

# Programare cu premeditare

Cătălin Frâncu



# Prefață

Aici voi spune ceva introductiv.

- Problemele sînt ordonate după dificultate.
- Pentru Codeforces și Kilonova aveți nevoie de un cont pentru a vedea sursele.
- Am inclus legături către versiunile online ale surselor acolo unde evaluarea este publică.  
Rapoartele de evaluare arată și timpul și memoria.

# Cuprins

<b>I</b>	<b>Structuri de date pe vectori</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Arbori de intervale</b>	<b>12</b>
1.1	Reprezentare . . . . .	12
1.1.1	Memoria necesară . . . . .	13
1.1.2	Reprezentări alternative . . . . .	14
1.2	Operații elementare . . . . .	14
1.2.1	Actualizarea punctuală . . . . .	14
1.2.2	Construcția în $\mathcal{O}(n \log n)$ . . . . .	15
1.2.3	Construcția în $\mathcal{O}(n)$ . . . . .	15
1.2.4	Calculul sumei pe interval . . . . .	15
1.2.5	Căutarea unei sume parțiale . . . . .	17
1.2.6	Căutarea într-un arbore de maxime . . . . .	17
1.2.7	Adaptarea la alte tipuri de operații . . . . .	18
1.2.8	Implementarea recursivă . . . . .	18
1.3	Probleme . . . . .	18
1.3.1	Problema Xenia and Bit Operations (Codeforces) . . . . .	18
1.3.2	Problema Distinct Characters Queries (Codeforces) . . . . .	19
1.3.3	Problema K-query (SPOJ) . . . . .	19
1.3.4	Problema Sereja and Brackets (Codeforces) . . . . .	20
1.3.5	Problema Copying Data (Codeforces) . . . . .	20
1.3.6	Problema PHF (FMI No Stress 2013) . . . . .	21
1.3.7	Problema Points (Codeforces) . . . . .	22
1.3.8	Problema Medwalk (Lot 2025) . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Arbori de intervale cu propagare <i>lazy</i></b>	<b>26</b>
2.1	Operații pe interval . . . . .	26
2.2	Implementare recursivă (actualizări punctuale) . . . . .	30
2.3	Implementare recursivă (actualizări pe interval) . . . . .	31
2.4	Arta proiectării unui arbore de intervale . . . . .	32
2.5	Probleme . . . . .	33
2.5.1	Problema Polynomial Queries (CSES) . . . . .	33
2.5.2	Problema Nezzar and Binary String (Codeforces) . . . . .	34

2.5.3	Problema Simple (infO(1)Cup 2019)	34
2.5.4	Problema Balama (Baraj ONI 2024)	35
<b>3</b>	<b>Arbori indexați binar</b>	<b>37</b>
3.1	<i>Benchmarks</i>	37
3.1.1	Varianta 1 ( <i>point update, range query</i> )	38
3.1.2	Varianta 2 ( <i>range update, range query</i> )	38
3.1.3	Concluzii	38
3.2	Actualizări punctuale și interogări pe interval	39
3.3	Reprezentare	39
3.4	Operația de interogare (suma unui interval)	39
3.5	Operația de actualizare (adăugare pe poziție)	40
3.6	Construcția în $\mathcal{O}(n)$	41
3.7	Găsirea unei valori punctuale	42
3.8	Căutarea binară a unei sume parțiale	43
3.9	Alte operații decât adunarea	44
3.10	Probleme	45
3.10.1	Problema The Permutation Game Again (SPOJ)	45
3.10.2	Problema Multiset (Codeforces)	45
3.10.3	Problema Hanoi Factory (Codeforces)	46
3.10.4	Problema Subsequences (Codeforces)	46
3.10.5	Problema D-query (SPOJ)	47
3.10.6	Problema Magic Board (CodeChef)	48
3.10.7	Problema Ball (Codeforces)	48
3.10.8	Problema Medwalk, revizitată (Lot 2025)	49
3.11	Interogări punctuale și actualizări pe interval	51
3.12	Interogări și actualizări pe interval	51
3.13	Arbori indexați binar 2D	54
3.13.1	Structura informației	54
3.13.2	Calculul sumei dintr-un dreptunghi	54
3.13.3	Actualizări punctuale	56
3.13.4	Construcția în $\mathcal{O}(n^2)$	57
<b>4</b>	<b>Descompunere în radical</b>	<b>58</b>
4.1	Actualizări punctuale	58
4.2	Actualizări pe interval	59
4.3	Optimizări	61
4.3.1	Evitați împărțirile!	61
4.3.2	Alegerea mărimii blocurilor	61
4.3.3	Alegerea mărimii blocurilor pentru operații inegale	62
4.4	Probleme	62
4.4.1	Problema Mexitate (ONI 2018 clasa a 9-a)	62

4.4.2	Problema Give Away (SPOJ)	63
4.4.3	Problema Holes (Codeforces)	64
4.4.4	Problema Piezișă (Baraj ONI 2022)	65
4.5	Descompunere după operații	66
4.6	Probleme	67
4.6.1	Problema Serega and Fun (Codeforces)	67
4.7	Procesări diferite înainte și după $\sqrt{n}$	68
4.8	Probleme	69
4.8.1	Problema Time to Raid Cowavans (Codeforces)	69
4.9	Descompunere în valori distincte	70
4.10	Probleme	70
4.10.1	Problema Sandor (Baraj ONI 2025)	70
4.10.2	Problema Puzzle-bile (Lot 2025)	71
<b>5</b>	<b>Algoritmul lui Mo</b>	<b>74</b>
5.1	Algoritmul lui Mo fără actualizări	74
5.1.1	Analiză de complexitate	75
5.1.2	Optimizare de viteză	75
5.2	Algoritmul lui Mo cu actualizări	76
5.2.1	Mărimea blocului, ordinea operațiilor, complexitate	76
5.3	Probleme	76
5.3.1	Problema Powerful Array (Codeforces)	76
5.3.2	Problema Most Frequent Value (SPOJ)	77
5.3.3	Problema RangeMode (Infoarena Cup 2013)	77
5.3.4	Problema Machine Learning (Codeforces)	78
<b>II</b>	<b>Măiestrie pe biți</b>	<b>80</b>
<b>6</b>	<b>Operații pe biți. Compactarea variabilelor</b>	<b>81</b>
6.1	Operații elementare	81
6.1.1	Noțiuni de bază	81
6.1.2	Măști	81
6.1.3	Operații pe măști de biți	82
6.2	Numărarea biților de 1 dintr-o valoare (popcount)	82
6.2.1	Metoda naivă	82
6.2.2	Metoda Kernighan	83
6.2.3	Funcții built-in	83
6.2.4	Tabel precalculat	83
6.2.5	Tabel precalculat + conversie	83
6.2.6	Calcul paralel	83

<b>III</b>	<b>Arbori</b>	<b>84</b>
<b>7</b>	<b>Unelte și algoritmi esențiali</b>	<b>85</b>
7.1	Generatoare de arbori aleatorii . . . . .	85
7.2	Probleme . . . . .	86
7.2.1	Problema Subordinates (CSES) . . . . .	86
7.2.2	Problema Tree Matching (CSES) . . . . .	86
7.2.3	Problema Tree Diameter (CSES) . . . . .	86
7.2.4	Problema Tree Distances II (CSES) . . . . .	87
7.2.5	Problema White-Black Balanced Subtrees (Codeforces) . . . . .	87
7.2.6	Problema Blood Cousins (Codeforces) . . . . .	88
<b>8</b>	<b>Liniaizarea arborilor</b>	<b>90</b>
8.1	Timpi de intrare și de ieșire din DFS . . . . .	90
8.2	Testul de strămoș . . . . .	91
8.3	Liniaizarea. Tipuri de liniaizare . . . . .	91
8.3.1	Liniaizarea DFS . . . . .	92
8.3.2	Liniaizarea Euler . . . . .	92
8.3.3	Liniaizarea Euler cu repetiție . . . . .	92
8.4	Probleme . . . . .	93
8.4.1	Problema Tree Queries (Codeforces) . . . . .	93
8.4.2	Problema Subtree Queries (CSES) . . . . .	94
8.4.3	Problema Path Queries (CSES) . . . . .	94
8.4.4	Problema New Year Tree (Codeforces) . . . . .	94
8.4.5	Problema Max Flow (USACO) . . . . .	95
8.4.6	Problema Distinct Colors (CSES) . . . . .	96
8.4.7	Problema Disconnect (Infoarena) . . . . .	97
<b>9</b>	<b>Tehnica small-to-large</b>	<b>98</b>
9.1	Generalități . . . . .	98
9.2	Probleme . . . . .	98
9.2.1	Problema Fixed-Length Paths I (CSES) . . . . .	98
9.2.2	Problema Distinct Colors (CSES) (din nou) . . . . .	99
9.2.3	Problema Lomsat Gelral (Codeforces) . . . . .	100
9.2.4	Problema Tokens on a Tree (CodeChef) . . . . .	100
9.2.5	Problema Blood Cousins Return (Codeforces) . . . . .	101
9.2.6	Problema Tree and Queries (Codeforces) . . . . .	102
<b>10</b>	<b>Cel mai apropiat strămoș comun</b>	<b>105</b>
10.1	Sumar: RMQ ( <i>range minimum query</i> ) . . . . .	105
10.1.1	RMQ cu arbore de intervale . . . . .	106
10.1.2	RMQ cu arbore indexat binar . . . . .	106

10.1.3	RMQ cu descompunere în radical . . . . .	106
10.1.4	RMQ cu tabelă rară . . . . .	106
10.1.5	RMQ cu stivă ordonată . . . . .	107
10.2	LCA cu liniarizare . . . . .	107
10.3	LCA cu descompunere în radical . . . . .	108
10.4	LCA cu binary lifting ( $\log n$ pointeri per nod) . . . . .	109
10.5	LCA cu binary lifting (2 pointeri per nod) . . . . .	109
10.6	LCA cu algoritmul lui Tarjan (offline) . . . . .	109
10.7	Benchmarks . . . . .	110
 <b>IV Probleme diverse</b>		<b>111</b>
 <b>11 Probleme diverse</b>		<b>112</b>
11.1	Problema Liars (Baraj ONI 2025) . . . . .	112
11.1.1	Generalități . . . . .	112
11.1.2	Numărarea configurațiilor . . . . .	112
11.1.3	Găsirea unei configurații . . . . .	113
 <b>V Anexă: Cod-sursă</b>		<b>115</b>
 <b>A Arbori de intervale</b>		<b>116</b>
A.1	Problema Xenia and Bit Operations (Codeforces) . . . . .	116
A.2	Problema Distinct Characters Queries (Codeforces) . . . . .	117
A.3	Problema K-query (SPOJ) . . . . .	120
A.4	Problema Sereja and Brackets (Codeforces) . . . . .	124
A.5	Problema Copying Data (Codeforces) . . . . .	127
A.6	Problema PHF (FMI No Stress 2013) . . . . .	129
A.7	Problema Points (Codeforces) . . . . .	131
A.8	Problema Medwalk (Lot 2025) . . . . .	134
 <b>B Arbori de intervale cu propagare <i>lazy</i></b>		<b>140</b>
B.1	Problema Polynomial Queries (CSES) . . . . .	140
B.2	Problema Nezzar and Binary String (Codeforces) . . . . .	146
B.3	Problema Simple (infO(1)Cup 2019) . . . . .	150
B.4	Problema Balama (Baraj ONI 2024) . . . . .	154
 <b>C Arbori indexați binar</b>		<b>161</b>
C.1	Problema The Permutation Game Again (SPOJ) . . . . .	161
C.2	Problema Multiset (Codeforces) . . . . .	162
C.3	Problema Hanoi Factory (Codeforces) . . . . .	164
C.4	Problema Subsequences (Codeforces) . . . . .	166



C.5	Problema D-query (SPOJ)	168
C.6	Problema Magic Board (CodeChef)	171
C.7	Problema Ball (Codeforces)	174
C.8	Problema Medwalk revizitată (Lot 2025)	176
<b>D</b>	<b>Descompunere în radical</b>	<b>183</b>
D.1	Problema Mexitate (ONI 2018 clasa a 9-a)	183
D.2	Problema Give Away (SPOJ)	189
D.3	Problema Holes (Codeforces)	194
D.4	Problema Piezișă (Baraj ONI 2022)	196
D.5	Problema Serega and Fun (Codeforces)	205
D.6	Problema Time to Raid Cowavans (Codeforces)	216
D.7	Problema Sandor (Baraj ONI 2025)	218
D.8	Problema Puzzle-bila (Lot 2025)	222
<b>E</b>	<b>Algoritmul lui Mo</b>	<b>226</b>
E.1	Problema Powerful Array (Codeforces)	226
E.2	Problema Most Frequent Value (SPOJ)	228
E.3	Problema RangeMode (Infoarena Cup 2013)	230
E.4	Problema Machine Learning (Codeforces)	233
<b>F</b>	<b>Arbori - probleme esențiale</b>	<b>237</b>
F.1	Generator simplu de arbori aleatorii	237
F.2	Generator avansat de arbori aleatorii	238
F.3	Problema Subordinates (CSES)	241
F.4	Problema Tree Matching (CSES)	243
F.5	Problema Tree Diameter (CSES)	245
F.6	Problema Tree Distances II (CSES)	247
F.7	Problema White-Black Balanced Subtrees (Codeforces)	249
F.8	Problema Blood Cousins (Codeforces)	250
<b>G</b>	<b>Arbori - liniarizare</b>	<b>254</b>
G.1	Problema Tree Queries (Codeforces)	254
G.2	Problema Subtree Queries (CSES)	256
G.3	Problema Path Queries (CSES)	258
G.4	Problema New Year Tree (Codeforces)	261
G.5	Problema Max Flow (USACO)	265
G.6	Problema Distinct Colors (CSES)	272
G.7	Problema Disconnect (Infoarena)	274
<b>H</b>	<b>Arbori - small-to-large</b>	<b>279</b>
H.1	Problema Fixed-Length Paths I (CSES)	279
H.2	Problema Distinct Colors (CSES) (din nou)	281

H.3	Problema Lomsat Gelral (Codeforces) . . . . .	282
H.4	Problema Tokens on a Tree (CodeChef) . . . . .	288
H.5	Problema Blood Cousins Return (Codeforces) . . . . .	296
H.6	Problema Tree and Queries (Codeforces) . . . . .	303
<b>I</b>	<b>Cel mai apropiat strămoș comun</b>	<b>310</b>
I.1	LCA cu descompunere în radical . . . . .	310
I.2	LCA cu binary lifting ( $\log n$ pointeri per nod) . . . . .	312
I.3	LCA cu binary lifting (2 pointeri per nod) . . . . .	316
I.4	LCA cu algoritmul lui Tarjan (offline) . . . . .	322
<b>J</b>	<b>Probleme diverse</b>	<b>325</b>
J.1	Problema Liars (Baraj ONI 2025) . . . . .	325

# Partea I

## Structuri de date pe vectori

---

Următoarele capitole tratează structuri de date care pot procesa anumite operații pe vectori în timp mai bun decât  $\mathcal{O}(N)$ . Ocazional aceste structuri se aplică și matricilor.

Subiectele de ONI / baraj ONI / lot din anii trecuți abundă în probleme rezolvabile cu astfel de structuri:

- [3dist](#) (baraj ONI 2022)
- [6 de Pentagrame](#) (lot 2024)
- [Babel](#) (baraj ONI 2025)
- [Balama](#) (baraj ONI 2024)
- [Bisortare](#) (ONI 2021)
- [Circuit](#) (lot 2025)
- [Emacs](#) (baraj ONI 2021)
- [Erinaceida](#) (lot 2022)
- [Guguștiuc](#) (baraj ONI 2022)
- [Împiedicat](#) (baraj ONI 2023)
- [Lupușor](#) (ONI 2022)
- [Medwalk](#) (lot 2025)
- [Perm](#) (baraj ONI 2024)
- [Piezișă](#) (baraj ONI 2022)
- [Subiectul III](#) (lot 2024)
- [Șirbun](#) (baraj ONI 2023)
- [Trapez](#) (lot 2025)

Pare o idee bună să le învățăm și să le stăpânim bine. 😊 Concret, vom studia trei structuri:

1. arbori de intervale;
2. arbori indexați binar;
3. descompunere în radical.

Vom exemplifica structurile și vom face benchmarks pe două probleme didactice. Apoi vom vedea, prin probleme, cum putem extinde aceleași structuri pentru nevoi mai complicate.

**Varianta 1 (actualizări punctuale, interogări pe interval):** Se dă un vector de  $N$  elemente întregi și  $Q$  operații de două tipuri:

1.  $\langle 1, x, val \rangle$ : Adaugă  $val$  pe poziția  $x$  a vectorului.
2.  $\langle 2, x, y \rangle$ : Calculează suma pozițiilor de la  $x$  la  $y$  inclusiv.

**Varianta 2 (actualizări pe interval, interogări pe interval):** Similar, dar operația 1 este pe interval:

1.  $\langle 1, x, y, val \rangle$ : Adaugă  $val$  pe pozițiile de la  $x$  la  $y$  inclusiv.
2.  $\langle 2, x, y \rangle$ : Calculează suma pozițiilor de la  $x$  la  $y$  inclusiv.

Vom menționa ocazional și **Varianta 3 (actualizări pe interval, interogări punctuale):**

1.  $\langle 1, x, y, val \rangle$ : Adaugă  $val$  pe pozițiile de la  $x$  la  $y$  inclusiv.

- 
2.  $\langle 2, x \rangle$ : Returnează valoarea poziției  $x$ .

Toate implementările mele sînt disponibile [pe GitHub](#).

# Capitolul 1

## Arbori de intervale

Arborii de intervale<sup>1</sup> (AINT) sînt o structură foarte puternică și flexibilă. Ușurința implementării depinde de natura operațiilor pe care dorim să le admitem.

### 1.1 Reprezentare

Ca multe alte structuri (heap-uri, AIB, păduri disjuncte), arborii de intervale se reprezintă pe un simplu vector. Ei sînt arbori doar la nivel logic, în sensul că fiecare poziție din vector are o altă poziție drept părinte.

Pentru început, să presupunem că vectorul dat are  $n = 2^k$  elemente. Atunci vectorul necesar  $S$  are  $2n$  elemente, în care cele  $n$  elemente date sînt stocate începînd cu poziția  $n$ . Apoi,

- Cele  $n/2$  elemente anterioare stochează valori agregate (sume, minime, xor etc.) pentru perechi de valori din vectorul dat.
- Cele  $n/4$  elemente anterioare stochează valori agregate pentru grupe de 4 valori din vectorul dat.
- ...
- Elementul  $S[1]$  stochează valoarea agregată a întregului vector.
- Valoarea  $S[0]$  rămîne nefolosită.

Iată un exemplu pentru  $n = 16$ . Datele de la intrare se regăsesc pe pozițiile 16-31.

---

<sup>1</sup>Există o inversiune între nomenclatura internațională și cea românească. Internațional, structura pe care o învățăm astăzi se numește [segment tree](#), iar [interval tree](#) este o structură diferită, care stochează colecții de intervale. Cîțiva ani am înotat împotriva curentului și am fost (posibil) singurul român care se referea la această structură ca „arbori de segmente”. În acest curs am adoptat și eu denumirea încetățenită.

1 95															
2 49								3 46							
4 19				5 30				6 18				7 28			
8 8		9 11		10 14		11 16		12 11		13 7		14 9		15 19	
16 3	17 5	18 10	19 1	20 9	21 5	22 7	23 9	24 5	25 6	26 1	27 6	28 2	29 7	30 10	31 9

Figura 1.1: Un arbore de intervale cu 16 frunze și 15 noduri interne. Valorile din fiecare celulă reprezintă suma din frunzele subîntinse de acea celulă. Cu cifre mici este notat indicele fiecărei celule.

Facem câteva observații preliminare:

- Fiii unui nod  $i$  sînt  $2i$  și  $2i + 1$ .
- Părintele lui  $i$  este  $\lfloor i/2 \rfloor$ .
- Toți fiii stîngi au numere pare și toți fiii dreپți au numere impare.

De exemplu, fiii lui 6 sînt 12 și 13, iar fiii acestora sînt respectiv 24-25 și 26-27. Aceasta corespunde cu intenția noastră ca 6 stocheze informații agregate (suma) despre nodurile 24-27.

După cum vom vedea în secțiunea următoare, arborii de intervale obțin timpi logaritmici pentru operații, deoarece numărul de niveluri este  $\log n$ .

### 1.1.1 Memoria necesară

În această formă, structura necesită  $2n$  memorie pentru  $n$  elemente dacă  $n$  este putere a lui 2 sau foarte aproape. De exemplu, pentru  $n = 1024$ , sînt necesare 2048 de celule. Dar, dacă  $n$  depășește cu puțin o putere a lui 2, atunci el trebuie rotunjit în sus. Pentru  $n = 1025$ , baza arborelui necesită 2048 de celule, iar arborele în întregime necesită 4096 de celule. De aceea spunem că, în cel mai rău caz, arborele poate ajunge la  $4n$  celule ocupate în cel mai rău caz.

În realitate, necesarul este doar de  $3n$  cu puțină atenție la alocare. Pentru  $n = 1025$ , alocăm 2048 de celule pentru nivelurile superioare ale arborelui, dar putem alocă fix 1025 pentru bază (nu 2048). Totalul este circa  $3n$ .

Pentru a calcula următoare putere a lui 2, putem folosi bucla naivă:

```
int p = 1;
while (p < n) {
    p *= 2;
}
n = p;
```

Sau o buclă care folosește *bit hacks*:

```
while (n & (n - 1)) {
    n += n & -n;
}
```

Mai concis, putem folosi funcția `__builtin_clz(x)`, care ne spune cu câte zerouri începe numărul  $x$ :

```
n = 1 << (32 - __builtin_clz(n - 1));
```

### 1.1.2 Reprezentări alternative

Există și reprezentări mai compacte, care ocupă exact  $2n-1$  noduri, adică strictul necesar teoretic. Iată un exemplu pentru un vector cu 6 noduri.

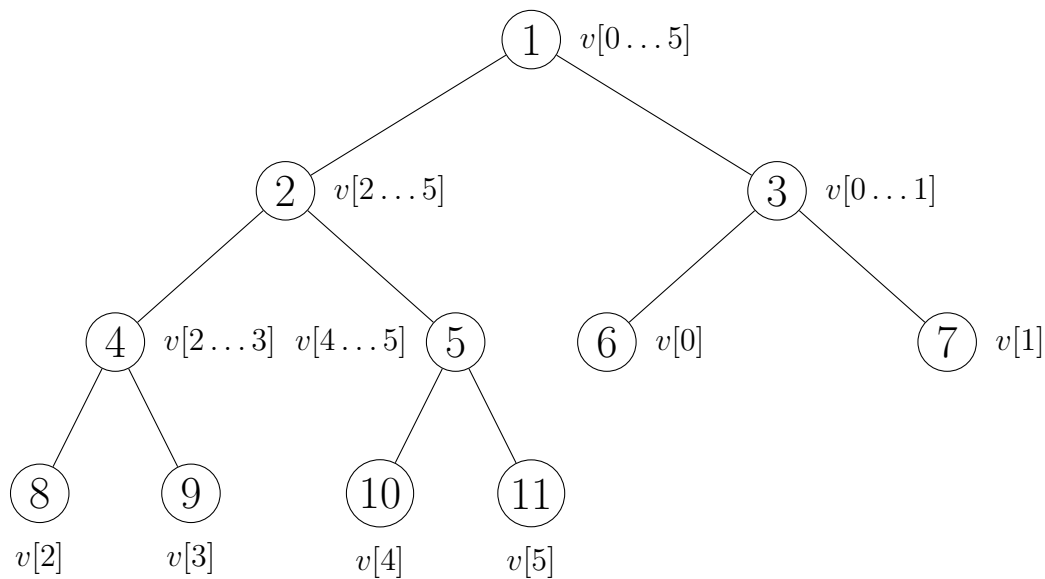


Figura 1.2: Reprezentarea arborilor de intervale cu exact  $2n - 1$  noduri.

Vedem că frunzele (adică vectorul dat,  $v[0] \dots v[5]$ ) se află pe pozițiile consecutive 6-11. În schimb, această reprezentare pare mai greu de vizualizat și încalcă o abstracție importantă: frunzele nu mai sînt la același nivel. Structura se pretează la operațiile de actualizare și interogare, dar nu sînt sigur că se pretează și la restul operațiilor pe care le discutăm în secțiunile următoare. De aceea prefer să folosesc și să predau structura rotunjită la  $2^k$  noduri.

## 1.2 Operații elementare

### 1.2.1 Actualizarea punctuală

Nu uitați că poziția  $i$  din datele de intrare este stocată efectiv în  $s[n+i]$ . Apoi, cînd elementul aflat pe poziția  $i$  primește valoarea  $val$ , toate nodurile care acoperă poziția  $i$  trebuie recalculate:

```
void set(int pos, int val) {
```



```

pos += n;
s[pos] = val;
for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
    s[pos] = s[2 * pos] + s[2 * pos + 1];
}
}

```

Dacă nu ni se dă noua valoare absolută, ci variația  $\delta$  față de valoarea anterioară, atunci codul este chiar mai simplu, căci toți strămoșii poziției se modifică tot cu  $\delta$ :

```

void add(int pos, int delta) {
    for (pos += n; pos; pos /= 2) {
        s[pos] += delta;
    }
}

```

Apropo de *clean code*: Remarcați că am denumit funcțiile `set` și `add`, nu le-am denumit pe ambele `update`. Astfel am evidențiat diferența dintre ele.

### 1.2.2 Construcția în $\mathcal{O}(n \log n)$

O variantă de construcție este să invocăm funcția `set` de mai sus pentru fiecare valoare de la intrare. Complexitatea va fi  $\mathcal{O}(n \log n)$ .

### 1.2.3 Construcția în $\mathcal{O}(n)$

Putem reduce timpul de construcție dacă doar inserăm valorile frunzelor, fără a le propaga la strămoși. La final calculăm foarte simplu nodurile interne, în ordine descrescătoare.

```

void build() {
    for (int i = n - 1; i >= 1; i--) {
        s[i] = s[2 * i] + s[2 * i + 1];
    }
}

```

### 1.2.4 Calculul sumei pe interval

Să calculăm suma pe intervalul original  $[2, 12]$ , care corespunde intervalului  $[18, 28]$  din reprezentarea internă. Ideea este să descompunem acest interval într-un număr logaritm de segmente, mai exact  $[18,19]$ ,  $[20,23]$ ,  $[24,27]$  și  $[28,28]$ . Avantajul descompunerii este că avem deja calculate sumele acestor intervale, respectiv în nodurile 9, 5, 6 și 28.

1 95															
2 49								3 46							
4 19				5 30				6 18				7 28			
8 8		9 11		10 14		11 16		12 11		13 7		14 9		15 19	
16 3	17 5	18 10	19 1	20 9	21 5	22 7	23 9	24 5	25 6	26 1	27 6	28 2	29 7	30 10	31 9

Figura 1.3: Suma intervalului  $[18, 28]$  este egală cu suma valorilor nodurilor 9, 5, 6 și 28.

Pornim cu doi pointeri  $l$  și  $r$  din capetele interogării date. Apoi procedăm astfel:

- Dacă  $l$  este fiu stîng, putem aștepta ca să includem un strămoș al său, care va include și alte poziții utile. În schimb, dacă  $l$  este fiu drept, trebuie să îl includem în sumă, căci orice strămoș al său va include și elemente inutile din stînga lui  $l$ . Apoi avansăm  $l$  spre dreapta.
- Printr-un raționament similar, dacă  $r$  este fiu stîng, includem valoarea sa în sumă și avansăm  $r$  spre stînga.
- Urcăm pe nivelul următor prin înjumătățirea lui  $l$  și  $r$ .
- Continuăm cît timp  $l \leq r$ .

Astfel, vom selecta cel mult două intervale de pe fiecare nivel al arborelui și vom restrînge corespunzător intervalul dat, pînă cînd îl reducem la zero. De aici rezultă complexitatea logaritmică.

```

long long query(int l, int r) { // [l, r] închis
    long long sum = 0;

    l += n;
    r += n;

    while (l <= r) {
        if (l & 1) {
            sum += s[l++];
        }
        l >>= 1;

        if (!(r & 1)) {
            sum += s[r--];
        }
        r >>= 1;
    }

    return sum;
}

```

Clarificare: la ultimul nivel, dacă  $l = r$ , atunci  $s[l]$  va fi selectat exact o dată, fie datorită lui  $l$ ,

fie datorită lui  $r$ , după cum poziția este impară sau pară.

### 1.2.5 Căutarea unei sume parțiale

Ca și la AIB-uri, dacă toate valorile sînt pozitive are sens întrebarea: pe ce poziție suma parțială atinge valoarea  $P$ ? Pentru simplitate, recomand să adăugați o santinelă de valoare infinită pe poziția  $n$ . Aceasta garantează că suma parțială se atinge întotdeauna, iar dacă răspunsul este  $n$ , atunci de fapt suma parțială nu există în vectorul fără santinelă.

```
int search(int sum) {
    int pos = 1;

    while (pos < n) {
        pos *= 2;
        if (sum > s[pos]) {
            sum -= s[pos++];
        }
    }

    return pos - n;
}
```

### 1.2.6 Căutarea într-un arbore de maxime

Dat fiind un vector  $v$  cu  $n$  elemente, ni se cere să răspundem la interogări de tipul  $\langle pos, val \rangle$  cu semnificația: găsiți cea mai mică poziție  $i > pos$  pe care se află o valoare  $v[i] > val$ . În secțiunea următoare vom vedea problemele Points și Împiedicat care au această nevoie.

Pentru rezolvare, să construim peste acest vector un arbore de intervale de maxime. Fiecare nod stochează maximum dintre cei doi fii ai săi. Ca urmare, fiecare nod stochează maximum dintre frunzele pe care le subîntinde. Atunci soluția constă din doi pași:

- Mergi la dreapta și în sus, similar pointerului  $l$  din operația de sumă pe interval prezentată anterior. Oprește-te când ajungi la un nod cu o valoare  $> val$ . Știm că acest nod subîntinde cel puțin o frunză de valoare  $> val$ .
- Din acest nod, coboară în fiul care are la rîndul său o valoare  $> val$ . Dacă ambii fii au această proprietate, coboară în fiul stîng. Oprește-te când ajungi la o frunză.

Pentru a simplifica codul, putem adăuga o santinelă infinită la finalul vectorului, ca să ne asigurăm că problema are soluție.

```
int find_first_after(int pos, int val) {
    pos += n + 1;

    while (v[pos] <= val) {
        if (pos & 1) {
```

```
    pos++;
} else {
    pos >>= 1;
}
}

while (pos < n) {
    pos = (v[2 * pos] > val) ? (2 * pos) : (2 * pos + 1);
}

return pos - n;
}
```

Am inclus acest algoritm, deși este rar întâlnit în practică, pentru a ilustra flexibilitatea uriașă a arborilor de intervale.

### 1.2.7 Adaptarea la alte tipuri de operații

Aceeași structură de date poate răspunde la multe alte feluri de actualizări și interogări. Nu detaliem aici, vom studia probleme. Ce este important este să ne dăm seama ce stocăm în fiecare nod și cum combină părintele informațiile din cei doi fii.

### 1.2.8 Implementarea recursivă

Există și o implementare recursivă, pe care nu o vom discuta acum (o menționez doar ca să o fac de rîs). O vom discuta mai târziu în acest capitol. Este păcat că mulți elevi învață și stăpînesc doar acea implementare, pe care o aplică și cînd nu este nevoie de ea, deși implementarea iterativă de mai sus este de 2-3 ori mai rapidă. Implementarea iterativă ar trebui să fie implementarea voastră de referință oricînd este suficientă.

Exemplu: din implementarea iterativă rezultă imediat că:

1. Complexitatea este  $\mathcal{O}(\log n)$ , întrucît  $l$  și  $r$  urcă exact un nivel la fiecare iterație.
2. De pe fiecare nivel selectăm cel mult două intervale.

Vă urez succes să demonstrați aceste lucruri în implementarea recursivă. 🐱

## 1.3 Probleme

### 1.3.1 Problema Xenia and Bit Operations (Codeforces)

[enunț](#) • [sursă](#)

Problema este simplisimă. O includ doar ca exemplu de arbore care face operații diferite pe niveluri diferite.

### 1.3.2 Problema Distinct Characters Queries (Codeforces)

[enunț](#) • [sursă](#)

Există diverse abordări pentru această problemă. Una este să construim un AIB sau un AINT pentru fiecare caracter, cu memorie totală  $\mathcal{O}(\Sigma n)$  (tradițional  $\Sigma$  denotă mărimea alfabetului). Fiecare structură reține pozițiile pe care apare un caracter. Modificările sînt simple: debifăm poziția în AIB-ul corespunzător vechiului caracter și o marcăm în AIB-ul noului caracter. Pentru interogări, verificăm pentru fiecare din cele 26 de caractere dacă suma pe intervalul dat este non-zero. Rezultă o complexitate de  $\mathcal{O}(\Sigma q \log n)$ .

Dar iată și o soluție mai elegantă, care reduce complexitatea la  $\mathcal{O}(q \log n)$ , folosind paralelismul nativ pe 32 de biți al procesorului. Vom folosi 26 de biți din fiecare întreg, câte unul pentru fiecare caracter. Într-o frunză care stochează litera 'f' vom seta pe 1 doar cel de-al șaselea bit, așadar valoarea întregă va fi `000...000100000`. Apoi, un nod intern va stoca OR-ul pe biți al frunzelor din intervalul acoperit. Acest gen de informație se numește **mască de biți** (engl. *bitmask*).

Ce semnifică acest OR pe biți? Fiecare dintre biți va fi 1 dacă și numai dacă litera corespunzătoare apare cel puțin o dată în intervalul acoperit. Să observăm că bitul 6 va fi 1 indiferent dacă intervalul conține un caracter 'f' sau multiple caractere 'f'. Rezultă că fiecare mască va avea atîția biți setați (biți 1) câte caractere distincte există în interval.

Facem actualizări în acest arbore înlocuind masca din frunză și propagînd valoarea spre strămoși cu operația OR. Pentru a răspunde la interogări,

- colectăm cele  $\mathcal{O}(\log n)$  măști care compun interogarea;
- le combinăm cu OR;
- numărăm biții din rezultat, de exemplu cu funcția `__builtin_popcount`.

### 1.3.3 Problema K-query (SPOJ)

[enunț](#) • [surse](#)

Problema fiind offline, este destul de natural să ordonăm interogările. Sper să vă obișnuiți și voi să luați în calcul această posibilitate.

Ordonarea după capătul stîng sau drept nu pare să ducă nicăieri. Exemplu: ordonăm interogările după capătul drept  $dr$ . Atunci, după ce adăugăm elementul  $a[dr]$  la structura noastră (oricare ar fi ea), trebuie să răspundem la interogări de tipul: câte numere  $> k$  există începînd cu poziția  $st$ ? Eu nu am reușit să găsesc o structură echilibrată care să răspundă la întrebări. Poate voi reușiți?

În schimb, ordonarea descrescătoare după valoare duce la o soluție relativ directă. Pentru o interogare  $(st, dr, k)$ , marcăm (cu 1) într-o structură de date toate pozițiile elementelor mai mari decît  $k$ . Apoi numărăm valorile 1 din intervalul  $[st, dr]$ .

Pentru a găsi rapid toate elementele mai mari decît  $k$  (care nu au fost deja inserate în structură), rezultă că trebuie să sortăm și vectorul în ordine descrescătoare, reținînd și poziția originală a

fiecărei valori.

În fapt, putem implementa această soluție chiar și cu un AIB. Sursa este identică cu cea bază pe arbori de intervale cu excepția `struct`-ului. În acest caz, timpii de rulare sînt aproape egali, dar în general vă recomand să folosiți AIB unde se poate.

### 1.3.4 Problema Sereja and Brackets (Codeforces)

[enunț](#) • [sursă](#)

Iată și o problemă pentru a cărei rezolvare este mai puțin clar că ne ajunge un arbore de intervale. Vom construi un arbore în care nodurile stochează valori mai complexe care se combină după reguli speciale.

Să considerăm o subsecvență contiguă. Din ce constă ea? Dintr-un subșir (pe sărite) care este bine format, plus niște paranteze deschise neîmperecheate, plus niște paranteze închise neîmperecheate. De exemplu, în subșirul `))) ( ( ( ( ( (` am evidențiat cu bold cele 6 caractere bine formate. Rămîn 4 paranteze deschise și 3 închise. Să notăm aceste cantități cu  $f$  (lungimea subșirului bine format),  $d$  (surplusul de paranteze deschise) și  $i$  (surplusul de paranteze închise).

Cum combinăm două subsecvențe adiacente  $(f_1, d_1, i_1)$  și  $(f_2, d_2, i_2)$ ? Clar putem concatena porțiunile bine formate. Dar mai mult, putem prelua și  $\min(d_1, i_2)$  perechi dintre surplusurile de paranteze deschise, respectiv închise. Șirul rezultat va fi bine format. Ne putem convinge de asta eliminînd porțiunile bine formate  $f_1$  și  $f_2$ , ca și cînd ele nu ar exista. Dacă nu sînteți convinși, puteți apela la o definiție echivalentă pentru un șir de paranteze bine format: pentru orice prefix, diferența dintre numărul de paranteze deschise și închise este pozitivă.

Rezultă că intervalul concatenat va avea parametrii:

- $f = f_1 + f_2 + 2 \min(d_1, i_2)$
- $d = d_1 + d_2 - \min(d_1, i_2)$
- $i = i_1 + i_2 - \min(d_1, i_2)$

Construcția arborelui se face ca de obicei, combinînd fiii doi cîte doi. La interogare este nevoie de puțină atenție pentru a colecta și combina intervalele în ordinea corectă (de la stînga la dreapta). Ne bazăm pe observația că operația de compunere nu este comutativă, dar este asociativă.

### 1.3.5 Problema Copying Data (Codeforces)

[enunț](#) • [sursă](#)

Aici întîlnim o formă complementară a arborilor de intervale: actualizări pe interval și interogări punctuale (*range update, point query*). Mecanismul necesar folosește o reprezentare puțin diferită. O problemă foarte similară este [Range Update Queries](#) (CSES).

(Cei dintre voi care stăpînesc arborii de intervale cu propagare *lazy* vor fi tentați să se repeadă la aceia: Pe fiecare nod ținem informația *lazy* că segmentul din  $b$  a fost suprascris cu un segment

din  $a$  începînd de la o poziție  $p$  (sau cu o deplasare  $\pm p$ , cum preferați). La actualizări, propagăm informația la fii după nevoie. La interogare, propagăm informația pînă în frunza cerută, pentru a afla de unde provine. Dar nu este nevoie de aceste complicații.)

Să pornim de la observația de bun simț: Dacă o copiere acoperă o poziție, atunci la descompunerea sa în intervale, unul dintre acele intervale va fi strămoș al poziției poziția (*duh!*).

Ne vom folosi și de numerele de ordine ale interogărilor, care vor funcționa ca niște momente de timp între 1 și  $q$ . Acum, să construim un arbore de intervale care, pentru o operație de copiere  $(x, y, k)$ :

- Descompune intervalul  $[y, y + k - 1]$  prin metoda obișnuită.
- Notează pe fiecare interval momentul  $t$  și diferența  $x - y$ .

Dacă ulterior o altă copiere va acoperi unul dintre aceste intervale, vom nota acolo momentul  $t'$  și diferența  $x' - y'$ . Atunci ultimul moment (și, implicit, ultima proveniență) a suprascrierii unei poziții este dată de cel mai mare moment de timp **dintre toți strămoșii poziției**.

### 1.3.6 Problema PHF (FMI No Stress 2013)

enunț • sursă

Problema ne cere să simulăm un șir de meciuri de piatră-hîrtie-foarfecă de tip „cîștigătorul la masă” și să admitem actualizări punctuale pe acest șir. Deoarece nu ne permitem o simulare în  $\mathcal{O}(n)$  pentru fiecare din cele  $q$  actualizări, vom căuta să accelerăm simularea la  $\mathcal{O}(\log n)$ .

Caracterul de pe fiecare poziție, să-i spunem  $X$ , este un meci între  $X$  și cîștigătorul meciului de pe poziția anterioară. Echivalent,  $X$  este o funcție definită pe mulțimea  $\{P, H, F\}$  cu valori tot în  $\{P, H, F\}$ , unde  $X(c)$  este chiar rezultatul unui meci între  $X$  și  $c$ . De exemplu,  $P$  este funcția:

$$\begin{cases} P(P) &= P \\ P(H) &= H \\ P(F) &= P \end{cases}$$

Atunci o înșiruire de caractere este o compunere de funcții. De exemplu, dintr-un șir de intrare de patru caractere, numite generic  $XYZT$ , îl tratăm pe  $X$  ca argument, iar rezultatul final este  $T(Z(Y(X)))$  sau  $(T \circ Z \circ Y)(X)$ .

Orice funcție are nevoie de un argument. 😊 De aceea, tratăm separat primul caracter, iar pe celelalte  $n - 1$  le punem într-o structură. (O altă abordare este să definim primul caracter ca pe o funcție care returnează acel caracter independent de intrarea fictivă). Această structură trebuie să mențină rezultatul compunerii caracterelor, cu modificări. Vom folosi un arbore de intervale unde informația dintr-un nod este funcția compusă a intervalului subîntins. Reprezentăm aceste funcții prin tabelul complet (trei valori). Tabelele frunzelor le definim manual, iar tabelul unui nod intern este compunerea tabelelor celor doi fii. Tabelul rădăcinii este ceea ce ne interesează:

compunerea pozițiilor  $2 \dots n$  din șir, adică o funcție pe care o vom aplica primului caracter din șir.

Implementarea mea rotunjește numărul de noduri la o putere a lui 2. De aceea la dreapta vom avea și noduri vide, pe care le tratăm ca pe funcții identice ( $X(c) = X$ ).

### 1.3.7 Problema Points (Codeforces)

[enunț](#) • [sursă](#)

Problema are rating de 2800 pentru că se compune din multe blocuri, dar niciunul nu este de speriat, căci sîntem deja versați în arbori de intervale. 🤓 Aș zice că problema ar fi grea la un baraj ONI sau ușoară la lot.

Ca să putem construi un arbore de intervale, în primul rînd normalizăm coordonatele  $x$ . Păstrăm și o tabelă cu valorile originale, căci pe acelea trebuie să le afișăm.

Am putea reformula întrebarea pentru operația `find x y`: dintre toate punctele cu  $x' > x$ , există vreunul cu  $y' > y$ ? Ne gîndim că am putea folosi un AINT de maxime, indexat după  $x$ , cu valori din  $y$ , cu interogarea: „Caută maximul pe intervalul  $[x + 1, n)$  și spune-mi dacă este mai mare decît  $y$ ”.

Dar astfel aflăm doar dacă există un punct. Ca să-l găsim, întrebarea corectă este: „dă-mi cea mai din stînga poziție după  $x$  pe care maximul depășește  $y$ ”. Din fericire, putem face asta cu același AINT maxime, așa cum am explicat în secțiunea de teorie:

1. Pornind de la prima poziție validă (în cazul nostru,  $x + 1$ ), mergem în sus și spre dreapta, spre intervale tot mai mari, pînă cînd găsim o poziție de valoare  $> y$ . Ca să evităm cazurile particulare, adăugăm la finalul vectorului o santinelă de valoare infinită.
2. De la această poziție, coborîm în timp ce menținem în vizor valoarea  $> y$ . Dacă putem coborî în orice direcție, preferăm stînga.

Astfel putem gestiona operațiile de adăugare (cînd maximul pentru un  $x$  fixat poate doar să crească). Următoarea întrebare este cum gestionăm ștergerile. Cea mai directă soluție este să menținem cîte un set STL pentru fiecare coordonată  $x$ . Suma mărimilor acestor seturi nu va depăși  $n$ . Cu metoda `rbegin()` putem afla noul maxim după inserări și ștergeri.

Ultima întrebare, odată ce stabilim că răspunsul pentru `find x y` este la abscisa  $x'$ , este: care dintre punctele cu această abscisă este răspunsul? Folosim același set și metoda `upper_bound()` pentru a afla cel mai mic  $y'$  strict mai mare decît  $y$ .

Complexitatea soluției este  $\mathcal{O}(n \log n)$ , atît pentru normalizarea inițială cît și pentru procesarea operațiilor. Fiecare operație necesită o căutare în set și o căutare sau actualizare în AINT.

### 1.3.8 Problema Medwalk (Lot 2025)

[enunț](#) • [sursă](#)



Problema admite și o soluție diferită, mult mai rapidă, bazată pe AIB-uri 2D, dar iată o soluție care folosește doar arbori de intervale.

Din enunț putem defini forma drumului: el va merge pe linia de sus a unor coloane, apoi va folosi ambele linii de pe o coloană  $c$  pentru a coborî, apoi va merge pe linia de jos a coloanelor rămase. Acum, să presupunem că avem un oracol care, pentru orice interogare, ne spune coloana  $c$ . Atunci vom muta restul coloanelor fie în stînga, fie în dreapta lui  $c$ , pentru a folosi valoarea de sus sau de jos, oricare este mai mică.

Cu alte cuvinte, mulțimea de valori de pe drumul care minimizează medianul constă din

- minimele de pe toate coloanele;
- minimul dintre maximele de pe coloane.

Răspunsul la fiecare interogare este elementul median al acestei mulțimi. Logica pentru a afla a  $k$ -a valoare este relativ simplă și implică trei valori: al  $k$ -lea minim, al  $k - 1$ -lea minim și minimul maximelor. De aici înainte, putem abstractiza matricea ca doi vectori, unul cu minimele perechilor și altul cu maximele. De exemplu, cînd o coloană se modifică din  $(3, 6)$  în  $(3, 2)$ , atunci minimul se modifică din 3 în 2, iar maximul din 6 în 3.

De aceea, avem nevoie de două structuri independente:

- O structură pentru maxime, care să admită actualizări punctuale și interogare de minim pe interval.
- O structură pentru minime, care să admită actualizări punctuale și interogări de al  $k$ -lea element pe interval.

Pentru prima structură, ochiul nostru de-acum experimentat ne spune că putem folosi un simplu AINT. Dar pentru a doua? Am găsit [pe StackOverflow](#) o idee bine explicată, pe care o reiau.

Vom folosi un arbore de intervale **pe valori**. Așadar, nu indexăm pozițiile conform cu pozițiile din vector, ci cu valorile existente în vector. Fiecare frunză din aint, corespunzătoare unei valori  $v$ , reține o colecție ordonată (un set, în esență) cu pozițiile pe care apare valoarea  $v$ . Fiecare nod intern reține reuniunea colecțiilor fiilor săi. Cu alte cuvinte, dacă un nod subîntinde valorile  $[l, r]$ , colecția sa va enumera toate pozițiile pe care apar valori între  $l$  și  $r$ .

Remarcăm că memoria necesară este  $\mathcal{O}(n \log V_{max})$ , deoarece aint-ul conține  $V_{max}$  valori, deci are înălțime  $\log V_{max}$ , iar fiecare poziție din vectorul original va fi enumerată în  $\log V_{max}$  colecții.

Pentru actualizare, trebuie să ștergem poziția modificată din lista vechii valori minime și din listele tuturor strămoșilor. Apoi inserăm poziția în listele noii valori minime. De exemplu, dacă minimul coloanei 100 se modifică din 30 în 20, atunci de la poziția 30 din aint și din toți strămoșii eliminăm elementul 100 din colecție. Apoi la poziția 20 în aint și în toți strămoșii inserăm elementul 100.

Rămîne să descriem interogările. Pentru a afla al  $k$ -lea minim dintr-un interval de coloane  $[l, r]$ , pornim din rădăcina arborelui de intervale (luînd așadar în calcul toate valorile de la 0 la  $V_{max}$ ). Consultăm fiul stîng (valorile  $1 \dots V_{max}/2$ ) și ne întrebăm: cîte apariții au aceste valori pe poziții din  $[l, r]$ ? Putem răspunde la această întrebare printr-o diferență, reducînd întrebarea la forma:

câte apariții au aceste valori pe pozițiile  $0 \dots r$ ? Așadar, trebuie numărate elementele mai mici sau egale cu  $r$  din setul rădăcinii. Set-ul simplu din STL nu poate gestiona această întrebare, dar putem folosi un set extins din PB/DS. Nu detaliem acum, dar ne vom reîntîlni cu acest tip de date.

Dacă numărul de valori între 0 și  $V_{max}/2$  care apar pe poziții între  $l$  și  $r$  este  $\geq k$ , atunci acolo se va afla și al  $k$ -lea element, deci coborîm în fiul stîng. Altfel coborîm în fiul drept.

Complexitatea algoritmului este  $\mathcal{O}((n+q) \log n \log V_{max})$ . De exemplu, fiecare interogare coboară  $\log V_{max}$  niveluri, iar la fiecare nivel face o căutare într-un set de  $\mathcal{O}(n)$  elemente în timp  $\mathcal{O}(\log n)$ .

# Bibliografie

- [1] CS Academy, *Segment Trees*, URL: [https://csacademy.com/lesson/segment\\_trees](https://csacademy.com/lesson/segment_trees).
- [2] CP Algorithms, *Segment Tree*, URL: [https://cp-algorithms.com/data\\_structures/segment\\_tree.html](https://cp-algorithms.com/data_structures/segment_tree.html).

# Capitolul 2

## Arbori de intervale cu propagare *lazy*

### 2.1 Operații pe interval

Să reluăm exemplul din capitolul trecut și să spunem acum că dorim să adăugăm 100 pe intervalul  $[2, 12]$ , corespunzător nodurilor  $[12, 28]$  din arbore.

Ca să nu facem efort  $\mathcal{O}(n)$ , vom descompune intervalul ca mai înainte și vom nota informația „+100” în nodurile 9, 5, 6 și 28, cu semnificația că valoarea reală a tuturor frunzelor de sub aceste noduri a crescut cu 100.

1 95															
2 49								3 46							
4 19				5 30 +100				6 18 +100				7 28			
8 8		9 11 +100		10 14		11 16		12 11		13 7		14 9		15 19	
16 3	17 5	18 10	19 1	20 9	21 5	22 7	23 9	24 5	25 6	26 1	27 6	28 2 +100	29 7	30 10	31 9

Figura 2.1: Pentru a adăuga 100 pe intervalul  $[18, 28]$ , notăm valoarea *lazy* 100 pe nodurile 9, 5, 6 și 28.

Aceasta este o **informație lazy**: o informație care stă într-un nod intern și care trebuie propagată tuturor frunzelor subîntinse de acel nod. Totuși, amânăm efortul acestei propagări pînă cînd el devine strict necesar; tocmai de aceea se numește **propagare lazy**. (Mulți elevi denumesc întreaga structură „AINT cu *lazy*”, dar asta este... lene.)

Evaluarea *lazy* este un concept des întîlnit:

- Memoizarea unor valori într-un vector / matrice, cu speranța că nu va fi nevoie să calculăm tabelul complet.

- Amînarea evaluării lui  $y$  în expresia booleană  $x \ || \ y$ , cu speranța că  $x$  va fi evaluat ca adevărat, iar  $y$  va deveni irelevant.
- Inițializarea unei componente costisitoare dintr-un program doar cînd devine necesară (o conexiune la baza de date, o zonă a hărții dintr-un joc).

Așadar, definim un al doilea vector numit *lazy* și executăm `lazy[x] += 100` pe pozițiile 9, 5, 6 și 28.

Motivul pentru care treaba se complică este următorul. Dacă acum primim o interogare de sumă pe intervalul [25,29]? Nu putem să însumăm, ca de obicei, pozițiile 25, 13 și 14, căci pierdem din vedere că unele dintre noduri au (cîte) +100. Sigur, putem lua asta în calcul, dar trebuie să clarificăm operațiile, altfel efortul poate deveni  $\mathcal{O}(n)$ .

În primul rînd, introducem două funcții noi (le puteți include în alte funcții, dar pentru claritate le puteți declara de sine stătătoare):

- `push()`, care propagă informația *lazy* de la un nod la fiii săi;
- `pull()`, care combină în părinte informația din cei doi fii după o actualizare.

```
void push(int node, int size) {
    s[node] += lazy[node] * size;
    lazy[2 * node] += lazy[node];
    lazy[2 * node + 1] += lazy[node];
    lazy[node] = 0;
}

void pull(int node, int size) {
    s[node] =
        s[2 * node] + lazy[2 * node] * size / 2 +
        s[2 * node + 1] + lazy[2 * node + 1] * size / 2;
}
```

Pentru problema dată (dar nu pentru toate problemele), codul are nevoie să știe numărul de frunze subîntinse (*size*).

Să presupunem acum că dorim să calculăm suma intervalului [2, 12] și că este posibil să avem niște sume *lazy* în multe alte noduri. Știm că codul descompune interogările în intervale mai scurte și nu urcă mai sus de acestea. Dacă există valori *lazy* mai sus (să zicem în rădăcină), codul nu va afla de ele. De aceea, în pregătirea interogării, trebuie să vizităm toți strămoșii intervalului și să propagăm în jos (*push*) informația *lazy*. Dar, dacă ne gîndim, lista completă a acestor strămoși constă doar din strămoșii capetelor de interval! Pentru intervalul [18,28], este nevoie să propagăm în jos informația *lazy* din strămoșii lui 18 (adică 1, 2, 4 și 9) și ai lui 28 (adică 1, 3, 7 și 14).

Dacă apelăm `push` din acești strămoși, de sus în jos, avem garanția că informația pe intervalele dorite este la zi. Vă rămîne vouă ca experiment de gîndire să demonstrați că, după operațiile *push*, nu va mai exista informație *lazy* în niciun strămoș al niciunei poziții din interogare.

Astfel obținem o funcție foarte similară cu cea din capitolul trecut

```

void push_path(int node, int size) {
    if (node) {
        push_path(node / 2, size * 2);
        push(node, size);
    }
}

long long query(int l, int r) {
    long long sum = 0;
    int size = 1;

    l += n;
    r += n;
    push_path(l / 2, 2); // pornim din părinte
    push_path(r / 2, 2);

    while (l <= r) {
        if (l & 1) {
            sum += s[l] + lazy[l] * size;
            l++;
        }
        l >>= 1;

        if (!(r & 1)) {
            sum += s[r] + lazy[r] * size;
            r--;
        }
        r >>= 1;
        size <<= 1;
    }

    return sum;
}

```

Dacă viteza este crucială, putem scrie și o funcție `push_path` cu circa 10% mai rapidă, iterativă, folosind operații pe biți. Să considerăm nodul  $22 = 10110_{(2)}$ . Strămoșii lui sînt 1, 2, 5 și 11 care au respectiv reprezentările binare 1, 10, 101 și 1011, care sînt fix prefixele lui 10110! Deci îl vom deplasa pe 10110 la dreapta cu 4, 3, 2 și respectiv 1 bit pentru a-i obține strămoșii.

```

void push_path(int node) {
    int bits = 31 - __builtin_clz(n);
    for (int b = bits, size = n; b; b--, size >>= 1) {
        int x = node >> b;
        push(x, size);
    }
}

// Acum primul apel este chiar din frunză:

```

```
...
push_path(l);
push_path(r);
...
```

Actualizările sînt foarte similare. Apelăm `pull()` după terminarea actualizărilor, deoarece trebuie să lăsăm arborele într-o stare coerentă și trebuie să preluăm orice modificare de la fii.

```
void pull_path(int node) {
    for (int x = node / 2, size = 2; x; x /= 2, size <= 1) {
        pull(x, size);
    }
}

void update(int l, int r, int delta) {
    l += n;
    r += n;
    int orig_l = l, orig_r = r;
    push_path(l / 2, 2);
    push_path(r / 2, 2);

    while (l <= r) {
        if (l & 1) {
            lazy[l++] += delta;
        }
        l >>= 1;

        if (!(r & 1)) {
            lazy[r--] += delta;
        }
        r >>= 1;
    }

    pull_path(orig_l);
    pull_path(orig_r);
}
```

Iată și o altă implementare care combină bucla `while` principală cu funcția `pull_path`.

Notă: În această implementare, valoarea *lazy* se aplică întregului subarbore, inclusiv nodului însuși. În implementarea de pe [CP Algorithms](#), valoarea *lazy* se aplică subarborelui fără nodul însuși. Oricare dintre formulări este acceptabilă, cîtă vreme o folosiți consecvent.

Notă: În practică, câmpurile *lazy* și *s* merită încapsulate într-un `struct`. Datorită localității acceselor la memorie, diferența de viteză este notabilă (circa 25%). Aici le-am lăsat separate pentru concizie.

## 2.2 Implementare recursivă (actualizări punctuale)

Lecția trecută am spus că există și o implementare recursivă. Să o examinăm acum (mulți o știți deja).

```
void update(int node, int pl, int pr, int pos, int delta) {
    if (pr - pl == 1) {
        s[node] += delta;
    } else {
        int mid = (pl + pr) >> 1;
        if (pos < mid) {
            update(2 * node, pl, mid, pos, delta);
        } else {
            update(2 * node + 1, mid, pr, pos, delta);
        }
        s[node] = s[2 * node] + s[2 * node + 1];
    }
}
```

Metoda recursivă cară după ea 5 parametri:

- `node`: nodul curent din arbore (aka poziția în vector);
- `pl, pr`: intervalul din vectorul inițial acoperit de `node`. Eu am optat pentru implementarea cu `pl` inclusiv și `pr` exclusiv. Dacă preferați intervale închise, este OK.
- `pos, delta`: poziția de modificat și valoarea de adăugat/scăzut.

Vedem că funcția coboară recursiv în fiul stîng sau fiul drept, după caz. Un exemplu de apel ar fi:

```
update(1, 0, n, some_pos, some_val);
```

Mai interesant, iată și implementarea funcției de interogare (sumă pe interval):

```
long long query(int node, int pl, int pr, int l, int r) {
    if (l >= r) {
        return 0;
    } else if ((l == pl) && (r == pr)) {
        return s[node];
    } else {
        int mid = (pl + pr) >> 1;

        return
            query(node * 2, pl, mid, l, min(r, mid)) +
            query(node * 2 + 1, mid, pr, max(l, mid), r);
    }
}
```

Regăsim trei din aceiași parametri, `node`, `pl` și `pr`. În plus,



- 1, r: Intervalul [închis, deschis) pe care dorim să calculăm suma.

Funcția se reapelează pe cei doi fii, restrângând corespunzător intervalul  $[l, r)$ . Iată o imagine care arată arborele de apeluri pentru calculul sumei pe intervalul  $[3, 10)$ :

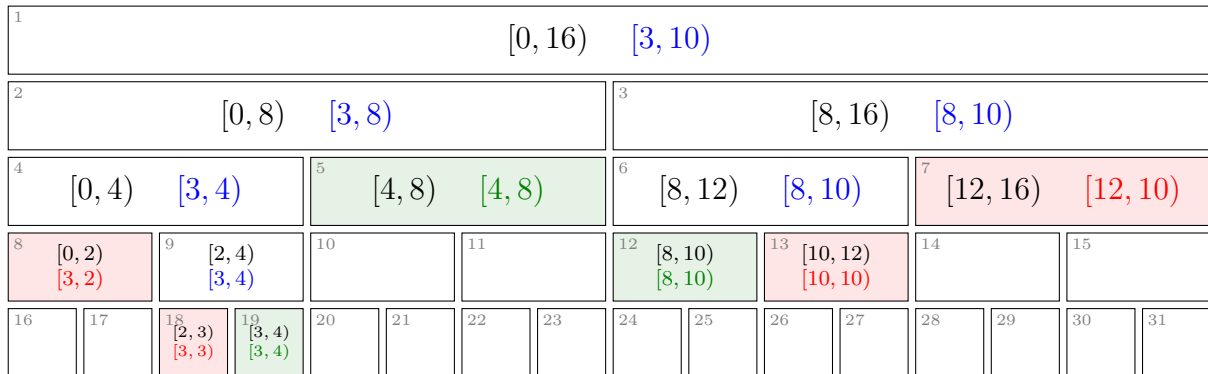


Figura 2.2: Arborele de apeluri în funcția de actualizare recursivă pe intervalul  $[3, 10)$ .

Am ilustrat cu albastru nodurile care au nevoie să-și apeleze descendenții, cu verde nodurile selectate integral, iar cu roșu nodurile eliminate.

Complexitatea rămâne  $\mathcal{O}(\log n)$ , deși funcția se reapelează pentru ambii fii. De ce?

Discutăm implementarea recursivă pentru că ea plutește prin supa culturală și vreau să puteți citi cod scris astfel. Dar ea este un exemplu de dopaj, de implementare repetată *mot à mot* indiferent de nevoile problemei. Implementarea recursivă este de 2-3 ori mai lentă decât cea iterativă pentru actualizări punctuale. Presupun că există două motive:

Implementarea recursivă cară după ea 5-6 parametri la fiecare apel, care trebuie copiați, puși/scoși de pe stivă etc. Implementarea iterativă folosește doar 3 variabile.

