(prev_occur[a[pos]], -1);
  }
  prev_occur[a[pos]] = pos;
  fen.add(pos, +1);
}

int answer_queries_ending_at(int right, int q_index) {
  while ((q_index < num_queries) && (q[q_index].r == right)) {
    q[q_index].answer = fen.range_sum(q[q_index].l, q[q_index].r);
    q_index++;
  }

  return q_index;
}

void scan_array() {
  fen.init(n);
  int q_index = 0;

  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    update_last_occurrence(i);
    q_index = answer_queries_ending_at(i, q_index);
  }
}

void sort_queries_by_orig_index() {
  std::sort(q, q + num_queries, [](query& a, query& b) {
    return a.orig_index < b.orig_index;
  });
}

void write_answers() {
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    printf("%d\n", q[i].answer);
  }
}

int main() {
  read_data();
  sort_queries_by_right_end();
  scan_array();
  sort_queries_by_orig_index();
  write_answers();

  return 0;
```

```
}
```

C.6 Problema Magic Board (CodeChef)

‹ înapoi • versiune online

```
#include <stdio.h>

const int MAX_SIZE = 500'000;
const int MAX_TIME = 500'000;
const int MAX_WORD_LENGTH = 8;
enum op_type { OP_ROW_SET, OP_COL_SET, OP_ROW_QUERY, OP_COL_QUERY };

struct operation {
  op_type type;
  int index, value;
};

struct fenwick_tree {
  int v[MAX_TIME + 1];
  int n;

  void init(int n) {
    this->n = n;
  }

  void add(int pos, int val) {
    do {
      v[pos] += val;
      pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
  }

  void set(int pos) {
    add(pos, +1);
  }

  void unset(int pos) {
    add(pos, -1);
  }

  int count(int pos) {
    int s = 0;
    while (pos) {
      s += v[pos];
      pos &= pos - 1;
    }
    return s;
```

```
  }
};

struct line_info {
  int time[MAX_SIZE + 1];
  bool value[MAX_SIZE + 1];
  fenwick_tree change[2];
  int size, num_ops;

  void init(int size, int num_ops) {
    this->size = size;
    this->num_ops = num_ops;
    change[0].init(num_ops);
    change[1].init(num_ops);
  }

  void update(int index, int now, int new_value) {
    int old_value = value[index];
    int old_time = time[index];

    if (old_time) {
      change[old_value].unset(old_time);
    }

    change[new_value].set(now);
    time[index] = now;
    value[index] = new_value;
  }

  int count_zeroes(int index, int now, line_info& other) {
    int last_reset = time[index];
    if (!last_reset) {
      last_reset = num_ops;
    }
    int last_value = value[index];
    int changes = other.change[1 - last_value].count(last_reset);

    return (last_value == 0)
      ? (size - changes)
      : changes;
  }

  void query(int index, int now, line_info& other) {
    int num_zeroes = count_zeroes(index, now, other);
    printf("%d\n", num_zeroes);
  }

};

line_info rows, cols;
```

```
operation read_op() {
  char word[MAX_WORD_LENGTH + 1];
  operation op;

  scanf("%s", word);
  if (word[3] == 'Q') {
    op.type = (word[0] == 'R') ? OP_ROW_QUERY : OP_COL_QUERY;
    scanf("%d", &op.index);
  } else {
    op.type = (word[0] == 'R') ? OP_ROW_SET : OP_COL_SET;
    scanf("%d %d", &op.index, &op.value);
  }

  return op;
}

void process_op(operation op, int time) {
  if (op.type == OP_ROW_SET) {
    rows.update(op.index, time, op.value);
  } else if (op.type == OP_COL_SET) {
    cols.update(op.index, time, op.value);
  } else if (op.type == OP_ROW_QUERY) {
    rows.query(op.index, time, cols);
  } else { // OP_COL_QUERY
    cols.query(op.index, time, rows);
  }
}

void process_ops() {
  int size, num_ops;
  scanf("%d %d", &size, &num_ops);
  rows.init(size, num_ops);
  cols.init(size, num_ops);

  // Inversăm direcţia timpului astfel încît operaţiile din AIB-uri să fie pe
  // prefix, nu pe sufix.
  for (int time = num_ops; time; time--) {
    operation op = read_op();
    process_op(op, time);
  }
}

int main() {
  process_ops();

  return 0;
}
```

C.7 Problema Ball (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```cpp
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_LADIES = 500'000;

struct lady {
  int x, y, z;
};

int max(int x, int y) {
  return (x > y) ? x : y;
}

struct suffix_max_fenwick_tree {
  int v[MAX_LADIES + 1];
  int n;

  void init(int n) {
    this->n = n;
  }

  void update(int pos, int val) {
    pos = n + 1 - pos;
    do {
      v[pos] = max(v[pos], val);
      pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
  }

  int suffix_max(int pos) {
    pos = n + 1 - pos;
    int result = 0;
    while (pos) {
      result = max(result, v[pos]);
      pos &= pos - 1;
    }
    return result;
  }
};

lady l[MAX_LADIES];
suffix_max_fenwick_tree fen;
int pos[MAX_LADIES]; // folosit pentru normalizare
int n;
```

```
void read_data() {
  scanf("%d", &n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    scanf("%d", &l[i].x);
  }
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    scanf("%d", &l[i].y);
  }
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    scanf("%d", &l[i].z);
  }
}

void normalize_x() {
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    pos[i] = i;
  }

  std::sort(pos, pos + n, [](int a, int b) {
    return l[a].x < l[b].x;
  });

  int old_x = l[pos[0]].x, new_x = 1;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    if (l[pos[i]].x != old_x) {
      old_x = l[pos[i]].x;
      new_x++;
    }
    l[pos[i]].x = new_x;
  }
}

void sort_ladies_by_z() {
  std::sort(l, l + n, [](lady& a, lady& b) {
    return a.z > b.z;
  });
}

int process_equal_z_batch(int start, int end) {
  int result = 0;

  for (int i = start; i < end; i++) {
    int prev_max_y = fen.suffix_max(l[i].x + 1);
    result += (prev_max_y > l[i].y);
  }
  for (int i = start; i < end; i++) {
    fen.update(l[i].x, l[i].y);
  }

  return result;
```

```
}

int count_self_murderers() {
  fen.init(n);

  int result = 0;

  // Procesează calupuri de valori z egale. Aceste doamne nu se domină una pe
  // alta.
  int i = 0;
  while (i < n) {
    int j = i;
    while ((j < n) && (l[j].z == l[i].z)) {
      j++;
    }
    result += process_equal_z_batch(i, j);
    i = j;
  }

  return result;
}

void write_answer(int answer) {
  printf("%d\n", answer);
}

int main() {
  read_data();
  normalize_x();
  sort_ladies_by_z();
  int answer = count_self_murderers();
  write_answer(answer);

  return 0;
}
```

C.8 Problema Medwalk revizitată (Lot 2025)

‹ înapoi • versiune online

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>
#include <vector>

const int MAX_N = 100'000;
const int MAX_QUERIES = 100'000;
const int MAX_VALUE = 300'000;
const int MAX_SEGTREE_NODES = 1 << 18;
```

```
const int INF = 1'000'000;
const int OP_UPDATE = 1;

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

int max(int x, int y) {
  return (x > y) ? x : y;
}

struct matrix {
  int v[2][MAX_N + 1];

  void set(int row, int col, int val) {
    v[row][col] = val;
  }

  int get_min(int col) {
    return min(v[0][col], v[1][col]);
  }

  int get_max(int col) {
    return max(v[0][col], v[1][col]);
  }
};

struct query {
  int type;
  // Syntactic sugar ca să putem folosi <row, col, val> sau <left, right>, nu
  // <x, y, z>.
  union { int row; int left; };
  union { int col; int right; };
  int val;
};

matrix mat;
query q[MAX_QUERIES];
int n, num_queries;

int next_power_of_2(int x) {
  return 1 << (32 - __builtin_clz(x - 1));
}

// Admite actualizări punctuale și interogări de minim pe interval.
struct min_segment_tree {
  int v[MAX_SEGTREE_NODES];
  int n;

  void init(int size) {
```

```
    n = next_power_of_2(size);
  }

  void update(int pos, int val) {
    pos += n;
    v[pos] = val;
    for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
      v[pos] = min(v[2 * pos], v[2 * pos + 1]);
    }
  }

  int range_min(int l, int r) {
    l += n;
    r += n;
    int result = INF;

    while (l <= r)  {
      if (l & 1) {
        result = min(result, v[l++]);
      }
      l >>= 1;

      if (!(r & 1)) {
        result = min(result, v[r--]);
      }
      r >>= 1;
    }

    return result;
  }
};

// Kudos https://usaco.guide/plat/2DRQ?lang=cpp#offline-2d-bit și
// https://kilonova.ro/submissions/752782
//
// Arbore Fenwick 2D offline.
struct fenwick_2d {
  // Valorile distincte pe fiecare coloană.
  std::vector<int> col_rows[MAX_VALUE + 1];

  // Arborele 1D pe fiecare coloană, peste valorile existente.
  std::vector<int> col_fen[MAX_VALUE + 1];

  int n, max_p2;

  void init(int n) {
    this->n = n;
    max_p2 = 1 << (31 - __builtin_clz(n));
    for (int i = 0; i <= n; i++) {
      col_rows[i].push_back(0);
```

```
  }
}

// Notează faptul că rîndul row va fi folosit cel puțin o dată pe coloana
// col.
void reserve(int row, int col) {
  do {
    col_rows[col].push_back(row);
    col += col & -col;
  } while (col <= n);
}

void build() {
  for (int col = 1; col <= n; col++) {
    std::vector<int>& v = col_rows[col]; // syntactic sugar
    std::sort(v.begin(), v.end());
    v.erase(std::unique(v.begin(), v.end()), v.end());
    col_fen[col].resize(v.size() + 1);
  }
}

int leftmost_gte(int row, int col) {
  std::vector<int>& v = col_rows[col];
              return std::lower_bound(v.begin(), v.end(), row) - v.begin();
}

// Adaugă delta (bifează / debifează) pentru rîndul row și toți succesorii
// săi în fiecare AIB 1D, atît pe coloana col cît și pe toate coloanele
// succesoare în AIB-ul 2D.
void add(int row, int col, int delta) {
  do {
    int pos = leftmost_gte(row, col);
    do {
      col_fen[col][pos] += delta;
      pos += pos & -pos;
    } while (pos <= (int)col_fen[col].size());
    col += col & -col;
  } while (col <= n);
}

int prefix_sum(int pos, int col) {
  int s = 0;
  while (pos) {
    s += col_fen[col][pos];
    pos &= pos - 1;
  }
  return s;
}

int count_less_than(int val, int col) {
```

```
    // Reminder: AIB-ul 1D este normalizat. Află pe ce rînd se află val.
    int pos = leftmost_gte(val, col);
    return prefix_sum(pos - 1, col);
  }

  int count_in_range(int col, int l, int r) {
    return count_less_than(r + 1, col) - count_less_than(l, col);
  }

  // Contract: k este 0-based, iar [l, r] este un interval închis de valori
  // (rînduri).
  int kth_element(int k, int l, int r) {
    int col = 0;

    for (int interval = max_p2; interval; interval >>= 1) {
      if (col + interval <= n) {
        int cnt = count_in_range(col + interval, l, r);
        if (cnt <= k) {
          k -= cnt;
          col += interval;
        }
      }
    }

    return col + 1;
  }
};

min_segment_tree maxima;
fenwick_2d minima;

void read_data() {
  scanf("%d %d", &n, &num_queries);
  for (int r = 0; r < 2; r++) {
    for (int c = 1; c <= n; c++) {
      int x;
      scanf("%d", &x);
      mat.set(r, c, x);
    }
  }

  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    query& z = q[i];
    scanf("%d", &z.type);
    if (z.type == OP_UPDATE) {
      scanf("%d %d %d", &z.row, &z.col, &z.val);
      z.row--;
    } else {
      scanf("%d %d", &z.left, &z.right);
    }
```

```
  }
}

void build_maxima_segtree() {
  maxima.init(n + 1);
  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    maxima.update(i, mat.get_max(i));
  }
}

void simulate() {
  // Rezervă minimele inițiale.
  for (int c = 1; c <= n; c++) {
    minima.reserve(c, mat.get_min(c));
  }

  // Rezervă minimele care iau naștere prin actualizări.
  matrix mat_copy = mat;
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    if (q[i].type == OP_UPDATE) {
      mat_copy.set(q[i].row, q[i].col, q[i].val);
      minima.reserve(q[i].col, mat_copy.get_min(q[i].col));
    }
  }
}

void build_fenwick() {
  minima.init(MAX_VALUE);
  simulate();
  minima.build();

  for (int c = 1; c <= n; c++) {
    minima.add(c, mat.get_min(c), +1);
  }
}

void update(int row, int col, int val) {
  int old_min = mat.get_min(col);
  mat.set(row, col, val);
  int new_min = mat.get_min(col);

  maxima.update(col, mat.get_max(col));

  if (new_min != old_min) {
    minima.add(col, old_min, -1);
    minima.add(col, new_min, +1);
  }
}

int query(int left, int right) {
```

```
  int len = right - left + 2;
  int median_pos = (len - 1) / 2;
  int median = minima.kth_element(median_pos, left, right);
  int best_max = maxima.range_min(left, right);

  if (best_max >= median) {
    return median;
  } else {
    // best_max trebuie inserat înainte de median_pos. Răspunsul poate fi la
    // poziția median_pos - 1 sau poate fi chiar best_max.
    int prev = minima.kth_element(median_pos - 1, left, right);
    return max(prev, best_max);
  }
}

void process_queries() {
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    if (q[i].type == OP_UPDATE) {
      update(q[i].row, q[i].col, q[i].val);
    } else {
      printf("%d\n", query(q[i].left, q[i].right));
    }
  }
}

int main() {
  read_data();
  build_maxima_segtree();
  build_fenwick();
  process_queries();

  return 0;
}
```

Anexa D

Descompunere în radical

D.1 Problema Mexitate (ONI 2018 clasa a 9-a)

înapoi

Sursă naivă (versiune online).

```
#include <stdio.h>

const int MAX_ELEMS = 400'000;
const int MOD = 1'000'000'007;

// Costul calculării funcției mex() este mare. Versiunea 2 va folosi o
// structură mai eficientă pentru frequency_tracker.
struct frequency_tracker {
  int f[MAX_ELEMS + 2]; // rows * cols + 1 în cel mai rău caz

  void add(int x) {
    f[x]++;
  }

  void remove(int x) {
    f[x]--;
  }

  int mex() {
    int x = 1;
    while (f[x]) {
      x++;
    }
    return x;
  }
};

int mat[MAX_ELEMS];
```

```
frequency_tracker ft;
int rows, cols, k, l;

void swap(int& x, int& y) {
  int tmp = x;
  x = y;
  y = tmp;
}

void read_right_matrix(FILE* f) {
  for (int r = 0; r < rows; r++) {
    for (int c = 0; c < cols; c++) {
      fscanf(f, "%d", &mat[r * cols + c]);
    }
  }
}

void read_transposed_matrix(FILE* f) {
  for (int r = 0; r < rows; r++) {
    for (int c = 0; c < cols; c++) {
      fscanf(f, "%d", &mat[c * rows + r]);
    }
  }
}

void read_data() {
  FILE* f = fopen("mexitate.in", "r");
  fscanf(f, "%d %d %d %d", &rows, &cols, &k, &l);
  if (k <= l) {
    read_right_matrix(f);
  } else {
    read_transposed_matrix(f);
    swap(rows, cols);
    swap(k, l);
  }
  fclose(f);
}

int get(int r, int c) {
  return mat[r * cols + c];
}

int north_west_corner() {
  for (int r = 0; r < k; r++) {
    for (int c = 0; c < l; c++) {
      ft.add(get(r, c));
    }
  }
  return ft.mex();
}
```

```
void move_right(int r, int c) {
  for (int i = r; i < r + k; i++) {
    ft.remove(get(i, c));
    ft.add(get(i, c + l));
  }
}

void move_left(int r, int c) {
  for (int i = r; i < r + k; i++) {
    ft.remove(get(i, c + l - 1));
    ft.add(get(i, c - 1));
  }
}

void move_down(int r, int c) {
  for (int j = c; j < c + l; j++) {
    ft.remove(get(r, j));
    ft.add(get(r + k, j));
  }
}


int left_right_snake() {
  north_west_corner();
  long long result = ft.mex();
  int r = 0, c = 0;
  int final_r = rows - k;
  int final_c = (final_r % 2) ? 0 : (cols - l);

  while ((r != final_r) || (c != final_c)) {
    if ((r % 2 == 0) && (c < cols - l)) {
      move_right(r, c++);
    } else if ((r % 2 == 1) && (c > 0)) {
      move_left(r, c--);
    } else {
      move_down(r++, c);
    }
    result = result * ft.mex() % MOD;
  }

  return result;
}

void write_answer(int answer) {
  FILE* f = fopen("mexitate.out", "w");
  fprintf(f, "%d\n", answer);
  fclose(f);
}
```

```
int main() {
  read_data();
  int answer = left_right_snake();
  write_answer(answer);

  return 0;
}
```

Sursă eficientă (versiune online).

```
#include <stdio.h>

const int MAX_ELEMS = 400'000;
const int BLOCK_SIZE = 400;
const int MAX_BLOCKS = (MAX_ELEMS - 1) / BLOCK_SIZE + 1;
const int MOD = 1'000'000'007;

struct frequency_tracker {
  int f[MAX_ELEMS + 2]; // rows * cols + 1 în cel mai rău caz
  int block_nonzero[MAX_BLOCKS];

  void init() {
    add(0); // Ca să nu-l returnăm niciodată.
  }

  void add(int x) {
    if (++f[x] == 1) {
      block_nonzero[x / BLOCK_SIZE]++;
    }
  }

  void remove(int x) {
    if (--f[x] == 0) {
      block_nonzero[x / BLOCK_SIZE]--;
    }
  }

  int mex() {
    int b = 0;
    while (block_nonzero[b] == BLOCK_SIZE) {
      b++;
    }
    int x = b * BLOCK_SIZE;
    while (f[x]) {
      x++;
    }
    return x;
  }
};
```

```
int mat[MAX_ELEMS];
frequency_tracker ft;
int rows, cols, k, l;

void swap(int& x, int& y) {
  int tmp = x;
  x = y;
  y = tmp;
}

void read_right_matrix(FILE* f) {
  for (int r = 0; r < rows; r++) {
    for (int c = 0; c < cols; c++) {
      fscanf(f, "%d", &mat[r * cols + c]);
    }
  }
}

void read_transposed_matrix(FILE* f) {
  for (int r = 0; r < rows; r++) {
    for (int c = 0; c < cols; c++) {
      fscanf(f, "%d", &mat[c * rows + r]);
    }
  }
}

void read_data() {
  FILE* f = fopen("mexitate.in", "r");
  fscanf(f, "%d %d %d %d", &rows, &cols, &k, &l);
  if (k <= l) {
    read_right_matrix(f);
  } else {
    read_transposed_matrix(f);
    swap(rows, cols);
    swap(k, l);
  }
  fclose(f);
}

int get(int r, int c) {
  return mat[r * cols + c];
}

int north_west_corner() {
  for (int r = 0; r < k; r++) {
    for (int c = 0; c < l; c++) {
      ft.add(get(r, c));
    }
  }
```

```
  return ft.mex();
}

void move_right(int r, int c) {
  for (int i = r; i < r + k; i++) {
    ft.remove(get(i, c));
    ft.add(get(i, c + l));
  }
}

void move_left(int r, int c) {
  for (int i = r; i < r + k; i++) {
    ft.remove(get(i, c + l - 1));
    ft.add(get(i, c - 1));
  }
}

void move_down(int r, int c) {
  for (int j = c; j < c + l; j++) {
    ft.remove(get(r, j));
    ft.add(get(r + k, j));
  }
}


int left_right_snake() {
  ft.init();
  north_west_corner();
  long long result = ft.mex();
  int r = 0, c = 0;
  int final_r = rows - k;
  int final_c = (final_r % 2) ? 0 : (cols - l);

  while ((r != final_r) || (c != final_c)) {
    if ((r % 2 == 0) && (c < cols - l)) {
      move_right(r, c++);
    } else if ((r % 2 == 1) && (c > 0)) {
      move_left(r, c--);
    } else {
      move_down(r++, c);
    }
    result = result * ft.mex() % MOD;
  }

  return result;
}

void write_answer(int answer) {
  FILE* f = fopen("mexitate.out", "w");
  fprintf(f, "%d\n", answer);
```

```
  fclose(f);
}

int main() {
  read_data();
  int answer = left_right_snake();
  write_answer(answer);

  return 0;
}
```

D.2 Problema Give Away (SPOJ)

înapoi

Sursă cu multiseturi PBDS.

```
// Complexitate: O(Q sqrt N log N).
//
// Metodă: Descompunere în radical. Pe fiecare bloc reține vectorul naiv și un
// set de valori pentru căutări în timp logaritmic. Avem nevoie de multisets
// pentru că pot exista duplicate și avem nevoie de PBDS pentru funcția
// order_of_key.
#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
#include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 500000;
const int BLOCK_SIZE = 10000;
const int MAX_BLOCKS = (MAX_N - 1) / BLOCK_SIZE + 1;
const int T_QUERY = 0;

// Multiseturile PBDS sînt obscene, dar par să meargă. Ștergerile necesită cod
// extra. Vezi https://stackoverflow.com/q/59731946/6022817
typedef __gnu_pbds::tree<
  int,
  __gnu_pbds::null_type,
  std::less_equal<int>,
  __gnu_pbds::rb_tree_tag,
  __gnu_pbds::tree_order_statistics_node_update
  > ordered_set;

// Toate intervalele sînt [închis, deschis).
struct block {
  int v[BLOCK_SIZE];
  ordered_set s;

  void set(int pos, int val) {
```

```
    if (v[pos]) {
      int rank = s.order_of_key(v[pos]);
      ordered_set::iterator it = s.find_by_order(rank);
      s.erase(it);
    }
    v[pos] = val;
    s.insert(v[pos]);
  }

  int partial_count(int l, int r, int val) {
    int cnt = 0;
    while (l < r) {
      cnt += (v[l++] >= val);
    }
    return cnt;
  }

  int prefix_count(int end, int val) {
    return partial_count(0, end, val);
  }

  int suffix_count(int start, int val) {
    return partial_count(start, BLOCK_SIZE, val);
  }

  int whole_count(int val) {
    return s.size() - s.order_of_key(val);
  }
};

block b[MAX_BLOCKS];
int n;

void read_array() {
  scanf("%d", &n);

  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int x;
    scanf("%d", &x);
    b[i / BLOCK_SIZE].set(i % BLOCK_SIZE, x);
  }
}

int process_query(int l, int r, int val) {
  int bl = l / BLOCK_SIZE, offset_l = l % BLOCK_SIZE;
  int br = r / BLOCK_SIZE, offset_r = r % BLOCK_SIZE;
  if (bl == br) {
    return b[bl].partial_count(offset_l, offset_r, val);
  } else {
    int cnt = b[bl].suffix_count(offset_l, val)
```

```
      + b[br].prefix_count(offset_r, val);
    for (int i = bl + 1; i < br; i++) {
      cnt += b[i].whole_count(val);
    }
    return cnt;
  }
}

void process_update(int pos, int val) {
  b[pos / BLOCK_SIZE].set(pos % BLOCK_SIZE, val);
}

void process_ops() {
  int num_ops, type, pos1, pos2, val;
  scanf("%d", &num_ops);

  while (num_ops--) {
    scanf("%d", &type);
    if (type == T_QUERY) {
      scanf("%d %d %d", &pos1, &pos2, &val);
      int count = process_query(pos1 - 1, pos2, val);
      printf("%d\n", count);
    } else {
      scanf("%d %d", &pos1, &val);
      process_update(pos1 - 1, val);
    }
  }
}

int main() {
  read_array();
  process_ops();

  return 0;
}
```

Sursă elementară.

```
// Complexitate: O(Q sqrt N log N).
//
// Metodă: Descompunere în radical. Pe fiecare bloc reține vectorul naiv și un
// vector sortat pentru căutări în timp logaritmic.
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 500'000;
const int BLOCK_SIZE = 3'000;
const int MAX_BLOCKS = (MAX_N - 1) / BLOCK_SIZE + 1;
const int T_QUERY = 0;
```

```
// Toate intervalele sînt [închis, deschis).
struct block {
  int v[BLOCK_SIZE];
  int s[BLOCK_SIZE];
  int size;

  void push(int val) {
    v[size] = s[size] = val;
    size++;
  }

  void sort() {
    std::sort(s, s + size);
  }

  // Returnează cea mai din stînga poziție a unui element >= val.
  int bin_search(int val) {
    if (val < s[0]) {
      return 0;
    } else if (val > s[size - 1]) {
      return size;
    }
    int l = -1, r = size - 1; // (l, r]

    while (r - l > 1) {
      int mid = (l + r) >> 1;
      if (s[mid] < val) {
        l = mid;
      } else {
        r = mid;
      }
    }

    return r;
  }

  void migrate_left(int pos) {
    int save = s[pos];
    while (pos && (s[pos - 1] > save)) {
      s[pos] = s[pos - 1];
      pos--;
    }
    s[pos] = save;
  }

  void migrate_right(int pos) {
    int save = s[pos];
    while ((pos < size - 1) && (s[pos + 1] < save)) {
      s[pos] = s[pos + 1];
```

```
      pos++;
    }
    s[pos] = save;
  }

  void set(int pos, int val) {
    int sorted_pos = bin_search(v[pos]);
    s[sorted_pos] = val;
    migrate_left(sorted_pos);
    migrate_right(sorted_pos);
    v[pos] = val;
  }

  int partial_count(int l, int r, int val) {
    int cnt = 0;
    while (l < r) {
      cnt += (v[l++] >= val);
    }
    return cnt;
  }

  int prefix_count(int end, int val) {
    return partial_count(0, end, val);
  }

  int suffix_count(int start, int val) {
    return partial_count(start, BLOCK_SIZE, val);
  }

  int whole_count(int val) {
    return size - bin_search(val);
  }
};

block b[MAX_BLOCKS];
int n;

void read_array() {
  scanf("%d", &n);

  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int x;
    scanf("%d", &x);
    b[i / BLOCK_SIZE].push(x);
  }

  int end_block = (n - 1) / BLOCK_SIZE + 1;
  for (int i = 0; i < end_block; i++) {
    b[i].sort();
  }
```

```
}

int process_query(int l, int r, int val) {
  int bl = l / BLOCK_SIZE, offset_l = l % BLOCK_SIZE;
  int br = r / BLOCK_SIZE, offset_r = r % BLOCK_SIZE;
  if (bl == br) {
    return b[bl].partial_count(offset_l, offset_r, val);
  } else {
    int cnt = b[bl].suffix_count(offset_l, val)
      + b[br].prefix_count(offset_r, val);
    for (int i = bl + 1; i < br; i++) {
      cnt += b[i].whole_count(val);
    }
    return cnt;
  }
}

void process_update(int pos, int val) {
  b[pos / BLOCK_SIZE].set(pos % BLOCK_SIZE, val);
}

void process_ops() {
  int num_ops, type, pos1, pos2, val;
  scanf("%d", &num_ops);

  while (num_ops--) {
    scanf("%d", &type);
    if (type == T_QUERY) {
      scanf("%d %d %d", &pos1, &pos2, &val);
      int count = process_query(pos1 - 1, pos2, val);
      printf("%d\n", count);
    } else {
      scanf("%d %d", &pos1, &val);
      process_update(pos1 - 1, val);
    }
  }
}

int main() {
  read_array();
  process_ops();

  return 0;
}
```

D.3 Problema Holes (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```cpp
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 100'000;
// Preferăm blocuri puțin mai mari deoarece actualizările au *cache locality*,
// pe cînd interogările sar mai mult.
const int BUCKET_SIZE = 1'000;
const int OP_UPDATE = 0;

struct hole {
  int power;
  int last;  // ultima destinație din același bloc
  int jumps; // numărul de salturi pînă la last
};

hole h[MAX_N + 1];
int n, num_queries;

void read_data() {
  scanf("%d %d", &n, &num_queries);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    scanf("%d", &h[i].power);
  }
}

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

// Actualizează găurile de la începutul blocului pînă la pos invlusiv.
void update_bucket_of(int pos) {
  int start = pos / BUCKET_SIZE * BUCKET_SIZE;
  int end = min(start + BUCKET_SIZE, n);
  for (int i = pos; i >= start; i--) {
    int dest = i + h[i].power;
    if (dest < end) {
      h[i].last = h[dest].last;
      h[i].jumps = h[dest].jumps + 1;
    } else {
      h[i].last = i;
      h[i].jumps = 0;
    }
  }
}

void init_buckets() {
  for (int start = 0; start < n; start += BUCKET_SIZE) {
    int end = min(start + BUCKET_SIZE - 1, n - 1);
    update_bucket_of(end);
  }
```

```
}

void query(int pos, int* last, int* count) {
  *count = 0;

  do {
    *count += h[pos].jumps + 1;
    *last = h[pos].last;
    pos = *last + h[*last].power;
  } while (pos < n);
}

void process_queries() {
  while (num_queries--) {
    int type, a;
    scanf("%d %d", &type, &a);
    a--;

    if (type == OP_UPDATE) {
      int power;
      scanf("%d", &power);
      h[a].power = power;
      update_bucket_of(a);
    } else {
      int last, num_jumps;
      query(a, &last, &num_jumps);
      printf("%d %d\n", 1 + last, num_jumps);
    }
  }
}

int main() {
  read_data();
  init_buckets();
  process_queries();

  return 0;
}
```

D.4 Problema Piezișă (Baraj ONI 2022)

‹ înapoi

Sursă forță brută (versiune online).

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>
```

```cpp
#define MAX_N 500000
#define INFINITY (MAX_N + 1)
#define NONE -1

int v[MAX_N + 1]; // partial xor's
int pos[MAX_N + 1];
int first[MAX_N + 2];
int n, distinct;

int max(int x, int y) {
  return (x > y) ? x : y;
}

// Returnează cea mai din dreapta apariție a lui val pe poziția p sau înainte,
// sau NONE dacă val nu apare pe poziția p sau înainte.
int rightmost(int val, int p) {
  int l = first[val], r = first[val + 1]; // [l, r)
  while (r - l > 1) {
    int m = (l + r) >> 1;
    if (pos[m] > p) {
      r = m;
    } else {
      l = m;
    }
  }

  // Caz special: p < orice poziție unde apare val. Căutarea binară normală ar
  // returna pos[l].
  return (pos[l] <= p) ? pos[l] : NONE;
}

int main() {
  FILE* fin = fopen("piezisa.in", "r");
  FILE* fout = fopen("piezisa.out", "w");
  fscanf(fin, "%d", &n);

  // Citește datele și calculează xor-uri parțiale.
  v[0] = 0;
  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    int x;
    fscanf(fin, "%d", &x);
    v[i] = v[i - 1] ^ x;
  }

  // Sortează pozițiile după valoarea xor parțială, apoi după poziție.
  for (int i = 0; i <= n; i++) {
    pos[i] = i;
  }
  std::sort(pos, pos + n + 1, [](int a, int b) {
    return (v[a] < v[b]) || ((v[a] == v[b]) && (a < b));
```

```
  });

  // Renumerotează valorile începînd cu n; colectează pozițiile.
  int from = -1;
  distinct = 0;
  for (int i = 0; i <= n; i++) {
    if (v[pos[i]] != from) {
      from = v[pos[i]];
      first[distinct++] = i;
    }
    v[pos[i]] = distinct - 1;
  }
  first[distinct] = n + 1;
  // Acum pos[first[i]...first[i+1]] conține o listă ordonată cu pozițiile
  // aparițiilor valorii i.

  int num_queries;
  fscanf(fin, "%d", &num_queries);
  while (num_queries--) {
    int l, r;
    fscanf(fin, "%d %d", &l, &r);
    r++;

    int end = r, best = INFINITY;
    // cît timp avem loc să avansăm și sperăm să îmbunătățim soluția existentă
    while ((end <= n) && (end - l < best)) {
      int start = rightmost(v[end], l);
      if ((start != NONE) && (end - start < best)) {
        best = end - start;
      }
      end++;
    }

    fprintf(fout, "%d\n", (best == INFINITY) ? NONE : best);
  }

  fclose(fin);
  fclose(fout);

  return 0;
}
```

Sursă cu metoda 1 (versiune online).

```
#include <algorithm>
#include <math.h>
#include <stdio.h>

const int MAX_BUCKETS = 354;
```

```
const int MAX_BUCKET_SIZE = 1416;
const int MAX_N = MAX_BUCKETS * MAX_BUCKET_SIZE;
const int MAX_Q = 500000;
const int INF = MAX_N + 1;
const int NONE = -1;

struct query {
  int l, r, orig_index;
};

int v[MAX_N + 1]; // xor-uri parțiale
int pos[MAX_N + 1];
int ptr[MAX_N + 1];
int last[MAX_N + 1];
int best[MAX_BUCKETS];

query q[MAX_Q];
// Logic ar trebui stocat în query.answer, dar astfel evităm o sortare.
int answer[MAX_Q];

int n, num_queries;
int bs, nb;

void read_array() {
  scanf("%d", &n);

  v[0] = 0;
  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    scanf("%d", &v[i]);
    v[i] ^= v[i - 1];
  }
}

void read_queries() {
  scanf("%d", &num_queries);
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    scanf("%d %d", &q[i].l, &q[i].r);
    q[i].r++;
    q[i].orig_index = i;
  }
}

void sort_queries() {
  std::sort(q, q + num_queries, [](query a, query b) {
    return (a.l < b.l);
  });
}

void sort_positions() {
  for (int i = 0; i <= n; i++) {
```

```
    pos[i] = i;
  }
  std::sort(pos, pos + n + 1, [](int a, int b) {
    return (v[a] < v[b]) || ((v[a] == v[b]) && (a > b));
  });
}

void preprocess_values() {
  nb = 0.5 * sqrt(n + 1); // determinat experimental
  bs = n / nb + 1;

  sort_positions();

  // renumerotează valorile de la 0; creează pointeri
  int prev = -1, distinct = 0;
  for (int i = 0; i <= n; i++) {
    if (v[pos[i]] == prev) {
      v[pos[i]] = distinct - 1;
      bool same_bucket = (pos[i] / bs == pos[i - 1] / bs);
      ptr[pos[i]] = same_bucket
        ? ptr[pos[i - 1]]
        : pos[i - 1];
    } else {
      // începi o serie nouă de la sfîrșitul vectorului
      prev = v[pos[i]];
      v[pos[i]] = distinct++;
      ptr[pos[i]] = NONE;
    }
  }
}

inline int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

int answer_query(int l, int r) {
  int result = INF;

  // procedează incremental pînă la blocul următor
  int b = r / bs + 1, boundary = min(b * bs, n + 1);
  while (r < boundary) {
    result = min(result, r - last[v[r]]);
    r++;
  }

  // procedează bloc cu bloc restul vectorului
  while (b < nb) {
    result = min(result, best[b++]);
  }
```

```
  return (result == INF) ? NONE : result;
}

void scan() {
  for (int i = 0; i <= n; i++) {
    last[i] = -INF;
  }
  for (int i = 0; i < nb; i++) {
    best[i] = INF;
  }

  int qi = 0;
  for (int l = 0; l <= n; l++) {
    // actualizează-l pe last
    last[v[l]] = l;

    // actualizează-l pe best
    for (int i = ptr[l]; i != NONE; i = ptr[i]) {
      int b = i / bs;
      best[b] = min(best[b], i - l);
    }

    // răspunde la interogările care încep la l
    while (qi < num_queries && q[qi].l == l) {
      answer[q[qi].orig_index] = answer_query(q[qi].l, q[qi].r);
      qi++;
    }
  }
}

void write_answers() {
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    printf("%d\n", answer[i]);
  }
}

int main() {
  read_array();
  read_queries();
  sort_queries();
  preprocess_values();
  scan();
  write_answers();

  return 0;
}
```

Sursă cu metoda 2 (versiune online).

