# Calea minimă dintre două vârfuri la grafuri orientate

June 5, 2018

Student: Anghel Florina-Cătălina

Grupa: CR1.1

Specializarea: Calculatoare cu predare în limba română

Anul întâi

### 1 Introducere

#### 1.1 Enunțul problemei

Implementați doi algoritmi care să determine calea minimă dintre două vârfuri dintr-un graf orientat.

Pentru a rezolva această problemă, am ales să implementez:

- Algoritmul lui Dijkstra
- Algoritmul Floyd-Warshall

#### 1.2 Funcții folosite

Este un proiect modular, care contine 3 fișiere cu extensia .c si două fișiere de tip header.

În matrix.c am implementat:

- O funcție care să genereze în mod aleator numarul de vârfuri ale grafului
- O funcție pentru generarea unui numar aleator pe care o folosesc la generarea vârfului start, dar și a vărfului destinație
- O funcție pentru generarea matricei de adiacență
- O funcție pentru generarea matricei de cost pe baza celei de adiacență
- Două funcții pentru afișarea matricelor

In shortest\_length\_path.c am implementat:

- Funcția Dijkstra, de tip void
- Funcția Floyd-Warshall, de tip void
- O funcție push\_beginning, pe care am folosit-o pentru a afișa calea în cazul algoritmului Floyd-Warshall, apelând-o pentru o stivă
- O funcție pop\_beginning\_list pentru a extrage elementele din stivă

In main.c se află funcția main.

Fişierele de tip header sunt matrix.h şi shortest\_length\_path.h

# 2 Algoritmi folosiţi

• Algoritmul lui Dijkstra

La acest algoritm, se memorează elementele din matricea de cost într-un vector denumit distance şi se inițializează elementele vectorului visited cu 0, acest vector ilustrând dacă vârful respectiv a fost sau nu parcurs. Acest algoritm determină calea minimă pentru toate vârfurile, dar a fost

particularizat pentru a afișa doar calea minimă și distanța de la un vârf start până la unul destinație. Variabila locală count este folosită pentru a nu depăși numărul de vârfuri ale grafului.

Cât timp nu este depășit numărul de vârfuri, se calculează distanța minimă și se reține valoarea iteratorului în variabila next\_node. Se testează dacă există o cale mai eficientă între vârfuri. Se testează dacă există o altă cale mai eficientă și dacă răspunsul este afirmativ, atunci se actualizează vectorul distanță și vectorul predecessor reține nextnode. Variabila count se incrementează pentru a arata că a mai fost parcurs un vârf. Apoi se afisează distanța și calea minimă dintre cele două vârfuri.

```
Dijkstra (adj, cost, n, start, dest)
1.
       for i = 0, n - 1 execute
2.
           distance [i] <- cost [start][i]
3.
           predecessor[i] <- start
           visited[i] \leftarrow 0
4.
      {\tt distance} \, [\, {\tt start} \, ] \, <\!\! - \, \, 0
5.
6.
       visited [start] <- 1
7.
      count < -1
       while count < n - 1 execute
8.
           min_dist <- inf
9.
10.
             for i = 0, n - 1 execute
11.
                 if distance[i] < min_dist and !visited[i] then
12.
                      min_dist <- distance[i]
13.
                      next\_node <- i
14.
             visited [next_node] <- 1
             for i = 0, n - 1 execute
15.
               if !visited[i] then
16.
17.
                 if min_dist + cost [next_node][i] < distance[i] then
18.
                      distance [i] <- min_dist + cost [next_node] [[i]
19.
                      predecessor[i] <- next_node</pre>
20.
        count \leftarrow count + 1
        for i = 0, n - 1 execute
21.
22.
              if i != start then
23.
                   if i = dest then
24.
                      write distance[i]
25.
                      write i
26.
                      i <- i
27.
                      repeat
28.
                           j <- predecessor[j]
29.
                           write j
30.
                      while j != start
```

#### • Algoritmul Floyd-Warshall

La acest algoritm, se inițializează matricea distanțelor cu elementele matricei de cost. Apoi se adaugă toate vârfurile ca vârfuri intermediare, se

iau toate vârfurile ca vârfuri sursă și apoi, se iau toate vârfurile ca vârfuri destinație. La fel ca și Dijkstra, algoritmul Floyd-Warshall determină distanța minimă pentru toete perechile de vârfuri din graf.