Implementarea recursivă este nevoită să pornească din rădăcină, să coboare pînă la frunze, apoi să revină din recursivitate. Implementarea iterativă se oprește imediat ce termină de descompus intervalul  $[l, r]$ .

La varianta cu propagare *lazy* diferența de timp aproape dispare, pentru că ambele implementări trebuie să urce pînă la rădăcină.

Nu vă năpustiți la implementarea recursivă dacă nu este nevoie. Rezistați tentației de a fi leneși, de a învăța o singură structură de date, pe care să o pictați indiferent de situație! Trebuie să aspirați la mai mult de atît, dacă este să vă meritați locul în lot.

## 2.3 Implementare recursivă (actualizări pe interval)

În această implementare, observăm cum:

- apelăm push înainte de reapelarea recursivă, pentru a-i garanta fiecărui nod că deasupra sa nu mai există informații lazy;

- apelăm `pull` după revenirea din recursivitate, ca să lăsăm arborele într-o stare coerentă.

```

long long query(int node, int pl, int pr, int l, int r) {
    if (l >= r) {
        return 0;
    } else if ((l == pl) && (r == pr)) {
        return s[node] + lazy[node] * (r - l);
    } else {
        push(node, pr - pl);
        int mid = (pl + pr) >> 1;
        return
            query(node * 2, pl, mid, l, min(r, mid)) +
            query(node * 2 + 1, mid, pr, max(l, mid), r);
    }
}

void update(int node, int pl, int pr, int l, int r, int delta) {
    if (l >= r) {
        return;
    } else if ((l == pl) && (r == pr)) {
        lazy[node] += delta;
    } else {
        push(node, pr - pl);
        int mid = (pl + pr) >> 1, child_size = (pr - pl) >> 1;
        update(2 * node, pl, mid, l, min(r, mid), delta);
        update(2 * node + 1, mid, pr, max(l, mid), r, delta);
        pull(node, child_size);
    }
}

void process_ops() {
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        if (q[i].t == OP_UPDATE) {
            update(1, 0, n, q[i].l - 1, q[i].r, q[i].val);
        } else {
            answer[num_answers++] = query(1, 0, n, q[i].l - 1, q[i].r);
        }
    }
}

```

## 2.4 Arta proiectării unui arbore de intervale

Atunci cînd primim o problemă și avem de proiectat o structură de date, cum știm dacă un arbore de intervale se potrivește scopului? În general, trebuie să urmărim trei lucruri.

În primul rînd, pentru a putea procesa rapid actualizările pe interval, dorim să facem efort  $\mathcal{O}(1)$

în fiecare interval elementar din descompunere. De aceea, în general informația *lazy* stochează fix ce primim de la operațiile de *update*: o cantitate de adăugat sau de atribuit, un bit de semn, un bit care arată că intervalul curent trebuie inversat etc.

Este nevoie de atenție la compunerea actualizărilor. Dacă avem două cantități de adăugat pe același interval, câmpul *lazy* va reține suma cantităților. Dacă avem două atribuiri succesive pe același interval, câmpul *lazy* o va reține doar pe ultima.

În al doilea rând, pentru a putea procesa rapid interogările pe interval, dorim să facem efort  $\mathcal{O}(1)$  în fiecare interval din descompunere. De aceea, informația propriu-zisă din fiecare nod trebuie să includă valorile pe care le cer operațiile de *query*. Acestea sînt un punct de pornire, dar uneori nu sînt suficiente, ci este nevoie să menținem mai multe valori din care să le putem alege pe cele cerute.

În sfîrșit, în al treilea rând trebuie să verificăm că avem tot ce ne trebuie pentru a compune două intervale alăturate la interogare, pentru a recalcula un părinte din cei doi fii ai săi (operația *pull*) și pentru a propaga informația *lazy* de la părinte la fii (operația *push*).

O regulă de aur este că, la începutul și la sfîrșitul fiecărei funcții, arborele trebuie să fie într-o stare **coerentă**. Aceasta înseamnă că trebuie să definim un **contract**, o promisiune despre care este structura logică a fiecărui nod. Vă recomand chiar să notați acest contract într-un comentariu de una-două fraze, la începutul codului pentru AINT. Apoi, scrieți codul astfel încît, la intrarea și la ieșirea din orice funcție, toate nodurile arborelui să respecte acel contract.

De exemplu, dacă informația *lazy* este o cantitate de adăugat pe tot subarborele, atunci operația *push* trebuie neapărat să se încheie prin a pune pe 0 valoarea *lazy* din părinte. În niciun caz nu trebuie să încheiem operația *push* lăsînd aceeași valoare *lazy* în părinte și în fii.

## 2.5 Probleme

### 2.5.1 Problema Polynomial Queries (CSES)

[enunț](#) • [surse](#)

Problema seamănă mult cu cea discutată la teorie, dar pe intervale nu mai adăugăm constante, ci progresii aritmetice. Așadar, pare natural să reținem exact această informație *lazy*: în fiecare nod reținem că în fiecare frunză acoperită de acel nod trebuie să adăugăm cîte un termen al unei progresii cu un anumit prim element și pasul (deocamdată) 1. De exemplu, dacă în figura 2.1 facem o actualizare pe intervalul  $[18, 28]$ , atunci în nodul 5 notăm progresia cu primul termen 3 și pasul 1. Informația *lazy* este o pereche  $\langle 3, 1 \rangle$ .

Trebuie tratate atent diversele cazuri care iau naștere. Dacă două progresii acoperă același interval, vor lua naștere progresii cu pas mai mare decît 1. Să luăm un exemplu:

- Progresia cu primul termen 5 și pasul 3, așadar 5, 8, 11, 14, ...
- Progresia cu primul termen 2 și pasul 7, așadar 2, 9, 16, 23, ...

- După însumare dorim să avem termenii 7, 17, 27, 37, ...
- Rezultă că suma este și ea o progresie cu primul termen 7 și pasul 10. Cu alte cuvinte, informațiile *lazy* se pot compune ușor:  $\langle 5, 3 \rangle + \langle 2, 7 \rangle = \langle 7, 10 \rangle$ .

La propagarea în jos a informației *lazy*, în cei doi fii vom adăuga progresii cu același pas. În fiul drept, primul termen trebuie calculat, dar este ușor. Dacă într-un nod care acoperă 16 elemente avem o progresie cu primul element 3 și pasul 5, atunci fiul drept va începe cu al nouălea termen al progresiei:

$$3 + 5 \cdot (16/2) = 43$$

La operațiile de adăugare, pe toate intervalele din descompunere vom aduna progresii cu pasul 1, dar primul element diferă pentru fiecare interval (la fel, nu este greu de calculat).

Contractul pe care l-am ales pentru implementarea iterativă este:

- `first` și `step` înseamnă că pe nodurile din intervalul acoperit trebuie adăugate valorile `first`, `first + step`, `first + 2 * step`, ...
- Valoarea `s` din fiecare nod **nu** include și suma progresiei dată de `<first, step>` din acel nod.

## 2.5.2 Problema Nezzar and Binary String (Codeforces)

[enunț](#) • [sursă](#)

Problema este relativ directă odată ce „ne prindem” că trebuie să procesăm operațiile în ordine inversă. Știm șirul final  $f$  și fie  $[l, r]$  ultimul interval inspectat de Nanako. În momentul inspecției, șirul curent trebuia să fie identic cu  $f$  pe pozițiile  $[1, l) \cup (r, n]$ , căci pe acelea nu le putem modifica. Pe pozițiile  $[l, r]$  trebuiau să fie doar biți 0 sau doar biți 1. Care dintre ele? Știm că la ultima modificare am modificat strict mai puțin de jumătate din biți. Să notăm cu  $z$  numărul de zerouri și cu  $u$  numărul de unu de pe pozițiile  $[l, r]$  din  $f$ . Iau naștere trei cazuri:

1. Dacă  $z > u$ , înseamnă că la pasul anterior  $[l, r]$  conținea doar 0.
2. Dacă  $z < u$ , înseamnă că la pasul anterior  $[l, r]$  conținea doar 1.
3. Dacă  $z = u$ , problema nu are soluție, căci nu putem opera modificarea necesară.

Astfel, toate operațiile sînt forțate, mergînd înapoi în timp. Răspunsul este YES doar dacă putem procesa toate operațiile, iar la final ajungem la șirul  $s$ .

Rezultă că, pentru a efectua efectiv operațiile, avem nevoie de un arbore de segmente cu valori de 0 și 1 în frunze, cu funcții de sumă pe interval (pentru a stabili majoritatea) și de atribuire pe interval (pentru a face *undo* la o operație).

## 2.5.3 Problema Simple (infO(1)Cup 2019)

[enunț](#) • [sursă](#)

Să aplicăm regula menționată ca să proiectăm un arbore de intervale pentru această problemă.

- În câmpul *lazy* vom stoca valorile primite la update, aşadar cantităţile de adăugat pe tot subarborele.
- În câmpurile propriu-zise vom stoca valorile necesare pentru interogări, aşadar minimul par pe interval şi maximul impar pe interval.
- Ce altceva ne mai trebuie ca să putem menţine informaţia la actualizări? Să observăm că o cantitate *lazy* impară schimbă paritatea valorilor pe întregul interval. Noul minim par este fostul minim impar, plus cantitatea *lazy*. De aceea, vom introduce încă două cantităţi: maximul par şi minimul impar.

Ca de obicei, este important ca la implementare să alegem dacă valoarea *lazy* este deja inclusă în nodul curent şi mai trebuie aplicată doar la subarbore sau dacă ea trebuie aplicată inclusiv nodului curent. Eu am ales prima variantă. Ambele sînt bune, cîtă vreme codul respectă alegerea făcută.

Pe unele intervale nu vor exista valori pare sau impare. Dacă facem cazuri speciale pentru toate acele situaţii, vom avea undeva între 5 şi 10 **if**-uri de presărat prin cod. O abordare mai simplă este să notăm în acele noduri  $+\infty$  pentru a arăta că nu există minime şi  $-\infty$  pentru a arăta că nu există maxime. Apoi lăsăm aceste valori să se combine fără să mai tratăm cazuri particulare. La final, ştim că orice valori definite vor fi între 1 şi  $2 \cdot 20^9 + 2 \cdot 20^5 \cdot 2 \cdot 20^9$ , conform limitelor din enunţ. Valorile din afara acestui interval le interpretăm ca fiind nedefinite.

În cod am încercat să separ funcţiile specifice nodului de funcţiile specifice arborelui.

## 2.5.4 Problema Balama (Baraj ONI 2024)

[enunţ](#) • [surse](#)

Vă veţi întîlni des cu probleme unde soluţia devine simplă dacă analizăm informaţiile în altă ordine. În cazul de faţă, în loc să luăm în calcul liniile (care sînt subsecvenţe ordonate), să analizăm coloanele.

Care va fi răspunsul pe ultima coloană? Desigur, va fi maximul din vector. Mult mai interesantă este întrebarea: care va fi răspunsul pe penultima coloană? Va fi cel mai mare element care este vreodată (în cel puţin o fereastră) **al doilea maxim**.

Exemplu: fie maximul global 1.000 şi fie al doilea maxim global 999. Dacă 999 stă foarte departe de 1.000, la distanţă de cel puţin  $k$ , atunci 999 va fi maxim în toate ferestrele de lăţime  $k$  care îl conţin. Cu alte cuvinte, 999 se va regăsi doar pe ultima coloană în matricea  $B$  (şi va fi mascat de 1.000). Să spunem că următoarele valori din şir, în ordine descrescătoare, sînt 998, 997 şi 996 şi toate se află la distanţă mare unele de altele. Niciunul dintre ele nu va apărea pe penultima coloană în  $B$ .

În schimb, să spunem că următoarea valoare ca mărime, 995, se află aproape (la distanţă  $< k$ ) de o valoare anterioară, cum ar fi 997. Atunci există o fereastră în care 995 şi 997 coexistă, deci 995 va fi al doilea maxim din acea fereastră şi va apărea pe penultima coloană în  $B$ . Cum alte valori mai mari nu au această proprietate, 995 este răspunsul pe penultima poziţie a soluţiei.

(Amănunt esențial 😊: 995 nu poate fi și al treilea maxim. Dacă exista o fereastră de lățime  $k$  care îl cuprindea pe 995 și alte două valori anterioare, atunci înainte să ajungem la 995 una dintre acele două valori anterioare ar fi fost al doilea maxim).

Astfel, putem considera elemente în ordine descrescătoare și, pentru fiecare element  $x$  ne întrebăm: câte elemente văzute anterior conține fiecare dintre ferestrele care îl conțin pe  $x$  (cel mult  $k$  la număr)? Dacă o astfel de fereastră are  $e$  elemente, și dacă a  $e + 1$ -a valoare din soluție (numărînd de la dreapta) este încă necunoscută, atunci pune  $x$  pe poziția  $e + 1$  a soluției.

Exemplu: Dacă considerăm elementul 900 și constatăm că într-una din ferestrele care îl conțin pe 900 existau deja alte 5 valori, atunci în acea fereastră 900 este al 6-lea element. Dacă a 6-a poziție din soluție este încă neocupată, scriem 900 acolo, acesta fiind maximul posibil.

Implementarea sună fioros, dar nu este! În realitate avem nevoie de o structură cu două operații:

- Incrementează pozițiile de la  $st$  la  $dr$ , pentru a arăta că în ferestrele de la  $[st, st + k - 1]$  și pînă la  $[dr, dr + k - 1]$  avem câte un element în plus.
- Află maximul de pe pozițiile de la  $st$  la  $dr$ .

Operația a doua ne este suficientă deoarece ferestrele nu vor ajunge brusc la 6 elemente. Vor apărea mai întîi ferestre cu 1, 2, 3, 4, 5 elemente. Cu alte cuvinte, soluția se completează de la dreapta spre stînga.

Vom implementa un AINT de maxime în care informația *lazy* din fiecare nod este valoarea de adăugat pe fiecare poziție din intervalul acoperit.

# Capitolul 3

## Arbori indexați binar

Arborii indexați binar (AIB), numiți și arbori Fenwick, iar în engleză *binary indexed trees (BIT)*, servesc ca și arborii de intervale tot la rezolvarea în  $\mathcal{O}(\log n)$  a unor operații pe vectori. Ei sînt mai puțin flexibili și universali decît arborii de intervale. Nu toate problemele rezolvabile cu AINT pot fi rezolvate și cu AIB. Dar acolo unde se potrivesc, AIB-urile sînt ușor de codat și sînt de 2-3 ori mai rapide decît arborii de intervale.

### 3.1 *Benchmarks*

Dacă se potrivesc mai multe structuri, contează pe care o alegem? Ca să alegem în cunoștință de cauză, iată niște măsurători de viteză (*benchmarks*). Le-am făcut în 2025 pe un procesor [AMD Ryzen 7 4700U](#), la acea vreme comparabil cu evaluatoarele de la Kilonova și Codeforces.

Am măsurat timpii de rulare pentru diverse implementări ale problemei în ambele variante (actualizări punctuale sau pe interval).

- arbori indexați binar,  $\mathcal{O}(\log n)$  per operație;
- arbori de segmente iterativi,  $\mathcal{O}(\log n)$  per operație;
- arbori de segmente recursivi,  $\mathcal{O}(\log n)$  per operație;
- descompunere în radical,  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$  și cel mult două împărțiri per operație;
- descompunere în radical,  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$  și  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$  împărțiri per operație.

Precizez că vom discuta descompunerea în radical abia în capitolul următor, dar pare un moment bun să privim aceste *benchmarks*.

Am ales limitele  $n = q = 500.000$  pentru ambele variante ale problemei. Pentru unele programe contează cîte dintre operații sînt interogări și cîte sînt actualizări. Pentru aceste situații, am măsurat doi timpi, notați astfel:

- 250u/250q: există cîte 250.000 de operații din fiecare tip;
- 100u/400q: există 100.000 de actualizări și 400.000 de interogări.

Toate testele sînt pe **long long** și 90% dintre intervale au lungime peste  $n/2$ . Toți timpii măsoară

strict partea de procesare (excluzînd citirea și scrierea).

### 3.1.1 Varianta 1 (*point update, range query*)

structură	timp
arbore indexat binar	23 ms
arbore de intervale iterativ (250u/250q)	46 ms
arbore de intervale iterativ (100u/400q)	55 ms
arbore de intervale recursiv (250u/250q)	116 ms
arbore de intervale recursiv (100u/400q)	130 ms
descompunere în radical (250u/250q)	113 ms
descompunere în radical (100u/400q)	177 ms
descompunere în radical cu împărțiri (250u/250q)	763 ms
descompunere în radical cu împărțiri (100u/400q)	1.219 ms

Tabela 3.1: Timpii de rulare pentru sume pe interval și actualizări punctuale.

### 3.1.2 Varianta 2 (*range update, range query*)

structură	timp
arbore indexat binar (250u/250q)	66 ms
arbore indexat binar (100u/400q)	58 ms
arbore de intervale iterativ (250u/250q)	183 ms
arbore de intervale iterativ (100u/400q)	175 ms
arbore de intervale recursiv (250u/250q)	211 ms
arbore de intervale recursiv (100u/400q)	203 ms
descompunere în radical (250u/250q)	235 ms
descompunere în radical (100u/400q)	274 ms

Tabela 3.2: Timpii de rulare pentru sume pe interval și actualizări pe interval.

### 3.1.3 Concluzii

Reținem că:

- Arborii indexați binar sînt de departe cei mai rapizi.
- Pentru actualizări punctuale, arborii de intervale iterativi sînt de două ori mai rapizi decît cei recursivi.
- Descompunerea în radical ține binișor pasul cu arborii de segmente. Din experiență, aceasta este o particularitate a problemei alese. Pentru alte probleme diferența poate fi mai mare.
- Împărțirile îngreunează enorm descompunerea în radical.



## 3.2 Actualizări punctuale și interogări pe interval

### 3.3 Reprezentare

AIB-ul descompune informația în felul următor: Poziția  $k$  din vector stochează suma ferestrei de  $p$  elemente care se termină la poziția  $k$ , unde  $p$  este cea mai mare putere a lui 2 care îl divide pe  $k$ . De exemplu, pentru  $k = 40$ ,  $p = 8$ . Așadar, pe poziția 40 AIB-ul va stoca suma celor 8 valori de pe pozițiile  $[33 \dots 40]$ .

Iată un exemplu care arată sus valorile pe care dorim să le reținem, iar jos valorile concrete pe care ajunge să le stocheze vectorul. Subliniez că AIB-ul nu folosește memorie suplimentară, ci doar stochează diferit informația în același vector. Suspectez că și de aici provine eficiența lui în raport cu arborii de intervale.

poziție	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
abstract	3	5	10	1	9	5	7	9	5	6	1	6	2	7	10	9	9	8	5	1	9	6
intervale	3	8	10	19	9	14	7	49	5	11	1	18	2	9	10	95	9	17	5	23	9	15
concret	3	8	10	19	9	14	7	49	5	11	1	18	2	9	10	95	9	17	5	23	9	15

Figura 3.1: Un arbore indexat binar cu 22 de poziții. Vectorul de sus este cel abstract, iar vectorul de jos este cel stocat concret în memorie. Fiecare interval arată pozițiile a căror sumă o notăm în capătul din dreapta al intervalului.

### 3.4 Operația de interogare (suma unui interval)

AIB-urile tratează interogările pe un interval oarecare  $[x, y]$  prin diferența a două interogări pe prefix,  $[1, y]$  și  $[1, x-1]$ . Pentru a răspunde la o interogare pe prefix, de exemplu suma pe intervalul  $[1, 21]$ , descompunem acel prefix în intervale dintre cele stocate în AIB, respectiv  $[1, 16]$ ,  $[17, 20]$  și  $[21, 21]$ . Odată ce includem o poziție  $x$  și tot intervalul pe care îl acoperă ea, pentru a ajunge la următoarea poziție de însumat trebuie, prin definiție, să scădem cea mai mare putere a lui 2 care îl divide pe  $x$ . Rezultă codul:

```
struct fenwick_tree {
    int v[MAX_N + 1]; // indexare de la 1
```

```
int prefix_sum(int pos) {
    int s = 0;
    while (pos) {
        s += v[pos];
        pos &= pos - 1;
    }
    return s;
}

int range_sum(int from, int to) {
    return prefix_sum(to) - prefix_sum(from - 1);
}
};
```

Expresia `pos &= pos - 1` elimină cel mai din dreapta bit de 1 dintr-un număr; de exemplu, din  $20 = 10100_{(2)}$  ea obține  $16 = 10000_{(2)}$ . Pe cazul general,

```
pos           = abc...xyz1000...000
pos - 1       = abc...xyz0111...111
pos & (pos - 1) = abc...xyz0000...000
```

De aici rezultă și complexitatea  $\mathcal{O}(\log n)$ , căci reprezentarea oricărei poziții în baza 2 are cel mult  $\log n$  biți de 1.

### 3.5 Operația de actualizare (adăugare pe poziție)

La actualizarea pe o poziție, trebuie actualizate toate intervalele care conțin acea poziție. De exemplu, la actualizarea poziției 11 trebuie actualizate intervalele  $[11, 11]$ ,  $[9, 12]$  și  $[1, 16]$ , așadar trebuie recalculate pozițiile 11, 12 și 16 din AIB. Această parte pare magică: de ce pozițiile 13, 14 și 15 nu trebuie actualizate? Dar ne putem convinge că, cu cât ne îndepărtăm de poziția inițială (11), ne interesează doar pozițiile responsabile de intervale suficient de mari încât să acopere poziția 11.

```
void add(int pos, int val) {
    do {
        v[pos] += val;
        pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
}
```

Pentru a înțelege expresia `pos & -pos`, să facem o scurtă digresiune. Numerele cu semn sînt reprezentate în calculator în **complement față de 2**. Aceasta înseamnă că, pentru a reprezenta un număr negativ,

- Reprezentăm întâi numărul pozitiv (valoarea absolută).

- Îi inversăm toți biții.
- Adăugăm 1.

De exemplu, pentru a îl reprezenta pe -20 procedăm astfel:

- Îl reprezentăm pe +20: 000...00010100.
- Îi inversăm toți biții: 111...11101011.
- Adăugăm 1: 111...11101100.

Această reprezentare are două avantaje:

1. Putem folosi același circuite logice pentru operații pe numere cu sau fără semn.
2. Reprezentările lui +0 și -0 sînt identice, 000...000. În **complement față de 1** există două reprezentări, 000...000 și 111...111, ceea ce este straniu.

Revenind, observăm acum că  $20 \& -20$  este 000...00000100, adică formula `pos & -pos` izolează ultimul bit, adică mărimea intervalului subîntins de `pos`. Prin adăugarea acestei cantități la `pos`, obținem intervalul imediat următor care include poziția `pos`.

Dacă din orice motiv această expresie vă scapă din memorie, puteți inventa pe loc formule echivalente, de exemplu:

---

```
pos = (pos | (pos - 1)) + 1;
```

---

Complexitatea este tot  $\mathcal{O}(\log n)$  deoarece la fiecare pas eliminăm cel puțin un bit 1 din reprezentarea binară a lui `pos`.

## 3.6 Construcția în $\mathcal{O}(n)$

Dat fiind un vector-sursă `src`, este tentant să construim arborele într-un al doilea vector apelînd de  $n$  ori rutina de adăugare:

---

```
void build(int* src) {
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        add(i, src[i]);
    }
}
```

---

Această metodă cere timp  $\mathcal{O}(n \log n)$ . Există însă o metodă care refolosește vectorul și rulează în  $\mathcal{O}(n)$ :

---

```
void build() {
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        int j = i + (i & -i);
        if (j <= n) {
            v[j] += v[i];
        }
    }
}
```

---

```
}  
}
```

Explicație: fiecare element  $v[i]$  este propagat doar la următorul element  $j$  care include poziția  $i$ . Este treaba acelui segment să propage adaosul și mai departe. Pentru scenariul relativ comun în care construim AIB-ul, apoi facem  $n$  interogări și  $n$  actualizări, construcția în  $\mathcal{O}(n)$  reduce costul de rulare cu circa 20%.

Paradoxal, tocmai fiindcă este atât de rapid, costul de funcționare al unui AIB este adesea înecat de costul altor operații (în special intrarea/ieșirea). De aceea optimizările sînt greu de observat. Dar *the hacker spirit* ne obligă să folosim oricum soluția inteligentă.

### 3.7 Găsirea unei valori punctuale

Pentru a găsi valoarea pe o singură poziție  $k$ , o putem calcula în  $\mathcal{O}(\log n)$  ca pe  $\text{sum}(k) - \text{sum}(k - 1)$ . Sau, desigur, putem păstra o copie a vectorului real. Dar există și o implementare în  $\mathcal{O}(1)$  amortizat.

Să considerăm poziția  $k = 60$ . Dacă o calculăm prin diferența sumelor parțiale, obținem

$$\begin{aligned}\text{val}(60) &= \text{sum}(60) - \text{sum}(59) = (v[60] + v[56] + v[48] + v[32]) - \\ &\quad (v[59] + v[58] + v[56] + v[48] + v[32]) \\ &= v[60] - (v[59] + v[58])\end{aligned}$$

Se vede că, de la poziția 56 încolo, sumele de intervale se anulează în cele două paranteze. Nu este o coincidență. Fie:

$$\begin{aligned}k &= \text{bbb}\dots\text{bbb}10000 \\ k - 1 &= \text{bbb}\dots\text{bbb}01111\end{aligned}$$

Unde  $b$  sînt niște biți oarecare, iar poziția  $k$  se termină într-un bit 1 urmat de cîțiva (posibil 0) biți de 0. Atunci, în calculul sumelor parțiale, pozițiile  $k$  și  $k - 1$  vor elimina biți de la coadă pînă cînd vor ajunge la strămoșul comun, care este

$$\text{str} = \text{bbb}\dots\text{bbb}00000$$

De aceea, codul este:

```
int get_value_at(int pos) {  
    int result = v[pos];  
    int ancestor = pos & (pos - 1);  
    pos--;  
    while (pos != ancestor) {  
        result -= v[pos];  
        pos &= pos - 1;  
    }  
    return result;  
}
```

```
}

```

Acest cod pare tot logaritm. În realitate, jumătate din valorile din AIB (cele de pe poziții impare) stochează chiar valoarea în acel punct, deci bucla din `get_value_at()` va face 0 iterații. Un sfert din valorile din AIB vor face o iterație, o optime dintre ele vor face două iterații. În general, pentru o poziție  $k$ , funcția `get_value_at()` va face atâtea iterații câte zerouri are la coadă reprezentarea binară a lui  $k$ . Media acestei valori este 1 (așadar constantă) dacă distribuția lui  $k$  este uniformă și aleatorie.

## 3.8 Căutarea binară a unei sume parțiale

Dacă vectorul (abstract) are doar valori non-negative, atunci sumele parțiale sînt nedescrescătoare și are sens întrebarea: Care este prima poziție pe care se atinge suma parțială  $S$ ?

Putem face o căutare binară naivă: examinăm suma parțială la poziția  $n/2$ , apoi la una dintre pozițiile  $n/4$  sau  $3n/4$  după caz, etc. Dar fiecare dintre aceste interogări durează  $\mathcal{O}(\log n)$ , deci complexitatea totală a algoritmului va fi  $\mathcal{O}(\log^2 n)$ . Dar iată și o metodă în  $\mathcal{O}(\log n)$ , similară cu căutarea binară prin „metoda Mihai Pătrașcu” (ca să adoptăm nomenclatura din supa culturală olimpică).

Fie  $p$  cea mai mare putere a lui 2 cel mult egală cu  $n$ . Pentru exemplul inițial,  $n = 22$ , deci  $p = 16$ . Observația-cheie este că putem afla suma parțială pe pozițiile  $[1 \dots p]$  printr-o singură operație: ea este exact `v[p]`! După cum `v[p] < s` sau `v[p] > s`, ne îndreptăm atenția către pozițiile din stînga sau din dreapta lui  $p$ . Următoarea interogare o vom face la `v[p / 2]` sau la `v[3 * p / 2]`.

În practică, invariantul este: `pos` reprezintă cea mai mare poziție cunoscută pe care suma parțială **nu** atinge valoarea  $S$ . La final, funcția returnează `pos + 1`. De asemenea, ținem cont că nu întotdeauna putem avansa la dreapta (nu putem depăși valoarea  $n$ ).

```
int bin_search(int sum) {
    int pos = 0;

    for (int interval = max_p2; interval; interval >>= 1) {
        if ((pos + interval <= n) && (v[pos + interval] < sum)) {
            sum -= v[pos + interval];
            pos += interval;
        }
    }

    return pos + 1;
}
```

Exemplu: pentru AIB-ul din figura 3.1 și suma parțială 72, algoritmul funcționează astfel:

- Verifică poziția 16. Suma este 95, prea mare.

- Verifică poziția 8. Suma este 49. Așadar, căutăm suma parțială  $72 - 49 = 23$  începând dincolo de poziția 8.
- Verifică poziția 12. Suma este 18. Așadar, căutăm suma parțială  $23 - 18 = 5$  începând dincolo de poziția 12.
- Verifică poziția 14. Suma este 9, prea mare.
- Verifică poziția 13. Suma este 2. Așadar, căutăm suma parțială  $5 - 2 = 3$  începând dincolo de poziția 13.
- Răspunsul este poziția 14.

Aici, `max_p2` este cea mai mare putere a lui 2 care nu depășește  $n$ . O putem afla naiv, de exemplu astfel:

```
max_p2 = n;
while (max_p2 & (max_p2 - 1)) {
    max_p2 &= max_p2 - 1;
}
```

, sau într-o singură linie cu funcția `__builtin_clz(n)`, care returnează numărul de zerouri la stînga lui  $n$ :

```
max_p2 = 1 << (31 - __builtin_clz(n));
```

Corolar: putem folosi căutarea binară pentru a afla prima poziție cu o valoare nenulă într-un AIB. Aceasta este poziția pe care suma parțială atinge valoarea 1. Similar putem afla ultima poziție cu o valoare nenulă. Mai trebuie doar să menținem și suma elementelor din AIB, ceea ce cere două linii de cod.

Corolar: dacă AIB-ul ține valori de 0 și 1, putem folosi căutarea binară pentru a afla poziția celui de-al  $k$ -lea bit 1 (în engleză această valoare se numește *k-th order statistic*). Ea este fix poziția pe care suma parțială atinge valoarea  $k$ . Multe probleme de permutări, care necesită evidența elementelor văzute / nevăzute, se încadrează aici (exemplu: codificarea / decodificarea permutărilor).

## 3.9 Alte operații decât adunarea

Arborii Fenwick pot gestiona și alte operații, cîtă vreme ele sînt **inversabile**. Reamintesc că **suma** pe intervalul  $[l \dots r]$  se calculează ca **diferența** sumelor pe intervalele  $[1 \dots r]$  și  $[1 \dots l - 1]$ . Deci operația inversă (scăderea) trebuie să fie definită. Exemplu: operația xor, operația de înmulțire modulo un număr prim etc.

Deoarece operația *max* nu este inversabilă, AIB-urile nu suportă, pe cazul general, operațiile:

1. actualizare punctuală;
2. maxim pe interval.

Totuși, putem folosi AIB-uri pentru interogări de maxim dacă următoarele condiții sînt adevărate:

1. Toate interogările sînt pe prefix (capătul stînga este întotdeauna 1).
  - Sau toate interogările sînt pe sufix, caz în care putem reflecta toți indicii față de  $n$ .
2. Prin actualizare, valorile pot doar să crească.

Temă de gîndire: De ce este necesar ca toate valorile să crească? Ce poate să meargă prost dacă într-un AIB de maxime valorile pot să și scadă?

Raționamente similare putem aplica pentru operațiile *min*, *and* și *or*. Cum reformulăm condiția 2 pentru aceste operații?

Un exemplu mai extravagant este operația *or* pe bitset-uri, vezi problema [Erinaceida](#).

## 3.10 Probleme

### 3.10.1 Problema The Permutation Game Again (SPOJ)

[enunț](#) • [sursă](#)

Problema ne cere să aflăm **rangul** unei permutări (engl. *rank*). Acesta este numărul de ordine al permutării în lista ordonată lexicografic a tuturor permutărilor mulțimii  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Echivalent, trebuie să răspundem eficient la întrebarea: cîte permutări vin înaintea celei date în lista permutărilor?

Să considerăm un exemplu. Dacă primul element al permutării este 9, atunci toate permutările care încep cu  $1, 2, \dots, 8$  o vor preceda în listă. Există  $8(n-1)!$  astfel de permutări.

Similar, dacă al doilea element este 3, atunci toate permutările care încep cu 91 sau 92 o vor preceda în listă. Există  $2(n-2)!$  astfel de permutări.

Dar dacă al treilea element este 7? Acum trebuie să ținem cont de faptul că pe 3 l-am văzut deja. Trebuie să socotim permutările care încep cu 931, 932, 934, 935, 936. Există  $5(n-3)!$  astfel de permutări.

Cu alte cuvinte, trebuie să răspundem eficient la întrebarea: cîte elemente mai mici decît cel curent am văzut în prefixul dinaintea elementului curent? Putem gestiona această informație cu un AIB de 0 și 1. Cînd procesăm un element de valoare  $x$ , adunăm 1 pe poziția  $x$  în AIB. Astfel, suma parțială din AIB pe o poziție  $y$  ne va arăta cîte elemente mai mici decît  $y$  am procesat pînă în prezent.

Pentru un plus de eficiență, sursa nu reține întreaga permutare, ci doar citește cîte un element, îl ia în calcul la rang, îl bifează în AIB, apoi îl aruncă.

### 3.10.2 Problema Multiset (Codeforces)

[enunț](#) • [sursă](#)

„Aproape” putem rezolva problema cu un singur vector de frecvențe. Dar avem nevoie să găsim eficient al  $k$ -lea element ca să-l putem șterge. Un vector de frecvențe ne dă inserări în  $\mathcal{O}(1)$ , dar ștergeri în  $\mathcal{O}(n)$ .

De aceea, înlocuim vectorul cu un AIB în care pe poziția  $x$  notăm frecvența lui  $x$  în multiset. Astfel putem căuta al  $k$ -lea element reformulând definiția: al  $k$ -lea element este poziția  $p$  pe care suma parțială atinge sau depășește valoarea  $k$ .

### 3.10.3 Problema Hanoi Factory (Codeforces)

[enunț](#) • [sursă](#)

Pare natural să sortăm inelele descrescător după diametrul exterior. Ce facem la egalitate? Toate inelele de același diametru exterior pot fi stivuite, caz în care îl vom prefera deasupra pe cel cu diametrul interior minim, ca să ne maximizăm șansele de a putea pune alt inel deasupra lui. Așadar, ca departajare, sortăm inelele descrescător după diametrul interior.

Acum orice turn valid va fi un subșir din șirul sortat, pe sărite, dar fără reordonare. Și atunci putem defini relativ ușor o recurență calculabilă în  $\mathcal{O}(n^2)$ . Fie  $H_i$  înălțimea maximă a unui turn care are în vîrf inelul  $i$ . Atunci inelul aflat imediat sub  $i$ , fie el  $j$ , respectă condițiile  $j < i$  și  $in_j < out_i$ . Așadar,

$$H_i = h_i + \max_{j < i, in_j < out_i} H_j$$

Pentru a reduce complexitatea la  $\mathcal{O}(n \log n)$ , procesăm inelele de la stînga la dreapta. Atunci  $j < i$  este întotdeauna respectată și trebuie doar să răspundem la întrebarea: dintre toate inelele cu  $in_j < x$  dat (unde  $x = out_i$ ), care este valoarea maximă pentru  $H_j$ ? Putem răspunde la întrebare cu un AIB de maxime, indexat după diametrele interioare, pe care îl interogăm despre maximul pe pozițiile  $[1 \dots out_i - 1]$ . După calcularea lui  $H_i$ , optimizăm maximul din AIB pe poziția  $in_i$  cu valoarea  $H_i$ .

Diametrele pot fi mari, dar le putem normaliza în intervalul  $[1 \dots 2n]$ .

Există și o soluție mai ingenioasă, cu o stivă ordonată, care nu face obiectul acestui capitol.

### 3.10.4 Problema Subsequences (Codeforces)

[enunț](#) • [sursă](#)

Problema pare abordabilă cu programare dinamică. Să căutăm întâi formula de recurență, care nu este dificilă. Fie  $C_{l,i}$  numărul de subsecvențe crescătoare de lungime  $l$  terminate pe poziția  $i$ . Atunci:

$$C_{l,i} = \sum_{j < i, a_j < a_i} C_{l-1,j}$$



Implementarea în  $\mathcal{O}(kn^2)$  este așadar directă. Cum procedăm să reducem calculul sumei de la  $\mathcal{O}(n)$  la  $\mathcal{O}(\log n)$ ? Observăm aici un mecanism pe care îl vom regăsi și la alte probleme. Pare că dorim o interogare bidimensională (suma valorilor  $C_{l-1,j}$  pe poziții unde  $j < i$  și simultan  $a_j < a_i$ ). În realitate, însă, putem reduce interogarea la una unidimensională.

Să inserăm într-un AIB valorile  $C_{l-1,1} \dots C_{l-1,i-1}$ . Atunci condiția  $j < i$  este automat satisfăcută și dorim suma valorilor pe pozițiile unde  $a_j < a_i$ . De aceea, vom indexa AIB-ul nu după  $j$ , ci după  $a_j$ . Cu alte cuvinte, vom scrie  $C_{l-1,j}$  nu la poziția  $j$ , ci la poziția  $a_j$ . Desigur, după ce calculăm  $C_{l,i}$  adăugăm și  $C_{l-1,i}$  la AIB.

Ca fapt divers, puteam face reducerea la interogări unidimensionale pe dos: iterăm prin elemente în ordinea crescătoare a valorilor, astfel încât condiția  $a_j < a_i$  să fie automat satisfăcută. Atunci AIB-ul ar fi fost indexat după pozițiile propriu-zise, deci  $C_{l-1,j}$  ar fi stat chiar la poziția  $a_j$ .

Noua complexitate este  $\mathcal{O}(kn \log n)$ : pentru fiecare dintre cele  $k \times n$  valori ale lui  $C$  facem o interogare și o actualizare în AIB. Ca optimizare de memorie, ne este suficientă o singură linie din matricea  $C$ .

### 3.10.5 Problema D-query (SPOJ)

[enunț](#) • [sursă](#)

La prima vedere AIB-urile ne sînt inutile aici, pentru că funcția „numărul de elemente distincte” nu poate fi calculată prin diferențe de intervale: dacă în intervalul  $[1, 10]$  avem 5 elemente distincte, iar în  $[1, 20]$  avem 8 elemente distincte, nu știm destule despre numărul de elemente distincte din  $[11, 20]$ .

Dar, ca la multe alte probleme, varianta offline (în care primim de la început toate interogările) este considerabil mai simplă decît varianta online (în care trebuie să răspundem la o interogare înainte de a o primi pe următoarea).

Pare natural să sortăm interogările și să le scanăm cumva, dar cum? Să fixăm o poziție  $r$  și să considerăm toate intervalele care se termină la  $r$ . Dacă un interval  $[l, r]$  conține o valoare  $x$ , atunci o poate conține o dată sau de multiple ori, dar în mod sigur va include **cea mai din dreapta** apariție a lui  $x$  înainte de  $r$ . Și atunci, pentru o poziție fixată  $r$ , dorim să bifăm toate pozițiile  $i \in [1, r]$  pentru care nu există o altă poziție  $j \in [i + 1, r]$  cu  $v[i] = v[j]$ .

De exemplu, pentru  $r = 8$  și prefixul (1 1 7 6 1 2 6 2), dorim să stocăm bifele (0 0 1 0 1 0 1 1), pentru a indica cele mai din dreapta apariții ale lui 1, 2, 6 și 7. Atunci răspunsul la interogarea  $[5, 8]$  va fi tocmai numărul de bife (adică suma) din intervalul  $[5, 8]$ , pentru că astfel ne asigurăm că numărăm exact o apariție, ultima, a fiecărei valori din interval.

AIB-ul de bife este ușor de actualizat. Dacă, de exemplu, următorul element din vector este 7, trebuie să ștergem bifa de la ultima apariție a lui 7 (poziția 3) și să o aplicăm pe poziția 9. Avem nevoie de un vector cu poziția ultimei apariții a fiecărei valori (dacă există), ceea ce este fezabil deoarece valorile nu depășesc 1.000.000.

La final, reordonăm interogările conform ordinii inițiale și afișăm răspunsurile.

### 3.10.6 Problema Magic Board (CodeChef)

[enunț](#) • [sursă](#)

Pare că avem de-a face cu o matrice binară uriașă, dar secretul este să reținem separat informații despre linii și despre coloane. Observația-cheie este că operațiile **Set** modifică doar linii și coloane întregi.

Putem reformula o interogare de tipul **RowQuery**  $i$  astfel. Dacă ultima resetare a liniei  $i$  a fost la momentul de timp  $t$  (operația cu numărul  $t$ ) și la valoarea 0, atunci câte coloane au fost modificate din 0 în 1 după momentul  $t$ ? Dacă au fost  $k$  coloane modificate, răspunsul la interogare este  $n - k$ .

Similar, dacă ultima resetare a liniei  $i$  a fost la momentul de timp  $t$  (operația cu numărul  $t$ ) și la valoarea 1, și dacă ulterior  $k$  coloane au fost modificate din 1 în 0, atunci răspunsul la interogare este chiar  $k$ .

Astfel, trebuie să răspundem la întrebări de tipul: câte modificări există la valoarea  $v$  la timp  $> t$ ? De aceea, vom ține două AIB-uri pe coloane, indexate după timp (adică după numărul operației), în care stocăm timpul ultimei resetări a fiecărei coloane în 0 și respectiv în 1.

De asemenea, când primim o interogare, trebuie să știm timpul ultimei modificări a acelei linii sau coloane, ceea ce putem stoca naiv: un vector de perechi (timp, valoare).

Informațiile pe linii și pe coloane sînt perfect simetrice. Vom studia codul ca să vedem cum putem elimina duplicarea codului. Asta doar dacă evitarea duplicării codului este importantă pentru noi. 😊

### 3.10.7 Problema Ball (Codeforces)

[enunț](#) • [sursă](#)

Să abstractizăm problema: date fiind  $n$  puncte în spațiu, câte dintre ele sînt dominate de un alt punct? Spunem că un punct  $(x, y, z)$  domină un punct  $(x', y', z')$  dacă  $x > x'$ ,  $y > y'$  și  $z > z'$ .

Ca și la problema Subsequences, un prim pas este să reducem interogările tridimensionale la interogări bidimensionale. Să sortăm punctele descrescător după  $z$ . Dacă toate  $z$ -urile ar fi diferite, atunci am ști că toate punctele procesate anterior au  $z$ -ul mai mare decît toate cele viitoare. Dat fiind că  $z$ -urile pot fi egale, trebuie să ne adaptăm. Este suficient să procesăm punctele în grupuri cu același  $z$ . Pentru toate punctele dintr-un grup calculăm întîi răspunsul și abia apoi le adăugăm la structura de date (oricare ar fi ea).

Astfel, problema pentru punctul  $p(p_x, p_y, p_z)$  devine: există vreun punct văzut anterior care să aibă și  $x$ -ul și  $y$ -ul mai mare? Interogarea pare bidimensională: trebuie să aflăm dacă există vreun punct în cadranul de la  $(p_x, p_y)$  la  $(\infty, \infty)$ . Iar coordonatele sînt prea mari pentru un AIB 2D.

Aici intervine ultimul artificiu. Dorim să reducem problema la o interogare unidimensională pe sufix: dintre toate punctele văzute anterior, considerându-le doar pe cele cu  $x > p_x$ , există vreunul cu  $y > p_y$ ? Putem reformula această întrebare ca pe una de maxim: Dă-mi maximul lui  $y$  pe domeniul  $[p_x, \infty)$ . Dacă acest maxim este  $> p_y$ , atunci există un punct care îl domină pe  $p$ , altfel nu.

Putem răspunde la aceste întrebări cu un AIB de maxime, cu două observații:

Trebuie să normalizăm coordonatele  $x$  la intervalul  $[1, n]$ . Nu ne interesează valorile exacte, ci doar relațiile între ele.

AIB-ul de maxime știe să calculeze doar maxime pe prefix, nu pe sufix. Dar putem să reflectăm toate valorile  $x$  normalizate față de  $n$  pentru a transforma interogările pe sufix în interogări pe prefix.

Observație tangențială: Întotdeauna estimați mărimea fișierului de intrare! În acest caz, avem 1,5 milioane de numere pe 9 cifre plus spații, deci circa 15 MB. Timpul de rulare este efectiv dominat de citire. Sursa inclusă a rulat în 1.100 ms. O [a doua sursă](#), cu citire rapidă, a rulat în 170 ms.

### 3.10.8 Problema Medwalk, revizitată (Lot 2025)

[enunț](#) • [sursă](#)

Am discutat această problemă și în [capitolul de arbori de intervale](#). Am găsit o soluție bazată pe un AINT de seturi, construit peste valorile din matrice. Să vedem acum una de 5 ori mai rapidă, probabil cea pe care a dorit-o comisia.

Primele observații se mențin. Decuplăm (conceptual) matricea în doi vectori, unul cu minimele și unul cu maximele de pe fiecare coloană. Pentru a minimiza medianul (scorul unui interval  $[l, r]$ ), căutăm un drum minim lexicografic. Acesta va consta din minimele de pe intervalul  $[l, r]$  și din minimul maximelor. Medianul acestei mulțimi va fi una din trei valori posibile (logica deciziei este simplă):

- fie minimul maximelor;
- fie medianul minimelor;
- fie elementul anterior medianului minimelor.

Pentru cazul (1), minimul maximelor îl menținem într-un aint simplu, cu actualizări punctuale și cu interogări de minim pe interval. Pentru cazurile (2) și (3) trebuie să răspundem la interogări de al  $k$ -lea element pe interval. Aici introducem următoarea soluție, constând dintr-un [AIB offline 2D](#) construit peste minimele din matrice.

Dorim să căutăm binar al  $k$ -lea element. Bunăoară, prima dată ne întrebăm: este el mai mare decât  $V_{max}/2$ ? Dacă da, îl căutăm între  $V_{max}/2$  și  $V_{max}$ . Dacă nu, îl căutăm între 1 și  $V_{max}/2$ . În general, pentru plaja de valori curentă,  $[x, y]$ , vom calcula mijlocul  $m = (x + y)/2$  și îi vom adresa structurii de date întrebarea: câte valori între  $x$  și  $m$  apar la intrare pe poziții între  $l$  și  $r$ ? Dacă

răspunsul este  $\geq k$ , atunci al  $k$ -lea element are valoarea între  $x$  și  $m$ . Altfel, el are valoarea între  $m$  și  $y$ .

Să încercăm o structură naivă: o matrice binară uriașă  $A$  de dimensiuni  $n \times V_{max}$ , unde  $A_{p,v}$  reține 1 dacă valoarea  $v$  apare în matrice la poziția  $p$ , 0 altfel. Atunci răspunsul la întrebarea „câte valori între  $v_1$  și  $v_2$  apar pe poziții între  $l$  și  $r$ ?” este suma dreptunghiului  $[l, r] \times [v_1, v_2]$ . Sună bine, dar memoria nu ne permite această matrice.

De aceea, vom comprima fiecare coloană într-un AIB pornind de la următoarea observație. Coloana  $v$  va reține 1, oricând pe durata întregului program, doar pe liniile  $p$  cu proprietatea că poziția  $p$  în vectorul de minime va avea, cel puțin după o operație, valoarea  $v$ . De aceea, în primă fază simulăm operațiile și colectăm toate minimele posibile pe toate pozițiile, care vor fi cel mult  $n + q$ . (De aici provine partea de *offline* din nume.) Pe fiecare coloană  $v$  stocăm:

- O listă a pozițiilor posibile pentru valori 1, ordonate crescător.
- Un AIB de 0/1 construit peste această listă.

De exemplu, dacă valoarea 9 este măcar o dată minimă pe pozițiile 102, 109, 110, 113, atunci pe coloana 9 stocăm vectorul  $[102, 109, 110, 113]$  și un AIB de 0/1 cu 4 poziții disponibile.

Dar facem mai mult decât atât, căci v-am promis un AIB 2D. 😊 Vectorul de coloane este el însuși un AIB. Coloana  $v$  nu reține doar pozițiile aparițiilor lui  $v$ , ci ale oricărei valori din  $(v - p, v]$ , unde  $p$  este cea mai mare putere a lui 2 mai mică sau egală cu  $v$ . În particular, cele 4 valori 102, 109, 110, 113 exemplificate mai sus nu apar doar în lista coloanei 9, ci și în listele coloanelor 10, 12, 16, 32, 64, ...

poziția	...	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	...
minimul acum	...	10	1	9	1	11	12	10	1	12	9	9	1	12	9	1	...
minimele la alte momente	...				10, 11								11				...

valoarea	...	9	10	11	12	...
valori subîntinse	...	9	9-10	11	9-12	...

pos	AIB	pos	AIB	pos	AIB	pos	AIB
...	...	...	...	...	...	...	...
102	1	100	1	103	0	100	1
109	1	102	1	104	1	102	1
110	1	103	0	111	0	103	0
113	1	106	1	...	...	104	1
...	...	109	1			105	1
		110	1			106	1
		113	1			108	1
		...	...			109	1
						110	1
						111	0
						112	1
						113	1
						...	...

Să observăm că fiecare poziție apare în lista unui număr logaritmice de coloane. De aceea, suma lungimilor tuturor listelor (și a tuturor AIB-urilor) este  $\mathcal{O}(n \log V_{\max})$ .

Pe această structură putem răspunde în timp  $\mathcal{O}(n \log n \log V_{\max})$  la interogări de al  $k$ -lea element.

### 3.11 Interogări punctuale și actualizări pe interval

Putem privi actualizările pe interval ca pe un fel de „Șmen al lui Mars online”. În șmenul lui Mars prelucrăm operațiile „adaugă  $x$  pe pozițiile  $[l \dots r]$ ” adăugând  $x$  pe poziția  $l$  și  $-x$  pe poziția  $r + 1$ . Deosebirea este că în Șmenul lui Mars interogările vin doar la sfârșit, după toate actualizările, pe când în varianta online interogările pot veni și pe parcurs.

AIB-ul poate fi adaptat foarte ușor la această nevoie:

1. Actualizare: adaugă  $x$  pe poziția  $l$  și  $-x$  pe poziția  $r + 1$ .
2. Interogare pe poziția  $k$ : calculează suma prefixului  $[1 \dots k]$ .

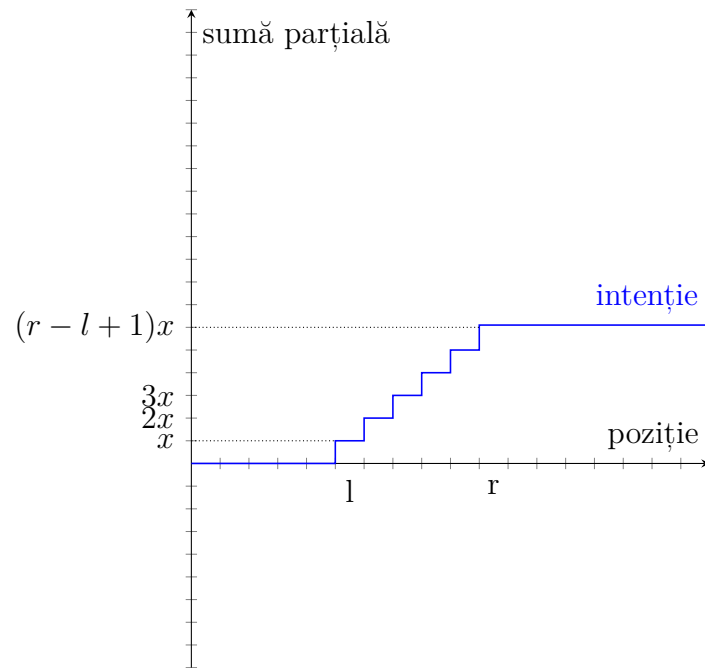
Aceasta funcționează deoarece, la interogarea pe poziția  $k$ ,

1. Dacă  $k < l$ , atunci suma prefixului  $[1 \dots k]$  nu va include pozițiile  $l$  și  $r + 1$ .
2. Dacă  $k > r$ , atunci suma prefixului  $[1 \dots k]$  va include pozițiile  $l$  și  $r + 1$ , care se vor anula reciproc. Dorim aceasta, deoarece  $k \notin [l, r]$ , deci variația intervalului  $[l, r]$  nu trebuie să afecteze poziția  $k$ .
3. Dacă  $l \leq k \leq r$ , atunci suma prefixului  $[1 \dots k]$  va include doar poziția  $l$ , nu și poziția  $r + 1$ , deci poziția  $k$  va fi afectată de variația pe intervalul  $[l, r]$ .

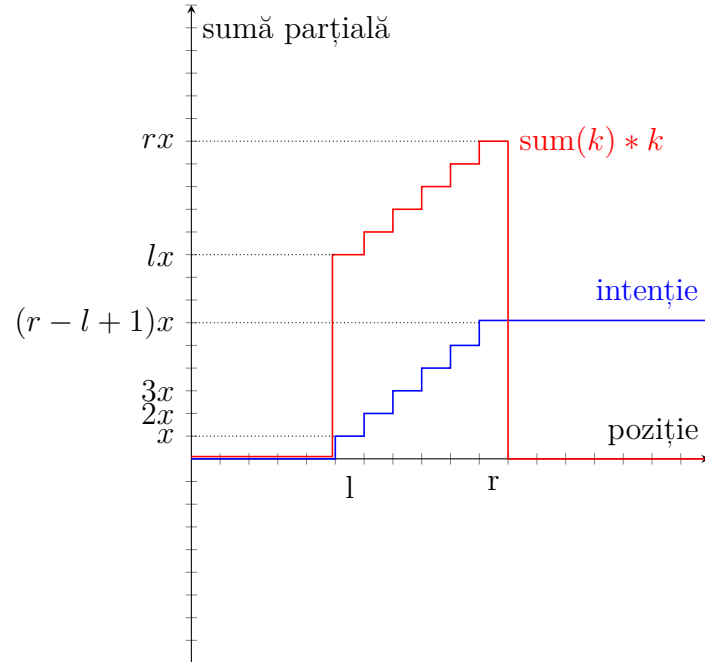
### 3.12 Interogări și actualizări pe interval

Să rezolvăm și această versiune, doar de amorul artei. Nu cred că discuția de mai jos se aplică la altceva decât la sume (la xor-uri, de pildă).

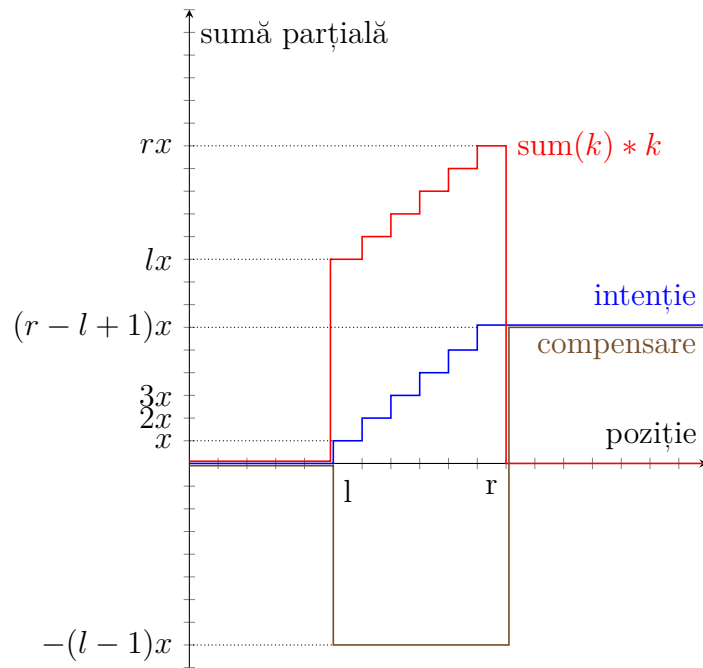
Având în vedere că AIB-urile se preocupă în special de sume parțiale, să examinăm grafic sumele parțiale după operația de adăugare a lui  $x$  pe intervalul  $[l, r]$ . Pe pozițiile  $[l \dots r]$  ia naștere o funcție scară: dorim ca sumele parțiale să crească cu  $x, 2x, \dots, (r - l + 1)x$ .



Intuitiv, deoarece suma parțială crește cu poziția, sîntem tentați să returnăm, la poziția  $k$ , valoarea  $\text{sum}(k) \times k$ . Pentru ca după  $r$  suma parțială să se oprească din creșcut, adăugăm  $x$  la poziția  $l$  și scădem  $x$  la poziția  $r + 1$ , similar cu șmenul lui Mars. Doar că atunci funcția  $\text{sum}(k) \times k$  are graficul:



Într-adevăr, observăm că suma parțială la stînga lui  $l$  este 0, iar la dreapta lui  $r$  este  $x - x = 0$ . Totuși, pare că cele două grafice nu au nicio legătură! Dar nu este chiar așa. Observăm că diferența între cele două funcții arată relativ simplu:



Pentru a corecta al doilea grafic ca să arate ca primul, trebuie să menținem un al doilea AIB în care:

- să scădem pe pozițiile  $l, \dots, r$  valoarea  $(l-1)x$ ;
- să adăugăm pe pozițiile  $r+1, \dots, n$  valoarea  $(r-l+1)x$ .

În termeni de sume parțiale, trebuie:

- să scădem pe poziția  $l$  valoarea  $(l-1)x$ ;
- să adăugăm pe poziția  $r+1$  valoarea  $rx$ .

Astfel ia naștere [codul](#) care, dacă nu-l înțelegem, poate părea foarte ezoteric:

```
struct fenwick_tree_2 {
    fenwick_tree v, w;

    void from_array(long long* src, int n) {
        v.n = n;
        w.from_array(src, n);
    }

    void range_add(int l, int r, long long val) {
        v.add(l, val);
        v.add(r + 1, -val);
        w.add(l, -val * (l - 1));
        w.add(r + 1, val * r);
    }

    long long prefix_sum(int pos) {
        return v.prefix_sum(pos) * pos + w.prefix_sum(pos);
    }
}
```

```
long long range_sum(int l, int r) {  
    return prefix_sum(r) - prefix_sum(l - 1);  
}  
};
```

## 3.13 Arbori indexați binar 2D

Putem extinde arborii indexați binar la matrice, cu costuri  $\mathcal{O}(\log^2 n)$  pentru operații. Să considerăm următoarele operații (*point update*, *rectangle query*):

- 1 row col val: Adaugă val la coordonatele  $(row, col)$
- 2 row1 col1 row2 col2: Calculează suma dreptunghiului  $(row_1, col_1) - (row_2, col_2)$  inclusiv.

### 3.13.1 Structura informației

Așa cum arborele 1D modifică structura informației din vector, arborele 2D modifică structura informației din matrice. El stochează anumite sume parțiale. Mai exact, arborele stochează la poziția  $(r, c)$  suma elementelor din submatricea (originală) de dimensiuni  $p \times q$  cu colțul dreapta-jos la coordonatele  $(r, c)$ , unde

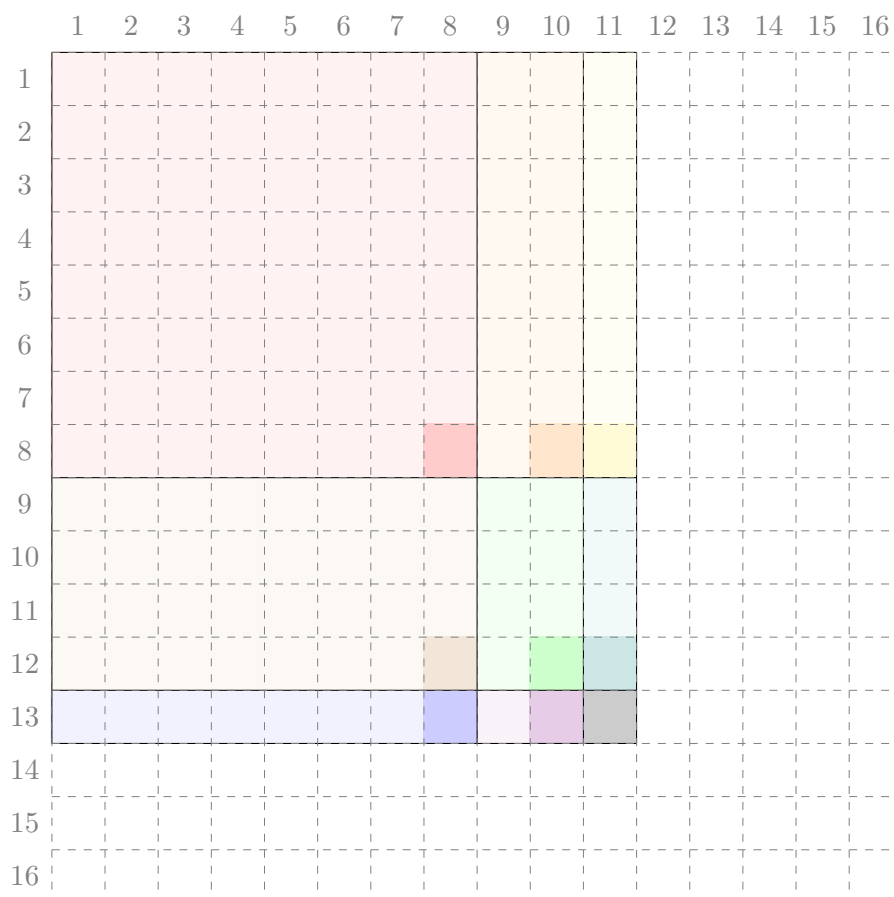
- $p$  este cea mai mare putere a lui 2 care îl divide pe  $r$
- $q$  este cea mai mare putere a lui 2 care îl divide pe  $c$ .