```cpp
// Rescrisă după https://infoarena.ro/job_detail/3032904
//
// Complexitate: O((N + Q) sqrt(N)).
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 500'000;
const int BLOCK_SIZE = 700;
const int NUM_BLOCKS = MAX_N / BLOCK_SIZE + 1;
const int MAX_Q = 500'000;
const int INFINITY = 1'000'000;
const int NONE = -1;

struct query {
  int l, r;
  int orig_index;
  int block;
};

int v[MAX_N + 1];
query q[MAX_Q];
int left[MAX_N + 1], right[MAX_N + 1];
int* pos = left; // folosit inițial pentru normalizare;

// Logic ar trebui stocat în query.answer, dar astfel evităm o sortare.
int answer[MAX_Q];

int n, num_queries, max_value;

void read_array() {
  scanf("%d", &n);

  v[0] = 0;
  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    scanf("%d", &v[i]);
    v[i] ^= v[i - 1];
  }
}

void read_queries() {
  scanf("%d", &num_queries);
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    scanf("%d %d", &q[i].l, &q[i].r);
    q[i].l++;
    q[i].r++; // inteval închis, indexat de la 1
    q[i].orig_index = i;
    q[i].block = q[i].l / BLOCK_SIZE;
  }
}
```

```
void normalize_array() {
  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    pos[i] = i;
  }
  std::sort(pos + 1, pos + n + 1, [](int a, int b) {
    return v[a] < v[b];
  });

  int prev = NONE;
  max_value = NONE;
  for (int i = 0; i <= n; i++) {
    if (v[pos[i]] != prev) {
      max_value++;
    }
    prev = v[pos[i]];
    v[pos[i]] = max_value;
  }
}

void sort_queries_by_left_block() {
  std::sort(q, q + num_queries, [](query a, query b) {
    return (a.block < b.block) ||
      ((a.block == b.block) && (a.r > b.r));
  });
}

void init_left() {
  for (int i = 0; i <= max_value; i++) {
    left[i] = -INFINITY;
  }
}

void init_right() {
  for (int i = 0; i <= max_value; i++) {
    right[i] = +INFINITY;
  }
}

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

void answer_query(query q, int closest_left_right) {
  int best = closest_left_right;
  for (int i = q.block * BLOCK_SIZE; i < q.l; i++) {
    best = min(best, right[v[i]] - i);
  }

  answer[q.orig_index] = (best > n) ? NONE : best;
```

```
}

int answer_queries_in_block(int block, int q_index) {
  init_right();
  int ptr = n + 1;
  int closest_left_right = INFINITY;
  while ((q_index < num_queries) && (q[q_index].block == block)) {
    while (ptr > q[q_index].r) {
      --ptr;
      right[v[ptr]] = ptr;
      int dist = ptr - left[v[ptr]];
      closest_left_right = min(closest_left_right, dist);
    }
    answer_query(q[q_index], closest_left_right);
    q_index++;
  }

  return q_index;
}

void update_left(int block) {
  int start = block * BLOCK_SIZE;
  int end = min(start + BLOCK_SIZE - 1, n);
  for (int i = start; i <= end; i++) {
    left[v[i]] = i;
  }
}

void scan_blocks() {
  init_left();
  int q_index = 0;

  int last_block = n / BLOCK_SIZE;
  for (int b = 0; b <= last_block; b++) {
    q_index = answer_queries_in_block(b, q_index);
    update_left(b);
  }
}

void write_answers() {
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    printf("%d\n", answer[i]);
  }
}

int main() {
  read_array();
  read_queries();
  normalize_array();
  sort_queries_by_left_block();
```

```
  scan_blocks();

  write_answers();

  return 0;
}
```

D.5 Problema Serega and Fun (Codeforces)

înapoi

Sursă cu `deque` (versiune online).

```
#include <deque>
#include <stdio.h>
#include <unordered_map>

const int MAX_N = 100'000;
const int BUCKET_SIZE = 2'000;
const int MAX_BUCKETS = (MAX_N - 1) / BUCKET_SIZE + 1;
const int TYPE_ROTATE = 1;
const int TYPE_COUNT = 2;

struct freq {
  std::unordered_map<int, short> map;

  void add(int val) {
    map[val]++;
  }

  void remove(int val) {
    auto it = map.find(val);
    if (it->second == 1) {
      map.erase(it);
    } else {
      it->second--;
    }
  }

  int count(int val) {
    auto it = map.find(val);
    return (it == map.end()) ? 0 : it->second;
  }
};

struct bucket {
  freq f;
```

```
std::deque<int> deq;

void push(int val) {
  deq.push_back(val);
  f.add(val);
}

void set(int pos, int val) {
  f.remove(deq[pos]);
  deq[pos] = val;
  f.add(val);
}

int shift(int val) {
  deq.push_front(val);
  f.add(val);
  int last = deq.back();
  deq.pop_back();
  f.remove(last);
  return last;
}

void rotate(int l, int r) {
  int val = deq[r];
  deq.erase(deq.begin() + r);
  deq.insert(deq.begin() + l, val);
}

int remove(int pos) {
  int val = deq[pos];
  f.remove(val);
  deq.erase(deq.begin() + pos);
  return val;
}

int remove_last() {
  return remove(BUCKET_SIZE - 1);
}

void insert(int pos, int val) {
  deq.insert(deq.begin() + pos, val);
  f.add(val);
}

void insert_first(int val) {
  insert(0, val);
}

int partial_count(int l, int r, int k) {
  int result = 0;
```

```
    while (l <= r) {
      result += (deq[l++] == k);
    }
    return result;
  }

  int prefix_count(int pos, int k) {
    return partial_count(0, pos, k);
  }

  int suffix_count(int pos, int k) {
    return partial_count(pos, BUCKET_SIZE - 1, k);
  }

};

bucket buck[MAX_BUCKETS];
int n, num_ops;
int last_answer;

void read_data() {
  scanf("%d", &n);

  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int x;
    scanf("%d", &x);
    buck[i / BUCKET_SIZE].push(x);
  }

  scanf("%d", &num_ops);
}

int bucket_count(int l, int r, int k) {
  int result = 0;
  while (l < r) {
    result += buck[l++].f.count(k);
  }
  return result;
}

void process_count_op(int l, int r, int k) {
  int bl = l / BUCKET_SIZE, offset_l = l % BUCKET_SIZE;
  int br = r / BUCKET_SIZE, offset_r = r % BUCKET_SIZE;
  if (bl == br) {
    last_answer = buck[bl].partial_count(offset_l, offset_r, k);
  } else {
    last_answer =
      buck[bl].suffix_count(offset_l, k) +
      bucket_count(bl + 1, br, k) +
      buck[br].prefix_count(offset_r, k);
```

```
  }

  printf("%d\n", last_answer);
}

void process_rotate_op(int l, int r) {
  int bl = l / BUCKET_SIZE, offset_l = l % BUCKET_SIZE;
  int br = r / BUCKET_SIZE, offset_r = r % BUCKET_SIZE;
  if (bl == br) {
    buck[bl].rotate(offset_l, offset_r);
  } else {
    int from_left = buck[bl].remove_last();
    for (int b = bl + 1; b < br; b++) {
      from_left = buck[b].shift(from_left);
    }
    int to_right = buck[br].remove(offset_r);
    buck[br].insert_first(from_left);
    buck[bl].insert(offset_l, to_right);
  }
}

int transform(int x) {
  return last_answer
    ? (x + last_answer - 1) % n + 1
    : x;
}

void process_ops() {
  while (num_ops--) {
    int type, l, r, k;
    scanf("%d %d %d", &type, &l, &r);
    l = transform(l) - 1;
    r = transform(r) - 1;
    if (l > r) {
      int tmp = l; l = r; r = tmp;
    }

    if (type == TYPE_COUNT) {
      scanf("%d", &k);
      k = transform(k);
      process_count_op(l, r, k);
    } else {
      process_rotate_op(l, r);
    }
  }
}

int main() {
  read_data();
  process_ops();
```

```
  return 0;
}
```

Sursă cu descompunere după poziții (versiune online).

```
#include <math.h>
#include <stdio.h>

const int MAX_BUCKETS = 160;
const int MAX_BUCKET_SIZE = 634;
const int MAX_N = MAX_BUCKETS * MAX_BUCKET_SIZE;
const int TYPE_ROTATE = 1;
const int TYPE_COUNT = 2;

typedef struct {
  short freq[MAX_N];
  int circ[MAX_BUCKET_SIZE];
  int start;
} bucket;

bucket buck[MAX_BUCKETS];
int modulo[2 * MAX_BUCKET_SIZE];
int bs; // bucket size
int n, numOps;
int lastAnswer;

void initBuckets() {
  bs = 2 * sqrt(n);

  for (int i = 0; i < 2 * bs; i++) {
    modulo[i] = i % bs;
  }
}

void bucketSetInitial(int pos, int val) {
  buck[pos / bs].circ[pos % bs] = val;
  buck[pos / bs].freq[val]++;
}

void readInputData() {
  scanf("%d", &n);
  initBuckets();

  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int x;
    scanf("%d", &x);
    bucketSetInitial(i, x);
  }
```

```
  scanf("%d", &numOps);
}

int realPos(int b, int pos) {
  return modulo[pos + buck[b].start];
}

int next(int pos) {
  return modulo[pos + 1];
}

int prev(int pos) {
  return modulo[pos + bs - 1];
}

void bucketSet(int b, int pos, int val) {
  bucket& g = buck[b];
  int realP = realPos(b, pos);
  int oldVal = g.circ[realP];
  g.circ[realP] = val;
  g.freq[oldVal]--;
  g.freq[val]++;
}

int partialCount(int b, int l, int r, int k) {
  int realL = realPos(b, l);
  int realR = realPos(b, r);

  // Numără-l separat pe realR ca să îl putem folosi ca terminator de buclă.
  int result = (buck[b].circ[realR] == k);

  while (realL != realR) {
    result += (buck[b].circ[realL] == k);
    realL = next(realL);
  }
  return result;
}

int bucketCount(int l, int r, int k) {
  int result = 0;
  while (l < r) {
    result += buck[l++].freq[k];
  }
  return result;
}

void processCountOp(int l, int r, int k) {
  int bl = l / bs, br = r / bs;
  int lpos = l - bl * bs, rpos = r - br * bs;
```

```
  if (bl == br) {
    lastAnswer = partialCount(bl, lpos, rpos, k);
  } else {
    lastAnswer =
      partialCount(bl, lpos, bs - 1, k) +
      partialCount(br, 0, rpos, k) +
      bucketCount(bl + 1, br, k);
  }

  printf("%d\n", lastAnswer);
}

int partialRotate(int b, int l, int r) {
  int *v = buck[b].circ;
  int realL = realPos(b, l);
  int realR = realPos(b, r);
  int prevR = prev(realR);
  int save = v[realR];

  while (realR != realL) {
    v[realR] = v[prevR];
    realR = prevR;
    prevR = prev(realR);
  }

  v[realL] = save;
  return save;
}

int bucketRotate(int b) {
  bucket& g = buck[b];
  g.start = prev(g.start);
  return g.circ[g.start];
}

void processRotateOp(int l, int r) {
  int bl = l / bs, br = r / bs;
  int lpos = l - bl * bs, rpos = r - br * bs;
  if (bl == br) {
    partialRotate(bl, lpos, rpos);
  } else {
    int fromLeft = partialRotate(bl, lpos, bs - 1);
    for (int b = bl + 1; b < br; b++) {
      int toRight = bucketRotate(b);
      bucketSet(b, 0, fromLeft);
      fromLeft = toRight;
    }
    int toRight = partialRotate(br, 0, rpos);
    bucketSet(br, 0, fromLeft);
    bucketSet(bl, lpos, toRight);
```

```
  }
}

int transform(int x) {
  return lastAnswer
    ? (x + lastAnswer - 1) % n + 1
    : x;
}

void processOps() {
  while (numOps--) {
    int type, l, r, k;
    scanf("%d %d %d", &type, &l, &r);
    l = transform(l) - 1;
    r = transform(r) - 1;
    if (l > r) {
      int tmp = l; l = r; r = tmp;
    }

    if (type == TYPE_COUNT) {
      scanf("%d", &k);
      k = transform(k);
      processCountOp(l, r, k);
    } else {
      processRotateOp(l, r);
    }
  }
}

int main() {
  readInputData();
  processOps();

  return 0;
}
```

Sursă cu descompunere după operații (versiune online).

```
#include <math.h>
#include <stdio.h>

const int MAX_BUCKETS = 160;
const int MAX_BUCKET_SIZE = 634;
const int OVERFLOW_FACTOR = 2;
const int MAX_N = MAX_BUCKETS * MAX_BUCKET_SIZE;
const int TYPE_ROTATE = 1;
const int TYPE_COUNT = 2;

struct bucket {
```

```
short freq[MAX_N];
int data[OVERFLOW_FACTOR * MAX_BUCKET_SIZE];
int size;

void append(int x) {
  data[size++] = x;
  freq[x]++;
}

// Returnează numărul de elemente vărsate. Golește data, size și freq.
int empty(int* dest) {
  for (int i = 0; i < size; i++) {
    dest[i] = data[i];
    freq[data[i]]--;
  }
  int old_size = size;
  size = 0;

  return old_size;
}

int partial_count(int l, int r, int val) {
  int cnt = 0;
  while (l <= r) {
    cnt += (data[l++] == val);
  }

  return cnt;
}

int prefix_count(int pos, int val) {
  return partial_count(0, pos, val);
}

int suffix_count(int pos, int val) {
  return partial_count(pos, size - 1, val);
}

void insert(int pos, int val) {
  freq[val]++;
  size++;
  for (int i = size - 1; i > pos; i--) {
    data[i] = data[i - 1];
  }
  data[pos] = val;
}

int remove(int pos) {
  int result = data[pos];
  freq[result]--;
```

```
    for (int i = pos; i < size - 1; i++) {
      data[i] = data[i + 1];
    }
    size--;

    return result;
  }
};

bucket buck[MAX_BUCKETS];
int naive[MAX_N];
int bs, nb; // mărimea blocului, numărul de blocuri
int n;
int last_answer;

// Stochează informații despre blocul în care se află un indice real.
struct bucket_info {
  int b;      // numărul blocului
  int start;  // indicele primului element din bloc
  int offset; // offset-ul indicelui dat față de start

  void find_next_bucket(int index) {
    while (start + buck[b].size <= index) {
      start += buck[b++].size;
    }
    offset = index - start;
  }
};

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

void distribute_buckets() {
  // Evită O(n) împărțiri deoarece vom rula acest cod de O(sqrt(n)) ori.
  for (int b = 0; b < nb; b++) {
    int start = b * bs;
    int end = min(start + bs, n);
    for (int i = start; i < end; i++) {
      buck[b].append(naive[i]);
    }
  }
}

void collect_buckets() {
  int ptr = 0;
  for (int i = 0; i < nb; i++) {
    ptr += buck[i].empty(&naive[ptr]);
  }
}
```

```
void read_data() {
  scanf("%d", &n);

  for (int i = 0; i < n; i++) {
    scanf("%d", &naive[i]);
  }
}

void init_buckets() {
  bs = 2 * sqrt(n);
  nb = (n - 1) / bs + 1;
  distribute_buckets();
}

int cross_bucket_count(int l, int r, int k) {
  int result = 0;
  while (l < r) {
    result += buck[l++].freq[k];
  }
  return result;
}

// [l, r] inclusiv
void process_count_op(int l, int r, int k) {
  bucket_info bl = { 0, 0, 0 };
  bl.find_next_bucket(l);
  bucket_info br = bl;
  br.find_next_bucket(r);

  if (bl.b == br.b) {
    last_answer = buck[bl.b].partial_count(bl.offset, br.offset, k);
  } else {
    last_answer =
      buck[bl.b].suffix_count(bl.offset, k) +
      buck[br.b].prefix_count(br.offset, k) +
      cross_bucket_count(bl.b + 1, br.b, k);
  }

  printf("%d\n", last_answer);
}

void process_rotate_op(int l, int r) {
  bucket_info bl = { 0, 0, 0 };
  bl.find_next_bucket(l);
  bucket_info br = bl;
  br.find_next_bucket(r);

  int x = buck[br.b].remove(br.offset);
  buck[bl.b].insert(bl.offset, x);
```

```
  if (buck[bl.b].size == OVERFLOW_FACTOR * bs) {
    collect_buckets();
    distribute_buckets();
  }
}

int transform(int x) {
  return last_answer
    ? (x + last_answer - 1) % n + 1
    : x;
}

void process_ops() {
  int num_ops;
  scanf("%d", &num_ops);

  while (num_ops--) {
    int type, l, r, k;
    scanf("%d %d %d", &type, &l, &r);
    l = transform(l) - 1;
    r = transform(r) - 1;
    if (l > r) {
      int tmp = l; l = r; r = tmp;
    }

    if (type == TYPE_COUNT) {
      scanf("%d", &k);
      k = transform(k);
      process_count_op(l, r, k);
    } else {
      process_rotate_op(l, r);
    }
  }
}

int main() {
  read_data();
  init_buckets();
  process_ops();

  return 0;
}
```

D.6 Problema Time to Raid Cowavans (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```cpp
// Complexitate: O((q + n) sqrt n).
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 300'000;
const int MAX_Q = 300'000;
const int PREPROCESS_LIMIT = 547;

struct query {
  int id, first, step;
};

int w[MAX_N + 1];
long long prep[MAX_N + 1];
query q[MAX_Q];
long long answer[MAX_Q];
int n, num_queries;

void read_data() {
  scanf("%d", &n);
  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    scanf("%d", &w[i]);
  }
  scanf("%d", &num_queries);
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    scanf("%d %d", &q[i].first, &q[i].step);
    q[i].id = i;
  }
}

void sort_queries() {
  std::sort(q, q + num_queries, [](query a, query b) {
    return a.step < b.step;
  });
}

long long naive_prog_sum(int first, int step) {
  long long sum = 0;
  for (int i = first; i <= n; i += step) {
    sum += w[i];
  }
  return sum;
}

void preprocess(int step) {
  for (int i = n; (i > n - step) && (i >= 1); i--) {
    prep[i] = w[i];
  }
  for (int i = n - step; i >= 1; i--) {
```

```
    prep[i] = w[i] + prep[i + step];
  }
}

void process_queries() {
  sort_queries();
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    if (q[i].step > PREPROCESS_LIMIT) {
      answer[q[i].id] = naive_prog_sum(q[i].first, q[i].step);
    } else {
      if (!i || (q[i].step != q[i - 1].step)) {
        preprocess(q[i].step);
      }
      answer[q[i].id] = prep[q[i].first];
    }
  }
}

void write_answers() {
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    printf("%lld\n", answer[i]);
  }
}

int main() {
  read_data();
  process_queries();
  write_answers();

  return 0;
}
```

D.7 Problema Sandor (Baraj ONI 2025)

‹ înapoi • versiune online

```
// Complexitate O(N sqrt N), provenită din 3 for-uri imbricate a cîte
// O(sqrt N) iterații.
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 400'000;
const int MAX_WEIGHT = 800'000;

struct run {
  int val, cnt;
};

run r[MAX_N];
```

```
// jump[w] este obiectul maxim care nu depășește greutatea w. Mai exact,
// jump[w] este cel mai mic i a.î r[i].val ≤ w
int jump[MAX_WEIGHT + 1];
long long sol[MAX_WEIGHT + 1];
int task, n, num_runs, capacity;

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

void read_data() {
  FILE* f = fopen("sandor.in", "r");
  int x;

  fscanf(f, "%d %d %d", &task, &n, &capacity);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    fscanf(f, "%d", &x);
    if (num_runs && (x == r[num_runs - 1].val)) {
      r[num_runs - 1].cnt++;
    } else {
      r[num_runs++] = { x, 1 };
    }
  }

  fclose(f);
}

void compute_jumps() {
  int i = 0;
  for (int w = MAX_WEIGHT; w >= 0; w--) {
    while ((i < num_runs) && (r[i].val > w)) {
      i++;
    }
    jump[w] = i;
  }
}

// Rulează algoritmul lui Sandor pentru capacitatea dată. Returnează greutatea
// acumulată.
int do_the_sandor(int start, int capacity) {
  int c = capacity;
  int i = start;

  while (i < num_runs) {
    int taken = min(c / r[i].val, r[i].cnt);
    c -= taken * r[i].val;
    // Dacă din c = 100 am luat 2 * r[i].val = 20, fiindcă atîtea erau, nu are
    // sens să continui de la 80. Următorul număr poate fi doar 9 sau mai mic.
    i = jump[min(c, r[i].val - 1)];
  }
```

```
  return capacity - c;
}

// Presupunînd că am tăiat deja două obiecte înainte de start și am obținut
// greutatea weight_so_far, rulează Sandor simplu pe restul vectorului și
// adaugă rezultatul la soluție.
void cut_0(int start, int weight_so_far, long long multiplier) {
  int s = do_the_sandor(start, capacity - weight_so_far);
  sol[weight_so_far + s] += multiplier;
}

// Presupunînd că am tăiat deja un obiect înainte de start și am obținut
// greutatea weight_so_far, și că de la poziția start începînd mai am num_num
// obiecte, încearcă să elimini cîte un obiect în toate modurile posibile.
//
// Observăm că, dacă tăiem alt obiect decît cele pe care le-ar pune Sandor în
// rucsac, vom obține aceeași sumă ca și pe vectorul nemodificat.
void cut_1(int start, int weight_so_far, int num_num, long long multiplier) {
  int c = capacity - weight_so_far;
  int i = start;

  while (i < num_runs) {
    int taken = min(c / r[i].val, r[i].cnt);
    if (taken == r[i].cnt) {
      num_num -= taken;
      int all_but_one = (taken - 1) * r[i].val;
      cut_0(i + 1, weight_so_far + all_but_one, multiplier * taken);
    }
    weight_so_far += taken * r[i].val;
    c -= taken * r[i].val;
    i = jump[min(c, r[i].val - 1)];
  }

  // Toate numerele pe care nu le-am tăiat explicit merg pe soluția originală,
  // care duce la sumă weight_so_far.
  sol[weight_so_far] += multiplier * num_num;
}

// Pentru bucla exterioară este important să obținem tot complexitate
// O(sqrt N). De aceea, considerăm simultan fiecare grupă de obiecte
// consecutive NEincluse în rucsac.
void cut_2() {
  long long multiplier = 0;
  int weight_so_far = 0;
  int c = capacity;
  int num_right = n;

  for (int i = 0; i < num_runs; i++) {
    if (r[i].val > c) {
```

```
      multiplier += r[i].cnt;
    } else {
      int cnt = r[i].cnt;
      // Taie două obiecte dinainte de i. Rămîn 0 de tăiat.
      cut_0(i, weight_so_far, multiplier * (multiplier - 1) / 2);

      // Taie un obiect dinainte de i. Rămîne unul de tăiat.
      cut_1(i, weight_so_far, num_right, multiplier);

      // Taie două obiecte din grupa i. În rest, pune în rucsac ce se poate.
      if (r[i].cnt >= 2) {
        int taken = min(c / r[i].val, r[i].cnt - 2);
        cut_0(i + 1, weight_so_far + taken * r[i].val, cnt * (cnt - 1) / 2);
      }

      // Taie un obiect din grupa i. În rest, pune în rucsac ce se poate.
      int taken = min(c / r[i].val, r[i].cnt - 1);
      cut_1(i + 1, weight_so_far + taken * r[i].val, num_right - r[i].cnt, cnt);

      // Nu tăia nimic, bagă în rucsac.
      taken = min(c / r[i].val, r[i].cnt);
      c -= taken * r[i].val;
      weight_so_far += taken * r[i].val;

      multiplier = 0;
    }

    num_right -= r[i].cnt;
  }

  // Nu mai putem băga nimic în rucsac, dar din ultimele @multiplier obiecte
  // trebuie să tăiem două.
  sol[weight_so_far] += multiplier * (multiplier - 1) / 2;
}

void write_solution() {
  FILE* f = fopen("sandor.out", "w");
  for (int i = 0; i <= capacity; i++) {
    fprintf(f, "%lld ", sol[i]);
  }
  fprintf(f, "\n");
  fclose(f);
}

int main() {
  read_data();
  compute_jumps();

  if (task == 1) {
    cut_1(0, 0, n, 1);
```

```
  } else {
    cut_2();
  }

  write_solution();

  return 0;
}
```

D.8 Problema Puzzle-bila (Lot 2025)

‹ înapoi • versiune online

```
// Complexitate: O(n·m·sqrt(m) + n·m·log(m)).
#include <stdio.h>

const int MAX_COLS = 50'000;
const int MAX_LOG = 16;
const int MAX_DISTINCT_LENGTHS = 320;
const int INFTY = 2'000'000;
const int NONE = -1;

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

int log2(int x) {
  return 31 - __builtin_clz(x);
}

struct sparse_table {
  int v[MAX_LOG][MAX_COLS];
  int n;

  void build(int* src, int n, bool with_shifts) {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
      v[0][i] = with_shifts ? (src[i] - i) : src[i];
    }
    for (int p = 1; (1 << p) <= n; p++) {
      for (int i = 0; i <= n - (1 << p); i++) {
        v[p][i] = min(v[p - 1][i], v[p - 1][i + (1 << (p - 1))]);
      }
    }
  }

  int range_min(int l, int r) {
    l = (l < 0) ? 0 : l;
    if (l > r) {
```

```
      return INFTY;
    }
    int row = log2(r - l + 1);
    return  min(v[row][l], v[row][r - (1 << row) + 1]);
  }
};

sparse_table st, st_shift;
bool row[MAX_COLS];
int prev1[MAX_COLS];
int distinct_len[MAX_DISTINCT_LENGTHS], num_lengths;
int dp[MAX_COLS];
int end[MAX_COLS + 1]; // coloana pe care se termină ultima fereastră de lățime l
int num_rows, num_cols;

void read_size() {
  scanf("%d %d ", &num_rows, &num_cols);
}

void read_row() {
  for (int c = 0; c < num_cols; c++) {
    row[c] = getchar() - '0';
  }
  getchar();
}

void init_all() {
  dp[0] = 0;
  for (int c = 1; c < num_cols; c++) {
    dp[c] = INFTY;
  }

  for (int l = 0; l <= num_cols; l++) {
    end[l] = NONE;
  }
}

void compute_prev1() {
  prev1[0] = row[0] ? 0 : -1;
  for (int c = 1; c < num_cols; c++) {
    prev1[c] = row[c] ? c : prev1[c - 1];
  }
}

void add_length(int len, int end_col) {
  if (len && (end[len] == NONE)) {
    distinct_len[num_lengths++] = len;
  }
  end[len] = end_col;
}
```

```
void reset_distinct_lengths() {
  while (num_lengths) {
    end[distinct_len[--num_lengths]] = NONE;
  }
}

// Adu ferestre de zerouri din stînga, deja închise, aliniindu-le cu col.
void slide_windows_right(int col) {
  dp[col] = INFTY;
  for (int i = 0; i < num_lengths; i++) {
    int len = distinct_len[i];
    int cost = st.range_min(col - len + 1, col) + (col - end[len]);
    dp[col] = min(dp[col], cost);
  }
}

// Adu ferestre de zerouri din dreapta, deja închise, aliniindu-le cu col.
void slide_windows_left(int col) {
  for (int i = 0; i < num_lengths; i++) {
    int len = distinct_len[i];
    int cost = st_shift.range_min(col - len + 1, col) + end[len] - len + 1;
    dp[col] = min(dp[col], cost);
  }
}

void slide_current_window(int col, int r_len) {
  if (!row[col]) {
    int l = 1 + prev1[col];
    int r = col + r_len - 1;
    int len = r - l + 1;
    dp[col] = min(dp[col], st.range_min(l, col));
    int cost_r = st_shift.range_min(col - len + 1, l - 1) + l;
    dp[col] = min(dp[col], cost_r);
  }
}

void scan_left_to_right() {
  reset_distinct_lengths();

  int cur_len = 0;
  for (int c = 0; c < num_cols; c++) {
    if (row[c]) {
      add_length(cur_len, c - 1);
      cur_len = 0;
    } else {
      cur_len++;
    }
    slide_windows_right(c);
  }
```

```
}

void scan_right_to_left() {
  reset_distinct_lengths();

  int cur_len = 0;
  for (int c = num_cols - 1; c >= 0; c--) {
    if (row[c]) {
      add_length(cur_len, c + cur_len);
      cur_len = 0;
    } else {
      cur_len++;
    }
    slide_windows_left(c);
    slide_current_window(c, cur_len);
  }
}

void process_rows() {
  init_all();
  for (int r = 0; r < num_rows; r++) {
    read_row();
    compute_prev1();
    st.build(dp, num_cols, false);
    st_shift.build(dp, num_cols, true);
    scan_left_to_right();
    scan_right_to_left();
  }
}

void write_result() {
  int res = dp[num_cols - 1];
  printf("%d\n", (res == INFTY) ? NONE : res);
}

int main() {
  read_size();
  process_rows();
  write_result();

  return 0;
}
```

Anexa E

Algoritmul lui Mo

E.1 Problema Powerful Array (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 200'000;
const int BLOCK_SIZE = 300;
const int MAX_QUERIES = 200'000;
const int MAX_VAL = 1'000'000;

typedef unsigned long long u64;

struct query {
  int l, r;
  int orig_index;
};

int v[MAX_N];
int f[MAX_VAL + 1];
u64 power;
query q[MAX_QUERIES];
u64 answer[MAX_QUERIES]; // separat de q[] ca să evităm o sortare la final
int n, num_queries;

void read_data() {
  scanf("%d %d", &n, &num_queries);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    scanf("%d", &v[i]);
  }
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    int l, r;
    scanf("%d %d", &l, &r);
```

```
    q[i].l = l - 1;
    q[i].r = r - 1;
    q[i].orig_index = i;
  }
}

void sort_queries_by_left_block() {
  std::sort(q, q + num_queries, [](query a, query b) {
    int x = a.l / BLOCK_SIZE, y = b.l / BLOCK_SIZE;
    if (x != y) {
      return (x < y);
    } else if (x % 2) {
      return a.r > b.r;
    } else {
      return a.r < b.r;
    }
  });
}

void add(int pos) {
  f[v[pos]]++;
  power += (u64)v[pos] * (2 * f[v[pos]] - 1);
}

void remove(int pos) {
  f[v[pos]]--;
  power -= (u64)v[pos] * (2 * f[v[pos]] + 1);
}

void mo() {
  int l = 0, r = -1; // vid
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    while (l > q[i].l) {
      add(--l);
    }
    while (r < q[i].r) {
      add(++r);
    }
    while (l < q[i].l) {
      remove(l++);
    }
    while (r > q[i].r) {
      remove(r--);
    }
    answer[q[i].orig_index] = power;
  }
}

void write_answers() {
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
```

```
    printf("%llu\n", answer[i]);
  }
}

int main() {
  read_data();
  sort_queries_by_left_block();
  mo();

  write_answers();

  return 0;
}
```

E.2 Problema Most Frequent Value (SPOJ)

înapoi

```
// Complexitate: O((n + q) sqrt n).
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 100'000;
const int BLOCK_SIZE = 316;
const int MAX_QUERIES = 100'000;
const int MAX_VAL = 100'000;

struct query {
  int l, r;
  int orig_index;
};

int v[MAX_N];
int f[MAX_VAL + 1];
int num_having_f[MAX_N + 1], max_f;
query q[MAX_QUERIES];
int answer[MAX_QUERIES];
int n, num_queries;

void read_data() {
  scanf("%d %d", &n, &num_queries);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    scanf("%d", &v[i]);
  }
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    scanf("%d %d", &q[i].l, &q[i].r);
    q[i].orig_index = i;
  }
```

```
}

void sort_queries_by_left_block() {
  std::sort(q, q + num_queries, [](query a, query b) {
    int x = a.l / BLOCK_SIZE, y = b.l / BLOCK_SIZE;
    if (x != y) {
      return (x < y);
    } else if (x % 2) {
      return a.r > b.r;
    } else {
      return a.r < b.r;
    }
  });
}

void add(int pos) {
  int x = ++f[v[pos]];
  num_having_f[x - 1]--;
  num_having_f[x]++;
  if (x > max_f) {
    max_f = f[v[pos]];
  }
}

void remove(int pos) {
  int x = --f[v[pos]];
  num_having_f[x + 1]--;
  num_having_f[x]++;
  if (num_having_f[max_f] == 0) {
    max_f--;
  }
}

void mo() {
  num_having_f[0] = n;
  int l = 0, r = -1; // vid
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    while (l > q[i].l) {
      add(--l);
    }
    while (r < q[i].r) {
      add(++r);
    }
    while (l < q[i].l) {
      remove(l++);
    }
    while (r > q[i].r) {
      remove(r--);
    }
    answer[q[i].orig_index] = max_f;
```

```
  }
}

void write_answers() {
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    printf("%d\n", answer[i]);
  }
}

int main() {
  read_data();
  sort_queries_by_left_block();
  mo();

  write_answers();

  return 0;
}
```

E.3 Problema RangeMode (Infoarena Cup 2013)

‹ înapoi • versiune online

```
// Complexitate: O((n + q) sqrt n).
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 100000;
const int BLOCK_SIZE = 316;
const int MAX_QUERIES = 100000;
const int MAX_VAL = 100000;

struct query {
  int l, r;
  int orig_index;
};

int v[MAX_N];
int f[MAX_VAL + 1]; // frecvențele elementelor
int right_ptr;      // poziția ultimului element adăugat în f
int right_best;     // răspunsul considerînd strict dreapta blocului curent
query q[MAX_QUERIES];
int answer[MAX_QUERIES];
int n, num_queries;

void read_data() {
  FILE* f = fopen("rangemode.in", "r");
  fscanf(f, "%d %d", &n, &num_queries);
```

```
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    fscanf(f, "%d", &v[i]);
  }
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    int l, r;
    fscanf(f, "%d %d", &l, &r);
    q[i].l = l - 1;
    q[i].r = r - 1;
    q[i].orig_index = i;
  }
  fclose(f);
}

void sort_queries_by_left_block() {
  std::sort(q, q + num_queries, [](query a, query b) {
    int x = a.l / BLOCK_SIZE, y = b.l / BLOCK_SIZE;
    return (x < y) || ((x == y) && (a.r < b.r));
  });
}

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

void clear_f() {
  for (int i = 0; i <= MAX_VAL; i++) {
    f[i] = 0;
  }
}

void optimize(int& best, int candidate) {
  if ((f[candidate] > f[best]) ||
      ((f[candidate] == f[best]) && (candidate < best))) {
    best = candidate;
  }
}

void extend_right(int until) {
  while (right_ptr < until) {
    int val = v[++right_ptr];
    f[val]++;
    optimize(right_best, val);
  }
}

int add_current_block(int l, int r) {
  int best = right_best;
  for (int i = l; i <= r; i++) {
    f[v[i]]++;
    optimize(best, v[i]);
```