În cazul în care costul parcurgerii printr-un vârf intermediar e mai mic decât cel al parcurgerii directe, atunci la distanța de la acel moment de timp se adaugă distanța parcursă prin nodul intermediar și se reține acest varf, altfel se parcurge calea directă și se reține vârful parcurs. Apoi urmează afișarea distanței minime și a căii minime.

La acest algoritm, pentru a afișa calea minimă am construit o stivă în care să se rețină vârfurile intermediare. Prima dată se va afișa primul vârf și se va testa dacă path[iterator\_1][destination\_node] este diferit de -1, caz în care se afișează vârful destinație, -1 însemnând că nu există noduri intermediare.

```
Floyd-Warshall (cost_matrix, n, start, destination)
1. build the stack
2. for i = 0, n-1 execute
3.
       for j = 0, n-1 execute
4.
             path [i] [j] <- −1
             dist[i][j] \leftarrow cost_matrix[i][j]
5.
6. var < -0
7. for i = 0, n-1 execute
8.
         if dist[start][i] != inf
             var < -1
10.if var = 0 then
11.
         write "The start vertex has no connection"
12.
         exit
13. for k = 0, n-1 execute
14.
         for i = 0, n-1 execute
15.
             for j = 0, n-1 execute
16.
                  for l = 0, n-1 execute
17.
                       if dist[i][j] > dist[i][k] + dist[k][j] then
18.
                           \operatorname{dist}[i][j] \leftarrow \operatorname{dist}[i][k] + \operatorname{dist}[k][j]
19.
                           path[i][j] <- k
20.i \leftarrow start
21.j <- destination
22. write start
23. while i != destination and path[i][destination]!= -1 execute
24.
         push_begining(head_stack, path[i][destination])
25.
         j <- path[i][destination]
26.
         aux <- j
27.
         while path [i][j] != -1
28.
             push_begining(head_stack, path[i][j])
             j <- path[i][j]
29.
         if path[i][j] = -1 then
30.
31.
             i <- aux
```

```
32.
            while head_stack->next != NULL execute
33.
                write pop_begining_list(head_stack)
34.
            i <- destination
35. write destination
36. write "Do you want to print the path matrix?"
37. write "Answer with Yes or No"
38. read answer
39. if strcmp(answer, "Yes") = 0 then
        for i = 0, n-1 execute
40.
41.
           for j = 0, n-1 execute
42.
                write path[i][j]
```

# 3 Date experimentale (Generarea matricelor şi a vârfurilor)

Pentru a genera numărul de noduri, am folosit funcția rand()%, apelând-o la început prin srand((unsigned) (t)). În funcția main, pentru a acoperi cazurile în care numărul de vârfuri generat aleator este 0 sau 1, am introdus anumite condiții, care determină ieșirea din program. Din cauza faptului că de cele mai multe ori vârful sursă și vârful destinație generate în mod aleator coincideau, am introdus o etichetă care îmi permite reluarea generării vârfului destinație și modificarea acestuia astfel încat el să fie diferit de cel sursă și să nu depașească numărul de vârfuri.

Pentru utilizarea eficientă a memoriei, matricele au fost alocate dinamic si initializate cu 0 prin utilizarea funcției calloc pentru a scurta timpul de execuție. Tot cu acest scop, dar și datorită corectitudinii teoretice, indicii matricelor și număratoarea vârfurilor încep de la zero.

Matricea de adiacență are pe diagonala principală zero, ea nu este simetrică față de diagonala principală deoarece se tratează cazul în care graful este orientat. Dacă elementul de deasupra diagonalei principale este 1, atunci cel de pe poziția simetrică în funcție de diagonala principală va avea valoarea zero deoarece se dorește eliminarea intrării într-o bucla infinită. Însă dacă elementul de deasupra diagonalei principale este zero, atunci pentru elementul de pe poziția simetrică lui se va genera aleator. Matricea de cost este generată pe baza matricei de adiacență, având pe diagonala principală zero, iar acolo unde în matricea de adiacență este unu, se generează aleator un număr. În cazul în care în matricea de adiacență elementul are valoarea zero și nu se află pe diagonala principală, atunci în matricea de cost se pune infinit, pentru că nu s-a calculat încă distanța până la acel vârf prin vârfuri intermediare.