De exemplu, la poziția 40, 60 arborele stochează suma elementelor din matricea de dimensiuni  $8 \times 4$  cuprinsă între liniile 33 și 40 și coloanele 57 și 60.

### 3.13.2 Calculul sumei dintr-un dreptunghi

Putem folosi această structură pentru a calcula suma dreptunghiurilor de forma  $(1, 1) - (r, c)$ . Iată o figură pentru  $r = 13$  și  $c = 11$ .





Dreptunghiul de dimensiune  $13 \times 11$  se compune din  $3 \times 3$  dreptunghiuri cu laturile puteri ale lui 2. Trebuie să însumăm valorile din colțurile jos-dreapta ale acestor dreptunghiuri (desenate mai întunecat). Codul este:

```
int prefix_sum(int row, int col) {
    int s = 0;

    for (int r = row; r; r &= r - 1) {
        for (int c = col; c; c &= c - 1) {
            s += mat[r][c];
        }
    }

    return s;
}
```

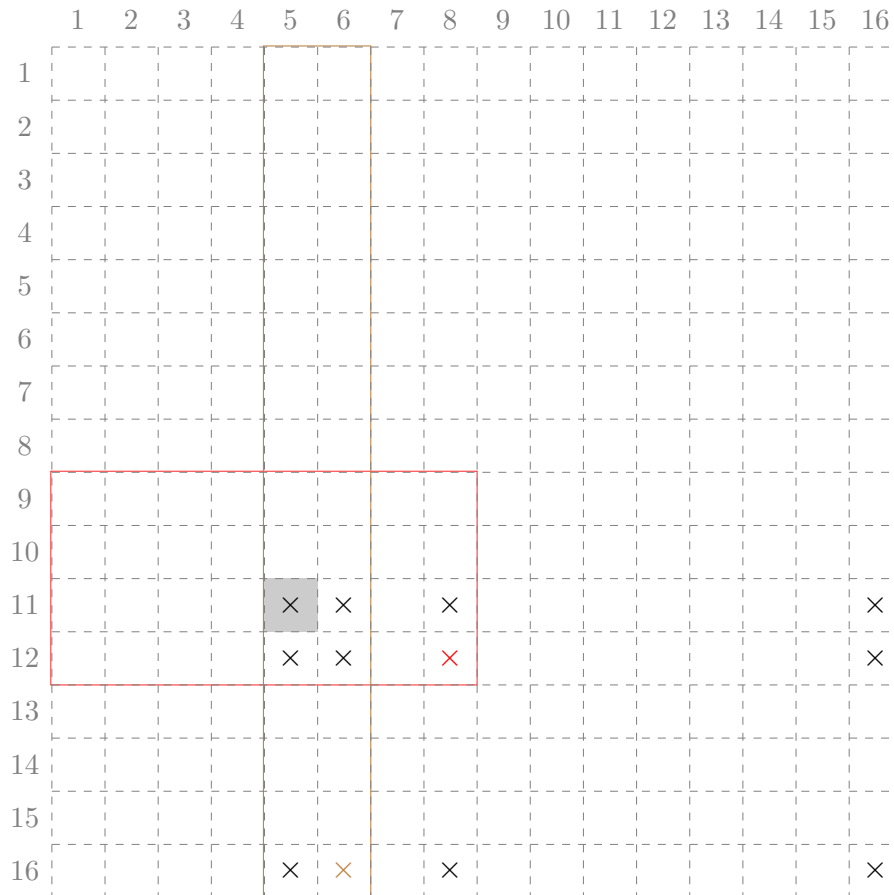
Desigur, putem calcula prin includeri și excluderi suma unui dreptunghi arbitrar:

```
int rectangle_sum(int row1, int col1, int row2, int col2) {
    return
        + prefix_sum(row2, col2)
        - prefix_sum(row2, col1 - 1)
        - prefix_sum(row1 - 1, col2)
        + prefix_sum(row1 - 1, col1 - 1);
}
```

}

### 3.13.3 Actualizări punctuale

Ca și la varianta 1D, când modificăm valoarea de la coordonatele  $(r, c)$  trebuie să modificăm corespunzător toate dreptunghiurile care includ acele coordonate. Iată un exemplu pentru linia 11, coloana 5:



Se observă că trebuie actualizate liniile 11, 12 și 16, adică exact cele care ar include poziția 11 într-un AIB unidimensional. Similar, trebuie actualizate coloanele 5, 6, 8 și 16, adică exact cele care ar include poziția 5. Am evidențiat cu roșu și cu auriu două dintre aceste coordonate,  $(12, 8)$  și  $(16, 6)$ , și dreptunghiurile aferente lor, pentru a evidenția că ele includ celula  $(11, 5)$ .

Codul pentru actualizare este:

```
void add(int row, int col, int val) {
    for (int r = row; r <= n; r += r & -r) {
        for (int c = col; c <= n; c += c & -c) {
            mat[r][c] += val;
        }
    }
}
```

### 3.13.4 Construcția în $\mathcal{O}(n^2)$

Și acest arbore poate fi construit in-place, refolosind matricea dată la intrare și în timp  $\mathcal{O}(1)$  per element.

În varianta unidimensională, trebuia să propagăm valoarea de la poziția  $x$  la poziția  $x + (x \& -x)$ .

În varianta bidimensională am vrea să procedăm astfel:

- Fie  $r' = r + (r \& -r)$  și  $c' = c + (c \& -c)$ .
- Propagăm valoarea de la poziția  $(r, c)$  la poziția  $(r, c')$ . De acolo, ea se va propaga automat la coloanele următoare.
- Propagăm valoarea de la poziția  $(r, c)$  la poziția  $(r', c)$ . De acolo, ea se va propaga automat la liniile următoare, iar pe fiecare linie pe coloanele următoare.

Dar apare o problemă: valoarea de la  $(r, c)$  se va propaga la  $(r', c')$  de două ori, pe căi diferite! Din fericire, este suficient să o scădem o dată. Iată codul:

```
void build() {
    for (int r = 1; r <= n; r++) {
        for (int c = 1; c <= n; c++) {
            int next_r = r + (r & -r);
            int next_c = c + (c & -c);

            if (next_r <= n) {
                mat[next_r][c] += mat[r][c];
            }

            if (next_c <= n) {
                mat[r][next_c] += mat[r][c];
            }

            if ((next_r <= n) && (next_c <= n)) {
                mat[next_r][next_c] -= mat[r][c];
            }
        }
    }
}
```

# Capitolul 4

## Descompunere în radical

Pe lângă faptul că oferă complexitate optimă pentru unele probleme, metoda oferă și un substitut bun pentru algoritmi în  $\mathcal{O}(n \log n)$  și în special  $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ , în cazul în care nu găsim ideea. Descompunerea în radical este, în experiența mea, mult mai ușor de implementat.

### 4.1 Actualizări punctuale

Revenim la problema inițială: actualizări punctuale, sume pe interval. Împărțim vectorul în blocuri de lungime  $k = \sqrt{n}$ . Așadar, vor exista  $\lceil n/k \rceil$  blocuri (engl. *blocks* sau *buckets*). Pentru fiecare bloc, menținem o informație suplimentară: suma elementelor din acel bloc.

Memorie suplimentară:  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ .

```
int v[MAX_N];
int b[MAX_BUCKETS];
int bs, nb;

// Se poate implementa și cu împărțiri pentru concizie (sînt doar n).
void init_buckets() {
    nb = sqrt(n + 1);
    bs = n / nb + 1;

    for (int i = 0; i < nb; i++) {
        int bucket_start = i * bs;
        for (int j = 0; j < bs; j++) {
            b[i] += v[j + bucket_start];
        }
    }
}

int array_sum(int* v, int l, int r) {
    int sum = 0;
    while (l < r) {
        sum += v[l++];
    }
}
```

```

    }
    return sum;
}

int fragment_sum(int l, int r) {
    return array_sum(v, l, r);
}

int bucket_sum(int l, int r) {
    return array_sum(b, l, r);
}

int range_sum(int l, int r) { // [l, r)
    int bl = l / bs, br = r / bs;
    if (bl == br) {
        return fragment_sum(l, r);
    } else {
        return
            // capete
            fragment_sum(l, (bl + 1) * bs) +
            fragment_sum(br * bs, r) +
            // blocuri complete
            bucket_sum(bl + 1, br);
    }
}

void point_add(int pos, int val) {
    v[pos] += val;
    b[pos / bs] += val;
}

```

Vă recomand să lucrați pe intervale închise la stînga, deschise la dreapta, ca să simplificați aritmetica.

Încheiem secțiunea cu observația că funcția `range_sum` are complexitatea  $\mathcal{O}(k + n/k)$ : Ea iterează naiv prin blocurile acoperite parțial, așadar  $\mathcal{O}(k)$ , și iterează rapid prin blocurile acoperite complet, așadar  $\mathcal{O}(n/k)$ . Alegem  $k = \sqrt{n}$  ca să minimizăm acea sumă, dar vom vedea în unele exemple că pot lua naștere și alte sume care duc la valori diferite pentru  $k$ .

## 4.2 Actualizări pe interval

Folosim o informație suplimentară care amintește de informația propagată *lazy* din arborii de segmente. Pentru problema dată (sume pe interval), am denumit această informație **bdelta**. Ea are semnificația: `bdelta[j]` este o valoare care trebuie adăugată la fiecare element din blocul  $j$ . Așadar, valoarea reală a unui element  $i$  din blocul  $j$  este `v[i] + bdelta[j]`.

```

int fragment_sum(int l, int r, int bucket) {

```

```
    return
        (r - 1) * bdelta[bucket] +
        array_sum(v, l, r);
}

int bucket_sum(int l, int r) {
    return
        array_sum(bsum, l, r) +
        bs * array_sum(bdelta, l, r);
}

int range_sum(int l, int r) {
    int bl = l / bs, br = r / bs;
    if (bl == br) {
        return fragment_sum(l, r, bl);
    } else {
        return
            // capete
            fragment_sum(l, (bl + 1) * bs, bl) +
            fragment_sum(br * bs, r, br) +
            // blocuri complete
            bucket_sum(bl + 1, br);
    }
}

void array_add(long long* v, int l, int r, int val) {
    while (l < r) {
        v[l++] += val;
    }
}

void fragment_add(int l, int r, int bucket, int val) {
    bsum[bucket] += (r - l) * val;
    array_add(v, l, r, val);
}

void range_add(int l, int r, int val) {
    int bl = l / bs, br = r / bs;
    if (bl == br) {
        fragment_add(l, r, bl, val);
    } else {
        // capete
        fragment_add(l, (bl + 1) * bs, bl, val);
        fragment_add(br * bs, r, br, val);

        // blocuri complete
        array_add(bdelta, bl + 1, br, val);
    }
}
```

Paranteză: conceptual, aint-urile fac același lucru cu descompunerea în radical, deci multe concepte se translatează între cele două, cum ar fi propagarea *lazy*. Marea inovație a arborilor de intervale este că garantează descompunerea în  $\mathcal{O}(\log n)$  blocuri.

## 4.3 Optimizări

### 4.3.1 Evitați împărțirile!

Codul anterior face doar două împărțiri per operație. În general, aveți nevoie strict de o împărțire pentru fiecare indice primit ca parametru. Evitați stilul de mai jos, care face  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$  împărțiri (sau operații modulo) per operație. El poate fi **de câteva ori mai lent** (vedeți *benchmark*-urile).

```
int bl = l / bs, br = r / bs;
int sum = 0;

// stînga
do {
    sum += v[l++];
} while (l % bs);

// dreapta
while (r % bs) {
    sum += v[--r];
}

// blocuri complete
for (int i = bl + 1; i < br; i++) {
    sum += b[i];
}

return sum;
```

### 4.3.2 Alegerea mărimii blocurilor

Am auzit că mărimea blocului merită declarată constantă, deoarece compilatorul va optimiza împărțirile. Am experimentat, dar diferențele nu sînt semnificative. Am încercat chiar să declar mărimea **o putere a lui 2**, pentru ca împărțirile să fie ieftine. Codul rezultat a fost mai lent! Cred că motivul este că se dezechilibrează acea funcție  $k + n/k$  pe care descompunerea în radical o optimizează.

Diferența de viteză este vizibilă cînd codul face multe împărțiri. Cînd codul face  $\mathcal{O}(1)$  împărțiri per operație, nu mai contează.

Are sens să declarați mărimea constantă dacă vi se pare codul mai simplu (evitați cîteva calcule la inițializare). În acest caz, vă recomand să puneți constanta mică (3-4) cînd lucrați local și să-i

dați valoarea reală când trimiteți sursa. Altfel, dacă testați local pe teste mici și mărimea blocului 300, nu veți testa decât codul cu interogări și actualizări într-un singur bloc.

### 4.3.3 Alegerea mărimii blocurilor pentru operații inegale

Dacă programul vostru depășește timpul, merită să variați mărimea blocurilor în jurul lui  $\sqrt{n}$  ca să vedeți dacă se schimbă ceva. Fie  $b$  numărul de blocuri și fie  $l$  lungimea unui bloc. Operațiile pot depinde doar de una dintre aceste variabile sau pot depinde de ambele, dar în mod inegal. Exemplu: dacă constanta pentru cele două capete de segment (de lungime medie  $l/2$ ) este mult mai mare decât constanta pentru blocurile întregi, merită redus  $l$ -ul puțin.

Iată un exemplu mai interesant. Să spunem că nu știm să rezolvăm corect una dintre operații și găsim doar o implementare în  $\mathcal{O}(b + l^2)$ . Pare catastrofic: dacă alegem  $b = l = \sqrt{n}$ , avem de fapt o soluție în  $\mathcal{O}(n)$ . 🤔

Dar se poate asimptotic mai bine. Să alegem  $b = n^{2/3}$ , caz în care  $l = n/b = n^{1/3}$ . Dacă  $n = 100.000$ , atunci  $b = 2.174$  și  $l = 46$ . O soluție în  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$  per operație ar face circa 600 de operații, pe când a noastră va face circa 4.300 de operații. Desigur, diferența este notabilă, dar, cu o implementare eficientă, avem șanse să „ținem aproape”.

Pauză de matematică: mai exact, noi vrem să găsim minimul funcției

$$f(x) = x^2 + \frac{n}{x}$$

Funcția își atinge minimul când derivata este zero, iar derivata este

$$f'(x) = 2x - \frac{n}{x^2} = \frac{2x^3 - n}{x^2}$$

Rezultă că  $l$  minim este  $\sqrt[3]{n/2} \approx 37$ , iar funcția va face sub 4.100 de operații.

## 4.4 Probleme

### 4.4.1 Problema Mexitate (ONI 2018 clasa a 9-a)

[enunț](#) • [surse](#)

Această problemă nu mi se pare nici în ruptul capului de clasa a 9-a. Posibil de baraj juniori.

Am notat cu  $m$  numărul de linii deoarece  $m$  vine înaintea lui  $n$  în alfabet, după cum și  $k$  vine înaintea lui  $l$  în alfabet.

Să luăm în calcul soluția naivă: calculăm mex-ul matricei din colțul stînga-sus, apoi translatăm în diverse feluri matricea pentru a recalcula incremental mex-urile celorlalte ferestre. De exemplu, putem urma un traseu șerpuit: translatăm matricea la dreapta pînă la capăt, apoi o dată în jos, apoi în stînga pînă la capăt etc.



La fiecare translație, menținem într-o structură  $S$  informații despre frecvența elementelor din matrice. Ștergem din structură elementele care ies din fereastră și le inserăm pe cele care intră în fereastră. Atunci complexitatea translatărilor va fi  $\mathcal{O}(mnk + ml)$ . Ca să minimizăm efortul, rotim sau transpunem matricea când  $k > l$ . Astfel,  $k \leq l$  și complexitatea translatărilor va fi  $\mathcal{O}(mn\sqrt{mn})$ .

Odată ce am adus raționamentul pînă aici, eu am și trimis o sursă, cu structura  $S$  implementată naiv ca vector de frecvențe. Astfel m-am asigurat că restul programului funcționează, căci el are suficient de multă logică (matrice de dimensiuni arbitrare, transpoziții, șerpuire...). Deoarece am gîndit totul modular, am programat structura `frequency_tracker` să expună funcțiile `add`, `remove` și `mex`. Pentru versiunea optimizată, doar am rescris acele funcții.

Pentru punctaj maxim, ce ne dorim de la structura  $S$ ? Dorim să facem  $\mathcal{O}(mn\sqrt{mn})$  inserări și ștergeri și  $\mathcal{O}(mn)$  calcule de mex. Rezultă că ne permitem  $\mathcal{O}(\sqrt{mn})$  per apel de mex, dar avem nevoie de  $\mathcal{O}(1)$  pe inserare și ștergere.

Atunci putem folosi descompunerea în radical. Stocăm vectorul naiv de frecvențe. În plus, în fiecare bloc stocăm numărul de valori nenule. Inițial această valoare este 0. Ea crește cu 1 ori de cîte ori frecvența unui element din bloc crește de la 0 la 1 și, invers, scade cu 1 ori de cîte ori frecvența unui element din bloc scade de la 1 la 0. Funcția mex caută din bloc în bloc pînă cînd găsește un bloc cu cel puțin o valoare nulă, apoi caută naiv prin acel bloc.

#### 4.4.2 Problema Give Away (SPOJ)

[enunț](#) • [surse](#)

Problema are limită de timp mare (1-2 secunde, iar conform paginii *status*, chiar peste 6 secunde). Acesta este un indiciu bun că o soluție în  $\mathcal{O}((n+q)\sqrt{n})$  este arhisuficientă. Doar că pare mai rău de atît! Să presupunem că ținem pe fiecare bloc o structură  $S$  (nu știm încă ce). Atunci:

- Sigur putem procesa actualizările în  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ , chiar și naiv la o adică.
- La căutare, pare simplu să procesăm naiv blocurile acoperite parțial, în  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ .
- Dar ce facem cu blocurile acoperite complet? Dacă folosim orice structură echilibrată, introducem un factor logaritm în plus pentru căutarea lui  $c$ .

Rezultă o complexitate de  $\mathcal{O}(q\sqrt{n} \log n)$ . Dar în 6 secunde, este acceptabil.

#### Mărimea blocurilor

Dacă am vrea să optimizăm suma  $k + n/k$ , am alege  $k = \sqrt{n} \approx 707$ . Dar noi dorim să optimizăm suma  $k + n/k \log k$ . Ochiometric log-ul va fi undeva între 7 și 12, deci este important să-l mărim pe  $k$ . Atunci  $\log k$  va crește lent, dar  $n/k$  va scădea rapid. Din cîteva încercări pe hîrtie aflăm că valoarea optimă pentru  $k$  este 2.000 sau 3.000. Într-adevăr, timpii de execuție pe acolo ating optimul.

## Detalii de implementare

Așadar, dorim o structură  $S$  care să admită inserări, ștergeri, și numărarea elementelor mai mari sau egale cu o valoare dată. Eu am izolat această structură într-un `struct` și am scris o primă [implementare naivă](#) ( $S$  este doar un vector). Cu doar 5 linii de cod în plus, sursa naivă mă ajută să verific corectitudinea restului programului.

A doua încercare a fost cu [structuri de date](#) din STL, care trece în 3 secunde. Dar este nevoie să memorăm papagalicește două noțiuni (le vom relua în capitolele viitoare):

1. `set`-ul simplu nu este suficient, căci el poate să caute valoarea  $c$ , dar nu și să numere elementele mai mari sau egale cu  $c$ . Este nevoie de structuri cu statistici de ordine (PBDS).
2. Blocurile pot conține valori egale, deci ne trebuie un multiset. Multisetul PBDS este o încropeală, iar ștergerea trebuie rescrisă.

Dar a treia încercare este elementară și trece în 1.3 secunde: pe fiecare bloc ținem vectorul original (ca să știm ce element înlocuim) și o copie sortată. Putem căuta binar în acea copie, iar la inserare/ștergere o actualizăm prin deplasări naive.

### 4.4.3 Problema Holes (Codeforces)

[enunț](#) • [sursă](#)

Îmi place această problemă pentru că este nestandard. Nu facem efectiv împărțirea în blocuri și nu stocăm informații agregate pe fiecare bloc. În loc de aceasta, fiecare poziție  $pos$  reține informații ca să își accelereze trecerea prin blocul său:

- care este ultima destinație din același bloc pe care o vizitează o bilă pornind de la  $pos$ ;
- câte salturi face bila până la acea destinație.

Atunci operațiile sînt:

- La interogare, urmărim traseul bilei din bloc în bloc, în timp  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ .
- La actualizare, trebuie să recalculăm poziția modificată și toate pozițiile din stînga ei, din același bloc, tot în  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ .

Sursa mea se apropie de limita de timp (700 ms din 1000 ms). Am încercat următoarea optimizare care cred că ajută. Am ales o mărime mai mare pentru blocuri, 1.000 în loc de cea teoretică ( $\sqrt{100.000} \approx 316$ ). Astfel accelerăm interogările, care traversează mai puține blocuri, în defavoarea actualizărilor, care au de recalculat mai multe poziții. Dar actualizările operează foarte local, pe 1.000 de poziții vecine și vor beneficia de cache. În schimb, interogările sar de colo-colo prin vector.

Remarc și că cele mai rapide soluții ajung la 122 ms. Ele folosesc *link-cut trees* pentru a obține  $\mathcal{O}(n \log n)$ . Putem percepe structura ca fiind arborescentă: părintele unei poziții este poziția unde sare bila. Atunci actualizările schimbă structura arborelui, ancorînd poziția modificată de un alt părinte. De aici (cred) decurge soluția cu *link-cut trees*.

### 4.4.4 Problema Piezișă (Baraj ONI 2022)

enunț • surse

Un element comun tuturor soluțiilor este: renumerotăm vectorul de la 1. Acum, dacă xorul pe  $[l, r]$  este 0, atunci xorurile pe  $[0, l-1]$  și  $[0, r]$  sînt egale. Așadar, calculăm xorurile parțiale și le normalizăm, ca să fie indexabile. Acum răspunsul la orice interogare  $[l, r]$  este o pereche  $(x, y)$  cu  $0 \leq x < l, r \leq y \leq n$  și  $v[x] = v[y]$ .

#### Brute force de 100p

Menționez pentru completitudine că următorul *brute force* optimizat ia 100p: Răspundem la interogări online, imediat ce le primim. Fie o interogare  $[l, r]$ . Căutăm binar ultima apariție a lui  $v[r]$  pe o poziție anterioară lui  $l$  (pentru aceasta, colectăm în prealabil listele de poziții pentru fiecare valoare distinctă din  $v$ ). Fie această poziție  $q$ . Atunci avem o soluție de mărime  $r-q$ , posibil  $\infty$  dacă elementul  $v[r]$  nu apare înainte de poziția  $l$ . Repetăm aceeași întrebare la pozițiile  $r+1, r+2, \dots$ . Menținem minimul răspunsurilor la aceste căutări, fie el  $m$ . Ne oprim la poziția  $l+m$  (sau, desigur, la  $n$ ), deoarece dincolo de ea am putea primi doar răspunsuri mai mari decât optimul curent. Afișăm răspunsul  $m$ .

#### Metoda 1

Fără sortarea interogărilor nu am găsit nicio soluție. Așadar, să sortăm interogările după capătul stîng și să răspundem la ele baleind  $l$  de la 1 la  $n$ . Acum, pentru o interogare  $[l, r]$ , dorim ca pentru fiecare poziție  $r' \geq r$  să aflăm dacă valoarea  $v[r']$  există pe vreo poziție  $l' \leq l$ . Aceasta este mult prea scump, deci dorim cumva să răspundem la întrebări pentru mai multe poziții simultan.

Să descompunem vectorul în bucăți de mărime  $\sqrt{n}$ . Pentru o interogare  $[l, r]$ , fie blocurile celor două capete  $bl$  și  $br$ . Atunci răspunsul poate avea capătul stîng fie în blocul  $bl$  (în stînga lui  $l$ ), fie într-un bloc anterior. Similar pentru capătul drept. Cazul care ne încurcă este cel în care ambele capete sînt în blocurile  $bl$ , respectiv  $br$ . Vrem să evităm să comparăm naiv aceste  $\mathcal{O}(\sqrt{n} \times \sqrt{n}) = \mathcal{O}(n)$  posibilități.

Astfel ne vine ideea să calculăm o singură informație pentru toate pozițiile din stînga lui  $l$ . Fie  $left[x]$  ultima poziție (înaintea lui  $l$ ) pe care apare valoarea  $x$ . Evident, putem menține vectorul  $left$  în  $\mathcal{O}(1)$  pe măsură ce  $l$  avansează.

Capătul drept al interogării poate varia oricum, și aici intervine descompunerea în radical. Fie  $best[b]$  cea mai mică soluție cunoscută pînă în prezent între orice valoare din blocul  $b$  și orice valoare din stînga lui  $l$ . Putem menține vectorul  $best$  în  $\mathcal{O}(1)$  per bloc pe măsură ce  $l$  avansează (așadar efort  $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$  efort global). Pentru aceasta, trebuie să cunoaștem, pentru elementul în curs de procesare  $v[l]$ , cea mai din stînga apariție a sa în fiecare bloc următor. Putem precalcuła această informație la început, într-o manieră similară cu colectarea listelor de apariții a fiecărei valori. Vezi vectorul `ptr` și funcția `preprocess_values`.

Cu aceste informații, răspunsul pentru interogarea curentă  $[l, r]$  este minimul dintre:

- Valorile *best* ale blocurilor mai mari decât *br*.
- Diferențele  $r' - left[v[r']]$  pentru elementele din blocul *br* începând cu poziția *r*.

Codul este lung, cam urât și cam lent, dar ia 100p.

## Metoda 2

Citind surse mai rapide decât a mea, am găsit-o [pe aceasta](#), care folosește o metodă mai simplă. Principala diferență este că sortează interogările diferit: crescător după blocul lui *l*, iar la egalitate descrescător după *r*. Această sortare amintește de algoritmul lui Mo, pe care îl vom discuta în curând.

Vectorul *left* are aceeași definiție ca mai înainte, dar include doar elementele dinaintea blocului *bl*.

La procesarea unui bloc, avem avantajul că toate *r*-urile scad. De aceea, și la dreapta putem ține un vector *right* similar cu *left*: *right*[*x*] indică prima apariție a lui *x* pe o poziție mai mare decât *r*-ul curent. Atenție, vectorul *right* trebuie golit și recalculat pentru fiecare bloc *bl*. Acest efort este  $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$ , deci acceptabil.

Pe măsură ce *r* scade, menținem și valoarea minimă *m* a oricărei perechi *right*[*x*] – *left*[*x*]. Deoarece *r* doar scade, intervalele doar scad, deci *m* poate doar să scadă.

Acum, pentru [*l*, *r*], răspunsul poate fi:

- chiar *m*, dacă soluția are capătul stîng înaintea blocului *bl*;
- altfel, minimul dintre *right*[*x*] – *x* pentru toate valorile *x* din blocul *bl*, din stînga lui *l*.

Implementarea este conceptual mai simplă și de peste două ori mai rapidă!

## 4.5 Descompunere după operații

Iată acum o tehnică înrudită. Proiectăm o structură relativ naivă pentru procesarea operațiilor. Prin „naiv” înțelegem, de exemplu, inserarea într-un vector prin deplasarea elementelor, fără a folosi structuri de date echilibrate.

Facem aceste operații naive cîtă vreme ele se încadrează în  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$  sau  $\mathcal{O}(\sqrt{q})$  per operație.

Periodic, trebuie să intervenim pentru ca structura naivă să nu degenereze în timp și să nu ajungă la  $\mathcal{O}(n)$  sau  $\mathcal{O}(q)$ . De aceea, aproximativ o dată la  $\sqrt{q}$  operații iterăm prin structură și o „consolidăm” (ce înseamnă asta depinde de la problemă la problemă). Această consolidare poate dura  $\mathcal{O}(n)$ , pentru ca efortul total al consolidărilor să fie  $\mathcal{O}(n\sqrt{q})$ . Această limită de timp face consolidările să fie facile, în general.

Să studiem o problemă concretă.

## 4.6 Probleme

### 4.6.1 Problema Serega and Fun (Codeforces)

[enunț](#) • [surse](#)

Trebuie să procesăm eficient operațiile:

1. Rotește circular la dreapta, cu o poziție, un interval  $[l, r]$ .
2. Raportează frecvența unei valori  $k$  într-un interval  $[l, r]$ .

Iată întâi soluția „clasică”, cu descompunere în blocuri de mărime egală. Soluția relativ directă. În fiecare bloc putem menține:

1. O listă a elementelor.
2. Informații despre frecvență (map sau vector simplu).

Atunci, la rotire, trebuie să:

1. Rotim naiv blocurile acoperite parțial.
2. Rotim eficient blocurile acoperite complet. La rotire, adăugăm la începutul listei elementul care ne parvine de la blocul anterior și trimitem ultimul element din listă în blocul următor.

La interogare, trebuie să:

1. Consultăm element cu element blocurile acoperite parțial.
2. Consultăm vectorii de frecvență ai blocurilor acoperite complet.

#### Discuție despre implementarea cu structuri STL

Putem rezolva problema și cu structuri ca deque, map sau unordered\_map, dar este nevoie de o implementare atentă ca să nu depășim timpul și memoria.

În particular, mare atenție la [operatorul \[\]](#)! Este tentant să îl folosim ca să aflăm frecvența unui element. Dacă elementul nu există în map, operatorul va returna 0, ceea ce este corect. Dar **operatorul inserează elementul** dacă nu exista deja.

Ce înseamnă asta? În mod normal, suma mărimilor tabelor hash din toate blocurile va fi  $n$ . Dar, dacă pentru fiecare din cele  $q$  interogări noi căutăm o valoare inexistentă în fiecare dintre cele  $\sqrt{n}$  blocuri, și dacă toate acele valori sînt inserate, suma mărimilor tabelor va ajunge la  $q\sqrt{n}$ . Necesarul de memorie va crește enorm. Este obligatoriu să folosim iteratori pentru căutarea sau decrementarea frecvențelor, pentru ca mărimea tabelor să rămînă  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ .

#### Detalii de implementare

Prime sursă stochează lista de elemente din fiecare bloc într-un deque din STL. A doua sursă folosește un simplu buffer circular: un vector de mărime `BUCKET_SIZE` împreună cu un pointer la primul element din listă. Atunci putem face rotirea completă în  $\mathcal{O}(1)$  mutînd pointerul de start

cu un element spre stînga. Pe poziția noului element de start scriem valoarea provenită din blocul anterior.

O altă diferență este că prima sursă stochează frecvențele din fiecare bloc într-o tabelă hash, pe cînd a doua folosește un vector de frecvențe, căci elementele au valori de cel mult  $n$ . Necesarul de memorie crește la  $\mathcal{O}(n \times \text{numBuckets})$ . Din acest motiv, merită să experimentăm cu mai puține blocuri de dimensiune mai mare. Într-adevăr, pentru blocuri de mărime  $2\sqrt{n} \approx 640$ , timpul scade la jumătate față de  $\sqrt{n}$ .

Mai remarcăm că frecvența într-un singur bloc încapă pe tipul `short`, nu este nevoie de `int`. Doar cu această modificare am redus timpul de rulare cu 20%. Am experimentat și cu `unsigned char`, dar atunci frecvența maximă stocabilă ar fi 256, deci mărimea maximă a unui bloc ar trebui să fie 256, iar timpul se înrăutățește.

### Soluție cu descompunere după operații

Iată acum și rezolvarea în care lăsăm blocurile să fluctueze ca lungime. La rotire, extragem efectiv elementul de pe poziția  $r$  din blocul său și îl inserăm la indicele corect în blocul poziției  $l$ . Blocurile dintre  $l$  și  $r$  rămîn nemodificate. Ca fapt divers, complexitatea rotirii depinde doar de mărimea blocului, nu și de numărul de blocuri.

Cu timpul, lungimile blocurilor pot degenera, ceea ce poate încetini operațiile: dacă un bloc devine foarte mare, atunci inserarea, ștergerea și numărarea de elemente din acel bloc vor fi lente. De aceea, periodic refacem structura blocurilor:

1. Colectăm toate blocurile într-un vector. Acesta este chiar conținutul real al vectorului.
2. Redistribuim elementele în blocuri de mărime egală.

Putem face redistribuirea fie periodic (la fiecare  $\mathcal{O}(\sqrt{q})$  operații), fie la nevoie, cînd în momentul inserării detectăm că unul dintre blocuri a atins un anumit prag, să zicem dublu față de lungimea inițială. În ambele cazuri, complexitatea rămîne  $\mathcal{O}(q\sqrt{n})$ .

Această implementare este relativ elementară și se mișcă de circa două ori mai repede decît precedenta!

## 4.7 Procesări diferite înainte și după $\sqrt{n}$

Următoarele două secțiuni teoretice prezintă două tehnici care ating timp  $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$  din motive matematice. Tehnicile nu duc la descompunere în radical „convențională”, cu blocuri, dar nu știu unde altundeva să le încadrez.

Prima tehnică pornește de la observațiile:

1. Între 1 și  $\sqrt{n}$  există  $\sqrt{n}$  valori<sup>1</sup>.
2. Valorile de forma  $\lfloor n/k \rfloor$ , cu  $k > \sqrt{n}$ , iau doar  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$  valori distincte.

---

<sup>1</sup>From the Department of Redundancy Department.

## 4.8 Probleme

### 4.8.1 Problema Time to Raid Cowavans (Codeforces)

[enunț](#) • [sursă](#)

În foarte multe cuvinte, problema ne dă un vector cu  $n$  elemente și  $q$  interogări  $\langle prim, pas \rangle$ . Răspunsul fiecărei interogări este suma valorilor de pe pozițiile care formează progresia cu primul termen  $prim$  și pasul  $pas$ .

Desigur, codul naiv care însumează progresiile este lent:

```
long long naive_prog_sum(int first, int step) {
    long long sum = 0;
    for (int i = first; i <= n; i += step) {
        sum += w[i];
    }
    return sum;
}
```

Dar... nu chiar atât de lent! Dacă pasul este cel puțin  $\sqrt{n}$ , progresia va avea cel mult  $\sqrt{n}$  termeni. Rămîne să tratăm progresiile cu pasul mic (așadar  $1, 2, \dots, \sqrt{n}$ ). Ne permitem să facem o preprocesare în  $\mathcal{O}(n)$  pentru fiecare din acești pași. Pentru un pas  $pas$ , preprocesăm efectiv  $prep[i] = \text{răspunsul la progresia cu primul termen } i \text{ și pasul } pas$ . Apoi putem răspunde la interogările pentru acel pas în  $\mathcal{O}(1)$ .

```
void preprocess(int step) {
    for (int i = n; (i > n - step) && (i >= 1); i--) {
        prep[i] = w[i];
    }
    for (int i = n - step; i >= 1; i--) {
        prep[i] = w[i] + prep[i + step];
    }
}
```

Complexitatea totală este:

- $\mathcal{O}(q\sqrt{n})$  pentru progresiile cu pas mare (calculate naiv);
- $\mathcal{O}(n\sqrt{n} + q)$  pentru preprocesarea tuturor răspunsurilor pentru pași mici.

Alte probleme similare:

- [Train Maintenance](#) (Codeforces);
- [Căsuța](#) (Lot juniori 2025) – atenție, la momentul scrierii acestei secțiuni problema nu are checker.

## 4.9 Descompunere în valori distincte

Această tehnică pornește de la observația: dacă suma unor numere naturale este  $n$ , atunci numerele au  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$  valori distincte. Demonstrația decurge din inversa sumei Gauss.

### 4.10 Probleme

#### 4.10.1 Problema Sandor (Baraj ONI 2025)

[enunț](#) • [sursă](#)

Observăm că algoritmul lui Sandor este un algoritm *greedy* pentru problema rucsacului. Să facem trei experimente de gândire despre natura acestui algoritm.

În primul rînd, dacă eliminăm un obiect pe care algoritmul oricum nu l-ar selecta (pentru că nu încap), atunci vom obține aceeași sumă ca și cînd nu am elimina nimic. Practic, obiectul nu există pentru algoritm.

Mai interesant, putem generaliza prima observație. Dacă există  $k$  obiecte de aceeași greutate și, la acel pas în algoritm, în rucsac încap mai puțin de  $k$  din aceste obiecte, atunci pe oricare dintre ele încercăm să-l eliminăm vom obține aceeași greutate ca și cînd nu am elimina nimic. De ce? Dacă, de exemplu, există 5 obiecte identice și doar 3 încap în rucsac, atunci dacă îl eliminăm pe primul algoritmul îl va adăuga pe al 4-lea.

În sfîrșit, deoarece în rucsac punem obiecte cu greutatea totală cel mult  $g$ , rezultă că vom pune  $\mathcal{O}(\sqrt{g})$  greutăți distincte.

De aceea, merită să stocăm mai degrabă un vector de serii (în sursă le-am numit *runs*) de elemente egale,  $\langle val, cnt \rangle$ , decît valorile originale. Peste acest vector precalculăm niște *jump pointers*, adică răspunsurile la întrebări de tipul „Cu ce serie să continui algoritmul dacă rucsacul mai are capacitate rămasă  $c$ ?” Cu această reprezentare, evaluarea algoritmului lui Sandor este elementară și necesită timp  $\mathcal{O}(\sqrt{g})$ . Mai mult, putem parametriza algoritmul ca să-l putem rula începînd cu oricare dintre serii, nu neapărat cu prima.

#### Cerința 1

De aici rezultă un algoritm relativ naiv pentru cerința 1. El necesită  $\mathcal{O}(\sqrt{g}^2)$ , adică  $\mathcal{O}(g)$ .

Mergînd de la stînga la dreapta prin vector, considerăm fiecare serie  $\langle val, cnt \rangle$ . Dacă în prezent în rucsac încap mai puțin de  $cnt$  obiecte, atunci conform observației din preambul oricum am elimina un element din serie obținem tot soluția inițială (avem  $cnt$  astfel de moduri).

Dacă încap toate obiectele, atunci are sens să ne punem întrebarea „dar dacă eliminăm unul, ce obținem?”. Deci punem în rucsac doar  $cnt - 1$  obiecte și simulăm algoritmul lui Sandor (naiv) pentru restul vectorului. Apoi revenim la problema originală, punem în rucsac toate cele  $cnt$  obiecte și continuăm.



Așadar, facem  $\mathcal{O}(\sqrt{g})$  simulări ale algoritmului, pentru o complexitate totală de  $\mathcal{O}(g)$ . Este important să nu luăm în calcul valorile care nu încap în rucsac, deoarece complexitatea ar crește la  $\mathcal{O}(n\sqrt{g})$ . Acele valori le sărim folosind *jump pointers*. Doar le contorizăm, prin diferența între  $n$  și numărul de valori pe care le-am luat în calcul. Fiecare valoare sărită ne dă un mod de a obține greutatea algoritmului lui Sandor fără eliminări.

Vom parametriza și cerința 1 pentru a o putea rula începând cu orice serie și cu orice capacitate reziduală a rucsacului, nu neapărat cu prima serie și cu capacitatea  $g$ .

## Cerința 2

Dacă reușim să facem același gen de trecere prin vector și pentru cerința 2, și să delegăm subprobleme la algoritmul naiv (fără eliminări) și la cerința 1 (o eliminare), atunci vom obține o complexitate de  $\mathcal{O}(g\sqrt{g})$ . Pentru aceasta, trebuie să analizăm cazurile posibile.

În primul rînd, cîtă vreme din seria curentă nici măcar un obiect nu încapă în rucsac, trecem la seria următoare și contorizăm numărul de obiecte ignorate. Fie acest contor *mult*. Să spunem că avem capacitatea  $c = 100$  și am ignorat serii de greutate 200, 150 și 130, totalizînd  $mult = 10$  obiecte. Atunci avem  $C_{mult}^2 = 45$  de moduri de a elimina două din aceste obiecte. Rulăm algoritmul lui Sandor naiv și vedem ce sumă obținem. Adăugăm 45 la răspunsul pentru acea sumă.

Dacă măcar un exemplar încapă în rucsac, atunci putem încerca să eliminăm un obiect din seriile anterioare și unul din seria curentă. Deci apelăm cerința 1 începînd cu poziția curentă, și îi transmitem că fiecare soluție găsită trebuie socotită de *mult* ori, deoarece există *mult* moduri de a elimina un obiect dinaintea seriei curente.

Dacă seria curentă include cel puțin două obiecte, putem încerca să eliminăm două obiecte din seria curentă, punînd  $cnt - 2$  în rucsac. Desigur, există  $C_{cnt}^2$  moduri de a face asta, iar pentru restul vectorului rulăm Sandor varianta de bază. Îi trimitem algoritmului parametrizat multiplicatorul  $C_{cnt}^2$  pentru soluția pe care o va găsi.

Similar, putem elimina doar un obiect din grupa curentă, punînd  $cnt - 1$  în rucsac, ceea ce putem face în  $cnt$  moduri distincte. Iar pentru seriile următoare apelăm cerința 1, spunîndu-i că soluțiile găsite trebuie numărate de cîte  $cnt$  ori.

În sfîrșit, putem să punem toate obiectele în rucsac și să reconsiderăm cerința 2 de la seria următoare.

### 4.10.2 Problema Puzzle-bile (Lot 2025)

[enunț](#) • [sursă](#)

#### Formularea programării dinamice

Vom denumi **fereastră** o serie de celule libere consecutive.

Pare firesc să ne dorim să calculăm valori de următorul tip. Fie  $C_{r,c}$  costul pentru a aduce bila pe rîndul  $r$ , coloana  $c$ . E destul de clar că  $C_{r,c}$  va depinde doar de valori din  $C$  de pe rîndul  $r - 1$ . Dacă  $C_{r,c}$  va depinde de  $C_{r-1,c'}$ , atunci va trebui să calculăm și costul de a aduce pe rîndul  $r$  o fereastră pe intervalul  $[c', c]$ .

Așadar, să definim și  $D_{r,c,l}$  ca fiind costul de a aduce pe rîndul  $r$  o fereastră de lățime (cel puțin)  $l$  terminată la coloana  $c$ . Acum putem defini recurența pentru  $C$ :

$$C_{r,c} = \min_{c'=1}^c (C_{r-1,c'} + D_{r,c,c-c'+1})$$

Recurența modelează ideea că mergem pe rîndul  $r - 1$  pînă la coloana  $c'$ , apoi coborîm pe rîndul  $r$  unde am pregătit o fereastră care ne duce pînă la coloana  $c$ .

### Reducerea complexității

O soluție în  $\mathcal{O}(nm^2)$  procedează astfel: pentru fiecare celulă  $(r, c)$  considerăm fiecare fereastră de pe rîndul  $r$ . Dacă fereastra are lățime  $l$  și trebuie deplasată cu  $p$  celule pentru a o alinia la dreapta cu coloana  $c$ , atunci putem optimiza  $C_{r,c}$  cu cantitatea:

$$p + \text{rmq}(C_{r-1,c-l+1}, \dots, C_{r-1,c})$$

, unde desigur  $\text{rmq}$  este funcția de minim pe interval. Doar că există  $\mathcal{O}(m)$  ferestre pe fiecare rînd, deci complexitatea este prea mare. Aici intervine descompunerea în valori distincte! Există doar  $\mathcal{O}(\sqrt{m})$  lățimi distincte de ferestre pe fiecare rînd. De aceea putem itera doar prin aceste lungimi. Pentru o lungime fixată  $l$ , nu are sens să testăm decît cele mai apropiate ferestre din stînga, respectiv din dreapta coloanei curente  $c$ . De aici rezultă complexitatea totală  $\mathcal{O}(nm\sqrt{m})$ .

Implementarea nu este deloc simplă datorită următoarei situații pe care o enunțăm, dar nu o detaliam (ea este descrisă cu exemple în cea de-a doua sursă). Cînd aducem o fereastră din stînga coloanei  $c$ , decizia este simplă: trebuie să o deplasăm pînă cînd capătul ei drept atinge coloana  $c$ . Dar, cînd aducem o fereastră din dreapta coloanei  $c$ , avem libertatea să o deplasăm fie pînă cînd capătul ei stîng atinge coloana  $c$ , fie mai mult de atît. Depinde ce coloană  $c' < c$  ne interesează să „prindem” în recurență. Poate există o valoare  $c'$  destul de mică (costul deplasării pînă acolo este mare), dar unde  $C_{r-1,c'}$  este foarte mic și justifică costul deplasării. Ia naștere un al doilea tabel RMQ construit nu peste valorile  $C_{r-1,c}$ , ci peste  $C_{r-1,c} - c$ .

### Cîteva cuvinte despre Arpa's trick

Eu sînt mereu în căutare de noi structuri pentru RMQ. 😊 Îmi displace tabela rară deoarece folosește  $\mathcal{O}(n \log n)$  memorie și evit să mă reped la ea. Iată o structură interesantă, numită Arpa's trick. Aparent, și alte nații au șmenurile lor... CP Algorithms are [o lecție](#) foarte bună.

Algoritmul răspunde la interogări în ordine crescătoare după capătul drept. Deci putem întîi să sortăm interogările sau să le distribuim în liste după capătul drept. Apoi folosim o pădure de

mulțimi disjuncte, pe care o instanțiem pe măsură ce baleiem poziția capătului drept.

Cînd ajungem la o poziție nouă  $p$  unde se află valoarea  $x$ , în primul rînd instanțiem o nouă rădăcină în DSF: părintele lui  $p$  este  $p$ . În plus,  $p$  devine părinte și pentru toate rădăcinile anterioare  $p'$  care aveau valori  $x' > x$ . Procedăm astfel deoarece, pentru orice interogări viitoare, valoarea  $x'$  nu va fi niciodată RMQ, deoarece  $x$  va face și ea parte din orice interogare care îl conține pe  $x'$ . Pentru implementarea acestei părți folosim o stivă ordonată.

La interogarea  $\text{rmq}[p', p]$ , unde  $p$  este poziția curentă, răspunsul este rădăcina arborelui lui  $p'$ . Într-adevăr, dorim cea mai mică valoare cu care a fost  $p'$  unit la orice moment.

Am rezolvat problema Puzzle-bila folosind *Arpa's trick*. Implementarea este dificilă și ineficientă, deoarece colectarea în avans și ordonarea interogărilor de care vom avea nevoie îngreunează codul (ca să folosesc un eufemism). Dar codul pentru *Arpa's trick* în sine este scurt și clar. El funcționează în  $\mathcal{O}(\log^* n)$  amortizat cu memorie  $\mathcal{O}(n)$ .

```
struct arpa_s_trick {
    int val[MAX_N];
    int parent[MAX_N];
    int n;

    // 0 stivă cu pozițiile care încă nu au un element mai mic la dreapta.
    int st[MAX_N], ss;

    void reset() {
        ss = 0;
        n = 0;
    }

    void append(int x) {
        while (ss && (val[st[ss - 1]] >= x)) {
            parent[st[--ss]] = n;
        }
        st[ss++] = n;
        parent[n] = n;
        val[n++] = x;
    }

    int find(int p) {
        return (parent[p] == p)
            ? p
            : (parent[p] = find(parent[p]));
    }

    int rmq(int p) {
        return val[find(p)];
    }
};
```

# Capitolul 5

## Algoritmul lui Mo

Algoritmul lui Mo atinge tot complexitatea de  $\mathcal{O}((q + n)\sqrt{n})$ , ca și metoda descompunerii în radical, dar printr-o metodă destul de diferită. El duce adesea la cod mai simplu, dar necesită ca interogările să fie date în avans (*offline*).

### 5.1 Algoritmul lui Mo fără actualizări

Algoritmul lui Mo ordonează interogările și le procesează în această ordine:

1. După blocul capătului stâng.
2. La egalitate, după capătul drept.

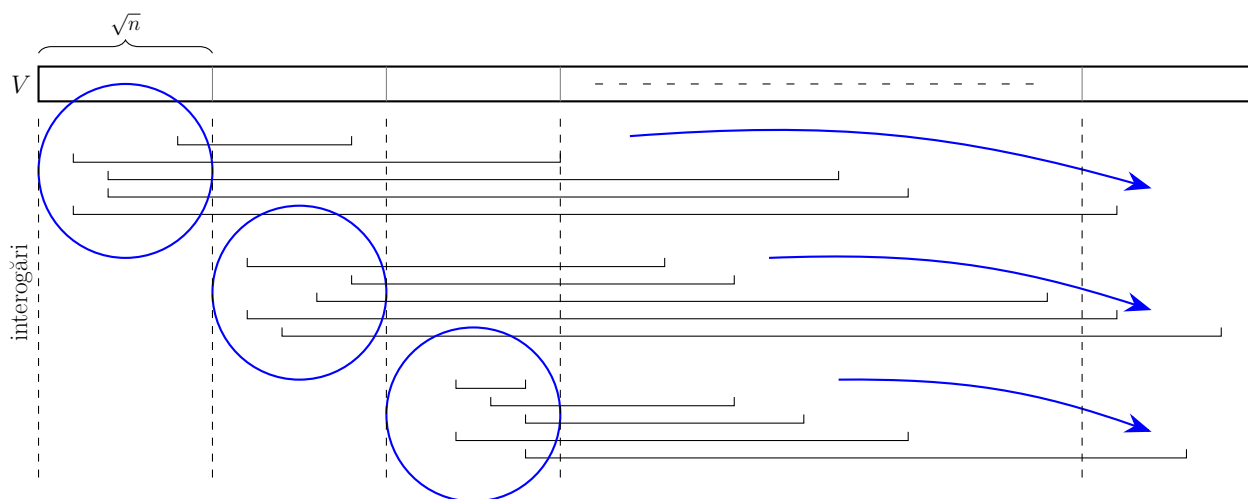


Figura 5.1: Ordonarea interogărilor în algoritmul lui Mo.

Algoritmul lui Mo ține minte informații despre interogarea curentă (răspunsul, dar posibil și alte informații). Pentru a trece la următoarea interogare, algoritmul:

1. Extinde intervalul curent cu câte un pas, pînă cînd ajunge să includă și următoarea interogare.

2. Restrînge intervalul curent cu cîte un pas, pînă cînd ajunge să coincidă cu următoarea interogare.

Atenție! Pașii trebuie executați în această ordine. Altfel puteți ajunge la intervale negative, din care încercați să eliminați elemente care nu au fost adăugate, cu consecințe neprevăzute.

Vom relua problema [D-query](#) (SPOJ) și vom examina [implementarea](#) algoritmului lui Mo. Logica este considerabil mai simplă decît la implementarea cu AIB, în  $\mathcal{O}(n \log n)$ . Surprinzător, timpul de rulare este identic!

### 5.1.1 Analiză de complexitate

La fiecare interogare, trebuie să deplasăm capetele intervalului curent ca să se suprapună cu interogarea. Care este efortul total?

- Capătul stîng se poate deplasa cu cel mult  $\sqrt{n}$  la fiecare interogare, plus  $n$  pași pentru toate trecerile între blocuri. Efortul total este de cel mult  $q\sqrt{n} + n$  pași.
- Capătul drept se deplasează cu cel mult  $n$  pași la dreapta pentru toate interogările dintr-un bloc, apoi cu cel mult  $n$  pași înapoi la stînga la trecerea între blocuri. Există  $\sqrt{n}$  blocuri, deci efortul total este de cel mult  $2n\sqrt{n}$  pași.

Să spunem că includerea sau excluderea unei poziții durează  $\mathcal{O}(f(n))$ . Pentru problema Dquery efortul este  $\mathcal{O}(1)$ , dar pentru alte probleme costul poate diferi. Atunci complexitatea totală a algoritmului lui Mo este:

$$\mathcal{O}((q + n)\sqrt{n}f(n))$$

### 5.1.2 Optimizare de viteză

Nu ne costă aproape nimic (doar un `if` în plus la sortare) ca, în cadrul unui bloc, să ordonăm interogările astfel:

- crescător după capătul drept în blocurile impare;
- descrescător după capătul drept în blocurile impare.

Atunci nu mai plătim costul deplasării spre stînga „în gol” a capătului drept al intervalului curent. Iată [o sursă](#) cu această optimizare la problema Dquery. Timpii de rulare nu diferă, dar în general optimizarea poate ajuta.

De amorul artei, strict pentru problema Dquery, am [normalizat](#) valorile din vectorul dat. Pot fi cel mult 30.000 de valori distincte, ceea ce înseamnă că vectorul de frecvențe (pe [short](#)) poate ocupa doar 60 kB, în loc de 2 MB. Din nou, timpii nu diferă.

Aș preciza, tot pentru Dquery, că soluțiile țin foarte bine pasul cu soluția cu AIB (70-75 ms în loc de 60-65).

## 5.2 Algoritmul lui Mo cu actualizări

Algoritmul lui Mo se pretează și la probleme care au actualizări, cu o complexitate de  $\mathcal{O}((q+n)n^{2/3})$ . El este în continuare offline, avînd nevoie să citească și să sorteze interogările (și, posibil, să normalizeze valorile).

Esența este să introducem o nouă dimensiune pentru operații, în afară de capetele de interval  $l$  și  $r$ : timpul  $t$ , adică indicele operației (între 1 și  $q$ ). Structura de date curentă stochează informații despre un interval  $[L, R]$  la un moment de timp  $T$ , adică despre vectorul cu toate actualizările cu indici mai mici sau egali cu  $T$ . Pentru a răspunde la interogarea  $[l, r]$  la momentul  $t$ , trebuie să:

1. Extindem intervalul curent pînă îl include pe  $[l, r]$  (ca și pînă acum).
2. Restrîngem intervalul curent pînă devine egal cu  $[l, r]$  (ca și pînă acum).
3. „Avansăm” timpul dacă  $T < t$ , procesînd actualizările din intervalul  $(T, t]$ .
4. „Dăm înapoi” timpul dacă  $t < T$ , inversînd actualizările din intervalul  $[t, T)$ .

Dacă actualizările efectuate sau inversate se întîmplă în intervalul curent  $[l, r]$ , actualizăm și structura de date, altfel nu.

### 5.2.1 Mărimea blocului, ordinea operațiilor, complexitate

Să alegem  $B$  blocuri de mărime  $S$ . Acum, să sortăm operațiile după blocul lui  $l$ , apoi după blocul lui  $r$ , apoi după  $t$ . Atunci:

Poziția lui  $l$  se schimbă cu  $\mathcal{O}(S)$  la fiecare operație, plus  $\mathcal{O}(n)$  la toate trecerile între blocuri, așadar cu  $\mathcal{O}(n + qS)$  în total.

Poziția lui  $r$  se schimbă cu  $\mathcal{O}(S)$  la fiecare operație. În plus, pentru fiecare bloc al lui  $l$  (deci de  $B$  ori),  $r$  va face o trecere prin cele  $n$  poziții cu un efort total de  $\mathcal{O}(qS + nB)$ .

Pentru fiecare pereche de blocuri,  $t$  poate trece prin toate cele  $q$  operații, cu un efort total de  $\mathcal{O}(qB^2)$ .

Așadar, complexitatea algoritmului este  $\mathcal{O}(qS + nB + qB^2)$ . De aceea dorim ca  $B^2 \approx S$  și alegem  $B \approx n^{1/3}$  și  $S \approx n^{2/3}$ , pentru o complexitate totală de  $\mathcal{O}((q+n)n^{2/3})$ .

## 5.3 Probleme

### 5.3.1 Problema Powerful Array (Codeforces)

[enunț](#) • [sursă](#)

Problema este o aplicație directă a algoritmului lui Mo. Am copiat sursa de la D-query și am adaptat-o. Atenție doar la lucrul pe 64 de biți.

### 5.3.2 Problema Most Frequent Value (SPOJ)

[enunț](#) • [sursă](#)

Problema este doar puțin mai complicată decât precedentele. Odată ce ne vine ideea că am putea-o rezolva cu algoritmul lui Mo, întrebarea este: ce ne trebuie ca să menținem cea mai mare frecvență?

Răspunsul, desigur, este: menținem toate frecvențele. Dar nu este suficient. Când frecvența lui  $x$  crește, să spunem de la 7 la 8, atunci frecvența maximă:

- se păstrează dacă era deja 8 sau mai mare;
- crește la 8 dacă era 7 (notă: nu putea fi mai mică de 7, căci  $x$  avea frecvența 7).

Pînă aici, toate bune. Dar când frecvența lui  $x$  scade, să spunem de la 8 la 7? Atunci frecvența maximă:

- se păstrează dacă era mai mare decât 8 (un alt element  $y$  avea frecvență maximă);
- se păstrează dacă era 8 și mai există un alt element  $y$  cu frecvență 8;
- altfel scade la 7.

Cazul al doilea este critic. Cum aflăm dacă alt element are frecvența egală cu frecvența elementului care iese din interval? Răspunsul este: menținem numărul de elemente care au fiecare frecvență. Un fel de frecvență a frecvențelor, dacă vreți. 😊 Când frecvența lui  $x$  scade de la 8 la 7, decrementăm numărul de elemente cu frecvență 8 și îl incrementăm pe cel cu frecvență 7. Dacă frecvența maximă era 8, dar acum nu mai există elemente cu frecvență 8, atunci ne aflăm în cazul al treilea.

### 5.3.3 Problema RangeMode (Infoarena Cup 2013)

[enunț](#) • [sursă](#)

Problema seamănă cu precedenta, dar nu cere frecvența maximă, ci elementul minim care atinge această valoare. Nu mai putem folosi fix aceeași abordare din cauza ștergerilor. Dacă există mai multe elemente cu frecvența maximă, și dacă cel mai mic dintre ele dispare, care este următorul minim?

Soluția este simplă: nu facem ștergeri! 😓 Glumesc, iar soluția nu este deloc evidentă. Ea împrumută sortarea interogărilor din algoritmul lui Mo. Atunci o interogare  $[l, r]$  constă din:

1. „Partea stîngă”: porțiunea de la  $l$  pînă la sfîrșitul blocului curent, care poate varia cu  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$  elemente între interogări.
2. „Partea dreaptă”: porțiunea de la începutul blocului următor pînă la  $r$ , care poate doar să crească între interogări.

Desigur, mai există și cazul particular în care  $l$  și  $r$  se află în același bloc.

Încercăm să aflăm răspunsul la fiecare interogare aditiv, compunînd partea dreaptă cu partea stîngă. Structura de date pe care o proiectăm,  $S$ , menține pentru partea dreaptă un vector de

frecvențe simplu, în  $\mathcal{O}(n)$  pentru toate interogările din bloc. Când trecem la blocul următor de interogări, golim acest vector. Așadar, efortul total pentru partea dreaptă este  $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$ .

Ce facem cu partea stângă? Dacă adăugăm elemente în  $S$ , va trebui să le ștergem la final. Am vrea să clonăm  $S$  pentru fiecare interogare, dar acea operație este scumpă. Iată o soluție struțo-cămilă, dar care funcționează:

1. După ce terminăm de adăugat elementele din partea dreaptă, salvăm din structura  $S$  doar răspunsul (elementul cu frecvența maximă).
2. Continuăm să adăugăm în  $S$  elementele din partea stângă și să recalculăm răspunsul.
3. La final, notăm răspunsul. Acesta este răspunsul la interogare.
4. Eliminăm din  $S$  elementele din partea stângă, fără să mai recalculăm răspunsul.
5. Restaurăm răspunsul salvat la pasul (1).

Soluția merge pentru că face ștergeri, dar evită componenta pe care nu știm s-o rezolvăm, a recalculării răspunsului la ștergere.

### 5.3.4 Problema Machine Learning (Codeforces)

[enunț](#) • [sursă](#)

Problema cere să admitem 100.000 operații de două tipuri pe un vector cu 100.000:

1. Pentru un interval  $[l, r]$  tipărește mex-ul frecvențelor acelui interval. Așadar, tipărește valoarea minimă  $f > 0$  pentru care nu există un element de frecvență  $f$  în intervalul  $[l, r]$ .
2. Modifică punctual vectorul,  $a[i] = x$ .

Implementarea mea este școlărească și medie ca eficiență. Iată ce am învățat din ea.

Pare mai natural să stocăm separat actualizările și interogările.