```
  }
  return best;
}

void remove_current_block(int l, int r) {
  for (int i = l; i <= r; i++) {
    f[v[i]]--;
  }
}

void process_query(query q, int last_element_in_block) {
  extend_right(q.r);

  // Interogarea nu trece neapărat în blocul următor. Poate fi complet
  // cuprinsă în blocul curent.
  int right = min(q.r,last_element_in_block);
  int best = add_current_block(q.l, right);
  answer[q.orig_index] = best;
  remove_current_block(q.l, right);
}

void scan_blocks() {
  int qi = 0;
  for (int start = 0; start < n; start += BLOCK_SIZE) {
    int end = start + BLOCK_SIZE;
    right_ptr = end - 1;
    right_best = 0;
    while ((qi < num_queries) && (q[qi].l < end)) {
      process_query(q[qi++], end - 1);
    }
    clear_f();
  }
}

void write_answers() {
  FILE* f = fopen("rangemode.out", "w");
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    fprintf(f, "%d\n", answer[i]);
  }
  fclose(f);
}

int main() {
  read_data();
  sort_queries_by_left_block();
  scan_blocks();

  write_answers();

  return 0;
```

```
}
```

E.4 Problema Machine Learning (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>
#include <unordered_map>

const int MAX_N = 100'000;
const int BLOCK_SIZE = 2'154; // n^{2/3}
const int MAX_OPS = 100'000;

const int T_QUERY = 1;
const int T_UPDATE = 2;

struct query {
  int l, r, time, answer;
};

struct update {
  int pos, old_val, val, time;
};

int a[MAX_N];
query q[MAX_OPS];
update u[MAX_OPS];
int tmp[MAX_N + MAX_OPS];
int n, num_ops, num_queries, num_updates;

// Date specifice pentru Mo.
int f[MAX_N + MAX_OPS];
int num_having_f[MAX_N + MAX_OPS];

// Renumerotează valorile din vector și actualizările.
struct normalizer {
  std::unordered_map<int, int> map;

  int normalize(int x) {
    auto it = map.find(x);
    if (it == map.end()) {
      int result = 1 + map.size();
      map[x] = result;
      return result;
    } else {
      return it->second;
    }
```

```
  }
};

normalizer norm;

void read_array() {
  scanf("%d %d", &n, &num_ops);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int x;
    scanf("%d", &x);
    a[i] = norm.normalize(x);
  }
}

void read_ops() {
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    tmp[i] = a[i];
  }

  u[num_updates++] = { 0, 0, 0, 0 }; // santinelă stînga (t = 0)
  for (int t = 1; t <= num_ops; t++) {
    int type;
    scanf("%d", &type);
    if (type == T_QUERY) {
      int l, r;
      scanf("%d %d", &l, &r);
      q[num_queries++] = { l - 1, r - 1, t };
    } else {
      int pos, val;
      scanf("%d %d", &pos, &val);
      pos--;
      val = norm.normalize(val);
      u[num_updates++] = { pos, tmp[pos], val, t };
      tmp[pos] = val;
    }
  }
  u[num_updates++] = { 0, 0, 0, n + num_ops }; // santinelă dreapta (t = ∞)
}

void sort_queries() {
  std::sort(q, q + num_queries, [](query a, query b) {
    int x = a.l / BLOCK_SIZE, y = b.l / BLOCK_SIZE;
    if (x != y) {
      return (x < y);
    }

    x = a.r / BLOCK_SIZE, y = b.r / BLOCK_SIZE;
    if (x != y) {
      return (x < y);
    }
```

```
    return a.time < b.time;
  });
}

void change_frequency(int val, int delta) {
  num_having_f[f[val]]--;
  f[val] += delta;
  num_having_f[f[val]]++;
}

void add(int pos) {
  change_frequency(a[pos], +1);
}

void remove(int pos) {
  change_frequency(a[pos], -1);
}

void change_value(int l, int r, int pos, int val) {
  if ((pos >= l) && (pos <= r)) {
    change_frequency(a[pos], -1);
    change_frequency(val, +1);
  }
  a[pos] = val;
}

int get_mex() {
  int mex = 1;
  while (num_having_f[mex]) {
    mex++;
  }
  return mex;
}

void mo() {
  num_having_f[0] = n + num_updates; // ceva infinit
  int l = 0, r = -1, u_index = 1;
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    while (l > q[i].l) {
      add(--l);
    }
    while (r < q[i].r) {
      add(++r);
    }
    while (l < q[i].l) {
      remove(l++);
    }
    while (r > q[i].r) {
      remove(r--);
```

```
    }
    while (u[u_index].time < q[i].time) {
      change_value(l, r, u[u_index].pos, u[u_index].val);
      u_index++;
    }
    while (u[u_index - 1].time > q[i].time) {
      u_index--;
      change_value(l, r, u[u_index].pos, u[u_index].old_val);
    }
    q[i].answer = get_mex();
  }
}

void sort_queries_by_time() {
  std::sort(q, q + num_queries, [](query a, query b) {
    return a.time < b.time;
  });
}

void write_answers() {
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    printf("%d\n", q[i].answer);
  }
}

int main() {
  read_array();
  read_ops();
  sort_queries();
  mo();
  sort_queries_by_time();
  write_answers();

  return 0;
}
```

Anexa F

Arbori - probleme esențiale

F.1 Generator simplu de arbori aleatorii

‹ înapoi

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <sys/time.h>

int n, k;

void usage() {
  fprintf(stderr, "Apel: ./generator <n> <k>\n");
  fprintf(stderr, "\n");
  fprintf(stderr, "Generează un arbore cu n noduri și k căi.\n");
  exit(1);
}

void parse_command_line_args(int argc, char** argv) {
  if (argc != 3) {
    usage();
  }

  n = atoi(argv[1]);
  k = atoi(argv[2]);
}

void init_rng() {
  struct timeval time;
  gettimeofday(&time, NULL);
  srand(time.tv_usec);
}

int rand2(int min, int max) {
  return min + rand() % (max - min + 1);
```

```
}

int main(int argc, char** argv) {
  parse_command_line_args(argc, argv);
  init_rng();

  printf("%d %d\n", n, k);
  for (int i = 2; i <= n; i++) {
    printf("%d %d\n", i, rand2(1, i - 1));
  }
  for (int i = 0; i < k; i++) {
    printf("%d %d\n", rand2(1, n), rand2(1, n));
  }

  return 0;
}
```

F.2 Generator avansat de arbori aleatorii

înapoi

```
#include <assert.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <sys/time.h>
#include <unistd.h>

#define MAX_N 1'000'000
#define NIL -1

int v[MAX_N], p[MAX_N];

void usage() {
  fprintf(stderr, "Apel: gen <n> <chain_length> <dense_node> <op_type> [...]\n");
  fprintf(stderr, "  op_type = 0:\n");
  fprintf(stderr, "    fără valori sau actualizări\n");
  fprintf(stderr, "  op_type = 1 <num_ops> <max_value>:\n");
  fprintf(stderr, "    valori inițiale, actualizări pe nod, interogări pe nod\n");
  fprintf(stderr, "  op_type = 2 <num_ops>:\n");
  fprintf(stderr, "    fără valori sau actualizări, cu interogări pe cale\n");
  _exit(1);
}

void shuffle(int* v, int n) {
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int j = rand() % (i + 1);
    int tmp = v[i];
    v[i] = v[j];
```

```
    v[j] = tmp;
  }
}

void generate_tree(int n, int chain_length, int dense_node) {
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    v[i] = i;
    p[i] = NIL;
  }

  shuffle(v, n);

  // Înlănțuie nodurile [0, chain_length).
  for (int i = 1; i < chain_length; i++) {
    p[v[i]] = v[i - 1];
  }

  // Conectează nodurile [chain_length, n - dense_node) la noduri aleatorii
  // dinaintea lor.
  for (int i = chain_length; i < n - dense_node; i++) {
    p[v[i]] = v[rand() % i];
  }

  // Conectează nodurile [n - dense_node, n) de un același părinte.
  int parent = rand() % (n - dense_node);
  for (int i = n - dense_node; i < n; i++) {
    p[v[i]] = v[parent];
  }

  // Nu tipări muchiile chiar în ordinea asta.
  shuffle(v, n);

  printf("%d\n", n);
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    int x = v[i], y = p[v[i]];
    if (y != NIL) {
      // Interschimbă aleatoriu fiul și părintele.
      if (rand() % 2) {
        int tmp = x;
        x = y;
        y = tmp;
      }
      printf("%d %d\n", 1 + x, 1 + y);
    }
  }
}

void generate_ops(int n, int num_ops, int max_value) {
  // Valorile inițiale.
  for (int i = 0; i < n; i++) {
```

```
    v[i] = rand() % (max_value + 1);
    printf("%d ", v[i]);
  }
  printf("\n");

  printf("%d\n", num_ops);
  while (num_ops--) {
    int u = rand() % n;
    if (rand() % 2) {
      // actualizare -- asigură-te că nu depășim max_value
      int delta = rand() % (max_value + 1) - v[u];
      v[u] += delta;
      printf("1 %d %d\n", 1 + u, delta);
    } else {
      // interogare
      printf("2 %d\n", 1 + u);
    }
  }
}

void generate_lca_queries(int n, int num_ops) {
  // Generează perechi de noduri distincte.
  printf("%d\n", num_ops);
  while (num_ops--) {
    int u = rand() % n, v;
    do {
      v = rand() % n;
    } while (u == v);
    printf("%d %d\n", 1 + u, 1 + v);
  }
}

int main(int argc, char** argv) {
  if (argc < 5) {
    usage();
  }

  int n = atoi(argv[1]);
  int chain_length = atoi(argv[2]);
  int dense_node = atoi(argv[3]);
  int op_type = atoi(argv[4]);

  assert(chain_length + dense_node <= n);

  struct timeval time;
  gettimeofday(&time, NULL);
  srand(time.tv_usec);

  generate_tree(n, chain_length, dense_node);
```

```
  int num_ops, max_value;
  switch (op_type) {
    case 0:
      // Nimic altceva de făcut.
      break;

    case 1:
      if (argc != 7) {
        usage();
      }
      num_ops = atoi(argv[5]);
      max_value = atoi(argv[6]);
      generate_ops(n, num_ops, max_value);
      break;

    case 2:
      if (argc != 6) {
        usage();
      }
      num_ops = atoi(argv[5]);
      generate_lca_queries(n, num_ops);
      break;

    default:
      assert(false);
  }

  return 0;
}
```

F.3 Problema Subordinates (CSES)

‹ înapoi

Sursă cu vectori STL.

```
#include <iostream>
#include <vector>

const int MAX_N = 200'000;

int s[MAX_N + 1]; // mărimea subarborelui, inclusiv nodul însuși
std::vector<int> c[MAX_N + 1]; // c[u] = fiii lui u
int n;

void read_data() {
  std::cin >> n;
  for (int u = 2; u <= n; u++) {
```

```
    int v;
    std::cin >> v;
    c[v].push_back(u);
  }
}

void depth_first_search(int u) {
  s[u] = 1;
  for (int v: c[u]) {
    depth_first_search(v);
    s[u] += s[v];
  }
}

void write_answers() {
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    std::cout << (s[u] - 1) << ' ';
  }
  std::cout << '\n';
}

int main() {
  read_data();
  depth_first_search(1);
  write_answers();

  return 0;
}
```

Sursă cu liste înlănțuite.

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;   // începutul listei de adiacență
  int size;  // mărimea subarborelui, inclusiv nodul însuși
};

cell list[MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int n;

void add_child(int u, int v) {
```

```
  static int pos = 1;
  list[pos] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = pos++;
}

void read_data() {
  scanf("%d",  &n);
  for (int u = 2; u <= n; u++) {
    int par;
    scanf("%d", &par);
    add_child(par, u);
  }
}

void depth_first_search(int u) {
  nd[u].size = 1;
  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    depth_first_search(v);
    nd[u].size += nd[v].size;
  }
}

void write_answers() {
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    printf("%d ", nd[u].size - 1);
  }
  printf("\n");
}

int main() {
  read_data();
  depth_first_search(1);
  write_answers();

  return 0;
}
```

F.4 Problema Tree Matching (CSES)

‹ înapoi

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct cell {
  int v, next;
```

```
};

struct node {
  int adj;
  bool matched;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int max_match;

void add_edge(int u, int v) {
  static int pos = 1;
  list[pos] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = pos++;
}

void read_data() {
  int n, u, v;

  scanf("%d",  &n);
  for (int i = 1; i < n; i++) {
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }
}

void dfs(int u, int parent) {
  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != parent) {
      dfs(v, u);
      if (!nd[u].matched && !nd[v].matched) {
        max_match++;
        nd[u].matched = nd[v].matched = true;
      }
    }
  }
}

void write_answer() {
  printf("%d\n", max_match);
}

int main() {
  read_data();
  dfs(1, 0);
  write_answer();
```

```
  return 0;
}
```

F.5 Problema Tree Diameter (CSES)

înapoi

Sursă cu două parcurgeri DFS.

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct cell {
  int v, next;
};

struct rec {
  int node, dist;

  void improve(rec child) {
    if (child.dist + 1 > dist) {
      dist = child.dist + 1;
      node = child.node;
    }
  }
};

cell list[2 * MAX_NODES];
int adj[MAX_NODES + 1];

void add_edge(int u, int v) {
  static int pos = 1;
  list[pos] = { v, adj[u] };
  adj[u] = pos++;
}

void read_data() {
  int n, u, v;

  scanf("%d",  &n);
  for (int i = 1; i < n; i++) {
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }
}
```

```
rec dfs(int u, int parent) {
  rec result = { u, 0 }; // nodul însuși
  for (int ptr = adj[u]; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != parent) {
      result.improve(dfs(v, u));
    }
  }
  return result;
}

int main() {
  read_data();
  rec farthest = dfs(1, 0);
  rec farthest2 = dfs(farthest.node, 0);
  int diam = farthest2.dist;
  printf("%d\n", diam);

  return 0;
}
```

Sursă cu o singură parcurgere DFS.

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct cell {
  int v, next;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
int adj[MAX_NODES + 1];
int diam;

void add_edge(int u, int v) {
  static int pos = 1;
  list[pos] = { v, adj[u] };
  adj[u] = pos++;
}

void read_data() {
  int n, u, v;

  scanf("%d",  &n);
  for (int i = 1; i < n; i++) {
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
```

```
  }
}

void maximize(int& x, int y) {
  x = (x > y) ? x : y;
}

// Returnează lungimea în muchii a căii celei mai lungi de la acest nod la
// orice frunză din subarbore.
int dfs(int u, int parent) {
  int dist = 0; // self
  for (int ptr = adj[u]; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != parent) {
      int l = 1 + dfs(v, u);
      maximize(diam, dist + l); // combină cu fiii anteriori
      maximize(dist, l);        // actualizează calea cea mai lungă
    }
  }
  return dist;
}

int main() {
  read_data();
  dfs(1, 0);
  printf("%d\n", diam);

  return 0;
}
```

F.6 Problema Tree Distances II (CSES)

‹ înapoi

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;            // începutul listei de adiacență
  int size;           // mărimea subarborelui, inclusiv nodul însuși
  long long sum_dist; // suma distanțelor la toate celelalte noduri
};
```

```
cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int n;

void add_edge(int u, int v) {
  static int pos = 1;
  list[pos] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = pos++;
}

void read_data() {
  scanf("%d",  &n);
  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }
}

void size_dfs(int u, int parent, int depth) {
  nd[1].sum_dist += depth;
  nd[u].size = 1;
  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != parent) {
      size_dfs(v, u, depth + 1);
      nd[u].size += nd[v].size;
    }
  }
}

void reroot_dfs(int u, int parent) {
  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != parent) {
      nd[v].sum_dist = nd[u].sum_dist + n - 2 * nd[v].size;
      reroot_dfs(v, u);
    }
  }
}

void write_answers() {
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    printf("%lld ", nd[u].sum_dist);
  }
  printf("\n");
}

int main() {
```

```
  read_data();
  size_dfs(1, 0, 0);
  reroot_dfs(1, 0);
  write_answers();

  return 0;
}
```

F.7 Problema White-Black Balanced Subtrees (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 4'000;
const int WHITE = 0;
const int BLACK = 1;

struct node {
  short parent;
  short num_children; // fii care încă nu ne-au dat raportul
  short cnt[2];
  unsigned char color;
};

node nd[MAX_NODES + 1];
int n, answer;

void read_data() {
  scanf("%d", &n);
  for (int i = 2; i <= n; i++) {
    scanf("%hd ", &nd[i].parent);
    nd[nd[i].parent].num_children++;
  }

  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    nd[i].color = (getchar() == 'B') ? BLACK : WHITE;
  }
}

// Toți fiii lui u i-au dat raportul. Este momentul ca u să își numere propria
// contribuție, apoi să i-o raporteze părintelui.
void process(node& u) {
  u.cnt[u.color]++; // numără-te pe tine însuți
  answer += (u.cnt[WHITE] == u.cnt[BLACK]);

  nd[u.parent].cnt[WHITE] += u.cnt[WHITE];
  nd[u.parent].cnt[BLACK] += u.cnt[BLACK];
```

```
}

void traverse_tree() {
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    int s = u;
    while (s && !nd[s].num_children) {
      process(nd[s]);
      s = nd[s].parent;
      nd[s].num_children--;
    }
  }
}

void reset() {
  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    nd[i] = { 0, 0, 0, 0, 0 };
  }
  answer = 0;
}

void solve_test() {
  read_data();
  traverse_tree();
  printf("%d\n", answer);
  reset();
}

int main() {
  int num_tests;
  scanf("%d", &num_tests);
  while (num_tests--) {
    solve_test();
  }

  return 0;
}
```

F.8 Problema Blood Cousins (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```
// Complexitate: O(n + q).
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 100'000;
const int MAX_QUERIES = 100'000;

struct cell {
```

```
  int v, next;
};

struct query_cell {
  int v, p, answer, next;
};

struct node {
  int adj;
  int qptr; // pointer în lista de interogări
};

cell list[MAX_NODES + 1];
query_cell q[MAX_QUERIES + 1];
node nd[MAX_NODES + 1];
int stack[MAX_NODES];
int n, num_queries;

void read_input_data() {
  int list_ptr = 1;

  scanf("%d", &n);

  // Pseudonodul 0 va avea toate rădăcinile drept fii.
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    int p;
    scanf("%d", &p);
    list[list_ptr] = { u, nd[p].adj };
    nd[p].adj = list_ptr++;
  }

  scanf("%d", &num_queries);
  for (int i = 1; i <= num_queries; i++) {
    scanf("%d %d", &q[i].v, &q[i].p);
  }
}

void distribute_queries() {
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    nd[u].qptr = 0;
  }
  for (int i = 1; i <= num_queries; i++) {
    if (q[i].v) { // poate fi 0 după primul DFS
      q[i].next = nd[q[i].v].qptr;
      nd[q[i].v].qptr = i;
    }
  }
}

void replace_query_nodes_dfs(int u, int depth) {
```

```
  stack[depth] = u;

  // Scanează toate interogările despre u și înlocuiește nodul cu al p-lea său
  // strămoș.
  for (int ptr = nd[u].qptr; ptr; ptr = q[ptr].next) {
    q[ptr].v = (depth > q[ptr].p)
      ? stack[depth - q[ptr].p]
      : 0;
  }

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    replace_query_nodes_dfs(list[ptr].v, depth + 1);
  }

  stack[depth] = 0; // curățenie pentru al doilea DFS
}

void answer_queries_dfs(int u, int depth) {
  stack[depth]++;

  // Scanează toate interogările despre u și reține contorul inițial.
  for (int ptr = nd[u].qptr; ptr; ptr = q[ptr].next) {
    q[ptr].answer = stack[depth + q[ptr].p];
  }

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    answer_queries_dfs(list[ptr].v, depth + 1);
  }

  // Rescanează interogările și reține diferența între valorile contorului.
  for (int ptr = nd[u].qptr; ptr; ptr = q[ptr].next) {
    q[ptr].answer = stack[depth + q[ptr].p] - q[ptr].answer - 1;
  }
}

void write_output_data() {
  for (int i = 1; i <= num_queries; i++) {
    printf("%d ", q[i].answer);
  }
  printf("\n");
}

int main() {
  read_input_data();
  distribute_queries();
  replace_query_nodes_dfs(0, 0);
  distribute_queries();
  answer_queries_dfs(0, 0);
  write_output_data();
```

```
  return 0;
}
```

Anexa G

Arbori - liniarizare

G.1 Problema Tree Queries (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```c
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;
const int NIL = -1;

struct list {
  int v, next;
};

struct node {
  int parent;
  int ptr; // pointer în lista de adiacență
  int time_in, time_out;
};

list adj[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int n, num_queries;

void add_neighbor(int u, int v, int pos) {
  adj[pos] = { v, nd[u].ptr };
  nd[u].ptr = pos;
}

void read_tree() {
  scanf("%d %d", &n, &num_queries);
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    nd[u].ptr = NIL;
  }
```

```
  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_neighbor(u, v, 2 * i);
    add_neighbor(v, u, 2 * i + 1);
  }
}

void euler_tour(int u, int parent) {
  static int time = 0;

  nd[u].parent = parent;
  nd[u].time_in = ++time;
  for (int ptr = nd[u].ptr; ptr != NIL; ptr = adj[ptr].next) {
    int v = adj[ptr].v;
    if (v != parent) {
      euler_tour(v, u);
    }
  }
  nd[u].time_out = ++time;
}

bool is_ancestor(int u, int v) {
  return
    (nd[u].time_in <= nd[v].time_in) &&
    (nd[u].time_out >= nd[v].time_out);
}

void process_queries() {
  while (num_queries--) {
    int size, u, lowest;
    bool has_path = true;
    scanf("%d %d", &size, &lowest);
    lowest = nd[lowest].parent;

    while (--size) {
      scanf("%d", &u);
      u = nd[u].parent;
      if (is_ancestor(lowest, u)) {
        lowest = u;
      } else if (!is_ancestor(u, lowest)) {
        has_path = false;
      }
    }

    printf(has_path ? "YES\n" : "NO\n");
  }
}

int main() {
```

```
  read_tree();
  euler_tour(1, 1);
  process_queries();

  return 0;
}
```

G.2 Problema Subtree Queries (CSES)

‹ înapoi

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct list {
  int val, next;
};

struct node {
  int val;
  int start, finish;
  int ptr; // pointer în lista de adiacență
};

struct fenwick_tree {
  long long v[MAX_NODES + 1];
  int n;

  void build(int n) {
    this->n = n;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
      int j = i + (i & -i);
      if (j <= n) {
        v[j] += v[i];
      }
    }
  }

  void add(int pos, int val) {
    do {
      v[pos] += val;
      pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
  }

  long long sum(int pos) {
    long long s = 0;
```

```
    while (pos) {
      s += v[pos];
      pos &= pos - 1;
    }
    return s;
  }

  long long range_sum(int x, int y) {
    return sum(y) - sum(x - 1);
  }
};

list adj[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
fenwick_tree fen;
int n, num_queries;

void add_neighbor(int u, int v) {
  static int ptr = 1;
  adj[ptr] = { v, nd[u].ptr };
  nd[u].ptr = ptr++;
}

void read_input_data() {
  scanf("%d %d", &n, &num_queries);
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    scanf("%d", &nd[u].val);
  }

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_neighbor(u, v);
    add_neighbor(v, u);
  }
}

void flatten(int u) {
  static int time = 0;

  nd[u].start = ++time;

  for (int ptr = nd[u].ptr; ptr; ptr = adj[ptr].next) {
    int v = adj[ptr].val;
    if (!nd[v].start) {
      flatten(v);
    }
  }

  nd[u].finish = time;
```

```
}

void build_fenwick_tree() {
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    fen.v[nd[u].start] = nd[u].val;
  }

  fen.build(n);
}

void process_queries() {
  while (num_queries--) {
    int type, u;
    scanf("%d %d", &type, &u);
    if (type == 1) {
      int val;
      scanf("%d", &val);
      fen.add(nd[u].start, val - nd[u].val);
      nd[u].val = val;
    } else {
      printf("%lld\n", fen.range_sum(nd[u].start, nd[u].finish));
    }
  }
}

int main() {
  read_input_data();
  flatten(1);
  build_fenwick_tree();
  process_queries();

  return 0;
}
```

G.3 Problema Path Queries (CSES)

‹ înapoi

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct list {
  int val, next;
};

struct node {
  int val;
```

```
  int time_in, time_out;
  int ptr; // pointer în lista de adiacență
};

struct fenwick_tree {
  long long v[2 * MAX_NODES + 1];
  int n;

  void build(int n) {
    this->n = n;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
      int j = i + (i & -i);
      if (j <= n) {
        v[j] += v[i];
      }
    }
  }

  void add(int pos, int val) {
    do {
      v[pos] += val;
      pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
  }

  long long sum(int pos) {
    long long s = 0;
    while (pos) {
      s += v[pos];
      pos &= pos - 1;
    }
    return s;
  }
};

list adj[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
fenwick_tree fen;
int n, num_queries;

void add_neighbor(int u, int v) {
  static int ptr = 1;
  adj[ptr] = { v, nd[u].ptr };
  nd[u].ptr = ptr++;
}

void read_input_data() {
  scanf("%d %d", &n, &num_queries);
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    scanf("%d", &nd[u].val);
```

```
  }

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_neighbor(u, v);
    add_neighbor(v, u);
  }
}

void flatten(int u) {
  static int time = 0;

  nd[u].time_in = ++time;

  for (int ptr = nd[u].ptr; ptr; ptr = adj[ptr].next) {
    int v = adj[ptr].val;
    if (!nd[v].time_in) {
      flatten(v);
    }
  }

  nd[u].time_out = ++time;
}

void build_fenwick_tree() {
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    fen.v[nd[u].time_in] = nd[u].val;
    fen.v[nd[u].time_out] = -nd[u].val;
  }

  fen.build(2 * n);
}

void process_queries() {
  while (num_queries--) {
    int type, u;
    scanf("%d %d", &type, &u);
    if (type == 1) {
      int val;
      scanf("%d", &val);
      int delta = val - nd[u].val;
      fen.add(nd[u].time_in, delta);
      fen.add(nd[u].time_out, -delta);
      nd[u].val = val;
    } else {
      printf("%lld\n", fen.sum(nd[u].time_in));
    }
  }
}
```

```
int main() {
  read_input_data();
  flatten(1);
  build_fenwick_tree();
  process_queries();

  return 0;
}
```

G.4 Problema New Year Tree (Codeforces)

înapoi • versiune online

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 400'000;
const int MAX_NODES_ROUNDED = 1 << 19;
const int T_PAINT = 1;

typedef unsigned long long u64;

// Un arbore de segmente care admite operațiile:
//
// * range_set(int l, int r, int val)
//   Atribuie valoarea val pe [l, r]. Presupune că 1 ≤ val ≤ 60.
// * range_count_distinct(int l, int r)
//   Returnează numărul de valori distincte din [l, r].
//
// Contract: mask[x] este masca valorilor din subarborele lui x. Dacă dirty[x]
// este nonzero, atunci dirty[x] trebuie scris peste tot în subarborele lui x
// și mask[x] deja respectă dirty[x].
struct segment_tree {
  u64 mask[2 * MAX_NODES_ROUNDED];
  char dirty[2 * MAX_NODES_ROUNDED];
  int n, bits;

  int next_power_of_2(int n) {
    return 1 << (32 - __builtin_clz(n - 1));
  }

  void init(int size) {
    n = next_power_of_2(size);
    bits = __builtin_popcount(n - 1);
  }

  void raw_set(int pos, char val) {
    mask[pos + n] = 1ull << val;
```

```
}

void build() {
  for (int i = n - 1; i; i--) {
    mask[i] = mask[2 * i] | mask[2 * i + 1];
  }
}

void push(int x) {
  if (dirty[x]) {
    dirty[2 * x] = dirty[2 * x + 1] = dirty[x];
    mask[2 * x] = mask[2 * x + 1] = mask[x];
    dirty[x] = 0;
  }
}

void push_path(int x) {
  for (int b = bits; b; b--) {
    push(x >> b);
  }
}

void pull_path(int x) {
  for (x /= 2; x; x /= 2) {
    if (!dirty[x]) {
      mask[x] = mask[2 * x] | mask[2 * x + 1];
    }
  }
}

void range_set(int l, int r, int val) {
  l += n;
  r += n;
  int orig_l = l, orig_r = r;

  push_path(l);
  push_path(r);

  while (l <= r)  {
    if (l & 1) {
      mask[l] = 1ull << val;
      dirty[l++] = val;
    }
    l >>= 1;

    if (!(r & 1)) {
      mask[r] = 1ull << val;
      dirty[r--] = val;
    }
    r >>= 1;
```

```
    }

    pull_path(orig_l);
    pull_path(orig_r);
  }

  int range_count_distinct(int l, int r) {
    u64 result = 0;

    l += n;
    r += n;
    push_path(l);
    push_path(r);

    while (l <= r)  {
      if (l & 1) {
        result |= mask[l++];
      }
      l >>= 1;

      if (!(r & 1)) {
        result |= mask[r--];
      }
      r >>= 1;
    }

    return __builtin_popcountll(result);
  }

};

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj; // lista de adiacență
  int time_in, time_out;
  unsigned char color;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
segment_tree segtree;
int n, num_ops;

void add_neighbor(int u, int v) {
  static int ptr = 1;
  list[ptr] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = ptr++;
```

```
}

void read_tree() {
  scanf("%d %d", &n, &num_ops);
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    scanf("%hhd", &nd[u].color);
  }
  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_neighbor(u, v);
    add_neighbor(v, u);
  }
}

void flatten_tree(int u) {
  static int time = 0;

  nd[u].time_in = time++;

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (!nd[v].time_in && (v != 1)) { // nu revizita rădăcina
      flatten_tree(v);
    }
  }

  nd[u].time_out = time - 1;
}

void make_segtree() {
  segtree.init(n);
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    segtree.raw_set(nd[u].time_in, nd[u].color);
  }
  segtree.build();
}

void process_ops() {
  while (num_ops--) {
    int type, u, color;
    scanf("%d %d", &type, &u);
    int l = nd[u].time_in, r = nd[u].time_out;

    if (type == T_PAINT) {
      scanf("%d", &color);
      segtree.range_set(l, r, color);
    } else {
      int colors = segtree.range_count_distinct(l, r);
      printf("%d\n", colors);
```

```
    }
  }
}

int main() {
  read_tree();
  flatten_tree(1);
  make_segtree();
  process_ops();

  return 0;
}
```

G.5 Problema Max Flow (USACO)

‹ înapoi

Sursă cu vectori de diferențe pe arbore.