# 4 Complexitatea algoritmilor

Pentru a evidenția eficiența algoritmilor, am ales doi algoritmi care au complexităti diferite. Primul algoritm, algoritmul lui Dijkstra este foarte eficient

din punctul de vedere al timpului necesar execuției sale.

Pentru algoritmul Dijkstra, timpul de execuție este egal cu  $O(|E| + |V|^2)$ , adică  $O(|V|^2)$ , unde E este numărul de muchii și V este numărul de vârfuri. Timpul este acesta pentru că este timpul maxim al unor bucle combinate, în acest caz, fiind vorba de o buclă for și una while. Deci timpul de execuție devine  $O(|V|^2)$ . La algoritmul Floyd-Warshall, timpul de execuție este dat de cele patru bucle for combinate, deci timpul este  $O(V^4)$ .

Lăsând la o parte acești algoritmi, o altă secvenă care poate încetini programul este cea de regenerare a vârfului destinație deoarece se verifică dacă este diferit de cel start și dacă se află în intervalul [0, V - 1], unde V este numărul de vârfuri.

## 5 Rezultate și concluzii

După mai multe teste, am constatat că în puţine cazuri, cei doi algoritmi afişează căi diferite deoarece există mai multe căi care au acelaşi cost și leagă aceleași vârfuri. Însă există câteva teste negative, adică teste în care cele două căi afişate diferă, problema fiind la cel de-al doilea algoritm pentru că exclude vârfuri (de exemplu, figura a patra ilustrează un astfel de test). După mai multe teste, am constatat că timpul de execuţie este de câteva secunde, dar se poate extinde și la câteva minute deoarece, atunci când se generează vârful destinaţie, este testat dacă este diferit de cel de start și dacă se află în intervalul de definiţie și existență al vârfurilor, în caz contrar, fiind regenerat.

În fig. 1, este prezentat un caz de test pozitiv, adică un caz în care rezultatele de la cei doi algoritmi coincid.

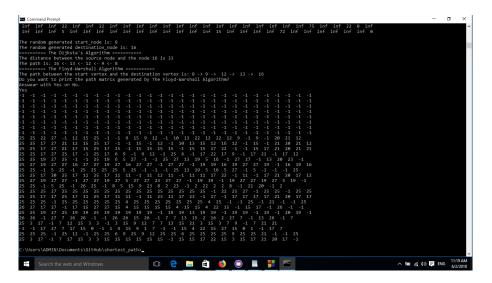


Figure 1: Acesta este un caz de test.

În figura a doua, este un caz de test în care cele două căi nu coincid, dar acest test este pozitiv deoarece calea nu este unică, adică pot exista mai multe căi diferite care să unească două vârfuri și să aibă același cost.

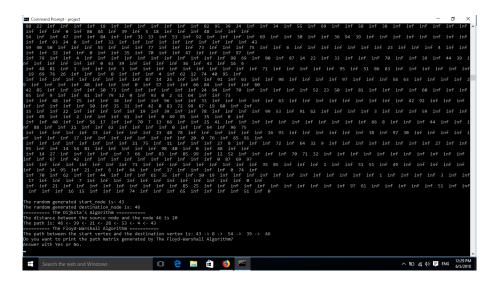


Figure 2: Acesta este un alt caz de test.

În figura 3 este prezentat un alt caz pozitiv.

În figura 4 este prezentat un caz de test negativ, în care cei doi algoritmi dau căi diferite. Mai exact, în această situație, algoritmul Floyd-Warshall afișează cu un vârf intermediar în minus.

```
The path between the start vertex and the destination vertex is: 43 > 8 -> 54 -> 39 -> 46

By you want to print the path matrix generated by The Floyd-Marshall Algorithm?

Answer With Yes on No.

C: \Users\ADMINI\Decuments\sit\Hab\shortest_path>project

The add server was a ser
```

Figure 3: Acesta este un alt caz de test.

Figure 4: Acesta este un caz de test negativ.

# 6 Referințe

- $\bullet \ \, \rm https://www.geeks for geeks.org/greedy-algorithms-set-6-dijks tras-shortest-path-algorithm/ \\$
- $\bullet \ \, \text{https://www.geeksforgeeks.org/dynamic-programming-set-16-floyd-warshall-algorithm/} \\$