Ca să pot face *undo* la actualizări, cel mai simplu mi s-a părut să stochez și vechea valoare în fiecare operație de actualizare. Putem obține vechile valori în mod elementar, scriind actualizările într-un vector pe măsură ce le facem (avem nevoie de o copie a vectorului original, pe care o distrugem).

Ca să descriu momentul curent, am ales să mențin un indice în vectorul de actualizări, care pointează la prima operație încă neaplicată. Ca să „derulez” sistemul la momentul de timp  $t$ , avansează spre dreapta în vectorul de actualizări dacă timpul operației neaplicate este mai mic decât  $t$ , respectiv avansează spre stînga dacă timpul ultimei operații aplicate este mai mare decât  $t$ . Ca fapt divers, timpurile nu pot fi egale, căci  $t$  este timpul unei interogări, care nu va apărea în vectorul de actualizări.

Mi-a fost mai simplu să adaug santinele la timpurile 0 și  $q + 1$ , ca să nu verific condiții suplimentare de ieșire din vector.

Strict referitor la problema Machine Learning: funcția mex pare greu de menținut incremental. Dacă o frecvență  $f$  încetează să mai aibă elemente, iar  $f$  este mai mic decât mex-ul curent, atunci



$f$  devine noul mex. Aceasta este partea simplă. Dar dacă apare un nou element de frecvență mex-ului, cum recalculăm noul mex? Riscăm să introducem un factor suplimentar la complexitate.

Soluția este de fapt brutală. Pot exista cel mult  $\sqrt{n}$  frecvențe diferite (deoarece suma frecvențelor este  $n$ , așa cum am arătat în capitolul de descompunere în radical). De aceea, putem calcula funcția mex naiv pentru fiecare interogare cu o complexitate totală de  $\mathcal{O}(q\sqrt{n})$ , care nu este dominantă.

O ultimă observație specifică problemei: ne interesează doar frecvențele valorilor, nu ordinea lor relativă. De aceea, am ales o variantă mai simplă pentru codul de normalizare.

## Partea II

### Măiestrie pe biți

Tehnici pentru calcule compacte și eficiente

# Capitolul 6

## Operații pe biți. Compactarea variabilelor

### 6.1 Operații elementare

Multe dintre structurile de date pe care le folosim au legătură cu puterile lui 2: arborii indexați binar, arborii de segmente, heapurile, *bitsets*... De aceea, este important să fiți familiari cu o listă de operații utile.

Această listă este inspirată din articolele [Bit Twiddling Hacks](#) și [Bit manipulation](#).

#### 6.1.1 Noțiuni de bază

- C are suport pentru constante hexazecimale (`0xdeadbeef`) și binare (`0b1100101101`).
- De asemenea, puteți tipări valori în bazele 8 și 16 cu `printf` sau folosind STL.
- O cifră hexa are 4 biți în baza 2. Deci `0xce = 0b1100'1110`.
- Uneori valorile hexa ajută la claritate. `0xff'ffff` arată că avem 24 de biți 1, poate mai clar decât `((1 << 24) - 1)`. Dar depinde de gusturi.

#### 6.1.2 Măști

Conceptual, o mască pe  $n$  biți este un număr binar care descrie o submulțime a unei mulțimi cu  $n$  elemente, indexate de la 0 la  $n - 1$ . Bitul  $k$  are valoarea 1 dacă și numai dacă submulțimea descrisă include elementul  $k$ . Măștile se pretează la submulțimi mici (32 sau 64 de biți). Dincolo de aceasta avem nevoie de vectori de măști (cum ar fi `bitset` din STL).

Exemple din lumea reală:

- Multe constante predefinite în limbajele de programare ocupă un singur bit (sînt puteri ale lui 2), iar programatorul le poate combina cu OR pe biți. Vezi [codurile de eroare](#) din PHP. Programatorul poate decide să afișeze sau să ascundă anumite tipuri de eroare. De exemplu, apelînd funcția `error_reporting(E_ALL & ~E_NOTICE & ~E_DEPRECATED)`, programatorul

arată că vrea să vadă toate erorile în afară de cele minore (E\_NOTICE) și cele despre perimare (E\_DEPRECATED).

- În multe programe, utilizatorii au permisiuni, care sînt definite ca puteri ale lui 2, iar permisiunile unui utilizator sînt o mască (o submulțime din mulțimea totală).
- Programele de șah moderne descriu tabla ca pe o colecție de măști pe 64 de biți: una pentru pozițiile pionilor albi, una pentru pozițiile pionilor negri etc. Este foarte convenabil că tabla de șah are fix 64 de pătrate.

Măștile au anumite avantaje, cum ar fi:

1. Este foarte ușor să facem operații de intersecție, reuniune, diferență folosind operatorii pe biți &, |, ^ și ~.
2. Valoarea numerică a măștii creează o bijecție naturală între mulțimea  $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$  și mulțimea submulțimilor unei mulțimi. Deci putem stoca eficient informații despre toate submulțimile într-un vector de  $2^n$  elemente indexate după ordinea lexicografică a submulțimii.

### 6.1.3 Operații pe măști de biți

operația	efectul
<code>x &amp; 0x1f</code> sau <code>x &amp; 0x1f</code>	Restul împărțirii lui $x$ la 32.
<code>x &amp; 1</code>	Test de (im)paritate.
<code>x &amp; (1 &lt;&lt; k)</code>	Test dacă al $k$ -lea bit este 1. Atenție, nu returnează 0/1, ci $0/2^k$ .
<code>(x &gt;&gt; k) &amp; 1</code>	Test dacă al $k$ -lea bit este 1. Returnează 0/1.
<code>x  = (1 &lt;&lt; k)</code>	Setează bitul $k$ pe 1.
<code>x &amp;= ~(1 &lt;&lt; k)</code>	Setează bitul $k$ pe 0.
<code>x ^= (1 &lt;&lt; k)</code>	Neagă bitul $k$ .
<code>x &amp; (x-1)</code>	Elimină ultimul bit 1 din $n$ . Util și ca test dacă $n$ este putere a lui 2.

Tabela 6.1: Operații pe măști de biți.

## 6.2 Numărarea biților de 1 dintr-o valoare (popcount)

De exemplu, pentru 187, care în binar este 10111011, dorim răspunsul 6. Vom discuta metodele de mai jos și vom studia codul. Puteți citi și [programul complet](#) care măsoară timpii de rulare.

### 6.2.1 Metoda naivă

Shiftăm în mod repetat numărul la dreapta și numărăm biții de 1.

```
pop = 0;
while (x) {
    pop += x & 1;
    x >>= 1;
}
```

```
}
```

---

### 6.2.2 Metoda Kernighan

Eliminăm și contorizăm câte un bit de 1.

### 6.2.3 Funcții built-in

Folosim funcțiile `__builtin_popcount` (pentru `int`) și `__builtin_popcountll` (pentru `long long`) sau `std::popcount` din STL. Atenție, aceasta din urmă apare doar în standardul C++20.

### 6.2.4 Tabel precalculat

Construim un tabel de 256 de valori care precalculează rezultatul pentru un octet. Extragem octeții numărului prin shiftare.

### 6.2.5 Tabel precalculat + conversie

Construim același tabel de 256 de valori. Extragem octeții numărului prin conversia la `char*`.

### 6.2.6 Calcul paralel

Iată o metodă bazată pe calcul paralel, care face  $\log(\text{sizeof}(n))$  operații.

## Partea III

### Arbori

# Capitolul 7

## Unelte și algoritmi esențiali

Acest curs presupune deja cunoscute reprezentarea arborilor și parcurgerile DFS și BFS. De aceea, în acest capitol vom prezenta doar o unealtă pentru depanare (generatoarele de arbori) și vom rezolva câteva probleme de bază.

### 7.1 Generatoare de arbori aleatorii

Generarea unor arbori aleatorii este și interesantă din punct de vedere teoretic, dar vă poate ajuta și la depanarea problemelor pe arbori.

Dacă nu ne interesează forma arborelui, generatoarele de arbori sînt la fel de ușor de scris ca generatoarele de vectori + interogări. Iată [un generator de bază](#) care generează un arbore cu  $n$  noduri și  $k$  interogări de tip pereche de noduri. L-am folosit la problema [Max Flow](#) (USACO).

În schimb, dacă dorim să testăm viteza unei soluții, sau dacă compunem o problemă și dorim date de test greu de fentat, avem nevoie ca:

- Arborele să aibă un lanț foarte lung.
- Arborele să aibă un nod cu foarte mulți vecini.
- Aceste structuri să nu poată fi decelate din datele de intrare (de exemplu, lanțul să nu conțină fix nodurile  $1, 2, \dots, n/2$ ).
- Generarea să dureze  $\mathcal{O}(n)$ .

Iată [un generator avansat](#) care răspunde acestor nevoie și poate genera, la cerere, și interogări sau actualizări. El poate fi apelat în trei moduri și poate fi ușor adaptat la altele:

1. Doar structura arborelui, fără valori în noduri, fără operații.
2. Valori inițiale în fiecare nod, actualizări în noduri, interogări în noduri.
3. Fără valori în noduri, interogări pe căi (perechi de noduri).

El acceptă trei parametri pentru definirea structurii:

1.  $n$ : numărul de noduri;
2.  $c$ : lungimea minimă garantată a cel puțin unui lanț;

3.  $d$ : gradul minim garantat al cel puțin unui nod.

Generatorul funcționează astfel:

- Generează o permutare aleatorie a nodurilor.
- Unește primele  $c$  noduri în lanț.
- Unește următoarele  $n - d - c$  noduri de noduri dinaintea lor, alese aleatoriu.
- Unește ultimele  $d$  noduri de un nod dintre primele  $n - d$ , ales aleatoriu.
- După ce a generat cele  $n - 1$  muchii, le amestecă, astfel încât primele  $c - 1$  muchii tipărite să nu formeze un lanț etc.

## 7.2 Probleme

### 7.2.1 Problema Subordinates (CSES)

[enunț](#) • [surse](#)

Cerința este clasică: aflarea mărimii subarborelui fiecărui nod. Am inclus două implementări: cu vectori STL și cu liste înlănțuite scrise de la zero. Implementarea cu liste este de două ori mai rapidă.

### 7.2.2 Problema Tree Matching (CSES)

[enunț](#) • [sursă](#)

Problema se rezolvă cu un singur DFS. Ea este un bun exemplu de raționament recursiv pe arbore. Ca în multe alte situații, putem trata nodul curent în relație cu fiul său (dacă nodul și fiul sînt necuplați, cuplează-i) sau în raport cu părintele (dacă nodul și părintele sînt necuplați, cuplează-i).

### 7.2.3 Problema Tree Diameter (CSES)

[enunț](#) • [surse](#)

Există două soluții relativ diferite. Vom lua fără demonstrație soluția cu două parcurgeri DFS:

- Facem un DFS pornind din orice nod  $x$ . Fie  $a$  nodul cel mai depărtat de  $x$ .
- Facem un al doilea DFS pornind din  $a$ . Fie  $b$  nodul cel mai depărtat de  $a$ .
- $a \rightsquigarrow b$  este unul dintre diametrele arborelui.

Soluția cu o singură parcurgere este cu 20% mai rapidă (ambele neoptimizate). Implementăm recursiv observația că diametrul constă din două lanțuri descendente care pornesc dintr-un strămoș comun  $u$ . (Este ușor de tratat și cazul cînd diametrul este doar un lanț pornind din rădăcină, considerînd atunci al doilea lanț ca fiind rădăcina însăși, o cale de lungime zero.) Atunci fiecare nod are două sarcini:



- Să actualizeze un maxim global cu suma maximă a căilor raportate de oricare doi fii distincți. La fiecare cale,  $u$  adaugă 1 (muchia care pleacă din  $u$  însuși).
- Să raporteze la părinte distanța maximă de la  $u$  pînă la orice frunză din subarbore.

Ambele soluții trebuie să fie scurte (5-6 linii în plus față de șablonul de declarații, citire, DFS).

Discuție secundară: pentru claritate, `diam` nu trebuia să fie variabilă globală, ci DFS-ul trebuia să-l returneze, ca maxim dintre valorile raportate de fii. Pentru viteză, însă, și pentru economisirea memoriei pe stivă, cred că putem face concesia să-l declarăm pe `diam` global. Cititorii mai pedanți decît mine 😊 pot încapsula `diam` și parcurgerea DFS într-o clasă.

## 7.2.4 Problema Tree Distances II (CSES)

[enunț](#) • [sursă](#)

Pentru un nod fixat (să zicem 1), putem calcula răspunsul cu un singur DFS. Apoi, vom introduce un concept întîlnit ocazional: recalcularea unei valori la schimbarea rădăcinii. Să spunem că suma cerută pentru nodul  $u$  este  $S_u$  și dorim să o calculăm pe  $S_v$  pentru nodul  $v$ , vecin cu  $u$ . Să spunem că, raportat la muchia  $u - v$ , de partea lui  $u$  avem  $n_u$  noduri, iar de partea lui  $v$  avem  $n_v = n - n_u$  noduri. Atunci, ca să trecem din  $S_u$  în  $S_v$ , observăm că:

- pentru  $n_v$  noduri distanțele scad cu 1;
- pentru  $n_u$  noduri distanțele cresc cu 1;

Rezultă tranziția simplă  $S_v = S_u - n_v + n_u = S_u + n - 2n_v$ .

Dacă facem toate tranzițiile dinspre rădăcina inițială (1) spre fii, atunci  $n_v$  va fi întotdeauna mărimea subarborelui lui  $v$ .

## 7.2.5 Problema White-Black Balanced Subtrees (Codeforces)

[enunț](#) • [sursă](#)

Includ această problemă pentru a discuta o altă parcurgere decît DFS, în cazul în care arborele este dat printr-un vector de părinți. Am ales o problemă simplă. Pentru una cu mai multă substanță, vedeți [Arbsumpow](#) (baraj ONI 2021).

Avantajul acestei reprezentări este că simplitatea și memoria redusă:  $n - 1$  întregi în loc de  $2(n - 1)$ .

Desigur, puteți converti formatul dat la cel obișnuit (liste de vecini). Dar uneori vectorul de părinți este suficient. În multe probleme trebuie să calculăm pentru fiecare nod o valoare care depinde, recurent, de valorile fiilor. Atunci putem folosi codul:

```
for (int u = 1; u <= n; u++) {
    scanf("%d", &p[u]);
    num_children[p[u]]++;
}
```

```
for (int u = 1; u <= n; u++) {
    int s = u;
    while (s && !num_children[s]) {
        process(s); // raportează la părinte ce trebuie raportat
        s = p[s];
        num_children[s]--;
    }
}
```

Rolul funcției `process` este să raporteze la părinte informațiile dintr-un nod. Pe parcurs, valoarea `num_children[u]` arată câți fii ai lui  $u$  încă nu și-au raportat informațiile. Astfel, când îi va veni rîndul părintelui să fie procesat, el va fi acumulat informațiile de la toți fiii.

Ordinea nodurilor este *bottom-up*. Programul încearcă vizitarea fiecărui nod de cel mult două ori: fie când îi vine rîndul în ordine numerică, fie în momentul în care ultimul său fiu este vizitat.

## 7.2.6 Problema Blood Cousins (Codeforces)

[enunț](#) • [sursă](#)

Soluția propusă în [editorial](#), în  $\mathcal{O}(q \log n)$ , procedează astfel.

- Măsoară timpii DFS și adîncimea fiecărui nod.
- Pentru a afla eficient al  $p$ -lea strămoș, construiește în fiecare nod lista strămoșilor de gradele  $1, 2, \dots, 2^k$ .
- Colectează nodurile arborelui, în ordinea DFS, în liste separate pentru fiecare adîncime. Așadar  $L[0]$  va conține doar rădăcina,  $L[1]$  va conține fiii rădăcinii etc.
- Pentru a afla numărul de descendenți la distanță  $p$  ai unui nod  $u$  care are timpii DFS  $t_i[u]$  și  $t_o[u]$ , căutăm binar în lista  $L[d[u] + p]$  primul și ultimul nod cu timpi DFS între  $t_i[u]$  și  $t_o[u]$ .

Iată și o soluție în timp liniar. Mi se pare mai simplă, căci folosește doar liste și două parcurgeri DFS.

- Distribuim interogările  $(v, p)$  în liste după nodul  $v$ .
- Rulăm un DFS în care menținem o stivă explicită de noduri în curs de vizitare. Concret, la intrarea în nodul  $u$  la adîncime  $d[u]$  notăm  $st[d[u]] = u$ .
- La intrarea în nodul  $v$ , procesăm toate interogările  $(v, p)$ . Al  $p$ -lea strămoș al lui  $v$  este  $st[d[v] - p]$  (dacă există). Înlocuim fiecare  $p$  cu acest strămoș.

Astfel, după un prim DFS, toate interogările au luat forma: câți descendenți are nodul  $v$  la adîncime  $p$ ? Vom scădea 1 pentru a răspunde la cerința problemei. Putem răspunde la aceste întrebări cu un al doilea DFS.

- Redistribuim interogările  $(v, p)$  în liste după noul nod  $v$ .

- Rulăm un DFS în care menținem numărul de noduri vizitate pe fiecare nivel. Concret, la intrarea în nodul  $u$  la adâncime  $d[u]$  îl incrementăm pe  $st[d[u]]$ .
- Acum răspunsul pentru o interogare  $(v, p)$  este diferența între  $st[d[v] + p]$  la intrarea și la ieșirea din nodul  $v$ . Iterăm prin toate interogările referitoare la nodul  $v$  la intrarea și la ieșirea din recursivitate.

# Capitolul 8

## Liniazarea arborilor

Să considerăm un arbore cu  $n$  noduri și cu valori în noduri. Liniazarea acestui arbore este o parcurgere DFS care calculează informații suplimentare. Putem folosi aceste informații ca să gestionăm operații pe arbore, cum ar fi:

- Modificarea valorii unui nod sau a unei muchii.
- Modificarea valorilor pe calea de la un nod la rădăcină.
- Modificarea valorilor în tot subarborele unui nod.
- Interogări despre valoarea unui nod.
- Interogări despre valorile pe calea de la un nod spre rădăcină.
- Interogări despre valorile din subarborele unui nod.

### 8.1 Timpi de intrare și de ieșire din DFS

Să considerăm următoarea parcurgere DFS. Ea este elementară, cu o singură noutate: menține un contor global pe care îl incrementează la intrarea și la ieșirea dintr-un nod. (Din motive ingineresti, ca să evidențiez că variabila `time` este folosită doar în funcția `dfs`, nu am declarat-o globală, ci statică în funcție. Efectul este același.)

```
void dfs(int u, int parent) {
    static int time = 0;

    time_in[u] = ++time;
    for (int v: adj[u]) {
        if (v != parent) {
            dfs(v, u);
        }
    }
    time_out[u] = ++time;
}
```

Dacă vrei, `time` este un metronom care bate la fiecare parcurgere a unei muchii, fie în jos (la

intrarea într-un nod), fie în sus (la ieșirea dintr-un nod). Toate valorile din vectorii `time_in` și `time_out` vor fi distincte și cuprinse între 1 și  $2n$ . Iată un exemplu.

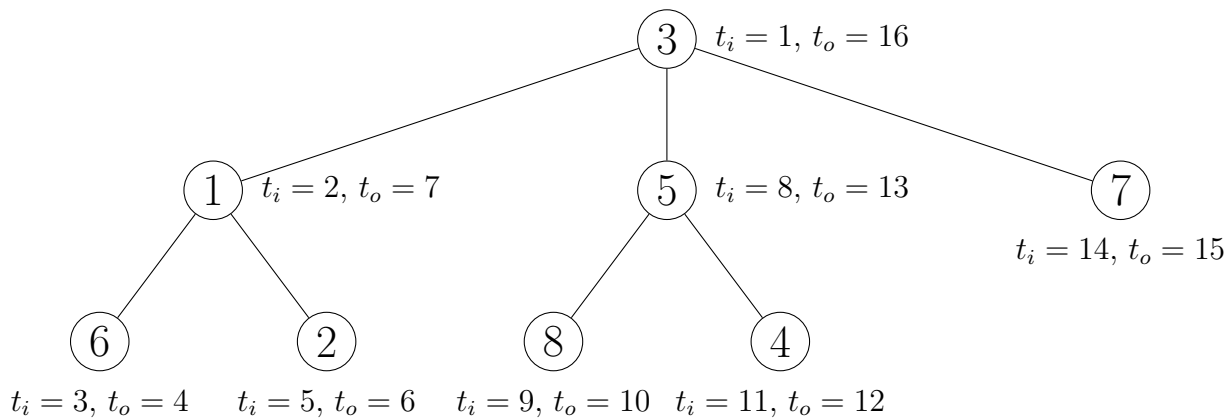


Figura 8.1: Timpii de intrare și de ieșire din noduri, varianta 1.

Într-o altă variantă, incrementăm timpul numai la intrarea în nod, nu și la ieșire. Atunci în vectorii  $t_i$  și  $t_o$  vom avea valori între 1 și  $n$ . Iată aceste valori pentru același arbore:

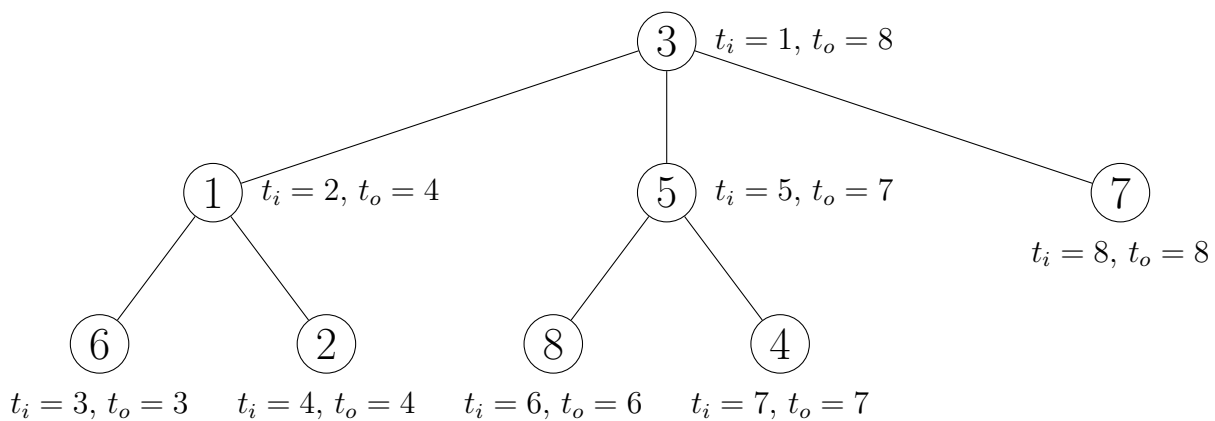


Figura 8.2: Timpii de intrare și de ieșire din noduri, varianta 2.

## 8.2 Testul de strămoș

O aplicație directă a timpilor de intrare și de ieșire este că putem decide în  $\mathcal{O}(1)$  dacă un nod  $u$  este strămoș al altui nod  $v$ . Este necesar ca  $t_i[u] < t_i[v] < t_o[v] < t_o[u]$ . Inegalitatea poate fi strictă ( $<$ ) sau permisivă ( $\leq$ ) în funcție de varianta aleasă mai sus și dacă dorim ca  $u$  să fie considerat propriul său strămoș sau nu.

## 8.3 Liniarizarea. Tipuri de liniarizare

Liniarizarea unui arbore este un vector. Obținem acest vector printr-o parcurgere DFS în care emitem, la anumite momente, numărul nodului curent. Acest instrument puternic ne permite să rezolvăm probleme pe arbori folosind structuri familiare pe vectori: AIB, arbori de segmente, căutări binare, algoritmul lui Mo...

Există trei tipuri de liniarizări, foarte asemănătoare și la fel de ușor de obținut. Fiecare este utilă în alte situații.

### 8.3.1 Liniarizarea DFS

În această liniarizare, emitem nodul curent (adică îl adăugăm la vectorul rezultat) când intrăm în nod. Pentru arborele din Figura 8.2, vectorul este:

poziție	1	2	3	4	5	6	7	8
nod	3	1	6	2	5	8	4	7

Tabela 8.1: Liniarizarea de tip DFS.

Cu alte cuvinte, această liniarizare constă din nodurile arborelui în ordinea în care le descoperă DFS-ul. Tocmai de aceea, fiecare nod  $u$  apare în vector la poziția  $t_i[u]$  (în varianta 2, din figura 8.2). De altfel, pentru acest tip de liniarizare în practică nu vom construi efectiv vectorul, ci doar vectorii  $t_i$  și  $t_o$ .

O observație importantă pentru toate liniarizările este că subarboarele oricărui nod corespunde unui interval contiguu din vector. De exemplu, nodurile 5, 8 și 4 apar pe poziții consecutive. În liniarizarea DFS, subarboarele oricărui nod  $u$  acoperă pozițiile dintre  $t_i[u]$  și  $t_o[u]$  inclusiv. De exemplu, subarboarele nodului 5 ocupă pozițiile de la 5 la 7. Pentru a exploata această structură, în probleme de arbori cu valori în noduri vom stoca într-un vector valoarea fiecărui nod  $u$  pe poziția  $t_i[u]$ . Atunci, folosind structurile cunoscute pe vector, putem face actualizări și interogări pe subarbori întregi.

### 8.3.2 Liniarizarea Euler

În această liniarizare, emitem nodul curent de două ori: la intrare și la ieșire. Pentru arborele din Figura 8.1, vectorul este:

poziție	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
nod	3	1	6	6	2	2	1	5	8	8	4	4	5	7	7	3

Tabela 8.2: Liniarizarea de tip Euler.

Observăm că pozițiile nodului  $u$  în vector sînt  $t_i[u]$  și  $t_o[u]$ . Vom studia probleme care arată cum folosim această liniarizare pentru a admite actualizări și interogări pe calea de la rădăcină la un nod oarecare  $u$ .

### 8.3.3 Liniarizarea Euler cu repetiție

Pe Internet nu am găsit o distincție clară între liniarizarea anterioară și aceasta, așa că am inventat un nume, sper că acceptabil. În această liniarizare, emitem nodul curent la intrare și la revenirea din fiecare fiu. În particular, emitem frunzele o singură dată. Pentru arborele din Figura 8.1, vectorul este:

poziție	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
nod	3	1	6	1	2	1	3	5	8	5	4	5	3	7	3

Tabela 8.3: Liniarizarea de tip Euler cu repetiție.

Lungimea acestei liniarizări este întotdeauna  $2n - 1$ . Emitem fiecare nod la intrare, ceea ce ocupă  $n$  poziții. În plus, emitem fiecare nod de atâtea ori câți fii are. Dar suma numărului de fii pentru toate nodurile este  $n - 1$ , deoarece fiecare nod este fiul cuiva, cu excepția rădăcinii.

Folosim această liniarizare cu preponderență pentru interogări de LCA (engl. *lowest common ancestor*), pe care le vom studia în capitolul FIXME.

## 8.4 Probleme

### 8.4.1 Problema Tree Queries (Codeforces)

[enunț](#) • [sursă](#)

Probabil am putea implementa următoarea soluție. Pentru fiecare interogare, pornim din cel mai de jos dintre noduri, mergînd pînă la rădăcină, și vedem dacă întîlnim toate celelalte noduri sau părinții acestora. Dar această soluție necesită  $\mathcal{O}(n)$  per interogare pentru un arbore degenerat. Probabil ea poate fi adusă la  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$  sau  $\mathcal{O}(\log n)$  prin tehnici mai complicate.

În loc de acesta, să procedăm astfel. Fie  $u$  cel mai de jos nod dintr-o interogare. Atunci toate celelalte noduri **sau** părinții lor trebuie să se afle pe calea de la  $u$  la rădăcină. Cu alte cuvinte, să fie strămoși ai lui  $u$ . Mai mult, decizia se simplifică astfel: dacă un nod  $v$  este pe calea de la  $u$  la rădăcină, atunci și părintele lui  $v$  se va afla pe calea de la  $u$  la rădăcină. Deci este suficient să testăm doar părinții și să răspundem la întrebarea: Sînt părinții tuturor nodurilor dintr-o interogare strămoși ai celui mai de jos nod? (Complicația cu noduri și părinți este mai mult un *red herring*, o diversiune care poate păcăli pe cineva.)

Vom folosi testul de strămoș studiat anterior:  $v$  este strămoș al lui  $u$  dacă și numai dacă  $t_i[v] < t_i[u] < t_o[u] < t_o[v]$ .

#### Detalii de implementare

Am preferat să declar variabila `time` statică, în interiorul funcției `euler_tour`, ca să evidențiez că nu este folosită altundeva.

Nodurile dintr-o interogare nu trebuie stocate, sortate etc. Nu avem nevoie de adîncimea nodurilor. Pur și simplu îl reținem pe cel mai de jos găsit pînă atunci, fie el  $l$ . Cînd citim un nod nou,  $u$ , îi aflăm părintele  $p$ . Pot lua naștere trei cazuri:

- Dacă  $p$  este strămoș al lui  $l$ , atunci  $l$  nu se modifică, iar calea care conține toate nodurile de pînă acum rămîne calea de la  $l$  la rădăcină.

- Dacă  $l$  este strămoș al lui  $p$ , atunci  $p$  îl înlocuiește pe  $l$ , iar calea care conține toate nodurile de pînă acum este calea de la  $p$  la rădăcină.
- Altfel nu există nicio cale care să le conțină pe  $l$  și pe  $p$ , deci răspunsul la interogarea curentă este NO.

### 8.4.2 Problema Subtree Queries (CSES)

[enunț](#) • [sursă](#)

Această problemă este o aplicație directă a liniarizării. Facem o liniarizare de tip DFS pentru a calcula doar vectorul  $t_i$  (timpul de intrare în fiecare nod). Apoi construim un vector indexat după timp, în care notăm valoarea fiecărui nod  $u$  la poziția  $t_i[u]$ . Peste acest vector construim un simplu arbore Fenwick sau orice structură preferați care să ofere actualizare punctuală + sumă pe interval.

O altă variantă clasică a acestei probleme ar fi ca operațiile de actualizare să fie pe subarbore: atribuie tuturor nodurilor din subarboarele lui  $u$  o valoare  $x$ , incrementează toate nodurile cu o cantitate  $x$  etc. Desigur, aceste operații s-ar traduce în operații de actualizare pe interval, pentru care putem folosi un arbore de intervale cu propagare *lazy*.

### 8.4.3 Problema Path Queries (CSES)

[enunț](#) • [sursă](#)

Această problemă ne arată utilitatea liniarizării Euler. Să considerăm momentul în care DFS-ul intră în nodul  $u$ , adică  $t_i[u]$ . El corespunde prefixului din liniarizare de la poziția 1 pînă la poziția  $t_i[u]$ . Observăm că:

1. Nodurile complet vizitate înainte de intrarea în  $u$  (numite și *noduri negre*) apar de cîte două ori.
2. Nodurile în curs de vizitare (calea de la  $u$  la rădăcină, numite și *noduri gri*) apar cîte o dată.
3. Nodurile încă nevizitate (numite și *noduri albe*) nu apar niciodată.

Putem exprima punctul (2) și în termeni de strămoși, discutați anterior: strămoșii lui  $u$  sînt singurele noduri ale căror intervale cuprind intervalul lui  $u$ .

De aici rezultă cum putem folosi paritatea aparițiilor ca să notăm informații de pe calea spre rădăcină. Notăm valoarea fiecărui nod  $v$  cu semnul  $+$  la poziția  $t_i[v]$  și cu semnul  $-$  la poziția  $t_o[v]$ . Astfel, suma prefixului  $[1, t_i[u]]$  va fi exact suma valorilor pe calea de la  $u$  la rădăcină.

### 8.4.4 Problema New Year Tree (Codeforces)

[enunț](#) • [sursă](#)

Problema este relativ directă, doar cu puțin mai complicată decît precedentele. După liniarizare, avem nevoie de o structură de date care să admită operațiile:



1. `range_set(l, r, val)`: scrie valoarea `val` pe tot intervalul  $[l, r]$
2. `range_count_distinct(l, r)`: returnează numărul de valori distincte din intervalul  $[l, r]$ .

Problema numărării de elemente distincte cu actualizări nu este trivială, dar varianta de față are un avantaj: valorile sînt între 1 și 60, deci putem folosi măști de biți. Rezultă că avem nevoie de un arbore de intervale cu propagare *lazy*, cu operațiile:

1. atribuire pe interval;
2. OR pe biți pe interval.

### 8.4.5 Problema Max Flow (USACO)

[enunț](#) • [surse](#)

#### Metoda 1: Vectori de diferențe pe arbore

O primă soluție aduce cu vectori de diferențe („șmenul lui Mars”), dar în varianta arborescentă. Pentru fiecare nod dorim să calculăm numărul de căi care trec prin acel nod. Atunci, pentru fiecare cale  $(u, v)$ , dorim să incrementăm valorile tuturor nodurilor de pe cale. Fie  $w$  cel mai de jos strămoș comun (LCA) al perechii  $(u, v)$ . Atunci dorim, echivalent,

- Să incrementăm toate valorile de la  $u$  la rădăcină.
- Să incrementăm toate valorile de la  $v$  la rădăcină.
- Să scădem cu 1 valoarea lui  $w$  (care a fost incrementat de două ori).
- Să scădem cu 2 valorile de la părintele lui  $w$  la rădăcină.

Putem face asta adunînd  $\pm 1$  în nodurile respective, apoi propagînd în sus acele valori. Implementarea este lungă întrucît trebuie să calculeze LCA și am ales să fac asta cu algoritmul lui Tarjan, cel mai eficient în situația offline (vom detalia în viitorul apropiat).

#### Metoda 2: AIB peste liniarizare

La momentul vizitării nodului  $u$ , putem împărți arborele în 3 zone disjuncte:

1. Zona 1 este porțiunea vizitată înainte de  $u$ .
2. Zona 2 este subarborele lui  $u$ .
3. Zona 3 este porțiunea care va fi vizitată după revenirea din  $u$ .

Atunci, căile care trec printr-un nod  $u$  sînt de trei feluri:

1. Cele care încep în zona 1 și se termină în zona 2.
2. Cele care încep în  $u$ , indiferent dacă se termină în zona 2 sau în zona 3.
3. Cele care pornesc dintr-un descendent al lui  $u$  și trec prin  $u$ , fie că se termină în alt descendent al lui  $u$ , fie în zona 3.

Pentru a afla aceste informații pentru fiecare nod, facem întâi o liniarizare de tip DFS imediat ce citim arborele. Reamintim că subarborele fiecărui nod ocupă un interval contiguu în această liniarizare.

Abia acum citim restul datelor (căile). Pentru fiecare nod  $u$  colectăm lista de căi care încep din  $u$  și lista de căi care se termină în  $u$ . Mai exact, pentru fiecare cale  $(u, v)$ , cunoscând liniarizarea, ne asigurăm că  $t_i[u] < t_i[v]$  (le interschimbăm la nevoie). Apoi adăugăm  $v$  la lista de căi care pornesc din  $u$  și  $u$  la lista de căi care se termină în  $v$ .

Acum putem rula o a doua parcurgere DFS în care ținem evidența căilor active. La intrarea într-un nod marcăm ca active căile care pornesc din  $u$ . La ieșire, marcăm ca inactive căile care se termină în  $u$  (adică le ștergem din evidență).

Care este structura necesară pentru această evidență? De exemplu, pentru întrebarea (1) de mai sus avem nevoie să știm ce căi active se termină în zona 2. Putem folosi un arbore Fenwick peste liniarizare în care notăm  $+1$  la momentul nodului de sfârșit al căilor active. Atunci răspunsul la (1) este suma pe  $[t_i[u], t_o[u]]$ .

Pentru (2) răspunsul este pur și simplu lungimea listei de căi care încep în  $u$ .

Pentru (3), la revenirea dintr-un fiu  $v$  avem nevoie să știm ce căi active au început în subarboarele lui  $v$ . De aceea, vom folosi un al doilea arbore Fenwick în care notăm  $+1$  la momentul nodului de început al căilor active.

Această metodă nu mai necesită calculul LCA.

### Metoda 3 (cred): *Small to large*

Cred că fiecare nod își poate menține colecția de căi care trec prin el. Un părinte va unifica aceste colecții, eliminându-le pe cele care apar de două ori (pentru care părintele este LCA). Dacă folosim cea mai mare colecție dintre cele ale fiilor, timpul rezultat va fi  $\mathcal{O}(n + q \log q)$ .

## 8.4.6 Problema Distinct Colors (CSES)

[enunț](#) • [sursă](#)

După liniarizare și după normalizarea culorilor, problema se reduce destul de direct la numărarea culorilor distincte dintr-un interval. O variantă este cu algoritmul lui Mo, în  $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$ . O altă variantă posibilă este cu tehnica *small to large* (vom reveni când studiem tehnica).

Soluția mai eficientă, în  $\mathcal{O}(n \log n)$ , este cea studiată în capitolele anterioare (problema [DQUERY](#)). Procesăm interogările în ordinea crescătoare a capătului drept. Pe parcursul procesării, într-un AIB ținem valori de 1 pentru poziția celei mai din dreapta apariții a fiecărei culori.

În practică implementarea se simplifică mult, căci interogările pe liniarizare au o structură foarte specială. Dacă răspundem la interogări la revenirea din nod, atunci în mod evident ele vor fi ordonate după capătul drept, deoarece capătul drept este dat de timpul curent din DFS, care poate doar să crească! De aceea,

1. Nu mai este nevoie să colectăm și să sortăm interogările. Le putem procesa chiar în DFS.
2. Putem renunța complet la stocarea timpilor de intrare în nod.

3. Nu (prea) mai are sens să normalizăm culorile în prealabil. Putem extinde AIB-ul să se ocupe de asta.

De aceea vă încurajez mereu să adaptați cunoștințele voastre la particularitățile problemei. Pe ansamblu, veți câștiga timp și eficiență.

### 8.4.7 Problema Disconnect (Infoarena)

enunț • sursă

Precizez că testele par incorect alese. Soluțiile [cele mai rapide](#) traversează naiv arborele. Ne facem că n-am observat. 😊

O rezolvare directă este similară cu problema Max Flow. Marcăm muchiile șterse cu 1. Apoi, două noduri sînt conectate dacă suma pe calea dintre ele este 0. Pentru a calcula suma pe o cale, calculăm sumele de la fiecare nod pînă la rădăcină, minus dublul sumei de la LCA la rădăcină.

Iată și o altă rezolvare, care evită nevoia de a calcula LCA. Alegem o rădăcină oarecare (1). Cînd ștergem o muchie, marcăm nodul de adîncime mai mare ca șters. Acum definim un concept clasic: pentru orice nod  $u$ , fie  $LMA(u)$  (engl. *lowest marked ancestor*) cel mai de jos nod marcat pe calea de la  $u$  la rădăcină, inclusiv.

Pentru a răspunde la o interogare de conectivitate  $(u, v)$ , considerăm 4 cazuri:

1.  $LMA(u)$  și  $LMA(v)$  sînt nedefinite. Atunci, desigur, calea este liberă și  $u$  și  $v$  sînt conectate.
2. Exact unul dintre  $LMA(u)$  și  $LMA(v)$  este definit. Atunci nodul marcat există undeva mai jos de  $LCA(u, v)$ , așadar el deconectează  $u$  de  $v$ .
3.  $LMA(u)$  și  $LMA(v)$  există și sînt egale. Atunci nodul marcat există undeva mai sus de  $LCA(u, v)$ , deci nu există alte obstacole.  $u$  și  $v$  sînt conectate.
4.  $LMA(u)$  și  $LMA(v)$  există și sînt diferite. Atunci fiecare nod are propriul său blocaj mai jos de  $LCA(u, v)$ , deci nodurile sînt deconectate.

Condiția este mai ușor de testat decît pare. Dacă lăsăm  $LMA(u) = 0$  pentru valori nedefinite, atunci trebuie doar să testăm dacă  $LMA(u) = LMA(v)$ .

Cum menținem informația de LMA? Este suficient un singur arbore de segmente, fără propagare *lazy*, construit peste liniarizare. La marcarea unui nod  $u$  ca șters, marcăm tot intervalul subîntins de  $u$  chiar cu valoarea  $u$ . La interogarea  $LMA(v)$ , pornim din frunza din AINT corespunzătoare nodului  $v$  și raportăm prima valoare întîlnită (sau 0 dacă nu întîlnim valori scrise).

Mai există un singur aspect important. Un nod din AINT poate fi acoperit de mai multe noduri din arbore. Dacă mai multe actualizări (ștergeri) acoperă același nod, cînd suprascriem valori și cînd nu? Este important că nodurile respective din arbore sînt toate în relația strămoș-descendent. De aceea, cele mai de jos au prioritate. Echivalent, cele care subîntind un interval mai mic în AINT au prioritate. AINT-ul procedează exact astfel: acordă valorilor scrise priorități egale cu lungimea intervalului scris.

# Capitolul 9

## Tehnica small-to-large

### 9.1 Generalități

Există o clasă de probleme pe arbori care, implementate naiv, au complexitate  $\mathcal{O}(n^2)$ . În aceste probleme, informația pentru un nod are mărime  $\mathcal{O}(n)$  și trebuie compusă din informațiile fiilor. Exemplu: fiecare nod  $u$  dorește să-și cunoască frecvențele adâncimilor nodurilor din subarbore, raportate la  $u$ . Cu alte cuvinte,  $u$  dorește să știe câți fii, nepoți, strănepoți etc. are. Pentru a calcula acest vector,  $u$  trebuie:

1. să însumeze vectorii primiți de la fii;
2. să translateze cu 1 toate valorile (fiul fiului lui  $u$  este nepotul lui  $u$ );
3. să se adauge pe sine însuși la distanță 0.

Pentru un arbore degenerat (un lanț de lungime  $n$ ), o implementare naivă va copia și modifica succesiv vectori de lungime  $1, 2, 3, \dots, n$ , așadar  $\mathcal{O}(n^2)$  în total.

Tehnica *small-to-large* spune: este OK să transferăm  $\mathcal{O}(\text{mărimea fiului})$  informații de la fiecare fiu la părinte, **câtă vreme ne asigurăm că transferăm din structura mai mică în cea mai mare**. Astfel, fiecare informație va fi transferată într-o structură de (cel puțin) două ori mai mare, deci numărul de transferuri este limitat la  $\log n$ . Complexitatea totală este  $\mathcal{O}(n \log n)$  sau, în unele cazuri, chiar  $\mathcal{O}(n)$ .

Pentru exemplul de mai sus, vectorii ar putea fi deque, astfel încât părintele să se poată adăuga la începutul listei. Aceasta rezolvă cerințele (2) și (3) în  $\mathcal{O}(1)$ . Pentru cerința (1), este suficient ca părintele să folosească cea mai lungă listă primită de la vreun fiu și să adune listele celorlalți fii la aceasta.

### 9.2 Probleme

#### 9.2.1 Problema Fixed-Length Paths I (CSES)

[enunț](#) • [sursă](#)

Putem rezolva problema exact cu ideile expuse teoretic. Fiecare nod raportează la părintele său o listă cu numărul de noduri aflate la distanțe 0 (el însuși), 1 (fiii), 2 (nepoții) etc. Pentru a-și calcula lista, fiecare nod:

1. Însurează listele primite de la toți fiii.
2. Deplasează lista rezultată cu o poziție (fiul fiului meu este nepotul meu).
3. Se adaugă pe sine însuși la distanță 0.

Pentru implementare, putem folosi un deque, care oferă inserarea la început în  $\mathcal{O}(1)$ . Pentru însumarea listelor, adăugăm mereu lista mai scurtă la cea mai lungă. În plus, fiecare nod  $u$  răspunde la întrebarea: pentru câte căi de lungime  $k$  sînt eu LCA (nodul cel mai de sus de pe cale)? Apoi adaugă această valoare la un contor global. Pentru a calcula răspunsul, nodul  $u$  confruntă lista primită de la fiecare fiu  $v$  cu listele obținute și însumate anterior: dacă fiul  $v$  raportează  $a$  noduri la o distanță  $l$  și fiii anteriori raportaseră  $b$  noduri la o distanță  $k - 2 - l$ , adăugăm  $a \cdot b$  la contorul global.

Care este complexitatea? Pare că ar fi  $\mathcal{O}(n \log n)$ , după cum spuneam: cînd copiem un nod din lista  $L_1$  în lista  $L_2$ , la final  $L_2$  va stoca informații (frecvențe) despre cel puțin dublul numărului de noduri din  $L_1$ . Deci fiecare nod poate fi copiat de cel mult  $\log n$  ori.

Dar putem da o limită și mai strînsă. Pentru această problemă soluția este, de fapt,  $\mathcal{O}(n)$ ! Programul nu operează cu noduri, ci doar cu distanțe. Cînd frecvența unei distanțe  $d$  în  $L_1$  este 2 sau mai mare, nu mai pierdem timp individual ca să copiem acele noduri din  $L_1$  în  $L_2$ , ci le „copiem” pe toate simultan, însumînd niște frecvențe. Practic, fiecare nod este copiat o singură dată. Vă puteți convinge de asta adăugînd contoare globale în interiorul buclelor critice și verificînd că ele nu depășesc valoarea totală  $n$ .

Notă: pentru a interschimba două liste, folosiți întotdeauna metoda `swap()`, care doar schimbă pointeri între ei. Niciodată nu folosiți operatorul `=`, care face copieri de elemente și are complexitate  $\mathcal{O}(\text{lungime})$ !

### 9.2.2 Problema Distinct Colors (CSES) (din nou)

[enunț](#) • [sursă](#)

Să reluăm această problemă și să o rezolvăm cu tehnica *small-to-large*. O variantă ar fi ca fiecare nod să țină o listă sortată de culori. Atunci părintele trebuie să interclaseze listele fiilor. Dar nu putem face interclasarea în  $\mathcal{O}(\text{lista mai scurtă})$ , ci doar în  $\mathcal{O}(\text{suma lungimilor})$ . Aceasta duce la o soluție în  $\mathcal{O}(n^2)$ . Exemplu:  $n = 1.000.000$ , iar rădăcina are 1.000 de fii, fiecare cu câte 1.000 de noduri în subarbore. Toate culorile sînt distincte. Atunci costul total al interclasărilor în rădăcină ar fi:

$$2.000 + 3.000 + \dots + 1.000.000$$

Ca să combinăm doi fii în  $\mathcal{O}(\text{fiul mai mic})$ , putem menține culorile într-o tabelă hash (`unordered_set`).


Atunci este ușor să „vărsăm” tabela mai mică în cea mai mare.

Două observații de implementare:

1. Această variantă consumă mai mult spațiu pe stivă, căci are variabile locale mai mari. Pe calculatorul meu local, testele mari chiar umplu stiva!
2. Această variantă este mai lentă decât cea cu AIB (nicio surpriză).

### 9.2.3 Problema Lomsat Gelral (Codeforces)

[enunț](#) • [surse](#)

Folosim tehnica *small-to-large*, așa cum se poate deduce și din numele problemei . Este important ca fiecare fiu să stocheze  $\mathcal{O}(\text{subarbore})$  informații, nu  $\mathcal{O}(n)$ . Deci vom folosi o tabelă hash de culori cu frecvențele lor.

Ca observație interesantă, este mult mai eficient să calculați și să returnați din DFS tabela hash și celelalte informații, decât să le stocați în fiecare nod. Iată și o astfel de [implementare](#), considerabil mai lentă.

Există și o soluție cu algoritmul lui Mo, puțin mai lentă, dar care consumă mai puțină memorie. Este necesară atenție la detalii. Ce informații stochează intervalul curent? Vă recomand să izolați acele structuri de date într-un [struct](#) sau o clasă separată.

Problemă similară: [Christmas Balls](#) (IIOT 2021/22 runda 2).

### 9.2.4 Problema Tokens on a Tree (CodeChef)

[enunț](#) • [surse](#)

O problemă echivalentă este [Short Code](#) (inspirată din viața reală, avînd în vedere cum își denumesc unii elevi variabilele).

Să demonstrăm teoretic ce avem de făcut. Iată diverse observații.

**Observația 1.** O monedă  $A$  poate „sări” aparent peste altă monedă  $B$ : practic, monedele fiind identice, o urcăm pe  $B$  pînă la destinația dorită, apoi pe  $A$  în locul lui  $B$ .

**Observația 2.** În orice soluție, monedele se vor afla la vîrfurile arborelui. Niciodată nu vom avea o monedă sub un nod gol, căci am putea face o mutare în plus.

**Observația 3.** Dacă rădăcina conține inițial o monedă, atunci acea monedă nu pleacă nicăieri și nicio altă monedă nu îi va lua locul. Deci putem rezolva problema independent pentru subarbori.

**Observația 4.** Dacă rădăcina nu conține inițial o monedă, atunci dintr-unul dintre subarborii fiilor o monedă va urca în rădăcină. Restul fiilor vor fi rezolvați independent, conform Observației 3. Moneda care va urca în rădăcină este cea de adîncime maximă după ce rezolvăm fiii, ca să facem cît mai mulți pași în plus. Urcarea este aparentă, conform Observației 1.

Așadar, implementarea trebuie să combine în mod eficient fiii unui nod, apoi să găsească cea mai de jos monedă și să o urce în părinte. Am găsit două variante de implementare.

### Implementare cu *small-to-large*

Fiecare nod  $u$  calculează un vector/listă  $f$  unde  $f[i]$  pentru  $i \geq 0$  este numărul de monede la distanță  $i$  de  $u$ . Fiecare părinte însumează listele fiilor așa cum știm, iar algoritmul este  $\mathcal{O}(n)$ , căci nodurile odată comasate își pierd identitatea. În plus, nodul  $u$  se adaugă pe sine însuși la începutul listei și, dacă este loc, simulează urcarea unei monede transferând o unitate de pe ultima poziție din  $f$  pe prima.

**Detalii de implementare.** Implementarea cu `std::list` este cu vreo 25 de linii mai scurtă decât cea cu liste proprii, dar este de două ori mai lentă și consumă dublul memoriei. Implementarea cu `std::deque` este nefolosibilă ca timp și ca memorie (spre 1 GB). Probabil, clasa `deque` are costuri fixe, iar multe `deque`-uri mici sînt foarte scumpe.

### Implementare cu liniarizare + RMQ

Construim o liniarizare DFS și notăm, în nodurile care conțin monede, adîncimea acelor noduri. În nodurile care nu conțin monede nu notăm nimic. Pentru a găsi cea mai de jos monedă din subarborele unui nod  $u$ , găsim maximul pe intervalul subîntins de  $u$ . Pentru a muta moneda, scriem 0 în locul celui maxim (moneda dispare) și scriem adîncimea lui  $u$  la poziția nodului  $u$  (moneda apare acolo). Apoi creștem numărul total de mutări cu diferența dintre cele două adîncimi. Avem nevoie de RMQ cu actualizare, deci putem folosi varianta pe arbori de segmente. Rezultă o complexitate de  $\mathcal{O}(n \log n)$ . Codul este puțin mai lent și consumă mai multă memorie decât implementarea cu *small-to-large*.

## 9.2.5 Problema Blood Cousins Return (Codeforces)

[enunț](#) • [surse](#)

Toate soluțiile încep prin a transforma numele în numere. Cea mai la îndemînă implementare folosește un `unordered_map`.

### Implementarea cu *small-to-large*

O soluție destul de brutală cu *small-to-large* este: fiecare nod  $u$  ține un vector de set-uri, unde setul de pe poziția  $i$  reține numerele distincte regăsite la adîncime  $i$  (raportat la adîncimea lui  $u$ ) în subarborele lui  $u$ . Cînd combinăm doi vectori, combinăm două cîte două seturile reprezentînd aceeași adîncime. Trebuie să avem grijă să folosim *small-to-large* în două locuri:

1. Copiem vectorul mai mic în cel mai mare.
2. Pentru fiecare pereche de seturi, îl copiem pe cel mai mic în cel mai mare.

Note de implementare:

1. `unordered_set` este mai lent decât `set`, deși algoritmic vorbind ne-ar trebui prima, care oferă timp constant. Dar tabelele hash (adică `unordered_set`) au o mărime minimă dată de vectorul pe care se bazează.
2. Reprezentarea listelor de adiacență cu `deque` este de două ori mai lentă decât cu `vector`.

Implementarea este rezonabil de scurtă, dar nu prea eficientă.

### Implementarea cu tehnici de bază

Iată și o abordare care necesită doar parcurgeri, liniarizare și căutare binară. Soluția este greu de codat, dar este mai rapidă.

1. Calculăm ordinea BFS. Atunci răspunsul la orice interogare se va traduce în numărarea elementelor distincte de pe un interval contiguu din BFS. Știm să facem asta folosind un simplu AIB și ordonînd interogările după capătul drept (vezi problema [D-query](#)).
2. Pentru fiecare interogare, rămîne să aflăm primul și ultimul nod de la o anumită adîncime din subarborele lui  $u$ , ca să știm pe ce interval din BFS facem numărarea. Putem face asta cu două parcurgeri DFS și o stivă. La intrarea în fiecare nod, notăm valoarea sa pe stivă în dreptul adîncimii sale. La revenirea din nod, lăsăm stiva intactă. Atunci, la revenirea într-un nod  $u$  aflat la adîncimea  $d$ , putem ști care este **ultimul** său descendent de la adîncimea  $d'$ : fie nu există, fie este nodul de la poziția  $d'$  de pe stivă. Pentru a afla **primul** descendent de la adîncimea dorită, facem același DFS, dar iterînd prin fiii nodurilor în ordine inversă.

Sună rezonabil din vorbe, dar [prima implementare](#) a fost migăloasă.

O soluție considerabil mai scurtă (cea inclusă în anexă) procedează astfel:

1. Calculăm aceeași ordine BFS.
2. Înlocuim fiecare interogare  $\langle u, d \rangle$  cu interogarea  $\langle depth[u] + d, t_{in}[u], t_{out}[u] \rangle$ . Cu alte cuvinte, fiecare interogare interoghează un interval aflat la o anumită adîncime și cu noduri între timpii dați. Sortăm și procesăm interogările cu un AIB ca de obicei.

O a treia implementare este: colectăm nodurile separat pe fiecare nivel, în ordinea timpilor de vizitare (care este chiar ordinea DFS). Acum intervalul de interes pentru o interogare referitoare la nodul  $u$  este pe un nivel cunoscut și este delimitat de timpii de intrare și de ieșire din  $u$ .

Este greu să construim cîte un AIB pe fiecare nivel, dar putem folosi un `set` cu aceeași informație: pozițiile ultimelor apariții ale fiecărui element distinct. Iată [o implementare](#) curată a fostului olimpic Alex Nuță.

### 9.2.6 Problema Tree and Queries (Codeforces)

[enunț](#) • [surse](#)

Din această problemă vom învăța o formă specială și foarte frumoasă de *small-to-large*. Să vedem întîi abordarea cunoscută.



## Implementare brută

Cel mai direct, proiectăm o structură de date care:

1. Să mențină frecvențele culorilor din subarborele curent.
2. Să raporteze numărul de frecvențe cel puțin egale cu o valoare dată.

Pentru (2) am dori un vector de frecvențe ale frecvențelor:  $g[x]$  stochează numărul de culori care au frecvența  $x$ . Pe acest vector, răspunsul la o interogare  $(u, x)$  este suma pe sufixul  $g[x \dots n]$ . Dar implementarea este alunecoasă, căci dorim ca structura să ocupe spațiu  $\mathcal{O}(\text{subarbore})$ , nu  $\mathcal{O}(n)$ . Deci orice AIB sau arbore de intervale construit peste  $g$  trebuie extins dinamic pe măsură ce urcăm în arbore.

În schimb, putem folosi un multiset: un set ordonat al tuturor frecvențelor (nenule). Ca să putem răspunde la întrebarea „câte frecvențe mai mari sau egale cu  $x$  există?”, avem nevoie de PBDS (*policy-based data structure*), o colecție extinsă de structuri de date din STL. Ne-am mai întâlnit cu seturi PBDS la problema [Give Away](#), în capitolul de descompunere în radical.

Soluția este relativ directă, dar ca să o puteți scrie în timp de concurs trebuie să memorați două lucruri:

1. Incantația magică necesară pentru a declara o structură de date PBDS.
2. Codul necesar pentru ștergerea dintr-un multiset. Când o frecvență se modifică, noi dorim să ștergem din multiset o singură apariție a vechii frecvențe, dar un simplu apel la `erase` le-ar șterge pe toate.

## Implementare cu vector global

Ar fi grozav dacă fiecare nod  $u$ , când îi vine rîndul în DFS, ar avea acces exclusiv la vectorul de frecvențe  $f$  și la un AIB cu frecvențele frecvențelor  $g$ . Atunci putem răspunde la toate interogările despre nodul  $u$  în  $\mathcal{O}(\log n)$  per interogare. Doar că, la o parcurgere normală, fiecare nod va opera pe o structură de date deja populată cu date din afara subarborelui său, ceea ce face interogările în AIB incorecte.

Și totuși, se poate! Dar este nevoie de o parcurgere DFS specială. Am învățat-o și eu din [sursa](#) unui legendary grandmaster. 🤖 Mai întâi, calculăm pentru fiecare nod  $u$  care este fiul său cu subarborele cel mai mare. Notăm această informație cu  $h[u]$  (de la *heavy*). Acum,  $DFS(u)$  procedează astfel:

1. Apelează recursiv toți fiii cu excepția lui  $h[u]$ .
2. La revenirea din fiecare fiu  $v$ , elimină recursiv din  $f$  și  $g$  toate nodurile din subarborele lui  $v$ .
3. Apelează recursiv  $DFS(h[u])$ . De data aceasta, lasă informațiile în arbore.
4. Adaugă la loc subarborii eliminați la pasul (2).
5. Adaugă în  $f$  și  $g$  nodul  $u$  însuși.
6. Răspunde la interogări despre subarborele lui  $u$ .

Se nasc două întrebări. Prima: de ce funcționează corect algoritmul? Mai exact, de ce la pasul (6) vectorii conțin doar informații despre subarborele lui  $u$ ? Să considerăm un alt nod  $w$ , din afara subarborelui lui  $u$ . Există trei posibilități.

1.  $w$  este strămoș al lui  $u$  („nod gri”). Atunci, în mod garantat,  $w$  nu apare în structura de date la momentul procesării lui  $u$ , deoarece  $w$  este adăugat în structură doar la finalul recursivității.
2.  $w$  este un „nod negru” într-un subarbor deja vizitat. Fie  $a$  strămoșul comun al lui  $u$  și  $v$  și fie  $a_w$  și  $a_u$  fiii lui  $a$  care pornesc către  $w$ , respectiv către  $u$ . Deoarece sîntem în procesul de vizitare a lui  $a_u$ , înseamnă că  $a_w$  și tot subarborele său (inclusiv  $w$ ) au fost temporar șterși din structură.
3.  $w$  este un „nod alb”, undeva într-un subarbor încă nevizitat. Atunci  $w$  încă nu a fost descoperit de DFS.

A doua întrebare: care este complexitatea algoritmului? Dacă nu am trata special nodul  $h[u]$ , atunci complexitatea ar fi pătratică. Fiecare nod este eliminat la pasul (2) și readăugat la pasul (5) pentru fiecare strămoș al său.

Dacă tratăm special fiii *heavy*, să analizăm numărul de eliminări și readăugări. Ori de cîte ori un strămoș  $w$  cauzează eliminarea unui descendent  $u$ , înseamnă că  $w$  **nu** este fiu *heavy* al părintelui său. Echivalent, părintele lui  $w$  este cel puțin de două ori mai mare decît  $w$ . Așadar, eliminarea nodului  $u$  poate fi cauzată de cel mult  $\log n$  dintre strămoșii săi. Complexitatea parcurgerii este  $\mathcal{O}(n \log n)$ .

Cum fiecare eliminare și adăugare necesită o operație în AIB, rezultă că complexitatea întregului algoritm este  $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ .

Notă de implementare: putem stoca listele de adiacență și listele de interogări ca `vector` sau ca `list`, căci nu avem nevoie de acces aleatoriu. [Implementarea](#) cu `list` este considerabil mai lentă și consumă mai multă memorie.

# Capitolul 10

## Cel mai apropiat strămoș comun

Dat fiind un arbore cu rădăcină, pentru orice două noduri  $u$  și  $v$  definim **cel mai apropiat strămoș comun** ca fiind nodul de adâncime maximă (sau nodul „cel mai jos”) care le are ca descendenți atât pe  $u$ , cât și pe  $v$ . Considerăm că un nod este propriul său descendent, ceea ce înseamnă că cel mai apropiat strămoș comun al lui  $u$  și  $v$  poate fi chiar unul dintre aceste noduri, dacă este strămoș al celuilalt.

În literatura română am întâlnit și denumirea „cel mai mic strămoș comun”, doar că această denumire mi se pare improprie. Nu comparăm nodurile ca mărime, ci ca adâncime. Pentru abreviere, o vom folosi pe cea din limba engleză (LCA - *lowest common ancestor*).

Formal, dat fiind un arbore cu  $n$  noduri, dorim să răspundem la  $q$  întrebări de forma:

- $LCA(u, v)$ : găsește nodul de adâncime maximă care este strămoș atât al lui  $u$ , cât și al lui  $v$ .