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 50'000;
const int MAX_PATHS = 100'000;
const int NIL = -1;

struct list {
  int val, next;
};

struct node {
  int parent;
  int ptr; // pointer în lista de adiacență
  int path_ptr; // pointer în lista de căi
  int load;
};

struct path {
  int u, v, lca;
};

list adj[2 * MAX_NODES];
list path_list[2 * MAX_PATHS];
node nd[MAX_NODES + 1];
path p[MAX_PATHS];
int ds_parent[MAX_NODES + 1];
int n, num_paths;

/*****************************************************************************/
```

```
/*                  Implementare de mulțimi disjuncte.                    */
/************************************************************************/

void ds_init() {
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    ds_parent[u] = u;
  }
}

int ds_find(int u) {
  return (ds_parent[u] == u)
    ? u
    : (ds_parent[u] = ds_find(ds_parent[u]));
}

// Întotdeauna unifică v în u. Fără unificare după rang.
void ds_union(int u, int v) {
  ds_parent[ds_find(v)] = ds_find(u);
}

/************************************************************************/
/*      Implementarea algoritmului lui Tarjan pentru LCA offline.       */
/************************************************************************/

void offline_lca_dfs(int u, int parent) {
  nd[u].parent = parent;

  for (int ptr = nd[u].ptr; ptr != NIL; ptr = adj[ptr].next) {
    int v = adj[ptr].val;
    if (v != parent) {
      offline_lca_dfs(v, u);
      ds_union(u, v);
    }
  }

  for (int ptr = nd[u].path_ptr; ptr != NIL; ptr = path_list[ptr].next) {
    int i = path_list[ptr].val;
    int v = (p[i].u == u) ? p[i].v : p[i].u;
    if (nd[v].parent) {
      p[i].lca = ds_find(v);
    }
  }
}

void offline_lca() {
  ds_init();
  offline_lca_dfs(1, 1);
}

/************************************************************************/
```

```
/*                          Codul principal.                                  */
/****************************************************************************/

void add_neighbor(int u, int v) {
  static int ptr = 0;
  adj[ptr] = { v, nd[u].ptr };
  nd[u].ptr = ptr++;
}

void add_path(int ind, int u) {
  static int ptr = 0;
  path_list[ptr] = { ind, nd[u].path_ptr };
  nd[u].path_ptr = ptr++;
}

void read_input_data() {
  FILE* f = fopen("maxflow.in", "r");
  fscanf(f, "%d %d", &n, &num_paths);
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    nd[u].ptr = nd[u].path_ptr = NIL;
  }

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    fscanf(f, "%d %d", &u, &v);
    add_neighbor(u, v);
    add_neighbor(v, u);
  }

  for (int i = 0; i < num_paths; i++) {
    fscanf(f, "%d %d", &p[i].u, &p[i].v);
    add_path(i, p[i].u);
    add_path(i, p[i].v);
  }
  fclose(f);
}

void mark_differences() {
  for (int i = 0; i < num_paths; i++) {
    nd[p[i].u].load++;
    nd[p[i].v].load++;
    nd[p[i].lca].load--;
    if (p[i].lca != 1) {
      int lca_parent = nd[p[i].lca].parent;
      nd[lca_parent].load--;
    }
  }
}

void sum_differences(int u) {
```

```
  for (int ptr = nd[u].ptr; ptr != NIL; ptr = adj[ptr].next) {
    int v = adj[ptr].val;
    if (v != nd[u].parent) {
      sum_differences(v);
      nd[u].load += nd[v].load;
    }
  }
}

int get_max_load() {
  int result = 0;
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    if (nd[u].load > result) {
      result = nd[u].load;
    }
  }
  return result;
}

void write_answer(int answer) {
  FILE* f = fopen("maxflow.out", "w");
  fprintf(f, "%d\n", answer);
  fclose(f);
}

int main() {
  read_input_data();
  offline_lca();
  mark_differences();
  sum_differences(1);
  int answer = get_max_load();
  write_answer(answer);

  return 0;
}
```

Sursă cu liniarizare + AIB.

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 50'000;
const int MAX_PATHS = 100'000;

struct cell {
  int v, next;
};

// Stochează două liste de noduri în fiecare nod u: una pentru căile care
```

```
// încep în u și alta pentru căile care se termină în u.
struct node {
  int adj;
  int path_begin, path_end; // pointers to list of nodes
  int start, finish;
};

struct fenwick_tree {
  unsigned short v[MAX_NODES + 1];
  int n;

  void init(int n) {
    this->n = n;
  }

  void add(int pos, int val) {
    do {
      v[pos] += val;
      pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
  }

  int count(int pos) {
    int s = 0;
    while (pos) {
      s += v[pos];
      pos &= pos - 1;
    }
    return s;
  }

  int range_count(int x, int y) {
    return count(y) - count(x - 1);
  }
};

cell list[2 * MAX_NODES + 2 * MAX_PATHS + 1];
node nd[MAX_NODES + 1];
fenwick_tree active_start, active_finish;
int n, num_paths;
FILE* fin;

void add_to_list(int& head, int u) {
  static int ptr = 1;
  list[ptr] = { u, head };
  head = ptr++;
}

void read_tree() {
  fscanf(fin, "%d %d", &n, &num_paths);
```

```
  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int u, v;
    fscanf(fin, "%d %d", &u, &v);
    add_to_list(nd[u].adj, v);
    add_to_list(nd[v].adj, u);
  }
}

void read_paths() {
  for (int i = 0; i < num_paths; i++) {
    int u, v;
    fscanf(fin, "%d %d", &u, &v);
    if (nd[u].start > nd[v].start) {
      int tmp = u; u = v; v = tmp;
    }
    add_to_list(nd[u].path_begin, v);
    add_to_list(nd[v].path_end, u);
  }
}

void compute_ranges(int u) {
  static int time = 0;

  nd[u].start = ++time;

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (!nd[v].start) {
      compute_ranges(v);
    }
  }

  nd[u].finish = time;
}

int max(int x, int y) {
  return (x > y) ? x : y;
}

int process_paths_starting_at(int u) {
  int cnt = 0;

  for (int ptr = nd[u].path_begin; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    active_finish.add(nd[v].start, +1);
    cnt++;
  }

  active_start.add(nd[u].start, +cnt);
```

```
  return cnt;
}

void process_paths_ending_at(int v) {
  int cnt = 0;

  for (int ptr = nd[v].path_end; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int u = list[ptr].v;
    active_start.add(nd[u].start, -1);
    cnt++;
  }

  active_finish.add(nd[v].start, -cnt);
}

int max_load = 0;

void compute_load(int u) {
  // Căi care se termină în subarborele lui u.
  int load = active_finish.range_count(nd[u].start, nd[u].finish);

  // Căi care încep în u.
  load += process_paths_starting_at(u);

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (nd[v].start > nd[u].start) {
      compute_load(v);
      // Căi care au început într-un descendent al lui u și se vor termina fie
      // în alt fiu al lui u, fie în afara subarborelui lui u.
      load += active_start.range_count(nd[v].start, nd[v].finish);
    }
  }

  process_paths_ending_at(u);
  max_load = max(max_load, load);
}

void write_answer() {
  FILE* f = fopen("maxflow.out", "w");
  fprintf(f, "%d\n", max_load);
  fclose(f);
}

int main() {
  fin = fopen("maxflow.in", "r");
  read_tree();
  compute_ranges(1);
  read_paths();
  fclose(fin);
```

```
  active_start.init(n);
  active_finish.init(n);

  compute_load(1);
  write_answer();

  return 0;
}
```

G.6 Problema Distinct Colors (CSES)

înapoi

```
#include <stdio.h>
#include <unordered_map>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int color, distinct;
  int adj; // lista de adiacență
};

// Un arbore Fenwick extins cu culori. Când colorăm un bit cu o culoare,
// arborele șterge automat apariția anterioară a culorii.
struct fenwick_tree {
  int v[MAX_NODES + 1];
  std::unordered_map<int, int> last_pos;
  int n, total;

  void init(int n) {
    this->n = n;
    total = 0;
  }

  void add(int pos, int val) {
    total += val;
    do {
      v[pos] += val;
      pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
  }
```

```
  void colorize(int pos, int color) {
    auto last = last_pos.find(color);
    if (last != last_pos.end()) {
      add(last->second, -1);
      last->second = pos;
    } else {
      last_pos[color] = pos;
    }
    add(pos, +1);
  }

  // count[pos..n] = total - count[1..pos-1]
  int suffix_count(int pos) {
    int s = total;
    pos--;
    while (pos) {
      s -= v[pos];
      pos &= pos - 1;
    }
    return s;
  }
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
fenwick_tree fen;
int n;

void add_neighbor(int u, int v) {
  static int ptr = 1;
  list[ptr] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = ptr++;
}

void read_input_data() {
  scanf("%d", &n);

  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    scanf("%d", &nd[u].color);
  }

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_neighbor(u, v);
    add_neighbor(v, u);
  }
}

void dfs(int u) {
```

```
  static int time = 0;
  int entry_time = ++time;

  fen.colorize(time, nd[u].color);
  nd[u].color = 0; // previne revizitarea

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (nd[v].color) {
      dfs(v);
    }
  }

  nd[u].distinct = fen.suffix_count(entry_time);
}

void write_output_data() {
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    printf("%d ", nd[u].distinct);
  }
  printf("\n");
}

int main() {
  read_input_data();
  fen.init(n);
  dfs(1);
  write_output_data();

  return 0;
}
```

G.7 Problema Disconnect (Infoarena)

‹ înapoi • versiune online

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 100'000;
const int MAX_NODES_ROUNDED = 1 << 17;
const int T_REMOVE = 1;

// Un arbore de intervale cu operațiile:
//
// update(l, r, val): scrie val peste tot în [l, r].
// query(pos): returnează prima valoare găsită călătorind în sus de la pos.
//
// Presupune că actualizările sînt fie disjuncte, fie imbricate. Cu alte
```

```
// cuvinte, nu există suprapuneri parțiale. Actualizările mai înguste au
// prioritate în fața celor mai late.
struct segment_tree_node {
  int val;
  int priority; // cu cît mai mică, cu atît mai importantă

  void update(int new_val, int new_priority) {
    if (new_priority < priority) {
      val = new_val;
      priority = new_priority;
    }
  }
};

struct segment_tree {
  segment_tree_node v[2 * MAX_NODES_ROUNDED];
  int n;

  int next_power_of_2(int x) {
    return 1 << (32 - __builtin_clz(x - 1));
  }

  void init(int n) {
    this->n = next_power_of_2(n);
    for (int i = 1; i < 2 * this->n; i++) {
      v[i].priority = n + 1; // cea mai neimportantă
    }
  }

  int query(int pos) {
    for (pos += n; pos; pos >>= 1) {
      if (v[pos].val) {
        return v[pos].val;
      }
    }
    return 0;
  }

  void update(int l, int r, int val) {
    int priority = r - l + 1;
    l += n;
    r += n;

    while (l <= r)  {
      if (l & 1) {
        v[l++].update(val, priority);
      }
      l >>= 1;

      if (!(r & 1)) {
```

```
        v[r--].update(val, priority);
      }
      r >>= 1;
    }
  }
};

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int parent;
  int start, finish;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
segment_tree segtree;
int n, num_ops;
FILE *fin, *fout;

void add_neighbor(int u, int v) {
  static int ptr = 1;
  list[ptr] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = ptr++;
}

void read_tree() {
  fscanf(fin, "%d %d", &n, &num_ops);
  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int u, v;
    fscanf(fin, "%d %d", &u, &v);
    add_neighbor(u, v);
    add_neighbor(v, u);
  }
}

void flatten_tree(int u) {
  static int time = 0;

  nd[u].start = time++;

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (!nd[v].start && (v != 1)) { // nu revizita rădăcina
      nd[v].parent = u;
      flatten_tree(v);
    }
```

```
  }

  nd[u].finish = time - 1;
}

void mark_node(int u) {
  segtree.update(nd[u].start, nd[u].finish, u);
}

bool bad_node(int u) {
  return (u < 1) || (u > n);
}

void remove_edge(int u, int v) {
  if (bad_node(u) || bad_node(v)) {
    return;
  }
  if (nd[u].parent == v) {
    mark_node(u);
  } else if (nd[v].parent == u) {
    mark_node(v);
  }
}

bool path_exists(int u, int v) {
  if (bad_node(u) || bad_node(v)) {
    return false;
  }

  u = segtree.query(nd[u].start);
  v = segtree.query(nd[v].start);

  return (u == v);
}

void process_ops() {
  int v = 0;

  while (num_ops--) {
    int type, x, y;
    fscanf(fin, "%d %d %d", &type, &x, &y);

    x ^= v;
    y ^= v;

    if (type == T_REMOVE) {
      remove_edge(x, y);
    } else {
      if (path_exists(x, y)) {
        fprintf(fout, "YES\n");
```

```
        v = x;
      } else {
        fprintf(fout, "NO\n");
        v = y;
      }
    }
  }
}

int main() {
  fin = fopen("disconnect.in", "r");
  fout = fopen("disconnect.out", "w");

  read_tree();
  flatten_tree(1);
  segtree.init(n);
  process_ops();

  fclose(fin);
  fclose(fout);

  return 0;
}
```

Anexa H

Arbori - small-to-large

H.1 Problema Fixed-Length Paths I (CSES)

înapoi

```
#include <deque>
#include <stdio.h>
#include <vector>

const int MAX_NODES = 200'000;

typedef std::deque<int> deque;

std::vector<int> adj[MAX_NODES + 1];
int n, k;
long long answer;

void read_input_data() {
  scanf("%d %d", &n, &k);

  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    adj[u].push_back(v);
    adj[v].push_back(u);
  }
}

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

int max(int x, int y) {
  return (x > y) ? x : y;
}
```

```
// Presupune că src.size() <= dest.size().
void merge_into(deque& src, deque&dest) {
  int min_i = max(0, k - 1 - dest.size());
  int max_i = min(src.size() - 1, k - 2);
  for (int i = min_i; i <= max_i; i++) {
    int j = k - 2 - i;
    answer += (long long)src[i] * dest[j];
  }
  for (int i = 0; i < (int)src.size(); i++) {
    dest[i] += src[i];
  }
}

deque dfs(int u, int parent) {
  deque result = { };
  for (int v: adj[u]) {
    if (v != parent) {
      deque d = dfs(v, u);
      if (d.size() > result.size()) {
        // Întotdeauna folosește swap(), care schimbă pointeri. Niciodată nu
        // folosi atribuirea, care copiază date.
        result.swap(d);
      }
      merge_into(d, result);
    }
  }

  result.push_front(1); // nodul însuși la distanță 0
  if ((int)result.size() >= k + 1) {
    answer += result[k];
  }
  if ((int)result.size() > k + 1) {
    // Nu are rost să ținem statistici peste distanța k.
    result.pop_back();
  }
  return result;
}

void write_answer() {
  printf("%lld\n", answer);
}

int main() {
  read_input_data();
  dfs(1, 0);
  write_answer();

  return 0;
```

```
}
```

H.2 Problema Distinct Colors (CSES) (din nou)

‹ înapoi

```
#include <stdio.h>
#include <unordered_set>

const int MAX_NODES = 200'000;

typedef std::unordered_set<int> set;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int color, distinct;
  int adj;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int n;

void add_neighbor(int u, int v) {
  static int ptr = 1;
  list[ptr] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = ptr++;
}

void read_data() {
  scanf("%d", &n);

  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    scanf("%d", &nd[u].color);
  }

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_neighbor(u, v);
    add_neighbor(v, u);
  }
}

void merge_into(set& src, set& dest) {
```

```
  dest.merge(src);
  src.clear();
}

set dfs(int u) {
  // marchează-l ca vizitat ca să prevenim recursivitatea infinită
  nd[u].distinct = 1;
  set result = { nd[u].color };
  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (!nd[v].distinct) {
      set s = dfs(v);
      if (s.size() > result.size()) {
        s.swap(result);
      }
      merge_into(s, result);
    }
  }

  nd[u].distinct = result.size();
  return result;
}

void write_answer() {
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    printf("%d ", nd[u].distinct);
  }
  printf("\n");
}

int main() {
  read_data();
  dfs(1);
  write_answer();

  return 0;
}
```

H.3 Problema Lomsat Gelral (Codeforces)

‹ înapoi

Sursă cu tehnica *small-to-large* (versiune online).

```
#include <stdio.h>
#include <unordered_map>

const int MAX_NODES = 100'000;
```

```
struct freq_info {
  std::unordered_map<int, int> map; // culori => frecvențe
  int max_f;                        // cea mai mare frecvență din map
  long long sum;                    // suma culorilor având max_f

  freq_info(int color) {
    map[color] = 1;
    max_f = 1;
    sum = color;
  }

  void swap(freq_info& other) {
    map.swap(other.map);
    max_f = other.max_f;
    sum = other.sum;
    // Tehnic, ar trebui să copiem și valorile noastre în other, dar nu este
    // necesar.
  }

  void absorb(freq_info& src) {
    if (src.map.size() > map.size()) {
      swap(src);
    }

    for (auto [color, f]: src.map) {
      map[color] += f;
      if (map[color] > max_f) {
        max_f = map[color];
        sum = color;
      } else if (map[color] == max_f) {
        sum += color;
      }
    }

    src.map.clear();
  }
};

struct cell {
  int val, next;
};

struct node {
  int color;
  int adj;
  long long sum;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
```

```
node nd[MAX_NODES + 1];
int n;

void add_neighbor(int u, int v) {
  static int ptr = 1;
  list[ptr] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = ptr++;
}

void read_input_data() {
  scanf("%d", &n);

  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    scanf("%d", &nd[u].color);
  }

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_neighbor(u, v);
    add_neighbor(v, u);
  }
}

freq_info dfs(int u) {
  freq_info result(nd[u].color);
  nd[u].color = 0; // previne recursia infinită

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].val;
    if (nd[v].color) {
      freq_info f = dfs(v);
      result.absorb(f);
    }
  }

  nd[u].sum = result.sum;
  return result;
}

void write_output_data() {
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    printf("%lld ", nd[u].sum);
  }
  printf("\n");
}

int main() {
  read_input_data();
  dfs(1);
```

```
  write_output_data();

  return 0;
}
```

Sursă cu algoritmul lui Mo (versiune online).

```
#include <algorithm>
#include <math.h>
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 100'000;

struct list {
  int val, next;
};

struct node {
  int color, orig_pos;
  int start, finish;
  int ptr; // lista de adiacență
};

struct accountant {
  int* color;
  int f[MAX_NODES + 1];       // frecvența fiecărei culori
  int c[MAX_NODES + 1];       // numărul de culori având fiecare frecvență
  long long s[MAX_NODES + 1]; // suma culorilor având fiecare frecvență
  int left, right, max_f;

  void init(int* color) {
    this->color = color;
    left = 1; right = 0; // gol
  }

  void change_frequency(int x, int delta) {
    c[f[x]]--;
    s[f[x]] -= x;
    f[x] += delta;
    c[f[x]]++;
    s[f[x]] += x;
  }

  void include(int x) {
    change_frequency(x, +1);
    if (f[x] > max_f) {
      max_f++;
    }
  }
```

```
  void exclude(int x) {
    change_frequency(x, -1);
    if (!c[max_f]) {
      max_f--;
    }
  }

  long long query(int l, int r) {
    while (right < r) {
      include(color[++right]);
    }
    while (right > r) {
      exclude(color[right--]);
    }
    while (left < l) {
      exclude(color[left++]);
    }
    while (left > l) {
      include(color[--left]);
    }
    return s[max_f];
  }
};

list adj[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int color[MAX_NODES + 1];
long long answer[MAX_NODES + 1];
accountant acc;
int n, block_size;

void add_neighbor(int u, int v) {
  static int ptr = 1;
  adj[ptr] = { v, nd[u].ptr };
  nd[u].ptr = ptr++;
}

void read_input_data() {
  scanf("%d", &n);

  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    scanf("%d", &nd[u].color);
    nd[u].orig_pos = u;
  }

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_neighbor(u, v);
```

```
    add_neighbor(v, u);
  }
}

void dfs(int u) {
  static int time = 0;

  nd[u].start = ++time;
  color[time] = nd[u].color;

  for (int ptr = nd[u].ptr; ptr; ptr = adj[ptr].next) {
    int v = adj[ptr].val;
    if (!nd[v].start) {
      dfs(v);
    }
  }

  nd[u].finish = time;
}

void sort_in_mo_order() {
  std::sort(nd + 1, nd + n + 1, [](node& u, node& v) {
    // TODO fewer divisions
    int bu = u.start / block_size;
    int bv = v.start / block_size;
    if (bu != bv) {
      return bu < bv;
    } else if (bu % 2) {
      return u.finish < v.finish;
    } else {
      return u.finish > v.finish;
    }
  });
}

void process_queries() {
  block_size = sqrt(n);
  sort_in_mo_order();
  acc.init(color);
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    answer[nd[u].orig_pos] = acc.query(nd[u].start, nd[u].finish);
  }
}

void write_output_data() {
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    printf("%lld ", answer[u]);
  }
  printf("\n");
}
```

```
int main() {
  read_input_data();
  dfs(1);

  // acum fiecare nod este și o interogare [start, finish]
  process_queries();
  write_output_data();

  return 0;
}
```

H.4 Problema Tokens on a Tree (CodeChef)

înapoi

Sursă cu tehnica *small-to-large* și liste proprii (versiune online).

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 1'000'000;

struct cell {
  int f, prev, next;
};

cell list[MAX_NODES + 1];
int list_ptr;
long long total_moves;

void swap(int& x, int& y) {
  int tmp = x;
  x = y;
  y = tmp;
}

struct node {
  int parent, num_children;
  int head, tail, length;
  bool has_coin;

  void reset(bool has_coin) {
    this->has_coin = has_coin;
    num_children = head = tail = length = 0;
  }

  // Procesează un nod după ce toți fiii săi i-au transmis datele lor.
  void process(node& par) {
```

```
  prepend_self();
  add_or_move_coin();
  trim();
  spill_into(par);
}

void prepend_self() {
  list[list_ptr].f = 0;
  list[list_ptr].prev = 0;
  list[list_ptr].next = head;
  if (head) {
    list[head].prev = list_ptr;
  } else {
    tail = list_ptr;
  }
  head = list_ptr++;
  length++;
}

void add_or_move_coin() {
  if (has_coin) {
    list[head].f = 1;
  } else if (list[tail].f) {
    list[head].f = 1;
    list[tail].f--;
    total_moves += length - 1;
  }
}

void trim() {
  while ((tail != head) && !list[tail].f) {
    tail = list[tail].prev;
    list[tail].next = 0;
    length--;
  }
}

void spill_into(node& other) {
  if (length > other.length) {
    swap_lists(other);
  }

  for (int p = head, q = other.head;
       p;
       p = list[p].next, q = list[q].next)  {
    list[q].f += list[p].f;
  }
}

void swap_lists(node& other) {
```

```
    swap(head, other.head);
    swap(tail, other.tail);
    swap(length, other.length);
  }
};

node nd[MAX_NODES + 1];
int n;

void read_input_data() {
  list_ptr = 1;

  scanf("%d ", &n);

  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    int c = getchar();
    nd[u].reset(c == '1');
  }

  for (int u = 2; u <= n; u++) {
    scanf("%d", &nd[u].parent);
    nd[nd[u].parent].num_children++;
  }
}

void traverse() {
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    int p = u;
    while (p && !nd[p].num_children) {
      nd[p].process(nd[nd[p].parent]);
      p = nd[p].parent;
      nd[p].num_children--;
    }
  }
}

void run_test() {
  read_input_data();
  total_moves = 0;
  traverse();
  printf("%lld\n", total_moves);
}

int main() {
  int num_tests;
  scanf("%d", &num_tests);
  while (num_tests--) {
    run_test();
  }
```

```
  return 0;
}
```

Sursă cu tehnica *small-to-large* și liste STL (versiune online).

```
#include <list>
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 1'000'000;

long long total_moves;

void swap(int& x, int& y) {
  int tmp = x;
  x = y;
  y = tmp;
}

struct node {
  int parent, num_children;
  std::list<int> f; // numărul de monede la adîncimile 0, 1, ...
  bool has_coin;

  void reset(bool has_coin) {
    this->has_coin = has_coin;
    f.clear();
  }

  // Procesează un nod după ce toți fiii săi i-au transmis datele lor.
  void process(node& par) {
    prepend_self();
    trim();
    spill_into(par);
  }

  void prepend_self() {
    if (has_coin) {
      f.push_front(1);
    } else if (!f.empty() && f.back()) {
      f.push_front(1);
      f.back()--;
      total_moves += f.size() - 1;
    }
    // altfel nu există monete în subarbore și nu adăugăm un element 0
  }

  void trim() {
    while (!f.empty() && !f.back()) {
      f.pop_back();
```

```
    }
  }

  void spill_into(node& other) {
    if (f.size() > other.f.size()) {
      f.swap(other.f);
    }

    for (auto it = f.begin(), other_it = other.f.begin();
         it != f.end();
         it++, other_it++) {
      *other_it += *it;
    }

    f.clear();
  }
};

node nd[MAX_NODES + 1];
int n;

void read_input_data() {
  scanf("%d ", &n);

  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    int c = getchar();
    nd[u].reset(c == '1');
  }

  for (int u = 2; u <= n; u++) {
    scanf("%d", &nd[u].parent);
    nd[nd[u].parent].num_children++;
  }
}

void traverse() {
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    int p = u;
    while (p && !nd[p].num_children) {
      nd[p].process(nd[nd[p].parent]);
      p = nd[p].parent;
      nd[p].num_children--;
    }
  }
}

void run_test() {
  read_input_data();
  total_moves = 0;
  traverse();
```

```
  printf("%lld\n", total_moves);
}

int main() {
  int num_tests;
  scanf("%d", &num_tests);
  while (num_tests--) {
    run_test();
  }

  return 0;
}
```

Sursă cu liniarizare și RMQ (versiune online).

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 1'000'000;
const int MAX_SEGTREE_NODES = 1 << 21;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  bool has_coin;
};

int max(int x, int y) {
  return (x > y) ? x : y;
}

int next_power_of_2(int n) {
  return 1 << (32 - __builtin_clz(n - 1));
}

struct segment_tree {
  int v[MAX_SEGTREE_NODES];
  int n;

  void init(int n) {
    this->n = next_power_of_2(n);
    for (int i = 1; i < 2 * this->n; i++) {
      v[i] = 0;
    }
  }

  void set(int pos, int val) {
```

```
    pos += n;
    v[pos] = val;
    for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
      v[pos] = max(v[2 * pos], v[2 * pos + 1]);
    }
  }

  void optimize(int pos, int& max, int& best_pos) {
    if (v[pos] > max) {
      max = v[pos];
      best_pos = pos;
    }
  }

  void descend_and_erase(int pos) {
    while (pos < n) {
      pos = (v[pos] == v[2 * pos])
        ? (2 * pos)
        : (2 * pos + 1);
    }
    set(pos - n, 0);
  }

  // Returnează maximul din [l, r] și îl înlocuiește cu 0.
  int erase_rmq(int l, int r) {
    int result = -1, pos = 0;

    l += n;
    r += n;

    while (l <= r)  {
      if (l & 1) {
        optimize(l++, result, pos);
      }
      l >>= 1;

      if (!(r & 1)) {
        optimize(r--, result, pos);
      }
      r >>= 1;
    }

    // Coboară din pos într-o frunză care are aceeași valoare și șterge
    // valoarea.
    descend_and_erase(pos);

    return result;
  }
};
```

```
cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
segment_tree segtree;
int n, list_ptr, dfs_time;

void add_child(int u, int v) {
  list[list_ptr] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = list_ptr++;
}

void read_input_data() {
  scanf("%d ", &n);

  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    int c = getchar();
    nd[u].has_coin = (c == '1');
    nd[u].adj = 0; // null
  }

  list_ptr = 1;
  for (int u = 2; u <= n; u++) {
    int p;
    scanf("%d", &p);
    add_child(p, u);
  }
}

long long dfs(int u, int depth) {

  long long result = 0;
  int start = dfs_time++;

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    result += dfs(list[ptr].v, depth + 1);
  }

  if (nd[u].has_coin) {
    segtree.set(start, depth);
  } else {
    int lowest_coin = segtree.erase_rmq(start, dfs_time - 1);
    if (lowest_coin) {
      segtree.set(start, depth);
      result += lowest_coin - depth;
    }
  }

  return result;
}

void run_test() {
```

```
  read_input_data();
  segtree.init(n);
  dfs_time = 0;
  long long moves = dfs(1, 1);
  printf("%lld\n", moves);
}

int main() {
  int num_tests;
  scanf("%d", &num_tests);
  while (num_tests--) {
    run_test();
  }

  return 0;
}
```

H.5 Problema Blood Cousins Return (Codeforces)

‹ înapoi

Sursă cu vectori de mulțimi (versiune online).

```
// Complexitate: O(n log n).
//
// Fiecare nod calculează un set de nume distincte la fiecare adîncime în
// subarborele său.
#include <iostream>
#include <unordered_map>
#include <set>
#include <string>
#include <vector>

const int MAX_NODES = 100'000;
const int MAX_QUERIES = 100'000;

struct query {
  int orig_index;
  int depth;
};

struct node {
  std::vector<int> adj;
  std::vector<query> queries;
  int parent;
  int name;
};
```

```
struct name_map {
  std::unordered_map<std::string, int> map;

  int insert_and_get_number(std::string s) {
    auto it = map.find(s);
    if (it == map.end()) {
      int result = map.size();
      map[s] = result;
      return result;
    } else {
      return it->second;
    }
  }
};

// Urmărește elementele distincte la fiecare adîncime. Adîncimea 0 (care
// conține doar nodul însuși) este ultimul element din vector.
struct dist {
  std::vector<std::set<int>> d;

  void absorb(dist other) {
    if (other.d.size() > d.size()) {
      d.swap(other.d);
    }
    int offset = d.size() - other.d.size();
    for (unsigned i = 0; i < other.d.size(); i++) {
      std::set<int>& us = d[i + offset];
      std::set<int>& them = other.d[i];
      if (them.size() > us.size()) {
        us.swap(them);
      }
      us.merge(them);
      them.clear();
    }
  }

  void prepend(int name) {
    d.push_back({name});
  }

  int count_distinct(unsigned depth) {
    if (depth < d.size()) {
      return d[d.size() - 1 - depth].size();
    } else {
      return 0;
    }
  }
};

node nd[MAX_NODES + 1]; // Vom folosi nodul 0 ca pe un strămoș comun fals.
```

```
int sol[MAX_QUERIES];
int n, q;

void read_tree() {
  name_map map;

  std::cin >> n;
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    std::string name;
    std::cin >> name >> nd[u].parent;
    nd[nd[u].parent].adj.push_back(u);
    nd[u].name = map.insert_and_get_number(name);
  }
}

void read_queries() {
  std::cin >> q;
  for (int i = 0; i < q; i++) {
    int u, depth;
    std::cin >> u >> depth;
    nd[u].queries.push_back({i, depth});
  }
}

dist dfs(int u) {
  dist result;
  for (int v: nd[u].adj) {
    result.absorb(dfs(v));
  }
  result.prepend(nd[u].name);

  for (query q: nd[u].queries) {
    sol[q.orig_index] = result.count_distinct(q.depth);
  }
  return result;
}

void write_answers() {
  for (int i = 0; i < q; i++) {
    std::cout << sol[i] << '\n';
  }
}

int main() {
  read_tree();
  read_queries();
  dfs(0);
  write_answers();

  return 0;
```

```
}
```

Sursă cu liniarizare (versiune online).

```
// 1. Mapează numele la numere ca de obicei.
// 2. Rulează un DFS pentru a calcula adîncimile și timpii de intrare/ieșire.
// 3. Rescrie fiecare interogare ca <u,d> ca „interoghează nodurile de nivel
//    depth[u] + d descoperite de DFS între timpii [t_i[u], t_o[u]]”.
// 4. Ordonează interogările după adîncime, apoi după t_o.
// 5. Calculează ordinea BFS. Fiecare interogare corespunde unui interval
//    contiguu în această ordonare.
// 6. Răspunde la intrerogări folosind un AIB ca în problema D-query.
#include <algorithm>
#include <stdio.h>
#include <unordered_map>
#include <string>
#include <vector>

const int MAX_NODES = 100'000;
const int MAX_QUERIES = 100'000;
const int MAX_NAME_LENGTH = 20;

struct node {
  std::vector<int> children;
  int name;
  int tin, tout;
  int depth;
};

struct name_map {
  std::unordered_map<std::string, int> map;

  int insert_and_get_number(char* s) {
    std::string str(s);
    auto it = map.find(str);
    if (it == map.end()) {
      int result = map.size();
      map[str] = result;
      return result;
    } else {
      return it->second;
    }
  }
};

struct query {
  int orig_index;
  int depth;
  int tin, tout;
```

```
};

struct fenwick_tree {
  int v[MAX_NODES + 1];
  int last[MAX_NODES + 1];
  int n;

  void init(int n) {
    this->n = n;
  }

  void add(int pos, int delta) {
    do {
      v[pos] += delta;
      pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
  }

  void set(int pos, int name) {
    if (last[name]) {
      add(last[name], -1);
    }
    add(pos, +1);
    last[name] = pos;
  }

  int prefix_sum(int pos) {
    int sum = 0;
    while (pos) {
      sum += v[pos];
      pos &= pos - 1;
    }
    return sum;
  }

  int range_sum(int l, int r) {
    return prefix_sum(r) - prefix_sum(l - 1);
  }
};

node nd[MAX_NODES + 1];
int bfs[MAX_NODES + 1];
query q[MAX_QUERIES];
int sol[MAX_QUERIES];
fenwick_tree fen;
int n, num_queries;

void read_tree() {
  name_map map;
  char name[MAX_NAME_LENGTH + 1];
```

```
  int parent;

  scanf("%d", &n);
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    scanf("%s %d", name, &parent);
    nd[u].name = map.insert_and_get_number(name);
    nd[parent].children.push_back(u);
  }
}

void dfs(int u) {
  static int time = 0;
  nd[u].tin = time++;

  for (int v: nd[u].children) {
    nd[v].depth = 1 + nd[u].depth;
    dfs(v);
  }

  nd[u].tout = time - 1;
}

void read_queries() {
  scanf("%d", &num_queries);

  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    int u, depth;
    scanf("%d %d", &u, &depth);
    q[i] = { i, nd[u].depth + depth, nd[u].tin, nd[u].tout };
  }
}

void sort_queries() {
  std::sort(q, q + num_queries, [](query& a, query& b) {
    return (a.depth < b.depth) ||
      ((a.depth == b.depth) && (a.tout < b.tout));
  });
}

void breadth_first_search() {
  int head = 0, tail = 0;
  bfs[tail++] = 0; // pune rădăcina în coadă

  while (head != tail) {
    int u = bfs[head++];
    for (int v: nd[u].children) {
      bfs[tail++] = v;
    }
  }
}
```

```
bool query_ends_at(query& q, int k) {
  if (k == n) {
    return true;
  }

  node& u = nd[bfs[k + 1]]; // următorul în BFS
  return (u.depth > q.depth) || ((u.depth == q.depth) && (u.tout > q.tout));
}

// Unde începe această interogare? Caută cel mai din stînga nod din BFS la
// adîncimea q.depth și cu timpul DFS cel puțin q.tin.
int bin_search(query& q, int end) {
  int l = 0, r = end; // (r, l]
  while (r - l > 1) {
    int mid = (r + l) / 2;
    int v = bfs[mid];
    if ((nd[v].depth < q.depth) ||
        (nd[v].tin < q.tin)) {
      l = mid;
    } else {
      r = mid;
    }
  }

  int v = bfs[r];
  return (nd[v].depth == q.depth) && (nd[v].tin >= q.tin)
    ? r
    : (end + 1);
}

void answer_queries_ending_at(int k) {
  static int i = 0;
  while ((i < num_queries) && query_ends_at(q[i], k)) {
    int start = bin_search(q[i], k);
    sol[q[i].orig_index] = fen.range_sum(start, k);
    i++;
  }
}

void answer_queries() {
  fen.init(n);

  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    int v = bfs[i];
    fen.set(i, nd[v].name);
    answer_queries_ending_at(i);
  }
}
```

```
void write_answers() {
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    printf("%d\n", sol[i]);
  }
}

int main() {
  read_tree();
  dfs(0);
  breadth_first_search();
  read_queries();
  sort_queries();
  breadth_first_search();
  answer_queries();
  write_answers();

  return 0;
}
```

H.6 Problema Tree and Queries (Codeforces)

‹ înapoi

Sursă cu PBDS (versiune online).

```
// Small-to-large relativ brut. Fiecare nod stochează informații despre
// subarbore:
//
// 1. Un map de culoare => frecvență.
// 2. Un multiset doar cu frecvențele.
//
// Folosim STL cu larghețe pentru un cod cît mai lent.
#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
#include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
#include <iostream>
#include <map>
#include <vector>

// Multiseturile PBDS sînt obscene, dar par să meargă. Ștergerile necesită cod
// extra. Vezi https://stackoverflow.com/q/59731946/6022817
typedef __gnu_pbds::tree<
  int,
  __gnu_pbds::null_type,
  std::less_equal<int>,
  __gnu_pbds::rb_tree_tag,
  __gnu_pbds::tree_order_statistics_node_update
  > multiset;
```

```
const int MAX_NODES = 100'000;
const int MAX_QUERIES = 100'000;

struct query {
  int orig_index;
  int min_freq;
};

struct node {
  int color;
  std::vector<int> adj;
  std::vector<query> q;
};

struct freq_info {
  std::map<int, int> f;
  multiset sorted_f;

  freq_info(int color) {
    f.insert({color, 1});
    sorted_f.insert(1);
  }

  void update_frequency(int color, int cnt) {
    int new_freq;
    auto it = f.find(color);
    if (it != f.end()) {
      int old_freq = it->second;
      int rank = sorted_f.order_of_key(old_freq);
      multiset::iterator to_erase = sorted_f.find_by_order(rank);
      sorted_f.erase(to_erase);
      it->second += cnt;
      new_freq = it->second;
    } else {
      f.insert({color, cnt});
      new_freq = cnt;
    }
    sorted_f.insert(new_freq);
  }

  void absorb(freq_info& other) {
    if (other.f.size() > f.size()) {
      f.swap(other.f);
      sorted_f.swap(other.sorted_f);
    }
    for (auto [color, cnt]: other.f) {
      update_frequency(color, cnt);
    }
    other.f.clear();
    other.sorted_f.clear();
```

```
  }

  int count_freq_gte(int min_freq) {
    return f.size() - sorted_f.order_of_key(min_freq);
  }
};

node nd[MAX_NODES + 1];
int sol[MAX_QUERIES];
int n, q;

void read_data() {
  std::cin >> n >> q;
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    std::cin >> nd[u].color;
  }
  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int u, v;
    std::cin >> u >> v;
    nd[u].adj.push_back(v);
    nd[v].adj.push_back(u);
  }
  for (int i = 0; i < q; i++) {
    int u, min_freq;
    std::cin >> u >> min_freq;
    nd[u].q.push_back({i, min_freq});
  }
}

freq_info dfs(int u) {
  freq_info result(nd[u].color);
  nd[u].color = 0; // previne revizitarea fără a necesita un argument în plus

  for (int v: nd[u].adj) {
    if (nd[v].color) {
      freq_info fi = dfs(v);
      result.absorb(fi);
    }
  }

  for (query q: nd[u].q) {
    sol[q.orig_index] = result.count_freq_gte(q.min_freq);
  }

  return result;
}

void write_solution() {
  for (int i = 0; i < q; i++) {
    std::cout << sol[i] << '\n';
```

```
  }
}

int main() {
  read_data();
  dfs(1);
  write_solution();

  return 0;
}
```

Sursă cu DFS exclusiv (versiune online).

```
// Small-to-large cu DFS exclusiv. Rescris după
// https://codeforces.com/contest/375/submission/5508178
//
// Folosește o singură structură de date globală conținînd:
//
// 1. Frecvența fiecărei culori.
// 2. Frecvențele frecvențelor („cîte culori au frecvența f?”).
// 3. Un AIB peste (2) care permite sume pe sufix.
//
// Funcționarea DFS-ului îi garantează fiecărui nod un moment cînd structura
// conține doar informații despre subarborele acelui nod.
#include <stdio.h>
#include <vector>

const int MAX_NODES = 100'000;
const int MAX_COLORS = 100'000;
const int MAX_QUERIES = 100'000;

struct fenwick_tree {
  int v[MAX_NODES + 1];
  int total;
  int n;

  void init(int n) {
    this->n = n;
  }

  void add(int pos, int val) {
    if (pos) {
      total += val;
      do {
        v[pos] += val;
        pos += pos & -pos;
      } while (pos <= n);
    }
  }
```

```
  int sum(int pos) {
    int s = 0;
    while (pos) {
      s += v[pos];
      pos &= pos - 1;
    }
    return s;
  }

  int suffix_sum(int pos) {
    return (pos > n)
      ? 0
      : (total - sum(pos - 1));
  }
};

struct query {
  int orig_index;
  int min_freq;
};

struct node {
  int color;
  int heavy;
  std::vector<int> adj;
  std::vector<query> q;
};

node nd[MAX_NODES + 1];
int freq[MAX_COLORS + 1];
fenwick_tree fen;
int sol[MAX_QUERIES];
int n, q;

void read_data() {
  scanf("%d %d", &n, &q);
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    scanf("%d", &nd[u].color);
  }
  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    nd[u].adj.push_back(v);
    nd[v].adj.push_back(u);
  }
  for (int i = 0; i < q; i++) {
    int u, min_freq;
    scanf("%d %d", &u, &min_freq);
    nd[u].q.push_back({i, min_freq});
```

```
  }
}

// Calculează fiul heavy al fiecărui nod. Șterge părintele nodului din lista
// de adiacență. Returnează mărimea subarborelui.
int size_dfs(int u, int parent) {
  int size = 1, max_c_size = 0;

  unsigned i = 0;
  while (i < nd[u].adj.size()) {
    int v = nd[u].adj[i];
    if (v == parent) {
      nd[u].adj[i] = nd[u].adj.back();
      nd[u].adj.pop_back();
    } else {
      int c = size_dfs(v, u);
      size += c;
      if (!nd[u].heavy || (c > max_c_size)) {
        nd[u].heavy = v;
        max_c_size = c;
      }
      i++;
    }
  }

  return size;
}

void change_freq(int color, int delta) {
  fen.add(freq[color], -1);
  freq[color] += delta;
  fen.add(freq[color], +1);
}

void toggle_subtree(int u, int delta) {
  change_freq(nd[u].color, delta);
  for (int v: nd[u].adj) {
    toggle_subtree(v, delta);
  }
}

void dfs(int u) {
  for (int v: nd[u].adj) {
    if (v != nd[u].heavy) {
      dfs(v);
      toggle_subtree(v, -1);
    }
  }

  if (nd[u].heavy) {
```

```
    dfs(nd[u].heavy);
  }

  for (int v: nd[u].adj) {
    if (v != nd[u].heavy) {
      toggle_subtree(v, +1);
    }
  }

  change_freq(nd[u].color, +1);

  for (query q: nd[u].q) {
    sol[q.orig_index] = fen.suffix_sum(q.min_freq);
  }
}

void write_solution() {
  for (int i = 0; i < q; i++) {
    printf("%d\n", sol[i]);
  }
}

int main() {
  read_data();
  size_dfs(1, 0);
  fen.init(n);
  dfs(1);
  write_solution();

  return 0;
}
```

Anexa I

Cel mai apropiat strămoș comun

I.1 LCA cu descompunere în radical

înapoi

```
#include <math.h>
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 500'000;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int depth;
  // Fiecare nod stochează doi pointeri la strămoși: unul la părinte, altul cu
  // sqrt(n) niveluri mai sus.
  int parent;
  int jump;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int st[MAX_NODES + 1];    // stivă DFS pentru construcția pointerilor
int n, jump_distance;

void add_edge(int u, int v) {
  static int pos = 1;
  list[pos] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = pos++;
}

void read_input_data() {
```

```
  scanf("%d", &n);
  jump_distance = sqrt(n);

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }
}

// Traversează arborele și calculează părinții, adîncimile și jump pointers.
void dfs(int u) {
  st[nd[u].depth] = u;  // Stiva reține nodurile gri.
  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (!nd[v].depth) {
      nd[v].depth = 1 + nd[u].depth;
      nd[v].parent = u;
      nd[v].jump = (nd[v].depth > jump_distance)
        ? st[nd[v].depth - jump_distance]
        : 0;
      dfs(v);
    }
  }
}

int sqrt_lca(int u, int v) {
  if (nd[v].depth > nd[u].depth) {
    int tmp = u; u = v; v = tmp;
  }

  // Întîi adu-le la același nivel.
  while (nd[u].depth - jump_distance >= nd[v].depth) {
    u = nd[u].jump;
  }
  while (nd[u].depth > nd[v].depth) {
    u = nd[u].parent;
  }

  // Urcă blocuri întregi.
  while ((nd[u].depth >= jump_distance) && (nd[u].jump != nd[v].jump)) {
    u = nd[u].jump;
    v = nd[v].jump;
  }

  // Urcă nivel cu nivel.
  while (u != v) {
    u = nd[u].parent;
    v = nd[v].parent;
```

```
  }
  return u;
}

void answer_queries() {
  int num_queries, u, v;
  scanf("%d", &num_queries);
  while (num_queries--) {
    scanf("%d %d", &u, &v);
    printf("%d\n", sqrt_lca(u, v));
  }
}

int main() {
  read_input_data();
  nd[1].depth = 1;
  dfs(1);
  answer_queries();

  return 0;
}
```

I.2 LCA cu binary lifting ($\log n$ pointeri per nod)

înapoi

Implementare cu urcare în paralel.

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 500'000;
const int MAX_LOG = 19;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int depth;
  int jump[MAX_LOG];
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int n, log_2;

void add_edge(int u, int v) {
```

```
  static int pos = 1;
  list[pos] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = pos++;
}

void read_input_data() {
  scanf("%d", &n);
  log_2 = 31 - __builtin_clz(n);

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }
}

// Traversează arborele și calculează adîncimile și jump pointers.
void dfs(int u, int parent) {
  nd[u].depth = 1 + nd[parent].depth;
  nd[u].jump[0] = parent;
  for (int i = 0; i < log_2; i++) {
    nd[u].jump[i + 1] = nd[nd[u].jump[i]].jump[i];
  }

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != parent) {
      dfs(v, u);
    }
  }
}

int lca(int u, int v) {
  if (nd[v].depth > nd[u].depth) {
    int tmp = u; u = v; v = tmp;
  }

  // Adu u și v la aceeași adîncime. Compară d[u] și d[v] bit cu bit.
  int pow = 0;
  while (nd[u].depth > nd[v].depth) {
    if ((nd[u].depth & (1 << pow)) != (nd[v].depth & (1 << pow))) {
      u = nd[u].jump[pow];
    }
    pow++;
  }

  if (u == v) {
    return u;
  } else {
```

```
    for (int i = log_2; i >= 0; i--) {
      if (nd[u].jump[i] != nd[v].jump[i]) {
        u = nd[u].jump[i];
        v = nd[v].jump[i];
      }
    }

    return nd[u].jump[0];
  }
}

void answer_queries() {
  int num_queries, u, v;
  scanf("%d", &num_queries);
  while (num_queries--) {
    scanf("%d %d", &u, &v);
    printf("%d\n", lca(u, v));
  }
}

int main() {
  read_input_data();
  dfs(1, 0);
  answer_queries();

  return 0;
}
```

Implementare cu test de strămoș.

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 500'000;
const int MAX_LOG = 19;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int time_in, time_out;
  int jump[MAX_LOG];
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int n, log_2;
```

```
void add_edge(int u, int v) {
  static int pos = 1;
  list[pos] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = pos++;
}

void read_input_data() {
  scanf("%d", &n);
  log_2 = 31 - __builtin_clz(n);

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }
}

// Traversează arborele și calculează timpii de intrare în noduri și jump
// pointers.
void dfs(int u, int parent) {
  static int time = 0;
  nd[u].time_in = time++;

  nd[u].jump[0] = parent;
  for (int i = 0; i < log_2; i++) {
    nd[u].jump[i + 1] = nd[nd[u].jump[i]].jump[i];
  }

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != parent) {
      dfs(v, u);
    }
  }

  nd[u].time_out = time++;
}

bool is_ancestor(int u, int v) {
  return
    (nd[u].time_in <= nd[v].time_in) &&
    (nd[u].time_out >= nd[v].time_out);
}

int lca(int u, int v) {
  if (is_ancestor(u, v)) {
    return u;
  }
```

```
  // Găsește cel mai de sus strămoș al lui u care *nu* este strămoș al lui v.
  for (int i = log_2; i >= 0; i--) {
    if (nd[u].jump[i] && !is_ancestor(nd[u].jump[i], v)) {
      u = nd[u].jump[i];
    }
  }

  // Acum părintele lui u este strămoș al lui v.
  return nd[u].jump[0];
}

void answer_queries() {
  int num_queries, u, v;
  scanf("%d", &num_queries);
  while (num_queries--) {
    scanf("%d %d", &u, &v);
    printf("%d\n", lca(u, v));
  }
}

int main() {
  read_input_data();
  dfs(1, 0);
  answer_queries();

  return 0;
}
```

I.3 LCA cu binary lifting (2 pointeri per nod)

‹ înapoi

Implementare cu urcare în paralel.

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 500'000;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int depth;
  int parent;
  int jump;
};
```

```
cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int n;

void add_edge(int u, int v) {
  static int pos = 1;
  list[pos] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = pos++;
}

void read_input_data() {
  scanf("%d", &n);

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }
}

// Traversează arborele și calculează părinții, adîncimile și jump pointers.
void dfs(int u) {

  int u2 = nd[u].jump, u3 = nd[u2].jump;
  bool equal = (nd[u2].depth - nd[u].depth == nd[u3].depth - nd[u2].depth);

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (!nd[v].depth) {
      nd[v].depth = 1 + nd[u].depth;
      nd[v].parent = u;
      nd[v].jump = equal ? u3 : u;
      dfs(v);
    }
  }
}

int two_ptr_lca(int u, int v) {
  if (nd[v].depth > nd[u].depth) {
    int tmp = u; u = v; v = tmp;
  }

  // Întîi adu-le la același nivel.
  while (nd[u].depth > nd[v].depth) {
    u = (nd[nd[u].jump].depth >= nd[v].depth) ? nd[u].jump : nd[u].parent;
  }

  while (u != v) {
```

```
    if (nd[u].jump != nd[v].jump) {
      u = nd[u].jump;
      v = nd[v].jump;
    } else {
      u = nd[u].parent;
      v = nd[v].parent;
    }
  }
  return u;
}

void answer_queries() {
  int num_queries, u, v;
  scanf("%d", &num_queries);
  while (num_queries--) {
    scanf("%d %d", &u, &v);
    printf("%d\n", two_ptr_lca(u, v));
  }
}

int main() {
  read_input_data();
  nd[1].depth = 1;
  dfs(1);
  answer_queries();

  return 0;
}
```

Implementare cu test de strămoș.

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 500'000;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int depth;
  int time_in, time_out;
  int parent;
  int jump;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
```

```
int n;

void add_edge(int u, int v) {
  static int pos = 1;
  list[pos] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = pos++;
}

void read_input_data() {
  scanf("%d", &n);

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }
}

// Traversează arborele și calculează părinții, adîncimile și jump pointers.
void dfs(int u) {
  static int time = 1;
  nd[u].time_in = time++;

  int u2 = nd[u].jump, u3 = nd[u2].jump;
  bool equal = (nd[u2].depth - nd[u].depth == nd[u3].depth - nd[u2].depth);

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (!nd[v].depth) {
      nd[v].depth = 1 + nd[u].depth;
      nd[v].parent = u;
      nd[v].jump = equal ? u3 : u;
      dfs(v);
    }
  }

  nd[u].time_out = time++;
}

bool is_ancestor(int u, int v) {
  return
    (nd[u].time_in <= nd[v].time_in) &&
    (nd[u].time_out >= nd[v].time_out);
}

int two_ptr_lca(int u, int v) {
  // Găsește cel mai jos strămoș al lui u care este și strămoș al lui v.
  while (!is_ancestor(u, v)) {
    if (nd[u].jump && !is_ancestor(nd[u].jump, v)) {
```

```
      u = nd[u].jump;
    } else {
      u = nd[u].parent;
    }
  }

  return u;
}

void answer_queries() {
  int num_queries, u, v;
  scanf("%d", &num_queries);
  while (num_queries--) {
    scanf("%d %d", &u, &v);
    printf("%d\n", two_ptr_lca(u, v));
  }
}

int main() {
  read_input_data();
  nd[1].depth = 1;
  dfs(1);
  answer_queries();

  return 0;
}
```

Implementare cu formula LSB și urcare în paralel.

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 500'000;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int depth;
  // Fiecare nod stochează doi pointeri la strămoși: unul la părinte, altul cu
  // LSB(adîncime) niveluri mai sus, similar unui arbore Fenwick.
  int parent;
  int jump;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int st[MAX_NODES + 1];    // stivă DFS pentru construcția pointerilor
```

```
int n;

void add_edge(int u, int v) {
  static int pos = 1;
  list[pos] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = pos++;
}

void read_input_data() {
  scanf("%d", &n);

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }
}

// Traversează arborele și calculează părinții, adîncimile și jump pointers.
void dfs(int u) {
  st[nd[u].depth] = u;  // Stiva reține nodurile gri.

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (!nd[v].depth) {
      nd[v].depth = 1 + nd[u].depth;
      nd[v].parent = u;
      nd[v].jump = st[nd[v].depth & (nd[v].depth - 1)];
      dfs(v);
    }
  }
}

int two_ptr_lca(int u, int v) {
  if (nd[v].depth > nd[u].depth) {
    int tmp = u; u = v; v = tmp;
  }

  // Întîi adu-le la același nivel.
  while (nd[u].depth > nd[v].depth) {
    u = (nd[nd[u].jump].depth >= nd[v].depth) ? nd[u].jump : nd[u].parent;
  }

  while (u != v) {
    if (nd[u].jump != nd[v].jump) {
      u = nd[u].jump;
      v = nd[v].jump;
    } else {
      u = nd[u].parent;
```

```
      v = nd[v].parent;
    }
  }
  return u;
}

void answer_queries() {
  int num_queries, u, v;
  scanf("%d", &num_queries);
  while (num_queries--) {
    scanf("%d %d", &u, &v);
    printf("%d\n", two_ptr_lca(u, v));
  }
}

int main() {
  read_input_data();
  nd[1].depth = 1;
  dfs(1);
  answer_queries();

  return 0;
}
```

I.4 LCA cu algoritmul lui Tarjan (offline)

înapoi

Implementarea folosește STL, ca să ne putem concentra pe algoritm. Vă reamintesc însă că arborii scriși cu STL sînt de două ori mai lenți și consumă dublul memoriei.

```
#include <stdio.h>
#include <vector>

const int MAX_NODES = 500'000;
const int MAX_QUERIES = 500'000;

struct disjoint_set_forest {
  int p[MAX_NODES + 1];

  void init(int n) {
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
      p[u] = u;
    }
  }

  int find(int u) {
    return (p[u] == u)
```

```
      ? u
      : (p[u] = find(p[u]));
  }

  // Întotdeauna îl leagă pe v de u. Fără *union by rank*.
  void unite(int u, int v) {
    p[find(v)] = find(u);
  }
};

struct node {
  std::vector<int> adj, queries;
  bool visited;
};

struct query {
  int u, v, lca;
};

node nd[MAX_NODES + 1];
query q[MAX_QUERIES];
disjoint_set_forest  dsf;
int n, num_queries;

void read_input_data() {
  scanf("%d", &n);
  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    nd[u].adj.push_back(v);
    nd[v].adj.push_back(u);
  }

  scanf("%d", &num_queries);
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    scanf("%d %d", &q[i].u, &q[i].v);
    nd[q[i].u].queries.push_back(i);
    nd[q[i].v].queries.push_back(i);
  }
}

void offline_lca(int u) {
  nd[u].visited = true;

  for (int v: nd[u].adj) {
    if (!nd[v].visited) {
      offline_lca(v);
      dsf.unite(u, v);
    }
  }
```

```
  for (int i: nd[u].queries) {
    int v = (q[i].u == u) ? q[i].v : q[i].u;
    if (nd[v].visited) {
      q[i].lca = dsf.find(v);
    }
  }
}

void answer_queries() {
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    printf("%d\n", q[i].lca);
  }
}

int main() {
  read_input_data();
  dsf.init(n);
  offline_lca(1);
  answer_queries();

  return 0;
}
```

I.5 Problema Gold Transfer (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 300'001;
const int OP_ADD_NODE = 1;
const int OP_BUY_GOLD = 2;

struct node {
  int depth;
  int supply;
  int cost;
  int parent;
  int jump;
};

struct purchase {
  int amount;
  long long cost;
};

node nd[MAX_NODES];
```

```
int stack[MAX_NODES];
int num_queries;

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

void create_node_zero() {
  scanf("%d %d %d", &num_queries, &nd[0].supply, &nd[0].cost);
  nd[0].depth = 1;
}

void read_node(int u) {
  scanf("%d %d %d", &nd[u].parent, &nd[u].supply, &nd[u].cost);
  int p = nd[u].parent, p2 = nd[p].jump, p3 = nd[p2].jump;
  bool equal = (nd[p2].depth - nd[p].depth == nd[p3].depth - nd[p2].depth);
  nd[u].depth = 1 + nd[p].depth;
  nd[u].jump = equal ? p3 : p;
}

void buy_from_node(int u, int& demand, purchase& p) {
  int bought = min(demand, nd[u].supply);
  demand -= bought;
  nd[u].supply -= bought;
  p.amount += bought;
  p.cost += (long long)bought * nd[u].cost;
}

purchase buy_from_path(int path_end, int demand) {
  purchase result = { 0, 0 };
  int ptr = 1;
  stack[0] = path_end;

  // Binary lifting după caz. Păstrează rezultatele pe stivă pentru a obține
  // coborîrea în O(1) amortizat.
  while (ptr && demand) {
    int u = stack[ptr - 1];
    if (u && nd[nd[u].jump].supply) {
      stack[ptr++] = nd[u].jump;
    } else if (u && nd[nd[u].parent].supply) {
      stack[ptr++] = nd[u].parent;
    } else {
      buy_from_node(u, demand, result);
      if (!nd[u].supply) {
        ptr--;
      }
    }
  }

  return result;
```

```
}

void buy_gold() {
  int u, demand;
  scanf("%d %d", &u, &demand);
  purchase p = buy_from_path(u, demand);
  printf("%d %lld\n", p.amount, p.cost);
  fflush(stdout);
}

void process_queries() {
  for (int q = 1; q <= num_queries; q++) {
    int type;
    scanf("%d", &type);
    if (type == OP_ADD_NODE) {
      read_node(q);
    } else {
      buy_gold();
    }
  }
}

int main() {
  create_node_zero();
  process_queries();

  return 0;
}
```

I.6 Problema A and B and Lecture Rooms (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 100'000;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int depth;
  int time_in, time_out;
  int parent;
  int jump;
```

```
  int subtree_size() {
    return time_out - time_in + 1;
  }
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int n;

void add_edge(int u, int v) {
  static int pos = 1;
  list[pos] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = pos++;
}

void read_input_data() {
  scanf("%d", &n);

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }
}

// Traversează arborele și calculează părinții, adîncimile și *jump pointers*.
void dfs(int u) {
  static int time = 1;
  nd[u].time_in = time++;

  int u2 = nd[u].jump, u3 = nd[u2].jump;
  bool equal = (nd[u2].depth - nd[u].depth == nd[u3].depth - nd[u2].depth);
  int dest = equal ? u3 : u;

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (!nd[v].depth) {
      nd[v].depth = 1 + nd[u].depth;
      nd[v].parent = u;
      nd[v].jump = dest;
      dfs(v);
    }
  }

  nd[u].time_out = time - 1;
}

bool is_ancestor(int u, int v) {
  return
```

```
    (nd[u].time_in <= nd[v].time_in) &&
    (nd[u].time_out >= nd[v].time_out);
}

int two_ptr_lca(int u, int v) {
  // Găsește cel mai jos strămoș al lui u care este și strămoș al lui v.
  while (!is_ancestor(u, v)) {
    if (nd[u].jump && !is_ancestor(nd[u].jump, v)) {
      u = nd[u].jump;
    } else {
      u = nd[u].parent;
    }
  }

  return u;
}

int get_ancestor_at_depth(int u, int d) {
  while (nd[u].depth > d) {
    u = (nd[nd[u].jump].depth >= d) ? nd[u].jump : nd[u].parent;
  }
  return u;
}

int query(int u, int v) {
  if ((nd[u].depth + nd[v].depth) % 2) {
    return 0;
  }

  if (u == v) {
    return n;
  }

  int l = two_ptr_lca(u, v);
  if (nd[u].depth == nd[v].depth) {
    int u2 = get_ancestor_at_depth(u, nd[l].depth + 1);
    int v2 = get_ancestor_at_depth(v, nd[l].depth + 1);
    return n - nd[u2].subtree_size() - nd[v2].subtree_size();
  }

  if (nd[u].depth < nd[v].depth) {
    int tmp = u; u = v; v = tmp;
  }

  int mid_level = nd[l].depth + (nd[u].depth - nd[v].depth) / 2;
  int u2 = get_ancestor_at_depth(u, mid_level + 1);
  int mid = nd[u2].parent;
  return nd[mid].subtree_size() - nd[u2].subtree_size();
}
```

```
void answer_queries() {
  int num_queries, u, v;
  scanf("%d", &num_queries);
  while (num_queries--) {
    scanf("%d %d", &u, &v);
    printf("%d\n", query(u, v));
  }
}

int main() {
  read_input_data();
  nd[1].depth = 1;
  dfs(1);
  answer_queries();

  return 0;
}
```

I.7 Problema Company (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 100'000;
const int MAX_SEGTREE_NODES = 256 * 1024;
const int INF = 1'000'000;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int parent;
  int jump;
  int depth;
};

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

int max(int x, int y) {
  return (x > y) ? x : y;
}

struct segment_tree_node {
```

```
  int min1, min2, max1, max2;

  void set(int val) {
    min1 = max1 = val;
    min2 = INF;
    max2 = -INF;
  }

  void combine(segment_tree_node& other) {
    if (min1 < other.min1) {
      // păstrăm min1
      min2 = min(min2, other.min1);
    } else {
      min2 = min(min1, other.min2);
      min1 = other.min1;
    }
    if (max1 > other.max1) {
      // păstrăm max1
      max2 = max(max2, other.max1);
    } else {
      max2 = max(max1, other.max2);
      max1 = other.max1;
    }
  }
};

// Un arbore de intervale care stochează primul și al doilea minim și
// maxim. După construcția inițială, admite interogări pe interval.
struct segment_tree {
  segment_tree_node v[MAX_SEGTREE_NODES];
  int n;

  int next_power_of_2(int x) {
    return 1 << (32 - __builtin_clz(x - 1));
  }

  void init(int n) {
    this->n = next_power_of_2(n);
  }

  void set(int pos, int val) {
    v[n + pos].set(val);
  }

  void build() {
    for (int i = n - 1; i; i--) {
      v[i] = v[2 * i];
      v[i].combine(v[2 * i + 1]);
    }
  }
```

```
  segment_tree_node query(int l, int r) {
    segment_tree_node result = { +INF, +INF, -INF, -INF };

    l += n;
    r += n;

    while (l <= r)  {
      if (l & 1) {
        result.combine(v[l++]);
      }
      l >>= 1;

      if (!(r & 1)) {
        result.combine(v[r--]);
      }
      r >>= 1;
    }

    return result;
  }
};

cell list[MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int dfs_order[MAX_NODES];
segment_tree st;
int n, num_queries;

void add_child(int p, int c) {
  static int ptr = 1;
  list[ptr] = { c, nd[p].adj };
  nd[p].adj = ptr++;
}

void read_tree() {
  scanf("%d %d", &n, &num_queries);

  for (int u = 2; u <= n; u++) {
    scanf("%d", &nd[u].parent);
    add_child(nd[u].parent, u);
  }
}

void dfs(int u) {
  static int time = 0;
  dfs_order[time] = u;
  st.set(u, time++);

  int u2 = nd[u].jump, u3 = nd[u2].jump;
```

```
  bool equal = (nd[u2].depth - nd[u].depth == nd[u3].depth - nd[u2].depth);

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    nd[v].depth = 1 + nd[u].depth;
    nd[v].parent = u;
    nd[v].jump = equal ? u3 : u;
    dfs(v);
  }
}

int lca(int u, int v) {
  if (nd[v].depth > nd[u].depth) {
    int tmp = u; u = v; v = tmp;
  }

  // Întîi adu-le la același nivel.
  while (nd[u].depth > nd[v].depth) {
    u = (nd[nd[u].jump].depth >= nd[v].depth) ? nd[u].jump : nd[u].parent;
  }

  while (u != v) {
    if (nd[u].jump != nd[v].jump) {
      u = nd[u].jump;
      v = nd[v].jump;
    } else {
      u = nd[u].parent;
      v = nd[v].parent;
    }
  }
  return u;
}

void query(int l, int r, int& kick, int& depth) {
  segment_tree_node m = st.query(l, r);
  int u = dfs_order[m.min1];
  int v = dfs_order[m.min2];
  int w = dfs_order[m.max2];
  int x = dfs_order[m.max1];

  kick = x;
  depth = nd[lca(u, w)].depth;

  int cand = nd[lca(v, x)].depth;
  if (cand > depth) {
    kick = u;
    depth = cand;
  }
}
```

```
void process_queries() {
  while (num_queries--) {
    int l, r, kick, depth;
    scanf("%d %d", &l, &r);
    query(l, r, kick, depth);
    printf("%d %d\n", kick, depth);
  }
}

int main() {
  read_tree();
  st.init(n + 1);
  dfs(1);
  st.build();
  process_queries();

  return 0;
}
```

I.8 Problema Duff in the Army (Codeforces)

‹ înapoi • versiune online

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 100'000;
const int MAX_LENGTH = 10;
const int SENTINEL = 100'001; // populația maximă + 1

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

int rbuf[2 * MAX_LENGTH]; // pentru combinarea a două liste

// Un *roster* este o listă ordonată de ID-uri de persoane.
struct roster {
  int n;
  int v[MAX_LENGTH + 1];

  void clear() {
    n = 0;
  }

  void add(int id) {
    int k = n;
    while (k && (id < v[k - 1])) {
      v[k] = v[k - 1];
```

```
      k--;
    }
    v[k] = id;
    if (n < MAX_LENGTH) {
      n++;
    }
  }

  void copy_from(roster& other) {
    n = other.n;
    for (int i = 0; i <= n; i++) {
      v[i] = other.v[i];
    }
  }

  void merge_from(roster& other, int limit) {
    v[n] = other.v[other.n] = SENTINEL;
    n = min(n + other.n, limit);
    int i = 0, j = 0;

    for (int k = 0; k < n; k++) {
      if (v[i] < other.v[j]) {
        rbuf[k] = v[i++];
      } else {
        rbuf[k] = other.v[j++];
      }
    }

    for (int i = 0; i < n; i++) {
      v[i] = rbuf[i];
    }
  }

  void print() {
    printf("%d", n);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
      printf(" %d", v[i]);
    }
    printf("\n");
  }
};

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int depth;
  int time_in, time_out;
```

```
  int parent;
  int jump;

  // populația proprie
  roster ids;

  // populația până la destinația saltului, exclusiv
  roster jids;

  void compute_jump();
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int num_queries, num_people;

void node::compute_jump() {
  jids.copy_from(ids);

  int u = parent, u2 = nd[u].jump, u3 = nd[u2].jump;
  if (u3 && (nd[u2].depth - nd[u].depth == nd[u3].depth - nd[u2].depth)) {
    jump = u3;
    jids.merge_from(nd[u].jids, MAX_LENGTH);
    jids.merge_from(nd[u2].jids, MAX_LENGTH);
  } else {
    jump = u;
  }
}

void add_edge(int u, int v) {
  static int pos = 1;
  list[pos] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = pos++;
}

void read_input_data() {
  int n, u, v;
  scanf("%d %d %d", &n, &num_people, &num_queries);

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }

  for (int id = 1; id <= num_people; id++) {
    scanf("%d", &u);
    nd[u].ids.add(id);
  }
}
```

```
// Traversează arborele și calculează părinții, adîncimile, *jump pointers* și
// listele subîntinse de toți pointerii.
void dfs(int u) {
  static int time = 1;
  nd[u].time_in = time++;

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (!nd[v].depth) {
      nd[v].depth = 1 + nd[u].depth;
      nd[v].parent = u;
      nd[v].compute_jump();
      dfs(v);
    }
  }

  nd[u].time_out = time++;
}

bool is_ancestor(int u, int v) {
  return
    (nd[u].time_in <= nd[v].time_in) &&
    (nd[u].time_out >= nd[v].time_out);
}

int climb_until_ancestor(int u, int v, int limit, roster& dest) {
  while (!is_ancestor(u, v)) {
    if (nd[u].jump && !is_ancestor(nd[u].jump, v)) {
      dest.merge_from(nd[u].jids, limit);
      u = nd[u].jump;
    } else {
      dest.merge_from(nd[u].ids, limit);
      u = nd[u].parent;
    }
  }

  return u;
}

// Urcă cu u și v pînă la LCA și colectează listele de pe drumuri.
void two_ptr_lca(int u, int v, int limit, roster& dest) {
  dest.clear();
  u = climb_until_ancestor(u, v, limit, dest);
  v = climb_until_ancestor(v, u, limit, dest);
  dest.merge_from(nd[u].ids, limit);
}

void answer_queries() {
  int u, v, limit;
```

```
  roster r;
  while (num_queries--) {
    scanf("%d %d %d", &u, &v, &limit);
    two_ptr_lca(u, v, limit, r);
    r.print();
  }
}

int main() {
  read_input_data();
  nd[1].depth = 1;
  dfs(1);
  answer_queries();

  return 0;
}
```

Anexa J

Algoritmul lui Mo pe arbore

J.1 Problema Dating (Codeforces)

înapoi

Sursă cu LCA implementat cu doi pointeri (versiune online).