[CP Algorithms](#) inventariază multe dintre metodele disponibile.

O aplicație directă a LCA-ului este aflarea distanțelor între noduri. Notăm cu  $d[u]$  adâncimea unui nod  $u$ . Atunci

$$dist(u, v) = (d[u] - d[LCA]) + (d[v] - d[LCA]) = d[u] + d[v] - 2 \cdot d[LCA]$$

### 10.1 Sumar: RMQ (*range minimum query*)

RMQ este o problemă clasică pe vectori. Dat fiind un vector  $V$  cu  $n$  elemente, trebuie să răspundem la  $q$  întrebări de forma  $\langle l, r \rangle$  cu semnificația: să se găsească minimul valorilor  $V[l \dots r]$ .

Problema are diverse variațiuni. Ni se poate cere *valoarea* minimă sau *poziția* valorii minime. Vectorul poate fi static sau poate avea actualizări.

Acest curs nu are un capitol dedicat pentru RMQ, dar o vom trata superficial aici întrucât ea se leagă de algoritmi pentru LCA. Iată un sumar al metodelor folosite în programarea competitivă.

Precizări:

metodă	preprocesare	interogări	memorie extra
Arbore de intervale	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(q \log n)$	$\mathcal{O}(n)$
Arbore Fenwick (AIB)	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(q \log n)$	0
Descompunere în radical	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(q\sqrt{n})$	$\mathcal{O}(\sqrt{n})$
Tabelă rară ( <i>sparse table</i> )	$\mathcal{O}(n \log n)$	$\mathcal{O}(q)$	$\mathcal{O}(n \log n)$
Stivă ordonată	$\mathcal{O}(q \log q)$	$\mathcal{O}(n + q \log n)$	$\mathcal{O}(n)$

Tabela 10.1: Metode pentru problema RMQ.

- Tabela rară și stiva ordonată nu permit actualizări.
- Arborele Fenwick permite doar interogări pe prefix și doar actualizări descrescătoare.

Să trecem în revistă, doar pentru completitudine, structurile de date.

### 10.1.1 RMQ cu arbore de intervale

Construim un arbore de intervale în care nodul părinte reține minimul fiilor săi. Admite actualizări punctuale sau, în varianta cu propagare *lazy*, și actualizări pe interval. Am tot studiat aceste structuri de date, nu mai detaliem aici.

### 10.1.2 RMQ cu arbore indexat binar

Construim un AIB peste vector. Admite doar interogări pe prefix și doar actualizări descrescătoare.

### 10.1.3 RMQ cu descompunere în radical

Pentru fiecare bloc reținem minimul. Asimptotic operațiile sînt mai lente, dar așa zice că actualizarea pe interval este mai simplă de codat decît la arborii de intervale.

### 10.1.4 RMQ cu tabelă rară

Elevii se dau în vînt după această metodă. Codul este aproximativ:

```
void compute_rmq(int* v, int n) {
    // r[p][i] = minimul pe intervalul v[i]...v[i + 2^p - 1]
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        r[0][i] = v[i];
    }
    for (int p = 1; (1 << p) <= n; p++) {
        for (int i = 0; i + (1 << p) <= n; i++) {
            r[p][i] = min(r[p - 1][i], r[p - 1][i + (1 << (p - 1))]);
        }
    }
}
```

```
int rmq(int left, int right) { // inclusiv
    int p = 31 - __builtin_clz(right - left + 1); // log_2 din lungime
    return min(r[p][left], r[p][right - (1 << p) + 1]);
}
```

Totuși, consumul de memorie al metodei *sparse table* este enorm. În afară de cazul în care avem multe interogări, timpul de  $\mathcal{O}(1)$  per interogare nu justifică risipa de memorie. Exemplu: Cu *sparse table*, pentru  $n = 200\,000$  vom folosi  $200\,000 \times 18$  întregi, adică 14,4 MB. Pentru arborele de intervale, presupunând că îl completăm pînă la 256K elemente, vom folosi 512K întregi, adică 2 MB. Nu am rulat benchmark-uri, dar mă aștept să existe o diferență de viteză din cauza cache-ului.

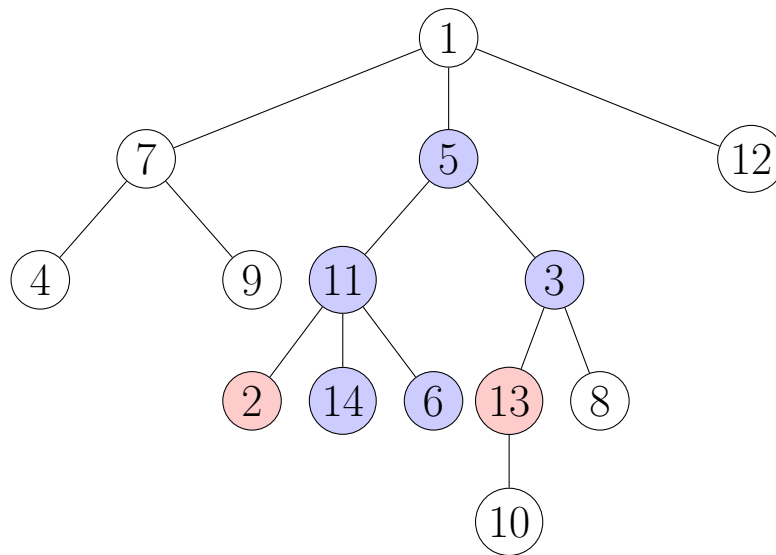
### 10.1.5 RMQ cu stivă ordonată

Includ și această metodă ad-hoc. Ordonăm interogările după capătul drept. Parcurgem vectorul de la stînga la dreapta și menținem o stivă crescătoare de minime parțiale. La poziția  $r$  putem răspunde la toate interogările  $[l, r]$ . Răspunsul este valoarea minimă din stivă aflată pe o poziție mai mare sau egală cu  $l$ . Așadar este suficientă o căutare binară.

Exemplu: fie vectorul  $V = (6, 3, \mathbf{2}, 10, 8, \mathbf{6}, 9, 15, \mathbf{9}, \mathbf{20}, \dots)$ . Cînd ajungem la elementul 20, stiva constă din valorile trecute cu aldin. Cînd răspundem la interogările cu capătul  $r$  pe elementul 20, răspunsul va fi una dintre valorile din stivă, în funcție de poziția capătului  $l$ .

## 10.2 LCA cu liniarizare

Facem o liniarizare Euler cu repetiție. În vector notăm nodurile, dar ne interesează de fapt adîncimea acelor noduri. Astfel, putem reformula interogările LCA ca „găsește nodul de adîncime minimă dintre ultima apariție a lui  $u$  și prima apariție a lui  $v$ ”. Așadar, toate metodele de RMQ pe vector se aplică și aici.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Euler	1	7	4	7	9	7	1	5	11	2	11	14	11	6	11	5	3	13	10	13	3	8	3	5	1	12	1
adâncimi	0	1	2	1	2	1	0	1	2	3	2	3	2	3	2	1	2	3	4	3	2	3	2	1	0	1	0

Figura 10.1: Aflarea LCA printr-o liniarizare Euler cu repetiție. LCA(2,13) se reduce la o interogare de minim pe intervalul [10,18]. Adâncimea minimă este 1, corespunzătoare nodului 5.

În continuare, vom mai discuta patru metode specifice arborilor, respectiv:

metodă	preprocesare	interogări	memorie extra
Descompunere în radical	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(q\sqrt{n})$	$\mathcal{O}(n)$
Binary lifting ( $\log n$ pointeri)	$\mathcal{O}(n \log n)$	$\mathcal{O}(q \log n)$	$\mathcal{O}(n \log n)$
Binary lifting (2 pointeri)	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(q \log n)$	$\mathcal{O}(n)$
Tarjan offline	$\mathcal{O}(q + n \log^* n)$	—	$\mathcal{O}(n)$

Tabela 10.2: Metode pentru aflarea LCA.

### 10.3 LCA cu descompunere în radical

Următoarele trei metode folosesc noțiunea de *jump pointers*: pointeri la strămoși care ne ajută să accelerăm urcarea din  $u$  și din  $v$  în căutarea LCA-ului. Pentru descompunerea în radical,

- Fiecare nod ține un pointer la părinte și unul la strămoșul aflat cu  $\sqrt{n}$  noduri mai sus.
- Construcția evidentă durează  $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$ : din fiecare nod, urcăm  $\sqrt{n}$  niveluri. Ea poate fi redusă la  $\mathcal{O}(n)$  dacă menținem stiva DFS pe durata parcurgerii.
- Fiecare interogare durează  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ .
- Variantă: fiecare nod stochează un pointer la cel mai de jos strămoș de adâncime multiplu de  $\sqrt{n}$ .

[implementare](#)

## 10.4 LCA cu binary lifting ( $\log n$ pointeri per nod)

- Fiecare nod ține pointeri la strămoșii aflați mai sus cu 1, 2, 4, 8... niveluri.
- Construcția durează  $\mathcal{O}(n \log n)$ , similară algoritmului de RMQ.
- Necesită  $\mathcal{O}(n \log n)$  memorie.
- Fiecare interogare durează  $\mathcal{O}(\log n)$ .
  - Deci nu prea mai merită. Pe vector plăteam memoria  $\mathcal{O}(n \log n)$  pentru că interogările durau  $\mathcal{O}(1)$ .

### Detaliu de implementare

Metodele cu *jump pointers* pot fi implementate în două feluri:

1. Aducem nodurile la aceeași adâncime. Apoi urcăm în paralel cu ambele până la strămoșul comun.
2. Îl urcăm pe  $u$  cât timp nu devine strămoș al lui  $v$ . La final,  $u$  este LCA-ul.

A doua implementare (cu test de strămoș) este mai scurtă și puțin mai rapidă.

[implementări](#)

## 10.5 LCA cu binary lifting (2 pointeri per nod)

- Un [articol](#) bun pe Codeforces (imaginile sînt foarte utile).
- Fiecare nod  $x$  ține un pointer la părinte și un pointer numit *jump*, construit după regula:
- Fie  $y$  părintele lui  $x$ , fie  $z = \text{jump}[y]$  și fie  $t = \text{jump}[z]$ .
- Dacă distanțele între  $y-z$  și  $z-t$  sînt egale, atunci  $\text{jump}[x] = t$ .
- Altfel  $\text{jump}[x] = y$ .
- Iau naștere niște pointeri cu o [structură](#) curioasă. Cei pasionați pot citi despre secvență pe OEIS, secvențele [A082850](#) și [A182105](#).
- Folosim această informație pentru a găsi LCA în  $\mathcal{O}(\log n)$ .
- Orice structură de pointeri „aproximativ” logaritmică funcționează aici. Am făcut și un experiment cu formula LSB (exemplu: un nod la adâncime  $20 = 10100_2$  va pointa patru nivele mai sus).

[implementări](#)

## 10.6 LCA cu algoritmul lui Tarjan (offline)

- Funcționează cînd interogările sînt date în avans.
- Distribuie interogările după noduri. Interogarea  $(u, v)$  este distribuită în listele lui  $u$  și  $v$ .
- Răspunde la interogări într-un singur DFS (!).
- Principiu de bază: grupăm nodurile deja vizitate („negre”) și pe cele în curs de vizitare („gri”) în mulțimi disjuncte (cu *union-find*).

- Fiecare mulțime va conține exact un nod gri, plus toți descendenții săi, cu excepția nodului gri în care se află acum DFS-ul. La terminarea unui nod gri, el este unit cu părintele său.
- Putem răspunde la o interogare  $(u, v)$  în momentul în care  $v$  este negru, iar pe  $u$  tocmai îl vizităm. Răspunsul (LCA) este nodul gri din mulțimea lui  $v$ .

[implementare](#)

## 10.7 Benchmarks

Am făcut aceste teste pe un arbore cu 200.000 de noduri, cu un lanț de cel puțin 150.000 de noduri. Fișierele de intrare au 5,2 MB.

- Tarjan: 160 ms
- *binary lifting*, doi pointeri (cu test de strămoș sau nu): 190 ms
- *binary lifting*, doi pointeri (metoda LSB): 250 ms
- *binary lifting*,  $\log n$  pointeri, cu test de strămoș: 290 ms
- *binary lifting*,  $\log n$  pointeri: 320 ms
- descompunere în radical: 900 ms

Concluzii: când interogările sînt date în avans, Tarjan cîștigă. În rest, metodele cu *binary lifting* cu doar doi pointeri per nod sînt mai rapide și consumă mai puțină memorie decît metoda cu  $\log n$  pointeri per nod.



# Partea IV

## Probleme diverse

# Capitolul 11

## Probleme diverse

Acest capitol include probleme care fie necesită doar cunoștințe de bază (engl. *core*, numite în supa culturală și probleme ad-hoc), fie necesită cunoștințe specifice, dar pentru care cursul încă nu are un capitol dedicat.

### 11.1 Problema Liars (Baraj ONI 2025)

[enunț](#) • [sursă](#)

#### 11.1.1 Generalități

Problema este una tipică de recurență pe arbore<sup>1</sup>, dar acest curs nu are un capitol dedicat subiectului. Poate într-o zi cu soare. Problema necesită multă atenție la implementare.

Să începem cu numărarea configurațiilor posibile. În problemele de recurență pe arbore, de obicei judecăm recursiv. Informația pe care o dorim să o calculăm într-un nod  $u$  decurge din combinarea informațiilor similare calculate în fiecare dintre fiii lui  $u$ . În plus, **încercăm să decuplăm subarborele lui  $u$  de restul arborelui**. Pentru aceasta, luăm în calcul toate posibilitățile pentru  $u$  sau (în alte probleme) pentru părintele lui  $u$ . Nu știm care dintre posibilități ne va trebui în final, dar astfel ne asigurăm că problema nu „se revarsă” în restul arborelui.

#### 11.1.2 Numărarea configurațiilor

În cazul de față, vom considera pe rînd că  $u$  este sincer, apoi mincinos. Să considerăm cazul în care  $u$  este sincer și fie  $r$  numărul de vecini mincinoși ai lui  $u$  (citit de la intrare). **În principiu** dorim să calculăm recursiv, pentru fiecare fiu  $v$  al lui  $u$ , numărul de configurații valide pentru

---

<sup>1</sup>Simt nevoia unei digresiuni despre termenul *programare dinamică*. Olimpicii tind să denumească orice recurență programare dinamică (și, pentru maximum de efect, să-și denumească variabilele aferente `dp`). Dar acest lucru nu este adevărat. Pentru a putea încadra o soluție ca programare dinamică, ea are nevoie de **două trăsături**: substructura optimă și suprapunerea subproblemelor. În cazul recurențelor pe arbore, prin definiție **nu** există subprobleme suprapuse, deoarece în acest caz subproblemele unui nod sînt fiii nodului, deci prin definiție sînt disjuncte.

$v$  și subarborele său, apoi să contorizăm numărul de moduri în care putem alege  $r$  fii mincinoși pentru  $u$ . Doar că ne mai lipsește o informație: valoarea de adevăr a părintelui lui  $u$ , fie el  $p$ . Dacă  $p$  este mincinos, atunci lui  $u$  îi mai trebuie doar  $r - 1$  fii mincinoși.

Astfel ajungem la mulțimea finală de informații necesare în fiecare nod  $u$ , respectiv numărul de configurații valide pentru subarborele lui  $u$  în patru cazuri:

1.  $u$  este sincer, iar  $p$  este sincer;
2.  $u$  este sincer, iar  $p$  este mincinos;
3.  $u$  este mincinos, iar  $p$  este sincer;
4.  $u$  este mincinos, iar  $p$  este mincinos.

Să considerăm acum că avem aceste 4 cantități calculate în toți fiii lui  $u$ . Dacă  $u$  este sincer, atunci, după cum am spus, ne interesează în câte moduri putem asigna  $r$  sau  $r - 1$  fii mincinoși (în funcție de valoarea lui  $p$ ). Dacă  $u$  este mincinos, atunci dimpotrivă ne interesează să asignăm orice număr de fii mincinoși în afară de  $r$ , respectiv  $r - 1$ . Această cantitate este mai simplu de calculat dacă aflăm numărul total de configurații în subarborele lui  $u$  (indiferent de numărul de fii mincinoși) din care scădem cantitatea care l-ar face pe  $u$  să fie sincer.

Cum combinăm informațiile din fii? Limitele problemei ne permit complexitatea  $\mathcal{O}(d_u^2)$  în fiecare nod, unde cu  $d_u$  am notat numărul de fii ai lui  $u$ . Aceasta ne permite o logică rezonabil de simplă (la acest nivel). Pentru nodul curent  $u$ , și pentru o valoare fixată pentru  $u$ , să calculăm numărul de configurații în care printre fiii lui  $u$  există  $0, 1, 2, d_u$  mincinoși.

Aceasta este o subproblemă, tot de programare dinamică. Fie  $C(i, j)$  numărul de moduri de a obține  $j$  mincinoși folosind primii  $i$  fii. Inițial,  $C(0, 0) = 1$ , căci cu primii 0 fii putem obține (doar) 0 mincinoși într-un singur mod. Apoi,  $C(i, j)$  provine

- din  $C(i - 1, j)$  dacă asignăm al  $i$ -lea fiu ca fiind sincer;
- din  $C(i - 1, j - 1)$  dacă asignăm al  $j$ -lea fiu ca fiind mincinos.

### 11.1.3 Găsirea unei configurații

Odată numărate configurațiile în această manieră *bottom up*, putem găsi una dintre ele într-o manieră *top down*. Ce valoare să punem în rădăcină (nodul 1)? Prin convenție, să asignăm rădăcina ca sinceră dacă ea raportează cel puțin o configurație validă în care ea este sinceră, altfel o asignăm ca mincinoasă. Din nou, efectul acestei asignări este că decuplăm subarborii rădăcinii.

O dată fixată valoarea unui nod  $u$ , îi putem asigna și fiii. Acest proces este elementar, dar necesită un pic de cod, în două faze.

În primă fază, asignăm toți fiii lui  $u$  care sînt impuși. Dacă un fiu  $v$  nu are nicio asignare în care el să fie sincer, iar părintele său  $u$  să aibă valoarea fixată, atunci obligatoriu  $v$  trebuie să fie mincinos. Similar decidem dacă  $v$  trebuie să fie sincer. Dintre restul fiilor, care pot lua orice valoare, știm câți trebuie să fie sinceri și câți mincinoși, în funcție de numărul de vecini mincinoși declarați de  $u$  și de valoarea acestuia de adevăr. Asignăm și restul de fii ai lui  $u$  respectînd aceste

cantități. Procedăm astfel pînă în frunze.

## Partea V

### Anexă: Cod-sursă

# Anexa A

## Arbori de intervale

### A.1 Problema Xenia and Bit Operations (Codeforces)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 1 << 17;

struct segment_tree {
    int v[2 * MAX_N];
    int n;

    void init(int n) {
        this->n = n;
    }

    void set(int pos, int val) {
        v[pos + n] = val;
    }

    void build() {
        bool is_or = true;
        for (int i = n - 1; i; i--) {
            int l = 2 * i, r = 2 * i + 1;
            v[i] = is_or ? (v[l] | v[r]) : (v[l] ^ v[r]);
            if ((i & (i - 1)) == 0) {
                is_or = !is_or;
            }
        }
    }

    int update(int pos, int val) {
        pos += n;
        v[pos] = val;
```

```

    bool is_or = true;
    for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
        int l = 2 * pos, r = 2 * pos + 1;
        v[pos] = is_or ? (v[l] | v[r]) : (v[l] ^ v[r]);
        is_or = !is_or;
    }
    return v[1];
}
};

segment_tree st;
int num_queries;

void read_array() {
    int n;
    scanf("%d %d", &n, &num_queries);
    n = 1 << n;
    st.init(n);

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int x;
        scanf("%d", &x);
        st.set(i, x);
    }

    st.build();
}

void process_queries() {
    while (num_queries--) {
        int pos, val;
        scanf("%d %d", &pos, &val);
        int root = st.update(pos - 1, val);
        printf("%d\n", root);
    }
}

int main() {
    read_array();
    process_queries();

    return 0;
}

```

## A.2 Problema Distinct Characters Queries (Codeforces)

◀ înapoi • [versiune online](#)

```
#include <stdio.h>
#include <string.h>

const int MAX_N = 1 << 17;
const int T_UPDATE = 1;

int next_power_of_2(int n) {
    return 1 << (32 - __builtin_clz(n - 1));
}

struct segment_tree {
    int v[2 * MAX_N];
    int n;

    void init(char* s) {
        int len = strlen(s);
        this->n = next_power_of_2(len);

        for (int i = 0; i < len; i++) {
            v[i + this->n] = 1 << (s[i] - 'a');
        }

        build();
    }

    void build() {
        for (int i = n - 1; i; i--) {
            v[i] = v[2 * i] | v[2 * i + 1];
        }
    }

    void update(int pos, char val) {
        pos += n;
        v[pos] = 1 << (val - 'a');

        for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
            v[pos] = v[2 * pos] | v[2 * pos + 1];
        }
    }

    int popcount_query(int l, int r) {
        int mask = 0;

        l += n;
        r += n;

        while (l <= r) {
            if (l & 1) {
                mask |= v[l++];
            }
        }
    }
};
```



```

    }
    l >>= 1;

    if (!(r & 1)) {
        mask |= v[r--];
    }
    r >>= 1;
}

return __builtin_popcount(mask);
}
};

segment_tree st;

void read_string() {
    char s[MAX_N + 1];
    scanf("%s", s);
    st.init(s);
}

void process_ops() {
    int num_ops, type;
    scanf("%d", &num_ops);

    while (num_ops--) {
        scanf("%d", &type);

        if (type == T_UPDATE) {
            int pos;
            char val;
            scanf("%d %c", &pos, &val);
            st.update(pos - 1, val);
        } else {
            int l, r;
            scanf("%d %d", &l, &r);
            int num_distinct = st.popcount_query(l - 1, r - 1);
            printf("%d\n", num_distinct);
        }
    }
}

int main() {
    read_string();
    process_ops();

    return 0;
}

```

## A.3 Problema K-query (SPOJ)

[◀ înapoi](#)

Sursă cu arbori de intervale.

```
// Complexitate:  $O(n \log n)$ 
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 32'768;
const int MAX_Q = 200'000;

int next_power_of_2(int n) {
    while (n & (n - 1)) {
        n += (n & -n);
    }

    return n;
}

struct segment_tree {
    short v[2 * MAX_N];
    int n;

    void init(int n) {
        this->n = next_power_of_2(n);
    }

    void set(int pos) {
        pos += n;
        while (pos) {
            v[pos]++;
            pos /= 2;
        }
    }

    short range_count(int l, int r) {
        int sum = 0;

        l += n;
        r += n;

        while (l <= r) {
            if (l & 1) {
                sum += v[l++];
            }
            l >>= 1;

            if (!(r & 1)) {
                sum += v[r--];
            }
            r >>= 1;
        }

        return sum;
    }
};
```

```

        sum += v[r--];
    }
    r >>= 1;
}

return sum;
}
};

struct elem {
    int val;
    short pos;
};

struct query {
    short left, right;
    int val;
    int orig_pos;
};

elem v[MAX_N];
query q[MAX_Q];
// Mai curat ar fi să punem răspunsurile în struct. Dar atunci ar trebui să
// sortăm interogările încă o dată la final.
short answer[MAX_Q];
segment_tree st;
int n, num_queries;

void read_data() {
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        scanf("%d", &v[i].val);
        v[i].pos = i + 1;
    }

    scanf("%d", &num_queries);
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        scanf("%hd %hd %d", &q[i].left, &q[i].right, &q[i].val);
        q[i].orig_pos = i;
    }
}

void sort_array_by_val() {
    std::sort(v, v + n, [](elem a, elem b) {
        return a.val > b.val;
    });
}

void sort_queries_by_val() {
    std::sort(q, q + num_queries, [](query& a, query& b) {

```

```
    return a.val > b.val;
});
}

void process_queries() {
    st.init(n);

    int j = 0;
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        while ((j < n) && (v[j].val > q[i].val)) {
            st.set(v[j++].pos);
        }
        answer[q[i].orig_pos] = st.range_count(q[i].left, q[i].right);
    }
}

void write_answers() {
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        printf("%d\n", answer[i]);
    }
}

int main() {
    read_data();
    sort_array_by_val();
    sort_queries_by_val();
    process_queries();
    write_answers();

    return 0;
}
```

---

Sursă cu arbori indexați binar.

```
// Complexitate:  $O(n \log n)$ 
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 30'000;
const int MAX_Q = 200'000;

struct fenwick_tree {
    short v[MAX_N + 1];
    int n;

    void init(int n) {
        this->n = n;
    }
}
```

```

void set(int pos) {
    do {
        v[pos]++;
        pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
}

short prefix_count(int pos) {
    int sum = 0;
    while (pos) {
        sum += v[pos];
        pos &= pos - 1;
    }
    return sum;
}

short range_count(int l, int r) {
    return prefix_count(r) - prefix_count(l - 1);
}
};

struct elem {
    int val;
    short pos;
};

struct query {
    short left, right;
    int val;
    int orig_pos;
};

elem v[MAX_N];
query q[MAX_Q];
// Mai curat ar fi să punem răspunsurile în struct. Dar atunci ar trebui să
// sortăm interogările încă o dată la final.
short answer[MAX_Q];
fenwick_tree fen;
int n, num_queries;

void read_data() {
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        scanf("%d", &v[i].val);
        v[i].pos = i + 1;
    }

    scanf("%d", &num_queries);
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        scanf("%hd %hd %d", &q[i].left, &q[i].right, &q[i].val);
    }
}

```

```
    q[i].orig_pos = i;
}
}

void sort_array_by_val() {
    std::sort(v, v + n, [](elem a, elem b) {
        return a.val > b.val;
    });
}

void sort_queries_by_val() {
    std::sort(q, q + num_queries, [](query& a, query& b) {
        return a.val > b.val;
    });
}

void process_queries() {
    fen.init(n);

    int j = 0;
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        while ((j < n) && (v[j].val > q[i].val)) {
            fen.set(v[j++].pos);
        }
        answer[q[i].orig_pos] = fen.range_count(q[i].left, q[i].right);
    }
}

void write_answers() {
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        printf("%d\n", answer[i]);
    }
}

int main() {
    read_data();
    sort_array_by_val();
    sort_queries_by_val();
    process_queries();
    write_answers();

    return 0;
}
```

---

## A.4 Problema Sereja and Brackets (Codeforces)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```

// Complexitate:  $O(n + q \log n)$ .
#include <stdio.h>
#include <string.h>

const int MAX_N = 1 << 20;

int next_power_of_2(int n) {
    while (n & (n - 1)) {
        n += (n & -n);
    }

    return n;
}

int min(int x, int y) {
    return (x < y) ? x : y;
}

struct node {
    int matched, open, closed;

    node combine(node& other) {
        int new_matches = min(open, other.closed);
        return {
            .matched = matched + other.matched + 2 * new_matches,
            .open = open + other.open - new_matches,
            .closed = closed + other.closed - new_matches,
        };
    }
};

struct segment_tree {
    node v[2 * MAX_N];
    int n;

    void init(char* s) {
        int len = strlen(s);
        this->n = next_power_of_2(len);

        for (int i = 0; i < len; i++) {
            v[i + this->n] = {
                .matched = 0,
                .open = (s[i] == '('),
                .closed = (s[i] == ')'),
            };
        }

        build();
    }
}

```

```
void build() {
    for (int i = n - 1; i; i--) {
        v[i] = v[2 * i].combine(v[2 * i + 1]);
    }
}

int query(int l, int r) {
    node left = { 0, 0, 0 };
    node right = { 0, 0, 0 };

    l += n;
    r += n;

    while (l <= r) {
        if (l & 1) {
            left = left.combine(v[l++]);
        }
        l >>= 1;

        if (!(r & 1)) {
            right = v[r--].combine(right);
        }
        r >>= 1;
    }

    node answer = left.combine(right);
    return answer.matched;
}

};

segment_tree st;

void read_string() {
    char s[MAX_N + 1];
    scanf("%s", s);
    st.init(s);
}

void process_ops() {
    int num_ops;
    scanf("%d", &num_ops);

    while (num_ops--) {
        int l, r;
        scanf("%d %d", &l, &r);
        printf("%d\n", st.query(l - 1, r - 1));
    }
}
```



```
int main() {
    read_string();
    process_ops();

    return 0;
}
```

## A.5 Problema Copying Data (Codeforces)

◀ înapoi • [versiune online](#)

```
// Complexitate:  $O(q \log n)$ 
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 1 << 17;
const int T_COPY = 1;

struct change {
    int time;
    int shift;
};

int next_power_of_2(int x) {
    return 1 << (32 - __builtin_clz(x - 1));
}

struct segment_tree {
    change v[2 * MAX_N];
    int n;

    void init(int n) {
        this->n = next_power_of_2(n);
    }

    change query(int pos) {
        change latest = { 0, 0 };
        for (pos += n; pos; pos >>= 1) {
            if (v[pos].time > latest.time) {
                latest = v[pos];
            }
        }
        return latest;
    }

    void update(int l, int r, change c) {
        l += n;
        r += n;
```

```
while (l <= r) {
    if (l & 1) {
        v[l++] = c;
    }
    l >>= 1;

    if (!(r & 1)) {
        v[r--] = c;
    }
    r >>= 1;
}
}
};

segment_tree st;
int a[MAX_N], b[MAX_N];
int n, num_ops;

void read_arrays() {
    scanf("%d %d", &n, &num_ops);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        scanf("%d", &a[i]);
    }
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        scanf("%d", &b[i]);
    }
}

void process_ops() {
    st.init(n);
    int type, x, y, k;
    for (int op = 1; op <= num_ops; op++) {
        scanf("%d", &type);
        if (type == T_COPY) {
            scanf("%d %d %d", &x, &y, &k);
            x--;
            y--;
            change c = { .time = op, .shift = x - y };
            st.update(y, y + k - 1, c);
        } else {
            scanf("%d", &x);
            x--;
            change latest = st.query(x);
            int val = latest.time ? a[x + latest.shift] : b[x];
            printf("%d\n", val);
        }
    }
}

int main() {
```

```

read_arrays();
process_ops();

return 0;
}

```

## A.6 Problema PHF (FMI No Stress 2013)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```

#include <stdio.h>

typedef unsigned char byte;

const int MAX_N = 1'000'000;
const int MAX_SEGTREE_NODES = 1 << 21;

const int IDENTITY = 3;
const byte CROSS_TABLE[4][3] = {
    { 0, 1, 0 }, // P
    { 1, 1, 2 }, // H
    { 0, 2, 2 }, // F
    { 0, 1, 2 }, // identitate
};

char FROM_CHAR[27] = ".....2.1.....0.....";
char TO_CHAR[4] = "PHF";

byte from_char(char c) {
    return FROM_CHAR[c - 'A'] - '0';
}

int next_power_of_2(int x) {
    return 1 << (32 - __builtin_clz(x - 1));
}

struct segment_tree_node {
    byte f[3];

    void make_leaf(byte c) {
        for (int i = 0; i < 3; i++) {
            f[i] = CROSS_TABLE[c][i];
        }
    }

    segment_tree_node compose(segment_tree_node other) {
        return {
            other.f[f[0]],

```

```

        other.f[f[1]],
        other.f[f[2]],
    };
}
};

struct segment_tree {
    segment_tree_node v[MAX_SEGTREE_NODES];
    int n;

    void init(char* s, int _n) {
        n = next_power_of_2(_n);
        for (int i = 0; i < _n; i++) {
            v[n + i].make_leaf(s[i]);
        }

        for (int i = _n; i < n; i++) {
            v[n + i].make_leaf(IDENTITY);
        }

        for (int i = n - 1; i; i--) {
            v[i] = v[2 * i].compose(v[2 * i + 1]);
        }
    }

    void update(int pos, byte b) {
        pos += n;
        v[pos].make_leaf(b);
        for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
            v[pos] = v[2 * pos].compose(v[2 * pos + 1]);
        }
    }

    char get_value(byte input) {
        return TO_CHAR[v[1].f[input]];
    }
};

char s[MAX_N + 1];
segment_tree st;
int n, num_queries;

void read_string() {
    scanf("%d %d ", &n, &num_queries);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        s[i] = from_char(getchar());
    }
}

void process_updates() {

```

```

int pos;

while (num_queries--) {
    scanf("%d ", &pos);
    pos--;
    s[pos] = from_char(getchar());
    if (pos) {
        st.update(pos - 1, s[pos]);
    }
    putchar(st.get_value(s[0]));
}

int main() {
    read_string();
    st.init(s + 1, n - 1);
    putchar(st.get_value(s[0]));
    process_updates();
    putchar('\n');

    return 0;
}

```

## A.7 Problema Points (Codeforces)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```

#include <algorithm>
#include <set>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 1 << 18;
const int INFINITY = 2'000'000'000;
const int T_ADD = 1;
const int T_REMOVE = 2;
const int T_FIND = 3;

struct query {
    char type;
    int x, y;
};

int next_power_of_2(int n) {
    while (n & (n - 1)) {
        n += (n & -n);
    }

    return n;
}

```

```

}

int max(int x, int y) {
    return (x > y) ? x : y;
}

struct max_segment_tree {
    int v[2 * MAX_N];
    int n;

    void init(int n) {
        n++; // santinelă infinită la final
        n = next_power_of_2(n);
        this->n = n;

        for (int i = 1; i < 2 * n; i++) {
            v[i] = -1; // fără puncte
        }

        set(n - 1, INFINITY);
    }

    void set(int pos, int val) {
        pos += n;
        v[pos] = val;
        for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
            v[pos] = max(v[2 * pos], v[2 * pos + 1]);
        }
    }

    // Returnează prima poziție după pos unde valoarea depășește val.
    int find_first_after(int pos, int val) {
        pos += n;
        pos++;

        // Urcă pînă cînd găsim un maxim mai mare decît val.
        while (v[pos] <= val) {
            if (pos & 1) {
                pos++;
            } else {
                pos >>= 1;
            }
        }

        // Coboară spre valoarea dorită, mergînd la stînga oricînd putem.
        while (pos < n) {
            pos = (v[2 * pos] > val) ? (2 * pos) : (2 * pos + 1);
        }

        return pos - n;
    }

```

```

}

};

query q[MAX_N];
int pos[MAX_N]; // pentru normalizare
int orig_x[MAX_N];
max_segment_tree segtree;
std::set<int> whys[MAX_N];
int n;

void read_queries() {
    char s[10];
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        scanf("%s %d %d", s, &q[i].x, &q[i].y);
        switch (s[0]) {
            case 'a': q[i].type = T_ADD; break;
            case 'r': q[i].type = T_REMOVE; break;
            default: q[i].type = T_FIND;
        }
    }
}

void normalize_x() {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        pos[i] = i;
    }

    std::sort(pos, pos + n, [](int a, int b) {
        return q[a].x < q[b].x;
    });

    int ptr = 0;
    orig_x[ptr] = q[pos[0]].x;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        if (q[pos[i]].x != orig_x[ptr]) {
            orig_x[++ptr] = q[pos[i]].x;
        }
        q[pos[i]].x = ptr;
    }
}

void add_query(int x, int y) {
    whys[x].insert(y);
    segtree.set(x, *whys[x].rbegin());
}

void remove_query(int x, int y) {
    whys[x].erase(y);
}

```

```
if (whys[x].empty()) {
    segtree.set(x, -1);
} else {
    segtree.set(x, *whys[x].rbegin());
}
}

void find_query(int x, int y) {
    int first = segtree.find_first_after(x, y);
    if (first < n) {
        int first_above = *whys[first].upper_bound(y);
        printf("%d %d\n", orig_x[first], first_above);
    } else {
        printf("-1\n");
    }
}

void process_queries() {
    segtree.init(n);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        switch (q[i].type) {
            case T_ADD: add_query(q[i].x, q[i].y); break;
            case T_REMOVE: remove_query(q[i].x, q[i].y); break;
            default: find_query(q[i].x, q[i].y);
        }
    }
}

int main() {
    read_queries();
    normalize_x();
    process_queries();

    return 0;
}
```

## A.8 Problema Medwalk (Lot 2025)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```
// Complexitate:  $O((N + Q) \log N \log \text{MAX\_VAL})$ .
//
// v2: Nu actualiza aint-ul de minime dacă valoarea nu s-a schimbat.
#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
#include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 100'000;
```



```

const int MAX_VALUE = 300'000;
const int MAX_POS_SEGTREE_NODES = 1 << 18;
const int MAX_VAL_SEGTREE_NODES = 1 << 20;
const int INF = 1'000'000;
const int OP_UPDATE = 1;

typedef __gnu_pbds::tree<
    int,
    __gnu_pbds::null_type,
    std::less<int>,
    __gnu_pbds::rb_tree_tag,
    __gnu_pbds::tree_order_statistics_node_update
> set;

int min(int x, int y) {
    return (x < y) ? x : y;
}

int max(int x, int y) {
    return (x > y) ? x : y;
}

struct pair {
    int v[2];

    void set(int pos, int val) {
        v[pos] = val;
    }

    int get_min() {
        return min(v[0], v[1]);
    }

    int get_max() {
        return max(v[0], v[1]);
    }
};

pair mat[MAX_N];
int n, num_queries;

int next_power_of_2(int x) {
    return 1 << (32 - __builtin_clz(x - 1));
}

// Admite actualizări punctuale și interogări de minim pe interval.
struct min_segment_tree {
    int v[MAX_POS_SEGTREE_NODES];
    int n;

```

```

void init(int size) {
    n = next_power_of_2(size);
}

void update(int pos, int val) {
    pos += n;
    v[pos] = val;
    for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
        v[pos] = min(v[2 * pos], v[2 * pos + 1]);
    }
}

int range_min(int l, int r) {
    l += n;
    r += n;
    int result = INF;

    while (l <= r) {
        if (l & 1) {
            result = min(result, v[l++]);
        }
        l >>= 1;

        if (!(r & 1)) {
            result = min(result, v[r--]);
        }
        r >>= 1;
    }

    return result;
}
};

// Kudos https://stackoverflow.com/a/22075025/6022817
//
// Arbore de intervale pe valori. Fiecare nod care subîntinde valorile [x, y)
// reține un set cu pozițiile pe care apar acele valori.
struct val_segment_tree {
    set s[MAX_VAL_SEGTREE_NODES];
    int n;

    void init(int size) {
        n = next_power_of_2(size);
    }

    void insert(int pos, int val) {
        for (val += n; val; val /= 2) {
            s[val].insert(pos);
        }
    }
}

```

```

void erase(int pos, int val) {
    for (val += n; val; val /= 2) {
        s[val].erase(pos);
    }
}

// Cîte poziții din [l, r] sînt ocupate de valori subintinse de acest nod?
int count_positions_between(int node, int l, int r) {
    return s[node].order_of_key(r + 1) - s[node].order_of_key(l);
}

// Contract: k este 0-based, iar [l, r] este interval închis.
int kth_element(int k, int l, int r) {
    int node = 1;

    while (node < n) {
        int on_left = count_positions_between(2 * node, l, r);
        if (on_left > k) {
            node = 2 * node;
        } else {
            k -= on_left;
            node = 2 * node + 1;
        }
    }

    return node - n;
}

};

void read_data() {
    scanf("%d %d", &n, &num_queries);
    for (int r = 0; r < 2; r++) {
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            int x;
            scanf("%d", &x);
            mat[i].set(r, x);
        }
    }
}

min_segment_tree maxima;
val_segment_tree occur;

void build_segment_trees() {
    maxima.init(n);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        maxima.update(i, mat[i].get_max());
    }
}

```

```
    occur.init(MAX_VALUE + 1);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        occur.insert(i, mat[i].get_min());
    }
}

void update(int row, int col, int val) {
    int old_min = mat[col].get_min();
    mat[col].set(row, val);
    int new_min = mat[col].get_min();

    maxima.update(col, mat[col].get_max());

    if (new_min != old_min) {
        occur.erase(col, old_min);
        occur.insert(col, new_min);
    }
}

int query(int left, int right) {
    int len = right - left + 2;
    int median_pos = (len - 1) / 2;
    int median = occur.kth_element(median_pos, left, right);
    int best_max = maxima.range_min(left, right);

    if (best_max >= median) {
        return median;
    } else {
        // best_max trebuie inserat înainte de median_pos. Răspunsul poate fi la
        // poziția median_pos - 1 sau poate fi chiar best_max.
        int prev = occur.kth_element(median_pos - 1, left, right);
        return max(prev, best_max);
    }
}

void process_queries() {
    while (num_queries--) {
        int type;
        scanf("%d", &type);
        if (type == OP_UPDATE) {
            int r, c, x;
            scanf("%d %d %d", &r, &c, &x);
            r--;
            c--;
            update(r, c, x);
        } else {
            int left, right;
            scanf("%d %d", &left, &right);
            left--;
            right--;
        }
    }
}
```

```
        printf("%d\n", query(left, right));
    }
}

int main() {
    read_data();
    build_segment_trees();
    process_queries();

    return 0;
}
```

---

# Anexa B

## Arbori de intervale cu propagare *lazy*

### B.1 Problema Polynomial Queries (CSES)

[◀ înapoi](#)

Sursă cu AINT iterativ.

```
// Complexitate:  $O(q \log n)$ 
//
// Metodă: menține un arbore de intervale care admite sume pe interval și
// adăugarea unei progresii pe interval.
#include <stdio.h>

const int MAX_SEGTREE_NODES = 1 << 19;
const int T_UPDATE = 1;

int next_power_of_2(int n) {
    return 1 << (32 - __builtin_clz(n - 1));
}

long long progression_sum(long long first, long long step, int len) {
    return first * len + step * (len - 1) * len / 2;
}

// Invarianți:
//
// 1. Valorile reale ale nodurilor subîntines sînt valorile lor v respective
//    plus o progresie aritmetică definită prin first și step.
// 2. Valoarea v a unui nod nu include progresia nodului.
struct segment_tree_node {
    long long s;
    long long first, step;

    long long get_value(int size) {
        return s + progression_sum(first, step, size);
    }
}
```

```

}
};

struct segment_tree {
    segment_tree_node v[MAX_SEGTREE_NODES];
    int n;

    void init(int n) {
        this->n = next_power_of_2(n);
    }

    void set(int pos, int val) {
        v[pos + n].s = val;
    }

    void build() {
        for (int i = n - 1; i; i--) {
            v[i].s = v[2 * i].s + v[2 * i + 1].s;
        }
    }

    void push(int t, int size) {
        int l = 2 * t, r = 2 * t + 1;

        v[l].first += v[t].first;
        v[l].step += v[t].step;

        long long first_right = v[t].first + v[t].step * size / 2;
        v[r].first += first_right;
        v[r].step += v[t].step;

        v[t].s += progression_sum(v[t].first, v[t].step, size);
        v[t].first = 0;
        v[t].step = 0;
    }

    void push_path(int node, int size) {
        if (node) {
            push_path(node / 2, size * 2);
            push(node, size);
        }
    }

    void pull(int t, int size) {
        int l = 2 * t, r = 2 * t + 1;
        v[t].s = v[l].get_value(size / 2) + v[r].get_value(size / 2);
    }
}

```

```
void pull_path(int node) {
    for (int x = node / 2, size = 2; x; x /= 2, size <= 1) {
        pull(x, size);
    }
}

void add_progression(int l, int r) {
    l += n;
    r += n;
    int orig_l = l, orig_r = r, size = 1;
    push_path(l / 2, 2);
    push_path(r / 2, 2);

    while (l <= r) {
        // Prima frunză subîntinsă de nodul x este x * size.
        if (l & 1) {
            v[l].first += l * size - orig_l + 1;
            v[l].step++;
            l++;
        }
        l >>= 1;

        if (!(r & 1)) {
            v[r].first += r * size - orig_l + 1;
            v[r].step++;
            r--;
        }
        r >>= 1;
        size <= 1;
    }

    pull_path(orig_l);
    pull_path(orig_r);
}

long long range_sum(int l, int r) {
    long long sum = 0;
    int size = 1;

    l += n;
    r += n;
    push_path(l / 2, 2);
    push_path(r / 2, 2);

    while (l <= r) {
        if (l & 1) {
            sum += v[l++].get_value(size);
        }
        l >>= 1;
    }
}
```



```

        if (!(r & 1)) {
            sum += v[r--].get_value(size);
        }
        r >>= 1;
        size <<= 1;
    }

    return sum;
}

};

segment_tree st;
int n, num_ops;

void read_array() {
    scanf("%d %d", &n, &num_ops);
    st.init(n);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int x;
        scanf("%d", &x);
        st.set(i, x);
    }
    st.build();
}

void process_ops() {
    while (num_ops--) {
        int type, l, r;
        scanf("%d %d %d", &type, &l, &r);
        l--; r--;
        if (type == T_UPDATE) {
            st.add_progression(l, r);
        } else {
            printf("%lld\n", st.range_sum(l, r));
        }
    }
}

int main() {
    read_array();
    process_ops();

    return 0;
}

```

Sursă cu AINT recursiv.

// Complexitate:  $O(q \log n)$

```

//
// Metodă: menține un arbore de intervale care admite sume pe interval și
// adăugarea unei progresii pe interval.
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 1 << 18;
const int T_UPDATE = 1;

int min(int x, int y) {
    return (x < y) ? x : y;
}

int max(int x, int y) {
    return (x > y) ? x : y;
}

int next_power_of_2(int n) {
    return 1 << (32 - __builtin_clz(n - 1));
}

long long progression_sum(long long first, long long step, int len) {
    return first * len + step * (len - 1) * len / 2;
}

// Invarianți:
//
// 1. Valorile reale ale nodurilor subîntines sînt valorile lor v respective
//    plus o progresie aritmetică definită prin first și step.
// 2. v[k] include first[k] și step[k], dar nu și valorile de la strămoși.
// 3. Toate intervalele sînt [încis, deschis).
struct segment_tree {
    long long v[2 * MAX_N];
    long long first[2 * MAX_N];
    long long step[2 * MAX_N];
    int n;

    void init(int n) {
        this->n = next_power_of_2(n);
    }

    void set(int pos, int val) {
        v[pos + n] = val;
    }

    void build() {
        for (int i = n - 1; i; i--) {
            v[i] = v[2 * i] + v[2 * i + 1];
        }
    }
}

```

```

void push(int t, int len) {
    first[2 * t] += first[t];
    step[2 * t] += step[t];
    v[2 * t] += progression_sum(first[t], step[t], len / 2);

    int right_first = first[t] + step[t] * len / 2;
    first[2 * t + 1] += right_first;
    step[2 * t + 1] += step[t];
    v[2 * t + 1] += progression_sum(right_first, step[t], len / 2);

    first[t] = 0;
    step[t] = 0;
}

void pull(int t) {
    v[t] = v[2 * t] + v[2 * t + 1];
}

// pos1 = poziția unde scriem 1
void add_progression_helper(int t, int pl, int pr, int l, int r, int pos1) {
    if (l >= r) {
        return;
    } else if ((l == pl) && (r == pr)) {
        int value_at_l = l - pos1 + 1;
        first[t] += value_at_l;
        step[t]++;
        v[t] += progression_sum(value_at_l, 1, r - l);
    } else {
        push(t, pr - pl);
        int mid = (pl + pr) >> 1;
        add_progression_helper(2 * t, pl, mid, l, min(r, mid), pos1);
        add_progression_helper(2 * t + 1, mid, pr, ::max(l, mid), r, pos1);
        pull(t);
    }
}

void add_progression(int left, int right) {
    add_progression_helper(1, 0, n, left, right, left);
}

long long range_sum_helper(int t, int pl, int pr, int l, int r) {
    if (l >= r) {
        return 0;
    } else if ((l == pl) && (r == pr)) {
        return v[t];
    } else {
        push(t, pr - pl);
        int mid = (pl + pr) >> 1;
        return range_sum_helper(2 * t, pl, mid, l, min(r, mid)) +
            range_sum_helper(2 * t + 1, mid, pr, ::max(l, mid), r);
    }
}

```

```
    }
}

long long range_sum(int left, int right) {
    return range_sum_helper(1, 0, n, left, right);
}
};

segment_tree s;
int n, num_ops;

void read_array() {
    scanf("%d %d", &n, &num_ops);
    s.init(n);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int x;
        scanf("%d", &x);
        s.set(i, x);
    }
    s.build();
}

void process_ops() {
    while (num_ops--) {
        int type, l, r;
        scanf("%d %d %d", &type, &l, &r);
        if (type == T_UPDATE) {
            s.add_progression(l - 1, r);
        } else {
            printf("%lld\n", s.range_sum(l - 1, r));
        }
    }
}

int main() {
    read_array();
    process_ops();

    return 0;
}
```

## B.2 Problema Nezzar and Binary String (Codeforces)

◀ înapoi • [versiune online](#)

```
// Complexitate:  $O(q \log n)$ .
#include <stdio.h>
```

```

const int MAX_N = 256 * 1024;
const int MAX_OPS = 200'000;
const int ST_CLEAN = 2;

int next_power_of_2(int n) {
    return 1 << (32 - __builtin_clz(n - 1));
}

// Arbore de intervale cu valori 0/1, atribuire pe interval și sumă pe
// interval.
//
// Contract: state[x] poate fi:
// * 0/1 pentru a indica o valoare de atribuit pe toți descendenții lui x, sau
// * ST_CLEAN pentru a arăta că am apelat deja push.
//
// sum[node] ține cont și de state[node].
struct segment_tree {
    int sum[2 * MAX_N];
    int state[2 * MAX_N];
    int n;

    void init(char* s, int len) {
        n = next_power_of_2(len);
        for (int i = 0; i < len; i++) {
            sum[n + i] = s[i] - '0';
        }
        for (int i = len; i < n; i++) {
            sum[n + i] = 0;
        }
        for (int i = 1; i < 2 * n; i++) {
            state[i] = ST_CLEAN;
        }

        build();
    }

    void build () {
        for (int i = n - 1; i; i--) {
            sum[i] = sum[2 * i] + sum[2 * i + 1];
        }
    }

    void push(int x) {
        if (state[x] != ST_CLEAN) {
            state[2 * x] = state[2 * x + 1] = state[x];
            sum[2 * x] = sum[2 * x + 1] = sum[x] / 2;
            state[x] = ST_CLEAN;
        }
    }
}

```

```
void push_all() {
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        push(i);
    }
}

void push_path(int x) {
    int bits = __builtin_popcount(n - 1);
    for (int b = bits; b; b--) {
        push(x >> b);
    }
}

void pull_path(int x) {
    for (x /= 2; x; x /= 2) {
        if (state[x] == ST_CLEAN) {
            sum[x] = sum[2 * x] + sum[2 * x + 1];
        }
    }
}

void range_set(int l, int r, int val) {
    l += n;
    r += n;
    int orig_l = l, orig_r = r;
    int size = 1;

    push_path(l);
    push_path(r);

    while (l <= r) {
        if (l & 1) {
            sum[l] = size * val;
            state[l++] = val;
        }
        l >>= 1;

        if (!(r & 1)) {
            sum[r] = size * val;
            state[r--] = val;
        }
        r >>= 1;
        size <<= 1;
    }

    pull_path(orig_l);
    pull_path(orig_r);
}

int range_sum(int l, int r) {
```

```

    int result = 0;

    l += n;
    r += n;
    push_path(l);
    push_path(r);

    while (l <= r) {
        if (l & 1) {
            result += sum[l++];
        }
        l >>= 1;

        if (!(r & 1)) {
            result += sum[r--];
        }
        r >>= 1;
    }

    return result;
}

bool equals(char* s, int len) {
    push_all();

    int i = 0;
    while ((i < len) && (s[i] - '0' == sum[n + i])) {
        i++;
    }

    return (i == len);
}
};

struct operation {
    int l, r;
};

segment_tree st;
char start[MAX_N + 1], finish[MAX_N + 1];
operation op[MAX_OPS];
int len, num_ops;

void read_data() {
    scanf("%d %d %s %s", &len, &num_ops, start, finish);
    for (int i = 0; i < num_ops; i++) {
        scanf("%d %d\n", &op[i].l, &op[i].r);
        op[i].l--;
        op[i].r--;
    }
}

```

```
}

bool process_op(operation op) {
    int num_ones = st.range_sum(op.l, op.r);
    int num_zeroes = (op.r - op.l + 1) - num_ones;
    if (num_ones == num_zeroes) {
        return false;
    } else {
        int majority = (num_ones > num_zeroes) ? 1 : 0;
        st.range_set(op.l, op.r, majority);
        return true;
    }
}

void process_test() {
    read_data();
    st.init(finish, len);
    int i = num_ops - 1;
    while ((i >= 0) && process_op(op[i])) {
        i--;
    }

    bool success = (i < 0) && st.equals(start, len);
    printf("%s\n", success ? "YES" : "NO");
}

int main() {
    int num_tests;
    scanf("%d", &num_tests);
    while (num_tests--) {
        process_test();
    }

    return 0;
}
```

## B.3 Problema Simple (infO(1)Cup 2019)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 200'000;
const int MAX_SEGTREE_NODES = 1 << 19;
const long long INF = 1LL << 60;
const int OP_ADD = 0;

long long min(long long x, long long y) {
```



```

    return (x < y) ? x : y;
}

long long max(long long x, long long y) {
    return (x > y) ? x : y;
}

// Un arbore de intervale cu propagare lazy. Fiecare nod reține
// * minimul par, maximul par, minimul impar și maximul impar;
// * o cantitate delta de adăugat pe tot subarborele.
//
// Contract: Nodul curent și-a aplicat deja delta sie însuși.
struct node {
    long long e, E, o, O;
    long long delta;

    void empty() {
        // Astfel operațiile de minim/maxim funcționează fără cazuri particulare.
        // 2x pentru că ne lăsăm loc să creștem/scădem.
        e = o = 2 * INF;
        E = O = -2 * INF;
        delta = 0;
    }

    void set(int val) {
        empty();
        if (val % 2) {
            o = O = val;
        } else {
            e = E = val;
        }
    }

    void swap() {
        long long tmp = e; e = o; o = tmp;
        tmp = E; E = O; O = tmp;
    }

    void push(node& a, node& b) {
        a.add(delta);
        b.add(delta);
        delta = 0;
    }

    void pull(node a, node b) {
        // Dacă nodul este *dirty*, atunci el știe mai bine situația curentă. Fiii
        // săi au informație perimată.
        if (!delta) {
            e = min(a.e, b.e);
            E = max(a.E, b.E);
        }
    }
};

```

```

    o = min(a.o, b.o);
    O = max(a.O, b.O);
}
}

void add(long long val) {
    delta += val;
    if (val % 2) {
        // Exemplu: [9,15] și [6,30] +5 ⇒ [11,35] și [14,20].
        swap();
    }
    e += val;
    E += val;
    o += val;
    O += val;
}
};

struct segment_tree {
    node v[MAX_SEGTREE_NODES];
    int n, bits;

    void init(int _n) {
        bits = 32 - __builtin_clz(_n - 1);
        n = 1 << bits;

        for (int i = n + _n; i < 2 * n; i++) {
            // Necesar deoarece altfel nodurile de la _n la n rămîn pe zero.
            v[i].empty();
        }
    }

    void raw_set(int pos, int val) {
        v[pos + n].set(val);
    }

    void build() {
        for (int i = n - 1; i; i--) {
            v[i].pull(v[2 * i], v[2 * i + 1]);
        }
    }

    void push_path(int pos) {
        for (int b = bits - 1; b; b--) {
            int t = pos >> b;
            v[t].push(v[2 * t], v[2 * t + 1]);
        }
    }

    void pull_path(int pos) {

```

```

    for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
        v[pos].pull(v[2 * pos], v[2 * pos + 1]);
    }
}

void range_add(int l, int r, int val) {
    l += n;
    r += n;
    int orig_l = l, orig_r = r;
    push_path(l);
    push_path(r);

    while (l <= r) {
        if (l & 1) {
            v[l++].add(val);
        }
        l >>= 1;

        if (!(r & 1)) {
            v[r--].add(val);
        }
        r >>= 1;
    }

    pull_path(orig_l);
    pull_path(orig_r);
}

node range_query(int l, int r) {
    node accumulator;
    accumulator.empty();

    l += n;
    r += n;
    push_path(l);
    push_path(r);

    while (l <= r) {
        if (l & 1) {
            accumulator.pull(accumulator, v[l++]);
        }
        l >>= 1;

        if (!(r & 1)) {
            accumulator.pull(accumulator, v[r--]);
        }
        r >>= 1;
    }

    return accumulator;
}

```

```
    }
};

segment_tree st;
int n;

void read_array_into_segtree() {
    scanf("%d", &n);
    st.init(n);

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int x;
        scanf("%d", &x);
        st.raw_set(i, x);
    }

    st.build();
}

void process_ops() {
    int num_ops, type, l, r, val;

    scanf("%d", &num_ops);
    while (num_ops--) {
        scanf("%d %d %d", &type, &l, &r);
        l--;
        r--;
        if (type == OP_ADD) {
            scanf("%d", &val);
            st.range_add(l, r, val);
        } else {
            node nd = st.range_query(l, r);
            long long e = (nd.e > INF) ? -1 : nd.e;
            long long o = (nd.o < -INF) ? -1 : nd.o;
            printf("%lld %lld\n", e, o);
        }
    }
}

int main() {
    read_array_into_segtree();
    process_ops();
    return 0;
}
```

## B.4 Problema Balama (Baraj ONI 2024)

[◀ înapoi](#)

Sursă cu AINT iterativ ([versiune online](#)).

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 200'000;
const int MAX_SEGTREE_NODES = 1 << 19;

struct hinge {
    int r, pos;
};

int min(int x, int y) {
    return (x < y) ? x : y;
}

int max(int x, int y) {
    return (x > y) ? x : y;
}

int next_power_of_2(int n) {
    return 1 << (32 - __builtin_clz(n - 1));
}

struct segment_tree_node {
    int m, delta;
};

struct segment_tree {
    segment_tree_node v[MAX_SEGTREE_NODES];
    int n, bits;

    void init(int _n) {
        n = next_power_of_2(_n);
        bits = 31 - __builtin_clz(n);
    }

    void push_path(int node) {
        for (int b = bits; b; b--) {
            int t = node >> b;
            v[2 * t].delta += v[t].delta;
            v[2 * t].m += v[t].delta;
            v[2 * t + 1].delta += v[t].delta;
            v[2 * t + 1].m += v[t].delta;
            v[t].delta = 0;
        }
    }

    void pull_path(int node) {
```

```
    for (int t = node / 2; t; t /= 2) {
        v[t].m = v[t].delta + max(v[2 * t].m, v[2 * t + 1].m);
    }
}

int range_max_and_inc(int l, int r) {
    l += n;
    r += n;
    push_path(l);
    push_path(r);

    int result = 0;
    int orig_l = l, orig_r = r;

    while (l <= r) {
        if (l & 1) {
            result = max(result, v[l].m);
            v[l].m++;
            v[l].delta++;
            l++;
        }
        l >>= 1;

        if (!(r & 1)) {
            result = max(result, v[r].m);
            v[r].m++;
            v[r].delta++;
            r--;
        }
        r >>= 1;
    }

    pull_path(orig_l);
    pull_path(orig_r);

    return result;
}

};

hinge h[MAX_N];
int sol[MAX_N];
segment_tree st;
int n, k;

void read_data() {
    FILE* f = fopen("balama.in", "r");
    fscanf(f, "%d %d", &n, &k);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        fscanf(f, "%d", &h[i].r);
        h[i].pos = i;
    }
}
```

```

    }
    fclose(f);
}

void sort_by_r() {
    std::sort(h, h + n, [](hinge a, hinge b) {
        return a.r > b.r;
    });
}

void scan_hinges() {
    int next_to_fill = 0;
    int i = 0;

    st.init(n);

    while (next_to_fill < k) {
        int left = max(h[i].pos - k + 1, 0);
        int right = min(h[i].pos, n - k);
        int m = st.range_max_and_inc(left, right);
        if (m == next_to_fill) {
            sol[next_to_fill++] = h[i].r;
        }
        i++;
    }
}

void write_answers() {
    FILE* f = fopen("balama.out", "w");
    for (int i = k - 1; i >= 0; i--) {
        fprintf(f, "%d ", sol[i]);
    }
    fprintf(f, "\n");
    fclose(f);
}

int main() {
    read_data();
    sort_by_r();
    scan_hinges();
    write_answers();

    return 0;
}

```

Sursă cu AINT recursiv ([versiune online](#)).