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>
#include <unordered_map>
#include <vector>

const int MAX_NODES = 100'000;
const int MAX_QUERIES = 100'000;
const int BLOCK_SIZE = 775; // de ordinul a sqrt(2n)

struct normalizer {
  std::unordered_map<int, int> map;

  int normalize(int x) {
    auto it = map.find(x);
    if (it == map.end()) {
      int result = 1 + map.size();
      map[x] = result;
      return result;
    } else {
      return it->second;
    }
  }
};

struct node {
  std::vector<int> adj; // listă de adiacență
  int tin, tout;        // timpi de intrare și ieșire din DFS
  int parent, jump;     // pointeri pentru LCA
```

```
  int depth;
  int fav;
  bool gender;
};

struct query {
  int l, r;
  int lca;
  int orig_index;
};

node nd[MAX_NODES + 1];
int euler[2 * MAX_NODES + 1];
query q[MAX_QUERIES];
unsigned answer[MAX_QUERIES];
int n, num_queries;

void read_tree() {
  scanf("%d ", &n);
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    nd[u].gender = (getchar() == '1');
    getchar();
  }

  normalizer norm;
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    int x;
    scanf("%d", &x);
    nd[u].fav = norm.normalize(x);
  }

  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    nd[u].adj.push_back(v);
    nd[v].adj.push_back(u);
  }
}

void dfs(int u) {
  static int time = 0;
  nd[u].tin = ++time;
  euler[time] = u;

  int u2 = nd[u].jump, u3 = nd[u2].jump;
  bool equal = (nd[u2].depth - nd[u].depth == nd[u3].depth - nd[u2].depth);

  for (auto v: nd[u].adj) {
    if (!nd[v].tin) {
      nd[v].depth = 1 + nd[u].depth;
```

```
      nd[v].parent = u;
      nd[v].jump = equal ? u3 : u;
      dfs(v);
    }
  }

  nd[u].tout = ++time;
  euler[time] = u;
}

bool is_ancestor(int u, int v) {
  return
    (nd[u].tin <= nd[v].tin) &&
    (nd[u].tout >= nd[v].tout);
}

int lca(int u, int v) {
  // Găsește cel mai jos strămoș al lui u care este și strămoș al lui v.
  while (!is_ancestor(u, v)) {
    if (nd[u].jump && !is_ancestor(nd[u].jump, v)) {
      u = nd[u].jump;
    } else {
      u = nd[u].parent;
    }
  }

  return u;
}

void read_queries() {
  scanf("%d", &num_queries);
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    int l = lca(u, v);
    if (nd[u].tin > nd[v].tin) {
      std::swap(u, v);
    }
    if (l == u) {
      q[i] = { nd[u].tin, nd[v].tin, 0, i };
    } else {
      q[i] = { nd[u].tout, nd[v].tin, l, i };
    }
  }
}

void sort_queries_in_mo_order() {
  std::sort(q, q + num_queries, [](query a, query b) {
    int x = a.l / BLOCK_SIZE, y = b.l / BLOCK_SIZE;
    if (x != y) {
```

```
      return (x < y);
    } else if (x % 2) {
      return a.r > b.r;
    } else {
      return a.r < b.r;
    }
  });
}

struct mo_tracker {
  bool on[MAX_NODES + 1];  // nodurile care apar exact o dată în interval
  int f[MAX_NODES + 1][2]; // frecvența numerelor favorite pentru fiecare gen
  int l, r;
  unsigned num_pairs;

  void init() {
    l = 1;
    r = 0;
  }

  void toggle(int pos) {
    int u = euler[pos];
    on[u] = !on[u];
    int sign = on[u] ? +1 : -1;
    f[nd[u].fav][nd[u].gender] += sign;
    num_pairs += sign * f[nd[u].fav][!nd[u].gender];
  }

  unsigned query(int target_l, int target_r, int extra_fav, bool extra_gender) {
    while (l > target_l) {
      toggle(--l);
    }
    while (r < target_r) {
      toggle(++r);
    }
    while (l < target_l) {
      toggle(l++);
    }
    while (r > target_r) {
      toggle(r--);
    }

    if (extra_fav) {
      return num_pairs + f[extra_fav][!extra_gender];
    } else {
      return num_pairs;
    }
  }
};
```

```
mo_tracker tracker;

void answer_queries() {
  tracker.init();
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    int extra_fav = nd[q[i].lca].fav;
    int extra_gender = nd[q[i].lca].gender;
    unsigned result = tracker.query(q[i].l, q[i].r, extra_fav, extra_gender);
    answer[q[i].orig_index] = result;
  }
}

void write_answers() {
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    printf("%u\n", answer[i]);
  }
}

int main() {
  read_tree();
  nd[1].depth = 1;
  dfs(1);
  read_queries();
  sort_queries_in_mo_order();
  answer_queries();
  write_answers();

  return 0;
}
```

Sursă cu LCA implementat cu algoritmul lui Tarjan (versiune online).

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>
#include <unordered_map>

const int MAX_NODES = 100'000;
const int MAX_QUERIES = 100'000;
const int BLOCK_SIZE = 775; // de ordinul a sqrt(2n)

struct disjoint_set_forest {
  int p[MAX_NODES + 1];

  void init(int n) {
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
      p[u] = u;
    }
  }
```

```
  int find(int u) {
    return (p[u] == u)
      ? u
      : (p[u] = find(p[u]));
  }

  // Întotdeauna îl alipește pe v la u. Fără *union by rank*.
  void unite(int u, int v) {
    p[find(v)] = find(u);
  }
};

struct normalizer {
  std::unordered_map<int, int> map;

  int normalize(int x) {
    auto it = map.find(x);
    if (it == map.end()) {
      int result = 1 + map.size();
      map[x] = result;
      return result;
    } else {
      return it->second;
    }
  }
};

struct cell {
  int val, next;
};

struct node {
  int adj;       // listă de adiacență
  int queries;   // listă de interogări pentru acest nod
  int tin, tout; // timpi de intrare și ieșire din DFS
  int fav;
  bool gender;
};

struct query {
  // Redenumește și refolosește cîmpurile pentru a economisi memorie.
  union { int u; int l; };
  union { int v; int r; };
  int lca;
  int orig_index;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
cell qlist[2 * MAX_QUERIES + 1];
node nd[MAX_NODES + 1];
```

```
int euler[2 * MAX_NODES + 1];
disjoint_set_forest dsf;
query q[MAX_QUERIES];
unsigned answer[MAX_QUERIES];
int n, num_queries;

void add_edge(int u, int v) {
  static int pos = 1;
  list[pos] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = pos++;
}

void add_query(int ind, int u) {
  static int pos = 1;
  qlist[pos] = { ind, nd[u].queries };
  nd[u].queries = pos++;
}

void read_tree() {
  scanf("%d ", &n);
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    nd[u].gender = (getchar() == '1');
    getchar();
  }

  normalizer norm;
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    int x;
    scanf("%d", &x);
    nd[u].fav = norm.normalize(x);
  }

  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }
}

void read_queries() {
  scanf("%d", &num_queries);
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    scanf("%d %d", &q[i].u, &q[i].v);
    add_query(i, q[i].u);
    add_query(i, q[i].v);
    q[i].orig_index = i;
  }
}
```

```
void process_lca_queries(int u) {
  for (int ptr = nd[u].queries; ptr; ptr = qlist[ptr].next) {
    int i = qlist[ptr].val;
    int v = (q[i].u == u) ? q[i].v : q[i].u;
    if (nd[v].tin) {
      q[i].lca = dsf.find(v);
    }
  }
}

void dfs(int u) {
  static int time = 0;
  nd[u].tin = ++time;
  euler[time] = u;

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].val;
    if (!nd[v].tin) {
      dfs(v);
      dsf.unite(u, v);
    }
  }

  process_lca_queries(u);

  nd[u].tout = ++time;
  euler[time] = u;
}

// Acum că știm LCA-urile și timpii Euler, calculează intervalele.
void rewrite_queries() {
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    if (nd[q[i].u].tin > nd[q[i].v].tin) {
      int tmp = q[i].u;
      q[i].u = q[i].v;
      q[i].v = tmp;
    }
    if (q[i].lca == q[i].u) {
      q[i].l = nd[q[i].u].tin;
      q[i].r = nd[q[i].v].tin;
      q[i].lca = 0;
    } else {
      q[i].l = nd[q[i].u].tout;
      q[i].r = nd[q[i].v].tin;
    }
  }
}

void sort_queries_in_mo_order() {
  std::sort(q, q + num_queries, [](query a, query b) {
```

```
    int x = a.l / BLOCK_SIZE, y = b.l / BLOCK_SIZE;
    if (x != y) {
      return (x < y);
    } else if (x % 2) {
      return a.r > b.r;
    } else {
      return a.r < b.r;
    }
  });
}

struct mo_tracker {
  bool on[MAX_NODES + 1];  // nodurile care apar exact o dată în interval
  int f[MAX_NODES + 1][2]; // frecvența numerelor favorite pentru fiecare gen
  int l, r;
  unsigned num_pairs;

  void init() {
    l = 1;
    r = 0;
  }

  void toggle(int pos) {
    int u = euler[pos];
    on[u] = !on[u];
    int sign = on[u] ? +1 : -1;
    f[nd[u].fav][nd[u].gender] += sign;
    num_pairs += sign * f[nd[u].fav][!nd[u].gender];
  }

  unsigned query(int target_l, int target_r, int extra_fav, bool extra_gender) {
    while (l > target_l) {
      toggle(--l);
    }
    while (r < target_r) {
      toggle(++r);
    }
    while (l < target_l) {
      toggle(l++);
    }
    while (r > target_r) {
      toggle(r--);
    }

    if (extra_fav) {
      return num_pairs + f[extra_fav][!extra_gender];
    } else {
      return num_pairs;
    }
  }
```

```
};

mo_tracker tracker;

void answer_queries() {
  tracker.init();
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    int extra_fav = nd[q[i].lca].fav;
    int extra_gender = nd[q[i].lca].gender;
    unsigned result = tracker.query(q[i].l, q[i].r, extra_fav, extra_gender);
    answer[q[i].orig_index] = result;
  }
}

void write_answers() {
  for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    printf("%u\n", answer[i]);
  }
}

int main() {
  read_tree();
  read_queries();
  dsf.init(n);
  dfs(1);
  rewrite_queries();
  sort_queries_in_mo_order();
  answer_queries();
  write_answers();

  return 0;
}
```

Anexa K

Descompunere *heavy-light*

K.1 Problema Heavy Path Decomposition (Infoarena)

înapoi

Versiunea 1.

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 1 << 17;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int val;
  int depth;
  int parent;
  int heavy;  // fiul cu subarborele maxim
  int head;   // vîrful lanțului nostru
  int tin;    // momentul descoperirii în DFS
};

node nd[MAX_NODES + 1];

int next_power_of_2(int x) {
  return 1 << (32 - __builtin_clz(x - 1));
}

int max(int x, int y) {
  return (x > y) ? x : y;
}
```

```
struct segment_tree {
  int v[2 * MAX_NODES];
  int n;

  void init(int n) {
    this->n = next_power_of_2(n);
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
      v[nd[u].tin + this->n] = nd[u].val;
    }
    for (int pos = this->n - 1; pos; pos--) {
      v[pos] = max(v[2 * pos], v[2 * pos + 1]);
    }
  }

  void update(int pos, int val) {
    pos += n;
    v[pos] = val;
    for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
      v[pos] = max(v[2 * pos], v[2 * pos + 1]);
    }
  }

  int rmq(int l, int r) {
    int result = -1;

    l += n;
    r += n;

    while (l <= r)  {
      if (l & 1) {
        result = max(result, v[l++]);
      }
      l >>= 1;

      if (!(r & 1)) {
        result = max(result, v[r--]);
      }
      r >>= 1;
    }

    return result;
  }
};

cell list[2 * MAX_NODES];
segment_tree segtree;
int n, num_queries;
FILE *fin, *fout;

void add_edge(int u, int v) {
```

```
  static int pos = 1;
  list[pos] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = pos++;
}

void read_data() {
  fscanf(fin, "%d %d", &n, &num_queries);
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    fscanf(fin, "%d", &nd[u].val);
  }

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    fscanf(fin, "%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }
}

// Returnează mărimea subarborelui lui u.
int heavy_dfs(int u) {
  int my_size = 1, max_child_size = 0;

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != nd[u].parent) {

      nd[v].parent = u;
      nd[v].depth = 1 + nd[u].depth;
      int child_size = heavy_dfs(v);
      my_size += child_size;
      if (child_size > max_child_size) {
        max_child_size = child_size;
        nd[u].heavy = v;
      }

    }
  }

  return my_size;
}

void decompose_dfs(int u, int head) {
  static int time = 0;

  nd[u].head = head;
  nd[u].tin = time++;

  if (nd[u].heavy) {
    decompose_dfs(nd[u].heavy, head);
```

```
  }

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != nd[u].parent && v != nd[u].heavy) {
      decompose_dfs(v, v); // începe un lanț nou
    }
  }
}

int query(int u, int v) {
  int result = 0;
  while (nd[u].head != nd[v].head) {
    // Interogare de prefix pe lanțul de jos.
    if (nd[nd[v].head].depth > nd[nd[u].head].depth) {
      int tmp = u; u = v; v = tmp;
    }
    result = max(result, segtree.rmq(nd[nd[u].head].tin, nd[u].tin));
    // Saltul la părintele capului de lanț ne plasează pe un lanț nou.
    u = nd[nd[u].head].parent;
  }

  // Ultima interogare are loc pe lanțul comun.
  if (nd[u].depth > nd[v].depth) {
    int tmp = u; u = v; v = tmp;
  }
  result = max(result, segtree.rmq(nd[u].tin, nd[v].tin));

  return result;
}

void process_queries() {
  while (num_queries--) {
    int t, x, y;
    fscanf(fin, "%d %d %d", &t, &x, &y);
    if (t) {
      fprintf(fout, "%d\n", query(x, y));
    } else {
      segtree.update(nd[x].tin, y);
    }
  }
}

int main() {
  fin = fopen("heavypath.in", "r");
  fout = fopen("heavypath.out", "w");

  read_data();
  heavy_dfs(1);
  decompose_dfs(1, 1);
```

```
  segtree.init(n);
  process_queries();

  fclose(fin);
  fclose(fout);

  return 0;
}
```

Versiunea 2.

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 1 << 17;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int val;
  int parent;
  int heavy;  // fiul cu subarborele maxim
  int head;   // vîrful lanțului nostru
  int tin;    // momentul descoperirii în DFS
};

node nd[MAX_NODES + 1];

int next_power_of_2(int x) {
  return 1 << (32 - __builtin_clz(x - 1));
}

int max(int x, int y) {
  return (x > y) ? x : y;
}

struct segment_tree {
  int v[2 * MAX_NODES];
  int n;

  void init(int n) {
    this->n = next_power_of_2(n);
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
      v[nd[u].tin + this->n] = nd[u].val;
    }
    for (int pos = this->n - 1; pos; pos--) {
      v[pos] = max(v[2 * pos], v[2 * pos + 1]);
```

```
    }
  }

  void update(int pos, int val) {
    pos += n;
    v[pos] = val;
    for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
      v[pos] = max(v[2 * pos], v[2 * pos + 1]);
    }
  }

  int rmq(int l, int r) {
    int result = -1;

    l += n;
    r += n;

    while (l <= r)  {
      if (l & 1) {
        result = max(result, v[l++]);
      }
      l >>= 1;

      if (!(r & 1)) {
        result = max(result, v[r--]);
      }
      r >>= 1;
    }

    return result;
  }
};

cell list[2 * MAX_NODES];
segment_tree segtree;
int n, num_queries;
FILE *fin, *fout;

void add_edge(int u, int v) {
  static int pos = 1;
  list[pos] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = pos++;
}

void read_data() {
  fscanf(fin, "%d %d", &n, &num_queries);
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    fscanf(fin, "%d", &nd[u].val);
  }
```

```
  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    fscanf(fin, "%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }
}

// Returnează mărimea subarborelui lui u.
int heavy_dfs(int u) {
  int my_size = 1, max_child_size = 0;

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != nd[u].parent) {

      nd[v].parent = u;
      int child_size = heavy_dfs(v);
      my_size += child_size;
      if (child_size > max_child_size) {
        max_child_size = child_size;
        nd[u].heavy = v;
      }

    }
  }

  return my_size;
}

void decompose_dfs(int u, int head) {
  static int time = 0;

  nd[u].head = head;
  nd[u].tin = time++;

  if (nd[u].heavy) {
    decompose_dfs(nd[u].heavy, head);
  }

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != nd[u].parent && v != nd[u].heavy) {
      decompose_dfs(v, v); // începe un lanț nou
    }
  }
}

int query(int u, int v) {
  int result = 0;
```

```
  while (nd[u].head != nd[v].head) {
    // Interogare de prefix pe lanțul de jos.
    if (nd[v].tin > nd[u].tin) {
      int tmp = u; u = v; v = tmp;
    }
    result = max(result, segtree.rmq(nd[nd[u].head].tin, nd[u].tin));
    // Saltul la părintele capului de lanț ne plasează pe un lanț nou.
    u = nd[nd[u].head].parent;
  }

  // Ultima interogare are loc pe lanțul comun.
  if (nd[u].tin > nd[v].tin) {
    int tmp = u; u = v; v = tmp;
  }
  result = max(result, segtree.rmq(nd[u].tin, nd[v].tin));

  return result;
}

void process_queries() {
  while (num_queries--) {
    int t, x, y;
    fscanf(fin, "%d %d %d", &t, &x, &y);
    if (t) {
      fprintf(fout, "%d\n", query(x, y));
    } else {
      segtree.update(nd[x].tin, y);
    }
  }
}

int main() {
  fin = fopen("heavypath.in", "r");
  fout = fopen("heavypath.out", "w");

  read_data();
  heavy_dfs(1);
  decompose_dfs(1, 1);
  segtree.init(n);
  process_queries();

  fclose(fin);
  fclose(fout);

  return 0;
}
```

K.2 Problema Disruption (USACO)

înapoi

Soluție cu descompunere *heavy-light*.

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 50'000;
const int MAX_SEGTREE_NODES = 1 << 17;
const int INFINITY = 2'000'000'000;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int parent;
  int heavy;
  int head;
  int pos;
};

struct edge {
  int u, v;
};

int next_power_of_2(int x) {
  return 1 << (32 - __builtin_clz(x - 1));
}

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

// Un arbore de intervale care suportă operațiile:
//
// 1. set(l, r, m): atribuie v[i] = min(v[i], m) pe toate pozițiile l ≤ i ≤ r.
// 2. get(i): returnează v[i].
//
// În plus, toate operațiile get() vin după toate operațiile set().
struct segment_tree {
  int v[MAX_SEGTREE_NODES];
  int n;

  void init(int n) {
    this->n = next_power_of_2(n);
    for (int i = 1; i < 2 * this->n; i++) {
      v[i] = INFINITY;
```

```
    }
  }

  void set(int l, int r, int val) {
    l += n;
    r += n;

    while (l <= r)  {
      if (l & 1) {
        v[l] = min(v[l], val);
        l++;
      }
      l >>= 1;

      if (!(r & 1)) {
        v[r] = min(v[r], val);
        r--;
      }
      r >>= 1;
    }
  }

  void push_all() {
    for (int i = 1; i < n; i++) {
      v[2 * i] = min(v[2 * i], v[i]);
      v[2 * i + 1] = min(v[2 * i + 1], v[i]);
    }
  }

  int get(int pos) {
    return v[pos + n];
  }
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
edge e[MAX_NODES];
segment_tree segtree;
FILE* fin;
int n, num_extra_paths;

void add_edge(int u, int v) {
  static int ptr = 1;
  list[ptr] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = ptr++;
}

void read_tree() {
  fscanf(fin, "%d %d", &n, &num_extra_paths);
  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
```

```
    int u, v;
    fscanf(fin, "%d %d", &u, &v);
    e[i] = { u, v };
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }
}

int heavy_dfs(int u) {
  int my_size = 1, max_child_size = 0;

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != nd[u].parent) {

      nd[v].parent = u;
      int child_size = heavy_dfs(v);
      my_size += child_size;
      if (child_size > max_child_size) {
        max_child_size = child_size;
        nd[u].heavy = v;
      }

    }
  }

  return my_size;
}

void decompose_dfs(int u, int head) {
  static int time = 0;

  nd[u].head = head;
  nd[u].pos = time++;

  if (nd[u].heavy) {
    decompose_dfs(nd[u].heavy, head);
  }

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != nd[u].parent && v != nd[u].heavy) {
      decompose_dfs(v, v);
    }
  }
}

void set_cost_on_path(int u, int v, int cost) {
  while (nd[u].head != nd[v].head) {
    if (nd[v].pos > nd[u].pos) {
```

```
      int tmp = u; u = v; v = tmp;
    }
    segtree.set(nd[nd[u].head].pos, nd[u].pos, cost);
    u = nd[nd[u].head].parent;
  }

  if (nd[u].pos > nd[v].pos) {
    int tmp = u; u = v; v = tmp;
  }

  // Nu scrie nimic pe nodul LCA însuși.
  segtree.set(nd[u].pos + 1, nd[v].pos, cost);
}

void read_extra_paths() {
  while (num_extra_paths--) {
    int u, v, cost;
    fscanf(fin, "%d %d %d\n", &u, &v, &cost);
    set_cost_on_path(u, v, cost);
  }
}

void compute_answers() {
  FILE* fout = fopen("disrupt.out", "w");

  segtree.push_all();
  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int child = (nd[e[i].u].parent == e[i].v) ? e[i].u : e[i].v;
    int cost = segtree.get(nd[child].pos);
    cost = (cost == INFINITY) ? -1 : cost;
    fprintf(fout, "%d\n", cost);
  }

  fclose(fout);
}

int main() {
  fin = fopen("disrupt.in", "r");
  read_tree();
  heavy_dfs(1);
  decompose_dfs(1, 1);
  segtree.init(n);
  read_extra_paths();
  compute_answers();
  fclose(fin);

  return 0;
}
```

Soluție cu tehnica *small-to-large*.

```
#include <algorithm>
#include <set>
#include <stdio.h>
#include <vector>

typedef unsigned short u16;
typedef std::set<u16> set;

const int MAX_NODES = 50'000;
const int MAX_REPL_PATHS = 50'000;

struct node {
  std::vector<u16> adj;
  std::vector<u16> repl_ids;
  u16 parent;
  int min_cost;
};

struct edge {
  u16 u, v;
};

struct repl_path {
  u16 u, v;
  int cost;
};

node nd[MAX_NODES + 1];
edge e[MAX_NODES];
repl_path repl[MAX_REPL_PATHS];
int n, num_repl_paths;

void read_data() {
  FILE* f = fopen("disrupt.in", "r");

  fscanf(f, "%d %d", &n, &num_repl_paths);
  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    u16 u, v;
    fscanf(f, "%hd %hd", &u, &v);
    e[i] = { u, v };
    nd[u].adj.push_back(v);
    nd[v].adj.push_back(u);
  }

  for (int i = 0; i < num_repl_paths; i++) {
    fscanf(f, "%hd %hd %d\n", &repl[i].u, &repl[i].v, &repl[i].cost);
  }
```

```
  fclose(f);
}

void sort_repl_paths() {
  std::sort(repl, repl + num_repl_paths, [](repl_path& a, repl_path& b) {
    return a.cost < b.cost;
  });
}

void distribute_repl_paths() {
  for (int i = 0; i < num_repl_paths; i++) {
    nd[repl[i].u].repl_ids.push_back(i);
    nd[repl[i].v].repl_ids.push_back(i);
  }
}

void merge_sets(set& parent, set& child) {
  if (child.size() > parent.size()) {
    parent.swap(child);
  }
  for (u16 id: child) {
    std::pair<set::iterator, bool> p = parent.insert(id);
    if (!p.second) {
      // Inserarea a eșuat deoarece ID-ul este deja în set; șterge-l.
      parent.erase(p.first);
    }
  }
  child.clear();
}

set dfs(int u) {
  set s;
  for (u16 id: nd[u].repl_ids) {
    s.insert(id);
  }

  for (u16 v: nd[u].adj) {
    if (v != nd[u].parent) {
      nd[v].parent = u;
      set s2 = dfs(v);
      merge_sets(s, s2);
    }
  }

  if (s.empty()) {
    nd[u].min_cost = -1;
  } else {
    u16 first = *s.begin();
    nd[u].min_cost = repl[first].cost;
```

```
  }

  return s;
}

void compute_answers() {
  FILE* fout = fopen("disrupt.out", "w");

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int child = (nd[e[i].u].parent == e[i].v) ? e[i].u : e[i].v;
    int cost = nd[child].min_cost;
    fprintf(fout, "%d\n", cost);
  }

  fclose(fout);
}

int main() {
  read_data();
  sort_repl_paths();
  distribute_repl_paths();
  dfs(1);
  compute_answers();

  return 0;
}
```

Soluție cu tehnica *small-to-large* cu DFS exclusiv.

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>
#include <vector>

typedef unsigned short u16;

const int MAX_NODES = 50'000;
const int MAX_REPL_PATHS = 50'000;

struct node {
  std::vector<u16> adj;
  std::vector<u16> repl_ids;
  u16 parent;
  u16 heavy;
  u16 min_id;
};

struct edge {
  u16 u, v;
};
```

```
struct repl_path {
  u16 u, v;
  int cost;
};

// Un arbore Fenwick de booleeni. Admite operația „cel mai mic bit setat”.
struct fenwick_tree {
  u16 v[MAX_NODES + 1];
  bool raw[MAX_NODES + 1];
  int n;
  int max_p2;

  void init(int n) {
    this->n = n;
    max_p2 = 1 << (31 - __builtin_clz(n));
  }

  void add(int pos, int delta) {
    do {
      v[pos] += delta;
      pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
  }

  void toggle(int pos) {
    add(pos, raw[pos] ? -1 : +1);
    raw[pos] = !raw[pos];
  }

  // Returnează poziția primului bit setat sau n + 1 dacă arborele este gol.
  int get_first_set_bit() {
    int pos = 0;

    for (int interval = max_p2; interval; interval >>= 1) {
      if ((pos + interval <= n) && (v[pos + interval] == 0)) {
        pos += interval;
      }
    }

    return pos + 1;
  }
};

node nd[MAX_NODES + 1];
edge e[MAX_NODES];
repl_path repl[MAX_REPL_PATHS + 1];
fenwick_tree fen;
int n, num_repl;
```

```
void read_data() {
  FILE* f = fopen("disrupt.in", "r");

  fscanf(f, "%d %d", &n, &num_repl);
  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    u16 u, v;
    fscanf(f, "%hd %hd", &u, &v);
    e[i] = { u, v };
    nd[u].adj.push_back(v);
    nd[v].adj.push_back(u);
  }

  for (int i = 1; i <= num_repl; i++) {
    fscanf(f, "%hd %hd %d\n", &repl[i].u, &repl[i].v, &repl[i].cost);
  }

  fclose(f);
}

void sort_repl_paths() {
  std::sort(repl + 1, repl + num_repl + 1, [](repl_path& a, repl_path& b) {
    return a.cost < b.cost;
  });
}

void distribute_repl_paths() {
  for (int i = 1; i <= num_repl; i++) {
    nd[repl[i].u].repl_ids.push_back(i);
    nd[repl[i].v].repl_ids.push_back(i);
  }
}

int size_dfs(int u) {
  int size = 1, max_c_size = 0;

  for (u16 v: nd[u].adj) {
    if (v != nd[u].parent) {
      nd[v].parent = u;
      int c = size_dfs(v);
      size += c;
      if (!nd[u].heavy || (c > max_c_size)) {
        nd[u].heavy = v;
        max_c_size = c;
      }
    }
  }

  return size;
}
```

```
void toggle_node(int u) {
  for (u16 id: nd[u].repl_ids) {
    fen.toggle(id);
  }
}

void toggle_subtree(int u) {
  toggle_node(u);
  for (int v: nd[u].adj) {
    if (v != nd[u].parent) {
      toggle_subtree(v);
    }
  }
}

void dfs(int u) {
  for (u16 v: nd[u].adj) {
    if ((v != nd[u].parent) && (v != nd[u].heavy)) {
      dfs(v);
      toggle_subtree(v);
    }
  }

  if (nd[u].heavy) {
    dfs(nd[u].heavy);
  }

  for (u16 v: nd[u].adj) {
    if ((v != nd[u].parent) && (v != nd[u].heavy)) {
      toggle_subtree(v);
    }
  }

  toggle_node(u);
  nd[u].min_id = fen.get_first_set_bit();
}

void compute_answers() {
  FILE* fout = fopen("disrupt.out", "w");

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int child = (nd[e[i].u].parent == e[i].v) ? e[i].u : e[i].v;
    int id = nd[child].min_id;
    int cost = (id <= num_repl) ? repl[id].cost : -1;
    fprintf(fout, "%d\n", cost);
  }

  fclose(fout);
}
```

```
int main() {
  read_data();
  sort_repl_paths();
  distribute_repl_paths();
  fen.init(num_repl);
  size_dfs(1);
  dfs(1);
  compute_answers();

  return 0;
}
```

K.3 Problema Rafaela (Lot 2014)

‹ înapoi

Soluție cu HLD (versiune online).

```
// Complexitate: O(q log^2 n).
// Metodă: descompunere heavy-light.
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;
const int MAX_SEGTREE_NODES = 1 << 19;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int parent;
  int heavy;      // fiul cu cel mai mare subarbore
  int head;       // începutul lanțului nostru
  int tin, tout;  // momentele intrării și ieșirii din DFS
  int init_pop;   // populația inițială
};

int next_power_of_2(int x) {
  return 1 << (32 - __builtin_clz(x - 1));
}

int max(int x, int y) {
  return (x > y) ? x : y;
}

struct segtree_node {
  int m;    // maximul din intervalul subîntins
```

```
  int lazy; // sumă de adăugat la tot intervalul
  // Invariant: pentru nodul curent, m include lazy
};

// Arbore de segmente cu adăugare pe interval și maxim pe interval.
struct segment_tree {
  segtree_node v[MAX_SEGTREE_NODES];
  int n, bits;

  void init(int size) {
    n = next_power_of_2(size);
    bits = __builtin_popcount(n - 1);
  }

  void raw_set(int pos, int val) {
    v[pos + n].m = val;
  }

  void build() {
    for (int pos = n - 1; pos; pos--) {
      v[pos].m = max(v[2 * pos].m, v[2 * pos + 1].m);
    }
  }

  void push(int pos) {
    if (v[pos].lazy) {
      v[2 * pos].m += v[pos].lazy;
      v[2 * pos].lazy += v[pos].lazy;
      v[2 * pos + 1].m += v[pos].lazy;
      v[2 * pos + 1].lazy += v[pos].lazy;
      v[pos].lazy = 0;
    }
  }

  void push_path(int pos) {
    for (int b = bits; b; b--) {
      push(pos >> b);
    }
  }

  void pull_path(int pos) {
    for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
      if (!v[pos].lazy) {
        v[pos].m = max(v[2 * pos].m, v[2 * pos + 1].m);
      }
    }
  }

  void range_add(int l, int r, int val) {
    l += n;
```

```
    r += n;
    int orig_l = l, orig_r = r;

    push_path(l);
    push_path(r);

    while (l <= r)  {
      if (l & 1) {
        v[l].m += val;
        v[l++].lazy += val;
      }
      l >>= 1;

      if (!(r & 1)) {
        v[r].m += val;
        v[r--].lazy += val;
      }
      r >>= 1;
    }

    pull_path(orig_l);
    pull_path(orig_r);
  }

  int range_max(int l, int r) {
    int result = 0;

    l += n;
    r += n;
    push_path(l);
    push_path(r);

    while (l <= r)  {
      if (l & 1) {
        result = max(result, v[l++].m);
      }
      l >>= 1;

      if (!(r & 1)) {
        result = max(result, v[r--].m);
      }
      r >>= 1;
    }

    return result;
  }
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
```

```
segment_tree segtree;
FILE *fin, *fout;
int n, num_queries, total_pop;

void add_edge(int u, int v) {
  static int ptr = 1;
  list[ptr] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = ptr++;
}

void read_tree() {
  fscanf(fin, "%d %d", &n, &num_queries);
  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    fscanf(fin, "%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }

  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    fscanf(fin, "%d", &nd[u].init_pop);
    total_pop += nd[u].init_pop;
  }
}

int heavy_dfs(int u) {
  int my_size = 1, max_child_size = 0;

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != nd[u].parent) {

      nd[v].parent = u;
      int child_size = heavy_dfs(v);
      my_size += child_size;
      nd[u].init_pop += nd[v].init_pop;
      if (child_size > max_child_size) {
        max_child_size = child_size;
        nd[u].heavy = v;
      }

    }
  }

  return my_size;
}

void decompose_dfs(int u, int head) {
  static int time = 0;
```

```
  nd[u].head = head;
  nd[u].tin = time++;
  segtree.raw_set(nd[u].tin, nd[u].init_pop);

  if (nd[u].heavy) {
    decompose_dfs(nd[u].heavy, head);
  }

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != nd[u].parent && v != nd[u].heavy) {
      decompose_dfs(v, v); // la v începe un lanț nou
    }
  }

  nd[u].tout = time - 1;
}

void update(int u, int delta) {
  total_pop += delta;
  while (u) {
    int h = nd[u].head;
    segtree.range_add(nd[h].tin, nd[u].tin, delta);
    u = nd[h].parent;
  }
}

int query(int u) {
  int size_of_u = segtree.range_max(nd[u].tin, nd[u].tin);
  int from_parent = total_pop - size_of_u;
  int from_any_child = segtree.range_max(nd[u].tin + 1, nd[u].tout);
  return max(from_parent, from_any_child);
}

void process_ops() {
  char type;
  int u, delta;

  while (num_queries--) {
    fscanf(fin, " %c", &type);
    if (type == 'U') {
      fscanf(fin, "%d %d ", &delta, &u);
      update(u, delta);
    } else {
      fscanf(fin, "%d ", &u);
      fprintf(fout, "%d\n", query(u));
    }
  }
}
```

```
int main() {
  fin = fopen("rafaela.in", "r");
  fout = fopen("rafaela.out", "w");

  read_tree();
  segtree.init(n);
  heavy_dfs(1);
  decompose_dfs(1, 1);
  segtree.build();
  process_ops();

  fclose(fin);
  fclose(fout);

  return 0;
}
```

Soluție cu HLD și `multiset` (versiune online).

```
// Complexitate: O(q log^2 n).
// Metodă: descompunere heavy-light + multiset.
#include <set>
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int parent;
  int heavy;      // fiul cu cel mai mare subarbore
  int head;       // începutul lanțului nostru
  int pos;        // momentul descoperirii în dfs
  int init_pop;   // populația inițială
  std::multiset<int> set;
};

int max(int x, int y) {
  return (x > y) ? x : y;
}

struct fenwick_tree {
  int v[MAX_NODES + 1];
  int n;

  void init(int n) {
```

```
    this->n = n;
  }

  void add(int pos, int val) {
    do {
      v[pos] += val;
      pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
  }

  void range_add(int l, int r, int val) {
    add(l, val);
    add(r + 1, -val);
  }

  void point_add(int pos, int val) {
    range_add(pos, pos, val);
  }

  int get(int pos) {
    long long s = 0;
    while (pos) {
      s += v[pos];
      pos &= pos - 1;
    }
    return s;
  }
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
fenwick_tree fen;
FILE *fin, *fout;
int n, num_queries, total_pop;

void add_edge(int u, int v) {
  static int ptr = 1;
  list[ptr] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = ptr++;
}

void read_tree() {
  fscanf(fin, "%d %d", &n, &num_queries);
  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    fscanf(fin, "%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }
```

```
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    fscanf(fin, "%d", &nd[u].init_pop);
    total_pop += nd[u].init_pop;
  }
}

int heavy_dfs(int u) {
  int my_size = 1, max_child_size = 0;

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != nd[u].parent) {

      nd[v].parent = u;
      int child_size = heavy_dfs(v);
      my_size += child_size;
      nd[u].init_pop += nd[v].init_pop;
      if (child_size > max_child_size) {
        max_child_size = child_size;
        nd[u].heavy = v;
      }

    }
  }

  return my_size;
}

void decompose_dfs(int u, int head) {
  static int time = 1;

  nd[u].head = head;
  nd[u].pos = time++;
  fen.point_add(nd[u].pos, nd[u].init_pop);

  if (nd[u].heavy) {
    decompose_dfs(nd[u].heavy, head);
  }

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != nd[u].parent && v != nd[u].heavy) {
      decompose_dfs(v, v); // la v începe un lanț nou
    }
  }
}

void update_parent_set(int h, int delta) {
  int p = nd[h].parent;
  std::multiset<int>& s = nd[p].set; // syntactic sugar
```

```
  int old = fen.get(nd[h].pos);
  auto it = s.find(old);
  if (it != s.end()) {
    s.erase(it);
  }
  s.insert(old + delta);
}

void update(int u, int delta) {
  total_pop += delta;
  while (u) {
    int h = nd[u].head;
    update_parent_set(h, delta);
    fen.range_add(nd[h].pos, nd[u].pos, delta);
    u = nd[h].parent;
  }
}

int query(int u) {
  int size_of_u = fen.get(nd[u].pos);
  int max_flow = total_pop - size_of_u;

  if (nd[u].heavy) {
    int from_heavy_child = fen.get(nd[nd[u].heavy].pos);
    max_flow = max(max_flow, from_heavy_child);
  }

  if (!nd[u].set.empty()) {
    max_flow = max(max_flow, *nd[u].set.rbegin());
  }

  return max_flow;
}

void process_ops() {
  char type;
  int u, delta;

  while (num_queries--) {
    fscanf(fin, " %c", &type);
    if (type == 'U') {
      fscanf(fin, "%d %d ", &delta, &u);
      update(u, delta);
    } else {
      fscanf(fin, "%d ", &u);
      fprintf(fout, "%d\n", query(u));
    }
  }
}
```

```
int main() {
  fin = fopen("rafaela.in", "r");
  fout = fopen("rafaela.out", "w");

  read_tree();
  fen.init(n);
  heavy_dfs(1);
  decompose_dfs(1, 1);
  process_ops();

  fclose(fin);
  fclose(fout);

  return 0;
}
```

Soluție cu descompunere în radical după interogări (versiune online).

```
// Metodă: descompunere în radical după interogări.
#include <algorithm>
#include <stdio.h>
#include <unordered_set>
#include <vector>

const int MAX_NODES = 200'000;
const int MAX_QUERIES = 200'000;
const int BLOCK_SIZE = 3'000;

struct query {
  int id;             // ordinea de la intrare
  int outside_delta;  // modificări în afara subarborelui
  int child_delta;    // modificări la fiul curent
  int max_touched;    // maximul dintre fiii anteriori

  query(int id) {
    this->id = id;
    outside_delta = 0;
    child_delta = 0;
    max_touched = 0;
  }
};

struct node {
  std::vector<int> adj;
  std::vector<query> q; // interogări (din blocul curent)
  int parent;
  int tin, tout;        // timpii de intrare/ieșire din DFS
  int pop, spop;        // populația din nod, respectiv din subarbore
};
```

```
struct update {
  int id, u, delta;
};

node nd[MAX_NODES + 1];
update updates[BLOCK_SIZE];
int answer[MAX_QUERIES + 1];
std::unordered_set<int> nodes_with_queries;
int n, num_ops, num_updates;
FILE* fin;

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

int max(int x, int y) {
  return (x > y) ? x : y;
}

void read_data() {
  fscanf(fin, "%d %d", &n, &num_ops);

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    fscanf(fin, "%d %d", &u, &v);
    nd[u].adj.push_back(v);
    nd[v].adj.push_back(u);
  }

  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    fscanf(fin, "%d", &nd[u].pop);
  }
}

// Calculează timpii DFS și părinții
void initial_dfs(int u) {
  static int time = 0;
  nd[u].tin = time++;

  for (int v: nd[u].adj) {
    if (v != nd[u].parent) {
      nd[v].parent = u;
      initial_dfs(v);
    }
  }

  nd[u].tout = time - 1;
}
```

```
void read_ops(int start, int end) {
  char type;
  int u, delta;

  num_updates = 0;
  for (int id = start; id < end; id++) {
    fscanf(fin, " %c", &type);
    if (type == 'U') {
      fscanf(fin, "%d %d ", &delta, &u);
      updates[num_updates++] = { id, u, delta };
      // vor intra în vigoare în următorul bloc
      nd[u].pop += delta;
    } else {
      fscanf(fin, "%d ", &u);
      nd[u].q.push_back(query(id));
      nodes_with_queries.insert(u);
    }
  }
}

void sort_updates_by_dfs_time() {
  std::sort(updates, updates + num_updates, [](update& a, update& b) {
    return nd[a.u].tin < nd[b.u].tin;
  });
}

void dfs(int u) {
  nd[u].spop = nd[u].pop;

  for (int v: nd[u].adj) {
    if (v != nd[u].parent) {
      dfs(v);
      nd[u].spop += nd[v].spop;
    }
  }
}

// Notifică-l pe u că există actualizarea upd în afara subarborelui său.
void process_outside_update(int u, update& upd) {
  for (query& q: nd[u].q) {
    if (upd.id < q.id) {
      q.outside_delta += upd.delta;
    }
  }
}

// Notifică-l pe u că există actualizarea upd în fiul său curent.
void process_child_update(int u, update& upd) {
  for (query& q: nd[u].q) {
    if (upd.id < q.id) {
```

```
      q.child_delta += upd.delta;
    }
  }
}

int merge_init(int u) {
  int i = 0;

  while ((i < num_updates) && (nd[updates[i].u].tin < nd[u].tin)) {
    process_outside_update(u, updates[i++]);
  }

  while ((i < num_updates) && (updates[i].u == u)) {
    // Doar le sărim. Populația din u nu influențează interogările din u.
    i++;
  }

  return i;
}

int merge_advance(int u, int v, int i) {
  while ((i < num_updates) && (nd[updates[i].u].tout <= nd[v].tout)) {
    process_child_update(u, updates[i++]);
  }

  for (query& q: nd[u].q) {
    q.max_touched = max(q.max_touched, nd[v].spop + q.child_delta);
    q.child_delta = 0;
  }

  return i;
}

void merge_finish(int u, int i) {
  while (i < num_updates) {
    process_outside_update(u, updates[i++]);
  }
}

void answer_queries(int u, int max_untouched) {
  for (query& q: nd[u].q) {
    // fluxul pe muchia dinspre părinte
    answer[q.id] = nd[1].spop + q.outside_delta - nd[u].spop;

    // maximul fiilor afectați de actualizări
    answer[q.id] = max(answer[q.id], q.max_touched);

    // maximul fiilor neafectați de actualizări
    answer[q.id] = max(answer[q.id], max_untouched);
  }
```

```
  nd[u].q.clear();
}

void process_queries(int u) {
  int max_untouched = 0;
  int i = merge_init(u);

  for (int v: nd[u].adj) {
    if (v != nd[u].parent) {
      int old_i = i;
      i = merge_advance(u, v, i);

      if (i == old_i) {
        max_untouched = max(max_untouched, nd[v].spop);
      }
    }
  }

  merge_finish(u, i);
  answer_queries(u, max_untouched);
}

void process_nodes_with_queries() {
  for (int u: nodes_with_queries) {
    process_queries(u);
  }
  nodes_with_queries.clear();
}

void process_ops() {
  for (int start = 0; start < num_ops; start += BLOCK_SIZE) {
    int end = min(start + BLOCK_SIZE, num_ops);
    dfs(1);
    read_ops(start, end);
    sort_updates_by_dfs_time();
    process_nodes_with_queries();
  }
}

void write_answers() {
  FILE* f = fopen("rafaela.out", "w");

  for (int i = 0; i < num_ops; i++) {
    if (answer[i]) {
      fprintf(f, "%d\n", answer[i]);
    }
  }

  fclose(f);
```

```
}

int main() {
  fin = fopen("rafaela.in", "r");

  read_data();
  initial_dfs(1);
  process_ops();

  fclose(fin);

  write_answers();

  return 0;
}
```

K.4 Problema Doi arbori (Lot 2025)

înapoi

Soluție cu descompunere *heavy-light* (versiune online).

```
// Complexitate: O(q log^2 n).
// Metodă: Descompunere heavy-light.
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;
const int MAX_SEGTREE_NODES = 1 << 19;
const int INFINITY = 3 * MAX_NODES;
const int OP_TOGGLE = 1;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int parent;
  int heavy;       // fiul cu subarborele maxim
  int head;        // începutul lanțului nostru
  int light_start; // începutul restului subarborelui, după lanțul greu
  int d;           // adîncimea
  int tin, tout;   // timpii DFS
};

int next_power_of_2(int x) {
  return 1 << (32 - __builtin_clz(x - 1));
}
```

```
int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

struct segment_tree {
  int v[MAX_SEGTREE_NODES];
  int n;

  void init(int n) {
    this->n = next_power_of_2(n);
    for (int i = 1; i < 2 * this->n; i++) {
      v[i] = INFINITY;
    }
  }

  void set(int pos, int val) {
    pos += n;
    v[pos] = val;
    for (pos >>= 1; pos; pos >>= 1) {
      v[pos] = min(v[2 * pos], v[2 * pos + 1]);
    }
  }

  int get(int pos) {
    return v[pos + n];
  }

  int get_min(int l, int r) {
    int result = INFINITY;
    l += n;
    r += n;

    while (l <= r)  {
      if (l & 1) {
        result = min(result, v[l++]);
      }
      l >>= 1;

      if (!(r & 1)) {
        result = min(result, v[r--]);
      }
      r >>= 1;
    }

    return result;
  }

  int get_min_plus(int l, int r, int delta) {
    int x = get_min(l, r);
```

```
    return (x == INFINITY) ? INFINITY : (x + delta);
  }
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
segment_tree seg, seg_diff, seg_2diff;
int n, num_ops;

void add_edge(int u, int v) {
  static int ptr = 1;
  list[ptr] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = ptr++;
}

void read_tree() {
  scanf("%d %d", &n, &num_ops);
  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }
}

int heavy_dfs(int u) {
  int my_size = 1, max_child_size = 0;

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != nd[u].parent) {

      nd[v].parent = u;
      nd[v].d = 1 + nd[u].d;
      int child_size = heavy_dfs(v);
      my_size += child_size;
      if (child_size > max_child_size) {
        max_child_size = child_size;
        nd[u].heavy = v;
      }

    }
  }

  return my_size;
}

void decompose_dfs(int u, int head) {
  static int time = 0;
```

```
  nd[u].head = head;
  nd[u].tin = time++;

  if (nd[u].heavy) {
    decompose_dfs(nd[u].heavy, head);
  }
  nd[u].light_start = time;

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != nd[u].parent && v != nd[u].heavy) {
      decompose_dfs(v, v); // începi un lanț nou
    }
  }

  nd[u].tout = time - 1;
}

void init_segment_trees() {
  seg.init(n);
  seg_diff.init(n);
  seg_2diff.init(n);
}

void toggle(int u) {
  int was_off = seg.get(nd[u].tin) == INFINITY;
  int val = was_off ? nd[u].d : INFINITY;
  seg.set(nd[u].tin, val);

  while (u) {
    seg_diff.set(nd[u].tin, (val == INFINITY) ? INFINITY : (val - nd[u].d));
    seg_2diff.set(nd[u].tin, (val == INFINITY) ? INFINITY : (val - 2 * nd[u].d));
    u = nd[nd[u].head].parent;
    if (u) {
      val = seg.get_min(nd[u].light_start, nd[u].tout);
    }
  }
}

// Găsește distanța minimă până la o frunză urcînd din u.
int up_query(int u) {
  int leaf_dist = INFINITY;
  int orig_u = u;

  while (u) {
    int h = nd[u].head;
    int on_path_h_u = seg_2diff.get_min_plus(nd[h].tin, nd[u].tin, nd[orig_u].d);
    int on_path_below_u = seg.get_min_plus(nd[u].tin, nd[u].tout, nd[orig_u].d - 2 * nd[u].d);
    leaf_dist = min(leaf_dist, on_path_h_u);
    leaf_dist = min(leaf_dist, on_path_below_u);
```

```
    u = nd[h].parent;
  }

  return leaf_dist;
}

// Găsește distanța în jos pînă la o frunză de la orice nod de pe lanțul greu
// u-v.
int path_score(int u, int v) {
  int on_path_u_v = seg_diff.get_min(nd[u].tin, nd[v].tin);
  int in_subtree_of_v = seg.get_min_plus(nd[v].tin, nd[v].tout, -nd[v].d);
  return min(on_path_u_v, in_subtree_of_v);
}

int query(int u, int v) {
  int orig_u = u, orig_v = v;

  int leaf_dist = INFINITY;
  // Urcă-l pe u sau v cît timp sînt pe lanțuri diferite.
  while (nd[u].head != nd[v].head) {
    if (nd[v].tin > nd[u].tin) {
      int tmp = u; u = v; v = tmp;
    }
    int h = nd[u].head;
    leaf_dist = min(leaf_dist, path_score(h, u));
    u = nd[h].parent;
  }

  // O ultimă operație cînd u și v se află pe același lanț.
  if (nd[u].tin > nd[v].tin) {
    int tmp = u; u = v; v = tmp;
  }
  leaf_dist = min(leaf_dist, path_score(u, v));

  leaf_dist = min(leaf_dist, up_query(u));

  if (leaf_dist == INFINITY) {
    return -1;
  } else {
    int dist_uv = nd[orig_u].d + nd[orig_v].d - 2 * nd[u].d;
    return dist_uv + 2 * leaf_dist;
  }
}

void process_ops() {
  int type, u, v;

  while (num_ops--) {
    scanf("%d %d", &type, &u);
    if (type == OP_TOGGLE) {
```

```
      toggle(u);
    } else {
      scanf("%d", &v);
      printf("%d\n", query(u, v));
    }
  }
}

int main() {
  read_tree();
  heavy_dfs(1);
  decompose_dfs(1, 1);
  init_segment_trees();
  process_ops();

  return 0;
}
```

Soluție parțială cu descompunere în radical (versiune online).

```
// Complexitate: O((n + q) sqrt q).
// Metodă: Descompunere în radical după interogări.
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;
const int MAX_OPS = 200'000;
const int MAX_LOG = 19;
const int BLOCK_SIZE = 2'000; // determinat experimental
const int INFINITY = 2 * MAX_NODES;

const int OP_TOGGLE = 1;
const int OP_QUERY = 2;

struct cell {
  int v, next;
};

cell list[2 * MAX_NODES];

struct node {
  int adj;
  int depth;

  // binary lifting cu doi pointeri per nod
  int parent, jump;

  int dist; // distanța până la cea mai apropiată frunză safe

  // distanța până la cea mai apropiată frunză safe de la orice nod subîntins
```

```
  // de jump pointer (excluzînd nodul destinație)
  int jdist;

  bool active;
  bool safe;
};

struct operation {
  int type, u, v;
};

// O simplă coadă.
struct queue {
  int v[MAX_NODES];
  int head, tail;

  void init() {
    head = tail = 0;
  }

  void enqueue(int u) {
    v[tail++] = u;
  }

  int dequeue() {
    return v[head++];
  }

  bool is_empty() {
    return head == tail;
  }
};

// O colecție care menține valori distincte între 1 și MAX_NODES și admite
// adăugări și ștergeri în O(1) și iterarea prin valori în O(nr. de valori).
struct tracker {
  int size;
  int t[BLOCK_SIZE];
  int pos[MAX_NODES + 1]; // BLOCK_SIZE = absent

  void init(int max_val) {
    for (int val = 1; val <= max_val; val++) {
      pos[val] = BLOCK_SIZE;
    }
    size = 0;
  }

  void clear() {
    for (int i = 0; i < size; i++) {
      pos[t[i]] = BLOCK_SIZE;
```

```
    }
    size = 0;
  }

  void add(int val) {
    pos[val] = size;
    t[size++] = val;
  }

  void remove(int val) {
    int p = pos[val];
    t[p] = t[size - 1]; // move last element in place of val
    pos[t[p]] = p;
    pos[val] = BLOCK_SIZE;
    size--;
  }

  void toggle(int val) {
    if (pos[val] == BLOCK_SIZE) {
      add(val);
    } else {
      remove(val);
    }
  }
};

node nd[MAX_NODES + 1];
operation op[MAX_OPS];
tracker unsafe;
queue q;
int n, num_ops;

int log(int x) {
  return 31 - __builtin_clz(x);
}

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

// Liniarizare cu RMQ, cu care putem răspunde la interogări de LCA în O(1).
struct lca_info {
  int d[MAX_LOG][2 * MAX_NODES];
  int tout[MAX_NODES + 1];
  int n; // lungimea liniarizării

  void append(int u) {
    tout[u] = n;
    d[0][n++] = u;
  }
```

```
  void build_rmq_table() {
    for (int l = 1; (1 << l) <= n; l++) {
      for (int i = 0; i <= n - (1 << l); i++) {
        int r = i + (1 << (l - 1));
        d[l][i] = (nd[d[l - 1][i]].depth < nd[d[l - 1][r]].depth)
          ? d[l - 1][i]
          : d[l - 1][r];
      }
    }
  }

  int lca(int u, int v) {
    int left = min(tout[u], tout[v]);
    int right = tout[u] + tout[v] - left;
    int bits = log(right - left + 1);
    int x = d[bits][left];
    int y = d[bits][right - (1 << bits) + 1];
    return (nd[x].depth < nd[y].depth) ? x : y;
  }

  int dist(int u, int v) {
    int l = lca(u, v);
    return nd[u].depth + nd[v].depth - 2 * nd[l].depth;
  }
};

lca_info l;

void add_edge(int u, int v) {
  static int ptr = 1;
  list[ptr] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = ptr++;
}

void read_data() {
  scanf("%d %d", &n, &num_ops);

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }

  for (int i = 0; i < num_ops; i++) {
    scanf("%d %d", &op[i].type, &op[i].u);
    if (op[i].type == OP_QUERY) {
      scanf("%d", &op[i].v);
    }
```

```
  }
}

// Calculează părinți, adîncimi, jump pointers și liniarizarea.
void initial_dfs(int u) {
  int u2 = nd[u].jump, u3 = nd[u2].jump;
  bool equal = (nd[u2].depth - nd[u].depth == nd[u3].depth - nd[u2].depth);
  l.append(u);

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != nd[u].parent) {
      nd[v].depth = 1 + nd[u].depth;
      nd[v].parent = u;
      nd[v].jump = equal ? u3 : u;
      initial_dfs(v);
      l.append(u);
    }
  }
}

// Colecteaza un bloc cu tel mult BLOCK_SIZE operații toggle(). Marchează ca
// safe frunzele care sînt active acum și care nu vor fi modificate în bloc.
// Inițializează trackerul cu frunzele unsafe, dar care încep ca active.
// Returnează finalul blocului.
int classify_leaves(int start) {
  int num_toggles = 0;
  int end = start;

  unsafe.clear();
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    nd[u].safe = nd[u].active;
  }

  while ((end < num_ops) && (num_toggles < BLOCK_SIZE)) {
    if (op[end].type == OP_TOGGLE) {
      int u = op[end].u;
      if (nd[u].safe) {
        // Frunza este unsafe, dar începe ca activă.
        unsafe.add(u);
        nd[u].safe = false;
      }
      num_toggles++;
    }
    end++;
  }

  return end;
}
```

```
// Recalculează câmpul dist pentru toate nodurile.
void bfs_from_safe_leaves() {
  q.init();

  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    if (nd[u].safe) {
      nd[u].dist = 0;
      q.enqueue(u);
    } else {
      nd[u].dist = INFINITY;
    }
  }

  while (!q.is_empty()) {
    int u = q.dequeue();
    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
      int v = list[ptr].v;
      if (nd[v].dist == INFINITY) {
        nd[v].dist = nd[u].dist + 1;
        q.enqueue(v);
      }
    }
  }
}

// Recalculează câmpul jdist pentru toate nodurile.
void jdist_dfs(int u) {
  nd[u].jdist = nd[u].dist;

  int p = nd[u].parent;
  if (nd[u].jump != p) {
    int p2 = nd[p].jump;
    nd[u].jdist = min(nd[u].jdist, nd[p].jdist);
    nd[u].jdist = min(nd[u].jdist, nd[p2].jdist);
  }

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != p) {
      jdist_dfs(v);
    }
  }
}

// Returnează finalul blocului.
int preprocess_block(int start) {
  int end = classify_leaves(start);
  bfs_from_safe_leaves();
  jdist_dfs(1);
```

```
  return end;
}

// Returnează distanța minimă la o frunză safe de la orice nod de pe calea [u,
// ancestor].
int upwards_path_min(int u, int ancestor) {
  int result = nd[ancestor].dist;

  while (u != ancestor) {
    if (nd[u].jump && (nd[nd[u].jump].depth >= nd[ancestor].depth)) {
      result = min(result, nd[u].jdist);
      u = nd[u].jump;
    } else {
      result = min(result, nd[u].dist);
      u = nd[u].parent;
    }
  }

  return result;
}

int query(int u, int v) {
  // Rezultatul vizitării unei frunze safe.
  int w = l.lca(u, v);
  int leaf_dist = min(upwards_path_min(u, w), upwards_path_min(v, w));
  int dist_uv = nd[u].depth + nd[v].depth - 2 * nd[w].depth;
  int result = 2 * leaf_dist + dist_uv;

  // Rezultatul vizitării unei frunze unsafe.
  for (int i = 0; i < unsafe.size; i++) {
    int leaf = unsafe.t[i];
    result = min(result, l.dist(u, leaf) + l.dist(leaf, v));
  }

  return (result < INFINITY) ? result : -1;
}

void toggle(int u) {
  unsafe.toggle(u);
  nd[u].active = !nd[u].active;
}

void process_ops() {
  int block_end = 0;

  for (int i = 0; i < num_ops; i++) {
    if (i == block_end) {
      block_end = preprocess_block(i);
    }
    if (op[i].type == OP_TOGGLE) {
```

```
      toggle(op[i].u);
    } else {
      printf("%d\n", query(op[i].u, op[i].v));
    }
  }
}

int main() {
  read_data();
  initial_dfs(1);
  l.build_rmq_table();
  unsafe.init(n);
  process_ops();

  return 0;
}
```

K.5 Problema Query on a Tree VI (CodeChef)

‹ înapoi • versiune online

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 100'000;
const int BLACK = 0;
const int WHITE = 1;
const int T_QUERY = 0;
const int T_TOGGLE = 1;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int parent;
  int heavy;  // fiul cu cel mai mare subarbore
  int head;   // începutul lanțului nostru
  int pos;    // timpul de descoperire în DFS / poziția în liniarizare
  int size;   // mărimea subarborelui (indiferent de culoare)
  bool color;
};

// Un AIB cu adăugare pe interval și interogare punctuală.
struct range_add_fenwick_tree {
  int v[MAX_NODES + 2];
  int n;
```

```
  void init(int n) {
    this->n = n;
  }

  void add(int pos, int delta) {
    do {
      v[pos] += delta;
      pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
  }

  void range_add(int l, int r, int delta) {
    add(l, delta);
    add(r + 1, -delta);
  }

  void point_add(int pos, int delta) {
    range_add(pos, pos, delta);
  }

  int point_query(int pos) {
    int sum = 0;
    while (pos) {
      sum += v[pos];
      pos &= pos - 1;
    }
    return sum;
  }
};

// Un AIB de booleeni cu suport pentru căutări binare.
struct bool_fenwick_tree {
  int v[MAX_NODES + 1];
  int n;
  int max_p2;

  void init(int n, bool val) {
    this->n = n;
    max_p2 = 1 << (31 - __builtin_clz(n));

    for (int i = 1; i <= n; i++) {
      v[i] += val;
      int j = i + (i & -i);
      if (j <= n) {
        v[j] += v[i];
      }
    }
  }

  void add(int pos, int delta) {
```

```
    do {
      v[pos] += delta;
      pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
  }

  void set(int pos) {
    add(pos, +1);
  }

  void clear(int pos) {
    add(pos, -1);
  }

  int prefix_sum(int pos) {
    int sum = 0;
    while (pos) {
      sum += v[pos];
      pos &= pos - 1;
    }
    return sum;
  }

  int last_occurrence_of_partial_sum(int sum) {
    int pos = 0;

    for (int interval = max_p2; interval; interval >>= 1) {
      if ((pos + interval <= n) && (v[pos + interval] < sum)) {
        sum -= v[pos + interval];
        pos += interval;
      }
    }

    return pos;
  }

  // Returnează poziția ultimului 1 pe o poziție ≤ pos.
  int last_one_before(int pos) {
    int s = prefix_sum(pos);
    if (s) {
      return 1 + last_occurrence_of_partial_sum(s);
    } else {
      return 0;
    }
  }
};

cell list[2 * MAX_NODES];
range_add_fenwick_tree size[2];
bool_fenwick_tree color[2];
```

```
node nd[MAX_NODES + 1];
int hld_order[MAX_NODES + 1];
int n;

void add_edge(int u, int v) {
  static int ptr = 1;
  list[ptr] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = ptr++;
}

void read_tree() {
  scanf("%d", &n);
  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }
}

void init_fenwick_trees() {
  size[BLACK].init(n);
  size[WHITE].init(n);
  color[BLACK].init(n, 1);
  color[WHITE].init(n, 0);
}

void heavy_dfs(int u) {
  nd[u].size = 1;

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != nd[u].parent) {

      nd[v].parent = u;
      heavy_dfs(v);
      nd[u].size += nd[v].size;
      if (!nd[u].heavy || (nd[v].size > nd[nd[u].heavy].size)) {
        nd[u].heavy = v;
      }

    }
  }
}

void decompose_dfs(int u, int head) {
  static int time = 1;

  nd[u].head = head;
  size[BLACK].point_add(time, nd[u].size);
```

```
  size[WHITE].point_add(time, 1);
  hld_order[time] = u;
  nd[u].pos = time++;

  if (nd[u].heavy) {
    decompose_dfs(nd[u].heavy, head);
  }

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != nd[u].parent && v != nd[u].heavy) {
      decompose_dfs(v, v); // începe un lanț nou
    }
  }
}

// Returnează cel mai depărtat strămoș w pe același lanț greu cu u astfel
// încît (1) toate nodurile de la w la u inclusiv au aceeași culoare și (2)
// părintele lui w are o culoare diferită. Notă: părintele lui w poate fi pe
// lanțul următor. Returnează 0 dacă w nu există.
int get_top_same_color(int u) {
  int start = nd[nd[u].head].pos;
  int pos_1 = color[!nd[u].color].last_one_before(nd[u].pos);
  if (pos_1 >= start) {
    // Există un nod de culoare opusă pe lanț.
    return hld_order[pos_1 + 1];
  }

  int next_path = nd[nd[u].head].parent;
  if (nd[next_path].color != nd[u].color) {
    // Părintele capului de lanț are culoarea opusă.
    return nd[u].head;
  }

  return 0;
}

int query(int u) {
  nd[0].color = !nd[u].color; // santinelă

  int t;
  while (u && (t = get_top_same_color(u)) == 0) {
    u = nd[nd[u].head].parent;
  }

  return size[nd[t].color].point_query(nd[t].pos);
}

void path_update(int u, int delta1, int delta2) {
  int c = nd[u].color;
```

```
  size[!c].point_add(nd[u].pos, delta1);

  // Toți strămoșii câștigă/pierd cîtă vreme au culoarea părintelui.
  int t;
  while (u && (t = get_top_same_color(u)) == 0) {
    size[c].range_add(nd[nd[u].head].pos, nd[u].pos, delta2);
    u = nd[nd[u].head].parent;
  }

  if (u) {
    size[c].range_add(nd[t].pos, nd[u].pos, delta2);

    // Și primul strămoș de culoarea opusă câștigă/pierde.
    t = nd[t].parent;
    if (t) {
      size[c].point_add(nd[t].pos, delta2);
    }
  }
}

void toggle(int u) {
  int old = nd[u].color;
  nd[u].color = !old;

  color[old].clear(nd[u].pos);
  color[!old].set(nd[u].pos);

  int p = nd[u].parent;
  if (p) {
    int lose = size[old].point_query(nd[u].pos);
    int gain = size[!old].point_query(nd[u].pos);
    if (nd[u].color == nd[p].color) {
      path_update(p, -lose, gain);
    } else {
      path_update(p, gain, -lose);
    }
  }
}

void process_ops() {
  int num_queries, type, u;
  scanf("%d", &num_queries);
  while (num_queries--) {
    scanf("%d %d", &type, &u);
    if (type == T_QUERY) {
      printf("%d\n", query(u));
    } else {
      toggle(u);
    }
  }
```

```
}

int main() {
  read_tree();
  init_fenwick_trees();
  heavy_dfs(1);
  decompose_dfs(1, 1);
  process_ops();

  return 0;
}
```

K.6 Problema Adă caii (Lot 2025)

‹ înapoi • versiune online

```
#include <stdio.h>
#include <unordered_set>

const int MAX_NODES = 100'000;
const int MAX_PATH = 1'800; // determinat experimental

typedef std::unordered_set<int> hash_set;

// Un buffer circular de n elemente care operează într-o zonă de memorie
// alocată extern.
struct circ_buf {
  int* v;
  int n;
  int offset; // Conținutul real al vectorului este v[offset]...v[offset-1].
  int num_nonzero;

  void init(int* _v, int _n) {
    v = _v;
    n = _n;
    offset = 0;
    num_nonzero = 0;

    for (int i = 0; i < n; i++) {
      v[i] = 0;
    }
  }

  bool is_empty() {
    return num_nonzero == 0;
  }

  int get(int pos) {
```

```
  return v[(pos + offset) % n];
}

void set(int pos, int val) {
  pos = (pos + offset) % n;
  num_nonzero -= (v[pos] != 0);
  v[pos] = val;
  num_nonzero += (v[pos] != 0);
}

void add(int pos, int delta) {
  set(pos, get(pos) + delta);
}

// Shiftează (conceptual) toate elementele spre stînga. Inserează un zero la
// coadă. Returnează elementul care a ieșit din buffer.
int shift_left() {
  int leftmost = v[offset];
  num_nonzero -= (leftmost != 0);
  v[offset] = 0;
  offset = (offset + 1) % n;
  return leftmost;
}

int shift_right() {
  offset = (offset + n - 1) % n;
  int rightmost = v[offset];
  num_nonzero -= (rightmost != 0);
  v[offset] = 0;
  return rightmost;
}

// Mută naiv elementele din stînga lui pos cu 1 mai la dreapta. Mută
// eficient elementele din dreapta lui pos cu 1 mai la stînga. Returnează
// valoarea inițială de pe poziția pos.
int attract_left(int pos) {
  if (pos == 0) {
    return shift_left();
  }

  int extracted = get(pos);

  add(pos + 1, get(pos - 1));
  for (int i = pos; i >= 2; i--) {
    set(i, get(i - 2));
  }
  set(1, 0);
  shift_left();

  return extracted;
```

```
  }

  int attract_right(int pos) {
    if (pos == n - 1) {
      return shift_right();
    }

    int extracted = get(pos);

    add(pos - 1, get(pos + 1));
    for (int i = pos; i + 2 < n; i++) {
      set(i, get(i + 2));
    }
    set(n - 2, 0);
    shift_right();

    return extracted;
  }

  int attract(int pos) {
    return (2 * pos < n)
      ? attract_left(pos)
      : attract_right(pos);
  }
};

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int parent;
  int heavy;   // fiul cu cel mai mare subarbore
  int head;    // capătul lanțului nostru
  int pos;     // momentul descoperirii în dfs
  int tmp_pop; // populația din nod, doar temporar pînă construim HLD

  circ_buf pop; // populația pe lanț, folosită doar în capetele de lanț
};

// Nu putem muta instantaneu caii de pe un lanț L1 pe altul L2, căci dacă încă
// nu l-am procesat pe L2, vom muta ulterior caii încă odată. Deci ținem o
// listă de postprocesări de făcut după ce procesăm toate lanțurile.
struct postprocess {
  int node, pop;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
int circ_buf_space[MAX_NODES];
```

```
node nd[MAX_NODES + 1];
hash_set nonempty_paths; // Doar prin aceste lanțuri vom itera.
postprocess postproc[MAX_NODES];
int n, num_queries, num_postproc;

void add_edge(int u, int v) {
  static int ptr = 1;
  list[ptr] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = ptr++;
}

void read_tree() {
  scanf("%d %d", &n, &num_queries);

  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    scanf("%d", &nd[u].tmp_pop);
  }

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }
}

int heavy_dfs(int u) {
  int my_size = 1, max_child_size = 0;

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != nd[u].parent) {

      nd[v].parent = u;
      int child_size = heavy_dfs(v);
      my_size += child_size;
      if (child_size > max_child_size) {
        max_child_size = child_size;
        nd[u].heavy = v;
      }

    }
  }

  return my_size;
}

// Descompunere heavy-light cu o mică modificare: impunem o limită de
// MAX_PATH pe lungimea oricărui lanț.
void decompose_dfs(int u, int head) {
```

```
  static int time = 0;

  nd[u].head = head;
  nd[u].pos = time++;
  int path_size = nd[u].pos - nd[head].pos + 1;
  bool can_fit_heavy = (path_size < MAX_PATH);

  if (nd[u].heavy && can_fit_heavy) {
    decompose_dfs(nd[u].heavy, head);
  } else {
    // Aici se termină lanțul head-u.
    int* start_pos = circ_buf_space + nd[head].pos;
    nd[head].pop.init(start_pos, path_size);
  }

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != nd[u].parent && ((v != nd[u].heavy) || !can_fit_heavy)) {
      decompose_dfs(v, v); // la v începe un lanț nou
    }
  }
}

void populate_circular_buffers() {
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    int h = nd[u].head;
    int pos = nd[u].pos - nd[h].pos;
    nd[h].pop.add(pos, nd[u].tmp_pop);
  }

  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    if ((nd[u].head == u) && !nd[u].pop.is_empty()) {
      nonempty_paths.insert(u);
    }
  }
}

void migrate_paths_to_root(int u, hash_set& paths_to_root) {
  int prev_h = 0;
  while (u) {
    int h = nd[u].head;
    if (!nd[h].pop.is_empty()) {
      int pos = nd[u].pos - nd[h].pos;
      int extracted = nd[h].pop.attract(pos);
      if (prev_h && extracted) {
        // Caii din centrul migrației coboară la începutul următorului lanț.
        postproc[num_postproc++] = { prev_h, extracted };
      } else {
        // Caii din centrul migrației nu pleacă nicăieri.
        nd[h].pop.add(pos, extracted);
```

```
      }
    }

    paths_to_root.insert(h);
    u = nd[h].parent;
    prev_h = h;
  }
}

// Migrează caii de pe celelalte lanțuri nevide. Evită lanțurile deja migrate
// în migrate_paths_to_root.
void migrate_other_paths(int u, hash_set paths_to_root) {
  for (int h: nonempty_paths) {
    if (!paths_to_root.contains(h)) {
      int extracted = nd[h].pop.shift_left(); // spre rădăcină
      if (extracted) {
        postproc[num_postproc++] = { nd[h].parent, extracted };
      }
    }
  }
}

void post_migration() {
  // Ștergem din set în timp ce iterăm prin set.
  for (auto it = nonempty_paths.begin(); it != nonempty_paths.end(); ) {
    if (nd[*it].pop.is_empty()) {
      it = nonempty_paths.erase(it);
    } else {
      it++;
    }
  }

  while (num_postproc) {
    postprocess& p = postproc[--num_postproc];
    int h = nd[p.node].head;
    int pos = nd[p.node].pos - nd[h].pos;
    nd[h].pop.add(pos, p.pop);
    nonempty_paths.insert(h);
  }
}

void migrate(int u) {
  hash_set paths_to_root;
  migrate_paths_to_root(u, paths_to_root);
  migrate_other_paths(u, paths_to_root);
  post_migration();
}

int query(int u) {
  int h = nd[u].head;
```

```
  int pos = nd[u].pos - nd[h].pos;
  return nd[h].pop.get(pos);
}

void process_ops() {
  char type1, type2;
  int u;

  while (num_queries--) {
    scanf(" %c%c %d", &type1, &type2, &u);
    if (type1 == 'C') {
      migrate(u);
    } else {
      int claimed_pop;
      scanf("%d", &claimed_pop);
      printf("%d\n", claimed_pop == query(u));
    }
  }
}

int main() {
  read_tree();
  heavy_dfs(1);
  decompose_dfs(1, 1);
  populate_circular_buffers();
  process_ops();

  return 0;
}
```

Anexa L

Descompunere în centroizi

L.1 Problema Finding a Centroid (CSES)

înapoi

Implementare recursivă și cu STL.

```
#include <stdio.h>
#include <vector>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct node {
  std::vector<int> adj;
  int size;
};

node nd[MAX_NODES + 1];
int n;

void read_input_data() {
  scanf("%d", &n);

  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    nd[u].adj.push_back(v);
    nd[v].adj.push_back(u);
  }
}

void size_dfs(int u) {
  nd[u].size = 1;

  for (int v: nd[u].adj) {
```

```
    if (!nd[v].size) {
      size_dfs(v);
      nd[u].size += nd[v].size;
    }
  }
}

int find_centroid(int u) {
  for (int v: nd[u].adj) {
    if ((nd[v].size < nd[u].size) && (nd[v].size > n / 2)) {
      return find_centroid(v);
    }
  }

  return u;
}

int main() {
  read_input_data();
  size_dfs(1);
  int c = find_centroid(1);
  printf("%d\n", c);

  return 0;
}
```

Implementare iterativă și cu liste proprii.

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int size;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int n;

void add_child(int u, int v) {
  static int pos = 1;
  list[pos] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = pos++;
```

```
}

void read_input_data() {
  scanf("%d", &n);

  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_child(u, v);
    add_child(v, u);
  }
}

void size_dfs(int u) {
  nd[u].size = 1;

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (!nd[v].size) {
      size_dfs(v);
      nd[u].size += nd[v].size;
    }
  }
}

int get_heavy_child(int u) {
  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if ((nd[v].size < nd[u].size) && (nd[v].size > n / 2)) {
      return v;
    }
  }
  return 0;
}

void find_centroid() {
  int u = 1, child;

  while ((child = get_heavy_child(u)) != 0) {
    u = child;
  }

  printf("%d\n", u);
}

int main() {
  read_input_data();
  size_dfs(1);
  find_centroid();
```

```
  return 0;
}
```

L.2 Problema Mystery Tree (CodeChef)

înapoi

```
#include <stdio.h>
#include <vector>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct node {
  std::vector<int> adj;
  int size;
  bool dead;
};

node nd[MAX_NODES + 1];
int n;

void read_tree() {
  scanf("%d", &n);

  // șterge listele de adiacență
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    nd[u].adj.clear();
    nd[u].dead = false;
  }

  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    nd[u].adj.push_back(v);
    nd[v].adj.push_back(u);
  }
}

void size_dfs(int u, int parent) {
  nd[u].size = 1;

  for (int v: nd[u].adj) {
    if ((v != parent) && !nd[v].dead) {
      size_dfs(v, u);
      nd[u].size += nd[v].size;
    }
  }
}
```

```
int find_centroid(int u, int limit) {
  for (int v: nd[u].adj) {
    if ((nd[v].size < nd[u].size) && (nd[v].size > limit)) {
      return find_centroid(v, limit);
    }
  }

  return u;
}

void solve(int u) {
  int prev = 0;

  while (u != -1) {
    size_dfs(u, 0);
    u = find_centroid(u, nd[u].size / 2);

    printf("1 %d\n", u);
    fflush(stdout);

    nd[u].dead = true;
    prev = u;
    scanf("%d", &u);
  }

  printf("2 %d\n", prev);
}

int main() {
  int num_tests, check = 1;
  scanf("%d", &num_tests);

  while (num_tests-- && (check == 1)) {
    read_tree();
    solve(1);
    scanf("%d", &check);
  }

  return 0;
}
```

L.3 Problema Ciel the Commander (Codeforces)

‹ înapoi

Soluție cu descompunere în centroizi.

```cpp
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int size;
  bool dead;
  char rank; // răspunsul
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int n;

void add_child(int u, int v) {
  static int pos = 1;
  list[pos] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = pos++;
}

void read_input_data() {
  scanf("%d", &n);

  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_child(u, v);
    add_child(v, u);
  }
}

void size_dfs(int u, int parent) {
  nd[u].size = 1;

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if ((v != parent) && !nd[v].dead) {
      size_dfs(v, u);
      nd[u].size += nd[v].size;
    }
  }
}

int find_centroid(int u, int limit) {
```

```
  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if ((nd[v].size < nd[u].size) && !nd[v].dead && (nd[v].size > limit)) {
      return find_centroid(v, limit);
    }
  }

  return u;
}

void decompose(int u, int rank) {
  size_dfs(u, 0);
  u = find_centroid(u, nd[u].size / 2);

  // Aceasta este problema pe care o rezolvăm. Restul codului este șablonul
  // pentru descompunerea în centroizi.
  nd[u].rank = rank;

  nd[u].dead = true;
  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (!nd[v].dead) {
      decompose(v, rank + 1);
    }
  }
}

void write_ranks() {
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    putchar(nd[u].rank);
    putchar((u == n) ? '\n' : ' ');
  }
}

int main() {
  read_input_data();
  decompose(1, 'A');
  write_ranks();

  return 0;
}
```

Soluție elementară.