```

#include <algorithm>
#include <stdio.h>

```

```
const int MAX_N = 1 << 18;

struct hinge {
    int r, pos;
};

int min(int x, int y) {
    return (x < y) ? x : y;
}

int max(int x, int y) {
    return (x > y) ? x : y;
}

int next_power_of_2(int n) {
    while (n & (n - 1)) {
        n += (n & -n);
    }

    return n;
}

// Arbore de segmente cu operațiile:
//
// 1. update: inc(left, right) -- incrementează pozițiile [left, right]
// 2. query: max(left, right) -- returnează maximul din [left, right]
//
// Invariant:
//
// * lazy_sum este valoarea de adăugat pe fiecare nod din subarbore
// * m este maximul real din subarbore, inclusiv lazy_sum
struct segment_tree {
    int m[2 * MAX_N];
    int lazy_sum[2 * MAX_N];
    int n;

    void init(int n) {
        this->n = next_power_of_2(n);
    }

    void push(int t) {
        lazy_sum[2 * t] += lazy_sum[t];
        m[2 * t] += lazy_sum[t];
        lazy_sum[2 * t + 1] += lazy_sum[t];
        m[2 * t + 1] += lazy_sum[t];
        lazy_sum[t] = 0;
    }

    void pull(int t) {
```



```

    m[t] = ::max(m[2 * t], m[2 * t + 1]);
}

void inc_helper(int t, int pl, int pr, int l, int r) {
    if (l >= r) {
        return;
    } else if ((l == pl) && (r == pr)) {
        lazy_sum[t]++;
        m[t]++;
    } else {
        push(t);
        int mid = (pl + pr) >> 1;
        inc_helper(2 * t, pl, mid, l, min(r, mid));
        inc_helper(2 * t + 1, mid, pr, ::max(l, mid), r);
        pull(t);
    }
}

void inc(int left, int right) {
    inc_helper(1, 0, n, left, right + 1);
}

int max_helper(int t, int pl, int pr, int l, int r) {
    if (l >= r) {
        return 0;
    } else if ((l == pl) && (r == pr)) {
        return m[t];
    } else {
        push(t);
        int mid = (pl + pr) >> 1;
        return ::max(max_helper(2 * t, pl, mid, l, min(r, mid)),
                    max_helper(2 * t + 1, mid, pr, ::max(l, mid), r));
    }
}

int max(int left, int right) {
    return max_helper(1, 0, n, left, right + 1);
}

};

hinge h[MAX_N];
int sol[MAX_N];
segment_tree st;
int n, k;

void read_data() {
    FILE* f = fopen("balama.in", "r");
    fscanf(f, "%d %d", &n, &k);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        fscanf(f, "%d", &h[i].r);
    }
}

```

```
    h[i].pos = i;
}
fclose(f);
}

void sort_by_r() {
    std::sort(h, h + n, [](hinge a, hinge b) {
        return a.r > b.r;
    });
}

void scan_hinges() {
    int next_to_fill = 0;
    int i = 0;

    st.init(n);

    while (next_to_fill < k) {
        int left = max(h[i].pos - k + 1, 0);
        int right = min(h[i].pos, n - k);
        int m = st.max(left, right);
        st.inc(left, right);
        if (m == next_to_fill) {
            sol[next_to_fill++] = h[i].r;
        }
        i++;
    }
}

void write_answers() {
    FILE* f = fopen("balama.out", "w");
    for (int i = k - 1; i >= 0; i--) {
        fprintf(f, "%d ", sol[i]);
    }
    fprintf(f, "\n");
    fclose(f);
}

int main() {
    read_data();
    sort_by_r();
    scan_hinges();
    write_answers();

    return 0;
}
```

# Anexa C

## Arbori indexați binar

### C.1 Problema The Permutation Game Again (SPOJ)

[◀ înapoi](#)

```
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 200'000;
const int MOD = 1'000'000'007;

struct fenwick_tree {
    int v[MAX_N + 1];
    int n;

    void init(int n) {
        this->n = n;
        for (int i = 1; i <= n; i++) {
            v[i] = 0;
        }
    }

    void check(int pos) {
        do {
            v[pos]++;
            pos += pos & -pos;
        } while (pos <= n);
    }

    int prefix_sum(int pos) {
        int s = 0;
        while (pos) {
            s += v[pos];
            pos &= pos - 1;
        }
        return s;
    }
};
```

```
    }  
};  
  
fenwick_tree fen;  
  
void solve_test() {  
    int n, x;  
    scanf("%d", &n);  
    fen.init(n);  
    long long rank = 0;  
  
    for (int place = n; place; place--) {  
        scanf("%d", &x);  
        int not_seen_before = x - 1 - fen.prefix_sum(x);  
        rank = (rank * place + not_seen_before) % MOD;  
        fen.check(x);  
    }  
  
    rank++; // Noi calculăm rangul începînd cu 0.  
  
    printf("%lld\n", rank);  
}  
  
int main() {  
    int num_tests;  
    scanf("%d", &num_tests);  
    while (num_tests--) {  
        solve_test();  
    }  
  
    return 0;  
}
```

## C.2 Problema Multiset (Codeforces)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

---

```
#include <stdio.h>  
  
const int MAX_N = 1'000'000;  
  
struct fenwick_tree {  
    int v[MAX_N + 1];  
    int n, max_p2;  
  
    void init(int n) {  
        this->n = n;  
        max_p2 = 1 << (31 - __builtin_clz(n));  
    }  
};
```

```

}

void add(int pos, int val) {
    do {
        v[pos] += val;
        pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
}

// Returnează poziția unde suma parțială atinge sau depășește sum.
int bin_search(int sum) {
    int pos = 0;

    for (int interval = max_p2; interval; interval >>= 1) {
        if ((pos + interval <= n) && (v[pos + interval] < sum)) {
            sum -= v[pos + interval];
            pos += interval;
        }
    }

    return pos + 1;
}

void remove_kth_element(int k) {
    int pos = bin_search(k);
    add(pos, -1);
}

int get_smallest() {
    int pos = bin_search(1);
    return (pos <= n) ? pos : 0;
}
};

fenwick_tree fen;
int n, num_ops;

void read_initial_multiset() {
    scanf("%d %d", &n, &num_ops);
    fen.init(n);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int x;
        scanf("%d", &x);
        fen.add(x, 1);
    }
}

void process_queries() {
    while (num_ops--) {
        int x;

```

```
scanf("%d", &x);
if (x > 0) {
    fen.add(x, 1);
} else {
    fen.remove_kth_element(-x);
}
}
}

void write_answer(int answer) {
    printf("%d\n", answer);
}

int main() {
    read_initial_multiset();
    process_queries();
    int answer = fen.get_smallest();
    write_answer(answer);

    return 0;
}
```

## C.3 Problema Hanoi Factory (Codeforces)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 100'000;

struct ring {
    int in, out, h;
};

long long max(long long x, long long y) {
    return (x > y) ? x : y;
}

struct max_fenwick_tree {
    long long* v;
    int n;

    void init(long long* v, int n) {
        this->v = v;
        this->n = n;
        for (int i = 0; i <= n; i++) {
            v[i] = 0;
        }
    }
};
```

```

    }
}

void improve(int pos, long long val) {
    do {
        v[pos] = max(v[pos], val);
        pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
}

long long prefix_max(int pos) {
    long long m = 0;
    while (pos) {
        m = max(m, v[pos]);
        pos &= pos - 1;
    }
    return m;
}
};

ring r[MAX_N];
// folosit si pentru arborele fenwick, si pentru normalizarea marimilor
long long v[2 * MAX_N + 1];
max_fenwick_tree fen;
int n;

void read_rings() {
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        scanf("%d %d %d", &r[i].in, &r[i].out, &r[i].h);
    }
}

void sort_rings() {
    std::sort(r, r + n, [](ring& a, ring& b) {
        return (a.out > b.out) || ((a.out == b.out) && (a.in > b.in));
    });
}

int bin_search(int val) {
    int l = 0, r = 2 * n;
    while (v[l] != val) { // valoarea exista garantat in v
        int m = (l + r) / 2;
        if (v[m] > val) {
            r = m;
        } else {
            l = m;
        }
    }
    return l;
}

```

```
}

void normalize_diameters() {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        v[2 * i] = r[i].in;
        v[2 * i + 1] = r[i].out;
    }
    std::sort(v, v + 2 * n);

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        r[i].in = 1 + bin_search(r[i].in);
        r[i].out = 1 + bin_search(r[i].out);
    }
}

long long solve_recurrence() {
    fen.init(v, 2 * n);

    long long max_height = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        long long best = r[i].h + fen.prefix_max(r[i].out - 1);
        fen.improve(r[i].in, best);
        max_height = max(max_height, best);
    }

    return max_height;
}

void write_answer(long long answer) {
    printf("%lld\n", answer);
}

int main() {
    read_rings();
    sort_rings();
    normalize_diameters();
    long long answer = solve_recurrence();
    write_answer(answer);

    return 0;
}
```

---

## C.4 Problema Subsequences (Codeforces)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

---

```
// Folosim un singur vector pentru cnt, înlocuind câte un element pe rînd.
#include <stdio.h>
```



```

const int MAX_N = 100'000;

struct fenwick_tree {
    long long v[MAX_N + 1];
    int n;

    void init(int n) {
        this->n = n;
        for (int i = 1; i <= n; i++) {
            v[i] = 0;
        }
    }

    void add(int pos, long long val) {
        do {
            v[pos] += val;
            pos += pos & -pos;
        } while (pos <= n);
    }

    long long prefix_sum(int pos) {
        long long s = 0;
        while (pos) {
            s += v[pos];
            pos &= pos - 1;
        }
        return s;
    }
};

fenwick_tree fen;
int a[MAX_N];
long long cnt[MAX_N];
int n, k;

void read_data() {
    scanf("%d %d", &n, &k);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        scanf("%d", &a[i]);
    }
}

void iterate_lengths() {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cnt[i] = 1;
    }

    while (k--) {
        fen.init(n);
    }
}

```

```
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        long long old_cnt = cnt[i];
        cnt[i] = fen.prefix_sum(a[i] - 1);
        fen.add(a[i], old_cnt);
    }
}

long long array_sum(long long* v, int n) {
    long long sum = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        sum += v[i];
    }
    return sum;
}

void write_answer(long long answer) {
    printf("%lld\n", answer);
}

int main() {
    read_data();
    iterate_lengths();
    long long total = array_sum(cnt, n);
    write_answer(total);

    return 0;
}
```

## C.5 Problema D-query (SPOJ)

[◀ înapoi](#)

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 30000;
const int MAX_QUERIES = 200000;
const int MAX_VAL = 1000000;

struct query {
    short l, r;
    int orig_index;
    short answer;
};

struct fenwick_tree {
```

```

short v[MAX_N + 1];
int n;

void init(int n) {
    this->n = n;
}

void add(int pos, int val) {
    do {
        v[pos] += val;
        pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
}

short prefix_sum(int pos) {
    int sum = 0;
    while (pos) {
        sum += v[pos];
        pos &= pos - 1;
    }
    return sum;
}

short range_sum(int l, int r) {
    return prefix_sum(r) - prefix_sum(l - 1);
}
};

int a[MAX_N + 1];
query q[MAX_QUERIES];
short prev_occur[MAX_VAL + 1];
fenwick_tree fen;
int n, num_queries;

void read_data() {
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        scanf("%d", &a[i]);
    }
    scanf("%d", &num_queries);
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        scanf("%hd %hd", &q[i].l, &q[i].r);
        q[i].orig_index = i;
    }
}

void sort_queries_by_right_end() {
    std::sort(q, q + num_queries, [](query& a, query& b) {
        return a.r < b.r;
    });
}

```

```
}

void update_last_occurrence(int pos) {
    if (prev_occur[a[pos]]) {
        fen.add(prev_occur[a[pos]], -1);
    }
    prev_occur[a[pos]] = pos;
    fen.add(pos, +1);
}

int answer_queries_ending_at(int right, int q_index) {
    while ((q_index < num_queries) && (q[q_index].r == right)) {
        q[q_index].answer = fen.range_sum(q[q_index].l, q[q_index].r);
        q_index++;
    }

    return q_index;
}

void scan_array() {
    fen.init(n);
    int q_index = 0;

    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        update_last_occurrence(i);
        q_index = answer_queries_ending_at(i, q_index);
    }
}

void sort_queries_by_orig_index() {
    std::sort(q, q + num_queries, [](query& a, query& b) {
        return a.orig_index < b.orig_index;
    });
}

void write_answers() {
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        printf("%d\n", q[i].answer);
    }
}

int main() {
    read_data();
    sort_queries_by_right_end();
    scan_array();
    sort_queries_by_orig_index();
    write_answers();

    return 0;
}
```

}

## C.6 Problema Magic Board (CodeChef)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```
#include <stdio.h>

const int MAX_SIZE = 500'000;
const int MAX_TIME = 500'000;
const int MAX_WORD_LENGTH = 8;
enum op_type { OP_ROW_SET, OP_COL_SET, OP_ROW_QUERY, OP_COL_QUERY };

struct operation {
    op_type type;
    int index, value;
};

struct fenwick_tree {
    int v[MAX_TIME + 1];
    int n;

    void init(int n) {
        this->n = n;
    }

    void add(int pos, int val) {
        do {
            v[pos] += val;
            pos += pos & -pos;
        } while (pos <= n);
    }

    void set(int pos) {
        add(pos, +1);
    }

    void unset(int pos) {
        add(pos, -1);
    }

    int count(int pos) {
        int s = 0;
        while (pos) {
            s += v[pos];
            pos &= pos - 1;
        }
        return s;
    }
};
```

```
}
};

struct line_info {
    int time[MAX_SIZE + 1];
    bool value[MAX_SIZE + 1];
    fenwick_tree change[2];
    int size, num_ops;

    void init(int size, int num_ops) {
        this->size = size;
        this->num_ops = num_ops;
        change[0].init(num_ops);
        change[1].init(num_ops);
    }

    void update(int index, int now, int new_value) {
        int old_value = value[index];
        int old_time = time[index];

        if (old_time) {
            change[old_value].unset(old_time);
        }

        change[new_value].set(now);
        time[index] = now;
        value[index] = new_value;
    }

    int count_zeroes(int index, int now, line_info& other) {
        int last_reset = time[index];
        if (!last_reset) {
            last_reset = num_ops;
        }
        int last_value = value[index];
        int changes = other.change[1 - last_value].count(last_reset);

        return (last_value == 0)
            ? (size - changes)
            : changes;
    }

    void query(int index, int now, line_info& other) {
        int num_zeroes = count_zeroes(index, now, other);
        printf("%d\n", num_zeroes);
    }
};

line_info rows, cols;
```

```

operation read_op() {
    char word[MAX_WORD_LENGTH + 1];
    operation op;

    scanf("%s", word);
    if (word[3] == 'Q') {
        op.type = (word[0] == 'R') ? OP_ROW_QUERY : OP_COL_QUERY;
        scanf("%d", &op.index);
    } else {
        op.type = (word[0] == 'R') ? OP_ROW_SET : OP_COL_SET;
        scanf("%d %d", &op.index, &op.value);
    }

    return op;
}

void process_op(operation op, int time) {
    if (op.type == OP_ROW_SET) {
        rows.update(op.index, time, op.value);
    } else if (op.type == OP_COL_SET) {
        cols.update(op.index, time, op.value);
    } else if (op.type == OP_ROW_QUERY) {
        rows.query(op.index, time, cols);
    } else { // OP_COL_QUERY
        cols.query(op.index, time, rows);
    }
}

void process_ops() {
    int size, num_ops;
    scanf("%d %d", &size, &num_ops);
    rows.init(size, num_ops);
    cols.init(size, num_ops);

    // Inversăm direcția timpului astfel încît operațiile din AIB-uri să fie pe
    // prefix, nu pe sufix.
    for (int time = num_ops; time; time--) {
        operation op = read_op();
        process_op(op, time);
    }
}

int main() {
    process_ops();

    return 0;
}

```

## C.7 Problema Ball (Codeforces)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_LADIES = 500'000;

struct lady {
    int x, y, z;
};

int max(int x, int y) {
    return (x > y) ? x : y;
}

struct suffix_max_fenwick_tree {
    int v[MAX_LADIES + 1];
    int n;

    void init(int n) {
        this->n = n;
    }

    void update(int pos, int val) {
        pos = n + 1 - pos;
        do {
            v[pos] = max(v[pos], val);
            pos += pos & -pos;
        } while (pos <= n);
    }

    int suffix_max(int pos) {
        pos = n + 1 - pos;
        int result = 0;
        while (pos) {
            result = max(result, v[pos]);
            pos &= pos - 1;
        }
        return result;
    }
};

lady l[MAX_LADIES];
suffix_max_fenwick_tree fen;
int pos[MAX_LADIES]; // folosit pentru normalizare
int n;
```



```

void read_data() {
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        scanf("%d", &l[i].x);
    }
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        scanf("%d", &l[i].y);
    }
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        scanf("%d", &l[i].z);
    }
}

void normalize_x() {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        pos[i] = i;
    }

    std::sort(pos, pos + n, [](int a, int b) {
        return l[a].x < l[b].x;
    });

    int old_x = l[pos[0]].x, new_x = 1;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        if (l[pos[i]].x != old_x) {
            old_x = l[pos[i]].x;
            new_x++;
        }
        l[pos[i]].x = new_x;
    }
}

void sort_ladies_by_z() {
    std::sort(l, l + n, [](lady& a, lady& b) {
        return a.z > b.z;
    });
}

int process_equal_z_batch(int start, int end) {
    int result = 0;

    for (int i = start; i < end; i++) {
        int prev_max_y = fen.suffix_max(l[i].x + 1);
        result += (prev_max_y > l[i].y);
    }
    for (int i = start; i < end; i++) {
        fen.update(l[i].x, l[i].y);
    }

    return result;
}

```

```
}

int count_self_murderers() {
    fen.init(n);

    int result = 0;

    // Procesează calupuri de valori z egale. Aceste doamne nu se domină una pe
    // alta.
    int i = 0;
    while (i < n) {
        int j = i;
        while ((j < n) && (l[j].z == l[i].z)) {
            j++;
        }
        result += process_equal_z_batch(i, j);
        i = j;
    }

    return result;
}

void write_answer(int answer) {
    printf("%d\n", answer);
}

int main() {
    read_data();
    normalize_x();
    sort_ladies_by_z();
    int answer = count_self_murderers();
    write_answer(answer);

    return 0;
}
```

## C.8 Problema Medwalk revizitată (Lot 2025)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>
#include <vector>

const int MAX_N = 100'000;
const int MAX_QUERIES = 100'000;
const int MAX_VALUE = 300'000;
const int MAX_SEGTREE_NODES = 1 << 18;
```

```

const int INF = 1'000'000;
const int OP_UPDATE = 1;

int min(int x, int y) {
    return (x < y) ? x : y;
}

int max(int x, int y) {
    return (x > y) ? x : y;
}

struct matrix {
    int v[2][MAX_N + 1];

    void set(int row, int col, int val) {
        v[row][col] = val;
    }

    int get_min(int col) {
        return min(v[0][col], v[1][col]);
    }

    int get_max(int col) {
        return max(v[0][col], v[1][col]);
    }
};

struct query {
    int type;
    // Syntactic sugar ca să putem folosi <row, col, val> sau <left, right>, nu
    // <x, y, z>.
    union { int row; int left; };
    union { int col; int right; };
    int val;
};

matrix mat;
query q[MAX_QUERIES];
int n, num_queries;

int next_power_of_2(int x) {
    return 1 << (32 - __builtin_clz(x - 1));
}

// Admite actualizări punctuale și interogări de minim pe interval.
struct min_segment_tree {
    int v[MAX_SEGTREE_NODES];
    int n;

    void init(int size) {

```

```

    n = next_power_of_2(size);
}

void update(int pos, int val) {
    pos += n;
    v[pos] = val;
    for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
        v[pos] = min(v[2 * pos], v[2 * pos + 1]);
    }
}

int range_min(int l, int r) {
    l += n;
    r += n;
    int result = INF;

    while (l <= r) {
        if (l & 1) {
            result = min(result, v[l++]);
        }
        l >>= 1;

        if (!(r & 1)) {
            result = min(result, v[r--]);
        }
        r >>= 1;
    }

    return result;
}
};

// Kudos https://usaco.guide/ptat/2DRQ?lang=cpp#offline-2d-bit și
// https://kilonova.ro/submissions/752782
//
// Arbore Fenwick 2D offline.
struct fenwick_2d {
    // Valorile distincte pe fiecare coloană.
    std::vector<int> col_rows[MAX_VALUE + 1];

    // Arborele 1D pe fiecare coloană, peste valorile existente.
    std::vector<int> col_fen[MAX_VALUE + 1];

    int n, max_p2;

    void init(int n) {
        this->n = n;
        max_p2 = 1 << (31 - __builtin_clz(n));
        for (int i = 0; i <= n; i++) {
            col_rows[i].push_back(0);

```

```

    }
}

// Notează faptul că rîndul row va fi folosit cel puțin o dată pe coloana
// col.
void reserve(int row, int col) {
    do {
        col_rows[col].push_back(row);
        col += col & -col;
    } while (col <= n);
}

void build() {
    for (int col = 1; col <= n; col++) {
        std::vector<int>& v = col_rows[col]; // syntactic sugar
        std::sort(v.begin(), v.end());
        v.erase(std::unique(v.begin(), v.end()), v.end());
        col_fen[col].resize(v.size() + 1);
    }
}

int leftmost_gte(int row, int col) {
    std::vector<int>& v = col_rows[col];
    return std::lower_bound(v.begin(), v.end(), row) - v.begin();
}

// Adaugă delta (bifează / debifează) pentru rîndul row și toți succesorii
// săi în fiecare AIB 1D, atît pe coloana col cît și pe toate coloanele
// succesoare în AIB-ul 2D.
void add(int row, int col, int delta) {
    do {
        int pos = leftmost_gte(row, col);
        do {
            col_fen[col][pos] += delta;
            pos += pos & -pos;
        } while (pos <= (int)col_fen[col].size());
        col += col & -col;
    } while (col <= n);
}

int prefix_sum(int pos, int col) {
    int s = 0;
    while (pos) {
        s += col_fen[col][pos];
        pos &= pos - 1;
    }
    return s;
}

int count_less_than(int val, int col) {

```

```

// Reminder: AIB-ul 1D este normalizat. Află pe ce rînd se află val.
int pos = leftmost_gte(val, col);
return prefix_sum(pos - 1, col);
}

int count_in_range(int col, int l, int r) {
    return count_less_than(r + 1, col) - count_less_than(l, col);
}

// Contract: k este 0-based, iar [l, r] este un interval închis de valori
// (rînduri).
int kth_element(int k, int l, int r) {
    int col = 0;

    for (int interval = max_p2; interval; interval >>= 1) {
        if (col + interval <= n) {
            int cnt = count_in_range(col + interval, l, r);
            if (cnt <= k) {
                k -= cnt;
                col += interval;
            }
        }
    }

    return col + 1;
}
};

min_segment_tree maxima;
fenwick_2d minima;

void read_data() {
    scanf("%d %d", &n, &num_queries);
    for (int r = 0; r < 2; r++) {
        for (int c = 1; c <= n; c++) {
            int x;
            scanf("%d", &x);
            mat.set(r, c, x);
        }
    }

    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        query& z = q[i];
        scanf("%d", &z.type);
        if (z.type == OP_UPDATE) {
            scanf("%d %d %d", &z.row, &z.col, &z.val);
            z.row--;
        } else {
            scanf("%d %d", &z.left, &z.right);
        }
    }
}

```

```

    }
}

void build_maxima_segtree() {
    maxima.init(n + 1);
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        maxima.update(i, mat.get_max(i));
    }
}

void simulate() {
    // Rezervă minimele inițiale.
    for (int c = 1; c <= n; c++) {
        minima.reserve(c, mat.get_min(c));
    }

    // Rezervă minimele care iau naștere prin actualizări.
    matrix mat_copy = mat;
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        if (q[i].type == OP_UPDATE) {
            mat_copy.set(q[i].row, q[i].col, q[i].val);
            minima.reserve(q[i].col, mat_copy.get_min(q[i].col));
        }
    }
}

void build_fenwick() {
    minima.init(MAX_VALUE);
    simulate();
    minima.build();

    for (int c = 1; c <= n; c++) {
        minima.add(c, mat.get_min(c), +1);
    }
}

void update(int row, int col, int val) {
    int old_min = mat.get_min(col);
    mat.set(row, col, val);
    int new_min = mat.get_min(col);

    maxima.update(col, mat.get_max(col));

    if (new_min != old_min) {
        minima.add(col, old_min, -1);
        minima.add(col, new_min, +1);
    }
}

int query(int left, int right) {

```

```
int len = right - left + 2;
int median_pos = (len - 1) / 2;
int median = minima.kth_element(median_pos, left, right);
int best_max = maxima.range_min(left, right);

if (best_max >= median) {
    return median;
} else {
    // best_max trebuie inserat înainte de median_pos. Răspunsul poate fi la
    // poziția median_pos - 1 sau poate fi chiar best_max.
    int prev = minima.kth_element(median_pos - 1, left, right);
    return max(prev, best_max);
}
}

void process_queries() {
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        if (q[i].type == OP_UPDATE) {
            update(q[i].row, q[i].col, q[i].val);
        } else {
            printf("%d\n", query(q[i].left, q[i].right));
        }
    }
}

int main() {
    read_data();
    build_maxima_segtree();
    build_fenwick();
    process_queries();

    return 0;
}
```

---



# Anexa D

## Descompunere în radical

### D.1 Problema Mexitate (ONI 2018 clasa a 9-a)

[◀ înapoi](#)

Sursă naivă ([versiune online](#)).

```
#include <stdio.h>

const int MAX_ELEMS = 400'000;
const int MOD = 1'000'000'007;

// Costul calculării funcției mex() este mare. Versiunea 2 va folosi o
// structură mai eficientă pentru frequency_tracker.
struct frequency_tracker {
    int f[MAX_ELEMS + 2]; // rows * cols + 1 în cel mai rău caz

    void add(int x) {
        f[x]++;
    }

    void remove(int x) {
        f[x]--;
    }

    int mex() {
        int x = 1;
        while (f[x]) {
            x++;
        }
        return x;
    }
};

int mat[MAX_ELEMS];
```

```
frequency_tracker ft;
int rows, cols, k, l;

void swap(int& x, int& y) {
    int tmp = x;
    x = y;
    y = tmp;
}

void read_right_matrix(FILE* f) {
    for (int r = 0; r < rows; r++) {
        for (int c = 0; c < cols; c++) {
            fscanf(f, "%d", &mat[r * cols + c]);
        }
    }
}

void read_transposed_matrix(FILE* f) {
    for (int r = 0; r < rows; r++) {
        for (int c = 0; c < cols; c++) {
            fscanf(f, "%d", &mat[c * rows + r]);
        }
    }
}

void read_data() {
    FILE* f = fopen("mexitate.in", "r");
    fscanf(f, "%d %d %d %d", &rows, &cols, &k, &l);
    if (k <= l) {
        read_right_matrix(f);
    } else {
        read_transposed_matrix(f);
        swap(rows, cols);
        swap(k, l);
    }
    fclose(f);
}

int get(int r, int c) {
    return mat[r * cols + c];
}

int north_west_corner() {
    for (int r = 0; r < k; r++) {
        for (int c = 0; c < l; c++) {
            ft.add(get(r, c));
        }
    }
    return ft.mex();
}
```

```

void move_right(int r, int c) {
    for (int i = r; i < r + k; i++) {
        ft.remove(get(i, c));
        ft.add(get(i, c + 1));
    }
}

void move_left(int r, int c) {
    for (int i = r; i < r + k; i++) {
        ft.remove(get(i, c + 1 - 1));
        ft.add(get(i, c - 1));
    }
}

void move_down(int r, int c) {
    for (int j = c; j < c + 1; j++) {
        ft.remove(get(r, j));
        ft.add(get(r + k, j));
    }
}

int left_right_snake() {
    north_west_corner();
    long long result = ft.mex();
    int r = 0, c = 0;
    int final_r = rows - k;
    int final_c = (final_r % 2) ? 0 : (cols - 1);

    while ((r != final_r) || (c != final_c)) {
        if ((r % 2 == 0) && (c < cols - 1)) {
            move_right(r, c++);
        } else if ((r % 2 == 1) && (c > 0)) {
            move_left(r, c--);
        } else {
            move_down(r++, c);
        }
        result = result * ft.mex() % MOD;
    }

    return result;
}

void write_answer(int answer) {
    FILE* f = fopen("mexitate.out", "w");
    fprintf(f, "%d\n", answer);
    fclose(f);
}

```

```
int main() {
    read_data();
    int answer = left_right_snake();
    write_answer(answer);

    return 0;
}
```

---

Sursă eficientă ([versiune online](#)).

---

```
#include <stdio.h>

const int MAX_ELEMS = 400'000;
const int BLOCK_SIZE = 400;
const int MAX_BLOCKS = (MAX_ELEMS - 1) / BLOCK_SIZE + 1;
const int MOD = 1'000'000'007;

struct frequency_tracker {
    int f[MAX_ELEMS + 2]; // rows * cols + 1 în cel mai rău caz
    int block_nonzero[MAX_BLOCKS];

    void init() {
        add(0); // Ca să nu-l returnăm niciodată.
    }

    void add(int x) {
        if (++f[x] == 1) {
            block_nonzero[x / BLOCK_SIZE]++;
        }
    }

    void remove(int x) {
        if (--f[x] == 0) {
            block_nonzero[x / BLOCK_SIZE]--;
        }
    }

    int mex() {
        int b = 0;
        while (block_nonzero[b] == BLOCK_SIZE) {
            b++;
        }
        int x = b * BLOCK_SIZE;
        while (f[x]) {
            x++;
        }
        return x;
    }
};
```

```
int mat[MAX_ELEMS];
frequency_tracker ft;
int rows, cols, k, l;

void swap(int& x, int& y) {
    int tmp = x;
    x = y;
    y = tmp;
}

void read_right_matrix(FILE* f) {
    for (int r = 0; r < rows; r++) {
        for (int c = 0; c < cols; c++) {
            fscanf(f, "%d", &mat[r * cols + c]);
        }
    }
}

void read_transposed_matrix(FILE* f) {
    for (int r = 0; r < rows; r++) {
        for (int c = 0; c < cols; c++) {
            fscanf(f, "%d", &mat[c * rows + r]);
        }
    }
}

void read_data() {
    FILE* f = fopen("mexitate.in", "r");
    fscanf(f, "%d %d %d %d", &rows, &cols, &k, &l);
    if (k <= l) {
        read_right_matrix(f);
    } else {
        read_transposed_matrix(f);
        swap(rows, cols);
        swap(k, l);
    }
    fclose(f);
}

int get(int r, int c) {
    return mat[r * cols + c];
}

int north_west_corner() {
    for (int r = 0; r < k; r++) {
        for (int c = 0; c < l; c++) {
            ft.add(get(r, c));
        }
    }
}
```

```

    return ft.mex();
}

void move_right(int r, int c) {
    for (int i = r; i < r + k; i++) {
        ft.remove(get(i, c));
        ft.add(get(i, c + 1));
    }
}

void move_left(int r, int c) {
    for (int i = r; i < r + k; i++) {
        ft.remove(get(i, c + 1 - 1));
        ft.add(get(i, c - 1));
    }
}

void move_down(int r, int c) {
    for (int j = c; j < c + 1; j++) {
        ft.remove(get(r, j));
        ft.add(get(r + k, j));
    }
}

int left_right_snake() {
    ft.init();
    north_west_corner();
    long long result = ft.mex();
    int r = 0, c = 0;
    int final_r = rows - k;
    int final_c = (final_r % 2) ? 0 : (cols - 1);

    while ((r != final_r) || (c != final_c)) {
        if ((r % 2 == 0) && (c < cols - 1)) {
            move_right(r, c++);
        } else if ((r % 2 == 1) && (c > 0)) {
            move_left(r, c--);
        } else {
            move_down(r++, c);
        }
        result = result * ft.mex() % MOD;
    }

    return result;
}

void write_answer(int answer) {
    FILE* f = fopen("mexitate.out", "w");
    fprintf(f, "%d\n", answer);
}

```

```

fclose(f);
}

int main() {
    read_data();
    int answer = left_right_snake();
    write_answer(answer);

    return 0;
}

```

## D.2 Problema Give Away (SPOJ)

◀ înapoi

Sursă cu multiseturi PBDS.

```

// Complexitate:  $O(Q \sqrt{N} \log N)$ .
//
// Metodă: Descompunere în radical. Pe fiecare bloc reține vectorul naiv și un
// set de valori pentru căutări în timp logaritmice. Avem nevoie de multisets
// pentru că pot exista duplicate și avem nevoie de PBDS pentru funcția
// order_of_key.
#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
#include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 500000;
const int BLOCK_SIZE = 10000;
const int MAX_BLOCKS = (MAX_N - 1) / BLOCK_SIZE + 1;
const int T_QUERY = 0;

// Multiseturile PBDS sînt obscene, dar par să meargă. Ștergerile necesită cod
// extra. Vezi https://stackoverflow.com/q/59731946/6022817
typedef __gnu_pbds::tree<
    int,
    __gnu_pbds::null_type,
    std::less_equal<int>,
    __gnu_pbds::rb_tree_tag,
    __gnu_pbds::tree_order_statistics_node_update
> ordered_set;

// Toate intervalele sînt [îchis, deschis).
struct block {
    int v[BLOCK_SIZE];
    ordered_set s;

    void set(int pos, int val) {

```

```

    if (v[pos]) {
        int rank = s.order_of_key(v[pos]);
        ordered_set::iterator it = s.find_by_order(rank);
        s.erase(it);
    }
    v[pos] = val;
    s.insert(v[pos]);
}

int partial_count(int l, int r, int val) {
    int cnt = 0;
    while (l < r) {
        cnt += (v[l++] >= val);
    }
    return cnt;
}

int prefix_count(int end, int val) {
    return partial_count(0, end, val);
}

int suffix_count(int start, int val) {
    return partial_count(start, BLOCK_SIZE, val);
}

int whole_count(int val) {
    return s.size() - s.order_of_key(val);
}
};

block b[MAX_BLOCKS];
int n;

void read_array() {
    scanf("%d", &n);

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int x;
        scanf("%d", &x);
        b[i / BLOCK_SIZE].set(i % BLOCK_SIZE, x);
    }
}

int process_query(int l, int r, int val) {
    int bl = l / BLOCK_SIZE, offset_l = l % BLOCK_SIZE;
    int br = r / BLOCK_SIZE, offset_r = r % BLOCK_SIZE;
    if (bl == br) {
        return b[bl].partial_count(offset_l, offset_r, val);
    } else {
        int cnt = b[bl].suffix_count(offset_l, val)

```



```

        + b[br].prefix_count(offset_r, val);
    for (int i = bl + 1; i < br; i++) {
        cnt += b[i].whole_count(val);
    }
    return cnt;
}
}

void process_update(int pos, int val) {
    b[pos / BLOCK_SIZE].set(pos % BLOCK_SIZE, val);
}

void process_ops() {
    int num_ops, type, pos1, pos2, val;
    scanf("%d", &num_ops);

    while (num_ops--) {
        scanf("%d", &type);
        if (type == T_QUERY) {
            scanf("%d %d %d", &pos1, &pos2, &val);
            int count = process_query(pos1 - 1, pos2, val);
            printf("%d\n", count);
        } else {
            scanf("%d %d", &pos1, &val);
            process_update(pos1 - 1, val);
        }
    }
}

int main() {
    read_array();
    process_ops();

    return 0;
}

```

Sursă elementară.

```

// Complexitate:  $O(Q \sqrt{N} \log N)$ .
//
// Metodă: Descompunere în radical. Pe fiecare bloc reține vectorul naiv și un
// vector sortat pentru căutări în timp logaritm.
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 500'000;
const int BLOCK_SIZE = 3'000;
const int MAX_BLOCKS = (MAX_N - 1) / BLOCK_SIZE + 1;
const int T_QUERY = 0;

```

```
// Toate intervalele sînt [inchis, deschis).
struct block {
    int v[BLOCK_SIZE];
    int s[BLOCK_SIZE];
    int size;

    void push(int val) {
        v[size] = s[size] = val;
        size++;
    }

    void sort() {
        std::sort(s, s + size);
    }

    // Returnează cea mai din stînga poziție a unui element >= val.
    int bin_search(int val) {
        if (val < s[0]) {
            return 0;
        } else if (val > s[size - 1]) {
            return size;
        }
        int l = -1, r = size - 1; // (l, r]

        while (r - l > 1) {
            int mid = (l + r) >> 1;
            if (s[mid] < val) {
                l = mid;
            } else {
                r = mid;
            }
        }

        return r;
    }

    void migrate_left(int pos) {
        int save = s[pos];
        while (pos && (s[pos - 1] > save)) {
            s[pos] = s[pos - 1];
            pos--;
        }
        s[pos] = save;
    }

    void migrate_right(int pos) {
        int save = s[pos];
        while ((pos < size - 1) && (s[pos + 1] < save)) {
            s[pos] = s[pos + 1];
        }
    }
}
```

```

        pos++;
    }
    s[pos] = save;
}

void set(int pos, int val) {
    int sorted_pos = bin_search(v[pos]);
    s[sorted_pos] = val;
    migrate_left(sorted_pos);
    migrate_right(sorted_pos);
    v[pos] = val;
}

int partial_count(int l, int r, int val) {
    int cnt = 0;
    while (l < r) {
        cnt += (v[l++] >= val);
    }
    return cnt;
}

int prefix_count(int end, int val) {
    return partial_count(0, end, val);
}

int suffix_count(int start, int val) {
    return partial_count(start, BLOCK_SIZE, val);
}

int whole_count(int val) {
    return size - bin_search(val);
}
};

block b[MAX_BLOCKS];
int n;

void read_array() {
    scanf("%d", &n);

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int x;
        scanf("%d", &x);
        b[i / BLOCK_SIZE].push(x);
    }

    int end_block = (n - 1) / BLOCK_SIZE + 1;
    for (int i = 0; i < end_block; i++) {
        b[i].sort();
    }
}

```

```
}

int process_query(int l, int r, int val) {
    int bl = l / BLOCK_SIZE, offset_l = l % BLOCK_SIZE;
    int br = r / BLOCK_SIZE, offset_r = r % BLOCK_SIZE;
    if (bl == br) {
        return b[bl].partial_count(offset_l, offset_r, val);
    } else {
        int cnt = b[bl].suffix_count(offset_l, val)
            + b[br].prefix_count(offset_r, val);
        for (int i = bl + 1; i < br; i++) {
            cnt += b[i].whole_count(val);
        }
        return cnt;
    }
}

void process_update(int pos, int val) {
    b[pos / BLOCK_SIZE].set(pos % BLOCK_SIZE, val);
}

void process_ops() {
    int num_ops, type, pos1, pos2, val;
    scanf("%d", &num_ops);

    while (num_ops--) {
        scanf("%d", &type);
        if (type == T_QUERY) {
            scanf("%d %d %d", &pos1, &pos2, &val);
            int count = process_query(pos1 - 1, pos2, val);
            printf("%d\n", count);
        } else {
            scanf("%d %d", &pos1, &val);
            process_update(pos1 - 1, val);
        }
    }
}

int main() {
    read_array();
    process_ops();

    return 0;
}
```

## D.3 Problema Holes (Codeforces)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```

#include <stdio.h>

const int MAX_N = 100'000;
// Preferăm blocuri puțin mai mari deoarece actualizările au *cache locality*,
// pe cînd interogările sar mai mult.
const int BUCKET_SIZE = 1'000;
const int OP_UPDATE = 0;

struct hole {
    int power;
    int last; // ultima destinație din același bloc
    int jumps; // numărul de salturi pînă la last
};

hole h[MAX_N + 1];
int n, num_queries;

void read_data() {
    scanf("%d %d", &n, &num_queries);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        scanf("%d", &h[i].power);
    }
}

int min(int x, int y) {
    return (x < y) ? x : y;
}

// Actualizează găurile de la începutul blocului pînă la pos inclusiv.
void update_bucket_of(int pos) {
    int start = pos / BUCKET_SIZE * BUCKET_SIZE;
    int end = min(start + BUCKET_SIZE, n);
    for (int i = pos; i >= start; i--) {
        int dest = i + h[i].power;
        if (dest < end) {
            h[i].last = h[dest].last;
            h[i].jumps = h[dest].jumps + 1;
        } else {
            h[i].last = i;
            h[i].jumps = 0;
        }
    }
}

void init_buckets() {
    for (int start = 0; start < n; start += BUCKET_SIZE) {
        int end = min(start + BUCKET_SIZE - 1, n - 1);
        update_bucket_of(end);
    }
}

```

```
}

void query(int pos, int* last, int* count) {
    *count = 0;

    do {
        *count += h[pos].jumps + 1;
        *last = h[pos].last;
        pos = *last + h[*last].power;
    } while (pos < n);
}

void process_queries() {
    while (num_queries--) {
        int type, a;
        scanf("%d %d", &type, &a);
        a--;

        if (type == OP_UPDATE) {
            int power;
            scanf("%d", &power);
            h[a].power = power;
            update_bucket_of(a);
        } else {
            int last, num_jumps;
            query(a, &last, &num_jumps);
            printf("%d %d\n", 1 + last, num_jumps);
        }
    }
}

int main() {
    read_data();
    init_buckets();
    process_queries();

    return 0;
}
```

---

## D.4 Problema Piezișă (Baraj ONI 2022)

[◀ înapoi](#)

Sursă forță brută ([versiune online](#)).

---

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>
```

```

#define MAX_N 500000
#define INFINITY (MAX_N + 1)
#define NONE -1

int v[MAX_N + 1]; // partial xor's
int pos[MAX_N + 1];
int first[MAX_N + 2];
int n, distinct;

int max(int x, int y) {
    return (x > y) ? x : y;
}

// Returnează cea mai din dreapta apariție a lui val pe poziția p sau înainte,
// sau NONE dacă val nu apare pe poziția p sau înainte.
int rightmost(int val, int p) {
    int l = first[val], r = first[val + 1]; // [l, r)
    while (r - l > 1) {
        int m = (l + r) >> 1;
        if (pos[m] > p) {
            r = m;
        } else {
            l = m;
        }
    }
}

// Caz special: p < orice poziție unde apare val. Căutarea binară normală ar
// returna pos[l].
return (pos[l] <= p) ? pos[l] : NONE;
}

int main() {
    FILE* fin = fopen("piezisa.in", "r");
    FILE* fout = fopen("piezisa.out", "w");
    fscanf(fin, "%d", &n);

    // Citește datele și calculează xor-uri parțiale.
    v[0] = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        int x;
        fscanf(fin, "%d", &x);
        v[i] = v[i - 1] ^ x;
    }

    // Sortează pozițiile după valoarea xor parțială, apoi după poziție.
    for (int i = 0; i <= n; i++) {
        pos[i] = i;
    }
    std::sort(pos, pos + n + 1, [](int a, int b) {
        return (v[a] < v[b]) || ((v[a] == v[b]) && (a < b));
    });
}

```

```
});

// Renumerotează valorile începînd cu n; colectează pozițiile.
int from = -1;
distinct = 0;
for (int i = 0; i <= n; i++) {
    if (v[pos[i]] != from) {
        from = v[pos[i]];
        first[distinct++] = i;
    }
    v[pos[i]] = distinct - 1;
}
first[distinct] = n + 1;
// Acum pos[first[i]...first[i+1]] conține o listă ordonată cu pozițiile
// aparițiilor valorii i.

int num_queries;
fscanf(fin, "%d", &num_queries);
while (num_queries--) {
    int l, r;
    fscanf(fin, "%d %d", &l, &r);
    r++;

    int end = r, best = INFINITY;
    // cit timp avem loc să avansăm și sperăm să îmbunătățim soluția existentă
    while ((end <= n) && (end - l < best)) {
        int start = rightmost(v[end], l);
        if ((start != NONE) && (end - start < best)) {
            best = end - start;
        }
        end++;
    }

    fprintf(fout, "%d\n", (best == INFINITY) ? NONE : best);
}

fclose(fin);
fclose(fout);

return 0;
}
```

Sursă cu metoda 1 ([versiune online](#)).

```
#include <algorithm>
#include <math.h>
#include <stdio.h>

const int MAX_BUCKETS = 354;
```



```

const int MAX_BUCKET_SIZE = 1416;
const int MAX_N = MAX_BUCKETS * MAX_BUCKET_SIZE;
const int MAX_Q = 500000;
const int INF = MAX_N + 1;
const int NONE = -1;

struct query {
    int l, r, orig_index;
};

int v[MAX_N + 1]; // xor-uri parțiale
int pos[MAX_N + 1];
int ptr[MAX_N + 1];
int last[MAX_N + 1];
int best[MAX_BUCKETS];

query q[MAX_Q];
// Logic ar trebui stocat în query.answer, dar astfel evităm o sortare.
int answer[MAX_Q];

int n, num_queries;
int bs, nb;

void read_array() {
    scanf("%d", &n);

    v[0] = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        scanf("%d", &v[i]);
        v[i] ^= v[i - 1];
    }
}

void read_queries() {
    scanf("%d", &num_queries);
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        scanf("%d %d", &q[i].l, &q[i].r);
        q[i].r++;
        q[i].orig_index = i;
    }
}

void sort_queries() {
    std::sort(q, q + num_queries, [](query a, query b) {
        return (a.l < b.l);
    });
}

void sort_positions() {
    for (int i = 0; i <= n; i++) {

```

```

    pos[i] = i;
}
std::sort(pos, pos + n + 1, [](int a, int b) {
    return (v[a] < v[b]) || ((v[a] == v[b]) && (a > b));
});
}

void preprocess_values() {
    nb = 0.5 * sqrt(n + 1); // determinat experimental
    bs = n / nb + 1;

    sort_positions();

    // renumerează valorile de la 0; creează pointeri
    int prev = -1, distinct = 0;
    for (int i = 0; i <= n; i++) {
        if (v[pos[i]] == prev) {
            v[pos[i]] = distinct - 1;
            bool same_bucket = (pos[i] / bs == pos[i - 1] / bs);
            ptr[pos[i]] = same_bucket
                ? ptr[pos[i - 1]]
                : pos[i - 1];
        } else {
            // începi o serie nouă de la sfîrșitul vectorului
            prev = v[pos[i]];
            v[pos[i]] = distinct++;
            ptr[pos[i]] = NONE;
        }
    }
}

inline int min(int x, int y) {
    return (x < y) ? x : y;
}

int answer_query(int l, int r) {
    int result = INF;

    // procedează incremental pînă la blocul următor
    int b = r / bs + 1, boundary = min(b * bs, n + 1);
    while (r < boundary) {
        result = min(result, r - last[v[r]]);
        r++;
    }

    // procedează bloc cu bloc restul vectorului
    while (b < nb) {
        result = min(result, best[b++]);
    }
}

```

```

    return (result == INF) ? NONE : result;
}

void scan() {
    for (int i = 0; i <= n; i++) {
        last[i] = -INF;
    }
    for (int i = 0; i < nb; i++) {
        best[i] = INF;
    }

    int qi = 0;
    for (int l = 0; l <= n; l++) {
        // actualizează-l pe last
        last[v[l]] = l;

        // actualizează-l pe best
        for (int i = ptr[l]; i != NONE; i = ptr[i]) {
            int b = i / bs;
            best[b] = min(best[b], i - l);
        }

        // răspunde la interogările care încep la l
        while (qi < num_queries && q[qi].l == l) {
            answer[q[qi].orig_index] = answer_query(q[qi].l, q[qi].r);
            qi++;
        }
    }
}

void write_answers() {
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        printf("%d\n", answer[i]);
    }
}

int main() {
    read_array();
    read_queries();
    sort_queries();
    preprocess_values();
    scan();
    write_answers();

    return 0;
}

```

Sursă cu metoda 2 ([versiune online](#)).

```

// Rescrisă după https://infoarena.ro/job_detail/3032904
//
// Complexitate:  $O((N + Q) \sqrt{N})$ .
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 500'000;
const int BLOCK_SIZE = 700;
const int NUM_BLOCKS = MAX_N / BLOCK_SIZE + 1;
const int MAX_Q = 500'000;
const int INFINITY = 1'000'000;
const int NONE = -1;

struct query {
    int l, r;
    int orig_index;
    int block;
};

int v[MAX_N + 1];
query q[MAX_Q];
int left[MAX_N + 1], right[MAX_N + 1];
int* pos = left; // folosit inițial pentru normalizare;

// Logic ar trebui stocat în query.answer, dar astfel evităm o sortare.
int answer[MAX_Q];

int n, num_queries, max_value;

void read_array() {
    scanf("%d", &n);

    v[0] = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        scanf("%d", &v[i]);
        v[i] ^= v[i - 1];
    }
}

void read_queries() {
    scanf("%d", &num_queries);
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        scanf("%d %d", &q[i].l, &q[i].r);
        q[i].l++;
        q[i].r++; // interval închis, indexat de la 1
        q[i].orig_index = i;
        q[i].block = q[i].l / BLOCK_SIZE;
    }
}

```

```

void normalize_array() {
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        pos[i] = i;
    }
    std::sort(pos + 1, pos + n + 1, [](int a, int b) {
        return v[a] < v[b];
    });

    int prev = NONE;
    max_value = NONE;
    for (int i = 0; i <= n; i++) {
        if (v[pos[i]] != prev) {
            max_value++;
        }
        prev = v[pos[i]];
        v[pos[i]] = max_value;
    }
}

void sort_queries_by_left_block() {
    std::sort(q, q + num_queries, [](query a, query b) {
        return (a.block < b.block) ||
            ((a.block == b.block) && (a.r > b.r));
    });
}

void init_left() {
    for (int i = 0; i <= max_value; i++) {
        left[i] = -INFINITY;
    }
}

void init_right() {
    for (int i = 0; i <= max_value; i++) {
        right[i] = +INFINITY;
    }
}

int min(int x, int y) {
    return (x < y) ? x : y;
}

void answer_query(query q, int closest_left_right) {
    int best = closest_left_right;
    for (int i = q.block * BLOCK_SIZE; i < q.l; i++) {
        best = min(best, right[v[i]] - i);
    }

    answer[q.orig_index] = (best > n) ? NONE : best;
}

```

```

}

int answer_queries_in_block(int block, int q_index) {
    init_right();
    int ptr = n + 1;
    int closest_left_right = INFINITY;
    while ((q_index < num_queries) && (q[q_index].block == block)) {
        while (ptr > q[q_index].r) {
            --ptr;
            right[v[ptr]] = ptr;
            int dist = ptr - left[v[ptr]];
            closest_left_right = min(closest_left_right, dist);
        }
        answer_query(q[q_index], closest_left_right);
        q_index++;
    }

    return q_index;
}

void update_left(int block) {
    int start = block * BLOCK_SIZE;
    int end = min(start + BLOCK_SIZE - 1, n);
    for (int i = start; i <= end; i++) {
        left[v[i]] = i;
    }
}

void scan_blocks() {
    init_left();
    int q_index = 0;

    int last_block = n / BLOCK_SIZE;
    for (int b = 0; b <= last_block; b++) {
        q_index = answer_queries_in_block(b, q_index);
        update_left(b);
    }
}

void write_answers() {
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        printf("%d\n", answer[i]);
    }
}

int main() {
    read_array();
    read_queries();
    normalize_array();
    sort_queries_by_left_block();
}

```

```

scan_blocks();

write_answers();

return 0;
}

```

## D.5 Problema Serega and Fun (Codeforces)

◀ înapoi

Sursă cu deque ([versiune online](#)).

```

#include <deque>
#include <stdio.h>
#include <unordered_map>

const int MAX_N = 100'000;
const int BUCKET_SIZE = 2'000;
const int MAX_BUCKETS = (MAX_N - 1) / BUCKET_SIZE + 1;
const int TYPE_ROTATE = 1;
const int TYPE_COUNT = 2;

struct freq {
    std::unordered_map<int, short> map;

    void add(int val) {
        map[val]++;
    }

    void remove(int val) {
        auto it = map.find(val);
        if (it->second == 1) {
            map.erase(it);
        } else {
            it->second--;
        }
    }

    int count(int val) {
        auto it = map.find(val);
        return (it == map.end()) ? 0 : it->second;
    }
};

struct bucket {
    freq f;

```

```
std::deque<int> deq;

void push(int val) {
    deq.push_back(val);
    f.add(val);
}

void set(int pos, int val) {
    f.remove(deq[pos]);
    deq[pos] = val;
    f.add(val);
}

int shift(int val) {
    deq.push_front(val);
    f.add(val);
    int last = deq.back();
    deq.pop_back();
    f.remove(last);
    return last;
}

void rotate(int l, int r) {
    int val = deq[r];
    deq.erase(deq.begin() + r);
    deq.insert(deq.begin() + l, val);
}

int remove(int pos) {
    int val = deq[pos];
    f.remove(val);
    deq.erase(deq.begin() + pos);
    return val;
}

int remove_last() {
    return remove(BUCKET_SIZE - 1);
}

void insert(int pos, int val) {
    deq.insert(deq.begin() + pos, val);
    f.add(val);
}

void insert_first(int val) {
    insert(0, val);
}

int partial_count(int l, int r, int k) {
    int result = 0;
```



```

    while (l <= r) {
        result += (deq[l++] == k);
    }
    return result;
}

int prefix_count(int pos, int k) {
    return partial_count(0, pos, k);
}

int suffix_count(int pos, int k) {
    return partial_count(pos, BUCKET_SIZE - 1, k);
}

};

bucket buck[MAX_BUCKETS];
int n, num_ops;
int last_answer;

void read_data() {
    scanf("%d", &n);

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int x;
        scanf("%d", &x);
        buck[i / BUCKET_SIZE].push(x);
    }

    scanf("%d", &num_ops);
}

int bucket_count(int l, int r, int k) {
    int result = 0;
    while (l < r) {
        result += buck[l++].f.count(k);
    }
    return result;
}

void process_count_op(int l, int r, int k) {
    int bl = l / BUCKET_SIZE, offset_l = l % BUCKET_SIZE;
    int br = r / BUCKET_SIZE, offset_r = r % BUCKET_SIZE;
    if (bl == br) {
        last_answer = buck[bl].partial_count(offset_l, offset_r, k);
    } else {
        last_answer =
            buck[bl].suffix_count(offset_l, k) +
            bucket_count(bl + 1, br, k) +
            buck[br].prefix_count(offset_r, k);
    }
}

```

```

}

printf("%d\n", last_answer);
}

void process_rotate_op(int l, int r) {
    int bl = l / BUCKET_SIZE, offset_l = l % BUCKET_SIZE;
    int br = r / BUCKET_SIZE, offset_r = r % BUCKET_SIZE;
    if (bl == br) {
        buck[bl].rotate(offset_l, offset_r);
    } else {
        int from_left = buck[bl].remove_last();
        for (int b = bl + 1; b < br; b++) {
            from_left = buck[b].shift(from_left);
        }
        int to_right = buck[br].remove(offset_r);
        buck[br].insert_first(from_left);
        buck[bl].insert(offset_l, to_right);
    }
}

int transform(int x) {
    return last_answer
        ? (x + last_answer - 1) % n + 1
        : x;
}

void process_ops() {
    while (num_ops--) {
        int type, l, r, k;
        scanf("%d %d %d", &type, &l, &r);
        l = transform(l) - 1;
        r = transform(r) - 1;
        if (l > r) {
            int tmp = l; l = r; r = tmp;
        }

        if (type == TYPE_COUNT) {
            scanf("%d", &k);
            k = transform(k);
            process_count_op(l, r, k);
        } else {
            process_rotate_op(l, r);
        }
    }
}

int main() {
    read_data();
    process_ops();
}

```

```

    return 0;
}

```

Sursă cu descompunere după poziții ([versiune online](#)).

```

#include <math.h>
#include <stdio.h>

const int MAX_BUCKETS = 160;
const int MAX_BUCKET_SIZE = 634;
const int MAX_N = MAX_BUCKETS * MAX_BUCKET_SIZE;
const int TYPE_ROTATE = 1;
const int TYPE_COUNT = 2;

typedef struct {
    short freq[MAX_N];
    int circ[MAX_BUCKET_SIZE];
    int start;
} bucket;

bucket buck[MAX_BUCKETS];
int modulo[2 * MAX_BUCKET_SIZE];
int bs; // bucket size
int n, numOps;
int lastAnswer;

void initBuckets() {
    bs = 2 * sqrt(n);

    for (int i = 0; i < 2 * bs; i++) {
        modulo[i] = i % bs;
    }
}

void bucketSetInitial(int pos, int val) {
    buck[pos / bs].circ[pos % bs] = val;
    buck[pos / bs].freq[val]++;
}

void readInputData() {
    scanf("%d", &n);
    initBuckets();

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int x;
        scanf("%d", &x);
        bucketSetInitial(i, x);
    }
}

```

```

    scanf("%d", &numOps);
}

int realPos(int b, int pos) {
    return modulo[pos + buck[b].start];
}

int next(int pos) {
    return modulo[pos + 1];
}

int prev(int pos) {
    return modulo[pos + bs - 1];
}

void bucketSet(int b, int pos, int val) {
    bucket& g = buck[b];
    int realP = realPos(b, pos);
    int oldVal = g.circ[realP];
    g.circ[realP] = val;
    g.freq[oldVal]--;
    g.freq[val]++;
}

int partialCount(int b, int l, int r, int k) {
    int realL = realPos(b, l);
    int realR = realPos(b, r);

    // Numără-l separat pe realR ca să îl putem folosi ca terminator de buclă.
    int result = (buck[b].circ[realR] == k);

    while (realL != realR) {
        result += (buck[b].circ[realL] == k);
        realL = next(realL);
    }
    return result;
}

int bucketCount(int l, int r, int k) {
    int result = 0;
    while (l < r) {
        result += buck[l++].freq[k];
    }
    return result;
}

void processCountOp(int l, int r, int k) {
    int bl = l / bs, br = r / bs;
    int lpos = l - bl * bs, rpos = r - br * bs;

```

```

if (bl == br) {
    lastAnswer = partialCount(bl, lpos, rpos, k);
} else {
    lastAnswer =
        partialCount(bl, lpos, bs - 1, k) +
        partialCount(br, 0, rpos, k) +
        bucketCount(bl + 1, br, k);
}

printf("%d\n", lastAnswer);
}

int partialRotate(int b, int l, int r) {
    int *v = buck[b].circ;
    int realL = realPos(b, l);
    int realR = realPos(b, r);
    int prevR = prev(realR);
    int save = v[realR];

    while (realR != realL) {
        v[realR] = v[prevR];
        realR = prevR;
        prevR = prev(realR);
    }

    v[realL] = save;
    return save;
}

int bucketRotate(int b) {
    bucket& g = buck[b];
    g.start = prev(g.start);
    return g.circ[g.start];
}

void processRotateOp(int l, int r) {
    int bl = l / bs, br = r / bs;
    int lpos = l - bl * bs, rpos = r - br * bs;
    if (bl == br) {
        partialRotate(bl, lpos, rpos);
    } else {
        int fromLeft = partialRotate(bl, lpos, bs - 1);
        for (int b = bl + 1; b < br; b++) {
            int toRight = bucketRotate(b);
            bucketSet(b, 0, fromLeft);
            fromLeft = toRight;
        }
        int toRight = partialRotate(br, 0, rpos);
        bucketSet(br, 0, fromLeft);
        bucketSet(bl, lpos, toRight);
    }
}

```

```
    }  
}  
  
int transform(int x) {  
    return lastAnswer  
        ? (x + lastAnswer - 1) % n + 1  
        : x;  
}  
  
void processOps() {  
    while (numOps--) {  
        int type, l, r, k;  
        scanf("%d %d %d", &type, &l, &r);  
        l = transform(l) - 1;  
        r = transform(r) - 1;  
        if (l > r) {  
            int tmp = l; l = r; r = tmp;  
        }  
  
        if (type == TYPE_COUNT) {  
            scanf("%d", &k);  
            k = transform(k);  
            processCountOp(l, r, k);  
        } else {  
            processRotateOp(l, r);  
        }  
    }  
}  
  
int main() {  
    readInputData();  
    processOps();  
  
    return 0;  
}
```

Sursă cu descompunere după operații ([versiune online](#)).

```
#include <math.h>  
#include <stdio.h>  
  
const int MAX_BUCKETS = 160;  
const int MAX_BUCKET_SIZE = 634;  
const int OVERFLOW_FACTOR = 2;  
const int MAX_N = MAX_BUCKETS * MAX_BUCKET_SIZE;  
const int TYPE_ROTATE = 1;  
const int TYPE_COUNT = 2;  
  
struct bucket {
```

```

short freq[MAX_N];
int data[OVERFLOW_FACTOR * MAX_BUCKET_SIZE];
int size;

void append(int x) {
    data[size++] = x;
    freq[x]++;
}

// Returnează numărul de elemente vărsate. Golește data, size și freq.
int empty(int* dest) {
    for (int i = 0; i < size; i++) {
        dest[i] = data[i];
        freq[data[i]]--;
    }
    int old_size = size;
    size = 0;

    return old_size;
}

int partial_count(int l, int r, int val) {
    int cnt = 0;
    while (l <= r) {
        cnt += (data[l++] == val);
    }

    return cnt;
}

int prefix_count(int pos, int val) {
    return partial_count(0, pos, val);
}

int suffix_count(int pos, int val) {
    return partial_count(pos, size - 1, val);
}

void insert(int pos, int val) {
    freq[val]++;
    size++;
    for (int i = size - 1; i > pos; i--) {
        data[i] = data[i - 1];
    }
    data[pos] = val;
}

int remove(int pos) {
    int result = data[pos];
    freq[result]--;