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct cell {
```

```
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  char rank; // răspunsul
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int n;

void add_child(int u, int v) {
  static int pos = 1;
  list[pos] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = pos++;
}

void read_input_data() {
  scanf("%d", &n);

  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_child(u, v);
    add_child(v, u);
  }
}

// Returnează indicele celui mai din dreapta bit care respectă regulile de
// combinare.
int get_valid_bit(unsigned once, unsigned twice) {
  // Ia cel mai mare rang care apare de două ori.
  int msb = twice
    ? (31 - __builtin_clz(twice))
    : -1;

  // Fiecare bit în stînga lui msb este OK.
  unsigned legal_twice = ~((1 << (msb + 1)) - 1);

  // Fiecare bit văzut o singură dată nu este OK.
  unsigned legal_once = ~once;

  // Trebuie să respectăm ambele criterii.
  unsigned both = legal_once & legal_twice;

  // Returnează indicele celui mai din dreapta bit.
  return __builtin_ctz(both);
}
```

```
// Returnează o mască pe 26 de biți a rangurilor vizibile (MSB este A, LSB
// este Z).
unsigned dfs(int u, int parent) {
  unsigned once = 0, twice = 0;

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != parent) {
      unsigned vis_mask = dfs(v, u);
      // Noduri văzute o dată înainte și a doua oară în subarborele lui v.
      twice |= vis_mask & once;
      once |= vis_mask;
    }
  }

  int bit = get_valid_bit(once, twice);
  nd[u].rank = 'Z' - bit;

  // Acest rang este vizibil și maschează toate rangurile mai mici.
  return (1 << bit) | (once & ~((1 << bit) - 1));
}

void write_ranks() {
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    putchar(nd[u].rank);
    putchar((u == n) ? '\n' : ' ');
  }
}

int main() {
  read_input_data();
  dfs(1, 0);
  write_ranks();

  return 0;
}
```

L.4 Problema Fixed-Length Paths I (CSES) (din nou)

‹ înapoi

```
#include <stdio.h>
#include <vector>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct node {
  std::vector<int> adj;
```

```
  int size;
  bool dead;
};

node nd[MAX_NODES + 1];
int freq[MAX_NODES];
int length;
long long answer;

void read_input_data() {
  int n;
  scanf("%d %d", &n, &length);

  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    nd[u].adj.push_back(v);
    nd[v].adj.push_back(u);
  }
}

/**
 * Aceasta este problema pe care o rezolvăm efectiv.
 **/

int max(int x, int y) {
  return (x > y) ? x : y;
}

int max_depth;

// Numără căile de lungime k pornind din u, mergînd în sus pînă la centroid și
// în jos în alt subarbore.
void count_dfs(int u, int parent, int depth) {
  max_depth = max(max_depth, depth);
  answer += freq[length - depth];

  for (int v: nd[u].adj) {
    if ((!nd[v].dead) && (v != parent) && (depth < length)) {
      count_dfs(v, u, depth + 1);
    }
  }
}

// Marchează adîncimile fiecărui nod.
void mark_dfs(int u, int parent, int depth) {
  freq[depth]++;

  for (int v: nd[u].adj) {
    if ((!nd[v].dead) && (v != parent) && (depth < length)) {
```

```
      mark_dfs(v, u, depth + 1);
    }
  }
}

// Numără căile de lungime k care trec prin u.
void count_paths_through(int u) {
  freq[0] = 1; // nodul u însuși
  max_depth = 0;

  for (int v: nd[u].adj) {
    if (!nd[v].dead) {
      count_dfs(v, u, 1);
      mark_dfs(v, u, 1);
    }
  }

  for (int d = 0; d <= max_depth; d++) {
    freq[d] = 0;
  }
}

/**
 * Restul codului (decompose(), size_dfs() și find_centroid()) este șablon. Îl
 * folosim deoarece ne permite să rulăm un DFS din fiecare centroid și să
 * obținem timp O(n log n).
 **/

void size_dfs(int u, int parent) {
  nd[u].size = 1;

  for (int v: nd[u].adj) {
    if ((v != parent) && !nd[v].dead) {
      size_dfs(v, u);
      nd[u].size += nd[v].size;
    }
  }
}

int find_centroid(int u, int limit) {
  for (int v: nd[u].adj) {
    if ((nd[v].size < nd[u].size) && (nd[v].size > limit)) {
      return find_centroid(v, limit);
    }
  }

  return u;
}

void decompose(int u) {
```

```
  size_dfs(u, 0);
  u = find_centroid(u, nd[u].size / 2);

  // Aceasta este ce încercăm să rezolvăm.
  count_paths_through(u);

  nd[u].dead = true;
  for (int v: nd[u].adj) {
    if (!nd[v].dead) {
      decompose(v);
    }
  }
}

void write_answer() {
  printf("%lld\n", answer);
}

int main() {
  read_input_data();
  decompose(1);
  write_answer();

  return 0;
}
```

L.5 Problema Xenia and Tree (Codeforces)

‹ înapoi

Soluție cu descompunere în radical după operații.

```
// Complexitate: O((n + q) sqrt q).
// Metodă: Descompunere în radical după operații.
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 100'000;
const int MAX_LOG = 18;
const int BLOCK_SIZE = 1'000; // determinat experimental
const int INFINITY = MAX_NODES;

const int OP_PAINT = 1;

struct cell {
  int v, next;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
```

```
struct node {
  int adj;
  int depth;
  int dist; // distanța până la cel mai apropiat nod roșu
  bool red;
};

struct queue {
  int v[MAX_NODES];
  int head, tail;

  void init() {
    head = tail = 0;
  }

  void enqueue(int u) {
    v[tail++] = u;
  }

  int dequeue() {
    return v[head++];
  }

  bool is_empty() {
    return head == tail;
  }
};

node nd[MAX_NODES + 1];
int fresh[BLOCK_SIZE];
queue q;
int n, num_ops, num_fresh;

int log(int x) {
  return 31 - __builtin_clz(x);
}

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

// O liniarizare DFS cu repetiție și informații pentru interogări de RMQ și
// LCA în O(1).
struct lca_info {
  int d[MAX_LOG][2 * MAX_NODES];
  int tout[MAX_NODES + 1];
  int n; // lungimea liniarizării

  void append(int u) {
```

```
    tout[u] = n;
    d[0][n++] = u;
  }

  void build_rmq_table() {
    for (int l = 1; (1 << l) <= n; l++) {
      for (int i = 0; i <= n - (1 << l); i++) {
        int r = i + (1 << (l - 1));
        d[l][i] = (nd[d[l - 1][i]].depth < nd[d[l - 1][r]].depth)
          ? d[l - 1][i]
          : d[l - 1][r];
      }
    }
  }

  int lca(int u, int v) {
    int left = min(tout[u], tout[v]);
    int right = tout[u] + tout[v] - left;
    int bits = log(right - left + 1);
    int x = d[bits][left];
    int y = d[bits][right - (1 << bits) + 1];
    return (nd[x].depth < nd[y].depth) ? x : y;
  }

  int dist(int u, int v) {
    int l = lca(u, v);
    return nd[u].depth + nd[v].depth - 2 * nd[l].depth;
  }
};

lca_info l;

void add_edge(int u, int v) {
  static int ptr = 1;
  list[ptr] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = ptr++;
}

void read_tree() {
  scanf("%d %d", &n, &num_ops);

  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }
}

// Calculează adîncimile și liniarizarea.
```

```
void initial_dfs(int u, int parent) {
  l.append(u);

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != parent) {
      nd[v].depth = 1 + nd[u].depth;
      initial_dfs(v, u);
      l.append(u);
    }
  }
}

void bfs_from_red_nodes() {
  q.init();

  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    if (nd[u].red) {
      nd[u].dist = 0;
      q.enqueue(u);
    } else {
      nd[u].dist = INFINITY;
    }
  }

  while (!q.is_empty()) {
    int u = q.dequeue();
    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
      int v = list[ptr].v;
      if (nd[v].dist == INFINITY) {
        nd[v].dist = nd[u].dist + 1;
        q.enqueue(v);
      }
    }
  }
}

void preprocess_block() {
  bfs_from_red_nodes();
  num_fresh = 0;
}

void paint(int u) {
  nd[u].red = true;
  fresh[num_fresh++] = u;
}

int query(int u) {
  int result = nd[u].dist;
  for (int i = 0; i < num_fresh; i++) {
```

```
    result = min(result, l.dist(u, fresh[i]));
  }

  return result;
}

void process_ops() {
  nd[1].red = true;

  for (int i = 0; i < num_ops; i++) {
    if (i % BLOCK_SIZE == 0) {
      preprocess_block();
    }
    int type, u;
    scanf("%d %d", &type, &u);
    if (type == OP_PAINT) {
      paint(u);
    } else {
      printf("%d\n", query(u));
    }
  }
}

int main() {
  read_tree();
  initial_dfs(1, 0);
  l.build_rmq_table();
  process_ops();

  return 0;
}
```

Soluție cu descompunere în centroizi.

```
// Complexitate: O((n + q) log n).
// Metodă: Descompunere în centroizi.
#include <stdio.h>
#include <vector>

const int MAX_NODES = 100'000;
const int MAX_LOG = 17;

struct node {
  std::vector<int> adj;
  int size;
  int level;
  int closest_red;
  int cparent; // părintele în arborele de centroizi
  int cdist[MAX_LOG]; // distanța până la părintele centroid de nivel k
```

```
  bool dead;
};

node nd[MAX_NODES + 1];
int freq[MAX_NODES];
int n, num_queries;

void read_input_data() {
  scanf("%d %d", &n, &num_queries);

  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    nd[u].adj.push_back(v);
    nd[v].adj.push_back(u);
  }
}

void size_dfs(int u, int parent) {
  nd[u].size = 1;

  for (int v: nd[u].adj) {
    if ((v != parent) && !nd[v].dead) {
      size_dfs(v, u);
      nd[u].size += nd[v].size;
    }
  }
}

void dist_dfs(int u, int parent, int level) {
  for (int v: nd[u].adj) {
    if ((v != parent) && !nd[v].dead) {
      nd[v].cdist[level] = 1 + nd[u].cdist[level];
      dist_dfs(v, u, level);
    }
  }
}

int find_centroid(int u, int limit) {
  for (int v: nd[u].adj) {
    if ((nd[v].size < nd[u].size) && (nd[v].size > limit)) {
      return find_centroid(v, limit);
    }
  }

  return u;
}

void decompose(int u, int parent, int level) {
  size_dfs(u, 0);
```

```
  u = find_centroid(u, nd[u].size / 2);

  nd[u].dead = true;
  nd[u].level = level;
  nd[u].cparent = parent;

  dist_dfs(u, 0, level);

  for (int v: nd[u].adj) {
    if (!nd[v].dead) {
      decompose(v, u, level + 1);
    }
  }
}

int min(int x, int y) {
  return (x < y) ? x : y;
}

void paint_red(int u) {
  int center = u;
  for (int l = nd[u].level; l >= 0; l--) {
    nd[center].closest_red = min(nd[center].closest_red, nd[u].cdist[l]);
    center = nd[center].cparent;
  }
}

int find_closest_red(int u) {
  int result = n; // infinit

  int center = u;
  for (int l = nd[u].level; l >= 0; l--) {
    int dist = nd[u].cdist[l] + nd[center].closest_red;
    result = min(result, dist);
    center = nd[center].cparent;
  }
  return result;
}

void init_distances() {
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    nd[u].closest_red = n; // infinit
  }
  paint_red(1);
}

void process_ops() {
  while (num_queries--) {
    int type, u;
    scanf("%d %d", &type, &u);
```

```
    if (type == 1) {
      paint_red(u);
    } else {
      printf("%d\n", find_closest_red(u));
    }
  }
}

int main() {
  read_input_data();
  decompose(1, 0, 0);
  init_distances();
  process_ops();

  return 0;
}
```

L.6 Problema Flareon (Lot 2017)

înapoi

```
#include "flareon.h"
#include <vector>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct node {
  std::vector<int> adj;
  std::vector<int> pow; // puterile flăcărilor cu originea aici
  int size;
};

static node nd[MAX_NODES + 1];
static long long ans[MAX_NODES + 1];

struct plume_tracker {
  // Date din punctul de vedere al centroidului, pe măsură ce flăcările urcă
  // în subarbore și ajung la centroid.
  //
  // Frecvențele flăcărilor indexate după puterea rămasă. Nu ținem evidența
  // puterilor mai mari decît n, deoarece acelea nu se vor stinge niciodată.
  int freq[MAX_NODES];
  // Numărul de flăcări.
  int cnt;
  // Puterea totală.
  long long sum;

  // Mărimea subarborelui curent. Ne trebuie ca să ne încadrăm în efort
```

```
// O(mărimea_subarborelui), nu O(n).
int sts;

void init(int sts) {
  this->sts = sts;
  sum = cnt = 0;
  for (int i = 0; i < sts; i++) {
    freq[i] = 0;
  }
}

void add_plume(int power, int depth, int sign) {
  if (power > depth) {
    if (power - depth < sts)  {
      freq[power - depth] += sign;
    }
    cnt += sign;
    sum += sign * (power - depth);
  }
  // Altfel nu face nimic: flacăra nu va ajunge la centroid.
}

// Colectează flăcările din nodul u și notează contribuția lor la centroid.
// Cînd sign = +1 includem contribuțiile, iar cînd sign = -1, le excludem.
void collect(int u, int parent, int depth, int sign) {
  for (int p: nd[u].pow) {
    add_plume(p, depth, sign);
  }

  for (int v: nd[u].adj) {
    if (v != parent) {
      collect(v, u, depth + 1, sign);
    }
  }
}

void distribute(int u, int parent, int depth, int cnt, long long sum) {
  // Stinge unele flăcări și redu puterile celorlalte cu cîte 1.
  sum -= cnt;
  cnt -= freq[depth];
  ans[u] += sum;

  for (int v: nd[u].adj) {
    if (v != parent) {
      distribute(v, u, depth + 1, cnt, sum);
    }
  }
}

void process_plumes_through(int u) {
```

```
    init(nd[u].size);
    collect(u, 0, 0, +1);
    ans[u] +=  sum;

    for (int v: nd[u].adj) {
      // Cînd numărăm efectele flăcărilor într-un subarbore, mai întîi
      // excludem flăcările care provin tocmai din acel subarbore.
      collect(v, u, 1, -1);
      distribute(v, u, 1, cnt, sum);
      collect(v, u, 1, +1);
    }
  }
};

plume_tracker pt;

/**
 * Restul codului (decompose(), size_dfs() și find_centroid()) este șablon. Îl
 * folosim deoarece ne permite să rulăm un DFS din fiecare centroid și să
 * obținem timp O(n log n).
 **/

void size_dfs(int u, int parent) {
  nd[u].size = 1;

  for (int v: nd[u].adj) {
    if (v != parent) {
      size_dfs(v, u);
      nd[u].size += nd[v].size;
    }
  }
}

int find_centroid(int u, int limit) {
  for (int v: nd[u].adj) {
    if ((nd[v].size < nd[u].size) && (nd[v].size > limit)) {
      return find_centroid(v, limit);
    }
  }

  return u;
}

void delete_edge(int u, int v) {
  int i = 0;
  while (nd[u].adj[i] != v) {
    i++;
  }
  nd[u].adj[i] = nd[u].adj.back();
  nd[u].adj.pop_back();
```

```
}

void delete_node(int u) {
  for (int v: nd[u].adj) {
    delete_edge(v, u);
  }
}

void decompose(int u) {
  size_dfs(u, 0);
  u = find_centroid(u, nd[u].size / 2);

  // Aceasta este problema pe care încercăm să o rezolvăm.
  pt.process_plumes_through(u);

  delete_node(u);
  for (int v: nd[u].adj) {
    decompose(v);
  }
}

void solve(int n, int m, int* v, int* pos, int* power) {
  for (int u = 2; u <= n; u++) {
    nd[u].adj.push_back(v[u - 2]);
    nd[v[u - 2]].adj.push_back(u);
  }

  for (int i = 0; i < m; i++) {
    nd[pos[i]].pow.push_back(power[i]);
  }

  decompose(1);
  answer(ans + 1); // shiftează vectorul cu 1
}
```

L.7 Problema Digit Tree (Codeforces)

înapoi

Soluție cu descompunere în centroizi și `std::map`.

```
// Method: Centroid decomposition.
// Complexity: O(n log^2 n).
#include <map>
#include <stdio.h>
#include <vector>

const int MAX_NODES = 100'000;
```

```
struct edge {
  int v, digit;
};

struct node {
  std::vector<edge> adj;
  int size;
  bool dead;
};

node nd[MAX_NODES];
int pow10[MAX_NODES + 1];
int inv_pow10[MAX_NODES + 1];
int n, mod;
long long num_pairs;

void read_tree() {
  scanf("%d %d", &n, &mod);

  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int u, v, digit;
    scanf("%d %d %d", &u, &v, &digit);
    nd[u].adj.push_back({v, digit % mod});
    nd[v].adj.push_back({u, digit % mod});
  }
}

void extended_euclid(int a, int b, int& x, int& y) {
  if (!b) {
    x = 1;
    y = 0;
  } else {
    int xp, yp;
    extended_euclid(b, a % b, xp, yp);
    x = yp;
    y = xp - (a / b) * yp;
  }
}

int inverse(int a, int mod) {
  int x, y;
  extended_euclid(a, mod, x, y);
  return (x + mod) % mod;
}

void precompute_pow10() {
  pow10[0] = 1;
  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    pow10[i] = 10ll * pow10[i - 1] % mod;
```

```
  }

  long long inv = inverse(10, mod);
  inv_pow10[0] = 1;
  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    inv_pow10[i] = inv * inv_pow10[i - 1] % mod;
  }
}

struct pair_counter {
  std::map<int, int> freq;

  void head_dfs(int u, int parent, int depth, int rem, int sign) {
    freq[rem] += sign;

    for (edge e: nd[u].adj) {
      if ((e.v != parent) && !nd[e.v].dead) {
        int new_rem = ((long long)pow10[depth] * e.digit + rem) % mod;
        head_dfs(e.v, u, depth + 1, new_rem, sign);
      }
    }
  }

  void tail_dfs(int u, int parent, int depth, int rem) {
    int h = (long long)inv_pow10[depth] * (mod - rem) % mod;

    // Numărul de moduri de a prefixa această coadă cu un început.
    num_pairs += freq[h];

    // Are coada curentă un rest egal cu zero?
    num_pairs += (rem == 0);

    for (edge e: nd[u].adj) {
      if ((e.v != parent) && !nd[e.v].dead) {
        int new_rem = ((long long)rem * 10 + e.digit) % mod;
        tail_dfs(e.v, u, depth + 1, new_rem);
      }
    }
  }

  void count_pairs_through(int u) {
    freq.clear();

    for (edge e: nd[u].adj) {
      if (!nd[e.v].dead) {
        head_dfs(e.v, u, 1, e.digit, +1);
      }
    }

    for (edge e: nd[u].adj) {
```

```
      if (!nd[e.v].dead) {
        head_dfs(e.v, u, 1, e.digit, -1);
        tail_dfs(e.v, u, 1, e.digit);
        head_dfs(e.v, u, 1, e.digit, +1);
      }
    }

    // Numărul de căi de început care au un rest 0.
    num_pairs += freq[0];
  }
};

pair_counter pc;

void size_dfs(int u, int parent) {
  nd[u].size = 1;

  for (edge e: nd[u].adj) {
    if ((e.v != parent) && !nd[e.v].dead) {
      size_dfs(e.v, u);
      nd[u].size += nd[e.v].size;
    }
  }
}

int find_centroid(int u, int limit) {
  for (edge e: nd[u].adj) {
    if ((nd[e.v].size < nd[u].size) && !nd[e.v].dead && (nd[e.v].size > limit)) {
      return find_centroid(e.v, limit);
    }
  }

  return u;
}

void decompose(int u) {
  size_dfs(u, -1);
  u = find_centroid(u, nd[u].size / 2);

  pc.count_pairs_through(u);

  nd[u].dead = true;
  for (edge e: nd[u].adj) {
    if (!nd[e.v].dead) {
      decompose(e.v);
    }
  }
}

void write_answer() {
```

```
  printf("%lld\n", num_pairs);
}

int main() {
  read_tree();
  precompute_pow10();
  decompose(0);
  write_answer();

  return 0;
}
```

Soluție cu descompunere în centroizi și căutări binare.

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>
#include <vector>

const int MAX_NODES = 100'000;

struct edge {
  int v, digit;
};

struct node {
  std::vector<edge> adj;
  int size;
};

// Stochează informații despre frecvența unui rest modulo M. Putem interoga
// aceste informații pentru un fiu dat al rădăcinii (0-based) sau pentru toți
// fiii.
struct rem_info {
  struct elem {
    int child, rem, freq;

    bool operator ==(elem other) {
      return (child == other.child) && (rem == other.rem);
    }

    bool operator <(elem other) {
      return (child < other.child) ||
        ((child == other.child) && (rem < other.rem));
    }

    bool operator >(elem other) {
      return (child > other.child) ||
        ((child == other.child) && (rem > other.rem));
    }
```

```
};

elem c[MAX_NODES], t[MAX_NODES];
int nc, nt;

void init() {
  nc = nt = 0;
}

void insert(int child, int rem) {
  c[nc++] = { child, rem, 1 };
  t[nt++] = { 0, rem, 1 };
}

int merge_duplicates(elem* v, int n) {
  if (n) {
    int j = 1;
    for (int i = 1; i < n; i++) {
      if (v[i] == v[j - 1]) {
        v[j - 1].freq++;
      } else {
        v[j++] = v[i];
      }
    }
    n = j;
  }
  return n;
}

void sort() {
  std::sort(c, c + nc);
  std::sort(t, t + nt);

  nc = merge_duplicates(c, nc);
  nt = merge_duplicates(t, nt);
}

int count_rem_0() {
  return (nt && (t[0].rem == 0))
    ? t[0].freq
    : 0;
}

int find(elem* v, int n, int child, int rem) {
  elem el = { child, rem, 0 };
  int pos = std::lower_bound(v, v + n, el) - v;
  return ((pos < n) && (v[pos] == el)) ? v[pos].freq : 0;
}

int count_not_in_child(int child, int rem) {
```

```
    return find(t, nt, 0, rem) - find(c, nc, child, rem);
  }
};

node nd[MAX_NODES];
int pow10[MAX_NODES + 1];
int inv_pow10[MAX_NODES + 1];
rem_info r;
int n, mod;
long long num_pairs;

void read_tree() {
  scanf("%d %d", &n, &mod);

  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int u, v, digit;
    scanf("%d %d %d", &u, &v, &digit);
    nd[u].adj.push_back({v, digit});
    nd[v].adj.push_back({u, digit});
  }
}

void extended_euclid(int a, int b, int& x, int& y) {
  if (!b) {
    x = 1;
    y = 0;
  } else {
    int xp, yp;
    extended_euclid(b, a % b, xp, yp);
    x = yp;
    y = xp - (a / b) * yp;
  }
}

int inverse(int a, int mod) {
  int x, y;
  extended_euclid(a, mod, x, y);
  return (x + mod) % mod;
}

void precompute_pow10() {
  pow10[0] = 1;
  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    pow10[i] = 10ll * pow10[i - 1] % mod;
  }

  long long inv = inverse(10, mod);
  inv_pow10[0] = 1;
  for (int i = 1; i <= n; i++) {
    inv_pow10[i] = inv * inv_pow10[i - 1] % mod;
```

```
  }
}

struct pair_counter {
  int child;

  void head_dfs(int u, int parent, int depth, int rem) {
    r.insert(child, rem);

    for (edge e: nd[u].adj) {
      if (e.v != parent) {
        int new_rem = ((long long)pow10[depth] * e.digit + rem) % mod;
        head_dfs(e.v, u, depth + 1, new_rem);
      }
    }
  }

  void tail_dfs(int u, int parent, int depth, int rem) {
    int h = (long long)inv_pow10[depth] * (mod - rem) % mod;

    // Numărul de moduri de a prefixa această coadă cu un început.
    num_pairs += r.count_not_in_child(child, h);

    // Are coada curentă un rest egal cu zero?
    num_pairs += (rem == 0);

    for (edge e: nd[u].adj) {
      if (e.v != parent) {
        int new_rem = ((long long)rem * 10 + e.digit) % mod;
        tail_dfs(e.v, u, depth + 1, new_rem);
      }
    }
  }

  void count_pairs_through(int u) {
    r.init();

    for (edge e: nd[u].adj) {
      child = e.v;
      head_dfs(e.v, u, 1, e.digit % mod);
    }

    r.sort();

    for (edge e: nd[u].adj) {
      child = e.v;
      tail_dfs(e.v, u, 1, e.digit % mod);
    }

    // Numărul de căi de început care au un rest 0.
```

```
    num_pairs += r.count_rem_0();
  }
};

pair_counter pc;

void size_dfs(int u, int parent) {
  nd[u].size = 1;

  for (edge e: nd[u].adj) {
    if (e.v != parent) {
      size_dfs(e.v, u);
      nd[u].size += nd[e.v].size;
    }
  }
}

int find_centroid(int u, int limit) {
  for (edge e: nd[u].adj) {
    if ((nd[e.v].size < nd[u].size) && (nd[e.v].size > limit)) {
      return find_centroid(e.v, limit);
    }
  }

  return u;
}

void delete_edge(int u, int v) {
  int i = 0;
  while (nd[u].adj[i].v != v) {
    i++;
  }
  nd[u].adj[i] = nd[u].adj.back();
  nd[u].adj.pop_back();
}

void delete_node(int u) {
  for (edge e: nd[u].adj) {
    delete_edge(e.v, u);
  }
}

void decompose(int u) {
  size_dfs(u, -1);
  u = find_centroid(u, nd[u].size / 2);

  pc.count_pairs_through(u);

  delete_node(u);
  for (edge e: nd[u].adj) {
```

```
    decompose(e.v);
  }
}

void write_answer() {
  printf("%lld\n", num_pairs);
}

int main() {
  read_tree();
  precompute_pow10();
  decompose(0);
  write_answer();

  return 0;
}
```

Anexa M

Probleme diverse

M.1 Problema Liars (Baraj ONI 2025)

‹ înapoi • versiune online

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 5'000;
const int MOD = 666'013;

const int ANY = -1;
const int LIAR = 0;
const int TRUTH_TELLER = 1;

// Combinații posibile pentru nodul curent × părintele
const int LIAR_P_LIAR = 0;
const int LIAR_P_TT = 1;
const int TT_P_LIAR = 2;
const int TT_P_TT = 3;

struct cell {
  int v, next;
};

struct node {
  int adj;
  int num_children;
  int resp;       // numărul de vecini mincinoși declarați de u
  int assignment; // valoarea asignată lui u în soluția construită
  int ways[4];    // În câte moduri putem fixa calitatea nodului și a părintelui?
};

node nd[MAX_NODES + 1];
cell list[2 * MAX_NODES];
int n;
```

```
// Vectorul pentru combinatorică. Ne ajunge unul singur, căci îl completăm în
// fiecare nod după ce procesăm fiii. a[i] = numărul de moduri de a avea i fii
// mincinoși. Calitatea părintelui este fixată în momentul apelului. Din
// fiecare fiu vom folosi cîmpurile ways[LIAR_P_LIAR] și ways[TT_P_LIAR]
// pentru a fixa părintele ca mincinos, respectiv ways[LIAR_P_TT] și
// ways[TT_P_TT] pentru a fixa părintele ca sincer.
//
// Îl îmbrăcăm într-un struct ca să oferim funcții getter pentru indici
// incorecți.
struct combo {
  long long a[MAX_NODES + 1];
  int curr_node;

  void merge_children(int u, int parent, int c_liar, int c_tt) {
    curr_node = u;

    // Înainte de a procesa fiii, avem un singur mod de a avea 0 mincinoși.
    a[0] = 1;
    int i = 0;

    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
      int v = list[ptr].v;
      if (v != parent) {
        i++;
        // Toți fiii sînt mincinoși.
        a[i] = a[i - 1] * nd[v].ways[c_liar] % MOD;

        for (int j = i - 1; j; j--) {
          // Aveam deja j mincinoși și adăugăm un sincer...
          long long gain_tt = a[j] * nd[v].ways[c_tt];
          // ... sau aveam j - 1 mincinoși și adăugăm un mincinos.
          long long gain_liar = a[j - 1] * nd[v].ways[c_liar];
          a[j] = (gain_tt + gain_liar) % MOD;
        }

        // Toți fiii sînt sinceri.
        a[0] = a[0] * nd[v].ways[c_tt] % MOD;
      }
    }
  }

  int get_sum() {
    long long result = 0;
    for (int i = 0; i <= nd[curr_node].num_children; i++) {
      result += a[i];
    }
    return result % MOD;
  }
```

```
  int get(int k) {
    if ((k >= 0) && (k <= nd[curr_node].num_children)) {
      return a[k];
    } else {
      return 0;
    }
  }
};

combo c;

void add_edge(int u, int v) {
  static int ptr = 1;
  list[ptr] = { v, nd[u].adj };
  nd[u].adj = ptr++;
  nd[u].num_children++;
}

void read_data() {
  FILE* f = fopen("liars.in", "r");
  fscanf(f, "%d", &n);
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    fscanf(f, "%d", &nd[u].resp);
  }
  for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    fscanf(f, "%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
  }
  fclose(f);

  for (int u = 2; u <= n; u++) {
    nd[u].num_children--; // toate nodurile în afară de 1 au un părinte
  }
}

void count_dfs(int u, int parent) {
  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != parent) {
      count_dfs(v, u);
    }
  }

  int r = nd[u].resp;
  // Cazul I: u este sincer.
  c.merge_children(u, parent, LIAR_P_TT, TT_P_TT);

  // Dacă și părintele este sincer, cei r mincinoși se află printre
```

```
  // fii.
  nd[u].ways[TT_P_TT] = c.get(r);

  // Dacă părintele este mincinos, ceilalți r - 1 mincinoși se află
  // printre fii.
  nd[u].ways[TT_P_LIAR] = c.get(r - 1);

  // Cazul II: u este mincinos.
  c.merge_children(u, parent, LIAR_P_LIAR, TT_P_LIAR);
  int sum = c.get_sum();

  // Dacă părintele este sincer, u trebuie să aibă orice în afară de r
  // mincinoși printre fii.
  nd[u].ways[LIAR_P_TT] = (sum + MOD - c.get(r)) % MOD;

  // Dacă și părintele este mincinos, u trebuie să aibă orice în afară de
  // r - 1 mincinoși printre fii.
  nd[u].ways[LIAR_P_LIAR] = (sum + MOD - c.get(r - 1)) % MOD;
}

// Atribuie toți fiii impuși.
int assign_forced(int u, int parent) {
  int c_liar = (nd[u].assignment == LIAR) ? LIAR_P_LIAR : LIAR_P_TT;
  int c_tt = (nd[u].assignment == LIAR) ? TT_P_LIAR : TT_P_TT;
  int num_assigned = 0;

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != parent) {
      if (!nd[v].ways[c_liar]) {
        nd[v].assignment = TRUTH_TELLER;
      } else if (!nd[v].ways[c_tt]) {
        nd[v].assignment = LIAR;
        num_assigned++;
      } else {
        nd[v].assignment = ANY;
      }
    }
  }

  return num_assigned;
}

void assign_optional(int u, int parent, int liars_left) {
  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (nd[v].assignment == ANY) {
      if (liars_left) {
        nd[v].assignment = LIAR;
        liars_left--;
```

```
      } else {
        nd[v].assignment = TRUTH_TELLER;
      }
    }
  }
}

// Atribuie valori fiilor lui u. Nodul lui u are deja valoare. Bug: dacă
// numărul de posibilități este 0 modulo MOD, el va fi considerat incorect ca
// fiind 0.
void assign_dfs(int u, int parent) {
  int assigned_liars = assign_forced(u, parent);
  // Și părintele poate minți (ce familie de cacao).
  assigned_liars += parent && (nd[parent].assignment == LIAR);

  int liars_left;
  if (nd[u].assignment == TRUTH_TELLER) {
    liars_left = nd[u].resp - assigned_liars;
  } else if (assigned_liars == nd[u].resp) {
    liars_left = 1; // Nu ne putem opri acum, căci u spune adevărul.
  } else {
    liars_left = 0;
  }

  assign_optional(u, parent, liars_left);

  for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (v != parent) {
      assign_dfs(v, u);
    }
  }
}

void write_answer() {
  FILE* f = fopen("liars.out", "w");
  int ans = (nd[1].ways[LIAR_P_TT] + nd[1].ways[TT_P_TT]) % MOD;
  fprintf(f, "%d\n", ans);
  for (int u = 1; u <= n; u++) {
    fprintf(f, "%d ", nd[u].assignment);
  }
  fprintf(f, "\n");
  fclose(f);
}

int main() {
  read_data();
  count_dfs(1, 0);
  nd[1].assignment = nd[1].ways[TT_P_TT] ? TRUTH_TELLER : LIAR;
  assign_dfs(1, 0);
```

```
  write_answer();

  return 0;
}
```