```

```

    for (int i = pos; i < size - 1; i++) {
        data[i] = data[i + 1];
    }
    size--;

    return result;
}
};

bucket buck[MAX_BUCKETS];
int naive[MAX_N];
int bs, nb; // mărimea blocului, numărul de blocuri
int n;
int last_answer;

// Stochează informații despre blocul în care se află un indice real.
struct bucket_info {
    int b; // numărul blocului
    int start; // indicele primului element din bloc
    int offset; // offset-ul indicelui dat față de start

    void find_next_bucket(int index) {
        while (start + buck[b].size <= index) {
            start += buck[b++].size;
        }
        offset = index - start;
    }
};

int min(int x, int y) {
    return (x < y) ? x : y;
}

void distribute_buckets() {
    // Evită O(n) împărțiri deoarece vom rula acest cod de O(sqrt(n)) ori.
    for (int b = 0; b < nb; b++) {
        int start = b * bs;
        int end = min(start + bs, n);
        for (int i = start; i < end; i++) {
            buck[b].append(naive[i]);
        }
    }
}

void collect_buckets() {
    int ptr = 0;
    for (int i = 0; i < nb; i++) {
        ptr += buck[i].empty(&naive[ptr]);
    }
}

```



```

void read_data() {
    scanf("%d", &n);

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        scanf("%d", &naive[i]);
    }
}

void init_buckets() {
    bs = 2 * sqrt(n);
    nb = (n - 1) / bs + 1;
    distribute_buckets();
}

int cross_bucket_count(int l, int r, int k) {
    int result = 0;
    while (l < r) {
        result += buck[l++].freq[k];
    }
    return result;
}

// [l, r] inclusiv
void process_count_op(int l, int r, int k) {
    bucket_info bl = { 0, 0, 0 };
    bl.find_next_bucket(l);
    bucket_info br = bl;
    br.find_next_bucket(r);

    if (bl.b == br.b) {
        last_answer = buck[bl.b].partial_count(bl.offset, br.offset, k);
    } else {
        last_answer =
            buck[bl.b].suffix_count(bl.offset, k) +
            buck[br.b].prefix_count(br.offset, k) +
            cross_bucket_count(bl.b + 1, br.b, k);
    }

    printf("%d\n", last_answer);
}

void process_rotate_op(int l, int r) {
    bucket_info bl = { 0, 0, 0 };
    bl.find_next_bucket(l);
    bucket_info br = bl;
    br.find_next_bucket(r);

    int x = buck[br.b].remove(br.offset);
    buck[bl.b].insert(bl.offset, x);
}

```

```
if (buck[b1.b].size == OVERFLOW_FACTOR * bs) {
    collect_buckets();
    distribute_buckets();
}
}

int transform(int x) {
    return last_answer
        ? (x + last_answer - 1) % n + 1
        : x;
}

void process_ops() {
    int num_ops;
    scanf("%d", &num_ops);

    while (num_ops--) {
        int type, l, r, k;
        scanf("%d %d %d", &type, &l, &r);
        l = transform(l) - 1;
        r = transform(r) - 1;
        if (l > r) {
            int tmp = l; l = r; r = tmp;
        }

        if (type == TYPE_COUNT) {
            scanf("%d", &k);
            k = transform(k);
            process_count_op(l, r, k);
        } else {
            process_rotate_op(l, r);
        }
    }
}

int main() {
    read_data();
    init_buckets();
    process_ops();

    return 0;
}
```

## D.6 Problema Time to Raid Cowavans (Codeforces)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```

// Complexitate:  $O((q + n) \sqrt{n})$ .
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 300'000;
const int MAX_Q = 300'000;
const int PREPROCESS_LIMIT = 547;

struct query {
    int id, first, step;
};

int w[MAX_N + 1];
long long prep[MAX_N + 1];
query q[MAX_Q];
long long answer[MAX_Q];
int n, num_queries;

void read_data() {
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        scanf("%d", &w[i]);
    }
    scanf("%d", &num_queries);
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        scanf("%d %d", &q[i].first, &q[i].step);
        q[i].id = i;
    }
}

void sort_queries() {
    std::sort(q, q + num_queries, [](query a, query b) {
        return a.step < b.step;
    });
}

long long naive_prog_sum(int first, int step) {
    long long sum = 0;
    for (int i = first; i <= n; i += step) {
        sum += w[i];
    }
    return sum;
}

void preprocess(int step) {
    for (int i = n; (i > n - step) && (i >= 1); i--) {
        prep[i] = w[i];
    }
    for (int i = n - step; i >= 1; i--) {

```

```
    prep[i] = w[i] + prep[i + step];
}
}

void process_queries() {
    sort_queries();
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        if (q[i].step > PREPROCESS_LIMIT) {
            answer[q[i].id] = naive_prog_sum(q[i].first, q[i].step);
        } else {
            if (!i || (q[i].step != q[i - 1].step)) {
                preprocess(q[i].step);
            }
            answer[q[i].id] = prep[q[i].first];
        }
    }
}

void write_answers() {
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        printf("%lld\n", answer[i]);
    }
}

int main() {
    read_data();
    process_queries();
    write_answers();

    return 0;
}
```

## D.7 Problema Sandor (Baraj ONI 2025)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

---

```
// Complexitate  $O(N \sqrt{N})$ , provenită din 3 for-uri imbricate a câte
//  $O(\sqrt{N})$  iterații.
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 400'000;
const int MAX_WEIGHT = 800'000;

struct run {
    int val, cnt;
};

run r[MAX_N];
```

```

// jump[w] este obiectul maxim care nu depășește greutatea w. Mai exact,
// jump[w] este cel mai mic i a.î  $r[i].val \leq w$ 
int jump[MAX_WEIGHT + 1];
long long sol[MAX_WEIGHT + 1];
int task, n, num_runs, capacity;

int min(int x, int y) {
    return (x < y) ? x : y;
}

void read_data() {
    FILE* f = fopen("sandor.in", "r");
    int x;

    fscanf(f, "%d %d %d", &task, &n, &capacity);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        fscanf(f, "%d", &x);
        if (num_runs && (x == r[num_runs - 1].val)) {
            r[num_runs - 1].cnt++;
        } else {
            r[num_runs++] = { x, 1 };
        }
    }

    fclose(f);
}

void compute_jumps() {
    int i = 0;
    for (int w = MAX_WEIGHT; w >= 0; w--) {
        while ((i < num_runs) && (r[i].val > w)) {
            i++;
        }
        jump[w] = i;
    }
}

// Rulează algoritmul lui Sandor pentru capacitatea dată. Returnează greutatea
// acumulată.
int do_the_sandor(int start, int capacity) {
    int c = capacity;
    int i = start;

    while (i < num_runs) {
        int taken = min(c / r[i].val, r[i].cnt);
        c -= taken * r[i].val;
        // Dacă din c = 100 am luat 2 * r[i].val = 20, fiindcă atitea erau, nu are
        // sens să continui de la 80. Următorul număr poate fi doar 9 sau mai mic.
        i = jump[min(c, r[i].val - 1)];
    }
}

```

```

    return capacity - c;
}

// Presupunînd că am tăiat deja două obiecte înainte de start și am obținut
// greutatea weight_so_far, rulează Sandor simplu pe restul vectorului și
// adaugă rezultatul la soluție.
void cut_0(int start, int weight_so_far, long long multiplier) {
    int s = do_the_sandor(start, capacity - weight_so_far);
    sol[weight_so_far + s] += multiplier;
}

// Presupunînd că am tăiat deja un obiect înainte de start și am obținut
// greutatea weight_so_far, și că de la poziția start începînd mai am num_num
// obiecte, încearcă să elimini cîte un obiect în toate modurile posibile.
//
// Observăm că, dacă tăiem alt obiect decît cele pe care le-ar pune Sandor în
// rucsac, vom obține aceeași sumă ca și pe vectorul nemodificat.
void cut_1(int start, int weight_so_far, int num_num, long long multiplier) {
    int c = capacity - weight_so_far;
    int i = start;

    while (i < num_runs) {
        int taken = min(c / r[i].val, r[i].cnt);
        if (taken == r[i].cnt) {
            num_num -= taken;
            int all_but_one = (taken - 1) * r[i].val;
            cut_0(i + 1, weight_so_far + all_but_one, multiplier * taken);
        }
        weight_so_far += taken * r[i].val;
        c -= taken * r[i].val;
        i = jump[min(c, r[i].val - 1)];
    }

    // Toate numerele pe care nu le-am tăiat explicit merg pe soluția originală,
    // care duce la sumă weight_so_far.
    sol[weight_so_far] += multiplier * num_num;
}

// Pentru bucla exterioară este important să obținem tot complexitate
// O(sqrt N). De aceea, considerăm simultan fiecare grupă de obiecte
// consecutive NEincluse în rucsac.
void cut_2() {
    long long multiplier = 0;
    int weight_so_far = 0;
    int c = capacity;
    int num_right = n;

    for (int i = 0; i < num_runs; i++) {
        if (r[i].val > c) {

```

```

    multiplier += r[i].cnt;
} else {
    int cnt = r[i].cnt;
    // Taie două obiecte dinainte de i. Rămân 0 de tăiat.
    cut_0(i, weight_so_far, multiplier * (multiplier - 1) / 2);

    // Taie un obiect dinainte de i. Rămîne unul de tăiat.
    cut_1(i, weight_so_far, num_right, multiplier);

    // Taie două obiecte din grupa i. În rest, pune în rucsac ce se poate.
    if (r[i].cnt >= 2) {
        int taken = min(c / r[i].val, r[i].cnt - 2);
        cut_0(i + 1, weight_so_far + taken * r[i].val, cnt * (cnt - 1) / 2);
    }

    // Taie un obiect din grupa i. În rest, pune în rucsac ce se poate.
    int taken = min(c / r[i].val, r[i].cnt - 1);
    cut_1(i + 1, weight_so_far + taken * r[i].val, num_right - r[i].cnt, cnt);

    // Nu tăia nimic, bagă în rucsac.
    taken = min(c / r[i].val, r[i].cnt);
    c -= taken * r[i].val;
    weight_so_far += taken * r[i].val;

    multiplier = 0;
}

num_right -= r[i].cnt;
}

// Nu mai putem băga nimic în rucsac, dar din ultimele @multiplier obiecte
// trebuie să tăiem două.
sol[weight_so_far] += multiplier * (multiplier - 1) / 2;
}

void write_solution() {
    FILE* f = fopen("sandor.out", "w");
    for (int i = 0; i <= capacity; i++) {
        fprintf(f, "%lld ", sol[i]);
    }
    fprintf(f, "\n");
    fclose(f);
}

int main() {
    read_data();
    compute_jumps();

    if (task == 1) {
        cut_1(0, 0, n, 1);
    }
}

```

```
} else {  
    cut_2();  
}  
  
write_solution();  
  
return 0;  
}
```

---

## D.8 Problema Puzzle-bila (Lot 2025)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```
// Complexitate:  $O(n \cdot m \cdot \sqrt{m} + n \cdot m \cdot \log(m))$ .  
#include <stdio.h>  
  
const int MAX_COLS = 50'000;  
const int MAX_LOG = 16;  
const int MAX_DISTINCT_LENGTHS = 320;  
const int INFTY = 2'000'000;  
const int NONE = -1;  
  
int min(int x, int y) {  
    return (x < y) ? x : y;  
}  
  
int log2(int x) {  
    return 31 - __builtin_clz(x);  
}  
  
struct sparse_table {  
    int v[MAX_LOG][MAX_COLS];  
    int n;  
  
    void build(int* src, int n, bool with_shifts) {  
        for (int i = 0; i < n; i++) {  
            v[0][i] = with_shifts ? (src[i] - i) : src[i];  
        }  
        for (int p = 1; (1 << p) <= n; p++) {  
            for (int i = 0; i <= n - (1 << p); i++) {  
                v[p][i] = min(v[p - 1][i], v[p - 1][i + (1 << (p - 1))]);  
            }  
        }  
    }  
  
    int range_min(int l, int r) {  
        l = (l < 0) ? 0 : l;  
        if (l > r) {
```



```

        return INFTY;
    }
    int row = log2(r - 1 + 1);
    return min(v[row][1], v[row][r - (1 << row) + 1]);
}
};

sparse_table st, st_shift;
bool row[MAX_COLS];
int prev1[MAX_COLS];
int distinct_len[MAX_DISTINCT_LENGTHS], num_lengths;
int dp[MAX_COLS];
int end[MAX_COLS + 1]; // coloana pe care se termină ultima fereastră de lăţime l
int num_rows, num_cols;

void read_size() {
    scanf("%d %d ", &num_rows, &num_cols);
}

void read_row() {
    for (int c = 0; c < num_cols; c++) {
        row[c] = getchar() - '0';
    }
    getchar();
}

void init_all() {
    dp[0] = 0;
    for (int c = 1; c < num_cols; c++) {
        dp[c] = INFTY;
    }

    for (int l = 0; l <= num_cols; l++) {
        end[l] = NONE;
    }
}

void compute_prev1() {
    prev1[0] = row[0] ? 0 : -1;
    for (int c = 1; c < num_cols; c++) {
        prev1[c] = row[c] ? c : prev1[c - 1];
    }
}

void add_length(int len, int end_col) {
    if (len && (end[len] == NONE)) {
        distinct_len[num_lengths++] = len;
    }
    end[len] = end_col;
}

```

```

void reset_distinct_lengths() {
    while (num_lengths) {
        end[distinct_len[--num_lengths]] = NONE;
    }
}

// Adu ferestre de zerouri din stînga, deja închise, aliniindu-le cu col.
void slide_windows_right(int col) {
    dp[col] = INFTY;
    for (int i = 0; i < num_lengths; i++) {
        int len = distinct_len[i];
        int cost = st.range_min(col - len + 1, col) + (col - end[len]);
        dp[col] = min(dp[col], cost);
    }
}

// Adu ferestre de zerouri din dreapta, deja închise, aliniindu-le cu col.
void slide_windows_left(int col) {
    for (int i = 0; i < num_lengths; i++) {
        int len = distinct_len[i];
        int cost = st_shift.range_min(col - len + 1, col) + end[len] - len + 1;
        dp[col] = min(dp[col], cost);
    }
}

void slide_current_window(int col, int r_len) {
    if (!row[col]) {
        int l = 1 + prevl[col];
        int r = col + r_len - 1;
        int len = r - l + 1;
        dp[col] = min(dp[col], st.range_min(l, col));
        int cost_r = st_shift.range_min(col - len + 1, l - 1) + 1;
        dp[col] = min(dp[col], cost_r);
    }
}

void scan_left_to_right() {
    reset_distinct_lengths();

    int cur_len = 0;
    for (int c = 0; c < num_cols; c++) {
        if (row[c]) {
            add_length(cur_len, c - 1);
            cur_len = 0;
        } else {
            cur_len++;
        }
        slide_windows_right(c);
    }
}

```

```
}

void scan_right_to_left() {
    reset_distinct_lengths();

    int cur_len = 0;
    for (int c = num_cols - 1; c >= 0; c--) {
        if (row[c]) {
            add_length(cur_len, c + cur_len);
            cur_len = 0;
        } else {
            cur_len++;
        }
        slide_windows_left(c);
        slide_current_window(c, cur_len);
    }
}

void process_rows() {
    init_all();
    for (int r = 0; r < num_rows; r++) {
        read_row();
        compute_prev1();
        st.build(dp, num_cols, false);
        st_shift.build(dp, num_cols, true);
        scan_left_to_right();
        scan_right_to_left();
    }
}

void write_result() {
    int res = dp[num_cols - 1];
    printf("%d\n", (res == INFTY) ? NONE : res);
}

int main() {
    read_size();
    process_rows();
    write_result();

    return 0;
}
```

# Anexa E

## Algoritmul lui Mo

### E.1 Problema Powerful Array (Codeforces)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 200'000;
const int BLOCK_SIZE = 300;
const int MAX_QUERIES = 200'000;
const int MAX_VAL = 1'000'000;

typedef unsigned long long u64;

struct query {
    int l, r;
    int orig_index;
};

int v[MAX_N];
int f[MAX_VAL + 1];
u64 power;
query q[MAX_QUERIES];
u64 answer[MAX_QUERIES]; // separat de q[] ca să evităm o sortare la final
int n, num_queries;

void read_data() {
    scanf("%d %d", &n, &num_queries);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        scanf("%d", &v[i]);
    }
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        int l, r;
        scanf("%d %d", &l, &r);
    }
}
```

```

    q[i].l = l - 1;
    q[i].r = r - 1;
    q[i].orig_index = i;
}
}

void sort_queries_by_left_block() {
    std::sort(q, q + num_queries, [](query a, query b) {
        int x = a.l / BLOCK_SIZE, y = b.l / BLOCK_SIZE;
        if (x != y) {
            return (x < y);
        } else if (x % 2) {
            return a.r > b.r;
        } else {
            return a.r < b.r;
        }
    });
}

void add(int pos) {
    f[v[pos]]++;
    power += (u64)v[pos] * (2 * f[v[pos]] - 1);
}

void remove(int pos) {
    f[v[pos]]--;
    power -= (u64)v[pos] * (2 * f[v[pos]] + 1);
}

void mo() {
    int l = 0, r = -1; // vid
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        while (l > q[i].l) {
            add(--l);
        }
        while (r < q[i].r) {
            add(++r);
        }
        while (l < q[i].l) {
            remove(l++);
        }
        while (r > q[i].r) {
            remove(r--);
        }
        answer[q[i].orig_index] = power;
    }
}

void write_answers() {
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {

```

```
    printf("%llu\n", answer[i]);
}
}

int main() {
    read_data();
    sort_queries_by_left_block();
    mo();

    write_answers();

    return 0;
}
```

---

## E.2 Problema Most Frequent Value (SPOJ)

[◀ înapoi](#)

---

```
// Complexitate:  $O((n + q) \sqrt{n})$ .
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 100'000;
const int BLOCK_SIZE = 316;
const int MAX_QUERIES = 100'000;
const int MAX_VAL = 100'000;

struct query {
    int l, r;
    int orig_index;
};

int v[MAX_N];
int f[MAX_VAL + 1];
int num_having_f[MAX_N + 1], max_f;
query q[MAX_QUERIES];
int answer[MAX_QUERIES];
int n, num_queries;

void read_data() {
    scanf("%d %d", &n, &num_queries);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        scanf("%d", &v[i]);
    }
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        scanf("%d %d", &q[i].l, &q[i].r);
        q[i].orig_index = i;
    }
}
```

```

}

void sort_queries_by_left_block() {
    std::sort(q, q + num_queries, [](query a, query b) {
        int x = a.l / BLOCK_SIZE, y = b.l / BLOCK_SIZE;
        if (x != y) {
            return (x < y);
        } else if (x % 2) {
            return a.r > b.r;
        } else {
            return a.r < b.r;
        }
    });
}

void add(int pos) {
    int x = ++f[v[pos]];
    num_having_f[x - 1]--;
    num_having_f[x]++;
    if (x > max_f) {
        max_f = f[v[pos]];
    }
}

void remove(int pos) {
    int x = --f[v[pos]];
    num_having_f[x + 1]--;
    num_having_f[x]++;
    if (num_having_f[max_f] == 0) {
        max_f--;
    }
}

void mo() {
    num_having_f[0] = n;
    int l = 0, r = -1; // vid
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        while (l > q[i].l) {
            add(--l);
        }
        while (r < q[i].r) {
            add(++r);
        }
        while (l < q[i].l) {
            remove(l++);
        }
        while (r > q[i].r) {
            remove(r--);
        }
        answer[q[i].orig_index] = max_f;
    }
}

```

```
    }
}

void write_answers() {
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        printf("%d\n", answer[i]);
    }
}

int main() {
    read_data();
    sort_queries_by_left_block();
    mo();

    write_answers();

    return 0;
}
```

---

## E.3 Problema RangeMode (Infoarena Cup 2013)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

---

```
// Complexitate:  $O((n + q) \sqrt{n})$ .
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_N = 100000;
const int BLOCK_SIZE = 316;
const int MAX_QUERIES = 100000;
const int MAX_VAL = 100000;

struct query {
    int l, r;
    int orig_index;
};

int v[MAX_N];
int f[MAX_VAL + 1]; // frecvențele elementelor
int right_ptr;      // poziția ultimului element adăugat în f
int right_best;     // răspunsul considerînd strict dreapta blocului curent
query q[MAX_QUERIES];
int answer[MAX_QUERIES];
int n, num_queries;

void read_data() {
    FILE* f = fopen("rangemode.in", "r");
    fscanf(f, "%d %d", &n, &num_queries);
```



```

for (int i = 0; i < n; i++) {
    fscanf(f, "%d", &v[i]);
}
for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
    int l, r;
    fscanf(f, "%d %d", &l, &r);
    q[i].l = l - 1;
    q[i].r = r - 1;
    q[i].orig_index = i;
}
fclose(f);
}

void sort_queries_by_left_block() {
    std::sort(q, q + num_queries, [](query a, query b) {
        int x = a.l / BLOCK_SIZE, y = b.l / BLOCK_SIZE;
        return (x < y) || ((x == y) && (a.r < b.r));
    });
}

int min(int x, int y) {
    return (x < y) ? x : y;
}

void clear_f() {
    for (int i = 0; i <= MAX_VAL; i++) {
        f[i] = 0;
    }
}

void optimize(int& best, int candidate) {
    if ((f[candidate] > f[best]) ||
        ((f[candidate] == f[best]) && (candidate < best))) {
        best = candidate;
    }
}

void extend_right(int until) {
    while (right_ptr < until) {
        int val = v[++right_ptr];
        f[val]++;
        optimize(right_best, val);
    }
}

int add_current_block(int l, int r) {
    int best = right_best;
    for (int i = l; i <= r; i++) {
        f[v[i]]++;
        optimize(best, v[i]);
    }
}

```

```

    }
    return best;
}

void remove_current_block(int l, int r) {
    for (int i = l; i <= r; i++) {
        f[v[i]]--;
    }
}

void process_query(query q, int last_element_in_block) {
    extend_right(q.r);

    // Interogarea nu trece neapărat în blocul următor. Poate fi complet
    // cuprinsă în blocul curent.
    int right = min(q.r, last_element_in_block);
    int best = add_current_block(q.l, right);
    answer[q.orig_index] = best;
    remove_current_block(q.l, right);
}

void scan_blocks() {
    int qi = 0;
    for (int start = 0; start < n; start += BLOCK_SIZE) {
        int end = start + BLOCK_SIZE;
        right_ptr = end - 1;
        right_best = 0;
        while ((qi < num_queries) && (q[qi].l < end)) {
            process_query(q[qi++], end - 1);
        }
        clear_f();
    }
}

void write_answers() {
    FILE* f = fopen("rangemode.out", "w");
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        fprintf(f, "%d\n", answer[i]);
    }
    fclose(f);
}

int main() {
    read_data();
    sort_queries_by_left_block();
    scan_blocks();

    write_answers();

    return 0;
}

```

}

## E.4 Problema Machine Learning (Codeforces)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>
#include <unordered_map>

const int MAX_N = 100'000;
const int BLOCK_SIZE = 2'154; // n^{2/3}
const int MAX_OPS = 100'000;

const int T_QUERY = 1;
const int T_UPDATE = 2;

struct query {
    int l, r, time, answer;
};

struct update {
    int pos, old_val, val, time;
};

int a[MAX_N];
query q[MAX_OPS];
update u[MAX_OPS];
int tmp[MAX_N + MAX_OPS];
int n, num_ops, num_queries, num_updates;

// Date specifice pentru Mo.
int f[MAX_N + MAX_OPS];
int num_having_f[MAX_N + MAX_OPS];

// Renumerotează valorile din vector și actualizările.
struct normalizer {
    std::unordered_map<int, int> map;

    int normalize(int x) {
        auto it = map.find(x);
        if (it == map.end()) {
            int result = 1 + map.size();
            map[x] = result;
            return result;
        } else {
            return it->second;
        }
    }
}
```

```

    }
};

normalizer norm;

void read_array() {
    scanf("%d %d", &n, &num_ops);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int x;
        scanf("%d", &x);
        a[i] = norm.normalize(x);
    }
}

void read_ops() {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        tmp[i] = a[i];
    }

    u[num_updates++] = { 0, 0, 0, 0 }; // santinelă stînga (t = 0)
    for (int t = 1; t <= num_ops; t++) {
        int type;
        scanf("%d", &type);
        if (type == T_QUERY) {
            int l, r;
            scanf("%d %d", &l, &r);
            q[num_queries++] = { l - 1, r - 1, t };
        } else {
            int pos, val;
            scanf("%d %d", &pos, &val);
            pos--;
            val = norm.normalize(val);
            u[num_updates++] = { pos, tmp[pos], val, t };
            tmp[pos] = val;
        }
    }
    u[num_updates++] = { 0, 0, 0, n + num_ops }; // santinelă dreapta (t = ∞)
}

void sort_queries() {
    std::sort(q, q + num_queries, [](query a, query b) {
        int x = a.l / BLOCK_SIZE, y = b.l / BLOCK_SIZE;
        if (x != y) {
            return (x < y);
        }

        x = a.r / BLOCK_SIZE, y = b.r / BLOCK_SIZE;
        if (x != y) {
            return (x < y);
        }
    });
}

```

```

    return a.time < b.time;
});
}

void change_frequency(int val, int delta) {
    num_having_f[f[val]]--;
    f[val] += delta;
    num_having_f[f[val]]++;
}

void add(int pos) {
    change_frequency(a[pos], +1);
}

void remove(int pos) {
    change_frequency(a[pos], -1);
}

void change_value(int l, int r, int pos, int val) {
    if ((pos >= l) && (pos <= r)) {
        change_frequency(a[pos], -1);
        change_frequency(val, +1);
    }
    a[pos] = val;
}

int get_mex() {
    int mex = 1;
    while (num_having_f[mex]) {
        mex++;
    }
    return mex;
}

void mo() {
    num_having_f[0] = n + num_updates; // ceva infinit
    int l = 0, r = -1, u_index = 1;
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        while (l > q[i].l) {
            add(--l);
        }
        while (r < q[i].r) {
            add(++r);
        }
        while (l < q[i].l) {
            remove(l++);
        }
        while (r > q[i].r) {
            remove(r--);
        }
    }
}

```

```
    }
    while (u[u_index].time < q[i].time) {
        change_value(l, r, u[u_index].pos, u[u_index].val);
        u_index++;
    }
    while (u[u_index - 1].time > q[i].time) {
        u_index--;
        change_value(l, r, u[u_index].pos, u[u_index].old_val);
    }
    q[i].answer = get_mex();
}
}

void sort_queries_by_time() {
    std::sort(q, q + num_queries, [](query a, query b) {
        return a.time < b.time;
    });
}

void write_answers() {
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        printf("%d\n", q[i].answer);
    }
}

int main() {
    read_array();
    read_ops();
    sort_queries();
    mo();
    sort_queries_by_time();
    write_answers();

    return 0;
}
```

# Anexa F

## Arbori - probleme esențiale

### F.1 Generator simplu de arbori aleatorii

[◀ înapoi](#)

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <sys/time.h>

int n, k;

void usage() {
    fprintf(stderr, "Apel: ./generator <n> <k>\n");
    fprintf(stderr, "\n");
    fprintf(stderr, "Generează un arbore cu n noduri și k căi.\n");
    exit(1);
}

void parse_command_line_args(int argc, char** argv) {
    if (argc != 3) {
        usage();
    }

    n = atoi(argv[1]);
    k = atoi(argv[2]);
}

void init_rng() {
    struct timeval time;
    gettimeofday(&time, NULL);
    srand(time.tv_usec);
}

int rand2(int min, int max) {
    return min + rand() % (max - min + 1);
}
```

```
}

int main(int argc, char** argv) {
    parse_command_line_args(argc, argv);
    init_rng();

    printf("%d %d\n", n, k);
    for (int i = 2; i <= n; i++) {
        printf("%d %d\n", i, rand2(1, i - 1));
    }
    for (int i = 0; i < k; i++) {
        printf("%d %d\n", rand2(1, n), rand2(1, n));
    }

    return 0;
}
```

## F.2 Generator avansat de arbori aleatorii

[◀ înapoi](#)

```
#include <assert.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <sys/time.h>
#include <unistd.h>

#define MAX_N 1'000'000
#define NIL -1

int v[MAX_N], p[MAX_N];

void usage() {
    fprintf(stderr, "Apel: gen <n> <chain_length> <dense_node> <op_type> [...] \n");
    fprintf(stderr, "    op_type = 0: \n");
    fprintf(stderr, "        fără valori sau actualizări \n");
    fprintf(stderr, "    op_type = 1 <num_ops> <max_value>: \n");
    fprintf(stderr, "        valori inițiale, actualizări pe nod, interogări pe nod \n");
    fprintf(stderr, "    op_type = 2 <num_ops>: \n");
    fprintf(stderr, "        fără valori sau actualizări, cu interogări pe cale \n");
    _exit(1);
}

void shuffle(int* v, int n) {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int j = rand() % (i + 1);
        int tmp = v[i];
        v[i] = v[j];
    }
}
```



```

    v[j] = tmp;
}
}

void generate_tree(int n, int chain_length, int dense_node) {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        v[i] = i;
        p[i] = NIL;
    }

    shuffle(v, n);

    // Înlănțuie nodurile [0, chain_length).
    for (int i = 1; i < chain_length; i++) {
        p[v[i]] = v[i - 1];
    }

    // Conectează nodurile [chain_length, n - dense_node) la noduri aleatorii
    // dinaintea lor.
    for (int i = chain_length; i < n - dense_node; i++) {
        p[v[i]] = v[rand() % i];
    }

    // Conectează nodurile [n - dense_node, n) de un același părinte.
    int parent = rand() % (n - dense_node);
    for (int i = n - dense_node; i < n; i++) {
        p[v[i]] = v[parent];
    }

    // Nu tipări muchiile chiar în ordinea asta.
    shuffle(v, n);

    printf("%d\n", n);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int x = v[i], y = p[v[i]];
        if (y != NIL) {
            // Interschimbă aleatoriu fiul și părintele.
            if (rand() % 2) {
                int tmp = x;
                x = y;
                y = tmp;
            }
            printf("%d %d\n", 1 + x, 1 + y);
        }
    }
}

void generate_ops(int n, int num_ops, int max_value) {
    // Valorile inițiale.
    for (int i = 0; i < n; i++) {

```

```
    v[i] = rand() % (max_value + 1);
    printf("%d ", v[i]);
}
printf("\n");

printf("%d\n", num_ops);
while (num_ops--) {
    int u = rand() % n;
    if (rand() % 2) {
        // actualizare -- asigură-te că nu depășim max_value
        int delta = rand() % (max_value + 1) - v[u];
        v[u] += delta;
        printf("1 %d %d\n", 1 + u, delta);
    } else {
        // interogare
        printf("2 %d\n", 1 + u);
    }
}
}

void generate_lca_queries(int n, int num_ops) {
    // Generează perechi de noduri distincte.
    printf("%d\n", num_ops);
    while (num_ops--) {
        int u = rand() % n, v;
        do {
            v = rand() % n;
        } while (u == v);
        printf("%d %d\n", 1 + u, 1 + v);
    }
}

int main(int argc, char** argv) {
    if (argc < 5) {
        usage();
    }

    int n = atoi(argv[1]);
    int chain_length = atoi(argv[2]);
    int dense_node = atoi(argv[3]);
    int op_type = atoi(argv[4]);

    assert(chain_length + dense_node <= n);

    struct timeval time;
    gettimeofday(&time, NULL);
    srand(time.tv_usec);

    generate_tree(n, chain_length, dense_node);
}
```

```

int num_ops, max_value;
switch (op_type) {
    case 0:
        // Nimic altceva de făcut.
        break;

    case 1:
        if (argc != 7) {
            usage();
        }
        num_ops = atoi(argv[5]);
        max_value = atoi(argv[6]);
        generate_ops(n, num_ops, max_value);
        break;

    case 2:
        if (argc != 6) {
            usage();
        }
        num_ops = atoi(argv[5]);
        generate_lca_queries(n, num_ops);
        break;

    default:
        assert(false);
}

return 0;
}

```

## F.3 Problema Subordinates (CSES)

[◀ înapoi](#)

Sursă cu vectori STL.

```

#include <iostream>
#include <vector>

const int MAX_N = 200'000;

int s[MAX_N + 1]; // mărimea subarborelui, inclusiv nodul însuși
std::vector<int> c[MAX_N + 1]; // c[u] = fiii lui u
int n;

void read_data() {
    std::cin >> n;
    for (int u = 2; u <= n; u++) {

```

```
    int v;
    std::cin >> v;
    c[v].push_back(u);
}
}

void depth_first_search(int u) {
    s[u] = 1;
    for (int v: c[u]) {
        depth_first_search(v);
        s[u] += s[v];
    }
}

void write_answers() {
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        std::cout << (s[u] - 1) << ' ';
    }
    std::cout << '\n';
}

int main() {
    read_data();
    depth_first_search(1);
    write_answers();

    return 0;
}
```

---

Sursă cu liste înlănțuite.

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct cell {
    int v, next;
};

struct node {
    int adj;    // începutul listei de adiacență
    int size;   // mărimea subarborelui, inclusiv nodul însuși
};

cell list[MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int n;

void add_child(int u, int v) {
```

```

static int pos = 1;
list[pos] = { v, nd[u].adj };
nd[u].adj = pos++;
}

void read_data() {
    scanf("%d", &n);
    for (int u = 2; u <= n; u++) {
        int par;
        scanf("%d", &par);
        add_child(par, u);
    }
}

void depth_first_search(int u) {
    nd[u].size = 1;
    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        depth_first_search(v);
        nd[u].size += nd[v].size;
    }
}

void write_answers() {
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        printf("%d ", nd[u].size - 1);
    }
    printf("\n");
}

int main() {
    read_data();
    depth_first_search(1);
    write_answers();

    return 0;
}

```

## F.4 Problema Tree Matching (CSES)

[◀ înapo](#)

```

#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct cell {
    int v, next;
}

```

```
};

struct node {
    int adj;
    bool matched;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int max_match;

void add_edge(int u, int v) {
    static int pos = 1;
    list[pos] = { v, nd[u].adj };
    nd[u].adj = pos++;
}

void read_data() {
    int n, u, v;

    scanf("%d", &n);
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        scanf("%d %d", &u, &v);
        add_edge(u, v);
        add_edge(v, u);
    }
}

void dfs(int u, int parent) {
    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        if (v != parent) {
            dfs(v, u);
            if (!nd[u].matched && !nd[v].matched) {
                max_match++;
                nd[u].matched = nd[v].matched = true;
            }
        }
    }
}

void write_answer() {
    printf("%d\n", max_match);
}

int main() {
    read_data();
    dfs(1, 0);
    write_answer();
}
```

```

    return 0;
}

```

## F.5 Problema Tree Diameter (CSES)

◀ înapoi

Sursă cu două parcurgeri DFS.

```

#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct cell {
    int v, next;
};

struct rec {
    int node, dist;

    void improve(rec child) {
        if (child.dist + 1 > dist) {
            dist = child.dist + 1;
            node = child.node;
        }
    }
};

cell list[2 * MAX_NODES];
int adj[MAX_NODES + 1];

void add_edge(int u, int v) {
    static int pos = 1;
    list[pos] = { v, adj[u] };
    adj[u] = pos++;
}

void read_data() {
    int n, u, v;

    scanf("%d", &n);
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        scanf("%d %d", &u, &v);
        add_edge(u, v);
        add_edge(v, u);
    }
}

```

```
rec dfs(int u, int parent) {
    rec result = { u, 0 }; // nodul însuși
    for (int ptr = adj[u]; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        if (v != parent) {
            result.improve(dfs(v, u));
        }
    }
    return result;
}

int main() {
    read_data();
    rec farthest = dfs(1, 0);
    rec farthest2 = dfs(farthest.node, 0);
    int diam = farthest2.dist;
    printf("%d\n", diam);

    return 0;
}
```

---

Sursă cu o singură parcurgere DFS.

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct cell {
    int v, next;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
int adj[MAX_NODES + 1];
int diam;

void add_edge(int u, int v) {
    static int pos = 1;
    list[pos] = { v, adj[u] };
    adj[u] = pos++;
}

void read_data() {
    int n, u, v;

    scanf("%d", &n);
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        scanf("%d %d", &u, &v);
        add_edge(u, v);
        add_edge(v, u);
    }
}
```



```

    }
}

void maximize(int& x, int y) {
    x = (x > y) ? x : y;
}

// Returnează lungimea în muchii a căii celei mai lungi de la acest nod la
// orice frunză din subarbore.
int dfs(int u, int parent) {
    int dist = 0; // self
    for (int ptr = adj[u]; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        if (v != parent) {
            int l = 1 + dfs(v, u);
            maximize(diam, dist + l); // combină cu fiii anteriori
            maximize(dist, l);       // actualizează calea cea mai lungă
        }
    }
    return dist;
}

int main() {
    read_data();
    dfs(1, 0);
    printf("%d\n", diam);

    return 0;
}

```

## F.6 Problema Tree Distances II (CSES)

[◀ înapoi](#)

```

#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct cell {
    int v, next;
};

struct node {
    int adj;           // începutul listei de adiacență
    int size;          // mărimea subarborelui, inclusiv nodul însuși
    long long sum_dist; // suma distanțelor la toate celelalte noduri
};

```

```
cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int n;

void add_edge(int u, int v) {
    static int pos = 1;
    list[pos] = { v, nd[u].adj };
    nd[u].adj = pos++;
}

void read_data() {
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        int u, v;
        scanf("%d %d", &u, &v);
        add_edge(u, v);
        add_edge(v, u);
    }
}

void size_dfs(int u, int parent, int depth) {
    nd[1].sum_dist += depth;
    nd[u].size = 1;
    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        if (v != parent) {
            size_dfs(v, u, depth + 1);
            nd[u].size += nd[v].size;
        }
    }
}

void reroot_dfs(int u, int parent) {
    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        if (v != parent) {
            nd[v].sum_dist = nd[u].sum_dist + n - 2 * nd[v].size;
            reroot_dfs(v, u);
        }
    }
}

void write_answers() {
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        printf("%lld ", nd[u].sum_dist);
    }
    printf("\n");
}

int main() {
```

```

read_data();
size_dfs(1, 0, 0);
reroot_dfs(1, 0);
write_answers();

return 0;
}

```

## F.7 Problema White-Black Balanced Subtrees (Codeforces)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```

#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 4'000;
const int WHITE = 0;
const int BLACK = 1;

struct node {
    short parent;
    short num_children; // fii care încă nu ne-au dat raportul
    short cnt[2];
    unsigned char color;
};

node nd[MAX_NODES + 1];
int n, answer;

void read_data() {
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 2; i <= n; i++) {
        scanf("%hd ", &nd[i].parent);
        nd[nd[i].parent].num_children++;
    }

    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        nd[i].color = (getchar() == 'B') ? BLACK : WHITE;
    }
}

// Toți fiii lui u i-au dat raportul. Este momentul ca u să își numere propria
// contribuție, apoi să i-o raporteze părintelui.
void process(node& u) {
    u.cnt[u.color]++; // numără-te pe tine însuși
    answer += (u.cnt[WHITE] == u.cnt[BLACK]);

    nd[u.parent].cnt[WHITE] += u.cnt[WHITE];
    nd[u.parent].cnt[BLACK] += u.cnt[BLACK];
}

```

```
}

void traverse_tree() {
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        int s = u;
        while (s && !nd[s].num_children) {
            process(nd[s]);
            s = nd[s].parent;
            nd[s].num_children--;
        }
    }
}

void reset() {
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        nd[i] = { 0, 0, 0, 0, 0 };
    }
    answer = 0;
}

void solve_test() {
    read_data();
    traverse_tree();
    printf("%d\n", answer);
    reset();
}

int main() {
    int num_tests;
    scanf("%d", &num_tests);
    while (num_tests--) {
        solve_test();
    }

    return 0;
}
```

---

## F.8 Problema Blood Cousins (Codeforces)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```
// Complexitate:  $O(n + q)$ .
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 100'000;
const int MAX_QUERIES = 100'000;

struct cell {
```

```

    int v, next;
};

struct query_cell {
    int v, p, answer, next;
};

struct node {
    int adj;
    int qptr; // pointer în lista de interogări
};

cell list[MAX_NODES + 1];
query_cell q[MAX_QUERIES + 1];
node nd[MAX_NODES + 1];
int stack[MAX_NODES];
int n, num_queries;

void read_input_data() {
    int list_ptr = 1;

    scanf("%d", &n);

    // Pseudonodul 0 va avea toate rădăcinile drept fii.
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        int p;
        scanf("%d", &p);
        list[list_ptr] = { u, nd[p].adj };
        nd[p].adj = list_ptr++;
    }

    scanf("%d", &num_queries);
    for (int i = 1; i <= num_queries; i++) {
        scanf("%d %d", &q[i].v, &q[i].p);
    }
}

void distribute_queries() {
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        nd[u].qptr = 0;
    }
    for (int i = 1; i <= num_queries; i++) {
        if (q[i].v) { // poate fi 0 după primul DFS
            q[i].next = nd[q[i].v].qptr;
            nd[q[i].v].qptr = i;
        }
    }
}

void replace_query_nodes_dfs(int u, int depth) {

```

```
stack[depth] = u;

// Scanează toate interogările despre u și înlocuiește nodul cu al p-lea său
// strămoș.
for (int ptr = nd[u].qptr; ptr; ptr = q[ptr].next) {
    q[ptr].v = (depth > q[ptr].p)
        ? stack[depth - q[ptr].p]
        : 0;
}

for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    replace_query_nodes_dfs(list[ptr].v, depth + 1);
}

stack[depth] = 0; // curățenie pentru al doilea DFS
}

void answer_queries_dfs(int u, int depth) {
    stack[depth]++;

    // Scanează toate interogările despre u și reține contorul inițial.
    for (int ptr = nd[u].qptr; ptr; ptr = q[ptr].next) {
        q[ptr].answer = stack[depth + q[ptr].p];
    }

    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        answer_queries_dfs(list[ptr].v, depth + 1);
    }

    // Rescanează interogările și reține diferența între valorile contorului.
    for (int ptr = nd[u].qptr; ptr; ptr = q[ptr].next) {
        q[ptr].answer = stack[depth + q[ptr].p] - q[ptr].answer - 1;
    }
}

void write_output_data() {
    for (int i = 1; i <= num_queries; i++) {
        printf("%d ", q[i].answer);
    }
    printf("\n");
}

int main() {
    read_input_data();
    distribute_queries();
    replace_query_nodes_dfs(0, 0);
    distribute_queries();
    answer_queries_dfs(0, 0);
    write_output_data();
}
```

```
return 0;  
}
```

---

# Anexa G

## Arbori - liniarizare

### G.1 Problema Tree Queries (Codeforces)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;
const int NIL = -1;

struct list {
    int v, next;
};

struct node {
    int parent;
    int ptr; // pointer în lista de adiacență
    int time_in, time_out;
};

list adj[2 * MAX_NODES];
node n[MAX_NODES + 1];
int num_nodes, num_queries;

void add_neighbor(int u, int v, int pos) {
    adj[pos] = { v, n[u].ptr };
    n[u].ptr = pos;
}

void read_tree() {
    scanf("%d %d", &num_nodes, &num_queries);
    for (int u = 1; u <= num_nodes; u++) {
        n[u].ptr = NIL;
    }
}
```



```

for (int i = 0; i < num_nodes - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_neighbor(u, v, 2 * i);
    add_neighbor(v, u, 2 * i + 1);
}
}

void euler_tour(int u, int parent) {
    static int time = 0;

    n[u].parent = parent;
    n[u].time_in = ++time;
    for (int ptr = n[u].ptr; ptr != NIL; ptr = adj[ptr].next) {
        int v = adj[ptr].v;
        if (v != parent) {
            euler_tour(v, u);
        }
    }
    n[u].time_out = ++time;
}

bool is_ancestor(int u, int v) {
    return
        (n[u].time_in <= n[v].time_in) &&
        (n[u].time_out >= n[v].time_out);
}

void process_queries() {
    while (num_queries--) {
        int size, u, lowest;
        bool has_path = true;
        scanf("%d %d", &size, &lowest);
        lowest = n[lowest].parent;

        while (--size) {
            scanf("%d", &u);
            u = n[u].parent;
            if (is_ancestor(lowest, u)) {
                lowest = u;
            } else if (!is_ancestor(u, lowest)) {
                has_path = false;
            }
        }

        printf(has_path ? "YES\n" : "NO\n");
    }
}

int main() {

```

```
read_tree();
euler_tour(1, 1);
process_queries();

return 0;
}
```

---

## G.2 Problema Subtree Queries (CSES)

[◀ înapoi](#)

---

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct list {
    int val, next;
};

struct node {
    int val;
    int start, finish;
    int ptr; // pointer în lista de adiacență
};

struct fenwick_tree {
    long long v[MAX_NODES + 1];
    int n;

    void build(int n) {
        this->n = n;
        for (int i = 1; i <= n; i++) {
            int j = i + (i & -i);
            if (j <= n) {
                v[j] += v[i];
            }
        }
    }

    void add(int pos, int val) {
        do {
            v[pos] += val;
            pos += pos & -pos;
        } while (pos <= n);
    }

    long long sum(int pos) {
        long long s = 0;
```

```

    while (pos) {
        s += v[pos];
        pos &= pos - 1;
    }
    return s;
}

long long range_sum(int x, int y) {
    return sum(y) - sum(x - 1);
}
};

list adj[2 * MAX_NODES];
node n[MAX_NODES + 1];
fenwick_tree fen;
int num_nodes, num_queries;

void add_neighbor(int u, int v) {
    static int ptr = 1;
    adj[ptr] = { v, n[u].ptr };
    n[u].ptr = ptr++;
}

void read_input_data() {
    scanf("%d %d", &num_nodes, &num_queries);
    for (int u = 1; u <= num_nodes; u++) {
        scanf("%d", &n[u].val);
    }

    for (int i = 0; i < num_nodes - 1; i++) {
        int u, v;
        scanf("%d %d", &u, &v);
        add_neighbor(u, v);
        add_neighbor(v, u);
    }
}

void flatten(int u) {
    static int time = 0;

    n[u].start = ++time;

    for (int ptr = n[u].ptr; ptr; ptr = adj[ptr].next) {
        int v = adj[ptr].val;
        if (!n[v].start) {
            flatten(v);
        }
    }

    n[u].finish = time;
}

```

```
}

void build_fenwick_tree() {
    for (int u = 1; u <= num_nodes; u++) {
        fen.v[n[u].start] = n[u].val;
    }

    fen.build(num_nodes);
}

void process_queries() {
    while (num_queries--) {
        int type, u;
        scanf("%d %d", &type, &u);
        if (type == 1) {
            int val;
            scanf("%d", &val);
            fen.add(n[u].start, val - n[u].val);
            n[u].val = val;
        } else {
            printf("%lld\n", fen.range_sum(n[u].start, n[u].finish));
        }
    }
}

int main() {
    read_input_data();
    flatten(1);
    build_fenwick_tree();
    process_queries();

    return 0;
}
```

## G.3 Problema Path Queries (CSES)

[◀ înapoi](#)

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct list {
    int val, next;
};

struct node {
    int val;
```

```

int time_in, time_out;
int ptr; // pointer în lista de adiacență
};

struct fenwick_tree {
    long long v[2 * MAX_NODES + 1];
    int n;

    void build(int n) {
        this->n = n;
        for (int i = 1; i <= n; i++) {
            int j = i + (i & -i);
            if (j <= n) {
                v[j] += v[i];
            }
        }
    }

    void add(int pos, int val) {
        do {
            v[pos] += val;
            pos += pos & -pos;
        } while (pos <= n);
    }

    long long sum(int pos) {
        long long s = 0;
        while (pos) {
            s += v[pos];
            pos &= pos - 1;
        }
        return s;
    }
};

list adj[2 * MAX_NODES];
node n[MAX_NODES + 1];
fenwick_tree fen;
int num_nodes, num_queries;

void add_neighbor(int u, int v) {
    static int ptr = 1;
    adj[ptr] = { v, n[u].ptr };
    n[u].ptr = ptr++;
}

void read_input_data() {
    scanf("%d %d", &num_nodes, &num_queries);
    for (int u = 1; u <= num_nodes; u++) {
        scanf("%d", &n[u].val);
    }
}

```

```
}

for (int i = 0; i < num_nodes - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_neighbor(u, v);
    add_neighbor(v, u);
}
}

void flatten(int u) {
    static int time = 0;

    n[u].time_in = ++time;

    for (int ptr = n[u].ptr; ptr; ptr = adj[ptr].next) {
        int v = adj[ptr].val;
        if (!n[v].time_in) {
            flatten(v);
        }
    }

    n[u].time_out = ++time;
}

void build_fenwick_tree() {
    for (int u = 1; u <= num_nodes; u++) {
        fen.v[n[u].time_in] = n[u].val;
        fen.v[n[u].time_out] = -n[u].val;
    }

    fen.build(2 * num_nodes);
}

void process_queries() {
    while (num_queries--) {
        int type, u;
        scanf("%d %d", &type, &u);
        if (type == 1) {
            int val;
            scanf("%d", &val);
            int delta = val - n[u].val;
            fen.add(n[u].time_in, delta);
            fen.add(n[u].time_out, -delta);
            n[u].val = val;
        } else {
            printf("%lld\n", fen.sum(n[u].time_in));
        }
    }
}
```

```

int main() {
    read_input_data();
    flatten(1);
    build_fenwick_tree();
    process_queries();

    return 0;
}

```

## G.4 Problema New Year Tree (Codeforces)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```

#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 400'000;
const int MAX_NODES_ROUNDED = 1 << 19;
const int T_PAINT = 1;

typedef unsigned long long u64;

// Un arbore de segmente care admite operațiile:
//
// * range_set(int l, int r, int val)
//   Atribuire valoarea val pe [l, r]. Presupune că  $1 \leq val \leq 60$ .
// * range_count_distinct(int l, int r)
//   Returnează numărul de valori distincte din [l, r].
//
// Contract: mask[x] este masca valorilor din subarborele lui x. Dacă dirty[x]
// este nonzero, atunci dirty[x] trebuie scris peste tot în subarborele lui x
// și mask[x] deja respectă dirty[x].
struct segment_tree {
    u64 mask[2 * MAX_NODES_ROUNDED];
    char dirty[2 * MAX_NODES_ROUNDED];
    int n, bits;

    int next_power_of_2(int n) {
        return 1 << (32 - __builtin_clz(n - 1));
    }

    void init(int size) {
        n = next_power_of_2(size);
        bits = __builtin_popcount(n - 1);
    }

    void raw_set(int pos, char val) {
        mask[pos + n] = 1ull << val;
    }
}

```

```
}

void build() {
    for (int i = n - 1; i; i--) {
        mask[i] = mask[2 * i] | mask[2 * i + 1];
    }
}

void push(int x) {
    if (dirty[x]) {
        dirty[2 * x] = dirty[2 * x + 1] = dirty[x];
        mask[2 * x] = mask[2 * x + 1] = mask[x];
        dirty[x] = 0;
    }
}

void push_path(int x) {
    for (int b = bits; b; b--) {
        push(x >> b);
    }
}

void pull_path(int x) {
    for (x /= 2; x; x /= 2) {
        if (!dirty[x]) {
            mask[x] = mask[2 * x] | mask[2 * x + 1];
        }
    }
}

void range_set(int l, int r, int val) {
    l += n;
    r += n;
    int orig_l = l, orig_r = r;

    push_path(l);
    push_path(r);

    while (l <= r) {
        if (l & 1) {
            mask[l] = 1ull << val;
            dirty[l++] = val;
        }
        l >>= 1;

        if (!(r & 1)) {
            mask[r] = 1ull << val;
            dirty[r--] = val;
        }
        r >>= 1;
    }
}
```



```

    }

    pull_path(orig_l);
    pull_path(orig_r);
}

int range_count_distinct(int l, int r) {
    u64 result = 0;

    l += n;
    r += n;
    push_path(l);
    push_path(r);

    while (l <= r) {
        if (l & 1) {
            result |= mask[l++];
        }
        l >>= 1;

        if (!(r & 1)) {
            result |= mask[r--];
        }
        r >>= 1;
    }

    return __builtin_popcountll(result);
}

};

struct cell {
    int v, next;
};

struct node {
    int adj; // lista de adiacență
    int time_in, time_out;
    unsigned char color;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
segment_tree segtree;
int n, num_ops;

void add_neighbor(int u, int v) {
    static int ptr = 1;
    list[ptr] = { v, nd[u].adj };
    nd[u].adj = ptr++;
}

```

```

}

void read_tree() {
    scanf("%d %d", &n, &num_ops);
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        scanf("%hhd", &nd[u].color);
    }
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        int u, v;
        scanf("%d %d", &u, &v);
        add_neighbor(u, v);
        add_neighbor(v, u);
    }
}

void flatten_tree(int u) {
    static int time = 0;

    nd[u].time_in = time++;

    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        if (!nd[v].time_in && (v != 1)) { // nu revizita rădăcina
            flatten_tree(v);
        }
    }

    nd[u].time_out = time - 1;
}

void make_segtree() {
    segtree.init(n);
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        segtree.raw_set(nd[u].time_in, nd[u].color);
    }
    segtree.build();
}

void process_ops() {
    while (num_ops--) {
        int type, u, color;
        scanf("%d %d", &type, &u);
        int l = nd[u].time_in, r = nd[u].time_out;

        if (type == T_PAINT) {
            scanf("%d", &color);
            segtree.range_set(l, r, color);
        } else {
            int colors = segtree.range_count_distinct(l, r);
            printf("%d\n", colors);
        }
    }
}

```

```

    }
}

int main() {
    read_tree();
    flatten_tree(1);
    make_segtree();
    process_ops();

    return 0;
}

```

## G.5 Problema Max Flow (USACO)

[◀ înapoi](#)

Sursă cu vectori de diferențe pe arbore.

```

#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 50'000;
const int MAX_PATHS = 100'000;
const int NIL = -1;

struct list {
    int val, next;
};

struct node {
    int parent;
    int ptr; // pointer în lista de adiacență
    int path_ptr; // pointer în lista de căi
    int load;
};

struct path {
    int u, v, lca;
};

list adj[2 * MAX_NODES];
list path_list[2 * MAX_PATHS];
node n[MAX_NODES + 1];
path p[MAX_PATHS];
int ds_parent[MAX_NODES + 1];
int num_nodes, num_paths;

/*****

```

```

/*          Implementare de mulțimi disjuncte.          */
/*****

void ds_init() {
    for (int u = 1; u <= num_nodes; u++) {
        ds_parent[u] = u;
    }
}

int ds_find(int u) {
    return (ds_parent[u] == u)
        ? u
        : (ds_parent[u] = ds_find(ds_parent[u]));
}

// Întotdeauna unifică v în u. Fără unificare după rang.
void ds_union(int u, int v) {
    ds_parent[ds_find(v)] = ds_find(u);
}

/*****
/*          Implementarea algoritmului lui Tarjan pentru LCA offline.          */
/*****

void offline_lca_dfs(int u, int parent) {
    n[u].parent = parent;

    for (int ptr = n[u].ptr; ptr != NIL; ptr = adj[ptr].next) {
        int v = adj[ptr].val;
        if (v != parent) {
            offline_lca_dfs(v, u);
            ds_union(u, v);
        }
    }

    for (int ptr = n[u].path_ptr; ptr != NIL; ptr = path_list[ptr].next) {
        int i = path_list[ptr].val;
        int v = (p[i].u == u) ? p[i].v : p[i].u;
        if (n[v].parent) {
            p[i].lca = ds_find(v);
        }
    }
}

void offline_lca() {
    ds_init();
    offline_lca_dfs(1, 1);
}

/*****/

```

```

/*                                     Codul principal.                                     */
/*****

void add_neighbor(int u, int v) {
    static int ptr = 0;
    adj[ptr] = { v, n[u].ptr };
    n[u].ptr = ptr++;
}

void add_path(int ind, int u) {
    static int ptr = 0;
    path_list[ptr] = { ind, n[u].path_ptr };
    n[u].path_ptr = ptr++;
}

void read_input_data() {
    FILE* f = fopen("maxflow.in", "r");
    fscanf(f, "%d %d", &num_nodes, &num_paths);
    for (int u = 1; u <= num_nodes; u++) {
        n[u].ptr = n[u].path_ptr = NIL;
    }

    for (int i = 0; i < num_nodes - 1; i++) {
        int u, v;
        fscanf(f, "%d %d", &u, &v);
        add_neighbor(u, v);
        add_neighbor(v, u);
    }

    for (int i = 0; i < num_paths; i++) {
        fscanf(f, "%d %d", &p[i].u, &p[i].v);
        add_path(i, p[i].u);
        add_path(i, p[i].v);
    }
    fclose(f);
}

void mark_differences() {
    for (int i = 0; i < num_paths; i++) {
        n[p[i].u].load++;
        n[p[i].v].load++;
        n[p[i].lca].load--;
        if (p[i].lca != 1) {
            int lca_parent = n[p[i].lca].parent;
            n[lca_parent].load--;
        }
    }
}

void sum_differences(int u) {

```

```
for (int ptr = n[u].ptr; ptr != NIL; ptr = adj[ptr].next) {
    int v = adj[ptr].val;
    if (v != n[u].parent) {
        sum_differences(v);
        n[u].load += n[v].load;
    }
}
}

int get_max_load() {
    int result = 0;
    for (int u = 1; u <= num_nodes; u++) {
        if (n[u].load > result) {
            result = n[u].load;
        }
    }
    return result;
}

void write_answer(int answer) {
    FILE* f = fopen("maxflow.out", "w");
    fprintf(f, "%d\n", answer);
    fclose(f);
}

int main() {
    read_input_data();
    offline_lca();
    mark_differences();
    sum_differences(1);
    int answer = get_max_load();
    write_answer(answer);

    return 0;
}
```

Sursă cu liniarizare + AIB.

```
#include <algorithm>
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 50'000;
const int MAX_PATHS = 100'000;

struct cell {
    int v, next;
};

// Stochează două liste de noduri în fiecare nod u: una pentru căile care
```

```
// încep în u și alta pentru căile care se termină în u.
```

```
struct node {
    int adj;
    int path_begin, path_end; // pointers to list of nodes
    int start, finish;
};
```

```
struct fenwick_tree {
    unsigned short v[MAX_NODES + 1];
    int n;
```

```
void init(int n) {
    this->n = n;
}
```

```
void add(int pos, int val) {
    do {
        v[pos] += val;
        pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
}
```

```
int count(int pos) {
    int s = 0;
    while (pos) {
        s += v[pos];
        pos &= pos - 1;
    }
    return s;
}
```

```
int range_count(int x, int y) {
    return count(y) - count(x - 1);
}
```

```
};
```

```
cell list[2 * MAX_NODES + 2 * MAX_PATHS + 1];
node nd[MAX_NODES + 1];
fenwick_tree active_start, active_finish;
int n, num_paths;
FILE* fin;
```

```
void add_to_list(int& head, int u) {
    static int ptr = 1;
    list[ptr] = { u, head };
    head = ptr++;
}
```

```
void read_tree() {
    fscanf(fin, "%d %d", &n, &num_paths);
```

```

    for (int i = 1; i < n; i++) {
        int u, v;
        fscanf(fin, "%d %d", &u, &v);
        add_to_list(nd[u].adj, v);
        add_to_list(nd[v].adj, u);
    }
}

void read_paths() {
    for (int i = 0; i < num_paths; i++) {
        int u, v;
        fscanf(fin, "%d %d", &u, &v);
        if (nd[u].start > nd[v].start) {
            int tmp = u; u = v; v = tmp;
        }
        add_to_list(nd[u].path_begin, v);
        add_to_list(nd[v].path_end, u);
    }
}

void compute_ranges(int u) {
    static int time = 0;

    nd[u].start = ++time;

    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        if (!nd[v].start) {
            compute_ranges(v);
        }
    }

    nd[u].finish = time;
}

int max(int x, int y) {
    return (x > y) ? x : y;
}

int process_paths_starting_at(int u) {
    int cnt = 0;

    for (int ptr = nd[u].path_begin; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        active_finish.add(nd[v].start, +1);
        cnt++;
    }

    active_start.add(nd[u].start, +cnt);
}

```



```

    return cnt;
}

void process_paths_ending_at(int v) {
    int cnt = 0;

    for (int ptr = nd[v].path_end; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int u = list[ptr].v;
        active_start.add(nd[u].start, -1);
        cnt++;
    }

    active_finish.add(nd[v].start, -cnt);
}

int max_load = 0;

void compute_load(int u) {
    // Căi care se termină în subarborele lui u.
    int load = active_finish.range_count(nd[u].start, nd[u].finish);

    // Căi care încep în u.
    load += process_paths_starting_at(u);

    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        if (nd[v].start > nd[u].start) {
            compute_load(v);
            // Căi care au început într-un descendent al lui u și se vor termina fie
            // în alt fiu al lui u, fie în afara subarborelui lui u.
            load += active_start.range_count(nd[v].start, nd[v].finish);
        }
    }

    process_paths_ending_at(u);
    max_load = max(max_load, load);
}

void write_answer() {
    FILE* f = fopen("maxflow.out", "w");
    fprintf(f, "%d\n", max_load);
    fclose(f);
}

int main() {
    fin = fopen("maxflow.in", "r");
    read_tree();
    compute_ranges(1);
    read_paths();
    fclose(fin);
}

```

```
active_start.init(n);
active_finish.init(n);

compute_load(1);
write_answer();

return 0;
}
```

---

## G.6 Problema Distinct Colors (CSES)

[◀ înapoi](#)

```
#include <stdio.h>
#include <unordered_map>

const int MAX_NODES = 200'000;

struct cell {
    int v, next;
};

struct node {
    int color, distinct;
    int adj; // lista de adiacență
};

// Un arbore Fenwick extins cu culori. Când colorăm un bit cu o culoare,
// arborele șterge automat apariția anterioară a culorii.
struct fenwick_tree {
    int v[MAX_NODES + 1];
    std::unordered_map<int, int> last_pos;
    int n, total;

    void init(int n) {
        this->n = n;
        total = 0;
    }

    void add(int pos, int val) {
        total += val;
        do {
            v[pos] += val;
            pos += pos & -pos;
        } while (pos <= n);
    }
}
```

```

void colorize(int pos, int color) {
    auto last = last_pos.find(color);
    if (last != last_pos.end()) {
        add(last->second, -1);
        last->second = pos;
    } else {
        last_pos[color] = pos;
    }
    add(pos, +1);
}

// count[pos..n] = total - count[1..pos-1]
int suffix_count(int pos) {
    int s = total;
    pos--;
    while (pos) {
        s -= v[pos];
        pos &= pos - 1;
    }
    return s;
}
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
fenwick_tree fen;
int n;

void add_neighbor(int u, int v) {
    static int ptr = 1;
    list[ptr] = { v, nd[u].adj };
    nd[u].adj = ptr++;
}

void read_input_data() {
    scanf("%d", &n);

    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        scanf("%d", &nd[u].color);
    }

    for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
        int u, v;
        scanf("%d %d", &u, &v);
        add_neighbor(u, v);
        add_neighbor(v, u);
    }
}

void dfs(int u) {

```

```
static int time = 0;
int entry_time = ++time;

fen.colorize(time, nd[u].color);
nd[u].color = 0; // previne revizitarea

for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
    int v = list[ptr].v;
    if (nd[v].color) {
        dfs(v);
    }
}

nd[u].distinct = fen.suffix_count(entry_time);
}

void write_output_data() {
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        printf("%d ", nd[u].distinct);
    }
    printf("\n");
}

int main() {
    read_input_data();
    fen.init(n);
    dfs(1);
    write_output_data();

    return 0;
}
```

## G.7 Problema Disconnect (Infoarena)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 100'000;
const int MAX_NODES_ROUNDED = 1 << 17;
const int T_REMOVE = 1;

// Un arbore de intervale cu operațiile:
//
// update(l, r, val): scrie val peste tot în [l, r].
// query(pos): returnează prima valoare găsită călătorind în sus de la pos.
//
// Presupune că actualizările sînt fie disjuncte, fie imbricate. Cu alte
```

```
// cuvinte, nu există suprapuneri parțiale. Actualizările mai înguste au
// prioritate în fața celor mai late.
```

```
struct segment_tree_node {
    int val;
    int priority; // cu cît mai mică, cu atît mai importantă

    void update(int new_val, int new_priority) {
        if (new_priority < priority) {
            val = new_val;
            priority = new_priority;
        }
    }
};
```

```
struct segment_tree {
    segment_tree_node v[2 * MAX_NODES_ROUNDED];
    int n;

    int next_power_of_2(int x) {
        return 1 << (32 - __builtin_clz(x - 1));
    }

    void init(int n) {
        this->n = next_power_of_2(n);
        for (int i = 1; i < 2 * this->n; i++) {
            v[i].priority = n + 1; // cea mai neimportantă
        }
    }

    int query(int pos) {
        for (pos += n; pos; pos >>= 1) {
            if (v[pos].val) {
                return v[pos].val;
            }
        }
        return 0;
    }

    void update(int l, int r, int val) {
        int priority = r - l + 1;
        l += n;
        r += n;

        while (l <= r) {
            if (l & 1) {
                v[l++].update(val, priority);
            }
            l >>= 1;

            if (!(r & 1)) {
```

```

        v[r--].update(val, priority);
    }
    r >>= 1;
}
};

struct cell {
    int v, next;
};

struct node {
    int adj;
    int parent;
    int start, finish;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
segment_tree segtree;
int n, num_ops;
FILE *fin, *fout;

void add_neighbor(int u, int v) {
    static int ptr = 1;
    list[ptr] = { v, nd[u].adj };
    nd[u].adj = ptr++;
}

void read_tree() {
    fscanf(fin, "%d %d", &n, &num_ops);
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        int u, v;
        fscanf(fin, "%d %d", &u, &v);
        add_neighbor(u, v);
        add_neighbor(v, u);
    }
}

void flatten_tree(int u) {
    static int time = 0;

    nd[u].start = time++;

    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        if (!nd[v].start && (v != 1)) { // nu revizita rădăcina
            nd[v].parent = u;
            flatten_tree(v);
        }
    }
}

```

```

}

nd[u].finish = time - 1;
}

void mark_node(int u) {
    segtree.update(nd[u].start, nd[u].finish, u);
}

bool bad_node(int u) {
    return (u < 1) || (u > n);
}

void remove_edge(int u, int v) {
    if (bad_node(u) || bad_node(v)) {
        return;
    }
    if (nd[u].parent == v) {
        mark_node(u);
    } else if (nd[v].parent == u) {
        mark_node(v);
    }
}

bool path_exists(int u, int v) {
    if (bad_node(u) || bad_node(v)) {
        return false;
    }

    u = segtree.query(nd[u].start);
    v = segtree.query(nd[v].start);

    return (u == v);
}

void process_ops() {
    int v = 0;

    while (num_ops--) {
        int type, x, y;
        fscanf(fin, "%d %d %d", &type, &x, &y);

        x ^= v;
        y ^= v;

        if (type == T_REMOVE) {
            remove_edge(x, y);
        } else {
            if (path_exists(x, y)) {
                fprintf(fout, "YES\n");
            }
        }
    }
}

```

```
        v = x;
    } else {
        fprintf(fout, "NO\n");
        v = y;
    }
}
}
}

int main() {
    fin = fopen("disconnect.in", "r");
    fout = fopen("disconnect.out", "w");

    read_tree();
    flatten_tree(1);
    segtree.init(n);
    process_ops();

    fclose(fin);
    fclose(fout);

    return 0;
}
```

---



# Anexa H

## Arbori - small-to-large

### H.1 Problema Fixed-Length Paths I (CSES)

[◀ înapoi](#)

```
#include <deque>
#include <stdio.h>
#include <vector>

const int MAX_NODES = 200'000;

typedef std::deque<int> deque;

std::vector<int> adj[MAX_NODES + 1];
int n, k;
long long answer;

void read_input_data() {
    scanf("%d %d", &n, &k);

    for (int i = 1; i < n; i++) {
        int u, v;
        scanf("%d %d", &u, &v);
        adj[u].push_back(v);
        adj[v].push_back(u);
    }
}

int min(int x, int y) {
    return (x < y) ? x : y;
}

int max(int x, int y) {
    return (x > y) ? x : y;
}
```

```

// Presupune că src.size() <= dest.size().
void merge_into(deque& src, deque&dest) {
    int min_i = max(0, k - 1 - dest.size());
    int max_i = min(src.size() - 1, k - 2);
    for (int i = min_i; i <= max_i; i++) {
        int j = k - 2 - i;
        answer += (long long)src[i] * dest[j];
    }
    for (int i = 0; i < (int)src.size(); i++) {
        dest[i] += src[i];
    }
}

deque dfs(int u, int parent) {
    deque result = { };
    for (int v: adj[u]) {
        if (v != parent) {
            deque d = dfs(v, u);
            if (d.size() > result.size()) {
                // Întotdeauna folosește swap(), care schimbă pointeri. Niciodată nu
                // folosi atribuirea, care copiază date.
                result.swap(d);
            }
            merge_into(d, result);
        }
    }

    result.push_front(1); // nodul însuși la distanță 0
    if ((int)result.size() >= k + 1) {
        answer += result[k];
    }
    if ((int)result.size() > k + 1) {
        // Nu are rost să ținem statistici peste distanța k.
        result.pop_back();
    }
    return result;
}

void write_answer() {
    printf("%lld\n", answer);
}

int main() {
    read_input_data();
    dfs(1, 0);
    write_answer();

    return 0;
}

```

}

## H.2 Problema Distinct Colors (CSES) (din nou)

◀ înapoi

```
#include <stdio.h>
#include <unordered_set>

const int MAX_NODES = 200'000;

typedef std::unordered_set<int> set;

struct cell {
    int v, next;
};

struct node {
    int color, distinct;
    int adj;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int n;

void add_neighbor(int u, int v) {
    static int ptr = 1;
    list[ptr] = { v, nd[u].adj };
    nd[u].adj = ptr++;
}

void read_data() {
    scanf("%d", &n);

    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        scanf("%d", &nd[u].color);
    }

    for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
        int u, v;
        scanf("%d %d", &u, &v);
        add_neighbor(u, v);
        add_neighbor(v, u);
    }
}

void merge_into(set& src, set& dest) {
```

```
dest.merge(src);
src.clear();
}

set dfs(int u) {
    // marchează-l ca vizitat ca să prevenim recursivitatea infinită
    nd[u].distinct = 1;
    set result = { nd[u].color };
    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        if (!nd[v].distinct) {
            set s = dfs(v);
            if (s.size() > result.size()) {
                s.swap(result);
            }
            merge_into(s, result);
        }
    }

    nd[u].distinct = result.size();
    return result;
}

void write_answer() {
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        printf("%d ", nd[u].distinct);
    }
    printf("\n");
}

int main() {
    read_data();
    dfs(1);
    write_answer();

    return 0;
}
```

---

## H.3 Problema Lomsat Gelral (Codeforces)

[◀ înapoi](#)

Sursă cu tehnica *small-to-large* ([versiune online](#)).

---

```
#include <stdio.h>
#include <unordered_map>

const int MAX_NODES = 100'000;
```

```

struct freq_info {
    std::unordered_map<int, int> map; // culori => frecvențe
    int max_f;                       // cea mai mare frecvență din map
    long long sum;                   // suma culorilor avînd max_f

    freq_info(int color) {
        map[color] = 1;
        max_f = 1;
        sum = color;
    }

    void swap(freq_info& other) {
        map.swap(other.map);
        max_f = other.max_f;
        sum = other.sum;
        // Tehnic, ar trebui să copiem și valorile noastre în other, dar nu este
        // necesar.
    }

    void absorb(freq_info& src) {
        if (src.map.size() > map.size()) {
            swap(src);
        }

        for (auto [color, f]: src.map) {
            map[color] += f;
            if (map[color] > max_f) {
                max_f = map[color];
                sum = color;
            } else if (map[color] == max_f) {
                sum += color;
            }
        }

        src.map.clear();
    }
};

struct cell {
    int val, next;
};

struct node {
    int color;
    int adj;
    long long sum;
};

cell list[2 * MAX_NODES];

```

```
node nd[MAX_NODES + 1];
int n;

void add_neighbor(int u, int v) {
    static int ptr = 1;
    list[ptr] = { v, nd[u].adj };
    nd[u].adj = ptr++;
}

void read_input_data() {
    scanf("%d", &n);

    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        scanf("%d", &nd[u].color);
    }

    for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
        int u, v;
        scanf("%d %d", &u, &v);
        add_neighbor(u, v);
        add_neighbor(v, u);
    }
}

freq_info dfs(int u) {
    freq_info result(nd[u].color);
    nd[u].color = 0; // previne recursia infinită

    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].val;
        if (nd[v].color) {
            freq_info f = dfs(v);
            result.absorb(f);
        }
    }

    nd[u].sum = result.sum;
    return result;
}

void write_output_data() {
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        printf("%lld ", nd[u].sum);
    }
    printf("\n");
}

int main() {
    read_input_data();
    dfs(1);
}
```

```

write_output_data();

return 0;
}

```

Sursă cu algoritmul lui Mo ([versiune online](#)).

```

#include <algorithm>
#include <math.h>
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 100'000;

struct list {
    int val, next;
};

struct node {
    int color, orig_pos;
    int start, finish;
    int ptr; // lista de adiacență
    long long sum;
};

struct accountant {
    int* color;
    int f[MAX_NODES + 1]; // frecvența fiecărei culori
    int c[MAX_NODES + 1]; // numărul de culori avînd fiecare frecvență
    long long s[MAX_NODES + 1]; // suma culorilor avînd fiecare frecvență
    int left, right, max_f;

    void init(int* color) {
        this->color = color;
        left = 1; right = 0; // gol
    }

    void change_frequency(int x, int delta) {
        c[f[x]]--;
        s[f[x]] -= x;
        f[x] += delta;
        c[f[x]]++;
        s[f[x]] += x;
    }

    void include(int x) {
        change_frequency(x, +1);
        if (f[x] > max_f) {
            max_f++;
        }
    }
}

```

```

}

void exclude(int x) {
    change_frequency(x, -1);
    if (!c[max_f]) {
        max_f--;
    }
}

long long query(int l, int r) {
    while (right < r) {
        include(color[++right]);
    }
    while (right > r) {
        exclude(color[right--]);
    }
    while (left < l) {
        exclude(color[left++]);
    }
    while (left > l) {
        include(color[--left]);
    }
    return s[max_f];
}
};

list adj[2 * MAX_NODES];
node n[MAX_NODES + 1];
int color[MAX_NODES + 1];
accountant acc;
int num_nodes, block_size;

void add_neighbor(int u, int v) {
    static int ptr = 1;
    adj[ptr] = { v, n[u].ptr };
    n[u].ptr = ptr++;
}

void read_input_data() {
    scanf("%d", &num_nodes);

    for (int u = 1; u <= num_nodes; u++) {
        scanf("%d", &n[u].color);
        n[u].orig_pos = u;
    }

    for (int i = 0; i < num_nodes - 1; i++) {
        int u, v;
        scanf("%d %d", &u, &v);
        add_neighbor(u, v);
    }
}

```



```

    add_neighbor(v, u);
}
}

void dfs(int u) {
    static int time = 0;

    n[u].start = ++time;
    color[time] = n[u].color;

    for (int ptr = n[u].ptr; ptr; ptr = adj[ptr].next) {
        int v = adj[ptr].val;
        if (!n[v].start) {
            dfs(v);
        }
    }

    n[u].finish = time;
}

void sort_in_mo_order() {
    std::sort(n + 1, n + num_nodes + 1, [](node& u, node& v) {
        int bu = u.start / block_size;
        int bv = v.start / block_size;
        if (bu != bv) {
            return bu < bv;
        } else if (bu % 2) {
            return u.finish < v.finish;
        } else {
            return u.finish > v.finish;
        }
    });
}

void sort_in_original_order() {
    std::sort(n + 1, n + num_nodes + 1, [](node& u, node& v) {
        return u.orig_pos < v.orig_pos;
    });
}

void process_queries() {
    block_size = sqrt(num_nodes);
    sort_in_mo_order();
    acc.init(color);
    for (int u = 1; u <= num_nodes; u++) {
        n[u].sum = acc.query(n[u].start, n[u].finish);
    }
    sort_in_original_order();
}

```

```
void write_output_data() {
    for (int u = 1; u <= num_nodes; u++) {
        printf("%lld ", n[u].sum);
    }
    printf("\n");
}

int main() {
    read_input_data();
    dfs(1);

    // acum fiecare nod este și o interogare [start, finish]
    process_queries();
    write_output_data();

    return 0;
}
```

---

## H.4 Problema Tokens on a Tree (CodeChef)

[◀ înapoi](#)

Sursă cu tehnica *small-to-large* și liste proprii ([versiune online](#)).

---

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 1'000'000;

struct cell {
    int f, prev, next;
};

cell list[MAX_NODES + 1];
int list_ptr;
long long total_moves;

void swap(int& x, int& y) {
    int tmp = x;
    x = y;
    y = tmp;
}

struct node {
    int parent, num_children;
    int head, tail, length;
    bool has_coin;

    void reset(bool has_coin) {
```

```

    this->has_coin = has_coin;
    num_children = head = tail = length = 0;
}

// Procesează un nod după ce toți fiii săi i-au transmis datele lor.
void process(node& par) {
    prepend_self();
    add_or_move_coin();
    trim();
    spill_into(par);
}

void prepend_self() {
    list[list_ptr].f = 0;
    list[list_ptr].prev = 0;
    list[list_ptr].next = head;
    if (head) {
        list[head].prev = list_ptr;
    } else {
        tail = list_ptr;
    }
    head = list_ptr++;
    length++;
}

void add_or_move_coin() {
    if (has_coin) {
        list[head].f = 1;
    } else if (list[tail].f) {
        list[head].f = 1;
        list[tail].f--;
        total_moves += length - 1;
    }
}

void trim() {
    while ((tail != head) && !list[tail].f) {
        tail = list[tail].prev;
        list[tail].next = 0;
        length--;
    }
}

void spill_into(node& other) {
    if (length > other.length) {
        swap_lists(other);
    }

    for (int p = head, q = other.head;
        p;

```

```
        p = list[p].next, q = list[q].next) {
        list[q].f += list[p].f;
    }
}

void swap_lists(node& other) {
    swap(head, other.head);
    swap(tail, other.tail);
    swap(length, other.length);
}

};

node nd[MAX_NODES + 1];
int n;

void read_input_data() {
    list_ptr = 1;

    scanf("%d ", &n);

    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        int c = getchar();
        nd[u].reset(c == '1');
    }

    for (int u = 2; u <= n; u++) {
        scanf("%d", &nd[u].parent);
        nd[nd[u].parent].num_children++;
    }
}

void traverse() {
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        int p = u;
        while (p && !nd[p].num_children) {
            nd[p].process(nd[nd[p].parent]);
            p = nd[p].parent;
            nd[p].num_children--;
        }
    }
}

void run_test() {
    read_input_data();
    total_moves = 0;
    traverse();
    printf("%lld\n", total_moves);
}

int main() {
```

```

int num_tests;
scanf("%d", &num_tests);
while (num_tests--) {
    run_test();
}

return 0;
}

```

Sursă cu tehnica *small-to-large* și liste STL ([versiune online](#)).

```

#include <list>
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 1'000'000;

long long total_moves;

void swap(int& x, int& y) {
    int tmp = x;
    x = y;
    y = tmp;
}

struct node {
    int parent, num_children;
    std::list<int> f; // numărul de monede la adîncimile 0, 1, ...
    bool has_coin;

    void reset(bool has_coin) {
        this->has_coin = has_coin;
        f.clear();
    }

    // Procesează un nod după ce toți fiii săi i-au transmis datele lor.
    void process(node& par) {
        prepend_self();
        trim();
        spill_into(par);
    }

    void prepend_self() {
        if (has_coin) {
            f.push_front(1);
        } else if (!f.empty() && f.back()) {
            f.push_front(1);
            f.back()--;
            total_moves += f.size() - 1;
        }
    }
}

```

```

    // altfel nu există monete în subarbore și nu adăugăm un element 0
}

void trim() {
    while (!f.empty() && !f.back()) {
        f.pop_back();
    }
}

void spill_into(node& other) {
    if (f.size() > other.f.size()) {
        f.swap(other.f);
    }

    for (auto it = f.begin(), other_it = other.f.begin();
         it != f.end();
         it++, other_it++) {
        *other_it += *it;
    }

    f.clear();
}

};

node nd[MAX_NODES + 1];
int n;

void read_input_data() {
    scanf("%d ", &n);

    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        int c = getchar();
        nd[u].reset(c == '1');
    }

    for (int u = 2; u <= n; u++) {
        scanf("%d", &nd[u].parent);
        nd[nd[u].parent].num_children++;
    }
}

void traverse() {
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        int p = u;
        while (p && !nd[p].num_children) {
            nd[p].process(nd[nd[p].parent]);
            p = nd[p].parent;
            nd[p].num_children--;
        }
    }
}

```

```

}

void run_test() {
    read_input_data();
    total_moves = 0;
    traverse();
    printf("%lld\n", total_moves);
}

int main() {
    int num_tests;
    scanf("%d", &num_tests);
    while (num_tests--) {
        run_test();
    }

    return 0;
}

```

Sursă cu liniarizare și RMQ ([versiune online](#)).

```

#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 1'000'000;
const int MAX_SEGTREE_NODES = 1 << 21;

struct cell {
    int v, next;
};

struct node {
    int adj;
    bool has_coin;
};

int max(int x, int y) {
    return (x > y) ? x : y;
}

int next_power_of_2(int n) {
    return 1 << (32 - __builtin_clz(n - 1));
}

struct segment_tree {
    int v[MAX_SEGTREE_NODES];
    int n;

    void init(int n) {
        this->n = next_power_of_2(n);
    }
}

```

```

    for (int i = 1; i < 2 * this->n; i++) {
        v[i] = 0;
    }
}

void set(int pos, int val) {
    pos += n;
    v[pos] = val;
    for (pos /= 2; pos; pos /= 2) {
        v[pos] = max(v[2 * pos], v[2 * pos + 1]);
    }
}

void optimize(int pos, int& max, int& best_pos) {
    if (v[pos] > max) {
        max = v[pos];
        best_pos = pos;
    }
}

void descend_and_erase(int pos) {
    while (pos < n) {
        pos = (v[pos] == v[2 * pos])
            ? (2 * pos)
            : (2 * pos + 1);
    }
    set(pos - n, 0);
}

// Returnează maximul din [l, r] și îl înlocuiește cu 0.
int erase_rmq(int l, int r) {
    int result = -1, pos = 0;

    l += n;
    r += n;

    while (l <= r) {
        if (l & 1) {
            optimize(l++, result, pos);
        }
        l >>= 1;

        if (!(r & 1)) {
            optimize(r--, result, pos);
        }
        r >>= 1;
    }

    // Coboară din pos într-o frunză care are aceeași valoare și șterge
    // valoarea.

```



```

    descend_and_erase(pos);

    return result;
}
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
segment_tree segtree;
int n, list_ptr, dfs_time;

void add_child(int u, int v) {
    list[list_ptr] = { v, nd[u].adj };
    nd[u].adj = list_ptr++;
}

void read_input_data() {
    scanf("%d ", &n);

    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        int c = getchar();
        nd[u].has_coin = (c == '1');
        nd[u].adj = 0; // null
    }

    list_ptr = 1;
    for (int u = 2; u <= n; u++) {
        int p;
        scanf("%d", &p);
        add_child(p, u);
    }
}

long long dfs(int u, int depth) {

    long long result = 0;
    int start = dfs_time++;

    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        result += dfs(list[ptr].v, depth + 1);
    }

    if (nd[u].has_coin) {
        segtree.set(start, depth);
    } else {
        int lowest_coin = segtree.erase_rmq(start, dfs_time - 1);
        if (lowest_coin) {
            segtree.set(start, depth);
            result += lowest_coin - depth;
        }
    }
}

```

```
}

return result;
}

void run_test() {
    read_input_data();
    segtree.init(n);
    dfs_time = 0;
    long long moves = dfs(1, 1);
    printf("%lld\n", moves);
}

int main() {
    int num_tests;
    scanf("%d", &num_tests);
    while (num_tests--) {
        run_test();
    }

    return 0;
}
```

## H.5 Problema Blood Cousins Return (Codeforces)

[◀ înapoi](#)

Sursă cu vectori de mulțimi ([versiune online](#)).

```
// Complexitate:  $O(n \log n)$ .
//
// Fiecare nod calculează un set de nume distincte la fiecare adîncime în
// subarborele său.
#include <iostream>
#include <unordered_map>
#include <set>
#include <string>
#include <vector>

const int MAX_NODES = 100'000;
const int MAX_QUERIES = 100'000;

struct query {
    int orig_index;
    int depth;
};

struct node {
```

```

std::vector<int> adj;
std::vector<query> queries;
int parent;
int name;
};

struct name_map {
    std::unordered_map<std::string, int> map;

    int insert_and_get_number(std::string s) {
        auto it = map.find(s);
        if (it == map.end()) {
            int result = map.size();
            map[s] = result;
            return result;
        } else {
            return it->second;
        }
    }
};

// Urmărește elementele distincte la fiecare adîncime. Adîncimea 0 (care
// conține doar nodul însuși) este ultimul element din vector.
struct dist {
    std::vector<std::set<int>> d;

    void absorb(dist other) {
        if (other.d.size() > d.size()) {
            d.swap(other.d);
        }
        int offset = d.size() - other.d.size();
        for (unsigned i = 0; i < other.d.size(); i++) {
            std::set<int>& us = d[i + offset];
            std::set<int>& them = other.d[i];
            if (them.size() > us.size()) {
                us.swap(them);
            }
            us.merge(them);
            them.clear();
        }
    }

    void prepend(int name) {
        d.push_back({name});
    }

    int count_distinct(unsigned depth) {
        if (depth < d.size()) {
            return d[d.size() - 1 - depth].size();
        } else {

```

```

        return 0;
    }
}
};

node nd[MAX_NODES + 1]; // Vom folosi nodul 0 ca pe un strămoș comun fals.
int sol[MAX_QUERIES];
int n, q;

void read_tree() {
    name_map map;

    std::cin >> n;
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        std::string name;
        std::cin >> name >> nd[u].parent;
        nd[nd[u].parent].adj.push_back(u);
        nd[u].name = map.insert_and_get_number(name);
    }
}

void read_queries() {
    std::cin >> q;
    for (int i = 0; i < q; i++) {
        int u, depth;
        std::cin >> u >> depth;
        nd[u].queries.push_back({i, depth});
    }
}

dist dfs(int u) {
    dist result;
    for (int v: nd[u].adj) {
        result.absorb(dfs(v));
    }
    result.prepend(nd[u].name);

    for (query q: nd[u].queries) {
        sol[q.orig_index] = result.count_distinct(q.depth);
    }
    return result;
}

void write_answers() {
    for (int i = 0; i < q; i++) {
        std::cout << sol[i] << '\n';
    }
}

int main() {

```

```

read_tree();
read_queries();
dfs(0);
write_answers();

return 0;
}

```

Sursă cu liniarizare ([versiune online](#)).

```

// 1. Mapează numele la numere ca de obicei.
// 2. Rulează un DFS pentru a calcula adâncimile și timpii de intrare/ieșire.
// 3. Rescrie fiecare interogare ca <u,d> ca „interoghează nodurile de nivel
//    depth[u] + d descoperite de DFS între timpii [t_i[u], t_o[u]]”.
// 4. Ordonează interogările după adâncime, apoi după t_o.
// 5. Calculează ordinea BFS. Fiecare interogare corespunde unui interval
//    contiguu în această ordonare.
// 6. Răspunde la intrerogări folosind un AIB ca în problema D-query.
#include <algorithm>
#include <stdio.h>
#include <unordered_map>
#include <string>
#include <vector>

const int MAX_NODES = 100'000;
const int MAX_QUERIES = 100'000;
const int MAX_NAME_LENGTH = 20;

struct node {
    std::vector<int> children;
    int name;
    int tin, tout;
    int depth;
};

struct name_map {
    std::unordered_map<std::string, int> map;

    int insert_and_get_number(char* s) {
        std::string str(s);
        auto it = map.find(str);
        if (it == map.end()) {
            int result = map.size();
            map[str] = result;
            return result;
        } else {
            return it->second;
        }
    }
}

```

```
};

struct query {
    int orig_index;
    int depth;
    int tin, tout;
};

struct fenwick_tree {
    int v[MAX_NODES + 1];
    int last[MAX_NODES + 1];
    int n;

    void init(int n) {
        this->n = n;
    }

    void add(int pos, int delta) {
        do {
            v[pos] += delta;
            pos += pos & -pos;
        } while (pos <= n);
    }

    void set(int pos, int name) {
        if (last[name]) {
            add(last[name], -1);
        }
        add(pos, +1);
        last[name] = pos;
    }

    int prefix_sum(int pos) {
        int sum = 0;
        while (pos) {
            sum += v[pos];
            pos &= pos - 1;
        }
        return sum;
    }

    int range_sum(int l, int r) {
        return prefix_sum(r) - prefix_sum(l - 1);
    }
};

node nd[MAX_NODES + 1];
int bfs[MAX_NODES + 1];
query q[MAX_QUERIES];
int sol[MAX_QUERIES];
```

```

fenwick_tree fen;
int n, num_queries;

void read_tree() {
    name_map map;
    char name[MAX_NAME_LENGTH + 1];
    int parent;

    scanf("%d", &n);
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        scanf("%s %d", name, &parent);
        nd[u].name = map.insert_and_get_number(name);
        nd[parent].children.push_back(u);
    }
}

void dfs(int u) {
    static int time = 0;
    nd[u].tin = time++;

    for (int v: nd[u].children) {
        nd[v].depth = 1 + nd[u].depth;
        dfs(v);
    }

    nd[u].tout = time - 1;
}

void read_queries() {
    scanf("%d", &num_queries);

    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        int u, depth;
        scanf("%d %d", &u, &depth);
        q[i] = { i, nd[u].depth + depth, nd[u].tin, nd[u].tout };
    }
}

void sort_queries() {
    std::sort(q, q + num_queries, [](query& a, query& b) {
        return (a.depth < b.depth) ||
            ((a.depth == b.depth) && (a.tout < b.tout));
    });
}

void breadth_first_search() {
    int head = 0, tail = 0;
    bfs[tail++] = 0; // pune rădăcina în coadă

    while (head != tail) {

```

```

    int u = bfs[head++];
    for (int v: nd[u].children) {
        bfs[tail++] = v;
    }
}

bool query_ends_at(query& q, int k) {
    if (k == n) {
        return true;
    }

    node& u = nd[bfs[k + 1]]; // următorul în BFS
    return (u.depth > q.depth) || ((u.depth == q.depth) && (u.tout > q.tout));
}

// Unde începe această interogare? Caută cel mai din stînga nod din BFS la
// adîncimea q.depth și cu timpul DFS cel puțin q.tin.
int bin_search(query& q, int end) {
    int l = 0, r = end; // (r, l]
    while (r - l > 1) {
        int mid = (r + l) / 2;
        int v = bfs[mid];
        if ((nd[v].depth < q.depth) ||
            (nd[v].tin < q.tin)) {
            l = mid;
        } else {
            r = mid;
        }
    }

    int v = bfs[r];
    return (nd[v].depth == q.depth) && (nd[v].tin >= q.tin)
        ? r
        : (end + 1);
}

void answer_queries_ending_at(int k) {
    static int i = 0;
    while ((i < num_queries) && query_ends_at(q[i], k)) {
        int start = bin_search(q[i], k);
        sol[q[i].orig_index] = fen.range_sum(start, k);
        i++;
    }
}

void answer_queries() {
    fen.init(n);

    for (int i = 1; i <= n; i++) {

```



```

    int v = bfs[i];
    fen.set(i, nd[v].name);
    answer_queries_ending_at(i);
}
}

void write_answers() {
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        printf("%d\n", sol[i]);
    }
}

int main() {
    read_tree();
    dfs(0);
    breadth_first_search();
    read_queries();
    sort_queries();
    breadth_first_search();
    answer_queries();
    write_answers();

    return 0;
}

```

## H.6 Problema Tree and Queries (Codeforces)

◀ înapoi

Sursă cu PBDS ([versiune online](#)).

```

// Small-to-large relativ brut. Fiecare nod stochează informații despre
// subarbore:
//
// 1. Un map de culoare => frecvență.
// 2. Un multiset doar cu frecvențele.
//
// Folosim STL cu larghețe pentru un cod cît mai lent.
#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
#include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
#include <iostream>
#include <map>
#include <vector>

// Multiseturile PBDS sînt obscene, dar par să meargă. Ștergerile necesită cod
// extra. Vezi https://stackoverflow.com/q/59731946/6022817
typedef __gnu_pbds::tree<
    int,

```

```
__gnu_pbds::null_type,  
std::less_equal<int>,  
__gnu_pbds::rb_tree_tag,  
__gnu_pbds::tree_order_statistics_node_update  
> multiset;  
  
const int MAX_NODES = 100'000;  
const int MAX_QUERIES = 100'000;  
  
struct query {  
    int orig_index;  
    int min_freq;  
};  
  
struct node {  
    int color;  
    std::vector<int> adj;  
    std::vector<query> q;  
};  
  
struct freq_info {  
    std::map<int, int> f;  
    multiset sorted_f;  
  
    freq_info(int color) {  
        f.insert({color, 1});  
        sorted_f.insert(1);  
    }  
  
    void update_frequency(int color, int cnt) {  
        int new_freq;  
        auto it = f.find(color);  
        if (it != f.end()) {  
            int old_freq = it->second;  
            int rank = sorted_f.order_of_key(old_freq);  
            multiset::iterator to_erase = sorted_f.find_by_order(rank);  
            sorted_f.erase(to_erase);  
            it->second += cnt;  
            new_freq = it->second;  
        } else {  
            f.insert({color, cnt});  
            new_freq = cnt;  
        }  
        sorted_f.insert(new_freq);  
    }  
  
    void absorb(freq_info& other) {  
        if (other.f.size() > f.size()) {  
            f.swap(other.f);  
            sorted_f.swap(other.sorted_f);  
        }  
    }  
};
```

```

    }
    for (auto [color, cnt]: other.f) {
        update_frequency(color, cnt);
    }
    other.f.clear();
    other.sorted_f.clear();
}

int count_freq_gte(int min_freq) {
    return f.size() - sorted_f.order_of_key(min_freq);
}
};

node nd[MAX_NODES + 1];
int sol[MAX_QUERIES];
int n, q;

void read_data() {
    std::cin >> n >> q;
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        std::cin >> nd[u].color;
    }
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        int u, v;
        std::cin >> u >> v;
        nd[u].adj.push_back(v);
        nd[v].adj.push_back(u);
    }
    for (int i = 0; i < q; i++) {
        int u, min_freq;
        std::cin >> u >> min_freq;
        nd[u].q.push_back({i, min_freq});
    }
}

freq_info dfs(int u) {
    freq_info result(nd[u].color);
    nd[u].color = 0; // previne revizitarea fără a necesita un argument în plus

    for (int v: nd[u].adj) {
        if (nd[v].color) {
            freq_info fi = dfs(v);
            result.absorb(fi);
        }
    }

    for (query q: nd[u].q) {
        sol[q.orig_index] = result.count_freq_gte(q.min_freq);
    }
}

```

```
    return result;
}

void write_solution() {
    for (int i = 0; i < q; i++) {
        std::cout << sol[i] << '\n';
    }
}

int main() {
    read_data();
    dfs(1);
    write_solution();

    return 0;
}
```

---

Sursă cu DFS cu acces exclusiv ([versiune online](#)).

---

```
// Small-to-large eficient. Rescris după
// https://codeforces.com/contest/375/submission/5508178
//
// Folosește o singură structură de date globală conținând:
//
// 1. Frecvența fiecărei culori.
// 2. Frecvențele frecvențelor („cîte culori au frecvența f?").
// 3. Un AIB peste (2) care permite sume pe sufix.
//
// Funcționarea DFS-ului îi garantează fiecărui nod un moment cînd structura
// conține doar informații despre subarborele nodului.
#include <stdio.h>
#include <vector>

const int MAX_NODES = 100'000;
const int MAX_COLORS = 100'000;
const int MAX_QUERIES = 100'000;

struct fenwick_tree {
    int v[MAX_NODES + 1];
    int total;
    int n;

    void init(int n) {
        this->n = n;
    }

    void add(int pos, int val) {
        if (pos) {
            total += val;
        }
    }
}
```

```

    do {
        v[pos] += val;
        pos += pos & -pos;
    } while (pos <= n);
}

}

int sum(int pos) {
    int s = 0;
    while (pos) {
        s += v[pos];
        pos &= pos - 1;
    }
    return s;
}

int suffix_sum(int pos) {
    return (pos > n)
        ? 0
        : (total - sum(pos - 1));
}
};

struct query {
    int orig_index;
    int min_freq;
};

struct node {
    int color;
    int heavy;
    std::vector<int> adj;
    std::vector<query> q;
};

node nd[MAX_NODES + 1];
int freq[MAX_COLORS + 1];
fenwick_tree fen;
int sol[MAX_QUERIES];
int n, q;

void read_data() {
    scanf("%d %d", &n, &q);
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        scanf("%d", &nd[u].color);
    }
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        int u, v;
        scanf("%d %d", &u, &v);
        nd[u].adj.push_back(v);
    }
}

```

```

    nd[v].adj.push_back(u);
}
for (int i = 0; i < q; i++) {
    int u, min_freq;
    scanf("%d %d", &u, &min_freq);
    nd[u].q.push_back({i, min_freq});
}
}

// Calculează fiul heavy al fiecărui nod. Șterge părintele nodului din lista
// de adiacență. Returnează mărimea subarborelui.
int size_dfs(int u, int parent) {
    int size = 1, max_c_size = 0;

    unsigned i = 0;
    while (i < nd[u].adj.size()) {
        int v = nd[u].adj[i];
        if (v == parent) {
            nd[u].adj[i] = nd[u].adj.back();
            nd[u].adj.pop_back();
        } else {
            int c = size_dfs(v, u);
            size += c;
            if (!nd[u].heavy || (c > max_c_size)) {
                nd[u].heavy = v;
                max_c_size = c;
            }
            i++;
        }
    }

    return size;
}

void change_freq(int color, int delta) {
    fen.add(freq[color], -1);
    freq[color] += delta;
    fen.add(freq[color], +1);
}

void toggle_subtree(int u, int delta) {
    change_freq(nd[u].color, delta);
    for (int v: nd[u].adj) {
        toggle_subtree(v, delta);
    }
}

void dfs(int u) {
    for (int v: nd[u].adj) {
        if (v != nd[u].heavy) {

```

```

        dfs(v);
        toggle_subtree(v, -1);
    }
}

if (nd[u].heavy) {
    dfs(nd[u].heavy);
}

for (int v: nd[u].adj) {
    if (v != nd[u].heavy) {
        toggle_subtree(v, +1);
    }
}

change_freq(nd[u].color, +1);

for (query q: nd[u].q) {
    sol[q.orig_index] = fen.suffix_sum(q.min_freq);
}
}

void write_solution() {
    for (int i = 0; i < q; i++) {
        printf("%d\n", sol[i]);
    }
}

int main() {
    read_data();
    size_dfs(1, 0);
    fen.init(n);
    dfs(1);
    write_solution();

    return 0;
}

```

# Anexa I

## Cel mai apropiat strămoș comun

### I.1 LCA cu descompunere în radical

[◀ înapoi](#)

```
#include <math.h>
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 500'000;

struct cell {
    int v, next;
};

struct node {
    int adj;
    int depth;
    // Fiecare nod stochează doi pointeri la strămoși: unul la părinte, altul cu
    // sqrt(n) niveluri mai sus.
    int parent;
    int jump;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int st[MAX_NODES + 1];    // stivă DFS pentru construcția pointerilor
int n, jump_distance;

void add_edge(int u, int v) {
    static int pos = 1;
    list[pos] = { v, nd[u].adj };
    nd[u].adj = pos++;
}

void read_input_data() {
```



```

scanf("%d", &n);
jump_distance = sqrt(n);

for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    int u, v;
    scanf("%d %d", &u, &v);
    add_edge(u, v);
    add_edge(v, u);
}
}

// Traversează arborele și calculează părinții, adâncimile și jump pointers.
void dfs(int u) {
    st[nd[u].depth] = u; // Stiva reține nodurile gri.
    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        if (!nd[v].depth) {
            nd[v].depth = 1 + nd[u].depth;
            nd[v].parent = u;
            nd[v].jump = (nd[v].depth > jump_distance)
                ? st[nd[v].depth - jump_distance]
                : 0;
            dfs(v);
        }
    }
}

int sqrt_lca(int u, int v) {
    if (nd[v].depth > nd[u].depth) {
        int tmp = u; u = v; v = tmp;
    }

    // Întii adu-le la același nivel.
    while (nd[u].depth - jump_distance >= nd[v].depth) {
        u = nd[u].jump;
    }
    while (nd[u].depth > nd[v].depth) {
        u = nd[u].parent;
    }

    // Urcă blocuri întregi.
    while ((nd[u].depth >= jump_distance) && (nd[u].jump != nd[v].jump)) {
        u = nd[u].jump;
        v = nd[v].jump;
    }

    // Urcă nivel cu nivel.
    while (u != v) {
        u = nd[u].parent;
        v = nd[v].parent;
    }
}

```

```
}
return u;
}

void answer_queries() {
    int num_queries, u, v;
    scanf("%d", &num_queries);
    while (num_queries--) {
        scanf("%d %d", &u, &v);
        printf("%d\n", sqrt_lca(u, v));
    }
}

int main() {
    read_input_data();
    nd[1].depth = 1;
    dfs(1);
    answer_queries();

    return 0;
}
```

---

## I.2 LCA cu binary lifting ( $\log n$ pointeri per nod)

[◀ înapoi](#)

Implementare cu urcare în paralel.

---

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 500'000;
const int MAX_LOG = 19;

struct cell {
    int v, next;
};

struct node {
    int adj;
    int depth;
    int jump[MAX_LOG];
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int n, log_2;

void add_edge(int u, int v) {
```

```

static int pos = 1;
list[pos] = { v, nd[u].adj };
nd[u].adj = pos++;
}

void read_input_data() {
    scanf("%d", &n);
    log_2 = 31 - __builtin_clz(n);

    for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
        int u, v;
        scanf("%d %d", &u, &v);
        add_edge(u, v);
        add_edge(v, u);
    }
}

// Traversează arborele și calculează adîncimile și jump pointers.
void dfs(int u, int parent) {
    nd[u].depth = 1 + nd[parent].depth;
    nd[u].jump[0] = parent;
    for (int i = 0; i < log_2; i++) {
        nd[u].jump[i + 1] = nd[nd[u].jump[i]].jump[i];
    }

    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        if (v != parent) {
            dfs(v, u);
        }
    }
}

int lca(int u, int v) {
    if (nd[v].depth > nd[u].depth) {
        int tmp = u; u = v; v = tmp;
    }

    // Adu u și v la aceeași adîncime. Compară d[u] și d[v] bit cu bit.
    int pow = 0;
    while (nd[u].depth > nd[v].depth) {
        if ((nd[u].depth & (1 << pow)) != (nd[v].depth & (1 << pow))) {
            u = nd[u].jump[pow];
        }
        pow++;
    }

    if (u == v) {
        return u;
    } else {

```

```
    for (int i = log_2; i >= 0; i--) {
        if (nd[u].jump[i] != nd[v].jump[i]) {
            u = nd[u].jump[i];
            v = nd[v].jump[i];
        }
    }

    return nd[u].jump[0];
}

void answer_queries() {
    int num_queries, u, v;
    scanf("%d", &num_queries);
    while (num_queries--) {
        scanf("%d %d", &u, &v);
        printf("%d\n", lca(u, v));
    }
}

int main() {
    read_input_data();
    dfs(1, 0);
    answer_queries();

    return 0;
}
```

Implementare cu test de strămoș.

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 500'000;
const int MAX_LOG = 19;

struct cell {
    int v, next;
};

struct node {
    int adj;
    int time_in, time_out;
    int jump[MAX_LOG];
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int n, log_2;
```

```

void add_edge(int u, int v) {
    static int pos = 1;
    list[pos] = { v, nd[u].adj };
    nd[u].adj = pos++;
}

void read_input_data() {
    scanf("%d", &n);
    log_2 = 31 - __builtin_clz(n);

    for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
        int u, v;
        scanf("%d %d", &u, &v);
        add_edge(u, v);
        add_edge(v, u);
    }
}

// Traversează arborele și calculează timpii de intrare în noduri și jump
// pointers.
void dfs(int u, int parent) {
    static int time = 0;
    nd[u].time_in = time++;

    nd[u].jump[0] = parent;
    for (int i = 0; i < log_2; i++) {
        nd[u].jump[i + 1] = nd[nd[u].jump[i]].jump[i];
    }

    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        if (v != parent) {
            dfs(v, u);
        }
    }

    nd[u].time_out = time++;
}

bool is_ancestor(int u, int v) {
    return
        (nd[u].time_in <= nd[v].time_in) &&
        (nd[u].time_out >= nd[v].time_out);
}

int lca(int u, int v) {
    if (is_ancestor(u, v)) {
        return u;
    }
}

```

```
// Găsește cel mai de sus strămoș al lui u care *nu* este strămoș al lui v.
for (int i = log_2; i >= 0; i--) {
    if (nd[u].jump[i] && !is_ancestor(nd[u].jump[i], v)) {
        u = nd[u].jump[i];
    }
}

// Acum părintele lui u este strămoș al lui v.
return nd[u].jump[0];
}

void answer_queries() {
    int num_queries, u, v;
    scanf("%d", &num_queries);
    while (num_queries--) {
        scanf("%d %d", &u, &v);
        printf("%d\n", lca(u, v));
    }
}

int main() {
    read_input_data();
    dfs(1, 0);
    answer_queries();

    return 0;
}
```

---

## I.3 LCA cu binary lifting (2 pointeri per nod)

[◀ înapoi](#)

Implementare cu urcare în paralel.

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 500'000;

struct cell {
    int v, next;
};

struct node {
    int adj;
    int depth;
    int parent;
    int jump;
};
```

```

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int n;

void add_edge(int u, int v) {
    static int pos = 1;
    list[pos] = { v, nd[u].adj };
    nd[u].adj = pos++;
}

void read_input_data() {
    scanf("%d", &n);

    for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
        int u, v;
        scanf("%d %d", &u, &v);
        add_edge(u, v);
        add_edge(v, u);
    }
}

// Traversează arborele și calculează părinții, adâncimile și jump pointers.
void dfs(int u) {

    int u2 = nd[u].jump, u3 = nd[u2].jump;
    bool equal = (nd[u2].depth - nd[u].depth == nd[u3].depth - nd[u2].depth);

    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        if (!nd[v].depth) {
            nd[v].depth = 1 + nd[u].depth;
            nd[v].parent = u;
            nd[v].jump = equal ? u3 : u;
            dfs(v);
        }
    }
}

int two_ptr_lca(int u, int v) {
    if (nd[v].depth > nd[u].depth) {
        int tmp = u; u = v; v = tmp;
    }

    // Întii adu-le la același nivel.
    while (nd[u].depth > nd[v].depth) {
        u = (nd[nd[u].jump].depth >= nd[v].depth) ? nd[u].jump : nd[u].parent;
    }

    while (u != v) {

```

```
    if (nd[u].jump != nd[v].jump) {
        u = nd[u].jump;
        v = nd[v].jump;
    } else {
        u = nd[u].parent;
        v = nd[v].parent;
    }
}
return u;
}

void answer_queries() {
    int num_queries, u, v;
    scanf("%d", &num_queries);
    while (num_queries--) {
        scanf("%d %d", &u, &v);
        printf("%d\n", two_ptr_lca(u, v));
    }
}

int main() {
    read_input_data();
    nd[1].depth = 1;
    dfs(1);
    answer_queries();

    return 0;
}
```

---

Implementare cu test de strămoș.

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 500'000;

struct cell {
    int v, next;
};

struct node {
    int adj;
    int depth;
    int time_in, time_out;
    int parent;
    int jump;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
```



```

int n;

void add_edge(int u, int v) {
    static int pos = 1;
    list[pos] = { v, nd[u].adj };
    nd[u].adj = pos++;
}

void read_input_data() {
    scanf("%d", &n);

    for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
        int u, v;
        scanf("%d %d", &u, &v);
        add_edge(u, v);
        add_edge(v, u);
    }
}

// Traversează arborele și calculează părinții, adâncimile și jump pointers.
void dfs(int u) {
    static int time = 1;
    nd[u].time_in = time++;

    int u2 = nd[u].jump, u3 = nd[u2].jump;
    bool equal = (nd[u2].depth - nd[u].depth == nd[u3].depth - nd[u2].depth);

    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        if (!nd[v].depth) {
            nd[v].depth = 1 + nd[u].depth;
            nd[v].parent = u;
            nd[v].jump = equal ? u3 : u;
            dfs(v);
        }
    }

    nd[u].time_out = time++;
}

bool is_ancestor(int u, int v) {
    return
        (nd[u].time_in <= nd[v].time_in) &&
        (nd[u].time_out >= nd[v].time_out);
}

int two_ptr_lca(int u, int v) {
    // Găsește cel mai jos strămoș al lui u care este și strămoș al lui v.
    while (!is_ancestor(u, v)) {
        if (nd[u].jump && !is_ancestor(nd[u].jump, v)) {

```

```
        u = nd[u].jump;
    } else {
        u = nd[u].parent;
    }
}

return u;
}

void answer_queries() {
    int num_queries, u, v;
    scanf("%d", &num_queries);
    while (num_queries--) {
        scanf("%d %d", &u, &v);
        printf("%d\n", two_ptr_lca(u, v));
    }
}

int main() {
    read_input_data();
    nd[1].depth = 1;
    dfs(1);
    answer_queries();

    return 0;
}
```

---

Implementare cu formula LSB și urcare în paralel.

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 500'000;

struct cell {
    int v, next;
};

struct node {
    int adj;
    int depth;
    // Fiecare nod stochează doi pointeri la strămoși: unul la părinte, altul cu
    // LSB(adîncime) niveluri mai sus, similar unui arbore Fenwick.
    int parent;
    int jump;
};

cell list[2 * MAX_NODES];
node nd[MAX_NODES + 1];
int st[MAX_NODES + 1]; // stivă DFS pentru construcția pointerilor
```

```

int n;

void add_edge(int u, int v) {
    static int pos = 1;
    list[pos] = { v, nd[u].adj };
    nd[u].adj = pos++;
}

void read_input_data() {
    scanf("%d", &n);

    for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
        int u, v;
        scanf("%d %d", &u, &v);
        add_edge(u, v);
        add_edge(v, u);
    }
}

// Traversează arborele și calculează părinții, adîncimile și jump pointers.
void dfs(int u) {
    st[nd[u].depth] = u; // Stiva reține nodurile gri.

    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        if (!nd[v].depth) {
            nd[v].depth = 1 + nd[u].depth;
            nd[v].parent = u;
            nd[v].jump = st[nd[v].depth & (nd[v].depth - 1)];
            dfs(v);
        }
    }
}

int two_ptr_lca(int u, int v) {
    if (nd[v].depth > nd[u].depth) {
        int tmp = u; u = v; v = tmp;
    }

    // Întii adu-le la același nivel.
    while (nd[u].depth > nd[v].depth) {
        u = (nd[nd[u].jump].depth >= nd[v].depth) ? nd[u].jump : nd[u].parent;
    }

    while (u != v) {
        if (nd[u].jump != nd[v].jump) {
            u = nd[u].jump;
            v = nd[v].jump;
        } else {
            u = nd[u].parent;
        }
    }
}

```

```
        v = nd[v].parent;
    }
}
return u;
}

void answer_queries() {
    int num_queries, u, v;
    scanf("%d", &num_queries);
    while (num_queries--) {
        scanf("%d %d", &u, &v);
        printf("%d\n", two_ptr_lca(u, v));
    }
}

int main() {
    read_input_data();
    nd[1].depth = 1;
    dfs(1);
    answer_queries();

    return 0;
}
```

---

## I.4 LCA cu algoritmul lui Tarjan (offline)

[◀ înapoi](#)

Implementarea folosește STL, ca să ne putem concentra pe algoritm. Vă reamintesc însă că arborii scriși cu STL sînt de două ori mai lenți și consumă dublul memoriei.

```
#include <stdio.h>
#include <vector>

const int MAX_NODES = 500'000;
const int MAX_QUERIES = 500'000;

struct disjoint_set_forest {
    int p[MAX_NODES + 1];

    void init(int n) {
        for (int u = 1; u <= n; u++) {
            p[u] = u;
        }
    }

    int find(int u) {
        return (p[u] == u)
    }
}
```

```

    ? u
    : (p[u] = find(p[u]));
}

// Întotdeauna îl leagă pe v de u. Fără *union by rank*.
void unite(int u, int v) {
    p[find(v)] = find(u);
}

};

struct node {
    std::vector<int> adj, queries;
    bool visited;
};

struct query {
    int u, v, lca;
};

node nd[MAX_NODES + 1];
query q[MAX_QUERIES];
disjoint_set_forest dsf;
int n, num_queries;

void read_input_data() {
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
        int u, v;
        scanf("%d %d", &u, &v);
        nd[u].adj.push_back(v);
        nd[v].adj.push_back(u);
    }

    scanf("%d", &num_queries);
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        scanf("%d %d", &q[i].u, &q[i].v);
        nd[q[i].u].queries.push_back(i);
        nd[q[i].v].queries.push_back(i);
    }
}

void offline_lca(int u) {
    nd[u].visited = true;

    for (int v: nd[u].adj) {
        if (!nd[v].visited) {
            offline_lca(v);
            dsf.unite(u, v);
        }
    }
}

```

```
for (int i: nd[u].queries) {
    int v = (q[i].u == u) ? q[i].v : q[i].u;
    if (nd[v].visited) {
        q[i].lca = dsf.find(v);
    }
}
}

void answer_queries() {
    for (int i = 0; i < num_queries; i++) {
        printf("%d\n", q[i].lca);
    }
}

int main() {
    read_input_data();
    dsf.init(n);
    offline_lca(1);
    answer_queries();

    return 0;
}
```

---

# Anexa J

## Probleme diverse

### J.1 Problema Liars (Baraj ONI 2025)

[◀ înapoi](#) • [versiune online](#)

```
#include <stdio.h>

const int MAX_NODES = 5'000;
const int MOD = 666'013;

const int ANY = -1;
const int LIAR = 0;
const int TRUTH_TELLER = 1;

// Combinații posibile pentru nodul curent × părintele
const int LIAR_P_LIAR = 0;
const int LIAR_P_TT = 1;
const int TT_P_LIAR = 2;
const int TT_P_TT = 3;

struct cell {
    int v, next;
};

struct node {
    int adj;
    int num_children;
    int resp;           // numărul de vecini mincinoși declarați de u
    int assignment;    // valoarea asignată lui u în soluția construită
    int ways[4];       // În câte moduri putem fixa calitatea nodului și a părintelui?
};

node nd[MAX_NODES + 1];
cell list[2 * MAX_NODES];
int n;
```

```

// Vectorul pentru combinatorică. Ne ajunge unul singur, căci îl completăm în
// fiecare nod după ce procesăm fiii. a[i] = numărul de moduri de a avea i fii
// mincinoși. Calitatea părintelui este fixată în momentul apelului. Din
// fiecare fiu vom folosi cîmpurile ways[LIAR_P_LIAR] și ways[TT_P_LIAR]
// pentru a fixa părintele ca mincinos, respectiv ways[LIAR_P_TT] și
// ways[TT_P_TT] pentru a fixa părintele ca sincer.
//
// Îl îmbrăcăm într-un struct ca să oferim funcții getter pentru indici
// incorecți.
struct combo {
    long long a[MAX_NODES + 1];
    int curr_node;

    void merge_children(int u, int parent, int c_liar, int c_tt) {
        curr_node = u;

        // Înainte de a procesa fiii, avem un singur mod de a avea 0 mincinoși.
        a[0] = 1;
        int i = 0;

        for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
            int v = list[ptr].v;
            if (v != parent) {
                i++;
                // Toți fiii sînt mincinoși.
                a[i] = a[i - 1] * nd[v].ways[c_liar] % MOD;

                for (int j = i - 1; j; j--) {
                    // Aveam deja j mincinoși și adăugăm un sincer...
                    long long gain_tt = a[j] * nd[v].ways[c_tt];
                    // ... sau aveam j - 1 mincinoși și adăugăm un mincinos.
                    long long gain_liar = a[j - 1] * nd[v].ways[c_liar];
                    a[j] = (gain_tt + gain_liar) % MOD;
                }

                // Toți fiii sînt sinceri.
                a[0] = a[0] * nd[v].ways[c_tt] % MOD;
            }
        }
    }

    int get_sum() {
        long long result = 0;
        for (int i = 0; i <= nd[curr_node].num_children; i++) {
            result += a[i];
        }
        return result % MOD;
    }
}

```



```

int get(int k) {
    if ((k >= 0) && (k <= nd[curr_node].num_children)) {
        return a[k];
    } else {
        return 0;
    }
}

};

combo c;

void add_edge(int u, int v) {
    static int ptr = 1;
    list[ptr] = { v, nd[u].adj };
    nd[u].adj = ptr++;
    nd[u].num_children++;
}

void read_data() {
    FILE* f = fopen("liars.in", "r");
    fscanf(f, "%d", &n);
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        fscanf(f, "%d", &nd[u].resp);
    }
    for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
        int u, v;
        fscanf(f, "%d %d", &u, &v);
        add_edge(u, v);
        add_edge(v, u);
    }
    fclose(f);

    for (int u = 2; u <= n; u++) {
        nd[u].num_children--; // toate nodurile în afară de 1 au un părinte
    }
}

void count_dfs(int u, int parent) {
    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        if (v != parent) {
            count_dfs(v, u);
        }
    }
}

int r = nd[u].resp;
// Cazul I: u este sincer.
c.merge_children(u, parent, LIAR_P_TT, TT_P_TT);

// Dacă și părintele este sincer, cei r mincinoși se află printre

```

```

// fii.
nd[u].ways[TT_P_TT] = c.get(r);

// Dacă părintele este mincinos, ceilalți r - 1 mincinoși se află
// printre fii.
nd[u].ways[TT_P_LIAR] = c.get(r - 1);

// Cazul II: u este mincinos.
c.merge_children(u, parent, LIAR_P_LIAR, TT_P_LIAR);
int sum = c.get_sum();

// Dacă părintele este sincer, u trebuie să aibă orice în afară de r
// mincinoși printre fii.
nd[u].ways[LIAR_P_TT] = (sum + MOD - c.get(r)) % MOD;

// Dacă și părintele este mincinos, u trebuie să aibă orice în afară de
// r - 1 mincinoși printre fii.
nd[u].ways[LIAR_P_LIAR] = (sum + MOD - c.get(r - 1)) % MOD;
}

// Atribuire toți fiii impuși.
int assign_forced(int u, int parent) {
    int c_liar = (nd[u].assignment == LIAR) ? LIAR_P_LIAR : LIAR_P_TT;
    int c_tt = (nd[u].assignment == LIAR) ? TT_P_LIAR : TT_P_TT;
    int num_assigned = 0;

    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        if (v != parent) {
            if (!nd[v].ways[c_liar]) {
                nd[v].assignment = TRUTH_TELLER;
            } else if (!nd[v].ways[c_tt]) {
                nd[v].assignment = LIAR;
                num_assigned++;
            } else {
                nd[v].assignment = ANY;
            }
        }
    }
}

return num_assigned;
}

void assign_optional(int u, int parent, int liars_left) {
    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        if (nd[v].assignment == ANY) {
            if (liars_left) {
                nd[v].assignment = LIAR;
                liars_left--;
            }
        }
    }
}

```

```

    } else {
        nd[v].assignment = TRUTH_TELLER;
    }
}
}
}

// Atribuie valori fiilor lui u. Nodul lui u are deja valoare. Bug: dacă
// numărul de posibilități este 0 modulo MOD, el va fi considerat incorect ca
// fiind 0.
void assign_dfs(int u, int parent) {
    int assigned_liars = assign_forced(u, parent);
    // Și părintele poate minți (ce familie de cacao).
    assigned_liars += parent && (nd[parent].assignment == LIAR);

    int liars_left;
    if (nd[u].assignment == TRUTH_TELLER) {
        liars_left = nd[u].resp - assigned_liars;
    } else if (assigned_liars == nd[u].resp) {
        liars_left = 1; // Nu ne putem opri acum, căci u spune adevărul.
    } else {
        liars_left = 0;
    }

    assign_optional(u, parent, liars_left);

    for (int ptr = nd[u].adj; ptr; ptr = list[ptr].next) {
        int v = list[ptr].v;
        if (v != parent) {
            assign_dfs(v, u);
        }
    }
}

void write_answer() {
    FILE* f = fopen("liars.out", "w");
    int ans = (nd[1].ways[LIAR_P_TT] + nd[1].ways[TT_P_TT]) % MOD;
    fprintf(f, "%d\n", ans);
    for (int u = 1; u <= n; u++) {
        fprintf(f, "%d ", nd[u].assignment);
    }
    fprintf(f, "\n");
    fclose(f);
}

int main() {
    read_data();
    count_dfs(1, 0);
    nd[1].assignment = nd[1].ways[TT_P_TT] ? TRUTH_TELLER : LIAR;
    assign_dfs(1, 0);
}

```

```
write_answer();  
  
return 0;  
}
```

---